UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA "JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
FACULDADE DE ENGENHARIA
CÂMPUS DE ILHA SOLTEIRA

EMERSON DIONISIO BELANÇON

APLICAÇÕES DA ÁLGEBRA GEOMÉTRICA NA HIDRODINÂMICA

ILHA SOLTEIRA
2022

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

EMERSON DIONISIO BELANÇON

APLICAÇÕES DA ÁLGEBRA GEOMÉTRICA NA HIDRODINÂMICA

Tese de Doutorado apresentada à Faculdade de Engenharia Câmpus de Ilha Solteira - Unesp como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Engenharia Mecânica.
Especialidade: Mecânica dos Sólidos.

Orientador: Prof. Dr. Samuel da Silva
Co-orientador: Prof. Dr. Geraldo de Freitas Maciel

Ilha Solteira

2022

FICHA CATALOGRÁFICA
Desenvolvido pelo Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação

Belançon, Emerson Dionísio.
B426a Aplicações da álgebra geométrica na hidrodinâmica / Emerson Dionísio Belançon. -- Ilha Solteira: [s.n.], 2022
105 f. : il.

Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira. Área de conhecimento: Mecânica dos Sólidos, 2022

Orientador: Samuel da Silva
Coorientador: Geraldo de Freitas Maciel
Inclui bibliografia

1. Álgebra geométrica. 2. Multivetores. 3. Hidrodinâmica. 4. Funções de Green.

Raiane da Silva Santos
Supervisora Técnica de Seção
Seção Técnica de Referência, Atendimento ao usuário e Documentação
Diretoria Técnica de Biblioteca e Documentação
CRB/8 - 9999

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Câmpus de Ilha Solteira

CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

TÍTULO DA TESE: Aplicações da Álgebra Geométrica na Hidrodinâmica.

AUTOR: EMERSON DIONISIO BELANÇON
ORIENTADOR: SAMUEL DA SILVA

Aprovado como parte das exigências para obtenção do Título de Doutor em ENGENHARIA MECÂNICA, área: Mecânica dos Sólidos pela Comissão Examinadora:

Samuel da Silva:26693971822
Assinado de forma digital por Samuel da Silva:26693971822
Dados: 2022.12.19 12:04:11 -03'00'

Prof. Dr. SAMUEL DA SILVA (Participaçao Virtual)
Departamento de Engenharia Mecanica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira UNESP

gov.br Documento assinado digitalmente
GERALDO DE FREITAS MACIEL
Data: 20/12/2022 22:27:32-0300
Verifique em https://verificador.iti.br

Prof. Dr. GERALDO DE FREITAS MACIEL (Participaçao Virtual)
Departamento de Engenharia Civil / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira -

Prof. Dr. CLAUDIO FREITAS NEVES (Participaçao Virtual)
Programa de Engenharia Oceânica / Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ

gov.br Documento assinado digitalmente
JOSE MANOEL BALTHAZAR
Data: 19/12/2022 17:35:33-0300
Verifique em https://verificador.iti.br

Prof. Dr. JOSE MANOEL BALTHAZAR (Participaçao Virtual)
Departamento de engenharia mecânica / UTFPR - Campus Ponta Grossa

Prof. Dr. AMERICO BARBOSA DA CUNHA JUNIOR (Participaçao Virtual)
Instituto de Matemática e Estatística / Universidade do Estado do Rio de Janeiro - UERJ

gov.br Documento assinado digitalmente
AMERICO BARBOSA DA CUNHA JUNIOR
Data: 20/12/2022 13:57:45-0300
Verifique em https://verificador.iti.br

Ilha Solteira, 19 de dezembro de 2022

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por ter me dado a graça de chegar até aqui e pelos milagres e prodígios em minha vida e na vida de minha família.

Agradeço também à minha esposa Silvana pela força e incentivo que tem me dado desde o início dos estudos. Se não fosse por ela acho que não teria chegado até aqui. Aos meus filho, Miguel, Tiago e André os quais amo demais.

Aos meus pais, Antonio e Mercedes que sempre depositaram grande confiança me dizendo que o estudo seria uma grande ferramenta de crescimento para a minha vida. Mesmo não tendo estudos nunca mediram esforços em proporcionar condições para que pudesse estudar.

À Universidade Federal de Rondonópolis a qual sou professor pelo apoio financeiro e o insentivo à capacitação de seus professores.

Ao professor Samuel da Silva por estes anos de trabalho e amizade, por ter sido a chave deste trabalho com suas sugestões, críticas e toda paciência. Também sou grato pelo voto de confiança que me deu e espero ter correspondido de forma satisfatória.

Ao professor Geraldo Maciel que me ajudou a resolver alguns problemas e dificuldades tentando mostrá-las de uma maneira mais simples e desta forma facilitar sua compreensão.

Ao programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica e aos professores que contribuíram de forma direta ou indireta para minha formação e desenvolvimento deste trabalho.

Por fim, agradecer aos amigos e colegas que adquiri nesta universidade, em especial aos do Grupo de Materiais e Sistemas Inteligentes (GMSINT) pela ajuda, pelas conversas e risadas que também foram de grande proveito.

Resumo

Na resolução de problemas envolvendo a dinâmica de fluidos é comum aparecer singularidades. Tais singularidades podem ser impulsionadas pelo movimento da fronteira em conjunto com a viscosidade do fluido ou singularidades de superfície livre associadas à tensão superficial e viscosidade ou ainda singularidades de pontos interiores da vorticidade associadas ao intenso alongamento do vórtice. Diante disto, alguns métodos são utilizados para tentar contornar esta situação uma vez que as singularidades dificultam uma boa aproximação para a solução das equações de movimento. Alguns métodos são, os Quatérnions, Simetria de Lie ou aproximações numéricas como elementos finitos os quais permitem ajustar a solução. No final do século XIX, William Kingdon Clifford desenvolveu uma estrutura matemática conhecida como *Álgebra Geométrica de Clifford* ou simplesmente *Álgebra Geométrica*. Esta estrutura matemática não se baseia em conceito de vetores mas em subespaços capaz de gerar objetos matemáticos de dimensões variadas, conhecidos como multivetores. A estrutura dessa álgebra generaliza e integra naturalmente conceitos, como matrizes, coordenadas de Plücker, números complexos, quatérnions, álgebra de Lie. Assim, este trabalho propõe uma maneira simples para compactar as equações usadas para descrever o escoamento de um fluido ideal e incompressível em uma única equação utilizando a estrutura da álgebra geométrica. Depois da compactação, resolver dois problemas clássicos da hidrodinâmica: o escoamento bidimensional em torno de um cilindro circular. O primeiro é manter o cilindro fixo e o segundo é acrescentar um vórtice simples no centro do cilindro. O primeiro problema será resolvido de duas formas diferentes: a primeira é aplicar um método semelhante a segunda fórmula (ou identidade) de Green, a qual é uma das ferramentas fundamentais no desenvolvimento deste trabalho. A segunda é compactar as equação clássicas da hidrodinâmica com a estrutura da álgebra geométrica e utilizar as funções de Green para resolver essa equação. O segundo problema será resolvido utilizando a compactação das equações clássicas que é o método proposto neste trabalho.

Palavras-chave: Álgebra Geométrica. Multivetores. Hidrodinâmica. Funções de Green.

Abstract

In solving problems involving fluid dynamics, it is common for singularities to appear. Such singularities can be driven by the movement of the boundary together with the fluid viscosity or free surface singularities associated with surface tension and viscosity or even singularities at interior points of vorticity associated with the intense elongation of the vortex. In view of this, some methods are used to try to circumvent this situation since the singularities make it difficult to get a good approximation for the solution of the equations of motion. Some methods are, the Quaternions, Lie Symmetry or numerical approximations as finite elements which allow to adjust the solution. In the late 19th century, William Kingdon Clifford developed a mathematical framework known as *Clifford's Geometric Algebra* or simply *Geometric Algebra*. This mathematical structure is not based on the concept of vectors but on subspaces capable of generating mathematical objects of varied dimensions, known as multivectors. The structure of this algebra naturally generalizes and integrates concepts such as matrices, Plücker coordinates, complex numbers, quaternions, Lie algebra. Thus, this work proposes a simple way to compress the equations used to describe the flow of an ideal and incompressible fluid into a single equation using the structure of geometric algebra. After compaction, solve two classic hydrodynamics problems: he two-dimensional flow around a circular cylinder. The first is to keep the cylinder fixed and the second is to add a simple vortex in the center of the cylinder. The first problem will be solved in two different ways: the first is to apply a method similar to Green's second formula (or identity), which is one of the fundamental tools in the development of this work. The second is to compact the classical equations of hydrodynamics with the structure of geometric algebra and use Green's functions to solve this equation. The second problem will be solved using the compression of classical equations, which is the method proposed in this work.

Keywords: Geometric Algebra. Multivector. Hydrodynamics. Green's Functions.

Lista de Figuras

1 Cronológica das descobertas. 19
2 Interpretação geométrica do produto escalar e do módulo do produto vetorial. 28
3 Representação geométrica dos momentos linear e angular 29
4 Visão geométrica de um bivetor. 33
5 Visão geométrica de um trivetor. 34
6 Representação geométrica do módulo de um bivetor. 35
7 Produto escalar (à esquerda) e produto externo (à direita). 39
8 Representação geométrica do isomorfismo de Hodge. 40
9 Esquema para descrever o problema proposto. 72
10 Linhas equipotenciais para $a = 3m$, $U = 1.5m/s$. 72
11 Linhas de corrente ambas para $a = 3m$, $U = 1.5m/s$. 73
12 Linhas de corrente para diferentes valores de K. 78

Lista de Símbolos

$\mathbb{R}^3$	-	espaço euclidiano tridimensional
$\mathcal{B}$	-	base ortonormal
$\hat{e}_i$	-	i-ésimo vetor da base ortonormal
$\mathbf{w}$	-	letras minúsculas em negrito representam 1-vetor ou simplesmente vetor
$\mathbb{R}$	-	conjunto de números reais
$\lvert \ \rvert$	-	módulo de um elemento
$\mathscr{H}$	-	momento angular de uma particula
$\mathbb{H}$	-	conjunto dos quatérnions
$\widetilde{q}$	-	letras minúsculas com til representam os quatérnions
$S(\widetilde{q})$	-	parte escalar do quatérnion $\widetilde{q}$
$\mathbf{V}(\widetilde{q})$	-	parte vetorial do quatérnion $\widetilde{q}$
$\otimes$	-	produto tensorial
A_k	-	letras maiúsculas com subescritos representam k-vetores
$\bigwedge^k(\mathbb{R}^3)$	-	porção k-vetorial do espaço multivetorial $\bigwedge(\mathbb{R}^3)$
$\wedge$	-	produto externo ou de Grasmann
$\bigwedge(\mathbb{R}^3)$	-	espaço multivetorial 2^3-dimensional
$\bigoplus$	-	soma direta
A	-	letras maiúsculas sem subescritos representam multivetores, não necessariamente um k-vetor
$\overline{\mathcal{B}}$	-	base ortonormal para o espaço multivetorial
$\rfloor$	-	contração à esquerda
$\lfloor$	-	contração à direita
$\star$	-	operação de dualidade
$\mathbb{I}_n$	-	n-vetor simples e unitário
$\mathcal{A}$	-	uma álgebra associativa
$\mathcal{C}\ell_{p,q,r}$b	-	álgebra geométrica de assinatura $\{p, q, r\}$
∇	-	operador nabla
$\dfrac{\partial}{\partial t}$	-	derivada parcial em relação ao tempo

$\mathbf{f}_{ext}$ - força externa agindo no escoamento

$\boldsymbol{\omega}$ - campo de vorticidade

Φ - potencial escalar de Bernoulli

$\mathcal{L}$ - simples vetor para auxiliar (Lamb)

∇^2 - operador Laplaciano

∇_4 - operador nabla em um espaço quadridimensão

$\mathcal{F}$ - multivetor campo de força hidrodinâmico

$\mathcal{I}$ - multivetor da diferença entre a densidade de cargave o vetor corrente turbulenta

$\mathcal{D}$ - operador multivetorial

$\{\mathbf{a}_k\}$ - k-ésimo vetor de uma base qualquer

$\{\mathbf{a}^k\}$ - k-ésimo vetor de uma base recíproca qualquer

x_k - letras minúsculas representam k-ésima componente escalar

$\{E_k\}$ - k-ésimo multivetor de uma base qualquer

$\{E^k\}$ - k-ésimo multivetor de uma base recíproca qualquer

Sumário

1 INTRODUÇÃO 10
1.1 MOTIVAÇÃO 11
1.2 OBJETIVO 13
1.3 CONTRIBUIÇÕES 13
1.4 ORGANIZAÇÃO 13

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA 16
2.1 HISTÓRIA 16
2.2 APLICAÇÕES 20
2.3 CONSIDERAÇÕES FINAIS 24

3 ÁLGEBRA GEOMÉTRICA DE CLIFFORD 26
3.1 COMPARAÇÃO ENTRE ÁLGEBRAS 26
3.1.1 A álgebra de Gibbs-Heaviside 26
3.1.2 A Álgebra de Hamilton 29
3.1.3 A Álgebra de Grassmann 31
3.1.4 Álgebra Geométrica 37
3.2 CONSIDERAÇÕES FINAIS 41

4 ÁLGEBRA GEOMÉTRICA DA HIDRODINÂMICA 43
4.1 AS EQUAÇÕES DO ELETROMAGNETISMO 43
4.2 AS EQUAÇÕES DA HIDRODINÂMICA 44
4.3 ANALOGIA ENTRE HIDRODINÂMICA E ELETROMAGNETISMO . . . 46
4.4 A ÁLGEBRA GEOMÉTRICA DAS EQUAÇÕES DA HIDRODINÂMICA . 49
4.5 CONSIDERAÇÕES FINAIS 52

5 CÁLCULO COM ÁLGEBRA GEOMÉTRICA 54
5.1 DIFERENCIAÇÃO E DERIVADA DIRECIONAL 54
5.2 INTEGRAL E O TEOREMA FUNDAMENTAL COM ÁLGEBRA GEOMÉTRICA 59
5.3 ANTIDERIVADA: INVERSÃO DE OPERADORES LINEARES 66
5.4 CONSIDERAÇÕES FINAIS 69

6 APLICAÇÕES DA ÁLGEBRA GEOMÉTRICA EM HIDRODINÂMICA 70
6.1 RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE LAPLACE COM FUNÇÕES DE GREEN 70
6.2 RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DA HIDRODINÂMICA COM ÁLGEBRA GEOMÉTRICA: CASO PARTICULAR I 74
6.3 RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DA HIDRODINÂMICA COM ÁLGEBRA GEOMÉTRICA: CASO PARTICULAR II 77
6.4 CONSIDERAÇÕES FINAIS 79

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS 81
7.1 CONCLUSÕES 81
7.2 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS 83

Referências 84

Apêndice A – Função de Green 91

Apêndice B – Conceitos sobre Álgebra 102

1 INTRODUÇÃO

Em qualquer problema envolvendo geometria, a representação algébrica dos objetos geométricos e de suas relações precisa ser consistente, do ponto de vista matemático, tornando possível uma eficiente implementação computacional. Atualmente, a ferramenta mais utilizada para esse fim é a Álgebra Linear, que apresenta deficiências no poder de representação e generalização dos conceitos geométricos envolvidos, causando dificuldades em todo o processo de implementação de soluções.

Para a resolução de problemas geométricos é importante distinguir entre o espaço físico[1] dos objetos que se quer manipular e o espaço dos objetos matemáticos que será utilizado para modelar este espaço físico. Por exemplo, o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ pode ser utilizado com restrições para descrever o espaço físico tridimensional. Essas restrições se devem ao fato de que vetores representam direções unidimensionais, enquanto os objetos geométricos de interesse podem ir além de direções.

Para um plano são utilizados dois objetos matemáticos distintos, que em geral são o vetor normal e um ponto, na representação de um objeto geométrico no espaço físico. Uma alternativa para contornar esta deficiência são as coordenadas de Plücker que, para pontos, retas e planos têm representações distintas e não utilizam mais vetores e escalares. Mas a Álgebra Linear continua sendo fundamental para representar as transformações entre os objetos geométricos e o problema é que a conexão entre a representação de transformações e a representação de objetos geométricos por coordenadas de Plücker não é imediata, podendo ser outra fonte de dificuldade em manipulações algébricas e no trabalho de implementação computacional.

Exemplos básicos destas transformações são as translação e rotação. Tais movimentos são representados, em álgebra linear, por vetores e matrizes e novamente dois objetos matemáticos de naturezas distintas devem ser utilizados para representar movimentos essenciais no espaço físico tridimensional, um do espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ e um do espaço matricial $\mathbb{R}^{3\times3}$. Para contornar essa dificuldade pode-se usar a geometria projetiva que representa translações e rotações por meio de um único objeto matricial, mas ao aplicá-lo a pontos, retas e planos, diferentes expressões e, consequentemente, diferentes implementações devem ser desenvolvidos para tratar cada situação. No caso específico das rotações, os

[1] Por espaço físico entende-se, neste contexto, como o meio que nos envolve.

quatérnions são mais apropriados trazendo vantagens sobre o uso de matrizes, porém soluções mais eficientes são encontradas fora do espaço descrito com álgebra linear.

Embora coordenadas de Plücker, geometria projetiva e quatérnions possam ser considerados extensões da álgebra linear, não há uma ligação natural entre essas diferentes estruturas. Isso dificulta a solução de problemas geométricos, principalmente na área da computação pois necessitam de uma estrutura única e integrada para facilitar sua implementação. Uma estrutura matemática que consegue contornar todas essas deficiências foi desenvolvida no século XIX e que voltou a se tornal popular em meados do século XX: a Álgebra Geométrica de Clifford.

1.1 MOTIVAÇÃO

As engenharias mecânica dos fluídos e aeronáutica estudam escoamentos de fluidos, geralmente ar ou água, em torno de carro, navio ou avião e turbinas. Já a maioria dos físicos têm um forte interesse pelas linhas de campos magnético, elétrico e gravitacional. Na descrição matemática desses fenômenos se usa normalmente campo vetorial para representar o movimento e as curvas integrais do campo vetorial levam ao movimento real. A maioria dos engenheiros, físicos e matemáticos utilizam a álgebra vetorial para expressar suas considerações. No entanto, um dos grandes problemas para se descrever esses movimentos é devido a possíveis singularidades que existem em função do tipo de parametrização usado, o que dificulta em demasia, principalmente, se for necessária alguma análise da cinemática inversa, isto é, analisar as diversas combinações de parâmetros em um objeto flexível de forma a encontrar a combinação correta para um posicionamento desejado.

Apesar das diferenças físicas entre a rotação de um corpo sólido, assumido inicialmente rígido, e de um fluido, do ponto de vista topológico existe muita proximidade na descrição e solução destas duas situações. As aplicações práticas de rotação destes corpos são enormes em diferentes áreas da engenharia. Mesmo na rotação de um corpo sólido, como um pião ou um giroscópio, singularidades podem existir, até mesmo usando um número mínimo de parâmetros, (STUELPNAGEL, 1964). São conhecidos diferentes meios de evitá-las na descrição da cinemática inversa ou na solução das equações de movimento. Dentre estas formas, podem ser citados os parâmetros de Cayley-Klein (NETO, 2004), parâmetros de Rodrigues e Rodrigues Modificado, (MORTARI; ROJAS; JUNKINS, 2004; BETSCH; MENZEL; STEIN, 1998), vetor conforme (TRINDADE; SAMPAIO, 2000) e, ainda, os quatérnions (KUIPERS *et al.*, 1999). Este último permite combinar rotações

sucessivas através da multiplicação de quatérnion, causando um número mínimo de operações algébricas, (TRINDADE; SAMPAIO, 2000). Entretanto quatérnions não se conectam bem com outras transformações na álgebra linear ou com coordenadas de Plücker.

Na descrição da rotação de fluidos esta abordagem é pouco usada, apenas alguns pesquisadores a utilizam. Por exemplo, Rubtsov e Roulstone (1997) mostraram que uma formulação quaterniônica pode ser feita para escoamentos bidimensionais quase geostróficos cuja origem está em modelos balanceados da atmosfera, ou seja, o gradiente de pressão equilibra o efeito de Coriolis. Eles também mostraram que uma estrutura Kähler pode ser associada a esta formulação (ROUBTSOV; ROULSTONE, 2001). Já Gibbon (2002) demonstra que as equações de Euler para escoamentos tridimensionais possuem uma estrutura quaterniônica de Riccati natural na variável dependente e Gibbon *et al.* (2006) apresentam uma representação quaterniônica da dinâmica de vórtices da equação de Euler tridimensional para investigar a evolução Lagrangiana dessas variáveis.

Diferentemente de um corpo sólido, uma outra forma de deparar com singularidades na descrição do movimento do escoamento de um fluido é o aparecimento do campo de vorticidade. Por exemplo, em uma situação conservativa da rotação de um fluido em um meio no espaço, o momentum angular deve permanecer constante o que exige um aumento no campo de vorticidade, uma vez que o vórtice deve continuar sempre girando. Este aumento pode provocar singularidade, o que dificulta uma boa aproximação para soluções das equações de movimento. Diversas formas são encontradas na literatura para se tentar reverter esta limitação, quase todas usando aproximações numéricas por exemplos, usando os métodos de volumes finitos, elementos finitos, diferenças finitas (LAYTON, 2008), (CHORIN, 1968), (BRISTEAU; GLOWINSKI; PERIAUX, 1987). No entanto, uma forma muito pouco adotada seria descrever as equações de movimento em notação completamente diferente da forma padrão, usando algo que já é usado para evitar singularidade na rotação de corpos rígidos: a descrição com Álgebra Geométrica pois trata de uma estrutura matemática que naturalmente generaliza e integra formalismos úteis como números complexos, quatérnions e coordenadas de Plücker de forma consistente. Assim, nesta tese a proposta é abandonar os teoremas integrais e notação de vetores para descrever o movimento de fluidos girando usando esta estrutura com base nas ideias originais desenvolvidas no século XIX por Hamilton, Grasmann e, principalmente, Clifford.

1.2 OBJETIVO

Propor uma forma para compactar as equações usadas para descrever o escoamento de um fluido ideal e incompressível e depois um método para resolver dois problemas a partir da estrutura da álgebra geométrica. O primeiro é o escoamento em torno de um cilindro circular fixo e o segundo o escoamento em torno de um cilindro circular com um vórtice simples no centro.

1.3 CONTRIBUIÇÕES

Este trabalho busca contribuir com os seguintes aspectos:

- Divulgar o estudo da álgebra geométrica no ensino de física, matemática e em cursos de engenharia e a utilização desta estrutura na comunidade científica através de uma abordagem clara e objetiva.
- Realizar um estudo inicial sobre o comportamento de uma grandeza física descrita com álgebra geométrica. Este resultado já foi publicado em Belançon e Silva (2019).
- Mostrar que as equações usadas para descrever o escoamento de um fluido ideal e incompressível podem ser descritas em uma única equação usando a estrutura da álgebra geométrica.
- Aplicar a estrutura da álgebra geométrica para descrever alguns conceitos úteis do cálculo diferencial e integral para resolver um problema descrito com as equações clássicas da hidrodinâmica.
- Utilizar os conceitos e fórmulas desenvolvidos no cálculo geométrico para resolver um problema descrito com as equações clássicas da hidrodinâmica e comparar com a resolução dos métodos tradicionais.

1.4 ORGANIZAÇÃO

Este trabalho está organizado da seguinte forma:

- **Capítulo 1 - Introdução:** Apresentação da motivação, contribuições e objetivo da presente trabalho.

- **Capítulo 2 - Revisão Bibliográfica:** Revisão básica apresentando alguns fatos importantes e os principais cientistas que influenciaram no desenvolvimento da álgebra geométrica com as principais áreas atuais de aplicação desta estrutura.

- **Capítulo 3 - Álgebra Geométrica de Clifford:** Descrição do embasamento teórico utilizado para definir outros sistemas algébricos tais como, álgebra de Hamilton, álgebra de Grassmann e álgebra geométrica de Clifford apresentando as definições básicas necessárias. Além disso, apresenta a definição do momentum angular e interpreta seu significado nesses sistemas e uma comparação crítica é apresentada no final do capítulo.

- **Capítulo 4 - Álgebra Geométrica da Hidrodinâmica:** Ilustra a aplicação da álgebra geométrica nas equações de movimento de um fluido ideal e incompressível, construindo um sistema de equações análogo ao sistema de Maxwell. Com isso, aplicar o produto geométrico e a operação de dualidade para compactar esse sistema em uma única equação.

- **Capítulo 5 - Cálculo com Álgebra Geométrica:** Descreve alguns conceitos do cálculo diferencial e integral definindos na estrutura da Álgebra Geométrica. Tais conceitos serão utilizados para desenvolver fórmulas que posteriormente serão aplicadas na resolução de problemas. No final algumas vontagens, em relação ao cálculo vetorial, são apresentadas.

- **Capítulo 6 - Aplicações da Álgebra Geométrica em Hidrodinâmica:** Apresenta dois problemas descritos com as equações clássicas da hidrodinâmica relacionados ao escoamento bidimensional em torno de um cilindro circular: o primeiro foi resolvido de duas formas diferentes, a primeira utilizou a segunda identidade de Green descrita com álgebra geométrica e a segunda foi inserir as equações clássicas na estrutura da álgebra geométrica, compactando em uma única equação, e em seguida aplicar a fórmula do cálculo geométrico e as funções de Green para resolvê-la. O segundo problema, é semelhante ao primeiro, porém acrescentou um vórtice simples no centro do cilindro. Por fim, essas soluções foram comparadas com as obtidas pelos métodos tradicionais.

- **Capítulo 7 - Considerações Finais:** Este capítulo apresenta as conclusões finais sobre o presente trabalho com propostas para desenvolvimento de trabalhos futuros para continuação prevista da tese.

- **Apêndice A - Funções de Green:** No Apêndice A são apresentadas as funções de

Green e alguns métodos que podem ser usados para encontrá-las bem como alguns exemplos.

- **Apêndice B - Conceitos Sobre Álgebra:** No Apêndice B são apresentadas as definições sobre álgebra linear, forma bilinear simétrica, alguns exemplos e para finalizar é apresentado a definição de álgebra e exemplos.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Este capítulo apresenta uma revisão sucinta sobre os principais cientistas que influenciaram no desenvolvimento da álgebra geométrica. Posteriormente são apresentados e discutidos exemplos das diferentes áreas de aplicação desta álgebra. O capítulo finaliza com considerações referentes à importância desta estrutura.

2.1 HISTÓRIA

A geometria surgiu da necessidade do homem em fazer medições de distâncias, áreas e volumes. O matemático grego Euclides de Alexandria foi o primeiro autor a descrever a geometria de forma axiomática. Sua obra intitulada *Os Elementos* foi escrita por volta de 300 a.C. e construída pelo raciocínio dedutivo sobre um alicerce de postulados e definições. Por outro lado, a álgebra se desenvolveu como um ramo separado da geometria até que o francês René Descartes, por volta de 1637, mostrou como traduzir problemas de geometria para a álgebra abordando-os através de um sistema de coordenadas onde cada ponto do espaço pôde ser representado por uma sequência ordenada de números e suas aplicações de álgebra em geometria foram compilados em um livro (DESCARTES; MACLEAN, 2006).

O norueguês Caspar Wessel foi o primeiro a desenvolver a noção geométrica dos *números complexos*, caracterizando-os como pontos em um plano e elaborando uma forma de descrever uma rotação em termos algébricos (WESSEL, 1799). De forma independente aos resultados de Wessel, a interpretação geométrica dos números complexos é geralmente atribuída ao matemático suiço Jean-Robert Argand (ARGAND, 1806) . Outro matemático, o alemão Carl Friedrich Gauss e independentemente de Argand, também estudou a interpretação geométrica dos números complexos e com seus estudos percebeu que tais objetos matemáticos podiam ser representados por um par ordenado tal qual utilizado no plano cartesiano: bastava convencionar que um dos eixos do sistema representasse o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais e o outro o conjunto I dos números imaginários e qualquer número complexo poderia ser representado por um ponto neste plano: o chamado plano de Argand-Gauss. Esses trabalhos de Wessel, Argand e Gauss logo cativaram a imaginação dos matemáticos da época.

Em 1840, o matemático francês Benjamim Olinde Rodrigues propôs as relações de

arco-metade para calcular o efeito da composição de duas rotações finitas (RODRIGUES, 1840). Em 1843, o matemático irlandês Sir William Rowan Hamilton descreveu os *quatérnions* apresentando resultados equivalentes ao de Rodrigues, mas desenvolvidos de forma independente. Após vários anos de tentativas frustradas, descobriu que a introdução de mais duas unidades imaginárias (além da já conhecida dos números complexos), com propriedades bem definidas levava a uma estrutura algébrica fechada. Com este formalismo, as regras válidas para os números complexos eram satisfeitas, com a única diferença de que o produto quaterniônico não é uma operação comutativa, desenvolvendo assim, a mais antiga e conhecida álgebra não-comutativa (HAMILTON, 1969).

Em 1843, o matemático alemão Hermann Günther Grassmann descobriu uma regra diferente da adotado por Descartes para relacionar elementos geométricos a números. O primeiro volume do principal trabalho de Grassmann foi apresentado na forma manuscrita, com o nome de *Die Lineale Ausdehnungslehre* (A Teoria das Extensões Lineares) (GRASSMANN, 1844). A Ausdehnungslehre foi publicada em duas versões, a de 1844 e a de 1862 que é uma versão reescrita da obra de 1844. Neste trabralho, Grassmann propôs que as grandezas físicas fossem representadas por objetos geométricos em vez de numéricos e desenvolve um produto não comutativo, chamado por ele *produto exterior*, que relaciona segmentos de retas orientadas, fragmentos de plano orientados e fragmentos de cubos orientados. Pode-se dizer que foi neste ponto que surgiu o conceito de objetos vetoriais, como os nossos conhecidos vetores dos dias atuais. Além disso, Grassmann generalizou a geometria de Euclides ao sugerir um tratamento matemático válido para espaço de qualquer dimensão. O trabalho de Grassmann foi, sem dúvida, excepcional, entretanto, o seu trabalho era por demais complexo para a época em que foi publicado, e poucos foram os que a entenderam, além do que, mediante todo o prestígio de Hamilton, o seu trabalho acabou quase que esquecido.

