

Clóvis Augusto Niiyama

*Análise Clássica e Bayesiana do Modelo
Weibull Modificado Generalizado*

Presidente Prudente - SP, Brasil

setembro de 2013

Clóvis Augusto Niiyama

*Análise Clássica e Bayesiana do Modelo
Weibull Modificado Generalizado*

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática Aplicada e Computacional da Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho como requisito para a obtenção do Título de Mestre em Matemática Aplicada e Computacional.

Orientador:
Sergio Minoru Oikawa

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL
FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA DE PRESIDENTE PRUDENTE
UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Presidente Prudente - SP, Brasil

setembro de 2013

FICHA CATALOGRÁFICA

N597a Niiyama, Clóvis Augusto.
Análise clássica e bayesiana do modelo Weibull modificado
generalizado / Clóvis Augusto Niiyama. - Presidente Prudente : [s.n], 2013
130 f.

Orientador: Sérgio Minoru Oikawa
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Faculdade de
Ciências e Tecnologia
Inclui bibliografia

1. Weibull modificado generalizado. 2. Análise clássica. 3. Análise
bayesiana. I. Oikawa, Sérgio Minoru. II. Universidade Estadual Paulista.
Faculdade de Ciências e Tecnologia. III. Título.

Resumo

Na literatura existem várias distribuições de probabilidade utilizadas em confiabilidade e análise de sobrevivência. Entre as famílias de distribuições utilizadas para este fim, a mais popular é a distribuição de Weibull cuja função de risco apresenta formas: constante, crescente e decrescente. No entanto, quando a função de risco é do tipo unimodal ou em forma de banheira, a Weibull distribuição não é apropriada. Assim, nos últimos anos, têm sido propostas novas distribuições que acomodam as várias formas que a função de risco pode tomar e conseqüentemente, para se ajustar a um maior número de problemas práticos. Carrasco et al. (2008) propôs uma nova distribuição chamada Weibull Modificada Generalizada, denotada por WMG, sua função de risco pode assumir muitas formas, tais como constante, crescente, decrescente, unimodal e banheira. A distribuição Weibull Modificada Generalizada proposta por Carrasco, Ortega e Cordeiro (2008) foi amplamente estudada no contexto de inferência clássica, porém não existem ainda trabalhos desenvolvidos na literatura sob o enfoque Bayesiano. O objetivo deste trabalho foi realizar uma comparação entre os métodos de estimação clássico e Bayesiano para a distribuição Weibull Modificada Generalizada. Tal distribuição ainda tem como sub-modelos as distribuições Exponencial, Exponencial Generalizada, Weibull, Weibull Modificada, Weibull Exponenciada e valor extremo. Foram realizados estudos sobre as propriedades da distribuição Weibull Modificada Generalizada e simulações para comparar o desempenho dos estimadores de máxima verossimilhança e Bayesiano. Uma abordagem Clássica e Bayesiana para a esta distribuição foi proposta e exemplificada, modelando conjunto de dados de sobrevivência e de confiabilidade.

Palavra-Chave: Weibull Modificado Generalizado, Análise Clássica, Análise Bayesiana.

Abstract

In the literature there are various probability distributions to model lifetimes of equipment or individual problems in survival analysis. Among the families of distributions used for this purpose, the most popular is the Weibull distribution whose hazard function presents constant, increasing and decreasing forms. However, when the hazard function is the type unimodal or bathtub shaped, the Weibull distribution is not appropriated. Thus, in recent years, there have been proposed new distributions that fit the various forms that the hazard function can take and consequently to fit a greater number of practical problems. Carrasco et al. (2008) has proposed a new distribution called Generalized Modified Weibull, denoted by GMW, whose hazard function can take many forms such as constant, increasing, decreasing, unimodal and bathtub. The Generalized Modified Weibull distribution proposed by Carrasco, Ortega e Cordeiro (2008) was most studied in the context of classical inference. However, no studies were found under the Bayesian approach. The aim of this work was to do a comparison of estimation methods for classical and Bayesian Generalized Modified Weibull distribution. The Generalized Modified Weibull distribution has a function of risk that can be increasing, decreasing, unimodal and bathtub shaped and has as sub-models Exponential distributions, Exponentiated Exponential, Weibull, Modified Weibull, Exponentiated Weibull and extreme value. It was performed the properties of Generalized Modified Weibull distribution and a simulation study to compare the performance of maximum likelihood estimator and Bayesian estimator. Classical and Bayesian approach to this distribution was proposed and exemplified, modeling data sets of survival and reliability.

Keyword: Modified Generalized Weibull, Classical Analysis, Bayesian Analysis.

Agradecimentos

Agradeço aos meus pais Yuri e Paulo, meu irmão Pi e a tia Tico pelo apoio e incentivo aos estudos.

A minha esposa Sueli pela compreensão, apoio, companheirismo e incentivo em todos os momentos.

A todos os familiares em especial a Marly e o Inácio que me acolheram durante os estudos.

Ao meu orientador Sérgio Minoru Oikawa e ao professor Fernando Antônio Moala pela paciência e ajuda no decorrer do período de mestrado.

Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional (Pós-MAC) pelo conhecimento compartilhado nas disciplinas.

Aos amigos da Pós em especial Álvaro, Animal, Boto, Brow, Carneiro, Camila, Cris, Expo, Fer, Gambazinha Cabeçuda, Lilian, Livia, Mezejolli, Pão, Pedro (Ramos), Penny, Renatinha, Tatão, Vanda e Xuxa pelo companheirismo, amizade e momentos de alegria e descontração proporcionados.

Aos funcionários da Seção de Pós-Graduação pelo auxílio prestado durante o decorrer do curso de mestrado.

Ao Conselho de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo apoio financeiro.

Sumário

Sumário	p. i
Lista de Figuras	p. vi
Lista de Tabelas	p. viii
1 Introdução	p. 1
1.1 Considerações Iniciais	p. 1
2 Revisão Bibliográfica	p. 6
2.1 Conceitos Básicos de Análise de Sobrevivência	p. 6
2.1.1 Tempo de Falha	p. 6
2.1.2 Censura	p. 7
2.1.2.1 Tipos de Censura	p. 7
2.1.2.2 Representação da Censura	p. 8
2.1.2.3 Representação dos Dados de Sobrevivência	p. 8
2.1.3 Função de Sobrevivência e Função de Risco	p. 9
2.1.3.1 Função de Sobrevivência	p. 9
2.1.3.2 Função de Risco ou Taxa de Falha	p. 9
2.1.4 Gráfico TTT Plot	p. 10
2.2 Métodos de Estimação	p. 11
2.2.1 Estimador de Máxima Verossimilhança (MV)	p. 12
2.3 Cálculo do Estimador de MV	p. 13

2.4	Estimação Bayesiana	p. 14
2.4.1	Teorema de Bayes	p. 15
2.4.2	distribuições a priori	p. 16
2.4.2.1	Priori Não Informativa	p. 16
2.4.2.2	Priori Uniforme	p. 17
2.4.2.3	Priori Gama	p. 17
2.4.2.4	Priori de Jeffreys	p. 18
2.4.2.5	Priori Regra de Jeffreys	p. 18
2.4.3	Estimadores de Bayes	p. 18
2.4.3.1	Estimação Pontual	p. 18
2.4.3.2	Estimação Intervalar	p. 19
2.4.4	Método de Monte Carlo via Cadeias de Markov (MCMC)	p. 20
2.4.4.1	Algoritmo de Metropolis-Hastings	p. 21
2.4.5	Diagnóstico de Convergência	p. 22
2.4.5.1	Critério de Geweke	p. 22
2.4.6	Seleção de Modelos	p. 22
2.5	Alguns Modelos Utilizados na Análise de Sobrevida	p. 23
2.5.1	Distribuição Weibull	p. 23
2.5.1.1	Caracterização do Modelo Weibull	p. 24
2.5.2	Distribuição Weibull Modificada	p. 25
2.5.2.1	Caracterização do Modelo Weibull Modificada	p. 26
2.5.3	Distribuição Weibull Exponenciada	p. 28
2.5.3.1	Caracterização do Modelo Weibull Exponenciada	p. 28
3	Distribuição Weibull Modificada Generalizada (WMG)	p. 31
3.1	Caracterização do Modelo Weibull Modificado Generalizado (WMG) . .	p. 31
3.2	Função de Densidade	p. 32

3.3	Função de Risco	p. 33
3.4	Casos Especiais	p. 34
3.5	Mediana, Moda, Percentil	p. 35
3.6	Variável Aleatória para WMG	p. 35
3.7	Momentos	p. 36
4	Estimação da Distribuição Weibull Modificada Generalizada.	p. 37
4.1	Estimação de Máxima Verossimilhança (EMV)	p. 37
4.1.1	Função de Verossimilhança	p. 37
4.1.2	Estimadores de Máxima Verossimilhança	p. 38
4.1.2.1	Intervalos de Confiança	p. 39
4.1.2.2	Matriz de Informação Observada	p. 39
4.2	Estimação Bayesiana	p. 40
4.2.1	Distribuições a Priori	p. 40
4.2.2	Distribuição a Posteriori	p. 40
4.2.2.1	Densidade a Posteriori com Priori Uniforme	p. 41
4.2.2.2	Densidade a Posteriori com Priori Gama	p. 41
4.2.2.3	Densidade a Posteriori com Priori ”Regra” de Jeffreys	p. 41
4.2.3	Método de Monte Carlo via Cadeias de Markov (MCMC)	p. 42
5	Estudos de Simulação	p. 44
5.1	Procedimentos Para Simulação	p. 44
5.2	Simulações com Função de Risco Crescente	p. 46
5.2.1	Probabilidades de Cobertura	p. 47
5.2.2	Erros Quadráticos Médio.	p. 49
5.2.3	Média e Desvio-Padrão	p. 52
5.3	Simulações com Função de Risco Decrescente	p. 55

5.3.1	Probabilidade de Cobertura	p. 56
5.3.2	Erros Quadráticos Médio	p. 59
5.3.3	Média e Desvio-Padrão	p. 61
5.4	Simulações com Função de Risco Unimodal	p. 64
5.4.1	Probabilidades de Cobertura	p. 65
5.4.2	Erros Quadráticos Médio.	p. 68
5.4.3	Média e Desvio-Padrão	p. 70
5.5	Simulações com Função de Risco em Forma de Banheira	p. 73
5.5.1	Probabilidades de Cobertura	p. 74
5.5.2	Erros Quadráticos Médio.	p. 77
5.5.3	Média e Desvio-Padrão	p. 79
5.6	Discussões dos Resultados da Simulação	p. 82
6	Aplicações	p. 85
6.1	Dados de Efron	p. 85
6.1.1	Resumo Numérico	p. 85
6.1.2	Diagnóstico de Convergência	p. 86
6.2	Dados de Aarset	p. 90
6.2.1	Resumo Numérico	p. 91
6.2.2	Diagnóstico de Convergência	p. 91
7	Conclusões e Trabalhos Futuros	p. 97
7.1	Conclusões	p. 97
7.2	Trabalhos Futuros	p. 98
	Referências	p. 99
	Apêndices	p. 103

Apêndice A	p. 103
Apêndice B	p. 107
Apêndice C	p. 108
Apêndice D	p. 110
Apêndice E	p. 115

Lista de Figuras

1	Gráfico ilustrativo de alguns TTT-Plots.	p. 11
2	Algumas formas das funções de densidade de probabilidade (a) e de risco (b) da distribuição Weibull considerando $\alpha = 1$	p. 25
3	Algumas formas das funções de densidade e de risco considerando $\alpha = 1$	p. 27
4	Algumas formas das funções de densidade de probabilidade e de risco da distribuição Weibull Exponenciada considerando $\alpha = 1$	p. 29
5	Algumas formas das funções de densidade de probabilidade considerando $\alpha = 1$ e $\lambda = 0,5$	p. 32
6	Exemplos de formas da função de risco para a distribuição WMG, $h1 = (\alpha = 1; \beta = 1,5; \theta = 1,5; \lambda = 1)$; $h2 = (\alpha = 1; \beta = 0,1; \theta = 3; \lambda = 0,15)$; $h3 = (\alpha = 0,2; \beta = 1,5; \theta = 0,5; \lambda = 0,001)$; $h4 = (\alpha = 0,1; \beta = 15; \theta = 0,5; \lambda = 0,1)$	p. 34
7	Funções de Sobrevivência, Densidade e de risco da distribuição WMG com $\alpha = 1, \beta = 1, \theta = 1$ e $\lambda = 1$	p. 46
8	Funções de Sobrevivência, Densidade e de risco da distribuição WMG com $\alpha = 3; \beta = 0,5; \theta = 1$ e $\lambda = 0,001$	p. 56
9	Funções de Sobrevivência, Densidade e de risco da distribuição WMG com $\alpha = 0,2; \beta = 8; \theta = 0,5$ e $\lambda = 0,01$	p. 65
10	Funções de Sobrevivência, Densidade e de risco da distribuição WMG com $\alpha = 5; \beta = 0,5; \theta = 0,5$ e $\lambda = 0,5$	p. 74
11	Histórico das séries temporais.	p. 87
12	Gráficos de autocorrelação dos parâmetros.	p. 87
13	Densidades marginais a posteriori para os parâmetros α, β, θ e λ	p. 88
14	Comparações entre as funções de sobrevivência	p. 89

15	Comparações entre as funções de risco	p. 90
16	Histórico das séries temporais.	p. 91
17	Gráficos de autocorrelação dos parâmetros.	p. 92
18	Densidades marginais a posteriori para os parâmetros α , β , θ e λ	p. 93
19	Comparações entre as funções de sobrevivência.	p. 95
20	Comparações entre as funções de risco.	p. 96

Lista de Tabelas

1	Probabilidades de Cobertura Nominal para um Intervalo de Confiança e de Credibilidade de 95% para α	p. 47
2	Probabilidades de Cobertura Nominal para um Intervalo de Confiança e de Credibilidade de 95% para β	p. 47
3	Probabilidades de Cobertura Nominal para um Intervalo de Confiança e de Credibilidade de 95% para θ	p. 48
4	Probabilidades de Cobertura Nominal para um Intervalo de Confiança e de Credibilidade de 95% para λ	p. 48
5	Erros Quadráticos Médio para α	p. 49
6	Erros Quadráticos Médio para β	p. 50
7	Erros Quadráticos Médio para θ	p. 50
8	Erros Quadráticos Médio para λ	p. 51
9	Média e (Desvio-Padrão) para α	p. 52
10	Média e (Desvio-Padrão) para β	p. 53
11	Média e (Desvio-Padrão) para θ	p. 54
12	Média e (Desvio-Padrão) para λ	p. 55
13	Probabilidades de Cobertura Nominal para um Intervalo de Confiança e de Credibilidade de 95% para α	p. 56
14	Probabilidades de Cobertura Nominal para um Intervalo de Confiança e de Credibilidade de 95% para β	p. 57
15	Probabilidades de Cobertura Nominal para um Intervalo de Confiança e de Credibilidade de 95% para θ	p. 57
16	Probabilidades de Cobertura Nominal para um Intervalo de Confiança e de Credibilidade de 95% para λ	p. 58

17	Erros Quadráticos Médio para α	p. 59
18	Erros Quadráticos Médio para β	p. 59
19	Erros Quadráticos Médio para θ	p. 60
20	Erros Quadráticos Médio para λ	p. 60
21	Média e (Desvio-Padrão) para α	p. 61
22	Média e (Desvio-Padrão) para β	p. 62
23	Média e (Desvio-Padrão) para θ	p. 63
24	Média e (Desvio-Padrão) para λ	p. 64
25	Probabilidades de Cobertura Nominal para um Intervalo de Confiança e de Credibilidade de 95% para α	p. 65
26	Probabilidades de Cobertura Nominal para um Intervalo de Confiança e de Credibilidade de 95% para β	p. 66
27	Probabilidades de Cobertura Nominal para um Intervalo de Confiança e de Credibilidade de 95% para θ	p. 66
28	Probabilidades de Cobertura Nominal para um Intervalo de Confiança e de Credibilidade de 95% para λ	p. 67
29	Erros Quadráticos Médio para α	p. 68
30	Erros Quadráticos Médio para β	p. 68
31	Erros Quadráticos Médio para θ	p. 69
32	Erros Quadráticos Médio para λ	p. 69
33	Média e (Desvio-Padrão) para α	p. 70
34	Média e (Desvio-Padrão) para β	p. 71
35	Média e (Desvio-Padrão) para θ	p. 72
36	Média e (Desvio-Padrão) para λ	p. 73
37	Probabilidades de Cobertura Nominal para um Intervalo de Confiança e de Credibilidade de 95% para α	p. 74
38	Probabilidades de Cobertura Nominal para um Intervalo de Confiança e de Credibilidade de 95% para β	p. 75

39	Probabilidades de Cobertura Nominal para um Intervalo de Confiança e de Credibilidade de 95% para θ	p. 75
40	Probabilidades de Cobertura Nominal para um Intervalo de Confiança e de Credibilidade de 95% para λ	p. 76
41	Erros Quadráticos Médio para α	p. 77
42	Erros Quadráticos Médio para β	p. 77
43	Erros Quadráticos Médio para θ	p. 78
44	Erros Quadráticos Médio para λ	p. 78
45	Média e (Desvio-Padrão) para α	p. 79
46	Média e (Desvio-Padrão) para β	p. 80
47	Média e (Desvio-Padrão) para θ	p. 81
48	Média e (Desvio-Padrão) para λ	p. 82
49	Tempos de sobrevivência (em dias)	p. 85
50	Estimativas dos parâmetros e desvio-padrão correspondentes [em colchetes] para a distribuição WMG obtidos pelos métodos MCMC e os critérios de avaliações DIC, para os dados apresentados em Efron (1988).	p. 86
51	Estimativas de MV para os parâmetros dos modelos WMG, Weibull e Weibull Exponenciada, desvios padrões correspondentes [em colchetes] e os critérios AIC e BIC, para os dados de Efron (1988).	p. 88
52	Tempo de vida de 50 lâmpadas	p. 90
53	Estimativas dos parâmetros e desvio-padrão correspondentes [em colchetes], obtidas pelos métodos MCMC e os critérios de avaliações DIC, para os dados apresentados em Aarset (1985).	p. 93
54	Estimativas de MV para os parâmetros dos modelos WMG, Weibull Modificado e Weibull Exponenciada e Weibull, desvios padrões correspondentes [em colchetes] e os critérios de avaliações AIC e BIC, para os dados de Aarset (1985).	p. 94

1 *Introdução*

1.1 Considerações Iniciais

A análise de sobrevivência (ou confiabilidade) é um conjunto de técnicas e modelos estatísticos frequentemente utilizados nas ciências da saúde, por exemplo, medicina e epidemiologia como também possuem aplicações em outras áreas do conhecimento, principalmente na engenharia.

Na análise de sobrevivência (ou confiabilidade), a variável aleatória de interesse ($T \geq t$) é o tempo entre eventos, ou seja, o tempo até a ocorrência de um evento de interesse (tempo de falha) ou a ocorrência de censura (observação parcial da resposta). Neste caso, as unidades experimentais em estudo podem ser animais, seres humanos, plantas, equipamentos, etc. Por outro lado, o evento de interesse pode ser: morte, remissão de uma doença, reação ao determinado medicamento, quebra de um equipamento eletrônico, queima de uma lâmpada, etc.

A literatura estatística apresenta várias técnicas e modelos estatísticos apropriados no estudo sobre tempo de vida para algum evento de interesse, tanto paramétricos como não paramétricos (BOLFARINE; TOJEIRO; LOUZADA-NETO, 2004).

A década de 50 marcou o início triunfante, talvez, do mais popular entre a família de distribuições paramétricas no estudo sobre tempo de vida, denominada distribuição Weibull. A distribuição Weibull é útil em diversas aplicações, particularmente, nos estudos sobre o tempo até a ocorrência de algum evento de interesse, em geral, morte ou falha de um equipamento. Uma das razões para a sua popularidade é o fato da distribuição Weibull apresentar funções de sobrevivência (ou confiabilidade) simples e também diversas formas para a função de risco (taxa de falha). Isto faz com que seja extremamente flexível no ajuste de dados experimentais. Em geral, é adequada para modelar funções de risco constante e monótonas (crescente e decrescente). Entretanto, a distribuição Weibull não é apropriada quando a função de risco indicada é do tipo unimodal ou em forma de banheira

(MUDHOLKAR; SRIVASTAVA, 1993; MUDHOLKAR; SRIVASTAVA; FREIMER, 1995; MUDHOLKAR; HUTSON, 1996; MUDHOLKAR; SRIVASTAVA; KOLLIA, 1996; LAI; XIE; MURTHY, 2003; NASSAR; EISSA, 2003).

Nos últimos anos, têm-se intensificado a pesquisa no desenvolvimento de novas propostas de distribuições ainda mais flexíveis (modificações, generalizações, misturas e extensões das distribuições existentes) na modelagem do tempo vida de indivíduos (ou duração de equipamentos). Isto porque as distribuições existentes, muitas vezes, não se ajustam de forma satisfatória ao conjunto de dados reais.

Mudholkar e Srivastava (1993) apresentaram uma generalização da distribuição Weibull que chamou de Weibull exponenciada. O novo modelo da família Weibull não só inclui distribuições com funções de risco do tipo banheira e unimodal, como também fornece uma classe mais ampla para as funções de risco monótonas.

Mudholkar e Hutson (1996) introduziram um novo modelo da família Weibull, denominada de distribuição Weibull aditiva que se baseia na ideia de combinar duas distribuições Weibull, amplamente utilizada para modelar o tempo de vida. O modelo é aditivo no sentido de que a função de risco é expressa como a soma de duas funções de risco da Weibull, uma decrescente e outra crescente. Neste caso, o modelo permite ajustar dados sobre tempo de vida cujas funções de risco são da forma crescente, decrescente ou banheira.

Mudholkar, Srivastava e Kollia (1996) apresentaram uma extensão da distribuição Weibull denominada de distribuição Weibull generalizada que comportam as funções de risco unimodal e banheira, como também produz uma classe mais ampla de funções de risco monótonas.

Xie, Tang e Goh (2002) propuseram uma modificação na distribuição de Chen (2000), denominada de distribuição Weibull modificada estendida que também pode ser vista como uma generalização da distribuição Weibull. A distribuição Weibull modificada estendida é capaz de modelar dados sobre tempo de vida cujas funções de risco é da forma crescente ou banheira.

Lai, Xie e Murthy (2003) propuseram uma nova modificação na distribuição Weibull com a introdução de um parâmetro adicional, denominada de distribuição Weibull modificada, cujas funções de risco podem acomodar não somente as formas monótonas, como também as formas de banheira.

Assim, devido às dificuldades na escolha de modelos mais flexíveis e adequados, fez com que surgissem novas propostas de distribuições. Uma dessas propostas foi apresentada

por Carrasco, Ortega e Cordeiro (2008), denominada de distribuição Weibull Modificada Generalizada com quatro parâmetros. A nova distribuição apresenta flexibilidade para acomodar varias formas de função de risco (constante, crescente, decrescente, unimodal e banheira) e, tem como casos especiais, a distribuição Exponencial, Weibull, Weibull Exponenciada, Valor Extremo e Weibull Modificada.

Segundo Hjorth (1980), as distribuições com um ou dois parâmetros, como é o caso das distribuições exponencial e Weibull, impõem restrições muito fortes sobre os dados, o que inviabiliza o ajuste de funções de risco em forma de banheira. Por outro lado, as distribuições mais flexíveis como é o caso da distribuição Weibull Modificada Generalizada, que apresentam vários parâmetros, sua utilização na obtenção das estimativas através dos métodos numéricos se torna impreciso, quando as amostras são pequenas.

Vários autores têm defendido a abordagem Bayesiana como uma alternativa viável na estimação de parâmetros em modelos de sobrevivência (ou confiabilidade) complexos. Assim, devido à forma complexa das funções de distribuições que envolvem muitos parâmetros, eles argumentam sobre a instabilidade do método de estimação de máxima verossimilhança quando o tamanho amostral é pequeno. Desta forma, o método Bayesiano pode ser uma alternativa ao método de máxima verossimilhança.

Canavos e Tsokos (1973) realizaram uma comparação entre o desempenho dos estimadores de máxima verossimilhança e Bayesianos para a distribuição Weibull. O estudo de simulação mostrou que no método Bayesiano o erro quadrático médio (EQM) foi significativamente menor nas condições estudadas.

De acordo com Bolfarine, Rodrigues e Achcar (1991), os métodos Bayesianos podem ser considerados como uma boa alternativa para analisar dados de sobrevivência (ou confiabilidade) quando comparados aos métodos clássicos. A justificativa é que, quando as distribuições de probabilidade possuem muitos parâmetros, as estimativas de máxima verossimilhança baseadas em resultados assintóticos, podem apresentar dificuldades com amostras pequenas.

Cancho, Barriga e Ortega (2007) argumentaram que, quando a amostra é pequena, o uso de distribuições assintóticas dos estimadores de máxima verossimilhança para a realização de inferência estatística nos modelos Weibull exponenciada, Weibull aditivo e Weibull modificada estendida, propostos por Mudholkar e Srivastava (1993), Xie e Lai (1996) e Xie, Tang e Goh (2002), podem apresentar resultados imprecisos. Neste artigo, eles exploraram a técnica de MCMC na realização de inferência Bayesiana usando a distribuição gama como priori para os parâmetros.

Jiang, Xie e Tang (2008) utilizaram os métodos Bayesianos via Cadeia de Markov Monte Carlo (MCMC) para estimar os parâmetros da distribuição Weibull modificada com base em amostras completas (sem censura). Os autores concluíram que os estimadores Bayesianos apresentam facilidade computacional, as estimativas sempre existem e são estatisticamente consistentes e, ainda, a construção dos intervalos de credibilidade é conveniente, quando comparados aos resultados de máxima verossimilhança.

Upadhyay et al. (2013) realizaram um estudo para comparar os modelos Weibull modificada e Weibull modificada estendida, com base em ferramentas importantes do paradigma Bayesiano. Os autores concluíram que numa análise de confiabilidade não devemos simplesmente considerar um modelo que se adapta bem aos dados, mas também levar em conta a comparação com outros modelos concorrentes e escolher aquele que é mais adequado para as análises finais.

A distribuição Weibull Modificada Generalizada proposta por Carrasco, Ortega e Cordeiro (2008) foi amplamente estudada no contexto de inferência clássica, porém não existem ainda trabalhos desenvolvidos na literatura sob o enfoque Bayesiano. Assim, o presente estudo objetivou explorar em detalhes a abordagem Bayesiana para amostras completas (sem censuras) e censuras do tipo II, considerando-se as distribuições a priori: uniforme, gama e regra de Jeffrey's. Além disso, foram realizadas simulações para avaliar as probabilidades de cobertura através da interpretação do intervalo de confiança (clássico) versus o intervalo de credibilidade (Bayesiano).

Diante do exposto, os objetivos da pesquisa foram estudar em detalhes as propriedades da distribuição Weibull Modificada Generalizada. Realizar comparações entre os métodos de estimação Bayesiana e de máxima verossimilhança para a distribuição Weibull Modificada Generalizada, considerando-se amostras completas e censuradas. Análise dos dados simulados usando diversos valores para os parâmetros, diferentes tamanhos amostrais e diferentes porcentagens de censuras, a fim de avaliar a qualidade de ajuste, assim como a probabilidade de cobertura entre as duas abordagens e por último comparar os ajustes com dados reais para as distribuições Weibull, Weibull Modificada e Weibull Exponenciada.

No capítulo 2 foram apresentados alguns conceitos básicos de análise de sobrevivência, tais como, tipos de censuras, conceito de função de sobrevivência, função de risco e algumas técnicas não paramétricas e também algumas características dos modelos Weibull e Weibull Modificado.

No capítulo 3 uma descrição do modelo Weibull Modificado Generalizado (WMG)

e alguns temas relacionados, tais como propriedades matemática e suas características foram apresentadas.

No capítulo 4 foi apresentado o método de estimação de máxima verossimilhança e seus respectivos intervalos de confiança assintóticos para a distribuição WMG e, para finalizar o capítulo, o método de estimação Bayesiana considerando-se as distribuições a priori, tais como, uniforme, gama e regra de Jeffrey's.

No capítulo 5 um estudo de simulação foi realizado para avaliar as probabilidades de cobertura e os desempenhos dos estimadores para a distribuição WMG, considerando-se dados simulados com diversos valores dos parâmetros, diferentes tamanhos de amostras e porcentagens de censura.

No capítulo 6 foram apresentados alguns exemplos de aplicações utilizando dados reais e os resultados foram comparados com as distribuições Weibull, Weibull Exponenciada e Weibull Modificada.

No capítulo 7, conclusões e propostas futuras foram apresentadas.

2 *Revisão Bibliográfica*

2.1 Conceitos Básicos de Análise de Sobrevivência

A análise de sobrevivência é uma das áreas da estatística que mais se desenvolveu nas últimas duas décadas, principalmente, devido ao aprimoramento de técnicas estatísticas combinado com o avanço dos computadores portáteis. Engloba um conjunto de métodos e modelos destinados à análise estatística de dados de sobrevivência. Este tipo de dados surge quando, para um determinado grupo de indivíduos, é registrado o tempo transcorrido desde um instante inicial bem definido (t_0) até à ocorrência de um evento de interesse, que pode ser a morte de indivíduos (ou animais), recidiva (ou remissão) de uma doença incurável ou ainda, na engenharia de confiabilidade, a falha de componentes mecânicos ou eletrônicos (COLOSIMO; GIOLO, 2006).

A principal característica dos dados de sobrevivência é a presença de censuras que são as observações incompletas ou parciais das respostas. Essas informações, apesar de incompletas devem ser incorporadas na análise estatística, pois essas observações mesmo censuradas ainda fornecem informações úteis sobre o tempo de vida, permitindo obter estimativas consistentes para os parâmetros de interesse, em que os métodos estatísticos clássicos não permitem.

Assim, para o entendimento dos métodos desenvolvidos na análise de dados de sobrevivência, fez-se necessário um estudo dos conceitos básicos tais como, dados censurados, função de sobrevivência, função de risco e as principais características das distribuições Weibull, Weibull modificada e Weibull Exponenciada.

2.1.1 Tempo de Falha

O tempo de falha é constituído por três elementos:

1. **tempo inicial:** é o tempo de início do estudo.

2. **escala de medida:** geralmente é o tempo mas pode ser outro tipo de medida.
3. **evento de interesse:** são, na maioria dos casos, indesejáveis e, como já mencionado, chamados de falha.

2.1.2 Censura

Normalmente o tempo de falha é determinado num período de observação. Porém, esse período de observação pode terminar antes de ocorrer o evento de interesse para todos os casos da amostra. Assim, tem-se então a presença de observações incompletas (ou parciais) do tempo de falha, denominadas de censuras. Uma observação importante é que, nos dados censurados, o tempo de falha é superior ao tempo registrado e essas observações incompletas devem ser consideradas nas análises estatísticas, pois a omissão desses dados pode resultar em conclusões viciadas (LAWLESS, 1982; COLOSIMO; GIOLO, 2006).

2.1.2.1 Tipos de Censura

Entre os tipos de censura destacam-se: censura à direita, à esquerda e a censura intervalar.

Os mecanismos de censura são conhecidos como à direita quando o tempo de ocorrência do evento de interesse está à direita do tempo registrado, podendo ainda ser caracterizada como: Censura do tipo I, Censura do tipo II e Censura aleatória. Detalhes podem ser encontradas em Lawless (1982)

- **Censura tipo I:** Ocorre quando o estudo termina após um período pré-estabelecido. As observações cujo evento de interesse não ocorreu dentro deste período são ditos dados censurados.
- **Cesura tipo II:** Ocorre quando o estudo termina após obter um determinado número de ocorrências pré-estabelecido.
- **Censura aleatória:** É a censura do tipo mais comum. Ocorre quando as observações são retiradas durante o período de estudo, em qualquer momento sem a ocorrência do evento de interesse.
- **Censura à esquerda:** Ocorre quando o tempo registrado é maior que o tempo de falha, ou seja, o evento de interesse aconteceu antes dos indivíduos serem observados.

- **Censura intervalar:** Acontece quando o evento de interesse t_i ocorre entre dois valores, isto é, $t_i \in [a, b]$. Na censura intervalar não se sabe exatamente o tempo de ocorrência da falha, apenas que o evento ocorreu num certo intervalo de tempo.

2.1.2.2 Representação da Censura

Uma forma simples de representar a censura é usar duas variáveis aleatórias. Considere T uma variável aleatória representando os tempos de falha e C outra variável aleatória indicando as observações censuradas, independente de T . Então, os dados observados consistem em uma variável aleatória $t = \min(T, C)$ e o indicador de censura é dado por:

$$\delta = \begin{cases} 1, & \text{se } T \leq C, \\ 0, & \text{se } T > C \end{cases} \quad (2.1)$$

Suponha que os pares (T_i, C_i) , para $i = 1, \dots, n$ formam uma amostra aleatória com n indivíduos. Pode-se observar que, se todos os elementos apresentam $C_i = C$ (uma constante fixa sob o controle do pesquisador) têm-se, neste caso, a censura do tipo I. Assim, conclui-se que a censura do tipo I é um caso particular da censura aleatória.

2.1.2.3 Representação dos Dados de Sobrevivência

Os dados de sobrevivência para o indivíduo i ($i = 1, \dots, n$) em estudo, normalmente, são representados pelo par (t_i, δ_i) em que t_i é o tempo de falha e δ_i é a variável indicadora de falha ou censura, isto é,

$$\delta_i = \begin{cases} 1, & \text{se } t_i \text{ é um tempo de falha} \\ 0, & \text{se } t_i \text{ é um tempo censurado} \end{cases} \quad (2.2)$$

Na presença de covariáveis medidas no i -ésimo indivíduo, os dados podem ser representados por (t_i, δ_i, x_i) em que x_i são as covariáveis, por exemplo $x_i = (\text{idade}_i, \text{sexo}_i, \text{tratamento}_i)$. Para o caso em que os dados de sobrevivência são intervalares, a representação é dada por $(a_i, b_i, \delta_i, x_i)$ em que a_i e b_i são, respectivamente, os limites inferiores e superiores do intervalo (COLOSIMO; GIOLO, 2006; RODRIGUES; CANCHO; CASTRO, 2008).

2.1.3 Função de Sobrevivência e Função de Risco

Em análise de sobrevivência, geralmente, utiliza-se a variável aleatória não negativa T , usualmente contínua, para representar o tempo de falha dado pela função de sobrevivência ou pela função de risco (também conhecida como taxa de falha).

2.1.3.1 Função de Sobrevivência

A definição de função de sobrevivência pode ser interpretada como a probabilidade de uma determinada observação não ocorrer até certo tempo t , ou seja, a probabilidade de uma observação sobreviver o tempo t . Em termos de probabilidade, tem-se:

$$S(t) = P(T \geq t) = \int_t^{\infty} f(t)dt = 1 - F(t). \quad (2.3)$$

A função de Sobrevivência satisfaz as seguintes propriedades:

1. $S(0) = 1$.
2. $\lim_{t \rightarrow \infty} S(t) = 0$.
3. $S(t)$ é decrescente

A função de sobrevivência, geralmente, é descrita através da representação gráfica chamada de curva de sobrevivência e pode ser usada na comparação de distribuições e também na determinação de quantidades relevantes como, por exemplo, a mediana e outros quantis.

2.1.3.2 Função de Risco ou Taxa de Falha

A probabilidade de ocorrência da falha num determinado intervalo de tempo, $[t_1, t_2)$ pode ser expressa em termos da função de sobrevivência como sendo a diferença entre as funções de sobrevivências nos tempos t_2 e t_1 , ou seja, $S(t_2) - S(t_1)$. Dessa forma, pode-se então definir a função de risco como sendo a probabilidade de que a observação falhe neste intervalo, dado que não falhou até o tempo t , dividida pelo comprimento do intervalo. Assim, a função de risco no intervalo $[t_1, t_2)$ é expressa por:

$$\frac{S(t_2) - S(t_1)}{(t_2 - t_1)S(t_1)} \quad (2.4)$$

Redefinindo o intervalo $[t_1, t_2)$ como sendo $[t, t + \Delta t)$, a expressão 2.4 pode ser descrita por:

$$h(t) = \frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{\Delta t S(t)} \quad (2.5)$$

Assumindo que Δt seja suficientemente pequeno, a função $h(t)$ representa a taxa de falha instantânea no tempo t , dado que ocorreu a sobrevivência até o tempo t .

A função de risco $h(t)$ é então definida como:

$$h(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(t \leq T < t + \Delta t | T \geq t)}{\Delta t} \quad (2.6)$$

Resultando em:

$$h(t) = \frac{f(t)}{S(t)}$$

A demonstração pode ser encontrada em Colosimo e Giolo (2006).

A função de risco é de grande utilidade na modelagem de dados sobre o tempo de vida e, portanto, frequentemente utilizada pelo fato dela ser mais informativa que a função de sobrevivência. A razão é que diferentes funções de sobrevivência podem apresentar formas semelhantes, enquanto suas respectivas funções de risco podem ser completamente diferentes.

2.1.4 Gráfico TTT Plot

Em análise de sobrevivência é de interesse identificar diversas formas para a função de risco, tais como, constante, crescente, decrescente, unimodal e banheira. Vários métodos foram propostos na literatura para identificar as formas da função de risco, e podem ser encontrados em Glaser (1980).

Dentre estes métodos destaca-se o método gráfico conhecido como TTT-Plot (Gráfico do Tempo Total em Teste) proposto por Barlow e Campo (1975).

A forma empírica de determinar o comportamento da função de risco se dá por meio da construção do gráfico TTT-Plot, proposta por Aarset (1985), é dada pela equação:

$$G\left(\frac{r}{n}\right) = \frac{\sum_{i=1}^r T_{[i]} + (n - r)T_{[r]}}{\sum_{i=1}^n T_{[i]}} \quad (2.7)$$

em que $r = 1, \dots, n$ e $T_{[i]}$, $i = 1, \dots, n$ são estatísticas de ordem da amostra (AARSET, 1985).

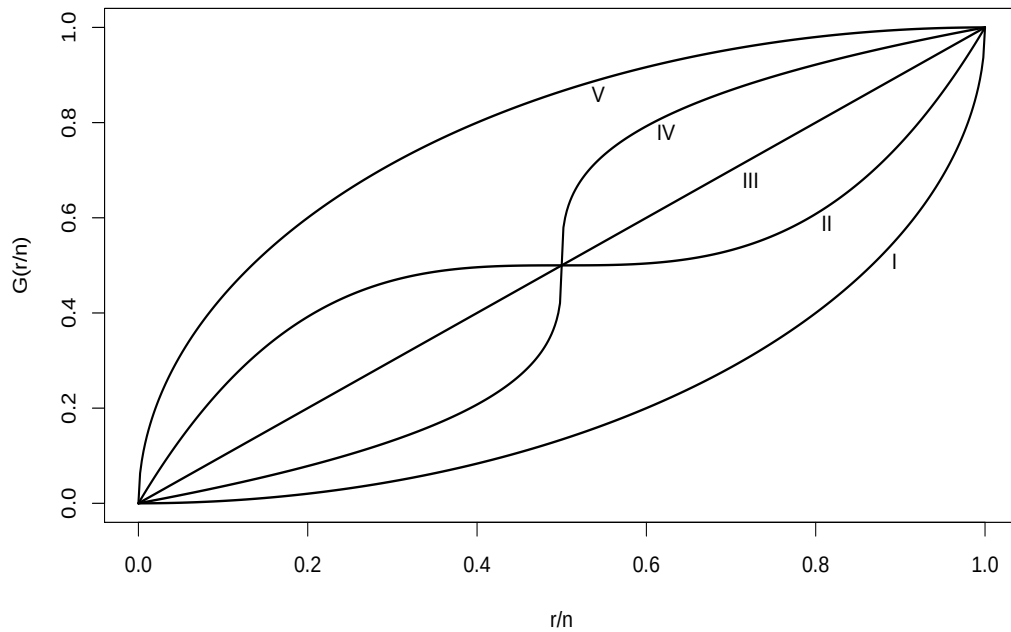


Figura 1: Gráfico ilustrativo de alguns TTT-Plots.

A partir das curvas ilustradas na Figura 1 é possível identificar formas para a função de risco $h(t)$.

- curva I (convexa) indica que $h(t)$ é decrescente.
- curva II (côncava e convexa) indica que $h(t)$ é unimodal.
- curva III (reta diagonal) indica que $h(t)$ é constante.
- curva IV (convexa e côncava) indica que $h(t)$ é em forma de banheira.
- curva V (côncava) indica que $h(t)$ é crescente.

2.2 Métodos de Estimação

Nesta seção foi realizada uma revisão sobre os métodos de estimação utilizados nos modelos de sobrevivência.

2.2.1 Estimador de Máxima Verossimilhança (MV)

O Princípio de Verossimilhança foi proposto, primeiramente, pelo matemático alemão C. F. Gauss em 1821. Porém, o método geralmente é creditado ao estatístico inglês R. A. Fisher, pois foi quem redescobriu a ideia em 1922 e o primeiro a investigar as propriedades deste método.

Devido à complexidade dos modelos considerados em análise de sobrevivência, a inferência estatística clássica sempre fundamenta-se nas propriedades assintóticas dos procedimentos de máxima verossimilhança. Assim, desde a sua criação, o estimador de máxima verossimilhança tem sido o método mais popular na estimação de parâmetros das distribuições estatísticas pelo fato de apresentar boas propriedades assintóticas para os estimadores que são consistentes e assintoticamente eficientes.

O Princípio de Máxima Verossimilhança essencialmente assume que a amostra é representativa da população e, portanto, escolhe-se como estimador o valor do parâmetro que maximiza função de probabilidade dos dados disponíveis (LEHMANN; CASELLA, 1998b).

Para encontrar os estimadores de máxima verossimilhança, é necessário primeiro definir a função de verossimilhança.

Definição 1. *Sejam $X_1, \dots, X_n$, uma amostra aleatória de uma família de distribuições $f(x; \theta)$, $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^k$ desconhecido. Considere a função:*

$$L(\underline{\theta}; \underline{x}) = \prod f(x_i; \underline{\theta}). \quad (2.8)$$

Fixado o ponto amostral $X_1, \dots, X_n$, então a função $L(\underline{\theta}; \underline{x})$, considerada como função de $\underline{\theta}$ é denominada Função de Verossimilhança da amostra.

