

Gabriel de Oliveira Gomes

Trabalho de Conclusão de Curso

Curso de Graduação em Física

*Um estudo da evolução orbital dos satélites
de Urano atribuída ao efeito de maré*

Rio Claro - SP, Brasil

Gabriel de Oliveira Gomes

Trabalho de Conclusão de Curso

Curso de Graduação em Física

*Um estudo da evolução orbital dos satélites
de Urano atribuída ao efeito de maré*

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado
ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas
- Câmpus de Rio Claro, da Universidade Es-
tadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, para
obtenção do grau de Bacharel em Física.

Orientador:

Prof. Dr. Tadashi Yokoyama

UNESP - UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA - DEPARTAMENTO DE FÍSICA

Rio Claro - SP, Brasil

521.1 Gomes, Gabriel de Oliveira
G633e Um estudo da evolução orbital dos satélites de Urano
atribuída ao efeito de maré / Gabriel de Oliveira Gomes. - Rio
Claro, 2017
44 f. : il., figs., tabs.

Trabalho de conclusão de curso (bacharelado - Física) -
Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e
Ciências Exatas

Orientador: Tadashi Yokoyama

1. Mecânica celeste. 2. Maré em satélites planetários. 3.
Migração. 4. Ressonância. I. Título.

GABRIEL DE OLIVEIRA GOMES

UM ESTUDO DA EVOLUÇÃO ORBITAL DOS SATÉLITES
DE URANO ATRIBUÍDA AO EFEITO DE MARÉ

Trabalho de Conclusão de Curso
apresentado ao Instituto de Geociências e
Ciências Exatas - Câmpus de Rio Claro,
da Universidade Estadual Paulista Júlio
de Mesquita Filho, para obtenção do grau
de Bacharel em Física.

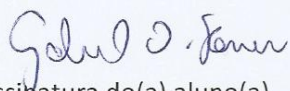
Comissão Examinadora

Tadashi Yokoyama (orientador)

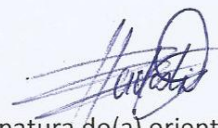
Ricardo Paupitz Barbosa dos Santos

Nelson Callegari Junior

Rio Claro, 30 de Novembro de 2017.



Assinatura do(a) aluno(a)



Assinatura do(a) orientador(a)

Agradecimentos

Eu gostaria de agradecer a todas as pessoas que, de alguma forma, me ajudaram a concluir este Trabalho de Conclusão de Curso. Dentre elas, agradeço especialmente:

Ao professor Tadashi Yokoyama, por me dar a oportunidade de trabalhar sob sua orientação, pelos diversos conselhos acadêmicos que me proporcionou e pela paciência e disposição para discutir todas as dúvidas que surgiram durante a realização deste trabalho.

Aos professores que tive durante a graduação, pelo conhecimento adquirido pelas disciplinas e pela paciência ao tirar as dúvidas ao longo do curso.

Aos professores que participaram da comissão julgadora deste trabalho.

Aos meus colegas Marina e Leonardo, pelas diversas discussões que, de alguma forma, complementaram as discussões presentes neste trabalho.

Às diversas amigas que fiz durante a graduação, especialmente ao Adriano Roman, Breno Orzari, Flávio Feres, Isabella Maietto, José Augusto Devienne, Pedro Sartori e Rodrigo Baroni.

À meus pais pelo apoio durante estes quatro anos de graduação, pelos diversos conselhos pessoais e pelo suporte e paciência que tiveram comigo.

Ao pessoal do Solid State Physics Lab, por permitirem a utilização do modelo utilizado no presente trabalho em LaTeX e pelas diversas discussões sobre Física em geral.

Aos técnicos do departamento de Física pela ajuda com os eventuais problemas técnicos e pelas recomendações e sugestões dadas ao longo da minha graduação.

Resumo

A maioria dos estudos realizados com relação aos possíveis eventos capazes de elevar a inclinação do satélite de Urano Miranda para seu atual valor e explicar a superfície atual relativamente ativa de Ariel são baseados em passagens por ressonâncias de movimento médio (RMM) entre dois satélites. Para a inclinação de Miranda, acredita-se que um aprisionamento numa ressonância 3 : 1 entre Miranda e Umbriel teria sido responsável por aumentar a inclinação de Miranda, onde o escape desta ressonância ocorre devido ao surgimento de comportamento caótico durante evolução na ressonância. Para a atual superfície de Ariel, acredita-se que uma ressonância 5 : 3 entre Ariel e Umbriel teria sido responsável por aumentar a excentricidade de Ariel, posteriormente causando intensos processos de dissipação de energia resultando na atual superfície de Ariel. Neste trabalho, objetivou-se revisar estes dois problemas de um ponto de vista inédito, considerando uma formulação baseada no formalismo Newtoniano no caso tridimensional e considerando que durante as duas ressonâncias há interação de maré agindo em Miranda, Ariel e Umbriel. Uma vez que a ressonância 5 : 3 entre Ariel e Umbriel foi provavelmente a última a ser encontrada pelo sistema (Peale, 1988), primeiramente a ressonância 3 : 1 entre Miranda e Umbriel é estudada de forma a obter condições iniciais razoáveis para estudo da ressonância 5 : 3 entre Ariel e Umbriel. Mostra-se que, para ambas as ressonâncias, as condições iniciais são um ponto importante a ser analisado, uma vez que o sistema é sensível a alterações nas condições iniciais.

Palavras-chave: Maré, Migração Planetária, Miranda, Ressonâncias.

Abstract

Almost all studies so far performed related to possible events capable of elevating Miranda's inclination to its present value and explain the relatively active surface of Ariel are based on passage through some mean motion resonances (MMR) between two satellites. For Miranda's inclination, it is claimed that an entrapment in a 3 : 1 resonance between Miranda and Umbriel would have been responsible for an increase in Miranda's inclination, where escape from such resonance occurs when chaotic behavior during the resonance ensues. For Ariel's present surface, studies show that a 5 : 3 resonance between Ariel and Umbriel would have been responsible for increasing Ariel's eccentricity, causing intense processes of energy dissipation resulting on Ariel's present resurfacing. In this work, we revisit these two problems from a new point of view taking the classical newtonian formalism, but in a tridimensional case and considering that, during the resonances, tidal interactions act on Miranda, Ariel and Umbriel. Since the 5 : 3 resonance between Ariel and Umbriel was probably the last encountered by the system (Peale, 1988), firstly the 3 : 1 resonance between Miranda and Umbriel is studied in order to obtain reasonable initial conditions to study the 5 : 3 resonance between Ariel and Umbriel. Finally, it is shown that, for both resonances, the initial conditions are an important aspect to be analyzed, since the system is very sensitive concerning alterations on the initial conditions.

Keywords: Tides, Planetary Migration, Miranda, Resonances.

Sumário

| | | |
|-----|-----------------------------------------------|----|
| 1 | Introdução | 6 |
| 2 | Características do sistema | 8 |
| 2.1 | Parâmetros físicos e orbitais | 8 |
| 2.2 | Diagrama de comensurabilidades | 9 |
| 3 | Montagem das equações de movimento | 15 |
| 3.1 | Montagem da parte gravitacional | 15 |
| 3.2 | Potencial de Achatamento | 16 |
| 3.3 | Implementação do efeito de maré | 18 |
| 4 | Resultados | 20 |
| 4.1 | Regressão orbital de Ariel | 20 |
| 4.2 | Evolução através da Ressonância 3:1 | 22 |
| 4.3 | Evolução através da Ressonância 5:3 | 27 |
| 5 | Conclusão | 31 |
| | Referências | 33 |
| | Apêndice A – Mapeamento Algébrico | 34 |
| A.1 | Estrutura do Hamiltoniano | 34 |
| A.2 | Integração do sistema de equações | 38 |

1 *Introdução*

O grupo de satélites de Urano apresenta características que o torna um sistema único e diferenciado quando comparado ao grupo de satélites de Júpiter ou Saturno, por exemplo. O valor do coeficiente J_2 de Urano é significativamente menor do que o valor de J_2 de Júpiter e Saturno. Além disso, as massas relativas m_i/M são relativamente mais altas do que as existentes em outros sistemas de satélites do Sistema Solar. Embora observações recentes mostrem que nenhum dos satélites está aprisionado em nenhuma ressonância de movimento médio, análises das superfícies dos satélites e a irregularidade na inclinação de Miranda indicam que intensas interações de maré devem ter ocorrido em algum momento. Pesquisas realizadas por Tittlemore et al. (1989) e Peale (1988) mostraram que diversas ressonâncias poderiam ter ocorrido ao longo da evolução dos satélites de Urano, onde cada ressonância apresenta um mecanismo de captura e escape distinto.

Neste sentido, o problema da alta inclinação de Miranda é um caso que desperta interesse para estudo, uma vez que a alta inclinação de Miranda pode ter sido consequência de uma intrigante combinação de captura e escape em uma ressonância 3 : 1 entre Miranda e Umbriel (Tittlemore et al., 1988).

Além do problema da alta inclinação de Miranda, observações da superfície de Ariel apontam para interações de maré intensas apesar da atual inexistência de quaisquer ressonâncias no sistema. A primeira explicação proposta para a atual superfície de Ariel envolve passagem por uma ressonância 5 : 3 entre Ariel e Umbriel, onde neste período a excentricidade de Ariel cresce significamente e como consequência intensos processos de dissipação de energia alteram a superfície de Ariel. Este estudo foi primeiramente desenvolvido por Tittlemore et al. (1987) utilizando o caso planar para análise da evolução do sistema.

Neste trabalho, será feita uma revisão do diagrama de comensurabilidades do sistema de satélites de Urano através da técnica desenvolvida por Peale (1988), onde ênfase será dada para as duas últimas ressonâncias encontradas pelo sistema, sendo estas a 3 : 1 entre

Miranda e Umbriel e a $5 : 3$ entre Ariel e Umbriel. Posteriormente serão feitas integrações numéricas a fim de estudar a evolução orbital dos satélites durante essas ressonâncias utilizando uma modelagem mais generalizada do que a apresentada por outros autores no estudo deste problema (Tittlemore et al., 1987). Por fim, os resultados obtidos pelas integrações numéricas serão utilizados para discutir os diversos cenários que poderiam ter acarretado na atual inclinação de Miranda e a superfície relativamente nova de Ariel. É importante ressaltar que ambas as ressonâncias deste trabalho foram estudadas previamente por outros autores. Assim, por conta da quantidade de tempo necessária para a integração numérica do sistema, o estudo dessas ressonâncias geralmente é feito a partir de métodos bem mais simplificados, como o caso do mapeamento algébrico (Tittlemore et al., 1989) e o uso de equações truncadas (Verheylewegen et al., 2013), onde apenas os satélites envolvidos diretamente na interação ressonante são considerados na integração. Portanto, o tratamento para as duas ressonâncias dado no presente trabalho, que envolve a integração numérica considerando todos os cinco satélites de Urano e a interação de maré em três destes cinco satélites (Miranda, Ariel e Umbriel), compõe um estudo novo deste sistema.

O presente trabalho está organizado da seguinte forma: Inicialmente, será apresentado o conjunto de parâmetros físicos do sistema de satélites estudados. Posteriormente, será feita uma revisão do diagrama de possíveis comensurabilidades do sistema de satélites de Urano, seguindo o trabalho de Peale (1988). Em seguida, a modelagem das equações de movimento utilizadas para a integração numérica do sistema será apresentada. No capítulo 4, serão apresentados e discutidos os resultados das simulações para o caso da ressonância $3 : 1$ entre Miranda e Umbriel e para o caso da ressonância $5 : 3$ entre Ariel e Umbriel, onde diversos casos com condições iniciais distintas serão mostrados. Por fim, as conclusões do trabalho serão apresentadas e discutidas. No Apêndice A será apresentado o método do mapeamento algébrico utilizado por diversos autores para o estudo das ressonâncias do sistema de satélites de Urano (esta seção foi incluída no trabalho apenas para comparação teórica entre o método para as integrações numéricas deste trabalho e as usualmente feitas na literatura).

2 Características do sistema

Neste capítulo, serão apresentados os parâmetros físicos do sistema utilizados ao longo do trabalho, como massa, raio equatorial, elementos orbitais, entre outros. Posteriormente, será feita uma revisão do diagrama de comensurabilidades para o grupo de satélites, inicialmente estudado por Peale (1988).

2.1 Parâmetros físicos e orbitais

Nesta seção serão apresentados os parâmetros físicos e orbitais atuais do sistema de satélites de Urano. Os dados foram retirados de Verheylewegen (2013).

| Satélite | Massa (kg) | R (km) |
|----------|------------------------|--------|
| Miranda | 6.593×10^{19} | 235.8 |
| Ariel | 1.353×10^{21} | 578.9 |
| Umbriel | 1.172×10^{21} | 584.7 |
| Titania | 3.527×10^{21} | 788.9 |
| Oberon | 3.012×10^{21} | 761.4 |

Tabela 1. Valores das massas dos satélites.

| Satélite | a (km) | e | ω (°) | M (°) | I (°) | Ω (°) |
|----------|----------|--------|--------------|---------|---------|--------------|
| Miranda | 129 900 | 0.0013 | 68.312 | 311.330 | 4.338 | 326.438 |
| Ariel | 190 900 | 0.0012 | 115.349 | 39.481 | 0.041 | 22.394 |
| Umbriel | 266 000 | 0.0039 | 84.709 | 12.469 | 0.128 | 33.485 |
| Titania | 436 300 | 0.0011 | 284.400 | 24.614 | 0.079 | 99.771 |
| Oberon | 583 500 | 0.0014 | 104.400 | 283.088 | 0.068 | 279.771 |

Tabela 2. Parâmetros orbitais do sistema, onde a corresponde ao semieixo maior, e corresponde à excentricidade, ω corresponde ao argumento do periastro, M representa a anomalia média, I representa a inclinação e Ω representa a longitude do nodo ascendente.

| Massa (kg) | R_m (km) | R_{eq} (km) | $J_2 \times 10^6$ | $J_4 \times 10^6$ |
|------------------------|------------|---------------|-------------------|-------------------|
| 8.681×10^{25} | 25 362 | 26 200 | 3341.29 | -30.44 |

Tabela 3. Parâmetros físicos de Urano, onde R_{eq} é o raio equatorial e R_m é o raio médio.

