



**UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”**

Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica

Abordagem para determinação de coeficientes de rigidez não linear de uma estrutura periódica através da energia de deformação

Rodrigo dos Santos Cruz

Bauru

2022

Rodrigo dos Santos Cruz

**Abordagem para determinação de coeficientes de
rigidez não linear de uma estrutura periódica
através da energia de deformação**

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia de Bauru, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica na Área de Projetos Mecânicos, como parte dos requisitos necessários à obtenção de Título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Orientador: Prof. Dr. Marcos Silveira

Bauru

2022

Cruz, Rodrigo dos Santos.

Abordagem para determinação de coeficientes de rigidez não linear de uma estrutura periódica através da energia de deformação / Rodrigo dos Santos Cruz, 2022

71 f. : il.

Orientadora: Marcos Silveira

Dissertação (Mestrado)- Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia, Bauru, 2022

1. Estrutura periódica. 2. Análise de vibração. 3. Rigidez não linear. 4. Energia de deformação equivalente. I. Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia. II. Título.

ATA DA DEFESA PÚBLICA DA DISSERTAÇÃO DE MESTRADO DE RODRIGO DOS SANTOS CRUZ, DISCENTE DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA, DA FACULDADE DE ENGENHARIA - CÂMPUS DE BAURU.

Aos 16 dias do mês de dezembro do ano de 2022, às 09:00 horas, no(a) Anfiteatro da Seção Técnica de Pós-Graduação, realizou-se a defesa de DISSERTAÇÃO DE MESTRADO de RODRIGO DOS SANTOS CRUZ, intitulada **ABORDAGEM PARA DETERMINAÇÃO DE COEFICIENTES DE RIGIDEZ NÃO LINEAR DE UMA METAESTRUTURA ATRAVÉS DA ENERGIA DE DEFORMAÇÃO.**

A Comissão Examinadora foi constituída pelos seguintes membros: Prof. Dr. MARCOS SILVEIRA (Orientador(a) - Participação Presencial) do(a) Departamento de Engenharia Mecânica / Faculdade de Engenharia de Bauru UNESP, Prof. Dr. DOUGLAS ROCA SANTO (Participação Presencial) do(a) Engenharia Mecânica / Escola de Engenharia de São Carlos - Universidade de São Paulo (EESC-USP), Prof. Dr. FABRICIO CESAR LOBATO DE ALMEIDA (Participação Presencial) do(a) Departamento de Engenharia de Biossistemas / Faculdade de Ciências e Engenharia de Tupa UNESP. Após a exposição pelo mestrando e arguição pelos membros da Comissão Examinadora que participaram do ato, de forma presencial e/ou virtual, o discente recebeu o conceito final: APROVADO

_____. Nada mais havendo, foi lavrada a presente ata, que após lida e aprovada, foi assinada pelo(a) Presidente(a) da Comissão Examinadora.



Prof. Dr. MARCOS SILVEIRA

Abordagem para determinação de coeficientes de rigidez não linear de uma estrutura periódica através da energia de deformação

Rodrigo Cruz

Palavras-chave: estrutura periódica, análise de vibração, rigidez não linear, energia de deformação equivalente

Resumo - O objetivo deste trabalho é explorar o comportamento dinâmico de um modelo discreto de uma estrutura periódica sob entrada harmônica com rigidez não linear. A estrutura periódica possui uma célula unitária com três graus de liberdade. Uma abordagem é apresentada para substituir a característica de rigidez linear da estrutura por uma não linear em que os coeficientes de rigidez não linear fornecem a mesma energia de deformação. O efeito desta abordagem na resposta dinâmica é analisado numericamente, com foco nos *bandgaps*. O modelo matemático do sistema de parâmetros discretos é analisado por meio de simulação numérica. A abordagem para determinar os coeficientes de rigidez não linear é baseada no conceito de energia de deformação elástica equivalente. Isso é diferente da abordagem comum encontrada na literatura de adicionar um termo cúbico ao original, resultando num aumento da energia de deformação elástica do sistema. Uma vez que a energia de deformação do sistema linear é determinada, uma família de possíveis coeficientes de rigidez não linear é encontrada, parametrizada pela razão entre os coeficientes linear e cúbico. Essa abordagem pode ser usada com características de rigidez de endurecimento ou amolecimento. Com os coeficientes de rigidez não linear definidos, a resposta dinâmica da estrutura periódica mostra a mudança usual para altas e para baixas frequências. Além disso, são mostradas algumas faixas de frequência onde os níveis de vibração podem ser fortemente reduzidos quando a razão entre os coeficientes de rigidez não linear é aumentada, em comparação com o caso em que há apenas molas lineares. Por fim, mostra-se que a adição do componente não linear na estrutura pode aumentar ou diminuir a distância entre as frequências ressonantes.

Strain energy approach for determination of nonlinear stiffness coefficients in the design of a periodic structure

Rodrigo Cruz

Keywords: periodic structure, vibration analysis, nonlinear stiffness, equivalent strain energy

Abstract - The objective of this work is to explore the dynamical behaviour of a discrete model of a periodic structure under harmonic input with nonlinear stiffness. The periodic structure has a unit cell with three degrees of freedom. One approach is presented to substitute the linear stiffness characteristic of the structure with a nonlinear one in which the nonlinear stiffness coefficients provide the same elastic potential, or strain, energy. The effect of this approach on the frequency response is analysed numerically, with specific focus on the band gaps. The mathematical model of the discrete parameter system is analysed using numerical simulation. To determine the nonlinear stiffness coefficients is based on the concept of equivalent elastic strain energy, i.e., the structure with nonlinear stiffness having the same elastic strain energy as the one with linear stiffness. This is not a commonly found approach in literature of simply adding the cubic term to the original one. Once the strain energy of the linear system is determined, a family of possible nonlinear stiffness coefficients is found, parameterised by the ratio between the linear and cubic coefficients. This approach can be used with hardening or softening stiffness characteristics. With the defined nonlinear stiffness coefficients, the frequency response of the nonlinear periodic structure shows the usual shift to high frequencies with hardening stiffness, and to low frequencies with softening stiffness. Also, it is shown some frequency ranges where the vibration levels can be strongly reduced when the ratio between nonlinear stiffness coefficients is increased, compared to the case where purely linear springs are only considered. Further to that, it is shown that the placement of the nonlinear component on the structure can increase or reduce the distance between the resonant frequencies.

Agradecimentos

Agradeço aos meus irmãos, pais (*in memoriam*), minha mulher e ao grupo NDE pelo apoio durante esse período.

Agradeço ao meu orientador Professor Dr. Marcos Silveira pelo incentivo, dedicação e conhecimento para o desenvolvimento desse trabalho e ao colega Diego por toda ajuda e sugestões ao longo desta dissertação.

À coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES), pelo financiamento e apoio para o desenvolvimento desse trabalho. Número de processo 88882.432818/2019-01.

À UNESP, pelo apoio e infraestrutura ao programa de pós-graduação, e todos que de certa forma ajudaram com esse trabalho.

Sumário

Nomenclatura	9
1 Introdução	11
1.1 Revisão Bibliográfica	12
1.1.1 Estruturas periódicas	12
1.1.2 Característica não linear em mestastruturas	15
1.2 Justificativa	16
1.3 Objetivos	17
1.4 Metodologia	17
1.5 Estrutura da dissertação	18
2 Modelos matemáticos	19
2.1 Modelo de estrutura periódica discreta com 2 células	19
2.1.1 Estrutura periódica com rigidez linear	19
2.1.2 Estrutura periódica com rigidez não linear	21
3 Abordagem para definir os coeficientes da força não linear	25
3.1 Definição dos coeficientes de rigidez da força não linear	26
3.1.1 Rigidez não linear do tipo <i>hardening</i>	28
3.1.2 Rigidez não linear do tipo <i>softening</i>	31
4 Dinâmica do sistema com rigidez linear	35

4.1	Análise do sistema com parâmetros lineares	35
5	Dinâmica do sistema com rigidez não linear	46
5.1	FRF com rigidez não linear do tipo <i>hardening</i>	47
5.1.1	Resposta do sistema forçado para o Caso II	57
5.2	FRF com rigidez não linear do tipo <i>softening</i>	60
6	Conclusões	66
	Bibliografia	68

Nomenclatura

Símbolo	Descrição
Letras Latinas	
b	Razão de coeficientes de rigidez linear e não linear
c	Coeficiente de amortecimento
$\mathbf{C}$	Matriz dos coeficientes de amortecimento
F	Força
F_0	Amplitude da força externa
F_L	Força elástica linear
F_{NL}	Força elástica não linear
$G(\omega)$	Função transferência
i	Número imaginário ($\sqrt{-1}$)
k	Coeficiente de rigidez linear da força linear
k_l	Coeficiente de rigidez linear da força não linear
k_{nl}	Coeficiente de rigidez não linear da força não linear
$\mathbf{K}$	Matriz dos coeficientes rigidez
m	Massa
$\mathbf{M}$	Matriz de massa
n	Número de graus de liberdade
N	Número de células
S	Energia potencial de deformação
T_r	Trasmissibilidade

x	Vetor de deslocamentos da estrutura periódica
X	Amplitude de deslocamento
$\mathbf{X}$	Autovetor de deslocamento
$\mathbf{Z}$	Matriz de impedância
 Greek symbols	
Δ	Deformação da mola
λ	Autovalor
μ	Razão de massa
ω	Frequência de excitação
ω_n	Frequência natural do sistema
 Abreviações	
FRF	Função de Resposta em Frequência
EDO	Equação Diferencial Ordinária

Capítulo 1

Introdução

Nas últimas décadas, as exigências ecológicas e ambientais, combinadas com a busca pela eficiência energética, deram origem à necessidade de materiais leves, resistentes e versáteis. As metaestruturas, e especificamente as estruturas periódicas, apresentam características interessantes como supressão de vibração, que não são encontradas em estruturas clássicas. Há vários sistemas periódicos que podem ser aplicados no cotidiano em muitas estruturas de engenharia, como trens, pontes, aviões, satélites e automóveis (Hussein et al. 2014; Taub 2006). Essas características podem ser manipuladas pelo arranjo macro geométrico de seus componentes fundamentais ou células unitárias, de forma que as características de massa, rigidez e/ou amortecimento sejam repetidas espacialmente e as atenuações resultantes estejam em uma faixa de frequência desejada (Cveticanin et al. 2018; Lamarque et al. 2018). O estudo de metamateriais, surgiu pela primeira vez na óptica, quando Veselago (1968) investigou alguns materiais com permissividade elétrica, permeabilidade magnética e índice de refração negativos. Em seguida, progrediu para Acústica e Mecânica. Este último, alvo do estudo, têm suas propriedades originadas da geometria e estão associadas às quatro constantes elásticas: módulo de Young (E), módulo de cisalhamento (G), compressibilidade (K) e o coeficiente de Poisson (ν). Além disso, uma das vantagens de investigar as estruturas periódicas é que a dinâmica pode ser estudada com a análise de apenas uma célula, o que facilita as

simulações e análises nesse tipo de estruturas (Chakraborty and Mallik 2001). As faixas de frequência onde ocorrem grandes atenuações, podem ser previstas pelas frequências naturais dessas células unitárias com condições de contorno livres e fixas, pela transmissibilidade da estrutura completa, que pode ser expressa em termos da transmissibilidade de uma célula usando a matriz de transferência (Mead 1996; Gonçalves et al. 2021). Uma abordagem comum ao comparar rigidez linear e não linear é simplesmente adicionar um termo não linear à força restauradora (Nayfeh and Balachandran 2008; Marathe and Chatterjee 2006). Isso pode ser útil em situações em que se compara a aproximação de pequenas deflexões (rigidez linearizada) com grandes deflexões (rigidez não linear). No entanto, esta abordagem resulta, em geral, numa mola mais rígida, ou seja, com maior energia de deformação para a mesma deformação. Outra abordagem é considerar a mesma energia de deformação na faixa de operação, a fim de comparar as características de rigidez linear e não linear nesta faixa (Vasconcellos and Silveira 2020). O procedimento específico proposto aqui é considerar que as energias de deformação linear e não linear sejam iguais dentro de uma faixa de operação da mola.

1.1 Revisão Bibliográfica

Nesta seção são apresentadas definições a respeito das estruturas periódicas, energia de deformação e característica não linear elástica nesse tipo de estrutura.

1.1.1 Estruturas periódicas

As metaestruturas, e especificamente as estruturas periódicas, consiste fundamentalmente de um número de componentes estruturais idênticos. A periodicidade se dá quando uma estrutura é constituída pela repetição de unidades idênticas que são denominadas de células, podendo ter até três dimensões (Mead 1996). Quando Veselago (1968) descobre materiais com permissividade elétrica, permeabilidade magnética e índice de refração negativos é iniciado o estudo de metaestruturas. Este estudo é estendido

ao ramo de acústica e vibração utilizando o conceito de massa negativa, tal conceito é implementado por meio da adição de absorvedores dinâmicos de vibrações.

Sánchez-Pérez et al. (1998) apresentaram o primeiro *bandgap*, que é o intervalo dentro da resposta dinâmica com níveis de vibrações baixos, medido experimentalmente para ondas acústicas, cuja a análise da transmissão acústica de um arranjo periódico bidimensional de barras cilíndricas ocas montadas em uma estrutura com simetria quadrada ou triangular. Os resultados mostraram que a intensidade de atenuação aumenta com o número de elementos considerados em toda a estrutura.

Os metamateriais estão relacionados ao estudo de acústica e vibrações, tendo suas raízes nas tentativas de Newton de descrever a propagação do som e nos estudos de Rayleigh sobre sistemas periódicos. As estruturas periódicas apresentam características únicas de filtragem de ondas, úteis para muitas estruturas de engenharia, como trens, pontes, aviões, satélites e automóveis (Hussein et al. 2014).

Zhu et al. (2014) realizam um estudo para atenuação de vibrações em um *bandgap* desejado, onde utilizam uma matriz de absorvedores quirais com um design exclusivo, como ilustrado na figura 1.1 e mostram uma das aplicações de engenharia significativas do metamaterial é para atenuação de vibração de baixa frequência devido ao seu comportamento incomum de *bandgap* de baixa frequência.

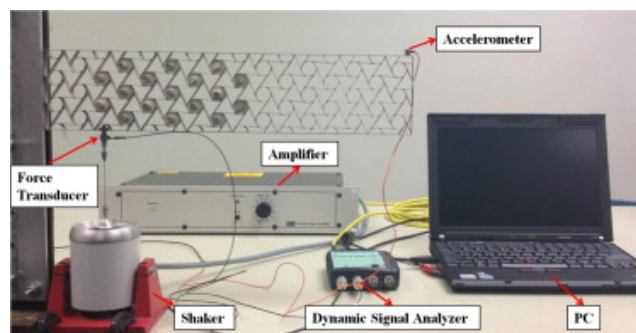


Figura 1.1: Metaestrutura hexagonal quiral experimental.
Fonte: Zhu et al. (2014).

Um estudo realizado por Sugino and Erturk (2018) apresentam uma metaestrutura,

mostrada na figura 1.2, cuja funcionalidade é tanto para aproveitamento e captação de energia elétrica de baixa potência (*energy harvesting*) quanto atenuar vibrações. Eles utilizam uma metaestrutura eletromecânica, e se baseiam na teoria de vigas de Euler-Bernoulli para modelar o sistema.

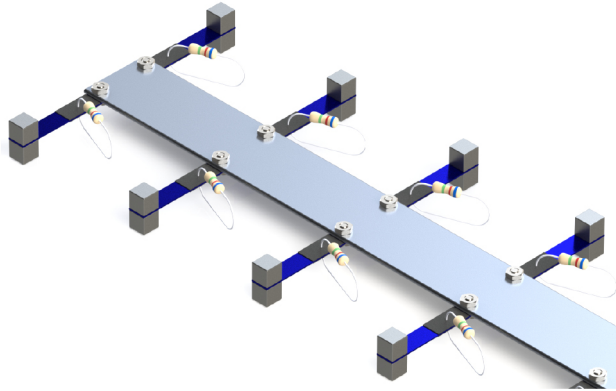


Figura 1.2: Metaestrutura utilizada para *energy harvesting* e atenuação de vibrações. Fonte: Sugino and Erturk (2018).

Dentre as inúmeras pesquisas sendo desenvolvidas nesse contexto, Beli et al. (2009) realiza um estudo experimental de uma viga em nylon com espaçamentos periódicos que pôde modificar o desempenho da propagação de frequência desse metamaterial. Na investigação, o metamaterial mostrado na figura 1.3 mostrou que a atenuação de vibração está estritamente relacionada ao perfil espacial. Além disso, têm aplicações em captação de energia.

Uma teoria geral para estimativa de *bandgap* em metaestruturas de ressonância local é apresentada por Sugino et al. (2017), que utilizam um método baseado em análise modal para conseguir entender o *bandgap* nas estruturas periódicas. Gonçalves et al. (2021) mostram que a transmissibilidade da estrutura completa, pode ser expressa em termos da transmissibilidade de uma célula unitária usando a abordagem da matriz de transferência e que a periodicidade faz com que apareçam os *bandgaps*.

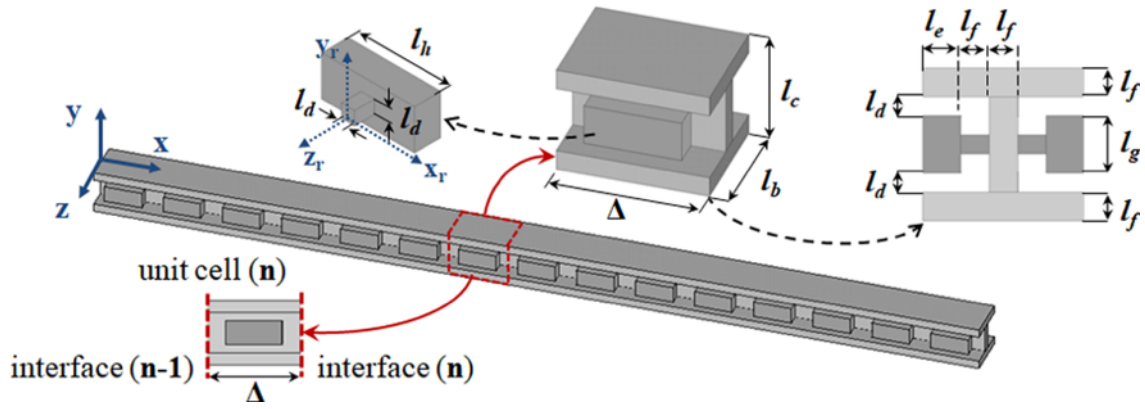


Figura 1.3: Viga I feita em poliamida e sua célula unitária com as dimensões geométricas nominais, tem-se a metaestrutura com 15 células unitárias

Fonte: Beli et al. (2009).

1.1.2 Característica não linear em mestastruturas

De acordo com Roberson (1952), a adição de termos não lineares tem eficiência no controle passivo de estruturas primárias. Estruturas periódicas com característica não linear podem exibir propriedades extras de excitação, o que permite aprimorar as propriedades de transmissão de ondas para a estrutura (Wang et al. 2016). O uso da característica não linear em estruturas periódicas é utilizada para projetos de isoladores de vibração, diodos, filtros, coletores de energia e processadores de sinais.

Boechler et al. (2010) investigaram uma análise de perturbação para prever a localização e a extensão do *bandgap* em termos de parâmetros lineares e não lineares do sistema. Narisetti et al. (2010) investigaram a propagação de ondas em uma estrutura periódica não linear unidimensional discreta por meio de análise de perturbação. Marathe and Chatterjee (2006) estudam a atenuação de ondas em estruturas periódicas com amortecimento não linear, utilizando os métodos de balanço harmônico e múltiplas escalas para resolver o problema. Campana et al. (2020) mostram a propagação da ondas em uma estrutura periódica formada por uma cadeia linear massa-mola com ressonadores não lineares do tipo *Duffing*. A estrutura utilizada por eles é mostrada na figura 1.4.

