

**IFT**

**Instituto de Física Teórica  
Universidade Estadual Paulista**

155

Agradecimentos



OK

**TESE DE DOUTORADO**

Esta pesquisa é a realização de alguns anos de trabalho e atuação no Instituto de Física Teórica da Universidade Estadual Paulista. Durante esse período pude contar com o apoio e colaboração de muitos colegas. Quero aqui agradecer ao Prof. Lauro Tomio pela orientação, paciência e incentivo, além de todos os colegas que me proporcionaram e pela convivência com eles.

Um agradecimento especial ao Dr. Lauro Tomio pela paciência, orientação e incentivo, além de todos os colegas que me proporcionaram e pela convivência com eles.

Às De. Sônia Pinheiro que me deu um excelente ambiente de trabalho, "Smile" e suporte importante para realização desta tese. Também quero agradecer ao meu primeiro orientador, o Dr. Evandro Mollia pela compreensão e apoio que me foram dispensados pela ausência de seu orientador.

À Capes - Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, pelo apoio financeiro durante a realização da pesquisa de doutorado.

**Aspectos Teóricos e Numéricos da Força Nuclear:**

**Comportamento de Longo, Curto Alcance e Renormalização**

**Carlos Fernando de Araujo Jr.**

**ORIENTADOR:**

*Dr. Lauro Tomio*



Outubro - 1998

## Agradecimentos

Este trabalho é o resultado de alguns anos de pesquisa e atuação no Instituto de Física Teórica. Nesse período várias amigos contribuíram para a execução desse trabalho. Agradeço imensamente esses amigos que tornaram a caminhada mais amena e agradável.

Agradeço em especial ao Dr. Lauro Tomio pelo apoio sempre incontestado e incentivo, pelo exemplo de trabalho que me proporcionou e pela orientação nesse trabalho.

Ao Dr. Tobias Frederico que com seu entusiasmo característico proporcionou vários "insights" e sugestões importantes para elaboração desse trabalho. As raízes desse trabalho estão em seus primeiros trabalhos sobre interação de alcance zero.

Ao Dr. Sadhan Kumar Adhikari, agradeço a oportunidade que me foi oferecida de compartilhar seus conhecimentos nas discussões e comentários e pela orientação em várias partes desse trabalho. Aos funcionários do IFT, em especial, a Marina pela paciência e atenção que sempre me dispensou. Agradeço também à Dra. Sandra Padula pela compreensão e atenção que me foram dispensadas pela comissão de pós-graduação.

A Capes - Coordenadoria de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, pelo apoio financeiro durante a execução do projeto de doutorado.

## Resumo

À minha sempre companheira e esposa Nilza e ao meu filho Lucas.

“O cego não vê e não verá ...,

o vaidoso se sobrepõe a cena,

o orgulhoso apaga o visto, apaga a cena...,

somente o sábio vê, reconhece, guarda e segue.

Seria o reconhecimento o prêmio da sabedoria?”

Dr. Celso Charuri

## Resumo

Nesse trabalho analisamos dois importantes aspectos limites (extremos) relacionados aos sistemas não-relativísticos de poucos núcleons: limite de curto e de longo alcance para a interação nuclear de dois corpos. No limite de longo alcance analisamos a troca de um pión, o comportamento assintótico entre os estados  $D/S$  e os correspondentes parâmetros de mistura para composição da força nuclear. O relacionamento dessas quantidades é apresentado como um importante caminho para a análise e entendimento da interação nuclear nesse setor. No limite de curto alcance as representações realísticas da força nuclear podem apresentar termos de contato, formas analíticas altamente singular. Nesse caso consideramos um método efetivo de regularização e renormalização dessas interações, que conduzem à solução da correspondente equação de espalhamento. Apresentamos também uma extensão desse formalismo para o sistema de três corpos.

*Palavras-chaves:* renormalização; parâmetro de mistura; núcleon-núcleon; dêuteron; equação de Lippmann-Schwinger; equação de Faddeev.

*Área de conhecimento:* 1.05.04.03-6; 1.05.01.01-0

## Abstract

In this work we analyse two important limiting aspects (extremes) in few nucleon systems: the short and long range limits of the nucleon-nucleon interaction. In the long range limit of the nuclear interaction we analyse the role of the one pion exchange, the  $D/S$  asymptotic behavior and corresponding mixing parameters. The relation between these quantities is shown as an important way to analyse and study the nuclear interaction in this sector. In the short range limit the analytical representations for the nuclear force can present contact terms or highly singular terms. In this case we consider an effective method to regularize and renormalize such interactions, which leads to the solution of the corresponding scattering equation. We also present an extension of the formalism to three body systems.

*Keywords:* renormalization; mixing parameter; nucleon-nucleon; deuteron; Lippmann-Schwinger equation; Faddeev equation.

### 3 Aspectos Computacionais e Numéricos 31

#### 3.1 Introdução 31

#### 3.2 Alguns Conceitos Fundamentais 33

#### 3.3 Métodos e Esquemas de Solução 37

### 4 Renormalização em Mecânica Quântica 37

#### 4.1 Introdução 37

#### 4.2 O problema 39

#### 4.3 Renormalização em Mecânica Quântica: Potenciais Singulares 74

# Índice

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>Introdução</b>   | <b>3</b>  |
| <b>2</b> | <b>Física de Dois e Três núcleons e os Potenciais Nucleares</b>                         | <b>9</b>  |
| 2.1      | Introdução . . . . .  | 9         |
| 2.2      | Física de Dois núcleons e Potenciais Nucleares . . . . .                                | 10        |
| 2.3      | Matrizes de Espalhamento . . . . .  | 13        |
| 2.4      | Potenciais Nucleares e as Quantidades Observáveis Físicas . . . . .                     | 17        |
| 2.4.1    | Comportamento de Longo Alcance e os Parâmetros $\epsilon_{BB}$ e $\epsilon_1$ . . . . . | 36        |
| <b>3</b> | <b>Aspectos Computacionais e Numéricos</b>  | <b>51</b> |
| 3.1      | Introdução . . . . .  | 51        |
| 3.2      | Alguns Conceitos Fundamentais . . . . .   | 53        |
| 3.3      | Métodos e Estratégias de Solução . . . . .  | 57        |
| <b>4</b> | <b>Renormalização em Mecânica Quântica</b>  | <b>67</b> |
| 4.1      | Introdução . . . . .  | 67        |
| 4.2      | O problema . . . . .  | 69        |
| 4.3      | Renormalização em Mecânica Quântica: Potenciais Singulares . . . . .                    | 74        |

|          |   |            |
|----------|---|------------|
| 4.4      | Equações do Grupo de Renormalização em Espalhamento . . . . . | 82         |
| <b>5</b> | <b>Aplicação da Renormalização à Equação de Espalhamento</b>  | <b>90</b>  |
| 5.1      | Introdução . . . . .  | 90         |
| 5.2      | Equações do Modelo . . . . .                                  | 93         |
| 5.3      | A Regularização e Renormalização . . . . .                    | 98         |
| 5.4      | Resultados Numéricos . . . . .                                | 101        |
| <b>6</b> | <b>O problema de Três Corpos</b>                              | <b>114</b> |
| 6.1      | Introdução . . . . .  | 114        |
| 6.2      | O modelo de Amado . . . . .                                   | 120        |
| <b>7</b> | <b>Conclusões e Perspectivas</b>                              | <b>129</b> |
|          | <b>Relação das Tabelas</b>                                    | <b>134</b> |
|          | <b>Relação das Figuras</b>                                    | <b>135</b> |

# Capítulo 1

## Introdução

O espalhamento quântico entre partículas é o processo fundamental no estudo da estrutura e propriedades da interação entre partículas. Deste modo, o estudo da dinâmica dos sistemas de dois e três núcleons é o caminho inicial para o entendimento da origem e composição da força nuclear. Nesse trabalho analisamos alguns aspectos básicos relacionados a dois limites extremos da força nuclear: os limites de longo e curto alcance. No limite de longo alcance da força nuclear analisamos o papel da troca de um pión, do comportamento assintótico da razão  $D/S$  e demais observáveis básicas do sistema núcleon-núcleon em baixas energias para composição do potencial nuclear. Essa análise é realizada através da expansão terórica[1] obtida para o parâmetro de mistura de Blatt-Biedenharn[2]. A expansão para o parâmetro de mistura se expressa através de algumas informações básicas da interação  $NN$ : comportamento de longo alcance de troca de um pión, energia do estado ligado e razão assintótica entre as ondas  $D/S$ [1, 3]. A expansão para o parâmetro de mistura assim obtida propicia uma medida da composição de estados  $D$  e  $S$  na força nuclear em termos de propriedades básicas, praticamente independentes da forma do potencial em baixas energias; e portanto, uma conexão com a fenomenologia da interação  $NN$  a baixas

energias. O papel da componente tensorial da força nuclear e dos parâmetros de mistura que fazem a mistura correta de onda  $S$  e  $D$  para bem representar as características do sistema núcleon-núcleon é ressaltado.

No limite de curto alcance, quando a força nuclear pode apresentar termos de contato[4, 5, 6] ou comportamento singular[7] analisamos a aplicabilidade do procedimento de renormalização como uma técnica para solução das equações de espalhamento para potenciais com comportamento singular.

Sabemos que para potenciais separáveis a equação de Lippmann-Schwinger[8, 9] (LS), que é a versão integral da equação diferencial de Schrödinger, representa o espalhamento para um sistema de dois núcleons é analiticamente resolvida e que para potenciais de forma simples a solução da equação de LS é uma tarefa relativamente simples. O problema surge quando a equação de LS é utilizada em problemas multicanais, onde duas partículas iniciais apresentam diferentes possibilidades de estados finais, e/ou com potenciais de forma mais complexas tais como os potenciais fenomenológicos derivados da teoria quântica de campos [7, 10, 11, 12] ou da teoria de campos efetiva[5]. Esses potenciais podem apresentar termos altamente singulares ou interações de contato do tipo delta de Dirac e suas derivadas[5, 6]. Deste modo, ao contrário que possa parecer a solução da equação integral pode tornar-se problemática já que a solução é altamente dependente da forma funcional do potencial utilizado e para potenciais singulares pode carecer de significado físico [13]. Assim existem um grande número de métodos e algoritmos para solução das equações integrais de espalhamento [9, 14]. Para o caso onde o potencial tem comportamento singular a série perturbativa de Born para a equação de LS não converge e assim não temos solução para

o problema de espalhamento[8, 9, 14]. O tratamento desse problema era feito de forma altamente “ad-hoc” não existindo um procedimento formal geral e adequado [13]. Contudo, recentemente foi proposto por Adhikari et. al.[15, 16] um procedimento simples para solução da equação de LS usando o conceito de renormalização semelhante ao usado em teoria quântica de campos[17]. Esse procedimento foi apresentado usando-se um potencial do tipo delta no espaço das coordenadas, ou seja, uma constante no espaço dos momentos. O potencial delta é altamente singular e apresenta divergências ultravioleta quando  $r \rightarrow 0(p \rightarrow \infty)$ . Através desse procedimento quantidades finitas são obtidas quando regularizamos a equação de LS e eliminamos o regularizador vinculando-o a uma quantidade observável física, um parâmetro de escala: energia de ligação ou comprimento de espalhamento, por exemplo. A esse procedimento de regularizar a equação com a introdução de um parâmetro regularizador e eliminar a dependência desse parâmetro vinculando a equação a uma quantidade observável física chamamos de renormalização. A aplicação e extensão do procedimento de regularização e renormalização apresentado nas Refs.[15, 16] foram apresentados em recentes trabalhos[18, 19, 20, 21].

Com a renormalização da equação de espalhamento de dois corpos uma questão que se impõe de forma imediata é se ao tratarmos o espalhamento de três corpos, com a mesma interação de dois corpos, deveremos renormalizar novamente a equação de espalhamento de três corpos. A questão procede já que no problema de três corpos usamos os elementos de matriz de dois corpos fora da camada de energia. Assim se matriz- $T$  de dois corpos foi renormalizada poderíamos pensar que o problema foi resolvido. Na verdade mostaremos usando as equações de Amado [22] para o espalhamento de três corpos que uma nova regu-

larização nessa equação será necessária, renormalizando as equações assim obtidas usando uma ou mais quantidades observáveis físicas de três corpos.

*Antes de apresentarmos a divisão desse trabalho gostaríamos de fazer algumas considerações sobre as quais se assentam a elaboração desse trabalho. Procuramos fazer um texto coeso e flexível apresentando de forma compreensível e progressiva a teoria e os resultados das pesquisas realizadas.*

A seqüência de divisão do trabalho é a seguinte: no capítulo 2 apresentamos alguns aspectos básicos sobre teoria de espalhamento e estado-ligado de dois núcleons e as estratégias dinâmicas de solução. O formalismo básico das matrizes de espalhamento  $T$ ,  $K$  e  $S$  é apresentado assim como a conexão entre esses formalismos e as quantidades observáveis físicas: deslocamento de fase, energia de estado ligado, razão assintótica entre as ondas  $D$  e  $S$  e os parâmetros de mistura e suas diferentes formulações.

Tratamos também, no capítulo 2, dos potenciais nucleares. Apresentamos as formas de alguns potenciais recentes, a relevância dos componentes do potencial para a descrição do problema de dois e de três corpos é discutida. Ressaltamos o comportamento de curto e longo alcance da força nuclear e como essas componentes são representadas nos potenciais "puramente" fenomenológicos[23, 24] e dos potenciais, mais recentes, derivados da teoria de troca de mésons[10, 11, 25]. O formalismo inicial e a breve descrição da força nuclear nos limites de curto e longo alcance, apresentados no capítulo 2, servem de base para a descrição de alguns métodos numéricos de solução para as equações de espalhamento apresentados no capítulo 3. Abordamos alguns aspectos relevantes sobre os métodos de solução

das equações de espalhamento e estado-ligado. Os métodos apresentados têm se mostrado um importante auxílio na solução de problemas multicanais e de potenciais com termos divergentes[14, 26, 28, 29]. Nesse capítulo abordamos fundamentalmente aspectos relativos às soluções numéricas e computacionais envolvidas no problema.

No capítulo 4 estabelecemos o problema da renormalização em mecânica quântica não relativística em conexão com alguns aspectos básicos da renormalização em Física. Para fins didáticos e elucidativos partimos de um Hamiltoniano do tipo  $H = H_0 + \lambda\delta^d(\mathbf{x})$ , onde  $H_0$  é o operador Hamiltoniano da partícula livre e  $\lambda\delta^d(\mathbf{x})$  é o potencial delta de Dirac em dimensão  $d$ . Tratamos o problema explicitamente, para  $d=1,2$  e  $3$ , mostrando em detalhes quando surge a divergência ultravioleta e como podemos fazer a redefinição da constante de acoplamento  $\lambda$  para absorver e eliminar a divergência final do problema. Abordamos também nesse capítulo as equações de grupo de renormalização em teoria de espalhamento utilizando o formalismo da matriz- $T$ . Essas equações são importantes pois proporcionam um melhor entendimento do procedimento de regularização e renormalização. Aspectos relacionados ao comportamento da constante de acoplamento e da matriz- $T$  em diferentes escalas são apresentados nessa seção.

No capítulo 5 apresentamos os resultados da utilização do método apresentado no capítulo anterior, para um potencial da forma  $r^{-2}$  usando diferentes esquemas de regularização. Os potenciais com comportamento singular são um interessante campo de experimentação para os procedimentos de regularização e renormalização no âmbito da mecânica quântica. Com o objetivo de empregarmos o método de renormalização apresentado no capítulo 4, seção 4.3, em um problema mais realístico analisamos os limites de validade para dife-

rentes procedimentos de regularização utilizados. Os resultados numéricos obtidos são apresentados e analisados.

No capítulo 6 apresentamos brevemente o formalismo utilizado para a solução do problema de três corpos. As equações acopladas de Faddeev[30] são apresentadas na forma de operadores. Sabendo-se que as equações de Faddeev reduzem-se, com a utilização de potenciais separáveis para a interação de dois corpos, a uma única equação semelhante a equação de LS: o Modelo de Amado[22], usamos esse modelo para representação do sistema de três bósons idênticos, mais especificamente o sistema nêutron-déuteron. Usando uma interação de dois corpos do tipo delta de Dirac no espaço das coordenadas, uma constante no espaço dos momentos, analisamos o núcleo da equação integral para verificar a necessidade de regularização dessa equação.

Finalizamos esse trabalho com o capítulo 7 com a apresentação das conclusões gerais e as perspectivas de trabalhos futuros.

## Capítulo 2

# Física de Dois e Três núcleons e os Potenciais Nucleares

### 2.1 Introdução

Um problema fundamental em física é a determinação da estrutura e interação entre partículas atômicas e subatômicas. Fenomenologicamente obtemos esse conhecimento a partir da análise dos resultados obtidos nas experiências de colisão entre partículas. Através desses experimentos podemos obter informações diretas tais como características da interação entre os corpos que colidem e sobre a própria composição das “partículas”. Em cada experimento os dados obtidos são analisados a luz de uma teoria mais fundamental. Em princípio, a teoria deve comportar os resultados experimentais obtidos. Contudo, no mundo real o acomplamento entre experimento e teoria nem sempre é perfeito ou claro. Existe pois a necessidade constante de se aprofundar o conhecimento teórico face essa dinâmica relação entre experiência e teoria. Assim, se a determinação da estrutura e interação entre as partículas é uma questão fundamental o problema de dois e três núcleons, ou mais genericamente de “poucos corpos”, se impõe como um importante campo de prova teórico e experimental.

Teoricamente a dinâmica do processo de colisão entre dois ou três corpos que interagem via um potencial dado é descrita, no formalismo da mecânica quântica, pela equação diferencial de Schrödinger[8, 9]. Contudo, uma outra abordagem bastante utilizada para o problema é via equação integral representada no espaço das coordenadas ou dos momentos[9]. Através da amplitude de espalhamento obtida diretamente dessa equação integral temos conhecimento das quantidades que são observáveis físicas: comprimento de espalhamento, energia de ligação do sistema  $NN$ , deslocamentos de fase e seções de choque, etc.

Na próxima seção abordaremos os aspectos fundamentais relativos a física de dois e três núcleons e aos potenciais nucleares.

## 2.2 Física de Dois núcleons e Potenciais Nucleares

No espalhamento elástico entre duas partículas, onde o estado interno das partículas que participam da reação não se altera, consideramos a descrição do processo a grandes distâncias do centro espalhador. A função de onda que descreve o processo, no referencial de centro de massa, se constitui da superposição de uma onda incidente e de uma onda espalhada. Nesse referencial o problema de espalhamento de duas partículas se reduz ao espalhamento de uma partícula, de massa reduzida  $m$ , por um centro de força onde atua o potencial  $V$ . Deste modo, a grandes distâncias do centro espalhador temos

$$|\varphi\rangle = |\phi_{inc}\rangle + |\phi_{esp}\rangle, \quad (2.1)$$

onde  $|\phi_{inc}\rangle$  e  $|\phi_{esp}\rangle$  se referem às funções de onda incidente (“inc”) e espalhada (“esp”), respectivamente. A onda espalhada traz informações sobre a interação. A dinâmica do

processo é descrita pela equação diferencial de Schrödinger,

$$(E - H_0)|\varphi\rangle = V|\varphi\rangle, \quad (2.2)$$

onde  $H_0 = \mathbf{p}^2/2m$  é o operador de energia livre,  $V$  é operador que representa a interação, o potencial, e  $E$  é a energia de centro de massa do sistema. Para problemas onde a Eq.(2.2) acima representa um estado ligado temos um espectro discreto de autovalores  $E$ , onde  $E < 0$ , e quando tratamos de problemas de espalhamento  $E > 0$  e portanto a equação tem espectro contínuo.

Podemos tratar o problema de espalhamento formulado acima através de uma equação diferencial, equação de Schrödinger, ou ainda de uma outra forma, através de uma equação integral denominada equação integral de Lippmann-Schwinger (LS). A questão de escolher uma ou outra formulação (equação diferencial ou equação integral) para a realização dos cálculos é respondida pelas peculiaridades de cada uma delas. A solução via equação diferencial requer a análise de aplicação de condições de continuidade, diferenciabilidade e comportamento assintótico. A equação integral contudo já contém essas condições de contorno na sua formulação através da função de Green, como veremos adiante. Do ponto de vista formal a maneira de transformar uma equação diferencial em uma equação integral é via formalismo das funções de Green[8, 9]. Nesse formalismo, no espaço das coordenadas, a função de Green é solução da equação

$$(\nabla_{\mathbf{r}}^2 + k^2)G_0^{(\pm)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; k^2) = \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (2.3)$$

onde  $\mathbf{r}$  e  $\mathbf{r}'$  são os vetores coordenadas e  $\delta^{(3)}$  é a função delta de Dirac tridimensional. A

forma explícita da função de Green  $G_0^{(\pm)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; k^2)$ , no espaço das coordenadas, é representada por

$$G_0^{(\pm)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; k^2) \equiv \langle \mathbf{r} | G_0^{(\pm)}(k^2) | \mathbf{r}' \rangle \quad (2.4)$$

$$= \langle \mathbf{r} | \frac{1}{E - H_0 \pm i\epsilon} | \mathbf{r}' \rangle \quad (2.5)$$

$$= \int \frac{d^3 \mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{\exp[i\mathbf{q} \cdot (\mathbf{r}' - \mathbf{r})]}{k^2 - q^2 \pm i\epsilon} \quad (2.6)$$

$$= -\frac{1}{4\pi} \frac{\exp(\pm ik|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|)}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|}. \quad (2.7)$$

Deste modo, podemos escrever então que

$$|\varphi^{(\pm)}\rangle = |\phi\rangle + G_0^{(\pm)}(k^2)V|\varphi^{(\pm)}\rangle. \quad (2.8)$$

Observamos que os índices superiores “ $(\pm)$ ” indicam as ondas que entram no centro espalhador segundo a prescrição  $G_0^{(+)}(k^2) = G_0(k^2 + i\epsilon)$  ou as ondas parciais que entram no centro espalhador segundo a prescrição  $G_0^{(-)}(k^2) = G_0(k^2 - i\epsilon)$ . A função de onda  $|\phi\rangle$ , na Eq.( 2.8), é a função de onda livre, solução da Eq.(2.2) na ausência do potencial  $V$ . A função

$$G_0^{(\pm)}(k^2) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (k^2 - H_0 \pm i\epsilon)^{-1}, \quad (2.9)$$

é a função de Green para a partícula livre. A quantidade “ $i\epsilon$ ” se deve à natureza singular do operador  $(E - H_0)^{-1}$ . Em problemas de espalhamento ( $E > 0$ ) o “ $\pm$ ” tem o importante papel de nos dar as condições de contorno do problema. Fisicamente podemos interpretar a Eq.(2.8) onde o primeiro termo representa a onda incidente que descreve o movimento de uma partícula livre. O segundo termo está associado com a onda espalhada que pode ser

convergente ou divergente de acordo com a função de Green escolhida. O comportamento assintótico da equação integral, Eq.(2.8), na representação do espaço dos momentos, nos dá a amplitude de espalhamento

$$f(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = N \langle \mathbf{k} | T | \mathbf{k}' \rangle, \quad (2.10)$$

onde  $N$  é uma constante obtida com normalização adequada. A Eq.(2.10) está diretamente relacionada a matriz de transição, matriz- $T$ , que por sua vez é relacionada com as observáveis físicas tais como deslocamento de fase e seção de choque. Essa quantidade é de grande interesse experimental e teórico, já que pode ser determinada experimentalmente. Toda informação sobre o processo de espalhamento, para um dado potencial, pode ser tirada da Eq.(2.8) e Eq.(2.10). Outras abordagens para o espalhamento de dois e três corpos também são utilizadas tendo em vista a sua aplicação em problemas mais complexos. A essas outras abordagens daremos o nome de “estratégias dinâmicas” para o tratamento do problema de poucos corpos[9]. Essas estratégias proporcionam diferentes algoritmos para obtenção de quantidades observáveis físicas e visam servir como um elemento facilitador para implementação computacional e obtenção de resultados numéricos [9, 14].

### 2.3 Matrizes de Espalhamento

No início da seção anterior, seção 2.2, dissemos que o espalhamento entre duas partículas pode ser tratado diretamente pela equação diferencial de Schrödinger ou alternativamente pela equação de Lippmann-Schwinger. A conveniência em se utilizar uma ou outra alternativa se assenta no fato de que em problemas realísticos, onde o potencial pode apresentar características mais complexas, uma solução numérica é inevitável. Na solução

numérica da equação diferencial tem-se a tarefa de encontrar as condições de contorno do problema, a continuidade e finitude das equações de espalhamento tem de ser analisadas. Por outro lado, a solução do problema de espalhamento via equação integral tem a vantagem de já incorporar as condições de contorno na própria equação. Esse aspecto acrescentado ao fato de que a solução numérica das equações integrais ser mais facilmente desenvolvida que sua versão diferencial faz com que a equação integral seja uma escolha preferível na representação do problema de espalhamento.

Tendo escolhido a abordagem via equação integral, diferentes formalismos podem ser seguidos a fim de se obter mais facilmente as quantidades observáveis físicas. Os formalismos mais usuais são a matriz- $T$ , matriz- $K$  ou matriz- $S$ . O operador de transição  $T$  é dado pela relação

$$T(k^2)|\mathbf{p}\rangle = V|\varphi_{\mathbf{k}}^{(+)}\rangle, \quad (2.11)$$

onde  $|\mathbf{p}\rangle$  representa o momento da partícula livre e  $|\varphi_{\mathbf{k}}^{(+)}\rangle$  é a solução da Eq.(2.8). Com a definição para a matriz- $T$  acima podemos escrever a equação de Lippmann-Schwinger na forma de operador[9, 28]

$$\begin{aligned} T(k^2) &= V + T(k^2)G_0^{(+)}(k^2)V \\ &= V + VG_0^{(+)}(k^2)T(k^2), \end{aligned} \quad (2.12)$$

ou em outra forma, pelo uso da relação entre a função de Green completa  $G$  e a função de Green livre  $G_0$ ,

$$G(k^2) = G_0^{(+)}(k^2) + G_0^{(+)}(k^2)VG(k^2), \quad (2.13)$$

tal que,

$$T(k^2) = V + VG(k^2)V. \quad (2.14)$$

A formulação do problema de espalhamento via matriz- $T$  elimina o uso direto da função de onda. A matriz- $T$  se conecta diretamente com a quantidade observável física do deslocamento de fase, obtida utilizando-se a relação estabelecida pela Eq.(2.10), como veremos mais adiante.

Há situações onde o operador mais conveniente para representar o espalhamento é a matriz- $S$ , cujos elementos matriciais no espaço dos momentos tem a seguinte relação com a matriz- $T$ :

$$\begin{aligned} \langle \phi_{\mathbf{p}} | S | \phi_{\mathbf{p}'} \rangle &= \langle \varphi_{\mathbf{p}}^{(-)} | \varphi_{\mathbf{p}'}^{(+)} \rangle \\ &= \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}') - 2i\pi \delta(p^2 - p'^2) \langle \phi_{\mathbf{p}} | T(p^2) | \phi_{\mathbf{p}'} \rangle, \end{aligned} \quad (2.15)$$

onde as funções de onda  $\langle \phi_{\mathbf{p}} |$ ,  $|\phi_{\mathbf{p}'} \rangle$ ,  $\langle \varphi_{\mathbf{p}}^{(-)} |$  e  $|\varphi_{\mathbf{p}'}^{(+)} \rangle$  satisfazem a equação de Lippmann-Schwinger, Eq.(2.8), para momentos definidos por  $\mathbf{p}$  e  $\mathbf{p}'$ .

Outra possibilidade para a representação do processo de espalhamento é através da matriz- $K$ . Nesse formalismo trabalhamos apenas com o valor principal da equação integral de espalhamento eliminando problemas numéricos e de continuidade advindos do tratamento da álgebra complexa. Essa matriz automaticamente preserva a unitariedade e produz deslocamentos de fase reais. Para potenciais reais Hermitianos os elementos da matriz- $K$  são reais e Hermitianos e satisfazem a relação [9]:

$$K(k^2) = K^\dagger(k^2). \quad (2.16)$$

A matriz- $T$ , por outro lado, não é Hermitiana nem unitária, mas satisfaz a propriedade [9]

$$T^\dagger(k^2 + i0) = T(k^2 - i0). \quad (2.17)$$

A matriz- $S$  é unitária e satisfaz, portanto, a relação

$$S^\dagger S = S S^\dagger = I, \quad (2.18)$$

onde  $I$  é a matriz identidade.

Analogamente ao que fizemos para a matriz- $T$ , podemos definir a matriz- $K$  pela seguinte relação

$$\langle \phi_k | K(k^2) | \phi_{k'} \rangle = \langle \phi_k | V | \varphi_{k'}^P \rangle, \quad (2.19)$$

onde a equação integral de espalhamento é representada por

$$|\varphi_k^P\rangle = |\phi_k\rangle + G_0^P(k^2)V|\varphi_k^P\rangle, \quad (2.20)$$

onde “ $P$ ” indica o valor principal da função de Green [8, 9].

Deste modo podemos reescrever a matriz de espalhamento utilizando a matriz- $K$

$$K(k^2) = V + V G_0^P(k^2) K(k^2), \quad (2.21)$$

$$K(k^2) = V + K(k^2) G_0^P(k^2) V. \quad (2.22)$$

A escolha de uma das representações da matriz de espalhamento é uma estratégia para tratamento do problema de espalhamento. Isso dependerá basicamente do potencial de interação entre as partículas e de conhecimentos antecipados da dinâmica do problema de espalhamento que se quer tratar.

## 2.4 Potenciais Nucleares e as Quantidades Observáveis Físicas

As matrizes de espalhamento que descrevemos brevemente na seção anterior se relacionam direta ou indiretamente com as quantidades que são obtidas experimentalmente. A Eq.(2.12), que representa a equação de Lippmann-Schwinger escrita em termos do operador de transição  $T$ , pode ser reescrita, no espaço dos momentos, por

$$\langle \mathbf{p} | T(k^2) | \mathbf{p}' \rangle = \langle \mathbf{p} | V | \mathbf{p}' \rangle + \int d^3 \mathbf{q} \frac{\langle \mathbf{p} | V | \mathbf{q} \rangle \langle \mathbf{q} | T | \mathbf{p}' \rangle}{(k^2 - q^2 + i\epsilon)}. \quad (2.23)$$

Na Eq.(2.23) as variáveis  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{q}$  e  $\mathbf{p}'$  representam os tri-momentos inicial, intermediário e final, respectivamente. Para os estados onde  $|\mathbf{p}| \neq |\mathbf{k}| \neq |\mathbf{p}'|$ , a energia não é conservada e os núcleons estão fora da camada de energia, ou seja matriz- $T$  é “off-shell”. Quando o estado inicial ou o estado final são tais que  $|\mathbf{p}| = |\mathbf{k}|$  ou  $|\mathbf{p}'| = |\mathbf{k}|$  os elementos da matriz- $T$  são conhecidos como “half-on-shell” ou “half-off-shell”. Quando os tri-momentos da matriz- $T$  são tal que  $|\mathbf{p}| = |\mathbf{p}'| = |\mathbf{k}|$ , isto significa que a energia inicial e final do processo de espalhamento é conservada, o espalhamento é elástico, e os elementos da matriz- $T$  nesse caso estão dentro da camada de energia (“on-shell”).

