

Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”  
Faculdade de Engenharia

**Método primal-dual de pontos interiores-penalidade e o  
problema de fluxo de potência ótimo reativo com  
variáveis de controle discretas**

**Jéssica Antonio Delgado**

Bauru – SP

Março – 2021



Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”  
Faculdade de Engenharia

# Método primal-dual de pontos interiores-penalidade e o problema de fluxo de potência ótimo reativo com variáveis de controle discretas

Jéssica Antonio Delgado

**Orientadora: Prof<sup>a</sup>. Dra Edméa Cássia Baptista**

**Coorientador: Prof Dr. Antonio Roberto Balbo**

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, da Faculdade de Engenharia de Bauru, da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” – Campus de Bauru, para obtenção do título de Doutora em Engenharia Elétrica.

Bauru – SP

Março – 2021


Delgado, Jéssica Antonio  
Método primal-dual de pontos interiores-  
penalidade e o problema de fluxo de potência  
ótimo reativo com variáveis de controle discretas  
/ Jéssica Antonio Delgado, 2021  
115 f. : il., tabs.

Orientadora: Edméa Cássia Baptista  
Coorientador: Antonio Roberto Balbo  
Tese (Doutorado)-Universidade Estadual  
Paulista. Faculdade de Engenharia, Bauru, 2021

1. Fluxo de potência ótimo. 2. Métodos de  
pontos interiores. 3. Método de penalidade. 4.  
Variáveis discretas. I. Universidade Estadual  
Paulista. Faculdade de Engenharia. II. Título.

**ATA DA DEFESA PÚBLICA DA TESE DE DOUTORADO DE JÉSSICA ANTONIO DELGADO, DISCENTE DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA, DA FACULDADE DE ENGENHARIA - CÂMPUS DE BAURU.**

Aos 08 dias do mês de março do ano de 2021, às 09:00 horas, por meio de Videoconferência, realizou-se a defesa de TESE DE DOUTORADO de JÉSSICA ANTONIO DELGADO, intitulada **MÉTODO PRIMAL-DUAL DE PONTOS INTERIORES-PENALIDADE E O PROBLEMA DE FLUXO DE POTÊNCIA ÓTIMO REATIVO COM VARIÁVEIS DE CONTROLE DISCRETAS**. A Comissão Examinadora foi constituída pelos seguintes membros: Prof. Dr. ANTONIO ROBERTO BALBO (Participação Virtual) do(a) Departamento de Matemática / Faculdade de Ciências de Bauru - UNESP, Prof. Dr. GERALDO ROBERTO MARTINS DA COSTA (Participação Virtual) do(a) Departamento de Engenharia Elétrica / Universidade de São Paulo / USP - São Carlos, Prof. Dr. DIEGO NUNES DA SILVA (Participação Virtual) do(a) Departamento de Matemática / Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo - IFSP, Prof. Dr. LEONARDO NEPOMUCENO (Participação Virtual) do(a) Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Bauru - UNESP, Prof<sup>ª</sup>. Dr<sup>ª</sup>. EDILAINE MARTINS SOLER (Participação Virtual) do(a) Departamento de Matemática / Faculdade de Ciências de Bauru - UNESP. Após a exposição pela doutoranda e arguição pelos membros da Comissão Examinadora que participaram do ato, de forma presencial e/ou virtual, a discente recebeu o conceito final: APROVADA \_\_\_\_\_. Nada mais havendo, foi lavrada a presente ata, que após lida e aprovada, foi assinada pelo(a) Presidente(a) da Comissão Examinadora.

  
Prof. Dr. ANTONIO ROBERTO BALBO



# Agradecimentos

Primeiramente, à Deus acima de tudo e de todos.

Aos meus pais, Nilton José Delgado e Sany Antonio Theodoro pela vida.

À minha família Renato Theodoro, Renato Theodoro Junior e Lara Theodoro, por sempre me apoiarem, incentivarem e compreenderem meus momentos de ausência.

À professora Edméa Cássia Baptista, pela orientação e ensinamentos transmitidos, e por todo apoio, amizade e compreensão. Uma palavra certa, dita no momento certo, faz toda a diferença.

Ao professor Antonio Roberto Balbo, pela orientação e ensinamentos transmitidos, e por todo apoio, amizade e compreensão.

À professora Edilaine Martins Soler e Leonardo Nepomuceno, pelos ensinamentos transmitidos, por todo apoio, amizade e compreensão.

Ao professor Diego Nunes da Silva e ao professor Geraldo Roberto Martins da Costa, por aceitarem o convite para participar da banca de defesa e pelas contribuições dadas a este trabalho.

Aos meus amigos da Pós-Graduação, Gabriela Bregadioli, Elis Gonçalves e Rafael Ramos pelo companheirismo na vida e nos estudos.

Aos meus amigos, Rafael Ortiz, Christiane Papeschi, Monaliza Guedes pelo companheirismo na vida.

Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, funcionários da Seção Técnica de Pós-Graduação da Faculdade de Engenharia e colegas do LOEESP.

Pelo apoio financeiro, processo 2017/24135-3, Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP).

A todos os que, direta ou indiretamente, estiveram comigo nesta caminhada.

*"A vida é aquilo que você deseja  
diariamente."*

---

Chico Xavier

# Resumo

DELGADO, J.A. MÉTODO PRIMAL-DUAL DE PONTOS INTERIORES-PENALIDADE E O PROBLEMA DE FLUXO DE POTÊNCIA ÓTIMO REATIVO COM VARIÁVEIS DE CONTROLE DISCRETAS. 2021. Faculdade de Engenharia de Bauru, UNESP-Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Bauru.

O fluxo de potência ótimo Reativo pode ser formulado matematicamente como um problema de otimização restrito, não linear, não convexo, com variáveis contínuas e discretas, o qual tem por objetivo buscar o melhor ponto de operação de um sistema elétrico, de acordo com algum objetivo. Em muitos trabalhos da literatura, as variáveis discretas do problema de problema fluxo de potência ótimo reativo são consideradas como contínuas e a solução é ajustada para o valor discreto mais próximo do conjunto de valores discretos preestabelecidos. Tal abordagem descaracteriza a representação real do problema associado ao sistema elétrico. Neste trabalho, para o tratamento das variáveis discretas foi utilizada uma estratégia que transforma o problema discreto em uma sequência de problemas contínuos, utilizando uma função senoidal, que obriga as variáveis a assumirem valores discretos. Para resolver essa sequência de problemas contínuos este trabalho propõe uma nova abordagem que utiliza o método primal-dual de pontos interiores-penalidade, para a resolução do problema de problema fluxo de potência ótimo reativo com variáveis de controle discretas. Na abordagem proposta as restrições de desigualdade são transformadas em igualdade introduzindo variáveis de folga e auxiliares, as quais são tratadas, respectivamente, pela função barreira logarítmica e pela função penalidade  $l_1$  e as restrições de igualdade são tratadas pelos multiplicadores de Lagrange. Testes numéricos utilizando os sistemas elétricos IEEE 30, 57, 118 e 300 barras indicam que o método é eficiente na resolução do problema fluxo de potência ótimo reativo com variáveis de controle discretas.

---

**Palavras-chave:** método de pontos interiores; método de penalidade; variáveis discretas; fluxo de potência ótimo reativo; sistemas elétricos de potência.

# Abstract

DELGADO, J.A. PRIMAL-DUAL INTERIOR POINT-PENALTY METHOD AND THE REACTIVE OPTIMAL POWER FLOW PROBLEM WITH DISCRETE CONTROL VARIABLES. 2021 Faculdade de Engenharia de Bauru, UNESP-Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Bauru.

The reactive optimal power flow can be formulated mathematically as a non convex, non linear, constrained optimization problem with discrete and continuous variables, which aims to seek the best point of operation of an electric system, according to some objective. In many works of the literature, the discrete variables of the Reactive optimal power flow problem are considered as continuous and the solution obtained is adjusted to the nearest discrete value of the set of preset discrete values. Such an approach mischaracterize the actual representation of the problem associated with the electrical system. This work, for handling the discrete variables, a strategy was adopted to transform the discrete problem in a sequence of continuous problems using a sinusoidal function, which forces the variables to assume discrete values. In order to solve the sequence of continuous problems, this work proposed a new approach that uses the primal-dual interior point penalty method to solve the reactive optimal power flow problem with discrete control variables. In this proposed approach the inequality constraints are transformed into equalities by adding the slack variables and auxiliary variables, which are handled by the logarithmic barrier function and  $l_1$  penalty function, respectively, while the remaining equality constraints are handled by means of Lagrange multipliers method. Numerical tests carried out with the IEEE 30, 57, 118 and 300 bus electrical systems indicate that the method is efficient to solve of the reactive optimal power flow problem with discrete control variables.

---

**Key words:** interior point method; penalty method; discrete variables; reactive optimal power Flow; electrical power system.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Histórico</b>	<b>7</b>
2.1	Histórico dos métodos de pontos interiores e penalidade . . . . .	7
2.2	Histórico do problema de Fluxo de Potência Ótimo . . . . .	13
<b>3</b>	<b>Revisão de métodos de otimização</b>	<b>24</b>
3.1	Método dual-Lagrangiano . . . . .	24
3.1.1	Algoritmo dual-Lagrangiano . . . . .	26
3.1.2	Dificuldades computacionais . . . . .	26
3.2	Método de barreira . . . . .	26
3.2.1	Algoritmo do método de barreira . . . . .	28
3.2.2	Método primal-dual barreira logarítmica . . . . .	28
3.2.3	Algoritmo primal-dual barreira logarítmica . . . . .	32
3.2.4	Dificuldades computacionais . . . . .	33
3.3	Método de penalidade . . . . .	33
3.3.1	Algoritmo do método de penalidade . . . . .	34
3.3.2	Dificuldades computacionais . . . . .	35
3.3.3	Variação do método de penalidade . . . . .	35
3.3.4	Atualização Adaptativa do parâmetro . . . . .	38
3.3.5	Algoritmo atualização adaptativa do parâmetro de penalidade . . . . .	38
<b>4</b>	<b>Método primal-dual de pontos interiores-penalidade discreto</b>	<b>40</b>
4.1	Introdução e motivação . . . . .	40

---

4.2	Método de solução para variáveis discretas . . . . .	41
4.3	Método primal-dual de pontos interiores-penalidade . . . . .	43
4.3.1	Correção de inércia . . . . .	47
4.3.2	Algoritmo de correção de inércia . . . . .	48
4.3.3	Procedimento para atualização das variáveis de folga e auxiliares . . . . .	49
4.3.4	Função mérito do método primal-dual de pontos interiores-penalidade . . . . .	51
4.3.5	Estratégia adaptativa para atualização dos parâmetros . . . . .	51
4.3.6	Algoritmo adaptativo para atualização de parâmetros . . . . .	54
4.3.7	Algoritmo do método primal-dual de pontos interiores-penalidade Discreto (PDPIP-Adaptativo) . . . . .	55
4.3.8	Método primal-dual de pontos interiores-penalidade Discreto (PDPIP-Conservativo) . . . . .	56
4.4	Exemplo numérico . . . . .	57
<b>5</b>	<b>Problema de Fluxo de Potência Ótimo Reativo com Variáveis de Controle Discretas</b> . . . . .	<b>62</b>
5.1	Introdução . . . . .	62
5.1.1	Notação . . . . .	62
<b>6</b>	<b>Resultados numéricos</b> . . . . .	<b>68</b>
6.1	Sistema IEEE 30 barras . . . . .	69
6.1.1	Resultados obtidos aplicado ao sistema IEEE 30 barras . . . . .	70
6.2	Sistema IEEE 57 barras . . . . .	72
6.2.1	Resultados obtidos aplicado ao sistema IEEE 57 barras . . . . .	72
6.3	Sistema IEEE 118 barras . . . . .	75
6.3.1	Resultados obtidos aplicado ao sistema IEEE 118 barras . . . . .	76
6.4	Sistema IEEE 300 barras . . . . .	78
6.4.1	Resultados obtidos aplicado ao sistema IEEE 300 barras . . . . .	79
<b>7</b>	<b>Conclusões</b> . . . . .	<b>84</b>
<b>8</b>	<b>Trabalhos publicados</b> . . . . .	<b>86</b>
8.1	Artigo publicado em periódico internacional . . . . .	87
	<b>Bibliografia</b> . . . . .	<b>87</b>

---

# Lista de Figuras

4.1	Convergência dos métodos PDPIP-Adaptativo e PDPIP-Conservativo para o exemplo numérico. . . . .	60
4.2	Convergência das variáveis de folga $s_1$ e auxiliar $r_1$ . . . . .	61
4.3	Convergência das variáveis de folga $s_2$ e auxiliar $r_2$ . . . . .	61
5.1	Modelo de um transformador ideal regulador em fase Lage (2013) . . . . .	66
6.1	Taps dos transformadores obtidos na última iteração para o método PDPIP-Adaptativo aplicado ao sistema IEEE 300 barras. . . . .	80
6.2	Taps dos transformadores obtidos na última iteração para o método PDPIP-Conservativo aplicado ao sistema IEEE 300 barras. . . . .	81
6.3	Taps dos transformadores obtidos na última iteração para o método PDBL aplicado ao sistema IEEE 300 barras. . . . .	82

# Lista de Tabelas

4.1	Valores Iniciais dos Parâmetros . . . . .	59
4.2	Convergência do método de PDPIP-Adaptativo para o exemplo numérico pelo Algoritmo 8 . . . . .	59
4.3	Convergência do método de PDPIP-Conservativo para o exemplo numérico pelo Algoritmo 9 . . . . .	60
6.1	Valores iniciais dos parâmetros para todos os problemas de FPOR e FPORD associados aos sistemas elétricos testados: . . . . .	69
6.2	Resultados obtidos pelo método PDPIP-Adaptativo associado ao sistema IEEE 30 barras para o caso contínuo (FPOR) e para o caso discreto (FPORD). . . . .	70
6.3	Resultados obtidos pelo método PDPIP-Conservativo associado ao sistema IEEE 30 barras para o caso contínuo (FPOR) e para o caso discreto (FPORD). . . . .	71
6.4	Resultados obtidos pelo método PDBL associado ao sistema IEEE 30 barras para o caso contínuo (FPOR) e para o caso discreto (FPORD). . . . .	71
6.5	Resultados obtidos pelos métodos PDPIP-Adaptativo, PDPIP-Conservativo e PDBL associado ao sistema IEEE 30 barras para o caso contínuo (FPOR). . . . .	71
6.6	Resultados obtidos pelos métodos PDPIP-Adaptativo, PDPIP-Conservativo e PDBL associado ao sistema IEEE 30 barras para o caso discreto (FPORD). . . . .	71
6.7	Resultados obtidos pelo método PDPIP-Adaptativo associado ao sistema IEEE 57 barras para o caso contínuo (FPOR) e para o caso discreto (FPORD). . . . .	73

---

6.8	Resultados obtidos pelo método PDPIP-Conservativo associado ao sistema IEEE 57 barras para o caso contínuo (FPOR) e para o caso discreto (FPORD). . . . .	73
6.9	Resultados obtidos pelo método PDBL associado ao sistema IEEE 57 barras para o caso contínuo (FPOR) e para o caso discreto (FPORD). . . . .	74
6.10	Resultados obtidos pelos métodos PDPIP-Adaptativo, PDPIP-Conservativo e PDBL associado ao sistema IEEE 57 barras para o caso contínuo (FPOR). . . . .	74
6.11	Resultados obtidos pelos métodos PDPIP-Adaptativo, PDPIP-Conservativo e PDBL associado ao sistema IEEE 57 barras para o caso discreto (FPORD). . . . .	74
6.12	Resultados obtidos pelo método PDPIP-Adaptativo associado ao sistema IEEE 118 barras para o caso contínuo (FPOR) e para o caso discreto (FPORD). . . . .	76
6.13	Resultados obtidos pelo método PDPIP-Conservativo associado ao sistema IEEE 118 barras para o caso contínuo (FPOR) e para o caso discreto (FPORD). . . . .	76
6.14	Resultados obtidos pelo método PDBL associado ao sistema IEEE 118 barras para o caso contínuo (FPOR) e para o caso discreto (FPORD). . . . .	77
6.15	Resultados obtidos pelos métodos PDPIP-Adaptativo, PDPIP-Conservativo e PDBL associado ao sistema IEEE 118 barras para o caso contínuo (FPOR). . . . .	77
6.16	Resultados obtidos pelos métodos PDPIP-Adaptativo, PDPIP-Conservativo e PDBL associado ao sistema IEEE 118 barras para o caso discreto (FPORD). . . . .	77
6.17	Resultados obtidos pelo método PDPIP-Adaptativo associado ao sistema IEEE 300 barras para o caso contínuo (FPOR) e para o caso discreto (FPORD). . . . .	79
6.18	Resultados obtidos pelo método PDPIP-Conservativo associado ao sistema IEEE 300 barras para o caso contínuo (FPOR) e para o caso discreto (FPORD). . . . .	79
6.19	Resultados obtidos pelo método PDBL associado ao sistema IEEE 300 barras para o caso contínuo (FPOR) e para o caso discreto (FPORD). . . . .	80
6.20	Resultados obtidos pelos métodos PDPIP-Adaptativo, PDPIP-Conservativo e PDBL associado ao sistema IEEE 300 barras para o caso contínuo (FPOR). . . . .	83

---

6.21 Resultados obtidos pelos métodos PDPIP-Adaptativo, PDPIP-Conservativo e PDBL associado ao sistema IEEE 300 barras para o caso discreto (FPORD).  
..... 83

## Introdução

O problema de fluxo de potência ótimo (FPO) é representado matematicamente como um problema de otimização não linear, restrito, não convexo, com variáveis contínuas e discretas. Ele visa otimizar uma determinada função objetivo, relacionada a algum desempenho do sistema, satisfazendo as restrições de igualdade - equações de fluxo de potência - e as de desigualdade - restrições físicas e operacionais do sistema. Segundo Grigsby (2016) diferentes classes de problemas de FPO, para diferentes aplicações, podem ser determinadas ao selecionar diferentes funções a serem minimizadas, e diferentes conjuntos de controles e restrições.

Neste trabalho explora-se uma classe particular do problema de FPO a qual é denominada de problema de FPO Reativo (FPOR). Neste, os controles ativos são fixados e as variáveis de controle relacionadas com a potência reativa, como as magnitudes da tensão dos geradores e dos compensadores síncronos e estáticos de potência reativa e os *taps* dos transformadores, são otimizados em relação à uma função objetivo. A função objetivo aqui utilizada será a função de perdas de potência ativa na transmissão, a qual, segundo Monticelli & Liu (1992) é uma função não separável e que não permite simplificações, o que dificulta ainda mais a resolução do problema de FPO.

O problema de FPO teve sua primeira formulação no início da década de 60 por Carpentier (1962), a partir da incorporação das equações de fluxo de potência ao problema de despacho econômico. Carpentier resolveu este problema ao utilizar a função Lagrangiana, as condições de Karush-Kuhn-Tucher (KKT) e o método de Gauss-Seidel. A partir deste, vários trabalhos, os quais utilizam diferentes abordagens de resolução para o problema de FPO, foram desenvolvidos.

Neste trabalho são explorados três métodos: o dual-Lagrangiano, o de pontos interiores e o de penalidade.

O método dual-Lagrangiano foi desenvolvido inicialmente para resolver problemas convexos. Sua estratégia é a de associar ao problema uma função auxiliar, que incorpora as restrições de igualdade à função objetivo, utilizando os multiplicadores de Lagrange. O método dual-Lagrangiano foi amplamente explorado por diversos autores em diversas áreas. Para a resolução do problema de FPO um dos precursores foi Rashed & Kelly (1974), que apresentaram uma técnica que utilizaram o método dual-Lagrangiano, o de Newton e o de penalidade. O método foi testado ao problema de FPO para um sistema de 5 barras. Com o bom desempenho do método dual-Lagrangiano para tratar as restrições de igualdade do problema de FPO, diversos autores o utilizaram, associado a outros métodos, tais como: Santos & Costa (1995), Monticelli & Liu (1992), Granville (1994), Wu et al. (1994), Yan (1999), Capitanescu et al. (2007), Sousa et al. (2008), Sousa et al. (2009), Pinheiro et al. (2015), Souza et al. (2017), entre outros.

Os métodos de penalidade são uma importante classe de métodos para a obtenção da solução de problemas de otimização restritos. O método utiliza uma função penalidade que transforma um problema restrito em um problema irrestrito e resolve uma sequência destes. As restrições são adicionadas à função objetivo através de um parâmetro de penalidade de modo a penalizar qualquer violação das mesmas.

O método de penalidade foi utilizado pela primeira vez para resolução do problema de FPO na década de 70 por Sasson et al. (1973), a proposta era tratar as restrições de igualdade e desigualdade do problema de FPO e a cada iteração aumentar o parâmetro de penalidade gradativamente. Desde então, o método foi amplamente explorado por diversos autores, tais como: Rashed & Kelly (1974) que resolveram o problema de FPO utilizando o método de penalidade para tratar as restrições de desigualdade e o método dual-Lagrangiano para as restrições de igualdade; Sun et al. (1984) que resolveram o problema de FPO dividindo as restrições de desigualdade em dois grupos: um com restrições penalizadas e outro com restrições consideradas ativas na solução; Santos & Costa (1995) utilizaram o método de Newton e a função Lagrangiana aumentada; Adibi et al. (2003) que exploraram o método da função Lagrangiana aumentada barreira modificada para resolver o problema de seleção dos *taps* dos transformadores ótimo, Baptista et al. (2006) apresentaram uma abordagem em que utilizam o método de pontos interiores e o método

da Lagrangiana aumentada; Curtis et al. (2016) utilizaram o método da Lagrangiana aumentada com região de confiança e uma estratégia adaptativa para atualizar o parâmetro de penalidade para resolver o problema de FPO.

Na década de 80, o trabalho de Karmarkar (1984) iniciou uma nova linha de pesquisa que ficou conhecida como método de pontos interiores. Esse tipo de método já havia sido proposto em Frisch (1955) e Fiacco (1968), com o nome de função barreira, porém devido a problemas de mau condicionamento da matriz Hessiana passaram a não serem utilizados. Isso se modificou após o trabalho de Karmarkar. Segundo Gondzio (2012), os métodos de pontos interiores revolucionaram o campo da otimização. No início da década de 90, Granville (1994) foi o primeiro a utilizar um método da classe dos métodos de pontos interiores, denominado de primal-dual barreira logarítmica (PDBL), na resolução do problema de FPO. O método PDBL foi inicialmente desenvolvido, entre outros, em Kojima et al. (1989), o qual foi amplamente investigado em Wright (1997). As vantagens do método PDBL é a facilidade de tratar as restrições de desigualdade pela função barreira logarítmica, a sua velocidade de convergência. Porém, apresenta desvantagens tais como: a sensibilidade ao parâmetro de barreira, em alguns casos o método pode divergir e a necessidade da garantia das folgas serem não negativas em todo o processo iterativo.

Diversos autores utilizaram os métodos de pontos interiores associados a outras técnicas na resolução e análise da solução dos problemas de FPO com sucesso. Entre eles cita-se: Wu et al. (1994) que utilizaram o método prima-dual previsor-corretor; Yan (1999) com o método de pontos interiores inactível para o problema de FPO linearizado; Torres & Quintana (2001) que utilizou o método de pontos interiores com múltiplas correções centrais; Jabr et al. (2002) que aplicou o método de pontos interiores de trajetória central ao problema de despacho do FPO; Min & Shengsong (2005) os quais utilizaram os métodos de pontos interiores com região de confiança; Capitanescu et al. (2007) que analisaram três métodos de pontos interiores: PDBL, primal-dual previsor-corretor e primal-dual com múltiplas correções centralizadas e compararam seus resultados; Mohapatra et al. (2013) que determinou uma abordagem baseada no método PDBL e resolveu o problema de FPO com incertezas; Duan et al. (2015) que utilizou o método PDBL convencional, com estratégias adaptativas de atualização do parâmetro de barreira, método de busca linear com filtro e a restauração da factibilidade na resolução do problema de FPO, quando aplicado a sistemas flexíveis de transmissão AC; Delgado et al. (2017) que utilizaram uma associa-

ção dos métodos PDBL e barreira logarítmica modificada para resolução do problema de FPO e Tófoli et al. (2020) propuseram a resolução do problema de FPOR com variáveis de controle discretas com o método de pontos interiores e exteriores com a estratégia de correção de inércia.

Atualmente, poucos métodos de solução podem ser considerados eficientes e robustos na resolução de problemas de otimização não linear de grande porte que envolvem variáveis discretas ou inteiras. Esses problemas são denominados problemas de otimização não linear inteiro misto, (Murray& Ng, 2010). Muitos algoritmos têm sido desenvolvidos para resolver essa classe de problemas: alguns trabalham em transformar o problema discreto em um problema contínuo e utilizar técnicas de arredondamento para obter sua solução; outros utilizam algoritmos de aproximação linear, de *Branch and Bound*, entre outros. Ressalta-se que, vários pacotes de otimização foram desenvolvidos, porém, especialmente para problemas de grande porte, estes algumas vezes falham, o que deixa claro que é necessário desenvolver novas metodologias para essa classe de problemas, (Murray& Ng, 2010).

Na maioria das abordagens propostas na literatura para a resolução do problema de FPO, os controles discretos são modelados como variáveis contínuas, porém estas formulações estão longe da realidade de um sistema elétrico de potência, pois alguns controles discretos podem ser somente ajustados por passos discretos (Soler *et al.*,2013). Uma abordagem para tratar as variáveis discretas é tratá-las como contínuas e penaliza-las na função objetivo quando estas variáveis assumem valores não discretos. Dentre os trabalhos que propuseram abordagens para tratar as variáveis de controle discretas do problema de FPO citam-se: Soler et al. (2013) que utilizou o método PDBL associado a uma função senoidal para tratar as variáveis discretas; Nie et al. (2015) utilizaram um modelo do problema de FPOR quadrático baseado em coordenadas retangulares aumentadas e as funções de penalidade quadráticas são incorporadas no modelo proposto, para lidar com variáveis de controle discretas; Murray et al. (2015) propuseram uma função penalidade *sparsity-inducing* para tratar as variáveis discretas; Yang et al. (2016) resolveram o problema de FPO por uma abordagem de aproximação sucessiva e as variáveis de controle discretas: *taps* e capacitores *shunt*, foram modelados por restrições lineares e Silva (2019) que utilizou três abordagens determinísticas para resolução do FPOR: Newton com programação linear (Newton-PL), reescalamamento não linear e PDBL com região de confiança,

tratando as variáveis discretas por meio de uma função senoidal, sendo que o método de Newton-PL somente foi utilizado para resolver o problema de FPOR com variáveis de controle contínuas.

Assim tendo em vista a importância do problema de FPO e a busca por métodos mais eficientes e robustos de resolução é proposto neste trabalho, o desenvolvimento de uma nova abordagem denominada de método primal-dual de pontos interiores-penalidade que consiste na união de três outros métodos: dual Lagrangiano, de pontos interiores e de penalidade para a resolução do Problema de FPOR com variáveis de controle discretas (FPORD). Este método justifica-se tendo em vista que uma proposta similar já foi investigada por Curtis (2012). Neste, o autor propõe a união do método de pontos interiores com o método de penalidade em uma única função Lagrangiana para resolver problemas de otimização não linear. Em sua conclusão, Curtis (2012) destaca que uma atualização eficiente dos parâmetros dos dois métodos gera um método eficiente e robusto.

Além da motivação de Curtis (2012), os métodos de pontos interiores e penalidade já foram investigados por vários autores separadamente, e são considerados métodos eficientes, tanto na resolução de problemas de otimização não lineares, quanto do problema de FPO. O objetivo de unir os dois métodos em um, é aproveitar as melhores qualidades de cada método e tentar acelerar a convergência do algoritmo. O método proposto nesse trabalho baseou-se em Curtis (2012) e diferenças do método desse autor com o proposto nesse trabalho podem ser resumidas da seguinte forma: i) o método desenvolvido em Curtis foi utilizado para resolver problemas não lineares e com variáveis contínuas enquanto neste trabalho foi resolvido um problema não linear, não convexo e discreto misto, com a estratégia proposta por Soler et al. (2013), para tratar as variáveis discretas; ii) em Curtis, a estratégia de correção de inércia utilizada baseou-se em Forsgren et al. (2002) e para determinação do comprimento dos passos primais e duais esse utilizou a regra de Armijo, já nesse trabalho a estratégia para correção de inércia baseou-se em Silva (2014)) (teorema de Sylvester) e em Granville (1994) para a determinação do comprimento dos passos primais e duais; iii) Curtis comparou o seu método com o SOLVER IPOPT já nesse trabalho foi implementado o método primal-dual barreira logarítmica no MATLAB para realizar a comparação.