Uma abordagem comum ao comparar rigidez linear e não linear é simplesmente

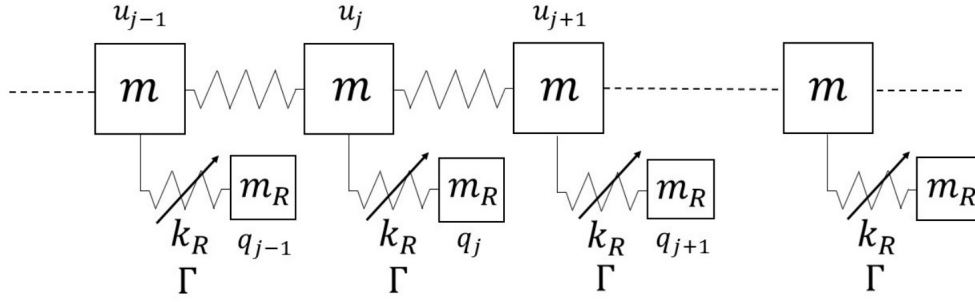


Figura 1.4: Estrutura periódica com ressonadores não linear.
Fonte: Campana et al. (2020).

adicionar um termo não linear à força restauradora (Nayfeh and Balachandran 2008). Chakraborty and Mallik (2001) estudaram a dinâmica de uma cadeia periódica fracamente não linear, considerando os tipos *hardening* e *softening* de não linearidade, onde utilizam uma abordagem de perturbação para obter tanto propagação quanto atenuação. Isso pode ser útil em situações em que se compara a aproximação de pequenas deflexões (rigidez linearizada) com grandes deflexões (rigidez não linear). No entanto, esta abordagem resulta em uma mola mais rígida, ou seja, maior energia de deformação para a mesma deformação. Outra abordagem é considerar a mesma energia de deformação na faixa de operação, a fim de comparar as características de rigidez linear e não linear nesta faixa, como visto em Vasconcellos and Silveira (2020), onde a não linearidade abordada é introduzida por meio da adição de uma rigidez cúbica em um dos absorvedores da metaestrutura, com a finalidade de atenuar vibrações em algumas faixas de frequência.

Neste trabalho, a característica não linear é abordada considerando que as energias de deformação linear e não linear são iguais dentro da faixa de operação da mola.

1.2 Justificativa

Vista a grande demanda por aplicações em estruturas periódicas e a importância de projetar sistemas de engenharia com elevada eficiência energética, neste projeto serão es-

tudadas metaestruturas utilizando modelos discretos de estruturas periódicas incluindo termos não lineares de rigidez para analisar o comportamento dinâmico da estrutura periódica, especificamente a atenuação de vibração.

1.3 Objetivos

O objetivo principal deste projeto é analisar o comportamento dinâmico de um modelo discreto de estrutura periódica sob excitação harmônica com foco em atenuação de vibração, com uma abordagem que substitui a característica de rigidez linear da estrutura por uma não linear em que os coeficientes de rigidez não linear fornecem a mesma energia de deformação. Este objetivo pode ser dividido nas seguintes partes:

1. Obter modelos matemáticos discretos de uma família de estruturas periódicas incluindo, termos não lineares de rigidez e amortecimento sob excitação harmônica.
2. Analisar o comportamento dinâmico destes modelos relacionando com as características das células unitárias, de forma a caracterizar *bandgaps* e *bandstop* em função dos parâmetros das células.
3. Analisar o impacto da inclusão de termos não lineares de rigidez no comportamento dinâmico das estruturas, especificamente nos *bandgaps* e *bandstop*.

1.4 Metodologia

Os modelos matemáticos de estruturas periódicas são definidos utilizando parâmetros concentrados. A inclusão de termos não lineares de rigidez é considerada na estrutura primária e implementada através da disposição geométrica dos seus elementos.

Neste trabalho, são abordadas respostas permanentes da estrutura periódica sujeita a uma excitação harmônica, também, é analisada a influência na resposta de uma característica não linear de rigidez. As equações de movimento da estrutura é obtida através

da segunda lei de Newton. A resposta dinâmica é obtida fazendo a integração numérica das equações diferenciais de movimento encontradas. Para resolver as equações diferenciais não lineares é utilizado o método Runge-Kutta de quarta ordem.

Para analisar a influência da rigidez cúbica adicionada à metaestrutura, é utilizada a norma $\mathcal{H}_2$ como valor de comparação, segundo Bueno (2007) com a norma é possível medir a intensidade da resposta de uma estrutura sob alguma excitação. E, para comparar tal influência, a norma $\mathcal{H}_2$ é definida como a área sob a função de resposta de frequência e é obtida por meio do método trapezoidal.

1.5 Estrutura da dissertação

Esta dissertação está estruturada da seguinte forma: no capítulo 1 é apresentada a revisão bibliográfica com a contextualização da dissertação, onde são apresentados estudos sobre estruturas periódicas, não linearidade nestas estruturas e energia de deformação. O capítulo 2 apresenta a modelagem do sistema, a fim de demonstrar como foram obtidas as equações dinâmicas e os parâmetros do sistema com as frequências naturais e os modos de vibrar da estrutura. O capítulo 3 mostra a abordagem para calcular o coeficiente de rigidez não linear, além de mostrar os resultados da força por deslocamento tanto do caso *hardening* quanto do caso *softening*, bem como sua energia de deformação. No capítulo 4 são feitas análises e discussões usando a abordagem mostrada no capítulo 3, com o objetivo de mostrar a influência da razão de massa e da razão de coeficientes de rigidez linear e não linear com rigidez cúbica do tipo *hardening* e *softening* na resposta dinâmica da estrutura. As conclusões são apresentadas no capítulo 6.

Capítulo 2

Modelos matemáticos

Este capítulo apresenta as equações de movimento da célula unitária da estrutura periódica, que é composta por três graus de liberdade. Tanto a equação de movimento da célula unitária da estrutura periódica com rigidez linear e não linear são obtidas por meio da segunda lei de Newton.

2.1 Modelo de estrutura periódica discreta com 2 células

A estrutura periódica utilizada neste trabalho é mostrada na figura 2.1. Neste trabalho é abordada a resposta permanente da estrutura sujeita a uma excitação harmônica. A estrutura periódica é composta por elementos de massa, rigidez e amortecimento. Ao decorrer desta dissertação a rigidez pode ter forma linear ou cúbica.

2.1.1 Estrutura periódica com rigidez linear

As equações dinâmicas do sistema mostrado na figura 2.1 (a) são obtidas através da segunda Lei de Newton. Por meio do diagrama de corpo-livre, é possível encontrar as equações diferenciais ordinárias (EDO), dadas por:

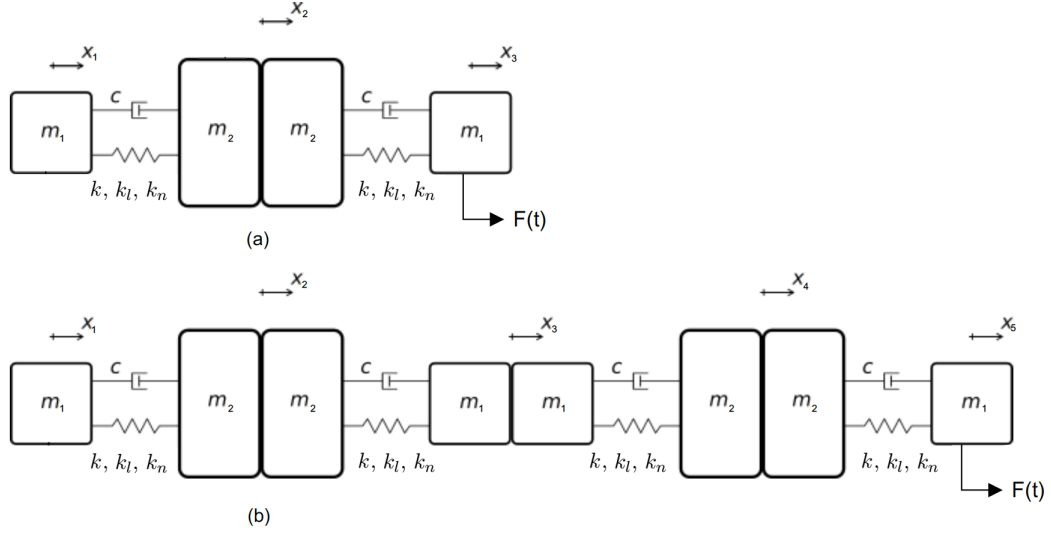


Figura 2.1: Modelo de estrutura periódica discreta: (a) célula unitária e (b) modelo de estrutura periódica discreta com duas células, onde há molas com rigidez linear e não linear.

$$\begin{aligned}
 m_1 \ddot{x}_1 + k(x_1 - x_2) + c(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) &= 0 \\
 2m_2 \ddot{x}_2 + k(x_2 - x_1) + k(x_2 - x_3) + c(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + c(\dot{x}_2 - \dot{x}_3) &= 0 \\
 m_1 \ddot{x}_3 + k(x_3 - x_2) + c(\dot{x}_3 - \dot{x}_2) &= F(t)
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

na qual, $x_1, x_2, \dots, x_n$ são os graus de liberdade da estrutura, $F(t) = F_0 \cos(\omega t)$ representa uma força harmônica aplicada ao primeiro bloco, onde F_0 é a amplitude da força, ω a frequência de excitação, m_1 e m_2 são as massas, c e k , os coeficientes de amortecimento e a rigidez respectivamente. Assim, para N células, tem-se $2N + 1$ graus de liberdade, e, para uma célula (a) há três graus de liberdade.

Para análises da dinâmica do sistema foi utilizada a razão de massa μ , dada por:

$$\mu = \frac{m_1}{m_2} \tag{2.2}$$

Dada a equação 2.1 é possível reescrevê-la na forma matricial, dada por:

$$\mathbf{M}\ddot{x}(t) + \mathbf{C}\dot{x}(t) + \mathbf{K}x(t) = \mathbf{F}(t), \quad \mathbf{F}(t) = F_0 e^{i\omega t} \quad (2.3)$$

na qual $\mathbf{M}$ é matriz de massa, x é o vetor de deslocamentos, $\dot{x}$ denota derivada em relação ao tempo t , $\mathbf{C}$ é a matriz dos coeficientes de amortecimento, $\mathbf{K}$ é matriz dos coeficientes de rigidez, $F(t)$ é a força externa, F_0 é a amplitude da força externa e ω é a frequência de excitação, dadas por:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mu & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \frac{1}{m_2} \begin{bmatrix} c & -c & 0 \\ -c & 2c & -c \\ 0 & -c & c \end{bmatrix} e \quad \mathbf{K} = \frac{1}{m_2} \begin{bmatrix} k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & k \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

2.1.2 Estrutura periódica com rigidez não linear

Para a estrutura com característica não linear de rigidez, uma força de restauração cúbica é utilizada na forma:

$$F_{NL} = k_l \Delta + k_n \Delta^3 \quad (2.5)$$

onde Δ representa a deformação da mola, k_l é o coeficiente de rigidez linear e k_n é o coeficiente de rigidez não linear, podendo ser negativo (*softening spring*) ou positivo (*hardening spring*) quando $k_l > 0$.

São considerados três arranjos de molas na célula, chamados aqui de casos I, II e III, descritos a seguir.

Caso I

No caso I, as duas molas possuem características de rigidez não linear.

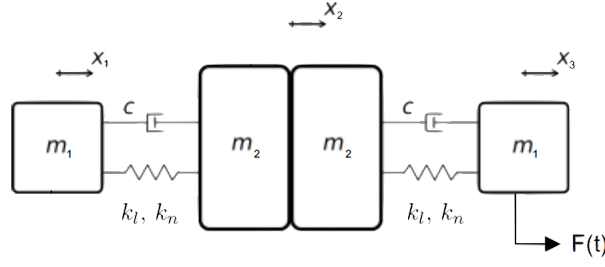


Figura 2.2: Modelo representando a célula unitária da estrutura periódica com duas molas não lineares.

As equações dinâmicas para este caso são dadas por:

$$\begin{aligned}
 m_1 \ddot{x}_1 + k_l(x_1 - x_2) + k_n(x_1 - x_2)^3 + c(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) &= 0 \\
 2m_2 \ddot{x}_2 + k_l(2x_2 - x_1 - x_3) + k_n[(x_2 - x_1)^3 + (x_2 - x_3)^3] + c(2\dot{x}_2 - \dot{x}_1 - \dot{x}_3) &= 0 \quad (2.6) \\
 m_1 \ddot{x}_3 + k_l(x_3 - x_2) + k_n(x_3 - x_2)^3 + c(\dot{x}_3 - \dot{x}_2) &= F(t)
 \end{aligned}$$

Caso II

A características de rigidez não linear está presente apenas em uma mola, no primeiro bloco mais à esquerda, mostrado na figura 2.3.

As equações dinâmicas para este caso são dadas por:

$$\begin{aligned}
 m_1 \ddot{x}_1 + k_l(x_1 - x_2) + k_n(x_1 - x_2)^3 + c(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) &= 0 \\
 2m_2 \ddot{x}_2 + k_l(x_2 - x_1) + k_n(x_2 - x_1)^3 + k(x_2 - x_1) + c(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + c(\dot{x}_2 - \dot{x}_3) &= 0 \quad (2.7) \\
 m_1 \ddot{x}_3 + k(x_3 - x_2) + c(\dot{x}_3 - \dot{x}_2) &= F(t)
 \end{aligned}$$

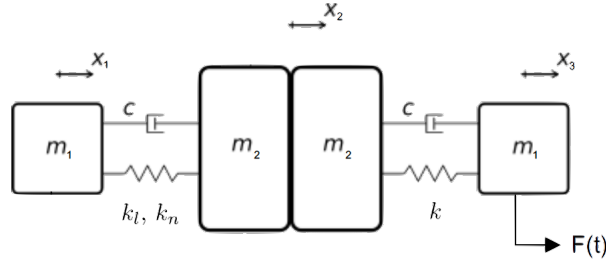


Figura 2.3: Modelo representando a célula unitária da estrutura periódica com uma mola não linear mais à esquerda, .

Caso III

Por fim, na figura 2.4, a características de rigidez não linear é adicionada apenas na última mola, mais à direita.

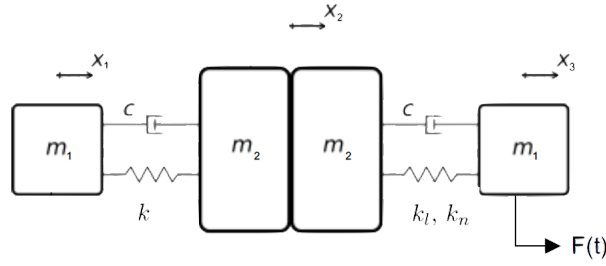


Figura 2.4: Modelo representando a célula unitária da estrutura periódica com uma mola não linear mais à direita.

As equações dinâmicas para este caso são dadas por:

$$\begin{aligned}
 m_1 \ddot{x}_1 + k(x_1 - x_2) + c(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) &= 0 \\
 2m_2 \ddot{x}_2 + k(x_2 - x_1) + k_l(x_2 - x_3) + k_n(x_2 - x_3)^3 + c(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + c(\dot{x}_2 - \dot{x}_3) &= 0 \quad (2.8) \\
 m_1 \ddot{x}_3 + k_l(x_3 - x_2) + k_n(x_3 - x_2)^3 + c(\dot{x}_3 - \dot{x}_2) &= F(t)
 \end{aligned}$$

A tabela 2.1 mostra os valores adotados e usados para calcular os parâmetros de massa, rigidez e amortecimento.

Tabela 2.1: Parâmetros do sistema

Parâmetros	Símbolo	Valor	Unidade
Coefficiente de rigidez linear	k	1.00	N/m
Coefficiente de amortecimento	c	0.10	Ns/m
Massa	m_2	2.00	kg
Amplitude da força externa	F_0	1.00	N

Capítulo 3

Abordagem para definir os coeficientes da força não linear

Neste capítulo é mostrada a abordagem para se definir a equação que relaciona os coeficientes linear e não linear da força não linear. É mostrado também, que o valor máximo de deformação X_{max} será a deformação Δ_1 utilizada para definir esses coeficientes, para cada razão de massa μ . Ainda, os valores da máxima deformação são obtidas através da resposta dinâmica do sistema com rigidez linear, isto é, o deslocamento relativo entre o bloco com amplitude X_1 . A figura 3.1 mostra a resposta em frequência do primeiro bloco.

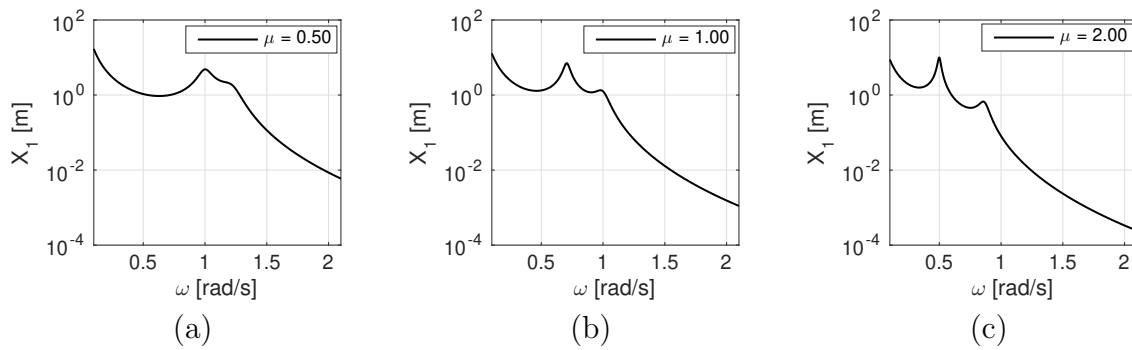


Figura 3.1: Resposta forçada do primeiro bloco com rigidez linear, alterando-se a razão de massa μ : (a) $\mu = 0.50$, (b) $\mu = 1.00$ e (c) $\mu = 2.00$.

A tabela 3.1 mostra a relação dos valores da razão de massa e o respectivo deslocamento máximo, próximo ao pico de ressonância, referido valor é usado para definição de valores dos coeficientes de rigidez da força não linear mostrados na figura 3.3 e na figura 3.4.

Tabela 3.1: Valores de deformação máxima (X_{max})

μ	$X_{max}[\text{m}]$	$\omega_n[\text{rad/s}]$
0.50	4.835	1.00
1.00	7.032	0.70
2.00	9.970	0.50

3.1 Definição dos coeficientes de rigidez da força não linear

Para encontrar uma expressão dos coeficientes de rigidez da força não linear, é considerado a área da força linear S_L igual a área da força não linear S_{NL} , equação 3.1, ou seja, há uma equivalência entre a energia potencial de deformação. A energia de deformação S é a área abaixo das curvas e corresponde ao trabalho realizado pela força numa deformação Δ_1 , que será o X_{max} conhecido e apresentado na tabela 5.1.

$$S_L = S_{NL} \quad (3.1)$$

Segundo lei de Hook, uma força linear F_L é dada pela equação 3.2, onde k é o coeficiente de rigidez linear e Δ a sua deformação.

$$F_L = k\Delta \quad (3.2)$$

A força não linear F_{NL} é dada pela equação 3.3, onde k_l é o coeficiente de rigidez

linear, k_n é o coeficiente de rigidez não linear e Δ é a deformação.

$$F_{NL} = k_l \Delta + k_n \Delta^3 \quad (3.3)$$

O coeficiente de rigidez não linear k_n é proporcional ao coeficiente de rigidez da força linear k_l , onde b é o parâmetro que determina quantas vezes um é maior ou menor que o outro, mostrada na equação 3.4.

$$k_n = b k_l \quad (3.4)$$

A área abaixo da curva da força linear é dada pela equação 3.5, onde Δ_1 é a máxima deformação, mostrada na tabela 5.1, obtida através da resposta dinâmica da célula mostrada na figura 3.1.

$$S_L = \int_0^{\Delta_1} k \Delta d\Delta = \frac{1}{2} k \Delta_1^2 \quad (3.5)$$

Na equação 3.6, tem-se a área abaixo da curva da força não linear

$$S_{NL} = \int_0^{\Delta_1} (k_l \Delta + k_n \Delta^3) d\Delta = \frac{1}{4} (2k_l \Delta_1^2 + k_n \Delta_1^4) \quad (3.6)$$

E por fim, da igualdade entre a equação 3.5 e equação 3.6 com a devida substituição da equação 3.4, é possível encontrar o coeficiente k_l .

$$k_l = \frac{2k}{b\Delta_1^2 + 2} \quad (3.7)$$

3.1.1 Rigidez não linear do tipo *hardening*

A seguir são mostrados os resultados utilizando a abordagem de igualdade da energia potencial elástica entre o sistema linear e o sistema não linear, de acordo com a tabela 5.1 é obtido os valores de rigidez do tipo *hardening*, isto é, $b > 0$ e $k_l > 0$.