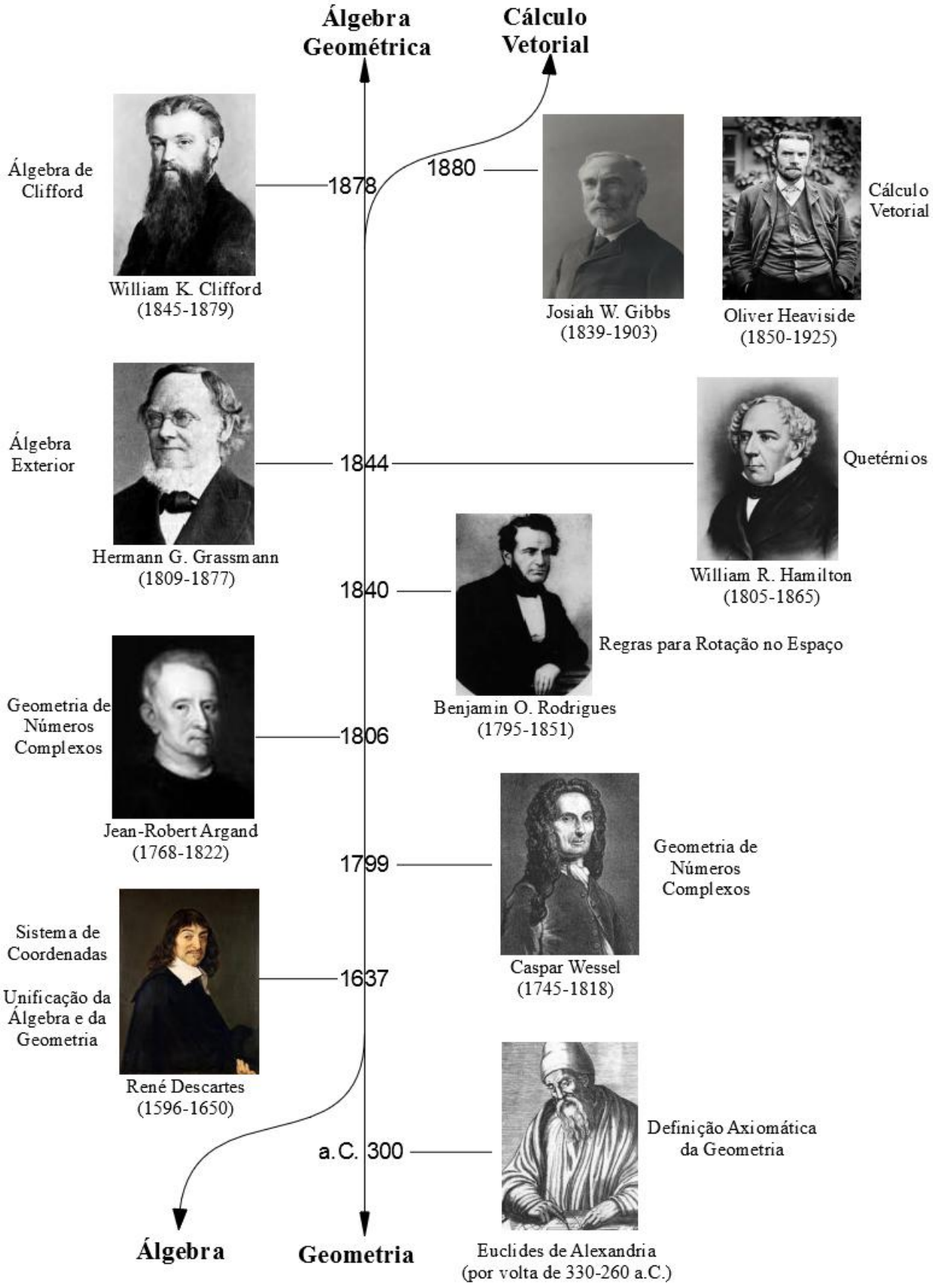
Em 1878, o matemático inglês William Kingdon Clifford publicou um artigo no American Journal of Mathematics intitulado *Applications of Grassmann's extensive algebra* (CLIFFORD, 1878). Neste trabalho Clifford apresenta uma nova estrutura matemática denomonada por ele de *Álgebra Geométrica* com semellhanças entre as estruturas de Grassmann e Hamilton. O que Clifford fez foi sintetizar duas estruturas matemáticas aparentemente dissociadas: os quatérnions de Hamilton e a álgebra de extensão de Grassmann de uma forma bem mais simples definindo um novo produto chamado *produto geométrico*. Por uma fatalidade, Clifford contraiu tuberculose e faleceu antes de ter a oportunidade de desenvolver suas ideias, o que tornou seu trabalho esquecido na época.

Os quatérnions levaram à introdução da ideia do *produto escalar* e do *produto veto-*

rial pelo cientista americano Josiah Willard Gibbs de forma separadas uma vez que esses resultados aparecem no resultado do produto de dois quatérnions. O produto escalar também aparece no trabalho de Grassmann de 1844. Nos anos seguintes à morte de Clifford, Gibbs trabalhou, a partir da álgebra de Grassmann, no desenvolvimento de um cálculo vetorial para as necessidades de físicos e apresentou seus estudos sob a forma de notas de aula que utilizava junto a seus alunos que posteriormente foi publicada em forma de livro (GIBBS, 1884; GIBBS, 1906). Quase ao mesmo tempo, Oliver Heaviside, chegou a resultados semelhantes ao de Gibbs de forma independente mas nunca escreveu um tratado formal sobre cálculo vetorial. Os resultados desenvolvidos por Heaviside sobre vetores foram introduzidos em seus artigos sobre eletromagnetismo que depois foram reunidos em dois volumes chamados *Electrical Papers* (HEAVISIDE, 1970). O cálculo vetorial desenvolvido por Gibbs-Heaviside ganhou força na comunidade científica no fim do século XIX por permitir lidar com dimensionalidade mais alta utilizando a estrutura simples do espaço vetorial, com isso se tornou a ferramenta matemática padrão para físicos e engenheiros, ao invés das ideias mais gerais que compõem a álgebra geométrica. Nesse ponto, os quatérnions também foram abandonados por grande parte dos pesquisadores. A figura (1) resume os passos que levaram ao desenvolvimento da chamada *Álgebra Geométrica*.

Os trabalhos desenvolvidos por Hamilton, Grassmann e Clifford foram praticamente esquecidos na primeira metade do século XX, porém começou a ressurgir e ganhar maior importância a partir do final do século XX e início do século XXI. Uma figura central nesse processo foi os trabalhos do Professor David Hestenes, um físico americano que nomeou essa reformulação de *Álgebra Geométrica de Clifford* e realizou todo um trabalho de disseminação ao redor do mundo. Com uma visão mais abrangente da estrutura desta álgebra, comparada com os físicos da época, verificou que esta estrutura poderia ser usada como forma de unificar várias áreas da mecânica quântica e as aplicações nos mais variados temas e áreas contribuíram para uma grande e importante gama de trabalhos publicados (HESTENES; LASENBY, 1966; HESTENES, 1974; HESTENES, 1982; HESTENES; SOBCZYK, 1984; HESTENES, 1986; HESTENES, 1993; HESTENES, 2001; HESTENES; HOLT, 2007; HESTENES, 2010; HESTENES, 2014; HESTENES, 2017). Desde então, este assunto tem ganhado crescente importância não apenas na comunidade de física, mas também nas engenharias e em computação, com destaque para aplicação em robótica e computação gráfica e, mais recentemente, em problemas de geometria molecular e computação quântica.

Figura 1 – Cronológica das descobertas.



Fonte: Adaptado de Fernandes, Lavor e Oliveira (2017).

2.2 APLICAÇÕES

Atualmente, a álgebra geométrica é a maior álgebra associativa que integra vários sistemas algébricos em uma linguagem coerente. Subálgebras deste sistema são a álgebra dos números complexos, a álgebra matricial, a álgebra dos quatérnions, tensores e formas diferenciais. Sua grandeza reside no fato de poder ser usada para desenvolver todos os ramos da física teórica, considerando o significado geométrico de todas as operações e interpretação física para elementos matemáticos. Além disso, é uma ferramenta poderosa para lidar com rotações e dilatações e pode servir como uma linguagem para unificar, simplificar e generalizar vários objetos da matemática que envolvem conceitos geométricos.

A álgebra geométrica foi introduzida aos físicos por Hestenes e possui em sua base uma combinação da estrutura algébrica e o significado geométrico de seus elementos matemáticos. Pode-se dizer que é uma álgebra dotada de informação geométrica e interpretação física para todos os elementos matemáticos. Ela permite unificar vários resultados encontrados da mecânica clássica à mecânica quântica (LOUNESTO, 2001; PERWASS *et al.*, 2009). Em relação ao eletromagnetismo, a principal vantagem do tratamento da álgebra geométrica é uma nova formulação para as quatro equações de Maxwell. O operador ∇ pode ser redefinido como um operador multivetorial e este junto com o produto geométrico permitem unir todas as quatro equações de Maxwell em uma única equação. Além disto, o produto geométrico é inversível o que permite calcular os campos em termos das correntes via integração das funções de Green. Isto têm aplicações na teoria do espalhamento e da propagação de ondas pois o princípio do Huygens é incorporado diretamente na solução. Sabbata e Datta (2006) mostram como escrever as equações para ondas eletromagnéticas dentro da álgebra geométrica e como o produto geométrico revela seus estados de polarização de maneiras simples e naturais. Eles colocam que a álgebra geométrica pode ser o que é necessário para introduzir um novo paradigma de análise capaz de colocar as características matemáticas essenciais da relatividade geral em um cenário comum com os da teoria quântica. Um exemplo disto é o Hamiltoniano de uma partícula carregada por um campo magnético que na mecânica quântica deve-se adicionar um novo termo, conhecido como o termo Stern-Gerlach, para descrever corretamente a interação da partícula com o campo magnético. No contexto da álgebra geométrica com a troca do produto escalar pelo produto geométrico, o termo de Stern-Gerlach surge naturalmente.

A álgebra geométrica pode ser incorporada em outros modelos de geometria, além da geometria euclidiana, as mais comuns são: o modelo homogêneo (ou modelo projetivo) e o modelo conforme. Este último, fornece uma base computacional universal de geometria

pois, incorpora a geometrias euclidiana, hiperbólica, elíptica e projetiva. Desta forma, suas aplicações na área da computação vem ganhando espaço nos dias atuais. Hildenbrand, Zamora e Bayro-Corrochano (2008) apresentam um algoritmo para a cinemática inversa de um robô. Eles mostram como executar certas tarefas básicas de manipulação de objetos robóticos, como resolver o problema de posicionamento de uma pinça em um braço robótico em uma determinada posição do espaço, desconsiderando o plano do alinhamento da pinça, e ilustrando como o braço robótico pode seguir caminhos lineares e esféricos. Nesta mesma linha, Sommer (2013) descreveu os fundamentos teóricos da geometria computacional através da álgebra geométrica com aplicações à robótica.

Uma tarefa central da computação visual é reconhecer automaticamente objetos no mundo real. Os parâmetros de definição da imagem e do espaço do objeto podem variar devido à condição da iluminação, a calibração da câmera e posição de visualização. É, portanto, desejável procurar propriedades geométricas do objeto que permanecem invariantes sob tais mudanças nos parâmetros de observação. A álgebra geométrica se mostra uma linguagem muito elegante para expressar invariantes projetivos e estes podem ser aplicados em pinças guiadas por visão, auto-localização de câmera e reconstrução de forma e movimento (BAYRO-CORROCHANO; BANARER, 2002; BAYRO-CORROCHANO; VALLEJO; ARANA-DANIE, 2005). Já Valkenburg e Alwesh (2011) desenvolveram um novo algoritmo para a rápida calibração de posições 3D de múltiplos alvos para pontos estacionários como parte de um sistema de posicionamento óptico usando álgebra geométrica no modelo, conforme simplificando a implementação do software pois representou muitos objetos e operadores (vetores, pontos, linhas, esferas duplas) em uma única álgebra, que permitiu uma representação muito compacta dos resultados.

Na área da computação gráfica, o processamento convencional de imagens em cores depende de três canais marginais. Mas o espaço de cores não é abordado em um sistema tridimensional. Novos tratamentos multidimensionais em quatérnions e álgebra geométrica superam essas limitações e levam os processamentos de imagem a um espaço de cor genuíno, que permite, por exemplo, comparar imagens giradas em relação ao espaço de cor, para tratar mudanças de iluminação e cor. Técnicas para o reconhecimento de objetos coloridos com base em um tipo especial de Transformada de Fourier de Clifford são desenvolvidas. Esta técnica incorpora um sinal vetorial de cor 3D em um espaço 4D ($\mathbb{R}^4$) e usa um bivetor e seu dual (MENNESSON; SAINT-JEAN; MASCARILLA, 2011). Outra dificuldade encontrada na computação gráfica é a análise de grandes volumes de dados multidimensionais não ordenados. Muitas vezes, envolve a busca de alinhamentos de dados que emergem como estruturas bem definidas ou padrões geométricos em conjuntos

de dados. Técnicas clássicas, como as transformadas Hough, são projetadas para detectar um tipo específico de alinhamento em determinados tipos de entrada. Uma técnica para detectar estes alinhamentos foi desenvolvida por Fernandes e Oliveira (2012) com álgebra geométrica. Essa técnica independe das propriedades geométricas dos alinhamentos bem como o tipo de dados de entrada e supera as técnicas clássicas. Kanatani (2015) coloca em seu livro como descrever e calcular a geometria para as aplicações de modelagem 3D em computação gráfica e visão computacional através das noções básicas da álgebra geométrica.

Uma rede neural artificial é um modelo matemático inspirado em redes neurais biológicas e foi reconhecido como uma ferramenta útil na aprendizagem de máquinas. Por exemplo, redes neurais podem aprender relações não-lineares apenas usando dados de entrada e saída e também podem ser usadas como uma memória associativa. As redes neurais são compostas de vários elementos computacionais não-lineares (chamados neurônios) que operam em paralelo e são organizados de uma maneira que lembra as interconexões neurais biológicas. Buchholz (2005) em sua tese de doutorado faz uma formulação de redes neurais com álgebra de Clifford através de múltiplas camadas com uma função de ativação do tipo split. Ele mostra que os neurônios individuais já descrevem transformações geométricas e estuda os neurônios espinocelulares de Clifford cujos pesos agem como rotores dos dois lados. Discute também os perceptrons multicamadas de Clifford e algoritmo de aprendizagem de retro-propagação, incluindo aplicações de aproximação e predição e comparações com redes neurais convencionais. Rivera-Rovelo, Bayro-Corrochano e Dillmann (2010) apresentam um algoritmo para aproximar a superfície de objetos 2D ou 3D, combinando conceitos de álgebra geométrica e redes neurais artificiais. Esta abordagem baseia-se na rede neural auto-organizada chamada Growing Neural Gas, incorporando versores da álgebra geométrica em suas unidades neurais.

A álgebra geométrica também pode ser aplicada em geometria molecular mais especificamente em geometria de distâncias. Os problemas de geometria de distâncias relacionados à moléculas consistem em se determinar a posição espacial de cada átomo, a partir da estrutura de um grafo cujos pontos representam estes átomos e as arestas representam os pares de átomos cujas distâncias são conhecidas. Nesta área de pesquisa, Alves *et al.* (2013) propõem uma nova abordagem utilizando a álgebra geométrica a fim de tornar o algoritmo Branch and Prune (BP) mais eficiente para solucionar este tipo de problema. Ainda com geometria de distância, Camargo *et al.* (2015) apresentam um método alternativo para a resolução de problemas referentes ao cálculo de estrutura tridimensional de proteínas cujas instâncias podem ser discretizadas. A abordagem considerada difere

da tradicional por tratar os objetos geométricos em um espaço de Minkowski por meio da Álgebra Geométrica Conforme. Souza *et al.* (2017) desenvolvem um método para descrever de maneira contínua os pontos em arcos de intersecção de esferas gerando um aumento significativo do espaço de busca por soluções eliminando os problemas gerados pela discretização do problema. Os artigos, Melo e Lavor (2013), Lavor *et al.* (2015), Alves *et al.* (2017) também tratam do tema geometria de distância e da discretização desses problemas e a solução com álgebra geométrica.

No contexto da dinâmica dos sólidos muitas vezes é preciso estimar as quantidades dinâmicas de um corpo rígido. Seria desejável ter um método geral para conseguir isso sob diferentes restrições dos modelos. No entanto, algumas situações as singularidades são inevitáveis pois dependem do tipo de parametrização que está sendo utilizada. Os quatérnions são uma das formas mais efetiva para a parametrização de rotações pois em muitos casos evitam singularidades na integração numérica das equações de movimento. Jambersi e Silva (2016) fizeram uma comparação da integração numérica da cinemática inversa da solução do movimento de um giroscópio via ângulos de Euler e por quatérnions. Muitas vezes trabalhar em um espaço de dimensão mais alta também é uma forma de evitar singularidade, Baylis (2012) utiliza da álgebra do espaço-tempo para tratar da dinâmica de corpos rígidos e de meios elásticos (HESTENES; LASENBY, 1966). A mecânica homogênea do corpo rígido 3D com acoplamento elástico é estudada por Hestenes e Fasse (2002) em álgebra geométrica com modelo conforme. Neste sentido, Sajeewa e Lasenby (2002) elaboram uma método simples para conseguir informações tais como rotações, velocidades angulares, acelerações e taxa de mudança do momentum angular a partir de dados da posição tridimensionais de pontos em um corpo articulado em movimento. Cibura (2012) amplia o conceito de transformação conforme do plano complexo 2D para espaço de dimensão mais alta com álgebra geométrica e aplica este conceito a um composto de movimentos de rotações em 3D, o que permite encontrar uma decomposição única para o movimento.

Dentre as aplicações da álgebra geométrica, a dinâmica dos fluidos é um campo pouco explorado, porém os autores que estão usando os elementos da álgebra geométrica para modelar o escoamento de um fluido, estão encontrando ampla vantagem em relação a outras linguagens matemática. Entre essas vantagens, Hagen e Scheuermann (2001) mostraram que o fluxo de um fluido 3D pode ser entendido com mais precisão se descrito como um multivetor. Cibura (2007) generaliza o Teorema de Stokes em termos de álgebra geométrica. A partir desse resultado, Cibura e Hildenbrand (2008) provam usando álgebra geométrica dois importantes teoremas para a dinâmica de fluidos: o Teorema de

Circulação de Kelvin e o Teorema de Helmholtz. Isso torna mais fácil tratar a vorticidade, pois descreve as equações de movimento em notação completamente diferente da forma padrão, evitando as singularidades. Mann e Rockwood (2002) apresentam um algoritmo baseado em álgebra geométrica para detectar singularidades. Seu algoritmo é uma aplicação da álgebra geométrica na versão discreta do teorema de Gauss-Bonnet. Pollock e Mann (2014) apresentam um novo método de detecção de vórtices em campos vetoriais usando álgebra geométrica. Este algoritmo examina recursivamente amostras vetoriais e, por meio de uma aplicação da versão bidimensional do Teorema de Gauss-Bonnet, extrai núcleos de vórtices.

2.3 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A partir desta revisão da literatura, observa-se que a estrutura da álgebra geométrica pode ser aplicada em diferentes áreas, tornando uma estrutura mais geral. A área que mais está aderindo a esta estrutura, além da física, é a da computação. Isto se deve ao fato de que objetos geométricos podem atuar como operadores e operadores podem ser transformados como objetos geométricos, isto é, um plano que pode ser visto como um bivetor pode atuar como um elemento de rotação e isso facilita na elaboração do algorítimo possibilitando construir uma fórmula fechada para manipular objetos diferentes. Daí o extensivo uso da álgebra geométrica em computação gráfica gerando algoritmos extremamente rápidos para realidade aumentada, animações, jogos virtuais. Observa-se também que a divulgação desta estrutura entre essas comunidades é mais intensa, além da criação de grupos de pesquisa envolvendo essas áreas. Apesar de integrar vários sistemas algébricos dentro de uma linguagem matemática coerente, na área de mecânica dos fluidos esta estrutura tem menos atenção e poucos trabalhos relacionados ao assunto. Os autores aqui sugerem uma maior resistência e conservadorismo dos pesquisadores desta comunidade para aderir a esta nova forma de representação do movimento de um fluido.

Outras razões também podem ser apontadas para explicar isso, por exemplo, a álgebra vetorial pode ser mais fácil de ser usada por ter uma notação mais clara e ser menos geral o que torna um sistema mais simples e fácil de ser usado pelo fato de ter dois produtos. Outra justificativa é a pouca divulgação nesta comunidade o que pode ser comprovado através da formação dos pesquisadores que estão publicando. Portanto, existem várias lacunas para aplicações e uso mais prático desta teoria na solução de problemas da dinâmica dos fluidos.

Verifica-se que nas diversas áreas em que a álgebra geométrica está sendo aplicada tem

contribuído diretamente na resolução de muitos problemas e na interpretação da solução ou indiretamente como uma ferramenta auxiliar na obtenção da solução.

3 ÁLGEBRA GEOMÉTRICA DE CLIFFORD

Este capítulo apresenta e compara as Álgebras de Gibbs-Heaviside, de Hamilton, de Grassmann e de Clifford. A definição do momentum angular é apresentada em três outros sistemas algébricos diferentes além do sistema convencional de Gibbs-Heaviside no qual é definido na maioria dos livros didáticos. Para finalizar o capitulo é feito uma comparação crítica entre estas definições e o seus significados. Este capítulo apresenta em maior detalhe o conteúdo apresentado em Belançon e Silva (2019).

3.1 COMPARAÇÃO ENTRE ÁLGEBRAS

3.1.1 A álgebra de Gibbs-Heaviside

Em todo este capítulo deve ficar entendido que $\mathbb{R}^3$ representa o espaço Euclidiano tridimensional com um sistema de coordenada retangular e $\mathcal{B} = \{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$ é uma base ortonormal neste espaço. A definição da álgebra vetorial pode ser encontrada em uma vasta lista de livros básicos de geometria, como por exemplo Camargo e Boulos (2005), Winterle (2010), e serão colocadas aqui apenas as definições básicas. Assim, a representação de um vetor $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ é dada simplesmente por $\mathbf{w} = x\hat{e}_1 + y\hat{e}_2 + z\hat{e}_3$ com $x, y, z \in \mathbb{R}$. O módulo de um vetor é dado por

$$| \mathbf{w} | = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \tag{1}$$

Gibbs e Heaviside definiram dois produtos entre estes elementos. Sejam $\mathbf{w}, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ e α o menor ângulo entre eles. Para $\alpha \neq 0$, $\mathbf{w}$ e $\mathbf{u}$ definem um plano e o *produto escalar* entre eles, representado por $\mathbf{w} \cdot \mathbf{u}$, é a relação métrica entre eles e é um número real definido por

$$\mathbf{w} \cdot \mathbf{u} = | \mathbf{w} | | \mathbf{u} | \cos\alpha. \tag{2}$$

A interpretação geométrica desse produto pode ser vista como a multiplicação do módulo de $\mathbf{w}$ com o módulo da componente de $\mathbf{u}$ que tem mesma direção de $\mathbf{w}$ como ilustrado na figura (2). Esse produto está relacionado com comprimento uma vez que ele amplia/reduz o comprimento de um dos vetores. Segue que o produto escalar é comutativo

mas não associativo e satisfaz as seguintes relações entre os vetores da base $\mathcal{B}$

$$\begin{aligned} &\hat{e}_i \cdot \hat{e}_i = 1 \qquad\quad \text{para} \quad i = 1,2,3 \\ &\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \hat{e}_j \cdot \hat{e}_i = 0 \quad \text{para} \quad i \neq j. \end{aligned} \tag{3}$$

Já o *produto vetorial* entre esses vetores, representado por $\mathbf{w} \times \mathbf{u}$, é uma relação geométrica entre eles, pois está relacionado com a área do paralelograma definida entre $\mathbf{w}$ e $\mathbf{u}$ e é um vetor dado por

$$\mathbf{w} \times \mathbf{u} = \mid \mathbf{w} \mid \mid \mathbf{u} \mid (\sin\alpha)\, \hat{n}, \tag{4}$$

onde $\hat{n}$ é um vetor unitário cujo direção é normal ao plano formado por $\mathbf{w}$ e $\mathbf{u}$ e sentido satisfazendo a regra da mão direita. Seu módulo é dado por

$$\mid \mathbf{w} \times \mathbf{u} \mid = \mid \mathbf{w} \mid \mid \mathbf{u} \mid \sin\alpha. \tag{5}$$

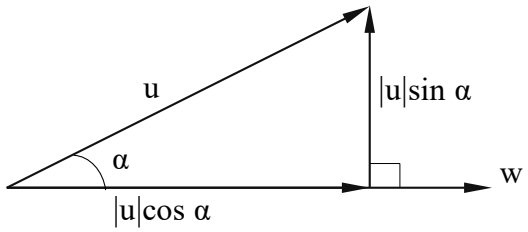
A interpretação geométrica do módulo desse produto pode ser vista como a multiplicação do módulo de $\mathbf{w}$ com módulo da componente de $\mathbf{u}$ que é perpendicular à direção de $\mathbf{w}$, também ilustrado na figura (2). Esse produto está relacionado com o valor da área do paralelogramo formado por esses vetores já que a componente perpendicular é a altura deste paralelogramo.

Segue que o produto vetorial, por sua vez, não é comutativo nem associativo e satisfaz as seguintes relações entre os vetores da base $\mathcal{B}$

$$\begin{aligned} &\hat{e}_i \times \hat{e}_i = 0 \qquad\quad \text{para} \quad i = 1,2 \,\text{ou}\, 3 \\ &\hat{e}_i \times \hat{e}_j = \varepsilon_{ijk}\hat{e}_k \quad \text{para} \quad i \neq j \neq k. \end{aligned} \tag{6}$$

sendo $\varepsilon_{ijk} = 1$ se $ijk = 123, 231$ ou 312 (permutação cíclica) ou $\varepsilon_{ijk} = -1$ se $ijk = 213, 132$ ou 321 (permutação acíclica) o que dá origem a conhecida regra mnemônica da mão direita.

Figura 2 – Interpretação geométrica do produto escalar e do módulo do produto vetorial.



Fonte: Próprio Autor.

Com isso, dado os vetores $\mathbf{w} = x_1\hat{e}_1 + x_2\hat{e}_2 + x_3\hat{e}_3$ e $\mathbf{u} = y_1\hat{e}_1 + y_2\hat{e}_2 + y_3\hat{e}_3$ segue das relações (3), (6) e das propriedades associativa e distributiva dos números reais as expressões conhecidas para os produtos escalar e vetorial, respectivamente

$$\mathbf{w} \cdot \mathbf{u} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3. \tag{7}$$

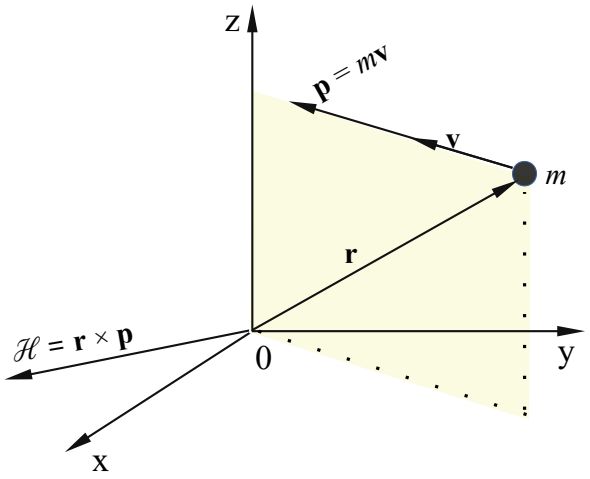
$$\begin{aligned} \mathbf{w} \times \mathbf{u} &= (x_2y_3 - x_3y_2)\hat{e}_1 + (x_3y_1 - x_1y_3)\hat{e}_2 \\ &+ (x_1y_2 - x_2y_1)\hat{e}_3. \end{aligned} \tag{8}$$

Em qualquer livro de física, por exemplo Walker *et al.* (2016), Nussenzveig (2018), pode-se encontrar a definição do momentum angular de uma partícula usando o conceito anterior de produto vetorial. Com esta álgebra o momentum angular de uma partícula de massa m constante, denotado por $\mathscr{H}$, com relação ao ponto O movendo-se com velocidade $\mathbf{v}$ é calculado como

$$\mathscr{H} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = m(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \tag{9}$$

sendo $\mathbf{r}$ o vetor com origem no ponto O até a posição da partícula e $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ é o momentum linear desta partícula. Decorre que o momentum angular é normal ao plano formado pelos vetores $\mathbf{r}$ e $\mathbf{p}$. Geometricamente, o momentum angular pode ser representado como o expresso na figura (3).

Figura 3 – Representação geométrica dos momentos linear e angular



Fonte: Próprio Autor.

Se um vetor posição é $\mathbf{r} = r_1\hat{e}_1 + r_2\hat{e}_2 + r_3\hat{e}_3$ e um vetor velocidade é $\mathbf{v} = v_1\hat{e}_1 + v_2\hat{e}_2 + v_3\hat{e}_3$, segue da equação (8) que a representação algébrica do momento angular será

$$\begin{aligned} \mathscr{H} &= m[(r_2v_3 - r_3v_2)\hat{e}_1 + (r_3v_1 - r_1v_3)\hat{e}_2 \\ &+ (r_1v_2 - r_2v_1)\hat{e}_3] \end{aligned} \tag{10}$$

que é a forma padrão da expressão matemática com que a totalidade dos estudantes tem contato com a definição do momentum angular. Porém, outras formas menos conhecidas do grande público podem ser usadas para descrever o mesmo conceito físico do momentum angular, com uma expressão matemática muito mais adequada.

3.1.2 A Álgebra de Hamilton

A origem dos quatérnions tem como principal objetivo a parametrização de rotações finitas. William Rowan Hamilton, em meados do século XIX, sabia que a multiplicação de números complexos eram isomorfos de rotação no $\mathbb{R}^2$, então buscou de forma estender isto para rotações no $\mathbb{R}^3$ Hamilton (1969). Suas primeiras tentativas envolveram utilizar elementos no $\mathbb{R}^3$ para operar rotações, mas não obteve sucesso em obter uma álgebra fechada. Somente em 1843, Hamilton constatou que precisaria operar elementos no $\mathbb{R}^4$ para rotacionar elementos no $\mathbb{R}^3$.

O conjunto dos quatérnions, denotado por $\mathbb{H}$, satisfaz as propriedades de espaço vetorial sobre o corpo dos números reais. Um quatérnion pode ser representado, conforme

Kuipers *et al.* (1999), por

$$\widetilde{q} = q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k}, \tag{11}$$

sendo q_0, q_1, q_2 e $q_3 \in \mathbb{R}$ os componentes de $\widetilde{q}$ e $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ e $\mathbf{k}$ as unidades imaginárias.

Um quatérnion $\widetilde{q}$ possui uma parte real, chamada por Hamilton de parte escalar, denotada por $S(\widetilde{q}) = q_0$ e uma parte imaginária, conhecida como parte vetorial ou simplesmente *vetor*, denotada por $\mathbf{V}(\widetilde{q}) = q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k}$. Assim, um quatérnion pode ser escrito simplesmente como $\widetilde{q} = S(\widetilde{q}) + \mathbf{V}(\widetilde{q})$. Se $\mathbf{V}(\widetilde{q}) = 0$, então $\widetilde{q} = S(\widetilde{q})$ é um número real; agora se $S(\widetilde{q}) = 0$, então $\widetilde{q} = \mathbf{V}(\widetilde{q})$ é dito um quatérnion puro (vetor).

O produto entre quatérnions é calculado de forma análoga aos números complexos, a única diferença é que nos quatérnions existem três unidades imaginárias, logo Hamilton definiu as seguintes relações fundamentais entre elas

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{ijk} = -1 \tag{12}$$

que tem como consequência

$$\begin{aligned} \mathbf{ij} &= \mathbf{k} = -\mathbf{ji} \\ \mathbf{jk} &= \mathbf{i} = -\mathbf{kj} \\ \mathbf{ki} &= \mathbf{j} = -\mathbf{ik}. \end{aligned} \tag{13}$$

A álgebra de Hamilton não é comutativa em relação ao produto que claramente pode ser visto nas relações (13), porém é uma álgebra fechada.

Aqui considera-se o caso particular dos quatérnions puros que se mostram suficientes para a definição do momentum angular. Dados os quatérnions $\widetilde{q} = 0 + \mathbf{w} = x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k}$ e $\widetilde{p} = 0 + \mathbf{u} = y_1\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + y_3\mathbf{k}$, o produto entre eles é dado por

$$\begin{aligned} \widetilde{q}\widetilde{p} = \mathbf{wu} &= -(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3) \\ &+ (x_2y_3 - x_3y_2)\mathbf{i} + (x_3y_1 - x_1y_3)\mathbf{j} \\ &+ (x_1y_2 - x_2y_1)\mathbf{k} \end{aligned} \tag{14}$$

Que pode ser escrito de forma mais compacta utilizando os produtos escalar e vetorial

$$\widetilde{q}\widetilde{p} = -\mathbf{V}(\widetilde{q}) \cdot \mathbf{V}(\widetilde{p}) + \mathbf{V}(\widetilde{q}) \times \mathbf{V}(\widetilde{p}) \tag{15}$$

Como o objetivo é escrever o momentum angular, assume-se o vetor posição $\mathbf{r}$ e o vetor velocidade $\mathbf{v}$ como quatérnions puros da forma $\widetilde{r} = 0 + \mathbf{r} = r_1\mathbf{i} + r_2\mathbf{j} + r_3\mathbf{k}$ e $\widetilde{v} = 0 + \mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$. Assim, o produto entre quatérnions puro é dado pela expressão

$$\begin{aligned} \widetilde{r}\widetilde{v} = \mathbf{rv} &= -(r_1v_1 + r_2v_2 + r_3v_3) \\ &+ (r_2v_3 - r_3v_2)\mathbf{i} + (r_3v_1 - r_1v_3)\mathbf{j} \\ &+ (r_1v_2 - r_2v_1)\mathbf{k} \end{aligned} \tag{16}$$

O produto de dois quatérnions puros tem como resultado a estrutura de um quatérnion geral (parte escalar e vetorial). Pode-se observar na equação (16) que a parte vetorial tem a mesma estrutura que a equação (10) e descreve a mesma grandeza já que possuem mesmo módulo, direção e sentido e que pode ser comprovado também através da equação compacta (15). Portanto, o momentum angular pode ser considerado como a parte vetorial do produto entre os dois quatérnions $\widetilde{r}$ e $\widetilde{v}$, isto é, $\mathscr{H} = m[\mathbf{V}(\widetilde{r}\widetilde{v})]$.

