



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Câmpus de São José do Rio Preto

Darwin Emerson Guerrero Vejarano

Sobre o Teorema de Fibração de Milnor

São José do Rio Preto
2014

Darwin Emerson Guerrero Vejarano

Sobre o Teorema de Fibração de Milnor

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, Área de Concentração - Teoria das Singularidades, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de São José do Rio Preto.

Orientador: Prof. Dr. João Carlos Ferreira Costa

São José do Rio Preto
2014

Guerrero Vejarano, Darwin Emerson.
Sobre o teorema de fibração de Milnor / Darwin Emerson
Guerrero Vejarano. -- São José do Rio Preto, 2014
69 f. : il.

Orientador: João Carlos Ferreira Costa
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual Paulista “Júlio de
Mesquita Filho”, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Matemática. 2. Variedades algébricas. 3. Fibração de Milnor.
I. Costa, João Carlos Ferreira. II. Universidade Estadual Paulista "Júlio
de Mesquita Filho". Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas.
III. Título.

CDU – 513.6

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do IBILCE
UNESP - Campus de São José do Rio Preto

Darwin Emerson Guerrero Vejarano

Sobre o Teorema de Fibração de Milnor

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, Área de Concentração - Teoria das Singularidades, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de São José do Rio Preto.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. João Carlos Ferreira Costa
UNESP - São José do Rio Preto
Orientador

Profa. Dra. Ana Claudia Nabarro
USP - Universidade de São Paulo

Profa. Dra. Luciana de Fátima Martins
UNESP - São José do Rio Preto

São José do Rio Preto, 28 de fevereiro de 2014.

À minha mãe e família
dedico.

Agradecimentos

Agradeço profundamente à minha mãe e família.

Ao meu orientador Prof. Dr. João Carlos Ferreira Costa, pela paciência, dedicação e apoio neste trabalho, e também pelo apoio para a continuação futura de meus estudos de Doutorado na Universidade de São Paulo.

À Banca Examinadora, por terem aceito o nosso convite.

Aos professores Claudio Pessoa, German Lozada, Jenny Rojas, Salomão Espinoza, Franco Rubio e aos amigos Vanderléa e Rodiak.

Ao CNPq pelo apoio financeiro.

Muito Obrigado !!!

*“Cuando la matemática se vuelve un fin en si mismo,
es entonces cuando ella, va mas allá de algo racional,
convirtiéndose por primera vez, en algo espiritual.”*

(Darwin Guerrero)

Resumo

A fibração de Milnor aparece como a principal ferramenta no estudo local da topologia das singularidades analíticas reais e complexas.

Neste trabalho estudaremos o Teorema de “Fibração” de Milnor e o surpreendente comportamento topológico das Fibras de Milnor. Para tais objetivos, usaremos algumas ferramentas da Geometria Algébrica, Análise Complexa em várias variáveis e um pouco da Teoria de Morse.

Palavras-chave: Variedades algébricas. Fibração de Milnor. Fibra de Milnor.

Abstract

The Milnor fibration appears as the main tool in the topological local study of real and complex analytic singularities.

In this work we study the famous Milnor Fibration Theorem, and the surprising topological behavior of the Milnor fibres. To reach these objectives we use some tools of classical Algebraic Geometry, Complex Analysis of several variables and also some aspects of Morse Theory.

Keywords: Algebraic varieties. Milnor fibration. Milnor fibre.

Sumário

1	Preliminares	1
1.1	Variedades diferenciáveis	1
1.2	Algumas definições algébricas	5
2	Variedades Algébricas	8
2.1	Dimensão de uma variedade algébrica	11
3	Aspectos topológicos e o Lema de Seleção da Curva	18
3.1	Topologia local	18
3.2	Fibrados e fibração	22
3.3	Lema de Seleção da Curva	24
4	Teorema de Fibração de Milnor	26
5	A topologia das fibras	40
	Bibliografía	49

Preliminares

Este primeiro Capítulo está dividido em duas partes: uma dedicada às variedades diferenciáveis e outra dedicada a algumas definições algébricas.

1.1 Variedades diferenciáveis

Em primeira instância, gostaríamos de trabalhar o cálculo diferencial sobre objetos matemáticos não tão cômodos como \mathbb{R}^2 , \mathbb{R}^3 ou incluso L^n onde $L = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

Seja M este tal objeto matemático, dotado de uma operação de soma.

Dados dois elementos $a, b \in M$, como garantir que $a + b \in M$? Pois sem este pequeno detalhe não é possível iniciar um estudo da teoria de cálculo diferencial. Então, uma questão natural é como definir em M uma estrutura “algébrica” que torne possível tal estudo.

Nosso espaço modelo é o \mathbb{R}^n . Se queremos que M seja como \mathbb{R}^n é natural primeiro fazer uma identificação de forma local e o caminho mais natural para isso é com uma função bijetora entre estes dois conjuntos. Mas, como necessitamos de noções topológicas em M (pontos aderentes, conjuntos abertos, fechados, 1º e 2º axiomas de enumerabilidade, propriedades de ser Hausdorff, T_3 , T_4 , etc ...) precisamos que M e \mathbb{R}^n sejam localmente homeomorfos.

E como pretendemos fazer cálculo diferencial em M , é natural exigir a condição de diferenciabilidade sobre os homeomorfismos. Então, para que tenha sentido a diferenciabilidade de funções sobre tais objetos matemáticos (que chamaremos de variedades diferenciáveis) exigiremos também que as mudanças de coordenadas sejam difeomorfismos.

Assim, temos que uma variedade diferenciável M é, em essência, um objeto localmente difeomorfo a \mathbb{R}^n , e que a derivada sobre este objeto esta bem definida.

Definição 1.1.1 (Variedade topológica n -dimensional) *Um conjunto $M \neq \emptyset$ é uma variedade topológica n -dimensional se é um espaço topológico de Hausdorff com base enumerável de tal maneira que, para todo $p \in M$, existe uma vizinhança U de p em M que é localmente homeomorfa (ou também chamada topologicamente equivalente) a \mathbb{R}^n .*

Os homeomorfismos acima são aplicações $X : U \subset M \rightarrow X(U) \subset \mathbb{R}^n$ os quais chamamos de *cartas* ou *sistema de coordenadas locais*. A aplicação inversa da carta é chamada de *parametrização*.

Definição 1.1.2 (Atlas topológico) *Seja M uma variedade topológica n -dimensional. Um conjunto de cartas*

$$\Lambda = \{X_\alpha/X_\alpha : U_\alpha \subset M \longrightarrow V_\alpha = X_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^n, \alpha \in J\}$$

tais que $M = \cup_{\alpha \in J} U_\alpha$ (é uma cobertura aberta de M) é chamado de atlas topológico ou simplesmente um atlas sobre M .

Definição 1.1.3 (Atlas diferenciável) *Seja M uma variedade topológica n -dimensional e seja Λ um atlas sobre M . Dizemos que Λ é um atlas diferenciável se para todo par de cartas*

$$X_{\alpha_1} : U_{\alpha_1} \subset M \longrightarrow V_{\alpha_1}$$

$$X_{\alpha_2} : U_{\alpha_2} \subset M \longrightarrow V_{\alpha_2}$$

com $U_{\alpha_1} \cap U_{\alpha_2} \neq \emptyset$ temos que

$$X_{\alpha_1} \circ X_{\alpha_2}^{-1} : X_{\alpha_2}(U_{\alpha_1} \cap U_{\alpha_2}) \longrightarrow X_{\alpha_1}(U_{\alpha_1} \cap U_{\alpha_2})$$

e

$$X_{\alpha_2} \circ X_{\alpha_1}^{-1} : X_{\alpha_1}(U_{\alpha_1} \cap U_{\alpha_2}) \longrightarrow X_{\alpha_2}(U_{\alpha_1} \cap U_{\alpha_2})$$

são diferenciáveis (isto é, são de classe C^∞).

As aplicações $X_{\alpha_1} \circ X_{\alpha_2}^{-1}$ são chamadas de *mudanças de coordenadas*. Observe também que todas as mudanças de coordenadas são, de fato, difeomorfismos.

Observação 1.1.1 *Seja Λ um atlas diferenciável sobre M . Seja $\Gamma = \Gamma(\Lambda)$ o atlas que contém justamente aquelas cartas de M cujas mudanças de coordenadas com cada parametrização de Λ é diferenciável (logo o inverso é diferenciável). Então, o atlas Γ é também um atlas diferenciável e ele é claramente maximal entre os demais atlas diferenciáveis sobre M . Assim, cada atlas diferenciável gera univocamente um atlas diferenciável maximal.*

Definição 1.1.4 (Estrutura diferenciável) *Seja M uma variedade topológica n -dimensional. Uma estrutura diferenciável Γ sobre M é um atlas diferenciável maximal sobre M .*

Definição 1.1.5 (Variedade diferenciável) *Uma variedade diferenciável de dimensão n é um par (M, Γ) , onde M é uma variedade topológica n -dimensional e Γ é uma estrutura diferenciável em M .*

Nota: Qualquer subconjunto aberto N de uma variedade diferenciável n -dimensional M , no qual N herda a estrutura topológica e a estrutura diferenciável de M , é chamado de *subvariedade diferenciável de M* . Naturalmente, a dimensão de N é menor ou igual n .

★ Para quase todos os aspectos abordados neste texto consideraremos M uma variedade diferenciável n -dimensional contida (mergulhada) em algum espaço euclidiano \mathbb{R}^k , salvo menção contrária. É importante observar que quando M está contida (mergulhada) em \mathbb{R}^k as mudanças de coordenadas são difeomorfismos devido ao Teorema da Função Inversa, e assim o atlas em questão já resulta ser maximal. No entanto, para variedades abstratas, esta é uma condição que se adiciona à definição. Isto é vital para que possamos ter bem definida a noção de diferencial de uma função entre variedades.

- ★ Uma variedade diferenciável M de dimensão n contida em \mathbb{R}^{n+1} é chamada de *hipersuperfície*.
- ★ Toda variedade diferenciável de dimensão 0 em \mathbb{R}^n é chamada de *ponto isolado*.

Exemplos.

1. Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto. O atlas $\{Id_U\}$, que consta de uma só carta $Id_U : U \rightarrow U$, define em U a estrutura diferenciável usual. Além disso, todo homeomorfismo $h : U \rightarrow U$ define também um atlas diferenciável $\{h\}$ o qual determina a mesma estrutura diferenciável que $\{Id_U\}$ se, e somente se, h é um difeomorfismo. Assim, se podem definir facilmente sobre um aberto de \mathbb{R}^n distintas estruturas diferenciáveis. O detalhe é que usando tais atlas com apenas uma carta, não se obtêm variedades diferenciáveis essencialmente distintas.
2. A esfera $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}; |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n+1}^2} = 1\}$ é uma variedade diferenciável de dimensão n .
3. Um subconjunto aberto de uma variedade diferenciável possui uma estrutura de variedade diferenciável.
4. O gráfico de uma função diferenciável $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ é trivialmente uma variedade diferenciável de dimensão m , pois a variedade pode ser coberta por uma única carta.

Denotaremos uma variedade diferenciável M de dimensão m por M^m .

Definição 1.1.6 (Função diferenciável) *Sejam M^m e N^n variedades diferenciáveis. Uma função contínua $f : M \rightarrow N$ é diferenciável em $p \in M$, se para um par de cartas (e portanto para todas) $X : U_p \rightarrow V_q$ e $Y : W_b \rightarrow Z_r$ com $X(p) = q$, $f(p) = b$, $Y(b) = r$, a aplicação $Y \circ f \circ X^{-1}$ é diferenciável em $q = X(p)$.*

Nota: Abusando da notação, às vezes é conveniente escrever (denotar) $f = Y \circ f \circ X^{-1}$.

Naturalmente, a definição acima não depende da escolha das cartas.

Definição 1.1.7 (Espaço tangente) *Seja M^n uma variedade diferenciável e considere $\phi : V \subset \mathbb{R}^n \rightarrow U \subset M$ uma parametrização no ponto $p \in U \subset M$, com $\phi(q) = p$. O espaço tangente a M no ponto p é definido por $T_p M = d\phi_q(\mathbb{R}^n)$, o qual é um espaço vetorial de dimensão n .*

Em essência, o espaço tangente é a parte euclidiana local da variedade M e é vital para definir a noção de diferencial de uma função diferenciável $f : M \rightarrow N$, onde M e N são variedades diferenciáveis.

Uma base para $T_p M$ é dada por $\{\frac{\partial \phi}{\partial x_i}(q) = d\phi(q)(e_i)\}$ onde $\{e_i\}_{i=1}^n$ é a base canônica do \mathbb{R}^n (na verdade pode ser qualquer base). Naturalmente, o espaço tangente $T_p M$ não depende da parametrização escolhida, pois as aplicações mudanças de coordenadas são difeomorfismos. Com isso, M é localmente difeomorfo a \mathbb{R}^n .

Outra apresentação mais “manejável” de T_pM é dada pela seguinte definição:

$$T_pM = \{v \in \mathbb{R}^n; v = \lambda'(0), \lambda : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M, \lambda(0) = p\},$$

onde λ é um caminho diferenciável em M . Em outras palavras, o espaço tangente é o conjunto dos vetores velocidades de curvas diferenciáveis em M que passam pelo ponto p .

Definição 1.1.8 (Diferencial de f) *Dada uma aplicação diferenciável $f : M \rightarrow N$ onde M^n e N^n são variedades diferenciáveis, com $f(p) = q$, a diferencial de f em p é a aplicação $df_p : T_pM \rightarrow T_qN$ dada por*

$$df_p(\lambda'(0)) = (f \circ \lambda)'(0),$$

onde $\lambda : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$, com $\lambda(0) = p$.

A aplicação diferencial df_p é linear e a matriz de df_p é chamada de matriz jacobiana de f em p .

Definição 1.1.9 (Imersão, Submersão, Ponto Regular e Ponto Singular) *Sejam M^m e N^n variedades diferenciáveis e $f : M \rightarrow N$ uma aplicação diferenciável em $p \in M^m$. Dizemos que:*

1. f é uma imersão em p se a diferencial df_p é injetora (isto é verdade se $n \geq m$). Em outras palavras, o posto da matriz Jacobiana de f em p é igual a m .
2. f é uma submersão em p , se a diferencial df_p é sobrejetora (isto é verdade se $m \leq n$). Em outras palavras, o posto da matriz jacobiana de f em p é igual a n .
3. p é um ponto regular de f se, e somente se, df_p tem posto máximo em p e, neste caso, $f(p)$ é chamado valor regular de f .
4. p é um ponto singular de f , se p não é ponto regular, ou em outras palavras se df_p não é sobrejetora e nem injetora (é dizer que f não é submersão, nem imersão em p) e $f(p)$ é chamado valor singular de f .

A função inclusão é um exemplo clássico de imersão enquanto a função projeção é um exemplo de submersão.

Observação 1.1.2 *Recorde que o posto de uma função se refere ao posto de sua derivada. É importante observar que o posto de uma função pode mudar de ponto a ponto. Vejamos:*

1. Se $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, então f tem posto 0 nos seus pontos singulares e posto 1 nos pontos regulares.
2. Considere $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $f(x, y) = (x^3, y^2)$. O posto de f é calculado pela matriz Jacobiana

$$[df_{(x,y)}] = \begin{pmatrix} 3x^2 & 0 \\ 0 & 2y^2 \end{pmatrix}$$

Se $x, y \neq 0$, o posto de f em (x, y) é 2.

Nos pontos da forma $(x, 0)$ ou $(0, y)$, com $x \neq 0, y \neq 0$, o posto de f é 1.

Em $(x, y) = (0, 0)$ o posto de f é 0.

Definição 1.1.10 (Espaço Normal) *Seja $M^m \subset \mathbb{R}^n$ ($m \leq n$) uma variedade diferenciável. O espaço normal a M no ponto $p \in M$ é o conjunto*

$$(T_p M)^\perp = \{w \in \mathbb{R}^n; \langle w, v \rangle = 0, \forall v \in T_p M\}.$$

O espaço $(T_p M)^\perp$ é o complemento ortogonal de $T_p M$ em \mathbb{R}^n e $\dim(T_p M)^\perp = n - m$. Os vetores de $(T_p M)^\perp$ são chamados *vetores normais* a M no ponto p .

Nem sempre é fácil provar que um conjunto é uma variedade diferenciável. Um resultado importante que ajuda a determinar se um conjunto é uma variedade diferenciável utiliza o conceito de valor regular. Um ponto $q \in N$ é chamado de *valor regular* de f se sua imagem inversa $f^{-1}(q)$ só contém pontos regulares.

Teorema 1.1.1 (Caracterização de variedade diferenciável via valor regular) *Sejam N^n e P^p variedades diferenciáveis, $f : N \rightarrow P$ uma aplicação diferenciável, $q \in P$ um valor regular de f . Então, $f^{-1}(q) = M$ é uma subvariedade de N de dimensão $n - p$ e, além disso, dado $b \in M$, temos $T_b M = \text{Ker}(df_b)$.*

Uma demonstração deste resultado pode ser encontrada em [7].

A generalização do resultado anterior utiliza a ideia de transversalidade.

Definição 1.1.11 (Transversalidade) *Sejam M^m e N^n variedades diferenciáveis, $P \subset N$ uma subvariedade de N de dimensão p e $f : M \rightarrow N$ uma aplicação diferenciável. Dizemos que f é transversal a P no ponto $q \in f^{-1}(P)$ quando*

$$T_{f(q)} N = T_{f(q)} P + df_q(T_q M).$$

Dizemos ainda que f é transversal a P se para todo $q \in f^{-1}(P)$, f é transversal a P em q .

Teorema 1.1.2 (Segunda caracterização de variedade diferenciável) *Sejam M^m , N^n variedades diferenciáveis, $P \subset N$ uma subvariedade de N de dimensão p e $f : M \rightarrow N$ uma aplicação diferenciável. Se f é transversal a P então $f^{-1}(P) = \emptyset$ ou $f^{-1}(P)$ é uma subvariedade diferenciável de M de dimensão $m - (n - p)$.*

Uma demonstração deste resultado pode também ser encontrada na referência [7].

Corolário 1.1.1 *Se uma aplicação diferenciável $f : M^m \rightarrow N^n$ é uma submersão, então para toda subvariedade P^p de N , temos que $f^{-1}(P) = \emptyset$ ou $f^{-1}(P)$ é uma subvariedade diferenciável de M , de dimensão $m - (n - p)$.*

1.2 Algumas definições algébricas

Nesta seção, todo anel é considerado comutativo e com unidade.

Definição 1.2.1 (Anel Noetheriano) *Dizemos que R é um anel Noetheriano se satisfaz uma das seguintes condições equivalentes:*

1. *Todo ideal de R é finitamente gerado.*
2. *Toda sequência crescente $I_1 \subset I_2 \subset \dots$ de ideais em R é estacionária, isto é, existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $I_i = I_{i+1} = I_{i+2} = \dots$.*

3. Toda família não vazia de ideais de R contém um elemento maximal.

Note que se R é um corpo então, R é um anel Noetheriano pois os únicos ideais de um corpo são os triviais.

Dado um anel R , podemos considerar o anel dos polinômios $R[x]$ formado pelos elementos da forma

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_ix^i \dots$$

tal que $a_i = 0$, exceto para um número finito de índices.

Se R é um anel Noetheriano, um fato relevante é que $R[x]$ também é Noetheriano. Este é um resultado conhecido como Teorema da Base de Hilbert:

Teorema 1.2.1 (*Teorema da Base de Hilbert*) *Se R é um anel Noetheriano, então o anel dos polinômios $R[x]$ também é Noetheriano.*

Uma demonstração deste resultado pode ser vista em [2].

Aplicando sucessivamente (de forma finita) o Teorema da Base de Hilbert, isto é, fazendo

$$(\dots((R[x_1])[x_2])[x_3]\dots)[x_n] = R[x_1, x_2, \dots, x_n]$$

concluimos que o anel de polinômios em n variáveis, o qual denotamos por $R[x_1, x_2, \dots, x_n]$, é também Noetheriano.