A função de verossimilhança $L(\underline{\theta}; \underline{x})$ fornece a probabilidade das variáveis aleatórias assumirem um particular valor $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)$.

Definição 2. *Seja $L(\underline{\theta}; \underline{x})$ a função de verossimilhança definida em (2.8) para uma amostra aleatória $\underline{X} = (X_1, \dots, X_n)$ de uma família de distribuições $f(x; \theta)$ se para cada valor de $x_1, \dots, x_n$ $\hat{\underline{\theta}} = \hat{\underline{\theta}}(\underline{X})$ é o valor que maximiza a função de verossimilhança, então, $\hat{\underline{\theta}}$ é denominado Estimador de Máxima Verossimilhança (EMV) de $\underline{\theta}$.*

2.3 Cálculo do Estimador de MV

Para determinar o estimador de MV do parâmetro $\underline{\theta}$ é necessário maximizar a função de verossimilhança $L(\underline{\theta}; \underline{x})$. Como $\log L(\underline{\theta}; \underline{x})$ é uma função monótona crescente, neste caso, maximizar $L(\underline{\theta}; \underline{x})$ é equivalente a maximizar $\log L(\underline{\theta}; \underline{x})$.

As condições de regularidade exigidas para garantir o comportamento assintótico são:

1. O espaço dos parâmetros é um intervalo aberto (não necessariamente finito).
2. As distribuições P_Θ para $T = (t_1, \dots, t_2)$ têm de suporte comum, de modo que o conjunto $A = \{t : f(t|\Theta) > 0\}$ é independente de Θ .
3. As derivadas de primeira e segunda ordem da função de verossimilhança devem ser definidas.
4. A Matriz Informação de Fisher não deve ser singular.

Se estas condições de regularidade são satisfeitas e se o estimador de MV $\hat{\underline{\theta}} = (\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_k)$ de $\underline{\theta}$ existe, deve satisfazer o sistema com k equações de verossimilhança

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta_1} \log L(\underline{\theta}; \underline{x}) &= 0 \\ &\vdots \\ \frac{\partial}{\partial \theta_k} \log L(\underline{\theta}; \underline{x}) &= 0 \end{aligned} \tag{2.9}$$

para todo $\underline{x}$, tal que, $\log L(\hat{\underline{\theta}}; \underline{x})$ tenha derivadas parciais de 1ª ordem em $\underline{\theta}$. A solução deste sistema de equações para um conjunto de dados particular deve ser obtida por meio de um algoritmo de otimização, por exemplo, Newton-Raphson, que tem como objetivo, estimar as raízes dessa função. O algoritmo de Newton-Raphson é representado matematicamente por:

$$x_{n+1} \approx x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{2.10}$$

em que n indica a n -ésima iteração do algoritmo e $f'(x_n)$ é a raiz da função f em x_n .

No caso do tamanho amostral ser suficientemente grande e, sob certas condições de regularidade para a função de verossimilhança, os intervalos de confiança e testes de hipóteses podem ser obtidos usando o fato de que a distribuição assintótica para os estimadores de MV é normal com média $\underline{\theta}$ e matriz de variância-covariância dada pelo inverso

da matriz de informação de Fisher. Mais detalhes podem ser encontrados em Lehmann e Casella (1998a).

Teorema 1. *Seja $\underline{X}$ uma amostra aleatória de tamanho n de uma família de distribuições $f(x; \theta)$, em que $\hat{\theta} = (\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_k)$, então sob as condições de regularidade acima,*

$$\sqrt{n} (\hat{\theta} - \theta) \sim N_n(\underline{0}, I^{-1}(\hat{\theta})) \quad (2.11)$$

em que a matriz I apresenta elementos $I(\theta)_{ij} = -E \left[\frac{\partial^2}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \log f(x; \theta) \right]$ e é denominada Matriz de Informação de Fisher.

Desta forma, tem-se:

$$I^{-1}(\hat{\theta}) = \text{var}(\hat{\theta}) = \begin{bmatrix} \text{var}(\hat{\theta}_1) & \text{cov}(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) & \cdots & \text{cov}(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_k) \\ \text{cov}(\hat{\theta}_2, \hat{\theta}_1) & \text{var}(\hat{\theta}_2) & \cdots & \text{cov}(\hat{\theta}_2, \hat{\theta}_k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{cov}(\hat{\theta}_k, \hat{\theta}_1) & \text{cov}(\hat{\theta}_k, \hat{\theta}_2) & \cdots & \text{var}(\hat{\theta}_k) \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

é denominada Matriz de Dispersão (variância-covariância) do vetor $\hat{\theta}$. Como $\text{cov}(x, y) = \text{cov}(y, x)$ tem-se que a Matriz de Dispersão é simétrica.

Em situações em que é complicado calcular a matriz de informação de Fisher $I(\hat{\theta})$ devido às observações censuradas, pode-se usar a matriz hessiana, $\frac{\partial}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \log L(\underline{\theta}; \underline{x})$, avaliada em $\theta = \hat{\theta}$, que é um estimador consistente para matriz de variância-covariância assintótica (MUDHOLKAR, SRIVASTAVA, KOLLIA, 1996).

2.4 Estimação Bayesiana

A abordagem estatística Bayesiana foi proposta, de fato, como a forma original de pensar sobre as probabilidades/evidências. Caiu no esquecimento em 1920 quando Sir Ronald Fisher estabeleceu a ideia de repetibilidade mostrando-se mais tratável matematicamente. No entanto, a vantagem da abordagem Bayesiana é a utilização de informações sobre a distribuição a priori.

Além disso, uma nova geração de técnicas numéricas poderosas foi desenvolvida proporcionando maior facilidade na implementação dos modelos Bayesianos complexos. Assim, com a disponibilização de computadores pessoais velozes e relativamente baratos,

fez com que a inferência Bayesiana impulsionasse um grande avanço nos últimos anos (HONG, 2009). Os métodos de integração de Monte Carlo tornaram-se populares entre os Bayesianos, assim como os métodos iterativos de Monte Carlo, dentre eles, o Markov Chain Monte Carlo (MCMC). As técnicas de MCMC permitem a geração de cadeias de Markov, que podem ser definidas como processos descrevendo trajetórias onde quantidades sucessivas são descritas probabilisticamente de acordo com o valor de seu predecessor imediato (GAMERMAN; MIGON, 1993).

A estatística Bayesiana utiliza a probabilidade para especificar diretamente os graus de crença. Esta é alcançada pela adição de um ingrediente a mais no modelo, ou seja, a distribuição de probabilidade no espaço de parâmetros, Ω . Antes de observar os dados, a distribuição de probabilidade sobre Ω é chamada de “distribuição a priori” com densidade $f(\theta)$. Ou seja, pode ser vista como a quantificação do nosso conhecimento sobre θ antes da coleta de dados.

Segundo Paulino, Turkman e Murteira (2003), a informação que se pretende incorporar na análise é a informação a priori obtida com um especialista - seja ele o investigador ou estatístico - e contém elementos subjetivos que, em geral, são baseados em fontes objetivas (dados históricos do problema ou de problemas análogos, fatos).

Após observar os dados, t , calcula-se a verossimilhança para os dados e, em seguida, usa-se o teorema de Bayes para atualizar nosso conhecimento/crença sobre θ - este é quantificada pela densidade a posteriori $f(\theta | t)$.

2.4.1 Teorema de Bayes

O Teorema de Bayes mostra a relação entre a probabilidade condicional e a sua inversa. Este teorema recebe este nome em homenagem ao reverendo Thomas Bayes (1702 – 1761), que realizou as primeiras tentativas de modelar matematicamente a inferência estatística. Este teorema é também conhecido como “lei de Bayes ou regra de Bayes” (BAYES, 1763).

O teorema de Bayes determina a expressão para a probabilidade condicional de A, dado que ocorreram B e C, que é expressa por:

$$P(A | B, C) = \frac{P(B | A, C)P(A | C)}{P(B | C)} \quad (2.13)$$

utilizando o teorema de Bayes como um modelo do processo de aprendizado sobre o parâmetro θ , e considerando H , como sendo a informação inicial disponível, tem-se:

$$f(\theta | t, H) = \frac{f(t | \theta, H)f(\theta | H)}{f(t | H)}$$

onde

$$f(t | H) = \int_{\Theta} f(t, \theta | H) d\theta.$$

Pode-se verificar que $f(t | H)$ não depende de θ e, portanto, para determinação da quantidade de interesse é apenas uma constante. Assim, a forma usual do teorema de Bayes é:

$$f(\theta | t) \propto f(t | \theta)f(\theta)$$

em que o símbolo $\propto$ denota “proporcional a” e a dependência em H , por ser comum a todos os termos, é removida para facilitar a notação. $p(t | \theta)$ é a função de verossimilhança e $f(\theta)$ é a distribuição a priori de θ .

O teorema fornece então a regra de atualização das probabilidades sobre θ , partindo de $p(\theta)$ e chegando a $f(\theta | t)$, por esse motivo, essas distribuições são chamadas, respectivamente, de priori e posteriori (GAMERMAN; MIGON, 1993).

2.4.2 distribuições a priori

A distribuição a priori é a informação que se pretende incorporar na análise. Essa informação é o conhecimento que se tem sobre o parâmetro.

De um modo geral as distribuições a priori podem ser subjetiva, conjugada e não informativa.

Aqui foram abordadas apenas distribuições a priori não informativas.

2.4.2.1 Priori Não Informativa

Os estatísticos frequentistas desenvolvem a probabilidade com base na repetição do experimento. Em contrapartida, o Bayesiano visualiza a probabilidade como uma expressão subjetiva do conhecimento sobre o parâmetro desconhecido.

Uma probabilidade subjetiva é uma medida do grau de crença pessoal, específico de um indivíduo. Como tal pode variar de indivíduo para indivíduo, até porque a informação

que cada um possui é geral e rigorosamente diferenciada. Sendo assim, este conceito não acomoda a ideia de um dado volume de informação estar associado a um único grau de crença. É possível que dois estatísticos Bayesianos usem duas distribuições a priori diferentes e, portanto, acabem encontrando distribuições a posteriori diferentes (Paulino et al., 2003).

Existe a preocupação (de influência frequentista) entre estatísticos de que a distribuição a priori subjetiva é arbitrária e altera as conclusões e, portanto, não pode ser aceita dentro de um procedimento científico. Desta forma, apresenta-se o conceito de distribuição a priori não informativa cuja principal motivação é conciliar essas críticas com o ponto de vista Bayesiano (GAMERMAN; MIGON, 1993). Outra justificativa plausível para o uso de distribuição a priori não informativa é quando não se tem nenhuma ou pouca informação sobre os parâmetros.

Desta forma, informações a respeito dos parâmetros não são significativas com relação às informações obtidas através da amostra.

A utilização de distribuições a priori não informativas permite a comparação com os resultados da inferência clássica que se baseia “apenas” na informação amostral.

2.4.2.2 Priori Uniforme

Inicialmente, é suposto a distribuição uniforme como representante de situações em que não se dispõe de informação inicial ou não se deseja usá-la, isto é:

$$f(\theta) \propto k \quad \text{constante} \quad (2.14)$$

o que implica não favorecer nenhum valor particular de θ (BAYES, 1763).

2.4.2.3 Priori Gama

No caso em que dispõe-se da informação que os parâmetros são positivos, porém não se tem muita informação sobre seu valor, uma solução é usar a distribuição a priori gama com variância grande. Por exemplo $\alpha = 0.01$ e $\beta = 0.01$. A distribuição a priori de θ é dada por:

$$f(\theta) \propto \text{Gama}(\alpha, \beta) \quad (2.15)$$

2.4.2.4 Priori de Jeffreys

Conforme Paulino et al. (2003), devido a crítica pela inconsistência da distribuição uniforme na representação formal da ignorância a priori que, sob transformação injetora não asseguram a invariância, Jeffreys (1946) defendeu o uso de medida de informação de Fisher sobre $\theta \in \Omega$,

$$I(\theta) = E \left[\left(\frac{\partial \ln f(X | \theta)}{\partial \theta} \right)^2 | \theta \right] \quad (2.16)$$

Box e Tiao (1973) discutiram amplamente as ideias de Jeffreys sobre a distribuição a priori para representar o estado de ausência de informação ou ignorância à respeito do comportamento probabilístico dos parâmetros. O estudo abrangeu os casos uniparamétricos e multiparamétricos.

2.4.2.5 Priori Regra de Jeffreys

Para formulação desta regra, Jeffreys considerou várias situações e tratou separadamente cada um deles. Jeffrey's considerou os casos em que os espaços paramétricos são intervalos limitados, intervalos $(-\infty, \infty)$ ou intervalos $(0, \infty)$. Para os casos em que os intervalos são limitados ou $(-\infty, \infty)$ Jeffrey's tomou a densidade a priori como sendo constante. Para o caso de $(0, \infty)$, a distribuição a priori é dada por:

$$f(\theta) = \frac{1}{\theta}. \quad (2.17)$$

A justificativa para escolha destas distribuições a priori foi sua invariância sob transformações dos parâmetros (BOX; TIAO, 1973).

2.4.3 Estimadores de Bayes

2.4.3.1 Estimação Pontual

No contexto Bayesiano, a ideia de estimação de parâmetros consiste em tomar como estimativas, os pontos típicos da distribuição a posteriori, neste caso, sendo útil a determinação de suas medidas de locação.

Naturalmente, a escolha das estimativas Bayesianas de θ depende da forma de sua distribuição a posteriori $p(\theta | t)$ bem como os objetivos do seu uso. As estimativas mais

usadas são a média a posteriori, mediana a posteriori e a moda a posteriori, em que $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_k)$.

Definição 3. *Média a posteriori:* $\hat{\theta} = E(\theta | t)$ em que

$$E(\theta_i | t) = \int_{\Theta} \theta_i f(\theta | t) d\theta, \quad i = 1, \dots, k$$

Definição 4. *Moda a posteriori:* $\hat{\theta}$ tal que:

$$f(\theta | t) = \max_{\theta \in \Theta} f(\theta | t) = \max_{\theta \in \Theta} [f(t | \theta)f(\theta)]$$

Definição 5. *Vetor das medianas a posteriori* $\hat{\theta} = (\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_k)$ tal que:

$$f\{\theta_i \geq \hat{\theta}_i | t\} \geq 1/2 \text{ e } f\{\theta_i \leq \hat{\theta}_i | t\} \geq 1/2 \quad i = 1, \dots, k$$

2.4.3.2 Estimação Intervalar

A estimação pontual restringe a distribuição a posteriori ao único valor, privando o usuário de uma medida de precisão mais acurada. Desta forma, um resumo mais informativo do que qualquer estimativa pontual é obtida de uma região que contenha uma parte substancial da densidade a posteriori conhecida como intervalo de credibilidade ou intervalo de confiança Bayesiano.

Definição 6. *IC é um intervalo de credibilidade ou intervalo de confiança Bayesiano de $100(1 - \gamma)\%$ para θ se $P(\theta \in IC) \geq 1 - \gamma$. Nesse caso, $(1 - \gamma)$ é chamado de nível de confiança ou credibilidade, ou seja,*

$$f(\theta \in IC) = \int_{IC} f(t | \theta)f(\theta)d\theta \geq 1 - \gamma$$

Da definição 6 tem-se que o intervalo IC pode admitir infinitos intervalos com o mesmo grau de credibilidade γ . Entretanto, o interesse é selecionar o intervalo que contém os valores mais prováveis de θ com relação às informações disponíveis, ou seja, o interesse está no intervalo de máxima densidade a posteriori (HPD) (GAMERMAN; MIGON, 1993).

Definição 7. *Um intervalo de credibilidade $100(1 - \gamma)\%$ de máxima densidade a posteriori para θ é o intervalo de credibilidade $100(1 - \gamma)\%$ da forma $IC = \{\theta \in \Theta : p(\theta | t) \geq k_\gamma\}$ em que k_γ é a maior constante tal que, $P(\theta \in IC) \geq 1 - \gamma$.*

O intervalo de credibilidade (HPD) coincide em geral com o intervalo de confiança clássico de amplitude mínima, mas pode ter um desempenho bem diferente.

2.4.4 Método de Monte Carlo via Cadeias de Markov (MCMC)

Os métodos computacionais de Monte Carlo via Cadeias de Markov (MCMC) têm sido largamente utilizados em inferência Bayesiana, pois possibilitam simular grandes amostras de uma determinada densidade a posteriori, $p(\theta | t)$, cuja expressão analítica é difícil de ser obtida.

A implementação dos métodos MCMC só foi possível devido ao grande avanço tecnológico dos computadores, cada vez mais robusto e acessível, e devido ao trabalho de Gelfand e Smith (1990) apud Paulino et al. (2003), que revolucionaram a inferência Bayesiana em relação à simulação da distribuição a posteriori, fazendo uso dos métodos MCMC.

A ideia básica dos métodos MCMC é construir uma cadeia de Markov com distribuição de equilíbrio dada pela distribuição a posteriori, $p(\theta | t)$, utilizando as cadeias de Markov ergódica. Uma cadeia de Markov é ergódica se cada estado pode ser atingido a partir de qualquer outro com um número finito de iterações (irredutível) e, neste caso, as probabilidades de transição de um estado para outro são homogêneas, não possuindo estados absorventes (aperiódica) (ver Paulino et al., 2003).

Conforme Paulino et al. (2003), após um número suficientemente grande de iterações, a cadeia converge para uma distribuição de equilíbrio (a posteriori), que pode ser usada para fazer inferências no modelo em estudo.

Assim, para obter as características das distribuições marginais a posteriori do parâmetro θ é necessário à integração da função de distribuição a posteriori que é, em geral, uma função multidimensional. As integrações dessas funções multidimensionais são também muito complexas. Desta forma, a inferência exata só será possível quando estas integrais possuem solução analítica. Na maioria dos casos, não se pode obter a solução analítica para estas integrais, sendo necessário recorrer a métodos numéricos, por exemplo, Método de Monte Carlo via Cadeias de Markov (MCMC).

O método MCMC fornece uma maneira conveniente e eficiente para amostrar distribuições estatísticas complexas e multidimensionais. Um desses métodos de MCMC é o algoritmo de Metropolis-Hastings, com ele pode-se obter uma amostra da distribuição a posteriori e calcular estimativas desta distribuição.

Este método de amostragem foi introduzido pela primeira vez por Metropolis, Rosenbluth e Teller (1953), para o caso específico da distribuição de Boltzmann (METROPOLIS; ROSENBLUTH; TELLER, 1953) e foi estendida para o caso mais geral por Hastings (1970).

2.4.4.1 Algoritmo de Metropolis-Hastings

O algoritmo de Metropolis-Hastings consiste em gerar um valor θ de uma distribuição auxiliar $q(\cdot)$ e aceitar este valor com uma dada probabilidade. Este mecanismo de correção garante a convergência da cadeia para a distribuição de equilíbrio que é, neste caso, a distribuição a posteriori de interesse.

Para simular este processo executa-se em cada instante t os dois seguintes passos:

Suponha que a cadeia esteja no estado θ e um valor θ' é gerado de uma distribuição proposta $q(\cdot|\theta)$.

O novo valor θ' é aceito com probabilidade α , ou é rejeitado com probabilidade $1 - \alpha$. No caso de rejeição a cadeia permanece no estado θ .

$$\alpha(\theta, \theta') = \min \left(1, \frac{p(\theta' | t) q(\theta | \theta')}{p(\theta | t) q(\theta' | \theta)} \right). \quad (2.18)$$

em que $p(\theta' | t)$ é a distribuição a posteriori.

É importante observar que só precisa-se conhecer $p(\theta | t)$ parcialmente, isto é, a menos de uma constante já que, neste caso, a probabilidade de 2.18 não se altera. Isto é fundamental em aplicações Bayesianas onde não se conhece completamente a posteriori.

Na prática, o algoritmo pode ser especificado pelos seguintes passos,

1. Inicializar o contador de iterações $t = 0$ e especificar um valor inicial $\theta^{(0)}$.
2. Gerar um novo valor θ' da distribuição proposta $q(\cdot|\theta)$.
3. Calcular a probabilidade de aceitação $\alpha(\theta, \theta')$ e gerar $u \sim U(0, 1)$.
4. Se $u \leq \alpha$ então aceitar o novo valor e fazer $\theta^{(t+1)} = \theta'$, caso contrário, rejeitar e fazer $\theta^{(t+1)} = \theta$.
5. Incrementar o contador de t para $t + 1$ e voltar ao passo 2.

Nota-se também que a cadeia pode permanecer no mesmo estado durante muitas iterações e, na prática, um dispositivo de monitoramento útil é dada pela porcentagem

média de iterações para que novos valores sejam aceitos. Hastings (1970) sugere que esta taxa de aceitação seja sempre calculada em aplicações práticas.

2.4.5 Diagnóstico de Convergência

As amostras obtidas com o algoritmo Metropolis-Hastings necessitam ter sua convergência constatada. Para a avaliação da convergência dessas amostras pode ser utilizado o critério de Geweke (2007), que requer a geração de apenas uma amostra da cadeia para o diagnóstico de convergência enquanto os outros critérios necessitam de duas amostras tornando o processo mais lento.

2.4.5.1 Critério de Geweke

O critério de Geweke foi desenvolvido por Geweke (1992) e Raftery e Lewis (1992). O critério de Geweke se baseia no teste de igualdade de medias geralmente dos primeiros 10% (γ_1) da cadeia de Markov e dos últimos 50% (γ_2) da cadeia, dado por:

$$z = \frac{\hat{\gamma}_1 - \hat{\gamma}_2}{\sqrt{\frac{sd(\hat{\gamma}_1)}{n_1} + \frac{sd(\hat{\gamma}_2)}{n_2}}} \quad (2.19)$$

em que $\hat{\gamma}$ e $sd(\hat{\gamma})$ são, respectivamente, a média e o erro-padrão dos elementos da cadeia de Markov e n_1 e n_2 são os números de elementos de γ_1 e γ_2 . A indicação de convergência é obtida se $|z| < 1.96$.

2.4.6 Seleção de Modelos

Como já mencionado, a escolha de um modelo probabilístico é um tópico de extrema importância na análise paramétrica de dados sobre o tempo de vida. Uma forma simples e eficiente de selecionar o melhor modelo a ser utilizado para um conjunto de dados é por meio de técnicas gráficas. Entretanto a escolha pode ser realizada através da minimização de algum critério de informação que penalize a função de verossimilhança. Os critérios mais utilizados são AIC (*Akaike Information Criterion*) (AKAIKE, 1974) e BIC (*Bayesian Information Criterion*) (SCHWARZ, 1978) definidos, respectivamente, por:

$$AIC = -2 \ln [L(\hat{\theta})] + 2k \quad (2.20)$$

em que k é o número de parâmetros no modelo estatístico, e $L(\hat{\theta})$ é o valor maximizado da função de verossimilhança estimada para o modelo em questão.

$$BIC = -2 \ln [L(\hat{\theta})] + k \ln(n) \quad (2.21)$$

em que n é o número de observações.

O critério de informação DIC (*Deviance Information Criterion*), proposto por Spiegelhalter et al. (2001) é útil em problemas Bayesianos em que as distribuições posteriores são obtidas através de simulação MCMC.

Definindo a função *deviance* como $D(\theta) = -2 \ln [L(\theta)]$, a esperança $\bar{D} = E^\theta[D(\theta)]$ como sendo a qualidade do ajuste e $p_D = \bar{D} - D(\bar{\theta})$ o número efetivo de parâmetros do modelo, o critério de informação DIC pode ser calculado através de:

$$DIC = p_D + \bar{D}. \quad (2.22)$$

Os critérios de informações AIC, BIC e DIC selecionam entre todos os modelos testados, aqueles que apresentam os menores valores na escolha do melhor modelo ajustado.

2.5 Alguns Modelos Utilizados na Análise de Sobre-vivência

Nesta seção, foram apresentadas, brevemente, as distribuições Weibull, Weibull modificada e Weibull exponenciada. Estas explanações serão essenciais para dar suporte ao desenvolvimento teórico da distribuição Weibull modificada generalizada.

2.5.1 Distribuição Weibull

A distribuição Weibull foi proposta por Weibull (1939) e sua aplicabilidade foi também discutida por este mesmo autor em 1951 e em 1954. Desde então a distribuição Weibull, tem sido aplicada em estudos biomédicos e industriais. A sua popularidade se deve a simplicidade de suas funções de densidade, de sobrevivência e de risco e, principalmente, pelas formas acomodadas pela função de risco, $h(t)$, que é monótona, isto é, pode ser crescente, decrescente ou constante.

2.5.1.1 Caracterização do Modelo Weibull

Para uma variável aleatória não negativa com distribuição Weibull, a função de distribuição acumulada $F(t)$ e de Sobrevivência $S(t)$ são dadas, respectivamente, por:

$$F(t) = 1 - \exp \left[-\frac{t^\theta}{\alpha} \right] \quad (2.23)$$

e

$$S(t) = \exp \left[-\frac{t^\theta}{\alpha} \right]. \quad (2.24)$$

Derivando a função (2.23) com respeito a variável t , a função densidade de probabilidade $f(t)$ e a função de risco $h(t)$ podem ser obtidas, respectivamente, como:

$$f(t) = \frac{\theta}{\alpha} t^{\theta-1} \exp \left[-\frac{t^\theta}{\alpha} \right] \quad (2.25)$$

e

$$h(t) = \frac{\theta}{\alpha} t^{\theta-1}. \quad (2.26)$$

Na função de densidade, $\theta > 0$, define o parâmetro de forma e $\alpha > 0$, o parâmetro de escala. O parâmetro α é expresso na mesma unidade dos dados e representa o percentil 63%, ou seja, $F(\alpha) \approx 0.63$. Como θ representa o parâmetro de forma, portanto, é adimensional. Para $\theta = 1$ tem-se a distribuição exponencial como caso particular. A função de densidade pode apresentar as seguintes formas:

- para $\theta \leq 1$ a função densidade é monotonamente decrescente.
- para $\theta > 1$ a função densidade é unimodal.

Assim como acontece na função de densidade, as formas da função de risco dependem apenas do parâmetro de forma θ e o parâmetro de escala α não tem efeito. A função de risco pode apresentar as seguintes formas:

- para $\theta < 1$ a função de risco é decrescente.
- para $\theta = 1$ a função de risco é constante.
- para $\theta > 1$ a função de risco é crescente.

Algumas das formas das funções de densidade e de risco de uma variável T com distribuição Weibull podem ser observadas na Figura 2

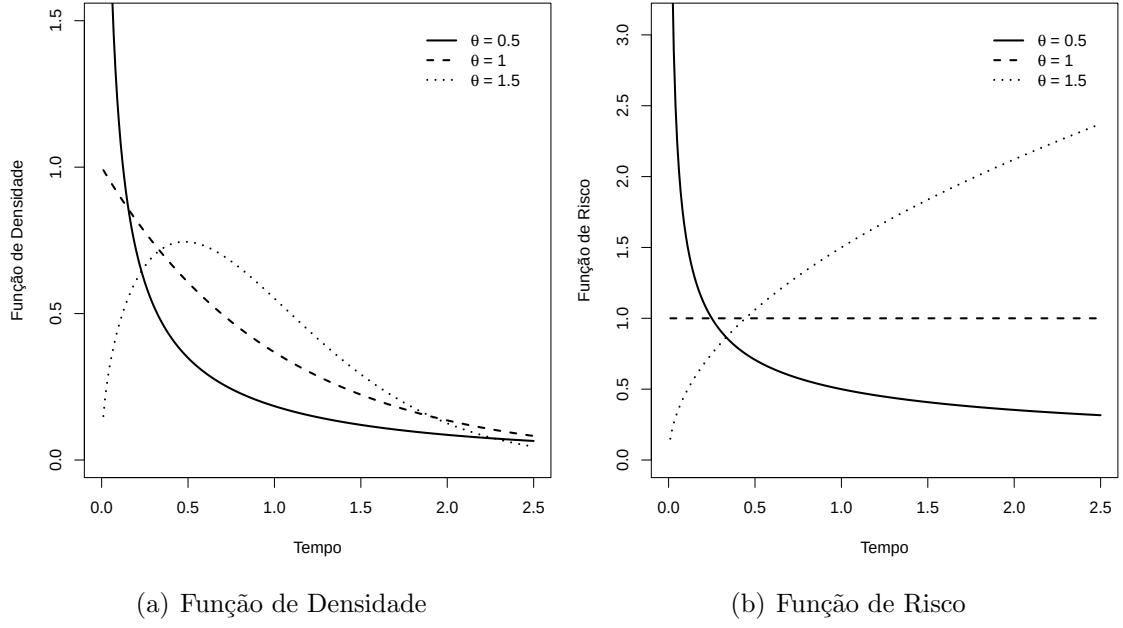


Figura 2: Algumas formas das funções de densidade de probabilidade (a) e de risco (b) da distribuição Weibull considerando $\alpha = 1$

Observa-se na Figura 2(b) que a função de risco é estritamente crescente para $\theta > 1$, estritamente decrescente para $\theta < 1$ e para $\theta = 1$, constante. Observa-se também que para $\theta = 1$ tem-se a distribuição exponencial como caso particular.

O n -ésimo momento da variável aleatória T , cuja função densidade de probabilidade é representada pela distribuição Weibull, é definido por:

$$E[T^n] = \int_0^{\infty} \frac{\theta}{\alpha} t^{\theta+n-1} e^{-\frac{t^\theta}{\alpha}} dt \quad (2.27)$$

As amostras das variáveis aleatórias da distribuição Weibull podem ser geradas a partir da distribuição uniforme $U[0, 1]$. Sendo $U[0, 1]$ a distribuição uniforme com valores p tal que $0 < p < 1$, as amostras das variáveis aleatórias podem ser geradas por:

$$t = (-\ln(-u + 1) \alpha)^{\theta^{-1}} \quad (2.28)$$

2.5.2 Distribuição Weibull Modificada

Com o intuito de ampliar a aplicabilidade da distribuição Weibull, muitas generalizações têm sido propostas e estudadas. Estes modelos não só possuem a distribuição

Weibull como caso particular como também outros modelos. Nestas situações, podem-se destacar duas generalizações da distribuição Weibull, que são as distribuições Weibull Modificada e Weibull Exponenciada.

A distribuição Weibull modificada foi proposta por Lai, Xie e Murthy (2003), que modificaram a distribuição Weibull, com a introdução de um parâmetro adicional λ . Lai, Xie e Murthy (2003) mostraram que a função de risco da Weibull modificada permite acomodar não somente as formas de risco monótonas, como também as formas do tipo banheira.

2.5.2.1 Caracterização do Modelo Weibull Modificada

Para uma variável aleatória não negativa com distribuição Weibull modificada, a função de distribuição acumulada $F(t)$ e de Sobrevivência $S(t)$ são dadas, respectivamente, por:

$$F(t) = 1 - \exp \left\{ -\frac{t^\theta e^{\lambda t}}{\alpha} \right\} \quad (2.29)$$

e

$$S(t) = \exp \left\{ -\frac{t^\theta e^{\lambda t}}{\alpha} \right\} \quad (2.30)$$

em que $t > 0$, $\alpha > 0$, $\theta \geq 0$ e $\lambda \geq 0$.

Derivando a função 2.29 com respeito a variável t , a função densidade de probabilidade $f(t)$ e a função de risco $h(t)$ podem ser obtidas, respectivamente, como:

$$f(t) = \exp \left\{ -\frac{t^\theta \exp \{ \lambda t \} - \lambda t \alpha}{\alpha} \right\} \frac{[t(\theta + \lambda t)]^{\theta-1}}{\alpha} \quad (2.31)$$

e

$$h(t) = \frac{\exp \{ \lambda t \} [t(\theta + \lambda t)]^{\theta-1}}{\alpha} \quad (2.32)$$

Lai, Xie e Murthy (2003) estudaram o comportamento da função de risco $h(t)$ e concluíram que as formas da função de risco dependem apenas dos parâmetros de forma θ e λ , observando que o parâmetro de escala α não afeta a forma da função de risco. Lai, Xie e Murthy (2003) mostraram que:

- Para $\theta = 1$ e $\lambda = 0$ a função de risco é constante.
- Para $\theta < 1$ e $\lambda = 0$ a função de risco é monotonamente decrescente.

- Para $\theta > 1$ e $\lambda = 0$ a função de risco é monotonamente crescente.
- Para $\theta < 1$ e $\lambda > 0$ a função de risco é em forma de U .
- Para $\theta \geq 1$ e $\lambda > 0$ a função de risco é monotonamente crescente.

As diversas formas da função de densidade e de risco acomodadas pela distribuição Weibull modificada são apresentadas na Figura 3. Considerando-se $\lambda = 0$ tem-se a distribuição Weibull como caso particular e, para $\theta = 0$, tem-se a distribuição Valor Extremo como caso particular.

Algumas formas da função de densidade e de risco acomodadas pela distribuição Weibull Modificada são apresentadas na Figura 3. Pode-se observar que, para valores de λ próximos de zero, a função de risco tem um comportamento semelhante ao comportamento de $\lambda = 0$, desde que o tempo t seja finito (LAI; XIE; MURTHY, 2003).

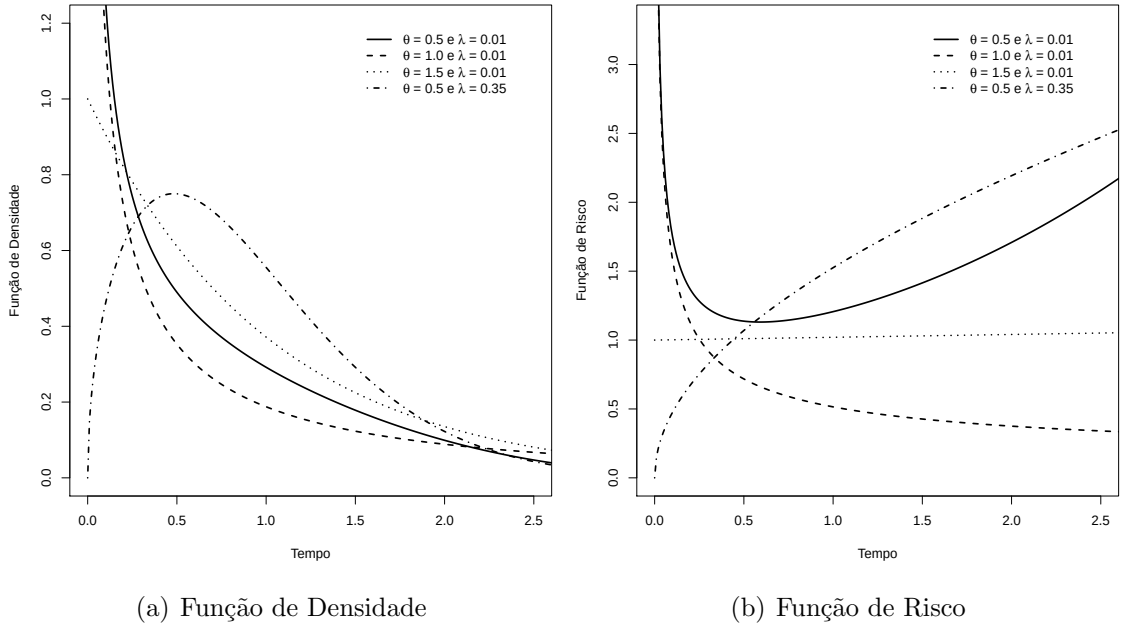


Figura 3: Algumas formas das funções de densidade e de risco considerando $\alpha = 1$

O n -ésimo momento da variável aleatória T , cuja função densidade de probabilidade é representada pela distribuição Weibull modificada, é definido por:

$$E[T^n] = \int_0^{\infty} \frac{t^{\theta+n-1} (\theta + \lambda t)^{\theta-1}}{\alpha} \exp \left\{ -\frac{t^{\theta} \exp \{\lambda t\} - \lambda t \alpha}{\alpha} \right\} dt \quad (2.33)$$

A geração de amostras para a variável aleatória com distribuição Weibull modificada pode ser realizada a partir da solução da equação não linear, dada por:

$$t^\theta \exp \{ \lambda t \} + \alpha \log (1 - u) = 0 \quad (2.34)$$

onde u tem uma distribuição uniforme $U(0, 1)$.

2.5.3 Distribuição Weibull Exponenciada

A distribuição Weibull Exponenciada foi proposta por Mudholkar e Srivastava (1993) e sua aplicabilidade foi também discutida por este mesmo autor em 1993, modificando a distribuição Weibull com a introdução de um parâmetro adicional $\beta > 0$. Mudholkar, Srivastava e Fraimer (1995), mostraram que a distribuição Weibull Exponenciada pode acomodar não só as formas de risco monótonas como também as formas de risco unimodal e em forma de Banheira.

2.5.3.1 Caracterização do Modelo Weibull Exponenciada

Basicamente, a distribuição Weibull exponenciada é obtida adicionando um expoente na função de distribuição acumulada da distribuição Weibull padrão. Assim, a função de distribuição acumulada da Weibull Exponenciada é dada por:

$$F(t) = [F_w(t)]^\beta = \left\{ 1 - \exp \left[-\frac{t^\theta}{\alpha} \right] \right\}^\beta \quad (2.35)$$

em que $F_w(t)$ é a função dada em 2.23, $t \geq 0$, $\alpha \geq 0$ e $\theta \geq 0$.

Da função 2.35 tem-se as funções densidade, $f(t)$, e de risco, $h(t)$, dadas, respectivamente, por:

$$f(t) = \frac{\beta \theta}{\alpha} t^{\theta-1} \exp \left[-\left(\frac{t}{\alpha} \right)^\theta \right] \left\{ 1 - \exp \left[-\frac{t^\theta}{\alpha} \right] \right\}^{\beta-1}, \quad (2.36)$$

e

$$h(t) = \frac{\beta \theta}{\alpha} t^{\theta-1} \exp \left[-\frac{t^\theta}{\alpha} \right] \frac{\left\{ 1 - \exp \left[-\frac{t^\theta}{\alpha} \right] \right\}^{\beta-1}}{1 - \left\{ 1 - \exp \left[-\frac{t^\theta}{\alpha} \right] \right\}^\beta}. \quad (2.37)$$

Mudholkar, Srivastava e Kollia (1996), Mudholkar e Hutson (1996) e Jiang e Murthy (1999) estudaram o comportamento da função de densidade $f(t)$ e a caracterização dos parâmetros no plano bidimensional e concluíram que a função de densidade pode ser monótona decrescente e unimodal. A forma de $f(t)$ depende apenas de β e θ e, neste caso, o parâmetro de escala α não tem efeito.

- para $\theta\beta \leq 1$ a função é monotonamente decrescente.
- para $\theta\beta > 1$ a função é unimodal.

Uma observação importante constatada é que, $f(0) = \infty$ quando $\theta\beta < 1$, $f(0) = 1/\alpha$ quando $\theta\beta = 1$ e $f(0) = 0$ quando $\theta\beta > 1$.

Mudholkar e Srivastava (1993) estudaram os comportamentos das funções de risco e constataram que, assim como acontece na função de densidade, as formas da função de risco dependem apenas dos parâmetros θ e β . As funções de risco podem apresentar as seguintes formas:

- Para $\theta = 1$ e $\beta = 1$ a função de risco é constante.
- Para $\theta \leq 1$ e $\theta\beta \leq 1$ a função de risco é monotonamente decrescente.
- Para $\theta \geq 1$ e $\theta\beta \geq 1$ a função de risco é monotonamente crescente.
- Para $\theta < 1$ e $\theta\beta > 1$ a função de risco é unimodal.
- Para $\theta > 1$ e $\theta\beta < 1$ a função de risco é em forma de banheira.

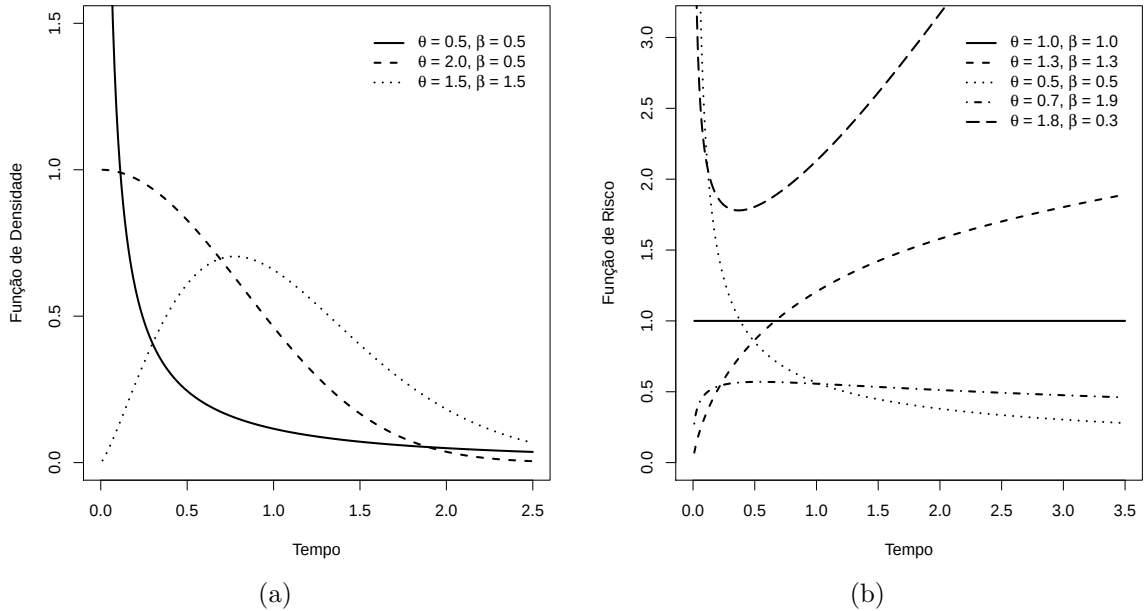


Figura 4: Algumas formas das funções de densidade de probabilidade e de risco da distribuição Weibull Exponenciada considerando $\alpha = 1$

As diversas formas da função de densidade e de risco acomodadas pela distribuição Weibull Exponenciada são apresentadas na Figura 4. Considerando-se $\theta = 1$, tem-se a

distribuição Exponencial Exponenciada como caso particular e, para $\beta = 1$, tem-se a distribuição Weibull como caso particular.