As contribuições deste trabalho são:

- i O desenvolvimento de uma nova abordagem para resolver problemas de FPOR e

FPORD;

- ii A incorporação de estratégias para resolução das variáveis discretas do problema de FPOR;
- iii A incorporação da estratégia de correção de inércia;
- iv A implementação e aplicação dessa abordagem em problemas de FPOR com variáveis de controle discretas;
- v Testes nos sistemas IEEE 30, 57, 118 e 300 barras para comprovar a eficiência da proposta e uma comparação dos resultados com o método PDBL.

Este trabalho encontra-se dividido em 7 Capítulos:

No Capítulo 1, apresenta-se a motivação para o trabalho e seu objetivo. No Capítulo 2, com o objetivo de posicionar o trabalho cronologicamente, apresenta-se um histórico de métodos de pontos interiores e penalidade e do problema de fluxo de potência ótimo. No Capítulo 3, apresenta-se uma revisão dos métodos de otimização: dual-Lagrangiano, pontos interiores e penalidade, com objetivo de fornecer um suporte teórico para o desenvolvimento do novo método. No Capítulo 4, apresenta-se a abordagem proposta, seu algoritmo e analisa-se um exemplo matemático. No Capítulo 5, apresenta-se a formulação matemática do problema de FPOR. No Capítulo 6 apresentam-se os resultados numéricos para os sistemas elétricos IEEE 30, 57, 118 e 300 barras. E, finalmente no Capítulo 7 são apresentadas as conclusões.

## Histórico

Neste capítulo apresenta-se um levantamento bibliográfico sobre os métodos de pontos interiores e penalidade e sobre o problema de fluxo de potência ótimo.

Tem-se o objetivo de fornecer uma ampla visão do desenvolvimento teórico e um posicionamento histórico para a apresentação da abordagem proposta neste trabalho, pois esta abordagem é uma combinação dos dois métodos citados e será aplicada na resolução do problema FPOD.

### **2.1 Histórico dos métodos de pontos interiores e penalidade**

Os métodos de otimização de barreira e penalidade transformam um problema de otimização restrito em uma sequência de problemas irrestritos.

O método de penalidade utiliza uma função auxiliar onde as restrições são incorporadas na função objetivo através de um fator de penalidade, o qual penaliza alguma violação destas. Esse método gera uma sequência de pontos infactíveis, cujo limite é a solução ótima do problema original.

Já o método de barreira é utilizado para resolução de problemas com restrições de desigualdade, cujo interior é não vazio. Pode ser visto como um caso particular do método das penalidades, mas diferencia-se deste por exigir uma penalização interna, ou seja, por trabalhar no interior da região factível, utilizando uma função auxiliar que cresce indefinidamente próximo à fronteira e uma sequência decrescente de parâmetros de barreira. A função barreira logarítmica foi apresentada por Frisch (1955) para problemas de

programação convexa. Outra função barreira, denominada de função barreira inversa foi proposta por Carroll (1961), sob o título de *The Created Response Surface Technique for Optimizing Nonlinear Restrained Systems*.

O método foi realmente popularizado por Fiacco & McCormick, (1968), que realizaram um estudo teórico mais detalhado e desenvolveram um novo método, no qual associaram a função barreira e a função penalidade em uma mesma função auxiliar. Existe uma versão revisada desse trabalho, que pode ser encontrada em Fiacco & McCormick (1990).

No entanto, o método da função barreira apresenta algumas desvantagens tais como:

- O mau condicionamento da matriz Hessiana da função Lagrangiana quando o parâmetro de barreira tende a zero;
- A dificuldade na escolha do ponto inicial e do parâmetro de barreira inicial;
- A não existência da derivada na solução e o aumento ilimitado da função barreira na vizinhança da fronteira.

Devido a estes problemas, os pesquisadores, na década de 70, perderam o interesse em trabalhar com o método de barreira, porém a motivação ressurgiu com o trabalho de Karmarkar (1984), em que é proposto o método das transformações projetivas para programação linear. Segundo Karmarkar sua proposta era mais rápida que o método simplex, para problemas lineares de grande porte. O método simplex, proposto por Dantzig (1948), busca a solução ótima com o deslocamento entres os vértices da região factível, isto é, pelos pontos extremos, visto que alcança a solução ótima somente se o ponto ótimo estiver na fronteira da região factível. Ao contrário do simplex, o algoritmo proposto por Karmarkar (1984) "caminha" pelo interior da região factível e ficou conhecido como o método de pontos interiores. Nesta classe de métodos, aqueles obtiveram melhor desempenho à resolução de problemas de otimização linear, quadráticos e não lineares convexos, foram os métodos primal-dual de pontos interiores, proposto, entre outros, em Kojima et al. (1989). Em extensão a esses métodos, surgiu o primal-dual predictor-corrector proposto em Mehrotra (1992). Essa classe de métodos foi amplamente investigada em Wright (1997).

Os métodos de pontos interiores e penalidade são considerados eficientes na resolução de problemas de otimização não linear e desfrutaram de grande sucesso por décadas.

Os métodos de penalidade provaram ser eficazes para uma variedade de classes de problemas devido a sua penalização nas restrições e rapidez na detecção da infactibilidade, enquanto os métodos de pontos interiores possuem convergência rápida. Entretanto, ambos têm desvantagens que tornam seu uso impraticável ou ineficiente para certas classes de problemas.

Em Breitfeld & Shanno (1994) foi realizada uma comparação do método de barreira modificada proposta por Polyak (1992) com o método de barreira clássica. As vantagens da barreira modificada tais como o ponto inicial não precisa ser estritamente interior, melhor condicionamento da matriz Hessiana e melhor tratamento para as restrições de igualdade foram discutidas e analisadas no artigo.

Os autores Breitfeld & Shanno (1995) propuseram um algoritmo com a união de três métodos: Lagrangiana aumentada, barreira logarítmica modificada proposta de Polyak (1992) e barreira logarítmica clássica de Frisch (1955) e denominaram-no de método de penalidade-barreira. As propriedades de convergência global foram consideradas e extensos testes computacionais sugerem que o algoritmo apresentado é robusto e eficiente para resolver problemas gerais de otimização não linear.

Já em 1996, Breitfeld & Shanno (1996) apresentaram uma versão melhorada do algoritmo desenvolvido em Breitfeld & Shanno (1994). A função barreira proposta em Polyak (1992) é modificada de modo que os termos logarítmicos são extrapolados por aproximações quadráticas, e o método foi denominado de barreira-penalidade. Os resultados mostraram que o método é computacionalmente eficiente nos problemas da biblioteca CUTE (*constrained and unconstrained testing environment*) e quando comparados aos resultados anteriores foram promissores principalmente em problemas com mau condicionamento da matriz Hessiana.

Shanno et al. (1996) iniciaram seu trabalho revisando o método de barreira clássica de Frisch (1955) e apresentaram seus principais problemas no processo de otimização, tais como a escolha do fator inicial e o mau condicionamento da matriz Hessiana. Os autores também revisaram os métodos de barreira modificada, apresentados por Polyak (1992) e ressaltaram alguns problemas, como o ajuste dos fatores de barreira e o uso do algoritmo de busca linear. Apresentaram a função penalidade-barreira vista em Breitfeld & Shanno (1996), destacando a não necessidade de um ponto inicial factível. Por fim, os autores sugeriram a utilização de um método misto, em que as restrições de igualdade são

tratadas pela função Lagrangiana aumentada e as restrições de desigualdade são tratadas por meio da função barreira-penalidade.

Uma nova classe de métodos para resolver problemas convexos foi apresentada por Ben-Tal & Zibulevsky (1997). Os autores apresentaram uma classe de métodos chamado de Multiplicador barreira/penalidade (MBP) baseada na Lagrangiana aumentada não quadrática. Casos especiais como a função logarítmica *Shifted* e função logarítmica exponencial, e uma nova função denominada *logarithmic branch glued* também foram incluídos. O algoritmo foi testado em problemas quadráticos restritos de grande porte.

Polyak & Teboulle (1997) estudaram as propriedades de convergência do algoritmo de reescalonamento não linear e os métodos proximais semelhantes a entropia, correspondentes para problemas de otimização restritos e convexos e apresentaram um novo método: o método barreira-penalidade exponencial modificada.

Um método de pontos interiores primal-dual para resolver problemas de otimização não lineares e restritos foi introduzido por Yamashita (1998). O objetivo do autor foi atingir a convergência global com seu método. O método é baseado na resolução das condições de KKT para o problema com a função barreira pelo método de Newton. Para atingir o ponto global foi introduzida a função de penalidade/barreira e a condição de otimização para minimizar essa função. O autor verificou a eficiência do seu método nos problemas de otimização não linear de pequeno porte do livro de Hock & Schittkowski (1981).

Goldfarb et al. (1999) apresentaram e analisaram um método denominado de Lagrangiana aumentada interior-exterior (LAIE) para resolver problemas de otimização com restrições de igualdade e desigualdade. O método LAIE é uma combinação do método de barreira modificada e Lagrangiana aumentada. As restrições de desigualdade foram tratadas pelo método de barreira modificada, já as restrições de igualdade pelo método da Lagrangiana aumentada. A convergência Q-superlinear pode ser alcançada aumentando o parâmetro de penalidade/barreira.

Os autores Peng et al. (2000) consideraram a função de Frisch e exploraram sua relação com outras funções mérito. Foi mostrado que a função de Frisch pode ser derivada de um método de penalidade/barreira logarítmica para minimização restrita. Com base na abordagem de barreira logarítmica, algumas novas funções de mérito foram fornecidas e suas propriedades foram exploradas. Também propuseram outra função mérito baseada

na função de Frisch, porém não conseguiram superar a eficiência da função de Frisch.

Uma nova classe de métodos de penalidade para otimização não linear foi analisada em Byrd et al. (2008). Em cada iteração, o método proposto tem por objetivo um progresso equilibrado em direção ao ponto ótimo e a viabilidade. Em contraste com a penalidade clássica, a escolha do parâmetro de penalidade deixa de ser uma heurística e é determinada, em subproblema com objetivos claramente definidos. A nova estratégia de atualização é testada em problemas de programação quadrática sequencial e em métodos de programação linear-quadrática sequencial que utilizam regiões de confiança.

Yamashita & Tanabe (2010) apresentaram um método primal-dual exterior para problemas não lineares e não convexos. No método proposto as restrições de desigualdade são tratadas pelo método de penalidade e, com isso, permite que as variáveis primais violem as restrições de desigualdade durante as iterações. Um dos objetivos dos autores foi não precisar de um ponto estritamente interior para iniciar o método. Com a inserção da região de confiança foi possível alcançar a convergência global, a superlinear local e a convergência quadrática do método proposto. Uma comparação com o *solver* IPOPT também foi realizada.

Já, Curtis (2012) teve por objetivo apresentar a união do método de pontos interiores e penalidade na mesma função Lagrangiana. As atualizações dos parâmetros de penalidade e barreira que propuseram foram projetadas para uma convergência rápida para a resolução de problemas de otimização. O algoritmo foi testado nos problemas das bibliotecas *CuteR* e Hock & Schittkowski (1981) o desempenho do método foi comparada com o *solver* IPOPT.

Em Curtis et al. (2016), os autores consideraram algoritmos de Lagrangiana aumentada (LA) para resolver problemas não lineares de grande porte. O artigo foi motivado pelo método de região de confiança adaptativa de Curtis et al. (2015). Os autores provaram a convergência global para o algoritmo proposto em Curtis et al. (2015) e o desempenho prático das variantes do algoritmo de busca e região de confiança em MATLAB, bem como de um estratégia de atualização de parâmetros de penalidade incorporada ao *software Lancelot*. O algoritmo foi testado nos problemas das bibliotecas *CUTEst* e *COPS*, bem como em problemas de fluxo de potência ótimo.

Em Armand & Omhenni (2017) foi apresentado um algoritmo primal-dual para resolver um problema de otimização restrito. Este método é baseado no método de Newton e

aplicado a uma sequência de sistemas de KKT perturbados. Introduz uma Lagrangiana aumentada para tratar as restrições de igualdade e uma barreira-penalidade logarítmica para as desigualdades. Os experimentos numéricos mostram o bom desempenho prático do método proposto.

Os autores Armand & Tran (2019) trabalharam com um método misto baseado na função barreira/penalidade logarítmica e Lagrangiana Aumentada. O objetivo principal do método foi detectar rapidamente a infactibilidade. Um parâmetro adicional foi introduzido para equilibrar a minimização da função objetivo e das restrições. Este foi o primeiro resultado de convergência local para a classe de métodos de pontos interiores no caso infactível.

Em, Liu & Dai (2020) foi provado que o problema clássico de barreira logarítmica é equivalente a um problema particular de relaxamento positivo de barreira logarítmica. Uma nova função barreira penalidade logarítmica, que depende de variáveis primais e duais, foi utilizada para a convergência global do método, em que o parâmetro de penalidade é atualizado de forma adaptativa. Os resultados preliminares mostraram que o método é eficiente e consegue alcançar a convergência global em problemas que os métodos de pontos interiores não conseguiram.

Já em Yamashita et al. (2020), os autores propuseram um método primal-dual de região de confiança de pontos interiores para resolver problemas de programação semi-definida não linear. Apresentaram um método de região de confiança primal-dual e provaram a propriedade de convergência global, além disso apresentaram uma função mérito barreira/penalidade e realizaram aproximações de segunda ordem dela.

Finalmente, em Gill et al. (2020), um novo algoritmo para otimização não linear foi proposto com base na minimização de uma função primal-dual de barreira penalidade *shifted*. Certas propriedades de convergência global foram estabelecidas e também foi provado que o método é equivalente a uma variante do método primal-dual *path-following*. Esse método foi proposto inicialmente, entre outros, em Gonzaga (1989). Alguns exemplos numéricos ilustraram o desempenho do método em comparação com um método de pontos interiores clássico.

## 2.2 Histórico do problema de Fluxo de Potência Ótimo

O problema de fluxo de Potência Ótimo (FPO) foi proposto por Carpentier (1962), a partir do problema de Despacho Econômico (DE). Com isso o DE passou a ser um caso particular do problema de FPO. A importância do DE é que as concessionárias de eletricidade utilizam-no para determinar o quanto cada unidade geradora deve produzir de potência para atender a demanda total do sistema com menor custo.

A proposta de resolução para o problema de FPO de Carpentier, foi transformá-lo em um problema irrestrito utilizando a função Lagrangiana clássica. Em seguida aplicam-se as condições de otimalidade na função Lagrangiana e resolve-se o sistema não linear resultante pelo método de Gauss-Seidel, obtendo a solução do problema.

Após a formulação do problema de FPO por Carpentier, diversos pesquisadores tentaram resolvê-lo utilizando diferentes técnicas de otimização, mudança na modelagem do problema, outros tipos de função objetivo e de restrições. O histórico com as propostas de resolução nas últimas décadas é apresentado a seguir. Esta revisão é baseada nos trabalhos de Sousa (2006) e Delgado (2016) e em trabalhos divulgados na literatura.

Um dos trabalhos clássicos na área foi o de Dommel & Tinney (1968), no qual foi investigada uma abordagem que utiliza o método do gradiente reduzido para resolver o problema de FPO. Seu método procura a solução ótima por meio de um algoritmo de passo descendente. Após mudanças nas variáveis de controle, as equações do fluxo de potência são resolvidas pelo método de Newton. Já as restrições funcionais de desigualdade são associadas às variáveis de controle por projeção e as variáveis dependentes ou funcionais, por métodos da função penalidade. Para atualização das variáveis de controle utilizaram uma busca unidimensional. O método tem uma eficiência de primeira ordem para a minimização da função objetivo, porém apresenta uma convergência lenta, "zigzagueando" próximo à solução ótima.

Sasson (1969) em seu trabalho, propôs uma abordagem para resolução do problema de FPO, na qual utiliza dois métodos: o método de Powell, que é um método utilizado para problemas restritos e o método de Fletcher-Powell, que é uma técnica para problemas irrestritos. Sasson resolveu o problema de FPO da seguinte forma, com o método de Powell transformou o problema de FPO, que é restrito em um problema irrestrito. Esse método acrescentou novas variáveis ao problema, as quais são reduzidas durante o processo iterativo. Depois aplicou o método de Fletcher-Powell, que calcula o gradiente da função

gerada pelo método de Powell. As restrições de igualdade são consideradas durante todo o processo iterativo porém as restrições de desigualdade só são consideradas quando são violadas. O método proposto foi testado no sistema IEEE 30 barras e apresentou bom resultado e tempo computacional baixo.

Os autores Sasson et al. (1973) resolveram o problema de FPO utilizando o método de penalidade. Esse método transforma o problema restrito em um problema irrestrito e penaliza todas as restrições de igualdade ou de desigualdade violadas. A cada iteração do método, os valores das penalidades são aumentadas e a matriz Hessiana da função penalidade é calculada. O processo iterativo chega ao fim quando todas as restrições são satisfeitas. Neste trabalho, os autores utilizaram técnicas de esparsidade na matriz Hessiana da função penalidade. Destaca-se que este foi o primeiro artigo a utilizar a matriz Hessiana da função Lagrangiana na resolução do problema de FPO e os testes foram realizados nos sistemas IEEE 14 e 30 barras.

Já Rashed & Kelly (1974) apresentaram um método que utiliza os multiplicadores de Lagrange, o método de Newton e o método de penalidade. Em seu método, as restrições de igualdade, representadas pelas equações do fluxo de potência, são introduzidas na função objetivo utilizando os multiplicadores de Lagrange, enquanto que as restrições de desigualdade são introduzidas na função objetivo utilizando os fatores de penalidade, o que resulta em uma função auxiliar. Os fatores de penalidade são atualizados por um parâmetro positivo, as variáveis pelo método de Newton e o passo é calculado utilizando-se a matriz Hessiana. Um dos objetivos desse trabalho é suprir as deficiências do método proposto por Dommel & Tinney (1968). O método foi testado em um sistema de 5 barras.

Sun et al. (1984) resolveram o problema de FPO utilizando o método de Newton e o desacoplamento do problema em dois subproblemas: o de potência ativa e o de potência reativa. No processo iterativo, a função Lagrangiana é aproximada por uma quadrática, as restrições de igualdade são inseridas na função Lagrangiana utilizando os multiplicadores de Lagrange e as restrições de desigualdade são inseridas na função objetivo utilizando os fatores de penalidade. As restrições de desigualdades são divididas em dois grupos: um grupo com restrições penalizadas e outro com restrições consideradas ativas na solução. Essas restrições ativas são inseridas na função objetivo por meio de multiplicadores de Lagrange. O ponto ótimo do problema ocorre quando as condições de KKT são satisfeitas e as equações do fluxo de potência satisfazem uma determinada precisão. O método

proposto apresenta uma certa deficiência, pois necessita, a cada iteração, identificar as restrições de desigualdade ativas na solução.

No trabalho de Santos Jr et al. (1988) aplicou-se um método da função Lagrangiana Aumentada (FLA) para resolver o problema de FPO ativo e reativo. A trajetória de convergência do método pode ocorrer pela região inactivável do problema. Neste método são associados multiplicadores de Lagrange às restrições de igualdade e desigualdade e termos de penalidade para construir a FLA. No processo iterativo a FLA é minimizada pelas variáveis primais utilizando o método de Newton. Esse método controla o aumento do parâmetro de penalidade para que não ocorra um mau condicionamento da matriz Hessiana, pode ser considerado um aperfeiçoamento do método de Sun et al. (1984) e não necessita identificar as restrições de desigualdade que estão ativas na solução.

Huneault et al. (1991) apresentaram diversas metodologias aplicadas na resolução do problema de FPO desde sua formulação por Carpentier, baseado em mais de 300 trabalhos publicados na área.

O primeiro artigo que trabalhou com o problema de FPO com variáveis de controles discreta foi Liu et al. (1992). Os autores apresentaram uma função penalidade quadrática para tratar as variáveis associadas aos capacitores/reatores *shunt* e utilizaram o método de Newton. Os autores obtiveram resultados quase ótimos para as variáveis discretas em dois sistemas reais.

Monticelli & Liu (1992) apresentaram uma nova abordagem do método de Newton para resolução do problema de FPO. Os autores utilizaram o método dos multiplicadores de Lagrange e da função penalidade. Seu método é semelhante ao método de Sun et al. (1984), porém os autores mantêm a matriz Hessiana definida positiva em todo processo iterativo, ao utilizar uma atualização adaptativa do fator penalidade, que não compromete a convergência do algoritmo.

Em 1994, Granville foi o primeiro pesquisador a utilizar o método de pontos interiores denominado método primal-dual barreira logarítmica para resolver o problema de despacho ótimo reativo, um caso particular do problema de FPO. No método proposto as restrições de igualdade são introduzidas na função Lagrangiana pelos multiplicadores de Lagrange e as restrições de desigualdade são transformadas em igualdade utilizando variáveis de folga. Essas variáveis de folga são introduzidas na função Lagrangiana por meio da função barreira logarítmica e penalizadas por um fator de barreira, o qual tende

a zero durante o processo de convergência. Um cálculo para o passo primal e para o passo dual foi apresentado, com o objetivo de manter as variáveis de folga estritamente positivas e satisfazer as condições de KKT para os multiplicadores de Lagrange. Uma das deficiências desse método é a sensibilidade na escolha do parâmetro de barreira inicial, podendo o método divergir em alguns casos. A solução do problema é atingida quando todas as restrições do problema original estiverem satisfeitas.

Wu et al. (1994) apresentaram um novo método de pontos interiores: o método primal-dual previsor-corretor. Sua diferença para o primal dual puro é a introdução de termos não lineares de segunda ordem nas condições de KKT. Os resultados mostraram que o método é mais eficiente e converge mais rápido quando comparado ao método primal-dual puro, nos testes com os sistemas de 9 até 2423 barras.

Os autores Santos & Costa (1995) resolveram o problema de FPO com os métodos de Newton e da função Lagrangiana aumentada. A função Lagrangiana agrega todas as restrições de igualdade e desigualdade. Na abordagem proposta o ponto inicial não precisa ser factível e os autores exploraram a esparsidade da matriz Hessiana da função Lagrangiana aumentada na implementação computacional. Os resultados dos testes utilizando os sistemas IEEE 118 barras e CESP 129 barras mostraram o bom desempenho do método proposto.

Torres & Quintana (1998) resolveram o problema de FPO utilizando o método de pontos interiores com coordenadas retangulares ao invés de coordenadas polares. Justificaram que tanto a função objetivo quanto as restrições são quadráticas. Exploraram as funções quadráticas e detectaram algumas vantagens como a matriz Hessiana constante e facilidade para incorporar o método previsor-corretor. Também apresentaram técnicas para a escolha do passo e para a redução do fator de barreira que se mostraram eficientes.

Em 1999, Yan (1999) aplicou o método primal-dual barreira logarítmica previsor-corretor no problema de despacho de potência ativa e reativa. O autor propôs uma heurística para o ajuste linear dinâmico do passo e da tolerância que, conseqüentemente, melhorou a rapidez na convergência do método e reduziu o esforço computacional. O método foi testado nos sistemas IEEE 118 e 1062 barras, e os resultados foram comparados com o método primal-dual barreira logarítmica.

Nejdawi (2000) propôs um método de programação quadrática e sequencial para resolver o problema de FPO. O algoritmo possui a seguinte estrutura: um ciclo de linearização

externo e um ciclo de otimização interno. No ciclo interno resolve-se o problema de programação quadrática reduzido e relaxado. Com a relaxação das restrições mantém-se o problema com uma dimensão pequena, o método é considerado eficiente pelos autores. As iterações do ciclo externo podem ser comparadas ao Fluxo de Potência Ótimo de Newton, e as do ciclo interno, como eficientes iterações de pontos interiores. O método foi testado nos sistemas de 23 barras e IEEE 30, 57, 118 e 300 barras.

Em Rezania & Shahidehpour (2001) o método de pontos interiores primal-dual previsor-corretor foi aplicado no problema de FPO reativo. Introduziram um modelo linear que controla as variáveis de controle e os incrementos de tensão por uma matriz Jacobiana modificada e as perdas na transmissão são representadas como função dos incrementos de tensão. Os resultados numéricos nos sistemas de 6 e 118 barras mostraram que o método é atrativo, pois o número de iterações não é sensível ao tamanho da rede, ele não requer inversão da matriz ou das derivadas de segunda ordem da matriz Hessiana e com isso economiza-se tempo computacional e espaço de memória.

Torres & Quintana (2001), em seu artigo, apresentaram uma extensão para problemas não lineares das técnicas de múltiplas correções centralizadas (MCC) desenvolvidas por Gondzio (1996), para resolver o problema de FPO. O método foi implementado e testado nos sistemas de 118 até 2098 barras e os resultados demonstraram que o método supera a técnica previsor-corretor. Além disso, o algoritmo é menos sensível à escolha do parâmetro de barreira e a técnica MCC desempenha um papel importante na convergência do método.

Bakirtzis et al. (2002) propuseram a resolução do problema de FPO utilizando o algoritmo genético. Na resolução consideraram o problema de FPO com variáveis contínuas e discretas. As variáveis discretas foram os transformadores *tap* e os shunt chaveáveis. Os testes foram realizados num sistema de até 242 barras e 500 variáveis de controle.

Jabr et al. (2002) resolveram o problema de despacho de potência ótimo utilizando o método primal dual de pontos interiores modificados. Os autores fizeram duas alterações no método primal dual: a técnica de filtro para calcular o tamanho do passo e uma perturbação na diagonal da matriz Hessiana, com objetivo de direcionar a convergência para um ponto de mínimo. O tempo computacional do método proposto foi inferior quando comparado ao método primal-dual, pois sua matriz Hessiana é sempre definida positiva, sendo seu tamanho igual ao número de variáveis primais. O artigo cita modelos

com transformadores defasadores em problemas de FPO. Testes numéricos nos sistemas 14, 24, 30, 57, 118, 175 e 300 barras mostraram a eficiência do método.

Liu et al. (2002) resolveram o problema de FPOR com variáveis discretas. O problema contínuo foi resolvido com o método primal-dual de pontos interiores, já a parte discreta foi tratada por uma função penalidade. Os autores discutiram o momento "certo" de introduzir a função penalidade, isto é, ela não foi utilizada nem desde o começo e nem apenas no final do processo iterativo. Os testes foram realizados nos sistemas de 14 a 538 barras.

Em Ding et al. (2004) a proposta foi considerar o modelo de problema de FPO com as variáveis de controle discretas associadas aos *taps* dos transformadores e resolver pelo método de pontos interiores com planos de corte. Uma das vantagens do método foi a velocidade computacional ao ser comparado com o método simplex com planos de corte. Os testes foram realizados em sistemas IEEE 14 ao 300 barras.

No artigo de Zhao et al. (2005) foi proposta a resolução do problema de FPOR com variáveis contínuas e discretas utilizando a heurística de enxame de partículas (PSO) e o multiagentes. No ambiente, cada agente pode competir e cooperar com seus vizinhos, e ainda ajustar sua posição no espaço de busca de acordo com PSO. Uma das vantagens do método é sua capacidade de encontrar soluções de alta qualidade.

Uma revisão da aplicação do método primal-dual de pontos interiores para o problema de FPO com minimização de perdas foi apresentada em Ramos et al. (2005). Após a formulação do problema não linear original, os autores discutiram a possível solução do problema ao utilizar uma sequência de subproblemas de programação linear. A técnica de barreira logarítmica foi aplicada ao modelo resultante e as equações relevantes foram resolvidas. Certos aspectos da implementação, como a escolha do ponto inicial foram discutidos e os autores obtiveram resultados satisfatórios com uma rede de transmissão real espanhola de 775 barras.

Yan et al. (2006) propuseram um método híbrido com algoritmo genético (AG) e de pontos interiores para resolver o problema de FPOR. Seu método foi dividido em duas partes. A primeira resolve o problema de FPOR com método de pontos interiores relaxando as variáveis discretas, já na segunda parte foi decomposto o problema de FPOR em dois sub-problemas: otimização contínua e discreta. O AG resolve as variáveis discretas com a parte contínua fixa, enquanto os pontos interiores resolve a otimização contínua

com as variáveis discretas constantes. A solução ótima foi encontrada resolvendo os dois sub-problemas alternadamente. Testes foram realizados nos sistemas IEEE 30 e 118 barras e *Chongqing* 161 barras.

Baptista et al. (2006) apresentaram uma nova abordagem para minimizar as perdas em sistemas elétricos de potência. Considerando a aplicação do método primal-dual de barreira logarítmica para a magnitude de tensão e os *taps* dos transformadores e as restrições de desigualdade são tratadas pelo método da Lagrangiana aumentada. As condições necessárias de primeira ordem são alcançadas pelo método de Newton e pela atualização das variáveis primais e duais e os fatores de penalização. Testes numéricos com os sistemas IEEE 14, 30, 57 e 118 foram apresentados para mostrar o bom desempenho desta abordagem.

No algoritmo proposto em AlRashidi & El-Hawary (2007) foi utilizada a heurística PSO e o método de Newton-Raphson para resolver problema de FPO com variáveis contínuas e discretas. Os autores consideraram a função objetiva de perdas nas linhas de transmissão, custo de combustível e emissão de poluentes pelas unidades geradoras com ponto de válvula. O método foi testado no sistema IEEE 30 barras e comparado ao método do *software* MATPOWER.

