



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Campus de Rio Claro

Grafos em superfícies

Mariana Thieme Moraes Takahama

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação – Mestrado Profissional em Matemática Universitária como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre

Orientadora
Profa. Dra. Alice Kimie Miwa Libardi

2014

511.5 Takahama, M. T. M.
T136g Grafos em superfícies/ Mariana Thieme Moraes Takahama- Rio
Claro: [s.n.], 2014.
63 f.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas.

Orientadora: Alice Kimie Miwa Libardi

1. Teoria dos Grafos. 2. superfícies fechadas. 3. Grupo de homologia. 4. Simplexos. 5. Complexo simplicial. I. Título

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, a Deus por essa oportunidade e por ter colocado pessoas especiais em minha vida, que me ajudaram direta ou indiretamente a concluir esse trabalho!

Agradeço aos meus pais, Seiti e Angela, pelo eterno apoio, carinho e empenho em sempre tornar os meus sonhos realidade! Por me apoiarem nos momentos bons e ruins e nunca me deixarem desistir de alcançar os meus objetivos! Isso sempre me fortaleceu! Obrigada pelo amor incondicional!

Agradeço ao meu noivo, Thiago, pelo apoio, incentivo, compreensão e por sempre me colocar para cima, me escutar e me fazer sorrir!

Agradeço a todos os professores do IBILCE, em especial à Professora Doutora Ermínia de Lourdes Campello Fanti que acreditou em meu potencial no momento mais difícil da minha graduação, me incentivou a seguir em frente e cursar o mestrado.

Agradeço a todos os professores de Rio Claro, em especial à Professora Doutora Alice Kimie Miwa Libardi pela excelente orientação, por acreditar no meu potencial, pela disponibilidade em sempre me ajudar e me receber! Agradeço imensamente ao seu empenho para que esse trabalho ficasse cada vez melhor!

Agradeço aos meus tios, Belardino e Ana, pela ajuda e acolhimento na mudança de cidade, por sempre me apoiarem nos trabalhos e estudos!

Agradeço aos meus amigos e companheiros de viagem (Rio Preto à Rio Claro) Edilson, Débora, Aline, Thaisa, João, Edmar, Denis, Érica, Juliano, Renato, Williner e Felipe, sem vocês as viagens seriam muito mais difíceis! Agradeço as nossas conversas e desabafos, que somente nós que acordávamos tão cedo entendíamos! Aos auxílios com o winedit e em tudo mais!

Agradeço aos meus companheiros de disciplinas, pelas trocas de informações e discussões sobre os conteúdos!!!

Ninguém vence sozinho ... Muito obrigada a todos que colaboraram para o meu desenvolvimento e o deste trabalho!

Resumo

O objetivo principal deste trabalho é obter um resultado sobre separação de superfícies por grafos. A Homologia Relativa é a principal ferramenta usada, obtendo uma versão particular da Dualidade de Lefschetz. Para a elaboração desta dissertação foram estudados: grafos, homologia simplicial, homologia relativa e grafos em superfícies. O estudo foi baseado em grande parte no livro *Graphs, Surfaces and Homology* de P. J. Giblin.

Palavras-chave: Teoria dos Grafos, superfícies fechadas, Grupo de homologia, Simplexos, Complexo simplicial.

Abstract

The main goal of this work is to get a result on separation of surfaces by graphs. The Relative Homology is the principal tool used and we get a particular version of Lefschetz duality. For the preparation of this dissertation we studied: graphs, simplicial homology, relative homology and graphs on surfaces. The study was based on the book *Graphs, Surfaces and Homology* of P. J. Giblin.

Keywords: Graphs theory, Closed surfaces, Homology groups, Simplexes, Simplicial complexes.

Sumário

1	Introdução	9
2	Grafos	11
3	Superfícies fechadas	21
3.1	Superfícies fechadas e orientáveis	21
3.2	Representação poligonal de uma superfície fechada	24
4	Complexos simpliciais	29
4.1	Simplexos	29
4.2	Simplexos Orientados	31
4.3	Complexos simpliciais	32
4.4	Estrelas e Links	34
5	Grupos de homologia	37
5.1	Grupos de cadeia e homomorfismo bordo	37
5.2	Grupos de Homologia	42
5.2.1	Zero-ésimo grupo de homologia	42
5.2.2	Primeiro grupo de Homologia	44
5.2.3	Grupos de homologia relativa	47
5.2.4	Zero-ésimo grupo de homologia relativa	49
5.2.5	Primeiro grupo de homologia relativa	50
5.2.6	Três homomorfismos	51
6	Grafos em Superfícies	55
6.1	Aplicação: Separando superfícies com grafos	59
	Referências	63

1 Introdução

Nesta dissertação tenho por objetivo estudar grafos em superfícies. Para tanto, dividiremos este trabalho em 6 capítulos, discriminados a seguir.

No capítulo 2, inicialmente, trabalharemos a ideia intuitiva de um grafo, e em seguida, a definição de tipos específicos de grafos. Introduziremos o conceito de árvore maximal entre outros conceitos importantes para o desenvolvimento deste trabalho.

No capítulo 3, construiremos todas as superfícies fechadas e iremos exibi-las como uma representação poligonal. Para isso, assumiremos três superfícies básicas: esfera, toro e plano projetivo. Mostraremos como distinguir duas superfícies fechadas.

No capítulo 4, definiremos de maneira mais formal um triângulo. A definição deixará claro que pontos serão chamados de 0-simplexos, segmentos de 1-simplexos, triângulos de 2-simplexos, tetraedros sólidos de 3-simplexos e assim por diante. O tetraedro sólido será o nosso bloco de construção 3-dimensional. Tudo neste capítulo irá ocorrer em um espaço vetorial real R^N , onde os elementos são chamados de pontos ou de vetores. A única restrição é que N seja grande o suficiente para a discussão fazer sentido, portanto, se falarmos de 4 pontos não coplanares então, obviamente, N deve ser pelo menos 3.

No capítulo 5, formalizaremos a definição de grupos de homologia para um complexo simplicial K orientado e arbitrário. A partir de um grupo $H_p(K)$, em cada dimensão p com $0 \leq p \leq \dim K$ mediremos, a grosso modo, o número de buracos p -dimensionais em K . Se K for um grafo orientado então $H_1(K)$ será isomorfo ao grupo $Z_1(K)$ de 1-ciclos em K .

No capítulo 6, concluiremos o nosso trabalho com a aplicação que mede em quantas regiões uma superfície fechada M , que contém um polígono fechado, será dividida por um grafo K .

2 Grafos

Um grafo é intuitivamente um subconjunto do espaço constituído por um número finito de pontos tais que pares de pontos podem ser ligados por arcos. Chamaremos os pontos de vértices e os arcos de arestas do grafo. O encontro de duas arestas deve ser em um vértice portanto, nenhuma aresta liga um vértice a si mesmo e dois vértices nunca são ligados por mais de uma aresta. Vejamos alguns exemplos de figuras que não constituem um grafo:



Formalmente, definimos um grafo da seguinte maneira:

Definição 2.1. *Um grafo é um par (V, E) onde V é um conjunto finito de vértices e E é um conjunto de pares não-ordenados de elementos distintos de V , as arestas. Assim um elemento de E é da forma $\{v, w\}$ onde v e w pertencem a V e $v \neq w$, dizemos também que $\{v, w\}$ é a aresta que liga os vértices v e w (ou w e v).*

Em várias circunstâncias é conveniente falar em grafo orientado, no qual cada aresta possui uma orientação fixada. Vejamos na definição a seguir com mais detalhes o que é um grafo orientado.

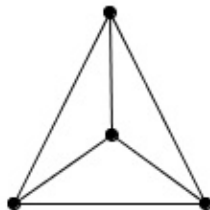
Definição 2.2. *Um grafo orientado é um par (V, E) onde V é um conjunto finito de pontos e E é um conjunto de pares ordenados de elementos distintos de V com a seguinte propriedade, se o par ordenado $(v, w) \in E$ então $(w, v) \notin E$. Os elementos de V são chamados vértices e os elementos (v, w) de E são chamados de arestas de v para w .*

Associado a todo grafo orientado existe um grafo abstrato, que é obtido pela mudança das arestas ordenadas pelas não-ordenadas. Obviamente os dois grafos devem ter o mesmo número de vértices e arestas, sendo que (v, w) e (w, v) não podem pertencer ao mesmo tempo a E .

Existem alguns tipos especiais de grafos que definiremos a seguir:

Definição 2.3. Um grafo completo é definido como um grafo onde todo par de vértices é ligado por uma aresta. Um grafo completo com n vértices é denotado por K_n .

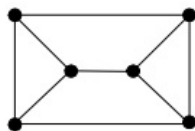
Por exemplo, o grafo K_4



Definição 2.4. Um grafo G nulo ou vazio é um par (V, E) em que o conjunto V é vazio.

Definição 2.5. Um grafo é regular (de grau k , ou ainda k -regular) quando todos os seus vértices possuem o mesmo grau k , ou seja, cada vértice tem k -arestas com origem neste vértice.

Por exemplo, a figura abaixo mostra um grafo 3-regular, isto é, todos os vértices com grau 3.



Definição 2.6. Seja (V, E) um grafo. A realização de um grafo (V, E) , que continuaremos chamando de grafo, é um conjunto de pontos em um espaço vetorial real \mathbf{R}^n , sendo os vértices representados por pontos e as arestas por segmentos de retas, ligando estes pontos. Na realidade, para que um grafo se realize precisamos de duas condições:

- (i) se duas arestas interceptam-se, então interceptam-se em um ponto final comum;
- (ii) cada vértice é um dos pontos extremos de uma aresta.

A realização de um grafo orientado é sua realização de um grafo (v, w) com a ordenação em cada uma das arestas. Iremos indicar a orientação por uma flecha, como no diagrama abaixo, onde a aresta é de v para w , já denotada acima por (v, w) .



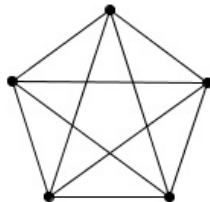
Vejamos agora a realização dos grafos completos com até 3 vértices no \mathbf{R}^2 :



Um grafo completo com 4 ou mais vértices não pode ser realizado no \mathbf{R}^2 , mas sim no \mathbf{R}^3 . Na realidade, todo grafo pode ser realizado no \mathbf{R}^3 . Por exemplo,

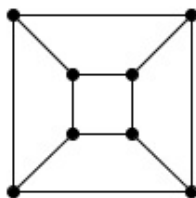


Mesmo que os grafos estejam no \mathbf{R}^3 , vamos desenhá-los sempre no plano. Convençamos desenhar pontos bem escuros para vértices e segmentos de retas para arestas. Neste caso, dizemos que o grafo está projetado no plano. Por exemplo, o grafo completo com 5 vértices pode ser desenhado como na figura a seguir:



%captiongrafo completo com 5 vértices

Considere o grafo no \mathbf{R}^3 formado por vértices e arestas de um cubo. O grafo realizado no \mathbf{R}^2 abaixo, representa a realização do "cubo" no \mathbf{R}^2 .



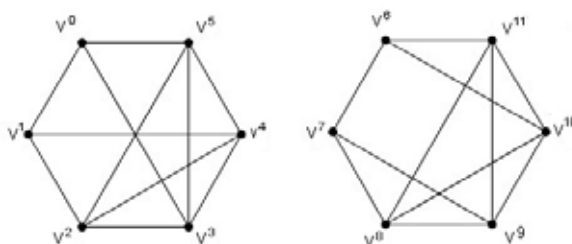
Definição 2.7. *Dois grafos (V, E) e (V', E') são isomorfos se existe uma aplicação bijetora $f : V \rightarrow V'$ de tal modo que:*

$$\{v, w\} \in E \iff \{f(v), f(w)\} \in E'.$$

A aplicação f é chamada um isomorfismo entre os grafos, ou seja, f é uma aplicação bijetora do conjunto de vértices de (V, E) sobre o conjunto de vértices de (V', E') , preservando as arestas.

Para provar que dois grafos não são isomorfos vamos olhar propriedades dos grafos que são invariantes por isomorfismos, e tentar encontrar uma propriedade que um grafo possui e o outro não. A propriedade mais simples é a ordem dos vértices. A ordem de um vértice é o número de arestas que tem aquele vértice como um ponto final.

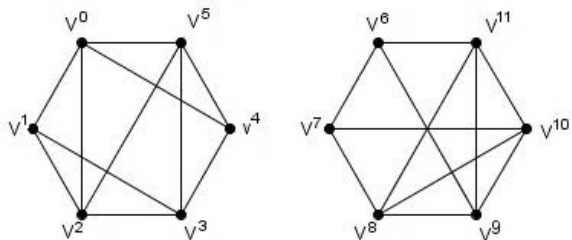
Exemplo 2.1. Os dois grafos abaixo são isomorfos



No exemplo anterior podemos observar que ambos os grafos possuem 2 vértices de ordem 3 e 4 vértices de ordem 4. Abaixo está a aplicação bijetora do conjunto de vértices dos dois grafos.

Grafo 1	Grafo 2	Ordem
v^1	v^7	3
v^0	v^6	3
v^5	v^{11}	4
v^4	v^9	4
v^3	v^{10}	4
v^2	v^8	4

Os dois grafos abaixo não são isomorfos.



Observe que embora os dois grafos possuam 2 vértices de ordem 3 e 4 vértices de ordem 4 eles não são isomorfos pois, no Grafo 1 os 2 vértices de ordem 3 não são pontos

finais de uma mesma aresta como acontece no Grafo 2, logo não é possível construir aplicação bijetora preservando as arestas.

Definição 2.8. *Um caminho sobre um grafo G de v^1 para v^{n+1} é uma sequência de vértices e arestas*

$$v^1 e^1 v^2 e^2 \dots v^n e^n v^{n+1}$$

onde $e^1 = (v^1 v^2), e^2 = (v^2 v^3), \dots, e^n = (v^n v^{n+1}), n \geq 0$.

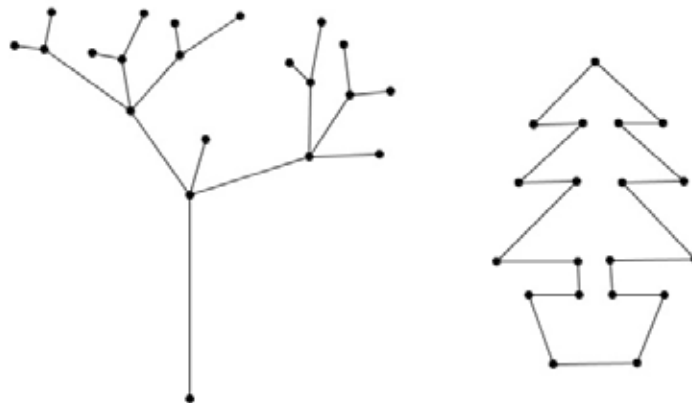
Perceba que se $n = 0$ teremos somente v^1 e nenhuma aresta. Se G for orientado, exigimos que $e^i = (v^i v^{i+1})$ sempre nesta ordem ou $(v^{i+1} v^i)$ sempre nesta ordem, para $i = 1, \dots, n$. Chamaremos o caminho de simples se as arestas e^1, \dots, e^n são todas distintas, e os vértices v^1, \dots, v^{n+1} são todos distintos exceto possivelmente $v^1 = v^{n+1}$. Se o caminho simples tem $v^1 = v^{n+1}$ e $n > 0$ este caminho recebe o nome de laço. Observe que para termos um laço, n deve ser maior ou igual a 3.

Definição 2.9. *Um grafo G é chamado conexo se, dados quaisquer dois vértices v e w de G existe um caminho em G de v para w . Para qualquer grafo não vazio G , uma componente de G consiste de todas as arestas e vértices que ocorrem em um caminho, começando em um vértice particular de G . Assim um grafo não vazio conexo tem exatamente uma componente.*

Definição 2.10. *Chamamos de árvore um grafo G que é conexo e que não possui laços.*

Uma aresta e de um grafo é parte de um laço no grafo se, e somente se, a remoção de e não aumentar o número de componentes do grafo.

Exemplo 2.2. Segue da definição acima que o grafo da esquerda é uma árvore e o grafo da direita não.