A tabela 3.2 mostra os valores de rigidez da força não linear (k_l e k_n) calculados para cada valor de b utilizando com $\Delta_1 = 4.835\text{m}$.

Tabela 3.2: Valores de rigidez do tipo *hardening* ($\mu = 0.50$)

$b [m^{-2}]$	$k_l [N/m]$	$k_n [N/m^3]$
0	1.0000	0
1×10^{-2}	0.8953	0.0090
5×10^{-2}	0.6311	0.0316
1×10^{-1}	0.4611	0.0461

A figura 3.2 mostra a força em função da deformação da mola, utilizando os valores de b da tabela 3.2. A linha em preto é do sistema apenas com rigidez linear, é possível notar nas outras curvas, diferentes inclinações em relação a do sistema linear. É importante notar que todas as curvas se cruzam no valor de $\Delta^* = 3.4187\text{m}$, e, utilizando a abordagem para definir os coeficientes, todas elas têm a mesma energia potencial elástica $S = 11.6886\text{J}$, ou seja, o mesmo valor de área abaixo de cada curva descrita na equação 3.1.

A tabela 3.3 mostra os valores de rigidez da força não linear (k_l e k_n) calculados para cada valor de b utilizando $\Delta_1 = 7.032\text{m}$.

Tabela 3.3: Valores de rigidez do tipo *hardening* ($\mu = 1.00$)

$b [m^{-2}]$	$k_l [N/m]$	$k_n [N/m^3]$
0	1.0000	0
1×10^{-2}	0.8018	0.0080
5×10^{-2}	0.4472	0.0224
1×10^{-1}	0.2880	0.0288

A figura 3.3 mostra a força em função da deformação da mola, utilizando os valores de b da tabela 3.3. A linha em preto é do sistema apenas com rigidez linear, é possível

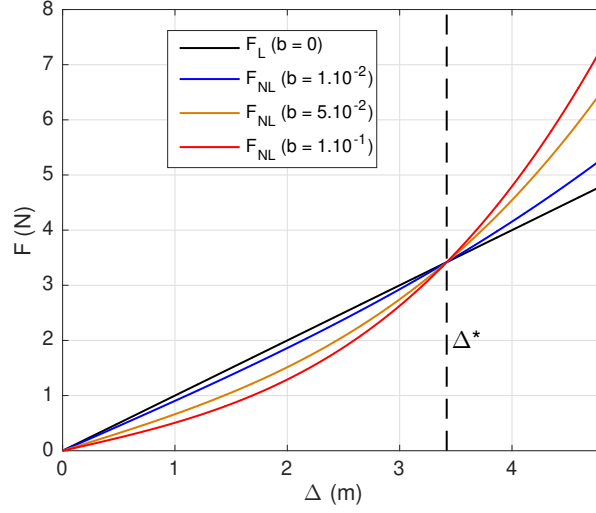


Figura 3.2: Força por deformação para comparação de b com a mesma energia de deformação, para coeficiente da força linear $k = 1\text{N/m}$, valor de $\Delta_1 = 4.835\text{m}$ e $\Delta^* = 3.4187\text{m}$

notar nas outras curvas diferentes inclinações em relação a preta (sistema linear). É importante notar que todas as curvas se cruzam no valor de $\Delta^* = 4.9714\text{m}$, e, utilizando a abordagem para definir os coeficientes, todas elas têm a mesma energia potencial elástica $S = 24.7245\text{J}$, ou seja, o mesmo valor de área abaixo de cada curva descrita na equação 3.1.

A tabela 3.4 mostra os valores de rigidez da força não linear (k_l e k_n) calculados para cada valor de b utilizando $\Delta_1 = 9.97\text{m}$.

Tabela 3.4: Valores de rigidez do tipo *hardening* ($\mu = 2.00$)

$b \text{ [m}^{-2}\text{]}$	$k_l \text{ [N/m]}$	$k_n \text{ [N/m}^3\text{]}$
0	1.0000	0
1×10^{-2}	0.6680	0.0067
5×10^{-2}	0.2869	0.0143
1×10^{-1}	0.1675	0.0168

A figura 3.4 mostra a força em função da deformação da mola, utilizando os valores de b da tabela 3.4. A linha em preto é do sistema apenas com rigidez linear, é possível notar nas outras curvas diferentes inclinações em relação a preta (sistema linear). É importante notar que todas as curvas se cruzam no valor de $\Delta^* = 7.0491\text{m}$, e, utilizando

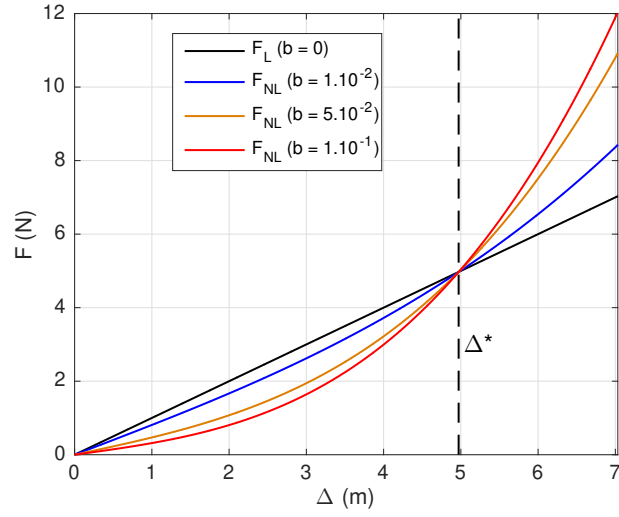


Figura 3.3: Força por deformação para comparação de b com a mesma energia de deformação, para coeficiente da força linear $k = 1\text{N/m}$, valor de $\Delta_1 = 7.032\text{m}$ e $\Delta^* = 4.9714\text{m}$

a abordagem para definir os coeficientes, todas elas têm a mesma energia potencial elástica $S = 49.7005\text{J}$, ou seja, o mesmo valor de área abaixo de cada curva descrita na equação 3.1.

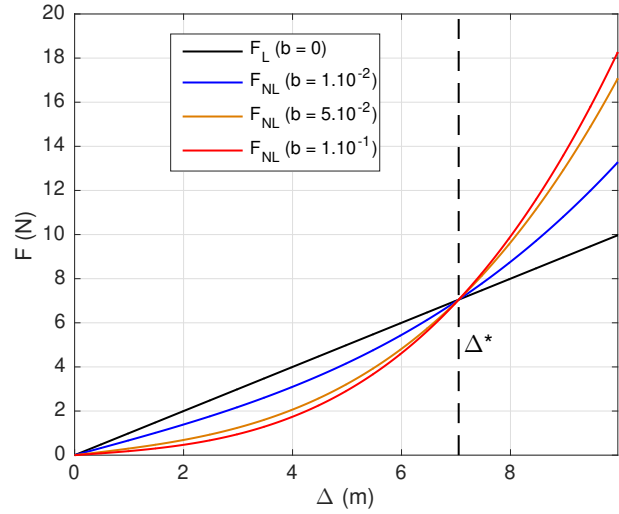


Figura 3.4: Força por deformação para comparação de b com a mesma energia de deformação, para coeficiente da força linear $k = 1\text{N/m}$, valor de $\Delta_1 = 9.97\text{m}$ e $\Delta^* = 7.0491\text{m}$

3.1.2 Rigidez não linear do tipo *softening*

A seguir são mostrados os resultados utilizando a abordagem de igualdade da energia potencial elástica entre o sistema linear e o sistema não linear, de acordo com a tabela 5.1 é obtido os valores de rigidez do tipo *softening*, isto é, $b < 0$ e $k_n < 0$. É importante ressaltar que para a não linearidade do tipo *softening*, afim de se evitar valores negativos para a força, tais valores não desejados, pois é como se a mola estivesse ajudando no movimento, deve-se diminuir os valores de b suavemente.

A tabela 3.5 mostra os valores de rigidez da força não linear (k_l e k_n) calculados para cada valor de b utilizando com $\Delta_1 = 4.835\text{m}$.

Tabela 3.5: Valores de rigidez do tipo *softening* ($\mu = 0.50$)

$b [m^2]$	$k_l [\text{N/m}]$	$k_n [\text{N/m}^3]$
0	1.0000	0
-5×10^{-3}	1.0621	-0.0053
-8×10^{-3}	1.1032	-0.0088
-1×10^{-2}	1.1324	-0.0113

A figura 3.5 mostra a força em função da deformação da mola, utilizando os valores de b da tabela 3.5. A linha em preto é do sistema apenas com rigidez linear, é possível notar nas outras curvas, diferentes inclinações em relação a do sistema linear. É importante notar que todas as curvas se cruzam no valor de $\Delta^* = 3.4187\text{m}$, e, utilizando a abordagem para definir os coeficientes, todas elas têm a mesma energia potencial elástica $S = 11.6886\text{J}$, ou seja, o mesmo valor de área abaixo de cada curva descrita na equação 3.1.

A tabela 3.6 mostra os valores de rigidez da força não linear (k_l e k_n) calculados para cada valor de b utilizando $\Delta_1 = 7.032\text{m}$.

A figura 3.6 mostra a força em função da deformação da mola, utilizando os valores de b da tabela 3.3. A linha em preto é do sistema apenas com rigidez linear, é possível notar nas outras curvas diferentes inclinações em relação a preta (sistema linear). É importante notar que todas as curvas se cruzam no valor de $\Delta^* = 4.9714\text{m}$, e, utilizando

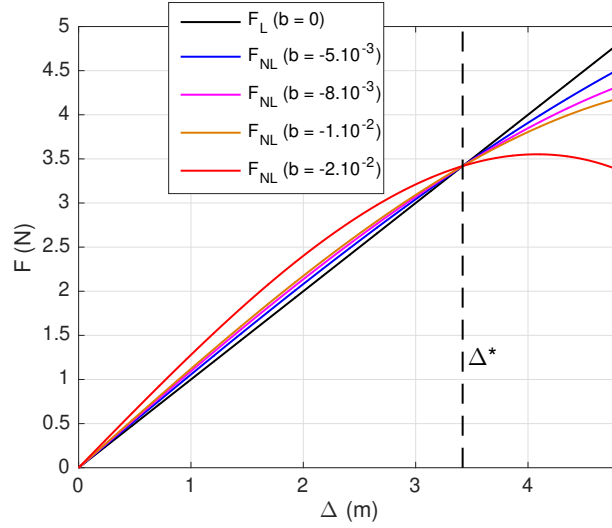


Figura 3.5: Força por deformação para comparação de b com a mesma energia de deformação, para coeficiente da força linear $k = 1\text{N/m}$, valor de $\Delta_1 = 4.835\text{m}$ e $\Delta^* = 3.4187\text{m}$

Tabela 3.6: Valores de rigidez do tipo *softening* ($\mu = 1.00$)

$b [m^2]$	$k_l [\text{N/m}]$	$k_n [\text{N/m}^3]$
0	1.0000	0
-5×10^{-3}	1.1411	-0.0057
-8×10^{-3}	1.2466	-0.0100
-1×10^{-2}	1.3285	-0.0133

a abordagem para definir os coeficientes, todas elas têm a mesma energia potencial elástica $S = 24.7245\text{J}$, ou seja, o mesmo valor de área abaixo de cada curva descrita na equação 3.1.

A tabela 3.7 mostra os valores de rigidez da força não linear (k_l e k_n) calculados para cada valor de b utilizando $\Delta_1 = 9.97\text{m}$.

Tabela 3.7: Valores de rigidez do tipo *softening* ($\mu = 2.00$)

$b [m^2]$	$k_l [\text{N/m}]$	$k_n [\text{N/m}^3]$
0	1.0000	0
-5×10^{-3}	1.3307	-0.0067
-8×10^{-3}	1.6600	-0.0133
-1×10^{-2}	1.9881	-0.0199

A figura 3.7 mostra a força em função da deformação da mola, utilizando os valores de b da tabela 3.4. A linha em preto é do sistema apenas com rigidez linear, é possível

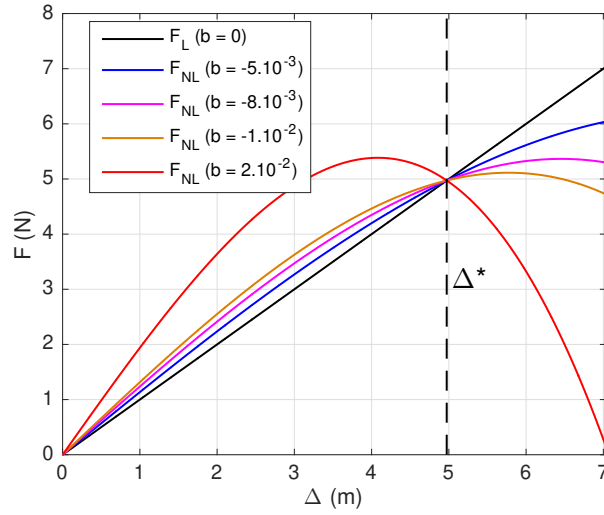


Figura 3.6: Força por deformação para comparação de b com a mesma energia de deformação, para coeficiente da força linear $k = 1\text{N/m}$, valor de $\Delta_1 = 7.032\text{m}$ e $\Delta^* = 4.9714\text{m}$

notar nas outras curvas diferentes inclinações em relação a preta (sistema linear). É importante notar que todas as curvas se cruzam no valor de $\Delta^* = 7.0491\text{m}$, e, utilizando a abordagem para definir os coeficientes, todas elas têm a mesma energia potencial elástica $S = 49.7005\text{J}$, ou seja, o mesmo valor de área abaixo de cada curva descrita na equação 3.1.

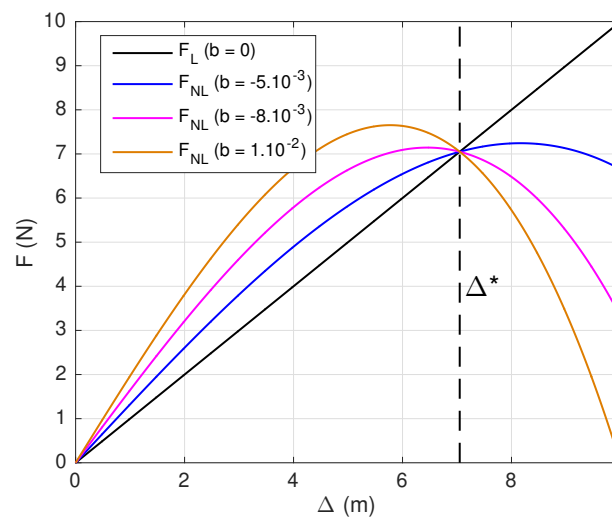


Figura 3.7: Força por deformação para comparação de b com a mesma energia de deformação, para coeficiente da força linear $k = 1\text{N/m}$, valor de $\Delta_1 = 9.970\text{m}$ e $\Delta^* = 7.0491\text{m}$

Capítulo 4

Dinâmica do sistema com rigidez linear

Neste capítulo é feita a análise modal da estrutura mostrada na figura 2.1 (a), para obter as frequências naturais e verificar a influência da razão de massa. Além disso, são mostradas a caracterização dos *bandgaps* e *bandstops* da estrutura periódica em função dos parâmetros das células para posterior análise do impacto da inclusão de termo não linear de rigidez e amortecimento nos *bandgaps* e *bandstop*, assim como as respostas dinâmicas do sistema livre e forçado harmonicamente.

4.1 Análise do sistema com parâmetros lineares

A análise do sistema com parâmetros lineares é feita para a célula unitária. Para encontrar as frequências naturais e modos de vibrar, o sistema é considerado livre e não amortecido, o problema é escrito na forma de um problema de autovalor e autovetor, como na equação 4.1, onde, $\mathbf{M}$ é a matriz de massa, $\mathbf{K}$ é a matriz de rigidez, λ é uma matriz com o inverso das frequências naturais ao quadrado e $\mathbf{X}$ é o autovetor com os modos de vibrar.

$$[\lambda \mathbf{K} - \mathbf{M}]\mathbf{X} = 0 \quad (4.1)$$

A equação dinâmica da célula unitária da estrutura periódica mostrada na equação 2.1 admite soluções harmônicas no tempo $x(t)$, em regime permanente, dadas por:

$$x(t) = \mathbf{X}e^{i\omega t} \quad (4.2)$$

onde $\mathbf{X}$ é o vetor complexo das amplitudes, ω a frequência de excitação, t o tempo dessa resposta e depende dos parâmetros do sistema.

Para obter tal resposta de um sistema amortecido forçado harmonicamente, representado pela equação dinâmica 2.3, na forma matricial, utilizou-se método de impedância mecânica do sistema. A impedância é definida por Rao (2011):

$$\mathbf{Z}(i\omega) = -\omega^2 \mathbf{M} + i\omega \mathbf{C} + \mathbf{K} \quad (4.3)$$

Desta forma, a amplitude é dada por:

$$\mathbf{X} = [\mathbf{Z}(i\omega)]^{-1} F_0 \quad (4.4)$$

na qual, $\mathbf{Z}(i\omega)$ é a matriz de impedância.

Resolveu-se o problema de autovalor para célula unitária, que contém três graus de liberdade, encontrando as equações com auxílio do software wxMaxima, as expressões para as três frequências naturais (ω_1 , ω_2 e ω_3), que estão em função do coeficiente de rigidez linear k , da massa m_2 e da razão de massa μ como mostra a equação 4.5:

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= 0 \\
\omega_2 &= \sqrt{\frac{k}{m_2\mu}} \\
\omega_3 &= \sqrt{\frac{k\mu + k}{m_2\mu}}
\end{aligned} \tag{4.5}$$

A figura 4.1 mostra a Função de Resposta em Frequência (FRF) do bloco mais a esquerda com amplitude de deslocamento X_1 da célula unitária da estrutura periódica. A FRF é obtida por meio dos valores máximos de deslocamento na resposta em regime permanente para cada frequência de excitação, obtidas através dos valores de parâmetros mostrados na tabela 2.1.

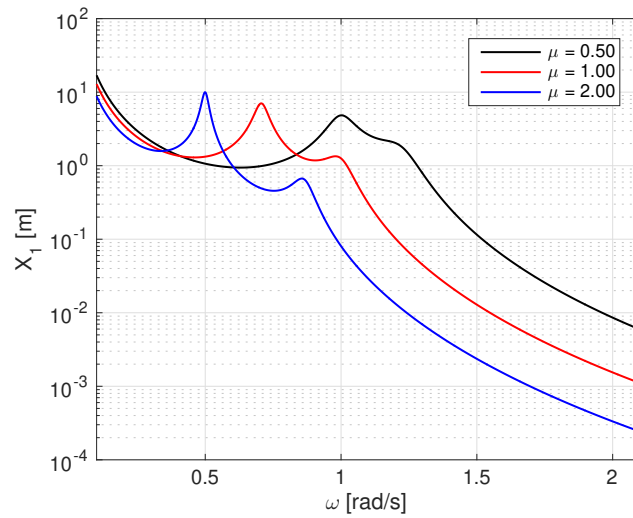


Figura 4.1: Resposta em frequência do bloco mais a esquerda (X_1) da célula unitária da estrutura periódica, mostrada na figura 2.1 (a), usando a equação 2.3, com os parâmetros da tabela 2.1 onde mostra a influência da razão de massa (μ) na resposta.