Capitanescu et al. (2007) consideraram o método de pontos interiores, uma abordagem muito atraente para o problema de FPO, principalmente devido à sua velocidade de convergência e facilidade no manuseio das restrições de desigualdade. Este artigo analisa 3 métodos de pontos interiores: primal-dual puro (PDP), o previsor-corretor (PC) e o das múltiplas correções centralizadas (MCC), para resolver vários problemas de FPO clássicos: minimização de custo de geração, minimização de perdas de potência ativa, a maximização da capacidade de carga do sistema de energia e a minimização da quantidade de corte de carga. Essas variantes do problema de FPO foram formuladas utilizando um modelo retangular para as tensões. Os resultados numéricos em três sistemas 60, 118 e 300 barras foram relatados.

Os autores Belati & Costa (2008) relataram uma abordagem diferenciada para o problema de alocação de perdas na transmissão em um sistema desregulado. Esta abordagem pertence ao conjunto de métodos incrementais. Esse método trata todas as restrições do sistema elétrico e foi baseado no teorema de perturbação. A partir de um determinado ponto de operação ótimo, obtido pelo problema de FPO, as cargas são perturbadas e

um novo ponto de funcionamento ótimo, que satisfaz as restrições, é determinado pela análise de sensibilidade. Esta solução é utilizada para obter os coeficientes de atribuição das perdas para os geradores e as cargas da rede. Os resultados numéricos mostraram a comparação da abordagem com outros métodos para o sistema IEEE 14 barras. Outro teste enfatiza a importância de se considerar as limitações operacionais da rede. O método também foi aplicado no sistema real brasileiro, com uma rede composta de 787 barras e foi comparado com a técnica utilizada no ano de 2008, pelo centro de controle brasileiro.

Sousa et al. (2009) apresentaram um método de barreira modificada previsor-corretor (BMPC) para minimizar as perdas de potência ativa em estudos de planejamento de sistemas elétricos. No BMPC, as restrições de desigualdade são transformadas em igualdades introduzindo variáveis auxiliares positivas, que são perturbadas pelo parâmetro de barreira e tratados pelo método barreira modificada. A viabilidade da abordagem proposta é demonstrada utilizando vários sistemas IEEE e um sistema real brasileiro de 2256 barras, correspondente ao sul-sudeste. Os resultados mostraram que a utilização do método proposto acelera a convergência do problema em relação ao número de iterações e tempo computacional.

Em 2010, Souza et al. (2010) apresentaram estudos de caso em sistemas de energia por Análise de Sensibilidade (AS) orientado pelo problema de FPO, em diferentes cenários de operação. Os estudos de caso começam a partir de uma solução ótima obtida pelo problema de FPO. Esta solução ótima é denominada caso-base e, a partir desta solução, os pontos podem ser avaliados por AS quando ocorrem perturbações no sistema. A fim de mostrar o bom desempenho da proposta, os testes foram realizados nos sistemas de IEEE 14, 118 e 300 barras.

No artigo de Macfie et al. (2010) foram propostas técnicas probabilísticas e adaptativas para arredondamento das variáveis discretas associadas aos bancos de capacitores e reatores *shunt*, considerando o problema de FPO com restrição de segurança. Os resultados foram comparados ao arredondamento padrão nos sistemas IEEE até o 118 barras e um sistema da Grã-Bretanha.

Capitanescu & Wehenkel (2010) apresentaram três abordagens para tratar as variáveis discretas do problema de FPO. As duas primeiras baseiam-se em técnicas de sensibilidade e a terceira baseia-se no uso de multiplicadores de Lagrange. A técnica de arredondamento padrão foi utilizada para comparação em 4 sistemas elétricos de até 1203 barras.

As contribuições do artigo de Capitanescu et al. (2011) são de três tipos: análise do estado da arte das soluções computacionais do problema de FPO com restrições de segurança; identificação dos desafios deste problema e destaque das abordagens promissoras para enfrentá-los. Os autores apontam algumas limitações da formulação clássica e indicam o caminho das possíveis pesquisas futuras.

Sousa et al. (2012) resolveram o problema de FPO utilizando a função Lagrangiana barreira modificada. Nesta abordagem, as restrições de desigualdade são tratadas pelo método da função barreira modificada, que tem uma propriedade de convergência finita, ou seja, a solução obtida pelo método pode estar na fronteira do conjunto viável. Por isso, a matriz Hessiana tem um bom condicionamento. Para comprovar isso, os autores fizeram uma análise comparativa do condicionamento numérico da matriz Hessiana. A viabilidade da abordagem proposta é também demonstrada em testes comparativos com o método de pontos interiores (MPI), utilizando vários sistemas testes IEEE e duas redes de sistema de geração/transmissão do Brasil. Os resultados mostraram que o método proposto é computacionalmente mais atraente do que o MPI em termos de velocidade, número de iterações e condicionamento numérico.

Phan (2012) resolveu o problema de FPO com variáveis discretas utilizando o método dual-Lagrangiano com região de confiança. O autor propôs dois algoritmos, o *branch and bound* e o elipsoidal ou a bissecção retangular com objetivo de encontrar o mínimo global do problema de FPO na forma retangular. Testes numéricos IEEE foram realizados.

Soler et al. (2013) resolveram o problema de FPO reativo, considerando as variáveis de controle como contínuas e discretas. O trabalho apresentou um tratamento eficiente para as variáveis discretas utilizando uma função penalidade de forma que o problema tornou-se contínuo e diferenciável. Testes com os sistemas elétricos do IEEE foram realizados para comprovar a eficiência da abordagem proposta.

Lage (2013) propôs uma nova abordagem para resolução do problema de FPO com variáveis discretas e restrições de atuação de dispositivos de controle de tensão. Utilizou o método da função Lagrangiana modificada penalidade discreto, no qual as variáveis discretas foram tratadas pela função senoidal proposta por Soler et al. (2013), as restrições de complementaridade foram transformadas em restrições de desigualdade equivalentes e as restrições de desigualdade foram transformadas em restrições de igualdade com acréscimo de folgas não negativas. As folgas foram tratadas pela função barreira modificada

com extrapolação quadrática. Os resultados foram testados nos sistemas IEEE 14, 30, 57 e 118 barras.

Nie et al. (2015) apresentaram um modelo de problema de FPOR quadrático baseado em coordenadas retangulares aumentadas com variáveis de controle discretas. Resolveram o problema de FPOR com o método de pontos de interiores previsor-corretor e funções de penalidade quadrática foram associadas ao problema de FPOR para tratar as variáveis de controle discretas. A abordagem foi testada nos sistemas IEEE 14, 30, 57 e 118 barras.

Murray et al. (2015) afirmaram que técnicas de arredondamento para lidar com as variáveis discretas de controle, em particular *shunt chaveáveis*, podem resultar em soluções ruins. Para suprir essa deficiência exploraram uma função penalidade *sparsity-inducing* com objetivo de reduzir o número de ajuste de controle do problema e para lidar com as variáveis discretas de controle. Os testes foram realizados em dois sistemas elétricos reais de aproximadamente 2500 barras (*North American power*).

Um novo método de aproximação linear sucessiva foi proposto por Yang et al. (2016) para tratar as equações do fluxo de potência. Modelos lineares precisos dos *taps* transformadores e susceptâncias *shunt* dos bancos de capacitores/reatores também foram propostos. Os dois modelos linearizados facilitaram a formulação do modelo do problema de FPOR linearizado restrito inteiro misto. Casos teste mostraram a eficiência do novo método.

Delgado et al. (2017) propuseram uma combinação dos métodos de barreira logarítmica e barreira logarítmica modificada. No processo iterativo a ideia consistia em, quando o método de barreira logarítmica atingisse uma determinada precisão era realizada a troca pelo método de barreira logarítmica modificada. Testes numéricos com os sistemas 3, IEEE 14, 30, 57 e 118 barras foram realizados e seus resultados foram comparados aos métodos barreira logarítmica e barreira logarítmica modificada, separadamente.

Mazzini et al. (2019) resolveram o problema de despacho reativo ótimo (DRO) com objetivo de minimizar as perdas de potência ativa. O problema é modelado como um problema multiobjetivo de DRO, as variáveis discretas são tratadas por uma função polinomial e foi considerado um número limitado de ajustes das variáveis de controle. O método foi testado nos sistemas IEEE 118 e 300 barras.

Tófoli et al. (2020) propuseram a resolução do problema de FPORD com o método de pontos interiores e exteriores (barreira logarítmica modificada) com a estratégia de

correção de inércia, proposta em Silva (2014). As variáveis discretas do problema foram tratadas pela função senoidal proposta por Soler et al. (2013). Testes com os sistemas IEEE 14, 30 e 57 barras foram realizados.

Finalmente, em Soler et al. (2020) foi proposta uma nova formulação para o problema de FPO com variáveis discretas com objetivo de reduzir o número de ações de controle do problema. Para reduzir, introduziram restrições de complementaridade no problema para representar comportamentos específicos de dispositivos de controle de tensão (*tap* dos transformadores em fase e banco de capacitores e reatores *shunt*) no sistema elétrico. O problema foi resolvido pelo método *branch and bound* implementado no solver BONMIN. Testes numéricos foram realizados com os sistemas elétricos IEEE 14, 30 e 118 barras.

Neste capítulo foi fornecido um posicionamento teórico e histórico dos métodos de barreira e penalidade e o problema de fluxo de potência ótimo. No Capítulo 3, apresenta-se uma breve revisão dos métodos de otimização que serão explorados neste trabalho.

## Revisão de métodos de otimização

Neste capítulo apresenta-se uma revisão de alguns métodos de otimização, os quais fornecem um suporte teórico para a apresentação da abordagem proposta neste trabalho, que combina dois métodos baseados na função barreira e na função penalidade. Os métodos apresentados são: o método dual-Lagrangiano, o método de barreira, o método primal-dual barreira logarítmica, o método de penalidade e uma variação do método de penalidade.

### 3.1 Método dual-Lagrangiano

Seja um problema de otimização não linear, conforme (3.1):

$$\begin{aligned} & \text{Min} && f(x) \\ & \text{sujeito a :} && \begin{cases} g(x) = 0 \\ h(x) \leq 0 \end{cases} \end{aligned} \tag{3.1}$$

em que:

- $f(x)$  é a função objetivo;  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$
- $g(x) = (g_1(x), \dots, g_m(x))^T$  é o vetor das funções das restrições de igualdade;
- $h(x) = (h_1(x), \dots, h_p(x))^T$  é o vetor das funções das restrições de desigualdade;
- $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  e  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ .

O método dual-Lagrangiano foi desenvolvido para resolver problemas convexos. Ele utiliza uma função auxiliar que introduz as restrições de igualdade e desigualdade na função objetivo. A função auxiliar é denominada função Lagrangiana e é representada conforme (3.2):

$$L(x, \lambda, \pi) = f(x) + \sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(x) + \sum_{i=1}^p \pi_i h_i(x) \quad (3.2)$$

em que:  $\lambda \in \mathbb{R}^m$  é o vetor dos multiplicadores de Lagrange das restrições de igualdade e  $\pi \in \mathbb{R}_+^p$  é o vetor dos multiplicadores de Lagrange das restrições de desigualdade.

Se o problema (3.1) é convexo, existem multiplicadores  $\lambda^*$  e  $\pi^*$ , que aplicados ao problema irrestrito,

$$\underset{x}{\text{Min}}\{L(x, \lambda^*, \pi^*)\} \quad (3.3)$$

que fazem com que a solução de (3.3) coincida com a solução de (3.1). A solução ótima do problema é obtida quando as condições de KKT estiverem satisfeitas. O problema (3.3) é denominado problema dual-Lagrangiano.

Para gerar os multiplicadores de Lagrange pode-se utilizar vários algoritmos. Uma escolha é o algoritmo do gradiente, que gera uma sequência de multiplicadores e atualiza-os a cada passo, pela expressão (3.4):

$$\begin{bmatrix} \lambda^{k+1} \\ \pi^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda^k \\ \pi^k \end{bmatrix} + \nu \begin{bmatrix} g(x) \\ t_i \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

em que:

$$t_i = \begin{cases} h_i(x), & \text{se } \pi_i^k > 0; i = 1, \dots, p. \\ \max\{0, h_i(x)\}, & \text{se } \pi_i^k = 0; i = 1, \dots, p. \end{cases}$$

e  $\nu$  é estimado para garantir a busca da variável dual. Seu valor pode ser obtido utilizando uma busca unidimensional.

### 3.1.1 Algoritmo dual-Lagrangiano

---

**Algoritmo 1:** Dual-Lagrangeano
 

---

**Dados:** Dado o problema (3.1), construa a função Lagrangiana (3.2)  
 Faça  $k = 0$ , obtenha uma estimativa inicial  $x^0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $\lambda^0 \in \mathbb{R}^m$  e  $\pi^0 \in \mathbb{R}^p$

- 1 **enquanto** *As condições de KKT*  $> \epsilon$  **faça**
- 2     Resolva o problema dual-Lagrangeano por um método de otimização irrestrita com  $\lambda^k$  e  $\pi^k$  com valor fixo.
- 3     **se** *As condições de KKT*  $< \epsilon$  **então**
- 4         | PARE;
- 5     **senão**
- 6         | atualize os multiplicadores de Lagrange por alguma regra,
- 7         | Faça  $k = k + 1$ .
- 8     **fim**
- 9 **fim**

---

### 3.1.2 Dificuldades computacionais

Ao resolver problemas não convexos, pode ocorrer o *gap* de dualidade e, portanto, o método dual-Lagrangiano não conseguir atingir a solução ótima do problema.

## 3.2 Método de barreira

O método de barreira é utilizado para resolução de problemas com restrições de desigualdade, cujo interior é não vazio. Pode ser visto como um caso particular do método das penalidades, mas diferencia-se deste por exigir uma penalização interna, ou seja, por trabalhar no interior da região factível. Ao trabalhar no interior dessa região, os fatores de barreira impedem que os pontos saiam da região factível. Com isso, parte-se de um ponto factível e geram-se novos pontos factíveis. Uma das vantagens desse método é a obtenção de, pelo menos, uma solução factível, caso ocorra uma parada prematura do método. Assim, seja o problema de otimização não linear com restrições de desigualdade (3.5):

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & f(x) \\ \text{sujeito a : } & h(x) \leq 0; \end{aligned} \tag{3.5}$$

em que:

- $f(x)$  é a função objetivo;  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$
- $h(x) = (h_1(x), \dots, h_p(x))^T$  é o vetor das funções das restrições de desigualdade;
- $x \in \mathbb{R}^n$  e  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ .

No método de barreira, resolve-se uma sequência de subproblemas irrestritos de barreira da seguinte forma:

$$\underset{x}{\text{Min}}\{f(x) + \mu B(x) : h(x) < 0\}, \quad (3.6)$$

em que:

$$FBA(x) = f(x) + \mu B(x). \quad (3.7)$$

Sendo que  $FBA(x)$  é a função auxiliar,  $\mu > 0$  (tende a zero no ponto estacionário) é denominado de parâmetro de barreira e  $B(x)$  é a função barreira não negativa e contínua no interior da região factível  $\{x \in \mathbb{R}^n; h(x) < 0\}$  e tende ao infinito à medida que a solução se aproxima da fronteira, a partir do interior. A função barreira  $B(x)$  é definida conforme (3.8):

$$B(x) = \sum_{i=1}^p \psi[h_i(x)], \quad (3.8)$$

em que:  $\psi$  é uma função de uma variável  $y$ , contínua sobre  $\{y; y < 0\}$  e satisfaz (3.9)

$$\psi(y) \geq 0, \text{ se } y < 0 \text{ e } \lim_{y \rightarrow 0^-} \psi(y) = \infty. \quad (3.9)$$

A função barreira (3.8), pode assumir várias formas como:

$$B(x) = \sum_{i=1}^p -\frac{1}{h_i(x)}, \quad (3.10)$$

denominada de função barreira clássica ou inversa, a qual foi estudada por Carroll (1961), ou

$$B(x) = - \sum_{i=1}^p \ln[-h_i(x)]. \quad (3.11)$$

denominada de função barreira logarítmica, a qual foi estudada por Frisch (1955).

Quando  $\mu \rightarrow 0$ , têm-se que  $\mu B(x)$  se aproxima da função barreira ideal e a solução do problema de barreira converge para a solução ótima do problema (3.5). O valor de  $\mu B(x)$  pode ser um critério de parada do método. Caso o valor absoluto de  $\mu B(x)$  não seja menor que a precisão desejada, o parâmetro de barreira deve ser reduzido por uma heurística e o problema de barreira deve ser resolvido novamente com  $\mu$  fixo. Um algoritmo para o método de barreira é apresentado a seguir.

### 3.2.1 Algoritmo do método de barreira

---

**Algoritmo 2:** Método de barreira

---

**Dados:** Dado o problema (3.5), construa a função auxiliar de barreira (3.7)  
 Faça  $k = 0$ , obtenha: uma estimativa inicial  $x^0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mu^0 > 0$  e o parâmetro de atualização da barreira  $\rho > 1$ .

```

1 enquanto  $|\mu^k B(x^k)| > \epsilon$  faça
2     Resolva o problema barreira por um método de otimização irrestrita com  $\mu^k$ 
       com valor fixo, determinando  $x^{k+1}$ 
3     se  $|\mu^k B(x^{k+1})| < \epsilon$  então
4         PARE;
5     senão
6         Atualize o parâmetro de barreira por alguma heurística,  $\mu^{k+1} = \frac{\mu^k}{\rho}$ ,
7         Faça:  $k = k + 1$ .
8     fim
9 fim
```

---

### 3.2.2 Método primal-dual barreira logarítmica

Dentre as variantes dos métodos de pontos interiores, pode-se dizer que o método primal-dual barreira logarítmica (PDBL) é considerado uma das mais robustas e eficientes. Este método consiste na união de outros três métodos:

- o método de Newton para resolver as equações não lineares;
- o método dual-Lagrangiano para tratar as restrições de igualdade;
- o método de barreira (Fiacco & McCormick, 1968) para tratar as restrições de desigualdade.

Dado o problema (3.1), no método PDBL, as restrições de desigualdade de (3.1) são transformadas em igualdade utilizando variáveis de folga não negativas. Com isso têm-se o problema modificado, dado em (3.12):

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & f(x) \\ \text{sujeito a :} & \begin{cases} g(x) = 0 \\ h(x) + s_1 = 0, \\ s_1 \geq 0. \end{cases} \end{array} \quad (3.12)$$

sendo o vetor  $s_1 \in \mathbb{R}^p$ . As variáveis,  $s_{1_j}$ ,  $j = 1, \dots, p$  são denominadas variáveis de folga.

Na sequência, adiciona-se uma função barreira logarítmica na função objetivo afim de garantir a não negatividade das variáveis de folga, conforme (3.13).

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & f(x) - \mu \sum_{j=1}^p \omega(s_{1_j}) \\ \text{sujeito a :} & \begin{cases} g(x) = 0 \\ h(x) + s_1 = 0, \end{cases} \end{array} \quad (3.13)$$

em que:  $\omega(s_{1_j})$  é denominada função barreira logarítmica, isto é,  
 $\omega(s_{1_j}) = \ln(s_{1_j}), j = 1, \dots, p$ .

Desta forma, obtêm-se a seguinte função Lagrangiana barreira logarítmica (FLBL):

$$FLBL(x, s_1, \lambda, \pi) = f(x) - \mu \sum_{j=1}^p \omega(s_{1_j}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x) + \sum_{j=1}^p \pi_j (h_j(x) + s_{1_j}) \quad (3.14)$$

sendo:  $\lambda \in \mathbb{R}^m$  e  $\pi \in \mathbb{R}^p$  os vetores dos multiplicadores de Lagrange, isto é, as variáveis duais do problema,  $\mu > 0$  é o parâmetro de barreira e  $s_1 \in \mathbb{R}_+^p$  é o vetor das variáveis de folga.

As condições necessárias de otimalidade 1<sup>ª</sup> ordem são aplicadas sobre a função Lagrangiana barreira logarítmica (3.14), gerando um sistema de equações não lineares, (3.15):

$$\nabla FLBL(x, s_1, \lambda, \pi) = 0, \quad (3.15)$$

em que:

$$\nabla FLBL(x, s_1, \lambda, \pi) = \begin{bmatrix} \nabla_x f(x) + J_g(x)^T \lambda + J_h(x)^T \pi \\ -\frac{\mu}{s_{1j}} + \pi_j \\ g_i(x) \\ (h(x) + s_1) \end{bmatrix} \begin{matrix} j = 1, \dots, p \\ i = 1, \dots, m \end{matrix}, \quad (3.16)$$

com:

$J_g(x)^T = (\nabla_x g_1(x), \dots, \nabla_x g_m(x))$  e  $J_h(x)^T = (\nabla_x h_1(x), \dots, \nabla_x h_p(x))$  as quais são as transpostas das matrizes Jacobianas, respectivamente, de  $g$  e  $h$ .

Uma solução do sistema de equações não lineares (3.16) é determinada através do método de Newton. O método de Newton gera as direções de busca  $(\Delta x, \Delta s_1, \Delta \lambda, \Delta \pi)^T$ , as quais serão utilizadas para a atualização das variáveis e resulta em um sistema matricial que é representado em (3.17):

$$W \Delta d = -\nabla FLBL(x, s_1, \lambda, \pi) \quad (3.17)$$

sendo  $\Delta d^T = (\Delta x, \Delta s_1, \Delta \lambda, \Delta \pi)$ , o  $\nabla FLBL$  é dado por (3.16), e a matriz  $W$  por (3.18):

$$W = \begin{bmatrix} \nabla_{xx}^2 FLBL(x, s_1, \lambda, \pi) & 0 & J_g(x)^T & J_h(x) \\ 0 & \Omega & 0 & I \\ J_g(x) & 0 & 0 & 0 \\ J_h(x) & I & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

é denominada de matriz Hessiana da função Lagrangiana (3.14), em que:

$$\nabla_{xx}^2 FLBL(x, s_1, \lambda, \pi) = \nabla_{xx}^2 f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla_{xx}^2 g_i(x) + \sum_{j=1}^p \pi_j \nabla_{xx}^2 h_j(x), \quad (3.19)$$

$$S = \text{diag}(s_1, \dots, s_p) \quad (3.20)$$

A escolha da submatriz  $\Omega$  pode afetar drasticamente o desempenho do método. Se  $\Omega$  tem a forma em (3.21) diz-se que tem um método primal.

$$\Omega = \mu S^{-2} \quad (3.21)$$

Por outro lado, se  $\Omega$  tem a forma em (3.22) diz-se que tem um método primal-dual.

$$\Omega = S^{-1} \Lambda \quad (3.22)$$

em que:

$$\Lambda = \text{diag}(\pi_1, \dots, \pi_p)$$

A diferença entre o sistema primal e o sistema primal-dual é que o primal possui apenas informações relacionadas as variáveis primais, já no sistema primal-dual possui informações relacionadas a variáveis primais e duais, portanto o método PDBL utiliza-se o sistema primal-dual (3.22).

Os vetores das variáveis  $x, s_1, \lambda$  e  $\pi$  são atualizados da seguinte forma:

$$\begin{aligned} x^{k+1} &= x^k + \alpha_p \Delta x^k \\ s_1^{k+1} &= s_1^k + \alpha_p \Delta s_1^k \\ \lambda^{k+1} &= \lambda^k + \alpha_d \Delta \lambda^k \\ \pi^{k+1} &= \pi^k + \alpha_d \Delta \pi^k, \end{aligned} \quad (3.23)$$

em que:

$\alpha_p$  e  $\alpha_d$  são os passos utilizados na atualização das variáveis primais e duais, respectivamente.

Para a determinação dos passos primais e duais adota-se uma adaptação da estratégia

utilizada por Granville (1994) e Torres & Quintana (2001), entre outros.

O objetivo do passo primal é preservar a positividade das variáveis de folga. Assim esse passo é dado por (3.24):

$$\alpha_p = \min\left\{\left(\delta \min_{\Delta s_{1j} < 0} \frac{-s_{1j}}{\Delta s_{1j}}, 1\right), j = 1, \dots, p\right\}. \quad (3.24)$$

O passo dual é calculado de forma que cada componente dos vetores duais das restrições de desigualdade  $\pi$  permaneçam com seus respectivos sinais, isto é:

$$\alpha_d = \min\left\{\left(\delta \min_{\Delta \pi_{1j} < 0} \frac{-\pi_{1j}}{\Delta \pi_{1j}}, 1\right), j = 1, \dots, p\right\}. \quad (3.25)$$

Em (3.24) e (3.25) adota-se:  $\delta = 0,9995$ .

A atualização do parâmetro de barreira  $\mu$  é dada por:

$$\mu^{k+1} = \frac{\mu^k}{\varrho}, \quad (3.26)$$

em que:  $\varrho > 1$ .

As condições  $s > 0$  e  $\pi > 0$  devem ser satisfeitas em todos os pontos. O método termina quando as condições de KKT são satisfeitas.

### 3.2.3 Algoritmo primal-dual barreira logarítmica

---

**Algoritmo 3:** Primal-dual barreira logarítmica

---

**Dados:** Dado o problema (3.1), construa a função Lagrangiana barreira logarítmica (3.14)

Faça  $k = 0$ , obtenha uma estimativa inicial para  $d^0 = (x^0, s_1^0, \lambda^0, \pi^0)$  e  $\mu^0$ .

```

1 enquanto As condições de KKT >  $\epsilon$  faça
2   | Obtenha o sistema de direções por (3.17) e resolva-o;
3   | Calcule os passos  $\alpha_p$  e  $\alpha_d$ , utilizando (3.24) e (3.25);
4   | Atualize as variáveis por (3.23);
5   se As condições de KKT <  $\epsilon$  então
6     | PARE;
7   senão
8     | atualize o parâmetro de barreira por (3.26), faça  $k = k + 1$  ;
9   fim
10 fim
```

---

### 3.2.4 Dificuldades computacionais

Uma das dificuldades do método de barreira é a determinação do ponto inicial factível. Em alguns problemas pode ser muito difícil. O método de barreira e o método PDBL que utilizam a estrutura da função barreira, podem apresentar um mau condicionamento da matriz Hessiana quando o parâmetro de barreira tende a zero. Uma outra dificuldade é a sensibilidade do método ao valor do parâmetro de barreira, que em alguns casos pode implicar na divergência do método.

## 3.3 Método de penalidade

O método da função penalidade associa ao problema não linear uma sequência de problemas irrestritos. Ele consiste em utilizar uma função auxiliar em que as restrições do problema são introduzidas na função objetivo através de um parâmetro de penalidade, o qual penaliza a função objetivo se as restrições são violadas.

Dado o problema (3.1). A função penalidade auxiliar (FPA) tem a seguinte forma:

$$FPA(x) = f(x) + \rho P(x) \quad (3.27)$$

em que  $\rho > 0$  é o parâmetro de penalidade e  $P(x)$  é a função penalidade que é dada por:

$$P(x) = \sum_{i=1}^m \Psi(g_i(x)) + \sum_{j=1}^p \tau(h_j(x)); \quad (3.28)$$

em que  $\Psi$  e  $\tau$  são funções contínuas de uma variável  $x_1$ , tais que:

$$\Psi(x_1) = 0, \text{ se } x_1 = 0 \text{ e } \Psi(x_1) > 0, \text{ se } x_1 \neq 0; \quad (3.29)$$

$$\tau(x_1) = 0, \text{ se } x_1 \leq 0 \text{ e } \tau(x_1) > 0, \text{ se } x_1 > 0. \quad (3.30)$$

As funções (3.29) e (3.30) podem assumir as seguintes formas:

$$\tau(x_1) = [\max\{0, x_1\}]^{pr}; \quad (3.31)$$

$$\Psi(x_1) = |x_1|^{pr} \quad (3.32)$$

em que:  $pr$  é um número inteiro positivo. A função  $P(x)$  em (3.28) é denominada de função penalidade quadrática para  $pr = 2$  em (3.31) e (3.32). Desta forma tem-se que o problema auxiliar a ser resolvido é da seguinte forma:

$$\underset{x}{\text{Min}}\{f(x) + \rho P(x)\}; \quad (3.33)$$

para  $\rho > 0$ . À medida que  $P(x) \rightarrow 0$  e  $\rho \rightarrow \infty$  a solução do problema (3.33) converge para a solução do problema (3.1) se  $\rho P(x) \rightarrow 0$ .

O método pode gerar uma sequência de pontos inicialmente ineficazes, sequência essa que converge para a solução do problema original, sobre determinadas hipóteses.

O parâmetro de penalidade pode ser atualizado por várias regras, uma delas é da seguinte forma:

$$\rho^{k+1} = \sigma \rho^k, \quad (3.34)$$

em que:  $\sigma > 1$ .