Na decomposição em ondas parciais para processos de espalhamento  $NN$  em canais acoplados, estado tripleto-tripletto  ${}^3S_1$  -  ${}^3D_1$  onde  $j = 1$ ,  $s = 1$ , teremos

$$T_{l'l}^{j(s's)}(p, p'; k^2) = V_{l'l}^{j(s's)}(p, p') + \frac{2}{\pi} \sum_{LS} \int_0^{\infty} q^2 dq \frac{V_{l'l}^{j(s's)}(p, q) T_{Ll}^{j(Ss)}(q, p')}{(k^2 - q^2 + i\varepsilon)}, \quad (2.24)$$

onde os momentos inicial, intermediário e final são apresentados em termos de seus módulos:  $p \equiv |\mathbf{p}|$ ,  $p' \equiv |\mathbf{p}'|$  e  $k \equiv |\mathbf{k}|$ , respectivamente. Os índices  $j$ ,  $l$  e  $s$  que aparecem na Eq.(2.24) representam o momento angular total, o momento angular orbital e momento angular de spin, respectivamente. Pela regra da adição dos momentos angulares temos que os possíveis momentos angulares são  $j = l \pm 1$ . Deste modo, não há conservação do momento angular orbital mas sim do momento angular total  $j$ . As equações explícitas a serem resolvidas no acoplamento  ${}^3S_1$  -  ${}^3D_1$ , podem ser escritas matricialmente como (ver Ref. [31])

$$\begin{bmatrix} T_{j-1, j-1}^j \\ T_{j+1, j-1}^j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{j-1, j-1}^j \\ V_{j+1, j-1}^j \end{bmatrix} + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{q^2 dq}{k^2 - q^2 \pm i\varepsilon} \begin{bmatrix} V_{j-1, j-1}^j(p, q) & V_{j-1, j+1}^j(p, q) \\ V_{j+1, j-1}^j(p, q) & V_{j+1, j+1}^j(p, q) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} T_{j-1, j-1}^j(q, p') \\ T_{j+1, j-1}^j(q, p') \end{bmatrix}. \quad (2.25)$$

Para canais desacoplados, onde há conservação do número quântico  $l$ , a expressão para a matriz- $\hat{T}$ , depois da decomposição em ondas parciais, para um potencial local  $V(r)$  é dada por

$$T_l(p, p'; k^2) = V_l(p, p') + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} q^2 dq \frac{V_l(p, q) T_l(q, p'; k^2)}{(k^2 - q^2 + i0)}, \quad (2.26)$$

onde  $p$  e  $p'$  representam os momentos,  $k^2 = E$  e  $l$  é o momento angular orbital. Através da solução da Eq.(2.26) podemos obter todas as quantidades que são observáveis físicas. As quantidades físicas que fazem sentido aqui estão na camada de energia ("on-shell"),

onde  $p = p' = k$ , nesse caso:  $T_l(k) \equiv T_l(k, k; k^2)$ . A Eq.(2.23) tem um pólo no ponto  $E = k^2 = q^2$ . Esse pólo representa a energia de ligação ( $E_B = E$ ) do sistema estável de dois núcleons, o dêuteron. Os elementos da matriz- $T$  na camada de energia são definidos por

$$T_l(k) = -\frac{\exp(i\delta_l(k)) \sin(\delta_l(k))}{k}, \quad (2.27)$$

onde  $\delta_l$  é quantidade chamada de deslocamento de fase. O deslocamento de fase é uma quantidade real para espalhamentos elásticos. Para espalhamentos inelásticos, ou quando o potencial tem componente complexa, o deslocamento de fase tem um componente complexo que representa a absorção ocorrida no processo. Genericamente, um deslocamento de fase complexo representa a não preservação do fluxo de partículas no processo de espalhamento, ou seja, significa que o número de partículas não é conservado no processo de espalhamento. A amplitude de espalhamento se relaciona diretamente com a matriz- $T$

$$f(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = -(2\pi)^2 \langle \mathbf{k}' | T(k^2) | \mathbf{k} \rangle. \quad (2.28)$$

A seção de choque para o espalhamento elástico é dada por

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\mathbf{k}, \mathbf{k}')|^2. \quad (2.29)$$

Um problema central em física nuclear é o conhecimento do potencial que entra na solução da Eq.(2.23). Essa quantidade representa a interação  $NN$ . O conhecimento do potencial pode vir através de duas formas básicas. Experimentalmente os resultados obtidos para o deslocamento de fase podem ser parametrizados em termos de funções. O resultado obtido

pode ser utilizado como um potencial realístico fenomenológico. Essa forma de obtenção do potencial faz com que efeitos tais como a interação spin-órbita, tensorial, dependência da carga, isospin, etc., não seja obtida por primeiros princípios mas simulada por funções parametrizadas para esse fim. A outra forma de se obter o potencial é a partir de primeiros princípios, em termos interações elementares entre os núcleons. Essa última forma deve se ajustar aos resultados experimentais obtidos no espalhamento  $NN$ . Assim os resultados obtidos para o espalhamento  $NN$  é um ingrediente básico na formulação de potenciais realísticos fenomenológicos ou via interações fundamentais. Há um número razoável de potenciais teóricos que dão praticamente os mesmos resultados para as observáveis físicas quando utilizados na Eq.(2.23) e descrevem os dados experimentais e as propriedades do dêuteron. A semelhança entre os potenciais teóricos se baseia no fato de que as observáveis físicas para o sistema de dois núcleons são obtidas na camada de energia ("on-shell"). Assim, embora esses potenciais apresentem os mesmos resultados na camada de energia existem diferenças nos elementos de matriz obtidos fora da camada de energia ("off-shell"). Esse fato tem conseqüência imediata em sistemas que envolvem três ou mais núcleons. Nos processos de espalhamento envolvendo três núcleons, por exemplo, os elementos de matriz- $T$ , de dois núcleons fora da camada de energia, são usados para obtenção de observáveis físicas de três corpos.

A interação  $NN$  é atualmente compreendida como sendo resultado da troca de partículas chamadas genericamente de mésons. O comportamento da interação em longo alcance é governado pela troca do méson mais leve chamado méson- $\pi$ . O comportamento em distâncias intermediárias é entendido como sendo o resultado da troca vários mésons es-

calares de diferentes massas. Em curtas distâncias a interação é mediada por mésons vetoriais. A interação vetorial em curtas distâncias foi originalmente postulada para explicar a interação spin-órbita. Mésons vetoriais se comportam como fótons pesados (“heavy photons”) esse tipo de interação quando usada na descrição relativística, via equação de Dirac, para dois núcleons resulta uma interação de curto alcance do tipo spin-órbita. A interação envolvendo mésons vetoriais intermediários são singulares a curtas distâncias comportando-se como  $1/r^3$ . As interações derivadas do modelo de troca de mésons, para a interação nuclear, resultam componentes dependentes do spin, isospin, da distância relativa dos núcleons e também do momento relativo dos núcleons entre outras quantidades. Fundamentalmente, as componentes da interação nuclear tais como: componente tensorial, spin-órbita e a repulsão a curtas distâncias podem ser explicadas através da teoria da troca de mésons como sendo resultado da troca do méson- $\pi$ , méson- $\omega$  e méson- $\rho$ , respectivamente. Apesar da boa descrição qualitativa que o modelo de troca de mésons para a interação nuclear nos proporciona, a sua utilização é na maioria das vezes de uma tal complexidade que faz com que outras aproximações para a interação sejam buscadas. Isso ocorre especialmente em altas energias quando a estrutura de quarks dos núcleons começa a ser exposta e a complexidade da interação devido a troca de vários mésons, quarks e glúons se tornam intensas. Historicamente os dois maiores esforços de se obter um potencial baseado na teoria de troca de mésons parametrizado pelos resultados obtidos no espalhamento núcleon-núcleon foram os potenciais de “Bonn”[11] e “Paris”[32]. Esses potenciais são portanto potenciais efetivos que representam os efeitos da troca de mésons e que serão utilizados no estudo de outros sistemas de dois corpos e para o problema de três corpos,

por exemplo. Um potencial fenomenológico mais simples, não dependente da energia, foi derivado no final dos anos 60 por Reid[23]. Esse potencial nas suas versões de caroço mole e caroço duro (“soft-core” e “hard-core”) depende apenas do spin, isospin, momento angular e da distância radial entre os núcleons. O potencial de Reid foi parametrizado utilizando a equação de Schrödinger, os resultados experimentais dos deslocamentos de fase e parâmetros do acoplamento tensorial. O potencial utilizado na equação de Schrödinger era constituído da soma de yukawas com diferentes alcances e com intensidades ajustadas para fitar os dados experimentais. No contexto de sua época e com as análises dos deslocamentos de fase em ondas parciais existentes o potencial de Reid descreve de forma razoável a interação  $NN$  em baixas energias e para momento angular  $l \leq 2$ . Nesse contexto a troca de mésons não é relevante e apenas o comportamento a longa distância da troca de um pión é considerado fenomenologicamente.

Devemos considerar que para cada diferente formulação teórica ou fenomenológica o potencial é apresentado tendo um comportamento funcional. Essa dependência funcional é fator importante quando da escolha dos métodos de solução da equação de Lippmann-Schwinger. Uma forma geral para interação  $NN$  pode ser dada por

$$V = V_c + V_{ls} + V_t, \quad (2.30)$$

onde os termos  $V_c$ ,  $V_{ls}$  e  $V_t$  se referem as componentes central, spin-órbita e tensorial, respectivamente, da interação. Um potencial dessa forma pode ser parametrizado fenomenologicamente, a partir dos dados experimentais, em termos de funções locais do tipo Yukawa com fatores múltiplos para a massa do pión [24],

$$\begin{aligned}
 V_c(r) &= (-10.463e^{-\mu r} + 105.468e^{-2\mu r} - 3187.8e^{-4\mu r} + 9924.3e^{-6\mu r})/\mu r, \\
 V_t(r) &= (-18.548e^{-\mu r} - 109.307e^{-2\mu r} + 210.503e^{-4\mu r} - 1650.35e^{-6\mu r})/\mu r, \\
 V_{ls}(r) &= (708.91e^{-4\mu r} - 2713.1e^{-6\mu r})/\mu r,
 \end{aligned} \tag{2.31}$$

onde  $\mu = m_\pi c/\hbar = 0.7\text{fm}^{-1}$ , aqui  $m_\pi$  é a massa do méson- $\pi$ . Esse potencial é conhecido como potencial de Reid modificado ou Reid-Pieper[24].

Outros potenciais mais recentes com bases teóricas mais fortes tais como os construídos pelos grupos de Bonn[7, 11], Nijmegen[33], Argonne[12, 34] e Urbana[35] apresentam termos dependentes da carga, não localidade e componentes locais com comportamento altamente singular. Todos esses novos potenciais, que concordam com os dados experimentais com grande precisão, usam a versão local da troca de um pión (“one-pion-exchange”) para a parte de longo alcance da interação nuclear para o espalhamento  $NN$  dada por

$$V_\pi(\mathbf{r}) = \frac{g_\pi^2}{12\pi} \left( \frac{m_\pi}{2M} \right)^2 \left[ \left( \frac{e^{-m_\pi r}}{r} - \frac{4\pi}{m_\pi^2} \delta^3(\mathbf{r}) \right) \sigma_1 \cdot \sigma_2 + \left( 1 + \frac{3}{m_\pi r} + \frac{3}{(m_\pi r)^2} \right) \frac{e^{-m_\pi r}}{r} S_{12} \right] \tag{2.32}$$

onde  $r$  é a distância entre as partículas,  $r = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ ,  $m_\pi$  denota a massa do pión e  $M$  é a massa do próton,  $\sigma_i$  são as matrizes de Pauli e

$$S_{12} = 3 \frac{(\sigma_1 \cdot \mathbf{r})(\sigma_2 \cdot \mathbf{r})}{r^2} - (\sigma_1 \cdot \sigma_2). \tag{2.33}$$

O potencial acima é altamente singular e os métodos tradicionais para solução da equação de espalhamento como o método iterativo via série de Born, por exemplo, é ineficaz ou não-

apropriado para tais potenciais. Algum regularizador (“cutoff”) é necessário para eliminar singularidade que se apresenta quando  $r \rightarrow 0$  ( $p \rightarrow \infty$ ). Contudo os procedimentos utilizados para regularizar um potencial com singularidades do tipo das apresentadas na Eq.(2.32) geralmente são “ad-hoc” não existindo métodos eficientes e procedimentos claros que indiquem um caminho comum para solução da equação de Lippmann-Schwinger. Esse fato contribui para existência de uma grande quantidade de potenciais que dão praticamente os mesmos resultados “on-shell” mas que apresentam diferentes comportamentos “off-shell”. Aliado a esse fato temos diferentes formulações de potenciais parametrizados a partir dos dados do espalhamento  $nn$  (nêutron-nêutron),  $np$  (nêutron-próton) e  $pp$  (próton-próton). Potenciais que apresentam a contribuição de um pión, como o potencial de Nijmegen [12] e Argonne [7] através de termos locais, têm contribuições sensivelmente diferentes para a interação  $NN$  que um potencial derivado do formalismo relativístico, não local, tal como o potencial de Bonn[33]. As diferenças são marcantes na probabilidade de onda  $D$  para o dêuteron ou para os diferentes componentes do potencial como apresentado na Tabela 2.1. Por construção, todo potencial realístico para interação  $NN$  reproduz o valor experimental da energia do dêuteron -2.224 MeV. No entanto, as várias contribuições para a energia do dêuteron originárias dos termos cinéticos e do potencial nas ondas parciais  $^3S_1$  e  $^3D_1$ , representadas por  $S$  e  $D$  na equação abaixo, podem ser escritos por

$$\begin{aligned}
 E &= \langle \Psi_S | T | \Psi_S \rangle + \langle \Psi_D | T | \Psi_D \rangle + \langle \Psi_S | V | \Psi_S \rangle + \langle \Psi_D | V | \Psi_D \rangle + 2 \langle \Psi_S | V | \Psi_D \rangle \\
 &= T_S + T_D + V_{SS} + V_{DD} + V_{SD} .
 \end{aligned}
 \tag{2.34}$$

As componentes da Eq.(2.34) exibem resultados bastante diferentes para os diversos poten-

ciais que “simulam” a interação  $NN$ . Na Tabela 2.1, apresentamos essas diferenças para alguns potenciais conhecidos. Os potenciais conhecidos por CD-Bonn[7], Argon- $V_{18}$  [12] e Nijmegen I e II [33] são apresentados na parte superior da Tabela 2.1 e correspondem as mais novas parametrizações de alguns antigos potenciais apresentados, como exemplo de comparação na parte inferior da Tabela 2.1. Os resultados apresentados na Tabela 2.1 é um exemplo claro e ilustrativo das diferenças entre os potenciais. Apesar de todos apresentarem valores distintos para as componentes quantidades  $T_S$ ,  $T_D$ ,  $V_{SS}$ ,  $V_{DD}$  e  $V_{SD}$ , eles apresentam praticamente o mesmo valor para a energia do dêuteron,  $E_B \approx -2.23$  MeV pelos dados apresentados nessa Tabela. Esse fato mostra que diferentes componentes de ondas  $D$  e  $S$  (veja a probabilidade de onda  $D$  apresentada na Tabela 2.1 para cada potencial) apresentam o mesmo comportamento na camada de energia. Contudo, essa semelhança na descrição das observáveis de dois corpos pode resultar em diferentes resultados quando esses potenciais são utilizados na solução do problema de três corpos. Nesse caso como o comportamento fora da camada de energia da matriz- $T$  de dois corpos é relevante os resultados tenderão a ser diferentes e podem levar a erros de interpretação[36]. Antes de utilizarmos um potencial  $NN$  para o problema de poucos ou muitos corpos é importante que verifiquemos os resultados do potencial para algumas quantidades básicas do sistema  $NN$ : a probabilidade de onda  $D$  e o resultado do potencial para o parâmetro de mistura (veja próxima seção) além da descrição dada pelo potencial para os deslocamentos de fase.

A Tabela 2.1 em conjunto com as Figuras 2.1, 2.2 e 2.3 são ilustrativas e ressaltam alguns aspectos básicos da interação  $NN$ . Na Figura 2.1 apresentamos os elementos de matriz no espaço dos momentos, para os canais  ${}^3S_1$ - ${}^3S_1$  ( $SS$ ) e  ${}^3S_1$ - ${}^3D_1$  ( $SD$ ). Os elementos de matriz

$V_{SS}$ , parte esquerda da figura, e  $V_{SD}$ , parte direita da figura, para a componente de troca de um pión (OPEP) são apresentados usando-se diferentes aproximações. A componente denotada na figura por OPEP não contém aproximações e está completa. Para obtenção do potencial de troca de um pión é necessária alguma regularização. Nessa figura denotamos OPEP sem FF (“OPEP without FF”) a aproximação para a obtenção da componente do potencial com troca de um pión usando um fator de forma regularizador do tipo gaussiano (veja, por exemplo a Ref.[5] para um exemplo dessa regularização). A aproximação para a componente de um pión usando apenas uma interação do tipo local (“local OPEP”). O potencial de troca de um pión, como apresentado pela Eq.(2.32) apresenta uma função delta de Dirac no espaço das coordenadas que será transformada em uma constante no espaço dos momentos, na Figura 2.1 a aproximação para potencial OPEP é realizada desconsiderando esse fator constante. Na figura 2.1 apresentamos também a componente OPEP para o potencial de Argonne- $V_{18}$  [12]. Esse potencial é local por construção. Na figura apresentamos também a componente de troca de um pión sem o termo advindo da dinâmica relativística. A principal observação resultante da análise da figura é o fato de que mesmo a baixas energias ao redor de 200 MeV há diferenças nos resultados para a componente central  $V_{SS}$  e tensorial  $V_{SD}$ . Observamos também o papel dos diferentes esquemas de regularização e aproximações para as intensidades de  $V_{SS}$  e  $V_{SD}$ .

Na Figura 2.2 apresentamos os elementos de matriz no espaço dos momentos para a parte central  $V_{SS}$ , parte superior da figura, e tensorial  $V_{SD}$ , parte inferior da figura, para os potenciais de Bonn e Argonne- $V_{18}$ . Os resultados para a componente de troca de um pión para o potencial de Bonn, parte esquerda da figura, e Argonne- $V_{18}$ , parte direita da figura,

são comparados com a intensidade total dos potenciais. No lado esquerdo da Figura 2.2 apresentamos também a componente do potencial de Bonn  $V_{SS}$  e  $V_{SD}$  quando acrescentamos os mésons  $\pi$  e  $\rho$ . Observamos que a inclusão do méson  $\rho$  diminui a intensidade do termo  $V_{SD}$  em comparação com a componente do potencial de Bonn que utiliza somente a troca de um pión. A aproximação para a troca de um pión para o potencial de Argonne- $V_{18}$  dá apenas uma pequena diferença com relação ao potencial completo na sua componente tensorial  $V_{SD}$ . Para o caso da componente central  $V_{SS}$  o potencial de Argonne completo apresenta um comportamento repulsivo maior quando comparado com sua aproximação que apresenta apenas o termo de troca de um pión. Contudo, o comportamento da componente  $V_{SS}$  para o potencial de Bonn e Argonne- $V_{18}$  apresenta a mesma dependência com relação ao momento, à parte, é claro, de constante repulsiva.

A Figura 2.3 os elementos de matriz no espaço dos momentos para as quatro parametrizações mais recentes dos potenciais de Bonn, Argonne e Nijmegen I (Nijm I) e Nijmegen II nos canais  $SS$ ,  $SD$  e  ${}^3D_1$ - ${}^3D_1$  ( $DD$ ). Esses potenciais apresentam deslocamentos de fase equivalentes. Os resultados da figura mostram as diferenças nos canais  $SS$  e  $SD$  e uma certa semelhança no canal  $DD$ . O comportamento em altas energias desses potenciais é obtido com aproximações relativísticas, fatores de forma e troca de méson- $\rho$ . Das diferenças apresentadas nos canais  $SS$  e  $SD$  concluímos que o requerimento de deslocamentos iguais para esses potenciais não suficientemente forte para que os potenciais apresentem um comportamento semelhante. Esse fato tem conseqüência imediata na probabilidade de onda  $D$  o que por sua vez poderá influenciar os resultados obtidos utilizando-se esses potenciais em problemas de três ou mais corpos[37].

| Pot.           | $T_S$<br>[MeV] | $T_D$<br>[MeV] | $V_{SS}$<br>[MeV] | $V_{DD}$<br>[MeV] | $V_{SD}$<br>[MeV] | $P_D$<br>[%] |
|----------------|----------------|----------------|-------------------|-------------------|-------------------|--------------|
| CD-Bonn        | 9.79           | 5.69           | -4.77             | 1.34              | -14.27            | 4.83         |
| Argon $V_{18}$ | 11.31          | 8.57           | -3.96             | 0.77              | -18.94            | 5.78         |
| Nijm I         | 9.66           | 7.91           | -1.35             | 2.37              | -20.82            | 5.66         |
| Nijm II        | 12.11          | 8.10           | -5.40             | 0.59              | -17.63            | 5.64         |
| Bonn A         | 10.05          | 4.41           | -7.29             | 0.39              | -9.78             | 4.38         |
| Bonn B         | 10.02          | 5.62           | -5.39             | 1.01              | -13.49            | 4.99         |
| Bonn C         | 10.13          | 7.44           | -1.20             | 3.46              | -22.05            | 5.62         |
| Argon $V_{14}$ | 10.53          | 8.68           | -1.83             | 1.99              | -21.59            | 6.08         |
| Reid           | 12.61          | 9.53           | -0.47             | 4.55              | -28.45            | 6.47         |
| Urbana         | 11.15          | 6.44           | -6.91             | -0.19             | -12.73            | 5.20         |
| $\pi$ Bonn     |                |                | 2.32              | 1.86              | -21.48            |              |
| $\pi$ local    |                |                | -1.99             | 2.18              | -26.76            |              |
| $\pi$ Argon    |                |                | -1.65             | 1.60              | -18.28            |              |

Tabela 2.1: Resultados para os diferentes valores das energias cinéticas e potencial para alguns potenciais conhecidos [36].

|                                     | CD-Bonn   | Nijm-II | Reid93 | $V_{18}$ |
|-------------------------------------|-----------|---------|--------|----------|
| Carácter                            | não-local | local   | local  | local    |
| $\chi^2/datum$                      | 1.03      | 1.03    | 1.03   | 1.09     |
| $g_\pi^2/4\pi$                      | 13.6      | 13.6    | 13.6   | 13.6     |
| Propriedades do dêuteron:           |           |         |        |          |
| Momento de Quadr.(fm <sup>2</sup> ) | 0.270     | 0.271   | 0.270  | 0.270    |
| $\eta_d$                            | 0.0255    | 0.0252  | 0.0251 | 0.0250   |
| $P_D(\%)$                           | 4.83      | 5.64    | 5.70   | 5.76     |
| Energia de Ligação ${}^3H$ : (MeV)  |           |         |        |          |
| cálculo relat.                      | -8.00     | -7.62   | -7.63  | -7.62    |
| cálculo não-relat.                  | -8.19     | -       | -      | -        |

Tabela 2.2: Resultados para as observáveis físicas de dois e três Núcleons obtidos usando-se alguns recentes potenciais núcleon-núcleon. Resultados extraídos da Ref.[7].

As principais quantidades observáveis físicas no espalhamento  $NN$  que resultam no dêuteron são a energia de ligação,  $E_d$ , o comprimento de espalhamento,  $a_{np}$ , a razão  $D/S$ ,  $\eta_d$ , o raio do dêuteron,  $r_d$ , o momento magnético,  $\mu_d$ , e momento de quadrupólo,  $Q_d$ . Nas equações de canais acoplados,  ${}^3S_1$  -  ${}^3D_1$ , onde está o dêuteron, Eq.(2.25) a razão entre as ondas  $D$  e  $S$  é obtida por

$$\eta_d = \lim_{k \rightarrow ik_B} \frac{T_{02}}{T_{00}}, \tag{2.35}$$

é uma quantidade praticamente independente do potencial é uma boa medida para a mistura de ondas  $D$  e  $S$ , no seu comportamento de longo alcance, que formam o dêuteron. O comprimento de espalhamento é obtido no limite de energia zero da Eq.(2.25) tal que temos

$$a_{np} = \lim_{k \rightarrow 0} T_{0,0}(k, k; k^2). \quad (2.36)$$

Um importante resultado da física de dois núcleons é que a existência da mistura das ondas  $S$  e  $D$  que dá origem ao momento de quadrupólo elétrico e magnético e contribui para a energia do dêuteron. Foi Schwinger[38] quem primeiro observou que a existência de um valor não nulo para o momento de quadrupólo elétrico e o momento magnético anômalo do dêuteron (por anômalo queremos dizer que o momento magnético não é igual a soma do momento magnético do próton e do nêutron) era uma evidência da existência de uma componente tensorial na interação  $NN$ . Bethe [38] observou a contribuição dominante da força tensorial para a energia de ligação do dêuteron. Essa mistura de ondas é explicada através de uma interação tensorial, potencial tensorial, que a longa distância corresponde a troca de um pión. Estudos recentes realizados pelo nosso grupo Refs.([1] e [3]) mostrou que a partir de observáveis experimentais de baixa energia podemos extrair uma quantidade  $\epsilon_j$ , conhecida como parâmetro de mistura, que dá informações sobre a natureza da interação de longo alcance e seu carácter tensorial. A baixas energias o parâmetro de mistura é independente da forma do potencial e serve como um norteador para obtenção de interações  $NN$  mais realísticas.

A característica tensorial da interação  $NN$  é importante no estudo das propriedades microscópicas de sistema de poucos corpos tal como o sistema de três núcleons  $NNN$ . Resultados recentes apontam como sendo essa característica uma explicação para as diferentes energias de ligação obtidas para a energia de ligação do trítio  ${}^3H$  [11, 39, 40, 38]. Se usarmos como parâmetro a probabilidade de ondas  $D$ ,  $P_D$ , para o potencial  $NN$  e os

resultados obtidos para energia de ligação do trítio por diferentes potenciais temos a Tabela 2.4. Na Tabela 2.4 apresentamos os resultados obtidos para as principais propriedades do dêuteron e para a energia de ligação do  ${}^3\text{H}$  obtidos usando os mais recentes potenciais núcleon-núcleon [7]. Os potenciais apresentados na Tabela 2.4 CD-Bonn, Nijmegen I e II, Reid93 e Argonne- $V_{18}$  são considerados como apresentando os mesmos valores para o deslocamento de fase para o sistema  $NN$ . A qualidade do potencial em descrever os dados experimentais em diferentes energias é representada pelo parâmetro  $\chi^2/\text{datum} \approx 1$ . Os resultados para as quantidades observáveis físicas de dois núcleons são praticamente as mesmas para todos os potenciais. Contudo os resultados encontrados para a energia de ligação do  ${}^3\text{H}$  para os potenciais locais são de aproximadamente -7.62 MeV. Esse resultado concorda com os cálculos de Friar et al. [41] que obteve  $-7.62 \pm 0.01$ , onde o fator  $\pm 0.01$  se refere aos diferentes valores obtidos por vários potenciais locais usados nos cálculos. Os resultados mostrados nessa Tabela evidenciam três aspectos relevantes: a) o valor da probabilidade de onda  $D$ ,  $P_D$ ; b) o carácter não local da interação  $NN$  e; c) o cálculo relativístico. Da tabela observamos que o valor da energia de ligação para o sistema de três núcleons aproxima-se de seu valor experimental -8.48 MeV para valores de probabilidade de ondas  $D$  mais baixos que o esperado. O potencial dependente da carga e não local, potencial CD-Bonn, apresenta  $P_D = 4.8\%$ ; os potenciais locais apresentam  $P_D \approx 5.7\%$ . O cálculo da energia de ligação do sistema de três nucleons usando as equações relativísticas de Blanckendecler-Sugar apresenta a energia de ligação de 8.19 MeV. Os resultados apresentados na Tabela 2.4 revelam a importância dos elementos fora da camada de energia para descrição de sistema de três ou mais núcleons. Glöckle e Kamada[42] mostraram

que uma solução rigorosa de problemas de poucos corpos tem essencialmente as mesmas características que as apresentadas pelo sistema de três núcleons. Assim sendo, a probabilidade de onda  $D$ , que é uma quantidade que não é observada experimentalmente, mas é um indicador numérico do comportamento fora da camada de energia da intensidade do força tensorial do potencial é de grande relevância para a física de poucos núcleons.

É interessante notar no entanto que apesar dos indicativos da importância da interação tensorial não temos resultados experimentais suficientes e diretos a seu respeito. As propriedades do estado ligado de dois núcleon - o dêuteron - tais como comentadas anteriormente:  $E_d$  (energia do dêuteron),  $Q_d$  (momento de quadrupólo elétrico),  $\mu_d$  (momento magnético) e  $\eta_d$  (comportamento assintótico) são propriedades que determinam o comportamento de longo alcance da interação nuclear e são facilmente reproduzidos por potenciais com diferentes valores de  $P_D$  (entre 3% à 7%). Contudo, quando esses potenciais com valores de probabilidade nesse intervalo são utilizados em sistemas de três ou mais núcleons os valores obtidos para as observáveis físicas e as demais propriedades nucleares microscópicas são bastante variados e não representam os dados experimentais[36]. Daí a importância de medidas independentes de potencial que indiquem um comportamento de longo e médio alcance, essa medida pode ser feita através do parâmetro de mistura[1, 3].

