UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

FACULDADE DE FILOSOFIA E CIÊNCIAS

PÓS-GRADUAÇÃO EM FILOSOFIA

***CAMPUS* DE MARÍLIA**

ANGELA PEREIRA RODRIGUES

SOBRE QUANTIFICADORES: UMA FORMALIZAÇÃO DO QUANTIFICADOR ‘QUASE SEMPRE’

Marília

2012

ANGELA PEREIRA RODRIGUES

SOBRE QUANTIFICADORES: UMA FORMALIZAÇÃO DO QUANTIFICADOR 'QUASE SEMPRE'

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Filosofia da Faculdade de Filosofia e Ciências da Universidade Estadual Paulista, *Campus* de Marília, na Área de Concentração em Filosofia da Mente, Epistemologia e Lógica.

Orientador: Prof. Dr. Hércules de Araújo Feitosa.

Marília
2012

Ficha Catalográfica elaborada pelo
Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação – UNESP – *Campus* de Marília

R696s

Rodrigues, Angela Pereira.

Sobre quantificadores: uma formalização do quantificador 'quase sempre' / Angela Pereira Rodrigues. - Marília, 2012.

115 f. ; 30 cm.

Dissertação (Mestrado - Filosofia) – Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Filosofia e Ciências 2012.

Bibliografia: f. 112-115

Orientador: Hércules de Araújo Feitosa.

1. Quantificadores. 2. Lógica do ultrafiltro. 3. Lógica proposicional do 'quase sempre'. 4. Sistema hilbertiano. 5. Cálculo de sequentes. I. Autor. II. Título.

CDD 160

ANGELA PEREIRA RODRIGUES

SOBRE QUANTIFICADORES: UMA FORMALIZAÇÃO DO QUANTIFICADOR 'QUASE SEMPRE'

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Filosofia da Faculdade de Filosofia e Ciências da Universidade Estadual Paulista, *Campus* de Marília, na Área de Concentração em Filosofia da Mente, Epistemologia e Lógica.

Este exemplar corresponde à redação final da Dissertação defendida e aprovada pela Banca Examinadora em 24/02/2012.

BANCA EXAMINADORA

____

Prof. Dr. Hércules de Araújo Feitosa (Presidente e orientador)

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA/BAURU

____

Prof. Dr. Mauri Cunha do Nascimento

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA/BAURU

____

Profa. Dra. Juliana Bueno-Soler

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC/SANTO ANDRÉ

Aos meus pais, Esmael e Maria,
e ao Claudemir,
fontes de amor e incentivo.

AGRADECIMENTOS

Muitas pessoas colaboraram, direta ou indiretamente, para que este trabalho fosse realizado. Agradecemos a todos e, de maneira especial:

- A Deus, por ter iluminado nosso caminho e possibilitado a conclusão de mais uma etapa.
- Ao Prof. Dr. Hércules de Araújo Feitosa, pela habilidade e dedicação com que orientou nosso trabalho e pela amizade.
- Aos Professores Doutores Mauri Cunha do Nascimento, Luiz Henrique da Cruz Silvestrini e Juliana Bueno-Soler pelas valiosas contribuições.
- Aos amigos Anderson, Ana e Kleidson pelo apoio.
- Aos professores Maria Eunice Q. Gonzalez, Ricardo P. Tassinari, Maria Cláudia C. Grácio, Mariana Claudia Broens e Adrian Oscar D. Montoya pelos ensinamentos.
- A CAPES pela bolsa concedida.

RESUMO

O objetivo deste trabalho é, em um primeiro momento, fazer um estudo detalhado sobre quantificadores, os quais são estudados desde Aristóteles [384-322 a. C.]. Apresentamos algumas concepções sobre quantificadores generalizados, a saber, a concepção de Mostowski (1957), criada com o intuito de formalizar alguns conceitos matemáticos, e a concepção de Barwise e Cooper (1981), desenvolvida para tentar aproximar a lógica da linguagem natural. Com este estudo, concluímos que não há uma definição geral de quantificadores e, por isso, trabalhos como o de Sette, Carnielli e Veloso (1999), no qual introduziram a Lógica do Ultrafiltro, são importantes. A Lógica do Ultrafiltro estende a lógica clássica de primeira ordem por meio do acréscimo de um novo quantificador, o qual é chamado de quantificador 'quase sempre'. Assim, em um segundo momento, formalizamos algebricamente este novo quantificador introduzido pela Lógica do Ultrafiltro. Introduzimos a lógica proposicional do 'quase sempre', que estende o cálculo proposicional clássico pela adição de um novo operador, em um sistema hilbertiano, e depois em um sistema de cálculo de sequentes.

Palavras-chave: Quantificadores. Lógica do Ultrafiltro. Lógica proposicional do 'quase sempre'. Sistema hilbertiano. Cálculo de sequentes.

ABSTRACT

The objective of this paper is, in a first moment, to do a detailed study on quantifiers, which are studied since Aristotle [384-322 BC]. We show some conceptions of the generalized quantifiers, namely, the conception of Mostowski (1957), created with the purpose of to formalize some mathematical concepts, and the one of Barwise and Cooper (1981), developed to try an approach to the logical nature of language. From this study we concluded that there is no an absolute definition of quantifiers and so the several presentations like the paper of Sette, Carnielli and Veloso (1999), on which it is introduced the Ultrafilter Logic, are important. The Ultrafilter Logic extends the first order classical logic by the addition of a new quantifier called ‘almost always’. Thus, in a second moment, we formalize algebraically this new quantifier introduced in the Ultrafilter Logic. We introduce the ‘almost always’ propositional logic, which extends the classical propositional calculus by the addition of a new operator, in a Hilbert system and in a sequent calculus system.

Key-words: Quantifiers. Ultrafilter Logic. ‘Almost always’ propositional logic. Hilbert system. Sequent calculus.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O raciocínio dedutivo pode ser muito bem analisado pela lógica clássica, por exemplo, através do cálculo clássico de predicados de primeira ordem. Já o raciocínio indutivo, não pode ser representado pela lógica clássica. Em outras palavras, existem muitas sentenças encontradas nas ciências naturais e no nosso cotidiano, como: “A maioria dos homens são machistas” e “Muitas mulheres querem ser mães” que não podem ser bem representadas pela lógica clássica.

Motivados por estas questões relativas ao raciocínio indutivo, surgiram muitas propostas para representar e sistematizar algumas formas de argumento indutivo. Destacamos o trabalho de Grácio (1999), que em sua tese de Doutorado, com a intenção de entender e formalizar o uso de alguns quantificadores presentes na linguagem natural, mas que não podem ser definidos a partir dos usuais quantificadores ‘para todo’ e ‘existe algum’, introduziu uma família de sistemas lógicos que formalizam algum tipo de argumento indutivo, em que cada representante é chamado de lógica modulada.

Uma *lógica modulada* é uma extensão da lógica clássica de primeira ordem pelo acréscimo de um novo quantificador na linguagem, denominado *quantificador modulado*.

Grácio (1999) trata de três lógicas moduladas, são elas: a lógica da maioria, a lógica do muito e a lógica do plausível. As lógicas citadas capturam, respectivamente, as noções de quantidades: ‘a maioria’, ‘muitos’ e ‘para uma ‘boa’ parte’.

As lógicas moduladas foram introduzidas num ambiente quantificacional. Inspirados pelo trabalho de Grácio (1999) foram introduzidas lógicas proposicionais para tratar das noções de ‘muitos’ e ‘para uma ‘boa’ parte’ em (Feitosa, Nascimento, Grácio, 2009a) e (Feitosa, Nascimento, Grácio, 2009b), respectivamente.

Por outro lado, em um trabalho que antecede o de Grácio, encontramos a Lógica do Ultrafiltro introduzida em (Sette, Carnielli, Veloso, 1999) com o intuito de formalizar as noções de ‘quase todos’ ou ‘quase sempre’ através da introdução de um quantificador generalizado na linguagem clássica de primeira ordem.

A motivação deste trabalho surgiu dos trabalhos de (Feitosa, Nascimento, Grácio, 2009a) e (Feitosa, Nascimento, Grácio, 2009b), que introduziram, num ambiente proposicional, lógicas apresentadas inicialmente num ambiente quantificacional. E, também, da Lógica do Ultrafiltro. Assim, o presente trabalho introduz a lógica proposicional do ‘quase sempre’ para tratar a noção de ‘quase sempre’ do novo quantificador da Lógica do Ultrafiltro por meio de um operador num ambiente proposicional.

Mais especificadamente, no primeiro capítulo, buscam-se fundamentos para justificar a importância de trabalhos sobre quantificadores, como em (Grácio, 1999) e em (Sette, Carnielli, Veloso, 1999). Em decorrência, destaca-se a importância dos trabalhos de Feitosa, Nascimento, Grácio (2009a) e Feitosa, Nascimento, Grácio (2009b), por conseguirem tratar das noções de ‘muitos’ e ‘para uma ‘boa’ parte’ no contexto proposicional.

Discorre-se sobre os quantificadores desde Aristóteles, em que os quantificadores universal e existencial foram estudados provavelmente pela primeira vez; as teorias quantificacionais propostas por Frege e Peirce; até as teorias de quantificadores generalizados, como as teorias sobre quantificadores generalizados de Mostowski (1957) e de Barwise e Cooper (1981). Define-se quantificadores lógicos e não-lógicos, segundo (Barwise, Cooper, 1981). Apresentam-se, também, estudos sobre as abordagens feitas em relação aos quantificadores, segundo (Hintikka, Sandu, 1994). Além disso, faz-se uma análise de como os dicionários definem o conceito de quantificadores.

No segundo capítulo, apresenta-se a Lógica do Ultrafiltro, como dito anteriormente, introduzida em (Sette, Carnielli, Veloso, 1999). Fala-se, também, da Lógica do Padrão de Reiter (1980) e sobre sistemas monotônicos e não-monotônicos. Este capítulo é importante, pois a noção de ‘quase sempre’ utilizada neste trabalho apareceu com a Lógica do Padrão, em que Reiter propôs trabalhar com esta noção por meio de um sistema não-monotônico. Posteriormente, Sette, Carnielli e Veloso (1999) trouxeram a noção de ‘quase sempre’ através de um sistema monotônico, por julgarem ser mais vantajoso.

Ainda, no segundo capítulo, apresentamos sucintamente as lógicas moduladas de Grácio (1999) e as lógicas proposicionais para tratar das noções de ‘muitos’ e ‘para uma ‘boa’ parte’ introduzidas em (Feitosa, Nascimento, Grácio, 2009a) e (Feitosa, Nascimento, Grácio, 2009b), respectivamente.

O terceiro capítulo é o capítulo central desta Dissertação. Nele introduz-se a lógica proposicional do ‘quase sempre’, em um sistema hilbertiano, com a pretensão de capturar, através de um novo operador, a mesma noção do quantificador introduzido na Lógica do Ultrafiltro. Ademais, introduz-se a álgebra do ‘quase sempre’ como estrutura semântica para esse novo sistema. Mostram-se alguns resultados neste sistema e, como usual, demonstra-se que o nosso sistema é correto e completo.

O Apêndice trata de reticulados, álgebra de Boole, filtros e ultrafiltros, pressupostos teóricos para o desenvolvimento do Capítulo 3.

No quarto capítulo, apresenta-se a lógica proposicional do 'quase sempre' por meio do método de cálculo de sequentes, método de prova introduzido por Gentzen (1969), e demonstra-se a equivalência entre este sistema e o dado pelo método hilbertiano. Assim, como a lógica do 'quase sempre', na versão hilbertiana, é correta e completa e a versão em cálculo de sequentes é equivalente a ela, esta última também é correta e completa.

Por fim, nas Considerações Finais, resumem-se os resultados obtidos, seus alcances e propõem-se alguns trabalhos futuros.

1 HÁ UMA DEFINIÇÃO GERAL DE QUANTIFICADORES?

1.1 Origem dos quantificadores

Segundo (Westerståhl, 2005), Aristóteles [384-322 a. C.] inventou a lógica e introduziu o estudo sobre a quantificação como parte essencial da lógica. Aristóteles, ao trabalhar com os silogismos categóricos, tratou do estudo formal do significado das propriedades de quatro expressões de quantificadores básicas: 'todo', 'nenhum', 'algum' e 'algum não' (que são respectivamente as sentenças categóricas chamadas: afirmação universal, negação universal, afirmação particular e negação particular).

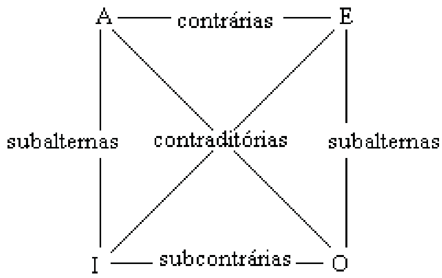
Ainda de acordo com (Westerståhl, 2005), o quadrado das oposições de Aristóteles é um estudo das várias formas de negação combinadas com expressões de quantificadores. Westerståhl (2005) acredita que estes primeiros estudos de Aristóteles foram decisivos para o estudo na área da quantificação, mesmo que a teoria dos silogismos categóricos seja muito fraca para expressar diversos raciocínios interessantes.

Para um melhor entendimento, exporemos de maneira sucinta os principais conceitos envolvidos na teoria dos silogismos categóricos. Utilizamos nesta teoria as chamadas *sentenças categóricas*, das quais nos referimos acima como expressões de quantificadores, que são da forma Sujeito-Predicado. As sentenças categóricas são constituídas por apenas quatro tipos básicos:

(A) Afirmação universal: "Todo S é P";
(E) Negação universal: "Nenhum S é P";
(I) Afirmação particular: "Algum S é P";
(O) Negação particular: "Algum S não é P".

Segundo (Feitosa, Paulovich, 2005, p. 147), as letras A e I, que servem para indicar as sentenças categóricas afirmativas, e as letras E e O, que servem para indicar as sentenças categóricas negativas, referem-se, respectivamente, às primeiras vogais das palavras ***a**ff**i**rmo* e *n**e**g**o***.

A título de curiosidade mostramos a seguir o *quadrado das oposições*:



As sentenças categóricas A e O bem como as sentenças categóricas E e I são *contraditórias*, o que significa que não podem ser, simultaneamente, ambas verdadeiras ou ambas falsas. As sentenças categóricas A e E são *contrárias*, isto é, não podem ser ambas verdadeiras, porém, podem ser ambas falsas. As sentenças categóricas I e O são sentenças *subcontrárias*, ou seja, não podem ser ambas falsas, mas podem ser ambas verdadeiras. Finalmente, as sentenças categóricas A e I assim como as sentenças categóricas E e O são *subalternas*, o que significa que se A é verdadeira, então I também é verdadeira; e que se E é verdadeira, então O também é verdadeira.

Aristóteles examinou detalhadamente os *silogismos*, argumentos que consistem de duas premissas e uma conclusão, em que tanto as premissas quanto a conclusão são sentenças categóricas. Silogismo, segundo (Machado, Cunha, 2005), é uma palavra de origem grega, *súllogos*, que significa reunião, ação de recolher, de reunir palavras ao raciocinar.

Todas as sentenças categóricas possuem dois *termos*, o sujeito e o predicado. Um silogismo contém unicamente três termos. As duas premissas envolvidas num silogismo não podem ser totalmente desvinculadas, pois devem apresentar um termo em comum, dito *termo médio*, termo este que não deve aparecer na conclusão. Cada premissa contém um termo comum com a conclusão. O sujeito da conclusão é chamado de *termo menor* e o predicado da conclusão é denominado por *termo maior*. Segue abaixo um exemplo de silogismo categórico:

Todo animal é mortal.
<u>Todo homem é animal.</u>
Todo homem é mortal.

Neste exemplo, 'animal' é o termo médio, 'homem' é o termo menor e 'mortal' é o termo maior.

Existem 256 silogismos categóricos, porém, somente 24 deles são argumentos válidos, ou seja, argumentos em que a verdade da conclusão decorre inevitavelmente da verdade das premissas. Cinco destes 24 silogismos válidos podem ser reescritos em função dos demais. Assim, temos 19 silogismos válidos.

A lógica aristotélica foi considerada como uma ciência acabada, pronta, por Kant, em sua obra *Crítica da Razão Pura*, de 1787, porém ela sofreu uma grande transformação no século XIX através dos trabalhos de lógicos como: George Boole [1815-1864], Augustus De Morgan [1806-1971], Charles Sanders Peirce [1839-1914], Gottlob Frege [1845-1925], Giuseppe Peano [1858-1932], Bertrand Russell [1872-1970], entre outros.

Krause (2009) destaca que Gottfried Leibniz [1646-1716] percebeu que a teoria dos silogismos categóricos não era suficiente para dar conta dos tipos de inferência feitos na matemática. Ademais, Krause (2009) fala do estranho fato dos matemáticos não mencionarem Aristóteles, inclusive Euclides [325-265 a. C.] que em sua obra 'Os Elementos' escreve sobre a geometria de forma dedutiva e utiliza plenamente argumentos lógicos. Pode ser devido a que, ao contrário do que pensava Aristóteles, a teoria dos silogismos categóricos seria um esquema geral que não conseguiria tratar as particularidades de cada ciência.

Mesmo raciocínios simples não podem ser feitos na teoria do silogismo. O argumento, dado por Krause (2009), em que temos a premissa 'Toda vaca é um animal' e a conclusão 'Todo chifre de vaca é chifre de um animal' não é válido na teoria dos silogismos categóricos, embora seja um raciocínio coerente.

Para Westerståhl (2005) o interessante da teoria proposta por Aristóteles é que as expressões de quantificadores possuem dois termos e podemos vê-las como relações binárias sintática e semanticamente. Isto porque os termos são conjuntos de indivíduos e, desta forma, a expressão 'alguns' pode ser vista como a intersecção não-vazia entre dois conjuntos, e a expressão 'todo' pode significar a relação de inclusão. Estas relações são entre conjuntos de indivíduos e não entre indivíduos. Isto significa que estas relações são de segunda ordem. Logo, estes quantificadores, vistos desta maneira, são os quantificadores generalizados: alguns e todos (em um dado universo).

Como ainda não foi vista nenhuma teoria sobre quantificadores generalizados, daremos a definição de acordo com Benthem (1983): um *quantificador generalizado* denota uma função D que atribui, para todo universo E, alguma relação binária entre seus subconjuntos. Desta forma, em um modelo com universo E, temos que: "*todo* X é Y" denota a sentença "$X \subseteq Y$" e "*nenhum* X é Y" denota a sentença "$X \cap Y = \varnothing$" e assim por diante.

Westerståhl (2005) diz que outro nome importante quando se fala da teoria da quantificação, mais especificamente da teoria dos quantificadores generalizados, é Gottlob Frege.

Com Frege surge uma visão linguística da lógica. Frege, por um lado, introduziu a linguagem formal da lógica de predicados (conectivos, identidade e os quantificadores universal e existencial) e, por outro, segundo (Westerståhl, 2005), "formulou explicitamente a noção abstrata de um quantificador como uma relação de segunda ordem".

Para Westerståhl (2005), a única distinção que existe entre os quantificadores como relação de segunda ordem de Frege e a noção moderna de quantificador generalizado se deve ao fato de que Frege desconhecia a noção de modelo.

Hintikka e Sandu (1994) dizem que Frege e Peirce propuseram e desenvolveram independentemente as bases para a teoria da quantificação com abordagens distintas.

De acordo com (Frápolli Sanz, 2007), a teoria da quantificação como a conhecemos surge pela primeira vez em 1879, na obra *Conceptografia* de Frege, apesar de que as expressões 'quantificadores' e 'lógica de primeira ordem', com o significado contemporâneo, foram escritas primeiramente por Peirce em 1883.

As abordagens de Frege e Peirce são distintas, para Hintikka e Sandu (1994), porque Frege fez uma formalização com a intenção da criação de uma linguagem universal da matemática, ou até mesmo para o pensamento humano em geral, com uma linguagem livre de ambiguidades e demais imperfeições próprias das linguagens naturais. Porém, Peirce pensou na teoria dos quantificadores e na notação envolvida apenas como um dos muitos dispositivos lógicos. Para Peirce, os quantificadores tinham significado não por sua relação com a linguagem natural, nem por alguma compreensão preexistente, mas por determinados jogos que podem ser jogados com os quantificadores e que servem para interpretá-los.

Discutiremos um pouco mais sobre o trabalho de Frege com relação aos quantificadores, segundo (Frápolli Sanz, 2007).

Primeiramente, devemos lembrar que inúmeros lógicos contribuíram para a lógica depois de Aristóteles e antes de Frege. Desta forma, com a concepção de lógica já desenvolvida por outros lógicos, podemos dizer que a *Conceptografia* é o primeiro tratado de lógica contemporânea e o primeiro a incorporar uma análise específica dos quantificadores. O tratamento de Frege em relação aos quantificadores necessita de dois passos prévios:

(a) Interpretação das variáveis como expressões de generalidade;

(b) Distanciamento da maneira habitual de se analisar as orações em termos de sujeito e predicado.

Quanto ao passo (a) destacamos a importância de se trabalhar com as variáveis não como uma ferramenta, mas com a compreensão do significado das variáveis. As variáveis supõem que as expressões que as incorporam sejam expressões gerais de um determinado tipo.

No passo (b), pontuamos que Frege abandonou a maneira habitual de se trabalhar com enunciados da forma Sujeito-Predicado e passou a trabalhar com as noções de funções e argumentos, pois acreditava que as relações lógicas se estabelecem não entre as próprias orações e fórmulas, mas entre o que as orações e as fórmulas dizem.

Para deixar mais claro, vamos exemplificar. As orações ‘os gregos venceram os persas’ e ‘os persas foram vencidos pelos gregos’ dizem a mesma coisa, no entanto, possuem sujeitos gramaticais diferentes. Fazendo uma análise em termos de sujeito e predicado apenas, temos duas orações distintas. Para Frege, o que importa é o conteúdo das orações. Assim, como as duas frases expressam o mesmo conteúdo, então ambas partilham o mesmo significado e representam a mesma proposição.

Ao considerarmos especificamente os aspectos funções e argumentos, os dois enunciados acima são idênticos. Assim, uma vantagem dessa escolha de Frege é que a troca da ordem das orações não afeta o conteúdo.

Outra vantagem é que ao usarmos as funções estamos trabalhando com um instrumento muito mais versátil que a tradicional versão gramatical. As funções podem se iterar e, desta forma, podemos fazer com que argumentos sejam funções. As funções em que os argumentos são termos singulares são chamadas *funções de primeira ordem*. E as funções em que os argumentos são funções de primeira ordem são chamadas *funções de ordem superior*. Frege, em sua obra *Conceptografia*, diz que a generalidade é uma função de funções.

Para Frege, os quantificadores são funções em que os argumentos são funções, funções de ordem n, $n > 1$. A interpretação dos quantificadores nos diz que eles são funções monádicas, ou seja, formam uma expressão completa quando acompanha uma única função que funciona como argumento. É desta forma que os quantificadores são introduzidos na obra *Conceptografia* e que ganhou espaço na lógica de primeira ordem.

Frege caracterizou os quantificadores como funções monádicas com alcance ilimitado, mas se mostrou consciente que nas linguagens naturais estes operadores não funcionam assim. Ele admite que as orações quantificadas, como nos silogismos, ou melhor, no uso comum dos quantificadores da linguagem natural, o argumento do quantificador não é o conceito que se segue imediatamente, e sim que o quantificador indica uma relação entre os dois predicados que aparecem na oração. A explicação, assim, é uma explicação relacional e binária dos quantificadores. Assumindo que estes operadores expressam relações entre dois conceitos, a interpretação ilimitada deles não faz sentido. O primeiro conceito funciona sempre como um demarcador do alcance da afirmação feita por meio da oração quantificada.

Em sua obra *Conceptografia*, Frege não assume apenas uma posição em relação à interpretação dos quantificadores, mas eles são apresentados como se pudessem ser monádicos. Posteriormente é dito que os quantificadores em determinados tipos de orações têm os conceitos relacionados. Os quantificadores caracterizados como operadores binários são vistos na teoria dos quantificadores generalizados, que será discutida ainda neste capítulo.

1.2 Quantificadores lógicos e não-lógicos

Ao consultar qualquer livro elementar de Lógica encontramos os quantificadores da lógica clássica de primeira ordem; são eles o quantificador universal "$\forall$" e o quantificador existencial "$\exists$". A partir destes quantificadores podemos definir vários outros quantificadores, por exemplo, os quantificadores "nenhum" e "existe um único" como segue:

$$\text{Nenhum } x\ A(x) =_{df} \forall x\ \neg A(x)$$

$$\exists! x\ A(x) =_{df} \exists x\ A(x) \wedge \forall y\ (A(y) \rightarrow y = x)$$

Ademais, é possível, na lógica clássica de primeira ordem, admitir apenas um dos quantificadores e definir o outro a partir deste. Se considerarmos o quantificador $\forall$, definimos o $\exists$ da seguinte maneira:

$$\exists x\ A(x) =_{df} \neg\forall x\ \neg A(x)$$

Por mais que a partir dos quantificadores $\forall$ e $\exists$ possamos definir outros quantificadores, é notório que ainda existam quantificadores que não possam ser definidos a partir deles. A insuficiência destes quantificadores para tratar das sentenças quantificadas da linguagem natural é discutida por Barwise e Cooper (1981) nos seguintes aspectos:

- Há sentenças quantificadas nas linguagens naturais que não podem ser simbolizadas apenas pelos quantificadores da lógica clássica de primeira ordem;
- A estrutura sintática das sentenças quantificadas nas linguagens naturais e a estrutura sintática das sentenças quantificadas na lógica clássica de primeira ordem são completamente diferentes.

Barwise e Cooper (1981) justificam a existência de sentenças quantificadas nas linguagens naturais por meio das frases a seguir:

(1) (a) Existe apenas um número finito de estrelas.
(b) Nenhum coração irá bater um número infinito de vezes.

(2) (a) Mais da metade das flechas de João acertam o alvo.
(b) Mais da metade das pessoas votaram em Carter.

(3) (a) A maioria das flechas de João acertou o alvo.
(b) A maioria das pessoas votou em Carter.

Os autores dizem suspeitar que sentenças com quantificadores, como as sentenças acima, podem ser expressas em toda linguagem humana. Contudo, as sentenças em (1), (2) e (3) não podem ser formalizadas pelos quantificadores universal e existencial. Concluímos, assim, que uma teoria semântica para a linguagem natural não pode ser baseada apenas nos quantificadores usuais.

Podemos escrever os quantificadores utilizados acima da seguinte forma:

(1’) Finitamente muitas coisas x satisfazem A(x), ou ainda, Finito x [A(x)].
(2’) Mais da metade dos x tais que B(x) satisfazem A(x), ou (mais que ½B)x [A(x)].
(3’) A maioria x tal que B(x) satisfaz A(x), ou (maioria B)x [A(x)].

Considerando **E** como um conjunto não-vazio e arbitrário de indivíduos para o domínio da nossa série de variáveis, temos que na lógica clássica de primeira ordem podemos quantificar sobre os objetos de **E**, porém não sobre conjuntos arbitrários de indivíduos, funções de indivíduos em indivíduos, ou outros tipos de objetos abstratos que não são elementos de **E**. Demonstra-se, utilizando a teoria de Barwise e Cooper (1981), que nenhum destes quantificadores é definido a partir dos quantificadores universal e existencial da lógica de primeira ordem (no Apêndice C13 de (Barwise, Cooper, 1981) encontramos a demonstração para o caso do quantificador “mais da metade”).

Para os autores, há dois caminhos para sairmos da lógica de primeira ordem clássica. Um é uma abordagem feita pela contemporânea teoria dos conjuntos, em que se expande o domínio **E** de quantificação para um domínio maior **E**∪**A**, em que **A** contém números e funções para subconjuntos de **E**. Outro caminho é manter a definição formal como parte da metalinguagem e tratar de quantificadores generalizados.

Os quantificadores que não podem ser definidos a partir dos quantificadores da lógica clássica de primeira ordem são chamados, segundo (Barwise, Cooper, 1981), *quantificadores não-lógicos*; já os que podem ser definidos por estes quantificadores são chamados *quantificadores lógicos*.

Para Frápolli Sanz (2007), Barwise e Cooper fazem esta distinção entre quantificadores lógicos e não-lógicos porque os quantificadores generalizados formam, em algum sentido, uma categoria sintática a parte. Os quantificadores generalizados não são considerados como expressões sincategoremáticas ou auxiliares, mas são interpretados como um tipo especial de predicado ou relação.

Desde a antiguidade, as noções lógicas pareciam ser caracterizadas como expressões sincategoremáticas. Esta ideia se torna clara apenas a partir da definição semântica da verdade de Tarski. Desde Tarski, a verdade de uma oração quantificada num modelo não exige que os quantificadores que ocorrem na oração sejam explicitamente interpretados no modelo em questão, pois a oração será verdadeira ou não dependendo das condições de satisfação da fórmula dominada pelo quantificador.

Na semântica da lógica clássica, os conectivos e os quantificadores não são interpretados junto com as expressões não-lógicas, ou seja, junto com as constantes individuais, os predicados e as relações. A interpretação das expressões lógicas é suficiente para avaliar a verdade das fórmulas da linguagem, pois os quantificadores clássicos juntamente com o resto das noções lógicas são invariantes de um modelo para outro. Isto não ocorre com os quantificadores generalizados. Na teoria dos quantificadores generalizados, considera-se que os quantificadores são relações entre os subconjuntos de um conjunto dado. Este conjunto funciona como o universo da quantificação. Os quantificadores generalizados, desta forma, não têm porque serem invariantes de um modelo para outro. Na verdade, as fórmulas quantificadas com quantificadores do tipo ‘muitos’, ‘poucos’, ‘a maioria’ ou ‘a metade’ variam de acordo com as variações do tamanho do universo utilizado, por exemplo, ‘100 pessoas’ é muito em um grupo de 150 pessoas, mas não é muito pensado nas pessoas existentes no mundo inteiro. Por isso, Barwise e Cooper (1981) afirmam que não há porque quantificadores generalizados serem considerados símbolos lógicos.

1.3 Quantificadores generalizados

Tendo em vista que existem, na linguagem natural, muitas expressões de quantidade que não podem ser formalizadas apenas pelos quantificadores da linguagem da lógica clássica de primeira ordem e, além disso, expressões que envolvem o infinito como os prefixos numéricos de fórmulas, por exemplo, nas expressões “Para um número infinito enumerável de x, Ax” e “Para um número infinito não enumerável de x, Ax”, também não podem ser expressas pelos quantificadores da lógica clássica de primeira ordem, surgiram, então, propostas de teorias com quantificadores generalizados.

1.3.1 Quantificadores generalizados de A. Mostowski

O primeiro a desenvolver este tipo de teoria, pensando mais em um viés matemático, foi Andrzej Mostowski, que apresentou, em 1957, o trabalho intitulado *On a generalization of quantifiers*, sobre quantificadores generalizados destinados a estender a teoria da quantificação clássica com outras expressões quantificadas.

Os quantificadores generalizados encontrados em (Mostowski, 1957) são quantificadores matematicamente interessantes e que, em sua maioria, não podem ser definidos por meio dos quantificadores universal e existencial, exceto os próprios quantificadores universal e existencial e os quantificadores lógicos. O autor trata de operadores que representam uma generalização natural dos quantificadores lógicos.

A seguir exporemos as definições de Mostowski (1957).

Sejam I um conjunto arbitrário e I^* o seu produto cartesiano ($I^* = I \times I \times ... \times I$ ...), isto é, I^* é o conjunto de todas as sequências $\vec{x} = (x_1, x_2, ...)$, com $x_j \in I$ e j = 1,2, ... Indicamos os valores de verdade, falso e verdadeiro, por $\perp$ e $\top$, respectivamente.

Uma *função proposicional* F em I é uma função de I^* em $\{\perp, \top\}$ que satisfaz a condição:

- Existe um conjunto finito de inteiros K tais que: se $x = (x_1, x_2, ...) \in I^*$, $y = (y_1, y_2, ...) \in I^*$ e $x_j = y_j$, para cada $j \in K$, então, F(x) = F(y), ou seja:

Com a condição acima percebemos que F depende essencialmente de um conjunto finito de argumentos. O menor conjunto K com a propriedade determinada acima é chamado *suporte* de F. Se este conjunto possui apenas um único elemento, então F é uma função de um argumento e pode ser identificada com um subconjunto de I.

Seja A uma função bijetiva de I sobre um conjunto I', não necessariamente diferente de I. Se $x = (x_1, x_2,\ldots) \in I^*$, então denotamos por A(x) a sequência $(A(x_1), A(x_2),\ldots)$. Se F é uma função proposicional em I, então denotamos por F_A a função proposicional em I' tal que $F_A(A(x)) = F(x)$.

Definimos um *quantificador limitado* para I como uma função **Q** que atribui um dos elementos $\perp$, $\top$ para cada função proposicional F em I de um argumento e que satisfaz a condição $\mathbf{Q}(F) = \mathbf{Q}(F_A)$, para toda F e toda permutação A de I.

A definição acima, primeiramente, generaliza o fato elementar que quantificadores nos permitem construir proposições para funções proposicionais com um argumento. A segunda parte da definição explicita que quantificadores não devem nos permitir distinguir entre elementos diferentes de I.

Seja (m_ξ, n_ξ) uma sequência (finita ou transfinita) de todos os pares de números cardinais que satisfazem a equação $m_\xi + n_\xi = |I|$, em que $|I|$ denota o número cardinal de I. Em outras palavras, (m_ξ, n_ξ) é uma sequência (finita ou transfinita) de forma que, dada uma relação $R \subseteq I$, $m_\xi = |R|$ é a cardinalidade de R e $n_\xi = |R^c|$ é a cardinalidade do complementar de

R. Para toda função T que atribui um dos valores de verdade para cada par (m_ξ, n_ξ) temos $\mathbf{Q}_T(F) = T(|F^{-1}(\top)|, |F^{-1}(\bot)|)$.

Salientamos que $\underset{x \in X}{E}[W(x)]$ denota o conjunto dos elementos x em X que satisfazem a condição W(x). Se F é uma função de X em Y, então $F^{-1}(y)$ denota o conjunto $\underset{x \in X}{E}[F(x) = y]$.

O seguinte teorema está demonstrado em (Mostowski, 1957): (i) $\mathbf{Q}_T$ é um quantificador limitado para *I*; (ii) para cada quantificador limitado para *I* existe uma função T tal que $\mathbf{Q}_T = \mathbf{Q}$.

Seja $T^*(m_\xi, n_\xi) = {\sim}T(m_\xi, n_\xi)$. O quantificador determinado por T* é um *dual* de $\mathbf{Q}_T$, ele é denotado por $\mathbf{Q}_T{}^*$.

Definimos um *quantificador ilimitado* (ou simplesmente um quantificador) como uma função que atribui um quantificador limitado $\mathbf{Q}_I$ em *I*, para cada conjunto *I* e que satisfaz a equação $\mathbf{Q}_I(F) = \mathbf{Q}_{I'}(F_A)$ para toda função proposicional F em *I* de um argumento e para toda função bijetiva de *I* em *I'*.

As operações booleanas sobre quantificadores limitados e ilimitados são simples. Utilizando os símbolos usuais $\vee$, $\wedge$ e ~ de maneira que, por exemplo, $\mathbf{Q}_I' \vee \mathbf{Q}_I''$ é uma função $\mathbf{Q}_I$ tal que $\mathbf{Q}_I(F) = \mathbf{Q}_I'(F) \vee \mathbf{Q}_I''(F)$, para cada função proposicional F.

Vejamos como os quantificadores existencial e universal podem ser expressos através desta definição:

Quantificador existencial ($\exists$): Se $\{T(m_\xi, n_\xi) = \top\} \equiv \{m_\xi \neq 0\}$, então $\mathbf{Q}_T$ é o quantificador existencial $\exists$ limitado para *I*;

Quantificador universal ($\forall$): O dual de $\mathbf{Q}_T$ é o quantificador universal $\forall$ limitado para *I*, ou seja, o quantificador universal $\forall$ limitado para *I* é $\mathbf{Q}_T$ se $\{T(m_\xi, n_\xi) = \top\} \equiv \{n_\xi = 0\}$.

Seguem outros exemplos de quantificadores, dados por Mostowski (1957):

- Considerando m, $n \in \mathbb{N}$ e T', T'' funções tais que $\{T'(m_\xi, n_\xi) = \top\} \equiv \{ m_\xi = m\}$, $\{T''(m_\xi, n_\xi) = \top\} \equiv \{ m_\xi = n\}$, então $\mathbf{Q}_{T'}$ e $\mathbf{Q}_{T''}$ serão denotados por $\sum\limits_I^{(m)}$ e $\prod\limits_I^{(n)}$. Os quantificadores ilimitados que atribuem $\sum\limits_I^{(m)}$ e $\prod\limits_I^{(n)}$ para I serão denotados por $\sum^{(m)}$ e $\prod^{(n)}$. Polinômios booleanos de quantificadores $\sum^{(m)}$ e $\prod^{(n)}$, em que m, $n \in \mathbb{N}$, são chamados *quantificadores numéricos*. Segue um exemplo de cada um destes quantificadores:

$$Q^{(1)} = \sum^{(m_1)} \vee \sum^{(m_2)} \vee \ldots \vee \sum^{(m_k)},\ Q^{(2)} = \prod^{(m_1)} \vee \prod^{(m_2)} \vee \ldots \vee \prod^{(m_k)}.$$

Tarski (1995, p. 63) define *quantificador numérico* como expressões do tipo: 'existe pelo menos um', ou 'no máximo um', ou 'exatamente um', ..., 'existem pelo menos dois', ou 'no máximo dois', ou 'exatamente dois', ..., e assim por diante.