O conjunto de dados fornecidos nas Tabelas 1-3 completam o conjunto de dados necessários para a integração numérica das equações de movimento. Fatores mais específicos como o valor de k_2/Q ou eventuais condições iniciais distintas serão discutidas na seção de resultados.

2.2 Diagrama de comensurabilidades

Nesta seção, serão discutidos aspectos relacionados às possíveis ressonâncias encontradas ao longo da evolução do grupo de satélites de Urano, assim como as razões pelas quais acredita-se que o sistema tenha passado por tais ressonâncias. As discussões apresentadas nesta seção serão baseadas nos trabalhos de Peale (1988) e Tittlemore et al. (1987).

Para a montagem do diagrama, será utilizada a expressão para a variação média no semieixo maior a_i de um corpo i atribuída ao efeito de maré, dada por

$$\frac{da_i}{dt} = 3 \frac{k_2^p n_i m_i R_p^5}{Q_p a_i^4 M} \left(1 + \frac{51}{4} e_i^2 \right) - 21 \frac{k_2^i n_i M R_i^5}{Q_i a_i^4 m_i} e_i^2, \quad (2.1)$$

onde k_2^p/Q_p é o fator de dissipação de maré do planeta (no caso Urano), n_i , m_i e e_i correspondem ao movimento médio, massa e excentricidade do corpo i , M corresponde à massa de Urano, R_p e R_i correspondem ao raio médio de Urano e do corpo i , respectivamente. Para simplificar a presente análise, considera-se que as excentricidades dos satélites de Urano nunca foram consideravelmente altas, assim como suas inclinações. Dessa forma, é possível reescrever (2.1) como

$$\frac{da_i}{dt} = 3 \frac{k_2^p n_i m_i R_p^5}{Q_p a_i^4 M}. \quad (2.2)$$

Sabendo que o semieixo maior e o movimento médio de um corpo podem ser relacionados pela terceira lei de Kepler como

$$n_i^2 a_i^3 = G(M + m_i) \approx GM, \quad (2.3)$$

pode-se utilizar (2.3) a fim de transformar a equação (2.2) em uma expressão para a

variação no movimento médio de um corpo i . Manipulando algebricamente a equação (2.3) e derivando esta expressão, obtém-se que

$$2n \frac{dn}{dt} = -3 \frac{GM}{a_i^4} \frac{da}{dt},$$

e utilizando a expressão (2.2), segue que

$$\frac{dn}{dt} = -\frac{9}{2} \frac{k_2^p m_i R_p^5 n^{16/3}}{MQ_p (GM)^{5/3}}. \quad (2.4)$$

A equação (2.4) pode ser integrada analiticamente, de forma que

$$\int_n^{n_0} \frac{dn}{n^{16/3}} = -\frac{9}{2} \frac{k_2^p m_i R_p^5}{MQ_p (GM)^{5/3}} \int_t^{t_0} dt,$$

onde os parâmetros n_0 e t_0 indicam o movimento médio e instante de tempo atuais do corpo.

Por fim, tem-se que

$$n_{0i}^{-13/3} - n_i^{-13/3} = \frac{117}{6} \frac{k_2^p m_i R_p^5}{Q_p G^{5/3} M^{8/3}} (t_0 - t), \quad (2.5)$$

e definindo o seguinte parâmetro

$$N = \frac{117}{6} \frac{k_2^p R_p^5}{Q_p G^{5/3} M^{8/3}}, \quad (2.6)$$

o movimento médio n_i pode ser escrito de forma que

$$n_i^{-13/3} - n_{0i}^{-13/3} = Nm_i(t - t_0). \quad (2.7)$$

A forma do parâmetro N sugere que este é o mesmo para qualquer satélite considerado, uma vez que depende apenas de parâmetros físicos do planeta, neste caso, Urano. A equação (2.7) mostra como o movimento médio de um corpo i se altera ao longo do tempo. Observa-se que a variação no movimento médio depende explicitamente do fator k_2^p/Q_p através do parâmetro N , como esperado.

Uma vez que o parâmetro N não depende do corpo i considerado, pode-se dividir a equação (2.7) pela mesma equação para um corpo j , de forma que tem-se

$$\frac{n_i^{-13/3} - n_{0i}^{-13/3}}{n_j^{-13/3} - n_{0j}^{-13/3}} = \frac{m_i}{m_j}, \quad (2.8)$$

e rearranjando os termos é possível mostrar que

$$\frac{n_i}{n_j} = \frac{n_{i0}}{n_{j0}} \left\{ \left[1 - \frac{m_i}{m_j} \left(\frac{n_{i0}}{n_{j0}} \right)^{13/3} \right] \left(\frac{n_j}{n_{j0}} \right)^{13/3} + \frac{m_i}{m_j} \left(\frac{n_{i0}}{n_{j0}} \right)^{13/3} \right\}^{-3/13}. \quad (2.9)$$

A equação (2.9) fornece o valor da razão dos movimentos médios dos satélites i e j para uma determinada comensurabilidade.

Algumas implicações das suposições feitas até então para a obtenção da equação (2.9) merecem discussão. Primeiramente, observa-se que a equação (2.1) só é válida para o caso onde não há captura em ressonâncias de movimento médio. Esta informação é de grande relevância, uma vez que atualmente acredita-se que uma série de ressonâncias em diferentes períodos causaram efeitos que contribuíram para as características atualmente intrigantes do sistema de satélites de Urano. Portanto, a equação (2.9) só seria válida até o ponto onde há encontro e captura em uma ressonância de movimento médio entre os satélites de Urano. Estudos realizados por Titemore et al. (1987) mostraram que a ressonância 5 : 3 entre Ariel e Umbriel teria sido a última encontrada pelo sistema de satélites. Portanto, para uma análise precisa da passagem por diversas ressonâncias do sistema, a equação (2.9) só seria válida até o ponto onde Ariel e Umbriel são capturados na ressonância 5 : 3. No entanto, para uma estimativa inicial da sequência de possíveis ressonâncias, pode-se considerar que o regime ditado pela equação (2.9) é válido para quaisquer períodos de tempo independentemente das ressonâncias encontradas.

Outro ponto importante que foi assumido até então para a obtenção da expressão (2.9) são as informações a respeito da variação na excentricidade e inclinação dos satélites ao longo do tempo, isto é, foi considerado que a excentricidade dos satélites nunca foi suficientemente alta, de forma que os termos dependentes da excentricidade em (2.1) foram desprezados. Para uma análise precisa das diversas possíveis comensurabilidades do sistema é necessária uma análise completa com a inclusão dos termos relacionados à excentricidade. No entanto, atualmente não há informações suficientes de modo que seja possível estimar um valor confiável para a excentricidade dos satélites de forma precisa. Portanto, a análise fica restrita para o caso apenas *circular*, assim como no estudo realizado por Peale (1988).

De posse do conjunto de equações até então obtidas, é possível efetuar uma análise do diagrama de comensurabilidades para o grupo de satélites de Urano. Fazendo $j = 2$,

ou seja, colocando as parcelas n_i em função do movimento médio de Ariel, tem-se que

$$\frac{n_i}{n_2} = \frac{n_{i0}}{n_{20}} \left\{ \left[1 - \frac{m_i}{m_2} \left(\frac{n_{i0}}{n_{20}} \right)^{13/3} \right] \left(\frac{n_2}{n_{20}} \right)^{13/3} + \frac{m_i}{m_2} \left(\frac{n_{i0}}{n_{20}} \right)^{13/3} \right\}^{-3/13}. \quad (2.10)$$

A Figura 1 mostra o diagrama de comensurabilidades para o sistema de satélites de Urano em função da razão do semieixo maior de Ariel com o semieixo maior atual deste satélite. A grandeza α é definida como

$$\alpha = \frac{n_i}{n_j}, \quad (2.11)$$

sendo n_i e n_j o movimento médio dos satélites i e j , respectivamente. A Tabela 4 mostra as informações de cada curva ilustrada no diagrama da Figura 1.

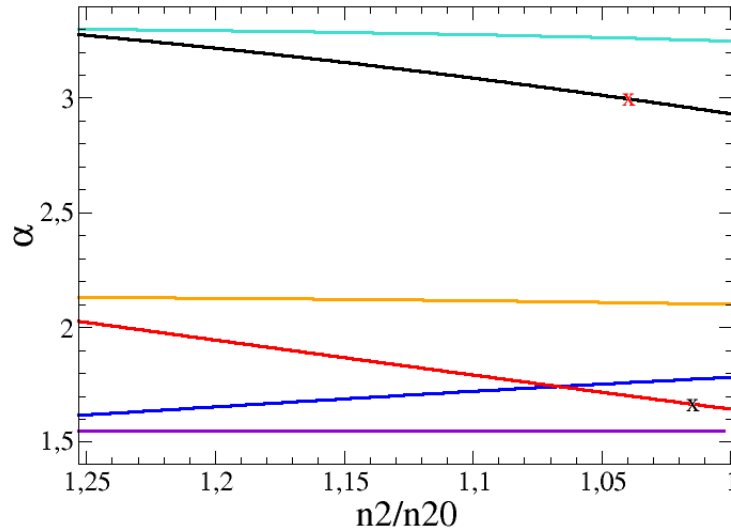


Figura 1: Diagrama de comensurabilidades para o grupo de satélites de Urano. Os valores das massas e movimentos médios atuais dos satélites utilizados na elaboração desta figura são os mesmos utilizados por Peale (1988). As informações de cada curva estão apresentadas na Tabela 4. Nesta figura, tem-se no eixo horizontal a grandeza n_2/n_{20} , ou seja, para o extremo direito, tem-se a configuração próxima da atual. Uma vez que a maré causa uma diminuição no movimento médio com o passar do tempo e, portanto, no fator n_2/n_{20} , o tempo avança da esquerda para a direita.

| Cor | Corpo i | Corpo j |
|----------|-----------|-----------|
| Preto | Miranda | Umbriel |
| Vermelho | Ariel | Umbriel |
| Azul | Miranda | Ariel |
| Amarelo | Umbriel | Titania |
| Ciano | Umbriel | Oberon |
| Roxo | Titania | Oberon |

Tabela 4. Informações das curvas mostradas na Figura 1.

A partir da Figura 1, diversos aspectos interessantes a respeito das possíveis comensurabilidades atingidas entre os diferentes satélites ao longo de suas respectivas evoluções orbitais podem ser discutidos. Primeiramente, observa-se que a razão entre os movimentos médios de Miranda e Ariel aumenta, como pode ser observado pela curva azul. Como consequência, infere-se que o semieixo maior de Ariel cresce mais rápido do que o semieixo maior de Miranda. Outra informação importante que pode ser abstraída da Figura 1 é a razão entre os movimentos médios dos três satélites mais distantes de Urano, sendo estes Umbriel, Titania e Oberon. Observa-se que a razão entre o movimento médio destes satélites praticamente não se altera ao longo do tempo, e portanto infere-se que a razão entre os semieixos maiores destes satélites permanece praticamente constante ao longo do tempo considerado.

As características até então discutidas relacionadas à Figura 1 podem ser explicadas a partir da observação dos valores das massas dos satélites de Urano e o valor de seus movimentos médios. Como consequência do baixo valor atual do movimento médio dos satélites mais distantes (e consequentemente do alto valor de seus semieixos maiores), a expansão das órbitas dos satélites mais distantes é muito menor do que a expansão das órbitas dos satélites mais interiores, como Miranda e Ariel. No caso de Ariel, uma vez que seu semieixo maior é relativamente pequeno e sua massa é grande, a taxa de aumento no semieixo maior de Ariel é grande, e como consequência este se expande mais rápido do que os outros satélites do sistema de satélites de Urano, como pode ser observado pela curva azul e verde.

Apesar da diversidade de informações relevantes que podem ser inferidas através de uma análise minuciosa da Figura 1, as informações mais importantes habitam na região entre $n_2/n_{20} = 1$ e $n_2/n_{20} = 1,07$ para as curvas preta e vermelha. Observamos que a ressonância 3 : 1 entre Miranda e Umbriel (ou equivalentemente $\alpha = 3$ da curva preta) ocorre para $n_2/n_{20} \approx 1.042$, enquanto a ressonância 5 : 3 entre Ariel e Umbriel (ou

equivalentemente $\alpha \approx 1,67$ da curva vermelha) ocorre para $n_2/n_{20} \approx 1.015$. Uma vez que sabe-se que a maré causa uma diminuição no movimento médio dos satélites com o passar do tempo (neste caso) e que a grandeza n_2 no exato ponto de entrada na comensurabilidade 5 : 3 entre Ariel e Umbriel é menor do que o valor de seu movimento médio no exato ponto de entrada na comensurabilidade 3 : 1 entre Miranda e Umbriel, conclui-se que a ressonância 3 : 1 entre Miranda e Umbriel tem alta probabilidade de ser a penúltima ressonância encontrada. Em seguida, há passagem pela ressonância 5 : 3 entre Ariel e Umbriel.

3 *Montagem das equações de movimento*

Neste capítulo será apresentada a modelagem matemática completa utilizada nas simulações realizadas durante o presente trabalho para o estudo da dinâmica ao longo das ressonâncias encontradas pelos satélites de Urano. A montagem será baseada no trabalho de Lainey (2004) para a parte gravitacional incluindo efeitos de achatamento e no trabalho de Verheylewegen (2013) para a implementação da maré na integração das equações de movimento.