3.1.3 A Álgebra de Grassmann

Devido às características dos quatérnions em descrever muitos fenômenos naturais da época, vários pesquisadores se interessaram em pesquisar novos objetos matemáticos adequados para o estudo da natureza entre eles, Hermann Günther Grassmann que em 1873, publicou um artigo denominado *Die Lineale Ausdehnungslehre* (GRASSMANN, 1844) (Álgebra das Extensões Lineares), onde propôs que as grandezas físicas fossem representadas por objetos geométricos em vez de numéricos.

A álgebra de Grassmann pode ser construída a partir das aplicações lineares alternadas ou a partir do quociente de alguma álgebra tensorial. Porém, o objetivo é saber como calcular o produto entre vetores para descrever o momentum angular. Sendo assim, apresentam-se apenas as principais definições sem entrar em conceitos mais gerais. O leitor interessado pode consultar as referências Vaz e Rocha (2012), Lima (2009) para detalhes aprofundados.

Dado um tensor na forma $\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2 \otimes ... \otimes \mathbf{v}_r$, em que $\mathbf{v}_i$ com $i = 1, ..., r$ são vetores do espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ sobre o corpo dos reais $\mathbb{R}$ e $\otimes$ denota o produto tensorial, pode-se definir o *operador alternador*, denotado por Alt, como segue

$$\mathrm{Alt}(\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2 \otimes ... \otimes \mathbf{v}_r) = \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in S_r} \varepsilon(\sigma)\mathbf{v}_{\sigma(1)} \otimes \mathbf{v}_{\sigma(2)} \otimes ... \otimes \mathbf{v}_{\sigma(r)}, \tag{17}$$

onde S_r é o conjunto de todas as permutações possíveis dos vetores $\mathbf{v}_i$ e $\varepsilon(\sigma) = 1$, se o

número de permutações feitas for par, e $\varepsilon(\sigma) = -1$, se o número de permutações feitas for ímpar. O operador Alt assim definido é um operador de projeção. Por exemplo, para um tensor da forma $\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{v}_3$ o alternador é escrito como

$$\begin{aligned} \mathrm{Alt}(\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{v}_3) &= \frac{1}{6}(\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{v}_3 \otimes \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3 \otimes \mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2 \\ &= -\mathbf{v}_3 \otimes \mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_3 \otimes \mathbf{v}_2). \end{aligned} \tag{18}$$

Nestas condições, um r-vetor, denotado por A_r, é um tensor contravariante[2] de ordem r (ou grade r) alternado

$$A_r = Alt(\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2 \otimes ... \otimes \mathbf{v}_r), \tag{19}$$

onde $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_r \in \mathbb{R}^3$.

Denota-se por $\bigwedge^r(\mathbb{R}^3)$ o conjunto dos r-vetores. Tal conjunto possui a estrutura de espaço vetorial. É possível definir um produto entre elementos desses espaços. Sejam $A_r \in \bigwedge^r(\mathbb{R}^3)$ um r-vetor e $B_s \in \bigwedge^s(\mathbb{R}^3)$ um s-vetor. Como essas quantidades, A_r e B_s, são tensores alternados é natural considera o produto tensorial entre elas, isto é, $A_r \otimes B_s$. Porém, o resultado deste produto tensorial, embora seja um tensor de ordem $r+s$, não é alternado. Assim, o *produto externo* deve ser definido da seguinte forma

$$\begin{array}{rccc} \wedge: & \bigwedge^r(\mathbb{R}^3) \times \bigwedge^s(\mathbb{R}^3) & \longrightarrow & \bigwedge^{r+s}(\mathbb{R}^3) \\ & A_r \wedge B_s & \longmapsto & Alt(A_r \otimes B_s), \end{array} \tag{20}$$

este produto também é conhecido como *cunha ou Grassmann* e é associativo.

Das relações (17) e (20) pode-se calcular o produto externo de dois vetores $\mathbf{v_1}$ e $\mathbf{v_2}$

$$\mathbf{v_1} \wedge \mathbf{v_2} = \mathrm{Alt}(\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2) = \frac{1}{2!}\sum_{\sigma \in S_2} \varepsilon(\sigma)\mathbf{v}_{\sigma(1)} \otimes \mathbf{v}_{\sigma(2)} = \frac{1}{2}(\mathbf{v_1} \otimes \mathbf{v_2} - \mathbf{v_2} \otimes \mathbf{v_1}) \tag{21}$$

claramente é possível concluir que o produto externo é não comutativo. Ao aplicar este produto nos vetores de $\mathcal{B}$ estes satisfazem as seguintes relações

$$\begin{aligned} &\hat{e}_i \wedge \hat{e}_i = 0 \qquad \text{para} \quad i = 1, 2, 3 \\ &\hat{e}_i \wedge \hat{e}_j = -\hat{e}_j \wedge \hat{e}_i \quad \text{para} \quad i \neq j. \end{aligned} \tag{22}$$

Além disso, pode-se construir quatro subespaços vetoriais a partir do $\mathbb{R}^3$, isto é, para $r = 0, ..., 3$ têm-se $\bigwedge^0(\mathbb{R}^3) = \mathbb{R}$ subespaço dos escalares, $\bigwedge^1(\mathbb{R}^3) = \mathbb{R}^3$ subespaço dos 1-

[2]São tensores do tipo (0,s) - por exemplo um vetor é um tensor contravariante do tipo (0,1).

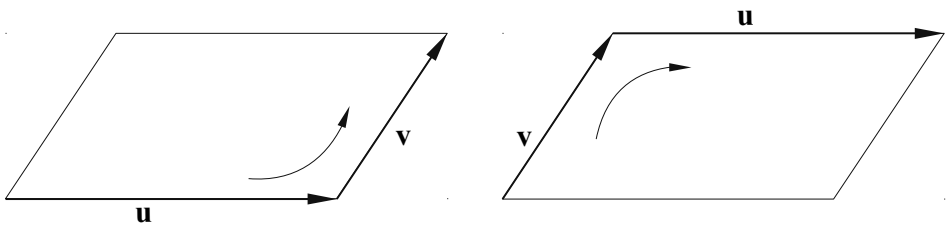
vetores (ou vetores), $\bigwedge^2(\mathbb{R}^3)$ subespaço dos 2-vetores (ou bivetores), $\bigwedge^3(\mathbb{R}^3)$ espaço dos 3-vetores (ou trivetores).

Os escalares e vetores são os usuais conhecidos da álgebra vetorial, mas os bivetor e trivetor são os objetos que diferenciam a álgebra de Grassmann uma vez que estes estão relacionados com área e volume que não encontram correspondentes na álgebra de Gibbs-Heaviside. Uma base para o subespaço dos bivetores é dado por todas as permutações da forma $\hat{e}_i \wedge \hat{e}_j$ dos elementos de $\mathcal{B}$ que são linearmente independentes. Um conjunto dessas permutações é dado por $\{\hat{e}_1 \wedge \hat{e}_2, \hat{e}_1 \wedge \hat{e}_3, \hat{e}_2 \wedge \hat{e}_3\}$. Assim, um bivetor pode ser escrito, algebricamente, na forma

$$A_2 = a_{12}\hat{e}_1 \wedge \hat{e}_2 + a_{13}\hat{e}_1 \wedge \hat{e}_3 + a_{23}\hat{e}_2 \wedge \hat{e}_3 \tag{23}$$

e, geometricamente, pode ser representado como um fragmento de plano orientado gerado por dois vetores ordenados, conforme a figura (4), que também ilustra as duas orientações possíveis.

Figura 4 – Visão geométrica de um bivetor.



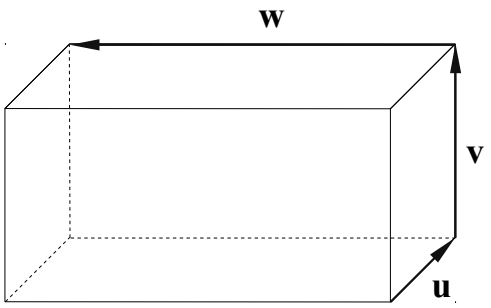
Fonte: Próprio Autor.

Já uma base para o subespaço dos trivetores é qualquer permutação da forma $\hat{e}_i \wedge \hat{e}_j \wedge \hat{e}_k$. Assim, um trivetor pode ser escrito, algebricamente, como

$$A_3 = a_{123}\hat{e}_1 \wedge \hat{e}_2 \wedge \hat{e}_3 \tag{24}$$

e, geometricamente, pode ser representado como um volume orientado. A figura (5) apresenta este volume com uma orientação das seis possíveis.

Figura 5 – Visão geométrica de um trivetor.



Fonte: Próprio Autor.

Ao aplicar o produto externo em um r-vetor e um s-vetor, equação (20), o resultado é um $(r+s)$-vetor que não pertence ao subespaço $\bigwedge^r(V)$ e nem ao subespaço $\bigwedge^s(V)$. Para resolver o problema do não fechamento deste produto, pode-se considerar a soma direta dos quatros subespaços vetoriais construídos a partir de $\mathbb{R}^3$, isto é,

$$\bigwedge(\mathbb{R}^3) = \bigoplus_{r=0}^{3} \bigwedge^r(\mathbb{R}^3) \tag{25}$$

no qual é fechado em relação ao produto externo. Este espaço é denominado *espaço multivetorial* e cada elemento arbitrário $A \in \bigwedge(\mathbb{R}^3)$ é chamado de *multivetor* e pode ser escrito de maneira geral como

$$A = \underbrace{a_0}_{escalar} + \underbrace{a_1\hat{e}_1 + a_2\hat{e}_2 + a_3\hat{e}_3}_{1-vetor} + \underbrace{a_{12}\hat{e}_1 \wedge \hat{e}_2 + a_{13}\hat{e}_1 \wedge \hat{e}_3 + a_{23}\hat{e}_2 \wedge \hat{e}_3}_{2-vetor} + \underbrace{a_{123}\hat{e}_1 \wedge \hat{e}_2 \wedge \hat{e}_3}_{3-vetor}. \tag{26}$$

Ao analisar o multivetor A observa-se uma construção natural de uma base canônica $\overline{\mathcal{B}}$ para o espaço multivetorial a partir da base canônica $\mathcal{B}$ do $\mathbb{R}^3$

$$\overline{\mathcal{B}} = \{1, \hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3, \hat{e}_1 \wedge \hat{e}_2, \hat{e}_1 \wedge \hat{e}_3, \hat{e}_2 \wedge \hat{e}_3, \hat{e}_1 \wedge \hat{e}_2 \wedge \hat{e}_3\}. \tag{27}$$

Tal espaço dotado do produto externo é denominado *álgebra exterior* do espaço vetorial $\mathbb{R}^3$. Em muitos textos é considerado a álgebra exterior e a álgebra de Grassmann[3] como sinônimos, porém existe uma distinção entre as duas estruturas, a álgebra de Grassmann é a álgebra exterior equipado com uma generalização de um funcional linear $g : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ para o espaço vetorial $\bigwedge(\mathbb{R}^3)$. Como o interesse é no produto entre dois vetores, o produto externo é calculado de forma análoga na álgebra de Grassmann e não se adentrará no rigor das definições, que podem ser encontradas em Vaz e Rocha

[3]Denotada como $\mathcal{G}_n$ álgebra de Grasmann n-dimensional.

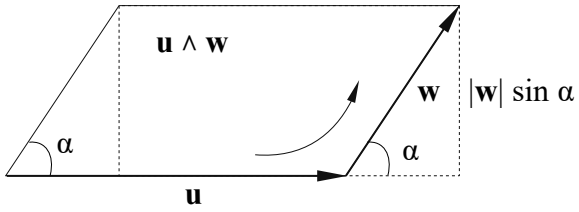
(2012).

O módulo de um bivetor pode ser dado como a área do paralelogramo formado pelo produto externo entre dois vetores, isto é

$$| \mathbf{u} \wedge \mathbf{w} | = | \mathbf{u} \| \mathbf{w} | \sin \alpha \tag{28}$$

com a interpretação geométrica descrita na figura (6).

Figura 6 – Representação geométrica do módulo de um bivetor.



Fonte: Próprio Autor.

Pode-se definir um produto métrico, denominado *contração à esquerda*,[4] entre p-vetores equivalente ao produto escalar quando restrito a vetores.

$$\begin{array}{rccc} \rfloor : & \bigwedge^r(\mathbb{R}^3) \times \bigwedge^s(\mathbb{R}^3) & \longrightarrow & \bigwedge^{s-r}(\mathbb{R}^3) \\ & A_r \rfloor B_s & \longmapsto & C_{s-r} \end{array}$$

Este produto não é associativo e só é simétrico se $r = s$ porém satisfaz as seguintes propriedades:

i) $\alpha \rfloor A_r = \alpha A_r$;

ii) $\mathbf{u} \rfloor \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$;

iii) $\mathbf{u} \rfloor (B_s \wedge C_k) = (\mathbf{u} \rfloor B_s) \wedge C_k + (-1)^s B_s \wedge (\mathbf{u} \rfloor C_k)$;

iv) $(A_r \wedge B_s) \rfloor C_k = A_r \rfloor (B_s \rfloor C_k)$.

onde α é um escalar, $\mathbf{u}$ e $\mathbf{w}$ são vetores e A_r, B_s, C_k um r-vetor um s-vetor e um k-vetor respectivamente.

[4] Pode-se definir a contração à direita de forma anóloga e denotada por $\lfloor$. A contração também é muitas vezes denominada de produto interno quando calculada entre vetores.

Com isto, defini-se uma operação, denotada pelo símbolo $\star$, denominada *dualidade* ou como em Vaz e Rocha (2012) *isomorfismo quase-Hodge* como segue

$$\begin{array}{rccc} \star: & \bigwedge^r(\mathbb{R}^3) & \longrightarrow & \bigwedge^{3-r}(\mathbb{R}^3) \\ & \star A_r & \longmapsto & -A_r \rfloor \mathbb{I}_3 \end{array} \tag{29}$$

onde $\mathbb{I}_3$ representa um trivetor simples unitário, isto é, $\mathbb{I}_3 = \hat{e}_1 \wedge \hat{e}_2 \wedge \hat{e}_3$ denominado como pseudoescalar.

Por exemplo, para calcular o dual do bivetor $A_2 = \hat{e}_1 \wedge \hat{e}_2$ deve ser aplicado, além da definição (29), as propriedades da contração, ou seja,

$$\begin{aligned} \star A_2 &= -(\hat{e}_1 \wedge \hat{e}_2)\rfloor(\hat{e}_1 \wedge \hat{e}_2 \wedge \hat{e}_3) \\ &= -\{\hat{e}_1\rfloor(\hat{e}_2\rfloor(\hat{e}_1 \wedge (\hat{e}_2 \wedge \hat{e}_3)))\} \\ &= -\{\hat{e}_1\rfloor(\hat{e}_2\rfloor\hat{e}_1) \wedge (\hat{e}_2 \wedge \hat{e}_3) - \hat{e}_1 \wedge (\hat{e}_2\rfloor(\hat{e}_2 \wedge \hat{e}_3))\} \\ &= -\{\hat{e}_1\rfloor(\hat{e}_2\rfloor\hat{e}_1) \wedge (\hat{e}_2 \wedge \hat{e}_3) - \hat{e}_1 \wedge [(\hat{e}_2\rfloor\hat{e}_2) \wedge \hat{e}_3 - \hat{e}_3 \wedge (\hat{e}_2\rfloor\hat{e}_1)]\} \\ &= -\{\hat{e}_1\rfloor(-\hat{e}_1 \wedge \hat{e}_3)\} \\ &= -\{-\hat{e}_1\rfloor\hat{e}_1 \wedge \hat{e}_3 + \hat{e}_1 \wedge (\hat{e}_1\rfloor\hat{e}_3)\} \\ &= -\{-\hat{e}_3\} = \hat{e}_3 \end{aligned}$$

Com isso, a representação dos vetores posição $\mathbf{r}$ e velocidade $\mathbf{v}$ no espaço multivetorial $\bigwedge(\mathbb{R}^3)$ pode ser escritos da seguinte forma $\mathbf{r} = r_1\hat{e}_1 + r_2\hat{e}_2 + r_3\hat{e}_3$ e $\mathbf{v} = v_1\hat{e}_1 + v_2\hat{e}_2 + v_3\hat{e}_3$. Segue do produto externo entre vetores, (21), que

$$\mathbf{r} \wedge \mathbf{v} = \frac{1}{2}(\mathbf{r} \otimes \mathbf{v} - \mathbf{v} \otimes \mathbf{r}). \tag{30}$$

Desenvolvendo os termos

$$\begin{aligned} \mathbf{r} \otimes \mathbf{v} &= r_1v_1\hat{e}_1 \wedge \hat{e}_1 + r_1v_2\hat{e}_1 \wedge \hat{e}_2 + r_1v_3\hat{e}_1 \wedge \hat{e}_3 \\ &+ r_2v_1\hat{e}_2 \wedge \hat{e}_1 + r_2v_2\hat{e}_2 \wedge \hat{e}_2 + r_2v_3\hat{e}_2 \wedge \hat{e}_3 \\ &+ r_3v_1\hat{e}_3 \wedge \hat{e}_1 + r_3v_2\hat{e}_3 \wedge \hat{e}_2 + r_3v_3\hat{e}_3 \wedge \hat{e}_3 \\ \\ \mathbf{v} \otimes \mathbf{r} &= v_1r_1\hat{e}_1 \wedge \hat{e}_1 + v_1r_2\hat{e}_1 \wedge \hat{e}_2 + v_1r_3\hat{e}_1 \wedge \hat{e}_3 \\ &+ v_2r_1\hat{e}_2 \wedge \hat{e}_1 + v_2r_2\hat{e}_2 \wedge \hat{e}_2 + v_2r_3\hat{e}_2 \wedge \hat{e}_3 \\ &+ v_3r_1\hat{e}_3 \wedge \hat{e}_1 + v_3r_2\hat{e}_3 \wedge \hat{e}_2 + v_3r_3\hat{e}_3 \wedge \hat{e}_3 \end{aligned}$$

e aplicando as relações (22) nestes termos e substituindo o resultado em (30) tem-se finalmente

$$\begin{aligned} \mathbf{r} \wedge \mathbf{v} &= (r_1v_2 - r_2v_1)\hat{e}_1 \wedge \hat{e}_2 + (r_1v_3 - r_3v_1)\hat{e}_1 \wedge \hat{e}_3 \\ &+ (r_2v_3 - r_3v_2)\hat{e}_2 \wedge \hat{e}_3 \end{aligned} \tag{31}$$

Mesmo sabendo que o produto entre vetores na álgebra de Grassmann resulta em um bivetor que por sua vez está relacionado com área assim como o momentum angular isto não é suficiente para dizer que ambos representam a mesma grandeza. Além disto, a comparação das equações (31) e (10) não podem ser feita pois possuem grades diferentes. Isto é, uma está no subespaço dos vetores e a outra no subespaço dos bivetores. Porém, na álgebra de Grassmann do $\mathbb{R}^3$, o subespaço dos vetores é isomorfo ao subespaço dos bivetores, com isso e da operação de dualidade é possível encontrar um representante do bivetor $\mathbf{r} \wedge \mathbf{v}$ no subespaço dos vetores para tal comparação. Desta forma,

$$\star(\mathbf{r} \wedge \mathbf{v}) = (r_2 v_3 - r_3 v_2)\hat{e}_1 + (r_3 v_1 - r_1 v_3)\hat{e}_2 + (r_1 v_2 - r_2 v_1)\hat{e}_3 = \mathbf{r} \times \mathbf{v}. \tag{32}$$

Por outro lado, o bivetor $\mathbf{r} \wedge \mathbf{v}$ e o vetor $\mathbf{r} \times \mathbf{v}$ possuem o mesmo módulo, conforme as equações (5) e (28). Assim o momentum angular é o dual deste bivetor, isto é,

$$\mathscr{H} = m[\star(\mathbf{r} \wedge \mathbf{v})]. \tag{33}$$

3.1.4 Álgebra Geométrica

Devido à álgebra de Grassmann ser por demais complexa para a época e poucos foram os que a entenderam e mediante todo o prestígio de Hamilton já bastante conhecido pelas suas pesquisas matemáticas à álgebra de Grassmann acabou quase que esquecida. Mas ao menos uma mente reconheceu a grandeza de seu trabalho e pôde ir além, demonstrando várias semelhanças entre o trabalho de Hamilton com o de Grassmann e formulando uma nova álgebra que englobava ambas as formulações de uma forma bem mais simples. Em 1878 William Kingdon Clifford desenvolveu o que ele mesmo denominada *Álgebra Geométrica*.

Para uma definição mais geral da álgebra geométrica é considerado um espaço vetorial V n-dimensional sobre $\mathbb{R}$ equipado com uma forma bilinear simétrica $g : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$, $\mathcal{A}$ uma álgebra associativa com unidade $\mathbf{1}_{\mathcal{A}}$ e ainda γ uma aplicação linear $\gamma : V \longrightarrow \mathcal{A}$.

Uma *álgebra geométrica* é o par $(\mathcal{A}, \gamma)$ para o espaço quadrático (V, g) quando $\mathcal{A}$ é gerada como uma álgebra por $\{\gamma(\mathbf{u}) \mid \mathbf{u} \in V\}$ com γ satisfazendo

$$\gamma(\mathbf{u})\gamma(\mathbf{w}) + \gamma(\mathbf{w})\gamma(\mathbf{u}) = 2g(\mathbf{u}, \mathbf{w})\mathbf{1}_{\mathcal{A}}, \tag{34}$$

para todo $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in V$.

A aplicação γ apresenta como uma espécie de raiz quadrada da forma quadrática, isto

é $Q(\mathbf{u}) = g(\mathbf{u}, \mathbf{u})$ visto que

$$(\gamma(\mathbf{u}))^2 = Q(\mathbf{u}) = g(\mathbf{u}, \mathbf{u}). \tag{35}$$

Uma álgebra geométrica construída sobre o espaço $\mathbb{R}^{p,q,r}$, onde $p + q + r = n$ é a dimensão de $\mathbb{R}$, é denotada por $\mathcal{C}\ell_{p,q,r}(V, g)$. A sequência (p, q, r) é denominado assinatura da métrica de um espaço vetorial $\mathbb{R}^n$. Na prática, o que essa notação define é uma base $\{\hat{e}_i\}_{i=1}^n$ para o espaço vetorial, composta com $n = p + q + r$ vetores ortogonais, onde os vetores de base apresentam a seguinte relação métrica:

$$\hat{e}_i\hat{e}_i = \begin{cases} +1 & \text{se} \quad i = j \quad \text{e} \quad 1 \leq i \leq p \\ -1 & \text{se} \quad i = j \quad \text{e} \quad p < i \leq p + q \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \tag{36}$$

Se $r = 0$ a notação $\mathbb{R}^{p,q,r}$ é simplificada para $\mathbb{R}^{p,q}$ e a álgebra geométrica é denotada como $\mathcal{C}\ell_{p,q}(V, g)$. Quando tanto $r = 0$ quanto $q = 0$ a notação é simplificada para $\mathbb{R}^n$, a álgebra geométrica é denotado $\mathcal{C}\ell_n(V, g)$ e a métrica a ser considerada é a Euclidiana.

O *produto geométrico* (ou de Clifford) entre dois vetores $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in V$ é dado por

$$\gamma(\mathbf{u})\gamma(\mathbf{w}) = \gamma(g(\mathbf{u}, \mathbf{w})) + \gamma(\mathbf{u} \wedge \mathbf{w}), \tag{37}$$

onde $\mathbf{u} \wedge \mathbf{w}$ denota o produto externo herdado da álgebra de Grassmann e o produto geométrico não possui nenhum símbolo especial e portanto é denotado por uma justaposição simples dos operandos $\gamma(\mathbf{u})$ e $\gamma(\mathbf{w})$.

Em outras palavras, o produto geométrico entre dois vetores pode ser visto como uma composição entre duas partes: a primeira é a imagem dentro de $\mathcal{C}\ell_{p,q,r}(V, g)$ da contração de $\mathbf{u}$ sobre $\mathbf{w}$ e a segunda parte é a imagem dentro de $\mathcal{C}\ell_{p,q,r}(V, g)$ do produto externo. Existe um isomorfismo de espaços vetoriais entre a álgebra geométrica e a álgebra de Grassmann e portanto o espaço de Clifford $\mathcal{C}\ell_{p,q,r}(V, g)$ possui uma estrutura multivetorial. Desta forma, os elementos da álgebra geométrica são denominados também de multivetores.

A partir de agora considera-se novamente um sistema Euclidiano tridimensional, isto é $V = \mathbb{R}^3$ munido do produto escalar (equação (155)), e uma base ortonormal $\mathcal{B}$. Para aplicar a relação (37) define-se uma aplicação linear $\gamma : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $\gamma(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$ para todo $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$, uma forma bilinear simétrica $g : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$ para

todo $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ e $\mathbf{1}_{\mathcal{A}} = 1$. Assim, aplicando aos elementos da base $\mathcal{B}$ segue as relações

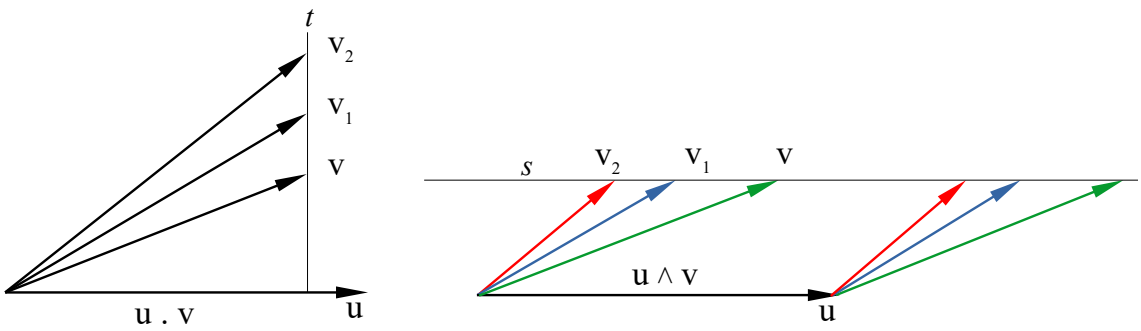
$$\begin{aligned} \hat{e}_i\hat{e}_i &= 1 \qquad \text{para} \quad i = 1, 2, 3 \\ \hat{e}_i\hat{e}_j &= -\hat{e}_j\hat{e}_i \quad \text{para} \quad i \neq j. \end{aligned} \tag{38}$$

O produto geométrico, dado pela equação (37), entre vetores pode ser reescrito como

$$\mathbf{uw} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{u} \wedge \mathbf{w}. \tag{39}$$

Uma propriedade importante do produto geométrico é a unicidade do inverso. Esta é uma propriedade que não é encontrada no produto escalar nem no produto externo, pois não é possível determinar apenas uma única solução, mas um conjunto de soluções. Ao avaliar o significado geométrico desses produtos, é possível notar, no entanto, que ambos são complementares, o que torna o produto geométrico invertível. De fato, considere um vetor fixo $\mathbf{u}$. O produto escalar $u \cdot v$ (equação (155) define um valor para o tamanho da projeção de $\mathbf{v}$ sobre $\mathbf{u}$. As numerosas posições possíveis para $\mathbf{v}$ são encontradas sobre uma reta fixa t (Figura (140)). Por outro lado, o bivetor $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ descreve um elemento de área. Assim, como o vetor $\mathbf{u}$ é fixo o produto externo fixa uma reta s ortogonal à reta t (Figura (140)). Combinar as duas informações é obviamente suficiente para determinar completamente um único vetor. Portanto, o produto geométrico garante a unicidade do inverso de qualquer vetor não nulo.

Figura 7 – Produto escalar (à esquerda) e produto externo (à direita).



Fonte: Próprio Autor.

Dentro da álgebra geométrica também é possível definir a operação de *dualidade*, como na álgebra de Grassmann, e será denotado da mesma forma por $\star$. Esta operação é análoga à chamada dualidade de Hodge dentro do cálculo com formas diferenciais (FLANDERS,

1963). Dado um k-vetor $A_k \in \bigwedge(\mathbb{R}^3)$, com $k = 0, ..., 3$, seu dual é definido como sendo

$$\star A_k = (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} A_k \mathbb{I}_3 \tag{40}$$

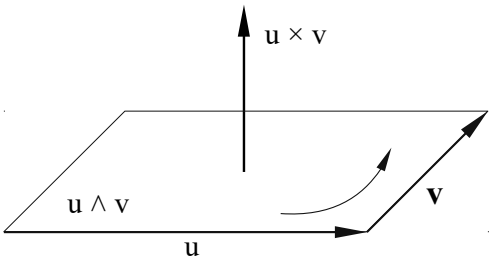
onde $\mathbb{I}_3$ representa um trivetor simples unitário, isto é, $\mathbb{I}_3 = \hat{e}_1\hat{e}_2\hat{e}_3$ denominado como pseudoescalar.

Um resultado importante obtido usando dualidade é, dado dois vetores $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in \bigwedge(\mathbb{R}^3)$ pode-se relacionar o produto vetorial com o produto externo

$$\mathbf{u} \times \mathbf{w} = \star(\mathbf{u} \wedge \mathbf{w}) = -(\mathbf{u} \wedge \mathbf{w})\mathbb{I}_3. \tag{41}$$

sendo que a figura (8) mostra a interpretação geométrica desta relação.

Figura 8 – Representação geométrica do isomorfismo de Hodge.



Fonte: Próprio Autor.

Já a representação dos vetores posição $\mathbf{r}$ e velocidade $\mathbf{v}$ no espaço multivetorial $\bigwedge(\mathbb{R}^3)$ é da forma $\mathbf{r} = r_1\hat{e}_1 + r_2\hat{e}_2 + r_3\hat{e}_3$ e $\mathbf{v} = v_1\hat{e}_1 + v_2\hat{e}_2 + v_3\hat{e}_3$.

Calculando os produtos escalar e externo e substituindo na equação (39) obtém-se a expressão do produto geométrico

$$\begin{aligned} \mathbf{rv} &= \mathbf{r}\cdot\mathbf{v} + \mathbf{r}\wedge\mathbf{v} \\ \mathbf{rv} &= (r_1v_1 + r_2v_2 + r_3v_3) \\ &+ (r_1v_2 - r_2v_1)\hat{e}_1\wedge\hat{e}_2 + (r_1v_3 - r_3v_1)\hat{e}_1\wedge\hat{e}_3 \\ &+ (r_2v_3 - r_3v_2)\hat{e}_2\wedge\hat{e}_3 \end{aligned} \tag{42}$$

Observa-se que ao aplicar a equação (39) nos elementos da base, tem-se

$$\hat{e}_i\hat{e}_j = \hat{e}_i\cdot\hat{e}_j + \hat{e}_i\wedge\hat{e}_j, \tag{43}$$

e da relação (3) que

$$\hat{e}_i\hat{e}_j = \hat{e}_i \wedge \hat{e}_j. \tag{44}$$

Logo a equação (42) pode ser reescrita da forma

$$\begin{aligned} \mathbf{rv} &= (r_1v_1 + r_2v_2 + r_3v_3) \\ &+ (r_1v_2 - r_2v_1)\hat{e}_1\hat{e}_2 + (r_1v_3 - r_3v_1)\hat{e}_1\hat{e}_3 \\ &+ (r_2v_3 - r_3v_2)\hat{e}_2\hat{e}_3 \end{aligned} \tag{45}$$

Pode-se ver claramente na equação (45) que aparece o bivetor dado pelo produto externo escrito em termos do produto geométrico. Esse bivetor representa, como já foi visto na seção anterior, de maneira mais precisa o momentum angular pois $\mathscr{H}$ está associada com área em vez de comprimento e os bivetores possuem naturalmente a característica de associar-se com área. Outra forma de ver isto é calcular o vetor momentum angular através da operação de dualidade (41), isto é,

$$\mathbf{r} \times \mathbf{v} = -(\mathbf{r} \wedge \mathbf{v})\mathbb{I}_3 \tag{46}$$

e uma característica importante desta operação é que seu resultado não muda o sinal perante uma inversão espacial que é a mesma característica do produto vetorial. Além disso, o produto geométrico tráz como resultado todas as informações entre os vetores **r** e **v**: uma relação métrica e uma relação geométrica cuja representação é mais precisa.