### 3.3.1 Algoritmo do método de penalidade

---

**Algoritmo 4:** Método de penalidade

---

**Dados:** Dado o problema (3.1), determine a função penalidade (3.28);  
 Faça  $k = 0$ , obtenha uma estimativa inicial  $x^0 \in \mathbb{R}^n$ , parâmetro de penalidade  $\rho^0 > 0$  e o parâmetro de atualização de penalidade  $\sigma$ :

- 1 **enquanto**  $\rho^k P(x^k) > \varepsilon$  **faça**
- 2     Resolva o problema de penalidade com  $\rho^k$  fixo por um método de otimização irrestrita obtendo  $x^{k+1}$ , determinando  $x^{k+1}$
- 3     **se**  $\rho^k P(x^{k+1}) < \varepsilon$  **então**
- 4         | PARE;
- 5     **senão**
- 6         | Atualize o parâmetro de penalidade por: (3.34)
- 7         | Faça  $k = k + 1$  ;
- 8     **fim**
- 9 **fim**

---

### 3.3.2 Dificuldades computacionais

A determinação do parâmetro de penalidade  $\rho$  pode ser difícil, por ser um número grande, faz com que a solução do problema (3.33) seja próxima da solução do problema (3.1), porém o método apresenta um problema de mau condicionamento da matriz Hessiana devido a sua dependência de  $\rho$ . Salienta-se que a escolha inicial do parâmetro de penalidade  $\rho$  e do atualizador  $\sigma$  afetam a convergência do método.

### 3.3.3 Variação do método de penalidade

Byrd et al. (2003), Byrd et al. (2005), Byrd et al. (2008) e Byrd et al. (2010) estudaram variações do método de penalidade. A ideia é que a atualização dada em (3.34) poderia levar uma convergência lenta. Devido a esse problema propuseram técnicas adaptativas para atualização do parâmetro de penalidade.

A ideia proposta em Byrd et al. (2010) foi estudar um algoritmo que detectasse rapidamente a infactibilidade. Uma maneira de lidar com a possibilidade de um problema ser inviável foi empregar uma mudança em um algoritmo para decidir se a iteração atual deve buscar uma solução ou apenas para minimizar alguma medida de infactibilidade. O estudo foi na classe de programação quadrática sequencial (PQS). Os métodos PQS encontram a solução de um problema complicado através da resolução de uma sequência de problemas mais simples. A função objetiva é substituída por uma aproximação quadrática e as restrições são substituídas por aproximações lineares Nunes et al. (2009).

Dado o problema (3.35)

$$\begin{aligned} & \text{Min} \quad f(x) \\ & \text{sujeito a :} \quad \begin{cases} h_i(x) \geq 0; \end{cases} \end{aligned} \quad (3.35)$$

em que:

- $f(x)$  é a função objetivo,  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  e  $h_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, i = 1, \dots, p$ ;
- $x \in \mathbb{R}^n$ .

Quando os pontos factíveis de (3.35) não existem, o algoritmo deve retornar uma solução para o problema (3.36).

$$\begin{aligned} & \text{Min} \quad v(x) \\ & \text{em que :} \quad v(x) = \sum_{i=1}^p \max \{-h_i(x), 0\}. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Quando o problema é infactível, as iterações convergem rapidamente para um ponto estacionário infactível  $x^k$  que é definido como ponto estacionário do problema (3.36) tal que  $v(x^k) > 0$ .

O problema (3.35) modificado pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} & \text{Min} \quad \rho f(x) + \sum_{i=1}^p r_i \\ & \text{sujeito a :} \quad \begin{cases} h_i(x) + r_i \geq 0, \\ r_i \geq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (3.37)$$

sendo  $r_i, i = 1, \dots, p$  são denominadas variáveis de folga.

A condição necessária de otimalidade de 1<sup>a</sup> ordem é aplicada no problema (3.37)

$$\rho \nabla f(x) - \sum_{i=1}^p \lambda_i \nabla h_i(x) = 0, \quad (3.38)$$

$$1 - \lambda_i - \phi_i = 0, \quad i = 1, \dots, p \quad (3.39)$$

$$\lambda_i (h_i(x) + r_i) = 0, \quad i = 1, \dots, p \quad (3.40)$$

$$\phi_i r_i = 0, \quad i = 1, \dots, p \quad (3.41)$$

$$h_i(x) + r_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, p \quad (3.42)$$

$$r, \lambda, \phi \geq 0, \quad (3.43)$$

em que:  $\lambda_i, i = 1, \dots, p$  e  $\phi_i, i = 1, \dots, p$  são os multiplicadores de Lagrange.

Dado um valor de  $\rho^k$  em uma iteração  $k$ , é definido o "passo"  $d$  como a solução de um subproblema

$$\text{Min } q^k(d; \rho^k) \quad (3.44)$$

em que:  $d \in \mathbb{R}^p$

$$q^k(d; \rho^k) = \rho^k \nabla f(x^k)^T d + \frac{1}{2} d^T W(x^k, \lambda^k; \rho^k) d + \sum_{i=1}^p \max\{-h_i(x^k) - \nabla h_i(x^k)^T d, 0\} \quad (3.45)$$

A matriz Hessiana é representada por  $W$ :

$$W(x^k, \lambda^k; \rho^k) = \rho^k \nabla^2 f(x^k) - \sum_{i=1}^p \lambda_i^k \nabla^2 h_i(x^k) \quad (3.46)$$

O problema (3.44) suavizado é escrito:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \rho^k f(x^k)^T + \frac{1}{2} d^T W(x^k, \lambda^k; \rho^k) d + \sum_{i=1}^p r_i \\ \text{sujeito a :} \quad & \begin{cases} h_i(x^k) + \nabla h_i(x^k)^T d + s_i \geq 0, i = 1, \dots, p \\ r_i \geq 0, i = 1, \dots, p \end{cases} \end{aligned} \quad (3.47)$$

em que:  $r_i \in \mathbb{R}^p$  são denominadas variáveis de folga.

O subproblema (3.47) tem como objetivo a busca da otimalidade e a atualização de  $\rho$ .

### 3.3.4 Atualização Adaptativa do parâmetro

O artigo de Byrd et al. (2010) propõe uma atualização baseada no artigo de Byrd et al. (2008). A função (3.44) é definida na sua forma linear em (3.48) e na sua forma quadrática (3.49):

$$m^k(d) = \sum_{i=1}^p \max\{-h_i(x^k) - \nabla h_i(x^k)^T d, 0\} \quad (3.48)$$

$$q^k(d; \rho) = \rho \nabla f(x^k)^T d + \frac{1}{2} d^T W(x^k, \lambda^k; \rho) d + m^k(d) \quad (3.49)$$

Em (3.50) é definida uma medida de erro KKT:

$$E^k(\rho) = \|\rho \nabla f(x^k) - \sum_{i=1}^p \lambda_i \nabla h_i(x^k)\|_1 + \sum_{i \in S^k} |h_i(x^k) \lambda_i^k| + \sum_{i \in V^k} |h_i(x^k)(1 - \lambda_i^k)|. \quad (3.50)$$

em que:  $S^k$  e  $V^k$  são os conjuntos de restrições satisfeitas e violadas, respectivamente de uma iteração  $x^k$  e  $\lambda_i^k \in [0, 1]$  são os multiplicadores de Lagrange.

### 3.3.5 Algoritmo atualização adaptativa do parâmetro de penalidade

---

**Algoritmo 5:** Atualização adaptativa do parâmetro de penalidade

---

**Dados:**  $\rho^k = \rho^{k-1}$ ,  $e_1 > 0$  e  $e_2 < 1$ .

- 1 Resolva (3.47) com  $\rho = \rho^k$  para obter  $d^k$
- 2 **se**  $m^k(d^k) = 0$  **então**
- 3 | Retorne  $\rho^k$  e  $d^k$ ;
- 4 **senão**
- 5 | Resolva (3.47) com  $\rho = 0$  para obter  $\bar{d}^k$
- 6 | **se**  $m^k(\bar{d}^k) = 0$  **então**
- 7 | | Reduza  $\rho^k$  até que a solução  $d^k$  para (3.47) com  $\rho = \rho^k$  satisfaça
- 8 | |  $m^k(d^k) = 0$ ;
- 9 | **senão**
- 10 | | Reduza  $\rho^k$  que  $d^k$  satisfaça
- 11 | |  $m^k(0) - m^k(d^k) \geq e_1(m^k(0) - m^k(\bar{d}^k))$
- 12 | **fim**
- 13 | Reduza  $\rho^k$  que  $d^k$  satisfaça  $q^k(0; \rho^k) - q^k(d^k; \rho^k) \geq e_2(q^k(0; 0) - q^k(\bar{d}^k; 0))$
- 14 | Defina  $\rho^k = \min\{\rho^k, [\frac{E^k(0)}{v(x)}]^2\}$
- 15 **fim**

---

Os efeitos essenciais dessa estratégia são os seguintes. Primeiro, se o subproblema (3.44) para o valor mais recente do parâmetro de penalidade produz uma solução linearmente viável (ou seja,  $m(d^k) = 0$ ), então segue nesta direção. Isso é para garantir que a regularização das restrições não prejudiquem o progresso do algoritmo quando ele não é necessário. Em segundo lugar, se a solução é inviável, então diminui o parâmetro de penalidade o suficiente para que a nova direção forneça progresso suficiente.

No próximo Capítulo apresenta-se a abordagem proposta neste trabalho.

# Método primal-dual de pontos interiores-penalidade discreto

Neste capítulo apresenta-se a nova abordagem de solução proposta neste trabalho para resolução do problema de FPO com variáveis de controle discretas. Analisa-se um exemplo numérico para aplicação da abordagem proposta.

## 4.1 Introdução e motivação

Desenvolveu-se neste trabalho uma nova abordagem de solução que utiliza de maneira conjunta, o método de pontos interiores e o método de penalidade, baseada no método de Curtis (2012). Segundo Curtis, os dois métodos são considerados eficientes e robustos. Com isso propôs a união destes para suprir as deficiências e utilizar as melhores qualidades de cada um. Por fim, conclui-se que uma boa atualização dos parâmetros conduz a uma boa convergência e a um excelente método.

No artigo de Curtis (2012), o método foi desenvolvido para resolver problemas não linear contínuos. Como a proposta desse trabalho é resolver um problema não linear discreto misto, para tratamento das variáveis discretas do problema foi utilizada uma função senoidal proposta em Soler et al. (2013).

## 4.2 Método de solução para variáveis discretas

A metodologia proposta consiste em, como proposto em Soler et al. (2013) resolver uma sequência de problemas de programação não linear (PPNL) contínuos, cuja solução é equivalente ao problema de programação não linear discreto misto (PPNLDM). Esse problema é obtido incorporando à função objetivo do problema original uma função que penaliza a função objetivo quando as variáveis discretas assumem valores não discretos.

Propõe-se neste trabalho determinar a solução do PPNL pelo método primal-dual de pontos interiores-penalidade, o qual será descrito na seção 4.3. A abordagem para transformar o PPNLDM em uma sequência de PPNL será apresentada a seguir.

A forma geral de um PPNLDM é dada por:

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & f(x, y) \\ \text{sujeito a :} & \begin{cases} g(x, y) = 0 \\ h(x, y) \leq 0 \\ x^{\min} \leq x \leq x^{\max} \\ y_i \in D_{y_i}, i = 1, \dots, ny \end{cases} \end{array} \quad (4.1)$$

em que:

- $x \in \mathbb{R}^{nx}$ : representa as variáveis contínuas;
- $y \in \mathbb{R}^{ny}$ : representa as variáveis discretas;
- $f(x, y)$  é a função objetivo,  $f : \mathbb{R}^{nx+ny} \rightarrow \mathbb{R}$ ;
- $h(x, y)$  é a função das restrições de desigualdade,  $h : \mathbb{R}^{nx+ny} \rightarrow \mathbb{R}^p$ ;
- $g(x, y)$  é a função das restrições de igualdade,  $g : \mathbb{R}^{nx+ny} \rightarrow \mathbb{R}^m$ ;
- $x^{\min} \in \mathbb{R}^{nx}$  e  $x^{\max} \in \mathbb{R}^{nx}$ : é o limitante inferior e superior da variável  $x$ , respectivamente;
- $D_{y_i}$  representa o conjunto de valores discretos para a variável discreta  $y_i$ .

Dado o problema (4.1), utiliza-se a função senoidal proposta por Soler et al. (2013) dada por:

$$v\phi(y) \tag{4.2}$$

em que:

$$\phi(y) = \sum_{i=1}^{ny} \left[ \text{sen}\left(\frac{y_i}{y_i^{sup} - y_i^{inf}} \pi + \gamma\right) \right]^{2\varpi} \tag{4.3}$$

- $v > 0$  é o fator de ajuste que determina a amplitude da função  $\phi$ ;
- $\varpi$  é um número inteiro positivo;
- $y_i^{sup}$  é valor discreto mais próximo superiormente de  $y_i$ ;
- $y_i^{inf}$  é valor discreto mais próximo inferiormente de  $y_i$ ;
- $\gamma$  é uma constante tal que  $0 \leq \gamma < \pi$  escolhida de modo que a função  $\phi(y)$  se anule somente nos valores discretos de  $y$ .

Com isso:

$$\phi(y) = \begin{cases} 0, \text{ se } y_i \in D_{y_i}, \\ \sum_{i=1}^{ny} \left[ \text{sen}\left(\frac{y_i}{y_i^{sup} - y_i^{inf}} \pi + \gamma\right) \right]^{2\varpi} > 0, \text{ caso contrário} \end{cases}$$

ou seja,  $\phi(y)$  assume valores positivos somente se  $y$  não assumir valores discretos.

Assim, conforme Soler et al. (2013) encontrar uma solução ótima para o problema (4.1) é equivalente a resolver uma sequência de problemas (4.4):

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & f(x, y) + v\phi(y) \\ \text{sujeito a :} & \begin{cases} g(x, y) = 0, \\ h(x, y) \leq 0, \\ x^{min} \leq x \leq x^{max}, \\ y^{min} \leq y \leq y^{max}. \end{cases} \end{array} \tag{4.4}$$

Neste trabalho para resolver o PPNLDM (4.1), em cada iteração o problema (4.4) é resolvido pelo método definido na seção 4.3. Se na solução obtida para este problema

as variáveis  $y$  (variáveis discretas no problema original) assumem valores discretos, admitindo uma tolerância  $E_1$ , o algoritmo é finalizado e esta é uma solução para (4.4). Caso contrário a amplitude da função senoidal para variáveis discretas  $v^K$  é atualizada e um novo problema é resolvido. O processo prossegue até que as variáveis  $y_i$  assumam valores discretos segundo a tolerância  $E_1$ , ou seja, até que  $|y_i^* - y_i^{*'}| < E_1$ , para  $i = 1, 2, 3, \dots, n_y$ , onde  $y_i^{*'}$  é o valor discreto mais próximo de  $y_i^*$ . Para atualizar a amplitude da função  $v\phi(y)$  no decorrer das iterações atualiza-se o parâmetro por:  $v^{(K+1)} = cv^{(K)}$ , em que  $c > 1$ . Para  $c$  escolhido dessa maneira os valores do parâmetro  $v^k$  crescem gradualmente no decorrer das iterações, Soler (2011).

O método primal-dual de pontos interiores-penalidade definido a seguir, baseado em Curtis (2012) será explorado junto com a estratégia de Soler et al. (2013) para a resolução do FPOD.

### 4.3 Método primal-dual de pontos interiores-penalidade

Baseando-se em Curtis (2012) o método é proposto da seguinte forma. O problema (4.4) pode ser reescrito na forma dada em (4.5), em que  $z = (x, y)$  e  $q(z) = f(x, y) + v\phi(y)$ , para simplificar a notação  $h(x) \leq 0$  referem-se a todas as restrições de desigualdade de (4.4).

Dado o problema (4.5):

$$\begin{aligned} & \text{Min} && q(z) \\ & \text{sujeito a :} && \begin{cases} g(z) = 0 \\ h(z) \leq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (4.5)$$

em que:

- $q(z)$  é a função objetivo,  $q : \mathbb{R}^{nx+ny} \rightarrow \mathbb{R}$ ;
- $z \in \mathbb{R}^{nx+ny}$ ,  $g : \mathbb{R}^{nx+ny} \rightarrow \mathbb{R}^m$  e  $h : \mathbb{R}^{nx+ny} \rightarrow \mathbb{R}^p$ .

Quando os pontos factíveis de (4.5) não existem, o algoritmo deve retornar uma solução para o problema (4.6):

$$\text{Min } V(z) : \sum_{i=1}^p \max \{h_i(z), 0\} \quad (4.6)$$

Quando o problema é infactível, as iterações convergem rapidamente para um ponto estacionário infactível  $z^k$  que é definido como um ponto estacionário do problema (4.6) tal que  $V(z^k) > 0$ . Com isso, conclui-se que o problema (4.5) é localmente inviável, se houver um ponto estacionário inviável.

O método de penalidade transforma o problema (4.5), no seguinte problema modificado:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \rho q(z) + \sum_{i=1}^p r_i \\ \text{sujeito a :} \quad & \begin{cases} g(z) = 0 \\ h(z) - r \leq 0 \\ r \geq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (4.7)$$

em que:  $\rho \geq 0$  é o parâmetro de penalidade e  $r$  é a variável auxiliar. Um desafio na implementação de tal abordagem é uma estratégia para diminuir  $\rho$  durante o processo de convergência. Um segundo desafio é que muitas implementações de métodos de penalidade requerem a solução de subproblemas de otimização linear ou quadrática (Byrd et al. (2003), Byrd et al. (2005), Byrd et al. (2008) e Byrd et al. (2010)), porém para problemas de grande porte é inviável a aplicação.

O método de pontos interiores transforma o problema (4.5), no seguinte problema modificado:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & q(z) - \mu \sum_{i=1}^p \ln s_i \\ \text{sujeito a :} \quad & \begin{cases} g(z) = 0 \\ h(z) + s = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (4.8)$$

em que:  $\mu$  é o parâmetro de barreira e  $s$  é o vetor das variáveis folga.

Utilizando essas duas ideias apresentadas em (4.7) e (4.8), o método primal-dual de pontos interiores-penalidade (PDPIP) transforma o problema (4.5), no seguinte problema

equivalente:

$$\text{Min} \quad \Psi(d; \rho, \mu) \quad (4.9)$$

$$\text{sujeito a : } \eta(d) = 0. \quad (4.10)$$

em que:

$$\begin{aligned} \Psi(d; \rho, \mu) &= \rho q(z) - \mu \sum_{i=1}^p (\ln s_i + \ln r_i) + \sum_{i=1}^p r_i \\ \eta &= \begin{cases} h(z) + s - r \\ g(z) \end{cases} \\ d &= [z^T \ s^T \ r^T]^T \end{aligned} \quad (4.11)$$

Assim pode-se associar à (4.11) a seguinte função Lagrangiana do método primal-dual de pontos interiores-penalidade (LPDPIP):

$$\begin{aligned} LPDPIP(z, \lambda, \pi, s, r) &= \rho q(z) - \mu \sum_{i=1}^p (\ln s_i + \ln r_i) + \sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(z) \\ &+ \sum_{i=1}^p \pi_i (h_i(z) + s_i - r_i) + \sum_{i=1}^p r_i \end{aligned} \quad (4.12)$$

sendo:  $\lambda \in \mathbb{R}^m$  e  $\pi \in \mathbb{R}^p$  os vetores dos multiplicadores de Lagrange, isto é, as variáveis duais do problema,  $\mu$  é o parâmetro de barreira,  $\rho$  é o parâmetro de penalidade,  $s$  é o vetor das variáveis de folga e  $r$  representa as variáveis auxiliares.

A condição necessária de otimalidade de 1<sup>a</sup> ordem é aplicada sobre a função LPDPIP (4.12), gerando um sistema de equações não lineares, (4.13):

$$\nabla LPDPIP(z, s, r, \lambda, \pi) = 0, \quad (4.13)$$

em que:

$$\nabla LPDPIP = \begin{bmatrix} \rho \nabla q(z) + \nabla g(z)\lambda + \nabla h(z)\pi \\ -\frac{\mu}{s} + \pi, \\ +1 - \frac{\mu}{r} - \pi, \\ g(z), \\ (h(z) + s - r). \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

As soluções do sistema de equações não lineares (4.13) são determinadas através do método de Newton. O método de Newton gera as direções de busca  $(\Delta z^T, \Delta s^T, \Delta r^T, \Delta \lambda^T, \Delta \pi^T)^T$ , as quais serão utilizadas para a atualização das variáveis e resulta em um sistema linear representado em (4.15):

$$W \Delta d = -\nabla LPDPIP(z, s, r, \lambda, \pi) \quad (4.15)$$

sendo  $\Delta d^T = (\Delta z^T, \Delta s^T, \Delta r^T, \Delta \lambda^T, \Delta \pi^T)$ , o  $\nabla LPDPIP(z, s, r, \lambda, \pi)$  é dado por (4.14), e a matriz  $W$  por (4.16):

$$W = \begin{bmatrix} K & 0 & 0 & \nabla g(z)^T & \nabla h(z)^T \\ 0 & \Upsilon & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & \Phi & 0 & -I \\ \nabla g(z) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \nabla h(z) & I & -I & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

é denominada de matriz Hessiana da função LPDPIP (4.12).

em que:

$$K = \rho \nabla_{zz}^2 q(z) + \sum_{j=1}^m \lambda_j \nabla_{zz}^2 g_j(z) + \sum_{i=1}^r \pi_i \nabla_{zz}^2 h_i(z), \quad (4.17)$$

a submatriz  $S$ , é expressa por:

$$S = \text{diag}(s_1, \dots, s_p) \quad (4.18)$$

a submatriz  $S^{-1}$ , é expressa por:

$$S^{-1} = \text{diag}\left(\frac{1}{s_1}, \dots, \frac{1}{s_p}\right) \quad (4.19)$$

a submatriz  $R$ , é expressa por:

$$R = \text{diag}(r_1, \dots, r_p) \quad (4.20)$$

e a submatriz  $R^{-1}$ , é expressa por:

$$R^{-1} = \text{diag}\left(\frac{1}{r_1}, \dots, \frac{1}{r_p}\right) \quad (4.21)$$

A submatriz  $\Upsilon$  e  $\Phi$  pode ser escrita no sistema primal:

$$\begin{aligned} \Upsilon &= \mu S^{-2} \\ \Phi &= \mu R^{-2} \end{aligned} \quad (4.22)$$

ou no sistema primal-dual:

$$\begin{aligned} \Upsilon &= S^{-1}\Lambda \\ \Phi &= R^{-1}(I - \Lambda) \end{aligned} \quad (4.23)$$

em que:

$$\Lambda = \text{diag}(\pi_1, \dots, \pi_p)$$

A diferença entre o sistema primal e o sistema primal-dual é que o primal possuem apenas informações relacionadas as variáveis primais, já o sistema primal-dual possuem informações relacionadas às variáveis primais e duais. Estudos anteriores em diversos artigos, em pontos interiores, comprovaram que o método primal-dual obtêm melhores resultados, com isso adotou-se ele.

### 4.3.1 Correção de inércia

Segundo Silva (2014) quando o problema de otimização é não convexo, as direções de busca determinadas através da resolução do sistema (4.15) nem sempre são produtivas na busca de mínimos locais. Isto ocorre porque a resolução do sistema apenas visa a busca por pontos que satisfaçam as condições de KKT. Isto significa que não apenas pontos de mínimo local, mas também pontos de máximo e outros pontos estacionários podem ser determinados.

Nocedal et al. (2009) provaram que, diante de situações em que a matriz  $W$  não possui a inércia desejada, uma modificação pode ser feita na mesma, visando favorecer a obtenção de direções de descida ao resolver o sistema. Espera-se que a matriz Hessiana possua  $nx + ny + p$  autovalores positivos, relacionados às variáveis primais e ao problema de minimização, e  $m + p$  autovalores negativos, relacionados às variáveis duais e ao problema de maximização. Atualmente a correção da inércia é adotada em alguns pacotes de otimização como IPOPT e LOQO, entre outros.

Baseado nos trabalhos de Silva (2014) e Nocedal et al. (2009), a modificação realizada visa corrigir a inércia da matriz  $W$ . Primeiramente, nota-se que as matrizes  $\Upsilon$  e  $\Phi$  são sempre definidas positivas. Por outro lado, para a matriz  $K$  não há a mesma garantia. Portanto, a ideia é substituir esta matriz por  $K + \beta I_{nx+ny}$ , em que  $\beta > 0$  é escolhido suficientemente grande para assegurar que a inércia de  $W$  é igual  $I(W) = (nx + ny + p, m + p, 0)$ .

O valor necessário para o parâmetro  $\beta$  não é conhecido a priori, de modo que valores sucessivamente maiores devem ser testados, até que a inércia desejada seja obtida. Além disso, a matriz  $W$  pode se tornar singular devido à deficiência de posto da matriz  $\nabla g(z)$ . Este problema pode ser evitado através da utilização de um parâmetro  $\zeta > 0$  além do termo  $\beta I_n$  apresentado anteriormente. Desta forma, tem-se a matriz modificada:

$$W_k = \begin{bmatrix} K + \beta I_n & 0 & 0 & \nabla g(z)^T & \nabla h(z)^T \\ 0 & \Upsilon & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & \Phi & 0 & -I \\ \nabla g(z) & 0 & 0 & -\zeta I_m & 0 \\ \nabla h(z) & I & -I & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

O sinal  $-$  (negativo) para a perturbação  $\zeta I_m$  tem por objetivo evitar que um número excessivo de autovalores positivos sejam produzidos.

### 4.3.2 Algoritmo de correção de inércia

A atualização do parâmetro  $\beta$ , conforme Silva (2014) é dada por

$$\beta^{k+1} = \delta_1 \beta^k, \quad (4.25)$$

em que  $\delta_1 > 1$ .

Uma vez que a inércia desejada é obtida, o valor de  $\beta$  é reduzido através de um parâmetro  $\delta_2 > 1$ .

$$\beta^0 = \frac{\beta^k}{\delta_2} \quad (4.26)$$

A decomposição da matriz foi realizada com o comando do MATLAB *ldl*. O comando *ldl* utiliza uma rotina da LAPACK (*Linear Algebra Package*).

A seguir apresenta-se o algoritmo de correção de inércia proposto por Silva (2014).

---

**Algoritmo 6:** Algoritmo de correção de inércia

---

**Dados:** Faça  $\beta \leftarrow 0$  e escolha  $\delta_1 > 1$  e  $\delta_2 > 1$   
 Faça  $\beta \leftarrow \beta/\delta_2$  e  $\zeta \leftarrow 0$ ;  
 Faça a decomposição  $LDL^T$  da Matriz  $W_k$ ;  
 1 **enquanto**  $I(W_k) \neq (n + p, m + p, 0)$  **faça**  
 2      $\beta \leftarrow \delta_1\beta$ ;  
 3     **se**  $W_k$  possui autovalores nulos **então**  
 4          $\zeta \leftarrow 10^{-6}$ ;  
 5     **fim**  
 6     **se**  $\beta = 0$  **então**  
 7          $\beta \leftarrow 10^{-4}$ ;  
 8     **fim**  
 9     Realize a decomposição  $LDL^T$  da matriz  $W_k$   
 10 **fim**

---

### 4.3.3 Procedimento para atualização das variáveis de folga e auxiliares

Antes de resolver o sistema (4.15), realiza-se um procedimento adicional para ajustar as variáveis de folga e auxiliares. O procedimento faz uma atualização dessas variáveis, que segundo Curtis (2012) pode-se chamar de "passos mágicos" do algoritmo.

Suponha que  $z^k$  é dado para que  $h(z^k)$  seja conhecido. Em seguida, pode-se definir  $r^k$  e  $s^k$ , tais que:

$$\min_{r,s} -\mu \sum_{i=1}^p (\ln s_i + \ln r_i) + \sum_{i=1}^p r_i \quad (4.27)$$

$$\text{sujeito a : } \begin{cases} h(z^k) + s - r = 0. \end{cases} \quad (4.28)$$

Desta forma, obtêm-se a seguinte função Lagrangiana:

$$LFolga(s, r) = -\mu \sum_{i=1}^p (\ln s_i + \ln r_i) + \pi^T (h(z^k) + s - r) + \sum_{i=1}^p r_i \quad (4.29)$$

A condição necessária de otimalidade de 1ª ordem é aplicada sobre a  $LFolga$  (4.29):

$$\nabla LFolga(s, r) = 0. \quad (4.30)$$

isto é,

$$\nabla LFolga(s, r) = \begin{cases} -\frac{\mu}{s_i} + \pi_i, & i = 1, \dots, p \\ -\frac{\mu}{r_i} + 1 - \pi_i, & i = 1, \dots, p \end{cases} \quad (4.31)$$

A primeira ideia é encontrar  $s_i$ , utilizando as equações (4.27) e (4.31):

$$h_i(z^k) + s_i - r_i = 0 \implies r_i = h_i(z^k) + s_i \quad (4.32)$$

$$\frac{-\mu}{r_i} + 1 - \pi_i = 0 \implies \pi_i = \frac{-\mu}{h_i(z^k) + s_i} + 1 \quad (4.33)$$

Com isso, retornando-se na equação (4.31) e substituindo-se  $\pi_i$  obtêm-se:

$$\frac{-\mu}{s_i} + \left( \frac{-\mu}{h_i(z^k) + s_i} + 1 \right) = 0, \quad i = 1, \dots, p. \quad (4.34)$$

$$s_i^2 + (h_i(z^k) - 2\mu)s_i - \mu h_i(z^k) = 0, \quad i = 1, \dots, p, \quad (4.35)$$

e resolvendo a equação (4.35) pela fórmula de Bhaskara, têm-se que

$$\left\{ s_i^k = \mu - \frac{1}{2}h_i(z^k) + \frac{1}{2}\sqrt{h_i(z^k)^2 + 4\mu^2} \right. \quad (4.36)$$

A mesma ideia pode ser utilizada para determinar  $r_i$ . Em resumo as atualizações das

variáveis de folgas e auxiliares são dadas por:

$$\begin{cases} s_i^k = \mu - \frac{1}{2}(h_i(z^k)) + \frac{1}{2}\sqrt{(h_i(z^k))^2 + 4\mu^2} \\ r_i^k = \mu + \frac{1}{2}(h_i(z^k)) + \frac{1}{2}\sqrt{(h_i(z^k))^2 + 4\mu^2}. \end{cases} \quad (4.37)$$

Os autores Gould et al. (2003) também utilizaram os "passos mágicos" no seu algoritmo e obtiveram resultados promissores.

