

Lucas de Haro Silva

Análise de transmissibilidade do modelo de Zener com
parâmetros não lineares

Bauru

2020

Lucas de Haro Silva

Análise de transmissibilidade do modelo de Zener
com parâmetros não lineares

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia de Bauru, programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica na Área de Projeto Mecânico, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Engenharia Mecânica.

Orientador: Prof. Dr. Paulo José Paupitz Gonçalves

Bauru

2020

Silva, Lucas de Haro.

Análise de transmissibilidade do modelo de
Zener com parâmetros não lineares / Lucas de Haro
Silva, 2020

93 f. : il.

Orientador: Paulo José Paupitz Gonçalves

Tese (Doutorado)-Universidade Estadual
Paulista. Faculdade de Engenharia, Bauru, 2020

1. Transmissibilidade. 2. Sistema Não linear.
3. Modelo de Zener. 4. Vibração. I. Universidade
Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia. II.
Título.

ATA DA DEFESA PÚBLICA DA TESE DE DOUTORADO DE LUCAS DE HARO SILVA, DISCENTE DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA, DA FACULDADE DE ENGENHARIA - CÂMPUS DE BAURU.

Aos 05 dias do mês de dezembro do ano de 2019, às 13:30 horas, no(a) Anfiteatro da Seção Técnica de Pós-graduação da FEB, reuniu-se a Comissão Examinadora da Defesa Pública, composta pelos seguintes membros: Prof. Dr. PAULO JOSÉ PAUPITZ GONÇALVES - Orientador(a) do(a) Departamento de Engenharia Mecânica / Faculdade de Engenharia de Bauru - UNESP, Prof. Dr. MARCOS SILVEIRA do(a) Departamento de Engenharia Mecânica / Faculdade de Engenharia de Bauru - UNESP, Prof. Dr. FABRICIO CESAR LOBATO DE ALMEIDA do(a) Departamento de Engenharia de Biossistemas / Faculdade de Ciências e Engenharia de Tupã - UNESP, Prof. Dr. DOUGLAS DOMINGUES BUENO do(a) Departamento de Matemática / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira - UNESP, Prof. Dr. FRANSBER SANTADE do(a) Departamento de Mecânica/Eletromecânica / Escola Técnica Estadual de São Paulo - ETEC Jacinto Ferreira de Sá, sob a presidência do primeiro, a fim de proceder a arguição pública da TESE DE DOUTORADO de LUCAS DE HARO SILVA, intitulada **ANÁLISE DE TRANSMISSIBILIDADE DO MODELO DE ZENER COM PARÂMETROS NÃO LINEARES**. Após a exposição, o discente foi arguido oralmente pelos membros da Comissão Examinadora, tendo recebido o conceito final: Aprovado. Nada mais havendo, foi lavrada a presente ata, que após lida e aprovada, foi assinada pelos membros da Comissão Examinadora.

Prof. Dr. PAULO JOSÉ PAUPITZ GONÇALVES

Prof. Dr. MARCOS SILVEIRA

Prof. Dr. FABRICIO CESAR LOBATO DE ALMEIDA

Prof. Dr. DOUGLAS DOMINGUES BUENO

Prof. Dr. FRANSBER SANTADE

*“Se você quiser descobrir os segredos do Universo, pense em termos de energia,
frequência e vibração.”*

- Nikola Tesla

AGRADECIMENTOS

Conhecimento algum seria capaz ao ser humano se este não pudesse contar com seu semelhante, desde um simples gesto de apoio, palavra de conforto ou amparo nos tempos difíceis. Para tanto, às várias pessoas, colegas e amigos, que colaboraram direta ou indiretamente com o desenvolvimento deste, ficam aqui meus sinceros agradecimentos:

- Agradeço primeiramente a Deus, pela saúde e capacidade para vencer barreiras e alcançar objetivos;
- Agradeço à minha família pelo apoio incondicional em todas as horas;
- Agradeço ao prof. Dr. Paulo José Paupitz Gonçalves, do Departamento de Engenharia Mecânica da UNESP de Bauru, pela confiança e oportunidade de poder trabalhar junto e compartilhar de vosso precioso conhecimento e experiência e pelo grande apoio e auxílio do desenvolvimento do presente trabalho nas partes experimental e científica;
- Agradeço aos profs. Dr. Marcos Silveira, Dr. Bento Rodrigues de Pontes Júnior e Dr. Edson Antônio Capello Sousa, do Departamento de Engenharia Mecânica da UNESP de Bauru, pelas valiosas aulas de Métodos Numéricos e Simulação em Dinâmica Não Linear, Controle de Sistemas Não Lineares e Caóticos, Vibrações de Sistemas Mecânicos Discretos e Contínuos Sujeitos a Carregamentos Aleatórios, Vibrações Mecânicas, Modelagem de Sistemas Mecânicos e Elementos Finitos.
- Agradeço aos profs Dr. Fabricio César Lobato de Almeida, do Departamento

de Ciências e Engenharia da UNESP de Tupã, Dr. Douglas Domingues Bueno, do Departamento de Matemática da UNESP de Ilha Solteira e Dr. Fransber Santade, da coordenação da Mecânica/Eletromecânica da ETEC de Ourinhos por compartilhar de vossos conhecimentos e experiências;

- Agradeço aos colegas do departamento, pelos muitos conhecimentos discutidos e compartilhados durante os dias e madrugadas de aulas e estudo e a todos os demais pelo apoio e troca de experiências;
- Agradeço à prof. Dr. Najla Varalta, por fazer parte da minha vida e me apoiar e acompanhar sempre em todos os momentos;
- Agradeço aos Doutores membros da banca pelas importantes contribuições a este trabalho;
- Finalmente, agradeço a CAPES pelo importante apoio financeiro a esta pesquisa (número de processo 162054-3).

SUMÁRIO

Lista de símbolos	14
1 Introdução	19
1.1 Motivação	22
1.2 Escopo do trabalho	23
1.2.1 Análise numérica	23
1.2.2 Validação experimental	23
1.3 Objetivos e contribuições	24
1.4 Estrutura da tese	25
2 Revisão bibliográfica	27
3 Transmissibilidade do isolador de <i>Zener</i> linear	38
3.1 Fundamentação Teórica	38
3.1.1 Modelo de Maxwell	39
3.1.2 Modelo de Kelvin	41
3.1.3 Modelo de Maxwell-Kelvin	43
3.1.4 Modelo de <i>Zener</i>	44
3.2 Transmissibilidade do isolador padrão	46
3.3 Transmissibilidade do isolador de <i>Zener</i> linear	49
3.4 Comparação do isolador padrão e isolador de <i>Zener</i> linear	59

4	Validação Experimental	61
4.1	Detalhes e propriedades das vigas	63
4.2	Propriedades do fluido magneto-reológico	65
4.3	Software de análises experimentais	66
4.4	Procedimento Experimental	68
4.5	Validação do modelo	72
5	Transmissibilidade do isolador de <i>Zener</i> com rigidez não linear	74
5.1	Solução aproximada usando o método do balanço harmônico	76
5.1.1	Transmissibilidade Absoluta	83
6	Conclusões	87
	Referências Bibliográficas	89
A	Apêndice	93

LISTA DE FIGURAS

1.1	Aparato experimental para medida de Resposta em Frequência	24
3.1	(a) Modelo de Maxwell com elementos mola e amortecedor em série; (b) respostas da tensão constante em função do tempo ($\sigma \times t$) e da deformação em função do tempo ($\epsilon \times t$)	39
3.2	(a) Modelo de Kelvin com elementos mola e amortecedor em paralelo; (b) respostas da tensão constante em função do tempo ($\sigma \times t$) e da deformação em função do tempo ($\epsilon \times t$)	42
3.3	(a) Modelo de Maxwell-Kelvin; (b) respostas da tensão constante em função do tempo ($\sigma \times t$) e da deformação em função do tempo ($\epsilon \times t$) . .	44
3.4	(a) Modelo de Zener; (b) respostas da tensão constante em função do tempo ($\sigma \times t$) e da deformação em função do tempo ($\epsilon \times t$)	44
3.5	Modelo de sistemas mecânicos	46
3.6	Influência da variação de amortecimento na transmissibilidade do modelo apresentado na figura 3.5(a)	48
3.7	Transmissibilidade na alta frequência	49
3.8	Representação do modelo <i>Zener</i> sujeito ao movimento base.	50
3.9	Contribuição de cada termo no denominador da equação 6 para $N = 3$. Caso (a) $\xi_0 = 0,1$ e caso (b) $\xi_0 = 4,0$	55

3.10	Transmissibilidade de base como função da frequência e da relação de amortecimento ξ_0 , com variação de ξ_0 de 0.1 (pico a esquerda) a 4.0 (pico a direita).	56
3.11	Variação de amortecimento ξ_0 de 0,1 (curva azul), 0,7 (curva verde) e 4,0 (curva vermelha).	57
3.12	Transmissibilidade na alta frequência no modelo de <i>Zener</i> linear	58
3.13	Comparação entre o modelo de isolador padrão e isolador de <i>Zener</i> linear, com variação de amortecimento entre $c = 0.1$ e $c = 10$, onde as setas indicam o aumento de amortecimento	59
3.14	Comparação da transmissibilidade na alta frequência no modelo do isolador padrão e isolador de <i>Zener</i> linear	60
4.1	Aparato experimental que representa o modelo de <i>Zener</i>	62
4.2	Propriedades geométricas viga primária e secundária	63
4.3	Modelo isolador de <i>Zener</i>	64
4.4	(a)Sem exposição ao campo magnético H, (b)Com exposição ao campo magnético H, Sidpara (2014), Costa and Branco (2009)	66
4.5	Programação com software LabView 2013	67
4.6	Aparato experimental para medida de Resposta em Frequência	68
4.7	Experimento; (1) Sensor de força, (2) Acelerômetros, (3) Reservatórios, (4) Shacker, (5) Haste do amortecedor	69
4.8	Vista superior do experimento e detalhes do campo magnético do fluido magneto-reológico	70
4.9	Efeito do campo magnético sobre o fluido magneto-reológico	70
4.10	Transmissibilidade em função da frequência para diversas configurações de amortecimento onde a seta indica o aumento do amortecimento	71
4.11	Transmissibilidade em função da frequência para diversas configurações de amortecimento, resultados experimentais (vermelho), analítico (azul)	72

4.12	Transmissibilidade em função da frequência para diversos configurações de amortecimento na alta frequência	73
5.1	Rigidez cúbica para Caso(a) $\gamma = -0,1$ e Caso(b) $\gamma = 0,1$ para amortecimento variando de $\xi_0 = 0,1$ para $\xi_0 = 4,0$	75
5.2	Curvas de backbone (frequência oscilatória em função da amplitude de deslocamento). As linhas azuis são a primeira frequência de ressonância ($\Omega = 1$) e a linha vermelha é a segunda frequência de ressonância ($\Omega = \sqrt{1+N}$), com $N = 3$	79
5.3	Comparação de Transmissibilidade Relativa por $N = 3$ e taxa de amortecimento $\xi_0 = 0,1$ e $\xi_0 = 10$ (a) com $\gamma = -0,1$ (curvas inclinadas para a esquerda) (b) com $\gamma = 0,1$ (curvas inclinadas para a direita)	81
5.4	Curva de resposta ótima com taxa de amortecimento $\xi_0 = 0,7$ (a) com $\gamma = -0,1$ (curvas inclinadas para a esquerda) (b) com $\gamma = 0,1$ (curvas inclinadas para a direita)	82
5.5	Exemplos de magnitude de transmissibilidade. (a) Transmissibilidade absoluta (X/X_0), (b) Transmissibilidade relativa (Z/X_0). Estes resultados foram obtidos usando $\gamma = -0.1$, $\xi_0 = 0.1$ e $X_0 = 1$	84
5.6	Comparação da transmissibilidade para diferentes valores de deslocamento da base usando $\xi = 0.1$, $\gamma = -0.1$, $N = 3$	85
5.7	Comparação da transmissibilidade para diferentes valores de deslocamento da base usando $\xi = 1.0$, $\gamma = -0.1$, $N = 8$	86
A.1	Design do projeto experimental	93
A.2	Passos das análises	94

LISTA DE TABELAS

4.1	Propriedades do material e propriedades geométricas das estruturas metálicas	64
4.2	Propriedades dos fluidos magneto-reológicos do fabricante <i>LORD Corporation</i>	65

LISTA DE SÍMBOLOS

Letras latinas

Símbolo	Descrição
b	Largura da viga experimental
c	Coefficiente de amortecimento viscoso
E	Módulo de elasticidade
F_0	Amplitude da força
h	Espessura da viga experimental
k, k_2	Constante elástica
L	Comprimento da viga experimental
m	Massa
N	Constante de proporcionalidade de rigidez
t	Tempo
T	Transmissibilidade
x	Deslocamento
$\dot{x}$	Velocidade
$\ddot{x}$	Aceleração

Letras Gregas

Símbolo	Descrição
β	Angulo de fase
ϵ	Deformação
ω	Frequência
ω_n	Frequência natural
Ω	Razão de frequência
ρ	Densidade do material
σ	Tensão
ξ	Razão de amortecimento

Abreviações

Acrónimos	Descrição
<i>HSLDS</i>	Alta rigidez estática e baixa rigidez dinâmica (do inglês, <i>high static low dynamic stiffness</i>)
<i>MBH</i>	Método do balanço harmônico
<i>MEF</i>	Método dos Elementos Finitos
<i>OFRF</i>	Função de resposta de frequência de saída
<i>SLS</i>	Sólido linear padrão

Resumo

O modelo de *Zener*, também conhecido como o modelo SLS, do inglês (*Standard Linear Solid*), é um modelo simples que descreve o comportamento de um material viscoelástico como isolador de vibração, utilizando uma combinação linear de molas e amortecedores para representar componentes elásticos e viscosos, respectivamente. Sabe-se que, o modelo mais semelhante de Maxwell, que é uma mola em série com um amortecedor, e o modelo de Kelvin-Voigt, que é uma mola em paralelo com um amortecedor, são utilizados. No entanto, estes modelos são muitas vezes insuficientes para representar tal comportamento desejado, o modelo de Maxwell não descreve a fluência ou recuperação, e o modelo de Kelvin-Voigt não descreve o stress e o relaxamento. O SLS é o modelo mais simples, que prevê dois fenômenos, com isso em mente, esta tese propõe a investigação do modelo de amortecimento de *Zener* substituindo as molas simples por molas não lineares (mola Duffing), no que diz respeito ao comportamento de isolamento de vibração, mostrando as curvas de transmissibilidade para vários valores de parâmetros. São utilizados métodos analíticos aplicáveis a sistemas não lineares, bem como método numérico para realizar análises de transmissibilidade do modelo de *Zener* e também o desenvolvimento de um aparato experimental que representa o modelo de isolador de vibração de *Zener*, essencial para um entendimento substancial dos fenômenos envolvidos. O objetivo principal da tese é investigar oportunidades de melhoria de isoladores mecânicos quando projetados para atuar em faixas dinâmicas com respostas não lineares.

Palavras-chave: Transmissibilidade, Sistema Não linear, Modelo de *Zener*, Vibração

Abstract

The *Zener* model, also known as the solid linear standard model (SLS), is a simple model that describes the behavior of a viscoelastic material as a vibration isolator, using a linear combination of springs and dampers to represent elastic and viscous components, respectively. Often the most similar Maxwell model, which is a spring in series with a damper, and the Kelvin-Voigt model, which is a spring in parallel with a damper, are used. However, these models are often insufficient to represent such behavior, the Maxwell model does not describe fluency or recovery, and the Kelvin-Voigt model does not describe stress and relaxation. The SLS is the simplest model, which predicts two phenomena, with this in mind, this thesis proposes the investigation of the *Zener* damping model replacing the simple springs with non-linear springs (*Duffing* spring), with respect to the vibration isolation behavior, showing the transmissibility curves for various parameter values. Analytical methods will be used for non-linear systems, as well as a numerical method to carry out *Zener* model transmissibility analyzes, as well as the development of an experimental apparatus that represents Zener's vibration isolator model, which is essential for a substantial understanding of the phenomena involved. The main objective of the thesis is to investigate opportunities for improvement of mechanical isolators when designed to act in dynamic bands with non-linear responses.

Keywords: Transmissibility, Non-linear System, Zener Model, Vibration

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Um dos grandes desafios para o desenvolvimento de estruturas mecânicas é a redução de vibrações e ruídos indesejados, diversas maneiras são encontradas para reduzir estes problemas. As estruturas têm se tornado mais flexíveis e leves devido aos avanços tecnológicos na área de materiais e produção, como consequência, análises estruturais estáticas não são suficientes para garantir segurança e conforto. Por isso o desenvolvimento de novos materiais para atender esta demanda é amplo, o que implica na crescente necessidade de se estabelecer modelos dinâmicos, como por exemplo, o modelo de *Zener*, que utiliza uma combinação linear de molas e amortecedores para representar componentes elásticos e viscosos, podendo descrever um material que apresenta reologia viscoelástica.

Por descrever um comportamento viscoelástico, trata-se de um modelo relevante para a engenharia, pois a aplicação do material viscoelástico pode ser encontrada nas indústrias aeronáutica, espacial, naval, civil, ferroviária, e automobilística.

O modelo de *Zener*, também conhecido como o modelo SLS, do inglês (*Standard Linear Solid*) é um modelo que descreve o comportamento de um material viscoelástico, utilizando uma combinação linear de molas e amortecedores para representar componentes elásticos e viscosos, respectivamente. Muitas vezes, o modelo mais semelhante Maxwell, que é uma mola em série com um amortecedor, e o modelo de Kelvin-Voigt, que é uma mola em paralelo com um amortecedor, são utilizados. No entanto, estes

modelos são muitas vezes insuficiente para representar tal comportamento, o modelo de Maxwell não descreve a fluência ou recuperação, e o modelo de Kelvin-Voigt não descreve o stress e o relaxamento. O SLS é o modelo mais simples, que prevê dois fenômenos.

Na teoria da vibração linear, ao se considerar elementos discretos submetidos à excitação de base, como o isolador de massa de mola de grau único de liberdade SDOF, do inglês (*Single Degree of Freedom*), pode-se aplicar o conceito de transmissibilidade (absoluta e relativa). A transmissibilidade do deslocamento absoluto é definida como a proporção do deslocamento da massa para o deslocamento da base. O isolamento da vibração ocorre quando a transmissibilidade é inferior a um (o deslocamento da massa é menor do que o deslocamento da base). Neste contexto o modelo de *Zener* descreve benefícios para a transmissibilidade acima da frequência de ressonância, quando comparado com o isolador tradicional constituído de uma mola e um amortecedor.

Tipicamente a descrição do comportamento viscoelástico dos materiais é feita através de equações diferenciais que combinam três termos: a deformação elástica, a taxa de deformação viscosa e um termo inercial de aceleração para as análises lineares, enquanto que para as análises não lineares estas mesmas considerações acrescentando a taxa de variação eletromagnética sendo uma taxa exponencial. Assim, a tensão mecânica total é a soma das tensões parciais de cada termo. De maneira geral, o desenvolvimento teórico da viscoelasticidade é feito através da combinação em série ou em paralelo dos modelos idealizados.

Para as análises analíticas lineares realizadas nesta tese, utiliza-se como base os modelos propostos na literatura para a fundamentação teórica e a formulação do comportamento de isoladores viscoelásticos, como os modelos clássicos de Maxwell, Kelvin-Voigt e *Zener*. Após estas análises, as representações analíticas são apresentadas na forma do clássico modelo de isoladores de vibração massa, mola e amortecedor, e comparados com o modelo do isolador de vibração de *Zener*. O modelo de isolador de vibração constituído por massa, mola e amortecedor também chamado de isolador padrão é comparado

ao isolador de vibração de *Zener* linear neste primeiro caso, apresentando assim, suas diferenças e desempenhos.

Para as análises experimentais, foi desenvolvida uma estrutura que representa o modelo de isolador de vibração de *Zener*. Este aparato contém duas vigas verticais que representam as rigidezes k e k_2 e um acoplamento viscoso que é representado por um reservatório fixado na viga de rigidez k_2 e uma haste fixada na viga de rigidez k , e que representam um amortecedor viscoso. Considerando a estrutura suspensa realiza-se análises de transmissibilidade, sendo o sinal de entrada aplicado por um *shaker* (atuador eletromecânico) .

As frequências naturais das vigas são avaliadas experimentalmente, além de comparadas com previsões obtidas a partir de uma solução via método dos Elementos Finitos. Para a variação paramétrica do experimento são utilizados imãs. Selecionando diferentes pontos na face do reservatório com fluido magneto-reológico é possível criar campos magnéticos que alteram a distribuição das partículas magnéticas suspensas encontradas no fluido, o que permite alterar o amortecimento estrutural no aparato desenvolvido.

Por outro lado, para as análises analíticas não lineares utiliza-se o Método do Balanço Harmônico (MBH) que consiste em expressar a solução periódica na forma de combinação linear de funções também periódicas Hagedorn (1984). O método possui uma forma simples e direta de aplicação, que considera uma soma de harmônicos, mais um termo constante, descrevendo a série de *Fourier* que é tomado como solução aproximada:

$$x(t) \approx c_0 + \sum_{i=1}^n c_i \cos i\omega t + d_i \sin \omega t \quad (1.1)$$

Esta solução aproximada é substituída na equação diferencial. As potências e produtos trigonométricos que surgem devidos às não linearidades, são substituídos pela expansão destas potências em somatórios de harmônicos. O passo seguinte é coletar os coeficientes de cada harmônico na equação 1.1 e fazer o balanço dos harmônicos resul-

tantes, isto é, igualar os coeficientes do lado esquerdo aos coeficientes do lado direito da equação. Cada harmônico de interesse na equação 1.1 produz uma equação não linear.

O aspecto mais importante a ser considerado ao escrever a solução aproximada é o tipo de não linearidade do problema e, em alguns casos, a característica da excitação. Assim, ao se empregar a solução mostrada na equação 1.1 para a equação diferencial, resultam potências destes harmônicos. Tomando como exemplo uma potência cúbica e uma quártica de cosseno, as seguintes relações trigonométricas são válidas:

$$(\cos x)^3 = \frac{1}{4} \cos 3x + \frac{3}{4} \cos x \quad (1.2)$$

1.1 MOTIVAÇÃO

Com o grande desenvolvimento e busca por tecnologia, a indústria visa a qualidade e a produtividade, amplificando a necessidade de novos materiais e buscando soluções para melhorar os sistemas produtivos. Assim, para a redução de vibração e ruídos indesejados, o desenvolvimento de materiais inteligentes torna-se um desafio de muitas aplicações de engenharia, desde a indústria aeroespacial, naval, metal/mecânica atingindo até mesmo as áreas de biomecânica, em muitas destas aplicações, onde há a necessidade de redução de massa e usando estruturas finas construídas com materiais leves.