Definição 2.11. *Um grafo H é chamado um subgrafo de um grafo G se os vértices de H são vértices de G e se as arestas de H são arestas de G . H é chamado um subgrafo próprio de G se além disso $H \neq G$.*

O grafo G pode ter uma árvore como subgrafo (o grafo vazio é uma árvore). Um conjunto Γ dos subgrafos de G que são árvores tem elementos maximais, isto é, teremos pelo menos um $T \in \Gamma$ tal que T não é subgrafo próprio de qualquer $T' \in \Gamma$. T é chamado de árvore maximal de G .

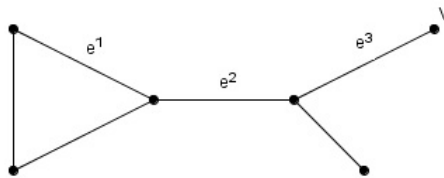
Proposição 2.1. *Seja G um grafo conexo. Um subgrafo T de G é uma árvore maximal para G se, e somente se, T é uma árvore e contém todos os vértices de G .*

Demonstração. Vamos supor G não-vazio. Suponha que T é uma árvore maximal de G , portanto uma árvore não-vazia. Suponha que um vértice v de G não pertença a T . Escolha um vértice w de T e um caminho de v para w em G . Seja v^i o primeiro vértice desse caminho em T , o próximo vértice v^{i+1} e a aresta $e^i = (v^i v^{i+1})$ não pertencerão a T . Adicionando v^{i+1} e e^i a T obtemos T' , um subgrafo de G maior que T . Além disso, e^i não pode ser parte de qualquer laço de T' , porque um de seus pontos finais, v^i não pertence a nenhuma aresta de T' exceto e^i . Assim T' é uma árvore e T não é maximal.

Reciprocamente, suponha que T é um subgrafo de G que é uma árvore e contém todos os vértices de G . Suponha que H é um subgrafo de G com T um subgrafo próprio de H . Desde que T já tenha todos os vértices de G deve haver uma aresta, $e = (vw)$ (por exemplo) em H mas não em T . Desde que T é conexo existe um caminho simples em T de v para w , acrescentando e ao final do caminho obtemos um laço em H . Por isso H não é uma árvore e T é maximal. \square

Sejam G um grafo conexo e um subgrafo T que é uma árvore. Então T é um subgrafo de uma árvore maximal de G . De fato, se H é um subgrafo de G que não contém um laço (não necessariamente conexo), então H é um subgrafo de uma árvore maximal de G .

Um vértice v de uma aresta (vw) em um grafo G é chamado livre se v não é um vértice de qualquer aresta de G exceto e , ou seja, v é um vértice de grau 1. Uma aresta interior de um grafo é uma aresta que não possui um ponto final como vértice livre. No diagrama abaixo e^1 e e^2 são arestas interiores, e^3 não. v é um vértice livre de e^3 .



Um grafo em que todas as arestas são interiores é obrigado a ter um laço (desde que o número de arestas seja finito), daí segue que uma árvore com pelo menos uma aresta sempre possui uma aresta e que não está no interior. Removendo esta aresta do grafo junto com o vértice livre de e , teremos o que é chamado de colapso. Assim o colapso transforma uma árvore em uma árvore menor, o que mostra que qualquer árvore se

colapsa a um único vértice livre e se um grafo colapsa a um único vértice livre, então é uma árvore.

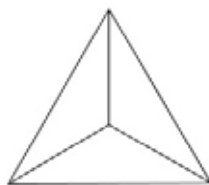
Falaremos agora um pouco sobre a Lei de Kirchhoff e sobre o número ciclomático, uma propriedade fundamental dos grafos que surgiu através do estudo de correntes contínuas.

Podemos associar um grafo a um circuito de correntes contínuas, substituindo os terminais por vértices e os fios por arestas. As Leis de Kirchhoff estabelecem equações lineares para as correntes.

Suponhamos que existam α_0 vértices e α_1 arestas, então quaisquer $\alpha_0 - 1$ das α_0 equações são independentes. A fim de determinar as correntes, são necessárias $\alpha_1 - \alpha_0 + 1$ equações independentes, que correspondem a $\alpha_1 - \alpha_0 + 1$ laços independentes.

O número de laços independentes $\alpha_1 - \alpha_0 + 1$ decorrentes da análise de circuitos elétricos de Kirchhoff foi chamado de número ciclomático do circuito por James Clerk Maxwell.

Um simples exemplo é o grafo abaixo que possui número ciclomático 3 já que todos os laços são uma combinação de 3 laços que ligam as regiões dentro do triângulo grande.



A seguir a definição e o teorema que conectam a ideia de árvore maximal com o número ciclomático.

Definição 2.12. *Seja G um grafo conexo com $\alpha_0 = \alpha_0(G)$ vértices e $\alpha_1 = \alpha_1(G)$ arestas. O número ciclomático de G é o número inteiro:*

$$\mu = \mu(G) = \alpha_1 - \alpha_0 + 1.$$

Teorema 2.1. *Seja G um grafo com o número ciclomático μ . Então:*

1. $\mu \geq 0$.
2. $\mu = 0$ se, e somente se, G é uma árvore.
3. Toda árvore maximal de G tem $\alpha_1 - \mu$ arestas.

Assim toda árvore maximal de G pode ser obtida de G pela remoção de μ arestas

adequadas (e não de vértices). Estas arestas devem ser interiores desde que T seja conexo.

4. Removendo menos que μ arestas de G não conseguiremos ter uma árvore, removendo mais que μ arestas sempre teremos G desconexo.

Demonstração. A demonstração de (1) e (2) é por indução sobre α_1 . Claramente (1) e (2) são verdadeiras se $\alpha_1 = 0$. Vamos supor que sejam verdadeiros para $\alpha_1 < k$, onde $k \geq 1$, e seja G com k arestas.

(i) Suponha que G é uma árvore. Então G tem uma aresta que não é interior, por exemplo e . Removendo a aresta e e um vértice livre desta mesma aresta de G deixamos a árvore G' com $k - 1$ arestas. Pela hipótese de indução, $\mu(G') = 0$, e por construção $\mu(G') = \mu(G)$. Por isso $\mu(G) = 0$.

(ii) Suponha que G não seja uma árvore, então G tem arestas interiores, por exemplo alguma aresta de um laço de G . Seja G' obtido pela remoção desta aresta (e de nenhum vértice). A remoção de uma aresta do laço não pode desconectar G , assim G' não é desconexo e pela hipótese de indução $\mu(G') \geq 0$. Por construção $\mu(G') = \mu(G) - 1$. Logo $\mu(G) \geq 1$.

Isto completa a demonstração por indução de (1) e (2). Para demonstrar (3), seja T uma árvore maximal de G , assim $\alpha_0(G) = \alpha_0(T)$. Como $\mu(T) = 0$, segue que $\alpha_1(T) = \alpha_1(G) - \mu(G)$.

Para demonstrar (4), note que removendo p arestas (e nenhum vértice) de G ou deixamos um grafo desconexo ou um grafo conexo com um único número ciclomático $\mu(G) - p$. Disto e de (1) e (2) podemos deduzir (4). \square

Observação 2.1. 1. Removendo μ arestas ao acaso podemos não deixar um grafo conexo. Entretanto se removendo μ arestas, o grafo torna-se conexo então esta deve ser uma árvore maximal, ou seja, irá conter todos os vértices e o número ciclomático é zero.

2. Seja G um grafo conexo com $\mu(G) = 1$. Então G tem exatamente um laço.

Desde que $\mu(G) > 0$, G tem pelo menos um laço. Se tiver dois laços, seja e uma aresta de um laço mas não de outro. Removendo e de G deixaremos G conexo, e continuará contendo um laço, mas também diminui μ isto é, $\mu = 0$, o que é uma contradição, logo G possui um único laço.

Definição 2.13. Seja G um grafo orientado com arestas e^1, \dots, e^r . Uma 1-cadeia z em G é dado por

$$z = \sum_{i=1}^r \lambda_i e^i,$$

λ_i inteiros. Para cada aresta $e^i = (v, w)$, seja o bordo de e^i , denotado por $\partial(e^i) = w - v$.

A 1-cadeia z dada acima é um 1-ciclo se

$$\partial(z) = \sum_{i=1}^r \lambda_i \partial e^i = 0$$

Teorema 2.2. *Seja G um grafo conexo orientado com número ciclomático μ . Sejam z um 1-ciclo em G e l^1, l^2, \dots, l^μ laços básicos. Denotando-se por z^i o 1-ciclo associado a l^i , a direção do laço l^i escolhida de modo que e^i ocorre em z^i com coeficiente $+1$, então existem inteiros $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\mu$ únicos, tais que:*

$$z = \sum_{i=1}^{\mu} \lambda_i z^i,$$

λ_i é o coeficiente da aresta e^i em z .

Demonstração. Vamos supor que G é uma árvore, isto é, que $\mu = 0$ e seja z um 1-ciclo em G . Vamos provar que $z = 0$, ou seja, que não temos 1-ciclos não triviais na árvore. (Isto generaliza o fato de que não existem laços em uma árvore). O resultado é claro se G não tem arestas, então supomos verdadeiro para árvores com número de arestas k ($k \geq 1$) e G com k arestas. Seja e uma aresta não-interna de G , e v um vértice livre de e . O coeficiente de e em z deve ser zero, caso contrário o coeficiente de v em ∂z não seria zero.

Por isso z é um 1-ciclo no grafo obtido pela remoção de e e v de G . Este grafo é uma árvore com $k - 1$ arestas. Por indução $z = 0$.

Agora suponha $\mu > 0$, e seja z um 1-ciclo de G . Seja λ_i o coeficiente de e^i em z , e consideremos

$$z' = z - (\lambda_1 z^1 + \dots + \lambda_\mu z^\mu)$$

Certamente z' é um 1-ciclo, desde que z e o z^i sejam 1-ciclos. Também, o coeficiente de cada e^i em z' é 0, pela escolha de λ^i e desde que o coeficiente de e^i em z^i seja $+1$ enquanto e^i não ocorra em z^j para $j \neq i$. Então z' é um 1-ciclo no grafo obtido pela remoção das arestas e^1, \dots, e^μ de G . Este grafo é uma árvore (maximal de G) e pela primeira parte da demonstração $z' = 0$.

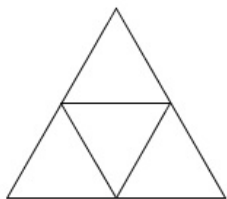
Falta verificar que a expressão de z ser única. Para ver isso, suponha que

$$z = \sum_{i=1}^{\mu} \lambda_i z^i = \sum_{i=1}^{\mu} \lambda'_i z^i$$

Comparando coeficientes de e^i com os dois lados temos que $\lambda_i = \lambda'_i$ □

Observe que uma base para 1-ciclo em um grafo conexo G é uma coleção de 1-ciclos de G dos quais cada 1-ciclo de G pode ser expressado unicamente como uma combinação linear com coeficientes inteiros. Assim z^1, \dots, z^μ é uma base. Mas nem toda base surge desta maneira, de uma árvore maximal. Por exemplo, é impossível

achar arestas e^1, e^2, e^3, e^4 do grafo abaixo, tal que, os representantes cíclicos z^1, z^2, z^3, z^4 formam a base dada pelos bordos dos quatro triângulos equiláteros pequenos.



3 Superfícies fechadas

A fim de estudar as superfícies vamos assumir que elas podem ser divididas em triângulos. Portanto, é necessário, de início, identificar as propriedades que cada objeto deve possuir para ser chamado de superfície, e em seguida ver que propriedades nos garantem uma triangulação.

A propriedade fundamental é a seguinte: Seja um ponto P na superfície. Os pontos próximos a P constroem um pequeno caminho na superfície, a região compreendida por este caminho é homeomorfa a um disco 2-dimensional. O disco pode ser dobrado ou esticado, mas não pode ser rasgado, até obtermos um polígono. Ligando P aos vértices deste polígono obtemos triângulos que constituem uma triangulação do disco que contém P na superfície.



No nosso trabalho vamos considerar superfícies fechadas, isto é, compactas e sem bordo. Posteriormente, apresentaremos a definição de superfícies fechadas, formalmente.

3.1 Superfícies fechadas e orientáveis

Recordemos que em um grafo, as arestas se interceptam apenas nos vértices. Vamos agora construir objetos 2-dimensionais, impondo uma condição de interseção. No caso, os objetos são triângulos, que podem ser de todo tipo e tamanho. Note que todo triângulo possui 3 vértices, 3 arestas e uma face. Considerando apenas os vértices e as arestas, a condição de interseção é a seguinte:

Dois triângulos quaisquer:

- (i) são disjuntos ou
- (ii) possuem um vértice em comum ou

(iii) possuem dois vértices em comum, e conseqüentemente, uma aresta em comum.

Uma coleção M de triângulos, satisfazendo a condição de interseção é conexa se dados dois vértices quaisquer existe um caminho ao longo das arestas ligando esses dois vértices. Observe que o conjunto de arestas e vértices dos triângulos de M formam um grafo.

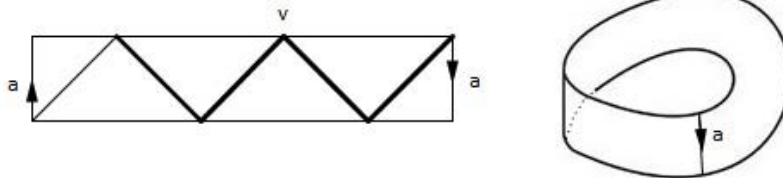
Um outro conceito importante para definir superfícies fechadas é o *link*. Considere um vértice v de algum triângulo da coleção que satisfaz as condições de interseção. Os lados opostos a v nos triângulos de M que possuem v como um vértice irão formar um grafo, chamado de *link* de v .

Definição 3.1. Uma superfície fechada é uma coleção M de triângulos (em um espaço euclidiano) de tal modo que:

- (i) M satisfaz as condições de interseção;
- (ii) M é conexo;
- (iii) para qualquer vértice v de um triângulo de M , o *link* de v é um polígono fechado simples.

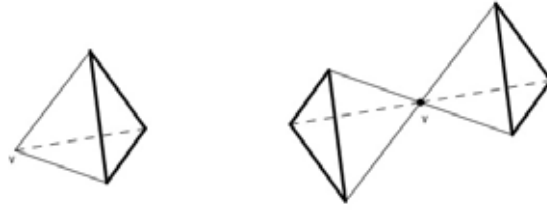
Qualquer aresta de uma superfície fechada M está em exatamente dois triângulos de M . Mas, note que 2 tetraedros com um vértice em comum possuem esta propriedade, embora não sejam uma superfície fechada. Dois tetraedros com uma aresta em comum não satisfazem a condição que toda aresta está em exatamente dois triângulos.

A definição de superfícies fechadas não permite a coleção de triângulos abaixo

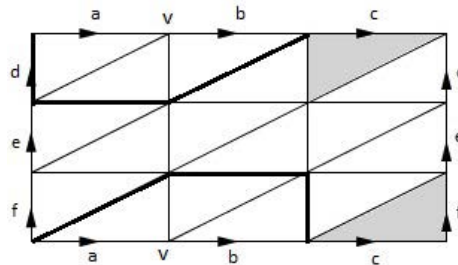


já que o *link* do vértice v não forma um polígono fechado simples (é um arco poligonal). O diagrama mostra a triangulação da faixa de Möbius, que é obtida juntando as pontas do retângulo após um giro de 180° . Revertendo uma das setas do diagrama obtemos um cilindro, no qual as extremidades do retângulo são identificadas sem a torção.

Exemplo 3.1. Um tetraedro oco é uma superfície fechada, o *link* de qualquer vértice é dado pelas 3 arestas de uma face oposta. Entretanto 2 tetraedros com um vértice em comum não formam uma superfície fechada desde que o *link* de um vértice comum seja dado por 2 polígonos fechados e não por um polígono fechado, o que não satisfaz a terceira condição da definição de superfícies fechadas.



O diagrama abaixo mostra uma representação de uma superfície fechada que contém 18 triângulos. Os pares com mesma letra coincidem, por exemplo, os dois triângulos sombreados possuem a aresta c em comum. O *link* de v é desenhado pela linha mais grossa no diagrama, as duas linhas grossas juntas formam um hexágono fechado. A superfície fechada descrita é uma triangulação de um toro.



Abaixo temos as representações das triangulações de uma garrafa de Klein e de um plano projetivo.

