

**“Estudo da dinâmica de captura em  
discos proto-planetários”**

*THIERRY GREGORY GIL CHANUT*

**ESTUDO DA DINÂMICA DE CAPTURA EM DISCOS  
PROTO-PLANETÁRIOS**

**THIERRY GREGORY GIL CHANUT**

Tese apresentada à Faculdade  
de Engenharia de Guaratinguetá da  
Universidade Estadual Paulista para  
a obtenção do título de Doutor em  
Física.

Orientadores: Prof. Dr. Othon Cabo Winter  
Prof. Dr. Masayoshi Tsuchida

Guaratinguetá  
2009

C458e Chanut, Thierry Gregory Gil  
Estudo da dinâmica de captura em discos proto-planetários  
/ Thierry Gregory Gil Chanut.- Guaratinguetá : [s.n.], 2009  
124 f.: il.  
Bibliografia: f. 110-115

Tese (Doutorado) – Universidade Estadual Paulista,  
Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, 2009

Orientador: Prof. Dr. Othon Cabo Winter

Co-orientador: Prof. Dr. Masayoshi Tsuchida

1. Mecânica Celeste I. Título

CDU 521.1

*THIERRY GREGORY GIL CHANUT*

ESTA TESE FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE  
“DOUTOR EM FÍSICA”

PROGRAMA: FÍSICA

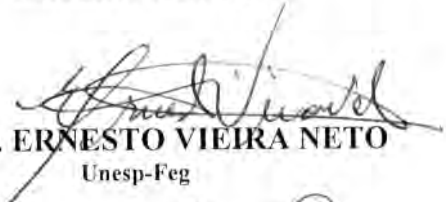
APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO

  
Prof. Dr. Marcelo Batista Hott  
Coordenador

*BANCA EXAMINADORA:*



Prof. Dr. OTHON CABO WINTER  
Orientador / Unesp-Feg



Prof. Dr. ERNESTO VIEIRA NETO  
Unesp-Feg



Prof. Dr. TADASHI YOKOYAMA  
Unesp-Rio Claro



Prof. Dr. RODNEY DA SILVA GOMES  
Observatório Nacional-RJ



Prof. Dr. FERNANDO VIRGILIO ROIG  
Observatório Nacional-RJ

Agosto de 2009

**DADOS CURRICULARES**  
**THIERRY GREGORY GIL CHANUT**

NASCIMENTO	01.04.1967 – MONTPELLIER / FRANÇA
FILIAÇÃO	Jacqueline Chanut
1999/2002	Curso de Graduação em Matemática Aplicada Ibilce-Unesp – Campus de São Jose do Rio Preto
2003/2005	Curso de Pós-Graduação em Física, nível de Mestrado, Feg- Unesp – Campus de Guaratinguetá
2004/2005	Curso de Graduação em licenciatura de Matemática Ibilce-Unesp – Campus de São Jose do Rio Preto
2005/2009	Curso de Pós-Graduação em Física, nível de doutorado, Feg- Unesp – Campus de Guaratinguetá

À memória de meus avós,  
Emile e Marie Francine,  
e de minha mãe Jacqueline  
que nos deixou recentemente.

## AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar agradeço a Deus, fonte da vida e da graça. Agradeço pela minha vida, minha inteligência, minha família e meus amigos,

ao meu orientador, *Prof. Dr. Othon Cabo Winter*, que jamais deixou de me incentivar. Sem a sua orientação, dedicação e auxílio, o estudo aqui apresentado seria praticamente impossível,

ao meu orientador, *Prof. Dr. Masayoshi Tsuchida* que teve uma participação essencial para o desenvolvimento deste trabalho, contribuindo com sua vasta experiência na área para sanar minhas dúvidas,

ao *prof. Dr. Pierre Barge* pela hospitalidade durante minha estadia em Marseille e por ter contribuído com o programa NDISK,

ao *Prof. Dr. Ernesto Vieira Neto* pelo auxílio na parte computacional utilizada neste trabalho,

às funcionárias da Biblioteca do Campus de Guaratinguetá pela dedicação, presteza e principalmente pela vontade de ajudar,

aos funcionários da pós-graduação Regina, Maria Cristina, Adriano e Sydney pela dedicação e alegria no atendimento,

à meus amigos da republica 69 pelo apoio e alegria que eles me deram neste período,

à *Maria Emília P. Chanut*, minha companheira neste percurso e mãe de minhas duas encantadoras filhas, Anaïs e Natasha

e principalmente à *Jacqueline Chanut* por ter sido minha mãe e ter me dado seu nome.