Se I é um conjunto infinito e F uma função proposicional em I com o suporte {1}, então a fórmula $\mathbf{Q}_I^{(1)}(F) = \top$ (ou a fórmula $\mathbf{Q}_I^{(2)}(F) = \top$) é equivalente à sentença: o conjunto de elementos x em I tal que $F(x,...) = \top$ (ou tal que $F(x,...) = \perp$) possui exatamente m_1, ou m_2, ou ... ou exatamente m_k elementos.

- Consideremos as funções T_1 e T_2 de forma que $\{T_1(m_\xi, n_\xi) = \top\} \equiv \{ m_\xi < \varkappa_0\}$, $\{T_2(m_\xi, n_\xi) = \perp\} \equiv \{ m_\xi = \varkappa_0\}$, então os quantificadores $\mathbf{Q}_{T1}$ e $\mathbf{Q}_{T2}$ serão denotados por $\mathbf{S_I}$ e $\mathbf{S^0_I}$. Os quantificadores ilimitados que atribuem $\mathbf{S_I}$ e $\mathbf{S^0_I}$ para I serão denotados por $\mathbf{S}$ e $\mathbf{S^0}$. Se F é uma função proposicional em I com o suporte {1}, então a fórmula $\mathbf{S_I}(F) = \top$ (ou a fórmula $\mathbf{S^0_I}(F) = \top$) é equivalente à sentença: existe, no máximo, um número finito de elementos x em I tais que $F(x, ...) = \top$ (ou é equivalente à sentença: existe, no máximo, um número finito de elementos x em I tais que $F(x, ...) = \top$ ou existe, no máximo, um número finito de elementos x em I tais que $F(x, ...) = \perp$).

- Seja I um conjunto enumerável. Um quantificador $\mathbf{Q_T}$ limitado para I é totalmente caracterizado pelas valorações $T(n, \varkappa_0)$, $T(\varkappa_0, n)$, $\gamma_T = T(\varkappa_0, \varkappa_0)$, $n \in \mathbb{N}$.

Mostowski (1957) introduz, assim, um cálculo formal que completa o cálculo de primeira ordem através da inclusão de um novo conjunto de quantificadores na sua sintaxe. Dessa forma, tudo o que é válido no cálculo de primeira ordem clássico (CQC) também é válido nesse novo sistema lógico.

Consideremos (S) um cálculo formal lógico que se diferencia do CQC porque a linguagem desse novo sistema possui um conjunto de símbolos ($\mathbf{Q}^1$, $\mathbf{Q}^2$, ..., $\mathbf{Q}^s$), com $s \in \mathbb{N}^*$, cuja função é representar tanto os quantificadores novos, quanto os quantificadores existencial ($\exists$) e universal ($\forall$). Assim, os símbolos $\exists$ e $\forall$ não são mais necessários na linguagem.

As regras de construção de fórmulas por meio dos símbolos universal e existencial são substituídas pela regra: se F é uma fórmula e x uma variável, então $(\mathbf{Q}^j x)\ F(x)$ é uma fórmula, para $j = 1, 2, ..., s$.

Na fórmula $(\mathbf{Q}^j x)\ F(x)$, a variável x ocorre *ligada*. Uma fórmula *fechada* é uma fórmula em que todas as variáveis ocorrem ligadas. Quando a variável não está ligada, está *livre*.

Falaremos agora sobre a satisfação das fórmulas de (S). Consideremos funções que determinam um elemento de *I* para cada variável individual de (S) e uma função proposicional em *I* com o suporte {1, 2, ..., k} para cada variável funcional de grau k de (S). Estas funções são ditas *I*-valorações. Considerando M uma *I*-valoração, temos que $[x_i]_M$ e $[F_j]_M$ denotam os elementos de *I* e a função proposicional designada por M para x_i e F_j.

Toda *I*-valoração M determina uma aplicação val_{MI} das fórmulas de (S) no conjunto $\{\top, \bot\}$. Se Z é a fórmula $F(x_{i1}, x_{i2}, ..., x_{ik})$, temos que: $val_{MI}(Z) = [F]_M([x_{i1}]_M, [x_{i2}]_M, ..., [x_{ik}]_M, [x_{ik}]_M, [x_{ik}]_M, ...)$. Se Z é a fórmula $x_i = x_j$, então $\{val_{MI}(Z) = \top\} \equiv \{[x_i]_M = [x_j]_M\}$. Se Z é a fórmula $Z_1 | Z_2$, então $val_{MI}(Z) = {\sim}val_{MI}(Z_1) \vee {\sim}val_{MI}(Z_2)$.

Enfim, caso Z seja a fórmula $(\mathbf{Q}^j x_i)Z_I$. Consideremos M(i,x) uma *I*-valoração diferente de M apenas pela troca de x pela variável x_i e seja F uma função proposicional em *I* com suporte {i} tal que $F(y_1, y_2,...) = val_{M(i,\ y_i),I}(Z_I)$. Assim temos: $val_{MI}((\mathbf{Q}^j x_i)Z_I) = \mathbf{Q}^j_I(F)$. Desse modo, a aplicação val_{MI} é definida por indução.

Mostowski não conseguiu demonstrar a completude do seu cálculo formal. Ele fala do problema da completude que advém da resposta à questão sobre o conjunto de fórmulas verdadeiras ser recursivamente enumerável e formula apenas parte do resultado (Mostowski, 1957). Em seu artigo *The completeness of logic with the added quantifier "there are uncountably many"*, de 1964, Vaught demonstrou que o conjunto de fórmulas válidas de (S) é recursivamente enumerável e, também, demonstrou a completude da lógica com o quantificador de Mostowski.

A demonstração da completude da lógica com o quantificador de Mostowski feita por Vaught era muito complicada. Keisler em seu artigo *Logic with the quantifier "there exist* *uncountable many"*, de 1970, também demonstrou a completude, porém, de uma forma mais simples e clara, por meio da utilização de modelos fracos.

A lógica (S) de Mostowski trabalha com conceitos que não podem ser tratados no CQC como, por exemplo, a distinção entre conjuntos infinitos e conjuntos finitos; contáveis e não contáveis. Isto porque a definição desses quantificadores está intimamente ligada com a cardinalidade de conjuntos. Esses conceitos de infinitude e enumerabilidade são essenciais para a matemática moderna, daí a importância de se tratar destes conceitos num campo formal.

De acordo com (Frápolli Sanz, 2007), Lindström, em 1966, fez contribuições a esta proposta de Mostowski e, em 1974, Montague relacionou os quantificadores generalizados com a linguagem natural ao apresentar uma teoria que descreve expressões substantivas e determinadores da linguagem natural. Explicaremos estes conceitos posteriormente, através do conceito de quantificadores generalizados de Barwise e Cooper.

Assim, a partir da caracterização sintática de Mostowski-Lindström e da abordagem semântica de Montague, Barwise e Cooper (1981) introduziram uma teoria que relaciona expressões substantivas da linguagem natural com quantificadores generalizados da lógica, veremos alguns detalhes desta teoria a seguir.

1.3.2 Quantificadores generalizados de J. Barwise e R. Cooper

Barwise e Cooper (1981), diferentemente de Mostowski que tinha pretensões de formalizar conceitos matemáticos, desenvolveram sua teoria sobre quantificadores generalizados tendo em vista a aproximação da lógica com a linguagem natural. Esta aproximação é importante por interessar não somente aos lógicos e aos matemáticos, mas também a linguistas e cientistas da computação.

Para Barwise e Cooper (1981), ao tratarmos, por exemplo, do que seria o quantificador 'mais da metade' há diferença entre dizermos 'mais da metade dos sapatos de Maria' e 'mais da metade de todas as coisas'. Isto porque não podemos de modo simples formalizar um quantificador 'mais da metade' como 'mais da metade de x (...x...)'. Desta forma, eles propõem que 'mais da metade' deve ser visto como um determinador e não como um quantificador. O quantificador é, então, formado por um *determinador* (termo de contagem) e uma *expressão de conjuntos* (conjunto arbitrário de coisas), como esquematizado a seguir:

Quantificador

Determinador — Expressão de conjuntos

Por exemplo, na frase ‘Muitas pessoas votaram em Carter’, o quantificador é ‘muitas pessoas’, em que ‘muitas’ é o determinador e ‘pessoas’ a expressão de conjuntos. Comparando esta forma de entendermos um quantificador com nossa linguagem natural, percebemos que estamos lidando com expressões substantivas, denominadas de NPs (noun-phrase).

Apresentaremos agora, sucintamente, uma lógica com quantificadores generalizados de acordo com Barwise e Cooper (1981), denotada por **L(GQ)**.

Os símbolos lógicos de **L(GQ)** são os seguintes:

(a) conectivos proposicionais: $\wedge$, $\vee$, ~
(b) variáveis: x, y, z, x_0, ...
(c) um termo de conjuntos distinguido: **thing**
(d) símbolos auxiliares: (,), [,], ^
(e) o símbolo de igualdade: =
(f) alguns determinadores lógicos: **todos**, **existe**, **nenhum**, **ambos**, **1**, **2**, **3**, ..., **1!**, **2!**, **3!**, ..., **o 1**, **o 2**, **o 3**, ...

Na semântica de **L(GQ)**, **thing** denota o conjunto E de todas as coisas (indivíduos, objetos, elementos) do nosso modelo, ou seja, o conjunto dos indivíduos ou objetos do domínio de discurso. A semântica dos determinadores numéricos será definida tal que **3 homens correm** significa que pelo menos três homens correm; **3! homens correm** significa que exatamente três homens correm; **os 3 homens correm**, terá significado apenas naqueles modelos em que existem exatamente 3 homens e será verdade se todos correm neste modelo.

Os símbolos não-lógicos de **L(GQ)** são os seguintes:

(a) símbolos de constantes: **c**, **d**, ...

(b) símbolos relacionais: **R**, **S**, ...

(c) determinadores não-lógicos: $\mathbf{D_1}$, $\mathbf{D_2}$, ... (podem incluir **muitos**, **a maioria**, **poucos,** ...).

Existem seis regras de formação sintática que servem para definir indutivamente três tipos de expressões de **L(GQ)**: *termos de conjuntos* (R_1 e R_2), *quantificadores* (R_3) e *fórmulas* (R_4, R_5 e R_6).

(R_1) Todo símbolo de predicado é um termo de conjunto.

(R_2) Se A é uma fórmula e *u* é uma variável, então û[A] é um termo de conjunto.

(R_3) Se **D** é um determinador e η é um termo de conjunto, então **D**(η) é um quantificador.

(R_4) Se **R** é um símbolo de relação *n*-ário e $t_1, t_2, ..., t_n$ são constantes ou variáveis, então $\mathbf{R}(t_1, t_2, ..., t_n)$ é uma fórmula. Da mesma forma, se η é um termo de conjunto e t é uma constante ou variável, então $\eta(t)$ é uma fórmula.

(R_5) Se Q é um quantificador e η é um termo de conjunto, então Q(η) é uma fórmula.

(R_6) Se A e B são fórmulas, então $A \wedge B$, $A \vee B$ e ~A são fórmulas.

Abaixo segue a semântica de **L(GQ)**.

Um modelo para **L(GQ)** é uma aplicação **M** = (E, || ||) que designa interpretações para expressões da linguagem. Designa para **thing** algum conjunto não-vazio E e designa para todo símbolo básico **S** uma interpretação || **S** || que satisfaz as regras (S_1) – (S_6) abaixo.

(S_1) Se t é uma constante ou variável, então $\| t \| \in E$.

(S_2) || **thing** || = E.

(S_3) $\| = \| = \{\langle a, a\rangle / a \in E\}$.

(S_4) Se **R** é um símbolo de relação *n*-ário, então $\| \mathbf{R} \| \subseteq E \times ... \times E$ (*n* vezes). Da mesma forma, se **U** é um termo de conjunto básico, então $\| \mathbf{U} \| \subseteq E$.

(S_5) Seja | Y | a cardinalidade do conjunto Y, então:

(a) $\|$ **algum** $\|$ é uma aplicação que designa para todo $A \subseteq E$ a família $\|$ **algum** $\|$ $(A) = \{X \subseteq E / X \cap A \neq \emptyset\}$.

(b) $\|$ **todo** $\|$ é uma aplicação que designa para todo $A \subseteq E$ a família $\|$ **todo** $\|$ $(A) = \{X \subseteq E / A \subseteq X\}$.

(c) $\|$ **nenhum** $\|$ é uma aplicação que designa para todo $A \subseteq E$ a família $\|$ **nenhum** $\|$ $(A) = \{X \subseteq E / X \cap A = \emptyset\}$.

(d) Para todo número natural n, $\|$ **n** $\|$, $\|$ **n!** $\|$ e $\|$ **o n** $\|$ são aplicações em conjuntos definidas por:

$\|$ **n** $\|$ $(A) = \{X \subseteq E / |X \cap A| \geq n\}$

$\|$ **n!** $\|$ $(A) = \{X \subseteq E / |X \cap A| = n\}$

$$\| \mathbf{o\ n} \| (A) = \begin{cases} \| \mathbf{todo} \| (A), \text{ se } |A| = n \\ \text{Indefinido, caso contrário} \end{cases}$$

$\|$ **ambos** $\|$ $(A) = \|$ **o 2** $\|$ (A)

$$\| \mathbf{nenhum\ dos\ dois} \| (A) = \begin{cases} \| \mathbf{nenhum} \| (A), \text{ se } |A| = 2 \\ \text{Indefinido, caso contrário} \end{cases}$$

(S_6) Se **D** é um símbolo de um determinador não-lógico, então $\|$ **D** $\|$ designa para todo conjunto A alguma família de conjuntos que vivem em A.

A propriedade “vive em” é definida em (Barwise e Cooper, 1981, p. 178) da seguinte maneira: Em um modelo $\mathbf{M} = (E, \| \|)$, um quantificador Q *vive em* um conjunto $A \subseteq E$ se Q é um conjunto de subconjuntos de E com a propriedade que, para todo $X \subseteq E$, $X \in Q$ se, e somente se, $(X \cap A) \in Q$.

As próximas regras, (S_7) – (S_{10}), constituem uma definição de $\| \mathbf{S} \|^{M}$ por recursão na expressão **S** de **L(GQ)**, simultaneamente, para todo modelo **M**, em que $\| \mathbf{S} \|^{M}$ denota **S** com respeito a **M**.

(S_7) Se **R** é um símbolo relacional n-ário, então:

$$\| \mathbf{R}(t_1, t_2, ..., t_n) \| = \begin{cases} 1, \text{ se } \langle \| t_1 \|, \| t_2 \|, ..., \| t_n \| \rangle \in \| \mathbf{R} \| \\ 0, \text{ se } \langle \| t_1 \|, \| t_2 \|, ..., \| t_n \| \rangle \notin \| \mathbf{R} \| \end{cases}$$

Da mesma forma, se η é um termo de conjunto, então:

$$\| \eta\ (t) \| = \begin{cases} 1, \text{ se } \| t \| \in \| \eta \| \\ 0, \text{ se } \| t \| \notin \| \eta \| \end{cases}$$

(S_8) Se **D** é um determinador e η é um termo de conjunto, então o quantificador **D**(η) denota o resultado da aplicação da denotação de **D** na denotação de η, ou seja, $\| \mathbf{D}(\eta) \| = \| \mathbf{D} \| (\| \eta \|)$. Esta é uma família de conjuntos que vive em $\| \eta \|$.

(S_9) Se Q é um quantificador e ψ é um termo de conjunto, então Qψ denota verdade ou falsidade dependendo da denotação de ψ ser ou não um dos conjuntos na denotação de Q, ou seja:

$$\| Q\psi \| = \begin{cases} 1, \text{ se } \| \psi \| \in \| Q \| \\ 0, \text{ se } \| \psi \| \notin \| Q \| \end{cases}$$

(S_{10}) Para os operadores usuais, as regras utilizadas são as mesmas.

$$\| A \wedge B \| = \begin{cases} 1, \text{ se } \| A \| = \| B \| = 1 \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases}$$

$$\| A \vee B \| = \begin{cases} 1, \text{ se } \| A \| = 1 \text{ ou } \| B \| = 1 \\ 0, \text{ se } \| A \| = \| B \| = 0 \end{cases}$$

$$\| \sim A \| = \begin{cases} 1, \text{ se } \| A \| = 0 \\ 0, \text{ se } \| A \| = 1 \end{cases}$$

Além da apresentação da semântica e da sintática desta lógica com quantificadores generalizados, Barwise e Cooper (1981) falam sobre aplicações para expressões substantivas do inglês e relacionam os quantificadores generalizados à teoria linguística, não faremos estas discussões neste trabalho.

1.3.3 Sobre a teoria de quantificadores generalizados de Barwise e Cooper

Analisando os estudos de Barwise e Cooper temos a impressão de termos encontrado uma sintaxe e uma semântica que abrangem tudo o que identificamos como quantificadores. Estaríamos considerando, assim, que todos os quantificadores são expressões substantivas e que todas as expressões substantivas são quantificadores.

Porém, o assunto não é tão simples e uma teoria geral sobre quantificadores não foi estabelecida completamente pela teoria de Barwise e Cooper (1981). Encontramos em (Loebner, 1987) uma revisão crítica das afirmações empíricas contidas na Teoria sobre Quantificadores Generalizados.

Em (Barwise e Cooper, 1981) encontramos a seguinte afirmação:

> Provavelmente seria errado afirmar que os NP's são os únicos quantificadores da linguagem natural. (Parece possível, por exemplo, que os advérbios temporais expressem quantificadores sobre momentos ou intervalos de tempo, como tem sido sugerido por Partee (1973); Dowty (1979) e outros). Parece razoável, no entanto, afirmar que as expressões substantivas da linguagem são todos e somente os quantificadores sobre o universo de discurso, ou seja, o conjunto E de coisas fornecidas pelo modelo (Barwise e Cooper, 1981, p. 177, tradução nossa).

O trecho "as expressões substantivas de uma linguagem são todos e somente os quantificadores sobre o universo de discurso" é citado por Loebner (1987, p. 181) a fim de iniciar uma discussão sobre este fato não ser tão fechado, nem tão feliz ou desejável como Barwise e Cooper supõem. Colocamos um trecho maior para mostrar que em (Barwise, Cooper, 1981) há indícios de dúvidas acerca desta afirmação. No entanto, tanto o que Loebner (1987) deseja discutir, quanto o fato de Barwise e Cooper (1981) assumirem que existem outros quantificadores, pelo menos os quantificadores advindos de advérbios temporais, que não são expressões substantivas, nos diz que a sintaxe e a semântica apresentadas em (Barwise, Cooper, 1981) não dão conta de todos os quantificadores da linguagem natural.

Loebner (1987) argumenta, ainda, que existem, na literatura, três subclasses de substantivos: substantivos definidos, substantivos indefinidos e substantivos quantificacionais em sentido estrito, sem considerar a quarta subclasse de substantivos interrogativos. As três subclasses de substantivos diferem sintática e semanticamente e somente na última, em geral, os substantivos devem ser considerados quantificadores.

Segundo o autor, nem substantivos definidos, nem indefinidos são quantificadores. Pois, substantivos definidos são termos, e a própria distinção entre termos e quantificadores é suficiente para justificar a distinção. Já os substantivos indefinidos podem ocorrer em sentenças quantificacionais, porém neste caso, o contexto deve cumprir algumas condições e, desta forma, substantivos indefinidos não podem ser simplesmente considerados como quantificadores.

Assim, apesar de a teoria proposta por Barwise e Cooper (1981) ser importante para a teoria dos quantificadores generalizados e servir de base para diversos pesquisadores, como Benthem (1983), Westerståhl (2006) e outros, não consegue captar a noção geral de quantificadores.

1.4 Definições e abordagens dos quantificadores

1.4.1 Abordagens dos quantificadores

De acordo com (Hintikka, Sandu, 1994) podemos distinguir três abordagens, ou interpretações, diferentes para analisar de que forma os quantificadores são usados nas linguagens formais e naturais. A seguir citaremos estas abordagens:

(i) <u>Quantificadores como predicados de ordem superior</u>. Nesta abordagem, por exemplo, o quantificador existencial na expressão $\exists x\ A(x)$ significa que o predicado $A(x)$ não é vazio. Esta interpretação é a mais popular, podendo ser considerada padrão e é defendida, entre outros, por Quine[1] e Davidson[2].

---

[1] Willard Van Orman Quine
[2] Donald Herbert Davidson

(ii) Interpretação substitucional dos quantificadores. A expressão mencionada no item (i) é interpretada como ‘pelo menos uma instância substituída de A(x) é verdadeira’. Esta abordagem é defendida, dentre outros, por Mates[3] e Marcus[4].

(iii) Quantificadores incorporando funções de escolha. Nesta abordagem, quantificadores são expressos por locuções tal como ‘dado um valor de x, pode-se encontrar um valor de y tal que...’.

A abordagem em (i) é conhecida como interpretação objetual. De acordo com (Frápolli Sanz, 2007), o filósofo americano Willard van Orman Quine foi o primeiro a desenvolver e defender esta interpretação. Isto aconteceu devido à conexão que Quine acredita existir entre os quantificadores e a ontologia.

Aparentemente, a escolha da abordagem parece não importar, porém a escolha acarretará em consequências filosóficas importantes. Haack (2002) trata de duas interpretações, a objetual e a substitucional, que correspondem respectivamente aos itens (i) e (ii) abordados acima. Para a autora:

> Vai fazer diferença para a definição de verdade para sentenças quantificadas qual interpretação dos quantificadores for adotada... Se os quantificadores são interpretados substitucionalmente, então a verdade das fórmulas quantificadas pode ser definida diretamente em termos da verdade de fórmulas atômicas... Se os quantificadores são interpretados objetualmente, a definição de verdade vai ser menos direta (HAACK, 2002, p. 85).

Aqui, vemos maneiras distintas de se interpretar os quantificadores e, como exposto acima, este estudo faz discussões pertinentes em relação a teorias da quantificação, porém, não define o que são quantificadores (nem se propõe a tal fato).

[3] Benson Mates
[4] Ruth Barcan Marcus

1.4.2 Definições de quantificadores

Existem muitos estudos sobre os quantificadores e muitas propostas surgiram após os quantificadores generalizados desenvolvidos por Mostowski, a maioria com a intenção de tentar aproximar ao máximo uma linguagem formal da linguagem natural. No entanto, o que são os quantificadores da linguagem natural?

Não foi encontrada uma definição geral que abranja todos os quantificadores contidos na linguagem natural. Também ainda não se conseguiu fazer isto formalmente, pois as propostas conseguem tratar apenas de alguns quantificadores específicos da linguagem natural. Escreveremos abaixo algumas definições encontradas em dicionários.

Segundo o *Dictionary of classical and theoretical mathematics*:

> Quantificadores são usados a fim de quantificar se elementos com certa propriedade existem em um universo particular. Os quantificadores são denotados simbolicamente por $\exists$ (o quantificador existencial) e $\forall$ (o quantificador universal). A interpretação do quantificador existencial $(\exists x)[...]$ é que existe um objeto x (possivelmente mais do que um) no universo com a propriedade [...]. A interpretação do quantificador universal $(\forall x)[...]$ é que todo objeto x no universo possui a propriedade [...].
>
> Nota-se que apenas um quantificador é suficiente, desde que $(\forall x)[...]$ é logicamente equivalente a $\neg(\exists x)\neg[...]$ (Cavagnaro, Haight, 2001, p. 99, tradução nossa).

Ainda segundo o *Dictionary of classical and theoretical mathematics* os quantificadores existencial e universal são utilizados na teoria dos grupos.

Com base nesta definição de quantificadores, pode-se pensar que a Lógica utiliza apenas os quantificadores universal e existencial, o que não é verdade. Como vimos, há autores, da área da Lógica, como Mostowski, interessados em quantificadores que diferem do universal e do existencial.

Para o Dicionário Oxford de Filosofia:

> Informalmente um quantificador é uma expressão que assinala a quantidade de vezes que um predicado é satisfeito numa classe de coisas (i.e., num “domínio”)’. Assim, ao investigar uma classe de crianças e suas dietas, poderíamos descobrir que algumas comem bolos, ou que todas comem bolos, ou que nem todas comem bolos, ou que nenhuma come bolos. “Alguns” e “todos” são representados na lógica moderna

> por quantificadores. O ponto importante é que este tratamento afasta a idéia de que termos como “algo”, “nada” e seus cognatos são uma espécie de nomes (BLACKBURN, 1997, p. 328).

O Dicionário Oxford de Filosofia fala também dos quantificadores clássicos, do fato que podemos definir o que chama ‘quantificadores matemáticos’ como, por exemplo, “mais da metade” e “exatamente um”. E sobre a existência de ‘quantificadores de pluralidade’ como é o caso de “muitos” e “poucos”, afirmando que estes são menos comuns. Ademais, define quantificadores em termos formais da seguinte maneira:

> ...um quantificador liga uma variável, transformando uma frase aberta com n variáveis livres diferentes numa outra frase com n-1 variáveis livres diferentes (uma letra individual conta como uma só variável, apesar de poder ocorrer várias vezes numa fórmula). Quando não restam quaisquer variáveis livres temos uma frase fechada, i.e., uma frase que pode ser avaliada como verdadeira ou falsa num domínio. Por exemplo, a partir da frase aberta $Fx \wedge Gx$ podemos formar a frase fechada $(\exists x) (Fx \wedge Gx)$, que significa que algo é simultaneamente F e G. A única variável, x, está ligada nas duas ocorrências (BLACKBURN, 1997, p. 328).

Uma última definição sobre quantificador que será exposta é a encontrada no Dicionário de Lógica:

> Sumariamente, quantificadores são palavras ou expressões que se prestam para indicar que houve quantificação. Ao lado de numerais, a língua comum admite inúmeros quantificadores. Entre eles, <u>todos</u>, <u>muitos</u>, <u>alguns</u>, <u>vários</u>, <u>cada</u>, <u>um</u>, <u>punhado</u>, <u>diversos</u>, <u>um determinado</u>, etc. A Lógica tem-se concentrado em dois desses quantificadores: ‘todos’ e ‘alguns’ (embora, é claro, em estudos especializados outros quantificadores tenham sido considerados).
> Vários símbolos têm sido adotados para indicar a quantificação <u>universal</u> (correspondente a ‘todos’) e a <u>existencial</u> – que, preferentemente, seria denominada quantificação <u>particularizadora</u> (correspondente a ‘alguns’). Aqui, usaremos o “A” invertido $\forall$ e o “E” rebatido $\exists$, respectivamente. Ao lado desses dois, há o quantificador <u>individualizador</u> (ou descritor), também frequentemente empregado (para o qual se usa a letra grega iota, ι) (HEGENBERG, 1995, p. 170-171).

É notório que estas definições, apesar das duas últimas não citarem apenas os quantificadores clássicos, não conseguem definir de forma geral o conceito de quantificadores como gostaríamos de encontrar.

Descrevemos neste capítulo os esforços de diversos pensadores que contribuíram com estudos sobre quantificadores. Desde Aristóteles, que já trabalhava com os quantificadores universal e existencial; Frege e Pierce que desenvolveram teorias para tratar dos quantificadores; teorias sobre quantificadores generalizados, mais especificamente as teorias de Mostowski (1957) e Barwise e Cooper (1981); discussões em relação às abordagens dos quantificadores e até definições vindas de dicionários. No entanto, parece não haver uma definição geral que abranja todos os quantificadores, nem formalmente, nem na linguagem natural. Acredito, assim, que ainda há muito a ser desenvolvido nesta área e é por este motivo que estudaremos o quantificador apresentado em (Sette, Carnielli, Veloso, 1999) e daremos algumas contribuições em relação a este quantificador, que chamaremos de ‘quase sempre’.

2 A LÓGICA DO PADRÃO E A LÓGICA DO ULTRAFILTRO

Neste capítulo, de maneira geral, fazemos algumas considerações a respeito das lógicas não-monotônicas; apresentamos a Lógica do Padrão, introduzida por Reiter (1980), e a Lógica do Ultrafiltro, introduzida por (Sette, Carnielli, Veloso, 1999).

2.1 Lógicas não-monotônicas

Uma conveniente característica da lógica clássica de primeira ordem é que ela é monotônica, ou seja, se um conjunto de fórmulas (Γ) deduz uma determinada fórmula (α) e este conjunto (Γ) é subconjunto de outro conjunto de fórmulas (Δ), então este outro conjunto de fórmulas (Δ) também deduz esta determinada fórmula (α). A monotonicidade é uma importante ferramenta dentro de um sistema lógico, pois se obtemos certas propriedades a partir de um conjunto de premissas dadas e, posteriormente, incluímos novas informações como premissas, não há necessidade de deduzirmos novamente os resultados obtidos previamente.

No entanto, em situações do cotidiano, parece que nem sempre raciocinamos desta forma. Segundo Antonelli (2010), um exemplo claro de que nem sempre raciocinamos de acordo com a monotonicidade é a suposição de inocência num sistema jurídico em que a partir do fato que ‘x é julgado’, conclui-se que ‘x é inocente’, mas é evidente que a conclusão pode ser modificada caso se obtenha novas evidências comprovando a culpa de x.

Outro exemplo de raciocínio não-monotônico, também dado por Antonelli (2010), é o seguinte: em geral, os mamíferos não voam. Assim, não voar pode ser considerada uma característica típica dos mamíferos. Desta forma, ao sabermos que x é um mamífero, concluiremos que x não voa. No entanto, essa conclusão pode ser mudada, por exemplo, pela informação de que x é um morcego. O que ainda não é imutável, pois podemos receber a informação que x é um morcego recém-nascido e, é claro, morcegos recém-nascidos ainda não sabem voar.

Raciocínios do cotidiano, como apresentados acima, são não-monotônicos. Neles, uma conclusão pode ser deduzida mesmo com informações incompletas e, depois de deduzida, pode ser alterada por meio de novas informações. As lógicas não-monotônicas surgem na tentativa de formalizar este tipo de raciocínio. Elas admitem inferências realizadas na ausência de informações e estas inferências podem ser invalidadas por novas informações.

De acordo com Antonelli (2010), numa estrutura não-monotônica surgem dois diferentes tipos de conflitos: (i) os conflitos entre as conclusões revogáveis e "fatos concretos", que podem ser fatos recém-adquiridos, e (ii) os conflitos entre duas conclusões revogáveis (muitos formalismos, por exemplo, fornecem algumas formas de regras de inferência revogáveis, e essas regras podem ter conclusões conflitantes). Com o surgimento de conflitos, deve-se tentar preservar ou restabelecer a consistência.

Ainda segundo Antonelli (2010), as lógicas não-monotônicas tratam os conflitos do primeiro tipo de forma simples, já que está na essência do raciocínio revogável que as conclusões podem ser mudadas quando novos fatos são aprendidos. No entanto, os conflitos do segundo tipo podem ser tratados de duas maneiras: podemos fazer inferências de forma crédula ou cética. O raciocínio crédulo compromete-se com todas as conclusões revogáveis possíveis e com a exigência de que haja consistência entre elas; enquanto o raciocínio cético não parece favorável a conclusões revogáveis conflituosas.

Grácio (1999, p. 60) define *sistemas crédulos* como os “que definem os teoremas como aquelas proposições que aparecem em alguma das extensões possíveis da teoria” e *sistemas céticos* como os “que definem seus teoremas como aquelas proposições que aparecem em todas as extensões da teoria”.

Segue um exemplo conhecido como “diamante de Nixon”, apresentado em (Antonelli, 2010), que ajuda a compreender melhor a distinção entre estes dois sistemas ou raciocínios.

Temos a informação (revogável) que um determinado indivíduo, Nixon, é tanto um Quaker quanto um republicano. Sabendo-se que Quakers, em geral, são pessoas pacíficas e que os republicanos, em geral, não o são, o que devemos concluir (revogavelmente) deste corpo de conhecimento? Mais especificamente, devemos concluir que Nixon é um pacifista ou não?

Tendo em vista um pensador crédulo, pelas informações oferecidas, ele não tem nenhuma razão para preferir qualquer conclusão ("Nixon é um pacifista", "Nixon não é um pacifista"). No entanto, certamente ele irá se comprometer com uma delas. Por outro lado, o pensador cético reconhece que este não é um conflito entre fatos e conclusões revogáveis, mas entre duas diferentes conclusões revogáveis e não assume conclusão alguma.

Em (Grácio, 1999, p. 60-61) encontramos dois exemplos que nos mostram que em determinadas situações é melhor termos um raciocínio crédulo e em outras um raciocínio cético. O primeiro exemplo foi elaborado por Doyle e Wellman e trata-se da situação em que um burro deve optar por um fardo de feno que está próximo ou por um balde de maçãs que está longe. Sabe-se que burros preferem uma comida que esteja próxima, mas também preferem maçãs a feno. Desta forma, é vantajoso optarmos por um raciocínio crédulo, pois se optarmos por um raciocínio cético, a conclusão seria que o burro não deveria optar por alimento algum, mas daí ele morreria de fome, o que não é viável. O segundo exemplo foi elaborado por Kautz e Selman e nele temos como hipótese que bagas são comestíveis e que frutas verdes são venenosas. Neste caso, se encontrarmos uma baga verde, a conclusão mais sensata deve ser a de um raciocínio cético, ou seja, não assumirmos alguma conclusão como verdadeira (que "devemos comer a baga" ou que "não devemos comer a baga") até que mais informações sejam acumuladas, pois uma pode levar à fome e outra à morte.

Para Antonelli (2010), o surgimento de trabalhos que dizem respeito às lógicas não-monotônicas vem da percepção de que a lógica clássica de primeira ordem é insuficiente para representar raciocínios revogáveis. Esta percepção foi acompanhada pela tentativa de reproduzir com sucesso a lógica clássica de primeira ordem num raciocínio representado matematicamente, ou formalmente.

Os primeiros trabalhos a desenvolverem lógicas não-monotônicas foram propostos no final dos anos 1970 por J. McCarthy, D. Mc Dermott & J. Doyle e R. Reiter. Um acontecimento importante que fez vir à tona as pesquisas nesta área aconteceu em 1980, com a revista *Artificial Intelligence*, que publicou uma edição dedicada a estes formalismos não-monotônicos. Daremos aqui atenção especial a um destes formalismos, o proposto por R. Reiter: a Lógica do Padrão (*Default Logic*). Assumimos a tradução de *Default Logic* como Lógica do Padrão, assim como está em (Grácio, 1999).

2.2 A Lógica do Padrão de Raymond Reiter

R. Reiter publicou um artigo, em 1980, na revista *Artificial Intelligence*, intitulado "A logic for default reasoning", em que introduz a Lógica do Padrão. Esta seção será baseada neste artigo.

A preocupação de Reiter (1980) foi com argumentos padrões do tipo "na ausência de alguma informação contrária, assume-se...", ou seja, argumentos que 'quase sempre' são verdadeiros, com algumas exceções. Este tipo de argumento é muito encontrado em nosso cotidiano e frequentemente ocorre na literatura da Inteligência Artificial.

Reiter (1980) nos dá alguns exemplos de argumentações padrões. Por exemplo, a maioria dos pássaros voa, exceto alguns pinguins, avestruzes, entre outros. Desta forma, dado um pássaro, assumiremos que ele voa, a não ser que percebamos que ele corresponde a uma das exceções. Podemos representar esta situação, na lógica clássica de primeira ordem, da seguinte maneira: $\forall x[(\text{Pássaro}(x) \wedge \neg\text{Pinguim}(x) \wedge \neg\text{Avestruz}(x) \wedge ...) \rightarrow \text{Voa}(x)]$. Porém, com esta representação na lógica clássica de primeira ordem, se de um indivíduo temos apenas a informação que ele é um pássaro, então não podemos concluir que ele voa, mas, gostaríamos, intuitivamente, de deduzir isso.

Assim, a ferramenta utilizada por Reiter nesta situação é a expressão "se x é um pássaro, então, na ausência de qualquer informação contrária, inferimos que x pode voar". Basta, então, interpretar a frase "na ausência de qualquer informação contrária". A interpretação é feita a partir da expressão "é consistente assumir que x pode voar". Logo, a situação acima é expressa da seguinte maneira: "Se x é um pássaro e é consistente assumir que x pode voar, então inferimos que x pode voar". De maneira formal, temos a regra do padrão (*default rule*) a seguir:

$$\frac{\text{pássaro}(x) : M\ \text{voa}(x)}{\text{voa}(x)},$$

em que lemos M como "é consistente assumir que".

Reiter (1980) ressaltou que esta regra providencia uma representação para o quantificador 'quase todos' ou 'quase sempre' em termos de padrão, sem utilizar distribuições de frequência ou lógicas fuzzy.