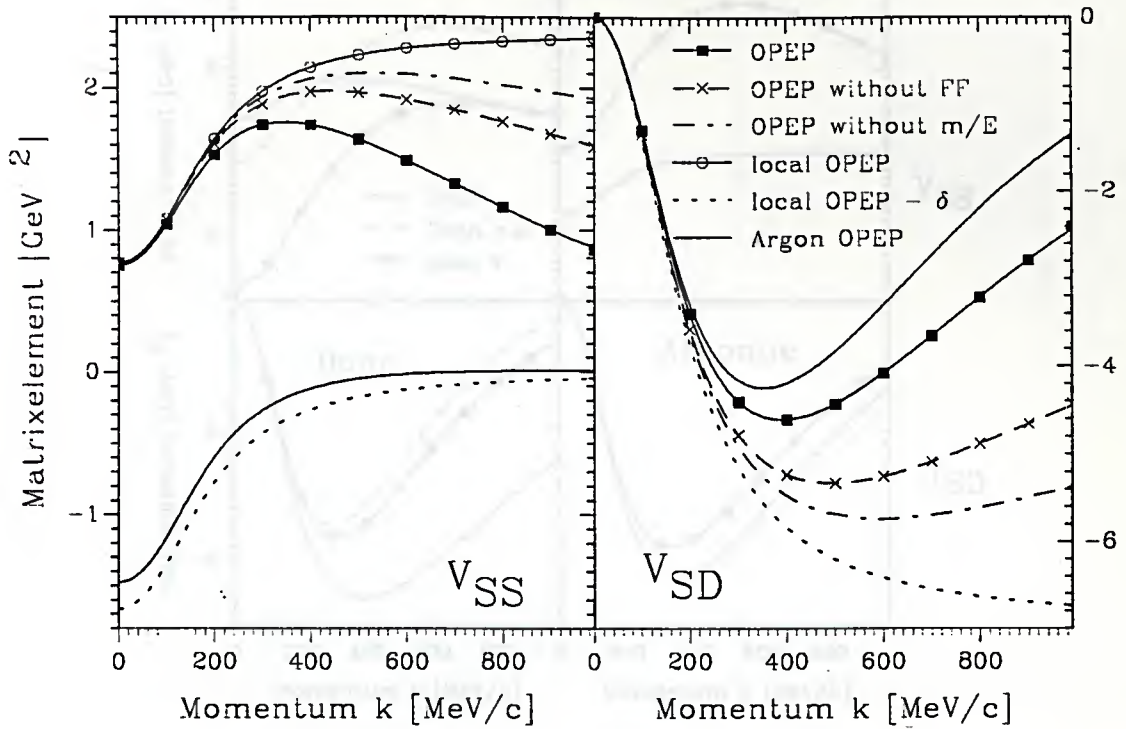


Figura 2.1: Elementos de matriz no espaço dos momentos  $\langle k'|V|k\rangle$  para as componentes de troca de um pión - OPEP - para vários potenciais modernos. Os elementos de matriz são obtidos fora da camada de energia como uma função de  $k$ , com  $k' = 95$  MeV/c mantido fixo. A parte esquerda da figura representa o comportamento das ondas parciais no canal  ${}^3S_1$ - ${}^3S_1$ . No lado direito da figura mostra o comportamento da componente tensorial do potencial no canal  ${}^3S_1$ - ${}^3D_1$ , onde  $k$  refere-se ao momento no canal  ${}^3D_1$ . Resultados extraídos da Ref.[36].

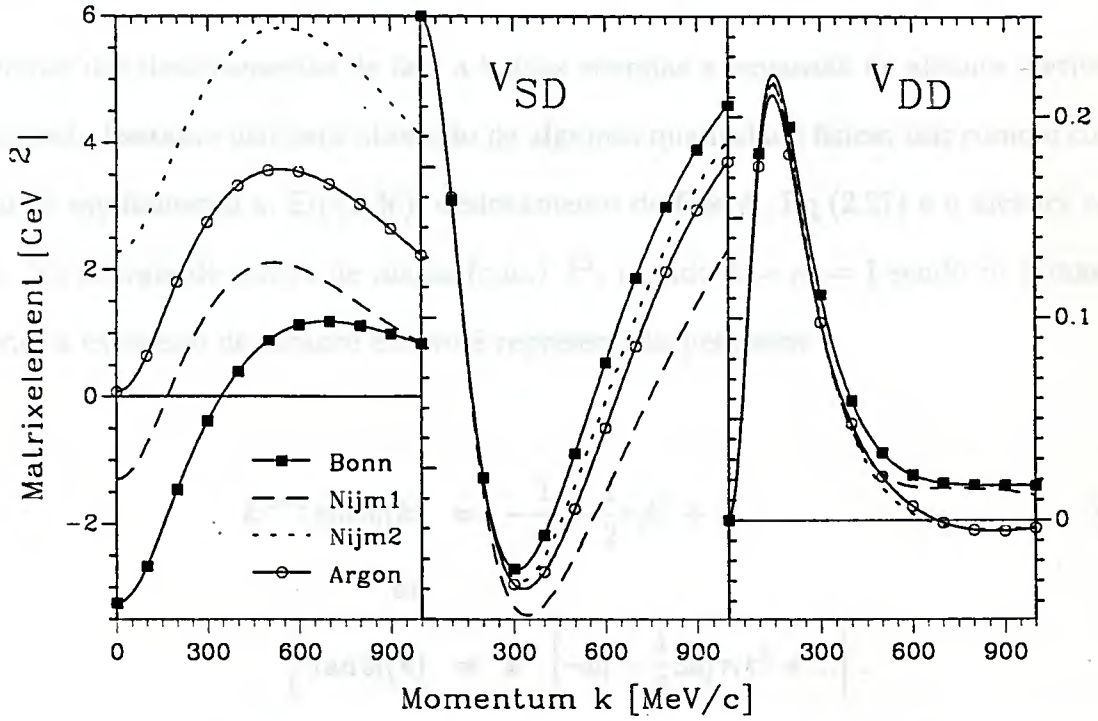


Figura 2.3: Elementos de matriz para vários potenciais  $NN$  realísticos no espaço dos momentos para os canais  ${}^3S_1$ - ${}^3S_1$ ,  ${}^3S_1$ - ${}^3D_1$  e  ${}^3D_1$ - ${}^3D_1$ . Os elementos de matriz são definidos na Fig. 2.1. Resultados extraídos da Ref.[36].

### 2.4.1 Comportamento de Longo Alcance e os Parâmetros de Mistura

Na análise dos deslocamentos de fase a baixas energias a expansão de alcance efetivo tem se mostrado bastante útil para obtenção de algumas quantidades físicas tais como o comprimento de espalhamento  $a$ , Eq.(2.36), deslocamento de fase  $\delta_l$ , Eq.(2.27) e o alcance efetivo  $r_0$  [9]. Na energia de centro de massa (c.m.)  $k^2$ , usando  $\hbar = m = 1$  sendo  $m$  a massa do núcleon, a expansão de alcance efetivo é representada pela série

$$k^{2l+1} \cot \delta_l(k) = -\frac{1}{a_l} + \frac{1}{2}r_l k^2 + \dots, \quad (2.37)$$

ou

$$\frac{1}{k} \tan \delta_l(k) = k^{2l} \left[ -a_l - \frac{1}{2}3a_l^2 r_l k^2 + \dots \right].$$

Os parâmetros  $a_l$  e  $r_l$  na Eq.(2.37) são determinados por propriedades médias do potencial e portanto são independentes da forma detalhada do potencial, por essa razão chamamos a Eq.(2.37) “independente da forma” [1]. Na análise do espalhamento em ondas acopladas, por exemplo  ${}^3S_1$ - ${}^3D_1$ , tal como representado pela Eq.(2.25), necessitamos do deslocamento de fase e do parâmetro de mistura para uma análise completa dos resultados. O parâmetro de mistura é extremamente importante pois supõe-se que essa quantidade carregue a informação sobre a força tensorial da interação núcleon-núcleon [1, 38]. Tem sido conjecturado[43, 44] há mais de três décadas que o conhecimento das principais observáveis do sistema núcleon-núcleon em baixas energias tais como: energia de ligação do dêuteron, comprimento de espalhamento, o comportamento assintótico da razão entre os

estados  $D$  e  $S$  - conhecido como parâmetro de normalização  $\eta_d$ , Eq.(2.35)- e a troca de méson a longa distância (principalmente o pión) seria suficiente para determinar o comportamento do parâmetro de mistura em baixas energias. Contudo, apesar de muitos trabalhos reafirmarem esse comportamento, uma previsão teórica para o parâmetro de mistura dentro desse contexto só foi apresentada recentemente [1, 3].

Existem duas formulações usuais para obtenção do parâmetro de mistura: a formulação de Stapp-Ypsilantis [45], representada por  $\epsilon_1$ , e a formulação de Blatt-Biedenharn [2], representada por  $\epsilon_{BB}$ . A formulação de Blatt-Biedenharn é baseada na parametrização onde a matriz- $S$ , e portanto também a matriz- $K$  é diagonalizada por uma matriz ortogonal real

$$O = \begin{pmatrix} \cos(\epsilon_j) & -\sin(\epsilon_j) \\ \sin(\epsilon_j) & \cos(\epsilon_j) \end{pmatrix}, \quad (2.38)$$

onde a matriz- $S$  ou  $K$  ( $2 \times 2$ ) são obtidas por  $S = OS_{diag}O^{-1}$  e  $K = OK_{diag}O^{-1}$ , respectivamente. Nessa parametrização autovalores definem as auto-fases  $\delta_{j-1}$  e  $\delta_{j+1}$ . Para baixos valores de energia temos os seguintes comportamentos

$$\delta_{j-1} \sim k^{2j-1}, \quad \delta_{j+1} \sim k^{2j+3} \quad \text{e} \quad \epsilon_j \sim k^2. \quad (2.39)$$

Para  $j > 1$  e baixos valores de  $k$  o parâmetro de mistura é significativo mesmo quando as fases são praticamente zero. Apesar desse aspecto as propriedades analíticas das auto-fases são mais facilmente tratáveis nessa formulação que na formulação de Stapp-Ypsilantis. A formulação de Stapp-Ypsilantes se baseia na parametrização da matriz- $S$  em termo do chamado deslocamento nuclear barra - "nuclear-bar phase shift"  $\bar{\delta}$  - e  $\bar{\epsilon}$  tal que

$$S = \begin{pmatrix} e^{i\bar{\delta}_{j-1}} & 0 \\ 0 & e^{i\bar{\delta}_{j+1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(2\bar{\epsilon}_j) & i \sin(2\bar{\epsilon}_j) \\ i \sin(2\bar{\epsilon}_j) & \cos(2\bar{\epsilon}_j) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\bar{\delta}_{j-1}} & 0 \\ 0 & e^{i\bar{\delta}_{j+1}} \end{pmatrix} \quad (2.40)$$

A vantagem dessa parametrização é que o comportamento do parâmetro de mistura-barra, em baixas energias é “agradável”:

$$\bar{\delta}_{j-1} \sim k^{2j-1}, \quad \bar{\delta}_{j+1} \sim k^{2j+3} \quad e \quad \bar{\epsilon}_j \sim k^{2j+1}. \quad (2.41)$$

Uma desvantagem para essa parametrização está em suas propriedades analíticas no setor abaixo de  $E = k^2 = 0$ . Devido suas propriedades de analiticidade a parametrização a parametrização de Stapp-Ypsilantis é mais utilizada na análise de deslocamentos de fase dos dados experimentais enquanto que a parametrização de Blatt-Biedenharn é mais utilizada para análises teóricas. No restante desta seção usaremos a seguinte notação para os parâmetros de mistura

$$\epsilon_{BB} = \epsilon_j, \quad \text{Blatt - Biedenharn} \quad (2.42)$$

$$\epsilon_1 = \bar{\epsilon}_j. \quad \text{Stapp - Ypsilantis} \quad (2.43)$$

Consideremos a forma funcional dada para o parâmetro  $\epsilon_{BB}$  em termos da matriz- $K$

$$\frac{\tan(2\epsilon_{BB})}{2k^2} = \frac{\widehat{K}_{02}/k^2}{\widehat{K}_{00} - \widehat{K}_{22}}, \quad (2.44)$$

onde estamos usando a notação  $\widehat{K}_{ll'} \equiv K_{ll'}(k^2)$  e aqui  $K_{ll'}(k^2) \equiv K_{ll'}(k, k, k^2)$  representa os elementos na camada de energia da matriz- $K$ , no espalhamento  $NN$  e no canal  $ll'$ . Recentemente [1], foi mostrado que o parâmetro de mistura dado pela Eq.(2.44), pode ser representado em baixas energias, através de parâmetros básicos do sistema  $NN$  que indicam a importância de uma interação tensorial para o sistema [1]. Em outro trabalho [3] mostrou-se a equivalência entre essa expansão e os parâmetros de mistura  $\epsilon_1$  e  $\epsilon_{BB}$  (ver Figs. 2.6 e 2.7).

A expansão para a Eq.(2.44) é obtida considerando-se os seguintes limites

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{\tan(2\epsilon_{BB})}{2k^2} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\widehat{K}_{02}/k^2}{\widehat{K}_{00} - \widehat{K}_{22}} \equiv \frac{a_{02}}{a_t}, \quad (2.45)$$

e

$$\lim_{k \rightarrow i\alpha} \frac{\tan(2\epsilon_{BB})}{2k^2} = \lim_{k \rightarrow i\alpha} \frac{\widehat{K}_{02}/k^2}{\widehat{K}_{00} - \widehat{K}_{22}} \simeq \frac{\eta_d}{\alpha^2}, \quad (2.46)$$

$a_t$  é o comprimento de espalhamento tripleto para o canal  $l' = (00)$  em unidades de fm,  $a_{02}$  é o comprimento de espalhamento para o canal  $l' = (02)$  em unidades de fm<sup>3</sup> e  $\alpha^2$  é a energia de ligação do dêuteron em unidades de fm<sup>2</sup>. Observe que a Eq.(2.46) não apresenta uma igualdade explícita. Isso se deve ao fato de que temos trocado a relação exata esperada para  $-\eta_d = \lim_{k \rightarrow i\alpha} \widehat{K}_{02}/\widehat{K}_{00}$  por  $\lim_{k \rightarrow i\alpha} \widehat{K}_{02}/(\widehat{K}_{00} - \widehat{K}_{22}) = -\eta_d$ . O erro associado a essa troca é da ordem de 0.1%. Portanto, para o propósito aqui estabelecido, vamos considerar a Eq.(2.46) como sendo exata.

Consideremos uma função  $B(k^2)$ , tal que

$$B(k^2) = -\frac{\eta_d}{\alpha^2} + \frac{\widehat{K}_{02}/k^2}{\widehat{K}_{00} - \widehat{K}_{22}}, \quad (2.47)$$

com os seguintes limites

$$B(-\alpha^2) = 0, \quad (2.48)$$

e

$$B(0) = \frac{a_{02}}{a_t} - \frac{\eta_d}{\alpha^2}. \quad (2.49)$$

Por meio de propriedades da analiticidade da matriz- $K$  de espalhamento e conseqüentemente da função  $B(k^2)$ . Podemos reescrever essa função em termos de expansão em série de Taylor

$$B(k) = \frac{k + \alpha^2}{k^2 + m_\pi^2/4} [c_1 + c_2(k^2 + \alpha^2) + \dots]. \quad (2.50)$$

Para energias muito-baixas o termo  $c_1$  é predominante, assim fazendo  $c_2 = 0$ , seu valor é dado por

$$c_1 \simeq \frac{m_\pi^2}{4\alpha^2} B(0) = \frac{m_\pi^2}{4\alpha^2} \left( \frac{a_{02}}{a_t} - \frac{\eta_d}{\alpha^2} \right). \quad (2.51)$$

Para energias mais altas tanto  $c_1$  e  $c_2$  contribuem para a expansão da Eq.(2.50). Das Eqs.(2.44, 2.47 e 2.50) nós obtemos, para o parâmetro de mistura  $\epsilon_{BB}$ ,

$$\frac{\tan(2\epsilon_{BB})}{2k^2} = \frac{\eta_d}{\alpha^2} + \frac{k + \alpha^2}{k^2 + m_\pi^2/4} [c_1 + c_2(k^2 + \alpha^2) + \dots]. \quad (2.52)$$

Essa equação, Eq.(2.52), reduz-se em baixas energias para

$$\frac{\tan(2\epsilon_{BB})}{2k^2} = \frac{\eta_d}{\alpha^2} + \frac{m_\pi^2}{4\alpha^2} \left( \frac{a_{02}}{a_t} - \frac{\eta_d}{\alpha^2} \right) \frac{k + \alpha^2}{k^2 + m_\pi^2/4}. \quad (2.53)$$

Assim a partir de considerações físicas fundamentais do sistema  $NN$  podemos ter informações do comportamento da interação de dois núcleons de longo alcance. Essa interação, representada por interações fundamentais pela troca de um pión -OPE, são responsáveis pela força tensorial no sistema. Os parâmetros básicos que indicam a intensidade da força tensorial são  $\eta_d$  e  $a_{02}$ . Reproduzimos aqui os resultados apresentados na Ref. [1] nas figuras 2.4 e 2.5. O valor de  $B(0)$  na Eq.(2.49) é particularmente interessante pois

ele essencialmente determina o comportamento em baixas energias de  $\tan(2\epsilon_{BB})/2$  dada pela Eq.(2.52). O valor de  $B(0)$  pode ser explicitamente obtido através do comportamento de longo alcance da força tensorial e das observáveis, na camada de energia do sistema NN a baixas energias. A aproximação para a quantidade  $B(0)$  pode ser obtida através da seguinte expressão

$$\begin{aligned} \frac{\widehat{K}_{02}}{\widehat{K}_{02}k^2} &= \\ &= \frac{V_{02}(k, k)}{\widehat{K}_{00}k^2} + \frac{2}{\pi} \mathcal{P} \int_0^\infty \frac{dq q^2 K_{00}(k, q; k^2) V_{02}(q, k)}{\widehat{K}_{00}k^2(k^2 - q^2)} + \frac{\langle k | K_{02} G_0 V_{22} | k \rangle}{\widehat{K}_{00}k^2}, \end{aligned} \quad (2.54)$$

onde  $\mathcal{P}$  representa o valor principal da integral. A Eq.(2.54) foi obtida dividindo-se a equação de Lippmann-Schwinger, na camada de energia para  $K_{02}$ , por  $k^2 \widehat{K}_{00}$ . Podemos obter uma aproximação para  $B(0)$  calculando a Eq.(2.54) nos pontos  $k = i\alpha$  e  $k = 0$ , respectivamente. Subtraindo o valor da Eq.(2.54) no ponto  $k = i\alpha$ , pelo valor da mesma equação no ponto  $k = 0$ , teremos

$$B(0) \simeq \frac{1}{a_t} \lim_{k \rightarrow 0} \left( \frac{V_{02}(k, k)}{k^2} \right) - \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{K_{00}(0, q; 0)}{a_t(\alpha^2 + q^2)} \lim_{k \rightarrow 0} \left( \frac{V_{02}(k, k)}{k^2} \right). \quad (2.55)$$

Nessa equação  $K_{00}(0, q; 0)$  representa os elementos de matriz- $K$  "half-off-shell" e  $V_{02}(q, k)$  são os elementos do potencial tensorial. Na Eq.(2.55) para baixos valores do momento  $q$  o potencial tensorial  $V_{02}(q, k)$  e os elementos da matriz- $K$  dominam a integral devido aos fatores de  $q^2$  existentes no denominador para altos valores de  $q$ . A função

$$g(q) \equiv \frac{K(0, q; 0)}{a_t}, \quad (2.56)$$

tem caracter universal pois independe do modelo de potencial utilizado[46, 47] e qualquer razoável aproximação para essa quantidade na Eq.(2.55) resulta em um valor com erro

menor que 1%. A quantidade  $B(0)$  é razoavelmente independente da forma específica do potencial e pode ser encontrada utilizando apenas o comportamento de longo alcance da interação  $NN$ . Potenciais que não possuem o comportamento de longo alcance de troca de um pión, como o potencial tensorial separável de Yamaguchi[48] e potenciais do tipo poço quadrado, reproduzem de forma conveniente os valores da energia de ligação do dêuteron e do parâmetro  $\eta_d$ , porém apresenta valores de  $B(0) \simeq 0 \text{ fm}^2$ . Assim esses potenciais conduzem a uma descrição errônea dos parâmetros de mistura a baixas energias. O comportamento de longo alcance da força nuclear, a troca de um pión, é essencial para a reprodução dos parâmetros de mistura em baixas energias. O último termo da Eq.(2.53), onde  $B(0)$  é representado pela Eq.(2.49), parametriza o efeito da troca de um pión do potencial tensorial para o sistema  $NN$ . Esse termo é fundamental para reprodução dos valores corretos dos parâmetros de mistura em baixas energias. A aproximação dada pela Eq.(2.53) reproduz com precisão os valores dos parâmetros de mistura para o potencial de Reid[23, 24] e Bonn[10], que representa a troca de um bóson, em energias do referencial de laboratório de até 25 MeV. Em altas energias desvios são esperados para os valores dos parâmetros de mistura já que nesse contexto os detalhes de médio e curto alcance da força nuclear são importantes. Assim, como vários potenciais derivados da teoria de troca de mésons são parametrizados, em baixas energias, utilizando-se as observáveis físicas de baixas energias eles apresentarão os mesmos valores para os parâmetros de mistura em energias de até 25 MeV. Como esses potenciais apresentam comportamentos diferentes em médio e curto alcance, em mais altas energias os parâmetros de mistura tendem a ser diferentes para esses potenciais.

Assim, a expansão dada pela Eq.(2.53) representa uma previsão, com base teórica, para os parâmetros de mistura, em baixas energias, utilizando-se os ingredientes básicos (mínimos) do sistema  $NN$ : o comportamento de longo alcance para o potencial tensorial com troca de méson, as observáveis em onda- $S$  em baixas energias e, o valor de correto de  $\eta_d$ . Portanto, a expansão dada pela Eq.(2.53) determina unicamente os valores para os parâmetros de mistura em baixas energias. Deve-se ressaltar, no entanto, que o comportamento de longo alcance para o potencial tensorial tem predominância de troca de um pión com alguma pequena mistura resultante da troca de mésons mais pesados e, por outro lado  $\eta_d$  não é unicamente conhecido[49]. Isso significa que as quantidades  $\eta_d$  de  $B(0)$  que entram na Eq.(2.53) não são unicamente conhecidas e, portanto, apresentam alguma incerteza. Em tempos recentes tivemos um grande número de publicações e atividades experimentais para medida do parâmetro  $\eta_d$ [49]. O valor mais recente, e presumivelmente mais preciso, para o parâmetro  $\eta_d=0.0256\pm 0.0004$ . Os potenciais derivados da teoria de mésons resultam em valores para  $\eta_d$  que variam entre 0.0255 á 0.0261. A tabela 2.3 apresenta os valores para alguns potenciais conhecidos.

Na Ref.[1] a constante  $B(0)$ , obtida pela Eq.(2.49), foi obtida para os potenciais de Reid de corço mole (“soft-core”) e OBE-Bonn, os valores encontrados foram:  $-0.190 \text{ fm}^2$  e  $-0.182 \text{ fm}^2$ , respectivamente. A aproximação dada pela Eq.(2.55) subestima esses valores por cerca de 3%. Esses potenciais tem o comportamento correto (fenomenológico) de longo alcance para o potencial tensorial  $V_{02}$ . Observou-se[1] que os valores de  $B(0)$  não são essencialmente alterados quando a componente de curto alcance do potencial (mésons pesados) é suprimida. Entretanto,  $B(0)$  é (fracamente) sensível ao comportamento de médio alcance

| Potenciais | $\eta_d$ |
|------------|----------|
| Paris      | 0.0261   |
| Bonn OBE-A | 0.0259   |
| Bonn OBE-B | 0.0263   |
| Nijmegen   | 0.0255   |
| Urbana     | 0.0255   |
| Reid-SC    | 0.0263   |
| Reid       | 0.0264   |

Tabela 2.3: Valores para a razão assintótica entre as ondas  $D$  e  $S$ ,  $\eta_d$  para alguns potenciais conhecidos.

do potencial tensorial. Se apenas o comportamento da troca de um pión for utilizado na Eq.(2.55) então o valor obtido para  $B(0)=-0.162 \text{ fm}^2$ . Esse valor é o valor extremo obtido quando são suprimidas as componentes de curto e médio alcance do potencial. Como a aproximação dada pela Eq.(2.55) subestima o valor de  $B(0)$  por cerca de 3% o valor exato para  $B(0)$  para um potencial tensorial com troca de um pión deve ser  $-0.170 \text{ fm}^2$ . Embora o comportamento de troca de um pión do potencial núcleon-núcleon dê uma boa descrição de  $B(0)$ , a troca de mésons mais pesados e assim o comportamento de médio alcance são necessários para reprodução precisa do valor dessa constante. O efeito da troca de mésons pesados em distâncias intermediárias sobre  $B(0)$  reduz seu valor por cerca de 0.01 á 0.02  $\text{fm}^2$ [1]. Para o propósito aqui considerado, e do exposto acima, usaremos os valores de  $B(0)$  entre  $-0.17$  até  $0.2 \text{ fm}^2$ . Nas figuras 2.6 e 2.7 apresentamos o parâmetro de mistura de Stapp-Ypsilantis  $\epsilon_1$  e parâmetro de mistura de Blatt-Biedenharn,  $\epsilon_{BB}$  em função da energia, no referencial de laboratório para energias de até 25 MeV. Os pontos experimentais foram obtidos das Refs.[38, 53, 50, 51, 52]. Os valores para  $B(0)$ ,  $\eta_d$  usados para as diferentes

| curvas | $B(0)$ | $\eta_d$ |
|--------|--------|----------|
| A      | -0.17  | 0.027    |
| B      | -0.17  | 0.025    |
| C      | -0.20  | 0.027    |
| D      | -0.20  | 0.025    |

Tabela 2.4: Valores dos parâmetros  $B(0)$  e  $\eta_d$  utilizados nas diferentes curvas apresentadas nas figuras 2.6 e 2.7.

curvas teóricas são apresentados na tabela 2.4.

A estimativa para o parâmetro de mistura  $\epsilon_{BB}$  foi transformada em  $\epsilon_1$  usando os valores experimentais dos deslocamento de fase nas ondas  $S$  e  $D$ , pelo uso das relações

$$\delta_{j+1,j} + \delta_{j-1,j} = \bar{\delta}_{j+1,j} + \bar{\delta}_{j-1,j} , \quad (2.57)$$

$$\sin(\bar{\delta}_{j-1,j} - \bar{\delta}_{j+1,j}) = \frac{\tan(2\epsilon_j)}{\tan(2\epsilon_{BB}^j)} , \quad (2.58)$$

$$\sin(\delta_{j-1,j} - \delta_{j+1,j}) = \frac{\sin(2\epsilon_j)}{\sin(2\epsilon_{BB}^j)} . \quad (2.59)$$

Nas Eqs.(2.57-2.59) usamos a notação apresentada no início dessa seção, onde  $\bar{\delta}$  e  $\epsilon_j$  representam o deslocamento de fase e parâmetro de mistura na parametrização de Stapp-Ypsilantis. O deslocamento de fase  $\delta$  e  $\epsilon_{BB}^j$  representam o deslocamento de fase e parâmetro de mistura na notação de Blatt-Biedenharn. Aqui usamos interassados no caso em  $j=1$ , onde  $\epsilon_{BB} = \epsilon_{BB}^1$ . Da Eq.(2.58) e Eq.(2.59) temos as relações entre os parâmetros de mistura de Stapp-Ypsilantis e Blatt- Biedenharn

$$\epsilon_1 = \frac{1}{2} \arctan[\tan(2\epsilon_{BB}) \sin(\bar{\delta}_{j+1,j} - \bar{\delta}_{j-1,j})] , \quad (2.60)$$

ou

$$\epsilon_1 = \frac{1}{2} \arcsin[\sin(2\epsilon_{BB}) \sin(\delta_{j-1,j} - \delta_{j+1,j})]. \quad (2.61)$$

Os resultados apresentados na figura 2.6 foram obtidos utilizando-se os valores experimentais dos deslocamentos de fase  $\bar{\delta}$ , para as ondas  $S$  e  $D$  e a aproximação dada pela Eq.(2.53) para  $\epsilon_{BB}$ . Observa-se das figuras que para energias entre 10 e 25 MeV os valores numéricos para  $\epsilon_1$  e  $\epsilon_{BB}$  são aproximadamente iguais. Entretanto, para os extremos de alta energias e baixas energias, nesse contexto, eles são bastante diferentes. Das figuras 2.6 e 2.7 observa-se que as determinações do parâmetro de mistura realizadas por Stoks et. al.[53], em várias energias, e Henneck[38], em energia de 25 MeV no referencial de laboratório, estão de acordo com a teórica[1, 3]. Como sabemos o conhecimento do parâmetro de mistura pode dar-nos, em princípio, o valor de  $\eta_d$ . Contudo, não é fácil obtermos o valor de  $\eta_d$  dos resultados apresentados nas figuras 2.6 e 2.7. Para os valores determinados por Stoks[53], em experimentos realizados em várias energias, o valor de  $\eta_d$  parece estar entre 0.026 e 0.027 em energias de 1 a 5 MeV. Para as energias de 10 à 25 MeV as determinações de Stoks e Henneck parecem sugerir um valor de  $\eta_d$  de 0.025 à 0.026. Observamos também da figura que as determinações para o parâmetros de mistura em experimentos realizados em uma única energia[50, 51, 52] apresentam um valor muito baixo para os parâmetros de mistura[3]. As determinações do parâmetro de mistura apresentadas nas Refs.[51, 52] são determinações realizadas em uma única energia e/ou em experimentos únicos. Esses valores são claramente inadequados.

A constante  $B(0)$  é determinada principalmente pelo comportamento de longo alcance do potencial tensorial dominado principalmente pela troca de um pión. Assim parece claro

que algumas determinações experimentais, em energias únicas e baixas energias, para os parâmetros de mistura são inconsistentes como o comportamento de longo alcance dos potenciais mais recentes derivados da teoria de troca de mésons e do valor experimental considerado nesse trabalho,  $\eta_d = 0.026 \pm 0.001$ . Para comportar essas determinações dos parâmetros de misturas teríamos de utilizar um valor para  $\eta_d$  menor que 0.025.