Definição 1.2.2 (*R -Módulos*) *Seja $(R, +, \cdot)$ um anel. Um conjunto $M \neq \emptyset$ é um R -módulo (ou um módulo sobre R) se $(M, +)$ é um grupo abeliano e existe uma operação $\xi : R \times M \rightarrow M$ dada por $\xi(r, m) = rm \in M$ tal que para todo $r_1, r_2, r \in R$ e para todo $m_1, m_2, m \in M$ temos*

1. $(r_1 + r_2)m = r_1m + r_2m$,
2. $r(m_1 + m_2) = rm_1 + rm_2$,
3. $(r_1r_2)m = r_1(r_2m_2)$,
4. $1m = m$.

A função ξ é chamada de multiplicação por escalar (de modo análogo ao que ocorre com os espaços vetoriais). Um R -módulo com a particularidade de que R é corpo, é um espaço vetorial.

Definição 1.2.3 (*R -Submódulo*) *Sejam R um anel e M um R -módulo. Um subgrupo aditivo N de $(M, +)$ é um R -submódulo se a multiplicação por escalar em M preserva N . Isto é,*

$$\xi(r, m) = rm \in N, \quad \forall r \in R, \forall m \in N.$$

Definição 1.2.4 (*R -módulo Noetheriano*) *Seja M um R -módulo. Dizemos que M é Noetheriano se toda sequência crescente $N_1 \subset N_2 \subset N_3 \dots$ de R -submódulos de M é estacionária (isto é, existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $N_i = N_{i+1} = N_{i+2} \dots$).*

Seja $\emptyset \neq S \subset M$. O R -submódulo gerado por S é o conjunto

$$\langle S \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^n r_i s_i ; r_i \in R, s_i \in S \right\}.$$

Se $N \subset M$ é tal que $N = \langle S \rangle$, onde S é um conjunto finito, então N é dito *finitamente gerado*.

Proposição 1.2.1 (Caracterização de módulo Noetheriano) *Seja M um R -módulo. Então, M é Noetheriano se, e somente se, todo submódulo de M é finitamente gerado.*

Demonstração ver [2]

Vamos terminar esta seção com o Lema de Zorn. Este lema tem uma série de aplicações em vários ramos da Matemática.

Lema 1.2.1 (Lema de Zorn) *Se $X \neq \emptyset$ é um conjunto parcialmente ordenado tal que todo subconjunto totalmente ordenado admite uma cota superior então X admite um elemento maximal.*

Neste trabalho, precisaremos do Lema de Zorn para poder definir o conceito de dimensão de uma variedade algébrica, a qual será feito no capítulo seguinte.

Variedades Algébricas

Seja $\mathbb{L} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . Considere o anel (Noetheriano) dos polinômios em várias variáveis $\mathbb{L}[x_1, x_2, \dots, x_{n+1}]$. Há um conjunto particularmente interessante relacionado com $\mathbb{L}[x_1, x_2, \dots, x_{n+1}]$ o qual definiremos a seguir:

Uma referência para este capítulo, pode ser vista em [11].

Definição 2.0.5 (Conjunto algébrico) *Seja $f \in \mathbb{L}[x_1, x_2, \dots, x_{n+1}]$ um polinômio. Definimos o conjunto de zeros de f por*

$$Z(f) = \{a \in \mathbb{L}^{n+1} / f(a) = 0\}.$$

Se $S \subset \mathbb{L}[x_1, x_2, \dots, x_{n+1}]$ então denotaremos por

$$Z = Z(S) = \bigcap_{f \in S} Z(f) = \{p \in \mathbb{L}^{n+1}; f(p) = 0, \text{ para todo } f \in S\}$$

o conjunto de zeros comuns de S , o qual é chamado de conjunto algébrico.

Note que S pode ser um conjunto unitário, digamos $S = \{f\}$. Neste caso, $Z(S) = Z(f)$ é chamado de *hipersuperfície algébrica*.

Se $S_1, S_2 \subset \mathbb{L}[x_1, x_2, \dots, x_{n+1}]$ e $S_1 \subset S_2$ então $Z(S_2) \subset Z(S_1)$.

Exemplo. O conjunto Z formado pelas soluções de um sistema finito de equações polinomiais é um conjunto algébrico. Notar que este exemplo gera uma grande variedade de exemplos de conjuntos algébricos.

Definição 2.0.6 (Ideal de um conjunto algébrico) *Seja $Z \subset \mathbb{L}^{n+1}$ um conjunto algébrico. Definimos o conjunto*

$$I(Z) = \{f \in \mathbb{L}[x_1, x_2, \dots, x_{n+1}]; f(a) = 0, \forall a \in Z\}$$

o qual é um ideal de $\mathbb{L}[x_1, x_2, \dots, x_m]$.

Nota: Se Z_1 e Z_2 são conjuntos algébricos e $Z_1 \subset Z_2$ então $I(Z_2) \subset I(Z_1)$.

Seja $S \subset \mathbb{L}[x_1, x_2, \dots, x_{n+1}]$ e consideremos o ideal gerado por S , $\langle S \rangle$. É natural investigarmos qual é a relação entre S e $\langle S \rangle$.

É claro que $S \subset \langle S \rangle$, logo $Z(\langle S \rangle) \subset Z(S)$.

Por outro lado, para todo $a \in Z(S)$, temos que $f(a) = 0$, qualquer que seja $f \in S$. Então, para todo $g \in \langle S \rangle$ temos também que $g(a) = 0$ e, portanto, $a \in Z(\langle S \rangle)$.

Logo, temos $Z(S) = Z(\langle S \rangle)$. Isto significa que o conjunto algébrico do ideal $\langle S \rangle$ é justamente o conjunto algébrico do conjunto S , ou seja, provamos que:

Lema 2.0.2 *Se $S \subset \mathbb{L}[x_1, x_2, \dots, x_{n+1}]$, então $Z(S) = Z(\langle S \rangle)$.*

Como $\langle S \rangle$ é o ideal gerado por $S \subset \mathbb{L}[x_1, x_2, \dots, x_{n+1}]$, ele é finitamente gerado e, assim, $\langle S \rangle = \langle f_1, f_2, \dots, f_k \rangle$. Logo

$$Z = Z(S) = Z(\langle S \rangle) = Z(f_1) \cap Z(f_2) \cap \dots \cap Z(f_k).$$

Ou seja, todo conjunto algébrico pode ser expresso como uma solução de um número finito de equações polinomiais.

Outras duas propriedades importantes são: a interseção arbitrária e a reunião finita de conjuntos algébricos é um conjunto algébrico.

Baseado no que já vimos sobre ideais e módulos, podemos investigar o que ocorre com uma sequência de conjuntos algébricos. Considere uma sequência decrescente de conjuntos algébricos da seguinte forma:

$$Z_1 \supset Z_2 \supset Z_3 \dots$$

Para cada conjunto algébrico Z_i , temos relacionado um ideal S_i de modo que

$$S_1 \subset S_2 \subset S_3 \dots$$

com $S_i \subset \mathbb{L}[x_1, x_2, \dots, x_{n+1}]$. Sendo $\mathbb{L}[x_1, x_2, \dots, x_{n+1}]$ Noetheriano, esta sequência é estacionária. Daí, a sequência dos conjuntos algébricos também é estacionária. Formalmente teremos:

Proposição 2.0.2 *Qualquer sequência decrescente de conjuntos algébricos*

$$Z_1 \supset Z_2 \supset Z_3 \dots$$

é estacionária.

Definição 2.0.7 (Variedade algébrica) *Um conjunto algébrico não vazio Z é chamado variedade algébrica se não pode ser expresso como a união de dois subconjuntos algébricos próprios.*

A proposição a seguir trata da relação entre um conjunto algébrico A e o conjunto algébrico do ideal de A , representado por $Z(I(A))$.

Proposição 2.0.3 *Se A é um conjunto algébrico então $A = Z(I(A))$.*

Demonstração. Note que todo elemento de A anula todos os polinômios de $I(A)$, logo $A \subset Z(I(A))$. Por outro lado, como A é um conjunto algébrico, $A = Z(J)$ para algum ideal J . Logo, $J \subset I(Z(J))$. De fato, dado $f \in J$, todo elemento de $Z(J)$ é raiz de f , logo f se anula em $Z(J)$

e, conseqüentemente, $f \in I(Z(J))$. Assim $A = Z(J) \supset Z(I(Z(J))) = Z(I(A))$. Portanto, $A = Z(I(A))$. ■

Investigaremos agora a relação entre o conjunto dos conjuntos algébricos e o conjuntos dos ideais relacionados a estes conjuntos algébricos.

Seja

$$B = \{Z = Z(S); S \text{ um ideal em } \mathbb{L}[x_1, x_2, \dots, x_{n+1}]\}$$

e

$$D = \{I(Z); Z \text{ um conjunto algbrico}\}.$$

Construímos a seguinte função $\Phi : B \rightarrow D$ tal que $\Phi(Z) = I(Z)$. Podemos perceber que Φ é injetora, tendo em conta o resultado anterior. De fato, se $\Phi(Z_1) = \Phi(Z_2)$ então $I(Z_1) = I(Z_2)$. Logo $Z(I(Z_1)) = Z(I(Z_2))$ e, então, $Z_1 = Z_2$. Portanto, Φ é injetora.

Brevemente recordemos alguns resultados da álgebra básica:

★ Seja R é um anel comutativo com unidade. Então, M é um ideal maximal $\Leftrightarrow R/M$ é um corpo.

★ Seja R um anel comutativo. Dizemos que $N \subsetneq R$ é um *ideal primo* se $ab \in N$ então $a \in N$ ou $b \in N$, $\forall a, b \in R$.

★ Seja R é um anel comutativo com unidade. Então, $N \subsetneq R$ é um ideal primo $\Leftrightarrow R/N$ é um *domínio inteiro ou domínio de integridade*. Equivale a dizer que R/N é um anel comutativo com unidade sem divisores de zero.

★ Todo ideal maximal em um anel comutativo com unidade é um ideal primo.

Para uma referência dos resultados acima ver [15].

É importante saber quando $Z = Z(S)$ com $S \subset \mathbb{L}[x_1, x_2, \dots, x_{n+1}]$ é uma variedade algébrica. No entanto, usar a definição para verificar isto pode não ser a melhor ideia. Precisamos encontrar condições mais práticas.

Suponhamos que Z é uma variedade algébrica. Sejam $f, g \in I(Z)$. Logo $\{f \cdot g\} \subset I(Z)$ então $Z(I(Z)) \subset Z(\{f \cdot g\})$. Portanto, $Z \subset Z(f \cdot g) = Z(f) \cup Z(g)$. A última igualdade é consequência da seguinte propriedade:

Propriedade. Sejam $S_1 = \{f_1, f_2, \dots, f_r\}$, $S_2 = \{g_1, g_2, \dots, g_r\}$, então $Z(S_1) \cup Z(S_2) = Z(S_1 \cdot S_2)$ onde

$$S_1 \cdot S_2 = \{f_1g_1 + f_1g_2 + f_1g_3 + \dots + f_2g_1 + \dots + f_i g_j; \quad f_i \in S_1, g_j \in S_2 \text{ com } 1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq r\}.$$

Voltando a análise anterior, $Z \subset Z(f) \cup Z(g)$. Então,

$$Z = (Z(f) \cup Z(g)) \cap Z = (Z(f) \cap Z) \cup (Z(g) \cap Z).$$

Como Z é uma variedade algébrica, um deles é vazio (por exemplo $Z(g) \cap Z = \emptyset$). Logo $Z \subset Z(f)$ (ou $Z = Z(S) \subset Z(f)$). E, conseqüentemente, $f \in I(Z)$. Logo $I(Z)$ é primo.

Por outro lado, suponha que $I(Z)$ seja um ideal primo. Que informação teremos sobre Z ? A intuição nos fala que Z deve ser uma variedade algébrica. De fato, por absurdo, vamos supor que Z não seja variedade algébrica. Logo $Z = Z_1 \cup Z_2$ onde Z_1 e Z_2 são conjuntos algébricos

próprios. Logo $Z_1 \subsetneq Z$. Então $I(Z) \subsetneq I(Z_1)$, de modo análogo $Z_2 \subsetneq Z$ então $I(Z) \subsetneq I(Z_2)$. Portanto existe $f_1 \in I(Z_1) \setminus I(Z)$ e existe $f_2 \in I(Z_2) \setminus I(Z)$. Logo $f_1 \cdot f_2 \in I(Z_1) \cap I(Z_2)$ (pois $I(Z_1)$ e $I(Z_2)$ são ideais). Ou seja, $f_1 \cdot f_2$ se anula em Z_1 e em Z_2 . Logo $f_1 \cdot f_2$ se anula em $Z_1 \cup Z_2 = Z$. Portanto $f_1 \cdot f_2 \in I(Z)$ e isso é uma contradição pois $I(Z)$ é primo. Ou seja, mostramos que:

Proposição 2.0.4 (Caracterização de uma variedade algébrica) *Seja Z um conjunto algébrico. Então Z é uma variedade algébrica se, e somente se, $I(Z)$ é um ideal primo.*

2.1 Dimensão de uma variedade algébrica

Seja B um anel comutativo, $A \subset B$ um sub-anel. Os elementos b_1, b_2, \dots, b_n de B , são ditos algebricamente independentes sobre A , se dado $f \in A[x_1, x_2, \dots, x_n]$ tal que $f(b_1, b_2, \dots, b_n) = 0$ então $f \equiv 0$. É dizer que a única relação polinomial entre os elementos b_1, b_2, \dots, b_n e A é através do polinômio trivial. Dizemos que $D \subset B$ é algebricamente independente sobre A , se seus elementos o são.

Definição 2.1.1 *Seja F um corpo. Dizemos que um corpo K é uma extensão de F , se $F \subset K$.*

Seja K um corpo extensão do corpo F . Seja D um subconjunto de K , algebricamente independente sobre F . Como todo subconjunto A de D é algebricamente independente sobre F , podemos introduzir uma ordem de inclusão ascendente na família de subconjuntos de K algebricamente independentes sobre F . Observamos que cada elemento da família tem como cota superior o conjunto potência de K . Pelo Lema de Zorn, tal família admite elemento maximal S , o qual chamaremos de *base de transcendência* de K sobre F . Naturalmente, por construção, S é algebricamente independente sobre F e maximal pelo Lema de Zorn.

Teorema 2.1.1 *Seja K um corpo extensão do corpo F . Então, quaisquer duas bases de transcendência de K sobre F têm a mesma cardinalidade.*

A demonstração deste resultado pode ser encontrada em [5].

Definição 2.1.2 *Seja K um corpo extensão do corpo F . Seja S uma base de transcendência de F sobre K . Definimos o grau de transcendência de K sobre F , ao cardinal do conjunto S .*

Seja Z uma variedade algébrica. Pela Proposição 2.0.4 (Caracterização de uma variedade algébrica), $I(Z)$ é primo e, portanto, $\mathbb{L}[x_1, x_2, \dots, x_{n+1}]/I(Z)$ é um domínio de integridade, o qual em essência “vive” entre um anel comutativo com unidade e um corpo. Um fato relevante na álgebra básica é que sempre é possível estender um domínio inteiro a um corpo.

A ideia, em essência, para esta extensão é a seguinte: seja $D = \mathbb{L}[x_1, x_2, \dots, x_{n+1}]/I(Z)$ o domínio de integridade. Construa o conjunto $B = D \times D^*$ onde $D^* = D \setminus \{0\}$. Definimos em B uma relação de equivalência a qual gera uma partição em B e assim obtemos um espaço quociente, o qual será um corpo F , considerando-se as operações definidas em F como aquelas naturalmente provenientes de D . Na verdade, este é um procedimento similar ao processo de obter o corpo dos racionais a partir do anel dos inteiros.

Seja $i : D \rightarrow E \subset F$ um isomorfismo entre D e um subdomínio E de F . Os elementos do corpo F podem ser expressos como quocientes dos elementos de D e F é minimal no seguinte sentido: se existir um outro corpo G tal que $D \subset G$ então existe um isomorfismo $\Phi : F \rightarrow G$ tal que $\Phi(a) = a$, para todo $a \in F$. Assim, temos bem fundamentada a seguinte definição:

Definição 2.1.3 (Corpo das funções racionais em Z) *Seja $D = \mathbb{L}[x_1, x_2, \dots, x_{n+1}]/I(Z)$ um domínio inteiro. Definimos o corpo das funções racionais $K = (D \times D^*)/\sim$ como o menor corpo que contém D e os elementos de K são do tipo f/g chamados funções racionais em Z tais que $f \in D$ e $g \in D^*$. Denotamos por \mathbb{L}^Z seu grau de transcendência sobre \mathbb{L} .*

Definição 2.1.4 (Dimensão de uma variedade algébrica) *Seja $Z \subset \mathbb{L}^{n+1}$ uma variedade algébrica. Seja $K = (D \times D^*)/\sim$ o corpo das funções racionais em Z . Definimos a dimensão de Z como o grau de transcendência do corpo $K = (D \times D^*)/\sim$ sobre o corpo \mathbb{L} , a qual denotaremos por $\dim Z$.*

Definição 2.1.5 (Subvariedade algébrica) *Seja Z uma variedade algébrica. Dizemos que W é uma subvariedade algébrica própria de Z se W é uma variedade algébrica contida em Z , mas distinta de Z .*

Definição 2.1.6 (Ponto regular e singular sobre Z) *Seja $Z \subset \mathbb{L}^n$ um conjunto algébrico não vazio, com $I(Z) = \langle f_1, f_2, \dots, f_k \rangle$, onde $f_i \in \mathbb{L}[x_1, x_2, \dots, x_n]$, para todo $i = 1, 2, \dots, k$. Considere $F = (f_1, f_2, \dots, f_k)$. Para todo $a \in Z$ denote por $JF(a) = [(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a))]_{k \times n}$ a matriz jacobiana de F em a e seja ρ o maior posto que esta matriz jacobiana assume nos pontos de Z .*

Dizemos que $a \in Z$ é ponto regular de Z se $JF(a)$ tem posto igual ρ . E, dizemos que $a \in Z$ é ponto singular de Z se $JF(a)$ tem posto menor que ρ .

Naturalmente a definição independe da escolha finita dos polinômios.

Que relação existe entre o conjunto dos pontos singulares de Z , denotado por $\Sigma(Z)$, com o conjunto algébrico Z ?

Seja $Z = Z(S)$ onde $S \subset \mathbb{L}[x_1, x_2, \dots, x_n]$. Sabemos que o ideal $I(Z)$ em $\mathbb{L}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ é finitamente gerado, isto é, $I(Z) = \langle f_1, f_2, \dots, f_k \rangle$. Construimos a função $F : \mathbb{L}^n \rightarrow \mathbb{L}^k$ dada por $F(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x))$. Seja $J \subset \mathbb{L}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ o ideal gerado pelos determinantes menores de ordem $\rho \times \rho$ que se anulam nos pontos singulares de Z (onde ρ é o posto máximo de F).

★ Seja $a \in \Sigma(Z)$. Logo, o posto de $JF(a)$ é menor que ρ . Então o determinante de $JF(a)$ (o qual é um polinômio) é zero. Assim, $a \in Z(J)$.

★ Seja $a \in Z(J)$, ou seja, todo polinômio $f \in J$ se anula em a , o qual é gerado pelos determinantes menores da matriz jacobiana de ordem $\rho \times \rho$. Logo, o posto de $JF(a)$ é menor do que ρ . Então, F não tem posto máximo em a e, portanto, a é ponto singular de Z .

Portanto, $\Sigma(Z) = Z(J)$, isto é, $\Sigma(Z)$ é um subconjunto algébrico de Z . Formalmente provamos o seguinte resultado:

Proposição 2.1.1 *O conjunto $\Sigma(Z)$ de pontos singulares de Z é um subconjunto algébrico de Z .*

A seguir, apresentamos uma relação entre variedades diferenciáveis e conjuntos algébricos dada por Whitney:

Teorema 2.1.2 (Whitney [13]) *Seja $\mathbb{L} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . Então $Z \setminus \Sigma(Z)$, o conjunto dos pontos regulares de $Z \subset \mathbb{L}^n$, é uma variedade diferenciável não vazia.*

Notar: Uma variedade analítica complexa é um par (Z, Γ) onde Z é uma variedade topológica e Γ é uma estrutura analítica (no mesmo sentido tratado no Capítulo 1) e ρ citado acima é o posto máximo já definido anteriormente.

