



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Instituto de Geociências e Ciências Exatas

Pós-Graduação em Educação Matemática

Área de Concentração: Ensino e Aprendizagem da Matemática e seus
Fundamentos Filosófico-Científicos

Funções, Software Gráfico e Coletivos Pensantes

Francisco Carlos Benedetti

Dissertação apresentada à Banca Examinadora
como exigência parcial para obtenção do título de
mestre em Educação Matemática, sob orientação
do Prof. Dr. Marcelo de Carvalho Borba.

Rio Claro
2003

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Marcelo de Carvalho Borba (orientador)

Profª. Drª. Miriam Godoy Penteado

Profª. Drª. Edna Maura Zuffi

Rio Claro, ____ de _____ de 2003

Resultado: _____

DEDICATÓRIA

A Deus, a meus pais, Dolores
e Arcênio, e ao amor da
minha vida, *DANIELA*

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. Marcelo de Carvalho Borba, pela orientação, pelo companheirismo, pela paciência, pelas aulas de metodologia, pela amizade. Também por ter assumido a orientação com a pesquisa em andamento, mesmo com todas as dificuldades que essa iniciativa viria a despendar.

Ao prof. Dr. Nelo da Silva Allan, pelas primeiras orientações.

Ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Unesp de Rio Claro, por ter me dado a oportunidade de realizar este trabalho.

À profª. Drª. Edna Maura Zuffi e à profª. Drª. Mônica Ester Villarreal, pelas valiosas críticas e sugestões oferecidas por ocasião do Exame de Qualificação, o qual me mostrou um exemplo prático de “avaliação inclusiva”.

Às funcionárias Ana, Eliana, Elisa e Valéria, pela ajuda nas questões acadêmicas.

À Moema e à Suely, bem como às demais funcionárias da Biblioteca da UNESP - Rio Claro, pela dedicação e competência nos diversos auxílios prestados.

Aos amigos do GPIMEM, constantemente dando suporte: Antonio Olímpio, Ana Flávia, Audria, Fernanda, Norma, Telma, Maria Helena, Paula, Renata, Rúbia, Miriam e Marcelo, componentes de um coletivo pensante, sem o qual esta pesquisa não teria se realizado.

A meus vários amigos e familiares, pelo apoio constante; aos amigos que deram força no começo: Ana Lúcia, Antonete, Audria, Ana Karina, Carla, César,

Jefferson, João Henrique, Jucélia, Paula, Selma, Telma, Wilton, dentre tantos outros.

Ao Ricardo Scucuglia, pela dedicada leitura prévia de considerável parte deste texto.

Às alunas Daniela L., Daniela R., Gabriela, Helena, Juliana, Monserrat e Raquel, pela participação no trabalho piloto.

Aos estudantes participantes da pesquisa, pela colaboração prestativa, e pelo fato de que sem eles eu não teria aprendido tanto: André, Gianluca, Maria Fernanda, Vivian, Maria Clara, Guilherme e André Felipe.

Aos diretores do Colégio Terras: Luiz Roberto, Rose e Clara; mais que diretores: amigos, colaboradores e incentivadores.

A todos os funcionários do Colégio Terras, em especial Marcelo Prata, Rodrigo, Fábio, Elza e Lúcia, pelo suporte no trabalho de campo.

Ao Marcelo Prata, pelas filmagens e pela paciência em acompanhar a maior parte dos experimentos de ensino, e ao Geraldo Lima, membro do GPIMEM, pelas “dicas” de filmagens.

À Daniela, esposa e companheira, por sua colaboração direta na pesquisa, formatando figuras, corrigindo padrões de texto, ajudando na transcrição; pela sua paciência, sua compreensão e seu companheirismo inabaláveis durante todo o processo de pesquisa.

A Deus, por permitir que tudo isto acontecesse.

RESUMO

Esta pesquisa investiga as potencialidades de um software gráfico na coordenação das representações múltiplas de funções, por dois pares de estudantes de primeira série do Ensino Médio, os quais iniciavam o estudo desse assunto em suas aulas regulares. A relevância da investigação relaciona-se sobretudo à emergência de softwares gráficos gratuitos, bem como ao tema das representações múltiplas de funções, tanto em termos de currículo quanto ao cotidiano dos alunos. Sendo uma pesquisa qualitativa, a estratégia metodológica “experimentos de ensino” foi utilizada ao se observarem ações desses estudantes no estudo das representações múltiplas de certas funções não tradicionalmente estudadas em sala de aula, na série considerada, como aquelas cujas expressões analíticas são $y = 1/x$, $y = \sqrt{x}$ e $y = x^3$. Tais análises foram assim realizadas, sob o ponto de vista teórico que entende o pensamento como a realização de um coletivo, o qual inclui seres humanos e tecnologias intelectuais, conforme noção desenvolvida por Lévy (1993, 1999); dessa forma, o uso articulado do software gráfico com outras mídias, como a escrita e a calculadora, também são considerados, bem como as interações entre estudantes e entre estes e o pesquisador. Os estudantes participantes coordenaram as representações de funções, especialmente a gráfica, a algébrica e a tabular, de maneira que suas ações foram condicionadas pelo *design* do software, incluindo sua capacidade de representar muitas funções e seus comandos *zoom* e barras de rolagem. Outras conclusões decorrentes se referem à atuação dos alunos em processos de experimentação, os quais se caracterizaram pela construção de conjecturas, confirmações e refutações, simultaneamente à interligação entre as representações, a qual se deu, em diversas ocasiões, mediante o uso entrelaçado das mídias citadas. Destaca-se, ainda, a forma como os grupos atribuíram significados que, anteriormente, relacionavam-se apenas às funções afins e quadráticas, a funções tais como $y = 1/x$, $y = \sqrt{x}$ e $y = x^3$. A manipulação de gráficos de várias funções prototípicas foi, afinal, considerada positiva, embora outras pesquisas nessa área ainda sejam necessárias.

ABSTRACT

This study investigated the potentialities of a graphing software in the coordination of multiple representations of functions by two pairs of ninth grade students who were beginning to study the subject in their regular classes. The relevance of the investigation is related to the emergence of free graphing software, and to the importance of the theme of multiple representations of functions in school curricula as well as the everyday lives of the students. Being a qualitative study, teaching experiments were used to observe the actions of these students as they studied multiple representations of certain functions which are not traditionally studied in the ninth grade, such as those whose analytic expressions are $y = 1/x$, $y = \sqrt{x}$ e $y = x^3$. These analyses were conducted from a theoretical point of view in which thinking is understood as being carried out by a collective which includes humans and intellectual technologies, according to the notion developed by Lévy (1993, 1999); thus, the use of graphing software linked with other media, such as writing and calculator, is also considered, as well as interactions between the students, and between the students and the researcher. The students who participated coordinated the representations of functions, especially of graphic, algebraic, and tabular representations, in such a way that their actions were conditioned by the design of the software, including its capacity to represent many functions, and its zoom commands and rolling bars. Other conclusions relate to the students' actions in processes of experimentation, which were characterized by the formation of conjectures, confirmations and refutations, simultaneously with the interconnection between representations, which often occurred through the interlinking use of the media cited. Especially noteworthy was the way the groups attributed meanings that they formerly attributed only to linear and quadratic functions, to functions such as $y = 1/x$, $y = \sqrt{x}$ e $y = x^3$. The manipulation of graphs of various prototypic functions from the beginning of the ninth grade was considered to be positive, although additional research is needed in this area.

SUMÁRIO

ÍNDICE.....	iv
CAPÍTULO 1 - Apresentando a pesquisa.....	1
CAPÍTULO 2 - Coletivos pensantes	11
CAPÍTULO 3 - Inserindo a pesquisa no contexto de outras realizadas	27
CAPÍTULO 4 - A metodologia da pesquisa.....	52
CAPÍTULO 5 - Os coletivos pensantes: descrição dos dados	80
CAPÍTULO 6 - Discussão dos resultados.....	201
CAPÍTULO 7 - Alcances, limitações e conclusões da pesquisa	277
REFERÊNCIAS.....	297
ANEXO 1	305
ANEXO 2	313

ÍNDICE

CAPÍTULO 1 - Apresentando a pesquisa.....	1
1.1 Trajetória pessoal.....	1
1.2 Objetivos desta pesquisa	4
1.3 Estrutura da dissertação	8
CAPÍTULO 2 - Coletivos pensantes	11
2.1 Tecnologias da inteligência.....	12
2.2 Redes hipertextuais	15
2.3 O pensamento coletivo	20
2.4 Metáfora seres-humanos-com-mídias.....	22
CAPÍTULO 3 - Inserindo a pesquisa no contexto de outras realizadas	27
3.1 Algumas pesquisas realizadas.....	27
3.1.1 As representações de funções sem o contexto informático.....	28
3.1.2 Funções específicas e as mídias informáticas	29
3.1.3 As representações múltiplas de funções e o Cálculo	30
3.1.4 Funções, representações múltiplas e os professores.....	33
3.1.5 Funções, representações múltiplas e construtos teóricos.....	35
3.1.6 Representações múltiplas de funções e as mídias informáticas.....	42
3.2 Este estudo e sua relevância no contexto da literatura revista	47
CAPÍTULO 4 - A metodologia da pesquisa.....	52
4.1 Opções metodológicas	52
4.1.1 O histórico do pesquisador	52
4.1.2 A opção pela abordagem qualitativa: experimentos de ensino.....	54
4.2 Os participantes da pesquisa.....	59
4.2.1 Os estudantes	59
4.2.2 A escola	62
4.2.3 O software gráfico	63
4.3 Os procedimentos metodológicos	66

4.3.1 As fichas de trabalho.....	66
4.3.2 Estudo piloto	67
4.3.3 Os experimentos de ensino definitivos.....	68
4.4 Análise dos dados.....	70
4.4.1 Análise de vídeo	70
4.4.2 Como foi realizada a análise dos dados	74
CAPÍTULO 5 - Os coletivos pensantes: descrição dos dados	80
5.1 André e Gianluca: construtores de “teoremas”.....	83
5.1.1 Episódio 1: Monotonicidade e as primeiras atuações do professor no trabalho de campo	85
5.1.2 Episódio 2: A função racional, representações múltiplas, domínio de funções e o drama do zero.	91
5.1.3 Episódio 3: A simetria da parábola.	112
5.1.4 Episódio 4: Álgebra, raízes e, novamente, o drama do zero.	124
5.1.5 Episódio 5: O “teorema” AGGA.	133
5.1.6 Episódio 6: Mais um “teorema”	151
5.2 Maria Fernanda e Vivian: alunas que gostam de Matemática	162
5.2.1 Episódio 1: Paralelas que se cruzam ou que coincidem?	163
5.2.2 Episódio 2: As três representações e a função racional.....	173
5.2.3 Episódio 3. A: função irracional e as parábolas.....	180
5.2.4 Episódio 4: Funções polinomiais e uma comparação original.	186
5.2.5 Episódio 5. O domínio e a imagem para $y = \frac{1}{x^2 + 1}$	193
CAPÍTULO 6 - Discussão dos resultados.....	201
6.1 O software gráfico.....	204
6.2 O papel do professor e a elaboração das fichas de trabalho.....	219
6.3 A calculadora	230
6.4 Os gestos	234
6.5 O <i>design</i> do software associado às outras mídias.....	238
6.6 As funções prototípicas.....	247

6.7 Concepções estáticas e concepções dinâmicas de funções.....	252
6.8 O <i>status</i> da prova.....	259
6.9 Noções de limite, continuidade e infinito	264
6.10 Os representantes de funções	268
CAPÍTULO 7 - Alcances, limitações e conclusões da pesquisa	277
REFERÊNCIAS.....	297
ANEXO 1	305
ANEXO 2	313

- CAPÍTULO 1 -

APRESENTANDO A PESQUISA

1.1 Trajetória pessoal

Na mesma época em que cursava Licenciatura em Matemática na Unicamp (Universidade Estadual de Campinas) no período de 1991 a 1995, comecei a trabalhar no Ensino Médio, 2º grau, à época, com aulas em primeiras séries de colégios particulares de Itu, interior do estado de São Paulo. Nessa ocasião, já podia perceber que muitas dificuldades existiam no ensino e na aprendizagem de funções.

Interesso-me pelo assunto **funções** desde o tempo em que era estudante do Ensino Médio, porém, as concepções que trazia a respeito desse tema se transformaram com o passar dos anos, mediante o aprofundamento propiciado por algumas disciplinas da graduação e, principalmente, pela prática em sala de aula.

Mas as inquietações provenientes das dificuldades que encontrava durante as aulas ainda não tinham sido suficientes para me provocar decisões mais firmes, que me levassem a enfrentar o quadro insatisfatório de notas baixas e as expectativas frustradas na aprendizagem desse assunto. Fazia tímidas tentativas alterando algumas metodologias, embora ainda mantivesse as aulas expositivas de modo predominantemente tradicional, no sentido usado por Mizukami (1986).

Esta autora entende que em tal abordagem o professor é visto como transmissor do conhecimento, ocupando um lugar de destaque no processo de ensino, de maneira que aos estudantes se associa o caráter de receptores do

conhecimento. Levando essa discussão para os processos de ensino e aprendizagem da Matemática, o papel de “ator principal” e de “possuidor do saber”, do professor, parece estar intimamente ligado, pelo menos no que se refere ao ambiente escolar, à visão da Matemática como um conhecimento já estabelecido e pré-existente, do qual os seres humanos devem tão somente se apropriar.

Entretanto, ao **me** enxergar como adepto desse paradigma, iniciei um processo de mudança em minha prática pedagógica, e passei a desejar me tornar um professor diferente. Esse processo vem se dando gradualmente, através de muitas experiências e reflexões e, obviamente, permanecerá continuamente enquanto for professor, profissão que não pretendo abandonar sob qualquer hipótese. O leitor poderá observar, através deste texto, mais especificamente na descrição dos dados da pesquisa e de suas respectivas análises, que essa transformação desenvolveu-se simultaneamente às minhas aprendizagens como pesquisador.

A gênese dessas aprendizagens pode, aliás, ser remetida a 1996, quando recebi um software gráfico, juntamente com livros didáticos distribuídos gratuitamente a professores. Ao conhecê-lo, fiquei bastante motivado a usá-lo, devido à possibilidade de vários gráficos serem desenhados de maneira rápida e prática. A partir desse “encantamento”, promovi uma série de tentativas mais ousadas, no sentido de mudar o quadro anterior. Desenvolvia roteiros de atividades de construções gráficas e levava os alunos ao laboratório de informática; em muitas aulas me senti frustrado, mas muitas outras foram animadoras. Sentia-me frustrado por acreditar, em algumas dessas aulas, que aquelas atividades poderiam não estar ajudando os alunos, mas quando percebia que vários deles se tornavam “criadores” de gráficos e de conjecturas quando usavam o software, pressentia que ali **havia um caminho a ser explorado**.

O fato de inserir a mídia informática alterou, em minhas aulas, o tradicional uso das mídias escritas, e a voz do professor já não era mais o centro das atenções. Nesse cenário, mostrava-se o conflito pelo qual passava um professor

em busca de idéias novas para sua prática pedagógica, ao procurar promover uma construção conjunta de conceitos, ou seja, proporcionar um envolvimento maior com os alunos, em um ambiente no qual as ações se davam de forma menos rígida e unidirecional.

Enquanto gradativamente passava a entender o conhecimento não mais como algo pré-existente, mas como uma produção coletiva, uma questão que associava minha “crise de paradigmas” com a “construção de conceitos matemáticos” pelos meus alunos, inquietava-me nessas primeiras tentativas em sala de aula: o aluno deixaria de pensar, se lhe bastasse apenas digitar a fórmula e teclar *enter*, para que o gráfico de uma função aparecesse pronto?

No decorrer das várias tentativas de propor atividades significativas aos estudantes, acabei notando que a forma de aprendizagem possibilitada pela relação aluno-software não era o único fator que estava em jogo. O meu papel de professor estava mudando, deixando de ocupar uma posição central, durante a aula, bem como a interação entre os estudantes se mostrava, sem que tivesse inicialmente pensado nisso, possibilitada e incentivada.

Sendo assim, minha habilidade de observação se intensificava gradualmente, o que favoreceu a vontade crescente de pesquisar e investigar as potencialidades da mídia informática em processos de ensino e aprendizagem de funções. Julguei, pois, relevante investir nesse assunto, visto que, além do meu gosto pessoal já evidenciado, trata-se de um tema de considerável importância dentro do quadro curricular de Matemática no Ensino Médio, na sua relação com outras disciplinas e também no cotidiano dos estudantes.

Porém, para que pudesse levar a cabo o desenvolvimento dos concomitantes processos de pesquisa e de mudança como professor, foi indispensável contar com o Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Unesp de Rio Claro. Após meu ingresso nesse programa, em 2001, pude tomar consciência de certos paradigmas que me prendiam às práticas tradicionais. Iniciei, assim, a estruturação de minhas primeiras indagações, trabalhando arduamente para que elas me conduzissem a objetivos claros de pesquisa, a qual era

necessário se situar num panorama mais geral, atrelada a outras pesquisas já realizadas.

Essas transformações se intensificaram ao final de 2001, quando passei a participar do GPIMEM (Grupo de Pesquisa em Informática, outras Mídias e Educação Matemática), coordenado pelo orientador deste trabalho, Prof. Dr. Marcelo de Carvalho Borba, que assumiu, nessa época, a difícil tarefa da orientação, e pela Prof^a. Dr^a. Miriam Godoy Penteado. A participação nesse grupo foi fundamental para que pudesse continuar meu amadurecimento como pesquisador e como professor, além de reestruturar aspectos da pesquisa em andamento.

1.2 Objetivos desta pesquisa

Este trabalho interessa principalmente a pesquisadores e professores de Matemática do Ensino Médio ou das séries finais do Ensino Fundamental, bem como a professores de cursos de Pré-Cálculo ou Cálculo I, já que o tema funções é presente também em certos cursos de graduação.

Um fato que me leva a acreditar na importância desta investigação é a emergência de softwares gratuitos, dentre eles os softwares gráficos, possibilitando sua inserção em um número de salas de aula cada vez maior. Ao se desenvolver um trabalho que vise levantar possibilidades para processos de ensino e aprendizagem, neste caso, envolvendo funções, de forma alternativa à tradicional, descrita no item anterior, deve-se então tomar cuidado para que, com uma nova mídia, não se repitam as mesmas práticas pedagógicas que predominaram durante muito tempo com as tradicionais mídias orais e escritas, conforme adverte Borba (1999). Esse autor acredita que o já citado modelo tradicional de ensino pode ser mantido mesmo com novas tecnologias, e que a presença do computador não implica mudanças substanciais na relação do professor com os alunos, nem mudanças na relação de professor e alunos com o conhecimento, dependendo da forma como se trabalha com essas tecnologias.

Dessa maneira, faz parte das finalidades desta pesquisa investigar possíveis potencialidades de um software gráfico em processos de ensino e aprendizagem de conceitos relativos às funções, junto a estudantes de primeira série do Ensino Médio, num ambiente em que se privilegiam as interações.

Vários tipos de interações são considerados neste estudo: maneiras diversas como os estudantes trabalham com um software gráfico; o modo como o professor incentiva esse trabalho; as relações entre os estudantes; a relação entre pesquisador e estudantes, e o papel das mídias como condicionadoras (e não determinantes) dessas interações. Ao estudar a dinâmica das diversas interações entre os seres humanos e as mídias citadas, analiso sobretudo como se dá a produção de conhecimentos matemáticos nesse grupo.

As mídias disponíveis (oralidade, escrita, informática) constituem, juntamente com estudantes e pesquisador, um grupo que é sujeito do pensamento produtor de conhecimentos, ao qual me referirei ao longo desta pesquisa como **coletivo pensante**¹ (LÉVY, 1993, 1999). Nesse coletivo, o software gráfico ocupa uma posição de destaque, embora as outras mídias também sejam consideradas. A importância aqui atribuída à mídia informática deve-se às várias possibilidades que ela ofereceu aos estudantes envolvidos nesta pesquisa, de trabalharem com funções que tradicionalmente não constam em conteúdos programáticos do início do Ensino Médio, como funções racionais e polinomiais de grau maior que 2.

Esboçar tais gráficos no papel provavelmente se tornaria uma atividade demorada, enfadonha, inviável ou qualitativamente muito diferente, já que o software oferece detalhes do gráfico muitas vezes difíceis de se obter com a mídia lápis-e-papel.

Este estudo investiga o papel da mídia informática não apenas no sentido da praticidade e rapidez em fornecer gráficos de funções diversas, mas também (e principalmente) na forma como ela condiciona, junto a outros fatores, a produção

¹ Pierre Lévy utiliza esta expressão, dentre outras semelhantes, ao longo do livro "Tecnologias da Inteligência" (1993), durante a discussão que estabelece a respeito da relação entre seres humanos e tecnologias intelectuais; Borba (1999, 2001) também utiliza essa expressão, a partir de Lévy e de outras considerações teóricas discutidas no capítulo 2.

de conhecimentos no que se refere a funções, ao suscitar discussões sobre conceitos, propriedades e características associados a esse tema. Tal enfoque, porém, não necessariamente elimina abordagens didáticas já existentes no ensino desse assunto, mas pode lhes acrescentar outras possibilidades, outros dados, outros pontos de vista.

Dentre as possibilidades em processos de ensino e aprendizagem de funções, destaca-se nesta pesquisa a exploração de suas diversas representações, indicada por vários autores como uma considerável possibilidade para tais processos. Nesse sentido, Borba (1999) aponta que, com mídias informáticas, nas quais se incluem os softwares gráficos, a ênfase algébrica dada ao estudo de funções pode ser transformada numa "atenção maior à coordenação entre representações algébricas, gráficas e tabulares (p. 293)", propiciando a produção de conhecimentos mais abrangentes a respeito do tema.

Com a possibilidade de esses softwares representarem dinamicamente inúmeras funções, o aspecto visual pode então ser explorado mais profundamente em relação às situações onde se verifica o privilégio da representação algébrica, provavelmente devido ao predomínio da mídia lápis-e-papel, como ressalta Borba (BORBA, 1999, 2002; BORBA, PENTEADO, 2001). Porém, o que se deseja aqui, concordando com esse autor, não é destacar esta ou aquela representação, mas proporcionar, aos estudantes, a possibilidade de uma interligação entre elas, que pode ocorrer de diversas maneiras, dependendo da forma como são encaminhadas as atividades com essas mídias.

Dentro desse panorama, como os estudantes, por sua vez, lidam com as características dos softwares gráficos mencionadas até aqui? Esta investigação analisa, portanto, como alunos de primeira série do Ensino Médio, em início de estudo das funções, trabalham com um determinado software, transitando pelas representações de várias funções, e até que ponto as possibilidades que a mídia informática oferece são significativas para a relação deles com os conceitos associados a esse tema.

Assim, esta pesquisa tem como principal finalidade investigar como as representações múltiplas de funções podem ser trabalhadas por estudantes de Ensino Médio, com a atuação de um desses softwares e de outras mídias, como lápis-e-papel e oralidade. Nesse contexto, as diretrizes teóricas e metodológicas desta investigação visam construir possíveis respostas à sua pergunta norteadora: **como estudantes trabalham com aspectos algébricos, gráficos e numéricos de funções dentro de um coletivo pensante formado por estudantes, mídias e pesquisador?**

Embora o foco principal da investigação recaia sobre os estudantes, a presença do pesquisador, autor deste texto, é bastante relevante para os resultados da pesquisa. Não se trata apenas de um detalhe metodológico, mas sim da constatação de uma evidente comunhão entre esse aspecto e as diretrizes teóricas da pesquisa. As características gerais desse pesquisador, relatadas em 1.1, seu histórico de vários anos como professor de Ensino Médio e seu gosto pela álgebra são levados em consideração na análise dos dados obtidos. Neles poderão ser percebidos indícios tanto do papel de **professor** quanto de **pesquisador**, já que algumas de minhas ações ora se mostraram características deste, ora mesclaram aspectos de ambos.

Um esclarecimento ainda se faz necessário: como a investigação se dá com estudantes ingressantes no Ensino Médio, o leitor deve levar em consideração que é nesse nível que as funções de uma variável são aqui trabalhadas. Isso porque entendo que não é um momento interessante para se trabalhar com casos mais “complicados” de certas funções, como aquelas em que determinada representação é inadequada ou impossível. Há inúmeras funções ilustradas graficamente, mas que algebricamente se tornam difíceis de se representar. Da mesma forma, uma função representada algebricamente pode ter sua representação tabular pouco expressiva ou mesmo sua representação gráfica inviabilizada, como o exemplo da função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(x) = \begin{cases} 1, & \text{para } x \in Q \\ 2, & \text{para } x \in (\mathbb{R} - Q) \end{cases}$.

Sendo o enfoque deste trabalho a coordenação entre as representações múltiplas, junto a estudantes que iniciavam o estudo de funções, procuro explorar esse aspecto, o que não significa assumir que em qualquer exemplo de função seja possível fazer uma escolha por uma de suas representações.

Por esse motivo, funções de expressões analíticas como $y = \sqrt{x}$ e $y = \frac{1}{x^2 + 1}$ foram utilizadas nas atividades com os estudantes de maneira usual, sem especificação prévia para domínio, contra-domínio ou imagem. Conforme será analisado nos capítulos finais, estes conceitos foram discutidos durante o trabalho dos alunos com essas e outras funções.

1.3 Estrutura da dissertação

Neste primeiro capítulo apresentei os motivos pessoais que me levaram a esta investigação, bem como uma descrição das características gerais do pesquisador que a realizou. Julgo que essa introdução é relevante, não apenas para a análise dos dados obtidos, conforme apontado no item anterior, mas também por entender que tais informações localizam melhor o leitor no contexto da pesquisa, permitindo que construa suas próprias críticas e observações durante o contato com o texto escrito. A intenção é tentar fornecer-lhe o maior número possível de informações a respeito do ambiente em que se deu todo o processo desta pesquisa.

Também nessa introdução descrevi os objetivos da investigação, sintetizados na pergunta norteadora da pesquisa. Trabalhando com as representações de funções, torna-se necessária uma discussão a respeito de alguns trabalhos já realizados. A revisão da literatura, desenvolvida no capítulo 3, apresenta pesquisas que lidam com esse tema em diferentes níveis de escolaridade.

Essa revisão não procura, contudo, articular um quadro teórico para esta pesquisa, mas inseri-la num contexto mais amplo das pesquisas realizadas sobre

funções, bem como apresentar ao leitor enfoques diferentes para tal assunto. Aspectos semelhantes e diferentes desta investigação em relação às outras também são discutidos nesse capítulo. Vale adiantar, ainda, que essa revisão foi realizada em dois períodos distintos: uma parte das pesquisas foi consultada anteriormente ao trabalho de campo, e outra parte, posteriormente. Tal procedimento, entretanto, será articulado com os resultados desta pesquisa e discutido no capítulo 6.

O referencial teórico será desenvolvido no capítulo 2, onde apresentarei as idéias que inspiraram boa parte do processo desta pesquisa. Tais idéias, permeadas pela noção de coletivo pensante de Pierre Lévy (1993, 1999), serão detalhadas nesse capítulo, bem como a origem de meu interesse por ela, que ocorreu por meio da metáfora "seres-humanos-com-mídias", desenvolvida por Borba (BORBA, 1999, 2002; BORBA, PENTEADO, 2001), a qual também consta nesse referencial. Embora tais idéias influenciassem minhas ações como pesquisador enquanto estava no trabalho de campo, elas ainda não estavam, nesse período, estruturadas da forma como será apresentada ao leitor.

Os procedimentos que foram adotados para o trabalho de campo são descritos e discutidos no capítulo 4, no qual justificarei a opção pela abordagem qualitativa e serão feitas as primeiras descrições dos participantes da pesquisa. Ainda nesse capítulo apresentarei as estratégias metodológicas (experimentos de ensino), as técnicas de registro de dados e a forma como estes foram analisados.

O Capítulo 5 refere-se à descrição dos dados obtidos. Caracteriza-se pela apresentação de episódios construídos junto a duas duplas de estudantes que participaram da pesquisa. Cada episódio é acompanhado das justificativas de sua elaboração e seguido de um resumo comentado.

A análise desses dados compõe o capítulo 6, onde vários itens dos episódios são observados à luz do referencial teórico adotado e de algumas pesquisas revisadas. No capítulo 7, apresentarei as conclusões decorrentes dessa análise e minhas considerações finais.

Este texto contém, ainda, após a apresentação das referências bibliográficas, uma parte destinada aos anexos da pesquisa, indicados durante os capítulos, nos momentos mais apropriados à sua consulta, de acordo com a perspectiva deste pesquisador.

– CAPÍTULO 2 –

COLETIVOS PENSANTES

Com base na relevância das interações em processos de ensino e aprendizagem, utilizo a idéia das mídias² como condicionantes do pensamento humano, proposta por Lévy (1993, 1999). Esse autor desenvolve a noção do pensamento realizado por grupos constituídos de humanos e técnicas, referindo-se a esse conjunto, em algumas ocasiões, através da expressão “**coletivo pensante**”, núcleo das idéias que motivaram uma parte considerável do processo desta pesquisa.

Para chegar a tal noção, em “Tecnologias da Inteligência”, Lévy (1993) tece o histórico das tecnologias intelectuais na vida dos seres humanos, desde o papel que desempenha a oralidade, até a atuação das mídias informáticas, passando pelas relevantes implicações da escrita nas sociedades. Articula-se esse histórico à noção do pensamento realizado num formato de **rede** ou **hipertexto**, metáfora empregada pelo autor para representar a construção coletiva do conhecimento.

Mais especificamente em relação às mídias informáticas, a **teoria da reorganização do pensamento** (TIKHOMIROV, 1981) complementa a forma como a relação do homem com o computador é aqui considerada, e como isso pode ser levado ao campo educacional. A metáfora **seres-humanos-com-mídias** (BORBA, 1999, 2002; BORBA, PENTEADO, 2001) articula essa teoria às

² Ao longo deste texto utilizo as expressões “mídias” e “tecnologias intelectuais” sinonimicamente. Tais termos não se referem apenas a objetos palpáveis do mundo exterior ao ser humano, mas também a formas de interface que participam de processos de comunicação, como os gestos.

noções de Lévy anteriormente mencionadas, expandindo a discussão sobre a dinâmica da relação dos seres humanos com as técnicas. Vale ressaltar que, ao identificar-me com as idéias desses autores, procuro trazê-las ao campo das atividades de ensino e aprendizagem de funções.

2.1 Tecnologias da inteligência

A comunicação entre os seres humanos é um fenômeno que motiva estudos sob diversos pontos de vista, tais como filosóficos, antropológicos, sociológicos e educacionais. Uma análise mais detalhada dos fatores responsáveis por processos comunicacionais perpassa um ou mais desses pontos de vista, mas, ao se estudar as relações dos seres humanos com os diversos saberes, deve-se levar em consideração que todo tipo de conhecimento possui certo grau de dependência do uso de tecnologias intelectuais (LÉVY, 1993).

Numa escala temporal, a oralidade, a escrita e a informática são as tecnologias intelectuais que coexistem em grande parte das sociedades atuais³. A oralidade está bastante ligada às primeiras formas de comunicação entre seres humanos e entre estes e seu meio. Mitos, rituais, contos e narrativas são estratégias mantenedoras das interações e da memória dos indivíduos e de seus grupos.

A oralidade existente sem a presença da escrita é classificada por Lévy (1993) como oralidade primária, enquanto a oralidade secundária é aquela que ocorre no contexto em que a escrita também atua. No caso da primeira, todo o esquema cultural de uma sociedade está subordinado às lembranças de seus indivíduos, de forma que inteligência e memória são características humanas muito próximas. As comunidades primitivas parecem ser um bom exemplo de sociedades

³ Lévy (1993) não menciona “gesto” como uma tecnologia intelectual, porém, devido à importância que gestos e expressões faciais representam na comunicação e, em particular, nos dados desta pesquisa, entendo-os como tal. Seriam os gestos, na escala temporal discutida por Lévy (1993), a tecnologia intelectual anterior à oralidade?

orais primárias; no entanto, seus esquemas de memorização, como o canto e a narrativa, sofreram transformações com o desenvolvimento da escrita.

Através das mídias escritas, as informações passaram a ser registradas em matéria, como pedra ou papel, que não são sujeitos humanos, assumindo um caráter de memória objetiva, estocável. A partir de então, arranjos de símbolos e de representações são feitos sem a necessidade da proximidade física ou temporal entre a pessoa que escreve e a pessoa que lê. A escrita assume, dessa forma, características típicas de extensão da memória humana e de freqüente impossibilidade da interação no próprio ambiente no qual as mensagens são construídas.

Considerando que textos são produzidos com diversas finalidades, aqueles em que a atividade cognitiva se sobrepõe às demais revelam uma característica peculiar da escrita, que é o modo como **condiciona maneiras de pensar**: a interpretação, ou seja, a atribuição de sentido, é o alimento da tensão semântica que existe na distância entre o mundo do autor e o mundo do leitor.

O alfabeto e a impressão fizeram com que a escrita desempenhasse papel fundamental na transformação da ciência como modo de conhecimento. Pode-se dizer que, com o desenvolvimento da escrita, estrutura-se também o modo de olhar a razão, a lógica, a verdade e a história: valorizam-se as teorias, que são “saberes cujos autores geralmente pretenderam que fossem independentes das situações singulares em que foram elaborados e utilizados” (LÉVY, 1993, p. 90).

Os conhecimentos são, nesse caso, organizados em módulos, e as apresentações de textos ou discursos, em padrões seqüenciais, encadeados logicamente, com palavras e idéias articulando-se em um aspecto linear.

E essa linearidade vem a ser modificada pelas tecnologias informáticas. Embora seja inevitável pensar no computador como um instrumento que torna mais prático e mais eficaz o armazenamento de informações, são as implicações cognitivas, em sua relação com humanos, que prevalecem em discussões várias, especialmente na esfera dos estudos em educação.

Aquele caminho percorrido por uma mensagem escrita ao sofrer as atribuições de sentido, desde o período em que é redigida à ocasião na qual é lida, sofre modificações substanciais com as tecnologias informáticas, já que esse caminho agora possui atalhos, novas curvas, novas possibilidades. Ao detalhar as implicações da digitalização de textos e imagens, Lévy (1993) afirma que

Um modelo digital não é *lido* ou *interpretado* como um texto clássico, ele geralmente é *explorado* de forma interativa. Contrariamente à maioria das descrições funcionais sobre papel ou aos modelos reduzidos analógicos, o modelo informático é essencialmente plástico, dinâmico, dotado de uma certa autonomia de ação e reação (p.121, grifos do autor).

Lévy (1993) aponta que uma das características indicadoras dessa exploração interativa é a **simulação**, que entende como **imaginação auxiliada por computador**. Nessa direção, o conhecimento gerado por simulação difere daqueles gerados por teoria, por processos primordialmente empíricos e por transmissão oral, devido às possibilidades diversas com textos escritos, imagens, sons e disponibilidade de diversas interfaces simultaneamente (em tempo real⁴).

A simulação refere-se mais às tentativas e erros, bricolagens⁵, explorações, geração de hipóteses, reflexões e questionamentos, e menos à apresentação do saber baseado na lógica formal, o que não significa seu extermínio. Nota-se, dessa forma, que Lévy analisa com mais profundidade os processos em que se dão as relações humanas com computadores e outras mídias, e não apenas os produtos finais da relação homem/máquina.

Assim, todos esses aspectos da simulação favorecem, de formas variadas, a construção de conhecimentos diversificados, o que muitas vezes torna difícil a

⁴ Não é minha intenção, e nem se faz aqui necessária, uma discussão sobre a questão **tempo**, na classificação "circular, linear e real", características respectivas das tecnologias orais, escritas e informáticas, detalhadas por Lévy (1993)

⁵ Do francês *bricoler*: realizar qualquer espécie de trabalho.

descrição de boa parte dos passos que foram seguidos para que determinado conhecimento produzido se estabelecesse. Lévy (1993) constrói uma metáfora para ilustrar a dinâmica com a qual o pensamento de uma pessoa ou grupo assume diferentes caminhos durante a construção de certos conhecimentos. Essa metáfora, denominada hipertexto ou rede hipertextual, será descrita no item a seguir.

2.2 Redes hipertextuais

A sucessão das tecnologias orais, escritas e informáticas na construção e gestão do conhecimento não se dá por substituição, “mas antes por complexificação e deslocamento de centros de gravidade” (LÉVY, 1993, p.10). A complexificação pode significar, por exemplo, que um conhecimento construído mediante a oralidade e a escrita pode ser **transformado** pelas mídias informáticas, e não simplesmente substituído, trocado.

Alguns pontos de vista podem ser modificados e alguns conceitos podem ser incrementados aos já existentes ao se inserir o computador onde predominam a escrita e a oralidade, ou seja, maneiras de se **conhecer** tais conceitos podem ser qualitativamente transformadas. Mantendo o exemplo, direcionando-o para esta pesquisa, o software gráfico pode integrar a produção de certos conhecimentos referentes às funções, o que não implica substituir o livro e a oralidade por essa mídia, nem substituir aquilo que os estudantes já conhecem sobre funções por outras noções.

Essa é uma forma na qual se pode verificar o deslocamento de centros de gravidade: em determinadas atividades de ensino e aprendizagem pode ocorrer, na interação entre os estudantes, ora o uso mais intenso do computador, ora do livro, ora da fala, ou ainda pode haver similaridade na maneira como essas mídias atuam. Ou seja, verifica-se que o uso das mídias ocorre de formas e intensidades variadas. Num contexto mais amplo, conceitos trabalhados ora numa mídia, ora

com outra, compõem uma rede de significados construídos junto às tecnologias intelectuais.

As diversificadas e freqüentes atuações das tecnologias intelectuais em um grupo fazem circular inúmeros significados de diversas ordens, como os saberes comuns e científicos, se é que tal diferenciação é possível, propiciando a produção de conhecimentos. A dinâmica desses processos permite a confecção de uma metáfora que procura estabelecer uma idéia de cadeias de relações entre todos os elementos envolvidos na produção de conhecimentos.

Estas cadeias são os **hipertextos** ou **redes hipertextuais**, compostos de um ou mais elementos do conjunto constituído de textos, imagens, sons, palavras, gestos, interfaces ou outros itens. Hipertexto é um termo funcionalmente utilizado nas ciências informáticas para organização de conhecimentos ou de dados, e que tecnicamente representa um “conjunto de nós ligados por conexões” (LÉVY, 1993, p. 33).

Porém, ultrapassando sua imagem técnica e incrementando-lhe elementos como significados, abstrações, conceitos, sentimentos etc, a noção de hipertexto adquire metaforicamente uma imagem de **rede de significados**:

Cada um em sua escala, os atores da comunicação ou os elementos de uma mensagem constroem e remodelam universos de sentido. [...] Chamaremos estes mundos de significação de hipertextos (LÉVY, 1993, p. 25).

A metáfora da rede também é utilizada por outros autores (BICUDO, 2000; MACHADO, 2000); especificamente, o uso que Lévy faz dela ilustra a dinâmica na qual a construção do conhecimento acontece, de forma que os significados produzidos e partilhados pelos grupos ocorrem mediante a interação de **atores** humanos e técnicos, não dependendo apenas de atributos cognitivos.

Sobre o sentido em que é usada a noção de **ator**, convém esclarecer que “tudo que for capaz de produzir uma diferença em uma rede será considerado

como um ator, e todo ator definirá a si mesmo pela diferença que ele produz” (LÉVY, 1993, p. 137). Ou seja, o que define algo como ator é sua possibilidade de constituir um pensamento. Por exemplo, um software gráfico é um ator, quando condiciona as reflexões de um estudante a respeito de um esboço apresentado na tela do computador, e, de modo similar, o lápis-e-papel é um ator, quando um aluno se utiliza dessa mídia para resolver um problema de geometria.

Para restringir o uso dessa metáfora (o próprio Lévy ressalta que há diversos modos de se fazer uso dela), não me apressarei para chegar à caracterização de sua idéia. Apresentarei cinco exemplos em que a metáfora do hipertexto pode ser válida, em “campos” diferentes e em ordem crescente de complexidade de justificativas⁶: (a) pode-se imaginar uma rede composta de todos os aeroportos do planeta, onde estes seriam os **nós** principais, todos ligados por linhas imaginárias; (b) dezenas de computadores, conectados à internet numa sala virtual destinada a discussões em rede, podem ser considerados **nós**, onde **atores** humanos debatem sobre algum tema, síncronica ou assincronicamente; (c) um palestrante apresentando um assunto, discursando por duas horas sobre um tema, onde alterna explanações orais e imagens, sons e textos escritos apresentados num telão, produz uma “palestra hipertextual”; (d) ao se pronunciar uma palavra, por exemplo “maçã”, alguns significados associados podem vir à mente de uma pessoa, como “cor vermelha”, “doce”, “saúde”, “árvore” etc, mas quando uma segunda palavra lhe vem associada, novos significados emergem: na expressão “maçã do amor”, por exemplo, o leitor pode pensar em outros sentidos além daqueles escritos anteriormente, como o próprio doce que tem esse nome, namoro, Adão e Eva etc; (e) dois alunos e um professor estudam juntos o fato de um gráfico de certa função se apresentar de uma maneira curiosa na tela do computador: atores humanos e não humanos proporcionam debates, reflexões e conclusões, de forma que significações diversas a respeito de conceitos referentes a funções emergem dessa interação.

⁶ Os itens (a) e (d) foram inspirados a partir de exemplos de Lévy (1993).

O termo hipertexto é muito utilizado em estudos de comunicação e de informática, como nos exemplos (b) e (c). A idéia de rede pode ser usada num sentido estático, apenas no aspecto físico, como no exemplo (a), mas o que interessa aqui são situações onde a produção de conhecimentos está em evidência, como nos exemplos (c), (d) e (e). Nesse sentido, torna-se possível transportar a idéia de rede ao campo pedagógico, em relações de ensino e aprendizagem, e analisar as possibilidades dessa metáfora: "(...) O hipertexto é talvez uma metáfora válida para todas as esferas da realidade em que significações estejam em jogo" (LÉVY, 1993, p. 25).

O exemplo (d) sugere que a interação entre as palavras constrói uma rede de significações organizadas e relacionadas de acordo com o contexto, o qual "designa portanto a configuração de ativação de uma grande rede semântica em um dado momento" (LÉVY, 1993, p. 24).

A cada nova manifestação de um item do contexto, como palavra, imagem, som ou gesto, "clarões" de novos significados, associações novas e de duração variável emergem na consciência, modelando e remodelando dimensões de sentido sobre assuntos gerais ou conceitos mais específicos. Sendo assim, cada palavra desencadeia uma série de noções a ela associados em suas redes semânticas, e, conforme as palavras se sucedem, os diversos clarões semânticos construirão um novo sentido para tal seqüência.

Para Lévy, os processos de atribuição de sentido equivalem ao processo de elaboração de um hipertexto ou rede. Através de associações, interpretar um texto equivale a conectá-lo a outros textos e outras imagens, de forma a se "tecer" uma rede, uma teia de significações. Ainda com a finalidade de tornar claro o uso que é feito dessa metáfora nesta pesquisa, apresento a seguir os seis princípios abstratos do hipertexto desenvolvidos por esse autor, os quais utilizo para embasar a idéia do pensamento em rede. Os nomes dos princípios são originais, porém a descrição deles é um resumo em que procuro manter as idéias constantes no texto de Lévy.

- (i) Princípio de metamorfose: a rede hipertextual está sempre em reconstrução e renegociação, e as estabilidades têm duração variável.

Sua extensão, sua composição e seu desenho estão permanentemente em jogo para os atores envolvidos, sejam eles humanos, palavras, imagens, traços de imagens ou de contexto, objetos técnicos, componentes destes objetos etc. (LÉVY, 1993, p.25).

- (ii) Princípio de heterogeneidade dos nós e das conexões: imagens, sons, palavras, sensações, modelos etc, estão na memória, conectados logicamente, afetivamente, ou de outra maneira, de forma que isso ocorre diferentemente de pessoa para pessoa, de grupo para grupo. Na comunicação, têm-se mensagens multimídias, multimodais, analógicas, digitais etc. No processo em que os humanos e tecnologias coexistem e se correlacionam (processo sociotécnico), há grupos, artefatos, forças naturais e as diversas associações entre esses elementos.
- (iii) Princípio de multiplicidade e de encaixe das escalas: cada nó pode ser (ou se tornar) uma rede; um exemplo prático: no exemplo (a), um aeroporto foi situado como um nó de uma rede composta por vários aeroportos, mas tal aeroporto pode também ser considerado uma rede de escritórios de agências de viagem e de turismo.
- (iv) Princípio da exterioridade: uma rede funciona sempre em dependência do exterior; por isso, a emissão de palavras e de sons e o contato dependem não apenas de um ator humano, mas também de atores externos a ele.
- (v) Princípio de topologia: tudo o que se desloca na rede assim o faz por um de seus caminhos.
- (vi) Princípio de mobilidade dos centros: pode-se dizer que a rede não tem centro ou tem vários centros, sempre se alternando em duração e intensidade, de acordo com o deslocamento dos centros de gravidade mencionados anteriormente. Talvez seja melhor considerar que aquilo que

se chama temporariamente de “centro” nada mais é senão um nó que, em certo período, é mais intenso em ação ou importância em relação aos outros nós.

2.3 O pensamento coletivo

O exemplo (e) de rede hipertextual, citado na seção anterior, no qual se imagina um grupo com estudantes e professor trabalhando junto ao computador, mostra que mesmo um desenho ilustrativo tridimensional não dá conta da complexidade característica dessa metáfora. Em tal exemplo, um dos alunos é sujeito mantenedor de uma rede de significados diversos, enquanto o outro estudante traz consigo outra rede de significados, outras maneiras de falar e de pensar sobre os assuntos sobre os quais discutem, e o mesmo acontece com o professor.

Não obstante, com o computador e as outras mídias, essas redes se interligam em diversos momentos, de diversas formas, com intensidades variáveis. Ou seja, não é possível conceber o homem atual, nem o da época de Euclides nem o do período Neolítico sem as mídias disponíveis. O conhecimento produzido só o é em função da existência do ser humano e das mídias. Tornando mais clara a relação entre esses atores, Lévy (1993) afirma que

O computador, ou ainda o arranjo composto pelo papel, o lápis e o alfabeto formam micromódulos relativamente coerentes que vêm juntar-se, como nós suplementares, a numerosos outros nós semi-independentes de uma rede cognitiva ao mesmo tempo pessoal e transpessoal (p.172).

Destaca-se, na afirmação de Lévy, a participação das **mídias** (“computador”, “papel”, “lápis”) junto a uma **“rede cognitiva”** que pode ser analisada em dois níveis: o **pessoal**, que se refere àquilo que uma pessoa pensa,

sua consciência e seus processos cognitivos individuais, e o nível **transpessoal**, que se refere às diversas interferências entre as individualidades, à produção de conhecimentos gerada não apenas por uma pessoa que pensa, mas por uma coletividade alimentada por interações entre seus constituintes humanos e não humanos.

Dessa forma, chega-se à noção de coletivos que são sujeitos do pensamento produtor de conhecimentos: redes de significados atribuídos, construídos e reconstruídos não são apenas produção de um ser humano que pensa, mas de um conjunto de seres humanos e coisas que interagem e se transformam continuamente. Instituições, técnicas, interfaces, contextos etc, não são considerados meros objetos do pensamento: coletivos pensantes, constituídos por seres humanos, coisas e mídias são os sujeitos da produção de conhecimentos, movidos por relações hipertextuais.

Não se trata de atribuir “importância” ou “*status*” equivalente a homens e máquinas, uma vez que neste referencial, tal comparação não faz sentido, nem é desejável. Nessa discussão da relação do ser humano com as coisas, Lévy (1993) mostra um outro ponto de vista na relação dicotômica sujeito/objeto. Considera que as mídias não se referem apenas aos objetos mediadores, restritos a elementos exteriores ao ser humano, que se limitam a meras funções de “auxiliar” do pensamento deste. Lévy leva em conta que aquilo que aprendemos ou conhecemos só foi assim possível porque ao menos uma tecnologia intelectual esteve condicionando esse saber, o que torna difícil estabelecer fronteiras nítidas entre a vertente humana e a influência midiática de um conhecimento produzido.

Nesse sentido, humanos e mídias são atores dos processos de significação, e a intensidade com que cada um desses constituintes de um coletivo pensante participa de tais processos é variável.

No campo educacional, a intensidade das relações entre os atores de coletivos pensantes cria apreciáveis possibilidades para processos de ensino e aprendizagem. Essa visão justifica o contexto em que este referencial teórico apresenta-se para atividades pedagógicas. Lévy (1999) confirma esta posição:

Postulemos explícita, aberta e publicamente o aprendizado recíproco como mediação das relações entre os homens. As identidades tornam-se identidades de saber. As conseqüências éticas dessa nova instituição da subjetividade são imensas: quem é o outro? É alguém que sabe. E que sabe as coisas que eu não sei. O outro não é mais um ser assustador, ameaçador: como eu, ele ignora bastante e domina alguns conhecimentos. Mas como nossas zonas de inexperiência não se justapõem, ele representa uma fonte possível de enriquecimento de meus próprios saberes. Ele pode aumentar meu potencial de ser, e tanto mais quanto mais diferir de mim. Poderei associar minhas competências às suas, de tal modo que atuem melhor juntos do que separados (p. 27)

Dessa forma, as interações mencionadas anteriormente são valorizadas mediante os pontos de vista de Lévy. A fim de complementar a noção de coletivo pensante, argumento que há muitos indicativos de que o **outro**, em sua linguagem, refere-se a um ser humano. Mas, conectando estas considerações àquelas que foram descritas anteriormente sobre as tecnologias intelectuais, vislumbro, naquele exemplo (e) de rede hipertextual, que ilustra alunos e professor, um coletivo pensante constituído de seres humanos e de mídias capaz de produzir conhecimentos matemáticos.

2.4 Metáfora seres-humanos-com-mídias

Ao trazer as idéias de Lévy para o campo da Educação Matemática, Borba (BORBA, 1999, 2002; BORBA, PENTEADO, 2001) discute como o conhecimento é produzido por coletivos pensantes constituídos por atores humanos e não humanos, analisando o papel das mídias informáticas em atividades didáticas, relacionando o sistema “homens-coisas” de Lévy à teoria da reorganização do

pensamento (TIKHOMIROV, 1981). Discorrerei a seguir sobre esta teoria, para depois mostrar como Borba a articula com as idéias de Lévy.

Seguidor do pensamento de Vygotsky na relação do homem com o artefato/ferramenta, Tikhomirov (1981) apresenta três possibilidades que normalmente são levadas em conta na relação psicológica dos seres humanos com o computador. Na **teoria da substituição**, a memória humana é substituída pela do computador, bem como sua capacidade para resolver problemas; ou seja, os humanos atribuiriam atividades ao computador sempre que se sentissem incapazes de fazê-las ou isso lhes fosse muito trabalhoso ou despendesse muito tempo.

Prolongar o conhecimento e a memória humana e aumentar a velocidade do processamento das informações são os pressupostos da **teoria da suplementação**, que se limita à análise quantitativa das relações dos seres humanos com os computadores. Esse ponto de vista é combatido por Lévy, que não concorda com uma “metáfora do prolongamento”, na qual o homem seria o soberano, que pensa e utiliza o computador como extensão de seu pensamento, de forma que a máquina não exerceria nenhuma influência nas maneiras como os seres humanos raciocinam.

Tikhomirov (1981) também acaba por refutar esses pontos de vista, expostos anteriormente, ao defender a **teoria da reorganização**, na qual o computador condiciona a produção do conhecimento construído pelos seres humanos, participa qualitativamente dos saberes estabelecidos e “torna possível **manifestar e desenvolver** o componente intuitivo do pensamento e a cadeia de geração de hipóteses” (TIKHOMIROV, 1981, p. 276, grifos meus).⁷ Assim, para esse autor, o computador é uma ferramenta de mediação da atividade mental humana, e que, ao mesmo tempo, transforma essa mesma atividade.

Nesse sentido, Lévy (1993) procura tornar explícitas as maneiras como as tecnologias intelectuais atuam num coletivo homens-coisas:

⁷ “(...) *the computer makes it possible to **reveal** and **develop** the intuitive component of thought and the chain of the generation of hypotheses (...)*”.

As tecnologias intelectuais situam-se *fora* dos sujeitos cognitivos, como este computador sobre minha mesa ou este livro em suas mãos. Mas elas também estão *entre* os sujeitos como códigos compartilhados, textos que circulam, programas que copiamos, imagens que imprimimos e transmitimos por via hertziana. Ao conectar os sujeitos, interporem-se entre eles, as técnicas de comunicação e de representação estruturam a rede cognitiva coletiva e contribuem para determinar suas propriedades. As tecnologias intelectuais estão ainda *nos* sujeitos, através da imaginação e da aprendizagem. (p.173, grifos do autor).

Articulando o ponto de vista do conjunto homem-computador, de Tikhomirov (1981), com a relação entre seres humanos e as tecnologias intelectuais de Lévy, Borba (BORBA, 1999, 2002; BORBA, PENTEADO, 2001) estende o alcance da relação homem-computador e da relação homem-coisas para homem-mídias, utilizando a expressão “seres-humanos-com-mídias”. Com isso, realça que o pensamento se constitui mediante as diversas inter-relações entre atores humanos e não humanos, investindo mais no terceiro aspecto citado anteriormente por Lévy, no qual afirma que as “tecnologias intelectuais estão ainda *nos* sujeitos, através da imaginação e da aprendizagem”.

A metáfora **seres-humanos-com-mídias** (BORBA, 1999, 2002; BORBA, PENTEADO, 2001) explora a noção do pensamento como a realização de um coletivo e procura evitar a dicotomia sujeito/objeto, ressaltando o que Lévy já indicara. Porém, Borba destaca que o conhecimento produzido é impregnado pelos aspectos midiáticos; ou seja, componentes da oralidade, da escrita e da informática estão **nos** conhecimentos produzidos.

O que se conhece em relação à Matemática, por exemplo, é impregnado de escrita, como no seguinte exemplo: posso realizar o cálculo de 1532×37 mentalmente, mas as condições que uma pessoa tem de realizar tal tarefa dessa maneira existem graças às atividades que desenvolveu junto às tecnologias intelectuais e, nesse caso, principalmente pela escrita.

Generalizando, pode-se afirmar que discussões sobre certos temas matemáticos que foram estabelecidos por uma comunidade, mediante o uso da escrita, acontecem mesmo quando “não se está escrevendo”, pois o pensamento dessa comunidade já está “impregnado de escrita”. Borba (1999), que utiliza softwares gráficos em várias de suas pesquisas, mostra que conhecimentos construídos junto às calculadoras gráficas aparecem em discussões entre os alunos, independentemente do fato de essa mídia estar ou não sendo utilizada no momento de tais debates; nesse caso, o saber produzido pelos estudantes demonstra estar constituído também pela mídia informática. O autor ainda realça que vários itens desse conhecimento dificilmente seriam conseguidos apenas mediante as tradicionais mídias orais e escritas.

Borba (BORBA, 1999, 2002; BORBA, PENTEADO, 2001) apresenta, em suas pesquisas, fortes indícios de que a mídia escrita condicionou o predominante enfoque algébrico que constitui a abordagem do ensino de funções; as mídias informáticas, por sua vez, favorecem a visualização e o enfoque gráfico, capazes de proporcionarem a produção de conhecimentos mais abrangentes e flexíveis em relação a esse tema.

Dessa forma, a metáfora seres-humanos-com-mídias, desenvolvida por esse autor, traz as noções de inteligência coletiva de Lévy (1993, 1999), ao domínio específico da Educação Matemática, articulando este construto teórico ao papel reorganizador do computador nas atividades humanas, elaborado por Tikhomirov (1981). Tal metáfora parece se aprofundar mais no fato de que o conhecimento produzido é impregnado de mídias: o alfabeto e as imagens estão **nas** consciências das pessoas, nos livros e nos computadores, e só existem mediante esses atores humanos (pessoas) e não humanos (livros, computadores), sendo, portanto, impossível dissociar a vertente puramente humana ou puramente técnica de um conhecimento produzido.

Dessa forma, a metáfora que Borba utiliza inclui o conhecimento matemático como também condicionado pelas mídias disponíveis, proporcionando o alcance das idéias de Lévy e de Tikhomirov para a Educação Matemática. Na

articulação dessas noções, Borba postula que no processo de interação do ser humano com o software, como um software gráfico ou de geometria dinâmica, ocorrem transformações qualitativas no conhecimento produzido: o estudante executa alterações nas formas proporcionadas pelo software, e as potencialidades que este oferece, por sua vez, condicionam tais ações.

Assim, o pensamento que o ser humano manifesta não se faz mediante uma característica exclusivamente individual, cerebral, independente daquilo que acontece ao seu redor; o pensamento se dá com alguém ou alguma coisa. Enquanto escrevo este texto, escrevo-o com os autores indicados e suas idéias, escrevo-o com meu microcomputador, com minhas notas de campo, entre outros.

O verbo pensar, nesses termos, pode ser usado também no sentido de **pensar com**, além do sentido de **pensar em**. Para Lévy (1993, 1999), há o pensamento enquanto consciência, que é uma interface entre seu organismo, imerso em determinados ambientes, e o funcionamento de seus processos cognitivos, e há o pensamento realizado por um grupo, que inclui humanos e não humanos. Diferenciando o pessoal do transpessoal, Lévy postula que “a consciência é individual, mas o pensamento é coletivo” (1993, p. 170).

Descrita a noção de coletivo pensante, agora se faz necessária uma discussão acerca do tema relativo ao conhecimento matemático aqui enfocado, o qual se relaciona às produções matemáticas dos coletivos pensantes desta pesquisa. No próximo capítulo, apresentarei algumas pesquisas que foram consultadas durante o desenvolvimento deste trabalho, e discutirei a inserção deste no contexto das mesmas, observando aspectos semelhantes e diferentes entre esta investigação e as demais examinadas.

– CAPÍTULO 3 –

INSERINDO A PESQUISA NO CONTEXTO DE OUTRAS REALIZADAS

Neste capítulo, apresento algumas pesquisas com as quais entrei em contato durante o período em que desenvolvi o trabalho de mestrado e discuto o papel desta pesquisa no contexto das já realizadas. Nem todos os títulos foram consultados anteriormente à minha atuação no campo de investigação, o que trouxe implicações para minhas análises finais.

O capítulo constitui-se de duas partes: na primeira (item 3.1), descrevo as pesquisas consultadas, sendo que a segunda parte (item 3.2) apresenta algumas considerações a respeito da relevância deste trabalho no contexto da bibliografia revisada.

3.1 Algumas pesquisas realizadas

O assunto funções é demasiado amplo, de forma que aparece em diversas pesquisas, de maneiras bastante variadas. Conseqüentemente, optei por agrupar os títulos consultados através de alguns de seus temas, utilizando, em cada caso, pelo menos um dos dois critérios a seguir: (i) procurei, em cada um dos trabalhos, identificar seu foco principal, buscando respeitar aquilo que seus autores consideram como pontos mais importantes do estudo; (ii) alguns aspectos de determinada pesquisa, que podem não ser aqueles mais intensamente discutidos

na apresentação das mesmas, puderam fornecer subsídios, de uma forma ou de outra, para este trabalho.

3.1.1 As representações de funções sem o contexto informático

Algumas pesquisas consultadas não utilizaram tecnologias informáticas ao trabalhar com funções. Schliemann et al (2001) investigaram possibilidades de se fazer conexões entre os campos aritmético e algébrico já com estudantes de 9 anos (*third-grade*). Os autores procuraram verificar essa conexão incentivando esses alunos a trabalhar com tabelas de números, relacionando, por exemplo, a quantidade de um produto e o respectivo preço a pagar. Depois de vários estudos “piloto”, os pesquisadores conseguiram chegar a um roteiro de atividades que permitisse aos estudantes relacionar funcionalmente os dados de uma tabela.

Oliveira (1997), também procurando verificar as potencialidades de uma seqüência didática, trabalhou com funções de várias famílias, junto a alunos do primeiro ano de um curso de Engenharia, verificando avanços qualitativos nas concepções desses estudantes. A construção dessa seqüência didática embasou-se num referencial teórico conhecido como “Jogo de Quadros”, no qual os alunos são incentivados a transitar pelas diversas representações, como, por exemplo, o quadro algébrico, o quadro gráfico e o quadro numérico.

A autora realça que foi necessário, para desenvolver sua pesquisa, colocar os 16 estudantes participantes em situação a-didática, ou seja, situá-los fora do contexto da sala de aula, a fim de que pudessem trabalhar suas dificuldades de maneira espontânea, com nenhuma ou pouca influência do **contrato didático**, termo utilizado por Brousseau, que caracteriza o conjunto de comportamentos do professor esperados pelos alunos e vice-versa. No entanto, não pude verificar, em suas conclusões finais, o levantamento de possíveis implicações para as situações didáticas, no sentido utilizado pelo referencial teórico da autora.

Suas atividades dividem-se em exercícios pelo trânsito das representações de funções a partir de problemas contextualizados, envolvendo exemplos em

economia, fenômenos climáticos e fenômenos físicos (duas atividades), além de exercícios que procuram estabelecer a correspondência entre expressões analíticas, gráficos e tabelas (uma atividade) e questões que incentivam a compreensão da definição de função nas diferentes representações (duas atividades).

3.1.2 Funções específicas e as mídias informáticas

A maioria das pesquisas consultadas associa o estudo de funções à presença de tecnologias informáticas, em diferentes níveis de profundidade, no que se refere à atuação dessas mídias. Há casos em que o computador e/ou a calculadora gráfica se inserem num contexto de estudo que envolve certas famílias específicas de funções.

Costa (1997) contrastou seqüências pedagógicas no estudo das funções seno e cosseno com estudantes da 2ª série do Ensino Médio. Tais seqüências envolveram artefatos do mundo experimental, como pêndulos de areia e simulador de alarme óptico, e atividades no computador, com os softwares *Cabri Geomètre* e *Graphmatica*. A autora, através de análises qualitativas e quantitativas, concluiu que a seqüência em que os alunos trabalhavam primeiro com manipulações de objetos do “mundo experimental”, para depois lidarem com os softwares, indicaram melhores índices de aprendizagem.

As atividades realizadas no contexto informático caracterizam-se pelo trabalho com a circunferência trigonométrica no *Cabri* e pela digitação de expressões analíticas e verificação do correspondente gráfico obtido, no *Graphmatica*. Nesse caso, alguns exercícios incluem a construção de gráficos previamente feitas no papel, para posterior comparação com a figura oferecida pelo software.

Outro tipo de função abordada foi a modular. Brumatti (2001) utilizou algumas atividades realizadas no computador ao focar o conceito de valor absoluto junto a estudantes de primeiro ano de um curso de Cálculo. Nessa

pesquisa, a autora concluiu, dentre outros itens, que a ênfase na forma algébrica ao se tratar o conceito de módulo, minimizando-se outras interpretações, como a geométrica, é um dos fatores que podem provocar dificuldades na aprendizagem.

Também trabalhando com turmas de Cálculo, Gómez e Carulla (2001) buscaram identificar motivos para concepções que consideram inválidas, em relação à Matemática formal, de estudantes que trabalharam com calculadoras gráficas e funções cúbicas da forma $f(x) = a.(x - h)^3 + k$. Dentre algumas conclusões, ressaltou-se a que levanta a possibilidade de itens informáticos, como alterações de escala, terem contribuído para que essas concepções inválidas fossem consolidadas.

Porém, no artigo consultado, esses autores não se aprofundaram na questão das mídias informáticas no ensino das funções consideradas, sobre as quais se priorizou o estudo da representação gráfica, nem apresentaram o formato das atividades desenvolvidas no computador, optando por analisar e discutir algumas formas de expressão gráfica dos estudantes participantes da pesquisa.

3.1.3 As representações múltiplas de funções e o Cálculo

Considerando ainda dificuldades de aprendizagem de funções para alunos de cursos de Cálculo e Pré-Cálculo, o tema “representações múltiplas de funções” ocorreu com certa frequência, geralmente com turmas iniciantes desses cursos. Grasse (1997) e O’Callaghan (1998), por exemplo, estudaram a influência dos currículos norte-americanos que incluem esse tema.

O primeiro considera as representações múltiplas de funções, as quais chama de MRF (*Multiple Representation of Function*), constituintes da “pedra fundamental” de todos os projetos que visaram e visam a reformas no ensino de Cálculo. Observa também a importância de se estimular a igualdade de ênfases em representações numéricas, simbólicas e gráficas. Em sua revisão bibliográfica, menciona que a maioria das pesquisas não apresenta diferenças significativas em termos de ensino e aprendizagem no campo das manipulações simbólicas.

A partir dessa revisão, o autor desenvolveu sua pesquisa analisando as tentativas de reforma curricular para o ensino de Cálculo, mas levantou um ponto de discussão para a relevância dos resultados obtidos por meio de testes: segundo Grasse (1997), não é coerente julgar os resultados de um teste realizado junto a estudantes que trabalharam com funções num ambiente com MRF, se esses testes continuarem priorizando as manipulações simbólicas.

O'Callaghan (1998), por sua vez, apostou no sucesso de reformas curriculares analisando os benefícios do CIA (*Computer-Intensive Algebra*), que é caracterizado pelo uso da tecnologia associada à resolução de problemas contextualizados, em oposição ao currículo da álgebra tradicionalmente ensinada (TA, *Tradicional Algebra*), nos padrões que enfatizam a manipulação simbólica, memorização e a prioridade das técnicas de cálculo. Em sua discussão conceitual, defende que existem quatro competências necessárias a serem desenvolvidas para a aprendizagem de funções.

A primeira competência, *Modeling*, se refere à percepção da relação entre variações de grandezas. A segunda competência é o reconhecimento do conceito de função, denominado *Interpreting*, nas diferentes formas de se representá-las, as quais são, para o autor, as equações, as tabelas e os gráficos. A terceira competência, intitulada *Translating*, refere-se à habilidade de realizar as transições entre essas representações, enquanto que a quarta competência, *Reifying*, consiste no estágio maior de abstração, no sentido piagetiano, em que processos e procedimentos tornam-se objetos mentais⁸.

Essa discussão integra o quadro das questões norteadoras da pesquisa desse autor, que envolve ainda interrogações que dizem respeito à resolução de problemas, aprendizagem de funções quadráticas e cúbicas, operações e transformações em fórmulas, sempre comparando o rendimento de estudantes que estejam dentro dos moldes do CIA com estudantes nos moldes de TA, utilizando, para tanto, estratégias metodológicas qualitativas, através de

⁸ O autor trabalha num referencial teórico conhecido como APOS (*Action-Process-Object-Schema*).

entrevistas, e quantitativas, por meio de testes, segundo sua própria classificação para tais procedimentos.

O autor afirma que ambas as formas de análise indicaram que o grupo CIA teve superioridade no desenvolvimento das três primeiras competências, enquanto que a quarta permaneceu difícil aos dois grupos. Afirma também que o entendimento global do conceito de função foi o diferencial do grupo CIA em relação ao grupo TA. No entanto, não apresentou exemplos de questões que constam nas atividades do grupo CIA, limitando-se a mostrar questões aplicadas num pós-teste a ambos os grupos, relacionando as mesmas às competências anteriormente discutidas.

Ainda no que diz respeito à perspectiva da resolução de problemas, contextualizados e em grupos, Brenner et al (1997) puderam constatar que habilidades com questões ligadas ao tema funções são desenvolvidas na medida em que as suas diferentes representações integram seus processos de ensino e aprendizagem. Os autores trabalharam com estudantes de pré-álgebra, em três *high schools*⁹ da Califórnia, que possuem línguas maternas diferentes. Constataram que tais alunos desenvolveram a habilidade de “traduzir” problemas diversos que envolviam funções, escritos na língua inglesa, para as diversas representações de funções.

Igualmente lidando com as representações múltiplas de funções num curso de Cálculo, Keller e Hirsch (1998) afirmam, ao trabalhar com calculadoras gráficas, que

se estudantes têm uma preferência cognitiva por uma representação, é provável que as conexões mais fortes entre representações e entre conceito e representação sejam construídas para e a partir das representações por eles preferidas¹⁰ (p.1).

⁹ Semelhante ao Ensino Médio brasileiro, porém já num processo de “transição” para o nível superior.

¹⁰ “[...] *If a student has a cognitive preference for a representation, it is likely that the strongest connections between representations and between concept and representation are constructed to and from the student’s preferred representation*”

Nessa pesquisa, os autores discutem como esses estudantes mostraram suas preferências por certas representações e como tais preferências foram afetadas pela disponibilidade das várias representações, além da relação das preferências com o contexto. Dentre outras conclusões, verificam que as atividades proporcionaram certa flexibilidade na observação, pelos alunos, de diferentes aspectos de funções, além da facilidade em gerar *links* entre representações.

Segundo os autores, o uso das tecnologias informáticas nas aulas contribuiu para esses resultados. Suas atividades incluem questões com e sem contextualização e, em ambos os casos, gráficos, tabelas e fórmulas foram disponibilizados simultaneamente.

3.1.4 Funções, representações múltiplas e os professores

Oliveira (1997a), citada anteriormente, não possui o trabalho com professores como o foco principal de sua pesquisa, mas anteriormente à aplicação de testes junto aos estudantes, desenvolveu três análises detalhadas: da Proposta Curricular do Estado de São Paulo para o ensino de funções em 1º e 2º Graus (atuais Ensino Fundamental e Ensino Médio), dos livros didáticos e das concepções de professores acerca do conceito de função.

Concluiu, a partir dessas análises, que a Proposta Curricular de Matemática, apesar de incentivar situações-problema e o Jogo de Quadros, não é reconhecida ou utilizada por mais da metade dos professores entrevistados, embora a maior parte deles acredite que as mudanças de registros de função (algébrico para o geométrico, geométrico para o algébrico, tabela para o gráfico etc) “oferecem mais vantagens do que desvantagens no ensino das funções” (p. 46).

A autora afirma que ficou claro, através dos dados obtidos nos questionários aplicados junto a esses professores, que a atuação deles em sala de aula, no trabalho com os diversos registros de função, limita-se às situações propostas nos livros didáticos, que, por sua vez, podem ser responsáveis por construções

confusas do conceito de função, já que a maioria dos livros analisados não enfatiza os aspectos de dependência e variação.

Questões como essas também são identificadas por Zuffi (1999), ao estudar como o tema “funções” é tratado na linguagem de professores do Ensino Médio. Ao traçar um breve histórico a respeito das noções de função e de suas definições, relata que é importante que o professor identifique, nas diversas representações desse conceito, a definição que adota, principalmente no que se refere ao trabalho com os estudantes, já que a linguagem utilizada por ele em sala de aula influencia sobremaneira o modo como os conceitos referentes às funções são construídos pelos alunos.

Ao observar as aulas de alguns professores da primeira série do Ensino Médio, Zuffi (1999) complementou os dados obtidos nas entrevistas e questionários, identificando questões conflitantes fortemente presentes no tratamento com funções: as reformas da **Matemática Moderna**, caracterizadas pela ênfase numa linguagem formal, abstrata e centrada na lógica das definições, têm reflexos nas formas de expressão desses professores.

Estes, aparentemente buscando minimizar os conflitos que essa abordagem propicia tanto em suas concepções como na dinâmica de sala de aula, ou mesmo revelando as dificuldades que possuem para lidar com os significados mais formais estudados em sua graduação, dicotomizavam o modo de abordar funções em “parte teórica” e “parte prática”. À primeira se atribuía importância menor, como se fosse algo desnecessário para a aprendizagem, e a segunda, que poderia indicar o trabalho com o assunto em situações contextualizadas, normalmente se traduziu em exercícios com predominantes enfoques algébricos.

A autora ainda argumenta que tal procedimento pode ser explicado também pela forte influência da prática docente, ainda bastante ligada ao uso do livro didático, na qual são raros os tratamentos com modelos mais complexos de funções, o que sustentaria uma situação cíclica: ao se manterem sempre os mesmos e reduzidos exemplares de funções em sua prática escolar, o professor

alimenta um processo circular que dificulta a “amplificação” dos conceitos que construiu ao longo de sua vida acadêmica.

Diante desse quadro, a autora constata que os professores, ao lidarem com aspectos gráficos em suas aulas, não tiram proveito dos conceitos que podem ser trabalhados através dessa representação:

Na exploração dos gráficos também não se evidencia, na linguagem dos professores, nenhuma preocupação com o “processo de transformação” definido entre dois conjuntos de valores, determinado pela “lei” ou “regra” que constitui uma função. Mesmo nos casos de tratamento de “funções crescentes e decrescentes”, o uso que se tem da linguagem matemática, no Ensino Médio, é fortemente marcado pela determinação de algoritmos, que levam o aluno à resposta desejada, mas com raras chances de que este venha compreender a função como um “processo de transformação” de valores, no qual estes crescem ou decrescem, dependendo do caso. (ZUFFI, 1999, p. 187, grifo da autora).

Ou seja, predomina, na linguagem de sala de aula, a ênfase nas regras de sintaxe, caracterizada pelo trabalho com as representações “sempre a partir do algébrico” (p. 192), ao invés de uma aprendizagem significativa, baseada na semântica, que priorize a **construção** de conceitos.

3.1.5 Funções, representações múltiplas e construtos teóricos

No conjunto das pesquisas consultadas que incluem computador ou calculadora gráfica, pude verificar que as representações múltiplas estão relacionadas às mídias informáticas de um modo quase que “natural”, de forma que essa ligação parece ser feita diretamente, geralmente sem uma discussão prévia, tamanha a facilidade que os softwares gráficos possuem em disponibilizar as representações.

Há trabalhos nos quais a “afinidade” entre tecnologias informáticas e as representações múltiplas de funções é teoricamente debatida. Nesse sentido, considero relevantes para esta investigação a noção de “representantes de funções”, o caso das “funções prototípicas” e o enfoque de “covariação”.

Schwarz e Dreyfus (1995) apontam que podem ocorrer ambigüidades ou equívocos em quaisquer das três representações de funções (gráfica, tabular e algébrica). Os autores indicam, porém, que a manipulação da mídia informática, através do software *Triple Representation Model* (TRM), ajudou estudantes a inferir propriedades de funções a partir de seus “representantes”¹¹.

Representantes são possibilidades dentro de cada representação: por exemplo, mudando-se a escala, muda-se um representante dentro de uma representação, no caso, a gráfica. Idem para valores dispostos numa ordem qualquer de uma tabela, que podem ser rearranjados em ordem crescente ou decrescente. Para esses autores, tão importante quanto relacionar as três representações é relacionar representantes dentro de uma mesma representação.

Apontam, ainda, como bastante problemática a aprendizagem compartimentalizada, verificada junto a estudantes que, apesar de entenderem o comportamento dos dados dispostos em determinada representação, não reconhecem os mesmos dados em outra representação. Nesse sentido, os autores afirmam que alterações numa representação geralmente não são identificadas ou traduzidas em outra representação.

[...] A falta de tais ações em certos contextos implica que as propriedades podem não ser vistas como invariantes através de diversos contextos. Tais propriedades podem, para o aluno, tornar-se características de objetos formais (gráficos, fórmulas e tabelas) ao invés

¹¹ *Representative* (tradução feita pelo Prof. Dr. Marcelo de Carvalho Borba, numa das reuniões do GPIMEM).

de propriedades do próprio conceito. Esta é a razão pela qual a compartimentalização do conhecimento dos estudantes ocorre (p. 264)¹².

Os autores concluíram que as atividades com o software TRM alimentaram a criação, pelos estudantes, de *links* entre as representações e a identificação de invariantes ao se transitar de uma representação para outra, de um representante a outro. Afirmam que esse software foi utilizado como ferramenta de aprendizagem e de pesquisa e, ao contrário da maioria dos softwares gráficos, as representações são disponibilizadas apenas uma de cada vez, de forma que as opções por determinada representação são feitas de modo consciente.

O segundo construto teórico refere-se ao papel prototípico de certas funções¹³. Esse tema, cujo trabalho de Confrey et al (1991) é um de seus primeiros expoentes, ocorreu em alguns artigos desta revisão, mesmo quando seu foco não era necessariamente esse.

Mais recentemente, Schwarz e HersHKovitz (1999) analisaram o papel de funções prototípicas na aprendizagem. Entendem protótipos de uma categoria de conceitos ou de um conjunto de objetos em discussão os exemplos marcantes cujas características são mais fortemente relacionadas com a maioria dos exemplos dessa categoria. Assim, o quadrado é um protótipo dos quadriláteros e, no caso das funções, as lineares (principalmente) e as quadráticas desempenham esse mesmo papel para muitos alunos no nível médio. Esses autores revelam que estudos anteriores não indicaram se a prototipicidade de tais funções ocorria em virtude do papel central que estas desempenham nos processos de ensino e aprendizagem ou se elas possuem “naturalmente” um caráter prototípico intrínseco.

¹² “[...] *The lack of such actions in certain settings implies that properties may not be seen as invariant through several settings. Such properties may, for the learner, become features of formal objects (graphs, formulae or tables) rather than properties of the concept itself. This is why the above compartmentalization of students’ knowledge occurs*”.

¹³ Protótipo: primeiro tipo ou exemplar; modelo (Dicionário Escolar da Língua Portuguesa, Francisco Silveira Bueno).

Schwarz e Hershkowitz (1999) consideram que seu estudo se insere num quadro geral de trabalhos que, durante cerca de 20 anos, buscam analisar processos pelos quais os estudantes constroem o conceito de função. Dividem esse período em ciclos, sendo o primeiro deles caracterizado pelo seguinte procedimento: são ensinados, no começo do estudo de função, a sua definição e alguns breves exemplos de funções diversas; a seguir, desenvolve-se o estudo sistemático de funções lineares e quadráticas. Os autores afirmam que, nessa época, estudos de Markovitz (1982, apud SCHWARZ, HERSHKOVITZ, 1999) já concluíam que esse estudo sistemático teria proporcionado suas “prototipicidades”.

No segundo ciclo, foram encorajadas, em nível curricular, atividades que envolvessem outras funções polinomiais, valor absoluto, maior inteiro etc. O terceiro ciclo, que chamam de *Function Project*, reuniu as experiências dos ciclos anteriores e consolidou a relevância do ambiente computacional no aprendizado de funções mediante o uso das representações múltiplas, do trabalho colaborativo em pequenos grupos, das análises dos relatos verbais e escritos dos estudantes durante atividades pedagógicas, e análise do papel do professor como facilitador da aprendizagem e também como investigador/pesquisador.

Essa pesquisa também traz discussões sobre a análise de imagens conceituais de funções, principalmente as lineares, construídas por alunos dos três ciclos¹⁴; tal análise detalha o papel das funções prototípicas ora como auxiliares para a construção de conceitos, ora como instrumentos que dificultam tal construção ou provocam “concepções errôneas” (*Misconceptions*).

Nesse contexto, os autores observaram que estudantes pertencentes ao terceiro ciclo transitaram com mais facilidade pelas representações e representantes de funções, revelando a influência do contexto das representações múltiplas. Tais conclusões foram resultantes da análise de questionários e das justificativas dos estudantes às respostas dadas.

¹⁴ Para uma discussão detalhada sobre o entendimento dos autores a respeito de *concept*, *concept images* e *concept-learning process*, consultar Schwarz e Hershkowitz, 1999.