3.1 *Montagem da parte gravitacional*

A modelagem da parte gravitacional é feita considerando um referencial uranocêntrico e utilizando a mecânica Newtoniana para a montagem das expressões para as acelerações de cada corpo. Consideram-se interações relacionadas ao potencial gravitacional de uma massa pontual e também os efeitos do achatamento polar de Urano até a ordem de J_4 . A equação que rege a evolução para cada corpo l do sistema pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{r}}_l = & -\frac{G(m_0 + m_l)\vec{r}_l}{r_l^3} + \sum_{j=1, j \neq l}^N Gm_j \left(\frac{\vec{r}_j - \vec{r}_l}{r_{lj}^3} - \frac{\vec{r}_j}{r_j^3} \right) + \\ & + G(m_0 + m_l)\nabla_l U_{l0} + \sum_{j=1, j \neq l}^N Gm_j \nabla_j U_{j0}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

onde os termos subscritos com 0 representam Urano e os subscritos com l ou j denotam o l -ésimo e j -ésimo satélites, respectivamente. Além disso, \vec{r}_l denota o vetor posição do l -ésimo satélite em relação ao referencial. O primeiro termo em (3.1) representa a força gravitacional entre o l -ésimo satélite e Urano, o segundo termo representa a força gravitacional entre o j -ésimo e l -ésimo satélite, o terceiro e quarto termos representam as forças devido ao achatamento polar de Urano, considerando os satélites l e j como corpos pontuais. Os subscritos j e l no gradiente indicam derivadas com respeito às coordenadas

de j e l .

3.2 Potencial de Achatamento

Para o achatamento polar, foi realizado inicialmente um desenvolvimento em função dos Polinômios de Legendre, a fim de obter uma expressão para o potencial devido ao achatamento polar de Urano. Segundo Verheylewegen et al. (2013), escreve-se que

$$U_i = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R_e^{2n}}{r_i^{2n+1}} J_{2n} P_{2n}(\sin \phi_i), \quad (3.2)$$

onde R_e representa o raio equatorial de Urano.

No presente estudo, implementam-se os efeitos de achatamento polar através da expansão da equação (3.2) até o termo acompanhado pelo coeficiente J_4 , isto é, até $n = 2$.

De acordo com a equação (3.2) tem-se, para o primeiro termo ($n = 1$), que

$$U_i = - \frac{R_e^2}{r_i^{2+1}} J_2 P_2(\sin \phi_i). \quad (3.3)$$

Da geometria do parâmetro ϕ (latitude), pode-se dizer que

$$\sin \phi_i = \frac{z}{r_i}. \quad (3.4)$$

O polinômio de Legendre P_2 pode ser escrito como

$$P_2\left(\frac{z}{r_i}\right) = \frac{1}{2} \left(\frac{3z^2}{r_i^2} - 1 \right). \quad (3.5)$$

Escrevendo r em função das coordenadas x , y e z obtém-se que

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad (3.6)$$

onde r corresponde a r_i . Utilizando do argumento de que uma força (desde que esta seja independente da velocidade) pode ser escrita como o gradiente de um potencial, é possível fazer a derivada da expressão (3.3) para obter a expressão da "força" correspondente ao achatamento em x, y e z utilizando

$$F_x = \frac{\partial U}{\partial x}$$

$$F_y = \frac{\partial U}{\partial y}$$

$$F_z = \frac{\partial U}{\partial z}. \quad (3.7)$$

Das relações dadas em (3.7) e fazendo a derivada da expressão para o potencial em (3.3), tem-se que

$$\begin{aligned} F_x &= -R^2 J_2 \left(\frac{3x}{2r^5} - \frac{15z^2 x}{2r^7} \right) \\ F_y &= -R^2 J_2 \left(\frac{3y}{2r^5} - \frac{15z^2 y}{2r^7} \right) \\ F_z &= -R^2 J_2 \left(\frac{9z}{2r^5} - \frac{15z^3}{2r^7} \right). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Portanto, fica completa a expansão do termo para achatamento polar correspondente a $n = 1$. Para $n = 2$, o procedimento é análogo, onde a única diferença é a expressão do polinômio de Legendre utilizado no cálculo da derivada. A expressão para P_4 pode ser escrita como

$$P_4 \left(\frac{z}{r_i} \right) = \frac{1}{8} \left(\frac{35z^4}{r_i^4} - \frac{30z^2}{r_i^2} + 3 \right). \quad (3.9)$$

Fazendo a derivada para a expressão do potencial de achatamento (3.2) com $n = 2$ e calculando as derivadas correspondentes, obtém-se que

$$\begin{aligned} F_x &= R^4 J_4 \left(\frac{315z^4 x}{8r^{11}} - \frac{105z^2 x}{4r^9} + \frac{15x}{8r^7} \right) \\ F_y &= R^4 J_4 \left(\frac{315z^4 y}{8r^{11}} - \frac{105z^2 y}{4r^9} + \frac{15y}{8r^7} \right) \\ F_z &= R^4 J_4 \left(\frac{315z^5}{8r^{11}} - \frac{175z^3}{4r^9} + \frac{15z}{8r^7} \right). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Portanto, ficam completas as expansões para o achatamento para $n = 2$. Nota-se que as expressões para x e y são extremamente parecidas, enquanto a expressão para z é diferenciada. O valor de J_2 e J_4 para Urano são extremamente baixos quando comparados aos de outros planetas do Sistema Solar, como Júpiter ou Saturno. Esta característica tem importante efeito na dinâmica de passagem pela ressonância 3 : 1 entre Miranda e Umbriel, como será discutido no capítulo 4.

3.3 Implementação do efeito de maré

Inicialmente, faz-se necessária a apresentação das equações que representam o efeito da maré, desenvolvidas primeiramente por Kaula (1966) e utilizadas por Verheylewegen et al. (2013). As equações podem ser escritas como

$$\frac{da_i}{dt} = 3 \frac{k_2^p n_i m_i R_p^5}{Q_p a_i^4 M} \left(1 + \frac{51}{4} e_i^2 \right) - 21 \frac{k_2^i n_i M R_i^5}{Q_i a_i^4 m_i} e_i^2, \quad (3.11)$$

$$\frac{de_i}{dt} = \frac{57}{8} \frac{k_2^p n_i m_i}{Q_p M} \left(\frac{R_p}{a_i} \right)^5 e_i - \frac{21}{2} \frac{k_2^i n_i M}{Q_i m_i} \left(\frac{R_i}{a_i} \right)^5 e_i. \quad (3.12)$$

Como pode ser notado por (3.11) e (3.12), os efeitos da maré são implementados em coordenadas orbitais. Este fato tem uma importante consequência do ponto de vista computacional e até mesmo teórico, uma vez que, como já foi mostrado nas duas subseções anteriores, as equações correspondentes ao movimento dos satélites por conta da interação gravitacional e de achatamento são escritas em função dos elementos cartesianos. Assim, ao menos à primeira vista, não seria possível conciliar as equações (3.11) e (3.12) com (3.1). Portanto, o seguinte procedimento é necessário:

- **Passo 1:** Dadas as condições iniciais em elementos orbitais do sistema, estas são convertidas para elementos cartesianos. Feito isso, é usada a subrotina RADAU15 (Everhart, 1985) para integrar o conjunto de EDOs geradas por (3.1) por um período de tempo δt , gerando novas coordenadas cartesianas.
- **Passo 2:** Em paralelo ao passo 1, o conjunto de condições iniciais em elementos orbitais é integrado como um conjunto de EDOs de primeira ordem (conjunto de equações (3.11) e (3.12)) também com o código integrador RADAU15 e são obtidos novos elementos orbitais oriundos desta integração.
- **Passo 3:** O conjunto de coordenadas cartesianas obtidas após a integração da equação (3.1) são convertidas em elementos orbitais, e os novos elementos orbitais oriundos do Passo 2 são implementados nos elementos orbitais novos provenientes da conversão.

A sequência de passos descritos acima avança o sistema em um período de tempo T . No presente estudo, utiliza-se $T = 1$ ano para este período. Este método foi inicialmente implementado por Verheylewegen et al. (2013). Neste trabalho, fixa-se o parâmetro δt em 1 ano terrestre.

O método descrito acima faz uso de aproximações que merecem destaque. Primeiramente, foi assumido que o sistema atingiu o sincronismo ao utilizar as equações mediadas de Kaula para a implementação da maré. Além disso, quando é feita a integração numérica paralela entre a parte da maré e a parte gravitacional isoladas supõe-se que, ao longo de um período de tempo δt , apenas as interações oriundas da gravidade ou da maré atuam no sistema. Esta suposição é, claramente, uma aproximação, uma vez que a maré e a interação gravitacionam são efeitos que agem em todos os corpos do sistema mutuamente e não devem ser processos integrados separadamente. Como consequência, o parâmetro δt deve ser escolhido de forma a balancear o tempo de CPU utilizado e também preservar as propriedades físicas e dinâmicas do sistema em questão.

Apesar do procedimento utilizado para a implementação ser uma aproximação, em um estudo anterior mostrou-se que o modelo de Verheylewegen et al. (2013) descreve adequadamente a dinâmica do sistema para pequenos valores de δt , como o escolhido neste trabalho, utilizando uma comparação com o formalismo de marés desenvolvido por Mignard (1978) para o caso síncrono.

4 *Resultados*

Neste capítulo, será apresentada parte dos resultados obtidos para o estudo das ressonâncias 3 : 1 entre Miranda e Umbriel e a ressonância 5 : 3 entre Ariel e Umbriel, considerando todos os cinco satélites nas integrações e interações de maré em Miranda, Ariel e Umbriel. Uma vez que seria inviável apresentar todos os resultados efetuados neste trabalho por conta da quantidade de simulações realizadas, serão mostrados casos que representam bem uma variedade de cenários distintos para a evolução nas ressonâncias. Por questões de completeza, será fornecida uma estatística dos resultados obtidos.

4.1 *Regressão orbital de Ariel*

Uma vez que foi proposto um estudo da ressonância 5 : 3 entre Ariel e Umbriel e sabe-se que a ressonância 3 : 1 entre Miranda e Umbriel precede a ressonância 5 : 3, é necessário estudar a ressonância 3 : 1 a fim de determinar condições iniciais razoáveis para estudo da ressonância 5 : 3 entre Ariel e Umbriel. Dado que estudos anteriores da dinâmica durante a passagem pela ressonância 3 : 1 entre Miranda e Umbriel foram feitos apenas utilizando os dois satélites envolvidos (Tittlemore et al., 1988) ou consideram que Ariel não sofre variações no semieixo maior por conta da maré (Verheylewegen et al., 2013), é necessário obter uma estimativa para o semieixo maior de Ariel no momento de entrada na ressonância 3 : 1 entre Miranda e Umbriel de forma que, após a saída desta ressonância, Ariel e Umbriel se encontrem em condições propícias para a entrada na ressonância 5 : 3. Um método para a estimativa do semieixo maior de Ariel será descrito nessa seção.

O método utilizado para estimar o semieixo maior de Ariel pode ser descrito da seguinte forma: Utiliza-se o integrador RADAU15 para integrar as equações de movimento do sistema de satélites assumindo como condições iniciais os valores atuais para todos os satélites e considerando maré em Miranda, Ariel e Umbriel. Inicia-se uma integração retrógrada, isto é, a opção de integração reversa do integrador. Desta forma, simula-se

uma integração reversa, e portanto os semieixos maiores dos satélites que sofrem efeito de maré diminuem. O sistema é integrado numericamente até que os semieixos maiores de Miranda e Umbriel sejam próximos àqueles utilizados como condições iniciais para simulação da ressonância 3 : 1, como os fornecidos por Verheylewegen et al. (2013). No mesmo instante de tempo correspondente ao valor procurado para os semieixos maiores de Miranda e Umbriel, observa-se o valor do semieixo maior de Ariel. Este valor é utilizado para estimar o semieixo maior de Ariel a ser utilizado como condição inicial supondo interação de maré também em Ariel.

Salientamos que este procedimento de regressão, em especial quando há passagem por ressonâncias, é muito limitado particularmente para os elementos de Miranda e Umbriel, que estão envolvidos na ressonância 3 : 1. No caso atual, na inexistência de qualquer outro método de obter um valor do semieixo de Ariel no passado, vamos utilizar desta regressão para obter uma estimativa do semieixo de Ariel, já que este não está envolvido em nenhuma ressonância importante neste intervalo de tempo.

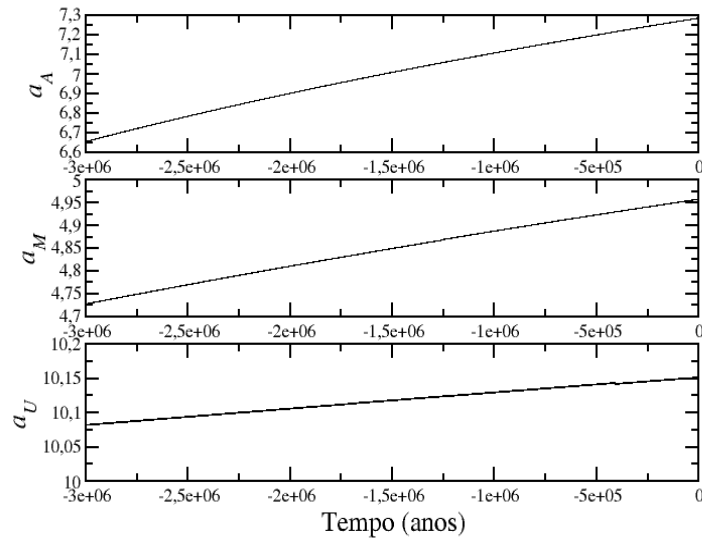


Figura 2: Variação do semieixo maior de Ariel, Miranda e Umbriel, respectivamente (de cima para baixo). Uma vez que o único objetivo da integração foi estimar o semieixo de Ariel, não foi necessário o uso de um fator k_2/Q de Urano extremamente baixo. A integração foi feita ao longo de 3 milhões de anos. Os semieixos maiores estão dados em unidades do raio equatorial de Urano, representado por R_e . Para entrada em ressonância 3 : 1 entre Miranda e Umbriel, tem-se que $a_M = 4,8626 R_e$ e $a_U = 10,1221 R_e$.