#### 4.3.4 Função mérito do método primal-dual de pontos interiores-penalidade

Uma função mérito é definida em (4.38) para equilibrar as prioridades de minimizar a função objetivo e satisfazer as restrições de igualdade e desigualdade.

$$\bar{\Psi}(z; \rho, \mu) = \rho q(z) - \mu \sum_{i=1}^p (\ln s_i^k + \ln r_i^k) + \sum_{i=1}^p r_i^k. \quad (4.38)$$

Pode-se provar que definido  $s_i^k$  e  $r_i^k$  por (4.37), a direção  $\Delta z$  obtida pela resolução de (4.15) é uma direção de descida para essa função mérito.

#### 4.3.5 Estratégia adaptativa para atualização dos parâmetros

A estratégia adaptativa consiste em atualizar  $\mu$  e  $\rho$  em todas as iterações. Durante uma iteração  $k$  são definidos dois conjuntos finitos  $U^k$  e  $N^k$  que contêm os valores de  $\mu$  e  $\rho$ , respectivamente.

Em resumo:

- A atualização do parâmetro de penalidade, se baseia na busca da factibilidade primal, conforme o artigo de Byrd et al. (2008);
- Já para o parâmetro de barreira, a atualização busca a factibilidade dual e complementaridade, com objetivo de calcular passos longos e atingir convergência rápida, conforme o artigo de Nocedal et al. (2009).

Realiza-se uma linearização em torno de  $d$  e para atualização de  $\rho$ , define-se o modelo

linear da função  $\Psi(d; \rho, \mu)$  em torno de  $d$ :

$$L(\Delta d; \rho, \mu, d) = \Psi(d; \rho, \mu) + \nabla \Psi(d; \rho, \mu)^T \Delta d. \quad (4.39)$$

Em uma iteração  $d^k$  e  $\Delta d^{k\rho,\mu}$  já determinados, para reduzir  $L(\Delta d; \rho, \mu, d)$  é realizada então:

$$\Delta L(\Delta d^k; \rho, \mu, d^k) = L(0; \rho, \mu, d^k) - L(\Delta d^k; \rho, \mu, d^k) \quad (4.40)$$

$$= -\nabla \Psi(d^k; \rho, \mu)^T \Delta d^{k\rho,\mu}. \quad (4.41)$$

Essa redução é positiva para qualquer passo diferente de zero. Em particular, uma solução diferente de zero para  $\rho = 0$ , é dada por:

$$\Delta L(\Delta d^k; 0, \mu, d^k) > 0. \quad (4.42)$$

O fato deste valor ser positivo é importante porque ele pode ser utilizado como uma medida do potencial de progresso em relação à factibilidade primal, a partir da iteração atual. O objetivo é garantir que o progresso em direção à factibilidade primal (linearizada) seja proporcional ao que seria obtido com  $\rho = 0$ . Para este fim, junto com o modelo linear (4.39) definido acima, também define-se o modelo linear para a função mérito (4.38), dada por:

$$\bar{L}(\Delta z; \rho, \mu, z) = \bar{\Psi}(z; \rho, \mu) + \nabla \bar{\Psi}(z; \rho, \mu)^T \Delta z. \quad (4.43)$$

A redução predita pelo modelo linear de  $\bar{\Psi}$  em um ponto  $z^k$ , devido ao passo  $\Delta z^{k\rho,\mu}$  obtida em (4.15) é reduzida em:

$$\Delta \bar{L}(\Delta z^k; \rho, \mu, z^k) = \bar{L}(0; \rho, \mu, z^k) - \bar{L}(\Delta z^k; \rho, \mu, z^k) \quad (4.44)$$

$$= -\nabla \bar{\Psi}(z^k; \rho, \mu)^T \Delta z^k. \quad (4.45)$$

Assim, um par admissível  $\rho$  e  $\mu$  deve satisfazer:

$$\Delta \bar{L}(\Delta z^{k\rho,\mu}; 0, \mu, z^k) \geq e_1 \Delta L(\Delta d^{k0,\mu}; 0, \mu, d^k) > 0. \quad (4.46)$$

em que:  $e_1 \in (0, 1)$ .

As condições devem garantir que a direção da busca seja de descida suficiente para a função mérito. Isso é comumente feito garantindo que a direção produza uma redução suficiente em um modelo quadrático da função, proposto por Byrd et al. (2008).

O modelo quadrático da função mérito é dada por:

$$\begin{aligned} \bar{Q}(\Delta z; \rho, \mu, z, \pi) &= \bar{L}(\Delta z; \rho, \mu, z) \\ &+ \frac{1}{2} \Delta z^T (K + \nabla h(z)(\Upsilon^{-1} + \Phi^{-1})^{-1} \nabla h(z)^T) \Delta z. \end{aligned} \quad (4.47)$$

A redução predita pelo modelo quadrático da função mérito:

$$\begin{aligned} \Delta \bar{Q}(\Delta z^k; \rho, \mu, z^k, \pi^k) &= \bar{Q}(0; \rho, \mu, z^k, \pi^k) - \bar{Q}(\Delta z^k; \rho, \mu, z^k, \pi^k) \\ &= \Delta \bar{L}(\Delta z^k; \rho, \mu, z^k) \\ &- \frac{1}{2} \Delta z^k T (K^k + \nabla h(z^k)(\Upsilon^{k-1} + \Phi^{k-1})^{-1} \nabla h(z^k)^T) \Delta z^k. \end{aligned} \quad (4.48)$$

Assim um par admissível  $\rho$  e  $\mu$  deve satisfazer:

$$\Delta \bar{Q}(\Delta z^k; \rho, \mu, z^k, \pi^k) \geq e_2 \Delta L(\Delta d^k; 0, \mu, d^k) > 0. \quad (4.49)$$

em que:  $e_2 \in (0, 1)$

Para obter a convergência superlinear, para os casos infactíveis, baseado no artigo de Byrd et al. (2010). Um par admissível deve garantir que  $\rho$  satisfaça:

$$\rho \leq \left\| \left\| \begin{bmatrix} \nabla h(z^k) \pi^k \\ S^k \pi^k \\ R^k (e - \pi^k) \end{bmatrix} \right\| \right\|^2 \quad (4.50)$$

Em resumo, se a iteração atual não for suficientemente viável (calculado por (4.6)), então (4.46) garante progresso na viabilidade linearizada, (4.49) garante uma direção de descida suficiente para a função mérito, e (4.50) promove convergência rápida para pontos estacionários infactíveis. Se, por outro lado, a iteração atual já é suficientemente viável, então não se aplica qualquer um de (4.46), (4.49) e (4.50), mas exige-se que:

$$\Delta\bar{Q}(\Delta z^k; \rho, \mu, z^k, \pi^k) > 0, \quad (4.51)$$

para obter uma direção de descida para a função mérito.

Seja  $\rho$  fixado como o maior valor em  $N^k$  tal que, para algum  $\mu \in U^k$  o par é admissível de acordo com as estratégias acima. Sendo  $A^k$  o conjunto de todos os pares admissíveis, então escolhe-se  $\mu$  de acordo com a seguinte estratégia.

Para satisfazer as condições de factibilidade dual e complementaridade é definida a função de qualidade:

$$M(\Delta d, \Delta\pi; \rho, \mu, d) = \left\| \left[ \begin{array}{c} \rho \nabla q(z) + \nabla g(z)(\lambda + \Delta\lambda) + \nabla h(z)(\pi + \Delta\pi) \\ (S + \Delta S)(\pi + \Delta\pi) \\ (R + \Delta R)(e - \pi - \Delta\pi) \end{array} \right] \right\|_{\infty} \quad (4.52)$$

Com isso, escolhe-se  $\mu$  sendo o maior valor de  $M^k$  e

$$M(\Delta d^{k^{\rho, \mu}}, \Delta\pi^{k^{\rho, \mu}}; \rho, \mu, d^k) \leq e_3 M(\Delta d^{k^{\rho, \bar{\mu}}}, \Delta\pi^{k^{\rho, \bar{\mu}}}; \rho, \bar{\mu}, d^k) \quad (4.53)$$

em que  $e_3 > 1$  e  $\bar{\mu}$  é o valor que minimiza a função qualidade, dentre os valores admissíveis.

### 4.3.6 Algoritmo adaptativo para atualização de parâmetros

---

**Algoritmo 7:** Algoritmo adaptativo para atualização de parâmetros

---

- 1 **Defina** o valor inicial para  $e_1, e_2 \in (0, 1)$  e  $e_3 > 1$ ;
  - 2 **Defina**  $N^k$  e  $U^k$ , o conjunto finito de  $\rho$  e  $\mu$ , respectivamente;
  - 3 **se**  $V(z) < \epsilon$ , vá para o passo 4, **senão** vá para o passo 5;
  - 4 **Atualize o parâmetro de penalidade, caso viável:** **Se**  $A^k = \emptyset$  mantenha o par  $\mu$  e  $\rho$  e vá para o passo 7, **senão** escolha o maior  $\rho$  e vá para o passo 6;
  - 5 **Atualize o parâmetro de penalidade, caso inviável:** **Se**  $A^k = \emptyset$  mantenha o par  $\mu$  e  $\rho$  e vá para o passo 7, **senão** escolha o maior  $\rho$ ;
  - 6 **Atualize o parâmetro de barreira:** **Defina**  $\bar{\mu}$  como um valor de  $M^k$  de modo que (4.52) é minimizado. Então, **Defina**  $\mu$  como o maior valor tal que satisfaça (4.53);
  - 7 **Defina**  $\Delta d^k, \Delta\pi^k$  como solução para (4.15)
- 

Os vetores das variáveis  $z, s, r, \lambda$  e  $\pi$  são atualizados da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 z^{k+1} &= z^k + \alpha_p \Delta z^k \\
 s^{k+1} &= s^k + \alpha_p \Delta s^k \\
 r^{k+1} &= r^k + \alpha_p \Delta r^k \\
 \lambda^{k+1} &= \lambda^k + \alpha_d \Delta \lambda^k \\
 \pi^{k+1} &= \pi^k + \alpha_d \Delta \pi^k,
 \end{aligned} \tag{4.54}$$

em que:

$\alpha_p$  e  $\alpha_d$  são os passos utilizados na atualização das variáveis primais e duais, respectivamente.

Para a determinação dos passos primais e duais adota-se uma adaptação da estratégia utilizada por Granville (1994) e Torres & Quintana (2001), entre outros.

O objetivo do passo primal é garantir que as variáveis primais obedecem a seus limites. Assim, esse passo é dado por (4.55):

$$\alpha_p = \min\left\{\left(\delta \min_{\Delta s_i < 0 \text{ e } s_i > 0} \frac{-s_i}{\Delta s_i}, \delta \min_{\Delta r_i < 0 \text{ e } r_i > 0} \frac{-r_i}{\Delta r_i}, 1\right), i = 1, \dots, p\right\}. \tag{4.55}$$

O passo dual é calculado de forma que cada componente dos vetores duais das restrições de desigualdade  $\pi$  permaneçam com seus respectivos sinais, isto é:

$$\alpha_d = \min\left\{\left(\delta \min_{\Delta \pi_i < 0 \text{ e } \pi_i > 0} \frac{-\pi_i}{\Delta \pi_i}, 1\right), i = 1, \dots, p\right\}. \tag{4.56}$$

Em (4.55) e (4.56) adota-se:  $\delta = 0,9995$ .

As condições  $s_i > 0$ ,  $r_i > 0$  e  $\pi_i > 0$  devem ser satisfeitas em todos os pontos. O método termina quando as condições de KKT são satisfeitas.

### 4.3.7 Algoritmo do método primal-dual de pontos interiores-penalidade Discreto (PDPIP-Adaptativo)

A seguir apresenta-se o algoritmo PDPIP-Adaptativo.

---

**Algoritmo 8:** Algoritmo do método primal-dual de pontos interiores-penalidade Discreto (PDPIP-Adaptativo)

---

**Dados:** Dado o problema (4.4), construa a LPDPIP,  $E_1 = E_2 = 10^{-4}$  e  $E_3 = 10^{-3}$ ,  
 Faça  $k = 0$ ,  $K = 0$ , obtenha uma estimativa inicial para  $d^0 = (z^0, \lambda^0, \pi^0)$ , Calcule as variáveis de folga por (4.37),  $\rho^0, \mu^0, v^1$ :

- 1 **enquanto**  $|y_i^* - y_i^{*'}| > E_1$  **faça**
- 2     **enquanto** *As condições de KKT*  $> E_2$  **faça**
- 3         **se**  $I(W_k) \neq (nx + ny + p, m + p, 0)$  **então**
- 4             **Execute** o Algoritmo 6
- 5         **fim**
- 6         **Obtenha** o sistema (4.24) e resolva-o;
- 7         **Encontre** o par admissível pelo Algoritmo 7
- 8         **Calcule** os passos  $\alpha_p$  e  $\alpha_d$ , utilizando (4.55) e (4.56);
- 9         **se** *As condições de KKT*  $< E_3$  **então**
- 10             **Atualize** as variáveis de folga por (4.37)
- 11         **fim**
- 12         **Atualize** as variáveis por (4.54), faça  $k = k + 1$ ;
- 13     **fim**
- 14     **Atualize** o parâmetro da função senoidal por  $v^{(K+1)} = cv^{(K)}$ ,  $\mu^k = \mu^0, \rho^k = \rho^0$   
        faça  $K = K + 1$  ;
- 15 **fim**

---

### 4.3.8 Método primal-dual de pontos interiores-penalidade Discreto (PDPIP-Conservativo)

O Algoritmo 8 ao atualizar os parâmetros requer vários cálculos, com isso nesse trabalho é proposto um mais "simples" baseado também em Curtis (2012). O Algoritmo 9 realiza a redução dos parâmetros de barreira e penalidade apenas com um fator de redução, isto é:

$$\mu^{k+1} = \frac{\mu^k}{\beta_2} \tag{4.57}$$

$$\rho^{k+1} = \frac{\rho^k}{\beta_3} \tag{4.58}$$

em que:  $\beta_2 > 1$  e  $\beta_3 > 1$ . Todos os outros passos para a definição do Algoritmo 9 são semelhantes àqueles definidos no Algoritmo 8.

**Algoritmo 9:** Algoritmo do método primal-dual de pontos interiores-penalidade Discreto (PDPIP-Conservativo)

---

**Dados:** Dado o problema (4.4), construa a LPDPIP,  $E_1 = E_2 = 10^{-4}$  e  $E_3 = 10^{-3}$ , Faça  $k = 0$ ,  $K = 0$ , obtenha uma estimativa inicial para  $d^0 = (z^0, \lambda^0, \pi^0)$ , Calcule as variáveis de folga por (4.37),  $\rho^0, \mu^0, v^1$ :

```

1 enquanto  $|y_i^* - y_i^{*'}| > E_1$  faça
2   enquanto As condições de KKT  $> E_2$  faça
3     se  $I(W_k) \neq (n + p, m + p, 0)$  então
4       | Execute o Algoritmo 6
5     fim
6     Obtenha o sistema (4.24) e resolva-o;
7     Calcule os passos  $\alpha_p$  e  $\alpha_d$ , utilizando (4.55) e (4.56);
8     se As condições de KKT  $< E_3$  então
9       | Atualize as variáveis de folga por (4.37)
10      | Atualize o parâmetro  $\mu$  por (4.57)
11      | se  $V(x^k) > V(x)^{k-1}$  então
12        | Atualize o parâmetro  $\rho$  por (4.58)
13      fim
14    fim
15    Atualize as variáveis por (4.54), faça  $k=k+1$ ;
16  fim
17  Atualize o parâmetro da função senoidal por  $v^{(K+1)} = c * v^{(K)}$ ,  $\mu^k = \mu^0$ ,
     $\rho^k = \rho^0$  faça  $K=K+1$  ;
18 fim

```

---

## 4.4 Exemplo numérico

Nesta seção apresenta-se um exemplo numérico e a sua resolução com os Algoritmos 8 e 9.

Seja o problema de otimização não linear discreto misto, proposto por Soler (2011):

$$\begin{aligned}
 & \text{Min} && (x_1 - 2)^4 + (x_1 - 2x_2)^2 \\
 & \text{sujeito a :} && \begin{cases} x_1^2 - x_2 = 0; \\ x_1 \in \{0, 8; 0, 9; 1, 1, 1, 1, 2\} \end{cases}
 \end{aligned} \tag{4.59}$$

O problema (4.59) pode ser transformado no problema (4.60).

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & (x_1 - 2)^4 + (x_1 - 2x_2)^2 + v \text{sen}\left(\frac{x_1\pi}{0,1}\right)^2 & (4.60) \\ \text{sujeito a :} \quad & \begin{cases} x_1^2 - x_2 = 0; \\ 0,8 \leq x_1 \leq 1,2 \end{cases} \end{aligned}$$

O método PDPIP transforma o problema (4.60) no seguinte problema modificado:

$$\text{Min } \rho((x_1 - 2)^4 + (x_1 - 2x_2)^2 + v \text{sen}\left(\frac{x_1\pi}{0,1}\right)^2) \quad (4.61)$$

$$-\mu(\ln s_1 + \ln r_1) - \mu(\ln s_2 + \ln r_2) + r_1 + r_2 \quad (4.62)$$

$$\text{sujeito a : } x_1^2 - x_2 = 0; \quad (4.63)$$

$$-x_1 + s_1 - r_1 + 0,80 = 0 \quad (4.64)$$

$$x_1 + s_2 - r_2 - 1,20 = 0 \quad (4.65)$$

O Algoritmo dos métodos PDPIP-Adaptativo e PDPIP-Conservativo foram implementados em MATLAB R.2010b. Os testes foram realizados em um computador Intel Core i5-2GHz, com 4 Gbytes de memória RAM, do LOEESP (Laboratório de Otimização e Estudos Econômicos em Sistemas Elétricos de Potência), da Faculdade de Engenharia de Bauru-Unesp.

A Tabela 4.1 apresenta os valores iniciais dos parâmetros.

Tabela 4.1: Valores Iniciais dos Parâmetros

Parâmetro	Valor	Parâmetro	Valor
$c$	2,9	$\delta_2$	10
$v$	0,01	$e_1$	0,01
$\varpi$	2	$e_2$	0,01
$\gamma$	0	$e_3$	1,5
$\rho$	0,01	$e_4$	100
$\mu$	0,001	$E_1$	0,00001
$\beta$	0,0001	$E_2$	0,001
$\delta_1$	1,3	$E_3$	0,0001
$\beta_2$	2,4	$\delta$	0,9995
$\beta_3$	10	$\kappa_1$	$\frac{5}{12}$
$e$	0,001	$\kappa_2$	$\frac{5}{6}$

O conjunto  $U^k = \{\kappa_1^8 \mu^0; \kappa_1^7 \mu^0; \kappa_1^6 \mu^0; \kappa_1^5 \mu^0; \kappa_1^4 \mu^0; \kappa_1^3 \mu^0; \kappa_1^2 \mu^0; \kappa_1 \mu^0; \mu^0\}$   
e  $N^k = \{\kappa_2^8 \rho^0; \kappa_2^7 \rho^0; \kappa_2^6 \rho^0; \kappa_2^5 \rho^0; \kappa_2^4 \rho^0; \kappa_2^3 \rho^0; \kappa_2^2 \rho^0; \kappa_2 \rho^0; \rho^0\}$ .

A Tabela 4.2 apresenta o processo de convergência externa do método de PDPIP-Adaptativo para o exemplo numérico (4.59).

O ponto inicial para as variáveis são  $x_1 = 0,8$  e  $x_2 = 0,88$ .

Tabela 4.2: Convergência do método de PDPIP-Adaptativo para o exemplo numérico pelo  
Algoritmo 8

It.	$x_1$	$x_2$	$v$
1	0,8017	0,6428	0,0290
2	0,9206	0,8476	0,0841
3	0,9082	0,8248	0,2439
4	0,9031	0,8156	0,7073
5	0,9011	0,8120	2,0511
6	0,9004	0,8107	5,9482
7	0,9001	0,8101	17,2499
8	0,9000	0,8101	50,0246

A Tabela 4.3 apresenta o processo de convergência externa do método PDPIP-Conservativo para o exemplo numérico 4.59.

O ponto inicial para as variáveis são  $x_1 = 0,8$  e  $x_2 = 0,88$ .

Tabela 4.3: Convergência do método de PDPIP-Conservativo para o exemplo numérico pelo Algoritmo 9

It.	$x_1$	$x_2$	$v$
1	0,9409	0,8853	0,0290
2	0,9692	0,9393	0,0841
3	0,9082	0,8248	0,2439
4	0,9031	0,8156	0,7073
5	0,9011	0,8120	2,0511
6	0,9004	0,8107	5,9482
7	0,9001	0,8102	17,2499
8	0,9000	0,8101	50,0296

Na Figura (4.1) têm-se o processo de convergência externa das variáveis  $x_1$  e  $x_2$ , para os métodos PDPIP-Adaptativo e PDPIP-Conservativo.

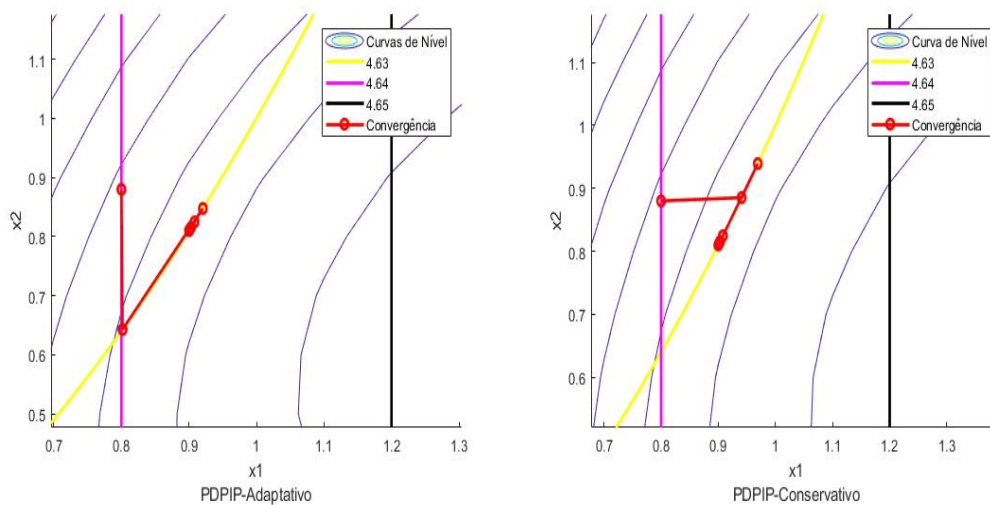


Figura 4.1: Convergência dos métodos PDPIP-Adaptativo e PDPIP-Conservativo para o exemplo numérico.

Observa-se na Figura 4.1 que os métodos obtiveram "caminhos" de convergência diferentes devido a atualização dos parâmetros de barreira e de penalidade. Na Figura 4.2 têm-se o processo de convergência externa das variáveis de folga e auxiliar,  $s_1$  e  $r_1$ , respectivamente, para os métodos PDPIP-Adaptativo e PDPIP-Conservativo, sendo o valor inicial para as variáveis  $r_1 = 0,0020$  e  $s_2 = 0,0020$ :

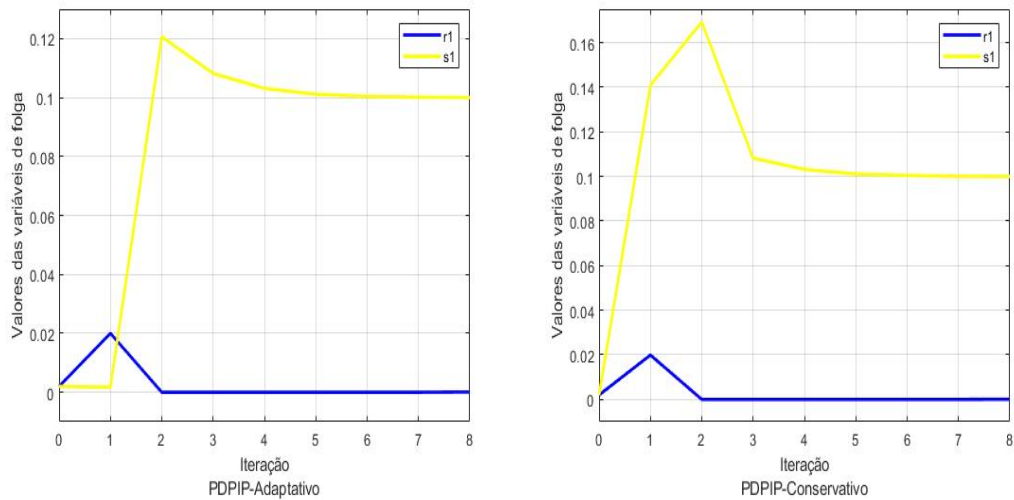


Figura 4.2: Convergência das variáveis de folga  $s_1$  e auxiliar  $r_1$

Na Figura 4.3 têm-se o processo de convergência externa das variáveis de folga e auxiliar,  $s_2$  e  $r_2$ , respectivamente, para os métodos PDPIP-Adaptativo e PDPIP-Conservativo, sendo o valor inicial para as variáveis  $r_2 = 0,0010$  e  $s_2 = 0,4010$ :

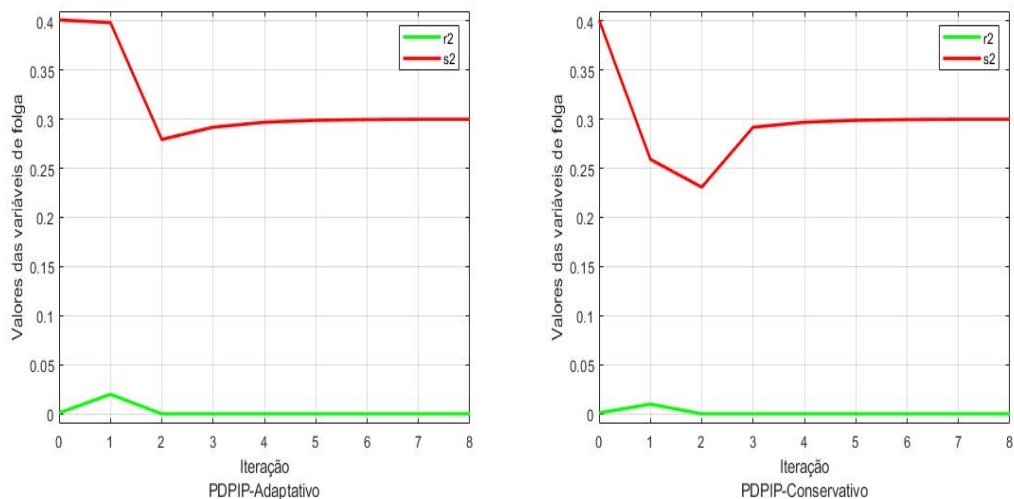


Figura 4.3: Convergência das variáveis de folga  $s_2$  e auxiliar  $r_2$

Observa-se nas Figuras 4.2 e 4.3 que durante o processo iterativo as variáveis auxiliares  $r$  que estão relacionadas com o método de penalidade tendem para 0, já as variáveis de folga  $s$  que estão relacionadas com o método de pontos interiores satisfazem as restrições de desigualdade. Nota-se também que, os dois Algoritmos convergiram em 8 iterações. O método proposto neste capítulo é de interesse à resolução do problema de FORD que será apresentado no próximo Capítulo.