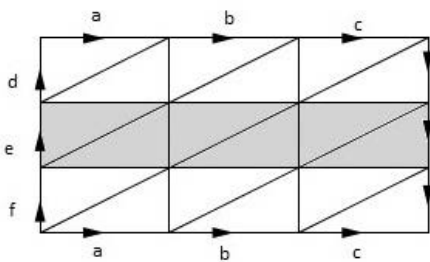
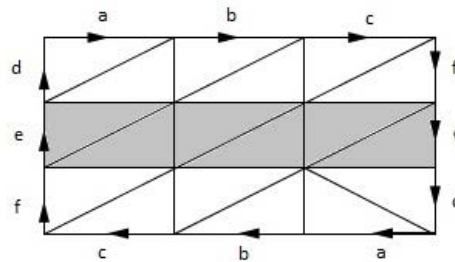
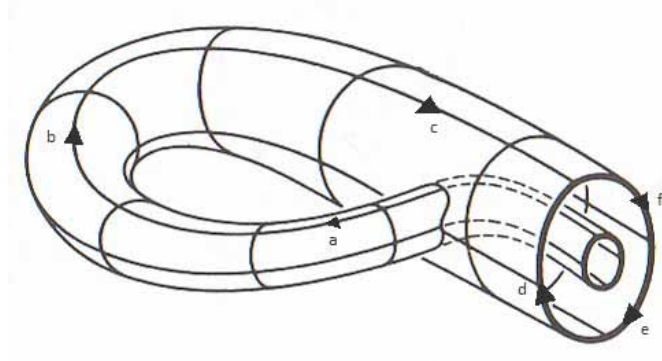


Figura 3.1: Garrafa de Klein

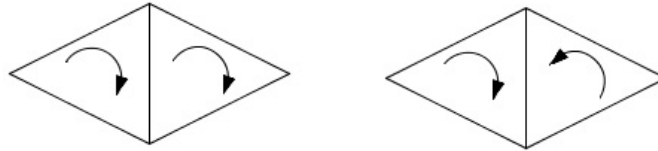


Plano projetivo

As duas superfícies podem ser construídas em um espaço tridimensional. O desenho da garrafa de Klein, no qual existe uma auto interseção ao longo do círculo, está abaixo:



A maior divisão entre superfícies fechadas é entre orientáveis e não-orientáveis. Vamos conhecer de uma forma um pouco informal este conceito, iremos defini-lo formalmente no próximo capítulo. Cada triângulo de uma superfície fechada M terá uma seta desenhada internamente, mostrando a orientação, como no diagrama



No diagrama da esquerda, os dois triângulos com a aresta comum estão coerentemente orientados, enquanto os triângulos do diagrama da direita não estão coerentemente orientados.

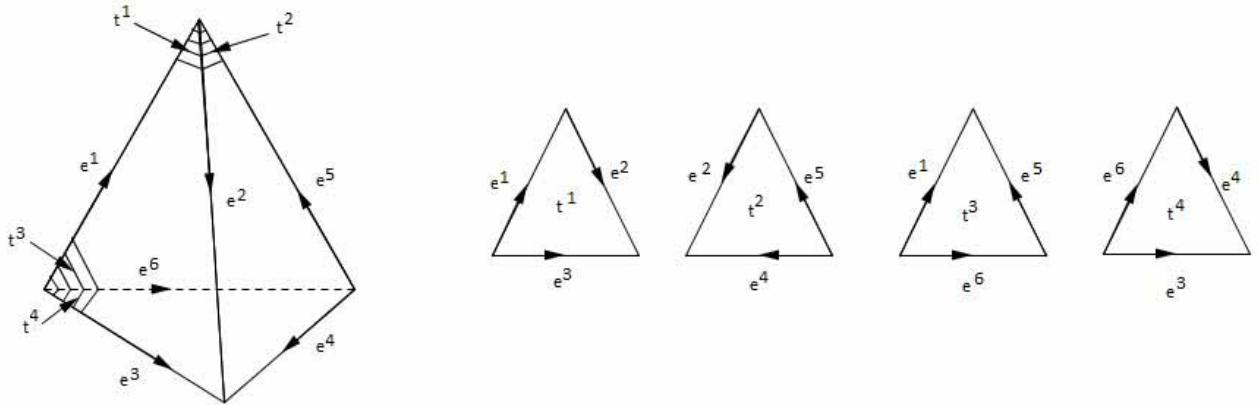
Definição 3.2. *Uma superfície fechada M é chamada (coerentemente) orientada se todos os triângulos de M possuem a mesma orientação e tal que a aresta em comum dos dois triângulos introduzem orientações opostas na aresta em comum. Caso contrário M é chamado não-orientável.*

Exemplo 3.2. No exemplo anterior vimos algumas triângulações e podemos notar que o toro é orientável, mas a garrafa de Klein e o plano projetivo não. Note que as duas últimas superfícies contém uma faixa de Möebius. De fato será mais claro ver se uma superfície fechada é não-orientável se ela contém uma faixa de Möebius. No caso da garrafa de Klein, por exemplo, removendo a parte sombreada de triângulos do exemplo anterior teremos outra faixa de Möebius, que pode ser identificada pelos dois a 's, b 's e c 's.

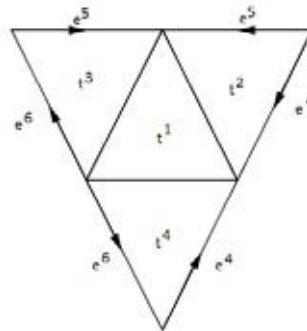
3.2 Representação poligonal de uma superfície fechada

Vamos começar com uma superfície fechada M , orientando arbitrariamente as arestas e rotulando os triângulos t^1, \dots, t^n e as arestas e^1, \dots, e^m . A informação necessária

para construir M baseia-se nos n triângulos e, para cada triângulo, as três arestas orientadas que lhe pertencem. Por exemplo na figura abaixo, o tetraedro da esquerda pode ser construído pelos quatro triângulos da direita



Vamos tentar construir um plano de representação de M mais conveniente do que a coleção de n triângulos disjuntos com arestas rotuladas. No caso de um tetraedro, conseguimos construir o plano de representação, pela montagem de M no plano: podemos juntar t^2 a t^1 por e^2 , e t^3 a t^1 por e^1 , e t^4 a t^1 por e^3 . O resultado é o diagrama abaixo que descreve completamente o modo de como cada triângulo de M intersecta outro.

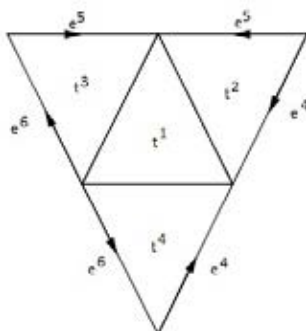


O mesmo procedimento pode ser feito para qualquer superfície M . Começando com n triângulos disjuntos com arestas rotuladas e montando-os um por vez. Triângulos que tenham sido montados em determinado estágio serão chamados de usados e os restantes de não usados. Isto é essencial para identificar em qual estágio a aresta de um triângulo não usado passa a ser a de um usado. O bordo de uma região planar coberta por triângulos usados sempre será um polígono fechado. O único problema desse procedimento é acabar em alguma sobreposição, como no diagrama abaixo em que o triângulo sombreado é o último a ser adicionado.



Para que nenhum triângulo sobreponha o outro, devemos distorcer os triângulos, mantendo as arestas retas, por exemplo, fazendo com que a fronteira dos triângulos usados seja sempre convexa. A representação final de M será uma representação fiel de todas as interseções dos triângulos de M . Isto nos leva a prova que, até que todos os triângulos tenham sido usados, sempre teremos um triângulo não usado com uma aresta em comum com o bordo do polígono dado pelos triângulos usados. Certamente há um triângulo não usado com um vértice v em comum com algum triângulo usado, e a construção garante que todos os vértices estão no bordo do polígono. Agora fica fácil de verificar, usando o fato de que o *link* de v em M é um polígono fechado simples, e que existe um triângulo não usado com vértice v e outro vértice (por isso uma aresta) em comum com um triângulo usado (note que a construção pode não dar certo se começarmos algum estágio com dois tetraedros com um vértice em comum).

Continuando antes de todos os triângulos de M serem usados, obtemos a representação poligonal de M como uma região delimitada por um polígono fechado simples. Esta região é dividida em n triângulos que correspondem aos triângulos de M , e a fronteira do polígono tem $n + 2$ arestas que ocorrem em pares igualmente marcados. A identificação necessária para recuperar M pode ser descrita por um símbolo: comece com um vértice qualquer e leia em volta do bordo do polígono, escreva as arestas ou inverta-as de acordo com a orientação a favor ou contra a direção da viagem. Por exemplo, para o tetraedro abaixo



o símbolo será:

$$(e^5)^{-1}e^4(e^4)^{-1}(e^6)^{-1}e^6e^5$$

Note que o símbolo é sempre cíclico, podemos começar de um vértice diferente e também com uma orientação contrária.

Os triângulos de uma representação poligonal de uma superfície fechada M podem ter orientação coerente, se estes recebem uma orientação coerente de M eles mesmos dependem da disposição da orientação da fronteira do polígono. Se o símbolo contém $\dots a \dots a^{-1} \dots$ então a orientação será coerente através das arestas acima de a , se este contém $\dots b \dots b \dots$ então a orientação não será coerente através da aresta b . De fato, temos os seguintes resultados:

Proposição 3.1. *Suponha que a superfície M é representada por um símbolo, como anteriormente. Então M é orientável se, e somente se, para cada letra que ocorrer no símbolo, o inverso sempre ocorre.*

Suponha que temos um polígono simples fechado com um número par de lados, a região plana é limitada por um polígono que a divide em triângulos, de tal maneira que os lados do polígono são arestas dos triângulos e dois triângulos se interceptam sempre, em um vértice ou em uma aresta. Agora nomeando os lados do polígono com letras ou setas, cada letra será usada exatamente duas vezes. O digrama pode ser esquematizado para colocar os triângulos juntos, uma maneira similar nas arestas pode ser identificada com setas correspondentes.

A identificação das arestas implica na identificação de certos vértices da fronteira poligonal, e com isto acabamos rotulando os vértices do diagrama, aqueles a serem identificados recebem o mesmo nome.

Proposição 3.2. *Um esquema do tipo descrito anteriormente é realizável em superfícies fechadas se, e somente se: (i) os pontos finais de qualquer aresta são nomeados diferentemente, e (ii) não há duas arestas (a menos que sejam identificadas) que tenham a mesma nomeação no ponto final, e (iii) não há dois triângulos que tenham os vértices com mesma nomeação.*

O diagrama então é chamado representação poligonal de superfícies fechadas.

4 Complexos simpliciais

Um triângulo é um bom modo de continuar a sequência ponto, segmento, ... (que se tornam 0-simplexo, 1-simplexo, ...) e sugere que o quarto termo seja o tetraedro sólido. Tudo neste capítulo irá ocorrer em um espaço vetorial real R^N e a menos que indicado de outra forma, a única restrição é que N seja grande o suficiente para a discussão fazer sentido, portanto, se falarmos de 4 pontos não coplanares então, obviamente, N deve ser pelo menos 3.

4.1 Simplexos

Definição 4.1. *Sejam v^0, \dots, v^n , $n + 1$ vetores em R^N com $n \geq 1$. Esses vetores são geometricamente independentes, se $v^1 - v^0, \dots, v^n - v^0$ são linearmente independentes. Por convenção se $n = 0$ então o vetor v^0 é sempre geometricamente independente (mesmo se for nulo).*

Segue da definição, que v^0 e v^1 são geometricamente independentes se, e só se, $v^0 \neq v^1$ e v^0, v^1, v^2 são geometricamente independentes se, e só se, não são colineares.

Se v^0, \dots, v^n forem geometricamente independentes então os vetores l.i. $v^1 - v^0, \dots, v^n - v^0$ constituem uma base de um subespaço U de R^N de dimensão n que contém todos os $v^1 - v^0, \dots, v^n - v^0$.

Definição 4.2. *Sejam v^0, \dots, v^n vetores em R^N . Um vetor v é dito geometricamente dependente de v^0, \dots, v^n se existem números reais não negativos $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ de tal modo que:*

$$\lambda_0 + \dots + \lambda_n = 1 \quad e \quad v = \lambda_0 v^0 + \dots + \lambda_n v^n$$

Proposição 4.1. *Sejam v^0, \dots, v^n geometricamente independentes e seja v um vetor geometricamente dependente deles. Então existem únicos números reais $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ tal que $\sum \lambda_i = 1$ e $v = \sum \lambda_i v^i$. Os λ 's são chamados de coordenadas baricêntricas de v em relação a v^0, \dots, v^n .*

Demonstração. Os λ 's existem, e isso é assegurado pela definição de dependência geométrica. Para provar a unicidade suponha que $v = \sum_{i=0}^n \lambda_i v^i = \sum_{i=0}^n \mu_i v^i$ onde

$\sum_{i=0}^n \lambda_i = \sum_{i=0}^n \mu_i = 1$. Então $\sum_{i=0}^n \nu_i v^i = 0$, onde $\nu_i = \lambda_i - \mu_i$, e $\sum_{i=0}^n \nu_i = 0$. Consequentemente temos $\nu^0 = \dots = \nu^n = 0$, ou seja, $\lambda_i = \mu_i$ para $i = 0, \dots, n$. \square

Definição 4.3. *Sejam v^0, \dots, v^n geometricamente independentes. O simplexo com vértices v^0, \dots, v^n é o conjunto de pontos geometricamente dependentes de v^0, \dots, v^n e com todas as coordenadas baricêntricas positivas. Dizemos que o simplexo é gerado por v^0, \dots, v^n . Os pontos com todas as coordenadas baricêntricas estritamente positivas são chamados de pontos interiores do simplexo e que algumas vezes é chamado de simplexo aberto com vértices v^0, \dots, v^n . O bordo do simplexo consiste do conjunto de pontos que não são interiores, isto é, que possuem, pelo menos uma coordenada baricêntrica igual a zero.*

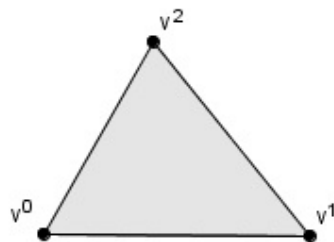
Exemplo 4.1. 1. Para cada vetor v^0 o 0-simplexo (v^0) é o conjunto $\{v^0\}$. Vamos denotar (v^0) simplesmente por v^0 .



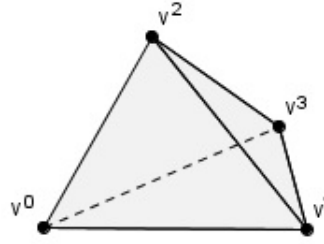
Para cada dois vetores v^0, v^1 o 1-simplexo ($v^0 v^1$) é o segmento com os pontos finais v^0, v^1 . O bordo de (v^0, v^1) é $\{v^0, v^1\}$, e o interior é o segmento aberto com pontos finais v^0, v^1 .



Para cada três vetores não colineares v^0, v^1, v^2 o 2-simplexo ($v^0 v^1 v^2$) é o triângulo com vértices v^0, v^1, v^2 . O bordo de ($v^0 v^1 v^2$) é dado por $(v^0 v^1) \cup (v^1 v^2) \cup (v^2 v^0)$, e o interior é o complementar.



Para cada 4 vetores não coplanares v^0, v^1, v^2, v^3 o 3-simplexo ($v^0 v^1 v^2 v^3$) é chamado de tetraedro com vértices v^0, v^1, v^2, v^3 , cujo bordo consiste dos 4 triângulos.



Um simplexo é convexo se dados dois pontos v e w do simplexo, todos os pontos do segmento que ligam v à w pertencem ao simplexo. De fato, o simplexo é o menor conjunto convexo contendo seus vértices, que é chamado a envoltória convexa de seus vértices.