Pelo fato do modelo de isolador de *Zener* ser um modelo simples, nesta tese são apresentados estudos sobre análise linear e também não lineares, pelas quais se verifica que existem configurações de parâmetros que definem regiões de maiores eficiências no modelo de isolador de *Zener*.

1.2 ESCOPO DO TRABALHO

Esta seção apresenta breves informações a respeito do conteúdo desta tese quanto ao método adotado para as análises numéricas, os resultados para as comparações com as análises experimentais para cada um dos casos estudados com seus respectivos resultados.

1.2.1 ANÁLISE NUMÉRICA

Para a análise numérica foi desenvolvido o método da variação paramétrica cujo seu comportamento está intrinsecamente ligado aos parâmetros utilizados e muitas vezes é possível observar mudanças no comportamento do sistema apenas variando alguns parâmetros e observando as respostas do sistema.

1.2.2 VALIDAÇÃO EXPERIMENTAL

Para a validação dos resultados numéricos e analíticos foram realizados em laboratório experimentos que consistem em medir a aceleração imposta a uma estrutura que representa o modelo isolador de *Zener* com o uso de acelerômetros. A excitação de entrada do sistema é realizada através de um ruído marrom (ruído Browniano), este ruído tem mais energia em frequências baixas, e é introduzido na estrutura através de um *shaker*. O sistema tem características livre livre, pois está suspenso através de cabos, evitando assim interferência através de atrito.

O aparato experimental apresentado na figura 1.1 é composto por duas vigas metálicas que representam as molas do modelo de *Zener*. As duas vigas são acopladas pelo reservatório contendo fluido magneto-reológico. O fluido magneto-reológico é um material a base de óleo lubrificante comum com partículas metálicas suspensas. Na figura 1.1 é apresentado este aparato desenvolvido para a avaliação dos resultados experimentais, no capítulo Validação experimental será apresentado com maiores detalhes.

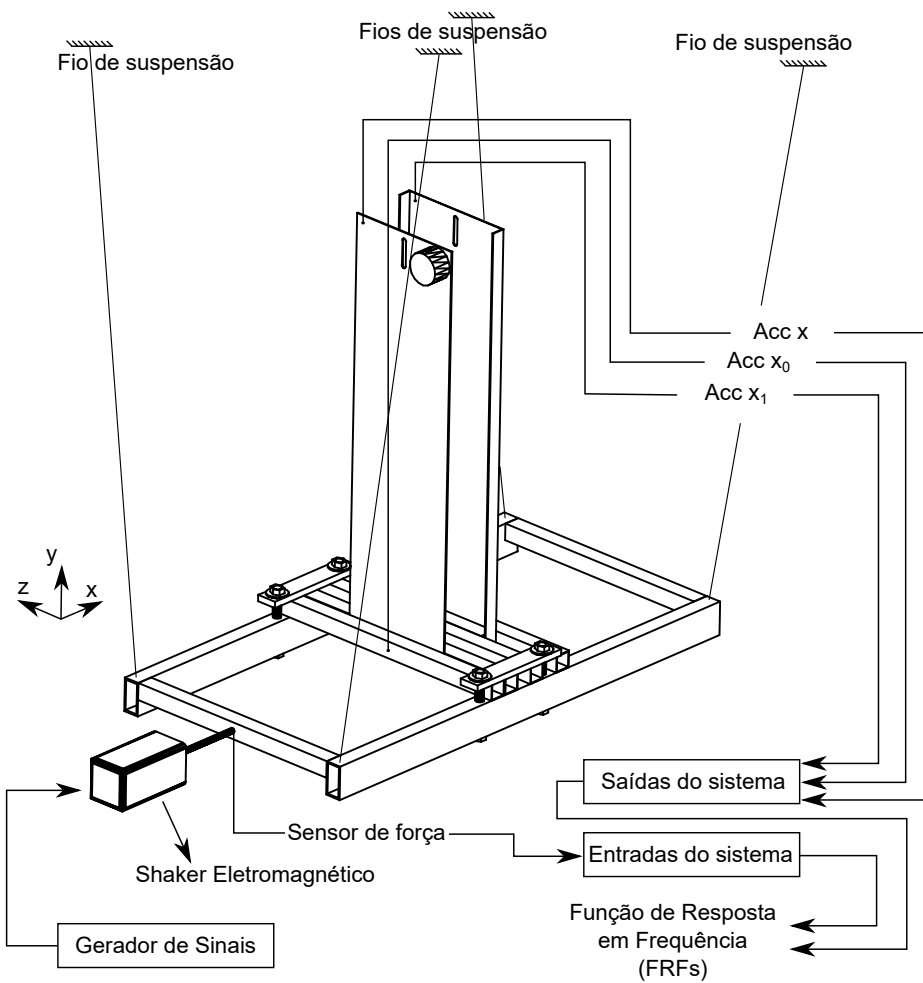


Figura 1.1: Aparato experimental para medida de Resposta em Frequência

1.3 OBJETIVOS E CONTRIBUIÇÕES

Os objetivos do presente trabalho são:

- Avaliar o sistema mecânico que representa o comportamento do modelo de *Zener* com variações dos seguintes parâmetros:
 - Amortecimento
 - Rigidez não linear

- Desenvolver um aparato experimental que represente o comportamento do modelo isolador de *Zener*;
- Implementar modelo que descreva o comportamento do modelo isolador de *Zener*;
- Validar os resultados numéricos e analíticos através de resultados das experimentações com variações de parâmetros;
- Demonstrar os efeitos do fluido magneto-reológico como atenuador de amplitude de vibração estrutural do modelo isolador de *Zener*.

As contribuições desenvolvidas ao longo do período desta tese são: Gonçalves et al. (2015), de Haro Silva and Gonçalves (2016a), de Haro Silva and Gonçalves (2016b), de Haro Silva and Gonçalves (2017a), de Haro Silva and Gonçalves (2017b), de Haro Silva et al. (2018).

1.4 ESTRUTURA DA TESE

Este trabalho é dividido em capítulos para uma melhor compreensão sequencial dos conteúdos abordados, conforme os seguintes tópicos:

- Capítulo 1 - Introdução

Neste capítulo é apresentada uma breve introdução a respeito do modelo isolador de *Zener*, a motivação para a elaboração da presente tese, um breve escopo, apresentando os métodos utilizados para análise numérica e validação experimental, além dos objetivos e contribuições da tese.

- Capítulo 2 - Revisão bibliográfica

Este capítulo aborda as referências bibliográficas e apresenta diversos trabalhos relacionados ao tema. Apresenta a classificação de vibrações, sistemas contínuos, tipos de amortecimentos, propriedades de materiais viscoelásticos e seus efeitos

quanto a frequência. Também é apresentada a formulação do comportamento viscoelástico e seus modelos já conhecidos na literatura, como os modelos de Maxwell, Kelvin(Voigth) e *Zener*.

- Capítulo 3 - Transmissibilidade do isolador de *Zener* linear

Neste capítulo são apresentados as equações constitutivas de cada elemento que compõe o sistema mecânico e, também, são inseridas em uma equação diferencial ordinária que descreve o modelo matemático mais simples que contempla o isolador de *Zener* linear. São apresentados os dois modelos sendo eles o modelo isolador de vibração padrão e o modelo de vibração de *Zener*, que são também comparados.

- Capítulo 4 - Validação experimental

Este capítulo aborda programa computacional de aquisição de sinal da análise experimental. Também é apresentada a estrutura descrita pelo modelo de *Zener*, variando seus parâmetros nas análises. No capítulo é apresentado o software LabVIEW 2013, para a aquisição dos sinais experimentais, e é também realizada a comparação entre os métodos adotados com os resultados experimentais, com resultados da estrutura em função da frequência.

- Capítulo 5 - Transmissibilidade do isolador de *Zener* com rigidez não linear

Este capítulo apresenta as equações para o modelo de vibração de *Zener* com rigidez não linear. Através do MBH é possível verificar a influência do termo não linear assim como a variação dos demais parâmetros do modelo.

- Capítulo 6 - Discussão e Conclusão

Este capítulo aborda as conclusões dos resultados e apresenta uma proposta para trabalhos futuros.

CAPÍTULO 2

REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

No artigo de Tang (2012) diz respeito à vibração livre de um sistema de um único grau de liberdade (SDOF) com três tipos de amortecimento não linear. Um sistema considerado é onde a mola e o amortecedor estão conectados à massa, de modo que estão perpendiculares entre si e a vibração está na direção da mola. Mostra-se que, desde que o deslocamento seja pequeno, este sistema comporta-se de forma semelhante ao sistema SDOF convencional com amortecimento cúbico, no qual a mola e o amortecedor estão conectados para que eles atuem na mesma direção. Esses sistemas são comparados com um sistema SDOF convencional com amortecimento quadrático. Ao transformar todas as equações de movimento dos sistemas para que a força de amortecimento seja proporcional ao produto de um termo e velocidade dependentes de deslocamento, então todos os sistemas podem ser comparados diretamente. Observa-se que o sistema com amortecimento cúbico é menos eficiente do que aquele com amortecimento quadrático para atenuar a vibração livre.

No trabalho de Kovacic et al. (2008) é considerado um isolador de vibração consistindo em uma mola linear e duas molas oblíquas pré-estressadas não lineares. O sistema apresenta não linearidade geométrica e física. Em primeiro lugar, uma análise estática é realizada. O parâmetro de amolecimento que leva à rigidez dinâmica quase zero na posição de equilíbrio é obtido em função da geometria inicial, pré-estresse e

rigidez das molas. A combinação ideal dos parâmetros do sistema é encontrada tal que maximiza o deslocamento da posição de equilíbrio quando a rigidez prescrita é igual à da mola vertical isolada. Também satisfaz a condição de que a rigidez dinâmica apenas ligeiramente se altera na vizinhança da posição de equilíbrio estático. Para esses valores, uma análise dinâmica do isolador sob excitação assimétrica é realizada para quantificar os efeitos indesejáveis das não linearidades. A análise inclui considerar as possibilidades de aparência da bifurcação do período de duplicação e seu desenvolvimento em movimento caótico. Para tanto, são utilizados métodos analíticos aproximados e simulações numéricas acompanhadas de métodos qualitativos, incluindo gráficos de planos de fase, mapas de Poincare e expoentes de Lyapunov. Finalmente, a frequência em que aparece a primeira bifurcação de duplicação do período é encontrada e determina-se o efeito do amortecimento nesta frequência.

Guo et al. (2012) apresentam análise e o design da transmissibilidade de força e deslocamento de sistemas de isolamento de vibração viscosa não linear com amortecedor. Os algoritmos analíticos são derivados usando o método Ritz-Galerkin para avaliar a transmissibilidade do isolamento de vibração de deslocamento SDOF e sistemas de isolamento de vibração de força onde um amortecedor viscoso não linear é usado como um dispositivo de dissipação de energia. Os resultados revelam que, em comparação com os amortecedores lineares, os amortecedores viscosos não lineares podem melhorar significativamente o desempenho do isolamento das vibrações do sistema em uma faixa de frequência mais ampla. Um procedimento é então proposto com base nos resultados da análise para facilitar a concepção de amortecedores viscosos não lineares para fins de isolamento de vibração do sistema. Esses resultados têm implicações significativas para o projeto de sistemas de isolamento de vibração em muitas aplicações de engenharia.

O estudo de Ho et al. (2014) compreende o design de um novo tipo de sistema de isolamento de vibração não linear, de um grau de liberdade (SDOF) que pode lidar com excitações harmônicas e aproveitar as não linearidades de mola e amortecimento. Para os requisitos típicos de design expressos em termos de envelope de transmissibilidade, o

projeto proposto faz uso de um método recentemente desenvolvido chamado Abordagem de Função de Resposta de Frequência de Saída (OFRF), que fornece uma relação direta entre a resposta de frequência de saída do sistema e os parâmetros que definem o sistema. Não linearidade. Tendo em conta todos os harmônicos de saída, um procedimento detalhado passo a passo é desenvolvido para determinar sistematicamente os parâmetros não lineares de um pequeno conjunto de simulação ou dados experimentais. Estudos de simulação são conduzidos para verificar os resultados e demonstrar que o projeto pode efetivamente atingir todos os três requisitos para um sistema de isolamento de vibração de pico de baixa ressonância, baixa transmissibilidade de alta frequência e um grande intervalo de isolamento.

No trabalho de Shaw et al. (2013) é apresentado o conceito de HSLDS, do inglês (*high static low dynamic stiffness*), que basicamente consiste em uma estratégia de projeto para uma montagem de antivibração que busca aumentar o isolamento, reduzindo a frequência natural do suporte, mantendo a mesma capacidade de carga estática. Estudos anteriores analisaram com sucesso muitas características da resposta modelando o conceito como um oscilador *Duffing*. Este estudo amplia os resultados anteriores, caracterizando o modelo HSLDS em termos de dois parâmetros simples. Um modelo polinomial de quinta ordem nos permite explorar os efeitos desses parâmetros. Analisa-se a resposta no estado estacionário, mostrando que mudanças simples na forma da curva de deslocamento da força podem ter grandes efeitos na amplitude e frequência da resposta máxima, e podem até levar a respostas ilimitadas em certos níveis de excitação. Os harmônicos da resposta fundamental também são analisados, e é demonstrado que é improvável que eles representem limitações de projeto significativas. As previsões se comparam bem com os resultados da simulação.

De acordo com Carrella et al. (2012), os engenheiros muitas vezes enfrentam o desafio de reduzir o nível de vibrações experimentadas por uma determinada carga útil ou aquelas transmitidas à estrutura de suporte à qual uma fonte vibrante está conectada. Para aumentar o alcance sobre o qual as vibrações são isoladas, montagens suaves são fre-

quentemente usadas na prática. A desvantagem desta abordagem é que o deslocamento estático pode ser muito grande por motivos de espaço disponível, por exemplo. Idealmente, um isolador de vibração deve ter uma rigidez de alta estática, suportar cargas estáticas sem um grande deslocamento e, ao mesmo tempo, uma rígida rigidez dinâmica para que a frequência natural do sistema seja tão baixa quanto possível, o que resulta em uma região de isolamento aumentada. Esses dois efeitos são mutuamente exclusivos em isoladores lineares, mas podem ser superados se são usados isoladores não lineares adequadamente configurados. Este artigo investiga a caracterização de um isolador não linear, que inclui três molas, duas das quais estão configuradas para reduzir a rigidez dinâmica do isolador. O comportamento dinâmico do isolador que suporta uma massa agrupada é investigado usando transmissibilidade de força e deslocamento, que são derivadas modelando o sistema dinâmico como um sistema de um grau de liberdade. Isso resulta em que a dinâmica do sistema é descrita aproximadamente pela equação de Duffing. Para um isolador linear, a dinâmica do sistema é a mesma, independentemente se a fonte da excitação é uma força harmônica que atua sobre a carga útil (transmissibilidade de força), ou um movimento harmônico da base (transmissibilidade de deslocamento) sobre a qual a carga útil é montada. Neste artigo, uma característica particular da transmissibilidade de deslocamento é que a resposta é ilimitada na frequência de ressonância não linear, a menos que o amortecimento no isolador seja maior do que um valor limite, o que não é o caso da transmissibilidade de força. Uma explicação para isso é oferecida no documento.

No trabalho de Ruzicka (1957) é apresentada a resposta dinâmica de um sistema harmonicamente forçado de um grau de liberdade com o amortecedor elasticamente suportado, e é obtida para sistemas que contêm amortecimento viscoso e amortecimento de Coulomb. Expressões analíticas exatas para a resposta do sistema viscoso amortecido são desenvolvidas e uma análise linearizada do sistema amortecido de coulomb fornece soluções aproximadas para a resposta dinâmica desse sistema. Os sistemas de computação analógica são concebidos para fornecer soluções exatas para ambos os sistemas

viscosos e Coulomb. As curvas de resposta típicas são dadas como obtidas pelo cálculo numérico das equações derivadas e da análise analítica analógica. As características de resposta dos sistemas são comparadas aos sistemas clássicos de grau único de liberdade em que o amortecedor é rigidamente suportado e uma ampla discussão é dada sobre as vantagens, desvantagens e aplicações dos sistemas analisados.

Os sistemas de isolamento de vibração de base excitadas com uma força de restauração puramente não linear e um amortecedor de diversas velocidades são considerados no trabalho de Kovacic (2014). A força de restauração tem uma forma de força de um único termo com o expoente que pode ser qualquer número real não negativo. As aproximações para a resposta no estado estável na frequência de excitação são obtidas usando a função elíptica de Jacobi com um parâmetro elíptico variável e aplicando um método de média elíptica. A transmissibilidade de deslocamento relativo e absoluto deste sistema é analisada. Essas características de desempenho são expressas em termos dos parâmetros de amortecimento, mas também são determinadas por um poder real não negativo arbitrário da não linearidade geométrica, que representa resultados inéditos.

A faixa de frequência sobre a qual um isolador de vibração passiva linear é efetiva é geralmente limitada pela rigidez de montagem necessária para suportar uma carga estática. Isto pode ser melhorado através da incorporação de um elemento de rigidez negativa na montagem, de modo que a rigidez dinâmica seja muito menor do que a rigidez estática, conforme Carrella et al. (2008). Neste caso, pode ser referido como HSLDS. Este artigo está preocupado com um estudo teórico e experimental. A estrutura do sistema contém duas molas mecânicas verticais entre as quais está montada uma massa isolada. Na borda exterior de cada mola, existe um ímã permanente. No trabalho experimental relatado aqui, a massa isolada também é um ímã disposto de modo que seja atraído pelos outros ímãs. Assim, a combinação de ímãs atua como uma rigidez negativa contrariando a rigidez positiva proporcionada pelas molas mecânicas. Embora o sistema de suspensão HSLDS seja inevitavelmente não linear, é mostrado que, para pequenas oscilações, o suporte considerado é do tipo linear. A transmissibilidade medida

é comparada com um sistema de massa mola amortecedor para mostrar as vantagens oferecidas pela montagem HSLDS.

No artigo de Milovanovic et al. (2009), os isoladores de vibração com linearidade e não linearidades cúbicas em termos de rigidez e amortecimento são considerados sob a excitação de base. A influência dos parâmetros do sistema sobre a transmissibilidade de deslocamento relativo e absoluto é investigada. As características de desempenho dos isoladores não lineares são avaliadas e comparadas com as características de desempenho dos isoladores lineares para destacar os efeitos benéficos nos sistemas não lineares considerados.

O artigo de Brennan et al. (2008) apresenta uma análise consistente e concisa da vibração livre e forçada de uma massa suportada por uma combinação paralela de uma mola e um amortecedor elasticamente suportado (um modelo *Zener*). Os resultados são apresentados de forma compacta e o comportamento físico do sistema é enfatizado. Este sistema é muito semelhante ao sistema convencional de um grau de liberdade - (modelo Voigt), mas a dinâmica pode ser diferente, dependendo dos parâmetros do sistema. A utilidade da mola adicional em série com o amortecedor é investigada e os valores de amortecimento ótimos para o sistema sujeito a diferentes tipos de excitação são determinados e comparados.

A teoria do isolamento das vibrações não lineares tem testemunhado mudanças significativas devido a exigências prementes para a proteção de instalações estruturais, reatores nucleares, componentes mecânicos e instrumentos sensíveis do movimento do solo terremoto, choques e cargas de impacto. Em vista dessas demandas, engenheiros e físicos desenvolveram diferentes tipos de isoladores de vibração não lineares. Com isto, o artigo de Ibrahim (2008) apresenta uma avaliação abrangente de desenvolvimentos recentes de isoladores não lineares na ausência de meios de controle ativos. Não trata de outros meios de amortecedores de vibração lineares ou não lineares. Começa com o conceito básico e características de isoladores não lineares e fenômenos não lineares inerentes. Tipos específicos de isoladores não lineares são discutidos, incluindo isolado-

res de ultra baixa frequência. Para o isolamento das vibrações verticais, o tratamento do isolador de mola Euler baseia-se nas características dinâmicas pós-encurvadura da coluna elástica e rigidez axial. Análises exatas e aproximadas da rigidez axial do feixe de Euler pós-flecular são delineadas. São descritas diferentes técnicas de redução da frequência de ressonância do isolador. Outro grupo é baseado no feixe Gospodnetic-Frisch-Fay, que é livre para deslizar em dois suportes. A força de restauração deste feixe lembra, em grande parte, o momento do rolo de restauração dos navios tendenciosos. A base de isolamento de edifícios, pontes e tanques de armazenamento de líquidos submetidos ao movimento do terremoto foi então descrita. O isolamento da base utiliza elementos de fricção, rolamentos de borracha laminada e o pêndulo de fricção. As molas de material viscoelástico e material não linear e elementos de material inteligente são descritos em termos de características mecânicas do material e a dependência de sua transmissibilidade em temperatura e amplitude de excitação.

No estudo de Peng et al. (2012), o HBM do inglês (*Harmonic Balance Method*) ou Método do Balanço Harmônico é aplicado para investigar o desempenho de isoladores de vibração passiva com amortecimento cíclico não linear. Os resultados revelam que a introdução de amortecimento não linear ou amortecimento linear poderia reduzir significativamente tanto a transmissibilidade do deslocamento quanto a transmissibilidade da força dos isoladores sobre a região de ressonância. No entanto, na região de não ressonância na qual a frequência é menor do que a frequência de ressonância, tanto o amortecimento linear como o amortecimento não linear cúbico não têm efeito significativo nos isoladores. Na região de não ressonância com maior frequência, o aumento do amortecimento linear tem pequeno efeito sobre a transmissibilidade do deslocamento, mas pode aumentar a transmissibilidade da força. Além disso, a influência do amortecimento não linear cúbico nos isoladores depende do tipo de força perturbadora. Se a força perturbadora é constante e independente da frequência de excitação, o efeito do amortecimento cíclico não linear na transmissibilidade de força e deslocamento é insignificante. No entanto, quando a força da força perturbadora é dependente da frequência

de excitação, o aumento do amortecimento cíclico não linear pode reduzir ligeiramente a transmissibilidade do deslocamento relativo e aumentar a transmissibilidade do deslocamento absoluto, mas pode aumentar significativamente a transmissibilidade da força. Essas conclusões são de importância significativa na análise e no projeto de isoladores de vibração passiva não linear.