Se Z é um conjunto algébrico, Whitney mostrou também que a dimensão do conjunto algébrico $Z \setminus \sum(Z)$ é exatamente a dimensão algébrica de Z sobre \mathbb{L} .

Teorema 2.1.3 (Whitney [13] - Finitude das componentes conexas) *Para qualquer par $Z \supset W$, com $Z, W \subset \mathbb{L}^n$, com $\mathbb{L} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , a diferença $Z \setminus W$ tem, no máximo, um número finito de componentes conexas. Em particular, o próprio $Z = Z \setminus \emptyset$ tem um número finito de componentes conexas.*

Como consequência temos também que a variedade diferenciável $Z \setminus \sum(Z)$ tem um número finito de componentes conexas.

Lembrando da Análise Complexa que toda função analítica tem uma representação em uma série de potências (isto é graças à formula de representação integral de Cauchy) podemos generalizar este fato para funções analíticas em várias variáveis, conforme a definição a seguir:

Definição 2.1.7 *Chamamos $\mathbb{C}[[x_1, x_2, \dots, x_n]]$ o anel comutativo com unidade que consiste de todos os polinômios em n variáveis em \mathbb{C}^n tais que podem ser expressos por uma série de potências formal nas indeterminadas x_1, x_2, \dots, x_n com coeficientes em \mathbb{C} .*

Naturalmente, em uma variedade algébrica complexa não é possível ter uma variedade diferenciável (por mais pequena que seja) em torno de um ponto singular, pois se isso acontecesse, teríamos uma contradição direta com o teorema 2.1.2 de Whitney acima.

O seguinte resultado, também conhecido como Teorema dos Zeros de Hilbert.

Teorema 2.1.4 (Teorema de Hilbert-Nullstellensatz) *Seja S um ideal de $\mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n]$. Então $I(Z(S)) = \sqrt{S}$, onde*

$$\sqrt{S} = \{f \in \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n]; f^n \in S \text{ para algum } n \in \mathbb{N}\}$$

é chamado radical de S .

Para uma demonstração ver [2].

Assim como todo número inteiro positivo maior do que 1 pode ser expresso de maneira única (exceto por permutações) em produto de números primos (Teorema Fundamental da Aritmética), resulta interessante estudar a possibilidade de uma analogia deste resultado para conjuntos algébricos. Isto é, dado um conjunto algébrico não vazio, é natural pensar que ele possa ter subespaços algébricos que não podem ser expressos como a união de conjuntos algébricos próprios - que neste contexto serão chamados de componentes irredutíveis de Z .

Pergunta. Será que um conjunto algébrico Z pode ser expresso de maneira única (exceto por permutações) nas chamadas componentes irredutíveis de Z ?

Suponhamos que Z tenha duas representações nessas componentes irredutíveis, isto é,

$$Z = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_k = W_1 \cup W_2 \cup \dots \cup W_\ell.$$

Note que $V_i = Z \cap V_i$ e então

$$V_i = (W_1 \cup W_2 \cup \dots \cup W_\ell) \cap V_i \Rightarrow V_i = (W_1 \cap V_i) \cup (W_2 \cap V_i) \cup \dots \cup (W_\ell \cap V_i).$$

Como cada V_i é uma componente irredutível de Z , temos que existe um índice j tal que $V_i = W_j \cap V_i$. Logo, $V_i \subset W_j$.

De modo análogo, $W_j = Z \cap W_j$ e então

$$W_j = (V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_k) \cap W_j \Rightarrow W_j = (V_1 \cap W_j) \cup (V_2 \cap W_j) \cup \dots \cup (V_k \cap W_j).$$

Como cada W_j é uma componente irredutível de Z , temos que existe um índice m tal que $W_j = V_m \cap W_j$. Logo, $W_j \subset V_m$ e então $V_i \subset V_m$. Assim, só pode ocorrer que $V_i = V_m$, pois elas são componentes irredutíveis. Com isso, mostramos a unicidade da representação em componentes irredutíveis. Vejamos agora como fundamentamos a existência da representação.

Suponhamos que tal decomposição não exista e considere uma sequência de ideais em $\mathbb{L}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ da forma

$$S_1 \subset S_2 \subset \dots$$

Naturalmente, tal sequência é estacionária (pois $\mathbb{L}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ é Noetheriano). Daí,

$$S_1 \subset S_2 \subset \dots \subset S_k = S_{k+1} = S_{k+2} = \dots$$

Logo,

$$Z_k = Z(S_k) \subset Z_{k-1} \subset Z_{k-2} \subset \dots \subset Z_1$$

e seus respectivos ideais satisfazem

$$I(Z_1) \subset I(Z_2) \subset \dots \subset I(Z_k)$$

onde $I(Z_k)$ é um ideal maximal. Chamaremos $Z = Z_k$.

★ Se Z é variedade algébrica a prova está terminada.

★ Se Z não é variedade algébrica, logo $Z = A \cup B$ onde A e B são conjuntos algébricos próprios. Logo $A \subset Z$ e $B \subset Z$ e, então, $I(Z) \subset I(B)$ o que é uma contradição pois $I(Z)$ é um ideal maximal. Com isso, podemos formalmente enunciar o seguinte resultado:

Teorema 2.1.5 (Primeiro teorema fundamental dos conjuntos algébricos) *Se Z é um conjunto algébrico não vazio, então Z pode ser expresso de forma única (exceto por permutações) como*

$$Z = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_k$$

onde V_j são variedades algébricas e, se $i \neq j$, então $V_i \not\subset V_j$. Neste contexto, os V_i são chamados de componentes irredutíveis de Z .

É interessante também saber sob que outras condições um conjunto algébrico $Z(f)$ é uma variedade algébrica e sob que condições os pontos singulares de Z são justamente os pontos críticos de um algum polinômio.

Tomemos $f \in \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ um polinômio irredutível. Como \mathbb{C} é algebricamente fechado, pelo Teorema 2.1.4 de Hilbert-Nullstellensatz $I(Z(f)) = \sqrt{f}$. Assim, se $g \in \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ é um polinômio que se anula em $Z = Z(f)$ então $g \in I(Z(f))$. Logo $g^n \in \langle f \rangle$ para algum $n \in \mathbb{N}^*$. Mas, como f é irredutível segue-se que $\{f\}$ é primo e, portanto, $g \in \{f\}$, isto é, g é múltiplo de f .

No caso real, se $Z \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é expresso como união de variedades algébricas $V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_k$, precisaremos que a aplicação f tenha posto máximo para assim poder aplicar o Teorema da

Função Implícita. Por tal motivo adicionaremos a hipótese de que Z tenha um ponto regular a com respeito a f . Sejam f_1, f_2, \dots, f_{n+1} polinômios que geram $I(Z(f))$, f irreduzível.

Então, a aplicação $F : Z \subset \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $F = (f_1, f_2, \dots, f_{n+1})$ tem posto máximo 1 no ponto a . Sem perda de generalidade, podemos supor $\frac{\partial F}{\partial x_{n+1}}(a) \neq 0$. Pelo Teorema da Função Implícita, existem conjuntos abertos $A \subset \mathbb{R}^{n+1}$ e $B \subset \mathbb{R}^n$ e uma aplicação diferenciável $\xi : B \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\xi(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_{n+1}$ e $f(a) = 0$.

Em outras palavras, $f^{-1}(0) \cap A = Z \cap A = \text{Graf}(\xi)$, o qual é uma variedade diferenciável de dimensão n . Desta forma, como $Z = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_k$, alguma das variedades V_j , $j = 1, \dots, k$, tem dimensão n . Portanto, pelo Teorema de Whitney, a dimensão n de V_j coincide com a dimensão algébrica de V_j sobre \mathbb{R} . Ou seja, o corpo das funções racionais em V_j dado por

$$\mathbb{R}[x_1, x_2, \dots, x_{n+1}]/I(V_j)$$

tem grau de transcendência n sobre \mathbb{R} . Mas o quociente do ideal primo $\mathbb{R}[x_1, x_2, \dots, x_{n+1}]$ pelo ideal primo principal $\langle f \rangle$ também tem grau de transcendência n sobre \mathbb{R} . Como $V_j \subset Z$ então $I(Z) \subset I(V_j)$. Mas, $\langle f \rangle \subset I(Z)$. Logo, $\langle f \rangle \subset I(V_j)$. Com isso, concluímos que $\langle f \rangle = I(V_j)$. Por proposição vista, tomando-se a variedade destes ideais obtemos

$$Z(\langle f \rangle) = Z(I(V_j)) = V_j.$$

Portanto, $I(Z(\langle f \rangle)) = I(V_j) = \langle f \rangle$ que é primo. Logo, pela Proposição 2.0.4 (Caracterização das variedades algébricas), segue que Z é variedade algébrica.

Também, o conjunto singular de Z

$$\sum(Z) = \{a \in Z; (\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_{n+1}}(a))\}$$

não tem posto máximo.

coincide com os pontos críticos de f .

A partir da análise anterior podemos enunciar o seguinte resultado:

Proposição 2.1.2 (Segunda caracterização das variedades algébricas) *Seja $\mathbb{L} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} e considere $f \in \mathbb{L}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ um polinômio irreduzível. Seja $Z = Z(f)$ uma hipersuperfície real ou complexa. No caso real, admitimos como hipótese adicional de que Z contém um ponto regular de f . Então, todo polinômio que se anula em Z é múltiplo de f . Consequentemente, Z é uma variedade algébrica e o conjunto dos pontos singulares $\sum(Z)$ de Z é justamente a interseção de Z com os pontos críticos de f .*

É também interessante o seguinte fato: seja $M_1 = Z \setminus \sum(Z)$. Pelos teoremas de Whitney, sabemos que M_1 é uma variedade diferenciável. Logo, $M_2 = \sum(Z) \setminus \sum(\sum(Z))$ é também uma variedade diferenciável, e assim por diante. Naturalmente, esta construção vai parar após um número finito de etapas pois toda sequência decrescente de conjuntos algébricos é estacionária, digamos até o índice p . Então, cada M_i é uma variedade diferenciável, para todo $i = 1, 2, \dots, p$. Além disso, em cada uma das etapas temos um número finito de componentes conexas.

$$Z = (Z \setminus \sum(Z)) \cup \sum(Z) \Rightarrow$$

$$Z = (Z \setminus \sum(Z)) \cup [(\sum(Z) \setminus \sum(\sum(Z))) \cup \sum(\sum(Z))]$$

Logo,

$$Z = M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_p.$$

Assim temos que:

Teorema 2.1.6 *Um conjunto algébrico real ou complexo Z pode ser expresso como uma união finita disjunta*

$$Z = M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_p,$$

onde cada M_j , $j = 1, 2, \dots, p$, é uma variedade diferenciável com um número finito de componentes conexas. Além disso, qualquer diferença $Z \setminus W$ de variedades algébricas pode ser expressa como uma união finita.

Sejam $Z \subset \mathbb{L}^n$ um conjunto algébrico e $M_1 = Z \setminus \sum(Z)$. Considere $g : \mathbb{L}^n \rightarrow \mathbb{L}$ um polinômio qualquer e sejam $\{f_1, f_2, \dots, f_k\}$ tais que $I(Z) = \langle f_1, f_2, \dots, f_k \rangle$.

Pergunta: É possível caracterizar os pontos críticos de g restritos a M_1 em relação a $\{f_1, f_2, \dots, f_k\}$?

Chamando de ρ o posto máximo de $F = (f_1, f_2, \dots, f_k)$, temos que para todo $a \in M_1$ o posto da matriz jacobiana $JF(a)$ é ρ .

Pelo Teorema da Função Implícita, existem vizinhanças A de a e B de 0 e um difeomorfismo $h : A \rightarrow B$ com $h(a) = 0$, tal que

$$(F \circ h)(x_1, x_2, \dots, x_\rho, x_{\rho+1}, \dots, x_n) = (u_1, u_2, \dots, u_\rho).$$

Se $a \in M_1$, $F(a) = 0$ e localmente $F(a) = (u_1, u_2, \dots, u_\rho)$. Logo, $(u_1, u_2, \dots, u_\rho) = (0, 0, \dots, 0)$, ou seja, M_1 corresponde ao lugar geométrico dos pontos tais que $u_1 = u_2 = \dots = u_\rho = 0$. Assim, $u_{\rho+1}, u_{\rho+2}, \dots, u_n$ podem ser tomadas como coordenadas locais de M_1 . Note que $\frac{\partial f_i}{\partial u_j}(a) = 0$, para todo $j \geq \rho + 1$ com $a \in M_1$ (já que f_i se anula em M_1). Como a matriz $\left(\frac{\partial f_i}{\partial u_j}\right)$ é matriz coluna equivalente à matriz $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_\ell}\right)$ (e, portanto tem posto ρ) as primeiras ρ colunas de $\left(\frac{\partial f_i}{\partial u_j}\right)$ devem ser linearmente independentes. Então, a matriz

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial u_1}(a) & \frac{\partial g}{\partial u_2}(a) & \dots & \frac{\partial g}{\partial u_n}(a) \\ \frac{\partial f_1}{\partial u_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial u_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial u_n}(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial u_1}(a) & \frac{\partial f_k}{\partial u_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_k}{\partial u_n}(a) \end{pmatrix}$$

terá posto ρ se, e somente se,

$$\frac{\partial g}{\partial u_{\rho+1}}(a) = \frac{\partial g}{\partial u_{\rho+2}}(a) = \dots = \frac{\partial g}{\partial u_n}(a) = 0.$$

Em outras palavras, se e somente se, o ponto dado for um ponto crítico de g restrito a M_1 . Formalmente teremos:

Proposição 2.1.3 (Caracterização dos pontos críticos de g) *Sejam $Z \subset \mathbb{L}^n$ um conjunto algébrico, $M_1 = Z \setminus \sum(Z)$ e $g : \mathbb{L}^n \rightarrow \mathbb{L}$ uma função polinomial. O conjunto dos pontos*

críticos de g restrito a M_1 é justamente a interseção de M_1 com W , onde W está formado por pontos $a \in Z$ para os quais a matriz

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial u_1}(a) & \frac{\partial g}{\partial u_2}(a) & \cdots & \frac{\partial g}{\partial u_p}(a) \\ \frac{\partial f_1}{\partial u_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial u_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial u_n}(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial u_1}(a) & \frac{\partial f_k}{\partial u_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_k}{\partial u_n}(a) \end{pmatrix}$$

tem posto menor ou igual a ρ .

Corolário 2.1.1 (Sobre o número finito de valores críticos) *Uma função polinomial g em $M_1 = Z \setminus \sum(Z)$ pode ter no máximo um número finito de valores críticos.*

Demonstração. O conjunto dos pontos críticos de $g|_{M_1}$ pode ser expresso como $M_1 \cap W = (Z \setminus \sum(Z)) \cap W = W \setminus \sum(Z)$. Como a interseção de conjuntos algébricos é ainda um conjunto algébrico, por resultado já visto, tal conjunto pode ser expresso como uma união finita de variedades diferenciáveis disjuntas. Ou seja,

$$Z \setminus \sum(Z) \cap W = Z \cap (\sum(Z))^c \cap W = W \cup (\sum(Z))^c = W \setminus \sum(Z) = N_1 \cup N_2 \cup \dots \cup N_p,$$

onde cada N_i tem um número finito de componentes conexas. Como cada ponto $a \in N_i$ é ponto crítico de $g|_{M_1}$ logo a é ponto crítico da restrição $g|_{N_i}$. Já que todos os pontos de N_i são críticos então g se anula em todos eles, logo g é constante em cada componente conexa de N_i . Portanto, o conjunto dos valores críticos é finito. ■

Aspectos topológicos e o Lema de Seleção da Curva

A referência principal deste capítulo é o livro de Milnor [10].

3.1 Topologia local

Nessa seção, nosso objetivo é estudar o comportamento topológico local de um conjunto algébrico Z .

Por fatos anteriores, temos que $\mathbb{L}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ é um anel Noetheriano com $\mathbb{L} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} e $I(Z) = \langle f_1, f_2, \dots, f_k \rangle$ é o ideal de Z . Pela Proposição 2.1.3 (Caracterização dos pontos críticos de g), temos que os pontos críticos de g em relação à $\{f_1, f_2, \dots, f_k\}$ com $g(x) = |x - x^0|^2$ estão em $M_1 \cap W$, onde W é como na parte anterior. Além disso, pelo Corolário 2.1.1 (Sobre o número finito de valores críticos), g tem um número finito de valores críticos, digamos b_1, b_2, \dots, b_n .

Tomando $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno é dizer tal que $g(x) = |x - x^0|^2 = \varepsilon^2$ e $\varepsilon^2 < |b_i|$, para todo $i = 1, 2, \dots, n$, todo ponto crítico $a \in M_1 \cap W$ de g é tal que $a \notin S_\varepsilon$. Logo, ε^2 é um valor regular de g e, por conseguinte, $g^{-1}(\varepsilon^2) \cap M_1$ é uma variedade diferenciável. Ou seja, mostramos que:

Proposição 3.1.1 (Caracterização do link) *Para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno a S_ε centrada em x^0 intercepta Z em uma variedade diferenciável.*

por comodidade tomaremos $x^0 = 0$.

Chamaremos de *link* o conjunto $K = S_\varepsilon \cap Z$, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno.

Se temos uma variedade diferenciável, temos a existência de uma base enumerável e então faz sentido a seguinte definição, chamada de *partição da unidade*. Intuitivamente, esta definição nos diz que “em certo sentido, para fazer um estudo pontual em M , é natural particionar o domínio de nosso trabalho de modo a obter alguma informação parcial, para logo após reuni-las e obter assim uma informação total local, a qual é expressa por $\sum_{i=1}^k \Gamma_i(a) = 1$ ”. E não só isso, a partição da unidade ainda brinda um resultado relevante pois permite globalizar resultados locais em variedades diferenciáveis.

Definição 3.1.1 (Partição da unidade) *Sejam M^n uma variedade diferenciável e $\Upsilon = \{U_i\}_{i \in J}$ uma cobertura aberta de M . Uma partição da unidade subordinada a Υ é uma família $\{\Gamma_i : M \rightarrow [0, 1];\}$ com Γ_i diferenciáveis tal que*

1. *Suporte(Γ_i) $\subset U_i$, onde $\text{Suporte}(\Gamma_i) = \overline{\{p \in M; \Gamma_i(p) \neq 0\}}$;*
2. *$\{\text{Suporte}(\Gamma_i)\}_{i \in J}$ é uma família localmente finita, isto é, todo ponto de M tem uma vizinhança que intercepta no máximo um número finito de elementos da família.*
3. *$\sum_{i \in J} \Gamma_i(p) = 1$ (a soma é finita para todo $p \in M$, devido o item 2).*

Observação 3.1.1 *Um fato importante é que a existência de uma cobertura aberta sobre M já implica na existência de uma partição da unidade subordinada a tal cobertura. Uma referência para este fato é [12].*

Definição 3.1.2 (Cone) *Sejam $x^\circ \in \mathbb{L}^n$ e $A \subset \mathbb{L}^n$. O cone sobre A com base em x° é definido como a união de todos os segmentos de reta*

$$ta + (1 - t)x^\circ, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad \forall a \in A,$$

e denotado por $\text{Cone}_{x^\circ}(A)$.

Nosso objetivo a seguir é procurar uma relação entre $\text{Cone}_{x^\circ}(K)$ e $D_\varepsilon \cap Z$, onde $D_\varepsilon = \{x \in \mathbb{L}^{n+1}; |x - x^\circ| \leq \varepsilon\} \subset \mathbb{L}^n$, x° é ser ponto regular ou singular isolado de Z , Z é um conjunto algébrico e K é o link definido anteriormente. E também, buscaremos uma relação entre $\text{Cone}_{x^\circ}(S_\varepsilon)$ e D_ε . Analisaremos apenas o caso real já que o caso complexo pode ser visto do mesmo jeito, apenas considerando o dobro da dimensão.

Seja $\varepsilon > 0$ tal que $D_\varepsilon \cap \sum(Z)$ tenha somente x° como ponto crítico isolado (ponto singular), o mesmo ocorrendo para a interseção de D_ε com o conjunto de pontos críticos de $r|_{M_1}$, onde ($r(x) = |x - x^\circ|^2$).