Este trabalho contou com apoio financeiro da **CAPES / PROPP-UNESP** e do **CNPq**



“A religião ameaça, com seus raios, o audacioso que ousa atribuir à ação única da natureza uma obra na qual ela vê, com razão, a intervenção imediata do ser supremo, e ela teme encontrar, na curiosidade indiscreta de tal tentativa, uma apologia do ateísmo.”

**Immanuel Kant**

CHANUT, T. G. G. **Estudo da dinâmica de captura em discos proto-planetários.** Guaratinguetá, 2009. 124 f. Tese (Doutorado em Física ) – Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista.

## RESUMO

Neste trabalho de tese exploramos a sugestão de Barge e Sommeria (1995) de captura de partículas em vórtices anticiclônicos que se formam devido a instabilidades na nebulosa proto-planetária. O problema dinâmico foi estudado através de simulações de um disco kepleriano bidimensional e incompressível. Examinamos o processo de concentração de partículas dentro de grandes vórtices através das equações do movimento para partículas individuais (com tamanho de 50 cm e 2,12 m) submetidas à gravidade solar e ao arrasto do gás nebular. Os vórtices levam à captura de um grande número de partículas. Mostramos que a eficácia das capturas não depende somente do valor do arrasto gasoso e da elongação do vórtice mas também do modelo do disco proto-planetário escolhido. Um achado muito importante nesse trabalho de tese pode começar a responder à questão sobre a formação planetária: colapso gravitacional ou coagulação? Quando incluímos a auto-gravidade, os resultados que obtivemos mostram que a acumulação das partículas dentro do vórtice é bem mais rápida. É um ponto muito importante na formação dos núcleos planetários até hoje bastante discutido. De fato, a formação dos núcleos planetários dos planetas gigantes precisa da acumulação de material maior que  $1M_{\oplus}$  em muito pouco tempo para que o colapso ocorra antes do efeito gravitacional dentro do vórtice começar a expulsar os planetesimais. A auto-gravidade até então bastante negligenciada por muitos autores pode ser uma ferramenta essencial a ser incluída no modelo de formação planetária para explicar tal fato. Outro resultado interessante que obtivemos foi que o crescimento por auto-sedimentação das partículas com tamanho sub-métrico, não é muito eficiente para formar planetesimais. Parece que os vórtices capturam partículas com um tamanho preferencial para formar planetesimais ou núcleos planetários.

**PALAVRAS-CHAVE:** Captura; Vórtices; Auto-gravidade; Discos proto-planetários

CHANUT, T. G. G. **Estudo da dinâmica de captura em discos proto-planetários.**  
Guaratinguetá, 2009. 124 f. Tese (Doutorado em Física ) – Faculdade de Engenharia do  
Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista.

### **ABSTRACT**

In this thesis, we explore the suggestion of Barge & Sommeria (1995) of dust-trapping in anticyclonic vortices forming due to instabilities in the protoplanetary nebula. The dynamical problem is studied through numerical simulations of a two-dimensional incompressible Keplerian disc. We examine the process of particle concentration inside large vortex through a non-collisional N body's code for individual particles (with sizes of 50 cm and 2,12 m) subject to the solar gravity and the nebular gas drag. The vortices tend to capture a large number of particles. We show that the effectiveness of these captures depend not only on the value of the gaseous drag and the elongation of the vortices but also on the model of the protoplanetary disc chosen. A very important finding in this thesis can start to answer the question of the planetary formation: gravitational collapse or coagulation? When we include the self-gravity, the results that we found show that the accumulation of particles inside the vortices is faster. It is a very important point in the formation of planetary embryo until today highly discussed. In fact, the formation of the giant planets embryo need the accumulation of more material than  $1M_{\oplus}$  in a very short time such that the collapse occurs before the gravitational effect inside the vortices start to eject the planetesimals. Self-gravity, until now neglected by many authors could be an essential tool to be included in planetary formation model to explain such fact. Another interesting result that we got was that the growth for auto-sedimentation of particles with sub-metric size, is not very efficient to form planetesimal. It seems that vortices capture particles with a preferential size to form planetesimals or planetary cores.