Ainda nas conclusões de pesquisa, os autores realçam que as opções *zoom*, mudanças de escala e barra de rolagem foram ferramentas extremamente importantes para o desempenho dos estudantes que estavam imersos no ambiente onde manipulavam as representações de funções. Ressaltam que a interação entre estudantes foi um fator influenciador desse quadro, embora não tenham se aprofundado nessa questão; observam também que tais alunos realizavam boa parte das atividades de forma que críticas, reflexões e argumentações integraram a dinâmica de suas ações.

Porém, a discussão teórica envolvendo o uso de funções prototípicas é feita de modo diferente por Confrey et al (1991), que não comungam a noção de que os estudantes construam *misconceptions*. Nesse sentido, concordo com estes autores, os quais justificam que alunos podem construir, de acordo com o contexto, concepções diferentes daquelas aceitas por aquilo que costuma se chamar “Matemática formal”, como a Matemática dos livros, por exemplo.

Num estudo mais amplo do ensino de funções, defendem o uso de problemas contextualizados como forma dos estudantes iniciarem a construção de conceitos referentes a esse tema. Dentre outros aspectos, tais problemas devem levar os alunos a construir as noções de dependência e de variação, a partir de suas resoluções.

Para exemplificar, a análise de seqüências numéricas, construídas pelos alunos a partir de dados de um determinado problema, podem desenvolver a noção de duas quantidades que variam simultaneamente, de forma que os estudantes procurem identificar o **padrão** que relaciona tais seqüências, tal como a coordenação entre uma seqüência aritmética e uma seqüência geométrica. Nesse exemplo, a eventual construção de equações algébricas, relacionando x a y , e/ou a construção de gráficos representativos de tais variações, partem normalmente de tais observações, permeadas por elementos intuitivos e por experimentação.

Dessa forma, o uso de problemas contextualizados, associados a softwares multirepresentacionais, favorecem a coordenação das representações,

simultaneamente ao processo de construção do conceito de função. Importa menos se a forma usada primeiramente é gráfica, algébrica ou tabular, do que o fato de o estudante trabalhar com as representações enquanto constrói também a noção de variação entre grandezas.

É nesse contexto que Confrey et al (1991) utilizam protótipos. Funções de expressões algébricas $y=x$, $y=x^2$, $y=x^3$, $y=1/x$, $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=a^x$, $y=\log_a x$, $y=|x|$ e $y=[x]$ (maior inteiro), consideradas protótipos de suas respectivas famílias, seriam então trabalhadas não com o tradicional enfoque “álgebra→gráfico” e “álgebra→tabela”, mas sim com trânsitos diversos, dependendo de cada problema e de cada maneira com que os estudantes decidem abordá-lo.

Nesse mesmo panorama, ou seja, com os problemas contextualizados e a construção de conceitos a partir dos mesmos, Confrey e Smith (1994, 1995), além do uso de tais protótipos, analisam outra implicação da abordagem descrita anteriormente, contrastando-a com um enfoque tradicional. Os autores afirmam que tratamentos convencionais de funções iniciam-se pela construção de uma regra de **correspondência** entre valores de x e de y , tipicamente através da criação de uma equação da forma $y=f(x)$.

Porém, exemplos como o citado anteriormente, nos quais os estudantes trabalham em uma situação-problema primeiramente, preenchendo uma tabela de valores de x , e depois preenchendo a coluna para valores de y , através de uma operação contextualizada, e não através de uma expressão algébrica predeterminada, conduzem os estudantes a compreender as variações simultâneas de duas grandezas, visualizando o fenômeno funcional de maneira mais dinâmica. Confrey e Smith (1994, 1995) chamam esse enfoque de **covariação**, considerando-o mais abrangente que a tradicional abordagem por correspondência:

Uma abordagem por covariação, por outro lado, proporciona que se mova operacionalmente de y_m para y_{m+1} coordenando-se com o movimento de x_m para x_{m+1} . No caso das tabelas, essa abordagem

envolve a coordenação da variação em duas ou mais colunas ao se mover para cima ou para baixo da tabela (CONFREY, SMITH, 1994, p. 137)¹⁵.

Os autores afirmam que essa abordagem favorece o trabalho com o conceito de função em vários contextos, permitindo que os estudantes também explorem intuitivamente a noção de variação, através de uma variedade de experiências. Ou seja, o que difere a covariação da abordagem por correspondência situa-se na noção de variabilidade que cada uma delas pode oferecer: na primeira, enfoca-se a relação entre cada elemento de um conjunto com um elemento de outro conjunto de forma isolada, enquanto que, na segunda, dois conjuntos de valores são analisados simultaneamente, juntamente com o padrão que os relaciona. As representações tabulares e gráficas favorecem esta abordagem, mas os autores não buscam a inversão de hierarquias, ou seja, partir necessariamente da tabela para se chegar à expressão algébrica, e sim a coordenação entre as representações, feitas através de várias experimentações sobre diferentes problemas.

Ainda sobre a covariação, Slavit (1997) afirma que esse conceito não se limita apenas à observação das relações, mas inclui também a análise, a manipulação e a compreensão das variações, num ponto de vista dinâmico. Souza (1996) afirma que “[...] o enfoque de covariação explora a dinâmica de como y muda quando o x é alterado. Esse processo é considerado diferente do processo de destinar um y a um x ” (p. 18). A dinâmica à qual esses dois autores se referem estaria, pois, mais ligada às variações que se observam, por exemplo, em leis de movimento e cinemática, o que, de certa forma, é coerente com a contextualização proposta por Confrey et al (1991).

¹⁵ “A covariation approach, on the other hand, entails being able to move operationally from y_m to y_{m+1} coordinating with movement from x_m to x_{m+1} . For tables, it involves the coordination of the variation in two or more columns as one moves down (or up) the table”.

3.1.6 Representações múltiplas de funções e as mídias informáticas

A análise das ações dos estudantes junto a softwares gráficos e/ou calculadoras gráficas, que é um ponto fundamental para se chegar às conclusões de uma pesquisa que esteja centrada em processos de ensino e aprendizagem de funções com informática, é feita também nos trabalhos de Borba (1993, 1994, 1995, 1999), Borba e Confrey (1996), Borba e Villarreal (1999), Gracias e Borba (1999) e Souza (1996). Estes autores, em suas pesquisas, enfatizaram especialmente tal aspecto, ao trabalharem com estudantes em nível escolar semelhante aos alunos participantes de minha pesquisa.

Borba (BORBA, 1993, 1994, 1995; BORBA, CONFREY, 1996) trabalhou com as representações múltiplas de funções quadráticas, modulares e “maior inteiro” em um ambiente computacional, tendo como motivação central da pesquisa a compreensão das transformações de funções, através do software *Function Probe*, por estudantes norte-americanos de nível equivalente ao Ensino Médio brasileiro.

Esse software, que pode ser utilizado com diversas famílias de funções, permite tais transformações através de (a) manipulações algébricas em funções da forma $y=A.f(B.x+C)+D$; (b) manipulações gráficas com o uso do *mouse*, que propiciam reflexões, translações e esticamentos (*stretches*), e (c) alterações na janela tabular. Justificando a abordagem que privilegia o trânsito pelas representações num ambiente computacional, Borba (1995) afirma:

[...] pode-se dizer que a interligação entre essas representações, feita de maneira quase instantânea, possibilita que as representações empregadas para analisar um determinado fenômeno sejam contrastadas umas com as outras, provocando ou um conhecimento mais abrangente e flexível do que é estudado, ou uma dúvida sobre o que parecia tão certo em uma dada representação olhada isoladamente (p. 72).

Sobre os softwares gráficos, Borba e Confrey (1996) e Borba (1999, 2000) indicam que o papel que podem desempenhar na construção de idéias matemáticas é mais que auxiliar. Para tanto, realçam que os estudantes podem utilizar seus conhecimentos prévios enquanto trabalham com as representações de funções, ao mesmo tempo em que têm suas ações condicionadas pelo software, conforme discussão desenvolvida no capítulo 2.

Souza (1996), por sua vez, trabalhou com funções quadráticas e calculadoras gráficas junto a estudantes de 8ª série. Nesse trabalho, a autora desenvolveu uma proposta didático-pedagógica, na qual a visualização e a experimentação fizeram parte das estratégias dos estudantes ao trabalhar com aqueles itens. Apesar do enfoque nas funções polinomiais de 2º grau, sua proposta apresenta funções diferentes das tradicionalmente ensinadas, afirmando inclusive que mais estudos referentes ao ensino dessas, junto às tecnologias informáticas, devem ser efetuados.

Suas atividades, caracterizadas sobretudo pelo uso alternado da mídia lápis-e-papel e da calculadora gráfica, incentivam o trânsito pelas representações, principalmente algébrica e gráfica, e pelos conceitos de função nessas representações. São trabalhados, em funções afins e quadráticas, itens como raízes, sinais, variação de coeficientes em expressões analíticas e resolução de equações.

No caso das pesquisas citadas neste item, a metodologia é predominantemente qualitativa, e a interação do pesquisador com os estudantes é considerada no sentido de que sua atuação no campo produz efeitos sobre os dados obtidos, os quais são observados nas análises finais.

Como se vê, o aspecto qualitativo possui esse caráter de “análise em profundidade”, que pode influenciar teoricamente pesquisas que procurem menos os resultados de aprendizagem, do que características importantes existentes em processos de ensino e aprendizagem. Dessa forma, referenciais teóricos que valorizam a interação entre estudantes, além da interação aluno-software, contribuem para uma análise mais profunda dos dados.

É o caso da pesquisa de Gomes-Ferreira (1998), que utilizou os softwares multirepresentacionais *Function Probe* e *DynaGraph* na realização de atividades que contaram com quatro pares de estudantes de 2º ano do Ensino Médio. Em tais atividades, predominaram ações nas janelas gráficas, de maneira que a interação entre os estudantes foi incentivada, como em situações nas quais um estudante digitava uma fórmula, enquanto outro aluno deveria “adivinhá-la”, por meio do gráfico disponibilizado.

O contexto em que se dão tais atividades são os “micromundos” (*microworlds*), entendidos na linguagem de Papert como programas computacionais que incorporam um conceito matemático, sendo que suas principais características situam-se na importância das diversas representações de um conhecimento, bem como no uso intensivo da exploração.

Aplicando essa referência teórica em sua pesquisa, e chamando de “subconceitos” de função aspectos tais como monotonicidade, período, domínio e imagem, a autora pôde constatar que atividades com funções lineares, quadráticas e seno levaram estudantes a rever algumas de suas concepções prévias, descobrir novos subconceitos, generalizá-los para um maior número de funções, buscar variantes e invariantes em diferentes funções e relacionar de diversas formas os subconceitos e as famílias de funções estudadas.

Outro referencial teórico que possui destaque dentro de uma pesquisa que aborda as representações de funções num ambiente computacional é a Teoria das Representações Sociais e da Argumentação, utilizado por Castro et al (2000). Essa perspectiva analisa a ocorrência de fenômenos que se relacionam à produção de conceitos na vida cotidiana.

Segundo os autores, tal teoria se apóia em dois processos maiores, a saber, “ancoragem” e “objetivação”. Ao primeiro se associa, resumidamente, a idéia da integração de informações novas às aquelas já existentes, bem como isso se desenvolve. O segundo processo refere-se à busca do ser humano por representações concretas de idéias abstratas. Um desenho gráfico, feito no papel,

por exemplo, pode ser entendido como uma representação que procura ilustrar a noção abstrata de função.

Tais considerações compõem a perspectiva pela qual esses autores desenvolvem análises com um grupo de cinco alunos de 8ª série, os quais não haviam estudado funções anteriormente. As questões que esse grupo trabalhou em suas atividades visavam à produção de significados referentes a esse conceito. Essas atividades, divididas em “abertas” e “direcionadas”, foram realizadas com os softwares *Greenglobes*¹⁶ e *TRM*.

Os autores afirmam, em suas conclusões, as quais, no próprio artigo, não consideram finalizadas, que o papel destes softwares foi fundamental para que algumas questões surgissem e a produção de significados sobre função fosse possibilitada. A pesquisa desses autores possui vários pontos em comum com a presente, principalmente no fato de trabalhar com as representações múltiplas de funções e considerar as interações que ocorrem entre os estudantes e entre estes e os softwares.

Outro trabalho que possui vários itens teóricos em comum com o que ora apresento é o de Villarreal (1999), que estudou como se manifestou o pensamento matemático de estudantes universitários de primeiro ano de um curso de Biologia, em conjunto com tecnologias informáticas e as mídias tradicionais.

Observando alunos em sala de aula e desenvolvendo experimentos de ensino com algumas duplas em horário alternativo às aulas regulares, essa autora pôde se aprofundar em diversas questões que envolvem o ensino e a aprendizagem do Cálculo. Uma delas é a visualização, intensamente discutida através de sua revisão bibliográfica e da análise dos dados emergentes, os quais se referem às estratégias de estudantes participantes da pesquisa que, através de conjecturas e refutações, procuraram resolver os problemas propostos ou levantados durante os experimentos através de aspectos visuais, em algumas situações, e de aspectos algébricos, em outras.

¹⁶ Software com características de jogo cujos objetivos, segundo os autores, referem-se ao acerto de pontos no plano cartesiano e à relação entre curva desenhada e equação digitada.

Villarreal (1999) faz então uma análise dessas opções à luz das idéias de Lévy (1993) e de outros pontos de vista teóricos. Para tanto, destaca a ligação, como também se faz na presente pesquisa, entre o trânsito por representações múltiplas e ao que chama de “intermídias”, ou seja, um ambiente caracterizado pela variedade das mídias disponíveis ao se estudar certos assuntos em Matemática: “[...] a coordenação intermídias é entendida como a necessidade de estabelecer relações entre as representações geradas no computador e aquelas produzidas com outras mídias” (p. 335).

Finalizando a descrição dos trabalhos consultados, antes de delinear as semelhanças e diferenças desta pesquisa em relação a essas últimas e às demais apresentadas, exponho a seguir um breve resumo dos aspectos aqui levantados.

Pode-se verificar que, de modo geral, a variedade destacada na literatura consultada caracteriza-se por: (i) abordagens teóricas diferenciadas de ensino e aprendizagem ou outros enfoques, como *APOS*, *concept images*, Jogo de Quadros e Teoria das Representações Sociais; (ii) noções teóricas construídas junto às representações de funções, como “prototipicidade”, representantes e covariação. (iii) enfoques sobre certos itens de funções, como monotonicidade, dependência, correspondência e funções específicas como lineares, quadráticas, cúbicas, modulares e seno, dentre outras.

Não há unanimidade entre os autores pesquisados quanto às terminologias que se referem às três principais representações de funções. A representação “algébrica” é também usada sinonimicamente como “simbólica”, e às vezes resumidamente como “fórmula”, “lei” ou “expressão analítica”. A representação em que se destaca o aspecto visual no plano cartesiano é usada no termo “gráfico” ou “representação gráfica” de forma quase unânime, ocorrendo ocasionalmente a expressão “representação geométrica”. “Tabelas” ou “representação tabular” às vezes se substitui por “representação numérica”. Outras representações, como conjuntos de pares ordenados e diagramas, raramente são mencionadas, com exceção à pesquisa de Zuffi (1999).

A fim de que sejam bem detalhados itens desta pesquisa que considero imprescindíveis para sua realização, segue uma explicitação de pontos comuns e não comuns da investigação proposta em relação às pesquisas anteriormente apresentadas.

3.2 Este estudo e sua relevância no contexto da literatura revista

Conforme mencionado no item 1.1, o estudo, o ensino e a aprendizagem de funções é de meu interesse desde os tempos em que cursava o Ensino Médio. No papel de pesquisador, iniciei este trabalho com uma conjectura pessoal de que a manipulação de um maior número de exemplares de funções, ampliando o campo de estudo das lineares e quadráticas, cria apreciáveis possibilidades no estudo de suas diversas representações. A revisão da literatura acaba por indicar que a exploração das várias representações de funções no ensino e na aprendizagem desse tema propicia uma larga margem de possibilidades no trabalho com esse conceito, bem como nas formas de abordar tais processos em pesquisa.

Há pesquisas que apresentam dados quantitativos em suas conclusões, geralmente incluindo também, com diferentes graus de intensidade, informações de cunho qualitativo, como em Gómez e Carulla (2001), Schwarz e Dreyfus (1995), Oliveira (1997), Costa (1997), Schwarz e HersHKovitz (1999), O'Callaghan (1998) e Keller e Hirsch (1998), sendo que, nestes dois últimos trabalhos, os dados qualitativos são assumidos como meros complementos dos dados quantitativos. O que não pude verificar em todas essas investigações foram discussões a respeito de possíveis limitações dos testes ou questionários que levam à interpretação dos dados quantitativos dessas próprias pesquisas, o que, inclusive, é corroborado por comentários de Grasse (1997) e Villarreal (1999).

Esta pesquisa se caracteriza, conforme será explicitado no capítulo seguinte, por procedimentos qualitativos de pesquisa, nos quais são priorizadas as análises das falas e das ações dos sujeitos participantes, tal como pôde ser verificado nos trabalhos de Borba (1993, 1994, 1995), Borba e Confrey (1996), Castro et al

(2000), Gomes-Ferreira (1998), Gracias e Borba (1999), Souza (1996), Villarreal (1999) e Zuffi (1999). Seguindo Confrey et al (1991) e Borba (2000, 2001), entendo que a metodologia de uma investigação não se resume à mera descrição de técnicas a serem usadas, mas representa um conjunto de procedimentos coerentes com os pontos de vista **teóricos** subjacentes a todo o processo de pesquisa.

Com exceção feita a alguns pontos do referencial teórico adotado por Villarreal (1999), esta pesquisa se situa num contexto teórico diferente daqueles já abordados, que é a noção de coletivo pensante de Pierre Lévy (1993, 1999), no qual a produção de conhecimentos é realizada por um grupo constituído de atores humanos e não humanos, dentre os quais o computador. Porém, Villarreal (1999) trabalhou junto a estudantes em nível universitário com itens do Cálculo; no caso desta pesquisa, trabalhei com estudantes em início do Ensino Médio, ou seja, alunos que não haviam tido um contato mais prolongado com funções, através de um software gráfico mais simples e com funções diversas.

Entretanto, não é apenas o fato de o ponto de vista teórico desta pesquisa ser diferente das demais que torna essa circunstância um diferencial em relação a elas. Ao analisar os dados com as lentes da noção de coletivos pensantes (LÉVY, 1993) e da metáfora seres-humanos-com-mídias (BORBA, 1999, 2001; BORBA, PENTEADO, 2001), o olhar mostra-se sensivelmente diferente da maioria das pesquisas, que geralmente enfocam, na relação de humanos com as mídias informáticas, a relação aluno-software. A mídia lápis-e-papel poucas vezes é considerada em sua "articulação" com a mídia informática, sendo parte das exceções os trabalhos de Borba (1993, 1994, 1995, 1999), Souza (1996) e Villarreal (1999).

Sendo assim, além da interação aluno-software, esta pesquisa considera também o papel do **outro**. Castro et al (2000) estudam o papel das interações entre os cinco estudantes que trabalharam em sua pesquisa; Villarreal (1999) analisa as interações entre os componentes das duplas participantes e, a exemplo de Borba (1993) e Souza (1996), que trabalharam com um estudante em cada

seqüência de atividades, tece considerações em relação ao papel do pesquisador em suas interações com os mesmos, embora esse fato não tenha se constituído em aspecto central da análise dos dados.

Nesta pesquisa, contudo, a investigação também abrange o papel do pesquisador. **As análises estão focadas nas diversas interações entre os componentes dos grupos constituídos por estudantes, mídias e pesquisador-professor**, e não apenas, nas interações consideradas em dois pólos, como nas relações estudante-software, estudante-estudante ou estudante-pesquisador. Entendo que essa polarização entre seres humanos, técnicas e conhecimento é tradicional nas teorias que enfocam aprendizagem, ao menos na descrição de uma delas (OLIVEIRA, 1997b) ou ao desenvolver a diferenciação entre elas (LA TAILLE et al, 1992; MIZUKAMI, 1986; PALANGANA, 1994).

Embora esta pesquisa não esteja preocupada com resultados mensuráveis de aprendizagem, creio que o referencial teórico adotado pelo pesquisador influencia os resultados finais da investigação. Aqui, os estudantes são observados dentro das dinâmicas dos grupos, interagindo entre si, com o pesquisador e com as mídias disponíveis, as quais condicionam certas produções matemáticas. O pesquisador, no papel de professor, também é analisado, através de suas ações, sua linguagem e seus vieses; nesse sentido, a pesquisa de Zuffi (1999), que envolve professores de Ensino Médio, forneceu importantes elementos para essa análise. Portanto, grupos com estudantes, pesquisador e mídias, entendidos como coletivos pensantes produtores de Matemática, constituem os sujeitos sobre os quais está centrada esta investigação.

Retornando às representações múltiplas de funções, discuto agora outro aspecto que diferencia esta pesquisa daquelas apresentadas na revisão de literatura. Considerando que os usos de novas tecnologias e de diferentes formas de apresentação de um mesmo conceito são incentivados pelos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (2002), acredito que o fato de existirem softwares gráficos gratuitos fortalece a hipótese de que esses possam estar cada vez mais acessíveis a considerável parte dos estudantes brasileiros.

Dessa forma, outro diferencial desta pesquisa em relação às consultadas se refere à **análise da manipulação de funções de diversas famílias ou classificações**, não usuais na grade curricular, por estudantes no início da primeira série do Ensino Médio. Embora considerável parte dos livros didáticos apresente funções de expressões analíticas semelhantes às aquelas que foram estudadas nesta pesquisa, como $y = x^3$, $y = \frac{1}{x}$ e $y = \sqrt{x}$, tais expressões normalmente estão incluídas em questões que se limitam a manipulações algébricas, como a determinação do domínio a partir da resolução de inequações.

Há exercícios que solicitam a determinação do domínio a partir de um dado gráfico, mas são raras ou inexistentes situações que, nesse mesmo tipo de exercício, **relacionem a expressão analítica fornecida com seu gráfico ou com sua representação tabular**. Isso será mais discutido nas conclusões finais, onde tecerei comentários a respeito de alguns livros didáticos, porém é relevante identificar aqui que esse trânsito pelas representações de funções torna-se extremamente facilitado com a mídia informática.

O trabalho com funções lineares e quadráticas, já tradicionais nos livros, no currículo e nas salas de aula, faz parte das atividades propostas neste estudo, mas não se limitam tão somente a essas funções, abrangendo outras, conforme pode ser verificado nas fichas de trabalho constantes no Anexo 1. Embora Schwarz e Dreyfus (1995) tenham utilizado funções diferentes das tradicionais, pode-se observar, na revisão de literatura, que a maior parte das pesquisas envolveu o estudo de funções usualmente tratadas no Ensino Médio ou em cursos iniciais de Cálculo, como quadrática, cúbica, seno, cosseno e modular, e outras envolveram um estudo mais intensivo de um pequeno grupo de algumas dessas. Borba (1993) chegou a abordar a função “maior inteiro” ($y=[x]$), e Souza (1996), em sua proposta didático-pedagógica, inclui algumas funções não tradicionalmente trabalhadas em sala de aula, embora sua pesquisa enfoque a função quadrática.

A título de exemplo, a função prototípica das racionais, dada pela expressão algébrica $y = \frac{1}{x}$, é mencionada em diversas pesquisas e em vários livros didáticos.

Mas como um estudante no início do tratamento com o assunto funções lida com as características dessa função, através de suas representações? Como a mídia informática atuará junto com ele nesse sentido? Tais questões, que não são abordadas nos trabalhos citados anteriormente, estão implícitas na pergunta diretriz desta pesquisa.

Como os softwares gráficos possuem a capacidade de representar as funções nos três modos principais, o software *Graphmatica* participa desta pesquisa a fim de que suas potencialidades em trabalhar com funções de diversas classificações sejam exploradas, para que a interligação das representações flexibilize o conhecimento sobre funções a ser produzido. Busca-se, aqui, esta flexibilização, de forma que, assim como valoriza Souza (1996) e Villarreal (1999), a visualização e a exploração possam contribuir para um melhor entendimento desse conceito complexo.

As representações de funções polinomiais de graus diferentes de 1 e 2, racionais e irracionais, não são habituais a boa parte dos estudantes da primeira série do Ensino Médio no Brasil, pelo menos em se tratando da grade curricular vigente. É justamente neste segmento que esta pesquisa procura trazer suas contribuições: pretende-se que as descrições, as análises e as conclusões desta pesquisa possam auxiliar professores, principalmente do Ensino Médio, e outros pesquisadores a criar possibilidades em suas aulas e/ou pesquisas. E que essas visem, mediante a exploração das múltiplas representações de funções diversas, à produção de um conhecimento mais abrangente a respeito de funções e de suas propriedades.

– CAPÍTULO 4 –

A METODOLOGIA DA PESQUISA

4.1 Opções metodológicas

Neste item, relato como meu histórico de pesquisador está conectado às opções metodológicas assumidas, ilustradas, de maneira geral, pela abordagem qualitativa com experimentos de ensino.

4.1.1 O histórico do pesquisador

A linearidade da mídia escrita muitas vezes oculta as diversas facetas que permeiam o estabelecimento de um conceito. Confrey et al (1991), por exemplo, apontam que “(...) Assim como tantas definições matemáticas, a simplicidade e a elegância de uma definição formal obscurece muito da gênese e da riqueza de um conceito”¹⁷(p. 3).

A mesma idéia estende-se na comparação entre o desenvolvimento de uma pesquisa e a sua apresentação textual, já que escolhas como referencial teórico, procedimentos metodológicos e revisão de literatura não ocorreram, pelo menos neste trabalho, de uma maneira linear, como sua apresentação escrita sugere. Ao lermos uma dissertação apresentada com os moldes lineares condicionados pela mídia escrita, muitos detalhes do processo de “confecção” desse trabalho podem

¹⁷ “[...] *As with so many mathematical definitions, the simplicity and elegance of a formal definition obscures much of the genesis and richness of the concept*”

passar despercebidos; “[...] Quando o projeto é colocado no papel, a sua apresentação linear esconde todas as dificuldades que a sua geração trouxe, e todas as vivências que levaram até ele, ficam ocultas”. (VILLARREAL, 1999, p. 6).

Embora comentado no final do capítulo anterior que a abordagem qualitativa é uma das características desta pesquisa, tal opção não se consolidou sem conflitos e dúvidas por parte do pesquisador, autor deste texto. A opção por uma metodologia se deu num processo mais amplo, que engloba diversos processos associados, os quais se desenvolveram em diferentes “graus de simultaneidade”. São eles: (i) o meu amadurecimento como pesquisador, já mencionado no capítulo 1, bem como a conscientização de meus vieses como tal, (ii) o delineamento do referencial teórico, com as leituras de obras de Lévy (1993, 1999) e Borba (BORBA, 1999; BORBA, PENTEADO, 2001) e (iii) o gradual esclarecimento dos objetivos da pesquisa, que também passou por seu processo de amadurecimento.

Dentre as dúvidas que se tornaram aparentes no projeto de admissão do mestrado, a principal se referia à intenção de trabalhar com todos os estudantes de uma classe, porém seria difícil o registro dos dados: a câmera focalizaria uma dupla ou várias simultaneamente? Escolhida uma, qual seria a dupla escolhida? O ruído poderia atrapalhar as filmagens? E se o tempo de aula se esgotasse antes de terminar os roteiros? O fato de as classes serem compostas por 40 alunos atrapalharia?

Ao cursar a disciplina “Metodologia de Pesquisa Qualitativa”, do programa de pós-graduação em Educação Matemática da Unesp de Rio Claro, pude não só ampliar consideravelmente o que conhecia sobre pesquisa qualitativa, como também perceber que seria difícil realizar uma pesquisa na qual conseguisse avaliar quantitativamente a aprendizagem dos estudantes com os quais iria trabalhar.

O uso de softwares gráficos foi um dos desencadeadores do meu desejo de fazer pesquisa, e atentei várias vezes para o fato de que o primeiro ano do Ensino Médio é a série na qual os alunos estudam funções com maior intensidade. Por

não ministrar aulas em nenhuma classe dessa série, na época em que desenvolvi esta investigação, cheguei a pensar em lidar com as funções trigonométricas, a fim de trabalhar com classes inteiras de segundo ano nas quais lecionava. Mas era justamente o potencial de esses softwares serem capazes de disponibilizar gráficos e tabelas de funções diversas que mais me chamava a atenção, o que me mantinha no forte anseio de trabalhar com alunos da primeira série.

Concomitantemente a esse processo, a referida disciplina, através de suas leituras e reflexões em grupo, auxiliou-me no gradativo esclarecimento dos objetivos de minha pesquisa, cujo processo se estendeu pelas dinâmicas de coletivos pensantes do GPIMEM (Grupo de Informática, Outras Mídias e Educação Matemática), culminando nos objetivos de pesquisa registrados no capítulo 1.

4.1.2 A opção pela abordagem qualitativa: experimentos de ensino

Como conseqüência desse processo, a pergunta norteadora de pesquisa, que também passou por diversas reestruturações¹⁸, consolidou-se de forma que “questão diretriz” e “metodologia” tornaram-se temas intrinsecamente ligados, conforme defende Borba (2000, 2002):

Perguntas que norteiam uma pesquisa e a metodologia escolhida para a mesma andam juntas (...). No sentido mais amplo, adotado por mim, metodologia engloba os procedimentos e a visão do que é conhecimento (BORBA, 2002, p. 139).

Para buscar respostas à pergunta **“como estudantes trabalham com aspectos algébricos, gráficos e numéricos de funções dentro de um coletivo pensante formado por estudantes, mídias e pesquisador?”**, a investigação acaba por enfocar os modos como os estudantes atuaram nas

¹⁸ No **Anexo 2**, apresento um texto no qual descrevo várias fases desta pesquisa através de versões preliminares da pergunta norteadora.

atividades propostas, através de comentários, conclusões e ações frente a questões previamente propostas ou que emergiram durante o desenvolvimento das próprias atividades. Nesses grupos, constituídos de estudantes, pesquisador e mídias, são analisadas **quais** questões matemáticas são levantadas, **como** certos recursos condicionam as respostas obtidas e **como** se dá a interação entre os diversos atores desses grupos.

Nota-se nessa pergunta um caráter aberto, visto que não há uma padronização *a priori* das possíveis respostas, mas sim sua construção a partir da análise dos dados, numa ação sistemática de confrontação entre estes e o referencial teórico descrito no capítulo 2, bem como itens da revisão de literatura. A pergunta conduz as análises nos **processos** pelos quais os estudantes transitaram pelas diversas representações de funções.

Enfocar os processos de determinados fenômenos e chegar a conclusões por meio de análises em profundidade são atributos que caracterizam uma pesquisa no modo qualitativo de investigação, de maneira que a quantificação das respostas obtidas, por exemplo, no número de respostas corretas através de questionários e testes, é menos considerada ou mesmo desconsiderada. Portanto, importam mais os processos que levam os participantes de uma pesquisa a optar por esta ou aquela resposta. Nesse sentido, Denzin e Lincoln (2000) afirmam que

[...] Eles [os pesquisadores qualitativos] buscam respostas a questões que acentuam **como** a experiência social é criada e adquire sentido. Ao contrário, estudos quantitativos enfatizam medida e análise de relações causais entre variáveis, não processos¹⁹ (p.8, grifo dos autores).

Bogdan e Biklen (1994), concordando com esse ponto de vista, apontam que descrições detalhadas são importantes na tarefa de análise desses processos, os quais, nesta pesquisa, referem-se às maneiras como estudantes trabalharam

¹⁹ "They seek answers to questions that stress **how** social experience is created and given meaning. In contrast, quantitative studies emphasize the measurement and analysis of causal relationship between variables, not processes".

com conceitos, propriedades e representações de funções, num ambiente com diversas mídias e com a influência de um pesquisador que desempenha o papel de professor.

E, para que fosse possível proporcionar um estudo aprofundado das interações entre estudantes, pesquisador-professor e mídias diversas, optei por trabalhar fora da sala de aula, com duplas de alunos, de tal forma que a coleta de dados, através de filmagens, pudesse fornecer subsídios para análises mais apuradas dessas interações, isentas das preocupações anteriormente citadas em relação ao trabalho com uma classe inteira.

A opção por duplas se deve a dois motivos: o primeiro se refere ao fato de que interações entre estudantes podem proporcionar discussões diferentes daquelas que existiriam apenas com um aluno e com o pesquisador; a linguagem dos educandos, ao trabalharem em conjunto, pode-se tornar mais rica, não apenas para a coleta de dados, em vista dos objetivos do pesquisador, mas também para possíveis aprendizagens que podem ocorrer durante os trabalhos do grupo.

O segundo motivo que me levou a trabalhar com estudantes em pares está relacionado a um dos objetivos da pesquisa: levar reflexões de suas conclusões para a sala de aula. Em minha prática pedagógica com os softwares gráficos, sempre procurei trabalhar com duplas, o que pude igualmente verificar junto a outros colegas professores. Algumas pesquisas também optaram pelo trabalho com pares (OLIVEIRA, 1997; COSTA, 1997; GOMES-FERREIRA, 1998; VILLARREAL, 1999), ou com grupos maiores (CASTRO et al, 2000). Porém, há ainda a possibilidade de ocorrerem problemas com essa escolha, como observa Villarreal (1999): “o grupo pode ser dominado por uma pessoa e as expressões individuais podem sofrer interferências” (p. 52), o que implica necessidade de uma ação mais habilidosa por parte do pesquisador.

Essa opção por trabalhar com duplas se deu paralelamente ao meu estudo sobre diferentes estratégias metodológicas, realizado durante a disciplina já citada. Dentre essas estratégias, pude observar que as características qualitativas de minha pesquisa “tomavam forma”, de tal maneira que seus aspectos peculiares

possuíam as características centrais de uma estratégia metodológica conhecida como “experimentos de ensino” (*teaching experiments*).

Por volta de 1970, os experimentos de ensino emergiram como uma estratégia para analisar fatos relacionados ao aprendizado. Apesar de variarem quanto à sua duração, o contato próximo e intenso do pesquisador com os estudantes passou a fornecer contribuições mútuas, tanto no aprendizado de conceitos matemáticos pelos alunos, como na geração de dados e suas respectivas análises para pesquisas.

Experimentos de ensino, neste texto ocasionalmente chamados de EE, a fim de facilitar-lhe a leitura, são seqüências de encontros em que um ou alguns estudantes e investigador realizam atividades de pesquisa e de aprendizagem. O segundo, no caso, assume um papel semelhante ao de professor, conforme aponta Cobb (2000): “No experimento de ensino construtivista, o pesquisador atua como professor e geralmente interage com os estudantes, individualmente ou em pequenos grupos²⁰” (p. 311). Nos EE, as atividades normalmente incluem instrumentos de registro, como câmeras de vídeo, gravador e caderno de campo, e métodos de pesquisa, como observação participante, entrevista e fichas de trabalho.

Steffe e Thompson (2000) afirmam que um dos fatores que levaram os EE a emergir como metodologia de pesquisa foi a necessidade de se preencher “uma ampla lacuna entre a prática de pesquisa e a prática de ensino²¹” (p. 270). De acordo com esses autores, como os experimentos não se caracterizam por procedimentos padronizados, o pesquisador deve criar estratégias que visem explorar a matemática dos estudantes (*students’ mathematics*²²) através de uma

²⁰ “*In the constructivist teaching experiment, the researcher acts as teacher and usually interacts with students either one-on-one or in small groups*”

²¹ “[...] *a large chasm existed between the practice of research and the practice of teaching*”.

²² Steffe e Thompson entendem “students’ mathematics” como o conjunto de conhecimentos matemáticos que os estudantes possuem independentemente de nossas interações com eles. Com isso, diferenciam a Matemática que os alunos constroem daquela que o professor julga que aqueles possuem. Os autores chamam os modelos da Matemática do estudante que o professor constrói de “mathematics of students”.

seqüência de atividades construídas a partir de hipóteses em situações de ensino e de aprendizagem.

Segundo esses autores, os EE buscam a compreensão de transformações que a matemática dos alunos sofre em períodos determinados²³, valorizando-se a experimentação como uma de suas características, focando-se menos na **classificação** de respostas dos alunos em “certas” ou “erradas”.

Sustentam ainda que a matemática dos estudantes não pode ser meramente analisada do ponto de vista da matemática do pesquisador, mas deve haver uma negociação entre este e aqueles, para que conhecimentos sejam construídos conjuntamente, envolvendo todos os participantes. Essas características de cooperação entre pesquisador e pesquisados, além de sua relevância nas formas como é desenvolvido, mostram que os EE são adequados à perspectiva qualitativa de investigação e, em particular para esta pesquisa, coerentes com a noção de coletivo pensante descrita anteriormente.

No modo qualitativo, é natural reconhecer e considerar que o pesquisador interaja com os estudantes. Goldenberg (1998) afirma, sobre a postura do pesquisador no campo, que

[...] a melhor maneira de controlar esta interferência [do pesquisador] é tendo consciência de como sua presença afeta o grupo e até que ponto este fato pode ser minimizado ou, inclusive, analisado como dado da pesquisa (p. 55).

O fato de constar o pesquisador na própria pergunta norteadora indica a importância de seu papel em toda a investigação. Portanto, como o foco da pesquisa se encontra na dinâmica de coletivos pensantes, em que o pesquisador é

²³ Steffe e Thompson consideram que os EE devem se constituir em um prazo mínimo de aproximadamente um ano; nesta pesquisa, os encontros ocorreram num período um pouco maior que um mês, mas mesmo assim utilizo a nomenclatura “experimentos de ensino” por entender que é verificada a maior parte das características que estes e outros autores apontam como típicas dessa estratégia metodológica.

um de seus atores, os EE se apresentam como uma estratégia metodológica adequada para possibilitar a análise dessa dinâmica.

4.2 Os participantes da pesquisa

Nesta seção, faço comentários gerais sobre os estudantes participantes, sobre sua escola e uma breve descrição a respeito do software gráfico escolhido para o trabalho de campo.

4.2.1 Os estudantes

A decisão de trabalhar com alunos de primeiro ano do Ensino Médio se deu, primeiramente, pelo fato de ser essa a série em que o assunto funções é trabalhado com maior intensidade. Em decorrência, os alunos iniciaram os EE quando ainda estavam, em suas aulas regulares, no início do tratamento de funções.

Essa opção relaciona-se, assim, com os objetivos da pesquisa: desejando a construção de conhecimentos mais abrangentes a respeito do tema funções, as potencialidades do software gráfico seriam mais bem investigadas com estudantes no início de sua aprendizagem em tal assunto, uma vez que alunos de segundo e terceiro ano já teriam, então, passado por um contato bem mais intenso com o tema.

No período em que se realizou o trabalho de campo (fevereiro a abril de 2002), os estudantes que participaram da pesquisa haviam estudado, na oitava série, apenas funções afins e quadráticas, enquanto que estudantes de segundo e terceiro ano teriam estudado, além daquelas, pelo menos em termos de currículo, funções exponenciais, logarítmicas, modulares e trigonométricas, além de outros conceitos periféricos (funções pares, ímpares, injetoras, sobrejetoras, bijetoras etc).

Esta pesquisa poderia até ter sido feita com estudantes de oitava série, mas essa opção não se tornou viável em razão de certas condições do pesquisador: além de ter afinidade com o Ensino Médio, a época do ano (setembro a novembro, aproximadamente) em que os estudantes daquela série iriam estudar funções era incompatível com o cronograma por mim apresentado ao Programa de Pós Graduação da Unesp.

Os EE se desenvolveram numa escola da rede particular de ensino no município de Itu, SP. Exerço a função de professor de Matemática nesse colégio desde 1993, e há vários anos trabalho com 2ª e 3ª séries do Ensino Médio. Dessa forma, os estudantes participantes da pesquisa não eram meus alunos na época dos experimentos.

Fiz o convite à classe inteira do 1º ano, nos quinze minutos finais da aula de Matemática, no dia 8/02/2002. A professora não só gentilmente cedeu esse tempo de sua aula, como também colaborou com informações para a escolha final dos estudantes que participariam dos EE.

Expliquei aos alunos as características gerais do estudo e o fato de o mesmo incluir filmagens; onze estudantes se ofereceram para participar da pesquisa, e a tarefa de escolher seis dentre eles foi difícil. Escolhi seis alunos para comporem três duplas, entendendo que esse número seria satisfatório para que os dados coletados fossem suficientes para análise.

Primeiramente, agrupei os nomes dos estudantes através do rendimento escolar, mediante as informações da professora, sendo que participaram da pesquisa alunos que apresentavam níveis diferentes de desempenho em Matemática, segundo critérios da escola²⁴. Embora se possa especular que a diversidade com a qual os estudantes se envolvem com a Matemática escolar pode produzir também uma diversidade nos dados, uma coisa não implica necessariamente outra.

²⁴ O colégio trabalha com **menções** A, B, C, D e E (em ordem decrescente de classificação), que não incluem, teoricamente, apenas o rendimento em provas, mas também critérios procedimentais e atitudinais, procurando seguir os Parâmetros Curriculares Nacionais.

A disponibilidade de datas e horários, por parte dos voluntários, foi outro fator decisivo; alguns deles não foram escolhidos porque possuíam várias limitações de horários. Além disso, um deles adoeceu logo após o primeiro encontro, o que me levou a convidar outro aluno para continuar as atividades.

Todos os estudantes que participaram da pesquisa cursaram a 8ª série nessa mesma escola, onde a informática não costuma integrar as aulas no que se refere ao ensino de funções. Tais alunos fizeram, também na 8ª série, cursos referentes a editores de texto e planilhas eletrônicas. As duplas inicialmente escolhidas foram André e Gianluca, Maria Fernanda e Vivian e Felipe e Maria Clara.

André e Gianluca são colegas que possuíam, na época, conceitos baixos ou medianos na disciplina Matemática (de acordo com os critérios de avaliação adotados pela professora e pela escola), e afirmaram que não gostavam muito dessa matéria. Embora os EE tivessem sido previstos para três encontros com cada dupla, sendo um encontro por semana, o trabalho com essa dupla se expandiu para cinco encontros, devido exclusivamente à intensidade com a qual foram tratadas muitas das questões que emergiram nesses encontros.

Maria Fernanda e Vivian, por sua vez, destacam-se nas aulas de Matemática, da qual muito gostam, por realizarem sempre as tarefas e por obterem conceitos A e B como resultados bimestrais. O número de atividades com essa dupla seguiu o previsto, ou seja, foram realizados três encontros.

A execução dos EE com a terceira dupla foi marcada por vários problemas. Felipe e Maria Clara, caracterizados pela professora como alunos esforçados e “brigadores”, iniciaram as atividades após vários imprevistos causados por um vendaval e por outros problemas de ordem técnica. Porém, Felipe participou apenas do primeiro encontro, já que na semana seguinte contraiu hepatite, ficando afastado por várias semanas das aulas e do convívio com os colegas.

Como havia planejado que os estudantes trabalhassem em duplas, convidei um outro estudante, chamado Guilherme, a compor a dupla com Maria Clara. Também classificado como um aluno “brigador” por sua professora, e possuidor de muitos conceitos C em seus boletins bimestrais, Guilherme demonstrou uma

grande facilidade em interligar as representações de funções, bem como em verbalizar suas maneiras de pensar diante dos diversos problemas que lhe foram propostos. Realizei, assim, um encontro com Guilherme somente, a fim de que trabalhasse individualmente nas questões que Maria Clara já havia discutido com Felipe.

Mas os problemas não cessaram aí. Guilherme precisou faltar num dos encontros subseqüentes, e Maria Clara precisou deixar um dos encontros prematuramente, por motivos particulares. Tais imprevistos me levaram a não desenvolver uma análise tão aprofundada desse grupo, da forma como o fiz com as duas primeiras duplas. Dessa maneira, o leitor encontrará, nas descrições dos dados do capítulo 5, episódios construídos junto às duplas André/Gianluca e Maria Fernanda/Vivian; ali detalharei mais características desses participantes.

A relação entre estudantes e pesquisador durante os EE foi amigável e não identifiquei problemas de relacionamento nos grupos de alunos. Embora André e Gianluca sejam colegas, a junção de ambos para compor uma dupla foi opção minha, e não deles, enquanto que no caso de Maria Fernanda e Vivian tive consciência de estar escolhendo amigas bem mais próximas. Felipe e Maria Clara, assim como os pares anteriores, demonstraram entrosamento, mas a dupla Guilherme e Maria Clara pareceu mais inibida, no sentido das interações entre eles não terem sido muito intensas.

Em relação às câmeras, creio que o fato de os estudantes estarem sendo filmados pouco interferiu no modo como os EE foram conduzidos. Elas permaneceram estáticas e o cinegrafista esteve isolado do ambiente onde os experimentos ocorriam, fazendo com que a possível inibição por parte dos estudantes fosse minimizada logo nos primeiros momentos dos encontros.

4.2.2 A escola

Conforme comentei no item anterior, o trabalho de campo se realizou numa escola particular, chamada “Colégio Terras”, no município de Itu, SP, cidade onde

nasci e resido. Trabalho nessa escola desde 1993, e há vários anos venho trabalhando com 2ª e 3ª séries do Ensino Médio.

As direções administrativa e pedagógica do colégio demonstraram receptividade ao pedido de realização da pesquisa e houve extrema colaboração no desenvolvimento da mesma. Não considero que o apoio se deu apenas por possuir laços afetivos com essa instituição, já que nesse colégio cursei o Ensino Médio como bolsista, mas também pelas preocupações educacionais que alimentam o dia-a-dia dessa escola, perceptíveis pelos projetos que sustenta e pelas discussões e eventos que promove.

Nesse mesmo local, que possui dois laboratórios de informática, funciona uma faculdade no período noturno. Por oferecer cursos de Jornalismo e de Publicidade e Propaganda, mantém-se um estúdio de televisão, no qual foram realizados os EE. A escola disponibilizou computador, mesa, quadro (*flipchart*), cadeiras e todo o aparato necessário para as filmagens, bem como a disponibilidade dos serviços do cinegrafista Marcelo, cuja importante dedicação tornou possível a coleta de dados.

4.2.3 O software gráfico

O *Graphmatica* é um software de interface amigável, no sentido de que a familiaridade com o mesmo é rapidamente adquirida. Esse programa, que não requer mais que 800 KB, foi utilizado nesta pesquisa em sua versão *shareware*²⁵ 2.0. Embora sua versão completa não seja gratuita, como outros softwares gráficos, escolhi o *Graphmatica* por acreditar que a familiaridade com ele seja mais rapidamente desenvolvida em relação àqueles, já que houve certa limitação de tempo para o uso do estúdio. Dessa forma, não foi necessária a realização de

²⁵ Um programa é *shareware* se é distribuído livremente, por um tempo determinado e sem o pagamento de licença de uso, mas que para ser utilizado em sua versão comercial completa deve-se pagar uma taxa.

uma sessão de trabalho específica com cada dupla apenas para que conhecessem o software.

Possui apenas uma caixa para digitação, onde pode ser escrita a fórmula de uma função qualquer, iniciando-se sempre com "**y=** ". Tabelas são disponibilizadas a partir do menu *Options*, assim permanecendo simultâneas ao gráfico. As funções digitadas são superpostas na mesma tela, e o botão *clear* retira todos os gráficos desenhados até então. As últimas 25 fórmulas ficam armazenadas, e barras de rolagem podem ser selecionadas num dos menus para se acompanhar o desenho do gráfico em diversas partes do plano cartesiano, além de existir um comando específico para alteração da escala.

Default grid retorna à escala padrão, *Coord cursor* apresenta as coordenadas de um ponto qualquer do plano, enquanto reduções e ampliações podem ser feitas através das opções *Zoom in* e *Zoom out*. A opção *Zoom in* pode ser feita também se selecionando apenas uma parte retangular do plano, aproximando-se a imagem gráfica em intervalos determinados das variáveis.

As figuras 4.1 e 4.2 ilustram essa opção. As opções anteriormente descritas foram as principais utilizadas nos EE, porém maiores informações sobre o software podem ser encontradas em Barufi e Lauro (2001) ou no sítio <http://www8.pair.com/ksoft/> .

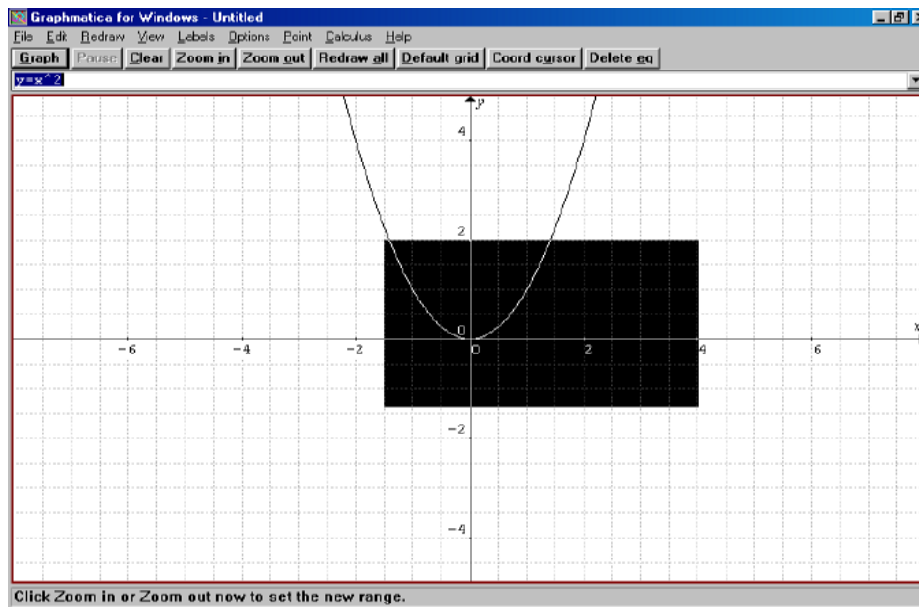


Figura 4.1: A interface do *Graphmatica*, e a seleção de uma região ao se "arrastar" o mouse.

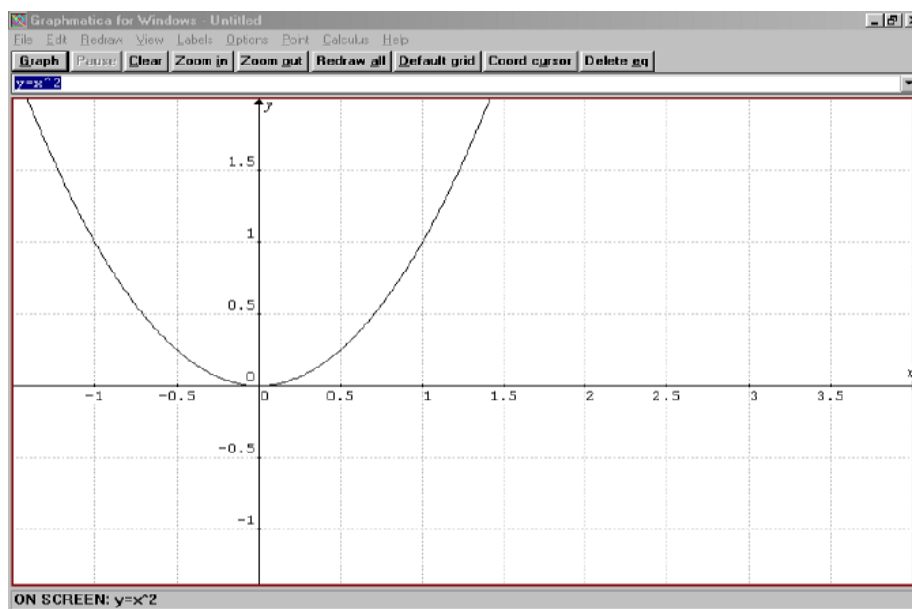


Figura 4.2: O gráfico de $y = x^2$ após o *zoom in* ser aplicado à região indicada na figura 4.1.

4.3 Os procedimentos metodológicos

Neste item, apresentarei as linhas gerais que conduziram os EE desta pesquisa. Descreverei as fichas de trabalho, comentarei sobre o estudo piloto realizado anteriormente à versão final dos EE e, finalizando a seção, descreverei os experimentos de ensino definitivos.

4.3.1 As fichas de trabalho

Referem-se ao material escrito com o encaminhamento das atividades realizadas durante os EE. São os três roteiros através dos quais os estudantes digitam as expressões analíticas de funções sugeridas ou então escolhem outras funções, dependendo do que é pedido ou do que está em discussão.

As fichas de trabalho, que se encontram no anexo 1, apresentam as seguintes características: a primeira envolve estudo de funções lineares, num roteiro de construções gráficas com questões referentes às variações dos parâmetros **a** e **b** da expressão $y = a.x + b$ e o estudo da função racional $y = \frac{1}{x}$. A segunda inclui o estudo de funções quadráticas, com questões referentes às variações dos parâmetros **a**, **b** e **c** da função $y = a.x^2 + b.x + c$, e o estudo da função racional $y = \frac{1}{x^2 + 1}$. Na terceira, predominam funções que tradicionalmente não são trabalhadas na 8ª série do Ensino Fundamental e 1ª série do Ensino Médio: polinomiais prototípicas²⁶ de graus variados, a função irracional $y = \sqrt{x}$ e mais uma função racional.

Os questionamentos tinham um caráter aberto, a fim de que os estudantes ficassem à vontade para discorrer sobre suas observações. No caso das minhas indagações, possuía um roteiro escrito com questões diversas, uma espécie de

²⁶ Funções da forma $y=x^n$, $n \in \mathbb{N}$.

“lembretes” de perguntas que poderiam ou não ser feitas durante os EE; no entanto, boa parte desses questionamentos emergiu da interação com os estudantes e com as mídias. Tais questões envolveram, por exemplo, variações de coeficientes em expressões analíticas, domínio, imagem, raízes, monotonicidade, simetria, noção intuitiva de limites etc.

No capítulo 6, tecerei considerações às fichas de trabalho, no sentido de discutir até que ponto as questões utilizadas viabilizaram o trânsito pelas representações múltiplas de funções, e até que ponto não atingiram esse objetivo, no sentido de certas ações dos grupos estudados terem se mantido no enfoque algébrico.

4.3.2 Estudo piloto

Diversos pilotos das atividades foram feitos com estudantes da 3ª série do Ensino Médio, no segundo semestre de 2001. O fato de tê-los escolhido ocorreu porque, uma vez que estavam prestes a deixar o colégio por ocasião da conclusão do Ensino Médio, não teriam a oportunidade de participar dos experimentos em 2002. É relevante mencionar esse fato porque, na época dos pilotos, havia o interesse de desenvolver a pesquisa com alunos de todas as três séries do Ensino Médio.

Os encontros do estudo piloto foram realizados no laboratório de informática, onde posições de câmeras foram testadas, assim como a viabilidade de se usar gravação em áudio. Não era possível o uso do estúdio nessa época por ser um período (segundo semestre letivo) no qual as faculdades o usam de modo mais intenso. Esses encontros preliminares também serviram para verificar a relevância de algumas questões propostas nas fichas de trabalho que foram primeiramente construídas.

4.3.3 Os experimentos de ensino definitivos

Conforme já explicitado em 4.2.1, os EE desta pesquisa se realizaram junto a pares de estudantes da primeira série do Ensino Médio, constituindo-se em três experimentos, com três duplas participando através de encontros realizados mediante roteiros de atividades (as fichas de trabalho), de modo que os EE com duas dessas duplas se constituíram em dados para análise.

O ambiente de cada experimento de ensino foi caracterizado pela atuação dos estudantes e pesquisador-professor junto às mídias disponíveis. Esteve sempre à disposição dos alunos um computador com o respectivo software *Graphmatica*, as fichas de trabalho que guiaram as atividades junto a esse aplicativo, folhas de papel para cálculos e anotações, lápis, caneta, borracha, régua e mais um representante das mídias informáticas: a calculadora, que ocasionalmente foi utilizada por alguns dos participantes, conforme o leitor poderá constatar na descrição dos dados.

O pesquisador também utilizou, ocasionalmente, essas mídias, mas além delas dispunha de um *flipchart*, uma espécie de lousa branca, usada com pincel atômico. Nas análises, será chamado de “quadro”, e foi utilizado em situações em que o pesquisador explicava algum item teórico aos estudantes ou formalizava uma pergunta a eles.

Os alunos debateram sobre diversas questões matemáticas que surgiram da interação entre eles, o pesquisador e as mídias, geralmente tendo como ponto de partida as perguntas constantes nas fichas de trabalho, as quais previam a construção de gráficos de funções apresentadas em suas expressões analíticas.

Várias perguntas que fiz aos estudantes foram previamente preparadas, mas a maioria dos questionamentos ocorreu numa interação natural com eles e com as mídias, conforme se caracteriza o pensamento em rede de um coletivo pensante. Em boa parte dos momentos em que a reflexão não foi suficiente para solucionar dúvidas ou conflitos, interfeiri para eventuais esclarecimentos.

A descrição do ambiente dos EE se completa com a presença das câmeras filmadoras, as quais aparentemente não causaram inibição por parte dos participantes. Escolhi as filmagens porque, através do estudo piloto, pude observar que gravações em áudio e anotações em forma de diário não eram, por si só, suficientes para as devidas apreciações.

Para posicionar as câmeras, ilustradas na figura 4.3, priorizei dois itens: o registro das ações dos estudantes junto ao software e os gestos que acompanharam explicações, o que em alguns casos foi fundamental para “compor” a manifestação do pensamento dos estudantes. O som de boa qualidade foi conseguido graças aos microfones de lapela que alunos e pesquisador utilizaram.

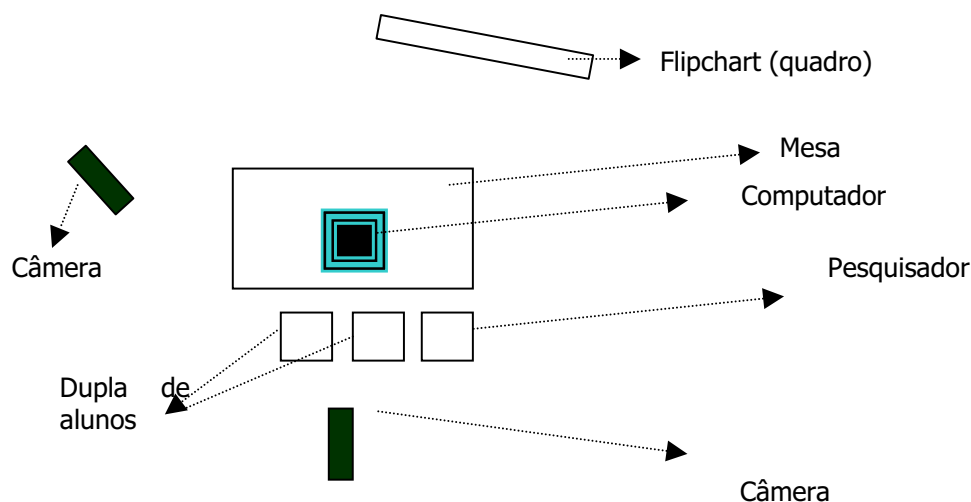


Figura 4.3: disposição física dos atores.

Na figura é possível observar apenas duas câmeras, mas uma terceira esteve acoplada ao computador. O cinegrafista ocasionalmente alternava a posição das imagens durante as gravações, sendo que esse recurso foi idealizado para os momentos em que predominavam as interações com o *Graphmatica* através de alguns dos seus comandos²⁷.

²⁷ Este recurso foi planejado conjuntamente por mim, pelo cinegrafista Marcelo e por Geraldo Lima, membro do GPIMEM que realizou filmagens em diversas pesquisas desse grupo.

Os microfones dos estudantes eram fixos, fazendo com que permanecessem em suas cadeiras, enquanto que o microfone do pesquisador era sem fio, o que permitia seu deslocamento da cadeira até o *flipchart*, quando necessário.

Assim, os registros que foram utilizados no trabalho de campo e utilizados no processo de análise dos dados foram as gravações em vídeo dos encontros, algumas anotações que fiz nos roteiros que tinha à mão e as anotações que os estudantes fizeram nas folhas de papel, as quais estiveram disponíveis durante todos os EE.

4.4 Análise dos dados

Pelo fato de o vídeo ter assumido extrema importância na obtenção dos dados e na análise dos episódios construídos, dedico parte deste item a uma discussão sobre o tema para, em seguida, apontar as estratégias gerais utilizadas na análise dos dados.

4.4.1 Análise de vídeo

Um item importante para a análise dos dados numa pesquisa que envolva filmagens é o modo como as imagens em vídeos são abordadas. Powell et al (2001) apontam, através de uma revisão da literatura sobre o assunto, as vantagens e desvantagens que pesquisadores em Educação Matemática têm observado nas formas de se coletar, observar e interpretar dados em vídeo.

Dentre as vantagens, citam a capacidade de captar procedimentos e interações complexas, as quais compõem cenas que podem ser vistas várias vezes, permitindo uma considerável profundidade na análise das nuances que existem na fala e em ações não verbais.

Alguns autores citados por Powell et al (2001) mencionam que o vídeo possui a propriedade da **densidade**, que se refere ao fato de que, pela cena gravada, é possível analisar fatos e detalhes que ocorrem de maneira simultânea,

mas que freqüentemente o pesquisador, estando no cenário das filmagens, não dá conta de observá-los com maior abrangência. Além disso, essa característica permite que os aspectos audiovisuais façam parte dos registros de uma mesma cena.

Na minha leitura sobre essa característica, entendo que a densidade pode se referir ao aspecto hipertextual dos dados: numa mesma cena, posso, por exemplo, observar ações e estratégias diferentes dos estudantes, ao mesmo tempo em que analiso suas falas, seus gestos e suas atuações com as diversas mídias.

Numa comparação com as notas de campo, Powell et al (2001) citam que estas podem limitar as observações àquilo que o pesquisador consegue observar em tempo real, podendo restringir seu campo de visão, no sentido de desenvolver a análise dos dados a partir de anotações prematuras. No entanto, com o vídeo, as cenas que ocorrem no campo podem ser revistas várias vezes, o que caracteriza mais uma capacidade dessa mídia.

A **permanência** é outro aspecto do vídeo discutido por esses autores. As vantagens de ser possível assistir à mesma cena várias vezes, em “câmera lenta”, avançar e retroceder nas mesmas, são potencializadas por dois fatores: (i) uma mesma pessoa, ao assistir à mesma cena várias vezes, pode observar aspectos teóricos diferentes, podendo optar por um tipo de observação de cada vez; (ii) o vídeo pode ser observado por mais de uma pessoa, o que permite uma visão da mesma cena sob modos diferentes de análise, sob diferentes pontos de vista.

Exemplos para o caso desta pesquisa: numa mesma cena, pude analisar as ações dos estudantes junto ao software, acrescidas de seus gestos e palavras, enquanto que em outro momento pude ver a mesma cena e observar meu desempenho como entrevistador. Além disso, uma mesma cena pôde ser analisada pelos integrantes do GPIMEM, de maneira que outros olhares pudessem localizar aspectos que sozinho não pude constatar.

Dentre as desvantagens, Powell et al (2001) citam as limitações mecânicas que tornam as cenas seletivas, a impossibilidade de discernir o conteúdo subjetivo

da interpretação daquilo que se observa nas gravações, e a incapacidade de tais gravações abrangerem o contexto histórico do cenário e das pessoas que estão sendo filmadas.

Não é intenção, nem dos autores e nem minha, apontar a filmagem como o melhor meio de se obterem dados, já que a escolha de um método depende sobretudo dos objetivos da pesquisa. Porém, acredito que tais situações não são exclusividade do uso do vídeo. Outras técnicas, como diário de campo e gravações em áudio, podem produzir, a meu ver, questões similares quanto àquilo que é anotado ou ouvido, no que se refere a subjetividades, seletividades e limitações da visão histórica dos participantes de uma pesquisa. Acredito, pois, que cada pesquisa tem suas características particulares, possuindo esta ou aquela estratégia metodológica mais adequada para a obtenção de dados.

No caso dos autores citados (POWELL et al, 2001), seus projetos de pesquisa incluem as filmagens em contextos diferentes, como em salas de aulas, entrevistas clínicas e experimentos de ensino. Consideram, assim, que dados em vídeo constituem uma ótima estratégia para se analisar o desenvolvimento da Matemática dos estudantes em determinados períodos, geralmente longos, se comparados aos EE desta pesquisa.

Esses projetos incluem também uma detalhada seqüência de passos a serem seguidos para a análise dos vídeos: (1) descrição do conteúdo do vídeo; (2) identificação de eventos críticos; (3) transcrição; (4) codificação; (5) construção do enredo e (6) construção da narração. Os autores confirmam que tais etapas não são, necessariamente, realizadas dessa maneira linear. No caso desta pesquisa, assistir ao vídeo, incluso no item 1, foi uma tarefa que ocorreu desde o andamento dos EE, mas tão logo se encerraram os mesmos, iniciei o processo de transcrição.

Uma dúvida é comum a respeito desse assunto: a transcrição integral dos diálogos é necessária? Powell et al (2001) e autores por eles citados mostram que as respostas a essa pergunta não são unânimes. Entendo que isso depende das características de cada pesquisa, de seus objetivos e daquilo que se investiga.

O que esses autores ressaltam, no entanto, é que transcrições, as quais devem incluir registros de gestos e de outras manifestações além da fala, são teoricamente guiadas, selecionadas consciente ou inconscientemente por aquele que transcreve. Isso, ao invés de representar certo relativismo em relação às opções metodológicas que são tomadas pelo pesquisador, indicam a este que as transcrições devem ter o maior grau de riqueza possível, como falas completas e ações mencionadas, para que o leitor possa construir conclusões a partir de sua própria perspectiva, como se “pudesse ver o vídeo através das transcrições”.

Seguindo tais características, transcrevi aproximadamente 80% dos diálogos e ações gravados, num longo processo que durou aproximadamente três meses; as cenas correspondentes ao que não foi transcrito não possuíram, já em meu primeiro exame dos vídeos, sinais de que trariam dados relevantes à pesquisa.

Nas transcrições, foi possível identificar falas e ações que me chamavam a atenção; criei então uma simbologia própria para identificar tais falas. Entretanto, nem todas se tornaram tão significativas, assim como algumas foram vistas como importantes somente nas análises finais. Esse procedimento parece semelhante àqueles que os autores chamam de “identificação de eventos críticos”, porém, mais uma vez, aponto que a construção de tais eventos se deu desde as transcrições até a construção dos episódios.

Concordando com Powell et al (2001), entendo que as transcrições fazem parte do conjunto de dados, mas não por si só; ou seja, os vídeos, as transcrições e as anotações escritas dos estudantes constituem os dados desta pesquisa. Esses autores, entre outros por eles citados, indicam que as gravações em vídeos devem ser analisadas junto a outras fontes, como, por exemplo, registros escritos, observações etnográficas e entrevistas. Postulam que esse procedimento favorece a confiabilidade nos resultados da análise, sendo coerentes com a noção de triangulação dos dados, abordada por Goldenberg (1998), que se refere à coordenação entre diversas fontes no processo de análise.

Powell et al (2001) ainda lembram que os registros em vídeos não proporcionam dados neutros, isentos de **interpretação**: não são apenas as

possibilidades e limitações das câmeras que limitam e moldam os dados, mas também, e principalmente, as perspectivas teóricas do pesquisador, atuantes de forma consciente ou inconsciente.

4.4.2 Como foi realizada a análise dos dados

Na leitura que fiz do abrangente trabalho de Powell et al (2001) sobre a discussão do uso do vídeo, parece que um aspecto não foi abordado. Em minha pesquisa, o papel das transcrições foi duplamente importante: primeiramente, os **registros escritos**, derivados das transcrições, foram usados para acompanhar simultaneamente a análise de várias cenas em vídeo, ou mesmo procedendo à sua leitura sem o uso do audiovisual televisivo; esse procedimento é mencionado por Powell et al (2001).

Mas, para mim, o **ato de transcrever** foi de extrema relevância, uma vez que, através desse procedimento, pude identificar muitas minúcias de fala e ações que se tornaram dados importantes. Ou seja, o ato de transcrever, que não me pareceu ser discutido por esses autores, dimensionou-se como um fator de destaque na característica qualitativa de “mergulhar profundamente” nos dados, em busca de respostas às questões de investigação.

Dessa forma, a metáfora seres-humanos-com-mídias de Borba (BORBA, 1999, 2002; BORBA, PENTEADO, 2001), utilizada nesta pesquisa para investigar como estudantes e pesquisador pensam com as mídias, também é aplicada no aprendizado que o autor deste texto desenvolveu ao longo da pesquisa.

As “cenas de bastidores” desta pesquisa, que puderam ser verificadas muitas vezes, assim se caracterizam: um coletivo pensante constituído pelo pesquisador Francisco, computador, anotações em papel dos estudantes e televisão com respectivo aparelho de vídeo foi o sujeito de boa parte das análises dos dados.

Ou seja, enquanto o vídeo reproduzia cenas das atividades dos coletivos pensantes dos EE, constituídos por estudantes, mídias e pesquisador, **outro**

coletivo pensante desenvolvia a análise dos dados da maneira descrita. Dessa forma, o **ato de transcrever** é por mim entendido como **pensar com o vídeo**, articulando diversas mídias (computador, vídeo, lápis-e-papel) num pensamento hipertextual, condicionado por elas. Acredito portanto que esse procedimento, nesta pesquisa, foi potencialmente mais importante do que o próprio uso posterior das transcrições.

Pelo fato de todo o processo de análise dos dados também ter esse aspecto hipertextual, torna-se difícil descrever linearmente os passos seguidos, mas a tentativa faz-se necessária.

Pode-se dizer que a primeira parte da análise ainda ocorrera no campo, porém num estágio bastante incipiente: decorridos os primeiros encontros com as duplas, assisti os vídeos logo em seguida para observar os detalhes diversos das atividades realizadas, principalmente para melhorar minha intervenção e verificar se alguma das questões deveria ser retomada, como o caso da questão 5 da segunda ficha de trabalho, a qual se repetiu na terceira ficha, já que considerei, naquele momento, que o estudo da função racional $y = \frac{1}{x^2 + 1}$ poderia ter sido melhor encaminhado. A intenção desse procedimento não era, na verdade, iniciar a análise, porém, ao assistir aos vídeos, algumas anotações foram realizadas.

Contudo, a grande parte da análise dos dados se deu, preponderantemente, após o término dos EE, iniciando-se com as transcrições dos vídeos. Estas incluem falas, gestos e expressões que considerei significativos nas situações em que estudantes e pesquisador buscavam resolver as questões. As mídias que constituíam tais ações também são ocasionalmente mencionadas, bem como as opções delas advindas, como nos momentos em que o estudante usa o *zoom in*, por exemplo.

Realizar a transcrição correspondeu à segunda fase da análise dos dados, já que, mais do que assistir ao vídeo e digitar falas, o ato de transcrever representa um exame minucioso das mesmas, integradas às ações dos atores humanos, conforme detalhei anteriormente. Muitos trechos das transcrições possuem realces

indicativos em que, intuitivamente, julguei haver fatos relevantes para análise. Talvez esse procedimento seja semelhante ao mencionado por Powell et al (2001), o qual se denomina “identificação de eventos críticos”.

No processo da análise dos dados, é comum, sob uma perspectiva qualitativa, alguns eventos serem vistos como mais interessantes que outros. Nesse sentido, Goldenberg (1998) afirma que

[...] É irreal supor que se pode ver, descrever e descobrir a relevância teórica de **tudo**. Na verdade, o pesquisador acaba se concentrando em alguns problemas específicos que lhe parecem de maior importância (p.51, grifo da autora).

Os critérios que levam o pesquisador a identificar certos eventos, em detrimento de outros, são subjetivos, porém relacionados ao referencial teórico e à busca de respostas à pergunta norteadora, o que acaba por justificar os realces que fiz ao longo das transcrições.

A subjetividade é uma característica dos estudos qualitativos, o que, neste paradigma, não é confundido com falta de credibilidade, e “objetividade” não significa necessariamente “rigor” nos procedimentos de pesquisa e na análise dos dados. A subjetividade não é um mal a ser evitado, porém, deve-se tentar possuir um certo grau de controle sobre tal aspecto, a fim de que a análise dos dados não produza um objeto inventado, e sim construído, como reforça Goldenberg (1998, p. 45).

O modo como se construíram os dados que ora são apresentados neste texto atravessaram um processo semelhante a uma lapidação, que “transforma uma pedra numa bela escultura”. Nessa metáfora, os dados “brutos” se referem aos vídeos e às transcrições, acompanhadas das anotações que os estudantes fizeram durante os EE, enquanto que os episódios construídos, apresentados neste texto, representam a escultura.

E o processo decorrente entre a pedra e a escultura? As transcrições foram parceladas naquilo que denominei “cenas”: divisões dos EE em partes menores, pequenas seqüências ou resumos em que agrupei as atividades que ocorreram ao longo dos encontros, e devem ser entendidas como a terceira fase da análise aqui apresentada. Na construção de tais cenas, realizadas junto às transcrições e aos vídeos, minha voz de pesquisador, no papel de narrador, se entrelaçou às falas e ações dos atores humanos, mas procurava relatar as histórias que assistia através do vídeo sem, no entanto, descrever teoricamente minhas interpretações. Ou seja, “via” aspectos de minhas referências teóricas nas cenas, mas não as escrevia em suas descrições.

Terminada essa fase, passei a reler as cenas e a assistir a todas elas novamente através dos vídeos, confrontando-as com a literatura revisada, bem como procurando identificar itens do referencial teórico. Alguns desses itens já haviam sido observados bem antes dessa fase, como, por exemplo, a influência do caráter prototípico das funções afins e quadráticas nas concepções matemáticas dos estudantes. Mas a maioria dos itens levantados para análise, alguns dos quais já intuitivamente percebidos, tornaram-se claros a partir desse processo. Dando início a uma busca mais direta a respostas para a pergunta de pesquisa, descartando algumas cenas e interligando outras, passei a construir **episódios**, aqui entendidos como conjuntos de descrições de cenas, cujas narrativas são constituídas pela voz do pesquisador.

A construção dos episódios, que indica ser a quarta fase deste processo, foi marcada por dois exercícios simultâneos. O primeiro referiu-se à preocupação estética do texto, que deve possuir um nível de clareza suficiente para que o leitor possa “ver” as cenas audiovisuais, a fim de que construa suas próprias observações. O segundo referiu-se ao papel de investigador: a construção dos episódios também revela um olhar para os dados de maneira mais crítica, um olhar feito através daquilo que Villarreal (1999) chama de “óculos bibliográficos”, pelos quais o pesquisador reconstrói os dados munido de instrumentos teóricos para interpretá-los e analisá-los de maneira menos intuitiva e mais objetiva.

Goldenberg (1998) defende que a objetividade não é plenamente realizável no paradigma qualitativo, mas afirma que o pesquisador deve manter um esforço para controlar a subjetividade. Mantendo perspectiva semelhante, Alves-Mazzotti (1998) defende que esse esforço produz bons frutos à pesquisa quando o pesquisador sujeita esta à crítica de seus pares. Assim, ser um integrante do GPIMEM (Grupo de Pesquisa em Informática, Outras Mídias e Educação Matemática) propiciou a socialização de alguns dados que foram construídos ao longo do processo da pesquisa como um todo, de forma que a diversidade das críticas, dinamizadoras de um pensamento coletivo, alimentava continuamente este processo. Alves-Mazzotti (1998) afirma que “[...] por ser intersubjetivo, esse processo permite identificar os vieses do pesquisador, decorrentes de sua experiência individual, sua inserção social e de sua história” (p. 145).

Simultaneamente, ao longo do processo de todas essas fases anteriores, os temas e as idéias constantes na revisão bibliográfica e no referencial teórico foram se tornando mais claros, de maneira que aquilo que se estudava em outros autores passou a fazer mais sentido; sendo assim, as interligações não se configuravam mais apenas como “intuitivas”.

A partir de então, com o potencial objetivo das referências teóricas articuladas aos dados, desenvolvi a quinta e última fase da análise dos mesmos, que se trata da identificação e discussão dos temas estudados, tanto na revisão de literatura, quanto no referencial teórico adotado. Há autores, como Bogdan e Biklen (1994), que discutem esse processo usando nomenclaturas como “códigos”, “unidades” e “categorias”. Aparentemente, as categorias de análise que esses autores desenvolveram têm o mesmo significado para aquilo que chamei, neste mesmo parágrafo, de “temas”. Optei, afinal, por continuar a usar essa expressão, a fim de evitar possíveis distorções de interpretação.

Essas “idas e vindas” do pesquisador pelos dados e pelos aspectos teóricos da pesquisa propiciaram a constituição do texto e das idéias que o leitor pode aqui verificar linearmente, embora construído “reticularmente”. Dessa forma, não houve, durante os EE, preocupação em verificar hipóteses ou categorias de análise

predeterminadas, o que pode inclusive ser verificado no estilo das perguntas das fichas de trabalho, as quais têm um caráter aberto. Segundo Bogdan e Biklen (1994), os pesquisadores qualitativos

não recolhem dados ou provas com o objetivo de confirmar ou infirmar [revogar] hipóteses construídas previamente; ao invés disso, as abstrações são construídas à medida que os dados particulares que foram recolhidos se vão agrupando (p. 50).

Ao finalizar este capítulo, resumo, abaixo, as fases de análise, de forma semelhante às realizadas por Powell et al (2001), Villarreal (1999), Souza (1996) e Borba (1993):

1. Assisti aos vídeos durante os experimentos de ensino, observando os alunos e o meu desempenho como pesquisador;
2. Encerrados os EE, desenvolvi a transcrição. Períodos em que foi evidente a ausência de indícios de possibilidades à pergunta norteadora não foram transcritos (aproximadamente 20% do tempo total das fitas). Ainda nessa fase, algumas cenas foram assistidas e discutidas em reuniões do GPIMEM;
3. Construção de cenas, a partir das transcrições e dos vídeos; são divisões pequenas, variáveis em duração, e não possuem considerações teóricas. Estas foram, ocasionalmente, escritas separadamente, em outro documento.
4. Construção de episódios, interligando algumas cenas e descartando outras.
5. Estudo intensivo dos episódios, articulando suas cenas a temas constantes na revisão de literatura e no referencial teórico.

Os temas que foram entrelaçados aos dados, no processo de análise dos mesmos, serão descritos no capítulo 6. Em seguida, serão apresentados os episódios construídos no processo acima delineado.

– CAPÍTULO 5 –

OS COLETIVOS PENSANTES: DESCRIÇÃO DOS DADOS

Estrutura do capítulo e detalhes para a leitura das transcrições

Este capítulo é dedicado à descrição de situações em que pude identificar elementos importantes para a busca de possíveis respostas à pergunta norteadora desta pesquisa, bem como a noções constantes tanto no referencial teórico apresentado no capítulo 2 quanto na revisão de literatura do capítulo 3.

As seções maiores, 5.1 e 5.2, referem-se às dinâmicas dos dois grupos analisados, respectivamente, com cada dupla de estudantes que participou da investigação. Nessas seções, antes de apresentar os episódios, faço uma breve descrição dos estudantes, segundo o ponto de vista da professora dos mesmos, a qual me referirei, durante o texto, como “professora”, e também da minha maneira de vê-los, após a realização dos EE e a construção dos episódios. Em cada episódio dos itens 5.1 e 5.2, apresento, além de sua própria descrição, o porquê de sua construção e, ao final, um resumo do mesmo.