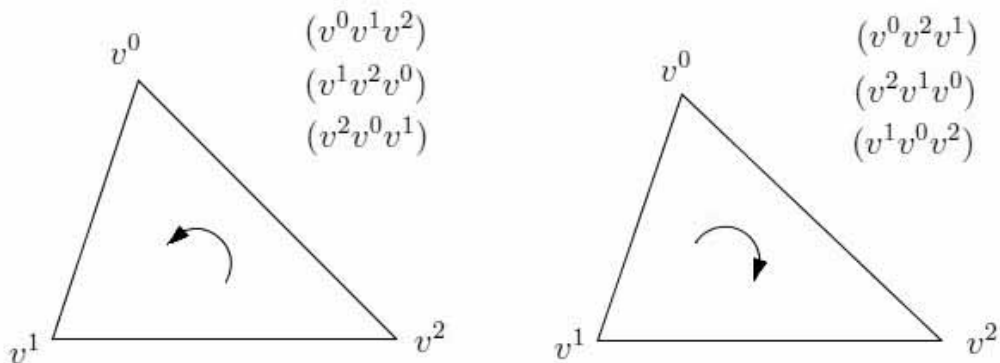
Definição 4.4. *Seja $s_n = (v^0 \dots v^n)$ um simplexo. Uma face de s_n é um simplexo cujos vértices formam um subconjunto de $\{v^0, \dots, v^n\}$. Se o subconjunto é próprio (ou seja, não é todo o conjunto $\{v^0, \dots, v^n\}$) dizemos que a face é uma face própria. Se s_p é uma face de s_n denotamos por $s_p < s_n$ ou $s_n > s_p$; note que $s_n < s_n$ para qualquer simplexo s_n .*

Observe que o bordo de s_n é a união das faces próprias de s_n e que as faces 0-dimensionais e 1-dimensionais de um n -simplexo formam um grafo completo com $n + 1$ vértices.

4.2 Simplexos Orientados

De acordo com as definições anteriores deste capítulo, permutar vértices de um simplexo não causa nenhuma alteração. Se definirmos a ordenação de vértices, o resultado é chamado de simplexo ordenado. Portanto, associado com qualquer n -simplexo existem $(n + 1)!$ simplexos ordenados distintos. Na prática, não iremos fazer distinção entre eles.

Considere por exemplo um 2-simplexo $(v^0 v^1 v^2)$. Os seis simplexos ordenados associados a ele são aqueles cujas ordenações estão abaixo:



Os três pares de permutações de v^0, v^1, v^2 da figura da esquerda possuem ordenação dos vértices no sentido anti-horário, enquanto que os três outros pares de permutações da figura da direita possuem ordenação dos vértices no sentido horário. O que nos sugere a definição abaixo.

Definição 4.5. *Seja $s_n = (v^0 \dots v^n)$ um n -simplexo. Uma orientação para s_n é um conjunto de ordenações para os vértices constituídos por uma ordem particular, e de todas as permutações pares deles. Um n -simplexo orientado σ_n é um n -simplexo s_n juntamente com uma orientação para s_n . Para uma permutação π de $\{0, \dots, n\}$ os simplexos orientados $\sigma_n = (v^0 \dots v^n)$ e $\tau_n = (v^{\pi(0)} \dots v^{\pi(n)})$ satisfazem $\sigma_n = \tau_n$ se π é par, e $\sigma_n = -\tau_n$ se π for ímpar.*

Escrevemos $\sigma_n = (v^0 \dots v^n)$ para dizer que σ_n é o n -simplexo orientado com vértices $v^0 \dots v^n$, e a orientação é dada pela ordem apresentada e de todas as permutações pares dele. Quando $n > 0$ escrevemos $-\sigma_n$ para o simplexo orientado que consiste do mesmo n -simplexo e a coleção de outras ordenações dos vértices. Pela definição $-(-\sigma_n) = \sigma_n$.

4.3 Complexos simpliciais

Definição 4.6. *Um complexo simplicial é um conjunto finito K de simplexos em R^N com as seguintes propriedades:*

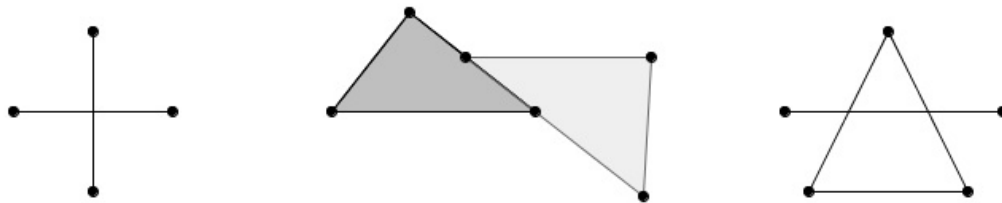
1. *Se $s \in K$ e $t < s$ então $t \in K$.*
2. *Condição de interseção: se $s \in K$ e $t \in K$ então $s \cap t$ ou é vazia ou é uma face de s e de t .*

A dimensão de K é a dimensão do simplexo de K de maior dimensão. O espaço subjacente de K , denotado por $|K|$, é o conjunto de pontos em R^N que pertencem a pelo menos um simplexo de K . Isto é, $|K|$ é a união de simplexos de K .

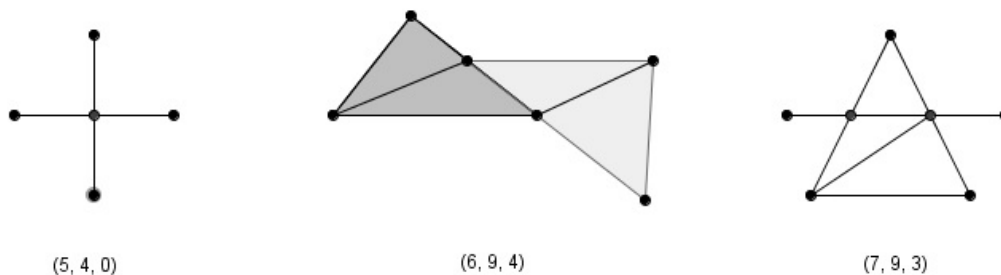
Quando desenhamos complexos simpliciais, às vezes, é útil indicar vértices por um ponto cheio em 2-simplexos que fazem parte do complexo.

Um complexo simplicial K de dimensão n é puro se todo simplexo de K é uma face de algum n -simplexo de K . Uma superfície fechada é um complexo simplicial puro. Um complexo simplicial não-puro é dado por exemplo, por $K = \{(v^0 v^1), (v^0), (v^1), (v^2)\}$ onde v^0, v^1, v^2 são distintos. Aqui $\dim K = 1$ mas (v^2) não é uma face de qualquer 1-simplexo de K .

Os três diagramas abaixo não representam complexos simpliciais pois, não respeitam as condições de interseção.



Mas, os diagramas abaixo são verdadeiros complexos simpliciais com, em cada caso, o mesmo espaço subjacente. As triplas em parênteses são respectivamente a quantidade de 0-simplexos, 1-simplexos e 2-simplexos.



O conjunto de todas as faces de um n -simplexo s_n é um complexo simplicial de dimensão n , que é denotado por \bar{s}_n . O conjunto de todas as faces próprias de s_n é um complexo simplicial de dimensão $n - 1$, que é denotado por \dot{s}_n e é chamado de bordo de s_n . Assim, o bordo de s_n é a união de faces próprias de s_n .

Definição 4.7. *Seja K um complexo simplicial. Um subcomplexo de K é um subconjunto L de K que possui a seguinte propriedade:*

$$(s \in L, t < s \Rightarrow t \in L)$$

O subconjunto L é chamado próprio se $L \neq K$.

Se todo simplexo do complexo simplicial possui uma orientação dizemos que o complexo simplicial é orientado.

Definição 4.8. *Seja r um número inteiro e positivo. O r -esqueleto de um complexo simplicial K é o conjunto de simplexos de K com dimensão $\leq r$, denotado por K^r . Claramente K^r é um subcomplexo de K . O 1-esqueleto K^1 de qualquer complexo simplicial K é um grafo.*

Um complexo simplicial K é chamado conexo se K^1 é um grafo conexo, ou seja, se e somente se, existe um caminho ao longo das arestas de K^1 conectando quaisquer dois vértices. Para qualquer K , uma componente de K é um subcomplexo conexo maximal. Assim K é a união (disjunta) de suas componentes, e K é conexo se, e somente se, possui exatamente uma componente.

Definição 4.9. Um conjunto U de R^N que é o espaço subjacente de algum complexo simplicial é chamado de poliedro. É claro que existem muitos complexos simpliciais cujos espaços subjacentes sejam um dado poliedro U (a única exceção é quando U é um conjunto finito) e quaisquer desses complexos simpliciais são chamados de triangulações de U .

4.4 Estrelas e Links

Definição 4.10. Seja Σ um conjunto de simplexes de K . O fecho de Σ (em K) é o menor subcomplexo de K que contém Σ , ou seja, é definido por:

$$\bar{\Sigma} = \{s \in K : s < t \text{ para algum } t \in \Sigma\}$$

Se $s \in K$ e $\Sigma = \{s\}$, então vamos escrever \bar{s} em vez de $\overline{\{s\}}$ para o fecho de Σ ; note que $|\bar{s}| = s$, $|\Sigma| = |\bar{\Sigma}|$ para qualquer Σ .

Definição 4.11. Seja Σ um conjunto de simplexes de K . A estrela de Σ (em K) é definida por:

$$St(\Sigma) = St(\Sigma, K) = \{s \in K; s > t \text{ para algum } t \in \Sigma\}$$

A estrela fechada de Σ (em K) é o fecho de Σ , e é denotada por $\overline{St}(\Sigma)$ ou $\overline{St}(\Sigma, K)$. Portanto,

$$\overline{St}(\Sigma) = \{u \in K : \exists t \in \Sigma \text{ e } s \in K \text{ com } s > u \text{ e } s > t\}$$

e $\overline{St}(\Sigma)$ é um subcomplexo de K . O exemplo mais importante é $\Sigma = \{s\}$: escrevemos $St(s)$ e $\overline{St}(s)$ em vez de $St(\{s\})$ e $\overline{St}(\{s\})$.

Sejam $s_p = (v^0 \dots v^p)$ e $s_q = (w^0 \dots w^q)$ simplexes em R^N . Dizemos que s_p e s_q são ligados se os $p+q+2$ vetores $v^0, \dots, v^p, w^0, \dots, w^q$ são geometricamente independentes, e neste caso a ligação $s_p s_q$ é um $p+q+1$ -simplexo $(v^0 \dots v^p w^0 \dots w^q)$. Assim $s_p s_q = s_q s_p$.

Definição 4.12. Seja $s \in K$. O link de s em K é definido por:

$$Lk(s) = Lk(s, K) = \{t \in K : st \in K\}$$

Lembremos que $st \in K$ significa que (i) s e t são ligados, e (ii) a ligação st pertence a K . $Lk(s)$ é um subcomplexo de K .

Exemplo 4.2. Seja K um complexo simplicial de dimensão 2. Então o *link* de um 0-simplexo v^0 consiste de todos os 0-simplexos v^1 para os quais $(v^0 v^1) \in K$ e todos os 1-simplexos $(v^1 v^2)$ para os quais $(v^0 v^1 v^2) \in K$. O *link* de um 1-simplexo $(v^0 v^1)$ consiste de todos os 0-simplexos v^2 para cada $(v^0 v^1 v^2) \in K$.

Se supomos que o *link* de todo 0-simplexo é um polígono fechado simples, então temos que o *link* de todo 1-simplexo é formado por dois 0-simplexos e que K é puro

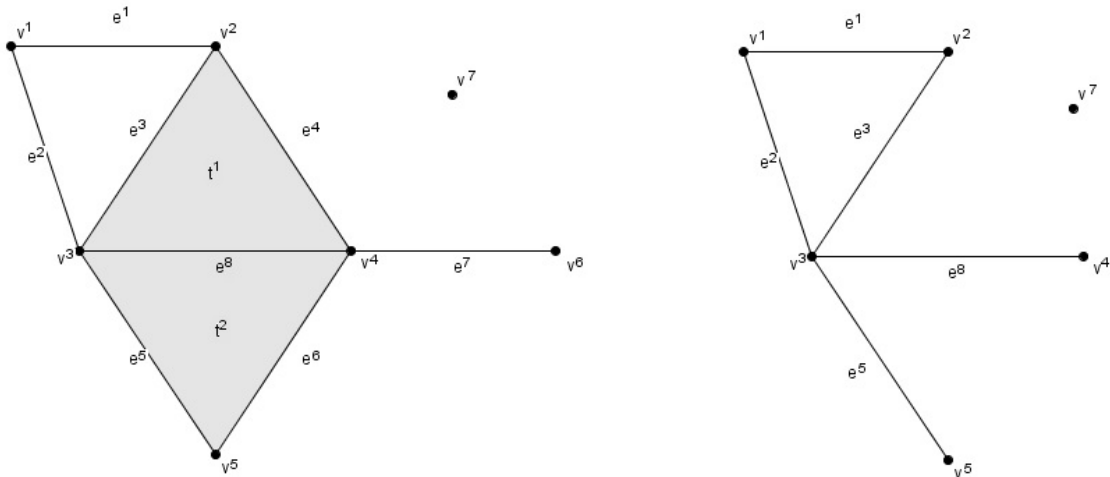
(todo simplexo é uma face de um 2-simplexo). Assim K consiste precisamente de triângulos de K junto com suas arestas e vértices. Por isso a definição de superfície fechada pode ser reescrita como:

Uma superfície fechada é um complexo simplicial 2-dimensional no qual o link de todo 0-simplexo é um polígono fechado simples.

A técnica do colapso é uma ideia geométrica simples, já utilizada no caso dos grafos: um grafo colapsa a um ponto se, e somente se, ele é uma árvore.

Definição 4.13. *Seja K um complexo simplicial. Um simplexo principal de K é um simplexo de K que não é uma face própria de qualquer simplexo de K . Para qualquer $s \in K$, uma face livre de s é uma face própria t de s de tal modo que t não é face própria de qualquer simplexo de K além de s . (Assim uma face livre de s tem dimensão $s - 1$ e se s tem uma face livre então s deve ser principal).*

Vejamos os seguintes diagramas:



No diagrama da esquerda, os simplexos principais são:

$$v^7; e^1, e^2, e^7; t^1, t^2$$

Destas, somente $e^7; t^1, t^2$ são faces livres, isto é v^6 para e^7 , e^3 e e^4 para t^1 , e e^5 e e^6 para t^2 .

Suponha que K tenha um simplexo principal s que possua a face livre t . Então o subconjunto K_1 de K obtido pela remoção de s e t é um subcomplexo de K , obtido a partir de K por um colapso elementar (que é descrito como sendo um colapso de s por t). A notação é $K \searrow^e K_1$. O diagrama da direita mostra o resultado de três colapsos elementares, de t^1 através de e^4 , t^2 através de e^6 e e^7 através de v^6 .

A sequência $K \searrow^e K_1 \searrow^e K_2 \searrow^e \dots \searrow^e K_m$ de colapsos elementares é chamada de colapso e é denotada por $K \searrow K_m$ (um caso especial é a sequência vazia pela qual $K \searrow K$). Se K_m consiste de um único vértice dizemos que K se colapsa a um ponto.

5 Grupos de homologia

Neste capítulo iremos formalizar a definição de grupos de homologia para um complexo simplicial K orientado. O grupo $H_p(K)$ com $0 \leq p \leq \dim K$ mede, a grosso modo, o número de buracos p -dimensionais em K . Se K é um grafo orientado então $H_1(K)$ é isomorfo ao grupo $Z_1(K)$ de 1-ciclos em K .

5.1 Grupos de cadeia e homomorfismo bordo

Os grupos de cadeias associados a um complexo simplicial orientado são definidos a seguir.

Definição 5.1. *Seja K um complexo simplicial orientado de dimensão n , e seja α_p o número de p -simplexos de K . Para $0 \leq p \leq n$, sejam $\sigma_p^1, \dots, \sigma_p^{\alpha_p}$ os p -simplexos orientados de K . O p -ésimo grupo de cadeias de K , denotado por $C_p(K)$, é um grupo abeliano livre gerado por $\sigma_p^1, \dots, \sigma_p^{\alpha_p}$. Assim, um elemento de $C_p(K)$ é uma combinação linear*

$$\lambda_1 \sigma_p^1 + \dots + \lambda_{\alpha_p} \sigma_p^{\alpha_p}$$

com os λ 's inteiros, que é chamado uma p -cadeia em K . Duas p -cadeias são somadas adicionando os coeficientes correspondentes.

Quando escrevemos as p -cadeias é habitual omitirmos os p -simplexos cujos coeficientes sejam zero, a menos que todos sejam 0, quando escrevemos apenas 0. Também escrevemos σ para 1σ . Para $p > n$ ou $p < 0$ o grupo $C_p(K)$ é definido por 0.

