UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Instituto de Geociências e Ciências Exatas Campus de Rio Claro

Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática

O USO DE CALEIDOSCÓPIOS NO ENSINO DE GRUPOS DE SIMETRIA E TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS

PAULO ROBERTO VARGAS NEVES

Dissertação de Mestrado elaborada junto ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática - Área de Concentração em Ensino e Aprendizagem da Matemática e seus Fundamentos Filosóficos-Científicos, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Claudemir Murari

Rio Claro – SP

2011

PAULO ROBERTO VARGAS NEVES

O USO DE CALEIDOSCÓPIOS NO ENSINO DE GRUPOS DE SIMETRIA E TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS

Dissertação de Mestrado elaborada junto ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática - Área de Concentração em Ensino e Aprendizagem da Matemática e seus Fundamentos Filosóficos-Científicos, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

Comissão Examinadora

Marcelo José Saia

Miriam Godoy Penteado

Claudemir Murari (orientador)

Rio Claro, 16 de novembro de 2011

Resultado: Aprovado

Dedico ao meu pai que esteve presente em todos os momentos, à minha mãe, exemplo de amor e bondade, aos meus irmãos, Célia, Cyro e Sônia pela fiel torcida e às minhas sobrinhas, minha eterna fonte de alegria.

AGRADECIMENTOS

Expresso meus agradecimentos a todos que participaram da jornada que resultou nessa dissertação.

Em especial a minha família, por tudo que me proporcionou e me proporciona e simplesmente por existir.

A minha noiva Dani, pela paciência, cumplicidade e apoio, principalmente nos momentos difíceis da realização deste trabalho. Sua presença tornou os obstáculos muito menos árduos e minha vida muito mais feliz.

Ao meu orientador, Claudemir, pela orientação e pela confiança depositada.

A Lenis Murari e Carla Alves, pelas sugestões e correções do texto que tanto me auxiliaram.

Aos membros da Banca, Miriam e Marcelo por suas valiosas contribuições no exame de qualificação.

Aos amigos que revi ao voltar a UNESP, aos funcionários Ana, Elisa, Inajara, Lê, Ricardo e Zezé, e professores, que muito auxiliaram com conversas, dicas, empréstimos de livros e sugestões.

Aos meus colegas e amigos da PGEM, que participaram desse trabalho nutrindo minhas reflexões através de debates, aulas, seminários e conversas.

Aos amigos que muito incentivaram e contribuíram, e sem os quais esse trabalho não existiria: Marco Escher, Pablo, Sir Willian XX, Mário, “tio” Helio, Rodrigo “encantado”, Lucieli, Carla, Doug, Gra, Vina, Inajara e Helinho.

A todos que de alguma maneira contribuíram e estiveram presentes nesse momento da vida, muito obrigado.

RESUMO

Este trabalho teve o objetivo de produzir um conjunto de atividades para analisar como o uso do caleidoscópio associado ao estudo dos ornamentos planos pode contribuir no ensino de grupos de simetria e transformações geométricas em um curso de graduação em Matemática**.** Esta pesquisa tem caráter qualitativo e foi desenvolvida segundo a proposta metodológica de Romberg. Elaborou-se uma proposta de ensino baseada na metodologia de Resolução de Problemas que foi aplicada a um grupo de professores (alguns em fase de formação) de matemática. As atividades tiveram a finalidade de fazer com que os alunos usassem o caleidoscópio para reproduzir ornamentos planos e, a partir de então, discutissem, com base em argumentos geométricos e algébricos, quais as possibilidades (e impossibilidades) que esse instrumento oferece para obtenção desses ornamentos e suas respectivas justificativas. A coleta de dados ocorreu, essencialmente, por observação participante em sala de aula por meio do uso de questionários, anotações e registros fotográficos. Após a coleta de dados, foi feita uma análise das possibilidades e limitações do material desenvolvido para o ensino de grupos de simetria e transformações geométricas, bem como o uso do caleidoscópio enquanto recurso didático.

Palavras-chave: Caleidoscópio, Teoria dos Grupos, Simetria, Transformações Geométricas, Ornamentos Planos, Papéis de Parede

ABSTRACT

The purpose of this work was to develop a set of activities to analyze how the use of kaleidoscope associated to the study of ornaments can contribute to the teaching of symmetry groups and geometric transformations on a undergraduate course in Mathematics. This is a qualitative research and it was developed according to the methodological proposal of Romberg. A teaching proposal was drafted and was applied to a group of mathematics teachers. Activities were designed following the methodology of problem-solving and intended to make students to use the kaleidoscope to reproduce some ornaments and thereafter, discuss, based on geometric and algebraic arguments, the possibilities and impossibilities that this tool provides to obtain ornaments and their respective justifications. Data collection occurred primarily by participant observation in the classroom through the use of questionnaires, notes and photographic records. After the end of the course a viability analysis of the activities was done (possibilities and limitations) for teaching symmetry groups and geometric transformations as well as the use of Kaleidoscope as a didactic tool.

Key words: kaleidoscope, Groups Theory, Symmetry, Geometric Transformations, Ornaments, Wallpaper

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO.....7

1. SIMETRIA.....9

2. METODOLOGIA DE PESQUISA.....21

2.1 O Modelo de Romberg.....22

3. CALEIDOSCÓPIOS.....29

3.1 Reflexão em um espelho.....31

3.2 Caleidoscópios com dois espelhos.....31

3.3 Caleidoscópios com três espelhos planos.....35

3.4 Caleidoscópios com quatro espelhos.....36

3.5 Pavimentações uniformes.....37

3.6 Bases geradoras e bases transformadas.....40

4. GRUPOS DE TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS NO PLANO.....43

5. ORNAMENTOS PLANOS.....63

5.1 Rosetas.....64

5.2 Faixas ou Frisos.....75

5.3 Papéis de Parede.....85

6. APRESENTAÇÃO E ESTUDO DOS DADOS.....101

CONSIDERAÇÕES FINAIS.....135

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....138

ANEXOS.....141

INTRODUÇÃO

A origem deste trabalho se deu durante uma aula de teoria dos grupos, na disciplina de álgebra, ministrada pelo professor Claudemir Murari neste programa de pós graduação. Na ocasião, ele destacava a relação das simetrias dos polígonos regulares com os grupos de permutações e os grupos de simetria. Ao final da aula procurei o professor Claudemir dizendo que havia me interessado pelo assunto e queria apresentá-lo como trabalho final da disciplina. Naquele momento, enquanto me indicava algumas leituras sobre o tema, ele mencionou algo que o intrigava há algum tempo: a afirmação feita por Coxeter (1948) o qual dizia ser possível fazer demonstrações práticas de resultados de grupos cíclicos e diedrais utilizando espelhos articulados.

Enquanto me preparava para apresentar o trabalho final da disciplina, outra afirmação no prefácio do livro *Groups and Simmetry* (ARMSTRONG, 1988) chamou minha atenção: "*Numbers measure size, groups measure simmetry*". Como pode ser possível grupo medir simetria?

O contato com um tema tão interessante para mim, as conversas com o professor Claudemir e as leituras indicadas por ele culminaram na proposta de desenvolver uma dissertação de mestrado que tem por objetivo:

Produzir um conjunto de atividades para analisar como o uso do caleidoscópio pode contribuir no ensino de grupos de simetria e transformações geométricas em cursos de graduação em Matemática.

Levando em consideração a linha de pesquisa na qual estamos inseridos foi elaborada uma seqüência de atividades envolvendo conhecimentos sobre caleidoscópios, transformações geométricas, grupos de simetria e ornamentos planos seguindo a metodologia de Resolução de Problemas. Foi oferecido um curso de extensão a futuros professores, alunos que estavam cursando a partir do segundo ano de licenciatura e bacharelado em matemática, mestrandos e doutorandos do programa de pós graduação em Educação Matemática e mestrandos em Matemática, além de um professor da rede pública de ensino para posterior análise das possibilidades e limitações desta proposta.

Na condição de pesquisa qualitativa, busquei em Romberg (2007) e Bogdan & Biklen (1994), subsídios para o planejamento dessa pesquisa e a análise dos dados coletados.

Para estudar os ornamentos planos apoiei-me nas obras de autores como Martin (1996), Armstrong (1988), Farmer (1999), Ferreira (1996) e Areas (1999) nos quais encontrei sustentação teórica para descrever e caracterizar os ornamentos planos. No que diz respeito aos caleidoscópios, recorri a Murari (1999), Barbosa (1957), Coxeter (1961), Batistela (2005) e Bellingeri, P; Di Sieno, M. D. S; Turrini, C. (2003).

Assim, o trabalho encontra-se dividido em seis capítulos:

No capítulo 1 inicia-se o desenvolvimento da ideia de simetria, partindo do senso comum e seguindo em direção a uma formalização mais refinada desse conceito.

O capítulo 2 apresenta a problemática, bem como a metodologia de pesquisa.

No terceiro capítulo há um estudo do caleidoscópio, no qual apresentamos argumentos para a sua utilização na sala de aula e as condições necessárias para que haja repetição perfeita de imagens.

O capítulo quatro apresenta o referencial teórico matemático que dá sustentação a este trabalho e a Teoria dos Grupos e as Transformações Geométricas são abordadas.

No capítulo 5 o objeto é estudar os ornamentos planos. As possibilidades de uso do caleidoscópio para a reprodução de rosetas, faixas e papéis de parede são justificadas geométrica e algebricamente assim como a visualização das propriedades das transformações geométricas e das operações dos elementos dos grupos de simetria.

O capítulo 6 trata da descrição dos dados que envolve a apresentação e a análise das informações coletadas durante a aplicação das atividades aos sujeitos desta pesquisa.

Por fim são apresentadas as considerações finais da pesquisa, onde são discutidas as limitações e possibilidades desse trabalho e levantadas questões sobre maneiras de aperfeiçoá-lo, seja no plano de aplicações das atividades, seja nas possibilidades que emergem desta pesquisa.

CAPÍTULO 1: SIMETRIAS

Do ponto de vista do saber popular, do senso comum e também das narrações históricas, a simetria é considerada uma forma de perfeição, harmonia, busca do belo, por equilíbrio e é encontrada em muitos elementos como, por exemplo, plantas, animais e cristais. Ela está presente tanto na estética como na arte, na tecnologia e nas ciências naturais e é percebida desde os tempos mais remotos na cultura das mais diferentes civilizações, em cestas, tecidos, tigelas, construções etc.

Um exemplo de simetria em edificações feitas pelos homens com a finalidade de ornamentação é o Palácio de Alhambra, em Granada, na Espanha. Construído pelos mouros entre os anos de 1230 e 1354, durante o auge da cultura desse povo na Espanha, nele aparecem os dezessete tipos de padrões que pavimentam o plano. Como por razões religiosas nem figuras humanas nem de animais eram utilizadas em suas pinturas e ornamentos, os motivos geométricos apareciam de forma exclusiva, o que deu ao palácio de Alhambra um lugar de destaque no que se refere à manifestação artística da humanidade.

Atualmente este conceito está presente em vários campos do conhecimento como, por exemplo, na Cristalografia (metalurgia e geologia), na Biologia (arranjo das células nos tecidos), na comunicação (melhoramento e compactação de imagens e códigos secretos), na Física e em estudos sobre estruturas moleculares em Química, além da própria Matemática.

O ensino deste assunto como um campo da Matemática se justifica, entre outros motivos, devido ao dinamismo que imprime à Geometria, porque desenvolve nos alunos a capacidade de observação de movimentos feitos em figuras geométricas em seu cotidiano. Podemos também ressaltar o uso de simetria no conceito de números simétricos ou opostos, no estudo de gráficos de curvas, nas relações de seno, cosseno e tangente no círculo trigonométrico, além do conteúdo de álgebra do ensino superior.

Além dos argumentos já citados, é importante notar que estamos rodeados de simetria no nosso dia-a-dia. Como exemplos, são apresentadas neste trabalho algumas figuras que foram identificadas em pisos, paredes, muros, calçadas e nas ruas enfeitadas para a procissão de Corpus Christi, em junho de 2009 na cidade de Rio Claro-SP.

Mas afinal, o que é simetria?

Muitas vezes, quando nos deparamos com uma imagem, procuramos, até de forma inconsciente, alguma simetria na figura; somos capazes de dizer se o que estamos vendo nos agrada ou não, ou se preferiríamos que fosse introduzido algum elemento que quebrasse a simetria. Logo, sabemos, de certa maneira, do que estamos falando quando nos referimos à simetria. Mas como responder à questão acima?

A simetria está relacionada com ritmo, com algo periódico, mas esse elemento que ocorre periodicamente pode se repetir de diversas maneiras e, portanto, para responder à pergunta acima precisamos estabelecer um modo sistemático de caracterizar, comparar e classificar os modos distintos de como esse elemento se repete.

Suponhamos que estamos diante de uma situação na qual é preciso decorar um número composto por muitos algarismos. Algumas seqüências numéricas podem ser mais fáceis de memorizar que outras e isso pode ser tanto por motivos subjetivos (os números que lembram algo familiar como o telefone de alguém conhecido ou a própria data de nascimento), como por motivos objetivos, por exemplo, se o número apresenta uma determinada simetria. Se nos for pedido para memorizar 2405324053, tal tarefa será bastante facilitada se notarmos que a seqüência 24053 se repete duas vezes na composição daquela cifra. No entanto, o que devemos memorizar não é apenas <u>o que</u> se repete, mas <u>como</u> se repete. Se tomarmos outro número, por exemplo, 24053-35042, os algarismos 2, 4, 0, 5 e 3 aparecem duas vezes na composição daquela quantidade, assim como ocorreu com o 24053-24053, contudo seguindo "regras" de repetição diferentes, indispensáveis para reconstruir o número.

Desta maneira, tentaremos classificar, a seguir, as simetrias através de algumas "leis" ou "regras".

Classificação das simetrias de alguns ornamentos[1] geométricos

Podemos afirmar que a simetria é um fenômeno que acontece na natureza e pode ser analisado de diferentes formas, associando-o às porções que relacionam partes ao todo; à idéia de invariabilidade de alguns elementos (figuras geométricas, sons, números) através de uma relação entre eles e pode ser usada para classificar, organizar e mesmo prever alguns fatos. Mas que tipo de organização é essa? Como podemos classificá-la?

---

[1] Mais adiante daremos uma definição formal para esse termo.

Observemos as figuras a seguir:

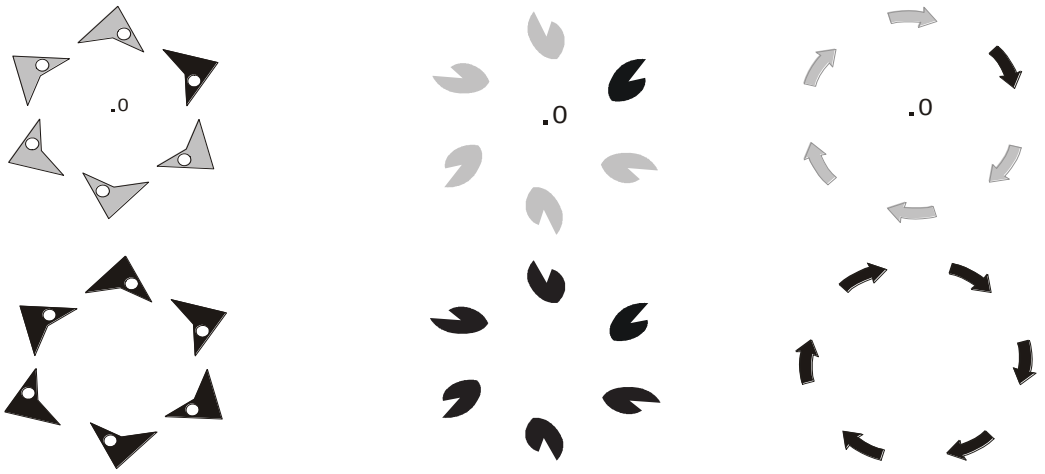


Figura 1.1

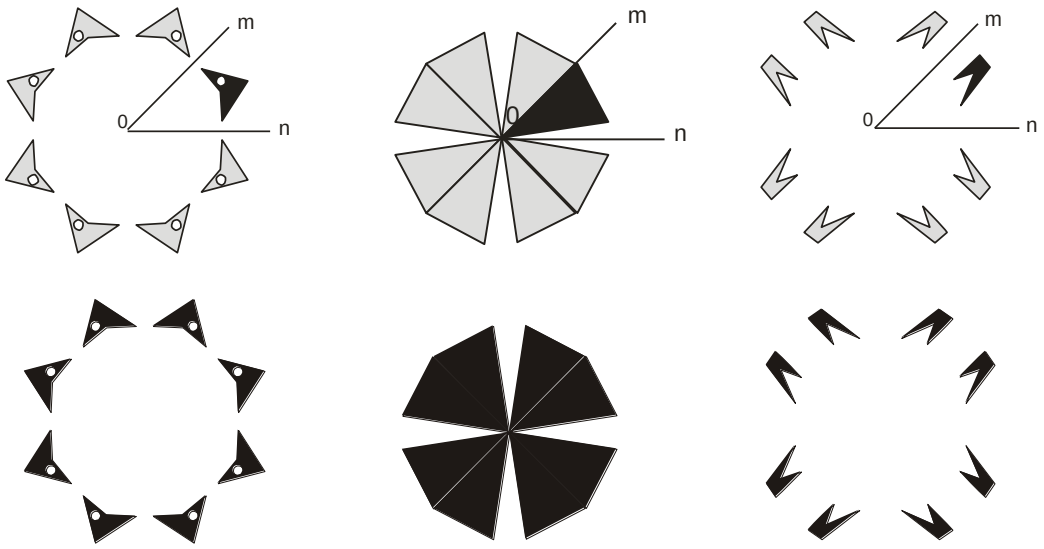


Figura 1.2

Podemos afirmar que os dois grupos de figuras apresentam simetria. Existe alguma relação entre eles?

No primeiro grupo, da Figura 1.1, temos um modelo (na linha de cima) e, a partir de seis rotações de 60° desse modelo em torno do ponto O obtemos a figura inteira que aparece na segunda linha desta mesma figura. Essa é a “regra” para a obtenção da figura completa a partir de um modelo. Poderíamos ainda pensar nessa regra para a figura toda. Diríamos, desta forma, que a figura não se alteraria se executássemos tais rotações. Uma boa maneira de

caracterizar os ornamentos da figura é dizer que estes apresentam apenas simetrias de **rotação**, ou rotacionais.

Outro ponto importante a ser ressaltado é que, embora as figuras tenham aspectos diferentes, estamos classificando-as como sendo de um mesmo tipo, pois o que mais nos importa não é **o que** se repete, e sim **como** se repete.

Já para a Figura 1.2, a "regra" é refletir relativamente à reta m o modelo da primeira linha e depois rodar esse conjunto (modelo e o seu reflexo) de 90° em torno do ponto O. Outra regra (usando apenas reflexões) seria refletir o modelo sucessivamente em relação às retas m e n (e suas respectivas imagens), obtendo assim a figura global. Mais adiante, descreveremos tal fato dizendo que esta figura completa possui quatro eixos de simetria.

Esta segunda regra corresponde à operação concreta de inserir o modelo entre dois espelhos planos (perpendiculares ao plano da figura e que formam entre si um ângulo de 45 graus) na posição das retas m e n. Outra questão importante é perceber que, num olhar mais atento ao ornamento (Figura 1.3) - agora comparando as duas regras - fazer uma rotação de uma porção do desenho é equivalente a fazer duas reflexões em relação às retas m e n (e suas respectivas imagens) e que o ângulo de rotação é duas vezes o ângulo entre essa duas retas.

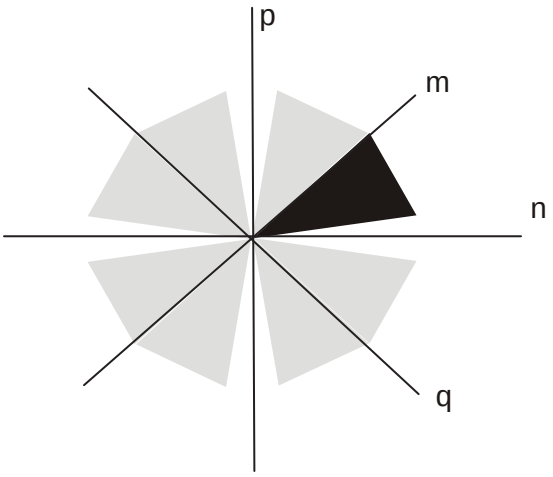


Figura 1.3 – Os quatro eixos de simetria

Os ornamentos presentes na Figura 1.2 são caracterizados como os que apresentam simetrias de **rotação** e **reflexão.**

Desta maneira, estamos começando a caracterizar, através de **regras**, algumas semelhanças e diferenças entre os diversos tipos de simetria: as imagens da Figura 1.1, de certo modo são semelhantes entre si (no que diz respeito à estrutura), mas são distintas das da Figura 1.2 que, por sua vez, se parecem todas. Se considerarmos as figuras inteiras nos

exemplos dados, podemos notar que algumas “transformações” [2] (reflexões ou rotações) as deixam globalmente fixas, isto é, embora algumas porções da figura tenham mudado de posição, o desenho como um todo permanece igual (e na mesma posição) que o inicial; chamamos tais “transformações” de **simetrias** da figura.

No desenvolvimento dessa dissertação faremos um estudo mais aprofundado do que estamos definindo como simetria, caracterizando as referidas “regras” de **como** um determinado modelo ou figura se repete, sob o olhar das transformações geométricas e da teoria dos grupos.

Examinemos o caso representado na ilustração abaixo. A Regra é: considerar o modelo e deslocá-lo para a direita, como indicado pela seta, infinitas vezes, e repetir tal procedimento para a esquerda usando uma seta de igual comprimento, direção e sentido contrário.

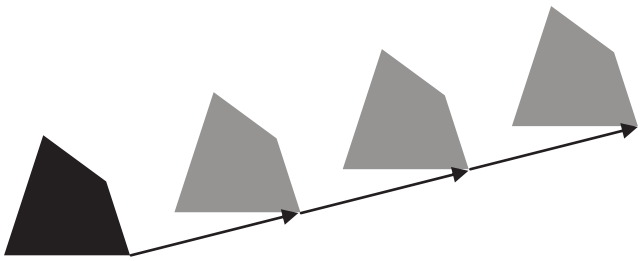


Figura 1.4

Nas ilustrações das figuras 1.1 e 1.2, discutidas anteriormente, as operações envolvidas eram rotações e reflexões e, bastava aplicá-las um número finito de vezes para que se retornasse à situação original. A operação que aparece agora é chamada de translação. Podemos iterá-la infinitas vezes (em teoria, pois na prática paramos quando chegamos à margem da folha) sem nunca voltar ao ponto de partida. É importante perceber que embora a translação desloque os pontos da figura, ela também fixa a figura no aspecto global. Se a tira da ilustração fosse prolongada até o infinito para a esquerda e para a direita, e se movêssemos a uma distância igual ao comprimento da seta da direção que esta determina, ainda veríamos exatamente o mesmo desenho.

O desenho da figura 1.5 também deve ser imaginado prolongado infinitamente, nos dois sentidos. Nestes, as regras para a construção do desenho inteiro são distintas das

[2] Essa palavra terá também, assim como ocorrerá com o termo “ornamentos”, uma definição formal no decorrer do trabalho.

anteriores: deve-se refletir o modelo (triângulo posicionado entre os espelhos) em relação à reta p e depois, considerando os dois modelos assim obtidos (o original e o seu reflexo), deslocá-los para a direita e para a esquerda.

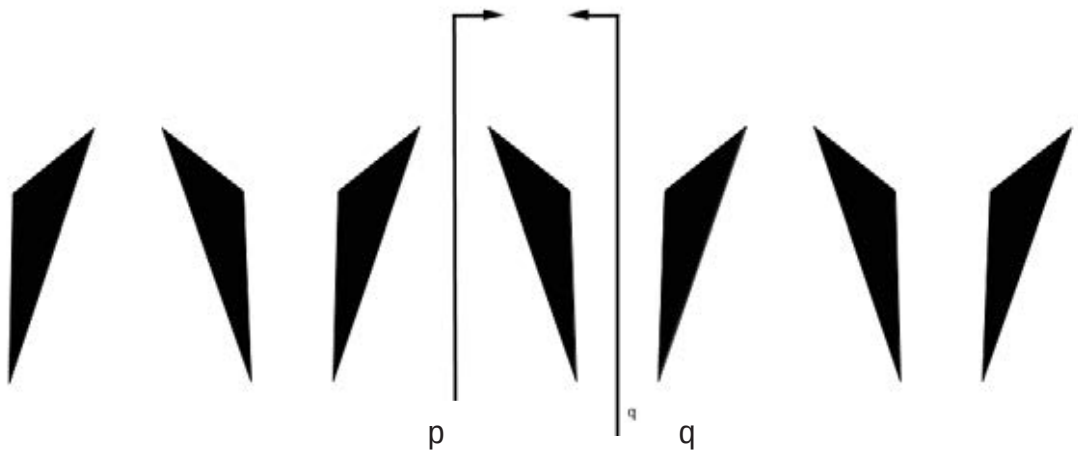


Figura1.5: Reprodução da figura: Refletir o modelo no espelho p e deslocá-los, a figura e seu reflexo, para a direita e a esquerda.

Outra regra, envolvendo apenas reflexões, é refletir o modelo em relação às retas p e q, bem como às imagens dessas duas retas obtidas no processo. Esta é outra situação na qual podemos reconstruir a figura usando espelhos. Neste caso, colocaríamos o modelo entre dois espelhos paralelos entre si que estariam nas posições das retas p e q.

Para melhor compreensão da segunda regra, que envolve apenas reflexões, colorimos os triângulos da figura 1.5. O modelo (triângulo preto), quando refletido nos espelhos posicionados sobre as retas p e q, gera os triângulos azuis. Estes, ao serem refletidos nos espelhos, dão origem aos vermelhos, que por sua vez tem como suas imagens os triângulos verdes

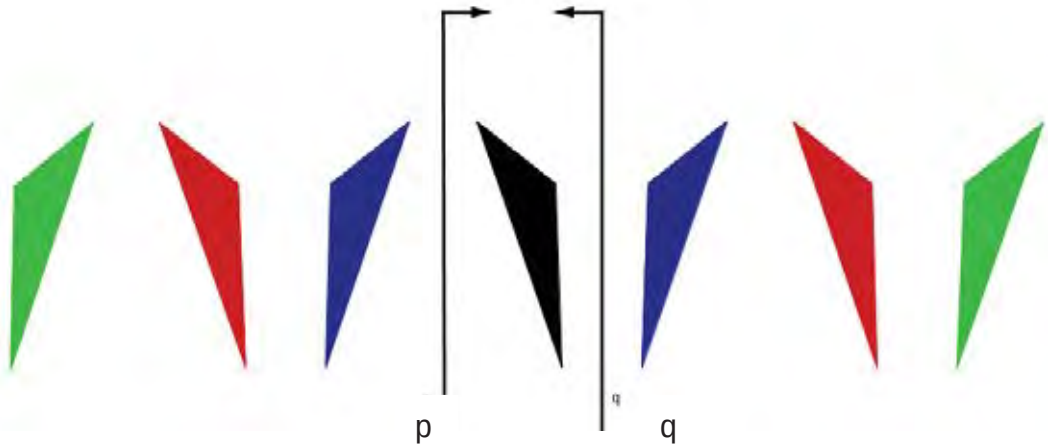


Figura1.6: Formação da figura por sucessivas reflexões.

É importante notar, seja pelo desenho, seja pelas regras citadas acima, que fazer uma translação equivale a fazer duas reflexões sucessivas em relação a duas retas paralelas (entre si e perpendiculares à direção da translação). Sendo assim, olhando novamente a ilustração 1.6, pode-se perceber que a distância de um ponto ao seu respectivo "transladado" é o dobro da distância entre as duas retas. Se tomarmos o triângulo azul da esquerda como referência e o refletirmos em relação à reta p, obteremos o triângulo negro. Se fizermos uma segunda reflexão, agora do triângulo preto em relação à reta q, chegamos ao triângulo azul da direita. Como a distância da figura ao espelho é a mesma a do espelho à sua imagem, conclui-se que a distância entre os dois triângulos azuis (que são um a translação do outro) é o dobro da distância entre os espelhos.

Dos exemplos que estudamos até agora, podemos dizer que encontramos duas categorias de simetrias:

- Primeira: por ocorrer apenas reflexões por retas oblíquas e rotações, leva o modelo à posição inicial;
- Segunda: desloca lateralmente o modelo de modo que este nunca volta à sua posição inicial.

O que percebemos na primeira categoria é um ornamento que, mesmo sendo rotacionado, permanece globalmente "no mesmo lugar". Mesmo podendo efetuar rotações de diversos ângulos distintos (estamos nos referindo às situações já vistas que aparecem apenas rotações ou rotações e reflexões), devido à característica de não haver nenhum tipo de deslocamento da figura (pensando no sentido global) diremos que essa é a categoria dos Grupos Finitos[3]. Não existem, além das duas estruturas exemplificadas nas figuras 1.1 e 1.2, outras categorias de grupos finitos.

Já na segunda categoria, por ocorrer uma transformação que desloca o desenho para os lados, vamos chamá-la de categoria dos Grupos Infinitos. Contudo, antes de falar dessa categoria profundamente, vamos conhecer uma última transformação, a Reflexão Deslizante (RD) que também recebe o nome de Reflexão Transladada, *Glide Reflection* ou Translação Refletida.

[3] Por hora, esse é apenas um nome que estamos dando para essa categoria. Futuramente associaremos tal nome ao sentido algébrico de grupo.

A RD é uma transformação que também desloca a figura para os lados, porém de uma maneira especial. Como o próprio nome sugere, trata-se da composição de uma reflexão em relação a uma reta r com uma translação (deslizamento) na mesma direção da reta r (ou vice versa). Assim, após ocorrer tal transformação é possível perceber um deslocamento lateral, mas de modo diferente daquele que ocorre na translação. Veja um exemplo:

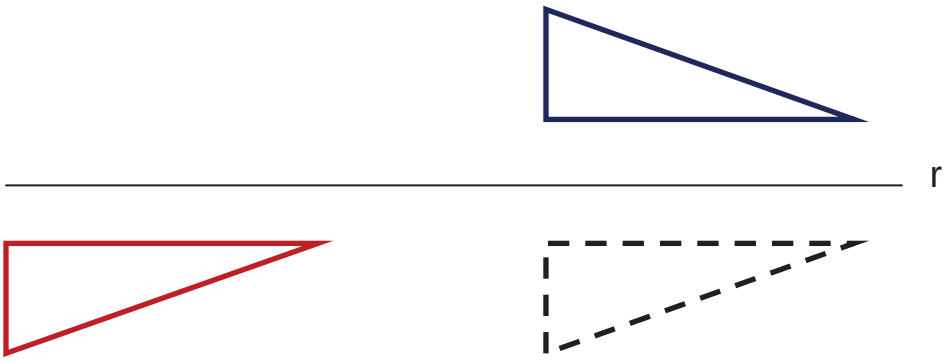


Figura 1.7: A Reflexão Deslizante passo a passo

Na Figura 1.7, refletindo o triângulo azul (modelo inicial) em relação à reta r e depois transladando seu reflexo (o triângulo pontilhado) tem-se por resultado o triângulo vermelho. Neste caso, o movimento rígido que transporta o modelo inicial até a posição do triângulo vermelho é a RD.

Uma forma alternativa de se caracterizar a Reflexão Deslizante é dizer que ela é uma composição de uma reflexão em relação a uma reta s, seguida de uma meia volta[4] (rotação de 180^0) em relação a um ponto P fora de s (na verdade, não necessariamente nessa ordem). Veja a mesma operação da figura anterior, agora executada da maneira alternativa.

O triângulo azul é refletido em relação à reta s. Quando é aplicada ao seu reflexo (o triângulo tracejado) uma meia volta em relação ao ponto P, a figura resultante é o triângulo vermelho. Ressalta-se que a figura tracejada não faz parte da RD e encontra-se no desenho apenas para ilustrar uma etapa intermediária da composição das duas transformações.

[4] Lembrando que uma rotação é a composição de duas reflexões por retas concorrentes cujo ângulo é o dobro daquele formado pelas duas retas, dizemos que uma meia volta é a composição de duas reflexões por retas perpendiculares.

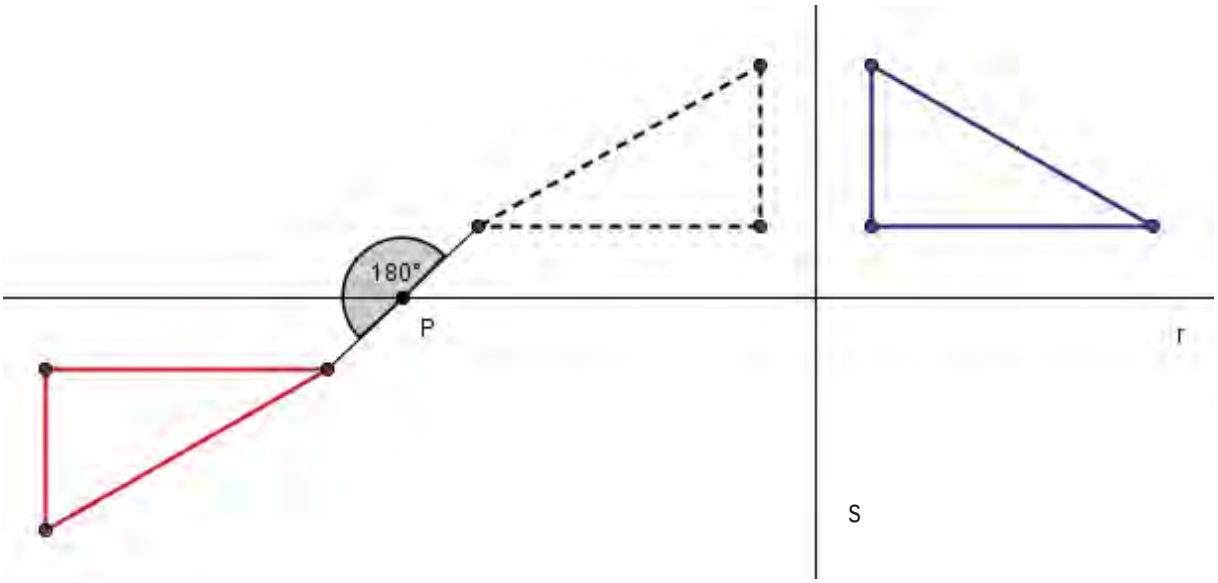


Figura 1.8: Forma alternativa de definir a RD

Um exemplo de sucessivas ocorrências de RD são as pegadas deixadas por uma pessoa caminhando em linha reta, ilustradas abaixo:

Figura 1.9

Agora que já estamos mais familiarizados com as RD's, podemos nos atentar novamente para o fato de que a ocorrência sucessiva de duas reflexões deslizantes corresponde a uma translação. Para perceber isso com mais clareza, reparemos na primeira pegada (a que se encontra acima e a esquerda) da figura 1.10. Após uma RD, ela se desloca para baixo da linha central destacada na figura e, aplicando a RD uma segunda vez, a pegada se desloca para cima da linha central. Essa nova imagem é exatamente a primeira pegada transladada para frente.

Figura 1.10

Retornemos agora aos Grupos Infinitos. A figura 1.11 mostra mais alguns exemplos:

Figura 1.11: mais exemplos de grupos infinitos

A pergunta que surge é: além dessas faixas em que aparecem somente translações e reflexões deslizantes, existem outros tipos de faixas? Olhando com mais atenção é possível perceber na figura acima algumas faixas nas quais ocorrem outras transformações além das duas já citadas anteriormente. Quais simetrias podem ocorrer nessas faixas? Qual a quantidade de faixas que se pode criar considerando, como fizemos anteriormente com os grupos finitos, a estrutura e não os diversos tipos de modelos? Existem outros tipos de grupos infinitos?

Em relação às faixas, existem apenas sete tipos delas e a justificativa dessa afirmação é dada no capítulo 5. No que diz respeito a outros tipos de grupos infinitos no plano, existe uma categoria chamada de Papéis de Parede, Padrões ou Grupos Cristalográficos, que é caracterizada por se estender indefinidamente por duas direções diferentes, de forma a cobrir inteiramente o plano. Dos 17 tipos de Papéis de Parede, apenas sete podem ser visualizados com caleidoscópios; assunto que também será abordado no quinto capítulo. A seguir, são

apresentados quatro Padrões e as respectivas maneiras de visualizá-los utilizando caleidoscópios.

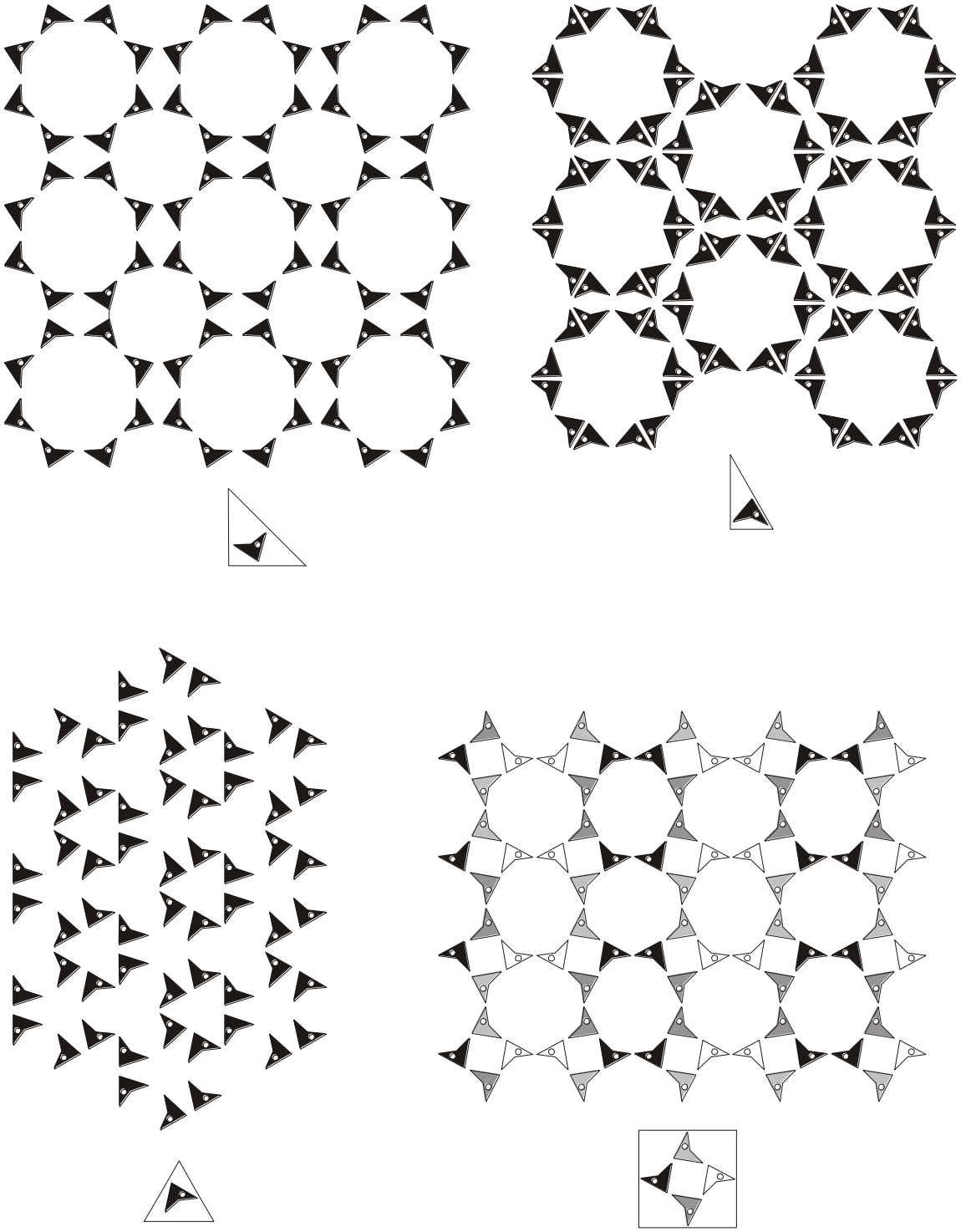


Figura 1.11: Papéis de parede e o respectivo modelo posicionado no interior do caleidoscópio que permite sua visualização

A figura 1.12 ilustra um tipo de Grupo Cristalográfico que apresenta translações e rotações e não pode ser visto com o auxílio de espelhos.