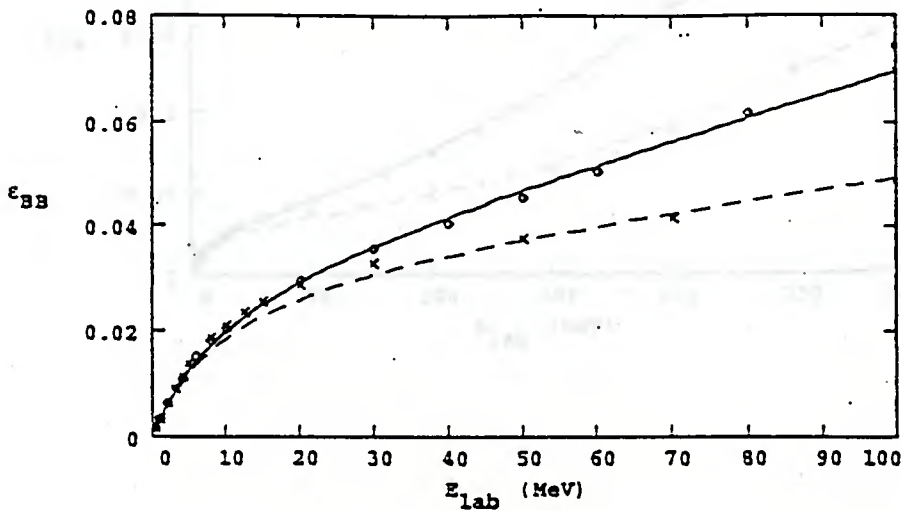


Figura 2.4: Resultados calculados numericamente para o parâmetro de mistura de Blatt-Biedenharn apresentados em radianos para o potencial de Reid-Pieper [24] ( $\diamond$ ) e para o potencial de Bonn [10] ( $\times$ ). Os resultados foram obtidos utilizando-se a expansão dada pela Eq.(2.52), linha contínua e linha pontilhada, representam os valores dado pela expansão para o potencial de Reid-Peiper ( $c_1 = -0.458 \text{ fm}^2$ ) e Bonn ( $c_1 = -0.482 \text{ fm}^2$  e  $c_2 = 0$ ), respectivamente.

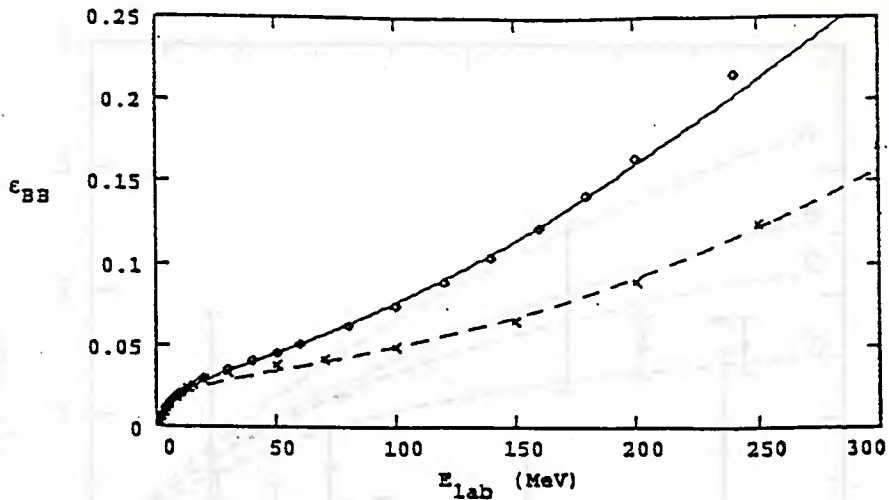


Figura 2.5: Resultados para o parâmetro de mistura de Blatt-Biedenharn, conforme dado na figura 2.4. Nessa figura temos: o potencial de Pieper-Reid para  $c_1 = -0.468 \text{ fm}^2$  e  $c_2 = 0.014 \text{ fm}^4$  para o potencial de Bonn temos  $c_1 = -0.492 \text{ fm}^2$  e  $c_2 = 0.008 \text{ fm}^4$ . A figura se estende até  $E_{lab} = 300 \text{ MeV}$ .

Figura 2.6: Resultados obtidos para o parâmetro de mistura de Blatt-Biedenharn  $\epsilon_{BB}$ , figura 2.7 e para o parâmetro de mistura dado por Stapp-Ypsilantis  $\epsilon_1$ , figura 2.8, como função da energia  $E_{lab}$ . Os valores experimentais foram obtidos das referências [24] ( $\times$ ), [23] ( $\square$ ), [20] ( $\times$ ), [21] ( $\Delta$ ) e [22] ( $\circ$ ). As curvas teóricas foram obtidas usando-se os seguintes valores para  $\eta_1$  e  $B(0)$ : A:  $\eta_1 = 0.027$ ,  $B(0) = -0.17$ ; B:  $\eta_1 = 0.025$ ,  $B(0) = -0.17$ ; C:  $\eta_1 = 0.027$ ,  $B(0) = -0.20$ ; D:  $\eta_1 = 0.025$ ,  $B(0) = -0.20$ . A unidade de  $B(0)$  é dada em  $\text{fm}^2$  e  $\eta_1$  é adimensional. Resultados extraídos da Ref. [3].

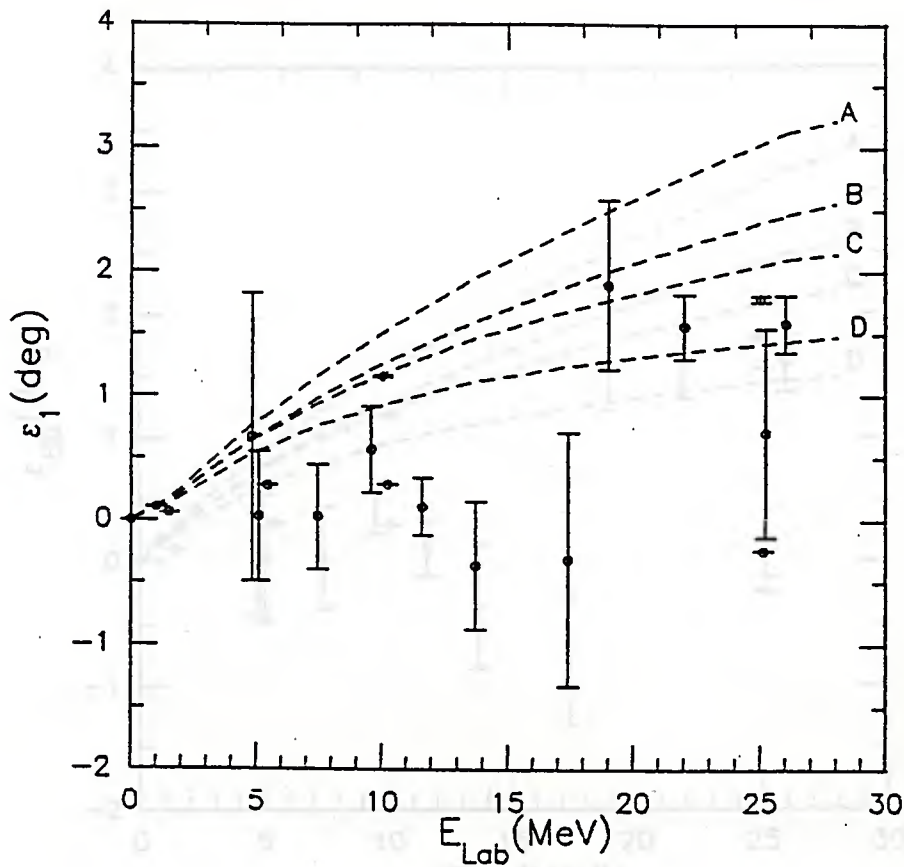


Figura 2.6: Resultados obtidos para o parâmetro de mistura de Blatt-Biedenharn  $\epsilon_{BB}$ , figura 2.7 e para o parâmetro de mistura dado por Stapp-Ypsilantis  $\epsilon_1$ , figura 2.6, como função da energia  $E_{lab}$ . Os valores experimentais foram obtidos das referências refs.[38] ( $\times$ ),[53]( $\square$ ),[50]( $\times$ ),[51] ( $\Delta$ ) e [52]( $\circ$ ). As curvas teóricas foram obtidas usando-se os seguintes valores para  $\eta_d$  e  $B(0)$ ; A:  $\eta_d = 0.027$ ,  $B(0) = -0.17$ ; B:  $\eta_d = 0.025$ ,  $B(0) = -0.17$ ; C:  $\eta_d = 0.027$ ,  $B(0) = -0.20$  e D:  $\eta_d = 0.025$ ,  $B(0) = -0.20$ . A unidade de  $B(0)$  é dada em  $\text{fm}^2$  e  $\eta_d$  é adimensional. Resultados extraídos da Ref.[3]

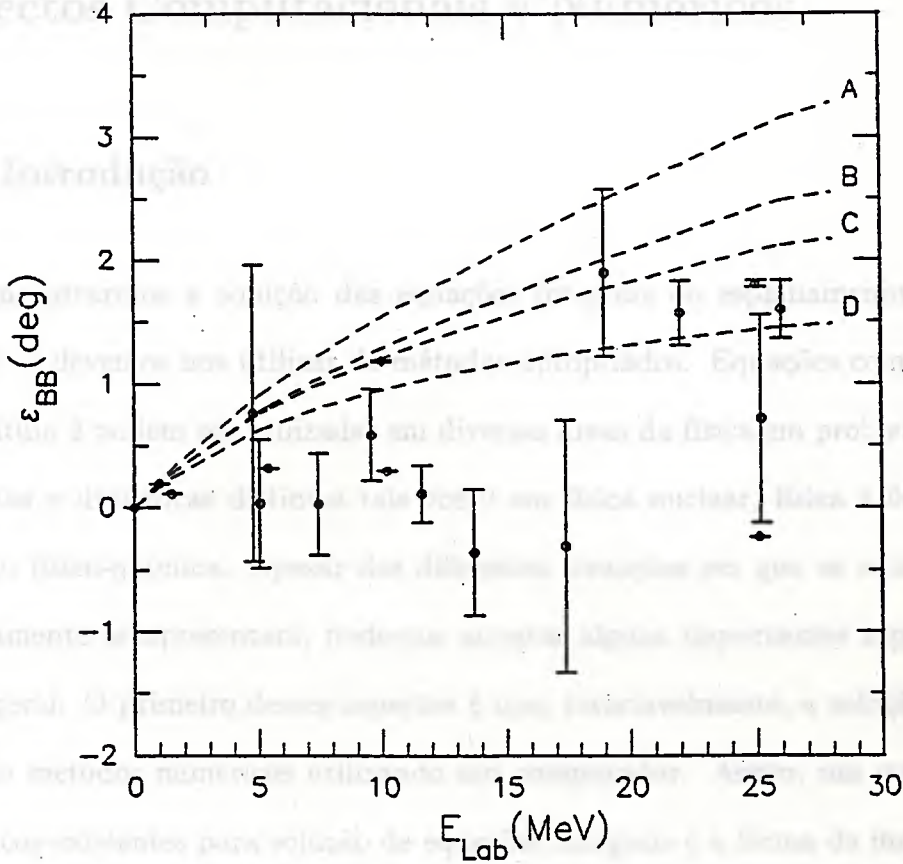


Figura 2.7: Parâmetro de Mistura  $\epsilon_{BB}$ . Os pontos experimentais e linhas A, B, e C, foram obtidos conforme descrição feita na Figura 2.6. Resultados extraídos da Ref.[3].

## Capítulo 3

# Aspectos Computacionais e Numéricos

### 3.1 Introdução

Para encontrarmos a solução das equações integrais de espalhamento apresentadas no capítulo 2 devemos nos utilizar de métodos apropriados. Equações como as apresentadas no capítulo 2 podem ser utilizadas em diversas áreas da física em problemas que envolvem contextos e dinâmicas distintos tais como em física nuclear, física atômica, física molecular ou físico-química. Apesar das diferentes situações em que as equações integrais de espalhamento se apresentam, podemos apontar alguns importantes aspectos que têm alcance geral. O primeiro desses aspectos é que, invariavelmente, a solução será obtida por meio de métodos numéricos utilizando um computador. Assim, um estudo dos métodos numéricos existentes para solução de equações integrais e a forma de implementação computacional desses métodos é de grande relevância. O segundo aspecto de alcance geral é que os problemas de espalhamento envolvem equações integrais de forma semelhante às chamadas equações integrais de Fredholm. Deste modo, aspectos teóricos gerais estabelecidos sobre as equações do tipo Fredholm nos auxiliam na obtenção da solução do problema em questão. Um terceiro aspecto a ser observado na solução das equações integrais são os

elementos que trazem complexidade na busca da solução. Esses elementos são peculiares a cada problema. Contudo, podemos apresentar três pontos que devem ser observados na solução das equações integrais e que podem ser elementos complicadores:

- a prescrição  $i\epsilon$ ;
- os problemas multicanais; e
- forma do potencial.

Logicamente, esses pontos não necessariamente se apresentam de forma isolada em problemas reais. Um problema multicanal pode envolver, por exemplo, um potencial com comportamento singular a curtas distâncias. Porém a análise isolada desses aspectos complicadores pode dar-nos subsídios para solução de problemas realísticos.

Devido a prescrição  $i\epsilon$  o kernel da Eq.(2.23) será complexo e portanto o problema envolve álgebra complexa e um cuidado especial deve ser tomado. Nesse caso, se esse aspecto parecer um inconveniente, a escolha de uma matriz de auxiliar de espalhamento pode ser uma boa estratégia. Os problemas multicanais são problemas que envolvem vários estados de espalhamento resultando em diferentes possíveis estados finais. Nesse caso o problema pode ser tratado pela Eq. de Lippmann-Schwinger, Eq.(2.23), onde apenas um dos canais será tratado. Assim como o problema envolve vários canais teremos um conjunto de equações, acopladas, a serem tratados. Esse fato envolve complicações adicionais sobre os métodos numéricos e computacionais utilizados na solução já que que a dimensão do conjunto de equações a serem resolvidos pode ser bastante elevado.

A forma do potencial que entra na Eq.(2.23) também é um elemento que pode definir a estratégia de solução a ser utilizada. Para potenciais “bem condicionados”, de curto-alcance, a solução pode ser encontrada, para problemas em um único canal, de forma relativamente simples. Contudo, potenciais do tipo Coulombiano, por exemplo, não podem seguir os métodos de solução convencionais. O mesmo acontece com potenciais do tipo corço mole (“soft core”) e corço duro (“hard core”). A forma desses potenciais pode fazer com que o kernel da equação integral seja não-compacto o que torna a solução numérica intratável. Problemas desse tipo advêm do comportamento do potencial a curta e longa distância. Um potencial do tipo Coulombiano apresenta divergência quando  $r = 0$ , curtas distâncias ou altos valores de momento, o mesmo acontecendo com um potencial do tipo Yukawa. Assim, o método de solução de problemas desse tipo deverá levar em consideração algum mecanismo de renormalização do problema, principalmente em potenciais atrativos, a fim de se obter soluções físicas adequadas.

### 3.2 Alguns Conceitos Fundamentais

Os princípios básicos para a solução das equações integrais de espalhamento está na Teoria de Fredholm. Nessa teoria classificamos a integral da forma

$$g(t) = \int_a^b K(t, s)f(s)ds, \quad (3.1)$$

como uma equação não-homogênea de Fredholm do primeiro tipo. Na Eq.(3.1) a função  $f(t)$  é uma função que queremos conhecer e  $g(t)$  é uma função conhecida.

Uma equação não-homogênea de Fredholm do segundo tipo pode ser representada generica-

mente por

$$f(t) = g(t) + \lambda \int_a^b K(t, s) f(s) ds. \quad (3.2)$$

Nas Eqs.(3.1 e 3.2) o termo  $K(t, s)$  é conhecido como núcleo (“kernel”) da equação integral e sobre esse núcleo existem restrições, que trataremos adiante, que nos auxiliam na solução da equação integral.

Podemos reescrever as Eqs.(3.1 e 3.2) em uma forma mais convencionalmente usada para cálculos computacionais. Na notação matricial podemos escrever a Eq.(3.1) como

$$\mathbf{Kf} = \mathbf{g}, \quad (3.3)$$

$$\mathbf{f} = \mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{g}. \quad (3.4)$$

Analogamente a Eq.(3.2) pode ser escrita matricialmente como

$$\mathbf{f} = \mathbf{g} + \lambda \mathbf{Kf}, \quad (3.5)$$

$$\mathbf{f} = (\mathbf{K} - \sigma \mathbf{1})^{-1} \cdot \mathbf{g}', \quad (3.6)$$

onde  $\sigma = 1/\lambda$  e  $\mathbf{g}' = -(1/\lambda)\mathbf{g}$ . Se  $\mathbf{g} = \mathbf{0}$  então a Eq.(3.2) é chamada de equação homogênea de Fredholm do segundo tipo

$$f(t) = \lambda \int_a^b K(t, s) f(s) ds, \quad (3.7)$$

ou

$$\mathbf{f} = \lambda \mathbf{K} \mathbf{f}. \quad (3.8)$$

A forma da Eq.(3.8) é conhecida no formalismo da mecânica quântica e se apresenta como uma equação de autovalores. Na verdade, se o núcleo  $K(t, s)$  é compacto ou de quadrado integrável então podemos ter um infinito conjunto  $\{\lambda_n\}$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$  de autovalores para a equação homogênea de Fredholm do segundo tipo. Os autovalores da Eq.(3.8) são reais quando o núcleo da equação integral é simétrico, em mecânica quântica isso é satisfeito se matriz  $\mathbf{K}$  for hermitiana, ou seja

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}^\dagger. \quad (3.9)$$

Fato importante a ser observado é que os autovalores que satisfazem a Eq.(3.8) não podem entrar na solução da equação de Fredholm não-homogênea, Eq.(3.6), já que para esses autovalores o operador  $(\mathbf{K} - \sigma \mathbf{1})^{-1}$  é singular. A esse fato dá-se o nome de alternativa de Fredholm.

A equação de Lippmann-Schwinger, Eq.(2.26), seção 2.4, pode ser escrita como por

$$T_l(p, p'; k^2) = V_l(p, p') + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty q^2 dq \frac{V_l(p, q) T_l(q, p'; k^2)}{(k^2 - q^2 + i0)}, \quad (3.10)$$

onde  $K(p, q'; k) = (2/\pi)q'^2 V_l(p, q') G_0(q'; k)$  é o núcleo dessa equação integral e  $G_0(q'; k^2)$  é a função de Green livre, ver seção 2.2, e  $V(p, q')$  é o potencial da interação. A Eq.(3.10) é claramente uma equação não-homogênea de Fredholm do segundo tipo da forma da Eq.(3.2). Deste modo, toda a teoria que se aplica a Eq.(3.2) se aplica a Eq.(3.10).

Analogamente ao que fizemos para obter uma equação homogênea de Fredholm do segundo tipo, Eq.(3.7 ou 3.8) podemos obter a forma homogênea da equação de Lippmann-Schwinger, Eq.(3.10). A equação integral para o estado ligado de dois núcleons, pode ser escrita por

$$|\psi\rangle = G_0(k^2)V|\psi\rangle. \quad (3.11)$$

A Eq.(3.11) pode ser obtida diretamente da Eq.(2.2), seção 2.2, onde  $|\psi\rangle$  é solução da equação de Schrödinger. A representação da Eq.(3.11) no espaço dos momentos, usando a representação de “bras” e “kets”, é obtida por

$$\langle \mathbf{k}|\psi\rangle = \langle \mathbf{k}|G_0(k^2)V|\psi\rangle, \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} &= \int \int \int d\mathbf{q}d\mathbf{q}'d\mathbf{q}'' \langle \mathbf{k}|\mathbf{q}\rangle \langle \mathbf{q}|G_0|\mathbf{q}'\rangle \langle \mathbf{q}'|V|\mathbf{q}''\rangle \langle \mathbf{q}''|\psi\rangle, \\ &= \int \int \int d\mathbf{q}d\mathbf{q}'d\mathbf{q}'' \delta(\mathbf{k} - \mathbf{q})\delta(\mathbf{q} - \mathbf{q}')G_0(\mathbf{q}, \mathbf{q}')V(\mathbf{q}', \mathbf{q}'')\psi(\mathbf{q}''), \\ &= G_0(q, k^2) \int d\mathbf{q}'' V(\mathbf{k}, \mathbf{q}'')\psi(\mathbf{q}''). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Depois da decomposição em ondas parciais a Eq.(3.13) fica como

$$\psi(p; k^2) = \frac{2}{\pi}(k^2 - p^2)^{-1} \int_0^\infty q''^2 dq'' V(p, q'')\psi(q'', k), \quad (3.14)$$

onde estamos usando  $E < 0$ ,  $\hbar = 2\mu = 1$  e  $\mu$  é a massa reduzida e suprimimos qualquer índice relativo aos momentos angulares.

Da observação da forma funcional das Eqs.(3.10 e 3.14) identificamos uma equação não-homogênea e uma equação homogênea de Fredholm do segundo tipo, para o espalhamento

e estado ligado de dois núcleons, respectivamente. Essa associação é útil na utilização de métodos numéricos e computacionais elaborados para solução de equações integrais de Fredholm do segundo tipo. Esses métodos podem ser aplicados, considerando-se os aspectos físicos do problema, para solução das equações de espalhamento, Eq.(3.10), e estado ligado Eq.(3.14).

### 3.3 Métodos e Estratégias de Solução

Os métodos formais de solução para as equações de espalhamento podem ser divididos em:

- métodos para a equação diferencial de Schrödinger; e
- métodos para a equação integral de Lippmann-Schwinger.

Em linhas gerais os métodos para solução da equação diferencial de Schrödinger são os algoritmos convencionais para solução de equações diferenciais. Um método que se destaca, também para solução das equações diferenciais é o uso de funções variacionais.

Por outro lado, podemos dividir os métodos de solução da equação de Lippmann-Schwinger em quatro métodos básicos:

- **método direto**; que consiste na inversão matricial da equação

$$T(k^2) = (1 - VG_0(k^2))^{-1}V.$$

- **métodos iterativos**; que consiste, basicamente, na solução da série perturbativa de Born-Neumann e, principalmente, em métodos iterativos alternativos como matriz- $\Gamma$  [28, 29].

- **métodos variacionais**; divididos basicamente em dois grupos: métodos variacionais de Schwinger e Kohn[14].

O método direto consiste na inversão matricial direta do conjunto de equações algébricas geradas pela discretização das matrizes de espalhamento. Deste modo, a equação de Lippmann-Schwinger, Eq.(3.10)

$$T(k^2) = V + VG_0^{(+)}(k^2)T(k^2), V = (1 - VG_0^{(+)}(k^2))T(k^2), \quad (3.15)$$

pode ser discretizada tal que o conjunto de equações a serem resolvidas é dada por

$$\sum_{k=1}^N M_{ki}T_{jk} = V_{ij}, \quad (3.16)$$

onde  $M_{ki}$  é dado por

$$M_{ki} = \delta_{ki} - K_{ki} \quad (3.17)$$

Na Eq.(3.17)  $K_{ki}$  representa o kernel da equação de Lippmann-Schwinger e  $\delta_{ki}$  é o delta de Kronecker:  $\delta_{ki} = 1(0)$  para  $k = i(\neq i)$ . Como é claro da Eq.(3.16) a sua solução é obtida através da inversão da matriz  $M$ . Em problemas de espalhamento a matriz  $M$  a ser invertida é complexa e a sua dimensão será dada pelo número de pontos utilizados pela discretização. Um problema que pode surgir é presença de singularidades e, em problemas multicanais, a dimensão da matriz a ser invertida pode ser razoavelmente grande o que pode acarretar perda de precisão numérica devido a inversão matricial[14]. Assim em problemas multicanais comuns em física atômica, molecular o método direto não é normalmente eficiente devido aos problemas acarretados com a inversão matricial.

A solução formal convencional de uma equação integral de Fredholm de segundo tipo é dada na forma de uma expansão da Eq.(3.5) tal que

$$f = g + Kg + K^2g + K^3g + \dots \quad (3.18)$$

A série dada pela Eq.(3.18) é conhecida como série de Born ou Neumann[8, 9]. Essa solução convencional é importante quando queremos encontrar soluções analíticas para problemas simples. Para estruturas mais complexas do núcleo da equação integral (na equação de Lippmann-Schwinger o núcleo é constituído do potencial e da função de Green) outras estratégias de solução devem ser encontradas já que, para a maioria dos potenciais realísticos em Física Nuclear e Atômica, a série de Born é não convergente. Um critério mais rigoroso sobre a convergência da série dada pela Eq.(3.18) foi apontado por Weinberg[54, 55]. O critério estabelecido por Weinberg repousa sobre o comportamento dos autovalores da homogênea, dada por Eq.(3.11), que corresponde ao kernel da equação não-homogênea de Lippmann-Schwinger. Foi observado que

$$K(E)|\psi\rangle \equiv VG_0^{(+)}(k^2)|\psi\rangle = \eta(E)|\psi\rangle, \quad (3.19)$$

onde  $\eta(E)$  é o autovalor da Eq.(3.19) que é complexo para energias acima do limiar de espalhamento e real para energias abaixo desse limiar. Weinberg mostrou que a Eq. de Lippmann-Schwinger converge, para uma dada energia, quando o núcleo da equação integral possui autovalores

$$|\eta| < 1, \quad (3.20)$$

e não-converge quando

$$|\eta| > 1. \quad (3.21)$$

Para baixas energias para a maioria dos potenciais realísticos a série dada pela Eq.(3.18) não-converge. Para altas energias a série de Born-Neumann converge, mas paradoxalmente, nesse limite os efeitos relativos a dinâmica do sistema (interação de mésons, quarks e efeitos relativísticos) tornam a solução iterativa da equação de Lippmann-Schwinger não aplicável nesse contexto físico.

Para potenciais singulares ou “quase” singulares métodos de solução mais específicos devem ser buscados que levem em consideração não somente a característica matemática da equação integral mas aspectos da dinâmica do problema físico em consideração. Seja qual for o método empregado a solução numérica e, portanto, com o auxílio do computador, é sempre empregada. Para problemas simples tais como o do espalhamento de uma partícula por um potencial em um único canal o aspecto computacional do método não é relevante tendo em vista o poder de processamento dos computadores atuais. Contudo, em problemas multicanais ou multipartículas envolvendo a Eq.(3.10), ou suas variantes como a matriz- $K$  ou matriz- $S$  apresentadas na seção anterior, a complexidade do problema obriga-nos a pensar na questão da eficiência do algoritmo utilizado para solução numérica e computacional. Assim existem uma série de algoritmos para solução das equações de espalhamento nas suas mais diversas abordagens que visam tornar a eficiência da convergência dos resultados obtidos otimizada.

Os métodos variacionais são utilizados em diversas áreas das Ciências. Em mecânica quântica, especificamente em teoria de espalhamento e estado ligado, os princípios variacionais têm sido largamente usados[56]. Os principais princípios variacionais utilizados em teoria de espalhamento são os princípios variacionais de Schwinger e Kohn. Para cada

uma desses métodos existem variantes que são conhecidas por diferentes denominações. Esse fato repousa na grande flexibilidade de se construir uma expressão variacional para as quantidades de espalhamento e estado ligado[56]. De fato, os princípios variacionais se baseiam em expressões de tal forma construídas que dado o conhecimento inicial em primeira ordem (significando um erro  $\delta Q$ ) de uma quantidade  $Q$ , o resultado obtido com o uso da expressão variacional é bom em segunda ordem (com erro  $(\delta Q)^2$ ). A idéia geral é bastante simples e pode ser apresentada de diferentes formas, apresentaremos aqui uma versão simples que consiste em expandir o núcleo da equação integral utilizando funções variacionais. Para isso consideremos um kernel dado na forma

$$O = AC^{-1}B \quad (3.22)$$

e dois conjuntos de funções  $f_i$  e  $g_j$ , de quadrado integrável, que satisfaçam as seguintes condições

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_i^N |f_i\rangle\langle f_i| = 1, \quad (3.23)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_j^N |g_j\rangle\langle g_j| = 1, \quad (3.24)$$

ou seja  $f_i$  e  $g_j$  formam um conjunto completo de funções no espaço  $L_2$  e, as Eqs.(3.23-3.24) são as chamadas relações de completeza.

Podemos escrever uma expressão para o operador (3.22) utilizando as relações de completeza acima, tal que

$$O_N = \sum_{ij}^N A |f_i\rangle\langle f_i| C^{-1} |g_j\rangle\langle g_j| B \quad (3.25)$$

onde  $D_{ij} = \langle f_i|C^{-1}|f_j\rangle$  e, portanto,

$$(D^{-1})_{ji} = \langle g_j|C|f_i\rangle. \quad (3.26)$$

De um ponto de vista prático esperamos que quando  $N$  é suficientemente grande o conjunto de funções  $f_i$  e  $g_j$  expanda uma relevante parte do espaço de Hilbert que contém o operador  $\mathcal{O}$  de tal modo a termos

$$\langle f_i | \mathcal{O} | g_j \rangle = \langle f_i | \mathcal{O}_N | g_j \rangle. \quad (3.27)$$

Deste modo podemos, em princípio, aproximar o operador dado pela Eq.(3.22) através do operador Eq.(3.25) com precisão arbitrária. Isto é bastante útil já que o resultado permite que tratemos problemas formulados num espaço de dimensão infinita (espaço de Hilbert) em um espaço de dimensão finita. Esse método ilustra o que fazemos frequentemente em mecânica quântica para passarmos de um espaço de dimensão infinita para um espaço de dimensão finita.

Nesse caso, podemos escrever a matriz- $T$  de espalhamento, nas suas diferentes formas,

$$T(k^2) = (1 - VG_0^{(+)}(k^2))^{-1}V, \quad (3.28)$$

$$= V(1 - G_0^{(+)}(k^2)V)^{-1} \quad (3.29)$$

ou equivalentemente

$$T(k^2) = V + VG^{(+)}(k^2)V \quad (3.30)$$

$$(3.31)$$

onde  $G$  é a função de Green Completa,  $G = (E - H)^{-1}$ . Já que podemos expandir o kernel dado pela Eq.(3.22) em termos da Eq.(3.25) podemos introduzir ainda um parâmetro variacional nas funções utilizadas na expansão do kernel dado pela Eq.(3.25). Assim se usarmos um tal conjunto de funções aplicados as equações dadas por Eqs.(3.29 e 3.31), podemos escrever, por exemplo

$$T_N = \sum_{ij} = V|f_i\rangle\langle f_i|(1 - G_0^{(+)}(k^2)V)^{-1}|g_j\rangle\langle g_j|, \quad (3.32)$$

onde

$$D_{ij} = \langle f_i|(1 - G_0^{(+)}(k^2)V)^{-1}|g_j\rangle, \quad (3.33)$$

e portanto

$$(D^{-1})_{ji} = \langle g_j|(1 - G_0^{(+)}(k^2)V)|f_i\rangle. \quad (3.34)$$

O resultado obtido para a Eq.(3.32) é conhecido como uma das formas do princípio variacional de Schwinger[57]. Uma outra expansão é possível obter usando a segunda equação dada por Eq.(3.29), dada por Usando a expressão alternativa para a equação de Lippmann-Schwinger dada pela Eq.(3.31), e aplicando o mesmo procedimento de expansão, onde agora as funções envolvidas na expansão são variacionais, temos

$$T_N = V + \sum_{i,j}^N V|f_i\rangle D_{ij} \langle \hat{f}_j|V \quad (3.35)$$

$$(D^{-1})_{ji} = \langle \hat{f}_i|(E - H)|f_j\rangle \quad (3.36)$$

A expansão dada pela Eq.(3.35) é uma expressão variacional conhecida como princípio variacional de Kohn[57] para o operador  $T - V$ .