A figura 4.2 mostra a Função de Resposta em Frequência (FRF) do bloco mais a esquerda com amplitude de deslocamento X_1 da célula unitária da estrutura periódica. A FRF é obtida por meio dos valores máximos de deslocamento na resposta em regime permanente para cada frequência de excitação, obtidas através dos valores de parâmetros

mostrados tabela 2.1.

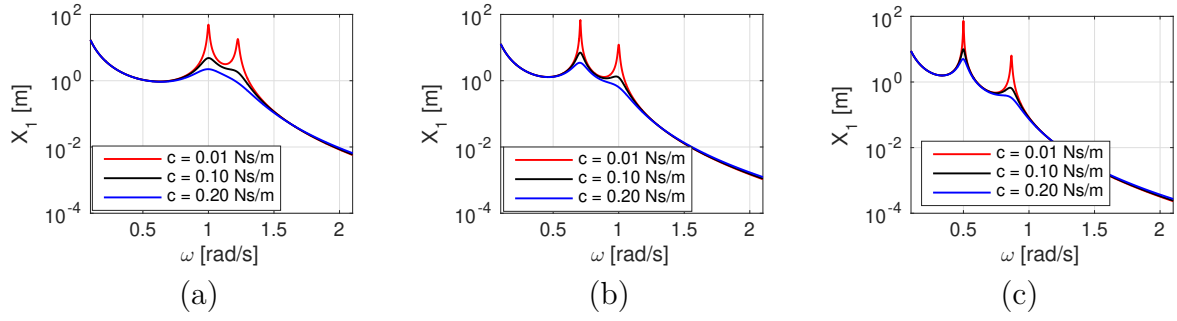


Figura 4.2: Resposta em frequência do bloco mais a esquerda (X_1) da célula unitária da estrutura periódica, mostrada na figura 2.1 para diferentes amortecimentos para as razões de massa (a) para $\mu = 0.50$, (b) $\mu = 1.00$ e (c) $\mu = 2.00$, usando a equação 2.3, com os parâmetros da tabela 2.1 onde mostra a influência do coeficiente de amortecimento (c) na resposta.

As FRF mostradas indicam que a alteração da razão de massa (μ) altera a amplitude de deslocamento em alta frequência e a frequência de ressonância. A alteração de amortecimento altera a amplitude de deslocamento próximo à frequência de ressonância e tem pouca influência no valor da amplitude na região de baixa e de alta frequência.

A figura 4.3 mostra os modos de vibrar da célula unitária, que se desloca axialmente, cujo os modos foram normalizados utilizando o primeiro valor de cada modo. É mostrado o deslocamento de cada massa para seu respectivo modo de vibrar em função da massa que está atrelada ao grau de liberdade.

As respostas dinâmicas da estrutura periódica mostrada na figura 2.1 para várias células a fim de se encontrar os *bandgaps* e o *bandstop* com a força externa $F(t)$ para o último grau de liberdade da estrutura. A Função de Resposta em Frequência (FRF) mostradas na figura 4.4, para alguns valores do número de células unitárias N , obtidas analiticamente através do método da impedância mostrados na equação 4.3. Para as simulações, atribuiu-se valores aos parâmetros do sistema adotados na tabela 2.1, mas com coeficiente de amortecimento $c = 10^{-4} \text{Ns/m}$ para melhor análise.

O *bandstop* está na terceira frequência natural denotado pelo traço pontilhado, nota-se que a partir de ω_3 há atenuação do movimento.

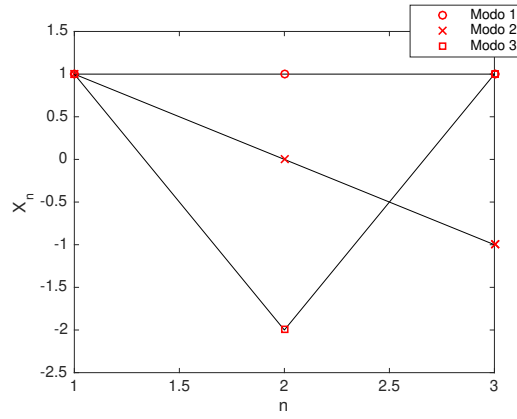


Figura 4.3: Modos de vibrar da estrutura periódica para $\mu = 2.00$, de forma axial, utilizando os parâmetros da tabela 2.1

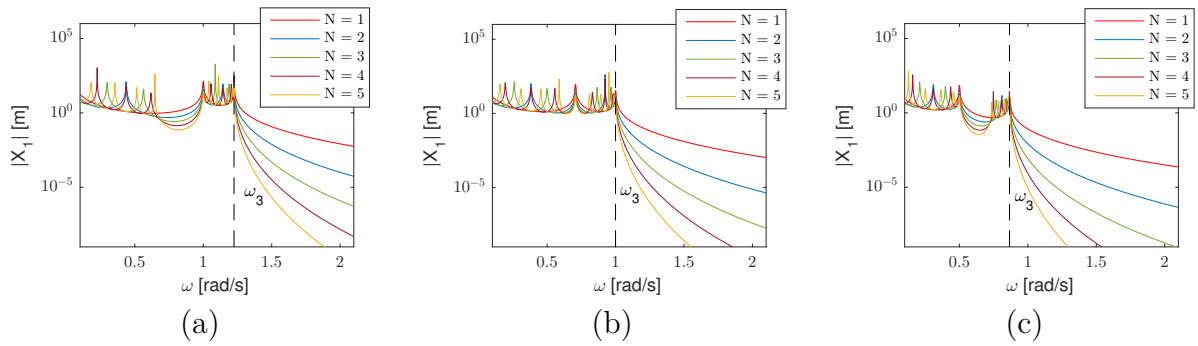


Figura 4.4: Comparação de respostas em frequência do sistema para diversos valores de N . Com (a) $\mu = 0.50$ (b) $\mu = 1.00$ e (c) $\mu = 2.00$, de acordo com os parâmetros adotados na tabela 2.1 e seus respectivos *bandstop*.

Primeiramente, como se pode verificar na figura 4.4 (b), quando $\mu = 1.00$ não há *bandgap* definido. Para análise da FRF utilizando $\mu = 0.50$ e $\mu = 2.00$ o *bandgap* é mostrado e discutido na figura 4.5 e figura 4.6, respectivamente. A célula unitária foi engastada nas duas extremidades e com auxílio do software wxMaxima foi possível obter a equação 4.6 onde é mostrada as duas frequências naturais ω_a e ω_b para a célula engastada:

$$\omega_a = \sqrt{\frac{-(k\sqrt{\mu^2 + 1} - k\mu - k)}{2m_2\mu}} \quad (4.6)$$

$$\omega_b = \sqrt{\frac{k\sqrt{\mu^2 + 1} + k\mu + k}{2m_2\mu}}$$

Na figura 4.5, já foi mostrado que o *bandstop* é a frequência ω_3 dada pela equação 4.5. O *bandgap* inicia na segunda frequência natural da célula, denotado por ω_2 , dado pela equação 4.5 e termina na segunda frequência natural do sistema engastado, denotado por ω_b , mostrado na equação 4.6.

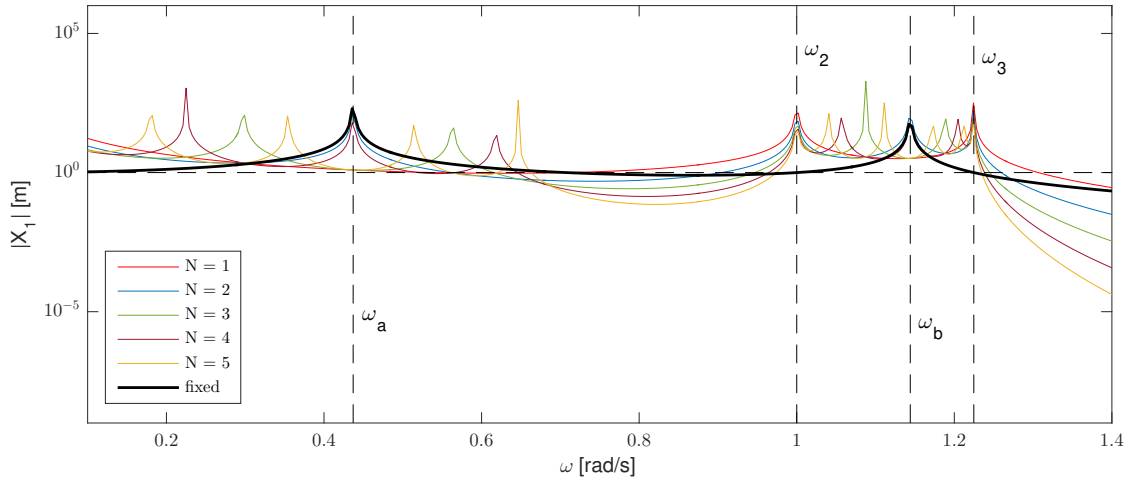


Figura 4.5: FRF com até $N=5$, i.e, cinco células, onde é possível a caracterizar o início e o fim do *bandgap* para $\mu = 0.50$.

Analogamente, na figura 4.6, foi mostrado que o *bandstop* é a frequência ω_3 dada pela equação 4.5. O *bandgap*, inicia na primeira frequência natural da célula engastada, denotado por ω_a , dado pela equação 4.6 e termina na segunda frequência natural da célula, denotado por ω_2 , mostrado na equação 4.5.

Para encontrar as repostas da transmissibilidade em função da frequência, deve-se encontrar a matriz de Transmissibilidade, à luz de resultados anteriores, os deslocamentos X_1 e X_3 são conhecidos, assim a curva de transmissibilidade será gerada seguindo a

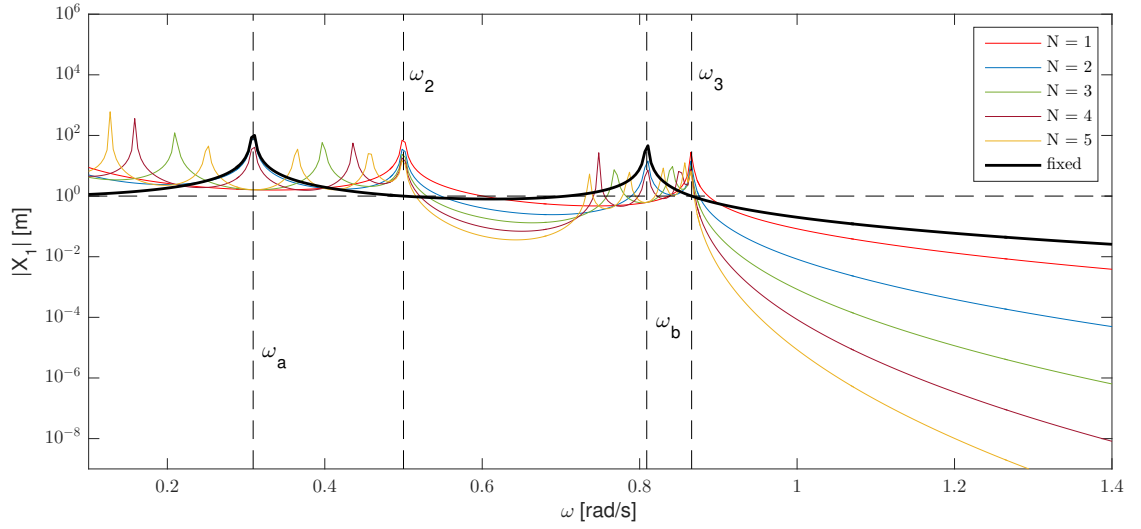


Figura 4.6: Análise *bandgap* $\mu = 2$.

equação 4.7.

$$T_r = \left| \frac{X_1}{X_3} \right| \quad (4.7)$$

Deve-se obter a expressão analítica para a magnitude dessa função utilizando a equação 4.3 em sua forma matricial. Quando $|T_r| = 1$ são as frequências encontradas irão definir os *bandgaps*.

Com auxílio do software wxMaxima, pode-se obter a equação 4.8, que mostra as expressões para cada uma das frequências, onde o início do *bandgap* é dado por ω_i , o fim do *bandgap* é dado pelo ω_f e o *bandstop* é ω_s .

$$\begin{aligned} \omega_i &= \sqrt{\frac{k}{m_2}} \\ \omega_f &= \sqrt{\frac{k}{m_2\mu}} \\ \omega_s &= \sqrt{\frac{k\mu + k}{m_2\mu}} \end{aligned} \quad (4.8)$$

As figuras 4.7, mostram as curvas de transmissibilidade (T_r) para $\mu = 0.50$, $\mu = 1.00$ e $\mu = 2.00$, respectivamente. Ainda, é possível observar que também não há *bandgap* para $\mu = 1.00$.

De acordo com os parâmetros adotados na tabela 2.1 foi possível obter a Transmissibilidade do sistema e seus respectivos *bandstop* denotado por ω_s e *bandgap* mostrados pelas linhas verticais.

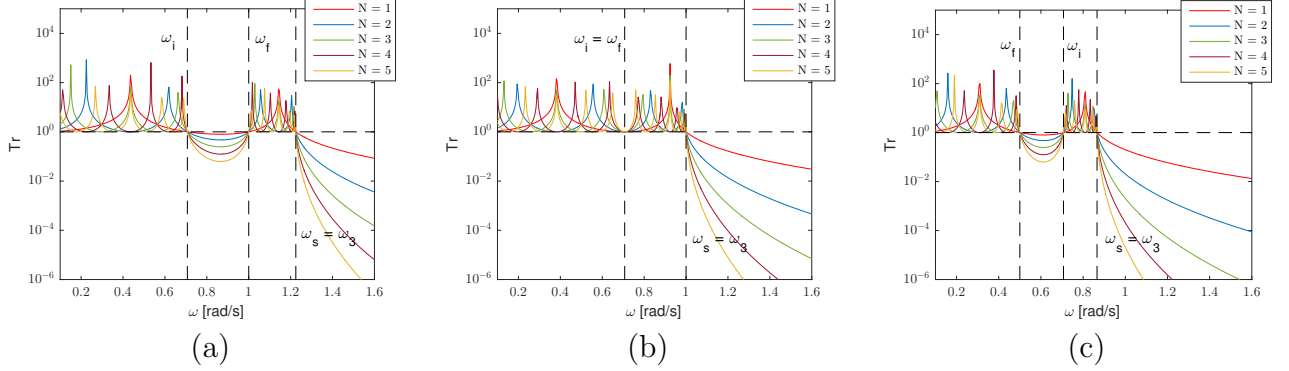


Figura 4.7: Transmissibilidade, alterando-se μ (a) para razão de massa $\mu = 0.50$, (b) para $\mu = 1.00$ e (c) para $\mu = 2.00$.

A figura 4.8 mostra a comparação da transmissibilidade numérica com a analítica, os valores dos *bandgaps* e *bandstop* encontrados para reposta analítica e numérica são mostrados na tabela 4.1 para $\mu = 0.50$ e $\mu = 2.00$, onde ω_i é o início do *bandgap*, ω_f é o fim e ω_s representa o *bandstop*.

A tabela 4.1 compara os valores analíticos e numéricos obtidos de ω_i , ω_f e ω_s para $\mu = 0.50$ e para $\mu = 2.00$, é possível verificar que os *bandgaps* e *bandstop* para Transmissibilidade numérica e analítica possuem valores equivalentes.

A figura 4.9 mostra a influência da razão de massa μ na Transmissibilidade, onde é possível notar que quanto maior a razão de massa, mais à esquerda a resposta se desloca. Ainda, que o fim do *bandgap* ω_f fica constante para $\mu \geq 1.00$ e que há um valor mínimo no tamanho do *bandgap* quando $\mu = 1.00$. É importante ressaltar que quando $\mu = 1.00$, não há *bandgap* definido, pois não há variação na impedância do sistema. Os blocos de massas são todos iguais

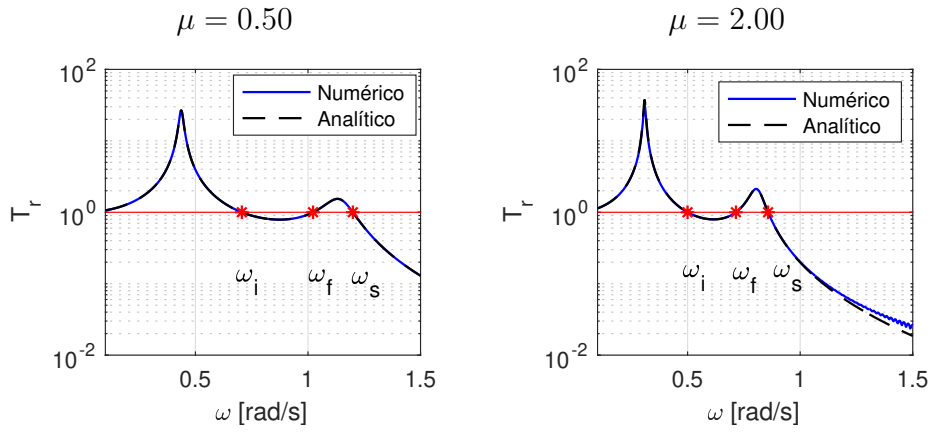


Figura 4.8: Comparação da transmissibilidade analítica e numérica com rigidez linear.

Tabela 4.1: Comparação dos *bandgaps* e *bandstop*

μ	Frequência [rad/s]	Numérico	Analítico
0.50	ω_i	0.7063	0.7062
	ω_f	1.0226	1.0225
	$(\omega_f - \omega_i)$	0.3163	0.3163
	ω_s	1.1993	1.1993
2.00	ω_i	0.4997	0.4997
	ω_f	0.7147	0.7146
	$(\omega_f - \omega_i)$	0.2150	0.2149
	ω_s	0.8576	0.8575

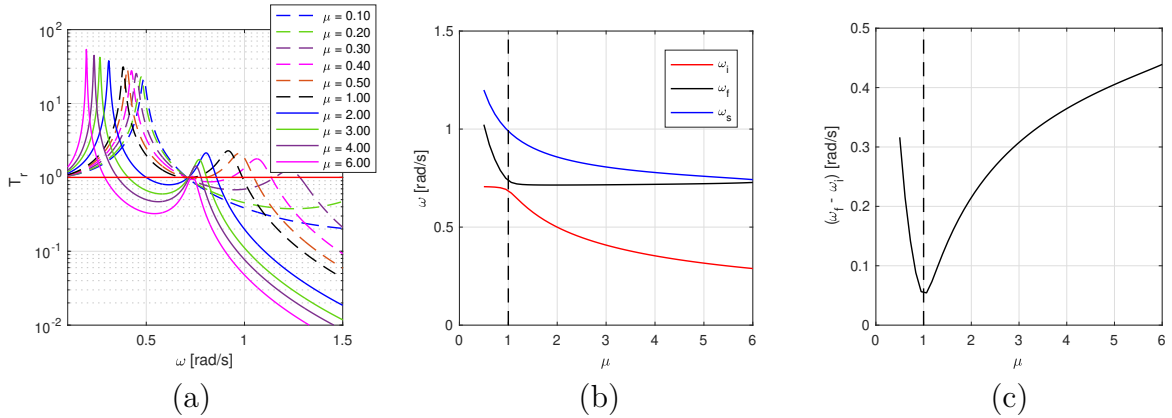


Figura 4.9: Influência da razão de massa μ na Transmissibilidade. A linha tracejada representa $\mu = 1.00$. (a) Comparação da transmissibilidade para diferentes μ , (b) início do *bandgap* denotado por ω_i , o fim do *bandgap* é ω_f e o *bandstop* ω_s (c) $(\omega_f - \omega_i)$ representa o tamanho do *bandgap*

A figura 4.10 mostra a influência do coeficiente de amortecimento c na Transmissibilidade, que afeta a amplitude da resposta. O *bandgap* sofre uma leve inclinação e o *bandstop* uma pequena declinação à medida em que se aumenta o coeficiente de amortecimento.