**KEYWORDS:** Trapping; Vortices; Self-gravity; Protoplanetary disc

## LISTA DE TABELAS E FIGURAS

- Tabela1: Distribuição das capturas na ressonância 1:1, das colisões, das difusões e outras possibilidades (como ressonâncias) relacionadas à dinâmica de planetesimais submetidos ao efeito do arrasto gasoso. A distribuição leva em conta varias razões de massa do corpo secundário e dois raios de colisão. Neste caso, não foi considerada a existência de falha na nebulosa.....23
- Tabela2: Distribuição das capturas na ressonância 1:1, das colisões, das difusões e outras possibilidades (como ressonâncias) relacionadas à dinâmica de planetesimais submetidos ao efeito do arrasto gasoso. A distribuição leva em conta varias razões de massa do corpo secundário e dois raios de colisão. Neste caso, foi considerada a existência de falha na nebulosa.....25
- Figura 1: Gráfico mostrando o comportamento da longitude de uma partícula no processo de captura com relação ao corpo secundário na presença de falha. A massa relativa  $\mu_2$  do corpo secundário é  $10^{-3}$  A longitude em relação ao corpo secundário fica em torno de 0 caracterizando um satélite planetário. ....26
- Figura 4.1: Sistema de referência centrado no sol e sistema de referência centrado no vórtice girando ao redor do sol a uma distância  $a_0 = r_0$  numa órbita circular kepleriana.....58
- Figura 4.2: Padrão de fluxo na nebulosa solar para a solução aproximada Eq.(30) descrita no texto. O parâmetro  $f$  para essas linhas de correntes é 4, um valor típico que esta de acordo com as predições resultantes das simulações hidrodinâmicas (Godon e Lívio 1999b, 2000) e da teoria (Chavanis2000).....61
- Figura 4.3: Discriminante da equação característica (38) em função do parâmetro  $f$  e do parâmetro de arrasto modificado  $\tau_s^*$ . A escolha para  $y_r$  é aproximadamente 0.1. Se a elongação do vórtice é significativa não temos raízes complexas e, portanto a captura não é possível (de la Fuentes Marcos e Barge, 2001).....65
- Figura 4.4: Escala temporal de captura normalizada  $t_{cap} \cdot \Omega_0$  em função do parâmetro de arrasto  $\tau_s$  e do parâmetro de arrasto modificado  $\tau_s^*$  como a mesma escolha de  $y_r$  da Fig. (4.3). O plano horizontal representa a vida média de um vórtice típico (30 períodos orbitais). O intervalo de  $\tau_s^*$  foi selecionada da Fig.(4.3) para que se obtenham raízes complexas (de la Fuentes Marcos e Barge, 2001) .....66

- Figura 6.1: Trajetória de captura de uma partícula dentro de um vórtice com alongação  $f = 4$ . O raio da partícula é de 50 cm e o vórtice é situado na distância atual de Júpiter. O sistema de referência é centrado no núcleo do vórtice que está girando ao redor do Sol. O raio do vórtice aqui é 0,37 UA. Neste caso não foi considerado a auto-gravidade da nebulosa.....73
- Figura 6.2: Trajetória de captura da mesma partícula que a da Figura 6.1. Uma vez que ela cruza pela primeira vez a separatriz do vórtice, ela gira em torno descrevendo uma trajetória espiral.....74
- Figura 6.3: Representação do comportamento distância radial em relação ao tempo para a mesma partícula que a das Figuras (6.1) e (6.2). Nessa figura se vê claramente a captura.....74
- Figura 6.4: Trajetória de captura de uma partícula dentro de um vórtice com alongação  $f = 4$ . O raio da partícula é de 50 cm. Aqui, consideramos uma auto-gravidade da nebulosa onde  $M_D = 0.04 M_\odot$  .....75
- Figura 6.5: Trajetória de captura da mesma partícula que a da Figura 6.4. A captura no vórtice não ocorre mais no centro devido a auto-gravidade da nebulosa. ....75
- Figura 6.6: Representação do comportamento distância radial em relação ao tempo para a mesma partícula que a das Figuras (6.4) e (6.5). Nessa figura se vê claramente como na Figura (6.5) que se alcança um ciclo limite. Além disso, a escala temporal para a captura parece ser menor quando se leva em conta a auto-gravidade.....76
- Figura 6.7: Distribuição das excentricidades das partículas à medida que elas foram capturadas pelo vórtice com  $f = 4$  depois de 300 anos. Neste caso não foi considerado a auto-gravidade da nebulosa. Essas excentricidades são das partículas que alcançaram a distância de 0,0007 UA em relação ao centro do vórtice. O raio das partículas é de 50 cm. A viscosidade do gás é: a)  $\alpha = 10^{-5}$ , b)  $\alpha = 10^{-4}$  .....77
- Figura 6.8: Distribuição das excentricidades das partículas à medida que elas foram capturadas pelo vórtice com  $f = 4$  depois de 300 anos. Neste caso não foi considerado a auto-gravidade da nebulosa. Essas excentricidades são das partículas que alcançaram a distância de 0,0007 UA em relação ao centro do vórtice. O raio das partículas é de 2,12 m. A viscosidade do gás é: a)  $\alpha = 10^{-5}$ , b)  $\alpha = 10^{-4}$  .....77