De acordo com Peng et al. (2010), o conceito de função de resposta de frequência de saída, recentemente proposto pelos autores, é aplicado para investigar teoricamente a transmissibilidade de força de isoladores de vibração passiva de um grau de liberdade com uma característica de amortecimento anti-simétrico não linear. Os resultados revelam que uma característica de amortecimento anti-simétrico não linear tem pouco efeito sobre a transmissibilidade dos isoladores de vibração SDOF nas faixas de frequências, que são muito menores ou superiores à frequência de ressonância do isolador. Por outro lado, a introdução de um amortecimento anti-simétrico não linear pode reduzir significativamente a transmissibilidade do isolador de vibração sobre a região de frequência de ressonância. Os resultados indicam que os isoladores de vibração não linear com uma característica de amortecimento anti-simétrico têm um grande potencial para superar o dilema encontrado no projeto de isoladores de vibração linear passiva, ou seja, aumentar o nível de amortecimento para reduzir a transmissibilidade na ressonância pode aumentar a transmissibilidade ao longo da faixa de frequências mais altas.

Conforme Xiao et al. (2013), a influência de um amortecimento não linear que é função de velocidade e deslocamento é investigada para um isolador de um grau de liberdade (SDOF). As relações analíticas entre a transmissibilidade de força ou deslocamento e o coeficiente de amortecimento não linear são desenvolvidas no domínio da frequência para os sistemas isoladores submetidos à excitação de força e de base. É mostrado teoricamente que o amortecimento não linear da ordem cúbica pode produzir um melhor desempenho de isolamento, isto é, supressão de pico óbvia na frequência de ressonância e transmissibilidade muito próxima ao amortecimento linear do sistema em frequências não ressonantes sob as excitações de força e deslocamento de base. Além

disso, quando apenas o amortecimento não linear de ordem cúbica pura é usado sem amortecimento linear, a transmissibilidade de força ou deslocamento é ainda melhor. Os resultados são comparados com os demais termos de amortecimento não linear estudados anteriormente na literatura.

Brown et al. (2018) consideram o problema da propagação de ondas em um sólido viscoelástico. Para as propriedades do material do sólido, considerou a diferenciação clássica e fracional em versões de tempo dos modelos *Zener*, *Maxwell* e *Voigt*, onde o acoplamento de diferentes modelos dentro do mesmo sólido também é coberto. A estabilidade de cada modelo é investigada no domínio de *Laplace*, e estes são então traduzidos para estimativas no domínio do tempo. Com o uso da teoria do semigrupo, também são fornecidos alguns resultados no domínio do tempo que evitam o uso da transformada de *Laplace* e fornecem estimativas mais nítidas. Os autores consideram o tempo para desenvolver e explicar a teoria necessária para entender a relação entre as equações que resolvem no domínio de *Laplace* e aquelas no domínio do tempo que são escritas usando a linguagem de distribuições temperadas causais. Finalmente, oferecem alguns experimentos numéricos que destacam algumas das diferenças entre os modelos e como diferentes parâmetros afetam os resultados.

Yang et al. (2019) consideram o modelo não linear e fracionário de *Zener*, e o modelo de força de atrito de *Berg*, que pode ser usado para descrever o comportamento dependente da frequência e amplitude dependente do isolador de borracha. O esquema simplificado de força de atrito de *Berg* é proposto para melhorar a eficiência computacional no domínio da frequência. A resposta de frequência do sistema de um grau de liberdade modelado com o modelo *Zener* fracionário e o esquema simplificado de força de atrito de *Berg* é investigado, resultados são próximos quando calculados pela transformada discreta de *Fourier*. Além disso, o modelo *Zener* fracionário e o esquema simplificado de força de atrito de *Berg* são implementados para modelar os calços de trilho e a mola de suspensão primária em um veículo ferroviário e, em seguida, o modelo *Zener* não linear e fracionário do sistema acoplado foi estabelecido. A resposta de

frequência calculada pelo modelo de *Zener* não linear e fracionário proposto do sistema acoplado do veículo foi comparada ao cálculo usando o modelo *Kelvin-Voigt* comum, e os resultados mostraram que há pouca diferença nos resultados de cálculo entre os dois modelos, mas as respostas de vibração são bastante diferentes no domínio do tempo e no domínio da frequência. Além disso, a comparação entre o modelo proposto e o modelo derivativo de *Kelvin-Voigt* foi analisado. A diferença entre os dois modelos é pequena na faixa de frequência de 1 a 200 Hz e em todo o domínio do tempo, mas a diferença é grande na região de alta frequência. O modelo de *Zener* não linear e fracionário proposto do sistema acoplado do veículo tem alta eficiência e precisão tanto no domínio do tempo quanto no domínio da frequência.

Wielentejczyk and Lewandowski (2019) apresentam o problema de vibrações de estado estacionário geometricamente não lineares de feixes feitos de materiais viscoelásticos. As teorias de *Euler-Bernoulli* e *Von Karman* são usadas para descrever o comportamento dinâmico de vigas. O material viscoelástico das vigas é modelado usando o modelo *Zener*. Dois harmônicos estão presentes na solução de estado estacionário assumida, o que permite uma análise das ressonâncias primária e secundária. A equação de trabalho virtual e o método de equilíbrio harmônico são usados para derivar as equações de amplitude na forma explícita. As curvas de resposta são determinadas usando o método de continuação e tratando a frequência de excitação como parâmetro principal. Os resultados de vários exemplos que ilustram o comportamento dinâmico dos feixes considerados são apresentados e discutidos.

O trabalho de Lang et al. (2009) apresenta uma análise teórica dos efeitos do amortecimento viscoso não linear sobre isolamento de vibração de sistemas de um grau de liberdade. O conceito de função de resposta de frequência de saída (OFRF) é aplicado para estudar como a transmissibilidade de um isolador de vibração depende do parâmetro de uma característica de amortecimento viscoso cúbico. A análise teórica revela que o amortecimento viscoso não linear pode produzir um isolamento de vibração ideal, de modo que apenas a região ressonante é modificada pelo amortecimento e as regiões não

ressonantes permanecem inalteradas, independentemente dos níveis de amortecimento aplicados ao sistema.

Tratando de fluido magneto-reológico, Costa and Branco (2009) realizaram estudo importante incluindo efeitos de atrito entre o fluido e a parede. Tal estudo contempla modelagem analítica e validação experimental e é possível observar a variação da velocidade do fluido à medida que o campo magnético sofre variação e, também, a variação de pressão com a variação do campo magnético.

CAPÍTULO 3

TRANSMISSIBILIDADE DO ISOLADOR DE *Zener* LINEAR

Neste capítulo são apresentadas a fundamentação teórica a formulação do comportamento de isoladores viscoelásticos e seus modelos conhecidos na literatura, como os modelos de Maxwell, Kelvin(Voigth) e *Zener*.

Em seguida, são apresentados os modelos de isoladores de vibração massa, mola e amortecedor, e *Zener*. Usado como comparativo, o modelo de isolador de vibração constituído por massa, mola e amortecedor também chamado de isolador padrão é comparado ao isolador de *Zener* linear neste primeiro caso, apresentando assim, suas diferenças e desempenho.

3.1 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Vários são os modelos possíveis para representar a viscoelasticidade linear dos polímeros, modelos estes que podem ser tratados matematicamente. Os principais modelos simplificados que permitem fazer uma previsão aproximada do comportamento físico-mecânico de um material viscoelástico são:

- Modelo de Maxwell;

- Modelo de Kelvin;
- Modelo de Maxwell-Kelvin;
- Modelo de *Zener*.

3.1.1 MODELO DE MAXWELL

Como um fluido viscoelástico apresenta por definição os dois componentes da deformação, um elástico e um plástico, Maxwell sugeriu que este pudesse ser representado por uma associação de uma mola e um amortecedor, como mostrado na figura (3.1).

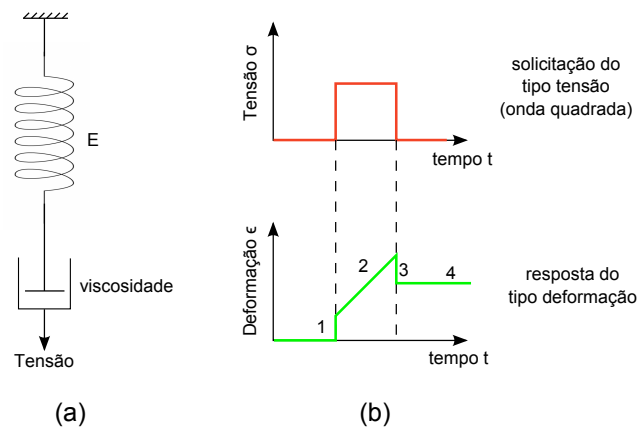


Figura 3.1: (a) Modelo de Maxwell com elementos mola e amortecedor em série; (b) respostas da tensão constante em função do tempo ($\sigma \times t$) e da deformação em função do tempo ($\epsilon \times t$)

A figura (3.1) (b) representa a deformação e o restabelecimento deste modelo. Conforme a figura (3.1) as quatro regiões da resposta de deformação ($\epsilon \times t$) são:

- Região 1 – deformação elástica instantânea da mola;
- Região 2 – deformação plástica, dependente do tempo, do amortecedor;
- Região 3 – recuperação elástica instantânea da mola;
- Região 4 – deformação plástica residual e irreversível do amortecedor

Sendo assim, a tensão da mola é dada por:

$$\sigma_1 = K\epsilon \quad (3.1)$$

A tensão do amortecedor é dada por:

$$\sigma_2 = \eta \frac{d\epsilon}{dt} \quad (3.2)$$

Sendo as tensões aplicadas na mola e amortecedor as mesma, a tensão total σ :

$$\sigma = \sigma_1 = \sigma_2 \quad (3.3)$$

A deformação total será: $\epsilon = \epsilon_1 + \epsilon_2$ A relação entre a tensão e a deformação pode ser descrita por:

$$\frac{d\epsilon}{dt} = \frac{1}{K} \frac{d\sigma}{dt} + \frac{\sigma}{\eta} \quad (3.4)$$

Para $t = 0$, $\sigma = \sigma_0$

$$\sigma = \sigma_0 e^{\left(\frac{-K}{\eta}\right)} \quad (3.5)$$

Na equação (3.5) apresenta que exponencialmente a tensão decai. Sendo τ o tempo de relaxação:

$$\tau = \frac{\eta}{E} \quad (3.6)$$

$$\sigma = \sigma_0 e^{\left(\frac{-t}{\tau}\right)} \quad (3.7)$$

Considerando as tensões constantes, tem-se que:

$$\frac{d\sigma}{dt} = 0 \quad (3.8)$$

$$\frac{d\epsilon}{dt} = \frac{\sigma}{\eta} \quad (3.9)$$

Isto não pode ser generalizado para materiais viscoelásticos onde o comportamento de fluência é mais complexo. A propriedade de relaxação de tensão não pode ser representada por uma exponencial simples do termo de decaimento, pois esta não decairá necessariamente a zero a um tempo infinito, Ward and Hadley (1993).

3.1.2 MODELO DE KELVIN

O modelo de Kelvin sendo igual ao modelo também conhecido chamado modelo de Voight, consiste de uma mola de módulo K , em paralelo com um amortecedor com viscosidade η . Ao se aplicar uma tensão durante um certo intervalo de tempo, obtém-se como resposta, uma curva de variação da deformação com o tempo, conforme figura (3.2).

No modelo de Kelvin, a tensão total é iniciada no pistão, isto porque a mola não pode se deformar instantaneamente. Sob influência da tensão constante, o pistão começa a fluir transferindo parte da carga para a mola. Retirada a tensão, a amostra retorna a sua forma original.

Conforme a figura (3.2) as duas regiões da resposta de deformação ($\epsilon \times t$) são:

- Região 1 – deformação elástica retardada por um componente viscoso;
- Região 2 – Recuperação elástica retardada pelo mesmo componente viscoso anteriormente dito;

Este modelo consiste de uma mola de módulo K , em paralelo com um amortecedor

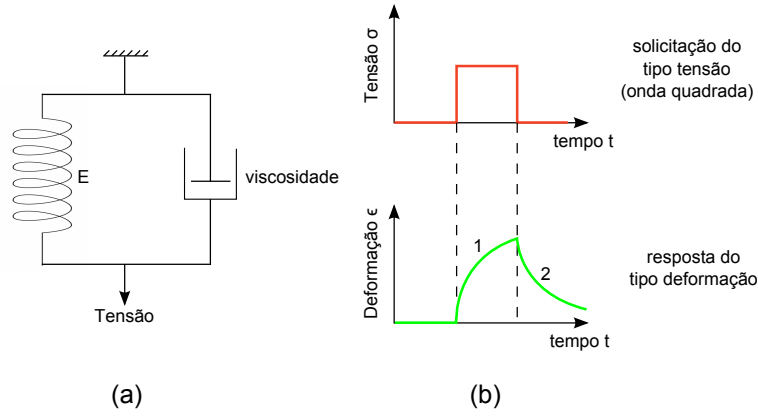


Figura 3.2: (a) Modelo de Kelvin com elementos mola e amortecedor em paralelo; (b) respostas da tensão constante em função do tempo ($\sigma \times t$) e da deformação em função do tempo ($\epsilon \times t$)

de viscosidade η . Se uma tensão constante σ é aplicada a um tempo $0 = t$ a elongação a mola poderá não ser instantânea, sendo retardada pelo amortecedor. A deformação ocorre a uma taxa variável, com a tensão distribuída entre os dois componentes, após um tempo dependente da viscosidade do amortecedor, a mola aproxima-se da elongação máxima finita. Quando a tensão é removida, ocorre o processo reverso, onde a deformação decai com o tempo, então o comprimento inicial tende a se restabelecer conforme figura (3.2). O modelo representa o componente tempo-temperatura da fluência para uma primeira aproximação.

As relações tensão-deformação são para a mola

$$\sigma = K_K \epsilon_1 \quad (3.10)$$

e para o amortecedor

$$\sigma_2 = \eta d\epsilon_2/dt \quad (3.11)$$

Sendo, a tensão total σ é $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$, e a deformação total é $e = e_1 = e_2$

$$\sigma = K_K \epsilon + \eta_K \frac{d\epsilon}{dt} \quad (3.12)$$

Considerando-se o tempo de retardo τ' após o carregamento para a deformação atingir $\left(1 - \frac{1}{e}\right)$ da deformação máxima. Após remover a tensão, a deformação assume valor de decaimento de $\left(\frac{1}{e}\right)$ do valor máximo no tempo τ' .

Na deformação tem-se que:

$$e(t) = e_0 \left(1 - \text{Exp}\left(\frac{-t}{\tau'}\right)\right) \quad (3.13)$$

E para a relaxação

$$e(t) = e_0 \left(\text{Exp}\left(\frac{-t}{\tau'}\right)\right) \quad (3.14)$$

3.1.3 MODELO DE MAXWELL-KELVIN

Como apresentado nos modelos anteriormente, os modelos anteriores de modo individual, não representa bem todos os casos de comportamento real dos fluidos viscoelásticos, sugeriu-se então uma associação dos dois em série. Ao aplicar uma tensão constante por um certo intervalo de tempo, obtém-se como resposta uma curva de variação da deformação com o tempo, como demonstrado na figura (3.3).

Nesse modelo, cada porção da curva resposta (ϵ x t) é a função da ação conjunta dos dois elementos sendo que:

- Região 1 - Resposta instantânea da mola;
- Região 2 - Deformação elástica retardada por dois componentes viscosos;
- Região 3 - Recuperação elástica instantânea da mola;
- Região 4 - Recuperação elástica retardada pelos componentes viscosos.

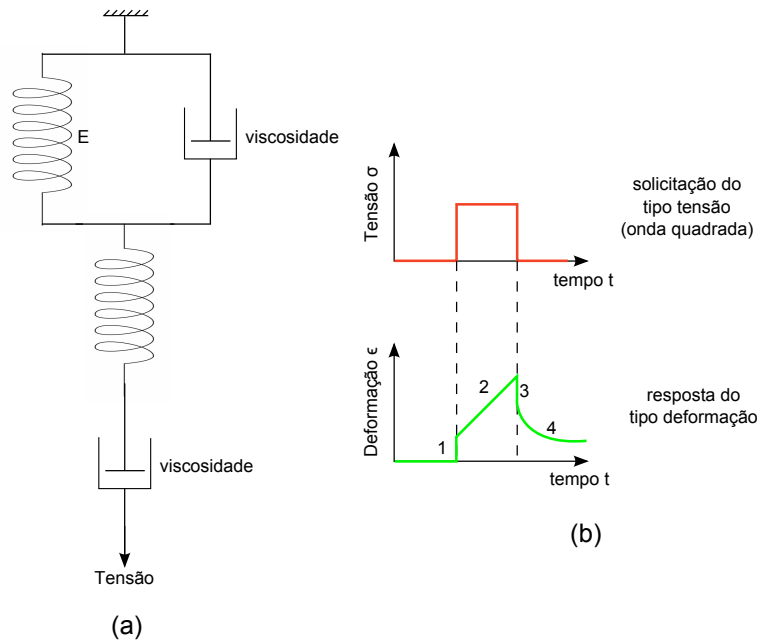


Figura 3.3: (a) Modelo de Maxwell-Kelvin; (b) respostas da tensão constante em função do tempo ($\sigma \times t$) e da deformação em função do tempo ($\epsilon \times t$)

3.1.4 MODELO DE *Zener*

O modelo de *Zener* apresenta uma combinação linear dos modelos de Maxwell e Kelvin-Voigt, conhecido como o “padrão sólido linear”, fazendo assim, uma descrição mais adequada do comportamento desses materiais do que os outros modelos anteriormente citados. Na figura (3.4) é apresentado o modelo analisado.

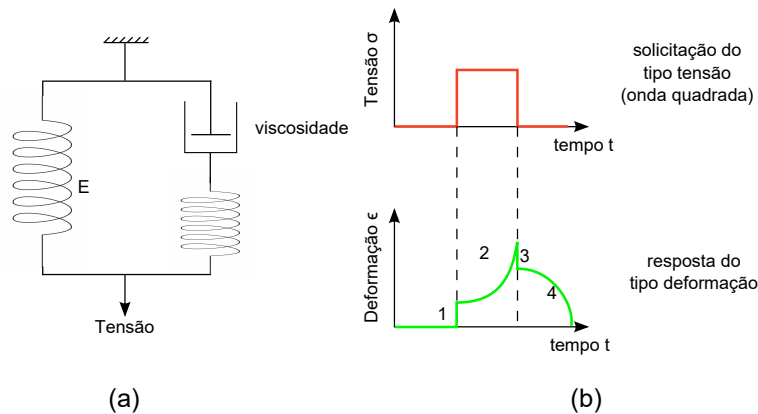


Figura 3.4: (a) Modelo de Zener; (b) respostas da tensão constante em função do tempo ($\sigma \times t$) e da deformação em função do tempo ($\epsilon \times t$)

Observa-se que o modelo de Maxwell descreve o relaxamento de tensão de um sólido viscoelástico para uma primeira aproximação, e o modelo de Kelvin o comportamento de fluência, mas que nenhum modelo é adequado para o comportamento geral de um sólido viscoelástico onde é necessário descrever tanto o estresse relaxamento e fluência. Uma resposta mais próxima da de um polímero real é obtida pela adição de uma segunda mola de módulo E_a em paralelo com uma unidade Maxwell. Este modelo é conhecido como "sólido linear padrão" e é geralmente atribuído a *Zener* [2]. Ele fornece uma representação aproximada do comportamento observado dos polímeros em sua faixa viscoelástica. Em fluência, ambas as molas se estendem, de modo que

$$\tau = \eta \left[\frac{1}{E_a} + \frac{1}{E_m} \right] \quad (3.15)$$

mas no relaxamento do estresse E_a não é afetada, resultando em:

$$\tau = \frac{\eta_m}{E_m} \quad (3.16)$$

A relação estresse-tensão é dada por:

$$\sigma + \tau \frac{d\sigma}{dt} = E_a e + (E_a + E_m) \tau \frac{de}{dt} \quad (3.17)$$

Este modelo descreve tanto o relaxamento por fluência quanto por tensão e a transição do módulo vítreo E_m (para $E_m \gg E_a$) em tempos curtos, onde o amortecimento viscoso tem uma viscosidade infinita, para o módulo elástico E_a em tempos longos.

3.2 TRANSMISSIBILIDADE DO ISOLADOR PADRÃO

Uma grande quantidade de sistemas práticos pode ser descrita usando um número finito de graus de liberdade. Sistemas com um número finito de graus de liberdade são denominados sistemas discretos ou de parâmetros concentrados. Para efeito de comparação e análise da eficiência do modelo de *Zener*, neste primeiro modelo adotou-se um isolador padrão conforme apresentado na figura 3.5. Para comparação do modelo

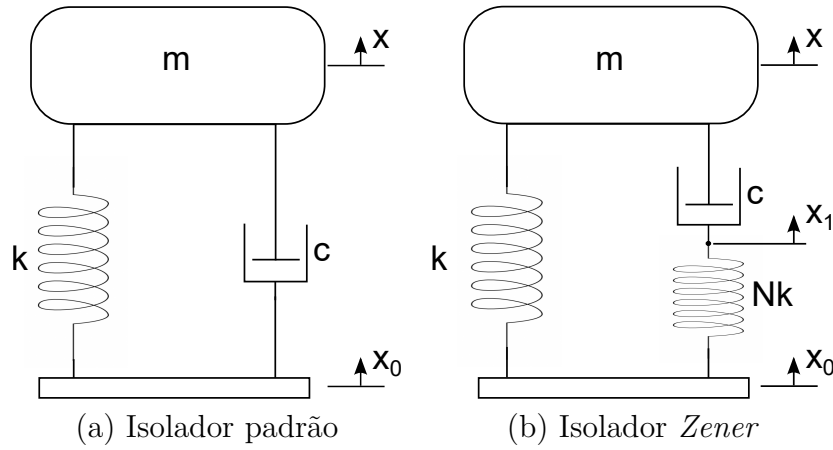


Figura 3.5: Modelo de sistemas mecânicos

de isolador proposto para esta tese, o modelo de *Zener*, o modelo padrão de isolador, constituído apenas por um sistema massa, mola e amortecedor conforme apresentado na figura 3.5(a). Para este modelo, a equação de equilíbrio é dada por:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = c\dot{x}_0 + kx_0 \quad (3.18)$$

Assumindo movimento harmônico do tipo $x_0 = X_0 e^{j\omega t}$ e $x = X e^{j\omega t}$, com $j = \sqrt{-1}$, pode-se obter a equação do movimento no domínio da frequência, na forma:

$$(-\omega^2 m + j\omega c + k)X = (j\omega c + k)X_0 \quad (3.19)$$

Remanejando os termos da equação 3.19, é possível obter a razão $\frac{X}{X_0}$, conhecida como transmissibilidade absoluta de deslocamento, dada por

$$T = \frac{X}{X_0} = \frac{j\omega c + k}{-\omega^2 m + j\omega c + k} \quad (3.20)$$

A equação 3.20 é uma relação complexa, com magnitude e fase. A magnitude é dada por

$$T_a = |T| = \sqrt{\frac{k^2 + (c\omega)^2}{(k - \omega^2 m)^2 + (c\omega)^2}} \quad (3.21)$$

Considerando $\omega_n^2 = k/m$, $\xi = \frac{c}{c_c} = \frac{c}{2m\omega_n}$ e $\Omega = \frac{\omega}{\omega_n}$. A equação da transmissibilidade absoluta é reescrita na forma adimensional.

$$|T| = \left(\frac{1 + (2\xi\Omega)^2}{(1 - \Omega^2)^2 + (2\xi\Omega)^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.22)$$

$$\Omega = \sqrt{2} \quad (3.23)$$

Conforme a figura 3.6 todas estas curvas, para diferentes fatores de amortecimento, têm transmissibilidade igual a 1 para valor de frequência igual a 0 e $\sqrt{2}$. É possível separar o gráfico em duas regiões: na primeira região, onde o valor de frequência varia entre 0 e $\sqrt{2}$, quanto maior o amortecimento menor será a transmissibilidade; na segunda, onde o valor da frequência é maior que $\sqrt{2}$, quanto menor o amortecimento menor será a transmissibilidade. Pode-se observar também que há redução na força transmitida apenas para o valor de frequência maior que $\sqrt{2}$. Desta forma, os isoladores de vibração devem ser escolhidos de maneira tal que as frequências de trabalho seja maiores que a $\sqrt{2}$ vezes a frequência natural do sistema.