De acordo com Grácio (1999, p. 60), a Lógica do Padrão pertence ao grupo de sistemas crédulos, e percebemos facilmente isto por meio do exemplo a seguir, dado por Reiter (1980, p. 86).

Os padrões que seguem podem existir naturalmente ao supormos que a cidade natal de uma pessoa é a cidade natal de seu (sua) cônjuge e que a cidade natal de uma pessoa é a mesma do seu local de trabalho:

$$\frac{\text{cônjuge}(x, y) \wedge \text{cidade natal}(y) = z : M\ \text{cidade natal}(x) = z}{\text{cidade natal}(x) = z}$$

$$\frac{\text{trabalho}(x, y) \wedge \text{local}(y) = z : M\ \text{cidade natal}(x) = z}{\text{cidade natal}(x) = z}$$

Se a cidade natal do cônjuge de uma pessoa e o local de trabalho desta pessoa forem cidades distintas, então concluiremos que a cidade natal desta pessoa pode estar em duas cidades diferentes. Como 'cidade natal' é uma função, podemos deduzir uma inferência de cada vez, mas não ambas simultaneamente. Esta seria uma situação incoerente em um sistema lógico convencional, porém, como se tratam de crenças, o exemplo faz sentido desde que não assumamos duas cidades distintas ao mesmo tempo. A regra do padrão serve para completar a teoria de primeira ordem subjacente e há várias maneiras de se fazer isto. Dessa forma, cada padrão resultará numa extensão diferente de uma teoria de primeira ordem e, consequentemente, em diferentes conjuntos de crenças em relação ao mundo. Percebemos, com esse exemplo, que a Lógica do Padrão realmente é um sistema crédulo.

A Lógica do Padrão é uma extensão da lógica clássica de primeira ordem $\mathcal{L}$ (com símbolos para relações, funções e constantes) e é formalizada através do acréscimo de padrões.

Um *padrão* é uma expressão da forma:

$$\frac{\alpha(x) : M\beta_1(x), M\beta_2(x), \ldots , M\beta_n(x)}{\psi(x)}$$

em que $\alpha(x)$, $\beta_1(x)$, $\beta_2(x)$, ... , $\beta_n(x)$, $\psi(x)$ são fórmulas cujas variáveis livres estão entre aquelas do vetor $x = (x_1, x_2, \ldots , x_m)$. As fórmulas $\alpha(x)$ e $\psi(x)$ são chamadas, respectivamente, de pré-requisito e consequente do padrão.

Seguem algumas definições dadas por Reiter (1980) com o intuito de formalizar a teoria do padrão.

Definição 2.2.1 (Reiter, 1980, p. 88): Um padrão é *fechado* se, e somente se, nenhuma das fórmulas α, β_1, β_2, ... , β_n, ψ contêm variáveis livres.

Definição 2.2.2 (Reiter, 1980, p. 88): Uma *teoria do padrão* é um par (D, W), em que D é um conjunto de padrões e W é um conjunto de fórmulas fechadas. Os conjuntos D e/ou W não precisam ser finitos; eles são, no entanto, no máximo infinitos contáveis, em vista da enumerabilidade de $\mathcal{L}$. Uma teoria do padrão (D, W) é *fechada* se, e somente se, todo padrão de D é fechado.

Definição 2.2.3 (Reiter, 1980, p. 89): Seja $\Delta = (D, W)$ uma teoria do padrão fechada, tal que todo padrão de D tenha a forma $(\alpha\colon M\beta_1, M\beta_2, \dots, M\beta_n / \psi)$, em que $\alpha, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, \psi$ são fórmulas bem formadas de $\mathcal{L}$. Para todo conjunto de fórmulas bem formadas fechadas $S \subseteq \mathcal{L}$, seja $\Gamma(S)$ o menor conjunto que satisfaz as três propriedades seguintes:

(i) $W \subseteq \Gamma(S)$;
(ii) $Th_{\mathcal{L}}(\Gamma(S)) = \Gamma(S)$;[5]
(iii) Se $(\alpha\colon M\beta_1, M\beta_2, \dots, M\beta_n / \psi) \in D$, $\alpha \in \Gamma(S)$ e $\neg\beta_1, \neg\beta_2, \dots, \neg\beta_n \notin S$, então $\psi \in \Gamma(S)$.

Definição 2.2.4 (Reiter, 1980, p. 89): Um conjunto de fórmulas bem formadas $E \subseteq \mathcal{L}$ é uma *extensão* para uma teoria do padrão fechada Δ se, e somente se, $\Gamma(E) = E$, ou seja, se, e somente se, E é um ponto fixo do operador Γ.

Reiter (1980, p. 94) define *teorema* de uma teoria do padrão como qualquer fórmula que pertença a no mínimo uma extensão da teoria. Assim, uma teoria do padrão é consistente se, e somente se, ela tem uma extensão consistente.

Ele utiliza esta definição e não outra, como a de McDermott e Doyle, que define um teorema em uma teoria não-monotônica como a intersecção de todos os pontos fixos de uma teoria, por ter a intenção de determinar, através do raciocínio por padrão, um conjunto consistente de crenças sobre o mundo, expresso, numa teoria, por uma extensão. Desta forma, é possível fazer inferências numa extensão até que novas evidências cheguem e exijam a revisão do conjunto de crenças, ou seja, o que foi deduzido até aquele momento.

Dessa forma, Reiter define uma teoria da prova que, dada uma fórmula α, determina se existe ou não uma extensão que contém α, ao invés de determinar se α pertence a todas as extensões.

Um problema desta formalização é que existem teorias do padrão que não possuem extensão e não há como se saber para quais teorias as extensões podem ser geradas. Para minimizar este problema, Reiter busca teorias nas quais ele possa provar que extensões existem.

[5] O conjunto $Th_{\mathcal{L}}(\Gamma)$ é o fecho dedutivo do conjunto Γ em $\mathcal{L}$, ou seja, $Th_{\mathcal{L}}(\Gamma) = \{\alpha \in \mathcal{L} / \Gamma \vdash \alpha\}$, composto por aquelas fórmulas que são dedutíveis a partir de Γ.

Definição 2.2.5 (Reiter, 1980, p. 95): Para as fórmulas $\alpha(x)$, $\psi(x) \in \mathcal{L}$, um padrão é dito *normal* se possui a seguinte forma:

$$\frac{\alpha(x) : M\psi(x)}{\psi(x)}$$

Definição 2.2.6 (Reiter, 1980, p. 95): Uma teoria do padrão (D, W) é *normal* se, e somente se, todo padrão de D é normal.

Reiter demonstra alguns resultados importantes para qualquer teoria do padrão normal fechada. Seguem alguns destes resultados:

Teorema 2.2.1 (Reiter, 1980, p. 95): Toda teoria do padrão normal fechada possui uma extensão.

Dentre estes resultados, temos o teorema da semi-monotonicidade, que permite que em uma teoria do padrão normal fechada não seja necessário considerar todos os padrões da teoria para determinarmos uma dedução de um teorema. Outro resultado importante é o da completude para este tipo de teoria. Porém, não é a mesma completude conhecida na lógica clássica, por não envolver conceitos semânticos da teoria desenvolvida. Seguem os enunciados destes teoremas:

Teorema 2.2.2 (Reiter, 1980, p. 96): (Semi-monotonicidade) Suponha que D e D' são conjuntos de padrões normais fechados com $D' \subseteq D$. Seja E' uma extensão para a teoria do padrão normal fechada $\Delta' = (D', W)$ e seja $\Delta = (D, W)$. Então, Δ tem uma extensão E tal que $E' \subseteq E$.

Teorema 2.2.3 (Reiter, 1980, p. 103): (Completude) Seja $\alpha \in \mathcal{L}$ uma fórmula fechada. Uma teoria do padrão normal fechada consistente Δ tem uma extensão E tal que $\alpha \in E$ se, e somente se, α tem uma demonstração com respeito à Δ.

Uma crítica relevante em relação à Lógica do Padrão de Reiter, de acordo com (Grácio, 1999), é a desvantagem, no âmbito computacional, dada pela falta de localidade dos procedimentos de dedução dos sistemas não-monotônicos. Exceto para as teorias padrões normais fechadas, como visto no Teorema 2.2.2, em todas as deduções feitas num sistema não-monotônico precisamos analisar todas as regras que formalizam as crenças existentes, as suposições iniciais e os teoremas já deduzidos para que não surja alguma inconsistência no sistema.

Por esta e outras desvantagens dos sistemas não-monotônicos, Sette, Carnielli e Veloso (1999) desenvolveram um sistema monotônico, baseado no conceito de ultrafiltro, a fim de substituir a Lógica do Padrão. Na próxima seção apresentaremos brevemente este sistema.

2.3 A Lógica do Ultrafiltro

Segundo Grácio (1999), a primeira tentativa de substituir a Lógica do Padrão de Reiter por um sistema monotônico foi baseada no conceito de ultrafiltro e surgiu com W. A. Carnielli e A. M. Sette, em 1994, no “Workshop on logic, language, information and computation” (WOLLIC’94). Em um primeiro momento, a abordagem recebeu muitas críticas, mas, posteriormente gerou novos trabalhos juntamente com P. A. S. Veloso, feitos de forma mais cuidadosa e detalhada.

Em (Sette, Carnielli, Veloso, 1999) encontramos um sistema lógico monotônico com o intuito de formalizar as noções de ‘quase todos’ ou ‘quase sempre’ através da introdução de um quantificador generalizado na linguagem clássica de primeira ordem.

Para tratar a noção de ‘quase todos’ por meio de uma interpretação conjuntista, faz-se uso da expressão ‘quase tão grande quanto’. Desta forma, a sentença “quase todos os pássaros voam” será verdadeira se, e somente se, “o conjunto dos pássaros que voam é quase tão grande quanto o conjunto dos pássaros”.

Verifica-se que subconjuntos de um dado conjunto universo B são ‘quase tão grandes quanto B’ através da definição de família de conjuntos grandes.

<u>Definição 2.3.1:</u> Uma *família de conjuntos grandes* sobre um universo B é uma coleção $\mathcal{F}$ de subconjuntos de B tal que, para X, Y $\subseteq$ B:

(i) $X \in \mathcal{F}$ e $X \subseteq Y \Rightarrow Y \in \mathcal{F}$

(ii) $X \in \mathcal{F}$ e $Y \in \mathcal{F} \Rightarrow X \cap Y \in \mathcal{F}$

(iii) $X \in \mathcal{F}$ ou $X^C \in \mathcal{F}$, em que X^C denota o complementar de X

(iv) $\emptyset \notin \mathcal{F}$.

Estas noções nos remetem à noção de ultrafiltro. Assim, a Lógica do Ultrafiltro é formalizada numa linguagem $L(\nabla)$ que é uma extensão da linguagem clássica de primeira ordem L (com símbolos para relações, funções e constantes), obtida através da inclusão do quantificador generalizado ∇. Denotamos a Lógica do Ultrafiltro por $\mathcal{L}(\nabla)$.

As fórmulas de $\mathcal{L}(\nabla)$ são as fórmulas da lógica clássica de primeira ordem $\mathcal{L}$ acrescidas das seguintes: Se φ é uma fórmula de $\mathcal{L}(\nabla)$, então $\nabla x\, \varphi$ é uma fórmula de $\mathcal{L}(\nabla)$. Os axiomas de $\mathcal{L}(\nabla)$ são formados por todos os axiomas de $\mathcal{L}$ mais os seguintes:

(∇_1) $\forall x\, (\varphi(x) \to \psi(x)) \to (\nabla x\, \varphi(x) \to \nabla x\, \psi(x))$
(∇_2) $(\nabla x\, \varphi(x) \wedge \nabla x\, \psi(x)) \to \nabla x\, (\varphi(x) \wedge \psi(x))$
(∇_3) $\nabla x\, \varphi(x) \vee \nabla x\, \neg\varphi(x)$
(∇_4) $\nabla x\, \varphi(x) \to \exists x\, \varphi(x)$.

As regras de inferência do sistema são:

Modus Ponens (MP): $\varphi, \varphi \to \psi \vdash \psi$
Generalização (Gen): $\varphi \vdash \forall x\, \varphi(x)$.

Os novos axiomas podem ser entendidos intuitivamente. Considerando o conjunto A de elementos que satisfazem φ e o conjunto B de elementos que satisfazem ψ, temos que os axiomas (∇_1), (∇_2), (∇_3) e (∇_4) nos dizem, respectivamente:

(i) Se $A \subseteq B$ e A é grande, então B é grande.
(ii) Se A e B são grandes, então $A \cap B$ é grande.
(iii) A é grande ou A^C é grande.
(iv) Conjuntos grandes não são vazios.

Na proposição a seguir, temos algumas demonstrações de resultados encontrados em (Sette, Carnielli, Veloso, 1999). Ressaltamos que ao escrevermos (CPC) queremos dizer que a passagem segue por algum resultado do cálculo proposicional clássico.

Proposição 2.3.1: As fórmulas seguintes são demonstráveis em $\mathcal{L}(\nabla)$:

(i) $\forall x\ \varphi(x) \rightarrow \nabla x\ \varphi(x)$.

(ii) $\neg\nabla x\ \varphi(x) \leftrightarrow \nabla x\ \neg\varphi(x)$.

(iii) $\nabla x\ (\psi(x) \wedge \varphi(x)) \rightarrow (\nabla x\ \psi(x) \wedge \nabla x\ \varphi(x))$.

Demonstração:

(i)

1. $\nabla x\ \psi(x) \vee \nabla x\ \neg\psi(x)$	(∇_3)
2. $(\nabla x\ \psi(x) \vee \nabla x\ \neg\psi(x)) \rightarrow (\neg\nabla x\ \psi(x) \rightarrow \nabla x\ \neg\psi(x))$	(CPC)
3. $\neg\nabla x\ \psi(x) \rightarrow \nabla x\ \neg\psi(x)$	(MP) em 1 e 2
4. $\nabla x\ \psi(x) \rightarrow \exists x\ \psi(x)$	(∇_4)
5. $\nabla x\ \psi(x) \rightarrow \neg\forall x\ \neg\psi(x)$	(CPC) em 4
6. $(\nabla x\ \psi(x) \rightarrow \neg\forall x\ \neg\psi(x)) \rightarrow (\neg\neg\forall x\ \neg\psi(x) \rightarrow \neg\nabla x\ \psi(x))$	(CPC)
7. $\neg\neg\forall x\ \neg\psi(x) \rightarrow \neg\nabla x\ \psi(x)$	(MP) em 5 e 6
8. $\forall x\ \neg\psi(x) \rightarrow \neg\nabla x\ \psi(x)$	(CPC) em 7
9. $\forall x\ \neg\psi(x) \rightarrow \nabla x\ \neg\psi(x)$	(CPC) em 3 e 8
10. $\forall x\ \varphi(x) \rightarrow \nabla x\ \varphi(x)$	(CPC) em 9.

(ii)

1. $\nabla x\ \varphi(x) \vee \nabla x\ \neg\varphi(x)$	(∇_3)
2. $(\nabla x\ \varphi(x) \vee \nabla x\ \neg\varphi(x)) \rightarrow (\neg\nabla x\ \varphi(x) \rightarrow \nabla x\ \neg\varphi(x))$	(CPC)
3. $\neg\nabla x\ \varphi(x) \rightarrow \nabla x\ \neg\varphi(x)$	(MP) em 1 e 2
4. $\varphi \vee \neg\varphi$	(CPC)
5. $\forall x\ (\varphi(x) \vee \neg\varphi(x))$	(Gen) em 4
6. $\nabla x\ (\neg\varphi(x) \wedge \varphi(x)) \rightarrow \exists x\ (\neg\varphi(x) \wedge \varphi(x))$	(∇_4)
7. $\nabla x\ (\neg\varphi(x) \wedge \varphi(x)) \rightarrow \neg\forall x\ \neg(\neg\varphi(x) \wedge \varphi(x))$	(CPC) em 6

8. $(\nabla x\, (\neg\varphi(x) \wedge \varphi(x)) \rightarrow \neg\forall x\, \neg(\neg\varphi(x) \wedge \varphi(x))) \rightarrow (\neg\neg\forall x\, \neg(\neg\varphi(x) \wedge \varphi(x)) \rightarrow \neg\nabla x\, (\neg\varphi(x) \wedge \varphi(x)))$ (CPC)

9. $\neg\neg\forall x\, \neg(\neg\varphi(x) \wedge \varphi(x)) \rightarrow \neg\nabla x\, (\neg\varphi(x) \wedge \varphi(x))$ (MP) em 7 e 8

10. $\forall x\, \neg(\neg\varphi(x) \wedge \varphi(x)) \rightarrow \neg\nabla x\, (\neg\varphi(x) \wedge \varphi(x))$ (CPC) em 9

11. $\forall x\, (\neg\varphi(x) \vee \varphi(x)) \rightarrow \neg\nabla x\, (\neg\varphi(x) \wedge \varphi(x))$ (CPC) em 9

12. $(\nabla x\, \neg\varphi(x) \wedge \nabla x\, \varphi(x)) \rightarrow \nabla x\, (\neg\varphi(x) \wedge \varphi(x))$ (∇_2)

13. $((\nabla x\, \neg\varphi(x) \wedge \nabla x\, \varphi(x)) \rightarrow \nabla x\, (\neg\varphi(x) \wedge \varphi(x))) \rightarrow (\neg\nabla x\, (\neg\varphi(x) \wedge \varphi(x)) \rightarrow \neg(\nabla x\, \neg\varphi(x) \wedge \nabla x\, \varphi(x))$ (CPC)

14. $\neg\nabla x\, (\neg\varphi(x) \wedge \varphi(x)) \rightarrow \neg(\nabla x\, \neg\varphi(x) \wedge \nabla x\, \varphi(x))$ (MP) em 12 e 13

15. $\forall x\, (\neg\varphi(x) \vee \varphi(x)) \rightarrow \neg(\nabla x\, \neg\varphi(x) \wedge \nabla x\, \varphi(x))$ (CPC) em 11 e 14

16. $\neg(\nabla x\, \neg\varphi(x) \wedge \nabla x\, \varphi(x))$ (MP) em 5 e 15

17. $\neg(\nabla x\, \neg\varphi(x) \wedge \nabla x\, \varphi(x)) \rightarrow (\nabla x\, \neg\varphi(x) \rightarrow \neg\nabla x\, \varphi(x))$ (CPC)

18. $\nabla x\, \neg\varphi(x) \rightarrow \neg\nabla x\, \varphi(x)$ (MP) em 16 e 17

19. $(\neg\nabla x\, \varphi(x) \rightarrow \nabla x\, \neg\varphi(x)) \wedge (\nabla x\, \neg\varphi(x) \rightarrow \neg\nabla x\, \varphi(x))$ (CPC) em 3 e 18

20. $\neg\nabla x\, \varphi(x) \leftrightarrow \nabla x\, \neg\varphi(x)$ (CPC) em 19.

(iii)

1. $\forall x\, ((\psi(x) \wedge \varphi(x)) \rightarrow \psi(x)) \rightarrow (\nabla x\, (\psi(x) \wedge \varphi(x)) \rightarrow \nabla x\, \psi(x))$ (∇_1)

2. $(\psi \wedge \varphi) \rightarrow \psi$ (CPC)

3. $\forall x\, ((\psi(x) \wedge \varphi(x)) \rightarrow \psi(x))$ (Gen) em 2

4. $\nabla x\, (\psi(x) \wedge \varphi(x)) \rightarrow \nabla x\, \psi(x)$ (MP) em 1 e 3

5. $\forall x\, ((\psi(x) \wedge \varphi(x)) \rightarrow \varphi(x)) \rightarrow (\nabla x\, (\psi(x) \wedge \varphi(x)) \rightarrow \nabla x\, \varphi(x))$ (∇_1)

6. $(\psi \wedge \varphi) \rightarrow \varphi$ (CPC)

7. $\forall x\, ((\psi(x) \wedge \varphi(x)) \rightarrow \varphi(x))$ (Gen) em 6

8. $\nabla x\, (\psi(x) \wedge \varphi(x)) \rightarrow \nabla x\, \varphi(x)$ (MP) em 5 e 7

9. $(\nabla x\, (\psi(x) \wedge \varphi(x)) \rightarrow \nabla x\, \psi(x)) \wedge (\nabla x\, (\psi(x) \wedge \varphi(x)) \rightarrow \nabla x\, \varphi(x))$ (CPC) em 4 e 8

10. $((\nabla x\, (\psi(x) \wedge \varphi(x)) \rightarrow \nabla x\, \psi(x)) \wedge (\nabla x\, (\psi(x) \wedge \varphi(x)) \rightarrow \nabla x\, \varphi(x))) \rightarrow (\nabla x\, (\psi(x) \wedge \varphi(x)) \rightarrow (\nabla x\, \psi(x) \wedge \nabla x\, \varphi(x)))$ (CPC)

11. $\nabla x\, (\psi(x) \wedge \varphi(x)) \rightarrow (\nabla x\, \psi(x) \wedge \nabla x\, \varphi(x))$ (MP) em 9 e 10 .

■

A interpretação semântica para as fórmulas de $\mathcal{L}(\nabla)$ é definida estendendo a interpretação usual de primeira ordem.

Uma *estrutura padrão* $\mathbf{M}^{\nabla}$ para $\mathcal{L}(\nabla)$ consiste de uma estrutura de primeira ordem **M** para $\mathcal{L}$ e um ultrafiltro $\mathbf{U}^{M}$ no universo M da estrutura **M**. Denotamos a estrutura padrão por $\mathbf{M}^{\nabla} = (\mathbf{M}, \mathbf{U}^{M})$. Esta estrutura é definida do modo clássico quando o quantificador ∇ não ocorre na fórmula e quando ocorre é definida por:

$\mathbf{M}^{\nabla} \vDash \nabla x\, \varphi(\bar{y}, x)[\bar{a}]$ se, e somente se, $\{b \in M : \mathbf{M}^{\nabla} \vDash \varphi(\bar{y}, x)[\bar{a}, b]\} \in \mathbf{U}^{M}$.

Os autores demonstraram os teoremas da dedução, correção e completude para este sistema.

Na próxima seção exporemos brevemente as lógicas moduladas de Grácio (1999) que, assim como a Lógica do Ultrafiltro, introduzem um novo quantificador na linguagem.

2.4 As lógicas moduladas

Grácio (1999) introduziu uma família de sistemas lógicos a fim de formalizar algum tipo de argumento indutivo, em que cada representante é chamado lógica modulada.

Cada sistema modulado possui um novo quantificador, Q, denominado *quantificador modulado*. Sintaticamente, este novo quantificador Q é caracterizado pelos seguintes axiomas:

$\forall x\, (\varphi(x) \leftrightarrow \psi(x)) \rightarrow (Qx\, (\varphi(x)) \leftrightarrow Qx\, (\psi(x)))$

$Qx\, (\varphi(x)) \rightarrow Qy\, (\varphi(y))$, se y é livre para x em $\varphi(x)$

$Qx\, (\varphi(x)) \rightarrow \exists x\, (\varphi(x))$

$\forall x\, (\varphi(x)) \rightarrow Qx\, (\varphi(x))$.

Uma *lógica modulada* é uma extensão da lógica clássica de primeira ordem pelo acréscimo de Q na linguagem e dos axiomas acima no conjunto de axiomas da lógica clássica de primeira ordem. As regras são, apenas, a *modus ponens* e a generalização. As fórmulas são acrescidas das fórmulas obtidas pela cláusula: se φ é uma fórmula, então $Qx\, \varphi$ é uma fórmula. A noção de variável livre e ligada em uma fórmula é estendida ao quantificador Q, de modo natural.

Grácio (1999) trata de três sistemas lógicos que são particularizações da família de sistemas de lógicas moduladas, são eles: a lógica da maioria, a lógica do muito e a lógica do plausível. Os sistemas citados capturam, respectivamente, as noções de quantidades: ‘a maioria’, ‘muitos’ e ‘para uma ‘boa’ parte’.

A noção de ‘maioria’ surgiu primeiramente com Rescher (1962) em que o quantificador modulado para tratar desta noção é interpretado semanticamente através de uma coleção de subconjuntos do universo, cujos números cardinais sejam maiores que os de seus complementos. Já as noções de ‘muitos’ e ‘para uma ‘boa’ parte’ possuem seus quantificadores modulados interpretados semanticamente por estruturas denominadas, respectivamente, *família fechada superiormente* e *pseudo-topologia*.

De acordo com (Grácio, 1999, p. 107), uma *família fechada superiormente* $\mathcal{S}$ sobre um conjunto A é uma coleção de subconjuntos de A que satisfaz as seguintes condições:

(i) para todos B, C $\subseteq$ A, se B $\in \mathcal{S}$ e B $\subseteq$ C, então C $\in \mathcal{S}$

(ii) A $\in \mathcal{S}$.

Uma *pseudo-topologia*, segundo (Grácio, 1999, p. 139), é uma família $\mathfrak{I}$ de subconjuntos de um conjunto X, chamados os *subconjuntos abertos*, que satisfaz as seguintes condições:

(i) a intersecção de dois subconjuntos abertos quaisquer é um subconjunto aberto

(ii) a reunião de dois subconjuntos abertos quaisquer é um subconjunto aberto

(iii) X é um subconjunto aberto

(iv) o subconjunto $\varnothing$ não é um aberto.

A *lógica da maioria* é uma lógica modulada com a adição dos seguintes axiomas:

$\forall x\ (\varphi(x) \to \psi(x)) \to (Qx\ (\varphi(x)) \to Qx\ (\psi(x)))$

$Qx\ (\varphi(x)) \to \neg Qx\ (\neg\varphi(x))$

$(Qx\ (\varphi(x)) \wedge Qx\ (\psi(x))) \to \exists x\ (\varphi(x) \wedge \psi(x))$.

A *lógica do muito* é uma lógica modulada com a adição do axioma:

$\forall x\ (\varphi(x) \rightarrow \psi(x)) \rightarrow (Qx\ (\varphi(x)) \rightarrow Qx\ (\psi(x)))$.

A *lógica do plausível* é uma lógica modulada com a adição dos axiomas:

$(Qx\ (\varphi(x)) \wedge Qx\ (\psi(x))) \rightarrow Qx\ (\varphi(x) \wedge \psi(x))$
$(Qx\ (\varphi(x)) \wedge Qx\ (\psi(x))) \rightarrow Qx\ (\varphi(x) \vee \psi(x))$.

A Lógica do Ultrafiltro também é um sistema particular de lógica modulada.

2.5 A lógica proposicional para 'muitos' e a lógica proposicional do 'plausível'

Tendo em vista que as lógicas moduladas foram abordadas num ambiente quantificacional, posteriormente, foram introduzidas algumas lógicas proposicionais para tratar das noções de 'muitos' e 'para uma 'boa' parte' em (Feitosa, Nascimento, Grácio, 2009a) e (Feitosa, Nascimento, Grácio, 2009b).

A lógica proposicional para 'muitos' e a lógica proposicional do 'plausível', denotadas, respectivamente, por $\mathcal{L}\ (\star)$ e $\mathcal{L}\ (\diamond)$, são extensões da lógica proposicional clássica. Apresentamos a seguir, sucintamente, estes dois sistemas e suas álgebras, que servem como estruturas semânticas.

A *lógica proposicional para 'muitos'*, $\mathcal{L}\ (\star)$, estende a lógica proposicional clássica pelo acréscimo do novo operador $\star$ na linguagem proposicional clássica e é determinada pelos seguintes axiomas e regras:

Axiomas:
Axiomas proposicionais clássicos
$\star(\varphi \vee \neg\varphi)$
$\star\varphi \rightarrow \varphi$
$\star(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \star\varphi$.

Regras de dedução:
(MP) $\varphi,\ \varphi \rightarrow \psi\ /\ \psi$

(R$\star$) $\vdash \varphi \leftrightarrow \psi / \vdash \star\varphi \leftrightarrow \star\psi$.

Uma *álgebra para ‘muitos’* é uma sétupla **M** = (M, $\wedge$, $\vee$, ~, 0, 1, #), em que (M, $\wedge$, $\vee$, ~, 0, 1) é uma álgebra de Boole e # é o operador que interpreta a noção de ‘muitos’ e satisfaz as seguintes condições:

(i) $\#1 = 1$

(ii) $\#a \leq a$

(iii) $\#(a \wedge b) \leq \#a$.

A *lógica proposicional do ‘plausível’*, $\mathcal{L}$ ($\diamondsuit$), estende a lógica proposicional clássica pelo acréscimo do novo operador $\diamondsuit$ na linguagem proposicional clássica e é determinada pelos seguintes axiomas e regras:

Axiomas:

Axiomas proposicionais clássicos

$\diamondsuit\varphi \wedge \diamondsuit\psi \rightarrow \diamondsuit(\varphi\wedge\psi)$

$\diamondsuit\varphi \vee \diamondsuit\psi \rightarrow \diamondsuit(\varphi\vee\psi)$

$\diamondsuit\varphi \rightarrow \varphi$

$\diamondsuit(\varphi\vee\neg\varphi)$.

Regras de dedução:

(MP) $\varphi, \varphi \rightarrow \psi / \psi$

(R$\diamondsuit$) $\vdash \varphi \leftrightarrow \psi / \vdash \diamondsuit\varphi \leftrightarrow \diamondsuit\psi$.

Uma *álgebra do ‘plausível’* é uma sétupla **P** = (P, $\wedge$, $\vee$, ~, 0, 1, $\odot$), em que (P, $\wedge$, $\vee$, ~, 0, 1) é uma álgebra de Boole e $\odot$ é um novo operador que satisfaz as seguintes condições:

(i) $\odot a \wedge \odot b \leq \odot(a\wedge b)$

(ii) $\odot a \vee \odot b \leq \odot(a\vee b)$

(iii) $\odot a \leq a$

(iv) $\odot 1 = 1$.

Os autores das lógicas proposicionais apresentadas acima demonstram que elas são corretas e completas.

A motivação deste trabalho surgiu dos trabalhos de (Feitosa, Nascimento, Grácio, 2009a) e (Feitosa, Nascimento, Grácio, 2009b), vistos acima, que introduzem, num ambiente proposicional modal, lógicas apresentadas inicialmente num ambiente quantificacional.

No próximo capítulo, que será o principal capítulo desta Dissertação, introduziremos a lógica proposicional do ‘quase sempre’ e a álgebra do ‘quase sempre’ baseadas na Lógica do Ultrafiltro.

3 A LÓGICA PROPOSICIONAL DO ‘QUASE SEMPRE’

Para a construção deste capítulo nos baseamos em (Feitosa, Nascimento, Grácio, 2009a), (Feitosa, Nascimento, Grácio, 2009b) e (Feitosa, Nascimento, Grácio, 2010).

Este capítulo possui um apêndice sobre reticulados, álgebra de Boole, filtros e ultrafiltros. Dessa forma, quando utilizarmos como justificativas definições ou proposições que iniciem com a letra A, por exemplo, Proposição A1.3, estaremos nos referindo à Proposição 1.3 do Apêndice. O leitor familiarizado com os conceitos tratados no apêndice pode ler este capítulo sem fazer a leitura prévia do apêndice, no entanto, sugerimos ao leitor que não está familiarizado com estes conceitos que leia o apêndice para um melhor entendimento do capítulo.

3.1 A lógica do ‘quase sempre’

Assim como foi feito na Lógica do Ultrafiltro, vista no capítulo anterior, introduziremos uma lógica para tratar do conceito de ‘quase sempre’. Porém, ao invés de trabalharmos num ambiente quantificacional, faremos isto num ambiente proposicional modal.

A lógica proposicional do ‘quase sempre’, denotada por $\mathcal{L}(☼)$, é uma extensão da lógica proposicional clássica. Assim, todos os resultados da lógica proposicional clássica, ou cálculo proposicional clássico (CPC), são também resultados de $\mathcal{L}(☼)$. Além destes resultados, teremos outros dados pelo novo operador lógico, que captura a noção de ‘quase sempre’.

Indicaremos o conjunto de variáveis proposicionais de $\mathcal{L}(☼)$ e o conjunto de fórmulas de $\mathcal{L}(☼)$, respectivamente, por **Var**$\mathcal{L}(☼)$ e **For**$\mathcal{L}(☼)$.

A *lógica proposicional do ‘quase sempre’* é determinada sobre a linguagem $L(\wedge, \vee, \rightarrow, \neg, ☼)$, em que $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ e $\neg$ são os conectivos lógicos usuais e ☼ é um novo operador. O conjunto de fórmulas, **For**$\mathcal{L}(☼)$, é dado pelas fórmulas do CPC acrescidas das fórmulas obtidas pela cláusula: se φ é uma fórmula, então ☼φ é uma fórmula. A lógica $\mathcal{L}(☼)$ fica determinada por meio dos seguintes axiomas e regras de dedução:

Axiomas:

(Ax_0) Axiomas do cálculo proposicional clássico (CPC)

(Ax_1) $(☼\varphi \wedge ☼\psi) \rightarrow ☼(\varphi \wedge \psi)$

(Ax_2) $☼\varphi \vee ☼\neg\varphi$

(Ax_3) $☼\bot \rightarrow \bot$.

Regras de dedução:

(MP) $\varphi \rightarrow \psi, \varphi / \psi$

(R☼) $\vdash \varphi \rightarrow \psi / \vdash ☼\varphi \rightarrow ☼\psi$.

Observações: Denotamos que a fórmula θ é deduzida a partir do conjunto Γ por $\Gamma \vdash \theta$. Quando o conjunto Γ é vazio, a expressão $\vdash \theta$ denota que a fórmula θ é um teorema de $\mathcal{L}(☼)$. Além disso, nossos axiomas e regras de dedução são esquemas, ou seja, φ e ψ representam uma fórmula qualquer.

Os novos axiomas e regra de dedução podem ser entendidos da seguinte maneira:

(Ax_1) Se φ ocorre 'quase sempre' e ψ ocorre 'quase sempre', então $\varphi\wedge\psi$ ocorre 'quase sempre';

(Ax_2) φ ocorre 'quase sempre' ou $\neg\varphi$ ocorre 'quase sempre';

(Ax_3) Se a contradição ocorre 'quase sempre', então a contradição ocorre;

(R☼) Se ψ ocorre quando φ ocorre, então ψ ocorre 'quase sempre' quando φ ocorre 'quase sempre'.

<u>Proposição 3.1.1:</u> $\vdash \neg☼\bot$.

Demonstração:

1. $\vdash ☼\bot \rightarrow \bot$	(Ax_3)
2. $\vdash (☼\bot \rightarrow \bot) \rightarrow (\neg\bot \rightarrow \neg☼\bot)$	(CPC)
3. $\vdash \neg\bot \rightarrow \neg☼\bot$	(MP) em 1 e 2
4. $\vdash \neg\bot$	(CPC)
5. $\vdash \neg☼\bot$	(MP) em 3 e 4. ■

Na proposição anterior, temos que a contradição não ocorre ‘quase sempre’. Este é um resultado intuitivo para a noção de ‘quase sempre’ e desejável em nosso sistema. Na proposição a seguir, demonstraremos que uma tautologia ocorre ‘quase sempre’, resultado também desejável.

<u>Proposição 3.1.2:</u> $\vdash ☼\top$.

Demonstração:

1. $\vdash ☼\bot \vee ☼\neg\bot$	(Ax_2)
2. $\vdash (☼\bot \vee ☼\neg\bot) \rightarrow (\neg ☼\bot \rightarrow ☼\neg\bot)$	(CPC)
3. $\vdash \neg ☼\bot \rightarrow ☼\neg\bot$	(MP) em 1 e 2
4. $\vdash \neg ☼\bot$	Proposição 3.1.1
5. $\vdash ☼\neg\bot$	(MP) em 3 e 4
6. $\vdash \neg\bot \rightarrow \top$	(CPC)
7. $\vdash ☼\neg\bot \rightarrow ☼\top$	(R☼)
8. $\vdash ☼\top$	(MP) em 5 e 7. ■

<u>Proposição 3.1.3:</u> $\vdash \varphi \Rightarrow \vdash ☼\varphi$.

Demonstração:

1. $\vdash \varphi$	premissa
2. $\vdash \top \rightarrow \varphi$	(CPC) em 1
3. $\vdash ☼\top \rightarrow ☼\varphi$	(R☼) em 2
4. $\vdash ☼\top$	Proposição 3.1.2
5. $\vdash ☼\varphi$	(MP) em 3 e 4. ■

<u>Proposição 3.1.4:</u> $\vdash ☼(\varphi\wedge\neg\varphi) \rightarrow \bot$.

Demonstração:

1. $\vdash (\varphi\wedge\neg\varphi) \rightarrow \bot$	(CPC)
2. $\vdash ☼(\varphi\wedge\neg\varphi) \rightarrow ☼\bot$	(R☼)
3. $\vdash ☼\bot \rightarrow \bot$	(Ax_3)
4. $\vdash (☼(\varphi\wedge\neg\varphi) \rightarrow ☼\bot) \wedge (☼\bot \rightarrow \bot)$	(CPC) em 2 e 3

5. $\vdash ((☼(\varphi\wedge\neg\varphi) \to ☼\bot) \wedge (☼\bot \to \bot)) \to (☼(\varphi\wedge\neg\varphi) \to \bot)$ (CPC)

6. $\vdash ☼(\varphi\wedge\neg\varphi) \to \bot$ (MP) em 4 e 5. ■

<u>Proposição 3.1.5:</u> $\vdash ☼\neg\varphi \to \neg☼\varphi$.