Para a leitura das transcrições é necessário que algumas questões sejam esclarecidas: os diálogos foram mantidos com as características da transcrição, contendo possíveis erros gramaticais e de concordância, dentre outros, a fim de evitar problemas com distorções nas falas dos atores humanos.

Estes são identificados pelas iniciais em negrito. Por exemplo, na seção 5.1, que apresenta episódios com a dupla André e Gianluca, **G** indica Gianluca, **A** indica André e **F** se refere, ao longo das descrições, ao pesquisador e professor

Francisco, como ator dos coletivos pensantes analisados nos episódios, e não como o autor deste texto. Conforme já explicitado, aquele que entrevista os estudantes se trata de um professor em processo de transformação em pesquisador, o que faz com que o uso de qualquer um dos dois termos para se referir a ele seja incompleto. Embora a expressão mais adequada seja a de “pesquisador-professor”, utilizarei, também como medida estética, o termo **professor** para me referir a Francisco, por acreditar que, à época dos EE, o entrevistador estava mais próximo desse papel. Ao longo deste capítulo, refiro-me a ele na terceira pessoa, a fim de facilitar a análise de seu papel e distingui-lo do papel de autor deste texto.

Mais alguns detalhes são necessários. Textos inseridos nos colchetes se referem a:

(a) Falas intercaladas de uma pessoa, proferidas durante a fala de outra; aparecem com a respectiva inicial do falante, com letras em fonte igual ao restante do texto, sem itálico ou negrito, ou seja, em fonte igual à das transcrições. Usei esse recurso quando a fala de uma segunda pessoa não foi suficiente para interromper o falante. Exemplo:

A: Duas vezes um, y é igual a dois. [**G:** não se o....] Ei! acho que eu achei alguma coisa!

(b) Ações não verbais aparecem em itálico, destaque pelo qual também é mencionado, ocasionalmente, a mídia ou o comando do software que está sendo usado. Exemplos:

G: 2 e... 2. Aproxima lá... [*André utiliza o zoom out*] Olha o 2 e 2 aqui, mais para cima, sobe um pouco [*André utiliza a barra de rolagem*] Olha o 2 e 2 aqui.

(c) Outros indicativos: [??] significa que ocorreu uma fala não possível de se identificar e [...] indica que um trecho dos diálogos foi suprimido.

Certas partes de algumas transcrições aparecem sublinhadas. Nesse caso, é o pesquisador, autor do texto, que chama a atenção do leitor para uma fala que considera importante para posterior análise. Quanto às falas, há alguns itens que podem contribuir na leitura de suas transcrições, a fim de diminuir a distância entre essa leitura e a riqueza de detalhes que a cena audiovisual oferece:

- (a) Nas frases que terminam com um ponto de interrogação “?”, a questão foi verbalmente formulada, de modo que o tom de voz é claro em representar uma pergunta; no caso do uso desse símbolo seguido de reticências, qual seja, o símbolo “?...”, a entonação não torna explícita a interrogação, mas a sugere, à medida que seu interlocutor normalmente entende como sendo “a sua vez de falar alguma coisa”. Esse recurso foi muito utilizado pelo professor de modo involuntário, e seu uso aparenta ser uma maneira de amenizar aquilo que, de início, pareceria um interrogatório, o que, além de cansativo, poderia levar os estudantes a se preocupar mais do que o necessário com o acerto nas respostas a essas perguntas.
- (b) As reticências também têm um papel importante: aparecendo no fim da fala, indicam que, embora a pessoa aparentasse que iria falar mais, possivelmente resolveu “continuar seu pensamento em silêncio”. Ocorrendo durante a fala, indica pequenas pausas da pessoa enquanto se expressa.
- (c) As expressões “hum hum” e “ahã” indicam concordância ou afirmação; já no caso de “hum” ou “hummmm”, significa que o falante está refletindo sobre ou duvidando de algo, geralmente daquilo que foi falado antes.
- (d) Uma barra vertical “|” é utilizada para interrupções, seja de alguém interrompendo bruscamente a fala do outro, seja de um falante que muda repentinamente “o rumo” de sua fala, como no exemplo em que uma pessoa reinicia sua frase ao se atrapalhar um pouco para organizar aquilo que parece querer expressar.
- (e) Palavras ou expressões que aparecem em negrito indicam que o falante provocou, durante sua fala, certa ênfase que frisasse as mesmas. Exemplo:

F: Porém agora você vai falar que números você **pode** colocar no lugar de
X

5.1 André e Gianluca: construtores de “teoremas”

Uma descrição dos estudantes

Os estudantes André e Gianluca, de acordo com sua professora, possuíam certas dificuldades em Matemática, de forma que seus respectivos desempenhos, durante a 8ª série, oscilavam entre os conceitos C e D, com agravante para Gianluca, que ocasionalmente se submeteu a processos de recuperação.

Nessas informações prévias, também havia o registro de que este estudante demonstrava certa timidez perante alguns desafios, durante as aulas, mas freqüentemente se arriscava a vencê-los: “Ele arrisca, nem que for pra te criar uma regra nova”, comentou sua professora. Posteriormente, ele me confessou não estudar Matemática com freqüência, de forma que “participar do projeto do Chico²⁸” fora uma maneira de estudar Matemática.

A professora dos alunos demonstrou ainda certa insegurança ao tecer as características de André, devido ao fato de ele ter ingressado no colégio apenas na 8ª série. Relatou, no entanto, que o fato de ter sido submetido ao processo de recuperação final, naquela época, teria lhe provocado um sentimento de decepção. Não sendo um aluno de muitas palavras, André estava com “olhos e ouvidos colados” a tudo o que a professora estava trabalhando naquele começo de ano, segundo me afirmou a mesma.

Em minha visão posterior à realização dos EE, pude confirmar o fato de que vários conceitos que foram apresentados pelos estudantes se mostravam diferentes ou conflitantes com a Matemática dos matemáticos e com a Matemática do professor que os entrevistou.

²⁸ Apelido do professor e pesquisador Francisco.

André e Gianluca, por sua vez, envolveram-se ativamente durante os encontros, os quais, embora previstos para serem três, distribuíram-se em número de cinco. Pude então conhecer um André falante, com uma linguagem admirável e facilidade para expressar o que pensava, inclusive quando esse pensamento se refletia em dúvidas. Quanto a Gianluca, não pude verificar qualquer atitude tímida de sua parte: demonstrou completa espontaneidade para o levantamento de hipóteses, “criação de regras” e para expressar comentários diversos. Ambos se mostraram, a meu ver, garotos extrovertidos, não se intimidando ao falar o que pensavam ou ao levantar conjecturas; não pareciam, conseqüentemente, ter medo de errar.

Muitas vezes interagiram entre si junto às mídias disponíveis, e várias vezes convocavam o professor para participar da conversa. Em relação à informática, ambos afirmaram ter aprendido a trabalhar um pouco com Excel e também digitar textos em Word, além de freqüentemente acessarem a Internet.

Os subsídios para a escolha dos estudantes foram as entrevistas com a professora, conforme comentado no capítulo 4, além de conversas informais com a mesma e com a coordenadora do Ensino Fundamental do colégio. Não realizei testes para selecioná-los, nem propus atividades prévias para identificar o que conheciam sobre funções ou Matemática em geral, optando por obter acesso a muitos indícios da “Matemática dos estudantes” durante os EE.

Procurarei apresentá-la com muitos detalhes ao longo das descrições dos episódios, a fim de que o leitor não se restrinja apenas ao meu ponto de vista dessa Matemática, mas também possa construir suas próprias observações.

A primeira ficha de trabalho foi utilizada no primeiro encontro, enquanto que as outras duas fichas nortearam as atividades em dois encontros para cada uma.

5.1.1 Episódio 1: Monotonicidade e as primeiras atuações do professor no trabalho de campo

Por que foi construído

Considero este breve episódio importante, na medida em que ilustra o começo de todos os EE, no qual se pode notar, de maneira mais intensa, a oscilação de Francisco entre o papel de pesquisador e o de professor.

Aqui, essa oscilação manifesta-se através da forma como abordou a diferença entre as concepções sobre monotonicidade levantadas pelos estudantes e aquelas pertencentes à sua Matemática. Além disso, monotonicidade é um conceito que esteve presente em todos os encontros dessa dupla, daí julgar importante a análise de como ele se apresentou na linguagem dos estudantes e na linguagem do professor, desde o primeiro momento em que ocorreram.

O episódio

Nas questões iniciais da primeira ficha de trabalho, durante as variações do parâmetro **a**, da expressão $y=a.x+b$, alguns conceitos foram levantados pelo grupo ao atribuírem a esse coeficiente os valores 1, 2, 6 e -1 (figura 5.1.1). Afirmaram que as funções são crescentes para valores positivos de **a** e decrescentes para valores negativos desse parâmetro.

As expressões “crescente” e “decrescente” apareceram no vocabulário dos estudantes após várias tentativas de verbalizar aquilo que observavam visualmente. Usaram expressões como “ela fica invertida em relação à original”, comparando as posições das retas obtidas através de $y=x-2$ e $y=-x-2$, e “inclinada à direita” e “inclinada à esquerda”, que, acompanhadas de gestos, indicaram que são sinônimos para o que se conhece como crescente e decrescente, respectivamente, na Matemática escolar.

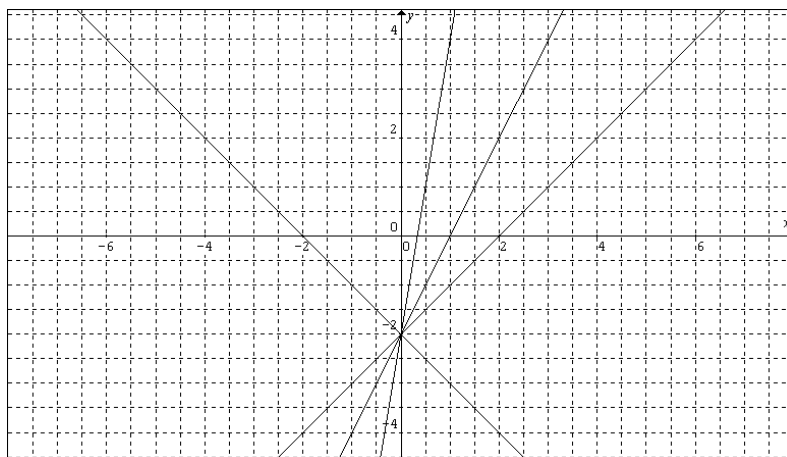


Figura 5.1.1: Gráficos obtidos a partir de valores de **a** iguais a 1, 2, 6 e -1.

André chegou a utilizar expressões como “a reta $y=x-2$ é crescente em x e decrescente em y ”. Ele relacionou as palavras “crescente e decrescente” a valores respectivamente “positivo e negativo” das intersecções da referida reta com os eixos coordenados. Analisando a figura, André mostrava que a “reta era crescente em x ” porque seu ponto de intersecção com esse eixo assume valor de x positivo, no caso, $(2,0)$, enquanto que a “reta era decrescente em y ” porque “cortava” esse eixo num valor negativo, no caso, no ponto $(0,-2)$.

Os estudantes identificaram, no início desse primeiro encontro, aspectos gráficos referentes à variação dos parâmetros **a** e **b**: identificaram **b**, no caso -2 , como o valor no eixo y , o qual as retas interceptam, e identificaram o sinal de **a** como sendo o mesmo sinal do valor no eixo x onde as retas o interceptam. Ou seja, o fato de as retas obtidas através de $y=x-2$, $y=2x-2$ e $y=6x-2$ interceptarem a parte positiva do eixo x estaria, para eles, diretamente relacionado ao fato do parâmetro **a** de todas ser positivo, no caso, 1, 2 e 6, respectivamente.

O professor, muito preocupado em desfazer a última conclusão, sugeriu que esboçassem gráficos a partir das expressões $y = x+4$ e $y = -x+4$ (figura 5.1.2).

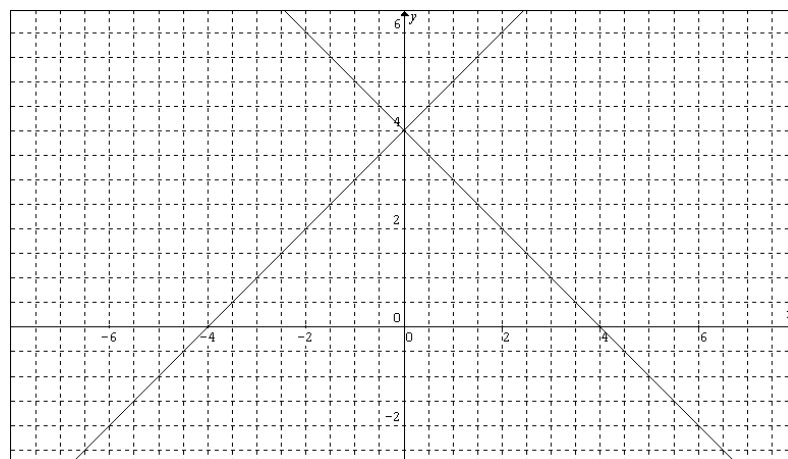


Figura 5.1.2: Gráficos obtidos a partir de $y = x+4$ e $y = -x+4$.

Ao observarem os gráficos dessas funções, as idéias anteriores se tornaram conflitantes em relação àquilo que André havia afirmado e também ao que estudaram em aula; ou seja, se **a** é positivo, então a função é crescente, e se **a** é negativo, então a função é decrescente. O conflito existiu, porque a reta obtida através de $y = -x + 4$ possui $a < 0$ e intercepta o eixo x num valor positivo, no caso, $x = 4$. Gianluca retoma as expressões “crescente” e “decrescente” com elementos estudados nas aulas regulares: as funções de expressões analíticas $y = x - 2$, $y = 2x - 2$ e $y = 6x - 2$ são crescentes “porque o **a** é positivo”. A função dada por $y = -x - 2$ é decrescente “porque o **a** é negativo”.

O professor, porém, não estava gostando da forma como os alunos faziam uso do que foi aprendido em aula, pois notava que aquilo que poderia definir uma função qualquer como crescente ou decrescente, possivelmente não estaria sendo abordado nessa conclusão. Dando seqüência às discussões, os estudantes tomaram caminhos bem diferentes.

Gianluca afirmou que havia criado um “jeito” de saber quando a função era crescente ou decrescente: **a parte inferior** dos símbolos “<” e “>” (“a perna de baixo do maior e do menor”, na linguagem desse aluno) lhe indicava a classificação de uma função. Os passos a serem seguidos foram:

$a > 0 \Rightarrow$ a parte inferior do símbolo ">" é $\swarrow \Rightarrow$ reta crescente;
 $a < 0 \Rightarrow$ a parte inferior do símbolo "<" é $\searrow \Rightarrow$ reta decrescente.

André, por sua vez, propôs algo estritamente gráfico, através de uma explicação em que usou muitos gestos junto ao plano cartesiano. Tais gestos "esboçaram" uma reta no ar, começando no terceiro quadrante e terminando no primeiro, para indicar uma "reta crescente", ou partindo do segundo para o quarto quadrante, mostrando uma "reta decrescente":

Se a reta está apontando para a direita $\Rightarrow$ reta crescente;
 Se a reta está apontando para a esquerda $\Rightarrow$ reta decrescente.

O professor resolveu, então, formalizar, à sua maneira, o conceito de função crescente/decrescente: utilizou-se, no quadro, do gráfico de uma função (5.1.3a) sobre a qual ambos afirmavam se tratar de uma função crescente. Questionando os alunos, chegou à afirmação de que "uma função é crescente se ao você aumentar o x, o y aumenta".

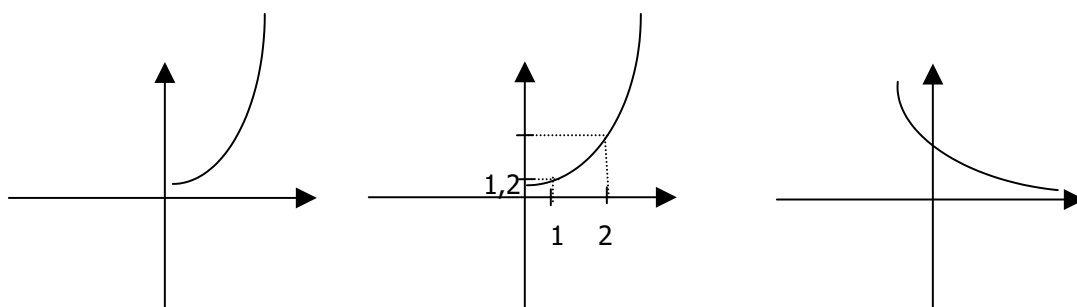


Figura 5.1.3a, 5.1.3b e 5.1.3c: Desenhos do professor no quadro.

O primeiro gráfico da figura 5.1.3a é utilizado para ilustrar tal fato, através de valores atribuídos às variáveis x e y (figura 5.1.3b).

A: [...] Você diria que isso aqui [figura 5.1.3a] isso aqui é uma reta?

AG: Não

F: Você diria que ela é crescente ou decrescente?

A: Eu diria que ela é crescente

F: Crescente?

G: Eu também diria que é crescente.

F: Pois é. Função é crescente quando se você aumenta o x, o y aumenta.

[...] Vamos congelar uma função e vamos pensar nela. Veja só, você consegue imaginar onde que está o correspondente desse valor de x aqui ó? Vamos supor que seja um [*marcando o valor 1 no eixo horizontal*]. Só pra exemplificar. Ele vai ter um correspondente ali [*no eixo vertical*], certo? Se eu pegar um número maior do que um, o correspondente dele lá daquele lado, vamos supor que aqui seja 1,2 [**G:** ahã]. Se eu pegar, por exemplo, o 2 agora [*no eixo x*], o y dele vai ser maior do que 1,2 ou menor?

G: Maior

F: Maior. Certeza?

G: Absoluta

“Definir” uma função decrescente não foi tarefa fácil para Gianluca. O professor usou, na seqüência, novamente uma figura no quadro (figura 5.1.3c):

G: Então decrescente x diminui y diminui

F: Não.

G: Então o x aumenta e o y diminui.

F: Isso.....se...olha só

G: Nessa daqui [*gesticula sobre o gráfico de $y=-x+4$*] que a gente tava vendo agora, o y estava diminuindo e o x estava aumentando; então ela é decrescente. [*o professor demonstra aprovação*]

A: [*um pouco surpreso*] É?

F: É.

A: Então espera um pouquinho. Aqui a gente tem o nosso eixo y [*olhando e apontando para o desenho do Graphmatica*]... aqui, nosso eixo x. Os números y estão diminuindo e o x está aumentando. **Certo.** [*refaz o mesmo caminho seguido por Gianluca*]

Resumo do episódio e uma análise inicial

A questão matemática aqui trabalhada se refere ao conceito de função crescente/decrescente. Os estudantes apresentaram suas próprias definições para tal noção, André estabelecendo uma concepção visual ("é crescente se aponta para a direita"), e Gianluca, uma relação entre os símbolos "<" e ">" e o esboço da reta.

Os alunos apresentaram ainda duas associações: o valor do parâmetro **b**, da expressão $y=ax+b$, referiu-se ao ponto no qual a reta intercepta o eixo y, enquanto que o sinal do parâmetro **a** foi identificado por eles como sendo o mesmo sinal do valor referente ao ponto onde a mesma reta intercepta o eixo x, ou seja, o mesmo sinal da raiz da função, embora o conceito de raiz ainda não tivesse surgido. Essa última conclusão foi prontamente questionada pelo professor.

Esse episódio, em particular, e os primeiros encontros com todas as duplas, no geral, mostraram um **professor** Francisco um pouco ansioso na forma de conduzir interações entre sua Matemática e a dos estudantes. Há exemplos destacados em algumas de suas falas sublinhadas, mas o que mais chama a atenção é a forma como forneceu, aos alunos, exemplos gráficos que derrubassem suas conjecturas iniciais. Poderia ter perguntado se existia uma reta que passasse por valores positivos nos eixos x e y, de tal forma que eles próprios descobrissem (ou tentassem descobrir) que, para isso, seria necessário uma expressão analítica com $a < 0$, portanto, uma função decrescente.

O episódio se encerra com mais opções para o entendimento de monotonicidade: Gianluca levanta o fato de que uma função é crescente para $a > 0$ e decrescente para $a < 0$. O professor preocupou-se com a forma pela qual essa

conclusão fora colocada, temendo que a mesma estivesse sendo aplicada a qualquer classificação de função, o que realmente veio a se confirmar em outros episódios. Afirmou, então, que “uma função é crescente se você aumenta o x , o y aumenta”, levando os estudantes a definirem uma função decrescente em moldes parecidos (“quando aumenta x , diminui y ”), utilizando gráficos disponibilizados pelo *Graphmatica*.

Em termos de análise da Matemática dos estudantes, a monotonicidade ainda será retomada em outros episódios; a atuação do professor, no entanto, merece alguns comentários. Conforme mencionado, suas interferências foram, com o desenvolvimento dos EE, tornando-se menos diretivas, mas, para que esse processo seja visualizável pelo leitor, é necessário apresentar as suas características desde os primeiros encontros. Alguns aspectos podem, aqui, ser levantados para discussão: 1) No capítulo 4, a importância do vídeo foi abordada em sua participação numa pesquisa. Estendendo a análise, como se pode avaliar a importância dessa mídia para o professor Francisco, no sentido da observação de seu próprio desempenho e sua própria linguagem? 2) As interferências desse professor, que também era pesquisador na época das atividades, podem ser discutidas abordando uma provável distância entre aquilo que se costuma chamar de teoria e o que se chama de prática, no caso, a pedagógica. A dicotomia “teoria X prática” estaria intimamente relacionada a uma possível dicotomia “pesquisador X professor”?

5.1.2 Episódio 2: A função racional, representações múltiplas, domínio de funções e o drama do zero.

Por que foi construído

Os estudantes protagonizaram inúmeras discussões matemáticas, caracterizando um pensamento coletivo num formato reticular, visto que os debates tomaram inúmeros caminhos. As mídias informáticas condicionaram esse

“movimento” não linear, enquanto o grupo trabalhava sobre uma função diferente daquelas que já haviam estudado.

O episódio

Ao esboçarem o gráfico da função de expressão $y = \frac{1}{x}$ (figura 5.1.4), ainda no primeiro encontro, ambos se surpreenderam com a figura. Gianluca garantiu que “esse a gente não estudou ainda...”, e perguntou ao professor se o gráfico “cortará o eixo x”. Antes que a discussão se encaminhasse para essa questão, André relatou que não lembrava o que seriam domínio, contra-domínio e imagem, conforme pedia a questão da ficha de trabalho.

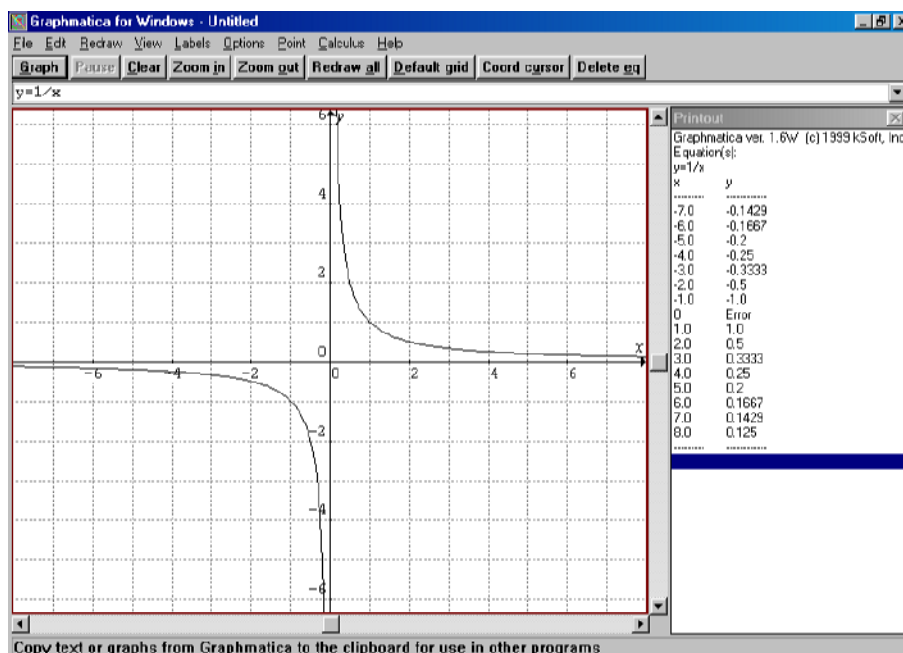


Figura 5.1.4: Gráfico e tabela obtidos a partir de $y=1/x$

O professor então lhes perguntou o que lembravam sobre tais assuntos e, de acordo com as respostas que iam fornecendo, encaminhou a revisão de termos e conceitos: “diagrama de flechas”, “domínio”, “contradomínio”, “imagem” e “relação” foram alguns dos termos colocados e, a pedido de André, que havia

associado essa pergunta ao diagrama de flechas, o professor fez uma explicação, no quadro, em que primeiramente mostrou uma relação qualquer entre elementos dos dois conjuntos (figura 5.1.5a); depois associou a mesma figura à representação algébrica, através de exemplos numéricos (figura 5.1.5b). O diálogo a seguir ocorreu enquanto o professor construía a figura 5.1.5b:

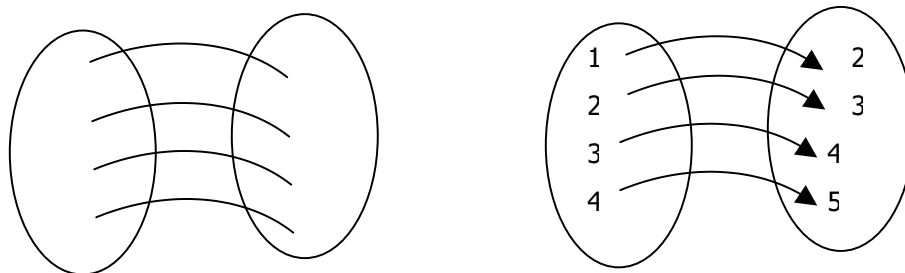


Figura 5.1.5a e 5.1.5b: Diagramas do professor no quadro

F: Eu vou inventar aqui [...] vou inventar uma regrinha: o 1 eu vou relacionar com o 2. **[G:** hum] o 2 eu vou relacionar com o 3. O 3 eu vou relacionar com o 4. E agora vocês vão adivinhar o último: o 4 eu vou relacionar com quem?

AG: Cinco!

F: Que regra que eu inventei aqui?

G: Na que, no conjunto domínio, você vai ligar um número no contra domínio, com um número maior... **Um** [*mostrando a unidade com o dedo indicador*] número só maior no conjunto contra domínio.

Nesse momento, o professor aproveitou para tornar o exemplo mais algébrico. Perguntou aos estudantes se um valor do domínio é x , qual seria o valor correspondente no contra domínio. Sobre esse valor, afirmaram sucessivamente que “é um”, “depende do valor de x ”, e, ainda, que “é y ”.

F: Tudo bem [*sorrindo*]... mas esse y não é um y qualquer.

A: Não.

F: Qual a relação entre um y para x.

A: De um. De um pra um.

G: Um mais zero.

F: [*escrevendo, no quadro, $y = 1 + \dots$*] De um mais...

G: x

A: x

F: x [*em seguida escreve o x*]. [...] E tá certo, é o y mesmo!

Que vale $x + 1$.

No começo dessa conversa, Gianluca falou que não entendia “o que esse negócio de diagrama, que tinha estudado na 8ª série, tinha a ver com função”. André, compartilhando da dúvida, retomou essa discussão, a qual gerou um interessante diálogo sobre as representações múltiplas de funções.

A: Você vê, eu fazia é... eu fazia aquele “trequinho” lá de x e y [??]...aí eu fazia por exemplo....o...diagrama de flechas, o x e o y do outro lado, aí colocava os números de um lado e outros [números] de outro [*ao que seus gestos e palavras indicam, refere-se à representação tabular*], e fazia o diagrama, entendeu?... eu acho que essa é a... a... relação porque o... é quase como se fosse um gráfico, entendeu? Só que em vez de um gráfico a gente tem um diagrama de flechas.

G: E pode ser representado no gráfico o diagrama de flechas também. Pode ser representado no diagrama de flechas, no gráfico e no... [*André está tentando lembrar-se de algo*] escrevendo normalmente.

F: Mas, então, do que nós estamos falando? Nós estamos falando da mesma coisa, só que tem várias maneiras de |

G: Representar elas. Tem 3 maneiras de representar.

F: Isso! E quais são as 3?

G: Diagrama de flechas [*André acena positivamente com a cabeça*], o gráfico [**A:** o gráfico] e tem outro de [**A:** eu não lembro...]

Ambos se atrapalham um pouco para falar, mas acabaram conseguindo mostrar ao professor um exemplo de conjunto de pares ordenados: Gianluca criou o conjunto $\{(1,2),(3,4)\}$ para dizer ao professor que esse formato era o terceiro exemplo de representação de função que conhecia. O professor, usando o *Graphmatica*, comentou que a tabela também é uma representação, e pergunta, apontando a expressão $y=x+1$, se ela também é uma representação:

A: É.

G: Mas aí você não está representando assim...

A: Mais ou menos assim... você tem que calcular pra montar o gráfico ou... ou... o domínio, sei lá.

G: ... Nessa daí que você mostrou [*diagramas do quadro*], você está representando um só. Porque tipo você colocou x no conjunto domínio e no... $x+1$ no contra domínio. A regra que você inventou é que o domínio tinha que ter uma unidade a menos do contra-domínio.

F: Certo.

G: Você coloca aí só a regra que você inventou...

F: Tá.

G: E não todas as ligações.

Nesse momento, o professor observou que, em outras representações, também pode haver limitações ou dificuldades. Tanto André quanto Gianluca demonstraram dar mais importância aos aspectos visuais, embora a conclusão deste se oriente para a equivalência das representações:

G: A menos limitada é a do... eu acho que é a do gráfico, porque você pode traçar 3 ou 4 mas... se você continuar, você pode traçar outras também, mas ...

no diagrama de flechas, você pode colocar mais 5, 6, 7, 8, pode ligar também. Acho que todos são iguais, se você for pensar em reais, infinitos, assim.... todos | não tem nenhuma que seja melhor que a outra para representar. Todos são iguais. Só o jeito de escrever é diferente.

Nesse ponto, o professor retomou com os estudantes a questão em que haviam parado antes dessas considerações sobre as representações: o significado de “domínio de uma função”. Ele frisou tratar-se de um conjunto, o qual pode ser visto ou imaginado em mais de uma representação. Em alguns momentos, inclusive dos dois encontros seguintes, “domínio” e “raiz” foram tomados como sinônimos por Gianluca, o que facilmente se verifica por suas falas e pelos seus gestos diante da tela do computador.

Quando Gianluca, usando a barra de rolagem, tentou retomar o debate, no sentido de investigar se gráfico “cortaria” ou não o eixo x, André se surpreendeu devido ao modo com o qual a tabela acompanhava as variações gráficas: os números da tabela se alteram conforme se altera a janela gráfica, permanecendo coerentes com os valores disponibilizados no gráfico (figura 5.1.6).

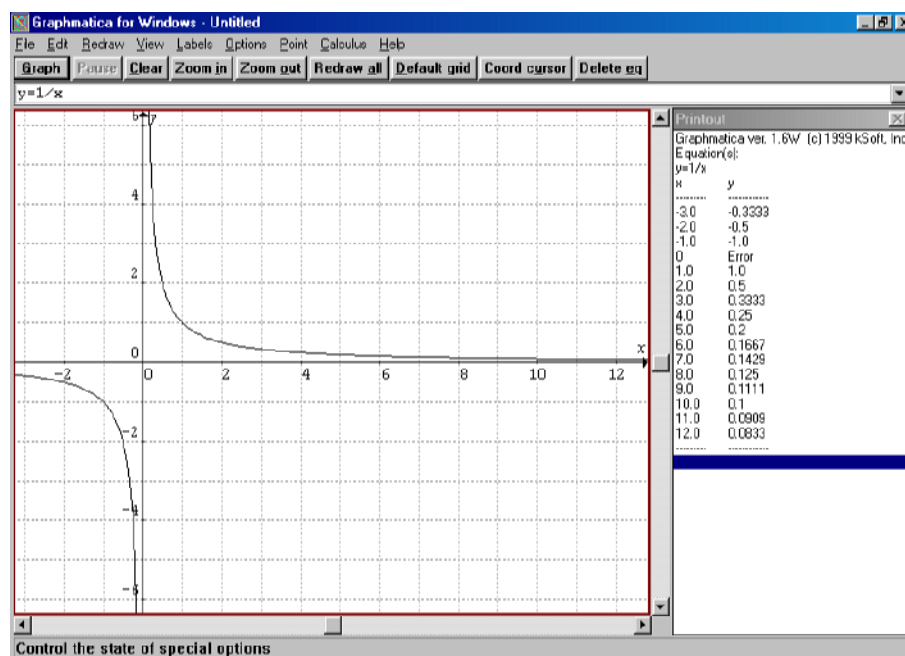


Figura 5.1.6: As três representações da função racional, no *Graphmatica*

O professor queria discutir o fenômeno “encosta ou não encosta”, juntamente com a discussão sobre o domínio, enquanto Gianluca estava usando a barra de rolagem, de forma que observava a aproximação do gráfico em relação ao eixo x:

G: O domínio é x.

A: Eu diria que o domínio é x, também.

F: O domínio é sempre x.

A: Sempre x.

F: Porém, agora você vai falar que números você **pode** colocar no lugar de x.

A: Então, todos esses daqui [?] [*mostrando a tabela*]

F: Tá, aí você tem nessa tabela alguns exemplos.

Aqui, a discussão sobre a tabela foi interrompida, pois a grande questão para Gianluca era saber se o gráfico “corta” ou não o eixo x. Observou valores crescentes de x, no gráfico, através da barra de rolagem, enquanto André observava novamente o que acontecia com a tabela.

André afirmou então que o gráfico não cortaria o eixo. Em momentos que antecederam a essa cena, enquanto Gianluca tecia comentários ao professor sobre o diagrama de flechas, André rapidamente produziu uma imagem semelhante à da figura 5.1.7, sem que o professor tivesse percebido, o que pode ter influenciado sua afirmação anterior.

Continuando, ele narrou a digitação que fez: $y = 365/x$, não disponibilizado, aparentemente, na tela do *Graphmatica*. André logo percebeu que, pelo fato de ter colocado um número muito alto, o gráfico não constava nos intervalos usuais para valores de x e de y no plano cartesiano. Assim, diz a Gianluca que qualquer número que ele “coloque lá o gráfico não vai encostar na reta”; a que Gianluca tece uma proposta:

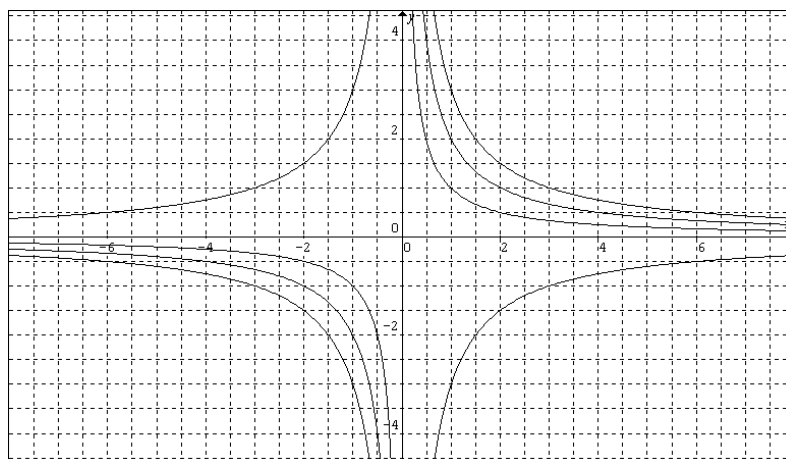


Figura 5.1.7: Gráficos obtidos por André, sem que o professor tivesse notado, enquanto estava no quadro falando sobre os diagramas. É bastante provável que tenha digitado as expressões $y=1/x$, $y=2/x$, $y=3/x$, $y=-3/x$

G: E se colocar o x em cima em vez de embaixo? Na... na fração. Aí encosta, não encosta?

F: Vamos ver...

A: 3 sobre... [*digitando*]

G: Não, x sobre 3.

A: Tá. Agora encosta.

F: $x/3$...

G: Olha... aí já não é o...

F: $x/3$ deu o quê?

A: $x/3$ deu esse treco aqui [*põe o dedo sobre a reta*].

F: Esse treco é uma figura geométrica conhecida ou não [*figura 5.1.8*]?

G: Uma reta.

A: Uma reta.

F: Uma reta...

A: Mas é o seguinte|

F: Mas uma reta não é da forma $ax + b$?

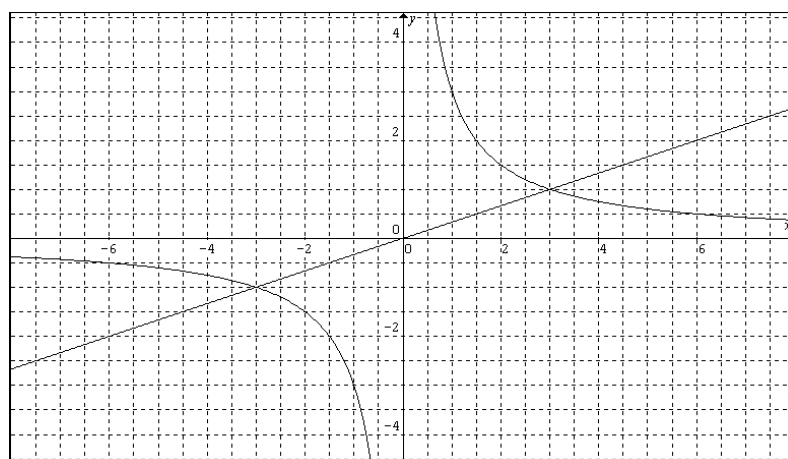


Figura 5.1.8: Gráficos obtidos a partir de $y = 3/x$ e $y = x/3$.

Infelizmente, a interferência do professor não foi proveitosa no sentido de incentivar o debate, principalmente no que diz respeito ao trânsito pelas representações. Como resgatou a forma algébrica nesse momento, a polêmica ateu-se a essa representação. Com muita dificuldade os estudantes identificaram os valores $1/3$ e 0 , respectivamente, para os parâmetros **a** e **b**.

A conversa entre os alunos tornou-se mais entusiasmada, graças ao uso que André fez do *zoom in* seguido da barra de rolagem.

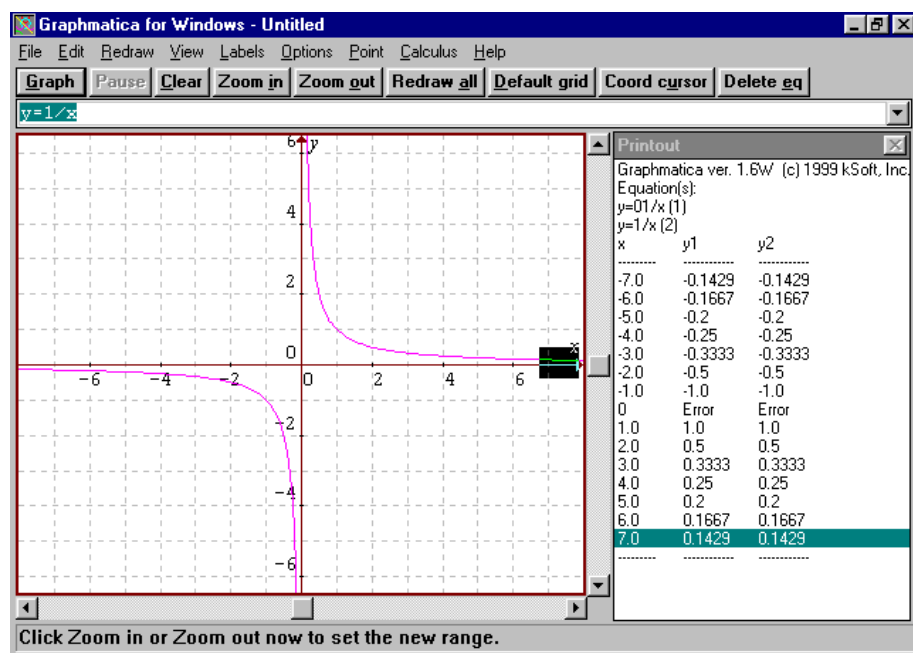


Figura 5.1.9: André utiliza o *zoom in* arrastando um retângulo.

A: Vamos ver aqui. Opa! Vamos pegar só esta partezinha aqui, vamos ver se toca [figura 5.1.9].

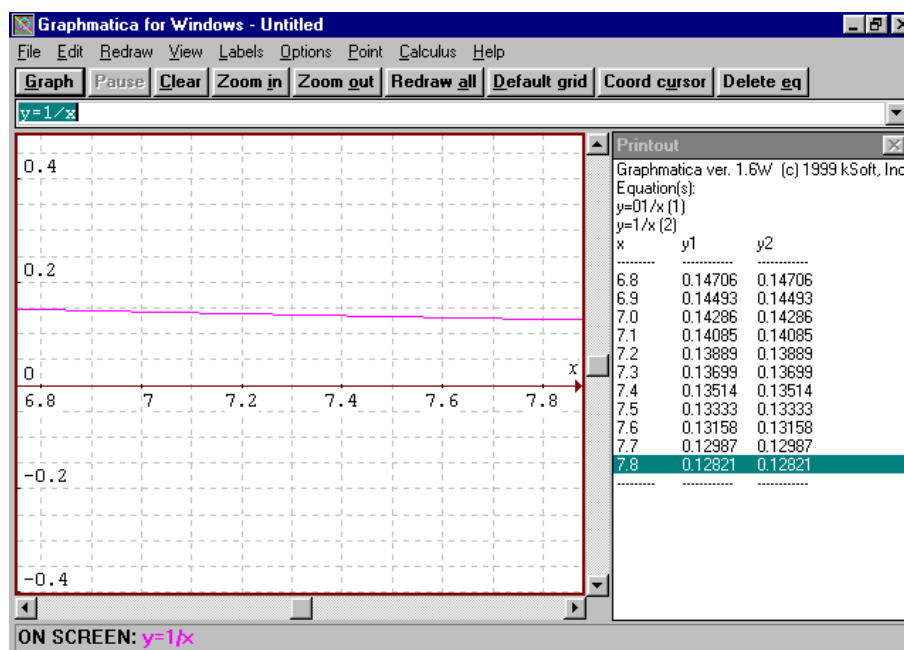


Figura 5.1.10: A figura obtida após o *zoom in*.

A: Arrá! Não toca. [ao observarem a imagem referente à figura 5.1.10]

G: Vai, vem mais então... porque, olha, tá descendo, uma hora vai tocar [André está usando a barra de rolagem] não, acho que não.

A: Olha, tá vendo que os espaços estão ficando maiores [refere-se à distância entre o gráfico e o eixo x, que aumenta a cada zoom in aplicado, conforme indicam as figuras 5.1.9 e 5.1.10]. Daqui a pouco eles vão se juntando [refere-se à posição entre o gráfico e o eixo x, enquanto usa a barra de rolagem], vão ficar completamente paralelos. Olha o espaço [após outro zoom].

G: Faz assim ó...

A: Calma, calma, vamos bem devagar... vamos avançar mais um pouquinho aqui para frente.

G: Pára. Olha, tá abaixando, vai tocar... [André continua usando a barra de rolagem (figura 5.1.11)]

A: [sorri] Não vai tocar, eu tô falando. Vai juntar todos os tracinhos, ó tá juntando.

G: É...aí não pode parar porque ela não é.. não termina, é infinita, mas.... Ela pode juntar sim, ficar na mesma linha, não pode?

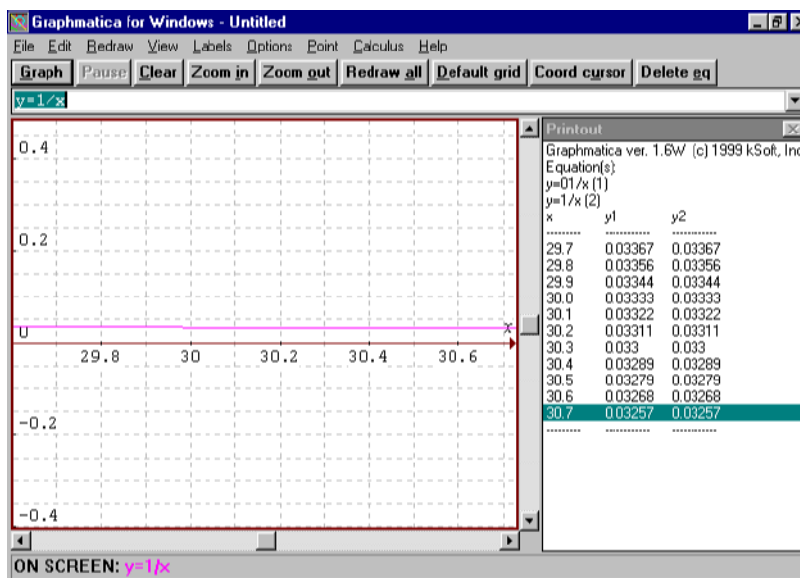


Figura 5.1.11: A barra de rolagem é usada por André.

André avançou até o valor 140 para x , e a interação com o *Graphmatica* permaneceu por mais alguns minutos, de forma que Gianluca começou a concordar com André. Antes de retornarem à pergunta sobre o domínio da função, Gianluca fez um comentário comparando a imagem que a mídia informática oferecia com uma possível representação semelhante com lápis-e-papel:

G: Mas não vai dar pra representar no gráfico isso...

A: É claro, 150 cm. Vai pegar a sala inteira.

G: É, 1,5 m de gráfico.

A: [??] ... Já pensou ... chegar até 1 Km de gráfico?

O próprio André se encarregou de retomar o roteiro, pressionando *default grid* e retornando à tela inicial, novamente observando a tabela: "O domínio será 7.0, 6.0, 5.0, pontinhos, -7.0". Os "pontinhos" são as reticências que representariam todos os números inteiros de 7 a -7. O professor confirmou, provisoriamente, a validade da resposta de André, já que ele não percebeu que,

para $x=0$, a tabela exibia a palavra "error". A partir disso, teceu comentários, auxiliado pelos estudantes, sobre os infinitos números reais que estão em jogo, embora não aparecessem na tabela.

O professor utilizou o desenho, no quadro, de uma reta. Fixou o intervalo real $[0,1]$ para instigar os estudantes a imaginar o número de pontos que existiriam nesse intervalo, tanto no eixo x como na reta desenhada. (figura 5.1.12)

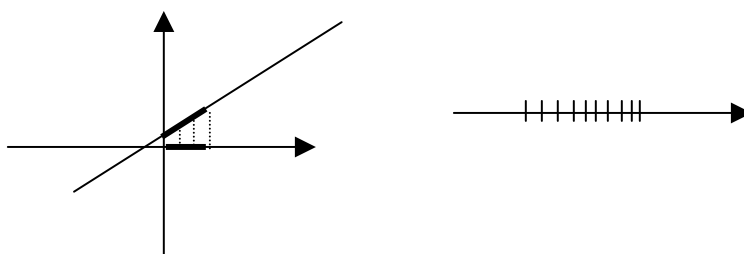


Figura 5.1.12: Desenhos do professor no quadro para discutir a relação entre números e pontos da reta; a discussão teve origem através da tabela do *Graphmatica*

Com isso, André associou esse raciocínio às imagens oferecidas por um microscópio: ao aumentar a potência da lente, uma ou mais casas decimais aumentariam na precisão desse aparelho. E, voltando à pergunta sobre o domínio da função, concluiu:

A: Então poderia escrever assim ó. Qual o conjunto domínio? Eu colocaria assim olha...

G: Todos.

A: Domínio é igual **R**. **R**... aquele... [*faz um gesto no ar indicando a letra R*] conjunto real.

O professor então confirmou graficamente, usando o desenho da figura 5.1.12, que, para a reta, o domínio poderia ser o conjunto dos números reais. Quando voltaram à figura do *Graphmatica* (figura 5.1.9), incentivou a busca do domínio pela representação gráfica, sendo que ambos trouxeram à discussão mais itens matemáticos:

F: Nesse gráfico [*no Graphmatica*], o... O gráfico faz isso também? Ele existe na direção de todos os valores de x ?

G: Esse gráfico com ângulo, não. Porque ele também tem infinitos números no domínio, só que a gente não consegue achar... O domínio é x , a gente não consegue achar o contra domínio que seria o **b**, certo?... Contra domínio é o **b** ou é o y ?

A: y

F: Que **b** que você tá falando?

G: Ah, não... então esquece.

F: Acho que você|

A: O **b** é um sobre um

G: Ahã

A: Não, quer dizer, o **a** é um sobre um... o **b** não tem, é zero... o x é x mesmo.

Apesar de ambos procurarem uma associação dos parâmetros **a** e **b**, da expressão analítica da função afim, à expressão $y=1/x$, o professor explicou-lhes que as letras x e y representam variáveis, e utilizou a tabela para ilustrar essa variabilidade. André então passou a observar os valores na tabela e a localizá-los no plano cartesiano, mas Gianluca não estava entendendo o que André fazia. Percebendo o fato, o professor pediu a André que mostrasse a idéia a seu amigo. Com isso, ficaram entretidos por alguns minutos na tarefa de olhar os valores da tabela e buscar os pontos no plano cartesiano, usando as ferramentas do software *zoom in* e a barra de rolagem. Na seqüência, Gianluca retoma a monotonicidade:

G: Cada vez que você aumenta o eixo x , você diminui o eixo y . Por isso que ela fica torta assim [*faz um gesto imitando a curva no primeiro quadrante*].

O professor, demonstrando ter gostado do comentário, convidou-os a analisar apenas o primeiro quadrante (naquele momento).

F: Vamos olhar só no primeiro quadrante: essa função é crescente ou decrescente?

A: É cresc... ãh... hum. [*faz gestos e murmura algo, tentando lembrar seu modo particular de classificar uma função em crescente ou decrescente*]

G: O a ... Nessa função não tem a e b né?

F: Não tem a e b .

Nesse instante, ambos estavam impelidos a classificar a função em crescente/decrescente sem a justificativa “porque o a é positivo/negativo”. André chegou a dizer, acompanhado de vários gestos, que a função era crescente e decrescente. Somente após o professor retomar a definição de função crescente/decrescente, discutida anteriormente, é que decidiram por classificar o desenho do primeiro quadrante como representação de uma função decrescente.

Porém, essa questão os incomodava. André retomou as discussões sobre esse assunto, realizadas no início do encontro, levando o grupo a gastar certo tempo no debate sobre monotonicidade de funções. Como Gianluca buscou novamente a sua maneira particular de classificar a função (“pela perna de baixo do sinal $<$ ou $>$ ”), o professor utilizou um novo desenho, feito no quadro (figura 5.1.13), convidando os alunos a observarem o gráfico numa perspectiva dinâmica.

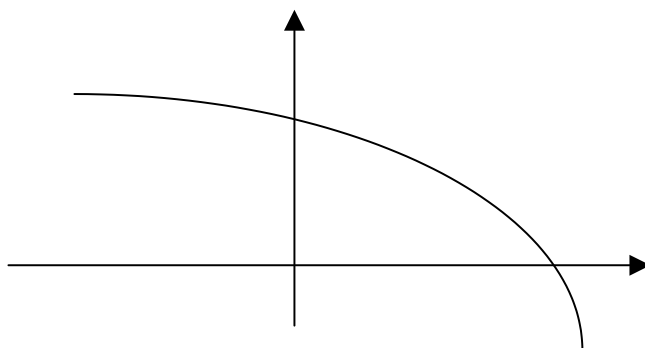


Figura 5.1.13: Desenho feito no quadro, pelo professor, a fim de “desafiar” o modo particular de Gianluca para a classificação de funções quanto à monotonicidade.

F: Então, se a gente olhar, do menor para maior, [...] da esquerda para direita... [Este comentário do professor é acompanhado de gestos que envolvem, simultaneamente, valores nos eixos x e y]

G: Porque ali ó| porque o lado direito do x é positivo é 1, 2, 3, 4, 5, 6 [gesto com o braço, apontando o desenho do quadro, indicando "o x aumentando"]. Está aumentando, então é crescente. Porque o x vai diminuindo e o... **Aliás**, o y vai diminuindo e o x vai aumentando. [...] x aumenta e y diminui.

A: x aumenta e y diminui. Aí é decrescente.

Imediatamente, André retomou sua classificação gráfica:

A: Mas se eu pudesse eu nem precisaria usar esses pontos e tudo mais, esses números no gráfico. Só olhando pra [gestos] pra reta, dá pra dizer se é crescente ou decrescente.

F: Eu também acho.

A: Porque, olha só, o formato dela, ela tá caindo... Você vê que, no eixo [seus gestos e sua fala completa indicam que se refere ao eixo y], ela está se posicionando de um lugar maior para um lugar menor [com a mão faz um movimento do segundo para o quarto quadrante]. E no eixo x , ela tá vindo de um lugar menor para um lugar maior. E no eixo y , de um lugar maior para um lugar menor. Então é eu diria que ela é decrescente.

Em seguida, André ampliou a idéia, dizendo, juntamente a gestos diante da tela, que essa função "poderia se tornar crescente". Com o dedo indicador, mostrou ao professor como ficaria, no segundo quadrante, o desenho simétrico ao anterior, em relação ao eixo y , obtido através da expressão $y=1/x$. Em seguida, digitou o sinal negativo, obtendo a expressão $y=-1/x$ e o gráfico da figura 5.1.14:

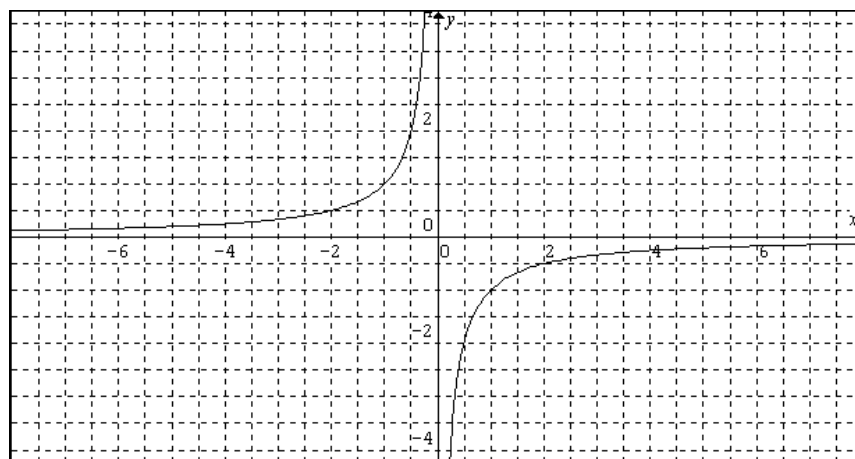


Figura 5.1.14: Gráfico obtido por André após digitar $y=-1/x$.

Retornaram mais uma vez à questão do domínio da função de expressão analítica $y=1/x$. A tentativa do professor em levar os estudantes a identificar graficamente o domínio da função parecia ter fracassado e, embora a tabela do *Graphmatica* ainda estivesse disponibilizada e mostrasse a expressão “error” junto ao ponto (0,0), ambos ainda afirmavam que o domínio “eram os reais”.

Ficou fácil, dessa forma, ao professor, retomar a representação algébrica, perguntando aos alunos se “poderia ser colocado qualquer número no lugar de x”. Vários valores foram levantados; ambos usaram a calculadora para efetuar diversas operações, inclusive algumas que constavam na tabela, procurando os pontos correspondentes no plano, repetindo atividade realizada minutos antes, com intenso uso de *zoom in*, *zoom out* e das barras de rolagem. Depois de várias perguntas indiretas, o professor então indagou diretamente sobre o zero:

F: Galera, eu posso pôr o zero naquela fórmula? No lugar do x?

G: Zero? Pode.

A: Ele é um número.

F: O zero é um número.

A: [??] posso pôr qualquer número.

F: E 1 sobre 0? Quanto dá um sobre zero, então?

G: Zero. Um dividido por nada, dá nada.

A: Não, mas olha aqui na tabelinha: zero no x e no y deu erro.

G: Acho que não podia colocar o zero...

A: Vamos ver. Bom, um sobre zero dá zero, né?

G: É.

A: Então, se x vai dar zero, y vai dar quanto? O y vai dar zero também, então vai dar dois zero: zero e zero. Então teria que ter um ponto aqui no meio [*aponta o ponto (0,0) no Graphmatica*]

Os estudantes dividiram um por zero na calculadora e afirmaram ter dado zero. O professor, por sua vez, mostrou o símbolo "E" na extremidade do visor, ao que comentaram, no entanto, não saberem que aquilo significava "erro".

A partir disso, o professor desenvolveu explicações numéricas para falar da divisão em geral, e da divisão do zero e por zero, no particular impasse em que se encontravam. Questões referentes à calculadora permearam toda essa discussão: além da mensagem de erro que essa mídia apresentava, houve certa confusão na utilização das teclas operatórias + e - e da tecla +/-, que indica a opção pelo sinal do número que consta no visor.

A discussão sobre as operações acabou então tomando outro rumo: André usou a barra de rolagem até enxergar o gráfico "colado" no eixo x, observando o ponto (1148;0.0009) no gráfico e na tabela. Após observarem alguns cálculos, Gianluca arrematou:

G: [...] eu acho que é qualquer numero real menos zero... Porque, nesse zero, você não está incluindo 0.1, 0.2... Porque eu dividi agora, olha [*na calculadora*]: 1 dividido por 0.1 dá 10. Já **existe**. [...] qualquer numero real, menos o 0, **existe**.

Relembaram, em seguida, maneiras de se escrever a conclusão; André demonstrou contentamento por ter se lembrado da forma $\mathbb{R}^*$, e o professor escreveu, a partir das palavras dos alunos, a forma $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$.

Como o encontro atingia duas horas de duração, o professor resolveu deixar o conceito de imagem para o encontro seguinte, embora os estudantes ainda estivessem animados para justificar o porquê do gráfico não tocar nem o eixo x e nem o eixo y.

A: Então [*em tom solene*], não importa o quanto eu dê zoom, sei lá, o quanto que ela parece se aproximar mais do eixo, ela não vai tocar.

F: Ela chega perto, chega perto, mas nunca encosta.

A: Nunca vai encostar

G: É.

F: Você ia me falar alguma coisa apontando pra lá, assim [*repete o gesto de Gianluca*].

G: Eu ia dizer que...o gráfico... o desenho do gráfico só ia encostar no... na reta, na reta do x, se o x fosse 0. Como o x não pode ser 0, porque não existe resultado de 1 dividido por 0, o desenho não encosta na reta. [*refere-se ao eixo x*]

O professor, em especial, notou a troca de eixos durante a fala e o gesto de Gianluca, mas optou por discuti-la em outra oportunidade. O grupo retomou essa idéia de Gianluca quando trabalharam com a função de expressão analítica $y = \frac{1}{x^2 + 1}$. Ao final desse encontro, o professor optou por complementar a idéia com um comentário numérico:

F: Quando que uma fração dá 0 ?

A: Uma fração dá 0 ?

G: Quando... Ah quando o denominador for|...o numerador for 0 [*corrigindo-se*].

A: E o denominador for 1

G: Não, e o denominador for qualquer outro número...

A: ...é.

Resumo do episódio e uma análise inicial

Vários conceitos estiveram em jogo nas ações desse coletivo pensante. Ao estudarem a função racional dada pela expressão analítica $y=1/x$, a dinâmica das atividades do grupo se deu num formato de rede, em que conceitos foram trabalhados de forma não linear.

O conceito de domínio foi desenvolvido simultaneamente a um debate sobre as representações, sendo que as falas dos estudantes foram muito ricas, ao se estender a noção de função do diagrama de flechas para outras representações, no caso, a gráfica, a tabular e o conjunto de pares ordenados. Gianluca chegou à conclusão de que todas eram equivalentes, apesar de inicialmente afirmar que o gráfico lhe parecia “a menos limitada”. Enquanto isso, André, ao utilizar os valores inteiros da tabela para representar o domínio, levou o grupo a um debate envolvendo continuidade, utilizando, para tanto, a comparação com as imagens de um microscópio.

O professor, por sua vez, perguntou-lhes se a expressão analítica também era uma representação, ao que responderam afirmativamente, no entanto, suas palavras demonstraram que a forma algébrica não tinha o mesmo *status* das outras representações, atribuindo-lhe um caráter **estático**: “você tem que calcular pra montar o gráfico”, disse André, enquanto Gianluca afirmou que “você coloca aí só a regra que você inventou, e não todas as ligações”.

O caminho para se chegar à conclusão de que zero não constava no domínio da função se deu através das várias mídias e com várias representações de funções. Após muitos debates, o professor interveio para solucionar a questão, através da representação algébrica: “Galera, eu posso pôr o zero naquela fórmula?”. André observou a mensagem de erro na tabela e questionou a ausência do ponto (0,0) no gráfico, após ter afirmado que $1/0$ na calculadora havia dado 0. O professor então lhe chamou a atenção para a mensagem de erro que a mesma oferecia.

Permeando essa discussão, havia ainda o forte desejo de Gianluca para descobrir se o gráfico tinha ou não ponto comum com os eixos. Várias experimentações dos estudantes foram realizadas até chegarem a um consenso: (i) André usou gráficos a partir de $y=1/x$, $y=2/x$, $y=3/x$, $y=-3/x$ (figura 5.1.7); posteriormente, usou também $y=365/x$; (ii) Gianluca propôs a inversão dos papéis de x e de 3 , obtendo uma reta ao digitar $y=x/3$ e gerando uma discussão a respeito dos parâmetros **a** e **b** nessa expressão, numa comparação com $y=ax+b$, o que também revelou a possível troca de papéis entre constante e variável; (iii) Ambos usaram intensamente os comandos *zoom in* e as barras de rolagem, de forma que Gianluca oscilou entre crer que o gráfico encostaria e concordar com André em que o gráfico não teria ponto em comum com o eixo x ; (iv) Retomando a monotonicidade, André digitou $y=-1/x$ para “tornar” crescente a função anterior, dada por $y=1/x$, que havia já deduzido ser decrescente.

Ao retomarem a monotonicidade, discutida no episódio anterior, a busca pela identificação dos parâmetros **a** e **b**, da função afim, na expressão da função racional, gerou certo conflito, e a “definição” que o professor utilizou para função crescente/decrescente procurou amenizar essa questão.

Porém, mais que isso, as falas e gestos que permearam essa parte do debate indicaram concepções, a respeito de função, que ilustraram seu caráter mais dinâmico, tanto para o professor (“se a gente olhar, do menor para maior, da esquerda para direita”), quanto para Gianluca (“porque o lado direito do x é positivo é 1, 2, 3, 4, 5, 6 [*gestos com o braço*]. Está aumentando, [...] o y vai diminuindo e o x vai aumentando”) e André (“ela tá caindo...Você vê que, no eixo ela está se posicionando de um lugar maior, para um lugar menor [*com a mão faz um movimento do segundo para o quarto quadrante*]. E, no eixo x , ela tá vindo de um lugar menor para um lugar maior. E, no eixo y , de um lugar maior para um lugar menor”).

É claro que todos esses debates não ocorreram de forma linear, mas percorreram caminhos distintos, num zigue-zague entre conjecturas, conceitos matemáticos e mídias. A escrita, através do papel e do quadro, a calculadora, e o

software *Graphmatica*, acompanhados da oralidade, condicionaram um intenso trânsito por conceitos matemáticos. Ao tentar observar a estrutura dos diálogos sobre os conceitos que foram trabalhados ao longo do episódio, o uso da linearidade da escrita parece ser caótico. Um esboço do caminho percorrido por esse coletivo foi:

Expressão analítica → Gráfico → domínio → diagramas → representações → domínio → encosta ou não encosta? → domínio → encosta ou não encosta? → domínio → números inteiros e números reais → reta e expressão algébrica (parâmetros **a** e **b**) → domínio → valores na tabela e pontos no plano → monotonicidade → parâmetros **a** e **b** da função afim → monotonicidade → domínio → operações com zero → ordem das operações (calculadora) → domínio.

Assim, quatro importantes questões tornam-se diretrizes para a análise deste episódio. A primeira se refere ao papel de um ambiente com diversas mídias no trânsito pelas representações de funções, incluindo-se aí uma função racional. Tal discussão pode ser desenvolvida junto com o referencial teórico adotado, na busca de elementos para respostas à pergunta de pesquisa. A segunda questão trata da linguagem do professor na condução de atividades dentro desse ambiente. Até que ponto a preferência do professor por uma representação, que pode ser observada na construção das fichas de trabalho, possibilita ou atrapalha o trânsito dos estudantes pelas representações de função? A terceira questão leva estas reflexões a possíveis respostas à pergunta norteadora da pesquisa: qual o papel que as barras de rolagem desempenharam para o estudo da função racional, por André e Gianluca? Qual a relevância, para o pensamento dos alunos, da relação que esse comando possui com as alterações que propicia à tabela? O pensamento não linear, ilustrado no parágrafo anterior, indica o formato de rede que conceitos relativos às funções, em especial, à função racional de expressão $y=1/x$, foram trabalhados por esse coletivo pensante. Finalmente, a quarta questão vem associada à terceira: qual a relação entre a coordenação das

representações múltiplas da função racional, verificada neste episódio, com o *design* do software?

5.1.3 Episódio 3: A simetria da parábola.

Por que foi construído

Os estudantes elaboraram um problema: como construir uma parábola qualquer, a partir de uma expressão analítica? As noções de simetria e da definição de função permearam parte dos diálogos, e tais idéias foram trazidas primordialmente pelos estudantes junto às mídias.

O episódio

As atividades do segundo encontro, destinadas à segunda ficha de trabalho, iniciaram-se ainda com questões remanescentes do primeiro dia. André pediu ao professor para rever “esse negócio de crescente e decrescente”. Este fez o teste:

F: Eu vou perguntar uma coisa para vocês. O que é uma função crescente?

AG: é quando o a é maior que zero.

F: Tá. Só que eu não quero falar de reta... [*apagando o quadro*]

G: Ué, faz o radical lá... [*se refere à função racional estudada no primeiro encontro*]

Nesse instante, o professor solicitou aos estudantes explicações próprias para os desenhos que fazia no quadro (figura 5.1.15). Gianluca se lembrou do encontro anterior:

G: Porque quando o x aumenta| quando a reta é crescente o x e o y aumenta.

F: Ah... foi isso que a gente conversou na semana passada. Como que é o negócio? *Replay:*

G: Quando o x aumenta, e o y também aumenta, a reta é crescente. [*André toma um papel para anotar essa frase*] Reta não, o desenho.

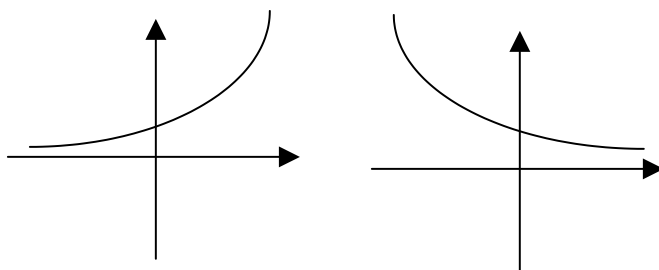


Figura 5.1.15: Gráficos desenhados pelo professor no quadro

O professor ainda fez mais desenhos e perguntas, ilustrando outros gráficos que apresentassem valores positivos e negativos nas intersecções com os eixos, a fim de verificar se os estudantes ainda estavam associando tais sinais com a classificação crescente/decrescente, conforme ocorrera no primeiro episódio. Não apenas deixaram de lado essa associação, como também eles próprios reconstruíram a “definição” para função decrescente:

G: Então, quando o x aumenta... e o y diminui, é decrescente.

André anotou essas conclusões e, em seguida, iniciaram a segunda ficha de trabalho. Após digitarem a expressão $y=x^2-2x-3$ (figura 5.1.16), abandonaram temporariamente o *Graphmatica*, passando a buscar o esboço do gráfico no papel e utilizando a fórmula de Bhaskara. André alertou Gianluca: “Não se esqueça que você tem que achar as raízes!”.

Gianluca usou a fórmula de Bhaskara e, em seguida, disse: “Ah, tem que fazer o quadro agora”. Construiu então uma tabela de valores e o gráfico (figura 5.1.17):

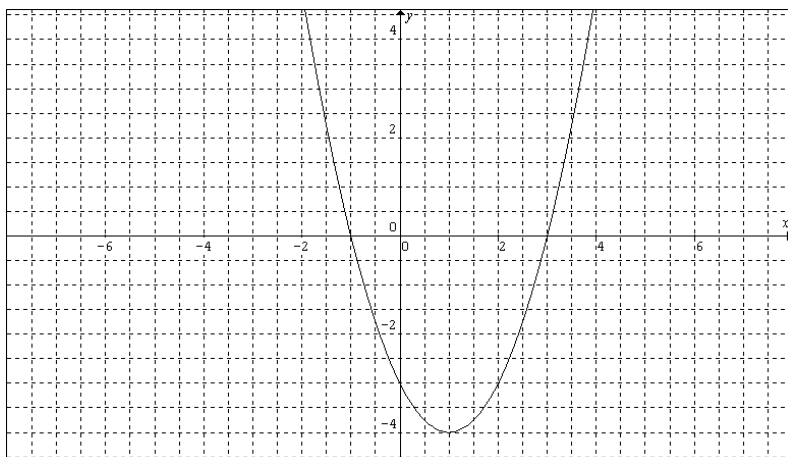


Figura 5.1.16: Gráfico obtido a partir de $y = x^2 - 2x - 3$.

X	Y
1	-4
2	-3
3	0
4	5
5	12



Figura 5.1.17: A tabela com os valores usados por Gianluca e o gráfico por ele construído

Nesse dia, houve muita discussão em torno da questão: como desenhar uma parábola no papel, dada a lei algébrica correspondente. Os alunos queriam lembrar como procediam, na 8ª série, para resolver essa tarefa. Ficou claro, em diversas explanações dos estudantes, que eles acreditavam existir um único modo de fazê-lo, “o jeito certo”, como disse Gianluca.

Este debate se manteve através de alguns longos diálogos entre Francisco e Gianluca e entre o primeiro e ambos os estudantes. O professor verificava

freqüentes “trocas” entre alguns conceitos: raiz e vértice freqüentemente foram tomados como sinônimos. Suas intervenções se deram através de perguntas, de sugestões de ação sobre o software, como no caso em que pediu a Gianluca que colocasse, com o *mouse*, o cursor “em cima” do vértice, ou “em cima” das raízes. André interferia quando discordava de Gianluca, e assim o grupo se manteve por bastante tempo entretido nessa questão.

Outra estratégia usada pelo professor consistiu em perguntar aos alunos “o que é raiz de uma função?”, ao que responderam em uníssono:

AG: É quando o y é igualado a zero.

Porém, o fato de Gianluca ter encontrado as raízes -1 e 3, através da fórmula de Bhaskara, não os ajudou na confecção do gráfico. Ao marcar os pontos no plano cartesiano que fizera no papel, utilizando-se da tabela que havia construído, conforme ilustra a figura 5.1.17, Gianluca marcou o ponto (3,0) pelo fato de este constar na tabela: o ponto (-1,0) não é assinalado em seu desenho, de maneira que o mesmo ilustrou apenas a parte do gráfico que se refere ao intervalo de valores de x para o qual a função considerada é crescente (figura 5.1.17).

Ele não se conformava com o fato de seu desenho estar “errado”, pois acreditava, nesse momento, que apenas atribuindo aqueles valores da tabela para x (1, 2, 3, 4 e 5) já seria suficiente para que seu desenho “fosse completo”.

A comparação de seu desenho com aquele que o *Graphmatica* lhe oferecia foi feita timidamente. André, porém, resgatava, a cada dúvida de Gianluca, essa comparação. Os alunos tentaram, durante longo período, recordar **como** eles “desenhavam gráficos de parábola”.

O professor então observou que somente uma parte da parábola semelhante à do *Graphmatica* fora construída no papel em razão da **escolha** dos valores de x. André sugeriu o aumento da tabela, colocando valores negativos para x (explicava gesticulando diante da imagem do *Graphmatica*). Gianluca, embora

afirmasse ter entendido, não se conformava de não recordar o modo como fazia na 8ª série: “mas eu lembro que tem um jeito. [...] Garanto que se você [*professor*] fizesse uma para mim, eu lembraria”. André compartilhava as dúvidas do amigo, no sentido de também crer na existência desse “jeito certo”.

O professor seguiu utilizando a noção de simetria através de comentários a respeito de vários gráficos. Como o desejo do grupo em chegar a uma conclusão era forte, o pesquisador convidou ambos a trazerem seus cadernos da 8ª série no encontro seguinte, para que continuassem esse debate, o que acabou não ocorrendo.

Voltando às observações gráficas, Gianluca afirmou que “a parábola corta no -3 [do eixo y] porque é o *c*”; mal o professor começara a perguntar o porquê dessa afirmação, e um novo problema foi se construindo, mediante uma observação de André. Isso porque ele estranhou o fato de aparecer o valor -3 duas vezes na tabela (figura 5.1.18).

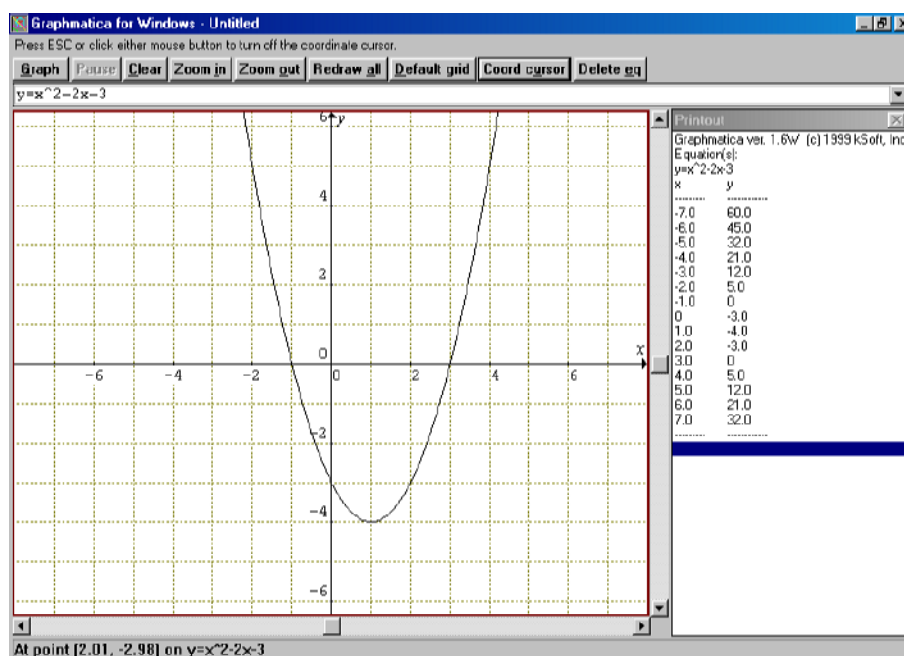


Figura 5.1.18: Gráfico e tabela obtidos a partir de $y = x^2 - 2x - 3$.

A: Tem dois -3! Tem o -3 e 2 e [tem] o -3 e 0 [olhando na tabela] [...] O que que é isso!?!.....dois -3?

F: Hummm desafio! Pegue o *mouse*, olha, “coordenadas do cursor” [*solicitando o botão “coord cursor”²⁹*]: ache esses dois pontos que vocês estão “interrogativos”.

A: Ah, tá certo [*usando o “coord cursor” no gráfico*]. Aqui está o -3 e 0 e o -3 e 2. [*posteriormente o professor os induziu a inverter a ordem das coordenadas*].

[...]

A: Só que é o seguinte: eu não estou entendendo por que é que têm dois aí. Como é que podem ter dois números iguais numa única tabela? Eles são iguais. E a professora disse que não podia ter.

G: Ainda se um fosse x e o outro fosse y, tudo bem.

A: [...] disse que não podia ter dois na mesma... “coisa” [*risos*]

G: ... Na mesma tabela...

[...]

A: Ah! Peraí! Peraí! Será que isso tem a ver com a mesma coisa que o Gian fez? [*refere-se à “parte” da parábola de Gianluca*] Um lado e o outro? Talvez tenha: o -3 de um lado, e um -3 do outro.

Com gestos, André mostrou o caráter simétrico da parábola. Mas a frustração por acharem que não tinham conseguido desenhar a parábola no papel, anteriormente, os perturbava mais uma vez:

G: Mas com a professora a gente não aprendeu metade da parábola, a gente aprendeu parábola inteira!

A: [...] inteira! [*fazendo coro com Gianluca*]

²⁹ Nesta opção, o ponteiro do mouse transforma-se numa cruz, cujo centro determina as coordenadas do ponto do plano; essa cruz pode deslizar pelo gráfico, bastando para isso que o usuário a coloque sobre a curva e utilize as setas do teclado. Na figura 5.1.18, no canto inferior esquerdo, é possível identificar o par ordenado de um ponto próximo ao ponto (2,-3).

O professor, sorrindo e aparentando muita calma, procurou deixá-los também tranquilos:

F: Prova disso é que aí você tem $(0,-3)$ e depois... qual que é o outro ponto?

A: O $(2,-3)$. São os dois lados da parábola.

Francisco perguntou se ainda havia algum problema; afirmaram, de modo comedido, que não havia. De modo persistente, ele perguntou (em tom de brincadeira):

F: Mas parece que vocês estavam “revoltados” porque tinha... é... como que é mesmo?

A: É que nos falaram que não podem ter dois pontos iguais na mesma reta, e [...] não podem ter dois pontos iguais na mesma parábola.

A estratégia do professor, nessa situação, foi usar a representação em que isso provavelmente teria sido muito falado aos alunos: o diagrama de flechas. Tal procedimento parece tê-los tranquilizado, já que suas interjeições indicaram certo contentamento, como se revissem “algo familiar”. A figura 5.1.19 refere-se aos desenhos feitos no quadro pelo professor.



Figura 5.1.19: Diagramas feitos pelo professor no quadro

Antes que o professor continuasse, André expõe a sua dúvida, escrevendo no papel:

A: É assim? [figura 5.1.20a]

A: Ou é assim? [figura 5.1.20b] Eu não sei.



Figura 5.1.20a e figura 5.1.20b: Diagramas propostos por André.

Nesse momento o professor colocou as letras “x” e “y” nos diagramas da figura 5.1.19, “recombinando” a ordem das coordenadas dos pontos e perguntando a ambos se seria o primeiro ou o segundo desenho. Gianluca, então, mostrou os valores da tabela do *Graphmatica* a André, afirmando ter absoluta certeza de que se tratava do primeiro desenho. Este, por sua vez, demonstrou entender o que dissera Gianluca.

A: É isso mesmo, Chico?

F: Têm dois x indo no mesmo y ou tem um x indo em dois y?

AG: [juntos] Dois x indo no mesmo y

F: Ah, que coral bonito, afinado! [todos riem bastante]

O professor finalizou a discussão retomando a questão da simetria recordada por André, a partir da parábola desenhada por Gianluca, acrescentando algumas considerações gráficas.