O n -ésimo momento da variável aleatória T , cuja função densidade de probabilidade é representada pela distribuição Weibull Exponenciada, é definido por:

$$E [T^n] = \int_0^{\infty} \frac{\beta \theta}{\alpha} t^{\theta+n-1} \exp \left[-\frac{t^\theta}{\alpha} \right] \left\{ 1 - \exp \left[-\frac{t^\theta}{\alpha} \right] \right\}^{\beta-1} dt \quad (2.38)$$

As amostras das variáveis aleatórias para a distribuição Weibull Exponenciada podem ser geradas a partir da transformação inversa dada por:

$$t = \left[-\ln \left(-u^{\beta-1} + 1 \right) \alpha \right]^{\theta-1} \quad (2.39)$$

em que u tem uma distribuição uniforme $U(0, 1)$.

3 Distribuição Weibull Modificada Generalizada (WMG)

Recentemente, Carrasco, Ortega e Cordeiro (2008) introduziram a distribuição Weibull Modificada Generalizada (WMG) que tem como casos especiais o modelo Exponencial, Weibull, Weibull Exponenciada, Valor Extremo e Weibull Modificada e que permite modelar diversas formas de risco: constante, crescente, decrescente, unimodal ou em forma de banheira.

3.1 Caracterização do Modelo Weibull Modificado Generalizado (WMG)

Seja $F_{WM}(t)$ a função de distribuição acumulada da distribuição Weibull Modificada dada em 2.29 proposta por Lai, Xie e Murthy (2003). A função de distribuição da WMG pode ser definida elevando $F_{WM}(t)$ a um expoente β , isto é, $F(t) = F_{WM}(t; \alpha, \theta, \lambda)^\beta$. Desta forma, uma variável aleatória, T tem distribuição WMG se sua função de distribuição acumulada é escrita na forma:

$$F(t) = \left[1 - \exp \left\{ -\frac{t^\theta}{\alpha} \exp \{ \lambda t \} \right\} \right]^\beta, \quad t > 0 \quad (3.1)$$

em que $\alpha > 0$ é o parâmetro de escala, $\beta > 0$ e $\theta \geq 0$ são parâmetros de forma e $\lambda \geq 0$ funciona como um fator de fragilidade na sobrevivência do objeto em estudo, quando o tempo aumenta.

A função de sobrevivência é dada por:

$$S(t) = 1 - \left[1 - \exp \left\{ -\frac{t^\theta}{\alpha} \exp \{ \lambda t \} \right\} \right]^\beta. \quad (3.2)$$

3.2 Função de Densidade

A função de densidade de probabilidade para a variável aleatória representando o tempo de falha T da distribuição WMG é dada por:

$$f(t) = \frac{\beta t^{\theta-1} (\theta + \lambda t) \exp \left\{ \lambda t - \frac{t^\theta e^{\lambda t}}{\alpha} \right\}}{\alpha \left[1 - \exp \left\{ -\frac{t^\theta e^{\lambda t}}{\alpha} \right\} \right]^{1-\beta}}, \quad (3.3)$$

Devido à complexidade da função de densidade de probabilidade definida em (3.3), o estudo analítico de seu comportamento é bastante complexo. A Figura 5 ilustra o comportamento dessas funções de densidade para diferentes valores de β e θ .

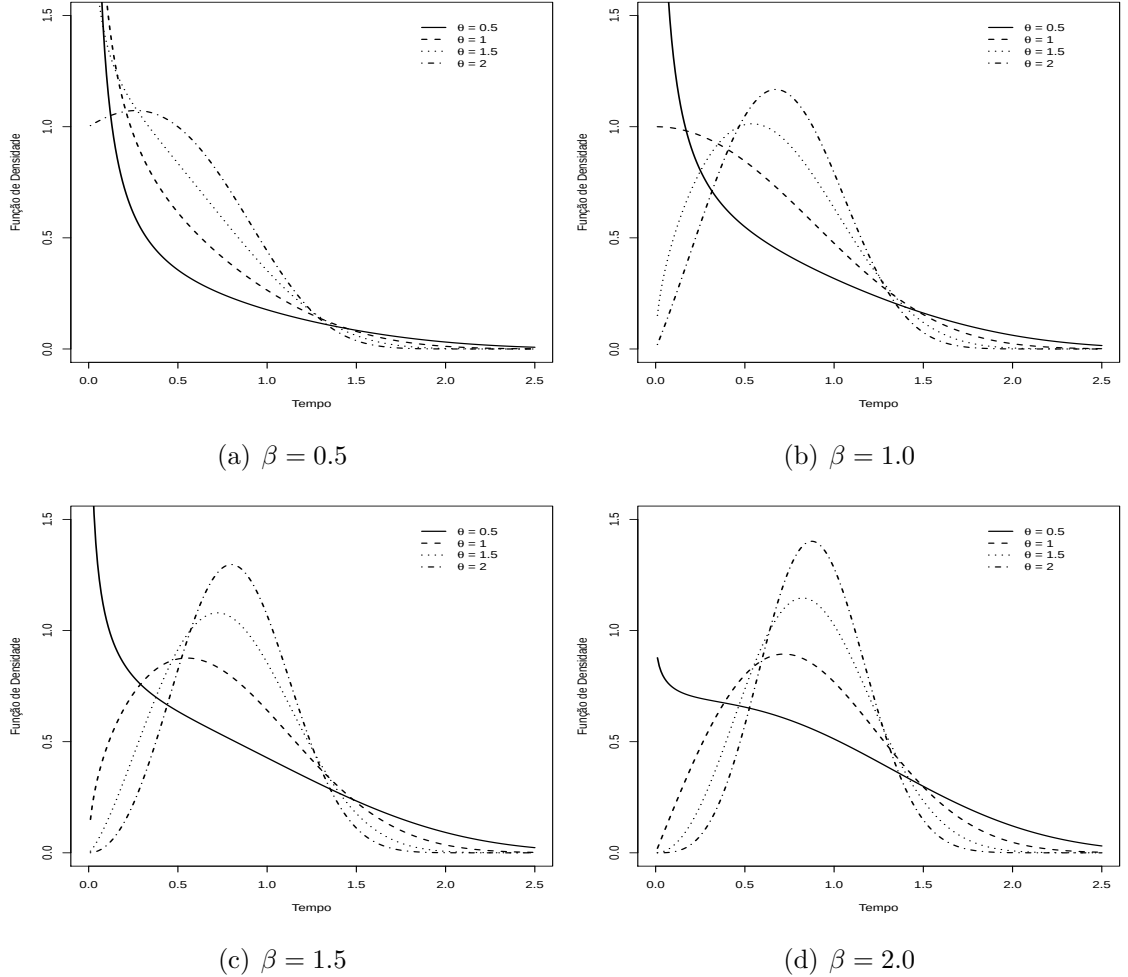


Figura 5: Algumas formas das funções de densidade de probabilidade considerando $\alpha = 1$ e $\lambda = 0.5$

3.3 Função de Risco

A partir da função de densidade dada por (3.3) e de sobrevivência (3.2), tem-se a função de risco da WMG descrita na forma:

$$h(t) = \frac{-\beta t^{\theta-1} (\theta + \lambda t) \exp \left\{ -\frac{-\lambda t \alpha + t^\theta e^{\lambda t}}{\alpha} \right\} \left[1 - \exp \left\{ -\frac{t^\theta e^{\lambda t}}{\alpha} \right\} \right]^{-1+\beta}}{\alpha \left\{ -1 + \left[1 - \exp \left\{ -\frac{t^\theta e^{\lambda t}}{\alpha} \right\} \right]^\beta \right\}}. \quad (3.4)$$

Carrasco, Ortega e Cordeiro (2008) verificaram que a distribuição WMG apresenta funções de risco constante, monótona crescente, monótona decrescente, unimodal e em forma de banheira. Assim:

- Para $\theta \geq 1$, $0 < \beta < 1$ e $h'(t) > 0$ a função de risco é crescente.
- Para $0 < \theta < 1$, $\beta > 1$ e $h'(t) < 0$ a função de risco é decrescente.
- Para $0 < \theta < 1$ e $\beta \rightarrow \infty$ a função de risco é unimodal
- Se $\beta = 1$, $0 < \theta < 1$ e $t^* = (-\theta + \sqrt{\theta})/\lambda$ tem-se que, para $t < t^*$ a função de risco é decrescente. Se $t > t^*$ a função de risco é crescente. Assim a função de risco é em forma de banheira (CARRASCO; ORTEGA; CORDEIRO, 2008).

em que $h'(t)$ é a derivada da função de risco com relação a t , $h'(t) = dh(t)/dt$.

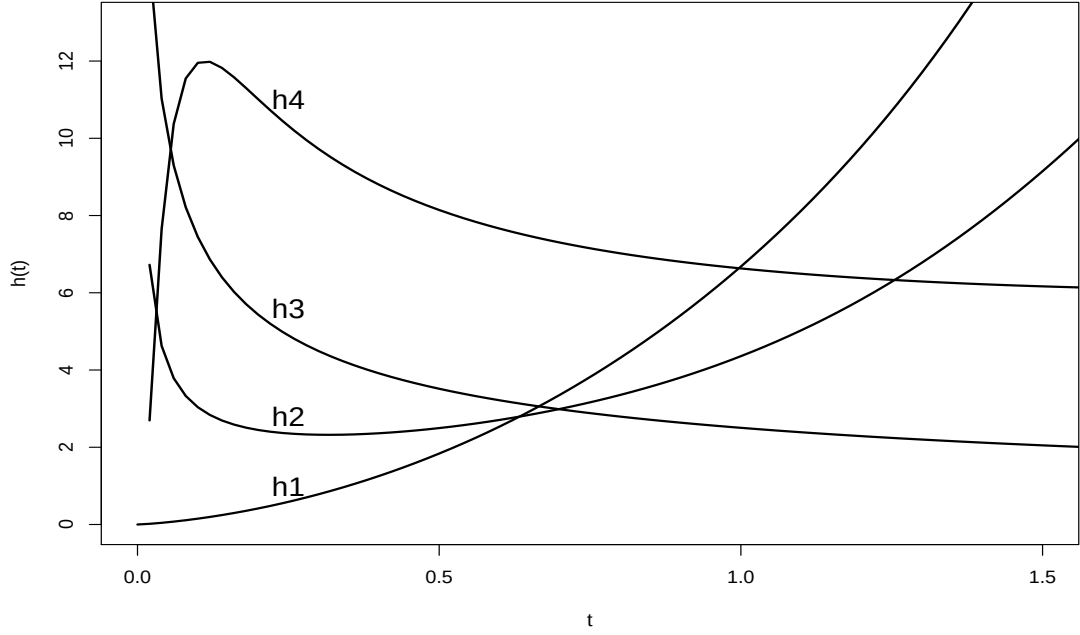


Figura 6: Exemplos de formas da função de risco para a distribuição WMG, $h1 = (\alpha = 1; \beta = 1,5; \theta = 1,5; \lambda = 1)$; $h2 = (\alpha = 1; \beta = 0,1; \theta = 3; \lambda = 0,15)$; $h3 = (\alpha = 0,2; \beta = 1,5; \theta = 0,5; \lambda = 0,001)$; $h4 = (\alpha = 0,1; \beta = 15; \theta = 0,5; \lambda = 0,1)$

3.4 Casos Especiais

A distribuição WMG tem ainda como caso particular alguns modelos conhecidos de distribuições:

- distribuição Exponencial, se $\beta = 1$, $\theta = 1$, $\lambda = 0$.

$$f(t) = e^{-\frac{t}{\alpha}} \alpha^{-1} \quad (3.5)$$

- distribuição Exponencial Exponenciada, (KUNDU; GUPTA, 1999) se $\theta = 1$, $\lambda = 0$.

$$f(t) = \left(1 - e^{-\frac{t}{\alpha}}\right)^{\beta} \beta e^{-\frac{t}{\alpha}} \alpha^{-1} \left(1 - e^{-\frac{t}{\alpha}}\right)^{-1} \quad (3.6)$$

- distribuição Weibull, (WEIBULL, 1939) se $\beta = 1$, $\lambda = 0$.

$$f(t) = t^{\theta} \theta e^{-\frac{t^{\theta}}{\alpha}} \alpha^{-1} t^{-1} \quad (3.7)$$

- distribuição Valor Extremo, se $\beta = 1$, $\theta = 0$.

$$f(t) = \lambda e^{\lambda t} e^{-\frac{e^{\lambda t}}{\alpha}} \alpha^{-1} \quad (3.8)$$

- distribuição Weibull Exponenciada (MUDHOLKAR; SRIVASTAVA, 1993), se $\lambda = 0$.

$$f(t) = \left(1 - e^{-\frac{t^\theta}{\alpha}}\right)^\beta \beta t^\theta \theta e^{-\frac{t^\theta}{\alpha}} \alpha^{-1} t^{-1} \left(1 - e^{-\frac{t^\theta}{\alpha}}\right)^{-1} \quad (3.9)$$

- distribuição Weibull Modificada (LAI; XIE; MURTHY, 2003), se $\beta = 1$.

$$f(t) = - \left(-\frac{t^\theta \theta e^{\lambda t}}{\alpha t} - \frac{t^\theta \lambda e^{\lambda t}}{\alpha} \right) e^{-\frac{t^\theta e^{\lambda t}}{\alpha}} \quad (3.10)$$

3.5 Mediana, Moda, Percentil

A mediana pode ser obtida através da solução da equação não linear dada por:

$$t^\theta \exp(\lambda t) + \alpha \log(1 - 2^{-1/\beta}) = 0 \quad (3.11)$$

A moda da função de densidade da distribuição WMG não apresenta uma expressão analítica. Quando $\beta\phi \leq 1$ a moda é em $t = 0$.

Assim como na mediana, o Quantil p ($Q(p)$) pode ser obtido resolvendo a equação não linear, dada por:

$$t_p^\theta \exp(\lambda t) + \alpha \log(1 - p^{1/\beta}) = 0 \quad (3.12)$$

3.6 Variável Aleatória para WMG

De acordo com Carrasco, Ortega e Cordeiro (2008) a geração de amostras aleatórias da distribuição WMG pode ser obtida resolvendo a equação não linear dada por:

$$t^\theta \exp(\lambda t) + \alpha \log(1 - u^{1/\beta}) = 0 \quad (3.13)$$

onde u tem uma distribuição uniforme $U(0, 1)$.

3.7 Momentos

Os momentos da distribuição WMG, não podem ser obtidos de forma analítica, somente numericamente usando-se a expressão geral, dada por:

$$E(T^r) = \frac{\beta}{\alpha} \int_0^\infty t^{r+\theta-1} (\theta + \lambda t) \exp \left\{ \lambda t - \frac{t^\theta e^{\lambda t}}{\alpha} \right\} \left[1 - \exp \left\{ -\frac{t^\theta e^{\lambda t}}{\alpha} \right\} \right] dt. \quad (3.14)$$

Para o caso particular em que $\theta = 1$ e $\lambda = 0$ (Distribuição Exponencial Exponenciada) tem-se que:

$$E(T) = \alpha \{ \psi(\beta + 1) - \psi(1) \} \text{ e } Var(T) = \alpha^2 \{ \psi'(1) - \psi'(\beta + 1) \}$$

4 *Estimação da Distribuição Weibull Modificada Generalizada.*

4.1 Estimação de Máxima Verossimilhança (EMV)

Na análise de sobrevivência, quando as observações são não censuradas (amostras completas) a função de verossimilhança é o produto da função densidade de probabilidade de cada observação, dada por:

$$L(\theta | t) = \prod_{i=1}^n f(t_i; \theta) \quad (4.1)$$

A função de verossimilhança para dados com censura aleatória é dada por:

$$L(\theta | t, \delta) = \prod_{i=1}^n [h(t_i; \theta)]^{\delta_i} S(t_i; \theta) \quad (4.2)$$

4.1.1 Função de Verossimilhança

Seja $t = (t_1, \dots, t_n)$ uma amostra aleatória provenientes de uma distribuição WMG e a variável indicadora de censura δ_i , $\delta_i = 1$ se t_i é observado ou $\delta_i = 0$ se t_i é censurado. A função de verossimilhança pode ser descrita na forma:

$$L(\Theta | t, \delta) = \prod_{i=1}^n \left\{ \frac{\beta [1 - \exp \{-u_i\}]^\beta (\theta + t_i \lambda) t_i^{\theta-1} e^{\lambda t_i}}{\alpha v_i \{1 - [1 - \exp \{-u_i\}]^\beta\}} \right\}^{\delta_i} \quad (4.3)$$

$$\times \left\{ 1 - [1 - \exp \{-u_i\}]^\beta \right\} \quad (4.4)$$

em que $u_i = \left[\frac{t_i^\theta \exp\{\lambda t_i\}}{a} \right]$, $v_i = \exp \left\{ \frac{t_i^\theta \exp\{\lambda t_i\}}{\alpha} \right\} - 1$ e $\Theta = (\alpha, \beta, \theta, \lambda)$. Aplicando-se o logaritmo em 4.4, obtém-se a função de log-verossimilhança dada por:

$$\begin{aligned} l(\Theta | t, \delta) &= \sum_{i=1}^n \delta_i [\lambda t_i - \log(v_i) - (1 - \theta) \log(t_i)] \\ &+ \sum_{i=1}^n \delta_i [\log(\theta + \lambda t_i) - \log(\alpha) + \log(\beta) + \beta u_i] \\ &+ \sum_{i=1}^n \log \left\{ \left[e^{u_i} - v_i^\beta \right]^{-\delta_i} \left[e^{-u_i} v_i^{\delta_i \beta} - w_i^{\beta(\delta_i+1)} \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.5)$$

em que $w_i = 1 - \exp \left\{ -\frac{t_i^\theta \exp\{\lambda t_i\}}{\alpha} \right\}$.

4.1.2 Estimadores de Máxima Verossimilhança

Os estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros Θ são obtidos resolvendo o seguinte sistema de equações não lineares:

$$\begin{aligned} \frac{\partial l}{\partial \alpha} &= \sum_{i=1}^n -\frac{\delta_i}{\alpha} - \frac{\delta_i w_i^\beta \beta t_i^\theta \exp\{\lambda t_i - u_i\}}{\alpha^2 w_i (1 - w_i^\beta)} + \frac{\delta_i t_i^\theta \exp\{\lambda t_i + u_i\}}{\alpha^2 v_i} \\ &+ \sum_{i=1}^n \frac{\beta t_i^\theta \exp\{\lambda t_i - u_i\}}{\alpha^2 w_i [w_i^{\delta_i \beta} - w_i^{\beta(\delta_i+1)}]} \left[-w_i^{\delta_i \beta} \delta_i + w_i^{\beta(\delta_i+1)} (\delta_i + 1) \right] = 0 \\ \frac{\partial l}{\partial \beta} &= \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\beta} + \frac{\delta_i w_i^\beta \log(w_i)}{1 - w_i^\beta} + \frac{\log(w_i) [w_i^{\delta_i \beta} \delta_i - w_i^{\beta(\delta_i+1)} (\delta_i + 1)]}{w_i^{\delta_i \beta} - w_i^{\beta(\delta_i+1)}} = 0 \\ \frac{\partial l}{\partial \theta} &= \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i (w_i)^\beta \beta t_i^\theta \log(t_i) \exp\{\lambda t_i + u_i\}}{\alpha w_i (-1 + w_i^\beta)} + \delta_i \log(t_i) \\ &+ \sum_{i=1}^n \frac{\beta t_i^\theta \exp\{\lambda t_i - u_i\} [-(\delta_i + 1) w_i^{\beta(\delta_i+1)} + w_i^{\delta_i \beta} \delta_i] \log(t_i)}{\alpha w_i [w_i^{\delta_i \beta} - w_i^{\beta(\delta_i+1)}]} \\ &+ \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\theta + \lambda t_i} - \frac{\delta t_i^\theta \log(t_i) \exp\{\lambda t_i + u_i\}}{\alpha v_i} = 0 \\ \frac{\partial l}{\partial \lambda} &= \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\theta + \lambda t_i} + \frac{\delta_i w_i^\beta \beta t_i^\theta t \exp\{\lambda t_i - u_i\}}{\alpha w_i (-1 + (w_i)^\beta)} - \frac{\delta_i t^\theta t \exp\{\lambda t + u_i\}}{\alpha v_i} \\ &+ \sum_{i=1}^n \delta_i t_i - \frac{t_i \exp\{\lambda t_i - u_i\} \beta t_i^\theta [-(\delta_i + 1) w_i^{\beta(\delta_i+1)} + w_i^{\delta_i \beta} \delta_i]}{-\alpha w_i (w_i^{\delta_i \beta} - w_i^{\beta(\delta_i+1)})} = 0 \end{aligned}$$

As estimativas de máxima verossimilhança podem ser obtidas facilmente por meio

dos procedimentos *nlmixed* ou *nlp* do software SAS, ou ainda, pelo software R através de diversos pacotes implementados, dentre eles, o pacote *maxLik*, quando especifica-se a função log-verossimilhança. O mesmo é válido para qualquer função densidade de probabilidade em que não seja possível à obtenção dos estimadores de máxima verossimilhança analiticamente.

4.1.2.1 Intervalos de Confiança

Considerando que o tamanho da amostra n seja suficientemente grande e que as condições de normalidade sejam satisfeitas, pode-se obter os intervalos de confiança assintóticos $100 \times (1 - \gamma)\%$ dos estimadores de máxima verossimilhança (GHITANY; MALLER, 1992).

$$IC(\alpha)_{[1-\gamma]} = \hat{\alpha} \pm z_{\gamma/2} \sqrt{\text{var}(\hat{\alpha})} \quad (4.6)$$

$$IC(\beta)_{[1-\gamma]} = \hat{\beta} \pm z_{\gamma/2} \sqrt{\text{var}(\hat{\beta})} \quad (4.7)$$

$$IC(\theta)_{[1-\gamma]} = \hat{\theta} \pm z_{\gamma/2} \sqrt{\text{var}(\hat{\theta})} \quad (4.8)$$

$$IC(\lambda)_{[1-\gamma]} = \hat{\lambda} \pm z_{\gamma/2} \sqrt{\text{var}(\hat{\lambda})} \quad (4.9)$$

em que $z_{\gamma/2}$ é o $\gamma/2$ -ésimo percentil da distribuição normal padrão e as estimativas das variâncias $\text{var}(\hat{\alpha})$, $\text{var}(\hat{\beta})$, $\text{var}(\hat{\theta})$ e $\text{var}(\hat{\lambda})$ podem ser obtidas através do inverso da matriz de informação observada $I^{-1}(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\theta}, \hat{\lambda})$.

4.1.2.2 Matriz de Informação Observada

Quando não se consegue obter a matriz de informação de Fisher, na prática, utiliza-se a matriz de informação observada $I(\Theta)$ dada por:

$$I(\Theta) = \begin{pmatrix} I_{\alpha\alpha} & I_{\alpha\beta} & I_{\alpha\theta} & I_{\alpha\lambda} \\ \cdot & I_{\beta\beta} & I_{\beta\theta} & I_{\beta\lambda} \\ \cdot & \cdot & I_{\theta\theta} & I_{\theta\lambda} \\ \cdot & \cdot & \cdot & I_{\lambda\lambda} \end{pmatrix}$$

em que os elementos da matriz de informação observada são dados no Apêndice A..

Desta forma, define-se o inverso da matriz de informação observada por:

$$I^{-1}(\hat{\Theta}) = \begin{pmatrix} \text{var}(\hat{\alpha}) & \text{cov}(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) & \text{cov}(\hat{\alpha}, \hat{\theta}) & \text{cov}(\hat{\alpha}, \hat{\lambda}) \\ \text{cov}(\hat{\beta}, \hat{\alpha}) & \text{var}(\hat{\beta}) & \text{cov}(\hat{\beta}, \hat{\theta}) & \text{cov}(\hat{\beta}, \hat{\lambda}) \\ \text{cov}(\hat{\theta}, \hat{\alpha}) & \text{cov}(\hat{\theta}, \hat{\beta}) & \text{var}(\hat{\theta}) & \text{cov}(\hat{\theta}, \hat{\lambda}) \\ \text{cov}(\hat{\lambda}, \hat{\alpha}) & \text{cov}(\hat{\lambda}, \hat{\beta}) & \text{cov}(\hat{\lambda}, \hat{\theta}) & \text{var}(\hat{\lambda}) \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

4.2 Estimação Bayesiana

Nesta seção, os modelos propostos são abordados sob o ponto de vista Bayesiano para estimar os parâmetros de interesse. A inferência Bayesiana é uma alternativa para a estimação dos parâmetros do modelo proposto. Sua aceitação e aplicação vêm aumentando devido aos avanços computacionais. Este método pode ser utilizado para resolver uma variedade de problemas complexos.

4.2.1 Distribuições a Priori

Na análise Bayesiana é necessária a especificação de uma distribuição a priori representando o conhecimento sobre a distribuição de Θ , antes da realização do experimento.

Na distribuição WMG, foram consideradas as distribuições a priori uniforme, gama e regra de Jeffreys para representar a ausência de informação a respeito do comportamento dos parâmetros.

4.2.2 Distribuição a Posteriori

Definida a distribuição a priori para o parâmetro Θ e, utilizando o teorema de Bayes, a distribuição a posteriori considerando dados censurados é definida por:

$$p(\Theta | t, \delta) \propto L(\Theta | t, \delta) \pi(\Theta) \quad (4.11)$$

em que $L(\Theta | t, \delta)$ é definida em (4.4) e o simbolo $\propto$ denota proporcionalidade. Pode-se dizer que a distribuição a posteriori é proporcional à multiplicação da distribuição a posteriori com a função de verossimilhança.

4.2.2.1 Densidade a Posteriori com Priori Uniforme

Utilizando a distribuição a priori uniforme definida em 2.14 para Θ considerando $k=1$ e assumindo independência entre os parâmetros, a densidade a posteriori para a distribuição WMG é dada por:

$$p(\Theta | t, \delta) \propto \prod_{i=1}^n \left[-\frac{\beta \exp\{\lambda t_i\} w_i^\beta (t_i^{\theta-1} \theta + t_i^\theta \lambda)}{\alpha v_i x_i} \right]^{\delta_i} (1 - w_i^\beta). \quad (4.12)$$

Observe que, neste caso, a função densidade da distribuição a posteriori conjunta é proporcional à função de verossimilhança.

4.2.2.2 Densidade a Posteriori com Priori Gama

Considerando a distribuição a priori gama e assumindo independência entre os parâmetros de Θ , tem-se que a distribuição a priori conjunta é dada por:

$$\pi(\Theta) = \frac{b_1^{a_1}}{\Gamma(a_1)} \frac{b_2^{a_2}}{\Gamma(a_2)} \frac{b_3^{a_3}}{\Gamma(a_3)} \frac{b_4^{a_4}}{\Gamma(a_4)} \alpha^{a_1-1} \beta^{a_2-1} \theta^{a_3-1} \lambda^{a_4-1} \exp\{-b_1 \alpha - b_2 \beta - b_3 \theta - b_4 \lambda\} \quad (4.13)$$

sendo o par de valores (a_i, b_i) com $i = 1, \dots, 4$ os hiper-parâmetros das distribuições gama.

Como $\frac{b_1^{a_1}}{\Gamma(a_1)} \frac{b_2^{a_2}}{\Gamma(a_2)} \frac{b_3^{a_3}}{\Gamma(a_3)} \frac{b_4^{a_4}}{\Gamma(a_4)}$ é apenas uma constante normalizadora, pode-se então definir a distribuição a priori conjunta como sendo:

$$\pi(\Theta) \propto \alpha^{a_1-1} \beta^{a_2-1} \theta^{a_3-1} \lambda^{a_4-1} \exp\{-b_1 \alpha - b_2 \beta - b_3 \theta - b_4 \lambda\} \quad (4.14)$$

e, tem-se então que a distribuição a posteriori é dada por:

$$\begin{aligned} p(\Theta | t, \delta) &\propto \alpha^{a_1-1} \beta^{a_2-1} \theta^{a_3-1} \lambda^{a_4-1} \exp\{-b_1 \alpha - b_2 \beta - b_3 \theta - b_4 \lambda\} \\ &\times \prod_{i=1}^n \left[-\frac{\beta \exp\{\lambda t_i\} w_i^\beta (t_i^{\theta-1} \theta + t_i^\theta \lambda)}{\alpha v_i x_i} \right]^{\delta_i} (1 - w_i^\beta) \end{aligned} \quad (4.15)$$

4.2.2.3 Densidade a Posteriori com Priori "Regra" de Jeffreys

Utilizando-se como distribuição a priori a regra de Jeffrey's para Θ e assumindo independência entre os parâmetros, a distribuição a priori é dada por:

$$\pi(\Theta) = \frac{1}{\alpha\beta\theta\lambda} \quad (4.16)$$

e, assim, tem-se a densidade a posteriori dada por:

$$p(\Theta | t, \delta) \propto \frac{1}{\alpha\beta\theta\lambda} \prod_{i=1}^n \left[-\frac{\beta \exp\{\lambda t_i\} w_i^\beta (t_i^{\theta-1}\theta + t_i^\theta \lambda)}{\alpha v_i x_i} \right]^{\delta_i} (1 - w_i^\beta). \quad (4.17)$$

4.2.3 Método de Monte Carlo via Cadeias de Markov (MCMC)

Devido às dificuldades operacionais em encontrar a expressão analítica para as distribuições marginais a posteriori, tais como, o estimador de Bayes e intervalos de credibilidade, são utilizados procedimentos numéricos.

Portanto, os cálculos das estimativas pelo método Bayesiano são realizados através do método MCMC para obter amostras dos valores de Θ a partir da posteriori conjunta. As estimativas foram obtidas a partir das amostras geradas. A implementação do algoritmo MCMC para a posteriori da distribuição WMG, pode ser descrito pelos seguintes passos.

1. Escolher os valores iniciais de $\Theta = (\alpha_0, \beta_0, \theta_0, \lambda_0)$.
2. Gerar um novo valor α_{i+1} de uma distribuição proposta $G(a_1, b_1)$.
3. Calcular a probabilidade de aceitação dada por:

$$\Omega(\alpha_i, \alpha_{i+1}) = \min \left(1, \frac{G(\alpha_i, a_1, b_1) p(\alpha_{i+1}, \beta_i, \theta_i, \lambda_i | t, \delta)}{G(\alpha_{i+1}, a_1, b_1) p(\alpha_i, \beta_i, \theta_i, \lambda_i | t, \delta)} \right)$$

e gerar $u \sim U(0, 1)$.

4. Se $\Omega(\alpha_i, \alpha_{i+1}) < u$ então $\alpha_{i+1} = \alpha_{i+1}$ caso contrário $\alpha_{i+1} = \alpha_i$.
5. Gerar um novo valor β_{i+1} de uma distribuição proposta $G(a_2, b_2)$.
6. Calcular a probabilidade de aceitação dada por:

$$\Omega(\beta_i, \beta_{i+1}) = \min \left(1, \frac{G(\beta_i, a_2, b_2) p(\alpha_{i+1}, \beta_{i+1}, \theta_i, \lambda_i | t, \delta)}{G(\beta_{i+1}, a_2, b_2) p(\alpha_{i+1}, \beta_i, \theta_i, \lambda_i | t, \delta)} \right)$$

e gerar $u \sim U(0, 1)$.

7. Se $\Omega(\beta_i, \beta_{i+1}) < u$ então $\beta_{i+1} = \beta_{i+1}$ caso contrário $\beta_{i+1} = \beta_i$.

8. Gerar um novo valor θ_{i+1} de uma distribuição proposta $G(a_3, b_3)$.

9. Calcular a probabilidade de aceitação dada por:

$$\Omega(\theta_i, \theta_{i+1}) = \min \left(1, \frac{G(\theta_i, a_3, b_3) p(\alpha_{i+1}, \beta_{i+1}, \theta_{i+1}, \lambda_i | t, \delta)}{G(\theta_{i+1}, a_3, b_3) p(\alpha_{i+1}, \beta_{i+1}, \theta_i, \lambda_i | t, \delta)} \right)$$

e gerar $u \sim U(0, 1)$.

10. Se $\Omega(\theta_i, \theta_{i+1}) < u$ então $\theta_{i+1} = \theta_{i+1}$ caso contrário $\theta_{i+1} = \theta_i$.

11. Gerar um novo valor θ_{i+1} de uma distribuição proposta $G(a_4, b_4)$.

12. Calcular a probabilidade de aceitação dada por:

$$\Omega(\lambda_i, \lambda_{i+1}) = \min \left(1, \frac{G(\lambda_i, a_4, b_4) p(\alpha_{i+1}, \beta_{i+1}, \theta_{i+1}, \lambda_{i+1} | t, \delta)}{G(\lambda_{i+1}, a_4, b_4) p(\alpha_{i+1}, \beta_{i+1}, \theta_{i+1}, \lambda_i | t, \delta)} \right)$$

e gerar $u \sim U(0, 1)$.

13. Se $\Omega(\lambda_i, \lambda_{i+1}) < u$ então $\lambda_{i+1} = \lambda_{i+1}$ caso contrário $\lambda_{i+1} = \lambda_i$.

14. Incrementar o contador i para $i+1$ e voltar para o passo 2.

Os pares de parâmetros das distribuições propostas (a_1, b_1) , (a_2, b_2) , (a_3, b_3) e (a_4, b_4) não dependem do estado da cadeia e foram escolhidos a fim de obter uma mistura entre elas, que é denominado de cadeias de Markov independentes (TIERNEY, 1994).

Detalhes na construções do MCMC, podem ser encontrados em Gelfand e Smith (1990), Smith e Roberts (1993), Gilks, Thomas e Spiegelhalter (1993).

Para o diagnóstico de convergência foi utilizado o critério de Geweke (2007).

5 *Estudos de Simulação*

Nesta seção, foram realizados estudos de simulação avaliando o desempenho dos estimadores clássicos e Bayesianos, considerando-se diversos valores para os parâmetros, diferentes tamanhos amostrais e diferentes níveis de censura.

Estes estudos permitiram obter conclusões sobre os ajustes dos modelos bem como verificar a qualidade dos ajustes. As comparações entre os métodos foram realizadas através das probabilidades de cobertura, erros quadráticos médios e para a verificação do desempenho desses estimadores, foram calculadas as médias e os desvios padrões dos parâmetros.

Para verificar as probabilidades de cobertura, construíram-se os intervalos de confiança para o EMV e o intervalo de credibilidade para o MCMC. Em seguida, compararam-se as frequências dos intervalos que cobriram os verdadeiros valores de Θ . Para um número grande de experimentos repetidos de mesmo tamanho, e um nível de confiança de 95%, a frequência de cobertura nominal deve ser próxima de 95%.

Foram calculados os erros quadráticos médios (EQM) para mensurar os erros cometidos pelos estimadores nas quantidades a serem estimadas. Assim, valores próximos de zero são indicativos de melhor ajuste.

Todos os resultados obtidos das simulações e apresentados nas Tabelas 1-48 foram separados em quatro subseções, de acordo com a forma de risco considerada, sendo que cada tabela apresentam diferentes níveis de censura para diferentes distribuições a priori. Na seção 5.6, foram realizadas as discussões sobre os resultados apresentados.

5.1 Procedimentos Para Simulação

Nesta primeira seção, as simulações foram realizadas a fim de avaliar as probabilidades de cobertura. As gerações de dados provenientes da distribuição WMG, foram obtidas através da solução da equação 3.13 com a utilização do software *R*.

Os procedimentos para avaliar as probabilidades de cobertura foram:

- Os valores de $\Theta = (\alpha, \beta, \theta, \lambda)$ foram selecionados de forma que apresentassem funções de risco crescente, decrescente, unimodal e em forma de banheira.
- Foram consideradas as seguintes porcentagens de censura: 0%, 10%, 20% e 30%.
- Os tamanhos das amostras consideradas foram: $n = 10, 30, 50$ e 100 .
- Nos cálculos das probabilidades de cobertura pelo método clássico, utilizou-se os intervalos de confiança dados pelas equações (4.6), (4.7), (4.8) e (4.9).
- Nos cálculos das probabilidades de cobertura pelo método Bayesiano, utilizou-se uma cadeia de 1000 iterações do MCMC para estimar os quantis das distribuições a posteriori de cada distribuição a priori. Desta forma, tomaram-se os intervalos entre os quantis 2.5% e 97.5% empíricos, como a aproximação dos intervalos de credibilidade de 95%.
- Para a distribuição a priori gama foram considerados os hiperparâmetros $a = 0, 1$ e $b = 0, 1$
- Os EQM para α, β, θ e λ foram obtidos pelas equações dadas por:

$$EQM(\alpha) = \frac{\sum_{i=1}^{1000} (\hat{\alpha}_i - \alpha_v)^2}{1000}$$

$$EQM(\beta) = \frac{\sum_{i=1}^{1000} (\hat{\beta}_i - \beta_v)^2}{1000}$$

$$EQM(\theta) = \frac{\sum_{i=1}^{1000} (\hat{\theta}_i - \theta_v)^2}{1000}$$

$$EQM(\lambda) = \frac{\sum_{i=1}^{1000} (\hat{\lambda}_i - \lambda_v)^2}{1000}$$

em que $\hat{\alpha}_i, \hat{\beta}_i, \hat{\theta}_i$ e $\hat{\lambda}_i$ são cada uma das 1000 estimativas computadas e $\alpha_v, \beta_v, \theta_v$ e λ_v representam os valores verdadeiros.

5.2 Simulações com Função de Risco Crescente

As funções de sobrevivência, densidade, e de risco da distribuição WMG são apresentadas respectivamente na Figura 7, considerando os parâmetros $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $\theta = 1$ e $\lambda = 1$. Analogamente, as Figuras 8 , 9 e 10 apresentam as funções para outros valores de parâmetros.

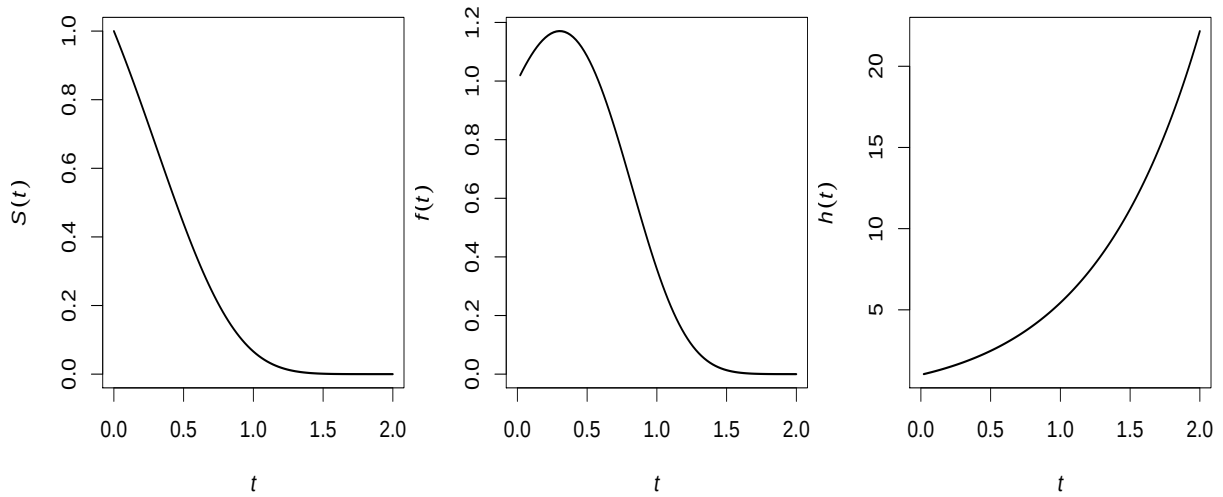


Figura 7: Funções de Sobrevivência, Densidade e de risco da distribuição WMG com $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $\theta = 1$ e $\lambda = 1$.