Demonstração:

1. $\vdash (☼(\varphi\wedge\neg\varphi) \to \bot) \to (\neg\bot \to \neg☼(\varphi\wedge\neg\varphi))$ (CPC)

2. $\vdash ☼(\varphi\wedge\neg\varphi) \to \bot$ Proposição 3.1.4

3. $\vdash \neg\bot \to \neg☼(\varphi\wedge\neg\varphi)$ (MP) em 1 e 2

4. $\vdash \neg\bot$ (CPC)

5. $\vdash \neg☼(\varphi\wedge\neg\varphi)$ (MP) em 3 e 4

6. $\vdash (☼\varphi \wedge ☼\neg\varphi) \to ☼(\varphi \wedge \neg\varphi)$ (Ax_1)

7. $\vdash ((☼\varphi\wedge☼\neg\varphi) \to ☼(\varphi\wedge\neg\varphi)) \to (\neg☼(\varphi\wedge\neg\varphi) \to \neg(☼\varphi\wedge☼\neg\varphi))$ (CPC)

8. $\vdash \neg☼(\varphi\wedge\neg\varphi) \to \neg(☼\varphi\wedge☼\neg\varphi)$ (MP) em 6 e 7

9. $\vdash \neg(☼\varphi\wedge☼\neg\varphi)$ (MP) em 5 e 8

10. $\vdash \neg(☼\varphi\wedge☼\neg\varphi) \to (☼\neg\varphi \to \neg☼\varphi)$ (CPC)

11. $\vdash ☼\neg\varphi \to \neg☼\varphi$ (MP) em 9 e 10. ■

<u>Proposição 3.1.6:</u> $\vdash ☼(\varphi\wedge\psi) \to (☼\varphi \wedge ☼\psi)$.

Demonstração:

1. $\vdash (\varphi\wedge\psi) \to \varphi$ (CPC)

2. $\vdash ☼(\varphi\wedge\psi) \to ☼\varphi$ (R☼) em 1

3. $\vdash (\varphi\wedge\psi) \to \psi$ (CPC)

4. $\vdash ☼(\varphi\wedge\psi) \to ☼\psi$ (R☼) em 3

5. $\vdash ((☼(\varphi\wedge\psi) \to ☼\varphi)\wedge(☼(\varphi\wedge\psi) \to ☼\psi)) \to (☼(\varphi\wedge\psi) \to (☼\varphi\wedge☼\psi))$ (CPC)

6. $\vdash (☼(\varphi\wedge\psi) \to ☼\varphi) \wedge (☼(\varphi\wedge\psi) \to ☼\psi)$ (CPC) em 2 e 4

7. $\vdash ☼(\varphi\wedge\psi)\to(☼\varphi\wedge☼\psi)$ (MP) em 5 e 6. ■

<u>Proposição 3.1.7:</u> $\vdash ☼\varphi \to ☼(\varphi\vee\psi)$.

Demonstração:

1. $\vdash \varphi \to (\varphi\vee\psi)$ (CPC)

2. $\vdash ☼\varphi \to ☼(\varphi\vee\psi)$ (R☼) em 1. ■

<u>Proposição 3.1.8:</u> $\vdash (☼\varphi \vee ☼\psi) \to ☼(\varphi\vee\psi)$.

Demonstração:

1. $\vdash ☼\varphi \to ☼(\varphi\vee\psi)$	Proposição 3.1.7
2. $\vdash \psi \to (\varphi\vee\psi)$	(CPC)
3. $\vdash ☼\psi \to ☼(\varphi\vee\psi)$	(R☼) em 2
4. $\vdash ((☼\varphi \to ☼(\varphi\vee\psi))\wedge(☼\psi \to ☼(\varphi\vee\psi))) \to ((☼\varphi\vee☼\psi) \to ☼(\varphi\vee\psi))$	(CPC)
5. $\vdash (☼\varphi \to ☼(\varphi\vee\psi)) \wedge (☼\psi \to ☼(\varphi\vee\psi))$	(CPC) em 1 e 3
6. $\vdash (☼\varphi \vee ☼\psi) \to ☼(\varphi\vee\psi)$	(MP) em 4 e 5. ■

<u>Proposição 3.1.9:</u> $\vdash \varphi \leftrightarrow \psi \Rightarrow \vdash ☼\varphi \leftrightarrow ☼\psi$.

Demonstração:

1. $\vdash \varphi \leftrightarrow \psi$	premissa
2. $\vdash (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$	(CPC) em 1
3. $\vdash \varphi \to \psi$	(CPC) em 2
4. $\vdash \psi \to \varphi$	(CPC) em 2
5. $\vdash ☼\varphi \to ☼\psi$	(R☼) em 3
6. $\vdash ☼\psi \to ☼\varphi$	(R☼) em 4
7. $\vdash (☼\varphi \to ☼\psi) \wedge (☼\psi \to ☼\varphi)$	(CPC) em 5 e 6
8. $\vdash ☼\varphi \leftrightarrow ☼\psi$	(CPC) em 7. ■

<u>Proposição 3.1.10:</u> $\vdash (☼\varphi \wedge ☼\psi) \to ☼(\varphi\vee\psi)$.

Demonstração:

1. $\vdash (☼\varphi \wedge ☼\psi) \to ☼\varphi$	(CPC)
2. $\vdash ☼\varphi \to (☼\varphi \vee ☼\psi)$	(CPC)
3. $\vdash ((☼\varphi \wedge ☼\psi) \to ☼\varphi) \wedge (☼\varphi \to (☼\varphi \vee ☼\psi))$	(CPC) em 1 e 2
4. $\vdash (((☼\varphi \wedge ☼\psi) \to ☼\varphi) \wedge (☼\varphi \to (☼\varphi \vee ☼\psi))) \to$ $((☼\varphi \wedge ☼\psi) \to (☼\varphi \vee ☼\psi))$	(CPC)
5. $\vdash (☼\varphi \wedge ☼\psi) \to (☼\varphi \vee ☼\psi)$	(MP) em 3 e 4
6. $\vdash (☼\varphi \vee ☼\psi) \to ☼(\varphi\vee\psi)$	Proposição 3.1.8
7. $\vdash ((☼\varphi \wedge ☼\psi) \to (☼\varphi \vee ☼\psi)) \wedge ((☼\varphi \vee ☼\psi) \to ☼(\varphi\vee\psi))$	(CPC) em 5 e 6
8. $\vdash (((☼\varphi \wedge ☼\psi) \to (☼\varphi \vee ☼\psi)) \wedge ((☼\varphi \vee ☼\psi) \to ☼(\varphi\vee\psi))) \to$ $((☼\varphi \wedge ☼\psi) \to ☼(\varphi\vee\psi))$	(CPC)

9. $(☼\varphi \wedge ☼\psi) \rightarrow ☼(\varphi \vee \psi)$ (MP) em 7 e 8. ■

O Teorema da Dedução, T. D., é um resultado importante na lógica proposicional clássica, demonstramos, a seguir, que ainda é um resultado da lógica do 'quase sempre'. Nossa demonstração está baseada na demonstração de (Feitosa, Paulovich, 2005).

<u>Teorema 3.1.1:</u> Seja $\Delta \cup \{\varphi, \psi\} \subseteq$ **For**$\mathcal{L}(☼)$. $\Delta \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ se, e somente se, $\Delta \vdash \varphi \rightarrow \psi$.

Demonstração: $(\Rightarrow)$ Nossa demonstração será feita por indução sobre o número de fórmulas que ocorrem na dedução de ψ a partir de $\Delta \cup \{\varphi\}$.

Quando a sequência que determina a dedução de ψ tem exatamente um membro, então ψ é uma axioma ou pertence a $\Delta \cup \{\varphi\}$:

Se ψ é um axioma de $\mathcal{L}(☼)$:

1. $\Delta \vdash \psi$ axioma de $\mathcal{L}(☼)$
2. $\Delta \vdash \psi \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$ (CPC)
3. $\Delta \vdash \varphi \rightarrow \psi$ (MP) em 1 e 2.

Se $\psi \in \Delta$:

1. $\Delta \vdash \psi$ membro de Δ
2. $\Delta \vdash \psi \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$ (CPC)
3. $\Delta \vdash \varphi \rightarrow \psi$ (MP) em 1 e 2.

Se $\psi = \varphi$:

1. $\Delta \vdash \varphi \rightarrow \varphi$ (CPC)
2. $\Delta \vdash \varphi \rightarrow \psi$ substituição em 1

Assim, considerando uma sequência de exatamente um membro para a dedução de ψ a partir de $\Delta \cup \{\varphi\}$, temos $\Delta \vdash \varphi \rightarrow \psi$.

(Hipótese de indução) Assumindo que a dedução de ψ a partir de $\Delta \cup \{\varphi\}$ é uma sequência de n membros, $n > 1$, então o resultado vale para toda fórmula que pode ser deduzida a partir de $\Delta \cup \{\varphi\}$ através de uma sequência com menos que n membros. Consideraremos quatro casos:

Se ψ é um axioma de $\mathcal{L}(☼)$, ou $\psi \in \Delta$, ou $\psi \equiv \varphi$, então a dedução de $\Delta \vdash \varphi \to \psi$ é como no caso em que a sequência possui exatamente um membro. Resta-nos o quarto caso, em que ψ é obtida de fórmulas anteriores na dedução pelas regras (MP) ou (R☼):

Não precisamos nos preocupar com a regra (R☼), pois ela só pode ser aplicada quando temos um teorema, ou seja, quando não temos premissas.

Se ψ é obtida de duas fórmulas anteriores na dedução pela regra (MP), então estas duas fórmulas devem ser do tipo θ e $\theta \to \psi$, assim, ambas podem ser deduzidas a partir de $\Delta \cup \{\varphi\}$ por uma sequência com menos que n membros. Desta forma, pela hipótese de indução, temos $\Delta \cup \{\varphi\} \vdash \theta \Rightarrow \Delta \vdash \varphi \to \theta$ e $\Delta \cup \{\varphi\} \vdash \theta \to \psi \Rightarrow \Delta \vdash \varphi \to (\theta \to \psi)$. Disto, como $\Delta \vdash (\varphi \to (\theta \to \psi)) \to ((\varphi \to \theta) \to (\varphi \to \psi))$ é um resultado do CPC, aplicando duas vezes a regra (MP), obtemos $\Delta \vdash \varphi \to \psi$.

($\Leftarrow$) 1. $\Delta \cup \{\varphi\} \vdash \varphi \to \psi$	premissa e $\Delta \subseteq \Delta \cup \{\varphi\}$
2. $\Delta \cup \{\varphi\} \vdash \varphi$	$\varphi \in \Delta \cup \{\varphi\}$
3. $\Delta \cup \{\varphi\} \vdash \psi$	(MP) em 1 e 2. ■

3.2 A álgebra do 'quase sempre'

As álgebras do 'quase sempre' são modelos algébricos da lógica proposicional do 'quase sempre'.

Definição 3.2.1: Uma *álgebra do 'quase sempre'* é uma sétupla **Q** = (Q, $\wedge$, $\vee$, ~, 0, 1, ▼), em que (Q, $\wedge$, $\vee$, ~, 0, 1) é uma álgebra de Boole, $0 \neq 1$ e ▼ é o operador que interpreta a noção de 'quase sempre' e satisfaz as seguintes condições para todos $a, b \in$ Q:

(i) $▼a \wedge ▼b \leq ▼(a \wedge b)$

(ii) $1 \leq ▼a \vee ▼{\sim}a$

(iii) $▼0 \leq 0$

(iv) $▼a \leq ▼(a \vee b)$.

<u>Proposição 3.2.1:</u> $\blacktriangledown 0 = 0$.

Demonstração: Como $0 \leq \blacktriangledown 0$ e, pelo item (iii) da Definição 3.2.1, $\blacktriangledown 0 \leq 0$, então, pela anti-simetria (Proposição A1.3 (iii)), $\blacktriangledown 0 = 0$. ■

<u>Proposição 3.2.2:</u> $a \leq b \Rightarrow \blacktriangledown a \leq \blacktriangledown b$.

Demonstração: Por hipótese, $a \leq b$. Pela definição A1.2, $a \vee b = b$, assim, $\blacktriangledown(a \vee b) = \blacktriangledown b$. Pelo item (iv) da Definição 3.2.1, $\blacktriangledown a \leq \blacktriangledown(a \vee b) = \blacktriangledown b$. Logo, $\blacktriangledown a \leq \blacktriangledown b$. ■

<u>Proposição 3.2.3:</u> $\sim\blacktriangledown 0 = 1$.

Demonstração: Como $\sim 0 = 1$ (Proposição A2.3 (i)), então, pela Proposição 3.2.1, $\sim\blacktriangledown 0 = \sim 0 = 1$. ■

<u>Proposição 3.2.4:</u> $\blacktriangledown 1 = 1$.

Demonstração: A condição (ii) da Definição 3.2.1 nos garante que: $1 \leq \blacktriangledown 1 \vee \blacktriangledown\sim 1 = \blacktriangledown 1 \vee \blacktriangledown 0$. Logo, pela Proposição 3.2.1, $1 \leq \blacktriangledown 1 \vee 0 = \blacktriangledown 1$. Como $\blacktriangledown 1 \leq 1$, então, pela anti-simetria, $\blacktriangledown 1 = 1$. ■

<u>Proposição 3.2.5:</u> $\blacktriangledown a \vee \blacktriangledown\sim a = 1$.

Demonstração: Como $\blacktriangledown a \vee \blacktriangledown\sim a \leq 1$ e, pelo item (ii) da Definição 3.2.1, $1 \leq \blacktriangledown a \vee \blacktriangledown\sim a$, então, pela anti-simetria, $\blacktriangledown a \vee \blacktriangledown\sim a = 1$. ■

<u>Proposição 3.2.6:</u> $\sim\blacktriangledown\sim a \vee \sim\blacktriangledown a = 1$.

Demonstração: Pela Definição 3.2.1 (i) e pela Proposição 3.2.1, $\blacktriangledown\sim a \wedge \blacktriangledown a \leq \blacktriangledown(\sim a \wedge a) = \blacktriangledown 0 = 0 \Rightarrow \blacktriangledown\sim a \wedge \blacktriangledown a = 0 \Rightarrow \sim(\blacktriangledown\sim a \wedge \blacktriangledown a) = \sim 0 \Rightarrow \sim\blacktriangledown\sim a \vee \sim\blacktriangledown a = 1$. ■

<u>Proposição 3.2.7:</u> $\blacktriangledown\sim a = \sim\blacktriangledown a$.

Demonstração: Pela Proposição 3.2.5, $\blacktriangledown a \vee \blacktriangledown\sim a = 1 \Rightarrow \sim\blacktriangledown a \wedge (\blacktriangledown a \vee \blacktriangledown\sim a) = \sim\blacktriangledown a \wedge 1 \Rightarrow (\sim\blacktriangledown a \wedge \blacktriangledown a) \vee (\sim\blacktriangledown a \wedge \blacktriangledown\sim a) = \sim\blacktriangledown a \Rightarrow 0 \vee (\sim\blacktriangledown a \wedge \blacktriangledown\sim a) = \sim\blacktriangledown a \Rightarrow \sim\blacktriangledown a \wedge \blacktriangledown\sim a = \sim\blacktriangledown a \Rightarrow \sim\blacktriangledown a \leq \blacktriangledown\sim a$. (I)

Por outro lado, pela Proposição 3.2.6, $\sim\blacktriangledown\sim a \vee \sim\blacktriangledown a = 1 \Rightarrow \blacktriangledown\sim a \wedge (\sim\blacktriangledown\sim a \vee \sim\blacktriangledown a) = \blacktriangledown\sim a \wedge 1 \Rightarrow (\blacktriangledown\sim a \wedge \sim\blacktriangledown\sim a) \vee (\blacktriangledown\sim a \wedge \sim\blacktriangledown a) = \blacktriangledown\sim a \Rightarrow 0 \vee (\blacktriangledown\sim a \wedge \sim\blacktriangledown a) = \blacktriangledown\sim a \Rightarrow \blacktriangledown\sim a \wedge \sim\blacktriangledown a = \blacktriangledown\sim a \Rightarrow \blacktriangledown\sim a \leq \sim\blacktriangledown a$. (II)

Portanto, de (I) e (II), pela anti-simetria, $\blacktriangledown\sim a = \sim\blacktriangledown a$. ■

<u>Proposição 3.2.8:</u> $\blacktriangledown(a \wedge b) \leq \blacktriangledown a$.

Demonstração: Pela Proposição A1.3 (ii), $a \wedge b \leq a$. Desta forma, pela Proposição 3.2.2, $\blacktriangledown(a \wedge b) \leq \blacktriangledown a$. ■

<u>Proposição 3.2.9:</u> $\blacktriangledown(a \wedge b) = \blacktriangledown a \wedge \blacktriangledown b$.

Demonstração: Como $a \wedge b = b \wedge a$, então, pela Proposição 3.2.8, $\blacktriangledown(a \wedge b) \leq \blacktriangledown a$ e $\blacktriangledown(a \wedge b) \leq \blacktriangledown b$. Portanto, pela Proposição A1.3 (iv), $\blacktriangledown(a \wedge b) \leq \blacktriangledown a \wedge \blacktriangledown b$. Por outro lado, pela condição (i) da Definição 3.2.1, $\blacktriangledown a \wedge \blacktriangledown b \leq \blacktriangledown(a \wedge b)$. Assim, $\blacktriangledown(a \wedge b) = \blacktriangledown a \wedge \blacktriangledown b$. ■

<u>Proposição 3.2.10:</u> $\blacktriangledown(a \vee b) = \blacktriangledown a \vee \blacktriangledown b$.

Demonstração: Pela Proposição 3.2.7 e pela Proposição 3.2.9, $\sim(\blacktriangledown(a \vee b)) = \blacktriangledown{\sim}(a \vee b) = \blacktriangledown({\sim}a \wedge {\sim}b) = \blacktriangledown{\sim}a \wedge \blacktriangledown{\sim}b = {\sim}\blacktriangledown a \wedge {\sim}\blacktriangledown b = {\sim}(\blacktriangledown a \vee \blacktriangledown b)$. Logo, $\blacktriangledown(a \vee b) = \blacktriangledown a \vee \blacktriangledown b$. ■

<u>Proposição 3.2.11:</u> $\blacktriangledown a \wedge \blacktriangledown b \leq \blacktriangledown(a \vee b)$.

Demonstração: Pela Proposição A1.3 (i) e (ii), $\blacktriangledown a \wedge \blacktriangledown b \leq \blacktriangledown a \leq \blacktriangledown a \vee \blacktriangledown b$. Logo, pela transitividade e pela Proposição 3.2.10, $\blacktriangledown a \wedge \blacktriangledown b \leq \blacktriangledown(a \vee b)$. ■

<u>Exemplo:</u> Seja A = $\{x, y, z\}$ e ($\mathcal{P}$ (A), $\cap$, $\cup$, ^{C}, $\varnothing$, A) uma álgebra de Boole de conjuntos. Definimos um operador do 'quase sempre', $\blacktriangledown$, sobre ($\mathcal{P}$ (A), $\cap$, $\cup$, ^{C}, $\varnothing$, A) da seguinte maneira: $\blacktriangledown\varnothing = \varnothing$; $\blacktriangledown\{x\} = \{z\}$; $\blacktriangledown\{y, z\} = \{x, y\}$; $\blacktriangledown\{y\} = \{x, y\}$, $\blacktriangledown\{x, z\} = \{z\}$; $\blacktriangledown\{z\} = \varnothing$; $\blacktriangledown\{x, y\} = \{x, y, z\}$; $\blacktriangledown\{x, y, z\} = \{x, y, z\}$. Facilmente podemos verificar que ($\mathcal{P}$ (A), $\cap$, $\cup$, ^{C}, $\varnothing$, A, $\blacktriangledown$) é uma álgebra do 'quase sempre'. Tomando $a = \{y, z\}$ e $b = \{y\}$ temos que, $\blacktriangledown\{y, z\} = \{x, y\} \subseteq \{x, y\} = \blacktriangledown\{y\}$, mas $\{y, z\} \nsubseteq \{y\}$. Tomando, agora, $a = \{x\}$ e $b = \{y\}$ temos que, $\blacktriangledown\{x\} = \{z\} \nsubseteq \varnothing = \blacktriangledown\varnothing = \blacktriangledown(\{x\} \cap \{y\})$, ademais, $\blacktriangledown(\{x\} \cup \{y\}) = \blacktriangledown\{x, y\} = \{x, y, z\} \nsubseteq \{z\} = \blacktriangledown\{x\}$.

Nesse exemplo verificamos que as condições (i), (ii) e (iii) abaixo nem sempre valem numa álgebras do 'quase sempre':

(i) $\blacktriangledown a \leq \blacktriangledown b \Rightarrow a \leq b$;

(ii) $\blacktriangledown a \leq \blacktriangledown(a \wedge b)$;

(iii) $\blacktriangledown(a \vee b) \leq \blacktriangledown a$.

Portanto, não podemos trocar as desigualdades por igualdades nas proposições 3.2.2 e 3.2.11 e a implicação pela equivalência na Proposição 3.2.2.

Definição 3.2.2: Sejam **Q** = (Q, $\wedge$, $\vee$, ~, 0, 1, $\blacktriangledown$) e **Q’** = (Q’, $\wedge$’, $\vee$’, ~’, 0’, 1’, $\blacktriangledown$) álgebras do ‘quase sempre’ e h: **Q** $\to$ **Q’** uma função. Dizemos que h é um *homomorfismo de álgebras do ‘quase sempre’* se para todo a, $b \in$ Q temos h($a\wedge b$) = h(a) $\wedge$’ h(b), h($a\vee b$) = h(a) $\vee$’ h(b), h(~a) = ~’h(a) e h($\blacktriangledown a$) = $\blacktriangledown$h(a).

Definição 3.2.3: Um *isomorfismo de álgebras do ‘quase sempre’* é um homomorfismo bijetivo de álgebras do ‘quase sempre’.

Definição 3.2.4: Um *monomorfismo de álgebras do ‘quase sempre’* é um homomorfismo injetivo de álgebras do ‘quase sempre’.

Teorema 3.2.1: Para toda álgebra do ‘quase sempre’ **Q** = (Q, $\wedge$, $\vee$, ~, 0, 1, $\blacktriangledown$) existe um isomorfismo h de **Q** em uma álgebra do ‘quase sempre’ de conjuntos.

Demonstração: Pelo Teorema A4.1, para toda álgebra de Boole (Q, $\wedge$, $\vee$, ~, 0, 1) existe um monomorfismo de (Q, $\wedge$, $\vee$, ~, 0, 1) em $\mathcal{P}$ ($\mathcal{P}$ (Q)). Seja h um monomorfismo de (Q, $\wedge$, $\vee$, ~, 0, 1) em (Q’, $\cap$, $\cup$, ^{C}, $\varnothing$), de forma que Q’ = h(Q) $\subseteq \mathcal{P}$ ($\mathcal{P}$ (Q)). Este fato nos garante a sobrejetividade de h, ou seja, h é um isomorfismo de álgebras de Boole.

O isomorfismo h se estende a um isomorfismo entre **Q** = (Q, $\wedge$, $\vee$, ~, 0, 1, $\blacktriangledown$) e **Q’** = (Q’, $\cap$, $\cup$, ^{C}, $\varnothing$, $\blacktriangledown$) quando definimos, para cada $a \in$ Q, $\blacktriangledown$h(a) = h($\blacktriangledown a$). A função h é bijetiva e, desse modo, preserva também a nova operação.

A álgebra de conjuntos **Q’** é uma álgebra do ‘quase sempre’ de conjuntos, pois:

(i) Se a, $b \in$ Q, pela Proposição 3.2.9, $\blacktriangledown a\wedge\blacktriangledown b$ = $\blacktriangledown(a\wedge b)$, então h($\blacktriangledown a\wedge\blacktriangledown b$) = h($\blacktriangledown(a\wedge b)$) $\Rightarrow$ h($\blacktriangledown a$) $\cap$ h($\blacktriangledown b$) = $\blacktriangledown$h($a\wedge b$) $\Rightarrow$ $\blacktriangledown$h(a) $\cap$ $\blacktriangledown$h(b) = $\blacktriangledown$(h(a) $\cap$ h(b)). Logo, $\blacktriangledown$h(a) $\cap$ $\blacktriangledown$h(b) $\subseteq$ $\blacktriangledown$(h(a) $\cap$ h(b)).

(ii) Se $a \in$ Q, pela Proposição 3.2.5, $\blacktriangledown a \vee \blacktriangledown{\sim}a$ = 1, então h($\blacktriangledown a \vee \blacktriangledown{\sim}a$) = h(1) $\Rightarrow$ h($\blacktriangledown a$) $\cup$ h($\blacktriangledown{\sim}a$) = Q’ $\Rightarrow$ $\blacktriangledown$h(a) $\cup$ $\blacktriangledown$h(~a) = Q’ $\Rightarrow$ $\blacktriangledown$h(a) $\cup$ $\blacktriangledown$h(a)^C = Q’. Portanto, Q’ $\subseteq$ $\blacktriangledown$h(a) $\cup$ $\blacktriangledown$h(a)^C.

(iii) Pela Proposição 3.2.1, $\blacktriangledown 0 = 0$, logo, $h(\blacktriangledown 0) = h(0) \Rightarrow {}^{\blacktriangledown}h(0) = h(0) \Rightarrow {}^{\blacktriangledown}\varnothing = \varnothing \Rightarrow {}^{\blacktriangledown}\varnothing \subseteq \varnothing$.

(iv) Se a, $b \in Q$, pela condição (iv) da Definição 3.2.1, $\blacktriangledown a \leq \blacktriangledown(a \vee b)$, então $\blacktriangledown a \wedge \blacktriangledown(a \vee b) = \blacktriangledown a \Rightarrow h(\blacktriangledown a) \cap h(\blacktriangledown(a \vee b)) = h(\blacktriangledown a \wedge \blacktriangledown(a \vee b)) = h(\blacktriangledown a) \Rightarrow h(\blacktriangledown a) \subseteq h(\blacktriangledown(a \vee b))$. Portanto, ${}^{\blacktriangledown}h(a) = h(\blacktriangledown a) \subseteq h(\blacktriangledown(a \vee b)) = {}^{\blacktriangledown}h(a \vee b) = {}^{\blacktriangledown}(h(a) \cup h(b))$. ∎

Apresentamos, assim, um sistema sintático e um sistema semântico para tratar do conceito de 'quase sempre'. Necessitamos demonstrar, agora, que nosso sistema é adequado. Faremos isso na próxima seção.

3.3 Adequação da lógica proposicional do 'quase sempre'

Em geral, os sistemas formais possuem um modelo ou uma semântica adequada a ele. O sistema é adequado quando ele é correto e completo. A correção fraca determina que todo teorema é uma fórmula válida; e a completude fraca que toda fórmula válida é um teorema. Enquanto a correção forte e a completude forte envolvem não só teoremas e fórmulas válidas, mas também consequências semântica e sintática (formal).

Nesta seção, faremos a demonstração da adequação forte e fraca entre a lógica proposicional do 'quase sempre', $\mathcal{L}(☼)$, e as álgebras do 'quase sempre'.

Denotaremos uma álgebra do 'quase sempre' genérica por $\mathcal{A}$.

Definição 3.3.1: Uma fórmula $\varphi \in \mathbf{For}\mathcal{L}(☼)$ é *refutável* em Γ quando $\Gamma \vdash \neg\varphi$, caso contrário, φ é *irrefutável*.

Definição 3.3.2: Uma *valoração restrita* é uma função $\upsilon^{\wedge} : \mathbf{Var}\mathcal{L}(☼) \rightarrow \mathcal{A}$, que interpreta cada variável de $\mathcal{L}(☼)$ em um elemento de $\mathcal{A}$.

Definição 3.3.3: Sejam p uma fórmula atômica e φ e ψ fórmulas. Uma *valoração* é uma função $\upsilon : \mathbf{For}\mathcal{L}(☼) \rightarrow \mathcal{A}$ que estende natural e unicamente a valoração restrita do seguinte modo:

$\upsilon(p) = \upsilon\hat{}(p)$

$\upsilon(\neg\varphi) = \sim \upsilon(\varphi)$

$\upsilon(\varphi \vee \psi) = \upsilon(\varphi) \vee \upsilon(\psi)$

$\upsilon(\varphi \wedge \psi) = \upsilon(\varphi) \wedge \upsilon(\psi)$

$\upsilon(☼\varphi) = \blacktriangledown\upsilon(\varphi)$.

Observações: Os símbolos de operadores do lado esquerdo das igualdades representam os operadores lógicos, enquanto os símbolos de operadores do lado direito das igualdades representam os operadores algébricos. O símbolo $\rightarrow$ é definido da seguinte maneira: $\varphi \rightarrow \psi =_{df} \neg\varphi\vee\psi$.

<u>Definição 3.3.4:</u> Uma valoração υ : **For**$\mathcal{L}$(☼) → $\mathcal{A}$ é um *modelo* para um conjunto $\Gamma \subseteq$ **For**$\mathcal{L}$(☼) quando $\upsilon(\varphi) = 1$, para toda fórmula $\varphi \in \Gamma$.

Em particular, uma valoração υ : **For**$\mathcal{L}$(☼) → $\mathcal{A}$ é um modelo para $\varphi \in$ **For**$\mathcal{L}$(☼) quando $\upsilon(\varphi) = 1$.

<u>Definição 3.3.5:</u> Uma fórmula φ é *válida* em uma álgebra do 'quase sempre' $\mathcal{A}$ quando toda valoração υ : **For**$\mathcal{L}$(☼) → $\mathcal{A}$ é um modelo para φ.

<u>Definição 3.3.6:</u> Uma fórmula φ é *qs-válida* quando ela é válida em toda álgebra do 'quase sempre'.

Denotamos que uma fórmula φ é qs-válida por $\vDash\varphi$.

<u>Definição 3.3.7:</u> Seja $\Gamma \subseteq$ **For**$\mathcal{L}$(☼), **Ax** o conjunto de axiomas de $\mathcal{L}$(☼) e $C(\Gamma) = \{\psi : \Gamma\cup$**Ax** $\vdash \psi\}$. Dizemos que ψ é *derivável* em $\mathcal{L}$(☼) ou é um *teorema* de $\mathcal{L}$(☼) quando $\psi \in C(\varnothing)$, ou de outro modo, quando $\Gamma = \varnothing$.

Se $\Gamma = \varnothing$, temos os teoremas de $\mathcal{L}$(☼), e assim $\psi \in C(\varnothing) \Leftrightarrow\ \vdash \psi$.

<u>Definição 3.3.8:</u> Uma *teoria* de $\mathcal{L}$(☼) é um conjunto $\Delta \subseteq$ **For**$\mathcal{L}$(☼), tal que $C(\Delta) = \Delta$.

<u>Definição 3.3.9:</u> Seja $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq \mathbf{For}\mathcal{L}(☼)$. O *conjunto de fórmulas* Γ é *inconsistente* quando se tem $\Gamma \vdash \varphi$ e $\Gamma \vdash \neg\varphi$, para alguma fórmula φ. Caso contrário, Γ é *consistente*.

<u>Definição 3.3.10:</u> Um sistema, constituído por uma linguagem formal, axiomas e regras de dedução, é *consistente* quando o seu conjunto de teoremas é consistente. Caso contrário, ele é *inconsistente*.

<u>Definição 3.3.11:</u> A *álgebra de fórmulas* de $\mathcal{L}(☼)$ é dada por $(\mathbf{For}\mathcal{L}(☼), \wedge, \vee, \rightarrow, \neg, ☼)$, em que $\wedge, \vee, \rightarrow, \neg$ e ☼ são os operadores de $\mathcal{L}(☼)$.

Uma álgebra de Lindenbaum é um conjunto de classes de equivalência obtidas a partir de uma relação de equivalência, ou ainda uma congruência, definida sobre o conjunto de fórmulas de uma determinada lógica. Definiremos a seguir a relação de equivalência que nos dará a álgebra de Lindenbaum de $\mathcal{L}(☼)$.

<u>Definição 3.3.12:</u> Dado $\Gamma \subseteq \mathbf{For}\mathcal{L}(☼)$, a relação $\equiv_\Gamma$ é definida por:

$$\varphi \equiv_\Gamma \psi \Leftrightarrow \Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi \text{ e } \Gamma \vdash \psi \rightarrow \varphi.$$

A partir daqui omitiremos o índice Γ da relação.

<u>Proposição 3.3.1:</u> A relação $\equiv$ é uma relação de congruência.

Demonstração: Primeiramente demonstraremos que $\equiv$ é uma relação de equivalência. A relação é reflexiva: para toda fórmula $\varphi \in \Gamma \subseteq \mathbf{For}\mathcal{L}(☼)$, $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \varphi$ e, então, $\varphi \equiv \varphi$. A relação é simétrica: se $\varphi \equiv \psi$, então $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$ e $\Gamma \vdash \psi \rightarrow \varphi$. Logo, $\psi \equiv \varphi$. A relação é transitiva: se $\varphi \equiv \psi$ e $\psi \equiv \theta$, então $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$, $\Gamma \vdash \psi \rightarrow \varphi$, $\Gamma \vdash \psi \rightarrow \theta$ e $\Gamma \vdash \theta \rightarrow \psi$. Logo, $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \theta$ e $\Gamma \vdash \theta \rightarrow \varphi \Leftrightarrow \varphi \equiv \theta$. Assim, a relação $\equiv$ é uma relação de equivalência.

Para concluir a demonstração de que a relação $\equiv$ é uma congruência, basta mostrar que ela preserva o operador ☼, pois, claramente, preserva os operadores booleanos. Por exemplo, para conjunção, $(\varphi \equiv \psi)$ e $(\theta \equiv \sigma) \Leftrightarrow \Gamma \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$ e $\Gamma \vdash \theta \leftrightarrow \sigma \Rightarrow$ (CPC) $\Gamma \vdash \varphi\wedge\theta \leftrightarrow \psi\wedge\sigma \Leftrightarrow \varphi\wedge\theta \equiv \psi\wedge\sigma$. A Proposição 3.1.9 nos garante que: $\varphi \equiv \psi \Leftrightarrow \Gamma \vdash \varphi \leftrightarrow \psi \Rightarrow \Gamma \vdash ☼\varphi \leftrightarrow ☼\psi \Leftrightarrow ☼\varphi \equiv ☼\psi$. Assim, a relação $\equiv$ é uma congruência. ■

Definição 3.3.13: A *classe de equivalência de* φ *módulo* $\equiv$ *e* Γ é dada por: $[\varphi]_{\Gamma} = \{\psi \in \mathbf{For}\mathcal{L}(☼) : \psi \equiv \varphi\}$.

Definição 3.3.14: Para cada $\Gamma \subseteq \mathbf{For}\mathcal{L}(☼)$, a *álgebra de Lindenbaum de* $\mathcal{L}(☼)$ relativa a Γ, denotada por $A_{\Gamma}(\mathcal{L}(☼))$, é a álgebra quociente dada por:

$A_{\Gamma}(\mathcal{L}(☼)) = (\mathbf{For}\mathcal{L}(☼)\big|_{\equiv}, \wedge_{\equiv}, \vee_{\equiv}, \neg_{\equiv}, ☼_{\equiv}, 0_{\equiv}, 1_{\equiv})$, tal que:

$[\varphi] \wedge_{\equiv} [\psi] = [\varphi \wedge \psi]$;

$[\varphi] \vee_{\equiv} [\psi] = [\varphi \vee \psi]$;

$\neg_{\equiv} [\varphi] = [\neg\varphi]$;

$☼_{\equiv} [\varphi] = [☼\varphi]$;

$0_{\equiv} = [\varphi \wedge \neg\varphi] = [\bot]$ e

$1_{\equiv} = [\varphi \vee \neg\varphi] = [\top]$.

Observação: Não escreveremos o índice $\equiv$ daqui para frente.

Quando $\Gamma = \varnothing$, denotamos a álgebra de Lindenbaum de $\mathcal{L}(☼)$ relativa a Γ por $A(\mathcal{L}(☼))$, a qual chamaremos simplesmente de álgebra de Lindenbaum de $\mathcal{L}(☼)$.

Proposição 3.3.2: Em $A_{\Gamma}(\mathcal{L}(☼))$ temos $[\varphi] \leq [\psi] \Leftrightarrow \Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$.

Demonstração: $[\varphi] \leq [\psi] \Leftrightarrow [\varphi] \wedge [\psi] = [\varphi] \Leftrightarrow [\varphi \wedge \psi] = [\varphi] \Leftrightarrow \Gamma \vdash \varphi \wedge \psi \leftrightarrow \varphi \Leftrightarrow$
$\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi \rightarrow \varphi \Leftrightarrow \Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$. ■

Proposição 3.3.3: A álgebra $A_{\Gamma}(\mathcal{L}(☼))$ é uma álgebra do 'quase sempre'.