Através de um diálogo de aproximadamente 10 minutos, Francisco conduziu os estudantes a perceber que uma parábola possui dois trechos, que representam uma parte crescente e outra decrescente de uma função quadrática. Essa questão

surgiu porque André, repetindo uma expressão do primeiro encontro, disse que “em parábola não tem crescente ou decrescente, só concavidade, que é para cima ou para baixo”.

Para encerrar a descrição deste episódio, vale a pena relatar que os alunos voltaram a mencionar, no início do terceiro encontro, o valor de **c** como “o ponto onde a parábola corta o eixo y”, porém, desta vez, a partir de vários gráficos esboçados (figura 5.1.21), referentes à questão 3 da segunda ficha de trabalho, a qual previa alterações gráficas a partir de variações do coeficiente **b** da expressão analítica geral $y=ax^2+bx+c$.

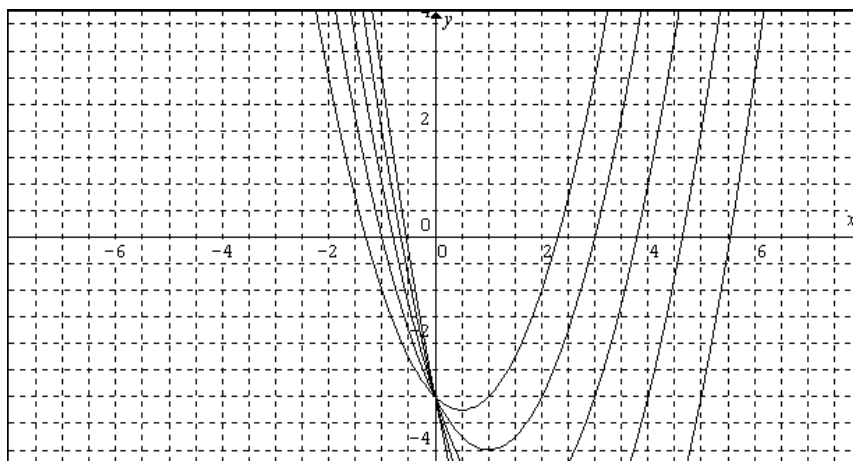


Figura 5.1.21: Gráficos obtidos a partir da variação do parâmetro **b** de expressões analíticas da forma $y = x^2+bx-3$.

O que havia incomodado o professor no segundo encontro foi o fato de a observação ter sido feita mediante o traçado de apenas uma parábola; não encontrei, ao assistir as fitas e ler as transcrições, indícios que pudessem supor o porquê de uma associação direta entre o valor do parâmetro **c** e do valor -3 no eixo **y**, nem indícios de que os estudantes estivessem se lembrando dessa relação por a terem visto em suas aulas regulares da 8ª série, embora essa fosse a desconfiança do professor no momento da atividade.

Outra hipótese seria uma associação com o fato de que, no caso da função afim, o termo independente, normalmente indicado com a letra **b**, é o valor em

que a reta intercepta o eixo y . Como c é o termo independente nas expressões analíticas das funções quadráticas, tal associação não pode ser descartada.

Na tentativa de descobrir esse “porquê”, o professor perguntou aos estudantes o motivo daquela conclusão. As explicações diferiram entre si:

G: Eu não alterei o c ; então, todas elas vão passar no c . Em toda parábola o c tá sempre escrito.

F: Hum hum.

A: No eixo y ! [*em tom categórico*].

[...]

A: O x' e o x'' já estão presentes no eixo x . Então, tem que ter alguma coisa no eixo y . Essa é a minha tese. Se o x' e o x'' já estão “ocupados”, então vai o c no eixo y .

O professor poderia ter perguntado para André, dentre outras indagações possíveis e aceitáveis para um investigador, o motivo de esse valor ser c e não a , já que esse parâmetro também não havia sido alterado. Seu gosto algébrico então se mostrou presente, e indicou aos estudantes que há um cálculo que comprovaria o fato já observado por eles. Após algumas reflexões, André expôs um palpite certo para as intenções do professor:

A: Acho que a gente tem que descobrir através da função do 2º grau.

F: Como assim?

A: Através da função escrita [*André está se referindo à expressão analítica $y=ax^2+bx+c$*].

[...]

F: Vocês estão muito perto. [...] É só juntar as duas coisas que vocês falaram aí. [...] O André falou para usar a fórmula da função.

G: E o que que eu falei?

F: E você falou que esse ponto, o que elas se encontram, é o $(0,-3)$

A partir desse momento, os estudantes foram levantando hipóteses até chegarem ao cálculo correto: André pensou em trocar x por -3 ; Gianluca, em trocar o y por zero. Mas antes que André encerrasse de vez a questão, exibiu um forte indício de sua opinião sobre a “demonstração” algébrica pedida pelo professor:

F: No fundo, eu estou fazendo a seguinte pergunta para vocês: porque toda parábola corta no c ?

A: Porque foi uma regra que a Matemática fez, talvez.

F: Mas sem um motivo, uma lógica... foi imposta?

A: Porque alguém talvez tenha observado assim: de todas as parábolas que eu fiz até agora... Passei a minha vida inteira desenhando parábolas [*e/e e o professor riem, enquanto Gianluca prossegue calculando no papel*], e ninguém pode falar que estou errado porque estou há 130 anos fazendo parábolas. Esse cara tem razão, mesmo sem ter uma formulazinha.

A questão se encerrou com a álgebra. Todos verificaram os cálculos de Gianluca, que havia trocado y por zero e x por -3 , escrevendo $0 = (-3)^2 - 2 \cdot (-3) - 3$, o que não lhe deixou à vontade. André lhe falou para trocar x por zero, repetindo aquilo que já havia dito anteriormente, e y por -3 . Ao chegar à expressão $0 = 0$, era nítida a expressão dos alunos de não se sentirem convencidos através desse cálculo.

Resumo do episódio e uma análise inicial

O episódio se iniciou com André pedindo para conversarem mais sobre “esse negócio de função crescente e decrescente”. Voltaram a afirmar que uma função seria crescente “quando o a é maior que zero”, para, em seguida,

retomarem as definições trabalhadas no primeiro encontro, agora com menor influência do professor.

Ao trabalharem com a função quadrática, os alunos chegaram a um impasse, uma vez que Gianluca obtivera, no papel, somente a parte não decrescente do gráfico de uma função quadrática, apesar de ter encontrado duas raízes e possuir o gráfico disponibilizado à sua frente. Através da tabela apresentada pelo *Graphmatica*, André apontou uma “saída” a Gianluca, mostrando-lhe os pontos $(0,-3)$ e $(2,-3)$, que davam indícios da simetria visualmente verificada por André.

Porém, a primeira fala deste, em relação àqueles pontos, deixou-o em dúvida a respeito do fato de $y=-3$ estar relacionado a dois valores de x . Tal questionamento levou o grupo: (i) a retomar a representação de função através de diagramas; (ii) a resgatar a definição de função que conheciam e (iii) a utilizar a tabela como forma de levar os estudantes a reconhecer a característica simétrica de uma parábola.

Nesse sentido, pode ser analisado, neste episódio, dentre outras possibilidades, a interligação entre representações: a álgebra dos estudantes, nesse momento marcada por algoritmos para se chegar ao “jeito certo” de se desenhar uma parábola (“Não se esqueça que você tem que achar as raízes!”), encontrava-se associada à tabela e ao desenho que o software oferecia, a fim de trabalharem com as questões que foram levantadas.

Além disso, ao associarem o valor do parâmetro c à intersecção das parábolas com o eixo y , o enfoque algébrico do professor enfraqueceu-se em tais circunstâncias: André, questionando veementemente a verificação algébrica, valorizou aspectos empíricos, dizendo que “ninguém pode falar que estou errado porque estou há 130 anos fazendo parábolas”; para Gianluca pouco pareceu ter significado chegar à expressão $0 = 0$, após substituir as coordenadas de um ponto do gráfico em sua correspondente expressão algébrica.

Esta análise inicial parece indicar o forte significado que os estudantes atribuíram à visualização; posteriormente, analisarei como esse conceito pôde

contribuir para a coordenação entre as representações, a qual, neste episódio, trouxe, além das três canônicas (gráfico, lei algébrica e tabela) utilizadas no *Graphmatica*, os diagramas.

5.1.4 Episódio 4: Álgebra, raízes e, novamente, o drama do zero.

Por que foi construído

Já que a álgebra faz parte das preferências do professor, é interessante observar como sua álgebra se relacionou com a álgebra dos estudantes. Sobretudo através do conceito de raiz, tornou-se visível que tais álgebras possuíam pontos de conflito. A dinâmica desse coletivo pensante não foi, assim, marcada por uma intensa atuação do software, ao passo que a calculadora teve um papel muito importante na conclusão do episódio.

O episódio

Este episódio ocorreu no início das atividades referentes à terceira ficha de trabalho, a qual possui as funções diferentes das tradicionalmente trabalhadas, marcando o início do quarto encontro. O professor iniciou perguntando sobre as raízes da função quadrática, esboçada no *Graphmatica* (figura 5.1.22), obtida a partir de $y=x^2$.

Até esse momento do experimento de ensino, os alunos não haviam trabalhado com funções quadráticas que possuíam uma raiz dupla. Apesar de o gráfico da figura 5.1.22 e da expressão analítica $y=x^2$ serem representações canônicas da função quadrática, André achou a parábola “esquisita” e “estranha, porque ela toca diretamente no ponto zero”. Ambos afirmaram inicialmente que zero seria a raiz, mas, logo em seguida, Gianluca disse que a função “não tem raiz”. Repetindo uma pergunta feita várias vezes em outros encontros, o professor indagou-lhes “o que é raiz de uma função?”, ao que André apresentou sua

explicação, muito semelhante com as suas anteriores, com as respostas de Gianluca e com as dos outros estudantes participantes da pesquisa:

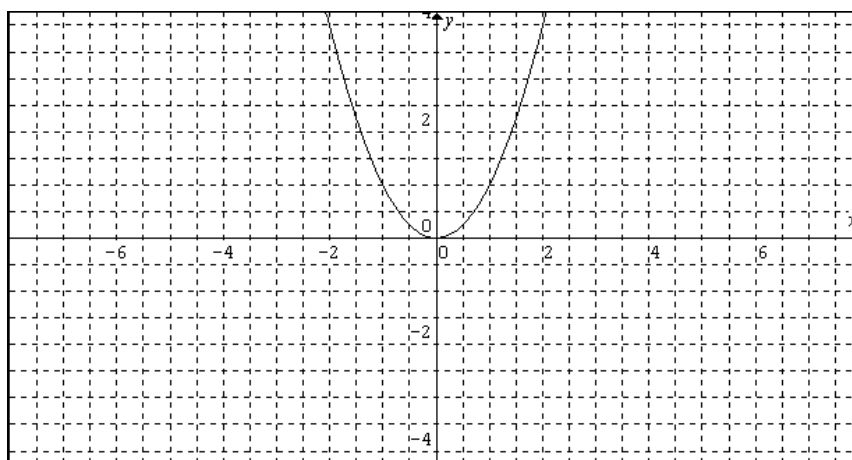


Figura 5.1.22: Gráfico obtido a partir de $y = x^2$

A: Raiz da função | “zeros ou raízes da função” [*em tom solene*] é quando
[G: é...] a gente iguala a zero a função.

G: Igualo a equação a zero.

A: E temos que [???] |

G: E acha o x.

A: Se for, se for uma função, digamos assim, quadrática, [...], que a gente usa o quadrado, de segundo grau. A gente teria que fazer Bhaskara, ou então relação de Girard.³⁰

[...]

A: Eu vou fazer aqui, ó, x ao quadrado [*faz a seqüência de passos* $x^2 = 0 \rightarrow x = \sqrt{0} \rightarrow x = 0$ *no papel, mas não a comenta. Prefere a fórmula de Bhaskara*]. Qual é o delta? Hum, é, um. Ah, não, como é que é? $b^2 - 4ac$ né... b não tem, então é zero, [...]

G: Não precisa fazer isso...

³⁰ André se refere, em relação às equações da forma $ax^2+bx+c=0$, às relações de Girard também conhecidas como “Soma e Produto”; tais relações envolvem as raízes dessa equação, e são dadas por $x_1+x_2=-b/a$ e $x_1 \cdot x_2=c/a$.

André resolveu, no papel, a equação $x^2 = 0$ através da fórmula de Bhaskara, enquanto que Gianluca o observava, demonstrando não desejar fazer o mesmo. Assim como nas atividades anteriores, André utilizou com certa frequência a calculadora, inclusive quando se tratava de operar com zero numa multiplicação. Mas a frase de Gianluca chamara a atenção do professor, que posteriormente procurou investigar em que estaria pensando.

A: Então, vai ter aqui vai ter zero e vai ter zero. Perfeito: zero e zero [*sorrindo*].

F: Zero e zero. Tem parábola que tem duas raízes iguais?

[*Ambos afirmam que isto ocorre para delta igual a zero*]

[...]

F: Só uma perguntinha: você [*para Gianluca*] aquela hora falou pra ele assim, que não precisava fazer isso. Por quê?

G: Ah, porque não tem outro número, então ele mesmo falou que tudo era zero.

A: Eu falei, só que ele pediu pra fazer o negócio. Eu não faria, entendeu, mas...

Nota-se que o professor não conseguia uma explicação mais clara do porquê de essa resolução não ser necessária, embora imaginasse um motivo gráfico. Na verdade, não esperava que os alunos, inicialmente, se remetessem à fórmula de Bhaskara, mas que dissessem que sua conclusão tinha sido baseada pelo gráfico, que é o ocorrido mais provável, ou então que atribuísem a x o valor zero. O professor poderia, também, ter perguntado onde o gráfico interceptava o eixo x .

Mesmo assim, André não justificou o porquê de não ser necessário “fazer o negócio”. Talvez um pouco inseguro na maneira como conduzir a essas possibilidades e tentando explorar o que Gianluca queria dizer com “Não precisa

fazer isso”, o professor resolveu perguntar novamente o que significava “raiz de uma função”, esperando que os estudantes tentassem outra explicação.

G: Raiz é quando você iguala a equação a zero e acha o x dela.

A: Os dois x, o x' e o x'', o x_1 e o x_2 , ou então o x_A e o x_B , ou então o x_x e o x_y ...

F: Entendi. Eu só não entendi uma coisinha... aqui você falou: “eu não precisava fazer isso” [*não deixou claro se falava a um deles ou aos dois*]

A: Não precisava, é |

G: Não tem nenhum número, só tem o x ao quadrado.

A: É tudo zero, só tem um número, um! [*mostra o número um com o dedo indicador*]

G: Então, tudo é zero.

A: Tudo é zero. [*pausa*] Porque zero | uma vez zero dá zero.

O professor assim confirmou com os alunos que na verdade se referiam ao fato de que, na forma $y=ax^2+bx+c$, **a** valia 1 e **b** e **c** valiam zero. Contudo, não demonstrou ter ficado satisfeito em relação à explicação dos estudantes, a qual novamente se inclinou à representação algébrica; porém, percebeu que André, ao dizer “uma vez zero dá zero”, poderia ainda explicar essa maneira de pensar.

F: Eu ainda não estou convencido. Não precisava fazer isso aqui por quê? [*aponta a fórmula de Bhaskara no papel, feita por André*]

A: Por que é zero|

G: Porque só tem o **a**. Só tem o **a**. Que vale um, ainda. Se o **a** valesse 3, ou 4, talvez influenciasse alguma coisa...

A: Eu acho que eu tenho uma teoria melhor [*Gianluca fala junto com André, indicando que tem uma explicação, mas André continua.*]. O **b** e o **c** são zero. O **a** é um. Só que qualquer número multiplicado por zero dá zero, vai dar zero!

Após mais algumas falas dos estudantes e do professor, este parecia aceitar a explicação dos primeiros. Na verdade, nesse momento havia “duas álgebras” nas concepções do professor, as quais tinha identificado ainda nos trabalhos piloto. A primeira se referia ao trabalho com fórmulas e expressões consagradas. Assim, a manipulação da fórmula de Bhaskara e as justificativas dos estudantes em relação aos coeficientes **a**, **b** e **c** eram, para o professor, situações puramente algébricas. Substituir a variável x por zero e verificar que o cálculo resulta em zero, ou seja, utilizar o atributo de que raiz é o valor numérico de x para o qual y assume o valor numérico zero era, para o professor, uma álgebra diferente, uma “álgebra mais numérica”.

Posteriormente, porém, Francisco percebeu que a diferença recaía em outro aspecto: o que provavelmente lhe incomodava era o fato de que os estudantes não usavam a definição algébrica de raiz para as justificativas, mas sim as técnicas algébricas que consagram o ensino desse conceito, atreladas à ênfase na resolução de equações. Ou seja, os estudantes retomavam os **métodos para encontrar** a raiz, a fim de confirmarem suas conjecturas, ao invés de usarem o **fato de já saber** que zero é a raiz da função e apenas verificar tal propriedade.

Embora não muito claras, tais idéias permeavam algumas das perguntas do professor durante os EE. Gianluca havia dito que “se o **a** valesse 3, ou 4, talvez influenciasse alguma coisa...” e André falou: “minha teoria: quando **b** e **c** são zero, a equação, quer dizer, a função, dá zero”. O professor resolveu, nesse ponto, investigar o que essa fala de Gianluca poderia trazer em relação às tentativas de justificação para o zero como raiz.

Escreveu a expressão $y = 3x^2$ no quadro, perguntou quais seriam as raízes, e os alunos afirmaram que provavelmente seria zero. Gianluca explicou verbalmente que daria zero, narrando todo o cálculo do discriminante delta e da fórmula de Bhaskara. André explicou, num tom hesitante entre afirmação e interrogação, se sua “teoria” se comprova, ou seja, se apenas **a** não for zero, então a raiz será zero. O professor aponta que sim e confirmou como legítima a explicação de ambos através da fórmula de Bhaskara, mas insistiu na conversa:

F: Quanto que dá o x aqui? [*escrevendo $3x^2 = 0$ no quadro*]

AG: Zero

F: Zero. Sem Bhaskara eu consigo ver isso ou não?

G: Acho que não, né?...

A: Sem Bhaskara... nnnão.

F: Não.... [*num tom hesitante, mas sem caracterizar exatamente uma pergunta*]

G: Três vezes um...três vezes um, três...

A: Porque zero dividido por três é igual a...não. Não dá. Não consigo.

G: Aí três é igual a zero. Se substituir o x por algum número lá [*sinais afirmativos com a cabeça*], vai dar alguma coisa.

É possível desconfiar de que, nessa fala de Gianluca, estava presente o tipo de conclusão que o professor tanto aguardava. Porém, André retomou novamente a questão para si de forma categórica:

A: Vou te falar um negócio: eu não conseguiria. Então, eu iria por Bhaskara. Eu iria direto, só olhando pra esse negócio aí. Com $3x^2 = 0$ [*mostra o papel*] aí eu teria que fazer algo parecido com isso daqui. Eu começaria fazendo assim. [*escrevendo e simulando seu procedimento em outro ambiente, provavelmente na sala de aula ou numa prova*] " $x^2 = 0/3$, ah, não vou fazer mais!" daí eu começaria a fazer Bhaskara.

F: Tem certeza... que você começaria a fazer Bhaskara? [*coloca o dedo na escrita em que André anteriormente havia resolvido a equação $x^2=0$ no papel, sem a fórmula de Bhaskara, seguindo os passos $x^2 = 0 \rightarrow x = \sqrt{0} \rightarrow x = 0$*]

A: É, porque daí eu faria assim: x é igual a raiz de zero sobre três...e isso fica muito esquisito, entende. Eu ia levar um tempinho para raciocinar e tudo mais, eu falo assim: vou mais rápido por Bhaskara, daí eu começo Bhaskara.

André, mais uma vez demonstrando problemas com o zero, justificou-se ao professor, explicando-lhe que resolveu a equação $x^2 = 0$ tranquilamente porque quem multiplicava o x^2 era o 1, enquanto que, no trecho acima, na fração $\sqrt{\frac{0}{3}}$, disse que teria que fazer racionalização de denominadores.

F: Mas eu não posso fazer o zero sobre três antes?

A: Hummm, como assim?

F: Você... $\sqrt{\frac{0}{3}}$ você escreveu $\frac{\sqrt{0}}{\sqrt{3}}$.

A: Hum hum.

F: Eu não posso fazer $\frac{0}{3}$ antes de extrair a raiz?

Nesse momento, Gianluca lembrou um aspecto de um tipo de exercício de domínio de funções, que, tipicamente, geram inequações do tipo produto/quociente, o qual provavelmente estariam estudando em suas aulas regulares; ao que sua fala indicava, Gianluca parecia, por um momento, titubear sobre a possibilidade de se efetuar $0/3$. Enquanto isso, André operou, na calculadora, 0 dividido por 3. Após verificar o resultado, interrompeu o diálogo entre Gianluca e o professor, provavelmente por naquele instante crer, com mais convicção, em que tinha a resposta à indagação feita anteriormente.

A: Não, não, a gente pode fazer isso aqui mesmo. Pára, pára, pára [*Gianluca estava falando ainda*]. A gente não precisa fazer isso aqui [*risca seus cálculos anteriores*]. E nem isso daqui. Porque zero dividido por três dá zero. E porque $x^2 = 0$, e x é igual a raiz de zero, x é igual a zero [*mostrando no papel*]

O professor, aparentemente satisfeito com a evolução da conversa, buscou encerrar essa discussão, apresentando seu ponto de vista: levantou-se da cadeira

e escreveu no quadro a expressão $A.B = 0$, perguntando “se A e B são números reais, o que se pode falar a respeito deles?”. André afirmou estar faltando o x, enquanto que Gianluca, sorrindo, justificou que apenas era possível falar “que $A.B = 0$. Só isso...”.

F: Quero falar do A e do B, isoladamente.

[...]

G: São opostos ou alguma coisa assim?

A: Um deles tem que ser zero e o outro pode ser qualquer número.
[*fornece vários exemplos de cálculos onde um número multiplicado por zero resulta em zero*]

Todos chegaram ao consenso de que pelo menos um dos dois valores seria zero. Então, o professor perguntou-lhes se esse raciocínio tinha alguma relação com a equação $3x^2 = 0$:

A: Claro.

G: Pode ter ué ...

A: Não, não: Claro!

F: Por quê?

A: Se... se 3 vezes x^2 dá zero... eu sei que... x^2 vai ter que ser zero...
Porque 3 vezes algum número... |

G: [*demonstrando ter entendido*] Ah! Tá certo!

A:... somente o zero, que vai dar zero.

Resumo do episódio e uma análise inicial

Este breve episódio envolveu apenas a função quadrática canônica obtida através de $y = x^2$. O gráfico esboçado no *Graphmatica*, por sua vez, permaneceu estático durante todo o diálogo. Para provocar a discussão entre os estudantes,

talvez um desenho apresentado no livro obtivesse o mesmo desempenho que o software. O professor, perguntando aos alunos o porquê de terem concluído que 0 era a raiz de tal função, manteve o grupo voltado às reflexões algébricas; poderia ter perguntado, por exemplo, em que ponto o gráfico da função possuía intersecção com o eixo x , explorando também a definição gráfica de raiz.

Mas foi a definição algébrica de raiz, reiterada pelo professor, que permaneceu nessas cenas: a ele, bastava que substituíssem x por 0 para verificar $y=0$. O que se pôde verificar foi um incômodo, por parte do professor, ao perceber que os estudantes trabalharam algebricamente apenas com os algoritmos costumeiros para encontrar a raiz da função. Isso ficou claro não apenas por evocarem a fórmula de Bhaskara para determinar a raiz que já conheciam, mas também pela expressão unanimemente utilizada por todos os participantes da pesquisa: “raiz é quando o y é igualado a zero”.

A definição algébrica para raiz, ou seja, um valor numérico do domínio para o qual seu correspondente valor na imagem é zero, foi apresentada de maneira problemática na linguagem dos estudantes. “Raiz de uma função”, em termos algébricos, deixou de ser um valor numérico, passando a configurar um **procedimento**: “é quando igualamos o y a zero”.

Porém, a presença da calculadora tornou-se de extrema importância para os estudantes, como se pôde ver neste episódio, no sentido de transporem a dificuldade na qual se encontravam. O pesquisador, autor deste texto, não havia programado uma observação maior sobre o uso dessa mídia, mas a forma com a qual ela atuou em diversos momentos dos EE me levou a aprofundar as análises sobre seu papel. No próximo episódio, a calculadora não aparece apenas num momento em que o software é pouco utilizado, mas, como poderá ser notado, é usada articuladamente com o software gráfico e com a mídia lápis-e-papel. Em relação ao *Graphmatica*, este volta a constituir, de maneira intensa, o pensamento desse grupo.

5.1.5 Episódio 5: O “teorema” AGGA.

Por que foi construído

Este extenso episódio foi, na verdade, o primeiro a ser identificado como uma seqüência de cenas que contivessem dados para se chegar a respostas à pergunta de pesquisa. Também se deu durante o quarto encontro e foi construído porque, a partir da influência das perguntas algébricas do professor, os estudantes transitaram pelas representações gráficas e algébricas de funções, através de ações sobre o software, construindo conjecturas com o mesmo, através de várias funções representadas graficamente. Pude identificar, em tais ações, características dos pontos de vista teóricos que já inspiravam o pesquisador-professor Francisco na época dos experimentos. O título do episódio deve-se, pois, à conjectura construída e comprovada pelos estudantes, a qual recebeu comicamente o status de “teorema”.

O episódio

Retomando o início da terceira ficha de trabalho, o professor pediu aos

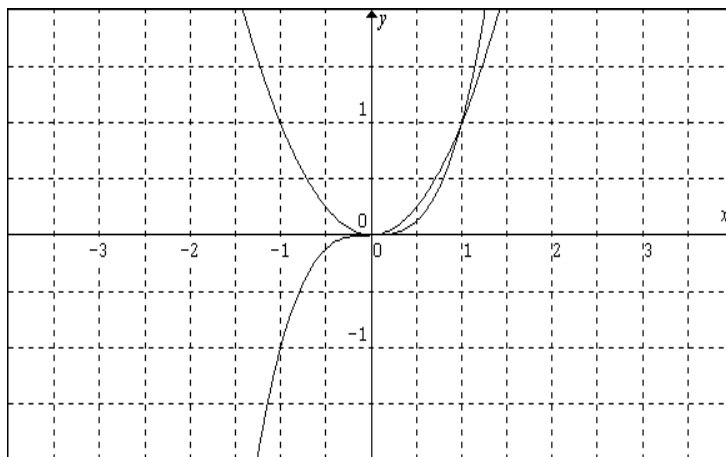


Figura 5.1.22: Gráficos obtidos a partir de gráficos de leis $y=x^2$ e $y=x^3$

alunos que apontassem as similaridades e diferenças entre os gráficos das funções de leis $y=x^2$ e $y=x^3$ (figura 5.1.22).

Gianluca e André observaram que os gráficos possuíam “vértice igual” e que “ambos têm x' e x'' como zero”. Observaram também que ambos os gráficos passam pelo mesmo ponto (1,1):

G: Os dois passam por esse ponto aqui, ó [*aponta com as mãos e procura o mouse*]. Aproxima lá André. [*André utiliza o zoom in*]

G: Por esse aqui. Pegou 1 e 1. Que é o **a**.

A: [?] É o **a**! tá certo.

F: É o **a**?

G: Ahã.

A: Não, não é o **a**, o **a** é um. Agora, são duas coordenadas, 1 e 1.

F: Será que é 1 e 1 porque o **a** é 1?

G: Eu acho que é.

A: Ah, sim. Com certeza. E porque também os outros números são zero. Porque senão não seriam 1 e 1. **Acho...**

O **a** e os “outros números” a que se referia André eram o **a**, o **b** e o **c**, coeficientes de $y = ax^2 + bx + c$; poderia ter ocorrido também de os estudantes suspeitarem da presença de polinômios de grau 2 e de grau 3, da forma $y = ax^2$ e $y = ax^3$, já que ficaram curiosos em relação à expressão analítica de uma função cúbica.

Percebendo o fato, o professor sugeriu que observassem a forma geral da função do 1º grau ($y=ax+b$) e da função do segundo grau ($y=ax^2+bx+c$) para deduzirem como seria a forma geral de uma função do 3º grau. Ambos acabaram deduzindo simultaneamente que esta seria da forma $y=ax^3+bx^2+cx+d$. Os estudantes observaram, mediante perguntas do professor, que na função $y=x^3$ têm-se $a=1$ e $b=c=d=0$.

Procurando interligar a observação gráfica feita pelos alunos com aspectos algébricos das suas observações, o professor perguntou-lhes se haveria um cálculo que mostrasse ser o par (1,1) comum às duas funções, inclusive para observar se os alunos iriam utilizar a discussão feita anteriormente, descritas nos episódios 3 e 4, no que se refere a verificar algebricamente se um par ordenado pertence ou não a uma dada função. Dando início a uma nova questão, no sentido de não ser prevista pelo professor, Gianluca afirmou que se o coeficiente **a** valia, por ex., 2, então os gráficos “passarão” no ponto (2,2).

G: Só tira a dúvida, então, assim, ó. Faz isso aqui, ó. [No *Graphmatica*, Gianluca digita as expressões $y=2x^2$ e $y=2x^3$, obtendo as respectivas representações gráficas]

G: 2 e... 2. Aproxima lá... [André utiliza o *zoom out*; a figura 5.1.23 reproduz a imagem que constava na tela nesse momento] Olha o 2 e 2 aqui, mais para cima, sobe um pouco [André utiliza a barra de rolagem]. Olha o 2 e 2 aqui.

AG: [juntos] Dois e do... |

A: E um? [surpreendendo-se]

G: Aqui e aqui, é esse pontinho aqui, é 1.

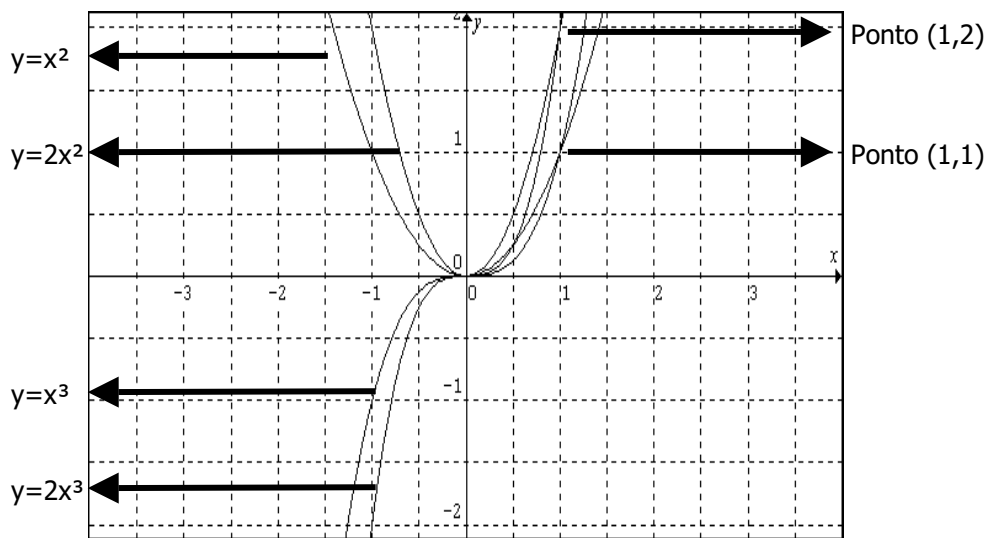


Figura 5.1.23: Tela com os gráficos de $y=x^2$, $y=x^3$, $y=2x^2$ e $y=2x^3$, com um fator de *zoom in* utilizado por André; apesar de ser possível visualizar o ponto (1,2), Gianluca solicita a barra de rolagem.

A: É, mas se eu não me engano, a sua tese é que era | iria sair 2 e 2.

G: É, era. Mas não foi... [sorrindo]

F: O 2 e 2 está aí onde você está clicando agora, né? [após verificar que os gráficos de $y=2x^2$ e $y=2x^3$ continham o ponto (1,2), André seleciona o ponto (2,2) para visualizar a "quebra" da hipótese anterior; ver figura 5.1.24]

A: Sim, é exatamente onde eu selecionei agora.

G: Ah, e o **a** está no eixo y , então.

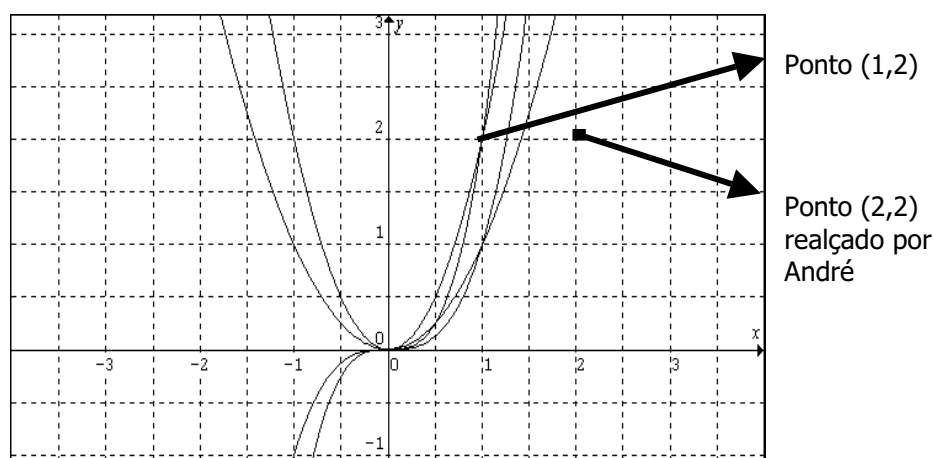


Figura 5.1.24: Tela com os gráficos de $y=x^2$, $y=x^3$, $y=2x^2$ e $y=2x^3$, obtida pelos estudantes

Com isso, a visualização dos gráficos de $y=2x^2$ e $y=2x^3$ levou os estudantes a verificar que eles possuem o ponto (1,2). Gianluca, logo após ter sua hipótese refutada, não se frustrou e logo procurou uma relação entre o coeficiente **a** das funções $y=ax^2$ e $y=ax^3$ e pontos do gráfico. Tão logo Gianluca afirmou que “o **a** está no eixo y ”, os estudantes deram início a uma tentativa de generalizar a noção de que gráficos referentes a funções de leis da forma $y=a.x^n$ passam pelo ponto (1,a). O formato $y=a.x^n$ foi idealizado mais adiante, porém a tentativa de generalizar a característica se evidenciou no fato de os alunos fornecerem vários exemplos numéricos da propriedade que gradualmente elaboravam.

Essa conjectura foi construída enquanto outras discussões surgiam, como as que abordaram formas completas de funções de 1º, 2º e 3º graus, sendo que o seu processo parece ter sido gerado por uma espécie de “acordo” entre os alunos

e o professor: os primeiros se interessaram pela generalização que começavam a construir, enquanto “toleraram” a insistência do segundo em buscar uma forma algébrica para verificar as conjecturas que surgiram.

F: Beleza. Como que eu sei que é no ponto (1,2) que os dois gráficos se encontram?

A: Ah, pelo desenho! Olha [*mostra a tela do computador*] um e dois [*André aponta as coordenadas na tela*]

F: Pelo desenho?...

A: É, pelo desenho.

A observação da representação gráfica mostrou-se suficiente para ambos e, diferentemente do episódio 4, foi verbalizada. O professor perguntou se havia um “cálculo” que verificasse a afirmação dos alunos, oferecendo-lhes novas folhas de papel.

A primeira reação de cada um deles foi sensivelmente diferente: enquanto André efetuou cálculos novamente com a fórmula de Bhaskara, Gianluca hesitava em iniciar qualquer operação, mantendo sua confiança na visualização, ao indagar: “Só de olhar pra função não dá para achar todos os pontos da parábola?”.

Enquanto André concentrou-se em sua tentativa de resolver a questão proposta no papel, Gianluca novamente retomou sua conjectura visual: “Os gráficos de $y=2x^2$ e $y=2x^3$ passam no (1,2) porque o **a** é 2”. Ao professor novamente bastaria que os alunos pensassem em substituir x por 1, para que y tivesse o mesmo valor nas duas fórmulas.

André caprichava em seu desenho da função $y=2x^2$, no papel, construindo uma tabela com vários valores e com auxílio da calculadora. Enquanto isso, Gianluca fez várias experimentações usando o *Graphmatica*, verificando que os pontos (1,1), (1,2) e (1,3) pertenciam, respectivamente, aos pares de gráficos de $y=x^2$ e $y=x^3$, $y=2x^2$ e $y=2x^3$ e $y=3x^2$ e $y=3x^3$, os quais traçou sem qualquer indicação do professor.

Nesse contexto, Gianluca parecia desconfiar de que as características que eles levantavam eram específicas para um certo formato de funções polinomiais³¹. Procurando dar uma dica a Gianluca, o professor afirmou que a conjectura deles referia-se a um valor específico de **x** (mas não falou que era 1), ao que Gianluca contestou, afirmando ser o mesmo **a**.

F: Mas nós estamos trabalhando com um x especial, não estamos?

G: Não. Fale outro.

F: Dois |

G: ...outro **a**.

F: Outro **a**? Não, outro x...

G: Não, outro **a**.

O professor então sugeriu $a = 4$, cedendo ao desejo de Gianluca, que esboçou o gráfico de $y = 4x^2$ e de $y = 4x^3$, e, ao usar *zoom in* e as barras de rolagem, verificou que ambos possuíam o ponto (1,4). Gianluca afirmou que “o y é o 4, que é o **a**”; indagado sobre quem seria o x naquele ponto, respondeu que seria 1, e o professor procurou apontar que assim o fora para os outros pares de gráficos.

Gianluca frisou que se tratava de funções “específicas”: esboçou os gráficos de $y = 4x^2 + 3x - 12$ e de $y = 4x^2 + x$ para verificar que se não fosse usado $b=c=0$, numa expressão do tipo $y = 4x^2 + bx + c$, o par (1,4) não pertenceria necessariamente ao seu gráfico. Essa conclusão fora, novamente, resultado da visualização dos gráficos no *Graphmatica* mediante manipulações dos coeficientes em expressões algébricas.

Ao que tudo indica, André se absteve completamente dessa discussão, enquanto esboçava o gráfico de $y=2x^2$ no papel (figura 5.1.26), o que levou

³¹ Embora tivesse mencionado o termo “funções polinomiais” durante as atividades da 2ª ficha de trabalho, este termo não foi mencionado durante este episódio, sendo que ele aparece aqui devido à formalização normal da linguagem matemática e ao processo de descrição detalhada que caracteriza um estudo qualitativo.

aproximadamente 8 minutos. Terminada a tarefa, “retornou” ao grupo, desejando comparar seu gráfico com o do software, e perguntou se o ponto (2,8) pertencia ao gráfico. Como o fato de haver vários gráficos desenhados parece ter atrapalhado a visualização desse ponto no plano do *Graphmatica*, André utilizou a tabela.

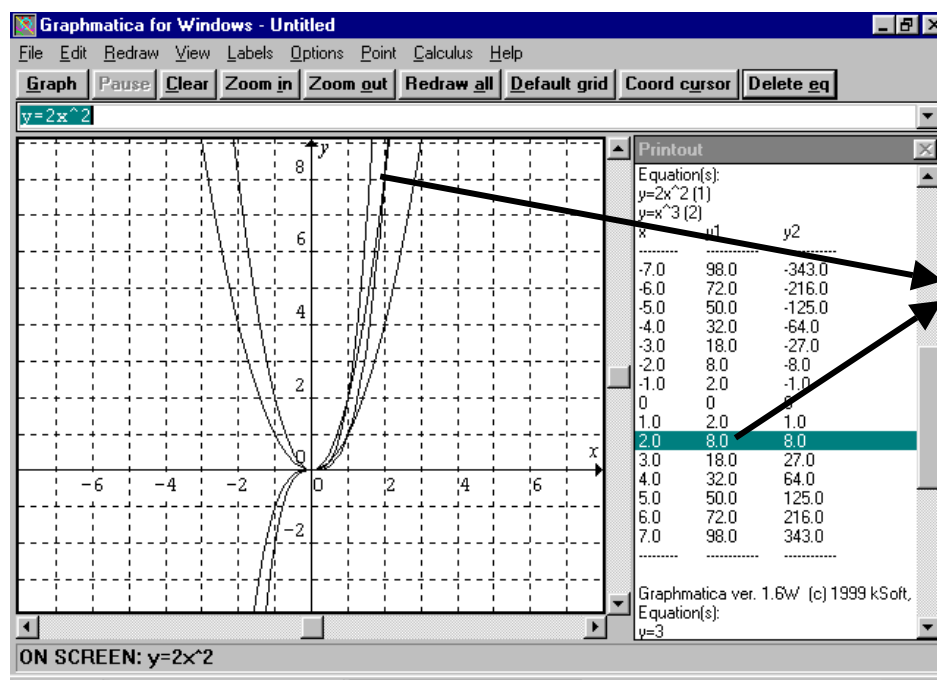
A: Coloca aí o gráfico pra mim, $2x^2$, por favor.

G: $2x^2$ é esse aqui, ó. [*mostra para André*]

A: Ele tem o ponto [...] (2,8)? [*o professor sugere a opção "Coord Cursor", mas André tem uma opção melhor*]

A: Porque você não usa a tabelinha?

A: [...] [*confirmam o ponto (2,8) na tabela – figura 5.1.25*] Então tá certo meu gráfico aqui. Uf! 32!...Tive que ir até o 32.



André sugere a tabela, provavelmente porque o desenho não deixa clara a informação que deseja.

Figura 5.1.25: O gráfico esboçado por Gianluca e a tabela solicitada por André

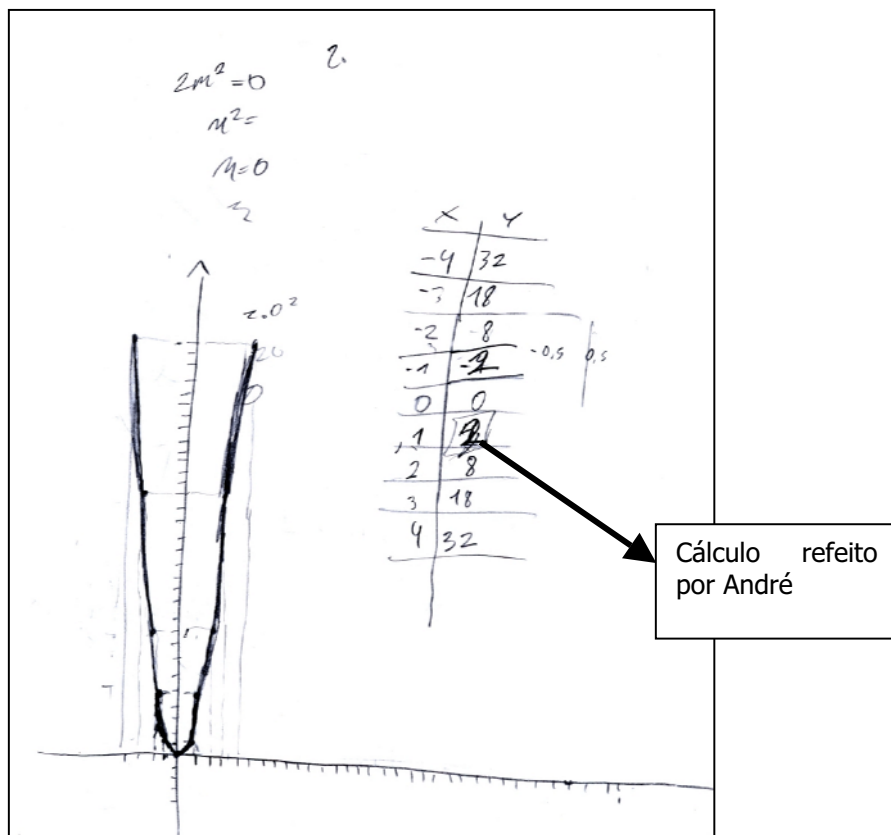


Figura 5.1.26: O gráfico e a tabela feitos por André

Ao retomar a questão do ponto (1,2), André alertou que esse ponto não constava em seu gráfico, ao que Gianluca rebateu indicando a presença desse ponto no gráfico disponibilizado pelo *Graphmatica*. André, nesse momento, procura refazer seus cálculos, registrando um ponto de vista em relação à mídia computador:

A: No $2x^2$ não passa por esse ponto no gráfico que eu fiz agora. Eu tô errado, então... porque no computador... você acha que vou estar errado? [ou melhor,] o computador vai estar errado?

F: Vamos descobrir onde está o erro? Na sua tabela onde que eu vou descobrir isso?

G: No y.

A: Tem o 1 e o 4 e não o 1 e o 2. E aqui ele está 2. [*André havia encontrado o ponto(1,4); ver tabela da figura 5.1.26*]

[...]

A: Eu peguei o um, né? Duas vezes um [*na calculadora*] é igual a 2, não peraí. Um... uma vez um é igual a um, vezes dois é igual a dois... Certo, é dois, não é quatro. Tá certo.

O problema havia sido a ordem das operações: André havia efetuado, com a calculadora, $2.1^2 = (2.1)^2 = 4$ ao invés de $2.1^2 = 2.1 = 2$. Finalmente retomaram a questão, e o professor insistiu na busca de um cálculo que justificasse a conclusão anteriormente obtida através da observação visual. O trecho a seguir mostra que, apesar de essa questão ainda não estar resolvida, os estudantes avançaram em maneiras mais formais de enunciar propriedades matemáticas presentes nessa discussão, nesse caso, indicando a generalização de uma característica constatada visualmente.

F: Se fosse $3x^2$ e aqui $3x^3$ ia dar (1,3) [*retomando a questão*]

A: Hum hum

G: Isso.

F: Por que que acontece isso?

G: Porque só tem o **a**. Não tem nem **b** nem **c**.

[...]

G: Cálculo, cálculo mesmo acho que não tem. É só ir traçando gráficos |

F: E nem a tab | [*o professor iria sugerir a tabela*]

G: E ver que todos eles vão passar em...um ponto em comum.

F: Só traçando gráficos?...

G: Só traçando gráficos.

F: André concorda?

A: Acho que deve ter um jeito.

F: Qual será que é?

A: Quando **b** e **c** é zero, existe o ponto **a** é igual **a** na função onde a coordenada seria 1 "vírgula" **a** [*esta frase foi proferida de modo "solene", como se estivesse lendo um teorema em um livro; resolve então escrever essa dedução (figura 5.1.27)*].

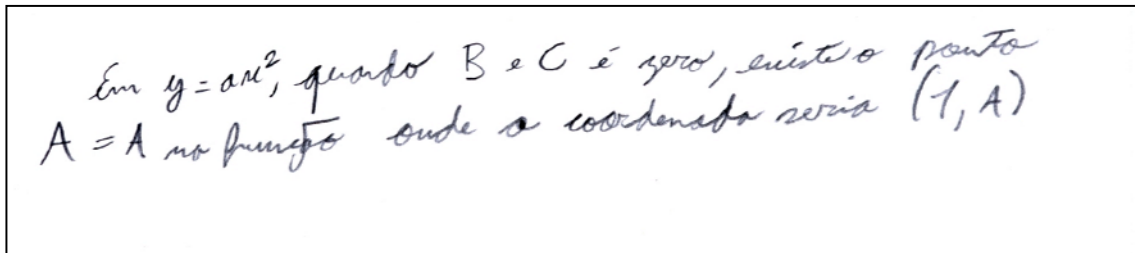


Figura 5.1.27: André escreve a afirmação anterior.

[...]

F: Prove. Prove que em toda função | em todo par de funções |

A: Onde **b** e **c** é zero.

F: ...do tipo $y = ax^2$...

G: ax^2 , mais x^2 | x^3 ...

O grupo prosseguiu em procura da generalização algébrica: o professor procurando prosseguir na fala de André, o qual já havia mostrado que o ponto tinha a forma (1,a); André restringindo as famílias de funções em questão ("Onde **b** e **c** é zero"), e Gianluca estendendo a generalização, ao mencionar os expoentes de x .

F: [...] elas se encontram no ponto, qual ponto você falou?

G: Um e |

A: Um e **a**

G: **a**

F: Ok. Prove.

G: Só olhar na reta [no gráfico] aqui, Chico!!!... [*sorrindo e "simulando" estar bravo*]

F: Ah, mas eu digo pra você que eu estou sem óculos hoje e não consigo ver direito o desenho.

G: Então chegue bem perto. [*todos riem das brincadeiras*]

Apesar da insistência do professor, sua estratégia provocou mais reflexões na álgebra dos estudantes. Desta vez, diferentemente do episódio 4, André percebeu que as "regras algébricas" (fórmula de Bhaskara, relações de Girard, fórmulas do vértice), utilizadas em aula, não eram úteis para responder tal questão.

Através de perguntas feitas pelo professor, André se convenceu de que determinar as raízes não significa mostrar que (1,2) pertencia ao gráfico da função. Quanto mais Francisco insistia na "prova" algébrica, mais a visualização era utilizada pelos estudantes: Gianluca chegou a esboçar mais gráficos no *Graphmatica*, desta vez variando os expoentes. De modo dinâmico e com sugestões de André, obteve os gráficos de $y=x^5$, $y=x^6$ e $y=x^7$. Ao decidir por esboçar o gráfico de $y=x^{65}$ (figura 5.1.28), provocou gargalhadas de André.

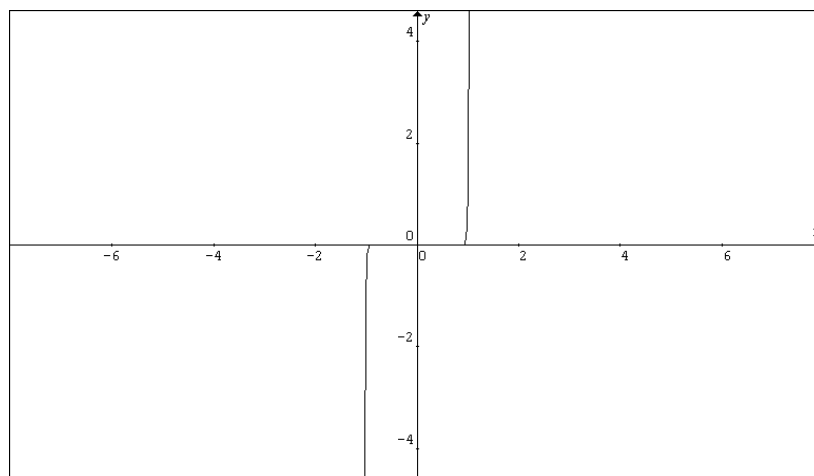


Figura 5.1.28: Gráfico de $y = x^{65}$, esboçado junto a outros por Gianluca e André

Refeito dos risos, ele próprio retoma a questão:

A: [...] Agora eu preciso encontrar uma conta que se refira ao ponto [...] da forma $(a,1)$.

F: Aqueles pontos são da forma $(a,1)$?

[...]

G: Não é $(a,1)$. É $(1,a)$ [*O professor faz um sinal positivo com o polegar para Gianluca*]

Após breve discussão sobre a ordem das coordenadas, o professor incentivou os estudantes a verbalizar a idéia que possuíam nesses tons mais formais, atribuindo-lhes a formulação do problema:

F: [*Dirigindo-se ao quadro*] $(1,a)$. Isso. Então, o nosso problema agora, crianças, é o seguinte: prove pro tio Chico, [*risos*] que toda função do estilo ax^2 e ax^3 [*escreve ax^4*]

A: E ax^4

F: E ax^4 , escapou [*risos*]...

A: E ax^5 e ax^6 e ax^{65}

F: Prove que todos esses passam pelo ponto $(1,a)$

[...]

A: Um cara já inventou isso.

G: Já inventou e ele [*o Chico*] está fazendo...

A: Já inventou e fez a fórmula, entendeu?...

F: Eu não, acho que vocês mesmos que inventaram aí.

A: Hum legal inventar fórmula. Vamos fazer isso mais vezes...

Seguiu, então, novo debate sobre como seria possível mostrar, no papel, que o gráfico de $y=2x^2$ continha o ponto $(1,2)$. Gianluca faz mais algumas tentativas no *Graphmatica*, enquanto André tem uma idéia:

A: Nã, nananananã...peraí. a gente pega aqui ó, y é igual a... quanto mesmo? Vamos pegar $2x^2$, tá certo?|

[...]

A: Eu sei que: y é igual a duas vezes um elevado ao quadrado. [**F:** hum] o 1 seria aquele outro valorzinho que a gente tem lá do $(a,1)$, $(a,1)$! [*frisa*]. Tá certo? [**F:** hum] o y seria esse| esse **1** aqui seria esse valor aqui, tá certo? [**F:** hum hum]. O y é igual a duas vezes o 1|

[...]

A: $(a,1)$. Duas vezes um, y é igual a dois. [**G:** não se o....] Ei! acho que eu achei alguma coisa!

[...]

A: Não, mas olha só. É muito fácil, se a gente pegar, por exemplo, o... vamos colocar qualquer número no lugar do **a**, certo? Se a gente colocar... 65, tá certo, se a gente colocar a coordenada um lá no canto vai dar o **a**!

G: Vai dar 65. Vai dar $(1,65)$.

A: Vai dar o 65.

A figura 5.1.29 ilustra as anotações que André realizou enquanto proferia as afirmações anteriores.

Handwritten notes by André showing the derivation of the point $(a, 1)$ from the equation $y = 2x^2$. The notes are:

$$y = 2x^2 \quad (a, 1)$$
$$y = 2(1)^2$$
$$y = 2.1$$
$$y = 2$$
$$y = 65$$

Figura 5.1.29: Anotações de André, concomitantes ao presente diálogo; apesar da ordem das coordenadas estar trocada, em relação à ordem constante nos livros de Matemática, os estudantes chegam ao cálculo insistido pelo pesquisador.

G: Quando x é um, |

A: Nananananana calma, vamos lá

G: No eixo y é 65 [junto com André]

Ressalta-se, aqui, que o número 65 apareceu diferentemente do uso que Gianluca fizera anteriormente desse número, ou seja, dessa vez ele fora usado como o coeficiente **a**, e não como expoente. Porém, as conclusões de ambos foram corretas, e não se confundiram com os dois usos que fizeram desse número. Prosseguindo, André procurou então organizar as idéias que haviam construído até aqui:

A: Vamos começar desde o comecinho, tá certo? $y=2x^2$, tá bom? Deixa que eu faço aqui, deixa que eu faço aqui. $y=2x^2$ [no papel] conforme a nossa pequena fórmula que eu vou chamar de AG, ou então GA, tanto faz AG GA. Aí a gente tem **a** e um, tá certo? Ou seja, esta coordenada sempre estará presente em uma fórmula do tipo y é igual a [**G:** x^2] ax^2 , ou y igual a [**G:** bx^2] x^2 .

[...]

A: x ao quadrado, cubo, quarta... isso aí ... tá certo?

G: Não só x^2 .

A: É. Vamos pegar como exemplo, a $y=2x^2$ [**F:** tá] e eu vou colocar a coordenada um no lugar do eixo x, no lugar do x, tá certo? $y = 2.1^2$, $y = 2$. O que que é o dois?

F: O que que é o dois?

A: É o a. [é notória a expressão de satisfação de André]

F: Hum hum.

O professor também demonstrava satisfação, afinal, estas últimas palavras de André se referiam àquilo que Francisco pretendia ao indagar sobre um cálculo que ilustrasse a conjectura dos alunos. André fez cálculos no papel, afirmando não ter dado certo. O motivo é o fato de ter substituído x por 2; ou seja, apesar de,

inicialmente, o grupo ter concluído que o ponto era (1,2), o par ordenado (2,1) ainda estava sendo considerado por André. Através das perguntas do professor os estudantes puderam perceber o que havia ocorrido.

Retomando os cálculos feitos por André, o professor indicou que a cada cálculo poderia-se associar um ponto. Quando Francisco apontou para o cálculo de (1,2), feito anteriormente por André, este apresentou uma notória expressão de descoberta.

A: Não, mas é... (1,2)? **[G:** ahã]... (1,2)! É!!!... *[o professor não consegue conter o riso ao se deparar com a expressão de descoberta de André]*

A: Legal!... (1,2)! *[expressão de contentamento de quem descobriu algo]*

F: *[controlando o riso]* Tá, mas isso não convence você daquilo? *[refere-se ao caso geral (1,a)]*

A: Convence. Acho que sim. Porque não importa que potência que eu eleve, não importa, ãh... Que número que eu coloque aqui na frente *[na frente do x , ou seja, o coeficiente a]*, vai sempre dar **a**... O **a**; não, peraí, quer dizer, o um e o **a**, não, ou o **a** e o um *[olha para G]*?

G: O **a** e o um.

A: O **a** e o um *[escrevendo]* como parte da fórmula AG GA.

G: Aliás... **[A:** "AGA"] Acho que é um e o **a**. É um e o **a** *[demonstrando convicção]*

A: Um e o **a**.

[...]

F: (1,a) ou (a,1)? Vocês vão ter que resolver porque vocês vão assumir a autoria juntos dessa fórmula.

A: AGGA... Fórmula...

F: (1,a) ou (a,1)?

A: É sempre x primeiro, então vai ser (1,a)

Infelizmente, a mídia escrita nos priva, autor e leitor, dos detalhes dos gestos, dos modos de se expressar, dos tons de voz e das imagens diversas que envolveram esse longo trecho. Após todas essas passagens, o “teorema” foi então enunciado, incluindo considerações dos estudantes em relação ao papel do professor Francisco, um professor que, nesse momento, apesar de seu viés algébrico ainda estar presente, era um professor que “perguntava”, que insistia em certas questões e que se preocupava menos com o tempo, com o cumprimento do roteiro.

F: Então vamos lá, enuncie o teorema AGGA.

A: AGGA.

G: Teorema de AGA [*escrevendo*]...

A: Teorema AGA... [*escrevendo e "discursando"*] também conhecido como A-G-G-A, tá certo? Consiste em... (1,a) né? [*para Gianluca*] [...] uma teoria extremamente bem elaborada por alunos do 1º colegial [*todos, aparentando satisfação, sorriem perante o tom com o qual André discursa*]... [...] André e Gianluca, e também com a ajuda não tão... quer dizer... [*Gianluca "cai" na gargalhada devido à dica que André fornecera sobre o que pensava acerca do papel do professor "que não ajudava muito"...*]

F: Não tão... [*também rindo*]

A: Extremamente importante... do professor Chico. [*brincando de consertar o discurso*]

[...]

A: Extremamente importante do professor Chico que dá aula para o 2º e 3º colegial.

F: Uma ajuda não muito auxiliadora, né? (1,a) ou (a,1)? [*todos riem muito*]

A: (1,a).

G: [*brincando*] Só complicando nossa vida aqui...

F: Ok, então (1,a) para aquelas funções, é isso?

A: (1,a).

G: (1,a), (1,a).

A: Ah, e ela serve... para funções...[*escrevendo*]

G: a | y =

A: Do tipo ...

G: $y = ax^2$

A: $y = ax^2$

G: E $y = ax^3$

A: E $y = ax^3$

[...]

A: Incluindo outras potências, vou colocar assim.

G: E ax^3

A: Incluindo outras potências...

G: ax^4 , ax^5 , ax^6 ...

A: ax^4 , ax^5 , ax^6 [*escrevendo*] e três pontinhos.

Posteriormente, o professor sugeriu a expressão $y=ax^n$. O “teorema” foi originalmente escrito nos seguintes termos, em um ambiente bem-humorado (figura 5.1.30):

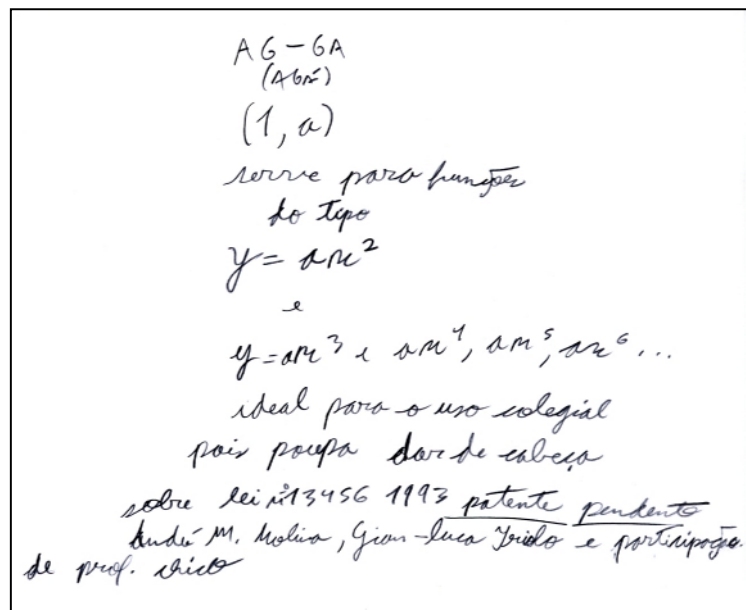


Figura 5.1.30: O teorema AGGA, em sua versão original.

Resumo do episódio e uma análise inicial

A partir da observação dos gráficos obtidos através de $y=x^2$ e $y=x^3$, verificaram que (1,1) era ponto comum aos gráficos. Gianluca construiu uma primeira conjectura, afirmando que assim o fora “porque o **a** é um”, referindo-se ao coeficiente **a** de $y=ax^n$; ao suspeitar de que, para **a** valendo 2, o ponto comum seria (2,2), teve sua hipótese reestruturada através do software, verificando então que, para $y=2x^2$ e $y=2x^3$, o ponto comum era (1,2).

As experimentações dos estudantes junto ao software não se limitaram ao uso dos comandos já observados em episódios anteriores, mas vários gráficos foram esboçados, alguns com e outros sem a intervenção do professor. A partir da “influência algébrica” deste, das várias experimentações junto ao software, da tabela e do gráfico obtidos por André através de $y=2x^2$, no papel, os alunos constataram que gráficos de funções de expressão algébrica $y=ax^n$ possuem o ponto (1,a) em comum. O processo dessa conclusão passou pelos esboços de vários gráficos, obtidos por $y=x^2$, $y=x^3$, $y=2x^2$, $y=2x^3$, $y=3x^2$, $y=3x^3$, $y=4x^2$, $y=4x^3$, $y=x^{65}$ e outros; tal conclusão recebeu comicamente o status de “teorema”, encerrando uma sequência de ações desse grupo permeada por vários conceitos matemáticos.

Porém, o viés algébrico do professor, verificado também neste episódio, desencadeou a explicitação de um dado emergente, qual seja, o modo como os estudantes apresentaram seus critérios de prova, de demonstração e de generalização. Tais critérios, bastante ligados à visualização, parecem ter ligação com o uso do software gráfico, devido a seu potencial em oferecer vários gráficos de maneira **dinâmica**.

Dessa forma, alguns pontos parecem me levar às discussões teóricas realizadas no capítulo 2: quais aspectos da discussão que Lévy (1993, 1999) desenvolve a respeito das mídias informáticas se estendem ao conhecimento matemático? Como a metáfora seres-humanos-com-mídias (BORBA, 1999, 2002; BORBA, PENTEADO, 2001) pode auxiliar a discussão sobre a relação entre o

ambiente “intermédias” (VILLARREAL, 1999) e o conhecimento matemático produzido, neste caso, em relação à coordenação das representações múltiplas de funções pelos estudantes? Retomarei essas questões mais adiante, já que são fundamentais na busca por respostas à pergunta norteadora desta pesquisa.

5.1.6 Episódio 6: Mais um “teorema”.

Por que foi construído

Principalmente pelo fato de que os estudantes relacionaram a paridade do expoente da variável x , em funções da forma $y=x^n$ e $y=1/x^n$, com a posição dos respectivos gráficos nos quadrantes do plano cartesiano. Permeando o processo dessa conclusão, ocorreram discussões numéricas várias, tais como simplificação de frações e, novamente, a ordem das operações e o uso da calculadora. A noção de limite também pode ser aqui identificada, de forma semelhante àquela observada no estudo da função racional, discutida no episódio 2.

O episódio

Este episódio contém cenas de dois dias bastante distintos. Conforme explicado no capítulo 4, a expressão analítica $y = \frac{1}{x^2 + 1}$ constava na segunda e na terceira fichas de trabalho. Essa função foi estudada pelos alunos no 3º e no 5º encontros.

Ao digitarem a expressão $y=1/x^2+1$, no terceiro encontro, repetiram o fato ocorrido com todas as duplas do piloto e também das outras duplas participantes, ao esboçar o gráfico da função de expressão analítica $y = \frac{1}{x^2} + 1$ (figura 5.1.31), já que a ausência do par de parênteses na expressão x^2+1 levou-os a essa função.

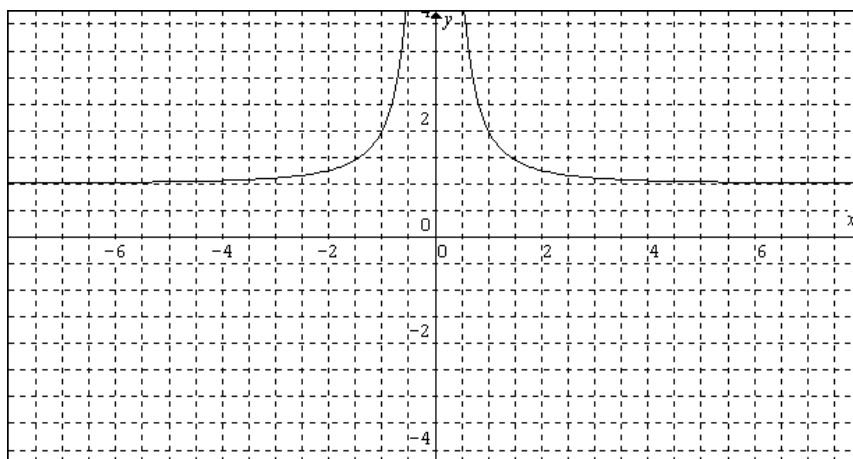


Figura 5.1.31: Gráfico obtido a partir de $y = \frac{1}{x^2} + 1$.

Resolvido o problema dos parênteses, os estudantes navegaram pelas características do gráfico obtido utilizando intensamente as opções *zoom in*, *zoom out* e as barras de rolagem.

“Não vai ser zero”, foi a primeira justificativa dos estudantes para dizer que o gráfico não tocaria o eixo x. Gianluca acertou de imediato a pergunta do professor, desta vez proferida sem o viés algébrico:

F: O x pode ser zero nessa função [*apontando o gráfico*]?

A: Não.

G: Pode. Fica 1 sobre 1, que dá um.

F: No gráfico a gente consegue enxergar isso ou não?

G: Aqui [*mostra o ponto (0,1) no gráfico do Graphmatica (figura 5.1.32)*].

F: Isso. Que ponto é esse?

G: (0,1)

A: Ah, que legal! [*expressão de contentamento por ter entendido*]

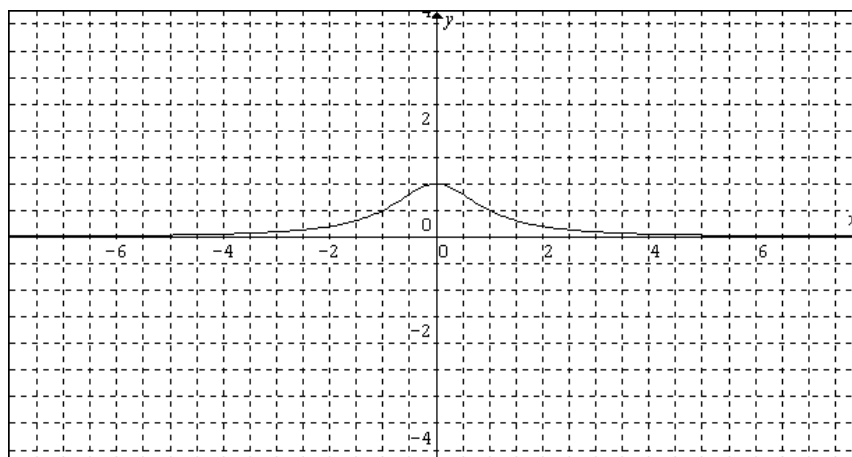


Figura 5.1.32: Gráfico obtido a partir de $y = \frac{1}{x^2 + 1}$

O grupo retoma, então, a questão do “encosta ou não encosta”. Gianluca afirmou que esse gráfico era parecido com o de $y = \frac{1}{x}$, só que “lá o x não podia ser zero, e aqui pode”. O professor, aproveitando a figura que Gianluca produzira no *Graphmatica* (figura 5.1.33), perguntou-lhe por que não encostaria.

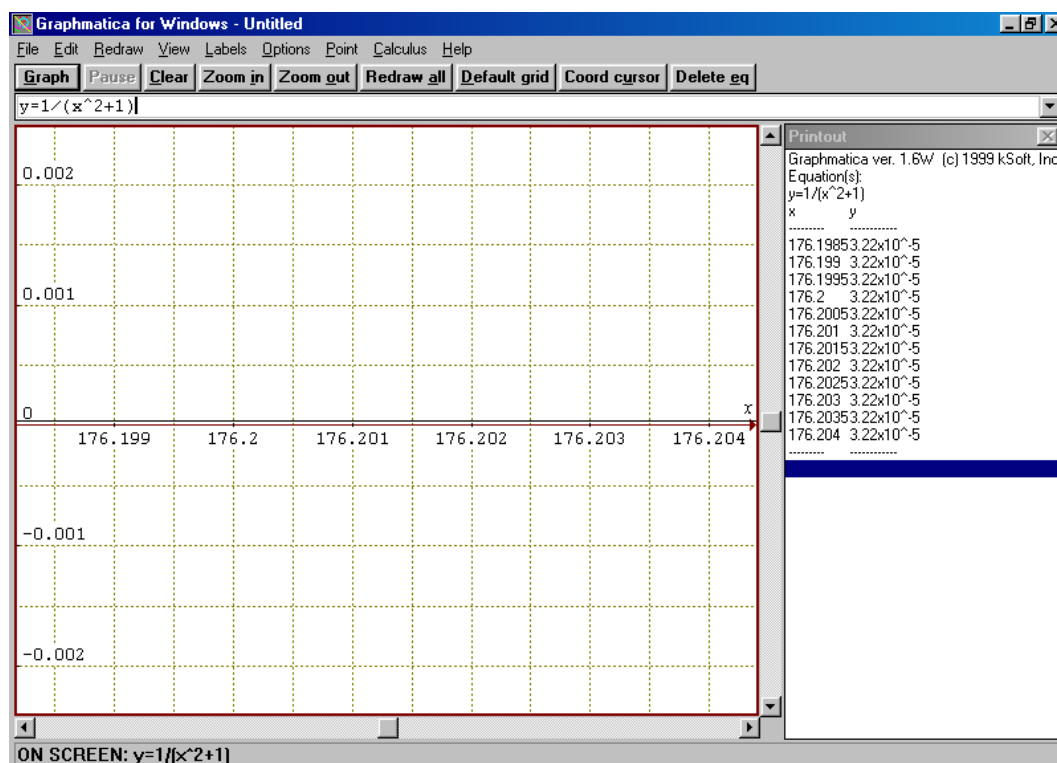


Figura 5.1.33: Gianluca usa a barra de rolagem.

F: [...] Quando eu pego valores de x cada vez maiores, para que valor se aproxima y?

G: [*manipulando o ponteiro do mouse sobre o gráfico*] maiores, né? maiores que....[*deixa a frase inacabada, provavelmente por estar prestando mais atenção ao comportamento gráfico*]

F: [*observando os valores que o gráfico disponibilizava*] Se você pegar o 176,2 [*que estava disponibilizado no gráfico*] para valor de x, o y é um valor... alto?

G: Posso fazer?

F: Tem a tabela... [*Gianluca aceita a sugestão (figura 5.1.33)*]

Discutiram, assim, o significado de 322×10^{-5} , chegando a um consenso de que era um número “muito pequeno”, o que ajudou Gianluca a concluir que o valor tenderia a zero.

F: [...] chegar mais perto do eixo x significa que|

A: Mas não cola [*gestos*]!

F: Mas não cola. Por que não cola?

G: Porque o nosso x não é zero.

F: Mas vocês acabaram de me dizer que o x pode valer zero...

A: Ah não. É o y que não pode valer zero.

O professor, aproveitando a imagem sobre a qual Gianluca estava trabalhando, onde o gráfico parecia estar superposto ao eixo x, perguntou:

F: Que ponto é esse?

G: [*corretamente*] É o ponto (250,0).

F: Ele está no gráfico?

AG: Está.

F: Então, quer dizer que, se eu puser 250 na fórmula e fizer a conta, então o y vai dar zero.

A: Vamos ver [*faz na calculadora*]

[...]

A: 0,0000159 e não dá zero. Então, não encosta!!

O grupo fechou a questão, concluindo que o y não seria zero. Além disso, o professor mostrou também que y não poderia assumir valores negativos, dando início à noção de conjunto imagem.

Ao retomarem essa função no quinto e último encontro, André digitou corretamente a expressão $y=1/(x^2+1)$, dizendo, em tom de brincadeira, que era uma “escarpa”, relacionando o gráfico à figura de uma montanha levemente íngreme, conforme nomenclatura aprendida na aula de Geografia, na manhã daquele dia. Mas Gianluca colocou em dúvida a posição dos parênteses.

André então retirou os parênteses, mudando a expressão para $y=1/x^2+1$, obtendo a figura 5.1.34, apresentada a seguir, incluindo a tabela disponibilizada

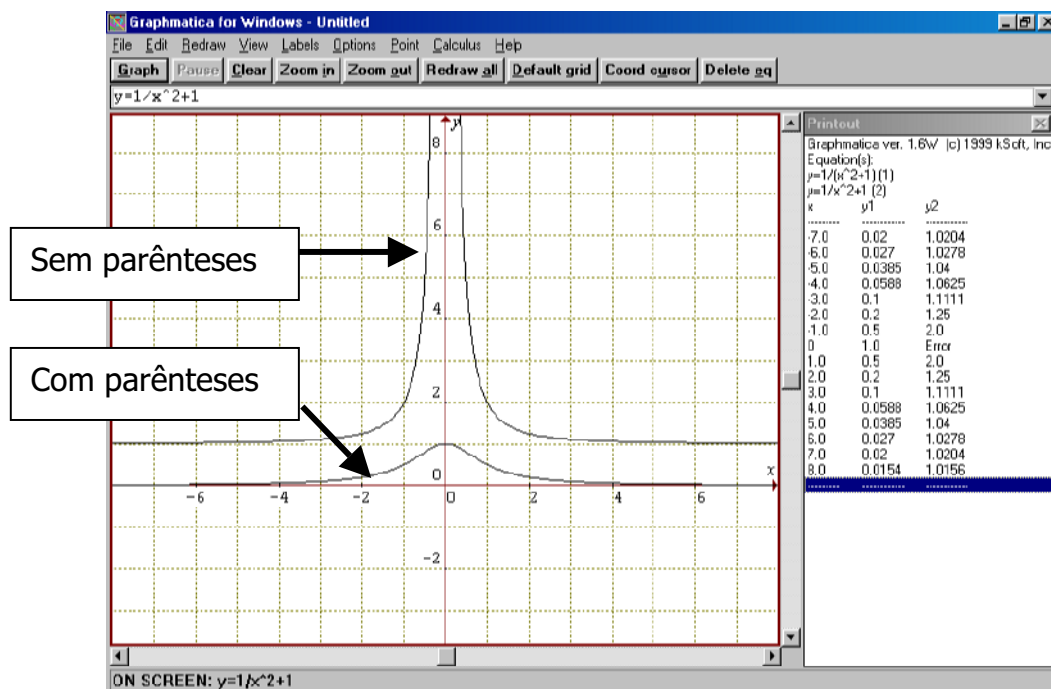


Figura 5.1.34: Gráficos obtidos a partir de $y = \frac{1}{x^2 + 1}$ e $y = \frac{1}{x^2} + 1$

por André.

Os estudantes afirmaram não saber qual seria a correta. Isso posto, a estratégia usada pelo professor foi a comparação com o cálculo de uma expressão aritmética. Perguntou-lhes se, uma vez desejando realizar o cálculo de $(2+3.5)$, digitando, na sequência, as teclas 2, +, 3, X e 5, poderia ser obtido o resultado correto. Após refletirem sobre isso, os alunos optam então pela “escarpa”, e deletam a “serra”, referindo-se ao gráfico com comportamento assintótico em relação ao eixo y.

Porém, André ainda acreditava que havia algo errado, achando que os parênteses deveriam ser colocados apenas no x^2 ; por isso, digitou a expressão $y=1/(x^2)+1$, trazendo a “serra” de volta à tela. Indagados sobre a ordem das operações que o software teria realizado, travam intenso debate até concluírem, pela segunda vez, que o gráfico correto era o da “escarpa”.

Ao falarem sobre o domínio, afirmaram, num primeiro momento, que são todos os reais. Semelhante ao ocorrido no episódio 2, acabaram mudando suas opiniões para “reais menos zero”.

André mudou novamente, afirmando com convicção que zero estava no domínio; ao descobrir que a opção *coord cursor* também poderia ser obtida clicando-se num ponto com o botão direito do *mouse*, garantiu que 0 estava no domínio porque existia o ponto (0,1) no gráfico. Procurando verificar se Gianluca estava realmente convencido da resposta de André, o professor indagou:

F: Olhando para aquela fórmula, eu posso trocar o x por zero?

G: Pode.

A: Pode.

F: Não vai dar problema de denominador dando zero?

G: Não, porque tem o mais um ali.

F: Certo...

A: Vai dar um sobre um que dá um. Vai dar exatamente esse pontinho aqui.

[mostra o ponto (0,1) no gráfico]

A partir da “escarpa” disponibilizada juntamente com a expressão $y=1/(x^2+1)$, André esboçou mais dois gráficos através das expressões $y=1/(x^3+1)$, $y=1/(x^4+1)$ e $y=1/(x^5+1)$ (figura 5.1.35), observando que, ao colocar expoentes pares, os gráficos ficavam no primeiro e segundo quadrantes, constituindo-se em “escarpas”, enquanto para expoentes ímpares o comportamento era diferente: exceto pelo deslocamento à esquerda, tais gráficos “pegam o segundo e o terceiro quadrantes”.

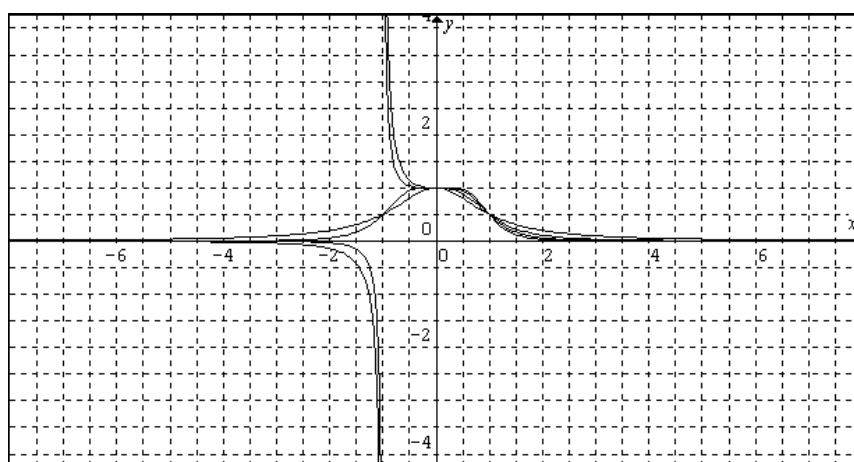


Figura 5.1.35: Gráficos obtidos a partir de $y=1/(x^2+1)$, $y=1/(x^3+1)$, $y=1/(x^4+1)$ e $y=1/(x^5+1)$.