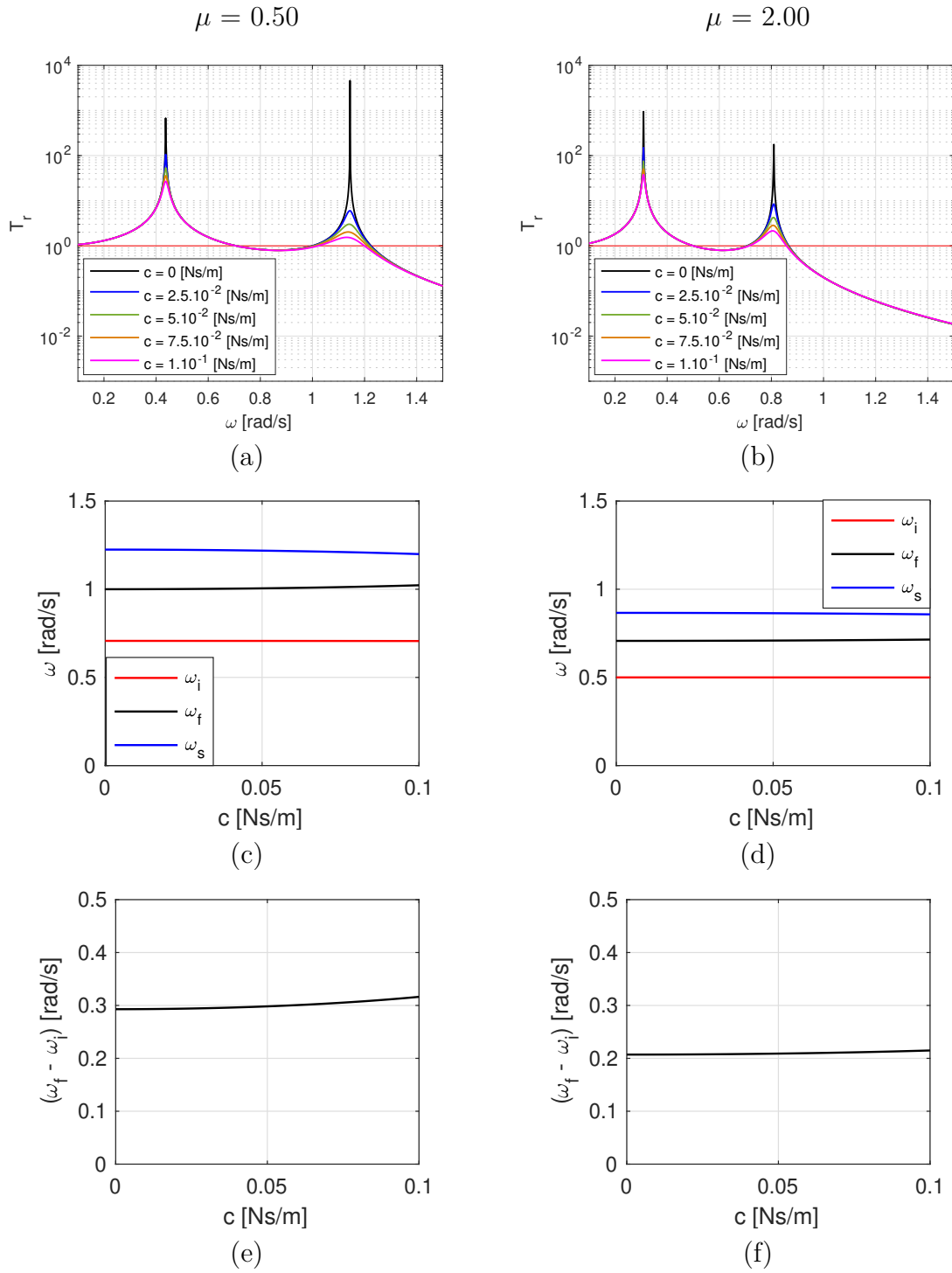


Figura 4.10: Frequência pela variação do coeficiente de amortecimento c . Em (a) e (b) Transmissibilidade para $\mu = 0.50$ e $\mu = 2.00$, respectivamente. Em (c), (d), (e) e (f) é mostrada a frequência variando c e seus respectivos *bandgap* e *bandstop*

Capítulo 5

Dinâmica do sistema com rigidez não linear

Nesta seção são mostradas as respostas dinâmicas após o cálculo dos valores dos coeficientes mostradas na tabela 5.1 com a utilização da abordagem de igualdade de energia potencial elástica, para rigidez do tipo *hardening* e do tipo *softening*. Assim é possível comparar as FRF e nos casos I, onde há rigidez não linear nas duas molas; caso II onde a rigidez não linear consta apenas na primeira mola à esquerda e III apenas na mola à direita, para todos os μ e respectivos coeficientes de rigidez não linear, relacionados por b e sua norma $\mathcal{H}_2$. As normas de um sistema são importantes, pois com elas é possível medir a intensidade da resposta de uma estrutura sob alguma excitação (Bueno, 2007). A formulação da norma $\mathcal{H}_2$ é obtida considerando a representação do sistema em espaço de estados (A,B,C), no qual I é a matriz identidade e G é a função transferência, mostrada na equação 5.1.

Com as equações de movimento 2.1 e equações de estado do sistema utilizando o método de Runge-Kutta de quarta e quinta ordem, através do comando ODE45, bastante utilizado na simulação de problemas em engenharia. Após determinar as condições iniciais das variáveis de estado escolhidas, objetivando mostrar as FRF para o sistema com rigidez linear e não linear.

A tabela 5.1 mostra a relação dos valores da razão de massa e o respectivo deslocamento máximo, próximo ao pico de ressonância, referido valor é usado para definição de valores dos coeficientes de rigidez da força não linear mostrados na figura 3.3 e na figura 3.4.

Tabela 5.1: Valores de deformação máxima (X_{max})

μ	$X_{max}[\text{m}]$	$\omega_n[\text{rad/s}]$
0.50	4.835	1.00
1.00	7.032	0.70
2.00	9.970	0.50

$$G(\omega) = C(j\omega I - A)^{-1}B \quad (5.1)$$

Assim, a equação da norma $\mathcal{H}_2$ é mostrada na equação 5.2, no qual tr é o traço da matriz

$$\mathcal{H}_2 = \|G\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} tr(G^*(j\omega)G(j\omega))d\omega \quad (5.2)$$

O valor da norma $\mathcal{H}_2$, também pode ser interpretado como a área abaixo da resposta em frequência do sistema, e, neste estudo, a área foi obtida através do método trapezoidal.

5.1 FRF com rigidez não linear do tipo *hardening*

A seguir são mostrados os resultados utilizando a abordagem de igualdade de energia de deformação discutida no capítulo anterior para encontrar os valores de rigidez do tipo *hardening*. Como é possível ver nas respostas em frequência mostrada nas figuras 5.1 - 5.4, os deslocamentos da estrutura periódica, com a não linearidade cúbica do tipo *hardening* mostram a comparação das respostas entre os três casos propostos.

No caso I, há rigidez não linear nas duas molas, no caso II a não linearidade cúbica

está presente apenas na força elástica presente no primeiro bloco, mais à esquerda e no caso III há não linearidade cúbica apenas na força elástica presente no último bloco, estão mostrados na seção 2.1.2 para $\mu = 0.50$, de acordo com os coeficientes k_l e k_n mostradas na tabela 3.2 com mesmos valores e cores das forças mostrados na figura 3.2 com seus respectivos valores b .

Em X_1 , é possível notar que a medida que se aumenta o b , que é a razão de coeficientes de rigidez linear e não linear, mais a esquerda a resposta se desloca e os picos de frequência diminuem conforme mostra a figura 5.1.

A tabela 5.2 mostra a comparação entre os valores das FRF de X_1 , figura 5.1 (a), (b) e (c) de norma $\mathcal{H}_2$ da estrutura periódica para os três casos, quando é usada a abordagem de igualdade de energia de deformação, i.e., $S_L = S_{NL}$, também qual dos casos tem um valor de norma $\mathcal{H}_2$ menor para μ .

Como visto na figura 5.1, a vibração é atenuada com a adição de molas do tipo não linear com rigidez cúbica na estrutura periódica investigada. A não linearidade cúbica do tipo *hardening* e *softening* são feitas para os três casos já mencionados, a não linearidade nas duas molas, apenas no primeiro bloco mais à esquerda e presente no último bloco, casos I, II e III respectivamente, é discutido para quais b e qual caso tem a menor norma $\mathcal{H}_2$.

Para encontrar os valores dos *bandgaps* e *bandstop*, que são os pontos de interseção entre $T_r = 1$ e ω , mostrada na figura 4.8, foi utilizada a função *polyxpoly* do MATLAB®.

A figura 5.5, figura 5.6 e figura 5.7, respectivamente casos I, II e III, mostram a influência da razão de coeficientes de rigidez linear e não linear, da força não linear do tipo *hardening* nos *bandgap* e *bandstop*. Para cada b , tem-se uma resposta no domínio da frequência com a mesma a energia de deformação e o objetivo é verificar o comportamento do tamanho do *bandgap* a medida em que o coeficiente b é modificado, para $\mu = 0.50$ e $\mu = 2.00$.

Para o caso I, onde a característica não linear está presente nas duas molas, a figura 5.5 mostra que com $\mu = 0.50$ o tamanho do *bandgap* se mantém entre 0.30 e 0.40 rad/s

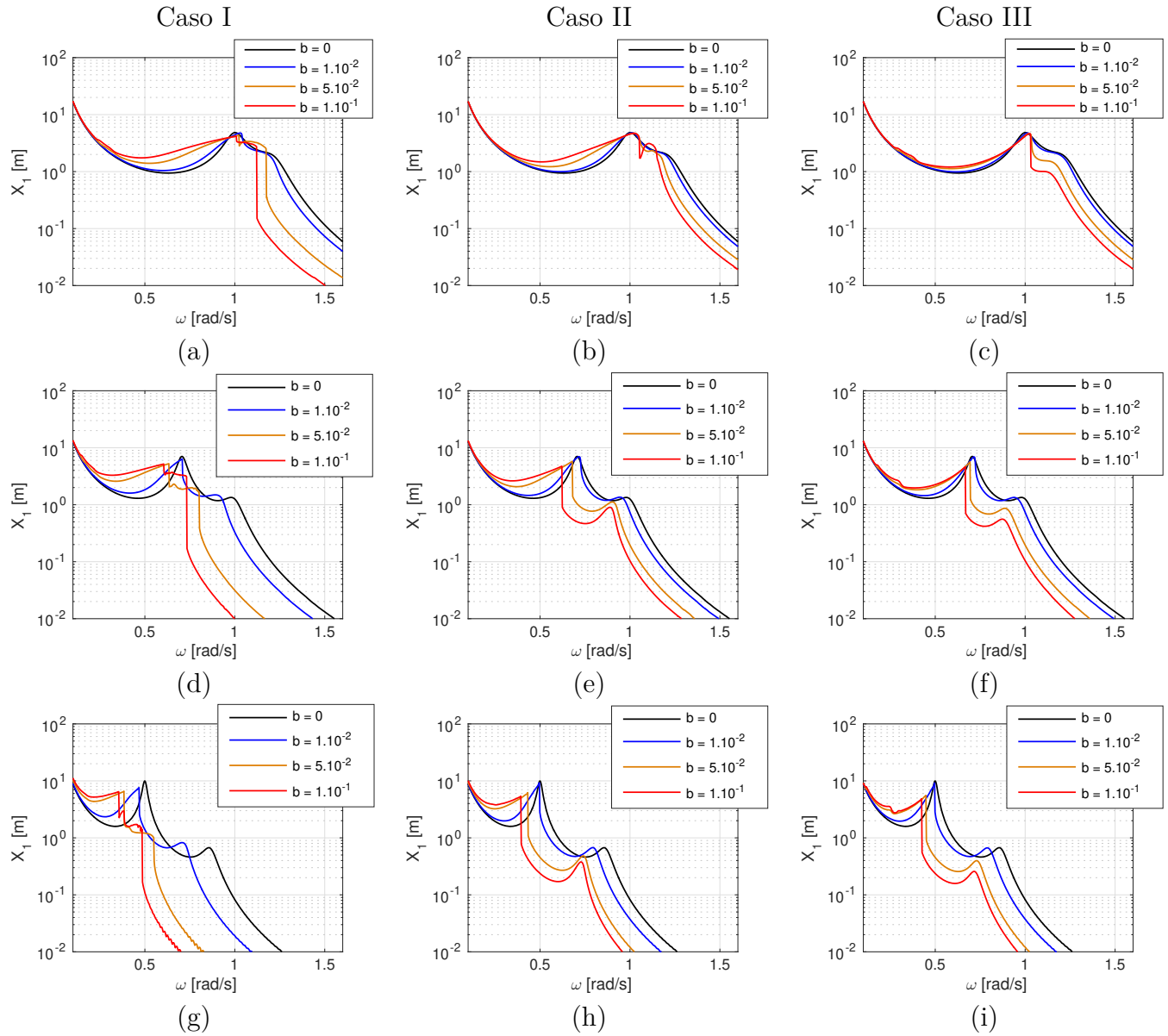


Figura 5.1: Resposta em frequência com rigidez não linear do tipo *hardening* de X_1 do modelo da estrutura periódica mostrada na figura 2.1, para os casos I, II e III, onde (a), (b) e (c) é para razão de massa $\mu = 0.50$, (d), (e) e (f) para $\mu = 1.00$ e (g), (h) e (i) para $\mu = 2.00$. As FRF são mostradas com diferentes valores de razão de coeficientes de rigidez linear e não linear (b).

para diferentes b , enquanto para $\mu = 2.00$ o tamanho do *bandgap* se mantém constante para $b > 0.05m^{-2}$.

Para o caso II, onde a caracterísitca não linear está presente apenas na primeira mola mais à esquerda, a figura 5.6 mostra que com $\mu = 0.50$ o tamanho do *bandgap* diminui

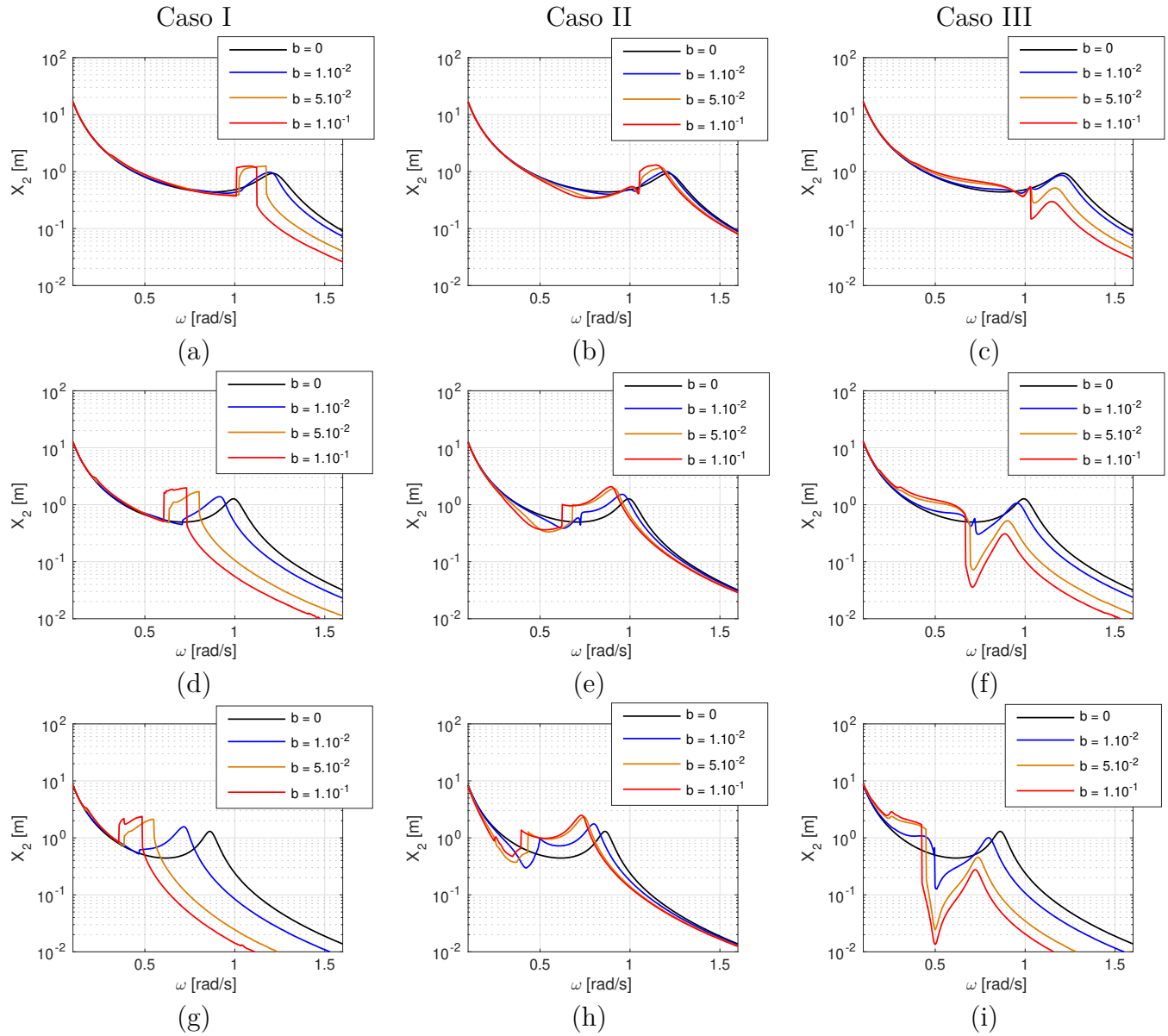


Figura 5.2: Resposta em frequência com rigidez não linear do tipo *hardening* da massa central (X_2) do modelo da estrutura periódica mostrada na figura 2.1, para os casos I, II e III, onde (a), (b) e (c) é para razão de massa $\mu = 0.50$, (d), (e) e (f) para $\mu = 1.00$ e (g), (h) e (i) para $\mu = 2.00$. As FRF são mostradas com diferentes valores de razão de coeficientes de rigidez linear e não linear (b).

para $0 < b < 0.03m^{-2}$ e se mantém em $b \geq 0.03$. Quando $\mu = 2.00$, há um valor mínimo do tamanho do *bandgap*, $b = 0.02m^{-2}$.

Por fim, no caso III cuja força não linear está presente na segunda mola mais à direita, a figura 5.7 mostra que com $\mu = 0.50$ o tamanho do *bandgap* se mantém crescente.