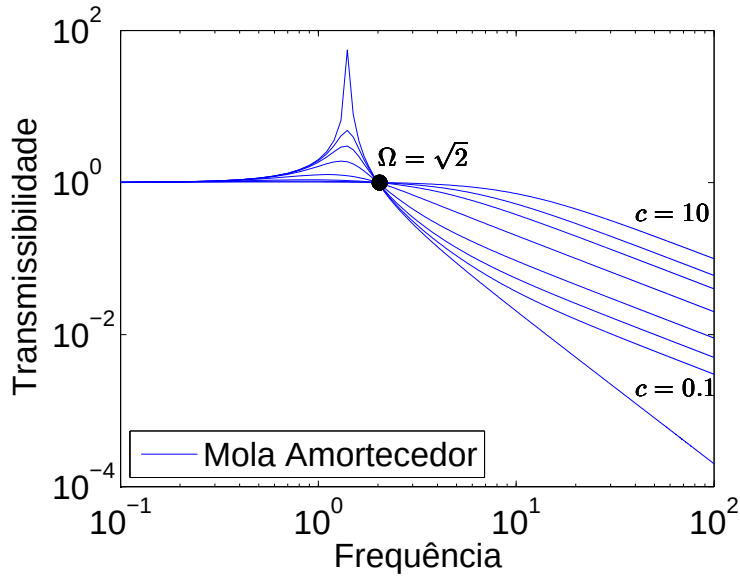


Figura 3.6: Influência da variação de amortecimento na transmissibilidade do modelo apresentado na figura 3.5(a)

De fato, na figura 3.6 nota-se que quanto maior o valor de amortecimento implica em maior valor de frequência e menor o pico de amplitude. Caso contrário, quanto menor o valor de amortecimento, menor o valor da frequência e maior o pico de amplitude. Sendo assim, com amortecimento elevado o sistema tende a atenuar com menor eficiência a vibração proposta. Caso contrário, o sistema passa por uma severa vibração, dada pela frequência natural do sistema, e após esse pico, atenua a vibração com maior eficiência.

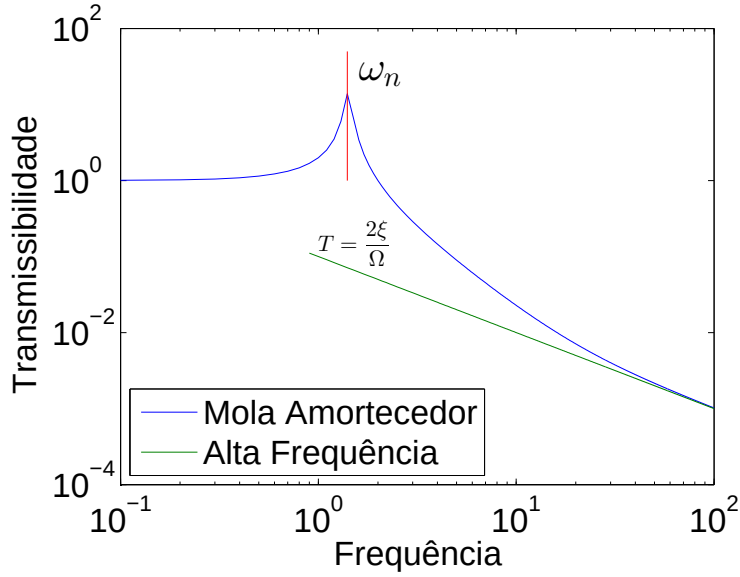


Figura 3.7: Transmissibilidade na alta frequência

Nota-se que a transmissibilidade na alta frequência não altera o pico da ressonância como apresentado na figura 3.7. A semi-reta apresentada por $T = \frac{2\xi}{\Omega}$ é uma assíntota da curva dada pela equação 3.22

3.3 TRANSMISSIBILIDADE DO ISOLADOR DE *Zener* LINEAR

O sistema em estudo é apresentado na figura 3.8 representando uma massa suportada por uma mola principal k e uma combinação em série de uma mola secundária k_2 e um amortecedor linear viscoso com coeficiente c . O sistema está sujeito ao movimento de base com amplitude x_0 , o deslocamento de massa é definido por x e a variável x_1 está relacionada ao grau de liberdade onde o amortecedor viscoso e a mola secundária estão conectados.

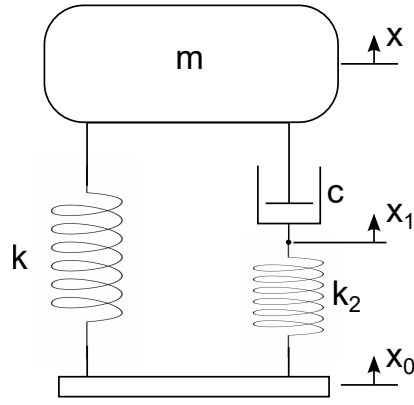


Figura 3.8: Representação do modelo *Zener* sujeito ao movimento base.

As equações de movimento do sistema mostrado na figura 3.8 são expressas pelo equilíbrio dinâmico na massa e no equilíbrio da força em grau de liberdade (x_1) representadas pelas equações em 3.24 e 3.25 Ruzicka and Derby (1971); Ruzicka (1957)

$$m\ddot{x} = -k(x - x_0) - c(\dot{x} - \dot{x}_1) \quad (3.24)$$

$$c(\dot{x} - \dot{x}_1) = k_2(x_1 - x_0) \quad (3.25)$$

Substituindo a equação 3.25 na equação 3.24, a equação de movimento do sistema é dado por

$$x_1 = \frac{1}{k_2}[-m\ddot{x} - k(x - x_0) + k_2x_0] \quad (3.26)$$

Supondo que $k_2 = Nk$, onde N é um número real positivo, é mais conveniente escrever as duas equações diferenciais (eqs.3.24 e 3.25) como uma Equação Diferencial Ordinária de ordem superior (EDO). Isso pode ser feito substituindo o termo no lado direito da equação 3.25 na equação 3.24, e diferenciar uma vez em relação ao tempo

$$\dot{x}_1 = -\frac{1}{Nk}[m\ddot{x} + k(\dot{x} - \dot{x}_0)] + \dot{x}_0 \quad (3.27)$$

A variável $\dot{x}_1$ é então substituída na equação 3.24 para fornecer uma EDO de terceira ordem definida como

$$m\ddot{x} = -kx + kx_0 - c\dot{x} - \frac{cm}{Nk}\ddot{x} - \frac{ck}{Nk}(\dot{x} - \dot{x}_0) + x\dot{x}_0 \quad (3.28)$$

Com isso,

$$-\frac{cm}{Nk}\ddot{x} - m\ddot{x} - c\left(1 + \frac{k}{Nk}\right)(\dot{x} - \dot{x}_0) - k(x - x_0) = 0 \quad (3.29)$$

Dividindo a equação 3.29 pelo parâmetro da massa m , tem-se

$$-\frac{c}{Nk}\ddot{x} - \ddot{x} - \frac{c}{m}\left(1 + \frac{1}{N}\right)(\dot{x} - \dot{x}_0) - \frac{k}{m}(x - x_0) = 0 \quad (3.30)$$

E considerando os valores de $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ e $\xi_0 = c/2m\omega_0$.

$$-\frac{2\xi_0}{N\omega_0}\ddot{x} - \ddot{x} - 2\xi_0\omega_0\left(1 + \frac{1}{N}\right)(\dot{x} - \dot{x}_0) - \omega_0^2(x - x_0) = 0 \quad (3.31)$$

Resulta em,

$$\left(\frac{2\xi_0}{\omega_0 N}\right)\ddot{x} + \ddot{x} + 2\xi_0\omega_0\left(\frac{N+1}{N}\right)\dot{x} + \omega_0^2 x = 2\xi_0\omega_0\left(\frac{N+1}{N}\right)\dot{x}_0 + \omega_0^2 x_0 \quad (3.32)$$

Por conveniência, os parâmetros do sistema são simplificados para $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, $\xi_0 = c/2m\omega_0$. (Note-se que estes são a frequência natural e a taxa de amortecimento de um sistema massa-amortecedor-mola e não a frequência natural e a relação de amortecimento do sistema em estudo).

Considerando o caso especial em que o deslocamento da base é uma função harmônica do tipo $x_0 = X_0 e^{j\omega t}$, com $j^2 = -1$ e ω é a frequência da excitação externa. Supondo que a resposta do sistema também é uma função harmônica do tipo $x = X e^{j(\omega t + \beta)}$, onde β é o ângulo de fase entre o deslocamento da base x_0 e o deslocamento de massa x , no

regime estacionário, a transmissibilidade de O sistema pode ser escrito como

$$x_0 = X_0 e^{j\omega t}, \dot{x}_0 = X_0 j\omega e^{j\omega t}, \ddot{x}_0 = -X_0 \omega^2 e^{j\omega t} \quad (3.33)$$

e,

$$x = X e^{j\omega t}, \dot{x} = X j\omega e^{j\omega t}, \ddot{x} = -X \omega^2 e^{j\omega t}, \ddot{\ddot{x}} = -X j\omega^3 e^{j\omega t} \quad (3.34)$$

Substituindo (3.33) e (3.34) em (3.32),

$$\begin{aligned} \left(-\frac{2\xi_0}{\omega_0 N}\right) j\omega^3 e^{j\omega t} X - \omega^2 e^{j\omega t} X + 2\xi_0 \omega_0 \left(\frac{N+1}{N}\right) j\omega e^{j\omega t} X + \omega_0^2 e^{j\omega t} X = \\ 2\xi_0 \omega_0 \left(\frac{N+1}{N}\right) j\omega e^{j\omega t} X_0 + \omega_0^2 e^{j\omega t} X_0 \end{aligned} \quad (3.35)$$

$$\begin{aligned} \left[-\frac{2\xi_0}{\omega_0 N} j\omega^3 - \omega^2 + 2\xi_0 \omega_0 \left(\frac{N+1}{N}\right) j\omega + \omega_0^2\right] X e^{j\omega t} = \\ \left[2\xi_0 \omega_0 \left(\frac{N+1}{N}\right) j\omega + \omega_0^2\right] X_0 e^{j\omega t} \end{aligned} \quad (3.36)$$

Então, reescrevendo a equação 3.36, obtém-se a razão $\frac{X}{X_0}$, isto é

$$\frac{X}{X_0} = \frac{\left[2\xi_0 \omega_0 \left(\frac{N+1}{N}\right) j\omega + \omega_0^2\right]}{\left[-\frac{2\xi_0}{\omega_0 N} j\omega^3 - \omega^2 + 2\xi_0 \omega_0 \left(\frac{N+1}{N}\right) j\omega + \omega_0^2\right]} \quad (3.37)$$

Considerando, $\Omega = \frac{\omega}{\omega_0}$ e $\alpha = \frac{N}{2\xi_0}$, tem-se

$$\frac{X}{X_0} = \frac{2\xi_0 \omega_0 (N+1) j\omega + N \omega_0^2}{2\xi_0 \omega_0 (N+1) j\omega - 2\xi_0 \omega^2 \Omega j - \omega^2 N + \omega_0^2 N} \quad (3.38)$$

Reescrevendo o numerador e o denominador da razão apresentado pela equação 3.38 em

termos de $2\xi_0\omega_0^2$ e separando em 2 partes para melhor visualização, tem-se

$$\frac{X}{X_0} = \left(\frac{2\xi_0\omega_0(N+1)j\omega + N\omega_0^2}{2\xi_0\omega_0^2} \right) \left(\frac{2\xi_0\omega_0^2}{2\xi_0\omega_0(N+1)j\omega - 2\xi_0\omega^2\Omega j - \omega^2N + \omega_0^2N} \right) \quad (3.39)$$

Parte 1

$$\frac{X}{X_0} = \frac{2\xi_0\omega_0(N+1)j\omega}{2\xi_0\omega_0\omega_0} + \frac{N\omega_0^2}{2\xi_0\omega_0^2} \Rightarrow j\frac{\omega}{\omega_0}(N+1) + \frac{N}{2\xi_0} \Rightarrow j\Omega(N+1) + \alpha \quad (3.40)$$

Parte 2

$$\frac{X}{X_0} = \frac{2\xi_0\omega_0^2}{2\xi_0\omega_0(N+1)j\omega - 2\xi_0\omega^2\frac{\omega}{\omega_0}j - \omega^2N + \omega_0^2N} \quad (3.41)$$

Tirando em evidência o termo $2\xi_0\omega_0^2$ no denominador, a equação 3.41 pode ser reescrita

$$\frac{X}{X_0} = \frac{1}{\alpha - \Omega^2\alpha + (N+1)j\Omega - \Omega^3j} \quad (3.42)$$

Lembrando que, $\frac{X}{X_0}$ é multiplicado pela parte 1 e parte 2 respectivamente, e assim, tem-se

$$\frac{X}{X_0} = \frac{j\Omega(N+1) + \alpha}{\alpha(1 - \Omega^2) + j\Omega(N+1 - \Omega^2)} \quad (3.43)$$

A magnitude da transmissibilidade pode ser escrita por

$$|T| = \left(\frac{\Omega^2(N+1)^2 + \alpha^2}{\alpha^2(1 - \Omega^2)^2 + \Omega^2(N+1 - \Omega^2)^2} \right)^{1/2} \quad (3.44)$$

$$\frac{X}{X_0} = \frac{j\Omega(N+1) + \alpha}{\alpha(1 - \Omega^2) + j\Omega(N+1 - \Omega^2)} \quad (3.45)$$

Sendo $\alpha = N/2\xi_0$ e $\Omega = \omega/\omega_n$ é a relação de frequência. A magnitude da transmissibi-

lidade é então definida como

$$|T| = \left(\frac{\Omega^2(N+1)^2 + \alpha^2}{\alpha^2(1-\Omega^2)^2 + \Omega^2(N+1-\Omega^2)^2} \right)^{1/2} \quad (3.46)$$

E o ângulo de fase β é dado por

$$\beta = \text{atan} \left(\frac{-\alpha\Omega^3N}{-(N+1)\Omega^4 + (-\alpha^2 + (N+1)^2)\Omega^2 + \alpha^2} \right) \quad (3.47)$$

Brennan et al. (2008) demonstrou que o amortecimento crítico ocorre apenas se houver um valor mínimo de N que deve ser maior que 8, caso contrário, a mola secundária é muito macia para permitir que o amortecedor opere no regime de amortecimento crítico. Se N for pequeno, o sistema se comportará como um sistema subamortecido. Se a taxa de amortecimento for alta, ele bloqueará o amortecedor e o sistema se comportará como um sistema não amortecido, com frequência de ressonância $\Omega = \sqrt{1+N}$. Os fatores que controlam o pico de ressonância são os termos no denominador da equação 3.46, que dependem do valor de α . Isso pode ser verificado nas parcelas da 5.1(a) e (b) que ilustram a influência do fator de amortecimento ξ_0 nos termos que definem o denominador da equação 3.46.

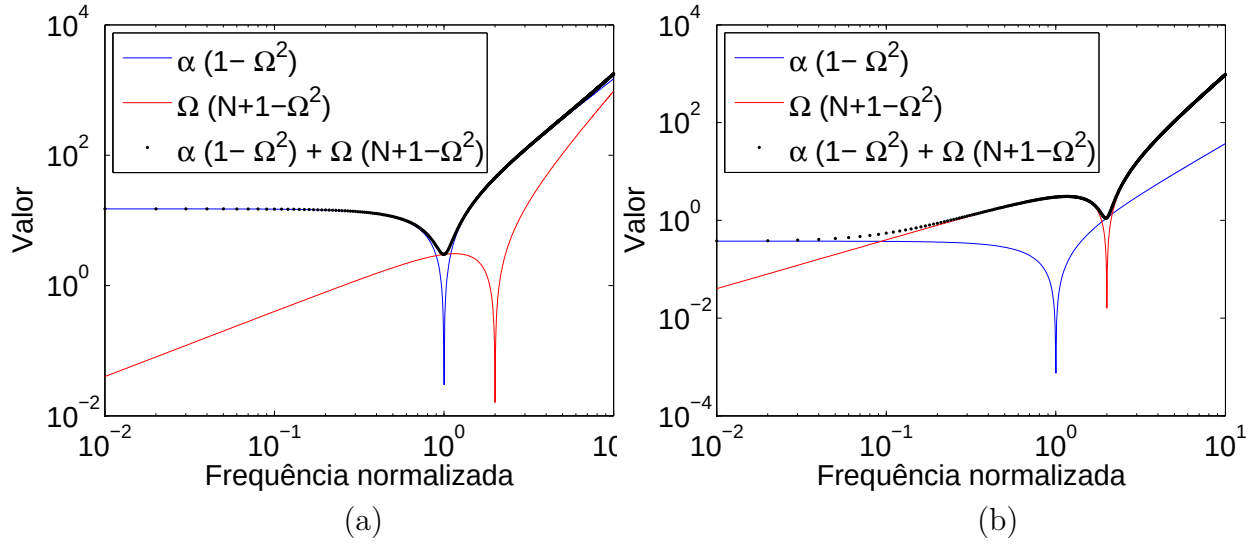


Figura 3.9: Contribuição de cada termo no denominador da equação 6 para $N = 3$. Caso (a) $\xi_0 = 0, 1$ e caso (b) $\xi_0 = 4, 0$

O comportamento geral da transmissibilidade em função da frequência e do fator de amortecimento é mostrado no gráfico de superfície da 3.10. Pode-se ver que há uma mudança na frequência de ressonância à medida que o fator de amortecimento aumenta. Isso ocorre porque há uma mudança nas raízes do polinômio definido no denominador da equação 3.45, como ξ_0 é mudança, Brennan et al. (2008). Aumentando ξ_0 de valores pequenos a grandes, a transmissibilidade passa por um mínimo e aumenta novamente.

Na figura 3.10 é apresentado o comportamento da transmissibilidade do sistema com variação de amortecimento de $c = 0.1$ a $c = 4.0$.

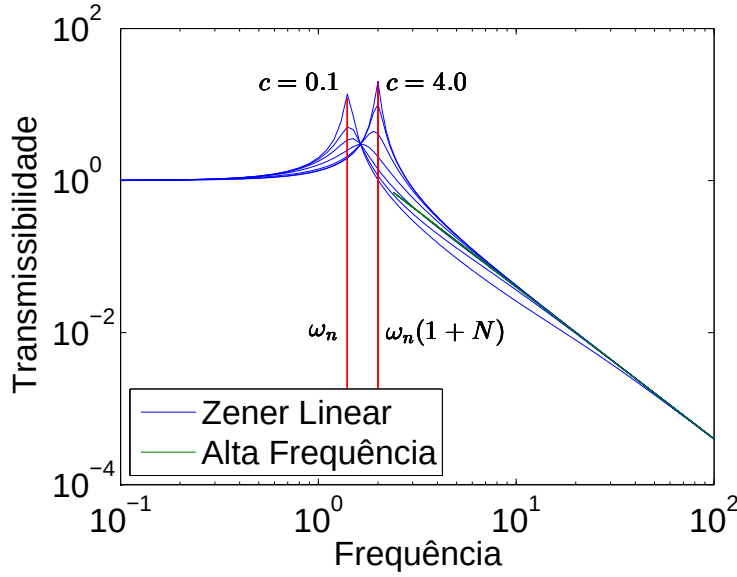


Figura 3.10: Transmissibilidade de base como função da frequência e da relação de amortecimento ξ_0 , com variação de ξ_0 de 0,1 (pico a esquerda) a 4,0 (pico a direita).

Este comportamento é apresentado quando ξ_0 é submetido a uma variação entre 0,1 e 4,0 com o valor inicial de 0,1 tem-se que este valor é somente a frequência natural relacionado ao valor da rigidez de k (rigidez primária) e com o aumento do valor de ξ_0 igual a 4,0 tem-se o acoplamento da estrutura considerando assim um valor resultante das duas rigidez k e k_2 . Sendo assim, o sistema passa a operar em um novo valor de frequência natural.

O ponto mínimo é o ponto em que o sistema tem uma frequência de vibração ideal um ponto onde o sistema tem sua menor amplitude entre os valores mínimos e máximos de amortecimento e vibração. Para este sistema, tem-se como valor ideal de amortecimento o valor de $\xi_0 = 0.7$ como apresentado na figura 3.11.