5.2.1 Probabilidades de Cobertura

Tabela 1: Probabilidades de Cobertura Nominal para um Intervalo de Confiança e de Credibilidade de 95% para α

<i>Censura = 0%</i>					<i>Censura = 10%</i>				
<i>n</i>	EMV	P. Unif	P. Gam	P. Jeff	<i>n</i>	EMV	P. Unif	P. Gam	P. Jeff
10	0,630	0,944	0,993	0,990	10	0,628	0,937	0,989	0,992
30	0,781	0,955	0,995	0,990	30	0,756	0,952	0,989	0,996
50	0,800	0,969	0,989	0,992	50	0,799	0,975	0,988	0,990
100	0,873	0,973	0,996	0,991	100	0,871	0,973	0,992	0,986

<i>Censura = 20%</i>					<i>Censura = 30%</i>				
<i>n</i>	EMV	P. Unif	P. Gam	P. Jeff	<i>n</i>	EMV	P. Unif	P. Gam	P. Jeff
10	0,642	0,927	0,985	0,988	10	0,673	0,944	0,964	0,985
30	0,749	0,966	0,974	0,986	30	0,759	0,960	0,957	0,959
50	0,798	0,972	0,970	0,965	50	0,799	0,978	0,958	0,953
100	0,856	0,977	0,965	0,942	100	0,855	0,973	0,968	0,958

Tabela 2: Probabilidades de Cobertura Nominal para um Intervalo de Confiança e de Credibilidade de 95% para β

<i>Censura = 0%</i>					<i>Censura = 10%</i>				
<i>n</i>	EMV	P. Unif	P. Gam	P. Jeff	<i>n</i>	EMV	P. Unif	P. Gam	P. Jeff
10	0,886	0,972	0,99	0,992	10	0,892	0,944	0,987	0,995
30	0,909	0,972	0,983	0,992	30	0,921	0,966	0,989	0,994
50	0,901	0,979	0,988	0,998	50	0,923	0,982	0,986	0,988
100	0,918	0,973	0,983	0,996	100	0,930	0,974	0,971	0,996

<i>Censura = 20%</i>					<i>Censura = 30%</i>				
<i>n</i>	EMV	P. Unif	P. Gam	P. Jeff	<i>n</i>	EMV	P. Unif	P. Gam	P. Jeff
10	0,903	0,945	0,988	0,996	10	0,904	0,956	0,987	0,995
30	0,935	0,959	0,986	0,991	30	0,957	0,96	0,974	0,994
50	0,945	0,98	0,979	0,994	50	0,956	0,977	0,965	0,996
100	0,951	0,973	0,944	0,997	100	0,960	0,978	0,960	0,993

Tabela 3: Probabilidades de Cobertura Nominal para um Intervalo de Confiança e de Credibilidade de 95% para θ

<i>Censura = 0%</i>					<i>Censura = 10%</i>				
<i>n</i>	EMV	P. Unif	P. Gam	P. Jeff	<i>n</i>	EMV	P. Unif	P. Gam	P. Jeff
10	0,883	0,980	0,994	0,990	10	0,885	0,967	0,986	0,994
30	0,858	0,97	0,989	0,992	30	0,890	0,973	0,989	0,995
50	0,855	0,979	0,991	0,995	50	0,896	0,975	0,983	0,994
100	0,851	0,971	0,988	0,995	100	0,899	0,978	0,97	0,991
<i>Censura = 20%</i>					<i>Censura = 30%</i>				
<i>n</i>	EMV	P. Unif	P. Gam	P. Jeff	<i>n</i>	EMV	P. Unif	P. Gam	P. Jeff
10	0,906	0,967	0,988	0,994	10	0,911	0,969	0,987	0,996
30	0,908	0,970	0,989	0,995	30	0,936	0,971	0,972	0,994
50	0,929	0,978	0,972	0,995	50	0,942	0,971	0,957	0,994
100	0,92	0,979	0,946	0,987	100	0,943	0,983	0,97,6	0,987

Tabela 4: Probabilidades de Cobertura Nominal para um Intervalo de Confiança e de Credibilidade de 95% para λ

<i>Censura = 0%</i>					<i>Censura = 10%</i>				
<i>n</i>	EMV	P. Unif	P. Gam	P. Jeff	<i>n</i>	EMV	P. Unif	P. Gam	P. Jeff
10	0,909	0,958	0,997	0,993	10	0,893	0,951	0,991	0,998
30	0,928	0,967	0,997	0,992	30	0,934	0,963	0,996	0,993
50	0,919	0,969	0,993	0,993	50	0,944	0,982	0,991	0,992
100	0,950	0,979	0,991	0,993	100	0,954	0,988	0,987	0,986
<i>Censura = 20%</i>					<i>Censura = 30%</i>				
<i>n</i>	EMV	P. Unif	P. Gam	P. Jeff	<i>n</i>	EMV	P. Unif	P. Gam	P. Jeff
10	0,901	0,943	0,995	0,991	10	0,915	0,939	0,99	0,987
30	0,930	0,972	0,993	0,975	30	0,932	0,970	0,979	0,968
50	0,943	0,984	0,973	0,957	50	0,945	0,985	0,957	0,910
100	0,950	0,987	0,943	0,957	100	0,953	0,983	0,911	0,904

Pode-se observar através das Tabelas 1-4 que as probabilidades de cobertura obtidas pelos métodos MCMC encontram-se próximos ou acima dos níveis nominais adotados independente da distribuições a priori utilizada. Entretanto, quando aumentam-se as porcentagens de censuras, essas probabilidades diminuem com as distribuições a priori

Gama e Jeffrey, exceto para algumas funções de risco com a priori uniforme que se mantêm constante. Pode-se verificar também que no caso do estimador de MV, as probabilidades de cobertura são influenciadas pelos tamanhos amostrais utilizados, independente das porcentagens de censuras. Constatam-se também um ótimo desempenho da priori de Jeffreys para diferentes tamanhos amostrais e níveis de censuras.

5.2.2 Erros Quadráticos Médio.

Tabela 5: Erros Quadráticos Médio para α

<i>Censura = 0%</i>					<i>Censura = 10%</i>				
<i>n</i>	EMV	P. Unif	P. Gam	P. Jeff	<i>n</i>	EMV	P. Unif	P. Gam	P. Jeff
10	3,2911	2,6436	0,0241	0,1789	10	3,9629	3,0362	0,0274	0,0070
30	1,3283	0,3814	0,0051	0,0490	30	1,5023	0,4226	0,0056	0,0023
50	0,7023	0,0850	0,0022	0,0313	50	0,8345	0,0859	0,0029	0,0017
100	0,2465	0,0380	0,0009	0,0145	100	0,3866	0,0395	0,0011	0,0009
<i>Censura = 20%</i>					<i>Censura = 30%</i>				
<i>n</i>	EMV	P. Unif	P. Gam	P. Jeff	<i>n</i>	EMV	P. Unif	P. Gam	P. Jeff
10	4,2759	3,0784	0,0324	0,0174	10	3,9308	2,9628	0,0367	0,0205
30	1,9199	0,4800	0,0078	0,0076	30	1,9651	0,4853	0,0103	0,0113
50	1,0581	0,0922	0,0043	0,0055	50	1,1149	0,0914	0,0061	0,0086
100	0,4743	0,0365	0,0020	0,0044	100	0,5480	0,0400	0,0029	0,0028

Tabela 6: Erros Quadráticos Médio para β

<i>Censura</i> = 0%					<i>Censura</i> = 10%				
<i>n</i>	EMV	P. Unif	P. Gam	P. Jeff	<i>n</i>	EMV	P. Unif	P. Gam	P. Jeff
10	3,3183	0,5022	0,1646	0,1620	10	2,9691	0,5474	0,1353	0,0065
30	1,2777	0,1925	0,0528	0,0447	30	1,0998	0,1969	0,0440	0,0021
50	1,0130	0,0664	0,0280	0,0241	50	0,8464	0,0606	0,0255	0,0012
100	0,5954	0,0330	0,0141	0,0134	100	0,4722	0,0303	0,0135	0,0007
<i>Censura</i> = 20%					<i>Censura</i> = 30%				
<i>n</i>	EMV	P. Unif	P. Gam	P. Jeff	<i>n</i>	EMV	P. Unif	P. Gam	P. Jeff
10	2,5691	0,4601	0,1522	0,0138	10	2,3357	0,5577	0,1413	0,0139
30	1,0744	0,1691	0,0406	0,0056	30	1,0489	0,1674	0,0423	0,0053
50	0,8011	0,0609	0,0279	0,0030	50	0,7247	0,0658	0,0301	0,0032
100	0,4639	0,0310	0,0168	0,0014	100	0,4215	0,0329	0,0220	0,0017

Tabela 7: Erros Quadráticos Médio para θ

<i>Censura</i> = 0%					<i>Censura</i> = 10%				
<i>n</i>	EMV	P. Unif	P. Gam	P. Jeff	<i>n</i>	EMV	P. Unif	P. Gam	P. Jeff
10	2,3507	2,0702	0,1185	0,2792	10	2,5730	2,5474	0,1598	0,0071
30	1,0657	0,3746	0,0396	0,0688	30	0,7840	0,3997	0,0516	0,0026
50	0,7421	0,0903	0,0220	0,0319	50	0,5061	0,1003	0,0361	0,0015
100	0,4481	0,0460	0,0129	0,0143	100	0,3529	0,0412	0,0223	0,0008
<i>Censura</i> = 20%					<i>Censura</i> = 30%				
<i>n</i>	EMV	P. Unif	P. Gam	P. Jeff	<i>n</i>	EMV	P. Unif	P. Gam	P. Jeff
10	1,7387	2,7684	0,1710	0,0166	10	1,8182	2,5992	0,1934	0,0171
30	0,5602	0,4500	0,0633	0,0059	30	0,4596	0,3879	0,0704	0,0066
50	0,4152	0,1079	0,0497	0,0038	50	0,3466	0,1216	0,0564	0,0041
100	0,2779	0,0436	0,0320	0,0025	100	0,2323	0,0425	0,0372	0,0025

Tabela 8: Erros Quadráticos Médio para λ

<i>Censura = 0%</i>					<i>Censura = 10%</i>				
n	EMV	P. Unif	P. Gam	P. Jeff	n	EMV	P. Unif	P. Gam	P. Jeff
10	1,2670	0,6972	0,0134	0,1239	10	2,1729	1,2380	0,0145	0,0074
30	0,4831	0,1723	0,0033	0,0458	30	0,7888	0,2211	0,0041	0,0027
50	0,3419	0,0649	0,0019	0,0318	50	0,4564	0,0676	0,0026	0,0021
100	0,1857	0,0328	0,0008	0,0146	100	0,2994	0,0341	0,0014	0,0013
<i>Censura = 20%</i>					<i>Censura = 30%</i>				
n	EMV	P. Unif	P. Gam	P. Jeff	n	EMV	P. Unif	P. Gam	P. Jeff
10	2,4946	1,5680	0,0165	0,0189	10	3,7703	2,2292	0,0198	0,0249
30	1,1155	0,3141	0,0055	0,0111	30	1,6182	0,3932	0,0075	0,0152
50	0,7560	0,0784	0,0041	0,0088	50	1,0071	0,0927	0,0052	0,0125
100	0,4402	0,0365	0,0022	0,0064	100	0,6007	0,0397	0,0028	0,0033

Os resultados apresentados nas Tabelas 5-8 indicam que o método de MCMC com priori de Jeffreys apresentaram os menores valores para os EQM, independente dos tamanhos amostrais e porcentagens de censuras, com exceção para alguns valores de λ . Em todos os casos considerados, os EQM diminuem com o aumento dos tamanhos amostrais. Observa-se também que, em geral, os aumentos das porcentagens de censuras influenciam nos aumentos dos EQM.

5.2.3 Média e Desvio-Padrão

Tabela 9: Média e (Desvio-Padrão) para α

<i>Cens</i>	<i>n</i>	EMV	P. Unif	P. Gam	P. Jeff
0%	10	1,2821 (1,7929)	2,3547 (0,8994)	0,9933 (0,1552)	1,1381 (0,3999)
	30	1,1352 (1,1451)	1,3918 (0,4775)	0,9953 (0,0709)	1,0349 (0,2186)
	50	1,0541 (0,8366)	1,1404 (0,2556)	0,9956 (0,0467)	1,0163 (0,1761)
	100	0,9870 (0,4965)	1,0758 (0,1796)	0,9980 (0,0295)	1,0103 (0,1199)
10%	10	1,3718 (1,9566)	2,4706 (0,9349)	0,9568 (0,1598)	0,9824 (0,0820)
	30	1,1586 (1,2159)	1,4451 (0,4740)	0,9666 (0,0673)	0,9818 (0,0440)
	50	1,0925 (0,9092)	1,1675 (0,2406)	0,9756 (0,0476)	0,9825 (0,0373)
	100	1,0574 (0,6194)	1,0868 (0,1787)	0,9802 (0,0268)	0,9823 (0,0250)
20%	10	1,4206 (2,0255)	2,4918 (0,9238)	0,9196 (0,1612)	0,9478 (0,1211)
	30	1,2765 (1,3584)	1,5072 (0,4720)	0,9392 (0,0637)	0,9481 (0,0699)
	50	1,1268 (1,0212)	1,1835 (0,2420)	0,9516 (0,044)	0,9468 (0,0522)
	100	1,0722 (0,6852)	1,0918 (0,1675)	0,9621 (0,0231)	0,9419 (0,0319)
30%	10	1,3823 (1,9463)	2,4498 (0,9281)	0,8744 (0,1447)	0,9181 (0,1174)
	30	1,2768 (1,3748)	1,5285 (0,454)	0,9146 (0,0544)	0,9134 (0,0621)
	50	1,1395 (1,0471)	1,1746 (0,2469)	0,9305 (0,0352)	0,9167 (0,0404)
	100	1,1034 (0,7333)	1,0947 (0,1762)	0,9497 (0,0186)	0,9500 (0,0170)

Tabela 10: Média e (Desvio-Padrão) para β

<i>Cens</i>	<i>n</i>	EMV	P. Unif	P. Gam	P. Jeff
0%	10	2,0933 (1,4577)	1,0411 (0,7078)	1,1711 (0,3679)	1,1167 (0,3854)
	30	1,5750 (0,9736)	1,0544 (0,4356)	1,0755 (0,2170)	1,0357 (0,2084)
	50	1,4447 (0,9033)	1,0299 (0,2561)	1,0408 (0,1622)	1,0278 (0,1529)
	100	1,2874 (0,7164)	1,0102 (0,1813)	1,0200 (0,1169)	1,0131 (0,1148)
10%	10	2,0334 (1,3794)	1,0110 (0,7401)	1,1197 (0,3479)	1,0049 (0,0806)
	30	1,5497 (0,8935)	1,0447 (0,4417)	1,0132 (0,2094)	1,0018 (0,0461)
	50	1,4472 (0,8043)	1,0075 (0,2461)	0,9712 (0,1571)	1,0026 (0,0347)
	100	1,2527 (0,6393)	1,0052 (0,1741)	0,9486 (0,1044)	1,0016 (0,0266)
20%	10	1,9686 (1,2776)	0,9725 (0,6780)	1,1128 (0,3735)	1,0211 (0,1157)
	30	1,5577 (0,8741)	0,9963 (0,4114)	0,9645 (0,1984)	1,0116 (0,0741)
	50	1,4378 (0,7810)	1,0021 (0,2468)	0,9379 (0,1552)	1,0065 (0,0540)
	100	1,3014 (0,6110)	0,9985 (0,1760)	0,9143 (0,0974)	1,0011 (0,0378)
30%	10	1,9206 (1,2204)	1,0263 (0,7467)	1,0904 (0,3650)	1,0203 (0,1159)
	30	1,5759 (0,8472)	0,9964 (0,4093)	0,9314 (0,1939)	1,0111 (0,0718)
	50	1,4570 (0,7185)	1,0001 (0,2566)	0,8973 (0,1400)	1,0049 (0,0560)
	100	1,3050 (0,5733)	1,0005 (0,1815)	0,8795 (0,0865)	0,9893 (0,0397)

Tabela 11: Média e (Desvio-Padrão) para θ

<i>Cens</i>	<i>n</i>	EMV	P. Unif	P. Gam	P. Jeff
0%	10	1,4328 (1,4715)	2,0377 (0,9971)	1,1074 (0,3271)	1,3700 (0,3774)
	30	1,2011 (1,0130)	1,3446 (0,5059)	1,0334 (0,1961)	1,1479 (0,2167)
	50	1,1836 (0,8420)	1,1331 (0,2694)	1,0256 (0,1460)	1,0862 (0,1565)
	100	1,1250 (0,6579)	1,0759 (0,2007)	1,0155 (0,1123)	1,0425 (0,1119)
10%	10	1,4684 (1,5348)	2,1698 (1,0862)	1,2044 (0,3436)	1,0197 (0,0818)
	30	1,1546 (0,8722)	1,3630 (0,5179)	1,1236 (0,1906)	1,0120 (0,0492)
	50	1,0886 (0,7062)	1,1509 (0,2785)	1,1229 (0,1448)	1,0124 (0,0363)
	100	1,0910 (0,5873)	1,0738 (0,1891)	1,1139 (0,0966)	1,0108 (0,0255)
20%	10	1,3749 (1,2647)	2,2275 (1,1237)	1,2338 (0,3411)	1,0519 (0,1179)
	30	1,0871 (0,7437)	1,4061 (0,5341)	1,1828 (0,1729)	1,0384 (0,0665)
	50	1,0800 (0,6396)	1,1607 (0,2865)	1,1743 (0,1388)	1,0374 (0,0492)
	100	1,0287 (0,5266)	1,0851 (0,1907)	1,1598 (0,0803)	1,0347 (0,0363)
30%	10	1,4393 (1,2754)	2,1862 (1,0923)	1,2810 (0,3383)	1,0547 (0,1188)
	30	1,0304 (0,6776)	1,3822 (0,4919)	1,2026 (0,1713)	1,0455 (0,0670)
	50	1,0291 (0,5883)	1,1785 (0,2996)	1,2043 (0,1210)	1,0399 (0,0502)
	100	0,9967 (0,4822)	1,0824 (0,1890)	1,1789 (0,0718)	1,0337 (0,0372)

Tabela 12: Média e (Desvio-Padrão) para λ

<i>Cens</i>	<i>n</i>	EMV	P. Unif	P. Gam	P. Jeff
0%	10	0,9171 (1,1231)	1,5400 (0,6371)	0,9984 (0,1156)	0,9046 (0,3389)
	30	0,9525 (0,6937)	1,1553 (0,3850)	1,0046 (0,0571)	0,9634 (0,2110)
	50	0,9160 (0,5789)	1,0648 (0,2464)	1,0005 (0,0440)	0,9692 (0,1757)
	100	0,9348 (0,4261)	1,0393 (0,1768)	1,0003 (0,0289)	0,9825 (0,1196)
10%	10	0,9904 (1,4747)	1,8140 (0,7588)	1,0336 (0,1158)	1,0275 (0,0817)
	30	0,8984 (0,8827)	1,2504 (0,3981)	1,0335 (0,0548)	1,0276 (0,0444)
	50	0,9372 (0,6729)	1,1074 (0,2369)	1,0290 (0,0424)	1,0290 (0,0347)
	100	0,9697 (0,5465)	1,0621 (0,1739)	1,0256 (0,0264)	1,0287 (0,0221)
20%	10	0,9515 (1,5794)	1,9762 (0,7846)	1,0601 (0,1135)	1,0815 (0,1109)
	30	0,9869 (1,0566)	1,3492 (0,4385)	1,0535 (0,0510)	1,0835 (0,0638)
	50	0,9121 (0,8654)	1,1370 (0,2443)	1,0490 (0,0405)	1,0816 (0,0460)
	100	0,9777 (0,6634)	1,0720 (0,1769)	1,0407 (0,0231)	1,0753 (0,0267)
30%	10	1,0783 (1,9411)	2,2195 (0,8618)	1,0860 (0,1114)	1,1147 (0,1082)
	30	0,9763 (1,2725)	1,4344 (0,4524)	1,0719 (0,0479)	1,1100 (0,0556)
	50	0,9311 (1,0016)	1,167 (0,2546)	1,0629 (0,0347)	1,1045 (0,0399)
	100	0,9887 (0,7753)	1,0814 (0,1818)	1,0494 (0,0196)	1,0549 (0,0169)

Com relação às Tabelas 9-12, os resultam indicam que as médias se aproximam dos valores verdadeiros e os desvios padrões diminuem à medida que os tamanhos amostrais aumentam, como esperado. Essas precisões aumentam conforme as porcentagens de censuras aumentam para o parâmetro θ . Os resultados indicam que o método MCMC com priori de Jeffrey apresentam melhores Desempenho para diferentes tamanhos amostrais e níveis de censuras.

5.3 Simulações com Função de Risco Decrescente

Para simular função de risco decrescente, foram considerados os valores $\alpha = 3$; $\beta = 0,5$; $\theta = 1$ e $\lambda = 0,001$. As formas das funções de sobrevivência, densidade e de risco são apresentadas na Figura 8.

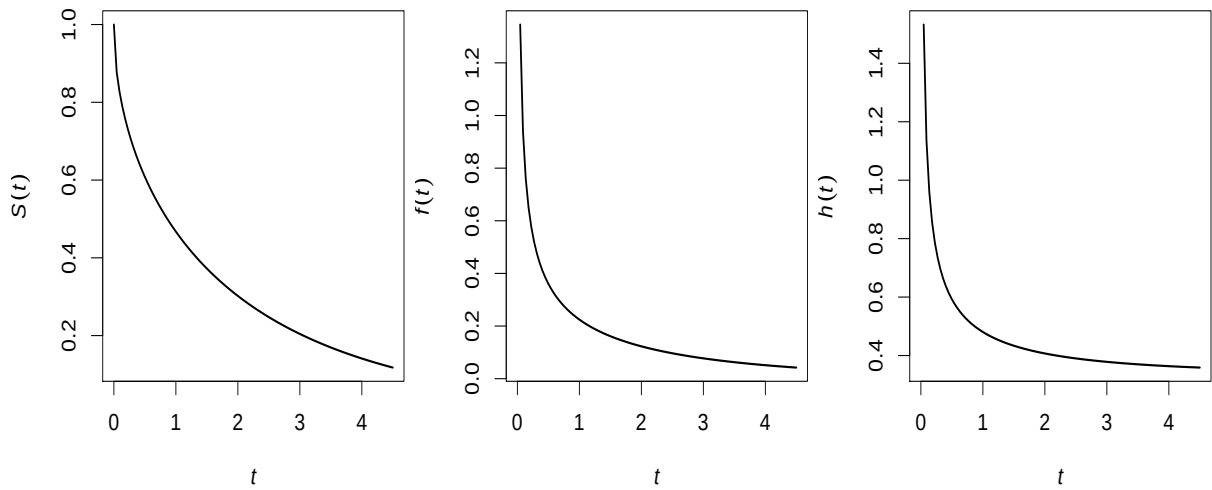


Figura 8: Funções de Sobrevivência, Densidade e de risco da distribuição WMG com $\alpha = 3$; $\beta = 0,5$; $\theta = 1$ e $\lambda = 0,001$.

5.3.1 Probabilidade de Cobertura

Tabela 13: Probabilidades de Cobertura Nominal para um Intervalo de Confiança e de Credibilidade de 95% para α

<i>Censura = 0%</i>					<i>Censura = 10%</i>				
<i>n</i>	EMV	P. Unif	P. Gam	P. Jeff	<i>n</i>	EMV	P. Unif	P. Gam	P. Jeff
10	0,465	0,967	0,991	0,996	10	0,514	0,964	0,979	0,98
30	0,570	0,966	0,971	0,994	30	0,636	0,972	0,988	0,99
50	0,658	0,972	0,969	0,997	50	0,745	0,993	0,995	0,995
100	0,798	0,982	0,977	0,999	100	0,834	0,964	0,964	0,991
<i>Censura = 20%</i>					<i>Censura = 30%</i>				
<i>n</i>	EMV	P. Unif	P. Gam	P. Jeff	<i>n</i>	EMV	P. Unif	P. Gam	P. Jeff
10	0,544	0,960	0,961	0,953	10	0,552	0,952	0,917	0,917
30	0,670	0,977	0,98	0,976	30	0,684	0,985	0,968	0,931
50	0,805	0,992	0,992	0,986	50	0,826	0,994	0,988	0,955
100	0,853	0,967	0,956	0,977	100	0,837	0,968	0,955	0,949

Tabela 14: Probabilidades de Cobertura Nominal para um Intervalo de Confiança e de Credibilidade de 95% para β

<i>Censura = 0%</i>					<i>Censura = 10%</i>				
<i>n</i>	EMV	P. Unif	P. Gam	P. Jeff	<i>n</i>	EMV	P. Unif	P. Gam	P. Jeff
10	0,945	0,973	0,985	0,981	10	0,935	0,967	0,985	0,953
30	0,933	0,973	0,972	0,983	30	0,927	0,971	0,981	0,956
50	0,924	0,976	0,967	0,982	50	0,906	0,971	0,950	0,946
100	0,927	0,97	0,975	0,987	100	0,910	0,963	0,959	0,935
<i>Censura = 20%</i>					<i>Censura = 30%</i>				
<i>n</i>	EMV	P. Unif	P. Gam	P. Jeff	<i>n</i>	EMV	P. Unif	P. Gam	P. Jeff
10	0,915	0,964	0,98	0,954	10	0,877	0,957	0,968	0,949
30	0,912	0,972	0,931	0,940	30	0,931	0,983	0,925	0,936
50	0,914	0,972	0,937	0,940	50	0,924	0,985	0,935	0,902
100	0,888	0,958	0,936	0,915	100	0,910	0,967	0,933	0,865

Tabela 15: Probabilidades de Cobertura Nominal para um Intervalo de Confiança e de Credibilidade de 95% para θ

<i>Censura = 0%</i>					<i>Censura = 10%</i>				
<i>n</i>	EMV	P. Unif	P. Gam	P. Jeff	<i>n</i>	EMV	P. Unif	P. Gam	P. Jeff
10	0,715	0,954	0,989	0,988	10	0,723	0,937	0,978	0,994
30	0,771	0,960	0,970	0,990	30	0,804	0,961	0,942	0,989
50	0,829	0,962	0,958	0,986	50	0,844	0,978	0,960	0,990
100	0,898	0,966	0,969	0,988	100	0,906	0,951	0,966	0,992
<i>Censura = 20%</i>					<i>Censura = 30%</i>				
<i>n</i>	EMV	P. Unif	P. Gam	P. Jeff	<i>n</i>	EMV	P. Unif	P. Gam	P. Jeff
10	0,764	0,925	0,934	0,992	10	0,743	0,928	0,841	0,992
30	0,818	0,961	0,960	0,983	30	0,857	0,964	0,927	0,973
50	0,887	0,967	0,986	0,986	50	0,889	0,972	0,960	0,966
100	0,880	0,950	0,981	0,982	100	0,881	0,955	0,983	0,978

Tabela 16: Probabilidades de Cobertura Nominal para um Intervalo de Confiança e de Credibilidade de 95% para λ

<i>Censura = 0%</i>					<i>Censura = 10%</i>				
<i>n</i>	EMV	P. Unif	P. Gam	P. Jeff	<i>n</i>	EMV	P. Unif	P. Gam	P. Jeff
10	0,897	0,96	0,996	0,991	10	0,865	0,958	0,996	0,972
30	0,912	0,983	0,991	0,992	30	0,903	0,987	0,994	0,984
50	0,899	0,993	0,996	0,996	50	0,892	0,992	0,997	0,985
100	0,913	0,988	0,991	0,993	100	0,907	0,986	0,999	0,984
<i>Censura = 20%</i>					<i>Censura = 30%</i>				
<i>n</i>	EMV	P. Unif	P. Gam	P. Jeff	<i>n</i>	EMV	P. Unif	P. Gam	P. Jeff
10	0,845	0,952	0,995	0,975	10	0,787	0,939	0,996	0,979
30	0,876	0,983	0,995	0,985	30	0,864	0,98	0,992	0,981
50	0,891	0,989	0,991	0,982	50	0,866	0,991	0,996	0,986
100	0,878	0,977	0,995	0,984	100	0,881	0,973	0,997	0,982

Conforme constatado no caso da função de risco crescente, pode-se observar através das Tabelas 13-16 que os métodos MCMC apresentam probabilidades de cobertura próximas ou acima dos níveis nominais adotados, independente das prioris usadas, exceto para o parâmetro β que diminuem com o aumento das porcentagens de censuras. No método de MV, as probabilidades de cobertura aumentam com os aumentos dos tamanhos amostrais.

5.3.2 Erros Quadráticos Médio

Tabela 17: Erros Quadráticos Médio para α

<i>Censura</i> = 0%					<i>Censura</i> = 10%				
<i>n</i>	EMV	P. Unif	P. Gam	P. Jeff	<i>n</i>	EMV	P. Unif	P. Gam	P. Jeff
10	23,1473	20,8107	3,5844	0,6731	10	20,9250	24,3420	5,1726	0,8825
30	5,0120	3,5437	1,4005	0,2540	30	4,4330	4,4455	2,0926	0,1071
50	2,6849	1,8075	0,9043	0,1337	50	2,1333	2,3379	0,0096	0,0360
100	0,9755	0,6566	0,5092	0,0659	100	0,6678	1,3688	0,4770	0,0092
<i>Censura</i> = 20%					<i>Censura</i> = 30%				
<i>n</i>	EMV	P. Unif	P. Gam	P. Jeff	<i>n</i>	EMV	P. Unif	P. Gam	P. Jeff
10	21,3141	27,1409	6,0868	1,0090	10	19,1907	32,8433	6,2781	1,2706
30	4,3068	2,4804	0,0710	0,1577	30	4,9286	2,7343	0,0931	0,2315
50	1,6495	2,3649	0,0109	0,0607	50	1,5236	2,3947	0,0152	0,0890
100	0,4804	1,6663	0,0247	0,0172	100	0,4564	1,9410	0,0207	0,0252

Tabela 18: Erros Quadráticos Médio para β

<i>Censura</i> = 0%					<i>Censura</i> = 10%				
<i>n</i>	EMV	P. Unif	P. Gam	P. Jeff	<i>n</i>	EMV	P. Unif	P. Gam	P. Jeff
10	8,8752	0,0729	0,1731	0,0764	10	5,9552	0,0572	0,1432	0,1110
30	1,0846	0,0215	0,0414	0,0150	30	0,8060	0,0203	0,0242	0,0121
50	0,2101	0,0158	0,0239	0,0082	50	0,1333	0,0109	0,0058	0,0066
100	0,0294	0,0075	0,0096	0,0038	100	0,0208	0,0119	0,0062	0,0028
<i>Censura</i> = 20%					<i>Censura</i> = 30%				
<i>n</i>	EMV	P. Unif	P. Gam	P. Jeff	<i>n</i>	EMV	P. Unif	P. Gam	P. Jeff
10	4,3008	0,0689	0,1147	0,1119	10	2,9035	0,0939	0,0885	0,1245
30	0,6173	0,0212	0,0118	0,0117	30	0,5116	0,0181	0,0107	0,0106
50	0,1095	0,0118	0,0053	0,0060	50	0,0851	0,0129	0,0054	0,0062
100	0,0148	0,0128	0,0030	0,0030	100	0,0118	0,0121	0,0026	0,0034

Tabela 19: Erros Quadráticos Médio para θ

<i>Censura</i> = 0%					<i>Censura</i> = 10%				
n	EMV	P. Unif	P. Gam	P. Jeff	n	EMV	P. Unif	P. Gam	P. Jeff
10	0,5475	0,2601	0,0969	0,0965	10	0,9294	0,3960	0,2331	0,0147
30	0,2327	0,0569	0,0354	0,0201	30	0,2655	0,0851	0,1132	0,0020
50	0,1384	0,0314	0,0245	0,0111	50	0,1416	0,0245	0,0008	0,0007
100	0,0493	0,0139	0,0128	0,0057	100	0,0585	0,0295	0,0295	0,0002
<i>Censura</i> = 20%					<i>Censura</i> = 30%				
n	EMV	P. Unif	P. Gam	P. Jeff	n	EMV	P. Unif	P. Gam	P. Jeff
10	1,2503	0,5913	0,5744	0,0190	10	2,0790	0,7638	1,0567	0,0240
30	0,2957	0,1087	0,0070	0,0031	30	0,2665	0,1419	0,0102	0,0042
50	0,1494	0,0395	0,0012	0,0011	50	0,1544	0,0556	0,0016	0,0016
100	0,0639	0,0445	0,0003	0,0003	100	0,0671	0,0561	0,0002	0,0004

Tabela 20: Erros Quadráticos Médio para λ

<i>Censura</i> = 0%					<i>Censura</i> = 10%				
n	EMV	P. Unif	P. Gam	P. Jeff	n	EMV	P. Unif	P. Gam	P. Jeff
10	0,1104	$> 10^{-4}$	$> 10^{-4}$	$> 10^{-4}$	10	0,2599	$> 10^{-4}$	$> 10^{-4}$	$> 10^{-4}$
30	0,0095	$> 10^{-4}$	$> 10^{-4}$	$> 10^{-4}$	30	0,0278	$> 10^{-4}$	$> 10^{-4}$	$> 10^{-4}$
50	0,0044	$> 10^{-4}$	$> 10^{-4}$	$> 10^{-4}$	50	0,0146	$> 10^{-4}$	$> 10^{-4}$	$> 10^{-4}$
100	0,0018	$> 10^{-4}$	$> 10^{-4}$	$> 10^{-4}$	100	0,0070	$> 10^{-4}$	$> 10^{-4}$	$> 10^{-4}$
<i>Censura</i> = 20%					<i>Censura</i> = 30%				
n	EMV	P. Unif	P. Gam	P. Jeff	n	EMV	P. Unif	P. Gam	P. Jeff
10	0,5768	$> 10^{-4}$	$> 10^{-4}$	$> 10^{-4}$	10	2,2213	$> 10^{-4}$	$> 10^{-4}$	$> 10^{-4}$
30	0,0734	$> 10^{-4}$	$> 10^{-4}$	$> 10^{-4}$	30	0,2135	$> 10^{-4}$	$> 10^{-4}$	$> 10^{-4}$
50	0,0355	$> 10^{-4}$	$> 10^{-4}$	$> 10^{-4}$	50	0,0959	$> 10^{-4}$	$> 10^{-4}$	$> 10^{-4}$
100	0,0185	$> 10^{-4}$	$> 10^{-4}$	$> 10^{-4}$	100	0,0446	$> 10^{-4}$	$> 10^{-4}$	$> 10^{-4}$

As Tabelas 17-20 indicam que o método MCMC com priori de Jeffreys apresentaram os menores valores para os EQM, seguido do MCMC com a priori Gama. Em todos os casos considerados, os EQM diminuem conforme aumentam os tamanhos amostrais.

5.3.3 Média e Desvio-Padrão

Tabela 21: Média e (Desvio-Padrão) para α

<i>Cens</i>	<i>n</i>	EMV	P. Unif	P. Gam	P. Jeff
0%	10	3,5308 (4,7841)	6,7278 (2,6307)	3,5907 (1,7996)	3,1050 (0,8140)
	30	2,1906 (2,0883)	4,2732 (1,3872)	3,1315 (1,1766)	3,0643 (0,5000)
	50	2,2789 (1,4721)	3,7798 (1,0956)	3,0718 (0,9486)	3,0183 (0,3653)
	100	2,5394 (0,8741)	3,3495 (0,7314)	3,0162 (0,7137)	3,0103 (0,2567)
10%	10	3,6295 (4,5331)	7,0955 (2,7524)	3,8741 (2,1006)	2,8836 (0,9326)
	30	2,2565 (1,9708)	4,5391 (1,4417)	3,7005 (1,2662)	2,836 (0,2833)
	50	2,4568 (1,3564)	3,2151 (0,5403)	2,9625 (0,0903)	2,8869 (0,1523)
	100	2,6504 (0,7389)	3,6087 (0,9996)	3,1427 (0,6760)	2,9362 (0,0720)
20%	10	3,762 (4,5556)	7,3780 (2,8251)	3,9901 (2,2608)	2,6008 (0,9222)
	30	2,3511 (1,9722)	4,0892 (1,1380)	2,8170 (0,1936)	2,6989 (0,2591)
	50	2,433 (1,153)	3,2619 (0,5445)	2,9309 (0,0786)	2,7946 (0,1364)
	100	2,6895 (0,6199)	3,7721 (1,0349)	2,8641 (0,0793)	2,8852 (0,0631)
30%	10	3,8964 (4,2901)	7,7778 (3,1663)	3,6979 (2,4076)	2,2855 (0,8722)
	30	2,5036 (2,1649)	4,1804 (1,1585)	2,7464 (0,1697)	2,5702 (0,2164)
	50	2,5187 (1,1372)	3,2653 (0,5697)	2,9036 (0,0771)	2,7230 (0,1110)
	100	2,7333 (0,621)	3,9242 (1,0430)	2,8692 (0,0604)	2,8512 (0,0555)

Tabela 22: Média e (Desvio-Padrão) para β

<i>Cens</i>	<i>n</i>	EMV	P. Unif	P. Gam	P. Jeff
0%	10	2,3419 (2,3426)	0,5667 (0,2618)	0,7810 (0,3069)	0,6503 (0,2321)
	30	1,2208 (0,752)	0,5223 (0,1450)	0,6171 (0,1663)	0,5435 (0,1145)
	50	0,8263 (0,322)	0,5256 (0,1231)	0,5830 (0,1303)	0,5227 (0,0879)
	100	0,6134 (0,1285)	0,5150 (0,0851)	0,5428 (0,0882)	0,5076 (0,0613)
10%	10	2,0228 (1,9078)	0,5272 (0,2378)	0,7026 (0,3196)	0,6520 (0,2966)
	30	1,1152 (0,6541)	0,5080 (0,1424)	0,5210 (0,1541)	0,5273 (0,1066)
	50	0,7432 (0,2723)	0,5291 (0,1004)	0,5100 (0,0754)	0,5134 (0,0799)
	100	0,5816 (0,1189)	0,5130 (0,1082)	0,4892 (0,0780)	0,4987 (0,0533)
20%	10	1,7534 (1,6529)	0,5290 (0,2609)	0,6352 (0,3106)	0,6577 (0,2951)
	30	1,0365 (0,5742)	0,5203 (0,1443)	0,5174 (0,1071)	0,5202 (0,1065)
	50	0,7203 (0,2469)	0,5236 (0,1058)	0,4995 (0,0726)	0,5052 (0,0776)
	100	0,5604 (0,1055)	0,5036 (0,1130)	0,5042 (0,0545)	0,4922 (0,0540)
30%	10	1,5035 (1,3777)	0,5201 (0,3059)	0,5641 (0,2905)	0,6537 (0,3176)
	30	0,9817 (0,5289)	0,5045 (0,1346)	0,4933 (0,1033)	0,5067 (0,1029)
	50	0,6842 (0,2263)	0,5245 (0,1109)	0,4843 (0,0717)	0,4890 (0,0781)
	100	0,5469 (0,098)	0,4959 (0,1098)	0,4905 (0,0497)	0,4779 (0,0542)

Tabela 23: Média e (Desvio-Padrão) para θ

<i>Cens</i>	<i>n</i>	EMV	P. Unif	P. Gam	P. Jeff
0%	10	0,6565 (0,6557)	1,3454 (0,3753)	1,0205 (0,3108)	1,0689 (0,3030)
	30	0,6655 (0,3477)	1,1167 (0,2080)	0,9745 (0,1866)	1,0052 (0,1416)
	50	0,7629 (0,2868)	1,0701 (0,1628)	0,9814 (0,1555)	0,9994 (0,1055)
	100	0,8803 (0,1872)	1,0308 (0,1138)	0,9864 (0,1125)	0,9991 (0,0755)
10%	10	0,7328 (0,9267)	1,4518 (0,4381)	1,2442 (0,4167)	1,0429 (0,1135)
	30	0,7055 (0,423)	1,1732 (0,2347)	1,2293 (0,2463)	1,0282 (0,0344)
	50	0,8311 (0,3364)	1,0446 (0,1500)	1,0172 (0,0213)	1,0178 (0,0196)
	100	0,929 (0,2312)	1,0612 (0,1606)	1,1449 (0,0920)	1,0097 (0,0094)
20%	10	0,8652 (1,1105)	1,5737 (0,5121)	1,5514 (0,5201)	1,0836 (0,1096)
	30	0,7469 (0,4815)	1,1843 (0,2734)	1,0719 (0,0428)	1,0453 (0,0320)
	50	0,8447 (0,3541)	1,0725 (0,1851)	1,0288 (0,0180)	1,0291 (0,0165)
	100	0,966 (0,2505)	1,1026 (0,1844)	1,0143 (0,0091)	1,0154 (0,0084)
30%	10	1,071 (1,4408)	1,6781 (0,5515)	1,8780 (0,5348)	1,1158 (0,1028)
	30	0,7494 (0,4516)	1,2349 (0,2945)	1,0942 (0,0364)	1,0580 (0,0287)
	50	0,8855 (0,376)	1,0958 (0,2154)	1,0361 (0,0180)	1,0365 (0,0158)
	100	0,9927 (0,259)	1,1260 (0,2004)	1,0121 (0,0071)	1,0186 (0,0074)

Tabela 24: Média e (Desvio-Padrão) para λ

<i>Cens</i>	<i>n</i>	EMV	P. Unif	P. Gam	P. Jeff
0%	10	0,1667 (0,2881)	0,0040 (0,0014)	0,0013 (0,001)	0,0010 (3e-04)
	30	0,0587 (0,0783)	0,0021 (6e-04)	0,0011 (6e-04)	0,0010 (1e-04)
	50	0,0396 (0,0543)	0,0016 (4e-04)	0,001 (4e-04)	9e-04 (1e-04)
	100	0,0202 (0,0373)	0,0013 (3e-04)	0,001 (3e-04)	9e-04 (1e-04)
10%	10	0,2457 (0,4473)	0,0041 (0,0014)	0,0013 (0,001)	9e-04 (9e-04)
	30	0,074 (0,15)	0,0022 (6e-04)	0,0011 (6e-04)	0,001 (8e-04)
	50	0,0415 (0,114)	0,0014 (3e-04)	0,0010 (2e-04)	0,0011 (8e-04)
	100	0,0166 (0,0823)	0,0024 (7e-04)	0,0012 (6e-04)	0,0012 (8e-04)
20%	10	0,3308 (0,6844)	0,0044 (0,0015)	0,0014 (0,0012)	9e-04 (9e-04)
	30	0,0994 (0,2526)	0,0025 (8e-04)	0,001 (5e-04)	0,0010 (0,001)
	50	0,0545 (0,1806)	0,0014 (3e-04)	0,001 (2e-04)	0,0011 (9e-04)
	100	0,007 (0,1357)	0,0026 (8e-04)	0,0052 (0,0046)	0,0012 (8e-04)
30%	10	0,6094 (1,3612)	0,0047 (0,0017)	0,0014 (0,0012)	9e-04 (8e-04)
	30	0,1754 (0,428)	0,0027 (9e-04)	0,0011 (5e-04)	0,001 (9e-04)
	50	0,067 (0,3027)	0,0014 (3e-04)	0,001 (2e-04)	0,0011 (9e-04)
	100	0,0044 (0,2113)	0,0027 (8e-04)	0,0054 (0,0044)	0,0012 (9e-04)

Com relação às Tabelas 21-24, os resultados indicam que as médias se aproximam dos valores verdadeiros e o vício diminui, conforme os tamanhos amostrais aumentam, como esperado.

5.4 Simulações com Função de Risco Unimodal

Para obter a função de risco unimodal foram considerados os valores $\alpha = 0, 2$; $\beta = 8$; $\theta = 0, 5$ e $\lambda = 0, 01$. As formas das funções de sobrevivência, densidade e de risco são apresentadas na Figura 9.

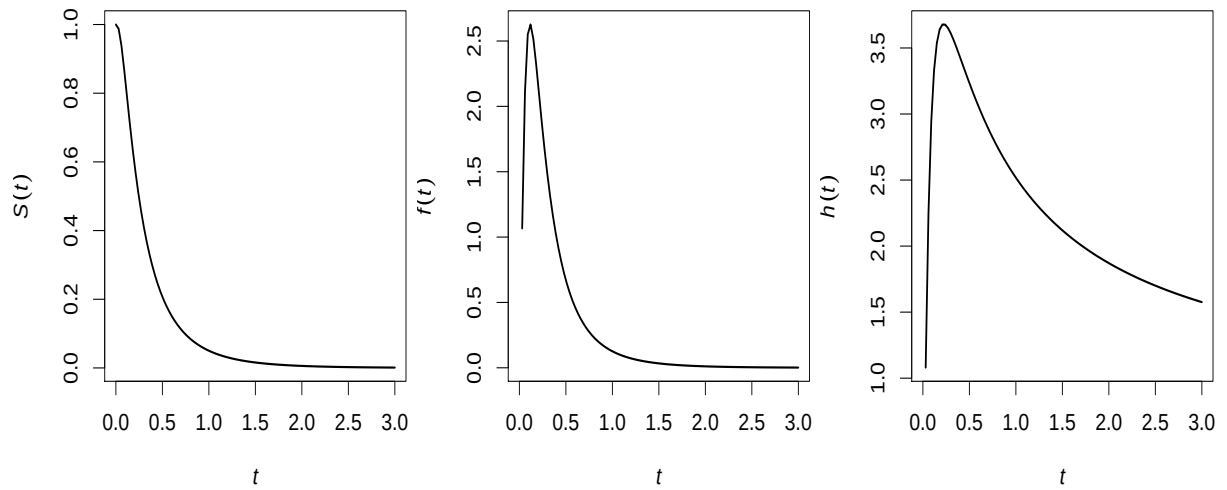


Figura 9: Funções de Sobrevivência, Densidade e de risco da distribuição WMG com $\alpha = 0,2$; $\beta = 8$; $\theta = 0,5$ e $\lambda = 0,01$.