3.2 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Heaviside usou o eletromagnetismo como incentivo para elaborar seu produto vetorial na descrição das equações de Maxwell, obtendo uma praticidade operacional no tratamento destas equações. Porém, com as novas teorias físicas deve-se descrever com maior exatidão algumas dessas novas grandezas. Neste cenário, vale observar que o momentum angular é uma grandeza que não atua ao longo de uma reta e sim ao longo de um plano. Logo da forma que é definido via álgebra vetorial, não é a melhor maneira de representá-lo. Na álgebra de Hamilton a parte vetorial da equação (16) representa, tanto algebricamente, quanto geometricamente, o momentum angular descrito na álgebra vetorial. Porém, matematicamente, também não é a forma mais efetiva de representá-lo uma vez que nesse contexto atua ao longo de uma reta, conforme foi mostrado neste capítulo. Já na álgebra de Grassmann o produto entre dois vetores tem como resultado um bivetor, dado pela

equação (21), que descreve naturalmente uma área orientada e possui a mesma estrutura, bastando aplicar o isomorfismo de Hodge para chegar a isto, além de possuir o mesmo módulo que a equação (10). Desta forma, um bivetor é a melhor maneira de representar matematicamente a grandeza física momentum angular. Por outro lado, na álgebra geométrica, o resultado do produto geométrico, além de ter o bivetor, que descreve a relação vetorial, possuí também um escalar, que descreve a relação métrica, unificando duas operações em um produto. Isto torna esta álgebra a mais completa para descrever a complexidade de diversas grandezas físicas importantes não só para físicos, como também engenheiros. Esta álgebra é mais geral e engloba todas as outras. Os autores Vaz e Rocha (2012) mostram diversas representações da álgebra dos números complexos, $\mathcal{C}\ell_{0,1}$, da álgebra dos quatérnions, $\mathcal{C}\ell_{0,2}$ e uma construção da álgebra de Grassmann a partir do produto geométrico, uma vez que ambos possuem a mesma estrutura multivetorial e quase todos os outros produtos podem ser definidos a partir do produto geométrico. Vale ressaltar também que a álgebra vetorial só vale para espaços de dimensão três, enquanto a álgebra de Hamilton é válida para espaços de dimensão até quatro, por outro lado, as álgebras de Grassmann e geométrica são válidas para espaços de qualquer dimensão. Além disso, as álgebras de Hamilton e Grassmann integram na álgebra geométrica assim como a álgebra de Gibbs-Heaviside pois em $\mathcal{C}\ell_3$ um escalar é o dual do trivetor e o vetor é o dual do bivetor. Por fim, ao representar o momentum angular, uma grandeza simples, com a estrutura da álgebra geométricca foi possível obter todas as informações relacionadas a essa grandeza, então, se aplicar a estrutura da álgebra geométrica em certas grandezas não tão simples será possível obter também todas as informações existentes nessa grandeza?

4 ÁLGEBRA GEOMÉTRICA DA HIDRODINÂMICA

Este capitulo tem como meta apresentar outra abordagem matemática para descrever as equações clássicas do movimento de um fluido ideal. Essas equações podem ser compactadas em uma única equação, simples e elegante, usando a estrutura da álgebra geométrica. Na primeira seção é construído um sistema com quatro equações a partir das equações da hidrodinâmica para mostrar a analogia com as equações do eletromagnetismo e como esta analogia contribui na aplicação da álgebra geométrica. Neste caso, foram definidos dois campos vetoriais para fazer analogia aos dois campos vetoriais do eletromagnetismo (campos elétrico e magnético) e consequentemente o sistema de equações resultante. Na segunda seção é utilizado o produto externo e os equivalentes duais para incorporar o sistema de equações no espaço multivetorial. Com isto, o produto geométrico é utilizado para reescrever o sistema de equações em uma única equação e a partir disso fica mais claro o poder que o produto geométrico tem de unificar as equações e com isso compactá-las. Para finalizar o capítulo algumas considerações são apresentadas para mostrar os benefícios dessa abordagem.

4.1 AS EQUAÇÕES DO ELETROMAGNETISMO

Originalmente, Maxwell escreveu suas equações sem utilizar o conceito de vetor, consistiam em oito equações, quatro descrevendo o campo elétrico, e outras quatro, o campo magnético. Para cada conjunto de quatro equações, uma delas aplicava-se a campos estacionários (correspondiam às leis de Gauss para os fluxos elétrico e magnético), as outras três descreviam, para cada eixo do sistema, as induções elétrica (lei de Faraday-Lenz) e magnética (lei de Ampère-Maxwell), que se devem respectivamente a uma variação do fluxo magnético e a uma variação do fluxo elétrico mais o movimento de cargas elétricas.

Com o advento da álgebra vetorial desenvolvida por Gibbs e Heaviside, onde se introduziu o operador nabla, estas oito equações puderam ser escritas, resumidamente, em quatro equações, grupo que consiste na forma mais conhecida das equações de Maxwell. São elas

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{J} + \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{cases} \tag{47}$$

Onde $\mathbf{E}$ é o campo elétrico, $\mathbf{B}$ o campo magnético, ρ a densidade de carga elétrica, $\mathbf{J}$ a densidade de corrente elétrica real e c é a velocidade da luz no vácuo.

Este sistema de equações será utilizado para à analogia apresentada na seção 3.

4.2 AS EQUAÇÕES DA HIDRODINÂMICA

Maxwell (1890) desenvolveu uma analogia entre o eletromagnetismo e a hidrodinâmica na qual as equações de movimento de um fluido incompressível através de um meio resistente, são reinterpretadas em termos das grandezas eletrostáticas e, particularmente, em termos do conceito de linha de força. Esta analogia segue o seguinte principio: uma linha de força elétrica é representada por um tubo de corrente do fluido. O potencial elétrico é análogo à pressão do fluido. A velocidade do fluido corresponde à intensidade da força elétrica em um ponto. Uma carga positiva e uma carga negativa correspondem, respectivamente, a uma fonte e a um sumidouro do fluido. A capacidade indutiva dos dielétricos corresponde à resistência ao movimento do fluido. Com a ideia de Maxwell, vários autores documentaram a enorme semelhança entre o eletromagnetismo e a hidrodinâmica, assumindo diferentes condições de fluxo, por exemplo, uma analogia foi apresentada para um fluido incompressível por Troshkin (1993) e depois por Marmanis (1998). Outra abordagem foi proposta por Arovas e Freire (1997) para o caso de um superfluido bidimensional. Kambe (2010) foi mais além, apresentou uma formulação diferente e mais geral pois considerou um fluido compressível em um campo de fluxo tridimensional.

Por outro lado, vários autores introduzem a álgebra geométrica através do eletromagnetismo para mostrar a eficiência da estrutura multivetorial em unificar as grandezas físicas e da capacidade do produto geométrico em simplificar as equações de Maxwell. Por exemplo, Ferreira (2006) definiu dois multivetores gradientes generalizados para escrever estas equações em uma única equação através da álgebra geométrica. Vaz (1997), definiu um operador multivetorial e um multivetor para combiná-los em uma única equação para

governar a lei física no eletromagnetismo. Vaz (1997) também concluiu que esse resultado pode ser alcançada se considerar um sistema quadridimensional ou o espaço-tempo de Minkowski e definir um multivetor $\mathcal{F}$ e um operador multivetorial $\mathcal{D}$. Estas mesmas considerações podem ser encontradas no livro de (HESTENES; LASENBY, 1966) e no livro de (DORAN; LASENBY; LASENBY, 2003). Nesse sentido, esta seção apresenta toda a construção da analogia entre a hidrodinâmica e o eletromagnetismo de forma mais concisa possível, tentando explorar o significado de cada elemento, entidade e produto contido na álgebra geométrica, bem como eles podem ser aplicados para descrever o movimento de um fluido nas equações da hidrodinâmica.

As equações fundamentais que governam o movimento de um fluido incompressível em um referencial inercial são descritas por Chorin, Marsden e Marsden (1990) como a equação de continuidade

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \tag{48}$$

e a equação de Navier-Stokes

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = \mathbf{f}_{ext} - \frac{1}{\rho}\nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{v} \tag{49}$$

onde ν é a viscosidade cinemática, $\mathbf{v}$ é o campo de velocidade, $\mathbf{f}_{ext}$ é a força externa por unidade de massa, normalmente associado ao campo gravitacional, ρ é a massa específica e p é o campo de pressão.

Algumas suposições são consideradas para simplificar o problema, como assumir o escoamento de um fluido incompressível com viscosidade nula, ou seja, $\nu = 0$. Portanto, a equação (49) pode ser reescrita como

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = \mathbf{f}_{ext} - \frac{1}{\rho}\nabla p. \tag{50}$$

Assumindo a força externa $\mathbf{f}_{ext}$ como o gradiente de força da gravidade $\mathbf{f}_{ext} = -\nabla(gz)$ e usando a seguinte identidade vetorial

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = \frac{1}{2}\nabla v^2 - \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) \tag{51}$$

onde $v^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$, tem-se

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{2}\nabla v^2 - \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) = -\nabla(gz) - \frac{1}{\rho}\nabla p. \tag{52}$$

Depois de definir o *campo de vorticidade* $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{v}$, assumindo ρ constante e unindo os gradientes de pressão, velocidade e força da gravidade, pode-se obter a seguinte equação

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz \right) = \mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}. \tag{53}$$

O potencial escalar de Bernoulli $\Phi = \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz$ pode ser aplicado na equação (53)

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega} - \nabla \Phi. \tag{54}$$

Então, o vetor Lamb $\mathcal{L} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$ pode ser usado na equação (54) para simplificar a equação (49) para obter

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\mathcal{L} - \nabla \Phi. \tag{55}$$

Esta equação será utilizada na seção seguinte para construir um sistema de quatro equações que envolve os campos $\boldsymbol{\omega}$ e $\mathcal{L}$ para à analogia com o eletromagnetismo.

4.3 ANALOGIA ENTRE HIDRODINÂMICA E ELETROMAGNETISMO

Pela definição da divergência do rotacional, segue

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\omega} = 0 \tag{56}$$

e tomando o rotacional dos dois lados da equação (55)

$$\nabla \times \mathcal{L} = -\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} \tag{57}$$

obtém-se o campo rotacional de $\mathcal{L}$. A divergência do campo $\mathcal{L}$ pode ser encontrado tomando a divergência da equação (55) e tem como resultado o Laplaciano do potencial de Bernoulli, com sinal trocado, isto é

$$\nabla \cdot \mathcal{L} = -\nabla^2 \Phi = j, \tag{58}$$

onde j é chamado *densidade de carga turbulenta* (MARMANIS, 1998). Isto conecta a divergência do vetor Lamb com o potencial escalar de Bernoulli. A densidade de carga turbulenta é identicamente nula para escoamento irrotacional de fluido incompressível,

pois

$$\nabla \cdot \mathcal{L} = \nabla \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}) = (\nabla \times \boldsymbol{\omega}) \cdot \mathbf{v} - \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega} \tag{59}$$

e é introduzido somente para permitir uma comparação com as equações de Maxwell. No entanto, a mesma dedução da densidade de carga turbulenta pode ser feita para escoamento rotacional, porém terá mais termos. Vale a pena mencionar que, para um fluído incompressível com viscosidade constante, a divergência do vetor Lamb é a mesma.

Calcula-se o rotacional de $\boldsymbol{\omega}$ tomando a derivada temporal de $\mathcal{L}$ é calculada, como

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}) = \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} \times \mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \tag{60}$$

e substituindo as equações (55) e (57) na equação anterior obtém-se a seguinte expressão

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = -(\nabla \times \mathcal{L}) \times \mathbf{v} - \boldsymbol{\omega} \times \mathcal{L} - \boldsymbol{\omega} \times \nabla \Phi. \tag{61}$$

Da identidade vetorial (gradiente do produto interno) (HILDEBRAND, 1962)

$$\nabla(\mathbf{v} \cdot \mathcal{L}) = (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathcal{L} + (\mathcal{L} \cdot \nabla)\mathbf{v} + \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathcal{L}) + \mathcal{L} \times (\nabla \times \mathbf{v}) \tag{62}$$

e usando as relações $\nabla(\mathbf{v} \cdot \mathcal{L}) = 0$ e $\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathcal{L}) = -(\nabla \times \mathcal{L}) \times \mathbf{v}$ segue

$$-(\nabla \times \mathcal{L}) \times \mathbf{v} = -(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathcal{L} - (\mathcal{L} \cdot \nabla)\mathbf{v} - \mathcal{L} \times \boldsymbol{\omega}. \tag{63}$$

Agora, considerando este resultado na equação (61)

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = -\mathbf{v} \cdot \nabla \mathcal{L} - \mathcal{L} \cdot \nabla \mathbf{v} - \boldsymbol{\omega} \times \nabla \Phi. \tag{64}$$

Outra identidade vetorial também é usada (HILDEBRAND, 1962) (rotacional do produto vetorial)

$$\nabla \times (\mathbf{v} \times \mathcal{L}) = (\mathcal{L} \cdot \nabla)\mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathcal{L} + \mathbf{v}(\nabla \cdot \mathcal{L}) - \mathcal{L}(\nabla \cdot \mathbf{v}) \tag{65}$$

e das equações (48) e (58) obtém-se

$$-\mathbf{v} \cdot \nabla \mathcal{L} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathcal{L}) - j\mathbf{v} - \mathcal{L} \cdot \nabla \mathbf{v} \tag{66}$$

tal que

$$\begin{aligned}\nabla \times (\mathbf{v} \times \mathcal{L}) &= \nabla \times [\mathbf{v} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v})] \\ &= \nabla \times [v^2\boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{v})\mathbf{v}] \\ &= \nabla \times (v^2\boldsymbol{\omega}) - \nabla \times (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{v})\mathbf{v} \\ &= v^2 \nabla \times \boldsymbol{\omega} + \nabla(v^2) \times \boldsymbol{\omega} - \nabla \times (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{v})\mathbf{v}\end{aligned}$$

e assim

$$-(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathcal{L} = v^2(\nabla \times \boldsymbol{\omega}) + \nabla(v^2) \times \boldsymbol{\omega} - \nabla \times (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{v})\mathbf{v} - j\mathbf{v} - (\mathcal{L} \cdot \nabla)\mathbf{v}. \tag{67}$$

Depois de substituir a equação (67) na equação (64) e de simplificá-la, o seguinte resultado é encontrado

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = v^2(\nabla \times \boldsymbol{\omega}) - j\mathbf{v} - \boldsymbol{\omega} \times \nabla(\Phi + v^2) - \nabla \times (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{v})\mathbf{v} - 2(\mathcal{L} \cdot \nabla)\mathbf{v}. \tag{68}$$

Primeiramente vale observar que para escoamento irrotacional esta equação se reduz a zero. em segundo lugar, o primeiro termo do lado direito desta equação possui estruturas semelhantes, exceto pelo fator multiplicativo v^2, à evolução da vorticidade no tempo (57), porém não descreve as mesmas propriedades no fluído. Por outro lado, o resto dos termos não aparecem na campo de vorticidade e também não pode ser escrito simplesmente como uma combinação de $\boldsymbol{\omega}$ ou $\mathcal{L}$. Assim, para escoamentos rotacionais, esses termos estão relacionado a uma corrente turbulenta do campo de velocidade. É, portanto, necessário agrupá-los em um vetor $\mathbf{J}$ denominado *vetor de corrente turbulenta*, (MARMANIS, 1998)

$$\mathbf{J} \equiv \frac{1}{v^2}\left\{j\mathbf{v} + \nabla \times (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{v})\mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \nabla(\Phi + v^2) + 2\mathcal{L} \cdot \nabla\mathbf{v}\right\}. \tag{69}$$

O vetor de corrente turbulenta é identicamente nulo para escoamento irrotacional, e neste caso é introduzido apenas para permitir uma comparação com as equações de Maxwell.

Então

$$\nabla \times \boldsymbol{\omega} = \mathbf{J} + \frac{1}{v^2}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}. \tag{70}$$

Finalmente, combinando as equações (56), (57), (58) e (70), um sistema compacto

composto por quatro equações, similar às equações de Maxwell, é obtido

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathcal{L} = j \\ \nabla \times \mathcal{L} = -\dfrac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \boldsymbol{\omega} = 0 \\ \nabla \times \boldsymbol{\omega} = \mathbf{J} + \dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \end{cases} \tag{71}$$

Em uma comparação com o sistema (47), pode-se dizer que o campo elétrico $\mathbf{E}$ corresponde ao campo Lamb $\mathcal{L}$ e o campo magnético $\mathbf{B}$ corresponde ao campo de vorticidade $\boldsymbol{\omega}$.

A primeira equação do sistema (71) representa a variação espacial de energia dada pela divergência do vetor Lamb. A segunda equação mostra que o vetor de corrente turbulenta e a variação do vetor Lamb no tempo são necessários para gerar o campo de vorticidade. A soma do vetor de corrente turbulenta com a variação do vetor Lamb no tempo é o Laplaciano do campo de velocidade, isto é, (da propriedade rotacional do rotacional)

$$\nabla \times \omega = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{v}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) - \nabla^2 \mathbf{v} = -\nabla^2 \mathbf{v}. \tag{72}$$

Se o Laplaciano é positivo, a velocidade no ponto é menor do que nos pontos vizinhos. Se o Laplaciano é negativo, o contrário é satisfeito. A terceira equação afirma que a variação temporal da velocidade provoca o rotacional do vetor de Lamb. Finalmente, a quarta equação indica que o campo de vorticidade é um campo vetorial solenoidal.

Com esta formulação, pode-se classificar todo escoamento em dois casos distintos. O primeiro é o caso *homogêneo*, onde as fontes turbulentas desaparecem, ou seja, $j = \mathbf{J} = 0$, e o segundo é o caso *não homogêneo*, onde as fontes turbulentas não desaparecem.

4.4 A ÁLGEBRA GEOMÉTRICA DAS EQUAÇÕES DA HIDRODINÂMICA

Vários trabalhos introduzem a álgebra geométrica através do eletromagnetismo visando mostrar o poder da álgebra geométrica em simplificar e unir as quatro equações de Maxwell (HESTENES; LASENBY, 1966; DORAN; LASENBY; LASENBY, 2003; VAZ, 1997; FERREIRA, 2006). Uma vez apresentado o sistema (71), é necessário substituir o produto vetorial pelo produto externo, o vetor vorticidade por seu dual bivetor, e depois definir o operador ∇ em quatro dimensões. Assumindo, para fins de comparação, que

$\frac{1}{v^2} = 1$ e substituindo o produto vetorial de acordo com a equação (41)

$$\begin{aligned} \nabla \wedge \mathcal{L} &= -\frac{\partial(\mathbb{I}_3 \boldsymbol{\omega})}{\partial t} \\ \nabla \wedge \boldsymbol{\omega} &= \mathbb{I}_3 \mathbf{J} + \frac{\partial(\mathbb{I}_3 \mathcal{L})}{\partial t}. \end{aligned}$$

Pode-se considerar o bivetor $M_2 = \mathbb{I}_3 \boldsymbol{\omega}$ que é o dual do vetor de vorticidade. Com isso, as últimas equações podem ser reescritas

$$\begin{aligned} \nabla \wedge \mathcal{L} &= -\frac{\partial M_2}{\partial t} \\ \nabla \wedge M_2 &= -\mathbf{J} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}. \end{aligned}$$

e o sistema (71) pode ser reescrito como

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathcal{L} = j \\ \nabla \wedge M_2 = -\mathbf{J} - \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \\ \nabla \wedge \mathcal{L} = -\dfrac{\partial M_2}{\partial t} \\ \nabla \cdot M_2 = 0 \end{cases} \tag{73}$$

Com o produto geométrico, é possível escrever o sistema (73) como um novo sistema com duas equações, como segue

$$\begin{cases} \nabla \mathcal{L} = j - \dfrac{\partial M_2}{\partial t} \\ \nabla M_2 = -\mathbf{J} - \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \end{cases} \tag{74}$$

Se estas duas equações forem adicionadas, a seguinte equação é obtida

$$\nabla(\mathcal{L} + M_2) + \frac{\partial(\mathcal{L} + M_2)}{\partial t} = +j - \mathbf{J}. \tag{75}$$

Esta equação pode ser simplificada ainda mais se considerar $x_4 = t$ e o operador ∇ for reescrito em um espaço de quatro dimensões

$$\nabla_4 = \hat{e}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \hat{e}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \hat{e}_3 \frac{\partial}{\partial x_3} + \hat{e}_4 \frac{\partial}{\partial t}. \tag{76}$$

Finalmente, a equação (75) tem a seguinte forma compacta

$$\nabla_4(\mathcal{L} + M_2) = +j - \mathbf{J}. \tag{77}$$

O multivetor *campo de força hidrodinâmico* é dada por $\mathcal{F} = \mathcal{L} + M_2$. Se considerar o multivetor $\mathcal{I} = j - \mathbf{J}$, pode-se substituir na equação (77) e reescrevê-la como

$$\nabla_4 \mathcal{F} = \mathcal{I}. \tag{78}$$

Também é possível obter uma equação semelhante à da expressão acima, se o espaço pseudo-euclidiano (autovetor negativo) é assumido, onde a quarta dimensão é o tempo conhecido como *espaço-tempo de Minkowski*, que é matematicamente imaginário. O espaço de Minkowski pode ser inserido na estrutura da álgebra geométrica e tem como espaço multivetorial a seguinte representação $\mathcal{C}\ell_{3,1} = \bigwedge(\mathbb{R}^{3,1})$. Assim, os elementos da base deste espaço satisfazem as seguintes regras

$$\begin{aligned} &\hat{e}_4\hat{e}_4 = -1 \\ &\hat{e}_i\hat{e}_i = 1 \qquad \text{para} \quad i = 1,2,3 \\ &\hat{e}_i\hat{e}_j = -\hat{e}_j\hat{e}_i \quad \text{para} \quad i,j = 1,2,3,4. \end{aligned} \tag{79}$$

Outra forma de escrever o sistema (71) como uma única equação usando álgebra geométrica é basear-se na existência do rotacional e da divergência de $\boldsymbol{\omega}$ e $\mathcal{L}$ e a presença da derivada no tempo dessas grandezas. Com isso, pode-se definir um operador multivetorial como segue

$$\mathcal{D} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial}{\partial t} + \nabla \tag{80}$$

e um multivetor denotado por $\mathcal{F}$ e definido como

$$\mathcal{F} = \mathcal{L} + \mathbb{I}_3\boldsymbol{\omega}. \tag{81}$$

Desta forma, o produto geométrico pode ser aplicado entre o operador multivetor $\mathcal{D}$ e o multivetor $\mathcal{F}$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}\mathcal{F} &= \left(\frac{1}{v^2}\frac{\partial}{\partial t} + \nabla\right)(\mathcal{L} + \mathbb{I}_3\boldsymbol{\omega}) \\ &= \frac{1}{v^2}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} + \nabla\mathcal{L} + \frac{\mathbb{I}_3}{v^2}\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \nabla(\mathbb{I}_3\boldsymbol{\omega}) \\ &= \frac{1}{v^2}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} + \nabla\cdot\mathcal{L} + \nabla\wedge\mathcal{L} + \frac{\mathbb{I}_3}{v^2}\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \mathbb{I}_3\nabla\cdot\boldsymbol{\omega} + \mathbb{I}_3(\nabla\wedge\boldsymbol{\omega}). \end{aligned} \tag{82}$$

Com base na dualidade de Hodge, equação (41), as seguintes expressões podem ser obtidas

$$\begin{aligned} \nabla \wedge \mathcal{L} &= \mathbb{I}_3(\nabla \times \mathcal{L}) \\ \mathbb{I}_3(\nabla \wedge \boldsymbol{\omega}) &= -\nabla \times \boldsymbol{\omega}. \end{aligned} \tag{83}$$

Substituíndo estas expressões na equação (82) e colocando na ordem crescente de grau dos multivetores

$$\mathcal{D}\mathcal{F} = \underbrace{\nabla \cdot \mathcal{L}}_{escalar} + \underbrace{\left(\frac{1}{v^2}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} - \nabla \times \boldsymbol{\omega}\right)}_{vetor} + \underbrace{\mathbb{I}_3\left(\frac{1}{v^2}\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \nabla \times \mathcal{L}\right)}_{bivetor} + \underbrace{\mathbb{I}_3 \nabla \cdot \boldsymbol{\omega}}_{trivetor}. \tag{84}$$

Após comparar a equação (84) com as equações do sistema (71), é possível concluir que, se um multivetor $\mathcal{I} = j - \mathbf{J}$ for definido de forma que o bivetor e o trivetor sejam iguais a zero, o sistema de equações (71) pode ser escrito como uma única equação, ou seja

$$\mathcal{D}\mathcal{F} = \mathcal{I}. \tag{85}$$

A equação (85) simplifica no sentido de diminuir o número de equações significativamente o modelo matemático que deve ser resolvido para descrever o escoamento potencial com características de fluido ideal. Este modelo é mais geral que pode ser simplificado dependendo das condições de contorno imposto bem como a existência de única solução. Além disso, se o operador $\mathcal{D}$ for linear a estrutura do cálculo geométrico fornece ferramentas necessárias para a inversão deste operador o que nos facilita e agiliza a resolução deste tipo de problema.

4.5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Pode-se observar que as equações (78) e (85) obtidas são mais simplese compacta em comparação com as equações obtidas através da álgebra vetorial. Isto acontece devido a estrutura da álgebra geométrica conseguir representar várias grandezas em um único multivetor. Além disso, o produto geométrico unifica dois produtos: o produto escalar e o produto externo, aliás quase todos os produtos podem ser definidos a partir dele, o que torna o procedimento usado para resolver o problema mais fácil, mesmo considerando algumas questões práticas, como por exemplo, a vorticidade ou singularidades que podem surgirem em problemas em dinâmica dos fluidos, além de ter uma fórmula fechada, isto é,

válida para escoamentos potenciais e rotacionais. Isso se deve ao fato de que o operadores ∇_4 e $\mathcal{D}$ são invertíveis através do produto geométrico permitindo calcular o campo de força hidrodinâmico $\mathcal{F}$ em termos da densidade de carga turbulenta j e do vetor de corrente turbulenta $\mathbf{J}$ através da integração da função de Green para equações de primeira ordem. Enquanto, por outro lado, usando álgebra vetorial, a divergência e o rotacional não são invertíveis, tendo que usar aproximações numéricas e isso inviabiliza completamente uma boa aproximação, exigindo uma grande quantidade de testes em túnel de vento para corrigir e ajustar estes problemas numéricos.

5 CÁLCULO COM ÁLGEBRA GEOMÉTRICA

Este capítulo trata da apresentação de alguns conceitos do cálculo diferencial e integral definidos na estrutura da álgebra geométrica. Termos bem conhecidos como diferenciação e derivada direcional são definidos com o produto geométrico além da derivada multivetorial que é uma generalização do conceito de derivada direcional para todos os elementos do espaço multivetorial. Também será apresentado um conceito de integral através do produto geométrico que estende as fórmulas de integração para qualquer dimensão. Além disso é apresentado um teorema mais geral análogo ao Teorema Fundamental do Cálculo, válido para qualquer dimensão, que tem como caso particular os principais teoremas do cálculo vetorial. Todas as definições colocadas neste capítulo podem ser vistas com mais detalhes nas referências (HESTENES; SOBCZYK, 1984; DORST; FONTIJNE; MANN, 2010; DORAN; LASENBY; LASENBY, 2003; PERWASS *et al.*, 2009; MACDONALD, 2017; BAYLIS, 2012).

5.1 DIFERENCIAÇÃO E DERIVADA DIRECIONAL

Seja $F(\mathbf{x})$ um elemento da álgebra geométrica com valores vetorial. A *derivada direcional* de F em relação à $\mathbf{x}$ na direção de um vetor $\mathbf{v}$ é dada por

$$(\mathbf{v}\cdot\nabla)F(\mathbf{x}) = \lim_{\tau\to 0}\frac{F(\mathbf{x}+\tau\mathbf{v}) - F(\mathbf{x})}{\tau} \tag{86}$$

se esse limite existir. Uma definição semelhante ao da análise vetorial, porém com resultados diferentes, mas geometricamente corretos, devido ao produto geométrico.

A *projeção ortogonal* é uma operação importante na álgebra geométrica, além de ser mais simples que na álgebra matricial é independente da escolha de uma base. Dado um vetor $\mathbf{u}$ e um k-vetor A_k não nulo. Pode-se decompor o vetor $\mathbf{u}$ em suas componentes paralela e perpendicular com respeito a A_k, isto é, $\mathbf{u} = \mathbf{u}_\parallel + \mathbf{u}_\perp$ e como consequência $\mathbf{u}_\parallel \wedge A_k = 0$ e $\mathbf{u}_\perp \cdot A_k = 0$. Logo

$$\mathbf{u}_\parallel A_k = \mathbf{u}_\parallel \cdot A_k + \mathbf{u}_\parallel \wedge A_k = \mathbf{u}_\parallel \cdot A_k + \mathbf{u}_\perp \cdot A_k = (\mathbf{u}_\parallel + \mathbf{u}_\perp)\cdot A_k = \mathbf{u}\cdot A_k. \tag{87}$$

onde $\cdot$ é o produto interno definido entre multivetores (DORST; FONTIJNE; MANN, 2010).

Como A_k é inversível, pois é não nulo a projeção ortogonal de $\mathbf{u}$ sobre A_k é a componente de $\mathbf{u}$ que se encontra em A_k, ou seja

$$P_{A_k}(\mathbf{u}) = \mathbf{u}_{\parallel} = (\mathbf{u} \cdot A_k)A_k^{-1}. \tag{88}$$

Com a operação de projeção (88) uma expressão algébrica para o operador diferencial vetorial ∇ pode ser definida. Como a projeção de qualquer vetor sobre o espaço em que reside é o próprio vetor, segue que

$$\nabla = P_{A_n}(\nabla) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{a}^k(\mathbf{a}_k \cdot \nabla), \tag{89}$$

onde $\{\mathbf{a}_k\}$ são vetores do $\mathbb{R}^n$ que compõem o multivetor A_n e $\{\mathbf{a}^k\}$ é seu vetor recíproco de forma a satisfazer a equação

$$\mathbf{a}^j \cdot \mathbf{a}_i = \delta_i^j = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad i = j \\ 0 & \text{se} \quad i \neq j. \end{cases} \tag{90}$$

A expansão da equação (89) separa as propriedades algébricas do operador ∇ de suas propriedades diferenciais; as propriedades algébricas residem nos vetores $\mathbf{a}^k$, enquanto as diferenciais residem no produto interno $\mathbf{a}_k \cdot \nabla$.

Se o conjunto $\{\mathbf{a}_k\}$ define uma base para o $\mathbb{R}^n$, cada variável vetorial $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ pode ser escrita $\mathbf{x} = \sum_{k=1}^{n} x^k\mathbf{a}_k$. Quando a base não for ortonormal, então usa-se a base recíproca $\{\mathbf{a}^k\}$ para calcular x^k com $x^k = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{a}^k \cdot \mathbf{x}$. Então a derivada direcional na direção de $\mathbf{a}_k$ é simplesmente a derivada escalar das funções coordenadas que coincide com a derivada parcial com respeito a variável escalar x^k, ou seja,

$$\mathbf{a}_k \cdot \nabla = \frac{\partial}{\partial x^k}. \tag{91}$$

Logo um operador diferencial vetorial pode ser definido como

$$\nabla = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{a}^k \ (\mathbf{a}_k \cdot \nabla) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{a}^k \ \frac{\partial}{\partial x^k}. \tag{92}$$

A propriedade vetorial de ∇ permite escrever o produto geométrico (39) para qualquer função F de valor vetorial ou escalar da seguinte forma,

$$\nabla F = \nabla \cdot F + \nabla \wedge F. \tag{93}$$

Se $F = \phi(\mathbf{x}) : \bigwedge^1(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função de valor escalar em uma variável vetorial, então de acordo com a propriedade do produto interno, segue que $\nabla \cdot \phi(\mathbf{x}) = 0$ e portanto de (93) e (92), tem-se

$$\nabla\phi(\mathbf{x}) = \nabla \wedge \phi(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{a}^k \, \frac{\partial \phi}{\partial x^k}(\mathbf{x}) \tag{94}$$

que é chamado de *vetor gradiente* do campo escalar $\phi(\mathbf{x})$.