Os princípios variacionais de Kohn e de Schwinger têm outras formulações que se estendem para as outras matrizes de espalhamento. Em geral a utilização dos princípios variacionais tem se destacado nas áreas de Física Atômica e Molecular, em problemas multicanais, por produzir um sistema de equações algébricas de dimensões reduzidas, em comparação com o método direto, por exemplo. Assim os métodos variacionais têm se mostrado como uma

importante método para otimizar a solução das equações de espalhamento. Recentemente, foi apresentado uma formulação para o princípio variacional de Kohn onde algumas das funções que entram na expansão da Eq.(3.22) são funções complexas[58]. Esse procedimento foi utilizado em física envolvendo potenciais repulsivos (do tipo “hard-core”) em sistemas de dois núcleons em um único canal[20] e em canais acoplados[26, 27]. Recentemente, incentivados pelos resultados obtidos em sistemas de dois núcleons em canais acoplados[26, 27] Kievsky tem aplicado o princípio variacional de Kohn complexo para solução das equações de espalhamento para sistemas envolvendo três núcleons[59] com bons resultados para deslocamentos de fase e comprimento de espalhamento com erro menor que 0.1%. Nesse trabalho Kievsky utilizou um potencial local realístico para a iteração núcleon-núcleon, incluindo a força de três corpos.

A solução numérica para a equação de Fredholm do segundo tipo é obtida pela discretização das integrais envolvidas. Esse método é chamado de método Nystron [60, 61] e consiste em transformar a integral em uma soma discreta da forma

$$\int_a^b y(x)dx = \sum_{i=1}^N w_i y(x_i), \quad (3.37)$$

onde o conjunto  $\{w_i\}$  são chamados de coeficientes de quadratura numérica e os pontos  $\{x_i\}$  são os pontos da quadratura. A discretização dada pela Eq.(3.37) pode em princípio ser realizada utilizando-se qualquer um dos métodos numéricos para solução de integrais: método do trapézio, método de Simpson ou a quadratura de Gauss-Legendre[60]. O fato relevante aqui é que os métodos numéricos de integração envolvem operações de ordem  $O(N^3)$ . Assim no estudo da eficiência dos métodos de solução devemos procurar, para

problemas mais complexos, métodos que dêem maior precisão para a relação dada pela Eq.(3.37) usando um menor número de pontos. Para esse propósito a quadratura de Gauss-Legendre se apresenta como uma alternativa eficiente tendo como única desvantagem não proporcionar um erro formal para solução numérica obtida. Esse erro deve ser obtido empiricamente aumentando-se o valor de  $N$  e observando-se a convergência obtida.

A solução numérica para a Eq.(3.2) pode ser obtida usando-se a relação dada pela Eq.(3.37) tal que

$$f(t) = g(t) + \lambda \sum_{i=1}^N w_i K(t, s_i) f(s_i) + g(t). \quad (3.38)$$

A função  $f$  nos pontos  $\{s_i\}$  são obtidos usando-se a equação

$$f(t_i) = g(t_i) + \lambda \sum_{i=1}^N w_i K(t_i, s_i) f(s_i). \quad (3.39)$$

A solução para um valor arbitrário de  $t$  é obtida usando-se a própria Eq.(3.38). Esse procedimento é geral e vale, portanto, para a equação de Lippmann-Schwinger. Observe, contudo, que a maioria das integrais apresentadas nesse capítulo têm limites de integração definidos. Na equação integral de espalhamento, Eq.(2.23), a variável de integração se estende a todo espaço dos momentos de 0 até  $\infty$ . Numericamente podemos discretizar a integral com limite superior indefinido usando transformações que mapeiem  $q$  de um espaço de 0 à  $\infty$  ( $0 < q < \infty$ ) para  $-1$  à  $1$  ( $-1 < x < 1$ ), onde a imagem dos pontos  $x=-1, 0, 1$  são  $q=0, c, \infty$ ; uma tal transformação é dada por

$$q = c \frac{1+x}{1-x}, \quad (3.40)$$

procedimento de regularização teremos uma escala que deve ser respeitada pelo parâmetro  $\Lambda$ . Das Eqs.(4.47 e 4.52) é imediato que

$$\lambda_R(\mu) = -[\mu + \Lambda_0]^{-1}. \quad (4.53)$$

Alguns aspectos físicos devem ser ressaltados:

- a) em princípio os resultados obtidos por diferentes esquemas de regularização devem ser os mesmos;
- b) os resultados obtidos para, digamos uma energia  $E_1$ , devem possibilitar o conhecimento do sistema em uma energia  $E_2$ .

Esses dois pontos se relacionam na seguinte situação: se através de um esquema de regularização obtemos um resultado físico para digamos o deslocamento de fase do sistema em uma escala de energia  $E_1$  da ordem de  $\mu$ , e por um outro esquema de regularização obtemos o deslocamento de fase para uma escala de energia  $E_2$  da ordem de  $\mu_0$ , os dois resultados obtidos estão vinculados, nessas duas escalas a escala física  $\Lambda_0$ . Esse fato pode ser representado a partir da Eq.(4.53) nas escalas de renormalização  $\mu$  e  $\mu_0$ , em tal caso teremos

$$\lambda_R(\mu) + \mu = \lambda_R(\mu_0) + \mu_0. \quad (4.54)$$

A Eq.(4.54) é conhecida como equação de fluxo ("flow equation"), representam a continuidade entre as duas escalas de renormalização e a independência do esquema de regularização. A matriz- $T$  renormalizada  $T_R(k, \lambda_R(\mu), \mu)$  pode então ser reescrita

$$T_R(k, \lambda_R(\mu), \mu) = [\lambda_R(\mu) + \mu + ik]^{-1} \quad (4.55)$$

$$= [\Lambda_0 - ik]^{-1}, \quad (4.56)$$

onde temos usado o vínculo entre  $\lambda_R(\mu)$  e  $\mu$  e a intensidade do potencial  $\Lambda_0$  obtida pela Eq.(4.53)

$$\lambda_R(\mu) + \mu = -\Lambda_0 \quad (4.57)$$

A dependência funcional da matriz- $T$  renormalizada em  $\Lambda_0$  dependerá do esquema de regularização utilizado. Isso é facilmente observado da Eq.(4.56). Se a matriz- $T$  regularizada é renormalizada para obtenção da energia de estado ligado devemos tomar o pólo da matriz- $T$  dada pela Eq.(4.56), nesse caso temos

$$\Lambda_0 - ik = 0, \quad (4.58)$$

$$E_B = -k^2 = \Lambda_0^2. \quad (4.59)$$

Uma outra possibilidade é obter a partir da Eq.(4.56) o comprimento de espalhamento  $a_s$ . Nesse caso o vínculo com essa quantidade física é dado, em  $k = 0$ , por

$$T_R(k = 0, \lambda_R(\mu), \mu) = a_s, \quad (4.60)$$

$$a_s = -\frac{1}{\Lambda_0}. \quad (4.61)$$

A Eq.(4.59) devem ser comparada a Eq.(4.20), obtida na seção 4.2 partindo de um outro formalismo mas usando o procedimento de regularização empregado nesta seção. Das Eqs.(4.59 e 4.61) observamos que  $\Lambda_0$  deve ser negativo para que tenhamos um estado ligado o que significa que o potencial tem que ser atrativo. Para o caso em que  $\Lambda_0$  seja positivo teremos pela Eq.(4.59) um estado ligado virtual e pela Eq.(4.61) um comprimento de espalhamento negativo, o que é coerente para o caso de um potencial repulsivo.

Do exposto acima verificamos que a matriz- $T$  obtida é independente de  $\mu$  e portanto ela deve também invariante em relação as transformações que levam  $\mu \rightarrow \exp(s)\mu$  que for-

mam o grupo de renormalização. Matematicamente isso significa que a derivada total de  $T_R(k, \lambda_R(\mu), \mu)$  com relação a  $\mu$  deve ser zero. Tratando o problema em termos de quantidades adimensionais podemos redefinir a constante de acoplamento por

$$g_R(\mu) = \mu \lambda_R(\mu), \quad (4.62)$$

e a derivada total de  $T_R$  em relação a  $\mu$  deve ser tal que

$$\mu \frac{d}{d\mu} T_R(k, g_R(\mu), \mu) = \quad (4.63)$$

$$= \left( \mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta(g_R) \frac{\partial}{\partial g_R} \right) T_R(k, g_R(\mu), \mu) = 0, \quad (4.64)$$

onde

$$\beta(g_R) = \mu \frac{\partial}{\partial \mu} g_R(\mu), \quad (4.65)$$

$$= g_R + \mu^2 \frac{\partial \lambda_R(\mu)}{\partial \mu} \quad (4.66)$$

A Eq.(4.63) é condição de renormalização e a Eq.(4.64) é conhecida como equação do grupo de renormalização. Os zeros da função  $\beta$  dada pela Eq.(4.66) são os chamados “pontos fixos”, esses zeros em conjunto com seu sinal contém a informação básica sobre o comportamento da teoria em diferentes escalas. Usando a Eq.(4.53) na Eq.(4.66) temos

$$\beta(g_R) = g_R + g_R^2. \quad (4.67)$$

Um interessante resultado dessas equações, nesse modelo, é a formalização da mudança na matriz- $T_R$  sob uma modificação de escala[16]

$$T_R(\gamma k, g_R(\mu), \mu) = \gamma^{-1} T_R(k, g_R(\mu), \mu \gamma^{-1}), \quad (4.68)$$

pelas equações de renormalização de grupo temos a seguinte equação

$$\left( \gamma \frac{\partial}{\partial \gamma} + \mu \frac{\partial}{\partial \mu} + 1 \right) T_R(\gamma k, g_R(\mu), \mu) = 0. \quad (4.69)$$

Da Eq.(4.64) podemos substituir  $\mu \partial T_R / \partial \mu$  por  $-\beta(g_R) \partial T_R / \partial g_R$ , então

$$\left( \gamma \frac{\partial}{\partial \gamma} - \beta(g_R) \frac{\partial}{\partial g_R} + 1 \right) T_R(\gamma k, g_R(\mu), \mu) = 0 \quad (4.70)$$

A Eq.(4.70) expressa o efeito na mudança do momento por um fator multiplicativo  $\gamma$ . Essa mudança tem de ser compensada por um “contra-termo” na redefinição da constante de acoplamento regularizada. Esse fato pode ser observado ao calcularmos a integral  $I(k, \Lambda)$ , Eq.(4.48), fazendo  $k \rightarrow \gamma k$  usando um corte superior na integral  $\Lambda$ . Nesse caso teremos como resultado um  $\Lambda \rightarrow \gamma \Lambda$ , quando  $k$  é trocado por  $\gamma k$ . Por analogia ao que fizemos nas Eqs.(4.15 à 4.20), seção 4.2, no caso da mudança na escala do momento da matriz- $T$  por um fator  $\gamma$  teremos de reabsorver o termo divergente resultante,  $\gamma \Lambda$  em uma nova definição da constante de acoplamento  $\lambda(\Lambda)$ , Eq.(4.47). Após a consideração acima exposta podemos usar a Eq.(4.70) para obtermos maiores detalhes sobre a função  $\beta$  em termos de uma mudança de escala. Para isso consideremos uma forma geral para a matriz- $T$  regularizada modificada através da mudança de escala

$$T_R(\gamma k, g_R(\mu), \mu) = f(\gamma) T_R(k, g_R(\gamma), \mu), \quad (4.71)$$

nesse caso a Eq.(4.70) pode ser reescrita em termos de  $f(\gamma)$ , tal que

$$\left( \gamma \frac{\partial}{\partial \gamma} - \frac{\gamma}{f(\gamma)} \frac{df(\gamma)}{d\gamma} + \gamma \frac{\partial g_R(\gamma)}{\partial \gamma} \frac{\partial}{\partial g_R(\gamma)} \right) T_R(\gamma k, g_R, \mu) = 0 \quad (4.72)$$

Pela comparação da Eq.(4.72) com a Eq.(4.70) podemos obter uma relação em termos de  $\gamma$  para a função  $\beta$ , tal que

$$\beta(g_R) = \gamma \frac{\partial g_R(\gamma)}{\partial \gamma}. \quad (4.73)$$

A Eq.(4.73) apresenta a função de acoplamento adimensional introduzida pela Eq.(4.62) em termos do parâmetro que representa a mudança na escala do problema ( $\gamma$ ). A função de acoplamento definida em termos de  $\gamma$ , Eq.(4.73), é conhecida como constante de acoplamento dinâmica ("running coupling constant"). A partir da Eq.(4.73) e da Eq.(4.67) podemos escrever

$$\beta(g_R) = g_R(\gamma) + g_R^2(\gamma), \quad (4.74)$$

integrando a essa equação entre  $\gamma = \mu_0$  e  $\gamma = \mu$  teremos

$$\int_{\gamma=\mu_0}^{\gamma=\mu} \gamma \frac{\partial g_R(\gamma)}{\partial \gamma} d\gamma = \int_{\mu_0}^{\mu} (g_R + g_R^2) d\gamma. \quad (4.75)$$

O resultado da integração da Eq.(4.75) dá novamente a Eq.(4.54), a equação de continuidade entre duas escalas:  $\mu$  e  $\mu_0$ , escrita em uma forma ligeiramente diferente

$$\lambda_R(\mu) = \frac{\lambda_R(\mu_0)}{1 - (\mu - \mu_0)\lambda_R(\mu_0)}. \quad (4.76)$$

A Eq.(4.76) confirma um resultado conhecido em teoria quântica de campos mas que ainda não tinha sido mostrado no contexto da mecânica quântica não-relativística[16]: em geral, se a função  $\beta$  é conhecida a integração da equação do grupo de renormalização, Eq.(4.72), dá a dependência em  $\mu$  da quantidade para qual a equação foi escrita. A partir da dependência em  $\mu$  podemos obter, por análise dimensional, a dependência na energia para a quantidade que estamos considerando, obtendo assim relações para essa quantidade em diferentes energias. Essa é a principal utilidade das equações do grupo de renormalização em teoria quântica de campos.

## Capítulo 5

# Aplicação da Renormalização à Equação de Espalhamento

### 5.1 Introdução

Neste capítulo apresentaremos os resultados da aplicação numérica realizada para a regularização e conseqüente renormalização da equação de Lippmann-Schwinger com um potencial do tipo  $1/r^2$ . Potenciais com esse comportamento são usuais em Física atômica, nuclear e em matéria condensada: o potencial de Wood-Saxon, potenciais teóricos que simulam a troca de mésons e polímeros[69], respectivamente, são exemplos típicos [13]. Potenciais desse tipo apresentam divergências ultravioletas (quando  $k \rightarrow \infty$ ,  $r \rightarrow 0$ ) e se apresentam como um campo de teste para os procedimentos de regularização e renormalização apresentados nas seções anteriores. Na seção 4.3 apresentamos os procedimentos de regularização e renormalização, para a equação de Lippmann-Schwinger utilizando um potencial do tipo delta de Dirac, correspondente a uma constante no espaço dos momentos. Os resultados se mostraram instrutivos no sentido de apresentarem os detalhes do formalismo utilizado. Para problemas mais complexos, em que são utilizados interações de dois corpos não separáveis e singulares um tratamento numérico se faz necessário para o estudo

da aplicabilidade dos métodos de regularização e renormalização em mecânica quântica.

O tema potenciais singulares é recorrente e antigo em Mecânica Quântica[13, 66, 63]. O estudo de sistemas com potenciais singulares geralmente apontam para duas direções. Uma direção é o estudo de potenciais singulares como uma ponte para o entendimento das divergências que aparecem no contexto da Teoria Quântica de Campos(TQC). Na outra direção está o estudo de sistemas físicos que apresentam interações singulares e portanto necessitam de soluções especiais. A solução encontrada para a equação de espalhamento nesse último contexto geralmente é “ad-hoc”.

Nosso formalismo se baseia no princípio da introdução de um parâmetro regularizador na equação de espalhamento(divergente) original e, através da utilização de um parâmetro de escala: uma observável física do sistema, através da qual eliminamos o parâmetro “estranho” (regularizador) da teoria.

A proposta deste capítulo é apresentar os procedimentos e resultados numéricos em um problema quântico não-relativístico onde soluções analíticas não são possíveis de se obter. Através dos procedimentos e resultados apresentados entenderemos melhor o comportamento da equação de espalhamento na camada de energia (“on-shell”) e fora da camada de energia (“off-shell”) para diferentes esquemas de regularização.

Consideremos um potencial local em onda-S, atrativo, que apresenta comportamento singular na origem, dado por

$$V(r) = V_0 \frac{\exp(-\mu r)}{r^2}. \quad (5.1)$$

Para valores suficientemente grandes de  $|V_0|$ , o problema do espalhamento de dois corpos

com o potencial (5.1) exibe divergência ultravioleta o que não permite soluções físicas convencionais[70]. Em energias negativas um número infinito de estados ligados colapsam para uma energia infinita e em energias positivas a equação de espalhamento tem um “kernel” não-compacto e não permite soluções. Para valores de  $|V_0|$  muito pequenos os problemas anteriores podem ser evitados mas o problema torna-se difícil do ponto de vista numérico.

O potencial da Eq.(5.1) tem um valor crítico, apresentado em Landau e Lifchitz[70]. Esse valor crítico, no limite  $\mu = 0$ , é dado por

$$V_{0,c} = \frac{-1}{4} \left( \frac{\hbar}{2m} \right)^2, \quad (5.2)$$

onde  $m$  é a massa reduzida do sistema de dois corpos separados por uma distância  $r$ . Para um potencial atrativo temos dois casos relevantes que têm o valor crítico Eq.(5.2) como referência. Quando  $|V_0| > |V_{0,c}|$  temos a possibilidade de infinitos estados ligados com energia infinita. Por outro lado, quando  $|V_0| < |V_{0,c}|$  os infinitos estados ligados estão ausentes e o sistema tem um comportamento regular.

É interessante ressaltar que potenciais da forma da Eq.(5.1) têm sido sugeridos para a interação efetiva de dois corpos no sistema de três bósons [71]. Esses estudos foram estendidos para o sistema nêutron-dêuteron, considerando que a energia de ligação do dêuteron na escala nuclear é bastante próxima de zero. Dessa forma, sendo o tamanho do dêuteron muito grande, o termo de troca de um núcleon do potencial núcleon-dêuteron apresenta um comportamento atrativo de longo alcance da forma  $1/r^2$ . Uma dedução analítica, para esse comportamento assintótico do potencial efetivo de dois corpos em um sistema de três

partículas idênticas, foi feita na Ref. [72].

## 5.2 Equações do Modelo

A equação de Lippmann-Schwinger, Eq.(4.21), pode ser reescrita na forma de operadores por

$$T(k^2) = V + VG_0(k^2)T(k^2), \quad (5.3)$$

onde  $G_0(k^2)$  é o operador correspondente à função de Green livre,

$$G_0(E) = (E - H_0 + i0)^{-1}. \quad (5.4)$$

$H_0$  é o hamiltoniano da partícula livre,  $E = k^2$  é a energia de centro-de-massa e  $i0$  representa o limite  $\epsilon \rightarrow 0$ . O potencial é representado por  $V$ , e para nosso estudo utilizaremos como potencial a Eq.(5.1).

A projeção em ondas parciais de um elemento de matriz do  $T$  ou  $V$ , no espaço dos momentos, para um potencial esféricamente simétrico, é dada genericamente por

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{p} | \mathcal{O} | \mathbf{q} \rangle &= \frac{2}{\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \mathcal{O}_l(p, q) \sum_{m=-l}^l Y_{l,m}^*(\Omega_p) Y_{l,m}(\Omega_q) \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \mathcal{O}_l(p, q) \frac{2l+1}{4\pi} P_l\left(\frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}}{pq}\right) \end{aligned} \quad (5.5)$$

onde  $\mathcal{O}$  é um operador genérico,  $Y_{l,m}(\Omega_p)$  são os esféricos harmônicos normalizados a um e  $\Omega_p$  representa os dois ângulos polares do vetor  $\mathbf{p}$  e ainda  $p = |\mathbf{p}|$ . A função  $P_l(x)$

representa os conhecidos polinômios de Legendre de ordem  $l$ . A função  $\mathcal{O}_l(p, q)$  é coeficiente da expansão dada pela Eq.(5.5).

Podemos reescrever a Eq.(5.3) utilizando a expansão dada pela Eq.(5.5). Nesse caso obteremos a decomposição em ondas parciais da equação de Lippmann-Schwinger

$$T_l(p, p'; E) = V_l(p, p') + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty q^2 dq V_l(p, q) G_0(q; k^2) T_l(q, p'; E). \quad (5.6)$$

Na Eq.(5.6) estamos considerando  $E = k^2$  e  $\hbar = 2m = 1$ ,  $m$  sendo a massa reduzida do sistema de dois corpos. A função de Green livre no espaço dos momentos é dada por

$$G_0(q; k^2) = (k^2 - q^2 + i0)^{-1}. \quad (5.7)$$

Como nosso objetivo é encontrar soluções para a Eq.( 5.6) no espaço dos momentos precisamos encontrar a transformada de Fourier do potencial local  $V(r)$  dado pela Eq.(5.2) e obter através da expansão dada pela Eq.(5.5) a decomposição do potencial em ondas parciais. Deste modo teremos

$$V_l(p, q) = \pi^2 \int_{-1}^1 P_l(x) \langle \mathbf{p} | V | \mathbf{q} \rangle \quad (5.8)$$

a transformada de Fourier do potencial  $\langle \mathbf{p} | V | \mathbf{q} \rangle$  é dada por

$$\langle \mathbf{p} | V | \mathbf{q} \rangle = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3r V(r) \exp(i(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \cdot \mathbf{r}) \quad (5.9)$$

nesse caso a Eq.(5.8) pode ser reescrita, tal que

$$V_l(p, q) = \frac{1}{2} \int_0^\infty r^2 dr V(r) \int_{-1}^1 dx P_l(x) \frac{\sin(|\mathbf{p} - \mathbf{q}|r)}{|\mathbf{p} - \mathbf{q}|r}. \quad (5.10)$$

Para resolver essa integral utilizamos o teorema da adição, equação (10.1.45) da Ref.[73]:

$$\frac{\sin(|\mathbf{p} - \mathbf{q}|r)}{|\mathbf{p} - \mathbf{q}|r} = j_0 \left( r \sqrt{p^2 + q^2 - 2pqx} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} (2n + 1) j_n(pr) j_n(qr) P_n(x),$$

onde  $j_0(z)$ , são as funções esféricas de Bessel de ordem  $l$  (ver Ref.[73], cap. 10). Usando a condição de normalização dos polinômios de Legendre, obtemos uma expressão simplificada para a decomposição em ondas parciais, no espaço dos momentos, do potencial  $V(r)$ . Essa expressão é

$$V_l(p, q) = \int_0^\infty r^2 dr V(r) j_l(pr) j_l(qr). \quad (5.11)$$

O comprimento de espalhamento  $a$ , uma quantidade física observável, é dada por

$$T(0, 0; 0) = a. \quad (5.12)$$

A conexão da Eq.(5.6) com a Eq.(5.12) é um dos vínculos possíveis, que permite a renormalização dessa primeira equação, com o potencial divergente dado pela Eq.(5.11). Inicialmente a equação integral de espalhamento com o potencial original apresenta um núcleo(“kernel”) não-compacto e portanto essa equação não apresenta solução para o espalhamento. Podemos obter um significado físico para a equação Eq.(5.6) transformando-a em equação integral com um limite superior de integração  $\Lambda$ , já que a divergência ultravioleta se apresenta para  $\Lambda \rightarrow \infty$ . Uma outra possibilidade seria utilizar uma das funções de Green, apresentadas na seção anterior, Eqs.(4.30 e 4.31) Esse processo é chamado de regularização

consiste portanto introduzir um parâmetro que torne finita a quantidade a ser renormalizada e quantidade  $\Lambda$  é conhecida como parâmetro de corte (“cut-off parameter”).

A introdução do parâmetro de corte( $\Lambda$ ) introduz um novo parâmetro na teoria que deverá ser eliminado em termos de uma quantidade observável física conhecida com o nome parâmetro de escala. Nesse trabalho escolhemos como parâmetro de escala a quatidade observável física ( $a$ ), dada pela Eq.(5.12). Assim poderemos eliminar o parâmetro de corte, o elemento estranho da teoria, em termos de uma quantidade física conhecida.

Observamos que, em princípio, os resultados obtidos na renormalização são independente dos esquemas de regularização escolhidos. Portanto a regularização da integral de espalhamento por meio de um parâmetro de corte ( $\Lambda$ ), no limite superior da integral, a regularização no potencial e na função de Green devem dar o mesmo resultado final.

Para regularização da Equação de espalhamento de Lippmann-Schwinger, Eq.(5.6), através de função de Green regularizada, podemos reescrever a função de Green tal que

$$G_R(q, \Lambda; k^2) = \frac{v^2(q, \Lambda; k^2)}{(k^2 - q^2 + i0)} \tag{5.13}$$

onde a função  $v(q, \Lambda; k^2)$  satisfaz as condições

$$v(q = k, \Lambda; k^2) = 1, \tag{5.14}$$

e

$$\lim_{\Lambda \rightarrow \infty} v(q, \Lambda; k^2) = 1. \tag{5.15}$$

A equação de espalhamento regularizada pode então ser reescrita com uma escolha apropriada de  $v(q, \Lambda; k^2)$ , para uma determinada onda parcial  $l$ ,

$$T_R(p, p'; E) = V(p, p') + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty q^2 dq V(p, q) G_R(q, \Lambda; k^2) T_R(q, p'; E). \quad (5.16)$$

A equação acima não possui divergência ultravioleta.

Podemos considerar também um esquema de regularização onde o parâmetro regularizador seja imposto ao potencial ao invés de diretamente na função de Green. Nesse caso podemos reescrever o potencial  $V(p, p')$ , tal que

$$V_R(p, p') = v(p, \Lambda; k^2) V(p, p') v(p', \Lambda; k^2), \quad (5.17)$$

Nesse caso teremos uma equação de espalhamento onde a função de Green aparece como inalterada,

$$T'_R(p, p'; E) = V_R(p, p') + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty q^2 dq V_R(p, q) G_0(q; k^2) T'_R(q, p'; E). \quad (5.18)$$

A equivalência das Eqs.(5.16 e 5.17) no espaço dos momentos, na camada de energia ("on-shell") é dada por

$$T'_R(p, p'; E) = v(p, \Lambda; k^2) T_R(p, p'; E) v(p', \Lambda; k^2) \quad (5.19)$$

$$= v(p, \Lambda; k^2) \left[ V(p, p') + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty q^2 dq V(p, q) \frac{v^2(q, \Lambda; k^2)}{(k^2 - q^2 + i0)} T_R(q, p'; E) \right] v(p', \Lambda; k^2)$$

Considerando que a função regularizadora  $v(q, \Lambda; k^2)$  satisfaz as Eqs.(5.14 e 5.15), as observáveis "on-shell" obtidas por  $T'_R(p, p'; E)$  e  $T_R(p, p'; E)$  são idênticas.

### 5.3 A Regularização e Renormalização

Nesta seção apresentaremos as equações explícitas para os esquemas de regularização utilizados para renormalizar a equação de Lippmann-Schwinger utilizando o potencial dado pela Eq.( 5.1). Para esse potencial, como argumentamos anteriormente, quando  $|V_0|$  é suficientemente grande temos um estado fundamental de energia infinita e, portanto, sem significado físico. Do ponto de vista matemático o “kernel” da Eq.(5.6) com o potencial da Eq.(5.6), tem “kernel” não-compacto e portanto seus autovetores e autovalores não pertencem ao espaço de Hilbert.

Para realizar a regularização da Eq.(5.6) com o potencial dado pela Eq.(5.1) e testar diferentes esquemas de regularização procedemos da seguinte forma: escolhemos dois esquemas de regularização que consistem em utilizar, para cada um deles, uma função de Green regularizada, Eq.(4.30) e Eq.( 4.31), respectivamente; a esses esquemas de regularização denominaremos escolhas A e B. De outro lado, escolhemos dois esquemas de regularização que consistem em introduzir um parâmetro de corte (“cut-off parameter”), no espaço das configurações, de tal forma que esse parâmetro de corte não possa ser fatorado no espaço dos momentos. A esses dois procedimentos de regularização atribuímos a denominação de Escolhas C e D. A seguir apresentamos as equações utilizadas pelos procedimentos de regularização escolhidos.

#### Escolha A

A representação no espaço dos momentos, em onda  $S$ , para o potencial da Eq.(5.1), depois de utilizar a Eq.(5.10) e Eq.(3.947.2) da Ref.[73], é dada por

$$V(p, q) = \frac{V_0}{2pq} p \left[ \arctan \left( \frac{2\mu q}{\mu^2 + p^2 - q^2} \right) + q \arctan \left( \frac{2\mu p}{\mu^2 + q^2 - p^2} \right) \right] \quad (5.20)$$

$$+ \frac{\mu}{2} \ln \left( \frac{\mu^2 + (p - q)^2}{\mu^2 + (p + q)^2} \right) \quad (5.21)$$

com o seguinte limite

$$V(0, q) = V(q, 0) = \frac{V_0}{q} \arctan \left( \frac{q}{\mu} \right).$$

A função reguladora para a função de Green livre, nesse caso, foi escolhida ser

$$v^2(p, \Lambda_A; k) = \Theta(\Lambda_A - p), \quad (5.22)$$

que a função degrau, onde  $\Theta(\Lambda_A - p) = 1$ , para  $\Lambda_A > p$  e  $\Theta(\Lambda_A - p) = 0$ , para  $\Lambda_A < p$ .