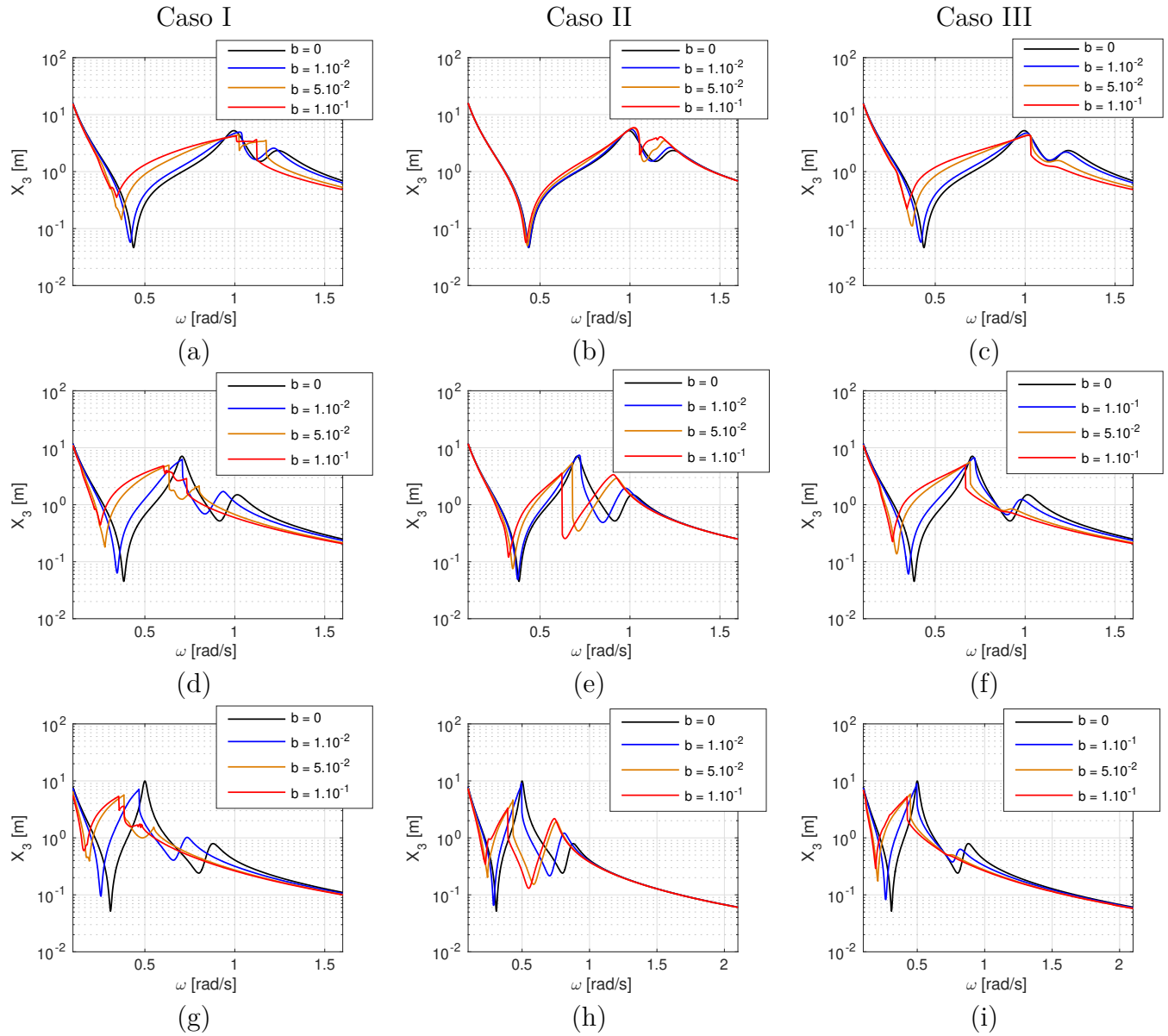


Figura 5.3: Resposta em frequência com rigidez não linear do tipo *hardening* da massa mais à direita (X_3) do modelo da estrutura periódica mostrado na figura 2.1, para os casos I, II e III, onde (a), (b) e (c) é para razão de massa $\mu = 0.50$, (d), (e) e (f) para $\mu = 1.00$ e (g), (h) e (i) para $\mu = 2.00$. As FRF são mostradas com diferentes valores de razão de coeficientes de rigidez linear e não linear (b).

Enquanto para $\mu = 2.00$ não é possível mensurar o tamanho do *bandgap*, pois quando $b > 0.03m^{-2}$ não há ω_f , nem ω_s .

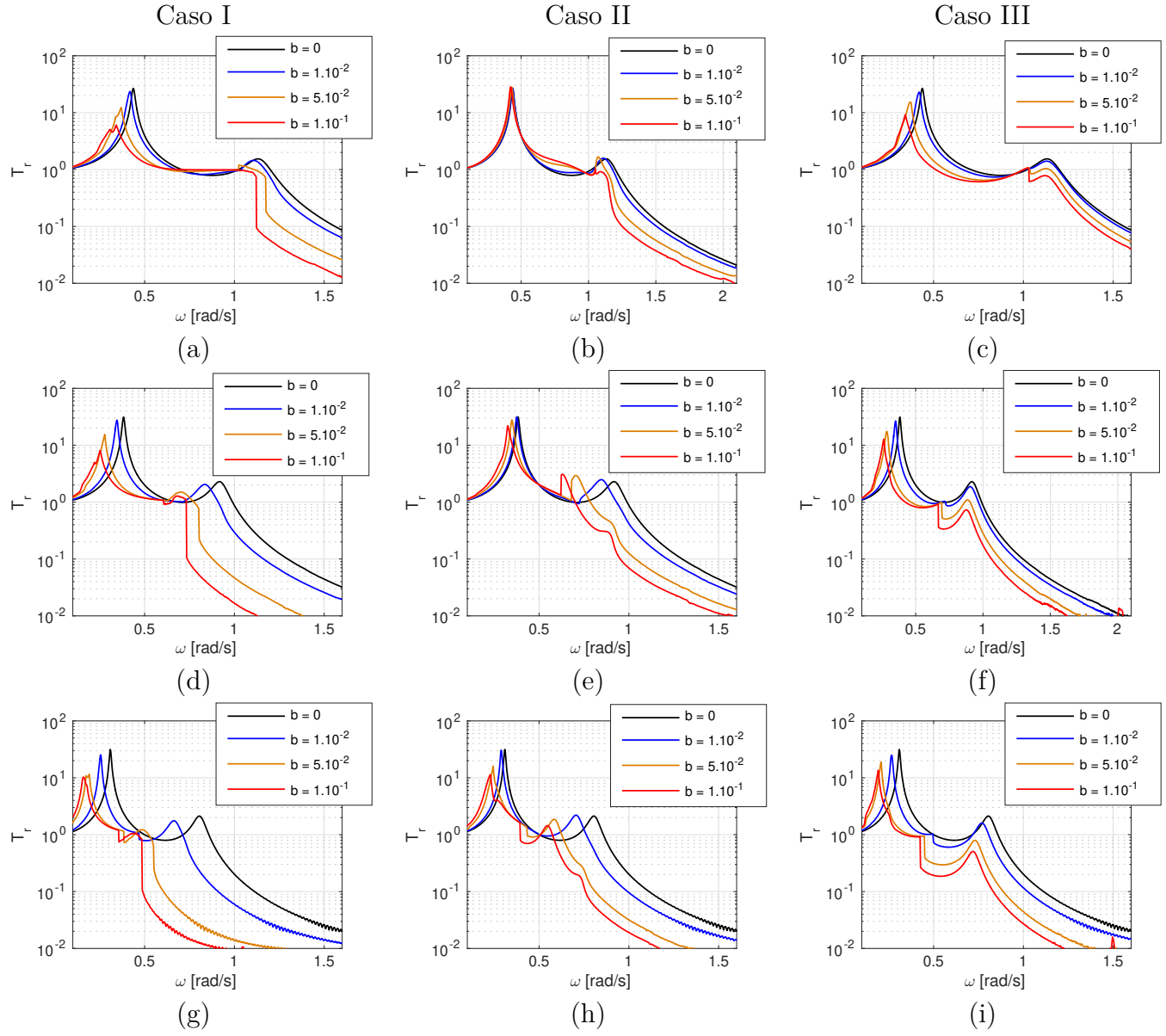


Figura 5.4: Resposta em frequência com rigidez não linear do tipo *hardening* da Transmissibilidade (Tr) do modelo da estrutura periódica mostrado na figura 2.1, para os casos I, II e III, onde (a), (b) e (c) é para razão de massa $\mu = 0.50$, (d), (e) e (f) para $\mu = 1.00$ e (g), (h) e (i) para $\mu = 2.00$. As FRF são mostradas com diferentes valores de razão de coeficientes de rigidez linear e não linear (b).

Tabela 5.2: Norma $\mathcal{H}_2$ para os casos I, II e III (*hardening*)

		$\mathcal{H}_2$								
b [m^{-2}]		$\mu = 0.50$			$\mu = 1.00$			$\mu = 2.00$		
		I	II	III	I	II	III	I	II	III
X_1	0	3.0930	3.0930	3.0930	2.4768	2.4768	2.4768	1.7507	1.7507	1.7507
	1×10^{-2}	3.1014	3.1251	3.0515	2.4890	2.5174	2.4404	1.7658	1.7671	1.7128
	5×10^{-2}	3.3600	3.2506	2.8851	2.5770	2.4422	2.2347	1.7984	1.6349	1.5245
	1×10^{-1}	3.4294	3.4185	2.7805	2.8129	2.3083	2.1021	1.8326	1.5373	1.4397
X_2	0	1.9486	1.9486	1.9486	1.5343	1.5343	1.5343	1.0652	1.0652	1.0652
	1×10^{-2}	1.9278	1.9420	1.9300	1.5256	1.5613	1.4953	1.0767	1.1164	1.0368
	5×10^{-2}	1.9198	1.9210	1.8791	1.4766	1.5627	1.4639	1.0389	1.1374	1.0648
	1×10^{-1}	1.8685	1.9164	1.8640	1.4573	1.5594	1.4720	0.9953	1.1607	1.0727
X_3	0	3.2611	3.2611	3.2611	2.2713	2.2713	2.2713	1.5613	1.5613	1.5613
	1×10^{-2}	3.2960	3.3384	3.2319	2.2676	2.2992	2.2861	1.5127	1.4889	1.5661
	5×10^{-2}	3.4476	3.5224	3.1686	2.2641	2.2534	2.2339	1.4457	1.2865	1.4536
	1×10^{-1}	3.4489	3.7227	3.1554	2.4457	2.1634	2.1894	1.4710	1.2000	1.3926
T_r	0	2.8264	2.8264	2.8264	2.6447	2.6447	2.6447	2.0591	2.0591	2.0591
	1×10^{-2}	2.6617	2.8343	2.6516	2.3388	2.6412	2.3205	1.6550	1.9682	1.6953
	5×10^{-2}	2.0625	2.9099	2.1034	1.6574	2.4725	1.7315	1.0884	1.5203	1.2122
	1×10^{-1}	1.6705	2.9785	1.6018	1.2950	2.2534	1.3701	0.9754	1.3096	1.0000

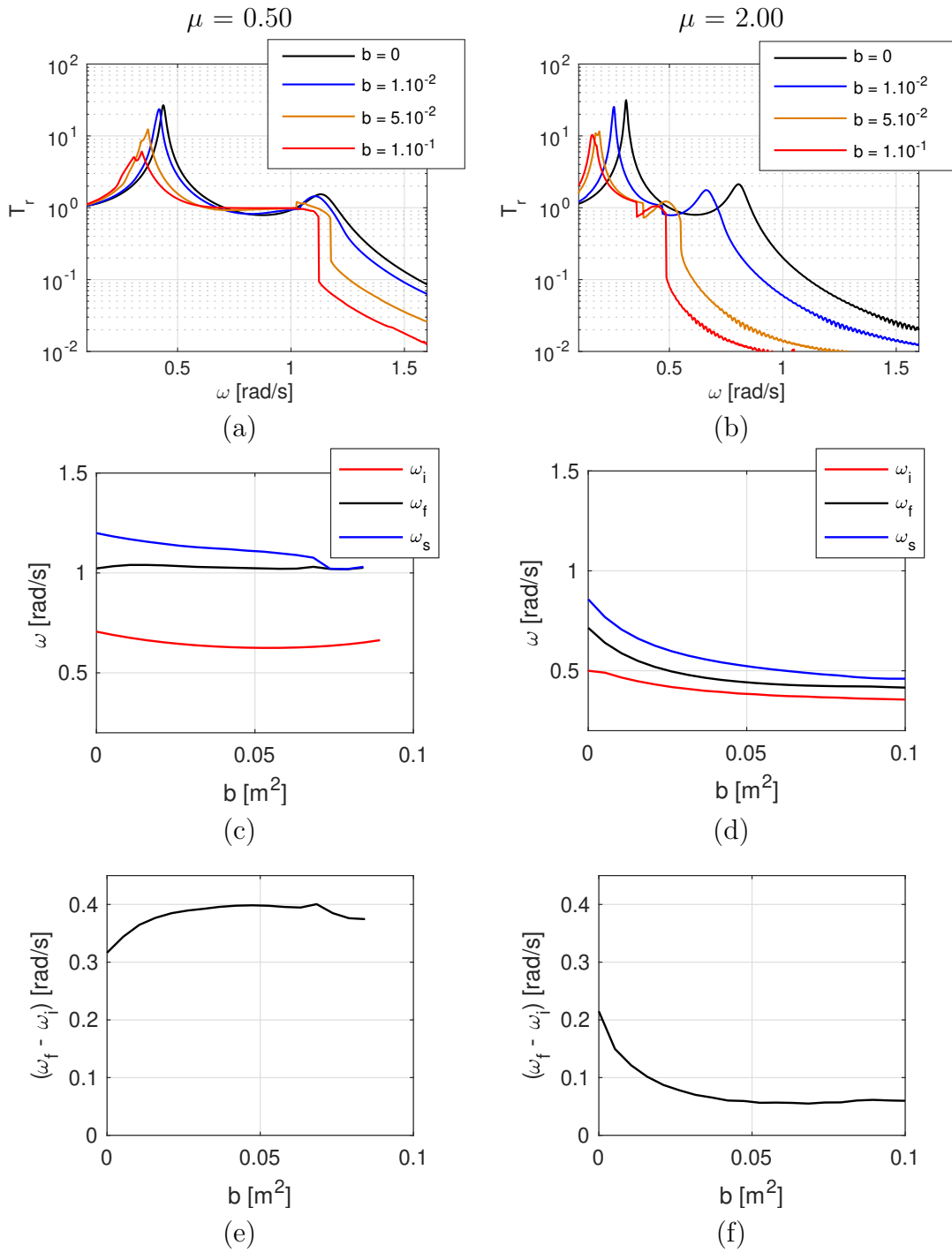


Figura 5.5: Caso I apresenta a característica não linear do tipo *hardening* está nas duas molas , para $\mu = 0.50$ e $\mu = 2.00$, (a) e (b) Trasmisibilidade, (c), (d), (e) e (f) Frequência variando b , que é a razão entre os coeficientes de rigidez linear e não linear.

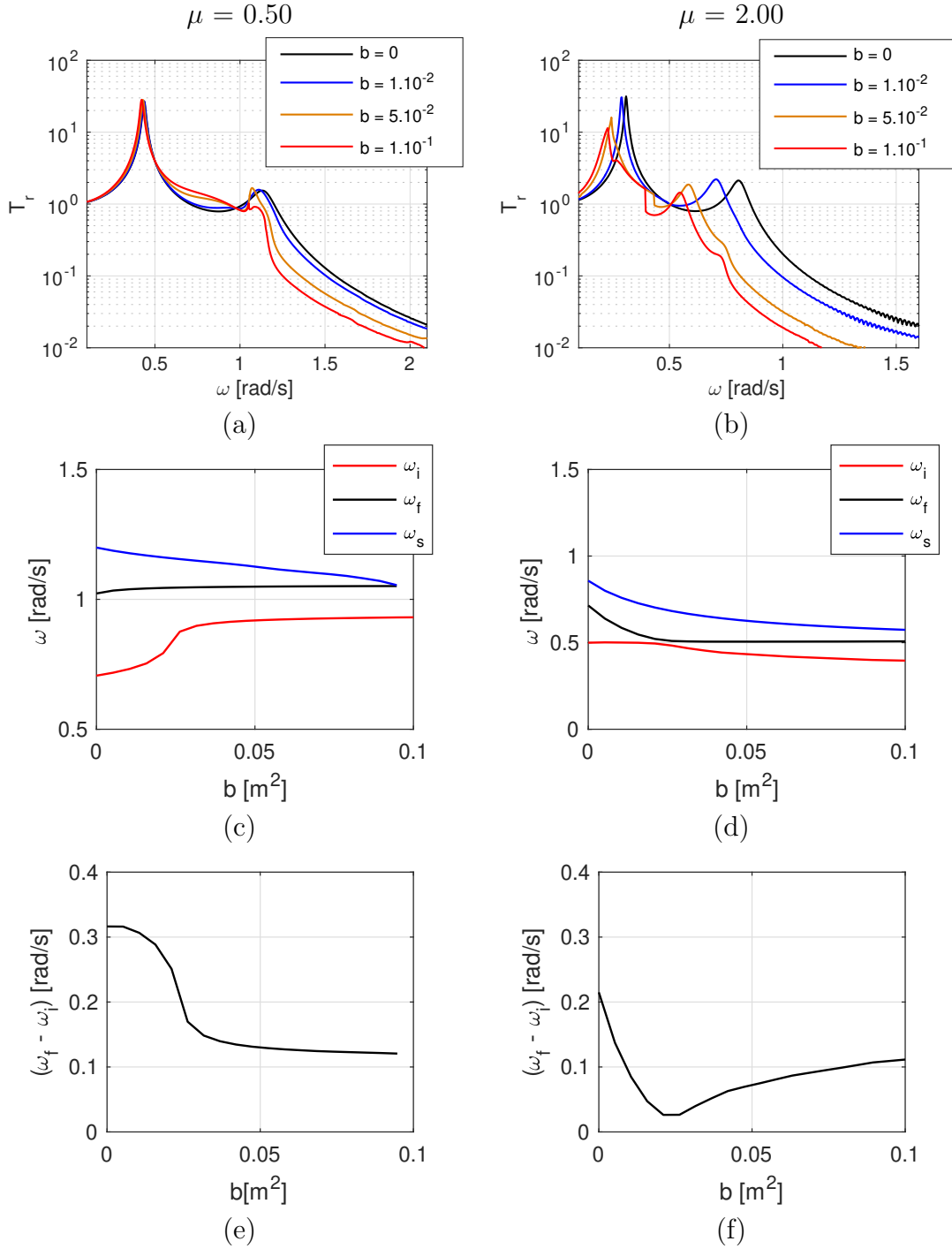


Figura 5.6: Caso II, onde a característica não linear do tipo *hardening*, que está presente apenas em uma mola, no primeiro bloco mais à esquerda, para $\mu = 0.50$ e $\mu = 2.00$, (a) e (b) Transmissibilidade, (c), (d), (e) e (f) Frequência variando b , que é a razão entre os coeficientes de rigidez linear e não linear.