Figura 6.9: Configuração das partículas depois de 150 anos para um vórtice realista incluindo decaimento na amplitude com o tempo. O vórtice é visível na parte inferior esquerda. O raio inicial do vórtice era de 0,37 UA, mas depois de 150 anos para uma viscosidade  $\alpha = 10^{-5}$ , o raio é de 0,36 UA. O número de partículas é  $N = 10000$  com um raio de 50 cm e foram distribuídas uniformemente e aleatoriamente no domínio (4,8- 6,0 UA , Valor inicial do raio interno e externo do anel). Nesse caso não foi considerado a auto- gravidade do disco. Nessa figura se vê que o vórtice confinou uma quantidade apreciável de partículas mostrando a boa eficiência desse processo nessas condições.....80

Figura 6.10: Configuração das partículas depois de 150 anos para um vórtice realista incluindo decaimento na amplitude com o tempo. O vórtice é visível na parte inferior esquerda. O raio inicial do vórtice era de 0,37 UA, mas depois de 150 anos para uma viscosidade  $\alpha = 10^{-4}$ , o raio é de 0,36 UA. O número de partículas é  $N = 10000$  com um raio de 50 cm e foram distribuídas uniformemente e aleatoriamente no domínio (4,8- 6,0 UA , Valor inicial do raio interno e externo do anel). Nesse caso não foi considerado a auto- gravidade do disco. Nessa figura se vê que o vórtice confinou também uma certa quantidade de partículas mostrando a eficiência desse processo nessas condições.....81

Figura 6.11: Configuração das partículas depois de 150 anos para um vórtice realista com ( $f = 4$ ) incluindo decaimento na amplitude com o tempo. O vórtice é visível na parte inferior esquerda. O raio inicial do vórtice era de 0,37 UA, mas depois de 150 anos para uma viscosidade  $\alpha = 10^{-4}$ , o raio é de 0,27 UA. O número de partículas é  $N = 10000$  com um raio de 2,12 m e foram distribuídas uniformemente e aleatoriamente no domínio (4,8- 6,0 UA , Valor inicial do raio interno e externo do anel). Nesse caso não foi considerado a auto-gravidade do disco.....82

Figura 6.12: Configuração das partículas depois de 150 anos para um vórtice realista com ( $f = 4$ ) incluindo decaimento na amplitude com o tempo. O vórtice é visível na parte inferior esquerda. O raio inicial do vórtice era de 0,37 UA, mas depois de 150 anos para uma viscosidade  $\alpha = 10^{-4}$ , o raio é de 0,27 UA. O número de partículas é  $N = 10000$  com um raio de 2,12 m e foram distribuídas uniformemente e aleatoriamente no domínio (4,8- 6,0 UA , Valor inicial do raio interno e externo do anel). Nesse caso foi considerado a auto-gravidade do disco de  $0.04 M_{\odot}$ . Vemos aqui que a auto-gravidade aumenta a velocidade de decaimento das partículas pela posição do vórtice se a comparamos com a figura 6.11.....83