De acordo com Ruzicka (1957) e Brennan et al. (2008), o mínimo é definido pelo valor de amortecimento ideal como

$$\xi_{opt} = \frac{N\sqrt{2(N+2)}}{4(N+1)} \quad (3.48)$$

O valor de amortecimento ideal ou ótimo é o valor que quando aplicado ao modelo

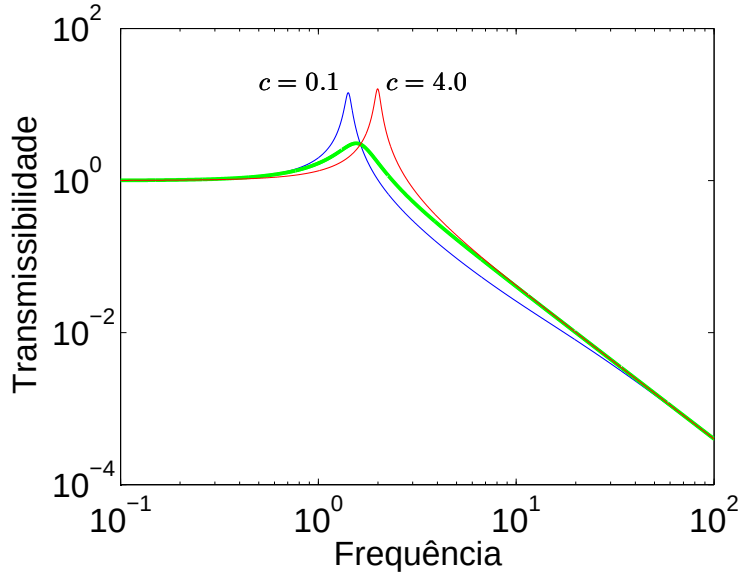


Figura 3.11: Variação de amortecimento ξ_0 de 0,1 (curva azul), 0,7 (curva verde) e 4,0 (curva vermelha).

o sistema tem a melhor resposta, onde o sistema tem o menor valor de amplitude de vibração.

De fato, considerando a equação 3.46 quando o Ω tende a 0 e o α tende ao ∞ , tem-se

$$|T| = \left(\frac{1}{(1 - \Omega^2)^2} \right)^{1/2} \quad (3.49)$$

Por outro lado, quando o Ω tende a ∞ e o α tende ao 0, tem-se

$$|T| = \left(\frac{(N+1)^2}{(N+1 - \Omega^2)^2} \right)^{1/2} \quad (3.50)$$

O ponto em que as curvas se sobrepõem é dado igualando as equações, isto é

$$\left(\frac{1}{(1 - \Omega^2)^2} \right)^{1/2} = \left(\frac{(N+1)^2}{(N+1 - \Omega^2)^2} \right)^{1/2} \quad (3.51)$$

O isolador linear de massa de mola fornece isolamento ($|T| < 1$) para frequências acima de $\Omega = \sqrt{2}$. No caso do isolador *Zener*, esta frequência é dada por

$$\Omega_{\text{isolação}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(2(N+1) - \alpha^2 + \sqrt{(\alpha^2 + 2)^2 + 4N(N+2 - \alpha^2)} \right)^{1/2} \quad (3.52)$$

A magnitude da $\Omega_{\text{isolação}}$ varia entre $\Omega_1 = \sqrt{2}$ e $\Omega_h = \sqrt{2(N+1)}$ de acordo com os valores de ξ_0 e N , portanto, a frequência de isolamento no isolador *Zener* linear é sempre maior que o isolador amortecedor de mola. O valor de magnitude da transmissibilidade em alta frequência pode ser encontrado mantendo apenas os termos de alta ordem de Ω tanto no numerador quanto no denominador da equação 3.46. Isso fornece uma assíntota de alta frequência definida por:

$$|T| = \frac{1+N}{\Omega^2} \quad (3.53)$$

Sendo assim, seu comportamento é apresentado conforme figura 3.12.

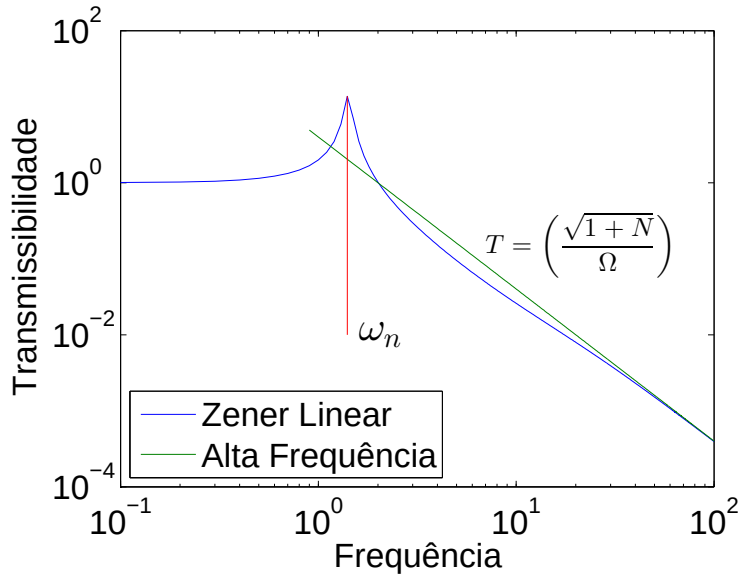


Figura 3.12: Transmissibilidade na alta frequência no modelo de *Zener* linear

A transmissibilidade possui um comportamento de alta frequência que não depende do amortecimento do sistema, mas é afetado pela massa do sistema e pela rigidez das

duas molas.

3.4 COMPARAÇÃO DO ISOLADOR PADRÃO E ISOLADOR DE *Zener* LINEAR

Nesta seção serão apresentadas comparações entre os modelos de isoladores, isolador padrão e isolador de *Zener* linear. Na figura 3.13 são apresentadas respostas com ambos os isoladores com as mesmas condições de amortecimento. O isolador padrão é representado pelas curvas na cor vermelha, já o isolador de *Zener* linear é representado pelas curvas pontuadas na cor azul.

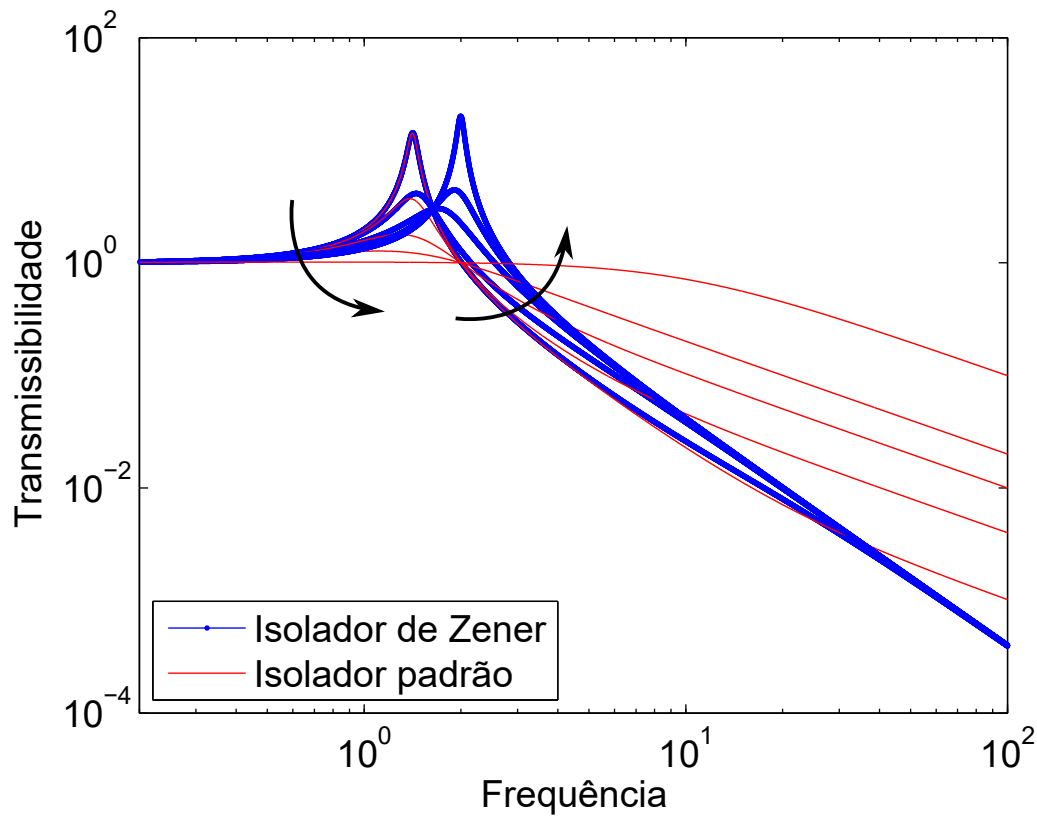


Figura 3.13: Comparação entre o modelo de isolador padrão e isolador de *Zener* linear, com variação de amortecimento entre $c = 0.1$ e $c = 10$, onde as setas indicam o aumento de amortecimento

Tratando-se do mesmo sistema, a frequência natural é a mesma para ambos os iso-

ladores quando o valor de amortecimento é ínfimo. Com o aumento do amortecimento o isolador padrão perde eficiência quanto a isolamento de vibração, nota-se que quanto maior o valor de amortecimento para esse isolador o sistema tende a um maior valor de amplitude em alta frequência.

No caso do isolador de *Zener* linear, o isolador inicia-se semelhante ao isolador padrão, e com o aumento de amortecimento o sistema tende a outro valor de frequência natural. Com isso o isolador apresenta maior eficiência quanto a isolamento de vibração, pois mesmo com as máximas variações de amortecimento o sistema tende a isolamento da vibração em alta frequência conforme apresentado na figura 3.14.

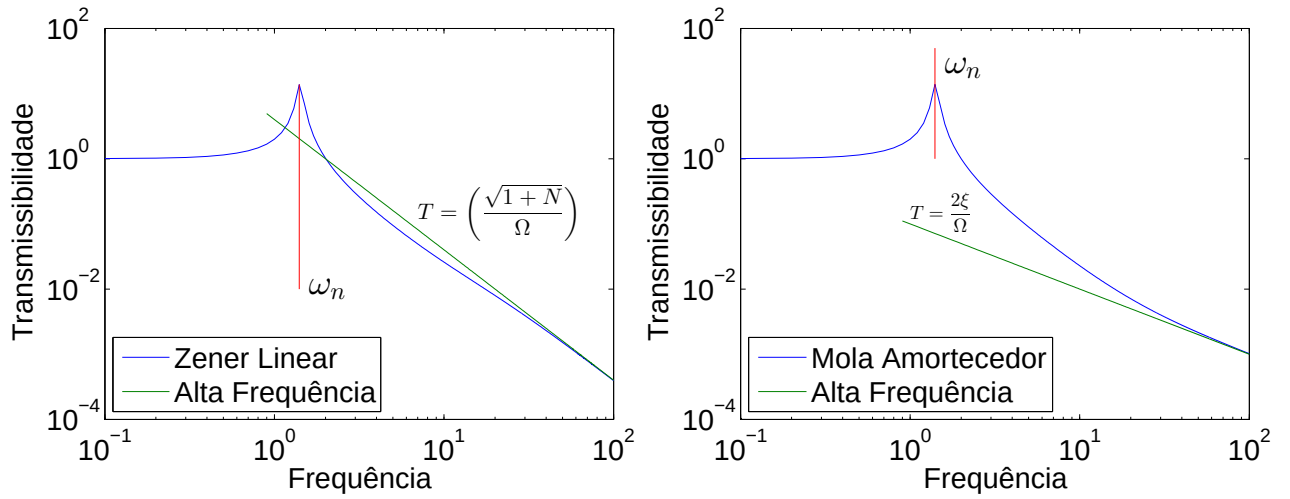


Figura 3.14: Comparação da transmissibilidade na alta frequência no modelo do isolador padrão e isolador de *Zener* linear

CAPÍTULO 4

VALIDAÇÃO EXPERIMENTAL

Este capítulo aborda a relação dos materiais e equipamentos utilizados nos ensaios experimentais, propriedades dos materiais desenvolvidos, metodologia dos ensaios e validação das propriedades dos materiais.

Para a representação experimental do modelo de *Zener* foi adotado um modelo que é composto por duas vigas de diferentes rigidez, estão conectadas através de um acoplamento do tipo amortecedor, o acoplamento amortecedor é representado por duas partes, sendo elas uma haste que é fixada na viga de menor rigidez e um reservatório com material magneto-reológico que é fixado na viga com maior rigidez, o material magneto-reológico consiste em um óleo que possui micro-partículas magnetizáveis em suspensão no mesmo. Sob condições normais, o fluido é um líquido com a viscosidade semelhante a um óleo lubrificante de motores de automóveis. Porém submetido a campo magnetizável muda suas propriedades alterando assim a viscosidade. Na figura 4.1 é apresentado o aparato desenvolvido que representa o modelo de *Zener*.

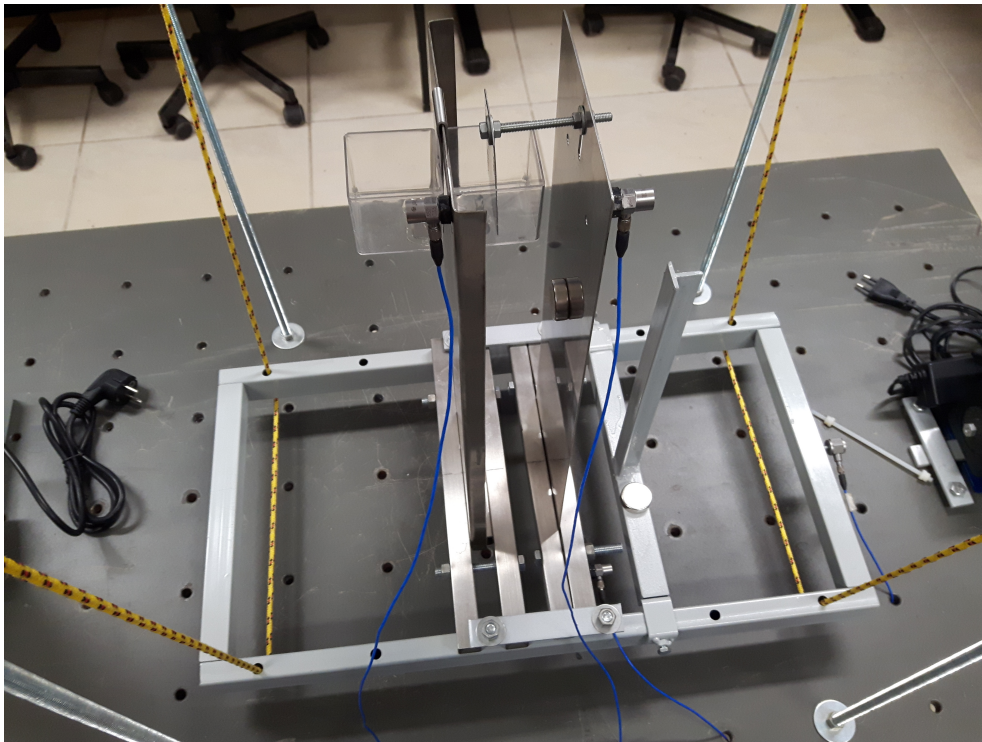


Figura 4.1: Aparato experimental que representa o modelo de *Zener*

Os materiais e equipamentos necessários à realização dos procedimentos experimentais propostos, fez-se necessária utilização de:

- Base (Aço carbono SAE 1020);
- Viga primária e viga secundária (Aço AISI 304, Inox);
- 02 Morsas (Aço AISI 304, Inox);
- 02 Travas (Aço carbono SAE 1020);
- Amortecedor (reservatório e haste);
- Mini SmartShaker with integrated power amplifier (K2007E01);
- Sensor de força (PCB 208C02);
- 03 Acelerômetros piezoelétrico (PCB 352C33);

- 02 Neodímios N52;
- Módulo de aquisição de dados (National Instruments USB-4431);
- Software LabView 2013.

4.1 DETALHES E PROPRIEDADES DAS VIGAS

Como o experimento consiste em dois valores de rigidez fixos e uma dessas rigidez deve ser oito vezes maior que outra, conforme apresentado no modelo analítico, umas das vigas é totalmente plana e outra foi realizada uma aba em ambos os lados da viga para introduzir um maior valor de rigidez. As vigas propostas foram desenvolvidas em Aço AISI 304, foi utilizado este material por possuir estrutura austenítica (sem influência magnética).

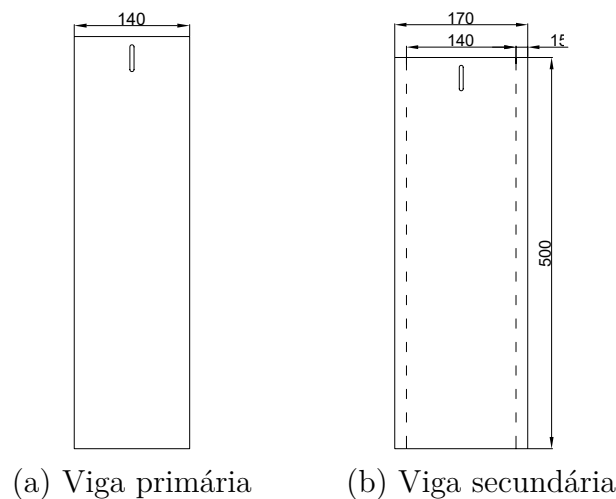


Figura 4.2: Propriedades geométricas viga primária e secundária

Na figura 4.2 são apresentadas as vigas utilizadas neste projeto, a viga (a) é totalmente plana e a viga (b) contem abas em sua lateral para que haja o aumento de rigidez proposto para as análises. A validação das vigas, primária e secundárias foram realizadas através de software de elementos finitos FEMAP, nessas simulações são apresentados

os valores das frequências naturais de ambas as vigas, esse conteúdo está detalhado no apêndice A.

Na tabela 4.1 são apresentadas as propriedades do material utilizado nos experimentos e os mesmos que serão adotados nos modelos numéricos.

Tabela 4.1: Propriedades do material e propriedades geométricas das estruturas metálicas

Propriedade	Valor	Unidade
Comprimento (L)	500	mm
Largura (b)	140	mm
Espessura (h)	1.3	mm
Densidade (ρ)	8	g/cm ³
Módulo de Elasticidade (E)	193.000	N/mm ²

Na figura 4.3 são apresentadas duas vistas do projeto desenvolvido do modo em que foi montado para análise, as vigas utilizadas no projeto têm um comprimento total de 500mm mas após o engaste ela passa a um comprimento total de 360mm, ajustes necessários para alcançar os valores de rigidezes propostos.

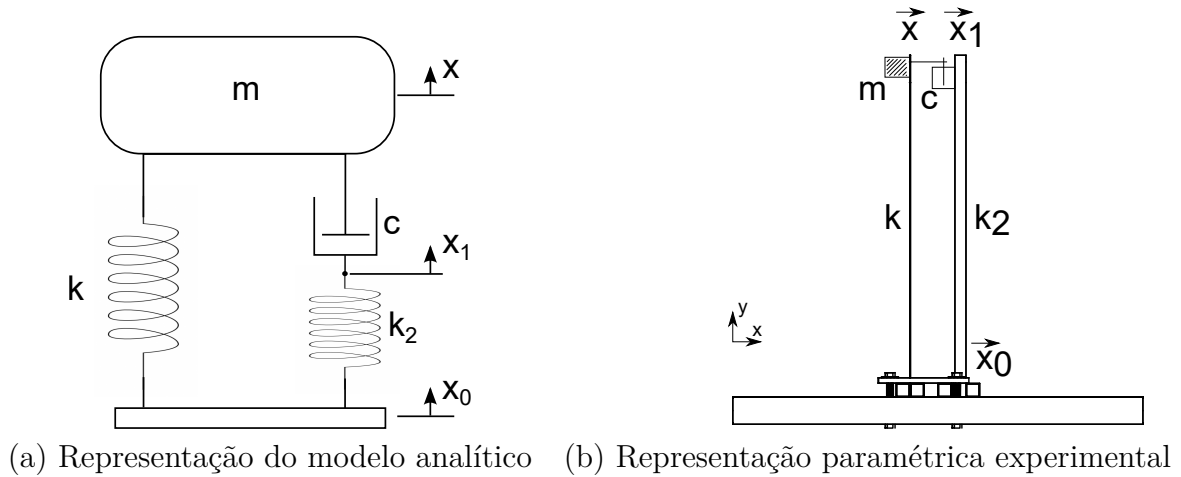


Figura 4.3: Modelo isolador de *Zener*

Realizando uma representação do modelo analítico apresentado na equação 3.32 tem-se a figura 4.3 (a) que é o modelo representativo da modelagem analítica onde são apresentados os parâmetros do sistema. A figura 4.3 (b) que também apresenta os parâ-

metros do sistema estudado, porém representa o aparato desenvolvido para as avaliações do modelo isolador de vibração de *Zener*.

4.2 PROPRIEDADES DO FLUIDO MAGNETO-REOLÓGICO

O material magneto-reológico consiste em um óleo que possui micro-partículas magnetizáveis em suspensão. Sob condições normais, o fluido é um líquido com a viscosidade semelhante a um óleo lubrificante de motores de automóveis, porém submetido a campo magnetizável muda suas propriedades alterando assim a viscosidade, suas propriedades são apresentadas na tabela 4.2.

Tabela 4.2: Propriedades dos fluidos magneto-reológicos do fabricante *LORD Corporation*.

Propriedade	MRF-122 EG	Unidade (SI)
Aparência	Líquido cinza escuro	-
Viscosidade Plástica, η , a 40° C	$0,042 \pm 0,020$	Pa.s
Faixa de Temperatura de Operação	$-40a + 130$	°C
Quantidade de sólido em peso	72	%
Densidade	$2,28a2,48$	g/cm ³
Ponto de Ignição	> 150	°C

Na figura 4.4 são apresentadas duas situações para o comportamento do fluido magneto-reológico, a primeira, sem exposição a um determinado campo magnético e a segunda com exposição ao campo magnético.

O fluido magneto-reológico foi escolhido após inúmeras tentativas de outros materiais para o uso como amortecedor viscoso. Óleos, graxas e outros foram analisados para o uso porém não atingiam um alto valor de viscosidade a ponto de acoplar o sistema e assim ser possível a visualização deste efeito.