5.4.1 Probabilidades de Cobertura

Tabela 25: Probabilidades de Cobertura Nominal para um Intervalo de Confiança e de Credibilidade de 95% para α

<i>Censura = 0%</i>					<i>Censura = 10%</i>				
<i>n</i>	EMV	P. Unif	P. Gam	P. Jeff	<i>n</i>	EMV	P. Unif	P. Gam	P. Jeff
10	0,927	0,937	0,995	0,960	10	0,925	0,933	0,988	0,972
30	0,929	0,945	0,987	0,957	30	0,931	0,944	0,981	0,987
50	0,935	0,952	0,984	0,969	50	0,950	0,956	0,98	0,990
100	0,929	0,955	0,997	0,960	100	0,931	0,946	0,989	0,984
<i>Censura = 20%</i>					<i>Censura = 30%</i>				
<i>n</i>	EMV	P. Unif	P. Gam	P. Jeff	<i>n</i>	EMV	P. Unif	P. Gam	P. Jeff
10	0,906	0,942	0,985	0,943	10	0,911	0,946	0,986	0,893
30	0,939	0,941	0,957	0,962	30	0,933	0,934	0,914	0,901
50	0,935	0,963	0,946	0,969	50	0,931	0,944	0,934	0,919
100	0,935	0,937	0,965	0,968	100	0,944	0,942	0,939	0,932

Tabela 26: Probabilidades de Cobertura Nominal para um Intervalo de Confiança e de Credibilidade de 95% para β

<i>Censura = 0%</i>					<i>Censura = 10%</i>				
<i>n</i>	EMV	P. Unif	P. Gam	P. Jeff	<i>n</i>	EMV	P. Unif	P. Gam	P. Jeff
10	0,949	0,994	0,993	0,996	10	0,924	0,995	0,994	0,988
30	0,928	0,988	0,989	0,996	30	0,934	0,994	0,981	0,988
50	0,982	0,991	0,992	0,993	50	0,939	0,99	0,973	0,982
100	0,994	0,979	0,988	0,998	100	0,949	0,995	0,993	0,968
<i>Censura = 20%</i>					<i>Censura = 30%</i>				
<i>n</i>	EMV	P. Unif	P. Gam	P. Jeff	<i>n</i>	EMV	P. Unif	P. Gam	P. Jeff
10	0,939	0,992	0,986	0,989	10	0,934	0,993	0,984	0,985
30	0,929	0,994	0,979	0,982	30	0,958	0,992	0,958	0,982
50	0,932	0,984	0,945	0,978	50	0,962	0,989	0,952	0,974
100	0,954	0,994	0,993	0,932	100	0,950	0,994	0,99	0,934

Tabela 27: Probabilidades de Cobertura Nominal para um Intervalo de Confiança e de Credibilidade de 95% para θ

<i>Censura = 0%</i>					<i>Censura = 10%</i>				
<i>n</i>	EMV	P. Unif	P. Gam	P. Jeff	<i>n</i>	EMV	P. Unif	P. Gam	P. Jeff
10	0,710	0,926	0,962	0,972	10	0,824	0,946	0,951	0,987
30	0,787	0,951	0,974	0,966	30	0,888	0,959	0,935	0,984
50	0,840	0,967	0,983	0,969	50	0,941	0,964	0,936	0,983
100	0,947	0,962	0,981	0,981	100	0,992	0,953	0,968	0,968
<i>Censura = 20%</i>					<i>Censura = 30%</i>				
<i>n</i>	EMV	P. Unif	P. Gam	P. Jeff	<i>n</i>	EMV	P. Unif	P. Gam	P. Jeff
10	0,852	0,942	0,952	0,98	10	0,948	0,957	0,953	0,969
30	0,897	0,95	0,939	0,971	30	0,937	0,954	0,952	0,962
50	0,927	0,951	0,947	0,967	50	0,943	0,961	0,944	0,954
100	0,988	0,941	0,957	0,899	100	0,980	0,941	0,951	0,959

Tabela 28: Probabilidades de Cobertura Nominal para um Intervalo de Confiança e de Credibilidade de 95% para λ

<i>Censura = 0%</i>					<i>Censura = 10%</i>				
<i>n</i>	EMV	P. Unif	P. Gam	P. Jeff	<i>n</i>	EMV	P. Unif	P. Gam	P. Jeff
10	0,967	0,994	0,995	0,973	10	0,956	0,996	0,999	0,985
30	0,971	0,998	0,994	0,987	30	0,959	0,994	0,994	0,989
50	0,952	0,995	0,989	0,99	50	0,957	0,995	0,993	0,982
100	0,937	0,995	0,994	0,994	100	0,936	0,992	0,995	0,982
<i>Censura = 20%</i>					<i>Censura = 30%</i>				
<i>n</i>	EMV	P. Unif	P. Gam	P. Jeff	<i>n</i>	EMV	P. Unif	P. Gam	P. Jeff
10	0,950	0,99	0,995	0,987	10	0,950	0,996	0,991	0,987
30	0,960	0,994	0,994	0,992	30	0,954	0,995	0,998	0,993
50	0,950	0,996	0,991	0,989	50	0,957	0,998	0,993	0,99
100	0,929	0,995	0,996	0,985	100	0,937	0,996	0,997	0,987

Com nos demais casos, as Tabelas 25-28 indicam que os métodos MCMC apresentam as probabilidades de cobertura próximas ou acima dos níveis nominais adotados, independente do tipo de prioris utilizadas. Constatase que no método de MV, as probabilidades de cobertura aumentam com o aumento dos tamanhos amostrais.

5.4.2 Erros Quadráticos Médio.

Tabela 29: Erros Quadráticos Médio para α

<i>Censura = 0%</i>					<i>Censura = 10%</i>				
n	EMV	P. Unif	P. Gam	P. Jeff	n	EMV	P. Unif	P. Gam	P. Jeff
10	0,0795	0,0002	0,0003	0,0039	10	0,1622	0,0002	0,0005	0,0015
30	0,0036	0,0001	0,0001	0,0007	30	0,0068	0,0001	0,0001	0,0002
50	0,0018	$> 10^{-4}$	0,0001	0,0005	50	0,0034	0,0001	0,0001	0,0001
100	0,0009	$> 10^{-4}$	$> 10^{-4}$	0,0002	100	0,0018	$> 10^{-4}$	$> 10^{-4}$	$> 10^{-4}$
<i>Censura = 20%</i>					<i>Censura = 30%</i>				
n	EMV	P. Unif	P. Gam	P. Jeff	n	EMV	P. Unif	P. Gam	P. Jeff
10	0,1797	0,0003	0,0004	0,0018	10	0,1865	0,0002	0,0005	0,0022
30	0,0111	0,0001	0,0002	0,0003	30	0,0208	0,0001	0,0002	0,0005
50	0,0056	0,0001	0,0001	0,0001	50	0,0089	0,0001	0,0002	0,0002
100	0,0028	$> 10^{-4}$	0,0001	$> 10^{-4}$	100	0,0038	$> 10^{-4}$	0,0001	$> 10^{-4}$

Tabela 30: Erros Quadráticos Médio para β

<i>Censura = 0%</i>					<i>Censura = 10%</i>				
n	EMV	P. Unif	P. Gam	P. Jeff	n	EMV	P. Unif	P. Gam	P. Jeff
10	90,4775	67,0894	38,1276	22,3308	10	54,6500	78,1996	61,6400	47,6244
30	65,5205	14,3009	11,9680	5,6134	30	35,7507	13,1690	7,3899	6,6721
50	23,8493	4,5023	4,0909	2,9521	50	10,6821	4,7533	3,0036	2,4259
100	5,5558	1,6300	2,0962	1,6435	100	2,3766	1,5726	1,3119	1,3787
<i>Censura = 20%</i>					<i>Censura = 30%</i>				
n	EMV	P. Unif	P. Gam	P. Jeff	n	EMV	P. Unif	P. Gam	P. Jeff
10	35,3717	87,8785	46,5586	51,0564	10	22,4186	66,3744	29,6452	57,2665
30	28,1387	15,5675	3,8879	5,9161	30	21,1124	16,7605	4,8833	5,2412
50	7,4998	4,0650	2,8638	2,1859	50	5,7441	5,0579	2,8090	2,4610
100	1,0702	1,7895	1,4313	1,6242	100	0,7439	1,5176	1,5670	1,9556

Tabela 31: Erros Quadráticos Médio para θ

<i>Censura</i> = 0%					<i>Censura</i> = 10%				
n	EMV	P. Unif	P. Gam	P. Jeff	n	EMV	P. Unif	P. Gam	P. Jeff
10	0,0465	0,0094	0,0080	0,0139	10	0,0724	0,0105	0,0086	0,0104
30	0,0236	0,0028	0,0034	0,0030	30	0,0273	0,0023	0,0033	0,0034
50	0,0132	0,0017	0,0012	0,0016	50	0,0152	0,0018	0,0023	0,0022
100	0,0054	0,0007	0,0011	0,0005	100	0,0076	0,0007	0,0013	0,0015
<i>Censura</i> = 20%					<i>Censura</i> = 30%				
n	EMV	P. Unif	P. Gam	P. Jeff	n	EMV	P. Unif	P. Gam	P. Jeff
10	0,1030	0,0080	0,0103	0,0123	10	0,1610	0,0330	0,0138	0,0147
30	0,0292	0,0028	0,0035	0,0049	30	0,0326	0,0124	0,0112	0,0055
50	0,0186	0,0012	0,0031	0,0033	50	0,0222	0,0067	0,0110	0,0042
100	0,0097	0,0008	0,0020	0,0024	100	0,0113	0,0024	0,0015	0,0029

Tabela 32: Erros Quadráticos Médio para λ

<i>Censura</i> = 0%					<i>Censura</i> = 10%				
n	EMV	P. Unif	P. Gam	P. Jeff	n	EMV	P. Unif	P. Gam	P. Jeff
10	1,3467	0,0539	0,0025	0,0154	10	2,2765	0,1991	0,0029	0,0221
30	0,1276	0,0179	0,0005	0,0062	30	0,3049	0,0266	0,0006	0,0127
50	0,0689	0,0105	0,0002	0,0035	50	0,1624	0,0163	0,0003	0,0096
100	0,0240	0,0049	0,0001	0,0018	100	0,0807	0,0081	0,0001	0,0072
<i>Censura</i> = 20%					<i>Censura</i> = 30%				
n	EMV	P. Unif	P. Gam	P. Jeff	n	EMV	P. Unif	P. Gam	P. Jeff
10	3,4248	0,0078	0,0086	0,0147	10	6,7344	1,3618	0,0040	0,0028
30	0,5674	0,0022	0,0046	0,0055	30	1,1165	0,0836	0,0009	0,0003
50	0,3368	0,0015	0,0040	0,0042	50	0,6129	0,0380	0,0005	0,0001
100	0,1681	0,0009	0,0024	0,0029	100	0,2912	0,0240	0,0002	$> 10^{-4}$

Observando-se os resultados apresentados nas Tabelas 29-32, verifica-se que nos métodos MCMC os EQM diminuem conforme os tamanhos amostrais aumentam independente das prioris utilizadas. Para o método EMV, também os EQM diminuem com aumento dos tamanhos amostrais.

5.4.3 Média e Desvio-Padrão

Tabela 33: Média e (Desvio-Padrão) para α

<i>Cens</i>	<i>n</i>	EMV	P. Unif	P. Gam	P. Jeff
0%	10	0,2857 (0,2688)	0,1977 (0,0438)	0,1997 (0,0105)	0,2021 (0,0398)
	30	0,2112 (0,0589)	0,1990 (0,0250)	0,2005 (0,0138)	0,2014 (0,0224)
	50	0,2095 (0,0415)	0,2007 (0,0197)	0,2007 (0,0111)	0,2004 (0,0169)
	100	0,2058 (0,0287)	0,2003 (0,014)	0,2001 (0,0033)	0,1996 (0,0122)
10%	10	0,3176 (0,3853)	0,1974 (0,0469)	0,1957 (0,0167)	0,1952 (0,0386)
	30	0,2168 (0,0807)	0,1994 (0,0270)	0,1941 (0,0119)	0,1935 (0,0139)
	50	0,2117 (0,0568)	0,1995 (0,0207)	0,1940 (0,0093)	0,1957 (0,0079)
	100	0,2061 (0,0421)	0,1995 (0,0137)	0,1983 (0,0023)	0,1978 (0,0038)
20%	10	0,3369 (0,4014)	0,1965 (0,0492)	0,1928 (0,0133)	0,1825 (0,0382)
	30	0,2227 (0,1027)	0,1989 (0,0297)	0,1895 (0,0100)	0,1870 (0,0125)
	50	0,2168 (0,0727)	0,1992 (0,0226)	0,1888 (0,0082)	0,1916 (0,0072)
	100	0,2069 (0,0521)	0,1995 (0,0159)	0,1968 (0,0020)	0,1953 (0,0033)
30%	10	0,3531 (0,4039)	0,1957 (0,0512)	0,1908 (0,0111)	0,1678 (0,0348)
	30	0,2359 (0,1397)	0,1977 (0,0325)	0,1863 (0,0083)	0,1808 (0,0101)
	50	0,2215 (0,0916)	0,1998 (0,0252)	0,1862 (0,0061)	0,1874 (0,0061)
	100	0,2086 (0,0611)	0,1996 (0,0171)	0,1955 (0,0017)	0,1935 (0,0027)

Tabela 34: Média e (Desvio-Padrão) para β

<i>Cens</i>	<i>n</i>	EMV	P. Unif	P. Gam	P. Jeff
0%	10	13,9437 (7,4299)	8,1209 (1,0217)	7,6961 (0,9715)	7,8964 (0,7179)
	30	13,6849 (5,765)	8,0709 (1,1183)	7,6314 (1,0545)	7,9573 (0,4082)
	50	11,1423 (3,7401)	8,0812 (1,1587)	7,7118 (1,0598)	7,9722 (0,3384)
	100	9,2869 (1,9756)	8,1085 (1,1691)	7,8814 (1,0798)	7,9808 (0,2293)
10%	10	12,3363 (5,9901)	8,0951 (1,1145)	7,5361 (1,0444)	11,6351 (5,8689)
	30	11,9484 (4,4922)	8,0756 (1,0505)	7,2800 (0,9851)	8,7576 (2,4706)
	50	9,9071 (2,6555)	8,1151 (1,2200)	7,1902 (1,0302)	8,0897 (1,5557)
	100	8,666 (1,391)	7,9849 (0,2037)	7,9044 (0,1912)	7,5632 (1,0904)
20%	10	10,9598 (5,1611)	8,1052 (1,1589)	7,3035 (1,0686)	12,1366 (5,8291)
	30	11,4082 (4,0667)	8,1074 (1,2218)	7,1022 (1,0255)	8,4765 (2,3863)
	50	9,6285 (2,2028)	8,0772 (1,3021)	6,845 (0,932)	7,6504 (1,4372)
	100	8,4101 (0,9501)	7,9992 (0,2206)	7,8448 (0,2063)	7,1319 (0,9335)
30%	10	10,0243 (4,2824)	8,1108 (1,2527)	7,2750 (1,1019)	12,544 (6,0543)
	30	10,8799 (3,582)	8,0899 (1,2001)	6,7746 (0,9617)	8,3130 (2,2690)
	50	9,4339 (1,9213)	8,1051 (1,2031)	6,5483 (0,8550)	7,4455 (1,4682)
	100	8,3471 (0,7899)	7,9947 (0,2300)	7,8031 (0,2087)	6,8423 (0,7848)

Tabela 35: Média e (Desvio-Padrão) para θ

<i>Cens</i>	<i>n</i>	EMV	P. Unif	P. Gam	P. Jeff
0%	10	0,4374 (0,2063)	0,5673 (0,1446)	0,5326 (0,0991)	0,5474 (0,1149)
	30	0,4221 (0,1325)	0,5307 (0,0758)	0,5297 (0,0617)	0,5123 (0,0618)
	50	0,4417 (0,0988)	0,5179 (0,0600)	0,5219 (0,0512)	0,5110 (0,0479)
	100	0,4655 (0,0648)	0,5125 (0,0441)	0,5117 (0,0353)	0,5051 (0,0335)
10%	10	0,4698 (0,2675)	0,5822 (0,1497)	0,5664 (0,0941)	0,5670 (0,0767)
	30	0,4454 (0,156)	0,5318 (0,0828)	0,5634 (0,0616)	0,5372 (0,0447)
	50	0,4637 (0,1179)	0,5231 (0,0646)	0,5634 (0,0494)	0,5312 (0,0351)
	100	0,4838 (0,0857)	0,5077 (0,0391)	0,5186 (0,0260)	0,5300 (0,0238)
20%	10	0,5043 (0,321)	0,5896 (0,1607)	0,5781 (0,0949)	0,5816 (0,0751)
	30	0,4552 (0,1649)	0,5401 (0,0919)	0,5840 (0,0580)	0,5541 (0,0438)
	50	0,4674 (0,1324)	0,5280 (0,0734)	0,5872 (0,0443)	0,5497 (0,0294)
	100	0,4927 (0,0982)	0,5079 (0,0426)	0,5267 (0,0276)	0,545 (0,0188)
30%	10	0,5417 (0,3992)	0,5943 (0,1554)	0,5744 (0,0906)	0,5965 (0,0734)
	30	0,4605 (0,1763)	0,5431 (0,1027)	0,5921 (0,0521)	0,5629 (0,0387)
	50	0,4733 (0,1466)	0,5267 (0,0771)	0,5969 (0,0395)	0,5586 (0,0269)
	100	0,4956 (0,1061)	0,5085 (0,0480)	0,5269 (0,0273)	0,5515 (0,0160)

Tabela 36: Média e (Desvio-Padrão) para λ

<i>Cens</i>	<i>n</i>	EMV	P. Unif	P. Gam	P. Jeff
0%	10	0,5518 (1,0267)	0,0429 (0,0149)	0,0146 (0,0232)	0,0095 (0,0091)
	30	0,194 (0,3063)	0,0238 (0,0083)	0,0125 (0,0115)	0,0102 (0,0071)
	50	0,1412 (0,2274)	0,0188 (0,0078)	0,0110 (0,0075)	0,0099 (0,0045)
	100	0,0792 (0,1385)	0,0144 (0,0029)	0,0103 (0,0037)	0,0101 (0,0034)
10%	10	0,6174 (1,3818)	0,0428 (0,0134)	0,0122 (0,0149)	0,0099 (0,0062)
	30	0,2062 (0,5163)	0,0235 (0,0091)	0,0126 (0,0096)	0,0109 (0,0078)
	50	0,1369 (0,3826)	0,0205 (0,0074)	0,0121 (0,0089)	0,0120 (0,0084)
	100	0,0684 (0,2781)	0,0130 (0,0027)	0,0118 (0,0055)	0,0151 (0,0100)
20%	10	0,6985 (1,7186)	0,0428 (0,0150)	0,0143 (0,0255)	0,0104 (0,0066)
	30	0,2329 (0,7198)	0,0232 (0,0080)	0,0127 (0,0085)	0,0115 (0,0080)
	50	0,1662 (0,5591)	0,0197 (0,0075)	0,0128 (0,0090)	0,0131 (0,0087)
	100	0,0606 (0,407)	0,0147 (0,0039)	0,0116 (0,0047)	0,0174 (0,0106)
30%	10	0,894 (2,441)	0,0422 (0,0151)	0,0143 (0,0237)	0,0104 (0,0070)
	30	0,3031 (1,0156)	0,0244 (0,0094)	0,0135 (0,0086)	0,0124 (0,0086)
	50	0,182 (0,7641)	0,0179 (0,0060)	0,0123 (0,0086)	0,0138 (0,0085)
	100	0,0688 (0,5366)	0,0147 (0,0037)	0,0127 (0,0051)	0,0186 (0,0102)

Os resultados das Tabelas 33-36 indicam que, nos métodos MCMC, as médias se aproximam dos valores verdadeiros e os desvios padrões diminuem à medida que aumentam os tamanhos amostrais como esperado. No método de MV, os desvios padrões diminuíram com aumento dos tamanhos amostrais, exceto para β .

5.5 Simulações com Função de Risco em Forma de Banheira

A função de risco em forma de banheira foi obtida considerando os parâmetros $\alpha = 5$; $\beta = 0,5$; $\theta = 0,5$ e $\lambda = 0,5$. Na Figura 10 tem-se as funções de sobrevivência, densidade e de risco.

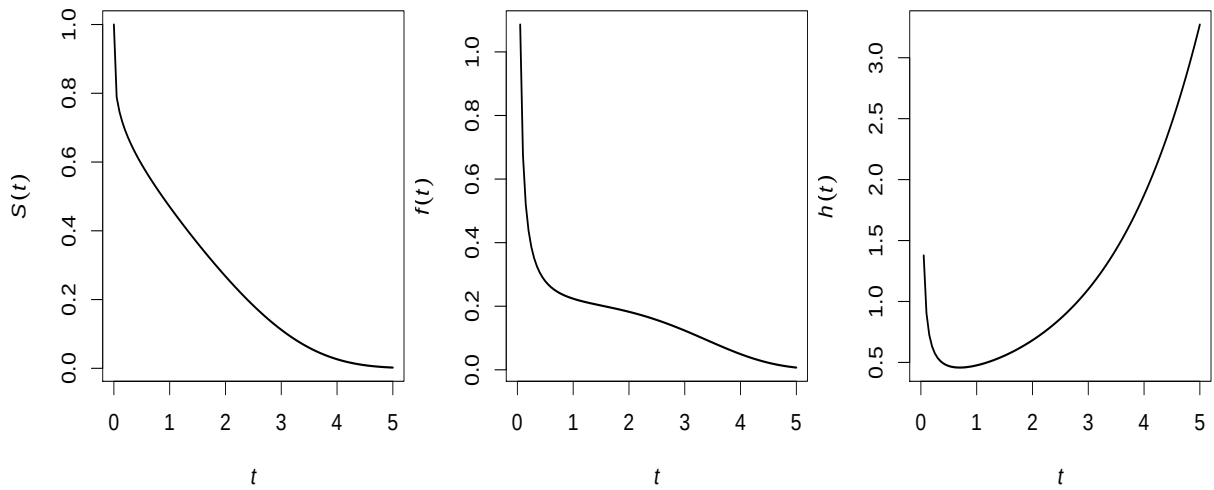


Figura 10: Funções de Sobrevivência, Densidade e de risco da distribuição WMG com $\alpha = 5$; $\beta = 0,5$; $\theta = 0,5$ e $\lambda = 0,5$.

5.5.1 Probabilidades de Cobertura

Tabela 37: Probabilidades de Cobertura Nominal para um Intervalo de Confiança e de Credibilidade de 95% para α

<i>Censura = 0%</i>					<i>Censura = 10%</i>				
<i>n</i>	EMV	P. Unif	P. Gam	P. Jeff	<i>n</i>	EMV	P. Unif	P. Gam	P. Jeff
10	0,388	0,972	0,987	0,998	10	0,474	0,975	0,979	0,996
30	0,329	0,991	0,989	0,992	30	0,436	0,981	0,983	0,992
50	0,469	0,99	0,987	0,996	50	0,648	0,976	0,975	0,993
100	0,731	0,991	0,989	0,991	100	0,903	0,991	0,949	0,991
<i>Censura = 20%</i>					<i>Censura = 30%</i>				
<i>n</i>	EMV	P. Unif	P. Gam	P. Jeff	<i>n</i>	EMV	P. Unif	P. Gam	P. Jeff
10	0,531	0,971	0,959	0,99	10	0,574	0,973	0,929	0,973
30	0,588	0,976	0,966	0,974	30	0,710	0,991	0,979	0,982
50	0,754	0,984	0,963	0,947	50	0,833	0,983	0,913	0,966
100	0,920	0,989	0,989	0,766	100	0,909	0,995	0,983	0,961

Tabela 38: Probabilidades de Cobertura Nominal para um Intervalo de Confiança e de Credibilidade de 95% para β

<i>Censura = 0%</i>					<i>Censura = 10%</i>				
<i>n</i>	EMV	P. Unif	P. Gam	P. Jeff	<i>n</i>	EMV	P. Unif	P. Gam	P. Jeff
10	0,622	0,976	0,972	0,989	10	0,707	0,964	0,98	0,978
30	0,692	0,981	0,975	0,984	30	0,757	0,973	0,966	0,985
50	0,731	0,968	0,957	0,984	50	0,869	0,972	0,968	0,984
100	0,839	0,98	0,985	0,988	100	0,935	0,968	0,97	0,977
<i>Censura = 20%</i>					<i>Censura = 30%</i>				
<i>n</i>	EMV	P. Unif	P. Gam	P. Jeff	<i>n</i>	EMV	P. Unif	P. Gam	P. Jeff
10	0,838	0,979	0,956	0,949	10	0,833	0,975	0,953	0,946
30	0,864	0,98	0,958	0,955	30	0,897	0,975	0,925	0,937
50	0,925	0,969	0,933	0,949	50	0,927	0,965	0,926	0,948
100	0,949	0,973	0,940	0,956	100	0,949	0,974	0,931	0,951

Tabela 39: Probabilidades de Cobertura Nominal para um Intervalo de Confiança e de Credibilidade de 95% para θ

<i>Censura = 0%</i>					<i>Censura = 10%</i>				
<i>n</i>	EMV	P. Unif	P. Gam	P. Jeff	<i>n</i>	EMV	P. Unif	P. Gam	P. Jeff
10	0,648	0,974	0,976	0,989	10	0,826	0,97	0,961	0,975
30	0,667	0,972	0,966	0,976	30	0,800	0,963	0,948	0,964
50	0,802	0,956	0,941	0,971	50	0,875	0,945	0,955	0,97
100	0,873	0,979	0,969	0,973	100	0,935	0,977	0,972	0,972
<i>Censura = 20%</i>					<i>Censura = 30%</i>				
<i>n</i>	EMV	P. Unif	P. Gam	P. Jeff	<i>n</i>	EMV	P. Unif	P. Gam	P. Jeff
10	0,830	0,985	0,96	0,996	10	0,827	0,975	0,962	0,99
30	0,859	0,972	0,94	0,991	30	0,899	0,962	0,837	0,962
50	0,909	0,945	0,981	0,977	50	0,913	0,953	0,953	0,947
100	0,944	0,978	0,963	0,976	100	0,927	0,975	0,973	0,941

Tabela 40: Probabilidades de Cobertura Nominal para um Intervalo de Confiança e de Credibilidade de 95% para λ

<i>Censura = 0%</i>					<i>Censura = 10%</i>				
<i>n</i>	EMV	P. Unif	P. Gam	P. Jeff	<i>n</i>	EMV	P. Unif	P. Gam	P. Jeff
10	0,794	0,954	0,95	0,991	10	0,794	0,973	0,966	0,987
30	0,792	0,959	0,965	0,983	30	0,834	0,956	0,948	0,974
50	0,870	0,94	0,942	0,987	50	0,905	0,933	0,954	0,932
100	0,908	0,964	0,984	0,985	100	0,922	0,964	0,953	0,956
<i>Censura = 20%</i>					<i>Censura = 30%</i>				
<i>n</i>	EMV	P. Unif	P. Gam	P. Jeff	<i>n</i>	EMV	P. Unif	P. Gam	P. Jeff
10	0,759	0,984	0,95	0,988	10	0,735	0,974	0,933	0,944
30	0,839	0,958	0,934	0,986	30	0,839	0,975	0,942	0,937
50	0,904	0,948	0,937	0,964	50	0,893	0,953	0,951	0,959
100	0,910	0,955	0,973	0,973	100	0,918	0,949	0,971	0,960

Como constatados anteriormente para diferentes funções de risco, através dos resultados apresentados nas Tabelas 37-40 indicam que os métodos MCMC fornecem as probabilidades de cobertura próximas ou acima do nível nominal adotado, independente das prioris usadas. Verifica-se também que probabilidades diminuem com o aumento das censuras. Entretanto, no caso do método de MV, as probabilidades de cobertura aumentam com o aumento dos tamanhos amostrais.

5.5.2 Erros Quadráticos Médio.

Tabela 41: Erros Quadráticos Médio para α

<i>Censura = 0%</i>					<i>Censura = 10%</i>				
n	EMV	P. Unif	P. Gam	P. Jeff	n	EMV	P. Unif	P. Gam	P. Jeff
10	93,0026	6,3584	0,2967	0,7749	10	57,2129	6,3903	0,3365	0,9409
30	67,7655	1,3517	0,1082	0,3177	30	36,9242	1,4381	0,1053	0,3770
50	16,0717	0,6925	0,0637	0,1780	50	6,4361	0,6865	0,0732	0,2369
100	2,6193	0,3437	0,0311	0,0934	100	1,1130	0,3512	0,0432	0,1188
<i>Censura = 20%</i>					<i>Censura = 30%</i>				
n	EMV	P. Unif	P. Gam	P. Jeff	n	EMV	P. Unif	P. Gam	P. Jeff
10	43,8005	6,7880	0,3312	0,5380	10	36,1726	6,7179	0,3831	0,8214
30	20,4422	1,4692	0,1384	0,5164	30	12,3757	1,3262	0,1748	0,2116
50	3,8361	0,6831	0,0975	0,5376	50	2,4345	0,7193	0,1370	0,1276
100	0,6849	0,3370	0,0614	0,6311	100	0,5846	0,3499	0,0894	0,0549

Tabela 42: Erros Quadráticos Médio para β

<i>Censura = 0%</i>					<i>Censura = 10%</i>				
n	EMV	P. Unif	P. Gam	P. Jeff	n	EMV	P. Unif	P. Gam	P. Jeff
10	0,4472	0,0932	0,0667	0,0535	10	0,3534	0,0993	0,0782	0,0649
30	0,1104	0,0282	0,0120	0,0151	30	0,0640	0,0280	0,0128	0,0172
50	0,0367	0,0168	0,0065	0,0085	50	0,0226	0,0162	0,0063	0,0089
100	0,0101	0,0076	0,0031	0,0037	100	0,0069	0,0083	0,0033	0,0052
<i>Censura = 20%</i>					<i>Censura = 30%</i>				
n	EMV	P. Unif	P. Gam	P. Jeff	n	EMV	P. Unif	P. Gam	P. Jeff
10	0,3493	0,1037	0,0825	0,0739	10	0,2581	0,1118	0,0763	0,0583
30	0,0472	0,0261	0,0121	0,0156	30	0,0409	0,0266	0,0117	0,0110
50	0,0206	0,0191	0,0070	0,0080	50	0,0186	0,0173	0,0065	0,0073
100	0,0062	0,0081	0,0034	0,0038	100	0,0066	0,0089	0,0040	0,0040

Tabela 43: Erros Quadráticos Médio para θ

<i>Censura = 0%</i>					<i>Censura = 10%</i>				
n	EMV	P. Unif	P. Gam	P. Jeff	n	EMV	P. Unif	P. Gam	P. Jeff
10	0,7695	0,2132	0,0064	0,0871	10	0,9109	0,2291	0,0073	0,1234
30	0,3188	0,0707	0,0023	0,0262	30	0,2105	0,0758	0,0024	0,0346
50	0,1493	0,0399	0,0014	0,0172	50	0,1135	0,0425	0,0017	0,0194
100	0,0657	0,0140	0,0007	0,0081	100	0,0521	0,0184	0,0009	0,0094
<i>Censura = 20%</i>					<i>Censura = 30%</i>				
n	EMV	P. Unif	P. Gam	P. Jeff	n	EMV	P. Unif	P. Gam	P. Jeff
10	1,0896	0,2315	0,0080	0,0114	10	1,4152	0,2843	0,0091	0,0233
30	0,1955	0,0821	0,0032	0,0045	30	0,1806	0,0705	0,0041	0,0058
50	0,1011	0,0436	0,0021	0,0030	50	0,0984	0,0417	0,0031	0,0029
100	0,0527	0,0177	0,0014	0,0017	100	0,0554	0,0213	0,0020	0,0012

Tabela 44: Erros Quadráticos Médio para λ

<i>Censura = 0%</i>					<i>Censura = 10%</i>				
n	EMV	P. Unif	P. Gam	P. Jeff	n	EMV	P. Unif	P. Gam	P. Jeff
10	0,1544	0,0539	0,0025	0,0154	10	0,2930	0,1991	0,0029	0,0221
30	0,0387	0,0179	0,0005	0,0062	30	0,0596	0,0266	0,0006	0,0127
50	0,0195	0,0105	0,0002	0,0035	50	0,0284	0,0163	0,0003	0,0096
100	0,0103	0,0049	0,0001	0,0018	100	0,0161	0,0081	0,0001	0,0072
<i>Censura = 20%</i>					<i>Censura = 30%</i>				
n	EMV	P. Unif	P. Gam	P. Jeff	n	EMV	P. Unif	P. Gam	P. Jeff
10	0,5590	0,5659	0,0035	0,0196	10	2,0703	1,3618	0,0040	0,0028
30	0,0997	0,0379	0,0008	0,0023	30	0,1598	0,0836	0,0009	0,0003
50	0,0438	0,0252	0,0004	0,0009	50	0,0804	0,0380	0,0005	0,0001
100	0,0273	0,0124	0,0002	0,0002	100	0,0427	0,0240	0,0002	$> 10^{-4}$

Com os resultados apresentados pelas Tabelas 41-44, observa-se que os EQM diminuem conforme aumentam os tamanhos amostrais, sendo que, os menores valores para os EQM foram obtidos com o método MCMC utilizando-se priori Gama.

5.5.3 Média e Desvio-Padrão

Tabela 45: Média e (Desvio-Padrão) para α

<i>Cens</i>	<i>n</i>	EMV	P. Unif	P. Gam	P. Jeff
0%	10	11,2806 (7,3218)	8,2234 (2,2486)	4,8840 (1,7433)	5,0812 (0,8769)
	30	10,1307 (6,4406)	6,1489 (1,2049)	4,9114 (1,2029)	5,0252 (0,5633)
	50	7,2619 (3,3115)	5,3473 (0,6716)	4,8833 (0,5689)	5,0199 (0,4216)
	100	5,6768 (1,4708)	5,1652 (0,4921)	4,9627 (0,7363)	4,9940 (0,3057)
10%	10	9,221 (6,2797)	8,4543 (2,3013)	5,1817 (2,0862)	5,0958 (0,9657)
	30	8,2002 (5,1681)	6,3105 (1,3527)	5,1039 (1,3478)	5,0253 (0,6137)
	50	6,0621 (2,305)	6,0957 (1,1924)	4,8367 (1,3228)	5,0277 (0,4862)
	100	5,1052 (1,0502)	5,1922 (0,5038)	4,5008 (0,7553)	4,9429 (0,3401)
20%	10	8,2791 (5,7516)	8,9344 (2,5034)	4,9899 (2,1339)	4,7437 (0,6875)
	30	6,6744 (4,2019)	6,6134 (1,4174)	4,9775 (1,4096)	4,4832 (0,4995)
	50	5,3544 (1,9272)	5,8233 (1,0571)	4,5727 (0,3049)	4,3781 (0,3885)
	100	4,7906 (0,801)	5,2278 (0,5421)	4,8886 (0,099)	4,2548 (0,2754)
30%	10	7,6122 (5,4201)	9,1077 (2,6703)	4,7453 (2,3329)	4,4004 (0,6800)
	30	5,4844 (3,4861)	5,4783 (0,7506)	4,6600 (0,3379)	4,6203 (0,2598)
	50	4,7498 (1,5408)	5,9682 (1,0980)	4,4123 (0,2447)	4,6871 (0,1725)
	100	4,5733 (0,6348)	5,2619 (0,5412)	4,8814 (0,0753)	4,7838 (0,0903)

Tabela 46: Média e (Desvio-Padrão) para β

<i>Cens</i>	<i>n</i>	EMV	P. Unif	P. Gam	P. Jeff
0%	10	0,5994 (0,6615)	0,5893 (0,2202)	0,6919 (0,2227)	0,6101 (0,2036)
	30	0,4783 (0,3317)	0,5358 (0,1297)	0,5763 (0,1211)	0,5387 (0,1165)
	50	0,4713 (0,1894)	0,5343 (0,1034)	0,5576 (0,1148)	0,5216 (0,0894)
	100	0,4746 (0,0971)	0,5143 (0,0632)	0,5271 (0,0677)	0,5070 (0,0606)
10%	10	0,6158 (0,5833)	0,6039 (0,2509)	0,7161 (0,2210)	0,6124 (0,2287)
	30	0,4936 (0,2529)	0,5278 (0,1406)	0,5954 (0,1364)	0,5531 (0,1198)
	50	0,4846 (0,1497)	0,5181 (0,1107)	0,5805 (0,1016)	0,5339 (0,0878)
	100	0,4914 (0,0824)	0,5188 (0,0696)	0,5533 (0,0703)	0,5203 (0,0692)
20%	10	0,6394 (0,5746)	0,5744 (0,2500)	0,7316 (0,2661)	0,6019 (0,2521)
	30	0,5184 (0,2166)	0,5263 (0,1333)	0,6218 (0,1327)	0,5259 (0,1223)
	50	0,5071 (0,1434)	0,5358 (0,1369)	0,5235 (0,0913)	0,5183 (0,0873)
	100	0,5002 (0,0786)	0,5193 (0,0675)	0,4840 (0,0525)	0,5107 (0,0607)
30%	10	0,6278 (0,4919)	0,5959 (0,2678)	0,7539 (0,2680)	0,5532 (0,2356)
	30	0,5547 (0,1947)	0,5425 (0,1209)	0,4765 (0,1161)	0,4755 (0,1020)
	50	0,5269 (0,1338)	0,5376 (0,1467)	0,5071 (0,0904)	0,4689 (0,0795)
	100	0,5057 (0,081)	0,5202 (0,0721)	0,4705 (0,0514)	0,4638 (0,0521)

Tabela 47: Média e (Desvio-Padrão) para θ

<i>Cens</i>	<i>n</i>	EMV	P. Unif	P. Gam	P. Jeff
0%	10	1,0204 (0,7065)	0,7556 (0,3112)	0,6038 (0,2869)	0,6103 (0,2737)
	30	0,9045 (0,394)	0,5622 (0,1831)	0,5004 (0,1635)	0,5188 (0,1609)
	50	0,7795 (0,2668)	0,5300 (0,1604)	0,5005 (0,1607)	0,5120 (0,1306)
	100	0,7049 (0,1539)	0,4881 (0,0772)	0,4748 (0,0765)	0,4935 (0,0895)
10%	10	0,9792 (0,8257)	0,7646 (0,3457)	0,5900 (0,3045)	0,6568 (0,3144)
	30	0,8148 (0,3338)	0,5823 (0,2038)	0,4817 (0,1781)	0,5343 (0,1827)
	50	0,7385 (0,2379)	0,5657 (0,1986)	0,5003 (0,1677)	0,5159 (0,1382)
	100	0,6804 (0,1396)	0,4900 (0,0796)	0,4802 (0,0843)	0,5007 (0,0971)
20%	10	0,9647 (0,9351)	0,809 (0,3425)	0,6309 (0,3434)	0,5391 (0,0994)
	30	0,766 (0,3534)	0,5947 (0,2089)	0,4795 (0,1818)	0,5339 (0,0577)
	50	0,7094 (0,2392)	0,5844 (0,2257)	0,5277 (0,0388)	0,5303 (0,0456)
	100	0,6753 (0,1482)	0,4892 (0,0814)	0,5237 (0,0179)	0,5292 (0,0295)
30%	10	1,0171 (1,0718)	0,8053 (0,3915)	0,6319 (0,3655)	0,5915 (0,1223)
	30	0,7171 (0,3654)	0,5539 (0,1901)	0,6526 (0,1361)	0,5625 (0,0433)
	50	0,6899 (0,2497)	0,5840 (0,2202)	0,5482 (0,0380)	0,5461 (0,0284)
	100	0,6763 (0,1558)	0,4893 (0,0875)	0,5147 (0,0104)	0,5322 (0,0133)

Tabela 48: Média e (Desvio-Padrão) para λ

<i>Cens</i>	<i>n</i>	EMV	P. Unif	P. Gam	P. Jeff
0%	10	0,5526 (0,3896)	0,5698 (0,2287)	0,4402 (0,1860)	0,4856 (0,1233)
	30	0,4886 (0,1965)	0,5255 (0,1199)	0,4831 (0,1086)	0,4954 (0,0787)
	50	0,4756 (0,1375)	0,5097 (0,0963)	0,4963 (0,0920)	0,5014 (0,0591)
	100	0,4525 (0,0899)	0,5138 (0,0574)	0,5019 (0,0364)	0,5001 (0,0427)
10%	10	0,5702 (0,537)	0,6054 (0,2471)	0,5486 (0,2283)	0,5425 (0,1426)
	30	0,4845 (0,2438)	0,5379 (0,1496)	0,6023 (0,1314)	0,5724 (0,0862)
	50	0,4541 (0,1623)	0,5361 (0,1346)	0,5570 (0,0487)	0,5769 (0,0604)
	100	0,4335 (0,1082)	0,5230 (0,0717)	0,5447 (0,0252)	0,5751 (0,0390)
20%	10	0,6349 (0,7357)	0,6816 (0,2919)	0,6694 (0,2670)	0,6040 (0,0936)
	30	0,4683 (0,3143)	0,5680 (0,1773)	0,7177 (0,1287)	0,5402 (0,0252)
	50	0,4372 (0,1998)	0,5205 (0,1597)	0,5369 (0,0171)	0,5262 (0,0153)
	100	0,4113 (0,1396)	0,5308 (0,0936)	0,5112 (0,0060)	0,5130 (0,0069)
30%	10	0,9095 (1,38)	0,7826 (0,3318)	0,8374 (0,2985)	0,5368 (0,0378)
	30	0,455 (0,3974)	0,5743 (0,1867)	0,5962 (0,0367)	0,5141 (0,0115)
	50	0,4143 (0,2705)	0,5460 (0,1976)	0,5468 (0,0149)	0,5090 (0,0066)
	100	0,3906 (0,1754)	0,5481 (0,1154)	0,5080 (0,0047)	0,5048 (0,0033)

Em relação às médias, as Tabelas 45-48 indicam que elas se aproximam dos valores verdadeiros à medida que os tamanhos amostrais aumentam, independente das porcentagens de censuras. e o método MCMC com o uso da priori de Jeffreys apresentaram os menores desvios padrões.