Assim, o ponto x° é um ponto singular isolado e, então, não podemos ter nenhuma vizinhança de x° que seja uma variedade diferenciável (na verdade isto é uma proposição ver no livro de Milnor [10]). Com isso, só nos resta estudar os aspectos topológicos em tais vizinhanças do ponto x° . Vejamos o que ocorre:

$$r(x) = |x - x^\circ|^2 = (x_1 - x_1^\circ)^2 + (x_2 - x_2^\circ)^2 + \dots + (x_{n+1} - x_{n+1}^\circ)^2.$$

Considere o link $K = S_\varepsilon \cap Z$ (onde S_ε é $r(x) = \varepsilon^2$ com centro no ponto singular isolado x° .) Construimos um campo vetorial V sobre D_ε^* (o disco menos x°), $V : D_\varepsilon^* \rightarrow \mathbb{R}^m$ tal que

- i) O campo V aponta para “fora” de x° (isto é, $\langle v(x), x - x^\circ \rangle > 0$);
- ii) $V(x)$ é tangente a M_1 , se $x \in M_1$.

Primeiro vamos construir o campo localmente. Dado qualquer ponto $x^a \in D_\varepsilon^*$, construiremos um campo V^a em toda vizinhança U^a de x^a de modo que as duas condições acima estejam satisfeitas.

Se $x^a \notin Z$, então basta definir o campo $V^a(x) = x - x^\circ$ para todo $x \in U^a$, onde U^a é uma vizinhança de x^a contida em $\mathbb{R}^n \setminus Z$. Deste modo, $\langle V^a(x), x - x^\circ \rangle = \langle x - x^\circ, x - x^\circ \rangle > 0$, pois $x \neq x^\circ$.

Se $x^a \in Z$, então $x^a \in M_1$, logo é ponto regular. Então, a função $F = (f_1, f_2, \dots, f_k, r)$ tem posto máximo em x^a . Assim, seguindo a ideia e as notações da Proposição 2.0.4. (Caracterização de uma variedade algébrica), temos que uma das seguintes derivadas

$$\frac{\partial r}{\partial u_{\rho+1}}(x^a), \frac{\partial r}{\partial u_{\rho+2}}(x^a), \dots, \frac{\partial r}{\partial u_m}(x^a)$$

é distinta de zero. Suponhamos que uma delas, digamos $\frac{\partial r}{\partial u_h}(x^a)$ é distinta de zero. Seja U^a uma vizinhança suficientemente pequena e conexa tal que, na direção da curva u_h -coordenada em x , o campo

$$V^a(x) = \pm \left(\frac{\partial X_1}{\partial u_h}(x), \frac{\partial X_2}{\partial u_h}(x), \dots, \frac{\partial X_m}{\partial u_h}(x) \right) \neq 0$$

é tangente (escolhendo o sinal positivo ou negativo conforme $\frac{\partial r}{\partial u_h}$ é positivo ou negativo). Note que $V^a(x)$ é tangente a M_1 se $x \in M_1$, pois a curva coordenada também está contida em M_1 . Além disso,

$$\begin{aligned} 2\langle x - x^\circ, V^a(x) \rangle &= \sum 2(x_i - x_i^\circ) \left(\pm \frac{\partial X_i}{\partial u_h} \right) = \sum \left(\frac{\partial r}{\partial x_i} \right) \left(\pm \frac{\partial X_i}{\partial u_h} \right) \\ &= \pm \frac{\partial r}{\partial u_h} \neq 0, \quad \forall x \in U^a. \end{aligned}$$

Como isto é possível fazer para todo ponto a , temos que U^a forma uma cobertura aberta de $D_\varepsilon \setminus \{x^\circ\} = D_\varepsilon^*$ e, portanto, temos a existência da partição da unidade (Γ^a, U^a) com suporte $(\Gamma^a) \subset U^a$.

Agora, podemos definir o campo vetorial

$$V(x) = \sum \Gamma^a(x) V^a(x) \quad \text{com } x \in D_\varepsilon \setminus \{x^\circ\}.$$

O campo V satisfaz as condições i) e ii).

De fato,

$$\langle V(x), x - x^\circ \rangle = \sum \Gamma^a(x) \langle V^a(x), x - x^\circ \rangle > 0$$

pois $\Gamma^a(x) \geq 0$ e $\langle V^a(x), x - x^\circ \rangle > 0$ e assim i) está provada.

Vejam agora a outra condição ii). Como $V^a(x)$ é tangente a M_1 então $V(x)$ é tangente a M_1 (pois $T_x M_1$ é um espaço vetorial). Assim, ter um campo vetorial bem definido sobre D_ε^* é dizer que temos uma equação diferencial.

Agora definimos o campo $W(x)$ em função $V(x)$ e do número positivo $\langle 2(x - x^\circ), V(x) \rangle$

$$w(x) = \frac{V(x)}{\langle 2(x - x^\circ), V(x) \rangle}$$

temos a equação diferencial $\frac{dX}{dt} = w(x)$. Se $X = p(t)$ é solução então $\frac{dp(t)}{dt} = w(p(t))$. Dada qualquer solução $p(t)$, a derivada da composição $r(p(t))$ é dada por

$$\begin{aligned} r'(p(t))p'(t) &= r'(x)w(x) \\ &= \left(\frac{\partial r}{\partial x_1}, \frac{\partial r}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial r}{\partial x_m} \right) (w_1(x), w_2(x), \dots, w_m(x))^t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{\partial r}{\partial x_1}\right)w_1 + \left(\frac{\partial r}{\partial x_2}\right)w_2 + \dots + \left(\frac{\partial r}{\partial x_m}\right)w_m \\
&= \langle 2(x - x^\circ), w(x) \rangle \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Assim, a função $r(p(t))$ deve ser igual a $t + c$ onde c é uma constante. Portanto, subtraindo a constante c podemos assumir que $r(p(t)) = \|p(t) - x^\circ\|^2 = t$. Como esta solução pode ser estendida em todo o intervalo $0 \leq t \leq \varepsilon^2$ segue que $p(t)$ é unicamente determinada pelo valor inicial $p(\varepsilon^2) \in S_\varepsilon$. Para cada $a \in S_\varepsilon$ seja $p_a(t) = p(a, t)$, $0 \leq t \leq \varepsilon^2$ a única solução que satisfaz a condição inicial $p_a(\varepsilon^2) = p(a, \varepsilon^2) = a$. Então, a aplicação

$$\begin{aligned}
P : S_\varepsilon \times (0, \varepsilon^2] &\longrightarrow D_\varepsilon \setminus \{x^\circ\} \\
(a, t) &\longmapsto P(a, t) = p_a(t)
\end{aligned}$$

é um difeomorfismo local.

De fato, note que $r(p_a(t)) = t$, logo p_a tem inversa à esquerda e, portanto, é sobrejetora. Dado $x \in D_\varepsilon \setminus \{x^\circ\}$, existe $w(x)$ para este x , logo existe $p_a(t)$ tal que $p'_a(t) = w(x)$.

Como $p_a(t)$ é sobrejetora, existe t_0 tal que $x = p_a(t_0) = P(a, t_0)$. Isto mostra que P é sobrejetora.

Vejam agora a injetividade. Suponha que $P(a, t_1) = P(b, t_2)$ então $p_a(t_1) = p_b(t_2)$. Temos assim que

$$\begin{aligned}
\|p_a(t_1) - x^\circ\| &= \|p_b(t_2) - x^\circ\| \Rightarrow \|p_a(t_1) - x^\circ\|^2 = \|p_b(t_2) - x^\circ\|^2 \\
&\Rightarrow r(p_a(t_1)) = r(p_b(t_2)) \Rightarrow t_1 = t_2.
\end{aligned}$$

E tomando $t_1 = t_2 = \varepsilon^2$ temos $p_a(\varepsilon^2) = p_b(\varepsilon^2)$, ou seja, $a = b$. Logo, P é injetora.

Sendo cada p_a diferenciável segue-se que P é diferenciável e como a derivada de P é não nula, pelo Teorema da Função Inversa temos que P é um difeomorfismo local.

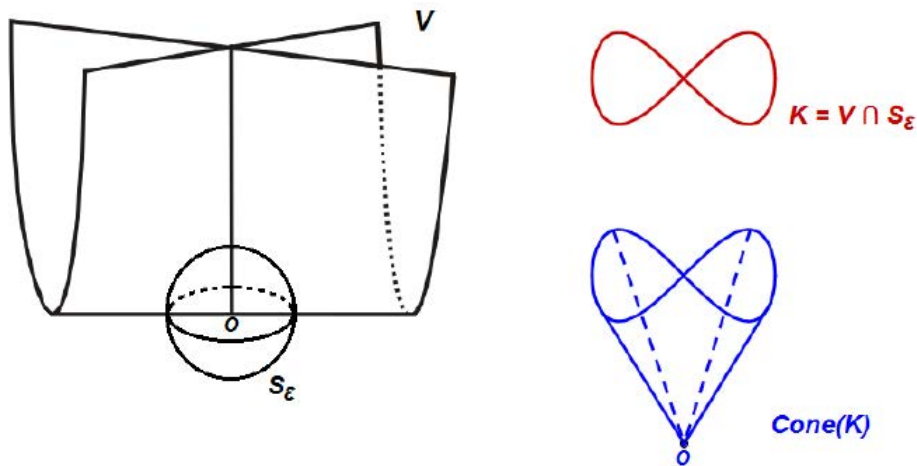
Como o campo vetorial $w(x)$ é tangente a M_1 , para todo $x \in M_1$, segue que toda curva solução que toca M_1 deve estar contida em M_1 . Portanto P aplica o produto $K \times (0, \varepsilon^2]$ difeomorficamente em $(D_\varepsilon \setminus \{x^\circ\}) \cap Z$. Finalmente, note que $P(a, t)$ tende uniformemente para x° quando $t \rightarrow 0$. Assim, a correspondência

$$ta + (1 - t)x^\circ \mapsto P(a, t\varepsilon^2)$$

definida para $0 < t \leq 1$, estende-se unicamente a um homeomorfismo do $Cone(S_\varepsilon)$ ao D_ε . Além disso, este homeomorfismo leva o $Cone_{x^\circ}(K)$ em $D_\varepsilon \cap Z$. Com isso, provamos que:

Teorema 3.1.1 (Topologia do cone do link) *Para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, temos que $Cone_{x^\circ}(K) \cong D_\varepsilon \cap Z$ e $Cone_{x^\circ}(S_\varepsilon) \cong D_\varepsilon$, onde \cong denota homeomorfismo.*

O desenho a seguir ilustra a ideia do teorema acima e chamando $Z = V$, temos:



3.2 Fibrados e fibração

Definição 3.2.1 (Fibrado ou Fibrado Topológico) *Sejam E, B, F espaços topológicos. Um fibrado sobre B com fibra F é uma quádrupla $\eta = (E, P, B, F)$ satisfazendo as condições*

1. $P : E \rightarrow B$ é contínua e sobrejetora (chamada projeção).
2. Para todo $b \in B$, existe uma vizinhança U_b de b em B e existe um homeomorfismo $\varphi_b : U_b \times F \rightarrow P^{-1}(U_b)$ tal que $P \circ \varphi_b = \pi_1$ é a projeção na primeira variável

$$\begin{array}{ccc} U_b \times F & \xrightarrow{\varphi_b} & P^{-1}(U_b) \\ \pi_1 \downarrow & \swarrow P & \\ U_b & & \end{array} \quad (3.1)$$

Para todo $b \in B$, temos que $P^{-1}(b) = \varphi_b \circ \pi_1^{-1}(b)$, ou seja,

$$P^{-1}(b) = \varphi_b \circ (\{b\} \times F)$$

e assim, temos que a fibra $P^{-1}(b)$ é homeomorfa a F . Denotamos a fibra por $P^{-1}(b) = F_b = F_b(\eta)$. Se podemos escolher $U_b = B$, chamamos de fibrado trivial.

Neste contexto, E é chamado espaço total; B é chamado espaço base do fibrado e F é chamado fibra.

Definição 3.2.2 (Fibrado Vetorial) *Sejam E e B espaços topológicos. Um fibrado vetorial é uma quádrupla $\eta = (E, \pi, B)$ satisfazendo as seguintes condições*

1. $\pi : E \rightarrow B$ é uma aplicação contínua sobrejetora (chamada projeção);
2. Para todo $b \in B$; $\pi^{-1}(b)$ tem estrutura de espaço vetorial e deve satisfazer a seguinte condição de **trivialidade local**:

$\forall b \in B, \exists U_b \subset B, \exists n \in \mathbb{N}$ e existe um homeomorfismo $\varphi_b : U_b \times \mathbb{K}^n \rightarrow \pi^{-1}(U_b)$ tal que $\forall a \in U_b$ a função $x \mapsto \varphi_b(a, x)$ define um isomorfismo entre $\pi^{-1}(a)$ e \mathbb{K}^n , onde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . O par (U_b, φ_b) é chamado de um sistema de coordenadas para o fibrado η em b .

Se é possível escolher U_b igual ao espaço base B então η será chamado de fibrado (vetorial) trivial. Nestas condições, $E = E(\eta)$ é chamado espaço total, $F_b = \pi^{-1}(b) = F_b(\eta)$ é a fibra sobre b .

Definição 3.2.3 (Fibrado diferenciável) *Sejam E, B, F variedades diferenciáveis e considere B conexo. Um fibrado diferenciável sobre B com fibra F é uma quádrupla $\eta = (E, P, B, F)$ tais que*

1. $P : E \rightarrow B$ é uma submersão sobrejetora;
2. Para todo $b \in B$, existe uma vizinhança U_b de b em B e existe um difeomorfismo $\varphi_b : U_b \times F \rightarrow P^{-1}(U_b)$ tal que $P \circ \varphi_b = \pi_1$, onde π_1 é a projeção na primeira variável (condição de trivialidade local).

Neste caso, para todo $b \in B$ temos que a fibra $P^{-1}(b)$ é difeomorfa a F .

Exemplo 3.2.1 *Alguns casos particulares de fibrado trivial são:*

1. Fibrado trivial sobre S^1 , cuja fibra também é S^1 . Nesse caso, o espaço total será o toro

$$\begin{array}{c} S^1 \times S^1 \\ \pi_1 \downarrow \\ S^1 \end{array}$$

2. Fibrado trivial sobre S^1 , cuja fibra é o disco D^2 . Nesse caso o espaço total será o toro sólido $S^1 \times D^2$.
3. Fibrado vetorial real trivial. Se $F = \mathbb{R}^n$ temos o fibrado vetorial real trivial de dimensão n .

Observação. Um fibrado cuja fibra é uma esfera S^n é chamado de *fibrado de esferas* (como o do item (1) do exemplo anterior). Um fibrado cuja fibra é um disco D^n é chamado de um *fibrado de discos* (como o do item (2) acima).

Exemplo 3.2.2 *Considere o fibrado onde o espaço total é \mathbb{R} , a base é S^1 e $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ definida por $p(t) = e^{2\pi it}$. A fibra é \mathbb{Z} , que é um conjunto discreto.*

Definição 3.2.4 (Fibrado vetoriais isomorfos) *Dizemos que dois fibrados vetoriais são isomorfos, e denotamos por $\eta \simeq \nu$, quando existe um homeomorfismo $h : E(\eta) \rightarrow E(\nu)$ entre os espaços totais de modo que cada fibra $\Pi^{-1}(b) = F_b = F_b(\eta)$ é isomorfa a $\Pi^{-1}(b) = F_b = F_b(\nu)$.*

Analogamente, temos definições equivalentes para fibrados topológicos homeomorfos e para fibrados diferenciáveis difeomorfos.

Definição 3.2.5 (Seção de um fibrado) *Uma seção de um fibrado η sobre B é uma função*

$$\begin{array}{l} s : B \longrightarrow E(\eta) \\ b \longmapsto s(b) = F_b(\eta) \end{array}$$

que faz corresponder a cada $b \in B$ sua fibra $\pi^{-1}(b) = F_b = F_b(\eta)$.

Uma seção de um fibrado tangente a uma variedade diferenciável M é usualmente chamada um *campo de vetores* de M .

Observação 3.2.1 (Fibração) *Uma fibração é uma generalização da noção de fibrado. O conceito de fibração é como o de um fibrado, exceto pelo fato de que as fibras não precisam ser homeomorfas. É pedido apenas que elas tenham o mesmo tipo de homotopia (o conceito de homotopia será tratado no Capítulo 5).*

Observação 3.2.2 *Uma observação importante é que em nosso estudo sobre o Teorema de Fibração de Milnor, provaremos que o espaço $S_\varepsilon \setminus K$ é um fibrado diferenciável localmente trivial sobre S^1 , com a projeção $\frac{f(z)}{|f(z)|}$ embora o nome do teorema mencione a palavra “fibração”. O abuso de notação se deve ao fato importante de que as fibras desta fibração (as fibras de Milnor) têm o tipo de homotopia de um buquê de esferas.*

3.3 Lema de Seleção da Curva

Um fato importante no processo da demonstração do Teorema de Fibração de Milnor é um resultado que o próprio Milnor desenvolveu, chamado de Lema de Seleção da Curva.

Lema 3.3.1 (Lema de Seleção da Curva) *Seja $Z \subset \mathbb{R}^m$ um conjunto algébrico real e seja $U \subset \mathbb{R}^m$ um conjunto aberto definido por um número finito de desigualdades*

$$U = \{x \in \mathbb{R}^m; g_1(x) > 0, g_2(x) > 0, \dots, g_\ell(x) > 0\},$$

(este tipo de conjunto é chamado de semi-algébrico). Se $a \in \overline{U \cap Z}$ então existe uma curva analítica real $p : [0, \delta) \rightarrow \mathbb{R}^m$ satisfazendo $p(0) = a$ e $p(t) \in U \cap Z$, para todo $t > 0$.

Por comodidade, em geral, tomamos $a = 0$. Um estudo mais detalhado da demonstração pode ser vista em [10]. A seguir, daremos apenas uma ideia da demonstração.

Ideia da demonstração. A prova do lema se baseia essencialmente em duas ideias:

1. Com o conjunto algébrico Z , construímos o ideal $I(Z)$, o qual é finitamente gerado por $\{f_1, f_2, \dots, f_k\}$. Daí, é possível construir um subconjunto Z' de Z a partir das funções $r(x) = |x - a|^2$ e $g = (g_1, g_2, \dots, g_\ell)$ (função da hipótese), da seguinte maneira:

$$Z' = \{x \in Z; \text{posto}(df_{1_x}, df_{2_x}, \dots, df_{k_x}, dr_x, dg_x) \leq \rho + 1\}$$

de modo que $0 \in \overline{U \cap Z'}$.

No caso de ter $Z' = Z$ isso acontecerá quando $\dim Z = m - \rho = 1$, logo $m = \rho + 1$.

2. Se a é um ponto de acumulação de uma variedade diferenciável 1-dimensional M (real ou complexa), uma vizinhança adequadamente escolhida de a em M é a união finita de “ramos” que só se interseccionam em a , onde cada ramo é homeomorfo a um intervalo da reta (ou homeomorfa à um disco aberto, no caso complexo), onde o homeomorfismo vem dado por $s(t) = a + c_1 t + c_2 t^2 + \dots < \infty$ se $|t| < \varepsilon$.

Suponhamos que Z contenha pontos x muito próximos de 0 , com $x \in U$. Isto é, $g_1(x) > 0$, $g_2(x) > 0$, \dots , $g_\ell(x) > 0$, e suponhamos que a dimensão de Z seja 1 . Então, um dos ramos de Z que passa através de 0 , contém pontos de U , arbitrariamente próximos a 0 .

Seja $X = s(t)$ com $|t| < \varepsilon$ uma parametrização analítica real desse ramo.

Para cada g_i notemos que a função real analítica $g_i(s(t))$ deve ser:

- * maior que zero, para todo t em algum intervalo $0 < t < \varepsilon'$, ou
- * menor ou igual que zero, para todo $t \in (0, \varepsilon')$.

Assim, o semi-ramo $s(0, \varepsilon')$ está contido em U ou é alheio a U , para ε suficientemente pequeno. Analogamente, o semi-ramo $s(-\varepsilon', 0)$ está contido em U ou é alheio a U . Como tínhamos assumido que $s(-\varepsilon', \varepsilon')$ contém pontos de U arbitrariamente próximos do 0 , pelo menos um destes semi-ramos deve estar contido em U . Isso equivale a dizer que, obtivemos uma curva real analítica em $U \cap Z$ com $s(0) = 0$. ■

Teorema de Fibração de Milnor

A referência principal deste capítulo é o livro de Milnor [10].