Gianluca disse que se lembrava de terem discutido sobre a relação par/ímpar com as posições pelas quais os gráficos se apresentavam no plano cartesiano. Essa discussão ocorreu no quarto encontro, para as questões da terceira ficha de trabalho, que envolviam as expressões $y=x$, $y=x^2$, $y=x^3$, $y=x^4$, $y=x^5$ e $y=x^6$. Haviam tentado utilizar o “teorema AGGA” para explicar tal fato, porém não o conseguiram.

André, portanto, decidiu construir um novo “teorema”, escrevendo no papel: **“Todas as equações elevadas à expoente par ocupam o 1º e 2º quadrantes, enquanto as ímpares ocupam os 2º e 3º quadrantes, desde que não se some mais nenhum número $\in \mathbb{R}$ ao x ”.**

A Figura 5.1.36 representa o plano cartesiano que acompanha este novo “teorema”. Nota-se que a numeração dada aos quadrantes é diferente da adotada pelos matemáticos. O professor aceitou como válida a explicação de André, mas chamou-lhe a atenção para esse fato. A expressão “desde que não se some mais nenhum número $\in \mathbb{R}$ ao x ” foi escrita para justificar o deslocamento dos gráficos proporcionados ao se adicionar 1 a x^2 , x^3 ou x^4 dos denominadores das fórmulas digitadas.

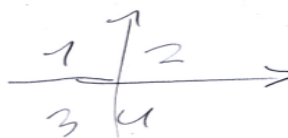


Figura 5.1.36: Numeração de André para os quadrantes.

Através das expressões $y=x^2$, $y=x^3$, $y=x^4$ e $y=x^5$ André obteve a figura 5.1.37, suficiente para que pudesse verificar a validade de seu “teorema”.

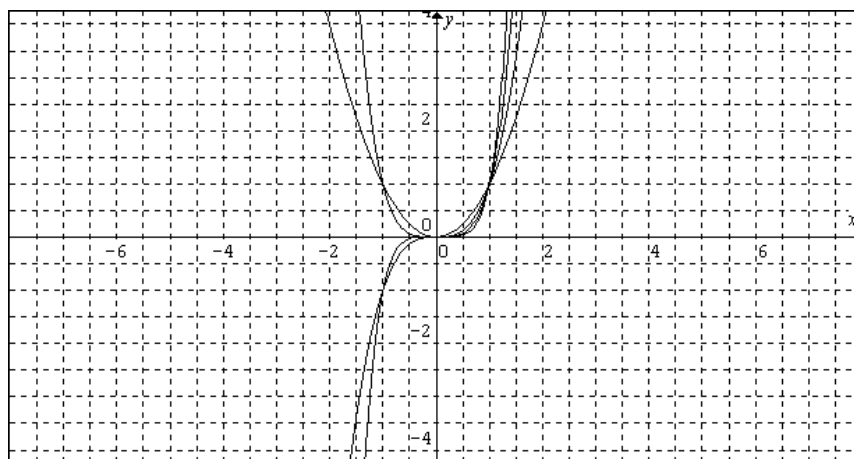


Figura 5.1.37: Gráficos obtidos a partir de $y=x^2$, $y=x^3$, $y=x^4$ e $y=x^5$

Gianluca pergunta qual havia sido a conclusão a que tinham chegado sobre essa relação. O professor, não respondendo prontamente, convidou-os a pensar

numa explicação numérica para o fato. Enquanto pensavam nisso, André digitou a expressão $y=x/x^5$:

A: Hummmm, defeito.

F: O que que aconteceu aí?

A: Nós temos um defeito na nossa fórmula. Olhe isso: quando eu coloquei x sobre x^5 ficou no primeiro, ficou no primeiro, e também no segundo [**G:** no segundo] e primeiro quadrantes.

Ou seja, o gráfico obtido através de $y = \frac{x}{x^5}$, disposto nos quadrantes 1 e 2 (da Matemática “formal”), não satisfazia a relação construída, porque o expoente 5, que é ímpar, deveria implicar gráfico nos quadrantes 1 e 3. (2 e 3 no esquema de André).

F: [...] faz no papel pra mim x sobre x à quinta [*olhando a tela*].

A: Quer que eu resolva?

F: Dá para simplificar essa fração?

G: Não.

A: [*balança negativamente a cabeça após pausa refletindo*]

F: Não?...

A: Dá.

G: Dá x à sétima?

Essa discussão foi longa. Gianluca encontrou, numa primeira “correção”, o valor x^6 . O professor então interveio, observando que estava simplesmente multiplicando o numerador pelo denominador.

André, por sua vez, encontrou x^4 , e digitou novamente o gráfico de $y = x^4$. Irritado por acreditar que o gráfico não estava aparecendo, foi alertado pelo

professor de que esse gráfico já estava no desenho (figura 5.1.38). Francisco, em seguida, pediu que revisse o cálculo feito no papel: $\frac{x}{x^5} \rightarrow \frac{x}{x.x.x.x.x} \rightarrow \frac{1}{x^4}$.

Na verdade, André havia escrito, ao final de seus cálculos, apenas x^4 ; o numerador 1 fora colocado após intervenção do professor. Ao esboçar o gráfico de $y = \frac{1}{x^4}$ (figura 5.1.38), verificou que se tratava do mesmo gráfico esboçado anteriormente, apenas mudando sua cor. André sorriu satisfeito e “vibrou” com a confirmação da validade de seu mais novo “teorema”.

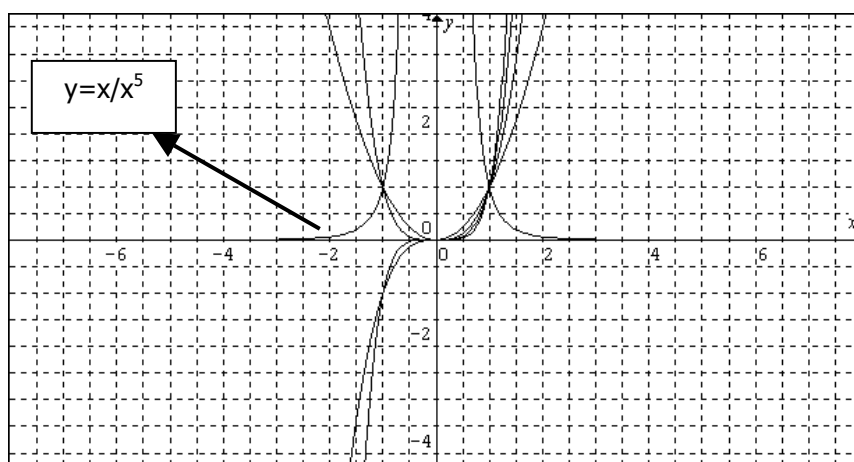


Figura 5.1.38: Junto aos gráficos anteriores, André esboça $y=x/x^5$

O professor retomou então a relação entre os quadrantes em que os gráficos são esboçados e a paridade dos expoentes de x . Essa questão foi trabalhada pelas outras duas duplas junto às expressões do tipo $y=x^n$ da terceira ficha, enquanto que, com os alunos, no quarto encontro, ela foi abandonada. A associação foi construída mediante muitas perguntas aos estudantes, que demonstravam dificuldades em expressar, verbalmente, tal relação.

Resumem-se as conclusões do grupo da seguinte forma, naquele momento, com a numeração dos quadrantes disposta da forma como ocorre nos livros: “Em gráficos obtidos a partir das fórmulas da forma $y=x^n$ e $y=1/x^n$, se n é par, os gráficos possuem seus pontos nos quadrantes 1 e 2; se n é ímpar, os gráficos possuem seus pontos nos quadrantes 1 e 3”. André resumiu tais relações num

formato gráfico, como mostra a figura 5.1.39, utilizando agora a numeração aceita pela comunidade matemática:

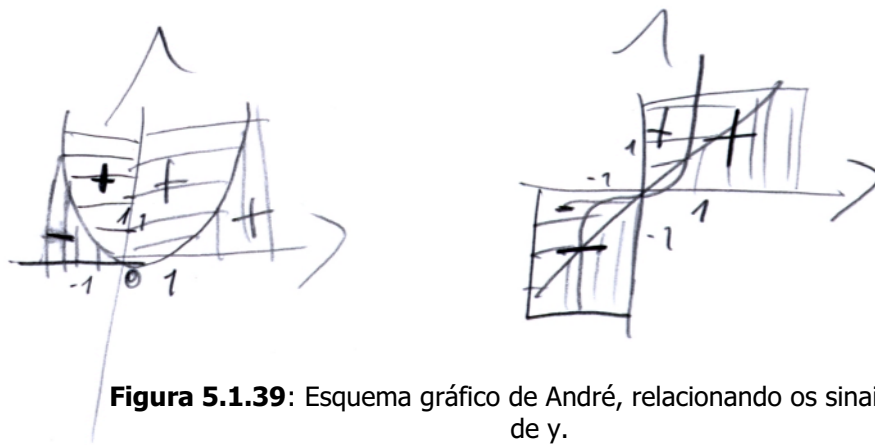


Figura 5.1.39: Esquema gráfico de André, relacionando os sinais de x e de y.

Os gráficos obtidos a partir das expressões $y=1/(x^3+1)$, $y=1/(x^4+1)$ e $y=1/(x^5+1)$ (figura 5.1.35) possuem uma translação, que não foi abordada a fundo, pois já não havia mais tempo. Desta forma, a última questão da terceira ficha de trabalho, que se refere à função de expressão analítica $y = \frac{x}{x^2 + 1}$ não foi estudada.

Resumo do episódio e uma análise inicial

Este episódio mostra como os estudantes trabalharam com a função de expressão analítica $y = \frac{1}{x^2 + 1}$, comparando seu gráfico com aqueles obtidos através de $y = \frac{1}{x}$ e de $y = \frac{1}{x^2} + 1$, de maneira que as discussões referentes à ordem das operações, domínio e a noção intuitiva de limites pudessem, novamente, ser trabalhadas, com exploração junto ao software, à calculadora, ao lápis-e-papel e através das três principais representações de funções (tabela, gráfico e álgebra).

Esse trânsito pelas representações, marcado por experimentações com o *Graphmatica*, permitiu que, ao final do episódio, André esboçasse gráficos com as expressões $y=1/(x^2+1)$, $y=1/(x^3+1)$, $y=1/(x^4+1)$ e $y=1/(x^5+1)$, estabelecendo uma relação entre a paridade do expoente da variável x e as respectivas posições dos gráficos no plano cartesiano, estendendo-se para expressões da forma $y=x^n$ ou $y=1/x^n$, construindo, assim, mais um “teorema”. A mesma conclusão foi desenvolvida pelas outras duplas participantes para funções do tipo $y=x^n$, porém, André e Gianluca diferiram na forma como chegaram a ela.

5.2 Maria Fernanda e Vivian: alunas que gostam de Matemática

Descrição das estudantes.

Estas amigas se destacavam nas aulas de Matemática por apresentarem bom desempenho (conceitos bimestrais A e B); afirmaram gostar de Matemática e demonstraram, durante os EE, a facilidade algébrica já relatada, nas descrições oferecidas pela professora, a qual caracterizou Maria Fernanda, juntamente com outro aluno de sua turma, como os mais habilidosos em Matemática.

Vivian, pelas descrições da professora, também possuía bom desempenho, mas diferia da amiga pelo modo como agia perante os exercícios mais difíceis. Maria Fernanda gostava de resolver os problemas em classe com o mínimo de interferência da professora e dos colegas (“ela gosta de resolver quieta, no canto dela, até conseguir”), enquanto Vivian costumava buscar a interação com os outros: “é ‘brigadora’, levanta e vem me perguntar, eu dou um ‘flash’, e ela resolve”, afirmou a professora.

Sobre suas experiências com computador, as alunas afirmaram que se resumiam mais a navegações na Internet, mas se recordaram que fizeram, na própria escola, um curso a respeito de aplicativos como editores de texto e planilhas eletrônicas.

Pude observar que, durante os EE, aquela característica que a professora citara a respeito de Maria Fernanda valeu também para Vivian: as falas não foram, em sua maioria, manifestações de diálogos intensos e “acalorados”, mas as conjecturas e questões levantadas eram trabalhadas de modo pausado, inclusive com poucas ações com lápis-e-papel. Ambas, com maior destaque para Maria Fernanda, refletiam bastante antes de se pronunciar a respeito de alguma questão.

O fato de serem amigas em muito facilitou a interação entre elas. Realizaram as atividades das fichas de trabalho em exatos três encontros, sendo uma ficha em cada encontro. O último deles realizou-se pouco mais de 15 dias depois do segundo encontro, já que Vivian ficou doente.

O leitor perceberá que os episódios com esta dupla são mais curtos que aqueles já detalhados junto aos alunos. Tal fato pode ser associado ao tempo em que os grupos estiveram atuando: André e Gianluca protagonizaram discussões demoradas, o que levou o respectivo experimento de ensino a ser realizado em 5 encontros. As mesmas fichas de trabalho, no entanto, foram usadas, junto às alunas, na razão de uma para cada encontro. Dessa forma, as “durações” dos episódios parecem ser proporcionais às durações dos respectivos EE.

Um detalhe técnico: nas falas transcritas dessa dupla, utilizo a letra **M** como inicial para Maria Fernanda, já que continuo usando **F** para o professor Francisco; como Maria Fernanda prefere ser chamada de Fernanda, assim será ao longo do texto.

5.2.1 Episódio 1: Paralelas que se cruzam ou que coincidem?

Por que foi construído

Este episódio ilustra como a experimentação das alunas junto ao *Graphmatica* produziu questões originadas a partir das representações gráficas. A noção intuitiva de limite, verificada pelos alunos com a função racional, aparece já

na primeira questão de todo o experimento de ensino com Vivian e Fernanda, ao trabalharem com retas. Outro motivo, talvez mais forte, refere-se a um questionamento elaborado pelo pesquisador, autor deste texto, que não ocorreu ao professor durante os EE: até que ponto a experimentação, a qual, nesta pesquisa, é bastante atrelada ao aspecto visual, pode limitar as possíveis conclusões dos estudantes?

O episódio

Fernanda e Vivian encararam a primeira questão da ficha de trabalho de forma a realizar no papel a atividade. O professor comentou: "Ah, vocês vão fazer no papel...". Após realizarem o desenho no papel, utilizando-se de três pontos³², Fernanda perguntou "se pode fazer agora no computador".

Observando o gráfico no computador, ambas relataram com facilidade características da reta apresentada: crescente, "corta" no eixo y em **b**, a raiz é 2. Indagadas sobre como seria possível confirmar que 2 é raiz, ambas mencionaram que, igualando y a zero, resolveriam a equação. Fernanda fez, no papel, os passos $y = x - 2 \rightarrow 0 = x - 2 \rightarrow x = 2$.

Na variação do parâmetro **a** (figura 5.2.1), afirmaram que, quanto maior seu valor, maior a inclinação das retas, sendo que a raiz "fica cada vez mais próxima de zero", dizia Fernanda, enquanto Vivian sobrepunha sua caneta sobre a tela do computador, num movimento anti-horário que simulava o movimento das retas, concluído com a caneta sobre o eixo y.

As alunas ficaram um pouco confusas ao trocar x por zero, depois y por zero, esperando que a reta ficasse vertical e seu ponto de intersecção com o eixo x fosse a origem. Verificaram que essa estratégia não surtira efeito. O professor

³² Esse procedimento é realizado em suas aulas regulares: apesar de dois pontos distintos serem suficientes para o esboço de uma reta, a professora sugere que a obtenção de um terceiro ponto pode identificar possíveis erros com operações, através da verificação do alinhamento ou não deste terceiro ponto com os outros dois.

optou então por buscar junto a elas uma relação entre os valores de **a** que foram digitados e a inclinação da reta.

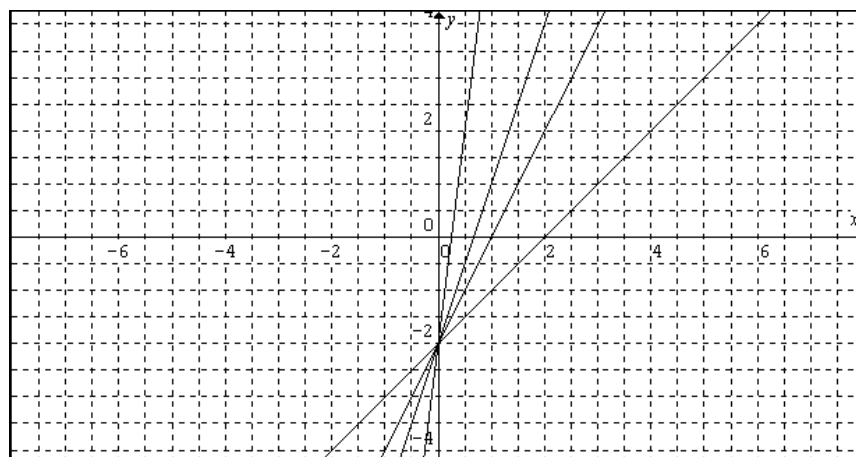


Figura 5.2.1: Gráficos obtidos com valores de **a** iguais a 1, 2, 3 e 8

Ao retomar a expressão $y=8x-2$, indicaram $\frac{1}{4}$ como raiz dessa função, fazendo o cálculo mentalmente, e o professor chamou a atenção para esse valor no plano cartesiano. Como as alunas não disseram mais nada, ele “deu vazão a sua álgebra”, influenciando bastante o modo como se seguiram as conclusões: perguntando qual é a raiz da expressão $ax+b=0$, Vivian rapidamente lhe respondeu que era $x = -b/a$.

F: [*Vivian vai falando a resolução da equação, enquanto o professor escreve no quadro $x=-b/a$*] Ok, vamos olhar agora pra isso daqui... Será que, se eu observar essa fração, eu consigo justificar o fato dessas retas estarem cada vez mais próximas do eixo y, ou seja, essa raiz estar chegando perto do zero?

M: Hum hum.

F: Como que é isso?

M: Ah, eles ficam cada vez menores.

F: Quem?

M: O x. A fração.

F: E por quê?

M: Porque você está div| você está aumentando o **a**, e está dividindo o b por um nu| por um número maior.

O professor voltou à situação gráfica e perguntou como poderiam fazer, variando o parâmetro **a**, para que a reta ficasse exatamente sobre o eixo y. Quando Vivian usou $a=0$, identificaram, junto ao *Graphmatica*, a função constante (Figura 5.2.2).

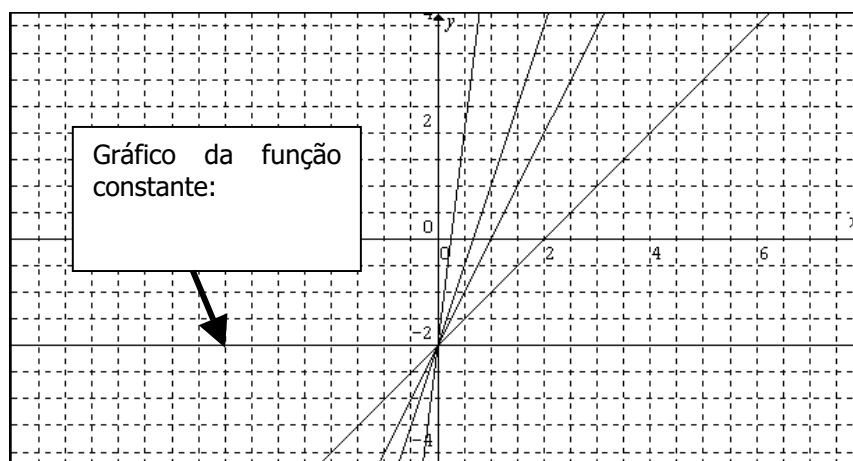


Figura 5.2.2: Vivian obtém o gráfico da função constante a partir da expressão $y=0.x-2$

Após longa reflexão, decidiram “limpar” o plano cartesiano e colocar outros valores de **a**. Utilizaram 10, 20, 100 e 400 (figura 5.2.3), concluindo, através da figura obtida, que a reta havia “chegado no eixo y”.

O professor perguntou se elas tinham certeza, e ambas garantiram que sim. Porém, ele as recordou das opções de *zoom* do software, até então não utilizadas. Após uma seqüência de *zoom in*, ambas proferiram expressões de espanto, ao chegarem à tela correspondente à figura 5.2.4.

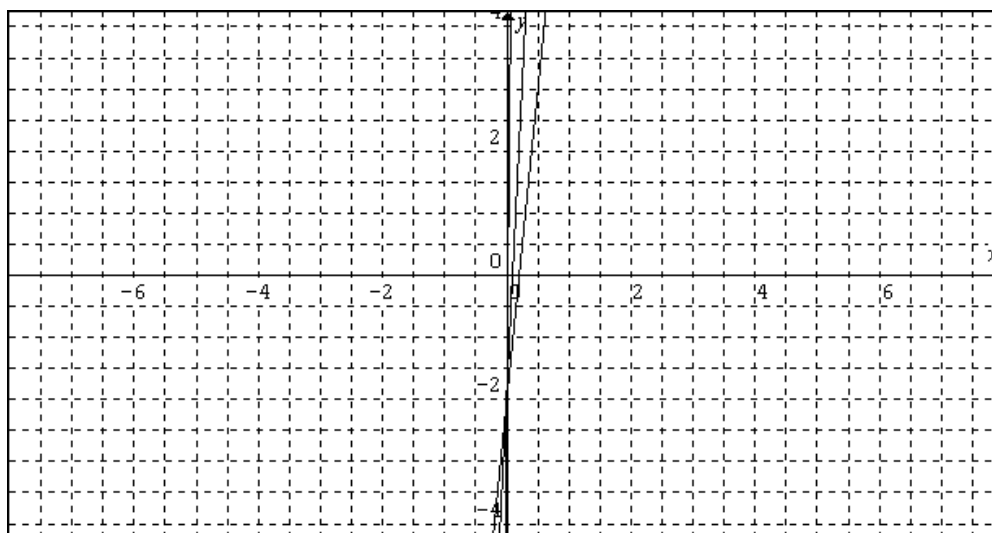


Figura 5.2.3: A: reta obtida a partir de $y = 400x - 2$, originalmente azul, fica justaposta ao eixo y. A reta que “descola” desse eixo nas proximidades do ponto $(0, 3)$, se refere à expressão $y = 100x - 2$

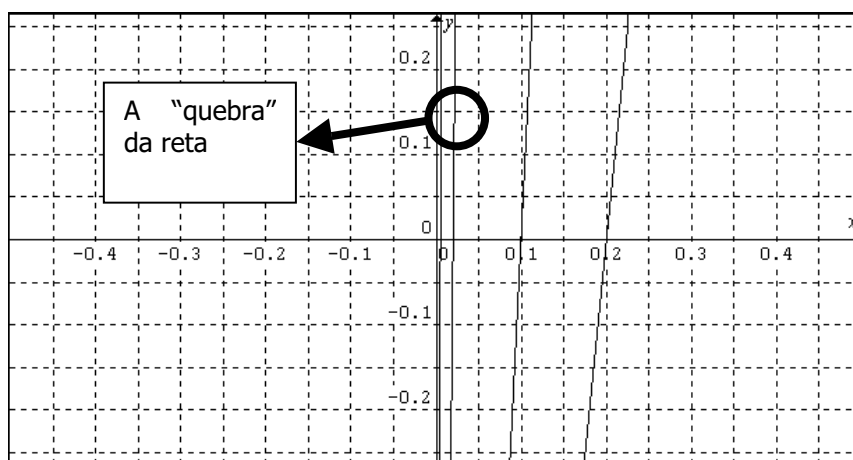


Figura 5.2.4: A “quebra” da reta à qual se referiu Vivian

Seguem-se algumas observações geométricas. O professor perguntou a ambas que ângulo a “reta azul” estaria formando com o eixo x. Após dizerem que o ângulo é 90° , confirmaram também 90° para o ângulo que o eixo y forma com o eixo x.

M: Hum... tá chegando perto, mas não tem...

[...]

F: Mas a azul também faria 90° ?

V: Não, um pouquinho menos.

M: Hum hum...

V: Mas como isso!? [*ambas sorriem perplexas*]

[...]

F: Mas, então, as duas estão paralelas?

MV: Estão!

V: Olha! Tá retinho... [*apontando a reta no Graphmatica*]

M: Não dá pra ter x no zero... [*faz um gesto com o braço como se este chegasse, verticalmente, bem perto do eixo y*]. Porque a gente tem o **b**.

Fernanda iniciou a conclusão a que chegariam mais tarde. Ela indicou que a reta passava pelo ponto $(0,b)$, no caso, $(0,-2)$, e pela raiz (ao falar “x”, na passagem anterior), a qual não estaria no ponto $(0,0)$; esse pensamento foi brevemente interrompido.

F: Então, essa reta azul ela está paralela mesmo ao eixo y ou ela é...

V: Ela quebrou... [*sorrisos*]

F: É... isso aí é o lance do digital, né?...

M: Ah, então... então está paralela!

F: Ela está paralela?...

M: Está.

V: Está.

Aqui ocorreu o questionamento de Vivian a respeito da apresentação que o *Graphmatica* fez em certos lugares do gráfico, de forma que os *pixels* pareciam indicar uma “quebra” na reta (figura 5.2.4). No entanto, a explicação do professor foi suficiente para que ambas reafirmassem o paralelismo, embora Fernanda retomasse seu pensamento anterior:

F: Mas eu tô pensando na reta inteira: vocês acreditam que ela é paralela ao eixo y inteiro?

M: Ou será que vai ter uma hora que vai [faz um gesto com a mão, da direita para a esquerda, de cima para baixo, indicando que a reta "encontrará" o eixo y]

F: Vai encontrar?...

M: Vai ter a hora lá do -2...

V: É... [aplica o zoom in algumas vezes e usa pela primeira vez a barra de rolagem (figura 5.2.5)]

Fernanda confirma sua hipótese junto ao software, usando a imagem da figura 5.2.5:

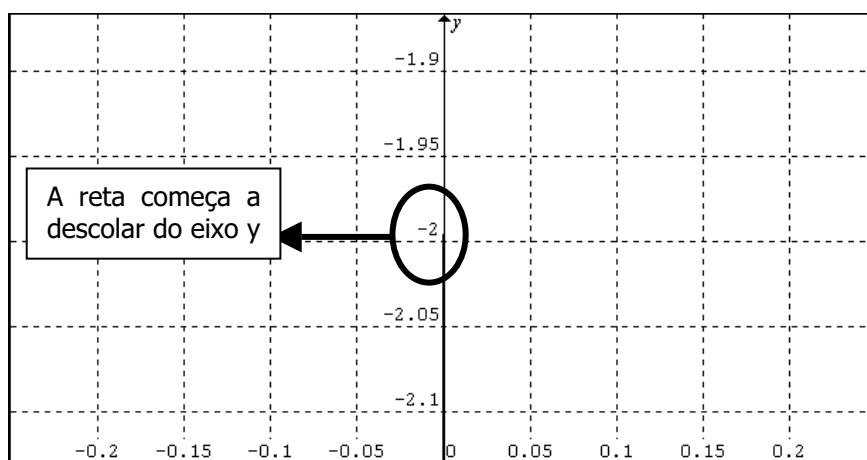


Figura 5.2.5: A reta obtida através de $y=400x-2$ também começa a "descolar" do eixo y.

M: Não falei?

V: Daí encontra e fica...

M: Aí vai saindo prá lá... [completa o gesto anterior, indicando com a mão que a reta passa pelo ponto (0,-2) e prossegue atravessando o terceiro quadrante. Vivian discorda:]

V: Não, ó, não vai saindo.

M: Claro que vai, vai indo pra lá agora!

V: Aonde...

M: Ela tá assim [*gesticula, continuando a desenhar, no ar, a reta inclinada, atravessando o 3º quadrante*]

F: Então, ela não é paralela?

M: Não.

F: Ela parece paralela num certo momento ali [**M:** hum hum], que é o tamanho de nossa tela, né?

M: É.

O professor recordou então a nomenclatura referente às possíveis posições entre as retas num plano. O grupo concluiu que o eixo y e a reta gerada pela expressão $y=400x-2$ eram concorrentes; como Vivian não havia concordado com Fernanda, Francisco insistiu um pouco mais:

F: Vocês diriam que ela forma 90° exatamente com o eixo x? Assim [*faz gesto indicando o perpendicularismo da função representada*]

MV: Não.

F: Que ângulo será, mais ou menos? Uma idéia...

V: Ah, uns 89...

F: Éééé... isso aí, uns 89 vírgula sei lá o quê...

V: [*sorrisos*] É uns 89 vírgula 9...

Mas Vivian parecia não estar certa de sua opinião:

V: Tá, mas, por exemplo, a gente acha que não vai ficar, mas se for aumentando o... o valor do **a** aqui não vai?

Os gestos e a fala de Vivian dão indícios de que queria dizer algo como "A gente acha que não vão ficar paralelas, mas se for aumentando o valor do **a**, será que realmente não ficará paralela (ao eixo y)?"

Vivian digitou os valores 10000 e 15000 para o coeficiente de x , e ambas sorriram ao observar os gráficos resultantes. O professor buscou convencê-la, perguntando-lhe sobre a raiz:

F: [...] Qual é a raiz desse gráfico que está agora aí na tela [*de expressão $y=10000x-2$*]?

MV: [*sorrisos*]

M: 2 sobre 10000.

F: E isso dá quanto?

V: 1 sobre 5000

F: 1 sobre 5000

M: É

F: Que dá?... [*olhando Vivian usar a calculadora*]

M: 0,000...

V: Dá 0,0002 [*mostrando a calculadora*]

O professor poderia ter pedido a Vivian, nesse momento, que identificasse esse valor no plano cartesiano, numa tentativa de verificar o não paralelismo; porém, seu viés algébrico se sobrepôs:

F: É possível essa conta dar zero? A conta dessa raiz dar zero?

V: Não [*sorrisos*].

M: Não.

F: Por quê?

Essa discussão não prosseguira, e Vivian tentou outro caminho: “E se eu colocar o 0,0002 no lugar de a não fica?”; com esse valor, Vivian obteve a figura 5.2.6.

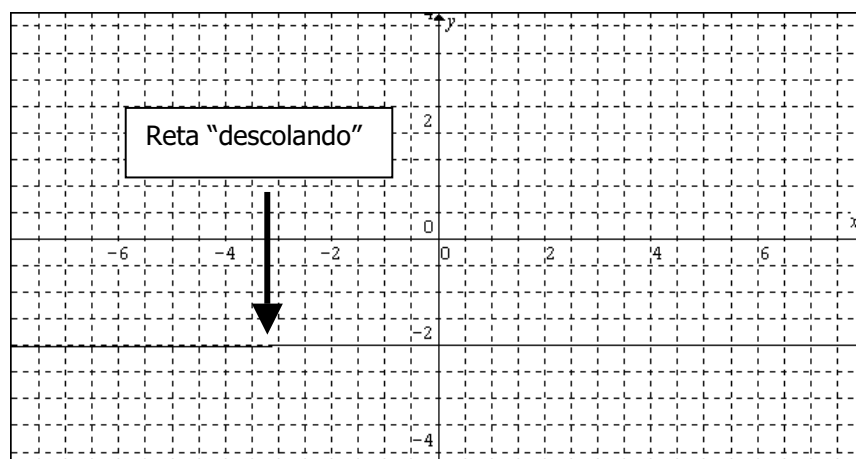


Figura 5.2.6: Gráfico obtido a partir de $y = 0,0002x - 2$.

Ao afirmar que havia ficado uma função constante, Fernanda interferiu, dizendo que não era constante, porque, em algum lugar do eixo x , a “reta cortava”. Seus gestos simulavam o efeito produzido pelo uso da barra de rolagem horizontal, indicando que, para um valor de x bem distante da origem, o gráfico interceptaria esse eixo. Além disso, mostrou a Vivian, através da imagem do *Graphmatica* ilustrada na figura 5.2.6, que a reta possuía uma pequena inclinação.

O professor finalizou a questão propondo o formato $y = a \cdot x - 2$, a fim de analisar todas as raízes imagináveis no eixo x , relacionando-o algebricamente com a forma $x = \frac{2}{a}$. Em discussão semelhante àsquelas já descritas junto a André e Gianluca, em relação à fração $1/x$, Fernanda e Vivian deduziram, com influência do professor, que “ x nunca dará zero”, porque o numerador da fração “é dois, fixo, e não zero”, conforme afirmou Fernanda.

Resumo do episódio e uma análise inicial

É possível perceber neste episódio que a experimentação foi um aspecto marcante no modo como Vivian construiu suas observações. Trabalhando com funções da forma $y = ax + b$, utilizou valores para a iguais a 0, 10, 20, 100, 400,

10000, 15000 e 0,0002, na tentativa de confirmar o paralelismo entre a função esboçada e o eixo y. Mesmo quando o grupo parecia ter chegado a um consenso, Vivian utilizou o valor 0,0002 para verificar esse possível paralelismo, o qual foi rejeitado por Fernanda, ao prever, através de gestos, o “caminho” que a função percorreria pelo terceiro quadrante, após passar pelo ponto (0,-2).

Ao trazer a discussão para a forma algébrica, utilizando a forma geral $x = \frac{2}{a}$ para as possíveis raízes das funções esboçadas, o grupo lidou com uma noção intuitiva de limite, associando valores numéricos de x, variando o parâmetro **a**, com as respectivas posições relativas entre as retas geradas e o eixo y.

Porém, um fato chamou-me a atenção logo no começo do episódio: ao digitarem $y=400x-2$ e observarem a respectiva reta “colada” no eixo y, deram-se por satisfeitas com o “resultado gráfico”. E se o professor não as tivesse recordado da opção *zoom in* do software? Seria legítimo então aceitar a resposta das estudantes, que confiavam na coincidência das retas?

5.2.2 Episódio 2: As três representações e a função racional

Por que foi construído

Neste breve episódio, as três representações de funções mais abordadas, ou seja, gráfico, tabela e expressão algébrica, foram utilizadas para que as alunas chegassem à conclusão sobre a questão “o gráfico toca o eixo x?”.

O episódio

Ainda no primeiro encontro, uma questão inquietou o grupo por alguns minutos ao traçarem o gráfico de $y=1/x$. Após breve explicação do professor a respeito de continuidade, Vivian utilizou *zoom in* e as barras de rolagem para “caminhar” pelo gráfico, porém, em alguns intervalos ele simplesmente “desapareceu” (figuras 5.2.7 e 5.2.8).

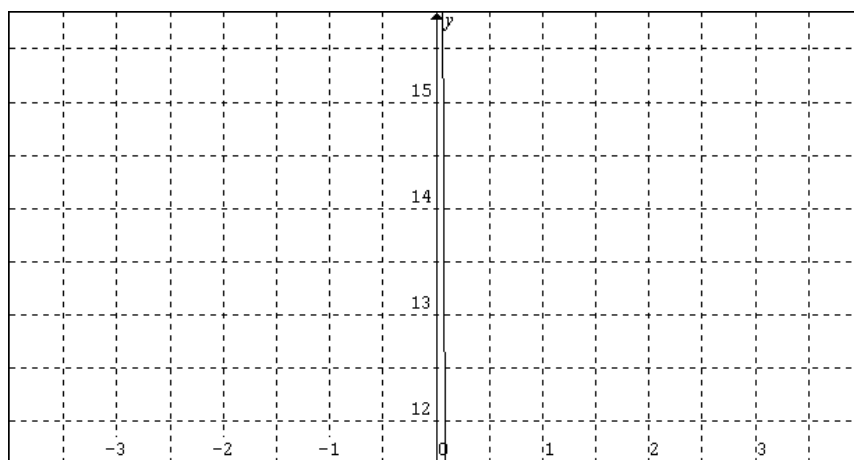


Figura 5.2.7: Gráfico obtido a partir de $y=1/x$

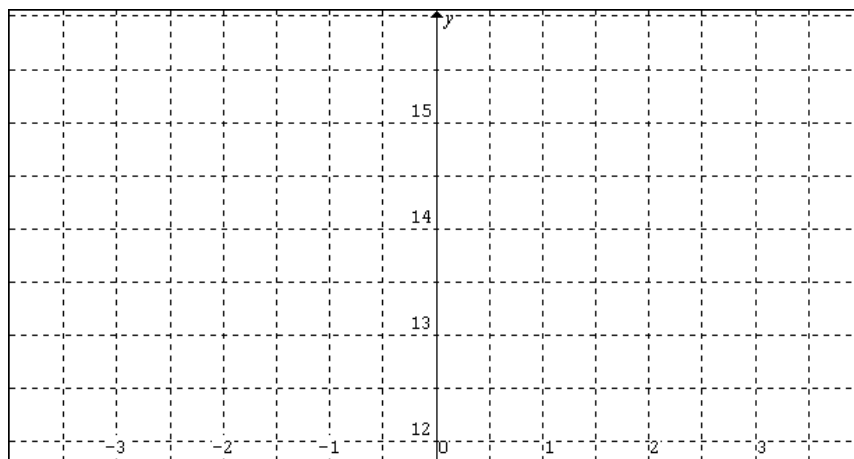


Figura 5.2.8: Apenas um *click* a mais na barra de rolagem vertical e o gráfico desapareceu

Isso deixou o professor incomodado, já que Vivian passou a acreditar que “o gráfico encosta no eixo y porque o gráfico sumiu” a partir de $y=16$. Então, ele modificou a figura, utilizando-se do *zoom out* para produzir um afastamento e mostrar às alunas que o gráfico também existia para valores de y maiores que 16.

A figura 5.2.9 parece não deixar clara esta verificação, mas no momento em que foi observado pelas alunas, o gráfico da função racional apresentava um colorido que mostrou sua coincidência com o eixo y , para os valores anteriormente considerados.

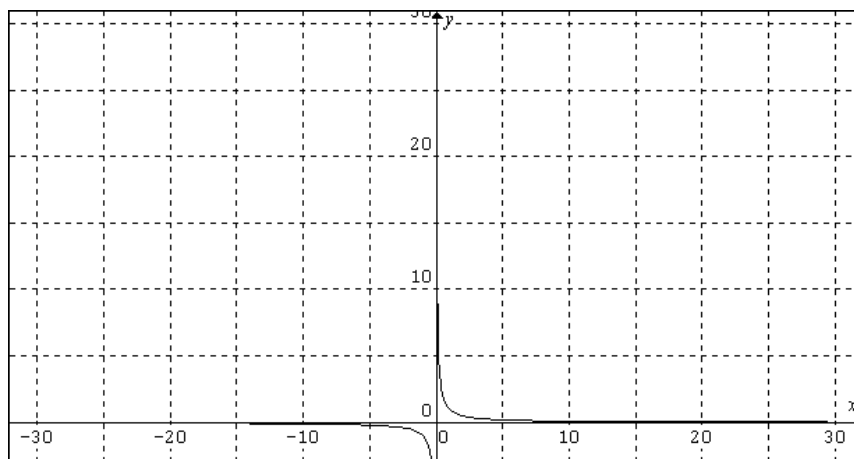


Figura 5.2.9: Aplicando três vezes o *zoom out*, o gráfico volta, com um colorido que sugere sua superposição ao eixo y

Vivian então perguntou se seria possível achar valores de x e de y onde tais gráficos tocam os eixos. Fernanda, por sua vez, sugeriu trocar x ou y por zero:

M: Se bem que... essa função não tem raiz, porque o gráfico não encosta no zero.

V: Não encosta no eixo x .

M: Isso.

F: E se eu for para lá, assim [*gesticula indicando o sentido positivo do eixo x*]

M: Ah, encosta, porque ele está descendo assim...

Mas Vivian, utilizando a barra de rolagem, afirmou a Fernanda que o gráfico não iria encostar.

V: Só vai encostar se x for zero. [...] Mas daí daria tudo zero.

Nota-se que aqui Vivian não usou o conceito de raiz que demonstrara possuir através de suas palavras: “é quando o y é igualado a zero”. Voltou à cena o caso da divisão por zero, e ambas lembraram o que haviam conversado anteriormente sobre a divisão por zero, na discussão sobre as raízes do episódio 1.

Procurando indicar que há dois fenômenos em discussão, $x=0$ e $y=0$, o professor sugeriu a tabela (figura 5.2.10), a fim de que pudessem observar que, nos pontos onde o gráfico é muito próximo ao eixo x , é o valor de y que está muito próximo de zero. Vivian disse não entender o que estava acontecendo, apenas sabia que “a função é crescente” porque “ x e y aumentavam”.

M: Mas o que quer dizer se o x aumenta e o y diminui? [*olhando a tabela*]

V: A reta é decrescente.

F: Isso. A função é decrescente.

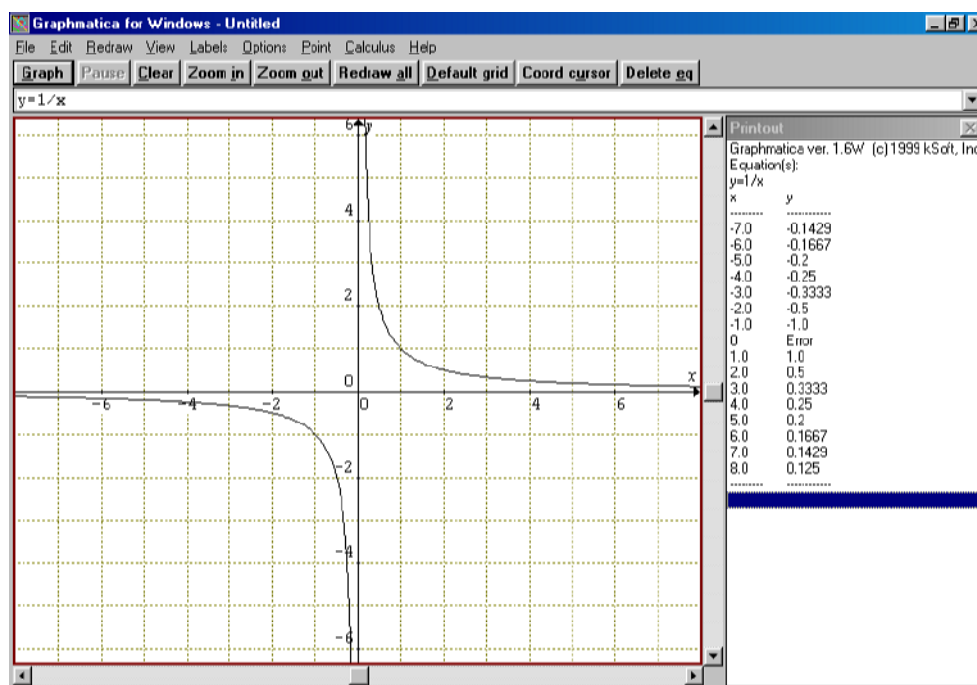


Figura 5.2.10: Função racional em três representações simultâneas.

O professor passou a fazer o seguinte exercício junto às alunas: pediu que localizassem certos valores da tabela nos eixos do plano cartesiano e, em seguida, os pontos que eram sugeridos pelos pares ordenados que podiam ser observados pela própria tabela. Após realizarem o exercício com alguns pontos, o professor voltou à monotonicidade, comentada por Vivian momentos antes:

F: [...] Crescente ou decrescente?

V: Crescente.

M: Decrescente. Você não falou que, se o x aumenta e o y diminui, a função é decrescente?

V: É, mas **a**... não tem **a**...

A própria Vivian se corrigiu ao buscar a explicação válida para a função do primeiro grau da forma $y=ax+b$. Minutos antes do início dos diálogos deste episódio, Vivian apresentou seu modo visual para identificar uma função crescente: “É aquela que aponta para a direita”, enquanto que, analogamente, a função decrescente “aponta para a esquerda”, ao se observar a parte superior dos gráficos.

Tentando resgatar essa “definição visual” de Vivian, o professor foi ao quadro e fez, de modo divertido, duas afirmações que deixaram as alunas refletindo (após um pouco de risos), utilizando gestos indicados nas figuras 5.2.11a e 5.2.11b:

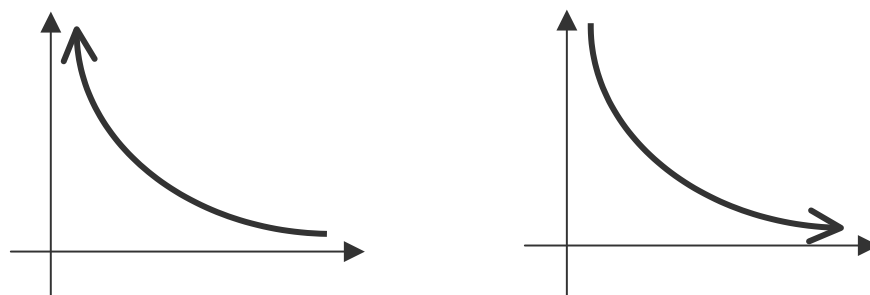


Figura 5.2.11a e 5.2.11b: Num mesmo desenho gráfico, o pesquisador faz gestos simulando dois movimentos diferentes, indicados na figura.

F: Este gráfico é crescente [*figura 5.2.11a*]

F: Não! Este gráfico é decrescente [*figura 5.2.11b*]

Passaram então a pensar na função racional junto ao *Graphmatica*:

V: É crescente. [*longa pausa*] É decrescente.

M: [*longa pausa*] É decrescente.

F: Vocês estão concluindo isso olhando na figura ou na tabela?

M: Na tabela.

V: Na figura [*junto com Fernanda*].

Ambas responderam juntas, e Vivian confirmou sua resposta tecendo vários comentários com gestos e indicações sobre a tela do computador. Após algumas observações das alunas, o professor sugeriu que fosse estabelecido um referencial para classificar visualmente o gráfico, sugerindo “olhar da esquerda para a direita”, embora ressaltando que o sentido contrário proporcionaria a elas as mesmas conclusões. Por exemplo, se x aumenta e y diminui, na definição informal com que o professor trabalhou durante os experimentos, então x diminuindo e y aumentando significa o mesmo fenômeno.

Depois de um pouco mais de discussão sobre a tabela, as alunas chegaram à conclusão que não existia raiz, porque não havia x que satisfizesse a equação $\frac{1}{x} = 0$. Para explicarem o fato, desta vez usaram o papel: afirmaram que não havia raiz porque, ao multiplicarem “em cruz”, obtiveram “ $1 = 0$ ”. De modo semelhante, explicaram que y não poderia valer zero, porque $\frac{1}{0} = y$ implicaria novamente “ $1=0$ ”, o que estava de acordo com o fato de que o gráfico não tocava o eixo y . O professor ainda pediu que ilustrassem os resultados desses cálculos no plano cartesiano.

M: Quando o rosinha chegar no branco [*entenda-se quando o gráfico chegar no eixo x*], é o zero.

V: Mas não tem zero.

F: Quem é zero?

MV: [*pausa*] O y .

Vivian observou os valores de x positivos e próximos de zero, identificando pontos no plano, ao usar o ponteiro do *mouse* e observar que tais valores proporcionariam valores de y “mais altos”. O professor pediu um exemplo numérico que ilustrasse essa conclusão, e Vivian efetuou, na calculadora, 1 dividido por 0,25. Antes que Francisco pedisse, ela lhe mostra o ponto (0.25,4) no gráfico. Essa atividade se encerrou, afinal, com as considerações a respeito de domínio e imagem de funções em geral e, em particular, dessa função racional.

Resumo do episódio e uma análise inicial

Trata-se uma seqüência de cenas caracterizada pelo trabalho das estudantes com a função racional prototípica. O “sumiço” do gráfico desta, obtida através de $y=1/x$, desencadeou a discussão, de forma semelhante à ocorrida com André e Gianluca, a respeito da curva “tocar ou não tocar” os eixos coordenados. Embora de modo um pouco confuso, os significados algébrico e gráfico para raiz de uma função foram retomados por Vivian: “Só vai encostar se x for zero. [...] Mas daí daria tudo zero”.

Durante essa discussão, as alunas retomaram o conceito de função crescente/descrescente, utilizando a linguagem oferecida pelo professor, e usaram estratégias diferentes para decidir sobre a monotonicidade da função em questão, Vivian, através do gráfico, e Fernanda, utilizando a tabela. Aproveitando que ambas utilizavam as três representações, o professor pediu-lhes que relacionassem os pontos dos gráficos aos pares de valores na tabela.

Tal atividade acabou permitindo que o professor conduzisse as estudantes a perceber a inversão dos papéis de x e y , verificada anteriormente na fala de Vivian. As alunas finalizaram a questão resgatando a multiplicação “em cruz”: ao substituírem x e y por zero, sucessivamente, obtêm a expressão $1=0$, associando isso com o fato de o gráfico não ter ponto comum com os eixos.

Podemos discutir, neste episódio, o papel do software gráfico na resolução de uma questão, no caso, a existência ou não de pontos em comum do gráfico com os eixos. A impossibilidade do valor **zero** no denominador de expressões analíticas, comumente trabalhada por diversos livros didáticos, tomou nova forma ao se abordar a questão graficamente. Será que é possível vislumbrar, no tratamento de questões como essa, possíveis diferenças entre sua abordagem nos livros didáticos e essa realizada pelas alunas, a qual se deu num ambiente com diversas mídias?

Talvez seja possível esboçar uma resposta inicial a essa questão, observando que os comandos oferecidos pelo software parecem ter propiciado a associação, neste episódio, do uso da mídia informática com a exploração; a interligação entre as representações através do *Graphmatica* tornou-se facilitada, e depois que as estudantes alternaram seus olhares para o **gráfico** e para a **tabela**, Vivian “encerrou” a questão trazendo sua **álgebra**, através da multiplicação em cruz.

5.2.3 Episódio 3: A função irracional e as parábolas.

Por que foi construído

Como faz parte dos objetivos desta pesquisa investigar as potencialidades de se trabalhar com funções de famílias diversas, entendi que seria importante, para as observações do leitor e para as conclusões de pesquisa, o relato do trabalho de uma das duplas com a função irracional de expressão $y = \sqrt{x}$. Aqui se

destaca a comparação entre as representações gráficas proporcionadas a partir da comparação algébrica entre as expressões $y = \sqrt{x}$ e $y^2 = x$.

O episódio

No terceiro e último encontro, as alunas não encontraram dificuldades em responder às questões sobre domínio, imagem, raízes e outros itens. Na questão sobre a monotonicidade, Vivian afirmou que “a função $y=x^3$ é crescente porque o **a** é positivo”, e, com o auxílio da tabela, Fernanda classificou a função como crescente porque “aumenta x , aumenta y ”.

Analisando o gráfico da figura 5.2.12, obtido a partir da expressão $y = \sqrt{x}$ (digita-se $y=\text{sqrt}(x)$), afirmaram, praticamente ao mesmo tempo, que o domínio da função disponibilizada era “reais não negativos”.

A resposta baseou-se pelo gráfico, ambas gesticulando bastante sobre o mesmo e sobre os eixos. Confirmaram a explicação para o domínio junto à expressão algébrica dessa função, dizendo que “ x não pode ser negativo”.

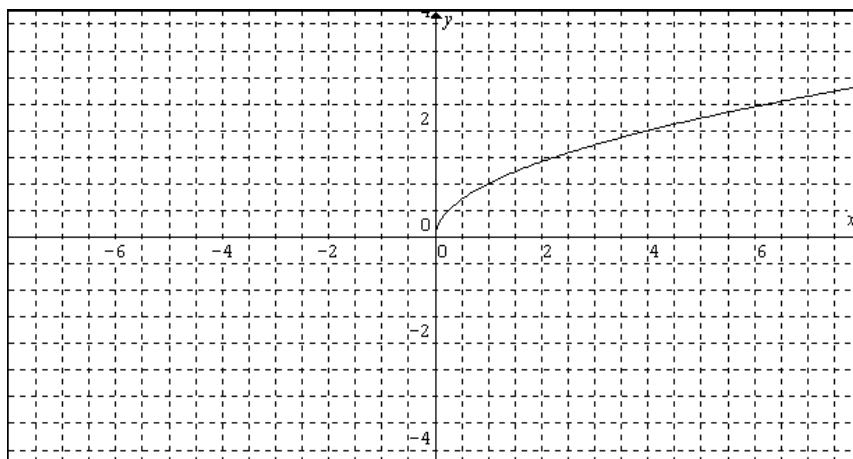


Figura 5.2.12: Gráfico obtidos a partir de $y = \sqrt{x}$

Após estas observações, Vivian tece um comentário que leva o grupo a outra discussão:

V: É sempre y que vai ficar ao quadrado... [*rindo, faz gesto e expressão de auto repreensão, como se dissesse: "estou falando besteira"*]

F: Hummmm, fiquei curioso agora...

V: Não, é que eu quis dizer que é sempre y que vai... [*longa pausa*] Eu não entendi o que eu quis dizer...

M: [*após longa pausa*] Você quis dizer que... o y é o resultado de x ao quadrado.

V: Para dar isso [*a expressão algébrica $y = \sqrt{x}$*], y ao quadrado é igual a x.

M: [...] Isso!

Após Vivian escrever as expressões $y = \sqrt{x}$ e $y^2 = x$ no papel, o professor pergunta às alunas se já haviam trabalhado com expressões dessas formas, ao que responderam que apenas em equações com x^2 no primeiro membro, as quais graficamente geram uma parábola.

F: Isso daqui [*mostra $y^2 = x$ escrito no papel*] é uma parábola?

M: É.

V: Hum hum.

M: Não, não é. Parábola é isso aqui [*mostra o gráfico da figura 5.2.12 no Graphmatica*]

V: É. Isso aí é uma parábola. [*Também aponta o gráfico*] [...] Não! Mas a parábola não pára aqui, pára? No zero?

O comentário de Vivian foi complementado por Fernanda, a qual apontou que a figura do *Graphmatica* não era uma parábola, pelo fato de não estar completa. Segundo as alunas, para que fosse uma parábola, a figura teria então que apresentar mais uma parte, a qual se completou com um gesto sobre a tela, no quarto quadrante.

Fernanda perguntou, desenhando uma parábola no ar, com concavidade para cima, se “parábola é sempre assim...”, ou seja, com seu eixo de simetria na posição vertical. O professor respondeu através de um desenho de parábola no papel: mostra o mesmo desenho às alunas com o papel em três posições diferentes (figura 5.2.13).

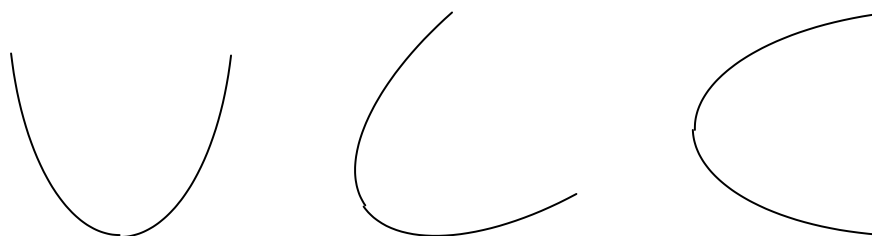


Figura 5.2.13: Com o mesmo desenho feito no papel, o professor mostra a parábola em três posições diferentes

A cada posição da folha, o professor perguntava se a figura que mostrava era uma parábola. As alunas afirmaram que sim nos dois primeiros casos; após também o confirmarem no terceiro caso, de modo mais comedido, Fernanda voltou atrás em sua decisão. Espelho que estava comparando o desenho do professor com o desenho do *Graphmatica*, o qual já havia completado com o dedo sobre a tela anteriormente.

M: Mas não tem essa curva aqui inteira. [*repete o gesto sobre o Graphmatica*] Pára aqui no zero.

[...]

F: Será que esse desenho é uma “meia parábola”?

V: Hum hum.

M: É.

Indagadas sobre como poderiam ter certeza, disseram não saber como fazê-lo. O professor então propôs que digitassem a expressão $y^2=x$, mostrando-a no papel. Ao olharem para o gráfico (figura 5.2.14), Fernanda comemorou: “não falei que era parábola?”.

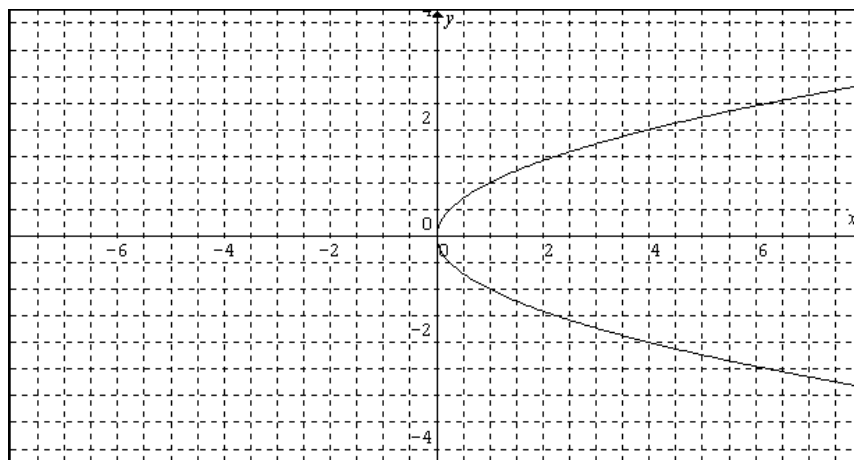


Figura 5.2.14: Gráfico obtido a partir de $y^2=x$

Fernanda perguntou o porquê do segundo gráfico não ser igual ao primeiro, já que as fórmulas $y = \sqrt{x}$ e $y^2 = x$ tinham sido consideradas iguais, ao passo que Vivian participou da dúvida de modo mais exaltado. O professor convida a própria Fernanda a tentar a explicação.

Sua explicação foi bastante pertinente, sendo que qualquer narração linearmente descrita no papel é insuficiente para mostrar a riqueza dos gestos e dos olhares dessa estudante. Com a mão direita alternando ora sobre a expressão $y^2=x$ escrita no papel, ora sobre o gráfico, ela disse:

M: Ah!! Só que mesmo se isso aqui for negativo [*mostra y na expressão $y^2=x$, no papel*] que acontece **aqui** [*mostra no gráfico a parte decrescente da parábola correspondente, no quarto quadrante – figura 5.2.14*] isso aqui vai dar positivo [*mostra o x na expressão $y^2=x$, no papel*], sempre pra lá [*com a mão faz um gesto partindo da origem e seguindo o sentido positivo do eixo x*]. Então pode ter assim. [*pequena pausa*] Olha o que eu falei, meu Deus...

Posteriormente, Fernanda diferenciou, mediante influência das perguntas do professor, as duas expressões analíticas apresentadas. Sua conclusão, assim como nas considerações gráficas, referiu-se ao fato de que na expressão $y = \sqrt{x}$, os valores possíveis para y e para x eram não negativos, enquanto que na expressão $y^2 = x$, a variável y podia assumir valores negativos.

Ao encerrar a questão, o professor dialogou com as estudantes, a fim de mostrar-lhes que o gráfico gerado a partir da expressão $y^2 = x$ não se tratava de uma função em x . Nesse momento, foi utilizado, pelo professor, o diagrama de flechas. As próprias estudantes recordaram o aspecto da definição de função que estava em jogo, ou seja, o fato de cada elemento do domínio possuir apenas um valor de y a ele associado no conjunto imagem, identificando essas reflexões tanto com aspectos gráficos, como também através das expressões analíticas citadas.

Resumo do episódio e uma análise inicial

Este breve episódio mostra, inicialmente, as estudantes trabalhando com alguns conceitos da função de expressão analítica $y = \sqrt{x}$, tais como domínio e imagem, interligando as representações gráfica e algébrica. Enquanto discutiram se o gráfico correspondente a essa função se caracterizava ou não como “parte” de uma parábola, Vivian levantou a possível equivalência entre as expressões $y = \sqrt{x}$ e $y^2 = x$. Com sugestão do professor, as estudantes utilizaram as respectivas representações gráficas para estabelecer a diferenciação.

A definição de função foi trazida pelo professor no final do debate, através da representação com diagramas, a fim de identificar a parábola obtida através de $y^2 = x$ como uma representação de uma relação que não se caracteriza como função, pelo menos através dos papéis comumente atribuídos às variáveis x e y . Talvez tivesse sido interessante o professor comentar às alunas que tal gráfico e sua expressão correspondente $y^2 = x$ poderiam representar uma função, de forma

que valores de y constituiriam o domínio, enquanto valores de x comporiam a imagem.

A intenção do professor, ao propor o trabalho com essa função, era propiciar o debate daquela comparação (gráficos obtidos por $y = \sqrt{x}$ e $y^2 = x$), que ocorrera a partir de um comentário de Vivian. Considero que essas reflexões, protagonizadas pelas alunas, não ocorridas com as outras duplas, ilustram um caminho interessante, no sentido de discutir, simultaneamente, itens teóricos como definição de função, suas representações e resolução de equações irracionais, a fim de se analisarem as implicações de se elevar ao quadrado ambos os membros de uma equação. No caso deste episódio, as alunas perceberam, através dos esboços gráficos diferentes, que $y = \sqrt{x}$ e $y^2 = x$ não eram equivalentes. Numa referência à revisão de literatura, observa-se que tais expressões não são representantes algébricos de uma mesma função.

5.2.4 Episódio 4: Funções polinomiais e uma comparação original.

Por que foi construído

A discussão de uma pergunta da terceira ficha de trabalho propiciou a interligação entre aspectos gráficos e algébricos de funções polinomiais. Fernanda apresentou comparações de uma forma que tanto o professor Francisco considerou original, como também o pesquisador Francisco, o qual não observou pensamento semelhante na análise de outras pesquisas.

O episódio

A relação entre a paridade do expoente n , em funções da forma $y = a \cdot x^n$, e os quadrantes em que os gráficos se situam foi observada rapidamente pelas alunas. Ao trabalharem com as expressões $y = x^2$, $y = x^4$ e $y = x^6$ (figura 5.2.15), a

questão da terceira ficha de trabalho procurava analisar o comportamento dos gráficos gerados a partir dessas expressões, em intervalos específicos.

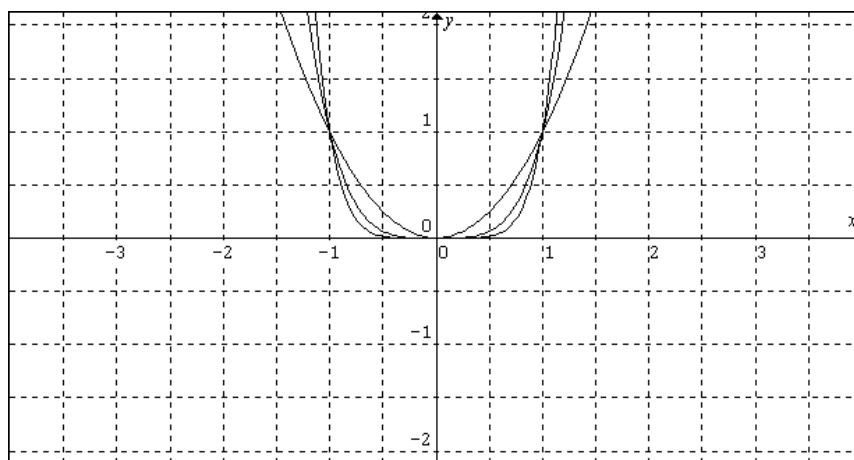


Figura 5.2.15: Gráficos obtidos a partir de $y=x^2$, $y=x^4$ e $y=x^6$.

Analisar as posições entre os gráficos foi uma tarefa inicialmente facilitada pelo colorido dos mesmos, tendo sido a primeira maneira com a qual as alunas diferenciaram as posições dos gráficos para $0 < x < 1$ e $x > 1$. O professor induziu as alunas a pensarem, inicialmente, em valores positivos de x , estendendo, ao final, as conclusões para o segundo quadrante.

A característica que primeiro chamou a atenção das alunas foi o fato de que algumas parábolas eram mais “abertas” que as outras. A explicação de Fernanda para o fato levou algo cerca de 15 minutos. A verbalização, difícil e gradual, ocorreu com algumas intervenções de Vivian e de algumas perguntas do professor. A própria Fernanda admitiu, algumas vezes: “não consigo explicar”. Após alguns momentos em silêncio, o professor observou o que Fernanda havia escrito no papel:

M: Pro mesmo x , o y é menor. Dependendo do expoente.

F: [*fala olhando o que Fernanda escrevera*] Numa função, o x é igual à raiz de y , na outra é raiz quarta de y , e na outra vai ser raiz sexta de y . [*Fernanda escrevera: $x = \sqrt{y}$, $x = \sqrt[4]{y}$ e $x = \sqrt[6]{y}$*]

M: Hum hum.

F: Interessante...

M: Mas eu não sei se é assim...

F: É uma possibilidade... Não quer dizer que tenha uma só.

M: Por que daí eu pensei assim: pro mesmo número do x, aqui... aliás... pro mesmo y, o x vai ser menor. Se, por exemplo, aqui este vai ser menor que este, este x vai ser menor que este, este vai ser maior que este. [*esclarecendo: nesta fala Fernanda explicou, junto com a escrita anterior feita no papel, que se fosse trocado y por um valor, ter-se-ia $\sqrt[6]{y} \leq \sqrt[4]{y} \leq \sqrt{y}$*]. E é o que acontece aqui [*faz diversos gestos no Graphmatica*]. O mesmo y, só que o x, é maior. Aqui, o x é maior. Esse x, o segundo aqui, o x também é maior.

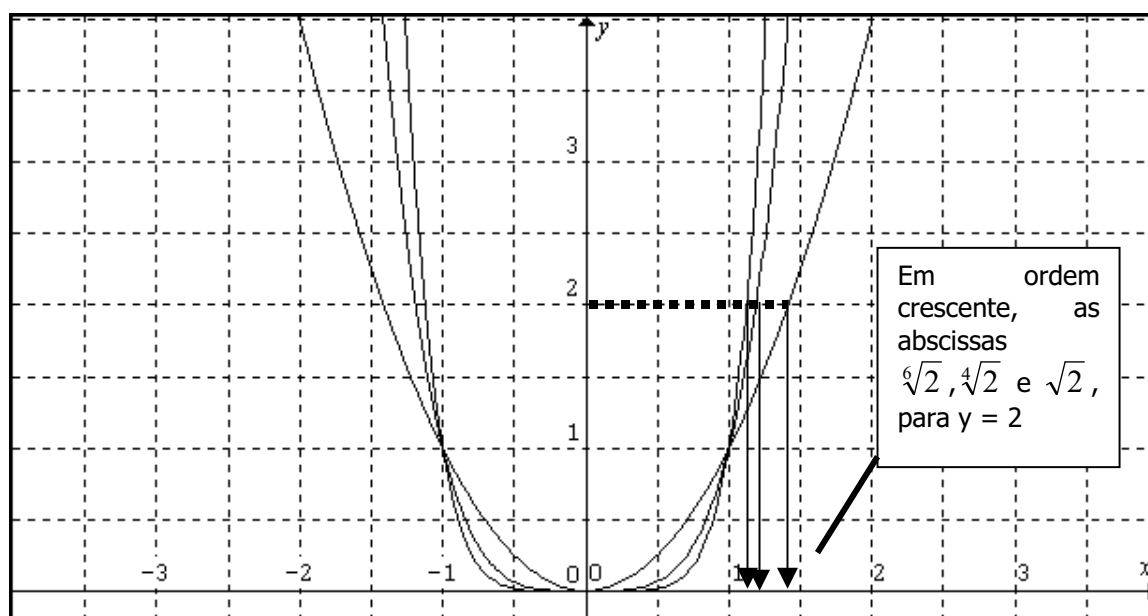


Figura 5.2.16: Os mesmos gráficos da figura 5.2.15, com valores comentados por Fernanda.

Para facilitar a explicação, o professor sugeriu um número para que a comparação fosse mais fácil de ser visualizada. A figura 5.2.16 procura ilustrar esse pensamento elaborado por Fernanda junto ao software e acompanhado por Vivian, que demonstrava seguir o raciocínio completando ocasionalmente algumas

frases que Fernanda deixava inacabadas ou incompletas. Após o término dessa explicação, o professor explicou às estudantes um outro modo de pensar: fixa $x=2$ e mostra-lhes 2^2 , 2^4 e 2^6 no *Graphmatica*.

Mediante nova pergunta do professor, as alunas inclinam-se agora sobre o fato dos gráficos estarem numa posição invertida no intervalo $0 < x < 1$. Mais um tempo considerável foi usado para estas discussões.

M: [*Explica junto com o Graphmatica*] Aqui [*gráfico de $y=x^6$*] o y está diminuindo... Não! Está aumentando **menos** do que o outro [*gráfico de $y=x^4$ ou $y=x^2$*]. Aí, quando chega no 1 [*ponto (1,1)*], que os resultados são iguais, depois ele continua, um aumentando menos do que o outro [...].

V: Se eles não passassem por esse ponto [(1,1)] [...] Se eles passam num mesmo ponto então com certeza eles vão...

M: Vai inverter.

V: É.

Quando chegaram a uma situação de aparente impasse, o professor tentou resgatar a mesma idéia através de um desenho, no quadro, de dois gráficos que já haviam comparado em certo momento do episódio anterior (figura 5.2.17).

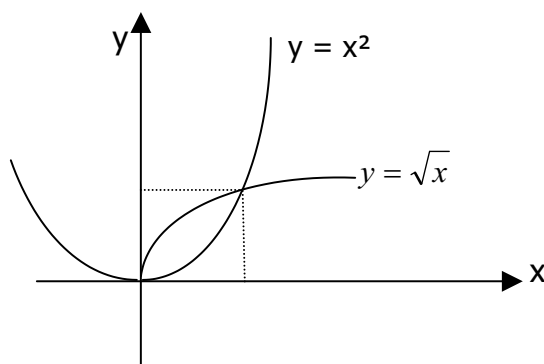


Figura 5.2.17: Desenhos do professor no quadro.

Fernanda desenvolveu seu pensamento aos poucos, com certa dificuldade em expressá-los verbalmente. Embora sua idéia anterior sobre as parábolas mais

abertas também estivesse permeada por essa dificuldade, nesse instante o professor também demorou a entender o que a estudante queria dizer.

Provavelmente movida pelo interesse e pela insistência do professor em procurar entender o que pensava, Fernanda tentou-o várias vezes. A dificuldade dele foi descobrir as comparações que ela fazia. Vivian entendeu antes do professor e o auxiliou na tarefa de esclarecer a comparação, que ainda se referia a valores de x maiores do que 1.

Fernanda fez sua explicação indicando valores na figura. Em cada uma das funções comparou o valor de y , resultante do cálculo feito com o valor de x , com o próprio x . Assim, na fórmula $y = \sqrt{x}$, ela comparou $x=9$ com $y=3$, observando que $x > y$; já na expressão $y = x^2$, para $x=9$ têm-se $y=81$, ou seja, $x < y$, o que lhe explicava a posição entre os gráficos e também o fato de que $y = \sqrt{x}$ “cresce menos do que $y = x^2$ ”. A figura 5.2.18 é uma maneira de ilustrar o modelo que construí a partir do que essa estudante expressou, enquanto pensava com o *Graphmatica*. Como os valores por ela citados tornam difícil sua representação com a mídia escrita (como $y=81$), utilizei a figura com outros valores, no caso, utilizando $x=3$.

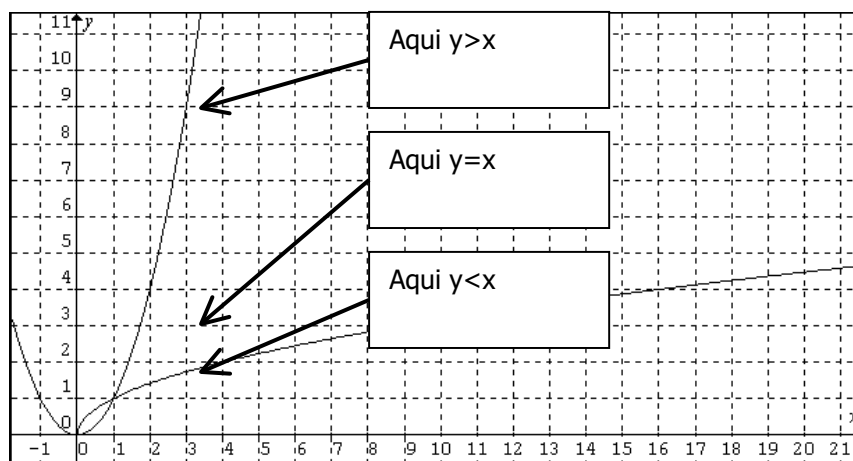


Figura 5.2.18: Interpretação escrita do pesquisador para o pensamento de Fernanda junto com os gráficos

Ou seja, a estratégia do professor fez com que Fernanda explicasse, de forma brilhante, sua maneira de enxergar o comportamento dos gráficos que se encontram no ponto (1,1), para $x > 1$ (figura 5.2.18). Ao retomarem a discussão para o intervalo do domínio $0 < x < 1$, Fernanda afirmou saber o porquê, mas não conseguia expressá-lo. Ao voltarem aos gráficos obtidos por $y = x^2$, $y = x^4$ e $y = x^6$, depois de certo período em silêncio, Vivian apontou um caminho:

V: Por exemplo, aqui é 0,5 [*mostra esse valor no eixo x do Graphmatica*]. Se for ao quadrado, vai ficar 0,25.

M: Hum hum.

V: Certo? Então o y é igual a 0,25.

M: Agora se você usar o mesmo x...

V: [*faz $(0,25)^2 = 0,0625$ na calculadora, ou seja, $(0,5)^4$*] Vai diminuir... [*ambas sorriem*]

[...]

M: Quanto maior o expoente...

V: Por que quando... tipo... o 2 por exemplo, quando o x é 2, aumenta, e quando é zero vírgula alguma coisa, diminui? [*Olha para o professor como se pedisse uma confirmação; ele se limita a um sorriso, esperando que Fernanda falasse algo*].[...] É isso, mas por que que é isso?

Fernanda explicou o fenômeno através do número de casas decimais; resumindo suas palavras, teríamos uma fala semelhante a “multiplicando decimal por decimal, o número de casas decimais vai aumentar, então o número vai diminuir”. Vivian, porém, não se convenceu com a explicação, o que gerou um momento de grande descontração, já que Fernanda fingiu ter ficado aborrecida com Vivian.

Em seguida, o professor pediu a Vivian que lhe relacionasse os cálculos, que realizara na calculadora, com os gráficos, ao que mostrou corretamente os pontos

(0.5,0.25) e (0.5,0.0625) no plano, com ajuda de Fernanda e de alguns “zoons” aplicados pelo professor.

Voltando ao porquê de Vivian, o professor sugeriu as frações; Vivian gostou da sugestão e teceu uma explicação geométrica, criando, com gestos no ar, uma unidade dividida em duas partes e a mesma unidade dividida em quatro partes, concluindo que a quarta parte da unidade era menor. Após essa comparação entre $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{4}$, o professor encerra a discussão com outro exemplo usando frações.

Utilizou a comparação entre $\frac{3}{7}$ e $\frac{9}{49}$, perguntando se seriam iguais, proporcionais etc, de forma que o grupo chegou a um acordo, com grande influência das perguntas e afirmações do professor. Concluíram que as frações positivas menores que um, elevadas ao quadrado (ou à quarta potência, ou à sexta potência), diminuem de valor devido ao aumento propiciado ao denominador.

Resumo do episódio e uma análise inicial

As estudantes compararam a posição dos gráficos obtidos a partir de $y=x^2$, $y=x^4$ e $y=x^6$, nos intervalos do domínio $0<x<1$ e $x>1$. Fernanda, em sua explanação, inverteu o papel tradicional das variáveis, comparando graficamente as formas $x = \sqrt{y}$, $x = \sqrt[4]{y}$ e $x = \sqrt[6]{y}$ (figura 5.2.16). A dificuldade maior se deu para construírem uma explicação ao comportamento gráfico para $0<x<1$.

Tentando levar o grupo a sair do impasse, o professor sugeriu a comparação dos gráficos obtidos por $y = \sqrt{x}$ e $y = x^2$ (figura 5.2.18), o que proporcionou outra brilhante explicação por parte de Fernanda, ao comparar valores de $\sqrt{x}$ e x^2 com o próprio x . Ao voltarem para os gráficos das funções polinomiais, Vivian apresentou a saída para o impasse.

A fim de associar a posição dos gráficos, no intervalo do domínio $0<x<1$, com uma explicação numérica, Vivian pensou junto com a calculadora e com os gráficos do software, realizando os cálculos $(0,5)^2=0,25$ e $(0,5)^4=0,0625$,

indicando o fato de que havia uma relação inversa entre a variação do expoente e o resultado obtido, ou seja, aumentando-se o expoente, o resultado final da operação diminuía. A discussão encerrou-se com comentários de Vivian a respeito do número de casas decimais, e do professor, ilustrando cálculos semelhantes aos apresentados por Vivian, porém comparando algumas frações.

O que se pôde ver, nesse episódio, com maior intensidade, é uma característica marcante dos experimentos de ensino, debatida por Steffe e Thompson (2000), que é a interação entre as matemáticas dos estudantes e a do professor. Tal característica relaciona-se diretamente à busca por respostas à pergunta norteadora: ao procurar entender a forma como Fernanda procurava resolver a questão proposta, pude observar que, nesse debate, a discussão que envolveu as representações gráfica e algébrica, gerada a partir de uma observação gráfica (posição entre os gráficos), proporcionou uma estreita ligação entre ambas as representações, de maneira que a coordenação das mesmas foi também acompanhada da coordenação entre as mídias, já que a calculadora incentivou as estudantes a atribuírem significados gráficos para as operações que fizeram com essa mídia.

5.2.5 Episódio 5: O domínio e a imagem para $y = \frac{1}{x^2 + 1}$

Por que foi construído

Porque apresenta Vivian trazendo sua álgebra para as discussões e porque o pesquisador, autor deste texto, conseguiu identificar o professor Francisco moderando o viés algébrico de suas interferências.

O episódio

Ao lidarem com a função de expressão analítica $y = \frac{1}{x^2 + 1}$ no segundo encontro, Vivian procedeu de modo semelhante ao descrito no episódio 2, no qual trabalharam com $y=1/x$, afirmando que a função não possuía raízes porque o gráfico “não corta o eixo x”. Buscando uma explicação algébrica para esse fato, novamente a álgebra da sala de aula se mostrou eficiente. Vivian disse que “zerando’ o y” e multiplicando “em cruz”, mostrava-se que a função não possuía raízes reais, ou seja, não haveria valor de x para o qual $y=0$. Escreveu no papel a seqüência de passos:

$$y = \frac{1}{x^2 + 1} \quad \rightarrow \quad 0 = \frac{1}{x^2 + 1} \quad \rightarrow \quad 0.(x^2 + 1) = 1 \quad \rightarrow \quad 0 = 1$$

Para trabalharem novamente nessa função, no terceiro encontro, realizado quinze dias depois, Vivian digitou $y=1/x^2+1$, da mesma forma já descrita junto a André e Gianluca (item 5.1.6). Ao teclar *enter*, o gráfico dessa função não apareceu (figura 5.2.19); em seguida, Vivian colocou os parênteses na expressão x^2+1 , disponibilizando assim o gráfico de $y = \frac{1}{x^2 + 1}$ (figura 5.2.20).