Agora, porém, se $F = (F^1(\mathbf{x}), F^2(\mathbf{x}), ..., F^n(\mathbf{x})) : \bigwedge^1(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \bigwedge^1(\mathbb{R}^n)$ é uma função de valor vetorial em uma variável vetorial, então a equação (93) contém dois termos, um escalar e um bivetorial. O termo escalar é chamado de *divergencia de F* e pode ser escrito como

$$\nabla \cdot F = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{a}^k \, \frac{\partial}{\partial x^k} \cdot F^j \hat{e}_j = \sum_{k=1}^{n} \, \frac{\partial F^k}{\partial x^k}. \tag{95}$$

Outra forma de ver isso é, a função vetorial pode ser escrita como $F = F^k \cdot \mathbf{a}_k$ e cada componente desta função F pode ser encontrada com o auxilio da base recíproca multiplicando a função pelo vetor correspondente desta base, ou seja, $F^k = \mathbf{a}^k \cdot F$. Assim pode-se escrever a equação (95) como

$$\nabla \cdot F = \sum_{k=1}^{n} \, \frac{\partial}{\partial x_k} \underbrace{\mathbf{a}^k \cdot F}_{F^k} = \sum_{k=1}^{n} \, \frac{\partial F^k}{\partial x^k}, \tag{96}$$

Vale observar que o conjunto de componentes $\dfrac{\partial F^j}{\partial x^k}$ forma a matriz Jacobiana. O termo bivetorial define a *derivada externa* de um campo de vetores, que é escrita como

$$\nabla \wedge F = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{a}^k \, \frac{\partial}{\partial x^k} \wedge \sum_{j=1}^{n} \, F^j \mathbf{a}_j = \sum_{k=1}^{n} \, \mathbf{a}^k \wedge \left(\sum_{j=1}^{n} \, \frac{\partial (F^j \mathbf{a}_j)}{\partial x^k} \right) = \sum_{k=1}^{n} \, \mathbf{a}^k \wedge \left(\sum_{j=1}^{n} \, \mathbf{a}_j \frac{\partial F^j}{\partial x^k} \right). \tag{97}$$

Em três dimensões, os termos $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F^j}{\partial x^k}$ são as componentes do rotacional, embora $\nabla \wedge F$ seja um bivetor, em vez de um vetor axial. Desta forma, o rotacional é encontrado através da operação de dualidade (equação 41). A derivada externa generaliza o rotacional para dimensões arbitrárias.

Para um campo vetorial A, segue da equação (95) que

$$\begin{aligned}
\nabla\cdot(\nabla\cdot A) &= \sum_{k=1}^{n}\mathbf{a}^k\,\frac{\partial}{\partial x^k}\cdot\left(\sum_{j=1}^{n}\mathbf{a}^j\,\frac{\partial}{\partial x^j}\cdot A\right)\\
&= \sum_{k=1}^{n}\mathbf{a}^k\cdot\left(\sum_{j=1}^{n}\mathbf{a}^j\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x^k}\frac{\partial A}{\partial x^j}\right)\right)\\
&= \pm\sum_{k=1}^{n}\mathbf{a}^k\cdot\left(\sum_{j=1}^{n}\mathbf{a}^j\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x^k}\frac{\partial \widetilde{A}\mathbb{I}_n}{\partial x^j}\right)\right)\\
&= \pm\sum_{k=1}^{n}\mathbf{a}^k\cdot\left(\left(\sum_{j=1}^{n}\mathbf{a}^j\wedge\left(\frac{\partial}{\partial x^k}\frac{\partial \widetilde{A}}{\partial x^j}\right)\right)\mathbb{I}_n\right)\\
&= \pm\left(\sum_{k=1}^{n}\mathbf{a}^k\wedge\left(\sum_{j=1}^{n}\mathbf{a}^j\wedge\left(\frac{\partial}{\partial x^k}\frac{\partial \widetilde{A}}{\partial x^j}\right)\right)\right)\mathbb{I}_n\\
&= 0,
\end{aligned}\tag{98}$$

onde $\widetilde{A}\mathbb{I}_n$ é o dual do campo A e a troca do produto interno pelo produto externo é feito através das propriedades das relações entre estes produtos (DORST; FONTIJNE; MANN, 2010).

Agora da equação (97), segue que

$$\begin{aligned}
\nabla\wedge(\nabla\wedge A) &= \sum_{k=1}^{n}\mathbf{a}^k\,\frac{\partial}{\partial x^k}\wedge\left(\sum_{j=1}^{n}\mathbf{a}^j\,\frac{\partial}{\partial x^j}\wedge A\right)\\
&= \sum_{k=1}^{n}\mathbf{a}^k\wedge\sum_{j=1}^{n}\mathbf{a}^j\wedge\left(\frac{\partial}{\partial x^k}\frac{\partial A}{\partial x^j}\right)\\
&= 0,
\end{aligned}\tag{99}$$

porque $\mathbf{a}^k\wedge\mathbf{a}^j = -\mathbf{a}^j\wedge\mathbf{a}^k$ e $\dfrac{\partial}{\partial x^k}\dfrac{\partial}{\partial x^j} = \dfrac{\partial}{\partial x^j}\dfrac{\partial}{\partial x^k}$. Se A é uma função escalar $A=\phi$ tem-se também

$$\begin{aligned}
\nabla\wedge(\nabla\phi) &= \sum_{k=1}^{n}\mathbf{a}^k\,\frac{\partial}{\partial x^k}\wedge\left(\sum_{j=1}^{n}\mathbf{a}^j\,\frac{\partial\phi}{\partial x^j}\right)\\
&= \sum_{k=1}^{n}\mathbf{a}^k\wedge\sum_{j=1}^{n}\mathbf{a}^j\,\frac{\partial}{\partial x^k}\frac{\partial\phi}{\partial x^j}\\
&= 0.
\end{aligned}\tag{100}$$

Se A é um campo multivetorial, tem-se

$$\begin{aligned} \nabla\nabla A = \nabla^2 A &= \nabla(\nabla \cdot A + \nabla \wedge A) \\ &= \nabla \cdot (\nabla \cdot A) + \nabla \cdot (\nabla \wedge A) + \nabla \wedge (\nabla \cdot A) + \nabla \wedge (\nabla \wedge A). \end{aligned} \tag{101}$$

Assim, das equações 98 e 99 conclui-se a expressão

$$\nabla^2 A = \nabla \cdot (\nabla \wedge A) + \nabla \wedge (\nabla \cdot A). \tag{102}$$

A expressão $\Delta = \nabla^2$ não faz nenhum sentido dentro do cálculo vetorial o que não é o caso dentro do cálculo geométrico onde o operador nabla pode ser visto como a raiz quadrada do operador Laplaciano. Essa é uma novidade do cálculo geométrico no qual nenhum dos operadores - gradiente, rotacional ou divergência - possui essa propriedade. Pode-se calcular o Laplaciano no cálculo vetorial onde é uma superposição de gradiente com divergência e portanto, não o quadrado de uma única operação.

Pode-se estender as definições da derivada direcional e do operador diferencial ∇ para funções com valores multivetoriais, como segue.

Seja $F : \bigwedge(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \bigwedge(\mathbb{R}^n)$ um elemento da álgebra geométrica com valores multivetoriais. A *derivada multivetorial* na direção de um multivetor A é definida como

$$(A \cdot \partial_X)F(X) = \lim_{\tau \to 0} \frac{F(X + \tau P(A)) - F(X)}{\tau}, \tag{103}$$

onde $P(A)$ é a projeção do multivetor A sobre $\bigwedge(\mathbb{R}^n)$ (DORST; FONTIJNE; MANN, 2010)), se este limite existir.

A derivada de F com respeito à variável multivetorial X tem as propriedades de um multivetor, assim uma expressão algébrica para o operador diferencial multivetorial ∂_X pode ser encontrada projetando-o sobre o subespaço gerado pelo pseudoescalar $A_{[n]}$ através da operação de projeção, como segue

$$\partial_X = P_{A_n}(\partial_X) = \sum_{i=1}^{2^n} E^i (E_i \cdot \partial_X), \tag{104}$$

onde $\{E_i\}$ é uma base qualquer de $\bigwedge(\mathbb{R}^n)$ e $\{E^i\}$ é sua base recíproca de forma que os elementos satisfazem a seguinte equação

$$E^{j_r} \cdot E_{k_r} = \delta^{j_r}_{k_r} = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad j_r = k_r \\ 0 & \text{se} \quad j_r \neq k_r. \end{cases} \tag{105}$$

Seja $\{\mathbf{a}_k\}$ uma base do espaço n-dimensional. Como consequência, define-se uma

base do espaço multivetorial $\bigwedge(\mathbb{R}^n)$ que será denotado por $\{\mathbf{a}_J\}$, onde J é um conjunto de índices crescentes, ou seja, se $J = \{1,3,4\}$ então $\mathbf{a}_J = \mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_3 \wedge \mathbf{a}_4$. Com isso, um multivetor X pode ser escrito como $X = \sum_J X^J \mathbf{a}_J$ e se a base não for ortonormal usa-se a base recíproca para calcular X^J com $X^J = \sum_J \mathbf{a}^J * X$. A partir disto, o operador diferencial multivetorial ∂_X pode ser escrito como

$$\partial_X = \sum_J \mathbf{a}^J \frac{\partial}{\partial_{X^J}}, \tag{106}$$

onde $\mathbf{a}^J$ denota o recíproco do elemento $\mathbf{a}_J$.

Seguem algumas aplicações da equação (106). Seja $F : \bigwedge(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de valor escalar na variável multivetorial, então

$$\partial_X F(X) = \sum_J \mathbf{a}^J \frac{\partial F(X)}{\partial_{X^J}} = \sum_J \mathbf{a}^J F^J(X), \tag{107}$$

onde $F^J(X)$ é a derivada parcial de F com respeito à variável escalar X^J calculada no multivetor X. Em analogia com as funções de valores vetoriais, a equação (107) é denominda de o gradiente de $F(X)$. Pode-se também calcular a derivada multivetorial de $F(X)$ na direção de um multivetor $A \in \bigwedge(\mathbb{R}^n)$ com $A = \sum_J A^j \mathbf{a}_J$ então

$$\begin{aligned}(A \cdot \partial_X)F(X) &= A * (\partial_X F(X)) = A \cdot \left(\sum_J \mathbf{a}^J F^J(X)\right) \\ &= \left(\sum_J A^j \mathbf{a}_J\right) \cdot \left(\sum_J \mathbf{a}^J F^J(X)\right) = \sum_J A^j F^J(X). \end{aligned} \tag{108}$$

A definição baseada em coordenadas deve ser usada para derivar resultados livres de coordenadas o que é feito, com mais frequência, em funções com valores multivetoriais para variáveis multivetoriais. Uma coleção de resultados podem ser encontrados em (HESTENES; SOBCZYK, 1984; DORST; FONTIJNE; MANN, 2010).

5.2 INTEGRAL E O TEOREMA FUNDAMENTAL COM ÁLGEBRA GEOMÉTRICA

Nesta seção será colocada a noção de uma integral denominada como *integral direcionada* e para facilitar a definição será relacionada com à integral de Riemann. Na sequência uma simples e sucinta construção de uma versão análoga do Teorema Fundamental do cálculo, porém muito mais poderoso.

As integrais de linha são as mais simples, então seja C uma curva suave definda do ponto a ao ponto b e seja $F = F(\mathbf{x})$ uma função de valores vetoriais definida em cada ponto $\mathbf{x}$ da curva C, A integral de linha é definida como

$$\int_C F(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \bar{F}^i \Delta x^i \tag{109}$$

onde $\Delta x^i = x_i - x_{i-1}$ e $\bar{F}^i = \dfrac{1}{2}\left(F(x_{i-1}) + F(x_i)\right)$.

Embora esta expressão envolve vetores em vez de escalares o processo de limite na definição é formalmente o mesmo na definição de integral escalar do cálculo vetorial. Apesar da semelhança formal não se pode ignorar o novo recurso central dessa definição que, $d\mathbf{x}$ é uma medida com valor vetorial e o produto $F(\mathbf{x})d\mathbf{x}$ é o produto geométrico da álgebra geométrica. Se a curva C é representada paramétricamente pela equação $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ com $\mathbf{x}(t_0) = a$ e $\mathbf{x}(t_n) = b$, então pode-se provar que a equação (109) é escrita da seguinte forma

$$\int_C F(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \int_{t_0}^{t_n} F(\mathbf{x}(t)) \, \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} dt. \tag{110}$$

Vale observar qua a definição (110) possui desvantagem em relação a definição (109) pois depende da representação paramétrica da curva C. Outra observação é que o produto geométrico não é comutatito, assim a posição do elemento $d\mathbf{x}$ é importanto sob a integral. Logo, uma forma mais geral para a definição (110) é dada como

$$\int_C F(\mathbf{x})d\mathbf{x}G(\mathbf{x}) = \int_{t_0}^{t_n} F(\mathbf{x}(t)) \, \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} G(\mathbf{x}(t))dt. \tag{111}$$

Na prática a integral de linha pode ser escrita como

$$\int_C F(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \int_C F(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} + \int_C F(\mathbf{x}) \wedge d\mathbf{x}. \tag{112}$$

uma vez que $F(\mathbf{x})$ e $d\mathbf{x}$ possuem propriedades vetoriais. Esta definição tem uma parte escalar e uma parte bivetorial e ambas são chamadas integrais de linhas.

A extensão natural da integral de linha é para a *integral de uma superfície orientada.* Para definir a integral de superfície em termos de um limite é necessário desenvolver a ideia de uma superfície triangularizada, isto é, a superfície é representada por uma série de pontos e cada conjunto de três pontos adjacentes define um *triângulo ou simplex*[5]. À medida que mais pontos são adicionados, esses simplices se tornam menores e são um

[5]Na geometria, um simplex ou k-simplex é análogo a um triângulo k-dimensional. Especificamente, um simplex é a casca convexa de um conjunto de $(k+1)$ pontos em algum espaço euclidiano de dimensão k ou superior

modelo cada vez melhor para a superfície. Cada simplex tem uma orientação fixada de modo que, para um par de simplex adjacentes, a borda comum tenha direções opostas. Desta forma, um simplex inicial é construído para definir uma orientação para toda a superfície. Para algumas superfícies, como a faixa Möbius, não é possível definir uma orientação consistente em toda a superfície e para estes casos não é possível definir uma integral orientada.

Dado uma superfície n-dimensional, um n-simplex para a superfície discretizada é definido por $n+1$-vértices com os pontos $x_0, ..., x_n$, com a ordem especificando a orientação desejada. Para este n-simplex defini-se os vetores

$$e_i = x_i - x_0 \qquad i = 1, ..., n, \tag{113}$$

e o elemento de volume orientado é

$$\Delta\mathbf{x} = \frac{1}{n!} e_1 \wedge e_2 \wedge ... \wedge e_n. \tag{114}$$

Um ponto no n-simplex pode ser descrito em termos de coordenadas $\lambda^1, \lambda^2, ..., \lambda^n$ escrevendo

$$\mathbf{x} = x_0 + \sum_{i=1}^{n} \lambda^i e_i \tag{115}$$

onde cada coordenada pertence ao intervalo $0 \leq \lambda^i \leq 1$. Vale observar, mesmo que os n-simplices sejam pequenos e que se tenha uma boa aproximação da superfície no ponto x_0 o que se pode garantir é que os $n+1$-vértices estão na superfície, já que esta superfície pode ter curvatura no ponto x_0. Isto coloca problemas em relação às funções com valor multivetorial definidas sobre a superfície. Com isso, é necessário definir uma aproximação linear (interpolação linear) nos n-simplices da superfície em x_0.

Sendo assim, dado um campo multivetorial $F(\mathbf{x})$ definido sobre a superfície de forma que $F_i = F(x_i)$ é o valor da função em cada vértice x_i. Define-se uma nova função $f(\mathbf{x})$ que é uma aproximação linear de F_i sobre os n-simplices

$$f(\mathbf{x}) = F_0 + \sum_{i=1}^{n} \lambda^i (F_i - F_0). \tag{116}$$

Note que, a medida que o número de pontos aumenta os simplices ficam cada vez menores e a função $f(\mathbf{x})$ se aproxima melhor de $F(\mathbf{x})$, então os n-simplices se aproximam da superfície original.

A integral orientada de $F(\mathbf{x})$ sobre a superfície é agora aproximada pela integral de

$f(\mathbf{x})$ sobre cada simplex na superfície. Assim, para cada simplex tem-se

$$\int f(\mathbf{x}) d^n\mathbf{x} = \frac{1}{n+1}\left(\sum_{i=0}^{n} F_i\right)\Delta\mathbf{x}, \tag{117}$$

onde $d^n\mathbf{x} = e_1 \wedge e_2 \wedge ... \wedge e_n d\lambda^1 d\lambda^2 ... d\lambda^n$ e $\Delta\mathbf{x} = \int d^n\mathbf{x}$ sendo a integral calculada sobre os n-simplices. Somando todos os n-simplices que formam a superfície, pode-se agora definir a integral de superfície orientada como

$$\int F d^n\mathbf{x} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \bar{F}^k \Delta x^k, \tag{118}$$

onde $\bar{F}^k$ é o valor médio de $F(\Delta x^k)$ sobre o vértice de cada simplex e k percorre todos os simplices da superfície.

Aqui será apresentado um Teorema mais geral que tem esses como casos especiais, denominado pelos autores (DORAN; LASENBY; LASENBY, 2003; HESTENES; SOBCZYK, 1984; BAYLIS, 2012; MACDONALD, 2017) como *Teorema Fundamental do Cálculo Geométrico*. Uma prova mais detalhada deste teorema pode ser encontrada em (DORAN; LASENBY; LASENBY, 2003).

Seja F uma função de valor multivetorial definida sobre um domínio V, então o *Teorema Fundamental do Cálculo Geométrico* é definido como

$$\int_{\partial V} F d^{n-1}\mathbf{x} = \int_V \dot{F}\dot{\nabla} d^n\mathbf{x}. \tag{119}$$

onde o ponto sobre o operador ∇ indica qual função está sendo diferenciada.

Seram apresentados alguns detalhes da demonstração deste teorema. Seja $x_0, x_1, x_2, ..., x_k$, $k+1$ pontos, denotamos um simplex como

$$(x)_k = (x_0, x_1, x_2, ..., x_k). \tag{120}$$

A ordem dos pontos é importante para especificar a orientação do simplex. A fronteira de um simplex é denotado por ∂ e definida por

$$\partial(x)_k = \sum_{i=0}^{k} (x_0, x_1, ..., x_{i-1}, \breve{x}_i, x_{i+1}, ..., x_k), \tag{121}$$

onde $\breve{x}_i$ denota a ausência do ponto x_i no simplex.

Pode-se também definir um operador, denominado por Δ, para calcular a medida

orientada de um k-simplex, como

$$\Delta(x)_k = \frac{1}{k!}(x_1 - x_0) \wedge (x_2 - x_0) \wedge ... \wedge (x_k - x_0). \tag{122}$$

Com isso, prova-se que a medida da fronteira de um k-simplex é nula, isto é, $\Delta(\partial(x)_k) = 0$. Assim, a integral de superfície sobre a fronteira fechada de um volume pode ser escrita como a soma de integrais sobre a fronteira de cada simplex que compõe o volume, isto é,

$$\int_{\partial(x)_k} d\partial(x)_k = \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{k} \oint d(x)_j = \Delta(\partial(x)_k) = 0, \tag{123}$$

onde $\int d(x)_j$ é a integral de superfície calculada sobre o j-ésimo simplex.

Cada ponto no simplex pode ser descrito em termos de coordenadas λ^i, equação (115), tais coordenadas podem ser encontradas através dos vetores definidos em (113) e seu recíproco, como segue

$$\lambda^i = e^i(x - x_0). \tag{124}$$

Com isso, a função f definida em (116) pode ser integrada sobre o simplex, obtendo

$$\int_{\partial(x)_k} = \sum_{i=1}^{n} (F_i - F_0)e^i \cdot (\Delta\mathbf{x}). \tag{125}$$

Mas $\dfrac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \lambda^i} = F_i - F_0$. Então a integral de superfície da equação (125) pode ser reescrita como

$$\int_{\partial(x)_k} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \lambda^i} e^i \cdot (\Delta\mathbf{x}). \tag{126}$$

Somando a equação (126) sobre uma cadeia de simplices, nota-se que a função $f(\mathbf{x})$ assume o mesmo valor sobre a fronteira comum entre dois simplices uma vez que f é definida apenas nos vértices. Assim, todas as "faces"internas são canceladas e a integral de superfície permanecerá somente sobre a fronteira. Portanto,

$$\int_{\partial(x)_k} = \sum_{m} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \lambda^i} e^i \cdot (\Delta x^m), \tag{127}$$

com a soma $\sum_m$ percorrendo todos os simplices da cadeia. Desta forma, tomando o limite sobre os k pontos que definem os simplices, esses simplices se reduzem em tamanho e a primeira versão do Teorema Fundamental do Cálculo Geométrico pode ser definida como na equação (119).

Vale observar que está sendo considerado $\nabla = e^i \dfrac{\partial}{\partial \lambda^i}$ como na equação (92) e está sendo escrito $\nabla d^n\mathbf{x}$ em vez de $\nabla \cdot d^n\mathbf{x}$ pois o vetor ∇ está totalmente dentro do espaço vetorial definido pelo pseudoescalar $d^n\mathbf{x}$ de modo que $\nabla \wedge d^n\mathbf{x} = 0$ e portando pode-se trocar o produto interno pelo produto geométrico. Além disso, $\nabla d^n\mathbf{x} = (-1)^{n+1} d^n\mathbf{x}\nabla$, ou seja, a comutatividade depende da dimensão do espaço em que se está considerando. Com isso, tem-se

$$\int_{\partial V} F d^{n-1}\mathbf{x} = \int_V \dot{F}\dot{\nabla} d^n\mathbf{x} = (-1)^{n+1} \int_V \dot{F} d^n\mathbf{x}\dot{\nabla}. \tag{128}$$

Com o mesmo argumento usado para definir a equação (119) pode-se definir outra versão do teorema

$$\int_{\partial V} d^{n-1}\mathbf{x} F = \int_V \dot{\nabla} d^n\mathbf{x}\dot{F} = (-1)^{n+1} \int_V d^n\mathbf{x}\dot{\nabla}\dot{F}. \tag{129}$$

Uma definição ainda mais geral do teorema fundamental pode ser construída introduzindo uma função linear $L(A_{n-1}) = L(A_{n-1}; \mathbf{x})$. Essa função usa um multivetor A_{n-1} de grau $n-1$ como seu argumento linear e retorna um multivetor geral. Além disso, L depende também da posição. Desta forma, segue uma versão mais geral

$$\int_{\partial V} L(d^{n-1}\mathbf{x}) = \int_V \dot{L}(\dot{\nabla} d^n\mathbf{x}) = (-1)^{n+1} \int_V \dot{L}(d^n\mathbf{x}\dot{\nabla}). \tag{130}$$

O teorema fundamental é aplicado muitas vezes em casos especiais da seguinte forma

$$\int_{\partial V} G d^{n-1} F = \int_V G d^n\mathbf{x}\nabla F + (-1)^{n+1} \int_V \dot{G}\dot{\nabla} d^n\mathbf{x} F. \tag{131}$$

Segue que $d^n\mathbf{x}$ e $d^{n-1}\mathbf{x}$ são definidos pelas expressões

$$\begin{aligned} d^{n-1}\mathbf{x}\mathbb{I}^{-1} &= \mathbf{n} d^{n-1}x \\ d^n\mathbf{x} &= d^n x \mathbb{I} \end{aligned} \tag{132}$$

onde $\mathbf{n}$ é o vetor normal externo para o elemento de superfície $d^{n-1}\mathbf{x}$.

Como um caso particular do teorema fundamental do cálculo geométrico, considere a função linear definida como $L(A) = \mathbf{J} A \mathbb{I}_n^{-1}$, onde $\mathbf{J}$ é um vetor, $\mathbb{I}_n$ é o pseudoescalar unitário no espaço n-dimensional e A um multivetor de grau $n-1$. Com isso, $L(d^{n-1}\mathbf{x}) = \mathbf{J} d^{n-1}\mathbf{x}\mathbb{I}_n^{-1}$ e

$$\dot{L}(\dot{\nabla} d^n\mathbf{x}) = \dot{\mathbf{J}}\dot{\nabla} d^n\mathbf{x}\mathbb{I}_n^{-1} + \mathbf{J}\dot{\nabla} d^n\mathbf{x}\dot{\mathbb{I}}_n^{-1}, \tag{133}$$

sendo $\mathbb{I}_n^{-1}$ constante e $\nabla\mathbb{I}^{-1} = 0$ .Tem-se $d^n\mathbf{x} = d^n x\mathbb{I}_n$, onde $d^n x$ é o valor escalar da medida do elemento de volume $d^n\mathbf{x}$. O vetor normal, $\mathbf{n}$, à superfície é definido pelas equações (132). Logo,

$$\begin{aligned} \int_{\partial V} \mathbf{J} d^{n-1}\mathbf{x}\mathbb{I}_n^{-1} &= \int_V \dot{\mathbf{J}}\dot{\nabla} d^n\mathbf{x}\mathbb{I}_n^{-1} \\ \int_{\partial V} \mathbf{J}\mathbf{n} d^{n-1}x &= \int_V \dot{J}\dot{\nabla} d^n x \end{aligned} \tag{134}$$

A parte escalar da equação (134) descreve o conhecido Teorema da Divergência, isto é,

$$\oint_{\partial V} \mathbf{J}\cdot\mathbf{n} d^{n-1}x = \int_V \nabla\cdot\mathbf{J} d^n x, \tag{135}$$

onde

$$\mathbf{J}\mathbf{n} = \mathbf{J}\cdot\mathbf{n} + \mathbf{J}\wedge\mathbf{n} \quad \text{e} \quad \mathbf{J}\nabla = \mathbf{J}\cdot\nabla + \mathbf{J}\wedge\nabla. \tag{136}$$

Considerando o espaço Euclidiano bidimensional, segue que $V = D$ é uma região bidimensional, $\partial V = C$ é uma curva que delimita a região D, $d^2x = dA$ é um elemento de área e $d^1x = dl$ é um elemento de comprimento. Em coordenadas cartesianas, considere $\mathbf{J} = P\hat{e}_x + Q\hat{y}$, $\mathbf{n} = n_x\hat{e}_x + n_y\hat{y}$ e $dA = dxdy$. Com isso, segue da parte bivetorial da equação (136) que

$$\begin{aligned} \mathbf{J}\wedge\mathbf{n} = -\mathbf{n}\wedge\mathbf{J} &= (n_x Q - n_y P)\hat{e}_x\hat{e}_y \\ \mathbf{J}\wedge\boldsymbol{\nabla} = -\boldsymbol{\nabla}\wedge\mathbf{J} &= \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\hat{e}_x\hat{e}_y. \end{aligned} \tag{137}$$

Então

$$\begin{aligned} -\oint_C \mathbf{n}\wedge\mathbf{J} dl &= -\int_D \boldsymbol{\nabla}\wedge\mathbf{J}\, dA \\ \oint_C (n_x Q - n_y P)\hat{e}_x\hat{e}_y dl &= \int \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\hat{e}_x\hat{e}_y dxdy. \end{aligned} \tag{138}$$

Como $dy = n_x dl$ e $dx = -n_y dl$, então

$$\oint_C (Pdx + Qdy) = \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy. \tag{139}$$

A equação (139) é o Teorema de Green no plano.

5.3 ANTIDERIVADA: INVERSÃO DE OPERADORES LINEARES

Nesta seção será apresentada uma expressão explícita para a inversão de um operador linear D qualquer, denominada por (DORAN; LASENBY; LASENBY, 2003; HESTENES; SOBCZYK, 1984; MACDONALD, 2017) como *antiderivada*, com o auxílio do Teorema Fundamental do Cálculo Geométrico.

Um problema fundamental no cálculo vetorial é inverter a equação diferencial

$$DF(\mathbf{x}) = P(\mathbf{x}) \qquad \text{para obter a solução} \qquad F(\mathbf{x}) = D^{-1}P(\mathbf{x}). \tag{140}$$

A existência de uma antiderivada para (140) exige apenas que $P = P(\mathbf{x})$ seja integrável. Assim, para uma função integrável P corresponde uma função $F = F(\mathbf{x})$ denominada potencial de P tal que $P = DF$. Obviamente, o potencial F não será determinado sem outras condições, no entanto, potenciais equivalentes diferem apenas por uma função analítica F_0. Um caso especial bem conhecido da existência de potenciais é o *Teorema de Helmhotz* (que foi provado com o cálculo geométrico por Cibura e Hildenbrand (2008)).

Para determinar a antiderivada, será definida a equação com álgebra geométrica da seguinte forma. Suponha que existe uma função de valor multivetorial $G = G(\mathbf{x} \mid \mathbf{x}_0)$ dos pontos $\mathbf{x}_0$ e $\mathbf{x}$ na região V e ∂V do espaço $\mathbb{R}^n$ que satisfaz a equação

$$D_{\mathbf{x}}G(\mathbf{x} \mid \mathbf{x}_0) = -\dot{G}(\mathbf{x} \mid \mathbf{x}_0)\dot{D}_{\mathbf{x}_0} = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \tag{141}$$

onde δ é a função Delta de Dirac definida em (184).

Se $F = F(\mathbf{x}_0)$ é uma função contínua sobre uma região V do espaço $\mathbb{R}^n$ contendo o ponto $\mathbf{x}_0$, então a função Delta satisfaz a propriedade de filtragem (186), definida na álgebra geométrica, da seguinte forma

$$\int_V \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)F(\mathbf{x})d^n\mathbf{x} = \mathbb{I}_n F(\mathbf{x}_0). \tag{142}$$

Desta forma, das equações (141) e (142) e do Teorema Fundamental do Cálculo (131), tem-se

$$\begin{aligned}
&\int_{\partial V} G(\mathbf{x} \mid \mathbf{x}_0) d^{n-1}\mathbf{x} F(\mathbf{x}) = \int_V G(\mathbf{x} \mid \mathbf{x}_0) d^n\mathbf{x} DF(\mathbf{x}) + (-1)^{n+1} \int_V \dot{G}(\mathbf{x} \mid \mathbf{x}_0) \dot{D}_{\mathbf{x}} d^n\mathbf{x} F(\mathbf{x}) \\
&\int_{\partial V} G(\mathbf{x} \mid \mathbf{x}_0) d^{n-1}\mathbf{x} F(\mathbf{x}) - \int_V G(\mathbf{x} \mid \mathbf{x}_0) d^n\mathbf{x} DF(\mathbf{x}) = (-1)^n \int_V (-1) \dot{G}(\mathbf{x} \mid \mathbf{x}_0) \dot{D}_{\mathbf{x}} d^n\mathbf{x} F(\mathbf{x}) \\
&\int_{\partial V} G(\mathbf{x} \mid \mathbf{x}_0) d^{n-1}\mathbf{x} F(\mathbf{x}) - \int_V G(\mathbf{x} \mid \mathbf{x}_0) d^n\mathbf{x} DF(\mathbf{x}) = (-1)^n \mathbb{I}_n \int_V \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) F(\mathbf{x}) d^n x \\
&(-1)^n \mathbb{I}_n F(\mathbf{x}_0) = \int_{\partial V} G(\mathbf{x} \mid \mathbf{x}_0) d^{n-1}\mathbf{x} F(\mathbf{x}) - \int_V G(\mathbf{x} \mid \mathbf{x}_0) d^n\mathbf{x} DF(\mathbf{x}) + F_0(\mathbf{x})
\end{aligned} \tag{143}$$

$$F(\mathbf{x}_0) = \frac{(-1)^n}{\mathbb{I}_n} \left\{ \int_{\partial V} G(\mathbf{x} \mid \mathbf{x}_0) d^{n-1}\mathbf{x} F(\mathbf{x}) - \int_V G(\mathbf{x} \mid \mathbf{x}_0) d^n DF(\mathbf{x}) + F_0(\mathbf{x}) \right\}. \tag{144}$$

onde $\mathbf{x}_0$ é um ponto interior de V, $\mathbb{I}_n$ é o pseudoescalar unitário do espaço tangente em $\mathbf{x}_0$ e $F_0(\mathbf{x})$ é uma função analítica.

A equação (144) é a expressão geral para a antiderivada. Esta expressão mostra claramente que os valores de F nos pontos interiores de V são determinados pelos valores de F na fronteira ∂V bem como pelos valores da derivada de F dentro de V. Além disso, reduz o problema de resolver a equação (140) em resolver uma equação mais especial, tal solução depende da topologia de V e das condições de contorno desejadas.