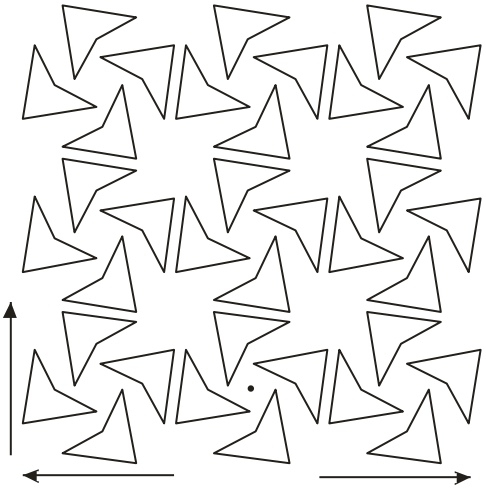


Figura 1.12: Papel de Parede que não pode ser visualizado pelo caleidoscópio.

CAPÍTULO 2: METODOLOGIA DE PESQUISA

A pesquisa científica sempre procede de uma inquietação, de uma conjectura ou de alguma questão que se queira responder. Este trabalho de investigação, conforme dito anteriormente, originou-se da discussão das possibilidades de uso dos caleidoscópios associados ao estudo dos ornamentos planos, como contribuição no ensino de grupos de simetria e transformações geométricas.

A metodologia para o desenvolvimento desta dissertação está ancorada na pesquisa qualitativa. Nesta modalidade de investigação existe interação entre sujeito e objeto e o contexto é considerado na significação da análise dos dados da pesquisa, através de uma compreensão interpretativa dessas informações.

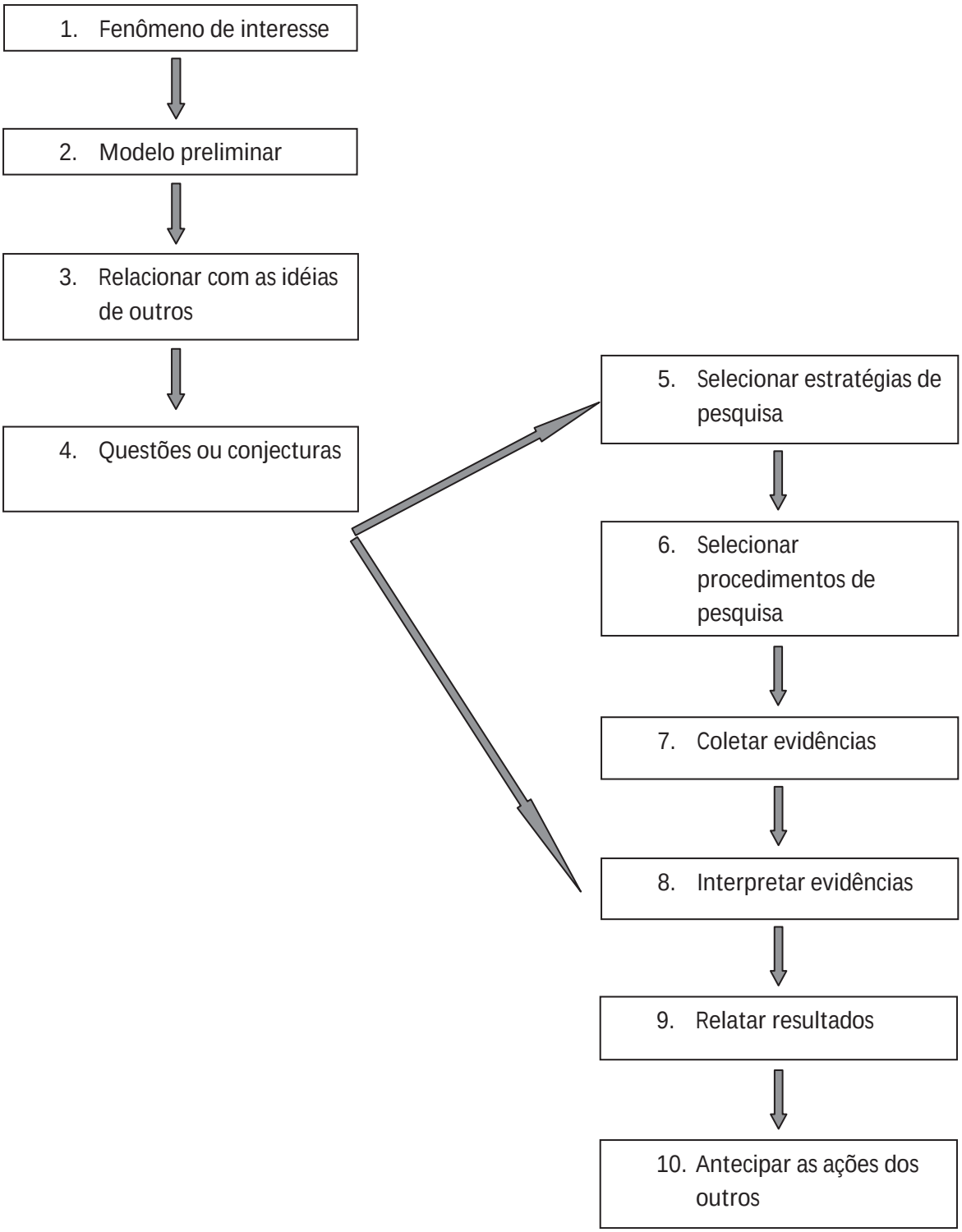
Segundo Bogdan e Biklen (1994), esse tipo de estudo apresenta cinco características: 1) a fonte de dados é o ambiente natural e o investigador é o instrumento principal; 2) é descritivo; 3) os investigadores interessam-se mais pelo processo do que pelo resultado; 4) a análise dos dados tende a ser indutiva; e 5) o significado é de importância vital nessa abordagem.

O caráter descritivo da investigação qualitativa tem por objetivo compreender melhor o processo por meio do qual as pessoas constroem significados, para, assim, descrever em que consistem esses mesmos significados, pois “o objetivo principal do investigador é construir conhecimento e não o de dar opiniões sobre determinado contexto.” (BOGDAN & BIKLEN, 1994, p. 67).

Numa situação de contato direto com os sujeitos, os dados obtidos nessa investigação foram registrados através de fotos, de questionários e atividades feitas pelos alunos e de anotações do pesquisador. Este proceder satisfaz as particularidades descritas nas cinco características acima e possibilita uma compreensão do contexto onde a pesquisa ocorreu.

Este trabalho foi estruturado na proposta metodológica de Romberg (ROMBERG, 1992), que sugere dez passos a serem seguidos numa pesquisa em Educação Matemática. Tais passos são listados abaixo e não aparecem, necessariamente, nessa ordem e, na prática, não se separam de forma tão nítida.

2.1 O modelo de Romberg

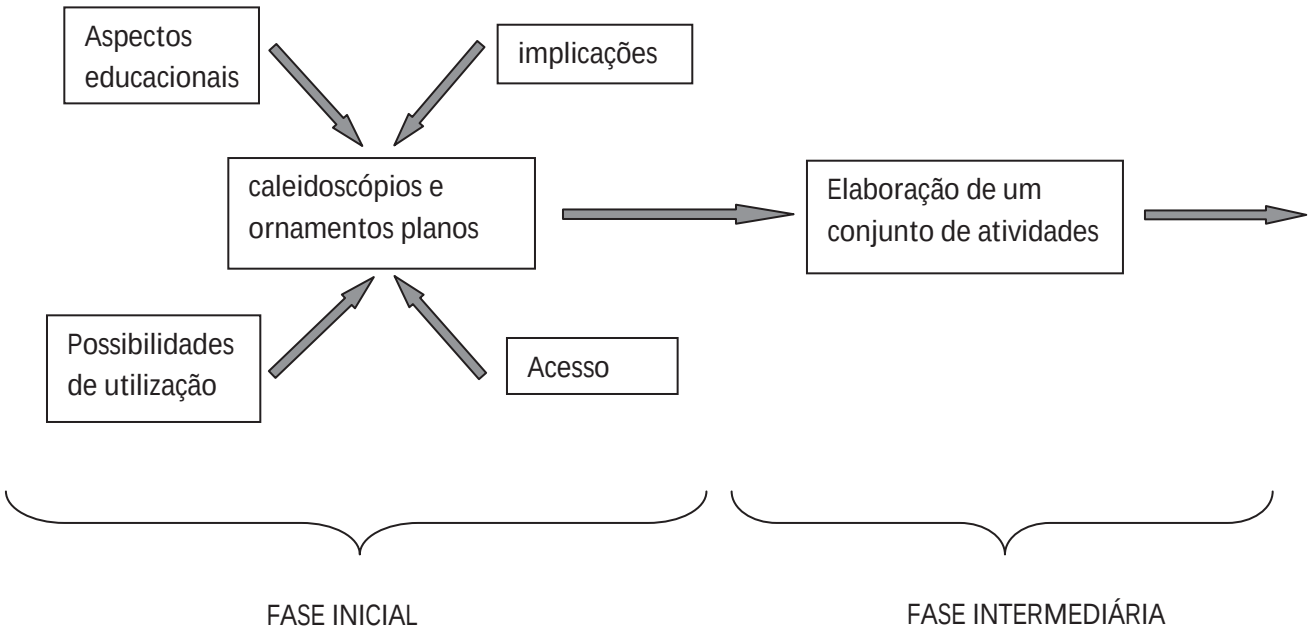


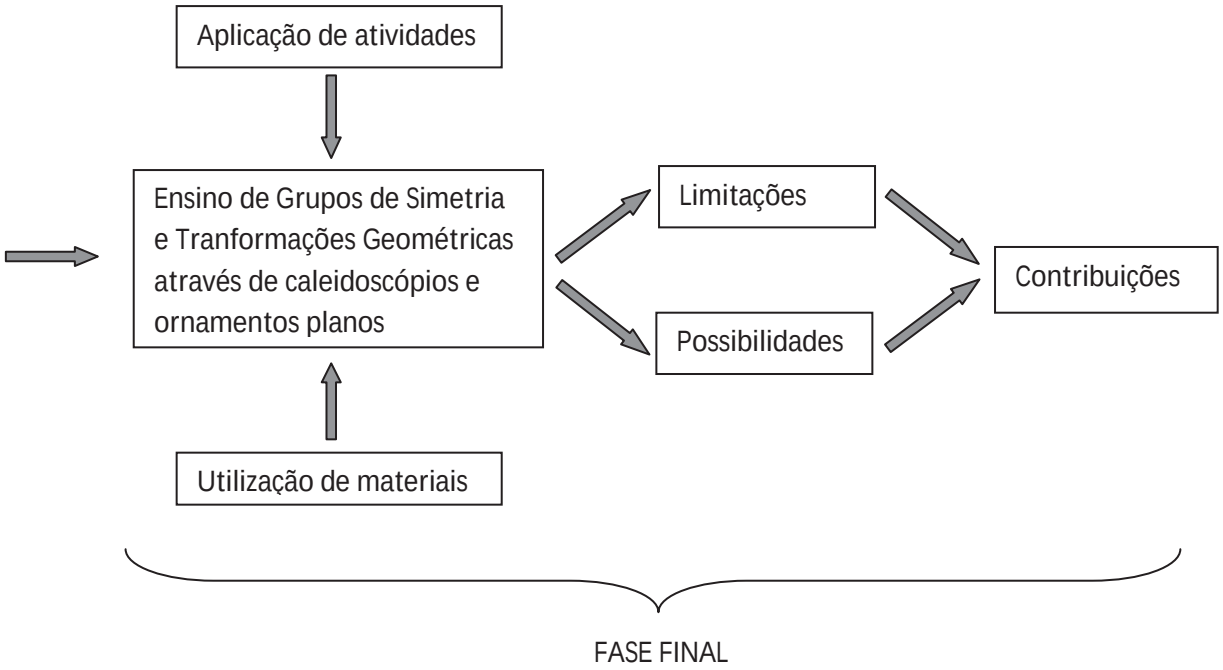
2.1.1 Identificando o fenômeno de interesse.

O fenômeno de interesse deste estudo é *O ensino de Grupos de Simetria e Transformações Geométricas utilizando caleidoscópio associado ao estudo dos ornamentos planos*.

2.1.2 Modelo Preliminar

O modelo preliminar serve como ponto de partida do trabalho. É um esquema que orienta o desenvolvimento da dissertação e é composto por variáveis que compõem o fenômeno e a maneira como elas se relacionam. Em seguida é apresentado o modelo elaborado na presente pesquisa:





2.1.3 Relacionando com idéias dos outros

A pesquisa realizada baseou-se no uso do caleidoscópio associado ao estudo dos ornamentos planos no ensino da geometria das transformações geométricas e grupos de simetria. Assim, embora não tenhamos entrado em contato com uma bibliografia que tratasse de todos esses temas simultaneamente, algumas referências foram importantes por abordar parte desses assuntos como:

- Areas (1999), Armstrong (1988), Coxeter (1961), Farmer (1999), Ferreira (1996), Ledergerber-Ruoff (1992) e Martin (1996) cujo foco é relacionar ornamentos planos e álgebra ou ornamentos planos e transformações geométricas.

- Barbosa (1957), Barbosa e Murari (1998), Batistela (2005), Murari (1999) e BellingeriDi Sieno e Turrini (2003) que estudaram o uso do caleidoscópio no ensino de geometria incluindo as transformações geométricas, mas não tão objetivamente no aspecto formal quanto fazemos neste trabalho.

É importante ressaltar que na literatura consultada sobre ornamentos planos, na maioria das vezes o nível abordado estava muito além ou muito aquém do que pretendemos neste trabalho, o que nos levou a escrever este texto de maneira a preencher essa lacuna que, sem perder o embasamento matemático formal, contivesse uma estrutura cuja leitura fosse

mais fluente, mais acessível ao futuro professor e, por vezes se valesse de resultados anteriormente provados sem a preocupação do rigor da demonstração formal nos argumentos.

Quanto à bibliografia acerca dos caleidoscópios, tivemos mais acesso por se tratar de um dos principais objetos de estudo do orientador desta dissertação, quer nas pesquisas de mestrado por ele também orientadas, quer na bibliografia e materiais dos quais ele já tinha conhecimento.

2.1.4. Estabelecendo conjecturas

No nosso caso, inicialmente, o fenômeno de interesse eram as contribuições do uso do caleidoscópio no processo de ensino e aprendizagem de grupos de simetria. Nesse sentido, foi elaborado o seguinte questionamento:

Como o uso dos caleidoscópios pode contribuir para o processo de ensino e aprendizagem dos grupos de simetria em um curso de graduação em matemática?

No decorrer do trabalho, entendemos que o estudo dos grupos de simetria seria algo muito amplo e decidimos limitar nossa análise para as simetrias do plano. Percebemos também que, ao abordar os grupos de simetria do plano, estávamos desenvolvendo dois assuntos subjacentes bastante relevantes e que, nesse novo contexto, passavam a fazer parte dos nossos objetivos: os ornamentos planos e as transformações geométricas. Assim, a pergunta que procuramos responder é:

Como o uso do caleidoscópio, associado ao estudo dos ornamentos planos, pode contribuir no processo de ensino e aprendizagem de grupos de simetria e transformações geométricas?

Após algumas reflexões notamos a importância do material desenvolvido para a discussão da questão acima proposta e, portanto, optamos por uma nova redação para o objetivo da pesquisa:

Produzir um conjunto de atividades para analisar como o uso do caleidoscópio pode contribuir no ensino de grupos de simetria e transformações geométricas em cursos de graduação em Matemática.

2.1.5 Selecionando a estratégia geral

Foi elaborado e aplicado um conjunto de atividades envolvendo Transformações Geométricas e Grupos de Simetria baseadas no estudo dos ornamentos planos (rosetas, faixas e papéis de parede) utilizando o Caleidoscópio e valendo-nos da metodologia de Resolução de Problemas.

Para o desenvolvimento desse conjunto de atividades convidamos alunos do curso de graduação em matemática da Universidade Estadual Paulista UNESP – Campus de Rio Claro, que já cursaram ou que estivessem cursando a disciplina de estruturas algébricas, professores da rede pública e alunos do curso de Pós-Graduação em Educação Matemática e Mestrado em Matemática Universitária desta instituição.

As atividades que foram aplicadas encontram-se no capítulo 6 desta dissertação.

2.1.6. Selecionando procedimentos específicos

Com a estratégia geral delineada, definimos os procedimentos que foram utilizados para esclarecer a questão proposta.

Retornando ao modelo preliminar apresentado na seção 2.1.2 e considerando-o por partes, temos na fase inicial um levantamento sobre os materiais e assuntos selecionados, no nosso caso o caleidoscópio e os ornamentos planos. Através da revisão bibliográfica foi feito um levantamento de suas possibilidades matemáticas e verificadas as potencialidades do seu uso em sala de aula, além das atividades que poderiam ser desenvolvidas para os estudos das transformações geométricas e grupos de simetria.

A fase intermediária, correspondente à idealização, foi a escolha, a reelaboração ou adaptações de atividades já existentes. Tínhamos, nesse momento, a finalidade de introduzir e orientar a compreensão sobre espelhos planos, caleidoscópios, ornamentos planos e teoria dos grupos de forma a melhor promover a formação de conceitos e o entendimento das transformações geométricas e grupos de simetrias.

A fase final do modelo refere-se à aplicação das atividades e à coleta de dados. Nesta parte foi usado o método da observação e o registro dos acontecimentos, e se deu por

anotações de campo do professor/pesquisador, fotografias e do recolhimento das atividades resolvidas pelos sujeitos do experimento de ensino.

2.1.7. Coletando as informações

A coleta de dados ocorreu através da observação dos sujeitos pelo próprio pesquisador durante cada um dos encontros ocorridos no primeiro semestre de 2011.

A aplicação do curso aconteceu às segundas feiras durante o período noturno na Universidade Estadual Paulista UNESP – campus de Rio Claro. A cada encontro era feita uma retomada das discussões da aula anterior e em seguida os alunos dividiam-se em grupos para resolver os problemas propostos.

O registro das informações foi feito por fotos e anotações, durante as reuniões e principalmente logo após as mesmas, de impressões do pesquisador em relação às situações, diálogos e ações mais significativas ocorridas no decorrer da execução das atividades. As atividades respondidas individualmente ou em grupos também constituem a parte documental do registro de informações.

2.1.8. Interpretando as informações

Esta corresponde à segunda parte da fase final, na qual foram organizadas, categorizadas e analisadas as informações coletadas com o intuito de responder a pergunta inicial da pesquisa.

A análise e interpretação dos dados iniciaram no período da sua coleta, especialmente no momento de registrar os acontecimentos observados na aula que acabara de acontecer, bem como na leitura das atividades resolvidas pelos alunos. Perceber o entendimento e as dificuldades dos sujeitos relativas aos conceitos de Simetria, Caleidoscópios, Teoria dos Grupos e Transformações Geométricas desenvolvidos no decorrer das atividades, foi bastante importante tanto no encaminhamento das próximas aulas como no desenvolvimento da percepção do pesquisador no sentido de acompanhar o processo de aprendizagem do tema de forma contínua.

Foi proposta na primeira e na última aula uma questão sobre o que cada um entendia sobre Simetria e qual a relação do tema com os conteúdos matemáticos presentes nos diversos níveis de ensino. O desenvolvimento das atividades, a descrição das informações recolhidas e sua análise encontram-se no capítulo seis deste trabalho de pesquisa.

As impressões e as considerações a respeito das contribuições, possibilidades e limitações da temática desenvolvida nesta dissertação são apresentadas nas considerações finais.

CAPÍTULO 3: CALEIDOSCÓPIOS

Há bastante tempo as reflexões em espelhos já fascinam o homem e, devido a essa curiosidade e encanto causados, as superfícies refletoras foram cada vez mais estudadas e aprimoradas. Segundo Batistela (2005), já em 1817 existia um brinquedo chamado caleidoscópio, patenteado em 1817 pelo físico escocês David Brewster. Tal objeto, de forma cilíndrica, era composto por espelhos dispostos longitudinalmente no seu interior formando um prisma triangular. Numa das bases desse prisma existiam pequenos vidros ou pedras coloridas que, refletidas pelos espelhos, formavam imagens múltiplas, imprevisíveis e muito bonitas. Esse brinquedo se tornou bastante popular e, ainda hoje, quase 200 anos depois, continua sendo vendido em várias versões. Etimologicamente o nome é derivado dos termos gregos *kalos* (belo), *eidos* (aspecto ou formas) e *skopien* (ver), ou seja, adaptando à Língua Portuguesa seria algo como “ver formas belas”.

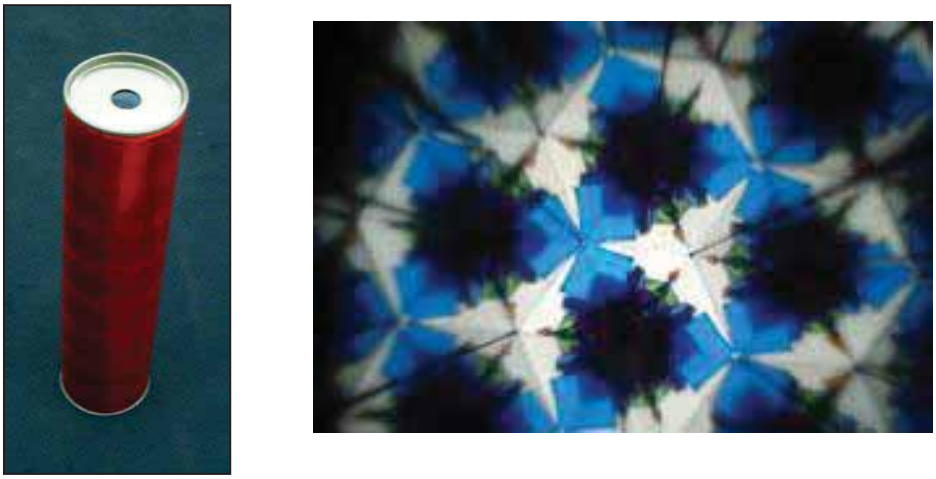


Figura 3.1: Caleidoscópio e a imagem visualizada, respectivamente.

Segundo Murari e Barbosa, no Brasil, os caleidoscópios apareceram como material didático inicialmente em obras de Física e Ciências. Atualmente, os professores Ruy Madsen Barbosa e Claudemir Murari são os nomes que mais se destacam nesse tema (com diversas publicações, entre artigos e orientações), na área de investigação da Educação Matemática.

Neste trabalho fazemos o uso do caleidoscópio educacional, um instrumento composto por um conjunto de espelhos planos (dois, três, ou quatro), que possibilita a obtenção repetida e perfeita de imagens.

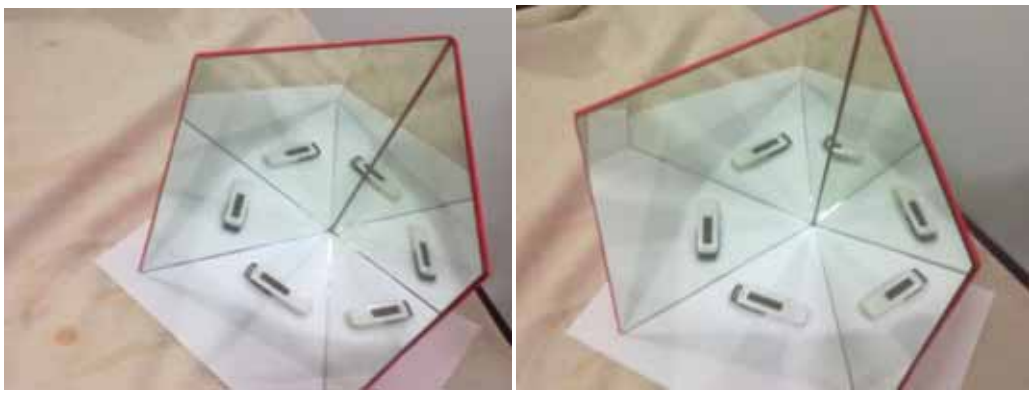


Figura 3.2: À esquerda, formação perfeita de imagens que não ocorre na figura da direita.

Ao contrário do caleidoscópio de uso recreativo, o de uso educacional permite a substituição das bases (pedrinhas, objetos e desenhos colocados entre os espelhos) e a previsão das imagens geradas. Existem também diferenças no que diz respeito à estrutura desses objetos. Com relação ao caleidoscópio de uso educacional, com três ou quatro espelhos planos, temos um deles um pouco menor, para permitir uma melhor visualização. Caleidoscópios com três ou quatro espelhos formarão prismas (triangulares ou retangulares) com as superfícies refletoras voltadas para a sua parte interna. No interior dos espelhos se colocam as figuras deliberadamente construídas, que chamaremos de bases caleidoscópicas, para que o indivíduo, ou o grupo de pessoas, visualizem a infinidade de imagens formadas. Denominamos de caleidoscópio também os conjuntos de dois espelhos, articulados ou não, cujas condições de formação perfeita de imagens serão estudadas mais adiante neste capítulo.

Figura 3.3: Caleidoscópio de dois espelhos articulados (à esquerda), caleidoscópio de três espelhos (ao meio) e sua respectiva base caleidoscópica (à direita)

Vamos, a seguir, descrever as principais características dos caleidoscópios como, por exemplo, as condições para produzir a repetição perfeita de imagem, o número de imagens formadas e suas respectivas justificativas.

3.1 Reflexão em um espelho

Antes de tratarmos da reflexão em dois espelhos planos acreditamos ser importante discorrer sobre algumas das propriedades da reflexão em um espelho plano, embasadas nas leis da ótica geométrica:

- o raio normal a superfície no ponto de incidência e o raio refletido estão num mesmo plano;
- o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão;
- a reflexão inverte a orientação do objeto, isto é, objeto e imagem são enantiomorfos (ao colocar a mão direita na frente de um espelho, a imagem que aparece é idêntica à da mão esquerda);
- a distância do objeto ao espelho é a mesma de seu reflexo ao espelho.

Outras propriedades geométricas da reflexão serão mais exploradas no capítulo 4 quando abordamos a reflexão como uma transformação geométrica.

3.2 Caleidoscópios com dois espelhos

Para o uso de dois espelhos temos duas situações possíveis:

- dois espelhos planos paralelos entre si;
- dois espelhos planos articulados.

3.2.1 Dois espelhos planos paralelos entre si

Quando dois espelhos planos estão posicionados perpendicularmente ao plano em que se apóiam e paralelos entre si, as duas imagens iniciais do objeto em cada um dos espelhos serão refletidas novamente nesses espelhos, determinando um número infinito de imagens. Observando o desenho abaixo, também é possível destacar algumas características

importantes, que serão abordadas formalmente mais adiante, como o caso de a reflexão inverter a orientação do objeto e o de que o "produto" de duas reflexões (ou seja, o fato de se fazer duas reflexões sucessivas), é uma translação de comprimento **2d**, onde **d** é a distância entre os dois espelhos.

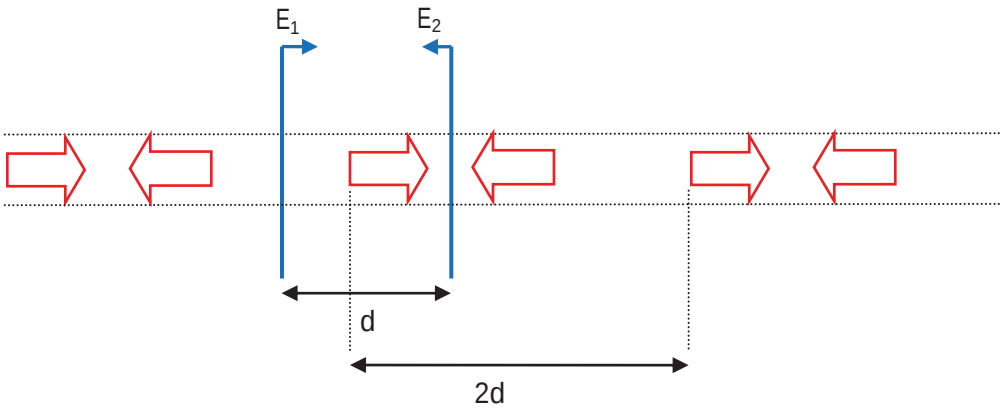


Figura 3.4

3.2.2 Dois espelhos planos articulados

Neste tópico abordamos as condições para que haja formação perfeita de imagens e a quantidade de imagens possíveis de se obter à medida que variamos o ângulo entre os espelhos.

Na figura seguinte, as semirretas de mesma origem OE1 e OE2 representam os dois espelhos planos articulados (cujas faces refletoras estão indicadas pelas setas) que estão posicionados perpendicularmente ao plano em que estão apoiados e, portanto, o ângulo convexo plano $E_1\hat{O}E_2$ corresponde ao diedro formado pelos espelhos.

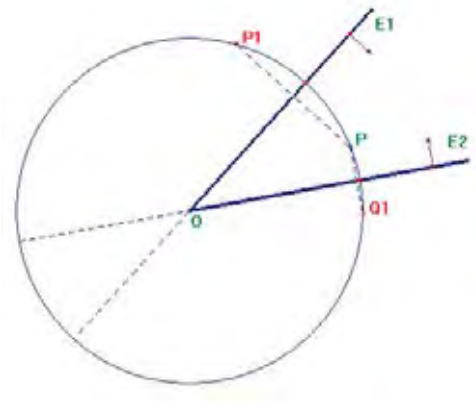


Figura 3.5

No caso de colocarmos um objeto pontual P entre os espelhos, teremos respectivamente em E1 e E2 as imagens P1 e Q1. Entretanto, como P1 está na frente do espelho E2 então P1 terá uma imagem e esta, por sua vez, terá uma nova imagem, agora em E1; e assim sucessivamente até que cesse a reprodução de imagens. Isto acontecerá por que a última imagem não ficou à frente de E1 nem de E2. O mesmo acontecerá com Q1.

A figura abaixo ilustra a formação sucessiva de imagens do ponto P nos espelhos articulados:

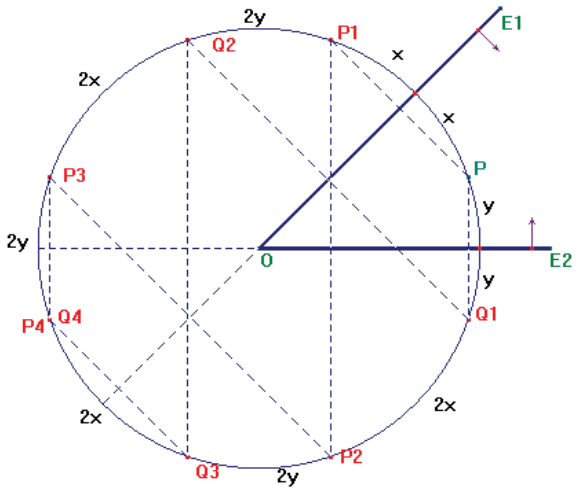


Figura 3.6

Por congruência de triângulos podemos afirmar que os segmentos OP, OP1 e OQ1 tem a mesma medida. Estendendo esse raciocínio é possível concluir que todas as imagens formadas pelos espelhos planos articulados estão sobre uma circunferência de centro O e raio de medida OP. Se as medidas dos arcos que iniciam no ponto P e terminam nos espelhos E1 e E2 são, respectivamente x e y, o mesmo argumento utilizado acima garante que os arcos $\widehat{PP1}$ e $\widehat{PQ1}$ tem medidas 2x e 2y, respectivamente, e ainda que as imagens se distribuem determinando ao longo da circunferência com arcos de medida 2x e 2y (ou 2y e 2x no sentido contrário) alternadamente.

3.2.2.1 Fórmula do Número de Imagens

Se z é a medida do ângulo entre os dois espelhos, cada vez que marcamos 2x + 2y (ou 2y + 2x) = 2 (x + y) = 2z obtemos duas imagens. Como consequência, para que as imagens coincidam marcando-se nos dois sentidos, é necessário que 2z seja divisor de 360^0. No caso

de 2z não dividir 360^0, marcando-se as imagens nos dois sentidos, haverá certamente a ocasião em que elas se tornarão improdutivas (por se localizam atrás dos espelhos, não mais produzirão imagens); portanto, não se pode continuar a marcação dos arcos 2x ou 2y.

Quando x = y (objeto P está no plano bissetor do diedro dos espelhos articulados) as imagens estarão sobre os vértices de um polígono regular. Tal argumento é justificado pelo fato de estarmos dividindo a circunferência em n arcos iguais (no caso de 2z dividir 360^0).

Em alguns livros de Física ou de Ciências é fornecida a fórmula para o cálculo do número de imagens $n = \frac{360^0}{z} - 1$ para quando z é um divisor de 360. Uma situação mais geral é descrita por Barbosa (1957) que calcula o número n de imagens: $n = \frac{360^0 - R}{z} + n'$, onde R é o resto da divisão de 360º por 2z e n´ = -1, 0, 1 ou 2, conforme os seguintes valores respectivos de R:

R	n´
0	- 1
0 < R ≤ 2x	0
2x < R ≤ 2y	1
2y < R < 2z	2

supondo x < y.

A figura 3.7 ilustra um caleidoscópio formado por dois espelhos planos articulados.

Figura 3.7: tira de papel colorido entre dois espelhos articulados formando um triângulo equilátero.

3.3 Caleidoscópios com três espelhos planos

Enquanto o caleidoscópio com dois espelhos planos articulados nos permite visualizar uma figura finita e limitada (por uma circunferência), o caleidoscópio com três espelhos, com estes dispostos na forma de um triângulo (na verdade, na forma de um prisma de base triangular), permite ao observador enxergar uma imagem infinita que se estende por todas as direções de modo a pavimentar o plano.

Como vimos no item anterior, os ângulos entre cada par de espelhos devem ser divisores inteiros de 180^0 (já que a condição para que as imagens coincidam é de 2z dividir 360^0), isto é, devem ser da forma $\frac{180^0}{m}$, $\frac{180^0}{n}$ e $\frac{180^0}{p}$, para m, n e p inteiros. Como se trata de ângulos internos de um triângulo, temos $\frac{180^0}{m}+\frac{180^0}{n}+\frac{180^0}{p}=180^0$ou ainda, $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{p}=1$. Supondo, sem perda de generalidade, que m $\leq$ n $\leq$ p e com m $\geq$ 2 (pois se m = 1, teríamos um ângulo interno do triângulo medindo $\frac{180}{1}$= 180^0) temos:

$$\frac{1}{m}+\frac{1}{m}+\frac{1}{m}\geq 1 \quad \text{ou} \quad \frac{3}{m}\geq 1 \;\Rightarrow\; m\leq 3,$$

mas como o inteiro m é tal que m $\geq$ 2, temos que m = 2 ou m = 3.

Para m = 2:

Considerando n $\leq$ p obtemos:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\geq 1 \;\Rightarrow\; \frac{2}{n}\geq\frac{1}{2} \;\Rightarrow\; n\leq 4.$$

Portanto, n = 3 ou n = 4 uma vez que, se n = 2, teríamos, $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{p}\geq 1$. Desta maneira chegamos a:

m = 2, n = 3 e p = 6 ou m = 2, n = 4 e p = 4.

Para m = 3:

Se n $\leq$ p, temos:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\geq 1 \;\Rightarrow\; \frac{2}{n}\geq\frac{2}{3} \;\Rightarrow\; n\leq 3.$$

Como m $\leq$ n, temos que m = 3, n = 3 e p = 3.

Assim, as soluções inteiras para essa equação $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{p}=1$ são (3,3,3), (2,4,4) e (2,3,6). Tais soluções nos mostram as três possibilidades de caleidoscópios com três espelhos:

- (3,3,3) caleidoscópio equilátero com três ângulos de 60^0;
- (2,4,4) caleidoscópio (retângulo) isósceles com ângulos de 90^0, 45^0 e 45^0 e
- (2,3,6) caleidoscópio (retângulo) escaleno, com ângulos de 90^0, 60^0 e 30^0.

A foto na Figura 3.8 mostra o visual obtido com de um caleidoscópio com três espelhos:

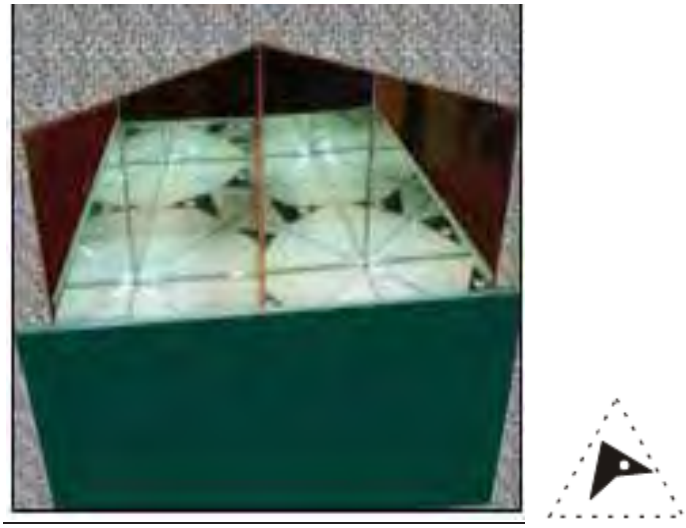


Figura 3.8: Caleidoscópio com três espelhos e a respectiva base.

3.4 Caleidoscópios com quatro espelhos

Um conjunto de quatro espelhos planos articulados, se apoiados verticalmente num plano formará um quadrilátero. Usando argumentos análogos ao item anterior, Barbosa e Murari (1998, p. 65) demonstram que a única possibilidade para a formação deste tipo de caleidoscópio é quando os espelhos se posicionam no plano de apoio na forma de um retângulo, como demonstrado abaixo:

> "Para que as imagens coincidam em cada ângulo de par de espelhos, devemos ter que o seu dobro seja divisor de 360^0, ou que cada ângulo do quadrilátero precisa ser divisor de 180^0; portanto colocando $\frac{180^0}{a_i}=n_i$ (inteiro positivo, i = 1, 2, 3, 4, com $n \geq 2$) com

$\hat{a}_1 + \hat{a}_2 + \hat{a}_3 + \hat{a}_4 = 360^0$ encontramos $\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} = 2$ (1).

Supondo, sem perda de generalidade, que $n_1 \leq n_2 \leq n_3 \leq n_4$ temos, substituindo em (1) todos por n_1, que $n_1 \leq 2$, de onde $n_1=2$.

Substituindo em (1) encontra-se que $\frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} = \frac{3}{2}$ (2).

Novamente, trocando todos por n_2 em (2) encontramos $n_2 \leq 2$, então necessariamente $n_2=2$.

Com argumentação análoga encontramos sucessivamente $n_3 = n_4 = 2$."

No mesmo trabalho citado acima, os autores provam que quatro é o número máximo de espelhos que um caleidoscópio plano deve ter para que haja repetição perfeita das imagens.