Recorde que o *gradiente* de uma função complexa $f : \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}$, no ponto $z \in \mathbb{C}^{n+1}$ é a $(n+1)$ -upla

$$\mathbf{grad} f(z) = \left(\frac{\overline{\partial f(z)}}{\partial z_1}, \frac{\overline{\partial f(z)}}{\partial z_2}, \dots, \frac{\overline{\partial f(z)}}{\partial z_{n+1}} \right),$$

onde a j -ésima componente é o complexo conjugado de $\frac{\partial f(z)}{\partial z_j}$ com $1 \leq j \leq n+1$. O *argumento principal* de um número complexo $\lambda \neq 0$, denotado por $\mathbf{Arg} \lambda$, é o único número complexo $\theta \in (-\pi, \pi]$ tal que $\lambda = \|\lambda\|e^{i\theta}$. Lembremos também que o *produto Hermitiano* é definido da seguinte forma:

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_h : \mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{C} \\ (u, v) \longmapsto \langle u, v \rangle_h = \sum_{i=1}^{n+1} u_i \overline{v_i}$$

Seja $p : I \rightarrow \mathbb{C}^{n+1}$ um caminho diferenciável dado por

$$p(t) = (p_1(t), p_2(t), \dots, p_{n+1}(t)).$$

A derivada direcional de f no ponto $z = p(t)$, na direção do vetor $v = p'(t) = \frac{dp(t)}{dt}$, é dada por

$$\begin{aligned} \frac{d(f \circ p)(t)}{dt} &= df(p(t)) \frac{dp(t)}{dt} \\ &= \left\langle \frac{d}{dz}(p(t)), \mathbf{grad} f(p(t)) \right\rangle_h \end{aligned}$$

o que equivale a dizer

$$df(z) \cdot v = \langle v, \mathbf{grad} f(z) \rangle_h.$$

Lembrando a existência do isomorfismo $\xi : \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{2n+2}$

$$\xi(a_1 + ib_1, a_2 + ib_2, \dots, a_{n+1} + ib_{n+1}) = (a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_{n+1}, b_{n+1})$$

onde

$$z = (a_1 + ib_1, a_2 + ib_2, \dots, a_{n+1} + ib_{n+1}), w = (a'_1 + ib'_1, a'_2 + ib'_2, \dots, a'_{n+1} + ib'_{n+1})$$

então

$$\begin{aligned} \mathbf{Re}\langle z, w \rangle_h &= \mathbf{Re} \left(\sum_{j=1}^{n+1} (a_j + ib_j)(a'_j - ib'_j) \right) \\ &= \sum_{j=1}^{n+1} (a_j a'_j + b_j b'_j) = \langle \xi(z), \xi(w) \rangle_E \end{aligned}$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$ (ou simplesmente $\langle \cdot, \cdot \rangle$) é o produto interno usual euclidiano em \mathbb{R}^{2n+2} . Assim, interpretamos o espaço \mathbb{C}^{n+1} como um espaço euclidiano de dimensão $2n + 2$.

No que segue, colocaremos algumas situações onde apresentamos perguntas e resultados importantes para entender a prova do Teorema de Fibrção de Milnor. A primeira vista, tais situações podem parecer desconectadas entre si, mas veremos que todas elas estão intimamente relacionadas.

Situação 1

Seja $f : \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função polinomial não nula que se anula na origem e denotemos por $Z = f^{-1}(0)$ (conjunto algébrico que é uma hipersuperfície), S_ε a circunferência centrada num ponto singular isolado x° e $K = S_\varepsilon \cap Z$ o link.

Consideremos $S_\varepsilon \setminus K$. Para todo $z \in S_\varepsilon \setminus K$, temos $f(z) \neq 0$. Logo a expressão $\frac{f(z)}{|f(z)|}$ tem sentido, e variando-se z , construímos a seguinte importante função $\phi(z) = \frac{f(z)}{|f(z)|}$.

Pergunta: É possível caracterizar os pontos críticos da função ϕ ?

Temos que $\phi(z) = \frac{f(z)}{|f(z)|} = e^{i\theta(z)}$, ou seja,

$$\begin{aligned} \phi : S_\varepsilon \setminus K &\longrightarrow S^1 \\ z &\longmapsto \phi(z) = e^{i\theta(z)} \end{aligned}$$

cuja derivada no ponto z aplicada no vetor v é

$$\begin{aligned} d\phi(z) : T_z(S_\varepsilon \setminus K) &\longrightarrow T_{\phi(z)}S^1 \\ v &\longmapsto d\phi(z)v \end{aligned}$$

Fazendo cálculos,

$$d\phi(z) = e^{i\theta(z)} id\theta(z) = \phi(z) id\theta(z).$$

Aplicando o vetor v teremos

$$d\phi(z)v = \phi(z) id\theta(z)v.$$

Estudaremos agora a função $\theta(z)$. Como

$$e^{i\theta(z)} = \frac{f(z)}{|f(z)|}$$

localmente podemos fazer

$$\begin{aligned} i\theta(z) &= \text{Log}f(z) - \text{Log}|f(z)| \\ \theta(z) &= -i\text{Log}f(z) + i\text{Log}|f(z)| \end{aligned}$$

onde $\theta(z)$ é argumento principal de $\phi(z)$. Daí,

$$\theta(z) = \mathbf{Re}(-i\text{Log}f(z)).$$

Agora, tomando um caminho $z = p(t)$, para todo $t \in I$, e considerando $v = \frac{dp(t)}{dt}$, temos

$$\begin{aligned} \theta(p(t)) &= \mathbf{Re}(-i\text{Log}f(p(t))) \Rightarrow \\ (\theta \circ p)(t) &= \mathbf{Re}(-i\text{Log}(f \circ p)(t)), \end{aligned}$$

que derivando com respeito a t ,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\theta \circ p)(t) &= \frac{\partial \theta}{\partial v}(p(t)) = d\theta(p(t))v \\ &= \mathbf{Re}\left(\frac{-i}{f(p(t))} \frac{d(f \circ p)}{dt}(t)\right) \\ &= \mathbf{Re}\left(\frac{-i}{f(p(t))} \frac{\partial f}{\partial v}(p(t))\right) \\ &= \mathbf{Re}\left(\frac{-i}{f(p(t))} \left\langle \frac{dp(t)}{dt}, \mathbf{grad}f(p(t)) \right\rangle_h\right) \\ &= \mathbf{Re}\left\langle \frac{dp(t)}{dt}, \frac{i\mathbf{grad}f(p(t))}{f(p(t))} \right\rangle_h \\ &= \mathbf{Re}\left\langle v, \frac{i\mathbf{grad}f(z)}{f(z)} \right\rangle_h. \end{aligned}$$

Então, temos

$$d\theta(z)v = \theta(z)i\mathbf{Re}\left\langle v, \frac{i\mathbf{grad}f(z)}{f(z)} \right\rangle_h.$$

Calculemos $\frac{\mathbf{grad}f(z)}{f(z)}$

Já vimos que

$$\text{Log}f(z) = i\theta(z) + \text{Log}|f(z)|.$$

Esta expressão pode ser estendida para todo $z \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus Z$. Tomando o gradiente

$$\mathbf{grad}\text{Log}f(z) = \left(\overline{\frac{\partial}{\partial z_1}\text{Log}f(z)}, \overline{\frac{\partial}{\partial z_2}\text{Log}f(z)}, \dots, \overline{\frac{\partial}{\partial z_{n+1}}\text{Log}f(z)} \right)$$

$$= \left(\frac{1}{f(z)} \frac{\partial f}{\partial z_1}(z), \frac{1}{f(z)} \frac{\partial f}{\partial z_2}(z), \dots, \frac{1}{f(z)} \frac{\partial f}{\partial z_{n+1}}(z) \right)$$

segue que

$$\mathbf{grad} \text{Log} f(z) = \frac{\mathbf{grad} f(z)}{f(z)}.$$

Assim temos que

$$d\phi(z)v = \phi(z)id\theta(z)v = \phi(z)i\mathbf{Re}\langle v, i\mathbf{grad} \text{Log} f(z) \rangle_h.$$

Como queremos estudar os pontos críticos da função ϕ , devemos fazer

$$d\phi(z)v = 0, \quad \forall v \in T_z(S_\varepsilon \setminus K).$$

Logo,

$$d\phi(z)v = \phi(z)i\mathbf{Re}\langle v, i\mathbf{grad} \text{Log} f(z) \rangle_h = 0$$

ou

$$d\phi(z)v = \phi(z)i\langle v, i\mathbf{grad} \text{Log} f(z) \rangle_E = 0$$

o qual é verdade somente se z e $i\mathbf{grad} \text{Log} f(z)$ são linearmente dependentes (ou l.d.) sobre \mathbb{R} . Com isso respondemos nossa pergunta e formalizamos o resultado da seguinte forma:

Lema 4.0.2 (Lema dos pontos críticos de ϕ) *Os pontos críticos de*

$$\begin{aligned} \phi : S_\varepsilon \setminus K &\longrightarrow S^1 \\ z &\longmapsto \phi(z) = \frac{f(z)}{|f(z)|} \end{aligned}$$

são os pontos $z \in S_\varepsilon \setminus K$ para os quais o vetor $i\mathbf{grad} \text{Log} f(z)$ é múltiplo real de z .

Se supusermos que z e $i\mathbf{grad} \text{Log} f(z)$ são linearmente independentes (l.i.) sobre \mathbb{R} , o que podemos falar do ponto z em relação a ϕ ?

Para responder esta pergunta, provaremos primeiro que se z e $i\mathbf{grad} \text{Log} f(z)$ são l.i. então existe um vetor não nulo $v \in T_z(S_\varepsilon \setminus K)$ tal que

$$\begin{cases} \langle v, z \rangle_E = \mathbf{Re}\langle v, z \rangle_h = 0 \\ \langle v, i\mathbf{grad} \text{Log} f(z) \rangle_E = \mathbf{Re}\langle v, i\mathbf{grad} \text{Log} f(z) \rangle_h \neq 0. \end{cases}$$

De fato, se os vetores z e $i\mathbf{grad} \text{Log} f(z)$ são tais que $\mathbf{Re}\langle i\mathbf{grad} \text{Log} f(z), z \rangle_h = 0$ podemos de forma natural escolher o vetor v como sendo $v = i\mathbf{grad} \text{Log} f(z)$.

Por outro lado, se $\mathbf{Re}\langle i\mathbf{grad} \text{Log} f(z), z \rangle_h \neq 0$, fazemos a seguinte construção:

Seja $w = i\mathbf{grad} \text{Log} f(z)$. Usando a projeção ortogonal de w sobre z , definimos o vetor

$$v = w - \mathbf{Proj}_z w.$$

Assim, o vetor v pertence ao espaço tangente de $S_\varepsilon \setminus K$ no ponto z . Logo

$$v = i\mathbf{grad} \text{Log} f(z) - \frac{\mathbf{Re}\langle i\mathbf{grad} \text{Log} f(z), z \rangle_h}{\mathbf{Re}\langle z, z \rangle_h} z.$$

Observe que a primeira condição é trivialmente satisfeita por este v neste caso. Vejamos a segunda.

$$\begin{aligned}\langle v, i\mathbf{grad} \operatorname{Log} f(z) \rangle_E &= \langle w - \frac{\langle w, z \rangle_E}{\langle z, z \rangle_E} z, w \rangle_E = \langle w, w \rangle_E - \frac{\langle w, z \rangle_E}{\langle z, z \rangle_E} \langle z, w \rangle_E \\ &= |w|^2 - \frac{\langle w, z \rangle_E^2}{|z|^2}.\end{aligned}$$

Por Pitágoras,

$$\begin{aligned}|w|^2 &= |\mathbf{Proj}_z w|^2 + |v|^2 \quad \Rightarrow \quad |w|^2 - |\mathbf{Proj}_z w|^2 = |v|^2 \Rightarrow \\ |w|^2 - \left| \frac{\langle w, z \rangle_E}{\langle z, z \rangle_E} z \right|^2 &= |w|^2 - \frac{\langle w, z \rangle_E^2}{|z|^2} = |v|^2 > 0.\end{aligned}$$

Em conclusão, tendo em conta que a derivada da função ϕ é dada por

$$d\phi(z)v = \phi(z)id\theta(z)v = \phi(z)i\mathbf{Re}\langle v, i\mathbf{grad} \operatorname{Log} f(z) \rangle_h,$$

segue que se z e $i\mathbf{grad} \operatorname{Log} f(z)$ são l.i. então z não pode ser ponto crítico de ϕ .

Lembrando que estamos considerando $f : \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função polinomial não nula, que se anula no origem de \mathbb{C}^{n+1} , nosso objetivo a partir de agora é provar que para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, a função

$$\begin{aligned}\phi : S_\varepsilon \setminus K &\longrightarrow S^1 \\ z &\longmapsto \phi(z) = \frac{f(z)}{|f(z)|}\end{aligned}$$

não admite pontos críticos, onde $K = S_\varepsilon \cap Z$ com $Z = f^{-1}(0) \subset \mathbb{C}^{n+1}$.

Situação 2

Seja $f : \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função polinomial não nula, que se anula no origem e seja p um caminho $p : [0, \delta) \rightarrow \mathbb{C}^{n+1}$ tal que $p(0) = 0$ e $f(p(t))$ é não nulo, para todo $t \in (0, \delta)$ e $\mathbf{grad} \operatorname{Log} f(p(t)) = \lambda(t)p(t)$ onde $\lambda(t) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Pergunta: O que podemos falar do $\mathbf{Arg} \lambda(t)$, quando $t \rightarrow 0$?

Sabemos que

$$\frac{\partial f}{\partial v}(z) = \langle v, \mathbf{grad} f(z) \rangle_h \quad \Rightarrow \quad \frac{d(f \circ p)}{dt}(t) = \left\langle \frac{dp}{dt}(t), \mathbf{grad} f(p(t)) \right\rangle_h$$

para todo $t \in (0, \delta)$. Naturalmente $v \neq 0$ (por definição de derivada direcional). Se supönhamos que $\mathbf{grad} f(p(t)) = 0$ então $(f \circ p)(t)$ é constante em uma vizinhança de 0 e, como $f(p(0)) = 0$, temos $f(p(t)) = 0$, na vizinhança do 0 o qual é uma contradição (pois estamos supondo desde o início que $f(p(t))$ é não nula).

Da expressão $\mathbf{grad} \operatorname{Log} f(p(t)) = \lambda(t)p(t)$ com $t \in (0, \delta)$, como

$$\mathbf{grad} \operatorname{Log} f(p(t)) = \frac{\mathbf{grad} f(p(t))}{f(p(t))}$$

logo

$$\mathbf{grad} f(p(t)) = \lambda(t) \overline{f(p(t))} p(t)$$

e, portanto,

$$\lambda(t) = \frac{\mathbf{grad}f(p(t))}{f(p(t))p(t)}, \quad t \in (0, \delta).$$

Como $p(t)$, $f(p(t))$, $\mathbf{grad}f(p(t))$ são função analíticas, elas têm uma representação em série de potências tais que $p(0) = 0$, $f(p(0)) = 0$, $\mathbf{grad}f(p(0)) = 0$ e

$$p(t) = a_0t^\alpha + a_1t^{\alpha+1} + a_2t^{\alpha+2} \dots, \quad a_i \in \mathbb{C}^{n+1}$$

$$f(p(t)) = b_0t^\beta + b_1t^{\beta+1} + b_2t^{\beta+2} \dots, \quad b_i \in \mathbb{C}$$

$$\mathbf{grad}f(p(t)) = c_0t^\gamma + c_1t^{\gamma+1} + c_2t^{\gamma+2} \dots, \quad c_i \in \mathbb{C}^{n+1}$$

onde a_0, b_0, c_0 são não nulos e α, β, γ são números naturais. Substituindo as expressões acima na expressão $\lambda(t) = \frac{\mathbf{grad}f(p(t))}{f(p(t))p(t)}$, obtemos

$$\lambda(t) = \frac{c_0t^\gamma + c_1t^{\gamma+1} + \dots}{a_0\bar{b}_0t^{\alpha+\beta} + \dots} = \frac{c_0}{a_0\bar{b}_0}t^{\gamma-\alpha-\beta} + \dots \Rightarrow$$

$$\lambda(t) = \lambda_0t^{\gamma-\alpha-\beta} + \dots = \lambda_0t^{\gamma-\alpha-\beta} (1 + k_1t^1 + k_2t^2 + \dots)$$

onde

$$\lambda_0 = \frac{c_0}{a_0\bar{b}_0} \Rightarrow c_0 = \lambda_0 a_0 \bar{b}_0.$$

Da expressão $\frac{d(f \circ p)}{dt}(t) = \frac{df}{dt}(p(t)) = \langle \frac{dp(t)}{dt}, \mathbf{grad}f(p(t)) \rangle_h$ chegamos a

$$\beta b_0 t^{\beta-1} + \dots = \langle a_0 \alpha t^{\alpha-1} + \dots, c_0 t^\gamma + \dots \rangle_h \Rightarrow$$

$$\beta b_0 t^{\beta-1} + \dots = a_0 \alpha \bar{c}_0 t^{\alpha+\gamma-1} + \dots \Rightarrow$$

$$\beta b_0 t^{\beta-1} + \dots = a_0 \alpha \bar{\lambda}_0 \bar{a}_0 \bar{b}_0 t^{\alpha+\gamma-1} + \dots$$

Logo, $\beta = \alpha |a_0|^2 \bar{\lambda}_0$ o que implica que $\bar{\lambda}_0 \in \mathbb{R}_+$ e assim, $\bar{\lambda}_0 = \lambda_0$.

Assim, $|\lambda_0 t^{\gamma-\alpha-\beta}| = \lambda_0 t^{\gamma-\alpha-\beta}$. Por outro lado, podemos escrever $\frac{\lambda(t)}{|\lambda(t)|} = e^{i \mathbf{Arg} \lambda(t)}$.

Daí,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\lambda(t)}{|\lambda(t)|} &= \frac{\lambda_0 t^{\gamma-\alpha-\beta} (1 + k_1 t^1 + k_2 t^2 + \dots)}{|\lambda_0 t^{\gamma-\alpha-\beta}| |1 + k_1 t^1 + k_2 t^2 + \dots|} = \\ &= 1 = \lim_{t \rightarrow 0} e^{i \mathbf{Arg} \lambda(t)}. \end{aligned}$$

Logo

$$\lim_{t \rightarrow 0} \mathbf{Arg} \lambda(t) = 0.$$

Ou seja, provamos o seguinte resultado:

Lema 4.0.3 (Lema do Argumento) *Seja $f : \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função polinomial não nula, que se anula na origem e considere $p : [0, \delta) \rightarrow \mathbb{C}^{n+1}$ um caminho analítico com $p(0) = 0$ e $f(p(t)) \neq 0$, para todo $t > 0$. Suponha $\lambda(t) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tal que $\mathbf{grad} \log f(p(t)) = \lambda(t)p(t)$. Então, $\mathbf{Arg} \lambda(t)$ tende a 0 quando t tende a 0.*

Em outras palavras, $\lambda(t)$ é não nulo para valores positivos de t suficientemente pequenos e

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\lambda(t)}{|\lambda(t)|} = \lim_{t \rightarrow 0} e^{i \mathbf{Arg} \lambda(t)} = 1.$$

Situação 3

Já vimos que se z e $\mathbf{igrad} \mathbf{Log} f(z)$ são l.i. em \mathbb{R} então z não pode ser ponto crítico da função ϕ , pois $d\phi(z)v \neq 0$. Se tomamos v definido como $\mathbf{igrad} \mathbf{Log} f(z)$ podemos afirmar ainda mais, que z e $\mathbf{grad} \mathbf{Log} f(z)$ são l.i. em \mathbb{C} (isso significa que para toda combinação linear nula $\alpha z + \beta \mathbf{grad} \mathbf{Log} f(z) = 0$ implica $\alpha = \beta = 0$).