A Figura 2 mostra o resultado obtido para a regressão do semieixo maior de Ariel. Uma vez que o método utilizado não leva em conta passagem por ressonâncias na integração retrógrada, alguns pequenos desvios no valor do semieixo maior de Ariel são to-

leváveis, porém são pequenos e irrelevantes. A tabela 5 mostra os valores mais próximos das condições iniciais utilizadas para a_U e a_M no estudo da ressonância 3 : 1 e o semieixo maior de Ariel no mesmo instante de tempo, onde os dados correspondem à integração da Figura 2.

| Tempo (Myr) | $a_M (R_e)$ | $a_A (R_e)$ | $a_U (R_e)$ |
|-------------|-------------|-------------|-------------|
| -1,3312 | 4,86272 | 7,04377 | 10,12201 |
| -1,3313 | 4,86265 | 7,04366 | 10,12261 |
| -1,3314 | 4,86263 | 7,04396 | 10,12291 |

Tabela 5. Tabela dos valores de semieixo maior para Miranda, Ariel e Umbriel (em unidades do raio equatorial de Urano).

De posse dos valores dados na tabela 5, optou-se por utilizar o valor de $a_A = 7.04366 R_e$ para o semieixo maior de Ariel. Utilizando o método de Peale (1988), temos $n_2/n_{20} \approx 1.0418$ com $n_{20} = 2,885 \times 10^{-5} \text{ seg}^{-1}$ ou equivalentemente $a_A \approx 7.09085 R_e$ (ver Figura 1 e equação (2.10)) no exato momento de captura na ressonância 3 : 1 entre Miranda e Umbriel. Na seção seguinte será discutido o problema da ressonância 3 : 1 entre Miranda e Umbriel utilizando a maré em Ariel e valores para o semieixo maior deste satélite (Ariel) discutidos nesta seção.

4.2 Evolução através da Ressonância 3:1

Nesta seção serão apresentados resultados para a ressonância 3 : 1 entre Miranda e Umbriel considerando maré também em Ariel e utilizando o valor do semieixo maior dado na seção 4.1. Uma vez que o problema da ressonância 3 : 1 entre Miranda e Umbriel nunca foi estudado utilizando maré em Ariel, dá-se destaque aos resultados obtidos e discutidos nesta seção, uma vez que nunca foram estudados deste ponto de vista.

Como a ressonância de estudo será a 3 : 1, serão examinadas apenas as combinações ressonantes desta ressonância. Eventuais alterações nos elementos orbitais iniciais dos satélites serão comentados nas legendas das figuras individualmente, assim como a razão para a mudança nas condições iniciais e como a evolução do sistema se altera perante as mudanças realizadas. É interessante ressaltar que o tempo de integração utilizado para a obtenção dos resultados varia de 1 a 3 meses de integração, entre as integrações de 7 a 10 milhões de anos.

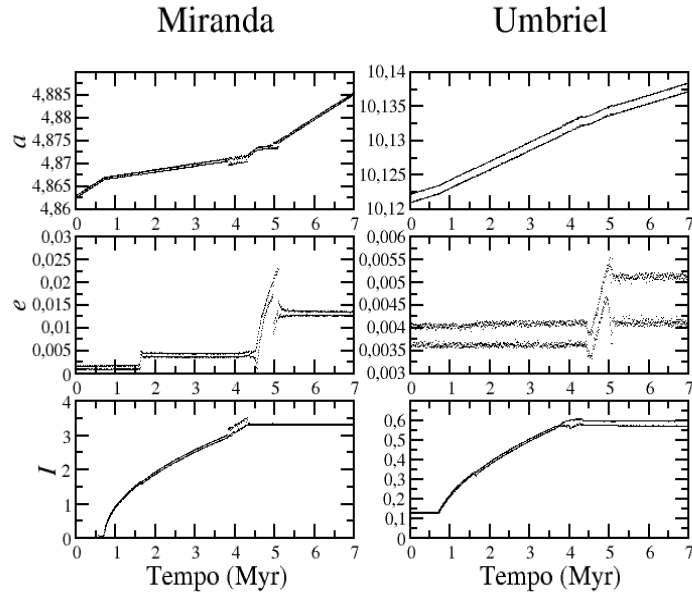


Figura 3: Resultados obtidos para a evolução de Miranda e Umbriel utilizando $k_{20}/Q_0 = 1,5 \times 10^{-4}$ e condições dadas pelas descritas na tabela 2. Temos também que $a_M = 4.8626 R_0$, $a_U = 10.1214 R_0$ e $a_A = 7.04366 R_0$ onde R_0 representa o raio equatorial de Urano. Neste caso observamos captura em θ_2 sem captura pela ressonância θ_1 . A inclinação de Miranda e Umbriel aumentam. O sistema fica capturado na ressonância por cerca de 4 milhões de anos.

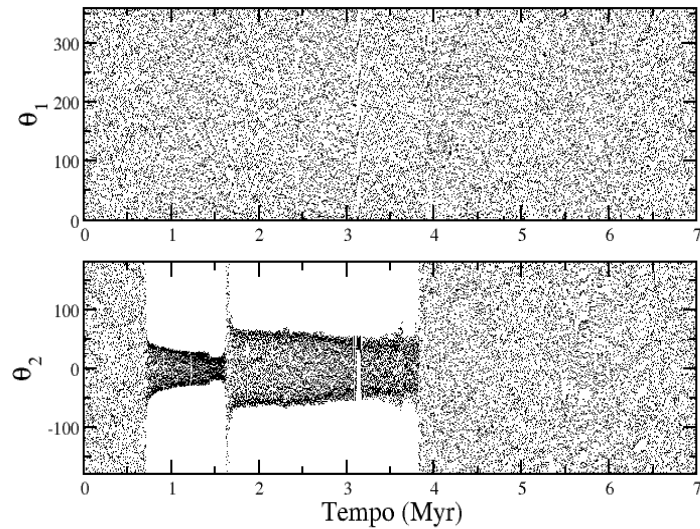


Figura 4: Ângulos ressonantes $\theta_1 = \lambda_M - 3\lambda_U + 2\Omega_M$ e $\theta_2 = \lambda_M - 3\lambda_U + \Omega_M + \Omega_U$ relacionados à integração da figura 19. Observando a evolução do ângulo θ_2 ao longo do tempo, podemos observar que há captura e escape em mais de uma ressonância secundária, como pode ser observado ao examinarmos o intervalo entre 1 e 2 milhões de anos de integração do sistema. Além disso, não há captura em θ_1 .

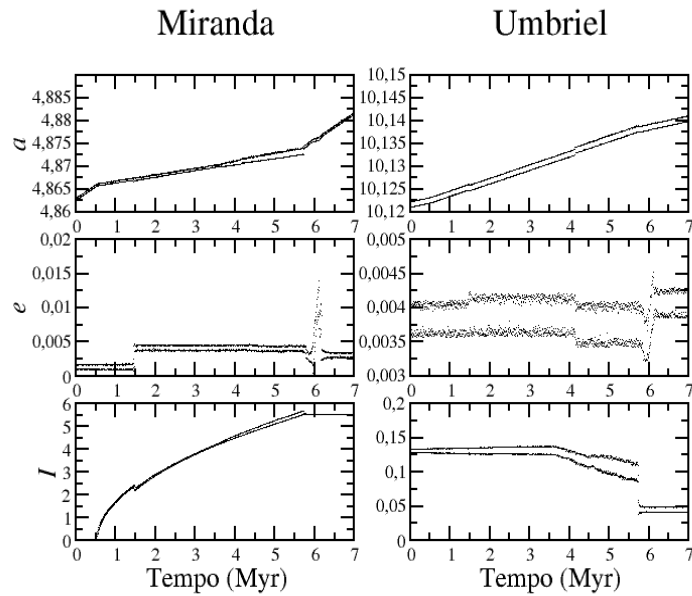


Figura 5: Similar à figura 3 utilizando $k_{20}/Q_0 = 1,3 \times 10^{-4}$. Vemos que uma pequena diminuição no fator k_2/Q de Urano causa uma mudança drástica na evolução do sistema tanto na ressonância capturada quanto na evolução do sistema durante aprisionamento na ressonância 3 : 1. O sistema é capturado em θ_1 e posteriormente a inclinação de Miranda aumenta, enquanto o sistema é aprisionado em uma série de ressonâncias secundárias. O tempo total de passagem pela ressonância 3 : 1 antes do escape é de cerca de 5,5 milhões de anos. A inclinação final de Miranda está em torno de $5,5^\circ$.

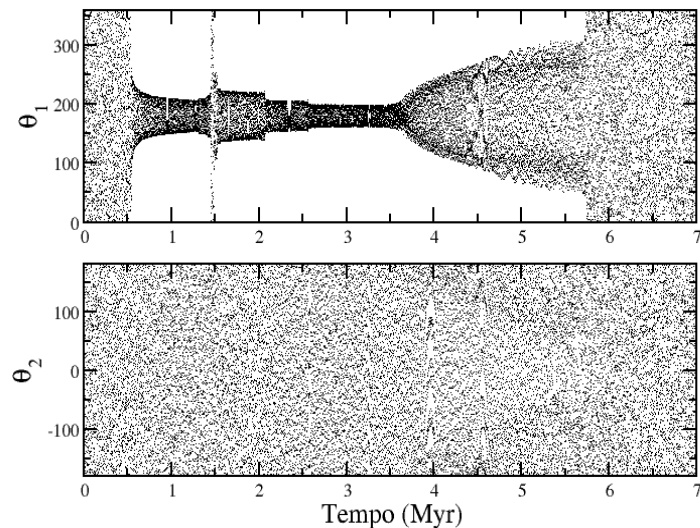


Figura 6: Ângulos ressonantes θ_1 e θ_2 relacionados à integração da figura 5. Esta figura nos mostra as diversas ressonâncias secundárias que o sistema sofre captura ao longo da passagem pela ressonância 3 : 1. Algumas dessas capturas podem ser facilmente detectadas se observarmos o ângulo θ_1 em cerca de 1,5 e 3,5 milhões de anos de integração. Observamos que, em geral, a inclinação de Miranda só cresce suficientemente se o sistema fica aprisionado por um longo período de tempo em ressonâncias secundárias da comensurabilidade 3 : 1, como pode ser observado nas outras figuras.

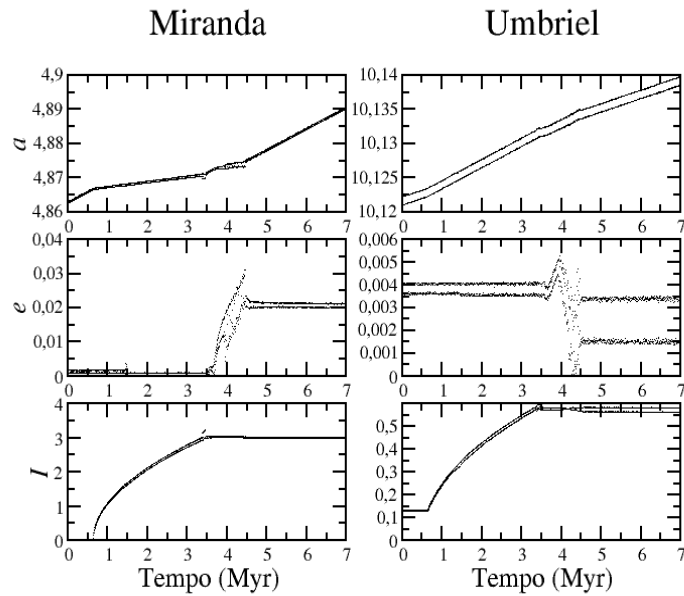


Figura 7: Similar à figura 3 utilizando $k_{20}/Q_0 = 1,3 \times 10^{-4}$ e $a_A = 7,04376 R_0$. Neste caso observamos um cenário de captura em ressonância θ_2 onde a inclinação de Miranda e Umbriel aumentam após captura na ressonância em cerca de 500 mil anos de integração. O sistema permanece aprisionado em θ_2 por cerca de 3 milhões de anos. Neste período, algumas ressonâncias secundárias são encontradas pelo sistema, e no momento de escape de θ_2 o sistema é capturado em uma ressonância de excentricidades, onde ambas as excentricidades de Miranda e Umbriel sofrem alteração. Posteriormente, o sistema se estabiliza em cerca de 4,5 milhões de anos. Observamos que uma pequena alteração no semieixo maior de um dos satélites altera significativamente a evolução do sistema como um todo.

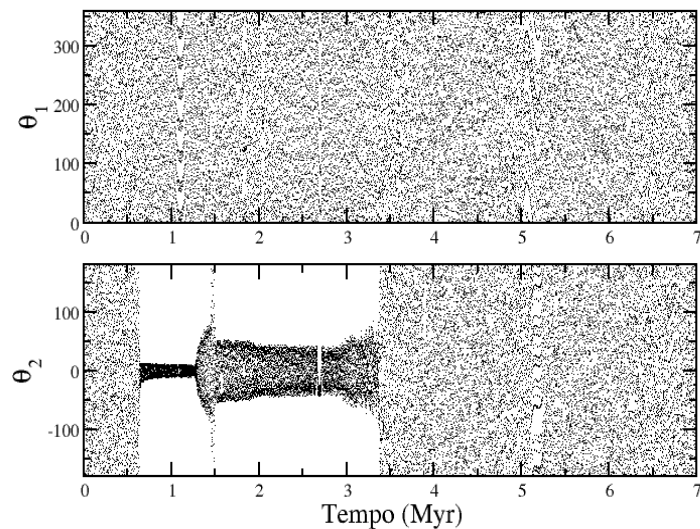


Figura 8: Ângulos ressonantes θ_1 e θ_2 relacionados à integração da figura 7. A figura nos permite analisar o grupo de ressonâncias secundárias nas quais o sistema é capturado ao longo da ressonância θ_2 entre Miranda e Umbriel. Observa-se também que o sistema evolui aprisionado em ressonância secundária por cerca de 2 milhões de anos.