O fluido magneto-reológico foi escolhido após inúmeras tentativas como o uso de diversas variedades de lubrificantes com diferentes valores de viscosidade, também foi analisado a composição de óleo acrescido de graxa para a representação do amortecedor

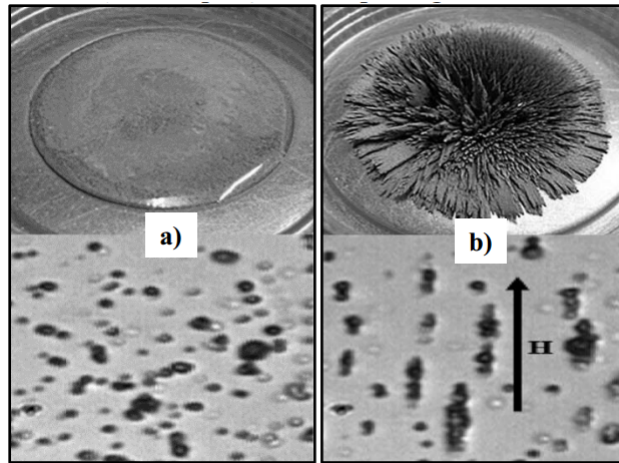


Figura 4.4: (a) Sem exposição ao campo magnético H , (b) Com exposição ao campo magnético H , Sidpara (2014), Costa and Branco (2009)

viscoso, foram analisados para o uso porém não atingiam um alto valor de viscosidade a ponto de acoplar o sistema e assim ser possível a visualização deste efeito.

4.3 SOFTWARE DE ANÁLISES EXPERIMENTAIS

Para a análise e aquisição dos resultados dos ensaios experimentais foi utilizado o software LabView 2013. Na Figura 4.5 é apresentado o programa desenvolvido para a realização das análises. É possível configurar todos seus parâmetros conforme necessário, parâmetros de saída como os acelerômetros que são utilizado em cada viga e base e sensor de força localizado entre o *shaker* e a estrutura analisada.

Neste programa são realizadas análises e vários resultados, no momento da separação de cada sinal, temos as respostas de aceleração de cada acelerômetro pois é necessário verificar se não há impactos indesejados nos mesmos, verificando-se também o sinal do sensor de força para garantir que não haja folga ou impactos indesejados. Verifica-se as FRFs das vigas onde são apresentados os modos de vibrar de cada delas, o gráfico de coerência para analisarmos o comportamento se esta adequado ao esperado, os gráficos de fase para analisarmos o ângulo de cada viga em instantes específicos.

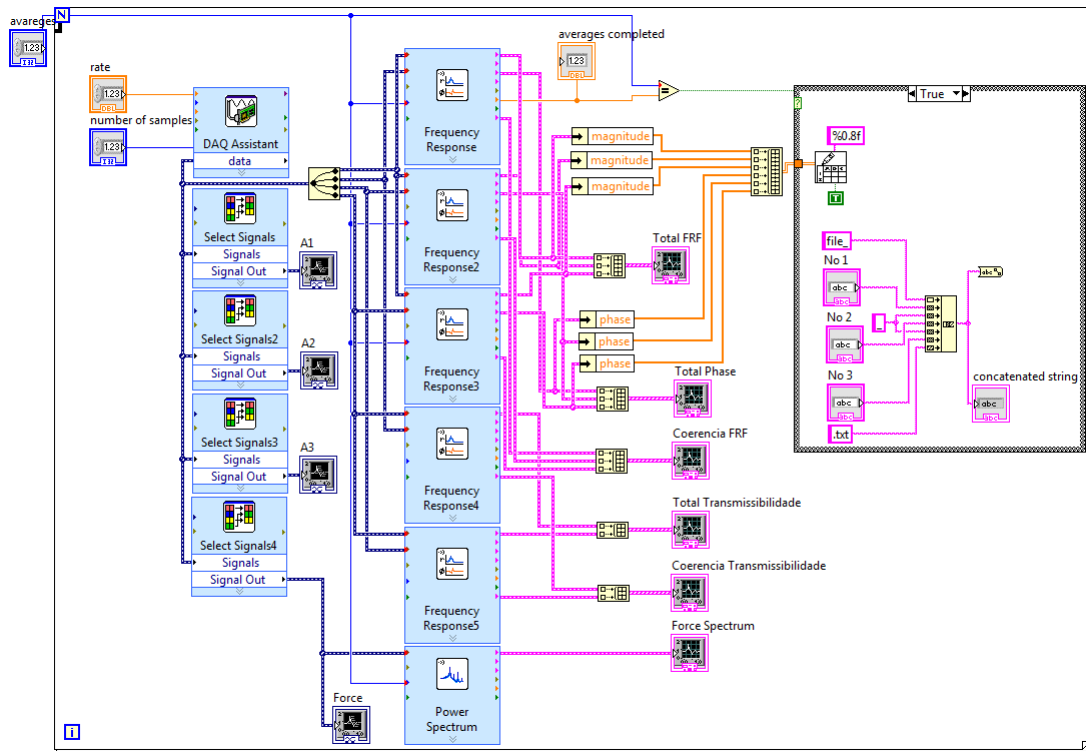


Figura 4.5: Programação com software LabView 2013

Outro item importante é a escolha do sinal de entrada aplicado ao *shaker*. Para este projeto foi selecionado o ruído do tipo marrom, vermelho ou *browniano* como pode ser encontrado na literatura. Sua densidade espectral é proporcional a $\frac{1}{f^2}$, ou seja mais energia nas baixas frequências. A potência espectral decresce a 20db por década, quando ouvida, tem uma qualidade "amortecida" ou "suave". O som é um ruído baixo, semelhante a uma cachoeira ou a fortes chuvas. O ruído castanho é por vezes referido como ruído vermelho porque é algo análogo à luz vermelha, que tem frequências baixas mais predominante.

O ruído marrom foi utilizado pelo fato de que o *shaker* tende a responder melhor em altas frequências e por isso foi necessário amplificar as frequências mais baixas.

4.4 PROCEDIMENTO EXPERIMENTAL

A rotina de como foram realizados os experimentos são apresentados nesta seção, na figura 4.6 é apresentado o aparato que representa o modelo de *Zener*, o mesmo é composto por duas vigas metálicas que representam as molas do modelo de *Zener*. As duas vigas são acopladas pelo reservatório contendo fluido magneto-reológico. O fluido magneto-reológico é um material a base de óleo lubrificante comum com partículas metálicas suspensas.

Na figura 4.7 é apresentado uma foto do aparato na bancada de testes e apresentado a disposição dos equipamentos e dos itens que foram utilizados neste projeto.

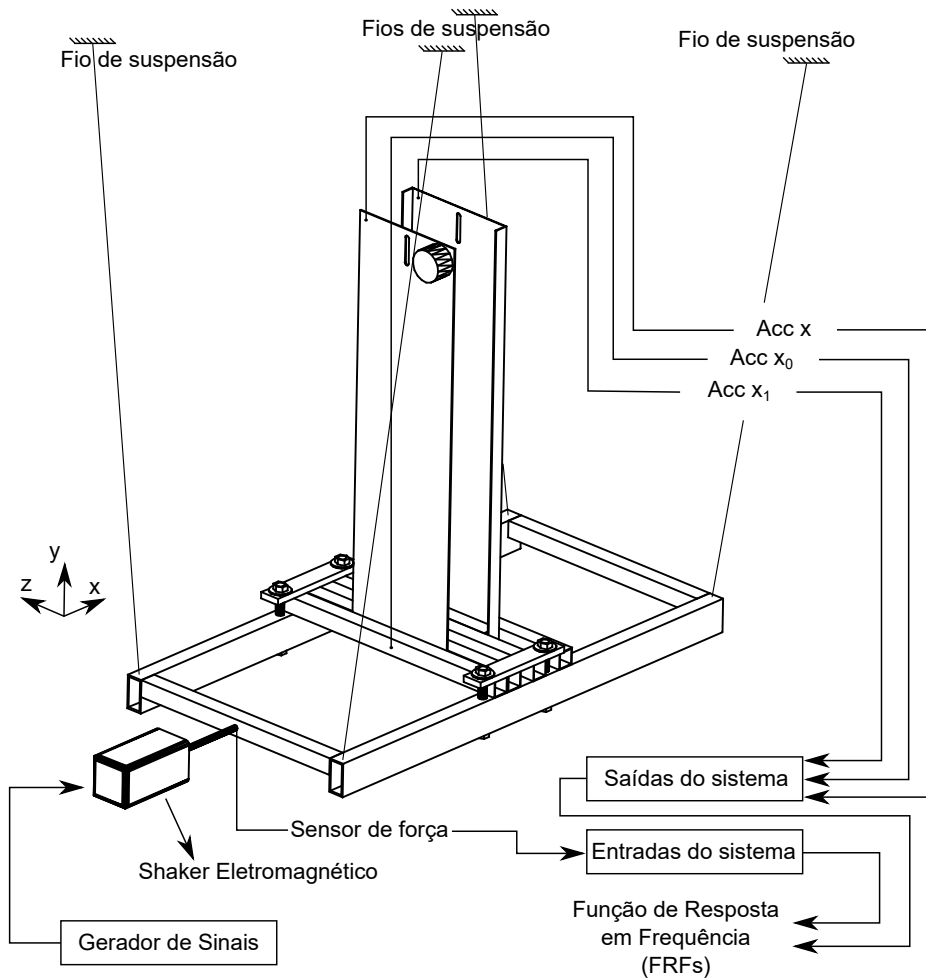


Figura 4.6: Aparato experimental para medição de Resposta em Frequência

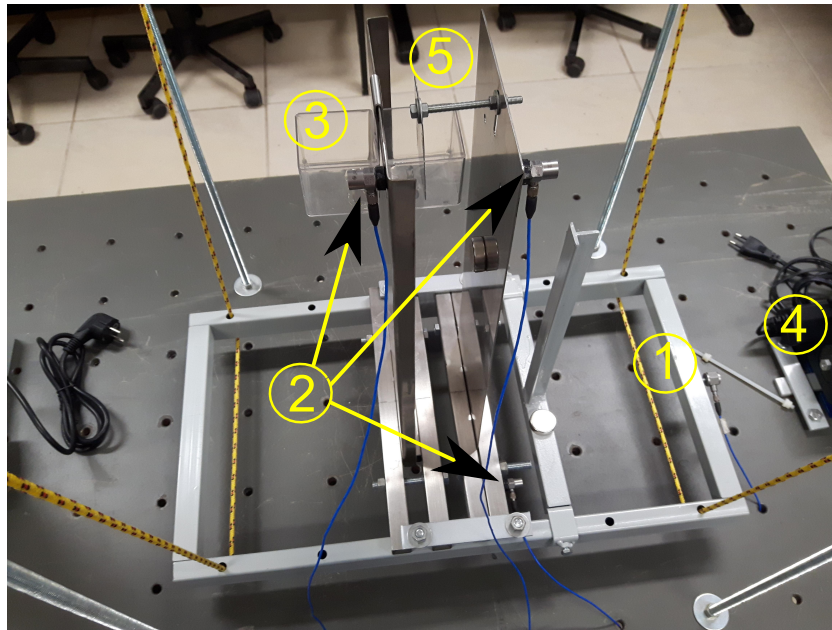


Figura 4.7: Experimento; (1) Sensor de força, (2) Acelerômetros, (3) Reservatórios, (4) Shacker, (5) Haste do amortecedor

As vigas primária e secundária são travadas as suas respectivas morsas, onde as mesmas são travadas em uma base de aço na cor cinza e sustentada por cordas presas a uma estrutura de barras em uma mesa inercial, esse suporte representa uma condição livre onde é possível restringir o momento e 2 graus de liberdade da estrutura, sendo somente promovido o grau que se refere ao sentido do longitudinal da estrutura. Através do item (4) o shaker, é introduzido um sinal de vibração onde é medido pelo sensor de força (1), na estrutura há três acelerômetros (2), onde um está localizado na base das vigas e outro dois acelerômetros nas extremidade superiores de cada viga. O número (3) são os reservatórios de óleo que junto ao item (5) que é a haste, e juntos compõem um amortecedor viscoso.

Para a realização das análises experimentais foram desenvolvidos diversos métodos e processos resultando ao uso do material magneto-reológico junto ao reservatório que representa o amortecedor do sistema.

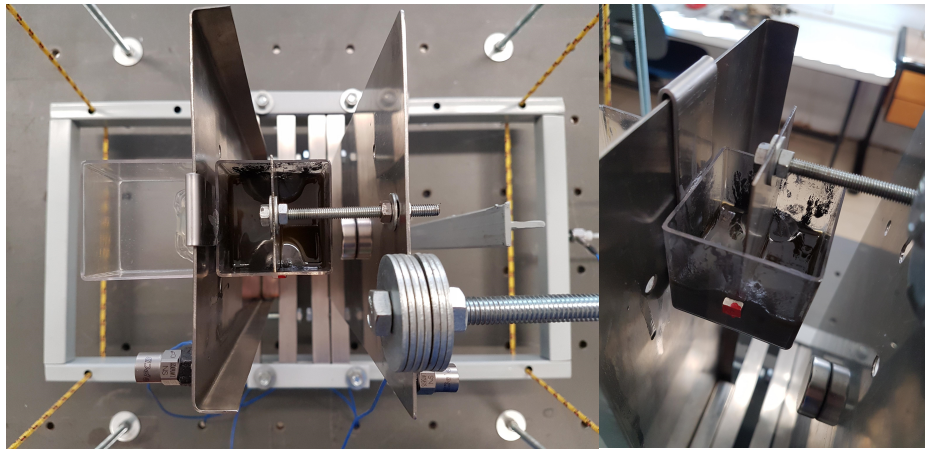
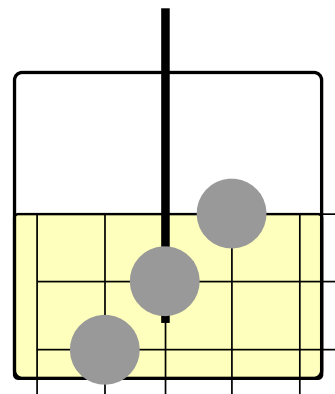


Figura 4.8: Vista superior do experimento e detalhes do campo magnético do fluido magneto-reológico

Com o uso do fluido magneto-reológico no reservatório, apesar de sua alta viscosidade através das partículas metálicas suspensas no óleo, o sistema se comporta simplesmente como um sistema amortecido, com isso, foi utilizado ímãs nas laterais do reservatório para a indução de um campo magnético no fluido e com isso atingir maiores valores de amortecimento entre as duas vigas até atingir um determinado acoplamento entre as mesmas. Com o desenvolvimento dos experimentos, encontra-se melhores resultados quando se posiciona os ímãs em uma linha média em relação a altura do reservatório.



(a) Campo Magnético



(b) Posição dos ímãs permanentes

Figura 4.9: Efeito do campo magnético sobre o fluido magneto-reológico

Na figura 4.9(a) é apresentado o comportamento do campo magnético de um ímã

retangular aplicado ao fluido magneto-reológico, na figura 4.9(b) são sobrepostos ao reservatório a área que representa o campo magnético, nota-se que o campo só é completo em posições médias em relação a altura do reservatório.

Os resultados experimentais após diversas variações e diferentes posições dos ímãs no reservatório com fluido magneto-reológico são apresentados na Figura 4.10.

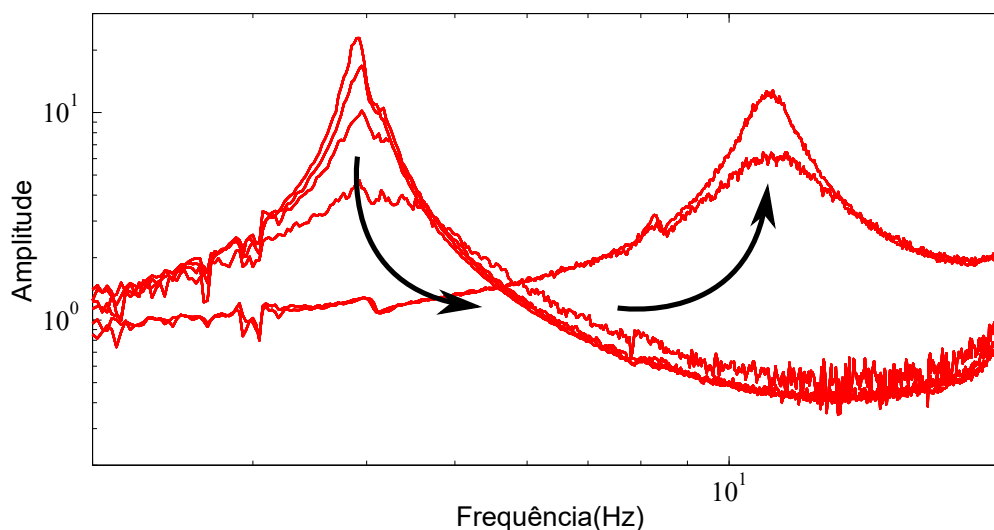


Figura 4.10: Transmissibilidade em função da frequência para diversas configurações de amortecimento onde a seta indica o aumento do amortecimento

Com a variação da posição dos ímãs é possível verificar a influência do campo magnético quanto a frequência e a amplitude de amortecimento do sistema, passando de um alto valor de amplitude quando o amortecimento é baixo, e com o aumento do amortecimento, isto é, com a proximidade dos ímãs na haste do amortecedor o aumento do amortecimento é claro. E com o envolvimento do campo magnético do reservatório junto a haste ocorre o aumento da frequência natural do sistema e ele passa a operar em uma nova faixa de frequência dada pelo acoplamento das duas vigas do sistema.

Na Figura 4.10 é possível visualizar o aumento de amortecimento representado pelas setas, indicam o sentido do aumento de amortecimento inserido na estrutura através do acoplamento magnético. A frequência natural da estrutura parte do lado esquerdo da figura com maior amplitude de transmissibilidade e com o acoplamento máximo,

a estrutura assume o novo valor de frequência natural sendo apresentado pela maior amplitude de transmissibilidade do lado direito da figura.

4.5 VALIDAÇÃO DO MODELO

Para a validação do modelo de *Zener* os resultados obtidos através do experimento foram analisados junto aos dados obtidos do modelo analítico, para alcançar as curvas de respostas do modelo é considerado o valor de $m = 0.615g$, o valor de rigidez da mola primária $k = 9.5N/m$ e o valor de $k_2 = 66N/m$. O valor de k_2 é aproximadamente 7 vezes maior que o valor de k como previsto na modelo analítico. O amortecimento foi variado com valor inicial de $c = 0.105Ns/m$ até o valor máximo de $c = 65Ns/m$, na Figura 4.11 são apresentados os resultados com a variação de amortecimento analítico e experimental.

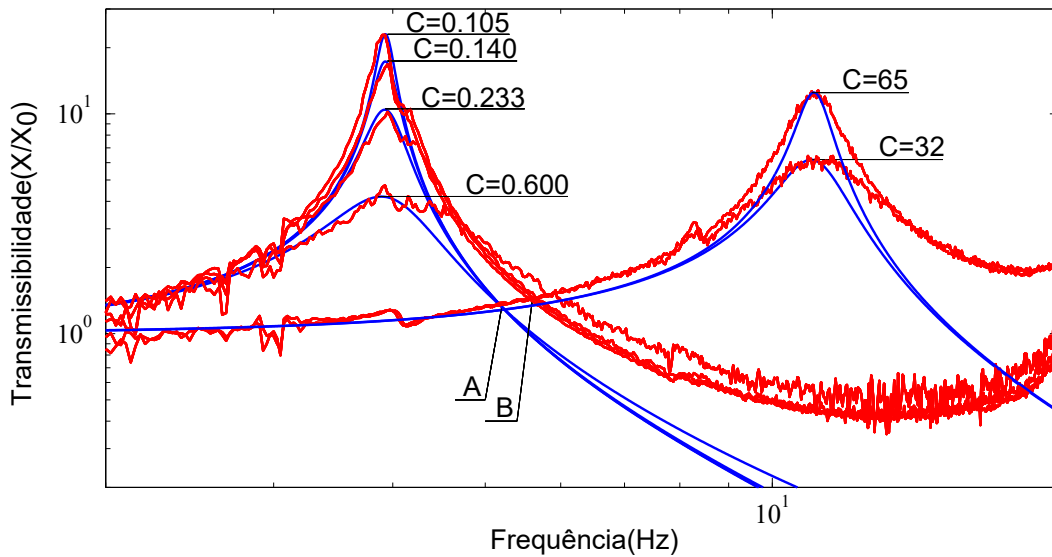


Figura 4.11: Transmissibilidade em função da frequência para diversas configurações de amortecimento, resultados experimentais (vermelho), analítico (azul)

As curvas de resposta na cor vermelha representam os resultados do modelo experimental com variação de amortecimento através da posição do campo magnético dos ímãs no reservatório com o fluido magneto-reológico, já as curvas de resposta na cor

azul, são os resultados do modelo implementado analítico.

O ponto A apresentado na Figura 4.11 é um ponto conhecido através da modelagem analítica como o ponto ideal de amortecimento dado pela Equação 3.48, para os resultados experimentais o ponto ideal aparece sendo o ponto B, que representa o melhor valor de amortecimento do sistema para o modelo experimental.

Os resultados experimentais e analíticos apresentam mesmo comportamento quando variado o valor de amortecimento considerando o sistema iniciando com um valor muito baixo de amortecimento o sistema vibra em uma frequência mais baixa sendo somente influenciada somente pela rigidez da viga primária, quando o valor de amortecimento começa a ser expressivo, inicia-se o decaimento do pico de amplitude de vibração chegando até ao ponto de amortecimento ótimo (ponto A para o modelo analítico e ponto B para o modelo experimental) e ao continuar o amortecimento o sistema passa a vibrar em uma nova frequência dada pelo acoplamento das duas rigidezes.

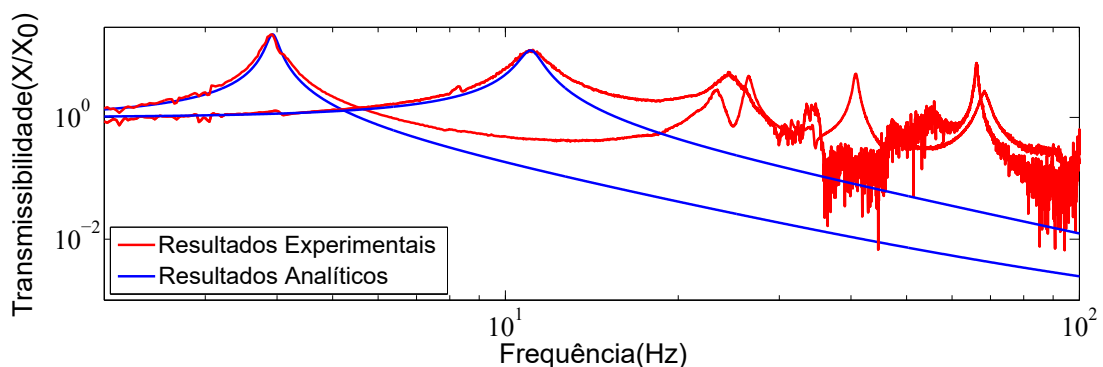


Figura 4.12: Transmissibilidade em função da frequência para diversas configurações de amortecimento na alta frequência

Na Figura 4.12 são apresentados os resultados considerando um maior valor para a frequência. O decaimento dos resultados para o modelo experimental tem um menor valor pois trata-se de um modelo mais complexo com infinitos modos de vibrar, é possível visualiza-los quando apresentado os resultados na alta frequência. Os resultados analíticos tendem a zero assim que passam pela sua ressonância pois trata-se de um modelo discreto de apenas um grau de liberdade.