Demonstração: Utilizaremos nesta demonstração a Proposição 3.3.2 e a Definição 3.3.12.

(i) Pelo (Ax_1), $\vdash (☼\varphi \wedge ☼\psi) \rightarrow ☼(\varphi \wedge \psi) \Rightarrow [☼\varphi \wedge ☼\psi] \leq [☼(\varphi \wedge \psi)] \Rightarrow [☼\varphi] \wedge [☼\psi] \leq [☼(\varphi \wedge \psi)] \Rightarrow ☼[\varphi] \wedge ☼[\psi] \leq ☼[\varphi \wedge \psi]$.

(ii) Pelo (Ax_2), $\vdash ☼\varphi \vee ☼\neg\varphi \Rightarrow \vdash (\varphi \vee \neg\varphi) \rightarrow (☼\varphi \vee ☼\neg\varphi) \Rightarrow [\varphi \vee \neg\varphi] \leq [☼\varphi \vee ☼\neg\varphi] \Rightarrow 1 \leq [☼\varphi] \vee [☼\neg\varphi] \Rightarrow 1 \leq ☼[\varphi] \vee ☼[\neg\varphi]$.

(iii) Pelo (Ax_3), $\vdash ☼\bot \rightarrow \bot \Rightarrow [☼\bot] \leq [\bot] \Rightarrow ☼[\bot] \leq 0 \Rightarrow ☼0 \leq 0$.

(iv) A Proposição 3.1.7 nos garante que: $\vdash$ ☼φ → ☼(φ∨ψ) ⇒ [☼φ] ≤ [☼(φ∨ψ)] ⇒ ☼[φ] ≤ ☼[φ∨ψ].

Assim, a álgebra $\mathcal{A}_\Gamma(\mathcal{L}$(☼)) é uma álgebra do 'quase sempre'. ■

Definição 3.3.15: A valoração υ : **For**$\mathcal{L}$(☼) → $\mathcal{A}_\Gamma(\mathcal{L}$(☼)) é o *modelo canônico* de Γ ⊆ **For**$\mathcal{L}$(☼).

Proposição 3.3.4: Seja Γ∪{φ} ⊆ **For**$\mathcal{L}$(☼):

(i) Γ $\vdash$ φ se, e somente se, [φ] = 1 em $\mathcal{A}_\Gamma(\mathcal{L}$(☼));

(ii) Γ $\vdash$ ¬φ (φ é refutável em Γ) se, e somente se, [φ] = 0 em $\mathcal{A}_\Gamma(\mathcal{L}$(☼)).

Demonstração:

(i) (⇐) Se [φ] = 1, então [φ → φ] ≤ [φ], pela Proposição 3.3.2, Γ $\vdash$(φ → φ) → φ. Como Γ $\vdash$φ → φ, então, pela regra MP, temos Γ $\vdash$ φ.

(⇒) Se Γ $\vdash$ φ, então, como φ → ((φ → φ) → φ) é um resultado do CPC, pela regra MP, Γ $\vdash$(φ → φ) → φ. A álgebra $\mathcal{A}_\Gamma(\mathcal{L}$(☼)) sempre tem o elemento 1. Logo, pela Definição 3.3.12 e pela Proposição 3.3.2, 1 = [φ∨¬φ] = [φ → φ] ≤ [φ] e, portanto, [φ] = 1.

(ii) Pelo item anterior e pela Definição 3.3.12, temos: Γ $\vdash$ ¬φ ⇔ [¬φ] = 1 ⇔ ¬[φ] = 1 ⇔ [φ] = 0. ■

Teorema 3.3.1: (Correção) As álgebras do 'quase sempre' são modelos corretos para a lógica $\mathcal{L}$(☼).

Demonstração: Seja $\mathcal{A}$ = (A, ∧, ∨, ~, 0, 1, ▼) uma álgebra do 'quase sempre'. Resta demonstrar que os axiomas (Ax_1), (Ax_2) e (Ax_3) são válidos e a regra (R☼) preserva a validade. Utilizaremos a Definição 3.3.3.

(Ax_1) υ((☼φ ∧ ☼ψ) → ☼(φ ∧ ψ)) = υ(¬(☼φ ∧ ☼ψ)) ∨ (☼(φ∧ψ)) = υ(¬(☼φ ∧ ☼ψ)) ∨ υ(☼(φ∧ψ)) = υ(¬☼φ ∨ ¬☼ψ) ∨ υ(☼(φ∧ψ)) = (υ(¬☼φ) ∨ υ (¬☼ψ)) ∨ υ(☼(φ∧ψ)) = (~▼υ(φ) ∨ ~▼υ(ψ)) ∨ ▼υ(φ∧ψ) = (~▼υ(φ) ∨ ~▼υ(ψ)) ∨ ▼(υ(φ) ∧ υ(ψ)) = (Pela Proposição 3.2.9) (~▼υ(φ) ∨ ~▼υ(ψ)) ∨ (▼υ(φ) ∧ ▼υ(ψ)) = ((~▼υ(φ) ∨ ~▼υ(ψ)) ∨ ▼υ(φ)) ∧ ((~▼υ(φ) ∨ ~▼υ(ψ)) ∨ ▼υ(ψ)) = ((~▼υ(φ) ∨ ▼υ(φ)) ∨ ~▼υ(ψ)) ∧ (~▼υ(φ) ∨ (~▼υ(ψ) ∨ ▼υ(ψ))) = (1∨ ~▼υ(ψ)) ∧ (~▼υ(φ) ∨1) = 1∧1 = 1.

(Ax_2) υ(☼φ ∨ ☼¬φ) = υ(☼φ) ∨ υ(☼¬φ) = ▼υ(φ) ∨ ▼υ(¬φ) = ▼υ(φ) ∨ ▼~υ(φ) = 1 (Proposição 3.2.5).

(Ax$_3$) $\upsilon(☼\bot \to \bot) = \upsilon(\neg(☼\bot) \vee \bot) = \upsilon(\neg(☼\bot)) \vee \upsilon(\bot) = \sim\upsilon(☼\bot) \vee 0 = \sim\blacktriangledown\upsilon(\bot) \vee 0 = \sim\blacktriangledown 0 = \sim 0 = 1$ (Proposição 3.2.1).

(R☼) $\upsilon(\varphi \to \psi) = 1 \Rightarrow \upsilon(\varphi) \leq \upsilon(\psi) \Rightarrow$ (Pela Proposição 3.2.2) $\blacktriangledown\upsilon(\varphi) \leq \blacktriangledown\upsilon(\psi) \Rightarrow \upsilon(☼\varphi) \leq \upsilon(☼\psi) \Rightarrow \upsilon(☼\varphi \to ☼\psi) = 1$. ■

Proposição 3.3.5: A lógica proposicional $\mathcal{L}$(☼) é consistente.

Demonstração: Suponhamos que $\mathcal{L}$(☼) não é consistente. Então, pela Definição 3.3.10, existe $\varphi \in$ **For**$\mathcal{L}$(☼) tal que $\vdash\varphi$ e $\vdash\neg\varphi$. Pelo Teorema da Correção, φ e $\neg\varphi$ são fórmulas válidas. Seja υ uma valoração em uma álgebra do 'quase sempre' com dois elementos **2** = {0, 1}. Como φ e $\neg\varphi$ são válidas, então $\upsilon(\neg\varphi) = 1$ e $\upsilon(\varphi) = 1 \Rightarrow \upsilon(\neg\varphi) = \sim\upsilon(\varphi) = 0$, o que é uma contradição. Logo, $\mathcal{L}$(☼) é consistente. ■

Lema 3.3.1: As seguintes condições são equivalentes para toda fórmula $\varphi \in$ **For**$\mathcal{L}$(☼):

(i) $\vdash\varphi$;

(ii) $\vDash\varphi$;

(iii) φ é válida em toda álgebra do 'quase sempre' de conjuntos;

(iv) $\upsilon_0(\varphi) = 1$, em que υ_0 é a valoração do modelo canônico $A(\mathcal{L}$(☼)).

Demonstração:

(i) $\Rightarrow$ (ii): Segue do Teorema da Correção.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Se a fórmula φ é *qs-válida*, $\vDash\varphi$, então ela é válida em toda álgebra do 'quase sempre', em particular, φ é válida em toda álgebra do 'quase sempre' de conjuntos.

(iii) $\Rightarrow$ (iv): Pela Proposição 3.3.3, $A(\mathcal{L}$(☼)) é uma álgebra do 'quase sempre'. Logo, pelo Teorema 3.2.1, $A(\mathcal{L}$(☼)) é isomorfa a uma álgebra do 'quase sempre' de conjuntos **Q'** = (Q', $\cap$, $\cup$, ^{C}, $\varnothing$, $\blacktriangledown$). Assim, se φ é válida em **Q'**, então φ é válida em $A(\mathcal{L}$(☼)), ou seja, $\upsilon_0(\varphi) = 1$.

(iv) $\Rightarrow$ (i): Se $\varphi \in$ **For**$\mathcal{L}$(☼) e $\nvdash\varphi$ em $\mathcal{L}$(☼), então, pela Proposição 3.3.4, [φ] não coincide com a unidade de $A(\mathcal{L}$(☼)) e, assim, $\upsilon_0(\varphi) \neq 1$. ■

Teorema 3.3.2: (Completude) Para toda fórmula $\varphi \in$ **For**$\mathcal{L}$(☼), se φ é uma fórmula válida, então φ é derivável em $\mathcal{L}$(☼).

Demonstração: Segue pelo Lema 3.3.1. ■

Foram demonstrados os Teoremas da Correção e da Completude fraca. A seguir demonstraremos a Adequação (Correção e Completude) forte.

Denotaremos por $\Gamma \vDash \varphi$ todo modelo para Γ que também é modelo para φ.

<u>Lema 3.3.2:</u> Seja $\Gamma \subseteq$ **For**$\mathcal{L}(☼)$ e B uma álgebra do 'quase sempre'. Se $\Gamma \vdash \varphi$, então $\Gamma \vDash \varphi$.

Demonstração: Seja υ_B : **For**$\mathcal{L}(☼) \to B$ um modelo para Γ. Como $\Gamma \vdash \varphi$, φ pode ser um axioma de $\mathcal{L}(☼)$, ou uma fórmula obtida por meio de regras de dedução de $\mathcal{L}(☼)$, ou uma fórmula de Γ. Pelo Teorema da Correção, os axiomas de $\mathcal{L}(☼)$ são válidos e as regras de $\mathcal{L}(☼)$ preservam a validade. Além disso, como $\upsilon_B(\psi) = 1$, para toda fórmula $\psi \in \Gamma$, então $\upsilon_B(\varphi) = 1$. Logo, υ_B é um modelo para φ. ■

<u>Proposição 3.3.6:</u> Seja $\Gamma \subseteq$ **For**$\mathcal{L}(☼)$ e B uma álgebra do 'quase sempre'. Se existe um modelo υ_B : **For**$\mathcal{L}(☼) \to B$ para Γ, então Γ é consistente.

Demonstração: Suponhamos que Γ não é consistente. Então, existe φ tal que: $\Gamma \vdash \varphi$ e $\Gamma \vdash \neg\varphi$. Além disso, $\upsilon_B(\varphi) = 1$ e $\upsilon_B(\neg\varphi) = 1 \Rightarrow {\sim}\upsilon_B(\varphi) = 1 \Rightarrow \upsilon_B(\varphi) = 0$, donde temos uma contradição. Portanto, Γ é consistente. ■

<u>Definição 3.3.16:</u> Um modelo υ : **For**$\mathcal{L}(☼) \to B$ é *fortemente adequado* para Γ quando: $\Gamma \vdash \varphi$ se, e somente se, $\Gamma \vDash_B \varphi$.

<u>Lema 3.3.3:</u> Se $\Gamma \subseteq$ **For**$\mathcal{L}(☼)$ é consistente, então a valoração canônica é um modelo fortemente adequado para Γ.

Demonstração: Considerando a valoração canônica υ_0 : **For**$\mathcal{L}(☼) \to A_\Gamma(\mathcal{L}(☼))$, $\upsilon_0(\varphi) = [\varphi]$, pela Proposição 3.3.4 (i), $\upsilon_0(\varphi) = 1$ se, e somente se, $\Gamma \vdash \varphi$. Consequentemente, a valoração canônica υ_0 é um modelo adequado para Γ. ■

<u>Lema 3.3.4:</u> As seguintes condições são equivalentes para todo conjunto de fórmulas $\Gamma \subseteq$ **For**$\mathcal{L}(☼)$:

(i) Γ é consistente;

(ii) existe um modelo fortemente adequado para Γ;

(iii) existe um modelo fortemente adequado para Γ em uma álgebra do 'quase sempre' $\mathcal{B}$ que é uma álgebra de conjuntos **Q'** = (Q', $\cap$, $\cup$, ^{C}, $\varnothing$, ▾);

(iv) existe um modelo para Γ.

Demonstração:

(i) $\Rightarrow$ (ii): Segue pela Lema 3.3.3.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Como, pela Proposição 3.3.3, $\mathcal{A}_\Gamma(\mathcal{L}(☼))$ é uma álgebra do 'quase sempre' e, pelo Teorema 3.2.1, toda álgebra do 'quase sempre' é isomorfa a uma álgebra de conjuntos **Q'** = (Q', $\cap$, $\cup$, ^{C}, $\varnothing$, ▾), então o resultado é imediato.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) O resultado é imediato.

(iv) $\Rightarrow$ (i) Segue pela Proposição 3.3.6. ■

<u>Teorema 3.3.3:</u> (Adequação forte) Seja $\Gamma \subseteq$ **For**$\mathcal{L}$(☼). Se Γ é consistente, as afirmações seguintes são equivalentes:

(i) $\Gamma \vdash \varphi$;

(ii) $\Gamma \vDash \varphi$;

(iii) todo modelo de Γ na álgebra do 'quase sempre' de conjuntos **Q'** = (Q', $\cap$, $\cup$, ^{C}, $\varnothing$, ▾) é um modelo para φ.

(iv) $\upsilon_0(\varphi) = 1$, para toda valoração canônica υ_0 no modelo canônico $\mathcal{A}_\Gamma(\mathcal{L}(☼))$.

Demonstração:

(i) $\Rightarrow$ (ii): Segue do Lema 3.3.2.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Se $\Gamma \vDash \varphi$, então todo modelo para Γ também é modelo para φ, em particular, todo modelo de Γ na álgebra do 'quase sempre' de conjuntos **Q'** = (Q', $\cap$, $\cup$, ^{C}, $\varnothing$, ▾) é um modelo para φ.

(iii) $\Rightarrow$ (iv): Por hipótese, Γ é consistente. Logo, pelo Lema 3.3.4, existe um modelo fortemente adequado para Γ em uma álgebra do 'quase sempre' $\mathcal{B}$ que é uma álgebra de conjuntos **Q'** = (Q', $\cap$, $\cup$, ^{C}, $\varnothing$, ▾). Como $\mathcal{A}_\Gamma(\mathcal{L}(☼))$ é uma álgebra do 'quase sempre' (Proposição 3.3.3) e toda álgebra do 'quase sempre' é isomorfa a uma álgebra de conjuntos **Q'** = (Q', $\cap$, $\cup$, ^{C}, $\varnothing$, ▾) (Teorema 3.2.1), então, para uma valoração canônica υ_0 no modelo canônico $\mathcal{A}_\Gamma(\mathcal{L}(☼))$, $\upsilon_0(\varphi) = 1$.

(iv) $\Rightarrow$ (i): Como, por hipótese, Γ é consistente, segue pelo Lema 3.3.3 que a valoração canônica υ_0 : $\mathbf{For}\mathcal{L}(☼) \to \mathcal{A}_\Gamma(\mathcal{L}(☼))$ é um modelo fortemente adequado para Γ, ou seja, $\Gamma \vdash \varphi$ se, e somente se, $\Gamma \vDash_{\mathcal{A}_\Gamma(\mathcal{L}(☼))} \varphi$. Pelo item (iv) deste teorema, $\Gamma \vDash_{\mathcal{A}_\Gamma(\mathcal{L}(☼))} \varphi$. Logo, $\Gamma \vdash \varphi$. ■

Neste capítulo apresentamos a lógica do ‘quase sempre’ no estilo hilbertiano, isto é, pela introdução de alguns axiomas (ou esquemas de axiomas) acrescidos de algumas regras de dedução, como é feito usualmente dentro de um ambiente matemático. No próximo capítulo apresentaremos esta mesma lógica num sistema de cálculo de sequentes.

APÊNDICE: Reticulados, Álgebra de Boole, Filtros e Ultrafiltros

A1. Reticulados

Escrevemos esta primeira parte sobre reticulados com base em (Miraglia, 1987).

<u>Definição A1.1:</u> Seja R um conjunto não vazio, com duas operações binárias $\wedge$ (conjunção) e $\vee$ (disjunção). Um *reticulado* é uma estrutura algébrica **R** = (R, $\wedge$, $\vee$), tal que, para todos a, b, $c \in$ R, as seguintes leis são satisfeitas:

R_1: $a\wedge b = b\wedge a$; $a\vee b = b\vee a$ (comutatividade)

R_2: $(a\wedge b) \wedge c = a \wedge (b\wedge c)$; $(a\vee b) \vee c = a \vee (b\vee c)$ (associatividade)

R_3: $(a\wedge b) \vee b =$ b; $(a\vee b) \wedge b = b$ (absorção).

<u>Proposição A1.1:</u> Se **R** = (R, $\wedge$, $\vee$) é um reticulado, então para todos a, b, $c \in$ R:

(i) $a\wedge a = a$; $a\vee a = a$ (idempotência)

(ii) $a\wedge b = a \Leftrightarrow a\vee b = b$ (ordem).

Demonstração: (i) De R_3, temos que $a\wedge a = [(a\wedge a) \vee a] \wedge a = a$. Da mesma forma, de R_3, $a\vee a = [(a\vee a) \wedge a] \vee a = a$.

(ii) ($\Rightarrow$) Se $a\wedge b = a$, então $a\vee b = (a\wedge b) \vee b$ e, por R_3, $a\vee b = b$. ($\Leftarrow$) Se $a\vee b = b$, então $a\wedge b = a \wedge (a\vee b)$, de R_1 e R_3, $a\wedge b = (a\vee b) \wedge a = (b\vee a) \wedge a = a$. ■

Podemos definir um reticulado de outra maneira, através de uma relação de ordem. Para isso, definiremos, a seguir, uma relação de ordem parcial em um reticulado.

<u>Definição A1.2:</u> Seja **R** = (R, $\wedge$, $\vee$) um reticulado e a, $b \in$ R. Dizemos que $a \leq b$ (a menor ou igual a b) se $a\wedge b = a$.

Segundo a proposição anterior, temos $a \leq b \Leftrightarrow a\wedge b = a \Leftrightarrow a\vee b = b$. Um reticulado pode ser visto como uma estrutura ordenada **R** = (R, $\leq$), tal que a ordem do reticulado é dada por uma destas equivalências.

<u>Proposição A1.2:</u> A relação $\leq$ em um reticulado $\mathbf{R} = (R, \wedge, \vee)$ é uma ordem parcial, ou seja, para todos $a, b, c \in R$:

(i) $a \leq a$; (reflexividade)

(ii) $a \leq b$ e $b \leq a \Rightarrow a = b$; (anti-simetria)

(iii) $a \leq b$ e $b \leq c \Rightarrow a \leq c$. (transitividade)

Demonstração: (i) Pela Proposição A1.1, $a \wedge a = a$. Logo, pela Definição A1.2, $a \leq a$.

(ii) Se $a \leq b$ e $b \leq a$, então, pela Definição A1.2, $a \wedge b = a$ e $b \wedge a = b$. De R_1, $a = a \wedge b = b \wedge a = b$. Logo, $a = b$.

(iii) Se $a \leq b$ e $b \leq c$, então da Definição A1.2 $a \wedge b = a$ e $b \wedge c = b$. Assim, por R_2, $a \wedge c = (a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c) = a \wedge b = a$. Logo, novamente pela Definição A1.2, $a \leq c$. ■

<u>Proposição A1.3:</u> Se $\mathbf{R} = (R, \wedge, \vee)$ é um reticulado, então as seguintes propriedades são válidas, para todos $a, b, c, d \in R$:

(i) $a \leq a \vee b$ e $b \leq a \vee b$;

(ii) $a \wedge b \leq a$ e $a \wedge b \leq b$;

(iii) $a \leq c$ e $b \leq c \Rightarrow a \vee b \leq c$;

(iv) $c \leq a$ e $c \leq b \Rightarrow c \leq a \wedge b$;

(v) $a \leq b$ e $c \leq d \Rightarrow a \wedge c \leq b \wedge d$ e $a \vee c \leq b \vee d$;

(vi) $a \leq b \Rightarrow a \wedge c \leq b \wedge c$ e $a \vee c \leq b \vee c$.

Demonstração: (i) De R_1 e R_3, temos: $a \wedge (a \vee b) = (a \vee b) \wedge a = (b \vee a) \wedge a = a$ e $b \wedge (a \vee b) = (a \vee b) \wedge b = b$. Logo, pela Definição A1.2, $a \leq a \vee b$ e $b \leq a \vee b$.

(ii) De R_1 e R_3, temos: $(a \wedge b) \vee a = (b \wedge a) \vee a = a$ e $(a \wedge b) \vee b = b$. Logo, pela Definição A1.2, $a \wedge b \leq a$ e $a \wedge b \leq b$.

(iii) Se $a \leq c$ e $b \leq c$, então de R_1, R_2, da Definição A1.2 e da Proposição A1.1: $(a \vee b) \vee c = (a \vee b) \vee (a \vee c) = (a \vee a) \vee (b \vee c) = a \vee c = c$. Logo, $a \vee b \leq c$.

(iv) Se $c \leq a$ e $c \leq b$, então de R_1, R_2, da Definição A1.2 e da Proposição A1.1: $c \wedge (a \wedge b) = (c \wedge a) \wedge (a \wedge b) = (c \wedge b) \wedge (a \wedge a) = c \wedge a = c$. Logo, $c \leq a \wedge b$.

(v) Se $a \leq b$ e $c \leq d$, então de R_1, R_2 e da Definição A1.2: $(a \wedge c) \wedge (b \wedge d) = (a \wedge b) \wedge (c \wedge d) = a \wedge c$ e $(a \vee c) \vee (b \vee d) = (a \vee b) \vee (c \vee d) = b \vee d$. Portanto, $a \wedge c \leq b \wedge d$ e $a \vee c \leq b \vee d$.

(vi) Se $a \leq b$, então pela Definição A1.2, $a \wedge b = a$ e $a \vee b = b$. Pelas leis R_1, R_2 e pela Proposição A1.1: $(a \wedge c) \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge (c \wedge c) = a \wedge c$ e $(a \vee c) \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee (c \vee c) = b \vee c$. Portanto, $a \wedge c \leq b \wedge c$ e $a \vee c \leq b \vee c$. ■

<u>Definição A1.3:</u> Sejam **R** = (R, $\wedge$, $\vee$) um reticulado e $\emptyset \neq A \subseteq R$. Um elemento $s \in R$ é um *limitante superior* de A quando: $\forall a\ (a \in A \rightarrow a \leq s)$. Um elemento $i \in R$ é um *limitante inferior* de A quando: $\forall a\ (a \in A \rightarrow i \leq a)$.

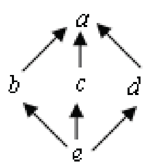
<u>Definição A1.4:</u> Sejam **R** = (R, $\wedge$, $\vee$) um reticulado e $\emptyset \neq A \subseteq R$. Um elemento $m \in A$ é um *máximo* de A quando: $\forall a\ (a \in A \rightarrow a \leq m)$. Um elemento $m' \in A$ é um *mínimo* de A quando: $\forall a\ (a \in A \rightarrow m' \leq a)$.

Denotamos o máximo de A por max(A) e o mínimo de A por min(A). Podemos observar que max(A) é sempre um limitante superior de A, mas nem todo limitante superior de A é um max(A). Da mesma forma, todo min(A) é um limitante inferior de A, mas nem todo limitante inferior de A é um min(A). O Exemplo A1.1 elucida este fato.

<u>Definição A1.5:</u> Sejam (R, $\leq$) uma ordem parcial e $\emptyset \neq A \subseteq R$. O *supremo* de A, caso exista, é o menor dos limitantes superiores de A. O *ínfimo* de A, caso exista, é o maior dos limitantes inferiores de A.

Denotamos o supremo de A por sup(A) e o ínfimo de A por inf(A).

<u>Exemplo A1.1:</u> Seja (E, $\leq$) uma ordem parcial em que E = $\{a, b, c, d, e\}$ e a ordem é dada pelo diagrama abaixo (a flecha que vai de um elemento a outro significa que o primeiro é menor ou igual ao segundo):



A partir do diagrama notamos que: o limitante superior de $\{a, b\}$ é o elemento a, os limitantes inferiores de $\{a, b\}$ são os elementos b e e, max$\{a, b\} = a$, min$\{a, b\} = b$, sup$\{a, b\} = a$ e inf$\{a, b\} = b$. Notamos que e é limitante inferior de $\{a, b\}$, mas não é min$\{a, b\}$. Tomando $\{b, e\}$ ao invés de $\{a, b\}$ teremos que a é limitante superior de $\{b, e\}$, mas não é max$\{b, e\}$.
Temos também que o limitante superior de $\{b, c\}$ é o elemento a, o limitante inferior de $\{b, c\}$ é o elemento e, não há max$\{b, c\}$, nem min$\{b, c\}$, sup$\{b, c\} = a$ e inf$\{b, c\} = e$. Podemos

perceber que a é $\sup\{b, c\}$, mas não é $\max\{b, c\}$, bem como $\inf\{b, c\} = e$, mas não há $\min\{b, c\}$.

<u>Proposição A1.4:</u> Em um reticulado $\mathbf{R} = (R, \wedge, \vee)$, para todos $a, b \in R$:

(i) $\sup\{a, b\} = a \vee b$;

(ii) $\inf\{a, b\} = a \wedge b$.

Demonstração: De R_3 temos que $a \wedge b \leq b \leq a \vee b$, $\forall a, b \in R$. Assim, $a \vee b$ é limitante superior de $\{a, b\}$ e $a \wedge b$ é limitante inferior de $\{a, b\}$. Por outro lado, se $a \leq c$ e $b \leq c$, então, da Proposição A1.3 (iii), temos $a \vee b \leq c$. Logo, $a \vee b = \sup\{a, b\}$. Da mesma forma, se $c \leq a$ e $c \leq b$, então, pela Proposição A1.3 (iv), temos $c \leq a \wedge b$. Logo, $a \wedge b = \inf\{a, b\}$. ■

<u>Proposição A1.5:</u> Seja $(R, \leq)$ uma ordem parcial tal que para quaisquer $a, b \in R$ existem $\sup\{a,b\}$ e $\inf\{a,b\}$. Então $(R, \wedge, \vee)$ é um reticulado para $a \vee b = \sup\{a,b\}$ e $a \wedge b = \inf\{a,b\}$.

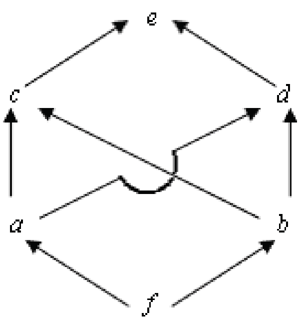
Demonstração: A comutatividade é válida para quaisquer $a, b \in R$, pois: Como $b \wedge a = \inf\{b, a\}$, então $b \wedge a \leq a$ e $b \wedge a \leq b$, isto nos garante que $b \wedge a$ é um limitante inferior de $\{a, b\}$, visto que $a \wedge b$ é $\inf\{a, b\}$, temos $b \wedge a \leq a \wedge b$. Da mesma forma, como $a \wedge b = \inf\{a, b\}$, então $a \wedge b \leq b$ e $a \wedge b \leq a$, o que nos garante que $a \wedge b$ é um limitante inferior de $\{b, a\}$, visto que $b \wedge a = \inf\{b, a\}$, $a \wedge b \leq b \wedge a$. Assim, pela propriedade anti-simétrica, $a \wedge b = b \wedge a$. O procedimento, utilizando supremo, é análogo para $a \vee b = b \vee a$.

A associatividade é válida para quaisquer $a, b, c \in R$, pois: Como $(a \wedge b) \wedge c = \inf\{a \wedge b, c\}$, então $(a \wedge b) \wedge c \leq c$ (I) e $(a \wedge b) \wedge c \leq a \wedge b$, sabemos que $a \wedge b = \inf\{a, b\}$, logo, $a \wedge b \leq a$ (II) e $a \wedge b \leq b$. Pela transitividade, como $(a \wedge b) \wedge c \leq a \wedge b$ e $a \wedge b \leq b$, $(a \wedge b) \wedge c \leq b$ (III). De (I) e (III), $(a \wedge b) \wedge c$ é um limitante inferior de $\{b, c\}$, sabemos que $b \wedge c = \inf\{b, c\}$, logo $(a \wedge b) \wedge c \leq b \wedge c$ (IV). De (II) e (IV), $(a \wedge b) \wedge c$ é um limitante inferior de $\{a, b \wedge c\}$, como $a \wedge (b \wedge c) = \inf\{a, b \wedge c\}$, $(a \wedge b) \wedge c \leq a \wedge (b \wedge c)$. Utilizando o mesmo raciocínio, temos $a \wedge (b \wedge c) \leq (a \wedge b) \wedge c$. Pela propriedade anti-simétrica, $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$. O procedimento, utilizando supremo, é análogo para $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$.

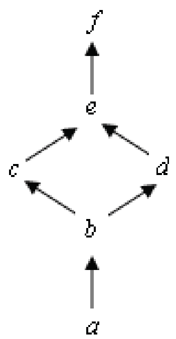
A absorção é válida para quaisquer $a, b \in R$, pois: Como $a \vee b = \sup\{a, b\}$, então $b \leq a \vee b$ (I). Pela reflexividade, $b \leq b$ (II). De (I) e (II), b é limitante inferior de $\{a \vee b, b\}$, como $(a \vee b) \wedge b = \inf\{a \vee b, b\}$, então $b \leq (a \vee b) \wedge b$ (III). Por outro lado, como $(a \vee b) \wedge b = \inf\{a \vee b, b\}$, então $(a \vee b) \wedge b \leq b$ (IV). Assim, de (III), (IV) e propriedade anti-simétrica, $(a \vee b) \wedge b = b$. O procedimento é análogo para $(a \wedge b) \vee b = b$.

Portanto, (R, $\wedge$, $\vee$) é um reticulado para $a \vee b = \sup\{a,b\}$ e $a \wedge b = \inf\{a,b\}$. ■

Exemplo A1.2: O conjunto {*a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*} não é um reticulado com respeito à ordem parcial dada pelo diagrama abaixo, pois tomando os elementos *a*, *b*, temos que os limitantes superiores do conjunto formado por estes dois elementos são os elementos *c*, *d* e *e*, no entanto, não existe o menor entre eles, portanto não existe sup{*a*, *b*}.



Exemplo A1.3: O conjunto {*a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*} é um reticulado com respeito à ordem parcial dada pelo diagrama a seguir, pois, para quaisquer $x, y \in \{a, b, c, d, e, f\}$, existe sup{*x*, *y*} e inf{*x*, *y*}.



Os exemplos que aparecerão daqui para frente, em que afirmarmos que o diagrama é um reticulado, podem ser verificados tomando os elementos do diagrama, dois a dois, e verificando se possuem supremo e ínfimo.

Definição A1.6: Um reticulado **R** = (R, $\wedge$, $\vee$) tem *zero* se existe um min(R), e tem *um* se existe um max(R).

Indicamos o *zero* e o *um* de **R** por 0 = min(R) e 1 = max(R), respectivamente. Veremos na Proposição A1.6, a seguir, que o zero e o um são únicos.

Podemos observar que se $0 \in$ R, então $a \wedge 0 = 0$ e $a \vee 0 = a$, para todo $a \in$ R. E se $1 \in$ R, então $a \wedge 1 = a$ e $a \vee 1 = 1$, para todo $a \in$ R.

<u>Proposição A1.6:</u> Seja **R** = (R, $\wedge$, $\vee$) um reticulado.

(i) Se existe um mínimo em R, então ele é único;

(ii) Se existe um máximo em R, então ele é único.

Demonstração: (i) Suponhamos que 0 e m' são mínimos em R. Assim, para todo $a \in$ R, $a \wedge 0 = 0$ e $a \wedge m' = m'$. Deste modo, $0 = m' \wedge 0 = 0 \wedge m' = m'$. Logo, $0 = m'$, ou seja, se existe algum mínimo em R, então ele é único.

(ii) Suponhamos que 1 e m são máximos em R. Assim, para todo $a \in$ R, $a \vee 1 = 1$ e $a \vee m = m$. Deste modo, $1 = m \vee 1 = 1 \vee m = m$. Logo, $1 = m$, ou seja, se existe algum máximo em R, então ele é único. ■

<u>Proposição A1.7:</u> Todo reticulado finito tem 0 e 1.

Demonstração: Sejam $a_1, ..., a_n$ os elementos do reticulado **R** e seja $b = a_1 \vee ... \vee a_n$. Então b é um 1 do reticulado, pois, $a_i \leq b$ para todo i. Analogamente, $a_1 \wedge ... \wedge a_n$ é um 0 do reticulado. ■

<u>Definição A1.7:</u> Sejam **R** = (R, $\wedge_R$, $\vee_R$) e **R'** = (R', $\wedge_{R'}$, $\vee_{R'}$) reticulados e h: **R** → **R'** uma função. Dizemos que h é um *homomorfismo de reticulados* se para todo $a, b \in$ R temos $h(a \wedge_R b) = h(a) \wedge_{R'} h(b)$ e $h(a \vee_R b) = h(a) \vee_{R'} h(b)$.

<u>Proposição A1.8:</u> Sejam **R** = (R, $\wedge_R$, $\vee_R$) e **R'** = (R', $\wedge_{R'}$, $\vee_{R'}$) reticulados. Se h: **R** → **R'** é um homomorfismo de reticulados, então h é crescente.

Demonstração: Para todos $a, b \in$ R, se $a \leq b$, então $a \wedge_R b = a$ e como h é um homomorfismo de reticulados: $h(a) \wedge_{R'} h(b) = h(a \wedge_R b) = h(a)$. Portanto, $h(a) \leq h(b)$. Logo, h é crescente. ■

<u>Definição A1.8:</u> Um homomorfismo de reticulados h: **R** → **R'** é *injetivo* se para todos $a, b \in$ R, $h(a) = h(b)$ implica em $a = b$.

<u>Definição A1.9:</u> Um homomorfismo de reticulados h: **R** → **R'** é *sobrejetivo* se para todo $b \in$

R' existe $a \in$ R tal que h(a) = b.

Definição A1.10: Um homomorfismo de reticulados h: **R** → **R'** é *bijetivo* se é injetivo e bijetivo.

Definição A1.11: Um *isomorfismo de reticulados* é um homomorfismo de reticulados bijetivo.

Definição A1.12: Um reticulado **R** = (R, $\wedge$, $\vee$) é distributivo se para todos a, b, $c \in$ R:

D_1: $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$

D_2: $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$.

Usualmente, colocamos estas duas condições para que o reticulado seja distributivo; contudo, se considerarmos apenas uma das condições, a outra é facilmente obtida.

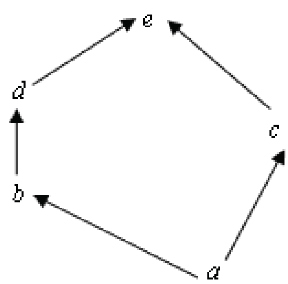
Proposição A1.9: Se **R** = (R, $\wedge$, $\vee$) é um reticulado, então para todos a, b, $c \in$ R:

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \Leftrightarrow a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c).$$

Demonstração: ($\Rightarrow$) De R_1, R_2, R_3 e $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$: $(a \vee b) \wedge (a \vee c) = [(a \vee b) \wedge a] \vee [(a \vee b) \wedge c] = [(b \vee a) \wedge a] \vee [(a \vee b) \wedge c] = a \vee [c \wedge (a \vee b)] = a \vee [(c \wedge a) \vee (c \wedge b)] = [a \vee (c \wedge a)] \vee (c \wedge b) = [(c \wedge a) \vee a] \vee (c \wedge b) = a \vee (c \wedge b) = a \vee (b \wedge c)$.

($\Leftarrow$) De R_1, R_2, R_3 e $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$: $(a \wedge b) \vee (a \wedge c) = [(a \wedge b) \vee a] \wedge [(a \wedge b) \vee c] = [(b \wedge a) \vee a] \wedge [c \vee (b \wedge a)] = a \wedge [(c \vee b) \wedge (c \vee a)] = [a \wedge (c \vee a)] \wedge (c \vee b) = [(c \vee a) \wedge a] \wedge (c \vee b) = a \wedge (c \vee b) = a \wedge (b \vee c)$. ■

Exemplo A1.4: Nem todo reticulado é distributivo. Observe o diagrama abaixo:



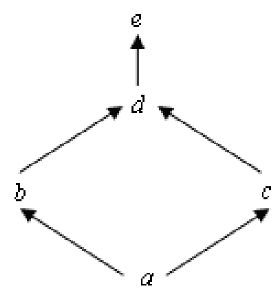
Ele nos mostra um reticulado com zero (elemento a) e um (elemento e), para o qual não vale a distributividade. Por exemplo, $d \wedge (b \vee c) = d \wedge e = d$, enquanto que, $(d \wedge b) \vee (d \wedge c) = b \vee a = b$.