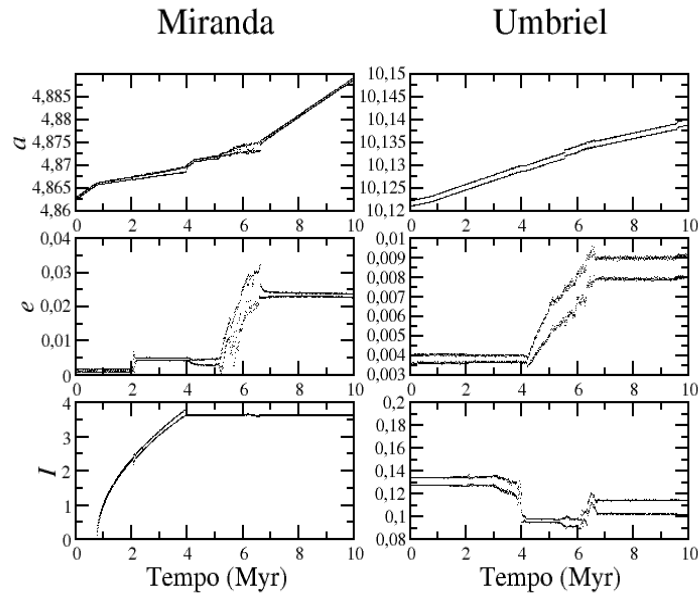


Figura 9: Similar à figura 3 utilizando $k_{20}/Q_0 = 8,0 \times 10^{-5}$ e $a_A = 4,04376 R_0$. Este caso mostra um cenário de captura em ressonância 3 : 1 entre Miranda e Umbriel do tipo θ_1 , onde apenas a inclinação de Miranda aumenta enquanto a de Umbriel permanece constante ao longo de praticamente todo o período de aprisionamento da ressonância, exceto ao final, onde a inclinação de Umbriel diminui. Observamos que a ressonância dura cerca de 3,5 milhões de anos e resulta numa inclinação final de Miranda de cerca de $3,6^\circ$.

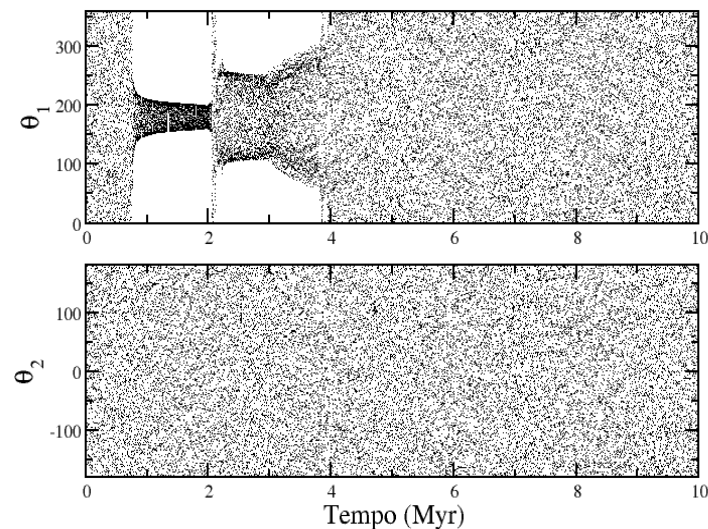


Figura 10: Ângulos ressonantes θ_1 e θ_2 relacionados à integração da figura 9. Observamos que há captura em ressonância θ_1 como discutido na figura 9 e também observamos comportamento diferenciado se comparado aos resultados clássicos de Tittlemore & Wisdom (1988) no ponto de entrada em ressonância secundária. Em cerca de 2 milhões de anos, há um aumento súbito na amplitude de libração de θ_1 , seguido de uma rápida diminuição na amplitude e posterior estabilização entre 2 e 3 milhões de anos. Entre 3 e 4 milhões de anos, observamos aumento na amplitude de libração de θ_1 de forma suave, até escape de θ_1 em cerca de 4 milhões de anos de integração.

O conjunto de resultados apresentados nesta seção possibilita uma importante inferência. Primeiramente, observamos que a alegação feita por Verheylewegen (2013) de que a partir de $k_2/Q = 5,2 \times 10^{-3}$ não há alteração no comportamento do sistema perante outras mudanças neste fator é de fato incorreta. Mostramos com parte das simulações feitas e aqui apresentadas que pequenas alterações tanto no fator k_2/Q quanto no semieixo maior de Miranda e Ariel provocam mudanças significativas na evolução orbital tanto de Miranda quanto de Umbriel ao longo da passagem pela ressonância 3 : 1. Este fato corrobora a afirmação de Tittlemore et al. (1987) a respeito da possível inexistência do invariante adiabático para este sistema. Como consequência, são necessárias diversas simulações utilizando diferentes condições iniciais para que possamos ter uma estatística ampla dos diversos cenários de evolução orbital do sistema de satélites.

Com relação à qualidade dos resultados obtidos, conseguimos reproduzir uma variedade de cenários utilizando uma modelagem mais completa para o sistema, composta pela integração das equações de movimento sem eventuais truncamentos, diferente da metodologia de Tittlemore et al. (1988) e Malhotra (1988) baseada no uso de Mapeamentos Algébricos (ver Apêndice A).

Os resultados relacionados às mudanças no valor do semieixo maior de Ariel nos mostram que o sistema é extremamente sensível também às alterações neste parâmetro. Portanto, para examinarmos a ressonância 5 : 3 necessitamos de muitos casos distintos com diferentes valores de a_A de forma a explorarmos os diversos cenários envolvidos durante a passagem pela ressonância 5 : 3 entre Ariel e Umbriel. Na seção seguinte, mostraremos os resultados obtidos para o estudo da ressonância 5 : 3 utilizando como condições iniciais os estados finais após passagem pela ressonância 3 : 1 entre Miranda e Umbriel obtidos nesta seção.

4.3 Evolução através da Ressonância 5:3

Nesta seção vamos expor os resultados obtidos para a ressonância 5 : 3 entre Ariel e Umbriel. Ressaltamos que as condições iniciais das simulações nesta seção apresentadas têm como base o resultado final da ressonância 3 : 1.

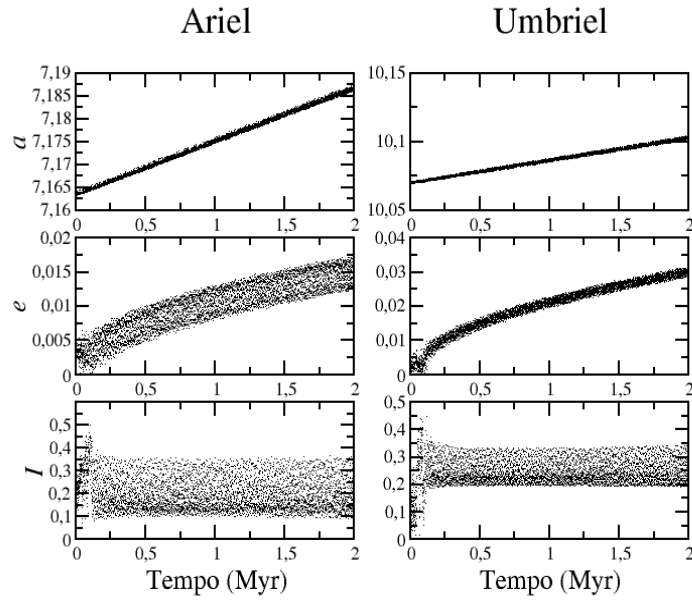


Figura 11: Evolução orbital de Ariel e Umbriel com condições iniciais de forma a reproduzir a ressonância 5 : 3 entre Ariel e Umbriel. Temos que $a_M = 4,9266 R_0$, $a_A = 7,1633 R_0$ e $a_U = 10,0703 R_0$. Temos também que $k_{20}/Q_0 = 2,6 \times 10^{-3}$. Além disso, fixamos $I_M = 4,338^\circ$ uma vez que a ressonância 5 : 3 sucede a ressonância 3 : 1 entre Miranda e Umbriel, e portanto Miranda já possui inclinação elevada.

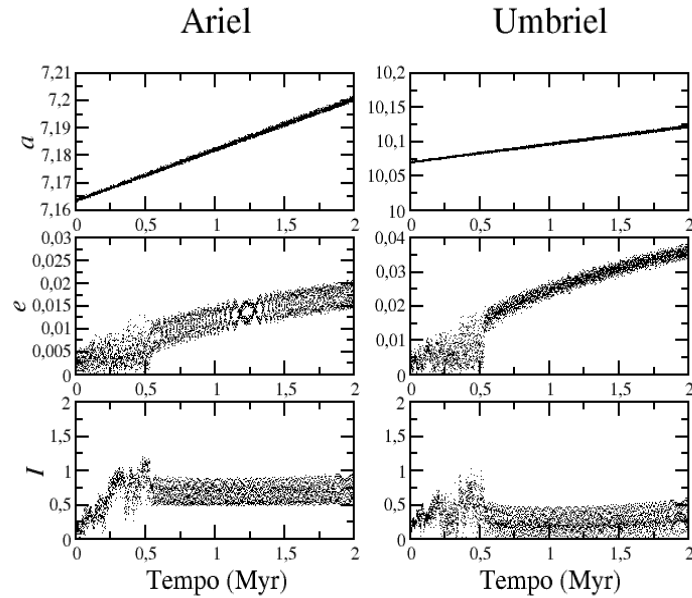


Figura 12: Similar à figura 11, porém com $a_A = 7,1628 R_0$ e $a_M = 4,9261 R_0$. Observamos uma mudança no comportamento das excentricidades de Ariel e Umbriel no início da integração, correspondendo ao ponto de captura na ressonância de excentricidades. Vemos novamente que as excentricidades de Ariel e Umbriel crescem, enquanto as inclinações apresentam apenas oscilações, no entanto a amplitude de oscilação das inclinações é praticamente o dobro da amplitude do caso da figura 11.

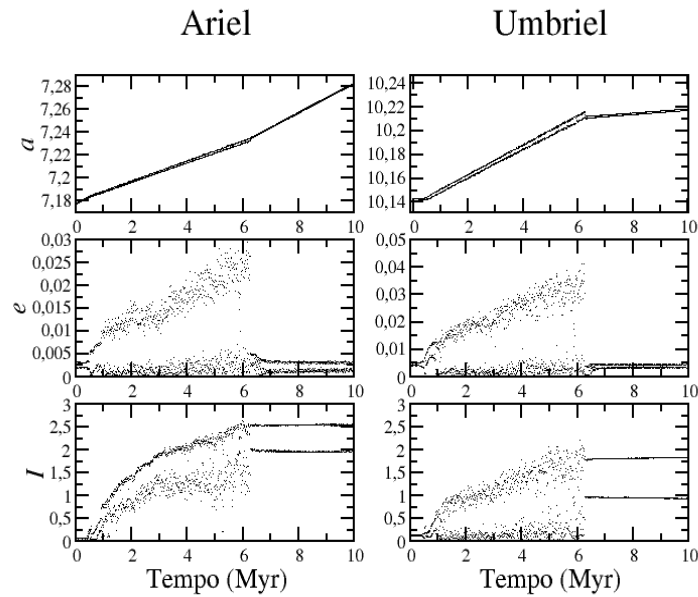


Figura 13: Caso para captura em ressonância 5 : 3 entre Ariel e Umbriel. Neste caso, temos captura em $\theta_5 = 3\lambda_A - 5\lambda_U + \omega_A + \omega_U$. Observamos que durante a captura nesta ressonância há um aumento na excentricidade de Ariel e Umbriel. Além disso, os máximos de excentricidade apresentam flutuações significativas, apontando para comportamento caótico durante a ressonância.

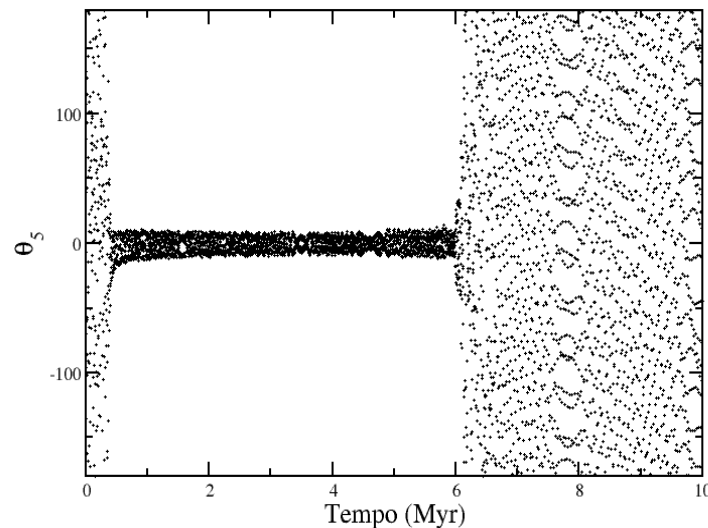


Figura 14: Ângulo ressonante relacionado à figura 13, onde vemos que há libração em θ_5 durante passagem pela ressonância 5 : 3 entre Ariel e Umbriel. ao contrario dos escapes da 3:1, onde estes ocorriam precedidos de interação de ressonâncias secundárias e depois interação como outros ângulos ressonantes que originavam caos, na ressonância 5:3, o escape não é precedido de surgimento de ressonâncias secundárias que aumentam a amplitude das librações como na ressonância 3:1. O mecanismo parece ser muito distinto do caso 3:1 entre Miranda e Umbriel.

As figuras 11 e 12 mostram dois casos com condições iniciais diferentes para o estudo da ressonância 5 : 3 entre Ariel e Umbriel. De acordo com as figuras, podemos perceber que a ressonância 5 : 3 de fato pode acarretar um aumento na excentricidade de Ariel e Umbriel. Este resultado já foi reproduzido por Titemore et al. (1987). Além disso, este cenário é um dos mais utilizados como argumento para a explicação da atual superfície de Ariel. Portanto, trata-se de uma ressonância de grande importância, uma vez que, segundo estudos realizados (Peale et al., 1981) um aumento significativo na excentricidade de um dado satélite pode acarretar na ocorrência de intensas atividades de "resurfacing" no satélite.