Seja G um grafo orientado com um caminho $v^1 e^1 v^2 e^2 \dots v^n e^n v^{n+1}$ em G . Podemos associar a ele a soma formal

$$\epsilon_1 e^1 + \epsilon_2 e^2 + \dots + \epsilon_n e^n$$

onde $\epsilon_i = 1$ se $e^i = (v^i v^{i+1})$ e $\epsilon_i = -1$ se $e^i = (v^{i+1} v^i)$.

Definição 5.2. *Considere G um grafo orientado com arestas e^1, \dots, e^r . Uma 1-cadeia em G é uma soma formal*

$$\lambda_1 e^1 + \lambda_2 e^2 + \dots + \lambda_r e^r$$

onde cada λ_i é um número inteiro. Quando escrevemos 1-cadeia omitimos qualquer aresta com o coeficiente 0. A 1-cadeia na qual todos os coeficientes são zero é denotada por 0. Definimos a soma de duas 1-cadeias $\sum \lambda_i e^i$ e $\sum \lambda'_i e^i$ como:

$$\sum \lambda_i e^i + \sum \lambda'_i e^i = \sum (\lambda_i + \lambda'_i) e^i$$

que é uma 1-cadeia também.

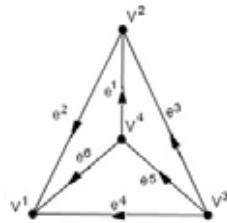
O grupo de 1-cadeias em G é um grupo abeliano, denotado por $C_1(G)$.

Observe que uma 0-cadeia em G é uma soma formal

$$\beta_1 v^1 + \beta_2 v^2 + \dots + \beta_m v^m$$

onde v^1, \dots, v^m são os vértices de G e cada β_i é um número inteiro. 0-cadeias são somadas, somando coeficientes, e o conjunto de 0-cadeias é um grupo abeliano, denotado por $C_0(G)$.

Exemplo 5.1. A 1-cadeia associada a um caminho é obtida da maneira descrita na definição acima. Note que as arestas em um caminho não necessitam ser distintas (a não ser que o caminho seja simples), então o coeficiente final de uma aresta pode ser um número diferente de 0, 1 ou -1 .

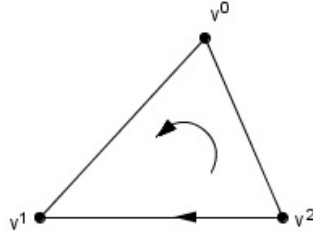


Por exemplo, a 1-cadeia associada ao caminho $v^4 e^1 v^2 e^2 v^1 e^6 v^4 e^1 v^2 e^3 v^3$ no grafo acima é $e^1 + e^2 - e^6 + e^1 - e^3 = 2e^1 + e^2 - e^3 - e^6$.

Recordamos que o bordo $\partial(v^0 v^1)$ de um 1-simplexo orientado $(v^0 v^1)$ é a 0-cadeia $v^1 - v^0$. Agora, considere um 2-simplexo orientado $(v^0 v^1 v^2)$. É desejável que o bordo seja uma 1-cadeia

$$\partial(v^0 v^1 v^2) = (v^1 v^2) + (v^2 v^0) + (v^0 v^1)$$

Entretanto, se o 2-simplexo pertence a um complexo simplicial orientado K então, as três arestas do triângulo terão orientação específica como elementos de K , e pode ser que, por exemplo, a aresta inferior possua orientação contrária $(v^2 v^1)$. Neste caso $(v^1 v^2) \notin K$ de modo que não teremos uma 1-cadeia. Devemos então escrever:



$$\partial(v^0v^1v^2) = -(v^2v^1) + (v^2v^0) + (v^0v^1)$$

Faremos a convenção que:

(v^1v^2) representa a 1-cadeia (v^1v^2) se $(v^1v^2) \in K$ e,

(v^1v^2) representa a 1-cadeia $-(v^2v^1)$ se $(v^2v^1) \in K$.

Assim, a fórmula acima para $\partial(v^0v^1v^2)$ sempre forma uma 1-cadeia. Além disso, esta convenção nos permite preservar a ordem natural dos índices e escrever:

$$\partial(v^0v^1v^2) = (v^1v^2) - (v^0v^2) + (v^0v^1).$$

Definição 5.3. Seja $\sigma = (v^0 \dots v^p)$ um p -simplexo orientado de K para algum $p > 0$. O bordo de σ é a $(p - 1)$ -cadeia

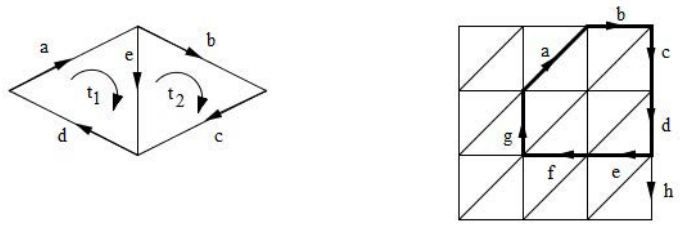
$$\partial\sigma = \partial_p\sigma = \sum_{i=0}^p (-1)^i (v^0 \dots \hat{v}^i \dots v^p)$$

onde o chapéu sobre v^i indica que este é omitido. Para $p = 0$, $\partial_p\sigma$ é definido como zero. O homomorfismo bordo $\partial = \partial_p : C_p(K) \rightarrow C_{p-1}(K)$ é definida por:

$$\partial_p(\sum \lambda_i \sigma_p^i) = \sum \lambda_i \partial_p(\sigma_p^i)$$

para $0 \leq p \leq n$, caso contrário é definido como homomorfismo trivial.

Como um exemplo, considere dois triângulos coerentemente orientados como no diagrama da esquerda



Temos,

$$\partial(t^1 + t^2) = (a + e + d) + (b + c - e) = a + b + c + d,$$

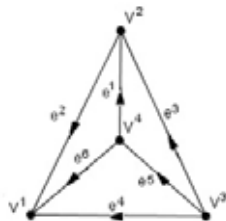
correspondendo a ideia geométrica de que o bordo de toda a área é o polígono $a+b+c+d$. Note que $\partial(a+b+c+d) = 0$, de forma similar, orientando todos os triângulos do diagrama da direita, a soma do bordo dos sete triângulos fechados pela linha grossa é $a+b+c+d+e+f+g$, que é uma 1-cadeia com bordo 0. Se fizermos a identificação usual para tornar o complexo simplicial da direita em um toro, então $\partial(c+d+h) = 0$, mas podemos mostrar que não existe 2-cadeia com bordo $c+d+h$: o polígono simples fechado $c+d+h$ gira em torno de um buraco no toro e não é limite de nenhuma região. Mas, no toro, $a+\dots+g$ limita uma região enquanto que $c+d+h$ não.

Recordemos que no caso em que G é um grafo orientado, para qualquer aresta $e = (vw)$ de G (considerado como uma 1-cadeia), definimos o bordo de e sendo $\partial e = w - v$ (considerado como uma 0-cadeia). O homomorfismo bordo:

$$\partial : C_1(G) \rightarrow C_0(G)$$

é definido por $\partial(\sum \lambda_i e^i) = \sum \lambda_i \partial(e^i)$. Um 1-ciclo em G é um elemento $c \in C_1(G)$ tal que $\partial c = 0$. O grupo de 1-ciclos em G é denotado por $Z_1(G)$.

Exemplo 5.2. Como exemplo, a 1-cadeia associada a qualquer laço em G é sempre um 1-ciclo, Vejamos o grafo orientado abaixo



Para o laço $v^1 e^2 v^2 e^1 v^4 e^5 v^3 e^4 v^1$, está associado o 1-ciclo $-e^2 - e^1 - e^5 + e^4$ e $\partial(-e^2 - e^1 - e^5 + e^4) = -(v^2 - v^1) - (v^1 - v^2) - (v^4 - v^3) + (v^1 - v^3) = 0$.

Definição 5.4. A *augmentação*

$$\epsilon : C_0(K) \rightarrow Z$$

é o homomorfismo definido por:

$$\epsilon(\sum \lambda_i \sigma_0^i) = \sum \lambda_i.$$

Proposição 5.1. Para qualquer p , o homomorfismo

$$\partial \circ \partial = \partial_{p-1} \circ \partial_p : C_p(K) \rightarrow C_{p-2}(K)$$

é trivial. Também $\epsilon \circ \partial_1 : C_1(K) \rightarrow Z$ é trivial.

Demonstração. É suficiente provar que, para qualquer p -simplexo $\sigma = (v^0 \dots c^p)$ de K , com $p \geq 2$

$$\partial_{p-1}(\partial_p \sigma) = 0.$$

Agora,

$$\partial_{p-1}(\partial_p \sigma) = \sum_{i=0}^p (-1)^i \partial_{p-1}(v^0 \dots \hat{v}^i \dots v^p).$$

Esta é a soma de $p(p+1)$ termos em que cada $(p-2)$ -faces dimensionais de σ acontecem exatamente duas vezes. De fato, considere a $(p-2)$ -face dimensional $(v^0 \dots \hat{v}^i \dots \hat{v}^j \dots v^p)$, onde $i < j$. Isso ocorre uma vez em

$$(-1)^i \partial_{p-1}(v^0 \dots \hat{v}^i \dots v^p), \text{ com sinal } (-1)^i (-1)^{j-1}$$

e uma vez em

$$(-1)^j \partial_{p-1}(v^0 \dots \hat{v}^j \dots v^p), \text{ com sinal } (-1)^j (-1)^i.$$

O total dos coeficientes destes $(p-2)$ -simplexos em $\partial_{p-1}(\partial_p \sigma)$ é, portanto, $(-1)^i (-1)^{j-1} + (-1)^j (-1)^i = 0$. □

Corolário 5.1. Para qualquer p ,

$$Im \partial_{p+1} \subset Ker \partial_p$$

também

$$Im \partial_1 \subset Ker \epsilon$$

Seja G um grafo orientado. A aumentação é o homomorfismo

$$\epsilon : C_0(G) \rightarrow Z$$

dado por

$$\epsilon\left(\sum \lambda_i v^i\right) = \sum \lambda_i.$$

Teorema 5.1. Seja G um grafo conexo orientado. A sequência

$$C_1(G) \xrightarrow{\partial} C_0(G) \xrightarrow{\epsilon} Z$$

é exata, isto é $Im \partial = Ker (\epsilon)$.

Demonstração. Para mostrar $Im \partial \subset Ker (\epsilon)$ é suficiente verificar que, para alguma aresta e de G , $\epsilon(\partial e) = 0$. De fato, $\epsilon(\partial e) = \epsilon(v^1 - v^0) = 1 - 1 = 0$.

Para mostrar que $Ker (\epsilon) \subset Im \partial$, temos que qualquer elemento α do $Ker(\epsilon)$ pode ser escrito como:

$$\alpha = \sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i (v^i - v^m)$$

onde v^1, \dots, v^m são os vértices de G , cada λ_i um número inteiro. Desde que G é conexo existe um caminho de v^m para v^i e a 1-cadeia e^i associado a este caminho tem $\partial e^i = v^i - v^m$.

$$\text{Logo, } \alpha = \sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i (v^i - v^m) = \sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i \partial(e^i) = \partial\left(\sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i e^i\right).$$

Portanto, $\alpha \in Im \partial$. □

5.2 Grupos de Homologia

Definição 5.5. *Considere a sequência semi-exata*

$$C_{p+1}(K) \xrightarrow{\partial_{p+1}} C_p(K) \xrightarrow{\partial_p} C_{p-1}(K)$$

$\text{Ker } \partial_p$ é denotado por Z_p , ou $Z_p(K)$ e os elementos de Z_p são chamados p -ciclos. Z_p é um grupo abeliano livre finitamente gerado.

Im ∂_{p+1} é denotada por B_p , ou $B_p(K)$, e elementos de B_p são chamados de p -bordos. B_p é um grupo abeliano livre finitamente gerado.

Segue do Corolário anterior que todo bordo é um ciclo. O inverso é geralmente falso.

Desde que $B_p \subset Z_p$ existe um grupo quociente $H_p(K) = Z_p(K)/B_p(K)$, chamado o p -ésimo grupo de homologia. Ele mede a extensão em que K não possui bordos p -ciclos, ou seja, ele mede a extensão em que K possui "buracos p -dimensionais".

O grupo quociente $\text{Ker } \epsilon/B_0(K)$ é denotado por $\tilde{H}_0(K)$ e é chamado o 0-ésimo grupo de homologia reduzido de K .

Um elemento de $H_p(K)$ é a classe lateral $\bar{z} = z + B_p(K)$ onde $z \in Z_p(K)$. Usaremos a notação $\{z\}$ para esta classe lateral, isto é chamada a classe de homologia para o ciclo z (se diversos complexos simpliciais estão em discussão, ao mesmo tempo, a notação $\{z\}_K$ será usada). Qualquer ciclo z' em $\{z\}$ - isto é, qualquer ciclo $z' = z + b$ para $b \in B_p(K)$ - é chamado um representante para $\{z\}$. Dizemos que z e z' são homólogos se $z' - z \in B_p(K)$, e escrevemos $z \sim z'$; em particular se $z \in B_p(K)$, ou seja, se z borda, escrevemos $z \sim 0$: z é homólogo a zero. Assim $z \sim z' \Leftrightarrow \{z\} = \{z'\}$.

Observação 5.1. *Seja K^r o r -esqueleto de K - que é o subcomplexo de K consistindo de todos os simplexes de dimensão menor ou igual a r . Então claramente $C_p(K) = C_p(K^r)$ e $Z_p(K) = Z_p(K^r)$ com $r \geq p + 1$.*

No caso em que $r = 1$, temos $Z_1(K) = Z_1(K^1)$. Desde que K^1 é um grafo orientado podemos escrever uma base para $Z_1(K^1)$. Explicitamente, quando K é conexo, uma base para $Z_1(K) = Z_1(K^1)$ é obtida da seguinte forma: escolha uma árvore maximal T em K^1 e sejam e^1, \dots, e^μ as arestas de K e não de T . Seja Z_i ($i = 1, \dots, \mu$) o 1-ciclo associado ao único laço em $T + e^i$, o coeficiente de e^i em Z_i será $+1$. Assim z^1, \dots, z^μ é a base pedida. Se K não é conexo, então a base é dada encontrando uma base do ciclo para cada componente.

Seja K um grafo orientado. Então temos $H_1(K) = Z_1(K)$ de modo que, se K é conexo, $H_1(K) \cong Z^{\mu(K)}$ e geradores livres de $H_1(K)$ são dados pelos ciclos básicos descritos acima.

Para qualquer K de dimensão n , temos $H_p(K) = 0$ para $p < 0$ e para $p > n$.

5.2.1 Zero-ésimo grupo de homologia

Seja K um complexo simplicial orientado. O objetivo é calcular $H_0(K)$.

Proposição 5.2. $v \sim v' \Leftrightarrow v$ e v' encontram-se na mesma componente conexa por caminhos de K .

Demonstração. Se v e v' encontram-se na mesma componente conexa por caminhos de K , então o caminho de v' para v terá uma 1-cadeia associada c com propriedade $\partial c = v - v'$, conseqüentemente $v \sim v'$. Para o oposto, teremos que usar $v \sim v'$ para construir um caminho de v' para v . Podemos nos convencer que isto é possível desenhando algumas figuras, mas faremos a demonstração por indução. Suponha que $v - v' = \partial c$, e vamos escrever, temporariamente, $|c|$ para a soma dos módulos dos coeficientes em c , a indução é em $|c|$ e neste caso $|c| = 1$ é trivial. Suponha, para simplificar a notação, que todos os 1-simplexos de K com v como um ponto final são orientados em direção a v . Assim c deve conter pelo menos um destes 1-simplexos com coeficientes positivos. Escrevendo $e = (v''v)$, temos $|c - e| < |c|$ e $\partial(c - e) = v'' - v'$ então por indução existe um caminho de v' para v'' , e, portanto, de e para v . \square

Para os próximos resultados consideremos K um complexo simplicial não vazio com k componentes K_1, \dots, K_k , e seja v^i um vértice de K_i para $i = 1, \dots, k$.

Proposição 5.3. $H_0(K)$ é livremente gerado pelas classes de homologia $\{v^i\}$ para $i = 1, \dots, k$. Assim, $H_0(K) \cong Z^k$.