Para o operador diferencial vetorial $D = \nabla$ no espaço $\mathbb{R}^n$, a equação (141) admite solução particular, sem considerar condições iniciais e/ou contorno de acordo com (HESTENES; SOBCZYK, 1984; DORAN; LASENBY; LASENBY, 2003), da seguinte da forma

$$G(\mathbf{x} \mid \mathbf{x}_0) = \frac{1}{S_n} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0}{\mid \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \mid^n}, \tag{145}$$

onde $\mathbf{x}$ e $\mathbf{x}_0$ são vetores e S_n é a área da superfície da esfera unitária $n-1$-dimensional definida como

$$S_n = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} \tag{146}$$

escrita em termos da função gama. Logo, para cada ponto $\mathbf{x}_0 \in V$ tem-se da equação (144)

$$F(\mathbf{x}_0) = \frac{(-1)^n}{S_n \mathbb{I}_n} \left\{ \int_{\partial V} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0}{\mid \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \mid^n} \, d^{n-1}\mathbf{x} F(\mathbf{x}) - \int_V \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0}{\mid \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \mid^n} \, d^n\mathbf{x} \nabla F(\mathbf{x}) + S_n \, F_0(\mathbf{x}) \right\}. \tag{147}$$

A equação (140) também foi estudada, embora de maneira indireta, no ramo da matemática conhecido como *Teoria do Potencial*[6] como em (HELMS, 1975; PRILENKO; SOLOMENTSEV, 2001). Para ver esta relação, basta considerar $D = \nabla$ e substituir $F = \nabla\phi$ na equação (140) para obter

$$\nabla^2\phi = P. \tag{148}$$

Uma forma integral para a equação (148) pode ser obtida por (147) expressando a função de Green (145) em termos de um potencial $g(\mathbf{x} \mid \mathbf{x}_0)$ tal que

$$G(\mathbf{x} \mid \mathbf{x}_0) = \nabla_{\mathbf{x}} g(\mathbf{x} \mid \mathbf{x}_0) = -\dot{g}(\mathbf{x} \mid \mathbf{x}_0)\dot{\nabla}_{\mathbf{x}_0}. \tag{149}$$

Considerando $G(\mathbf{x} \mid \mathbf{x}_0)$ com as condições da equação (145), a equação (149) tem solução particular como segue

$$g(\mathbf{x} \mid \mathbf{x}_0) = \begin{cases} \dfrac{(2-n)}{S_n \mid \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \mid^{n-2}} & \text{para} \quad n > 2 \\ \dfrac{1}{2\pi} \log \mid \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \mid & \text{para} \quad n = 2 \end{cases} \tag{150}$$

Logo

$$\phi(\mathbf{x}_0) = \frac{(-1)^n}{\mathbb{I}_n} \left\{ \int_{\partial V} g(\mathbf{x} \mid \mathbf{x}_0) d^{n-1}\mathbf{x} \; \nabla\phi(\mathbf{x}) - \int_V g(\mathbf{x} \mid \mathbf{x}_0) d^n\mathbf{x} \; \nabla^2\phi(\mathbf{x}) + \phi_0(\mathbf{x}_0) \right\}, \tag{151}$$

para $n \geq 2$ e $\phi_0(\mathbf{x}_0)$ é qualquer função analítica em V tal que $\nabla\phi_0(\mathbf{x}_0) = 0$.

Como $\phi_0(\mathbf{x}_0)$ é qualquer, pode-se escolher como

$$\phi_0(\mathbf{x}_0) = \int_{\partial V} \nabla g(\mathbf{x} \mid \mathbf{x}_0) d^{n-1}\mathbf{x} \; \phi(\mathbf{x}) \tag{152}$$

e a equação (151) assume a forma

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{x}_0) &= \frac{(-1)^{n+1}}{\mathbb{I}_n} \int_V g(\mathbf{x} \mid \mathbf{x}_0) d^n\mathbf{x} \; \nabla^2\phi(\mathbf{x}) \\ &+ \frac{(-1)^n}{\mathbb{I}_n} \int_{\partial V} g(\mathbf{x} \mid \mathbf{x}_0) d^{n-1}\mathbf{x} \; \nabla\phi(\mathbf{x}) + \frac{(-1)^n}{\mathbb{I}_n} \int_{\partial V} \nabla g(\mathbf{x} \mid \mathbf{x}_0) \; d^{n-1}\mathbf{x} \; \phi(\mathbf{x}). \end{aligned} \tag{153}$$

Este é o principal resultado da teoria potencial. Obviamente, ele obtém outras opções de $g(\mathbf{x} \mid \mathbf{x}_0)$ além (150). Além disso, o potencial ϕ não precisa ser escalar, mas pode ter valores multivetoriais.

[6] Estudo de funções que satisfazem a equação de Laplace.

5.4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Quando formulado o cálculo com álgebra geométrica, torna-se possível diferenciar não apenas com respeito a um escalar (como no cálculo real) ou um vetor (como no cálculo vetorial), mas também com respeito a multivetores. Desta forma ficam claras as vantagens que se pode ter comparado com as definições tradicionais. A primeira vantagem é um conceito único de derivada vetorial, ou seja, conceitos como gradiente, divergência e rotacional que são desenvolvidos separadamente no cálculo vetorial, porém no cálculo geométrico o conceito de divergência e rotacional são termos da mesma derivada vetorial (equação (93)). Além de ampliar o conceito de derivada para elementos multivetoriais que é uma ferramenta valiosa na análise Lagrangiana e geometria diferencial.

Muitos físicos e engenheiros estão familiarizados com vários teoremas integrais bem como os Teoremas da Divergência e de Stokes, além da fórmula Integral de Cauchy da análise complexa. Diante disto, pode ser apontada uma outra vantagem do cáludo definido com a estrutura da álgebra geométrica pois o Teorema Fundamental do Cálculo ficou mais geral (válido para qualquer dimensão) e definido por meio de uma única fórmula que tem como caso particular os principais teoremas do cálculo tais como o Teorema da Divergência, o Teorema de Stokes a fórmula Integral de Cauchy da análise complexa.

6 APLICAÇÕES DA ÁLGEBRA GEOMÉTRICA EM HIDRODINÂMICA

Neste capítulo serão apresentadas as soluções de dois problemas dados por um escoamento bidimensional em torno de um cilindro circular. Esses problemas podem ser formulados, com algumas considerações, através da Equação de Laplace e suas condições de contorno. No primeiro problema, mantém-se o cilindro fixo e apresentam-se dois métodos de resolução totalmente diferente dos métodos encontrados nos livros tradicionais. O primeiro método foi desenvolvido por Green e conhecido como a segunda identidade de Green, e que pode ser generalizada com a estrutura da álgebra geométrica. O segundo método é incluir o sistema de equação que descreve o problema na estrutura da álgebra geométrica, compactar esse sistema em uma única equação e depois resolvê-la. O segundo problema é acrescentar um vórtice simples no centro do cilindro e resolvê-lo utilizando a estrutura da álgebra geométrica. A equação compactada com a álgebra geométrica é um caso particular da equação (78). Por fim, comparam-se as soluções obtidas via cálculo vetorial.

6.1 RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE LAPLACE COM FUNÇÕES DE GREEN

A equação de conservação de momentum para um fluido invíscido é a equação de Euler, dada pela equação (50). Assumindo um fluido incompressível, a equação de continuidade é descrita pela (48). Essas equações, juntamente com as condições de contorno/iniciais, são suficientes para estabelecer a velocidade e a pressão no escoamento.

Um grande problema em resolver a equação de Euler é dado pelo termo advectivo $(\mathbf{v}\cdot\nabla)\,\mathbf{v}$ que é não linear. Algumas considerações são feitas para simplificar essa equação e torná-la linear, como assumir um escoamento irrotacional para um fluido que pode ser aproximado, em um sistema de coordenadas cartesianas, pelo seguinte sistema de equações lineares

$$\begin{cases} \nabla\cdot\mathbf{v}=0 \\ \\ \nabla\times\mathbf{v}=0 \end{cases} \tag{154}$$

Se o escoamento é potencial o Teorema de Kelvin garante que este permanecerá irrotacional, ou seja, o vetor de vorticidade será zero em todos os pontos do fluido. Então, a equação $\nabla \times \mathbf{v} = 0$ permite definir um potencial de velocidade ϕ (ou potencial escalar), independentemente da dimensionalidade do escoamento de tal forma que o campo de velocidade $\mathbf{v}$ em qualquer ponto do escoamento pode ser expresso como o gradiente desse potencial, ou seja,

$$\mathbf{v} = \nabla\phi. \tag{155}$$

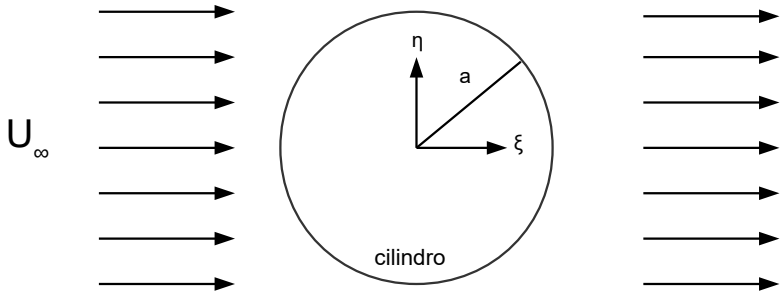
Para encontrar a equação que o potencial de velocidade ϕ satisfaz, a expressão de $\mathbf{v}$ dada pela equação (155) é substituída na equação de continuidade (48) e o sistema (154) é resumido pela *Equação de Laplace*,

$$\nabla^2\phi = 0. \tag{156}$$

Com a determinação de ϕ pode-se encontrar $\mathbf{v}$ por diferenciação direta na equação (155). Alguns desses resultados são conhecidos como soluções fundamentais e desses podem-se obter muitos resultados interessantes, embora idealizados, através do princípio da superposição.

O problema a ser resolvido é dado por um escoamento bidimensional e pode ser idealizado, desfrutando do princípio da superposição, da seguinte forma: somando um escoamento uniforme na direção do eixo ξ com um dipolo situado na origem do sistema. Mantendo a intensidade do dipolo constante as linhas de corrente tendem ao formato de um corpo circular materializando um escoamento em torno de um cilindro circular fixo, figura (9). Portanto, o potencial de velocidade, a função corrente e o campo de velocidade desse tipo de escoamento podem ser encontrados em livros de mecânica dos fluidos (KUNDU; COHEN; DOWLING, 2008; CURRIE, 2016) descritos tradicionalmente em um sistema de coordenadas polares, como segue

Figura 9 – Esquema para descrever o problema proposto.

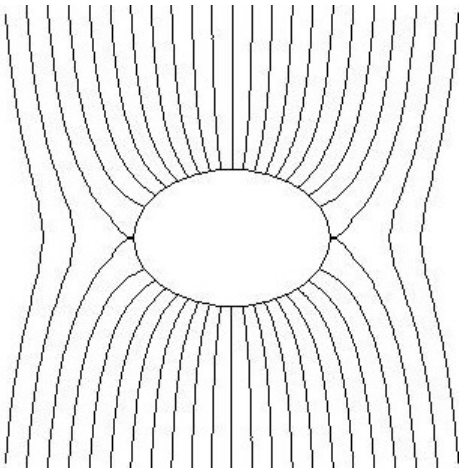


Fonte: Próprio Autor.

$$\begin{aligned}
\phi(r,\theta) &= U_\infty\, r\, \cos(\theta) + \frac{U_\infty\, a^2}{r}\cos(\theta),\\
\psi(r,\theta) &= U_\infty\, r\, \sin(\theta) - \frac{U_\infty\, a^2}{r}\sin(\theta),\\
\mathbf{v}(r,\theta) &= U_\infty\, \cos(\theta)\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)\hat{e}_r + U_\infty\, \sin(\theta)\left(-1-\frac{a^2}{r^2}\right)\hat{e}_\theta,
\end{aligned} \tag{157}$$

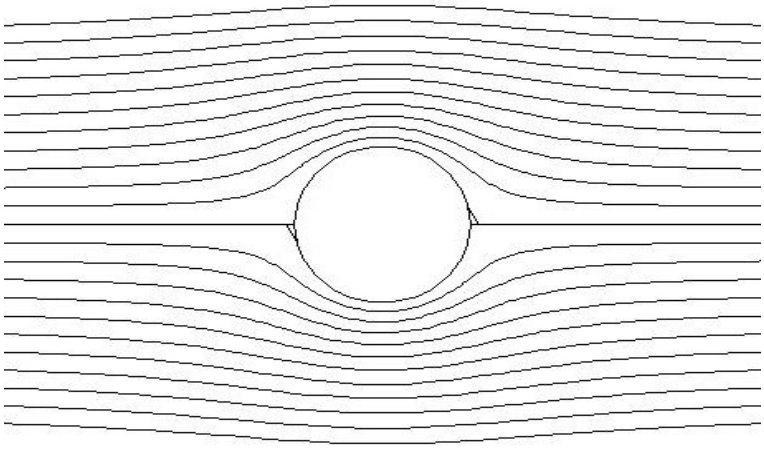
onde a é o raio de cilindro e U_∞ é a velocidade do escoamento uniforme. Os gráficos das linhas equipotencial e de corrente estão ilustrados nas figuras (10) e (11) respectivamente.

Figura 10 – Linhas equipotenciais para $a = 3m$, $U = 1.5m/s$.



Fonte: Próprio Autor.

Figura 11 – Linhas de corrente ambas para $a = 3m$, $U = 1.5m/s$.



Fonte: Próprio Autor.

As características do problema sugerem que a Equação de Laplace seja escrita no sistema de coordenadas polares e os seguintes sistemas de conversão serão utilizados

$$\mathbf{x}_0 = \begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ \\ y = r\sin(\theta) \end{cases} \qquad \mathbf{x} = \begin{cases} \xi = \rho\cos(\vartheta) \\ \\ \eta = \rho\sin(\vartheta) \end{cases} \tag{158}$$

.

Desta forma, a equação (153) que será utilizada pode ser escrita da forma

$$\phi(\mathbf{r}_0) = -\int_C G(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0)(\mathbf{n}\cdot\nabla\phi(\mathbf{r}))d\mathbf{r} + \int_C (\mathbf{n}\cdot\nabla G(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0))\phi(\mathbf{r})d\mathbf{r} \tag{159}$$

onde $\mathbf{r}_0 = (r,\theta)$, $\mathbf{r} = (\rho,\vartheta)$, $d\mathbf{r} = \rho\, d\rho\, d\vartheta$, $\mathbf{n}$ é o vetor unitário e normal exterior a região e C é a fronteira do cilindro. Logo, o problema se resume em

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2\phi(\rho,\vartheta)}{\partial\rho^2} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial\phi(\rho,\vartheta)}{\partial\rho} + \dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2\phi(\rho,\vartheta)}{\partial\vartheta^2} = 0 \quad \text{para} \quad a < \rho < \infty \quad \text{e} \quad 0 \le \vartheta < 2\pi \\ \\ \phi(a,\vartheta) = m(\vartheta) \qquad\qquad \text{para} \quad 0 \le \vartheta < 2\pi \\ \\ (\mathbf{n}\cdot\nabla\phi(a,\vartheta)) = n(\vartheta) \qquad\qquad \text{para} \quad 0 \le \vartheta < 2\pi. \end{cases} \tag{160}$$

A função de Green a ser considerada em $\rho = a$ é da forma

$$G(a,\vartheta \mid r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\ln(r^2 + a^2 - 2ra\cos(\vartheta - \theta)) \tag{161}$$

A derivada normal, que neste caso é a derivada radial, da função de Green na fronteira

do cilindro é da forma

$$-(\mathbf{n}\cdot\nabla G(a,\vartheta\mid r,\theta)) = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{-2a+2r\cos(\vartheta-\theta)-2r\sin(\vartheta-\theta)}{r^2+a^2-2ra\cos(\vartheta-\theta)}\right). \tag{162}$$

Como m e n são puramente tangenciais em $\rho = a$ pode-se considerar $m(\vartheta) = \zeta\cos(\vartheta)$ e $n(\vartheta) = \lambda\sin(\vartheta)$, onde$\zeta, \lambda \in \mathbb{R}$ são parâmetros de controle. Portanto, a equação (159) fica da forma

$$\begin{aligned}\phi(r,\theta) &= -\frac{\lambda}{2\pi}\int_0^{2\pi}(a\sin(\vartheta)\ln(r^2+a^2-2ra\cos(\vartheta-\theta)))d\vartheta \\ &+ \frac{\zeta}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{-2a^2\cos(\vartheta)+2ra\cos(\vartheta)\cos(\vartheta-\theta)-2ra\cos(\vartheta)\sin(\vartheta-\theta)}{r^2+a^2-2ra\cos(\vartheta-\theta)}\right)d\vartheta.\end{aligned} \tag{163}$$

cuja solução é dada por

$$\phi(r,\theta) = \left[\frac{(\lambda a+\zeta)\,(+a^2+r^2)\sin(\theta)}{2ar}\right] + \left[\frac{\zeta\,(+a^2+r^2)\cos(\theta)}{2ar}\right]\mathbb{I}_2. \tag{164}$$

É importante notar que a solução é um multivetor, onde o primeiro termo é um escalar e o segundo é um bivetor. A partir das condições de contorno, é possível considerar $\zeta = 2aU_\infty$, $\lambda = -2U_\infty$ e então a parte escalar do multivetor da solução desaparece, restando apenas o coeficiente do bivetor, que satisfaz a equação de Laplace e as características do problema proposto. Dessa forma, pode-se concluir que o potencial de velocidade é dado pelo coeficiente da parte bivetorial, conforme segue

$$\phi(r,\theta) = U_\infty\, r\,\cos(\theta) + \frac{U_\infty\, a^2}{r}\cos(\theta). \tag{165}$$

Consequentemente, a partir da equação (155) é possível encontrar o campo de velocidade e a função corrente que correspondem às equações em (157).

6.2 RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DA HIDRODINÂMICA COM ÁLGEBRA GEOMÉTRICA: CASO PARTICULAR I

O objetivo nesta seção é resolver o mesmo problema descrito na figura (9), porém utilizando a equação (144). Para isto é necessário inserir o sistema de equações (154) na estrutura da álgebra geométrica substituindo o produto vetorial pelo produto externo. Isto é feito através do produto geométrico (39) e a operação de dualidade (41). Desta forma,

o sistema (154) é reescrito com o auxilio da equação (93) em coordenadas cartesianas, como segue

$$\nabla\ \mathbf{v}(\xi,\eta) = \left[\frac{\partial f(\xi,\eta)}{\partial \xi} + \frac{\partial h(\xi,\eta)}{\partial \eta}\right] + \left[\frac{\partial h(\xi,\eta)}{\partial \xi}\hat{e}_\xi\hat{e}_\eta + \frac{\partial f(\xi,\eta)}{\partial \eta}\hat{e}_\eta\hat{e}_\xi\right] = 0, \tag{166}$$

com $\mathbf{v}(\xi,\eta) = f(\xi,\eta)\hat{e}_\xi + h(\xi,\eta)\hat{e}_\eta$ e $\nabla = \dfrac{\partial}{\partial \xi}\hat{e}_\xi + \dfrac{\partial}{\partial \eta}\hat{e}_\eta$.

Observe que existem dois bivetores no segundo termo do lado direito da igualdade. Assim é necessário definir a orientação da base para depois definir qual bivetor será o positivo. Esta equação é um caso particular da equação descrita por Belançon e Silva em (BELANÇON; SILVA, 2018).

Para isso, é considerado $\mathcal{B} = \{\hat{e}_\xi,\ \hat{e}_\eta\}$ uma base ortonormal do espaço Euclidiano bidimensional e $\overline{\mathcal{B}} = \{1,\ \hat{e}_\xi,\ \hat{e}_\eta,\ \hat{e}_\eta\hat{e}_\xi\}$ é uma base ortonormal para o espaço da álgebra geométrica do $\mathbb{R}^2$, orientada no sentido horário, sendo $\mathbb{I}_2 = \hat{e}_\eta\hat{e}_\xi$ o pseudoescalar com a propriedade $\mathbb{I}_2^2 = -1$.

Definida a orientação da base, a equação (166) pode ser reescrita em um sistema de coordenadas polares, como segue

$$\nabla\ \mathbf{v}(\rho,\vartheta) = \left(\frac{\partial f(\rho,\vartheta)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial h(\rho,\vartheta)}{\partial \vartheta}\right) + \left(-\frac{\partial h(\rho,\vartheta)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f(\rho,\vartheta)}{\partial \vartheta}\right)\mathbb{I}_2. \tag{167}$$

Portanto, o problema proposto pode ser descrito como

$$\begin{cases} \nabla\ \mathbf{v}(\rho,\vartheta) = 0 & \text{para} \quad a < \rho < \infty \quad \text{e} \quad 0 \le \vartheta < 2\pi \\ \\ \mathbf{v}(a,\vartheta) = h(a,\vartheta)\ \hat{e}_\vartheta & \text{para} \quad \rho = a \quad \text{e} \quad 0 \le \vartheta < 2\pi, \end{cases} \tag{168}$$

e a equação (144) se resume em

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}_0) = \int_C G(\mathbf{r} \mid \mathbf{r}_0)\ V(\mathbf{r})\ \mathbb{I}_2^{-1} d\mathbf{r}. \tag{169}$$

onde $\mathbf{r}_0 = (r,\theta)$, $\mathbf{r} = (\rho,\vartheta)$ e, com a equação (132), $\mathbb{I}_2^{-1}\ d\mathbf{r} = \mathbf{n}\ dl$ sendo dl a medida de valor escalar sobre a curva C.

Com a ajuda do pseudoescalar é possível converter o vetor normal exterior à região no vetor tangente orientado no sentido horário da seguinte forma

$$\mathbb{I}_2\ (\mathbf{n}\ dl) = (\mathbb{I}_2\ \mathbf{n})\ dl = \mathbf{T}\ dl. \tag{170}$$

com $dl = \rho\, d\vartheta$. Uma parametrização para a curva C pode ser escrita como

$$\gamma(\vartheta) = a\ \cos(\vartheta)\hat{e}_\rho - a\ \sin(\vartheta)\hat{e}_\vartheta \quad \text{para} \quad \rho = a \quad \text{e} \quad 0 \leq \vartheta < 2\pi. \tag{171}$$

Assim, o vetor tangente $\mathbf{T}$ da equação (170) pode ser escrito na forma

$$\mathbf{T}(\vartheta) = \frac{d\,\gamma(\vartheta)}{d\,\vartheta} = -a\ \sin(\vartheta)\hat{e}_\rho - a\ \cos(\vartheta)\hat{e}_\vartheta. \tag{172}$$

A função de Green a ser usada na fronteira do cilindro é da forma

$$G(a,\vartheta \mid r,\theta) = +\frac{1}{\pi}\left(\frac{a\ \cos(\vartheta) - r\ \cos(\theta)}{r\ (a^2 + r^2 - 2\ a\ r\cos(\vartheta-\theta))}\right)\hat{e}_\rho + \frac{1}{\pi}\left(\frac{a\ \sin(\vartheta) - r\ \sin(\theta)}{r\ (a^2 + r^2 - 2\ a\ r\cos(\vartheta-\theta))}\right)\hat{e}_\vartheta. \tag{173}$$

Portanto, pode ser considerado $h(a,\vartheta) = \kappa\ \sin(\vartheta)$, onde $\kappa \in \mathbb{R}$ é um parâmetro de controle e o produto geométrico $G(a,\vartheta \mid r,\theta)\mathbf{v}(a,\vartheta)$ é

$$G(a,\vartheta \mid r,\theta)\mathbf{v}(a,\vartheta) = +\frac{1}{\pi}\left(\frac{(a\ \sin(\vartheta) - r\ \sin(\theta))\kappa\ \sin(\theta)}{r\ (a^2 + r^2 - 2\ a\ r\cos(\vartheta-\theta))}\right) + \frac{1}{\pi}\left(\frac{-(a\ \cos(\vartheta) - r\ \cos(\theta))\kappa\ \sin(\theta)}{r\ (a^2 + r^2 - 2\ a\ r\cos(\vartheta-\theta))}\right)\mathbb{I}_2 \tag{174}$$

A partir das equações (172) e (174) define-se

$$\begin{aligned}(G(a,\vartheta \mid r,\theta)\mathbf{v}(a,\vartheta))\mathbf{T}(\vartheta) &= \frac{1}{\pi}\left(\frac{(a\ \sin(\vartheta) - r\ \sin(\theta))\kappa\ \sin(\theta)(-a\ \sin(\vartheta))}{r\ (a^2 + r^2 - 2\ a\ r\cos(\vartheta-\theta))}\right)\hat{e}_\rho \\ &+ \frac{1}{\pi}\left(\frac{(a\ \cos(\vartheta) - r\ \cos(\theta))\kappa\ \sin(\theta)(-a\ \cos(\vartheta))}{r\ (a^2 + r^2 - 2\ a\ r\cos(\vartheta-\theta))}\right)\hat{e}_\rho \\ &+ \frac{1}{\pi}\left(\frac{(a\ \sin(\vartheta) - r\ \sin(\theta))\kappa\ \sin(\theta)(-a\ \cos(\vartheta))}{r\ (a^2 + r^2 - 2\ a\ r\cos(\vartheta-\theta))}\right)\hat{e}_\vartheta \\ &- \frac{1}{\pi}\left(\frac{(a\ \cos(\vartheta) - r\ \cos(\theta))\kappa\ \sin(\theta)(-a\ \sin(\vartheta))}{r\ (a^2 + r^2 - 2\ a\ r\cos(\vartheta-\theta))}\right)\hat{e}_\vartheta\end{aligned} \tag{175}$$

Portanto, a equação (169) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}\mathbf{v}(r,\theta) &= \left[\frac{\kappa}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{-a^3\ \sin(\vartheta) + a^2\ r\ \sin(\vartheta)\cos(\theta-\vartheta)}{r\ (a^2 + r^2 - 2\ a\ r\cos(\vartheta-\theta))}\right)d\vartheta\right]\hat{e}_r \\ &+ \left[\frac{\kappa}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{+a^2\ r\ \sin(\vartheta)\sin(\theta-\vartheta)}{r\ (a^2 + r^2 - 2\ a\ r\cos(\vartheta-\theta))}\right)d\vartheta\right]\hat{e}_\theta.\end{aligned} \tag{176}$$

cuja solução é dada por

$$\begin{aligned}\mathbf{v}(r,\theta) &= \left(\frac{\kappa(a^2-r^2)\sin(\theta)}{2\,r^2} + \mathbb{I}_2\ \frac{\kappa(a^2-r^2)\cos(\theta)}{2\,r^2}\right)\hat{e}_r \\ &+ \left(\frac{\kappa(-a^2-r^2)\cos(\theta)}{2\,r^2} + \mathbb{I}_2\ \frac{\kappa(a^2+r^2)\sin(\theta)}{2\,r^2}\right)\hat{e}_\theta.\end{aligned} \tag{177}$$

É importante notar que cada componente do campo de velocidade é dado por um multivetor, sendo um termo escalar e um termo bivetorial. Além disso, tanto o termo escalar quanto o termo bivetorial satisfazem a equação (166), mas o termo escalar de cada componente não satisfaz a condição de contorno contida no sistema de equações (168). Assim, ao considerar $\kappa = -2U$ e o coeficiente da parte bivetorial de cada componente da equação (177) isso define uma solução do problema (168).

6.3 RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DA HIDRODINÂMICA COM ÁLGEBRA GEOMÉTRICA: CASO PARTICULAR II

O objetivo da seção é apresentar a solução do segundo problema proposto, isto é, o escoamento bidimensional em torno de um cilindro circular com circulação.

Este tipo de problema possue um grande potencial de aplicação em projetos navais e aeronáuticos, ainda não suficientemente explorado, como dispositivos capazes de oferecer elevados coeficientes de sustentação ou, ainda, no controle ativo da camada limite de escoamentos sobre aerofólios. A utilização também de cilindros rotativos como substitutos de velas, na propulsão de embarcações, foi proposta pelo engenheiro alemão Anton Flettner, em 1920, e constitui uma das mais destacadas aplicações práticas do efeito Magnus.

Este problema é encontrado na literatura como a superposição de um escoamento uniforme na direção do eixo ξ, um dipolo situado na origem e um vórtice irrotacional no centro do cilindro de intensidade K, o que não altera a materialização do formato do cilindro. Porém à medida que a circulação $\Gamma = K$ aumenta, o escoamento torna-se mais rápido acima do cilindro e mais lento abaixo dele. O potencial de velocidade, a função corrente e o campo de velocidade são dados como a soma da solução destes escoamentos que, em coordenadas polares, são da forma

$$\phi(r,\theta) = U_\infty\, r\, \cos(\theta) + \frac{U_\infty\, a^2}{r}\cos(\theta) + \frac{K}{2\pi}\theta$$

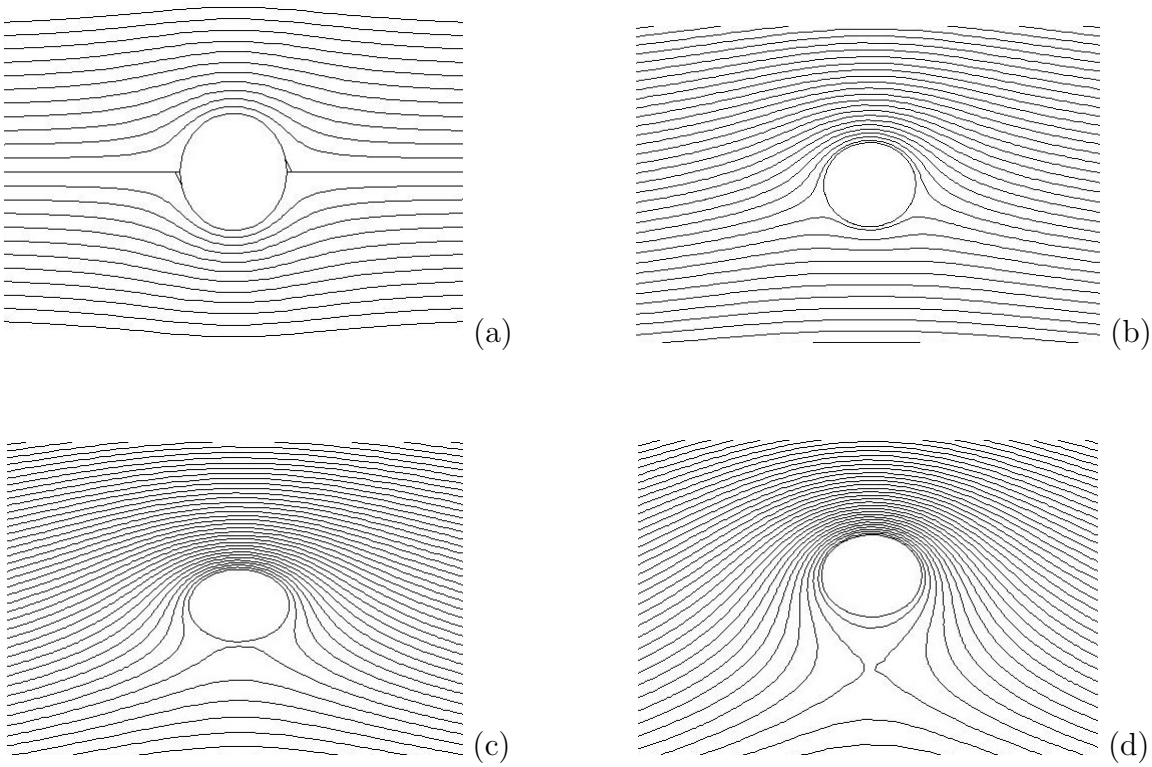
$$\psi(r,\theta) = U_\infty\, r\, \sin(\theta) - \frac{U_\infty\, a^2}{r}\sin(\theta) + \frac{K}{2\pi}\ln(r) \tag{178}$$

$$\mathbf{v}(r,\theta) = U_\infty\, \cos(\theta)\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)\hat{e}_r + \left[U_\infty\, \sin(\theta)\left(-1 - \frac{a^2}{r^2}\right) + \frac{K}{2\pi r}\right]\hat{e}_\theta$$

O gráfico das linhas de corrente está ilustrado na figura (12) para valores diferentes da intensidade K do dipolo. Por exemplo, na figura (12.a) com $K = 0$, na figura (12.b) com $K = U_\infty a$, na figura (12.c) com $K = 2U_\infty a$ e na figura (12.d) com $K > 2U_\infty a$.