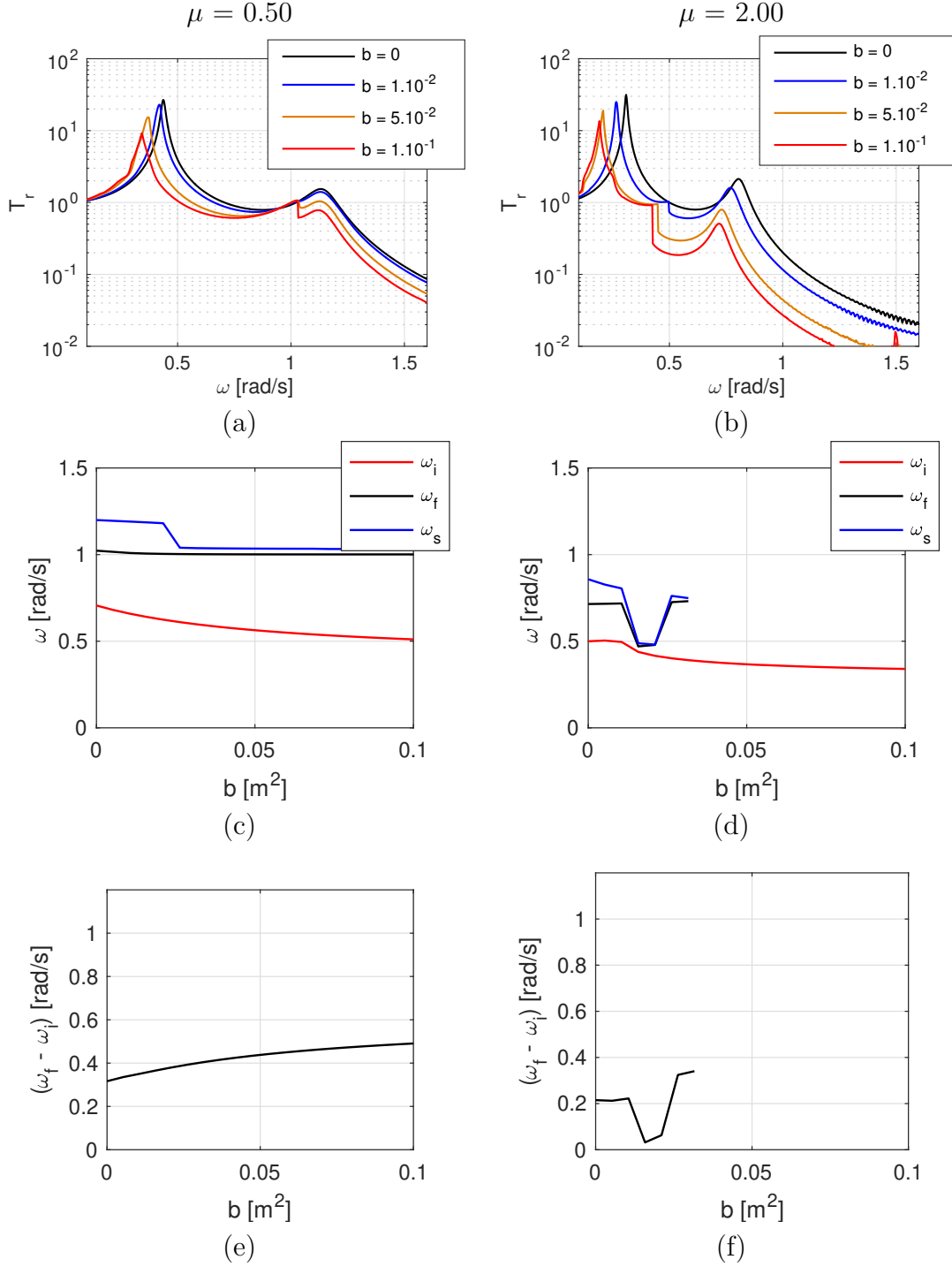


Figura 5.7: Caso III, onde a característica não linear do tipo *hardening* está presente apenas na última mola mais à direita, para $\mu = 0.50$ e $\mu = 2.00$, (a) e (b) Transmissibilidade, (c), (d), (e) e (f) Frequência variando b , que é a razão entre os coeficientes de rigidez linear e não linear.

5.1.1 Resposta do sistema forçado para o Caso II

Na figura 5.8, é mostrado a FRF do sistema para o Caso II, com $\mu = 2.00$, cuja rigidez não linear do tipo *hardening* está presente apenas na primeira mola mais à esquerda, considerando o coeficiente $b = 1.10^{-1}[m^{-2}]$, para simulação numérica, fez-se presentes os parâmetros adotados da tabela 2.1.

É possível observar o fenômeno do salto quando $\omega = 0.39$ rad/s, conforme figura 5.8, mostra um tipo de bifurcação que ocorre em sistemas com não linearidade na rigidez e excitados externamente. Tal fenômeno, se caracteriza pelo aumento ou diminuição repentinos da amplitude de vibração de um sistema como resultado do acréscimo ou decréscimo de sua frequência de excitação (Nayfeh and Balachandran 2008).

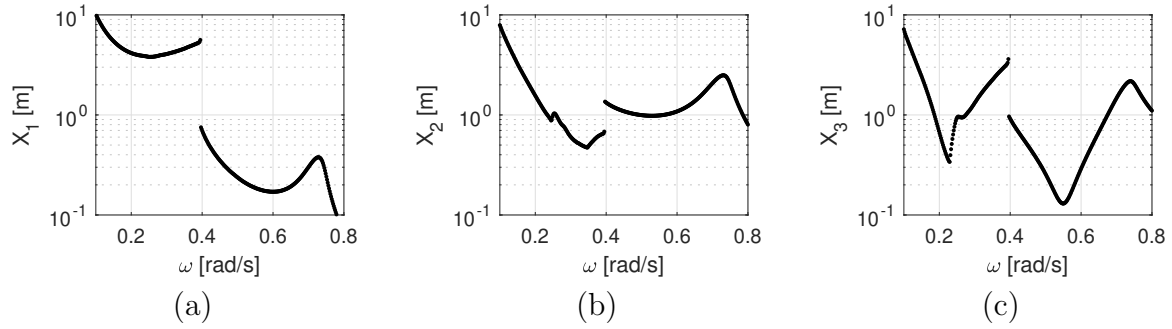


Figura 5.8: FRF do sistema para o caso II, onde a característica não linear cúbica está presente apenas na mola mais à direita. (a) Resposta em frequência do primeiro bloco à esquerda, (b) Resposta em frequência do segundo bloco e (c) Resposta do terceiro bloco mais à direita.

A figura 5.9 mostra os planos de fase, o qual apresenta deslocamento e velocidade relativa entre os blocos para x_1 e x_2 e x_3 em regime permanente, com $\omega = 0.394$ rad/s e $\omega = 0.396$ rad/s. Quando $\omega = 0.394$ rad/s é possível ver o início do salto, quando se aumenta a frequência, a amplitude no início do salto é maior em X_1 e X_3 , já para X_2 a amplitude é menor no início e maior no fim do salto, quando $\omega = 0.396$ rad/s. Além disso, é possível verificar que o movimento é periódico, pois a oscilação possui um padrão de repetição.

A figura 5.10, mostra as respostas numéricas do sistema investigado, o histórico do

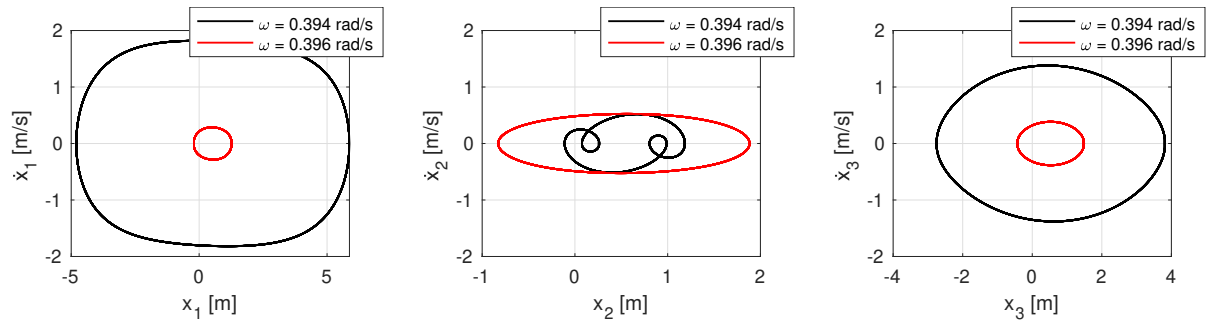


Figura 5.9: Planos de fase com $\omega = 0.394$ rad/s e $\omega = 0.396$ rad/s sem condições iniciais (a) primeiro bloco, (b) segundo bloco e (c) último bloco mais à direita.

deslocamento no tempo e plano de fase, forçado harmonicamente por $F(t)$, sob condição inicial $x_1 = 0m$, $\dot{x}_1 = 0m/s$, $x_2 = 0m$, $\dot{x}_2 = 0m/s$, $x_3 = 0m$, $\dot{x}_3 = 0m/s$ considerando $\omega = 0.394$ rad/s, com passo de integração de 0.01 s e os parâmetros da tabela 2.1.

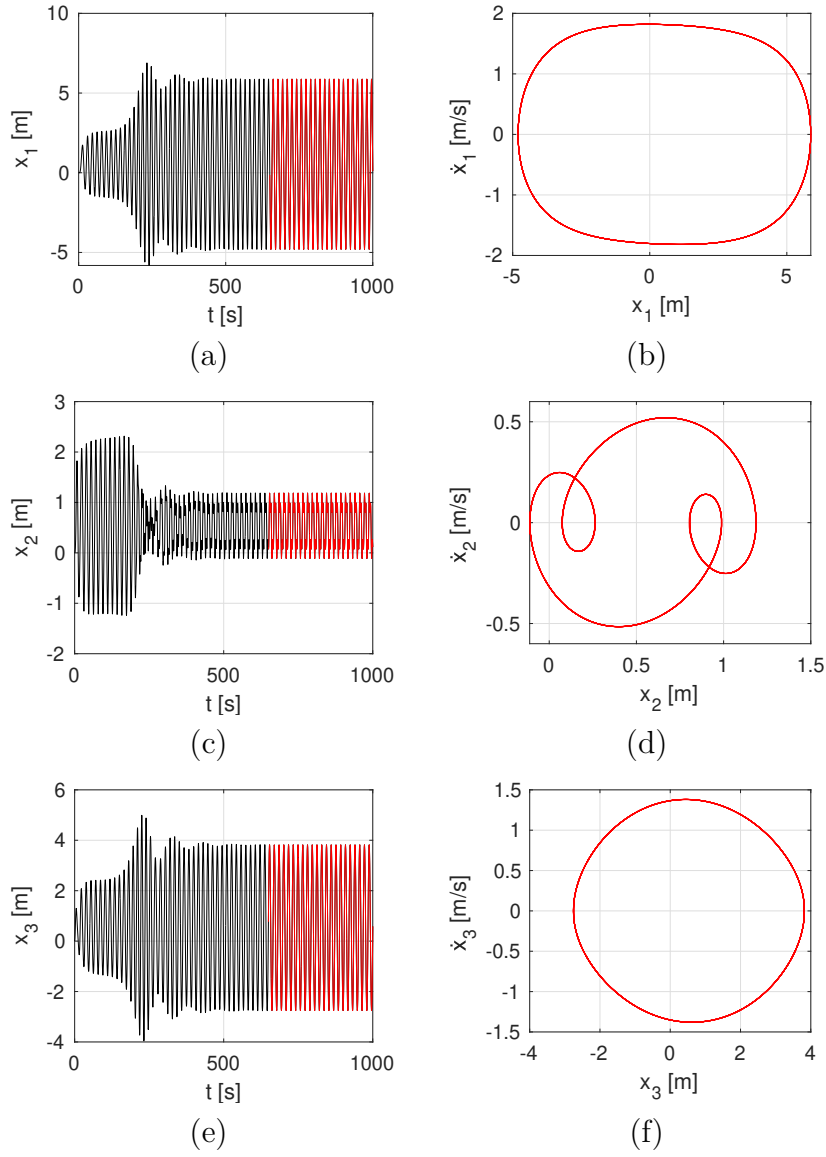


Figura 5.10: Caso II, onde a característica não linear do tipo *hardening* está presente apenas em uma mola, no primeiro bloco mais à esquerda, para x_1 e x_2 e x_3 considerando $\omega = 0.394$ rad/s (a) reposta no tempo de x_1 (b) plano de fase de $x_1 - \dot{x}_1$, (c) reposta no tempo de x_2 , (d) plano de fase de $x_2 - \dot{x}_2$, (e) reposta no tempo de x_3 e (f) plano de fase de $x_3 - \dot{x}_3$,

5.2 FRF com rigidez não linear do tipo *softening*

As figuras 5.11, 5.12, 5.13 e 5.14 mostram a comparação entre os três casos. No caso I há rigidez não linear nas duas molas, no caso II a não linearidade cúbica está presente apenas na força elástica presente no primeiro bloco, mais à esquerda e no caso III há não linearidade cúbica apenas na força elástica presente no último bloco, estão mostrados na seção 2.1.2 para $\mu = 0.50$, de acordo com os coeficientes k_l e k_n mostradas na tabela 3.5 com mesmos valores e cores das forças mostrados na figura 3.5 com seus respectivos valores b .

Em X_1 , é possível notar que a medida que se aumenta o valor de b , que é a razão de coeficientes de rigidez linear e não linear, mais a direita a resposta se desloca e os picos de frequência diminuem figura 5.1.

A tabela 5.3 mostra a comparação entre os valores das FRF de X , figura 5.1 (a), (b) e (c) de norma $\mathcal{H}_2$ da célula unitária da estrutura periódica para os três casos, quando é usada a abordagem de igualdade de energia de deformação, i.e., $S_L = S_{NL}$, também qual dos casos tem um valor de norma $\mathcal{H}_2$ menor para μ .

Como visto na figura 5.11, a vibração é atenuada com a adição de molas do tipo não linear com rigidez cúbica na estrutura investigada. A não linearidade cúbica do tipo *hardening* e *softening* são feitas para os três casos já mencionados, a não linearidade nas duas molas, apenas no primeiro bloco mais à esquerda e presente no último bloco, casos I, II e III respectivamente. Após comparações é discutido nas conclusões para quais b e qual caso tem a menor norma $\mathcal{H}_2$.

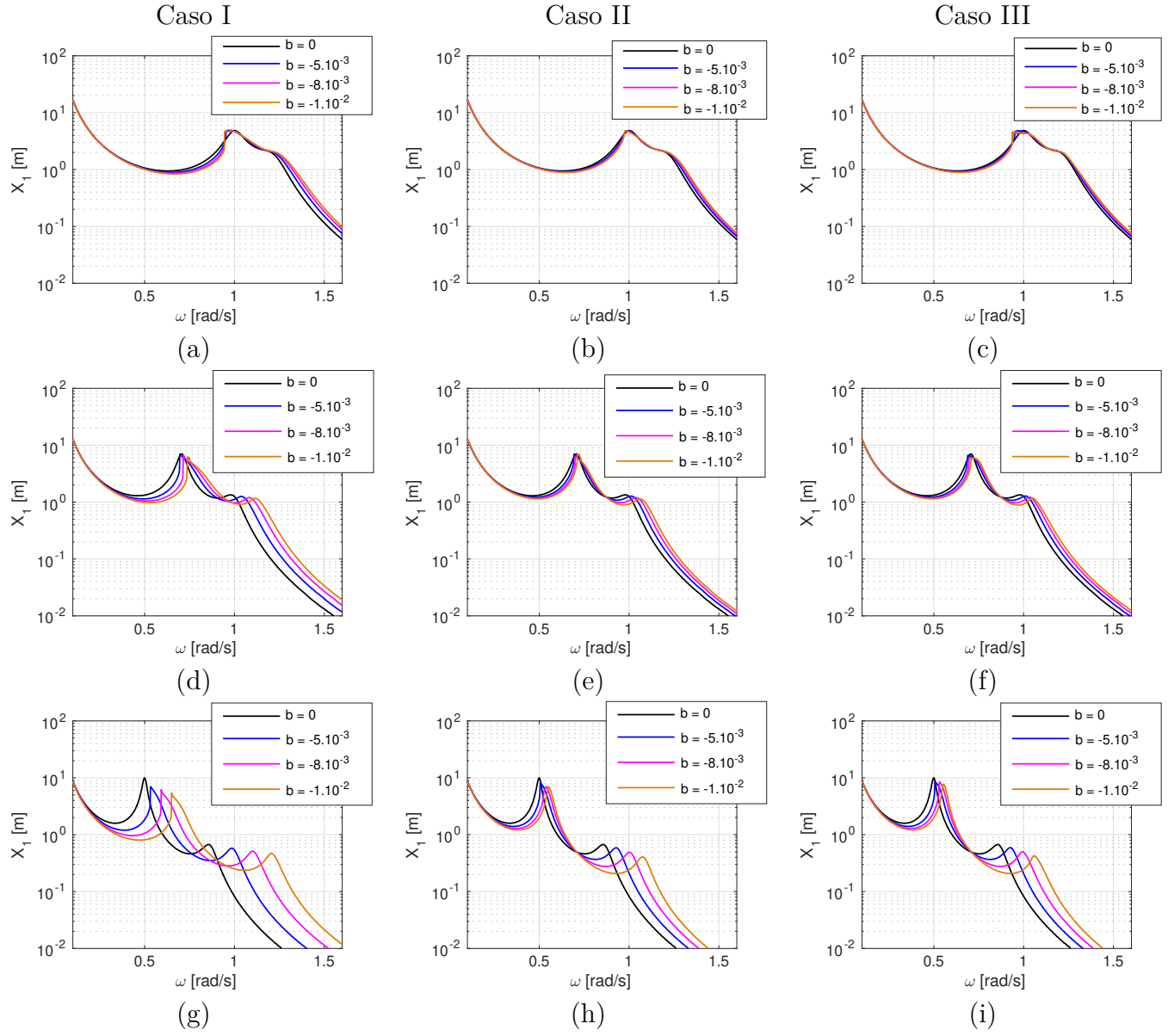


Figura 5.11: Resposta em frequência com rigidez não linear do tipo *softening* da massa mais à esquerda (X_1) do modelo da estrutura periódica mostrado na figura 2.1, para os casos I, II e III, onde (a), (b) e (c) é para razão de massa $\mu = 0.50$, (d), (e) e (f) para $\mu = 1.00$ e (g), (h) e (i) para $\mu = 2.00$. As FRF são mostradas com diferentes valores de razão de coeficientes de rigidez linear e não linear (b).

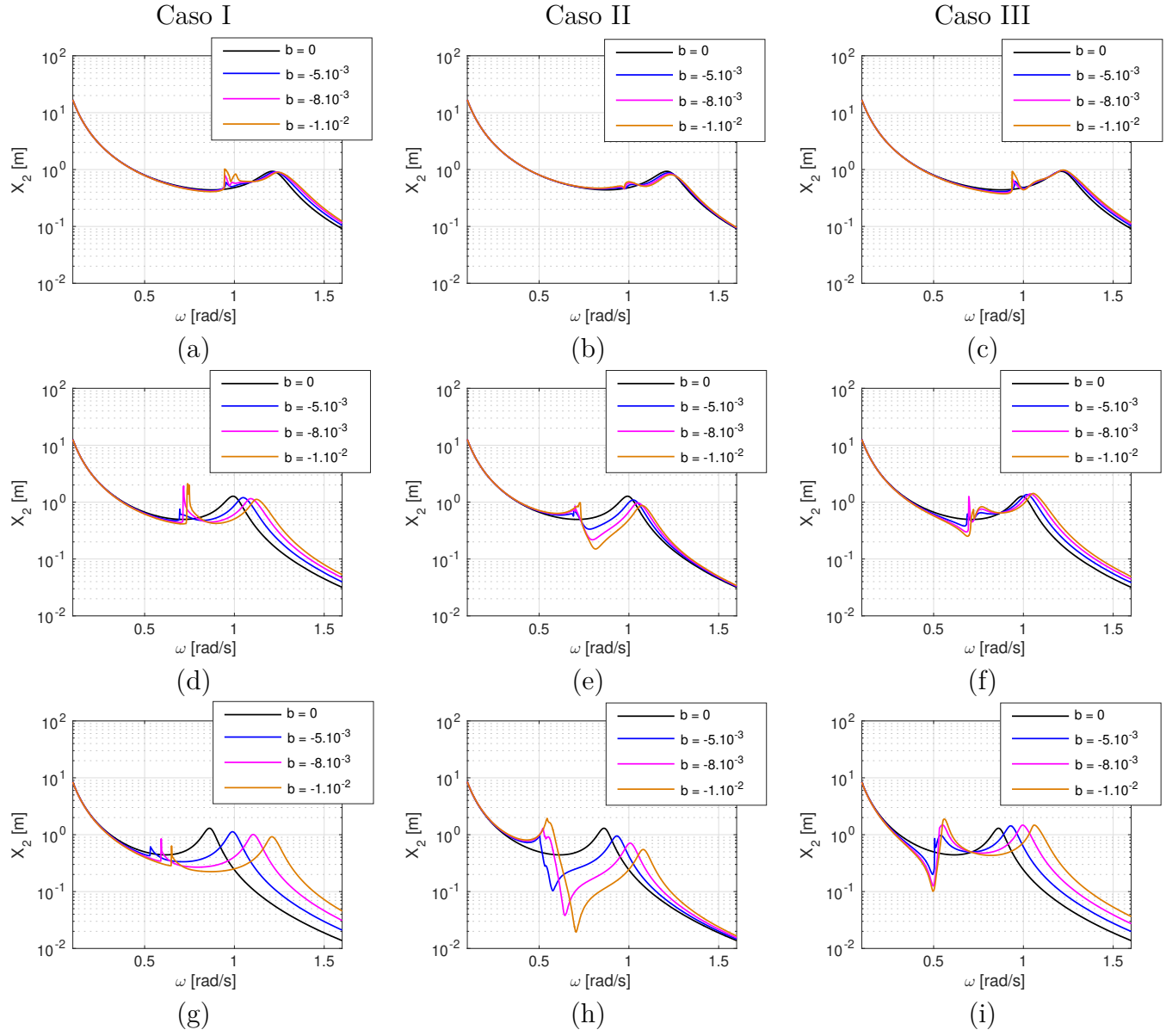


Figura 5.12: Resposta em frequência com rigidez não linear do tipo *softening* da massa central (X_2) do modelo da estrutura periódica mostrado na figura 2.1, para os casos I, II e III, onde (a), (b) e (c) é para razão de massa $\mu = 0.50$, (d), (e) e (f) para $\mu = 1.00$ e (g), (h) e (i) para $\mu = 2.00$. As FRF são mostradas com diferentes valores de razão de coeficientes de rigidez linear e não linear (b).