<u>Definição A1.13:</u> Sejam $\mathbf{R} = (R, \wedge, \vee)$ um reticulado com 0 e $a \in R$. Caso exista, $-a = \max\{b \in R : a \wedge b = 0\}$ em R, dizemos que o elemento a é *pseudocomplementado* em **R** e que $-a$ é seu *pseudocomplemento*.

<u>Definição A1.14:</u> Sejam $\mathbf{R} = (R, \wedge, \vee)$ um reticulado com 0 e 1 e $a \in R$. Dizemos que $\sim a \in R$ é um *complemento* de a em **R** se $a \wedge \sim a = 0$ e $a \vee \sim a = 1$.

<u>Definição A1.15:</u> Um reticulado $\mathbf{R} = (R, \wedge, \vee)$ é *pseudocomplementado* quando todo elemento em R tem um pseudocomplemento; e é *complementado* quando todo elemento em R tem um complemento.

<u>Exemplo A1.5:</u> Nem todo reticulado é complementado. Observe o diagrama abaixo:



Este é um reticulado distributivo com $0 = a$ e $1 = e$, mas não é um reticulado complementado, pois, por exemplo, não existe $\sim c$ tal que $c \vee \sim c = e$ e $c \wedge \sim c = a$.

A seguir, definiremos Álgebra de Boole a partir dos conceitos de reticulados vistos nessa seção.

A2. Álgebra de Boole

As definições e resultados a seguir são fundamentados por (Miraglia, 1987), (Mendelson, 1977) e (Feitosa, Nascimento, Grácio, 2009a).

Definição A2.1: Uma *álgebra de Boole* é um reticulado distributivo e complementado.

Observação: Toda álgebra de Boole possui 0 e 1, pois Definição A1.11 e da Definição A1.12 segue que todo reticulado complementado possui 0 e 1 e, da Definição A2.1, acima, temos que toda álgebra de Boole é um reticulado complementado.

Proposição A2.1: Seja $\mathbf{B} = (B, \wedge, \vee, \sim, 0, 1)$ uma álgebra de Boole. Então para todo $a \in B$, existe um único $\sim a \in B$, tal que, $a \vee \sim a = 1$ e $a \wedge \sim a = 0$.

Demonstração: Suponhamos que $\sim a$ e b sejam complementos de a. Então, $a \vee \sim a = a \vee b = 1$ e $a \wedge \sim a = a \wedge b = 0$. Desta forma, utilizando as leis da distributividade, comutatividade e a Definição A1.2, temos:

$b = 1 \wedge b = (a \vee \sim a) \wedge b = (a \wedge b) \vee (\sim a \wedge b) = 0 \vee (\sim a \wedge b) = \sim a \wedge b$. Logo, $b \leq \sim a$. (I)

$b = 0 \vee b = (a \wedge \sim a) \vee b = (a \vee b) \wedge (\sim a \vee b) = 1 \wedge (\sim a \vee b) = \sim a \vee b$. Logo, $\sim a \leq b$. (II)

De (I) e (II), temos que $\sim a = b$.

Assim, concluímos que para todo $a \in B$, existe e é único $\sim a$, tal que, $a \vee \sim a = 1$ e $a \wedge \sim a = 0$. ∎

Daqui para frente o complemento de a será denotado por $\sim a$.

Uma álgebra de Boole será indicada por uma sêxtupla $\mathbf{B} = (B, \wedge, \vee, \sim, 0, 1)$.

Proposição A2.2: Se $\mathbf{B} = (B, \wedge, \vee, \sim, 0, 1)$ é uma álgebra de Boole e $a \in B$, então $\sim\sim a = a$.

Demonstração: Pela Definição A1.11, $a \wedge \sim a = 0$ e $a \vee \sim a = 1$. Pela comutatividade, $\sim a \wedge a = 0$ e $\sim a \vee a = 1$. Logo, a é o complemento de $\sim a$, ou seja , $\sim\sim a = a$. ∎

Proposição A2.3: Seja $\mathbf{B} = (B, \wedge, \vee, \sim, 0, 1)$ uma álgebra de Boole, então:

(i) $1 = \sim 0$;

(ii) $0 = \sim 1$.

Demonstração: (i) Como $0 \wedge 1 = 0$ e $0 \vee 1 = 1$, então 1 é um complemento de 0. Como, pela Proposição A1.9 o complemento é único, temos que $1 = \sim 0$.

(ii) Como $1 \wedge 0 = 0$ e $1 \vee 0 = 1$, então 0 é um complemento de 1. Logo, $0 = \sim 1$, pois o complemento é único. ■

Proposição A2.4: Seja **B** = (B, ∧, ∨, ~, 0, 1) uma álgebra de Boole. Se a, $b \in$ B e a e b possuem complemento $\sim a$ e $\sim b \in$ B, respectivamente, então $a \vee b$ e $a \wedge b$ possuem complemento e:

(i) $\sim (a \vee b) = \sim a \wedge \sim b$; (leis de De Morgan)

(ii) $\sim (a \wedge b) = \sim a \vee \sim b$.

Demonstração: (i) Pelas leis de distributividade, associatividade, comutatividade e pela Definição A1.11, temos: $(a \vee b) \wedge (\sim a \wedge \sim b) = (a \wedge (\sim a \wedge \sim b)) \vee (b \wedge (\sim a \wedge \sim b)) = ((a \wedge \sim a) \wedge \sim b) \vee (b \wedge (\sim b \wedge \sim a)) = (0 \wedge \sim b) \vee ((b \wedge \sim b) \wedge \sim a) = 0 \vee (0 \wedge \sim a) = 0 \vee 0 = 0$ e $(a \vee b) \vee (\sim a \wedge \sim b) = ((a \vee b) \vee \sim a) \wedge ((a \vee b) \vee \sim b) = ((b \vee a) \vee \sim a) \wedge (a \vee (b \vee \sim b)) = (b \vee (a \vee \sim a)) \wedge (a \vee 1) = (b \vee 1) \wedge 1 = 1 \wedge 1 = 1$. Logo, $\sim a \wedge \sim b$ é o complemento de $a \vee b$, isto é, $\sim (a \vee b) = \sim a \wedge \sim b$.

(ii) Pelas leis de distributividade, associatividade, comutatividade e pela Definição A1.11, temos: $(a \wedge b) \wedge (\sim a \vee \sim b) = ((a \wedge b) \wedge \sim a) \vee ((a \wedge b) \wedge \sim b) = ((b \wedge a) \wedge \sim a) \vee (a \wedge (b \wedge \sim b)) = (b \wedge (a \wedge \sim a)) \vee (a \wedge 0) = (b \wedge 0) \vee 0 = 0 \vee 0 = 0$ e $(a \wedge b) \vee (\sim a \vee \sim b) = (a \vee (\sim a \vee \sim b)) \wedge (b \vee (\sim a \vee \sim b)) = ((a \vee \sim a) \vee \sim b) \wedge (b \vee (\sim b \vee \sim a)) = (1 \vee \sim b) \wedge ((b \vee \sim b) \vee \sim a) = 1 \wedge (1 \vee \sim a) = 1 \wedge 1 = 1$. Logo, $\sim a \vee \sim b$ é o complemento de $a \wedge b$, isto é, $\sim (a \wedge b) = \sim a \vee \sim b$. ■

Exemplo A2.1: Seja A um conjunto não-vazio. Um exemplo de álgebra de Boole é **B** = ($\mathcal{P}$(A), ∩, ∪, ^{C}, ∅, A), em que o seu domínio é o conjunto das partes de A, denotado por $\mathcal{P}$(A); ∧ é a operação de intersecção da teoria dos conjuntos ∩; ∨ é a operação de união da teoria dos conjuntos ∪; ~ é a operação de complementação na teoria dos conjuntos ^{C}; o zero é o conjunto vazio ∅ e o um é o conjunto A.

Exemplo A2.2: Um caso particular do exemplo anterior é a álgebra de Boole de dois elementos: **B** = ({∅,{∅}}, ∩, ∪, ^{C}, ∅, {∅}), em que A = {∅}.

Exemplo A2.3: Seja B = {1, 2, 5, 10, 25, 50} o conjunto de todos os inteiros positivos que são divisores inteiros de 50. Para todo a, $b \in$ B: $\sim a = 50/a$; $a \wedge b$ é máximo divisor comum de a e b

e $a \vee b$ é o mínimo múltiplo comum de a e b. Desta forma, (B, $\wedge$, $\vee$, ~, 1, 50) é uma álgebra de Boole.

Os exemplos acima podem ser verificados pela teoria dos conjuntos e pelas propriedades elementares do máximo divisor comum e do mínimo múltiplo comum.

Exemplo A2.4: Outro exemplo de álgebra de Boole é (B, $\wedge$, $\vee$, ~, 0, 1), em que B é o conjunto das classes de equivalência de sentenças proposicionais (p é equivalente a q se, e somente se, $p \leftrightarrow q$ é uma tautologia); $\wedge$, $\vee$ e ~ são, respectivamente, os conectivos e, ou e não da lógica proposicional clássica; 0 é a classe de equivalência das sentenças logicamente equivalentes a $p \wedge \sim p$ (contradições) e 1 é a classe de equivalência das sentenças logicamente equivalentes a $p \vee \sim p$ (tautologias).

Definição A2.2: Seja **R** = (R, $\wedge$, $\vee$) um reticulado pseudocomplementado. Um elemento $a \in$ R é dito:

(i) *regular*, se $\sim\sim a = a$;

(ii) *denso*, se $\sim\sim a = 1$.

Indicamos por Reg(R) o conjunto dos elementos regulares de R. Veja que 0, 1 $\in$ Reg(R) e que para qualquer $a \in$ R, temos $\sim a$, $\sim\sim a \in$ Reg(R). Definimos duas operações $\wedge$ e $\vee$* em Reg(R): Para a, $b \in$ Reg(R), $a \wedge b$ é a mesma operação que em R e $a \vee^* b = \sim\sim(a \vee b)$.

Exemplo A2.5: A estrutura (Reg(R), $\wedge$, $\vee$*, ~, 0, 1) é uma álgebra de Boole, em que, para qualquer $a \in$ Reg(R), seu complemento é $\sim a \in$ Reg(R). Esta álgebra de Boole é chamada álgebra de Boole dos elementos regulares de R.

Definição A2.3: Sejam **B** = (B, $\wedge_B$, $\vee_B$, $\sim_B$, 0_B, 1_B) e **B'** = (B', $\wedge_{B'}$, $\vee_{B'}$, $\sim_{B'}$, $0_{B'}$, $1_{B'}$) álgebras de Boole e h: **B** $\rightarrow$ **B'** uma função. Dizemos que h é um *homomorfismo de álgebras de Boole* se para todo a, $b \in$ B temos $h(a \wedge_B b) = h(a) \wedge_{B'} h(b)$, $h(a \vee_B b) = h(a) \vee_{B'} h(b)$ e $h(\sim_B a) = \sim_{B'} h(a)$.

Definição A2.4: Um *isomorfismo de álgebras de Boole* é um homomorfismo bijetivo de álgebras de Boole.

<u>Proposição A2.5:</u> Seja h um isomorfismo de uma álgebra de Boole **B** = (B, $\wedge_B$, $\vee_B$, $\sim_B$, 0_B, 1_B) em uma álgebra de Boole **B'** = (B', $\wedge_{B'}$, $\vee_{B'}$, $\sim_{B'}$, $0_{B'}$, $1_{B'}$). Então $h(0_B) = 0_{B'}$ e $h(1_B) = 1_{B'}$.

Demonstração: Por Definição A1.11, Definição A2.2 e Definição A2.3:

$h(0_B) = h(a \wedge_B \sim_B a) = h(a) \wedge_{B'} h(\sim_B a) = h(a) \wedge_{B'} \sim_{B'} h(a) = 0_{B'}$ e

$h(1_B) = h(a \vee_B \sim_B a) = h(a) \vee_{B'} h(\sim_B a) = h(a) \vee_{B'} \sim_{B'} h(a) = 1_{B'}$. ■

<u>Proposição A2.6:</u> Sejam h um isomorfismo de uma álgebra de Boole **B** = (B, $\wedge_B$, $\vee_B$, $\sim_B$, 0_B, 1_B) em uma álgebra de Boole **B'** = (B', $\wedge_{B'}$, $\vee_{B'}$, $\sim_{B'}$, $0_{B'}$, $1_{B'}$) e g um isomorfismo de **B'** em uma álgebra de Boole **C** = (C, $\wedge_C$, $\vee_C$, $\sim_C$, 0_C, 1_C). Então, a função composta g∘h é um isomorfismo de **B** em **C**, em que, para todo $a \in$ B, $(g \circ h)(a) = g(h(a))$.

Demonstração: (i) Primeiramente demonstraremos que a função composta g∘h é um homomorfismo tendo como hipótese que h e g são homomorfismos. Para todos $a, b \in$ B:

$g(h(a \wedge_B b)) = g(h(a) \wedge_{B'} h(b)) = g(h(a)) \wedge_C g(h(b))$;

$g(h(a \vee_B b)) = g(h(a) \vee_{B'} h(b)) = g(h(a)) \vee_C g(h(b))$;

$g(h(\sim_B a)) = g(\sim_{B'} h(a)) = \sim_C g(h(a))$.

(ii) Agora, considerando que h e g são isomorfismos, demonstraremos que a função composta é injetiva. Para quaisquer $a, b \in$ B:

$g(h(a)) = g(h(b)) \Rightarrow h(a) = h(b) \Rightarrow a = b$.

(iii) Demonstraremos que a função composta é sobrejetiva. Assim, seja $c \in$ C, queremos demonstrar que existe $a \in$ B tal que $c = g(h(a))$:

Como g é sobrejetiva, então existe $b \in$ B' tal que $c = g(b)$. Desde que a função h também é sobrejetiva, então existe $a \in$ B tal que $b = h(a)$. Logo, existe $a \in$ B tal que $c = g(h(a))$, ou seja, a função composta é sobrejetiva.

Assim, de (i), (ii) e (iii) concluímos que a função composta g∘h é um isomorfismo de **B** em **C**. ■

<u>Proposição A2.7:</u> Seja h um isomorfismo de uma álgebra de Boole **B** = (B, $\wedge_B$, $\vee_B$, $\sim_B$, 0_B, 1_B) em uma álgebra de Boole **B'** = (B', $\wedge_{B'}$, $\vee_{B'}$, $\sim_{B'}$, $0_{B'}$, $1_{B'}$). A função inversa h^{-1} é um isomorfismo de **B'** em **B**.

Demonstração: (i) Primeiramente demonstraremos que a h^{-1} é um homomorfismo tendo como hipótese que h é um homomorfismo. Para todos $b, d \in$ B':

$h^{-1}(b \wedge_{B'} d) = h^{-1}(h(a) \wedge_{B'} h(c)) = h^{-1}(h(a \wedge_B c)) = a \wedge_B c = h^{-1}(b) \wedge_B h^{-1}(b)$;

$h^{-1}(b \vee_{B'} d) = h^{-1}(h(a) \vee_{B'} h(c)) = h^{-1}(h(a \vee_B c)) = a \vee_B c = h^{-1}(b) \vee_B h^{-1}(b)$;

$h^{-1}(\sim_{B'} b) = h^{-1}(\sim_{B'} h(a)) = h^{-1}(h(\sim_B a)) = \sim_B a = \sim_B h^{-1}(b)$.

(ii) Para qualquer elemento $a \in$ B, como h é uma função bijetiva, existe $b \in$ B' tal que $h^{-1}(b) = a$. Logo, h^{-1} é sobrejetiva.

(iii) Ao tomarmos elementos quaisquer $h^{-1}(b)$ e $h^{-1}(d)$ de B, se $h^{-1}(b) = h^{-1}(d)$, como h é uma função bijetiva, então $b = d$. Logo, h^{-1} é injetiva.

Assim, de (i), (ii) e (iii) concluímos que a função inversa h^{-1} é um isomorfismo de **B'** em **B**. ■

Os resultados sobre filtros e ultrafiltros que se seguem estão de acordo com (Miraglia, 1987), (Rasiowa, 1974), (Rasiowa, Sikorski, 1968) e (Feitosa, Nascimento, Grácio, 2009a).

A3. Filtros

Definição A3.1: Seja **R** = (R, $\wedge$, $\vee$) um reticulado. Um subconjunto não-vazio **F** $\subseteq$ R é um *filtro* se:

(i) $\forall a, b \in$ R, $a, b \in$ **F** $\Rightarrow a \wedge b \in$ **F**;

(ii) $\forall a, b \in$ R, $a \in$ **F** e $a \leq b \Rightarrow b \in$ **F**.

A definição acima poderia ser dada através de outras sentenças equivalentes. As duas proposições que seguem nos confirmarão este fato.

Proposição A3.1: Sejam **R** = (R, $\wedge$, $\vee$) um reticulado e **F** um subconjunto não-vazio de R. A condição (ii) da Definição A3.1, acima, é equivalente a condição: para todos $a, b \in$ R, $a \in$ **F** $\Rightarrow a \vee b \in$ **F**.

Demonstração: ($\Rightarrow$) Para todos $a, b \in$ R, se $a \in$ **F**, como $a \leq a \vee b$, então pela condição (ii) da definição de filtro $a \vee b \in$ **F**. ($\Leftarrow$) Para todos $a, b \in$ R. Se $a \leq b$, então pela Definição A1.2 e pela Proposição A1.1 $a \wedge b = a \Leftrightarrow a \vee b = b$ (I). Se $a \in$ **F**, então pela condição acima $a \vee b \in$ **F** (II). De (I) e (II), se $a \in$ **F** e $a \leq b$, então $b \in$ **F**. ■

<u>Proposição A3.2:</u> Seja **R** = (R, $\wedge$, $\vee$) um reticulado. A condição (ii) da Definição A3.1 é equivalente a condição: para todos a, $b \in$ R, $a \wedge b \in$ **F** $\Rightarrow a \in$ **F** e $b \in$ **F**.

Demonstração: ($\Rightarrow$) Se $a \wedge b \in$ **F**, como $a \wedge b \leq a$ e $a \wedge b \leq b$, então pela condição (ii) da definição de filtro $a \in$ **F** e $b \in$ **F**. ($\Leftarrow$) Se $a \leq b$, então $a \wedge b = a$. Como $a \in$ **F**, então $a \wedge b \in$ **F**. Logo, $b \in$ **F**. ■

<u>Proposição A3.3:</u> Sejam **R** = (R, $\wedge$, $\vee$) um reticulado e $a \in$ **R**.

(i) O conjunto $a^{\rightarrow} = \{b \in \mathbf{R}: b \geq a\}$ é um filtro (o filtro principal gerado por a);

(ii) Se **F** $\subseteq$ R é um filtro, então $a \in$ **F** $\Leftrightarrow a^{\rightarrow} \subseteq$ **F**.

Demonstração: (i) Para todos b, $c \in$ R. Se b, $c \in a^{\rightarrow}$, pela lei de formação de $a^{\rightarrow}$, $b \geq a$ e $c \geq a$, então $b \wedge c \geq a \wedge c \geq a \wedge a = a$, logo $b \wedge c \in a^{\rightarrow}$. E se $b \in a^{\rightarrow}$ e $c \geq b$, pela lei de formação de $a^{\rightarrow}$, $b \geq a$, desta forma $c \geq a$, logo $c \in a^{\rightarrow}$. Assim, pela definição de filtro, $a^{\rightarrow} = \{b \in \mathbf{R}: b \geq a\}$ é um filtro.

(ii) ($\Rightarrow$) Se $a \in$ **F** e $a \leq b$, pela definição de filtro, $b \in$ **F**. Logo, **F** tem como elementos todos os elementos de $a^{\rightarrow}$, ou seja, $a^{\rightarrow} \subseteq$ **F**. ($\Leftarrow$) Se $a^{\rightarrow} \subseteq$ **F**, como $a \in a^{\rightarrow}$, então $a \in$ **F**. ■

<u>Proposição A3.4:</u> Sejam **R** = (R, $\wedge$, $\vee$) um reticulado com 1 e **F** $\subseteq$ R um filtro.

(i) O conjunto $\{1\} \subseteq$ R é um filtro de R;

(ii) O conjunto $\{1\} \subseteq$ R está contido em todo filtro de R.

Demonstração: (i) Pelas leis da idempotência, $1 \wedge 1 = 1 \in \{1\}$ (I). E para todo $a \in$ R, se $1 \leq a$, pela Definição A1.2, $1 \leq a \Leftrightarrow 1 = 1 \wedge a = a$, logo $a \in \{1\}$ (II). Assim, de (I) e (II), para todos a, $b \in$ R, a, $b \in \{1\} \Rightarrow a \wedge b \in \{1\}$ e $a \in \{1\}$ e $a \leq b \Rightarrow b \in \{1\}$. Desta forma, $\{1\}$ é um filtro de R.

(ii) Seja **F** um filtro qualquer de R, como $1 \in$ R e para todo $a \in$ **F**, segue que $a \leq 1$ e, então, pela condição (ii) da definição de filtro, $1 \in$ **F**. Logo, $\{1\} \subseteq$ **F**, para todo **F** de R. ■

<u>Proposição A3.5:</u> Sejam **R** = (R, $\wedge$, $\vee$) um reticulado e S $\subseteq$ R. A intersecção de todos os filtros de R que contêm S, [S] = $\cap$ {**F** $\subseteq$ R : **F** é um filtro e S $\subseteq$ **F**}é um filtro.

Demonstração: Sejam $\mathbf{F}_\lambda$ o conjunto de todos os filtros de R que contêm S. Para todos a, $b \in$ R, se a, $b \in \cap\, \mathbf{F}_\lambda$ = [S], então a, $b \in \mathbf{F}_\mathbf{i}$, para todo i $\in \lambda$. Logo, como cada $\mathbf{F}_\mathbf{i}$ é um filtro, então $a \wedge b \in \mathbf{F}_\mathbf{i}$, para todo i $\in \lambda$. Portanto, $a \wedge b \in \cap\, \mathbf{F}_\lambda$ = [S] (I). Para todos a, $b \in$ R, se $a \in \cap\, \mathbf{F}_\lambda$ = [S] e $a \leq b$, então $a \in \mathbf{F}_\mathbf{i}$, para todo i $\in \lambda$. Logo, como cada $\mathbf{F}_\mathbf{i}$ é um filtro, então $b \in \mathbf{F}_\mathbf{i}$, para todo i $\in \lambda$, e, portanto, $b \in \cap \mathbf{F}_\lambda = [S]$ (II). Assim, de (I) e (II), $[S] = \cap \{\mathbf{F} \subseteq R : \mathbf{F}$ é um filtro e $S \subseteq \mathbf{F}\}$é um filtro. ∎

O filtro [S] é denominado *filtro gerado por S*.

Proposição A3.6: Sejam $\mathbf{R} = (R, \wedge, \vee)$ um reticulado, $\mathbf{F}$ um filtro, $a_0 \in R$ um elemento fixado e $\mathbf{F^*}$ o conjunto de todos os elementos a em R tal que $a_0 \wedge c \leq a$, para algum elemento $c \in \mathbf{F}$. O conjunto $\mathbf{F^*}$ é o menor filtro que contém a_0 e $\mathbf{F}$.

Demonstração: Primeiramente demonstraremos que $\mathbf{F^*}$ é um filtro. Se $a, b \in \mathbf{F^*}$, então $a_0 \wedge c_1 \leq a$ e $a_0 \wedge c_2 \leq b$, para alguns c_1, c_2 pertencentes a $\mathbf{F}$. Pela Proposição A1.3 (v), associatividade, comutatividade e idempotência: $(a_0 \wedge c_1) \wedge (a_0 \wedge c_2) \leq a \wedge b \Leftrightarrow a_0 \wedge (c_1 \wedge c_2) \leq a \wedge b$. Como c_1 e c_2 pertencem a $\mathbf{F}$ e $\mathbf{F}$ é um filtro, então $c_1 \wedge c_2$ pertence a $\mathbf{F}$. Logo, $a \wedge b \in \mathbf{F^*}$(I). Se $a \in \mathbf{F^*}$ e $a \leq b$, então $a_0 \wedge c \leq a$, para algum c pertencente a $\mathbf{F}$. Pela transitividade, $a_0 \wedge c \leq b$. Portanto, $b \in \mathbf{F^*}$ (II). De (I) e (II) temos que $\mathbf{F^*}$ é um filtro. Por outro lado, pela condição (i) da definição de filtro, o conjunto $\mathbf{F^*}$ está contido em todo filtro que contém a_0 e $\mathbf{F}$. Assim, este conjunto é o menor filtro que contém a_0 e $\mathbf{F}$. ∎

O filtro $\mathbf{F^*}$ da Proposição A3.6 é denominado *filtro gerado por um elemento fixado a_0 e um filtro $\mathbf{F}$*.

Definição A3.2: Sejam $\mathbf{R} = (R, \wedge, \vee)$ um reticulado e $\mathbf{F} \subseteq R$ um filtro. O filtro $\mathbf{F}$ é *próprio* se $\mathbf{F} \neq R$.

Definição A3.3: Sejam $\mathbf{R} = (R, \wedge, \vee)$ um reticulado e $\mathbf{F} \subseteq R$ um filtro. O filtro $\mathbf{F}$ é *primo* se ele é próprio e para todos $a, b \in R$, $a \vee b \in \mathbf{F} \Rightarrow a \in \mathbf{F}$ ou $b \in \mathbf{F}$.

Definição A3.4: Sejam $\mathbf{R} = (R, \wedge, \vee)$ um reticulado e $\mathbf{F} \subseteq R$ um filtro. O filtro $\mathbf{F}$ é *maximal* se ele é próprio e para todo filtro $\mathbf{G}$ de $\mathbf{R}$, se $\mathbf{F} \subseteq \mathbf{G}$, então $\mathbf{G} = \mathbf{F}$ ou $\mathbf{G} = R$.

Definição A3.5: Sejam $\mathbf{R} = (R, \wedge, \vee)$ um reticulado e $\mathbf{F} \subseteq R$ um filtro. O filtro $\mathbf{F}$ é *irredutível* se ele é próprio e para todos dois filtros $\mathbf{F_1}, \mathbf{F_2}$: $\mathbf{F} = \mathbf{F_1} \cap \mathbf{F_2} \Rightarrow \mathbf{F} = \mathbf{F_1}$ ou $\mathbf{F} = \mathbf{F_2}$.

Proposição A3.7: Sejam $\mathbf{B} = (B, \wedge, \vee, \sim, 0, 1)$ uma álgebra de Boole e $\mathbf{F} \subseteq B$ um filtro, então:

(i) $1 \in \mathbf{F}$;

(ii) $\mathbf{F}$ é um filtro próprio se, e somente se, $0 \notin \mathbf{F}$.

Demonstração: (i) Como $\mathbf{F}$ um filtro, então $\mathbf{F}$ não é vazio. Portanto, existe $b \in \mathbf{F}$. Como $b \leq 1$, então $1 \in \mathbf{F}$.

(ii) ($\Rightarrow$) Se $0 \in \mathbf{F}$, pela condição (ii) da definição de filtro, como para todo $a \in B$, tem-se $0 \leq a$, então $a \in \mathbf{F}$. Assim, $B = \mathbf{F}$ e, portanto, $\mathbf{F}$ não é um filtro próprio. ($\Leftarrow$) Como $0 \in B$ e $0 \notin \mathbf{F}$, então $\mathbf{F} \neq B$. Daí, $\mathbf{F}$ é um filtro próprio. ■

Proposição A3.8: Sejam $\mathbf{B} = (B, \wedge, \vee, \sim, 0, 1)$ uma álgebra de Boole, $\mathbf{F} \subseteq B$ um filtro e b um elemento de B. Então, o filtro $\mathbf{F^*}$ gerado por $\mathbf{F}$ e b é próprio se, e somente se, $\sim b \notin \mathbf{F}$.

Demonstração: ($\Rightarrow$) Se $\sim b \in \mathbf{F}$, então $b \wedge \sim b = 0 \in \mathbf{F^*}$. Logo, pela Proposição A3.7, $\mathbf{F^*}$ não é próprio. ($\Leftarrow$) Se $\mathbf{F^*}$ não é próprio, então, pela Proposição A3.7, $0 \in \mathbf{F^*}$. Assim, temos que existe um elemento $c \in \mathbf{F}$ tal que $b \wedge c \leq 0 \Leftrightarrow (b \wedge c) \wedge 0 = b \wedge c \Leftrightarrow 0 = b \wedge c \Leftrightarrow \sim b \vee 0 = \sim b \vee b \wedge c \Leftrightarrow c = \sim b$. Assim, $\sim b \in \mathbf{F}$. ■

Definição A3.6: Sejam $\mathbf{B} = (B, \wedge, \vee, \sim, 0, 1)$ uma álgebra de Boole e $\mathbf{F} \subseteq B$ um filtro. A relação binária $\sim_{\mathbf{F}}$ em B é definida por: $a \equiv_{\mathbf{F}} b \Leftrightarrow \exists\, c \in \mathbf{F}$ tal que $a \wedge c = b \wedge c$.

Proposição A3.9: Sejam $\mathbf{B} = (B, \wedge, \vee, \sim, 0, 1)$ uma álgebra de Boole e $\mathbf{F} \subseteq B$ um filtro. A relação $\sim_{\mathbf{F}}$ é uma relação de equivalência tal que se $a \equiv_{\mathbf{F}} a'$ e $b \equiv_{\mathbf{F}} b'$, então $a \wedge b \equiv_{\mathbf{F}} a' \wedge b'$ e $a \vee b \equiv_{\mathbf{F}} a' \vee b'$. Ademais, $a \in \mathbf{F} \Leftrightarrow a \equiv_{\mathbf{F}} 1$.

Demonstração: Primeiramente vamos demonstrar que a relação $\sim_{\mathbf{F}}$ é uma relação de equivalência: A relação é reflexiva: $a \equiv_{\mathbf{F}} a$, pois para todo $b \in \mathbf{F}$, segue que $a \wedge b = a \wedge b$. A relação é simétrica: pois se $a \equiv_{\mathbf{F}} b$, então $\exists\, c \in \mathbf{F}$ tal que $a \wedge c = b \wedge c$, ou $b \wedge c = a \wedge c$. Logo $b \equiv_{\mathbf{F}} a$. A relação é transitiva: se $a \equiv_{\mathbf{F}} b$ e $b \equiv_{\mathbf{F}} c$, então $\exists\, d, e \in \mathbf{F}$ tais que $a \wedge d = b \wedge d$ e $b \wedge e = c \wedge e$, logo $a \wedge d \wedge e = b \wedge d \wedge e = b \wedge e \wedge d = c \wedge e \wedge d = c \wedge d \wedge e$. Como $\mathbf{F}$ é um filtro, então $d \wedge e \in \mathbf{F}$. Assim, $a \equiv_{\mathbf{F}} c$. Portanto, a relação $\sim_{\mathbf{F}}$ é uma relação de equivalência.

Agora, demonstraremos que se $a \equiv_{\mathbf{F}} a'$ e $b \equiv_{\mathbf{F}} b'$, então $a \wedge b \equiv_{\mathbf{F}} a' \wedge b'$ e $a \vee b \equiv_{\mathbf{F}} a' \vee b'$: se $a \equiv_{\mathbf{F}} a'$, $b \equiv_{\mathbf{F}} b'$, então $\exists\, c, d \in \mathbf{F}$ tais que $a \wedge c = a' \wedge c$ e $b \wedge d = b' \wedge d$ logo, $a \wedge b \wedge c \wedge d = a' \wedge b' \wedge c \wedge d$ e $(a \vee b) \wedge c \wedge d = (a \wedge c \wedge d) \vee (b \wedge c \wedge d) = (a' \wedge c \wedge d) \vee (b' \wedge c \wedge d) = (a' \vee b') \wedge c \wedge d$, como $\mathbf{F}$ é um filtro temos que $c \wedge d \in \mathbf{F}$, logo, $a \wedge b \equiv_{\mathbf{F}} a' \wedge b'$ e $a \vee b \equiv_{\mathbf{F}} a' \vee b'$.

Finalmente, demonstraremos que $a \in \mathbf{F} \Leftrightarrow a \equiv_{\mathbf{F}} 1$: ($\Rightarrow$) Se $a \in \mathbf{F}$, então, pela Proposição A3.7 (i), $\exists\, 1 \in \mathbf{F}$ tal que $a \wedge a = a = 1 \wedge a$, logo $a \equiv_{\mathbf{F}} 1$. ($\Leftarrow$) Se $a \equiv_{\mathbf{F}} 1$, então $\exists\, b \in \mathbf{F}$ tal que $a \wedge b = 1 \wedge b = b$, pela Definição A1.2, $b \leq a$. Logo, pela definição de filtro $a \in \mathbf{F}$. ∎

<u>Proposição A3.10:</u> Se $\mathbf{B} = (\mathrm{B}, \wedge, \vee, \sim, 0, 1)$ é uma álgebra de Boole e $\mathbf{F} \subseteq \mathrm{B}$ é um filtro em B. Então:

(i) Para todos $a, a' \in \mathrm{B}$, $a \equiv_{\mathbf{F}} a' \Rightarrow \sim[(\sim a' \wedge a) \vee (\sim a \wedge a')] \in \mathbf{F}$;

(ii) $\equiv_{\mathbf{F}}$ é uma congruência com respeito à operação ~, ou seja, $a \equiv_{\mathbf{F}} a' \Rightarrow \sim a \equiv_{\mathbf{F}} \sim a'$.

Demonstração: (i) Como $a \equiv_{\mathbf{F}} a'$, então, pela Definição A3.6, $\exists\, b \in \mathbf{F}$ tal que $a \wedge \mathrm{b} = a' \wedge b$. Desta forma, temos que $\sim a \wedge (a \wedge b) = \sim a \wedge (a' \wedge b) \Rightarrow (\sim a \wedge a) \wedge b = (\sim a \wedge a') \wedge b \Rightarrow 0 \wedge b = (\sim a \wedge a') \wedge b \Rightarrow (\sim a \wedge a') \wedge b = 0 \Rightarrow [(\sim a \wedge a') \wedge b] \vee \sim b = 0 \vee \sim b \Rightarrow [(\sim a \wedge a') \vee \sim b] \wedge (b \vee \sim b) = \sim b \Rightarrow [(\sim a \wedge a') \vee \sim b] \wedge 1 = \sim b \Rightarrow (\sim a \wedge a') \vee \sim b = \sim b \Rightarrow \sim[(\sim a \wedge a') \vee \sim b] = \sim\sim b \Rightarrow \sim(\sim a \wedge a') \wedge \sim\sim b = b \Rightarrow \sim(\sim a \wedge a') \wedge b = b \Rightarrow b \leq \sim(\sim a \wedge a')$. Logo, como $b \in \mathbf{F}$ e $\mathbf{F}$ é um filtro, então $\sim(\sim a \wedge a') \in \mathbf{F}$. Analogamente, podemos mostrar que $b \leq \sim(\sim a' \wedge a)$ e, consequentemente, $\sim(\sim a' \wedge a) \in \mathbf{F}$. Assim, $\sim(\sim a' \wedge a) \wedge \sim(\sim a \wedge a') = \sim[(\sim a' \wedge a) \vee (\sim a \wedge a')] \in \mathbf{F}$, pois $\mathbf{F}$ é um filtro.