5.6 Discussões dos Resultados da Simulação

Nesta seção, foram apresentadas as discussões sobre os resultados obtidos na simulação de Monte Carlo. Com base nas Tabelas 1-48, pode-se observar que:

- Considerando-se as estimativas de α (Tabelas 1, 13 e 37), o método de MV apresenta as probabilidades de cobertura abaixo dos níveis nominais adotados, com exceção do parâmetro α do risco unimodal (Tabela 25) que ficaram próximas. Em geral, os métodos MCMC apresentaram as probabilidades de cobertura próximas ou acima dos níveis nominais adotados, com pequena vantagem para a priori de Jeffrey e,

quando as porcentagens de censuras aumentaram, esses valores diminuíram, exceto para o risco unimodal da Tabela 25 que se mantiveram próximas. Observa-se também que em alguns casos o MCMC com prioris uniforme e priori gama apresentaram os maiores EQM que no método de MV (Tabela 24). Entretanto, em geral, no método MCMC com priori de Jeffrey os EQM são sempre menores. Com relação às médias e os desvios padrões, os métodos MCMC com priori de Jeffrey também apresentaram os melhores desempenho.

- Para a estimação de β , verifica-se também que (Tabelas 2 e 38), as probabilidades de cobertura pelo método de MV ficaram abaixo dos níveis nominais, exceto para as Tabelas 14 e 26 que se mantiveram próximas. No caso dos métodos MCMC, apresentaram as probabilidades de cobertura próximas ou acima dos níveis nominais. Verificou-se também que o método MCMC com priori de Jeffrey apresentaram os menores EQM. Com relação às médias e os desvios padrões, o método MCMC com a priori de Jeffrey apresentaram os melhores resultados.
- Para a estimação de θ , (fornecidas pelas Tabelas 3, 7, 11, 15, 19, 23, 27, 31, 35, 39, 43 e 47), de modo geral, as probabilidades de cobertura nos métodos MCMC apresentaram os melhores resultados. Para os EQM, os métodos MCMC com prioris gama e Jeffrey apresentaram os melhores resultados. As estimativas das médias através do método MCMC com priori de Jeffreys forneceram os melhores desempenho. Quanto às estimativas dos desvios padrões, verifica-se que os métodos MCMC com prioris gama e Jeffreys mostraram-se mais precisos.
- Para a estimação de λ , (dadas nas Tabelas 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44 e 48) os métodos MCMC apresentaram os melhores resultados para as probabilidades de cobertura, ficando próximos ou acima dos níveis nominais. Com relação aos EQM, as médias e os desvios padrões, o método MCMC com as prioris gama e Jeffrey apresentaram os melhores desempenho.
- Quando os tamanhos das amostras são pequenos, o método MCMC com as prioris gama ou Jeffrey apresentaram os melhores desempenho que o método de MV.
- Os intervalos de credibilidade Bayesianos podem ser facilmente calculados através das amostras obtidas pelos métodos MCMC. Em contraste, nos métodos de MV são necessárias a estimação da matriz de informação de Fisher, ou a matriz de informação observada nos cálculos dos intervalos de confiança. Portanto, os cálculos

dos intervalos de confiança Bayesianos são bem mais fáceis e mais precisos, além apresentar facilidade nas interpretações.

Com base nos resultados da simulação, sugere-se a utilização de MCMC com prioridade ou prioridade de Jeffreys.

Levando em conta o custo computacional, os métodos MCMC apresentam desvantagem sobre o método de MV. As gerações e as análises das cadeias de Markov são demoradas que o procedimento de otimização da função de máxima verossimilhança.

6 Aplicações

Neste capítulo, foram apresentados alguns exemplos de aplicações com dados reais para ilustrar os métodos de estimação discutidos neste trabalho.

6.1 Dados de Efron

Os dados da Tabela 49 correspondem aos tempos de sobrevivência de 51 pacientes com câncer de cabeça e pescoço (EFRON, 1988). De acordo com Lai, Xie e Barlow (2006) este conjunto de dados apresenta função de risco em forma unimodal. Desta forma, o uso das distribuições WMG e WE pode ser adequado.

Tabela 49: Tempos de sobrevivência (em dias)

74*	185*	279*	319*	523*	1116*	1226*	1349*	1412*	7
34	42	63	64	83	84	91	108	112	129
133	133	139	140	140	146	149	154	157	160
160	165	173	176	218	225	241	248	273	277
297	405	417	420	440	523	583	594	1101	1146
1417									

* dados censurados

6.1.1 Resumo Numérico

Na execução do MCMC com priori $Gama(a, b)$, foram usados os valores $a = 0,001$ e $b = 0,001$ como os hiperparâmetros. E na execução do MCMC com priori uniforme, considerou-se $k = 1$. Na priori de Jeffreys não há necessidade de especificar hiperparâmetros.

O modelo apresentado em 4.12 foi compilado para gerar uma cadeia de Markov de

tamanho 151000. Descartaram-se as primeiras 1000 iterações para eliminar o efeito dos valores iniciais. Consideraram-se saltos de comprimento 30 para eliminar o efeito da autocorrelação, resultando amostras de tamanhos 5000 para as distribuições marginais a posteriori.

Para os modelos apresentados em 4.15 e 4.17, foram geradas cadeias de comprimento 101000, descartando-se as primeiras 1000 iterações para eliminar os efeitos dos valores iniciais. Realizaram-se saltos de comprimento 20 a fim de diminuir o efeito da autocorrelação. Desta forma, obtiveram-se as posteriori com amostras de tamanhos 5000.

A Tabela 50 apresenta os resultados das estimativas dos parâmetros e o desvio-padrão obtidos pelo métodos MCMC, considerando-se as distribuições a priori uniforme, gama e a regra de Jeffreys.

Tabela 50: Estimativas dos parâmetros e desvio-padrão correspondentes [em colchetes] para a distribuição WMG obtidos pelos métodos MCMC e os critérios de avaliações DIC, para os dados apresentados em Efron (1988).

Dist	Bayes				Teste
	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\theta}$	$\hat{\lambda}$	DIC
P. Unif	1,3941	20,8764	0,2676	8e-05	590,3
	[0, 3613]	[7, 6208]	[0, 0363]	[6e - 05]	
P. Gam	1,3383	21,4915	0,2708	3e-05	590,3
	[0, 1706]	[6, 9336]	[0, 0157]	[4e - 05]	
P. Jeff	1,4201	20,1922	0,2791	2e-05	590,6
	[0, 1740]	[6, 4998]	[0, 0209]	[4e - 05]	

De acordo com os resultados da Tabela 50, observa-se que as estimativas dos parâmetros obtidas com diferentes prioris estão próximas. No entanto, a priori uniforme apresentou um desvio-padrão maior. Quanto às comparações das prioris através do DIC, indica pouca diferença entre elas sendo recomendado a utilização da priori gama ou Jeffreys devido ao menor desvio padrão. Nota-se também que, neste conjunto de dados, as estimativas de λ estão próximas de zero, sugerindo a utilização da Weibull Exponenciada.

6.1.2 Diagnóstico de Convergência

Para verificar se houve convergência em cada um dos parâmetros, foram monitorados os históricos das séries temporais, autocorrelações e as densidades marginais. Os históricos

das iterações e as autocorrelações dos parâmetros podem ser observadas nas Figuras 11 e 12.

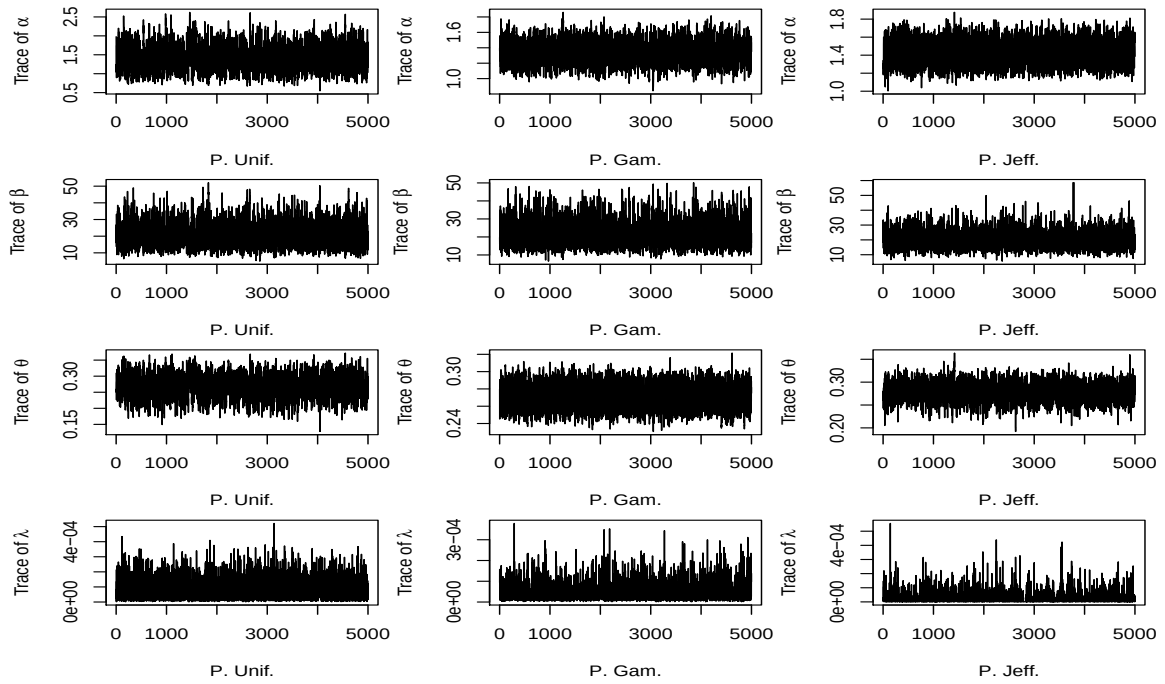


Figura 11: Histórico das séries temporais.

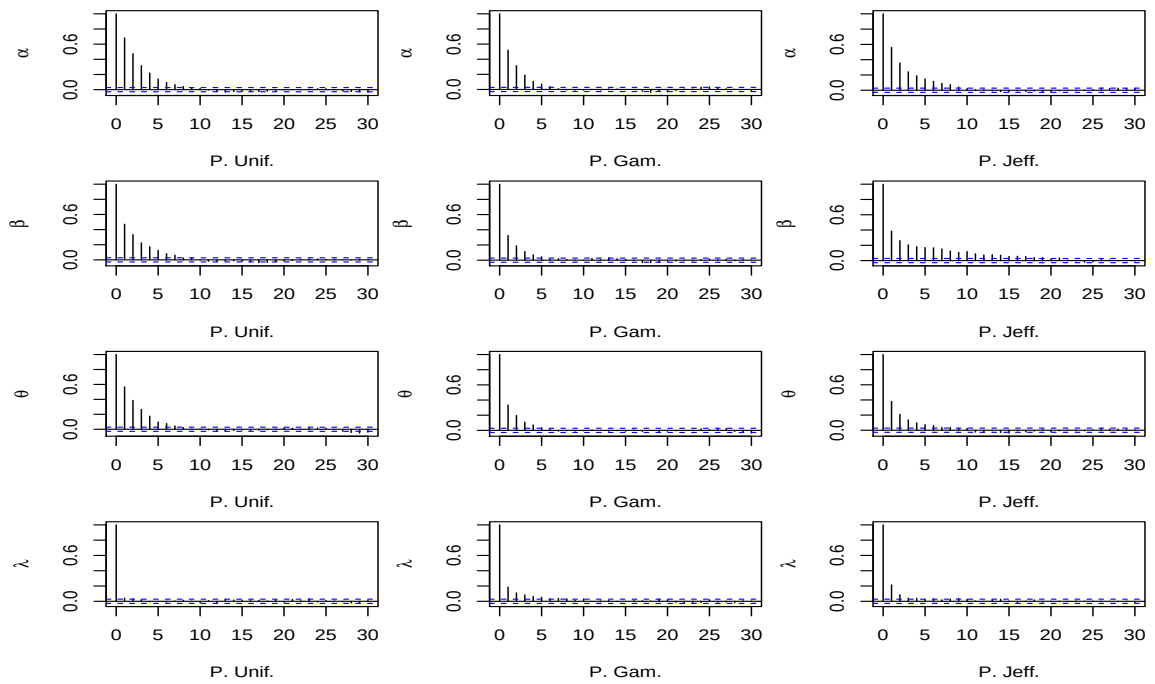


Figura 12: Gráficos de autocorrelação dos parâmetros.

Através das Figuras 11 e 12, observa-se que houve a convergência do MCMC e que

as correlações são muito pequenas, indicando que as amostras das posteriori são independentes. As taxas de aceitação ficaram em torno de 35% a 45%.

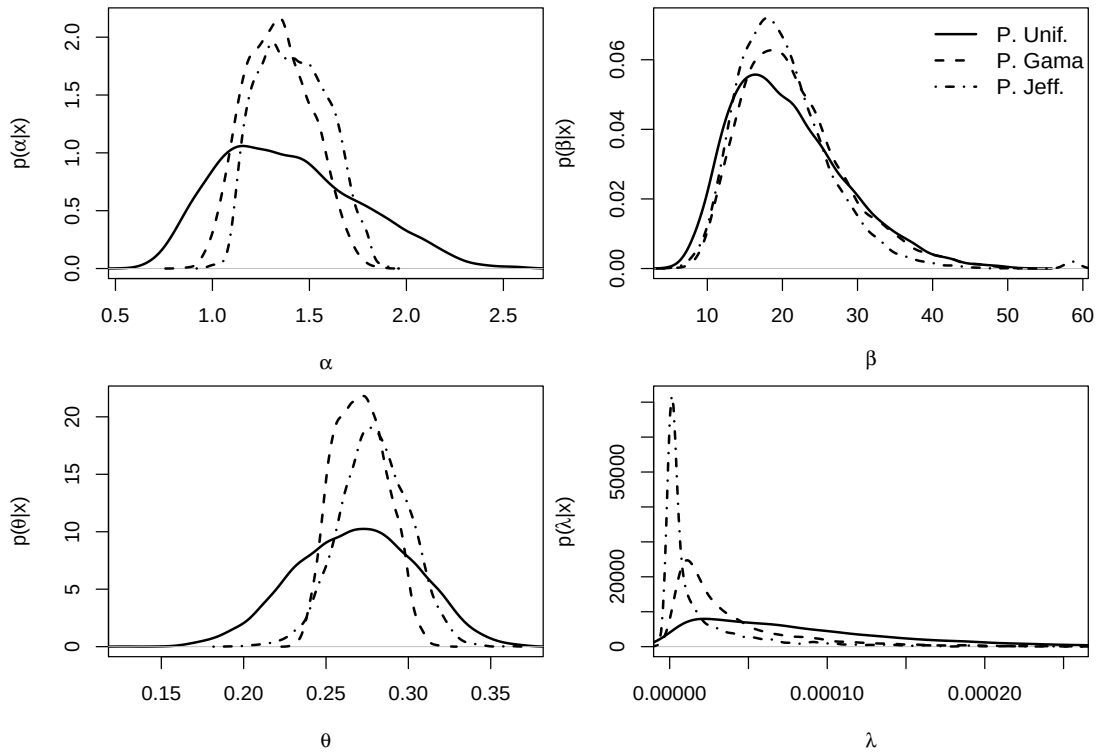


Figura 13: Densidades marginais a posteriori para os parâmetros α , β , θ e λ

Na Tabela 51 são apresentadas as estimativas dos parâmetros e os desvios-padrões obtidos pelo método de MV para as distribuições WMG, Weibull e Weibull Exponenciada.

Tabela 51: Estimativas de MV para os parâmetros dos modelos WMG, Weibull e Weibull Exponenciada, desvios padrões correspondentes [em colchetes] e os critérios AIC e BIC, para os dados de Efron (1988).

Dist	EMV				Testes	
	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\theta}$	$\hat{\lambda}$	AIC	BIC
WMG	6,0030 [12, 8509]	6,2954 [8, 5698]	0,4837 [0, 2962]	-0,0002 [0, 0002]	593,3	601,0
WE	1,5451 [1, 8918]	18,0358 [27, 3970]	0,2943 [0, 1390]	0	592,1	597,9
W	278,81 [196, 48]	1	0,9297 [0, 1095]	0	597,8	601,7

Observa-se na Tabela 51 que as estimativas dos desvios padrões para os parâmetros

α e β são maiores que seus valores estimados. Quanto às comparações das prioris através de critérios de avaliações AIC e BIC, verifica-se que houve pouca diferença entre os modelos, com pequena vantagem para a distribuição Weibull Exponenciada. A estimativa de λ fornecido pelo método de MV é próxima de zero, também sugere a utilização da Weibull Exponenciada, como verificado no método MCMC.

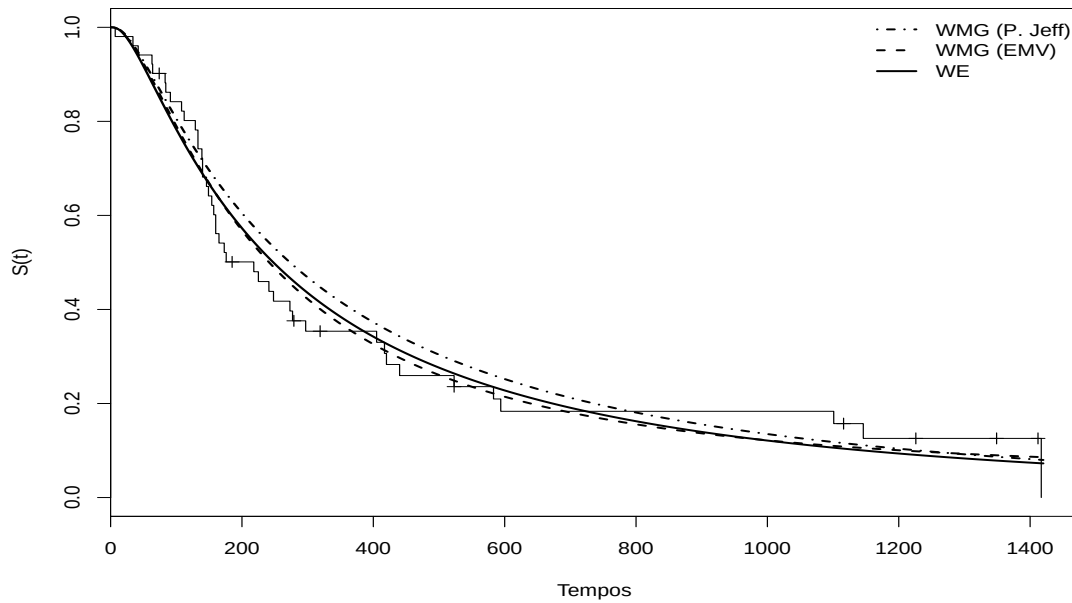


Figura 14: Comparações entre as funções de sobrevivência

A Figura 14 apresenta as curvas das funções de sobrevivências da WMG ajustada pelo MCMC com priori de Jeffrey, da WMG ajustada pelo EMV e da Weibull Exponenciada, todas localizadas próximas da função de sobrevivência empírica para os dados de Efron.

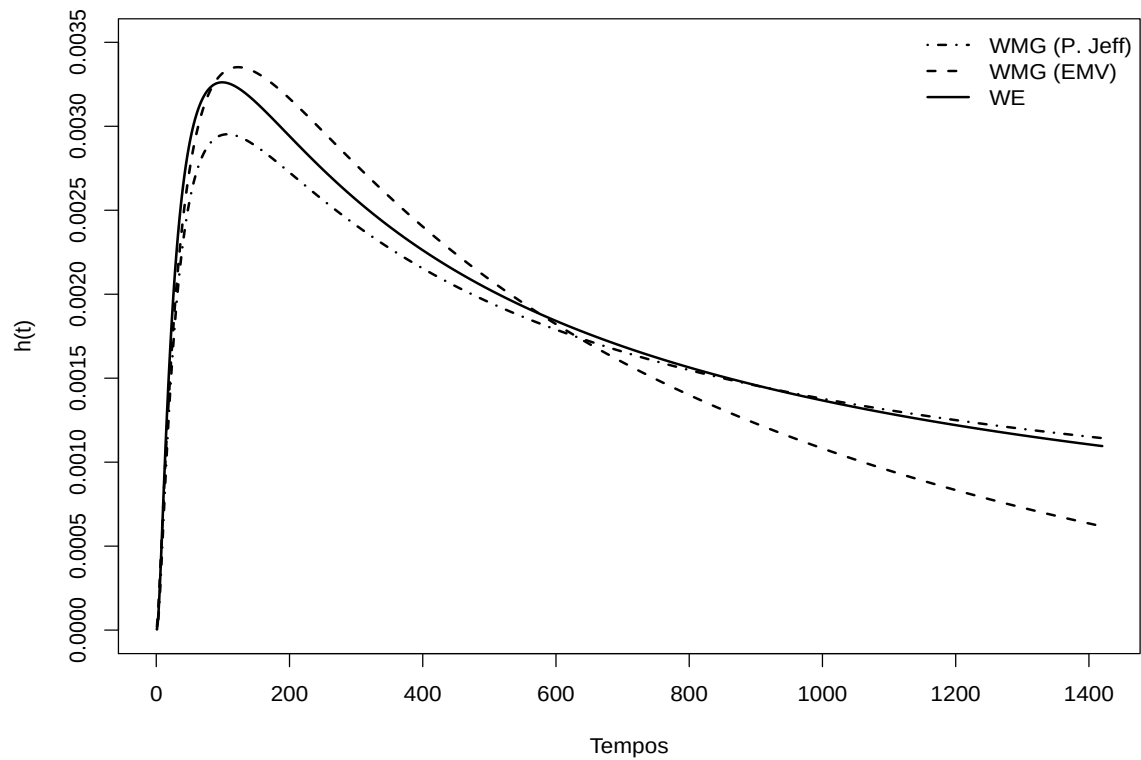


Figura 15: Comparações entre as funções de risco

Verifica-se na Figura 15 que os ajustes obtidos por diferentes métodos e distribuições indicam que os dados de Efron apresentam função de risco unimodal.

6.2 Dados de Aarset

Os dados da Tabela 52 sobre o tempo de vida de lâmpadas de Aarset (1985) apresentam função de risco em forma de banheira (XIE; LAI; MURTHY, 2003), indicando o uso da distribuição WMG. Este mesmo conjunto de dados foi utilizado por Mudholkar e Srivastava (1993), como exemplo, na utilização da distribuição Weibull Exponenciada.

Tabela 52: Tempo de vida de 50 lâmpadas

0,1	0,2	1	1	1	1	1	2	3	6
7	11	12	18	18	18	18	18	21	32
36	40	45	46	47	50	55	60	63	63
67	67	67	67	72	75	79	82	82	83
84	84	84	85	85	85	85	85	86	86

6.2.1 Resumo Numérico

Para execução do MCMC, foi utilizado os valores $a = 0.001$ e $b = 0.001$ como os hiper-parâmetros da priori gama $Gama(a, b)$, na estimação dos parâmetros de Θ . Para a priori uniforme considerou-se $k = 1$. Na priori de Jeffreys não há necessidade de especificação de hiper-parâmetros.

Com os modelos apresentados em 4.12, 4.15 e 4.17, foram geradas cadeias de Markov de comprimento 151000 com descartes das primeiras 1000 iterações a fim de eliminar os efeitos dos valores iniciais e, ainda, saltos de comprimento 30 para diminuir os efeitos das autocorrelações. Desta forma, obtiveram-se amostras de tamanhos 5000 para a distribuição a posteriori.

6.2.2 Diagnóstico de Convergência

Os históricos das séries temporais, autocorrelações e as densidades marginais dos parâmetros são apresentados nas Figuras 16, 17 e 18.

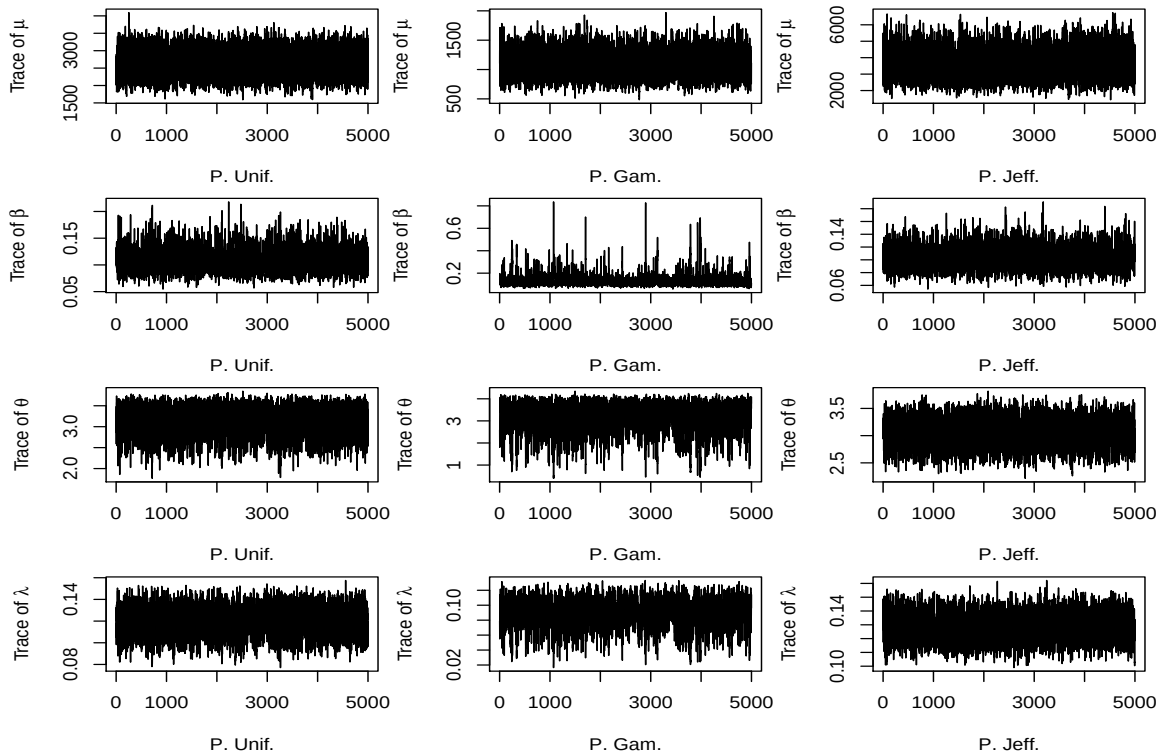


Figura 16: Histórico das séries temporais.

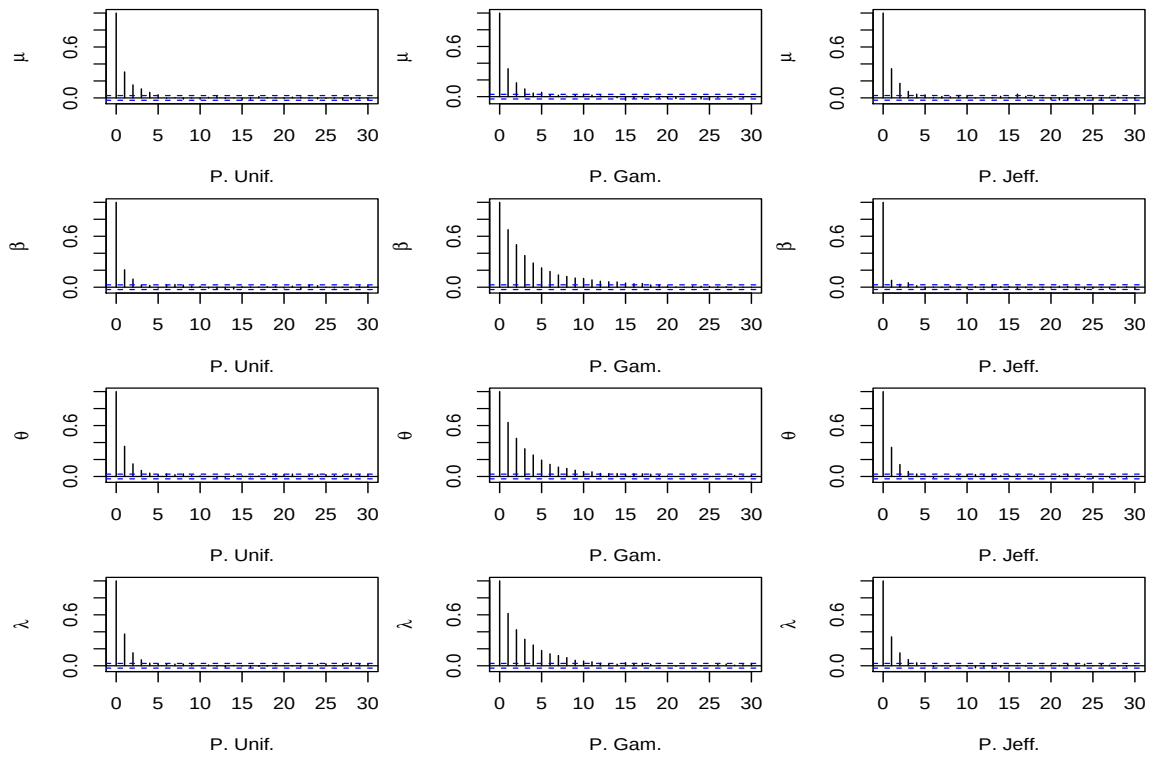


Figura 17: Gráficos de autocorrelação dos parâmetros.

Através das Figuras 16 e 17, pode-se observar as convergências do MCMC. Verifica-se também que as correlações são baixas, indicando que as amostras das distribuições a posteriori são independentes. As taxas de aceitações ficaram em torno de 35% a 50%.

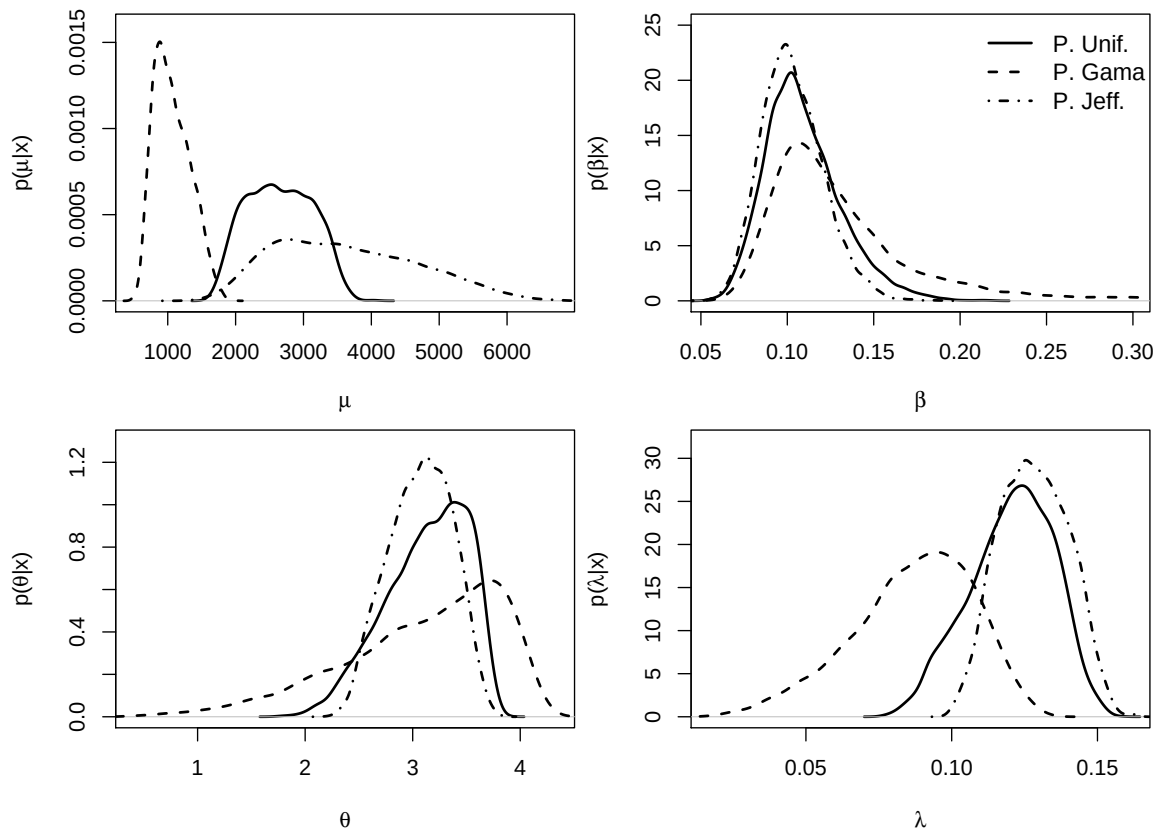


Figura 18: Densidades marginais a posteriori para os parâmetros α , β , θ e λ

A Tabela 53 apresenta os resultados das estimativas e os desvios-padrões obtidos pelo método MCMC, considerando-se as distribuições a priori uniforme, gama e regra de Jeffreys.

Tabela 53: Estimativas dos parâmetros e desvio-padrão correspondentes [em colchetes], obtidas pelos métodos MCMC e os critérios de avaliações DIC, para os dados apresentados em Aarset (1985).

Dist	Bayes				Teste
	$\hat{\mu}^{**}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\theta}$	$\hat{\lambda}$	DIC
P. Unif	2650,88 [478, 68]	0,1092 [0, 0220]	3,1270 [0, 3805]	0,1204 [0, 0143]	443,4
P. Gam	1067,11 [266, 28]	0,1360 [0, 0612]	3,0905 [0, 7360]	0,0867 [0, 0207]	445,2
P. Jeff	3636,86 [1047, 64]	0,1030 [0, 0179]	3,0726 [0, 2920]	0,1282 [0, 0116]	443,0

$$^{**}\mu = \alpha^{\frac{1}{\theta}}$$

Através da Tabela 53 pode-se observar que a estimativa do parâmetro de escala μ é influenciada pela distribuição a priori. Entretanto, através do critério de avaliação DIC indica pouca diferença entre elas, com a priori de Jeffrey apresentando um ajuste melhor.

A Tabela 51 apresenta as estimativas e os desvios-padrões obtidos pelo método de MV para as distribuições WMG, Weibull modificada, Weibull Exponenciada e Weibull, bem como os critérios de avaliações AIC e BIC.

Tabela 54: Estimativas de MV para os parâmetros dos modelos WMG, Weibull Modificado e Weibull Exponenciada e Weibull, desvios padrões correspondentes [em colchetes] e os critérios de avaliações AIC e BIC, para os dados de Aarset (1985).

Dist	EMV				Testes	
	$\hat{\mu}^{**}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\theta}$	$\hat{\lambda}$	AIC	BIC
WMG	2533,1	0,0914	3,6024	0,1385	445,9	453,5
	[1335, 15]	[0, 0132]	[0, 2321]	[0, 0141]		
WM	2486,58	1	0,3548	0,0233	460,3	466,8
	[991, 02]		[0, 0534]	[0, 0026]		
WE	90,4206	0,1301	5,3129	0	463,2	468,9
	[6, 4621]	[0, 0191]	[0, 1334]			
W	44,9125	1	0,9490	0	486,0	489,8
	[6, 9451]		[0, 1196]			

Observando-se os critérios de avaliações AIC e BIC apresentados na Tabela 54, verifica-se o melhor ajuste para a distribuição WMG.

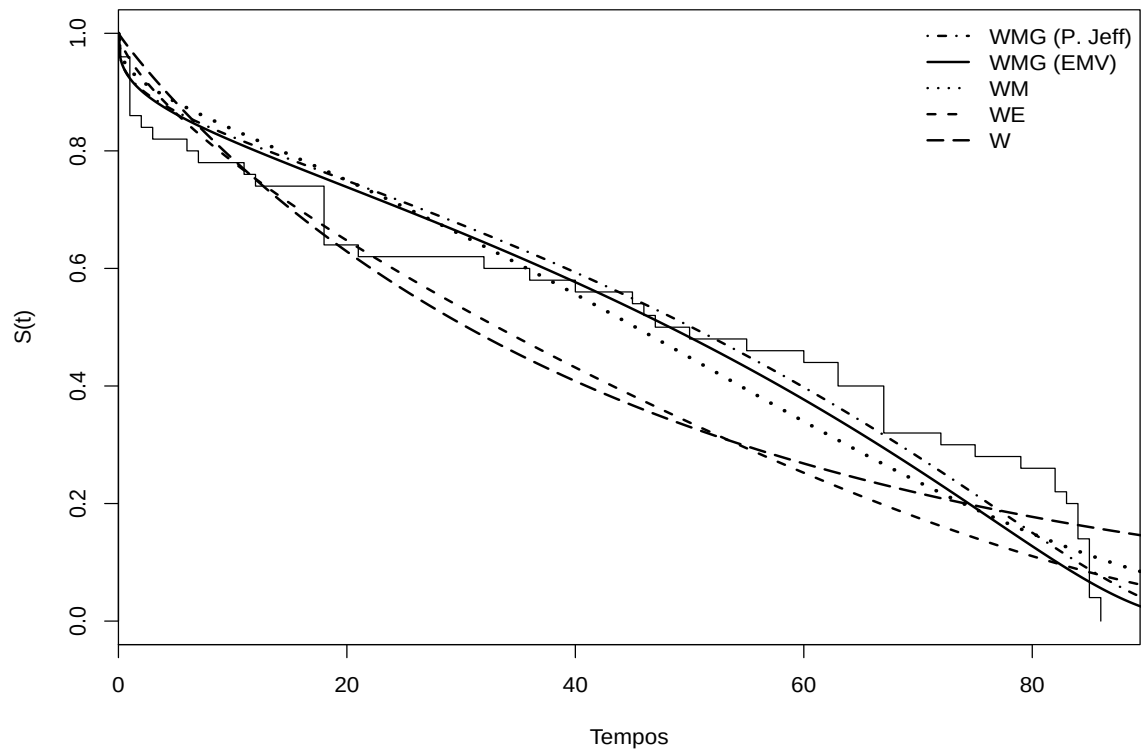


Figura 19: Comparações entre as funções de sobrevivência.

A Figura 19 apresenta as curvas das funções de sobrevivência com diferentes métodos para os dados de Aarset. Nota-se que as curvas da função de sobrevivência da WMG obtida com o EMV e da WMG com o método MCMC, encontram próximos da função de sobrevivência empírica para os dados de Aarset.

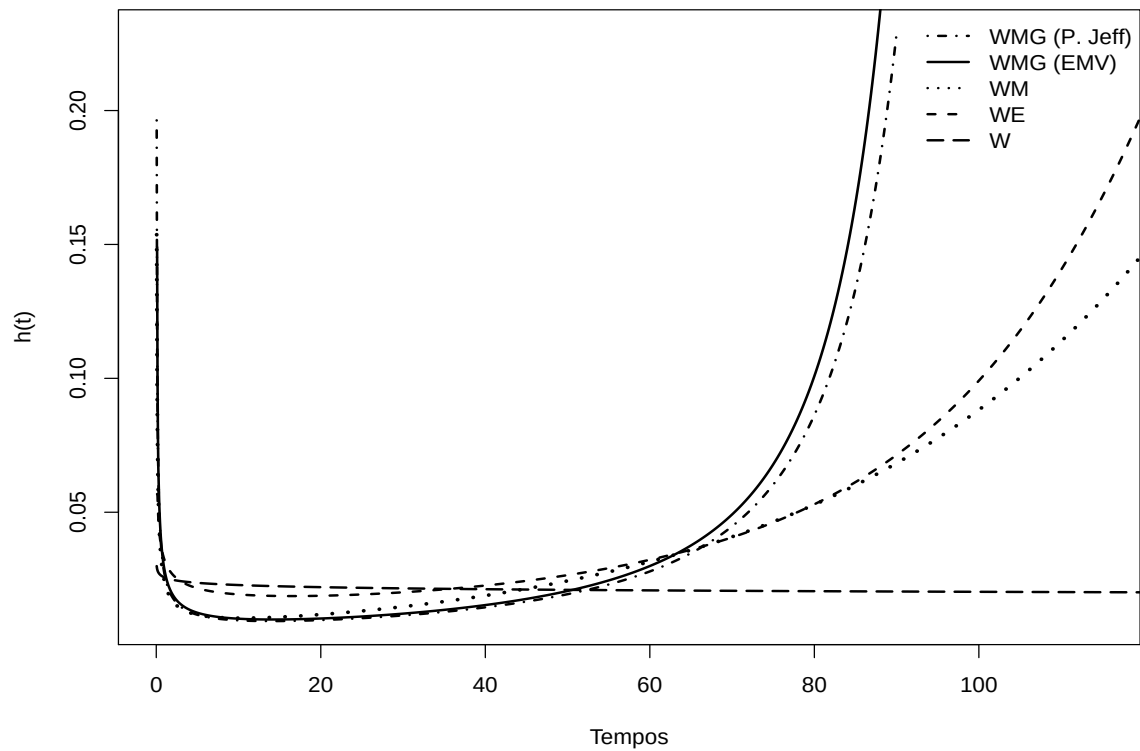


Figura 20: Comparações entre as funções de risco.

Na Figura 20 nota-se que as funções de risco obtida pela distribuição WMG, tanto no método MCMC como no método de MV, apresentam um período equivalente à mortalidade infantil e um envelhecimento mais elevado que as distribuições Weibull Modificada e Weibull Exponenciada. No caso da distribuição Weibull, apresenta a forma decrescente para a função de risco.