### Escolha B

Para esse esquema de regularização utilizamos o potencial dado pela Eq.(5.20) mas escolhemos outra função para ser regularizadora da função de Green livre

$$v^2(p, \Lambda_B; k) = \frac{(\Lambda_B^2 + k^2)}{(\Lambda_B^2 - p^2)}. \quad (5.23)$$

### Escolha C

O esquema de regularização escolhido aqui consiste em regularizar o potencial original através de um parâmetro de corte introduzido no espaço das configurações tal que

$$V_C(r) = \frac{V_0 \exp(-\mu r)}{r(r + \alpha_C)}. \quad (5.24)$$

O potencial  $V_C(r)$  reduz-se ao potencial original  $V(r)$ , quando  $\alpha_C \rightarrow 0$ . Nesse esquema, a Eq.(5.24), no espaço dos momentos é obtida utilizando a Eq.(5.24). Assim procedendo obtemos

$$\begin{aligned}
 V(p, q) &= \frac{V_0 e^{\mu\alpha_C}}{4pq} \int_{\mu}^{\infty} dz e^{-\alpha_C z} \ln \left( \frac{z^2 + (p+q)^2}{z^2 + (p-q)^2} \right) \\
 &= \frac{V_0 e^{\mu\alpha_C}}{4\alpha_C pq} \ln \left( \frac{z^2 + (p+q)^2}{z^2 + (p-q)^2} \right) \\
 &= -\frac{2V_0}{\alpha_C} e^{\mu\alpha_C} \int_{\mu}^{\infty} dz \frac{z e^{-\alpha_C z}}{[z^2 + (p+q)^2][z^2 + (p-q)^2]} \\
 &= \frac{2\mu V_0}{4pq} e^{\mu\alpha_C} \int_0^1 dy \frac{e^{-\alpha_C z/y}}{y^2} \ln \left( \frac{z^2 + (p+q)^2 y^2}{z^2 + (p-q)^2 y^2} \right) \quad (5.25)
 \end{aligned}$$

O comportamento limite para os casos em que  $p$  ou  $q$  tendem a zero é dado por

$$V(p, 0) = V(0, p) = V_0 e^{\mu\alpha_C} \int_{\mu}^{\infty} dz \frac{\exp(-\alpha_C z)}{z^2 + p^2} = V_0 \mu e^{\mu\alpha_C} \int_0^1 dy \frac{\exp(-\alpha_C \mu/y)}{\mu^2 + (py)^2} \quad (5.26)$$

### Escolha D

Nessa escolha utilizamos um corte no espaço das configurações dado por  $\alpha_D$ . Assim quando  $\alpha_D \rightarrow 0$ , obtemos o potencial original dado pela Eq.(5.1). A forma explícita para o potencial nessa escolha, no espaço das configurações, é dada por

$$V_D(r) = \frac{V_0 \exp(-\mu r)}{(r + \alpha_D)^2}. \quad (5.27)$$

A representação no espaço dos momentos, em onda-S, para o potencial  $V_D(r)$  é

$$V_D(p, q) = 2V_0 e^{\mu\alpha_D} \int_{\mu}^{\infty} dz \frac{z(z - \mu) \exp(-\alpha_D z)}{[z^2 + (p+q)^2][z^2 + (p-q)^2]}$$

$$= 2V_0 e^{\mu\alpha_D} \mu^3 \int_0^1 \frac{(1-y) \exp(-\mu\alpha_D/y)}{[\mu^4 + 2\mu^2 y^2 (p^2 + q^2) + (p^2 - q^2)^2 y^4]} dy. \quad (5.28)$$

Nos procedimentos de regularização apresentados acima podem ser divididos em dois tipos básicos: nas escolhas A e B a função regularizadora é introduzida na função de Green livre e nas escolhas C e D introduzimos um corte ("cut-off"), no potencial diretamente no espaço das configurações. Portanto, nas duas primeiras escolhas fazemos a regularização diretamente no espaço dos momentos e nas escolhas C e D a regularização é feita no espaço das configurações e a renormalização é procedida utilizando a transformada de Fourier desses potenciais. A forma simples do parâmetro regularizador para o potencial no espaço das configurações é obtida explorando-se a simetria desse espaço. Ao obtermos a transformada de Fourier do potencial parâmetro regularizador (ou função regularizadora) não pode ser simplesmente fatorada como nos casos das escolhas A e B.

Em princípio, acredita-se que os resultados obtidos para utilizando-se os vários esquemas de renormalização deveriam ser os mesmos, ou seja: os resultados físicos obtidos devem, em princípio, ser independentes do esquema particular de regularização.

## 5.4 Resultados Numéricos

Os quatro diferentes esquemas de regularização denominados por A, B, C e D na seção anterior foram utilizados para obtenção dos deslocamentos de fase em diferentes energias e em vários estados ligados. Nos cálculos utilizamos a massa reduzida do sistema núcleon-núcleon  $\hbar/(2m) = 41.47 \text{ MeV fm}^2$ . O parâmetro de alcance do potencial original, Eq.(5.1), foi considerado, por motivos de simplicidade, ter o valor de  $1 \text{ fm}^{-1}$ .

No esquema de regularização que apresentaremos aqui utilizamos uma das escolhas de reg-

ularização, apresentadas na seção anterior, para ser nosso parâmetro para “calibrar” as demais escolhas de regularização. Nos deslocamentos de fase calculados usamos a escolha A a partir da qual calibramos as demais. O esquema de renormalização consiste em fixar o comprimento de espalhamento tripleto em onda-S utilizando  $a=5.4$  fm e variar o valor de  $V_0$ , intensidade do potencial, para obter o ajuste necessário para a renormalização. O parâmetro de corte  $\Lambda_A$  que aparece na Eq.(5.22) é fixado a um valor fisicamente razoável inicialmente. Através desse procedimento poderemos obter vários valores para  $V_0$  que corresponde a diferentes estados ligados mas que apresentam o mesmo valor para o comprimento de espalhamento tripleto em onda-S ( $a=5.4$  fm). Utilizando o mesmo valor para a intensidade do potencial  $V_0$  encontrado para esquema de renormalização aplicado à escolha A, encontramos os parâmetros de corte para as demais escolhas, ou seja:  $\Lambda_B$ ,  $\alpha_C$ ,  $\alpha_D$ , para as escolhas B, C e D, respectivamente. Através desse procedimento temos uma garantia de que estamos trabalhando com a mesma interação em quatro diferentes esquemas de regularização. As observáveis físicas utilizadas para proceder o esquema de renormalização no presente trabalho foram o comprimento de espalhamento e número de estados ligados. Os resultados obtidos nesse esquema de renormalização são apresentados na Tabela 5.1. Embora tenhamos considerado o potencial, Eq.(5.1), em situações de até quatro estados ligados e de altos valores para o parâmetro de corte ( $\Lambda$ ), o interesse maior para o sistema núcleon-núcleon é o caso de um estado ligado, o dêuteron, e de valores compatíveis para o parâmetro de corte no espaço dos momentos. Esse “valor compatível” se estabelece pela escala do problema. Assim, para o sistema núcleon-núcleon a primeira linha da Tabela 5.1 é de maior interesse.

Nas figuras 5.1 a 5.4 nos apresentamos os resultados obtidos para os deslocamentos de fase usando os parâmetros dados pela Tabela 5.1. Nessas figuras normalizamos o deslocamento de fase energia zero tal que  $\delta_l(k=0) = \pi$ . Para cada conjunto de quatro valores de parâmetros, e portanto, quatro valores distintos de  $V_0$ , temos uma elipse identificadora do número de estados ligados considerados indicando 1, 2, 3 e 4. A identificação das curvas para cada esquema de regularização: escolhas A, B, C e D, são convenientemente indicadas nas figuras com os parâmetros de corte dados por  $\Lambda_A$ ,  $\Lambda_B$ ,  $\alpha_C$  e  $\alpha_D$ , respectivamente. Como é observado da figura no limite de altos momentos os valores para os parâmetros de corte  $\Lambda_A$ ,  $\Lambda_B$  são grandes enquanto que os valores para os parâmetros de corte, no espaço das configurações,  $\alpha_C$  e  $\alpha_D$  são pequenos. Para um dado momento na camada de energia o parâmetro de corte, no espaço dos momentos deve ser grande quando comparado ao momento na camada de energia. Para os esquemas de regularização escolhidos teremos  $\Lambda_A^2 \gg k^2$ ,  $\Lambda_B^2 \gg k^2$ ,  $\alpha_C^{-2} \gg k^2$  e  $\alpha_D^{-2} \gg k^2$ .

Pela comparação em cas conjunto de deslocamentos de fase da Figura 5.1, observamos que os deslocamentos de fase obtidos são numericamente muito próximos para valores de energia de até 50 MeV, que corresponde a  $k^2 \sim 1 \text{ fm}^{-2}$ , ou aproximadamente  $0.01\Lambda_A^2$ . Os desvios tornam-se bastante relevantes quando a energia se aproxima ou ultrapassa o valor do parâmetro de corte, nesse caso  $10 \text{ fm}^{-1}$ .

Na figura 5.2 apresentamos os dados para o segundo conjunto de valores da tabela 5.1. Nos resultados apresentados nessa figura aumentamos os valores do parâmetro de corte  $\Lambda_A$  e  $\Lambda_B$ , no espaço dos momentos e, diminuimos os parâmetros de corte  $\alpha_C$  e  $\alpha_D$ , no espaço das configurações. Aumentando o parâmetro de corte obtemos um alcance maior para o

resultado obtido pela renormalização. Nesse caso, pela comparação das curvas em cada conjunto de deslocamento de fase, observamos que os deslocamentos de fase são numericamente próximos para energias de até 500 MeV, que corresponde a  $k^2 \sim 10 \text{fm}^{-2} \approx 0.025 \Lambda_A^2$ .

Na figura 5.3 apresentamos os resultados para o terceiro conjunto de valores da Tabela 5.1. Esses valores foram obtidos com o valor do parâmetro de corte de referência ( $\Lambda_A = 30 \text{fm}^{-2}$ ). Nessa figura observamos que os deslocamentos de fase para o mesmo número de estados ligados são praticamente iguais para os diferentes esquemas de regularização. Os valores dos deslocamentos de fase para cada conjunto são praticamente iguais para energias de até 1000 MeV, ou aproximadamente  $k^2 \sim 20 \text{fm}^{-2} \approx 0.025 \Lambda_A^2$ .

Das três figuras apresentadas, 5.1, 5.2 e 5.3, observamos que o limite da validade da renormalização aumenta com o aumento do parâmetro de corte no espaço dos momentos. Como esperado, a renormalização tornar-se independente dos diferentes esquemas de regularização utilizado, se o parâmetro de corte é grande o suficiente quando comparado com o momento na camada de energia ou, equivalentemente, quando parâmetro de corte no espaço das configurações seja pequeno. No limite de domínio da renormalização se estende aproximadamente até a energias  $E \approx 0.025 E_\Lambda$  onde  $E_\Lambda = \hbar^2 \Lambda^2 / (2m)$ .

Para  $k \ll \mu$ , o espalhamento em onda-S prevalece e o deslocamento de fase decresce linearmente com  $k$ :  $\delta \approx \pi - ka$ . Esse comportamento é consistente com o deslocamento de fase para interação de contato[15]:  $\tan(\delta) = -ka$ , que se reduz a  $\delta \approx \pi - ka$ , para pequenos valores de  $k$ . Esse comportamento do deslocamento de fase é claramente observado nas Figuras 5.1 a 5.3 e não depende dos detalhes do potencial e do número de estados ligados. Observamos dos valores apresentados na Tabela 5.1 e das Figuras 5.1,5.2,5.3, onde  $\mu \neq$

0, para caso de maiores valores do parâmetro de corte, a intensidade crítica  $V_{0,crit} = -10.3675 \text{ MeV fm}^2$ , Eq.(5.1). Observe que na Figura 5.3 temos um parâmetro de corte de  $30 \text{ fm}^{-1}$  e um valor corresponde valor de  $V_0 = -12.482 \text{ MeV fm}^2$ . No limite de valores maiores para o parâmetro de corte e maior número de estados ligados,  $V_0$  deve aproximar do valor crítico.

O comportamento do esquema de renormalização é mostrado na Figura 5.4. Nessa figura apresentamos a dispersão nos deslocamentos de fase entre os quatro esquemas, A-D versus o parâmetro de corte  $\Lambda_A$ , para o caso de quatro estados ligados. Para encontrar a dispersão  $\Delta\delta$  tomamos o máximo desvio dos deslocamentos de fase, para as escolhas A e B, em uma energia fixa. As curvas mostradas na Figura 5.4 foram obtidas para as energias 150, 500 e 1000 MeV. Dos resultados obtidos observamos que  $\Delta\delta \rightarrow 0$  quando o parâmetro de corte  $\Lambda_A \rightarrow \infty$ . Nesse limite os resultados obtidos apresentam a independência do esquema particular de regularização usado para renormalizar a equação de Lippmann-Schwinger.

Nós estudamos nesse trabalho sistemas que apresentam até quatro. Sistemas que apresentam mais de um estado ligado são de interesse em física atômica e molecular. Para sistemas envolvendo a interação núcleon-núcleon os dados relevantes são os apresentados na primeira linha da Tabela 5.1 onde o parâmetro de corte utilizado é de aproximadamente  $10 \text{ fm}^{-1}$ .

Os resultados apresentados nessa seção podem ser usados em outras aplicações para observação e análise dos diferentes comportamentos dos elementos de matriz do potencial e da matriz- $T$  fora da camada de energia. Nesse trabalho utilizamos como vínculo, ao esquema de regularização usado, o comprimento de espalhamento. Contudo, em situações mais

realísticas vários vínculos são utilizados nos potenciais de interação  $NN$  fenomenológicos e então os elementos de matriz, na camada de energia, para diferentes modelos, apresentam praticamente o mesmo comportamento. Mas esses diferentes modelos de interação  $NN$  apresentam resultados bastante diferentes para a matriz- $T$  fora da camada energia, como observado nas referências [46, 74]. Como a matriz- $T$  completamente fora da camada de energia é obtida através dos elementos de matriz- $T$  “half-shell” [46], apresentamos na Figura 5.5 os elementos de matriz “half-shell” da Eq.(5.16) para os vários esquemas de regularização utilizados aqui. Para esses dados usamos as energias:  $E_{cm} = 0, 37.5, 140$  e  $300$  MeV; esses valores foram utilizados na Ref.[74] para o estudo do “Bremsstrahlung” usando diferentes potenciais realísticos.

A variação dos elementos de matriz apresentados na Figura 5.5 não é consequência das variações observadas, na camada de energia, nas Figuras 5.1, 5.2 e 5.3. Em energia zero os resultados obtidos para os quatro procedimentos de regularização podem apresentar os mesmos resultados mas, o mesmo não é verdade para os elementos de matriz fora da camada de energia. Nos casos onde utilizamos um parâmetro de corte na espaço dos momentos, escolhas A e B, não encontramos grandes variações dos valores obtidos para os elementos de matriz fora da camada de energia, para baixas energias. O mesmo é verdadeiro para as escolhas C e D. Para os parâmetros usados nos nossos cálculos observamos que as funções auxiliares de corte, Eqs.(5.22 e 5.23) das escolhas A e B são bastante diferentes numericamente. O mesmo comportamento fora da camada de energia para esses dois casos, A e B, sugerem que a regularização realizada no espaço dos momentos, em dois distintos modelos de potencial devem conduzir a pequenas variações independente dos valores dos parâmetros

usados.

As variações observadas na Figura 5.5 são significativamente menores que as apresentadas na Ref.[74] usando diferentes modelos teóricos. As variações maiores observadas por Fearing são provavelmente devidas as diferenças dos conteúdos físicos dos modelos de interação  $NN$  utilizados. Esse fato indica um comportamento de alcance intermediário (2-4 fm) diferente para os potenciais considerados. Em nosso estudo utilizamos o mesmo comportamento de alcance do potencial, intermediário e longo, enquanto que o comportamento de curto alcance é variado nos diferentes esquemas de regularização utilizados. A variação deve aumentar quando o parâmetro de corte é reduzido. Para um valor fixo  $\Lambda$  a variação também deve aumentar quando as variáveis  $k$  ou  $p$  dos elementos "half-shell" s ao aumentadas. As variações apresentadas nos elementos de matriz "half-shell" observados na Figura 5.5 devem-se aos diferentes esquemas de regularização usados. Variações similares são esperadas em diferentes potenciais  $NN$  fenomenológicos com conteúdos físicos iguais.

|   |         |    |        |          |          |
|---|---------|----|--------|----------|----------|
| 1 | -0.4537 | 80 | 22.940 | 0.005353 | 0.012391 |
| 2 | -1.2485 | 90 | 24.260 | 0.022420 | 0.008320 |
| 3 | -2.5020 | 30 | 24.753 | 0.002700 | 0.020180 |
| 4 | -7.4400 | 27 | 20.917 | 0.122570 | 0.033700 |

Figura 5.5. Variações típicas para o Parâmetro de Regularização.

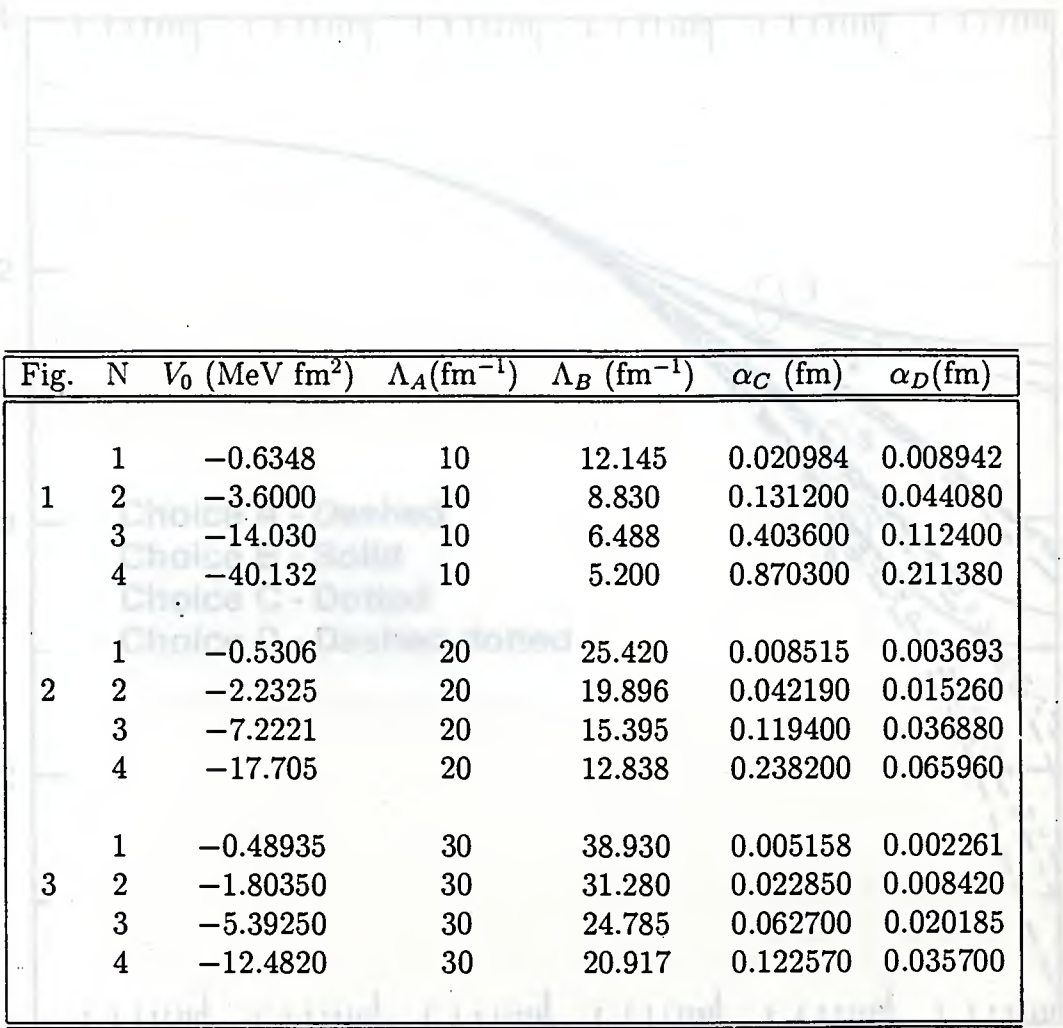


Tabela 5.1: Resultados Numéricos para os Parâmetros da Renormalização.

Figura 5.1: Deslocamentos de fase renormalizados versus energia usando quatro diferentes procedimentos de regularização descritos no texto. Nesta figura o parâmetro regularizador usado é 10 fm<sup>-1</sup>. Os demais regularizadores para as outras três curvas é correspondente  $\Lambda_B$  substituído mantendo-se como vínculo o valor do comprimento de espalhamento de 5.4 fm. Quando variamos o número de estados ligados  $N$  obtemos as figuras 5.2, 5.3 e 5.4.

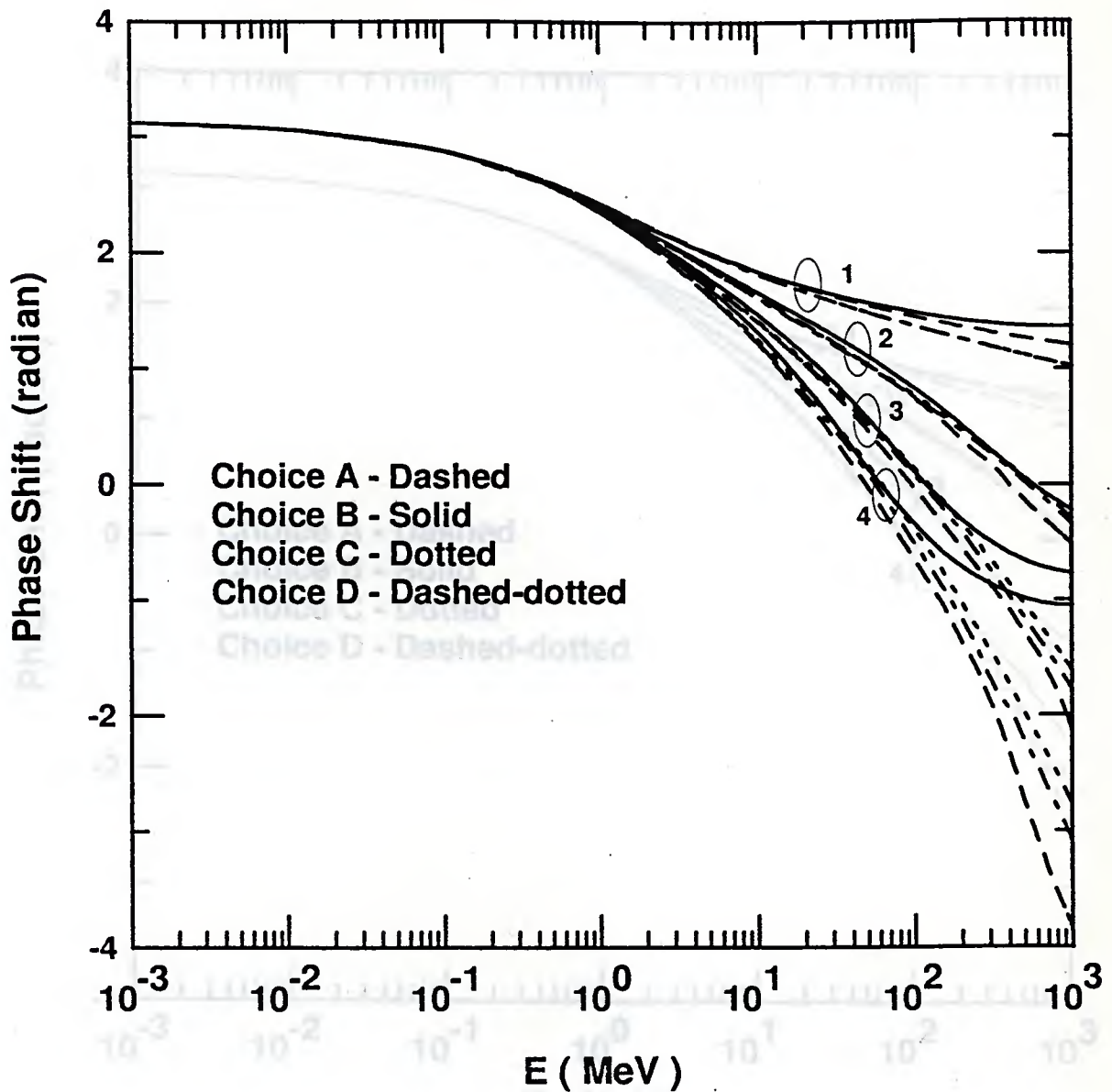


Figura 5.1: Deslocamentos de fase renormalizados versus energia usando quatro diferentes procedimentos de regularização descritos no texto. Nesta figura o parâmetro regularizador usado é  $10 \text{ fm}^{-1}$ . Os demais regularizadores para as outras três escolhas e correspondente  $V_0$  são obtidos mantendo-se como vínculo o valor do comprimento de espalhamento de  $5.4 \text{ fm}$ . Quando variamos o número de estados ligados  $N$  obtemos as figuras 5.2, 5.3 e 5.4.

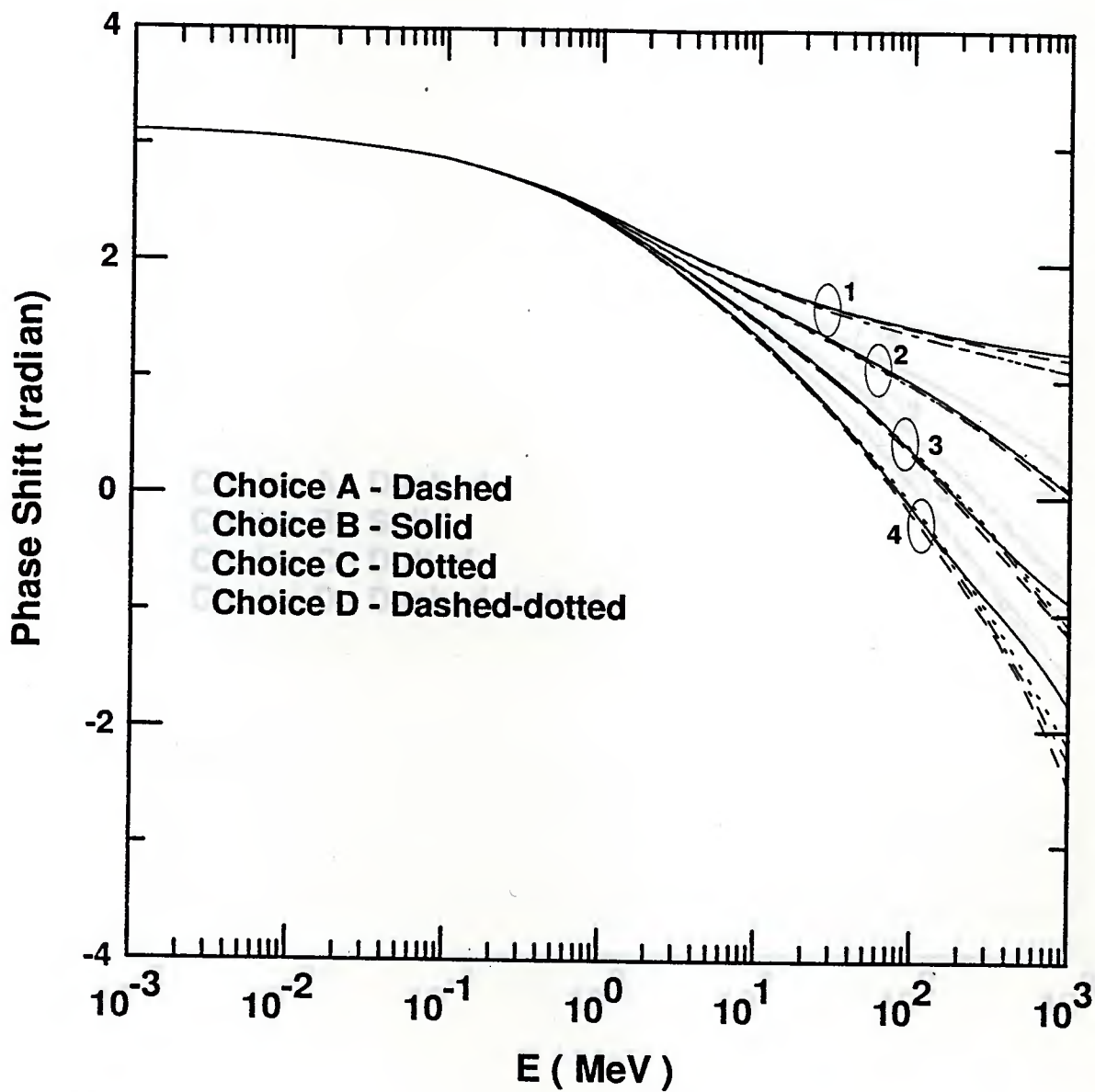


Figura 5.2: Deslocamentos de fase para regularizador  $20 \text{ fm}^{-1}$ .

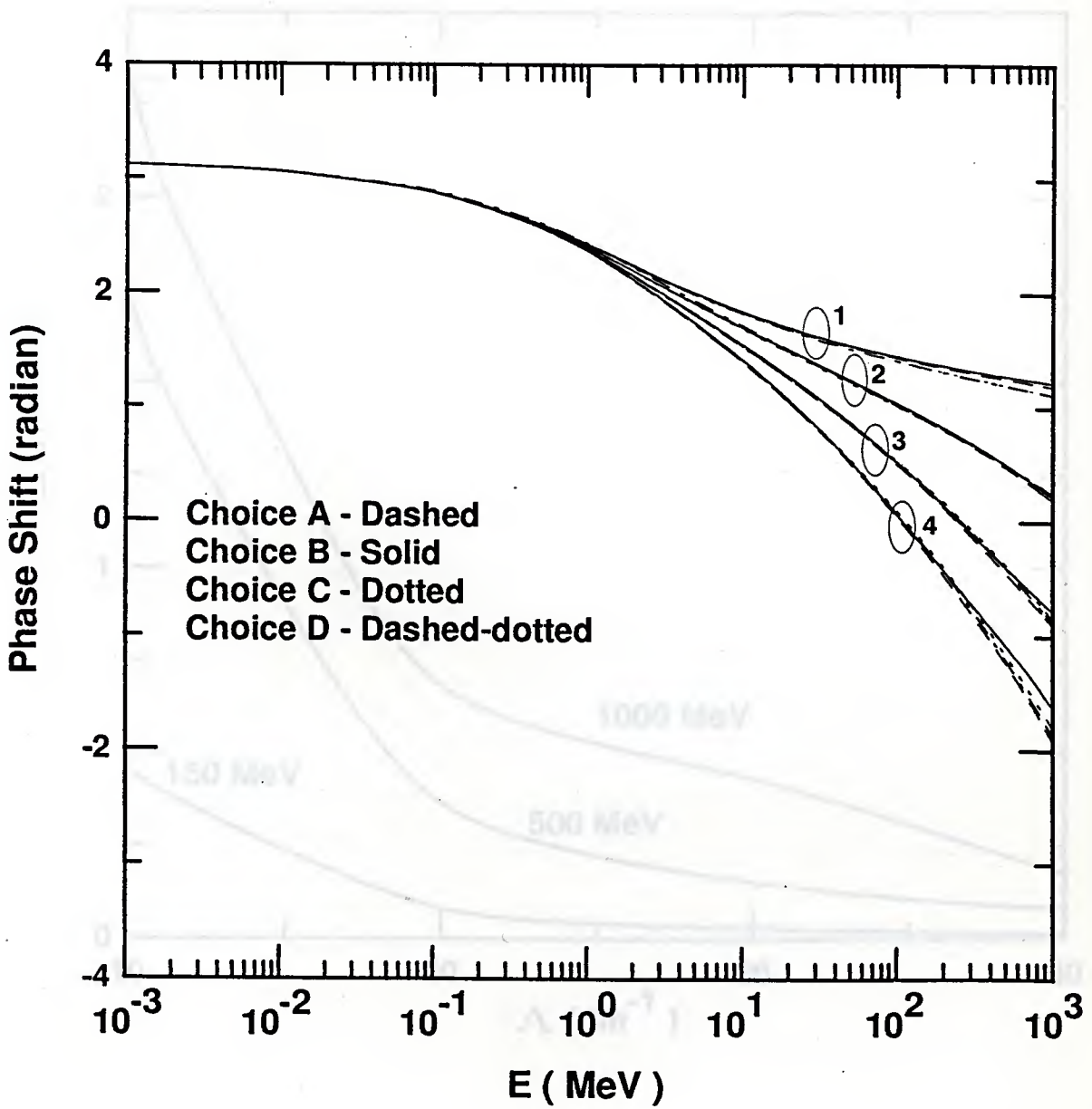


Figura 5.3: Deslocamentos de fase para regularizador  $30 \text{ fm}^{-1}$ .