Na figura 11, vemos que apesar de o sistema ser aprisionado na ressonância 5 : 3 e ambas as excentricidades de Ariel e Umbriel aumentarem, as inclinações apresentam oscilações com amplitude na ordem de 0,5 graus. No entanto, na figura 12 vemos que além do aumento nas excentricidades de Ariel e Umbriel, suas inclinações oscilam com amplitude de cerca de 1 grau, sendo este valor o dobro do valor para a amplitude de oscilação das inclinações mostradas na figura 11. Uma vez que este resultado só é possível utilizando uma modelagem completa (sem eventuais truncamentos e aproximação para o caso planar), esta característica não foi verificada por Titemore et al. (1987) e não seria possível utilizando a técnica do Mapeamento Algébrico para o caso planar excêntrico (ver Apêndice).

A figura 13 ilustra o cenário mais importante entre os descritos para a ressonância 5 : 3, uma vez que, neste caso, o valor de k_2/Q utilizado foi significativamente mais baixo (na ordem de 10^{-4}) e conseguimos obter o ângulo ressonante em libração durante a ressonância 5 : 3. Esta característica não é verificada para as simulações das figuras 11 e 12. Ainda no caso da figura 15, observamos que há um aumento na inclinação dos satélites durante passagem pela ressonância 5 : 3.

Com o conjunto de dados apresentados para a ressonância 5 : 3, percebemos que há um aumento significativo da inclinação dos satélites para esta ressonância. Além disso, verificamos que a utilização de um valor relativamente alto para k_2/Q altera o ângulo ressonante em libração durante passagem pela ressonância.

5 *Conclusão*

Neste trabalho, foi feito um estudo de duas ressonâncias de movimento médio do sistema de satélites de Urano, as quais provavelmente resultaram na atual configuração do sistema com relação à elevada inclinação de Miranda e superfície relativamente ativa de Ariel. Primeiramente, foi realizada uma revisão do histórico de ressonâncias do sistema de satélites de Urano utilizando a mesma metodologia primeiramente apresentada por Peale (1988). Esta revisão possibilitou a confirmação teórica de que a ressonância 3 : 1 entre Miranda e Umbriel provavelmente ocorreu pouco antes da ressonância 5 : 3 entre Ariel e Umbriel. Posteriormente, para a modelagem das equações de movimento do sistema, foi utilizado o formalismo Newtoniano da mecânica clássica, onde as equações de movimento foram obtidas até a ordem de J_4 nos harmônicos zonais e para a implementação do efeito de maré foi utilizado o formalismo de Kaula (Verheylewegen, 2013), onde o mecanismo de implementação do efeito de maré foi apresentado de forma detalhada. No Apêndice foi descrito o modelo para evolução do sistema pela técnica de Mapeamento Algébrico, que envolve truncamento em potências dos elementos orbitais e suposição da ação de uma maré linear no sistema. Trata-se, portanto, de um método essencialmente aproximado e distinto utilizado para a evolução do sistema, com a vantagem de exigir um tempo significativamente menor de CPU.

A seção de resultados deste trabalho mostrou resultados intrigantes. Sabemos que em fenômenos dissipativos com passagem por ressonâncias, é extremamente difícil ou praticamente inviável, o uso de qualquer integração numérica retroativa para reproduzir com confiança o cenário passado. Mesmo assim, na falta de condições iniciais, foi feito um estudo retroativo, apenas para estabelecer uma idéia de possíveis intervalos, restrito somente ao semieixo maior a ser testado. Com base nisto é que se estabeleceu o semieixo de Ariel, o que não significa que outros valores não possam ser testados. Mostrou-se que eventuais alterações pequenas no valor do semieixo maior de Ariel acarretam mudanças drásticas na evolução durante a ressonância 3 : 1, mesmo que o satélite Ariel não participe diretamente como um dos corpos envolvidos em tal ressonância.

Posteriormente, a seção dos resultados relacionados ao estudo da ressonância 5 : 3 entre Ariel e Umbriel (cujas condições iniciais utilizadas foram as condições após estabilização da ressonância 3 : 1, como discutido no Capítulo 4) mostrou que existe uma diversidade de cenários possíveis durante a passagem pela ressonância 5 : 3 quando as condições iniciais foram alteradas. Os cenários estudados são inéditos uma vez que é a primeira vez que o problema da ressonância 5 : 3 entre Ariel e Umbriel é estudado utilizando todos os cinco satélites na integração numérica, juntamente com o caso tridimensional e considerando Miranda em sua posição após saída da ressonância 3 : 1, isto é, com altos valores de inclinação orbital (entre 3 e 5 graus). Estes resultados sugerem que, de fato, o sistema é sensível a alterações nas condições iniciais, e é necessário uma grande quantidade de casos analisados com diferentes condições iniciais para uma análise completa dos diversos cenários envolvidos na evolução do sistema.

Em suma, foram realizadas mais de 100 simulações (cerca de 50 para cada ressonância) onde diversos cenários foram obtidos. Uma minoria desses casos (cerca de 5%) para a ressonância 3 : 1 resultaram na atual configuração do satélite Miranda, enquanto que para a ressonância 5 : 3, os resultados mostram cenários onde há aumento da excentricidade de Ariel e Umbriel por conta de uma captura na ressonância 5 : 3. Além disso, para o caso da ressonância 5 : 3, identificamos que o ângulo ressonante θ_5 libra em torno de 0° para casos com maré extremamente lenta (k_2/Q na ordem de 10^{-5}). Este resultado não havia sido detectado até então em outros trabalhos relacionados ao estudo desta ressonância, como por exemplo em Tittlemore et al. (1988). Por conta do tempo de CPU necessário para a obtenção de resultados, não foi possível uma análise de diversos casos cujo cenário final seja o escape da ressonância e posterior estabilização do sistema. As integrações numéricas ainda estão em andamento e para que haja detecção do ângulo ressonante é necessário um fator k_2/Q extremamente baixo, na ordem do resultado mostrado na figura 13. É importante ressaltar que os casos mostrados no presente trabalho foram expostos para uma análise geral do sistema, uma vez que seria inviável discutir todas as simulações realizadas.

Referências

- Abramowitz, M., Stegun, I., 1964, Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables, Academic Press, New York.
- Brouwer, D., Clemence, G. M., 1961, Methods of Celestial Mechanics, Academic Press, New York.
- Dermott et al., 1988, *Icarus*, 76, 295.
- Goldreich, P., Soter, S., 1966, *Icarus*, 5, 375.
- Kaula, W.M., 1964, *Rev. Geophys.*, 2, 661.
- Lainey et al., 2004, *Astronomy & Astrophysics*, 420, 1171.
- Malhotra, R., Dermott, S.F., 1990, *Icarus*, 85, 444.
- Malhotra, R., 1990, *Icarus*, 87, 249.
- Mignard, F., 1978, *Celest. Mech.*, 18, 287.
- Mignard, F., 1979, *Celest. Mech.*, 20, 301.
- Mignard, F., 1980, *Celest. Mech.*, 23, 185.
- Peale, S.J., Cassen, P., 1978, *Icarus*, 36, 245.
- Peale, S.J., 1988, *Icarus*, 74, 153.
- Squyres et al., 1985, *Icarus*, 61, 218.
- Tittemore, W.C., Wisdom, J., 1988, *Icarus*, 74, 172.
- Tittemore, W.C., Wisdom, J., 1989, *Icarus*, 78, 63.
- Tittemore, W.C., Wisdom, J., 1990, *Icarus*, 85, 394.
- Verheylewegen et al., 2013, *MNRAS*, 435, 1776.
- Wisdom, J., 1985, *Icarus*, 63, 272.
- Yoder, C.F., Peale, S.J., 1981, *Icarus*, 47, 1.

APÊNDICE A – Mapeamento Algébrico

Neste apêndice será abordada a técnica do mapeamento algébrico e como se dá a construção e aplicação das equações de movimento. Este método foi inicialmente utilizado por Wisdom (1982) para o estudo de asteróides e para a explicação dos *Kirkwood Gaps*. A abordagem apresentada neste trabalho é baseada no trabalho de Malhotra (1988) e Tittlemore et al. (1987).

A.1 Estrutura do Hamiltoniano

Considera-se, para a construção do Hamiltoniano do sistema, a ressonância 5 : 3 entre Ariel e Umbriel. Para este caso, o Hamiltoniano que leva em conta todas as interações pode ser separado em quatro parcelas como

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_K + \mathcal{H}_O + \mathcal{H}_S + \mathcal{H}_R, \quad (\text{A.1})$$

onde \mathcal{H}_K é a soma dos termos não perturbados, chamados de termos Keplerianos, \mathcal{H}_O é a parcela correspondente às perturbações geradas pelo achatamento polar de Urano, \mathcal{H}_S corresponde às perturbações causadas por interações seculares entre os satélites e \mathcal{H}_R expressa a perturbação devida à interação de ressonância entre os satélites.

Para prosseguir com a montagem do Hamiltoniano, é necessário escrever cada parcela da equação (A.1) em função dos elementos Keplerianos. Denotando a_i como o semieixo maior, e_i a excentricidade, λ_i a longitude média e ω_i como a longitude do periélio, tem-se que

$$\mathcal{H}_K = -\frac{GMm_A}{2a_A} - \frac{GMm_U}{2a_U}. \quad (\text{A.2})$$

Para a parcela correspondente às interações geradas pelo achatamento polar de Urano, consideram-se apenas termos em J_2 na excentricidade, e obtém-se que

$$\mathcal{H}_O = -\frac{GMm_A}{2a_A} J_2 \left(\frac{R}{a_A}\right)^2 \left(1 + \frac{3}{2}e_a^2\right) - \frac{GMm_U}{2a_U} J_2 \left(\frac{R}{a_U}\right)^2 \left(1 + \frac{3}{2}e_U^2\right), \quad (\text{A.3})$$

Onde os termos na excentricidade foram utilizados por conta do tipo da ressonância em questão envolvida, isto é, trata-se de uma ressonância 5 : 3 cujos argumentos da função perturbadora relacionados são desenvolvidos em termos da excentricidade. Para a construção do Hamiltoniano onde o argumento da função perturbadora correspondente é desenvolvido em termos da inclinação, a construção seria semelhante estruturalmente, porém é necessário utilizar os termos desenvolvidos em função da inclinação, como feito por Tittlemore et al. (1988).

Para a parcela correspondente à interações seculares, tem-se que

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_S = & -\frac{Gm_{AM_U}}{a_U} \left[\frac{1}{2}b_{1/2}^0(\alpha) + \left(\alpha \frac{d}{d\alpha} b_{1/2}^0(\alpha) + \frac{1}{2}\alpha^2 \frac{d^2}{d\alpha^2} b_{1/2}^0(\alpha) \right) \left(\frac{e_A}{2} \right)^2 \right] + \\ & -\frac{Gm_{AM_U}}{a_U} \left[\left(\alpha \frac{d}{d\alpha} b_{1/2}^0(\alpha) + \frac{1}{2}\alpha^2 \frac{d^2}{d\alpha^2} b_{1/2}^0(\alpha) \right) \left(\frac{e_U}{2} \right)^2 \right] + \\ & -\frac{Gm_{AM_U}}{a_U} \left[\left(2b_{1/2}^1(\alpha) - 2\alpha \frac{d}{d\alpha} b_{1/2}^1(\alpha) - \alpha^2 \frac{d^2}{d\alpha^2} b_{1/2}^1(\alpha) \right) \frac{e_A e_U}{4} \cos(\omega_A - \omega_U) \right], \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

e os coeficientes $b_i^j(\alpha)$ são chamados de coeficientes de Laplace e podem ser definidos pela relação

$$b_k^s(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos(sx) dx}{(1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2)^k}, \quad (\text{A.5})$$

sendo α a razão entre o semieixo maior de Ariel e Umbriel. Por fim, a parte ressonante do Hamiltoniano pode ser escrita como

$$\mathcal{H}_R = -\frac{Gm_{AM_U}}{a_U} \left[C_1 \left(\frac{e_A}{2} \right)^2 \cos(\theta_1^{(2)}) + C_2 \frac{e_A e_U}{4} \cos(\theta_{12}^{(2)}) + C_3 \left(\frac{e_U}{2} \right)^2 \cos(\theta_2^{(2)}) \right], \quad (\text{A.6})$$

onde

$$C_1 = \frac{75}{2}b_{1/2}^5(\alpha) + 9\alpha \frac{d}{d\alpha} b_{1/2}^5(\alpha) + \frac{1}{2}\alpha^2 \frac{d^2}{d\alpha^2} b_{1/2}^5(\alpha), \quad (\text{A.7})$$

$$C_2 = -72b_{1/2}^4(\alpha) - 18\alpha \frac{d}{d\alpha} b_{1/2}^4(\alpha) - \alpha^2 \frac{d^2}{d\alpha^2} b_{1/2}^4(\alpha), \quad (\text{A.8})$$

$$C_3 = \frac{67}{2}b_{1/2}^3(\alpha) + 9\alpha \frac{d}{d\alpha} b_{1/2}^3(\alpha) + \frac{1}{2}\alpha^2 \frac{d^2}{d\alpha^2} b_{1/2}^3(\alpha), \quad (\text{A.9})$$

e as variáveis angulares definidas em (A.6) são dadas por

$$\theta_1^{(2)} = 5\lambda_U - 3\lambda_A - 2\omega_A, \quad (\text{A.10})$$

$$\theta_{12}^{(2)} = 5\lambda_U - 3\lambda_A - \omega_A - \omega_U, \quad (\text{A.11})$$

$$\theta_2^{(2)} = 5\lambda_U - 3\lambda_A - 2\omega_U. \quad (\text{A.12})$$

Nas proximidades da condição de ressonância, a evolução da excentricidade e argu-