# Problema de Fluxo de Potência Ótimo Reativo com Variáveis de Controle Discretas

Neste capítulo apresenta-se a formulação do problema de FPOR com variáveis de controle discretas e contínuas (FPORD).

## 5.1 Introdução

O problema de FPO é representado matematicamente por um problema de otimização não linear, restrito, não convexo, e de grande porte com variáveis contínuas e inteiras, o qual busca o melhor ponto de operação de um sistema elétrico de potência, para um dado objetivo, satisfazendo as restrições operativas. Esse objetivo pode ser o de minimizar perdas de potência ativa no sistema de transmissão, minimizar custo na geração de energia, custo de alocação de reativos, entre outros. No FPO as restrições são formadas pelo equilíbrio de potência ativa e reativa, pelos limites operacionais dos equipamentos e outras restrições referentes ao sistema elétrico.

Neste trabalho a função objetivo utilizada é a de minimização de perdas de potência ativa na transmissão e trabalha-se com o problema de FPOR com variáveis discretas (FPORD).

### 5.1.1 Notação

Conjuntos:

- $\vartheta_k$  é o conjunto das barras  $m$  diretamente conectadas à barra  $k$ ;
- $G$ : é o conjunto das barras de geração do sistema, incluindo a barra *slack*;
- $G'$ : é o conjunto das barras de geração do sistema com exceção da barra *slack*;
- $B$ : é o conjunto de todas as barras do sistema;
- $C$ : é o conjunto das barras de carga do sistema;
- $B^{sh}$ : é o conjunto das barras com controle de magnitude de tensão por bancos de capacitores e reatores *shunt*;
- $L$ : é o conjunto das linhas de transmissão;
- $T$ : é o conjunto dos transformadores em-fase com *tap* variável em carga;
- $T_{km}$ : é o conjunto predeterminado de valores discretos para o *tap* do transformador em-fase no ramo  $km$ ;
- $D_k^{sh}$ : é o conjunto predeterminado de valores discretos para a susceptância equivalente dos bancos de capacitores e reatores *shunt* na barra  $k$ .

Parâmetros:

- $g_{km}$ : é a condutância série do ramo  $(k, m)$ ;
- $b_{km}$ : é a susceptância série do ramo  $(k, m)$ ;
- $b_{km}^{sh}$ : é a susceptância *shunt* do ramo  $(k, m)$ ;
- $V_k^{min}$  e  $V_k^{max}$ : são os valores dos limitantes inferior e superior, respectivamente, para a magnitude de tensão na barra  $k$ ;
- $Q_{G_k}^{min}$  e  $Q_{G_k}^{max}$ : são as gerações de potência reativa mínima e máxima, respectivamente, na barra  $k$ ;
- $b_k^{min}$  e  $b_k^{max}$ : são os valores dos limitantes inferior e superior, respectivamente, para a susceptância equivalente do banco de capacitores e reatores *shunt* na barra  $k$ ;
- $tap_{km}^{min}$  e  $tap_{km}^{max}$ : são os valores dos limitantes inferior e superior, respectivamente, para o *tap* do transformador em-fase no ramo  $(k, m)$ ;

- $P_k$ : é a injeção líquida de potência ativa na barra  $k$ ;
- $Q_k$ : é a injeção líquida de potência reativa na barra  $k$ ;
- $Q_k^C$ : é a demanda de potência reativa na barra  $k$ ;
- $\theta_{slack}$ : é o ângulo de tensão da barra *slack*.

Variáveis:

- $V \in \mathbb{R}^{|B|}$ : é o vetor que representa as magnitudes de tensão do sistema;
- $tap \in \mathbb{R}^{|T|}$ : é o vetor que representa os *taps* dos transformadores em-fase sob carga do sistema;
- $\theta \in \mathbb{R}^{|B|-1}$ : é o vetor que representa os ângulos de tensão do sistema;
- $b^{sh} \in \mathbb{R}^{|B^{sh}|}$ : é o vetor que representa as susceptâncias equivalentes dos bancos de capacitores e reatores *shunt* do sistema.

Funções:

- $f(V, tap, \theta, b_k^{sh})$ : é a função objetivo que representa as perdas de potência ativa nos ramos do sistema;
- $P_{km}(V, tap, \theta)$ : é a função que representa a potência ativa fluindo da barra  $k$  para a barra  $m$ ;
- $Q_{km}(V, tap, \theta)$ : é a função que representa a potência reativa fluindo da barra  $k$  para a barra  $m$ ;
- $Q_k^{sh}(V, tap, \theta, b_k^{sh})$ : é a função que representa a potência reativa gerada na barra  $k$  por um banco de capacitores e reatores *shunt* conectado à barra  $k$ ;
- $Q_k^G(V, tap, \theta, b_k^{sh})$ : é a função que representa a potência reativa gerada na barra  $k$ .

Desta forma o modelo matemático do problema com variáveis contínuas e discretas, pode ser escrito da seguinte forma:

$$\text{Min } f(V, tap, \theta)$$

*sujeito a :*

$$P_k - \sum_{m \in \vartheta_k} P_{km}(V, tap, \theta) = 0, \quad \forall k \in G' \cup C \quad (5.1)$$

$$Q_k + Q_k^{sh}(V, tap, \theta, b_k^{sh}) - \sum_{m \in \vartheta_k} Q_{km}(V, tap, \theta) = 0, \quad \forall k \in C \quad (5.2)$$

$$Q_{G_k}^{min} \leq Q_{G_k}(V, \theta, tap, b_k^{sh}) \leq Q_{G_k}^{max}, \quad \forall k \in G \quad (5.3)$$

$$V_k^{min} \leq V_k \leq V_k^{max}, \quad \forall k \in B \quad (5.4)$$

$$tap_{km} \in T_{km}, \quad \forall (k, m) \in T \quad (5.5)$$

$$b_k^{sh} \in D_k^{sh}, \quad \forall k \in B^{sh}, \quad (5.6)$$

sendo que o ângulo de tensão da barra *slack* é fixado em zero.

A função objetivo escolhida são as perdas de potência ativa nas linhas de transmissão, a qual é escrita da seguinte forma:

$$f(V, tap, \theta, b_k^{sh}) = \sum_{(km) \in L \cup T} g_{km} \left[ \left( \frac{1}{tap_{km}^2} V_k^2 + V_m^2 - 2 \frac{1}{tap_{km}} V_k V_m \cos(\theta_{km}) \right) \right]; \quad (5.7)$$

Seja o modelo de transformador adotado na Figura 5.1. O modelo deste transformador consiste em um auto-transformador ideal com relação de transformação  $a_{km} = 1$  e uma admitância série de  $y_{km}$  (para transformadores em fase, o qual é adotado neste trabalho, tem-se  $a_{km} = t_{km}$ , dado por um número real) Tófoli (2017). Com a aplicação da lei de Kircchoff e relações entre as magnitudes dos nós no circuito, as equações para as correntes  $I_{km}$  e  $I_{mk}$  são determinadas Monticelli (1983).

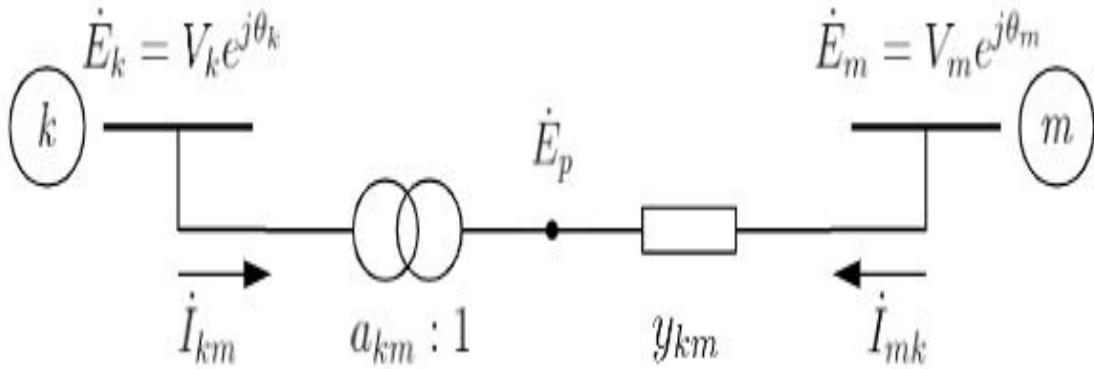


Figura 5.1: Modelo de um transformador ideal regulador em fase Lage (2013)

Admitindo que a barra  $k$  é a barra ao lado do  $tap$ , os fluxos de potência ativa e reativa podem ser calculados através das seguintes expressões gerais Lage (2013):

$$P_{km}(V, tap, \theta) = g_{km} \frac{1}{tap_{km}^2} V_k^2 - \frac{1}{t_{km}} V_k V_m [g_{km} \cos(\theta_{km}) + b_{km} \sin(\theta_{km})] \quad (5.8)$$

$$P_{mk}(V, tap, \theta) = g_{km} V_m^2 - \frac{1}{t_{km}} V_k V_m [g_{km} \cos(\theta_{mk}) + b_{km} \sin(\theta_{mk})] \quad (5.9)$$

$$Q_{km}(V, tap, \theta) = -(b_{km} \frac{1}{tap_{km}^2} + b_{km}^{sh}) V_k^2 + \frac{1}{tap_{km}} V_k V_m [b_{km} \cos(\theta_{km}) - g_{km} \sin(\theta_{km})] \quad (5.10)$$

$$Q_{mk}(V, tap, \theta) = -(b_{km} + b_{km}^{sh}) V_m^2 + \frac{1}{tap_{km}} V_k V_m [b_{km} \cos(\theta_{mk}) - g_{km} \sin(\theta_{mk})] \quad (5.11)$$

em que:

$$\theta_{km} = \theta_k - \theta_m$$

Para linhas de transmissão,  $tap_{km} = 1$ ; para transformadores em-fase com  $tap$  variável sob carga,  $b_{km}^{sh} = 0$ .

A geração de potência reativa nas barras de geração pode ser calculada através da

seguinte expressão:

$$Q_k^G(V, tap, \theta, b_k^{sh}) = Q_k^C - Q_k^{sh}(V_k, b_k^{sh}) + \sum_{m \in \vartheta_k} Q_{km}(V, tap, \theta) \quad (5.12)$$

em que:

$$Q_k^{sh}(V_k, b_k^{sh}) = b_k^{sh} V_k^2 \quad (5.13)$$

Com isso foi apresentado um problema de FPOR discreto (FPORD). Já o FPOR clássico (FPOR), substitui a (5.5) e (5.6), respectivamente, por (5.14) e (5.15).

$$tap_{km}^{min} \leq tap_{km} \leq tap_{km}^{max}, \quad \forall (k, m) \in T \quad (5.14)$$

$$b_k^{min} \leq b_k \leq b_k^{max}, \quad \forall k \in B^{sh} \quad (5.15)$$

em que:

$$tap_{km}^{min} = \min D_{km}^{tap}$$

$$tap_{km}^{max} = \max D_{km}^{tap}$$

$$b_k^{min} = \min D_k^{sh}$$

$$b_k^{max} = \max D_k^{sh}$$

(5.16)

Segundo Monticelli & Liu (1992) a função objetivo escolhida é não separável e não permite simplificações, fato este que dificulta ainda mais a resolução do problema de FPORD.

No próximo capítulo apresentam-se os resultados numéricos com problemas de FPOR e FPORD associados a determinados sistemas elétricos, os quais são resolvidos pela abordagem proposta.

## Resultados numéricos

Para verificar a eficiência do método de solução proposto foram realizados testes numéricos com os Algoritmos: primal-dual de pontos interiores-penalidade-Adaptativo (PDPIP-Adaptativo) 8, primal-dual de pontos interiores-penalidade-Conservativo (PDPIP-Conservativo) 9 e primal-dual barreira logarítmica (PDBL) 3. No PDBL também foi acoplada a estratégia de Soler et al. (2013) para tratar as variáveis discretas do problema de FPORD.

Os dados dos sistemas elétricos IEEE 30, 57, 118 e 300 barras, tanto no problema de FPOR clássico com as variáveis consideradas como contínuas, bem como no problema de FPORD com as variáveis contínuas e discretas, podem ser encontrados em UWEE (2019). A função objetivo considerada em todos os testes foram as perdas de potência ativa na transmissão.

A implementação computacional do método foi realizada em MATLAB R.2010b em um computador Intel Core i5- 2GHz, com 4 Gbytes de memória RAM, do LOEESP (Laboratório de Otimização e Estudos Econômicos em Sistema Elétricos de Potência), do Departamento de Engenharia Elétrica, da Faculdade de Engenharia de Bauru.

Para a resolução do FPORD, inicia-se com o vetor das magnitudes de tensão  $V_k = 1$ , o vetor dos *taps*  $tap_k = 1$ , e o vetor dos ângulos  $\theta_k = 0$  em radianos.

Os limites mínimos e máximos das magnitudes de tensão das barras foram  $V_{min} = 0,95 p.u$  e  $V_{max} = 1,05 p.u$ , respectivamente, exceto para sistema elétrico IEEE 300 barras que foi  $V_{min} = 0,94 p.u$  e  $V_{max} = 1,06 p.u$ .

Nos testes realizados com os sistemas elétricos IEEE 30, 57, 118 e 300 barras considerou-se que os *taps* dos transformadores devem pertencer ao conjunto apresentado a seguir, de

acordo com Lage (2013):

$$T = \{0, 88; 0, 8875; 0, 895; 0, 9025; 0, 91; 0, 9175; 0, 925; 0, 9325; 0, 94; 0, 9475; 0, 955; 0, 9625; 0, 97; 0, 9775; 0, 985; 0, 9925; 1; 1, 0075; 1, 015; 1, 0225; 1, 03; 1, 0375; 1, 045; 1, 0525; 1, 06; 1, 0675; 1, 075; 1, 0825; 1, 09; 1, 0975; 1, 105; 1, 1125; 1, 12\}$$

No caso discreto, os três algoritmos ( PDPIP-Adaptativo, PDPIP-Conservativo e PDBL) possuem dois ciclos: o ciclo interno que resolve o problema contínuo e o ciclo externo que resolve o problema discreto. Em todas as Tabelas somente o número de iterações externas são apresentadas.

A tabela 6.1 apresenta os valores iniciais adotados para os parâmetros para todos os problemas de FPOR e FPORD associados aos sistemas elétricos testados.

Tabela 6.1: Valores iniciais dos parâmetros para todos os problemas de FPOR e FPORD associados aos sistemas elétricos testados:

Parâmetro	Valor	Parâmetro	Valor
$c$	6, 8	$\delta_2$	10
$v$	0, 00001	$e$	0, 001
$\varpi$	2	$e_1$	0, 01
$\gamma$	0	$e_2$	0, 01
$\rho$	0, 084	$e_3$	1, 5
$\mu$	0, 015	$e_4$	100
$\beta$	0, 0001	$E_1$	0, 00001
$\beta_2$	2, 4	$E_2$	0, 001
$\beta_3$	10	$E_3$	0, 0001
$\delta$	0, 9995	$\kappa_1$	$\frac{5}{12}$
$\delta_1$	1, 3	$\kappa_2$	$\frac{5}{6}$

O conjunto

$$U^k = \{\kappa_1^8 \mu^0; \kappa_1^7 \mu^0; \kappa_1^6 \mu^0; \kappa_1^5 \mu^0; \kappa_1^4 \mu^0; \kappa_1^3 \mu^0; \kappa_1^2 \mu^0; \kappa_1 \mu^0, \mu^0\}$$

$$\text{e } N^k = \{\kappa_2^8 \rho^0; \kappa_2^7 \rho^0; \kappa_2^6 \rho^0; \kappa_2^5 \rho^0; \kappa_2^4 \rho^0; \kappa_2^3 \rho^0; \kappa_2^2 \rho^0; \kappa_2 \rho^0, \rho^0\}.$$

## 6.1 Sistema IEEE 30 barras

O sistema IEEE 30 barras apresenta as seguintes características:

- 1 barra de geração (slack);
- 5 barras de controle reativo;
- 24 barras de carga;
- 37 linhas de transmissão;
- 4 transformadores com *taps* variável discreta;
- 2 susceptâncias *shunt*.

No caso discreto, considerou-se que as susceptâncias *shunt* equivalentes do banco de capacitores na barra devem pertencer ao conjunto:

$$D_{10}^{sh} = \{0; 0, 10; 0, 34; 0, 39\}$$

$$D_{24}^{sh} = \{0; 0, 05; 0, 09\}$$

### 6.1.1 Resultados obtidos aplicado ao sistema IEEE 30 barras

Nas Tabelas 6.2, 6.3 e 6.4 são apresentadas as soluções obtidas pelo método PDPIP-Adaptativo, PDPIP-Conservativo e PDBL para os casos contínuos (FPOR) e casos discretos (FPORD), respectivamente. Essas Tabelas mostram o valor da função objetivo, o tempo computacional para resolver os sistemas, o número de iterações, o valor dos *taps* do transformador e as susceptâncias *shunt* equivalentes do banco de capacitores na barra.

Tabela 6.2: Resultados obtidos pelo método PDPIP-Adaptativo associado ao sistema IEEE 30 barras para o caso contínuo (FPOR) e para o caso discreto (FPORD).

PDPIP-Adaptativo									
Contínuo					Discreto				
F. Obj	Tempo(s)	it.	Tap	$b_k^{sh}$	F. Obj	Tempo(s)	it.	Tap	$b_k^{sh}$
17,87	1,06	15	$Tap_{6-9} = 0,9364$ $Tap_{6-10} = 1,0083$ $Tap_{4-12} = 0,9966$ $Tap_{28-27} = 1,0390$	$b_{10}^{sh} = 0,3705$ $b_{24}^{sh} = 0,0861$	17,89	5,64	10	$Tap_{6-9} = 0,9775$ $Tap_{6-10} = 1,0075$ $Tap_{4-12} = 1,0225$ $Tap_{28-27} = 1,0825$	$b_{10}^{sh} = 0,39$ $b_{24}^{sh} = 0,09$

Tabela 6.3: Resultados obtidos pelo método PDPIP-Conservativo associado ao sistema IEEE 30 barras para o caso contínuo (FPOR) e para o caso discreto (FPORD).

PDPIP-Conservativo									
Contínuo					Discreto				
F. Obj	Tempo(s)	it.	Tap	$b_k^{sh}$	F. Obj	Tempo(s)	it.	Tap	$b_k^{sh}$
17, 85	1, 83	15	$Tap_{6-9} = 0, 9115$ $Tap_{6-10} = 1, 0334$ $Tap_{4-12} = 1, 0020$ $Tap_{28-27} = 1, 0416$	$b_{10}^{sh} = 0, 3883$ $b_{24}^{sh} = 0, 0900$	17, 86	8, 67	10	$Tap_{6-9} = 0, 9400$ $Tap_{6-10} = 1, 0150$ $Tap_{4-12} = 1, 0300$ $Tap_{28-27} = 1, 0600$	$b_{10}^{sh} = 0, 39$ $b_{24}^{sh} = 0, 09$

Tabela 6.4: Resultados obtidos pelo método PDBL associado ao sistema IEEE 30 barras para o caso contínuo (FPOR) e para o caso discreto (FPORD).

PDBL									
Contínuo					Discreto				
F. Obj	Tempo(s)	it.	Tap	$b_k^{sh}$	F. Obj	Tempo(s)	it.	Tap	$b_k^{sh}$
17, 88	2, 08	12	$Tap_{6-9} = 0, 9446$ $Tap_{6-10} = 1, 0006$ $Tap_{4-12} = 0, 9974$ $Tap_{28-27} = 1, 0412$	$b_{10}^{sh} = 0, 3685$ $b_{24}^{sh} = 0, 0846$	17, 89	3, 32	10	$Tap_{6-9} = 0, 9775$ $Tap_{6-10} = 1, 0075$ $Tap_{4-12} = 1, 0225$ $Tap_{28-27} = 1, 0825$	$b_{10}^{sh} = 0, 34$ $b_{24}^{sh} = 0, 09$

Nas Tabelas 6.5 e 6.6 são apresentados os resultados dos três métodos no caso contínuo (FPOR) e no caso discreto (FPORD), respectivamente:

Tabela 6.5: Resultados obtidos pelos métodos PDPIP-Adaptativo, PDPIP-Conservativo e PDBL associado ao sistema IEEE 30 barras para o caso contínuo (FPOR).

PDPIP-Adaptativo			PDPIP-Conservativo			PDBL		
Caso Contínuo			Caso Contínuo			Caso Contínuo		
F. Obj	Tempo(s)	it.	F. Obj	Tempo(s)	it.	F. Obj	Tempo(s)	it.
17, 87	1, 06	15	17, 85	1, 83	15	17, 88	2, 08	12

Nota-se que os três métodos foram eficientes para resolver os problemas de FPOR e FPORD associados ao sistema elétrico IEEE 30 barras. No caso contínuo, os métodos PDPIP-Adaptativo, PDPIP-Conservativo atingiram a solução em 15 iterações, já o método PDBL atingiu em 12 iterações. A função objetivo dos três ficaram próximas e o tempo computacional também.

Tabela 6.6: Resultados obtidos pelos métodos PDPIP-Adaptativo, PDPIP-Conservativo e PDBL associado ao sistema IEEE 30 barras para o caso discreto (FPORD).

PDPIP-Adaptativo			PDPIP-Conservativo			PDBL		
Caso Discreto			Caso Discreto			Caso Discreto		
Obj F	Time(s)	it.	Obj F	Time(s)	it.	Obj F	Time(s)	it.
17, 89	5, 64	10	17, 86	8, 67	10	17, 89	3, 32	10

No caso discreto, os métodos PDPIP-Adaptativo, PDPIP-Conservativo e PDBL atingiram a solução em 10 iterações. A função objetivo dos três ficaram próximas e o tempo

computacional também.

## 6.2 Sistema IEEE 57 barras

O sistema IEEE 57 barras apresenta as seguintes características:

- 1 barra de geração (slack);
- 6 barras de controle reativo;
- 50 barras de carga;
- 80 linhas de transmissão;
- 17 transformadores com *taps* variável;
- 3 susceptâncias *shunt*

No caso discreto, considerou-se que as susceptâncias *shunt* equivalentes do banco de capacitores na barra devem pertencer ao conjunto:

$$D_{18}^{sh} = \{0; 0, 12; 0, 22; 0, 27\}$$

$$D_{25}^{sh} = \{0; 0, 04; 0, 07; 0, 09\}$$

$$D_{53}^{sh} = \{0; 0, 1; 0, 165\}$$

### 6.2.1 Resultados obtidos aplicado ao sistema IEEE 57 barras

Nas Tabelas 6.7, 6.8 e 6.9 são apresentadas as soluções obtidas pelo método PDPIP-Adaptativo, PDPIP-Conservativo e PDBL para os casos contínuos (FPOR) e casos discretos (FPORD), respectivamente. Essas Tabelas mostram o valor da função objetivo, o tempo computacional para resolver os sistemas, o número de iterações, o valor dos *taps* do transformador e as susceptâncias *shunt* equivalentes do banco de capacitores na barra.

Tabela 6.7: Resultados obtidos pelo método PDPIP-Adaptativo associado ao sistema IEEE 57 barras para o caso contínuo (FPOR) e para o caso discreto (FPORD).

PDPIP-Adaptativo									
Contínuo					Discreto				
F. Obj	Tempo(s)	it.	Tap	$b_k^{sh}$	F. Obj	Tempo(s)	it.	Tap	$b_k^{sh}$
25, 17	1, 63	12	$Tap_{4-18} = 0, 9942$ $Tap_{4-18} = 0, 9942$ $Tap_{21-20} = 0, 9807$ $Tap_{24-25} = 1, 0338$ $Tap_{24-25} = 1, 0338$ $Tap_{24-26} = 0, 9942$ $Tap_{7-29} = 1, 0228$ $Tap_{34-32} = 1, 0575$ $Tap_{11-41} = 1, 0938$ $Tap_{15-45} = 1, 0385$ $Tap_{14-46} = 1, 0511$ $Tap_{10-51} = 1, 0373$ $Tap_{13-49} = 1, 0826$ $Tap_{11-43} = 1, 0474$ $Tap_{40-56} = 0, 9992$ $Tap_{39-57} = 1, 0316$ $Tap_{9-55} = 1, 0278$	$b_{18}^{sh} = 0, 1675$ $b_{25}^{sh} = 0, 0872$ $b_{53}^{sh} = 0, 1345$	25, 22	10, 64	12	$Tap_{4-18} = 1, 0150$ $Tap_{4-18} = 1, 0150$ $Tap_{21-20} = 0, 9850$ $Tap_{24-25} = 1, 0375$ $Tap_{24-25} = 1, 0375$ $Tap_{24-26} = 0, 9925$ $Tap_{7-29} = 1, 0225$ $Tap_{34-32} = 1, 0525$ $Tap_{11-41} = 1, 0900$ $Tap_{15-45} = 1, 0375$ $Tap_{14-46} = 1, 0525$ $Tap_{10-51} = 1, 0375$ $Tap_{13-49} = 1, 0825$ $Tap_{11-43} = 1, 0450$ $Tap_{40-56} = 0, 9925$ $Tap_{39-57} = 1, 0300$ $Tap_{9-55} = 1, 0300$	$b_{18}^{sh} = 0, 12$ $b_{25}^{sh} = 0, 07$ $b_{53}^{sh} = 0, 10$

Tabela 6.8: Resultados obtidos pelo método PDPIP-Conservativo associado ao sistema IEEE 57 barras para o caso contínuo (FPOR) e para o caso discreto (FPORD).

PDPIP-Conservativo									
Contínuo					Discreto				
F. Obj	Tempo(s)	it.	Tap	$b_k^{sh}$	F. Obj	Tempo(s)	it.	Tap	$b_k^{sh}$
25, 27	2, 83	12	$Tap_{4-18} = 0, 9962$ $Tap_{4-18} = 0, 9962$ $Tap_{21-20} = 0, 9821$ $Tap_{24-25} = 1, 0339$ $Tap_{24-25} = 1, 0339$ $Tap_{24-26} = 0, 9862$ $Tap_{7-29} = 1, 0159$ $Tap_{34-32} = 1, 0523$ $Tap_{11-41} = 1, 0868$ $Tap_{15-45} = 1, 0394$ $Tap_{14-46} = 1, 0498$ $Tap_{10-51} = 1, 0347$ $Tap_{13-49} = 1, 0813$ $Tap_{11-43} = 1, 0444$ $Tap_{40-56} = 0, 9925$ $Tap_{39-57} = 1, 0310$ $Tap_{9-55} = 1, 0187$	$b_{18}^{sh} = 0, 1521$ $b_{25}^{sh} = 0, 0848$ $b_{53}^{sh} = 0, 1286$	25, 28	10, 28	12	$Tap_{4-18} = 1, 0000$ $Tap_{4-18} = 1, 0000$ $Tap_{21-20} = 0, 9850$ $Tap_{24-25} = 1, 0375$ $Tap_{24-25} = 1, 0375$ $Tap_{24-26} = 0, 9850$ $Tap_{7-29} = 1, 0150$ $Tap_{34-32} = 1, 0525$ $Tap_{11-41} = 1, 0825$ $Tap_{15-45} = 1, 0375$ $Tap_{14-46} = 1, 0525$ $Tap_{10-51} = 1, 0375$ $Tap_{13-49} = 1, 0825$ $Tap_{11-43} = 1, 0450$ $Tap_{40-56} = 0, 9925$ $Tap_{39-57} = 1, 0300$ $Tap_{9-55} = 1, 0150$	$b_{18}^{sh} = 0, 12$ $b_{25}^{sh} = 0, 07$ $b_{53}^{sh} = 0, 10$

Tabela 6.9: Resultados obtidos pelo método PDBL associado ao sistema IEEE 57 barras para o caso contínuo (FPOR) e para o caso discreto (FPORD).

PDBL									
Contínuo					Discreto				
F. Obj	Tempo(s)	it.	Tap	$b_k^{sh}$	F. Obj	Tempo(s)	it.	Tap	$b_k^{sh}$
25, 10	2, 40	13	$Tap_{4-18} = 1, 0056$ $Tap_{4-18} = 1, 0056$ $Tap_{21-20} = 0, 9889$ $Tap_{24-25} = 1, 0346$ $Tap_{24-25} = 1, 0346$ $Tap_{24-26} = 0, 9945$ $Tap_{7-29} = 1, 0217$ $Tap_{34-32} = 1, 0640$ $Tap_{11-41} = 1, 1184$ $Tap_{15-45} = 1, 0361$ $Tap_{14-46} = 1, 0540$ $Tap_{10-51} = 1, 0416$ $Tap_{13-49} = 1, 0854$ $Tap_{11-43} = 1, 0518$ $Tap_{40-56} = 1, 0111$ $Tap_{39-57} = 1, 0427$ $Tap_{9-55} = 1, 0321$	$b_{18}^{sh} = 0, 1644$ $b_{25}^{sh} = 0, 0900$ $b_{53}^{sh} = 0, 1400$	25, 45	23, 28	15	$Tap_{4-18} = 1, 0000$ $Tap_{4-18} = 1, 0000$ $Tap_{21-20} = 0, 9925$ $Tap_{24-25} = 1, 0450$ $Tap_{24-25} = 1, 0450$ $Tap_{24-26} = 0, 9775$ $Tap_{7-29} = 1, 0225$ $Tap_{34-32} = 1, 0150$ $Tap_{11-41} = 1, 0900$ $Tap_{15-45} = 1, 0450$ $Tap_{14-46} = 1, 0675$ $Tap_{10-51} = 1, 0300$ $Tap_{13-49} = 1, 0900$ $Tap_{11-43} = 1, 0525$ $Tap_{40-56} = 0, 9850$ $Tap_{39-57} = 1, 0375$ $Tap_{9-55} = 1, 0150$	$b_{18}^{sh} = 0, 12$ $b_{25}^{sh} = 0, 07$ $b_{53}^{sh} = 0, 10$

Nas Tabelas 6.10 e 6.11 são as apresentados os resultados dos três métodos no caso contínuo (FPOR) e no caso discreto (FPORD), respectivamente:

Tabela 6.10: Resultados obtidos pelos métodos PDPIP-Adaptativo, PDPIP-Conservativo e PDBL associado ao sistema IEEE 57 barras para o caso contínuo (FPOR).