Demonstração. Da proposição anterior segue que $\{v^1\}, \dots, \{v^k\}$ gera $H_0(K) = C_0(K)/B_0(K)$ (note que $Z_0(K) = C_0(K)$). Para mostrar que são livremente gerados suponha $\lambda_1 v^1 + \dots + \lambda_k v^k = \partial c$, para algum $c \in C_1(K)$. Escrevemos $c = c^1 + \dots + c^k$ onde, c^i contém somente 1-simplexos em K_i ($i = 1, \dots, k$). Então, ∂c^i contém somente vértices em K_i , assim deduzimos $\lambda_i v^i = \partial c^i$ para $i = 1, \dots, k$. Usando a aumentação para ambos os lados e o fato que $\epsilon \circ \partial = 0$ encontramos $\lambda_i = 0$ para $i = 1, \dots, k$. \square

Isto mostra que $H_0(K)$ mede uma propriedade geométrica muito fundamental de K , isto é, o número de componentes que K possui.

Na realidade, é sempre verdade que, $H_p(K) \cong H_p(K_1) \oplus \dots \oplus H_p(K_k)$ para todo p .

Considere a seqüência:

$$C_1(K) \xrightarrow{\partial} C_0(K) \xrightarrow{\epsilon} Z$$

Sabemos que $Im \partial \subset Ker \epsilon \subset C_0(K)$ e por propriedade de seqüência exata, temos a seguinte seqüência exata curta:

$$0 \rightarrow \frac{Ker \epsilon}{Im \partial} \rightarrow \frac{C_0}{Im \partial} \rightarrow \frac{C_0}{Ker \epsilon} \rightarrow 0$$

ou seja,

$$0 \rightarrow \tilde{H}_0(K) \rightarrow H_0(K) \rightarrow \frac{C_0}{Ker \epsilon} \rightarrow 0$$

Agora, suponha que K é não vazio, então ϵ é sobrejetora e $C_0/Ker \epsilon \cong Im \epsilon = Z$. Portanto a seqüência cinde e o resultado se mantém.

5.2.2 Primeiro grupo de Homologia

Dado um complexo simplicial orientado K , iremos calcular $H_1(K)$. Quando K é um grafo ($\dim K = 1$) não temos problema, pois já calculamos $Z_1(K)$. Assim nesse caso $H_1(K) \cong Z^{\mu(K)}$ com geradores $\{z^1\}, \dots, \{z^\mu\}$.

Em geral, existe um subgrupo não trivial $B_1(K)$ de $Z_1(K)$ para decompor:

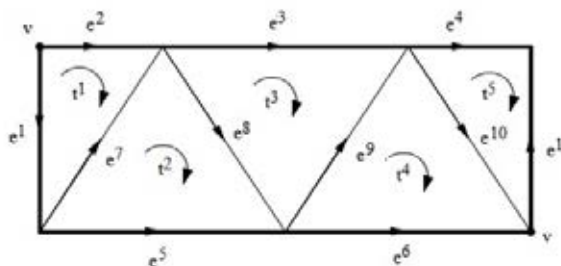
$$C_2(K) \xrightarrow{\partial_2} C_1(K) \xrightarrow{\partial_1} C_0(K)$$

$$H_1(K) = \text{Ker } \partial_1 / \text{Im } \partial_2 = Z_1(K) / B_1(K)$$

Para calcular este quociente usaremos o método de apresentações. Primeiro encontramos bases para $Z_1(K) = Z_1(K^1)$ pelo método da observação 5.1 e então encontramos geradores para $B_1(K)$. Os geradores que usamos são $\partial_2 t$ onde t obedece a orientação do 2-simplexo de K . Uma apresentação, quando K é conexo, de $H_1(K)$ é dada por ciclos z^1, \dots, z^μ , $\mu = \mu(K^1)$, associado a laços básicos em K^1 , e a relação $\partial_2 t = 0$ para cada 2-simplexo orientado de K .

Faixa de Möebius

O diagrama mostra uma triangulação K da faixa de Möebius.



É bom rotular as arestas e^1, \dots, e^μ (neste exemplo $\mu = 6$) e as arestas restantes $e^{\mu+1}, \dots, e^\alpha$ ($\alpha = \alpha_1(K)$). A razão para isto será explicada a seguir. Suponha que z é um 1-ciclo em K , então $z = \lambda_1 e^1 + \dots + \lambda_\mu e^\mu + \lambda_{\mu+1} e^{\mu+1} + \dots + \lambda_\alpha e^\alpha$. Logo, $z = \lambda_1 z^1 + \dots + \lambda_\mu z^\mu$, onde z^i ($i = 1, \dots, \mu$) é o 1-ciclo associado com o único laço na (árvore maximal $+e^i$), o 1-ciclo é orientado de modo que ele contenha e^i com coeficiente $+1$. Esta é uma grande ajuda quando expressamos $\partial_2 t$ como uma combinação linear de z^1, \dots, z^μ .

Sejam z^1, \dots, z^6 como acima. Assim, $z^1 = e^1 + e^7 + e^8 + e^9 + e^{10}$, $z^2 = e^2 + e^8 + e^9 + e^{10}$ e etc., mas não há necessidade de escrever todos. $B_1(K)$ é gerado pelos seguintes elementos de $Z_1(K)$

$$\begin{aligned} \partial_2 t^1 &= e^2 - e^7 - e^1 = z^2 - z^1 \\ \partial_2 t^2 &= e^7 + e^8 - e^5 = -z^5 \\ \partial_2 t^3 &= e^3 - e^9 - e^8 = z^3 \\ \partial_2 t^4 &= e^9 + e^{10} - e^6 = -z^6 \\ \partial_2 t^5 &= e^4 - e^1 - e^{10} = z^4 - z^1 \end{aligned}$$

Assim, $H_1(K)$ tem apresentação dada por $z^1, z^2, z^3, z^4, z^5, z^6$, com $z^2 - z^1 = -z^5 = z^3 = -z^6 = z^4 - z^1 = 0$

Isto mostra que todos os geradores podem ser escritos em termos de z^1 , e $H_1(K)$ é isomorfo ao grupo abeliano com apresentação z^1 , logo $H_1(K) \cong Z$.

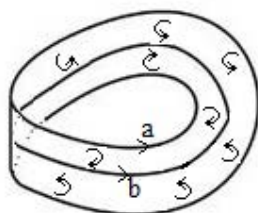
Além disso, isto mostra que $\{z^1\}_K$ gera $H_1(K)$. Usando as relações, os geradores alternativos são $\{z^2\}$, ou $\{z^4\}$, ou $\{z^2 + z^3\} \dots$

Note que o ciclo z^1 passa em torno da faixa de Möebius. Assim, o resultado diz que um 1-ciclo vai "em torno", e não limitando nada, e que qualquer 1-ciclo é, a menos de homomorfismo, um múltiplo deste.

Por exemplo $e^2 + e^3 + e^4 + e^5 + e^6$ é um 1-ciclo indo em volta da faixa, e

$$\begin{aligned} \{e^2 + e^3 + e^4 + e^5 + e^6\} &= \{z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6\} \\ &= \{z^2\} + \{z^3\} + \{z^4\} + \{z^5\} + \{z^6\} \\ &= \{z^1\} + 0 + \{z^1\} + 0 + 0 \text{ pela apresentação de } H_1(K). \\ &= 2\{z^1\} \end{aligned}$$

Na verdade, é geometricamente claro que o bordo é um círculo que passa duas vezes antes de se juntar. A figura seguinte mostra de forma mais informal que o bordo **a** é homólogo duas vezes a **b** dando a volta no meio da faixa.



As orientações apresentadas são coerentes exceto através da linha central b . Mas, $a - 2b$ limita toda a área orientada (ou seja, se a área for dividida em triângulos, orientados, a soma dos bordos deverá ser $a - 2b$), por isso $a \sim 2b$.

Sabemos da última proposição que $H_0(K) \cong Z$, e com o gerador sendo a classe de homologia de qualquer vértice. Para encontrar $H_2(K)$ precisamos de $Ker(\partial_2 : C_2(K) \rightarrow C_1(K))$, desde que $C_3(K) = 0$. Agora um elemento geral de $C_2(K)$ é

$\sum_{i=1}^5 \lambda_i t^i$; suponha que $\partial_2 c = 0$. A aresta e^2 ocorre somente em $\partial_2 t^1$, por isso, t^1 deve ter coeficiente zero em c . Argumentos similares mostram que t^2, t^3, t^4, t^5 possuem coeficiente zero em c , então $c = 0 : H_2(K) = 0$. Uma forma alternativa de fazer isto é escrever ∂c explicitamente, usando $\partial t^1 = e^2 - e^7 - e^1$ etc., e deduzir de $\partial c = 0$ que $\lambda_1 = \dots = \lambda_5 = 0$.

Assim, $H_0(K) \cong Z$, com gerador $\{v\}$ e $H_1(K) \cong Z$, com gerador $\{e^1 + e^7 + e^8 + e^9 + e^{10}\}$ e $H_2(K) = 0$.

Proposição 5.4. *Seja K uma superfície fechada. Então:*

$$H_2(K) \cong \begin{cases} 0 & \text{se } K \text{ é não orientada;} \\ Z & \text{se } K \text{ é orientada.} \end{cases}$$

Um gerador para $H_2(K)$, quando K é orientada, é dado pela soma das classes de homologia de todos os 2-simplexos de K , coerentemente orientados.

Para ser preciso: K já está orientado, e, além disto, os 2-simplexos podem ser coerentemente orientados. O gerador de $H_2(K)$ é $\sum (\pm t^i)$, a soma sendo sobre todos os 2-simplexos orientados t^i de K , com sinal $+$ ou $-$, se a orientação de t^i com um simplexo de K está ou não de acordo com a orientação escolhida. Note que $H_2(K) = Z_2(K)$ desde que K é 2-dimensional. Um gerador de $H_2(K)$, quando K é uma superfície fechada orientada, é chamado um ciclo fundamental, ou classe fundamental, para K . Até o sinal é determinado por K .

Demonstração. Suponha primeiro que K é orientável. Para simplificar vamos supor que a orientação de K é tal que os 2-simplexos já recebem orientação coerente.

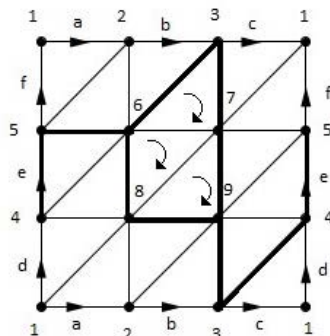
Buscamos $Z_2(K)$, então seja $z \in Z_2(K)$, e suponha $z \neq 0$ então, alguns 2-simplexos orientados t ocorrem com coeficiente $\lambda \neq 0$ em z . Seja t' outro 2-simplexo orientado. Então, existe uma sequência de triângulos de K conectando t e t' , dois membros consecutivos da sequência sempre possuem uma aresta em comum. Disto e $\partial z = 0$ segue que todo triângulo na sequência, e em particular t' , sempre tem coeficiente λ em z . Por isso z é um múltiplo da soma de todos os triângulos, coerentemente orientados, e $Z_2(K)$ é um ciclo finito com esta soma de geradores.

Agora, suponha que $H_2(K) \neq 0$ e seja z um elemento não-zero de $Z_2(K)$. Exatamente como anteriormente podemos deduzir que o coeficiente de cada 2-simplexo orientado em z deve ser, até o sinal, o mesmo integrante não-zero (somente até o sinal pois, os triângulos de K já não são assumidos como coerentemente orientados). Agora defina uma nova orientação dos triângulos de K pela mudança de orientação de todos os coeficientes negativos em z . Isto é fácil de ver (usando $\partial z = 0$) que este orienta coerentemente os triângulos de K : K é orientável. \square

5.2.3 Grupos de homologia relativa

Uma situação envolvendo um par de complexos simpliciais, como por exemplo, investigar algumas das propriedades de um grafo que é realizado como um subcomplexo de uma superfície, é o que chamaremos de uma situação relativa.

Em particular considere o grafo no toro desenhado abaixo:



Existe uma região limitada por cinco arestas e contendo os três triângulos orientados. A soma dos bordos desses três triângulos certamente não é zero, mas contém apenas as arestas do grafo, e a soma dos três triângulos é chamada de um ciclo relativo. Assim, ciclo relativo tem uma conexão com regiões.

Definição 5.6. *Sejam K um complexo simplicial orientado de dimensão n e L um subcomplexo de K (L é portanto orientado de uma forma natural por K). Para qualquer p , $0 \leq p \leq n$, o p -ésimo grupo cadeia de K módulo L , ou o p -ésimo grupo de cadeia relativa (do par (K, L)) é o subgrupo de $C_p(K)$ consistindo daquelas p -cadeias em K em que o coeficiente de todo simplexo de L é zero. Isto é denotado por $C_p(K, L)$, e um elemento de $C_p(K, L)$ é chamada uma p -cadeia de K módulo L , ou uma p -cadeia relativa. Para $p > n$ ou $p < 0$, $C_p(K, L)$ é definida como zero.*

Note que $C_p(K, \emptyset) = C_p(K)$.

Definição 5.7. *Com a notação da definição anterior, definimos:*

$$j = j_q : C_q(K) \rightarrow C_q(K, L)$$

como um homomorfismo que muda para zero (ou mantém como zero) o coeficiente de cada simplexo em L (para $q < 0$ ou $q > n$, $j_q = 0$). Agora definimos

$$\hat{\partial} = \hat{\partial}_p : C_p(K, L) \rightarrow C_{p-1}(K, L)$$

por

$$\hat{\partial}c = j_{p-1}(\partial_p c), \quad \forall c \in C_p(K, L)$$

$\hat{\partial}$ é chamado o homomorfismo bordo relativo. Assim, se i_p denota a inclusão de $C_p(K, L)$ em $C_p(K)$, então $\hat{\partial}_p = j_{p-1} \circ \partial_p \circ i_p$. Podemos dizer que j omite L e então o bordo relativo de uma cadeia é o bordo comum seguido por esquecer L .

Proposição 5.5. Para qualquer p , o homomorfismo

$$\hat{\partial} \circ \hat{\partial} = \hat{\partial}_{p-1} \circ \hat{\partial}_p : C_p(K, L) \rightarrow C_{p-2}(K, L)$$

é trivial.

A demonstração é similar a da proposição (5.1) e será omitida.

As definições seguintes são precisamente análogas àquelas para o caso absoluto $L = \emptyset$. Elas estão resumidas abaixo:

Definição 5.8. Complexos de Cadeias de (K, L) :

$$\dots 0 \rightarrow C_n(K, L) \xrightarrow{\hat{\partial}} C_{n-1}(K, L) \xrightarrow{\hat{\partial}} \dots \xrightarrow{\hat{\partial}} C_1(K, L) \xrightarrow{\hat{\partial}} C_0(K, L) \rightarrow 0$$

(não existe complexo de cadeia aumentada).

Grupos de p -ciclos relativos = $Z_p(K, L) = \text{Ker}(\hat{\partial}_p)$.

Grupos de p -bordos relativos = $B_p(K, L) = \text{Im}(\hat{\partial}_{p+1})$.

Pela proposição acima, $B_p(K, L) \subset Z_p(K, L)$, o grupo quociente:

$$H_p(K, L) = \frac{Z_p(K, L)}{B_p(K, L)}$$

é o p -ésimo grupo de homologia relativa do par (K, L) .

Se $z \in Z_p(K, L)$ então $z + B_p(K, L) \in H_p(K, L)$ e é denotada por $\{z\}$ ou $\{z\}_{K, L}$, ou seja, qualquer $z + b$ para $b \in B_p(K, L)$, é chamado um ciclo de representação relativa para $\{z\}$. Dois ciclos relativos z e z' são ditos homólogos mod L (escrito $z \stackrel{L}{\sim} z'$) se $\{z\} = \{z'\}$.

Exemplo 5.3. 1. Se $K = L$ então todos os grupos e homomorfismos são triviais.

Se $\dim K = n$, então $H_p(K, L) = 0$ para $p < 0$ ou $p > n$, e $H_n(K, L) = Z_n(K, L)$ é abeliano livre.

2. $H_p(K, L)$ geralmente não é um subgrupo de $H_p(K)$. Por exemplo, seja K um 1-simplexo $e = (vw)$ com seus pontos finais e seja L os pontos finais. Então, $H_1(K) = 0$ desde que K é uma árvore, assim, $H_1(K, L) = Z$, com gerador $\{e\}$. Para $C_0(K, L) = 0$, então $\hat{\partial}_1 = 0$ e $Z_1(K, L) = C_1(K, L)$ é cíclico infinito com gerador e .