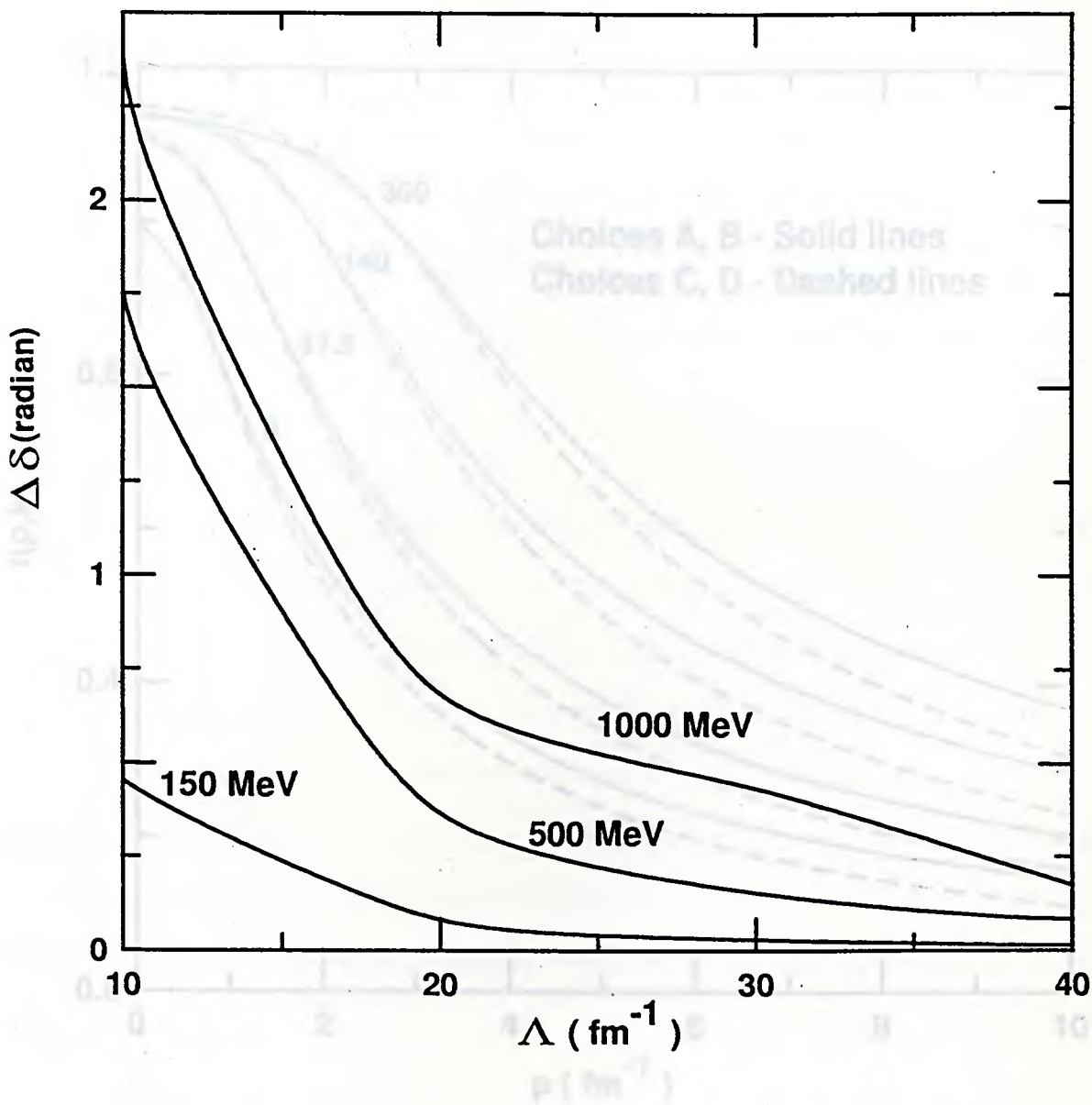


Figura 5.4: Dispersão do deslocamento de fase versus o parâmetro de corte, para as energias de 150, 500 e 1000 MeV, para o caso de quatro estados ligados. Definimos a dispersão pela diferença entre os deslocamentos de fase das escolhas A e B, as quais são melhoradas quando o número de estados ligados  $N$  é maior.

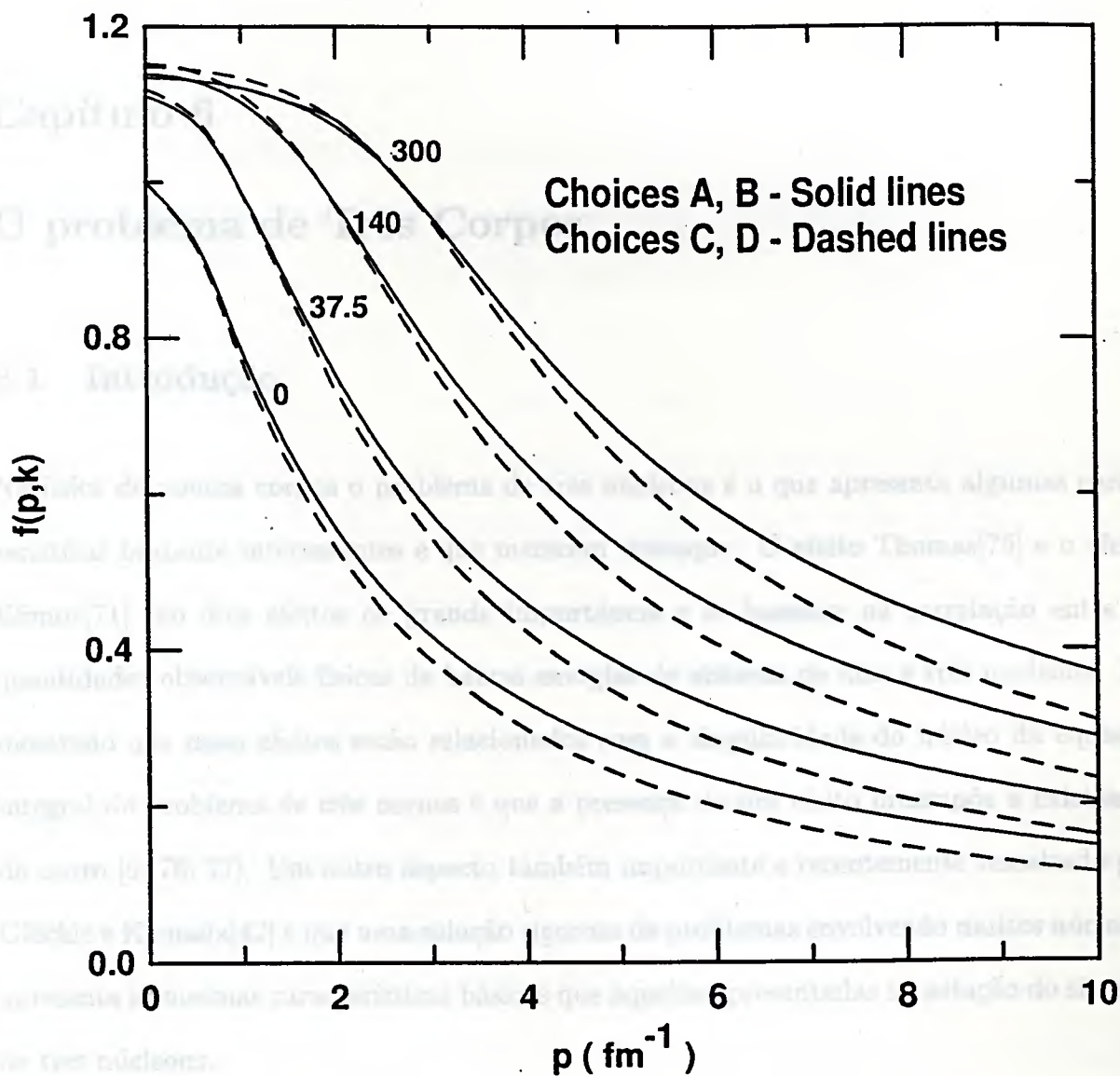


Figura 5.5: Matriz-T Renormalizada fora da camada de energia.

## Capítulo 6

# O problema de Três Corpos

### 6.1 Introdução

Na física de poucos corpos o problema de três núcleons é o que apresenta algumas características bastante interessantes e que merecem destaque. O efeito Thomas[75] e o efeito Efimov[71] são dois efeitos de grande importância e se baseiam na correlação entre as quantidades observáveis físicas de baixas energias do sistema de dois e três nucleons. Foi mostrado que esses efeitos estão relacionados com a singularidade do núcleo da equação integral do problema de três corpos e que a presença de um efeito pressupõe a existência do outro [9, 76, 77]. Um outro aspecto também importante e recentemente ressaltado por Glöckle e Kamada[42] é que uma solução rigorosa de problemas envolvendo muitos núcleons apresenta as mesmas características básicas que aquelas apresentadas na solução do sistema de três núcleons.

Neste capítulo apresentaremos o formalismo básico para solução das equações de espalhamento e estado ligado para o problema de três núcleons. As equações de espalhamento para o problema de três corpos têm várias formulações. Faddeev foi o primeiro a apresentar uma solução geral e completa para o problema[30]. Outras formulações conhecidas e muito

utilizadas são as que foram desenvolvidas por Alt, Grassberger e Sandhas (A.G.S.)[78], o modelo Amado[22] e o método de Mitra[79].

Inicialmente somos levados a pensar que o problema de três corpos pode ser resolvido através de uma generalização das equações de Lippmann-Schwinger(LS). Na verdade a equação de LS falha ao ser aplicada a esse problema. Matematicamente isso é explicado pelo fato de a equação de LS homogênea para o problema de três corpos tem soluções não-nulas para o espectro contínuo ( $E > 0$ ) e portanto a solução dessa equação homogênea que deve entrar da equação não-homogênea tem como consequência uma não unicidade de soluções dessa equação. Em outras palavras a equação de LS, quando aplicada ao problema de três núcleons, não tem solução única que satisfaça a equação de Schrödinger com as condições de contorno apropriadas.

Fisicamente podemos entender esse problema da seguinte forma: no espalhamento envolvendo três partículas, identificadas por 1, 2 e 3, podemos ter a possibilidade em que duas dessas partículas, digamos 2 e 3, formem um estado ligado (23) e a terceira partícula (1) esteja livre. Deste modo, a partícula (1) permanece inalterada durante o processo de espalhamento enquanto (23) interagem. Para podermos descrever o fato da partícula (1) permanecer inalterada durante o processo devemos introduzir uma função delta de Dirac no núcleo ("kernel") da equação de LS. O núcleo da equação de LS assim obtido não é de quadrado integrável nem compacto e portanto a integral pode não ter solução.

Consideremos o problema de um ponto de vista mais formal. Identificando como fizemos anteriormente as três partículas interagentes por 1, 2 e 3. As interações entre as partículas serão denotadas por:  $V_1$ , a interação entre a partícula 2 e 3,  $V_2$ , a interação entre 1 e 3,  $V_3$  a

interação entre 1 e 2. O Hamiltoniano para o sistema é representado por

$$H = H_0 + V, \quad (6.1)$$

onde  $H_0$  identifica a energia cinética total das três partículas,

$$H_0 = \frac{p_1}{2M_1} + \frac{p_2}{2M_2} + \frac{p_3}{2M_3}, \quad (6.2)$$

e  $V$  identifica a interação entre as partículas, tal que

$$V = V_1 + V_2 + V_3. \quad (6.3)$$

Para esse sistema a matriz- $T$ , apresentada no capítulo 2, no espaço de três corpos, fica como

$$\begin{aligned} \langle p'_1 p'_2 p'_3 | T | p_1 p_2 p_3 \rangle &= \langle p'_1 p'_2 p'_3 | V | p_1 p_2 p_3 \rangle + \int \int \int [\delta(p'_1 - q_1) \langle p'_2 p'_3 | V_1 | p_2 p_3 \rangle + \\ &+ \delta(p'_2 - q_2) \langle p'_1 p'_3 | V_2 | p_1 p_3 \rangle + \delta(p'_3 - q_3) \langle p'_1 p'_2 | V_3 | p_1 p_2 \rangle] \times \\ &\left( E - \frac{q_1}{2M_1} + \frac{q_2}{2M_2} + \frac{q_3}{2M_3} + i\varepsilon \right)^{-1} \langle q_1 q_2 q_3 | T | p_1 p_2 p_3 \rangle dq_1 dq_2 dq_3. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Como comentado acima as funções de delta de Dirac que aparecem na Eq.(6.4) tornam o "kernel" da equação de LS original não-compacto e portanto não permite uma solução direta.

A abordagem de Faddeev para o problema foi encontrar um conjunto de equações integrais acopladas completamente não-homogêneas e portanto possuindo uma única solução. Os

núcleos dessas equações integrais serão compactos e conectados (“connected”) de tal forma que não teremos mais funções  $\delta$  da forma que aparece na Eq.(6.4).

Consideremos como um ponto de partida para a obtenção das equações de Faddeev o problema anterior onde a partícula (1) interage com as partículas 2 e 3 que formam um estado ligado(23). Fisicamente podemos considerar o espalhamento de um nêutron ( $n$ ) ou próton ( $p$ ) sobre um dêuteron ( $d$ ), com a diferença de que não trataremos a interação Coulombiana. A matriz de transição  $T$  para esse processo pode ser representada, na forma de operadores, por

$$T = V_2 + V_3 + (V_2 + V_3)G_1T, \quad (6.5)$$

onde  $G_1$  é o propagador da partícula (1) dado por

$$G_1 = (E - H_0 - V_1 + i\varepsilon)^{-1}, \quad (6.6)$$

o operador  $H_0$  é dado pela Eq.(6.2) e  $V_2$  é um dos componentes do potencial, Eq.(6.3). A Eq.(6.5) pode ser reescrita tal que

$$T = [1 - (V_2 + V_3)G_1]^{-1}(V_2 + V_3). \quad (6.7)$$

usando as seguintes identidades entre operadores, onde

$$(A + B)^{-1} = A^{-1} - (A + B)^{-1}BA^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(A + B)^{-1}, \quad (6.8)$$

então

$$(1 - AB)^{-1}A = A(1 - BA)^{-1}. \quad (6.9)$$

Através das identidades representadas pelas Eqs.(6.8) e (6.9) podemos escrever o operador  $G_1$  em termos da função de Green livre para um sistema de três partículas

$$G_0 = (E - H_0 + i\varepsilon)^{-1}, \quad (6.14)$$

tal que

$$\begin{aligned} G_1 &= [(E - H_0 + i\varepsilon) - V_1]^{-1} = (E - H_0 + i\varepsilon)^{-1} + \\ &+ [(E - H_0 + i\varepsilon) - V_1]^{-1}V_1(E - H_0 + i\varepsilon)^{-1} \\ &= (1 + G_1V_1)G_0. \end{aligned} \quad (6.10)$$

Observe que da Eq.(6.10) é imediato que podemos escrever,  $G_1$  em termos da função de Green livre, tal que

$$G_1 = (1 - G_0V_1)^{-1}G_0. \quad (6.11)$$

Substituindo a Eq.(6.11) na Eq.(6.7) teremos

$$T = (V_2 + V_3) + (V_2 + V_3)(1 - G_0 \sum_{k=1}^3 V_k)^{-1}G_0(V_2 + V_3). \quad (6.12)$$

A Eq.(6.12) pode ser escrita em termos de índices  $i$  e  $j$ , tal que  $i, j = 1, 2, 3$ , considerando que

$$T_{ij} = V_i \delta_{ij} + V_i (1 - G_0 \sum_{k=1}^3 V_k) G_0 V_j, \quad (6.13)$$

assim teremos

$$T = \sum_{i,j \neq 1} T_{ij}, \quad (6.14)$$

onde na Eq.(6.12) consideramos

$$T_{ij} = V_i \delta_{ij} + V_i G_0 \sum_{k=1}^3 T_{kj}. \quad (6.15)$$

A partir da Eq.(6.13) podemos escrever

$$(1 - V_i G_0) T_{ij} = V_i \delta_{ij} + V_i G_0 \sum_{k \neq i}^3 T_{kj}, \quad (6.16)$$

ou

$$T_{ij} = (1 - V_i G_0)^{-1} V_i \delta_{ij} + (1 - V_i G_0)^{-1} V_i \sum_{k=1}^3 G_0 (1 - \delta_{ik}) T_{kj}. \quad (6.17)$$

Definindo os elementos

$$\bar{\delta}_{ik} \equiv (1 - \delta_{ik}), \quad (6.18)$$

e

$$t_i \equiv (1 - V_i G_0)^{-1} V_i, \quad (6.19)$$

podemos escrever a Eq.(6.17) na forma mais convencionalmente conhecida por equações de Faddeev

$$T_{ij} = t_i \delta_{ij} + \sum_{k=1}^3 t_i G_0 T_{kj} \bar{\delta}_{ik}, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (6.20)$$

As equações de Faddeev eliminam o problema da “desconectividade” apresentada pela matriz- $T$ , através das funções delta que aparecem no núcleo da equação integral dada por Eq.(6.4). Outro aspecto importante é que a Eq.(6.20) é completamente não-homogênea pois o termo  $T_{ij}$  não aparece do lado direito dessa equação. O resultado disso é que podemos iterar essa equação e o resultado obtido será dado em termos de elementos cruzados da forma  $t_1 G_0 t_2$  que são de quadrado integrável e portanto não divergem.

## 6.2 O modelo de Amado

O problema de três corpos também pode ser tratado através de uma abordagem mais simples onde a equação resultante é bastante semelhante a equação de Lippmann-Schwinger para dois corpos. Amado[22] apresentou essa abordagem ainda sem ter o conhecimento do trabalho de Faddeev[30]. Contudo as abordagens são equivalentes. As equações de Faddeev com potenciais separáveis reduzem-se ao modelo de Amado como foi mostrado por Lovelace[80].

Consideremos para a obtenção do modelo de Amado o mesmo ponto de partida da seção anterior. Temos um problema onde a partícula 1 interage com as partículas 2 e 3 que formam um estado ligado(23). O sistema físico que iremos tratar por simplicidade é composto de 3 bósons idênticos sem spin e com massas unitárias.

Formalmente o modelo de Amado se expressa através da seguinte equação, após antisimetrização e decomposição em ondas parciais,

$$X_{nn'}^{IS}(q, q', E) = Z_{nn'}^{IS}(q, q'; E) + \sum_m \frac{3}{2\pi} \int_0^\infty q''^2 dq'' Z_{nm}^{IS}(q, q''; E) \tau_m(E - \frac{3q''^2}{4}) X_{mn'}^{IS}(q'', q'; E), \quad (6.21)$$

onde

$$Z_{nn'}^{IS}(q, q'; E) = \frac{8\pi^2}{3} J_{nn'}^S \int_{-1}^1 du P_L(u) \frac{g(|\mathbf{q}/2 + \mathbf{q}'|)g(|\mathbf{q}'/2 + \mathbf{q}|)}{E + i0 - \mathbf{q} \cdot \mathbf{q}'}, \quad (6.22)$$

com

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{q}' \equiv q^2 + q'^2 + qq'u, \quad (6.23)$$

sendo  $u$  o cosseno do ângulo entre os vetores  $\mathbf{q}$  e  $\mathbf{q}'$  e  $J_{nn'}^S$  representa os fatores de acoplamento de spin-isospin para o canal quarteto ( $S = 3/2$ ),  $J_{00}^{3/2} = -1/2$  e o acoplamento dubleto,  $S = 1/2$ :  $J_{00}^{1/2} = J_{11}^{1/2} = 1/4$  e  $J_{01}^{1/2} = J_{10}^{1/2} = -3/4$ .

O elemento  $\tau(E - 3q''^2/4)$  representa a matriz- $T$  de dois corpos no espaço de três partículas e é representado por

$$[\tau(z)]_n^{-1} = \frac{1}{\lambda_n} - 4\pi \int_0^\infty q^2 dq \frac{g^2(q)}{z - q^2 + i0}. \quad (6.24)$$

A matriz- $T$ , Eq.(6.24), é obtida utilizando-se o potencial separável da forma

$$\langle p|V|q \rangle = \sum_{n=0}^1 \lambda_n g_n(p) g_n(q'). \quad (6.25)$$

Nas Eqs.(6.21 à 6.25) estamos considerando  $\hbar = m = 1$ , onde  $m$  é a massa de cada partícula no processo, o potencial da interação é não local e separável dado pela Eq.(6.25) apresenta os fatores de forma  $g_n$  escolhidos para representar a interação separável no problema de dois e três corpos exemplos desses fatores de forma podem ser encontrados na Ref.[48].

Na Eq.(6.21) a função  $\tau(E - 3q''/4)$  que representa a matriz- $T$  de dois corpos no espaço de três corpos. Fisicamente temos a energia do sistema de três partículas  $E$  menos a energia da partícula livre, partícula 1, que se propaga pelo sistema de estado ligado, partículas (23). A conservação de energia do sistema é dada por

$$E - 3q''^2/4 = \alpha^2, \quad (6.26)$$

onde  $\alpha$  representa a energia do estado ligado de duas partículas, partículas (23).

O problema proposto na forma da Eq.(6.21) para um potencial separável na forma dada pela Eq.(6.25) para determinados fatores de forma é conhecido e temos diversos trabalhos utilizando diferentes técnicas numéricas para sua solução; para alguns resultados numéricos utilizando a matriz- $\Gamma$  veja Refs.[28, 29]. Nosso objetivo aqui é reinterpretarmos o problema em termos de um potencial delta no espaço das coordenadas - uma constante no espaço dos momentos- para interação de dois corpos que entra na construção do modelo de Amado através da matriz- $T$ , fora da camada de energia, de dois corpos. Consideremos para esse objetivo que a interação dada pela Eq.(6.25) seja tal que os fatores de forma  $g_n$  sejam

$$g_n(p) = g_n(q) = 1, \quad (6.27)$$

deste modo temos

$$\langle p|V|q \rangle = \sum_{i=0}^2 \lambda_i. \quad (6.28)$$

onde consideremos que  $\lambda_i = \lambda$  para  $i = 1, 2$ . A interação dada pela Eq.(6.28) representa uma função delta de Dirac no espaço das configurações. Interações desta forma são conhecidas como sendo de alcance zero ("zero range"). Nesse caso as Eqs.( 6.22 e 6.24) ficam como

$$Z_{nn'}^{1S}(q, q'; E) = -\frac{8\pi^2}{3qq'} J_{nn'}^S \ln \left[ \frac{E - q^2 - q'^2 - qq'^2}{E - q^2 - q'^2 + qq'^2} \right], \quad (6.29)$$

e a função  $\tau(E)$  no espaço de três corpos é dada por

$$[\tau(E - 3q'^2/4)]_n^{-1} = \frac{1}{\lambda} - 4\pi \int_0^\infty q^2 dq \frac{1}{E - 3q'^2/4 - q^2 + i0}. \quad (6.30)$$

$$= \lambda^{-1} - I(q', E). \quad (6.31)$$

onde  $I(q', E)$  é definida diretamente da relação anterior tal que

$$I(q', E) \equiv 4\pi \int_0^\infty q^2 dq \frac{1}{E - 3q'^2/4 - q^2 + i0}. \quad (6.32)$$

A Eq.(6.32) apresenta divergência linear quando  $q \rightarrow \infty (r \rightarrow 0)$ . Deste modo, essa integral deve ser regularizada a fim de termos valores finitos para matriz- $T$  de dois corpos no espaço de três corpos. A regularização aqui segue o procedimento básico apresentado na seção 4.3. Consideremos o procedimento de regularização realizado para obter uma matriz- $T$  regularizada sob uma potencial constante no espaço dos momentos. Neste caso teremos, para um sistema de dois corpos sob a ação de um potencial dado pela Eq.(6.28), a seguinte matriz- $T$

$$T(E) = \tau(E) \tag{6.33}$$

onde  $\tau(E)$  é dado pela Eq.(6.24) para  $g(p) = 1$ . Para regularização dessa matriz- $T$  usaremos o propagador regularizado, dado pela Eq.(4.30) da seção 4.3, tal que teremos

$$T_R(E) = \tau_R(E), \tag{6.34}$$

onde

$$[\tau_R(E)]^{-1} = \frac{1}{\lambda_R} - I_R(q', \Lambda, E), \tag{6.35}$$

com

$$I_R(\Lambda, E) = 4\pi \int_0^\infty q^2 dq \frac{1}{E - q^2 + i0} \times \frac{E + \Lambda^2}{\Lambda^2 + q^2}. \tag{6.36}$$

No processo de renormalização devemos eliminar o parâmetro  $\Lambda$  em função de uma quantidade física de dois corpos. Utilizando-se a energia de ligação de dois corpos teremos

$$\frac{1}{\lambda_R} = I_R(\Lambda, E = -\alpha_n^2), \tag{6.37}$$

onde  $E = k^2 = -\alpha_n^2$ , representa a energia de estado ligado do sistema de dois corpos, e  $n = 1, 2$  representa a energia do estado singlete ( $\alpha_0 > 0$ ) e tripleto ( $\alpha_1 < 0$ ) para o sistema de dois corpos. Analogamente, podemos eliminar o parâmetro  $\Lambda$  em função do comprimento de espalhamento de dois corpos  $a$ , obtido quando tomamos  $E = 0$  na Eq.(6.34) assim temos

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{\lambda_R} - I_R(\Lambda, E = 0). \quad (6.38)$$

A partir das relações dadas pelas Eqs.(6.37 e 6.38) encontraremos a matriz- $T$  para dois corpos renormalizada

$$[\tau_{\mathcal{R}}(E)]^{-1} = [I_R(q', \Lambda, E = -\alpha_n^2) - I_R(q', \Lambda, E)] \quad (6.39)$$

$$= - \left[ 4\pi \int_0^{\infty} \frac{q^2(E + \alpha_n^2)}{(E - q^2)(\alpha_n^2 + q^2)} dq \right], \quad (6.40)$$

$$= -[2\pi^2(\alpha_n + i\sqrt{E})], \quad (6.41)$$

ou, do vínculo dado pela Eq.(6.38), temos

$$[\tau_{\mathcal{R}}(E)]^{-1} = [a^{-1} + I_R(q', \Lambda, E = 0) - I_R(q', \Lambda, E)] \quad (6.42)$$

$$= - \left[ \frac{1}{a} + 4\pi \int_0^{\infty} \frac{E}{(E - q^2)} dq \right], \quad (6.43)$$

$$= [a^{-1} + i\sqrt{E}]. \quad (6.44)$$

Os resultados obtidos pelas Eqs.(6.41 e 6.44) representam a matriz- $T$  para dois corpos renormalizada para uma interação da forma  $V(p, p') = \lambda$ . Podemos usar essa matriz- $T$  renormalizada para re-interpretar a Eq.(6.30) que entra na formulação do modelo de Amado dada pela Eq.(6.21). Deste modo podemos usar por exemplo, a Eq.(6.44) para o nosso propósito de regularizar a equação de Amado. Nesse modelo para o caso em que  $S = 3/2$ , estado quarteto, a Eq.(6.21) reduz-se a uma única equação dada por

$$X_{00}^{0,3/2}(q, q', E) = Z_{00}^{0,3/2}(q, q'; E) + \frac{3}{2\pi} \int_0^{\infty} q''^2 dq'' Z_{00}^{0,3/2}(q, q''; E) \tau_{\mathcal{R}}(E - \frac{3q''^2}{4}) X_{00}^{0,3/2}(q'', q'; E), \quad (6.45)$$

onde

$$\left[ \tau_R \left( E - \frac{3q''^2}{4} \right) \right]^{-1} = -2\pi^2 \left[ \alpha + \sqrt{\frac{3q''^2}{4} - E} \right]. \quad (6.46)$$

O núcleo da equação integral dada pela Eq.(6.45) é dado por

$$K(q, q'', E) = \frac{q''^2}{\pi q q''} \ln \left[ \frac{E - q^2 - q^2 + q q''^2}{E - q^2 - q''^2 - q q''^2} \right] \times \frac{1}{[\alpha + \sqrt{3q''^2/4 - E}]}. \quad (6.47)$$

Podemos observar mais claramente o comportamento do núcleo  $K(q, q'', E)$ , tomando  $q = q''$  e analisando o traço do núcleo da Eq.(6.45), nesse caso a Eq.(6.47) fica

$$Tr K(\beta^2) = \frac{1}{\pi} \int_0^\Lambda \ln \left[ \frac{\beta^2 + q^2}{\beta^2 + 3q^2} \right] \frac{1}{[\alpha + \sqrt{3q^2/4 + \beta^2}]} dq, \quad (6.48)$$

onde  $\beta^2 = -E$ ,  $\alpha$  é a energia de ligação do estado de dois núcleons e  $\Lambda$  é o parâmetro regularizador da integral. O traço do núcleo dado pela Eq.(6.48) para  $\beta^2 = 0$ , diverge logaritmicamente nos limites  $q \rightarrow 0$  e  $q \rightarrow \infty$  para  $\ln(|\alpha|)$  quando  $|\alpha| \rightarrow 0$  e  $\ln(\Lambda)$ , para  $\Lambda \rightarrow \infty$ , respectivamente. Portanto a regularização e conseqüente renormalização realizada na matriz- $T$  de dois corpos no espaço de três corpos não foi suficiente para obtermos uma equação renormalizada no modelo de Amado no espaço de três corpos. Deste modo um novo procedimento de regularização deverá ser feito e a renormalização deverá ser obtida utilizando-se como vínculo uma escala física do espaço de três corpos. Esse procedimento valerá tanto para o caso particular do estado quarteto quanto para o estado dubleto já que as singularidades que divergem o núcleo das equações integrais resultantes são semelhantes aos núcleo dado para a Eq.(6.47-6.48).