Para este segundo problema, o sistema (168) permanece o mesmo, porém o que precisa mudar é a condição de contorno, pois a medida que a circulação $\Gamma = K$ aumenta a velocidade na parede do cilindro deixa de ser puramente tangencial. Logo, $h(a,\vartheta) = \lambda\, \sin(\vartheta) + \zeta$ em $\rho = a$ e $\lambda, \zeta \in \mathbb{R}$ são parâmetros de controle. As outras funções e os cálculos seguem de forma análogo aos feitos na seção anterior

Figura 12 – Linhas de corrente para diferentes valores de K.



Fonte: Próprio Autor.

Desta forma, a equação (169), com as devidas alterações, segue como

$$\mathbf{v}(r,\theta) =$$

$$\left[\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{-\lambda\ a^3\ \sin(\vartheta)+\lambda\ a^2\ r\ \ \sin(\vartheta)\cos(\theta-\vartheta)-\zeta\ a^3+\zeta\ a^2\ r\ \cos(\theta-\vartheta)}{r\ (a^2+r^2-2\ a\ r\cos(\vartheta-\theta))}\right)d\vartheta\right]\ \hat{e}_r$$

$$+\left[\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{+\lambda\ a^2\ r\ \ \sin(\vartheta)\sin(\theta-\vartheta)+\zeta\ a^2\ r\ \ \sin(\theta-\vartheta)}{r\ (a^2+r^2-2\ a\ r\cos(\vartheta-\theta))}\right)d\vartheta\right]\ \hat{e}_\theta. \tag{179}$$

cuja solução é dada por

$$\begin{aligned}\mathbf{v}(r,\theta) &= \left[\left(\frac{\lambda(a^2-r^2)\sin(\theta)}{2\ r^2}-\frac{\zeta\ a}{r}\right)+\left(\frac{\lambda(a^2-r^2)\cos(\theta)}{2\ r^2}\right)\ \mathbb{I}_2\right]\ \hat{e}_r \\ &+ \left[\left(\frac{\lambda(-a^2-r^2)\cos(\theta)}{2\ r^2}\right)+\left(\frac{\lambda(a^2+r^2)\sin(\theta)}{2\ r^2}+\frac{\zeta\ a}{r}\right)\ \mathbb{I}_2\right]\ \hat{e}_\theta.\end{aligned} \tag{180}$$

Da mesma forma que na equação (177) somente as componentes bivetoriais satisfazem a condição de contorno do sistema de equação (168). Portanto, ao considerar $\lambda = -2U_\infty$ e $\zeta = \frac{K}{a}$, isso define uma solução do sistema (168) para um escoamento em torno de um cilindro circular com circulação cujo campo de velocidade é da forma

$$v(r,\theta) = U_\infty\cos(\theta)\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)\hat{e}_r+\left[U_\infty\sin(\theta)\left(-1-\frac{a^2}{r^2}\right)+\frac{K}{2\pi r}\right]\hat{e}_\theta \tag{181}$$

6.4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A álgebra geométrica possui um mecanismo importante em sua estrutura: o produto geométrico. O produto geométrico garante a unicidade do inverso, o que não ocorre com os produtos interno e vetorial. Na estrutura da álgebra geométrica, as equações diferenciais foram transformadas (equações (156) e (166)) em equações integrais (equações (159) e (169)), ou seja, o operador Laplaciano é invertível e não há necessidade de usar equações intermediárias de segunda ordem ou aproximações numéricas para encontrá-lo. Isso não acontece na álgebra vetorial, pois a divergência e o rotacional não têm um único inverso.

Portanto, a principal diferença entre os métodos tradicionais e o exposto neste trabalho é a forma como a solução é gerada: no método tradicional, a solução é formada através do método de sobreposição de soluções fundamentais da Equação de Laplace ou de um potencial complexo. Porém, no método apresentado, é definida uma fórmula geral e fechada, que no contexto computacional acelera e facilita a implementação de uma

solução numérica; entretanto, para cada problema, é necessário definir uma função de Green específica. E, finalmente, o método apresentado fornece diretamente um campo de velocidade sem a necessidade de calcular o gradiente do potencial de velocidade. Por fim, vale ressaltar que no tocante à simulação em torno do cilindro rotativo, cilindros circulares em movimento de rotação possuem um grande potencial de aplicação em projetos navais e aeronáuticos, ainda não suficientemente explorado, como dispositivos capazes de oferecer elevados coeficientes de sustentação ou, ainda, no controle ativo da camada limite de escoamentos sobre aerofólios.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste capítulo as conclusões finais desta tese estão colocadas de forma resumida a partir das contribuições feitas. Posteriormente, algumas perspectivas e sugestões para trabalhos futuros estão apresentadas na seção 7.2.

7.1 CONCLUSÕES

No primeiro contato com a álgebra geométrica surgiu a curiosidade em descrever uma grandeza física e analisar seu comportamento em outros sistemas algébricos. O momentum angular foi esta grandeza escolhida pois é uma importante ferramenta da física para a resolução de sistemas rotacionais uma vez que está associado a um objeto que executa um movimento de rotação em torno de um ponto fixo. Neste sentido, foi apresentado , no capitulo 3, a definição do momentum angular conforme está presente na maioria dos livros didáticos de física e na sequência com a álgebra de Hamilton, a álgebra de Grassmann e por fim com a álgebra geométrica. Foi explorada a representação geométrica desta grandeza nesses sistemas algébricos e a conclusão foi que a estrutura da álgebra geométrica é a mais completa pois consegue representar tanto a parte geométrica quanto a parte métrica da grandeza estudada. Após essa análise a pergunta que surgiu foi: se para uma grandeza física, aparentemente simples, foi possível identificar grandes contribuições ao escrevê-la com a estrutura da álgebra geométrica, então o qão seria com grandezas mais complexas?

Ao avançar o estudos no campo da mecânica dos fluidos (capitulo 4) e tendo conhecimento que existe uma analogia entre o eletromagnetismo e a hidrodinâmica, assumindo diferentes condições de escoamento, a presente investigação mostrou um formalismo matemático das equações usadas para descrever o escoamento de um fluido ideal e incompressível. Nesse formalismo foi utilizado vários recursos para construir um sistema com quatro equações de maneira simples e direta. A partir disso foi utilizada a estrutura da álgebra geométrica para compactar em uma única equação esse sistema.

Esta investigação mostrou a necessidade de um estudo do cálculo geométrico, uma vez que o produto geométrico é uma ferramenta poderosa na formulação de problemas geométricos tendo em vista que ele é invertível. Neste sentido, vários conceitos do cálculo

foram apresentados com álgebra geométrica (capitulo 5), como por exemplo, um conceito completo de diferenciação que unifica o conceito de derivada de função vetorial os quais são vistos separadamente, por exemplo a divergência e o rotacional, no cálculo vetorial. Outro conceito abordado é um teorema geral, que tem como caso particular os principais teoremas do cálculo vetorial tais como: Teoremas da Divergência e de Stokes, além da fórmula Integral de Cauchy da análise complexa. Com todos esses conceitos uma fórmula para inverter operadores lineares é apresentada com base na segunda identidade de Green. A grande vantagem, além da unificação de conceitos, que essa álgebra é válida para espaços de qualquer dimensão consequêntemente também esses conceitos.

Com as ferramentas do cálculo geométrico a aplicabilidade se deu em um problema descrito pelas equações da hidrodinâmica aplicadas a escoamentos planos irrotacionais, que pode ser traduzido na Equação de Laplace. A solução do problema (160) foi apresentada de duas formas diferentes: a primeira foi encontrar o potencial de velocidade, isto é, resolver a equação de Laplace. A segunda forma foi utilizar a estrutura da álgebra geométrica e compactar as equações da hidrodinâmica e depois resolvê-la encontrando o campo de velocidade. Na sequência uma comparação das soluções encontradas foi feita com a solução dos métodos tradicionais.

Com um avanço na investigação e uma maior experiência em álgebra geométrica, foi possível trabalhar em outra aplicação. Foi considerado o mesmo problema acrescentando um vórtice irrotacional no centro do cilindro. Com as equações da hidrodinâmica compactadas, a solução foi encontrada aplicando a fórmula (169) e uma comparação feita. Vale notar que, à simulação em torno do cilindro rotativo, cilindros circulares em movimento de rotação possuem um grande potencial de aplicação em projetos navais e aeronáuticos, ainda não suficientemente explorado, como dispositivos capazes de oferecer elevados coeficientes de sustentação ou, ainda, no controle ativo da camada limite de escoamentos sobre aerofólios.

Finalmente, pode-se observar que os resultados dos estudos com a álgebra geométrica estão contribuindo para desenvolvimento de novos métodos na resolução de problemas no estudos de dinâmica dos fluidos. No entanto, investigações adicionais são necessárias para a construção de novos métodos para análisar vários perfis de velocidade. No que se refere a estrutura da álgebra geométrica, nota-se que é uma poderosa ferramenta matemática que auxilía na resolução de problemas com características geométricas, pois seus conceitos e definições permitem uma interpretação geométrica de cada operação, além de definir fórmulas mais completas e gerais no sentido da validade para espaços de qualquer dimensão. Esta ferramenta é muito bem aceita no meio computacional pois acelera e

facilita a implementação de uma solução numérica. Por outro lado, pode-se notar, através dos estudos, que esta ferramenta é pouco conhecida entre a comunidade de mecânica dos fluidos. Espera-se que este trabalho possa contribuir contribuir em disseminar esta ferramenta matemática entre pesquisadores desta área.

7.2 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Nesta seção, algumas sugestões para trabalhos futuros são enumeradas. Essas propostas podem ser conduzidas tanto para investigar soluções analíticas quanto para investigar soluções numéricas. As ideias propostas são as seguintes:

- Trabalhar com outras propriedade mecânicas como, a energia, o Lagrangeano, o Hamiltoniano, o momento de inércia;
- Deduzir as equações da continuidde, Navier-Stokes e vorticidade com a estrutura da Álgebra Geométrica;
- Avançar os estudos com álgebra geométrica para viabilizar soluções em problemas com singularidades;
- Entrar no mundo computacional, pois a estrutura da álgebra geométrica permite uma agilidade e um ganho maior comparado com outras estruturas.

REFERÊNCIAS

ALVES, R.; LAVOR, C.; SOUZA, C.; SOUZA, M. Clifford algebra and discretizable distance geometry. **Mathematical Methods in the Applied Sciences**, Wiley Online Library, p. 4063–4073, 2017. Disponível em: <http://doi.org/10.1002/mma.4422>.

ALVES, R. S. d. O. *et al.* Álgebra de clifford aplicada ao cálculo de estruturas moleculares. [sn], 2013. Disponível em: <http://repositorio.unicamp.br/jspui/handle-/REPOSIP/306802>.

ARGAND, J. R. **Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques**. [S.l.]: Paris: Gauthier-Villars, 1806.

AROVAS, D. P.; FREIRE, J. A. Dynamical vortices in superfluid films. **Physical Review B**, American Physical Society, v. 55, n. 2, p. 1068–1080, 1997. Disponível em: <http://doi.org/10.1103/PhysRevB.55.1068>.

BARTON, G.; BARTON, G. **Elements of Green's functions and propagation: potentials, diffusion, and waves**. [S.l.]: Oxford University Press, 1989.

BAYLIS, W. E. **Clifford (Geometric) Algebras: with applications to physics, mathematics, and engineering**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2012.

BAYRO-CORROCHANO, E.; BANARER, V. A geometric approach for the theory and applications of 3d projective invariants. **Journal of Mathematical Imaging and Vision**, Springer, v. 16, n. 2, p. 131–154, 2002. Disponível em: <http://doi.org/10.1023/A:1013947415006>.

BAYRO-CORROCHANO, E.; VALLEJO, R.; ARANA-DANIE, N. Geometric preprocessing, geometric feedforward neural networks and clifford support vector machines for visual learning. **Neurocomputing**, Elsevier, v. 67, p. 54–105, 2005. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0925231205001116>.

BELANÇON, E. D.; SILVA, S. d. A very short introduction to the geometric algebra of hydrodynamics. **European Journal of Physics**, IOP Publishing, v. 40, n. 1, p. 015801, 2018. Disponível em: <http://doi.org/10.1088/1361-6404/aae355>.

BELANÇON, E. D.; SILVA, S. d. Um passeio por várias álgebras na descrição do momento angular. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, SciELO Brasil, v. 41, n. 2, 2019. Disponível em: <https://doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2018-02522>.

BETSCH, P.; MENZEL, A.; STEIN, E. On the parametrization of finite rotations in computational mechanics: A classification of concepts with application to smooth shells. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier, v. 155, n. 3, p. 273–305, 1998. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article-/pii/S0045782597001588>.

BRISTEAU, M.; GLOWINSKI, R.; PERIAUX, J. Numerical methods for the navier-stokes equations. applications to the simulation of compressible and incompressible viscous flows. **Computer Physics Reports**, North-Holland, v. 6, n. 1, p. 73–187, 1987. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0167797787900116>.

BUCHHOLZ, S. **A theory of neural computation with Clifford algebras**. PhD thesis, 2005. Disponível em: <http://macau.uni-kiel.de/servlets/MCRFileNodeServlet-/dissertation_derivate_00001402/d1402.pdf>.

CAMARGO, I. d.; BOULOS, P. **Geometria analítica: um tratamento vetorial**. [S.l.]: 3ª edição. Renovada e ampliada–São Paulo: Prentice Hall, 2005.

CAMARGO, V. S. d. *et al.* Álgebra geométrica conforme e geometria de distâncias. [sn], 2015. Disponível em: <http://repositorio.unicamp.br/jspui/handle/REPOSIP/306798>.

CHORIN, A. J. Numerical solution of the navier-stokes equations. **Mathematics of computation**, v. 22, n. 104, p. 745–762, 1968. Disponível em: <http://www.ams.org-/journals/mcom/1968-22-104/S0025-5718-1968-0242392-2/>.

CHORIN, A. J.; MARSDEN, J. E.; MARSDEN, J. E. **A mathematical introduction to fluid mechanics**. [S.l.]: Springer, 1990.

CIBURA, C. **Derivation of fluid dynamics basics using geometric algebra**. Dissertação (Mestrado) — Master's thesis, TU Darmstadt, 2007.

CIBURA, C. **Fitting model parameters in conformal geometric algebra to Euclidean observation data**. PhD thesis, 2012. Disponível em: <http://hdl.handle-.net/11245/1.357016>.

CIBURA, C.; HILDENBRAND, D. Geometric algebra approach to fluid dynamics. **Presentation at AGACSE**, 2008. Disponível em: <http://pdfs.semanticscholar.org-/1191/ad6f5117da7b857ebe94c9af8e89fe841263.pdf>.

CLIFFORD, W. K. P. Applications of grassmann's extensive algebra. **American Journal of Mathematics**, Johns Hopkins University Press, v. 1, n. 4, p. 350–358, 1878. Disponível em: <http://www.jstor.org/stable/2369379>.

CURRIE, I. G. **Fundamental mechanics of fluids**. [S.l.]: CRC press, 2016.

DESCARTES, R.; MACLEAN, I. **A Discourse on the Method**. [S.l.]: Oxford University Press, UK, 2006. (Oxford World's Classics). ISBN 9780192825148.

DORAN, C.; LASENBY, A.; LASENBY, J. **Geometric algebra for physicists**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2003.

DORST, L.; FONTIJNE, D.; MANN, S. **Geometric algebra for computer science: an object-oriented approach to geometry**. [S.l.]: Elsevier, 2010.

DUFFY, D. G. **Green's functions with applications**. [S.l.]: Chapman and Hall/CRC, 2015.

FERNANDES, L. A.; OLIVEIRA, M. M. A general framework for subspace detection in unordered multidimensional data. **Pattern Recognition**, Elsevier, v. 45, n. 9, p. 3566–3579, 2012. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii-/S0031320312001112>.

FERNANDES, L. A. F.; LAVOR, C.; OLIVEIRA, M. M. **Álgebra Geométrica e Aplicações**. SBMAC, 2017. (Notas em Matemática Aplicada, v. 85). ISSN 2175-3385. ISBN 978-85-8215-081-8. Disponível em: <http://www.ic.uff.br/algebrageometrica>.

FERREIRA, G. F. L. Uma mini-introdução à concisa álgebra geométrica do eletromagnetismo. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, SciELO Brasil, v. 28, n. 4, p. 441–443, 2006. Disponível em: <http://www.scielo.br/pdf/rbef/v28n4/a06v28n4>.

FLANDERS, H. **Differential Forms with Applications to the Physical Sciences by Harley Flanders**. [S.l.]: Elsevier, 1963.

GIBBON, J. A quaternionic structure in the three-dimensional euler and ideal magneto-hydrodynamics equations. **Physica D: Nonlinear Phenomena**, Elsevier, v. 166, n. 1, p. 17–28, 2002. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science-/article/pii/S0167278902004347>.

GIBBON, J. D.; HOLM, D. D.; KERR, R. M.; ROULSTONE, I. Quaternions and particle dynamics in the euler fluid equations. **Nonlinearity**, IOP Publishing, v. 19, n. 8, p. 1969–1983, jul 2006. Disponível em: <https://doi.org/10.1088/0951-7715/19/8/011>.

GIBBS, J. W. **Elements of vector analysis: arranged for the use of students in physics**. [S.l.]: Tuttle, Morehouse & Taylor, 1884.

GIBBS, J. W. **The scientific papers of J. Willard Gibbs**. [S.l.]: Longmans, Green and Company, 1906.

GRASSMANN, H. G. **Die Lineale Ausdehnungslehre**. [S.l.]: Otto Wigand, Leipzig, 1844.

GRATTAN-GUINNESS, I. Why did george green write his essay of 1828 on electricity and magnetism? **The American mathematical monthly**, Taylor & Francis, v. 102, n. 5, p. 387–396, 1995.

GREEN, G. An essay on the application of mathematical analysis to the theories of electricity and magnetism. **J. Reine Angew. Math.**, v. 39, 44, 47, p. 73–89; 356–374; 161–221, 1850, 1852, 1854.

HAGEN, H.; SCHEUERMANN, G. Mathematical methods for curves and surfaces. In: LYCHE, T.; SCHUMAKER, L. L. (Ed.). Nashville, TN, USA: Vanderbilt University, 2001. p. 173–182. ISBN 0-8265-1378-6. Disponível em: <http://dl.acm.org/citation-.cfm?id=570828.570844>.

HAMILTON, W. R. **Elements of quaternions**. [S.l.]: Longmans, London, 1889; reprint Chelsea Publishing Company, New York, 1969.

HEAVISIDE, O. **Electrical papers**. [S.l.]: Chelsea Publishing Company, New York, 1970.

HELMS, L. L. Introduction to potential theory. **Pure and Applied Mathematics**, Robert E. Krieger Publishing Co., 1975.

HESTENES, D. Proper particle mechanics. **Journal of Mathematical Physics**, AIP, v. 15, n. 10, p. 1768–1777, 1974. Disponível em: <http://doi.org/10.1063/1.1666540>.

HESTENES, D. Space-time structure of weak and electromagnetic interactions. **Foundations of Physics**, Springer, v. 12, n. 2, p. 153–168, 1982. Disponível em: <http://doi.org/10.1007/BF00736846>.

HESTENES, D. **New foundations for classical mechanics**. [S.l.]: Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1986.

HESTENES, D. Differential forms in geometric calculus. In: BRACKX, F.; DELANGHE, R.; SERRAS, H. (Ed.). **Clifford Algebras and their Applications in Mathematical Physics**. Dordrecht: Springer Netherlands, 1993. p. 269–285. ISBN 978-94-011-2006-7. Disponível em: <http://doi.org/10.1007/978-94-011-2006-7_31>.

HESTENES, D. Old wine in new bottles: A new algebraic framework for computational geometry. In: CORROCHANO, E. B.; SOBCZYK, G. (Ed.). **Geometric Algebra with Applications in Science and Engineering**. Boston, MA: Birkhäuser Boston, 2001. p. 3–17. ISBN 978-1-4612-0159-5. Disponível em: <http://doi.org/10.1007/978-1-4612-0159-5_1>.

HESTENES, D. New tools for computational geometry and rejuvenation of screw theory. In: BAYRO-CORROCHANO, E.; SCHEUERMANN, G. (Ed.). **Geometric Algebra Computing: in Engineering and Computer Science**. London: Springer London, 2010. p. 3–33. ISBN 978-1-84996-108-0. Disponível em: <http://doi.org/10.1007/978-1-84996-108-0_1>.

HESTENES, D. Tutorial on geometric calculus. **Advances in Applied Clifford Algebras**, Springer, v. 24, n. 2, p. 257–273, 2014. Disponível em: <http://doi.org/10-.1007/s00006-013-0418-0>.

HESTENES, D. The genesis of geometric algebra: A personal retrospective. **Advances in Applied Clifford Algebras**, Springer, v. 27, n. 1, p. 351–379, 2017. Disponível em: <http://doi.org/10.1007/s00006-016-0664-z>.

HESTENES, D.; FASSE, E. D. Homogeneous rigid body mechanics with elastic coupling. In: DORST, L.; DORAN, C.; LASENBY, J. (Ed.). **Applications of Geometric Algebra in Computer Science and Engineering**. Boston, MA: Birkhäuser Boston, 2002. p. 197–212. ISBN 978-1-4612-0089-5. Disponível em: <http://doi.org/10.1007/978-1-4612-0089-5_19>.

HESTENES, D.; HOLT, J. W. Crystallographic space groups in geometric algebra. **Journal of Mathematical Physics**, AIP, v. 48, n. 2, p. 023514, 2007. Disponível em: <http://doi.org/10.1063/1.2426416>.

HESTENES, D.; LASENBY, A. N. **Space-time algebra**. [S.l.]: Springer, 1966.

HESTENES, D.; SOBCZYK, G. **Clifford algebra to geometric calculus: a unified language for mathematics and physics**. [S.l.: s.n.], 1984.

HILDEBRAND, F. B. **Advanced calculus for applications**. [S.l.]: Prentice-Hall, 1962.

HILDENBRAND, D.; ZAMORA, J.; BAYRO-CORROCHANO, E. Inverse kinematics computation in computer graphics and robotics using conformal geometric algebra. **Advances in applied Clifford algebras**, Springer, v. 18, n. 3, p. 699–713, 2008. Disponível em: <http://doi.org/10.1007/s00006-008-0096-5>.

JAHNKE, H. N. A history of analysis (history of mathematics vol. 24). **American Mathematical Society, Providence, RI**, p. 670–679, 2003.

JAMBERSI, A. B.; SILVA, S. d. A sutileza dos quatérnions no movimento de rotação de corpos rígidos. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, SciELO Brasil, v. 38, n. 2, 2016. Disponível em: <https://doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2016-0015>.

KAMBE, T. A new formulation of equations of compressible fluids by analogy with maxwell's equations. **Fluid dynamics research**, IOP Publishing, v. 42, n. 5, p. 055502, 2010. Disponível em: <http://stacks.iop.org/1873-7005/42/i=5/a=055502>.

KANATANI, K. **Understanding geometric algebra: Hamilton, Grassmann, and Clifford for computer vision and graphics**. [S.l.]: AK Peters/CRC Press, 2015.

KUIPERS, J. B. *et al.* **Quaternions and rotation sequences**. [S.l.]: Princeton university press Princeton, 1999.

KUNDU, P. K.; COHEN, I. M.; DOWLING, D. **Fluid Mechanics**. [S.l.]: Elsevier Academic Press, 2008.

LAVOR, C.; ALVES, R.; FIGUEIREDO, W.; PETRAGLIA, A.; MACULAN, N. Clifford algebra and the discretizable molecular distance geometry problem. **Advances in Applied Clifford Algebras**, Springer, v. 25, n. 4, p. 925–942, 2015. Disponível em: <http://doi.org/10.1007/s00006-015-0532-2>.

LAYTON, W. **Introduction to the numerical analysis of incompressible viscous flows**. [S.l.]: Siam, 2008.

LIMA, E. L. **Álgebra exterior**. [S.l.]: IMPA, 2009.

LOUNESTO, P. **Clifford algebras and spinors**. [S.l.]: Cambridge university press, 2001.

MACDONALD, A. A survey of geometric algebra and geometric calculus. **Advances in Applied Clifford Algebras**, Springer, v. 27, n. 1, p. 853–891, 2017. Disponível em: <http://doi.org/10.1007/s00006-016-0665-y>.

MANN, S.; ROCKWOOD, A. Computing singularities of 3d vector fields with geometric algebra. In: **Proceedings of the Conference on Visualization '02**. Washington, DC, USA: IEEE Computer Society, 2002. (VIS '02), p. 283–290. ISBN 0-7803-7498-3. Disponível em: <http://dl.acm.org/citation.cfm?id=602099.602143>.

MARMANIS, H. Analogy between the navier-stokes equations and maxwell's equations: Application to turbulence. **Physics of fluids**, AIP, v. 10, n. 6, p. 1428–1437, 1998. Disponível em: <http://doi.org/10.1063/1.869762>.

MAXWELL, J. C. On faraday's lines of force. **The scientific papers of James Clerk Maxwell**, Cambridge: Cambridge University Press, v. 1, p. 155–229, 1890.

MELO, N.; LAVOR, C. A clifford algebra of signature (n, 3n) and the density operators of quantum information theory. **Advances in Applied Clifford Algebras**, Springer, v. 23, n. 1, p. 143–152, 2013. Disponível em: <http://doi.org/10.1007/s00006-012-0341-9>.

MENNESSON, J.; SAINT-JEAN, C.; MASCARILLA, L. Color object recognition based on a clifford fourier transform. In: DORST, L.; LASENBY, J. (Ed.). **Guide to Geometric Algebra in Practice**. London: Springer London, 2011. p. 175–191. ISBN 978-0-85729-811-9. Disponível em: <http://doi.org/10.1007/978-0-85729-811-9_9>.

MORTARI, D.; ROJAS, J. M.; JUNKINS, J. L. Attitude and position estimation from vector observations. In: **Proceedings of the 2004 Space Flight Mechanics Meeting Conference**. [S.l.: s.n.], 2004. p. 04–140.

NETO, J. B. **Mecânica Newtoniana, Lagrangiana e Hamiltoniana**. [S.l.]: Editora Livraria da Física, 2004.

NUSSENZVEIG, H. M. **Curso de Física Básica: fluidos, oscilações e ondas, calor**. [S.l.]: Editora Blucher, 2018.

PERWASS, C.; EDELSBRUNNER, H.; KOBBELT, L.; POLTHIER, K. **Geometric algebra with applications in engineering**. [S.l.]: Springer, 2009.

POLLOCK, S.; MANN, S. Vortex detection in vector fields using geometric algebra. **Advances in Applied Clifford Algebras**, Springer, v. 24, n. 2, p. 423–442, 2014. Disponível em: <http://doi.org/10.1007/s00006-013-0434-0>.

PRILENKO, A.; SOLOMENTSEV, E. Potential theory. **Encyclopedia of Mathematics (Springer)**, 2001.

RIVERA-ROVELO, J.; BAYRO-CORROCHANO, E.; DILLMANN, R. Geometric neural computing for 2d contour and 3d surface reconstruction. In: BAYRO-CORROCHANO, E.; SCHEUERMANN, G. (Ed.). **Geometric Algebra Computing: in Engineering and Computer Science**. London: Springer London, 2010. p. 191–209. ISBN 978-1-84996-108-0. Disponível em: <http://doi.org/10.1007/978-1-84996-108-0_10>.

RODRIGUES, O. Des lois géométriques qui régissent les déplacements d'un système solide dans l'espace, et de la variation des coordonnées provenant de ces déplacements considérés indépendamment des causes qui peuvent les produire. **Journal de mathématiques pures et appliquées**, v. 5, n. 1, p. 380–440, 1840.

ROUBTSOV, V. N.; ROULSTONE, I. Holomorphic structures in hydrodynamical models of nearly geostrophic flow. **Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences**, v. 457, n. 2010, p. 1519–1531, 2001. Disponível em: <https://royalsocietypublishing.org/doi/abs/10.1098-/rspa.2001.0779>.

RUBTSOV, V. N.; ROULSTONE, I. Examples of quaternionic and kähler structures in hamiltonian models of nearly geostrophic flow. **Journal of Physics A: Mathematical and General**, IOP Publishing, v. 30, n. 4, p. L63–L68, feb 1997. Disponível em: <https://doi.org/10.1088/0305-4470/30/4/004>.

SABBATA, V. D.; DATTA, B. K. **Geometric algebra and applications to physics**. [S.l.]: CRC Press, 2006.

SAJEEWA, H. U. G. S.; LASENBY, J. Inferring dynamical information from 3d position data using geometric algebra. In: DORST, L.; DORAN, C.; LASENBY, J. (Ed.). **Applications of Geometric Algebra in Computer Science and Engineering**. Boston, MA: Birkhäuser Boston, 2002. p. 395–406. ISBN 978-1-4612-0089-5. Disponível em: <http://doi.org/10.1007/978-1-4612-0089-5_35>.

SOMMER, G. **Geometric computing with Clifford algebras: theoretical foundations and applications in computer vision and robotics**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2013.

SOUZA, J. V. C. d. *et al.* Álgebra geométrica conforme em geometria de distâncias com incertezas. [sn], 2017. Disponível em: <http://repositorio.unicamp.br/jspui/handle-/REPOSIP/330676>.

STEIN, E. M.; WEISS, G. **Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces (PMS-32)**. [S.l.]: Princeton university press, 2016.

STUELPNAGEL, J. On the parametrization of the three-dimensional rotation group. **SIAM Review**, v. 6, n. 4, p. 422–430, 1964. Disponível em: <http://doi.org/10.1137-/1006093>.

TRINDADE, M. A.; SAMPAIO, R. Uma revisão sobre a parametrização de rotações finitas na dinâmica de corpos rígidos. **Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences**, Scielo, v. 22, n. 2, p. 341–377, 2000. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1590/S0100-73862000000200015>.

TROSHKIN, O. Perturbation waves in turbulent media. **Zhurnal Vychislitel'noi Matematiki i Matematicheskoi Fiziki**, Russian Academy of Sciences, Branch of Mathematical Sciences, v. 33, n. 12, p. 1844–1863, 1993. Disponível em: <http://mi-.mathnet.ru/zvmmf2630>.

VALKENBURG, R.; ALWESH, N. Calibration of target positions using conformal geometric algebra. In: DORST, L.; LASENBY, J. (Ed.). **Guide to Geometric Algebra in Practice**. London: Springer London, 2011. p. 127–148. ISBN 978-0-85729-811-9. Disponível em: <http://doi.org/10.1007/978-0-85729-811-9_7>.

VAZ, J. J. A algebra geomérica do espaço euclideano e a teoria de pauli. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, SciELO Brasil, v. 19, n. 2, 1997. Disponível em: <http://www.sbfisica.org.br/rbef/pdf/v19a23.pdf>.

VAZ, J. J.; ROCHA, R. da. **Álgebras de Clifford e Espinores**. [S.l.]: Editora Livraria da Física da USP, 2012.

WALKER, J. *et al.* **Fundamentos de física**. [S.l.]: Editora LTC, Rio de Janeiro, 2016.

WESSEL, C. **Om directionens analytiske betegning, et forsøg, anvendt fornemmelig til plane og sphaeriske polygoners opløsning**. [S.l.]: Nye Samling af det Kongelige Danske Videnskabernes Selskab Skrifter, 1799. 469–518 p.

WINTERLE, P. **Vetores e geometria analítica**. [S.l.]: Pearson Makron Books, São Paulo, 2010.

APÊNDICE A – Função de Green

Neste apêndice será colocado os principais conceitos envolvendo as Funções de Green os quais podem auxiliar em uma melhor compreensão dos resultados apresentados ao longo deste trabalho.

Essa teoria foi desnvolvida pelo matemático e físico inglês George Green (1793 – 1841) que publicou um trabalho (GREEN, 1850, 1852, 1854) no qual apresenta o chamado *Teorema de Green* (também conhecido hoje como segunda identidade de Green) e as *Funções de Green* (GRATTAN-GUINNESS, 1995; JAHNKE, 2003). As funções de Green nasceram como funções auxiliares para resolver problemas de valor inicial/contorno e com isso surgiu toda uma teoria de equações diferenciais parciais, abrindo caminho para o desenvolvimento da análise funcional. No final do século XIX, muitos problemas de valor inicial/contorno foram abordados em acústica, hidrodinâmica, termodinâmica e eletromagnetismo.