(ii) Se $a \equiv_{\mathbf{F}} a'$, então, por (i), $b = \sim(\sim a' \wedge a) \wedge \sim(\sim a \wedge a') \in \mathbf{F}$. Assim, $\sim a \wedge b = \sim a \wedge [\sim(\sim a' \wedge a) \wedge \sim(\sim a \wedge a')] = [\sim a \wedge \sim(\sim a' \wedge a)] \wedge \sim(\sim a \wedge a') = [\sim a \wedge (\sim\sim a' \vee \sim a)] \wedge (\sim\sim a \vee \sim a') = [\sim a \wedge (a' \vee \sim a)] \wedge (a \vee \sim a') = \sim a \wedge (a \vee \sim a') = (\sim a \wedge a) \vee (\sim a \wedge \sim a') = 0 \vee (\sim a \wedge \sim a') = \sim a \wedge \sim a' = \sim a' \wedge \sim a = (\sim a' \wedge \sim a) \vee 0 = (\sim a' \wedge \sim a) \vee (\sim a' \wedge a') = \sim a' \wedge (\sim a \vee a') = [\sim a' \wedge (\sim a' \vee a)] \wedge \sim(a \wedge \sim a') = \sim a' \wedge [(\sim a' \vee a) \wedge \sim(\sim a' \wedge a)] = \sim a' \wedge [\sim(a' \wedge \sim a) \wedge \sim(\sim a' \wedge a)] = \sim a' \wedge [\sim(\sim a' \wedge a) \wedge \sim(\sim a \wedge a')] = \sim a' \wedge b$. Logo, $\sim a \equiv_{\mathbf{F}} \sim a'$. ∎

<u>Definição A3.7:</u> Sejam $\mathbf{B} = (\mathrm{B}, \wedge, \vee, \sim, 0, 1)$ uma álgebra de Boole e $\mathbf{F} \subseteq \mathrm{B}$ um filtro. A classe de equivalência do elemento $a \in \mathbf{F}$ por $\equiv_{\mathbf{F}}$ é $a/_{\mathbf{F}} = \{b \in \mathrm{B}: b \equiv_{\mathbf{F}} a\}$. O conjunto das classes de equivalência da relação $\equiv_{\mathbf{F}}$ é $\mathrm{B}/_{\mathbf{F}} = \{a/_{\mathbf{F}}: a \in \mathrm{B}\}$. Em $\mathrm{B}/_{\mathbf{F}}$ definimos $\sim(a/_{\mathbf{F}}) = (\sim a)/_{\mathbf{F}}$, $a/_{\mathbf{F}} \wedge b/_{\mathbf{F}} = a \wedge b/_{\mathbf{F}}$ e $a/_{\mathbf{F}} \vee b/_{\mathbf{F}} = a \vee b/_{\mathbf{F}}$, $0 = 0/_{\mathbf{F}}$, $1 = 1/_{\mathbf{F}}$, para todos $a, b \in \mathrm{B}$.

A4. Ultrafiltros

Definição A4.1: Um *ultrafiltro* em uma álgebra de Boole **B** = (B, $\wedge$, $\vee$, ~, 0, 1) é um filtro **U** tal que, para todo $a \in$ B, exatamente um dentre os elementos a e $\sim a$ pertence a **U**.

Proposição A4.1: Seja **B** = (B, $\wedge$, $\vee$, ~, 0, 1) uma álgebra de Boole. As seguintes condições são equivalentes para todo filtro **F** $\subseteq$ B:

(i) **F** é um ultrafiltro;

(ii) **F** é um filtro maximal;

(iii) **F** é um filtro primo;

(iv) **F** é um filtro irredutível.

Demonstração: Esta demonstração será dividida em 3 partes: Em (I) demonstraremos que (i) $\Leftrightarrow$ (ii); em (II) demonstraremos que (iii) $\Leftrightarrow$ (iv) e em (III) demonstraremos que (ii) $\Leftrightarrow$ (iii).

(I) ($\Rightarrow$) Seja **F** um ultrafiltro. Assim, se $a \in$ **F**, então $\sim a \notin$ **F**. Desta forma, **F** $\neq$ B, isto é, **F** é um filtro próprio. Se **F'** é um filtro que contém **F** e se b está em **F'** mas não está em **F**, então temos que $\sim b \in$ **F**, portanto $\sim b \in$ **F'**. Como $0 = b \wedge \sim b \in$ **F'**, então, pela Proposição A3.7 (ii), **F'** = B, portanto, **F** não é um subconjunto de algum filtro próprio em B, ou seja, **F** é um filtro maximal.

($\Leftarrow$) Se **F** é um filtro maximal, então ele é próprio e consequentemente, levando em conta a Proposição A3.7 (ii) e que $a \wedge \sim a = 0$, para todo elemento $a \in$ B no máximo um dos elementos a, $\sim a$ podem pertencer a **F**. Suponhamos que $\sim a \notin$ **F**, então, pela Proposição A3.8, o filtro **F*** gerado por **F** e a é próprio e contém o filtro **F**. Daí, pela Definição A3.4, **F*** = **F**, logo $a \in$ **F**. Assim, **F** é um ultrafiltro.

(II) ($\Rightarrow$) Se **F** $\subseteq$ B não é irredutível, então **F** não é próprio ou existem dois filtros $\mathbf{F_1} \neq$ **F** e $\mathbf{F_2} \neq$ **F** tais que **F** = $\mathbf{F_1} \cap \mathbf{F_2}$. Caso **F** não seja um filtro próprio, então, claramente, **F** não é um filtro primo. Se **F** é um filtro próprio e existem dois filtros $\mathbf{F_1} \neq$ **F** e $\mathbf{F_2} \neq$ **F** tais que **F** = $\mathbf{F_1} \cap \mathbf{F_2}$, então, nem $\mathbf{F_1} \subseteq \mathbf{F_2}$, nem $\mathbf{F_2} \subseteq \mathbf{F_1}$. Consequentemente, existem dois elementos $a, b \in$ B tais que $a \in \mathbf{F_1}$, $a \notin \mathbf{F_2}$ e $b \notin \mathbf{F_1}$, $b \in \mathbf{F_2}$. Obviamente, **F** $\subseteq \mathbf{F_1}$ e **F** $\subseteq \mathbf{F_2}$. Como $a \notin \mathbf{F_2}$, **F** $\subseteq \mathbf{F_2}$ e $b \notin \mathbf{F_1}$, **F** $\subseteq \mathbf{F_1}$, então $a \notin$ **F** e $b \notin$ **F** (*). Como $b \in \mathbf{F_2}$ e $a \in \mathbf{F_1}$, então, pela condição (i) da Proposição A1.3 e por $\mathbf{F_1}$ e $\mathbf{F_2}$ serem filtros, então $a \vee b \in \mathbf{F_2}$ e $a \vee b \in \mathbf{F_1}$. Sabemos que **F** = $\mathbf{F_1} \cap \mathbf{F_2}$, logo $a \vee b \in$ **F** (**). Assim, de (*) e (**), **F** não é um filtro primo.

($\Leftarrow$) Se $\mathbf{F} \subseteq$ B é um filtro próprio e não é primo, então existem dois elementos a, $b \notin \mathbf{F}$ tais que $a \neq b$ e $a \vee b \in \mathbf{F}$. Seja $\mathbf{F_1}$ o filtro gerado por $\mathbf{F}$ e a, e $\mathbf{F_2}$ o filtro gerado por $\mathbf{F}$ e b. Vamos demonstrar que $\mathbf{F} = \mathbf{F_1} \cap \mathbf{F_2}$. Como $\mathbf{F} \subseteq \mathbf{F_1}$ e $\mathbf{F} \subseteq \mathbf{F_2}$, então $\mathbf{F} \subseteq \mathbf{F_1} \cap \mathbf{F_2}$ (*). Se $x \in \mathbf{F_1} \cap \mathbf{F_2}$, então $x \in \mathbf{F_1}$ e $x \in \mathbf{F_2}$. Desta forma, existem c, $d \in \mathbf{F}$ tais que $a \wedge c \leq x$ e $b \wedge d \leq x$. Portanto, $(a \wedge c) \vee (b \wedge d) \leq x$. Mas, $(a \wedge c) \vee (b \wedge d) = ((a \wedge c) \vee b) \wedge ((a \wedge c) \vee d) = (a \vee b) \wedge (c \vee b) \wedge (a \vee d) \wedge (c \vee d) \in \mathbf{F}$, pois $a \vee b$, $c \vee b$, $a \vee d$, $c \vee d \in \mathbf{F}$. Assim, $(a \wedge c) \vee (b \wedge d) \in \mathbf{F}$ e $(a \wedge c) \vee (b \wedge d) \leq x$, portanto, $x \in \mathbf{F}$. Logo, $\mathbf{F_1} \cap \mathbf{F_2} \subseteq \mathbf{F}$ (**). Assim, de (*) e (**), $\mathbf{F} = \mathbf{F_1} \cap \mathbf{F_2}$, em que $\mathbf{F} \neq \mathbf{F_1}$ e $\mathbf{F} \neq \mathbf{F_2}$. Portanto, $\mathbf{F}$ não é um filtro irredutível.

(III) ($\Leftarrow$) Seja $\mathbf{F}$ um filtro primo e $\mathbf{F_1}$ um filtro tal que $\mathbf{F} \subseteq \mathbf{F_1}$ e $\mathbf{F} \neq \mathbf{F_1}$. Então, existe um elemento $a \in$ B tal que $a \notin \mathbf{F}$ e $a \in \mathbf{F_1}$. Seja $\mathbf{F^*}$ o menor filtro contendo a e $\mathbf{F}$, pela Proposição A3.6, $\mathbf{F^*} = \{x \in \mathrm{B} : a \wedge c \leq x,\ c \in \mathbf{F}\}$. Claramente, $\mathbf{F} \subseteq \mathbf{F^*} \subseteq \mathbf{F_1}$. Pela Proposição A3.7 (i), $a \vee {\sim}a = 1 \in \mathbf{F}$. O filtro $\mathbf{F}$ é primo e $a \notin \mathbf{F}$, logo, ${\sim}a \in \mathbf{F}$, portanto, ${\sim}a \in \mathbf{F_1}$. Como $a \in \mathbf{F_1}$, temos que $0 = a \wedge {\sim}a \in \mathbf{F_1}$. Consequentemente, $\mathbf{F_1} =$ B e, portanto, $\mathbf{F}$ é um filtro maximal.

($\Rightarrow$) Observar que todo filtro maximal é irredutível e daí é primo.

Por (I), (II) e (III) fica provada a equivalência entre (i), (ii), (iii) e (iv). ■

<u>Proposição A4.2:</u> Sejam $\mathbf{B}$ = (B, $\wedge$, $\vee$, ~, 0, 1) uma álgebra de Boole e $\mathbf{U} \subseteq$ B um ultrafiltro. Então, $0 \notin \mathbf{U}$ e $1 \in \mathbf{U}$.

Demonstração: Pela Proposição A3.7 (ii), como um ultrafiltro é um filtro próprio, então $0 \notin \mathbf{U}$. Pela Proposição A3.7 (i), para todo filtro $\mathbf{U}$, $1 \in \mathbf{U}$. ■

<u>Proposição A4.3:</u> Seja $\mathbf{B}$ = (B, $\wedge$, $\vee$, ~, 0, 1) uma álgebra de Boole. Se para todos a, $b \in$ B temos que $b \leq a$ não ocorre, então existe um ultrafiltro $\mathbf{U}$ em $\mathbf{B}$ tal que $a \notin \mathbf{U}$ e $b \in \mathbf{U}$.

Demonstração: Pode ser encontrada em Rasiowa e Sikorski (1968, p. 49). ■

Seja $\mathbf{B}$ = (B, $\wedge$, $\vee$, ~, 0, 1) uma álgebra de Boole e $U(\mathbf{B})$ o conjunto de todos os ultrafiltros em B. Para todo $a \in$ B, h(a) = $\{\mathbf{U} \in U(\mathbf{B}) : a \in \mathbf{U}\}$ e $\mathbf{P(B)}$ = {h(a) : $a \in$ B}.

<u>Teorema A4.1:</u> Se $\mathbf{B}$ = (B, $\wedge$, $\vee$, ~, 0, 1) é uma álgebra de Boole, então h é um isomorfismo de álgebras de Boole de $\mathbf{B}$ em $\mathbf{P(B)}$.

Demonstração: (i) Inicialmente demonstraremos que h é um homomorfismo de álgebras de Boole de $\mathbf{B}$ em $\mathbf{P(B)}$:

Seja **U** um ultrafiltro. Então, pela Proposição A4.1, **U** é um filtro primo (*).

Se **U** $\in$ h($a\vee b$), ou seja, $a\vee b \in$ **U**, então, por (*), $a \in$ **U** ou $b \in$ **U**. Consequentemente, **U** $\in$ h(a) ou **U** $\in$ h(b). Logo, **U** $\in$ h(a)$\cup$h(b). Por outro lado, se **U** $\in$ h(a)$\cup$h(b), ou seja, $a \in$ **U** ou $b \in$ **U**, como $a \leq a\vee b$ e $b \leq a\vee b$, então, $a\vee b \in$ **U**, isto é, **U** $\in$ h($a\vee b$). Assim, h($a\vee b$) = h(a)$\cup$h(b).

Se **U** $\in$ h($a\wedge b$), ou seja, $a\wedge b \in$ **U**, então, pela Proposição A4.2, $a \in$ **U** e $b \in$ **U**. Desta forma, **U** $\in$ h(a)$\cap$h(b). Por outro lado, se **U** $\in$ h(a)$\cap$h(b), ou seja, $a \in$ **U** e $b \in$ **U**, então, como **U** é um filtro, $a\wedge b \in$ **U**. Logo, **U** $\in$ h($a\wedge b$). Assim, h($a\wedge b$) = h(a)$\cap$h(b).

Se **U** $\in$ h(a)^C, ou seja, **U** $\in$ *U*(**B**) **-** h(a), então, pela definição de h, $a \notin$ **U**. Como **U** é um ultrafiltro, então $\sim a \in$ **U**, ou seja, **U** $\in$ h($\sim a$). Por outro lado, se **U** $\in$ h($\sim a$), ou seja, $\sim a \in$ **U**, então, novamente por **U** ser um ultrafiltro, $a \notin$ **U**. Como **U** $\notin$ h(a), então **U** $\in$ *U*(**B**) **-** h(a) = h(a)^C. Assim, h($\sim a$) = h(a)^C.

(ii) Agora, demonstraremos que h é injetiva:

Se a, $b \in$ **U**, $a \neq b$, então uma das relações $a \leq b$, $b \leq a$ não vale. Pela Proposição A4.2, existe um ultrafiltro que pertence a exatamente um dos conjuntos h(a) ou h(b). Assim, h(a) $\neq$ h(b), ou seja, h é injetiva.

(iii) Como para todo elemento b de **P(B)** existe um elemento $a \in$ **B**, tal que b = h(a), então h é sobrejetiva.

Portanto, de (i), (ii) e (iii) temos que h é um isomorfismo de **B** em **P(B)**. ■

<u>Definição A4.2:</u> O isomorfismo h é um *isomorfismo de Stone*, *U*(**B**) é um *espaço de Stone*.

O Teorema A4.1, acima, nos permite dizer que para toda álgebra de Boole **B** = (B, $\wedge$, $\vee$, ~, 0, 1) existe um homomorfismo injetivo de **B** em *P* (*P* (B)), pois **P(B)** $\subseteq$ *P* (*P* (B)). Podemos explicar mais detalhadamente: Como **U** é um ultrafiltro em **B**, então **U** $\subseteq$ B, ou seja, **U** $\in$ *P* (B). Assim, h(a) $\subseteq$ *P* (B), ou ainda, h(a) $\in$ *P* (*P* (B)) $\Rightarrow$ **P(B)** $\subseteq$ *P* (*P* (B)).

4 A LÓGICA DO 'QUASE SEMPRE' EM CÁLCULO DE SEQUENTES

Hilbert, no começo do século XX, iniciou investigações sobre a Fundamentação da Matemática, proposta conhecida como Programa de Hilbert. Ele pretendia garantir a segurança dos métodos e teorias da matemática tradicional, ou seja, garantir que a Matemática seria, realmente, uma ciência sem contradições. Para isso, era necessário formalizar a Matemática através de princípios lógicos, mostrar que a Matemática poderia ser dada por um sistema de axiomas e que este sistema seria consistente.

Nos anos 30, com interesse na demonstração da consistência da aritmética, Gentzen mostrou que os sistemas lógicos podem ter outras apresentações que são naturalmente equivalentes à hilbertiana, para a lógica de primeira ordem clássica. Dentre estas novas apresentações, mencionamos a dedução natural e o cálculo de sequentes introduzidas por Gentzen (1969) e, em decorrência, os tablôs introduzidos por Smullyan (1968).

O primeiro sistema criado por Gentzen foi o sistema de dedução natural, com regras mais próximas do modo como raciocinamos. Uma das regras deste sistema é a regra do corte que, ao ser aplicada, elimina uma fórmula da demonstração. Assim, se conhecermos apenas o final de uma demonstração, não saberemos se, em algum momento, uma fórmula foi introduzida na demonstração e, pela regra do corte, eliminada. Este sistema, devido à regra do corte, gerou problemas na demonstração proposta por Gentzen em relação à consistência da aritmética.

Por este motivo, Gentzen criou outro sistema, denominado cálculo de sequentes. No sistema de cálculo de sequentes, Gentzen conseguiu demonstrar que toda demonstração neste sistema pode ser posta numa forma dita normal (caracterizada por não possuir a operação do 'corte'), ele chamou este resultado de sua tese principal (*Hauptsatz*).

Desta forma, Gentzen pôde provar a consistência da aritmética. Devemos destacar que Gentzen não utilizou a perspectiva finitária proposta por Hilbert. Apenas em 1965, Prawitz conseguiu demonstrar a consistência da aritmética usando um sistema de dedução natural.

Pretendemos, neste capítulo, apresentar a lógica do 'quase sempre' através do sistema de cálculo de sequentes.

4.1 Um sistema em cálculo de sequentes para a lógica do 'quase sempre'

O sistema que será utilizado é uma adaptação do sistema encontrado em (Schwichtenberg, Troelstra, 2000). Usamos também algumas definições dadas por Gentzen (1969).

Definição 4.1.1: *Multiconjuntos finitos* são conjuntos finitos com possível repetição de elementos.

Por exemplo, em conjuntos $\{\varphi, \varphi, \varphi, \psi\}$ e $\{\varphi, \psi\}$ são conjuntos iguais, mas, quando trabalhamos com multiconjuntos, temos que $\{\varphi, \varphi, \varphi, \psi\} \neq \{\varphi, \psi\}$.

Definição 4.1.2: *Sequentes* são expressões da forma $\Gamma \Rightarrow \Delta$, em que Γ e Δ são multiconjuntos finitos de fórmulas. Chamamos Γ de antecedente e Δ de consequente do sequente.

O símbolo $\Rightarrow$ não é um símbolo lógico, mas um símbolo auxiliar, como as vírgulas.

Na definição dada por Gentzen, Γ e Δ eram sequencias finitas e não multiconjuntos finitos. Por este fato, como veremos a seguir, no nosso caso, não necessitamos de uma regra para permutar os elementos dos multiconjuntos finitos, já que $\{\varphi, \psi\} = \{\psi, \varphi\}$.

Em (Gentzen, 1969, p. 115) encontramos a relação entre sequentes e fórmulas como segue:

Definição 4.1.3: Sejam $\Gamma = \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\}$, $\Delta = \{\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_m\}$ multiconjuntos finitos de fórmulas e θ uma fórmula qualquer. No sistema hilbertiano o sequente $\Gamma \Rightarrow \Delta$ é equivalente a seguinte fórmula:

(i) Se Γ e Δ não são vazios, então: $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \vdash \psi_1 \vee \psi_2 \vee \ldots \vee \psi_m$.

(ii) Se Γ é vazio e Δ não é, então: $\psi_1 \vee \psi_2 \vee \ldots \vee \psi_m$.

(iii) Se Δ é vazio e Γ não é, então: $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \vdash \theta \wedge \neg\theta$.

(iii) Se Δ e Γ são vazios, então: $\theta \wedge \neg\theta$.

A *lógica proposicional do 'quase sempre' em cálculo de sequentes,* $\mathcal{L}_G$(☼), é definida sobre a linguagem L_G ($\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\perp$, ☼), em que $\wedge$, $\vee$ e $\rightarrow$ são os conectivos lógicos usuais, $\perp$ (falso) é uma constante lógica e ☼ é o novo operador. Sejam φ e ψ fórmulas arbitrárias e Γ e

Δ multiconjuntos finitos de fórmulas. Introduzimos o conectivo $\neg$ (negação) por definição: $\neg\varphi =_{df} \varphi\rightarrow\bot$.

A lógica $\mathcal{L}_G$(☼) fica determinada por meio dos seguintes axiomas e regras:

Axiomas:

(Ax) $\varphi \Rightarrow \varphi$

(E$\bot$) $\bot \Rightarrow$

Regras estruturais:

- atenuação:

(EA) $\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}$

(DA) $\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi}$

- contração:

(EC) $\dfrac{\varphi, \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}$

(DC) $\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi, \varphi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi}$

Regras operacionais:

- conjunção:

(E$\wedge$) $\dfrac{\varphi, \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi\wedge\psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}$

(D∧) $\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi; \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \wedge \psi}$

- disjunção:

(E∨) $\dfrac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta; \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi \vee \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}$

(D∨) $\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \vee \psi}$

- condicional:

(E→) $\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi; \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi \rightarrow \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}$

(D→) $\dfrac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \rightarrow \psi}$

Regras para o operador ☼:

(☼$_{G1}$) $\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, ☼\varphi \wedge ☼\psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, ☼(\varphi \wedge \psi)}$

(☼$_{G2}$) $\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg ☼\varphi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, ☼\neg\varphi}$

(☼$_{G3}$) $\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, ☼\bot}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \bot}$

(☼$_{G4}$) $\dfrac{\Rightarrow \varphi \rightarrow \psi}{\Rightarrow ☼\varphi \rightarrow ☼\psi}$

Os nossos axiomas e regras que não envolvem o operador ☼ estão de acordo com (Schwichtenberg, Troelstra, 2000, p. 61).

No sistema original de Gentzen, há apenas um axioma, pois nele o falso, $\perp$, não faz parte da linguagem. Porém, existe uma regra para a negação, $\neg$. Nota-se também que não utilizaremos a regra do corte.

Definição 4.1.4: Chamamos de *sequentes superiores* e *inferiores* aos sequentes que estão, respectivamente, acima ou abaixo das linhas em que aparecem as regras consideradas.

Definição 4.1.5: As regras estruturais, regras operacionais e regras para o operador ☼ são *regras de inferência*.

Definição 4.1.6: Uma *demonstração*, em $\mathcal{L}_G$(☼), é construída a partir dos axiomas por meio das regras de inferência e tem a forma de uma árvore Π, tal que:

(i) Os nós mais altos de Π são axiomas;
(ii) Cada nó μ de Π, exceto o último, é o sequente superior de uma aplicação de uma regra de inferência cujo sequente inferior também ocorre em Π, imediatamente abaixo de μ.

Um *sequente* é *válido* quando existe uma demonstração para ele.

Definição 4.1.7: Uma *dedução*, em $\mathcal{L}_G$(☼), é construída a partir dos axiomas e premissas por meio das regras de inferência e tem a forma de uma árvore Π, tal que:

(i) Os nós mais altos de Π são axiomas ou premissas;
(ii) Cada nó μ de Π, exceto o último, é o sequente superior de uma aplicação de uma regra de inferência cujo sequente inferior também ocorre em Π, imediatamente abaixo de μ.

Definição 4.1.8: Uma fórmula φ é um *teorema*, em $\mathcal{L}_G$(☼), se o sequente $\Rightarrow \varphi$ pode ser demonstrado.

Definição 4.1.9: O sequente mais baixo de Π, que não é sequente superior de nenhuma regra, é o *sequente final* de Π.

<u>Definição 4.1.10:</u> O *comprimento de* Π, denotado por $\ell(\Pi)$, considerando Π e Π_i $(1 \leq i \leq n)$ demonstrações, é definido da seguinte forma:

(i) Se Π é um axioma $\ell(\Pi) = 1$.

(ii) Se Π é da forma

$$\frac{\Pi_1, \Pi_2, ..., \Pi_n}{\varphi}$$

então $\ell(\Pi) = (\ell(\Pi_1) + \ell(\Pi_2) + ... + \ell(\Pi_n) + 1)$.

4.2 Equivalência entre $\mathcal{L}(☼)$ e $\mathcal{L}_G(☼)$

Nesta seção faremos a equivalência entre os sistemas $\mathcal{L}(☼)$ e $\mathcal{L}_G(☼)$. Para isso, utilizaremos a Definição 4.1.3 e as duas definições a seguir, dadas por Gentzen (1969, p. 116).

<u>Definição 4.2.1:</u> Duas *deduções* são *equivalentes* se a fórmula final (sequente final) de uma é equivalente ao da outra.

<u>Definição 4.2.2:</u> Dois *sistemas* são *equivalentes* se toda dedução em um sistema pode ser transformada em uma dedução equivalente no outro sistema.

A equivalência será feita provando o teorema a seguir:

<u>Teorema 4.2.1:</u> Sejam $\Gamma = \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\}$ e $\Delta = \{\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_m\}$ multiconjuntos finitos de fórmulas. Então existe uma dedução Π do sequente $\Gamma \Rightarrow \Delta$ se, e somente se, $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge ... \wedge \varphi_n \vdash \psi_1 \vee \psi_2 \vee \ldots \vee \psi_m$.

Demonstração:

Os axiomas do cálculo proposicional clássico (Ax_0) serão os seguintes:

(Ax_{01}) $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$

(Ax_{02}) $(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \theta)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \theta))$

(Ax_{03}) $\varphi \rightarrow \varphi \vee \psi$

(Ax_{04}) $\psi \to \varphi\vee\psi$

(Ax_{05}) $(\varphi \to \theta) \to ((\psi \to \theta) \to (\varphi\vee\psi \to \theta))$

(Ax_{06}) $\varphi\wedge\psi \to \varphi$

(Ax_{07}) $\varphi\wedge\psi \to \psi$

(Ax_{08}) $\varphi \to (\psi \to (\varphi\wedge\psi))$

(Ax_{09}) $\perp \to \varphi$

(Ax_{010}) $\varphi\vee(\varphi \to \perp)$.

Estes axiomas estão de acordo com (Schwichtenberg, Troelstra, 2000, p. 51). O fato de utilizarmos vários axiomas, o que não ocorre normalmente, se deve à nossa intenção de demonstrar a equivalência entre as lógicas do ‘quase sempre’ dadas no sistema hilbertiano e no cálculo de sequentes. Utilizaremos nas deduções, implicitamente, o Teorema da Monotonicidade, T. M. (Bianconi, Carnielli, Coniglio, 2006, p. 45): Se $\Gamma \vdash \varphi$ e $\Gamma \subseteq \Delta$, então $\Delta \vdash \varphi$. Ademais, utilizaremos que $\Gamma \vdash \varphi\vee\psi \Leftrightarrow \Gamma \vdash \neg\varphi \to \psi$ e $\Gamma \vdash \varphi \to \psi \Leftrightarrow \Gamma \vdash \neg\psi \to \neg\varphi$.

($\Rightarrow$) Provaremos que todas as regras e axiomas de $\mathcal{L}_G(☼)$ podem ser deduzidos em $\mathcal{L}(☼)$.

Notemos que no antecedente interpretamos as vírgulas como $\wedge$, mas para facilitar nossa dedução o sequente $\Gamma, \varphi \Rightarrow \Delta$ será entendido como $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \Delta$.

(Ax) $\varphi \vdash \varphi$

1. $\vdash (\varphi \to ((\varphi \to \varphi) \to \varphi)) \to ((\varphi \to (\varphi \to \varphi)) \to (\varphi \to \varphi))$	(Ax_{02})
2. $\vdash \varphi \to ((\varphi \to \varphi) \to \varphi)$	(Ax_{01})
3. $\vdash (\varphi \to (\varphi \to \varphi)) \to (\varphi \to \varphi)$	(MP) em 1 e 2
4. $\vdash \varphi \to (\varphi \to \varphi)$	(Ax_{01})
5. $\vdash \varphi \to \varphi$	(MP) em 3 e 4
6. $\varphi \vdash \varphi$	T. D. em 5.

(E$\perp$) $\perp \vdash \varphi\wedge\neg\varphi$

1. $\vdash \perp \to (\varphi\wedge\neg\varphi)$	(Ax_{09})
2. $\perp \vdash \varphi\wedge\neg\varphi$	T. D. em 1.

(EA) $\dfrac{\boldsymbol{\Gamma \vdash \Delta}}{\boldsymbol{\varphi, \Gamma \vdash \Delta}}$

1. $\Gamma \vdash \Delta$	premissa
2. $\{\varphi\} \cup \Gamma \vdash \Delta$	T. M. em 1
3. $\varphi, \Gamma \vdash \Delta$.	

(DA) $\underline{\boldsymbol{\Gamma \vdash \Delta}}$

$\boldsymbol{\Gamma \vdash \Delta, \varphi}$

1. $\Gamma \vdash \Delta$	premissa
2. $\Gamma \vdash \psi_1 \vee \ldots \vee \psi_m$	
3. $\Gamma \vdash (\psi_1 \vee \ldots \vee \psi_m) \rightarrow (\psi_1 \vee \ldots \vee \psi_m) \vee \varphi$	(Ax_{03})
4. $\Gamma \vdash (\psi_1 \vee \ldots \vee \psi_m) \vee \varphi$	(MP) em 2 e 3
5. $\Gamma \vdash \Delta, \varphi$.	

(EC) $\underline{\boldsymbol{\psi, \psi, \Gamma \vdash \Delta}}$

$\boldsymbol{\psi, \Gamma \vdash \Delta}$

1. $\psi, \psi, \Gamma \vdash \Delta$	premissa
2. $\{\psi\} \cup \{\psi\} \cup \Gamma \vdash \Delta$	
3. $\{\psi\} \cup \Gamma \vdash \Delta$	$\{\psi\} \cup \{\psi\} = \{\psi\}$
4. $\psi, \Gamma \vdash \Delta$.	

(DC) $\underline{\boldsymbol{\Gamma \vdash \Delta, \varphi, \varphi}}$

$\boldsymbol{\Gamma \vdash \Delta, \varphi}$

1. $\Gamma \vdash \Delta, \varphi, \varphi$	premissa
2. $\Gamma \vdash (\psi_1 \vee \ldots \vee \psi_m) \vee \varphi \vee \varphi$	
3. $\Gamma \vdash \neg(\psi_1 \vee \ldots \vee \psi_m) \rightarrow \varphi \vee \varphi$	(CPC) em 2
4. $\Gamma \cup \{\neg(\psi_1 \vee \ldots \vee \psi_m)\} \vdash \varphi \vee \varphi$	T. D. em 3
5. $\Gamma \cup \{\neg(\psi_1 \vee \ldots \vee \psi_m)\} \vdash (\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow (\varphi \vee \varphi \rightarrow \varphi))$	(Ax_{05})
6. $\Gamma \cup \{\neg(\psi_1 \vee \ldots \vee \psi_m)\} \vdash \varphi \rightarrow \varphi$	(Ax)[6]
7. $\Gamma \cup \{\neg(\psi_1 \vee \ldots \vee \psi_m)\} \vdash (\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow (\varphi \vee \varphi \rightarrow \varphi)$	MP em 5 e 6
8. $\Gamma \cup \{\neg(\psi_1 \vee \ldots \vee \psi_m)\} \vdash \varphi \vee \varphi \rightarrow \varphi$	MP em 6 e 7
9. $\Gamma \cup \{\neg(\psi_1 \vee \ldots \vee \psi_m)\} \vdash \varphi$	MP em 4 e 8
10. $\Gamma \vdash \neg(\psi_1 \vee \ldots \vee \psi_m) \rightarrow \varphi$	T. D. em 9

[6] Demonstramos este resultado em (Ax) $\varphi \vdash \varphi$.

11. $\Gamma \vdash (\psi_1 \vee ... \vee \psi_m) \vee \varphi$ (CPC) em 10

12. $\Gamma \vdash \Delta, \varphi$.

(E∧) $\underline{\boldsymbol{\theta, \sigma, \Gamma \vdash \Delta}}$

$\boldsymbol{\theta \wedge \sigma, \Gamma \vdash \Delta}$

1. $\theta, \sigma, \Gamma \vdash \Delta$ premissa
2. $\{\theta\} \cup \{\sigma\} \cup \{\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_n\} \vdash \psi_1 \vee ... \vee \psi_m$
3. $\vdash \theta \rightarrow (\sigma \rightarrow ((\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_n) \rightarrow (\psi_1 \vee ... \vee \psi_m)))$ T. D. em 2
4. $\theta \wedge \sigma \vdash \theta \rightarrow (\sigma \rightarrow ((\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_n) \rightarrow (\psi_1 \vee ... \vee \psi_m)))$ T. M. em 3
5. $\vdash \theta \wedge \sigma \rightarrow (\theta \rightarrow (\sigma \rightarrow ((\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_n) \rightarrow (\psi_1 \vee ... \vee \psi_m))))$ T. D. em 4
6. $\vdash (\theta \wedge \sigma \rightarrow (\theta \rightarrow (\sigma \rightarrow ((\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_n) \rightarrow (\psi_1 \vee ... \vee \psi_m))))) \rightarrow$
$((\theta \wedge \sigma \rightarrow \theta) \rightarrow (\theta \wedge \sigma \rightarrow (\sigma \rightarrow ((\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_n) \rightarrow (\psi_1 \vee ... \vee \psi_m)))))$ (Ax_{02})
7. $\vdash (\theta \wedge \sigma \rightarrow \theta) \rightarrow (\theta \wedge \sigma \rightarrow (\sigma \rightarrow ((\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_n) \rightarrow (\psi_1 \vee ... \vee \psi_m))))$ (MP) em 5 e 6
8. $\vdash \theta \wedge \sigma \rightarrow \theta$ (Ax_{06})
9. $\vdash \theta \wedge \sigma \rightarrow (\sigma \rightarrow ((\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_n) \rightarrow (\psi_1 \vee ... \vee \psi_m)))$ (MP) em 7 e 8
10. $\vdash (\theta \wedge \sigma \rightarrow (\sigma \rightarrow ((\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_n) \rightarrow (\psi_1 \vee ... \vee \psi_m)))) \rightarrow$
$((\theta \wedge \sigma \rightarrow \sigma) \rightarrow (\theta \wedge \sigma \rightarrow ((\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_n) \rightarrow (\psi_1 \vee ... \vee \psi_m))))$ (Ax_{02})
11. $\vdash (\theta \wedge \sigma \rightarrow \sigma) \rightarrow (\theta \wedge \sigma \rightarrow ((\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_n) \rightarrow (\psi_1 \vee ... \vee \psi_m)))$ (MP) em 9 e 10
12. $\vdash \theta \wedge \sigma \rightarrow \sigma$ (Ax_{07})
13. $\vdash \theta \wedge \sigma \rightarrow ((\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_n) \rightarrow (\psi_1 \vee ... \vee \psi_m))$ (MP) em 11 e 12
14. $\theta \wedge \sigma, \Gamma \vdash \Delta$ T. D. em 13.

(D∧) $\underline{\boldsymbol{\Gamma \vdash \Delta, \varphi; \Gamma \vdash \Delta, \theta}}$

$\boldsymbol{\Gamma \vdash \Delta, \varphi \wedge \theta}$

1. $\Gamma \vdash \Delta, \varphi$ premissa
2. $\Gamma \vdash (\psi_1 \vee ... \vee \psi_m) \vee \varphi$
3. $\Gamma \vdash \neg(\psi_1 \vee ... \vee \psi_m) \rightarrow \varphi$ (CPC) em 2
4. $\Gamma \cup \{\neg(\psi_1 \vee ... \vee \psi_m)\} \vdash \varphi$ T. D. em 3
5. $\Gamma \vdash \Delta, \theta$ premissa
6. $\Gamma \vdash (\psi_1 \vee ... \vee \psi_m) \vee \theta$
7. $\Gamma \vdash \neg(\psi_1 \vee ... \vee \psi_m) \rightarrow \theta$ (CPC) em 6
8. $\Gamma \cup \{\neg(\psi_1 \vee ... \vee \psi_m)\} \vdash \theta$ T. D. em 7

9. $\Gamma \cup \{\neg(\psi_1 \vee ... \vee \psi_m)\} \vdash \varphi \to (\theta \to \varphi \wedge \theta)$ (Ax_{08})

10. $\Gamma \cup \{\neg(\psi_1 \vee ... \vee \psi_m)\} \vdash \theta \to \varphi \wedge \theta$ (MP) em 4 e 9

11. $\Gamma \cup \{\neg(\psi_1 \vee ... \vee \psi_m)\} \vdash \varphi \wedge \theta$ (MP) em 8 e 10

12. $\Gamma \vdash \neg(\psi_1 \vee ... \vee \psi_m) \to \varphi \wedge \theta$ T. D. em 11

13. $\Gamma \vdash \Delta, \varphi \wedge \theta$ (CPC) em 12.

(E$\vee$) $\dfrac{\varphi, \Gamma \vdash \Delta; \theta, \Gamma \vdash \Delta}{\varphi \vee \theta, \Gamma \vdash \Delta}$

1. $\varphi, \Gamma \vdash \Delta$ premissa

2. $\{\varphi\} \cup \Gamma \vdash \psi_1 \vee ... \vee \psi_m$

3. $\Gamma \vdash \varphi \to (\psi_1 \vee ... \vee \psi_m)$ T. D em 2

4. $\theta, \Gamma \vdash \Delta$ premissa

5. $\{\theta\} \cup \Gamma \vdash \psi_1 \vee ... \vee \psi_m$

6. $\Gamma \vdash \theta \to (\psi_1 \vee ... \vee \psi_m)$ T. D. em 5

7. $\Gamma \vdash (\varphi \to (\psi_1 \vee ... \vee \psi_m)) \to ((\theta \to (\psi_1 \vee ... \vee \psi_m)) \to (\varphi \vee \theta \to (\psi_1 \vee ... \vee \psi_m)))$ (Ax_{05})

8. $\Gamma \vdash (\theta \to (\psi_1 \vee ... \vee \psi_m)) \to (\varphi \vee \theta \to (\psi_1 \vee ... \vee \psi_m))$ (MP) em 3 e 7

9. $\Gamma \vdash \varphi \vee \theta \to (\psi_1 \vee ... \vee \psi_m)$ (MP) em 6 e 8

10. $\{\varphi \vee \theta\} \cup \Gamma \vdash \psi_1 \vee ... \vee \psi_m$ T. D. em 9

11. $\varphi \vee \theta, \Gamma \vdash \Delta$.