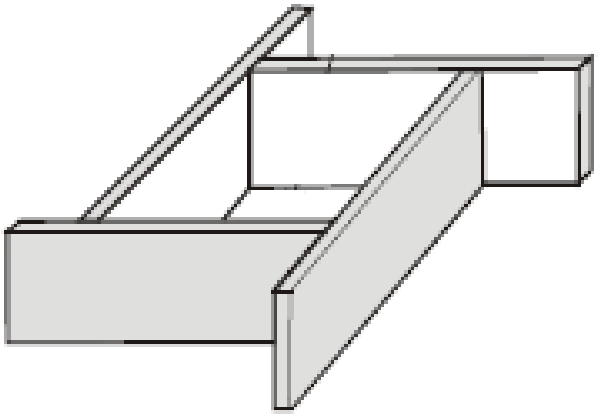


Figura 3.9: Desenho de um caleidoscópio de quatro espelhos

3.5 Pavimentações Uniformes

Um conjunto de polígonos é uma pavimentação do plano se, e somente se, cobrir o plano inteiro sem lacunas ou sobreposição. Isto significa que qualquer ponto do plano pertence a um único polígono da pavimentação. Através desta definição podem ser obtidas figuras como por exemplo:

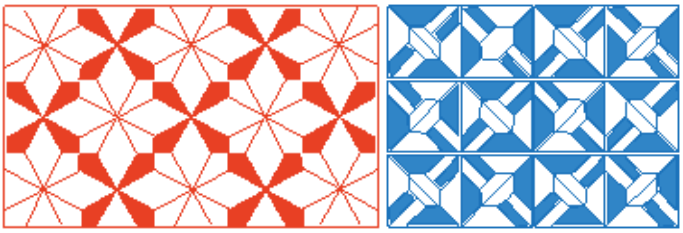


Figura 3.10: Pavimentações do plano.

Dizemos que uma pavimentação do plano é uniforme se satisfizer as seguintes condições:

i) é composta apenas por polígonos regulares

ii) se dois polígonos regulares intersectam-se, então essa interseção é um lado ou um vértice comum;

iii) a distribuição dos polígonos regulares ao redor de cada vértice é sempre a mesma.

Assim sendo, as ilustrações apresentadas na figura 3.11, embora sejam formadas por polígonos regulares não são caracterizadas como pavimentações Uniformes uma vez que não atendem, respectivamente, às condições (ii) e (iii).

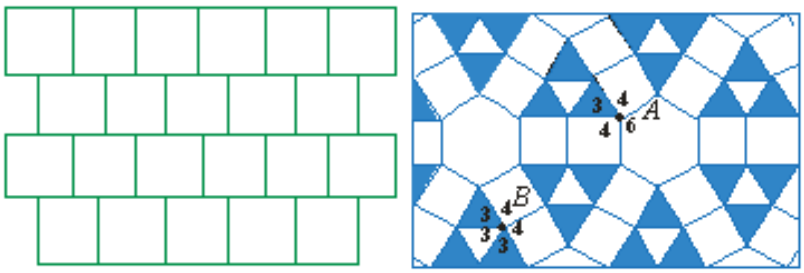


Figura 3.11: Exemplos de Pavimentações não uniformes.

Murari (1999) e Almeida (2003) fazem um estudo mais aprofundado do tema e concluem que existem apenas 11 possibilidades para as pavimentações uniformes, das quais somente três são formadas por apenas um tipo de polígono regular:

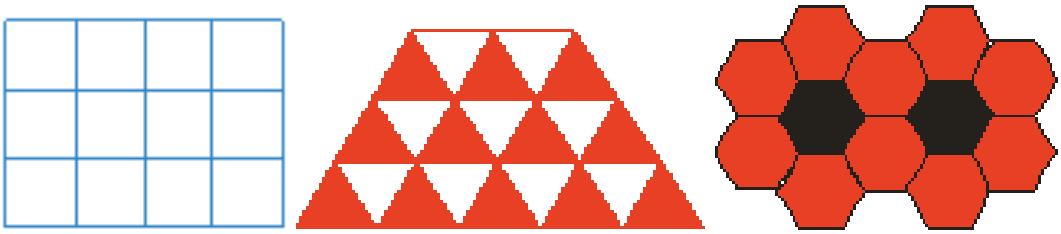
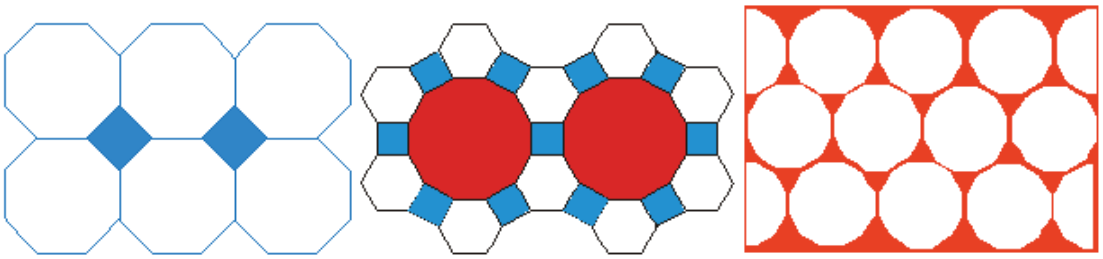


Figura 3.12: Pavimentações Uniformes compostas por apenas um tipo de polígono regular.

No que diz respeito à nomenclatura, ela faz referência ao número de lados dos polígonos ao redor da cada vértice. Deste modo, a pavimentação acima composta apenas por

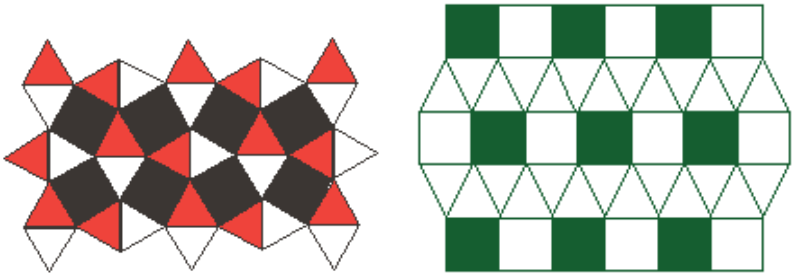
triângulos é designada por (3,3,3,3,3,3), isto é, seis triângulo ao redor de cada vértice. As outras são (4,4,4,4), composta exclusivamente por quadrados e (6,6,6), por hexágonos.

Além destas, temos as seguintes pavimentações:



(4,8,8) (4,6,12) (3,12,12)

(3,4,6,4) (3,6,3,6) (3,3,3,3,6)



(3,3,4,3,4) (3,3,3,4,4)

Figura 3.13: As outras oito Pavimentações Uniformes do plano.

Dentre as onze pavimentações uniformes possíveis apenas uma não pode ser visualizada com o caleidoscópio, a (3,3,3,3,6), por não possuir linhas de simetria.

3.6 Bases geradoras e bases transformadas

Murari (1999) desenvolveu um algoritmo através do traçado de linhas de simetria para, dada uma figura plana, se obter uma base caleidoscópica que torna possível reproduzi-la através de jogos de espelhos.

Em particular, quando a figura é uma pavimentação do plano, sua reprodução se dará através do uso de caleidoscópios de três ou quatro espelhos. Neste caso, o autor destaca o fato de que se pode obter mais de uma base para visualização de uma dada pavimentação. Para o estudo mais aprofundado de tipos diferentes de bases, é feita a definição dos conceitos de base geradora e base transformada:

"Queremos agora definir como 'base geradora' aquela base substituível que não contém propriamente nenhuma base substituível; enquanto que 'base transformada' é aquela base substituível que provém de uma base geradora" (MURARI, 1999).

Em outras palavras, a base geradora é o menor modelo que deve ser introduzido no interior do caleidoscópio para visualizar um determinado padrão ou pavimentação plana. Já a base transformada é composta por réplicas da base geradora e reproduz a mesma figura da base geradora.

A figura[5] 3.14 apresenta uma das bases geradoras da figura 3.15 e a primeira base transformada correspondente composta por mais três réplicas desta, resultantes de sucessivas reflexões por espelhos representados pelos segmentos AB, AC´ e BC´.

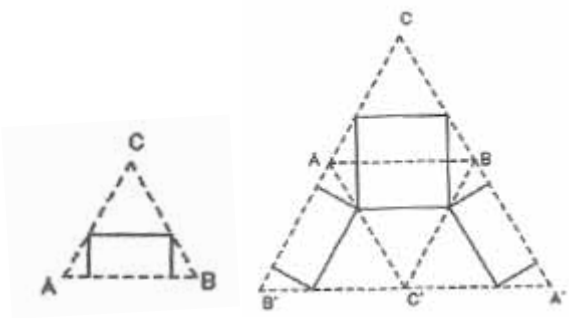


Figura 3.14: Uma base geradora e sua transformada.

[5] As figuras 3.14, 3.15, 3.16 e 3.17 foram extraídas de Almeida (2003).

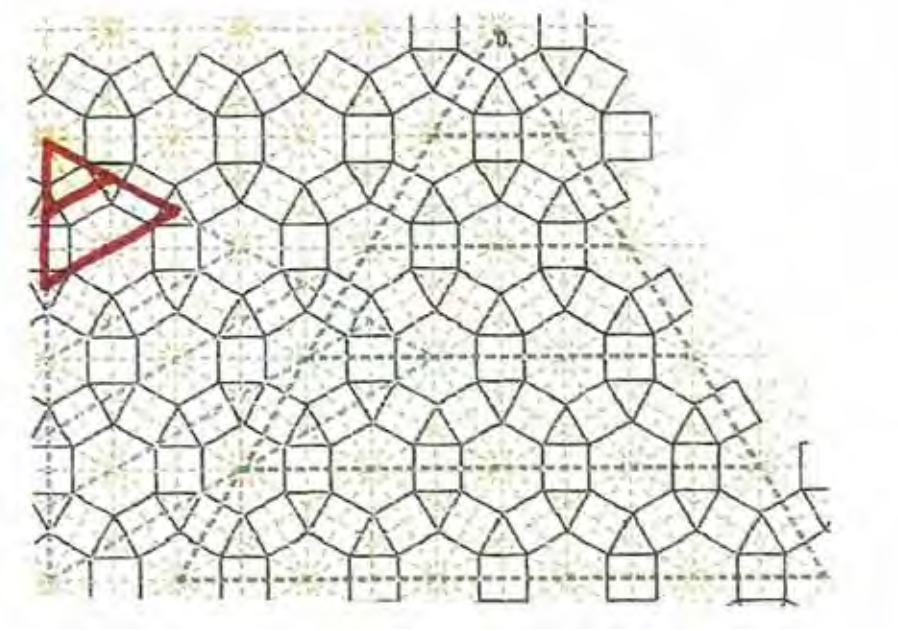


Figura 3.15: A pavimentação (3,4,6,4) em preto, suas linhas de simetria em laranja e as possíveis bases caleidoscópicas em azul e verde. As bases da figura 3.14 estão destacadas em vermelho.

De acordo com as linhas de simetria da figura 3.15, em laranja, utilizando o algoritmo desenvolvido por Murari (1999) é possível determinar duas classes de bases caleidoscópicas, realçadas no desenho com traços pontilhados em azul e verde. A figura 3.16 destaca as duas bases geradoras e a figura 3.17 suas respectivas transformadas.

Figura 3.16: Duas bases geradoras.

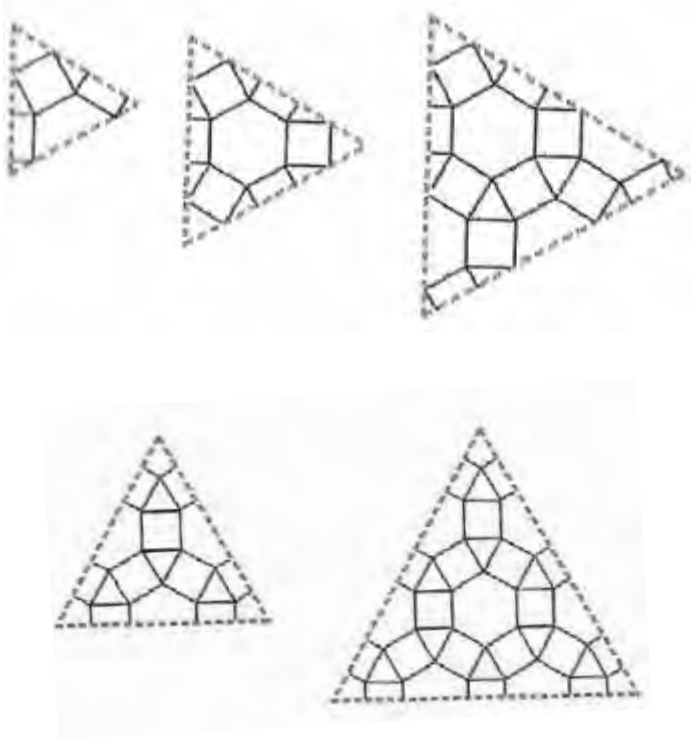


Figura 3.17: E suas respectivas transformadas.

.

CAPÍTULO 4: GRUPOS DE TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS NO PLANO

Conforme foi dito anteriormente, as leis ou regras que tornam possível relacionar a parte da figura com o todo ou que tornam a figura globalmente invariante são chamadas de transformações geométricas. Iniciamos agora um estudo de tais transformações sob um olhar matemático mais formal, definindo alguns elementos que serão abordados durante esse trabalho.

4.1 Definição: uma transformação em um plano euclidiano é uma função f: $R^2 \rightarrow R^2$, que é bijetora.

4.2 Definição: uma isometria no plano é uma transformação f: $R^2 \rightarrow R^2$ que preserva a distância, isto é, $\forall$ x, y $\in R^2$, $|f(x) - f(y)| = |x - y|$, considerando R^2 com a métrica usual.

4.3 Definição: uma transformação α fixa um conjunto S, se $\forall$ P $\in$ S, $\alpha(P) = Q$ com Q $\in$ S, ou seja $\alpha(S) = S$. Uma transformação α fixa o conjunto S ponto a ponto se, $\alpha(P) = P$, $\forall$ P $\in$ S.

4.4 Definição: uma reta m é reta de simetria para um conjunto de pontos S, se a reflexão em m fixa S. Um ponto P é ponto de simetria de S se uma meia volta[6] em relação a P fixa S.

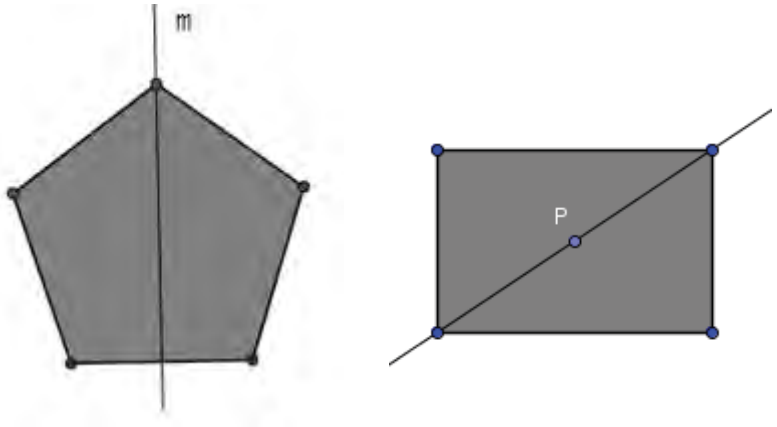


Figura 4.1: Reta de simetria do pentágono e ponto de simetria do retângulo

[6] Mais adiante definiremos formalmente o conceito de meia volta.

4.5 Definição: uma isometria α é uma simetria para um conjunto S, se $\alpha(S) = S$, isto é, se α fixa a figura.

Definimos agora alguns elementos da teoria dos grupos que são úteis neste estudo.

4.6 Definição: diz-se que o conjunto não vazio G é um grupo em relação à operação $*$ se, e somente se, são satisfeitas as seguintes condições:

i) Associatividade: quaisquer que sejam a, b e c elementos de G, tem-se:

$$(\mathbf{a} * \mathbf{b}) * \mathbf{c} = \mathbf{a} * (\mathbf{b} * \mathbf{c})$$

ii) Existência do Elemento Neutro: existe em G um elemento **e** tal que:

$$\mathbf{a} * \mathbf{e} = \mathbf{e} * \mathbf{a} = \mathbf{a}, \ \forall a \in G$$

iii) Existência do Elemento Inverso: para todo a ϵ G existe um elemento b ϵ G tal que: $\mathbf{a} * \mathbf{b} = \mathbf{b} * \mathbf{a} = \mathbf{e}$. O elemento b é chamado de inverso de a e será representado por a^{-1}.

O grupo será indicado por (G, $*$) e quando não houver dúvida em relação a qual operação está sendo utilizada, usaremos simplesmente G para nos referirmos a ele. Se a operação $*$ satisfizer a propriedade comutativa, diremos que o grupo (G, $*$) é um grupo comutativo ou abeliano.

iv) Comutatividade: quaisquer que sejam a e b em G, tem-se:

$$\mathbf{a} * \mathbf{b} = \mathbf{b} * \mathbf{a}$$

4.7 Definição: seja G um grupo. Dizemos que um subconjunto não vazio H de G é um subgrupo de G se, e somente se:

i) $\forall$ **a, b** ϵ H, $\mathbf{a}*\mathbf{b} \in$ H

ii) $\forall$ **a** ϵ H, $\mathbf{a}^{-1} \in$ H

4.8 Definição: a ordem de um grupo G é o número de elementos de G. A ordem de um elemento x de G é o menor inteiro positivo n tal que $x^n = e$.

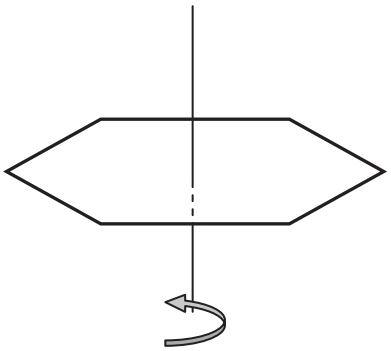
4.9 Definição: dados dois grupos $(G, *)$ e (G', Δ), dizemos que G e G´ são isomorfos se existe $f: G \to G'$ bijetora, tal que:

$$f(x*y) = f(x)\Delta f(y), \forall\ x, y \in G.$$

4.10 Definição: dados um grupo G e $x \in G$. O conjunto $\{y \in G \ / \ y = x^n, n \in \mathbb{Z}\}$ é um subgrupo de G e é chamado <u>subgrupo cíclico</u> gerado por x, ou simbolicamente $\langle x \rangle$. Se $\langle x \rangle = G$, então dizemos que G é um <u>grupo cíclico</u>. Denotaremos o grupo cíclico de ordem n por C_n.

Um exemplo de grupo cíclico é o grupo das rotações do hexágono regular.

Se x é a rotação de $\pi/3$ em torno do centro do hexágono, teremos o grupo cíclico C_6 composto da seguinte maneira: $C_6 = \{e, x, x^2, x^3, x^4, x^5\}$.



$\pi/3$, $2\pi/3$, π, $4\pi/3$, $5\pi/3$ e 2π

Figura 4.2

4.11 Definição: chamamos de <u>grupo diedral</u> D_n um grupo gerado por dois elementos, R e S, que satisfazem as três seguintes condições:

(i) $R^n = e$

(ii) $S^2 = e$

(iii) $RSR = S$ (ou equivalentemente $SR = R^{n-1}S$)

Assim, o grupo $D_n = \{e, R, R^2, \ldots, R^{n-1}, S, RS, R^2S, \ldots, R^{n-1}S\}$ é o referido grupo diedral, já que $SR = R^{n-1}S$, $SR^2 = R^{n-2}S$, $SR^3 = R^{n-3}S$, etc.

Observamos ainda que o grupo D_n possui 2n elementos, isto é, tem ordem 2n e, também, que C_n é subgrupo abeliano de D_n.

O conjunto das simetrias de um polígono regular de n lados munido da operação de composição de isometrias é um exemplo de Grupo Diedral D_n. Para tanto, basta considerarmos a operação R como uma rotação de $\frac{2\pi}{n}$ em torno do centro do polígono e a operação S seria a simetria reflexional em relação a uma reta que passa por dois vértices opostos ou por pontos médios de dois lados do polígono[7].

Tomemos como exemplo o conjunto das simetrias H do hexágono regular. Note que ele é formado por 5 rotações de $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$, π, $\frac{4\pi}{3}$ e $\frac{5\pi}{3}$ além da rotação de 2π (perceba que fazer uma rotação de 2π radianos é o mesmo que deixar o polígono na posição inicial, isto é, a identidade) em torno do centro do polígono. Ainda temos três eixos de simetria reflexional (S_1, S_3 e S_5) determinados pelos três pares de vértices opostos e mais três eixos determinados pelos pontos médios dos três pares de lados opostos (S_2, S_4 e S_6), totalizando seis simetrias reflexionais.

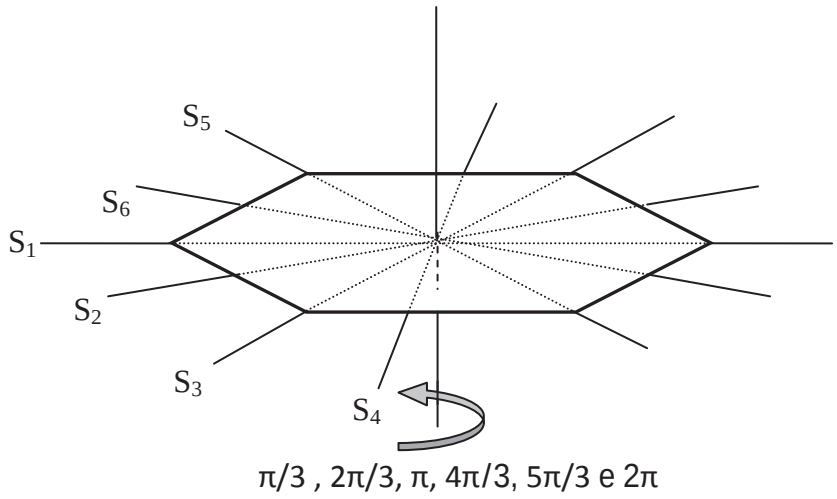


Figura 4.3: Simetrias de um hexágono n=6 e R= π/3

Essas 12 simetrias podem ser expressas por composições de apenas duas delas. Se chamarmos de R a rotação de $\frac{\pi}{3}$ em torno do centro do hexágono e S a reflexão em relação à reta que passa por dois vértices opostos do hexágono, por exemplo, S = S_1, teremos que:

[7] Na verdade, essa afirmação só é válida no caso de o polígono ter um número par de lados. Caso tenha um número ímpar de lados, os eixos são determinados por um vértice e pelo ponto médio do lado oposto a esse vértice.

$$R = \frac{\pi}{3},\ R^2 = \frac{2\pi}{3},\ R^3 = \pi,\ R^4 = \frac{4\pi}{3},\ R^5 = \frac{5\pi}{3} \text{ e } R^6 = \mathbf{e},$$

e ainda[8]:

$$S = S_1,\ RS = S_2,\ R^2S = S_3,\ R^3S = S_4,\ R^4S = S_5,\ R^5S = S_6,$$

de onde concluímos que o grupo diedral

$$D_6 = \{e, R, R^2,..., R^5, S, RS, R^2S,... , R^5S\}$$

é isomorfo ao grupo constituído pelo conjunto de simetrias do hexágono regular e da operação de composição de isometrias:

$$H = \{i, R_{\pi/3}, R_{2\pi/3}, R_{\pi}, R_{4\pi/3}, R_{5\pi/3}, S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6\}.$$

Uma vez feitas essas definições, daremos um tratamento algébrico às transformações e às simetrias, através dos seguintes resultados:

Sejam G o conjunto de todas as transformações e I o conjunto de todas as isometrias.

4.12 Teorema: G é um grupo e I é um subgrupo de G (em relação à operação de composição de funções).

Demonstração:

(Primeira parte) Notemos que a composição de funções é associativa e que a função identidade ι é bijetora e, portanto $\iota \in G$. Como G é o conjunto formado pelas funções bijetoras e toda função bijetora tem inversa, então $\forall f \in G$, $f^{-1} \in G$.

(Segunda parte) Sejam f e g duas isometrias quaisquer de I. Então:

i) $|fog(x) - fog(y)| = |f(g(x)) - f(g(y))|$ mas, como f é isometria $|f(g(x)) - f(g(y))| = |g(x) - g(y)|$ e do fato de g ser isometria $|g(x) - g(y)| = |x - y|$ onde chegamos à $|fog(x) - fog(y)| = |x - y|$, isto é, $fog \in I$.

ii) $|x - y| = |\iota(x) - \iota(y)| = |gog^{-1}(x) - gog^{-1}(y)| = |\, g(g^{-1}(x)) - g(g^{-1}(y))| =$

[8] Sugerimos numerar os vértices do hexágono para entender melhor essas correspondências.

$= |g^{-1}(x) - g^{-1}(y)|$, ou seja, g^{-1} é uma isometria.

4.13 Definição: uma <u>involução</u> é uma transformação f: $R^2 \rightarrow R^2$, tal que, $f^2 = \iota$. Um ponto $P \in R^2$ é um ponto fixo de uma transformação α se $\alpha(P) = P$.

4.14 Definição: uma <u>translação</u> é uma transformação τ: $R^2 \rightarrow R^2$, definida através das seguintes equações:

$\tau_{P,Q}(x,y) = (x',y')$ onde $x' = x + a$ e $y' = y + b$ e $a = x_P - x_Q$ e $b = y_P - y_Q$.

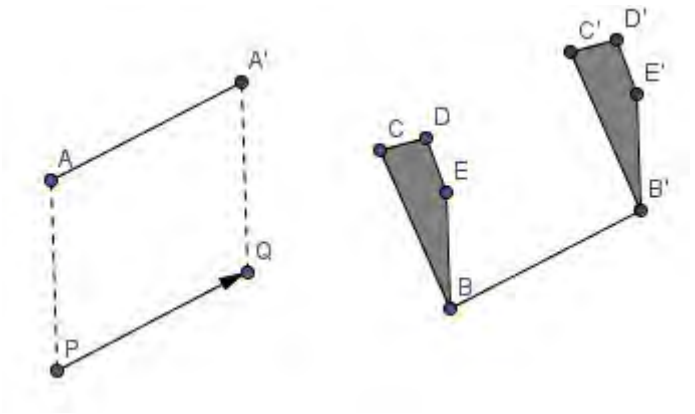


Figura 4.4

Na ilustração acima, foi feita a translação do ponto A e do quadrilátero BCDE. De acordo com a definição de translação, os segmentos AA´, BB´ e PQ são congruentes e paralelos.

4.15 Teorema: dados os pontos P e Q, existe uma única translação tal que $\tau_{P,Q}(P) = Q$.

Demonstração: sejam P(c,d) e Q(e,f). Então, existem únicos números a e b tal que e = c + a e f = d + b. Então a única translação, $\tau_{P,Q}(x,y) = (x', y')$, que leva o ponto P no ponto Q tem equações: $x' = x + (e - c)$ e $y' = y + (f - d)$.

É importante observar que $\iota = \tau_{P,P}$ $\forall P \in R^2$ e se $\tau_{P,Q}(R) = R$, então $\tau_{P,Q} = \iota$.

4.16 Teorema: toda translação é uma isometria.

Demonstração: Sejam C, D, E e F pontos do plano tais que $\tau_{P,Q}(C) = E$ e $\tau_{P,Q}(D) = F$. Assim,

$$|E - F| = \sqrt{(x_E - x_F)^2 + (y_E - y_F)^2} = \sqrt{(x_C + a - (x_D + a))^2 + (y_C + b - (y_D + b))^2} = \sqrt{(x_C - x_D)^2 + (y_C - y_D)^2} = |C - D|.$$

4.17 Proposição: toda translação distinta da identidade não fixa nenhum ponto, isto é, se $P \neq Q$, $\tau_{P,Q}(x, y) \neq (x, y)$, $\forall (x, y) \in R^2$.

Demonstração: se $\tau_{P,Q} = \iota$, então $\tau_{P,Q}(x, y) = (x,y)$. Se $\tau_{P,Q} \neq \iota \Rightarrow \tau_{P,Q}(x, y) = (x + a, y + b)$ com $(a, b) \neq (0, 0)$.

4.18 Definição: se P(a,b), então uma <u>meia volta</u> é uma aplicação σ_P definida por:

$$\sigma_P(x,y) = (-x + 2a, -y + 2b)$$

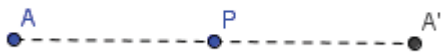


Figura 4.5

Se $\sigma_P(A) = A'$, P será o ponto médio entre A e A´.

4.19 Teorema: toda meia volta é uma isometria.

Demonstração: a demonstração é análoga ao do teorema 4.16.

4.20 Proposição: uma meia volta é uma involução, além disso:

i) $\sigma_P(A) = A \Leftrightarrow A=P$.

ii) Seja P um ponto e l uma reta. $\sigma_P(l) = l \Leftrightarrow P \in l$.

Demonstração: seja P (a, b). $\sigma_P^2(x,y) = \sigma_P(\sigma_P(x,y)) = \sigma_P(-x + 2a, -y + 2b) =$

$= \sigma_P(-(-x + 2a) + 2a, -(-y + 2b) + 2b) = (x, y)$.

i) Notemos que por se tratar de uma meia volta, P é o ponto médio do segmento de extremos A e $\sigma_P(A)$ que, neste caso, é o próprio ponto A. Assim, a única possibilidade é termos P = A. Segue deste fato que a meia volta σ_P fixa um único ponto, o ponto P.

ii) Suponha que a reta l tenha equação ax + by + c = 0. Seja P(h, k). Então σ_P tem equações x´= – x + 2h e y´= – y + 2k. Assim, ax + by + c = 0 ⇔ ⇔ ax´ + by´ + c – 2(ah + bk + c) = 0. Portanto, σ_P (l) é uma reta m, paralela a l e de equação ax´ + by´ + c – 2(ah + bk + c) = 0. Finalmente, l e m coincidem se, e somente se, ah + bk +c = 0, ou seja, se o ponto

P(h, k) ∈ l.

4.21 Definição: seja α: $R^2 \rightarrow R^2$ uma transformação. Dizemos que α <u>fixa uma reta</u> l se α(l) = l.

4.22 Definição: uma <u>reflexão</u> em torno de uma reta m é uma transformação σ_m definida por:

$$\sigma_m(P) = \begin{cases} P, & se\ P \in m \\ Q, & se\ P \notin m \end{cases}$$

tal que $\overleftrightarrow{PQ} \perp$ m no ponto médio de PQ.

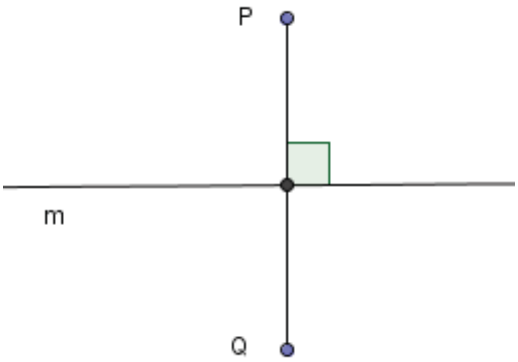


Figura 4.6

4.23 Propriedades:

i) σ_m é uma involução.

ii) $\sigma_m(P) = P \Leftrightarrow P \in m$

iii) $\sigma_m(P) = P, \forall P \in l \Leftrightarrow l = m$

iv) $\sigma_m(l) = l \Leftrightarrow l = m$ ou $l \perp m$.

Demonstração:

i) $\forall P \in R^2$, temos que $P \in m$ ou $P \notin m$. Se $P \in m$, $\sigma_m(\sigma_m(P)) = \sigma_m(P) = P$. Se $P \notin m$, $\sigma_m(\sigma_m(P)) = \sigma_m(Q)$ tal que $\overleftrightarrow{PQ} \perp m$ no ponto M, médio de PQ. Mas como $Q \notin m$, $\sigma_m(Q) = R$, com $\overleftrightarrow{QR} \perp m$ também no ponto M, já que M é a distância de Q a m. Como M é ponto médio de PQ e de QR e P, Q e R estão sobre a mesma reta, concluímos que os pontos P e R coincidem e, portanto, $\sigma_m(\sigma_m(P)) = P$, o que conclui a demonstração.

ii) Segue da definição

iii) ($\Leftarrow$) Se $l = m$, então $\forall P \in l$, $P \in m$. Logo $\sigma_m(P) = P$.

($\Rightarrow$)Sejam $P_1 \neq P_2 \in l$. Então, $\sigma_m(P_1) = P_1$ e $\sigma_m(P_2) = P_2$. Logo $P_1 \in m$ e $P_2 \in m$ e, portanto, $l = m$.

iv) ($\Leftarrow$) Se $l = m$, então $\sigma_m(l) = l$. Se $l \perp m$, então $\forall P \in l$, $\sigma_m(P) \in l$.

($\Rightarrow$) Se $\sigma_m(l) = l$, então podemos ter $l = m$ ou $l \neq m$. Suponhamos então que $l \neq m$. Sejam $Q = \sigma_m(P)$, $P \notin m$ e $P \in l$. Então, P e Q estão sobre l. Logo $\overleftrightarrow{PQ} \perp m$. Segue que $l \perp m$.

4.24 Teorema: toda reflexão é uma isometria.

Demonstração: sejam os pontos P, Q, $P' = \sigma_m(P)$ e $Q' = \sigma_m(Q)$. Se P e Q estiverem sobre a reta m, a demonstração é imediata. Se $P \in m$ e $Q \notin m$, temos $P = P'$ e m é a mediatriz de QQ'. Como $P = P'$ está em m, segue o resultado.

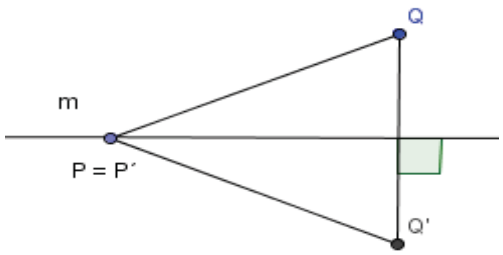


Figura 4.7

i) Se P∉m e Q∉m:

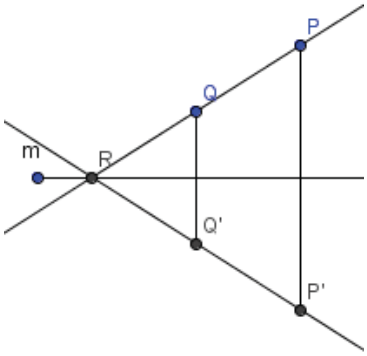


Figura 4.8

Seja R o ponto de intersecção das retas m e $\overleftrightarrow{PQ}$. R também é o ponto de intersecção de $\overleftrightarrow{P'Q'}$. O fato de m ser mediatriz de QQ´ garante, por congruência de triângulos, que RQ = RQ´. Como QQ´⊥m e PP´⊥m, temos que QQ´// PP´. Por Tales: $\frac{RQ}{RQ'} = \frac{PQ}{P'Q'}$ e portanto PQ = P´Q´.

4.25 Definição: uma <u>rotação</u> de centro C e ângulo θ, é uma transformação $\rho_{C,\theta}$ tal que $\rho_{C,\theta}$(C) = C e, se P ≠ C:

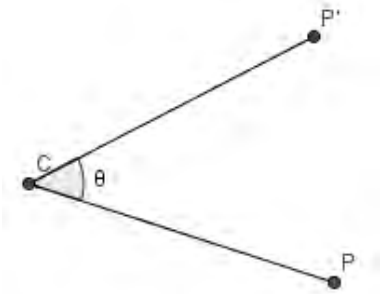


Figura 4.9

$\rho_{C,\theta}$(P) = P´ tal que CP = CP´, onde $\overrightarrow{CP}$ e $\overrightarrow{CP'}$ são os lados do ângulo de medida θ (adotando o sentido anti-horário como o de rotação) com vértice em C.

Segue da definição que:

i) $\rho_{C,0} = \iota$

ii) Uma rotação fixa exatamente um ponto, o seu vértice.

iii) A meia volta M_P é uma rotação de centro em P e $\theta = 180^0$.

iv) Dados $\rho_{C,\theta}$ e $\rho_{C,\eta}$, então $\rho_{C,\theta} o \rho_{C,\eta} = \rho_{C,\theta+\eta}$.

4.26 Teorema: toda rotação é uma isometria.

Demonstração: Seja $\rho_{C,\theta}$ uma rotação. Dados P e Q, sejam P´ = $\rho_{C,\theta}$(P) e Q´ = $\rho_{C,\theta}$(Q). Temos dois casos.

i) Se C, P e Q são colineares, segue da definição que PQ =P´Q´.

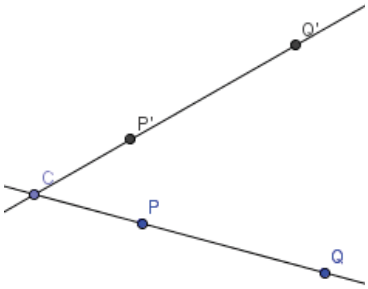


Figura 4.10

ii) Se C, P e Q são não colineares, segue que:

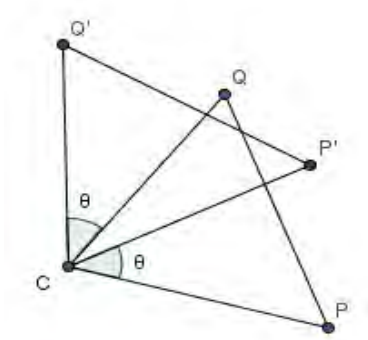


Figura 4.11

CP = CP´, $P\hat{C}Q = P'\hat{C}Q'$ e CQ = CQ´. Logo os triângulos CPQ e CP´Q´ são congruentes e assim chegamos a PQ = P´Q´.

Uma consequência imediata desse teorema é que a rotação $\rho_{C,\theta}$ fixa toda circunferência de centro C.

4.27 Teorema: se uma isometria fixa dois pontos distintos de uma reta, então a isometria fixa a reta ponto a ponto.

Se uma isometria fixa três pontos não colineares, então a isometria é a identidade.

Demonstração:

(1ª parte) sejam α uma isometria, P ≠ Q em l, α(P) = P e α(Q) = Q. Seja X∈l um ponto qualquer e Y = α(X). Temos P, Q e X colineares e PX = PY e

QX = QY (α é isometria). Logo X = Y.

(2ª parte) Seja α uma isometria tal que α(A) = A, α(B) = B e α(C) = C para A, B e C não colineares.

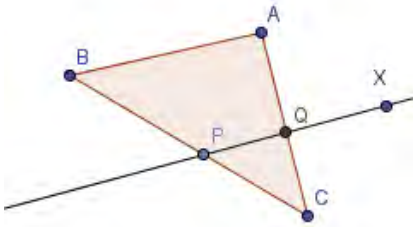


Figura 4.12

Da primeira parte segue que α fixa $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ ponto a ponto. Logo α fixa o triângulo ABC. Seja X um ponto qualquer. Tomemos P um ponto do lado BC, por exemplo. Então $\overleftrightarrow{PX}$ intercepta um dos outros lados do triângulo em um ponto Q. Como α(P) = P e α(Q) = Q, temos, de acordo com a primeira parte, que α(X) = X.

4.28 Teorema: sejam α e β duas isometrias tais que α(A) = β(A), α(B) = β(B) e α(C) = β(C), para A, B e C não colineares. Então α = β.

Demonstração:

Temos $\begin{cases} \beta^{-1}\alpha(A) = A \\ \beta^{-1}\alpha(B) = B \\ \beta^{-1}\alpha(C) = C \end{cases}$ Então, $\beta^{-1}\alpha$ fixa três pontos não colineares e, pelo teorema anterior, $\beta^{-1}\alpha = \iota$, ou ainda, β = α.