3. De forma mais genérica que no item anterior, seja K qualquer grafo orientado e $L = K^0$, o conjunto de vértices de K . Então, $C_0(K, L) = 0$, $\hat{\partial}_1 = 0$ e $Z_1(K, L) = C_1(K, L)$ é um grupo abeliano livre com um gerador para cada aresta de K .

Se K é qualquer grafo orientado conexo e L é uma árvore maximal para K , então L contém todos os vértices de L e então $C_0(K, L) = 0$, $\hat{\partial}_1 = 0$ e $Z_1(K, L) = C_1(K, L)$ é um grupo abeliano livre com um gerador para cada aresta de K não em L - portanto, da classificação $\mu(K)$.

A próxima proposição permite que ciclos relativos e bordos sejam reconhecidas como tal sem muita dificuldade. Isto é conveniente, agora e depois, para fazer a convenção seguinte. Quando L é um subcomplexo de K , consideramos $C_p(L)$ como um subgrupo de $C_p(K)$, ou seja, o subgrupo consistindo de todas as p -cadeias em K em que o coeficiente de cada p -simplexo não em L é zero. (Assim, com esta convenção, $C_p(K)$ é a soma direta interna de $C_p(L)$ e $C_p(K, L)$). A fim de que a convenção não deve nos levar ao erro, é essencial que o bordo de uma p -cadeia em L deva ser a mesma se considerarmos ela mesma ou de acordo com a convenção como um tipo especial de p -cadeia de K . Este é realmente o caso decorrente do fato de que L é um subcomplexo de K e que assim, se $\sigma \in L$ então, todas as faces de σ também pertencem a L .

Proposição 5.6. 1. *Seja, em uma notação usual, $c \in C_p(K, L)$. Então c é um ciclo relativo, ou seja, pertence a $Z_p(K, L)$, se, e somente se, $\partial c \in C_{p-1}(L)$.*

2. *Seja $c \in C_p(K, L)$. Então c é um bordo relativo, ou seja, $c \in B_p(K, L)$ se, e somente se, houver uma p -cadeia (absoluta) $c' \in C_{p+1}(K)$ tal que $\partial c' - c \in C_p(L)$.*

Demonstração. 1. É praticamente imediato para as definições (e a convenção acima), então a demonstração será omitida.

2. Suponha que $c \in B_p(K, L)$, ou seja, $c = \hat{\partial}c'$ para algum $c' \in C_{p+1}(K, L)$. Mostraremos que este c' (que pertence a $C_{p+1}(K)$) satisfaz $\hat{\partial}c' - c \in C_p(L)$. De fato,

$$jc = c = \hat{\partial}c' = j\partial c', \text{ assim } j(c - \partial c') = 0$$

Da definição de j , isto implica $\partial c' - c \in C_p(L)$.

Suponha reciprocamente que c' , como em (2), existe. Então seja $c'' = jc' \in C_{p+1}(K, L)$. Mostramos $\partial c'' = c$, o que prova que $c \in B_p(K, L)$.

Usaremos um artifício simples e útil. Seja $\rho : C_{p+1}(K) \rightarrow C_{p+1}(L)$ denotando a restrição homomorfa que coloca em zero o coeficiente de qualquer simplexo não em L . Então claramente, para qualquer $c' \in C_{p+1}(K)$, $c' = jc' + \rho c'$.

Temos que $j(\partial c' - c) = 0$; também $jc = c$ desde que $c \in C_p(K, L)$. Por isso, $c = jc = j\partial c' = j\partial jc' + j\partial \rho c' = j\partial jc'$ desde que $\partial \rho c' \in C_p(L) = \partial c''$ pela definição.

□

5.2.4 Zero-ésimo grupo de homologia relativa

Consideremos K conexo e L não vazio. Mostraremos que $H_0(K, L) = 0$, ou seja, $B_0(K, L) = C_0(K, L)$. Seja v um vértice de K não em L (se tal vértice não existe então o resultado é verdadeiro desde que $C_0(K, L) = 0$), e w um vértice de L . Ligando w a v por um caminho em K , a 1-cadeia associada c' tem $\partial c' = v - w$, é um bordo relativo, que implica no resultado.

Proposição 5.7. *Seja K um complexo simplicial orientado e L um subcomplexo de K . Então $H_0(K, L) = 0$ se L tem pelo menos um vértice em todas as componentes de K , mas $H_0(K, L)$ adquire uma soma cíclica infinita para cada componente de K , que não contenha nenhum vértice de L . Geradores livres para $H_0(K, L)$ são as classes de homologia relativa de um vértice a partir de cada uma destas últimas componentes.*

5.2.5 Primeiro grupo de homologia relativa

Para calcular $H_1(K, L)$ precisamos de uma base para $Z_1(K, L)$ e de geradores para $B_1(K, L)$. O método de apresentações irá fornecer os resultados como no caso absoluto. O caso mais fácil é quando todos os vértices de K pertencem a L , e então $C_0(K, L) = 0$, assim $Z_1(K, L) = C_1(K, L)$ e uma base é dada pelas arestas de K , não em L . Geradores para $B_1(K, L)$ são simplesmente $\hat{\partial}_2 t$, onde t atravessa os triângulos de K , não em L .

Para ser completo, aqui está um método para escrever uma base de $Z_1(K, L)$. Assumimos que K é conexo para simplicar a declaração.

Seja K um complexo simplicial conexo orientado e L um subcomplexo de K , com componentes L_1, \dots, L_l . Seja T_α uma árvore maximal em um 1-esqueleto de K que contém T_1, \dots, T_l . Para cada aresta e^i de K que não está nem em T nem em L , seja z^i o 1-ciclo em K dado pelo laço único em $T + e^i$ tal que o coeficiente de e^i em z^i é $+1$. Assim o número de z^i é:

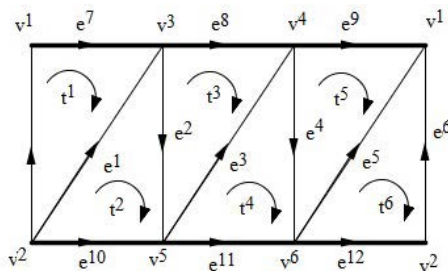
$$m = \mu(K) - \mu(L_1) - \dots - \mu(L_l).$$

Em seguida, sejam v^1, \dots, v^l vértices de K , respectivamente, nas componentes L_1, \dots, L_l de L , e seja c^α ($\alpha = 2, \dots, l$) a 1-cadeia associada a algum caminho em K de v^1 para v^α (Assim se $l = 0$ ou $l = 1$ não existe c^α para considerar).

Proposição 5.8. *Os seguintes elementos de $Z_1(K, L)$ são geradores livres:*

$$jz^1, \dots, jz^m, jc^2, \dots, jc^l.$$

Exemplo 5.4. 1. Seja K o cilindro desenhado abaixo e L (as linhas grossas do desenho) o subcomplexo consistindo de dois pontos finais.



Neste caso L contém todos os vértices de K para que $C_0(K, L) = 0$, e $Z_1(K, L) = C_1(K, L)$ com bases e^1, \dots, e^6 . Geradores para $B_1(K, L)$ são $\hat{\partial} t^1, \dots, \hat{\partial} t^6$ e uma

apresentação para $H_1(K, L)$ é dada por e^1, \dots, e^6 , com $-e^1 + e^6 = e^1 + e^2 = -e^2 - e^3 = e^3 + e^4 = -e^4 - e^5 = e^5 - e^6 = 0$.

Assim, $H_1(K, L)$ é cíclico infinito, com gerador $\{e^6\}$ por exemplo.

Se usarmos a proposição (5.8) para obter uma base para $Z_1(K, L)$, temos $l = 2$ e tomando L_1 para ser o topo do cilindro e L_2 o fundo, podemos ter $T_1 = \{e^7, e^8, v^1, v^3, v^4\}$, $T_2 = \{e^{10}, e^{11}, v^2, v^5, v^6\}$ e $T = T_1 \cup T_2 \cup \{e^6\}$. Então $m = 5$ e os ciclos z^1, \dots, z^5 são obtidos para T por uma substituição, respectivamente falando, as arestas e^1, \dots, e^5 . Os primeiros cinco geradores de $Z_1(K, L)$ são então $e^1 - e^6, e^2 + e^6, e^3 - e^6, e^4 + e^6, e^5 - e^6$. O gerador restante é, dito, e^2 , que é jc^2 onde $c^2 = e^7 + e^2 - e^{10}$ é associado a um caminho de $v^1 \in L_1$ a $v^2 \in L_2$. Para expressar dizemos $\hat{\partial}t^4 = e^3 + e^4$: os coeficientes de je^3 e je^4 são ambos 1, e o coeficiente de je^2 é 0 desde que $\partial(e^3 + e^4) = v^6 - v^5$, com soma 0 dos coeficientes.

2. Considere o homomorfismo $j : C_1(K) \rightarrow C_1(K, L)$. Se $z \in Z_1(K)$ então, $je^2 \in Z_1(K, L)$ para

$$\hat{\partial}je^2 = j\partial je^2 = j\partial(\rho z)$$

($\rho : C_1(K) \rightarrow C_1(L)$ colocando coeficientes dos simplexes não em L igual a 0)

$$= 0 - j\partial\rho z \text{ desde que } \partial z = 0$$

$$= 0 \text{ desde que } \partial\rho z \in C_0(L).$$

Portanto, há um homomorfismo induzido, o que ainda podemos chamar de j ,

$$j : Z_1(K) \rightarrow Z_1(K, L).$$

5.2.6 Três homomorfismos

Definimos três homomorfismos:

$$i_* : H_p(L) \rightarrow H_p(K)$$

$$j_* : H_p(K) \rightarrow H_p(K, L)$$

$$\partial_* : H_p(K, L) \rightarrow H_{p-1}(L)$$

Como de costume K será um complexo simplicial orientado e L um subcomplexo de K .

Definição 5.9. O homomorfismo i_*

Definimos $i_* : H_p(L) \rightarrow H_p(K)$ por:

$$i_*\{z\}_L = \{z\}_K (z \in Z_p(L))$$

ou seja,

$$i_*(z + B_p(L)) = z + B_p(K)$$

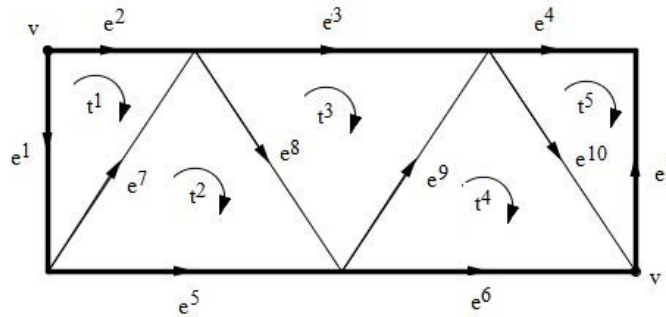
assim simplesmente consideramos $z \in Z_p(L)$ como um ciclo em K e com a classe de homologia existente. Claro que $\{z\}_K$ pode ser zero quando $\{z\}_L$ não é zero. Por exemplo, seja K um 2-simplexo com todas as suas faces, e L o bordo do 2-simplexo (o conjunto de faces próprias). Então $\{e^1 + e^2 + e^3\}_L$ gera $H_1(K) \cong Z$, mas $\{e^1 + e^2 + e^3\}_K = 0$ desde que $\partial t = e^1 + e^2 + e^3$.

Da definição de i_* podemos dizer que:

1. Se $z \in Z_p(L)$ então $z \in Z_p(K)$;
2. Se $z \in B_p(L)$ então $z \in B_p(K)$;
3. $\{z + z'\}_K = \{z\}_K + \{z'\}_K$ onde $z, z' \in Z_p(L)$.

(1) e (2) afirmam que i_* é bem definida, e (3) diz que i_* é um homomorfismo.

Exemplo 5.5. Seja K a faixa de Möbius abaixo



e seja L a borda da faixa. Então $H_1(L) \cong Z$ com geradores $\{e^1 + e^2 + e^3 + e^4 + e^5 + e^6\}_L$ e $H_1(K) \cong Z$ com geradores $\{z^1\}_K = \{e^1 + e^7 + e^8 + e^9 + e^{10}\}_K$. O homomorfismo i_* é determinado pelo seu efeito sobre o gerador de $H_1(L)$, e de acordo com os cálculos da página 12, em Faixa de Möbius,

$$i_*\{e^2 + e^3 + e^4 + e^5 + e^6\}_L = \{e^2 + e^3 + e^4 + e^5 + e^6\}_K = 2\{z^1\}_K$$

Assim, i_* tem um gerador duplo: isto é, multiplicado por dois.

Definição 5.10. O homomorfismo j_*

Definimos $j_* : H_p(K) \rightarrow H_p(K, L)$ por:

$$j_*\{z\}_K = \{jz\}_{K,L} (z \in Z_p(K)).$$

Exemplo 5.6. Tome K a faixa de Möbius e L a borda da faixa. Então $H_1(K, L) \cong Z_2$ com geradores $\{e^1\}$. Assim, $j_*\{e^1 + e^7 + e^8 + e^9 + e^{10}\}_K = \{e^1\} + \{e^7\} + \{e^8\} + \{e^9\} + \{e^{10}\} = 5\{e^1\} = \{e^1\}$ (todos em (K, L)). Assim j_* leva gerador a gerador.

Definição 5.11. O homomorfismo ∂_*

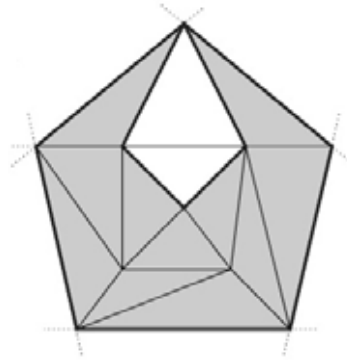
Definimos $\partial_* : H_p(K, L) \rightarrow H_{p-1}(L)$ por:

$$\partial_*\{z\}_{K,L} = \{\partial z\}_L (z \in Z_p(K, L)).$$

Exemplo 5.7. Seja K uma faixa de Möebius e L como a borda da faixa. Então $\partial_* : H_1(K, L) \rightarrow H_0(L)$ é trivial - qualquer homomorfismo $Z_2 \rightarrow Z$ é trivial.

6 Grafos em Superfícies

No capítulo anterior mencionamos que ciclos relativos têm conexão com as regiões que um grafo divide uma superfície. Mais precisamente, seja M uma superfície fechada e seja K um grafo que é um subcomplexo de M . Se K é removido de M , o que resta são subconjuntos disjuntos de M .



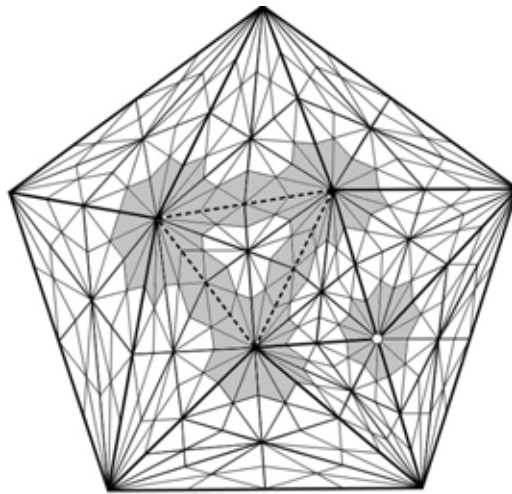
Considere uma destas regiões (no desenho é a parte sombreada) e retire todos os seus 2-simplexos. Agora, recoloque os 2-simplexos um por um de modo que a reunião de 2-simplexos recolocados seja um bordo de K , ou seja, um elemento do grupo cíclico $Z_2(M, K; 2)$ com todos os coeficientes em Z_2 , onde todos os 2-simplexos já foram repostos. Existe uma conexão entre o número de regiões e a dimensão de $Z_2(M, K; 2) = H_2(M, K; 2)$.

Para podermos estabelecer esta conexão temos que interpretar o número de regiões em termos da Teoria da Homologia. Adotaremos como partida a abordagem que substitui as regiões por subcomplexos da segunda divisão baricêntrica de M .