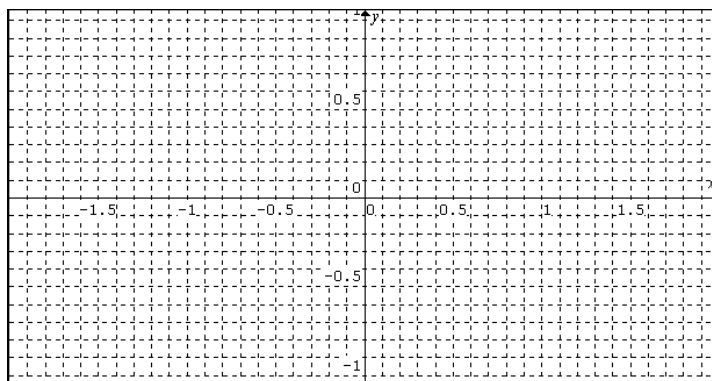


Figura 5.2.19: O gráfico de $y = \frac{1}{x^2} + 1$ não é disponibilizado, já que seus pontos não pertencem a essa região do plano.

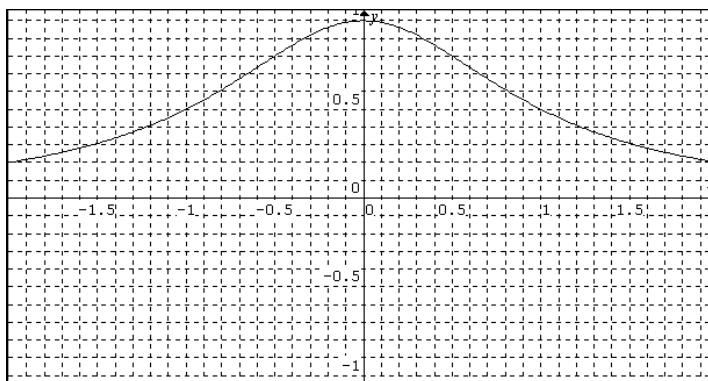


Figura 5.2.20: Gráfico obtido a partir de $y = \frac{1}{x^2 + 1}$, após o uso dos parênteses no denominador

Com apenas mais um “click” em *zoom out*, o gráfico obtido por $y = \frac{1}{x^2} + 1$ **apareceria** (figura 5.2.21), mas, antes que isso fosse feito, o grupo permaneceu debatendo em que região do plano cartesiano estaria a referida curva.

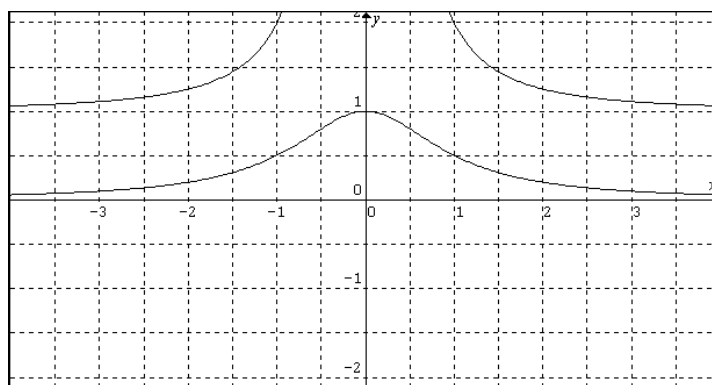


Figura 5.2.21: Gráficos obtidos a partir de $y = \frac{1}{x^2} + 1$ e de $y = \frac{1}{x^2 + 1}$

O professor perguntou às estudantes qual era a função representada, em termos de expressão analítica; Vivian escreveu no papel a expressão $y = \frac{1}{x^2} + 1$, e o professor indagou onde deveria estar aquele gráfico.

M: Lá pra cima... ou lá pra baixo... [*rindo*] não sei...

[...]

M: Lá pra cima! [*gesticula com o braço indicando estar "acima da tela do computador"*].

F: Por quê?

V: Não vai estar lá pra baixo porque é positivo.

F: Quem é positivo?

MV: O y.

F: [...] e por que o y é positivo?

V: Porque pra qualquer valor de x o y vai dar negativo| positivo!
[*corrigindo-se*]

F: E por que pra qualquer valor de x |

M: Por que está ao quadrado! [*antecipando-se*]

Ao voltarem à questão do domínio, Vivian e Fernanda retomaram o que já haviam discutido na segunda ficha de trabalho, afirmando que “domínio é todos os reais”.

F:: *Why?*

V: Porque x dá positivo, negativo e zero.

M: Hum hum.

F: Hum hum. Olhando pro gráfico ou olhando pra fórmula?

V: Pro gráfico.

M: Pro gráfico.

Vivian tomou a iniciativa de discutir a questão do domínio do modo como tinham feito ultimamente em sala de aula, ou seja, escreveu no papel a desigualdade $x^2 + 1 \neq 0$. Ao escrever a expressão $x^2 \neq -1$, incluiu o símbolo da raiz quadrada de modo um pouco displicente, deixando a escrita na forma $x^2 \neq \sqrt{-1}$.

Como Vivian e Fernanda chegaram a um impasse no significado da última expressão, o professor conduziu as alunas a reescreverem a mesma, chegando à

forma $x \neq \pm\sqrt{-1}$. Após considerações sobre o uso dos sinais $\pm$, o professor as convidou a escrever do modo com o qual estão acostumadas em aula. Vivian então escreveu a expressão para o domínio dessa função: $\{x \in R \mid x \neq \pm\sqrt{-1}\}$; Francisco enfatiza a leitura dessa expressão:

F: Quais são os números reais que “satisfazem isto” [*enquanto fala, segue com a ponta do lápis acompanhando a expressão $\{x \in R \mid x \neq \pm\sqrt{-1}\}$*]

V: Todos. [*respondeu sem pestanejar...*]

F: Todos?

V: É. Não existe raiz de -1 nos reais.

F: O que Fernanda diz?

M: Não sei. [*pausa*] Pra mim continua sendo todos menos o zero. [...] Eu não sei porque, mas eu só sei que é porque não corta o eixo x.

Vivian afirmou que zero pertencia ao domínio, pois ao trocar a variável x por esse valor o resultado seria $y=1$. Então, Fernanda afirmou que estava pensando no conjunto imagem, por isso estava discordando de Vivian. Ao iniciarem o debate sobre o conjunto imagem para $y = \frac{1}{x^2 + 1}$, a primeira observação das estudantes priorizou a presença do zero nesse conjunto. Vivian disse que tal conjunto é “reais não negativos”, ao que Fernanda prontamente corrigiu:

M: Não, são os positivos, porque o zero não está relacionado.

As considerações das estudantes foram explicitamente gráficas. Relembrou então a discussão sobre o fato de o gráfico “não encostar”. Mas a respeito do limite superior da função, foi o professor quem deu início à discussão; após alguns “diálogos” durante os quais perguntara duas vezes se elas “tinham certeza” de que

o conjunto imagem era mesmo o conjunto de todos os reais positivos, um enfoque gráfico na pergunta as conduziu à mudança da afirmação anterior:

F: A imagem são todos os positivos?

V: São. [*Fernanda balança a cabeça afirmativamente*]

F: Então, por exemplo, o 2 tá na imagem...

MV: Tá.

F: Ele está relacionado com que valor de x?

V: [*baixinho...*] Ah, não tá...

Então, ambas falam ao mesmo tempo:

M: [*alto*] Ah não! Ah! Já entendi o que você estava perguntando! É... São x| y pertence aos reais tal que

V: Tal que seja menor do que 1|

M: y é menor | maior que zero e menor que um [**V:** menor que um] menor ou igual a 1 [**V:** é].

Fernanda escreveu no papel o conjunto imagem $\{y \in \mathbb{R} \mid 0 < y \leq 1\}$; percebendo que as estudantes valorizavam a organização das respostas no que se refere à linguagem formal, o professor também ofereceu a elas as opções $]0,1]$ e $(0,1]$.

Vivian, relacionando essa discussão aos exercícios de aula, retomou a questão da impossibilidade do valor 2 para a variável y, argumentando que y não poderia valer 2, escrevendo a equação $2 = \frac{1}{x^2 + 1}$ e manipulando-a até chegar a $x^2 = -0,5$. O professor, encerrando esse debate, conduziu as estudantes a verificar, da mesma forma como haviam feito momentos antes com a expressão $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \pm\sqrt{-1}\}$, que esse resultado era coerente com a conclusão gráfica a que

havia chegado, em que perceberam que o número 2 não pertencia à imagem dessa função.

Resumo do episódio e uma análise inicial

Ao trabalharem com a função de expressão $y = \frac{1}{x^2 + 1}$, ocorreu o problema já descrito em relação à colocação dos parênteses na expressão " $x^2 + 1$ ". Embora o debate em relação a essa questão tenha sido rápido, mostrou-se rico em proporcionar o trânsito pelas representações algébrica e gráfica: como o gráfico de $y = \frac{1}{x^2 + 1}$ não fora disponibilizado, devido aos intervalos em que se encontrava a janela gráfica (figura 5.2.19), o professor pôde aproveitar o fato para discutir onde estaria a curva dessa função, proporcionando interligações, feitas pelas alunas, entre as observações gráficas e os aspectos da expressão algébrica em questão.

O que sobressaiu neste episódio foi a maneira como a álgebra das estudantes mostrou-se, novamente, eficiente para resolver algumas questões aqui trabalhadas, com destaque para as ações de Vivian: (i) afirmou que o gráfico não tinha ponto comum com o eixo x , porque não havia possibilidade para $y=0$, já que $0 = \frac{1}{x^2 + 1}$ levava à expressão $0 = 1$; (ii) afirmou que zero pertencia ao domínio da função substituindo x por zero e obtendo $y=1$, na expressão algébrica $y = \frac{1}{x^2 + 1}$; (iii) trouxe a resolução de exercícios da sala de aula para o experimento de ensino, ao escrever a expressão $x^2 + 1 \neq 0$ e chegar ao domínio $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \pm\sqrt{-1}\}$. Vivian explicou que essa escrita era coerente com o fato de o domínio da função em questão ser todo o conjunto $\mathbb{R}$; (iv) Após constatarem visualmente que o conjunto imagem não se referia a todos os reais positivos, conforme afirmaram várias vezes, Vivian justificou, também algebricamente, que 2 não pertencia à imagem, ao construir a equação $2 = \frac{1}{x^2 + 1}$ e chegando à impossibilidade constatada em

$x^2 = -0,5$. Ou seja, a abordagem algébrica esteve, neste episódio, coordenada às observações gráficas, de maneira semelhante àquela vista no episódio 2, no qual as alunas também coordenaram tais representações, trazendo a álgebra da sala de aula para as atividades do EE.

Encerrada a descrição dos dados, no próximo capítulo estenderei as análises que foram aqui iniciadas, examinando os episódios construídos tendo como base o referencial teórico descrito no capítulo 2 e temas da revisão de literatura apresentada no decorrer do capítulo 3.

– CAPÍTULO 6 –

DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Neste capítulo, apresento a discussão a respeito dos episódios construídos e apresentados no capítulo anterior, procurando elaborar possíveis respostas à pergunta norteadora desta pesquisa, ou seja, **“como estudantes trabalham com aspectos algébricos, gráficos e numéricos de funções dentro de um coletivo pensante formado por estudantes, mídias e pesquisador?”**.

Conforme já abordado no capítulo 4, nas considerações metodológicas, não se busca aqui uma resposta única e final à discussão proposta por esta pesquisa, mas sim a observação de vários temas emergentes dos dados, e que podem constituir uma visão panorâmica das conclusões finais da investigação.

O *design* dos experimentos de ensino, em seu papel na coordenação das representações múltiplas de funções pelos coletivos pensantes estudados, será analisado ao longo deste capítulo. Tal discussão será dividida em itens, os quais se referem a temas utilizados para desenvolver a análise dos episódios descritos no capítulo anterior. Nesses itens, permeiam, como perspectivas principais de análise, o referencial teórico assumido, descrito no capítulo 2, bem como alguns tópicos discutidos na revisão de literatura apresentada no capítulo 3.

Para facilitar o entendimento das análises que seguirão, repetirei algumas figuras do capítulo 5 ao longo das discussões; logo a seguir, apresento a nomenclatura dos episódios, seguida de algumas expressões-chave, procurando facilitar a identificação dos mesmos. Nesse sentido, uma opção adicional que o

leitor possui é a possibilidade de, antes de continuar a leitura deste capítulo, retomar os resumos de cada episódio, no capítulo 5.

André e Gianluca, os construtores de “teoremas”.

- **Episódio 1 - Monotonicidade e as primeiras atuações do professor no trabalho de campo:** conflito entre as maneiras de se identificar funções crescentes e decrescentes; associação direta com o sinal do coeficiente a , de $y=ax+b$.
- **Episódio 2 - A função racional, representações múltiplas, domínio de funções e o drama do zero:** discussão sobre as representações múltiplas; manipulação sobre as representações da função racional (“encosta ou não encosta?”); reflexões a respeito do domínio desta, e sobre operações com zero, com uso da calculadora.
- **Episódio 3 - A simetria da parábola:** Nova conversa sobre monotonicidade; Gianluca constrói uma parábola no papel e, com tabela e parábola correspondentes do *Graphmatica*, o grupo discute a simetria da função quadrática; verificação gráfica do ponto $(0,c)$ em funções de expressões do tipo $y = ax^2 + bx + c$.
- **Episódio 4 - Álgebra, raízes e, novamente, o drama do zero:** O professor incomoda-se com alguns aspectos da álgebra dos estudantes; o software praticamente não fora utilizado, mas a calculadora desempenhou um papel importante no debate sobre o cálculo de $0/3$.
- **Episódio 5 - O “teorema” AGGA:** A partir de uma conjectura dos estudantes, refutada com o software, utilizam várias funções para chegar à conclusão de que gráficos obtidos com expressões do tipo $y=ax^n$, com $n \in \mathbb{N}$, “passam” pelo ponto $(1,a)$.
- **Episódio 6 - Mais um “teorema”:** Gráficos obtidos a partir de $y=1/(x^2+1)$ e de $y=1/x^2+1$ provocam discussões sobre a ordem das operações; gráficos obtidos por meio de expressões da forma $y=x^n$, $y=1/x^n$

e $y=1/(x^n+1)$ são esboçados, levando os estudantes a relacionar a paridade do número $n \in \mathbb{N}$ com a posição dos gráficos nos quadrantes do plano cartesiano.

Maria Fernanda e Vivian, alunas que gostam de Matemática.

- **Episódio 1 - Paralelas que se cruzam ou que coincidem?** Ao variarem o parâmetro **a**, na expressão $y=a.x-2$, discutem se as retas correspondentemente geradas, como a obtida ao digitarem $y=400x-2$, podem coincidir com o eixo y .
- **Episódio 2 - As três representações e a função racional:** Através da função racional, coordenam valores da tabela com pontos no gráfico, usando a calculadora; Vivian utiliza o resultado da multiplicação “em cruz” para relacioná-lo com as características gráficas.
- **Episódio 3 - A função irracional e as parábolas:** Discussão entre as diferenças algébricas entre $y = \sqrt{x}$ e $y^2 = x$ e as correspondentes diferenças gráficas obtidas com o *Graphmatica*; discussão sobre definição de função.
- **Episódio 4 - Funções polinomiais e uma comparação original:** Análise das posições entre os gráficos obtidos por $y=x^2$, $y=x^4$ e $y=x^6$ para os intervalos $0 < x < 1$ e $x > 1$.
- **Episódio 5 - O domínio e a imagem para $y = \frac{1}{x^2 + 1}$:** Discussões a respeito do uso dos parênteses; debates na determinação do domínio e da imagem; Vivian interliga novamente a álgebra da multiplicação “em cruz” com as observações gráficas.

Ao longo deste capítulo, utilizarei, por exemplo, a expressão “episódio 3 dos alunos”, para me referir ao episódio construído junto às ações de André e Gianluca, enquanto que, para Fernanda e Vivian escreverei, analogamente,

“episódio 3 das alunas”. Ocasionalmente me refiro ao professor Francisco na terceira pessoa, em geral para situações em que o texto retoma as descrições das cenas analisadas.

6.1 O software gráfico

Algumas características do *Graphmatica*, apresentadas no capítulo 4, puderam ser observadas no capítulo 5 através das descrições das ações dos coletivos pensantes estudados. Torna-se aqui necessária uma discussão acerca de como o design desse software condicionou as ações dos estudantes nos EE, ou seja, como ele contribui positivamente na coordenação das representações múltiplas.

Para facilitar a retomada da perspectiva teórica aqui utilizada, repetirei um trecho de Tecnologias da Inteligência (LÉVY, 1993), presente no capítulo 3, acrescido de grifos meus em negrito, mantendo, para tanto, os grifos em itálico originais do autor:

Um modelo digital não é *lido* ou *interpretado* como um texto clássico, ele geralmente é ***explorado*** de forma interativa. Contrariamente à maioria das descrições funcionais sobre papel ou aos modelos reduzidos analógicos, o modelo informático é essencialmente **plástico, dinâmico**, dotado de uma certa **autonomia de ação e reação** (p.121).

As expressões destacadas encerram idéias extremamente importantes na análise da atuação do software durante os EE. A **exploração** interativa realizada pelos estudantes junto ao *Graphmatica* pôde ser observada em vários aspectos, sendo neste item detalhada, em especial, a forma como certas características do mesmo foram importantes nas ações dos grupos; a discussão sobre essas e outras particularidades do software permeará, ainda, os itens posteriores deste capítulo.

Entendo que a **exploração** de Lévy (1993) relaciona-se, nesta pesquisa, à noção de **experimentação**, o que pedagogicamente concerne às tentativas e erros, construção de conjecturas, confirmação ou refutação das mesmas, levantamento de hipóteses, dentre outras considerações que podem emergir de atividades exploratórias, no caso, junto a um software gráfico.

Em seu aspecto **dinâmico**, o *Graphmatica* evidencia-se em sua capacidade de representar graficamente inúmeras funções de maneira prática, já que basta digitar uma expressão analítica para a obtenção de gráfico e tabela correspondentes.

Essa característica do software permitiu que Gianluca, no episódio 5, obtivesse vários gráficos: $y=x^2$, $y=x^3$, $y=2x^2$, $y=2x^3$, $y=3x^2$, $y=3x^3$, $y=4x^2$, $y=4x^3$ e $y=x^{65}$ foram expressões utilizadas para comprovar a validade da conjectura que chamaram de “teorema AGGA”, pelo qual deduziram que gráficos de funções de expressão analítica da forma $y=ax^n$ possuem o ponto referente ao par ordenado (1,a). Tal conclusão coordenou aspectos algébricos (valores do coeficiente **a** das expressões analíticas) com aspectos gráficos (coordenadas y de valores correspondentes àquele coeficiente), enquanto que as expressões $y=4x^2+3x-12$ e $y=4x^2+x$ foram digitadas para reforçar essa validade, no sentido de que, se não fossem tomados parâmetros $b=c=0$, numa expressão da forma $y=ax^2+bx+c$, a conjectura possivelmente não seria verificada.

Há mais exemplos desta dinâmica em outros episódios. No episódio 2 dos alunos, André variou o numerador da função racional, a fim de observar se os gráficos obtidos por $y=1/x$, $y=2/x$, $y=3/x$ e $y=-3/x$ (figura 6.1) tocariam ou não o eixo x. Na sequência do debate, garantiu que o gráfico de $y=1/x$ não tinha ponto em comum com o eixo das abscissas. É bastante provável que essa sequência de gráficos, não percebida pelo professor no momento em que André a realizou, tenha condicionado sua resposta, já que, ao explicar para Gianluca o porquê dessa conclusão, assim o fez trazendo mais um exemplo: $y=365/x$. Gianluca, entusiasmado, tentou mostrar que o gráfico “cortaria” o eixo x se invertessem as

posições da constante e da variável; aproveitando o gráfico de $y=3/x$, pediu a André que utilizasse $y=x/3$, obtendo uma reta.

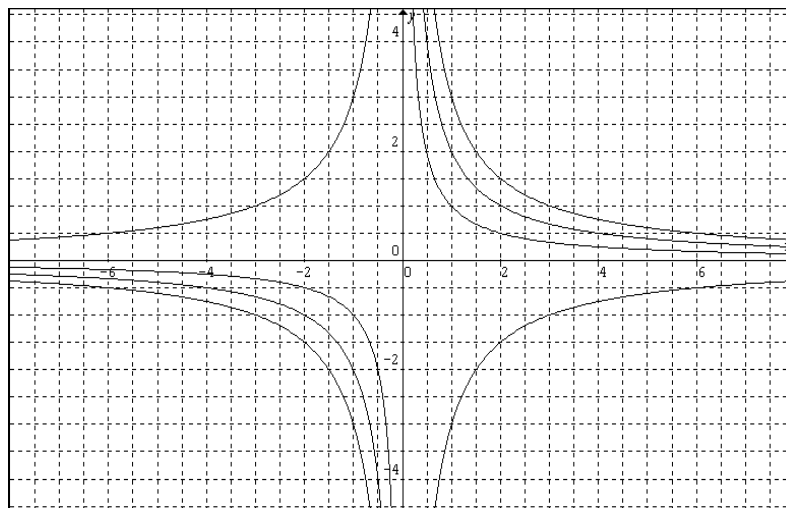


Figura 6.1: Gráficos obtidos por André, sem que o professor tivesse notado, enquanto estava no quadro falando sobre os diagramas. Ao que indicam os gráficos, é bastante provável que tenha digitado as expressões $y=1/x$, $y=2/x$, $y=3/x$, $y=-3/x$

No episódio 3, os estudantes deduziram que as parábolas interceptam o eixo y no ponto $(0,c)$, através de uma constatação visual proporcionada pelos esboços obtidos com a variação do parâmetro **b**, na expressão $y=ax^2+bx+c$ (figura 6.2).

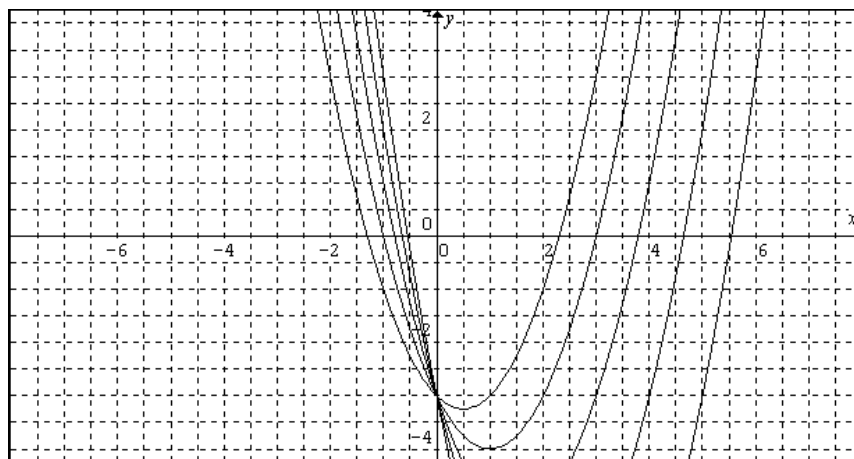


Figura 6.2: Gráficos obtidos a partir da variação do parâmetro b de expressões analíticas da forma $y = x^2+bx-3$.

No episódio 6, André estabeleceu a relação entre a paridade dos expoentes de x e as posições dos gráficos obtidos, através das expressões analíticas $y=1/(x^3+1)$, $y=1/(x^4+1)$ e $y=1/(x^5+1)$, conforme ilustra a figura 6.3. A construção dessa dedução, completada no quinto encontro dos alunos, havia se iniciado no quarto encontro, quando essa mesma relação não chegara a uma conclusão clara junto às expressões $y=x$, $y=x^2$, $y=x^3$, $y=x^4$, $y=x^5$ e $y=x^6$ (ao contrário do que ocorreu com as outras duplas), e foi retomada por André e Gianluca após lidarem com as primeiras expressões.

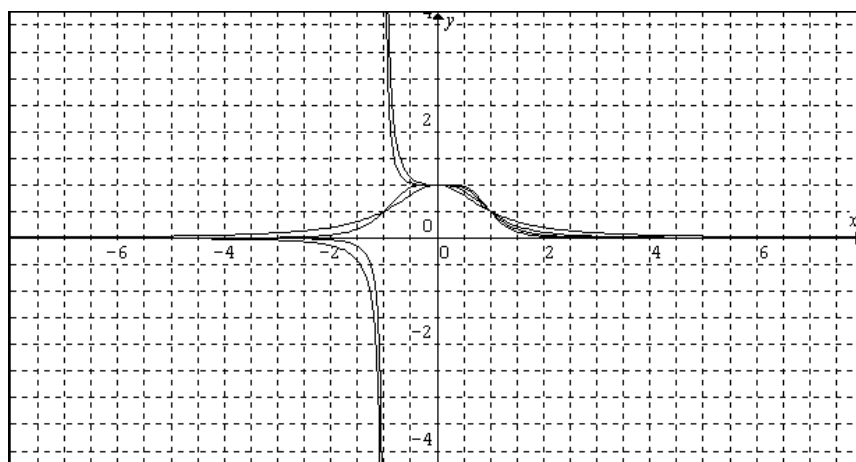


Figura 6.3: Gráficos obtidos a partir de $y=1/(x^2+1)$, $y=1/(x^3+1)$, $y=1/(x^4+1)$ e $y=1/(x^5+1)$.

André e Gianluca estenderam a relação entre a paridade de expoentes da variável x e as respectivas posições dos gráficos, em termos de localização de quadrantes, para funções de expressão analítica dos tipos $y=x^n$ e $y=1/x^n$, ou seja, para n par, os gráficos se situam nos quadrantes 1 e 2, e para n ímpar, os gráficos se situam nos quadrantes 1 e 3.

Em certo momento, a experimentação que André realizara não correspondeu às suas expectativas: ao digitar $y = \frac{x}{x^5}$ (figura 6.4), entendeu que suas deduções possuíam erro, já que o expoente de x , no denominador, era ímpar, mas o gráfico correspondente foi disponibilizado nos quadrantes 1 e 2. A atuação do professor foi importante para mostrar-lhe que o mesmo gráfico estava sendo

ilustrado para a expressão equivalente $y = \frac{1}{x^4}$, obtida através da simplificação da fração.

Dessa forma, vários gráficos e expressões de funções racionais levantaram tópicos matemáticos que acabaram sendo conectados pelos estudantes, de modo que os alunos chegaram a conclusões que interligam ambas representações.

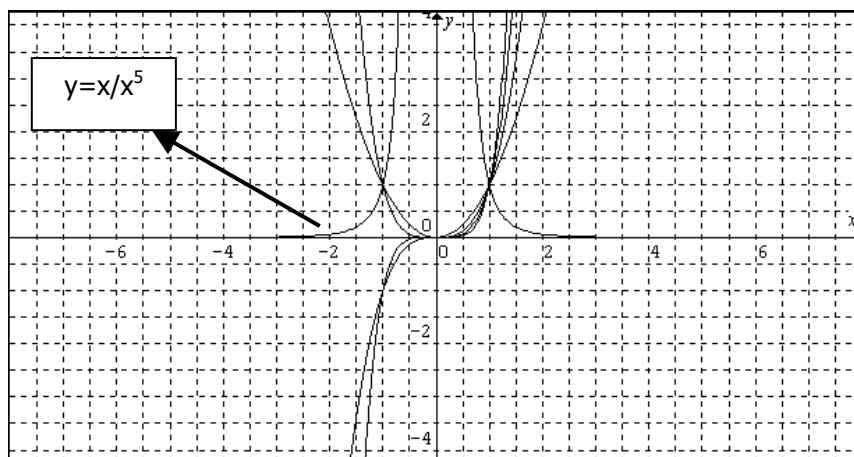


Figura 6.4: André esboça o gráfico obtido por $y = x/x^5$

Em relação às alunas Fernanda e Vivian, no episódio 1, inúmeras retas foram visualizadas no *Graphmatica* através da variação do parâmetro **a** da expressão $y = ax - 2$; o que chamou a atenção nas dinâmicas desse episódio foram as discussões a respeito da possibilidade ou não de uma reta obtida por essa forma algébrica coincidir com o eixo y.

Por meio de gestos e expressões utilizados junto à função obtida por $y = 400x - 2$ (figura 6.5), Fernanda justificou a não coincidência das retas, utilizando simultaneamente as representações gráficas e algébricas: "Não dá pra ter x no zero..... [faz um gesto com o braço como se este chegasse, verticalmente, bem perto do eixo y]. Porque a gente tem o b."

Vivian também usou as expressões $y = 10000x - 2$ e $y = 15000x - 2$, levando o professor a questioná-las sobre as raízes das funções obtidas; as alunas usaram a calculadora para observar que 0,0002, raiz da primeira função, não seria

exatamente 0, o que implicava dizer que a reta, que a elas parecia ser vertical, não “passa” exatamente por $x=0$.

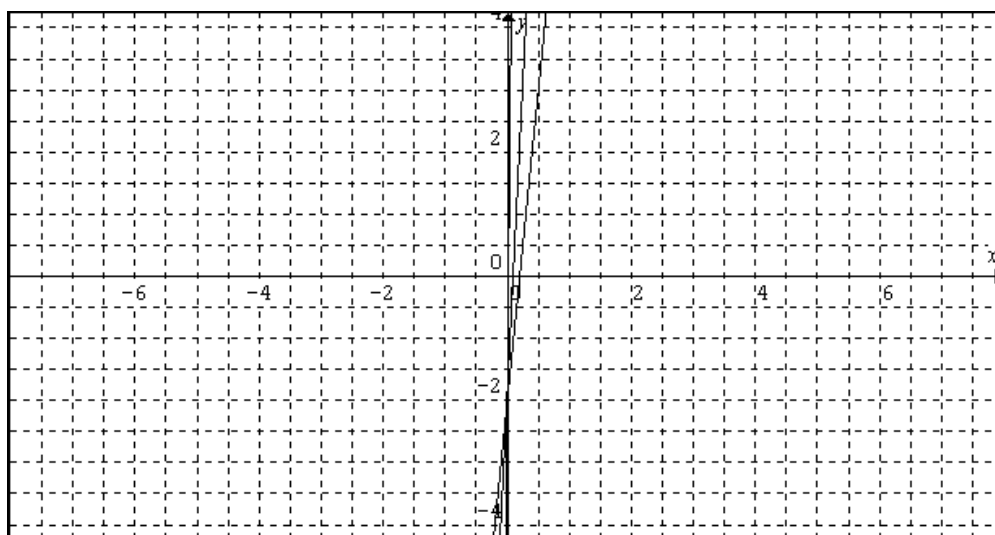


Figura 6.5: A: reta obtida a partir de $y = 400x - 2$, originalmente azul, fica justaposta ao eixo y. A reta que “descola” desse eixo nas proximidades do ponto $(0,3)$, se refere à expressão $y = 100x - 2$

Ainda nesse episódio 1 das alunas, a tentativa e erro também foi verificada. Após usar valores “elevados” do **a**, Vivian resolveu inverter a tentativa, atribuindo um valor “pequeno” a esse parâmetro, no caso, 0,0002; a importância de trabalharem em dupla ficou aqui constatada: quando Vivian afirmou ter obtido uma função constante, Fernanda se apressa em mostrar-lhe, com o software (figura 6.6), que não era isso que havia ocorrido.

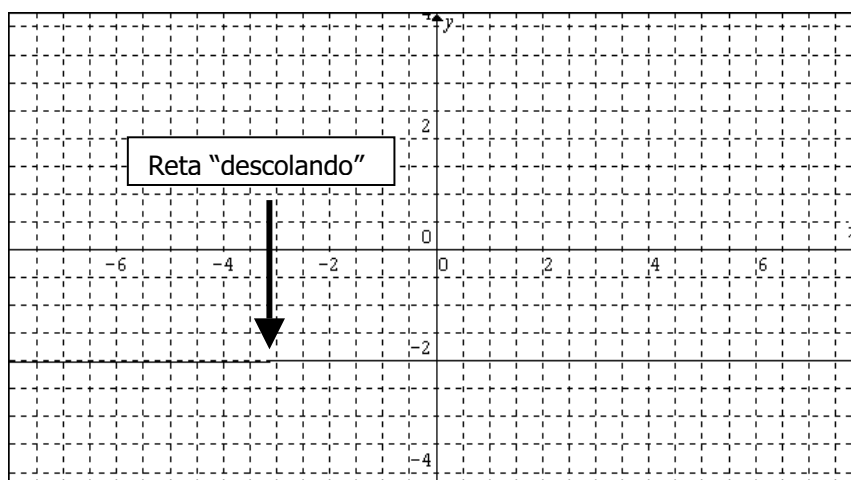


Figura 6.6: Gráfico obtido a partir de $y = 0,0002x - 2$.

Em todos os exemplos citados anteriormente, podem ser observadas situações nas quais a característica do software em disponibilizar dinamicamente vários gráficos propiciou a coordenação, pelos estudantes, entre as representações algébricas e gráficas de funções. Destacam, sobretudo, os exemplos nos quais as funções polinomiais prototípicas da forma $y=ax^n$ ($n \in \mathbb{N}$) serviram a essa coordenação, como no episódio 5, no qual André e Gianluca construíram o “teorema AGGA”, e no episódio 6, ao relacionarem a paridade do expoente n com os quadrantes do plano em que os respectivos gráficos se situavam. Sobre essa relação, vale comentar que a mesma também foi desenvolvida por Fernanda e Vivian, embora tal fato não tenha se constituído um episódio; como foi visto, André e Gianluca desenvolveram essa interligação também usando funções racionais da forma $y=1/x^n$ e $y=1/(x^n+1)$.

Continuando, a experimentação também foi verificada por meio de outro aspecto do software: ao se trabalhar com **uma mesma função**, os comandos de *zoom* e as barras de rolagem permitiram que os estudantes “navegassem” pelas características da mesma, principalmente em sua representação gráfica. A função racional prototípica de expressão $y = \frac{1}{x}$ foi muito utilizada, nesse sentido, pelas duas duplas.

No episódio 2 dos alunos, as barras de rolagem foram fundamentais para que os estudantes investigassem as características gráficas e tabulares de tal função. A figura 6.7 ilustra um exemplo do uso desse comando, que, ao ser utilizado para serem visualizados outros valores de x no gráfico, implica automática mudança da disposição da tabela, tornando-a, também, à sua maneira, dinâmica.

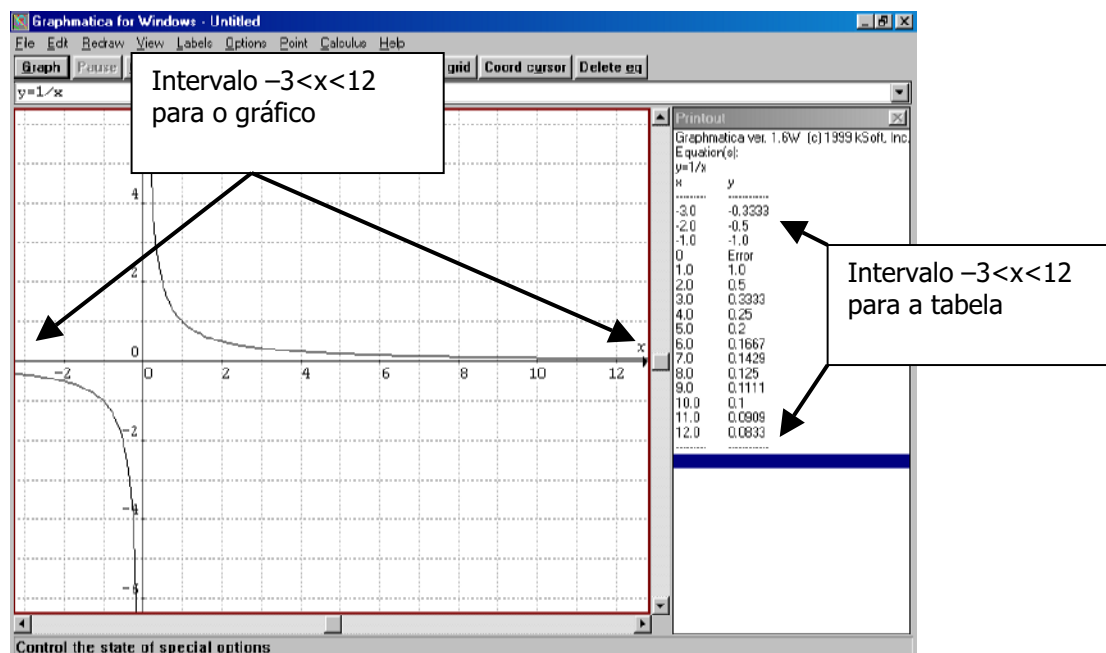


Figura 6.7: As três representações da função racional, no *Graphmatica*

Com a barra de rolagem horizontal, Gianluca buscava descobrir se tal gráfico poderia ou não tocar o eixo x. Esse aluno parecia esperar que, no “momento certo”, ambos, gráfico e eixo x, iriam coincidir.

No entanto, os gráficos que André esboçara, usando $y=1/x$, $y=2/x$, $y=3/x$, $y=-3/x$, aliados às imagens que conseguira usando o *zoom in* (Figuras 6.8 e 6.9), fortaleceram-lhe a convicção de que não haveria esse “momento”, ao garantir que o gráfico “não toca o eixo x”:

A: Vamos ver aqui. Opa! Vamos pegar só esta partezinha aqui, vamos ver se toca (figura 6.8).

A: Arrá! Não toca. [ao observarem a imagem referente à figura 6.9]

G: Vai, vem mais então... porque olha, tá descendo, uma hora vai tocar [André está usando a barra de rolagem] não, acho que não.

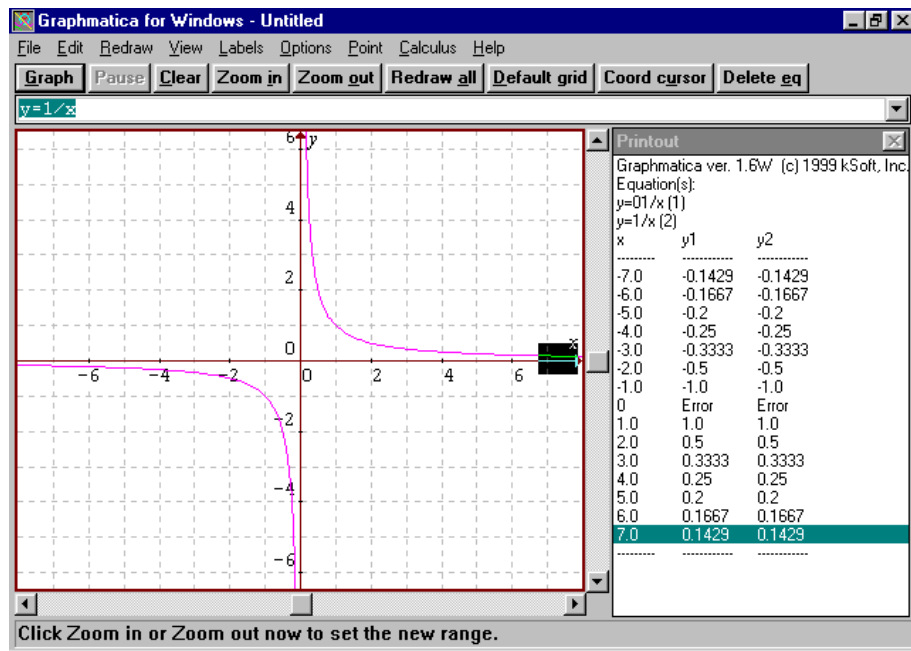


Figura 6.8: André utiliza o *zoom in* arrastando um retângulo.

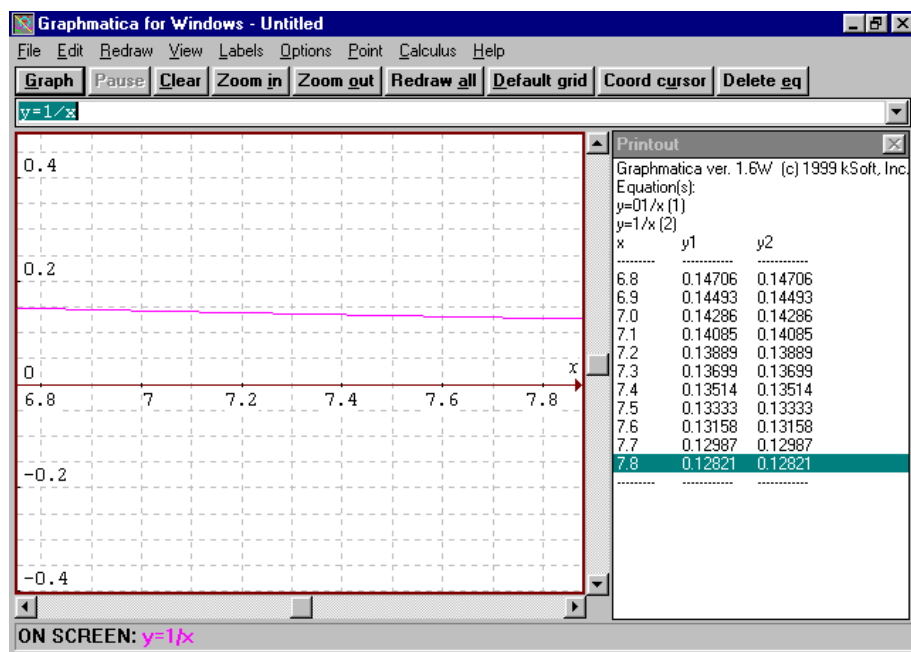


Figura 6.9: A figura obtida após o *zoom in*.

A: Olha, tá vendo que os espaços estão ficando maiores [*refere-se à distância entre o gráfico e o eixo x, que aumenta a cada zoom in aplicado, conforme indicam as figuras 6.8 e 6.9*], daqui a pouco eles vão se juntando [*refere-se à posição entre o gráfico e o eixo x, enquanto usa a barra de rolagem*], vão ficar completamente paralelos. Olha o espaço [*após outro zoom*]

G: Faz assim, ó...

A: Calma, calma, vamos bem devagar... vamos avançar mais um pouquinho aqui para frente.

G: Pára. Olha, tá abaixando, vai tocar... [*André continua usando a barra de rolagem (figura 6.10)*]

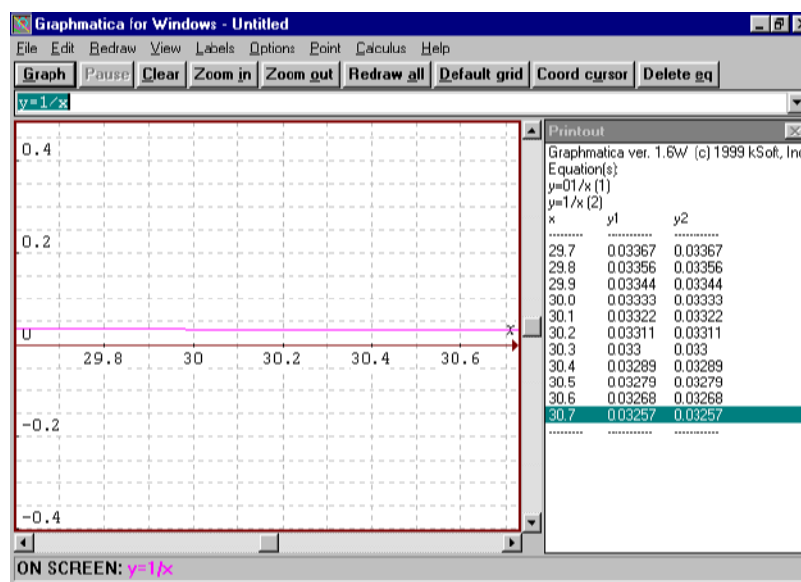


Figura 6.10: A barra de rolagem é usada por André.

A: [*sorri*] Não vai tocar, eu tô falando. Vai juntar todos os tracinhos, ó tá juntando.

G: É... aí não pode parar, porque ela não é... não termina, é infinita, mas... Ela pode juntar sim, ficar na mesma linha, não pode?

Verificou-se, na seqüência desses diálogos, não apenas uma interligação entre as representações, mas também entre mídias: André utilizou a barra de

rolagem até visualizar o gráfico aparentemente coincidente com o eixo x , observando o par ordenado $(1148; 0.0009)$ no ponto correspondente do gráfico e nos respectivos valores da tabela. Após algumas observações simultâneas com gráfico e tabela, Gianluca utilizou a calculadora, aparentemente para dar sentido aos valores representados na tabela; esse exercício o conduziu a determinar o domínio da função racional, analisando que o zero não poderia pertencer a esse conjunto.

G: [...] eu acho que é qualquer numero real menos zero... Porque nesse zero você não está incluindo 0.1, 0.2... Porque eu dividi agora olha [*na calculadora*], 1 dividido por 0.1 dá 10. Já **existe**. [...] qualquer numero real, menos o 0, **existe**.

A fala de Gianluca permeou-se de questões numéricas. Ao mencionar que “nesse zero você não está incluindo 0.1, 0.2...”, esse estudante mostrou ter observado, através dos valores decimais, a característica da continuidade do conjunto $\mathbf{R}$, ao mesmo tempo em que **diferenciou** valores próximos de zero com o próprio zero. Nesse contexto, é relevante verificar que Gianluca interligou o fenômeno gráfico com as outras representações:

G: Eu ia dizer que...o gráfico... o desenho do gráfico só ia encostar no... na reta, na reta do x , se o x fosse 0. Como o x não pode ser 0, porque não existe resultado de 1 dividido por 0, o desenho não encosta na reta. [*se refere ao eixo x*]

É verdade que o aluno trocou as posições dos eixos em sua fala, mas o que marca esta é sua busca na coordenação das representações algébricas, mediante operações realizadas na calculadora, com o aspecto visual do gráfico, que havia sido examinado pelos estudantes, junto à tabela.

Essa troca de papéis entre x e y, na linguagem de Gianluca, foi retomada no encontro seguinte. No episódio 6, único composto de duas partes em dias diferentes (3º e 5º encontros), os estudantes trabalharam com a função obtida por $y=1/(x^2+1)$, e após utilizarem seguidamente as barras de rolagem (figura 6.11), a discussão sobre qual variável valia zero em determinada circunstância foi retomada, mediante a coordenação da expressão analítica com gráfico, software e calculadora:

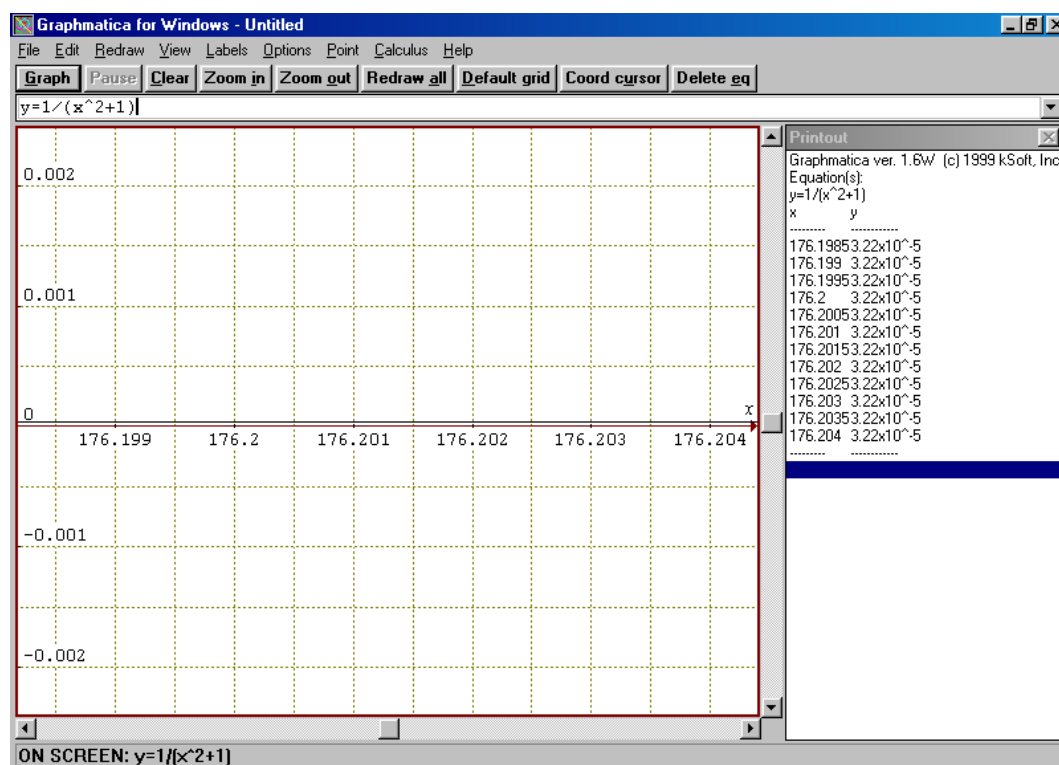


Figura 6.11: Gianluca usa a barra de rolagem.

F: [...] chegar mais perto do eixo x significa que|

A: Mas não cola [gestos]!

F: Mas não cola. Por que não cola?

G: Porque o nosso x não é zero.

F: Mas vocês acabaram de me dizer que o x pode valer zero...

A: Ah, não. É o y que não pode valer zero.

Essa coordenação entre gráfico e álgebra continua, então direcionada à questão “encosta ou não encosta?”; o professor perguntou, aproveitando a posição do gráfico que Gianluca estava trabalhando, o qual parecia indicar o mesmo superposto ao eixo x:

F: Que ponto é esse?

G: [*corretamente*] É o ponto (250,0).

F: Ele está no gráfico?

AG: Está.

F: Então, quer dizer que, se eu puser 250 na fórmula e fizer a conta, então o y vai dar zero.

A: Vamos ver [*faz na calculadora*]

[...]

A: 0,0000159 e não dá zero. Então, não encosta!!

O software e a calculadora condicionaram, dessa forma, a coordenação entre as três principais representações, neste caso, com destaque para as possibilidades que a barra de rolagem e o comando *zoom in* proporcionaram aos estudantes. Essa mesma análise se aplica ao episódio 4 das alunas, que incluiu poucas, mas significativas aplicações de *zoom in* e da barra de rolagem vertical (figura 6.12), realizadas enquanto Fernanda e Vivian estudaram as posições entre os gráficos obtidos através de $y=x^2$, $y=x^4$ e $y=x^6$ para $0 < x < 1$ e para $x > 1$; o colorido dos esboços facilitou a tarefa das alunas.

Num modo de pensar seguramente criativo, Fernanda, depois de escrever $x = \sqrt{y}$, $x = \sqrt[4]{y}$ e $x = \sqrt[6]{y}$, fixou $y = 2$ obtendo os valores para x iguais a $\sqrt{2}$, $\sqrt[4]{2}$ e $\sqrt[6]{2}$, respectivamente; então os indicou, com gestos sobre o *Graphmatica*, uma conclusão que poderia ser assim enunciada: “para um mesmo valor y (2, por exemplo), o gráfico de $y=x^2$ é mais aberto porque sua abscissa é maior ($\sqrt{2}$) em relação às abscissas dos gráficos de $y=x^4$ ($\sqrt[4]{2}$) e $y=x^6$ ($\sqrt[6]{2}$), sucessivamente”.

Creio que figura 6.12 é clara ao mostrar que a manipulação algébrica realizada por Fernanda, junto a essas funções, foi acompanhada pelo pensamento gráfico. Nota-se que essa coordenação das representações, do modo como Fernanda a realizou, poderia incitar ainda um debate envolvendo o conceito de “inversão de funções”, podendo também ser explorado junto ao software, ao favorecer as coordenações como a realizada pela aluna.

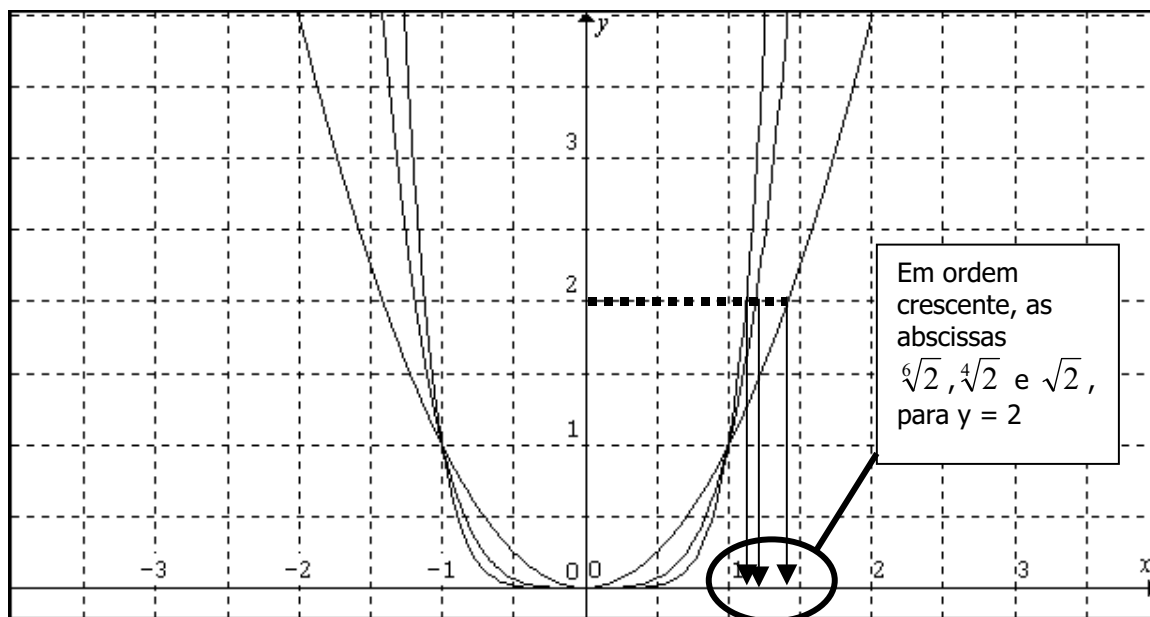


Figura 6.12: Os mesmos gráficos com valores comentados por Fernanda.

Assim, diante da análise anteriormente descrita junto a alguns episódios, cheguei à questão: como os comandos do software, como *zoom* e barras de rolagem, condicionaram a interligação das representações de funções realizada pelos estudantes? A resposta a essa pergunta, que se traduz também como uma resposta à pergunta norteadora da pesquisa, pode ser estruturada sob o conceito de **navegação**, apresentado por Lévy (1993), ao desenvolver a metáfora da rede hipertextual: “[...] Navegar em um hipertexto significa portanto desenhar um percurso em uma rede que pode ser tão complicada quanto possível.” (p. 33).

“Complicado” aqui se refere ao não-sequencial: as maneiras como os estudantes pensaram **com** os comandos do software não seguiram uma estratégia

linear, uma seqüência de passos pré-estabelecida, mas a **autonomia** que lhes foi conferida, esboçando vários gráficos ou utilizando *zoom* e barras de rolagem, permitiu-lhes navegar pelas características gráficas das funções racionais propostas, discutir a divisão por zero e, dentre outras ações, relacionar valores da tabela com o comportamento gráfico, de maneira que a calculadora favorecera esse trânsito, através de valores atribuídos à variável x em sua expressão analítica.

"A quase instantaneidade da passagem de um nó a outro permite generalizar e utilizar em toda sua extensão o princípio da não-linearidade. Isto se torna a norma, um novo sistema de escrita, uma metamorfose da leitura, batizada de navegação" (LÉVY, 1993, p. 37)

Dessa forma, entendo que esse processo de experimentação, que permeou a construção do "teorema" AGGA, a coordenação entre as três representações (gráfico, álgebra e tabela) da função racional $y=1/x$ e o debate sobre a possível coincidência de retas obtidas por $y=ax-2$, para citar os exemplos mais marcantes, **dificilmente ocorreria, se as mídias disponíveis não incluíssem as tecnologias informáticas.**

Essa inferência não se deve apenas ao fato de que seria uma tarefa demorada construir todos os gráficos citados nesses episódios mediante lápis-e-papel, mas também porque seria muito difícil surgirem as conjecturas iniciais descritas, de forma a conduzir os estudantes aos debates posteriores, a suas confirmações, dúvidas e refutações.

Até o momento, procurei realçar as características do software *Graphmatica* que foram extremamente importantes para o processo de produção matemática dos grupos estudados; outra característica, já mencionada, e que será retomada mais adiante, é sua possibilidade de representar simultaneamente as três representações canônicas (gráfico, álgebra e tabela). O leitor poderá notar, dentre

outros temas a serem analisados, que o debate aqui desenvolvido estará permeando várias das discussões que ainda seguirão.

Porém, antes de desenvolver análises sobre outras mídias que atuaram durante os EE, farei, no próximo item, uma discussão sobre o encaminhamento das atividades realizadas junto ao software gráfico, que vão desde a confecção das fichas de trabalho até a atuação do professor no trabalho de campo.

6.2 O papel do professor e a elaboração das fichas de trabalho

Torna-se relevante, neste momento, levantar indícios do já citado viés algébrico do professor, motivos que possam justificá-lo e os reflexos do mesmo na Matemática produzida ao longo dos EE.

Acredito que pesquisadores qualitativos, como quaisquer outros pesquisadores, atravessam um processo de amadurecimento e de crescimento no decorrer de suas pesquisas, desenvolvendo, dessa forma, suas habilidades investigativas. Assim se deu com o pesquisador, autor deste texto, conforme já delineado de maneira mais geral no capítulo inicial desta dissertação. Entendendo minha preferência pela álgebra como um dado emergente dos episódios, procuro, aqui, analisá-la, observando até que ponto a influência de minha prática escolar esteve presente em minhas ações como pesquisador, no trabalho de campo.

O viés do professor, que trabalhou junto com os estudantes e que se vê na função de pesquisador, possui suas raízes em um processo complexo e parece corresponder a considerável parte das conclusões da pesquisa de Zuffi (1999), no sentido de que a prática pedagógica, limitada pela visão dos livros didáticos, pode proporcionar esse enfoque predominantemente algébrico, aspecto também levantado por Borba (1999).

O trabalho de Zuffi (1999), que investigou a linguagem de professores de Matemática do Ensino Médio, levantou vários itens nesse âmbito, os quais podem dificultar a construção de certos conceitos, ou mesmo causar ambigüidades e confusões, tanto por parte dos estudantes em sua aprendizagem, como também

para as próprias concepções desses professores. Devido a isso, considero que aqui se protagonizaram alguns dos problemas afins aos que essa autora relata no tratamento com a linguagem, o que poderia estar reforçando esse viés algébrico.

Um desses problemas, aliás, refere-se ao papel das variáveis, que podem se apresentar de maneira confusa, misturadas com as noções de domínio e imagem: “Há uma ambigüidade no significado das notações que se referem às variáveis e aos conjuntos de domínio e imagem.” (ZUFFI, 1999, p. 107).

Esta citação, originalmente grifada pela autora, diz respeito a uma das unidades de significado construída em sua análise de dados. Pôde aqui ser identificada na linguagem do professor Francisco, quando este afirma a André e Gianluca que “o domínio é sempre x” (episódio 2), e também ao utilizar as letras x e y inadequadamente na figura 6.13 (episódio 3 dos alunos).

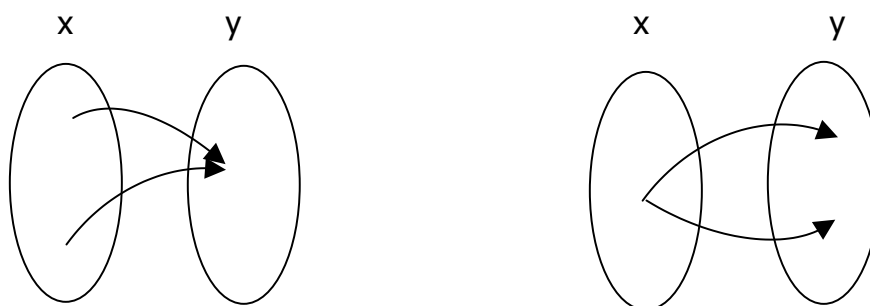


Figura 6.13: Diagramas feitos pelo professor no quadro

Embora em alguns momentos dos EE esse professor tenha frisado que o domínio é um **conjunto**, tal deslize pode ser significativo para os estudantes, já que a ambigüidade pode ser identificada também na linguagem deles. No episódio 2, Gianluca fala se é possível identificar **graficamente** o domínio da função obtida através de $y=1/x$, a partir de pergunta do professor:

G: Esse gráfico com ângulo, não. Porque ele também tem infinitos números no domínio, só que a gente não consegue achar... o domínio é x, a gente não

consegue achar o contra domínio que seria o **b**, certo?... contra domínio é o **b** ou é o **y**?

Numa passagem anterior, numa conversa sobre as representações, Gianluca também indicava essa ambigüidade:

G: ... Nessa daí que você mostrou [*diagramas do quadro*] você está representando um só. Porque, tipo, você colocou x no conjunto domínio e no... $x + 1$ no contra domínio. A regra que você inventou é que o domínio tinha que ter uma unidade a menos do contra-domínio.

Apesar de existirem vários exemplos, nos EE, de uma linguagem adequada do professor Francisco em relação ao conceito de domínio, vale a pena ressaltar que alguns descuidos podem vir a dificultar a ampliação de conceitos pelos alunos, principalmente se entendermos, assim como Zuffi (1999), que o professor tem um importante papel no processo de aprendizagem dos estudantes.

Porém foi a preferência pela representação algébrica que pôde ser observada com mais intensidade na linguagem e nas intervenções do professor Francisco, em especial nas perguntas dirigidas aos estudantes, em situações que os incentivou a verificar algebricamente se determinado ponto pertence ou não ao gráfico de certa função. Foi assim no episódio 3 dos alunos, ao solicitar que estes justificassem que o ponto $(0, -3)$ se refere ao parâmetro **c** da expressão $y = ax^2 + bx + c$, no exemplo específico de $y = x^2 - 2x - 3$. Ainda com os alunos, no episódio 4, insiste na verificação algébrica de zero como raiz da função de expressão analítica $y = x^2$, e no episódio 5 essa insistência foi um dos fatores que levou os estudantes à confecção do “teorema” AGGA, uma vez que perguntou várias vezes aos estudantes o porquê de gráficos de funções obtidas a partir de $y = a \cdot x^n$ “passarem” pelo ponto $(1, a)$.

Também pode-se identificar momentos em que a interferência do professor realizou-se de maneira imperativa, provavelmente pela ansiedade em conduzir o

estudante a uma resposta que considera apropriada. No episódio 1, sugeri, de maneira muito direta, duas expressões algébricas que derrubassem as conjecturas iniciais dos estudantes, referentes a conceitos de monotonicidade; teria sido mais produtivo ao debate se tivesse proposto novas perguntas que incentivassem a experimentação junto ao software, de forma a levar os estudantes a derrubarem ou confirmarem suas hipóteses iniciais. Outros exemplos ocorreram e foram sublinhados ao longo das descrições do capítulo 5, como o citado abaixo, referente ao episódio 1 dos alunos:

G: Então, decrescente x diminui y diminui

F: Não.

Porém, essa postura do professor modificou-se sensivelmente com o desenvolvimento dos EE. Deve-se realçar a importância que os vídeos tiveram nesse sentido, uma vez que a maioria deles foi analisada logo após os respectivos encontros. No resumo do primeiro episódio, com André e Gianluca, levantei a seguinte questão: como se pode avaliar a importância dessa mídia para o professor Francisco?

Torna-se importante, nesse ponto, tecer considerações metodológicas, à luz daquele panorama teórico descrito no capítulo 4, no que se refere ao coletivo seres-humanos-com-mídias (BORBA, 1999, 2002), incluindo os vídeos, a fim de analisar o seu papel na minha evolução como pesquisador ao longo de todo o processo. Ao assistir aos vídeos no mesmo dia em que se realizou o primeiro encontro com a dupla André e Gianluca, o pesquisador e professor Francisco viveu uma rica experiência pedagógica, embora não muito agradável. Isso porque se mostrou difícil ver sua interferência impor limites ao potencial das mídias informáticas e ao potencial de criação dos estudantes, como a definição visual (gráfica) de André e a associação “simbólica $\leftrightarrow$ gráfica” de Gianluca, para decidirem se uma função é crescente ou decrescente.

À medida que os encontros dos EE aconteciam, o coletivo pensante composto pelo pesquisador Francisco, em casa, junto ao computador e aos vídeos, entrelaçou-se com os coletivos pensantes que atuaram durante os experimentos, uma vez que essas atividades de pesquisa junto ao vídeo **transformaram** continuamente a atuação do professor Francisco no trabalho de campo. É verdade que a importância dada à representação algébrica continuou a aparecer em várias oportunidades, mas pude constatar, tanto na pesquisa quanto em minha prática pedagógica, que passei a **perguntar** mais, e **explicar** menos.

Com os vídeos, pude, pois, conscientizar-me da relação que estava desenvolvendo entre a Matemática dos estudantes e a minha (de modo semelhante àquele proposto nas reflexões desenvolvidas por Steffe e Thompson (2000)), e que o potencial das mídias informáticas não poderia ser bloqueado, mas incentivado a alimentar as interações entre essas matemáticas.

Assim, assistir aos vídeos dos primeiros encontros com cada dupla provocou bons resultados para minha auto-avaliação, como professor e como pesquisador. Essas reflexões acerca do papel do professor dentro dos coletivos pensantes não forneceram respostas diretas à pergunta de pesquisa, mas indiretamente influenciaram a estrutura das fichas de trabalho, contribuindo para que certos temas emergissem para análise. Tais temas serão retomados adiante, porém seguirá uma primeira análise desenvolvida a respeito dos roteiros que conduziram os EE.

As fichas de trabalho também apresentam, de certa forma, indícios da preferência do **professor** Francisco pela álgebra. É interessante a tentativa de analisar até que ponto ele é o autor das mesmas, e até que ponto o **pesquisador** Francisco trouxe contribuições à elaboração delas.

Desde que conheci os softwares gráficos, trabalhei, em sala de aula, utilizando atividades que incentivavam o trabalho com funções através da variação de parâmetros em expressões algébricas, como as da forma $y = ax + b$, $y = ax^2 + bx + c$ e $y = a + b \cdot \text{sen}(cx + d)$.

No estudo piloto, alunas da 3ª série do Ensino Médio puderam realizar atividades semelhantes com funções exponenciais e logarítmicas. Nessas atividades, o foco principal era a interligação entre as representações algébricas e gráficas, porém **sempre se partindo da expressão analítica**, um fato que pode ocorrer, talvez até com mais facilidade, sem as mídias informáticas, conforme resultados da pesquisa de Zuffi (1999).

O leitor pode perceber a influência de tais atividades nas fichas de trabalho 1 e 2, nas quais constam essas variações com funções afins e quadráticas. A intenção foi a associação da variação entre os parâmetros das expressões analíticas com as variações gráficas. No caso da segunda ficha, um aspecto a mais permeava as intenções do professor: relacionar alterações gráficas, obtidas através das variações dos parâmetros de $y = ax^2 + bx + c$, com as fórmulas de Bhaskara, com as fórmulas das coordenadas do vértice das parábolas esboçadas e com as relações de Girard. Devido ao forte enfoque algébrico dessa ficha, as atividades dela decorrentes pouco acrescentaram em termos de dados à pesquisa.

Embora constem funções não tradicionalmente trabalhadas na 1ª série do Ensino Médio, na primeira ($y = 1/x$) e na segunda ($y = 1/(x^2 + 1)$) fichas, é na terceira ficha de trabalho que tais funções aparecem com maior intensidade. Torna-se, aqui, necessário retomar o papel do pesquisador Francisco: qual a influência da revisão de literatura sobre essas atividades?

A consulta a diversas pesquisas que envolvem o tema funções ocorreu em momentos bastante distintos deste trabalho: uma parte se realizou anteriormente ao trabalho de campo, mas boa parte foi posterior aos EE. Tal “divisão” explica-se pelas circunstâncias de amadurecimento da própria pesquisa: as dificuldades para encontrar o foco da investigação propiciaram uma diversidade considerável aos temas abordados na fase “pré-campo” do trabalho de mestrado. Dentre as pesquisas consultadas nessa fase, comentarei apenas aquelas que puderam, com intensidades diferentes, influenciar a construção das fichas de trabalho.

A pesquisa de Oliveira (1997) incluiu atividades sem o uso da mídia informática, envolvendo problemas com contextualização, utilizando, por exemplo, o uso de artigos e figuras extraídos de jornais e revistas. Como o potencial da informática era o grande pilar de minha investigação, tais atividades me auxiliaram, no sentido de se utilizar funções não tradicionalmente ensinadas: nelas aparecem, sem contextualização, as funções de expressões analíticas $y=1/x$ e $y=x^3$, incentivando o trânsito entre as representações gráfica, algébrica e tabular, por meio da mídia lápis-e-papel. Vale lembrar, porém, que tais atividades foram realizadas junto a alunos de nível superior, ou seja, que já tinham lidado com funções por um tempo considerável.

Por sua vez, as atividades junto ao *Graphmatica* que Costa (1997) desenvolveu para trabalhar com as funções trigonométricas foram muito semelhantes àquelas que eu já estava utilizando em sala de aula, desde 1996. No início, a pesquisadora também propunha um primeiro esboço no papel, mas apenas para poucos exemplares, para em seguida, no software, propor ao estudante que variasse os parâmetros de expressões do tipo $y = a + b.\text{sen}(cx + d)$.

A variação dos parâmetros foi prefixada, ou seja, a autora determinava de antemão as expressões analíticas. Comparando com minhas fichas de trabalho, há situações de prefixação: no caso das funções tradicionalmente estudadas na 1ª série, embora tenha deixado abertas as possibilidades para os parâmetros das expressões analíticas, escolhi funções para iniciarem esse estudo, no caso, através de $y = x - 2$ (primeira ficha) e $y = x^2 - 2x - 3$ (segunda ficha), para começar cada uma das atividades com funções afins e quadráticas, respectivamente.

Se retornasse ao campo hoje, portanto, não utilizaria essa técnica. Percebi, principalmente na segunda ficha de trabalho, que algumas questões podem ficar de lado ao se realizar essa prefixação, como, por exemplo, o número de raízes e a concavidade das parábolas.

A terceira ficha de trabalho também poderia ter sido mais aberta. A relação entre os quadrantes em que os pontos dos gráficos se situam e a paridade dos expoentes da variável x , em funções de expressões $y=x^n$, poderia ser menos

diretiva. Nessa ficha, as expressões com expoentes pares são apresentadas separadamente daquelas com expoentes ímpares. Embora tenha incentivado a comparação entre todas elas, tais questões poderiam ainda ter sido agrupadas numa só, apresentando o formato $y=x^n$, e pedindo que os estudantes variassem o valor de n .

Nos episódios e nas fichas pôde-se constatar que são freqüentes perguntas sobre conceitos associados às funções, como raízes, monotonicidade e domínio. A leitura do trabalho de Keller e Hirsch (1998) foi uma influência dessas indagações; nesse trabalho, tais questões são trabalhadas enquanto os estudantes utilizam calculadoras gráficas para trabalhar com fórmulas, tabelas e gráficos, disponibilizados simultaneamente.

Outra importante consulta realizada antes do trabalho de campo foi a pesquisa de Souza (1996) que, embora focando o estudo das funções quadráticas, incluindo a variação de parâmetros, apresentou, em sua proposta didático-pedagógica, funções diferentes das afins e quadráticas, a fim de serem trabalhadas com calculadoras gráficas.

Os trabalhos de Borba (1993, 1994, 1995) foram fundamentais para definir as representações múltiplas como enfoque principal das investigações desta pesquisa, associadas à manipulação de exemplares de funções de diversas classificações. Com o software *Function Probe*, esse autor trabalhou as transformações de funções quadráticas, modulares e “maior inteiro” com estudantes norte-americanos em nível equivalente ao Ensino Médio brasileiro.

O papel do *Function Probe* é essencial nesse trabalho, uma vez que as transformações, que não são o foco de minha pesquisa, são realizadas através de manipulações em quaisquer das três representações principais (gráfico, álgebra e tabela), de forma que o trânsito de uma representação a outra é sempre possível.

O *Graphmatica* não possui a capacidade de interligar as representações da mesma forma que o *Function Probe*, uma vez que ele não permite, por exemplo, uma manipulação direta sobre a tabela ou um comando para se efetuar esticamentos (*stretches*) nos gráficos. No *Graphmatica*, os valores das tabelas e os

esboços dos gráficos dependem primeiramente da digitação da expressão analítica. Então, a partir de manipulações feitas sobre o gráfico, como, por exemplo, através dos comandos *zoom* e barra de rolagem, alterações na tabela podem ser verificadas: os valores do domínio nela dispostos acompanham os valores visíveis no eixo x do plano cartesiano disponibilizado. Ou seja, não há possibilidade, com o *Graphmatica*, de esboçar um gráfico ou gerar uma tabela e, a partir um destes, chegar à expressão algébrica correspondente.

Essas características do software em certa medida contribuíram para reforçar o viés algébrico do professor Francisco, embora tenha havido uma tentativa de reverter a direção do trânsito pelas representações, no caso, uma adaptação que proporcionaria o trânsito no sentido “gráfico → expressão algébrica”.

Algumas questões foram por ele construídas para a primeira ficha de trabalho, mas foram suprimidas tão logo se encerrou o primeiro encontro com André e Gianluca, pelo fato de que o tempo não seria suficiente para a realização das mesmas. Dessa forma, ao final do anexo 1, o leitor poderá observar que até a questão 6 as funções aí constantes foram trabalhadas, mas ainda eram previstas atividades com as expressões $y = \frac{1}{x^2}$ (que foi trabalhada por André e Gianluca no episódio 6) e $y = \frac{x+1}{x-2}$, e, invertendo o sentido “álgebra → gráfico”, as últimas questões trazem impressos três gráficos de funções racionais, solicitando aos estudantes que descobrissem as expressões analíticas correspondentes de cada um deles.

É interessante então observar que, apesar das limitações do software já descritas, seu uso não implica necessariamente priorização da representação algébrica, pois o professor que desejar utilizá-lo tem plena autonomia para propor atividades que incentive o trânsito pelas representações, como nas últimas questões da ficha que acaba de ser comentada. Através da mídia escrita, uma

tabela impressa pelo *Graphmatica* pode ser utilizada para que o aluno tente chegar à expressão analítica correspondente por meio do software.

Gomes-Ferreira (1998), por exemplo, realizou atividade semelhante ao explorar a interação entre os alunos durante as atividades, propondo que um deles digitasse a fórmula da função sem que o outro a visse, para que este tentasse descobri-la a partir do gráfico disponibilizado.

Em relação aos trabalhos anteriormente citados, observo que esta pesquisa possui o diferencial de insistir mais na investigação do modo como o software gráfico é utilizado pelos estudantes e em como estes pensam **junto com** os comandos do *Graphmatica* e com as outras mídias. Entendo que o design de um software não é neutro, e que seus comandos condicionam muitas das ações dos seus “usuários”, no caso, estudantes de Ensino Médio. Conforme se debaterá nos próximos itens, embora diversas pesquisas possuam a função racional de equação $y=1/x$ em suas discussões, a análise da manipulação que alunos fazem sobre as representações dessa função não foi por mim verificada em tais trabalhos.

A discussão de Keller e Hirsch (1998), que usaram as representações de modo simultâneo, foca-se mais nas preferências dos estudantes, e não na experimentação com os comandos da calculadora gráfica; no caso da pesquisa de Oliveira (1997), por não trabalhar com informática, a “navegação” por partes distintas do gráfico obtido por $y=1/x$, por exemplo, não pôde ser verificada; Costa (1997) não parece ter explorado as potencialidades de se usarem as barras de rolagem e os comandos *zoom in* e *zoom out* do *Graphmatica*, provavelmente porque seus objetivos de pesquisa não incluíram o uso de tais comandos; Souza (1996), por se concentrar mais no estudo da função quadrática, não aborda a manipulação dos estudantes com comandos da calculadora gráfica ao observarem os gráficos obtidos por $y = \sqrt{x}$ e da função racional já citada. Borba (1993, 1994, 1995), analisa as ações dos estudantes participantes de sua pesquisa junto ao software, mas seu enfoque é o estudo das transformações de funções. Em trabalhos posteriores, mencionados no capítulo 3, esse autor continuou a discutir

as representações múltiplas, porém utilizando-se mais da calculadora gráfica em tais atividades de pesquisa.

Portanto, em se tratando de um ambiente com várias mídias, proposto na realização desta pesquisa, foram levados em consideração itens que produzem diferença no encaminhamento de certas atividades, dentre os quais minha preferência pela álgebra e a escolha pelo software *Graphmatica*, o que muito influenciou na manipulação das representações de funções diversas, realizadas pelos estudantes. Esse software, embora mais simples do que o *Function Probe* e outros conhecidos, configurou-se como incentivador do trabalho com funções, de maneira que seu *design* pôde ser aproveitado de forma articulada à mídia escrita, à calculadora simples e às interações entre estudantes. Nesse sentido, a associação da mídia escrita com o predomínio da álgebra, discutido por Borba (1999), teria uma maneira de ter seus efeitos transformados.

Um último comentário ainda é pertinente nesta discussão sobre a atuação do professor nos EE. No item anterior deste capítulo foram discutidas as influências das características do software gráfico nas ações dos estudantes, mas o leitor pode também verificar que o *Graphmatica* condicionou as ações do professor Francisco. Logicamente não é necessário retomar todos os exemplos do item 6.1 para ilustrar tal fato, mas fica aqui observado, tanto em tais cenas como em outras que foram ou ainda serão discutidas, que a presença da mídia informática, associada às ações dos estudantes, influenciaram as ações do pesquisador e professor Francisco, com ou sem evidências de seu viés algébrico.

Assim, neste item, discuti a atuação do professor durante os EE, bem como a forma como elaborou as fichas de trabalho. Entendo que tal debate fora necessário, até para que, nos próximos itens, seja observado que, embora a álgebra esteja com maior preocupação nas ações do professor, os estudantes transitaram pelas representações múltiplas de funções, coordenando as mesmas, utilizando-se dos comandos do software e das outras mídias. Uma destas, a calculadora, foi mencionada diversas vezes na descrição dos episódios realizada no capítulo 5. Devido ao fato de essa mídia ter participado de forma relevante dentro

do processo mais amplo de coordenação das representações de funções, acredito ser necessária uma discussão mais densa sobre essa atuação.

6.3 A calculadora

Partindo da premissa de Lévy (1993), segundo a qual “tudo que for capaz de produzir uma diferença em uma rede será considerado como um ator, e todo ator definirá a si mesmo pela diferença que ele produz” (p. 137), não há dúvidas de que a calculadora também desempenhou esse papel nos aqui estudados coletivos pensantes. Essa mídia levou André e Gianluca a refletirem sobre a divisão **por** zero (episódio 2) e **de** zero (episódio 4), de modo que tais reflexões não foram isoladas, mas integrantes de discussões mais amplas, caracterizadas pela coordenação das representações de funções. No caso do episódio 4, a calculadora constituiu as reflexões algébricas do grupo: ao realizar $0/3=0$, André concluiu que não era necessário remeter à fórmula de Bhaskara para mostrar, algebricamente, que 0 é raiz da função $y=3x^2$.