Figura 6.13: a) Configuração das partículas num disco proto-planetário depois de 40 anos para um vórtice realista com ( $f = 4$ ) incluindo decaimento na amplitude com o tempo. b) Configuração das partículas depois de 45anos. c) Configuração das partículas depois de 50anos. d) Configuração das partículas depois de 55anos. O raio inicial do vórtice era de 0,37 UA. O número de partículas é  $N = 10000$  com um raio de 50 cm e foram distribuídas uniformemente e aleatoriamente no domínio (4,8-6,0 UA , Valor inicial do raio interno e externo do anel). A viscosidade do gás é  $\alpha = 10^{-5}$ . Nesse caso não foi levado em conta a auto-gravidade do disco.  
.....84

Figura 6.14: a) Configuração das partículas num disco proto-planetário depois de 70 anos para um vórtice realista com ( $f = 4$ ) incluindo decaimento na amplitude com o tempo. b) Configuração das partículas depois de 75anos. c) Configuração das partículas depois de 80anos. d) Configuração das partículas depois de 85anos. O raio inicial do vórtice era de 0,37 UA. O número de partículas é  $N = 10000$  com um raio de 50 cm e foram distribuídas uniformemente e aleatoriamente no domínio (4,8-6,0 UA , Valor inicial do raio interno e externo do anel). A viscosidade do gás é  $\alpha = 10^{-5}$ . Nesse caso não foi levado em conta a auto-gravidade do disco.  
.....85

Figura 6.15: a) Configuração das partículas num disco proto-planetário depois de 40 anos para um vórtice realista com ( $f = 4$ ) incluindo decaimento na amplitude com o tempo. b) Configuração das partículas depois de 45anos. c) Configuração das partículas depois de 50anos. d) Configuração das partículas depois de 55anos. O raio inicial do vórtice era de 0,37 UA. O número de partículas é  $N = 10000$  com um raio de 50 cm e foram distribuídas uniformemente e aleatoriamente no domínio (4,8-6,0 UA , Valor inicial do raio interno e externo do anel). A viscosidade do gás é  $\alpha = 10^{-4}$ . Nesse caso não foi levado em conta a auto-gravidade do disco.  
.....86

Figura 6.16: a) Configuração das partículas num disco proto-planetário depois de 70 anos para um vórtice realista com ( $f = 4$ ) incluindo decaimento na amplitude com o tempo. b) Configuração das partículas depois de 75anos. c) Configuração das partículas depois de 80anos. d) Configuração das partículas depois de 85anos. O raio inicial do vórtice era de 0,37 UA. O número de partículas é  $N = 10000$  com um raio de 50 cm e foram distribuídas uniformemente e aleatoriamente no domínio (4,8-6,0 UA , Valor inicial do raio interno e externo do anel). A viscosidade do gás é  $\alpha = 10^{-4}$ . Nesse caso não foi levado em conta a auto-gravidade do disco.  
.....87

Figura 6.17: a) Configuração das partículas num disco proto-planetário depois de 40 anos para um vórtice realista com ( $f = 4$ ) incluindo decaimento na amplitude com o tempo. b) Configuração das partículas depois de 45anos. c) Configuração das partículas depois de 50anos. d) Configuração das partículas depois de 55anos. O raio inicial do vórtice era de 0,37 UA. O número de partículas é  $N = 10000$  com um raio de 50 cm e foram distribuídas uniformemente e aleatoriamente no domínio (4,8-6,0 UA, Valor inicial do raio interno e externo do anel). A viscosidade do gás é  $\alpha = 10^{-4}$ . Neste caso foi levado em conta a auto-gravidade do disco onde  $M_D = 0.01 M_{\odot}$  .....88

Figura 6.18: a) Configuração das partículas num disco proto-planetário depois de 70 anos para um vórtice realista com ( $f = 4$ ) incluindo decaimento na amplitude com o tempo. b) Configuração das partículas depois de 75anos. c) Configuração das partículas depois de 80anos. d) Configuração das partículas depois de 85anos. O raio inicial do vórtice era de 0,37 UA. O número de partículas é  $N = 10000$  com um raio de 50 cm e foram distribuídas uniformemente e aleatoriamente no domínio (4,8-6,0 UA, Valor inicial do raio interno e externo do anel). A viscosidade do gás é  $\alpha = 10^{-4}$ . Neste caso foi levado em conta a auto-gravidade do disco onde  $M_D = 0.01 M_{\odot}$  .....89