CAPÍTULO 5

TRANSMISSIBILIDADE DO ISOLADOR DE *Zener* COM RIGIDEZ NÃO LINEAR

Conforme observado no capítulo 3, o uso da configuração *Zener* de molas e amortecedores fornece um comportamento de isolamento interessante para alta frequência. Este desempenho pode ser melhorado se forem utilizadas molas de baixa rigidez. Por este motivo, propõe-se a utilização de uma rigidez não linear de tipo cúbico. A mola principal k é alterada para uma mola equivalente $k^* = k + k_0(x - x_0)^2$ e a força da mola é definida por $f_{k^*} = k^*(x - x_0)$. A equação de movimento é obtida de acordo com o procedimento apresentado no capítulo 03, que fornece uma EDO não linear de terceira ordem, mas desta vez em termos de deslocamento relativo $z = x - x_0$ e $z_1 = \dot{x}_1 - \dot{x}_0$ para dar

$$\frac{2\xi_0}{N\omega_0} \ddot{z} + \ddot{z} + 2\xi_0\omega_0 \frac{(N+1)}{N} \dot{z} + \omega_0^2 z + \gamma\omega_0^2 z^3 + \frac{6\xi_0}{N} \gamma\omega_0 z^2 \dot{z} = -\ddot{x}_0 - \frac{2\xi_0}{N\omega_0} \ddot{x}_0 \quad (5.1)$$

Apresentando os parâmetros não-dimensionais

$$\tau = \omega_0 t, \quad \omega_0 z' = \dot{z}, \quad \gamma = k_0/k$$

E assumindo a excitação harmônica a partir da base da forma $x_0 = X_0 \cos(\omega t)$, que quando combinada com os termos trigonométricos do lado direito da equação 5.1, dá

$$z''' + \alpha z'' + (N + 1 + 3\gamma z^2)z' + \alpha(1 + \gamma z^2)z = A \cos(\Omega\tau + \phi) \quad (5.2)$$

onde, o primeiro termo denota a derivada em relação à variável de tempo não-dimensional τ e a amplitude de deslocamento da base é dada por

$$A = X_0 \Omega (\alpha^2 + \Omega^2)^{1/2}$$

E o ângulo de fase

$$\phi = \text{atan}(\Omega/\alpha)$$

A Figura 5.1 representa a EDO de terceira ordem com parâmetros não lineares. A inclinação das curvas são dadas de acordo com o γ onde há variação entre valores positivos e negativos.

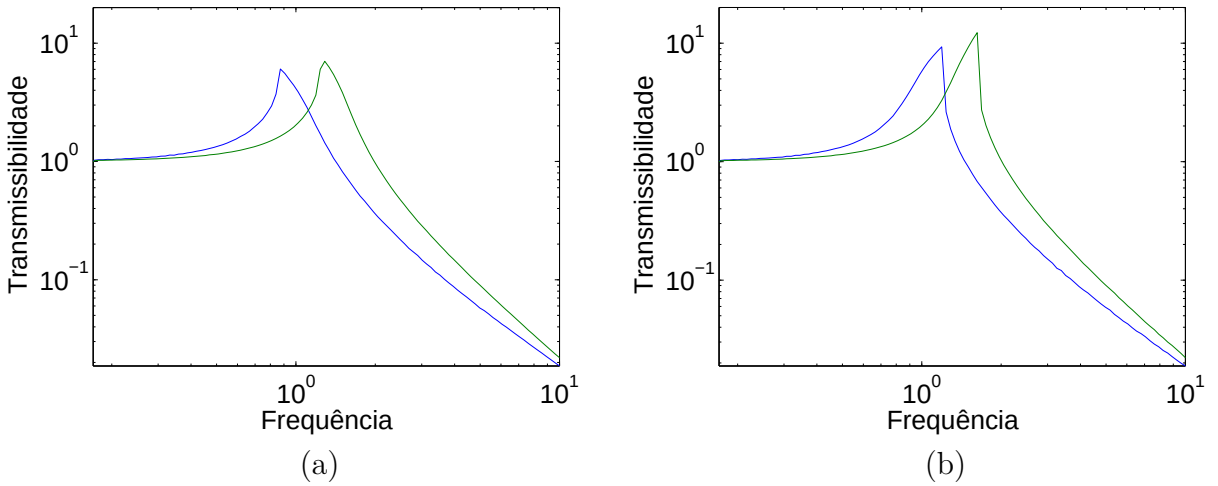


Figura 5.1: Rigidez cúbica para Caso(a) $\gamma = -0,1$ e Caso(b) $\gamma = 0,1$ para amortecimento variando de $\xi_0 = 0,1$ para $\xi_0 = 4,0$

5.1 SOLUÇÃO APROXIMADA USANDO O MÉTODO DO BALANÇO HARMÔNICO

Para obter uma solução aproximada para ODE não linear é usado o método do balanço harmônico. A solução da equação 5.2 e suas respectivas derivadas são assumidas como sendo a forma

$$\begin{aligned} z &= Z \cos(\Omega\tau + \phi + \theta) = Z \cos(\Delta), & \Delta &= \Omega\tau + \phi + \theta \\ \dot{z} &= -Z\Omega \sin(\Omega\tau + \phi + \theta) = -Z\Omega \sin(\Delta) \\ \ddot{z} &= -Z\Omega^2 \cos(\Omega\tau + \phi + \theta) = -Z\Omega^2 \cos(\Delta) \\ \dddot{z} &= Z\Omega^3 \sin(\Omega\tau + \phi + \theta) = Z\Omega^3 \sin(\Delta) \end{aligned}$$

Derivando e substituindo as soluções na equação 5.2

$$\begin{aligned} Z\Omega^3 \sin(\Delta) - \alpha Z\Omega^2 \cos(\Delta) - (N + 1 + 3\gamma Z^2)Z\Omega \sin(\Delta) + \alpha(1 + \gamma Z^2)Z \cos(\Delta) \\ = A \cos(\Omega\tau + \phi) \end{aligned} \quad (5.3)$$

Agrupando a equação em termos de seno e cosseno

$$\begin{aligned} \sin(\Delta) [Z\Omega^3 - Z\Omega(N + 1 + 3\gamma Z^2)] + \cos(\Delta) [\alpha(1 + \gamma Z^2)Z - \alpha\Omega^2 Z] \\ = A \cos(\Omega\tau + \phi) \end{aligned} \quad (5.4)$$

Dessa forma, devem ser válida a seguintes igualdades

$$\begin{cases} [Z\Omega^3 - Z\Omega(N + 1 + 3\gamma Z^2)] = 0 \\ [\alpha(1 + \gamma Z^2)Z - \alpha\Omega^2 Z] = A \end{cases} \quad (5.5)$$

Aplicando esta solução na eq. 5.2 e negligenciando termos com harmônicos de ordem superior ($\cos(3\Delta)$, $\sin(3\Delta)$) e considerando ($\cos^3(\Delta) = \frac{3}{4}\cos(\Delta)$), a equação de movi-

mento é reescrita no domínio da frequência como.

Na primeira equação do sistema 5.5, tem-se

$$\begin{aligned}
-Z \cos(\Delta) \Omega^3 + Z \cos(\Delta) \Omega(N+1) + 3Z^3 \cos^3(\Delta) \Omega \gamma &= 0 \\
-Z \cos(\Delta) \Omega^3 + Z \cos(\Delta) \Omega(N+1) + 3Z^3 \frac{3}{4} \cos(\Delta) \Omega \gamma &= 0 \\
\cos(\Delta) \Omega Z \left[-\Omega^2 + (N+1) + \frac{9}{4} Z^2 \gamma \right] &= 0
\end{aligned} \tag{5.6}$$

Na segunda equação do sistema 5.5, tem-se

$$\begin{aligned}
\alpha(Z \cos(\Delta)) + \alpha \gamma (Z \cos(\Delta))^3 - \alpha \Omega^2 (Z \cos(\Delta)) &= A \\
\alpha Z \cos(\Delta) + \alpha \gamma Z^3 \cos^3(\Delta) - \alpha \Omega^2 Z \cos(\Delta) &= A \\
\alpha Z \cos(\Delta) + \alpha \gamma Z^3 \frac{3}{4} \cos(\Delta) - \alpha \Omega^2 Z \cos(\Delta) &= A \\
\cos(\Delta) \alpha Z \left[1 - \Omega^2 + \gamma Z^2 \frac{3}{4} \right] &= A
\end{aligned} \tag{5.7}$$

Sabendo-se que é válida a igualdade trigonométrica por soma de ângulos tem-se

$$\cos(\Omega\tau + \phi + \theta - \theta) = \cos(\Omega\tau + \phi + \theta) \cos(\theta) + \sin(\Omega\tau + \phi + \theta) \sin(\theta) \tag{5.8}$$

Somando a equação 5.6 e 5.7, tem-se

$$\alpha Z \left(1 - \Omega^2 + \frac{3}{4} \gamma Z^2 \right) \cos(\Delta) - \Omega Z \left(N + 1 - \Omega^2 + \frac{9}{4} \gamma Z^2 \right) \sin(\Delta) = A \cos(\Delta - \theta) \tag{5.9}$$

Alternando o argumento de cosseno do lado direito para combinar os termos no lado

esquerdo, dá

$$\alpha Z \left(1 - \Omega^2 + \frac{3}{4}\gamma Z^2 \right) \cos(\Delta) - \Omega Z \left(N + 1 - \Omega^2 + \frac{9}{4}\gamma Z^2 \right) \sin(\Delta) = A[\cos(\Delta) \cos(\theta) + \sin(\Delta) \sin(\theta)] \quad (5.10)$$

Equacionando os termos cosseno e seno em ambos os lados da equação leva a:

$$\alpha Z \left(1 - \Omega^2 + \frac{3}{4}\gamma Z^2 \right) = A \cos(\theta) \quad (5.11)$$

$$-\Omega Z \left(N + 1 - \Omega^2 + \frac{9}{4}\gamma Z^2 \right) = A \sin(\theta) \quad (5.12)$$

Para o caso de vibração livre ($A = 0$), essas equações fornecem uma relação entre a frequência oscilatória em função da amplitude de deslocamento, conhecida como curvas de backbone. Existem situações que dependem da quantidade de amortecimento, como foi visto para o caso linear. Essas frequências são mostradas nos resultados da Figura 5.2 considerando diferentes dois valores de γ . As curvas azuis com ressonância começando em $\Omega = 1$ são calculadas a partir da equação 5.11 e as curvas vermelhas começando em $\Omega = \sqrt{N+1}$ são calculadas a partir da equação 5.12. Para os casos de γ negativo, os valores máximos de amplitude são definidos onde a curva backbone ($\Omega = 0$). Para a primeira frequência de ressonância é definida por $Z = \sqrt{\frac{4}{3\gamma}}$ e para a segunda frequência de ressonância é definida por $Z = \sqrt{\frac{4(N+1)}{3\gamma}}$.

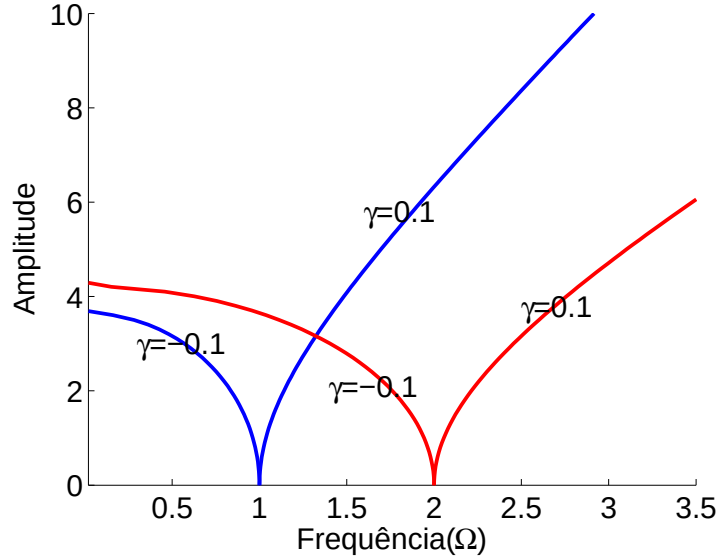


Figura 5.2: Curvas de backbone (frequência oscilatória em função da amplitude de deslocamento). As linhas azuis são a primeira frequência de ressonância ($\Omega = 1$) e a linha vermelha é a segunda frequência de ressonância ($\Omega = \sqrt{1 + N}$), com $N = 3$.

Para o caso de excitação de base, a transmissibilidade relativa Z pode ser obtida combinando equações 5.11 e 5.12 para dar uma função de resposta de frequência dependente de amplitude

$$\left(\frac{Z}{X_0}\right)^2 = \frac{\Omega^4(\alpha^2 + \Omega^2)}{\alpha^2(1 - \Omega^2 + \frac{3}{4}\gamma Z^2)^2 + \Omega^2(N + 1 - \Omega^2 + \frac{9}{4}\gamma Z^2)^2} \quad (5.13)$$

A fim de escrever a transmissibilidade em termos de equação polinomial em termos de Z , eleva-se as equações 5.11 e 5.12 ao quadrado e sabendo que $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$, tem-se que:

$$P_1 Z^6 + P_2 Z^4 + P_3 Z^2 - P_4 = 0 \quad (5.14)$$

Onde os coeficientes são escritos na forma em que, P_1 é o coeficiente relacionado ao termo Z de sexta ordem, P_2 é o coeficiente relacionado ao termo Z de quarta ordem, P_3 é o coeficiente relacionado ao termo Z de segunda ordem e P_4 é o termo independente.

Ou seja,

$$\begin{aligned}
P_1 &= \frac{9}{16}\gamma^2 (9\Omega^2 + \alpha^2) \\
P_2 &= \frac{3}{2}\gamma (-3\Omega^4 + 3N\Omega^2 - \alpha^2\Omega^2 + 3\Omega^2 + \alpha^2) \\
P_3 &= \Omega^6 - 2N\Omega^4 + \alpha^2\Omega^4 - 2\Omega^4 + N^2\Omega^2 + 2N\Omega^2 - 2\alpha^2\Omega^2 + \Omega^2 + \alpha^2 \\
P_4 &= A^2
\end{aligned} \tag{5.15}$$

De forma análoga, pode-se reescrever a equação polinomial em termos de Ω , isto é

$$P_5\Omega^6 + P_6\Omega^4 + P_7\Omega^2 + P_8 = 0 \tag{5.16}$$

Em termos de Ω os coeficientes assumem os seguintes valores:

$$\begin{aligned}
P_5 &= Z^2 \\
P_6 &= Z^2 \left(-\frac{9}{2}\gamma Z^2 - 2N + \alpha^2 - 2 \right) - X_0^2 \\
P_7 &= \frac{81}{16}\gamma^2 Z^6 + \gamma Z^4 \left(\frac{9}{2}N - \frac{3}{2}\alpha^2 + \frac{9}{2} \right) + Z^2(N^2 + 2N - 2\alpha^2 + 1) - \alpha^2 X_0^2 \\
P_8 &= \alpha^2 Z^2 \left(\frac{9}{16}\gamma^2 Z^4 + \frac{3}{2}\gamma Z^2 + 1 \right)
\end{aligned} \tag{5.17}$$

As equações 5.14 e 5.16 são uma relação de forma fechada entre a amplitude Z e a frequência de excitação Ω . Ambas as equações quando resolvidas permitem a estimativa da resposta de frequência em função dos parâmetros do sistema N , ξ_0 , γ e do deslocamento de entrada X_0 . Como o sistema não é linear, o comportamento da resposta de frequência também muda com a amplitude. Os resultados na Figura 5.3 ilustram o comportamento de valores positivos e negativos γ para dois valores diferentes da razão de amortecimento ξ_0 . Os resultados são comparados com o caso linear (linha preta fina). A faixa de frequência em torno da ressonância é conforme o esperado, com o pico de flexão para a esquerda para o caso de amolecimento ($\gamma < 0$) e dobrando para a direita para o caso de endurecimento ($\gamma > 0$).

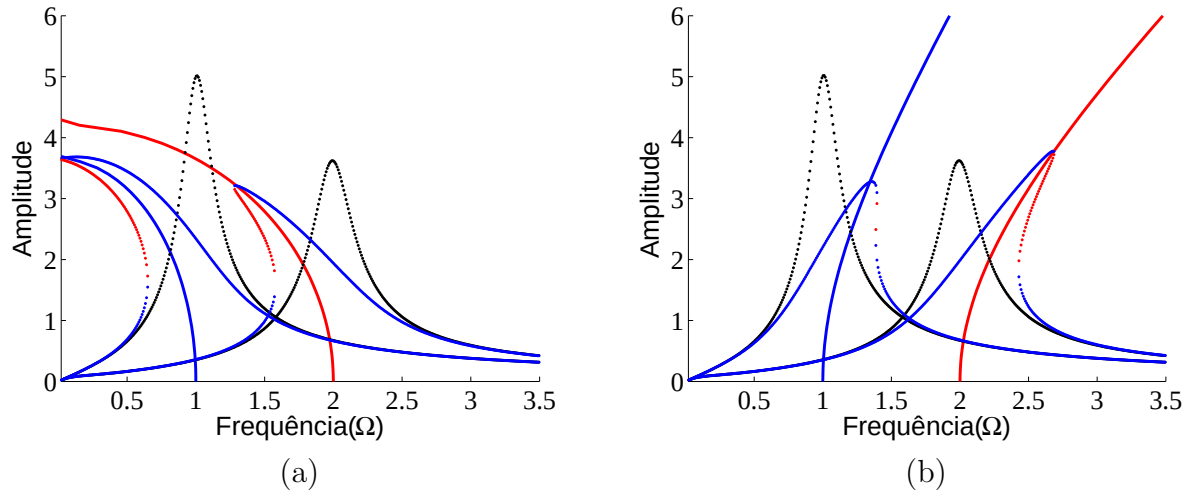


Figura 5.3: Comparação de Transmissibilidade Relativa por $N = 3$ e taxa de amortecimento $\xi_0 = 0, 1$ e $\xi_0 = 10$ (a) com $\gamma = -0, 1$ (curvas inclinadas para a esquerda) (b) com $\gamma = 0, 1$ (curvas inclinadas para a direita)

As linhas que partem dos valores 1 e 2 do eixo x são as apresentadas como *Backbone* anteriormente, e são usadas apenas como referência para as curvas apresentadas pelo Método do Balanço Harmônico. As curvas inclinadas para a direita e esquerda são respostas através do Método do Balanço Harmônico com variação de γ entre $-0, 1$ e $0, 1$ apresentadas na cor azul e vermelha, a parcela na cor vermelha representa que nessa região o sistema é instável. As curvas apresentadas na cor preta, são resultados gerados a partir da anulação do termo não linear, são resultados lineares apresentados somente como comparação e demonstração do efeito da não linearidade no sistema.

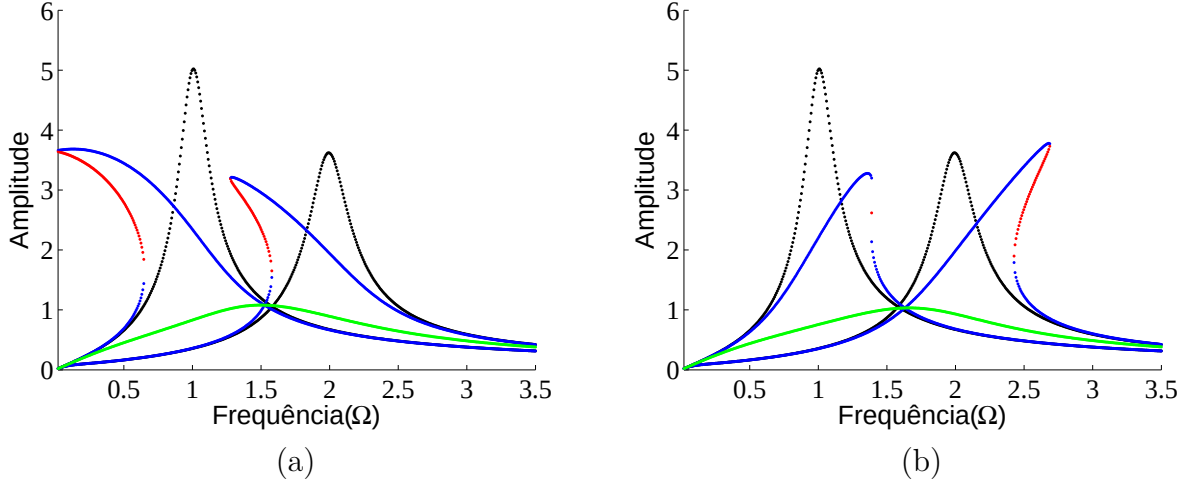


Figura 5.4: Curva de resposta ótima com taxa de amortecimento $\xi_0 = 0,7$ (a) com $\gamma = -0,1$ (curvas inclinadas para a esquerda) (b) com $\gamma = 0,1$ (curvas inclinadas para a direita)

As curvas de respostas apresentadas na Figura 5.4 na cor verde, são as curvas que passam pelo ponto ótimo já apresentado anteriormente, para ambos os casos com $\gamma = -0,1$ e $\gamma = 0,1$ e taxa de amortecimento igual a $\xi_0 = 0,7$ as curvas ótimas passam pelos pontos ótimos, tanto lineares quanto não lineares. Porém observando em relação a Figura 5.4(a) é apresentado o caso *softening* ou amolecimento, neste caso nota-se que a frequência natural do sistema teve uma redução quanto ao valor da frequência natural do sistema em relação caso de transmissibilidade do modelo de *Zener* linear, em contra ponto, na Figura 5.4(b) é apresentado o caso *hardening* ou enrijecimento nota-se que a frequência natural do sistema teve um aumento quanto ao valor valor de frequência natural do sistema em relação ao caso linear.