No episódio 2 dos alunos, a calculadora foi usada para substituírem, na expressão algébrica $y=1/x$, valores de x apresentados nos eixos coordenados do plano cartesiano ou na tabela, juntamente com várias aplicações de *zoom in* e das barras de rolagem; ocasionalmente, os estudantes de ambas as duplas compararam os resultados obtidos na calculadora com aqueles disponibilizados pelo software, e, em seguida, buscaram pelos pontos correspondentes no gráfico. No episódio 1 das alunas, Vivian e Fernanda puderam observar os pontos de intersecção de retas obtidas por expressões como $y=400x-2$ com o eixo x , associando o fato de esse ponto estar bem próximo à origem do plano cartesiano com os valores próximos de zero obtidos na calculadora. No episódio 2, realizaram atividades semelhantes, desta vez com a função racional $y=1/x$.

Voltando ao episódio 2 dos alunos, discutido anteriormente em suas características de navegação, Gianluca não apenas chegou à conclusão de que o

domínio da função racional não incluía o zero, mas fez com que diferenciasse esse valor de outros muito próximos a ele:

G: [...] eu acho que é qualquer numero real menos zero... Porque nesse zero você não está incluindo 0.1, 0.2... Porque eu dividi agora olha [*na calculadora*], 1 dividido por 0.1 dá 10. Já **existe**. [...] qualquer numero real, menos o 0, **existe**.

Tão expressivo quanto esse pensamento foi a coordenação entre as representações e entre as mídias que André pôde realizar: após discussão sobre a mensagem de erro que a calculadora acusava, ao realizar a divisão $1/0$, relaciona tal fato, antes não realizado oralmente pelos estudantes, à mensagem de erro da tabela e à ausência do ponto referente ao par $(0,0)$ no gráfico da função. Ou seja, com a calculadora os estudantes compreenderam a impossibilidade de se escrever $1/0$ a partir da **expressão analítica**, **relacionando** esse fato com a mensagem de erro na **tabela** e com a ausência da origem $(0,0)$ no **gráfico** da função.

Além disso, a ordem das operações a serem realizadas na calculadora também foi discutida pelo grupo dos alunos, assim como a diferenciação entre as teclas operatórias $+$ e $-$ e a tecla $\pm$, a qual altera o sinal do número digitado. No caso do episódio 5, a ordem das operações foi discutida assim que a mídia escrita foi diretamente articulada à calculadora, na atividade em que André construiu tabela e gráfico da função de expressão analítica $y=2x^2$. Novamente interligando as mídias (lápiz-e-papel, calculadora e software), André contrastou com a tabela do *Graphmatica* os cálculos que realizara: os pontos diferentes entre sua tabela e a do software ocorreram devido ao cálculo $2.1^2 = (2.1)^2 = 4$ em vez de $2.1^2 = 2.1 = 2$.

Há, ainda, uma dimensão de análise, presente no uso da calculadora, concernente à metáfora seres-humanos-com-mídias. Além dos relatos anteriores ilustrarem os alunos “pensando com a calculadora”, torna-se relevante observar a semelhança com uma das formas com que Borba (1999, 2002) utiliza esse

construto teórico em suas investigações. Esse aspecto situou-se nas análises do conhecimento construído por estudantes participantes de suas pesquisas, ao observar a forma como o pensamento manifestado por eles era impregnado das mídias informáticas, no caso, da calculadora gráfica. Um desses trabalhos (BORBA, VILLARREAL, 1999) ilustra como estudantes, ao debaterem sobre comportamentos gráficos num certo problema, assim o fazem de maneira que seus argumentos revelam formas como opera uma calculadora gráfica; tais argumentos são usados mesmo durante debates nos quais os estudantes não estão com essas tecnologias à mão.

De modo semelhante, pude identificar a metáfora seres-humanos-com-mídias através da maneira como foi encaminhada a discussão sobre o uso dos parênteses nas expressões $y=1/(x^2+1)$ e $y=1/x^2+1$, no episódio 6 dos alunos. Para conduzir os estudantes ao entendimento de como o software gráfico diferencia essas expressões, o professor Francisco utilizou a calculadora, mas **pensando em como ela operaria**.

A estratégia usada foi a comparação com o cálculo de uma expressão aritmética. Convidei os estudantes a pensar como resultaria o cálculo da expressão $(2+3.5)$, através de sua digitação na calculadora, ao se pressionar, consecutivamente, as teclas **2**, **+**, **3**, **X** e **5**. Ao refletirem sobre isso, os alunos notaram que o resultado encontrado não seria o desejado, uma vez que a calculadora efetuaria $(2+3)$ primeiramente para, em seguida, efetuar a multiplicação por 5. Após observarem esse fato, fizeram a opção correta pela lei $y=1/(x^2+1)$, argumentando que, na forma $y=1/x^2+1$, sem os parênteses, o primeiro número 1 dessa expressão seria dividido apenas pelo termo x^2 , e, ao resultado de tal operação, seria adicionado 1. Tais reflexões dos alunos e do professor ocorreram sem que realizassem o cálculo proposto na própria calculadora. Ou seja, o grupo **pensou com** a calculadora, mesmo sem manuseá-la.

Mas a coordenação da expressão algébrica com as outras representações foi o aspecto mais marcante da atuação da calculadora. Após André e Gianluca

afirmarem que o ponto (250,0) pertencia ao gráfico da função $y=1/(x^2+1)$, André substituiu a variável x por 250 nessa **expressão algébrica**, efetuando as operações na calculadora e chegando a uma conclusão **gráfica**:

A: 0,0000159 e não dá zero. Então, não encosta!!

Também foram significativas as ações de Vivian no episódio 4, no qual as alunas compararam as posições dos gráficos obtidos através de $y=x^2$, $y=x^4$ e $y=x^6$ no intervalo $0 < x < 1$ do domínio. Essa comparação deu-se junto à calculadora, com Vivian efetuando $x=0,5$ nas duas primeiras funções, obtendo $(0,5)^2=0,25$ e $(0,5)^4=0,0625$, o que relacionou com o fato do gráfico obtido por $y=x^4$ estar “abaixo” do gráfico obtido por $y=x^2$.

Dessa forma, a calculadora se interligou ao lápis-e-papel, ou ao software, ou a ambos, na coordenação das representações de funções, não com mero papel de “máquina de realizar cálculos”, mas como constituinte do pensamento realizado pelos grupos aqui estudados.

Assim, pode-se constatar, através dos exemplos extraídos dos episódios e mencionados anteriormente, que a calculadora mostrou-se uma mídia atuante em muitas situações, não simplesmente da forma entendida na teoria da suplementação, elaborada, porém refutada, por Tikhomirov (1981), na qual se entenderia essa tecnologia como útil apenas para fazer cálculos; **sua articulação com o software dinamizou a produção de significados matemáticos, neste caso, relativos à coordenação entre as representações algébricas, gráficas e tabulares de funções.**

Concluo, pois, diante das observações relatadas, que a calculadora desempenhou um papel de extrema importância na coordenação das representações de funções, contribuindo não apenas no sentido da realização de cálculos trabalhosos, quando com lápis-e-papel, mas principalmente pelo fato de que os estudantes demonstraram interpretar os resultados de tais cálculos também em outras representações, no caso, o gráfico e a tabela.

Da mesma forma que a calculadora integrou processos em que os estudantes interligaram representações de funções, os gestos também foram observados e descritos várias vezes ao longo dos episódios; devido a isto, entendendo-os também como atores. A seguir, discutirei a importância dos mesmos em certos episódios dos EE.

6.4 Os gestos

A calculadora foi por mim disponibilizada aos estudantes, durante os EE, para que os mesmos usufríssem o potencial da mesma, porém, confesso que não imaginava, anteriormente ao trabalho de campo, que a análise dos dados me mostraria um alcance tão considerável de seu uso. Da mesma forma, os gestos, entendidos como tecnologias, desempenharam papéis extremamente importantes na produção matemática dos coletivos estudados, portanto, comentá-los torna-se necessário, uma vez que foram diferenciais quanto a temas que não apareceram com a devida importância na discussão teórica do capítulo 2.

Os **gestos** não são diretamente abordados como tecnologias intelectuais por Lévy em “Tecnologias da Inteligência” (1993), embora em “A Inteligência Coletiva” (1999) o autor indique a importância dos mesmos para a linguagem dos seres humanos: “É provável que a linguagem humana tenha aparecido simultaneamente sob diversas formas: oral, gestual, musical, icônica, plástica [...]” (LÉVY, 1999, p. 105). No campo da Educação Matemática, a importância dos gestos é teoricamente debatida por Borba e Scheffer (2003), os quais estudam a relação entre corpo, seus movimentos, sensores e representações múltiplas.

No caso desta pesquisa, os gestos foram atuantes em diversas interações dos coletivos pensantes, assim como as mídias já citadas, cuja importância acentuou-se em várias ocasiões. Na própria descrição dos dados, desenvolvida no capítulo 5, foi possível verificar, principalmente pelas transcrições, que os gestos atuaram diretamente sobre alguns conceitos matemáticos: facilitaram as definições

visuais de funções crescentes/decrescentes de André e de Vivian, bem como o modo dinâmico com o qual o professor apresentou o conceito aos estudantes.

Ainda no referente à monotonicidade, os gestos de Francisco, em sentidos contrários num mesmo gráfico, provocaram reflexões de Fernanda e Vivian sobre esse conceito. No episódio 4 dessas alunas, os gestos de Vivian manifestaram, junto com sua fala, o modo como pensou geometricamente nas frações $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{4}$. No episódio 3 dos alunos, por sua vez, a simetria da parábola freqüentemente era indicada por André ao mostrar pontos simétricos da mesma com o dedo indicador, além de ter utilizado seu braço para representar o eixo de simetria da mesma.

Ainda no episódio 1 das alunas, são bastante significativos os gestos que Fernanda efetuou para indicar a Vivian que a reta obtida por $y=400x-2$ passaria pelo ponto $(0,-2)$ e continuaria, para valores negativos de x , “atravessando o terceiro quadrante”, ao invés de “continuar colada no eixo y ”, conforme suas gesticulações junto ao software também o indicaram.

De modo semelhante, Fernanda conduziu Vivian a se convencer de que a reta obtida através de $y=0,0002x-2$ não se tratava de uma função constante, afirmando, com palavras e com gestos, que em algum lugar do eixo x a “reta cortava”. Esses gestos simularam o aspecto gráfico dessa função em algum ponto distante do domínio que a tela oferecia, como se a mão direita de Fernanda indicasse a barra de rolagem atingindo um valor consideravelmente “alto” de x , no qual o gráfico o interceptaria. Os gestos de Fernanda e de Vivian também completaram a parábola que diziam imaginar, ao analisar o gráfico obtido por $y = \sqrt{x}$.

Como entender certas falas transcritas sem a observação dos olhares, das expressões e dos gestos que as acompanham? Falas e gestos diante da tela do computador, muitas vezes simularam o comportamento gráfico de alguma função, ou mesmo comandos do software, o que mais uma vez me levou à metáfora seres-humanos-com-mídias: em vários desses exemplos, o software estava **no** pensamento coletivo dos grupos estudados.

Em termos teórico-metodológicos, os gestos me auxiliaram, como pesquisador, a interpretar ações dos estudantes perante o software e observar como e em quais representações pensavam. Gianluca falava “domínio”, ao mesmo tempo em que apontava a intersecção de gráficos com o eixo x , o que me levou à conclusão, durante os EE, de que esse aluno tomava ambos os conceitos como sinônimos. Pude, ainda, ter certeza de que André pensava **com** a mídia informática ao prever como seria o gráfico que **iria** disponibilizar, antecipando o mesmo (figura 6.14), através de seu gesto sobre a tela do computador, antes de digitar a fórmula $y = -1/x$.

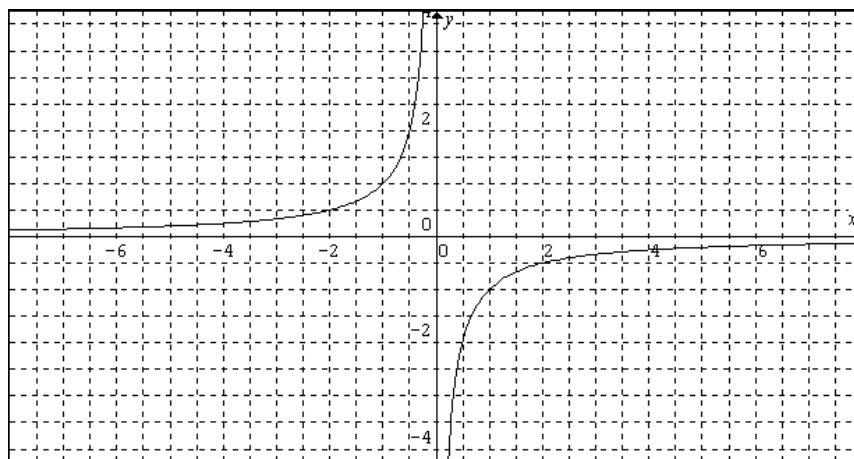


Figura 6.14: Gráfico obtido por André após digitar $y = -1/x$.

Num último exemplo, o leitor poderá perceber a importância dos gestos e do vídeo na interpretação do pensamento de Fernanda, no episódio 4: a figura 6.12, apresentada anteriormente, resultou de minha análise minuciosa realizada nos momentos em que, assistindo ao vídeo e procurando reconstruir tal cena, tentava entender como Fernanda estava pensando. Nessa situação, o pesquisador tentou se aproximar da Matemática dos estudantes, nos termos da discussão abordada por Steffe e Thompson (2000), tanto na situação de **ensino**, enquanto pensava junto com Fernanda, presencialmente, no terceiro encontro, quanto em termos de **pesquisa**, analisando tal pensamento junto aos vídeos.

Ressalto que a construção dessa figura só foi possível devido aos gestos dela junto ao *Graphmatica*, simultâneos às suas falas, o que me faz levantar novamente uma questão colocada há muitas páginas, numa nota de rodapé: seriam os gestos os constituintes de uma tecnologia intelectual coexistente às outras mídias já citadas?

Embora não pretenda desenvolver uma análise teórica mais profunda sobre isso, não vejo problemas em registrar aqui meu ponto de vista. Assim como Borba e Scheffer (2003) entendem que os movimentos corporais podem se integrar a outras mídias, no caso, sensores e calculadoras gráficas, no processo de produção matemática que estudantes protagonizam junto a essas tecnologias, entendo que, em minha pesquisa, os gestos não serviram apenas para que o pesquisador, a partir dos vídeos, pudesse colher indícios dos pensamentos dos estudantes, ou mesmo revelar concepções dinâmicas de funções, conforme observado em alguns episódios, mas também **integraram** os processos nos quais os estudantes transitaram pelas representações de funções.

Nessa direção, os gestos foram atores nos coletivos pensantes estudados, uma vez que foram constituintes de pensamentos em rede desses grupos, envolvendo representações múltiplas, como quando o professor conduz as alunas a refletir sobre monotonicidade, através de seus gestos num esboço gráfico, ou quando Fernanda provocou a reação de Vivian ao mostrar, com um movimento de seu braço, uma reta “descolando” do eixo y , para citar apenas dois, dentre vários outros exemplos em que o aspecto gestual, podendo até mesmo incluir expressões faciais, interferiu nas redes de pensamento dos grupos. Torna-se, pois, perfeitamente possível especular que podemos entender o conjunto de tecnologias intelectuais englobando o gestual, a oralidade, a escrita e a informática.

Isso posto, assumo os gestos como componentes da Matemática produzida em cada coletivo pensante analisado, de maneira que o trânsito pelas representações múltiplas de funções acabou também sendo constituído, em diversas ocasiões, por essa tecnologia, entendendo os gestos como tal. Movimentos de braços e mãos representaram, dentre outras análises possíveis,

gráficos de funções, com destaque para aqueles obtidos pelas expressões $y=1/x$, $y=-1/x$ e $y=400x-2$, além do gráfico de $y^2=x$, abordado, no episódio 3 das alunas, como exemplo de uma relação que não é função.

6.5 O *design* do software associado às outras mídias

Neste item, analiso o ambiente dos EE considerando os coletivos pensantes desta pesquisa de maneira mais ampla, observando o **conjunto** de atores humanos, estudantes e professor, produzindo conhecimentos matemáticos junto às mídias disponíveis, no caso, o gestual, a oralidade, a escrita e a informática.

No item 6.1 desta seção, discuti intensamente o pensamento dos estudantes em situações nas quais lidaram com as características de certa função, ou famílias de funções, através dos comandos *zoom in* e barras de rolagem. Nesse mesmo item, também analisei alguns resultados dos dados que foram condicionados pela capacidade do software em oferecer inúmeros gráficos de modo prático e dinâmico.

Na seqüência, realço agora outra característica do software gráfico utilizado nesta pesquisa, que consiste no fato de disponibilizar as três representações mais usuais de função (gráfico, expressão algébrica e tabela) de modo **simultâneo**, embora se deva considerar que a tabela, ao contrário da expressão analítica e do gráfico, nem sempre esteve disponibilizada, dependendo da opção dos estudantes e/ou professor em utilizá-la ou não.

Um aspecto relevante nesse design, no entanto, refere-se ao fato de que ao utilizar a barra de rolagem horizontal, alterando os valores do eixo x do plano cartesiano no campo de visão dos “estudantes-usuários”, tal modificação também ocorre **simultaneamente** nos valores de x e de y dispostos na tabela, os quais se alteram e permanecem condizentes com os valores de x disponibilizados no eixo horizontal.

Esse aspecto do design do *Graphmatica*, observado e abordado em diversas figuras apresentadas no capítulo 5, propiciou a coordenação entre informações de

certas funções apresentadas no gráfico e na tabela. Novamente, a análise das manipulações que os estudantes realizaram junto à função racional de expressão analítica $y=1/x$ forneceu evidências dessa coordenação.

Gianluca desejava ansiosamente saber se o gráfico dessa função interceptava ou não o eixo x (episódio 2); sua estratégia para lidar com essa questão foi usar da barra de rolagem, de maneira a chamar a atenção de André para esse aspecto do software que ora discuto: este aluno observou atentamente as alterações propiciadas nos valores da tabela do *Graphmatica*, à medida que Gianluca usava a barra de rolagem horizontal.

Isso conduziu os estudantes a observar pares ordenados da tabela e a **relacioná-los** com respectivos pontos do gráfico, o que similarmente se verificou com Fernanda e Vivian, no episódio 2. Em ambas as duplas, essa interligação entre gráfico e tabela levou os participantes a debates que tomaram conta de boa parte desses episódios, culminando com a determinação do domínio da referida função. No caso da dupla dos alunos, as três representações são interligadas na cena em que André respondeu à pergunta do professor, após este interpelar pela representação algébrica:

F: Galera, eu posso pôr o zero naquela fórmula? No lugar do x ?
(**representação algébrica**)

G: Zero? Pode.

A: Ele é um número.

F: O zero é um número.

A: [??] posso pôr qualquer número.

F: E 1 sobre 0? Quanto dá um sobre zero, então? (**representação algébrica**)

G: Zero. Um dividido por nada, dá nada.

A: Não, mas olha aqui na tabelinha, zero no x e no y deu erro.

(**representação tabular**)

G: Acho que não podia colocar o zero...

A: Vamos ver. Bom um sobre zero dá zero, né?

G: É.

A: Então se x vai dar zero, y vai dar quanto? O y vai dar zero também, então vai dar dois zero, zero sobre zero. Então teria que ter um ponto aqui no meio [*aponta o ponto (0,0) no Graphmatica*] (**representação gráfica**)

Os estudantes transitaram pelas três representações, pensando com as mídias: a calculadora foi usada para se trabalhar com a **expressão algébrica**, sendo que o papel do professor foi de extrema importância para conduzir os alunos a observarem a mensagem de erro que essa mídia indicava. Em seguida, André aponta **na tabela** do *Graphmatica* a mensagem de erro correspondente (“zero no x e no y deu erro”), confirmando a mesma informação no **gráfico**, alertando para o fato de que o mesmo deveria conter o ponto (0,0), caso esse par ordenado pertencesse à função em questão.

É relevante observar o modo como André pensou junto com o software, nos termos da metáfora seres-humanos-com-mídias, coordenando as representações. Se o par (0,0) pertencesse à função, a origem do plano cartesiano deveria então pertencer ao gráfico disponibilizado. Coerente com tal metáfora, essa parte do episódio 2 dos alunos ilustra as potencialidades do ambiente que condiciona a produção de significados: o professor conduziu os estudantes a refletir sobre suas ações com a calculadora, de maneira que tais ações os levassem a atribuir significados a dados explícitos oferecidos pelo software (mensagem de erro na tabela) ou mesmo um dado não tanto evidente como esse (a ausência de (0,0) no gráfico).

Tornou-se nítida a potencialidade desse ambiente também no episódio 3, no qual a parábola de Gianluca, realizada através do lápis-e-papel, é comparada àquela que o software oferecia; contudo, foi a **tabela** do *Graphmatica* que forneceu indícios, aos estudantes, do caráter simétrico de uma função quadrática, no momento em que André verificou dois valores de x associados a um valor de y,

no caso, identificando os pares $(0,-3)$ e $(2,-3)$ na tabela, obtidos através da expressão $y=x^2-2x-3$.

Essas articulações entre diferentes mídias no trabalho com funções levaram Villarreal (1999) a utilizar a expressão “intermédias” para caracterizar as potencialidades de se contrastar as representações de uma mesma função em diferentes mídias.

Nesse sentido, a parábola de Gianluca, desenhada no papel, e a parábola correspondente, esboçada no *Graphmatica*, foram contrastadas, de maneira que esse contraste condicionou as reflexões do grupo a respeito do aspecto simétrico dessa função, observado por André também através da tabela. A definição de função foi retomada pelo aluno, uma vez que estranhou o fato de haver dois valores de x relacionados com o mesmo valor de y . Neste último conceito, a representação através de **diagramas** (figuras 6.15) é retomada, sendo interligada com a **tabela** e com o **gráfico**, e estes, com lápis-e-papel (figura 6.16) e com o software (figura 6.17).



Figura 6.15a e figura 6.15b: Diagramas propostos por André.

X	Y
1	-4
2	-3
3	0
4	5
5	12



Figura 6.16: A tabela com os valores usados por Gianluca e o gráfico por ele construído

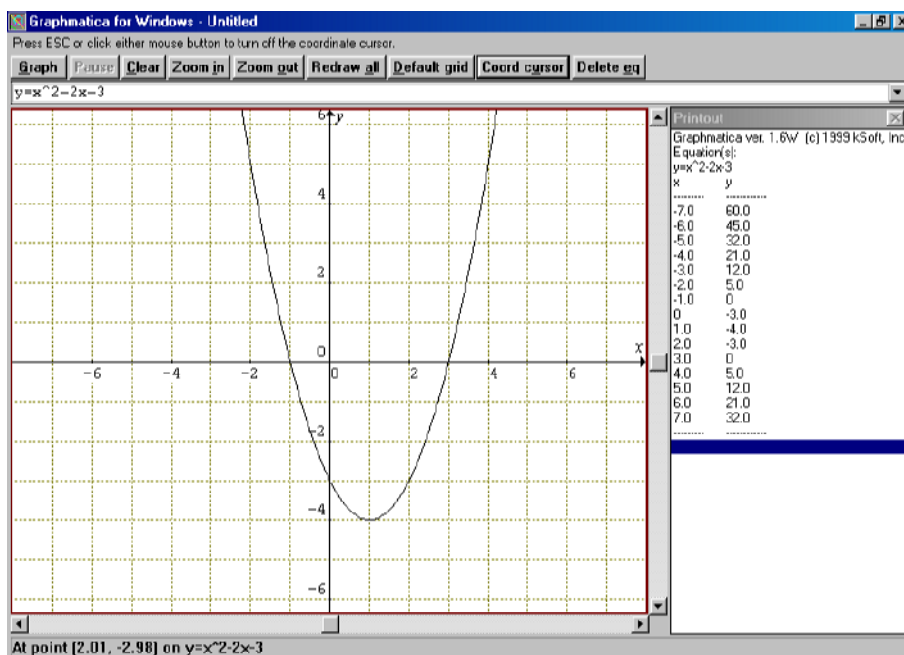


Figura 6.17: Gráfico e tabela obtidos a partir de $y = x^2 - 2x - 3$.

Nesse episódio 3 dos alunos, a Matemática produzida pelo grupo foi permeada pelo trânsito entre as representações e entre as mídias. O software e a calculadora são mídias que conduziram à análise das características da função racional citada, nas três representações canônicas, enquanto que elementos da

Matemática dos estudantes, neste caso, construídos primordialmente com lápis-e-papel e identificáveis através da representação com diagramas, foram conectados às representações de funções que o software lhes oferecia. Ou seja, esse ambiente intermédias permitiu a coordenação das representações múltiplas de funções, simultaneamente à coordenação entre as mídias.

Esse intercâmbio explícito entre as mídias foi novamente observado no episódio 5 dos alunos, no qual André, a partir da expressão algébrica $y=2x^2$, obteve o gráfico e a tabela no papel, comparando-os com as representações correspondentes do software. Tal comparação permitiu que André revisse o modo de usar a calculadora, ao refletir sobre a ordem das operações, conforme já analisado.

Essa cena do episódio merece “parênteses”. Talvez o leitor se lembre de que, no capítulo 2, na seção destinada à descrição da idéia de **pensamento em rede**, citei 5 exemplos que pudessem ilustrar tal noção, dentre os quais, a rede de aeroportos, todos conectados entre si através de ligações imaginárias entre eles e, na mesma seção, ilustrei a idéia de um dos princípios da rede hipertextual³³, construído por Lévy (1993), que prevê a possibilidade de um nó da rede tornar-se uma rede. Estendendo o mesmo exemplo, mencionei que um nó-aeroporto poderia se tornar uma rede, por exemplo, de escritórios e agências de turismo.

Numa comparação semelhante, André se absteve do debate em que o grupo se encontrava para, “sozinho”, trabalhar as três principais representações da função obtida por $y=2x^2$. Dentro do coletivo pensante André-Gianluca-Francisco-mídias, atuava o coletivo pensante André-lápis-e-papel, de maneira que este coletivo, ao retornar àquele, assim o fez proporcionando uma intensa interligação entre mídias (escrita-informática) e representações (tabelas, gráficos e expressão analítica).

Ao “fechar” esses parênteses, aproveito o fato de ter analisado um aspecto do episódio AGGA para retomá-lo numa análise mais global, entendendo-a

³³ Princípio de multiplicidade e de encaixe de escalas.

também como mais profunda, já que, através desse episódio, o qual foi o primeiro a ser construído, posso “enxergar” as dinâmicas do coletivo estudantes-professor-mídias com os “óculos teóricos” da noção de coletivos pensantes de Lévy (1993).

Os estudantes inicialmente conjecturaram que o ponto (1,1) pertencia aos gráficos de $y=x^2$ e $y=x^3$ “porque o **a** é 1”, numa referência ao coeficiente **a** de $y=ax^2$ e $y=ax^3$, o que foi identificado com o desdobramento do episódio. Gianluca supõe que o ponto de intersecção dos dois gráficos seria (2,2) se tivessem $a=2$, mas, ao esboçarem os gráficos a partir de $y=2x^2$ e $y=2x^3$, tiveram sua hipótese derrubada. Ao verificar que os gráficos possuem (1,2) como ponto comum, os estudantes construíram nova conjectura, que culminaria posteriormente com uma conclusão comicamente denominada “teorema” AGGA, a qual indica que gráficos de funções de expressão algébrica $y=ax^n$ possuem o ponto (1,a).

Nesse episódio, pude reinterpretar os conceitos que Lévy (1993) atribui para sua noção de simulação, entendida como imaginação auxiliada por computador, de maneira a elaborá-los dentro do contexto de minha pesquisa. A **plasticidade**, já mencionada numa citação, é uma característica do modelo digital, e observei a mesma através das ações dos estudantes junto ao software gráfico.

Ao entender esse conceito como aquilo que pode ser moldado ou modificado, que pode assumir diferentes formas, pude identificá-lo no processo que permeou a construção de conjecturas e refutações do episódio 5 dos alunos: a partir de uma pergunta do pesquisador, no caso, buscando uma justificativa algébrica para o fato de que os gráficos obtidos a partir de $y=x^2$ e $y=x^3$ “passam” pelo ponto (1,1), outras questões tomaram lugar nas discussões, não devido exclusivamente à imaginação de Gianluca ou exclusivamente ao desenho que o *Graphmatica* oferecia, mas devido a, no mínimo, ambos. Gianluca fez uma conjectura a partir de uma observação gráfica, e buscou, através das representações algébricas $y=2x^2$ e $y=2x^3$, dentre outras, estabelecer uma propriedade que interligasse essas expressões com seus respectivos gráficos.

A plasticidade do software, observada neste episódio, assim se aplica à noção de não-linearidade de Lévy (1993): observações diversas e imprevisíveis puderam ser feitas, e caminhos diferentes, como o que levou ao “teorema AGGA”, puderam ser trilhados dentre outros possíveis; tais caminhos ilustram um pensamento em rede realizado por André-Gianluca-Francisco-mídias, de forma que conjecturas, refutações e confirmações, condicionadas por experimentações, principalmente junto ao software, permitiram o trabalho dos estudantes com algumas funções polinomiais.

As funções escolhidas por Gianluca caracterizam a “**autonomia de ação e reação**” (LÉVY, 1993, p. 121) que o software gráfico lhe proporcionou: esse estudante construiu uma hipótese, a partir do software (“os gráficos vão passar por (2,2)”), derrubada após sua observação na própria imagem que essa tecnologia lhe propiciara; a reação de Gianluca foi construir outra propriedade (“os gráficos passam por (1,2) porque $a=2$ ”) que o levou à criação de outra conjectura (“os gráficos de $y=a.x^n$ vão passar por (1,a)”).

Ampliando as noções até aqui descritas, a **plasticidade do software gráfico** condicionou, em vários momentos dos EE, a **plasticidade do pensamento coletivo** de cada grupo analisado. A articulação entre as representações de funções, já insistentemente discorrida em relação ao *design* do software, ocorreu também mediante a articulação dessa mídia com as outras disponíveis aos estudantes.

No episódio 2 das alunas, ao trabalharem com a função racional obtida por $y=1/x$, realizaram, de modo muito parecido ao descrito com André e Gianluca, a associação entre os valores disponibilizados na tabela e os pontos do gráfico, usando o ponteiro do *mouse*. Da mesma forma que os alunos, as alunas utilizaram muito a calculadora em tal exercício, nos mesmos termos discutidos com os alunos: o ambiente intermídias condicionou o trânsito pelas representações, fato ilustrado quando Vivian identifica o par (0.25;4) na **tabela** do **Graphmatica**, toma a **calculadora** para realizar o cálculo de $1/(0.25)$ a partir da **expressão algébrica** $y=1/x$ e confirmar, com esse resultado, a presença do ponto (0.25;4)

no **gráfico** disponibilizado pelo software. Novamente, verifica-se uma relação intrínseca entre mídias e representações.

De modo semelhante, o episódio 2 dos alunos ilustrou a produção matemática realizada mediante o pensamento em rede desse coletivo: as mídias condicionaram o caminho abaixo, que ilustra os conceitos referentes às funções, trabalhados por esse grupo enquanto usavam o software, a calculadora e as mídias orais, escritas e gestuais:

Expressão analítica → Gráfico → domínio → diagramas → representações → domínio → encosta ou não encosta? → domínio → encosta ou não encosta? → domínio → números inteiros e números reais → reta e expressão algébrica (parâmetros **a** e **b**) → domínio → valores na tabela e pontos no plano → monotonicidade → parâmetros **a** e **b** da função afim → monotonicidade → domínio → operações com zero → ordem das operações (calculadora) → domínio.

Diante de toda a discussão apresentada neste item e nos itens anteriores desta seção, apresento uma resposta mais ampla à pergunta de pesquisa, articulada com a perspectiva teórica aqui adotada. Os estudantes trabalharam com aspectos algébricos, gráficos e numéricos de funções, interligando essas representações através das interações com o software gráfico e com a articulação deste com as outras mídias disponíveis. Os comandos que esse software oferece condicionaram a experimentação, pelos estudantes, através de diversos exemplares de funções, de maneira que um **mesmo fenômeno** foi identificado por eles em mais de uma representação. As dinâmicas do pensamento coletivo, analisada junto aos dois pares de estudantes participantes da pesquisa, propiciou o trabalho com conhecimentos referentes a funções, como domínio e monotonicidade, bem como outros tópicos matemáticos, como ordem de operações e a divisão **de** e **por** zero. Tais dinâmicas não foram pré-determinadas nem organizadas sequencialmente; alguns temas foram incentivados voluntariamente pelo pesquisador, mas outros emergiram durante as atividades

que os estudantes desenvolveram, de modo que vários conceitos, em especial as representações múltiplas de funções, foram trabalhados “hipertextualmente”.

Contudo, ainda falta, nessas conclusões, analisar o papel do estudo com funções de diversas famílias realizado pelos estudantes participantes da pesquisa; no item seguinte, desenvolvo a articulação dos dados com noções de funções prototípicas, estudadas na revisão de literatura, de maneira que tal análise produziu mais uma possibilidade de respostas às investigações desta pesquisa.

6.6 As funções prototípicas

Este tema foi analisado de maneiras diferentes pelos trabalhos consultados: enquanto Confrey et al (1991) utilizaram protótipos de funções de expressões analíticas $y=x$, $y=x^2$, $y=x^3$, $y=1/x$, $y=\text{sen}x$, $y=\text{cos}x$, $y=a^x$, $y=\log_a x$, $y=[x]$ e $y=|x|$, através de problemas contextualizados, Schwarz e HersHKovitz (1999) discutiram o possível papel prototípico das funções lineares e quadráticas, o qual pode dificultar ou incentivar a aprendizagem de conceitos associados a funções, dependendo do contexto.

Esta pesquisa possui pontos em comum com a primeira abordagem (CONFREY et al, 1991), no sentido de utilizar algumas daquelas funções citadas, como polinomiais prototípicas da forma $y=ax^n$ e a função racional $y=1/x$. Embora não conste naquele rol de expressões, considero que $y=\sqrt{x}$ também se enquadraria nessa relação.

Interligações entre as representações de funções foram intensas nos dois grupos estudados, quando trabalharam com a função $y=1/x$, no episódio 2 dos alunos e no episódio 2 das alunas. O “teorema” AGGA (epidódio 5) foi produzido a partir de funções da forma $y=ax^n$; também já foi discutida a coordenação entre aspectos algébricos e gráficos na relação entre a paridade do expoente n e os quadrantes nos quais os gráficos se situam (episódios 6 dos alunos e 4 das alunas). No episódio 3 das alunas, foi trabalhado o protótipo $y=\sqrt{x}$, que inclusive

pode ter influenciado o pensamento de Fernanda no episódio 4, o qual poderia levar o grupo a discutir funções inversas, já que essa aluna lidou com as formas $x = \sqrt{y}$, $x = \sqrt[4]{y}$ e $x = \sqrt[6]{y}$.

Nota-se que Confrey et al (1991) trabalham com protótipos de várias funções, usando o termo “protótipo” ao abordarem funções mais simples dessas famílias. Por exemplo, $y=x$ é o protótipo (“primeiro exemplar”) das funções afins da forma $y=ax+b$; $y=x^2$ é o protótipo das funções quadráticas de expressão geral $y=ax^2+bx+c$; $y=1/x$ é o protótipo das funções racionais, e assim por diante.

A forma como Schwarz e Hershkowitz (1999) abordam o tema “funções prototípicas” é diferente. O sentido usado por esses autores para esse tema está relacionado ao estudo intensivo de conceitos concernentes às funções afins e quadráticas, o qual provavelmente provoca, segundo esses autores, concepções errôneas dos estudantes, em situações onde o tema funções é estudado de maneira mais geral, com funções de outras famílias.

Tal discussão, especificamente no caso do papel prototípico de funções afins, pôde ser observada junto aos estudantes que participaram desta pesquisa. Não o protótipo $y=x$, mencionado por Confrey et al (1991), mas a forma $y=ax+b$. A monotonicidade é o conceito que foi identificado como pertencente a esta problemática, na medida em que o sinal do coeficiente **a** da expressão geral $y=ax+b$ foi utilizado para classificar funções em crescentes/decrescentes, mesmo em gráficos esboçados, com a mídia escrita ou no *Graphmatica*, que não se referiam a funções afins.

Gianluca, no episódio 1, afirmou que as funções de expressões analíticas $y=x-2$, $y=2x-2$ e $y=6x-2$ eram crescentes “porque o **a** é positivo”. A função dada por $y=-x-2$ era decrescente “porque o **a** é negativo”. Além disso, seu modo particular de classificação é válido apenas se for considerada a presença do parâmetro **a** nas expressões analíticas em questão:

$a > 0 \Rightarrow$ a parte inferior do símbolo “>” é $\swarrow \Rightarrow$ reta crescente;
 $a < 0 \Rightarrow$ a parte inferior do símbolo “<” é $\searrow \Rightarrow$ reta decrescente.

Seguem-se mais algumas falas que revelaram essa associação; no episódio 2, os estudantes procuraram identificar valores de a e de b na expressão $y=1/x$:

G: Esse gráfico com ângulo, não. Porque ele também tem infinitos números no domínio, só que a gente não consegue achar... o domínio é x , a gente não consegue achar o contra domínio que seria o b , certo?... Contra domínio é o b ou é o y ? (episódio 2)

[...]

A: O b é um sobre um [...] Não, quer dizer, o a é um sobre um... o b não tem, é zero. O x é x mesmo.

[...]

G: O a ... nessa função não tem a e b , né?

Essas falas também pareceram revelar certo conflito em identificar o que é variável e o que é constante nessas comparações entre expressões analíticas. No episódio 3, o fenômeno ainda foi verificado, mas já se observa o efeito das interferências do professor:

F: Eu vou perguntar uma coisa para vocês. O que é uma função crescente?

AG: É quando o a é maior que zero.

[...]

G: [*sobre o primeiro gráfico da figura 6.18*] Porque quando o x aumenta | quando a reta é crescente, o x e o y aumenta.

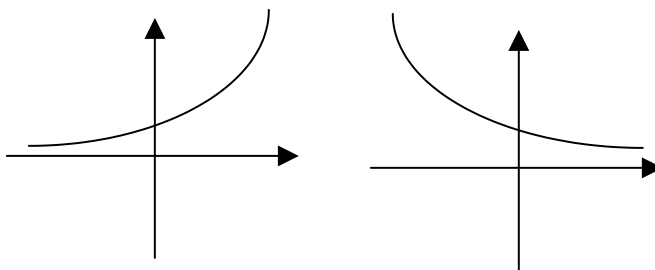


Figura 6.18: Gráficos esboçados pelo professor no quadro

F: Ah... foi isso que a gente conversou na semana passada. Como que é o negócio? *Replay:*

G: Quando o x aumenta, e o y também aumenta, a reta é crescente. [*André toma um papel para anotar essa frase*] Reta não, o desenho.

Situações semelhantes foram observadas junto a Vivian e Fernanda. Embora não relatado nos primeiros episódios, a expressão “a função é crescente porque o a é positivo” foi mencionada pelas alunas no primeiro encontro, antes de chegarem ao estudo da função racional. Ao trabalharem com essa função (episódio 2), apareceram indícios das intervenções do professor, juntamente com o aspecto prototípico da função afim:

F: [...] Crescente ou decrescente?

V: Crescente.

M: Decrescente. Você não falou que, se o x aumenta e o y diminui, a função é decrescente?

V: É, mas a ... não tem a ...

Porém, não se pode deixar de mencionar que houve definições gráficas para funções crescentes/decrescentes, proferidas de modo muito parecido por André (episódio 2) e Vivian (episódio 2):

Se a reta está apontando para a direita $\Rightarrow$ reta crescente;

Se a reta está apontando para a esquerda $\Rightarrow$ reta decrescente.

A função quadrática também teve seu papel prototípico identificado. Ao compararem os gráficos das funções obtidas pelas expressões $y=x^2$ e $y=x^3$, no episódio 5, Gianluca e André comentaram que os mesmos tinham “vértice igual” e que “ambos tem x' e x'' como zero”.

A possibilidade de a função cúbica ter três raízes não foi levantada, e deve-se considerar que André, ao fazer o comentário a respeito de duas raízes (x' e x''), poderia estar fortemente influenciado pelas reflexões realizadas momentos antes, descritas no episódio 4, nas quais a justificativa para que zero fosse raiz de $y=x^2$ passou pela fórmula de Bhaskara e pelos passos $x^2 = 0 \rightarrow x = \sqrt{0} \rightarrow x = 0$. No mesmo exemplo, André identificou o ponto de inflexão do gráfico da polinomial de grau 3 também como “vértice”.

Embora o tema “monotonicidade” não tenha sido frisado nos episódios finais, ele permeou todos os encontros com as duplas, porém as associações relatadas, neste item, em relação ao papel prototípico das funções afim e quadrática, foram gradativamente enfraquecidas ao final dos EE. Considero, porém, que essa associação poderia ter sido mais explorada, já que a mesma associação feita a funções da forma $y=ax+b$, ou seja, relacionar o sinal de **a** com a monotonicidade, pode ser estendida a funções de expressão analítica $y=ax^n$, $n \in \mathbb{N}$ e n ímpar.

Está fora do escopo desta pesquisa avaliar a aprendizagem dos estudantes, mas é possível, diante de todas as análises delineadas até o momento, levantar como possibilidade de resposta à pergunta de pesquisa o importante papel do estudo de funções diversas na construção, pelos alunos, da noção de função crescente/decrescente, desenvolvida junto a diversos exemplares de funções.

A abordagem de Schwarz e HersHKovitz (1999), bem como concepções observadas nas pesquisas de vários autores, implicaria afirmar que a associação entre o sinal do coeficiente **a** e a monotonicidade de uma função, mesmo que não afim, enquadrar-se-ia naquilo que chamam de *misconceptions*, expressão cuja tradução pode não envolver a totalidade das interpretações que seu uso permite. Talvez “concepções errôneas”, por ora, seja uma boa aproximação.

Considero, no entanto, seguindo Confrey et al (1991) e Confrey e Smith (1994), que tais concepções não deveriam ser assim classificadas, já que tal rótulo parece se limitar a avaliar as respostas dos estudantes como diferentes da Matemática formalmente apresentada nos livros. Entendo que tais respostas, como

a associação entre sinal de **a** e monotonicidade, são legítimas, se considerarmos o contexto no qual foram construídas. Ou ainda, são legítimas, dependendo do alcance da validade das mesmas.

Foi confirmado que os estudantes trabalharam, de maneira mais intensa, apenas com funções afins e quadráticas. Se o estudo inicial que fizeram, os quais incluíram a representação por diagramas e provavelmente, o uso de tabelas, **não** exploraram os conceitos de monotonicidade nessas representações, como avaliar suas respostas como erradas? Como esperar a construção de um conceito que abrange uma infinidade de funções, se o mesmo for trabalhado apenas com uma ou duas famílias de funções, ou apenas numa representação?

Dessa forma, analisando a evolução de tal conceito ao longo dos EE, acredito que a coordenação das representações múltiplas, através do estudo de funções de diversas famílias, propiciou a (re)construção de conceitos referentes a esse tema, como a monotonicidade, de maneira que os mesmos fossem usados e identificados pelos estudantes de uma maneira menos restrita e mais geral, amenizando esse “efeito prototípico”.

6.7 Concepções estáticas e concepções dinâmicas de funções

Confrey e Smith (1994, 1995) entendem que o modo de focar a noção de função, conhecido como **correspondência**, destaca a relação entre **cada** elemento de um conjunto com **um** elemento de outro conjunto, normalmente a partir de uma expressão algébrica do tipo $y=f(x)$.

Os autores postulam que, ao se priorizar essa abordagem, uma concepção dinâmica desse conceito pode não ser explorada e, conseqüentemente, muitos conceitos associados a esse tema podem deixar de ser trabalhados junto aos estudantes. Na abordagem que propõem, chamada **covariação** (*covariation*), a dinâmica das variações é visualizada em termos mais amplos do que na observação de cada par ordenado isoladamente; ao invés disso, dois conjuntos de

valores são analisados simultaneamente, de forma que o estudo sobre tal variação seja incentivado.

Observações e análises mais intuitivas podem ser exploradas pelos estudantes; as tabelas, através da análise dos padrões numéricos apresentados pelas seqüências de valores do domínio e da imagem, e os gráficos, que normalmente ilustram muitas relações entre tais valores, são representações que favorecem essa abordagem, embora os autores não desejem relegar a representação algébrica a um plano secundário: Confrey e Smith (1994, 1995), assim como Borba (1993, 1994, 1995, 1999), Confrey et al (1991) e Grasse (1997), não buscam a inversão de hierarquias, atribuindo valor maior a uma das representações, mas defendem a coordenação entre as mesmas, feitas através de várias experimentações sobre diferentes problemas.

Sendo assim, acredito que a covariação é mais abrangente que a correspondência, e que, por esse fato, colabore com uma aprendizagem mais significativa em relação às funções; porém, me limitarei, neste item, a identificar tais concepções, ou seja, uma mais estática e outra mais dinâmica, através das falas e das ações de estudantes e professor, nos EE.

Para uma discussão que leve à análise de possíveis conflitos que possam existir no uso de uma, de outra ou de ambas, o leitor pode consultar o trabalho de Zuffi (1999), no qual um dos itens de sua análise de dados indica que, na linguagem dos professores participantes de sua pesquisa, existem mais indícios de uma visão estática do conceito de função. Embora suas análises sejam feitas num referencial teórico diferente desta pesquisa, identifica-se uma oposição estático/dinâmico na discussão apresentada numa de suas unidades de análise: “há mais evidências de uma concepção de ação para funções, do que uma concepção de processo (a função é aplicada em um elemento de cada vez)” (ZUFFI, 1999, p. 111). Na primeira concepção, segundo a autora, as variações nos valores das imagens ocorrem uma de cada vez, ponto-a-ponto; na segunda concepção, que parece assemelhar-se à covariação, a relação entre as variáveis é

caracterizada por uma “transformação global entre dois conjuntos” (ZUFFI, 1999, p. 116).

Retornando a esta pesquisa, apresento cenas extraídas dos dados que indicaram tais abordagens; o enfoque por correspondência geralmente apareceu nos momentos em que o diagrama de flechas foi utilizado, como no episódio 2 dos alunos, e talvez seja por isso que tal representação aparece pouco nos trabalhos sobre representações múltiplas. O trecho seguinte é extraído do episódio 2 dos alunos:

F: Eu vou inventar aqui [...] vou inventar uma regrinha: o 1 eu vou relacionar com o 2. **[G: hum]** o 2 eu vou relacionar com o 3. O 3 eu vou relacionar com o 4. E agora vocês vão adivinhar o último: o 4 eu vou relacionar com quem (figuras 6.19)?

AG: Cinco!

F: Que regra que eu inventei aqui?

G: Na que no conjunto domínio você vai ligar um número no contra domínio com um número maior... **Um** [*mostrando a unidade com o dedo indicador*] número só maior no conjunto contra domínio.



Figura 6.19a e 6.19b: Diagramas do professor no quadro

No episódio 1 dos alunos, a fala do professor Francisco tinha indícios das duas concepções, ao trabalhar a idéia de monotonicidade, a qual pode facilitar um modo mais dinâmico de se focar as funções:

F: Pois é. Função é crescente quando se você aumenta o x, o y aumenta. [...] Vamos congelar uma função e vamos pensar nela. Veja só, você consegue imaginar onde que está o correspondente desse valor de x aqui ó, vamos supor que seja um [*marcando o valor 1 no eixo horizontal*]. Só pra exemplificar. Ele vai ter um correspondente ali [*no eixo vertical*], certo? Seu eu pegar um número maior do que um, o correspondente dele lá daquele lado, vamos supor que aqui seja 1,2 [**G:** ahã]. Se eu pegar, por exemplo, o 2 agora [*no eixo x*], o y dele vai ser maior do que 1,2 ou menor?

Enquanto falava, construía a figura 6.20b, a partir da figura 6.20a. A curiosa expressão “congelar” pareceu indicar que pensava dinamicamente no gráfico da função que desenhava, mas resolvi tornar o desenho estático, para usar a correspondência.

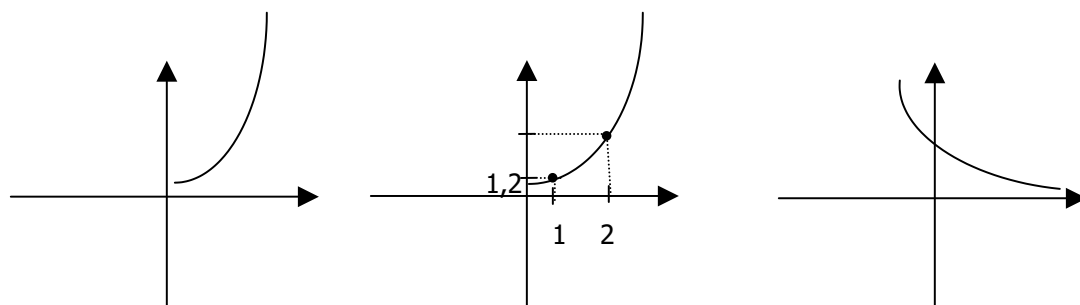


Figura 6.20a, 6.20b e 6.20c: Desenhos do professor no quadro.

Sobre o tema monotonicidade, André e Vivian apresentaram definições visuais muito semelhantes para função crescente: “É aquela que aponta para a direita”, disse Vivian, enquanto que, analogamente, a função decrescente “aponta para a esquerda”. Ao contrário de como procedera com os alunos, o professor manteve, no episódio 2 das alunas, o enfoque dinâmico.

Ao resgatar a “definição visual” de Vivian, o professor faz gestos sobre uma mesma figura que desenhava no quadro, indicados nas figuras 6.21a e 6.21b, que levaram as alunas a refletir sobre essa “definição visual”:

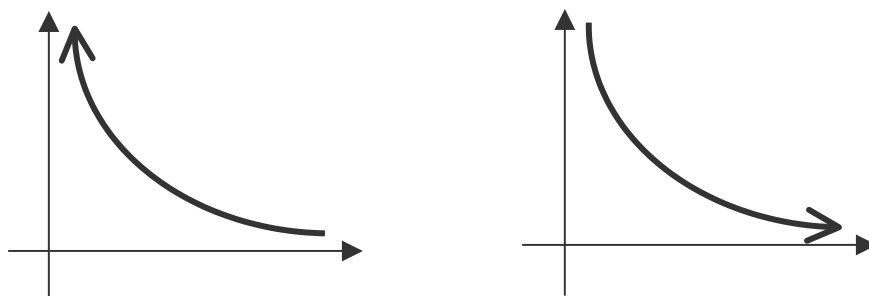


Figura 6.21a e 6.21b: Num mesmo desenho gráfico, o pesquisador faz gestos simulando dois movimentos diferentes, indicados na figura.

F: Este gráfico é crescente [figura 6.21a]

F: Não! Este gráfico é decrescente [figura 6.21b]

Em seguida, levaram essas reflexões para a função racional obtida por $y=1/x$ junto ao *Graphmatica*:

V: É crescente. [longa pausa] É decrescente.

M: [longa pausa] É decrescente.

F: Vocês estão concluindo isso olhando na figura ou na tabela?

M: Na tabela.

V: Na figura [junto com Fernanda].

Fernanda também teceu explicações sobre sua opção, com muitos gestos diante da tela do computador, e o professor ainda sugeriu às alunas que a idéia de função crescente/decrescente era fácil de se classificar visualmente, ao se “olhar da esquerda para a direita”, embora tenha ressaltado que o sentido contrário proporcionaria a elas as mesmas conclusões.

Nota-se que o resultado dessas interações foi coerente com as considerações teóricas de Confrey e Smith (1994, 1995), que entendem a tabela e o gráfico como representações que favorecem a abordagem dinâmica da covariação; porém, as discussões observadas nos artigos consultados mostraram

que esses autores acentuam bastante o uso da tabela para trabalhar com a covariação. Nos dados desta pesquisa, houve situações em que essa idéia pôde ser observada: no episódio 2 dos alunos, por exemplo, ao trabalharem com a função racional, houve um período em que eles ficaram entretidos na tarefa de olhar os valores da tabela e buscar os pontos no plano cartesiano, usando os comandos *zoom in* e barra de rolagem. Após várias dessas ações, Gianluca retomou a monotonicidade:

G: Cada vez que você aumenta o eixo x , você diminui o eixo y . Por isso que ela fica torta assim [*faz um gesto imitando a curva no primeiro quadrante*].

Utilizando uma estratégia parecida com a descrita anteriormente com as alunas, o professor faz um desenho no quadro (figura 6.22)

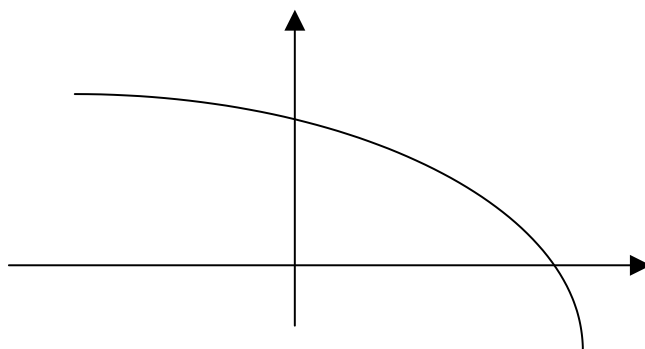


Figura 6.22: Desenho feito no quadro, pelo professor, a fim de “desafiar” o modo particular de Gianluca para a classificação de funções quanto à monotonicidade.

F: Então, se a gente olhar, do menor para maior, [...] da esquerda para direita... [*Este comentário do professor é acompanhado de gestos que envolvem, simultaneamente, valores nos eixos x e y*]

G: Porque ali ó| porque o lado direito do x é positivo é 1, 2, 3, 4, 5, 6 [*gesto com o braço, apontando o desenho do quadro, indicando “o x aumentando”*]. Está aumentando, então é crescente. Porque o x vai diminuindo e o... **Aliás**, o y vai diminuindo e o x vai aumentando. [...] x aumenta e y diminui.

A: x aumenta e y diminui. Aí é decrescente.

[...]

A: Mas, se eu pudesse, eu nem precisaria usar esses pontos e tudo mais, esses números no gráfico. Só olhando pra [*gestos*] pra reta dá pra dizer se é crescente ou decrescente. [...] Porque olha só, o formato dela [*refere-se ao desenho do professor – figura 6.22*], ela tá caindo...Você vê que, no eixo [*seus gestos e sua fala completa indicam que se refere ao eixo y*], ela está se posicionando de um lugar maior, para um lugar menor [*com a mão faz um movimento do segundo para o quarto quadrante*]. E no eixo x, ela tá vindo de um lugar menor para um lugar maior. E no eixo y de um lugar maior para um lugar menor. Então é eu diria que ela é decrescente.

O que se pôde constatar, nesses últimos relatos, foram concepções dinâmicas de funções, trabalhadas **graficamente**. Embora a abordagem teórica desenvolvida por Confrey e Smith (1994, 1995) realce **as tabelas** como uma representação favorável à abordagem da covariação, entendo que os alunos puderam, através de desenhos gráficos do software e daqueles feitos pelo professor no quadro, aproximar-se de tal abordagem, que previu o enfoque das variações em termos de conjuntos de números, não somente entre elementos um a um.

Analisar a monotonicidade da função racional prototípica $y=1/x$ revelou-se, nesse sentido, um exercício favorável, assim como a análise do gráfico esboçado no quadro, como se pode notar na fala de André: “E no eixo x, ela tá vindo de um lugar menor para um lugar maior. E no eixo y de um lugar maior para um lugar menor. Então é eu diria que ela é decrescente”.

A noção de covariação, comentada anteriormente, acontece simultaneamente à interligação entre a tabela e o gráfico. Isto pôde ser deduzido através dos diálogos entre os estudantes, enquanto discutiam sobre monotonicidade; a coordenação entre tais representações foi nítida na fala de Gianluca, após minuciosa análise dos valores de x e de y na tabela: “cada vez que

“você aumenta o eixo x , você diminui o eixo y [após análises junto com a tabela]. Por isso que ela fica torta assim [gesticula imitando o desenho gráfico]”. Essa interligação pôde ser verificada pela **dupla** das alunas: após os gestos do professor, ambas deduziram, **com** o *Graphmatica*, que a função racional era decrescente no primeiro quadrante, sendo que, para isso, Fernanda usou a **tabela**, enquanto Vivian chegou à mesma conclusão utilizando o **gráfico**.

Portanto, uma contribuição dessa discussão para as conclusões gerais desta pesquisa situa-se novamente no design do software: é verdade que se pode pensar dinamicamente através do diagrama de flechas e da representação algébrica, mas os comandos de *zoom* e as barras de rolagem propiciaram ainda a observação, pelos estudantes, da relação entre valores de x e valores de y , seja através da interligação entre gráfico e tabela, seja na forma dinâmica de observar graficamente essa relação.

6.8 O status da prova

A preferência pela álgebra, discutida no item 6.2, levou o professor Francisco a utilizar essa representação também de forma peculiar. Ficou evidente que uma prova ou demonstração, tomando aqui ambos os termos com mesmo significado, deveria ser feita através das expressões analíticas. Por meio delas, o professor Francisco insistiu várias vezes na verificação de determinado ponto pertencer ou não a certo gráfico disponibilizado.

Exemplificarei, abaixo, com algumas falas, as quais se referem a diálogos estabelecidos com André e Gianluca. E Vivian e Fernanda? É fácil verificar, ao longo de todo o experimento de ensino desenvolvido junto a essas alunas, que as mesmas demonstraram consideráveis habilidades para resoluções algébricas de certas questões. Dessa forma, na dinâmica de suas atividades, elas responderam corretamente às perguntas do professor, de maneira que não ocorreram debates “acalorados” quando eu lhes pedia: “prove!”.

1º exemplo:

F: No fundo, eu estou fazendo a seguinte pergunta para vocês: porque toda parábola corta no **c**? (episódio 3)

2º exemplo:

F: Beleza. Como que eu sei que é no ponto (1,2) que os dois gráficos se encontram? (episódio 5)

3º exemplo:

Ainda no episódio 5, até mesmo certos momentos de descontração foram bastante significativos:

F: Só traçando gráficos?...

G: Só olhar na reta [no gráfico] aqui, Chico!!!... [*sorrindo e "simulando" estar bravo*]

F: Ah, mas eu digo pra você que eu estou sem óculos hoje e não consigo ver direito o desenho.

G: Então, chegue bem perto. [*todos riem das brincadeiras*]

Agora, relato o contraste que os estudantes fizeram em relação a essa abordagem do professor, em cada exemplo:

1º exemplo:

F: No fundo, eu estou fazendo a seguinte pergunta para vocês: porque toda parábola corta no **c**?

A: Porque foi uma regra que a Matemática fez, talvez.

F: Mas sem um motivo, uma lógica... foi imposta?

A: Porque alguém talvez tenha observado assim: de todas as parábolas que eu fiz até agora... Passei a minha vida inteira desenhando parábolas [*ele e o professor riem, enquanto Gianluca prossegue calculando no papel*], e ninguém pode falar que estou errado porque estou há 130 anos fazendo parábolas. Esse cara tem razão, mesmo sem ter uma formulazinha.

Vale, aqui, uma nota explicativa: quando André disse "Esse cara tem razão, mesmo sem ter uma formulazinha", ele simulou, com o tom de voz, um outro

falante, que supostamente estaria lhe “dando razão”, acatando sua conclusão, já que teria passado “130 anos fazendo parábolas”.

Gianluca então substituiu, a partir das instruções de André, x por 0 e y por -3, realizando os cálculos de $-3=(0)^2-2.(0)-3$, chegando assim à expressão $0 = 0$. É impossível, porém, ao pesquisador que assistiu aos vídeos, acreditar que tal cálculo tenha convencido Gianluca de alguma coisa.

2º exemplo:

F: Beleza. Como que eu sei que é no ponto (1,2) que os dois gráficos se encontram?

A: Ah, pelo desenho! Olha [*mostra a tela do computador*], um e dois [*André aponta as coordenadas na tela*]

Posteriormente, o professor até iria sugerir a tabela, como indica a transcrição abaixo; mas o que fica evidente aqui é a confiança que os estudantes possuíam na representação gráfica, as quais eram, naquele contexto, suficientes para seu convencimento. Note o leitor, ainda, que foi dentro desse jogo de idéias, opiniões e conjecturas que o “teorema” AGGA, foi construído.

3º exemplo:

G: Cálculo, cálculo mesmo acho que não tem. É só ir traçando gráficos.

F: E nem a tab | [*o professor iria sugerir a tabela*]

G: E ver que todos eles vão passar em...um ponto em comum.

F: Só traçando gráficos?...

G: Só traçando gráficos.

[...]

G: Só olhar na reta [no gráfico] aqui, Chico!!!... [*sorrindo e "simulando" estar bravo*]

F: Ah, mas eu digo pra você que eu estou sem óculos hoje e não consigo ver direito o desenho.

G: Então, chegue bem perto. [*todos riem das brincadeiras*]

Quanto mais o professor Francisco insistia na “prova” algébrica, mais a visualização era utilizada pelos estudantes: Gianluca chegou a esboçar mais gráficos no *Graphmatica*, variando os expoentes. De modo dinâmico e com sugestões de André, obteve gráficos através de $y=x^5$, $y=x^6$ e $y=x^7$ e $y=x^{65}$. Embora, ao final do episódio, André tenha conseguido a “prova” que o professor pedia, foram as comprovações gráficas, com todos estes exemplares de funções, que significavam a constatação do fato matemático em questão.

Nesse sentido, quais as implicações de se aceitar as justificativas visuais dos estudantes como legítimas? Essa questão não poderá ser aqui amplamente debatida, uma vez que tal análise necessitaria de uma incursão por trabalhos e pesquisas sob esse enfoque. Contudo, considero relevante apresentar meu ponto de vista neste momento, como autor do texto e pesquisador que analisou as ações do professor Francisco, além de localizar pontos desses dados em que possam existir contribuições a esta investigação.

O debate sobre o valor da “prova” ou “demonstração” é freqüente nas comunidades que se envolvem com a Educação Matemática, sendo que as idéias que cerceiam este assunto ainda estão, além de não unânimes, longe de uma conclusão efetiva. Garnica (2002) menciona que, em sua tese de doutorado, abordou o modo de enxergar a demonstração através daquilo que se conhece por “Matemática” e do movimento que se entende por “Educação Matemática”.

Tendo consciência de estar deixando de lado as análises que Garnica (2002) desenvolve para a delimitação desses e de outros termos de seu artigo, entendo que esse autor atribui à primeira a característica marcante da priorização da técnica, da dedução e da sintaxe, de maneira a se pretender, nesse campo, justificar a atitude da prova como o caminho para a “verdade”.

A demonstração em Educação Matemática não visaria à anulação de tais “postulados”, mas o educador matemático entende que as demonstrações e outros tópicos daquilo que se chama Matemática fazem parte de processos sociais mais amplos, criações humanas que se mantêm e se transformam com o exercício da

crítica e, principalmente, com a busca de significados em processos de ensino e de aprendizagem, ao invés do estabelecimento de uma linguagem que prime por si mesma.

Hoje, o professor e pesquisador Francisco aceitaria tais “demonstrações visuais”? Garnica (2002) confirma que as demonstrações que envolvem a informática ainda geram polêmicas, mas reafirmo aqui a minha resposta: aceitaria, sim, porém ampliando o diálogo com os estudantes, para chamar a atenção dos mesmos a diferentes maneiras de se entender o conceito de prova, não através de um relativismo precipitado, mas trabalhando essas diferentes maneiras em seus devidos contextos, seja entendendo a palavra “demonstração” como convencimento, como argumentação ou como tantos outros termos a ela associados. Ou seja, os “óculos” do professor Francisco já não são mais “os mesmos”.

Embora conflitantes, o modo de enxergar a demonstração dos alunos e do professor, tema que emergiu dos dados, principalmente pela insistência algébrica do segundo, proporcionou a análise de mais um aspecto constante em alguns episódios. André e Gianluca, mediante sua confiança nos gráficos, e Francisco, com sua preferência algébrica, possibilitaram que o pensamento coletivo realizado fosse permeado pelo trânsito entre essas duas representações de funções, por meio das concepções como cada um desses atores humanos entendia, nesses episódios, o conceito de prova ou demonstração. Nessa direção, a visualização foi a característica marcante nos argumentos dos estudantes; tal enfoque, intensamente discutido no trabalho de Villarreal (1999), foi fortemente condicionado pela atuação do software *Graphmatica*, notadamente pela sua facilidade em disponibilizar vários gráficos e por permitir a “navegação” pelas características dos mesmos.

6.9 Noções de limite, continuidade e infinito

Desenvolver uma análise superficial desses temas é algo muito difícil, principalmente por se tratar de itens matemáticos tão ricos e amplos. Na seção 6.7, foram delineadas as abordagens estática e dinâmica para o tema funções, o que corroborou a idéia de que tais abordagens podem se atrelar aos conceitos emergentes dos dados que intitulam este item. Tais pontos de vista são também enfocados por Caraça (2000), em seu clássico livro “Conceitos Fundamentais da Matemática”, ao lidar com o tema “limites”:

[...] Entre estas duas atitudes de espírito [a estática e a dinâmica] medeiam na História da Ciência 2000 anos e, ao longo desses vinte séculos, arrasta-se o calvário duma idéia – a idéia do infinito! Idéia perante a qual os gregos recuaram e que é retomada e utilizada agora, como elemento activo desta nova operação. (p. 219)

Embora a análise das concepções de limites, infinito e continuidade não conste nos objetivos desta pesquisa, tais temas emergiram dos dados obtidos em situações nas quais o trânsito pelas representações de funções foi verificado. Tais conceitos foram observados em cenas bastante peculiares de alguns episódios.

No episódio 2 dos alunos, André indicou, em certo momento, a respeito da função obtida por $y=1/x$, que “o domínio será 7.0, 6.0, 5.0, pontinhos, -7.0”, numa alusão aos valores inteiros que a tabela lhe oferecia. Antes que a questão envolvendo $x=0$ fosse debatida, o professor então os convidou a pensar na infinidade de números reais existentes entre aqueles valores, utilizando, para tanto, desenhos no quadro, de modo similar à figura 6.23.

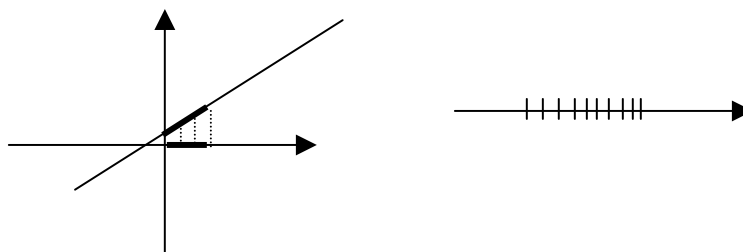


Figura 6.23: Desenhos do professor, no quadro, para discutir a relação entre números e pontos da reta; a discussão teve origem através da tabela do *Graphmatica*

André associou ainda esse raciocínio às imagens oferecidas por um microscópio: ao aumentar a potência da lente, uma ou mais casas decimais aumentariam na precisão desse aparelho. Borba e Villarreal (1999), identificaram um dado similar numa de suas pesquisas, na qual um dos alunos participantes, estudante de Biologia, associou o comando *zoom* da calculadora gráfica ao microscópio, ferramenta bastante usada nesse curso. Aqui, por conseguinte, André utilizou essa metáfora para ilustrar a continuidade dos números reais, ao passo que, naquela pesquisa, o estudante “implicitamente, mostrou a idéia de linearidade local de uma curva diferenciável” (BORBA, VILLARREAL, 1999, p. 127).

No próprio episódio 2, com a função obtida através de $y=1/x$, e no episódio 6, com a função obtida por $y=1/(x^2+1)$ (figura 6.24), as noções de infinito e de limites também são observadas, com a já citada dúvida relativa aos gráficos: “tocam ou não tocam o eixo x ?”, ou o eixo y ?

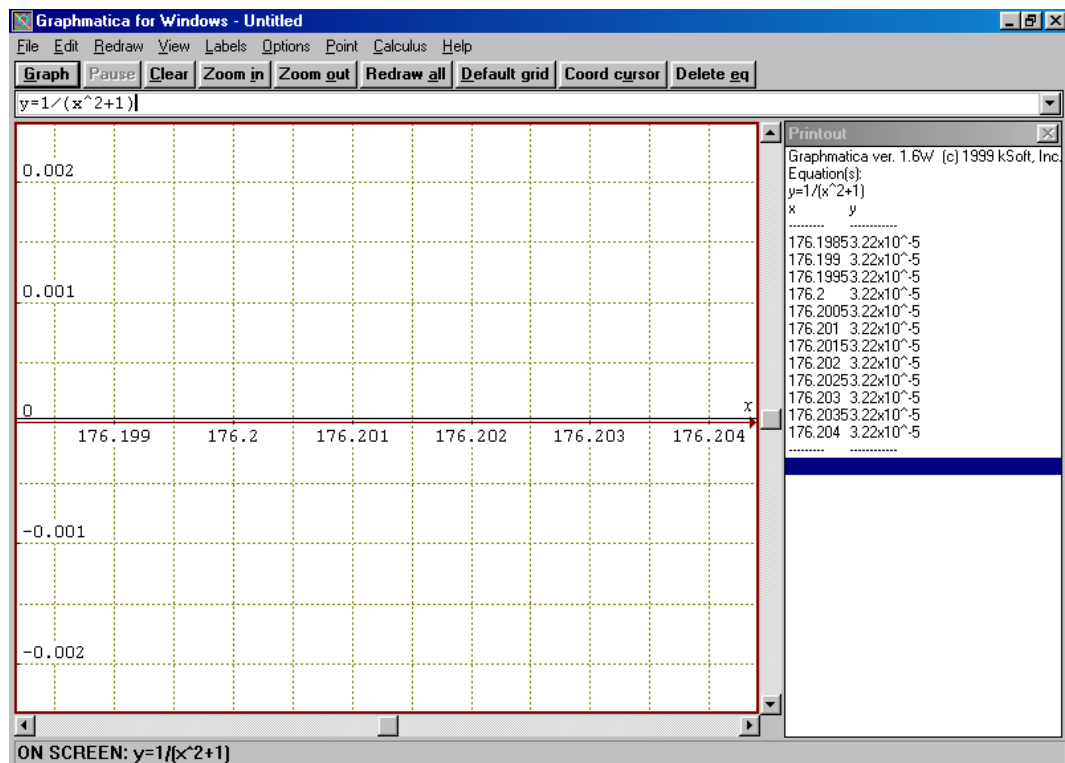


Figura 6.24: Gianluca usa a barra de rolagem.

Gianluca caminha mais ainda com a barra de rolagem, até uma situação em que se via o gráfico coincidindo com o eixo x. As intervenções do professor conduziram os estudantes a coordenarem as três representações, graças às mídias disponíveis, incluindo a noção intuitiva de limite, como que “implícita” nessa coordenação:

F: Que ponto é esse?

G: [*corretamente*] É o ponto (250,0).

F: Ele está no gráfico?

AG: Está.

F: Então, quer dizer que, se eu puser 250 na fórmula e fizer a conta, então o y vai dar zero.

A: Vamos ver [*faz na calculadora*]

[...]

A: 0,0000159 e não dá zero. Então, não encosta!!

Com as alunas, por sua vez, a noção de continuidade foi visualizada já no primeiro episódio, após o traçado de inúmeras retas, obtidas através da forma algébrica $y=ax-2$, após variarem o parâmetro **a**. Valores elevados para esse coeficiente, no caso, levaram as estudantes a observar que cada raiz das funções esboçadas “fica cada vez mais próxima de zero”. Nesse contexto, observa-se que noção intuitiva de limite encontrava-se no centro dos debates, nas reflexões que as alunas realizaram ao investigar se tais retas coincidiriam ou não com o eixo y.

Aspectos geométricos foram colocados quando as alunas levantaram suspeitas sobre o possível paralelismo entre a reta obtida a partir de $y=400x-2$ e o eixo y. Vale notar que as noções destacadas neste item apareceram também em termos geométricos:

F: Que ângulo será, mais ou menos? Uma idéia...

V: Ah, uns 89...

F: Éééé...isso aí, uns 89 vírgula sei lá o quê....

V: [*sorrisos*] É uns 89 vírgula 9...

A interligação com a álgebra foi conduzida pelo professor, que procurou mostrar a mesma idéia, porém nessa representação, formalizando a expressão $y=a.x-2$ junto às alunas, a fim de analisar todas as raízes imagináveis no eixo x, relacionando-as com a forma $x = \frac{2}{a}$; conseqüentemente, as alunas constataram, algebricamente, que x tende a zero, à medida que se aumentam os valores atribuídos ao parâmetro **a**.

O que torna relevante a análise desses três exemplos, em termos de possibilidades a esta investigação, é o fato de que tais debates foram proporcionados graças às possibilidades que o software gráfico ofereceu a esses estudantes. A dinâmica do software proporcionou, pois, discussões a respeito dos representantes gráficos obtidos por $y=400x-2$, bem como uma análise

correspondente coordenando essas observações gráficas com valores de x obtidos ao se variar os valores do coeficiente a , na forma $x = \frac{2}{a}$; ou seja, esse debate dificilmente seria explorado com a mesma riqueza, se os estudantes dispusessem apenas de lápis-e-papel.

Nesses exemplos, portanto, tais discussões articularam observações dos estudantes em mais de uma representação. No primeiro exemplo, as exposições orais de André, que levaram o grupo à idéia de continuidade, partiram de suas observações junto à tabela, estendendo o conceito ao gráfico; o segundo exemplo, debatido intensamente ao longo de todo este capítulo, mostrou a coordenação simultânea entre gráfico, tabela e expressão analítica, realizada pelos alunos, ao utilizarem o software e a calculadora; no exemplo das meninas, as observações gráficas foram interligadas com a álgebra, de forma semelhante àquela realizada pelos alunos, porém aqui utilizando a forma geral de raízes de uma expressão analítica de função afim ($x=2/a$). Ou seja, os conceitos que intitulam este item configuraram-se como objetos de reflexão dos participantes desta pesquisa, de modo simultâneo à coordenação das representações.

A abordagem desses conceitos foi condicionada, principalmente, pelo *design* do software; como se pôde observar neste item, a apresentação dinâmica de diferentes imagens de um mesmo gráfico, ou exemplares diferentes da representação tabular de uma mesma função, propiciaram, nesse sentido, os debates nos grupos estudados. Dessa forma, o próximo item destina-se a análise do papel que essas diferentes imagens e tabelas de uma mesma função desempenharam em sua atuação nos EE.

6.10 Os representantes de funções

Schwarz e Dreyfus (1995) entendem que estudantes podem cometer erros, ao lidarem com as representações gráfica, tabular e algébrica, caso não trabalhem, além dessas representações, alguns de seus respectivos **representantes**

(*representatives*), que são possibilidades dentro de cada representação, como imagens diferentes de um mesmo gráfico, ou tabelas com valores diferentes, mas que se referem à mesma função.

Esses autores entendem que, tão importante quanto a coordenação entre as representações, é a coordenação entre representantes dentro de uma mesma representação. Afirmam que estas coordenações amenizam ou procuram evitar a compartimentalização do aprendizado dos estudantes, verificada por esses pesquisadores na medida em que um mesmo conceito, ou uma mesma propriedade, não é reconhecido em diferentes representantes ou representações.

Essa compartimentalização pôde ser constatada no início dos EE, junto aos alunos, de maneira que tal questão acabou sendo trabalhada. Em certo momento do primeiro encontro, relatado no episódio 2 dessa dupla, Gianluca falou que não entendia “o que esse negócio de diagrama, que tinha estudado na 8ª série, tinha a ver com função”. André também tinha dúvidas a esse respeito, e uma pergunta sobre o domínio de determinada função (no caso, a racional prototípica), resgatou a representação através de diagramas, pouco abordada na revisão de literatura, proporcionando um diálogo significativo sobre as representações múltiplas de funções.

A: Você vê, eu fazia é... eu fazia aquele “trequinho” lá de x e y [??]... aí eu fazia por exemplo... o... diagrama de flechas, o x e o y do outro lado, aí colocava os números de um lado e outros [números] de outro [ao que seus gestos e palavras indicam, refere-se à representação tabular], e fazia o diagrama, entendeu?... eu acho que essa é a... a... relação porque o... é quase como se fosse um gráfico, entendeu? Só que em vez de um gráfico a gente tem um diagrama de flechas.

G: E pode ser representado no gráfico o diagrama de flechas também. Pode ser representado no diagrama de flechas, no gráfico e no... [André está tentando lembrar-se de algo] escrevendo normalmente.

F: Mas então do que nós estamos falando? Nós estamos falando da mesma coisa, só que tem várias maneiras de |

G: Representar elas. Tem 3 maneiras de representar.

F: Isso! E quais são as 3?

G: Diagrama de flechas [*André acena positivamente com a cabeça*], o gráfico [**A:** o gráfico] e tem outro de [**A:** eu não lembro...]

A terceira representação à qual se referiram os estudantes é um conjunto de pares ordenados, como, por exemplo, $f=\{(1,0),(2,-1),(-1,3)\}$. A tabela e a expressão analítica não foram mencionadas, nesse momento, pelos estudantes. Ao perguntar-lhes se a tabela e a expressão analítica também eram representações de funções, a primeira foi prontamente aceita, mas os alunos hesitaram em confirmar a lei algébrica como uma representação:

G: Mas aí você não está representando assim...

A: Mais ou menos assim... você tem que calcular pra montar o gráfico ou... ou... o domínio, sei lá.

Os alunos concluíram, pois, que as representações referem-se aos mesmos fenômenos, após observação do professor que indicava a possibilidade de haver limitações ou dificuldades em determinada representação, dependendo da função ou do problema em questão. Tanto André quanto Gianluca demonstraram dar mais importância aos aspectos visuais, embora a conclusão deste tenha se pautado pela equivalência das representações:

G: A menos limitada é a do... eu acho que é a do gráfico, porque você pode traçar 3 ou 4 mas... se você continuar você pode traçar outras também, mas... no diagrama de flechas você pode colocar mais 5, 6, 7, 8, pode ligar também. Acho que todos são iguais, se você for pensar em reais, infinitos, assim... todos | não

tem nenhuma que seja melhor que a outra para representar. Todos são iguais. Só o jeito de escrever é diferente.

Entendo que essa conversa foi extremamente importante para que os alunos coordenassem as representações, de uma maneira geral. Após essa conversa, não verifiquei, trabalhando com as funções das fichas de trabalho e com as conjecturas que os alunos levantaram, situações em que representantes de funções foram vistos de modo compartimentalizado, ou seja, identificados como representações de funções diferentes.

Porém, uma questão conflitante, e que envolve a noção de representantes, ocorreu no episódio 1, com as alunas. Nesse episódio, levantei a seguinte dúvida: até que ponto a experimentação, que nesta pesquisa é bastante ligada ao aspecto visual, pode limitar as possíveis conclusões dos estudantes?