Logo, $\alpha z + \left(\frac{\beta}{i}\right) \mathbf{igrad} \mathbf{Log} f(z) = 0$ o que acarreta

$$\alpha z + \tilde{\beta} \mathbf{igrad} \mathbf{Log} f(z) = 0 \Rightarrow \alpha = \tilde{\beta} = 0.$$

Com isso concluímos que z e $\mathbf{igrad} \mathbf{Log} f(z)$ são l.i. em \mathbb{C} . Em particular, isso também se cumpre para as partes reais de α e $\tilde{\beta}$, ou seja, $\mathbf{Re}(\alpha)z + \mathbf{Re}(\tilde{\beta}) \mathbf{igrad} \mathbf{Log} f(z) = 0$ implica $\mathbf{Re}(\alpha) = \mathbf{Re}(\tilde{\beta}) = 0$. Logo, z e $\mathbf{grad} \mathbf{Log} f(z)$ são l.i. em \mathbb{R} .

Se consideramos a outra possibilidade de que z e $\mathbf{grad} \mathbf{Log} f(z)$ são l.d. em \mathbb{C} , temos que existe $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tal que $\mathbf{grad} \mathbf{Log} f(z) = \lambda z$. Multiplicando ambos os membros por i , segue que $\mathbf{igrad} \mathbf{Log} f(z) = i\lambda z$.

Gostaríamos que $i\lambda \notin \mathbb{R}$ ou ($i\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$), pois se isso acontecesse, os vetores z e $\mathbf{igrad} \mathbf{Log} f(z)$ não seriam l.d. em \mathbb{R} (e note que ser l.i. em \mathbb{R} só ocorreria se $|\mathbf{Arg} \lambda| < \frac{\pi}{4}$ e $\lambda \neq 0$, pois ao rotacionar de 90° o vetor λ , o mesmo nunca pode intersepar o eixo normal).

Tendo em conta as ideias acima, propomos a seguinte pergunta:

Pergunta: Será que existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que para todo $z \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus Z$ com $|z| \leq \varepsilon_0$, z e $\mathbf{grad} \mathbf{Log} f(z)$ são l.i. em \mathbb{C} ou $\mathbf{grad} \mathbf{Log} f(z) = \lambda z$ com $|\mathbf{Arg} \lambda| < \frac{\pi}{4}$?

O caso l.i. já foi analisado (no sentido de que, neste caso, já sabemos que z não é ponto crítico de ϕ). Então, vamos supor (por absurdo) que para todo $\varepsilon_0 > 0$, existe z suficientemente próximo da origem com a condição $|z| \leq \varepsilon_0$ e $\mathbf{grad} \mathbf{Log} f(z) = \lambda z$ com $|\mathbf{Arg} \lambda| \geq \frac{\pi}{4}$. Temos dois casos a analisar:

Caso 1. $\lambda \neq 0$ e $|\mathbf{Arg} \lambda| > \frac{\pi}{4}$.

A expressão $\mathbf{Arg} \lambda > \frac{\pi}{4}$ é equivalente a $\mathbf{Re}(1+i)\lambda < 0$ e $\mathbf{Arg} \lambda < -\frac{\pi}{4}$ é equivalente a $\mathbf{Re}(1-i)\lambda > 0$.

Para chegarmos a uma contradição, iremos aplicar o Lema de Seleção da Curva.

Da expressão

$$\mathbf{grad} \mathbf{Log} f(z) = \frac{\mathbf{grad} f(z)}{f(z)}$$

e do fato de que $\mathbf{grad} \mathbf{Log} f(z) = \lambda z$ segue que

$$\mathbf{grad} f(z) = \lambda \overline{f(z)} z = \tilde{\lambda} z.$$

Tendo isso em mente, construímos o seguinte conjunto

$$W = \{z \in \mathbb{C}^{n+1}; \mathbf{grad} f(z) = \lambda z \text{ para algum } \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\}.$$

Observe que $\mathbf{grad}f(z) = \lambda z$ nos diz que

$$\left(\frac{\overline{\partial f}}{\partial z_1}(z), \frac{\overline{\partial f}}{\partial z_2}(z), \dots, \frac{\overline{\partial f}}{\partial z_{n+1}}(z), \right) = \lambda(z_1, z_2, \dots, z_{n+1}).$$

Logo, cada coordenada satisfaz $\frac{\overline{\partial f}}{\partial z_j}(z) = \lambda z_j$ com $j = 1, \dots, n+1$. Daí,

$$z_k \left(\frac{\overline{\partial f}}{\partial z_j}(z) \right) = z_k \lambda z_j = z_j \lambda z_k = z_j \left(\frac{\overline{\partial f}}{\partial z_k}(z) \right).$$

Como z é suficientemente próximo da origem, existe $z_k \neq 0$ para algum índice k tal que

$$\begin{aligned} \left(\frac{\overline{\partial f}}{\partial z_1}(z), \frac{\overline{\partial f}}{\partial z_2}(z), \dots, \frac{\overline{\partial f}}{\partial z_{n+1}}(z), \right) &= \left(\frac{z_1}{z_k} \left(\frac{\overline{\partial f}}{\partial z_k}(z) \right), \dots, \frac{z_{n+1}}{z_k} \left(\frac{\overline{\partial f}}{\partial z_k}(z) \right) \right) \\ &= \frac{\overline{\partial f}}{\partial z_k}(z) (z_1, z_2, \dots, z_{n+1}) \end{aligned}$$

o que implica

$$\mathbf{grad}f(z) = \tau z, \quad \text{onde } \tau = \frac{\overline{\partial f}}{\partial z_k}(z) \in \mathbb{C}.$$

Assim, temos que $\mathbf{grad}f(z)$ e z são l.d. em \mathbb{C} e tomando as partes real e imaginária das equações $z_k \left(\frac{\overline{\partial f}}{\partial z_j}(z) \right) = z_j \left(\frac{\overline{\partial f}}{\partial z_k}(z) \right)$ obtemos um sistema de equações lineares. Desta forma, segue que W é um conjunto algébrico.

Como $\mathbf{grad}Logf(z) = \frac{\mathbf{grad}f(z)}{f(z)}$ e $\mathbf{grad}Logf(z) = \lambda z$ temos $\mathbf{grad}f(z) = \lambda z \overline{zf(z)}$, multiplicando escalarmente por $zf(z)$,

$$\langle \mathbf{grad}f(z), \overline{zf(z)} \rangle_h = \langle \lambda z \overline{zf(z)}, \overline{zf(z)} \rangle_h$$

chegamos que

$$\langle \mathbf{grad}f(z), \overline{zf(z)} \rangle_h = \lambda |zf(z)|^2, \quad \forall z \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus Z, \quad |z| \leq \varepsilon_0.$$

Assim temos $\tilde{\lambda}(z) = \langle \mathbf{grad}f(z), \overline{zf(z)} \rangle_h = \lambda p^2$, onde $p^2 = |zf(z)|$. Note que $\mathbf{Arg}\tilde{\lambda}(z) = \mathbf{Arg}\lambda$ e $|\mathbf{Arg}\lambda| > \frac{\pi}{4}$.

Seja

$$U_+ = \{z \in \mathbb{C}^{n+1}; \mathbf{Re}(1+i)\lambda < 0\},$$

$$U_- = \{z \in \mathbb{C}^{n+1}; \mathbf{Re}(1-i)\lambda < 0\}.$$

Se $z \in Z$ temos que $f(z) = 0$. Logo $\tilde{\lambda}(z) = 0$. Então $z \notin U_+$ nem $z \notin U_-$. Da hipótese de existirem elementos z suficientemente próximos da origem satisfazendo as condições $\mathbf{grad}Logf(z) = \lambda z \neq 0$ e $\mathbf{Arg}\lambda > \frac{\pi}{4}$, temos que isso equivale a dizer que

$$z \in W \cap (U_+ \cup U_-) = (W \cap U_+) \cup (W \cap U_-)$$

e

$$0 \in \overline{W \cap (U_+ \cup U_-)} = \overline{W \cup U_+} \cap \overline{W \cup U_-}.$$

Pelo Lema de Seleção da Curva, existe $p : [0, \delta) \rightarrow W \cap (U_+ \cup U_-)$ tal que $p(0) = 0$ e $p(t) \in (W \cap U_+)$ ou $p(t) \in (W \cap U_-)$, para todo $t > 0$. Em qualquer dos casos, obtemos $\mathbf{grad} \text{Log} f(p(t)) = \lambda(t)p(t)$, $t > 0$ e $\lambda(t) \neq 0$ com $|\mathbf{Arg} \lambda(t)| > \frac{\pi}{4}$.

Assim $p(t) \in W$ e $p(t) \in U_+ \cup U_-$. Logo, $p(t) \in \mathbb{C}^{n+1}$ tal que $f(p(t)) \neq 0$, para todo $t \in (0, \delta)$. Pelo Lema 4.0.3 do argumento chegamos a uma contradição.

Caso 2. $\mathbf{grad} \text{Log} f(z) = \lambda z$ com $\lambda = 0$ ou $|\mathbf{Arg} \lambda| = \frac{\pi}{4}$.

Construímos o seguinte conjunto

$$\widetilde{W} = \{z \in \mathbb{C}^{n+1}; \mathbf{Re}(1+i)\lambda \mathbf{Re}(1-i)\lambda = 0\}.$$

Logo temos que \widetilde{W} é um conjunto algébrico e considere o conjunto semi-algébrico

$$U = \{z \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus Z; |f(z)|^2 > 0\}.$$

Novamente, podemos concluir que $z \in (W \cap \widetilde{W}) \cap U$ e $0 \in \overline{(W \cap \widetilde{W}) \cap U}$.

Pelo Lema 3.3.1 de Seleção da Curva e aplicando o Lema 4.0.3 do Argumento, chegamos novamente a uma contradição. Assim, podemos concluir o seguinte fato:

Lema 4.0.4 (Lema dos vetores l.i. geral) *Seja $f : \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função polinomial não nula, que se anula na origem. Existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que para todo $z \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus Z$ com $\|z\| \leq \varepsilon_0$, os vetores z e $i \mathbf{grad} \text{Log} f(z)$ são linearmente independentes sobre \mathbb{C} ou $\mathbf{grad} \text{Log} f(z) = \lambda z$, cujo $\mathbf{Arg}(\lambda)$ em valor absoluto é menor que (digamos) $\pi/4$. Em outras palavras, λ está no quadrante aberto de \mathbb{C} simétrico em relação ao semi-eixo real positivo.*

Corolário 4.0.1 (Lema dos vetores l.i.) *Existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que, para todo $z \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus Z$, com $\|z\| \leq \varepsilon_0$ os vetores z e $i \mathbf{grad} \text{Log} f(z)$ são linearmente independentes sobre os reais.*

E por o análise feito quando z e $i \mathbf{grad} \text{Log} f(z)$ são l.i. em \mathbb{R} , concluímos o seguinte importante resultado.

Corolário 4.0.2 *Seja $f : \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função polinomial não nula, que se anula na origem. Se $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ (onde ε_0 é o mesmo considerado no Lema 4.0.4 do vetores l.i. geral) a aplicação*

$$\begin{aligned} \phi : S_\varepsilon \setminus K &\longrightarrow S^1 \\ z &\longmapsto \phi(z) = \frac{f(z)}{|f(z)|} \end{aligned}$$

não tem pontos críticos.

Assim temos que, para cada $e^{i\theta} \in S^1$, o espaço $F_\theta = \phi^{-1}(e^{i\theta}) \subset S_\varepsilon \setminus K$ é uma variedade diferenciável de dimensão real $2n$.

Definição 4.0.1 (Raio e fibra de Milnor) *Nas condições anteriores, o número ε_0 é chamado de Raio de Milnor e a variedade F_θ é chamada de fibra de Milnor da aplicação ϕ .*

Situação 4

Considerando $f : \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}$ do mesmo jeito anterior, queremos investigar agora a existência de um campo vetorial tangente a $S_\varepsilon \setminus K$. Veremos que, se existe este campo tangente, ele está intimamente relacionado com o raio do Milnor. Assim, propomos a seguinte pergunta:

Pergunta. Sob que condições existe um campo vetorial tangente a $S_\varepsilon \setminus K$ e, além disso, como é possível caracterizá-lo?

Dividiremos nossa análise em dois casos.

Caso 1. Suponha que os vetores z_α e $\mathbf{grad} \text{Log} f(z_\alpha)$ são l.i. sobre \mathbb{C} , onde $\alpha \in I$, I é um conjunto não enumerável.

Assim, já vimos que os vetores z_α e $i \mathbf{grad} \text{Log} f(z_\alpha)$ também são l.i. sobre \mathbb{C} (e isso implica que também são l.i. sobre \mathbb{R}). Procedendo como na Situação 1, temos assegurada a existência do vetor $v \in T_z(S_\varepsilon \setminus K)$ satisfazendo

$$\begin{cases} \langle v, z \rangle_E = \mathbf{Re} \langle v, z \rangle_h = 0 \\ \langle v, i \mathbf{grad} \text{Log} f(z) \rangle_E = \mathbf{Re} \langle v, i \mathbf{grad} \text{Log} f(z) \rangle_E = 1. \end{cases}$$

E, deste modo, construímos um campo vetorial tangente na vizinhança de $z_\alpha \in S_\varepsilon \setminus K$.

Caso 2. Suponha agora que $\mathbf{grad} \text{Log} f(z_\alpha) = \lambda z_\alpha$. Considerando $v = i z_\alpha$, v é obviamente tangente a $S_\varepsilon \setminus K$ no ponto z_α , pois $\mathbf{Re} \langle v, z_\alpha \rangle_h = 0$ onde $|\mathbf{Arg} \lambda| < \frac{\pi}{4}$ (esta condição sobre o argumento já foi explicada). Além disso, $|\mathbf{Arg} \lambda| = |\mathbf{Arg} \bar{\lambda}|$. Então,

$$\begin{aligned} i \mathbf{grad} \text{Log} f(z_\alpha) &= i \lambda z_\alpha \Rightarrow \\ \langle i z_\alpha, i \mathbf{grad} \text{Log} f(z_\alpha) \rangle_h &= \langle i z_\alpha, i \lambda z_\alpha \rangle_h \Rightarrow \\ \langle v, i \mathbf{grad} \text{Log} f(z_\alpha) \rangle_h &= \bar{\lambda} |z_\alpha|^2 \Rightarrow \\ |\mathbf{Arg} \langle v, i \mathbf{grad} \text{Log} f(z_\alpha) \rangle_h| &= |\mathbf{Arg} \bar{\lambda}| < \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Logo, em ambos os casos analisados, é possível escolher um campo de vetores tangentes local $v = v_\alpha(z_\alpha)$ com a condição

$$|\mathbf{Arg} \langle v_\alpha(z_\alpha), i \mathbf{grad} \text{Log} f(z_\alpha) \rangle_h| < \frac{\pi}{4}$$

sendo válida na vizinhança de z_α . Daí, para obter o campo “global” $V(z)$, usamos a partição da unidade juntamente com a seguinte propriedade geométrica:

Propriedade. Sejam $u, v_{a_1}, v_{a_2}, \dots, v_{a_n}$ vetores de \mathbb{C}^{n+1} tais que

$$|\mathbf{Arg} \langle v_{a_i}, u \rangle_E| < \frac{\pi}{4}, \quad i = 1, \dots, n,$$

então $|\mathbf{Arg} \langle v, u \rangle_E| < \frac{\pi}{4}$ onde $v = \sum_{i=1}^n x_i v_{a_i}$, com $x_i \in \mathbb{C}$.

Com toda a análise dos fatos da Situação 4, podemos concluir:

Lema 4.0.5 *Se $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ então existe um campo de vetores diferenciável $V(z)$ tangente a $S_\varepsilon \setminus K$*

tal que, para cada $z \in S_\varepsilon \setminus K$, o produto interno hermitiano $\langle V(z), \mathbf{igrad} \text{Log} f(z) \rangle_h \neq 0$ e $|\mathbf{Arg} \langle V(z), \mathbf{igrad} \text{Log} f(z) \rangle_h| < \pi/4$.

Situação 5

De posse do Lema anterior, definimos o campo $w(z)$ em função do campo $V(z)$ e em função do número positivo $\mathbf{Re} \langle V(z), \mathbf{igrad} \text{Log} f(z) \rangle_h > 0$

$$w(z) = \frac{V(z)}{\mathbf{Re} \langle V(z), \mathbf{igrad} \text{Log} f(z) \rangle_h}.$$

Observe que o campo $w(z)$ satisfaz as seguintes propriedades

Observe que

$$\mathbf{Re} \langle w(z), \mathbf{igrad} \text{Log} f(z) \rangle_h = \frac{\mathbf{Re} \langle V(z), \mathbf{igrad} \text{Log} f(z) \rangle_h}{\mathbf{Re} \langle V(z), \mathbf{igrad} \text{Log} f(z) \rangle_h} = 1.$$

E também,

$$\begin{aligned} \mathbf{Re} \langle w(z), \mathbf{grad} \text{Log} f(z) \rangle_h &= \frac{\mathbf{Re} \langle V(z), \mathbf{grad} \text{Log} f(z) \rangle_h}{\mathbf{Re} \langle V(z), \mathbf{igrad} \text{Log} f(z) \rangle_h} \\ &= \frac{\mathbf{Re} \langle V(z), -i \mathbf{grad} \text{Log} f(z) \rangle_h}{\mathbf{Re} \langle V(z), \mathbf{igrad} \text{Log} f(z) \rangle_h} = \frac{\mathbf{Re} i \langle V(z), \mathbf{igrad} \text{Log} f(z) \rangle_h}{\mathbf{Re} \langle V(z), \mathbf{igrad} \text{Log} f(z) \rangle_h} = (\star) \end{aligned}$$

Lembrando que se $z = a + ib$, $iz = ia - b$ e, portanto, $\mathbf{Re}(iz) = -b = -\mathbf{Im}(z)$. Logo, $|\mathbf{Re}(iz)| = |\mathbf{Im}(z)|$, e

$$(\star) = \frac{-\mathbf{Im} \langle V(z), \mathbf{igrad} \text{Log} f(z) \rangle_h}{\mathbf{Re} \langle V(z), \mathbf{igrad} \text{Log} f(z) \rangle_h}.$$

Então, tomando o valor absoluto, obtemos

$$|\mathbf{Re} \langle w(z), \mathbf{grad} \text{Log} f(z) \rangle_h| = \frac{|\mathbf{Im} \langle w(z), \mathbf{igrad} \text{Log} f(z) \rangle_h|}{|\mathbf{Re} \langle V(z), \mathbf{igrad} \text{Log} f(z) \rangle_h|}$$

e como $|\mathbf{Arg} \langle V(z), \mathbf{igrad} \text{Log} f(z) \rangle_h| < \frac{\pi}{4}$ segue que

$$|\mathbf{Re} \langle V(z), \mathbf{igrad} \text{Log} f(z) \rangle_h| < |\mathbf{Im} \langle V(z), \mathbf{igrad} \text{Log} f(z) \rangle_h|.$$

Logo,

$$|\mathbf{Re} \langle w(z), \mathbf{grad} \text{Log} f(z) \rangle_h| < 1.$$

Com isso, temos que $w(z)$ é um campo diferenciável unitário e tangente a $S_\varepsilon \setminus K$. Logo, para todo $z \in S_\varepsilon \setminus K$ podemos considerar uma equação diferencial do tipo

$$\begin{cases} \frac{d\alpha}{dt}(t) &= w(\alpha(t)) \\ \alpha(0) &= z \end{cases}$$

Pelo Teorema de Existência e Unicidade das E.D.O.s, existe um único caminho diferenciável $p : I \rightarrow S_\varepsilon \setminus K$ que é solução da equação acima, o qual pode ser estendido a um intervalo

maximal de \mathbb{R} , ou seja, podemos então considerar o caminho diferenciável

$$p : \mathbb{R} \longrightarrow S_\varepsilon \setminus K$$

como solução da EDO acima.

Tendo em vista a existência deste caminho p , podemos questionar:

Pergunta: Existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{t \rightarrow t_0} p(t) \in K$? Ou, em outras palavras, existe algum tempo t_0 para o qual o caminho diferenciável p intersepta à K ?