4.29 Teorema: uma isometria que fixa 2 pontos em uma reta m é uma reflexão em uma reta m ou a identidade.

Demonstração: observemos que σ_m e ι fixam 2 pontos quaisquer de m, por exemplo, P e Q. Provemos que se α é uma isometria com a propriedade acima, então $\alpha = \sigma_m$ ou $\alpha = \iota$.

Tomemos $\alpha \neq \iota$. Então existe R tal que α(R) = R´ ≠ R. Assim, pelas propriedades do item 4.23, temos que R∉m.

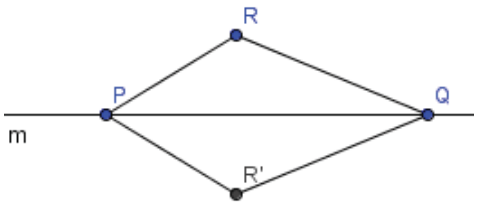


Figura 4.13

Como P e Q são pontos da reta m, α(P) = P e α(Q) = Q. Uma vez que α é uma isometria, PR = PR´ e QR = QR´. Decorre que m = $\overleftrightarrow{PQ}$ é a mediatriz de RR´. Logo, $\alpha = \sigma_m$.

4.30 Teorema: uma isometria que fixa exatamente um ponto é um produto de duas reflexões.

Demonstração: seja C o único ponto que a isometria α fixa, isto é, α(C) = C. Seja P ≠ C e tomemos P´ = α(P). Tomemos também m ⊥ $\overleftrightarrow{PP'}$, pelo ponto médio Q de PP´. Como α é isometria, CP = CP´ e, assim, C ∈ m.

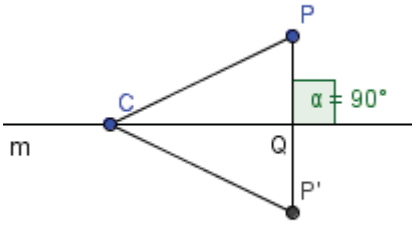


Figura 4.14

De $\begin{cases} \sigma_m(C) = C \\ \sigma_m(P') = P \end{cases}$ temos: $\begin{cases} \sigma_m\alpha(C) = \sigma_m(C) = C \\ \sigma_m\alpha(P) = \sigma_m(P') = P \end{cases}$. Decorre do teorema anterior que $\sigma_m\alpha = i$ ou $\sigma_m\alpha = \sigma_l$, onde $l = \overleftrightarrow{CP}$.

Se $\sigma_m\alpha = \iota$, então $\alpha = \sigma_m$, o que é uma contradição, já que, por hipótese, α fixa um único ponto C. Assim, $\sigma_m\alpha = \sigma_l$ e isso implica que $\alpha = \sigma_m\sigma_l$.

4.31 Teorema: seja l ∩ m = {C} e $\hat{C} = \frac{\theta}{2}$. Então $\sigma_m\sigma_l = \rho_{C,\theta}$.

Demonstração: seja L∈ l, L ≠ C. Consideremos S a circunferência de centro C e raio CL e seja M∈m, M∈S.

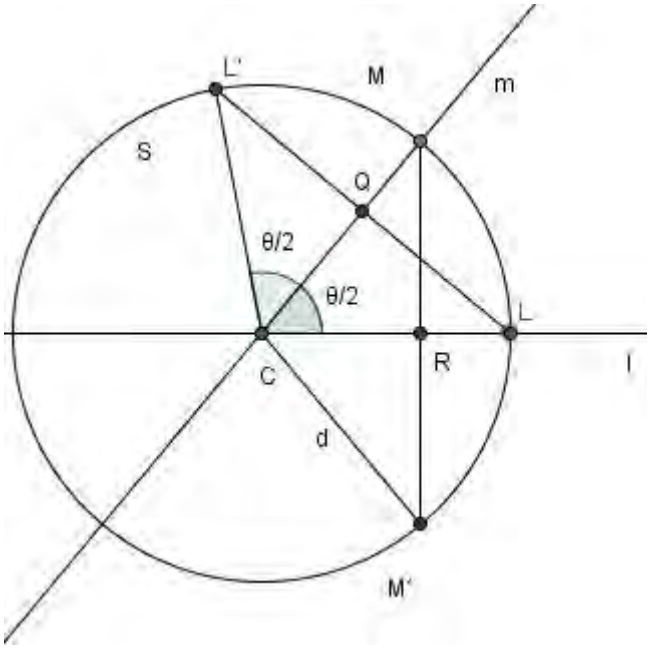


Figura 4.15

Então, por hipótese, $M\hat{C}L = \frac{\theta}{2}$. Seja L´= $\rho_{C,\theta}$(L) e Q a intersecção de LL´ com m. Da congruência dos triângulos LCQ e L´CQ, segue que Q é ponto médio de LL´ e que LL´ ⊥ m. Logo L´= σ_m(L).

Seja M´ = σ_l(M). Segue da congruência dos triângulos MCR e M´CR, que $M'\hat{C}R = R\hat{C}M = \frac{\theta}{2}$. Então, $\rho_{C,\theta}$(M´) = M.

Consideremos C, M´, L pontos não colineares.

$\sigma_m\sigma_l$(C) = σ_m(C) = C = $\rho_{C,\theta}$(C);

$\sigma_m\sigma_l$(M´) = σ_m(M) = M = $\rho_{C,\theta}$(M´);

$\sigma_m\sigma_l$(L) = σ_m(L) = L´ = $\rho_{C,\theta}$(L). Portanto, pelo teorema 4.28, $\sigma_m\sigma_l = \rho_{C,\theta}$.

4.32 Corolário: toda rotação é o produto de duas reflexões.

Demonstração: dada a rotação $\rho_{C,\theta}$, basta tomar as retas l e m como as retas determinadas por um ângulo com vértice em C e medida $\frac{\theta}{2}$.

4.33 Teorema: se l // m, então $\sigma_m\sigma_l$ é uma translação dada pelo dobro da distância entre l e m.

Toda translação é o produto de duas reflexões em retas paralelas.

Demonstração: seja b ⊥ l em L e b ⊥ m em M. Consideremos L´ = σ_m(L) e K ∈ l, K ≠ L.

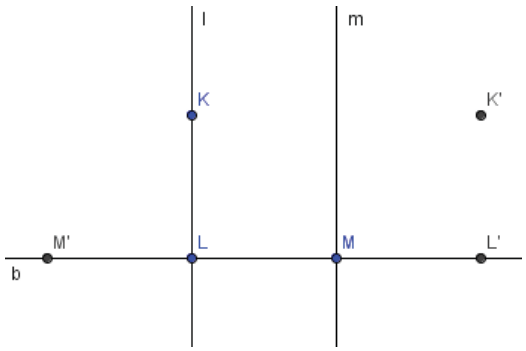


Figura 4.16

Então, se K´ = σ_m(K), temos que LL´ = KK´. Tomemos M´ = σ_l(M). Então, L é ponto médio de MM´ e M o ponto médio de LL´. Logo $\tau_{M'M} = \tau_{LL'}$.

Considerando os pontos não colineares M´, K e L, temos:

$\sigma_m\sigma_l(M') = \sigma_m(M) = M = \tau_{LL'}(M')$;

$\sigma_m\sigma_l(L) = \sigma_m(L) = L' = \tau_{LL'}(L)$;

$\sigma_m\sigma_l(K) = \sigma_m(K) = K' = \tau_{LL'}(K)$.

Logo, $\sigma_m\sigma_l = \tau_{LL'}$, onde a medida do segmento LL´ é o dobro da distância entre as retas l e m.

De acordo com os últimos resultados demonstrados podemos concluir que um produto de duas reflexões ou é uma rotação ou uma translação (somente a identidade é uma rotação e uma translação). Uma isometria que fixa exatamente um ponto é uma rotação. Uma isometria que fixa um ponto é uma rotação ou uma reflexão.

4.34 Definição: uma reflexão em uma reta seguida de uma translação paralela a esta reta é uma <u>reflexão deslizante</u>, (RD). Uma outra definição, equivalente é a seguinte: Uma isometria é uma RD se existem retas a, b, c, com a⊥c e b⊥c, tal que $\gamma = \sigma_b\sigma_a\sigma_c$, ou seja, é o produto de 3 reflexões. As duas definições são equivalentes, já que $\sigma_b\sigma_a$ é uma translação (pois a//b) por uma reta paralela à reta c (porque a⊥c e b⊥c).

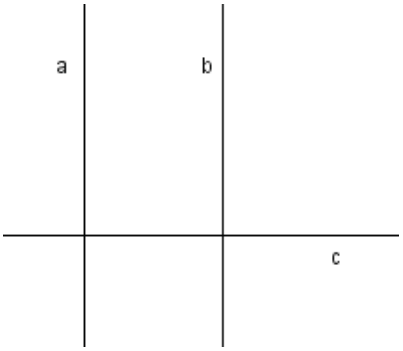


Figura 4.17

A reta c é denominada eixo da RD.

4.35 Teorema: uma RD fixa exatamente uma reta, que é seu eixo.

Demonstração: sejam a e b retas paralelas entre si e perpendiculares ao eixo c da RD e P um ponto qualquer. Tomemos l a reta passando por P e perpendicular à c. Existe uma reta m, m⊥c, tal que a translação $\sigma_b\sigma_a$ coincide com a translação $\sigma_m\sigma_l$. Seja {M} = m∩c.

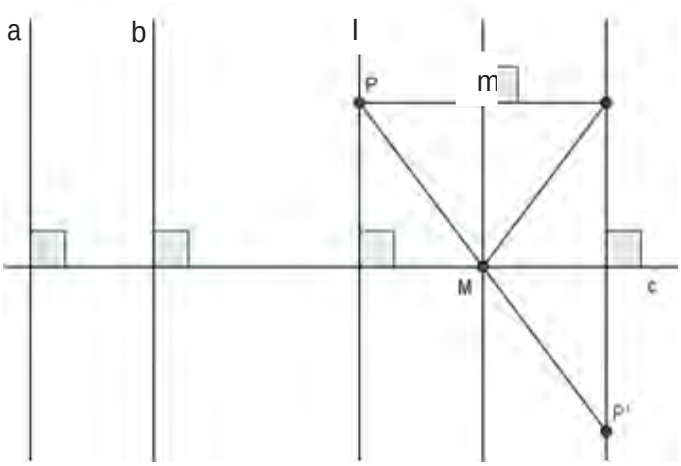


Figura 4.18

Temos:

$$\sigma_c\sigma_b\sigma_a(P) = \sigma_c\sigma_m\sigma_l(P) = \sigma_c\sigma_m(P)$$

Usando a congruência de triângulos duas vezes obtemos que M é o ponto médio do segmento de extremos P e P´, onde P´= $\sigma_c\sigma_m\,\sigma_l(P) = \sigma_c\sigma_m(P)$. Mas, como m⊥c, segue que $\sigma_M(P) = \sigma_c\sigma_m(P)$. Assim, $\sigma_c\sigma_b\sigma_a(P) = \sigma_c\sigma_m\sigma_l(P) = \sigma_c\sigma_m(P) =$

$= \sigma_M(P)$, ou seja, $\sigma_c\sigma_b\sigma_a$ é uma meia volta ao redor do ponto M. Como M∈c, então $\sigma_c\sigma_b\sigma_a(c) = \sigma_M(c) = c$. Portanto, $\sigma_c\,\sigma_b\,\sigma_a$ fixa c.

4.36 Teorema: uma RD é uma composição de uma reflexão por uma reta a com uma meia volta por algum ponto B fora de a.

Se B∉a, então $\sigma_B\sigma_a$ e $\sigma_a\sigma_B$ são reflexões deslizantes com eixo c, c perpendicular a a passando por B.

Demonstração: seja γ uma RD. então existem a, b e c com a⊥c e b⊥c e $\gamma = \sigma_c\,\sigma_b\,\sigma_a$.

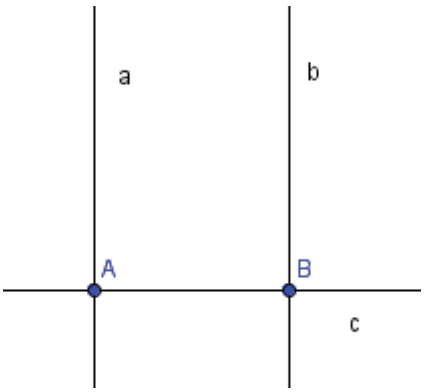


Figura 4.19

Sejam {A} = a∩c e {B} = b∩c. Temos que o produto de duas reflexões resulta numa rotação cujo ângulo é o dobro do ângulo entre as retas pelas quais se deu a reflexão, isto é, $\sigma_a\sigma_c = \sigma_c\sigma_a = \sigma_A$ e $\sigma_b\sigma_c = \sigma_c\sigma_b = \sigma_B$.Assim, a RD definida por $\gamma = \sigma_c\sigma_b\sigma_a$ pode ser escrita como $\gamma = \sigma_B\sigma_a$, concluindo a demonstração.

4.37 Teorema: uma translação que fixa uma reta c comuta com uma RD de eixo c.

O quadrado de uma RD é uma translação diferente de ι.

Uma RD gera um grupo cíclico infinito.

Demonstração:

(1ª parte) seja τ_{AB} uma translação que fixa c. Então $\tau_{AB}\sigma_c = \sigma_c\tau_{AB.}$ (I)

Consideremos γ uma RD com eixo c. Então, existem p⊥c e q⊥c tal que

$\gamma = \sigma_c\sigma_p\sigma_q$. Assim, temos:

$\tau_{AB}\,\gamma = \tau_{AB}\sigma_c\sigma_p\sigma_q = \sigma_c\tau_{AB}\tau_{A'B'} = \sigma_c\tau_{A'B'}\tau_{AB} = \sigma_c\sigma_p\sigma_q\,\tau_{AB} = \gamma\,\tau_{AB}$, onde para simplificar a notação, denotamos $\tau_{A'B'} = \sigma_p\sigma_q$.

A segunda igualdade se justifica por (I) e a terceira pela comutatividade entre as translações.

(2ª parte) Seja γ a RD, tal que $\gamma = \sigma_c\sigma_p\sigma_q$. Então $\gamma^2 = (\sigma_c\sigma_p\sigma_q)\ (\sigma_c\sigma_p\sigma_q) = \sigma_c\tau_{A'B'}\ \sigma_c\tau_{A'B'.}$ De acordo com a primeira parte, temos:

$\gamma^2 = \tau_{A'B'}\sigma_c\sigma_c\,\tau_{A'B'} = \tau_{A'B'}\,\tau_{A'B'} = \tau_{CD}$, ou seja, γ^2 é uma translação definida por dois pontos C e D cujo comprimento de CD é o dobro da medida do comprimento de A´B´.

(3ª parte) Considere o grupo cíclico gerado por γ^2. $<\gamma^2> = <\tau_{CD}>$ e, portanto, $<\gamma^2>$ é cíclico e infinito. Mas $<\gamma^2> \subset <\gamma>$. Logo $<\gamma>$ é também cíclico e infinito.

Uma vez conhecidas as isometrias e algumas de suas propriedades, vamos apresentar um conjunto de resultados que garantem que só existem quatro isometrias: translação, reflexão, rotação e reflexão deslizante e classificam tais isometrias.

4.38 Definição: uma isometria é par (ímpar) se for um produto de um número par (ímpar) de reflexões.

4.39 Teorema: se l, m e n são concorrentes em C, então existem retas p e q por C, tais que $\sigma_m\sigma_l = \sigma_n\sigma_p = \sigma_q\sigma_n$.

Demonstração: consideremos L∈l, M∈m, N∈n.

Por C, tracemos as semirretas $\overrightarrow{CP}$ e $\overrightarrow{CQ}$ tais que $L\hat{C}M = P\hat{C}N = N\hat{C}Q$.

Decorre que $\rho_{C,2\theta} = \sigma_m\sigma_l = \sigma_n\sigma_p = \sigma_q\sigma_n$.

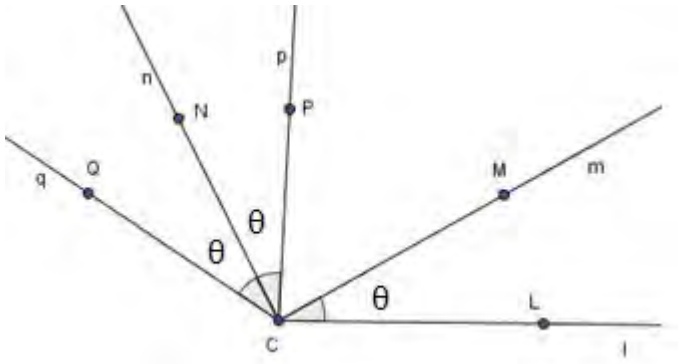


Figura 4.20

4.40 Corolário: se l, m e n são concorrentes em C, então $\sigma_n\sigma_m\sigma_l$ é uma reflexão por uma reta (reta p) passando por C.

Demonstração: do teorema anterior, temos que: $\sigma_m\sigma_l = \sigma_n\sigma_p$. Operando σ_n a esquerda de ambos os lados da igualdade, chegamos em $\sigma_n\sigma_m\sigma_l = \sigma_p$.

4.41 Corolário: o produto de duas reflexões é uma translação ou uma rotação.

Demonstração:

- Se m//n, então $\sigma_m\sigma_n$ é uma translação (teorema 4.33);
- Se m∩n = {C}, então $\sigma_m\sigma_n$ é uma rotação (teorema 4.32).

4.42 Lema: se P é um ponto e a e b retas, então existem retas c e d por P tal que

$\sigma_b\sigma_a = \sigma_d\sigma_c$.

Demonstração: dados a, b e P.

Se a//b, seja c//a passando por P. Se a e b são concorrentes, seja a∩b = {C}. Tomemos c como a reta determinada por C e P. Assim, as três ou serão paralelas entre si ou concorrentes no ponto C. Em ambos os casos, existe uma reta d tal que $\sigma_b\sigma_a\sigma_c = \sigma_d$ e, portanto, $\sigma_b\sigma_a = \sigma_d\sigma_c$.

4.43 Proposição: um produto de quatro reflexões se reduz a um produto de duas reflexões.

Demonstração: dado o produto $\sigma_s\sigma_r\sigma_q\sigma_p$, seja P um ponto da reta p. Pelo lema anterior, existem retas q´e r´ tal que $\sigma_r\sigma_q = \sigma_{r'}\sigma_{q'}$ com P em q´. Usando novamente o lema 4.41 existem retas r´´ e m tal que $\sigma_s\sigma_{r'} = \sigma_m\sigma_{r''}$ com P em r´´.

Visto que p, q´ e r´´ são concorrentes em P, então existe uma reta l tal que $\sigma_{r''}\sigma_{q'}\sigma_p = \sigma_l$. Portanto, $\sigma_s\sigma_r\sigma_q\sigma_p = \sigma_s\sigma_{r'}\sigma_{q'}\sigma_p = \sigma_m\sigma_{r''}\sigma_{q'}\sigma_p = \sigma_m\sigma_l$.

4.44 Corolário: uma isometria par é o produto de duas reflexões. Uma isometria ímpar é uma reflexão ou o produto de três reflexões.

4.45 Proposição: o produto de três reflexões é uma reflexão ou uma RD.

Demonstração: seja $\sigma_n\sigma_l\,\sigma_m$.

- Se m, n e l são concorrentes em C, ou paralelas entre si, então já foi demonstrado que trata-se de uma reflexão.
- Se m, n e l não são todas concorrentes em C e nem paralelas, consideremos $l \cap m = \{Q\}$. Tomemos a reta p, passando por Q e perpendicular a n em P. As retas l, m e p são concorrentes em Q. Logo pelo corolário 4.39 existe q de modo que $\sigma_l\,\sigma_m = \sigma_p\sigma_q$. Temos então $\sigma_n\sigma_l\,\sigma_m = \sigma_n\sigma_p\sigma_q$ e, como $n \perp p$, segue que $\sigma_n\sigma_l\sigma_m = \sigma_P\sigma_q$ que é uma RD.

4.46 Proposição: uma isometria não é par nem ímpar ao mesmo tempo.

Demonstração: pelos resultados anteriores, basta provar que o produto de três reflexões não é o produto de duas reflexões.

Suponhamos que existam p, q, r, s e t, tais que $\sigma_r\sigma_q\,\sigma_p = \sigma_s\sigma_t$. Se considerarmos $\sigma_s\sigma_r\sigma_q\sigma_p$, temos pela prop. 4.42, que existem m e l tais que $\sigma_s\sigma_r\sigma_q\sigma_p = \sigma_m\sigma_l$. Logo $\sigma_t = \sigma_m\sigma_l$ (contradição, de acordo com o corolário 4.40).

Assim, terminamos este capítulo destacando o fato de que só existem quatro isometrias além da identidade:

- Duas pares: translação (duas reflexões por retas paralelas) e rotações (duas reflexões por retas concorrentes).
- Duas ímpares: reflexão (pode ser escrita como o produto de três reflexões por retas paralelas entre si ou concorrentes num mesmo ponto) e RD (caso contrário).

CAPÍTULO 5 ORNAMENTOS PLANOS

"Numbers measure size, groups measure symmetry."(ARMSTRONG, 1957, p. 83).

Chamamos de ornamentos planos qualquer conjunto de pontos do plano. Alguns ornamentos são considerados triviais, como por exemplo: o ornamento vazio, o próprio plano (ornamento constituído por todos os pontos do plano), os ornamentos que são a união de um ou mais círculos concêntricos do plano e os ornamentos que são a união de uma ou mais retas paralelas. Neste trabalho, quando nos referirmos a ornamentos planos, ou simplesmente ornamentos, consideraremos apenas os ornamentos não triviais.

Os ornamentos serão classificados de acordo com as simetrias que possuem. Caso o ornamento não tenha translação não nula nem reflexão deslizante (RD), será chamado de **Roseta** (figura 5.1). As Rosetas são sempre limitadas por um círculo.

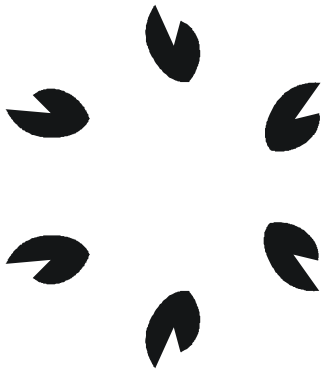


Figura 5.1

Se possuir pelo menos uma destas isometrias, mas em uma única direção, receberá o nome de **Faixa** ou **Friso** (figura 5.2). As Faixas são sempre limitadas por um par de retas paralelas distintas, mas nunca por um círculo.

Figura 5.2

Caso possua pelo menos uma destas duas simetrias em duas direções distintas, diremos que o ornamento é um **Padrão, Papel de Parede ou Grupo Cristalográfico** (figura 5.3), que não podem ser limitados nem por um círculo nem por um par de retas paralelas.

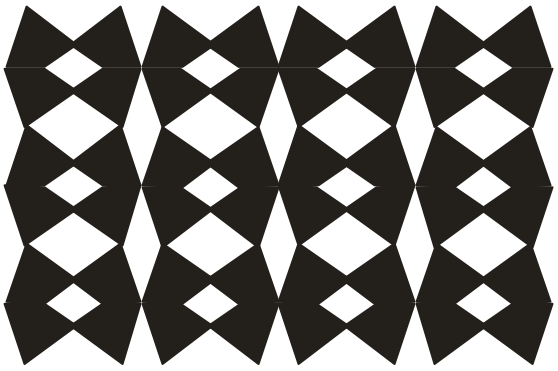


Figura 5.3

5.1 ROSETAS

Como vimos, as Rosetas são ornamentos planos que não possuem as simetrias de translação (não nula) nem reflexão deslizante (RD). Dessa forma, as únicas possibilidades de ocorrência de simetrias para este tipo de figura são rotações e reflexões segundo retas concorrentes, pois, se houvesse reflexão por retas paralelas, teríamos a presença de translações, conforme abordado no capítulo 4. Neste mesmo capítulo foi estudado que o produto de duas reflexões por retas concorrentes resulta em uma rotação cujo ângulo é o dobro da medida do ângulo entre as duas retas. Portanto, podemos afirmar que, nos estudos das Rosetas, ocorrerão figuras que possuem apenas rotações (uma vez que o produto de duas rotações é uma rotação) e figuras que possuem reflexões e rotações.

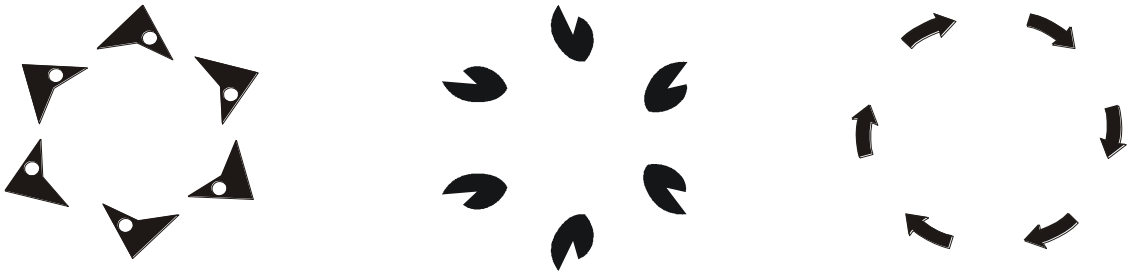


Figura 5.4: Rosetas que apresentam apenas rotações

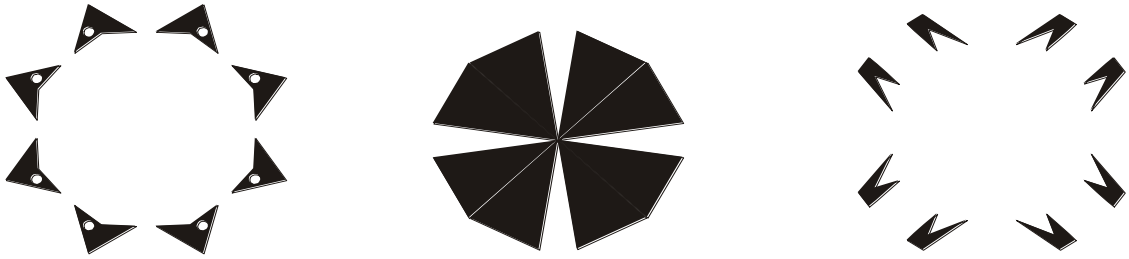


Figura 5.5 : Rosetas com a presença de reflexões e rotações

Vamos, agora, concentrar nossa atenção nas rosetas do tipo que aparecem na figura 5.5, nas quais verificamos ocorrência de reflexões e rotações.

Suponhamos uma situação mais geral, de um ornamento que possui n eixos de simetria reflexional. Esses n eixos, de acordo com as propriedades da reflexão, formarão entre si 2.n ângulos congruentes de medida $\frac{360^0}{2n}$ e dividirão a figura em 2.n partes iguais. Considerando uma dessas partes como referência e seguindo, por exemplo, no sentido anti-horário, a próxima parte será uma reflexão da primeira, a seguinte, uma reflexão da segunda e, portanto, uma rotação de $2.\frac{360^0}{2n} = \frac{360^0}{n}$ em relação à primeira porção, considerada inicialmente como referência, uma vez que se trata de duas reflexões por retas concorrentes. Estendendo tal raciocínio para as 2.n partes, observamos que n delas serão rotações de $\frac{360^0}{n}$, $2.\frac{360^0}{n}$, $3.\frac{360^0}{n}$, ..., $(n–1).\frac{360^0}{n}$, $n.\frac{360^0}{n}$ ao redor do centro da figura em relação à porção da figura tomada inicialmente como referência e as outras n serão reflexões da porção inicial em relação aos n eixos de simetria.

A Figura 5.6 ilustra um exemplo de um ornamento com 4 eixos de simetria: m, n, p e q, que o dividem em 8 porções. Se tomarmos a porção 1 como referência, é possível observar que as partes 2, 4, 6 e 8 são reflexões da porção 1 em relação aos eixos m, p, q e n, respectivamente. Os pedaços enumerados com 3, 5 e 7, são rotações do triângulo preto de 90^0, isto é, $\frac{360^0}{4}$, 180^0 e 270^0, além do próprio pedaço número 1 que pode

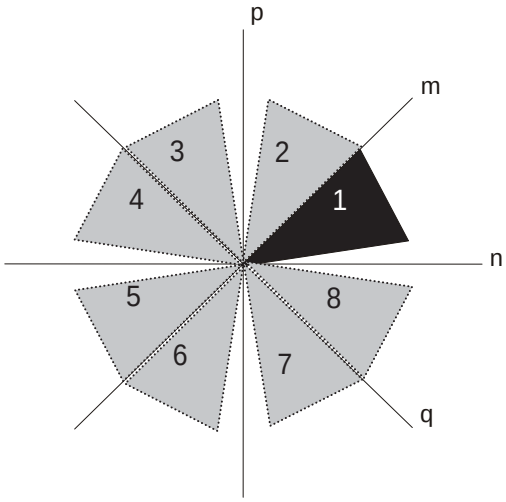


Figura 5.6

ser considerado como uma rotação de 360^0 de si mesmo, onde todas as rotações são em torno do centro da figura.

5.1.1 O estudo das Rosetas sob o ponto de vista algébrico e sua visualização com o caleidoscópio.

5.1.1.1 Grupos Cíclicos

Os ornamentos que aparecem na figura 5.4 são invariantes para rotações de 60^0. O desenho abaixo também pertence a essa primeira categoria, mas é mantido invariante com rotações de 120^0.

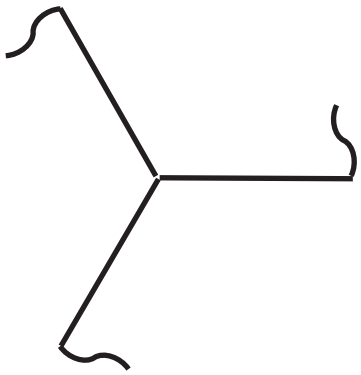


Figura 5.7

Se chamarmos tal rotação[9] de R, o conjunto A= {R, R^2, R^3} será o conjunto de todas as isometrias possíveis da figura[10], sem que haja repetição, já que R^4 coincide com R e R^5 com R^2, etc. Outra observação importante diz respeito a R^3. Uma rotação desse tipo, isto é, de 360^0, é equivalente a figura inicial. Por esse motivo, chamamos tal operação de ι. Assim, vamos reescrever o conjunto A da seguinte maneira:

$A = \{ \iota, R, R^2\}$

[9] Convencionamos aqui que as todas as rotações das rosetas terão como centro o centro da figura e se darão no sentido anti-horário.

[10] Observemos que, por se tratar de uma Roseta, não possui translação nem RD e, neste caso específico, também não possui eixo de simetria reflexional.

Na tentativa de facilitar o entendimento, vamos enumerar as pontas da figura para tentarmos descrever mais detalhadamente o “efeito” causado por cada uma das rotações que compõe o conjunto A.

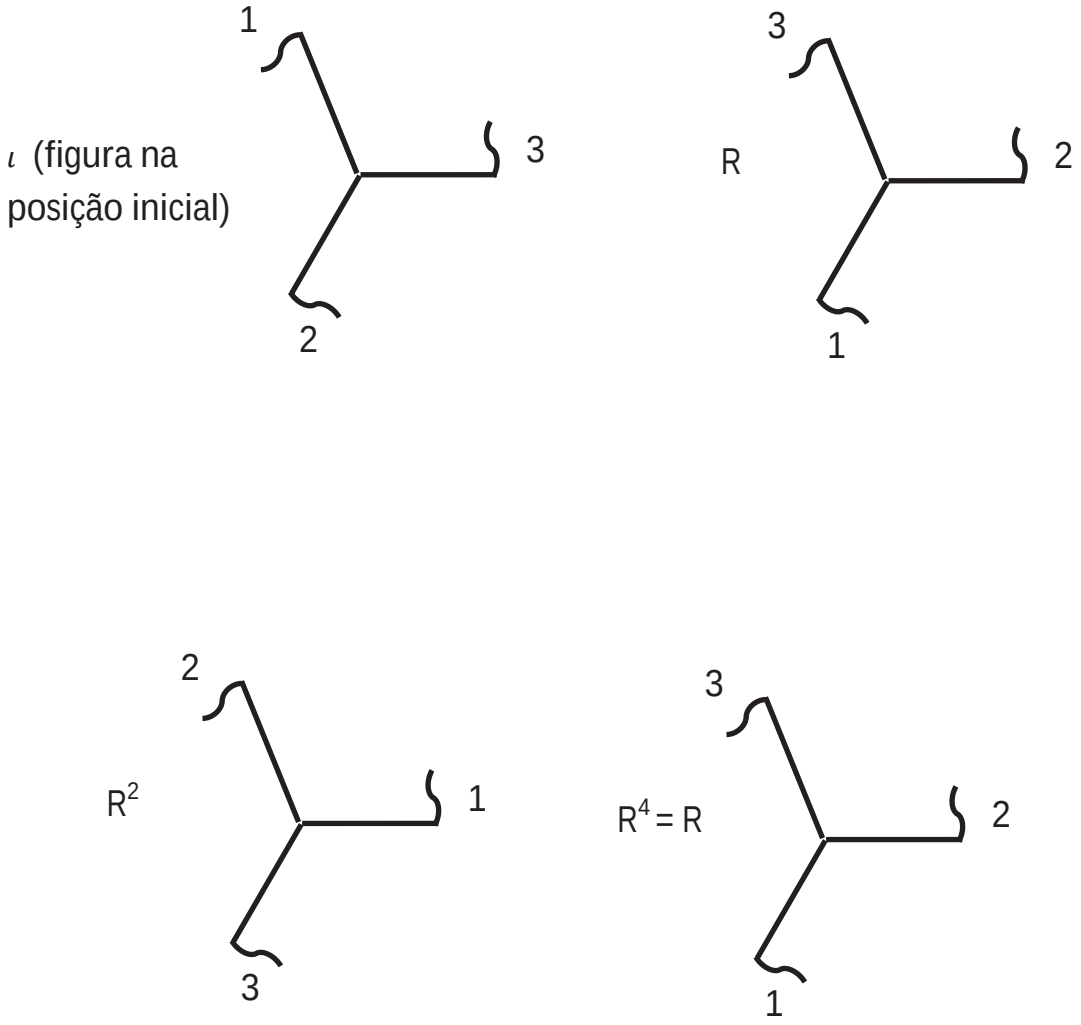


Figura 5.8

Como R pertence ao Grupo das Isometrias, o conjunto A, composto pelas potências inteiras de R, é um grupo cíclico, mais especificamente o C_3.

Generalizando essa idéia, dizemos que qualquer roseta que apresente somente n simetrias rotacionais (em torno do centro da figura) tem C_n como grupo de simetria. Por não haver simetrias reflexionais nas figuras desse tipo, não é possível observá-las usando o caleidoscópio.

As figuras 5.9, 5.10 e 5.11 exibem exemplos de rosetas com grupo de simetria C_n fotografadas pelo autor nas ruas da cidade.

Figura 5.9: Roseta C_4 em uma calçada da cidade

Figura 5.10: Roseta C_2 retratada na procissão de Corpus Christi de 2007.

Figura 5.11: Roseta C_1 retratada na procissão de Corpus Christi de 2007.

5.1.1.2 Grupos Diedrais

No capítulo 4 observamos que um polígono regular de n lados possui n eixos de simetria. Se n é par, teremos $^{n}/_{2}$ passando por pares de vértices opostos e outros $^{n}/_{2}$ eixos determinados pelos pontos médios de lados opostos. Se n é ímpar, os n eixos serão determinados por um vértice e pelo ponto médio do lado oposto a esse vértice. Assim, os grupos diedrais são os grupos de simetria dos polígonos regulares.

As rosetas que aparecem na figura 5.5 possuem 4 rotações de 90^0 e 4 eixos de simetria reflexionais. Para entender melhor esse outro tipo de roseta, vamos estudar um polígono regular que possui as mesmas simetrias dos ornamentos mencionados acima: o quadrado.

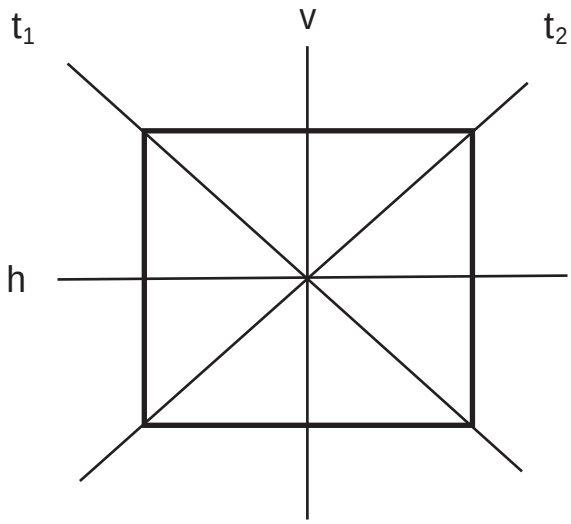


Figura 5.12: Os quatro eixos de simetria reflexional do quadrado

Enumerando os vértices do quadrado, como fizemos com a figura da primeira categoria, obteremos a seguinte figura:

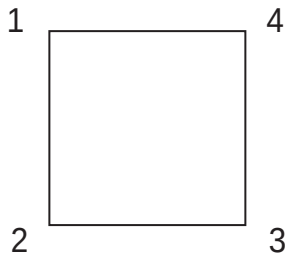


Figura 5.13

Chamando de R a rotação de 90^0 em torno do centro do quadrado, é possível determinar o "efeito" de rotações sucessivas de R:

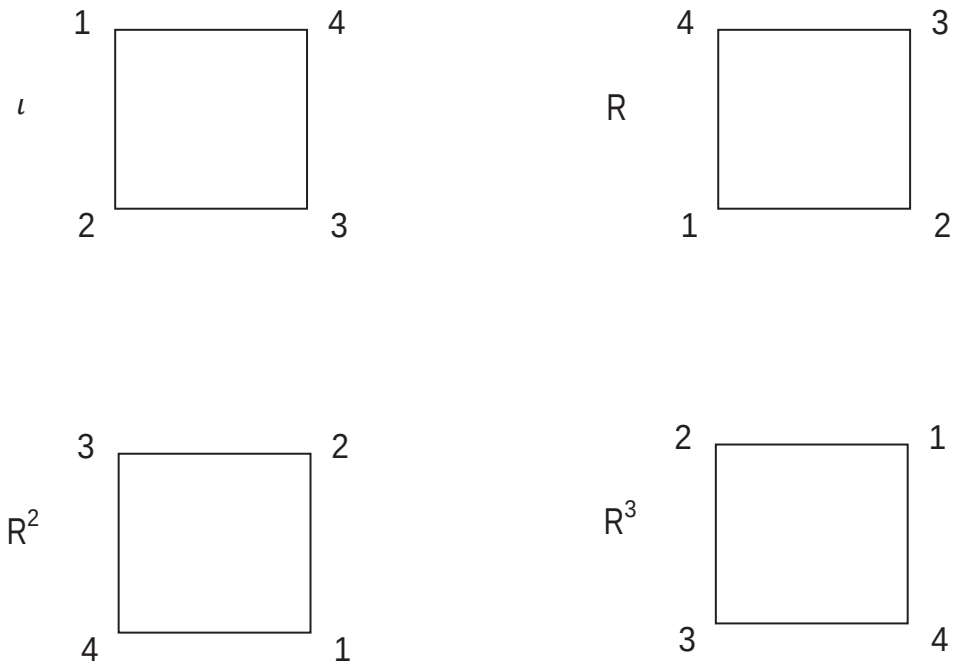


Figura 5.14

Analogamente à categoria anterior, essas configurações (determinadas pela enumeração dos lados do quadrado) passam a se repetir a partir de uma determinada potência de R, nesse caso de R^4, isto é, $R^4 = i$. Também é importante destacar que o conjunto $\{i, R, R^2, R^3\}$ é o grupo cíclico C_4. Mas isso ainda não é tudo. Estudemos agora o conjunto

$$B = \{ \iota, R, R^2, R^3, T_1, T_2, H, V\}$$

onde T_1, T_2, H e V são as simetrias reflexionais relativas às retas t_1, t_2, h e v, respectivamente.