mento do periélio é dominada por perturbações de baixas frequências, sendo estas associadas com mudanças na combinação dos ângulos ressonantes $5\lambda_U - 3\lambda_A$ e com a longitude do pericentro. Componentes com altas frequências são eliminadas por meio da realização da média. Definem-se os momentos de Delaunay (Ferraz-Mello, 2007) como

$$L_i \approx m_i \sqrt{GMa_i}, \quad (\text{A.13})$$

$$G_i = L_i \sqrt{1 - e^2}, \quad (\text{A.14})$$

onde a anomalia média e argumento do periélio são conjugadas destes momentos, respectivamente. Para prosseguir, é necessário definir novas coordenadas e momentos de forma a reduzir o número de graus de liberdade do Hamiltoniano associado ao problema. As novas variáveis podem ser definidas como

$$\sigma_A = \frac{1}{2}(5\lambda_U - 3\lambda_A - 2\omega_A), \quad (\text{A.15})$$

$$\sigma_U = \frac{1}{2}(5\lambda_U - 3\lambda_a - 2\omega_U), \quad (\text{A.16})$$

e os momentos conjugados a estas novas coordenadas ressonantes são dados por

$$\Sigma_A = L_A - G_A, \quad (\text{A.17})$$

$$\Sigma_U = L_U - G_U, \quad (\text{A.18})$$

de forma que pode-se definir duas integrais do movimento, isto é, parâmetros que permanecem inalterados durante a evolução do sistema. Estes parâmetros são dados por

$$\Gamma_A = L_A + \frac{3}{2}(\Sigma_A + \Sigma_U), \quad (\text{A.19})$$

$$\Gamma_B = L_U - \frac{5}{2}(\Sigma_A + \Sigma_U). \quad (\text{A.20})$$

Substituindo a definição de Σ_i e Γ_i no Hamiltoniano dado por (A.1) juntamente com as expressões (A.2), (A.3), (A.4) e (A.6) é possível expandir o Hamiltoniano em função de Σ_i/Γ_i e truncar termos com ordem superior a e_i^2 . Por fim, removendo termos constantes, a expressão final do Hamiltoniano pode ser escrita em função dos coeficientes de Laplace e das novas variáveis conjugadas σ_i e Σ_i juntamente com suas integrais de movimento Γ_i como

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & 2A(\Sigma_A + \Sigma_U) + 4B(\Sigma_A + \Sigma_U)^2 + 2C\Sigma_A + 2D\Sigma_U + 2E\sqrt{\Sigma_A\Sigma_U} \cos(\sigma_A - \sigma_U) + \\ & + 2F\Sigma_A \cos(2\sigma_A) + 2G\sqrt{\Sigma_A\Sigma_U} \cos(\sigma_A + \sigma_U) + 2H\Sigma_U \cos(2\sigma_U), \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

onde

$$A = -\frac{3 G^2 M^2 m_A^2 m_A^{(j)}}{4 \Gamma_A^3} + \frac{5 G^2 M^2 m_U^2 m_U^{(j)}}{4 \Gamma_U^3} \quad (\text{A.22})$$

$$B = -\frac{27 G^2 M^2 m_A^2 m_A^{(j)}}{32 \Gamma_A^3} - \frac{75 G^2 M^2 m_U^2 m_U^{(j)}}{32 \Gamma_U^3} \quad (\text{A.23})$$

$$\begin{aligned} C = & \frac{G^4 M^4 R^2 J_2}{2} \left[\frac{15 m_U^4 m_U^{(j)3}}{2 \Gamma_U^7} - \frac{6 m_A^4 m_A^{(j)3}}{\Gamma_A^7} \right] + \frac{G^2 M m_A m_U^2 m_U^{(j)}}{4 \Gamma_U^2} \left(\frac{5}{\Gamma_U} b_{1/2}^0(\alpha) \right) + \\ & + \frac{G^2 M m_A m_U^2 m_U^{(j)}}{4 \Gamma_U^2} \left[\frac{d}{d\alpha} b_{1/2}^0(\alpha) \frac{m_U}{m_A} \frac{m_U^{(j)}}{m_A^{(j)}} \left(\frac{3 \Gamma_A}{\Gamma_U^2} + \frac{5 \Gamma_A^2}{\Gamma_U^3} \right) \right] + \\ & - \frac{G^2 M m_A m_U^2 m_U^{(j)}}{4 \Gamma_U^2 \Gamma_A} \left(\alpha \frac{d}{d\alpha} b_{1/2}^0(\alpha) + \frac{1}{2} \alpha^2 \frac{d^2}{d\alpha^2} b_{1/2}^0(\alpha) \right) \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

$$\begin{aligned} D = & \frac{G^4 M^4 R^2 J_2}{2} \left[\frac{6 m_U^4 m_U^{(j)3}}{\Gamma_U^7} - \frac{9 m_A^4 m_A^{(j)3}}{2 \Gamma_A^7} \right] + \frac{G^2 M m_A m_U^2 m_U^{(j)}}{4 \Gamma_U^2} \left(\frac{5}{\Gamma_U} b_{1/2}^0(\alpha) \right) + \\ & + \frac{G^2 M m_A m_U^2 m_U^{(j)}}{4 \Gamma_U^2} \left[\frac{d}{d\alpha} b_{1/2}^0(\alpha) \frac{m_U}{m_A} \frac{m_U^{(j)}}{m_A^{(j)}} \left(\frac{3 \Gamma_A}{\Gamma_U^2} + \frac{5 \Gamma_A^2}{\Gamma_U^3} \right) \right] + \\ & - \frac{G^2 M m_A m_U^2 m_U^{(j)}}{4 \Gamma_U^2 \Gamma_A} \left(\alpha \frac{d}{d\alpha} b_{1/2}^0(\alpha) + \frac{1}{2} \alpha^2 \frac{d^2}{d\alpha^2} b_{1/2}^0(\alpha) \right) \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

$$E = -\frac{G^2 M m_A m_U^2 m_U^{(j)}}{4 \Gamma_U^2 \sqrt{\Gamma_A \Gamma_U}} \left(2 b_{1/2}^1(\alpha) - 2 \alpha \frac{d}{d\alpha} b_{1/2}^1(\alpha) - \alpha^2 \frac{d^2}{d\alpha^2} b_{1/2}^1(\alpha) \right) \quad (\text{A.26})$$

$$F = -\frac{G^2 M m_A m_U^2 m_U^{(j)}}{4 \Gamma_U^2 \Gamma_A} \left(\frac{75}{2} b_{1/2}^5(\alpha) + 9 \alpha \frac{d}{d\alpha} b_{1/2}^5(\alpha) + \frac{1}{2} \alpha^2 \frac{d^2}{d\alpha^2} b_{1/2}^5(\alpha) \right) \quad (\text{A.27})$$

$$G = \frac{G^2 M m_A m_U^2 m_U^{(j)}}{4 \Gamma_U^2 \sqrt{\Gamma_A \Gamma_U}} \left(72 b_{1/2}^4(\alpha) + 18 \alpha \frac{d}{d\alpha} b_{1/2}^4(\alpha) + \alpha^2 \frac{d^2}{d\alpha^2} b_{1/2}^4(\alpha) \right) \quad (\text{A.28})$$

$$H = -\frac{G^2 M m_A m_U^2 m_U^{(j)}}{4 \Gamma_U^3} \left(\frac{67}{2} b_{1/2}^3(\alpha) + 9 \alpha \frac{d}{d\alpha} b_{1/2}^3(\alpha) + \frac{1}{2} \alpha^2 \frac{d^2}{d\alpha^2} b_{1/2}^3(\alpha) \right), \quad (\text{A.29})$$

e os fatores $m_i^{(j)}$ correspondem às massas reduzidas no sistema de coordenadas de Jacobi (Plummer, 1960).

Por fim, faz-se uma transformação para coordenadas canônicas do tipo

$$q_i = \sqrt{2 \Sigma_i} \sin(\sigma_i) \approx e_i \sqrt{\Gamma_i} \sin(\sigma_i), \quad (\text{A.30})$$

e os momentos conjugados têm a forma

$$p_i = \sqrt{2 \Sigma_i} \cos(\sigma_i) \approx e_i \sqrt{\Gamma_i} \cos(\sigma_i). \quad (\text{A.31})$$

Portanto, a forma final do Hamiltoniano é dado por

$$\mathcal{H} = \frac{1}{4}(\delta - 2(C + D))(q_A^2 + q_U^2 + p_A^2 + p_U^2) + B(q_A^2 + q_U^2 + p_A^2 + p_U^2)^2 + C(q_A^2 + p_A^2) + D(q_U^2 + p_U^2) + E(q_A q_U + p_A p_U) + F(p_A^2 - q_A^2) + G(p_A p_U - q_A q_U) + H(p_U^2 - q_U^2), \quad (\text{A.32})$$

sendo $\delta = 4A + 2(C + D)$ um parâmetro com dimensão de energia responsável por reger o comportamento da evolução orbital resultante do sistema (Tittlemore & Wisdom, 1987).

A equação (A.32) fornece uma expressão para o Hamiltoniano do sistema para Ariel e Umbriel nas proximidades de passagem pela ressonância 5 : 3 com truncamentos em coordenadas de Jacob e a aproximação para o caso planar, porém excêntrico. Uma vez que (A.32) possui apenas dois graus de liberdade, é possível utilizar este Hamiltoniano juntamente com seções de Poincaré a fim de determinar os diferentes comportamentos de órbitas com condições iniciais distintas, como feito por Tittlemore et al. (1987) e Malhotra (1988). O estado do sistema é determinado por suas coordenadas q_i e momentos conjugados p_i e os dois parâmetros de energia δ e \mathcal{H} .

Na subseção seguinte, o Hamiltoniano obtido nesta subseção será utilizado para apresentar os procedimentos envolvidos na integração do problema em questão.

A.2 Integração do sistema de equações

O resultado (A.21) da subseção anterior pode ser utilizado para a integração das equações relacionadas ao Hamiltoniano se esta expressão for reescrita utilizando uma sequência de funções delta de Dirac em sua representação por funções trigonométricas (Abramowitz, 1964). Primeiramente reescreve-se (A.21) em forma de uma expansão com termos cosseno agrupados juntamente com os termos dependentes das variáveis σ_A e σ_U . A expressão resultante deste rearranjo pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & 2A(\Sigma_A + \Sigma_U) + 4B(\Sigma_A + \Sigma_U)^2 + 2C\Sigma_A + 2D\Sigma_U \\ & + 2E\sqrt{\Sigma_A\Sigma_U} \cos(\sigma_A - \sigma_U) \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \cos n(\Omega t - \phi_1) + 2F\Sigma_A \cos(2\sigma_A) \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \cos n(\Omega t - \phi_2) + \\ & + 2G\sqrt{\Sigma_A\Sigma_U} \cos(\sigma_A + \sigma_U) \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \cos n(\Omega t - \phi_3) + 2H\Sigma_U \cos(2\sigma_U) \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \cos n(\Omega t - \phi_4), \end{aligned} \quad (\text{A.33})$$

onde agora resta determinar uma relação entre a expansão de cossenos e a função delta de Dirac. Pela definição da expansão em série de Fourier \mathcal{F} de uma função arbitrária $f(x)$

tem-se que

$$\mathcal{F}[f(x)] = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx), \quad (\text{A.34})$$

onde

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx, \quad (\text{A.35})$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx. \quad (\text{A.36})$$

Portanto, utilizando que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - x_0) dx = f(x_0), \quad (\text{A.37})$$

pode-se calcular a série de Fourier da função delta de Dirac fazendo $f(x) = \delta(x)$ e utilizando a propriedade (A.37). O resultado da expansão de Fourier pode ser escrito como

$$\delta(x - x_0) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \cos[n(x - x_0)]. \quad (\text{A.38})$$

Somando mais uma parcela da função delta na equação (A.38) e utilizando a propriedade que a função cosseno é par, é possível colocar a segunda somatória com valores de n negativos e tem-se que

$$2\delta(x - x_0) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \cos[n(x - x_0)] + \frac{1}{\pi} \sum_{n=-1}^{-\infty} \cos[n(x - x_0)],$$

e uma vez que o termo constante fora da somatória do lado direito pode ser interpretado como o coeficiente para a expansão do somatório para $n = 0$, obtém-se que

$$2\pi\delta(x - x_0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos[n(x - x_0)]. \quad (\text{A.39})$$

Aplicando o resultado (A.39) em (A.33) e adotando a função delta como δ_T para desambiguação com o parâmetro de energia δ , escreve-se que

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & 2A(\Sigma_A + \Sigma_U) + 4B(\Sigma_A + \Sigma_U)^2 + 2C\Sigma_A + 2D\Sigma_U \\ & + 2E\sqrt{\Sigma_A\Sigma_U} \cos(\sigma_A - \sigma_U)2\pi\delta_T(\Omega t - \phi_1) + 2F\Sigma_A \cos(2\sigma_A)2\pi\delta_T(\Omega t - \phi_2) + \\ & + 2G\sqrt{\Sigma_A\Sigma_U} \cos(\sigma_A + \sigma_U)2\pi\delta_T(\Omega t - \phi_3) + 2H\Sigma_U \cos(2\sigma_U)2\pi\delta_T(\Omega t - \phi_4). \end{aligned} \quad (\text{A.40})$$

O Hamiltoniano escrito na forma da equação (A.40) possibilita a realização da integração do sistema em duas partes diferentes.

- **Parte A:** As contribuições correspondentes aos termos ressonantes σ_A e σ_U , são integrados ao longo das funções delta dadas em (A.40) em instantes de tempo distintos pré-estabelecidos.
- **Parte B:** As contribuições correspondentes ao efeito de achatamento, termos Keplerianos e termos seculares são integrados entre dois instantes de tempo t_1 e t_2 correspondentes a instantes onde a integração da parte angular (ou ressonante) é feita, dada pela parte A.