Figura 6.19: a) Configuração das partículas num disco proto-planetário depois de 40 anos para um vórtice realista com ( $f = 4$ ) incluindo decaimento na amplitude com o tempo. b) Configuração das partículas depois de 45anos. c) Configuração das partículas depois de 50anos. d) Configuração das partículas depois de 55anos. O raio inicial do vórtice era de 0,37 UA. O número de partículas é  $N = 10000$  com um raio de 50 cm e foram distribuídas uniformemente e aleatoriamente no domínio (4,8-6,0 UA, Valor inicial do raio interno e externo do anel). A viscosidade do gás é  $\alpha = 10^{-4}$ . Neste caso foi levado em conta a auto-gravidade do disco onde  $M_D = 0.04 M_{\odot}$  .....90

Figura 6.20: a) Configuração das partículas num disco proto-planetário depois de 70 anos para um vórtice realista com ( $f = 4$ ) incluindo decaimento na amplitude com o tempo. b)Configuração das partículas depois de 75anos. O raio inicial do vórtice era de 0,37 UA. O número de partículas é  $N = 10000$  com um raio de 50 cm e foram distribuídas uniformemente e aleatoriamente no domínio (4,8-6,0 UA, Valor inicial do raio interno e externo do anel). A viscosidade do gás é  $\alpha = 10^{-4}$ . Neste caso foi levado em conta uma auto-gravidade do disco onde  $M_D = 0.04 M_{\odot}$ . Nessa figura o contraste entre o vórtice e os arredores é suficientemente importante para mostrar um espalhamento maior da matéria capturada pelo vórtice quando se inclua a auto gravidade do disco.....91



- Figura 6.21: Configuração das partículas no sistema de coordenadas centrado no vórtice depois de 20 anos. O raio inicial do vórtice era de 0,37 UA. O número de partículas é  $N = 10000$  com um raio de 50 cm. A viscosidade do gás é  $\alpha = 10^{-4}$ . Neste caso não foi levado em conta a auto-gravidade do disco. Essa figura foi focalizada no vórtice para ver a eficiência do processo de confinamento.....94
- Figura 6.22: Configuração das partículas no sistema de coordenadas centrado no vórtice depois de 20 anos. O raio inicial do vórtice era de 0,37 UA. O número de partículas é  $N = 10000$  com um raio de 50 cm. A viscosidade do gás é  $\alpha = 10^{-4}$ . Neste caso foi levado em conta a auto-gravidade do disco onde  $M_D = 0.01 M_\odot$ . Essa figura foi focalizada no vórtice para ver a eficiência do processo de confinamento.....95
- Figura 6.23: Configuração das partículas no sistema de coordenadas centrado no vórtice depois de 20 anos. O raio inicial do vórtice era de 0,37 UA. O número de partículas é  $N = 10000$  com um raio de 50 cm. A viscosidade do gás é  $\alpha = 10^{-4}$ . Neste caso foi levado em conta a auto-gravidade do disco onde  $M_D = 0.04 M_\odot$ . Essa figura foi focalizada no vórtice para ver a eficiência do processo de confinamento.....96
- Figura 6.24: Configuração das partículas no sistema de coordenadas centrado no vórtice depois de 50 anos. O raio inicial do vórtice era de 0,37 UA. O número de partículas é  $N = 10000$  com um raio de 50 cm. A viscosidade do gás é  $\alpha = 10^{-4}$ . Neste caso não foi levado em conta a auto-gravidade do disco. Essa figura foi focalizada no vórtice para ver a eficiência do processo de confinamento.....97
- Figura 6.25: Configuração das partículas no sistema de coordenadas centrado no vórtice depois de 50 anos. O raio inicial do vórtice era de 0,37 UA. O número de partículas é  $N = 10000$  com um raio de 50 cm. A viscosidade do gás é  $\alpha = 10^{-4}$ . Neste caso foi levado em conta a auto-gravidade do disco onde  $M_D = 0.01 M_\odot$ . Essa figura foi focalizada no vórtice para ver a eficiência do processo de confinamento.....98
- Figura 6.26: Configuração das partículas no sistema de coordenadas centrado no vórtice depois de 50 anos. O raio inicial do vórtice era de 0,37 UA. O número de partículas é  $N = 10000$  com um raio de 50 cm. A viscosidade do gás é  $\alpha = 10^{-4}$ . Neste caso foi levado em conta a auto-gravidade do disco onde  $M_D = 0.04 M_\odot$ . Essa figura foi focalizada no vórtice para ver a eficiência do processo de confinamento.....99