Na medida em que as rosetas não admitem translações nem reflexões deslizantes, podemos ficar tentados a dizer que esse é o conjunto de todas as simetrias do quadrado. E de fato o é, pois não existe nenhuma outra rotação possível que não coincida com as anteriormente mencionadas, bem como não existe nenhum outro eixo de simetria na figura.

Agora, vamos comparar o conjunto B, composto por 8 elementos, com um outro conjunto já visto no capítulo 4, também de 8 elementos: o D_4.

$$D_4 = \{e, R, R^2, R^3, S, RS, R^2S, R^3S\}$$

Para uma melhor associação, chamamos de R o elemento do D_4 que também corresponde à rotação no conjunto B. Supondo que S represente, por exemplo, T_1:

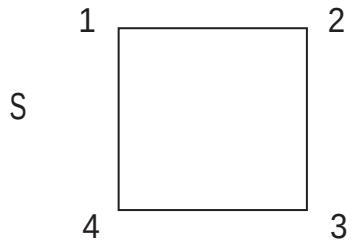


Figura 5.15

RS é o "produto" da reflexão S seguida de uma rotação R, isto é,

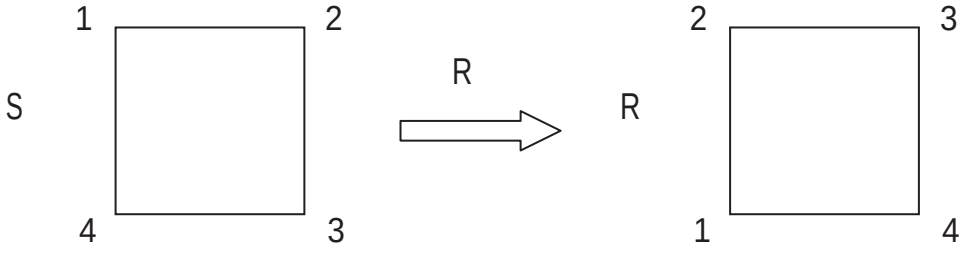


Figura 5.16

RS se equivale à reflexão H.

Se procedermos de mesma maneira em relação aos outros elementos de D_4, obtemos as relações:

$R^2S \rightarrow T_2$ e $R^3S \rightarrow V$.

o que nos mostra que o conjunto B tem as mesmas características do D_4. Afirmamos, portanto, que o grupo (B, o) é isomorfo ao (D_4, o), onde "**o**" é a operação composição de isometrias.

Essa segunda categoria de rosetas é, de fato, a que mais nos interessa nesse momento, uma vez que apresenta os dois tipos de isometrias possíveis para as Rosetas, a rotação e a reflexão. Mas, o fato de possuir simetrias reflexionais não sugere que essas figuras possam ser visualizadas por um Caleidoscópio adequado?

Quais simetrias podemos gerar operando apenas com T_1 e V? Falando com uma linguagem mais formal, esses dois elementos do grupo geram algum outro grupo? Qual?

Recordando que o quadrado original foi assim enumerado:

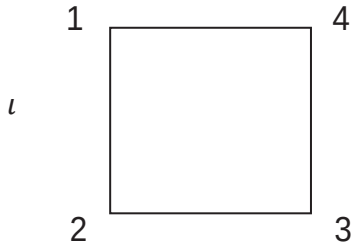


Figura 5.17

e que,

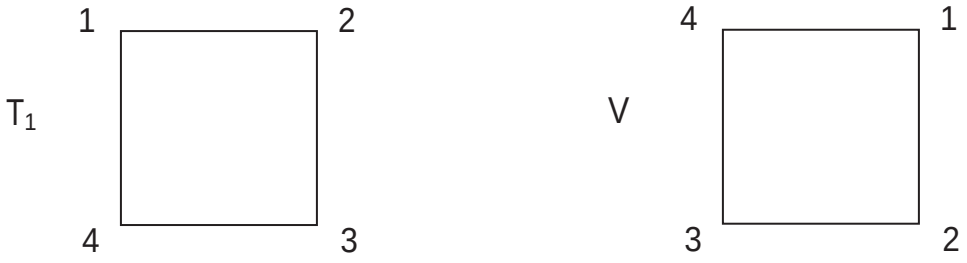


Figura 5.18

temos:

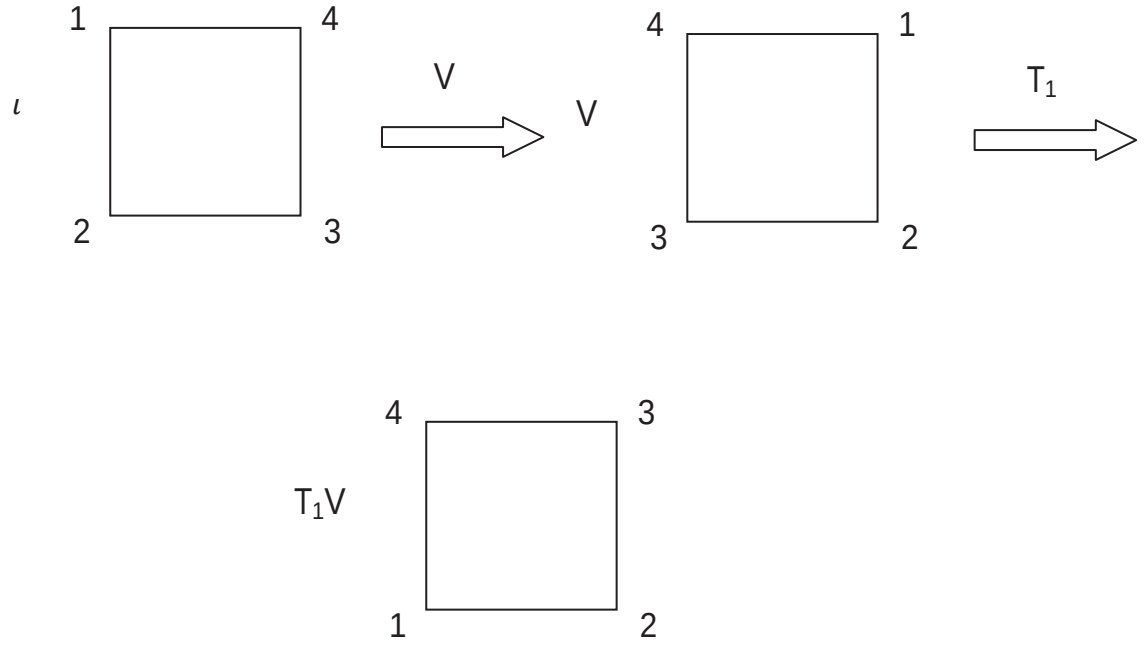


Figura 5.19

ou seja, $T_1V \rightarrow R$.

Fazendo VT_1 obtemos:

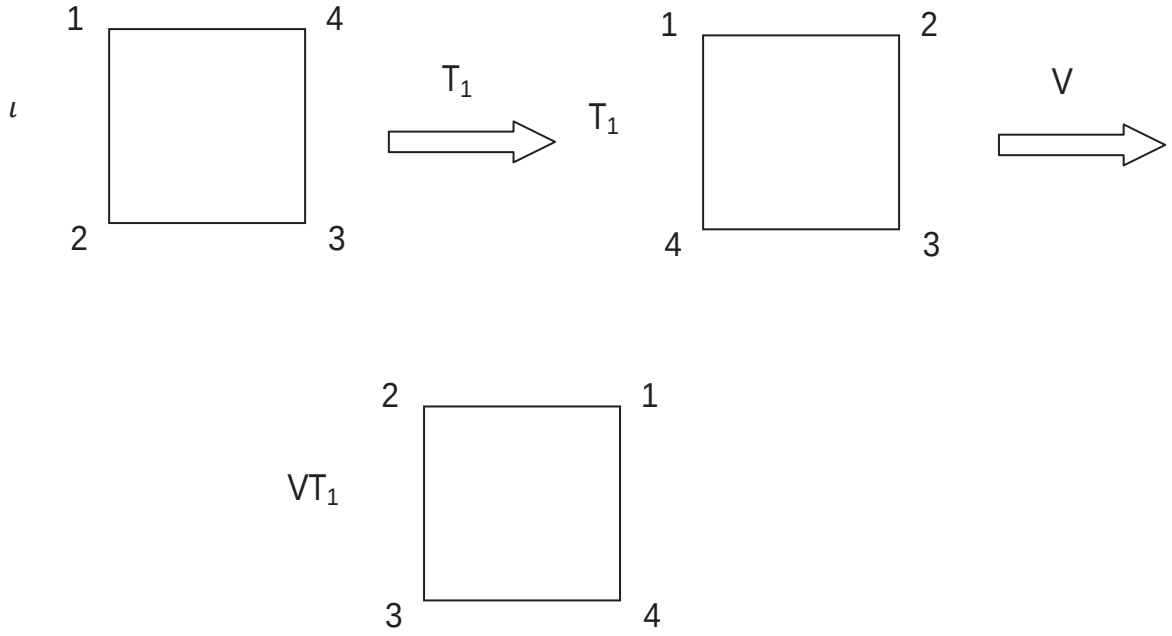


Figura 5.20

chegando a $VT_1 \rightarrow R^3$.

Efetuando as devidas operações com V e T_1 chegamos às seguintes relações:

$V^2 \rightarrow \iota$, $T_1V \rightarrow R$, $T_1V\,T_1V \rightarrow R^2$, $VT_1 \rightarrow R^3$, T_1 (ou S), $VT_1V \rightarrow T_2$ (ou R^2S),

$T_1VT_1 \rightarrow H$ (ou RS) e V (R^3S)

o que mostra que V e T_1 geram o grupo B. Entretanto, como estamos falando de duas reflexões, isso sugere que se posicionarmos um par de espelhos articulados perpendicularmente sobre as retas v e t_1, conseguiremos visualizar a figura inteira, seja ela o quadrado ou qualquer uma das que aparecem na figura 5.5 (que possuem o D_4 como grupo de simetria), ou ainda com uma visão mais geral que, posicionando adequadamente os espelhos articulados, conseguiremos reproduzir as figuras representadas por um grupo Diedral qualquer.

Note que a posição dos dois espelhos é fundamental. Caso posicionemos os espelhos sobre as retas v e h, obteríamos as seguintes possibilidades:

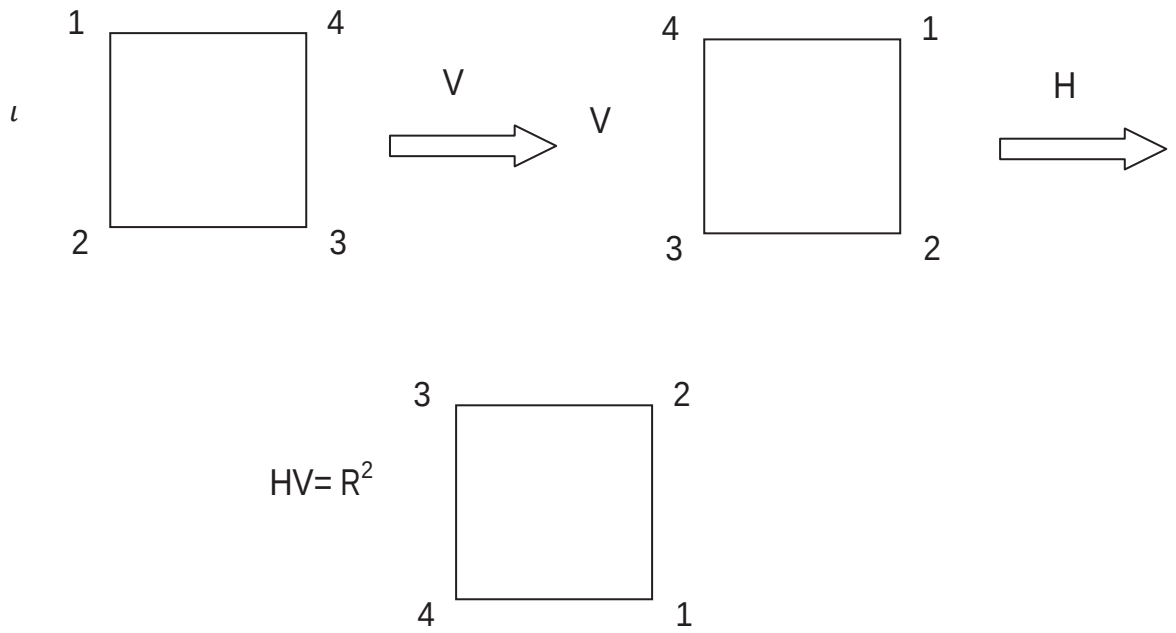


Figura 5.21

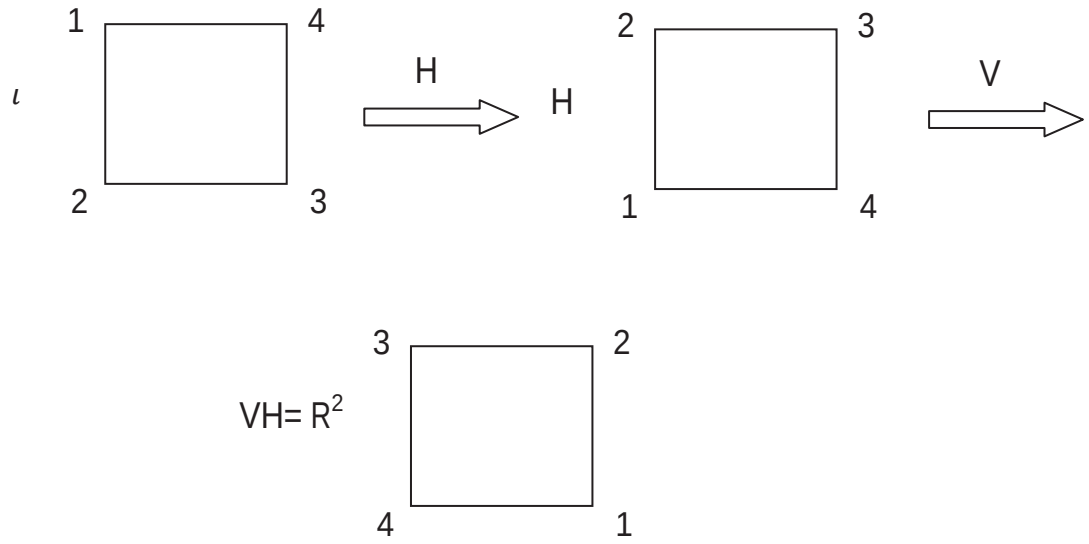


Figura 5.22

Como visto no capítulo 4, o produto de duas reflexões resulta numa rotação cujo ângulo é o dobro da medida do ângulo entre os espelhos, neste caso uma rotação de $2.90^0 = 180^0$, o que no nosso contexto corresponde a R^2.

Assim, o grupo gerado pelas reflexões V e H é o grupo abeliano E= { ι, V, H, R^2}, onde R^2 representa a rotação de 180^0 e ι é obtido, por exemplo, pelos produtos V^2 ou H^2, dentre outras possibilidades.

Optamos por chamar a rotação de 180° de R^2 para destacar o fato de E ser subgrupo de B, ou caso consideremos os isomorfismos entre E e {e, R^3S, RS, R^2} e entre B e D_4, de {e, R^3S1, RS, R^2} ser subgrupo de D_4.

Assim como fizemos no subitem anterior, as figuras abaixo mostram ornamentos do tipo D_n retratados pelo autor nas ruas da cidade de Rio Claro – SP.

Figura 5.23: D_1 (um eixo de simetria) na calçada

Figura 5.24: D_2 no portão de uma residência

Figura 5.25: Um azulejoD_4 enfeitando a parede de uma residência

5.2 FAIXAS OU FRISOS

Quando definimos os tipos de ornamentos, dissemos que uma Faixa ou Friso é uma figura que possui as simetrias de translação (não nula) ou reflexão deslizante em uma única direção. Na verdade, bastaria dizer que não possui translação não nula, já que aplicar duas vezes a mesma RD resultaria numa translação.

As figuras 5.26 e 5.27 mostram dois desses tipos de frisos:

Figura 5.26: Faixa com RD

F F F F F F F F F F

Figura 5.27: Faixa com translação

Agora veja mais dois exemplos de faixas:

Figura 5.28: Outros exemplos de faixas

A pergunta que surge é: além dessas faixas em que aparecem somente translações e reflexões deslizantes, existem outros tipos de faixas? Olhando com mais atenção é possível perceber na figura acima algumas faixas que ocorrem outras transformações além das duas

citadas logo acima. Quais simetrias podem ocorrer em um friso qualquer? Qual quantidade de faixas é possível ser criada (considerando, como fizemos anteriormente com as Rosetas, a estrutura e não os diversos tipos de modelos)?

Para responder essas perguntas vamos recordar as transformações que vimos até agora. Sabemos que nas faixas podem ocorrer translações e RD's. Como a faixa estende apenas em uma direção, conclui-se que não pode haver rotações, a menos que seja uma rotação de 180^0, isto é, uma meia volta. Em relação à reflexão, pelo mesmo motivo, esta não pode ocorrer por retas concorrentes e, portanto, ou ocorre por uma única reta de mesma direção da faixa (coincidindo com a linha central do friso) ou é reflexão por retas paralelas perpendiculares à direção da faixa.

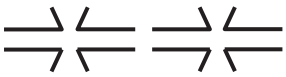
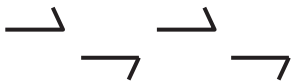
Portanto, podemos dizer que nas faixas sempre haverá translação e que, além desta, podem ocorrer quatro tipos de simetria: meia-volta, reflexão por uma reta na mesma direção da faixa (que para simplificar a linguagem chamaremos de horizontal), reflexão por retas perpendiculares à faixa (que denominaremos vertical) e reflexão deslizante.

A ocorrência ou não dessas simetrias nos levaria a $2^4 = 16$ possibilidades de faixas, mas, com um olhar mais cuidadoso, percebemos, por exemplo, a impossibilidade de ocorrer simultaneamente reflexões horizontais e verticais e não ocorrer meia-volta[11]. Assim essa possibilidade estaria sendo contabilizada erroneamente. Desta forma, para que não sejam cometidos esses tipos de erros, vejamos o seguinte esquema[12]:

[11] Já que duas reflexões por retas que formam entre si um ângulo reto resultaria em uma rotação de 180^0, conforme já visto anteriormente.

[12] É importante utilizar uma figura assimétrica como "célula geradora" para que não nos enganemos em relação à existência de uma determinada simetria no friso causada pela escolha não conveniente da figura que irá se repetir. Por este motivo optamos por usar uma "meia-seta".

Tabela 5.1

Refl. Verti-Cal	**Refl. Hori-zontal**	**Meia-Volta**	**RD**	**Possibilidades de ocorrências**	**Modelos**
S	**S**	**S**	**S**	**FAIXA TIPO 1**	
S	S	S	N	Impossível: motivo 1	
S	S	N	S	Impossível: motivo 2	
S	S	N	N	Impossível: motivos 1 e 2	
N	S	S	S	Impossível: motivo 3	
N	S	S	N	Impossível: motivos 1 e 3	
N	**S**	**N**	**S**	**FAIXA TIPO 2**	
N	S	N	N	Impossível: motivo 1	
S	**N**	**S**	**S**	**FAIXA TIPO 3**	
S	N	S	N	Impossível: motivo 4	
S	N	N	S	Impossível: motivo 5	
S	**N**	**N**	**N**	**FAIXA TIPO 4**	
N	N	S	S	Impossível: motivo 6	
N	**N**	**S**	**N**	**FAIXA TIPO 5**	
N	**N**	**N**	**S**	**FAIXA TIPO 6**	
N	**N**	**N**	**N**	**FAIXA TIPO 7**	

Motivos:

1) Lembrando que a translação ocorre em todos os tipos de faixa, se ocorrer também reflexão horizontal, certamente ocorreria reflexão deslizante[13] de acordo com sua definição.
2) Como a meia-volta é a composição de uma reflexão horizontal com uma vertical, é impossível haver esses dois tipos de reflexão e não ocorrer meia-volta[14].
3) Se ocorrer meia-volta e reflexão horizontal ocorrerá reflexão vertical.

   Demonstração: Seja A um ponto qualquer do plano e c uma reta horizontal. Chamemos de $A' = \sigma_c(A)$, $A'' = \sigma_P(A)$, p uma reta perpendicular a c e $\{P\} = p \cap c$.

   $A'' = \sigma_P(A) = \sigma_p(\sigma_c(A)) = \sigma_p(A')$, $\forall$ A, isto é, o ponto A´´ é a reflexão vertical de A´.

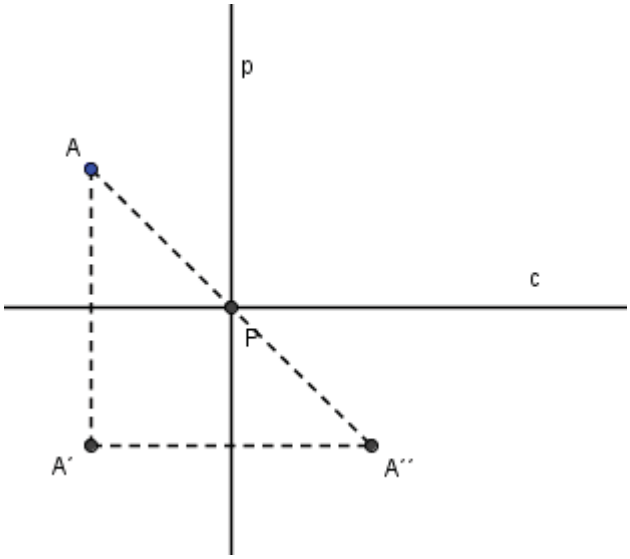


Figura 5.29

4) A definição alternativa de RD (teorema 4.35) impossibilita a ocorrência de meia-volta e reflexão vertical sem que haja reflexão deslizante.

[13] note que a recíproca não é verdadeira.
[14] note que a recíproca não é verdadeira.

5) Se ocorrer RD e reflexão vertical ocorrerá meia-volta.

Demonstração: Seja A um ponto qualquer do plano, c uma reta horizontal a e b retas perpendiculares a c tais que $\gamma(A) = \sigma_b\sigma_c\sigma_a(A)$. Seja $\{P\} = c \cap b$, $A' = \sigma_a(A)$ e $A'' = \gamma(A)$. Assim, temos que:

$A'' = \gamma(A) = \sigma_b\sigma_c\sigma_a(A) = \sigma_P(\sigma_a(A)) = = \sigma_P(A')$, $\forall$ A, o que quer dizer que A´´ é uma meia volta de A´ em torno do ponto P.

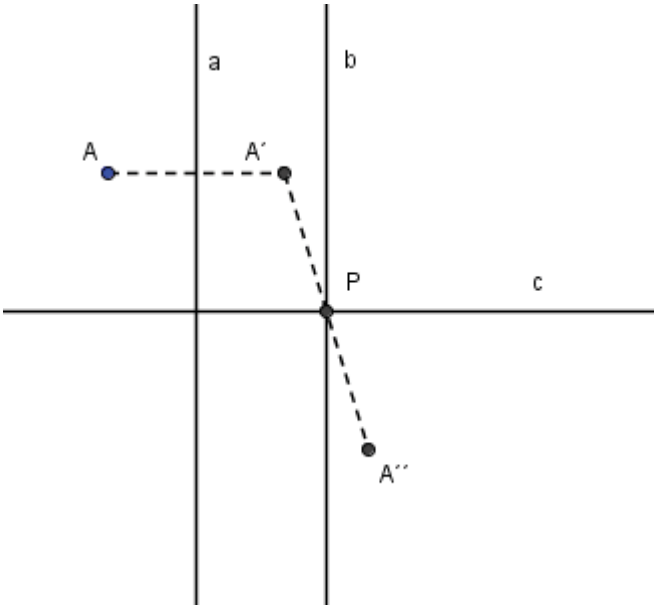


Figura 5.30

6) A existência de meia-volta e RD resulta na ocorrência de reflexão vertical.

Demonstração: Seja A um ponto qualquer do plano, c uma reta horizontal, a e b retas perpendiculares a c tais que $\gamma(A) = \sigma_b\sigma_c\sigma_a(A)$. Denominemos $\{P\} = c \cap a$, $A' = \sigma_P(A)$ e $A'' = \gamma(A)$. Portanto:

$A'' = \gamma(A) = \sigma_b\sigma_c\sigma_a(A) = \sigma_b\sigma_P(A) = = \sigma_b(A')$, $\forall$ A, ou seja, o ponto A´´ é a reflexão vertical de A´.

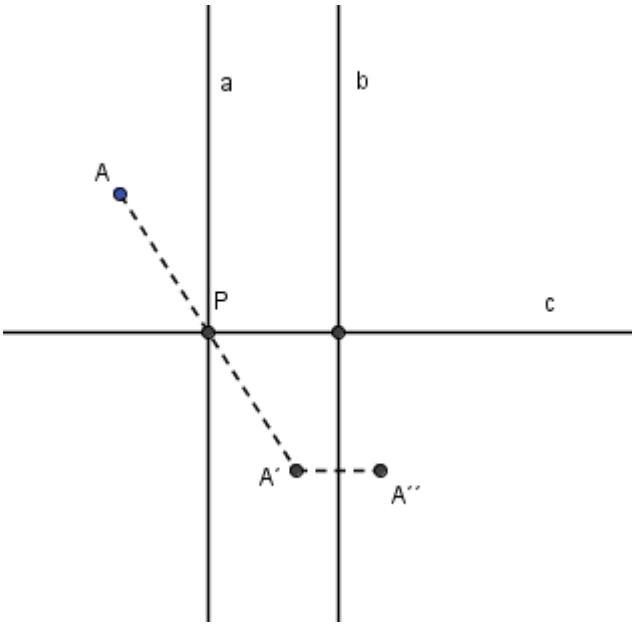


Figura 5.31

De acordo com o exposto, concluímos que mesmo que ocorram mudanças nos motivos, uma faixa qualquer terá a estrutura de algum dos sete tipos citados na tabela. Destes sete, apenas podem ser visualizados com espelhos os frisos que apresentam simetria por retas (paralelas) verticais, isto é, os de tipos 3, 4 e 1.

Figura 5.32: Duas maneiras de visualizar com o caleidoscópio o friso do tipo 1

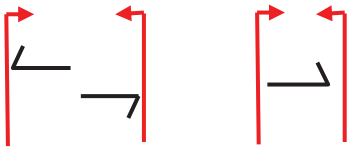


Figura 5.33: Modos de visualizar as faixas dos tipos 3 e 4 com caleidoscópios

Assim, como procedemos com os grupos finitos, as simetrias das faixas podem ser consideradas como o deslocamento de um modelo inicial ou como uma transformação que

mantém a invariabilidade do ornamento como um todo. A figura abaixo mostra um esquema no qual aparecem as sete possibilidades de faixas, dos tipos 7, 6, 5, 4, 2, 3 e 1, respectivamente.

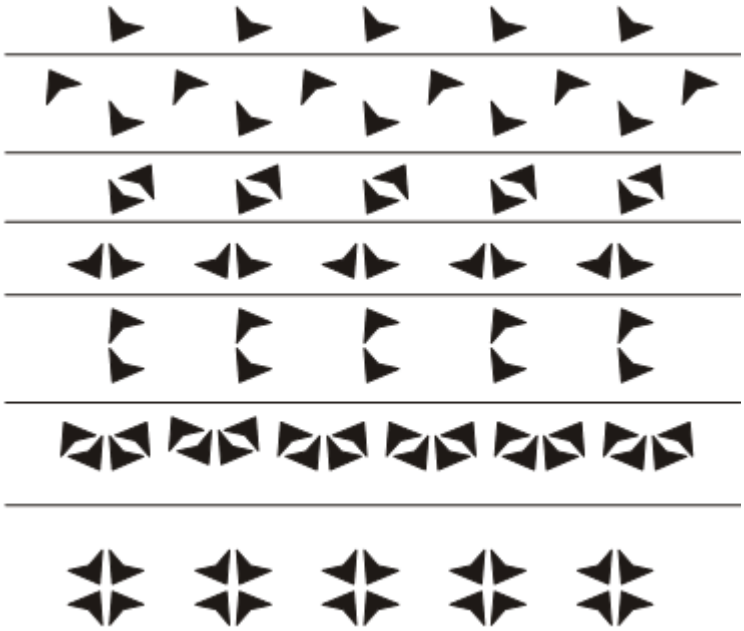


Figura5.34: As sete possibilidades de faixas

No que diz respeito às notações para as classificações dos frisos, destacamos duas delas, com as quais nos deparamos com maior frequencia na literatura e acreditamos serem as mais comuns.

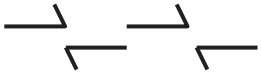
A primeira delas, também utilizada para papéis de parede, usa quatro símbolos para caracterizar cada um dos tipos de faixas.

O primeiro, a letra latina minúscula p, indica que se trata de um padrão (na verdade, a letra p vem do termo em inglês, *pattern*). **O segundo** refere-se à reflexão vertical. Se ocorrer, terá nesta posição a letra m (*mirror*, em inglês), caso contrário, aparecerá o numeral 1. **O terceiro** símbolo diz respeito à ocorrência de reflexão horizontal: se houver será m; se o friso for invariante segundo uma reflexão deslizante, mas não segundo a uma reflexão horizontal, aparecerá a letra latina minúscula a, e caso não ocorra nenhuma dessas simetrias, o terceiro símbolo será 1. **O quarto** e último símbolo trata da ocorrência da meia volta, se houver, será 2, caso contrário, 1.

A outra notação, mais simplificada, é constituída pela letra latina maiúscula F e dois índices: **o inferior**, que denota a ocorrência de meia volta (2 se houver e 1 se não houver) e **o superior**, onde aparecerá 1 se houver reflexão horizontal, 2 se não houver reflexão horizontal, mas sim a vertical e 3 se houver apenas reflexão deslizante[15]. Caso não haja nenhuma das simetrias que acabamos de mencionar, não aparecerá nada no índice superior.

Desse modo, a nomenclatura que usamos provisoriamente na construção da tabela para o entendimento dos sete tipos de frisos, pode ser substituída por:

Tabela5.2

TIPO DE FAIXA	UM MODELO	SIMETRIAS	NOVAS NOMECLATURAS
TIPO 1		σ_v, σ_h, σ_P e RD	pmm2 ou F_2^1
TIPO 2		σ_h e RD	p1m1 ou F_1^1
TIPO 3		σ_v, σ_P e RD	pma2 ou F_2^2
TIPO 4		σ_v	pm11 ou F_1^2
TIPO 5		σ_P	p112 ou F_2
TIPO 6		RD	p1a1 ou F_1^3
TIPO 7		apenas translação	p111 ou F_1

[15] Lembrando que estamos desconsiderando a ocorrência de translação, que aparece em todos os frisos.

5.2.1 Os Frisos sob o ponto de vista algébrico

Sob o olhar da Teoria dos Grupos de Simetria, os Frisos são grupos que contém as isometrias que fixam a reta c, que tem a mesma direção (horizontal) do friso e passa por seu centro. Portanto, as possibilidades de simetrias são: a translação $\tau_{P,Q}$, com $\overleftrightarrow{PQ}$//c, reflexão σ_c, reflexão σ_v, com v⊥c, a meia volta σ_P, P∈c e a reflexão deslizante γ com eixo c.

Uma possibilidade é a faixa gerada apenas por translação. Chamemos de τ a translação de comprimento mínimo que fixa c. Assim, o grupo $F_1 = < \tau >$ é um grupo de simetria que não contém ponto de simetria (meia volta), nem reta de simetria (reflexão) e tampouco RD.

Uma vez que as simetrias pares formam um grupo, acrescentemos a F_1 a isometria σ_P, a meia volta. Agora, temos o novo grupo de simetria, $F_2 = < \tau, \sigma_P >$. O produto $\tau\sigma_P$ é também uma meia volta e, portanto, também é elemento de F_2.

Dessa maneira, se considerarmos tão somente as isometrias pares, os únicos grupos possíveis são F_1 e F_2.

Acrescentemos, então, as simetrias ímpares, iniciando pelas reflexões. Se σ_v fixa c, então v=c ou v⊥c. Seja $F_1^1 = < \tau, \sigma_c >$. Como $\tau\sigma_c = \sigma_c\tau$, então F_1^1 é abeliano e seus elementos são da forma $\tau^i\sigma_c^j$. Pela definição 4.34, F_1^1 contém RD (veja a tabela 5.2 acima).

Seja $F_2^1 = < \tau, \sigma_P, \sigma_c >$. Como σ_c comuta com τ e σ_P, todo elemento de F_2^1 é da forma $\sigma_c^k\sigma_P^j\tau^i$. F_2^1 contém RD e reflexão por uma reta perpendicular a c, conforme a definição 4.33 e os motivos 3 e 6 (veja a tabela 5.2 acima).

Suponhamos que o friso em questão não contenha meia volta, mas contenha uma reflexão σ_v, com v⊥c. Neste caso, os elementos de $F_1^2 = < \tau, \sigma_v >$ são da forma $\sigma_v^j\tau^i$ e são apenas translações e reflexões por retas perpendiculares a c.

Seja $F_2^2 = < \tau, \sigma_P, \sigma_v >$, de acordo com o teorema 4.36 (definição alternativa da RD), concluímos que esse grupo também possui RD.

O último grupo de simetria é aquele onde, além da translação ocorre apenas a RD γ. Neste caso, teremos o grupo $F_1^3 = < \tau, \gamma >$ no qual ocorrem apenas translações e RD´s, já que γ^2 é uma translação e τγ (que é o mesmo que γτ) é também uma RD.

É pertinente perceber que o suposto grupo formado pelo acréscimo de uma RD em F_2, de acordo com o motivo 6 resultaria em F_2^2.

De acordo com o exposto, podemos apresentar o diagrama abaixo, que consiste em um critério para classificar o grupo de simetria:

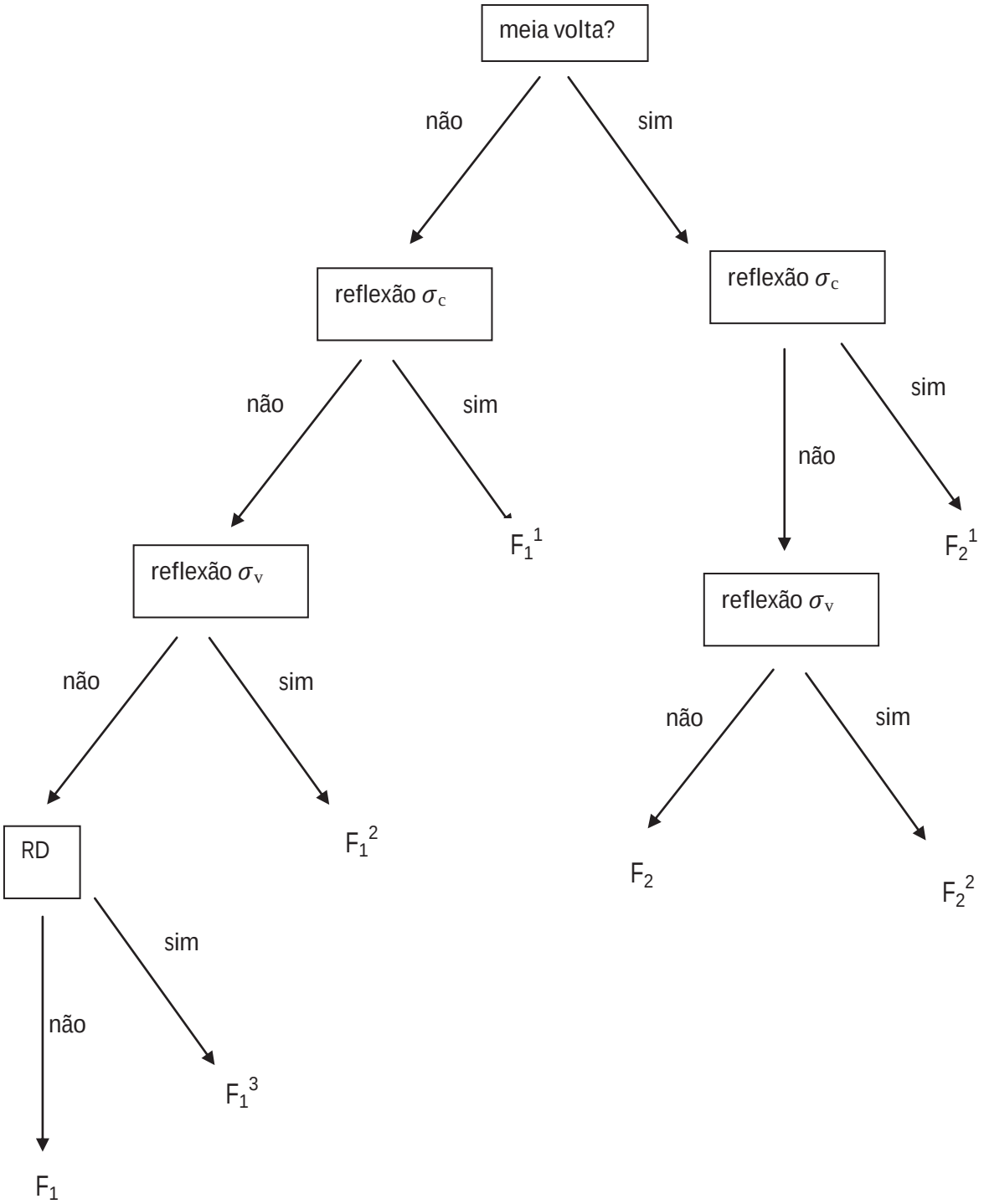


Figura 5.35: Classificação dos Frisos

A figura 5.36 mostra fotos em que aparecem as faixas ou frisos:

Figura 5.36: Uma faixa pmm2 e outra p112 nas ruas de Rio Claro – SP

5.3 PAPÉIS DE PAREDE

Neste item são abordados os ornamentos denominados Papéis de Parede, Padrões ou Grupos Cristalográficos. Esse tipo de ilustração foi produzido por diversos artistas no decorrer da história da humanidade, no entanto, a primeira demonstração da existência de apenas 17 tipos de Padrões que se tem notícia data de 1891 feita por E. S. Fedorov. Seu artigo, originalmente publicado em russo, ganhou maior repercussão com a publicação do artigo "*Über die Analogie der Kristallsymmetrie in der Ebene*", de Geoge Polya.

O termo "Grupos Cristalográficos" vem do fato dos Papéis de Parede estar relacionados com os cristais estudados pelos químicos.

Geometricamente, esses ornamentos são caracterizados por possuir algum tipo de simetria e não poderem ser limitados nem por círculos nem por retas paralelas. Outra maneira de caracterizá-los, agora com argumentos das transformações geométricas, é dizer que são figuras que possuem a simetria de translação em duas direções distintas.

A justificativa da existência de apenas 17 tipos de Papéis de Parede é semelhante a que foi usada no caso dos Frisos mas, consideravelmente mais trabalhosa, à medida que estamos diante de um cenário onde as simetrias de translação, RD, reflexão e rotação podem estar presentes em mais de uma direção. Particularmente, no caso das rotações, agora ocorrem não apenas o caso particular da meia volta, como aconteceu no estudo das Faixas.