(D$\vee$) $\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi, \theta}{\Gamma \vdash \Delta, \varphi \vee \theta}$

1. $\Gamma \vdash \Delta, \varphi, \theta$ premissa

2. $\Gamma \vdash (\psi_1 \vee ... \vee \psi_m) \vee \varphi \vee \theta$

3. $\Gamma \vdash \Delta, \varphi \vee \theta$.

(E$\to$) $\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi; \theta, \Gamma \vdash \Delta}{\varphi \to \theta, \Gamma \vdash \Delta}$

1. $\Gamma \vdash \Delta, \varphi$ premissa

2. $\Gamma \vdash (\psi_1 \vee ... \vee \psi_m) \vee \varphi$

3. $\Gamma \vdash \neg\varphi \to (\psi_1 \vee ... \vee \psi_m)$ (CPC) em 2

4. $\theta, \Gamma \vdash \Delta$ premissa

5. $\Gamma \vdash \theta \rightarrow (\psi_1 \vee ... \vee \psi_m)$ T. D. em 4

6. $\Gamma \vdash (\neg\varphi \rightarrow (\psi_1 \vee ... \vee \psi_m)) \rightarrow ((\theta \rightarrow (\psi_1 \vee ... \vee \psi_m)) \rightarrow (\neg\varphi \vee \theta \rightarrow (\psi_1 \vee ... \vee \psi_m)))$ (Ax_{05})

7. $\Gamma \vdash (\theta \rightarrow (\psi_1 \vee ... \vee \psi_m)) \rightarrow (\neg\varphi \vee \theta \rightarrow (\psi_1 \vee ... \vee \psi_m))$ (MP) em 3 e 6

8. $\Gamma \vdash \neg\varphi \vee \theta \rightarrow (\psi_1 \vee ... \vee \psi_m)$ (MP) em 5 e 7

9. $\Gamma \vdash \neg(\psi_1 \vee ... \vee \psi_m) \rightarrow \neg(\neg\varphi \vee \theta)$ (CPC) em 8

10. $\Gamma \cup \{\neg(\psi_1 \vee ... \vee \psi_m)\} \vdash \neg(\neg\varphi \vee \theta)$ T. D. em 9

11. $\Gamma \cup \{\neg(\psi_1 \vee ... \vee \psi_m)\} \vdash \neg(\varphi \rightarrow \theta)$ (CPC) em 10

12. $\Gamma \vdash \neg(\psi_1 \vee ... \vee \psi_m) \rightarrow \neg(\varphi \rightarrow \theta)$ T. D. em 11

13. $\Gamma \vdash (\varphi \rightarrow \theta) \rightarrow (\psi_1 \vee ... \vee \psi_m)$ (CPC) em 12

14. $\varphi \rightarrow \theta, \Gamma \vdash \Delta$ T. D. em 13.

(D→) $\underline{\boldsymbol{\varphi, \Gamma \vdash \Delta, \theta}}$

$\boldsymbol{\Gamma \vdash \Delta, \varphi \rightarrow \theta}$

1. $\varphi, \Gamma \vdash \Delta, \theta$ premissa

2. $\{\varphi\} \cup \Gamma \vdash (\psi_1 \vee ... \vee \psi_m) \vee \theta$

3. $\{\varphi\} \cup \Gamma \vdash \neg(\psi_1 \vee ... \vee \psi_m) \rightarrow \theta$ (CPC) em 2

4. $\Gamma \cup \{\varphi\} \cup \{\neg(\psi_1 \vee ... \vee \psi_m)\} \vdash \theta$ T. D. em 3

5. $\Gamma \cup \{\neg(\psi_1 \vee ... \vee \psi_m)\} \vdash \varphi \rightarrow \theta$ T. D. em 4

6. $\Gamma \vdash \neg(\psi_1 \vee ... \vee \psi_m) \rightarrow (\varphi \rightarrow \theta)$ T. D. em 5

7. $\Gamma \vdash (\psi_1 \vee ... \vee \psi_m) \vee (\varphi \rightarrow \theta)$ (CPC) em 6

8. $\Gamma \vdash \Delta, \varphi \rightarrow \theta$.

(☼$_{G1}$) $\underline{\boldsymbol{\Gamma \vdash \Delta, ☼\varphi \wedge ☼\theta}}$

$\boldsymbol{\Gamma \vdash \Delta, ☼(\varphi \wedge \theta)}$

1. $\Gamma \vdash \Delta, ☼\varphi \wedge ☼\theta$ premissa

2. $\Gamma \vdash (\psi_1 \vee ... \vee \psi_m) \vee (☼\varphi \wedge ☼\theta)$

3. $\Gamma \vdash \neg(\psi_1 \vee ... \vee \psi_m) \rightarrow (☼\varphi \wedge ☼\theta)$ (CPC) em 2

4. $\Gamma \cup \{\neg(\psi_1 \vee ... \vee \psi_m)\} \vdash ☼\varphi \wedge ☼\theta$ T. D. em 3

5. $\Gamma \cup \{\neg(\psi_1 \vee ... \vee \psi_m)\} \vdash (☼\varphi \wedge ☼\theta) \rightarrow ☼(\varphi \wedge \theta)$ (Ax_1)

6. $\Gamma \cup \{\neg(\psi_1 \vee ... \vee \psi_m)\} \vdash ☼(\varphi \wedge \theta)$ (MP) em 4 e 5

7. $\Gamma \vdash \neg(\psi_1 \vee ... \vee \psi_m) \rightarrow ☼(\varphi \wedge \theta)$ T. D. em 6

8. $\Gamma \vdash (\psi_1 \vee ... \vee \psi_m) \vee ☼(\varphi \wedge \theta)$ (CPC) em 7

9. $\Gamma \vdash \Delta, ☼(\varphi\wedge\theta)$.

($☼_{G2}$) <u>**$\Gamma \vdash \Delta, \neg☼\varphi$**</u>

$\Gamma \vdash \Delta, ☼\neg\varphi$

1. $\Gamma \vdash \Delta, \neg☼\varphi$	premissa
2. $\Gamma \vdash (\psi_1\vee...\vee\psi_m) \vee \neg☼\varphi$	
3. $\Gamma \vdash \neg(\psi_1\vee...\vee\psi_m) \rightarrow \neg☼\varphi$	(CPC) em 2
4. $\Gamma \cup \{\neg(\psi_1\vee...\vee\psi_m)\} \vdash \neg☼\varphi$	T. D. em 3
5. $\Gamma \cup \{\neg(\psi_1\vee...\vee\psi_m)\} \vdash ☼\varphi \vee ☼\neg\varphi$	(Ax_2)
6. $\Gamma \cup \{\neg(\psi_1\vee...\vee\psi_m)\} \vdash \neg☼\varphi \rightarrow ☼\neg\varphi$	(CPC) em 5
7. $\Gamma \cup \{\neg(\psi_1\vee...\vee\psi_m)\} \vdash ☼\neg\varphi$	(MP) em 4 e 6
8. $\Gamma \vdash \neg(\psi_1\vee...\vee\psi_m) \rightarrow ☼\neg\varphi$	T. D. em 7
9. $\Gamma \vdash (\psi_1\vee...\vee\psi_m) \vee ☼\neg\varphi$	(CPC) em 8
10. $\Gamma \vdash \Delta, ☼\neg\varphi$.	

($☼_{G3}$) <u>**$\Gamma \vdash \Delta, ☼\bot$**</u>

$\Gamma \vdash \Delta, \bot$

1. $\Gamma \vdash \Delta, ☼\bot$	premissa
2. $\Gamma \vdash (\psi_1\vee...\vee\psi_m) \vee ☼\bot$	
3. $\Gamma \vdash \neg(\psi_1\vee...\vee\psi_m) \rightarrow ☼\bot$	(CPC) em 2
4. $\Gamma \cup \{\neg(\psi_1\vee...\vee\psi_m)\} \vdash ☼\bot$	T. D. em 3
5. $\Gamma \cup \{\neg(\psi_1\vee...\vee\psi_m)\} \vdash ☼\bot \rightarrow \bot$	(Ax_3)
6. $\Gamma \cup \{\neg(\psi_1\vee...\vee\psi_m)\} \vdash \bot$	(MP) em 4 e 5
7. $\Gamma \vdash \neg(\psi_1\vee...\vee\psi_m) \rightarrow \bot$	T. D. em 6
8. $\Gamma \vdash (\psi_1\vee...\vee\psi_m) \vee \bot$	(CPC) em 7
9. $\Gamma \vdash \Delta, \bot$.	

($☼_{G4}$) <u>**$\vdash \varphi \rightarrow \psi$**</u>

$\vdash ☼\varphi \rightarrow ☼\psi$

1. $\vdash \varphi \rightarrow \psi$	premissa
2. $\vdash ☼\varphi \rightarrow ☼\psi$	(R☼) em 1.

($\Leftarrow$) A prova é feita por indução sobre o comprimento da dedução. Assim, devemos provar que vale para os axiomas (dedução de comprimento um) e supondo que vale para uma dedução de comprimento n, garantimos que vale para uma dedução de comprimento n+1, ou seja, mostramos que as regras do cálculo de sequentes preservam a validade.

Provaremos que cada um dos axiomas e regras da lógica proposicional do ‘quase sempre’ em sistema hilbertiano correspondem a algum sequente válido.

(Ax_{01}) $\Rightarrow \varphi \to (\psi \to \varphi)$

$\varphi \Rightarrow \varphi$ (Ax)

$\psi, \varphi \Rightarrow \varphi$ (EA)

$\varphi \Rightarrow \psi \to \varphi$ (D$\to$)

$\Rightarrow \varphi \to (\psi \to \varphi)$ (D$\to$)

(Ax_{02}) $\Rightarrow (\varphi \to (\psi \to \theta)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \theta))$

$\theta \Rightarrow \theta$ (Ax)

$\varphi \Rightarrow \varphi$ (Ax) $\qquad \varphi, \theta \Rightarrow \theta$ (EA)

$\varphi \Rightarrow \varphi$ (Ax) $\qquad \varphi, \psi \to \theta \Rightarrow \varphi$ (EA) $\qquad \psi \Rightarrow \psi$ (Ax) $\qquad \theta \Rightarrow \varphi \to \theta$ (D$\to$)

$\varphi, \varphi \to \psi \Rightarrow \varphi$ (EA) $\qquad \varphi, \psi \to \theta \Rightarrow \varphi, \theta$ (DA) $\qquad \psi \Rightarrow \varphi \to \theta, \psi$ (DA) $\qquad \theta, \psi \Rightarrow \varphi \to \theta$ (EA)

$\varphi, \varphi \to \psi \Rightarrow \varphi, \theta$ (DA) $\qquad \psi \to \theta \Rightarrow \varphi \to \theta, \varphi$ (D$\to$) $\qquad \psi, \psi \to \theta \Rightarrow \varphi \to \theta$ (E$\to$)

$\varphi \to \psi \Rightarrow \varphi, \varphi \to \theta$ (D$\to$) $\qquad \varphi \to \psi, \psi \to \theta \Rightarrow \varphi \to \theta$ (E$\to$)

$\Rightarrow (\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \theta), \varphi$ (D$\to$) $\qquad \psi \to \theta \Rightarrow (\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \theta)$ (D$\to$)

$\varphi \to (\psi \to \theta) \Rightarrow (\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \theta)$ (E$\to$)

$\Rightarrow (\varphi \to (\psi \to \theta)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \theta))$ (D$\to$)

(Ax_{03}) $\Rightarrow \varphi \to \varphi \vee \psi$

$\varphi \Rightarrow \varphi$ (Ax)

$\varphi \Rightarrow \varphi, \psi$ (DA)

$\varphi \Rightarrow \varphi \vee \psi$ (D$\vee$)

$\Rightarrow \varphi \to (\varphi \vee \psi)$ (D$\to$)

(Ax_{04}) $\Rightarrow \psi \to \varphi \vee \psi$

$\psi \Rightarrow \psi$ (Ax)

$\psi \Rightarrow \varphi, \psi$ (DA)

$\psi \Rightarrow \varphi \vee \psi$ (D$\vee$)

$\Rightarrow \psi \rightarrow (\varphi\vee\psi)$ (D→)

(Ax$_{05}$) $\Rightarrow (\varphi \rightarrow \theta) \rightarrow ((\psi \rightarrow \theta) \rightarrow (\varphi\vee\psi \rightarrow \theta))$

$\varphi \Rightarrow \varphi$ (Ax) $\quad \psi \Rightarrow \psi$ (Ax) $\quad \varphi \Rightarrow \varphi$ (Ax) $\quad \theta \Rightarrow \theta$ (Ax)

$\varphi \Rightarrow \varphi, \theta$ (DA) $\quad \psi \Rightarrow \theta, \psi$ (DA) $\quad \varphi, \theta \Rightarrow \varphi$ (EA) $\quad \psi, \theta \Rightarrow \theta$ (EA)

$\varphi \Rightarrow \varphi, \theta, \psi$ (DA) $\quad \psi \Rightarrow \varphi, \theta, \psi$ (DA) $\quad \varphi, \theta \Rightarrow \varphi, \theta$ (DA) $\quad \psi, \theta \Rightarrow \varphi, \theta$ (DA)

$\varphi\vee\psi \Rightarrow \varphi, \theta, \psi$ (E∨) $\quad \theta, \varphi\vee\psi \Rightarrow \varphi, \theta$ (E∨)

$\varphi\vee\psi, \psi \rightarrow \theta \Rightarrow \varphi, \theta$ (E→)

$\psi \rightarrow \theta \Rightarrow \varphi, \varphi\vee\psi \rightarrow \theta$ (D→)

$\Rightarrow (\psi \rightarrow \theta) \rightarrow (\varphi\vee\psi \rightarrow \theta), \varphi$ (D→) (I)

$\theta \Rightarrow \theta$ (Ax) $\quad \psi \Rightarrow \psi$ (Ax)

$\varphi, \theta \Rightarrow \theta$ (EA) $\quad \psi, \theta \Rightarrow \psi$ (EA) $\quad \theta \Rightarrow \theta$ (Ax)

$\varphi, \theta \Rightarrow \psi, \theta$ (DA) $\quad \psi, \theta \Rightarrow \psi, \theta$ (DA) $\quad \varphi\vee\psi, \theta \Rightarrow \theta$ (EA)

$\varphi\vee\psi, \theta \Rightarrow \psi, \theta$ (E∨) $\quad \theta \Rightarrow \varphi\vee\psi \rightarrow \theta$ (D→)

$\theta \Rightarrow \varphi\vee\psi \rightarrow \theta, \psi$ (D→) $\quad \theta, \theta \Rightarrow \varphi\vee\psi \rightarrow \theta$ (EA)

$\psi \rightarrow \theta, \theta \Rightarrow \varphi\vee\psi \rightarrow \theta$ (E→)

$\theta \Rightarrow (\psi \rightarrow \theta) \rightarrow (\varphi\vee\psi \rightarrow \theta)$ (D→) (II)

De (I) e (II), temos:

$\Rightarrow (\psi \rightarrow \theta) \rightarrow (\varphi\vee\psi \rightarrow \theta), \varphi \quad \theta \Rightarrow (\psi \rightarrow \theta) \rightarrow (\varphi\vee\psi \rightarrow \theta)$

$\varphi \rightarrow \theta \Rightarrow (\psi \rightarrow \theta) \rightarrow (\varphi\vee\psi \rightarrow \theta)$ (E→)

$\Rightarrow (\varphi \rightarrow \theta) \rightarrow ((\psi \rightarrow \theta) \rightarrow (\varphi\vee\psi \rightarrow \theta))$ (D→)

(Ax$_{06}$) $\Rightarrow \varphi\wedge\psi \rightarrow \varphi$

$\varphi \Rightarrow \varphi$ (Ax)

$\varphi, \psi \Rightarrow \psi$ (EA)

$\varphi\wedge\psi \Rightarrow \varphi$ (E∧)

$\Rightarrow (\varphi\wedge\psi) \rightarrow \psi$ (D→)

(Ax$_{07}$) $\Rightarrow \varphi\wedge\psi \rightarrow \psi$

ψ ⇨ ψ (Ax)

φ, ψ ⇨ ψ (EA)

φ∧ψ ⇨ ψ (E∧)

⇨ (φ∧ψ) → ψ (D→)

(Ax_{08}) ⇨ φ → (ψ → φ∧ψ)

φ ⇨ φ (Ax)   ψ ⇨ ψ (Ax)

ψ, φ ⇨ φ (EA)   ψ, φ ⇨ ψ (EA)

ψ, φ ⇨ φ∧ψ (D∧)

φ ⇨ ψ → φ∧ψ (D→)

⇨ φ → (ψ → φ∧ψ) (D→)

(Ax_{09}) ⇨ ⊥ → φ

⊥ ⇨ (E⊥)

⊥ ⇨ φ (DA)

⇨ ⊥ → φ (D→)

(Ax_{010}) ⇨ φ∨(φ → ⊥)

φ ⇨ φ (Ax)

φ ⇨ φ, ⊥ (DA)

⇨ φ, φ → ⊥ (D→)

⇨ φ∨(φ → ⊥) (D∨)

(Ax_1) ⇨ (☼φ ∧ ☼ψ) → ☼(φ∧ψ)

☼φ ∧ ☼ψ ⇨ ☼φ ∧ ☼ψ (Ax)

☼φ ∧ ☼ψ ⇨ ☼(φ∧ψ) ($☼_{G1}$)

⇨ ☼φ ∧ ☼ψ → ☼(φ∧ψ) (D→)

(Ax_2) ⇨ ¬☼φ → ☼¬φ

Como ⊢ ☼φ ∨ ☼¬φ ⇔ ⊢ ¬☼φ → ☼¬φ, basta demonstrarmos que o sequente ⇨ ¬☼φ → ☼¬φ é válido.

$$\dfrac{\dfrac{\neg☼\varphi \Rightarrow \neg☼\varphi}{\neg☼\varphi \Rightarrow ☼\neg\varphi}\ (\text{Ax})}{\Rightarrow \neg☼\varphi \rightarrow ☼\neg\varphi}\ (☼_{G2})\quad (D\rightarrow)$$

(Ax$_3$) $\Rightarrow ☼\bot \rightarrow \bot$

$$\dfrac{\dfrac{☼\bot \Rightarrow ☼\bot}{☼\bot \Rightarrow \bot}\ (\text{Ax})}{\Rightarrow ☼\bot \rightarrow \bot}\ (☼_{G3})\quad (D\rightarrow)$$

(MP) $\varphi, \varphi \rightarrow \psi \Rightarrow \psi$

$$\dfrac{\dfrac{\varphi \Rightarrow \varphi}{\varphi \Rightarrow \psi, \varphi}\ (\text{Ax})\ (\text{DA}) \qquad \dfrac{\psi \Rightarrow \psi}{\psi, \varphi \Rightarrow \psi}\ (\text{Ax})\ (\text{EA})}{\varphi \rightarrow \psi, \varphi \Rightarrow \psi}\ (E\rightarrow)$$

(R☼) $\Rightarrow \varphi \rightarrow \psi \ / \Rightarrow ☼\varphi \rightarrow ☼\psi$

$$\dfrac{\Rightarrow \varphi \rightarrow \psi}{\Rightarrow ☼\varphi \rightarrow ☼\psi}\ (\text{premissa})\quad (☼_{G4}) \quad \blacksquare$$

No Capítulo 3 demonstramos a adequação da lógica do ‘quase sempre’ na versão hilbertiana. Como demonstramos a equivalência entre os sistemas nas versões hilbertiana e em cálculo de sequentes, então a versão em cálculo de sequentes também é adequada.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Se houvesse um consenso de como devemos tratar formalmente as noções de quantificadores, ou seja, se tivéssemos conhecimento de uma definição geral sobre quantificadores, que abrangesse tudo o que consideramos quantificadores, talvez teorias particulares para capturar a noção de apenas um quantificador não fossem tão importantes. Porém, como analisamos no Capítulo 1, existem muitos estudos envolvendo quantificadores, desde Aristóteles, até as teorias de quantificadores generalizados e, apesar de terem contribuído muito, nos parece que nenhuma teoria possui uma definição geral para os quantificadores. Dessa forma, temos muito para desenvolver sobre os quantificadores.

A noção de 'quase sempre' está demasiadamente presente em nosso cotidiano e nas ciências naturais e físicas. Por exemplo, seria interessante formalizarmos expressões como "seres que são aves 'quase sempre' voam", "a gravidez na adolescência quase sempre não é planejada" e "metais do tipo gálio 'quase sempre' se liquefazem a 28,7° C".

Foi Reiter (1980) quem primeiro formalizou a noção de 'quase sempre' através da Lógica do Padrão, sem recorrer a distribuições de frequência ou lógicas fuzzy. Uma desvantagem da Lógica do Padrão de Reiter é que ela não possui a propriedade da monotonicidade. Assim, sempre que acrescentamos uma nova informação ao sistema, temos que rever todos os resultados obtidos anteriormente e isto torna o sistema inviável computacionalmente.

A fim de trabalhar com a mesma noção da Lógica do Padrão, porém num sistema monotônico, Sette, Carnielli e Veloso (1999) introduziram a Lógica do Ultrafiltro. O que definimos como uma família de conjuntos grandes coincide com o conceito de ultrafiltro e serviu de base para a introdução do quantificador que nos dá a noção de 'quase sempre' na Lógica do Ultrafiltro.

Tanto a Lógica do Padrão, quanto a Lógica do Ultrafiltro foram tratadas no Capítulo 2. No Capítulo 3, a partir das noções de 'quase sempre' da Lógica do Ultrafiltro, foram introduzidas a lógica proposicional do 'quase sempre' e a álgebra do 'quase sempre', que é a estrutura semântica para aquela lógica. Fizemos isto pela introdução na linguagem proposicional clássica de um novo operador e de axiomas e regras específicas para este operador.

A adequação entre a lógica proposicional do 'quase sempre' e a álgebra do 'quase sempre' foi demonstrada no Capítulo 3.

Vimos, no Capítulo 2, a lógica proposicional para 'muitos' e a lógica proposicional do 'plausível', ambas introduzidas, respectivamente, em (Feitosa, Nascimento, Grácio, 2009a) e

(Feitosa, Nascimento, Grácio, 2009b). Essas lógicas nos inspiraram a tratar a noção do quantificador do 'quase sempre' num ambiente proposicional.

Agora, seria interessante que a lógica proposicional do 'quase sempre' fosse uma lógica proposicional para 'muitos' e uma lógica proposicional do 'plausível', pois um ultrafiltro satisfaz tanto as condições de uma família fechada superiormente, quanto as condições de uma pseudo-topologia. Além disso, a Lógica do Ultrafiltro é uma lógica do muito e uma lógica do plausível.

No entanto, se interpretarmos o axioma $\nabla x\ \varphi(x) \rightarrow \exists x\ \varphi(x)$, da Lógica do Ultrafiltro, da Lógica do Muito e da Lógica do Plausível, num ambiente proposicional, por $\vdash ☼\varphi \rightarrow \varphi$, da forma como foi feito em (Feitosa, Nascimento, Grácio, 2009a) e (Feitosa, Nascimento, Grácio, 2009b), geramos um resultado indesejável na presença do axioma (Ax_2), $\vdash ☼\varphi \vee ☼\neg\varphi$, que caracteriza a noção de ultrafiltro. Pois, (Ax_2) nos permite deduzir $\vdash \neg☼\varphi \rightarrow ☼\neg\varphi$ e, por $\vdash ☼\varphi \rightarrow \varphi$, temos $\vdash ☼\neg\varphi \rightarrow \neg\varphi$. Então obteríamos como resultado $\vdash \neg☼\varphi \rightarrow \neg\varphi$ e, consequentemente, $\vdash \varphi \rightarrow ☼\varphi$. Com este resultado e com $\vdash ☼\varphi \rightarrow \varphi$ teríamos a equivalência $\vdash \varphi \leftrightarrow ☼\varphi$.

Assim, o axioma $\nabla x\ \varphi(x) \rightarrow \exists x\ \varphi(x)$, que significa que conjuntos grandes não são vazios, ou ainda, para nós, que o vazio não ocorre 'quase sempre', foi interpretado, no ambiente proposicional, por $☼\bot \rightarrow \bot$.

No Capítulo 4, a lógica proposicional do 'quase sempre', dada em um sistema hilbertiano no Capítulo 3, é apresentada num sistema de cálculo de sequentes. Cálculo de sequentes é um método de prova introduzido por Gentzen (1969). Demonstramos a equivalência entre estes dois sistemas. Assim, como a lógica do 'quase sempre' na versão hilbertiana é correta e completa, então a versão em cálculo de sequentes também é correta e completa.

Destacamos que um sistema em um ambiente quantificacional tem um poder maior de expressão do que um sistema correlato num ambiente proposicional. Por exemplo, ao tratarmos de relações entre objetos, a linguagem quantificacional é mais adequada. Tomemos a sentença "João ama Maria e Maria ama Carlos", esta sentença é representada proposicionalmente com dois símbolos distintos para expressar ideias semelhantes, $\varphi \wedge \psi$. No entanto, na linguagem quantificacional, considerando o predicado Pxy para designar "x ama y", podemos representar a sentença acima como '$Pjm \wedge Pmc$' e, desta forma, estamos preservando a relação que existe entre João e Maria e entre Maria e Carlos, além de percebermos que o indivíduo Maria aparece duas vezes na relação.

Apesar do poder de expressão superior da linguagem quantificacional, sistemas quantificacionais não são, em geral, decidíveis, ou seja, não existe um procedimento algorítmico para determinar, em um número finito de passos, se fórmulas arbitrárias são teoremas destes sistemas. Enquanto sistemas proposicionais, em geral, possuem a característica de serem decidíveis, o que faz, nesse sentido, a versão proposicional relevante.

Fechamos nossas Considerações Finais propondo alguns trabalhos futuros a partir do trabalho aqui apresentado:

- Demonstrar a decidibilidade da lógica proposicional do 'quase sempre'.

- Apresentar a lógica proposicional do 'quase sempre' em dois outros métodos dedutivos: o método de dedução natural e o método de tablôs.

- Introduzir uma lógica proposicional para tratar do conceito de 'maioria', baseada na lógica da maioria dada em Grácio (1999).

- Introduzir lógicas proposicionais para tratarem das noções de 'muitos' e 'para uma 'boa' parte' a partir da interpretação proposicional que demos para a fórmula do tipo $Qx\ \varphi(x) \rightarrow \exists x\ \varphi(x)$.

  Sugerimos uma extensão da lógica proposicional clássica para tratar da noção de 'muitos' através do acréscimo de um novo operador ⁎ na linguagem proposicional clássica e dos seguintes axiomas e regra:

  Axiomas:

  $⁎(\varphi \vee \neg\varphi)$

  $⁎\bot \rightarrow \bot$.

  Regra de dedução:

  (R⁎) $\vdash \varphi \rightarrow \psi / \vdash ⁎\varphi \rightarrow ⁎\psi$.

  Uma álgebra para tratar deste novo sistema seria **M'** = (M', $\wedge$, $\vee$, ~, 0, 1, $\circledast$), em que (M', $\wedge$, $\vee$, ~, 0, 1) é uma álgebra de Boole e $\circledast$ é um novo operador que satisfaz as condições:

$1 \leq \circledast 1$

$\circledast 0 \leq 0$

$\circledast a \leq \circledast(a \vee b)$.

A noção de 'para uma 'boa' parte' poderia ser dada pela extensão da lógica proposicional clássica, por meio do acréscimo de um novo operador ♮ na linguagem proposicional clássica e dos seguintes axiomas e regra:

Axiomas:

$\natural(\varphi \vee \neg\varphi)$

$\natural\bot \rightarrow \bot$

$\natural\varphi \wedge \natural\psi \rightarrow \natural(\varphi \wedge \psi)$

$\natural\varphi \vee \natural\psi \rightarrow \natural(\varphi \vee \psi)$.

Regra de dedução:

$(R\natural) \vdash \varphi \leftrightarrow \psi / \vdash \natural\varphi \leftrightarrow \natural\psi$.

Uma álgebra para tratar da lógica sugerida acima seria **P'** = (P', $\wedge$, $\vee$, ~, 0, 1, $\mathbb{O}$), em que (P', $\wedge$, $\vee$, ~, 0, 1) é uma álgebra de Boole e $\mathbb{O}$ é um novo operador que satisfaz as condições:

$1 \leq \mathbb{O}1$

$\mathbb{O}0 \leq 0$

$\mathbb{O}a \wedge \mathbb{O}b \leq \mathbb{O}(a \wedge b)$

$\mathbb{O}a \vee \mathbb{O}b \leq \mathbb{O}(a \vee b)$.

- Observar as semelhanças entre as lógicas proposicionais que tratam dos conceitos de 'muitos' e 'para uma 'boa' parte', da forma como propomos no item anterior, e a lógica proposicional do 'quase sempre' e, assim como Grácio (1999) criou a família de sistemas modulados, criar uma família para estes sistemas proposicionais.

- Golzio (2011) e Oliveira (2011), inspirados pela lógica do muito de Grácio (1999), introduziram lógicas em ambiente proposicional e quantificacional, respectivamente, para tratar da noção de 'poucos'. Pode-se introduzir, também, uma lógica proposicional para tratar da noção de 'quase nunca' ou 'quase nenhum', em que este operador seria um operador dual ao sugerido neste trabalho. Para isso bastaria nos basearmos no conceito de ideal primo, visto que um ultrafiltro é equivalente a um filtro primo e que os conceitos de ideal e de filtro são duais.

- Baseados no quantificador introduzido na Lógica do Ultrafiltro, construímos uma lógica proposicional, de caráter modal, associada ao conceito de 'quase sempre'. Acreditamos que, da mesma forma que fizemos neste trabalho, podemos tratar outras lógicas que introduzem novos quantificadores na linguagem quantificacional clássica num ambiente proposicional, ou seja, podemos escrever detalhadamente um procedimento geral de como fazer isto.

REFERÊNCIAS

ANTONELLI, G. A. Non-monotonic logic. *Stanford Encyclopedia of Philophy*, 2010. Disponível em: < http://plato.stanford.edu/entries/logic-nonmonotonic/>. Acesso em: 15 jan. 2011.

BARWISE, J.; COOPER, R. Generalized quantifiers and natural language. *Linguistics and Philosophy*, v. 4, 1981. p. 159-219.

BENTHEM, J. V. Determiners and logic. *Linguistics and Philosophy*, v. 6, n. 4. Holland: D. Reidel Publishing Company, 1983. p. 447-478.

BIANCONI, R.; CARNIELLI, W. A.; CONIGLIO, M. E. Lógica e aplicações: Matemática, Ciência da Computação e Filosofia, 2006 (Versão preliminar).

BLACKBURN, S. *Dicionário Oxford de filosofia*. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 1997.

CAVAGNARO, C.; HAIGHT, W. T. *Dictionary of classical and theoretical mathematics*. Boca Raton: CRC Press, 2001.

CARNIELLI, W.; GRÁCIO, M. C. C. Modulated logics and flexible reasoning. *Logic and logical philosophy*, v. 17, n. 3, p. 211-249, 2008.

FEITOSA, H. A.; NASCIMENTO, M. C.; GRÁCIO, M. C. C. *Algebraic elements for the notions of 'many'*. CLE e-Prints (Online), v. 9, n. 1, 2009a. Disponível em: <http://www.cle.unicamp.br>. Acesso em: 27 fev. 2009.

FEITOSA, H. A.; NASCIMENTO, M. C.; GRÁCIO, M. C. C. A propositional version of the logic of the plausible. In: Dutra, L. H. de A. e Mortari, C. A. (orgs.). *Anais do V Simpósio Internacional Principia*. Florianópolis: NEL/UFSC, p. 184–195, 2009b.

FEITOSA, H. A.; NASCIMENTO, M. C.; GRÁCIO, M. C. C. Lógica TK: algebraic notions from Tarski's consequence operator. *Principia*, v. 14, n. 1, p. 47-70, 2010. Disponível em: <http://www.cfh.ufsc.br/~principi/>. Acesso em: 10 fev. 2011.

FEITOSA, H. A.; PAULOVICH, L. *Um prelúdio à lógica*. São Paulo: Editora UNESP, 2005.

FRÁPOLLI SANZ, M. J. Cuantificadores. In: FRÁPOLLI SANZ, M. J. (Coord.). *Filosofía de la lógica*. Madrid: Tecnos, 2007. p. 151-178.

GENTZEN, G. *The collected papers of Gerhard Gentzen*. Editor M. E. Szabo. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1969.

GOLZIO, A. C. J. *Elementos algébricos para noção de ‘poucos’ e sua formalização em sistemas lógicos dedutivos*. Dissertação de mestrado (Mestrado em Filosofia da Mente, Epistemologia e Lógica) – Faculdade de Filosofia e Ciências, Universidade Estadual Paulista, Marília, 2011.

GRÁCIO, M. C. C. *Lógicas moduladas e raciocínio sob incerteza*. Tese de Doutorado (Doutorado em Lógica e Filosofia da Ciência) – Instituto de Filosofia e Ciências Humanas, Universidade Estadual de Campinas, 1999.

HAACK, S. *Filosofia das lógicas*. Tradução de C. A. Mortari e L. H. A. Dutra. São Paulo: Editora UNESP, 2002. Título original: *Philosophy of logics*.

HEGENBERG, L. *Dicionário de Lógica*. São Paulo: EPU, 1995.

HINTIKKA, J.; SANDU, G. What is a quantifier? *Synthese*, v. 98, p. 113-129, 1994.

KRAUSE, D. *Capítulo4: Lógica e Ontologia*, 2009. Disponível em: <http://www.cfh.ufsc.br/~dkrause/pg/cursos/Ontologia/LogOnto(LaTeX).pdf>. Acesso em: 20 agosto 2010.

KEISLER, H. J. Logic with the quantifier “there exist uncountable many”. *Annals of Mathematical Logic*, v. 1, 1970. p. 1-93.

LOEBNER, S. Natural language and generalized quantifiers theory. In: GÄRDENFORS, P. (Ed.). *Generalized quantifiers*. Holland: D. Reidel Publishing Company, 1987. p. 181-201.

MACHADO, N. J.; CUNHA, M. O. *Lógica e linguagem cotidiana*: verdade, coerência, comunicação, argumentação. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

MENDELSON, E. *Álgebra booleana e circuitos de chaveamento*: resumo da teoria, 150 problemas resolvidos. Tradução de C. M. Paciornick. São Paulo: McGraw-Hill do Brasil, 1977.

MIRAGLIA, F. *Cálculo proposicional: uma interação da álgebra e da lógica*. Campinas: UNICAMP/CLE. (Coleção CLE, v. 1), 1987.

MOSTOWSKI, A. On a generalization of quantifiers. *Fundamenta Mathematicæ*, v. 44, 1957. p. 12-36.

OLIVEIRA, K. E. C. S. *Uma lógica do poucos*. Dissertação de mestrado (Mestrado em Filosofia da Mente, Epistemologia e Lógica) – Faculdade de Filosofia e Ciências, Universidade Estadual Paulista, Marília, 2011.

RASIOWA, H. *An Algebraic Approach to non-classical logics*. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1974.

RASIOWA, H.; SIKORSKI, R. *The mathematics of metamathematics*. 2. ed. Warszawa: PWN – Polish Scientific Publishers, 1968.

REITER, R. A logic for default reasoning. *Artificial Intelligence*. v. 13, p. 81-132, 1980.

RESCHER, N. Plurality-quantification. *The Journal of Symbolic Logic*, v.27, p.373-4, 1962.

SCHWICHTENBERG, H.; TROELSTRA, A. S. *Basic proof theory*. Cambridge: Cambridge University Press, 2000.

SETTE, A. M., CARNIELLI, W. A., VELOSO, P. An alternative view of default reasoning and its logic. In: HAUESLER, E. H., PEREIRA, L. C. (Eds.) *Pratica*: Proofs, types and categories. Rio de Janeiro: PUC, 1999. p. 127-158.

SMULLYAN, R. M. *First-order logic*. New York: Springer-Verlag / Dover Publication, 1968.

TARSKI, A. *Introduction to logic and to the methodology of deductive sciences*. Tradução de O. Helmer. Mineola: Dover Publications, 1995. Título original: *O logice matematycznej i metodzie dedukcyjnej*.

VAUGHT, R. L. The completeness of logic with the added quantifier “there are uncountably many”. *Fundamenta Mathematicæ*, v. 54, 1964. p. 303-304.

WESTERSTÅHL, D. Generalized quantifiers. *Stanford Encyclopedia of Philosophy*, 2005. Disponível em: <http://plato.stanford.edu/entries/generalized-quantifiers/>. Acesso em: 11 jan. 2006.