A divergência observada na Eq.(6.48) pode ser interpretada melhor se fizermos uma redefinição a fim de tornar as quantidades adimensionais. Fazendo  $y = q/\alpha$  e  $x = \beta/\alpha$ , teremos

$$Tr K \simeq \int_0^{\Lambda/\alpha} dy \ln \left[ \frac{x^2 + 3y^2}{x^2 + y^2} \right] \left[ 1 + \left( \frac{3}{4}y^2 + x^2 \right)^{1/2} \right]^{-1}. \quad (6.49)$$

Ao contrário da Eq.(6.48) a Eq.(6.49) agora é convergente no limite inferior,  $y \rightarrow 0$ . No limite superior da integral podemos ter duas situações que tornaram a quantidade  $\Lambda/\alpha$  divergente: quando  $\Lambda \rightarrow \infty$  e quando  $\alpha \rightarrow 0$ . O primeiro caso significa, já que o regularizador  $\Lambda$  deve ser proporcional ao inverso do alcance da interação, que o alcance da interação é zero, esse caso é conhecido como efeito Thomas: a energia de três corpos torna-se infinita. No segundo caso quando a energia de dois corpos tende a zero (ou o comprimento de espalhamento é muito grande) teremos o chamado efeito Efimov: teremos um número infinito de estados ligados acumulando-se próximo da energia zero.

A estrutura adimensional da Eq.(6.49) foi utilizada recentemente [81, 82] no estudo de um sistema ligado de três corpos idênticos e de massa unitária. Nesse estudo a regularização do sistema ligado de três partículas idênticas foi possível através de uma análise dimensional da equação para o estado ligado e usando-se a universalidade dos valores de energia para os estados Efimov. O parâmetro regularizador  $\Lambda$  foi utilizado para dar os valores de energia dos estados efimiv e estudar a correlação entre a energia do dois corpos (no limite  $\alpha \rightarrow zero$ ) e as energias dos estados fundamental e excitado Efimov. O interessante resultado apresentado nesse trabalho[81] é que existe uma “universalidade” na razão entre o estados de Efimov excitados de três corpos

$$\frac{E^2 - \alpha}{E^1} = \frac{E^1 - \alpha}{E^0}, \quad (6.50)$$

onde  $E^n$  representa o  $n$ -ésimo estado excitado Efimov e  $\alpha$  a energia de ligação de dois corpos. É importante apontar que também nesse estudo o conhecimento das quantidades observáveis físicas de dois corpos não foram suficientes para tornar a equação para o estado ligado de três corpos finita. O conhecimento de uma outra quantidade, nesse caso os valores das energias do estado efimov, foram necessários para regularizar e renormalizar o modelo[81, 82]. Nesse caso conhecendo-se a natureza da singularidade do núcleo da integral pode-se regularizá-la para o estudo das correlações entre os estados Efimov e a energia de ligação do sistema de dois corpos. Nesse caso a escala de energia é próxima de zero e os estados Efimov funcionariam como escala física para regularização e renormalização. Para problemas envolvendo três partículas no setor de espalhamento teremos uma outra escala no problema. Cálculos efetivos usando o Modelo de Amado e os procedimentos de renormalização apresentados nesse trabalho, para uma interação de dois corpos do tipo delta de Dirac já está em andamento.

## Capítulo 7

### Conclusões e Perspectivas

Nesse capítulo destacamos os principais aspectos tratados nesse trabalho e os resultados obtidos. Concluimos com as perspectivas e trabalhos futuros.

Nos capítulos 2 e 3 apresentamos o formalismo básico da teoria de espalhamento e estado ligado do sistema de dois núcleons  $NN$ . No capítulo 2 ressaltamos a conexão do formalismo da teoria de espalhamento e estado ligado com as principais observáveis do sistema  $NN$ : deslocamento de fase, energia de estado ligado, razão assintótica entre as ondas  $D$  e  $S$ , os parâmetros de mistura e suas diferentes formulações. Dentro desse contexto apresentamos as diferentes formulações para o tratamento do espalhamento de dois núcleons e as vantagens e desvantagens de tais formulações: a matriz- $T$ , a matriz- $S$  e matriz- $K$  são as principais formulações discutidas. Abordamos também no capítulo 2 uma descrição da força nuclear em termos de potenciais “puramente” fenomenológicos e dos potenciais recentes derivados da teoria de troca de mésons ressaltando o comportamento da força nuclear nos limites de longo e curto alcance. O formalismo inicial e a breve descrição da força nuclear nos limites de longo e curto alcance se conectam e servem de base aos nossos estudos sobre métodos numéricos de solução para as equações de espalhamento[26, 27] e

com comportamento da descrição teórica para os parâmetros de mistura em baixas energias, realizados na seção 2.4 Refs.[1, 3] e capítulo 3, respectivamente. Nos capítulos 2 e 3 o principal resultado apresentado nesse trabalho é o papel das observáveis físicas, em baixas energias, do sistema núcleon-núcleon para a composição da força nuclear à longas distâncias. Com a utilização de uma expansão que requer o conhecimento de algumas quantidades básicas do sistema  $NN$  e o comportamento do potencial nuclear à longas distâncias é possível discernir sobre a aplicabilidade de alguns potenciais derivados da teoria de troca de mésons pela análise do parâmetro de mistura resultantes desses potenciais. A expansão pode ser utilizada também em conexão com os dados experimentais para obtenção e análise dos parâmetros de mistura  $\epsilon_1$  e  $\epsilon_{BB}$  conforme foi realizado na seção 2.4.1.

No capítulo 4 e, mais especificamente na seção 4.3, estabelecemos o problema da renormalização em mecânica quântica não-relativística. Esses capítulos servem como base para o capítulo 5 onde apresentamos a renormalização da equação de Lippmann-Schwinger para um potencial do tipo  $r^{-2}$  usando diferentes esquemas de regularização. analisamos os diferentes regimes de validade dos procedimentos de regularização e renormalização. Os resultados numéricos obtidos mostram que para energias muito menores que o parâmetro regularizador os diferentes métodos de regularização apresentam os mesmos resultados (ver tabela 5.1 e figuras 5.1-5.5).

No capítulo 6 apresentamos brevemente o formalismo para o tratamento do sistema de três corpos. As equações de Faddeev[30, 9] na forma de operadores são apresentadas. Sabendo-se que as equações acopladas de Faddeev reduzem-se, com utilização de uma interação separável de dois corpos, a uma única equação de duas variáveis: o modelo de Amado[22],

usamos esse modelo para representação do sistema de três partículas, mais especificamente o sistema  $N - D$ . O modelo de Amado, no espaço dos momentos, com uma interação constante, foi obtido. A equação resultante apresenta divergências ultravioletas mesmo quando usamos a matriz- $T$  renormalizada obtida na seção 4.3 é utilizada. Apontamos a necessidade de regularização do modelo de Amado e conseqüente renormalização utilizando uma ou mais quantidades do sistema de três corpos.

As perspectivas de pesquisa sobre o tema renormalização em mecânica quântica podem ser colocadas em três grandes frentes:

- *estudo da aplicabilidade, no sistema de três corpos - especialmente no estado dubleto - do procedimento de renormalização aqui apresentado com resultados numéricos em diferentes esquemas de regularização;*
- *questões relativas aos diferentes procedimentos de renormalização e regularização;*
- *estudo da aplicabilidade do procedimento de renormalização, seção 4.3, em problemas envolvendo potenciais singulares nas equações de espalhamento relativísticas.*

Na primeira frente apresentada alguns estudos já realizados apontam diferentes caminhos. Recentemente tem sido anunciado[83] a obtenção do comprimento de espalhamento do estado quarteto utilizando-se apenas a matriz- $T$  renormalizada de dois corpos. Nesse estudo ressalta-se a não necessidade de se regularizar e renormalizar novamente a equação de três corpos em função de uma quantidade física de três corpos. Esse estudo trata um caso muito particular - o comprimento de espalhamento quarteto do sistema  $N-D$ , sendo portanto precipitado, assumir que as demais quantidades tais como os deslocamentos de

fase, em diferentes energias, e comprimentos de espalhamento dubleto, por exemplo não necessitem ser obtidos através do procedimento de regularização. No setor de estado ligado para o sistema de três partículas que corresponde, com a utilização de potenciais separáveis, ao modelo de Mitra[79] foi mostrado recentemente[81] a necessidade de regularização e renormalização utilizando-se uma escala do problema de três corpos quando a interação de dois corpos é reduzida a uma constante no espaço dos momentos. A análise do comportamento do núcleo da equação de Amado, apresentado no capítulo 6 aponta esse mesmo comportamento estando portanto de acordo com as Refs.[15, 81].

As questões relativas aos resultados obtidos renormalizando-se a matriz- $T$  de espalhamento utilizando-se diferentes esquemas ou procedimentos de regularização e renormalizações impõem-se no âmbito da teoria de campos efetiva. Nessa teoria o potencial que representa a interação núcleon-núcleon é obtido utilizando-se termos de contato que apresentam deltas de Dirac e suas derivadas[6]. Portanto, tem-se como resultado uma interação, que representa o comportamento da força nuclear á curtas distâncias, altamente singular. No contexto da teoria de campos efetivo vários procedimentos de regularização e renormalização são conhecidos e utilizados. Entre eles destaca-se a regularização dimensional. Nesse contexto, tem-se apontado que a regularização dimensional apresenta resultados inconsistentes com os esquemas que regularização por corte ("cutoff"), por exemplo [6]. Assim um estudo futuro comparando-se os diferentes esquemas utilizando-se potenciais singulares do tipo  $r^{-2}$ , no âmbito da mecânica quântica relativística e não-relativística trará um maior entendimento sobre esse aspecto.

O estudo e o efeito de diferentes esquemas de regularização e conseqüente renormalização

das equações de espalhamento de dois e três corpos usando-se uma interação de dois corpos com comportamento singular é uma extensão natural desse trabalho e poderá ser um importante campo de prova para o procedimento de renormalização aqui apresentado e para verificação da validade das equações de grupo de renormalização para a matriz- $T$  apresentadas no capítulo 4.

Estudos no sentido atacar a primeira frente apresentada acima já estão em andamento e serão apresentados futuramente.

## Relação das Tabelas

|      |  |     |
|------|--|-----|
| 2.1  | Contribuições Cinética e Potencial do Hamiltoniano . . . . .     | 28  |
| 2.2  | Resultados para as Observáveis de Dois e Três Núcleons . . . . . | 29  |
| 2.3  | Valores para $\eta_d$ para Alguns Potenciais . . . . .           | 44  |
| 2.4  | Valores dos parâmetros $B(0)$ e $\eta_d$ . . . . .               | 45  |
| 5.1  | Resultados Numéricos para os Esquemas de Regularização . . . . . | 108 |
| 5.2  | Desconexões de Fase para Regularizar 30 MeV                      | 109 |
| 5.3  | Desconexões de Fase para Regularizar 30 MeV                      | 110 |
| 5.4  | Desconexões de Fase para Regularizar 30 MeV                      | 111 |
| 5.5  | Desconexões de Fase para Regularizar 30 MeV                      | 112 |
| 5.6  | Desconexões de Fase para Regularizar 30 MeV                      | 113 |
| 5.7  | Desconexões de Fase para Regularizar 30 MeV                      | 114 |
| 5.8  | Desconexões de Fase para Regularizar 30 MeV                      | 115 |
| 5.9  | Desconexões de Fase para Regularizar 30 MeV                      | 116 |
| 5.10 | Desconexões de Fase para Regularizar 30 MeV                      | 117 |
| 5.11 | Desconexões de Fase para Regularizar 30 MeV                      | 118 |

## Relação das Figuras

|     |   |     |
|-----|---|-----|
| 2.1 | Potenciais Nucleares: comparação entre potenciais . . . . .             | 33  |
| 2.2 | Potenciais Nucleares: potenciais de Bonn e Argonne . . . . .            | 34  |
| 2.3 | Potenciais Nucleares: potenciais realísticos . . . . .                  | 35  |
| 2.4 | Parâmetro de Mistura $\epsilon_{BB}$ até 100 MeV . . . . .              | 47  |
| 2.5 | Parâmetro de Mistura $\epsilon_{BB}$ até 300 MeV . . . . .              | 48  |
| 2.6 | Parâmetro de Mistura $\epsilon_1$ . . . . .                             | 49  |
| 2.7 | Parâmetro de Mistura $\epsilon_{BB}$ . . . . .                          | 50  |
| 5.1 | Deslocamentos de Fase para Regularizador $10 \text{ fm}^{-1}$ . . . . . | 109 |
| 5.2 | Deslocamentos de Fase para Regularizador $20 \text{ fm}^{-1}$ . . . . . | 110 |
| 5.3 | Deslocamentos de Fase para Regularizador $30 \text{ fm}^{-1}$ . . . . . | 111 |
| 5.4 | Dispersão do Deslocamento de Fase versus Regularizador . . . . .        | 112 |
| 5.5 | Matriz- $T$ Renormalizada Fora da Camada de Energia . . . . .           | 113 |

## Referências Bibliográficas

- [1] Adhikari, S.K., Tomio, L., Melo, J.P.B.C. e Frederico, T., *Shape-Independent Expansion for the  $^3S_1$ - $^3D_1$  Mixing Parameter*, Phys. Lett. B318, 14-18 (1993).
- [2] Blatt, J.M. e Biedernharn, L.C., *Neutron-Proton Scattering with Spin-Orbit Coupling I. General Expressions*, Phys. Rev. 86, 399 (1952 e Biedernharn, L.C. e Blatt, J.M., *Neutron-Proton Scattering with Spin-Orbit Coupling II. Variational Formulation and Effective Range Theory*, Phys. Rev. 93, 1387 (1954).
- [3] Adhikari, S.K., Araujo Jr., C.F. e Frederico, T., *Theoretical Prediction for the Low-Energy  $^3S_1$ - $^3D_1$  Mixing Parameters*, Phys. Rev. C50, R1 (1994).
- [4] Scaldeferri, K.A., Phillips, D.R., Kao, C.W. e Cohen, T.D., *Short Range Interactions in an Effective Field Theory Approach for Nucleon-Nucleon Scattering*, Phys. Rev. C 56, 679-688 (1997).
- [5] Lepage, G.P., *How to Renormalize the Schrödinger Equation* . in: Lectures at the VIII Jorge André Swieca Summer School, Brazil, 1997.
- [6] Phillips, D.R., Beane, S.R. e Cohen, T.D., *Regularization and Renormalization in Effective Field Theories of the Nucleon Nucleon Interaction* , Nucl. Phys. A 631,

- 447c-451c (1998).
- [7] Machleidt, R. e Sammarruca, F. e Song, Y., *The Non-Local Nature of the Nuclear Force and Its Impact on Nuclear Structure*, Phys. Rev. C53, R1483 (1996).
- [8] Byron, F.W. e Fuller, R.W., *Mathematics of Classical and Quantum Physics*, Vol.2, Add. Wesley, 1970.
- [9] Adhikari, S. K. e Kowalski, K. L., *Dynamical Collision Theory and Applications*, New York Academic (1991).
- [10] Machleidt, R., Holinde, K. e Elster, C., *The Bonn Meson Exchange Model for the Nucleon-Nucleon Interaction*, Phys. Rep. 149, 1-89 (1987).
- [11] Machleidt, R., *The Meson Theory of Nuclear Forces and Nuclear Structure*, Adv. Nucl. Phys. 19, 189 (1989).
- [12] Wiringa, R.B., Stoks, V.G.J. e Schiavilla, R., *An Accurate Nucleon-Nucleon Potentials with Charge-Independence Breaking*, Phys. Rev. C 51, p.38 (1995).
- [13] Frank, W.M., Land, D.J. e Spector, R., *Singular Potentials*, Rev. Mod. Phys. 43 (1974).
- [14] Adhikari, S.K., *Variational Principles and Numerical Solutions of Scattering Problems*, John Wiley & Sons, 1998.
- [15] Adhikari, S.K., Frederico, T., Goldman, I.D., *Perturbative Renormalization in Quantum Few-Body Problems*, Phys. Rev. Lett., 74, 487-491p. (1995).

- [16] Adhikari, S.K. e Frederico, T., *Renormalization Group in Potential Scattering*, Phys. Rev. Lett., 74, 4572-4575 p. (1995).
- [17] Weinberg, S., *The Quantum Theory of Fields*, Vol I., Cambridge University Press, 1995.
- [18] Araujo Jr., C.F., Tomio, L., Adhikari, S.K. e Frederico, T., *Renormalization: Numerical Application to Non-Relativistic Potential Scattering*. Proc. of XV Int. Conf. on Few Body Problems in Phys, p. 116-117. Local : Groiningen, Holland (1997).
- [19] Araujo Jr., C.F., Tomio, L., Adhikari, S.K., e Frederico, T., *Application of Renormalization to Potential Scattering*, Jour. of Phys. A, vol.30, p. 4687-4700 (1997).
- [20] Adhikari, S.K. e Ghosh, A., *Renormalization in Nonrelativistic Quantum Mechanics*, Jour. Phys. A. (1997).
- [21] Ghosh, A., Adhikari, S.K. e Talukdar, B. *Dimensional Versus Cut-off Renormalization and Nucleon-Nucleon Interaction*, pre-print, IFT-P.055/98, julho, 1998. (Submetido e aceito para publicação em: Phys. Rev. C. (1998).
- [22] Amado, R.D., *Soluble Problems in the Scattering from Compound Systems*, Phys. Rev. 132, 485 (1963).
- [23] Reid Jr., R.V., *Local Phenomenological Nucleon-Nucleon Potentials*, Ann. Phys. (N.Y.) 50, 411 (1968).
- [24] Pieper, S.C., *Separable Potentials for the Nucleon- Nucleon  $^3S_1$ - $^3D_1$  Channel*, Phys. Rev. C9, 883 (1974).

- [25] Machleidt, R. e Li, G.Q., *Nucleon-Nucleon Potentials in Comparison: Physics or Polemics ?*, Phys. Rept. 242, 5-35 (1994).
- [26] Araujo Jr., C. F, Tomio, L. e Adhikari, S.K., *Complex Kohn Variational Principle for Two Nucleon Bound State and Scattering with the Tensor Potential*, Jour. Comp. Phys., 118, 200 (1995).
- [27] Tomio, L., Araujo Jr., C.F. e Adhikari, S.K., *Complex Kohn Variational Principle for Two Nucleon Bound State and Scattering*, AIP Conf. Proc., 334, 829-832 (1994).
- [28] Tomio, L. e Adhikari, S.K., *Iterative Solution of Multichannel Three Body Equation* Phys. Rev. C22, 2356 (1980); Tomio, L. e Adhikari, S.K., *Method for Scattering Equations II. Iterative Solution*, Phys. Rev. C22, 28 (1980).
- [29] Tomio, L. e Adhikari, S.K., *Iterative Solution of Bound State Equations*, Phys. Rev. C24, 1186 (1981).
- [30] Faddeev, L.D., *Mathematical Aspects of the Three-Body Problem in Quantum Scattering Theory*, Davey, New York, 1965.
- [31] Araujo Jr., C. F., *O Princípio Variacional de Kohn Complexo para Solução da Equação de Lippmann-Schwinger com Potencial Tensorial*, Dissertação de Mestrado, IFT-D.005/93 (1993).
- [32] Vinh Mau, R., Richard, J.M., Loiseau, B., Lacombe, M. e Cottingham, W.N., *Nucleon-Nucleon Interaction from Pion-Nucleon Phase-Shift Analysis: the NN*

- peripheral partial waves*, Phys. Lett. B44, 1 (1973); Vinh Mau, R., *Mesons in Nuclei*, ed. M. Rho e D.H. Wilkinson, North-Holland, Amsterdam, 1979.
- [33] Stoks, V.G.J., Klomp, R.A.M., Terheggen, C.P.F. e Swart, J.J., *Construction of High Quality NN Potential Models*, Phys. Rev. C49, 2950-2962 (1994).
- [34] Wiringa, R.B., Smith, R.A. e Ainsworth, T.L., *Nucleon-Nucleon Potentials With and Without Delta (1232) Degrees of Freedom*, Phys. Rev. C29, 1207 (1984).
- [35] Lagaris, I.E. e Pandharipande, V.R., *Phenomenological Two Nucleon Interaction Operator*, Nucl. Phys. A359, 331-348 (1981).
- [36] Polls, A., Mütter, H., Machleidt, R. e Hjorth-Jensen, M., *Phaseshift Equivalent NN Potentials and the Deuteron*, nucl-th/9712055, 1997.
- [37] Song, Y. e Machleidt, R., *Off Shell NN Potential and Triton Binding Energy*, 14th International Conference on Few Body Problems in Physics, Williamsburg, Virginia, USA, Maio 26-31, 1994.
- [38] Henneck, R., *Phase-Shift Analysis of NN Scattering below 160 MeV: Indication for Strong Tensor Force*, Phys. Rev. C47, 1869-1875, (1993).
- [39] Ishikawa, S. e Sasakawa, T., *Nucleon-Nucleon Tensor Interaction and Triton Binding Energy*, Phys. Rev. C36, 2037 (1987).
- [40] Brandenburg, R.A., Chilik, G.S. e Machleidt, R., Picklesimer, A. e Thaler, R.M., *Essential Mechanisms in the Triton Binding*, Phys. Rev. C37, 1245 (1988).

- [41] Friar, J.L., Payne, G.L., Stoks, V.G.J. e Swart, J.J., *Triton Calculations with the New Nijmegen Potentials*, Phys. Lett. B311, 4 (1993).
- [42] Glöckle, W. e Kamada, H., *Alpha-Particle Binding Energies for Realistic Nucleon-Nucleon Interaction*, Phys. Rev. Lett. 71, 971 (1993).
- [43] Wong, D.Y., *One-Meson Contribution to Deuteron Quadrupole Moment*, Phys. Rev. Lett. 2, 406 (1959).
- [44] Mathelitsch, L. e Verwest, B.J., *Effective Range Parameters in Nucleon-Nucleon Scattering*, Phys. Rev. C29, 29 (1984).
- [45] Stapp, H.P., Ypsilantis, T., Metropolis, N., *Phase-Shift Analysis of 310 MeV Proton-Proton Scattering Experiments*, Phys. Rev. 105, 302 (1957).
- [46] Redish, E.F., *The Relation of Nonrelativistic Methods to Nuclear Physics*, Nucl. Phys. A463, 417c (1987).
- [47] Amos, K., Berge, L. Brieva, F.A., Katsofiannis, A., Petrus, L. e e Rikus, L., *Off-Shell Properties of Two Nucleon T-Matrix*, Phys. Rev. C37, 934, 934 (1988).
- [48] Yamaguchi, Y., *Two-Nucleon Problem When the Potential Is Nonlocal but Separable.I*, Phys. Rev. 95, 1628 (1954); Yamaguchi, Y. e Yamaguchi, Y., *Two-Nucleon Problem When the Potential Is Nonlocal but Separable.II*, Phys. Rev. 95, 1635 (1954).
- [49] Londergan, J.T. e Price, C.E. e Stephenson, E.J., *Stability of Angular Extrapolation Methods for Determining the Deuteron Asymptotic D-State to S-State*, Phys. Rev.

- C35, 902 (1987); Knutson, L.D., Colby, P.C. e Hichwa, B.P., *Determination of the  $D_2$  Parameter for  $(d,t)$  reactions*, Phys. Rev. C24, 411 (1981); Knutson, L.D. e Hichwa, B.P., Barroso, A., Eiro, A.M., Santos, F.D. e Johnson, R.C., *Effects of Triton  $D$ -State in  $(d,t)$  Reaction*, Phys. Rev. Lett. 35, 1570 (1975).
- [50] Wilburn, W.S. et al., *Measurements of Polarizes-Neutron- Polarizes-Proton Scattering: Implications for the Triton Binding Energy*, Phys. Rev. Lett. 71, 1982, (1993).
- [51] Arndt, R.A., Hyslop, J.S. e Ropper, L.D., *Nucleon-Nucleon Partial Wave Analysis to 1100 MeV*, Phys. Rev. D35, 128 (1987).
- [52] Arndt, R.A., Hackman, R.H. e Ropper, L.D., *Nucleon-Nucleon Scattering Analysis.2. Neutron-Proton Scattering From 0-MeV To 425 MeV and Proton-Proton Scattering From 1-MeV To 500 MeV*, Phys. Rev. C15, 1002 (1977).
- [53] Stoks, V.G.J., Klomp, R.A.M., Renmeester, M.C.M. e Swart, J.J., *Partial Wave Analysis of All Nucleon-Nucleon Scattering Data below 350 MeV*, Phys. Rev. C48, 792 (1993).
- [54] Weinberg, S., *Quasiparticles and the Born Series*, Phys. Rev. 131, 440 (1963).
- [55] Weinberg, S., *Systematic Solution of Multiparticle Scattering Problems*, Phys. Rev. 133, B232 (1964).
- [56] Gerjuoy, E., Rau, A.R.P. e Spruch, L., *A Unified Formulation of the Construction of Variational Principles*, Rev. Mod. Phys. 55, 725-774 (1983).

- [57] Adhikari, S.K. e Tomio, L., *Unified Formulation of Variational Approaches an Separable Expansions for the Solution of Scattering Equations*, Phys. Rev. C36, 1275-1285 (1987).
- [58] Miller, W.H. e Jansen op de Haar, B.M.D.D., *A New Basis Set Method for Quantum Scattering Calculations*, Jour. Chem. Phys. 86, 6213 (1987).
- [59] Kievsky, A., *The Complex Kohn Variational Method Applied to  $N - D$  Scattering*, Nucl. Phys. A624 125-139 (1997); Kievsky, A., Viviani, M. e Rosati, S., Phys. Rev. C., submetido. (1998).
- [60] Press, W.H., Teukolsky, S.A., Vetterling, W.T. e Flannery, B.P., *Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing*, Cambridge University Press (1992).
- [61] Isaacson, E. e Keller Bishop, H., *Analysis of Numerical Methods*, Dover Publications (1966).
- [62] Case, K.M., *Singular Potentials*, Phys. Rev. 80, 797 (1950).
- [63] Gosdzinsky, P. e Tarrach, R., *Learning Quantum Field Theory from Elementary Quantum Mechanics*, Am. J. Phys. 59, 70 (1991).
- [64] Perez, J.F. e Coutinho, A.B., *Schrödinger Equation in Two Dimensions for a Zero Range Potential and a Uniform Magnetic Field: An Exactly Solvable Model*, Am. Jour. Phys. 59, 52-54 (1991).
- [65] Mead, L.R. e Godines, J., *Analytical Example of the Renormalization in Two-Dimensional Quantum Mechanics*, Am. Jour. Phys. 59, 935-937 (1991).

- [66] Manuel, C. e Tarrach, R., *Perturbative Renormalization in Quantum Mechanics*, Phys. Lett. B328, 113-118 (1994).
- [67] Park, D.K., *Green's Function to Two- and Three Dimensional Delta Function Potentials and Application to Spin 1/2 Aharonov-Bohm Problem*, Jour. Math. Phys. 36, 5453-5464 (1995).
- [68] Cavalcanti, R.M. e Carvalho, C.A.A., *2D Eletron Gas in a Uniform Magnetic Field in the Presence of a  $\delta$ -Impurity*, Jour. Phys. A: Math. Gen., 31, 2391-2399 (1998).
- [69] Marinari, E. e Parisi, G., *On Polymers with Long-Range Repulsive Force*, Europhys. Lett. 15, 721 (1991).
- [70] Landau, L.D. e Lifchitz, E.M. *Quantum Mechanics Non-Relativistic Theory*, capítulo 5, Pergamon Press, New York, 1977.
- [71] Efimov, V., Phys. Lett. B33, 563 (1970); Sov. J. Nucl. Phys. 12, 589 (1971); Efimov, V., *Qualitative Treatment of Three-Nucleon Properties*, Nucl. Phys. A362, 45 (1981); Efimov, V. e Tkachenko, E.G., *Explanation of the Phillips Line in the Three-Nucleon Problem*, Phys. Lett. B157, 108 (1985).
- [72] Delfino, A., Frederico, T. e Tomio, L., *Long Range Local Effective Potential for a Three-Particle System*, Phys. Rev. C38, 11 (1988).
- [73] Abramowitz, M. e Stegun, I.A., *Handbook of Mathematical Functions*, Ed. Dover, New York, 1968.

- [74] Fearing, H.W., *Proton-Proton Bremsstrahlung and Information on Off-Shell Aspects of the Nucleon-Nucleon Force*, Nucl. Phys. A463, 95c (1987).
- [75] Thomas, L.H., *The Interaction between a Neutron and the Proton on the Structure of  $H^3$* , Phys. Rev. 47, 903 (1935).
- [76] Adhikari, S.K. e Tomio, L., *Efimov Effect in Three Nucleon System*, Phys. Rev. C26, 83 (1982).
- [77] Adhikari, S.K., Delfino, A., Frederico, T., Goldman, I.D. e Tomio, L., *Efimov and Thomas Effects and The Model Dependence of Three-Particle Observables in Two and Three Dimensions*, Phys. Rev. A37, 3666 (1988).
- [78] Alt, E.O., Grassberger, P. e Sandhas, W., *Reduction of the Three-Particle Collision Problem to Multichannel Two-Particle Lippmann-Schwinger*, Nucl. Phys. B2, 167 (1967).
- [79] Mitra, A.N., *Analyticity of Amplitudes and Separable Potentials*, Phys. Rev. 123, 1892 (1962).
- [80] Lovelace, C., *Practical Theory of Three-Particle States.I. Nonrelativistic*, Phys. Rev. 135, B1225-1249 (1964).
- [81] Amorim, A.E.A., *Aspectos Universais em Sistemas de Três Corpos*, Tese de Doutorado, IFT-T.004/97 (1997).
- [82] Amorin, A.E.A., Tomio, L. e Frederico, T., *Universal Aspects of Efimov States and Halo Nuclei*, Phys. Rev. C56, R2378 (1997).

- [83] Bedaque, P.F., Van Kolck, U., *Nucleon Deuteron Scattering from Effective Field Theory*, Phys. Lett. B 428, 221-226 (1998).