As possibilidades de rotação, que analisaremos a seguir, são chamadas de restrições cristalográficas.

5.3.1 Restrições Cristalográficas

Se houver rotação em um papel de parede, esta rotação será de meia volta, um terço de volta, um quarto de volta ou um sexto de volta.

A demonstração desse fato envolve conhecimentos matemáticos mais sofisticados cujo desenvolvimento foge ao objetivo deste trabalho. No entanto, ela é baseada nos seguintes argumentos:

i) As simetrias de um determinado papel de parede, em particular as rotações, levam centros de rotação em centros de rotação;

ii) Se P é um centro de rotação, os centros de rotação "mais próximos" de P são todos equidistantes a P, já que a rotação é uma isometria.

O item (i) é verdadeiro, pois as simetrias levam porções do papel de parede em porções idênticas e, portanto, levam o centro de rotação de um pedaço da figura (se houver) no outro centro de rotação correspondente.

O segundo argumento pode ser mais bem compreendido observando a figura 5.37:

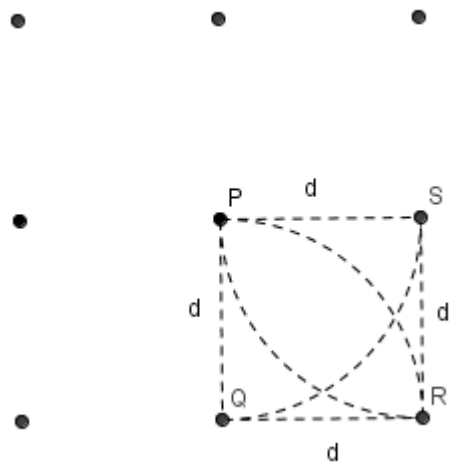


Figura 5.37: Centros de rotação

Se o ponto Q é o resultado de uma rotação de centro P aplicada ao ponto S e lembrando que a rotação é uma simetria da figura temos que a distância de P a S é a mesma da de P a Q, por exemplo, d.

Retornando à figura 5.37 e estendendo este raciocínio para as rotações de centros em Q e S, obtemos que as distâncias entre os pontos Q e R, e entre os pontos R e S também são d, o que nos leva à conclusão de que procedendo da mesma maneira com todos os centros de rotação, obteremos uma malha de pontos, onde todos são vértices de um polígono regular.

Como conseqüência do fato do ornamento se estender infinitamente pelo plano, estudar os centros de rotação dos Papéis de Parede, em última instância, é estudar quais polígonos regulares recobrem o plano. Estamos nos referindo ao triângulo equilátero, ao quadrado e ao hexágono regular, isto é, os polígonos que geram, respectivamente, rotações de 60, 90 e 120 graus (1/6, 1/4 e 1/3 de volta). Chamaremos esses centros de rotação de 6-centro, 4-centro e 3-centro. Existem ainda os 2-centro, centros de rotação de 180^0 ou meia volta e o 1-centro, quando se tratar de um ornamento que não possui centro de rotação, ou seja, é invariável apenas pela rotação identidade (volta completa).

É importante ressaltar que se um determinado ponto é um centro de rotação de um quarto de volta, ele também é um centro de rotação de meia volta. Em outras palavras, um 4-centro é também um 2-centro.

Assim, quando nos referirmos a um n-centro qualquer, estaremos fazendo alusão a um ponto que é centro de uma rotação de menor ângulo possível e, portanto, de maior índice, já que o índice n representa a fração de volta que caracteriza o ângulo. Isto significa que, embora um 6-centro seja também um 3-centro e um 2-centro, o índice que é utilizado para sua caracterização é o maior possível, no caso deste exemplo, o 6.

5.3.2 Os dezessete tipos de Papéis de Parede

Tendo em vista as possíveis rotações em um Grupo Cristalográfico e recordando que a existência de linha de simetria pressupõe a ocorrência de reflexão, apresentamos a seguir os dezessete tipos de Padrões, suas respectivas simetrias e possibilidades de visualização utilizando caleidoscópios.

Entre os Grupos Cristalográficos que apresentam 1-centro, isto é, que não apresentam rotações diferentes da identidade, temos:

1) O que apresenta somente translações como simetrias:

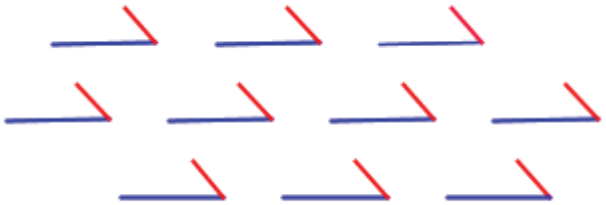


Figura 5.38: Padrão W_1 ou pl: apenas translações

Já que não possui linhas de simetria, este papel de parede não pode ser reproduzido com jogos de espelhos

Se, além de translações ocorrem reflexões deslizantes, precisamos distinguir algumas situações:

2) Alguns eixos de RD não são linhas de simetria.

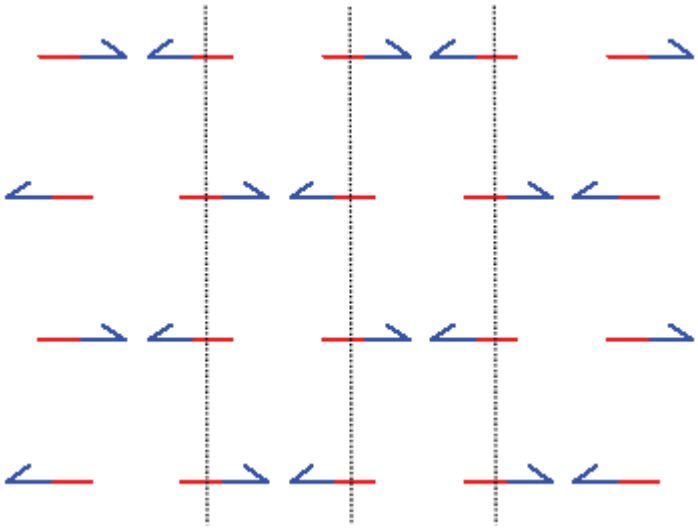


Figura 5.39: Padrão W_1^1 ou cm: alguns eixos da RD não são linhas de simetria

Embora este padrão possua linhas de simetria, o fato de elas se posicionarem paralelas umas às outras não permite que a figura seja visualizada com caleidoscópios. O mesmo ocorre no próximo Grupo Cristalográfico.

3) Todos os eixos de RD são linhas de simetria.

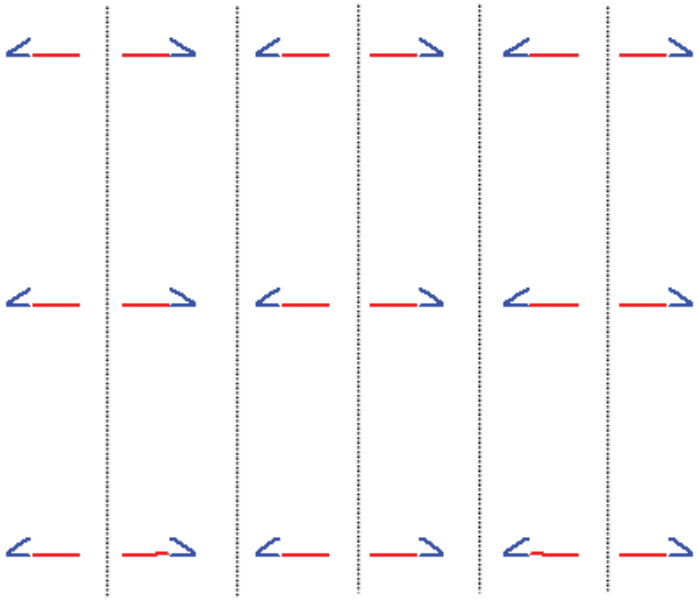


Figura 5.40: Padrão W_1^2 ou pm: todos os eixos de RD são linhas de simetria.

4) Não há linhas de simetria, mas possui RD.

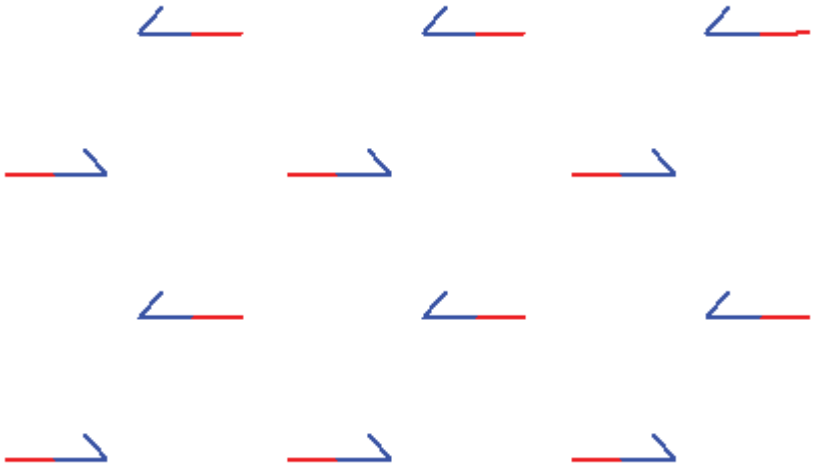


Figura 5.41: Padrão W_1^3 ou pg: apenas RD

Os próximos tipos de papéis de parede que abordaremos são aqueles que contêm simetrias de rotação. Neste caso, as rotações poderão ser, de acordo com a restrição cristalográfica, de meia volta, 120^0 ou 1/3 de volta, 90^0 ou 1/4 de volta, ou 60^0 ou 1/6 de volta.

Entre os padrões que apresentam apenas 2-centros podemos destacar os que:

5) Não possuem simetrias linhas de simetria, isto é, reflexões.

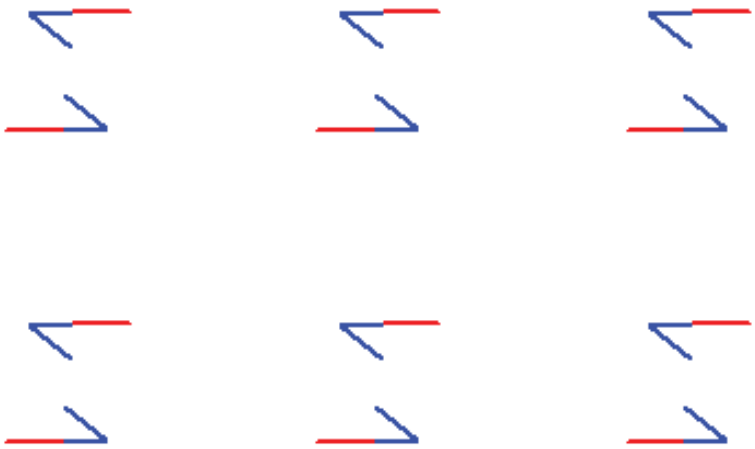


Figura 5.42: Padrão W_2 ou p2.

O fato de os dois últimos Papéis de Parede não possuirem reflexões acarreta na impossibilidade de reproduzi-los com o auxílio de caleidoscópios.

6) Possuem reflexões e alguns 2-centros estão fora da linha de simetria. Este Grupo Cristalográfico pode ser visualizado com um caleidoscópio de quatro espelhos determinados por suas linhas de simetria.

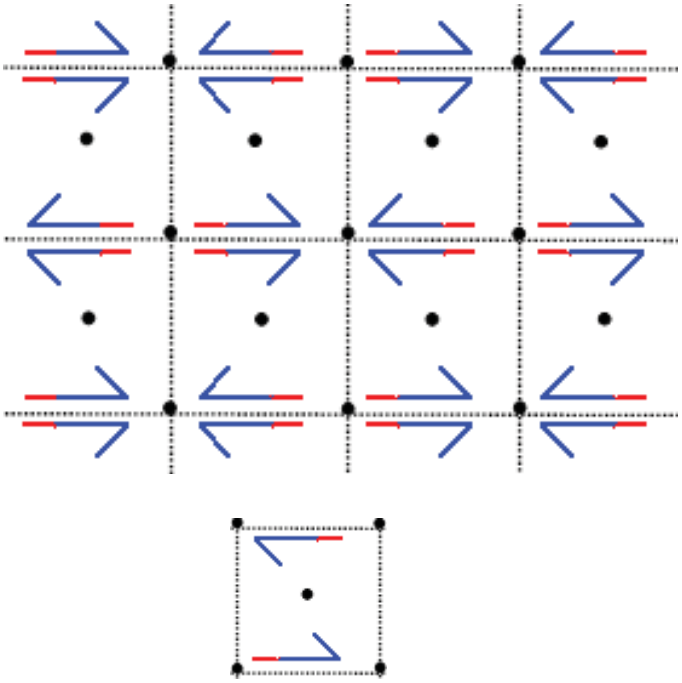


Figura 5.43: Padrão W_2^1 ou cmm e a respectiva base caleidoscópica.

7) Possui simetrias ímpares e todos os 2-centros estão sobre linhas de simetria. Outro Papel de Parede que pode ser visto com o auxílio do caleidoscópio.

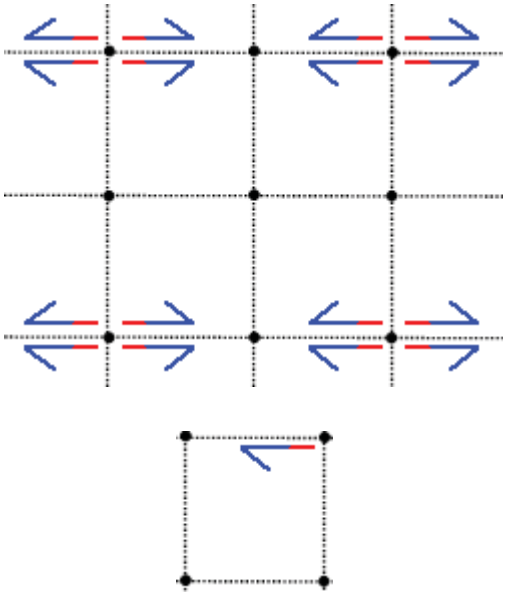


Figura 5.44: Padrão W_2^2 ou pmm e a base caleidoscópica correspondente.

8) Possui simetrias ímpares e nenhum dos 2-centros está sobre as linhas de simetria, que são paralelas entre si (caso contrário, haveria rotação diferente de meia volta).

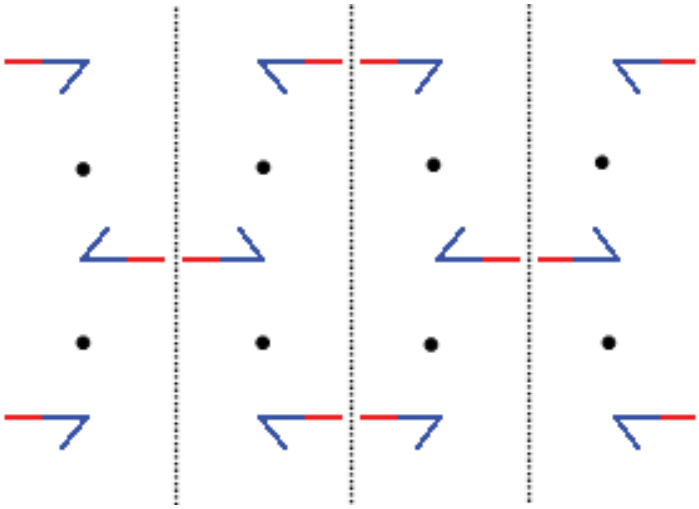


Figura 5.45: Padrão W_2^3 ou pmg: pontos e linhas de simetria.

9) Sem linhas de simetria, mas possuem RD.

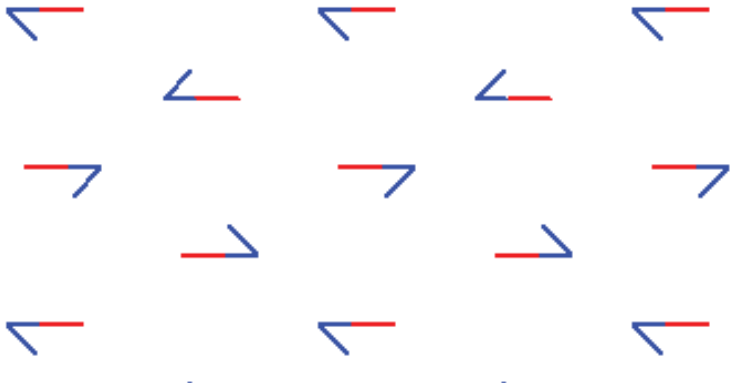


Figura 5.46: Padrão W_2^4 ou pgg

Os padrões que apresentam 4-centros podem ocorrer de três diferentes maneiras:

10) Não apresentam linhas de simetria.

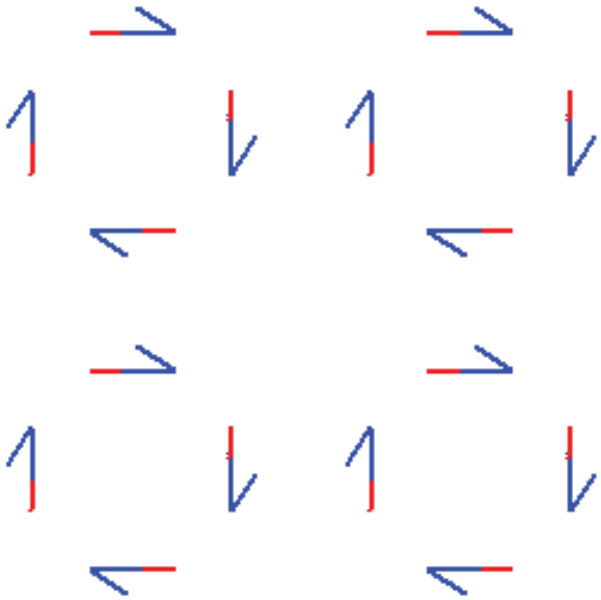


Figura 5.47: Padrão W_4 ou p4: apenas rotações.

11) Os 4-centros estão sobre as linhas de simetria. Este Grupo Cristalográfico pode ser visto utilizando-se o caleidoscópio de quatro espelhos ou o isósceles retângulo.

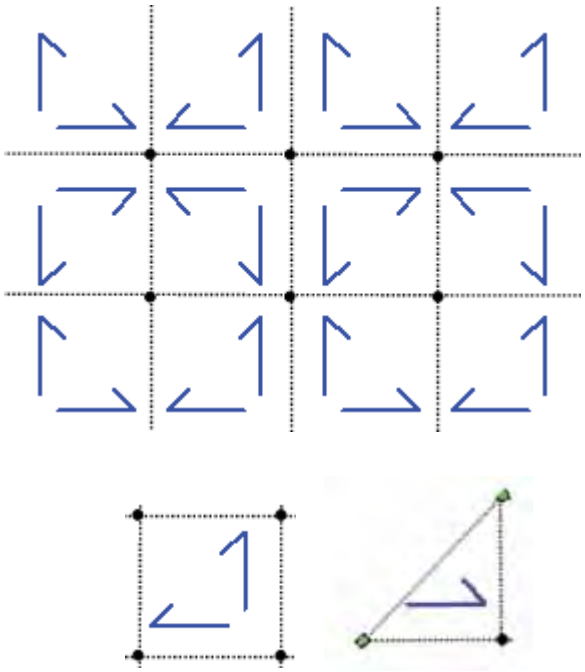


Figura 5.48: Padrão W_4^1 ou p4m e as duas maneiras de visualização com caleidoscópios

12) Os 4-centros não estão sobre as linhas de simetria. Outro Padrão que pode ser visto com o uso de caleidoscópios.

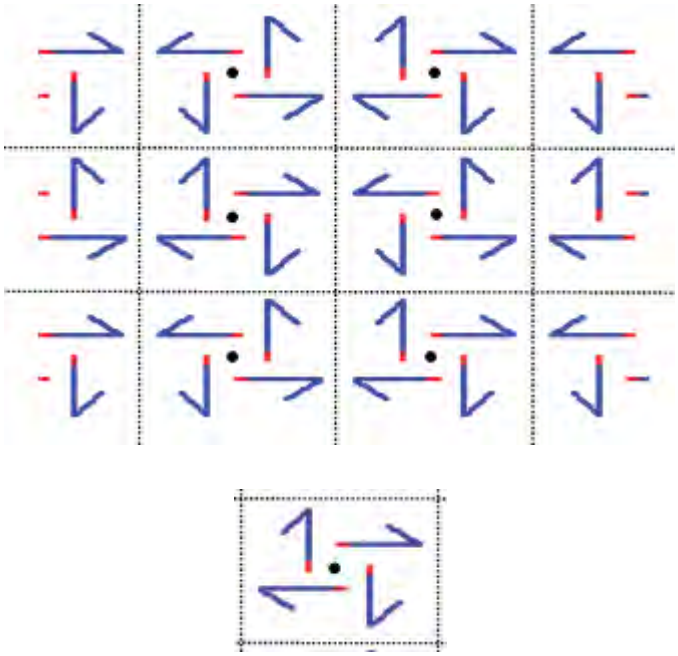


Figura 5.49: Padrão W_4^2 ou p4g e a base caleidoscópica correspondente.

Em relação aos padrões com apenas 3-centros, temos as seguintes possibilidades:

13) Não possuem linhas de simetria;

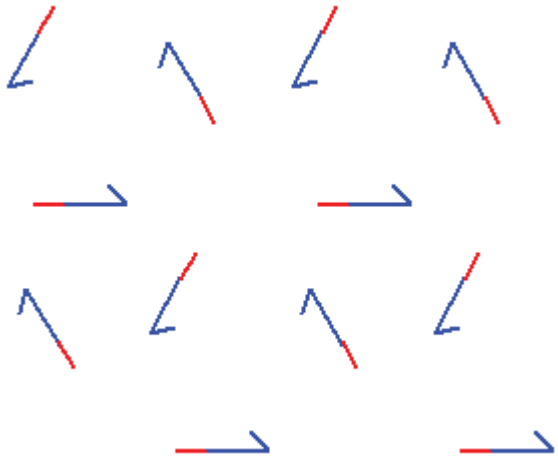


Figura 5.50: Padrão W_3 ou p3: apenas rotações.

14) Todos os centros estão sobre as linhas de simetria.

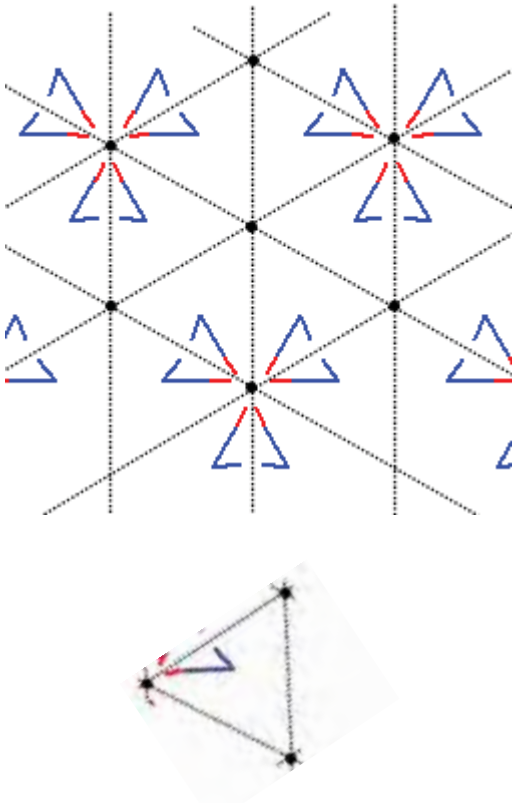


Figura 5.51: Padrão W_3^1 ou p3m1 e a respectiva base caleidoscópica para sua visualização.

15) Alguns centros não estão sobre as linhas de simetria.

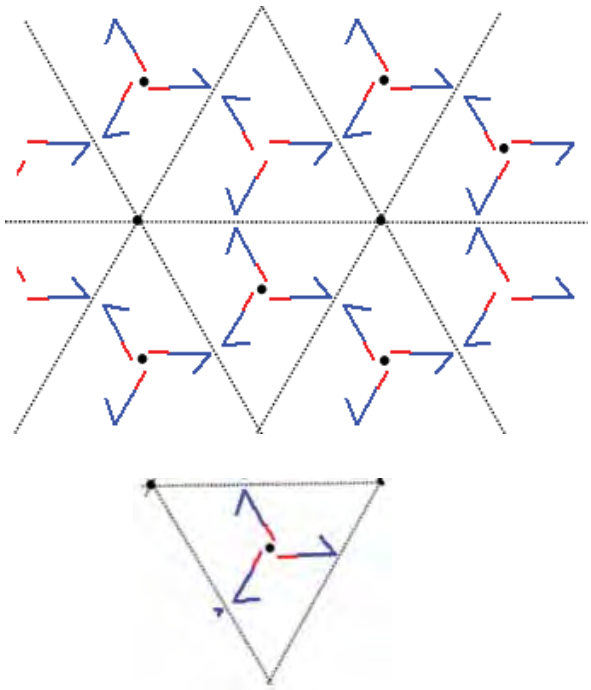


Figura 5.52: Padrão W_3^2 ou p3lm e a base caleidoscópica correspondente.

A última categoria de papéis de parede, a dos que apresentam os 6-centros, ocorrem de duas maneiras:

16) Não tem linhas de simetria.

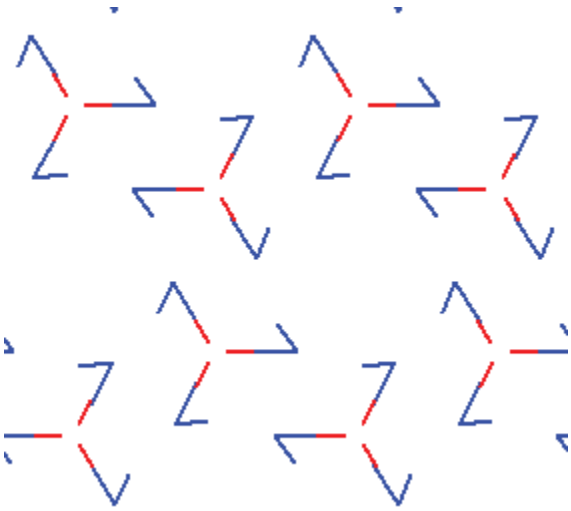


Figura 5.53: Padrão W_6 ou p6.

17) Tem linhas de simetria. Este Padrão pode ser visto com o auxílio de três caleidoscópios diferentes, como ilustrado na figura seguinte.

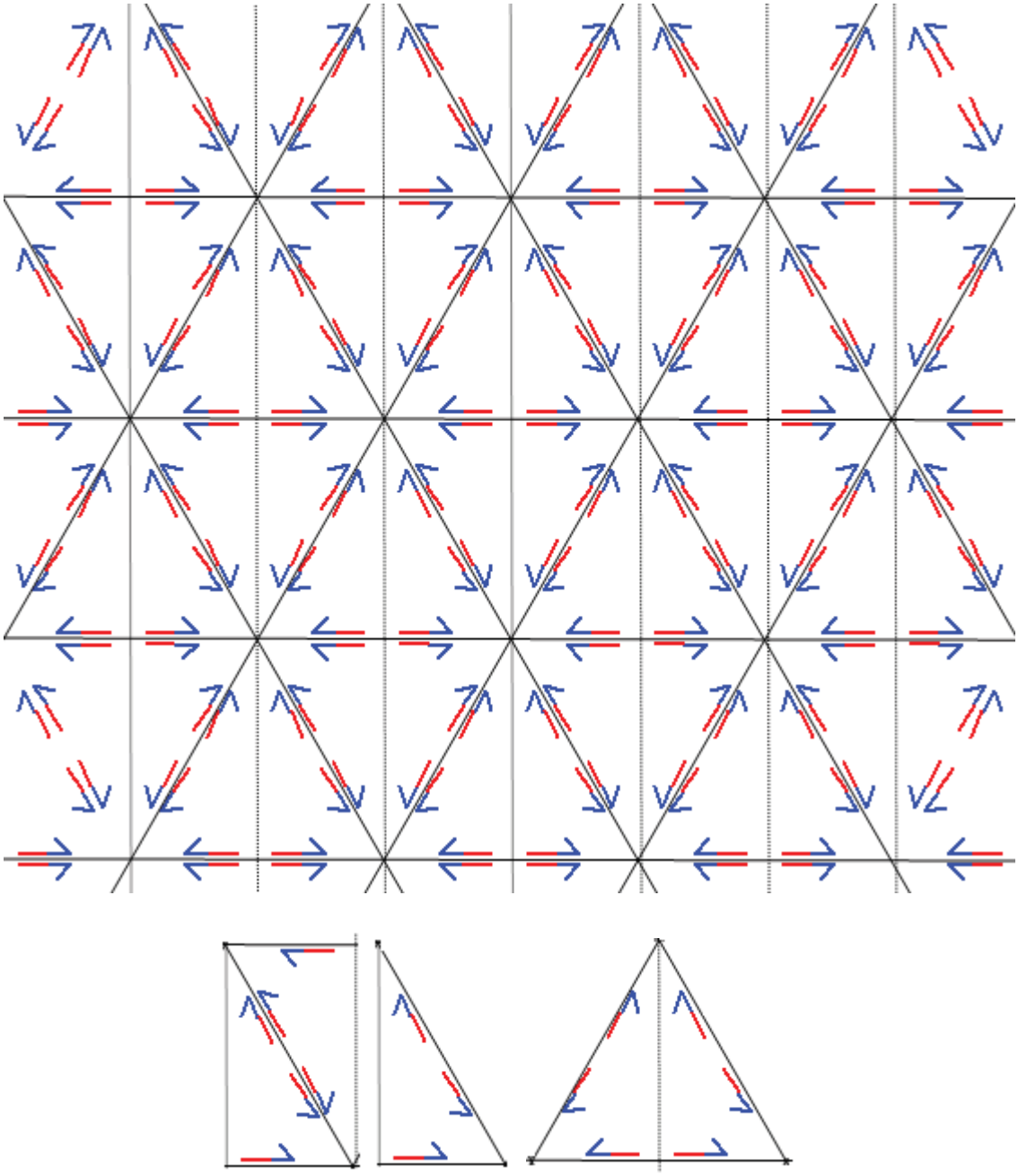


Figura 5.54: Padrão W_6^1 ou p6m e as diferentes maneiras de visualizá-lo.

Quando é mencionado o número de maneiras diferentes que um Grupo Cristalográfico pode ser visualizado por meio de caleidoscópios, está sendo feita referência às bases geradoras e às bases transformadas, estudadas no capítulo 3. Ao olhar para a base da figura 5.55, embora ela seja uma ilustração que, ao ser posicionada entre os espelhos de um

caleidoscópio equilátero, seja possível reproduzir o Padrão W_6^1, não se trata de uma base geradora, mas sim uma base transformada composta por quatro bases geradoras (a que aparece à direita na figura 5.54 e três de suas reflexões).

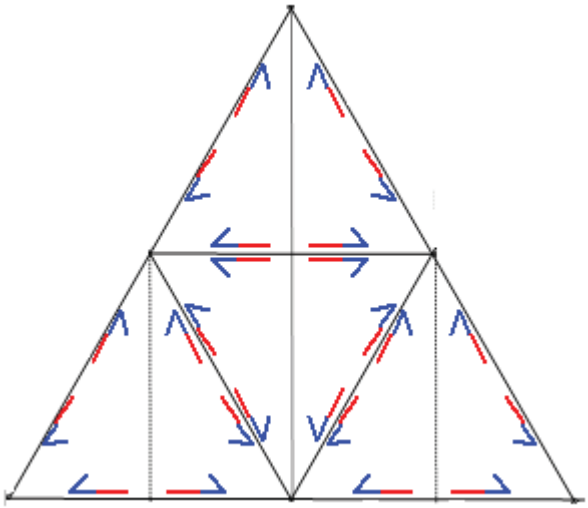


Figura 5.55: Base Transformada para o Padrão W_6^1

Assim, das dezessete possibilidades de Papéis de Parede apresentadas, apenas sete podem ser visualizadas com o uso do caleidoscópio, e as bases apresentadas em cada um dos casos são todas bases geradoras.

5.3.3 <u>As notações dos Grupos Cristalográficos</u>

Para representar cada um dos dezessete tipos de Padrões existem algumas notações. Assim como foi feito com os Frisos, serão apresentadas duas delas que, de acordo com Areas (1999) são as mais utilizadas.

Na primeira, aparece a letra W (do termo *wallpaper*, que em inglês significa papel de parede) com índices que indicam o tipo de n-centro (o índice inferior) e a existência de outros tipos de simetria (o superior).

O segundo tipo de notação tem a simbologia análoga à utilizada para os frisos. Na tabela 5.3, são mostradas as relações dos dois tipos de representações, as relações entre eles e suas respectivas caracterizações[16].

[16] Um estudo mais detalhado é encontrado em Areas (1999).

Tabela 5.3

W_1 p1 Apenas translações.	W_2 p2 Sem simetrias ímpares.	W_3 p3 Sem eixos de simetria.	W_4 p4 Sem eixos de simetria.	W_6 p6 Sem eixos de simetria.
W_1^1 cm Alguns eixos de RD não são linhas de simetria.	W_2^1 cmm Alguns 2-centros não estão sobre as linhas de simetria.	W_3^1 p3m1 Todos os 3-centros estão sobre as linhas de simetria.	W_4^1 p4m Todos os 4-centros estão sobre as linhas de simetria.	W_6^1 p6m Apresenta linhas de simetria.
W_1^2 pm Todos os eixos de RD são linhas de simetria.	W_2^2 pmm Todos os 2-centros estão sobre as linhas de simetria.	W_3^2 p3m1 Alguns 3-centros estão sobre as linhas de simetria.	W_4^2 p4g Os 4-centros não estão sobre as linhas de simetria.	
W_1^3 cm Sem linhas de simetria, mas com ocorrência de RD.	W_2^3 pmg Todos os eixos de simetrias são paralelos.			
	W_2^4 pgg Sem linhas de simetria, mas com ocorrência de RD.			

Procedendo da mesma maneira como fizemos com as Rosetas e os Frisos, as figuras 5.56 e 5.57 ilustram alguns tipos de Papéis de Parede presentes no cotidiano.

Figura 5.56:À esquerda um piso com configuração W_2^1 e à direita uma parede W_2.

Figura 5.57: À esquerda um piso com configuração W_4 e a direita uma parede W_4^1.

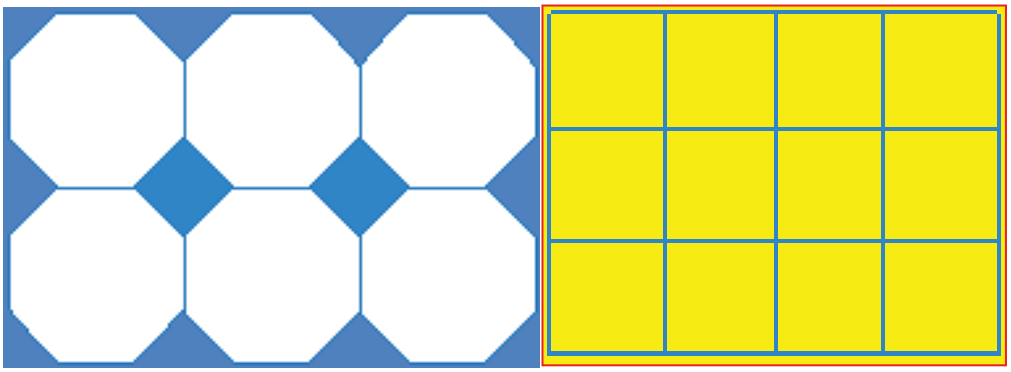


Figura 5.58: As pavimentações uniformes (4, 8, 8) e (4,4,4,4), ambas modelos de W_4^1.

Figura 5.59: Padrão W_3^1 visto no caleidoscópio.

CAPÍTULO 6: APRESENTAÇÃO E ESTUDO DOS DADOS

"For a practical demonstration in Euclidean space,
take two hinged mirrors inclined at 180º/n…"

(COXETER, 1948, p. 83)

Neste capítulo apresentamos o conjunto de atividades que foi desenvolvido e aplicado durante um curso de extensão oferecido como parte deste trabalho de pesquisa. Antes, porém, são feitas considerações sobre a metodologia de Resoluções de Problemas, a respeito do software Kali, utilizado no decorrer do curso, bem como a descrição do ambiente onde ocorreu a coleta de dados e das pessoas que dela participaram.

6.1 Resolução de Problemas

Alguns pesquisadores desenvolveram e ainda desenvolvem pesquisas sobre a relevância do uso de Resolução de Problemas no ensino de matemática. Onuchic (1999) afirma que:

> Embora a aquisição de conhecimento matemático seja importante, a proposta essencial para aprender matemática é ser capaz de usá-la. Em conseqüência disso, dá-se aos alunos muitos exemplos de conceitos e de estruturas matemáticas sobre aquilo que estão estudando e muitas oportunidades de aplicar essa matemática ao resolver problemas.

Dante (1999) destaca que a sua utilização é capaz de:

- fazer o aluno pensar produtivamente;
- desenvolver o raciocínio do aluno;
- ensinar o aluno a enfrentar situações novas;
- dar ao aluno oportunidade de se envolver com aplicações da matemática;
- tornar as aulas de matemática mais interessantes e desafiadoras;
- equipar o aluno com estratégias para resolver problemas e
- dar uma boa base matemática às pessoas.

Ao contrário do ensino fundamentado na transmissão de conhecimento, a Resolução de Problemas pode constituir não somente um conteúdo educacional, mas também uma forma de conceber as atividades educacionais. Atualmente consideram-se três modos diferentes de

abordar Resolução de Problemas: ensinar sobre resolução de problemas, ensinar a resolver problemas e ensinar matemática através de resolução de problemas.

Na **primeira concepção** destaca-se o modelo de resolução de problemas como conteúdo e está de acordo com as idéias de Polya (1978). Segundo ele, existem quatro fases no processo de resolução de problemas matemáticos:

- Compreensão do problema: o aluno precisa estar motivado a resolvê-lo. Esta é a fase em que precisa entender o enunciado e identificar as fases do problema.
- Estabelecimento de um plano: depois de ter visto o problema sobre diferentes aspectos, relacioná-lo a situações semelhantes e dividi-lo em partes, o aluno concebe uma estratégia para solucioná-lo.
- Execução de um plano: neste momento o aluno executa o plano que foi estabelecido para solucionar o problema.
- Retrospecto: esta é a fase que testa a solução encontrada. Caso esta não seja válida, recomeça todo o processo.

Estas fases deverão ser ensinadas aos alunos assim como algumas estratégias que lhe serão úteis. O professor tem a função de ser um questionador, de modo a ajudar o aluno a refletir e desenvolver nele a aptidão para resolver problemas futuros.

Ao "**ensinar a resolver problemas**" o objetivo do professor é aplicar o conhecimento matemático na solução destes. São apresentados aos alunos conceitos e exemplos de estruturas matemáticas para que apliquem na resolução de problemas. A aprendizagem matemática tem como finalidade capacitar os alunos a aplicar esse conhecimento.

No modo "**ensinar através de resolução de problemas**", o processo de ensino aprendizagem tem como partida um problema que é proposto de modo a contribuir na formação de conceitos e no desenvolvimento de estratégias de resolução antes da sua apresentação em linguagem matemática formal. Aqui, Resolução de Problemas passa a ser pensada como uma metodologia de ensino, isto é, um meio de ensinar matemática.

Concordamos com Onuchic (1999) quando afirma que: "...embora na teoria as três concepções de ensinar resolução de problemas matemáticos possam ser separadas, na prática elas se superpões e acontecem em várias combinações e sequencias".