Definição 6.1. *Sejam M uma superfície fechada e K um subcomplexo de M , para o momento K não necessariamente é um grafo. Sejam M'' e K'' as segundas subdivisões baricêntricas de M e K respectivamente, de modo que K'' é um subcomplexo de M'' . Seja N o fecho $\{s \in M'' : s \text{ tem pelo menos um vértice em } K''\}$, e $V = \{s \in M'' : s \text{ não possui vértices em } K''\}$.*

N é chamada uma **vizinhança regular** de K em M , e ela circunda as várias componentes de K , de tal modo que as partes de N circundando diferentes componentes não se interceptam.

Exemplo 6.1. O diagrama abaixo (página 234 de [1]), mostra 11 triângulos de uma superfície fechada M , subdivididos em 6 triângulos de M' e 36 triângulos de M'' . K é o subcomplexo de M consistindo da quebra de 3 arestas e de seus pontos finais, junto com o vértice branco isolado de M . Assim, K é automaticamente subdividido entre K' e K'' . Os triângulos cinzas e suas faces tornam-se a vizinhança regular N de K em M : cada triângulo cinza tem pelo menos um vértice em comum com K'' . Note que N tem dois componentes: cada um rodeia um componente de K . Os triângulos brancos e suas faces tornam-se o complexo complementar de V : assim, $N \cap V$ é um polígono fechado.

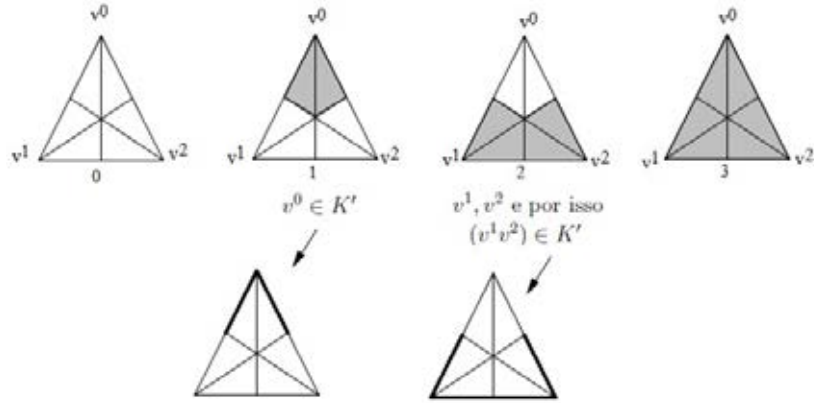


Definição 6.2. Seja V como antes. O número de regiões em que K divide M é o número de componentes de V .

O objetivo é calcular $H_0(V; 2)$ (ou $H_0(V)$); vamos também calcular $H_1(V; 2)$; e, quando M é orientável, $H_1(V)$. Isto nos fornece informações adicionais sobre as regiões, como veremos.

Lema 6.1. N colapsa para K'' . Então, $i_* : H_p(K'') \rightarrow H_p(N)$ é um isomorfismo para cada p , e $H_p(N, K'') = 0$ para cada p .

Demonstração. Considere o 2-simplexo $(v^0v^1v^2)$ da primeira subdivisão baricêntrica M' de M . O número de vértices do 2-simplexo que pertence a K' ou é 0, 1, 2 ou 3, e as interseções correspondentes de N com $(v^0v^1v^2)$ são sombreadas na linha superior do próximo diagrama. Os diagramas abaixo mostram, no segundo e terceiro caso, o resultado do colapso de 2-simplexos e um 1-simplexo de $N \setminus K''$ que se encontram em $(v^0v^1v^2)$. Desta forma N colapsa para K'' junto com um 1-simplexo de N , uma consideração similar dos 1-simplexos de M' mostram que os 1-simplexos de $N \setminus K''$ também podem ser colapsados. Por isso $N \searrow K''$. Se um complexo simplicial K colapsa para um subconjunto L , então $i_* : H_p(L) \rightarrow H_p(K)$ é um isomorfismo para todo p se, e somente se, $H_p(K, L) = 0$.



□

Usando a sequência exata de homologia da terna (M'', N, K'') , temos o seguinte:

Corolário 6.1. $H_p(M'', K'') \cong H_p(M'', N)$, para todo p .

Enunciaremos, sem demonstração, um resultado que será utilizado na demonstração da versão do teorema de Lefschetz.

Proposição 6.1. $H_p(M, K) \cong H_p(V, N \cap V)$ para todo p ; $H_p(M, K; 2) \cong H_p(V, N \cap V; 2)$ para todo p .

Proposição 6.2. Sejam N uma vizinhança regular de K em M e $V = \{s \in M'' : s \text{ não tem vértice em } K\}$.

Cada componente de V é uma superfície cujo bordo é a interseção de componentes com N . Se $K \neq \emptyset$ e $K \neq M$ o bordo nunca é vazio.

Demonstração. Para a primeira sentença precisamos mostrar o seguinte: se v é um vértice de V , então:

- (i) $v \notin N \Rightarrow Lk(v, V)$ é um polígono fechado simples.
- (ii) $v \in N \Rightarrow Lk(v, V)$ é um arco poligonal simples.

(i) Suponha $v \notin N$. Então $Lk(v, M'')$ é um polígono fechado simples, pois M'' é uma superfície fechada. Além disso, $Lk(v, V) \subset Lk(v, M'')$ assim, precisamos somente provar a outra inclusão. Seja $s \in Lk(v, M'')$. Então $sv \in M''$ e se um vértice de s não pertence a V então, este deverá pertencer a K'' . Segue que sv e conseqüentemente v deverão pertencer a N , contrário à hipótese. Assim s e então sv pertencem a V , e isto mostra que $s \in Lk(v, V)$.

(ii) Suponha $v \in V \cap N$. Então $v \notin K''$ mas, existe um 1-simplexo $(vw) \in M''$ com $v \in K''$.

Suponha que v é um vértice de M' . Então w é o baricentro de um simplexo $s \in M'$ de dimensão 1 ou 2. Também $s \in K'$ desde que $w \in K''$ (recordamos que w é um

vértice de $K'' \Leftrightarrow w$ é o baricentro de um simplexo de K'). Finalmente v é um vértice de s então $v \in K'$, uma contradição.

Então v deve ser o baricentro de um 1 ou 2-simplexo de M' . Vamos considerar os casos:

Caso 1: $v = \hat{s}$ (baricentro de s) onde s é um 1-simplexo de M' . No diagrama, $Lk(v, M'')$ tem quatro vértices $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}, \hat{d}$.

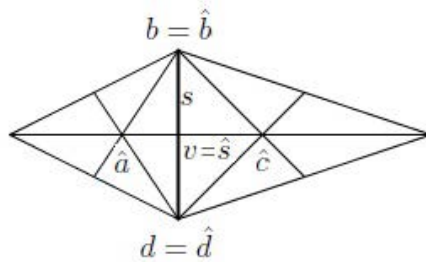
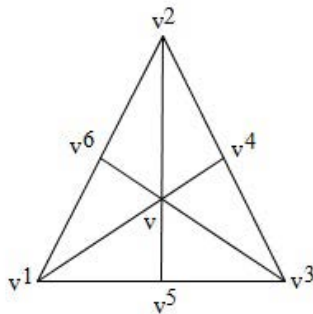


Figura 6.1: a, b, c, d são simplexos de M'

Agora, se $a \in K'$ então $s \in K'$ e assim $v \in K''$, uma contradição. Logo $a \notin K'$, ou seja, $\hat{a} \notin K''$, ou seja $\hat{a} \in V$. De forma similar $\hat{c} \in V$. Assim, o w mencionado acima deve ser \hat{b} ou \hat{d} , digamos que é \hat{b} e que pertence a K' . Se \hat{d} também pertence a K' então, $s = (\hat{b}\hat{d})$ deveria pertencer a K' (os simplexos de K' são precisamente aqueles de M' todos cujos vértices pertencem a K') e então, $v \in K''$, o que não é verdade. A conclusão é que $Lk(v, V)$ é:

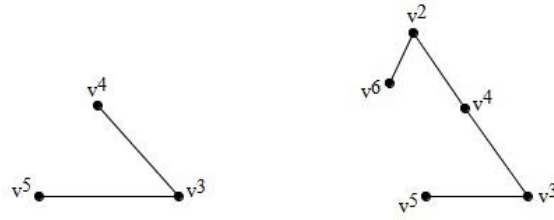


Caso 2: $v = \hat{s}$ onde s é um 2-simplexo de M' . Seja $s = (v^1v^2v^3)$, como no diagrama abaixo:



Agora, no máximo, dois de v^1, v^2, v^3 podem pertencer a K' desde que se todos os três pertencessem, então s deve pertencer a K' (como no caso 1), e então v deveria

pertencer a K'' . Se, digamos, v^1 e v^2 pertencem a K' , então v^3, v^4, v^5 pertencem a V e $Lk(v, V)$ é como no diagrama abaixo da esquerda; se por outro lado $v' \in K'$ então $Lk(v, V)$ é como no diagrama da direita.



Finalmente, devemos checar que para qualquer componente V^1 de V , $V^1 \cap N$ é não vazio, assumindo $K \neq \emptyset$ e $K \neq M$. Agora, estas duas restrições em K implicam, respectivamente, que $N \neq \emptyset$ e $V \neq \emptyset$. Assim escolhemos um vértice $v \in V_1$ e um vértice $w \in N$ e os juntamos com um caminho $v \dots w$ em M'' . Seja w' o primeiro vértice deste caminho que pertence a N ; assim todos os vértices anteriores e, portanto arestas, no caminho pertencem a V , e portanto a V_1 . Além disso, $w' \in V$ e isto implica que o vértice anterior w' no caminho pertence a N . Disso, $V_1 \cap N \neq \emptyset$. \square

Teorema 6.1. *(Uma versão do Teorema de Lefschetz)*

Seja M uma superfície fechada e K um subcomplexo de M . Sejam M'' e K'' as segundas divisões baricêntricas de M e K respectivamente, então K'' é um subcomplexo de M'' . Considere $V = \{s \in M'' : s \text{ não possui vértices em } K\}$ e N uma vizinhança regular de K em M . Assim:

$$H_0(V; 2) \cong H_2(M, K; 2) \text{ e } H_1(V; 2) \cong H_1(M, K; 2).$$

Em particular o número de regiões em que K divide M é $\dim(H_2(M, K; 2))$.

Demonstração. Pela Proposição 6.1, temos que $H_2(M, K; 2) \cong H_2(M, K; 2) \cong H_2(V, N \cap V; 2)$. Como V é uma união disjunta de superfícies e $N \cap V$ é a união dos seus bordos, pela Proposição 6.2 temos que $H_2(V, N \cap V; 2)$ possui dimensão igual ao número de componentes de V . Consequentemente é isomorfo a $H_0(V; 2)$. Da mesma maneira $H_1(M, K; 2) \cong H_1(V, N \cap V; 2)$ pela Proposição 6.1 é isomorfo a $H_1(V; 2)$, desde que, V é a união de superfícies. \square

6.1 Aplicação: Separando superfícies com grafos

Seja K um grafo que é um subcomplexo de uma superfície fechada M . O objetivo é estudar em que condições K separa M .

Vamos considerar primeiro o caso em que K é um polígono fechado simples. Então $H_1(K; 2) \cong Z_2$. Considerando a sequência exata:

$$H_2(K; 2) \rightarrow H_2(M; 2) \rightarrow H_2(M, K; 2) \rightarrow H_1(K; 2) \xrightarrow{i_*} H_1(M; 2)$$

0 1 r 1

onde os números são as dimensões dos grupos de homologia, temos que se $i_* = 0$ então, a exatidão implica que $r = 2$; se $i_* \neq 0$, então o 1-ciclo *mod* 2 em M dado pelo polígono fechado simples K não é homólogo a zero, assim a exatidão implica que $r = 1$. Por isso:

Proposição 6.3. *Um polígono fechado simples separa uma superfície fechada se, e somente se, o 1-ciclo mod 2 dado pelo polígono é homólogo a zero na superfície fechada.*

Proposição 6.4. *K é um grafo maximal não separável por M se, e somente se, $i_* : H_1(K; 2) \rightarrow H_1(M; 2)$ é um isomorfismo (maximal no sentido de ter a maior, possível, $\dim H_1(K; 2)$).*

Demonstração. Um grafo K irá separar M se, e somente se, K contém um polígono fechado simples. A pergunta que surge é qual o maior grafo K , que pode ser incorporado em uma superfície fechada M , sem separá-la? Vamos substituir, se necessário, por qualquer superfície fechada equivalente (com a mesma forma padrão), para podermos fazer perguntas mais gerais como: de todos os grafos que são subcomplexos de alguma triangulação de um toro e que não conseguem se separar, qual é o maior? A $\dim H_1(K; 2)$ é a soma dos números ciclomáticos das componentes de K . Considere a sequência exata, onde consideramos Z_2 como coeficientes :

$$H_2(K) \rightarrow H_2(M) \xrightarrow{j_*} H_2(M, K) \xrightarrow{\partial_*} H_1(K) \xrightarrow{i_*} H_1(M) \rightarrow H_1(M, K) \rightarrow \widetilde{H}_0(K)$$

Agora,

$$H_2(K; 2) = 0, H_2(M; 2) \cong Z_2.$$

Suponha que K não separa M . Pela dualidade Lefschetz $H_2(M, K; 2) \cong Z_2$ e j_* , sendo um monomorfismo, deve ser um isomorfismo, assim $\partial_* = 0$ e i_* é monomorfismo. Logo:

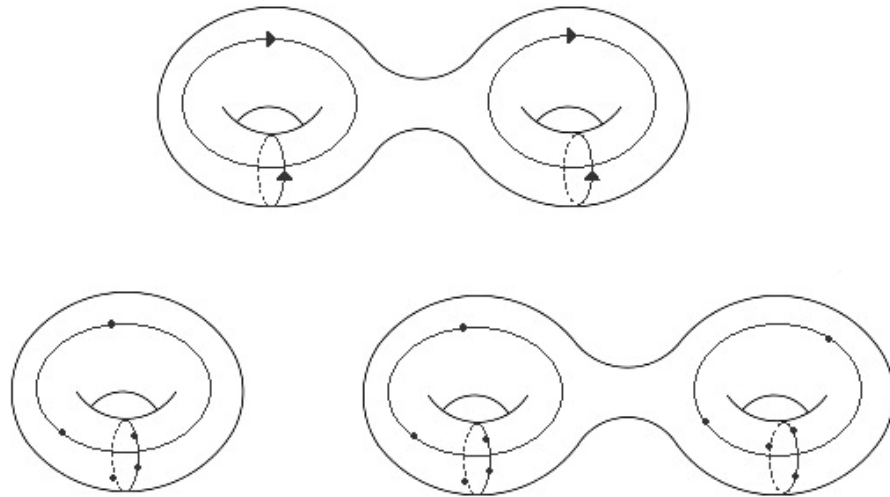
$$\dim H_1(K; 2) \leq \dim H_1(M; 2),$$

com igualdade se, e somente se, i_* é um isomorfismo.

Reciprocamente se i_* é um isomorfismo então $\partial_* = 0$, assim j_* é um isomorfismo e $H_2(M, K; 2) \cong Z_2$. Disso:

□

Exemplos de grafos maximais não separáveis em toros e bi-toros são indicados abaixo. Os ciclos *mod* 2 representam uma base para $H_1(M; 2)$.



Concluimos então que um grafo K , maximal, conexo e não separável em uma superfície fechada M possui a propriedade que a superfície $V = \{s \in M'' : s \text{ não possui vértices em } K\}$, é uma triangulação de um disco, ou seja, cortando ao longo de K a superfície M se torna um disco. Se M é representada por uma região poligonal no plano, um grafo K com as propriedades acima é dado pelo bordo de um polígono.

Referências

- [1] GIBLIN, P. J. *Graphs, Surfaces and Homology*. London: Chapman and Hall Ltd, 1981.
- [2] LIBARDI, A. K. M.; VIEIRA, J. P.; MELO, T. *Invariantes Topológicos*. São Paulo: Cultura Acadêmica, 2012.
- [3] GRIFFITHS, H. B. *Surfaces*. Cambridge: Cambridge University Press, 1976.
- [4] MASSEY, W. S. *Algebraic Topology: An introduction*. [S.l.]: Harcourt Brace and World, 1967.
- [5] MUNKRES, J. R. *Topology: A First Course*. [S.l.]: Prentice Hall, 1975.
- [6] VICK, J. W. *Homology theory: an introduction to Algebraic Topology*. Springer-Verlag: GTM 145, 1994.