Esse método pode ser aplicado a operadores diferenciais lineares ordinário ou parcial, como

$$D = \sum A_m(\mathbf{x}) \frac{\partial^{|m|}}{\partial^{m_1} x_1 ... \partial^{m_n} x_n}, \tag{182}$$

com $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, $m = (m_1, m_2, ..., m_n) \in \mathbb{Z}^n$, $\mid m \mid = m_1 + m_2 + ... + m_n$ e $A_m(\mathbf{x})$ são funções diferenciáveis. Para operador linear de segunda ordem para até três variáveis independentes o operador é da forma

$$D = A\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2}{\partial y^2} + 2E\frac{\partial^2}{\partial y \partial z} + F\frac{\partial^2}{\partial z^2} + 2G\frac{\partial^2}{\partial x \partial z}. \tag{183}$$

Os métodos para obtenção da função de Green variam segundo o tipo de problema proposto. Alguns métodos serão apresentados, tais como: o método direto,o método de expansão em série e o método da transformada de Fourier que em alguns casos pode ser aplicado juntamente com a transformada de Laplace (em geral, isso acontece, quando o operador depende também do tempo).

Antes de definir as funções de Green é preciso definir uma ferramenta especial: *o*

Delta de Dirac ou distribuição de Dirac,

$$\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0) = \begin{cases} \infty & \text{se} \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}_0 \\ \\ 0 & \text{se} \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0 \end{cases} \tag{184}$$

que satisfaz a seguinte condição

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 1. \tag{185}$$

Rigorosamente, o Delta Dirac não é uma função, pois exigiria um valor definido para cada ponto em seu domínio, por isso, é classificada como uma distribuição. Sua propriedade mais importante é a de filtragem dada por

$$f(\mathbf{x}_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0) f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \tag{186}$$

onde $f(\mathbf{x}_0)$ é qualquer função contínua em $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$. Convém notar também que $\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)$ é uma função par, isto é, $\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0) = \delta(\mathbf{x}_0-\mathbf{x})$.

Considerar uma equação diferencial não-homogênea da seguinte forma

$$D\ f(\mathbf{x}) = h(\mathbf{x}), \tag{187}$$

onde D é o operador diferencial linear (183), $f(\mathbf{x})$ é a solução desejada (saida) e $g(\mathbf{x})$ representa a força ou fonte (entrada) dependendo de que tipo de sistema a equação representa.

Uma *função de Green* $G(\mathbf{x} \mid \mathbf{x}_0)$ do operador diferencial linear D é qualquer solução da equação

$$D\ G(\mathbf{x} \mid \mathbf{x}_0) = \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0). \tag{188}$$

Uma solução particular da equação não homogênea (187) pode ser formalmente encontrada através da propriedade de filtragem da seguinte forma

$$f(\mathbf{x}_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(\mathbf{x} \mid \mathbf{x}_0) h(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \tag{189}$$

Assim, a pesquisa das soluções da equação (187) se reduz à pesquisa das funções de Green do operador D da mesma equação, isto é, as soluções da equação (189).

Para verificar isso, basta aplicar o operador diferencial linear D em ambos os lados da equação (189), utiliza a equação (188) e depois a propriedade de filtragem (186) resultando na equação (187). Note que existem infinitas funções de Green que satisfazen a equação

(188). Isso faz com que a escolha da função de Green dependa da situação do problema, isto é, a função de Green obedeça a qualquer condição inicial e/ou contorno. Nem todo operador D admite uma função de Green. Uma função de Green também pode ser pensada como sendo um inverso pela direita de D. Além das dificuldades de encontrar uma função de Green para um determinado operador, a integral na equação (189) pode ser bastante difícil de se calcular.

Em termos desta função de Green, a solução geral da equação (187) pode ser escrita como

$$f(\mathbf{x}_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(\mathbf{x} \mid \mathbf{x}_0) g(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + h(\mathbf{x}_0). \tag{190}$$

onde $h(\mathbf{x}_0)$ é a solução da equação homogênea $Dh(\mathbf{x}) = 0$ que satisfaz às condições de contorno da equação não-homogênea.

Será apresentado alguns métodos para encontrar as funções de Green.

1. **Método Direto:** O método direto é recomendado para operador diferencial unidimensional e para domínios finito ou semi-infinito. Com isso, uma equação diferencial da forma

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + \alpha\frac{d}{dx} + \beta\right)\psi(x) = f(x) \tag{191}$$

com α, β constantes e $a \leq x \leq b$, tem função de Green associada ao operador $D = \dfrac{d^2}{dx^2} + \alpha\dfrac{d}{dx} + \beta$, da seguinte forma

$$G(x \mid x_0) = \begin{cases} Au(x) + Bv(x) & \text{se} \quad a < x < x_0 \\ \\ Cu(x) + Dv(x) & \text{se} \quad x_0 < x < b \end{cases} \tag{192}$$

onde A, B, C e D são constante a determinar e $u(x)$, $v(x)$ são soluções linearmente independentes da equação homogênea associada

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + \alpha\frac{d}{dx} + \beta\right)\psi(x) = 0 \tag{193}$$

na qual a função de Green também deve satisfazer.

Para determinrs as constantes, além das condições de contorno e/ou iniciais, é necessário impor a continuidade de G no ponto x_0 e a descontinuidade de primeira espécie da derivada de G em x_0. Supondo que as condições de contorno
$\psi(a) = \psi(b) = 0$ são dadas, conclui-se que a função de Green, neste caso, é da forma

$$G(x \mid x_0) = \begin{cases} \dfrac{u(x)v(x_0)}{u(x_0)v'(x_0) - u'(x_0)v(x_0)} & \text{se} \quad a \le x \le x_0 \\ \\ \dfrac{u(x_0)v(x)}{u(x_0)v'(x_0) - u'(x_0)v(x_0)} & \text{se} \quad x_0 \le x \le b. \end{cases} \tag{194}$$

Vale observar que se as funções $u(x)$ e $v(x)$ forem linearmente dependente a expressão $u(x_0)v'(x_0) - u'(x_0)v(x_0) = 0$ e nesses casos a função de Green é indefinida. Uma deficiência da fórmula (194) é que ela só pode ser usada a partir do conhecimento de duas soluções lineramente independentes da equação homogênea (193). A expressão (194) vale também para domínios semi-infinitos, isto é, $(0, \infty)$ e condições de contorno $\psi(0) = \psi(\infty) = 0$.

Para condições iniciais em dominio finito $\psi(a) = \psi'(a) = 0$ ou em dominio semi-infinito $\psi(a) = \psi'(\infty) = 0$ a função de Green não é simétrica e tem forma

$$G(x \mid x_0) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad a \le x \le x_0 \\ \\ \dfrac{u(x)v(x_0) - u(x_0)v(x)}{u(x_0)v'(x_0) - u'(x_0)v(x_0)} & \text{se} \quad x_0 \le x. \end{cases} \tag{195}$$

Será aplicado este método para calcular a função de Green da equação de Helmholtz unidimensional. Neste método será considere um domínio limitado $0 \le x \le L$ e as condições de contorno $f(0) = f(L) = 0$.

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} + k^2 f(x) = h(x). \tag{196}$$

As funções $u(x) = \sin(kx)$ e $v(x) = \cos(kx)$ são soluções linearmente independentes da equação homogênea associada a equação (196). Além disso, $u(x_0)v'(x_0) - u'(x_0)v(x_0) = -k$. Com isso e da equação (194) a função de Green é da forma

$$G(x \mid x_0) = \begin{cases} -\dfrac{\sin(kx)\cos(kx_0)}{k} & \text{para} \quad 0 \le x \le x_0 \\ \\ -\dfrac{\sin(kx_0)\cos(kx)}{k} & \text{para} \quad x_0 \le x \le L. \end{cases} \tag{197}$$

Exemplo A.1 *Resolver a seguinte equação diferencial ordinária pelo método da função de Green*

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \frac{d\psi(x)}{dx} - 2\psi(x) = 2x, \quad e \quad \psi(0) = 0, \quad \psi'(0) = 0. \tag{198}$$

Duas soluções da equação homogênea associada são da forma

$$\psi_1(x) = e^{-2x} \quad e \quad \psi_2(x) = e^{x}. \tag{199}$$

Logo a função de Green associada ao operador pode ser escrita como

$$G(x \mid x_0) = \begin{cases} 0 & se \quad 0 \le x \le x_0 \\ \\ \dfrac{1}{3}\left(e^{-2(x-x_0)} - e^{(x-x_0)}\right) & se \quad x \ge x_0. \end{cases} \tag{200}$$

Assim, da equação (153) para uma dimensão, tem-se

$$\begin{aligned} \psi(x) = & -\int_0^x \frac{e^{-2(x-x_0)} - e^{(x-x_0)}}{3}(2x_0)dx_0 \\ \psi(x) = & -\frac{2}{3}e^{-2x}\int_0^x e^{2x_0}x_0dx_0 + \frac{2}{3}e^{x}\int_0^x e^{-x_0}x_0dx_0 \\ \psi(x) = & -\frac{1}{2} - x + \frac{2e^x}{3} - \frac{e^{-2x}}{6}. \end{aligned} \tag{201}$$

Exemplo A.2 *Considere a seguinte equação diferencial ordinária*

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + 4\psi(x) = x^2 + 3e^x, \quad e \quad \psi(0) = 0, \quad \psi'(0) = 0. \tag{202}$$

Duas soluções da equação homogênea associada são da forma

$$\psi_1(x) = \sin(2x) \quad e \quad \psi_2(x) = \cos(2x). \tag{203}$$

Logo a função de Green associada ao operador pode ser escrita como

$$G(x \mid x_0) = \begin{cases} 0 & se \quad 0 \le x \le x_0 \\ \\ -\dfrac{\sin(2(x-x_0))}{2} & se \quad x \ge x_0. \end{cases} \tag{204}$$

Assim, da equação (153) para uma dimensão, tem-se

$$\begin{aligned} \psi(x) = & \int_0^x \frac{\sin(2(x-x_0))}{2}(x_0^2 + 3e^{x_0})dx_0 \\ \psi(x) = & \frac{1}{2}\int_0^x \sin(2(x-x_0))x_0^2 \; dx_0 + \frac{3}{2}\int_0^x \sin(2(x-x_0))e^{x_0} \; dx_0 \\ \psi(x) = & -\frac{1}{8} + \frac{x^2}{4} + \frac{3e^x}{5} - \frac{19}{40}\cos(2x) - \frac{3}{10}\sin(2x). \end{aligned} \tag{205}$$

2. **Método de Expansão em Série:** Este método é aplicado em operadores com várias variáveis com domínio limitado, porém é preciso que o operador diferencial

linear D seja auto-adjunto, então a função de Green do problema

$$\nabla^2\psi(\mathbf{x}) + k^2\psi(\mathbf{x}) = 0, \tag{206}$$

onde $D = \nabla^2 + k^2$ e $\mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ é dada pela expansão

$$G(\mathbf{x} \mid \mathbf{x}_0) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\bar{u}_m(\mathbf{x})u_m(\mathbf{x}_0)}{k^2 - \lambda_m} \tag{207}$$

onde u_m são as autofunções normalizadas em Ω do operador D, λ_m são os autovalores correspondentes e $\bar{u}_m$ representa a conjugação complexa. A expansão em série pode ser encontrada, por exemplo em (BARTON; BARTON, 1989) e (DUFFY, 2015).

Para $k^2 = 0$ a função de Green é definida como

$$G(\mathbf{x}|\mathbf{x}_0) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\bar{u}_m(\mathbf{x})u_m(\mathbf{x}_0)}{\lambda_m} \tag{208}$$

e a função de Green é indefinida somente para o autovalor nulo. O estudo geral da função de Green e sua relação com os espaços de funções formados por autovetores, é conhecido como *Teoria de Fredholm*.

Será aplicado este método para encontrar a função de Green na equação de Helmholtz (196) para o mesmo domínio e as mesmas condições de contorno do método direto.

As autofunções $u(x)$ satisfaz o problema homogêneo

$$\frac{d^2u(x)}{dx^2} + \lambda u(x) = 0 \tag{209}$$

associado a equação (196), onde λ são os autovalores. Para os autovalores $\lambda < 0$, $\lambda = 0$ só existe a solução trivial $u(x) = 0$. Para $\lambda > 0$ a equação homogênea pode ser escrita da forma

$$\frac{d^2u(x)}{dx^2} + \mu^2 u(x) = 0 \tag{210}$$

(foi considerado $\lambda = \mu^2$ para facilitar as contas) e a equação característica tem raízes $\pm i\mu$ e a solução geral é da forma

$$u(x) = C_1 \cos(\mu x) + C_2 \sin(\mu x). \tag{211}$$

Da primeira condição, $C_1 = 0$ e da segunda

$$C_2 \sin(\mu L) = 0. \tag{212}$$

Como a soluções deve ser não triviais, coloca-se $C_2 \neq 0$, logo $\sin(\mu L) = 0$ o que

implica $\mu L = n\pi$, ou seja $\mu = \dfrac{n\pi}{L}$, $n = 1, 2, 3, ...$ Os autovalores são $\lambda_n = \dfrac{n^2\pi^2}{L^2}$ e as autofunções são $u_n(x) = C_2 \sin\left(\dfrac{n\pi}{L}x\right)$. Como a consante C_2 é arbitrária pode-se considerá-la $C_2 = 1$. Portanto, da expressão (207) a expansão em série da função de Green é da forma

$$G(x|x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\dfrac{n\pi}{L}x\right)\sin\left(\dfrac{n\pi}{L}x_0\right)}{k^2 - \dfrac{n^2\pi^2}{L^2}}. \tag{213}$$

3. **Método com Transformação de Fourier e/ou Laplace:** A transformação de Fourier é utilizada para encontrar a solução particular de uma equações diferenciais ordinárias transformando esta em uma equação algébrica. Considerações semelhantes são válidas para as equações diferenciais parciais, porém se a EDP depender do tempo a transformada de Fourier pode ser aplicada para eliminar a dependencia temporal e depois resolvê-la. Caso a solução é não nula somente para $t > 0$ a transformada de Fourier pode ser substituída pela Transformada de Laplace e então eliminar a dependencia do tempo. Em resumo, aplica-se a transformada de Laplace para eliminar a dependência temporal, então se o domínio espacial for infinito ou semi-infinito, usa-se a transformada de Fourier para reduzir essa equação diferencial em uma equação algébrica.

   Sejam D um operador diferencial linear e $G(\mathbf{x} \mid \mathbf{x}_0)$ uma função de Green associada a D, então a seguinte equação diferencial pode ser escrita para determinar $G(\mathbf{x})$

$$D\ G(\mathbf{x} \mid \mathbf{x}_0) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \tag{214}$$

   com $\mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$. Aplicando a transformada de Fourier a seguinte equação algébrica é obtida

$$P(\boldsymbol{\xi})g(\boldsymbol{\xi} \mid \mathbf{x}_0) = \frac{e^{-i\langle \mathbf{x}_0, \boldsymbol{\xi}\rangle}}{(\sqrt{2\pi})^n}, \tag{215}$$

   onde $g(\boldsymbol{\xi} \mid \mathbf{x}_0)$ é a transformada de Fourier n-dimensional da função de Green $G(\mathbf{x}|\mathbf{x}_0)$. Assim, a solução da equação (215) será

$$g(\boldsymbol{\xi}|\mathbf{x}_0) = \frac{e^{-i\langle \mathbf{x}_0, \boldsymbol{\xi}\rangle}}{(\sqrt{2\pi})^n P(\boldsymbol{\xi})}. \tag{216}$$

   A definição da transformada de Fourier pode ser encontrada em (STEIN; WEISS,

2016) e definida como

$$g(\boldsymbol{\xi} \mid \mathbf{x}_0) = \mathcal{F}\{G(\mathbf{x} \mid \mathbf{x}_0)\} = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi} \rangle} G(\mathbf{x} \mid \mathbf{x}_0) d\mathbf{x}, \tag{217}$$

$\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$, $d\mathbf{x} = dx_1 dx_2 ... dx_n$, $\langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi} \rangle = x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + ... + x_n\xi_n$ e $P(\boldsymbol{\xi})$ é um polinômio nas variáveis $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ determinado pelo operador D.

A transformada de Fourier da função $\delta(\mathbf{x})$ é calculada como

$$\mathcal{F}\{\delta(\mathbf{x})\} = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi} \rangle} \delta(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n}. \tag{218}$$

Consequentemente a transformada de Fourier da função $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$ é dada por

$$\mathcal{F}\{\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\} = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi} \rangle} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) d\mathbf{x} = \frac{e^{-i\langle \mathbf{x}_0, \boldsymbol{\xi} \rangle}}{(\sqrt{2\pi})^n}. \tag{219}$$

Portanto, a função de Green $G(\mathbf{x}|\mathbf{x}_0)$ será obtida pela transformação de Fourier inversa de $g(\boldsymbol{\xi} \mid \mathbf{x}_0)$, como segue

$$G(\mathbf{x} \mid \mathbf{x}_0) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi} \rangle} g(\boldsymbol{\xi} \mid \mathbf{x}_0) d\boldsymbol{\xi}. \tag{220}$$

As propriedades operacionais da transformada pode ser aplicada para facilitar os cálculos.

Para este método será considerado um domínio ilimitado, isto é, $-\infty < x < \infty$. Uma função de Green $G(x \mid x_0)$ deve satisfazer a equação

$$\frac{d^2 G(x \mid x_0)}{dx^2} + k^2 G(x \mid x_0) = \delta(x - x_0). \tag{221}$$

Aplicando a transformada de Fourier nesta expressão tem-se a seguinte equação algébrica

$$(-\xi^2 + k^2) g(\xi \mid x_0) = \frac{e^{-ix_0\xi}}{\sqrt{2\pi}}, \tag{222}$$

onde a função de Green no domínio da transformada é da forma

$$g(\xi \mid x_0) = -\frac{e^{-ix_0\xi}}{\sqrt{2\pi}(\xi^2 - k^2)}. \tag{223}$$

Aplicando a transformada inversa

$$G(x \mid x_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi} \left(-\frac{e^{-ix_0\xi}}{\sqrt{2\pi}(\xi^2 - k^2)} \right) d\xi. \tag{224}$$

$$G(x \mid x_0) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\xi(x-x_0)}}{(\xi^2 - k^2)} d\xi. \tag{225}$$

A função $\dfrac{1}{\xi^2 - k^2}$ possui duas raizes reais e simples $\xi = \pm k$, então qualquer contorno C que contenha o eixo real pode ser usado para resolver esta integral na teoria de variáveis complexas com o teorema dos resíduos. Logo

$$G(x \mid x_0) = -\frac{1}{2\pi}[2\pi i(Res(k) + Res(-k))] = \frac{-i}{2k}\left[e^{ik(x-x_0)} - e^{-ik(x-x_0)}\right]. \tag{226}$$

Aplicando a fórmula de Euler para eliminar a exponencial tem-se que a função de Green para a equação (196) é da forma

$$G(x \mid x_0) = \begin{cases} \dfrac{\sin(k(x-x_0))}{k} & \text{para} \quad x_0 < x \\ -\dfrac{\sin(k(x-x_0))}{k} & \text{para} \quad x < x_0 \end{cases} \tag{227}$$

Também pode ser escrito como

$$G(x \mid x_0) = \frac{\sin(k \mid x - x_0 \mid)}{k} \qquad \text{para} \quad -\infty < x < \infty.$$

Um exemplo mais simples possível para ilustrado a aplicação da tansformada de Fourier e Laplace conjuntamente é a equação da onda para o caso unidimensional

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = q(x,t), \tag{228}$$

para $-\infty < x < \infty$ e $t > 0$. Neste problema a função de Green é dada pela equação

$$\frac{\partial^2 G(x,t \mid x_0,t_0)}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 G(x,t \mid x_0,t_0)}{\partial x^2} = c^2\delta(x-x_0)\delta(t-t_0). \tag{229}$$

A equação (229) expressa o efeito de um impulso que se propaga a partir de $x = x_0$ à medida que o tempo aumenta a partir de $t = t_0$. Assim, para $t < t_0$ tem-se

$$G(x,t \mid x_0,t_0) = \frac{dG(x,t \mid x_0,t_0)}{dt} = 0 \tag{230}$$

se o impulso for a única fonte de pertubação. Logo, aplicando a transformada de Laplace

nesta equação, tem-se

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{\frac{\partial^2 G(x,t\mid x_0,t_0)}{\partial t^2}\right\} - \mathcal{L}\left\{c^2\frac{\partial^2 G(x,t\mid x_0,t_0)}{\partial x^2}\right\} &= \mathcal{L}\left\{c^2\delta(x-x_0)\delta(t-t_0)\right\} \\
s^2\mathcal{L}\{G(x,s\mid x_0,t_0)\} - c^2\frac{d^2\mathcal{L}\{G(x,s\mid x_0,t_0)\}}{dx^2} &= c^2\delta(x-x_0)e^{-t_0 s} \qquad (231)\\
\frac{d^2\mathcal{L}\{G(x,s\mid x_0,t_0)\}}{dx^2} - \frac{s^2}{c^2}\mathcal{L}\{G(x,s\mid x_0,t_0)\} &= -\delta(x-x_0)e^{-t_0 s}.
\end{aligned}$$

Observe que, a transformada de Laplace do termo

$$\frac{d^2\mathcal{L}\{G(x,s\mid x_0,t_0)\}}{dx^2} \qquad (232)$$

é em relação ao tempo, logo não se aplica as propriedades da transformada na segunda derivada $\frac{d^2}{dx^2}$ mas somente em $G(x,t\mid x_0,t_0)$.

Para resolver a equação (231) aplica-se a transformada de Fourier para obter a equação algébrica

$$-\xi^2 g(\xi,s\mid x_0,t_0) - \frac{s^2}{c^2}g(\xi,s\mid x_0,t_0) = -\frac{e^{-t_0 s}e^{-ix_0\xi}}{\sqrt{2\pi}} \qquad (233)$$

$$g(\xi,s\mid x_0,t_0) = \frac{e^{(-ix_0\xi - t_0 s)}}{\sqrt{2\pi}\left(\xi^2 + \frac{s^2}{c^2}\right)}. \qquad (234)$$

Agora, tendo resolvido a equação algébrica para g, se faz necessário percorrer o caminho inverso para encontrar a função de Green G. Com a transformada de Fourier inversa, tem-se

$$\mathcal{L}\{G(x,s\mid x_0,t_0)\} = \frac{e^{-t_0 s}}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i\xi(x-x_0)}}{\xi^2+\frac{s^2}{c^2}}d\xi. \qquad (235)$$

A função

$$\frac{1}{\xi^2+\frac{s^2}{c^2}} \qquad (236)$$

tem dois polos simples em $\xi = \pm\frac{s}{c}i$, então esta integral pode ser resolvida pelo teorema

dos resíduos, isto é,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{G(x,s\mid x_0,t_0)\} &= \frac{e^{-t_0 s}}{2\pi}\left[2\pi i(Res(\frac{s}{c}i)+Res(-\frac{s}{c}i))\right] \\
\mathcal{L}\{G(x,s\mid x_0,t_0)\} &= \frac{e^{-t_0 s}}{2\pi}\left[2\pi i\left(\frac{e^{-\frac{s}{c}(x-x_0)}}{\frac{2s}{c}i}-\frac{e^{\frac{s}{c}(x-x_0)}}{\frac{2s}{c}i}\right)\right] \\
\mathcal{L}\{G(x,s\mid x_0,t_0)\} &= \frac{ce^{-t_0 s}}{2s}\left(e^{-\frac{s}{c}(x-x_0)}-e^{\frac{s}{c}(x-x_0)}\right) \\
\mathcal{L}\{G(x,s\mid x_0,t_0)\} &= \frac{c}{2}\left(e^{-(t_0+\frac{(x-x_0)}{c})s}-e^{-(t_0-\frac{(x-x_0)}{c})s}\right)
\end{aligned} \tag{237}$$

Finalmente, aplicando a transformada de Laplace inversa, tem-se

$$G(x,t\mid x_0,t_0)=\frac{c}{2}\{H\left[c(t-t_0)-(x-x_0)\right]-H\left[c(t-t_0)+(x-x_0)\right]\}, \tag{238}$$

onde $H[\ \ ]$ é a função de Heaviside (ou função degrau). Se o domínio for limitado, isto é, $a \le x \le b$ com $t > 0$, pode-se aplicar o método de expansão em série na equação (231) e depois aplica-se a transformada de Laplace inversa.

APÊNDICE B – Conceitos sobre Álgebra

Neste apêndice é apresentado os principais conceitos envolvendo formas bilineares simétrica e a definição de uma álgebra. Estes conceitos podem auxiliar em uma melhor compreensão dos resultados apresentados ao longo deste trabalho.

Sejam U e V espaços vetoriais de dimensões p e q respectivamente sobre um corpo K. Uma função $f : U \times V \longrightarrow K$ é chamada de *forma bilinear* de $U \times V$ em K se satisfazer:

i) $f(\lambda \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2, \mathbf{v}) = \lambda f(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}) + f(\mathbf{u}_2, \mathbf{v})$, para todo $\lambda \in K$, $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in U$ e $\mathbf{v} \in V$.

ii) $f(\mathbf{u}, \lambda \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = \lambda f(\mathbf{u}, \mathbf{v}_1) + f(\mathbf{u}, \mathbf{v}_2)$, para todo $\lambda \in K$, $\mathbf{u} \in U$ e $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$.

Em geral, denota-se o espaço de todas as formas bilineares f por $B(U, V, K)$. Quando $U = V$ denota-se simplesmente por $B(V, K)$.

Em outras palavras, uma função $f : U \times V \longrightarrow K$ é uma forma bilinear se for linear em cada uma das variáveis quando se deixa fixo a outra.

Exemplo B.1 *A função $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 5x_1y_2 - 2x_2y_1$ é uma forma bilinear para todo $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$.*

No espaço das formas bilineares $B(V, K)$ pode-se procurar as funções com característica de simetria, ou seja, se V é um espaço vetorial de dimensão P sobre um corpo K e $f \in B(V, K)$, diz-se que f é simétrica se $f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = f(\mathbf{v}, \mathbf{u})$ para todos $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$. Neste caso, denomina-se que f é uma forma bilinear simétrica.

Exemplo B.2 *Se V é um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{R}$ munido de um produto interno, denotadp por $\cdot$, então a função $f : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ é uma forma bilinear simétrica sobre V.*

Outra característica que se pode encontrar em algumas formas bilineares $f \in B(V, K)$ é a forma quadrática associada a f. Ou seja, Dado V um espaço vetorial de dimensão finita sobre um corpo K e $f \in B(V, K)$. A função $Q : V \longrightarrow K$ dada por $Q(\mathbf{u}) = f(\mathbf{u}, \mathbf{u})$ é denominada forma quadrática associada a f.

Exemplo B.3 *Sejam $V = \mathbb{R}^2$ com produto interno canônico e f a forma bilinear de $B(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ dada por $f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$, para todo $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$. Então a forma quadrática associada a f é dada por*

$$Q(\mathbf{u}) = f(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = x^2 + y^2, \tag{239}$$

para cada $\mathbf{u} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Uma *álgebra* é um espaço vetorial V sobre um corpo $\mathbb{K}$ dotado de uma operação de produto binária denominada *produto da álgebra*, de modo que as seguintes propriedades são satisfeitas:

i) O produto da álgebra é distributivo em relação a soma vetorial: para todo a, b e $c \in V$ valem

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad \text{e} \quad (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c. \tag{240}$$

ii) O produto por escalares comuta com o produto da álgebra e é distributivo em relação a ele: para todo $a, b \in V$ e $\alpha \in \mathbb{K}$ vale

$$\alpha(a \cdot b) = (\alpha a) \cdot b = a \cdot (\alpha b). \tag{241}$$

Uma álgebra V é denominada uma álgebra comutativa ou uma álgebra Abeliana se para todos $a, b \in V$ tem-se

$$a \cdot b = b \cdot a. \tag{242}$$

Uma álgebra V é denominada uma álgebra associativa se para todos a, b e $c \in V$ tem-se

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c. \tag{243}$$

Uma álgebra associativa pode não ser comutativa. Por exemplo, à álgebra de matrizes complexas de ordem n, $M_n(\mathbb{C})$. Também, uma álgebra comutativa pode não ser associativa. Por exemplo, à álgebra de Jordan não associativa.

Alguns exemplos especiais de álgebra de interesse em áreas como a Física, a Teoria de Grupos e a Geometria Diferencial podem ser colocados: uma classe especialmente importante de álgebras é formada pelas chamadas *álgebras de Lie*. O produto de dois elementos de uma álgebra de Lie é denotado pelo símbolo $[a, b]$ em lugar de $a \cdot b$. Uma

álgebra $\mathbb{L}$ (sobre um corpo $\mathbb{K}$ com característica zero) é dita uma álgebra de Lie se seu produto, além das propriedades i) e ii) da página anterior, satisfizer

i) Para todo $a \in \mathbb{L}$ vale

$$[a, a] = 0. \tag{244}$$

ii) Identidade de Jacobi. Para todo $a, b, c \in \mathbb{L}$ vale

$$[a, [b, c]] + [c, [a, b]] + [b, [c, a]] = 0. \tag{245}$$

Por exemplo, o conjunto $M_n(\mathbb{R})$ (ou $M_n(\mathbb{C})$) de todas as matrizes reais (complexas) de ordem n é uma álgebra de Lie com relação ao produto $[A, B] = AB - BA$.

Uma *álgebra de Poisson* é um espaço vetorial $\mathcal{P}$ (em relação a um corpo $\mathbb{K}$) dotado de dois produtos, denotados por $\circledast$ e por $\{\cdot, \cdot\}$, satisfazendo as seguintes propriedades:

i) $\mathcal{P}$ e uma álgebra associativa em relação ao produto $\circledast$.

ii) $\mathcal{P}$ e uma álgebra de Lie em relação ao produto $\{\cdot, \cdot\}$.

iii) Para todos $a, b, c \in \mathcal{P}$, vale a identidade de Leibniz $\{a, b \circledast c\} = \{a, b\} \circledast c + b \circledast \{a, c\}$. Isso significa que o produto $\{\cdot, \cdot\}$ age como uma derivação para o produto $\circledast$.

Outra classe de álgebras não-associativas de interesse é formada pelas álgebras de Jordan. Uma álgebra não-associativa $\mathbb{J}$ sobre um corpo $\mathbb{K}$ é denominada uma *álgebra de Jordan* se seu produto satisfizer

i) Comutatividade: Para todo $a, b \in \mathbb{J}$ vale

$$a \cdot b = b \cdot a. \tag{246}$$

ii) Identidade de Jacobi. Para todo $a, b \in \mathbb{J}$ vale $(a \cdot a) \cdot (a \cdot b) = a \cdot ((a \cdot a) \cdot b)$.

Outros exemplos de álgebras estão definidos no capítulo 3: álgebra de Hamilton, álgebra de Grassmann e álgebra de Clifford.

Uma *álgebra Universal* é constituída por um conjunto A e uma coleção $mathcalC$ de funções finitárias sobre A. A coleção $mathcalC$ não precisa ser finita. Frequentemente denota-se uma álgebra universal por $(A, mathcalC)$.

O estudo sistemático das álgebras universais foi iniciado por Withehead e Birkhoff, tendo Boole, Hamilton, De Morgan e Sylvester como precursores. Vamos à alguns exemplos de álgebra universal.

Exemplo B.4 *Sejam $A = \mathbb{R}$ e $mathcalC = \{s, m\}$ onde s e m são duas funções binárias dadas por $s : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $s(x, y) = x + y$ e $m : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $m(x, y) = x \cdot y$. Então, a par $(A, mathcalC)$ define uma álgebra. Está álgebra é o conjunto dos números reais munido das operações de soma e multiplicação de números reais.*

Exemplo B.5 *Sejam $A = M_n(\mathbb{C})$, o conjunto das matrizes complexas de ordem n para um certo $n \in \mathbb{N}$ e $mathcalC = \{s, m\}$ onde s e m são duas funções binárias dadas por $s : M^2 \longrightarrow M$ tal que $s(B, C) = B + C$ e $m : M^2 \longrightarrow M$ tal que $m(B, C) = B \cdot C$. Esta álgebra é o conjunto das matrizes munido das operações de soma e multiplicação de matrizes.*