O ângulo de fase (θ) entre a excitação de base e a transmissibilidade relativa é obtido pela proporção da eq. 5.12 e 5.11, que resulta em:

$$\theta = atan \left[-\frac{\Omega}{\alpha} \left(\frac{N + 3/2\gamma Z^2}{1 - \Omega^2 + 3/4\gamma Z^2} + 1 \right) \right] \quad (5.18)$$

5.1.1 TRANSMISSIBILIDADE ABSOLUTA

Geralmente, é mais informativo analisar os resultados em termos de absoluta em vez da transmissibilidade relativa. Observe que o deslocamento absoluto pode ser escrito como $x = z + x_0$, e isso

$$x = X \cos(\Omega\tau + \beta), \quad z = Z \cos(\Omega\tau + \theta + \phi) \quad e \quad x_0 = X_0 \cos(\Omega\tau) \quad (5.19)$$

A partir de $x = z + x_0$, eleva-se ambos os lados ao quadrado, sendo assim $x^2 = (z + x_0)^2$, expandindo o lado direito da igualdade, tem-se

$$X^2 = Z^2 + X_0^2 + 2ZX_0 \cos(\theta + \phi) \quad (5.20)$$

O deslocamento absoluto pode ser calculado como

$$X = \sqrt{Z^2 + X_0^2 + 2ZX_0 \cos(\theta + \phi)}, \quad (5.21)$$

E o ângulo de fase β pode ser obtido como

$$\beta = \text{atan}\left(\frac{\sin(\theta + \phi)}{\cos(\theta + \phi) + \frac{X_0}{Z}}\right), \quad (5.22)$$

Onde, $\phi = \text{atan}(\Omega/\alpha)$ e o ângulo θ pode ser calculado usando equações 5.11 e 5.12.

Na figura 5.5 mostra a transmissibilidade (absoluta e relativa) e seus respectivos ângulos de fase como uma função da frequência não dimensional.

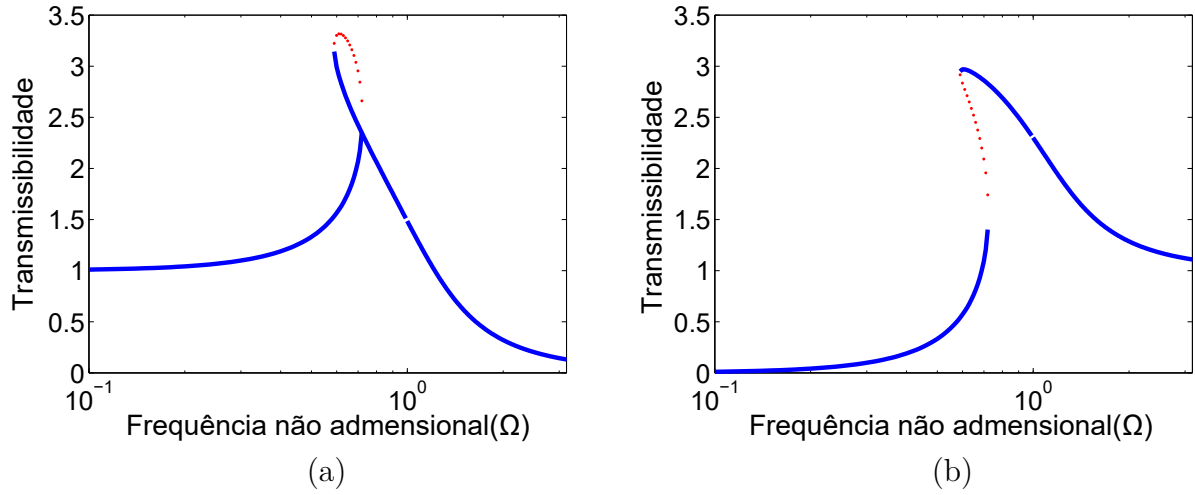


Figura 5.5: Exemplos de magnitude de transmissibilidade. (a) Transmissibilidade absoluta (X/X_0), (b) Transmissibilidade relativa (Z/X_0). Estes resultados foram obtidos usando $\gamma = -0.1$, $\xi_0 = 0.1$ e $X_0 = 1$.

Nos dois resultados apresentados nas figuras 5.5(a) e (b), a linha tracejada vermelha corresponde à trajetória instável da resposta de frequência. O loop em transmissibilidade absoluta é devido à adição ou subtração do termo $\cos(\theta + \phi)$ descrito na eq. 5.21 como o argumento $(\theta + \phi)$ cruza $-\pi/2$. Nesta tese, concentrou-se a análise para os casos em que $\gamma < 0$ porque valores positivos de γ tendem a aumentar a rigidez do sistema com o aumento da amplitude. Isso causará uma degradação da resposta de alta frequência do isolador quando comparado com valores de $\gamma < 0$.

Por exemplo, os resultados mostrados na figura 5.6 foram calculados para $\xi_0 = 0.1$ e $\gamma = -0.1$ e comparados com o modelo de *Zener* linear para diferentes valores de amplitude de deslocamento da base. Pode-se observar que a ressonância e a transmissibilidade de alta frequência são reduzidas à medida que X_0 aumenta. Uma desvantagem é a parte da resposta em frequência sujeita a fenômenos de salto. Da mesma forma, os resultados mostrados na figura 5.7 foram plotados para $\xi_0 = 1.0$ para vários valores de deslocamento da base.

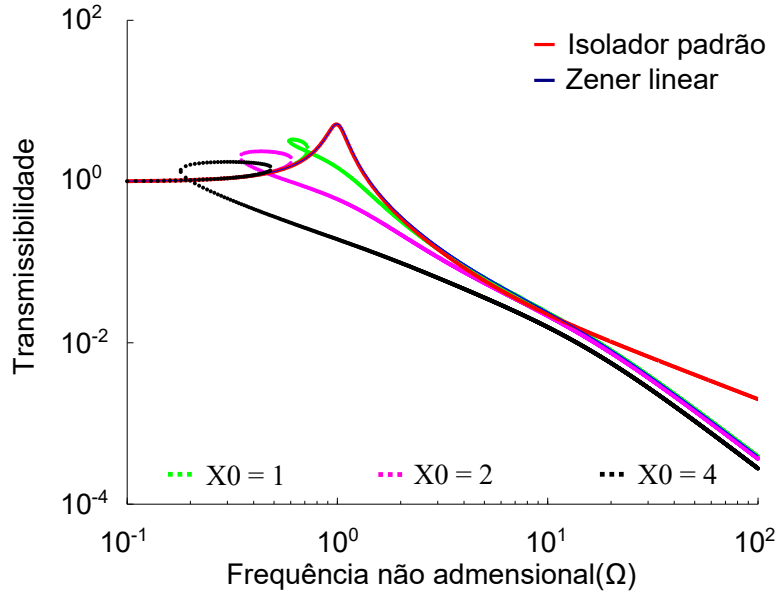


Figura 5.6: Comparação da transmissibilidade para diferentes valores de deslocamento da base usando $\xi = 0.1$, $\gamma = -0.1$, $N = 3$.

Como pode ser visto, as respostas de transmissibilidade não exibem saltos, no entanto, foram necessários grandes deslocamentos da base para induzir a resposta não linear do sistema. O desempenho de alta frequência é aprimorado sem degradação em ressonância e em frequências mais baixas. Resultados semelhantes mostrados nas figuras 5.6 e 5.7 podem ser obtidos com amplitude de base fixa ($X_0 = 1$), mas aumentando a taxa de rigidez γ . Os resultados mostrados na figura 5.7 são de particular interesse, pois mostram que a adição de rigidez não linear ao modelo *Zener* com alto amortecimento pode fornecer benefícios para o isolamento da vibração. No entanto, para obter esse benefício, é necessário ter valores altos de deslocamento da base ou valores altos da taxa de rigidez.

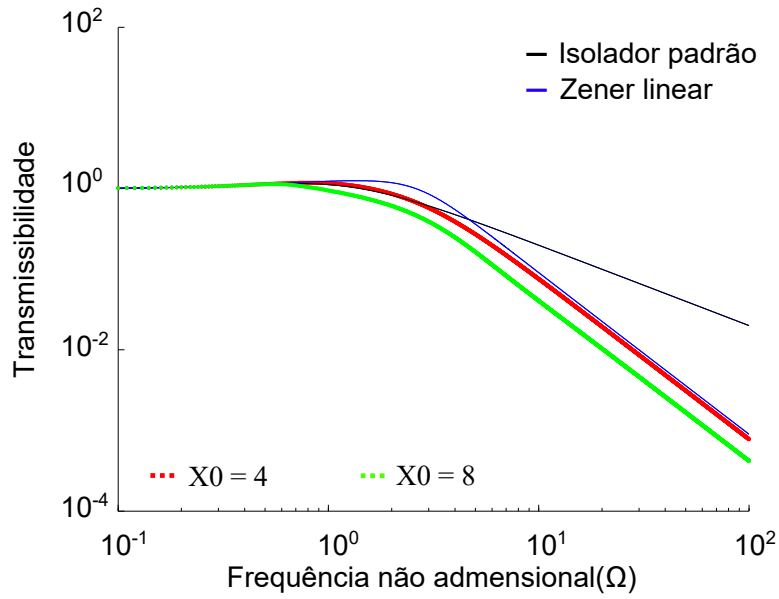


Figura 5.7: Comparação da transmissibilidade para diferentes valores de deslocamento da base usando $\xi = 1.0$, $\gamma = -0.1$, $N = 8$.

Um aspecto importante em sistemas não lineares com rigidez cúbica é a resposta transitória do sistema. Em muitos casos, o sistema pode exibir biestabilidade que depende das condições iniciais. Na prática, as condições iniciais são efetivamente impossíveis de controlar na maioria das aplicações reais e, portanto, todos os casos devem ser considerados igualmente prováveis. No entanto, mesmo soluções no ramo de maior amplitude tem amplitude reduzida em comparação com o caso linear.

CAPÍTULO 6

CONCLUSÕES

Esta tese descreve o comportamento dinâmico do modelo *Zener* sujeito a excitação na base com a inclusão de elemento de rigidez não linear com intuito de melhorar a transmissibilidade do sistema em altas frequências. O sistema foi inicialmente descrito com dois graus de liberdade e duas equações de movimento. Essas equações foram então combinadas para representar o sistema por uma equação diferencial ordinária de terceira ordem. Essa representação permite escrever as equações de movimento, incluindo um elemento de rigidez não linear, de modo que a resposta de frequência para o sistema possa ser obtida usando o método de equilíbrio harmônico.

A comparação apresentada nesta tese entre o modelo de isolamento padrão e o modelo de *Zener* tem-se que a frequência natural é a mesma para ambos os isoladores quando o valor de amortecimento é ínfimo. Com o aumento do amortecimento o isolador padrão perde eficiência quanto a isolamento de vibração. No caso do isolador de *Zener* linear, inicia-se semelhante ao isolador padrão, e com o aumento de amortecimento o sistema tende a outro valor de frequência natural. Com isso o isolador apresenta maior eficiência quanto a isolamento de vibração, pois mesmo com as máximas variações de amortecimento o sistema tende a isolamento da vibração de forma mais eficiente.

No experimento, fica clara a relação à parte analítica quanto aos resultados experimentais, a frequência da estrutura parte de um valor de frequência inicial e quando

aumenta o valor de amortecimento, o sistema tende a outro valor de frequência natural. Isso se deve ao acoplamento das vigas através do fluido magneto-reológico quando submetido a um campo magnético. O modelo proposto discreto de um grau de liberdade representa os mesmos comportamentos do experimento, as frequências naturais são análogas ao do experimento quando submetido a diferentes valores de amortecimento.

A principal conclusão do trabalho é que, ao incluir um elemento de rigidez não linear no sistema *Zener*, é possível melhorar a transmissibilidade de alta frequência sem degradar o desempenho em todo o restante da faixa de frequência. Este é um benefício potencial significativo para uma variedade de aplicações de isolamento de vibração. Além disso, foi mostrado como selecionar o coeficiente de amortecimento necessário para o sistema isolador aprimorado. Foi demonstrado que o aumento dos valores do coeficiente de amortecimento podem ser utilizado para evitar os fenômenos de salto devido à rigidez de amaciamento não linear. Contudo, é necessária cautela ao projetar esse recurso, pois um grande amortecimento fará o sistema oscilar em outra ressonância frequência dada por $\Omega = \sqrt{N + 1}$.

Por fim, conclui-se que é possível melhorar a transmissibilidade de alta frequência sem aumentar a amplitude em torno das frequências de ressonância usando a disposição das molas e amortecedores do modelo *Zener* e incluindo um elemento de rigidez não linear.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

MJ Brennan, A Carrella, TP Waters, and Vicente Lopes. On the dynamic behaviour of a mass supported by a parallel combination of a spring and an elastically connected damper. *Journal of Sound and Vibration*, 309(3):823–837, 2008.

Thomas Brown, Shukai Du, Hasan Eruslu, and Francisco-Javier Sayas. Analysis of models for viscoelastic wave propagation. *arXiv preprint arXiv:1802.00825*, 2018.

A Carrella, MJ Brennan, TP Waters, and K Shin. On the design of a high-static–low-dynamic stiffness isolator using linear mechanical springs and magnets. *Journal of Sound and Vibration*, 315(3):712–720, 2008.

A Carrella, MJ Brennan, TP Waters, and V Lopes. Force and displacement transmissibility of a nonlinear isolator with high-static-low-dynamic-stiffness. *International Journal of Mechanical Sciences*, 55(1):22–29, 2012.

Eduarda Costa and PJ Costa Branco. Continuum electromechanics of a magnetorheological damper including the friction force effects between the mr fluid and device walls: analytical modelling and experimental validation. *Sensors and Actuators A: Physical*, 155(1):82–88, 2009.

Lucas de Haro Silva and Paulo JP Gonçalves. Modelo de zener: Prelúdio das análises de transmissibilidade com mola não linear. *Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional (ERMAC), SBMAC*, 2016a.

- Lucas de Haro Silva and Paulo JP Gonçalves. Análises de transmissibilidade do modelo de zener com mola duffing. *CNMAC - Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional, SBMAC*, 2016b.
- Lucas de Haro Silva and Paulo JP Gonçalves. Estrutura experimental para análise do modelo de zener com elementos não lineares. *Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional (ERMAC), SBMAC*, 2017a.
- Lucas de Haro Silva and Paulo JP Gonçalves. The development of a experimental apparatus for analysis of the zener model with nonlinear elements. *DINAME 2017 - Proceedings of the XVII International Symposium on Dynamic Problems of Mechanics, ABCM*, 2017b.
- Lucas de Haro Silva, Paulo J Paupitz Gonçalves, and David Wagg. On the dynamic behavior of the zener model with nonlinear stiffness for harmonic vibration isolation. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 112:343–358, 2018.
- Paulo JP Gonçalves, Lucas de Haro Silva, and Marcos Silveira. The dynamic behavior analysis of spring-mass-damper systems jumping on ground: Free and forced motion. *Mathematics in Engineering, Science & Aerospace (MESA)*, 6(3), 2015.
- PF Guo, ZQ Lang, and ZK Peng. Analysis and design of the force and displacement transmissibility of nonlinear viscous damper based vibration isolation systems. *Non-linear Dynamics*, 67(4):2671–2687, 2012.
- Peter Hagedorn. Oscilações não-lineares. *São Paulo: Editora Edgard Blucher LTDA*, 1984.
- Carmen Ho, Zi-Qiang Lang, and Stephen A Billings. Design of vibration isolators by exploiting the beneficial effects of stiffness and damping nonlinearities. *Journal of Sound and Vibration*, 333(12):2489–2504, 2014.

- RA Ibrahim. Recent advances in nonlinear passive vibration isolators. *Journal of sound and vibration*, 314(3):371–452, 2008.
- Ivana Kovacic. On some performance characteristics of base excited vibration isolation systems with a purely nonlinear restoring force. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 65:44–52, 2014.
- Ivana Kovacic, Michael J Brennan, and Timothy P Waters. A study of a nonlinear vibration isolator with a quasi-zero stiffness characteristic. *Journal of Sound and Vibration*, 315(3):700–711, 2008.
- ZQ Lang, XJ Jing, SA Billings, GR Tomlinson, and Z K_ Peng. Theoretical study of the effects of nonlinear viscous damping on vibration isolation of sdof systems. *Journal of Sound and Vibration*, 323(1):352–365, 2009.
- Zarko Milovanovic, Ivana Kovacic, and Michael J Brennan. On the displacement transmissibility of a base excited viscously damped nonlinear vibration isolator. *Journal of Vibration and Acoustics*, 131(5):054502, 2009.
- ZK Peng, ZQ Lang, XJ Jing, SA Billings, GR Tomlinson, and LZ Guo. The transmissibility of vibration isolators with a nonlinear antisymmetric damping characteristic. *Journal of Vibration and Acoustics*, 132(1):014501, 2010.
- ZK Peng, G Meng, ZQ Lang, WM Zhang, and FL Chu. Study of the effects of cubic nonlinear damping on vibration isolations using harmonic balance method. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 47(10):1073–1080, 2012.
- Jerome E Ruzicka. *Forced vibration in systems with elastically supported dampers*. PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology, 1957.
- Jerome E Ruzicka and Thomas F Derby. Influence of damping in vibration isolation. Technical report, SHOCK AND VIBRATION INFORMATION CENTER (DEFENSE) WASHINGTON DC, 1971.

- AD Shaw, SA Neild, and DJ Wagg. Dynamic analysis of high static low dynamic stiffness vibration isolation mounts. *Journal of Sound and Vibration*, 332(6):1437–1455, 2013.
- Ajay M Sidpara. Magnetorheological finishing: a perfect solution to nanofinishing requirements. *Optical Engineering*, 53(9):092002, 2014.
- MJ Tang, Bin e Brennan. A comparison of the effects of nonlinear damping on the free vibration of a single-degree-of-freedom system. *Journal of Vibration and Acoustics*, 134(2):024501, 2012.
- Ian M Ward and Dennis W Hadley. *An introduction to the mechanical properties of solid polymers*. John Wiley & Sons Ltd.; John Wiley & Sons, Inc., 1993.
- Przemyslaw Wielentejczyk and Roman Lewandowski. Analysis of the primary and secondary resonances of viscoelastic beams made of zener material. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 2019.
- Zhenlong Xiao, Xingjian Jing, and Li Cheng. The transmissibility of vibration isolators with cubic nonlinear damping under both force and base excitations. *Journal of Sound and Vibration*, 332(5):1335–1354, 2013.
- Fan Yang, Ping Wang, Kai Wei, and Feng Wang. Investigation on nonlinear and fractional derivative zener model of coupled vehicle-track system. *Vehicle System Dynamics*, pages 1–26, 2019.

APÊNDICE A

APÊNDICE

Para o modelo de elementos finitos, foi utilizado o software FEMAP, (*Finite Element Modeling And Postprocessing*). O Femap é utilizado por organizações de engenharia e consultores para modelar produtos, sistemas e processos complexos, incluindo satélites, aeronaves, defesa eletrônica, equipamentos de construção pesada, guindastes de elevação, embarcações marítimas e equipamentos de processo.

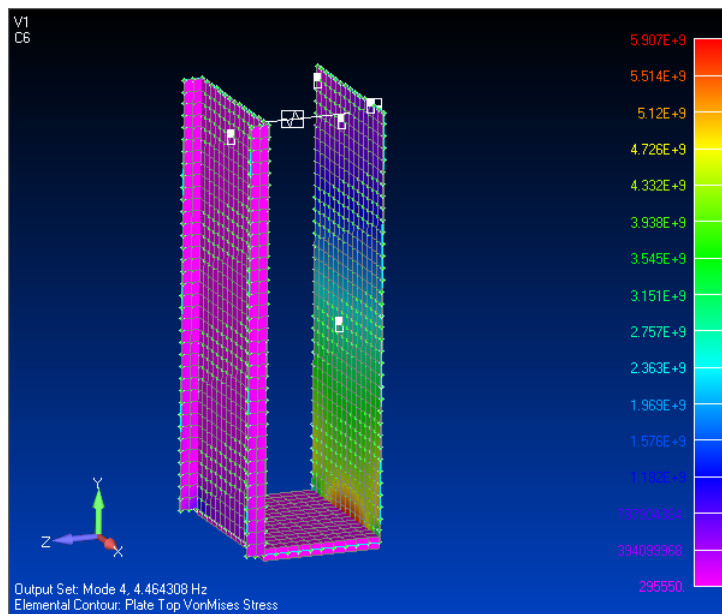


Figura A.1: Design do projeto experimental

Para o desenvolvimento do design experimental apresentado na Fig. A.1 foram realizados os seguintes passos, definição de geometria, definição de malha, definição dos materiais, definição das propriedades dos materiais, definição de engaste, definição de cargas, definição de análises.

O Femap fornece uma poderosa visualização e avaliação de resultados gráficos e orientados a dados e oferecer uma solução abrangente de análise de engenharia assistida por computador que ajuda a garantir que os produtos funcionem como projetados em ambientes reais.

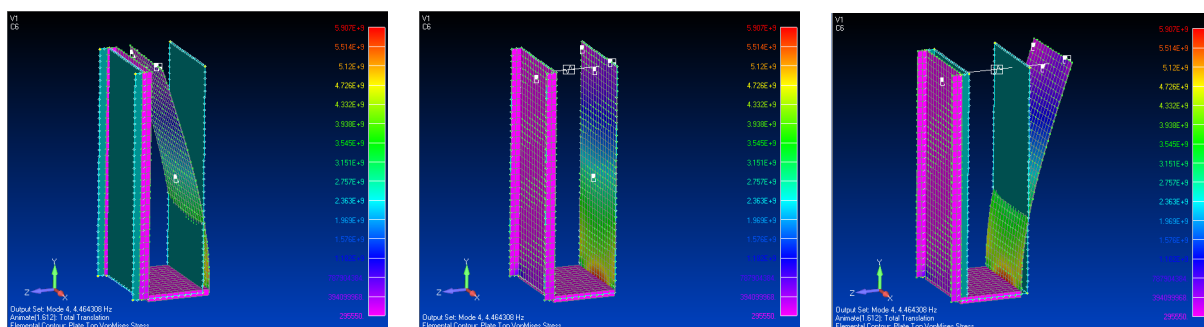


Figura A.2: Passos das análises

Na figura A.2 são apresentados passos da animação gerada no Femap para análises de estruturas, na barra a direita são apresentados os estresses na estrutura, onde a cor roxa apresenta um baixo nível de estresse e a cor vermelha apresenta o maior nível de estresse, essas cores são apresentadas no modelo de projeto para representar onde há maior nível de estresse na estrutura.

Através da implementação no software, foi realizada a aquisição das frequências naturais da viga primária na condição livre e após o engaste com a viga secundária. E seus valores são 4,46 Hz e 15,83 Hz respectivamente.