Assim, acreditamos que neste trabalho de pesquisa predomine a última concepção apresentada. O encaminhamento das atividades ocorreu segundo as etapas sugeridas por Allevato e Onuchic (2003):

- Formar grupos e entregar as atividades;
- Observar e intermediar o trabalho em grupos;
- Registrar os resultados na lousa;
- Analisar os resultados em plenária;
- Encaminhar um consenso e
- Formalizar o que foi aprendido.

Por entender que essa metodologia possibilite o desenvolvimento de um trabalho mais autônomo do aluno, onde este tem a oportunidade de participar mais ativamente da construção do próprio conhecimento, optamos por utilizar Resolução de Problemas para estruturar o corpo de atividades proposto neste curso.

6.2 Kali

Existem alguns *softwares* que auxiliam e tornam mais rápido e prático o desenho de ornamentos planos. Embora não seja um programa sofisticado no que diz respeito a recursos gráficos, principalmente quando se trata de preenchimento das figuras, optamos por utilizar o Kali para elaborar algumas atividades no decorrer do curso devido à sua facilidade de uso, o que o torna bastante acessível para a utilização em sala de aula. O Kali é um *software* gratuito desenvolvido por Jeff Weeks que possibilita a criação dos três tipos ornamentos planos: rosetas, faixas e papéis de parede. Algumas figuras que servem de exemplo para esta dissertação também foram produzidas no Kali. A seguir, mostraremos suas principais funções:

Figura 6.1: Friso desenhado com o auxílio do Kali.

Na parte superior da tela encontra-se a barra de menus que oferece as seguintes opções: Arquivos, Editar, Visualizar, Opções e Ajuda.

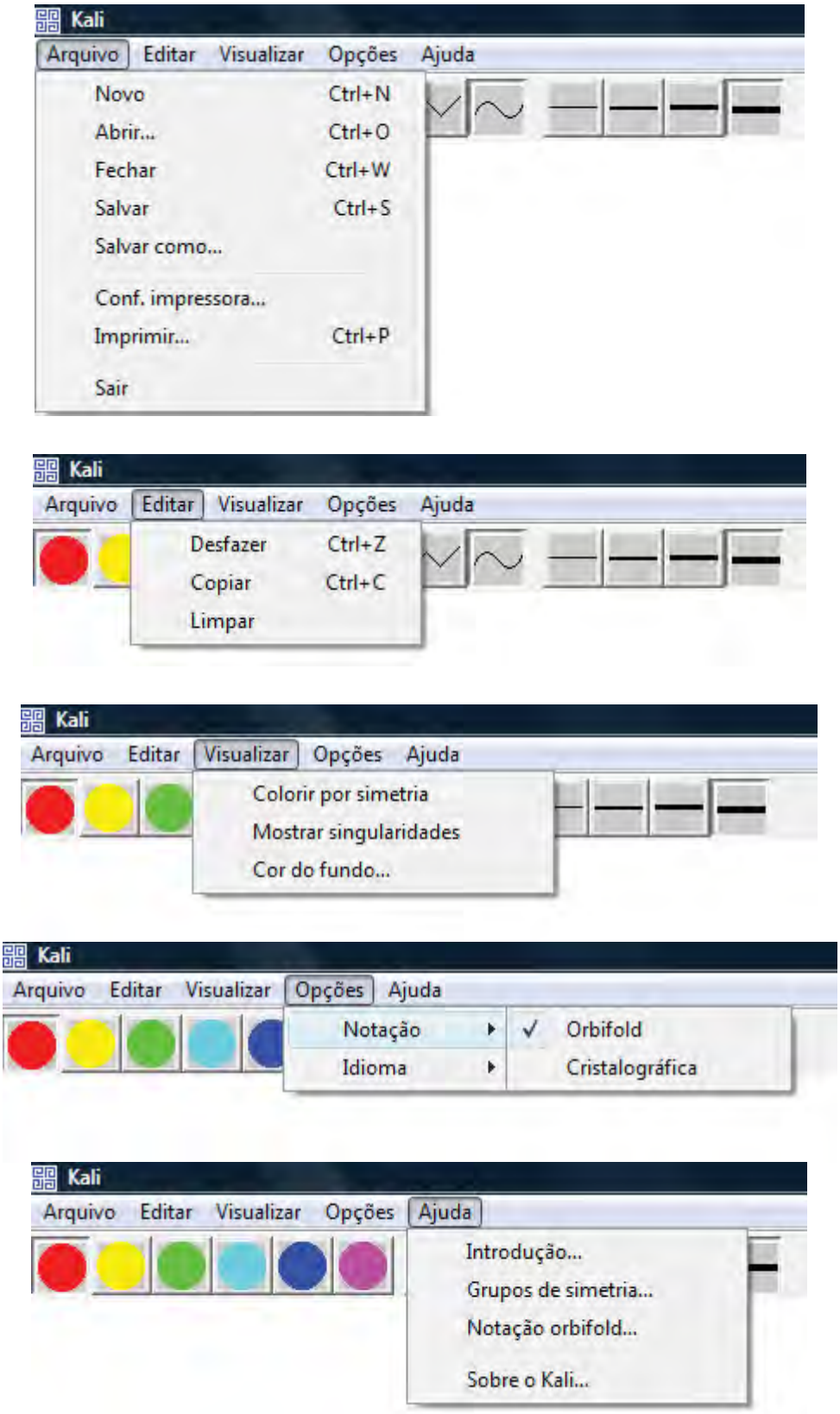


Figura 6.2: As opções da barra de menus.

Quando se posiciona o mouse sobre a tela, o cursor se transforma em um lápis e já é possível começar a desenhar. O botão esquerdo do mouse quando pressionado permite a mudança de direção da linha e o botão direito tira o lápis da tela, o que permite mudar as características do risco. Para tanto, a barra de ferramentas oferece sete opções de cores, duas possibilidades de tipo de traço (retos ou curvos) em quatro espessuras diferentes.

Figura 6.3: Barra de ferramentas.

É possível também escolher o tipo de ornamento que se deseja produzir. Na parte inferior da tela o primeiro botão (a seta branca com a palavra *more*) permite selecionar uma entre três alternativas: Rosetas, Frisos e Papéis de Parede.

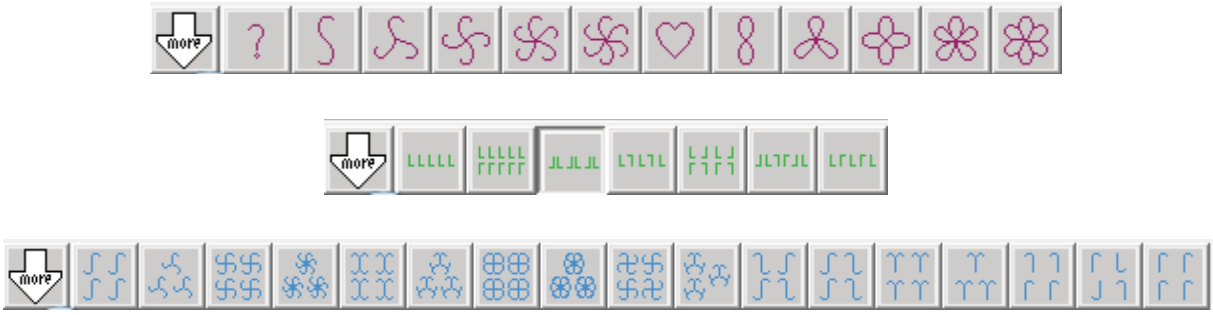


Figura 6.4: Opção por Rosetas, Frisos ou Papéis de Parede, respectivamente.

6.3 O público e o ambiente da pesquisa

A aplicação da proposta de ensino deu-se na forma de um curso de extensão universitária ministrado às segundas-feiras das 19h30 às 22h30 nas salas de aula do bloco didático GI da Universidade Estadual Paulista (UNESP) – campus de Rio Claro. Inicialmente, nos reuníamos na sala 1 do referido bloco, onde encontrávamos estrutura de sala de aula convencional. Trata-se de um ambiente iluminado, arejado e amplo, constituído com lousa, aparelho para projeção de arquivos de computador (datashow) e conjuntos de mesas e cadeiras.

A partir do quarto encontro, a administração da universidade trocou de lugar nossos encontros e nos ofereceu uma sala em outro bloco didático, cujas condições não eram tão adequadas quanto à primeira, principalmente, por não possuir um aparelho de data show em

bom estado de funcionamento e por suas carteiras serem do tipo universitárias (aquelas que possuem o apoio para o caderno acoplado à cadeira). Esse tipo de mobiliário não favorece o trabalho em grupo devido à dificuldade de acomodá-las lado a lado, de forma a compor uma superfície plana uniforme para apoiar os cadernos de anotações e, especialmente, os materiais manipuláveis, como os conjuntos de jogos de espelhos.

No dia da troca de salas houve um atraso no início dos trabalhos, uma vez que na busca por outra sala nas mesmas condições que a primeira (e a consequente localização dos alunos que se dirigiam a outro bloco) demandou algum tempo. Uma vez acomodados em situação semelhante à inicial, seguimos com as atividades e discussões. O curso prosseguiu até seu término nesta outra sala, a sala 2 do bloco GI.

Em relação aos participantes da pesquisa, no ato da inscrição, que ocorreu via email, os alunos forneciam, conforme haviam sido anteriormente orientados, informações que permitiram que se fizesse uma caracterização de seu perfil.

Figura 6.5: Os participantes da pesquisa

Iniciaram o curso 15 pessoas, das quais quatorze tinham algum vínculo com a Unesp – Rio Claro: seis eram alunos do terceiro e quarto anos do curso de Matemática, quatro do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, quatro do Programa de Mestrado Profissional em Matemática Universitária. O décimo quinto aluno era formado em Licenciatura Plena em Matemática em uma faculdade particular da região e professor de ensino fundamental e médio da rede pública estadual. A terça parte dos indivíduos tinha experiência como professor de ensino superior em disciplinas de cursos de licenciatura em

matemática e 40% possuíam experiência de mais de um ano como professor de ensino fundamental ou médio sendo que um deles lecionava em uma escola militar, estando afastado para fazer o doutorado. Todos os que haviam terminado a licenciatura o fizeram em instituições públicas de ensino, exceto o que foi anteriormente citado.

Tabela 6.1

Quantidade	**Ocupação atual**	**Experiência de mais de um ano como professor**	**Experiência de mais de um ano como professor de ensino superior**
6	Alunos do curso de Matemática	0	0
4	Mestrado ou doutorado em Educação Matemática	4	4
4	Mestrado em Matemática	1	1
1	Professor da rede estadual de ensino	1	0

Houve três desistências, dos alunos da graduação, motivadas pelo horário do curso. Este era um fator que atrapalhava o rendimento dos alunos, que no final de um dia de estudos já se mostravam bastante cansados, fato este que foi percebido no decorrer das reuniões. Duas alunas tinham aulas até as 19:30 e vinham direto para o curso de extensão. Em função desse cansaço aparente, as atividades eram elaboradas de forma a mesclar exposições e atividades de trabalho em grupo, de modo a tornar as aulas mais dinâmicas.

6.4 O curso

No total, foram realizadas sete reuniões de três horas cada, resultando em vinte e uma horas, que ocorreram às segundas feiras dos meses de março, abril e maio de 2011, entre 19h30 e 22h30. Os encontros aconteceram nas duas salas de aula já mencionadas.

Conforme descrito no capítulo 2, de Metodologia, o registro dos dados aconteceram de três maneiras: anotações do pesquisador durante e logo após o término das aulas, fotografias e as atividades resolvidas individualmente e em grupo pelos alunos.

Para fazer a análise dos dados, foram feitas leituras das atividades resolvidas e respondidas pelos alunos e as anotações do pesquisador, que narrava as reações, os comentários e as respostas dos alunos bem como as próprias respostas e os encaminhamentos do pesquisador/professor, além suas impressões a respeito das situações que surgiram durante as aulas.

Como já colocado, a análise dos dados ocorreu, em parte, no decorrer do curso, uma vez que elas serviam para orientar o pesquisador no encaminhamento, nas atividades do próximo encontro, na identificação das questões que necessitavam de melhor esclarecimento ou de mais tempo de amadurecimento de idéias e conceitos dos conteúdos desenvolvidos.

Para melhor organização das falas dos sujeitos participantes dessa pesquisa, os alunos serão denominados por **A, B, D, E, F, G, I, J, L, M, N, P, Q, R** e **T** e o pesquisador por **PP**. Foi feita a opção por fazer referência a todas as pessoas usando o gênero masculino (dizendo, o aluno X) para evitar que iniciais ou falas fossem identificadas e causassem possíveis constrangimentos aos participantes desta pesquisa.

6.5 As atividades

Esta é a fase que Romberg caracteriza como coleta de evidências. No primeiro dia de aula os alunos acomodaram-se na sala de maneira como é feito tradicionalmente: todos em fileiras, razoavelmente espalhados e ninguém próximo ao professor. Inicialmente foi pedido para que os alunos redigissem, como primeira atividade:

O que é Simetria e qual a relação desse tema com os conteúdos matemáticos nos diversos níveis de ensino?

O objetivo dessa questão foi verificar quais eram os conhecimentos prévios dessas pessoas a respeito do tema.

Em relação à primeira parte da pergunta, muitas respostas relacionavam simetria com congruência ou semelhança:

Aluno **P**:

"Simetria é ser igual".

Aluno **N**:

"Dois objetos são simétricos se forem "iguais", se possuem as mesmas propriedades."

Esse tipo de resposta sugere que, embora a pessoa tenha alguma noção de simetria no que diz respeito ao senso comum e, ao olhar para um objeto saiba identificar se há ou não algum tipo de simetria, ela parece nunca ter refletido sobre o tema sob o ponto de vista matemático.

Outra categoria de resposta é aquela muito comum, que associa simetria a reflexão por uma reta ou por um espelho. Um pouco menos freqüente é a que relaciona com reflexão por um ponto:

Aluno **M**:

"Simetria é como se fosse uma relação de congruência entre as partes de um todo, sem variação. A simetria é algo que leva em consideração a algum "ponto" de referência.

Um objeto, desenho, uma função, etc., podem ser simétricos com relação a um ponto, a uma reta etc.

Simetria lembra espelho. Pegar um 'pedaço' e refleti-lo num espelho de modo que todas as partes se juntem e sejam iguais."

Aluno **G**:

"Simetria é a semelhança entre as partes de uma figura em relação a um eixo fixo, ou seja, uma projeção do objeto, como se estivéssemos duplicando, triplicando."

No último grupo de respostas podemos encontrar justificativas mais elaboradas, de indivíduos que, já de maneira mais ou menos aprofundada, tiveram contato com o tema sob o ponto de vista matemático, incluindo na sua fala transformações geométricas e isometrias, como, por exemplo:

Aluno **R**:

"Congruência de uma imagem a partir de um ponto, reta, eixo. Produto de uma reflexão ou uma reflexão propriamente dita."

Aluno **L**:

"Simetria é uma transformação geométrica a qual se preserva determinadas propriedades da figura/objeto original. Alguns tipos de simetria possuem eixos de simetria e eles podem ser axial ou radial. Podemos falar de simetria de rotação, de reflexão e de translação."

De modo geral, nas respostas apareceram elementos importantes na caracterização de simetria como relação de parte da figura com o todo, a concepção de simetria considerando a figura globalmente, congruência, transformações geométricas e isometrias.

Sobre a relação de Simetria com os conteúdos matemáticos, os tópicos Geometria (congruência, pavimentações do plano, polígonos regulares) e funções (pares e ímpares, trigonométricas) foram os mais frequentes. Apenas dois alunos fizeram menção à Teoria dos Grupos: um, do terceiro ano da licenciatura que estava cursando a disciplina de Estruturas Algébricas e outro, que cursava o Mestrado Profissional em Matemática Universitária. A relação com Transformações Geométricas foi citada, mas não de maneira explícita. Algumas respostas apontavam de maneira isolada para reflexões e translações.

A análise destas respostas foi um elemento importante para a preparação das atividades subsequentes, de maneira que a discussão em torno da situação-problema proposta pudesse proporcionar o desenvolvimento dos conceitos de simetria, inicialmente sob o ponto de vista de transformações geométrica e posteriormente de grupos de simetria.

O próximo passo, depois de fazer a apresentação do curso, foi mostrar fotos que retratavam simetria em situações cotidianas e levantar uma discussão sobre simetrias.

Figura 6.6: Imagens simétricas

As isometrias de reflexão, rotação e translação já eram tratadas, naquele momento, com certa naturalidade até aparecer uma imagem onde ocorria o movimento rígido menos familiar, a reflexão deslizante (RD).

Figura 6.7: Reflexão Deslizante nas pegadas

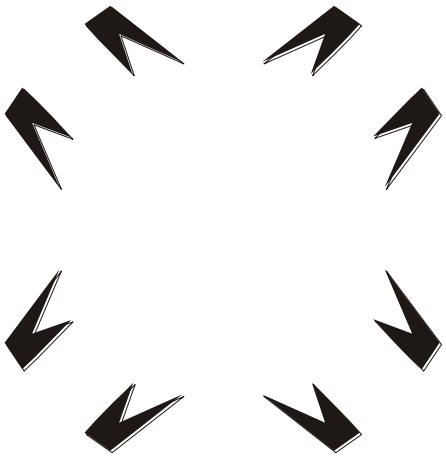
O aluno **E**, um dos quais respondeu a questão inicial de acordo com o terceiro grupo, referiu-se a RD como uma “reflexão arrastada” um pouco para frente e perguntou se poderia dizer que aquilo era uma simetria. Achei melhor me limitar a responder positivamente e falar mais sobre essa outra isometria ao invés de justificar os “porquês”. Pretendia fazer isso nos próximos encontros.

Em seguida, foi feita uma síntese da discussão recém-encerrada e uma proposta de convenção do que iríamos chamar de “simetria”. A ideia, nesse momento, era destacar que não importaria o que estivesse sendo repetido na figura, mas sim a maneira, ou a **regra** ou ainda a **lei** como se dava a repetição.

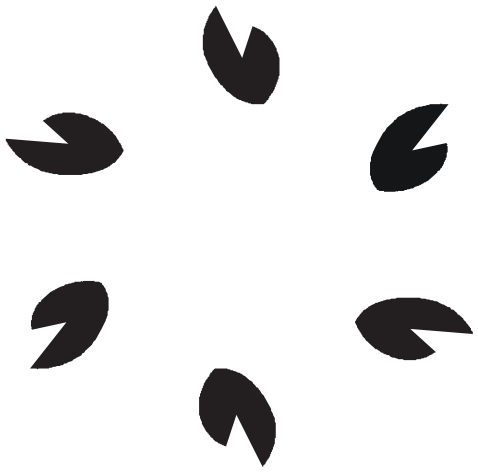
As atividades 1 e 2, trabalhadas em grupo, davam ênfase a esse aspecto:

ATIVIDADE 1: Existe alguma regra que caracteriza cada uma das figuras a seguir? Qual?

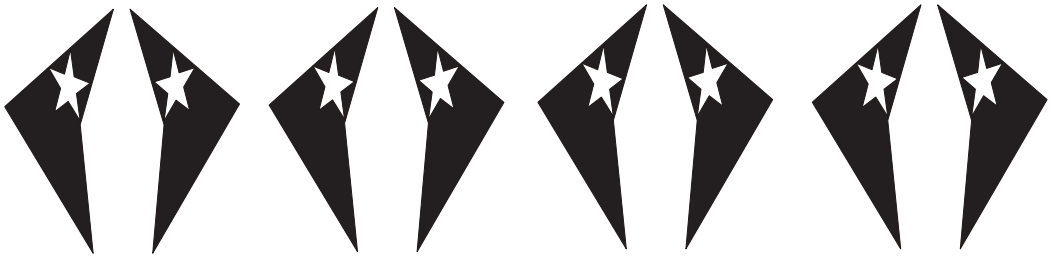
a)



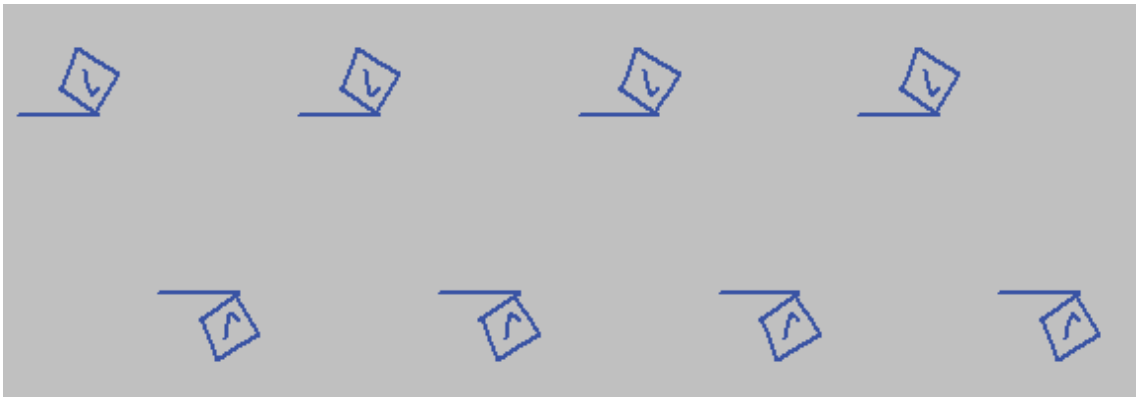
b)



c)



d)

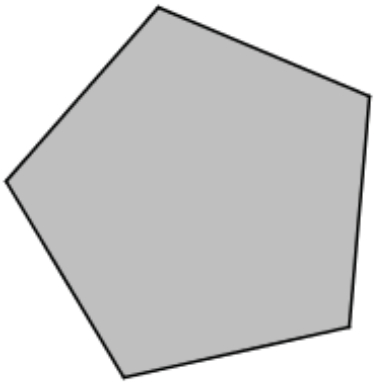


ATIVIDADE 2: Chamamos de <u>linha de simetria</u> a reta que divide a figura em duas partes, onde uma é a reflexão da outra. Quando a figura possui simetria rotacional, chamamos de centro de rotação da figura o ponto sob o qual o desenho poderia ser girado segundo um determinado ângulo. Nas figuras a seguir, determine as retas de simetria e os centros de rotação, caso ocorram.

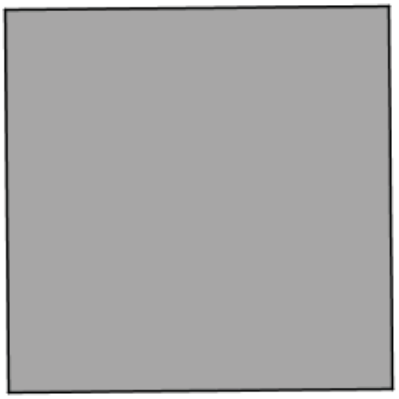
a)

b)

c)



d)



e)

f)

A primeira atividade gerou bastante discussão, mas dessa vez o assunto se estendeu. Assim, foram feitas conjecturas sobre a composição por reflexões, sobre as isometrias pares e ímpares, sobre a possibilidade de ocorrer apenas as quatro (depois de comentar o teorema que quatro reflexões se reduziam a duas e que não havia isometria que era simultaneamente par e ímpar). Em seguida, novamente as atenções se voltaram ao quadro para que se convergissem essas idéias, de acordo com o encaminhamento proposto por Allevato e Onuchic (2003). Na sequência, a segunda atividade foi distribuída.

Era possível perceber que as pessoas estavam cansadas, especialmente o aluno **R**, estudante do quarto ano de licenciatura que acabara de sair da aula da disciplina de prática de ensino.

A segunda atividade foi breve, pois bastante coisa já havia sido discutida na primeira. Passamos à formalização da caracterização de cada uma das simetrias (Rotação – centro e menor ângulo, Reflexão – eixo, Translação – vetor de menor comprimento e RD – vetor e eixo). A aula de transformações geométricas havia sido bastante adiantada.

Em geral, foi possível perceber que os alunos estavam bem envolvidos com o tema, desinibidos para levantar-se e apontar elementos das figuras na tela de projeção (o que ocorreu com os alunos **T** e **B**), para discordar da fala uns dos outros e também do professor/pesquisador. **I** foi meio insistente nas suas conjecturas (como ele já havia trabalhado com espelhos, tinha uma percepção melhor do que ocorria, mas não conseguia convencer os elementos do grupo e/ou não os deixava descobrir sozinhos). O aluno **E** também era bem participativo. Ele e **L** foram os que melhor caracterizaram as Simetrias na atividade preliminar. **F** também se destacou no que diz respeito à participação no seu grupo.

No encontro seguinte estavam presentes dois novos alunos, que não puderam comparecer na reunião anterior, **A** e **J**. Outros dois se ausentaram, **N** e **D** e, inclusive, não freqüentaram mais o curso.

Foram repassadas, neste dia, as principais discussões da aula anterior para deixar os dois novos alunos a par do que foi discutido e aproveitar o tempo a espera dos alunos do quarto ano que pediram para chegar atrasados em função da aula de Prática de Ensino que se estenderia até o horário do início da nossa reunião. Assim, foram sistematizadas as idéias que relacionam as simetrias dos polígonos regulares (quantidade de eixos e números de lados) e destacado o fato de n eixos dividirem o polígono, ou o plano, em 2n regiões. Isso seria

abordado novamente nesse dia sob o tema Caleidoscópios bem como na aula sobre grupos diedrais.

Figura 6.8: O pentágono e seus 5 eixos de simetria: figura dividida em 10 regiões

Em seguida, foi apresentado o caleidoscópio de uso recreativo e depois as propriedades da reflexão por um espelho, dando ênfase à questão da inversão da orientação. Nesse ponto, foram lembradas as propriedades das isometrias pares (que não invertem a orientação do objeto) e das ímpares (que invertem) e relacionadas com a regra de sinais da multiplicação de números reais. Salientou-se ainda a diferença entre refletir por uma reta (que permite que a operação seja feita a partir dos dois lados da reta) e por um espelho, onde apenas um dos lados contém a superfície refletora. Esse foi o "pretexto" para dar uma aula inteira sobre jogos de espelhos. Depois de falar sobre reflexão utilizando espelhos paralelos, iniciaram as atividades que criariam condições para discutir o número e a formação de imagens em um par de espelhos articulados.

ATIVIDADE 3: É possível, com o uso de espelhos articulados, obter um ângulo de 120°? E um ângulo de 90°? Quais ângulos podemos obter usando adequadamente o caleidoscópio de dois espelhos articulados? Justifique, com poucas palavras, as respostas acima.

A atividade 3 gerou bastante discussão (divisor inteiro de ângulo) sobre quais ângulos se pode formar com espelhos articulados e suas respectivas justificativas (bissetriz para

número ímpar de regiões e ângulo raso para número par). Nessa atividade os alunos também colocaram objetos entre os espelhos, embora essa fosse a proposta do próximo exercício.

É impressionante como o caleidoscópio exerce um fascínio sobre as pessoas. Elas mal se deparam com os espelhos e já colocam vários objetos entre eles para ver a reprodução de imagens. Mesmo sem serem propostos no exercício em questão, surgem conjecturas, reflexões e apontamentos que logo se põe à prova mediante a colocação de borrachas, chaves e canetas diante das superfícies refletoras.

R pediu para ir embora, alegando que estava gripado e que não se sentia bem.

Figura 6.9: Mexendo com a curiosidade

Depois da "inesperada" exploração das características e propriedades da reflexão por dois espelhos articulados, a atividade quatro foi resolvida de forma bem rápida. Alguns alunos já estavam começando a perceber a relação entre essa atividade, que indicava que só se conseguia repetição perfeita de imagens se o plano fosse dividido em um número par de regiões, e as conclusões a respeito das linhas de simetria dos polígonos regulares, discutido na segunda feira anterior.

ATIVIDADE 4: Coloque um objeto completamente assimétrico entre os espelhos (usando os valores dos ângulos obtidos na atividade anterior), uma tampa de caneta, por exemplo. Quantas imagens, contabilizando também o objeto real, são obtidas com os espelhos posicionados a 120°? Compare as imagens. Você notou alguma peculiaridade? Podemos afirmar que as imagens são reflexões perfeitas umas das outras? Refaça o exercício com os espelhos a 90°, a 72° e a 60°. A qual conclusão vocês chegaram?

Figura 6.10: Ângulo de 90^0 formado com o auxílio do caleidoscópio e a reflexão de uma tira de papel formando um quadrado

Ao professor/pesquisador foi perguntado se seria disponibilizada a apostila e as atividades para eles, depois de terminado o curso, para que pudessem desenvolver aquele tipo de trabalho com seus alunos e a resposta foi afirmativa.

Depois de terminados esses exercícios em grupo, a apresentação das condições matemáticas para a formação perfeita de imagens e a fórmula do número de imagens foi bastante interessante e com muita participação dos alunos, que se interessaram também pelo desenvolvimento matemático que justifica as únicas três possibilidades para caleidoscópios de 3 espelhos (apresentadas no capítulo 3) e a única maneira de se posicionar quatro espelhos para a composição do caleidoscópio (conforme figura 3.8). Acredito que minha empolgação na apresentação também contribuiu para isso. Terminamos esse encontro com a atividade 5, de visualização no caleidoscópio equilátero de três espelhos. As pessoas gostaram muito! Realmente o visual é incrível!

Figura 6.11: Caleidoscópio de três espelhos

Mais uma segunda feira de aula, mas hoje havia um motivo de preocupação: estavam presentes apenas 10 pessoas. O quorum parecia estar diminuindo! Uma maneira de esperar para ver se não chegaria mais alunos foi ocupar o tempo com alguns elementos de ordem burocrática. Foram preenchidas as fichas de inscrição do curso.

Terminada essa tarefa, foi iniciado o tema do dia: Transformações Geométricas e Teoria dos Grupos. Foi ressaltado que aquela seria a última aula antes de realmente entrarmos no assunto central do curso, ornamentos planos.

Aquele foi o encontro que mais se abordou tópicos da "matemática pura". Apesar de conter menos exercícios, as discussões foram bastante ricas. A percepção das sutilezas (a diferença entre isometria e simetria), as questões sobre percepções que as pessoas tinham sobre subgrupos e isomorfismos (no quadro estava o conceito formal, mas falamos sobre como as pessoas percebiam, de fato, aquilo).

Antes, porém, de aprofundar no tema, perguntei aos alunos se eles já haviam estudado o assunto e se lembravam dele. Todos responderam afirmativamente, com exceção de **F**:

"De teoria dos grupos eu só me lembro do nome. Já faz bastante tempo. Acho que minha graduação já expirou!"

Mesmo com bastante interação e discussões, a aula foi cansativa, já que na maior parte do tempo foi expositiva e sem atividades. Apenas duas atividades foram desenvolvidas com os alunos: fazer a tábua de multiplicação dos grupos cíclicos e diedrais.

ATIVIDADE 6: Complete a tábua de multiplicação do C_4.

	e	R	R^2	R^3
e				
R				
R^2				
R^3				

ATIVIDADE 7: Complete a tábua de multiplicação do D_4.

	e	R	R^2	R^3	S	RS	R^2S	R^3S
e								
R								
R^2								
R^3								
S								
RS								
R^2S								
R^3S								

Aí surgiram elementos bem interessantes! **P** (aluno do terceiro ano de licenciatura) falou sobre a maneira como era praxe fazer a composição de operações na aula de estruturas algébricas, sem perceber que isso se tratava de uma convenção, e que o grupo estava fazendo o contrário do que havíamos combinado momentos antes. O aluno **R**, que hoje estava bem

disposto, comentou sobre a lembrança de grupos diedrais na disciplina de estruturas algébricas, mas que não tinha idéia para quê servia. Quando foi feita pelo pesquisador a relação entre o número 2n de elementos do grupo diedral com a quantidade par de divisões do plano para que houvesse reprodução perfeita de imagens, e com o número 2n de regiões do plano que aparece na divisão de um polígono regular de n lados por n linhas de simetria, ele ficou bem entusiasmado. Percebi certo brilho no seu olhar!

Aluno **R**:

"Puxa, é verdade! Só dava certo no espelho quando aparecia um número par de regiões!"

Professor pesquisador **PP**:

"E nas linhas de simetria dos polígonos regulares, o que ocorria?"

Aluno **R**:

"É mesmo, as linhas de simetria faziam aparecer uma quantidade par de regiões do plano"

Figura 6.12: Espelhos formando ângulo de 60° e as linhas de simetria do triângulo eqüilátero (visualização das três reflexões e três rotações do grupo de simetria D_3 do triângulo)

Novamente foi possível notar o efeito do uso de espelhos. É comum, nas disciplinas de álgebra do curso de formação de professores, fazer a relação de grupos cíclicos e diedrais com rotações e reflexões em polígonos regulares. O aluno **R**, que cursava o quarto ano de licenciatura, havia concluído a disciplina de estruturas algébricas há, no máximo, um ano e meio (final do seu segundo ano) e não fazia associação entre esses dois assuntos! Há quinze dias ele havia feito neste curso de extensão um exercício, no qual era proposto que fossem

traçadas linhas de simetria dos polígonos. Mas a associação que ele fez, apesar de ter estudado esses conteúdos tão recentemente, foi com o caleidoscópio, com a reprodução de imagens dos espelhos e a quantidade de regiões do plano que ocorria nessas circunstâncias. Esse episódio nos leva a crer que o uso de materiais manipuláveis, em particular, os caleidoscópios, associado à metodologia de Resolução de Problemas tem importância fundamental para identificar e relacionar os conteúdos desenvolvidos em sala de aula.

Agora, depois de discutir simetria no senso comum, sob o ponto de vista algébrico, e conhecer o caleidoscópio, sabendo como ocorre a formação perfeita de imagens, usaríamos esses conhecimentos para estudar os Ornamentos Planos.

O primeiro a ser abordado foi o tipo de Roseta que apresenta apenas simetrias de rotação e que são caracterizadas algebricamente pelos grupos cíclicos, que havíamos estudado no encontro anterior. No momento dos exemplos, alguns alunos, especialmente **L**, ficaram na dúvida se esse tipo de ornamento podia ou não ser visto com o uso de caleidoscópio.

Figura 6.13: Roseta que apresenta apenas rotação de 90º

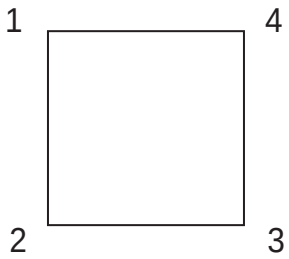
A abordagem sobre Rosetas que possuíam reflexões começou através de atividades. Antes, porém, **P** percebeu que, embora eu não tivesse dito, esse tipo de ornamento tinha também rotações, já que o produto de duas reflexões é uma rotação.

Figura 6.14: Roseta, feita com o auxílio do Kali, que apresenta 5 rotações e 5 reflexões

A atividade 8 começou com a retomada da aula anterior, uma vez que perguntava sobre o grupo cíclico estudado na segunda passada. O outro exercício gerou mais debates, já que a pergunta versava sobre um conjunto que não caracterizava um grupo. Foi pedido para que eles completassem aquele conjunto para que se desse a configuração de grupo. Como os alunos estavam com um quadrado de cartolina à mão para executar as operações do grupo, a execução e o entendimento do conceito trabalhado na aula passada foi muito mais rápido, prazeroso e eficiente. Impressionante como um material concreto auxilia no entendimento de conceitos tão abstratos!

ATIVIDADE 8: Veja se o conjunto {i, R, R^2, R^3}, onde R é a rotação de um quarto de volta, com a operação de composição de funções compõe um grupo. Faça o mesmo para o conjunto {i, v, h}. (Fazer a tábua de operações talvez seja uma boa idéia!)

posição inicial



O manuseio do pedaço de cartolina era intenso, as discussões surgiam. Um grupo fez em aproximadamente 20 minutos, a tábua que demorou mais de uma hora para ser construída no encontro anterior, isso já na atividade 9. Pedi também para que se formassem, com aquelas

8 simetrias, grupos de 1,2, 4 e 8 elementos e tentassem formar também com 3,5,6 e 7. Um caso particular do Teorema de Lagrange, subgrupos, elemento neutro e elemento inverso. Quantos conceitos se tornaram mais naturais com essa atividade!

ATIVIDADE 9: Quais grupos de simetria conseguimos formar, a partir das 8 simetrias mencionadas, com 1 elemento? E com 2? E com 4? O conjunto {i, R, R^2, R^3, V, H, T_1, T_2 }, das oito simetrias do quadrado é um grupo? Existem grupos dessa natureza com 3, 5, 6 e 7 elementos? Por quê?

Figura 6.15: Reflexões e rotações usando um pedaço de cartolina

Um grupo demorou para usar o quadrado de papelão e ainda fazia desenhos no caderno para encontrar a composição de simetrias. Enquanto ouvia a pergunta de um dos integrantes, comecei a reproduzir na cartolina as combinações de operações que ele dizia. O resto do grupo não se deu conta, mas ele percebeu e passou a manusear o material manipulável. Assim, a sistematização do conhecimento para resolver a atividade proposta se deu mais rápida e eficientemente.

Figura 6.16: Descobrindo o quadrado de cartolina

A atividade 10 propunha o raciocínio inverso. Ao invés de olhar para o desenho e dizer o grupo correspondente, olhava para o grupo e fazia o desenho. Um dos grupos já fazia os desenhos pressupondo que as reflexões eram espelhos. Eles terminaram o exercício com bastante antecedência em relação ao outro grupo. O espelho já começara a surtir "efeito"!

ATIVIDADE 10: Faça um desenho que possua como grupo de simetria os conjuntos citados abaixo.

- {I}
- $\{i, R^2\}$, onde R é meia volta.
- $\{i, R, R^2\}$, onde R é uma rotação de 120° em relação ao centro da figura.
- $\{i, R, R^2, R^3\}$, onde R é uma rotação de 90° em relação ao centro da figura.
- {i, V}, onde V é a reflexão em relação a um eixo de simetria.
- $\{i, V, H, R^2\}$, onde V e H são reflexões em relação a eixos de simetria perpendiculares.
- $\{i, R, R^2, E_1, E_2, E_3\}$, onde os E_i são eixos de simetria eqüidistantes e R é uma rotação de 120^0.

Por fim, fui ao quadro e caracterizei aqueles grupos como cíclicos e diedrais e concluímos que era possível enxergar as operações do grupo, que agora já era algo bem mais palpável, com o uso de espelhos articulados. Todos ficaram eufóricos e se revezavam na frente do espelho para ver refletido o que haviam acabado de estudar! Sempre havia algum aluno pensando, refletindo e logo estava ele lá, me perguntando mais alguma particularidade ou algum porquê. Que diferença da passividade da aula anterior!

Nesse dia a aula se estendeu para além das 22h30. Onde estava o cansaço dos dias anteriores? Quanta disposição para falar do assunto ou voltar para dar mais uma espiadinha no caleidoscópio e comentar, como fez **Q**:

"Nunca imaginei que ia pensar em álgebra na frente do espelho".

Em tempo, o aluno **T** afirmou que ficou um pouco zonzo depois de rodar tanto o quadradinho de cartolina. Uma maneira bem humorada de relatar o quanto foi útil a manipulação daquele pequeno objeto.

O próximo encontro ocorreu depois de um pequeno imprevisto. Originalmente ele seria na segunda-feira de uma semana que continha um feriado prolongado. Como nenhum aluno mencionou que viajaria naquela semana (alguns alunos são de Mato Grosso, Juiz de Fora-MG, e outros iam para um congresso no nordeste) só percebi o fato na quinta-feira que precedia a aula em questão. Resolvi consultá-los, por email, para saber se seria mais conveniente para o grupo caso aquela aula fosse transferida para a semana subsequente. Diante da concordância de todos, foi resolvido o problema.

As discussões iniciaram-se com uma breve recordação dos dois tipos de Rosetas existentes e da definição de Faixas e Frisos. Durante uma das atividades percebi que a definição mais ingênua de Frisos era incompleta (ao ser limitado por duas retas paralelas pode ocorrer uma Faixa em que não haja nenhuma repetição, nenhuma translação, isto é, nenhuma simetria).