7 *Conclusões e Trabalhos Futuros*

7.1 Conclusões

Neste trabalho, foi realizado um estudo sobre as propriedades matemática da distribuição WMG, verificando-se que este modelo não só têm os modelos Exponenciais, Weibull, Weibull Exponenciado, Valor Extremo e Weibull Modificada como casos particulares, mas também apresenta função de risco bastante flexível para se adaptar a uma variedade de conjunto de dados.

Através de simulações de Monte Carlo, verificou-se que as probabilidades de cobertura encontram-se próximas ou acima dos níveis nominais adotados, independente do tipo priori utilizada. Assim, os métodos MCMC obtiveram excelente desempenho quando comparados aos métodos de MV em que, na maioria dos casos, ficaram abaixo dos níveis nominais considerados. Nos métodos MCMC, os erros quadráticos médios (EQM), em geral, foram significativamente menores, independente do tipo de priori utilizada, quando comparados aos métodos de MV. Quanto aos desempenhos dos estimadores, os métodos Bayesianos se mostraram mais precisos em relação às médias e com erros padrões significativamente menores.

Através das simulações, constataram-se as ocorrências de desvio-padrão maiores que os valores das estimativas, quando se trabalham com amostras pequenas e usam-se o método de MV. Neste caso, os métodos de MCMC podem ser uma alternativa mais adequada, fornecendo estimativas mais precisas.

Pode-se então concluir que o modelo WMG pode ser bastante útil na análise de sobrevivência ou confiabilidade, uma vez que incorpora diversos submodelos como casos particulares.

7.2 Trabalhos Futuros

Existem vários outros modelos propostos tais como a distribuição Beta Weibull Modificada (SILVA; ORTEGA; CORDEIRO,) que podem ser utilizados, mas devido às dificuldades na estimação são poucos utilizados. A abordagem Bayesiana através da utilização MCMC mostrou-se eficiente nas condições estudadas. Estudos sobre a utilização do método Bayesiano para estes modelos certamente seria benéfico.

Referências

- AARSET, M. V. The null distribution for a test of constant versus “bathtub” failure rate. *Scandinavian Journal of Statistics. Theory and Applications*, v. 12, n. 1, p. 55–68, 1985.
- AKAIKE, H. A new look at the statistical model identification. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 19, p. 716–723, 1974.
- BARLOW, R. E.; CAMPO, R. A. Total time on test processes and applications to failure data analysis. *Reliability and Fault Tree Analysis: Theoretical and Applied Aspects of System Reliability and Safety Assessment*, p. 451–481, 1975.
- BAYES, T. An essay towards solving a problem in the doctrine of chances. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, v. 53, p. 370–418, 1763.
- BOLFARINE, H.; RODRIGUES, J.; ACHCAR, J. *Análise de Sobrevida*. [S.l.]: Associação Brasileira de Estatística, 1991.
- BOLFARINE, H.; TOJEIRO, C. A. V.; LOUZADA-NETO, F. A Bayesian analysis for accelerated lifetime tests under an exponential power law model with threshold stress. *Journal of Applied Statistics*, v. 31, n. 6, p. 685–691, jul. 2004. ISSN 0266-4763 (print), 1360-0532 (electronic).
- BOX, G. E. P.; TIAO, G. C. *Bayesian Inference in Statistical Analysis*. Reading, Mass.: Addison Wesley, 1973.
- CANAVOS, G. C.; TSOKOS, C. P. Bayesian estimation of life parameters in the weibull distribution. *Operations Research, INFORMS*, v. 21, n. 3, p. pp. 755–763, 1973. ISSN 0030364X. Disponível em: <<http://www.jstor.org/stable/169384>>.
- CANCHO, V. G.; BARRIGA, G. D. C.; ORTEGA, E. M. M. Comparison of modified weibull models when bathtub-shaped failure rates. *Revista de Matemática e Estatística*, v. 5, p. 111–137, 2007.
- CARRASCO, J. M.; ORTEGA, E. M.; CORDEIRO, G. M. A generalized modified weibull distribution for lifetime modeling. *Computational Statistics & Data Analysis*, v. 53, n. 2, p. 450 – 462, 2008. ISSN 0167-9473. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0167947308004192>>.
- CHEN, Z. A new two-parameter lifetime distribution with bathtub shape or increasing failure rate function. *Statistics & Probability Letters*, v. 49, n. 2, p. 155 – 161, 2000. ISSN 0167-7152. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0167715200000444>>.
- COLOSIMO, E.; GIOLO, S. *Análise de sobrevivência aplicada*. [S.l.]: Edgard Blucher, 2006. (ABE - Projeto Fisher). ISBN 9788521203841.

- EFRON, B. Logistic regression, survival analysis, and the Kaplan–Meier curve. *Journal of the American Statistical Association*, v. 83, n. 402, p. 414–425, 1988. ISSN 0162-1459, 1537-274X (electronic).
- GAMERMAN, D.; MIGON, H. S. *Inferência estatística: uma abordagem integrada*. [S.l.]: Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 1993. (Textos de métodos matemáticos).
- GELFAND, A. E.; SMITH, A. F. M. Sampling-based approaches to calculating marginal densities. *Journal of the American Statistical Association*, v. 85, p. 398–409, 1990.
- GEWEKE, J. *Evaluating the Accuracy of Sampling-Based Approaches to the Calculation of Posterior Moments*. 1992. Disponível em: <<http://citeseer.ist.psu.edu/175425.html>; <ftp://ftp.econ.umn.edu/outgoing/geweke/papers/paper49/Text.ps>>.
- GEWEKE, J. Interpretation and inference in mixture models: Simple MCMC works. *Computational Statistics and Data Analysis*, v. 51, n. 7, p. 3529–3550, 2007.
- GHITANY, M. E.; MALLER, R. A. Asymptotic results for exponential mixture models with long-term survivors. *A Journal of Theoretical and Applied Statistics*, v. 23, p. 331–336, 1992.
- GILKS, W. R.; THOMAS, A.; SPIEGELHALTER, D. J. A language and program for complex Bayesian modelling. *The Statistician*, 1993.
- GLASER, R. E. Bathtub and related failure rate characterizations. *Journal of the American Statistical Association*, v. 75, n. 371, p. 667–672, 1980. ISSN 0162-1459 (print), 1537-274X (electronic).
- HASTINGS, W. K. Monte Carlo sampling methods using Markov chains and their applications. *Biometrika*, v. 57, p. 97–109, 1970.
- HJORTH, U. A reliability distribution with increasing, decreasing, constant and bathtub-shaped failure rates. *Technometrics*, American Statistical Association and American Society for Quality, v. 22, n. 1, p. pp. 99–107, 1980. ISSN 00401706. Disponível em: <<http://www.jstor.org/stable/1268388>>.
- HONG, J. *Modified weibull distributions in reliability engineering*. Tese (Doutorado) — INDUSTRIAL and SYSTEMS ENGINEERING— National University of Singapore, 2009.
- JEFFREYS, H. An invariant form for the prior probability in estimation problems. *Proc. of the Royal Soc. of London A*, v. 186, p. 453–454, 1946.
- JIANG, H.; XIE, M.; TANG, L. C. Markov chain Monte Carlo methods for parameter estimation of the modified Weibull distribution. *Journal of Applied Statistics*, v. 35, n. 6, p. 647 – 658, jun. 2008. ISSN 0266 – 4763 (print), 1360 – 0532 (electronic).
- JIANG, R.; MURTHY, D. N. P. The exponentiated weibull family: Graphical approach. *Transactions Reliability*, v. 48, p. 68–72, 1999.
- KUNDU, D.; GUPTA, R. D. Generalized exponential distribution. *Australian and New Zealand Journal of Statistics*, v. 41, n. 2, p. 173–188, 1999.

LAI, C.-D.; XIE, M.; BARLOW, R. E. *Stochastic Ageing and Dependence for Reliability*. Secaucus, NJ, USA: Springer-Verlag New York, Inc., 2006. ISBN 0387297421.

LAI, C. D.; XIE, M.; MURTHY, D. N. P. A modified weibull distribution. *IEEE Transactions on Reliability*, v. 52, n. 1, p. 33–37, 2003.

LAWLESS, J. F. *Statistical models and methods for lifetime data*. New-York, Chichester, Brisbane: J. Wiley, 1982. (Wiley series in probability and mathematical statistics. Applied probability and statistics). ISBN 0-471-08544-8. Disponível em: <<http://opac.inria.fr/record=b1079753>>.

LEHMANN, E.; CASELLA, G. *Theory of point estimation*. 2. ed. [S.l.]: Springer, 1998.

LEHMANN, E. L.; CASELLA, G. *Theory of Point Estimation*. New York: Wiley, 1998.

METROPOLIS, N.; ROSENBLUTH, A. W.; TELLER, A. H. Equation of state calculations by fast computing machines. *Journal of Chemical Physics*, v. 21, n. 6, p. 1087–1092, jun. 1953.

MUDHOLKAR, G. S.; HUTSON, A. D. The exponentiated Weibull family: some properties and a flood data application. *Communications in Statistics. Theory and Methods*, v. 25, n. 12, p. 3059–3083, 1996.

MUDHOLKAR, G. S.; SRIVASTAVA, D. K. Exponentiated weibull family for analyzing bathtub failure-rate data. *IEEE Transactions on Reliability*, v. 42, n. 2, p. 299–302, 1993.

MUDHOLKAR, G. S.; SRIVASTAVA, D. K.; FRAIMER, M. The exponentiated Weibull family: A reanalysis of the bus-motor-failure data. *Technometrics*, v. 37, p. 436–445, 1995.

MUDHOLKAR, G. S.; SRIVASTAVA, D. K.; FREIMER, M. The exponentiated weibull family: A reanalysis of the bus-motor-failure data. *Technometrics*, v. 37, n. 4, p. 436–445, 1995. Disponível em: <<http://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/00401706.1995.10484376>>.

MUDHOLKAR, G. S.; SRIVASTAVA, D. K.; KOLLIA, G. D. A generalization of the Weibull distribution with application to the analysis of survival data. *Journal of the American Statistical Association*, v. 91, n. 436, p. 1575–1583, 1996.

NASSAR, M. M.; EISSA, F. H. On the exponentiated weibull distribution. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, v. 32, n. 7, p. 1317–1336, 2003. Disponível em: <<http://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1081/STA-120021561>>.

PAULINO, C. D.; TURKMAN; MURTEIRA, B. *Estatística Bayesiana*. [S.l.: s.n.], 2003.

RAFTERY, A. E.; LEWIS, S. *How Many Iterations in the Gibbs Sampler*. 1992. Disponível em: <<http://citeseer.ist.psu.edu/278416.html>; <http://www.stat.washington.edu/www/research/online/1991/raftery-lewis.ps>>.

RODRIGUES, J.; CANCHO, V. G.; CASTRO, M. de. *Teoria Unificada de Análise de Sobrevivência*. [S.l.]: ABE, 2008.

SCHWARZ, G. Estimating the dimension of a model. *Ann. Stat.*, v. 14, p. 461–64, 1978.

SILVA, G.; ORTEGA, E.; CORDEIRO, G. The beta modified weibull distribution. *Life-time Data Analysis*, Springer US, v. 16, n. 3, p. 409–430. ISSN 1380-7870. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/s10985-010-9161-1>>.

SMITH, A. F.; ROBERTS, G. O. Bayesian computation via the Gibbs sampler and related Markov chain Monte Carlo methods. *J. R. Statis. Soc.*, v. 55, p. 3–23, 1993.

SPIEGELHALTER, D. J. et al. *Bayesian Measures of Model Complexity and Fit*. set. 13 2001.

TIERNEY, L. Markov chains for exploring posterior distributions. *Ann. Statis.*, v. 22, p. 1701–1762, 1994.

UPADHYAY, S. K. et al. A bayes comparison of weibull extension and modified weibull models for data showing bathtub hazard rate. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, v. 83, n. 1, p. 68–81, 2013.

WEIBULL, W. A. A statistical theory of the strength of material. *Royal Swedish Institute for Engineering Research*, v. 151, p. 1–45, 1939.

WEIBULL, W. A. A statistical distribution of wide applicability. *Journal of Applied Mechanics*, v. 18, p. 293–297, 1951.

WEIBULL, W. A. *A statistical Representation of Fatigue Failure in Solids*. [S.l.]: Royal Institute of Technology, 1954.

XIE, M.; LAI, C. Reliability analysis using an additive weibull model with bathtub-shaped failure rate function. *Reliability Engineering & System Safety*, v. 52, n. 1, p. 87 – 93, 1996. ISSN 0951-8320. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0951832095001492>>.

XIE, M.; LAI, C. D.; MURTHY, D. N. P. Weibull-related distributions for the modelling of bathtub shaped failure rate functions. In: *Mathematical and statistical methods in reliability (Trondheim, 2002)*. [S.l.]: World Sci. Publ., River Edge, NJ, 2003, (Ser. Qual. Reliab. Eng. Stat., v. 7). p. 283–297.

XIE, M.; TANG, Y.; GOH, T. A modified weibull extension with bathtub-shaped failure rate function. *Reliability Engineering & System Safety*, v. 76, n. 3, p. 279 – 285, 2002. ISSN 0951-8320. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0951832002000224>>.

Apêndices

Apêndice A

Os elementos da matriz de informação observada para os parâmetros $\Theta = (\alpha, \beta, \theta, \lambda)$ são dados por:

$$\begin{aligned}
 I_{\alpha\alpha} &= \sum_{i=1}^n \frac{\beta \delta_i w_i^{\beta-1} t_i^{2\theta}}{x_i} \left(\frac{e^{2\lambda t_i - u_i}}{\alpha^4} + \frac{y_i^2}{\alpha^4 w_i} - \frac{\beta y_i^2}{\alpha^4 w_i} - 2 \frac{y_i}{t_i^\theta \alpha^3} \right) \\
 &+ \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i t_i^{2\theta}}{v_i} \left(\frac{z_i^2}{\alpha^4 v_i} - 2 \frac{w_i}{t_i^\theta \alpha^3} - \frac{e^{2\lambda t_i + u_i}}{\alpha^4} \right) + \frac{\delta_i}{\alpha^2} \\
 &+ \sum_{i=1}^n \frac{\beta y_i t_i^{2\theta} \{ [(-\delta_i - 1) w_i^\beta + \delta_i] e^{\lambda t_i} + y_i [(\delta_i + 1)^2 w_i^\beta - \delta_i^2] \beta \}}{\alpha^4 w_i^2 x_i} \\
 &+ \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i w_i^{-2+\beta} \beta t_i^{2\theta} y_i^2}{\alpha^4 x_i} - \frac{\beta^2 t_i^{2\theta} y_i^2 (-(1 + \delta_i) w_i^{\beta(\delta_i+1)} + \delta_i w_i^{\delta_i \beta})^2}{\alpha^4 w_i^2 (w_i^{\delta_i \beta} - w_i^{\beta(\delta_i+1)})^2} \\
 &+ \sum_{i=1}^n \frac{t_i^\theta y_i \{ [(\delta_i \beta - \beta) \log(w_i) - 3\delta_i - 1] w_i^\beta \}}{\alpha^2 w_i x_i^4} \\
 \\
 I_{\alpha\beta} &= \sum_{i=1}^n \frac{t_i^\theta y_i \{ [-2\beta (-1 + \delta_i) \log(w_i) + 3\delta_i + 3] w_i^{2\beta} + w_i^{4\beta} + \delta_i \}}{\alpha^2 w_i x_i^4} \\
 &- \sum_{i=1}^n \frac{t_i^\theta y_i \{ [\beta (-1 + \delta_i) \log(w_i) - \delta_i - 3] w_i^{3\beta} \}}{\alpha^2 w_i x_i^4} \\
 &- \sum_{i=1}^n \frac{t_i^\theta y_i \{ [(\delta_i \beta - \beta) \log(w_i) - 3\delta_i - 1] w_i^\beta \}}{\alpha^2 w_i x_i^4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{\alpha\theta} &= \sum_{i=1}^n \frac{\beta \delta_i \log(t_i) y_i^2 w_i^{\beta-1}}{x_i} \left(\frac{\beta t_i^{2\theta}}{\alpha^3 w_i} + \frac{t_i^\theta}{\alpha^2 y_i} - \frac{t_i^{2\theta} e^{2\lambda t_i - u_i}}{\alpha^3 y_i^2} - \frac{t_i^{2\theta}}{\alpha^3 w_i} \right) \\
&+ \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i \log(t_i)}{\alpha^2} \left(-\frac{w_i^{2\beta-2} \beta^2 t_i^{2\theta} y_i^2}{\alpha x_i^2} + \frac{t_i^\theta z_i}{v_i} + \frac{t_i^{2\theta} e^{2\lambda t_i + u_i}}{\alpha v_i} - \frac{t_i^{2\theta} z_i^2}{\alpha v_i^2} \right) \\
&- \sum_{i=1}^n \frac{\beta y_i \log(t_i) t_i^{2\theta} \{ [(-\delta_i - 1) w_i^\beta + \delta_i] e^{\lambda t_i} \}}{\alpha^3 w_i^2 x_i} \\
&- \sum_{i=1}^n \frac{\beta y_i \log(t_i) t_i^{2\theta} \{ [(\delta_i + 1)^2 w_i^\beta - \delta_i^2] y_i \beta \}}{\alpha^3 w_i^2 x_i} \\
&+ \sum_{i=1}^n \frac{\beta^2 \log(t_i) y_i^2}{\alpha^3 w_i^2} \left[\frac{[\delta_i w_i^{\delta_i \beta} - (1 + \delta_i) w_i^{\beta(\delta_i+1)}]^2 t_i^{2\theta}}{[w_i^{\delta_i \beta} - w_i^{\beta(\delta_i+1)}]^2} \right] \\
&- \sum_{i=1}^n \frac{\beta^2 \log(t_i) y_i^2}{\alpha^3 w_i^2} \left[\frac{w_i t_i^\theta [(\delta_i + 1) w_i^\beta - \delta_i] \alpha}{\beta x_i y_i} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{\alpha\lambda} &= \sum_{i=1}^n \frac{\beta^2 \delta_i w_i^{\beta-1} t_i^{2\theta+1}}{x_i} \left(\frac{y_i^2}{\alpha^3 w_i} + \frac{t_i^\theta y_i}{\alpha^2 \beta} - \frac{e^{2\lambda t_i - u_i}}{\alpha^3 \beta} - \frac{y_i^2}{\alpha^3 \beta w_i} - \frac{w_i^{\beta-1} y_i^2}{\alpha^3 x_i} \right) \\
&+ \sum_{i=1}^n \frac{(- (1 + \delta_i) w_i^{\beta(\delta_i+1)} + \delta_i w_i^{\delta_i \beta})^2 t_i^{2\theta+1} y_i^2 \beta^2}{\alpha^3 w_i^2 (w_i^{\delta_i \beta} - w_i^{\beta(\delta_i+1)})^2} \\
&- \sum_{i=1}^n \frac{\beta y_i t_i \{ [(\delta_i + 1)^2 w_i^\beta - \delta_i^2] y_i \beta t_i^{2\theta} \}}{\alpha^3 w_i^2 x_i} + \frac{\delta_i t_i^{2\theta+1}}{\alpha^2 v_i} \left(\frac{z_i}{t_i^\theta} - \frac{z_i^2}{\alpha v_i} \right) \\
&- \sum_{i=1}^n \frac{\beta y_i t_i \{ + w_i t_i^\theta [(\delta_i + 1) w_i^\beta - \delta_i] \alpha \}}{\alpha^3 w_i^2 x_i} + \frac{\delta_i t_i^{2\theta+1} e^{2\lambda t_i + u_i}}{\alpha^3 v_i} \\
&- \sum_{i=1}^n \frac{\beta y_i t_i \{ \{ [(-\delta_i - 1) w_i^\beta + \delta_i] e^{\lambda t_i} \} t_i^{2\theta} \}}{\alpha^3 w_i^2 x_i}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{\beta\beta} &= \sum_{i=1}^n \frac{4 w_i^{3\beta} \delta_i + w_i^{3\beta} \delta_i [\log(w_i)]^2 \beta^2 - 6 \delta_i w_i^{2\beta} - w_i^{3\beta} [\log(w_i)]^2 \beta^2}{\beta^2 (-1 + w_i^\beta)^4} \\
&+ \sum_{i=1}^n \frac{2 w_i^{2\beta} [\log(w_i)]^2 \beta^2 - w_i^\beta [\log(w_i)]^2 \beta^2 + 4 w_i^\beta \delta_i}{\beta^2 (-1 + w_i^\beta)^4} \\
&+ \sum_{i=1}^n \frac{w_i^\beta \beta^2 [\log(w_i)]^2 \delta_i - \delta_i - w_i^{4\beta} \delta_i - 2 w_i^{2\beta} \beta^2 \log(w_i)^2 \delta_i}{\beta^2 (-1 + w_i^\beta)^4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{\beta\theta} &= \sum_{i=1}^n \frac{[-2\beta(\delta_i - 1) \log(w_i) + 3\delta_i + 3] w_i^{2\beta} t_i^\theta y_i \log(t_i)}{\alpha w_i x_i^4} \\
&+ \sum_{i=1}^n \frac{\{ w_i^{4\beta} + [(\delta_i \beta - \beta) \ln(w_i) - 1 - 3\delta_i] w_i^\beta + \delta_i \} t_i^\theta y_i \log(t_i)}{\alpha w_i x_i^4} \\
&+ \sum_{i=1}^n \frac{\{ [\beta(\delta_i - 1) \log(w_i) - \delta_i - 3] w_i^{3\beta} \} t_i^\theta y_i \log(t_i)}{\alpha w_i x_i^4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{\beta\lambda} &= \sum_{i=1}^n \frac{[-2\beta(\delta_i - 1)\log(w_i) + 3\delta_i + 3]w_i^{2\beta}t_i^\theta y_i t_i}{\alpha w_i x_i^4} \\
&+ \sum_{i=1}^n \frac{\{w_i^{4\beta} + [(\delta_i\beta - \beta)\log(w_i) - 1 - 3\delta_i]w_i^\beta + \delta_i\}t_i^\theta y_i t_i}{\alpha w_i x_i^4} \\
&+ \sum_{i=1}^n \frac{[\beta(\delta_i - 1)\log(w_i) - \delta_i - 3]w_i^{3\beta}t_i^\theta y_i t_i}{\alpha w_i x_i^4} \\
\\
I_{\theta\theta} &= \sum_{i=1}^n \frac{w_i^\beta \delta_i \beta [\log(t_i)]^2}{x_i} \left[-\frac{t_i^\theta y_i}{\alpha w_i} - \frac{\beta t_i^{2\theta} y_i^2}{\alpha^2 (-w_i)^2} + \frac{t_i^{2\theta} e^{2\lambda t_i - u_i}}{\alpha^2 w_i} \right] \\
&+ \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i [\log(t_i)]^2}{\alpha^2} \left\{ \frac{w_i^{2\beta} \beta^2 t_i^{2\theta} y_i^2}{(-w_i)^2 x_i^2} - \frac{\alpha t_i^\theta z_i}{v_i} - \frac{t_i^{2\theta} e^{2\lambda t_i + u_i}}{v_i} + \frac{t_i^{2\theta} z_i^2}{v_i^2} \right\} \\
&+ \sum_{i=1}^n \frac{t_i^{2\theta} \beta [\log(t_i)]^2 y_i \{[(\delta_i + 1)^2 w_i^\beta - \delta_i^2] y_i \beta\}}{\alpha^2 - w_i^2 x_i} \\
&+ \sum_{i=1}^n \frac{\beta [\log(t_i)]^2 y_i \{-\alpha - w_i [(\delta_i + 1) w_i^\beta - \delta_i] t_i^\theta\}}{\alpha^2 - w_i^2 x_i} - \frac{\delta_i}{(\theta + \lambda t_i)^2} \\
&+ \sum_{i=1}^n \frac{w_i^\beta \delta_i \beta t_i^{2\theta} [\log(t_i)]^2 y_i^2}{\alpha^2 (-w_i)^2 x_i} + \frac{t_i^{2\theta} \beta^2 [\log(t_i)]^2 y_i^2 [(\delta_i + 1)^2 w_i^\beta - \delta_i^2]}{\alpha^2 - w_i^2 x_i} \\
&- \sum_{i=1}^n \frac{[\log(t_i)]^2 [-w_i^{\beta(\delta_i+1)} - w_i^{\beta(\delta_i+1)} \delta_i + \delta_i w_i^{\delta_i \beta}]^2 t_i^{2\theta} y_i^2 \beta^2}{\alpha^2 - w_i^2 [w_i^{\delta_i \beta} - w_i^{\beta(\delta_i+1)}]^2} \\
\\
I_{\theta\lambda} &= \sum_{i=1}^n \frac{\beta \delta_i \log(t_i) w_i^{\beta-1} t_i^{2\theta+1}}{\alpha x_i} \left[\frac{e^{2\lambda t_i - u_i}}{\alpha} + \frac{y_i^2}{\alpha w_i} + \frac{w_i^{\beta-1} \beta y_i^2}{\alpha x_i} \right] \\
&+ \sum_{i=1}^n \frac{\beta \delta_i \log(t_i) w_i^{\beta-1} t_i^{2\theta+1}}{\alpha x_i} \left[-\frac{\beta y_i^2}{\alpha w_i} - \frac{y_i}{t_i^\theta} \right] \\
&+ \sum_{i=1}^n \frac{[(\delta_i + 1) w_i^\beta - \delta_i] t_i^\theta \alpha w_i y_i \beta t_i \log(t_i)}{\alpha^2 w_i^2 x_i} + \frac{\delta_i t_i}{(\theta + \lambda t_i)^2} \\
&+ \sum_{i=1}^n \frac{\{[-(\delta_i - 1) w_i^\beta + \delta_i] e^{\lambda t_i}\} t_i^{2\theta} y_i \beta t_i \log(t_i)}{\alpha^2 w_i^2 x_i} \\
&+ \sum_{i=1}^n \frac{\{\beta y_i [(\delta_i + 1)^2 w_i^\beta - \delta_i^2]\} t_i^{2\theta} y_i \beta t_i \log(t_i)}{\alpha^2 w_i^2 x_i} \\
&+ \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i \log(t_i) t_i^{2\theta+1}}{\alpha v_i} \left[-\frac{z_i}{t_i^\theta} - \frac{e^{2\lambda t_i + u_i}}{\alpha} + \frac{z_i^2}{\alpha v_i} \right] \\
&- \sum_{i=1}^n \frac{(-w_i^{\beta(\delta_i+1)} - w_i^{\beta(\delta_i+1)} \delta_i + \delta_i w_i^{\delta_i \beta})^2 t_i^{2\theta+1} \beta^2 y_i^2 \log(t_i)}{\alpha^2 w_i^2 (w_i^{\delta_i \beta} - w_i^{\beta(\delta_i+1)})^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{\theta\theta} &= \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i \beta^2 y_i^2}{\alpha^3 x_i} \left(\frac{w_i^{-2+\beta} t_i^{2\theta}}{\alpha \beta} - \frac{w_i^{-2+\beta} t_i^{2\theta}}{\alpha} - 2 \frac{w_i^{\beta-1} t_i^\theta}{\beta y_i} + \frac{w_i^{2\beta-2} t_i^{2\theta}}{\alpha x_i} \right) \\
&+ \sum_{i=1}^n -2 \frac{\delta_i t_i^\theta w_{i;i}}{\alpha^3 v_i} - \frac{2 \beta y_i [(\delta_i + 1) w_i^\beta - \delta_i] t_i^\theta (-1 + e^{-u_i}) \alpha}{\alpha^4 w_i^2 x_i} \\
&+ \sum_{i=1}^n \frac{\beta y_i t_i^{2\theta} \{ [(-\delta_i - 1) w_i^\beta + \delta_i] e^{\lambda t_i} + y_i [(\delta_i + 1)^2 w_i^\beta - \delta_i^2] \beta \}}{\alpha^4 w_i^2 x_i} \\
&- \sum_{i=1}^n \frac{\beta^2 t_i^{2\theta} y_i^2 [-w_i^{\beta(\delta_i+1)} - w_i^{\beta(\delta_i+1)} \delta_i + \delta_i w_i^{\delta_i \beta}]^2}{\alpha^4 w_i^2 [w_i^{\delta_i \beta} - w_i^{\beta(\delta_i+1)}]^2} \\
&+ \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i w_i^{\beta-1} \beta t_i^{2\theta} e^{2\lambda t_i - u_i}}{\alpha^4 x_i} + \frac{\delta_i t_i^{2\theta} z_i^2}{\alpha^4 v_i^2} + \frac{\delta_i}{\alpha^2} - \frac{\delta_i t_i^{2\theta} e^{2\lambda t_i + u_i}}{\alpha^4 v_i}
\end{aligned}$$

em que $x_i = -1 + \left(1 - \exp \left\{ -\frac{t_i^\theta \exp\{\lambda t_i\}}{\alpha} \right\}\right)^\beta$, $y_i = \exp \left\{ \lambda t_i - \frac{t_i^\theta \exp\{\lambda t_i\}}{\alpha} \right\}$ e

$$z_i = \exp \left\{ \lambda t_i + \frac{t_i^\theta \exp\{\lambda t_i\}}{\alpha} \right\}.$$

Apêndice B

Programa utilizado para geração de amostras com censura tipo II

```
##### Tamanho da Amostra (n), % de Censura (cens), Semente #####
n = 50; cens = 20; set.seed(120);
##### Valores dos Parâmetros #####
alpha = 1; beta = 1; theta = 1; lambda = 1;
cs = floor(n*cens/100)
##### Valores dos Parâmetros #####
delta=c(rep(1,(n-cs)),rep(0,cs))
x=c()
for(i in 1:n)
{
  u = runif(1)
  f = function(t)
  {
    log(1-u^(1/beta))+(1/alpha)*(t^theta)*exp(lambda*t)
  }
  x[i] = uniroot(f=f,interval=c(0,150))$root
}
t=sort(x)
for(i in (n-cs):n)
{
  t[i]=t[n-cs]
}
#####
t
delta
#####
```

Apêndice C

Programa utilizado para o estimador de máxima verossimilhança no exemplo dos dados de Efron no SAS 9.2.

```

/***** Dados de Efron *****/
data dados;
input t delta@@;
cards;
  74 0 185 0 279 0 319 0 523 0 1116 0 1226 0 1349 0 1412 0 7 1
  34 1 42 1 63 1 64 1 83 1 84 1 91 1 108 1 112 1 129 1 133 1 133 1 139 1
  140 1 140 1 146 1 149 1 154 1 157 1 160 1 160 1 165 1 173 1 176 1 218 1
  225 1 241 1 248 1 273 1 277 1 297 1 405 1 417 1 420 1 440 1 523 1 583 1
  594 1 1101 1 1146 1 1417 1
run;

/***** Proc nlmixed *****/
proc nlmixed data = dados tech=tr df=99999999;

/***** Chutes Iniciais *****/
parms alpha = 6, beta=6, theta=0.3,lambda=0.00001;

/***** Log da Densidade *****/
t1 = lambda * t;
t2 = log(t);
t5 = log(theta + t1);
t6 = log(alpha);
t7 = log(beta);
t10 = t ** theta;
t12 = exp(t1);
t13 = 0.1e1 / alpha;
t15 = beta * t10 * t12 * t13;
t16 = exp(t15);
t19 = exp(t10 * t13 * t12);
t20 = t19 - 0.1e1;
t21 = t20 ** beta;
t24 = (-0.1e1 / (-t16 + t21)) ** delta;
t27 = t20 ** (delta * (beta - 0.1e1));
t28 = exp(-t15);
t30 = t20 ** (-beta);
t32 = (t20 * t30) ** (-delta);
t36 = log(-t24 * (-t27 + t28 * t21 * t32));

```

```
likeh = delta * (t1 + theta * t2 - t2 + t5 - t6 + t7) + t36;  
model t ~ general(likeh);  
run;
```



```

t37 = delta * (t1 + theta * t2 - t2 + t5 - t6 + t7) + t36;
likeh = sum(t37);
##### P. Uniforme #####
#prior1 = log(1);
#prior2 = log(1);
#prior3 = log(1);
#prior4 = log(1);
##### P. Gama #####
#prior1 = log(dgamma(alpha,0.01,0.01));
#prior2 = log(dgamma(beta,0.01,0.01));
#prior3 = log(dgamma(theta,0.01,0.01));
#prior4 = log(dgamma(lambda,0.01,0.01));
##### P. Jeff #####
prior1 = -log(alpha);
prior2 = -log(beta);
prior3 = -log(theta);
prior4 = -log(lambda);
posterior= likeh + prior1 + prior2 + prior3 + prior4;
return(posterior)
}

##### Escolha dos Valores da Distribuição Proposta #####
aa <- c((calpha)^2 /ctalpha,calpha/ctalpha);
bb <- c((cbeta)^2 /ctbeta,cbeta/ctbeta);
cc <- c((ctheta)^2 /cttheta,ctheta/cttheta);
dd <- c((clambda)^2 /ctlambda,clambda/ctlambda);

##### Criação das Cadeias #####
alpha = c(); beta = c(); theta = c(); lambda = c();
alpha[1] = calpha; beta[1] = cbeta; theta[1] = ctheta; lambda[1] = clambda;

##### Criando vetor da taxa de aceitação #####
k1=rep(0,times=R+nbi);k2=rep(0,times=R+nbi);
k3=rep(0,times=R+nbi);k4=rep(0,times=R+nbi);

##### ALGORITMO M-H #####
for(i in 1:(R+nbi))
{
##### Cadeia Alpha #####
j=1;
while(j<2)
{
prop1 = rgamma(1,aa[1],aa[2]);

```

```

q1 = log(dgamma(alpha[i],aa[1],aa[2]));
q2 = log(dgamma(prop1,aa[1],aa[2]));
p1 = posterior(alpha[i],beta[i],theta[i],lambda[i]);
p2 = posterior(prop1,beta[i],theta[i],lambda[i]);
aux1 = q1 - q2 - p1 + p2;
if (is.finite(aux1) & aux1 > log(tx)){aux1 = aux1; j=j+1}
}
if (aux1 > log(runif(1))){alpha[i+1]= prop1}
else {alpha[i+1] = alpha[i]; k1[i]=1 }
##### Cadeia Beta #####
j=1;
while(j<2)
{
    prop2 = rgamma(1,bb[1],bb[2]);
    q1 = log(dgamma(beta[i],bb[1],bb[2]));
    q2 = log(dgamma(prop2,bb[1],bb[2]));
    p1 = posterior(alpha[i+1],beta[i],theta[i],lambda[i]);
    p2 = posterior(alpha[i+1],prop2,theta[i],lambda[i]);
    aux2 = q1 - q2 - p1 + p2;
    if (is.finite(aux2) & aux2 > log(tx)){aux2 = aux2; j=j+1}
}
if (aux2 > log(runif(1))){beta[i+1]= prop2}
else{beta[i+1]=beta[i];k2[i]=1 }
##### Cadeia Theta #####
j=1
while(j<2)
{
    prop3 = rgamma(1,cc[1],cc[2]);
    q1 = log(dgamma(theta[i],cc[1],cc[2]));
    q2 = log(dgamma(prop3,cc[1],cc[2]));
    p1 = posterior(alpha[i+1],beta[i+1],theta[i],lambda[i]);
    p2 = posterior(alpha[i+1],beta[i+1],prop3,lambda[i]);
    aux3 = q1 - q2 - p1 + p2;
    if (is.finite(aux3) & aux3 > log(tx)){aux3 = aux3; j=j+1}
}
if (aux3 > log(runif(1))){theta[i+1]= prop3}
else{ theta[i+1]=theta[i]; k3[i]=1 }
##### Cadeia Lambda #####
j=1
while(j<2)
{
    prop4 =rgamma(1,dd[1],dd[2]);
    q1 = log(dgamma(lambda[i],dd[1],dd[2]));

```

```

q2 = log(dgamma(prop4,dd[1],dd[2]));
p1 = posterior(alpha[i+1],beta[i+1],theta[i+1],lambda[i]);
p2 = posterior(alpha[i+1],beta[i+1],theta[i+1],prop4);
aux4 = q1 - q2 - p1 + p2;
if (is.finite(aux4) & aux4 > log(tx)){aux4 = aux4; j=j+1}
}
if (aux4 > log(runif(1))){lambda[i+1]= prop4}
else{lambda[i+1]=lambda[i]; k4[i]=1}
cat(i,"\n");
}

##### Espaçamento #####
alpha11 = c(); beta11 = c(); theta11 = c(); lambda11 = c();
k11= c();k22= c();k33= c();k44= c();
for(w in 1:(R/thin))
{
alpha11[w] <- alpha[w*thin+nbi]; beta11[w] <- beta[w*thin+nbi]
theta11[w] <- theta[w*thin+nbi]; lambda11[w] <- lambda[w*thin+nbi]
k11[w] <- k1[w*thin+nbi]; k22[w] <- k2[w*thin+nbi]
k33[w] <- k3[w*thin+nbi]; k44[w] <- k4[w*thin+nbi]
}

##### Diagnóstico de Convergência #####
library(coda)
Diag1 <- data.frame(geweke.diag(alpha11,frac1=0.1, frac2=0.5)$z)[1,]
Diag2 <- data.frame(geweke.diag(beta11,frac1=0.1, frac2=0.5)$z)[1,]
Diag3 <- data.frame(geweke.diag(theta11,frac1=0.1, frac2=0.5)$z)[1,]
Diag4 <- data.frame(geweke.diag(lambda11,frac1=0.1, frac2=0.5)$z)[1,]
Geweke=c(Diag1,Diag2,Diag3,Diag4)

##### Intervalos de Credibilidade #####
mm1 = quantile(alpha11 , probs = 0.025, na.rm = FALSE,type = 7)
mm2 = quantile(alpha11 , probs = 0.975, na.rm = FALSE,type = 7)
mm3 = quantile(beta11 , probs = 0.025, na.rm = FALSE,type = 7)
mm4 = quantile(beta11 , probs = 0.975, na.rm = FALSE,type = 7)
mm5 = quantile(theta11 , probs = 0.025, na.rm = FALSE,type = 7)
mm6 = quantile(theta11 , probs = 0.975, na.rm = FALSE,type = 7)
mm7 = quantile(lambda11 , probs = 0.025, na.rm = FALSE,type = 7)
mm8 = quantile(lambda11 , probs = 0.975, na.rm = FALSE,type = 7)
IC_25=c(mm1,mm3,mm5,mm7)
IC_975=c(mm2,mm4,mm6,mm8)

##### Histórico, Autocorrelação, Dens. Marginal #####
par(mfrow=c(4,3),mar=c(4,4,0.5,0.5))
ts.plot(alpha11,ylab='alpha')

```

```

acf(alpha11,lag=30,ylab='alpha')
plot(density(alpha11),xlab=expression(alpha),
ylab=expression(paste("p(",alpha,"|x)")),lwd=2,lty=1,col=1,main="")
ts.plot(beta11,ylab='beta')
acf(beta11,lag=30,ylab='beta')
plot(density(beta11),xlab=expression(beta),
ylab=expression(paste("p(",beta,"|x)")),lwd=2,lty=1,col=1,main="")
ts.plot(theta11,ylab='theta')
acf(theta11,lag=30,ylab='theta')
plot(density(theta11),xlab=expression(theta),
ylab=expression(paste("p(",theta,"|x)")),lwd=2,lty=1,col=1,main="")
ts.plot(lambda11,ylab='lambda')
acf(lambda11,lag=30,ylab='lambda')
plot(density(lambda11),xlab=expression(lambda),
ylab=expression(paste("p(",lambda,"|x)")),lwd=2,lty=1,col=1,main="")

##### Sumário Numérico #####
Par=c('alpha','beta','theta','lambda')
Média=c(mean(alpha11),mean(beta11),mean(theta11),mean(lambda11))
SD=c(sd(alpha11),sd(beta11),sd(theta11),sd(lambda11))
T_Act=c(1-mean(k11),1-mean(k22),1-mean(k33),1-mean(k44))
old=options(digits=5)
Sumário <- data.frame(Par,Média,SD,IC_25,IC_975,T_Act,Geweke)
Sumário

```

Apêndice E

Artigo submetido para Tema

Bayesian Analysis of Generalized Modified Weibull Distribution

C.A. NIIYAMA¹, F.A. MOALA², S.M. OIKAWA³, Departament of Statistics, FCT, UNESP - Univ Estadual Paulista, 19060-900 Presidente Prudente, SP, Brasil.

Abstract Recently, Carrasco et al. (2008) proposed the four-parameters modified generalized Weibull distribution (GMW). This distribution presents hazard function with bathtub, unimodal and monotonic forms. Besides, GMW includes the Weibull, extreme value, exponentiated Weibull, generalized Rayleigh and Weibull distributions as special cases. In this paper we consider a complete Bayesian analysis for the unknown parameters assuming noninformative priors, and the Bayesian estimators are compared with the maximum likelihood ones. We introduce the MCMC algorithms to generate samples from the posterior distributions and computing the Bayesian estimators. Some numerical illustrations considering simulated and real lifetime data are presented to illustrate the proposed methodology.

Keywords: Generalized Modified Weibull, Bayesian estimation, noninformative priors, MCMC methods, maximum likelihood, Fisher matrix.

1. Introduction

In the literature there are various probability distributions to model lifetimes of equipment or individual problems in survival analysis. Among the families of distributions used for this purpose, the most popular is the Weibull distribution whose hazard function presents constant, increasing and decreasing forms. However, when the hazard function is the type unimodal or bathtub shaped, the Weibull distribution is not appropriated. Thus, in recent years, there have been proposed new distributions that fit the various forms that the hazard function can take and consequently to fit a greater number of practical problems.

Carrasco et al. (2008) has proposed a new distribution called Generalized Modified Weibull, denoted by GMW, whose hazard function can take many forms such as constant, increasing, decreasing, unimodal and bathtub. Moreover, it has the Exponential, Weibull, Weibull Exponentiated, Extreme Value and Weibull modified distributions as special cases.

They derive several properties of the GMW distribution and the maximum likelihood approach is performed to estimate the four parameters, which are reviewed in this section and in the next.

¹japaubatuba@hotmail.com

²femoala@fct.unesp.br

³smoikawa1@gmail.com;

The Generalized Modified Weibull distribution (GMW) with parameters $(\alpha, \beta, \theta, \lambda)$ has density given by,

$$f(t) = \beta t^{\theta-1} (\theta + \lambda t) \exp \left\{ \lambda t - \frac{t^\theta e^{\lambda t}}{\alpha} \right\} \alpha^{-1} \left[1 - \exp \left\{ -\frac{t^\theta e^{\lambda t}}{\alpha} \right\} \right]^{\beta-1}, \quad (1.1)$$

where $t > 0$; $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\theta > 0$ and $\lambda > 0$. Here, α is the scale parameter, (β, θ) denote the shape parameters and λ is an accelerating factor.