PDPIP-Adaptativo			PDPIP-Conservativo			PDBL		
Caso Contínuo			Caso Contínuo			Caso Contínuo		
F. Obj	Tempo(s)	it.	F. Obj	Tempo(s)	it.	F. Obj	Tempo(s)	it.
25, 17	1, 63	12	25, 27	2, 83	12	25, 10	2, 40	13

Nota-se que os três métodos foram eficientes para resolver os problemas de FPOR e FPORD associados ao sistema elétrico IEEE 57 barras. No caso contínuo, os métodos PDPIP-Adaptativo e PDPIP-Conservativo atingiram a solução em 12 iterações, já o método PDBL atingiu em 13 iterações. A função objetivo dos três ficaram próximas e o tempo computacional também.

Tabela 6.11: Resultados obtidos pelos métodos PDPIP-Adaptativo, PDPIP-Conservativo e PDBL associado ao sistema IEEE 57 barras para o caso discreto (FPORD).

PDPIP-Adaptativo			PDPIP-Conservativo			PDBL		
Caso Discreto			Caso Discreto			Caso Discreto		
Obj F	Time(s)	it.	Obj F	Time(s)	it.	Obj F	Time(s)	it.
25, 22	10, 64	12	25, 28	10, 28	12	25, 45	23, 28	15

No caso discreto, os métodos PDPIP-Adaptativo, PDPIP-Conservativo atingiram a solução em 12 iterações, já o método PDBL atingiu em 15 iterações. A função objetivo dos três ficaram próximas e o tempo computacional também.

### 6.3 Sistema IEEE 118 barras

O sistema IEEE 118 barras apresenta as seguintes características:

- 1 barra de geração (slack);
- 53 barras de controle reativo;
- 64 barras de carga;
- 177 linhas de transmissão;
- 9 transformadores com *taps* variável;
- 14 susceptâncias *shunt*

No caso discreto, considerou-se que as susceptâncias *shunt* equivalentes do banco de capacitores na barra devem pertencer ao conjunto:

$$D_5^{sh} = \{-0, 4; 0\}$$

$$D_{34}^{sh} = \{0; 0, 06; 0, 07; 0, 13; 0, 14; 0, 20\}$$

$$D_{37}^{sh} = \{-0, 25; 0\}$$

$$D_{44}^{sh} = \{0; 0, 1\}$$

$$D_{45}^{sh} = \{0; 0, 1\}$$

$$D_{46}^{sh} = \{0; 0, 1\}$$

$$D_{48}^{sh} = \{0; 0, 15\}$$

$$D_{74}^{sh} = \{0; 0, 08; 0, 12; 0, 20\}$$

$$D_{79}^{sh} = \{0; 0, 1; 0, 20\}$$

$$D_{82}^{sh} = \{0; 0, 1; 0, 20\}$$

$$D_{83}^{sh} = \{0; 0, 1; 0, 20\}$$

$$D_{105}^{sh} = \{0; 0, 1; 0, 20\}$$

$$D_{107}^{sh} = \{0; 0, 06; 0, 07; 0, 13; 0, 14; 0, 20\}$$

$$D_{110}^{sh} = \{0; 0, 06; 0, 07; 0, 13; 0, 14; 0, 20\}$$

### 6.3.1 Resultados obtidos aplicado ao sistema IEEE 118 barras

Nas Tabelas 6.12, 6.13 e 6.14 são apresentadas as soluções obtidas pelo método PDPIP-Adaptativo, PDPIP-Conservativo e PDBL para os casos contínuos (FPOR) e casos discretos (FPORD). Essas Tabelas mostram o valor da função objetivo, o tempo computacional para resolver os sistemas, o número de iterações, o valor dos *taps* do transformador e as susceptâncias *shunt* equivalentes do banco de capacitores na barra.

Tabela 6.12: Resultados obtidos pelo método PDPIP-Adaptativo associado ao sistema IEEE 118 barras para o caso contínuo (FPOR) e para o caso discreto (FPORD).

PDPIP-Adaptativo									
Contínuo					Discreto				
F. Obj	Tempo(s)	it.	Tap	$b_k^{sh}$	F. Obj	Tempo(s)	it.	Tap	$b_k^{sh}$
119, 12	14, 28	15	$Tap_{8-5} = 1, 0325$ $Tap_{26-25} = 0, 9705$ $Tap_{30-17} = 1, 0102$ $Tap_{38-37} = 1, 0196$ $Tap_{63-59} = 1, 0226$ $Tap_{64-61} = 0, 9992$ $Tap_{65-66} = 1, 0094$ $Tap_{68-69} = 1, 0531$ $Tap_{81-80} = 1, 0141$	$b_5^{sh} = -0, 3603$ $b_{34}^{sh} = 0, 1114$ $b_{37}^{sh} = -0, 2315$ $b_{44}^{sh} = 0, 0854$ $b_{45}^{sh} = 0, 0909$ $b_{46}^{sh} = 0, 0845$ $b_{48}^{sh} = 0, 1302$ $b_{74}^{sh} = 0, 1565$ $b_{79}^{sh} = 0, 1904$ $b_{82}^{sh} = 0, 1901$ $b_{83}^{sh} = 0, 1872$ $b_{105}^{sh} = 0, 1850$ $b_{107}^{sh} = 0, 0986$ $b_{110}^{sh} = 0, 1072$	119, 16	93, 84	12	$Tap_{8-5} = 1, 0375$ $Tap_{26-25} = 0, 9850$ $Tap_{30-17} = 1, 0225$ $Tap_{38-37} = 1, 0375$ $Tap_{63-59} = 1, 0375$ $Tap_{64-61} = 0, 9925$ $Tap_{65-66} = 0, 9925$ $Tap_{68-69} = 1, 0375$ $Tap_{81-80} = 1, 0300$	$b_5^{sh} = -0, 40$ $b_{34}^{sh} = 0, 13$ $b_{37}^{sh} = -0, 25$ $b_{44}^{sh} = 0, 10$ $b_{45}^{sh} = 0, 10$ $b_{46}^{sh} = 0, 10$ $b_{48}^{sh} = 0, 15$ $b_{74}^{sh} = 0, 12$ $b_{79}^{sh} = 0, 20$ $b_{82}^{sh} = 0, 20$ $b_{83}^{sh} = 0, 20$ $b_{105}^{sh} = 0, 20$ $b_{107}^{sh} = 0, 14$ $b_{110}^{sh} = 0, 13$

Tabela 6.13: Resultados obtidos pelo método PDPIP-Conservativo associado ao sistema IEEE 118 barras para o caso contínuo (FPOR) e para o caso discreto (FPORD).

PDPIP-Conservativo									
Contínuo					Discreto				
F. Obj	Tempo(s)	it.	Tap	$b_k^{sh}$	F. Obj	Tempo(s)	it.	Tap	$b_k^{sh}$
118, 97	10, 83	15	$Tap_{8-5} = 1, 0302$ $Tap_{26-25} = 0, 9525$ $Tap_{30-17} = 1, 0179$ $Tap_{38-37} = 1, 0229$ $Tap_{63-59} = 1, 0212$ $Tap_{64-61} = 0, 9982$ $Tap_{65-66} = 1, 0109$ $Tap_{68-69} = 1, 0533$ $Tap_{81-80} = 1, 0129$	$b_5^{sh} = -0, 3628$ $b_{34}^{sh} = 0, 1146$ $b_{37}^{sh} = -0, 2340$ $b_{44}^{sh} = 0, 0902$ $b_{45}^{sh} = 0, 0994$ $b_{46}^{sh} = 0, 0885$ $b_{48}^{sh} = 0, 1313$ $b_{74}^{sh} = 0, 1807$ $b_{79}^{sh} = 0, 1998$ $b_{82}^{sh} = 0, 2000$ $b_{83}^{sh} = 0, 1965$ $b_{105}^{sh} = 0, 1890$ $b_{107}^{sh} = 0, 0985$ $b_{110}^{sh} = 0, 1100$	119, 18	81, 49	14	$Tap_{8-5} = 1, 0225$ $Tap_{26-25} = 0, 9850$ $Tap_{30-17} = 1, 0075$ $Tap_{38-37} = 1, 0375$ $Tap_{63-59} = 1, 0300$ $Tap_{64-61} = 0, 9925$ $Tap_{65-66} = 1, 0000$ $Tap_{68-69} = 1, 0450$ $Tap_{81-80} = 1, 0300$	$b_5^{sh} = -0, 40$ $b_{34}^{sh} = 0, 13$ $b_{37}^{sh} = -0, 25$ $b_{44}^{sh} = 0, 10$ $b_{45}^{sh} = 0, 10$ $b_{46}^{sh} = 0, 10$ $b_{48}^{sh} = 0, 15$ $b_{74}^{sh} = 0, 12$ $b_{79}^{sh} = 0, 20$ $b_{82}^{sh} = 0, 20$ $b_{83}^{sh} = 0, 20$ $b_{105}^{sh} = 0, 20$ $b_{107}^{sh} = 0, 13$ $b_{110}^{sh} = 0, 13$

Tabela 6.14: Resultados obtidos pelo método PDBL associado ao sistema IEEE 118 barras para o caso contínuo (FPOR) e para o caso discreto (FPORD).

PDBL									
Contínuo					Discreto				
F. Obj	Tempo(s)	it.	Tap	$b_k^{sh}$	F. Obj	Tempo(s)	it.	Tap	$b_k^{sh}$
118, 97	23, 19	18	$Tap_{8-5} = 1, 0276$ $Tap_{26-25} = 0, 9431$ $Tap_{30-17} = 1, 0175$ $Tap_{38-37} = 1, 0207$ $Tap_{63-59} = 1, 0208$ $Tap_{64-61} = 0, 9990$ $Tap_{65-66} = 1, 0107$ $Tap_{68-69} = 1, 0556$ $Tap_{81-80} = 1, 0130$	$b_5^{sh} = -0, 2635$ $b_{34}^{sh} = 0, 1170$ $b_{37}^{sh} = -0, 1615$ $b_{44}^{sh} = 0, 0803$ $b_{45}^{sh} = 0, 0972$ $b_{46}^{sh} = 0, 0527$ $b_{48}^{sh} = 0, 0827$ $b_{74}^{sh} = 0, 1991$ $b_{79}^{sh} = 0, 1861$ $b_{82}^{sh} = 0, 1923$ $b_{83}^{sh} = 0, 1812$ $b_{105}^{sh} = 0, 1561$ $b_{107}^{sh} = 0, 1003$ $b_{110}^{sh} = 0, 1200$	119, 09	300, 95	15	$Tap_{8-5} = 1, 0225$ $Tap_{26-25} = 0, 9850$ $Tap_{30-17} = 1, 0075$ $Tap_{38-37} = 1, 0225$ $Tap_{63-59} = 1, 0225$ $Tap_{64-61} = 0, 9925$ $Tap_{65-66} = 1, 0075$ $Tap_{68-69} = 1, 0300$ $Tap_{81-80} = 1, 0150$	$b_5^{sh} = -0, 36$ $b_{34}^{sh} = 0, 13$ $b_{37}^{sh} = -0, 25$ $b_{44}^{sh} = 0, 10$ $b_{45}^{sh} = 0, 10$ $b_{46}^{sh} = 0, 10$ $b_{48}^{sh} = 0, 15$ $b_{74}^{sh} = 0, 12$ $b_{79}^{sh} = 0, 20$ $b_{82}^{sh} = 0, 20$ $b_{83}^{sh} = 0, 20$ $b_{105}^{sh} = 0, 20$ $b_{107}^{sh} = 0, 07$ $b_{110}^{sh} = 0, 07$

Nas Tabelas 6.15 e 6.16 são as apresentados os resultados dos três métodos no caso contínuo (FPOR) e no caso discreto (FPORD), respectivamente:

Tabela 6.15: Resultados obtidos pelos métodos PDPIP-Adaptativo, PDPIP-Conservativo e PDBL associado ao sistema IEEE 118 barras para o caso contínuo (FPOR).

PDPIP-Adaptativo			PDPIP-Conservativo			PDBL		
Caso Contínuo			Caso Contínuo			Caso Contínuo		
F. Obj	Tempo(s)	it.	F. Obj	Tempo(s)	it.	F. Obj	Tempo(s)	it.
119, 12	14, 28	15	118, 97	10, 83	15	118, 97	23, 19	18

Nota-se que os três métodos foram eficientes para resolver os problemas de FPOR e FPORD associados ao sistema elétrico IEEE 118 barras. No caso contínuo, os métodos PDPIP-Adaptativo e PDPIP-Conservativo atingiram a solução em 15 iterações, já o método PDBL atingiu em 18 iterações. A função objetivo dos três ficaram próximas e o tempo computacional também.

Tabela 6.16: Resultados obtidos pelos métodos PDPIP-Adaptativo, PDPIP-Conservativo e PDBL associado ao sistema IEEE 118 barras para o caso discreto (FPORD).

PDPIP-Adaptativo			PDPIP-Conservativo			PDBL		
Caso Discreto			Caso Discreto			Caso Discreto		
Obj F	Time(s)	it.	Obj F	Time(s)	it.	Obj F	Time(s)	it.
119, 16	93, 84	12	119, 18	81, 49	14	119, 09	300, 95	15

No caso discreto, os métodos PDPIP-Adaptativo, PDPIP-Conservativo atingiram a solução em 12 e 14 iterações, respectivamente, já o método PDBL atingiu em 15 iterações. A função objetivo dos três ficaram próximas e o tempo computacional do método PDBL ficou maior.

## 6.4 Sistema IEEE 300 barras

O sistema IEEE 300 barras apresenta as seguintes características:

- 1 barra de geração (slack);
- 68 barras de controle reativo;
- 231 barras de carga;
- 304 linhas de transmissão;
- 107 transformadores com *taps* variável discretas;
- 14 susceptâncias *shunt*

No caso discreto, considerou-se que as susceptâncias *shunt* equivalentes do banco de capacitores na barra devem pertencer ao conjunto:

$$\begin{aligned}
 D_{96}^{sh} &= \{0; 2; 3, 5; 4, 5; \} & (6.1) \\
 D_{99}^{sh} &= \{0; 0, 25; 0, 44; 0, 59\} \\
 D_{133}^{sh} &= \{0; 0, 19; 0, 34; 0, 39\} \\
 D_{143}^{sh} &= \{-4, 5; 0\} \\
 D_{145}^{sh} &= \{-4, 5; 0\} \\
 D_{152}^{sh} &= \{0; 0, 25; 0, 44; 0, 59\} \\
 D_{158}^{sh} &= \{0; 0, 25; 0, 44; 0, 59\} \\
 D_{169}^{sh} &= \{-2, 5; 0\} \\
 D_{210}^{sh} &= \{-4, 5; 0\} \\
 D_{217}^{sh} &= \{-4, 5; 0\} \\
 D_{219}^{sh} &= \{-1, 5; 0\} \\
 D_{227}^{sh} &= \{0; 0, 25; 0, 44; 0, 59\} \\
 D_{268}^{sh} &= \{0; 0, 15\} \\
 D_{283}^{sh} &= \{0; 0, 15\}
 \end{aligned}$$

### 6.4.1 Resultados obtidos aplicado ao sistema IEEE 300 barras

Nas Tabelas 6.17, 6.18 e 6.19 são apresentadas as soluções obtidas pelo método PDPIP-Adaptativo, PDPIP-Conservativo e PDBL para os casos contínuos (FPOR) e casos discretos (FPORD), respectivamente. Essas Tabelas mostram o valor da função objetivo, o tempo computacional para resolver os sistemas, o número de iterações e as susceptâncias *shunt* equivalentes do banco de capacitores na barra.

Tabela 6.17: Resultados obtidos pelo método PDPIP-Adaptativo associado ao sistema IEEE 300 barras para o caso contínuo (FPOR) e para o caso discreto (FPORD).

PDPIP-Adaptativo							
Contínuo				Discreto			
F. Obj	Tempo(s)	it.	$b_k^{sh}$	F. Obj	Tempo(s)	it.	$b_k^{sh}$
368,92	58,03	24	$b_{96}^{sh} = 3,92$ $b_{99}^{sh} = 0,4005$ $b_{133}^{sh} = 0,1553$ $b_{143}^{sh} = -1,9380$ $b_{145}^{sh} = -1,3627$ $b_{152}^{sh} = 0,4968$ $b_{158}^{sh} = 0,5067$ $b_{169}^{sh} = -1,3432$ $b_{210}^{sh} = -2,6536$ $b_{217}^{sh} = -1,5482$ $b_{219}^{sh} = -1,0022$ $b_{227}^{sh} = 0,3993$ $b_{268}^{sh} = 0,0871$ $b_{283}^{sh} = 0,0495$	369,24	631,59	12	$b_{96}^{sh} = 3,50$ $b_{99}^{sh} = 0,44$ $b_{133}^{sh} = 0,19$ $b_{143}^{sh} = 0,00$ $b_{145}^{sh} = 0,00$ $b_{152}^{sh} = 0,44$ $b_{158}^{sh} = 0,44$ $b_{169}^{sh} = -2,50$ $b_{210}^{sh} = -4,50$ $b_{217}^{sh} = 0,00$ $b_{219}^{sh} = -1,50$ $b_{227}^{sh} = 0,44$ $b_{268}^{sh} = 0,15$ $b_{283}^{sh} = 0,00$

Tabela 6.18: Resultados obtidos pelo método PDPIP-Conservativo associado ao sistema IEEE 300 barras para o caso contínuo (FPOR) e para o caso discreto (FPORD).

PDPIP-Conservativo							
Contínuo				Discreto			
F. Obj	Tempo(s)	it.	$b_k^{sh}$	F. Obj	Tempo(s)	it.	$b_k^{sh}$
371,33	42,83	24	$b_{96}^{sh} = 3,9240$ $b_{99}^{sh} = 0,4004$ $b_{133}^{sh} = 0,2083$ $b_{143}^{sh} = -1,964$ $b_{145}^{sh} = -1,374$ $b_{152}^{sh} = 0,4902$ $b_{158}^{sh} = 0,5008$ $b_{169}^{sh} = -1,340$ $b_{210}^{sh} = -2,649$ $b_{217}^{sh} = -1,551$ $b_{219}^{sh} = -1,000$ $b_{227}^{sh} = 0,3980$ $b_{268}^{sh} = 0,0863$ $b_{283}^{sh} = 0,0493$	373,33	750,44	16	$b_{96}^{sh} = 2,00$ $b_{99}^{sh} = 0,44$ $b_{133}^{sh} = 0,19$ $b_{143}^{sh} = 0,00$ $b_{145}^{sh} = 0,00$ $b_{152}^{sh} = 0,44$ $b_{158}^{sh} = 0,00$ $b_{169}^{sh} = -2,50$ $b_{210}^{sh} = -4,50$ $b_{217}^{sh} = 0,00$ $b_{219}^{sh} = -1,50$ $b_{227}^{sh} = 0,44$ $b_{268}^{sh} = 0,15$ $b_{283}^{sh} = 0,00$

Tabela 6.19: Resultados obtidos pelo método PDBL associado ao sistema IEEE 300 barras para o caso contínuo (FPOR) e para o caso discreto (FPORD).

PDBL										
Contínuo					Discreto					
F. Obj	Tempo(s)	it.	Tap	$b_k^{sh}$	F. Obj	Tempo(s)	it.	Tap	$b_k^{sh}$	
372,08	123,19	50	$b_{96}^{sh} = 3,6485$ $b_{99}^{sh} = 0,4101$ $b_{133}^{sh} = 0,1712$ $b_{143}^{sh} = -2,062$ $b_{145}^{sh} = -1,358$ $b_{152}^{sh} = 0,5075$ $b_{158}^{sh} = 0,5293$ $b_{169}^{sh} = -1,385$ $b_{210}^{sh} = -2,798$ $b_{217}^{sh} = -1,532$ $b_{219}^{sh} = -1,072$ $b_{227}^{sh} = 0,3953$ $b_{268}^{sh} = 0,0908$ $b_{283}^{sh} = 0,0503$	372,37	700,95	16	$b_{96}^{sh} = 3,50$ $b_{99}^{sh} = 0,44$ $b_{133}^{sh} = 0,19$ $b_{143}^{sh} = 0,00$ $b_{145}^{sh} = 0,00$ $b_{152}^{sh} = 0,44$ $b_{158}^{sh} = 0,44$ $b_{169}^{sh} = -2,50$ $b_{210}^{sh} = -4,50$ $b_{217}^{sh} = 0,00$ $b_{219}^{sh} = -1,50$ $b_{227}^{sh} = 0,44$ $b_{268}^{sh} = 0,15$ $b_{283}^{sh} = 0,00$			

Nas Figuras 6.1, 6.2, 6.3 têm-se os *taps* dos transformadores obtidos na última iteração para os casos contínuo e discreto, para o método PDPIP-Adaptativo, PDPIP-Conservativo e PDBL, respectivamente.

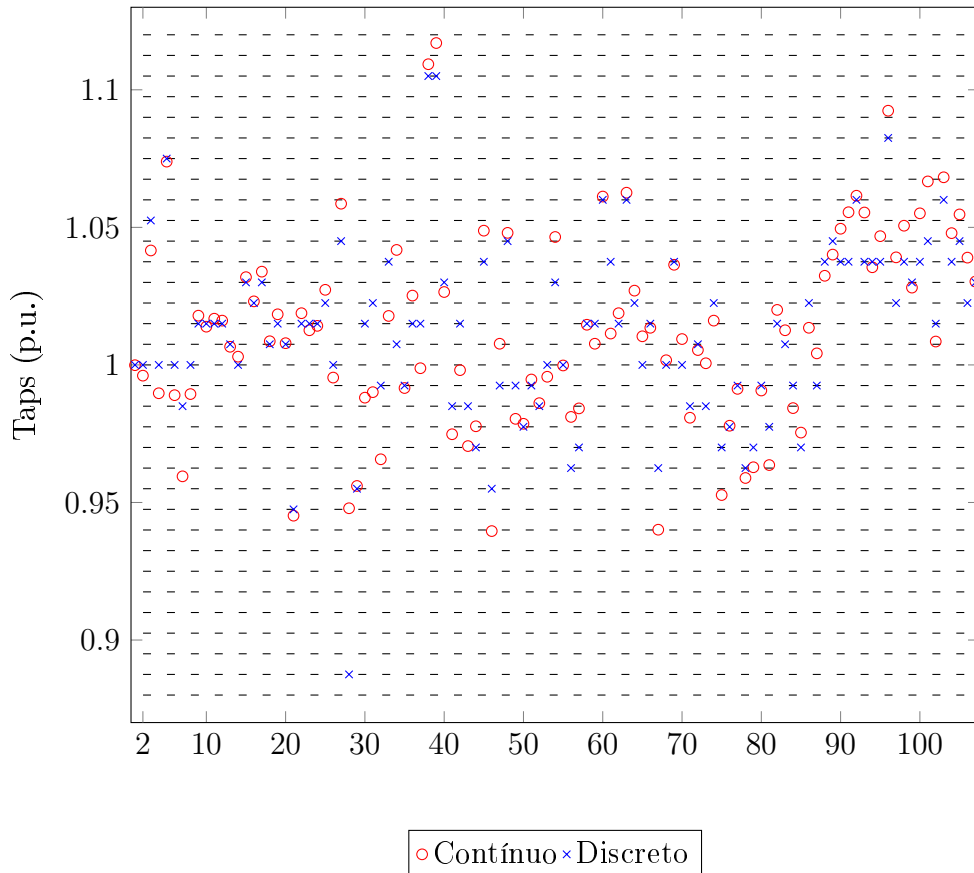


Figura 6.1: Taps dos transformadores obtidos na última iteração para o método PDPIP-Adaptativo aplicado ao sistema IEEE 300 barras.

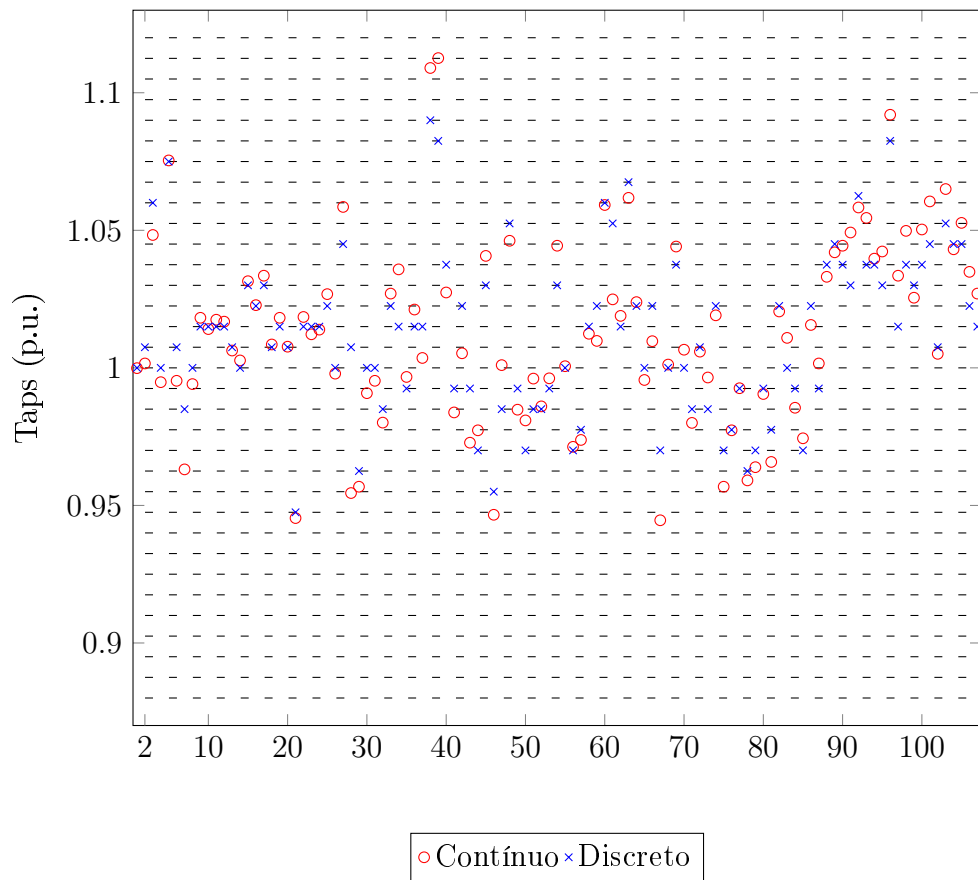


Figura 6.2: Taps dos transformadores obtidos na última iteração para o método PDPIP-Conservativo aplicado ao sistema IEEE 300 barras.