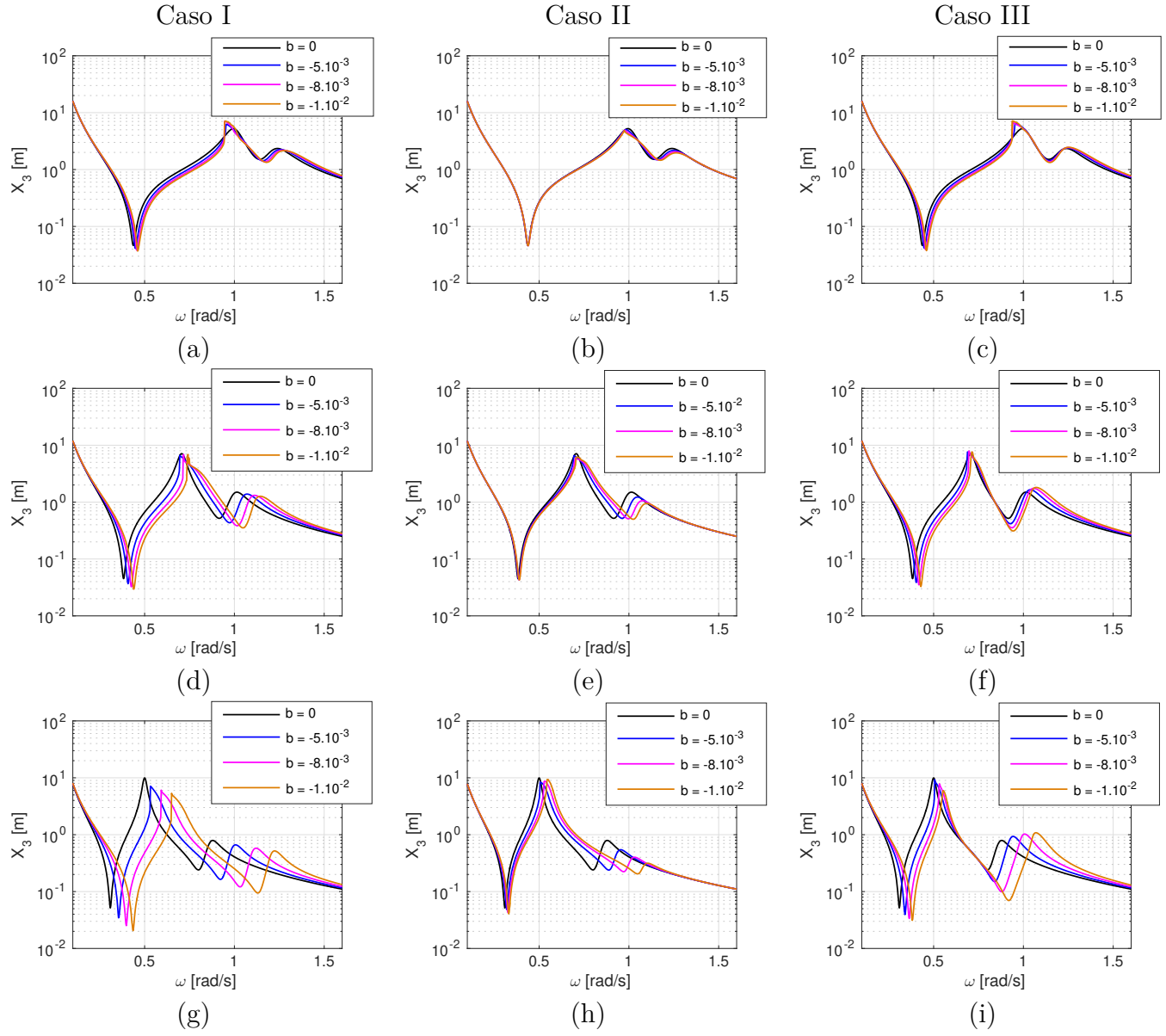


Figura 5.13: Resposta em frequência com rigidez não linear do tipo *softening* da massa mais à direita (X_3) do modelo da estrutura periódica mostrado na figura 2.1, para os casos I, II e III, onde (a), (b) e (c) é para razão de massa $\mu = 0.50$, (d), (e) e (f) para $\mu = 1.00$ e (g), (h) e (i) para $\mu = 2.00$. As FRF são mostradas com diferentes valores de razão de coeficientes de rigidez linear e não linear (b).

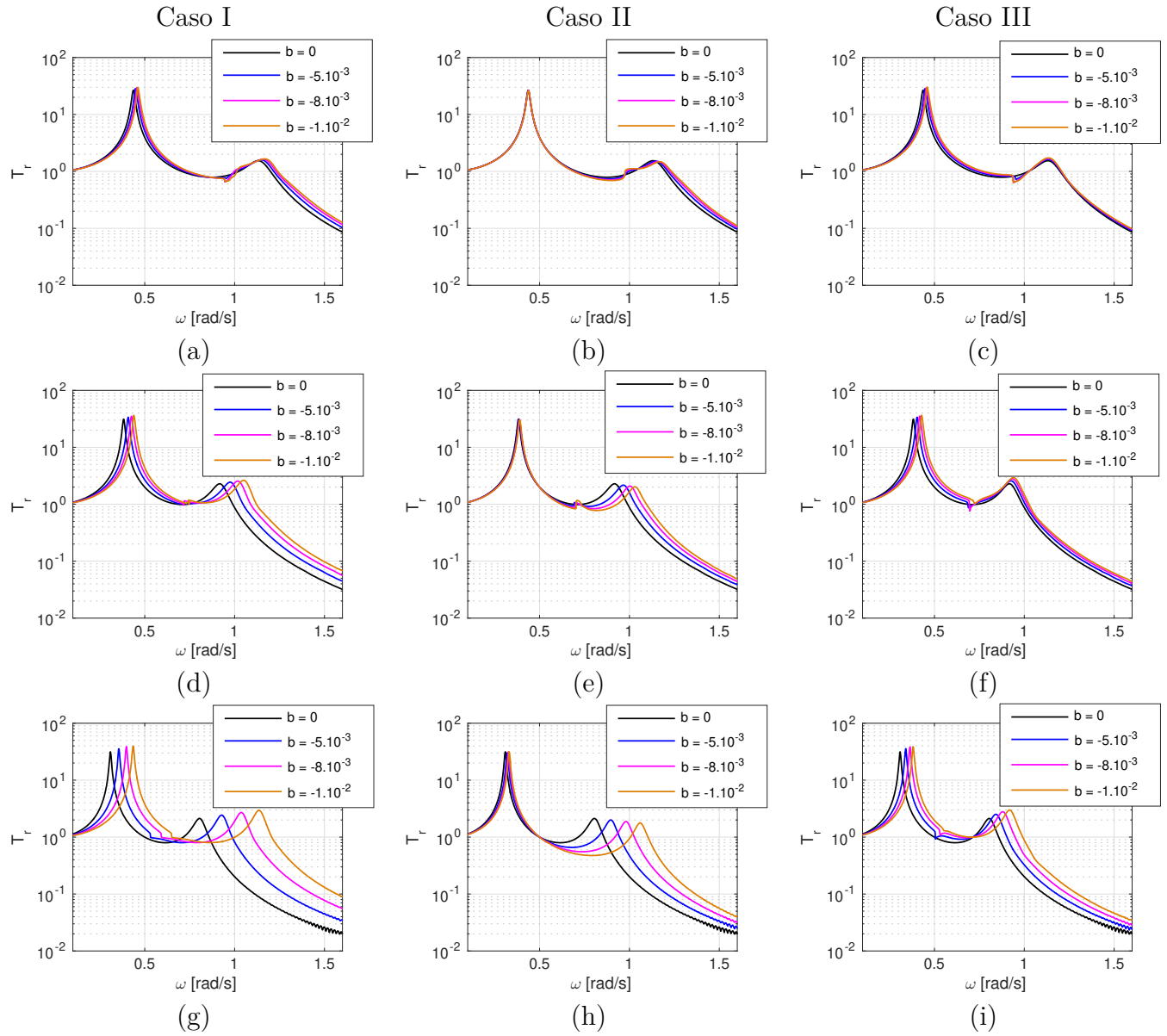


Figura 5.14: Resposta em frequência com rigidez não linear do tipo *softening* da Transmissibilidade (Tr) do modelo da estrutura periódica mostrado na figura 2.1, para os casos I, II e III, onde (a), (b) e (c) é para razão de massa $\mu = 0.50$, (d), (e) e (f) para $\mu = 1.00$ e (g), (h) e (i) para $\mu = 2.00$. As FRF são mostradas com diferentes valores de razão de coeficientes de rigidez linear e não linear (b).

Tabela 5.3: Norma $\mathcal{H}_2$ para os casos I, II e III (*softening*)

		$\mathcal{H}_2$								
b [m^{-2}]		$\mu = 0.50$			$\mu = 1.00$			$\mu = 2.00$		
		I	II	III	I	II	III	I	II	III
X_1	0	3.0930	3.0930	3.0930	2.4768	2.4768	2.4768	1.7507	1.7507	1.7507
	-5×10^{-3}	3.1160	3.0756	3.1215	2.4397	2.4335	2.4648	1.6298	1.6668	1.6890
	-8×10^{-3}	3.1245	3.0638	3.1081	2.4028	2.3888	2.4276	1.5629	1.5987	1.6342
	-1×10^{-2}	3.1276	3.0548	3.1136	2.3671	2.3735	2.3961	1.5179	1.5513	1.5734
X_2	0	1.9486	1.9486	1.9486	1.5343	1.5343	1.5343	1.0652	1.0652	1.0652
	-5×10^{-3}	1.9637	1.9516	1.9601	1.5399	1.5093	1.5610	1.0535	1.0088	1.1212
	-8×10^{-3}	1.9776	1.9528	1.9641	1.5527	1.4850	1.5808	1.0405	1.0159	1.1668
	-1×10^{-2}	1.9978	1.9533	1.9746	1.5604	1.4735	1.5898	1.0278	1.0475	1.1910
X_3	0	3.2611	3.2611	3.2611	2.2713	2.2713	2.2713	1.5613	1.5613	1.5613
	-5×10^{-3}	3.2519	3.2112	3.3177	2.2134	2.2583	2.2513	1.4648	1.5685	1.4714
	-8×10^{-3}	3.2461	3.1768	3.3280	2.1535	2.2580	2.2045	1.3962	1.5954	1.3825
	-1×10^{-2}	3.2572	3.1525	3.3473	2.1169	2.2830	2.1616	1.3498	1.6142	1.3092
T_r	0	2.8264	2.8264	2.8264	2.6447	2.6447	2.6447	2.0591	2.0591	2.0591
	-5×10^{-3}	2.9228	2.8277	2.9176	2.8620	2.6355	2.8615	2.4349	2.0906	2.3603
	-8×10^{-3}	2.9877	2.8305	2.9759	3.0234	2.6245	3.0186	2.7756	2.1132	2.5938
	-1×10^{-2}	3.0301	2.8332	3.0182	3.1448	2.6180	3.1426	3.0817	2.7781	2.7563

Capítulo 6

Conclusões

Neste capítulo são apresentados os comentários a respeito da mesteira estrutura investigada, a abordagem para determinar os coeficientes de rigidez não linear e a influência da mola com rigidez cúbica na resposta em frequência da estrutura.

Este trabalho foi desenvolvido com o objetivo de explorar o comportamento dinâmico de uma estrutura periódica mostrada no capítulo 2, figura 2.1 sob entrada harmônica com rigidez linear e não linear. Além disso, foi apresentada uma abordagem que substitui a característica de rigidez linear da estrutura por uma não linear de tal modo que os coeficientes de rigidez não linear forneçam a mesma energia de deformação e a resposta dinâmica foi analisada numericamente.

Através dos resultados do sistema com parâmetros lineares foi possível mostrar que não há influência da quantidade de células N nas frequências que caracterizam *bandgaps* e *bandstop*, basta analisar uma célula, ainda, não há *bandgap* definido para $\mu = 1.00$. Além disso, foi possível verificar que o tamanho do *bandgap* depende do μ e que o coeficiente de amortecimento tem uma leve influência.

Também foi possível comprovar que a vibração pode ser atenuada ao aumentar a relação entre os coeficientes de rigidez linear e não linear. Além disso, a rigidez não linear tipo *hardening* desloca os picos de ressonância para a esquerda, enquanto o tipo *softening* desloca para a direita. Quanto maior a relação de massa, menor é a norma

$\mathcal{H}_2$. A influência da relação entre os coeficientes de rigidez linear e não linear varia de acordo com cada caso.

Foi possível analisar também que a adição de mola com rigidez cúbica é capaz de diminuir a norma $\mathcal{H}_2$, mas depende do caso e da razão de massa. Para o caso III, onde a característica não linear do tipo *hardening* está presente apenas na mola mais à direita, a norma $\mathcal{H}_2$ se mostrou menor sempre que a razão de massa é 0.50. Já para a característica não linear do tipo *softening*, a norma $\mathcal{H}_2$ se mostrou menor sempre que a razão de massa é 0.50 para o caso II em que a característica não linear cúbica está presente apenas na mola mais à esquerda.

Para o caso de rigidez do tipo *hardening*, através da análise das curvas de Transmissibilidade, é possível observar a influência da razão de coeficientes de rigidez linear e não linear, é possível ver a influência da razão de coeficientes de rigidez linear e não linear, denotado por b , que depende do caso e da razão de massa (μ), podendo assumir valores de máximos e mínimos.

Para o caso II, que apresenta rigidez do tipo *hardening* somente na mola mais à esquerda, foi observada regiões com múltiplas soluções. Além disso, foi possível investigar o fenômeno de salto e que o aumento ou diminuição repentinos da amplitude, para valores de frequências próximas, dependem do bloco analisado.

Referências Bibliográficas

- D. Beli, A. T. Fabro, M. Ruzzene, and J. R. F. Arruda. Wave attenuation and trapping in 3d printed cantilever-in-mass metamaterials with spatially correlated variability. *Nature*, 2009.
- N. Boechler, C. Daraio, R. K. Narisetti, M. Ruzzene, and M. J. Leamy. *Analytical and Experimental Analysis of Bandgaps in Nonlinear one Dimensional Periodic Structures*. Springer Netherlands, 2010.
- D. D. Bueno. Controle ativo de vibrações e localização ótima de sensores e atuadores piezelétricos. Master’s thesis, Universidade Estadual Paulista (UNESP), 2007.
- M. A. Campana, M. Ouisse, E. Sadoulet-Reboul, M. Ruzzene, S. Neild, and F. Scarpa. Impact of non-linear resonators in periodic structures using a perturbation approach. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 135:106408, 2020. ISSN 0888-3270.
- G. Chakraborty and A. K. Mallik. Dynamics of a weakly non-linear periodic chain. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, v. 36, n. 2, p.(4):375–389, 2001.
- L. Cveticanin, M. Zukovic, and D. Cveticanin. Influence of nonlinear subunits on the resonance frequency band gaps of acoustic metamaterial. *Nonlinear Dynamics*, 93(3): 1341–1351, 2018. ISSN 1573-269X.
- P. J. P. Gonçalves, M. J. Brennan, and V. G. Cleante. Predicting the stop-band behaviour of finite mono-coupled periodic structures from the transmissibility of a single

- element. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 154:107512, 2021. ISSN 0888-3270.
- M. I. Hussein, M. J. Leamy, and M. Ruzzene. Dynamics of phononic materials and structures: Historical origins, recent progress, and future outlook. *Applied Mechanics Reviews*, 66(4), 05 2014. ISSN 0003-6900. 040802.
- C. H. Lamarque, A. Ture Savadkoochi, and S. Charlemagne. Experimental results on the vibratory energy exchanges between a linear system and a chain of nonlinear oscillators. *Journal of Sound and Vibration*, 437:97–109, 2018. ISSN 0022-460X.
- A. Marathe and A. Chatterjee. Wave attenuation in nonlinear periodic structures using harmonic balance and multiple scales. *Journal of Sound and Vibration*, 289(4):871–888, 2006. ISSN 0022-460X.
- D. Mead. Wave propagation in continuous periodic structures: research contributions from southampton, 1964–1995. *Journal of sound and vibration*, v. 190, n. 3, p.: 495–524, 1996.
- R. K. Narisetti, M. J. Leamy, and M. Ruzzene. A Perturbation Approach for Predicting Wave Propagation in One-Dimensional Nonlinear Periodic Structures. *Journal of Vibration and Acoustics*, 132(3), 04 2010. ISSN 1048-9002. 031001.
- A. H. Nayfeh and B. Balachandran. *Applied nonlinear dynamics: analytical, computational, and experimental methods*. John Wiley and Sons, 2008.
- S. S. Rao. *Mechanical Vibrations*. Always learning. Prentice Hall, 2011. ISBN 9789810687120.
- R. E. Roberson. Synthesis of a nonlinear dynamic vibration absorber. *Journal of the Franklin Institute*, 254(3):205–220, 1952. ISSN 0016-0032.

- J. V. Sánchez-Pérez, D. Caballero, R. Martínez-Sala, C. Rubio, J. Sánchez-Dehesa, F. Meseguer, J. Llinares, and F. Gálvez. Sound attenuation by a two-dimensional array of rigid cylinders. *Phys. Rev. Lett.*, 80:5325–5328, Jun 1998.
- C. Sugino and A. Erturk. Analysis of multifunctional piezoelectric metastructures for low-frequency bandgap formation and energy harvesting. *Journal of Physics D: Applied Physics*, 51(21):215103, may 2018.
- C. Sugino, Y. Xia, S. Leadenham, M. Ruzzene, and A. Erturk. A general theory for bandgap estimation in locally resonant metastructures. *Journal of Sound and Vibration*, 406:104–123, 2017. ISSN 0022-460X.
- A. I. Taub. Automotive materials: Technology trends and challenges in the 21st century. *MRS Bulletin*, 31(4):336–343, 2006.
- D. P. Vasconcellos and M. Silveira. Optimization of Axial Vibration Attenuation of Periodic Structure With Nonlinear Stiffness Without Addition of Mass. *Journal of Vibration and Acoustics*, 142(6), 06 2020. ISSN 1048-9002. 061009.
- V. G. Veselago. The electrodynamics of substances with simultaneously negative values of ϵ and μ . *Soviet physics uspekhi*, 10(4):509, 1968.
- Y.-Z. Wang, F.-M. Li, and Y.-S. Wang. Influences of active control on elastic wave propagation in a weakly nonlinear phononic crystal with a monoatomic lattice chain. *International Journal of Mechanical Sciences*, 106:357–362, 2016. ISSN 0020-7403.
- R. Zhu, X. N. Liu, G. K. Hu, C. T. Sun, and G. L. Huang. A chiral elastic metamaterial beam for broadband vibration suppression. *Journal of Sound and Vibration*, 333(10): 2759–2773, 2014. ISSN 0022-460X.