Suponhamos que a pergunta acima seja verdadeira. Então, a expressão $\lim_{t \rightarrow t_0} p(t) \in K$ é equivalente a

$$\lim_{t \rightarrow t_0} |f(p(t))| = 0. \quad (*)$$

Agora, tendo em conta que $e^{i\theta(z)} = \frac{f(z)}{|f(z)|}$ segue que

$$i\theta(z) = \operatorname{Log} f(z) - \operatorname{Log}|f(z)| \Rightarrow \operatorname{Log}|f(z)| = \operatorname{Log} f(z) - i\theta(z) \Rightarrow$$

$$\operatorname{Re}(\operatorname{Log} f(z)) = \operatorname{Log}|f(z)|.$$

Assim, a expressão $(*)$ é equivalente a

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \operatorname{Re}(\operatorname{Log} f(z)) = -\infty.$$

Vejamos que esta última condição, de fato, não ocorre. Tomando $z = p(t)$ e $v = \frac{dp(t)}{dt}$ tem-se

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \operatorname{Re}(\operatorname{Log} f(p(t))) &= \operatorname{Re} \left(\frac{1}{f(p(t))} \frac{d}{dt} (f \circ p)(t) \right) = \\ &= \operatorname{Re} \left(\frac{1}{f(p(t))} \left\langle \frac{dp(t)}{dt}, \mathbf{grad} f(p(t)) \right\rangle_h \right) = \operatorname{Re} \left\langle \frac{dp(t)}{dt}, \frac{\mathbf{grad} f(p(t))}{f(p(t))} \right\rangle_h = \\ &= \operatorname{Re} \langle w(z), \mathbf{grad} \operatorname{Log} f(z) \rangle_h, \end{aligned}$$

pois $\mathbf{grad} \operatorname{Log} f(z) = \frac{\mathbf{grad} f(p(t))}{f(p(t))}$.

Portanto,

$$\left| \frac{d}{dt} \operatorname{Re}(\operatorname{Log} f(p(t))) \right| = \left| \operatorname{Re} \langle w(p(t)), \mathbf{grad} \operatorname{Log} f(z) \rangle_h \right| < 1.$$

Isso significa que $\operatorname{Re}(\operatorname{Log} f(p(t)))$ é limitado, ou seja, isso é uma contradição em assumir a pergunta anterior como verdadeira. Logo, o caminho p nunca intersecta K .

Assim, temos um fluxo bem definido sobre $S_\varepsilon \setminus K$, o qual é formalizado por

$$\begin{aligned} h : (S_\varepsilon \setminus K) \times \mathbb{R} &\longrightarrow S_\varepsilon \setminus K \\ (z, t) &\longmapsto h(z, t) := h_t(z) = p_z(t) \end{aligned}$$

onde $p_z(t)$ é a solução da equação diferencial

$$\begin{cases} \frac{d\alpha}{dt}(t) = w(\alpha(t)) \\ \alpha(0) = z \end{cases}$$

Ou seja, $p_z(0) = z$, tal fluxo é naturalmente injetivo.

Também podemos redefinir o fluxo do seguinte modo: para todo $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} h_t : S_\varepsilon \setminus K &\longrightarrow S_\varepsilon \setminus K \\ z &\longmapsto h_t(z) := p_z(t) = \varepsilon e^{i\theta(p_z(t))} \end{aligned}$$

onde r é o raio de $S_\varepsilon \setminus K$.

Seja $\phi(z) = e^{i\theta(z)}$, onde $\theta = \mathbf{Arg}\phi(z)$. Note que, conhecendo a função θ , conheceremos a função ϕ .

Como $\theta(z) = \mathbf{Re}(-i\mathbf{Log}f(z))$, tomando $z = p(t)$ e $w = \frac{dp(t)}{dt}$,

$$\begin{aligned} \frac{d(\theta \circ p_z)}{dt}(t) &= \mathbf{Re}\left\langle \frac{dp_z(t)}{dt}, i\mathbf{grad}\mathbf{Log}f(p_z(t)) \right\rangle_h \\ &= \mathbf{Re}\langle w(p_z(t)), i\mathbf{grad}\mathbf{Log}f(p_z(t)) \rangle_h = 1. \end{aligned}$$

Logo, $\frac{d\theta}{dt}(p_z(t)) = 1 \Leftrightarrow \theta(p_z(t)) = t + \text{constante}$. Ou seja, $\theta(p_z(t)) = t + c$ e então $c = \theta(p_z(0)) = \theta(z) = \theta$ (pela a condição inicial da E.D.O.). Assim, $\theta(p_z(t)) = t + \theta(p_z(0)) = t + \theta(z) = t + \theta \in \mathbb{R}$. Logo,

$$\phi(p_z(t)) = e^{i\theta(p_z(t))} = e^{i(t+\theta)}$$

ou seja, vemos geometricamente que a função ϕ leva (projeta) caminhos de $S_\varepsilon \setminus K$ em caminhos em S^1 , que estão percorridos no sentido anti-horário com velocidade unitária.

Como

$$h_t(z) = p_z(t) = \varepsilon e^{i\theta(p_z(t))} = \varepsilon e^{i(t+\theta(p_z(0)))} = \varepsilon e^{i(t+\theta(z))}$$

derivando com respeito a z , temos que

$$h'_t(z) = \varepsilon e^{i(t+\theta(z))} \cdot i d\theta(z) = (\varepsilon e^{i(t+\theta_1(z))} d\theta_1(z), \varepsilon e^{i(t+\theta_2(z))} d\theta_2(z), \dots, \varepsilon e^{i(t+\theta_{n+1}(z))} d\theta_{n+1}(z)) \neq 0$$

pois z não é ponto crítico da função ϕ , o quer dizer que $d\theta_i(z) \neq 0$ com $i = 1, 2, \dots, n+1$, pois estamos trabalhando dentro do Raio de Milnor.

Então, para todo $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} h_t : S_\varepsilon \setminus K &\longrightarrow S_\varepsilon \setminus K \\ z &\longmapsto h_t(z) \end{aligned}$$

é localmente um difeomorfismo (pelo Teorema da Função Inversa) e como o fluxo é injetivo, logo temos que a função h_t é um difeomorfismo e com esta informação temos praticamente provado o teorema de fibração de Milnor, como veremos de aqui a pouco.

Dado $e^{i\theta} \in S^1$, considere a Fibra de Milnor $\phi^{-1}(e^{i\theta}) = F_\theta$. Logo, vale que $h_t(F_\theta) = F_{\theta+t}$, pois o fluxo translada a fibra de Milnor em t unidades (pela construção do fluxo).

Outra propriedade importante do fluxo h_t é a seguinte:

$$h_{t_1+t_2}(z) = (h_{t_1} \circ h_{t_2})(z).$$

Com efeito,

$$\begin{aligned}\phi(h_{t_1+t_2}(z)) &= \phi(p_z(t_1+t_2)) = e^{i\theta(p_z(t_1+t_2))} = e^{i(t_1+t_2+\theta(z))} = e^{i(t_1+\theta(p_z(t_2)))} = \\ &= e^{i\theta(p_{p_z(t_2)}(t_1))} = e^{i\theta(h_{t_1}(p_z(t_2)))} = e^{i\theta(h_{t_1}(h_{t_2}(z)))} = e^{i\theta((h_{t_1} \circ h_{t_2})(z))} \\ &= \phi((h_{t_1} \circ h_{t_2})(z)).\end{aligned}$$

Como a análise é feita localmente (logo ϕ é injetora) podemos concluir que

$$h_{t_1+t_2}(z) = (h_{t_1} \circ h_{t_2})(z).$$

Situação Principal 1.

Das análises anteriores, da definição do fibrado diferenciável localmente trivial, e tendo em conta o Raio de Milnor ε_0 temos:

- ★ $S_\varepsilon \setminus K$ é uma variedade diferenciável
- ★ S^1 é também uma variedade diferenciável
- ★ ϕ é trivialmente sobrejetora por contração e além disso dentro do raio de Milnor ela não tem pontos críticos, logo é uma submersão.

Agora vejamos a condição de trivialidade local:

Fixe $e^{i\theta(z)} \in S^1$ e contruirmos U_θ uma vizinhança desse ponto, definida do seguinte modo

$$U_\theta = \{e^{i\alpha} \in S^1; |\alpha - \theta| < a\},$$

ou escrevendo de outra forma,

$$U_\theta = \{e^{i\alpha} \in S^1; \alpha \in (\theta - a, \theta + a) = J_\theta\}.$$

Definimos agora a seguinte função

$$\begin{aligned}\varphi_\theta : U_\theta \times F_\theta &\longrightarrow \phi^{-1}(U_\theta) \\ (e^{i\alpha}, z) &\longmapsto \varphi_\theta(e^{i\alpha}, z) = h_{\alpha-\theta}(z) = p_z(\alpha - \theta)\end{aligned}$$

e como $h_{\alpha-\theta}(z)$ é um difeomorfismo, logo temos que φ_θ é também um difeomorfismo.

Observe também que $\phi \circ \varphi_\theta$ é exatamente a projeção na primeira variável, pois

$$(\phi \circ \varphi_\theta)(e^{i\alpha}, z) = \phi(\varphi_\theta(e^{i\alpha}, z)) = \phi(h_{\alpha-\theta}(z)) = \phi(p_z(\alpha - \theta(z))) = e^{i\theta(p_z(\alpha - \theta(z)))} = e^{i(\alpha - \theta(z) + \theta(z))} = e^{i\alpha}$$

logo temos que $S_\varepsilon \setminus K$ é um fibrado diferenciável localmente trivial, sobre S^1 com projeção $\phi = \frac{f}{|f|}$, assim provamos o Teorema de Fibrção de Milnor, formalmente teremos.

Teorema 4.0.1 (Teorema de Fibrção de Milnor) *Seja ε_0 o raio de Milnor da aplicação*

$$\begin{aligned}\phi : S_\varepsilon \setminus K &\longrightarrow S^1 \\ z &\longmapsto \phi(z) = \frac{f(z)}{|f(z)|}.\end{aligned}$$

Para ε tal que $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, o espaço $S_\varepsilon \setminus K$ é um fibrado diferenciável localmente trivial sobre S^1 com projeção $\phi(z) = \frac{f(z)}{|f(z)|}$.

A topologia das fibras

A referência principal deste capítulo é o livro de Milnor [10].

Neste capítulo daremos uma descrição do comportamento topológico da fibra de Milnor.

Definição 5.0.2 (Homotopia) *Sejam X e Y espaços topológicos. Dizemos que as aplicações contínuas $f : X \rightarrow Y$, $g : X \rightarrow Y$ são homotópicas se, existe uma aplicação contínua $H : X \times I \rightarrow Y$, com $I = [0, 1]$, tal que $H(x, 0) = f(x)$ e $H(x, 1) = g(x)$. Denotaremos por $f \simeq g$. A função H é chamada de homotopia.*

No caso em que g é uma função constante, dizemos que f é homotopicamente nula ou homotopicamente constante.

Definição 5.0.3 (Mesmo tipo de homotopia) *Sejam X e Y espaços topológicos. Dizemos que a função contínua $f : X \rightarrow Y$ é uma equivalência homotópica se, existe uma aplicação contínua $g : Y \rightarrow X$ tal que $f \circ g \simeq Id_Y$ e $g \circ f \simeq Id_X$. A aplicação g é chamada de equivalência homotópica inversa de f . Neste caso, os espaços X e Y são ditos ter o mesmo tipo de homotopia.*

Exemplo. A bola fechada centrada em p de raio 1 menos p , isto é $\overline{B_\varepsilon(p)} \setminus \{p\}$ em \mathbb{R}^{n+1} , tem o mesmo tipo de homotopia que a esfera unitária $S^n(p) = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}; \|x - p\| = 1\}$.

Proposição 5.0.1 (Extensão de uma função contínua a um fechado) *Seja $f : S^n \rightarrow X$ uma aplicação contínua, onde S^n é a esfera n -dimensional centrada em 0 de raio 1 e X é um espaço topológico. Então $f : S^n \rightarrow X$ se estende continuamente a $\overline{B_\varepsilon(0)}$ se, e somente se, f é homotópica a uma constante.*

Para demonstração ver [14].

Definição 5.0.4 (CW-complexo finito, de dimensão finita) *Um CW-complexo finito de dimensão finita é um espaço topológico de hausdorff $X \subset \mathbb{R}^m$, junto com uma partição finita em subespaços homeomorfos a bolas abertas de dimensão finita (não necessariamente todas elas têm a mesma dimensão). Os subespaços da partição são chamados células abertas (com sua respectiva dimensão da bola aberta). Além disso, a fronteira da bola aberta é a fronteira da célula aberta via o homeomorfismo e intersecta apenas um número finito de outras células.*

Um subconjunto $A \subset X$ é *fechado* em X se, e somente se, ele intersecta o fecho de cada célula segundo A .

Falaremos agora sobre um pouco da *Teoria de Morse*. Para um estudo detalhado ver [9].

Sejam M^n uma variedade diferenciável e $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação diferenciável. Então, p é um ponto crítico de f se, $\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = 0$, para todo $i = 1, \dots, n$. Note que $\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \in T_p M$ pode ser vista como um elemento da forma $d\phi_q(e_i)$ para alguma parametrização $\phi : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ com $\phi(q) = p$. Se $c \in \mathbb{R}$ é tal que o conjunto $f^{-1}(c)$ contém algum ponto crítico p de f , c é chamado valor crítico de f . Caso contrário, c é chamado valor regular de f .

Se p é um ponto crítico de f tal que a matriz hessiana de f em p tem determinante distinto de zero, chamamos ao ponto p de *ponto crítico não degenerado*. Quando todos os pontos críticos de $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ são não degenerados, chamamos a f de *função de Morse*.

Dada a forma bilinear definida pela matriz hessiana $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p)\right)$ em $T_p M \times T_p M$, chamamos a maior dimensão do espaço vetorial onde esta forma bilinear é definida-negativa de *índice* de f em p , o qual coincide também com o número de autovalores negativos da matriz hessiana, ou seja, o número de raízes negativas do polinômio característico de f em p , onde naturalmente p é um ponto crítico não degenerado de f .

Um fato relevante é que dada uma função analítica com uma singularidade isolada ela pode ser aproximada por uma função de Morse, ver [9].

O seguinte resultado nos diz que o comportamento uma função diferenciável numa vizinhança de um ponto crítico não degenerado pode ser completamente determinado pelo seu índice, da seguinte forma:

Lema 5.0.6 (Lema de Morse) *Seja p um ponto crítico não degenerado de uma função diferenciável $f : M \rightarrow \mathbb{R}$. Então existe um sistema de coordenadas locais (x_1, \dots, x_m) em uma vizinhança U de p em M , tal que neste sistema de coordenadas $p = (0, 0, \dots, 0)$ e*

$$f(x) = f(p) - x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_{I_M}^2 + x_{I_M+1}^2 + \dots + x_m^2$$

onde I_M é o índice de Morse de f em p .

Uma demonstração deste resultado pode ser encontrada também em [9].

Teorema 5.0.2 (Função de Morse e mesmo tipo de homotopia) *Seja M uma variedade diferenciável e considere $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável cujos pontos críticos são não degenerados. Se $f^{-1}((-\infty, a])$ é compacto então M tem o mesmo tipo de homotopia de um CW-complexo, obtido pela adição de células de dimensão I_M , para cada ponto crítico de índice I_M .*

Sabemos do Capítulo 4, que

$$\begin{aligned} \phi : S_\varepsilon \setminus K &\longrightarrow S^1 \\ z &\longmapsto \phi(z) = \frac{f(x)}{|f(z)|} \end{aligned}$$

define um fibrado diferenciável localmente trivial e, que a fibra de Milnor $F_\theta = \phi^{-1}(e^{i\theta})$ tem dimensão $2n$. O principal resultado desde Capítulo é demonstrar que cada fibra F_θ tem o mesmo tipo de homotopia que um CW-complexo finito de dimensão finita.

Para tal objetivo usaremos o teorema 5.0.2.

Logo nosso trabalho nesta parte é como construir uma função de Morse sobre a fibra de Milnor tal que ela satisfaz as hipóteses do teorema anteriormente falado.

O primeiro passo será caracterizar os pontos críticos da função $|f(z)|$ e assim observar sua existência com base na teoria desenvolvida no capítulo anterior. De fato, o ponto chave é estudar os pontos críticos da função real $|f(z)|$ os quais são os mesmos pontos críticos da função $\text{Log}|f(z)|$, Considere a seguinte função:

$$\begin{aligned} a_\theta : F_\theta &\longrightarrow \mathbb{R} \\ z &\longmapsto a_\theta(z) = \text{Log}|f(z)| \end{aligned}$$

Como já dissemos, os pontos críticos da função $a_\theta = \text{Log}|f(z)|$ são os mesmos que os pontos críticos da função $|f(z)|$ restrita a F_θ . A razão pela qual trabalharemos com a função a_θ é que já fizemos os cálculos de suas derivadas direcionais.

Situação 6

Seja

$$\begin{aligned} a_\theta : F_\theta &\longrightarrow \mathbb{R} \\ z &\longmapsto a_\theta(z) = \text{Log}|f(z)| \end{aligned}$$

Pergunta. Como caracterizar os pontos críticos da função a_θ ?

Como

$$\begin{aligned} f(z) &= |f(z)|e^{i\mathbf{Arg}f(z)} \Rightarrow \\ \text{Log}f(z) &= \text{Log}(|f(z)|e^{i\mathbf{Arg}f(z)}) \Rightarrow \\ \text{Log}f(z) &= \text{Log}|f(z)| + i\mathbf{Arg}f(z). \end{aligned}$$

Como $z \in F_\theta$ então $\mathbf{Arg}f(z) = \theta \in \mathbb{R}$. Logo

$$\text{Log}|f(z)| = \mathbf{Re}(\text{Log}f(z))$$

em $\mathbb{C}^{n+1} \setminus Z$, onde $Z = f^{-1}(0)$.

Tomando $z = p(t)$ e $v = \frac{dp}{dt}(t)$ temos $\text{Log}|f(p(t))| = \mathbf{Re}(\text{Log}f(p(t)))$. Derivando com respeito a t temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\text{Log}|f(p(t))| &= \frac{\partial}{\partial v}\text{Log}|f(z)| = \frac{d}{dt}\mathbf{Re}(\text{Log}f(p(t))) = \\ &= \mathbf{Re}\left\langle \frac{dp(t)}{dt}, \mathbf{grad}\text{Log}f(p(t)) \right\rangle_h = \langle v, \mathbf{grad}f(z) \rangle_h = \frac{\partial}{\partial v}a_\theta(z) = \\ &= \mathbf{Re}\langle v, \mathbf{grad}\text{Log}f(z) \rangle_h. \end{aligned}$$

Como queremos estudar os pontos críticos, então a expressão acima será zero se, e somente se, $\mathbf{grad}\text{Log}f(z)$ é normal a F_θ em z (isto significa que $\mathbf{grad}\text{Log}f(z)$ é ortogonal em z a todo vetor $v \in T_z(S_\varepsilon \setminus K)$).

Sabemos também que z é ortogonal à $S_\varepsilon \setminus K$, em particular à fibra F_θ . Como z é ponto crítico de a_θ segue que z e o vetor $i\mathbf{grad}\text{Log}f(z)$ são l.i. em \mathbb{R} , ou seja, $\{z, i\mathbf{grad}\text{Log}f(z)\}$ formam uma base para o espaço normal a F_θ , pois a codimensão de F_θ é 2. Assim, existem $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tais que

$$\mathbf{grad}\text{Log}f(z) = \lambda_1 z + \lambda_2 i\mathbf{grad}\text{Log}f(z)$$

e, então,

$$\mathbf{grad} \operatorname{Log} f(z) = \frac{\lambda_1}{1 - i\lambda_2} z = \tilde{\lambda} z$$

com $\tilde{\lambda} \in \mathbb{C}$.

Assim, z é ponto crítico de a_θ se, e somente se, o vetor $\mathbf{grad} \operatorname{Log} f(z)$ é múltiplo complexo de z , ou seja, mostramos que:

Lema 5.0.7 (Caracterização dos pontos críticos de a_θ) *Os pontos críticos da função*

$$\begin{aligned} a_\theta : F_\theta &\longrightarrow \mathbb{R} \\ z &\longmapsto a_\theta(z) = \operatorname{Log}|f(z)| \end{aligned}$$

são os pontos $z \in F_\theta$ tais que z e $\mathbf{grad} \operatorname{Log} f(z)$ são múltiplos complexos.