- Figura 6.27: Ritmo de captura de partículas por um vórtice com alongação  $f = 4$  e decaimento exponencial na amplitude com o tempo. O disco é constituído de 10000 partículas com 50 cm de raio. As viscosidades do gás escolhidas são  $\alpha = 10^{-5}$  e  $\alpha = 10^{-4}$ . Neste caso não foi levado em conta a auto-gravidade do disco.....100
- Figura 6.28: Ritmo de captura de partículas por um vórtice com alongação  $f = 4$  e decaimento exponencial na amplitude com o tempo. Foi considerado três casos para as partículas de 50 cm de raio, sem auto-gravidade, com auto-gravidade do disco onde  $M_D = 0.01 M_\odot$  e finalmente com auto-gravidade do disco onde  $M_D = 0.04 M_\odot$ . O disco é constituído de 1000 partículas e a viscosidade do gás escolhida é  $\alpha = 10^{-4}$  .....101
- Figura 6.29: Escala temporal de vida das partículas no domínio do disco que vai de 4,4 UA para o raio interno até 6,7 UA para o raio externo. Foi considerado três casos para as partículas de 50 cm de raio, sem auto-gravidade, com auto-gravidade do disco onde  $M_D = 0.01 M_\odot$  e finalmente com auto-gravidade do disco onde  $M_D = 0.04 M_\odot$ . A quantidade inicial de partículas é de 10000 e o coeficiente  $\alpha$  da viscosidade do gás é  $10^{-4}$ . No final aparece um queda devido as capturas temporárias.....102
- Figura 6.30: Comparação das distribuições das massas das partículas dentro e fora do vórtice depois de 10 anos quando levamos em conta o crescimento das partículas. O crescimento para quando elas se aproximam à uma distância de 1,4 raio do vórtice, correspondente a região de influência do mesmo. A massa inicial de todas as partículas é de 1000 Kg, correspondente à um raio de 50cm. A alongação  $f$  do vórtice é 4. O raio do vórtice decresce exponencialmente com o tempo, sendo que aqui o coeficiente  $\alpha$  da viscosidade do gás é  $10^{-4}$ . Neste caso não foi levado em conta a auto-gravidade do disco.....104
- Figura 6.31: Comparação das distribuições das massas das partículas dentro e fora do vórtice depois de 20 anos quando levamos em conta o crescimento das partículas. O crescimento para quando elas se aproximam a uma distância de 1,4 raio do vórtice, correspondente a região de influência do mesmo. A massa inicial de todas as partículas é de 1000 Kg, correspondente à um raio de 50cm. A alongação  $f$  do vórtice é 4. O raio do vórtice decresce exponencialmente com o tempo, sendo que aqui o coeficiente  $\alpha$  da viscosidade do gás é  $10^{-4}$ . Não há auto-gravidade do disco.....105

Figura 6.32: Comparação das distribuições das massas das partículas dentro e fora do vórtice depois de 30 anos quando levamos em conta o crescimento das partículas. O crescimento para quando elas se aproximam a uma distância de 1,4 raio do vórtice, correspondente a região de influência do mesmo. A massa inicial de todas as partículas é de 1000 Kg, correspondente à um raio de 50cm. A elongação  $f$  do vórtice é 4. O raio do vórtice decresce exponencialmente com o tempo, sendo que aqui o coeficiente  $\alpha$  da viscosidade do gás é  $10^{-4}$ . Não há auto-gravidade do disco.....106

Figura 6.33: Distribuições das massas das partículas capturadas pelo vórtice quando levamos em conta o crescimento das partículas. O crescimento para quando elas se aproximam à uma distância de 1,4 raio do vórtice, correspondente a região de influência do mesmo. A massa inicial de todas as partículas é de 1000 Kg, correspondente à um raio de 50cm. A elongação  $f$  do vórtice é 4. O raio do vórtice decresce exponencialmente com o tempo, sendo que aqui o coeficiente  $\alpha$  da viscosidade do gás é  $10^{-4}$ . Neste caso não levamos em conta a auto-gravidade do disco.....107