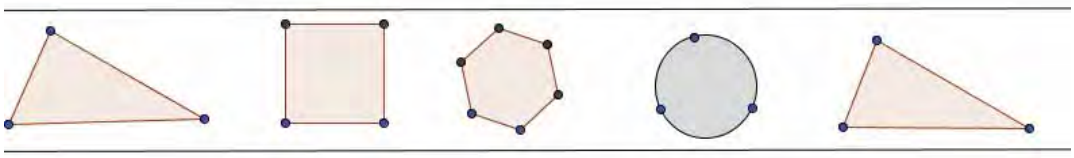


Figura 6.17: Faixa limitada por duas retas paralelas com ausência de simetrias

A atividade 11, proposta logo em seguida, solicitava que os grupos fizessem um desenho no papel (não necessariamente assimétrico, embora isso propositalmente não tenha sido explicitado) e tentassem visualizar Faixas usando dois espelhos (não articulados) que lhe foram entregues. Ao longo da atividade os alunos perceberam que a condição para a reprodução de Frisos era que os espelhos se posicionassem paralelamente (condição já estudada), que o fato do desenho ser simétrico ou não é que determinava tipos diferentes de

Frisos e que, na reprodução com o auxílio de espelhos, sempre ocorreria reflexão vertical, além da translação que ocorre em todos os Frisos, de acordo com sua definição. Os alunos encontraram duas possibilidades de formação de Faixas, que foram registradas no quadro para que eles as comparassem. Mencionei que havia uma terceira, mas não disse qual. Era reforçada a ideia desenvolvida da aula anterior (de ficar atento à regra de repetição e não ao desenho que se repete) de que já não olhávamos mais tanto para os modelos, mas sim para as simetrias. Já era comum ouvir as pessoas dizendo que dois ornamentos eram iguais, mesmo tendo aparência completamente diferente. Isso foi bastante motivado por eu ter colocado as simetrias de cada uma das faixas ao lado delas (eu as desenhei lado a lado para um maior destaque, como aparece na foto.)

ATIVIDADE 11:

a) Faça um desenho numa folha de papel. Usando dois espelhos planos, crie imagens diversas. Quais são as condições (relativas às posições dos espelhos) para que o ornamento inventado seja uma Faixa?
b) Quantos e quais tipos diferentes de Frisos (no que diz respeito às simetrias presentes) são possíveis de visualizar nessas condições?

Figura 6.18: Faixas criadas pelos grupos

A próxima atividade foi a de criação de Frisos que não podiam ser vistos com espelhos paralelos. Ambos os grupos questionaram se isso era possível. Um dos grupos logo percebeu que existia uma faixa contendo apenas a translação, e desenhou R R R R R R R R. O outro grupo desenhou uma parecida com essa. Logo vi que essa era uma atividade difícil. Passados alguns instantes, o primeiro grupo desenhou a faixa BBBBBBB, mas antes questionou sobre a

sua visualização porque, aparentemente, essa poderia ser vista com o auxílio de um espelho infinito (posicionado sobre a linha de simetria central da Faixa). Ao serem perguntados se ela poderia ser vista com os espelhos que eles tinham à mão, eles logo perceberam o equívoco. Era a questão do infinito "dando as caras"! O outro grupo desenhou outra faixa "igual" à primeira, no que diz respeito às simetrias. Desenhei no quadro as faixas, discutimos sobre as simetrias presentes e ainda desenhei outra Faixa formada apenas por translação e meia volta. Aí cometi um primeiro erro grave: disse que havia sete tipos diferentes de faixa. Em minha opinião, dizer o número delas faria com que os alunos que chegassem a um número menor ficassem tentando procurar as que estariam faltando, e os que encontrassem sete (fato que não aconteceu) parariam de procurar outras. Com esse comentário, sem perceber, limitei a capacidade de criação dos grupos!

ATIVIDADE 12: Algumas Faixas não podem ser visualizadas com o auxílio de espelhos. Vocês conseguem dar um exemplo de uma? Desenhe um ou mais Frisos desse tipo.

Enquanto comentava sobre a atividade 13, percebia pessoas de um dos grupos falando sobre possibilidades e combinação de isometria nas faixas. Dei vazão a esses argumentos e reforcei que nosso estudo encarava os desenhos de duas maneiras: globalmente e percebendo a relação entre a parte e o todo. Embora essas duas maneiras de perceber simetria já tivessem sido ressaltadas, era perceptível que a segunda estava mais presente nas análises.

ATIVIDADE 13: Estude, com o auxílio da tabela abaixo, quais dos 16 tipos de Frisos são (ou não) possíveis.

Refl. Verti-Cal	**Refl. Hori-zontal**	**Meia-Volta**	**RD**	**Modelos**

A atividade 13 foi a da tabela de composição de isometrias (cuja versão preenchida encontra-se na tabela 5.1). Enquanto uns alunos escreviam as 16 possibilidades e identificavam as 5 desenhadas no quadro, outros começavam a perceber quais eram impossíveis. Ter reflexão horizontal sem ter RD, duas reflexões sem ter meia volta. Aí cometi

outro erro grave: disse que se entre reflexão vertical (Rv), reflexão horizontal (Rh) e meia-volta (MV), se existissem duas delas, certamente, existiria a terceira. Isso é falso, embora seja um caso muito peculiar, mas assim, influenciei erroneamente os dois grupos e fiz com que pelo menos um deles não conseguisse identificar o penúltimo tipo de faixa que faltava, o que continha apenas RD (além da translação, sempre presente). Foi mencionado que esse Friso já havia sido apresentado à turma, era a imagem das pegadas (figura 6.3).

Figura 6.19: Faixas com MV, Rv e sem Rh

Meus erros fizeram com que a aula de hoje não fosse muito boa em alguns sentidos. No entanto, fiquei cada vez mais convencido de que deixar as pessoas descobrirem as coisas é o melhor caminho! E a metodologia de Resolução de Problemas associada ao uso caleidoscópio ajuda muito nesse sentido.

Terminei a aula alegando (depois de ter me confundido com a análise geométrica sobre a faixa que tinha reflexão vertical e MV, sem ter Rh), que a maneira mais “segura” de fazer aquela análise era estudá-la sob o ponto de vista algébrico. Surgiu aí a necessidade de fazer a mudança da análise dos Frisos: do geométrico para o algébrico. Um assunto para o próximo encontro.

Iniciamos essa aula retomando as questões estudadas na semana anterior. Assim, sob olhar da álgebra, retomamos as reflexões sobre as simetrias pares (que ao contrário das ímpares, formam grupo) baseado na estratégia usada na aula anterior de ir incluindo simetrias a um determinado conjunto e examinar se, no novo conjunto, verificava-se a condição do fechamento, e a conseqüente composição dos 7 grupos de faixas.

O aluno **L**, muito cansado, foi embora mais cedo. Percebo que as pessoas estavam bem exaustas e cheguei a duas conclusões: que foi um acerto oferecer o curso no começo do semestre e que, caso fosse um curso de maior duração, seria preciso alocá-lo em outro horário para não correr o risco de ficar sem alunos.

A aula seguiu, fazendo-se um resumo sobre nossas discussões e conclusões a respeito das possibilidades de Faixas. Agora, fazíamos o reconhecimento desses Frisos à medida que eram projetadas fotos e ilustrações no projetor. Reforçamos as questões das simetrias presentes e de quais poderiam ser reproduzidas com espelhos. Em seguida, sugerimos o exercício inverso: partir das simetrias e tentar descobrir como seriam as faixas. Nesse momento, apresentei o software Kali. Com o auxílio dessa ferramenta computacional criamos Frisos de maneira rápida e interativa.

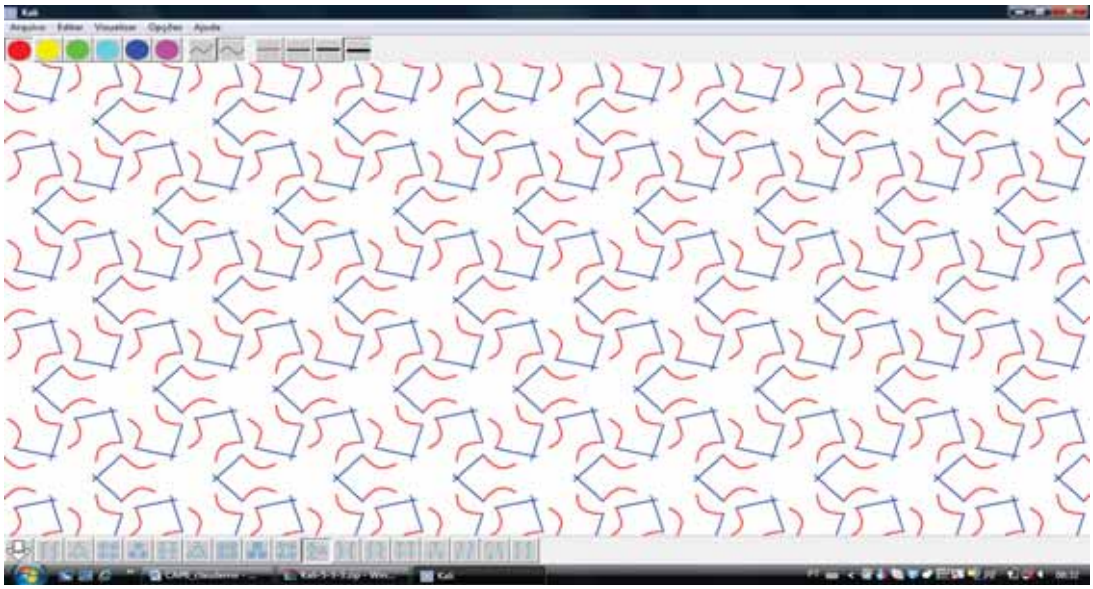


Figura 6.20: Papel de parede sendo criado no Kali

O tema desenvolvido no último dia de aula versava sobre as questões que envolvem os 17 tipos de Padrões vistos no capítulo anterior. Ressaltamos a história da abordagem matemática, o fato de que o artista pode saber da existência de apenas 17 Papéis de Parede sem aqueles argumentos (matemáticos). Foi mencionado o trabalho de Escher (havia estudado um pouco sobre as diferentes fases da sua obra) e, em seguida, passamos a tratar da parte exclusivamente matemática.

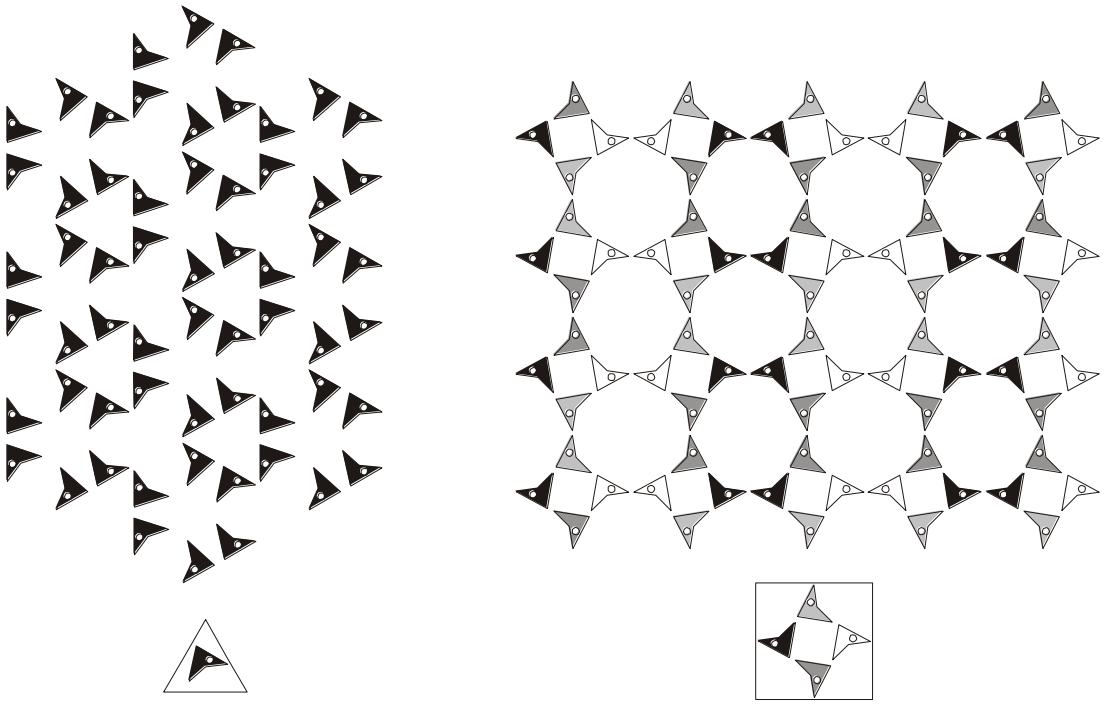


Figura 6.21: Dois dos sete padrões que podem ser visualizados com caleidoscópio e suas respectivas bases

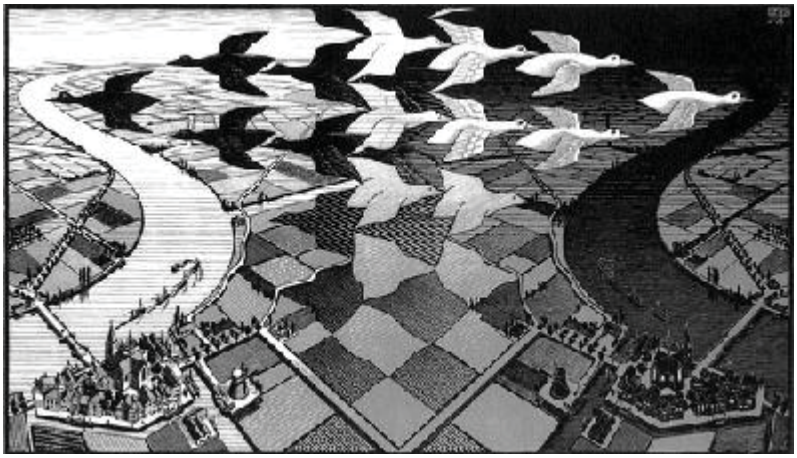


Figura 6.22: Dia e noite, de M. C. Escher

Iniciei falando das simetrias que poderiam estar presentes: translações em duas direções diferentes, reflexões e suas composições, RD's e rotações.

A restrição cristalográfica trata das rotações possíveis. Depois de abordarmos esse tema, central nos estudos dos *Wallpapers*, passamos a apresentar as suas 17 variações.

Discutimos sobre as simetrias presentes, sobre os n-centros, sobre cada célula básica ser um grupo cíclico ou diedral e a respeito das translações nas duas direções; que essas duas direções podem ser consideradas de maneira diferentes na mesma figura. Observando os Padrões, concluímos quais podem ser vistos por caleidoscópios e quais as características da base caleidoscópica (tanto a simetria da base como o tipo de caleidoscópio) são necessárias para visualizar cada um deles.

Após essa apresentação, distribuí os espelhos para que eles visualizassem os sete (dos 17) tipos possíveis. Esta foi a atividade 14: a visualização dos Padrões com caleidoscópio. Mais uma vez me espantei positivamente com a reação das pessoas quando se deparam com os caleidoscópios!

Finalmente, mostrei a reprodução dos Papéis de Parede no kali e distribuí as últimas duas atividades, que deveriam ser respondidas individualmente.

A atividade 15 indagava se, depois de participar do curso, as pessoas melhoraram a percepção sobre as simetrias presentes nas imagens e objetos presentes no seu cotidiano.

ATIVIDADE 15: Depois de participar do curso, você acha que ficou mais atento às simetrias presentes do seu cotidiano?

Todos os alunos responderam afirmativamente a essa pergunta.

Os alunos **F** e **E** lembraram que agora eles notavam os outros tipos de simetria, ao contrário de antes, que só se atentavam às reflexões.

O aluno **R**¸ respondeu positivamente e destacou a relação entre o questionamento que fazia a si mesmo, sobre o porquê de ensinar matemática, e o fato dela estar presente nas coisas da vida. Mencionou que um de seus objetivos enquanto professor é trazer a matemática para o dia-a-dia das pessoas e que a simetria tornava isso possível.

A atividade 16 retomava a pergunta feita no primeiro dia de aula:

ATIVIDADE 16: Responda:

a) O que você entende por Simetria?

b) Quais conteúdos matemáticos da escola básica podem ser relacionados com o tema Simetria?

As respostas agora estavam bem diferentes das fornecidas inicialmente. As pessoas, em geral, usaram argumentos relacionados às isometrias e transformações geométricas no plano. O aluno **P**, por exemplo, disse:

"Simetria é uma isometria em relação a uma figura."

Embora a resposta não esteja completamente correta[17], pode-se notar que o aluno já relacionava simetria com transformações geométricas.

O aluno **L**, vai mais longe:

"Simetria é uma isometria que fixa certa figura considerada. As isometrias conservam a distância e outras propriedades como medidas de ângulos, relação de estar entre, ponto médio, etc.

As simetrias são caracterizadas por movimentos rígidos de rotação, reflexão, translação e reflexão deslizantes que, selecionadas adequadamente formam grupos."

Em relação à segunda parte da pergunta, sobre a relação com os conteúdos matemáticos, além dos que já haviam sido citados no início do curso, surgiram outros, entre os quais destacamos Transformações Geométricas, Teoria dos Grupos, Grupos de Simetria e Isometrias. O aluno **R** chamou atenção quando relacionou simetria com a noção de infinito:

"Funções, geometria plana (polígonos, ângulos, bissetriz, mediatriz) e a noção de infinito, quando posicionamos um objeto entre dois espelhos planos paralelos."

Distribuí também a avaliação institucional do curso de extensão.

E, por último, fizemos uma discussão em grupo sobre as impressões que cada um teve no curso. Considerando essas falas em conjunto com a avaliação escrita da atividade didática entregue pelos participantes, podem-se destacar críticas e elogios.

---

[17] Uma simetria em relação à figura F é uma isometria que fixa F.

Além do horário do curso, que não agradou a alguns participantes surgiram contribuições importantes como:

- a elaboração de um número maior de atividades envolvendo recursos computacionais;
- ser dado mais ênfase à fase de percepção dos conhecimentos prévios dos alunos a respeito de Simetrias e Ornamentos Planos;
- estabelecer relações do tema com matemática aplicada e
- caso houvesse mais tempo de curso, ser feito um aprofundamento maior nas propriedades algébricas das simetrias.

A primeira observação foi percebida pelo professor no último dia de curso, quando o recurso computacional foi bastante utilizado. A apresentação de outros softwares e a ocorrência mais acentuada desse recurso poderia ter sido mais bem explorada no decorrer das atividades. A segunda, o questionamento e o aproveitamento dos conhecimentos prévios dos alunos sobre o tema foram feitos, respectivamente, na primeira atividade e no decorrer do primeiro dia de aula. Talvez essa questão também pudesse ter sido mais explorada. Quanto à terceira observação, não foi o objetivo da pesquisa estabelecer uma relação mais profunda com a matemática aplicada, embora, no caso de um curso um pouco mais longo, essa questão também pudesse ser contemplada. Em relação à quarta opinião, esse também era o desejo das pessoas que idealizaram e executaram esse trabalho de pesquisa.

No que diz respeito aos aspectos positivos, foi destacada a relação da álgebra com “coisas do mundo real” e o significado que isso pode dar aos conceitos abordados em teoria dos grupos (fechamento, subgrupo, comutatividade). Os materiais manipuláveis, especialmente o caleidoscópio, também foram bastante elogiados. Outro ponto positivo apontado foi a relação da álgebra com os tópicos do ensino básico no sentido de ajudar o futuro professor ou o professor a fazer essa relação. A possibilidade de trabalhar simetria como um projeto na escola básica foi levantada assim como foi mencionado que o conteúdo do curso ajudaria o professor a ter um respaldo teórico mais robusto para propor e desenvolver uma atividade desse tipo. Estamos diante da fase final do modelo de Romberg, a de coletar e interpretar evidências, relatar e analisar os resultados e apontar limitações, contribuições e possibilidades que emergem desta pesquisa.

7. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Inserida na área de investigação da Educação Matemática, particularmente na Educação Matemática no Ensino Superior, esta dissertação teve caráter qualitativo e foi baseada na proposta metodológica de Romberg (ROMBERG, 1992).

Durante a fase de pesquisa bibliográfica nos chamou atenção a escassez de trabalhos na Educação Matemática sobre esta temática. Na literatura consultada sobre ornamentos planos, na maioria das vezes o nível abordado estava muito além ou muito aquém do que pretendíamos, o que nos levou a produzir um texto de forma a preencher essa lacuna que, sem perder o embasamento matemático formal, contivesse uma estrutura cuja leitura fosse mais fluente, mais acessível ao futuro professor e, por vezes se valesse de resultados anteriormente provados sem a preocupação do rigor da demonstração formal nos argumentos.

Assim, o objetivo deste trabalho de pesquisa foi:

Produzir um conjunto de atividades para analisar como o uso do caleidoscópio pode contribuir no ensino de grupos de simetria e transformações geométricas em cursos de graduação em Matemática.

Após pesquisar a bibliografia referente a ornamentos planos e a utilização de caleidoscópios com os respectivos embasamentos teóricos que sustentaram o desenvolvimento do tema, elaboramos uma proposta de ensino que foi avaliada durante a aplicação de um curso de extensão oferecido a um grupo de alunos do curso de matemática, de mestrado em Matemática e mestrado e doutorado em Educação Matemática desta instituição, além de um professor da rede pública de ensino.

As atividades foram produzidas considerando o uso de materiais manipuláveis, especialmente o caleidoscópio e utilizando a Resolução de Problemas como metodologia de ensino. Os estudantes utilizavam os jogos de espelhos para tentar reproduzir os ornamentos planos e, mediante os encaminhamentos feitos pelo professor/pesquisador, eram feitas análises a respeito das possibilidades e impossibilidades de visualização dos ornamentos ancoradas em argumentos algébricos (da teoria dos grupos de simetria) e geométricos (das transformações geométricas).

Tal combinação se revelou eficaz à medida que os alunos do curso mostravam bastantes interessados diante de atividades que utilizavam caleidoscópios. Muitas vezes os participantes da pesquisa relacionavam as situações com conceitos desenvolvidos através do uso do caleidoscópio e não com os abordados durantes as aulas teóricas de Teoria dos Grupos do curso em questão (e possivelmente as da disciplina de Álgebra cursadas durante a graduação ou mestrado). Esta percepção leva a crer que o uso de espelhos e as "demonstrações práticas" propostas por Coxeter (1948) contribuem de maneira significativa para o aprendizado de Grupos de Simetria uma vez que estamos relacionando um conteúdo bastante abstrato com imagens e elementos da vida cotidiana que permitem visualizações e manipulações.

O fato de não contemplar o ensino do tema para cegos é uma limitação desta dissertação. O uso de materiais ou estratégias que privilegiassem outros sentidos além da visão como o tato (materiais em alto relevo) e a audição (o estudo da métrica e do ritmo de músicas e poesias) poderia auxiliar nesta questão, o que abre caminho para futuras pesquisas na área.

O tempo foi um fator que impôs limitações ao curso. Dentre estes limites estiveram a pouca ênfase aos conhecimentos prévios dos alunos sobre o tema e a ausência da proposta de pesquisar a ocorrência de simetrias nas mais diversas situações do cotidiano. Esses saberes prévios surgiram no decorrer do curso como, por exemplo, quando foi relatado que os jogos de espelhos eram utilizados em lojas de materiais de construção para reproduzir como ficaria o piso ou a parede se fossem utilizadas essa ou aquela opção de azulejo ou revestimento cerâmico.

O tempo reduzido fez com que o aprofundamento das questões algébricas também ficasse aquém do que era esperado pelo pesquisador. Por exemplo, tínhamos interesse em discutir o estudo das Faixas nesse aspecto com mais detalhes, o que ficou impossibilitado por ser uma tarefa mais longa.

Quanto ao estudo dos Padrões, em particular a análise algébrica que justifica a existência de apenas 17 tipos de Grupos Cristalográficos, acredito ser esta outra possibilidade que surge desta pesquisa podendo ser abordada, inclusive, a relação entre os grupos gerados pelas bases geradoras e as bases transformadas, estudadas por Almeida (2003) e Murari (1999). Essas duas bases, embora ao serem posicionadas entre os espelhos de um

caleidoscópio reproduzam o mesmo Papel de Parede, elas parecem ser representadas por diferentes grupos de simetrias.

Estes dois autores também desenvolveram pesquisas sobre as pavimentações do plano. A relação entre os dezessete tipos possíveis de Papéis de Parede e as onze possíveis pavimentações uniformes do plano, também é outro caminho aberto por este trabalho já que essa diferença de quantidades sugere que algumas pavimentações são caracterizadas de mais de uma maneira quando falamos de Grupos Cristalográficos, como mostra a figura 5.58. Ainda nessa linha de raciocínio, é sete a quantidade de Padrões que podem ser visualizados com o uso do caleidoscópio, ao passo que com esse instrumento é possível reproduzir 10 tipos de pavimentações diferentes.

No que diz respeito ao objetivo do trabalho, ressalto que este conjunto de atividades não constitui uma “receita” de como abordar os conteúdos de Grupos de Simetria e Transformações Geométricas, mas sim um caminho que indica uma alternativa viável e interessante para a abordagem destes tópicos, que deve ser adaptada às circunstâncias e necessidades do professor.

REFERÊNCIAS BILIOGRÁFICAS

ALLEVATO, N. S. G. O modelo de Romberg e o percurso metodológico de uma pesquisa qualitativa em Educação Matemática. **Bolema**, Rio Claro, n.29, p.175 – 197, 2008.

ALLEVATO, N. S. G; ONUCHIC, L. R. A resolução de problemas e o uso do computador na construção da taxa média de variação. **Revista de Educação Matemática.** Ano 8, n. 8, p. 37-42, 2003.

ALMEIDA, S. T. **Um estudo de pavimentação do plano utilizando caleidoscópios e o software Cabri Gèomètre II**. 2003. 147 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2003.

AREAS, E. N. **Sobre simetrias e ornamentos.** 1999. 143 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1999.

ARMSTRONG, M.A. **Groups and Symmetry**. New York: Springer, 1988.

BARBOSA, R. M. Estudo sobre espelhos planos angulares. **Atualidades Pedagógicas**, Rio de Janeiro, n. 40, p. 5 – 8, abr. 1957.

BARBOSA, R. M. **Descobrindo Padrões em Mosaicos**. São Paulo: Atual, 1993 126 p.

BARBOSA, R. M.; MURARI, C. Aprendendo a construir novos mosaicos, agora em caleidoscópios com quatro espelhos. **Revista de Educação Matemática**, São Paulo, n. 4, p. 57-66, 1998.

BATISTELA, R. F. **Um kit de espelhos planos para o ensino de geometria**. 2005. 134 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2005.

BELLINGERI, P; DI SIENO, M. D. S; TURRINI, C. (Ed.) **O ritmo das formas**. Milão: FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia. Milão: Associação Atractor, 2003.

BOGDAN, R. C; BIKLEN, S. K. **Investigação qualitativa em educação**: Uma introdução à teoria e aos métodos. Porto: Porto Editora, 1994. 336 p.

BUSKE, N. **Uma contribuição para o ensino de geometria utilizando origami e caleidoscópio.** 2007. 200 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2007.

COXETER, H.S.M. **Regular Polytopes**. Londres: Methuen, 1948.

COXETER, H.S.M. **Introduction to Geometry**. New York: John Wiley & Sons, 1961.

DANTE, L. R. **Didática da resolução de problemas:** 1ª a 5ª séries. São Paulo: Ática, 1999.

FARMER, D. W. **Grupos e Simetria, Um guia para descobrir a matemática**. Lisboa: Gradiva Publicações Ltda., 1999.

FERREIRA, S.S.C. **Simetria:** fenômeno e metodologia. Dissertação de mestrado-IGCE/UNESP, Rio Claro, 1996.

JACI MONTEIRO, L. H. **Elementos de Álgebra.** Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico S. A, 1971.

KALI. Disponível em: www.tessellations.org/kali-win1.htm. Acesso em: 20 jun DE 2010.

LEDERGERBER-RUOFF, E. B. **Isometrias e ornamentos do plano euclidiano**. São Paulo, Atual, 1992.

MARTIN, G. E. **Transformation Geometry:** An introduction to Symetry. New York: Springer, 1996.

MURARI, C. **Ensino-aprendizagem de geometria nas 7ª e 8ª séries, via caleidoscópios.** 1999. 2 v. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 1999.

MURARI, C., BARBOSA, R. M. **Belas formas em caleidoscópios, caleidociclos e caleidostrótons.** (Livro a ser publicado).

MURARI, C. ; PEREZ, G. A Geometria na Ótica do Caleidoscópio. **Revista de Educação Matemática**, SBEM-SP, Ano 6, nr.5, v. 5, p. 43-50, 1999.

NEVES, P. R. V; MURARI, C. **Grupos de Simetria e Caleidoscópios.** In: V CIEM – Congresso Internacional de Ensino da Matemática, 2010, Canoas – RS: Anais do V Ciem. Ulbra, 2010, v. 1.

ONUCHIC, L. R. Ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas. In BICUDO, M. A. V. (org.). **Pesquisa em Educação Matemática**: concepções & perspectivas. São Paulo: Editora Unesp, p. 199 – 218, 1999.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas.** Rio de Janeiro: Interciência, 1978.

RÊGO, R.G; RÊGO, R.M; FOSSA, J.A; PAIVA, J.P.A.A. **Padrões de Simetria:** do Cotidiano à Sala de Aula. João Pessoa: Editora Universitária/UFPB, 2006.

REIS, J. D. S. **Geometria Esférica por meio de materiais manipuláveis**. 2006. 158 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2006.

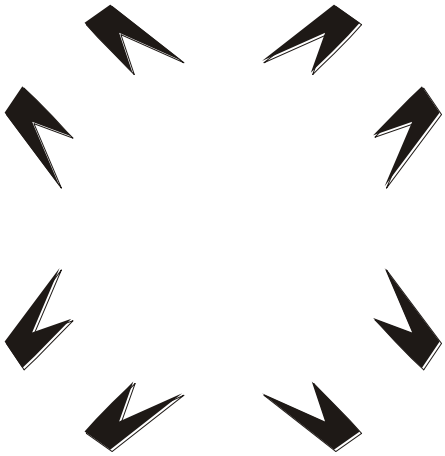
ROMBERG, T. A. **Perspectivas sobre o Conhecimento e Métodos de Pesquisa – Perspectives on scholarship and research methods**. Tradução: Loudes de La Rosa Onuchic. In: Bolema, Rio Claro, ano 20, n.37, 2007, p. 93 – 139.

TEIXEIRA, M. T; SCANAVINI, R. A; DANTE, L. R. **Novos Aspectos no Ensino da Matemática**. Rio Claro: Departamento de Matemática Faculdade Filosofia Ciências e Letras de Rio Claro, 1974. Apostila.

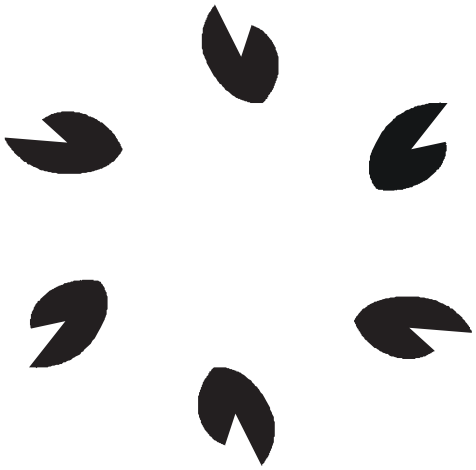
ANEXO: Conjunto de atividades elaboradas

ATIVIDADE 1: Existe alguma regra que caracteriza cada uma das figuras a seguir? Qual?

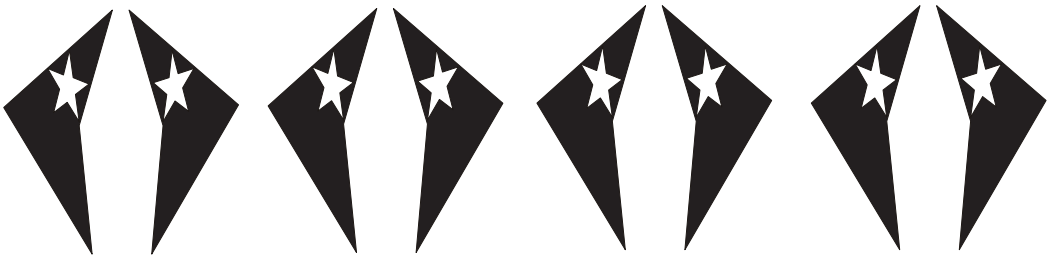
a)



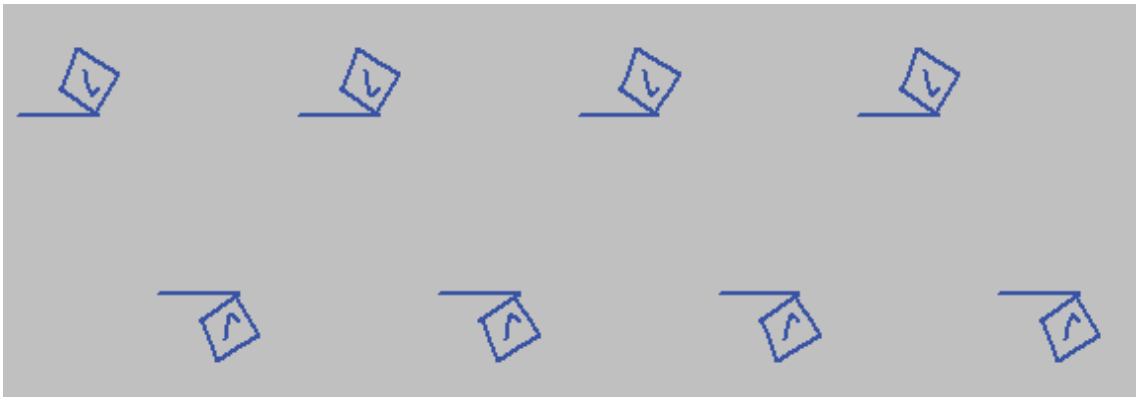
b)



c)



d)

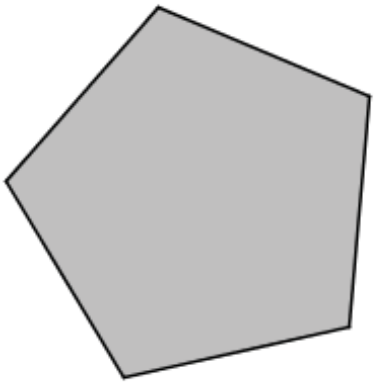


ATIVIDADE 2: Chamamos de <u>linha de simetria</u> a reta que divide a figura em duas partes, onde uma é a reflexão da outra. Quando a figura possui simetria rotacional, chamamos de centro de rotação da figura o ponto sob o qual o desenho poderia ser girado segundo um determinado ângulo. Nas figuras a seguir, determine as retas de simetria e os centros de rotação, caso ocorram.

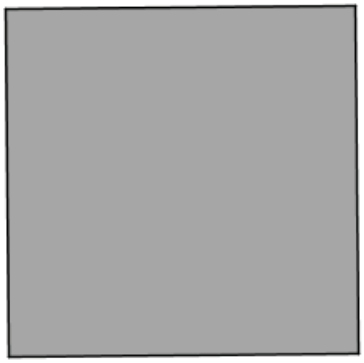
a)

b)

c)



d)



e)

f)

ATIVIDADE 3: É possível, com o uso de espelhos articulados, obter um ângulo de 120° ? E um ângulo de 90°? Quais ângulos podemos obter usando adequadamente o caleidoscópio de dois espelhos articulados? Justifique, com poucas palavras, as respostas acima.

ATIVIDADE 4: Coloque um objeto completamente assimétrico entre os espelhos (usando os valores dos ângulos obtidos na atividade anterior), uma tampa de caneta, por exemplo. Quantas imagens, contabilizando também o objeto real, são obtidas com os espelhos posicionados a 120°? Compare as imagens. Você notou alguma peculiaridade? Podemos afirmar que as imagens são reflexões perfeitas umas das outras? Refaça o exercício com os espelhos a 90°, a 72° e a 60°. A qual conclusão vocês chegaram?

ATIVIDADE 5: Visualização de imagens no caleidoscópio de três espelhos.

ATIVIDADE 6: Complete a tábua de multiplicação do C_4.

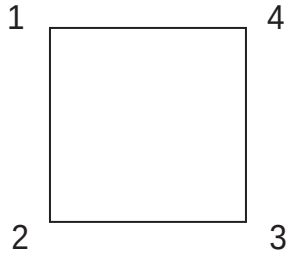
	e	**R**	**R^2**	**R^3**
e				
R				
R^2				
R^3				

ATIVIDADE 7: Complete a tábua de multiplicação do D_4.

	e	**R**	**R^2**	**R^3**	**S**	**RS**	**R^2S**	**R^3S**
e								
R								
R^2								
R^3								
S								
RS								
R^2S								
R^3S								

ATIVIDADE 8: Veja se o conjunto {i, R, R^2, R^3}, onde R é a rotação de um quarto de volta, com a operação de composição de funções compõe um grupo. Faça o mesmo para o conjunto {i, v, h}. (Fazer a tábua de operações talvez seja uma boa idéia!)

posição inicial



ATIVIDADE 9: Quais grupos de simetria conseguimos formar, a partir das 8 simetrias mencionadas, com 1 elemento? E com 2? E com 4? O conjunto {i, R, R^2, R^3, V, H, T_1, T_2 }, das oito simetrias do quadrado é um grupo? Existem grupos dessa natureza com 3, 5, 6 e 7 elementos? Por quê?

ATIVIDADE 10: Faça um desenho que possua como grupo de simetria os conjuntos citados abaixo.

- {I}
- {i, R^2}, onde R é meia volta.
- {i, R, R^2}, onde R é uma rotação de 120° em relação ao centro da figura.
- {i, R, R^2, R^3}, onde R é uma rotação de 90° em relação ao centro da figura.
- {i, V}, onde V é a reflexão em relação a um eixo de simetria.
- {i, V, H, R^2}, onde V e H são reflexões em relação a eixos de simetria perpendiculares.
- {i, R, R^2, E_1, E_2, E_3 }, onde os E_i são eixos de simetria eqüidistantes e R é uma rotação de 120^0.

ATIVIDADE 11:

a) Faça um desenho numa folha de papel. Usando dois espelhos planos, crie imagens diversas. Quais são as condições (relativas às posições dos espelhos) para que o ornamento inventado seja uma Faixa?
b) Quantos e quais tipos diferentes de Frisos (no que diz respeito às simetrias presentes) são possíveis de visualizar nessas condições?

ATIVIDADE 12: Algumas Faixas não podem ser visualizadas com o auxílio de espelhos. Vocês conseguem dar um exemplo de uma? Desenhe um ou mais Frisos desse tipo.

ATIVIDADE 13: Estude, com o auxílio da tabela abaixo, quais dos 16 tipos de Frisos são (ou não) possíveis.

Refl. Verti-Cal	**Refl. Hori-zontal**	**Meia-Volta**	**RD**	**Modelos**

ATIVIDADE 14: Visualização dos Padrões com caleidoscópios de três espelhos.

ATIVIDADE 15: Depois de participar do curso, você acha que ficou mais atento às simetrias presentes do seu cotidiano?

ATIVIDADE 16: Responda:

a) O que você entende por Simetria?

b) Quais conteúdos matemáticos da escola básica podem ser relacionados com o tema Simetria?