Esse questionamento me ocorreu a partir do esboço do gráfico da função obtida através da expressão algébrica $y=400x-2$, logo no começo do primeiro encontro. Fernanda e Vivian, ao observarem a respectiva reta “colada” no eixo y (figura 6.25), deram-se por satisfeitas com esse fato, entendendo que tal reta estaria justaposta ao eixo y .

No resumo desse episódio, questionei se seria legítimo aceitar a resposta das estudantes, que confiavam na coincidência das retas. É claro que, se o trabalho com o software se restringisse a esse representante, tal resposta seria **legítima**, uma vez que esse esboço levaria a tal conclusão. Mas uma resposta que possa deixar o leitor mais à vontade pode ser encontrada em outra pergunta que fizera, na ocasião da descrição desse episódio, sobre a conclusão das alunas: e se o professor não as tivesse recordado da opção *zoom in* do software?

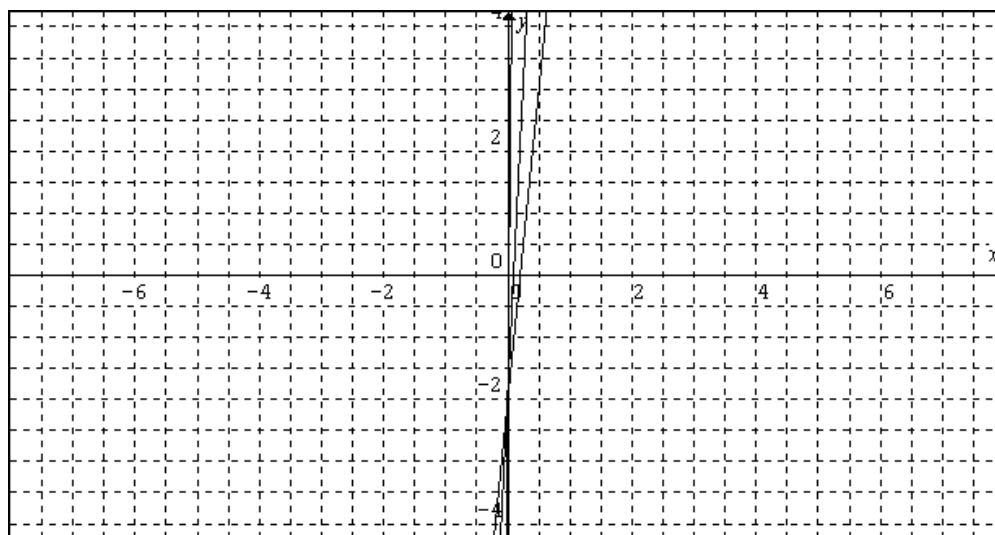


Figura 6.25: a reta obtida a partir de $y = 400x - 2$, originalmente azul, fica justaposta ao eixo y . A reta que “descola” desse eixo nas proximidades do ponto $(0, 3)$, se refere à expressão $y = 100x - 2$

O papel do professor (ou pesquisador) está incluso na pergunta diretriz desta pesquisa não apenas pelo fato de estar aqui assumido que o mesmo exerce influência nas dinâmicas dos coletivos pensantes, mas também pelo fato de que o papel do professor continua de extrema importância dentro dessas dinâmicas, enxergando-o como o mediador ou “catalisador” (ZUFFI, 1999) dos processos de aprendizagem, de forma que não defendo aqui um aprendizado de funções, em termos gerais, realizado apenas por estudantes e mídias.

Assim, o professor deve incentivar os estudantes a usufruírem os comandos que o software oferece, não meramente visando a respostas “esperadas”, mas que construam conceitos mais abrangentes a respeito do tema funções. Isso se estende, inclusive, aos momentos em que ocorrem imprevistos indesejáveis

relativos à mídia informática, como no episódio 2 das alunas, no qual o gráfico sumiu após algumas aplicações de *zoom* feitas por Vivian.

Sem a atuação do professor, talvez fosse difícil um esclarecimento maior, por exemplo, da coincidência dos gráficos de dois representantes algébricos obtidos por André, $y = \frac{x}{x^5}$ e $y = \frac{1}{x^4}$, no episódio³⁴ 6, ou mesmo de dois

aparentes representantes algébricos de uma mesma representação, como as expressões $y = \sqrt{x}$ e $y^2 = x$, trabalhadas por Vivian e Fernanda no episódio 3, que geraram gráficos diferentes, uma discussão a respeito da definição de função e o debate sobre a não reciprocidade do procedimento de se elevar ao quadrado. Na mesma linha de pensamento, a atuação do professor foi importante para mostrar a Gianluca e André (episódio 2) que o símbolo “E” na extremidade do visor da calculadora, significa “erro”, já que haviam entendido que a divisão de um por zero resultara zero.

A intervenção do professor mostrou-se competente na coordenação das representações algébrica e gráfica, no episódio 6, ao perguntar para os alunos se o ponto (250,0) pertencia ao gráfico de $y=1/(x^2+1)$, já que o representante gráfico de tal função, naquele momento, coincidia com o eixo x:

F: Ele está no gráfico?

AG: Está.

F: Então, quer dizer que se eu puser 250 na fórmula e fizer a conta, então o y vai dar zero.

A: Vamos ver [*faz na calculadora*]

[...]

A: 0,0000159 e não dá zero. Então, não encosta!!

³⁴ Embora uma expressão admita uma indeterminação, e outra não. O próprio software gráfico não abordou essa diferenciação.

Outro exemplo da interligação entre as representações pôde ser verificado mesmo em situações em que o gráfico não foi observado na tela do computador. Fernanda **pensou com o software**, e com a representação algébrica, para justificar o porquê de o gráfico correspondente à expressão $y = \frac{1}{x^2} + 1$, no episódio 5, não aparecer na tela do computador (figura 6.26), devido à escala em que se encontrava o plano, após o uso do comando *zoom in*. A aluna deduziu sua posição a partir da expressão analítica, desta vez com perguntas do professor realizadas sem o direcionamento algébrico verificado outras vezes.

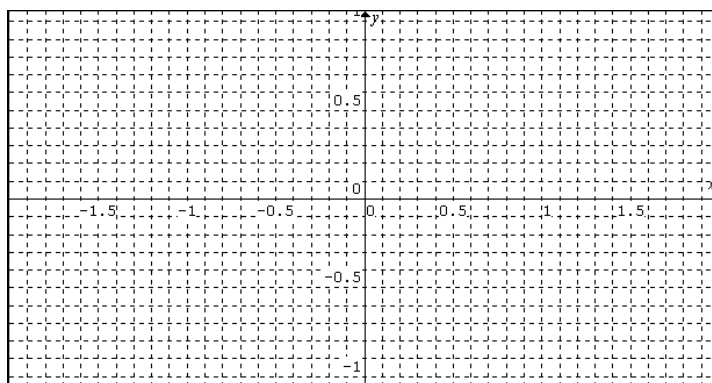


Figura 6.26: O gráfico de $y = \frac{1}{x^2} + 1$ não é visualizado, já que seus pontos não pertencem a essa região do plano.

Fato semelhante a esse fora relatado anteriormente, no episódio 2 dos alunos, na cena em que André digitou $y=365/x$ e deu uma idéia, com gestos, de onde estaria o gráfico correspondente.

Mas a análise da coordenação entre gráfico e tabela, já realizada anteriormente, em situações nas quais ambas as duplas relacionavam as alterações gráficas, feitas mediante comandos do software, com mudanças que ocorreram simultaneamente na tabela, estendeu, no item 6.5, a discussão sobre o *design* do software e suas implicações sobre a interligação entre representações; esta discussão se aplica igualmente à interligação entre representantes de funções, sejam de mesma representação ou de representações diferentes.

Conforme mencionado, ao usar a barra de rolagem horizontal no *Graphmatica*, os valores x do domínio são alterados na tabela; ou seja, utilizando esse comando, obtêm-se, simultaneamente, novos **representantes** gráficos e tabulares, a partir dos representantes que já estavam anteriormente disponibilizados. O mesmo pode ser estendido aos comandos *zoom in* e *zoom out*.

No trabalho consultado de Schwarz e Dreyfus (1995), esses autores apresentam, como conclusões de pesquisa, o sucesso empreendido por boa parte dos estudantes participantes em coordenar tanto representantes dentro de uma mesma representação como também representantes pertencentes a representações diferentes.

Porém, em relação à investigação desses autores, esta pesquisa apresenta uma possibilidade a mais: enquanto Schwarz e Dreyfus (1995) procuraram conectar as representações de maneira a incentivar a reflexão do estudantes, disponibilizando uma representação de cada vez, o design oferecido pelo *Graphmatica*, associado ao design das fichas de trabalho utilizadas, permitiu que representações e representantes fossem interligados **simultaneamente**, incentivados pelas características visuais dos gráficos, mediante a navegação já discutida, de forma que um mesmo fenômeno, como o já citado “encosta ou não encosta” de funções racionais, teve sua análise estendida à tabela ao mesmo tempo em que o gráfico era “manipulado”.

Portanto, as análises delineadas neste item conduzem a uma observação mais geral ao se trabalhar com funções de diversas famílias: a já discutida “navegação” pelas características gráficas de funções racionais, como $y=1/x$, $y=1/x^4$, $y=1/x^2+1$ e $y=1/(x^2+1)$, levaram os estudantes a lidar com aspectos algébricos, gráficos e, em algumas delas, também tabulares de tais funções, de forma que o mesmo fenômeno pôde ser interpretado em diferentes representações/representantes. Mesmo na função afim, tradicionalmente estudada na primeira série do Ensino Médio, o software proporcionou discussões a respeito dos representantes gráficos obtidos por $y=400x-2$, cujas justificativas algébricas acompanharam as ações das alunas enquanto utilizavam o *zoom in*.

Assim, aponto que, na leitura que faço dos dados, há várias evidências de que os mesmos mostram que o trabalho dinâmico com representantes gráficos e tabulares, principalmente de modo simultâneo, favoreceu a coordenação dessas representações, e das três principais, de maneira geral.

Ao longo deste capítulo apresentei uma discussão sobre os episódios, procurando visualizá-los à luz da bibliografia estudada, tanto em relação à perspectiva teórica aqui abraçada, quanto a temas constantes na revisão de literatura que foram identificados nos episódios. Tal exercício proporcionou, assim, possibilidades para respostas à pergunta norteadora.

No próximo capítulo, faço um resumo de todas essas possibilidades, de maneira a delimitar o alcance das conclusões desta pesquisa, bem como apontar caminhos passíveis de serem seguidos a partir das mesmas, além questões que ficarão abertas para possíveis novas investigações.

– CAPÍTULO 7 –

ALCANCES, LIMITAÇÕES E CONCLUSÕES DA PESQUISA

Neste último capítulo, estabelecerei a relação entre os resultados obtidos e os objetivos da pesquisa, de maneira a delimitar o alcance das respostas à pergunta norteadora, no contexto das metas delineadas no capítulo 1.

No capítulo 2, discuti itens da noção de coletivo pensante, de Pierre Lévy (1993, 1999), a fim de utilizar as potencialidades dessa metáfora na produção de significados relativos às funções, em atividades com estudantes em início do estudo desse assunto. Lévy (1993, 1999), a respeito dessa noção de pensamento como realização de um coletivo, aborda diversas características das mídias informáticas, no sentido de analisar sua participação na produção do conhecimento. Apoiando-me em tal idéia, e aproveitando o que Borba (1999,2002) traz sobre essas noções ao campo da Educação Matemática, utilizei o conceito de que o conhecimento matemático, por sua vez, é produzido não apenas por uma pessoa que pensa, mas por um coletivo que envolve seres humanos, coisas e técnicas. Sobre isso, Lévy (1999) afirma que

em nossas interações com as coisas, desenvolvemos competências. Por meio de nossas relações com os signos e com a informação adquirimos conhecimentos. Em relação com os outros, mediante iniciação e transmissão, fazemos viver o saber. Competência, conhecimento e saber (que podem dizer respeito aos mesmos objetos) são três modos complementares do negócio cognitivo, e se transformam constantemente

uns nos outros. Toda atividade, todo ato de comunicação, toda relação humana implica um aprendizado. Pelas competências e conhecimentos que envolve, um percurso de vida pode alimentar um circuito de troca, alimentar uma sociabilidade de saber. (LÉVY, 1999, p. 27)³⁵

Lévy (1993) entende que o humano, ao pensar, manipulando as opções que um software oferece, desencadeia a produção de novos raciocínios. De modo geral, um texto ou uma figura, utilizados ou construídos num determinado instante, mediará os raciocínios desenvolvidos no instante seguinte, num movimento pelo qual ser humano e software interagem constantemente, de forma que os pensamentos produzidos não são possibilitados única e exclusivamente a partir do ser humano e de seus processos cognitivos.

Nesse sentido, a interação com o outro também é de extrema relevância na produção de conhecimentos. O fato de os estudantes terem trabalhado em duplas propiciou debates que levaram ao trânsito pelas representações múltiplas de funções, bem como a profícuas reflexões acerca de itens matemáticos não exclusivos do assunto aqui enfocado, como a divisão **de** e **por** zero, por exemplo. As maneiras de pensar dos estudantes envolvidos, dessa forma, interagiram-se na proposição de perguntas, construção de hipóteses e confirmação ou refutação das mesmas. A interação dos estudantes com o pesquisador, o qual desempenhou o papel de professor desses estudantes, também propiciou uma produção matemática claramente resultante desse pensamento coletivo.

Postulemos explícita, aberta e publicamente o aprendizado recíproco como mediação das relações entre os homens. [...] Quem é o outro? É alguém que sabe. E que sabe as coisas que eu não sei. [...] Ele pode aumentar meu potencial de ser, e tanto mais quanto mais diferir de mim.

³⁵ Não fica claro aqui se a expressão “adquirimos conhecimento” se refere a um problema de tradução; independentemente desse fato, Lévy (1999) deixa claro, ao logo das duas obras que foram consultadas para esta pesquisa, que não entende o conhecimento como algo passivamente assimilável, mas construído, produzido.

Poderei associar minhas competências às suas, de tal modo que atuemos melhor juntos do que separados. (LÉVY, 1999, p. 27)

Nos coletivos pensantes aqui analisados, os estudantes trouxeram suas concepções matemáticas, constituídas principalmente junto à mídia escrita; as redes de significados que cada ator humano trouxe consigo, sobre o assunto funções e seus conceitos associados, relacionaram-se, interferiram-se, interagiram-se, de maneira que as **mídias**, permeando e constituindo essas redes entrelaçadas, condicionaram as ações desses grupos, e mais significados sobre esse tema puderam ser construídos, desta vez, com a atuação do software gráfico.

Assim, as mídias constituem um conhecimento construído, uma aprendizagem realizada, no sentido de que aquilo que se aprende é delas impregnado (o que aprendi sobre funções, por exemplo, é constituído de lápis-e-papel, principalmente, e de informática), fazendo parte da noção de coletivo pensante vislumbrado por Lévy, numa dinâmica ilustrada pela metáfora da rede. Um exemplo de rede hipertextual, citado no capítulo 2, deve então ser agora retomado. Em tal exemplo, dois estudantes e um professor estudam juntos o comportamento de uma função, cujo gráfico está esboçado na tela de um computador: um dos alunos é sujeito mantenedor de uma rede de significados diversos, dentre os quais aqueles associados a funções. O outro estudante traz consigo outra rede de significados, outras maneiras de falar e de pensar sobre esse assunto, outras habilidades. E o mesmo acontece com o professor; o pensamento coletivo, também realizado no formato metafórico de rede, foi verificado em vários episódios. Num deles (episódio 2), cheguei a esboçar um esquema escrito do trânsito por diversos conceitos realizados por André, por Gianluca e por mim, todos condicionados pelas mídias disponíveis: Expressão analítica → Gráfico → domínio → diagramas → representações → domínio → encosta ou não encosta? → domínio → encosta ou não encosta? → domínio → números inteiros e números reais → reta e expressão algébrica (parâmetros **a** e **b**) → domínio → valores na tabela e pontos no plano → monotonicidade →

parâmetros a e b da função afim $\rightarrow$ monotonicidade $\rightarrow$ domínio $\rightarrow$ operações com zero $\rightarrow$ ordem das operações (calculadora) $\rightarrow$ domínio.

Não foi um ser humano, mas sim um grupo que produziu a Matemática observada em tal esquema. As noções de domínio, de continuidade, de limite e de monotonicidade, feitas junto à função obtida através de $y=1/x$, realizadas mediante experimentações pelos atores humanos com as mídias, foram **nós** de um pensamento coletivo em rede que se alternaram em importância e variaram na forma como foram abordados, seja pelo desejo de Gianluca em analisar se o gráfico “corta ou não o eixo x ”, seja pela coordenação entre as representações realizada por André, seja pela importante atuação da calculadora na discussão sobre a divisão por zero, seja pelo gosto algébrico do professor, dentre outros motivos diversos que possam existir.

O software gráfico e as outras mídias estão presentes nesse “ambiente” intermídias (VILLARREAL, 1999), tanto em termos de tecnologias disponíveis aos atores humanos, como também nos conhecimentos prévios construídos com as tecnologias intelectuais diversas ao longo de suas respectivas histórias. Por essa razão, as interações entre humanos realizadas com as mídias potencializaram as dinâmicas dos coletivos pensantes estudados. Ao invés de promover uma pesquisa em que somente a relação aluno-software fosse considerada, levei em conta, nas análises, minhas interações com os estudantes e as interações entre eles, sendo que, se todas essas influências mútuas seguramente existem no ambiente de sala de aula, aí também devem ser exploradas.

Nesse sentido, recordo que um dos objetivos desta pesquisa foi trazer contribuições ao ensino de funções. Enquanto professor, na época em que estava experimentando o uso de softwares gráficos em minhas aulas, ainda tinha dúvidas, como, por exemplo: “o aluno vai deixar de pensar, se lhe bastar digitar a fórmula e teclar *enter*, para que o gráfico de uma função apareça pronto?”. Após os caminhos trilhados por ocasião desta pesquisa, passei a entender possíveis motivos para essa dúvida, analisando o paradigma sobre o qual ela se assentava.

A idéia de “gráfico pronto”, que permeia esse questionamento, referia-se a uma comparação implícita existente ainda em minhas concepções, já que era acostumado a propor exercícios de construções gráficas **no papel**, sendo que meu histórico como estudante também trazia esse enfoque. Ao final desta pesquisa, porém, tal questão foi então solucionada, entendendo que pensamos **com** as coisas. Sobre o caráter hipertextual das mídias informáticas e suas possibilidades educacionais, Lévy (1993) defende que

[...] O hipertexto ou a multimídia interativa adequam-se particularmente aos usos educativos. É bem conhecido o papel fundamental do envolvimento pessoal do aluno no processo de aprendizagem. Quanto mais ativamente uma pessoa participar da aquisição de um conhecimento, mais ela irá integrar e reter aquilo que aprender. Ora, a multimídia interativa, graças à sua dimensão reticular ou não linear, favorece uma atitude exploratória, ou mesmo lúdica, face ao material a ser assimilado. É, portanto, um instrumento bem adaptado a uma pedagogia ativa. (p. 40)

Esta citação acaba por justificar a presença do software *Graphmatica* na pergunta norteadora desta pesquisa: **“como estudantes trabalham com aspectos algébricos, gráficos e numéricos de funções dentro de um coletivo pensante formado por estudantes, mídias e pesquisador?”**. Por meio de tal software, os estudantes puderam explorar criticamente certos conceitos e propriedades de funções, muitas vezes percorrendo caminhos diversos, caracterizando uma plasticidade que a mídia escrita geralmente não incentiva. Como decorrência de toda a discussão apresentada no capítulo anterior, entendo que os estudantes participantes desta pesquisa transitaram por noções mais amplas de função, incluindo-se as propriedades e as representações de tal conceito.

Não desenvolvo aqui uma discussão sobre resultados de aprendizagem ou sobre memória, mas sim uma discussão de **possibilidades**: o software gráfico,

juntamente com as outras mídias disponíveis, conduziu os estudantes desta pesquisa a complexificarem os conhecimentos a respeito de função que traziam da 8ª série, bem como os que estavam trabalhando em suas aulas regulares.

Proponho, portanto, não a supervalorização de um enfoque exclusivo com mídias informáticas, em detrimento da abordagem com mídias escritas, ou seja, a substituição do uso do caderno e do livro pelos softwares, mas defendo o uso das potencialidades que um ambiente com várias mídias pode proporcionar a estudantes e professores no estudo de funções.

Assumo essa posição novamente recorrendo às idéias de Lévy (1993), o qual afirma, a respeito das tecnologias intelectuais, que a sucessão das mídias orais, escritas e informáticas não se dá por substituição, “mas antes por complexificação e deslocamento de centros de gravidade” (LÉVY, 1993, p.10). Essa complexificação pode significar, nesta pesquisa, a transformação dos conhecimentos sobre funções dos estudantes, ocorrida durante os EE.

Os deslocamentos de centros de gravidade denotam, nessa perspectiva teórica, que tais conhecimentos podem ser então constituídos de aspectos **também** da mídia informática, e não mais apenas daqueles construídos nas aulas regulares, com predominância da oralidade e da escrita, esta, tendo no livro didático, um de seus principais representantes.

Um exemplo, dentre outros possíveis, que evidencia essa complexificação, pôde ser observado na determinação do domínio de funções racionais, ocorrido nos episódios 2 e 5 das alunas. São comuns, em diversos livros didáticos, exercícios que solicitam a determinação do domínio de uma função, dada sua expressão algébrica, os quais normalmente recaem em resolução de equações e inequações. Numa seção posterior, a mesma solicitação é feita, mas agora dado o gráfico; porém, nenhum dos livros didáticos consultados (PAIVA, 1995; GENTIL et al, 1997; SMOLE, KIYUKAWA, 1998; GIOVANNI, BONJORNO, 2000; BUCCHI, 2001; NERY, TROTTA, 2001) apresentaram exercícios em que essas duas representações fossem fornecidas ou trabalhadas **simultaneamente**.

Com o software gráfico, entretanto, tais questões podem assumir novas possibilidades, visto que, além do enfoque algébrico, esse tipo de questão pode ser trabalhado graficamente, de modo que a conexão entre essas representações torna-se viabilizada, como nos mostrou Vivian nos episódios 2 e 5: após determinar graficamente o domínio das funções de expressões $y=1/x$ e $y=1/(x^2+1)$, essa estudante, por meio da mídia lápis-e-papel, substituiu y por zero e efetuou sua multiplicação “em cruz”, verificando, através desse trabalho algébrico, que o fato de não haver raiz para tais equações implicaria que zero não seria um valor possível para o conjunto imagem.

Pode-se notar, também, que com a capacidade de geração de gráficos destas novas mídias há um deslocamento da ênfase algébrica dada ao estudo das funções para uma atenção maior à coordenação entre representações algébricas, gráficas e tabulares (BORBA, 1999, p. 293)

Os conhecimentos sobre funções, manifestados ao longo dos EE, assim ocorreram graças aos encontros em que estiveram presentes, além dos pares de estudantes e do professor, a oralidade, o gestual, o lápis-e-papel, o software gráfico e a calculadora. Sendo assim, afirmo seguramente que o conhecimento dos estudantes esteve em transformação durante os EE, transformação esta condicionada pelas mídias disponíveis.

As evidências dessa transformação puderam ser analisadas no capítulo 6. Ao retomar as conclusões ali discutidas, apresento um resumo de possíveis respostas à pergunta norteadora desta pesquisa. Assim, constata-se que **os estudantes** trabalharam com aspectos algébricos, gráficos e numéricos de funções:

1. Construindo conjecturas, confirmando-as ou refutando-as a partir das interações entre **suas** Matemáticas, e entre estas e a Matemática do pesquisador; esse processo deu-se principalmente através de: (i) esboços de diversos gráficos, obtidos mediante diversas expressões analíticas, e (ii)

análise das diferentes partes do gráfico ou tabela de uma mesma função, de modo que propriedades observáveis em diferentes representações fossem identificadas como pertencentes a uma mesma função.

2. Produzindo significados matemáticos **com** as mídias e com as interações do item 1, tais como aqueles referentes à monotonicidade, raízes e domínio de funções; pensando **em** conceitos matemáticos mais gerais, como alguns relacionados a limites, continuidade, infinito, geometria e operações com números reais, pensando **com** os gestos, **com** os comandos do software e **com** a calculadora (além da oralidade e da escrita);
3. Desenvolvendo processos entrelaçados de coordenação das representações múltiplas de funções junto à coordenação entre as mídias, através do estudo de funções de diversas famílias; uma considerável parte desses processos foi caracterizada pela **experimentação**, processo possível principalmente pelo aspecto dinâmico do software gráfico, devido a seus comandos e à sua capacidade de representar diversas funções em curto prazo de tempo;
4. Usufruindo os aspectos dinâmicos do software para estudarem os conceitos matemáticos mencionados no item 2, ao trabalharem com diversos “representantes” de várias funções, a fim de que “navegassem” pelas características de uma mesma função, transitando por suas representações;
5. Amenizando os efeitos do enfoque prototípico que o ensino intensivo das funções polinomiais de graus 1 e 2 propiciam; ao estudarem funções de diversas famílias, os estudantes ampliaram conceitos como monotonicidade, domínio e raízes para várias famílias de funções, não mais restringindo tais noções apenas àquelas duas. O efeito prototípico das funções afim e quadrática foi, portanto, minimizado com o estudo de outros protótipos, como $y = x^3$, $y = x^4$, $y = x^5$, $y = x^6$, $y = \sqrt{x}$ e $y = 1/x$, além de outros exemplares de funções polinomiais de graus variados e de funções racionais.

6. Demonstrando **visualmente** algumas propriedades, como o fizeram André e Gianluca, ao utilizarem várias funções para comprovar hipóteses, ou **algebricamente**, como a multiplicação “em cruz” de Vivian, para associar comportamentos gráficos com a resolução de equações;
7. Interagindo com o viés algébrico do professor, aproveitando-o não apenas para tratar de questões algébricas, mas também utilizando o potencial do visual em explorações gráficas, mediante a facilidade do software em oferecer vários gráficos simultaneamente, chegando a conclusões ilustradas em mais de uma representação;
8. Explorando concepções estáticas e dinâmicas de função, principalmente através de gestos e de comandos do software, especialmente na variação simultânea dos valores apresentados no gráfico e na tabela.
9. Usando a calculadora articuladamente ao uso do software gráfico, ao efetuarem operações com valores da variável x em expressões analíticas; os estudantes atribuíram significados aos valores apresentados nas tabelas, bem como a pontos dos respectivos gráficos, o que mostra a interligação entre as representações canônicas (gráfico, expressão analítica e tabela). Ainda na articulação das mídias, os estudantes contrastaram algumas representações obtidas no software com aquelas realizadas com lápis-e-papel.

Os comandos que esse software oferece condicionaram a experimentação, por parte dos estudantes, através de diversos exemplares de funções, de maneira que um **mesmo fenômeno** foi identificado por eles em mais de uma representação. Dessa forma, o fato de terem lidado com diversas funções, no sentido de estas pertencerem a famílias diferentes, levou-os a trabalhar com conceitos referentes a função, como domínio, raízes, monotonicidade e imagem, bem como a própria noção principal de função, que é a variação entre grandezas ou números (CARAÇA, 2000), num contexto mais amplo, não apenas na resolução de exercícios com tradicional enfoque algébrico. Tais noções foram identificadas

não apenas como atributos de funções polinomiais de graus 1 e 2, mas de **funções** de uma maneira geral.

As dinâmicas do pensamento coletivo analisadas nesta pesquisa não foram pré-determinadas nem organizadas seqüencialmente; alguns temas foram incentivados voluntariamente por mim, enquanto outros emergiram durante as atividades que os estudantes desenvolveram, de modo que vários conceitos, em especial as representações múltiplas de funções, foram trabalhados hipertextualmente.

Escolhi a coordenação das representações múltiplas como um caminho, dentre outros possíveis, para explorar suas possibilidades pedagógicas no estudo dos conceitos associados às funções. Por que a afirmação, referida a muitas páginas atrás, de que as representações múltiplas estão associadas às mídias informáticas de um modo quase “natural”, na maioria dos trabalhos revisados no capítulo 3? Através desta pesquisa, concluo que a fácil e dinâmica disponibilidade das representações, propiciada pelo software gráfico, condicionou o trânsito por elas, sem, no entanto, substituir o conhecimento que os estudantes já haviam construído junto à oralidade e à escrita.

Com lápis-e-papel, porém, o processo de construção de gráficos é mais trabalhoso, possivelmente consumindo-se muito tempo, o qual às vezes poderia ser mais bem aproveitado: toma-se um papel, um lápis, fazem-se cálculos, constrói-se uma tabela, toma-se uma régua, traçam-se dois eixos etc. Não defendo que tal procedimento deva se extinguir, mas questiono veementemente o uso de tal técnica em atividades que envolvam diversos esboços de gráficos de funções, principalmente, grande parte daquelas que foram abordadas nesta pesquisa.

Se o estudante desejar, por exemplo, esboçar várias parábolas, num mesmo plano, a fim de compará-las, a mídia escrita limita-o muito mais que a mídia informática, sendo que por meio desta, a tarefa pode ser feita em questão de segundos. A validade desse exemplo fica reforçada ao imaginarmos coeficientes numéricos da variável x que gerem um gráfico que não se situa nas proximidades da origem do plano cartesiano, nas escalas tradicionalmente padronizadas.

Excluindo-se as possibilidades que o software gráfico oferece, dificilmente várias sucessões de hipóteses e conclusões dos alunos se desenvolveriam, sendo difícil, assim, imaginar os mesmos gráficos esboçados ao longo dos episódios, resultantes apenas a partir do lápis-e-papel, em atividades regulares em sala de aula. Há ainda outro fator, intrinsecamente ligado a essa capacidade do software, que deve ser levado em conta em tais análises.

É difícil acreditar que, somente com lápis-e-papel, André e Gianluca esboçariam gráficos e lidariam com tabelas de funções de expressões como $y=2/x$, $y=3/x$, $y=-3/x$, $y=-1/x$, $y = 365/x$, $y=x^5$, $y=x^6$, $y=x^7$, $y=x^{65}$, $y=1/(x^3+1)$, $y=1/(x^4+1)$, $y=1/(x^5+1)$ e $y=x/x^5$, dentre outras, além daquelas que já constam nas fichas de trabalho. O mesmo se aplica às alunas, através de expressões como $y=400x-2$, $y=10000x-2$, $y=15000x-2$ e $y=0,0002x-2$, incluindo relações que poderiam ser consideradas funções, com devidos “ajustes”, através das expressões $y^2 = x$ (se considerarmos y elemento do domínio e x da imagem) e $x = \sqrt{y}$, $x = \sqrt[4]{y}$ e $x = \sqrt[6]{y}$, que podem ser exemplos de funções inversas daquelas apresentadas na terceira ficha de trabalho (considerando o domínio delas igual a $\mathbf{R}_+$, por exemplo).

Da mesma forma, dificilmente construiriam vários gráficos dinamicamente, como aqueles que os levaram à construção do “teorema AGGA”, à relação entre a paridade de expoentes de x , em funções polinomiais prototípicas da forma $y=x^n$, com os quadrantes nos quais os respectivos gráficos foram esboçados. Também seria difícil, sem software e calculadora, que eles observassem pontos como $(250,0)$, e trabalhassem com valores de tabela como 322×10^{-5} e $0,0000159$, dentre vários exemplos. Segundo Borba (1995), interligações como essas levam estudantes a observar que aquilo que é

[...] representado de um dado fenômeno, em uma dada representação do aplicativo, pode ser remetido para outra representação. Essa

dinâmica entre múltiplas representações provoca uma nova perspectiva sobre o que se conhece. (p. 71)

Intrinsecamente associado à capacidade do software, o trabalho com funções diferentes das tradicionalmente estudadas pelos estudantes ganhou possibilidades qualitativas e quantitativas na produção de significados envolvendo funções. Qualitativa porque vários aspectos tais como monotonicidade, raízes, simetria, domínio, imagem e outros, foram bastante explorados ao disporem das diversas representações, o que foi facilmente permitido pelo software gráfico. Quantitativo, porque um considerável número de gráficos, fórmulas ou tabelas pôde ser representado em pouco tempo, restringindo a atenção dos grupos para a análise das características das funções, em vez de se despendem um tempo considerável em processos predominantemente operacionais, como, por exemplo, a construção do gráfico obtido por $y = \sqrt{x}$ num papel “milimetrado”.

Ou seja, essa capacidade do software se caracteriza pela **velocidade** com a qual facilmente torna possível serem gerados diversos gráficos em curto prazo. Na metáfora do pensamento em rede dos coletivos pensantes, tal idéia insere-se num conceito ainda maior apresentado por Lévy (1993), que é a **navegação**:

[...] A quase instantaneidade da passagem de um nó a outro permite generalizar e utilizar em toda sua extensão o princípio da não-linearidade. Isto se torna a norma, um novo sistema de escrita, uma metamorfose da leitura, batizada de navegação (LÉVY, 1993, p. 37).

A navegação é uma idéia bastante utilizada, em que a participação da informática associa-se à conexão entre mundos diferentes, ao acesso fácil a informações e à comunicação facilitada, como no caso da Internet; a palavra *link*, utilizada algumas vezes neste texto indica que, no âmbito desta pesquisa, a navegação também está presente.

Os estudantes protagonizaram, pois, episódios nos quais usaram o software gráfico apenas para apresentar representações de uma função, mas a maioria das cenas analisadas acabaram por mostrar os estudantes navegando pelas suas características, como nos gráficos, ao extrapolar o campo visual comum das proximidades da origem do plano cartesiano, observando características gráficas para valores de x ou de y muito pequenos ou muito grandes em relação à unidade padrão do plano cartesiano, com seqüências de zoom e o deslocamento por partes do gráfico. Esboçaram vários deles, levando o pensamento do grupo a navegar em busca de confirmações ou refutações de conjecturas. Enquanto atuavam nesse processo, transitavam pelas representações com autonomia, coordenando-as, ora com maior intensidade, ora com menor evidência, pensando com as mídias.

Esse “pensar com” é característico da metáfora seres-humanos-com-mídias, que não possui um espectro fechado de potencialidades, quando se dispõe a servir como instrumento de análise do pensamento de um coletivo pensante. No capítulo 6, pude retomar diversos exemplos nos quais os estudantes pensavam com as mídias, efetuando explorações que não se limitavam apenas a levantar conjecturas e depois verificar a validade das mesmas, mas proporcionavam várias reflexões, produzindo conhecimentos sobre funções, conforme detalhado nos exemplos dos episódios 2, 5 e 6 dos alunos, e no episódio 1 e 2 das alunas.

Tal metáfora inclui também as descobertas e análises que se obtêm mesmo sem conjecturas prévias, como as relações entre as representações debatidas no episódio 2 dos alunos; na relação entre expressões $y^2 = x$ e $y = \sqrt{x}$ e respectivos gráficos (episódio 3 das alunas); a divisão **de** e **por** zero na calculadora (episódios 2 e 4 dos alunos); a análise das posições entre gráficos obtidos por $y=x^2$, $y=x^4$ e $y=x^6$ (episódio 4 das alunas), dentre vários outros exemplos que permearam as atividades dos coletivos estudados.

O software gráfico estava, por exemplo, **no** pensamento de Gianluca quando sugeriu ao professor que retomasse o gráfico da função racional estudada

em encontro anterior: “Uê, faz o radical lá...”³⁶ (episódio 3). Se tal fala não fosse acompanhada de gestos e este pesquisador não estivesse familiarizado com gírias, seria difícil entender a quem o estudante se referia.

O software gráfico também estava **no** pensamento de André antes que digitasse $y = -1/x$ (episódio 2); **antes** de obter tal gráfico junto ao *Graphmatica*, durante de uma discussão sobre monotonicidade da função racional, André dissera que sabia um jeito para que “o gráfico” obtido através de $y = 1/x$ “se tornasse” crescente, efetuando um gesto sobre a tela do computador, mostrando “no ar” que tal gráfico se situaria no segundo quadrante, constituindo-se em um desenho simétrico àquele obtido por $y = 1/x$.

Outros exemplos são os gráficos esboçados por André, a partir da expressão $y = 365/x$ (episódio 2), e por Fernanda (episódio 5), com a fórmula $y = 1/(x^2) + 1$. Em ambos os casos, cada gráfico do *Graphmatica* está disponibilizado pelas mentes dos estudantes, no sentido de que os mesmos não eram visíveis na tela do computador, mas os estudantes falaram sobre suas características mesmo sem usarem o mouse e chegarem, efetivamente, até o desenho deles.

Diante de todos os exemplos expostos, torna-se necessária uma resposta clara à seguinte questão: como a metáfora seres-humanos-com-mídias, desenvolvida por Borba (1999, 2002), articula-se às respostas à pergunta norteadora desta pesquisa?

[...] Acredito, então, que a metáfora seres-humanos-com-mídias possa dar suporte às mudanças de ênfase em atividades didático-pedagógicas centradas na mídia escrita, para aquelas que incorporem a informática enquanto mídia (BORBA, 1999, p. 293).

Dessa forma, vale aqui retomar meu objetivo referente à possibilidade de esta pesquisa auxiliar professores e/ou pesquisadores a refletirem sobre suas

³⁶ A palavra radical, no sentido usado por Gianluca, é uma gíria, e deve ser entendida como uma mescla de adjetivos tais como “maluco”, “esquisito” e “diferente”, dentre outros possíveis.

possíveis práticas pedagógicas, tanto no sentido de observarem suas atuações com a mídia informática, como, principalmente, a atuação dos estudantes com as mesmas, em especial, no ensino de funções, já que o tema é de extrema abrangência, podendo seu estudo formal iniciar-se na 8ª série, continuar por todo o Ensino Médio e avançar no nível superior.

Nesse sentido, a análise do papel do professor, com suas preferências e seu histórico, é coerente com a perspectiva teórica aqui adotada, posto que esta considera a participação dos atores humanos junto ao reiterado papel que as mídias informáticas desempenham na produção do conhecimento.

O conhecimento que os estudantes produziram sobre funções foi analisado junto à influência das concepções e das ações do professor que conduziu as atividades, no caso, o próprio pesquisador, autor deste texto. O embasamento teórico aqui adotado não aborda certas dicotomias tradicionalmente utilizadas nas discussões em Educação, como sujeito/objeto, humano/conhecimento, ensino/aprendizagem etc, mas entende que o conhecimento é produzido por uma “unidade coletiva” (coletivos pensantes), de forma que o mesmo é impregnado de tecnologias intelectuais.

As possibilidades para que um conhecimento, no caso, sobre funções, com características diferentes em relação àqueles construídos somente com oralidade e lápis-e-papel, pudesse ser construído, foram verificadas pelo **uso do software gráfico**, como já discorrido, e pelo **trabalho com funções de diversas famílias**. O fato de terem sido trabalhadas expressões algébricas não comuns aos estudantes (os quais já haviam lidado com funções afins e quadráticas), propiciou-lhes o levantamento de várias questões matemáticas, sendo que o trânsito pelas representações possibilitou-se pela variedade de operações envolvidas em tais funções, como divisão (nas funções racionais), radiciação (na expressão algébrica $y = \sqrt{x}$) e potenciação (nas funções polinomiais prototípicas da forma $y = x^n$, $n \in \mathbf{N}$).

É verdade que a função racional $y = 1/x$ consta em diversas pesquisas, mas a análise de como os estudantes lidam com ela foi aqui intensamente discutida. O trabalho dos estudantes com essa função, a título de um breve exemplo, suscitou

discussões que apresentaram conceitos matemáticos diversos, como as operações básicas e a coordenação entre as três principais representações (gráfico, tabela e álgebra), sendo que alguns desses conceitos são pontos de conflito para estudantes de vários níveis escolares, como a divisão por zero e a noção de limites e de continuidade.

A mídia informática está diretamente associada às discussões e debates que podem surgir através do estudo de conceitos como esses, e acredito que, no ambiente da sala de aula, tais debates e discussões são “potencializadores” de uma aprendizagem mais abrangente, em particular, no caso das funções. Trabalhando com funções de famílias diversas, como polinomiais e racionais, os estudantes puderam estudar conceitos particulares, como monotonicidade, simetria, raízes, domínio, imagem etc, utilizando-os não somente para alguns casos específicos, mas estendendo-os para várias das funções estudadas durante os EE.

Nesse sentido, questões como os efeitos não desejáveis do estudo intensivo de funções afins e quadráticas, como abordam Schwarz e HersHKovitz (1999), podem ser trabalhadas, de maneira que um amplo estudo de diversas funções **anteceda** o tradicional trabalho intensivo com as funções afins e quadráticas. O que **proponho**, no caso, é que as diversas noções já citadas, constituintes das funções, sejam trabalhadas desde o começo do estudo desse tema, e não somente após o estudante atravessar o estudo intensivo de certas famílias de funções, o que pode levar anos.

Embora não tenha elementos para avaliar resultados de aprendizagem nesta pesquisa, observei que as falas dos estudantes, especificamente aquelas que indicavam a presença do papel prototípico de funções lineares e quadráticas, rarearam com o desenrolar dos experimentos de ensino; os últimos encontros com todas as duplas nem mesmo registraram identificações como “essa função é crescente porque o **a** é positivo”.

Parece-me razoável, então, que no início do tratamento com funções, tanto na 8ª série do Ensino Fundamental, quanto na primeira série do Ensino Médio,

sejam exploradas as diversas representações de funções, incentivando a coordenação das mesmas, para posteriormente investir-se no estudo sistemático de famílias específicas, como afins, quadráticas, exponenciais, logarítmicas, modulares e trigonométricas. E a mídia informática, conforme reiteradamente se defendeu, torna-se um ator extremamente importante nesse sentido.

Ainda considerando as pesquisas realizadas, não se constataram problemas que levassem à conclusão de que a manipulação de qualquer comando do software gráfico pudesse provocar problemas às concepções dos estudantes, conforme resultados de pesquisa de Gómez e Carulla (2001). Tampouco a disponibilidade dinâmica de diversos **representantes** de funções, construto teórico elaborado por Schwarz e Dreyfus (1995), pôde ser vista como inadequada para atividades que incentivassem o trânsito pelas representações.

Ao contrário, os diversos representantes de funções trabalhados pelos estudantes desta pesquisa fizeram parte dos debates, muitas vezes sendo importantes para as conclusões dos grupos. Convém salientar que o fato de ter sido possível trabalhar junto ao *Graphmatica* com as três representações simultaneamente favoreceu a coordenação das mesmas; André, no episódio 2, evidenciou uma “agradável surpresa”, ao observar a forma como os valores da tabela se modificavam simultaneamente ao uso da barra de rolagem horizontal no gráfico.

Apesar de todo esse meu envolvimento com o uso da informática no estudo de funções, torna-se necessário retomar os pontos falhos que identifico na pesquisa como um todo. Algumas vezes, o meu viés propiciou ações dos coletivos pensantes que os limitaram ao enfoque algébrico, como nos episódios 1 e 4 dos alunos, tanto que tais episódios pouco apareceram na totalidade das análises, em virtude de as manipulações com o software terem sido dificultadas.

Verdade também que as vozes dos estudantes foram fortes o suficiente para se buscarem várias alternativas: as demonstrações visuais de André e Gianluca, em especial, tornavam mais intensos os “nós gráficos” do pensamento

coletivo que, através da minha atuação, buscava manter a confiança no enfoque algébrico.

Outra questão que pode ser tema de debates futuros diz respeito à própria teoria de Lévy (1993): perde-se facilmente quando se navega hipertextualmente. A navegação pela Internet ou por enciclopédias eletrônicas favorece a substituição de uma meta por outra; certa opção do menu atrai o usuário, abrindo-se outros caminhos, confirmando-se, pois, a não-linearidade.

Tal fato também pôde ser verificado através das atividades com o *Graphmatica*: certas características de determinada função geraram conjecturas e/ou questionamentos de tal forma que o pensamento em rede se modificou a ponto de algumas questões iniciais serem abandonadas para se investir em outras, imprevistas ou difíceis de ocorrer quando se dispõe apenas das mídias tradicionais, como durante a construção do teorema "AGGA". O grupo pode não voltar às questões iniciais, priorizando as discussões nas questões que emergem durante a atividade.

Nesta pesquisa, pude ainda observar o contraste entre **o pensamento coletivo em formato de rede**, no qual diversos conceitos foram trabalhados num "vai-e-vem" de conjecturas, reflexões e refutações, com o estudo sistemático e linear de uma mesma família de função, tradicional no currículo e nos livros didáticos.

Considero que, ao trabalhar com informática, tanto professores quanto estudantes devem estar conscientes dos problemas que podem advir do uso dessa mídia. Vivian, por exemplo, aparentemente se sentiu incomodada com o desenho da reta oferecido pelo software, após várias aplicações de *zoom in*, de maneira que os *pixels* da imagem aparentavam representar a função através de segmentos: "a reta quebrou", disse Vivian. Também serve como exemplo o sumiço do gráfico obtido através de $y=1/x$, no episódio 2 das alunas.

Para o professor que deseja utilizar ou utiliza um software gráfico em suas aulas, são fortes as evidências, presentes nesta pesquisa, de que o uso dessa

tecnologia pode transformar a forma de se trabalhar com o livro didático, modificando qualitativamente o seu uso.

Entendo, a partir dos resultados obtidos, que tais transformações e aquele “efeito colateral” da navegação são favoráveis aos processos de ensino e aprendizagem de funções, visto que a mídia informática está diretamente associada às discussões e debates que podem emergir sobre conceitos vários, como os relativos às funções. Acredito que, no ambiente da sala de aula, esses debates e discussões são “potencializadores” de uma aprendizagem mais significativa, em particular, em relação ao tema funções.

[...] Trabalhar estes atritos, deixá-los florescer em busca de um enfoque educacional com a marca da diversidade na sala de aula parece ser um desafio central para os professores que trabalharão com computadores na sala de aula. A perda de controle por parte do professor – na medida em que os grupos estarão muitas vezes trabalhando em direções divergentes e interagindo com o computador – é um outro fator que tem que ser levado em conta quando da introdução do mesmo na sala de aula. [...]. (BORBA, 1996, p. 129)

Ao finalizar a apresentação desta pesquisa, observo que, embora haja ainda algumas portas abertas, certamente são inícios de caminhos que ainda poderão ser percorridos. O estudo de limites, por exemplo, num panorama que envolve continuidade e infinito, discutidos no capítulo anterior, pode proporcionar férteis investigações a respeito de maneiras de se trabalhar com tais conceitos já no Ensino Médio.

O debate sobre prova e demonstração, por sua vez, também é um desses caminhos que ainda me parecem interessantes para serem trilhados; ou seja, acredito que esta pesquisa tenha apresentado alguns dados que podem iniciar uma investigação mais rigorosa nesse tema.

Outra questão, de certa forma já abordada nos parágrafos anteriores, diz respeito à aplicação do *design* dos experimentos de ensino desta pesquisa em salas de aula, tanto por professores, em suas respectivas práticas pedagógicas, como por pesquisadores que desejem realizar investigações a partir dos temas aqui debatidos.

Creio, também, que possam existir ainda mais respostas à pergunta norteadora desta pesquisa, implícitas ao longo deste texto, as quais o leitor pode ter construído durante sua leitura. Da mesma forma, há também mais respostas me esperando, ao longo da minha prática pedagógica, a qual continua. O texto termina, mas eu, professor e pesquisador Francisco, continuamos pensando...

REFERÊNCIAS

ALVES-MAZZOTTI, A. J.; GEWANDSZNAJDER, F. *O método nas ciências naturais e sociais: pesquisa quantitativa e qualitativa*. 2. ed. São Paulo: Pioneira, 1999. 203p.

BARUFI, M. C. B.; LAURO, M. M. *Funções elementares, equações e inequações: uma abordagem utilizando microcomputador*. São Paulo: CAEM-IME/USP, [2001]. 121p. (Ensino Médio, 1).

BICUDO, M. A. V. *Fenomenologia: confrontos e avanços*. São Paulo: Cortez, 2000. 167p.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. *Investigação qualitativa em Educação: uma introdução à teoria e aos métodos*. Lisboa: Porto Editora, 1994. 336p.

BORBA, M. C. A informática trará mudanças na Educação Brasileira? *Zetetiké*, v. 4, n. 6, p. 123-134, 1996.

BORBA, M. C. Coletivos seres-humanos-com-mídias e a produção de Matemática. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE PSICOLOGIA DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 1., 2001, Curitiba. *Anais...* Curitiba: Universidade Federal do Paraná, Universidade Tuiuti do Paraná, Pontifícia Universidade Católica do Paraná, 2002. p. 135-146.

BORBA, M. C. Computadores, representações múltiplas e a construção de idéias matemáticas. *Bolema*, v. 9, especial 3, p. 83-101, 1994.

BORBA, M. C. Funções, representações múltiplas e visualização na Educação Matemática. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA DO RIO DE JANEIRO, 1., 1993, Rio de Janeiro. *Anais...* Rio de Janeiro: IM – UFRJ, 1995. p. 71-90.

BORBA, M. C. GPIMEM e UNESP: pesquisa, extensão e ensino em Informática e Educação Matemática. In: PENTEADO, M. G. et al (Org.). *A informática em ação: formação de professores, pesquisa e extensão*. São Paulo: Olho d'Água, 2000. p. 47-66.

BORBA, M. C. Tecnologias informáticas na Educação Matemática e reorganização do pensamento. In: BICUDO, M. A. V. (Org.). *Pesquisa em Educação Matemática: concepções & perspectivas*. São Paulo: Editora Unesp, 1999. cap. 16, p. 285-295.

BORBA, M. C. *Students' understanding of transformations of functions using multi-representational software*. 1993. 377f. Tese (Doutorado em Filosofia) - Cornell University, Ithaca.

BORBA, M. C.; CONFREY, J. A student's construction of transformations of functions in a multiple representational environment. *Educational Studies in Mathematics*, v. 31, n. 3, p. 319-337, 1996.

BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G. *Informática e Educação Matemática*. Belo Horizonte: Autêntica, 2001. 104p. (Tendências em Educação Matemática)

BORBA, M. C.; SCHEFFER, N. Sensors, body, technology and multiple representations. In: INTERNATIONAL CONFERENCE FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 27., 2003, Honolulu. *Proceedings...* Honolulu: in press.

BORBA, M. C.; VILLARREAL, M. E., Calculadoras gráficas e reorganização do pensamento: a transição de funções para derivadas. In: FAINGUELERNT, E. K.; GOTTLIEB, F. C. (Org.) *Calculadoras gráficas e Educação Matemática*. Rio de Janeiro: Art Bureau, 1999. p. 115-130.

BRASIL. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Ministério da Educação. *Parâmetros Curriculares Nacionais: ensino médio*. Brasília, 2002. 360 p.

BRENNER, M. E. et al. Learning by understanding: the role of multiple representations in learning Algebra. *American Educational Research Journal*, v. 34, n. 4, p. 663-689, 1997.

BRUMATTI, R. N. M. *Uma análise do processo de construção de conceitos: o caso do valor absoluto*. 2001. 198 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro.

BUCCHI, P. *Curso prático de Matemática*. São Paulo: Moderna, 1998. v. 1, 559 p.

BUENO, F. S. *Dicionário escolar da língua portuguesa*. Rio de Janeiro: FENAME. 1488 p.

CARAÇA, B. J. *Conceitos fundamentais da Matemática*. 3. ed. Lisboa: Gradiva, 2000. 295 p.

CASTRO, M. R.; FRANT, J. B.; LIMA, F. M. Produção de significados: funções e representações sociais. In: REUNIÃO ANUAL DA ANPED, 23., 2000, Caxambu, MG. *Programas e resumos...* Caxambu: ANPED, 2000. 1 CD-ROM.

COBB, P. Conducting teaching experiments in collaboration with teachers. In: LESH, R.; KELLY, A. E. (Ed.). *Research design in mathematics and science education*. Hillsdale: Erlbaum, 2000. cap.12, p. 307-333.

CONFREY, J.; SMITH, E. Exponential functions, rates of change, and the multiplicative unit. *Educational Studies in Mathematics*, v. 26, n. 1, p. 135-164, 1994.

CONFREY, J.; SMITH, E. Splitting, covariation, and their role in the development of exponential functions. *Journal for Research in Mathematics Education*, v. 26, n. 1, p. 66-86, 1995.

CONFREY, J.; SMITH, E.; PILIERO, S.; RIZZUTI, J. The use of contextual problems and multi-representational software to teach the concept of functions. Ithaca: Cornell University, 1991. 98 p. *Final project report to the National Science Foundation* (MDR-8652160) and Apple Computer, Inc.

COSTA, N. M. L. *Funções seno e cosseno: uma sequência de ensino a partir dos contextos do "mundo experimental" e do computador*. 1997. 179 p. Dissertação (Mestrado em Ensino da Matemática) - Pontifícia Universidade Católica, São Paulo.

DENZIN, N. K.; LINCOLN, Y. S. The discipline and practice of qualitative research. *Handbook of Qualitative Research*. 2nd ed. London: Sage Publications, 2000. p. 1-28

GARNICA, A. V. M. As demonstrações em Educação Matemática: um ensaio. *Bolema*, v. 15, n. 18, p. 91-122, 2002.

GENTIL, N. et al. *Matemática para o 2º grau*. São Paulo: Ática, 1997. v. 1, 302 p.

GIOVANNI, J. R.; BONJORNO, J. R. *Matemática: uma nova abordagem*. São Paulo: FTD editora, 2000. v. 1, 398 p.

GOLDENBERG, M. *A arte de pesquisar: como fazer pesquisa qualitativa em Ciências Sociais*. 3. ed. Rio de Janeiro: Record, 1998. 107 p.

GOMES-FERREIRA, V. G. Conceptions as articulated in different microworlds exploring functions. In: INTERNATIONAL CONFERENCE FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 22., 1998, Cape Town. *Proceedings...* Cape Town: Kwik Kopy Printing, 1998. v. 3, p. 3-9.

GÓMEZ, P; CARULLA, C. Students' conceptions of cubic functions. In: INTERNATIONAL CONFERENCE FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 25., 2001, Utrecht. *Proceedings...* Utrecht: Drukkerij Wilco, 2001. v. 3, p. 57-64.

GRACIAS, T. S.; BORBA, M. C. Calculadoras gráficas e funções quadráticas. In: BORBA, M. C. *Calculadoras gráficas e Educação Matemática*. Rio de Janeiro: Art Bureau, 1999. p. 59-74.

GRASSE, M. *Effect of the multiple representation of function approach on advanced placement students' symbolic manipulation of the derivative* – Illinois: State University, 1997. Unpublished.

KELLER, B. A.; HIRSCH, C. R. Student preferences for representations of functions. *International Journal of Mathematical Education*, v.29, n. 1, p. 1-17, 1998.

LA TAILLE, Y.; OLIVEIRA, M. K.; DANTAS, H. *Piaget, Vygotsky, Wallon: teorias psicogenéticas em discussão*. 14. ed. São Paulo: Summus, 1992. 155 p.

LÉVY, P. *A inteligência coletiva: por uma antropologia do ciberespaço*. 3. ed. São Paulo: Edições Loyola, 1999. 212 p.

LÉVY, P. *As tecnologias da inteligência. o futuro do pensamento na era da informática*. 1. ed. Rio de Janeiro: Editora 34, 1993. 203 p.

MACHADO, N. J. *Educação: projetos e valores*. 2. ed. São Paulo: Escrituras Editora, 2000. 155 p. (Ensaio Transversais)

MIZUKAMI, M. G. N. *Ensino: as abordagens do processo*. São Paulo: EPU, 1986. 119 p.

NERY, C.; TROTTA, F. *Matemática para o ensino médio*. São Paulo: Saraiva, 2001. 591 p.

O'CALLAGHAN, B. R. Computer-intensive algebra and students' conceptual knowledge of functions. *Journal for Research in Mathematics Education*, v. 29, n. 1, p. 21-40 1998.

OLIVEIRA, N. *Conceito de função: uma abordagem do processo ensino-aprendizagem*. 1997a. 137 f. Dissertação (Mestrado em Ensino da Matemática) - Pontifícia Universidade Católica, São Paulo.

OLIVEIRA, M. K. *Vygotsky: aprendizado e desenvolvimento: um processo sócio-histórico*. São Paulo: Scipione, 1997b. 111 p.

PAIVA, M. *Matemática*. São Paulo: Moderna, 1995. v. 1, 653 p.

PALANGANA, I. C. *Desenvolvimento & Aprendizagem em Piaget e Vygotsky: A relevância do social*. São Paulo: Plexus, 1994. 160 p.

POWELL, A. B.; FRANCISCO, J. M.; MAHER, C. A. An analytical model for studying the development of mathematical ideas using videotape data. In: ANNUAL CONFERENCE OF THE NORTH AMERICAN CHAPTER OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 23., 2001, Snowbird. [New Brunswick: Department of Learning and Teaching, Graduate School of Education, Rutgers University], 2001. 23 p.

SCHLIEMANN, A. D.; CARRAHER, D. W.; BRIZUELA, B. M. When tables become function tables. In: INTERNATIONAL CONFERENCE FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 25., 2001, Utrecht. *Proceedings...* Utrecht: Drukkerij Wilco, 2001. v. 4, p. 145-152.

SCHWARZ, B.; DREYFUS, T. New actions upon old objects: a new ontological perspective on functions. *Educational Studies in Mathematics*, v. 29, n. 3, p. 259-291, 1995.

SCHWARZ, B.; HERSHKOWITZ, R. Prototypes: brakes or levers in learning the function concept? The role of computer tools. *Journal for Research in Mathematics Education*. v. 30, n. 4, p. 362-389, 1999.

SLAVIT, D. An alternative route to the reification of function. *Educational Studies in Mathematics*, v. 33, n. 3, p. 259-282, 1997

SMOLE, K. C. S.; KIYUKAWA, R. *Matemática*. São Paulo: Saraiva, 1998. v. 1, 415p.

SOUZA, T. A. *Calculadoras gráficas: uma proposta didático-pedagógica para o tema funções quadráticas*. 1996. 221 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro.

STEFFE, L. P.; THOMPSON, P. W. Teaching experiment methodology: underlying principles and essential elements. In: LESH, R.; KELLY, A. E. (Ed.). *Research design in mathematics and science education*. Hillsdale: Erlbaum, 2000. p. 267-307.

TIKHOMIROV, O. K. The psychological consequences of computerization. In: WERTSCH, J. V. (Ed.). *The concept of activity in soviet psychology*. New York: M. E. Sharpe. 1981. p. 256-278.

VILLARREAL, M. E. *O pensamento matemático de estudantes universitários de Cálculo e tecnologias informáticas*. 1998. 387 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 1999.

ZUFFI, E. M. *O tema "funções" e a linguagem matemática de professores do Ensino Médio: por uma aprendizagem de significados*. 1999. 307 p. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo.

– ANEXO 1 –

Fichas de trabalho

Primeira ficha

Construções gráficas usando o software Graphmatica

Atividade 1 - Função do 1º grau e Função racional

Objetivos: Discutir as variações dos parâmetros **a** e **b** de uma função do 1º grau de fórmula geral $y = a.x + b$ e introduzir funções racionais.

Explicações iniciais sobre o software:

- a) Operações (adição +, subtração -, etc.);
- b) Zoom In e Zoom Out: “aproxima” ou “afasta” a imagem do plano cartesiano;
- c) Clear: “limpa” todos os gráficos que estiverem disponíveis na tela;
- d) Default grid: retorna à escala inicial;
- e) Options → Show Scrollbars: barras de rolagem;
- f) Options → Print Tables: apresenta tabelas de valores de x e de y da função digitada.

Primeira parte: Funções de primeiro grau do tipo $y = a.x + b$

1. Trace o gráfico de $y = x - 2$. Observe que começaremos com $a = 1$ e $b = -2$;
2. Variando os valores de **a** e atribuindo valores positivos a este coeficiente, o que você pode observar?
3. **(pressione Clear)** Varie novamente apenas **a**, porém agora tomando valores negativos. O que você pode observar?
4. O que ocorre se fizermos $a = 0$?

5. **(pressione Clear)** Trace novamente o gráfico de $y = x - 2$. Variando apenas os valores de **b**, atribuindo-lhe valores quaisquer, o que você pode observar?

Segunda parte: Função racional

6. **(pressione Clear)** Trace o gráfico da função $y = \frac{1}{x}$.

EXERCÍCIO:

- (a) Para que valor se aproxima y quando tomamos valores **positivos** de x "cada vez maiores"?
- (b) Para que valor se aproxima y quando tomamos valores **negativos** de x "cada vez menores"?
- (c) O que ocorre com os valores de y quando x se aproxima de 0 através de valores positivos?
- (d) O que ocorre com os valores de y quando x se aproxima de 0 através de valores negativos?
- (e) Para valores positivos de x , a função é crescente ou decrescente? E para valores negativos de x ?
- (f) Qual é o Domínio da função?
- (g) Qual é a Imagem da função?

Segunda ficha

Construções gráficas usando o software Graphmatica

Atividade 2 - Função do 2º grau e Função racional

Objetivos: Discutir as variações dos parâmetros **a**, **b** e **c** de uma função do 2º grau do tipo $y = a.x^2 + b.x + c$ e observar mais um exemplo de função racional.

Primeira parte: Função do tipo $y = a.x^2 + bx + c$

1. Trace o gráfico de $y = x^2 - 2x - 3$. Note que com $a = 1$, $b = -2$ e $c = -3$;
2. Trace vários gráficos a partir do anterior, variando apenas os valores de **c**. O que você pode observar?
3. **(pressione Clear)** Trace novamente o gráfico de $y = x^2 - 2x - 3$. A partir deste, trace vários gráficos variando agora apenas os valores de **b**. O que você pode observar?
4. **(pressione Clear)** Trace novamente o gráfico de $y = x^2 - 2x - 3$. Varie apenas os valores de **a** positivos. O que você pode observar?

Segunda parte: Função racional

5. Observe a fórmula da função $y = \frac{1}{x^2 + 1}$ e seu gráfico. Descreva todas as características que você puder observar.

Terceira ficha

Construções gráficas usando o software Graphmatica

Atividade 3 – Funções diversas

Objetivos: Explorar as características de outras funções.

1. Trace os gráficos de $y = x^2$ e de $y = x^3$. Aponte similaridades e diferenças entre eles.
2. Trace o gráfico da função $y = \sqrt{x}$
 - (a) Determine o Domínio;
 - (b) Determine a Imagem;
3. Trace os gráficos de: $y = x^2$, $y = x^4$ e $y = x^6$.
 - (a) Quais aspectos semelhantes destes gráficos você observa?
 - (b) Tente comparar o comportamento desses gráficos para $x > 1$.
 - (c) Tente comparar o comportamento desses gráficos para $0 < x < 1$.
4. Trace os gráficos de $y = x$, $y = x^3$ e $y = x^5$;
 - (a) Quais aspectos semelhantes destes gráficos você observa?
 - (b) Tente comparar o comportamento desses gráficos para $x > 1$.
 - (c) Tente comparar o comportamento desses gráficos para $0 < x < 1$.
5. Tracemos novamente o gráfico da função $y = \frac{1}{x^2 + 1}$.
 - (a) Determine o Domínio;
 - (b) Determine a Imagem;
6. Tracemos novamente o gráfico da função $y = \frac{x}{x^2 + 1}$.
 - (a) Determine o Domínio;
 - (b) Determine a Imagem;

**Primeira ficha, não utilizada integralmente por André e
Gianluca, no primeiro encontro**

Construções gráficas usando o software Graphmatica

Atividade 1 - Função do 1º grau e Função racional

Objetivos: Discutir as variações dos parâmetros **a** e **b** de uma função do 1º grau de fórmula geral $y = a.x + b$ e introduzir funções racionais.

Explicações iniciais sobre o software:

- a) Operações (adição +, subtração -, etc.);
- b) Zoom In e Zoom Out: “aproxima” ou “afasta” a imagem do plano cartesiano;
- c) Clear: “limpa” todos os gráficos que estiverem disponíveis na tela;
- d) Defaut grid: retorna à escala inicial;
- e) Options → Show Scrollbars: barras de rolagem;
- f) Options → Print Tables: apresenta tabelas de valores de x e de y da função digitada.

Primeira parte: Funções de primeiro grau do tipo $y = a.x + b$

1. Trace o gráfico de $y = x - 2$. Observe que começaremos com $a = 1$ e $b = -2$;
2. Variando os valores de **a** e atribuindo valores positivos a este coeficiente, o que você pode observar?
3. **(pressione Clear)** Varie novamente apenas **a**, porém agora tomando valores negativos. O que você pode observar?
4. O que ocorre se fizermos $a = 0$?

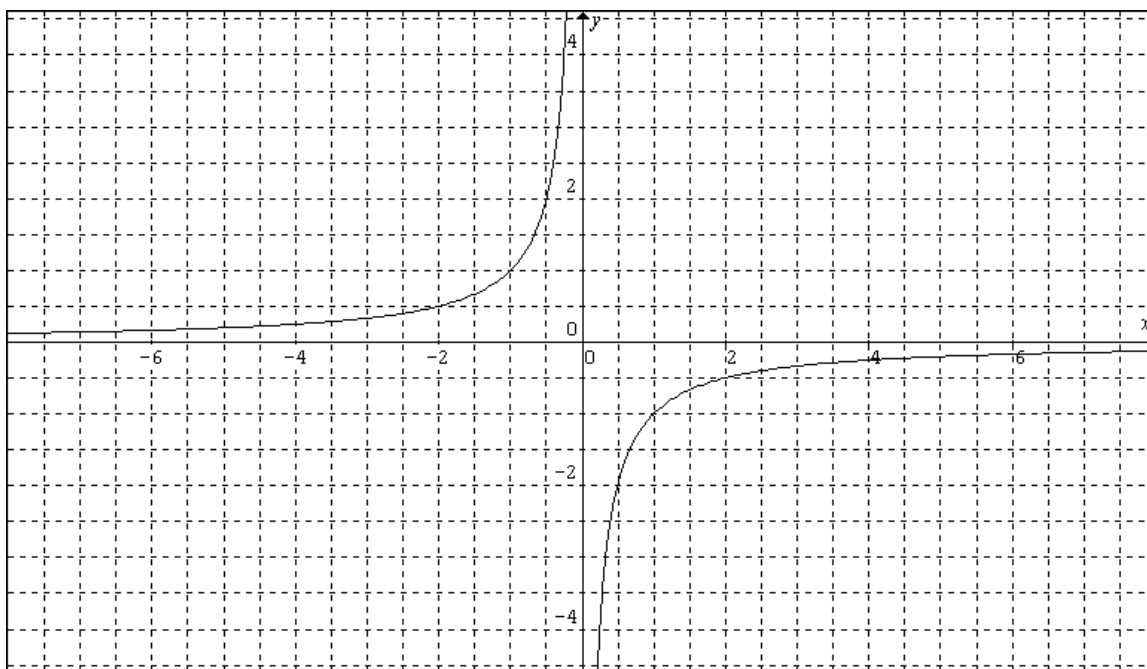
5. (**pressione Clear**) Trace novamente o gráfico de $y = x - 2$. Variando apenas os valores de **b**, atribuindo-lhe valores quaisquer, o que você pode observar?

Segunda parte: Função racional

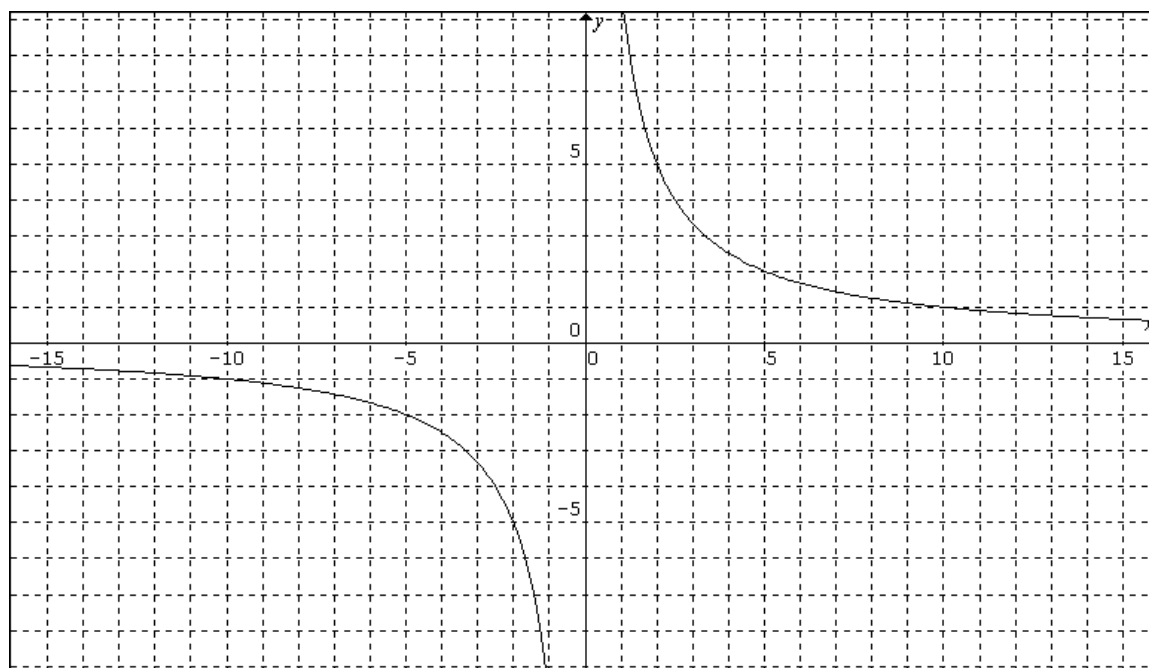
6. (**pressione Clear**) Trace o gráfico da função $y = \frac{1}{x}$.
- (a) Para que valor se aproxima y quando tomamos valores **positivos** de x "cada vez maiores"?
 - (b) Para que valor se aproxima y quando tomamos valores **negativos** de x "cada vez menores"?
 - (c) O que ocorre com os valores de y quando x se aproxima de 0 através de valores positivos?
 - (d) O que ocorre com os valores de y quando x se aproxima de 0 através de valores negativos?
 - (e) Para valores positivos de x , a função é crescente ou decrescente? E para valores negativos de x ?
 - (f) Qual é o Domínio da função?
 - (g) Qual é a Imagem da função?
7. (**pressione Clear**) Trace o gráfico da função $y = \frac{1}{x^2}$ e responda, com essa função, as mesmas questões apresentadas no exercício 6.
8. (**pressione Clear**) Trace o gráfico da função $y = \frac{x+1}{x-2}$ e responda, com essa função, as mesmas questões apresentadas no exercício 6.

9. Encontre as fórmulas dos gráficos indicados a seguir:

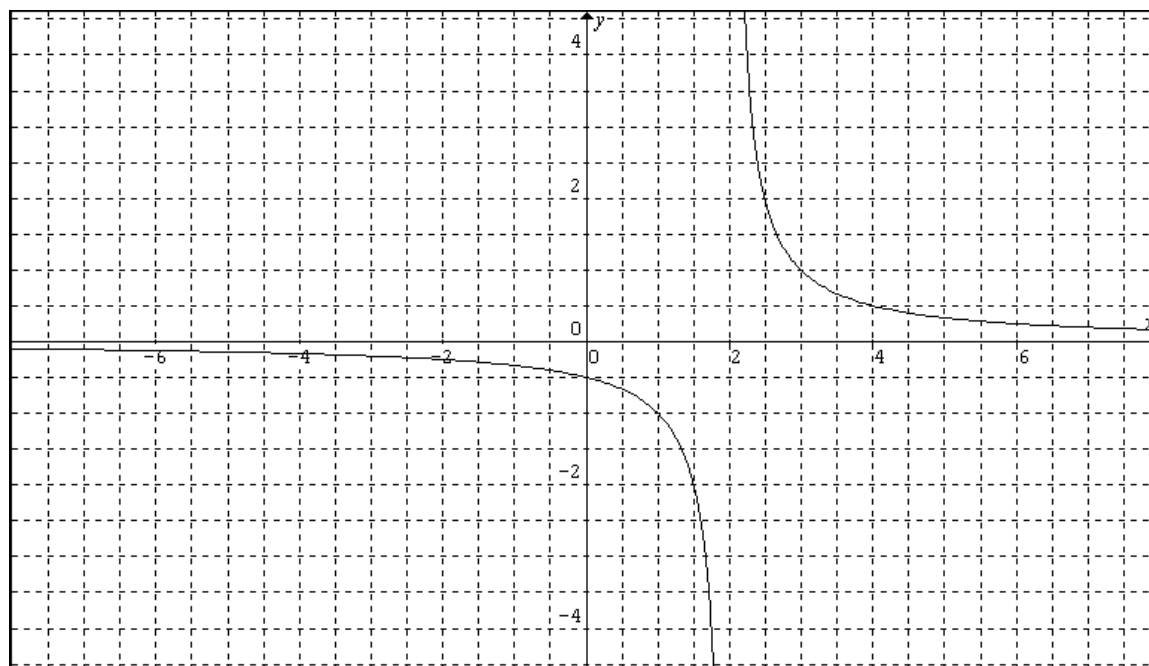
(a)



(b)



(c) Desafio!



– ANEXO 2 –

Caminhos da pesquisa, observados por meio de suas perguntas norteadoras

Em muitas das teses e dissertações que li, pude perceber, principalmente nas seções introdutórias e nos agradecimentos, que o pesquisador, autor do texto, havia passado por várias dificuldades, vencido obstáculos e trilhado vários caminhos no processo de confecção de todo o trabalho que ali apresentava. O que não pude verificar, contudo, foram ilustrações e relatos que pudessem me mostrar, no papel de leitor, em que aspectos tais dificuldades e obstáculos trouxeram contribuições à respectiva pesquisa ou ao respectivo pesquisador.

Procurando fazer algo diferente nesse sentido, apresento no texto deste anexo uma maneira de identificar as variações que esta pesquisa sofreu em seu processo de amadurecimento, através da observação do histórico de sua pergunta norteadora. Ao apresentar a seqüência, com várias das perguntas que construí durante os dois anos de mestrado, ilustrarei alguns elementos que fizeram parte dessa “caminhada”.

Início com a pergunta quando do projeto de admissão, em outubro de 2000: **“O trabalho com softwares de construções de gráficos no plano cartesiano pelos próprios alunos pode favorecer a assimilação do conteúdo de funções?”**. O que primeiro chama a atenção é a “assimilação de conteúdo”, que revela a concepção que possuía, à época, do conhecimento sendo algo existente, pré-determinado, cabendo aos humanos descobri-los e tomá-los para si.

A expressão “pelos próprios alunos” também é sugestiva, à medida que ilustra o início de um professor que “consequia sair da lousa”. Quero dizer que eu,

como professor, estava proporcionando mudanças, ainda que singelas, na estrutura da aula. Deixar os alunos manipularem o software, para que lidassem com conceitos matemáticos sem minha interferência constante era, para mim, uma ruptura. Usando conceitos desenvolvidos por Penteado (BORBA, PENTEADO, 2001), parecia estar tentando sair da zona de conforto, para entrar na zona de risco. É o que quis dizer, no capítulo introdutório desta dissertação, em relação ao fato de não ser mais o centro/dono do conhecimento durante as aulas.

Iniciadas as atividades no primeiro ano como mestrando, a pergunta, em 2001, chegou a incluir as funções trigonométricas: **"As atividades de construções de gráficos com o software 'Funex' podem aumentar as condições de ensino-aprendizagem de funções trigonométricas?"**. Conforme descrevi no capítulo 4, esse tema esteve, num curto prazo de tempo, inserido nos objetivos da pesquisa, pelo fato de lecionar em turmas de 2º ano (os livros didáticos adotados no Colégio Terras incluem esse tema nessa série).

Nessa pergunta, também aparece o conflito que sempre esteve presente no trabalho "pré campo": a aprendizagem. As preocupações iniciais consistiam em trabalhar com classes inteiras e, ao mesmo tempo, analisar quantitativamente resultados de atividades junto ao software. Não é necessário, aqui, retomar todo o processo pelo qual me conduzi à pesquisa qualitativa, já que acredito ter abordado o suficiente no capítulo 4.

Após o "encantamento" pelo software gráfico pelo professor, outro "encantamento" pode ser mencionado, referindo-se então ao papel do pesquisador. **"O computador, sendo um dos atores do sistema seres-humanos-com-mídias, pode ser usado como uma mídia reorganizadora do pensamento de estudantes de Ensino Médio no estudo de gráficos no plano cartesiano?"**. A metáfora seres-humanos-com-mídias e a teoria da reorganização do pensamento produziram esse entusiasmo, de maneira que as intuições do professor se entrelaçavam a uma análise mais aprofundada da relação aluno-software. Nota-se que "funções" até se suprimiu na pergunta, dando espaço

para uma de suas representações, a gráfica, justamente aquela que mobilizaria a quebra da “hegemonia da álgebra”.

Os pilotos foram desenvolvidos com estudantes de 3º ano do Ensino Médio, que já haviam trabalhado bastante com funções. Desejando verificar as potencialidades do software gráfico com estudantes que iniciavam o estudo desse assunto, desenvolvi a pergunta: **“Atividades envolvendo construções gráficas, desenvolvidas no computador, com funções que não são tradicionalmente trabalhadas no Ensino Médio, ampliam a rede de significados que alunos constroem em termos deste objeto matemático?”**. Na expressão “rede de significados”, há indícios da influência das leituras das obras de Lévy (1993, 1999).

Em 2002 a aprendizagem voltou à cena, incentivada pelas idéias trabalhadas na disciplina “Teorias da Aprendizagem”: **“Quais aspectos de aprendizagem emergem quando o aluno trabalha com gráficos de funções junto ao software Graphmatica?”**. Mas foi a definição do objeto de estudo, ou seja, as representações múltiplas de funções, que definiu a estrutura das perguntas seguintes. A dúvida, naquele momento, era sobre quem seria investigado: os estudantes ou o professor?

Esta questão estava impregnada da noção de coletivo pensante: **“Como estudantes e professor-pesquisador coordenam aspectos gráficos, algébricos e numéricos de funções num ambiente com diversas mídias?”**; **“Como aspectos algébricos, gráficos e numéricos de funções são trabalhados por estudantes, mídias e professor-pesquisador?”**

Aparentemente, essas duas perguntas se diferem gramaticalmente, mas a diferença entre ambas não se restringe somente a esse aspecto. O papel das mídias na primeira parece se dissociar do coletivo em que se inserem os estudantes e o professor, diferentemente da segunda, na qual me parecia explícito que as funções eram trabalhadas por **seres humanos** junto às mídias.

“As mídias pensam?”, perguntou-me um amigo na ocasião. Tal questionamento foi fundamental para se chegar à pergunta definitiva, uma vez

que o mesmo deixava claro que, na frase, não existia uma palavra catalisadora, que mostrasse a interdependência de humanos e técnicas. Ou seja, os conceitos essenciais da noção de coletivos pensantes, bem como a idéia central da metáfora seres-humanos-com-mídias, não estavam explícitos nessa pergunta.

Existiram outras perguntas, mas considero que as apresentadas por ora são as mais significativas no conjunto de todas as construídas. Assim, após todas as reflexões, pude então chegar à pergunta norteadora, apresentada no capítulo 1: **“Como estudantes trabalham com aspectos algébricos, gráficos e numéricos de funções dentro de um coletivo pensante formado por estudantes, mídias e pesquisador?”**.