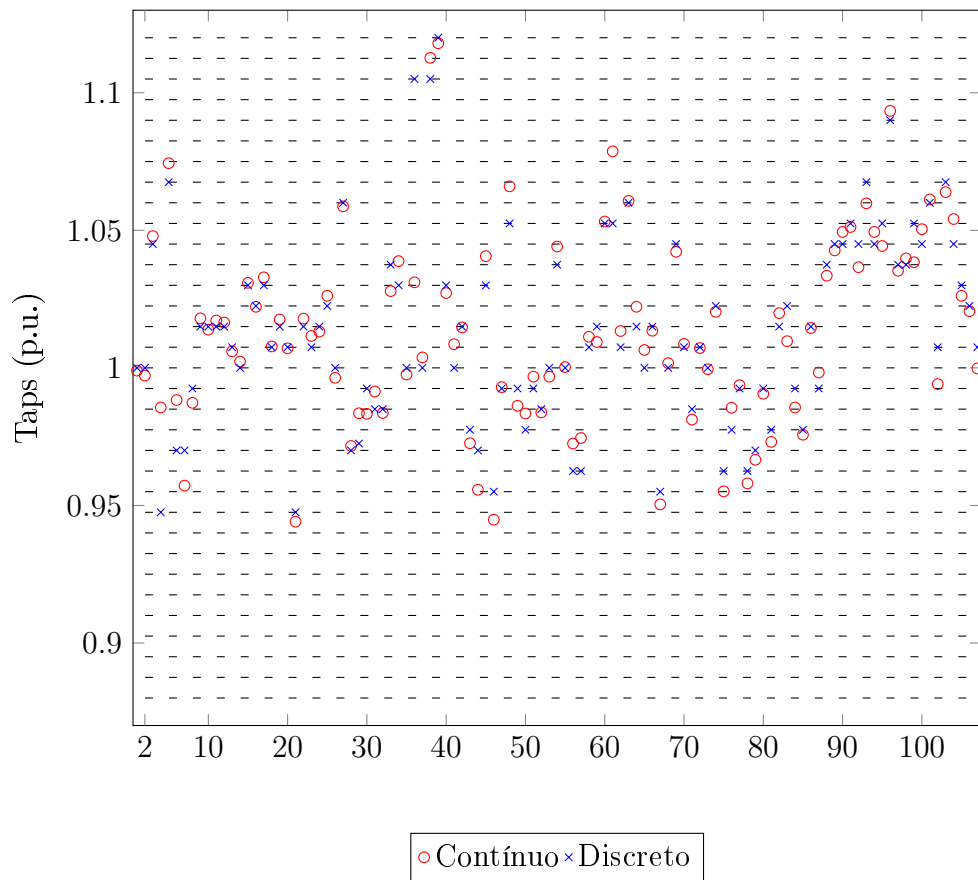


Figura 6.3: Taps dos transformadores obtidos na última iteração para o método PDBL aplicado ao sistema IEEE 300 barras.

Nas Tabelas 6.20 e 6.21 são apresentados os resultados dos três métodos no caso contínuo (FPOR) e no caso discreto (FPORD), respectivamente:

Tabela 6.20: Resultados obtidos pelos métodos PDPIP-Adaptativo, PDPIP-Conservativo e PDBL associado ao sistema IEEE 300 barras para o caso contínuo (FPOR).

PDPIP-Adaptativo			PDPIP-Conservativo			PDBL		
Caso Contínuo			Caso Contínuo			Caso Contínuo		
F. Obj	Tempo(s)	it.	F. Obj	Tempo(s)	it	F. Obj	Tempo(s)	it
368,92	58,03	24	371,33	42,83	24	372,08	123,19	50

Nota-se que os três métodos foram eficientes para resolver os problemas de FPOR e FPORD associados ao sistema elétrico IEEE 300 barras. No caso contínuo, os métodos PDPIP-Adaptativo e PDPIP-Conservativo atingiram a solução em 24 iterações, já o método PDBL atingiu em 50 iterações. A função objetivo dos três ficaram próximas, no entanto o método PDBL obteve uma convergência mais demorada.

Tabela 6.21: Resultados obtidos pelos métodos PDPIP-Adaptativo, PDPIP-Conservativo e PDBL associado ao sistema IEEE 300 barras para o caso discreto (FPORD).

PDPIP-Adaptativo			PDPIP-Conservativo			PDBL		
Caso Discreto			Caso Discreto			Caso Discreto		
Obj F	Time(s)	it	Obj F	Time(s)	it	Obj F	Time(s)	it
369,24	631,59	12	373,33	750,44	16	372,37	700,95	16

No caso discreto, os métodos PDPIP-Adaptativo, PDPIP-Conservativo atingiram a solução em 12 e 16 iterações, respectivamente, já o método PDBL atingiu em 16 iterações. A função objetivo dos três ficaram próximas e o tempo computacional do método PDBL ficou maior.

Ao analisar os 4 problemas de FPORD implementados e resolvidos, observa-se que nos problemas de FPORD menores, os três métodos apresentam a mesma qualidade de resolução, convergência e tempo computacional. Já no problema de FPORD associado ao sistema IEEE 300 barras, observa-se uma melhor convergência e um menor número de iterações no PDPIP-Adaptativo. É possível que isso ocorra visto que, o método possui uma estratégia para atualizar os parâmetros de penalidade e barreira que os outros métodos não tiveram.

Para todos os sistemas implementados e resolvidos, relativos ao método PDPIP-Adaptativo e PDPIP-Conservativo, observou-se a complementaridade entre as variáveis auxiliares  $r$  e folgas  $s$ , quando os métodos alcançavam a otimalidade.

No próximo Capítulo apresentam-se as conclusões e a proposta de trabalhos futuros.

## Conclusões

Neste trabalho foi proposto e implementado uma estratégia primal-dual de pontos interiores-penalidade para a resolução do problema de fluxo de potência ótimo reativo com variáveis de controle discretas (FPORD). Para tratar as variáveis de controle discretas do problema de FPORD, foi utilizada uma estratégia que transforma o problema discreto em uma sequência de problemas contínuos, baseada em uma função senoidal, que obriga as variáveis a assumirem valores discretos. O método primal-dual de pontos interiores-penalidade (PDPIP) foi utilizado para resolver essa sequência de problemas contínuos. O PDPIP é baseado na união de dois métodos: o primal-dual de pontos interiores e de penalidade. Devido a importância da atualização dos parâmetros de barreira e penalidade na convergência do método, foram implementados dois algoritmos (Conservativo e Adaptativo) para uma melhor comparação e avaliação do desempenho desse.

A cada iteração, o método de Newton gerou as direções de busca para as variáveis primais e duais, que são atualizadas considerando os passos primais e duais, e enquanto as condições de parada (baseadas nas condições KKT) do método não forem obedecidas, atualiza-se o parâmetro da função senoidal das variáveis discretas e repete-se o ciclo até que todas as variáveis converjam para os valores discretos em seus respectivos conjuntos. No modelo utilizado, as variáveis discretas foram os *taps* dos transformadores e susceptâncias *shunt*.

Realizou-se a implementação dos métodos em linguagem MATLAB R.2010b e aplicou-se o método em problemas de FPORD associados aos sistemas elétricos IEEE 30, 57, 118 e 300 barras. Os resultados numéricos foram comparados aos do método primal-dual barreira logarítmica e mostraram o potencial do método proposto na resolução do

FPORD, com bom desempenho computacional, de acordo com o número de iterações e tempos computacionais apresentados.

As contribuições deste trabalho podem ser resumidas em dois aspectos: na matemática aplicada contribuiu com o desenvolvimento de uma nova abordagem para resolução de problemas de otimização não lineares, não convexos e com variáveis mistas (contínuas e discretas). Na área de engenharia elétrica mostrou-se como uma alternativa viável para resolução do problema de FPORD, o qual é um problema de grande interesse para os estudos realizados no planejamento e na programação de operação de sistemas de energia.

Como continuação deste trabalho em pesquisas futuras pretende-se:

- A utilização de outros tipos de função barreira;
- O estudo para inicialização dos parâmetros barreira e penalidade;
- A implementação do método com as direções previsoras e corretoras de Mehrotra (1992);
- A modelagem do problema de FPO com a inclusão de outras funções objetivo;
- Implementação e comparação do método proposto com a inclusão da estratégia de barreira logarítmica modificada de Polyak (1992);
- Implementação e comparação da função senoidal com uma função polinomial para tratar as variáveis discretas.

## Trabalhos publicados

1. DELGADO, J. A. ; BAPTISTA, E. C.(2019). Resolução do problema de fluxo de potência ótimo reativo via o método de ponto interior-penalidade. Anais IX Seminário de Pós Graduação em Engenharia Elétrica-Resumo expandido, 2p;
2. DELGADO, J. A. ; BAPTISTA, E. C.(2019). The Investigation of penalty/interior points method and the solution of Discret Reactive Optimal Power Flow. XX Congresso da APDIO 2019-Resumo expandido, p.106;
3. DELGADO, J. A. ; BAPTISTA, E. C.; Soler E. M (2018).The penalty/interior points method and the solution of Discret Reactive Optimal Power Flow. Program and abstracts of the XIX LatinIberoamerican Conference on Operations Research, CLAIO 2018, Resumo, p.72;
4. DELGADO, J. A. ; SOUZA, R.R; BAPTISTA, E. C; BALBO, A. R. (2018). Uma investigação do método previsor-corretor barreira logarítmica e barreira logarítmica modificada na resolução do problema de fluxo de potência ótimo. Ermac (Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional) - ERMAC 2018,Trabalho completo, 7p;
5. DELGADO, J. A. ; BAPTISTA, E. C.(2018). Investigação do método de ponto interior e penalidade e problema de fluxo de potência ótimo com variáveis discretas. Anais VIII Seminário de Pós Graduação em Engenharia Elétrica-Resumo expandido, 2p;
6. DELGADO, J. A. ; BAPTISTA, E. C.(2017). Método de ponto interior e penalidade

na resolução do fluxo de potência ótimo reativo com variáveis de controle discretas. Anais VII Seminário de Pós Graduação em Engenharia Elétrica-Resumo expandido, 2p;

7. DELGADO, J. A. ; BAPTISTA, E. C.; Soler E. M (2016).Uma associação dos métodos de barreira e de barreira modificada.Proceedings of the XVIII Latin-Iberoamerican Conference on Operations Research, CLAIO 2016, Trabalho completo, p.271;
8. DELGADO, J. A. ; BAPTISTA, E. C.(2016). Um método de pontos interiores e penalidade na resolução do fluxo de potência ótimo reativo com variáveis de controle discretas. Anais VI Seminário de Pós Graduação em Engenharia Elétrica-Resumo, 1p.

## 8.1 Artigo publicado em periódico internacional

1. DELGADO, J. A. ; BAPTISTA, E. C.; BREGADIOLI, G. F.; BALBO, A.R.; NEPOMUCENO, L.; SOLER, E. M. (2017). A Modified Barrier and Barrier Method and the Optimal Power Flow Problem. *IEEE Latin America Transactions*, vol. 15, no. 9, p. 1629-1638.

# Bibliografia

- Adibi, M., Polyak, R., Griva, I., Mili, L., & Ammari, S. (2003). Optimal transformer tap selection using modified barrier-augmented lagrangian method. *IEEE transactions on power systems*, 18(1), 251–257.
- AlRashidi, M. & El-Hawary, M. (2007). Hybrid particle swarm optimization approach for solving the discrete opf problem considering the valve loading effects. *IEEE transactions on power systems*, 22(4), 2030–2038.
- Armand, P. & Omheni, R. (2017). A mixed logarithmic barrier-augmented lagrangian method for nonlinear optimization. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 173(2), 523–547.
- Armand, P. & Tran, N. N. (2019). Rapid infeasibility detection in a mixed logarithmic barrier-augmented lagrangian method for nonlinear optimization. *Optimization Methods and Software*, 34(5), 991–1013.
- Bakirtzis, A. G., Biskas, P. N., Zoumas, C. E., & Petridis, V. (2002). Optimal power flow by enhanced genetic algorithm. *IEEE Transactions on power Systems*, 17(2), 229–236.
- Baptista, E., Belati, E. A., Sousa, V. A., & Da Costa, G. (2006). Primal-dual logarithmic barrier and augmented lagrangian function to the loss minimization in power systems. *Electric Power Components and Systems*, 34(7), 775–784.
- Belati, E. & Costa, G. (2008). Transmission loss allocation based on optimal power flow and sensitivity analysis. *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, 30(4), 291–295.

- Ben-Tal, A. & Zibulevsky, M. (1997). Penalty/barrier multiplier methods for convex programming problems. *SIAM Journal on Optimization*, 7(2), 347–366.
- Breitfeld, M. G. & Shanno, D. F. (1994). Preliminary computational experience with modified log-barrier functions for large-scale nonlinear programming. In *Large Scale Optimization* (pp. 45–67). Springer.
- Breitfeld, M. G. & Shanno, D. F. (1995). A globally convergent penalty-barrier algorithm for nonlinear programming. In *Operations Research Proceedings 1994* (pp. 22–27). Springer.
- Breitfeld, M. G. & Shanno, D. F. (1996). Computational experience with penalty-barrier methods for nonlinear programming. *Annals of Operations Research*, 62(1), 439–463.
- Byrd, R. H., Curtis, F. E., & Nocedal, J. (2010). Infeasibility detection and sqp methods for nonlinear optimization. *SIAM Journal on Optimization*, 20(5), 2281–2299.
- Byrd, R. H., Gould, N. I., Nocedal, J., & Waltz, R. A. (2003). An algorithm for nonlinear optimization using linear programming and equality constrained subproblems. *Mathematical Programming*, 100(1), 27–48.
- Byrd, R. H., Gould, N. I., Nocedal, J., & Waltz, R. A. (2005). On the convergence of successive linear-quadratic programming algorithms. *SIAM Journal on Optimization*, 16(2), 471–489.
- Byrd, R. H., Nocedal, J., & Waltz, R. A. (2008). Steering exact penalty methods for nonlinear programming. *Optimization Methods and Software*, 23(2), 197–213.
- Capitanescu, F., Glavic, M., Ernst, D., & Wehenkel, L. (2007). Interior-point based algorithms for the solution of optimal power flow problems. *Electric Power systems research*, 77(5), 508–517.
- Capitanescu, F., Ramos, J. M., Panciatici, P., Kirschen, D., Marcolini, A. M., Platbrood, L., & Wehenkel, L. (2011). State-of-the-art, challenges, and future trends in security constrained optimal power flow. *Electric Power Systems Research*, 81(8), 1731–1741.
- Capitanescu, F. & Wehenkel, L. (2010). Sensitivity-based approaches for handling discrete variables in optimal power flow computations. *IEEE Transactions on Power Systems*, 25(4), 1780–1789.

- Carpentier, J. (1962). Contribution to the economic dispatch problem. *Bulletin de la Societe Francoise des Electriciens*, 3(8), 431–447.
- Carroll, C. W. (1961). The created response surface technique for optimizing nonlinear, restrained systems. *Operations Research*, 9(2), 169–184.
- Curtis, F. E. (2012). A penalty-interior-point algorithm for nonlinear constrained optimization. *Mathematical Programming Computation*, 4(2), 181–209.
- Curtis, F. E., Gould, N. I., Jiang, H., & Robinson, D. P. (2016). Adaptive augmented lagrangian methods: algorithms and practical numerical experience. *Optimization Methods and Software*, 31(1), 157–186.
- Curtis, F. E., Jiang, H., & Robinson, D. P. (2015). An adaptive augmented lagrangian method for large-scale constrained optimization. *Mathematical Programming*, 152(1-2), 201–245.
- Dantzig, G. B. (1948). Programming in a linear structure. *Washington, DC*.
- Delgado, J. A. (2016). A combinação dos métodos de barreira e de barreira modificada na resolução do problema de fluxo de potência ótimo reativo. Master's thesis, Universidade Estadual Paulista (UNESP).
- Delgado, J. A., Baptista, E. C., Bregadioli, G. F., Nepomuceno, L., Balbo, A. R., & Soler, E. M. (2017). A modified barrier and barrier method and the optimal power flow problem. *IEEE Latin America Transactions*, 15(9), 1629–1638.
- Ding, X., Wang, X., & Song, Y. (2004). Interior point cutting plane method for optimal power flow. *IMA Journal of management mathematics*, 15(4), 355–368.
- Dommel, Hermann W & Tinney, W. F. (1968). Optimal power flow solutions. *power apparatus and systems, IEEE transactions on*, (10), 1866–1876.
- Duan, C., Fang, W., Jiang, L., & Liu, J. (2015). Adaptive barrier filter-line-search interior point method for optimal power flow with facts devices. *IET Generation, Transmission & Distribution*, 9(16), 2792–2798.
- Fiacco, AV & McCormick, G. (1968). Nonlinear programming: Sumt.

- Fiacco, Anthony V & McCormick, G. P. (1990). *Nonlinear programming: sequential unconstrained minimization techniques*, volume 4. John & Sons, Wiley, New York, Siam.
- Forsgren, A., Gill, P. E., & Wright, M. H. (2002). Interior methods for nonlinear optimization. *SIAM review*, 44(4), 525–597.
- Frisch, K. (1955). The logarithmic potential method of convex programming. *Memorandum, University Institute of Economics, Oslo*, 5(6).
- Gill, P. E., Kungurtsev, V., & Robinson, D. P. (2020). A shifted primal-dual penalty-barrier method for nonlinear optimization. *SIAM Journal on Optimization*, 30(2), 1067–1093.
- Goldfarb, D., Polyak, R., Scheinberg, K., & Yuzefovich, I. (1999). A modified barrier-augmented lagrangian method for constrained minimization. *Computational optimization and applications*, 14(1), 55–74.
- Gondzio, J. (1996). Multiple centrality corrections in a primal-dual method for linear programming. *Computational Optimization and Applications*, 6(2), 137–156.
- Gondzio, J. (2012). Interior point methods 25 years later. *European Journal of Operational Research*, 218(3), 587–601.
- Gonzaga, C. C. (1989). An algorithm for solving linear programming problems in  $O(n^3)$  operations. In *Progress in mathematical programming* (pp. 1–28). Springer.
- Gould, N. I., Toint, P. L., & Orban, D. (2003). *An interior-point  $l_1$ -penalty method for nonlinear optimization*. Technical report, CM-P00047968.
- Granville, S. (1994). Optimal reactive dispatch through interior point methods. *Power Systems, IEEE Transactions on*, 9(1), 136–146.
- Grigsby, L. L. (2016). *Power system stability and control*. CRC press.
- Hock, W. & Schittkowski, K. (1981). *Test Examples for Nonlinear Codes*. Springer-Verlag.
- Huneault, M., Galiana, F., & St Bruno, Q. (1991). A survey of the optimal power flow literature. *IEEE Transactions on Power Systems*, 6(2).

- Jabr, R., Coonick, A. H., Cory, B. J., et al. (2002). A primal-dual interior point method for optimal power flow dispatching. *Power Systems, IEEE Transactions on*, 17(3), 654–662.
- Karmarkar, N. (1984). A new polynomial-time algorithm for linear programming. In *Proceedings of the sixteenth annual ACM symposium on Theory of computing* (pp. 302–311).: ACM.
- Kojima, M., Mizuno, S., & Yoshise, A. (1989). *A primal-dual interior point algorithm for linear programming*. Springer.
- Lage, G. G. (2013). *O fluxo de potência ótimo reativo com variáveis de controle discretas e restrições de atuação de dispositivos de controle de tensão*. PhD thesis, Universidade de São Paulo.
- Liu, M., Tso, S., & Cheng, Y. (2002). An extended nonlinear primal-dual interior-point algorithm for reactive-power optimization of large-scale power systems with discrete control variables. *IEEE Transactions on Power Systems*, 17(4), 982–991.
- Liu, W.-H., Papalexopoulos, A. D., & Tinney, W. F. (1992). Discrete shunt controls in a newton optimal power flow. *IEEE Transactions on Power Systems*, 7(4), 1509–1518.
- Liu, X.-W. & Dai, Y.-H. (2020). A globally convergent primal-dual interior-point relaxation method for nonlinear programs. *Mathematics of Computation*, 89(323), 1301–1329.
- Macfie, P. J., Taylor, G. A., Irving, M. R., Hurlock, P., & Wan, H.-B. (2010). Proposed shunt rounding technique for large-scale security constrained loss minimization. *IEEE Transactions on Power Systems*, 25(3), 1478–1485.
- Mazzini, A. P., Asada, E. N., & Lage, G. G. (2019). Reactive power optimization for loss reduction and voltage profile improvement. In *2019 IEEE PES Innovative Smart Grid Technologies Conference-Latin America (ISGT Latin America)* (pp. 1–6).: IEEE.
- Mehrotra, S. (1992). On the implementation of a primal-dual interior point method. *SIAM Journal on optimization*, 2(4), 575–601.
- Min, W. & Shengsong, L. (2005). A trust region interior point algorithm for optimal power flow problems. *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, 27(4), 293–300.

- Mohapatra, A., Bijwe, P., & Panigrahi, B. (2013). Optimal power flow with multiple data uncertainties. *Electric Power Systems Research*, 95, 160–167.
- Monticelli, A. & Liu, W.-H. E. (1992). Adaptive movement penalty method for the newton optimal power flow. *Power Systems, IEEE Transactions on*, 7(1), 334–342.
- Monticelli, A. J. (1983). *Fluxo de carga em redes de energia elétrica*. E. Blucher.
- Murray, W., De Rubira, T. T., & Wigington, A. (2015). Optimal power flow with limited and discrete controls. In *2015 IEEE Power & Energy Society Innovative Smart Grid Technologies Conference (ISGT)* (pp. 1–5).: IEEE.
- Murray, W. & Ng, K.-M. (2010). An algorithm for nonlinear optimization problems with binary variables. *Computational Optimization and Applications*, 47(2), 257–288.
- Nejdawi, Imad M, C. K. D. P. W. . o. (2000). An efficient interior point method for sequential quadratic programming based optimal power flow. *Power Systems, IEEE Transactions on*, 15(4), 1179–1183.
- Nie, Y., Du, Z., Wang, Z., & Feng, H. (2015). Pcpdipm based optimal reactive power flow model with discrete variables. *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, 69, 116–122.
- Nocedal, J., Wächter, A., & Waltz, R. A. (2009). Adaptive barrier update strategies for nonlinear interior methods. *SIAM Journal on Optimization*, 19(4), 1674–1693.
- Nunes, F. T. et al. (2009). *Programação quadrática sequencial e condições de qualificação*. Technical report.
- Peng, J., Roos, C., & Terlaky, T. (2000). A logarithmic barrier approach to fischer function. In *Nonlinear Optimization and Related Topics* (pp. 277–297). Springer.
- Phan, D. T. (2012). Lagrangian duality and branch-and-bound algorithms for optimal power flow. *Operations Research*, 60(2), 275–285.
- Pinheiro, R. B. N., Balbo, A. R., Baptista, E. C., & Nepomuceno, L. (2015). Interior–exterior point method with global convergence strategy for solving the reactive optimal power flow problem. *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, 66, 235–246.

- Polyak, R. (1992). Modified barrier functions (theory and methods). *Mathematical programming*, 54(1-3), 177–222.
- Polyak, R. & Teboulle, M. (1997). Nonlinear rescaling and proximal-like methods in convex optimization. *Mathematical programming*, 76(2), 265–284.
- Ramos, J. M., Exposito, A. G., & Quintana, V. (2005). Transmission power loss reduction by interior-point methods: implementation issues and practical experience. *IEE Proceedings-Generation, Transmission and Distribution*, 152(1), 90–98.
- Rashed, A. & Kelly, D. (1974). Optimal load flow solution using lagrangian multipliers and the hessian matrix. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, 5(PAS-93), 1292–1297.
- Rezania, E. & Shahidehpour, S. (2001). Real power loss minimization using interior point method. *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, 23(1), 45–56.
- Santos, A. & Costa, G. (1995). Optimal-power-flow solution by newton’s method applied to an augmented lagrangian function. In *Generation, Transmission and Distribution, IEE Proceedings-*, volume 142 (pp. 33–36): IET.
- Santos Jr, A., Deckmann, S., & Soares, S. (1988). A dual augmented lagrangian approach for optimal power flow. *Power Systems, IEEE Transactions on*, 3(3), 1020–1025.
- Sasson, A., Vilorio, F., & Aboites, F. (1973). Optimal load flow solution using the hessian matrix. *Power Apparatus and Systems, IEEE Transactions on*, (1), 31–41.
- Sasson, A. M. (1969). Combined use of the powell and fletcher-powell nonlinear programming methods for optimal load flows. *Power Apparatus and Systems, IEEE Transactions on*, (10), 1530–1537.
- Shanno, D. F., Breitfeld, M. G., & Simantiraki, E. M. (1996). *Implementing barrier methods for nonlinear programming*. Springer.
- Silva, D. N. d. (2014). Método primal-dual previsor-corretor de pontos interiores e exteriores com estratégias de correção de inércia e suavização hiperbólica aplicado ao problema de despacho econômico com ponto de carregamento de válvula e representação da transmissão. Master’s thesis, Universidade Estadual Paulista (UNESP).

- Silva, D. N. d. (2019). *Novas abordagens determinísticas de otimização para resolução do problema de fluxo de potência ótimo*. PhD thesis, Universidade de São Paulo.
- Soler, E. M. (2011). *Resolução do problema de fluxo de potência ótimo com variáveis de controle discretas*. PhD thesis, Universidade de São Paulo.
- Soler, E. M., Asada, E. N., & Da Costa, G. R. (2013). Penalty-based nonlinear solver for optimal reactive power dispatch with discrete controls. *Power Systems, IEEE Transactions on*, 28(3), 2174–2182.
- Soler, E. M., Valença, M., Nepomuceno, L., Balbo, A. R., & Baptista, E. C. (2020). Redução do número de ações de controle no problema de fluxo de potência ótimo reativo discreto. *IEEE Latin America Transactions*, 100(1e).
- Sousa, V., Baptista, E. C., & da Costa, G. (2009). Loss minimization by the predictor-corrector modified barrier approach. *Electric Power Systems Research*, 79(5), 803–808.
- Sousa, V., Baptista, E. C., & da Costa, G. (2012). Optimal reactive power flow via the modified barrier lagrangian function approach. *Electric Power Systems Research*, 84(1), 159–164.
- Sousa, V. A., Baptista, E. C., & da Costa, G. R. (2008). Fluxo de potência ótimo reativo via método da função lagrangiana barreira modificada. *Sba: Controle & Automação Sociedade Brasileira de Automatica*, 19(1), 83–92.
- Sousa, V. A. d. (2006). *Resolução do problema de fluxo de potência ótimo reativo via método da função lagrangiana barreira modificada*. PhD thesis, Universidade de São Paulo.
- Souza, A., Sousa, V., & Da Costa, G. (2010). Studies of cases in power systems by sensitivity analysis oriented by opf. *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, 32(9), 969–974.
- Souza, R. R., Balbo, A. R., Nepomuceno, L., Baptista, E. C., Soler, E. M., & Pinheiro, R. B. N. (2017). A primal-dual interior/exterior point method, with combined directions and quadratic test in reactive optimal power flow problems. *IEEE Latin America Transactions*, 15(8), 1413–1421.

- Sun, D., Ashley, B., Brewer, B., Hughes, A., Tinney, W. F., et al. (1984). Optimal power flow by newton approach. *power apparatus and systems, ieee transactions on*, (10), 2864–2880.
- Tófoli, M. F. (2017). Solução do fluxo de potência ótimo reativo com variáveis discretas utilizando um método de pontos interiores e exteriores com estratégia de correção de inércia. Master’s thesis, Universidade Estadual Paulista (UNESP).
- Tófoli, M. F., Soler, E. M., Balbo, A. R., Baptista, E. C., & Nepomuceno, L. (2020). Interior/exterior-point methods with inertia correction strategy for solving optimal reactive power flow problems with discrete variables. *Annals of Operations Research*, 286(1), 243–263.
- Torres, G. L. & Quintana, V. H. (1998). An interior-point method for nonlinear optimal power flow using voltage rectangular coordinates. *Power Systems, IEEE Transactions on*, 13(4), 1211–1218.
- Torres, G. L. & Quintana, V. H. (2001). On a nonlinear multiple-centrality-corrections interior-point method for optimal power flow. *Power Systems, IEEE Transactions on*, 16(2), 222–228.
- UWEE, P. S. T. C. A. (2019). “power systems test case archive - uwee”.
- Wright, S. J. (1997). *Primal-dual interior-point methods*. SIAM.
- Wu, Y.-C., Debs, A. S., & Marsten, R. E. (1994). A direct nonlinear predictor-corrector primal-dual interior point algorithm for optimal power flows. *Power Systems, IEEE Transactions on*, 9(2), 876–883.
- Yamashita, H. (1998). A globally convergent primal-dual interior point method for constrained optimization. *Optimization Methods and Software*, 10(2), 443–469.
- Yamashita, H. & Tanabe, T. (2010). A primal-dual exterior point method for nonlinear optimization. *SIAM Journal on Optimization*, 20(6), 3335–3363.
- Yamashita, H., Yabe, H., & Harada, K. (2020). A primal-dual interior point trust-region method for nonlinear semidefinite programming. *Optimization Methods and Software*, (pp. 1–33).

- Yan, Xihui & Quintana, V. H. (1999). Improving an interior-point-based opf by dynamic adjustments of step sizes and tolerances. *Power Systems, IEEE Transactions on*, 14(2), 709–717.
- Yan, W., Liu, F., Chung, C., & Wong, K. (2006). A hybrid genetic algorithm-interior point method for optimal reactive power flow. *IEEE transactions on power systems*, 21(3), 1163–1169.
- Yang, Z., Bose, A., Zhong, H., Zhang, N., Xia, Q., & Kang, C. (2016). Optimal reactive power dispatch with accurately modeled discrete control devices: A successive linear approximation approach. *IEEE Transactions on Power Systems*, 32(3), 2435–2444.
- Zhao, B., Guo, C., & Cao, Y. (2005). A multiagent-based particle swarm optimization approach for optimal reactive power dispatch. *IEEE transactions on power systems*, 20(2), 1070–1078.