Para determinar os instantes de tempo nos quais deve ser feita a integração relacionada à parte A, basta combinar a definição da função delta de Dirac com os argumentos da função delta dados na equação (A.33). Uma vez que tem-se quatro argumentos distintos da função delta, são necessários quatro valores de tempo correspondentes a cada argumento da função delta em (A.40). Impondo que o argumento da função delta seja nulo, obtem-se quatro valores de tempo, dados por

$$\begin{aligned}
\Omega t_1 - \phi_1 &= 0 \rightarrow t_1 = \frac{\phi_1}{\Omega} \\
\Omega t_2 - \phi_2 &= 0 \rightarrow t_2 = \frac{\phi_2}{\Omega} \\
\Omega t_3 - \phi_3 &= 0 \rightarrow t_3 = t_2 + \frac{\phi_3 - \phi_2}{\Omega} \\
\Omega t_4 - \phi_4 &= 0 \rightarrow t_4 = t_0 + \frac{2\pi}{\Omega}.
\end{aligned} \tag{A.41}$$

A existência de quatro valores de tempo distintos e a estrutura para a integração das coordenadas q_i e momentos p_i descritas até então mostram que, iniciando a integração ao longo de uma função delta como primeiro passo (isto é, mantendo o tempo fixo), deve-se ter uma sequência de seis passos a partir da integração ao longo da primeira função delta para a integração completa de um ciclo do mapeamento. Os seis passos a serem realizados podem ser descritos como segue:

- **Passo 1:** Integrar ao redor da primeira função delta em $t = t_1 = \phi_1/\Omega$

$$\begin{aligned}
p_A^{(1)} &= p_A^{(0)} \cos\left(\frac{2\pi E}{\Omega}\right) - q_U^{(0)} \sin\left(\frac{2\pi E}{\Omega}\right) \\
q_A^{(1)} &= q_A^{(0)} \cos\left(\frac{2\pi E}{\Omega}\right) + q_U^{(0)} \sin\left(\frac{2\pi E}{\Omega}\right) \\
p_U^{(1)} &= p_U^{(0)} \cos\left(\frac{2\pi E}{\Omega}\right) - q_A^{(0)} \sin\left(\frac{2\pi E}{\Omega}\right)
\end{aligned}$$

$$q_U^{(1)} = q_U^{(0)} \cos\left(\frac{2\pi E}{\Omega}\right) + p_A^{(0)} \sin\left(\frac{2\pi E}{\Omega}\right) \quad (\text{A.42})$$

- **Passo 2:** Integrar a parte secular de $t = t_1$ até $t = t_2$

$$\begin{aligned} p_A^{(2)} &= p_A^{(1)} \cos\left\{\left[\frac{\delta}{2} + C - D + 4B(p_A^{(1)2} + q_A^{(1)2} + p_U^{(1)2} + q_U^{(1)2})\right]\left(\frac{\phi_2 - \phi_1}{\Omega}\right)\right\} + \\ &\quad -q_A^{(1)} \sin\left\{\left[\frac{\delta}{2} + C - D + 4B(p_A^{(1)2} + q_A^{(1)2} + p_U^{(1)2} + q_U^{(1)2})\right]\left(\frac{\phi_2 - \phi_1}{\Omega}\right)\right\} \\ q_A^{(2)} &= q_A^{(1)} \cos\left\{\left[\frac{\delta}{2} + C - D + 4B(p_A^{(1)2} + q_A^{(1)2} + p_U^{(1)2} + q_U^{(1)2})\right]\left(\frac{\phi_2 - \phi_1}{\Omega}\right)\right\} + \\ &\quad -p_A^{(1)} \sin\left\{\left[\frac{\delta}{2} + C - D + 4B(p_A^{(1)2} + q_A^{(1)2} + p_U^{(1)2} + q_U^{(1)2})\right]\left(\frac{\phi_2 - \phi_1}{\Omega}\right)\right\} \\ p_U^{(2)} &= p_U^{(1)} \cos\left\{\left[\frac{\delta}{2} - C + D + 4B(p_A^{(1)2} + q_A^{(1)2} + p_U^{(1)2} + q_U^{(1)2})\right]\left(\frac{\phi_2 - \phi_1}{\Omega}\right)\right\} + \\ &\quad -q_U^{(1)} \sin\left\{\left[\frac{\delta}{2} - C + D + 4B(p_A^{(1)2} + q_A^{(1)2} + p_U^{(1)2} + q_U^{(1)2})\right]\left(\frac{\phi_2 - \phi_1}{\Omega}\right)\right\} \\ q_U^{(2)} &= q_U^{(1)} \cos\left\{\left[\frac{\delta}{2} - C + D + 4B(p_A^{(1)2} + q_A^{(1)2} + p_U^{(1)2} + q_U^{(1)2})\right]\left(\frac{\phi_2 - \phi_1}{\Omega}\right)\right\} + \\ &\quad +p_U^{(1)} \sin\left\{\left[\frac{\delta}{2} - C + D + 4B(p_A^{(1)2} + q_A^{(1)2} + p_U^{(1)2} + q_U^{(1)2})\right]\left(\frac{\phi_2 - \phi_1}{\Omega}\right)\right\} \quad (\text{A.43}) \end{aligned}$$

- **Passo 3:** Integrar ao redor da segunda e quarta função delta em $t = t_2 = \phi_2/\Omega$

$$\begin{aligned} p_A^{(3)} &= p_A^{(2)} \cosh\left(\frac{4\pi F}{\Omega}\right) + q_A^{(2)} \sinh\left(\frac{4\pi F}{\Omega}\right) \\ q_A^{(3)} &= q_A^{(2)} \cosh\left(\frac{4\pi F}{\Omega}\right) + p_A^{(2)} \sinh\left(\frac{4\pi F}{\Omega}\right) \\ p_U^{(3)} &= p_U^{(2)} \cosh\left(\frac{4\pi H}{\Omega}\right) + q_U^{(2)} \sinh\left(\frac{4\pi H}{\Omega}\right) \\ q_U^{(3)} &= q_U^{(2)} \cosh\left(\frac{4\pi H}{\Omega}\right) + p_U^{(2)} \sinh\left(\frac{4\pi H}{\Omega}\right) \quad (\text{A.44}) \end{aligned}$$

- **Passo 4:** Integrar a parte secular de $t = t_2$ até $t = t_3$

$$\begin{aligned} p_A^{(4)} &= p_A^{(3)} \cos\left\{\left[\frac{\delta}{2} + C - D + 4B(p_A^{(3)2} + q_A^{(3)2} + p_U^{(3)2} + q_U^{(3)2})\right]\left(\frac{\phi_3 - \phi_2}{\Omega}\right)\right\} + \\ &\quad -q_A^{(3)} \sin\left\{\left[\frac{\delta}{2} + C - D + 4B(p_A^{(3)2} + q_A^{(3)2} + p_U^{(3)2} + q_U^{(3)2})\right]\left(\frac{\phi_3 - \phi_2}{\Omega}\right)\right\} \\ q_A^{(4)} &= q_A^{(3)} \cos\left\{\left[\frac{\delta}{2} + C - D + 4B(p_A^{(3)2} + q_A^{(3)2} + p_U^{(3)2} + q_U^{(3)2})\right]\left(\frac{\phi_3 - \phi_2}{\Omega}\right)\right\} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -p_A^{(3)} \sin \left\{ \left[\frac{\delta}{2} + C - D + 4B(p_A^{(3)2} + q_A^{(3)2} + p_U^{(3)2} + q_U^{(3)2}) \right] \left(\frac{\phi_3 - \phi_2}{\Omega} \right) \right\} \\
p_U^{(4)} &= p_U^{(3)} \cos \left\{ \left[\frac{\delta}{2} - C + D + 4B(p_A^{(3)2} + q_A^{(3)2} + p_U^{(3)2} + q_U^{(3)2}) \right] \left(\frac{\phi_3 - \phi_2}{\Omega} \right) \right\} + \\
& -q_U^{(3)} \sin \left\{ \left[\frac{\delta}{2} - C + D + 4B(p_A^{(3)2} + q_A^{(3)2} + p_U^{(3)2} + q_U^{(3)2}) \right] \left(\frac{\phi_3 - \phi_2}{\Omega} \right) \right\} \\
q_U^{(4)} &= q_U^{(3)} \cos \left\{ \left[\frac{\delta}{2} - C + D + 4B(p_A^{(3)2} + q_A^{(3)2} + p_U^{(3)2} + q_U^{(3)2}) \right] \left(\frac{\phi_3 - \phi_2}{\Omega} \right) \right\} + \\
& + p_U^{(3)} \sin \left\{ \left[\frac{\delta}{2} - C + D + 4B(p_A^{(3)2} + q_A^{(3)2} + p_U^{(3)2} + q_U^{(3)2}) \right] \left(\frac{\phi_3 - \phi_2}{\Omega} \right) \right\} \quad (\text{A.45})
\end{aligned}$$

- **Passo 5:** Integrar ao redor da terceira função delta em $t = t_3 = \phi_3/\Omega$

$$\begin{aligned}
p_A^{(5)} &= p_A^{(4)} \cosh \left(\frac{4\pi G}{\Omega} \right) + q_U^{(4)} \sinh \left(\frac{4\pi G}{\Omega} \right) \\
q_A^{(5)} &= q_A^{(4)} \cosh \left(\frac{4\pi G}{\Omega} \right) + p_U^{(4)} \sinh \left(\frac{4\pi G}{\Omega} \right) \\
p_U^{(5)} &= p_U^{(4)} \cosh \left(\frac{4\pi G}{\Omega} \right) + q_A^{(4)} \sinh \left(\frac{4\pi G}{\Omega} \right) \\
q_U^{(5)} &= q_U^{(4)} \cosh \left(\frac{4\pi G}{\Omega} \right) + p_A^{(4)} \sinh \left(\frac{4\pi G}{\Omega} \right) \quad (\text{A.46})
\end{aligned}$$

- **Passo 6:** Integrar a parte secular de $t = t_3$ até $t = t_4$

$$\begin{aligned}
p_A^{(6)} &= p_A^{(5)} \cos \left\{ \left[\frac{\delta}{2} + C - D + 4B(p_A^{(5)2} + q_A^{(5)2} + p_U^{(5)2} + q_U^{(5)2}) \right] \left(\frac{\phi_4 - \phi_3}{\Omega} \right) \right\} + \\
& -q_A^{(5)} \sin \left\{ \left[\frac{\delta}{2} + C - D + 4B(p_A^{(5)2} + q_A^{(5)2} + p_U^{(5)2} + q_U^{(5)2}) \right] \left(\frac{\phi_4 - \phi_3}{\Omega} \right) \right\} \\
q_A^{(6)} &= q_A^{(5)} \cos \left\{ \left[\frac{\delta}{2} + C - D + 4B(p_A^{(5)2} + q_A^{(5)2} + p_U^{(5)2} + q_U^{(5)2}) \right] \left(\frac{\phi_4 - \phi_3}{\Omega} \right) \right\} + \\
& -p_A^{(5)} \sin \left\{ \left[\frac{\delta}{2} + C - D + 4B(p_A^{(5)2} + q_A^{(5)2} + p_U^{(5)2} + q_U^{(5)2}) \right] \left(\frac{\phi_4 - \phi_3}{\Omega} \right) \right\} \\
p_U^{(6)} &= p_U^{(5)} \cos \left\{ \left[\frac{\delta}{2} - C + D + 4B(p_A^{(5)2} + q_A^{(5)2} + p_U^{(5)2} + q_U^{(5)2}) \right] \left(\frac{\phi_4 - \phi_3}{\Omega} \right) \right\} + \\
& -q_U^{(5)} \sin \left\{ \left[\frac{\delta}{2} - C + D + 4B(p_A^{(5)2} + q_A^{(5)2} + p_U^{(5)2} + q_U^{(5)2}) \right] \left(\frac{\phi_4 - \phi_3}{\Omega} \right) \right\} \\
q_U^{(6)} &= q_U^{(5)} \cos \left\{ \left[\frac{\delta}{2} - C + D + 4B(p_A^{(5)2} + q_A^{(5)2} + p_U^{(5)2} + q_U^{(5)2}) \right] \left(\frac{\phi_4 - \phi_3}{\Omega} \right) \right\} + \\
& + p_U^{(5)} \sin \left\{ \left[\frac{\delta}{2} - C + D + 4B(p_A^{(5)2} + q_A^{(5)2} + p_U^{(5)2} + q_U^{(5)2}) \right] \left(\frac{\phi_4 - \phi_3}{\Omega} \right) \right\} \quad (\text{A.47})
\end{aligned}$$

Onde as equações (A.42) – (A.47) mostradas nos passos previamente descritos podem ser obtidas utilizando as equações de Hamilton, sendo estas escritas como

$$\dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}. \quad (\text{A.48})$$

A sequência de passos previamente descritos compõe um ciclo completo do mapa, iterando as coordenadas no tempo por um período de mapeamento igual a $T = 2\pi/\Omega$.

Portanto, durante a construção e manipulação do Hamiltoniano, vê-se que para que se torne possível utilizar a técnica de seções de Poincaré para análise do espaço de fases do sistema, diversos truncamentos são necessários. Após uma sequência de transformações algébricas, obtem-se um Hamiltoniano cuja parte secular pode ser analiticamente integrada e a parte ressonante é integrada como um pulso em um instante de tempo, uma vez que termos ressonantes são acompanhados de funções delta de Dirac em sua expressão no Hamiltoniano final.

Como a técnica do mapeamento algébrico já foi profundamente explorada por Tittlemore et al. (1989) e Malhotra (1988), no presente trabalho somente a apresentação do mecanismo de funcionamento do mapeamento algébrico e a discussão teórica até então feita relacionada a este método são necessárias para a comparação efetiva dos métodos de integração das equações de movimento. Conclui-se, portanto, que a técnica do Mapeamento Algébrico diminui significativamente o tempo de CPU utilizado para a integração das equações de movimento, no entanto diversos truncamentos são realizados no processo de obtenção de um conjunto de equações para a realização do mapeamento.