Observação. Note que o espaço tangente a F_θ no ponto z é o subespaço complexo $G \subset \mathbb{C}^{n+1}$ tal que para todo $v \in G$, temos $\langle v, z \rangle_h = 0$. Mas, isso ocorre se, e somente se, v é ortogonal a ambos os vetores z e $\mathbf{grad} \operatorname{Log} f(z)$. De fato, suponha que v é ortogonal (com respeito ao produto interno em \mathbb{R}) a ambos os vetores z e $\mathbf{grad} \operatorname{Log} f(z)$. Isso é equivalente a

$$\begin{aligned} \begin{cases} \operatorname{Re}\langle v, z \rangle_h &= 0 \\ \operatorname{Re}\langle v, \mathbf{grad} \operatorname{Log} f(z) \rangle_h &= 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{Re}\langle v, z \rangle_h &= 0 \\ \operatorname{Re}\langle v, (\lambda_1 + i\lambda_2)z \rangle_h &= 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{Re}\langle v, z \rangle_h &= 0 \\ \operatorname{Re}\langle v, \lambda_1 z \rangle_h + \operatorname{Re}\langle -i\langle v, \lambda_2 z \rangle_h &= \operatorname{Im}\langle v, z \rangle_h = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Logo $\langle v, z \rangle_h = 0$.

Situação 7

Dado que o comportamento de uma função diferenciável real, na vizinhança de um ponto crítico não degenerado pode ser completamente determinado pelo seu índice I_M , é natural estudar a matriz $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\right)$ hessiana da função a_θ nos pontos críticos z de a_θ . Considere o caminho $z = p(t)$ e seja $v = \frac{dp(t)}{dt}$ com $p(0) = a$. Logo

$$a_\theta''(t) = \frac{d^2 a_\theta}{dt^2}(p(t)).$$

Pergunta. Que representação tem $a_\theta''(t)$ quando $t = 0$?

Temos que $p(t) \in F_\theta$ para todo $t \in I$. Então,

$$\phi(p(t)) = \frac{f(p(t))}{|f(p(t))|} = e^{i\theta(p(t))} = \text{constante}$$

ao longo deste caminho. Aplicando a função a_θ ao caminho $p(t)$, temos $a_\theta(p(t)) = \operatorname{Log}|f(p(t))|$ e como $\operatorname{Log}|f(p(t))| = \operatorname{Log} f(p(t)) - i\theta$, concluímos que

$$a_\theta(t) = a_\theta(p(t)) = \operatorname{Log} f(p(t)) - i\theta.$$

Derivando com respeito a t ,

$$a'_\theta(t) = \frac{d}{dt} a_\theta(p(t)) = \frac{d}{dt} \text{Log}f(p(t)) = \sum_{j=1}^{n+1} \left(\frac{\partial \text{Log}f(p(t))}{\partial z_j} \right) \frac{dp_j}{dt}(t).$$

Derivando novamente,

$$a''_\theta(t) = \sum_{j,k=1}^{n+1} \left(\frac{\partial^2 \text{Log}f(p(t))}{\partial z_j \partial z_k} \right) \frac{dp_j(t)}{dt} \frac{dp_k(t)}{dt} + \sum_{j=1}^{n+1} \left(\frac{\partial \text{Log}f(p(t))}{\partial z_j} \right) \frac{d^2 p_j(t)}{dt^2}.$$

Usando a notação $D_{j,k}^2 = \frac{\partial^2 \text{Log}f(p(t))}{\partial z_j \partial z_k}$ e lembrando que $\mathbf{grad} \text{Log}f(z) = \lambda z$ com $\lambda \in \mathbb{C}$, podemos escrever a expressão anterior do seguinte modo

$$\begin{aligned} a''_\theta(t) &= \langle p''(t), \lambda z \rangle_h + \sum_{j,k=1}^{n+1} D_{j,k}^2 v_j v_k \Rightarrow \\ \lambda a''_\theta(t) &= \lambda \langle p''(t), \lambda z \rangle_h + \sum_{j,k=1}^{n+1} \lambda D_{j,k}^2 v_j v_k \Rightarrow \\ a''_\theta(t) \mathbf{Re}(\lambda) &= |\lambda|^2 \mathbf{Re} \langle p''(t), z \rangle_h + \sum_{j,k=1}^{n+1} \mathbf{Re} (\lambda D_{j,k}^2 v_j v_k) \end{aligned}$$

e como $\langle p(t), p(t) \rangle_h$ é um número positivo segue que $\langle p''(t), p(t) \rangle_h = -\langle p'(t), p'(t) \rangle_h$. Logo, $\mathbf{Re} \langle p''(t), z \rangle_h = -|v|^2$. Então,

$$a''_\theta(t) \mathbf{Re}(\lambda) = \sum_{j,k=1}^{n+1} \mathbf{Re} (\lambda D_{j,k}^2 v_j v_k) - |\lambda|^2 |v|^2.$$

Dividindo por $\mathbf{Re}(\lambda) > 0$ e avaliando em $t = 0$, temos que

$$a''_\theta(0) = \sum_{j,k=1}^{n+1} \mathbf{Re} (b_{jk} v_j v_k) - c |v|^2, \quad \text{onde } c = \frac{|\lambda|^2}{\mathbf{Re}(\lambda)} > 0$$

e (b_{jk}) é a matriz de números complexos, formada por $D_{jk}^2(0)$. Formalmente, provamos que:

Lema 5.0.8 (A hessiana de a_θ) *Tendo em conta a notação anterior, a segunda derivada de $a_\theta(t)$ avaliada em $t = 0$, é dada por*

$$a''_\theta(0) = \sum_{j,k=1}^{n+1} \mathbf{Re} (b_{jk} v_j v_k) - c |v|^2, \quad \text{onde } c = \frac{|\lambda|^2}{\mathbf{Re}(\lambda)} > 0$$

e (b_{jk}) é matriz de números complexos, formada por $D_{jk}^2(0)$.

Situação 8

Como já temos a expressão da segunda derivada da função a_θ , podemos avaliar o índice de Morse da função a_θ .

Pelo Lema anterior,

$$a_\theta''(0) = \sum_{j,k=1}^{n+1} \mathbf{Re}(b_{jk}v_jv_k) - c|v|^2, \quad \text{onde } c = \frac{|\lambda|^2}{\mathbf{Re}(\lambda)} > 0$$

e (b_{jk}) é matriz de números complexos, formada por $D_{jk}^2(0)$. Se agora fazemos variar o vetor $v \in T_z F_\theta$, consideramos a função quadrática

$$H(v) = a_\theta''(0)(v) = \sum_{j,k=1}^{n+1} \mathbf{Re}(b_{jk}v_jv_k) - c|v|^2.$$

Sabemos que o índice de Morse I_M é definido como a dimensão máxima entre os espaços vetoriais de $T_z F_\theta$, nos quais H é definida-negativa.

Se existe $v \in T_z F_\theta$ tal que $H(v) \geq 0$, então $H(iv) = \sum_{j,k=1}^{n+1} \mathbf{Re}(b_{jk}v_jv_k) - c|v|^2 < 0$ pois a expressão $\sum_{j,k=1}^{n+1} \mathbf{Re}(b_{jk}v_jv_k)$ muda de sinal. Logo construímos os espaços T_0 subespaço de $T_z F_\theta$, tal que H restrita a T_0 seja menor que zero, logo a $\dim T_0 = I_M$ é o Índice de Morse da função a_θ e seja T_1 subespaços de $T_z F_\theta$, tal que H restrita a T_1 seja maior que zero.

Assim temos que $T_0 \cap T_1 = \{0\}$ isto é equivalente a falar que $T_z F_\theta = T_0 \oplus T_1$, logo $I_M = \dim T_0 \geq \dim T_1 = \dim T_z F_\theta - \dim T_0 = 2n - I_M$

Ou seja, $2I_M \geq 2n$ então $I_M \geq n$. Formalmente teremos,

Lema 5.0.9 (Índice de Morse da a_θ) *O índice de Morse I_M de*

$$\begin{aligned} a_\theta : F_\theta &\longrightarrow \mathbb{R} \\ z &\longmapsto a_\theta(z) = \text{Log}|f(z)| \end{aligned}$$

é maior do que ou igual a n .

Situação 9

Pergunta. Será possível delimitar os pontos críticos da função a_θ em F_θ ?

Investiguemos a natureza topológica do seguinte conjunto:

$$C = \{x \in \mathbb{R}^3; |f(z)| \geq c\} \subset S_\varepsilon^2,$$

para alguma constante positiva c .

Seja $a \in \bar{C}$. Então, existe uma sequência $(x_n) \subset C$ tal que $\lim x_n = a$. Como cada $x_n \in C$, $|f(x_n)| \geq c, \forall n \in \mathbb{N}$. Logo, $\lim |f(x_n)| \geq c$ e, então, $|f(\lim x_n)| \geq c$, ou seja, $|f(a)| \geq c$. Então $a \in C$. Assim, C é fechado, e como C está contido em S_ε^2 , segue que C é compacto.

Afirmção. Todos os pontos críticos da função a_θ estão no compacto

$$C_\theta = \{z \in \mathbb{C}^{n+1} / |f(z)| \geq \eta_\theta\} \subset F_\theta$$

para alguma constante positiva η_θ .

A prova da afirmação será feita por absurdo.

Observe inicialmente, que o conjunto C_θ da Afirmação é compacto, por um argumento similar feito acima para o conjunto C (uma vez que podemos pensar o caso complexo como o dobro da dimensão real).

Suponha que exista pontos críticos de a_θ com $|f(z)|$ arbitrariamente próximos de zero. Então, esses pontos críticos tem um limite z_0 no compacto S_ϵ . Por resultados anteriores, sabemos que os pontos críticos da função a_θ são os $z \in F_\theta$ tal que $\mathbf{grad} \text{Log} f(z) = \lambda z$ para algum $\lambda \in \mathbb{C}$. Defina o conjunto

$$W = \{z \in \mathbb{C}^{n+1}; \mathbf{grad} \text{Log} f(z) = \lambda z, \text{ com } \lambda \in \mathbb{C}\}.$$

Já vimos que este conjunto W é um conjunto algébrico real. Como $\phi^{-1}(e^{i\theta}) = F_\theta$, logo $f(z) = |f(z)|e^{i\theta}$ onde $\theta = \mathbf{Arg} f(z)$, $\forall z \in F_\theta$. Então, $ie^{-i\theta}f(z) = i|f(z)|$ o que implica $\mathbf{Re}(ie^{-i\theta}f(z)) = 0$.

Assim, faz sentido construirmos o conjunto

$$B_\theta = \{z \in \mathbb{C}^{n+1}; \mathbf{Re}(ie^{-i\theta}f(z)) = 0\},$$

o qual é também um conjunto algébrico, já que f é polinomial. Por fim, tomando a parte imaginária $\mathbf{Im}(ie^{-i\theta}f(z)) = |f(z)| > 0$, construímos o conjunto $U_\theta = \{z \in \mathbb{C}^{n+1}; \mathbf{Im}(ie^{-i\theta}f(z)) > 0\}$, o qual é semi-algébrico.

De acordo com nossa suposição inicial, temos que $z_0 \in \overline{W \cap (B_\theta \cap U_\theta)}$. Pelo Lema de Seleção da Curva, existe um caminho diferenciável

$$p : [0, \delta) \longrightarrow W \cap (B_\theta \cap U_\theta) \text{ tal que } p(0) = z_0 \text{ e } p(t) \in W \cap (B_\theta \cap U_\theta) \subset F_\theta$$

, com $\lim_{t \rightarrow 0} p(t) = p(0) = z_0$ quando t tende a zero. Como $p(t) \in W$, segue que $p(t)$ é ponto crítico de a_θ . Logo $a'_\theta(z) = a'_\theta(p(t)) = 0$ e portanto $a_\theta(z)$ é constante. Assim, $|f(z)|$ é uma constante (positiva) e, por conseguinte, $\lim_{t \rightarrow 0} |f(p(t))|$ também é uma constante. Portanto, temos uma contradição e a Afirmação está provada. Juntando estes fatos, mostramos então que:

Lema 5.0.10 (Compacidade do conjunto dos pontos críticos de a_θ) *Existe uma constante $\eta_\theta > 0$ tal que os pontos críticos de*

$$\begin{aligned} a_\theta : F_\theta &\longrightarrow \mathbb{R} \\ z &\longmapsto a_\theta(z) = \text{Log}|f(z)| \end{aligned}$$

estão no compacto $C_\theta = \{z \in F_\theta / |f(z)| \geq \eta_\theta\}$.

Assim, como os pontos críticos de a_θ , os pontos críticos da função $|f(z)|$ também estão dentro do compacto C_θ .

Lema 5.0.11 (Sobre a função de Morse $s_\theta = |f|$) *Existe uma aplicação $s_\theta : F_\theta \longrightarrow \mathbb{R}_+$ tal que os pontos críticos de s_θ são não degenerados, com índice de Morse $I_M \geq n$ e tal que $s_\theta(z) = |f(z)|$ para $|f(z)|$ suficientemente próximo do zero.*

A idéia da prova é de colar aplicações. Podemos escolher s_θ de modo a coincidir com $|f|$, fora de uma vizinhança compacta do conjunto dos pontos críticos de maneira que tenha apenas pontos críticos não degenerados e tal que a primeira e a segunda derivadas de s_θ em qualquer

compacto coincide uniformemente com as primeira e segunda de $|f|$. Então, desde que os pontos críticos de $|f|$ têm todos índice de Morse maior ou igual a n , se a aproximação é suficientemente próxima, então os pontos críticos de s_θ têm também índice de Morse maior ou igual a n .

Observação 5.0.1 *Como os pontos críticos não degenerados são isolados (na verdade isto é uma consequência, do Lema do Morse), temos que a função de Morse*

$$\begin{aligned} s_\theta : F_\theta &\longrightarrow \mathbb{R} \\ z &\longmapsto s_\theta(z) = |f(z)| \end{aligned}$$

tem um número finito de pontos críticos não degenerados, pois todos eles estão dentro do compacto C_θ .

Situação Principal 2

Agora construiremos a função de Morse, sobre a fibra de Milnor, satisfazendo as hipóteses do teorema 5.0.2

Definimos a seguinte função

$$\begin{aligned} g_\theta : F_\theta &\longrightarrow \mathbb{R} \\ z &\longmapsto g(z) = -\text{Log } s_\theta = -\text{Log}|f(z)| \end{aligned}$$

logo temos que a função esta bem definida pois a função $s_\theta(z)$ esta bem definida e curiosamente, ela satisfaz a hipóteses do teorema 5.0.2 em efeito

$M^\theta = g_\theta^{-1}((-\infty, c]) = \{z \in F_\theta; g_\theta(z) \leq c\}$. Logo,

$$\begin{aligned} g_\theta(z) = -\text{Log } s_\theta(z) \leq c &\iff -\text{Log}|f(z)| \leq c \iff \text{Log}|f(z)| \geq -c \\ &\iff \text{Log}|f(z)| \geq \text{Log } e^{-c} \iff |f(z)| \geq e^{-c} \\ &\iff \{z \in F_\theta; |f(z)| \geq e^{-c}\} \end{aligned}$$

o qual ja provamos que é compacto, para todo $c \in \mathbb{R}$.

Agora esta função

$$\begin{aligned} g_\theta : F_\theta &\longrightarrow \mathbb{R} \\ z &\longmapsto g(z) = -\text{Log}|f(z)| \end{aligned}$$

tem associado também uma segunda derivada e fazendo variar o vetor tangente (a mesma ideia a como se calculo o Índice de Morse para a função a_θ) é possível obter “outra” forma quadratica $-H$, onde naturalmente agora é definida negativa em \widetilde{T}_1 e definida positva em \widetilde{T}_0 , logo a $\dim T_1 = \widetilde{I}_M$ é o Índice de Morse da função g logo $\widetilde{I}_M = 2n - I_M \leq n$, pois a $\dim T_z F_\theta = 2n$.

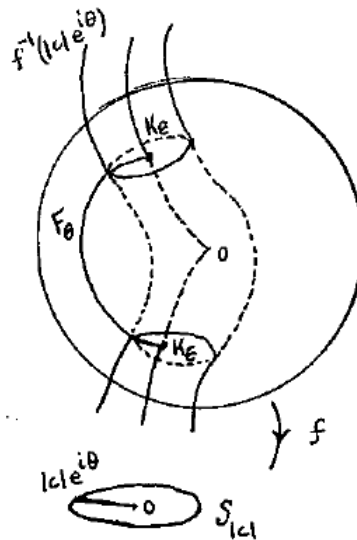
Então, pelo Teorema 5.1 (Função de Morse e mesmo tipo de homotopia), temos que a fibra de Milnor F_θ tem o mesmo tipo de homotopia que um CW-complexo finito de dimensão finita, obtido pela adjunção de células de dimensão \widetilde{I}_M , para cada ponto crítico de índice de Morse $\widetilde{I}_M \leq n$. Como o número de pontos críticos é finito, o CW-complexo é finito. Com isso, provamos que

Teorema 5.0.3 (Teorema da topologia das fibras de Milnor) *Cada fibra de Milnor F_θ tem o mesmo tipo de homotopia que um CW-complexo finito, de dimensão finita.*

E para ter a interpretação no caso particular do que f tenha ponto crítico isolado em zero, obtemos a vizinhança tubular de acordo com o seguinte teorema.

Teorema 5.0.4 (Fibras difeomorfas à fibra de Milnor) *Se o número complexo $c \neq 0$ é suficientemente próximo de zero, então $f^{-1}(c) \cap B_\varepsilon$ é uma variedade diferenciável difeomorfa a F_θ , onde B_ε é a bola aberta centrada em zero de radio ε .*

Demonstração ver [10].



Então com a hipótese do que o polinômio $f(z_1, \dots, z_{n+1})$ não tem pontos críticos em uma vizinhança da origem, exceto possivelmente a própria origem (ou simplesmente que tem um ponto crítico isolado). Então, pelo Lema 2.5 do livro [10], segue que a origem é um ponto singular isolado da hipersuperfície $Z = f^{-1}(0)$. Suponha também $n \geq 1$. Neste caso (singularidade isolada), Milnor [10] provou o seguinte teorema, o qual só mencionarei sem demonstração.

Teorema 5.0.5 (Bouquet de esferas) *Cada fibra de Milnor F_θ tem o mesmo tipo de homotopia que um bouquet de esferas*

$$S^n \vee S^n \vee S^n \vee \dots \vee S^n.$$

O número de esferas do bouquet é chamado de *número de Milnor* de f em 0 e é denotado por μ .

Bibliografia

- [1] Gunning, R.; Rossi, H., *Analytic Functions of several complex variables*, American Mathematical Society, United State of Americam, 1965.
- [2] Garcia A.; Lequain Y. *Elementos de Álgebra*, Projeto Euclides, IMPA 2010.
- [3] Lang, S., *Introduction to Algebraic Geometry*, Addison- Wesley Publishing company, United States of Americam, 1973.
- [4] Lang, S., *Differentiable Manifolds*, Sringer-Verlag, Now York, 1985.
- [5] Lang, S., *Algebra*, Addison Wesley, third edition, 1993.
- [6] Lima, E. L., *Curso de Análise*, Volume 2, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 2008.
- [7] Lima, E. L., *Variedades Diferenciáveis*, IMPA, Rio de Janeiro, 1973.
- [8] Brocker, T.H.; Janich, K, *Introducción a la Topologia Diferencial*, Editorial AC Madrid, España 1977.
- [9] Milnor, J., *Morse Theory*, Annals of Mathematics Studies, Princeton University Press, Princeton New Jersey, 1963.
- [10] Milnor, J., *Singular Points of Complex Hypersurfaces*, Annals of Mathematics Studies, Princeton University Press and University of Tokyo Press, Princeton, New Jersey, 1968.
- [11] Perrin, D., *Algebraic Geometry*, Sringer, London, 2008.
- [12] Melo, W., *Topologia das Variedades*, IMPA, 2008.
- [13] Whitney, H., *Elementary Structure of Real Algebraic Varieties*, The Annals of Mathematics, Second Series, 1957.
- [14] Munkres, J.R., *Topology, a first course*, Prentice-Hall Inc. New Jersey, 1975.
- [15] Fraleigh, J.B, *A first course in Abstract Algebra*, Pearson Education, 2003.