The survival and hazard functions associated to (1.1) are given, respectively, by,

$$S(t) = 1 - \left[1 - \exp \left\{ \frac{t^\theta}{\alpha} \exp \{ \lambda t \} \right\} \right]^\beta \quad (1.2)$$

and

$$h(t) = \frac{-\beta t^{\theta-1} (\theta + \lambda t) \exp \left\{ -\frac{-\lambda t \alpha + t^\theta e^{\lambda t}}{\alpha} \right\} \left[1 - \exp \left\{ -\frac{t^\theta e^{\lambda t}}{\alpha} \right\} \right]^{\beta-1}}{\alpha \left\{ -1 + \left[1 - \exp \left\{ -\frac{t^\theta e^{\lambda t}}{\alpha} \right\} \right]^\beta \right\}}. \quad (1.3)$$

In general, the moments of GMW distribution can not be obtained analytically hence they should be obtained numerically. The general formula is given by

$$E(T^r) = \frac{\beta}{\alpha} \int_0^\infty t^{r+\theta-1} (\theta + \lambda t) \exp \left\{ \lambda t - \frac{t^\theta e^{\lambda t}}{\alpha} \right\} \left[1 - \exp \left\{ -\frac{t^\theta e^{\lambda t}}{\alpha} \right\} \right]^{\beta-1} dt. \quad (1.4)$$

For the particular case in which $\theta = 1$ and $\lambda = 0$ we have:

$$E(T) = \alpha [\psi(\beta + 1) - \psi(1)] \quad \text{and} \quad \text{var}(T) = \alpha^2 [\psi'(1) - \psi'(\beta + 1)]. \quad (1.5)$$

Some special cases of the GMW distribution are

- if $\beta = 1$, $\theta = 1$, $\lambda = 0$ then the random variable T has exponential distribution;
- if $\theta = 1$, $\lambda = 0$ then the random variable T has Weibull distribution;
- if $\beta = 1$, $\theta = 0$ then the random variable T has extreme value distribution;
- if $\lambda = 0$ then the random variable T has exponentiated Weibull distribution [7];
- if $\beta = 1$ then the random variable T has modified Weibull distribution [6].

The hazard function of the GMW distribution can have various forms depending on the parameter values. Carrasco, et. al. (2008) show that:

if $\theta = 1$, $\beta = 1$ and $\lambda = 0$ then the hazard function is constant; if $\theta < 1$ and $\beta > 1$ the hazard function is monotonically decreasing; if $\theta \geq 1$ and $0 < \beta < 1$ the hazard function is monotonically increasing; if $\theta > 0$ and $\beta \rightarrow \infty$ the hazard function is unimodal; if $\theta > 1$, $\lambda = 0$ and $\beta\theta < 1$ the hazard function is bathtub shaped; if $\theta \geq 1$ and $0 < \beta < 1$ the hazard function is increasing; if $\beta = 1$, $0 < \theta < 1$ and $t^* = (-\theta + \sqrt{\theta})/\lambda$ then the hazard function is decreasing for $t < t^*$ and if $t > t^*$ the hazard function is increasing. This way, the hazard function is bathtub form.

A method for generating GMW distribution is based on inverse transform sampling. Given a random variable drawn from the uniform distribution on the interval $(0, 1)$, then the variable T obtained by solving the equation

$$t^\theta \exp(\lambda t) + \alpha \log(1 - u^{1/\beta}) = 0 \quad (1.6)$$

has the GMW distribution with parameters α , β , θ and λ .

In this paper, we develop a Bayesian analysis for the Generalized Modified Weibull distribution using MCMC (Markov Chain Monte Carlo) methods (see for example, Gelfand and Smith, 1990; or Chib and Greenberg, 1995) to obtain the posterior summaries of interest. The Jeffrey's prior is derived for the parameters assuming absence of expert's information. We show through a simulation study that Bayesian method based on Jeffrey's prior provides good estimators and confidence intervals, even for small data sets. An examination of the coverage probabilities of frequentist and Bayesian intervals is also considered. The paper is organized as follows: in Section 2, we review the maximum likelihood estimation; in Section 3, we present a Bayesian analysis considering different noninformative priors for the parameters, Section 4 illustrates and we discuss the results from the simulation performance in Section 5. In section 6, we introduce a applied example to illustrate the Bayesian approach. Finally, in Section 7, we present some conclusions.

2. The Maximum likelihood estimation

Suppose we have identically distributed lifetimes $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_n)'$ from the GMW distribution. The likelihood function in the parameters α , β , θ and λ , based on t is then,

$$L(\Theta|t) = \frac{\beta^n}{\alpha^n} \prod_{i=1}^n t_i^{\theta-1} (\theta + \lambda t_i) \exp \left\{ \lambda t_i - \frac{t_i^\theta e^{\lambda t_i}}{\alpha} \right\} \left[1 - \exp \left\{ -\frac{t_i^\theta e^{\lambda t_i}}{\alpha} \right\} \right]^{\beta-1}, \quad (2.1)$$

where $\Theta = (\alpha, \beta, \theta, \lambda)$. The logarithm of the likelihood function (2.1) is given by,

$$\begin{aligned}
l(\Theta|t) = & n \log(\beta) - n \log(\alpha) + (\theta - 1) \sum_{i=1}^n \log(t_i) + \\
& \sum_{i=1}^n \log(\theta + \lambda t_i) + \sum_{i=1}^n \lambda t_i - \sum_{i=1}^n \frac{t_i^\theta e^{\lambda t_i}}{\alpha} - \\
& (1 - \beta) \sum_{i=1}^n \log \left[1 - \exp \left\{ -\frac{t_i^\theta e^{\lambda t_i}}{\alpha} \right\} \right].
\end{aligned} \tag{2.2}$$

and maximum likelihood estimators (MLE) for α , β , θ and λ are obtained by solving the system of equations $\partial l / \partial \alpha = 0$, $\partial l / \partial \beta = 0$, $\partial l / \partial \theta = 0$ and $\partial l / \partial \lambda = 0$, where,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial l}{\partial \alpha} = & -\frac{n}{\alpha} + \sum_{i=1}^n \frac{t_i^\theta e^{\lambda t_i}}{\alpha^2} + (1 - \beta) \sum_{i=1}^n \frac{t_i^\theta e^{\lambda t_i} - \frac{t_i^\theta e^{\lambda t_i}}{\alpha}}{\alpha^2 \left(1 - e^{-\frac{t_i^\theta e^{\lambda t_i}}{\alpha}} \right)} = 0 \\
\frac{\partial l}{\partial \beta} = & \frac{n}{\beta} + \sum_{i=1}^n \log \left(1 - e^{-\frac{t_i^\theta e^{\lambda t_i}}{\alpha}} \right) = 0 \\
\frac{\partial l}{\partial \theta} = & \sum_{i=1}^n \left[\log(t_i) + \frac{1}{\theta + \lambda t_i} \right] - \sum_{i=1}^n \frac{t_i^\theta \log(t_i) e^{\lambda t_i}}{\alpha} + (\beta - 1) \sum_{i=1}^n \frac{t_i^\theta \log(t_i) e^{\lambda t_i} - \frac{t_i^\theta e^{\lambda t_i}}{\alpha}}{\alpha \left(1 - e^{-\frac{t_i^\theta e^{\lambda t_i}}{\alpha}} \right)} = 0 \\
\frac{\partial l}{\partial \lambda} = & \sum_{i=1}^n \frac{t_i}{\theta + \lambda t_i} + \sum_{i=1}^n t_i - \sum_{i=1}^n \frac{t_i^{\theta+1} e^{\lambda t_i}}{\alpha} - (1 - \beta) \sum_{i=1}^n \frac{t_i^{\theta+1} e^{\lambda t_i} - \frac{t_i^\theta e^{\lambda t_i}}{\alpha}}{\alpha \left(1 - e^{-\frac{t_i^\theta e^{\lambda t_i}}{\alpha}} \right)} = 0
\end{aligned} \tag{2.3}$$

As it is not possible to obtain closed form solutions, then numerical techniques must be used. Software *R* provides the package *maxLik* to solve these equations.

Carrasco, et al. (2008) derive the observed Fisher information matrix for the parameters Θ of GMW distribution.

Hypotheses tests and confidence intervals for α , β , θ and λ can be obtained using the asymptotical normal distribution for $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$, $\hat{\theta}$, and $\hat{\lambda}$, that is,

$$\hat{\Theta} \stackrel{a}{\sim} N \{ \Theta, I_0^{-1} \}, \tag{2.4}$$

where I_0 is the observed Fisher information matrix given by,

$$I_0(\Theta) = \begin{pmatrix} I_{\alpha\alpha} & I_{\alpha\beta} & I_{\alpha\theta} & I_{\alpha\lambda} \\ \cdot & I_{\beta\beta} & I_{\beta\theta} & I_{\beta\lambda} \\ \cdot & \cdot & I_{\theta\theta} & I_{\theta\lambda} \\ \cdot & \cdot & \cdot & I_{\lambda\lambda} \end{pmatrix}$$

The elements of matrix I_0 are given in Appendix.

3. Bayesian Analysis

The Bayesian inference is an alternative to the maximum likelihood estimation of probability distributions.

In the Bayesian framework is necessary to specify a prior distribution for the unknown parameters. If prior information is unavailable for a process, then, initial uncertainty about the parameters can be quantified with a noninformative prior distribution. We assume different prior distributions for the parameters α , β , θ and λ . denoted by $\pi(\alpha, \beta, \theta, \lambda)$. Thus the joint posterior distribution for the parameters is proportional to the product of the likelihood function (2.1) and the prior $\pi(\alpha, \beta, \theta, \lambda)$ i.e.,

$$p(\alpha, \beta, \theta, \lambda | t) \propto \pi(\alpha, \beta, \theta, \lambda) \frac{\beta^n}{\alpha^n} \prod_{i=1}^n \frac{t_i^{\theta-1} (\theta + \lambda t_i) \exp \left\{ \lambda t_i - \frac{t_i^\theta e^{\lambda t_i}}{\alpha} \right\}}{\left[1 - \exp \left\{ -\frac{t_i^\theta e^{\lambda t_i}}{\alpha} \right\} \right]^{1-\beta}}. \quad (3.1)$$

A common specification of noninformative prior considered in the literature is given by the product of independent gamma prior distributions given by

$$\pi(\alpha, \beta, \theta, \lambda) = G(\alpha, a_1, b_1) G(\beta, a_2, b_2) G(\theta, a_3, b_3) \times G(\lambda, a_4, b_4) \quad (3.2)$$

where $G(x, a, b) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-bx}$, with $x > 0$ for $a, b > 0$.

The values of hyper-parameters a_i and b_i ($i = 1, 2, 3, 4$) are choosing in order to provide ausence of information a priori, generally the values are given by 0.01 or 0.1. An uniform prior for the parameters is also appropriated.

An another option as noninformative prior density is to consider an improper prior assuming independence among the parameters given by,

$$\pi(\alpha, \beta, \lambda, \theta) \propto \frac{1}{\alpha \beta \lambda \theta}. \quad (3.3)$$

Let us call the prior (3.3) as Jeffrey's prior.

Since there is no closed form for marginal posteriors of (3.1) we need to appeal to numerical procedures to extract characteristics of the marginal posterior distributions such as summaries and credible intervals. We can then use MCMC algorithm (see for example, Casella and George, 1992) or the Metropolis-Hastings algorithm (see for example, Chib and Greenberg, 1995) to obtain a sample of values of $\Theta = (\alpha, \beta, \theta, \lambda)$ from the joint posterior (3.1).

4. Simulated data

In this section we present maximum likelihood and the Bayesian estimators, based on the punctual estimation, confidence intervals and coverage probabilities. The aim is to evaluate the effect of sample sizes and shapes of the hazard function in

the estimation. To evaluate this effect, data set of size 10, 30, 50 and 100 are generated from the GMW distribution for different values of parameters corresponding to the several shapes of the hazard function. Marginal posterior distributions, Bayes estimators and credible intervals are obtained by using the MCMC algorithms. The chain is run for 15000 iterations with a burn-in period of 5000 and convergence monitored from the MCMC output and auto-correlation plots. The MCMC plots suggest we have achieved convergence with a rate of acceptance around 35% – 50%. Also, the Raftery and Lewis (1992) diagnostics indicated convergence for all parameters. All reported results are based on 1000 simulation replications and shown in Tables 1-8. The simulation is conducted in R language software. The set of values for the parameters were chosen in to order to provide the hazard function with increasing, decreasing, unimodal and bathtub shapes.

In section 5 there is a discussion of the results presented following.

The density, reliability and hazard functions for each form are displayed in figures 1-4.

4.1. Increasing hazard function with parameters $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $\theta = 1$ and $\lambda = 1$.

The density, reliable and hazard functions of the GMW distribution are plotted in Figure 1 by considering the parameter values $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $\theta = 1$ e $\lambda = 1$.

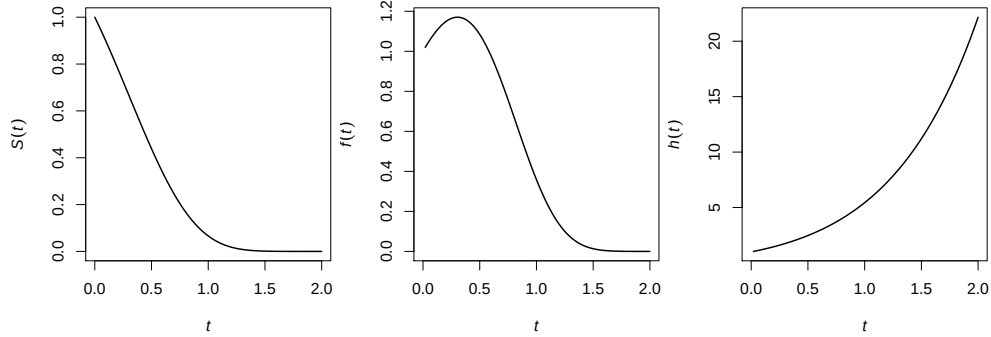


Figure 1: Plot of reliability, density and hazard functions of the GMW distribution for $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $\theta = 1$ e $\lambda = 1$.

In Table 1 the posterior means and standard deviations from each prior are compared with the MLE by considering several sample sizes.

Table 1: MLE, posterior estimates (mean) and standard deviation for Θ

	n	MLE	Uniform	Gamma	Jeffrey's
$\alpha = 1$	10	1.3316 (1.9640)	1.9994 (0.7434)	1.1358 (0.5813)	1.1381 (0.3999)
	30	1.1505 (1.1047)	1.1390 (0.2302)	1.0266 (0.2567)	1.0349 (0.2186)
	50	1.0145 (0.7659)	1.1155 (0.2265)	1.0181 (0.2665)	1.0163 (0.1761)
	100	0.9855 (0.5329)	1.0326 (0.1133)	1.0022 (0.1152)	1.0103 (0.1199)
$\beta = 1$	10	2.1791 (1.5024)	1.1311 (0.6057)	1.1855 (0.6073)	1.1167 (0.3854)
	30	1.6227 (0.9925)	1.0250 (0.2119)	1.0881 (0.2754)	1.0357 (0.2084)
	50	1.5412 (0.9411)	1.0102 (0.1996)	1.0905 (0.2871)	1.0278 (0.1529)
	100	1.3446 (0.7712)	1.0146 (0.1055)	1.0279 (0.1502)	1.0131 (0.1148)
$\theta = 1$	10	1.4371 (1.4493)	1.5939 (0.6529)	1.6795 (0.6587)	1.3700 (0.3774)
	30	1.1348 (0.9200)	1.1298 (0.2561)	1.1043 (0.2263)	1.1479 (0.2167)
	50	1.1102 (0.8256)	1.1219 (0.2455)	1.0924 (0.2265)	1.0862 (0.1565)
	100	1.0895 (0.6543)	1.0236 (0.1046)	1.0372 (0.1508)	1.0425 (0.1119)
$\lambda = 1$	10	0.9328 (1.1669)	1.5079 (0.5823)	0.7785 (0.4626)	0.9046 (0.3389)
	30	0.9597 (0.6731)	1.0860 (0.2479)	0.9553 (0.2126)	0.9634 (0.2110)
	50	0.9259 (0.5565)	1.0601 (0.2405)	0.9565 (0.2211)	0.9692 (0.1757)
	100	0.9295 (0.4291)	1.0234 (0.1130)	0.9871 (0.1097)	0.9825 (0.1196)

A criterion for comparison of the quality of the prior distributions consists on checking the frequentists coverage probabilities of the posterior intervals arising from the priors. See the results in Table 2.

Table 2: Frequentist coverage probabilities of the 95% posterior intervals

n	$\alpha = 1$				$\beta = 1$			
	MLE	Uniform	Gamma	Jeffrey's	MLE	Uniform	Gamma	Jeffrey's
10	63.4%	95.3%	98.9%	99%	89.2%	98.4%	98.7%	99.2%
30	78.2%	98.5%	98.4%	99%	90.2%	98.7%	98.7%	99.2%
50	81.6%	98.6%	96.8%	99.2%	90.4%	99.3%	96.7%	99.8%
100	87%	98.2%	98.8%	99.1%	90.8%	99.4%	98.1%	99.6%
n	$\theta = 1$				$\lambda = 1$			
	MLE	Uniform	Gamma	Jeffrey's	MLE	Uniform	Gamma	Jeffrey's
10	87.1%	98.9%	98%	99%	88.8%	95.8%	97.2%	99.3%
30	85.5%	99.1%	98.4%	99.2%	93.1%	98.5%	98%	99.2%
50	84.2%	98.5%	98.1%	99.5%	93.7%	98%	98.2%	99.3%
100	85.3%	99.4%	98.2%	99.5%	95.2%	98.2%	99.1%	99.3%

4.2. Decreasing hazard function with parameters $\alpha = 3$, $\beta = 0.5$, $\theta = 1$ e $\lambda = 0.001$.

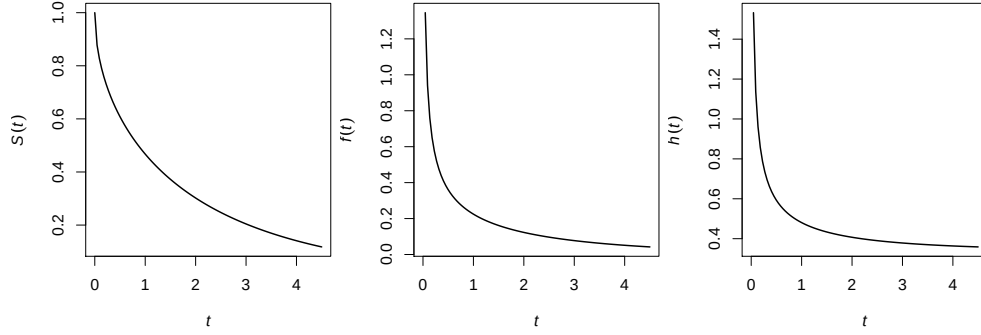


Figure 2: Plot of reability, density and hazard functions of the GMW distribution for $\alpha = 3$, $\beta = 0.5$, $\theta = 1$ e $\lambda = 0.001$.

Table 3: MLE, posterior estimates (mean) and standard deviation for Θ

	n	MLE	Uniform	Gamma	Jeffrey's
$\alpha = 3$	10	2.1430 (2.0880)	6.7278 (2.6307)	3.5907 (1.7996)	3.1050 (0.8140)
	30	1.7638 (1.3516)	4.2732 (1.3872)	3.1315 (1.1766)	3.0643 (0.5000)
	50	1.8500 (1.3629)	3.7798 (1.0956)	3.0718 (0.9486)	3.0183 (0.3653)
	100	1.8808 (1.3912)	3.3495 (0.7314)	3.0162 (0.7137)	3.0103 (0.2567)
$\beta = 0.5$	10	1.3321 (0.7617)	0.5667 (0.2618)	0.7810 (0.3069)	0.6503 (0.2321)
	30	1.1264 (0.5117)	0.5223 (0.1450)	0.6171 (0.1663)	0.5435 (0.1145)
	50	1.0632 (0.4659)	0.5256 (0.1231)	0.5830 (0.1303)	0.5227 (0.0879)
	100	0.9708 (0.3940)	0.5150 (0.0851)	0.5428 (0.0882)	0.5076 (0.0613)
$\theta = 1$	10	0.6022 (0.2637)	1.3454 (0.3753)	1.0205 (0.3108)	1.0689 (0.3030)
	30	0.6138 (0.2499)	1.1167 (0.2080)	0.9745 (0.1866)	1.0052 (0.1416)
	50	0.6440 (0.2569)	1.0701 (0.1628)	0.9814 (0.1555)	0.9994 (0.1055)
	100	0.6713 (0.2559)	1.0308 (0.1138)	0.9864 (0.1125)	0.9991 (0.0755)
$\lambda = 0.001$	10	0.1198 (0.1823)	0.0040 (0.0014)	0.0013 (0.001)	0.001 (3e-04)
	30	0.0585 (0.0666)	0.0021 (6e-04)	0.0011 (6e-04)	0.001 (1e-04)
	50	0.0470 (0.0506)	0.0016 (4e-04)	0.0010 (4e-04)	9e-04 (1e-04)
	100	0.0365 (0.0375)	0.0013 (3e-04)	0.0010 (3e-04)	9e-04 (1e-04)

Table 4: Frequentist coverage probabilities of the 95% posterior intervals

	$\alpha = 3$				$\beta = 0.5$			
n	MLE	Uniform	Gamma	Jeffrey's	MLE	Uniform	Gamma	Jeffrey's
10	64.2%	96.7%	99.1%	99.6%	99.2%	97.3%	98.5%	98.1%
30	56.8%	96.6%	97.1%	99.4%	98%	97.3%	97.2%	98.3%
50	50.9%	97.2%	96.9%	99.7%	95.8%	97.6%	96.7%	98.2%
100	51.5%	98.2%	97.7%	99.9%	91.8%	97%	97.5%	98.7%
	$\theta = 1$				$\lambda = 0.001$			
n	MLE	Uniform	Gamma	Jeffrey's	MLE	Uniform	Gamma	Jeffrey's
10	81.9%	95.4%	98.9%	98.8%	97.1%	96%	99.6%	99.1%
30	71.4%	96%	97%	99%	94.5%	98.3%	99.1%	99.2%
50	67.5%	96.2%	95.8%	98.6%	88.1%	99.3%	99.6%	99.6%
100	63.3%	96.6%	96.9%	98.8%	79.1%	98.8%	99.1%	99.3%

4.3. Unimodal hazard function with parameters $\alpha = 0.2$, $\beta = 8$, $\theta = 0.5$ e $\lambda = 0.01$.

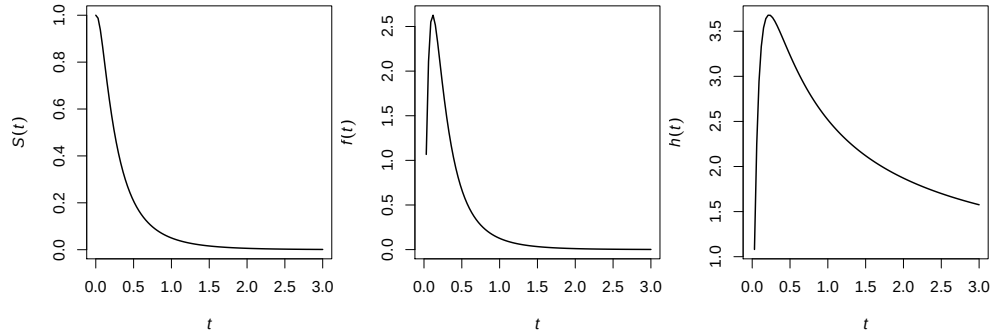
Figure 3: Plot of reability, density and hazard functions of the GMW distribution for $\alpha = 0.2$, $\beta = 8$, $\theta = 0.5$ e $\lambda = 0.01$.

Table 5: MLE, posterior estimates (mean) and standard deviation for Θ

	n	MLE	Uniform	Gamma	Jeffrey's
$\alpha = 0.2$	10	0.2573 (0.1593)	0.1977 (0.0438)	0.1997 (0.0105)	0.2021 (0.0398)
	30	0.2159 (0.0622)	0.1990 (0.0250)	0.2005 (0.0138)	0.2014 (0.0224)
	50	0.2074 (0.0416)	0.2007 (0.0197)	0.2007 (0.0111)	0.2004 (0.0169)
	100	0.2029 (0.0282)	0.2003 (0.0140)	0.2001 (0.0033)	0.1996 (0.0122)
$\beta = 8$	10	10.8717 (3.4476)	8.1209 (1.0217)	7.6961 (0.9715)	7.8964 (0.7179)
	30	11.3181 (4.1150)	8.0709 (1.1183)	7.6314 (1.0545)	7.9573 (0.4082)
	50	11.0612 (4.6224)	8.0812 (1.1587)	7.7118 (1.0598)	7.9722 (0.3384)
	100	10.9813 (4.8876)	8.1085 (1.1691)	7.8814 (1.0798)	7.9808 (0.2293)
$\theta = 0.5$	10	0.4448 (0.2059)	0.5673 (0.1446)	0.5326 (0.0991)	0.5474 (0.1149)
	30	0.4464 (0.1345)	0.5307 (0.0758)	0.5297 (0.0617)	0.5123 (0.0618)
	50	0.4643 (0.1357)	0.5179 (0.0600)	0.5219 (0.0512)	0.5110 (0.0479)
	100	0.4739 (0.1279)	0.5125 (0.0441)	0.5117 (0.0353)	0.5051 (0.0335)
$\lambda = 0.01$	10	0.4625 (0.8350)	0.01 (3e-04)	0.01 (3e-04)	0.0095 (0.0091)
	30	0.1905 (0.3227)	0.01 (2e-04)	0.01 (3e-04)	0.0102 (0.0071)
	50	0.1138 (0.2184)	0.01 (3e-04)	0.01 (3e-04)	0.0099 (0.0045)
	100	0.0739 (0.1404)	0.01 (2e-04)	0.01 (3e-04)	0.0101 (0.0034)

Table 6: Frequentist coverage probabilities of the 95% posterior intervals

n	$\alpha = 0.2$				$\beta = 8$			
	MLE	Uniform	Gamma	Jeffrey's	MLE	Uniform	Gamma	Jeffrey's
10	96.1%	93.7%	99.5%	96%	92.3%	99.4%	99.3%	99.6%
30	95%	94.5%	98.7%	95.7%	74.2%	98.8%	98.9%	99.6%
50	94.4%	95.2%	98.4%	96.9%	68.2%	99.1%	99.2%	99.3%
100	93.4%	95.5%	99.7%	96%	53.5%	97.9%	98.8%	99.8%
n	$\theta = 0.5$				$\lambda = 0.01$			
	MLE	Uniform	Gamma	Jeffrey's	MLE	Uniform	Gamma	Jeffrey's
10	96.8%	92.6%	96.2%	97.2%	99%	99.4%	99.5%	97.3%
30	93.2%	95.1%	97.4%	96.6%	97.9%	99.8%	99.4%	98.7%
50	86.4%	96.7%	98.3%	96.9%	96.8%	99.5%	98.9%	99%
100	72.5%	96.2%	98.1%	98.1%	96.4%	99.5%	99.4%	99.4%

4.4. Bathtub hazard function with parameters $\alpha = 5$, $\beta = 0.5$, $\theta = 0.5$ e $\lambda = 0.5$.

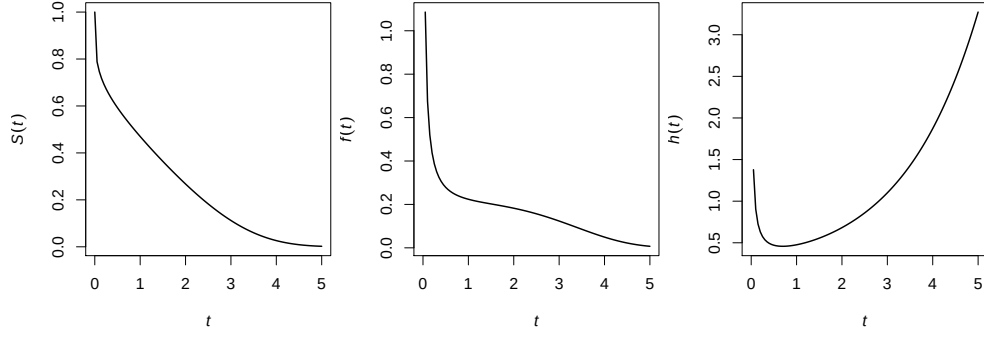


Figure 4: Plot of reability, density and hazard functions of the GMW distribution for $\alpha = 5$, $\beta = 0.5$, $\theta = 0.5$ e $\lambda = 0.5$.

Table 7: MLE, posterior estimates (mean) and standard deviation for Θ

	n	MLE	Uniform	Gamma	Jeffrey's
$\alpha = 5$	10	7.4194 (3.9500)	8.2234 (2.2486)	4.8840 (1.7433)	4.9574 (0.8051)
	30	6.4291 (4.1444)	6.1489 (1.2049)	4.9114 (1.2029)	5.0939 (0.7605)
	50	5.9714 (3.8956)	5.3473 (0.6716)	4.8833 (0.5689)	5.1389 (0.7989)
	100	5.5479 (4.1061)	5.1652 (0.4921)	4.9627 (0.7363)	5.0411 (0.5006)
$\beta = 0.5$	10	0.6173 (0.3641)	0.5893 (0.2202)	0.6919 (0.2227)	0.5824 (0.2194)
	30	0.6666 (0.4261)	0.5358 (0.1297)	0.5763 (0.1211)	0.5473 (0.1331)
	50	0.6616 (0.3409)	0.5343 (0.1034)	0.5576 (0.1148)	0.5298 (0.1013)
	100	0.6771 (0.3100)	0.5143 (0.0632)	0.5271 (0.0677)	0.5202 (0.0774)
$\theta = 0.5$	10	0.7140 (0.5353)	0.7556 (0.3112)	0.6038 (0.2869)	0.6195 (0.2293)
	30	0.5087 (0.3116)	0.5622 (0.1831)	0.5004 (0.1635)	0.5500 (0.1897)
	50	0.4854 (0.2771)	0.5300 (0.1604)	0.5005 (0.1607)	0.5220 (0.1566)
	100	0.4335 (0.2188)	0.4881 (0.0772)	0.4748 (0.0765)	0.4926 (0.1141)
$\lambda = 0.5$	10	0.5798 (0.3577)	0.5698 (0.2287)	0.4402 (0.1860)	0.4614 (0.1661)
	30	0.5383 (0.1704)	0.5255 (0.1199)	0.4831 (0.1086)	0.4782 (0.1002)
	50	0.5215 (0.1353)	0.5097 (0.0963)	0.4963 (0.0920)	0.4878 (0.0805)
	100	0.5098 (0.1085)	0.5138 (0.0574)	0.5019 (0.0364)	0.5029 (0.0594)

Table 8: Frequentist coverage probabilities of the 95% posterior intervals

n	$\alpha = 5$				$\beta = 0.5$			
	MLE	Uniform	Gamma	Jeffrey's	MLE	Uniform	Gamma	Jeffrey's
10	75.4%	97.2%	98.7%	99%	92.3%	97.6%	97.2%	98%
30	55.8%	99.1%	98.9%	99.8%	87.5%	98.1%	97.5%	98.2%
50	50.8%	99%	98.7%	99.3%	83.8%	96.8%	95.7%	98.6%
100	45.2%	99.1%	98.9%	99.5%	77.1%	98%	98.5%	98.1%
n	$\theta = 0.5$				$\lambda = 0.5$			
	MLE	Uniform	Gamma	Jeffrey's	MLE	Uniform	Gamma	Jeffrey's
10	85.1%	97.4%	97.6%	98.7%	91.9%	95.4%	95%	97.5%
30	79%	97.2%	96.6%	97.8%	90.5%	95.9%	96.5%	97.2%
50	73.7%	95.6%	94.1%	97.3%	88.2%	94%	94.2%	97%
100	65.7%	97.9%	96.9%	95.1%	82.7%	96.4%	98.4%	97.8%

5. Discussion

Some of the points are quite clear from the numerical results. As expected it is observed that the performances of all estimators become better when the sample size increases. It is also observed that the Bayes estimates of α , β , θ and λ perform better than the MLE in all class of hazard function studied.

Examining the Tables we also conclude that the Jeffreys prior produces better point estimates for all the parameters. However, the Bayesian estimates from the three class of priors considered become closer for large sample sizes.

In terms of frequentist coverage probability Tables illustrate that the coverage probabilities for maximum likelihood estimation are far below the nominal level but improving steadily when the sample size increases. On the other hand, the coverage probabilities are higher than the nominal level for the Bayesian procedure. Our simulation study also shows that the Jeffreys prior provides coverage probabilities often close to 99% level. With these intervals we can be sure that the intervals will, on average, have at least the desired coverage probability regardless of score levels.

6. An example with literature data

Let us consider the data set related to the lifetime of lamps introduced in Aarset (1985). Mudholkar and Srivastava (1993) illustrates the fit of the Exponentiated Weibull distribution. The data is shown in Table 9.

Table 9: Lifetime of 50 electronic devices

0.1	0.2	1	1	1	1	1	2	3	6
7	11	12	18	18	18	18	18	21	32
36	40	45	46	47	50	55	60	63	63
67	67	67	67	72	75	79	82	82	83
84	84	84	85	85	85	85	85	86	86

For the Bayesian analysis of the data let us assume the Jeffrey's , independent uniform and also Gamma priors (with hyperparameter values $a=0.01$ and $b=0.01$) for each parameter. Using the software R, we performed a MCMC simulation with 405000 iterations and discarded the first 5000 as a burn-in. The MCMC plots suggest we have achieved convergence and the algorithm also showed a acceptance rate around 35% and 50%. The maximum likelihood estimators are also evaluated. The results for both distributions are shown in Tables 10-13 We plot the posterior densities obtained from the three priors for the parameters Θ in Figure 5

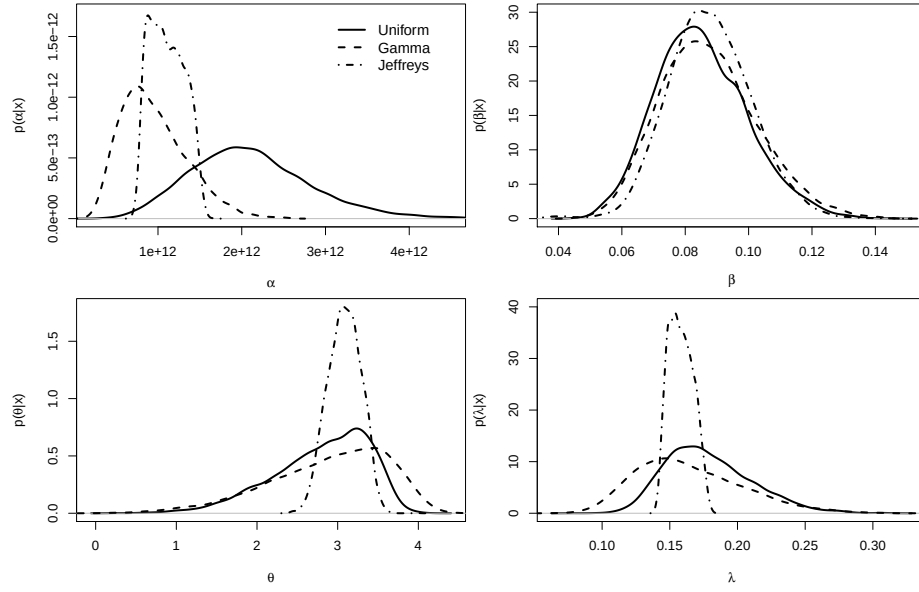


Figure 5: Marginal densities of the parameters α , β , θ and λ .

The tables 10 - 13 show the posterior means, standard deviation and 95% posterior intervals for the parameters α , β , θ and λ by considering Jeffrey's, uniform and gamma priors. The MLE are also computed.

Table 10: Posterior summaries and MLE for α

Priors	$\hat{\alpha}$	standard-deviation	95% interval
Uniform	2.1×10^{12}	7.4×10^{11}	$(9.1 \times 10^{11}, 3.7 \times 10^{12})$
Gamma	9.7×10^{11}	3.8×10^{11}	$(3.6 \times 10^{11}, 1.8 \times 10^{12})$
Jeffrey's	1.1×10^{12}	2.0×10^{11}	$(7.9 \times 10^{11}, 1.8 \times 10^{12})$
MLE	6.5×10^{11}	2.9×10^{11}	$(6.9 \times 10^{10}, 1.2 \times 10^{12})$

Table 11: Posterior summaries and MLE for β

Priors	$\hat{\beta}$	standard-deviation	95% interval
Uniform	0.0851	0.0144	(0.0595, 0.1165)
Gamma	0.0874	0.0153	(0.0606, 0.1199)
Jeffrey's	0.0878	0.0137	(0.0639, 0.1145)
MLE	0.0931	0.0136	(0.0664, 0.1198)

Table 12: Posterior summaries and MLE for θ

Priors	$\hat{\theta}$	standard-deviation	95% interval
Uniform	2.7992	0.5929	(1.4631, 3.6515)
Gamma	2.8916	0.7335	(1.1908, 3.9815)
Jeffrey's	3.0826	0.2036	(2.6826, 3.4457)
MLE	3.1245	0.3440	(2.4503, 3.7987)

Table 13: Posterior summaries and MLE for λ

Priors	$\hat{\lambda}$	standard-deviation	95% interval
Uniform	0.1785	0.0319	(0.1277, 0.2484)
Gamma	0.1644	0.0392	(0.1028, 0.2531)
Jeffrey's	0.1583	0.0088	(0.1438, 0.1753)
MLE	0.1515	0.0199	(0.1125, 0.1906)

We have also compared the fitting of the GMW and Exponentiated Weibull distributions. Table 14 provides the DIC values corresponding to the each distributions for different priors. Thus, we conclude that the GMW distribution yields better fit to the data set, since its DIC value is smaller. The graphical comparison of the empirical distribution function and the fitted distribution functions are given in Figure (6). The hazard functions are also plotted for comparison in Figure 6(b). Figure 6 suggests that the GMW distribution is more appropriated than the Exponentiated Weibull distribution for this data set.

Table 14: DIC

Distribution	DIC
GMW with Uniform Prior	443.4
GMW with Gamma Prior	445.2
GMW with Jeffrey's Prior	443.0
EW with Gamma Prior	463.6

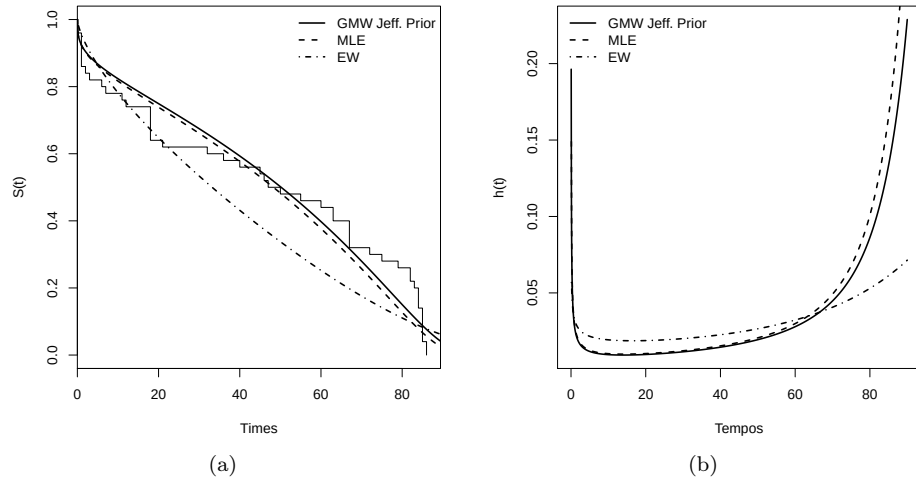


Figure 6: Plot of reliable and hazard functions for Exponentiated Weibull, GMW and Empirical distributions.

7. Conclusion

We observed that the generalized modified Weibull distribution can be used quite effectively in analyze of lifetime data. It includes important distributions as special cases and exhibits decreasing, increasing, unimodal and bathtub hazard rate depending on its parameters values.

In this paper we considered the Bayesian approach to estimate the unknown parameters of the GMW distribution by using noninformative priors as Jeffreys prior. After an extensive Monte Carlo simulations we concluded that the Bayesian estimation performs better than the maximum likelihood mainly for small data set. However when the sample size increases clearly both approaches produce quite similar results. In terms of frequentist coverage probability our simulation study indicates that the Jeffrey's prior have performed better than the other priors for the all the parameters. Finally, we also identified a better fit of the Weibull distribution for the two real data considered in this article.

References

- [1] M. V. Aarset. The null distribution for a test of constant versus “bathtub” failure rate. *Scandinavian Journal of Statistics. Theory and Applications*, 12(1):55–68, 1985.
- [2] J. M. Carrasco, E. M. Ortega, and G. M. Cordeiro. A generalized modified weibull distribution for lifetime modeling. *Computational Statistics & Data Analysis*, 53(2):450 – 462, 2008.

- [3] G. Casella and E. I. George. Explaining the Gibbs sampler. *The American Statistician*, 46(3):167–174, Aug. 1992.
- [4] S. Chib and E. Greenberg. Understanding the metropolis-hastings algorithm. *The American Statistician*, 49(4):327 – 335, Nov. 1995.
- [5] A. E. Gelfand and A. F. M. Smith. Sampling-based approaches to calculating marginal densities. *Journal of the American Statistical Association*, 85:398–409, 1990.
- [6] C. D. Lai, M. Xie, and D. N. P. Murthy. A modified weibull distribution. *IEEE Transactions on Reliability*, 52(1), 2003.
- [7] G. S. Mudholkar and D. K. Srivastava. Exponentiated weibull family for analyzing bathtub failure-rate data. *IEEE Transactions on Reliability*, 42(2):299–302, 1993.
- [8] A. E. Raftery and S. Lewis. How many iterations in the gibbs sampler?, 1992.