### LISTA DE SÍMBOLOS

$a$	-	Semi- eixo maior
$e$	-	Excentricidade
$\sigma_0$	-	Densidade superficial de referência do disco
$T_0$	-	Temperatura de referência do disco
$r_0$	-	Distância radial de referência
$\Omega_0$	-	Frequência orbital de referência
$H_0$	-	Escala de altura vertical de referência do disco
$r$	-	Distância radial
$\sigma(r)$	-	Densidade superficial do disco
$T(r)$	-	Temperatura do disco
$\Omega$	-	Frequência orbital
$H$	-	Escala de altura vertical do disco

$C_s$	-	Velocidade do som
$\rho_g$	-	Densidade do gás
$\rho_s$	-	Densidade da partícula
$K$	-	Constante de Boltzmann
$P$	-	Pressão do gás
$m_H$	-	Massa de um átomo de hidrogênio
$\Delta g$	-	Força por unidade de massa
$V_g$	-	Velocidade do gás
$V_k$	-	Velocidade Kepleriana
$M_D$	-	Massa do disco
$R_D$	-	Raio do disco
$\mu$	-	Peso médio molecular do gás
$\Psi$	-	Parâmetro da perturbação
$\sigma_s$	-	Densidade superficial da partícula
$\sigma_g$	-	Densidade superficial do gás
$G$	-	Constante da gravitação Universal
$\Phi$	-	Auto-gravidade do disco
$t$	-	Tempo
$T_s$	-	Tempo de parado
$\lambda$	-	Caminho médio livre das moléculas de gás
$M_\odot$	-	Massa do proto-sol

$M_{\oplus}$	-	Massa da Terra
$s$	-	Raio da partícula
$s_0$	-	Raio inicial da partícula
$C_d$	-	Coefficiente de arrasto
$u$	-	Velocidade relativa da partícula em relação ao gás
$\tau_s$	-	Parâmetro de arrasto
$\delta$	-	Coefficiente de sedimentação
$m_s$	-	Massa da partícula
$R_0$	-	Raio inicial do vórtice
$R$	-	Raio inicial do vórtice
$X, Y$	-	Coordenadas cartesianas centradas no Sol
$x, y$	-	Coordenadas cartesianas centradas no vórtice
$f$	-	Parâmetro de elipticidade ou alongação do vórtice
$\dot{X}, \dot{Y}$	-	Velocidades no sistema centrado no Sol
$\dot{x}, \dot{y}$	-	Velocidades no sistema centrado no vórtice
$t_{cap}$	-	Escala temporal de captura
$p$	-	Parâmetro de impacto

# SUMÁRIO

**Resumo**

**Abstract**

## LISTA DE FIGURAS

## LISTA DE SÍMBOLOS

<b>INTRODUÇÃO</b> .....	22
<b>1 Revisão de literatura e objetivo desse trabalho de tese</b> .....	29
1.1 Trabalhos já realizados.....	29
1.2 Objetivos desse trabalho de tese.....	34
<b>2 Modelo de um disco de acreção proto-planetário</b> .....	35
2.1 Introdução.....	35
2.2 Propriedades físicas da nebulosa proto-planetária.....	36
2.3 Modelo clássico de nebulosa solar.....	38
2.4 A nebulosa massiva.....	41
2.5 Equações do movimento e modelo de arrasto.....	43
<b>3 Crescimento das partículas</b> .....	45
3.1 Introdução .....	45
3.2 Sedimentação ou acreção das partículas .....	47
<b>4 Vórtices na nebulosa solar</b> .....	49
4.1 Introdução .....	49
4.2 Equações básicas de um vórtice bidimensional .....	52
4.3 Condições de captura das partículas no vórtice.....	64
4.4 Auto-gravidade na nebulosa solar.....	67
<b>5 Condições iniciais e resolução numérica</b> .....	69
<b>6 Resultados das simulações</b> .....	72
<b>7 Conclusão</b> .....	108
<b>REFERÊNCIAS</b> .....	110
<b>ANEXO 1</b> .....	115

## Introdução

As primeiras idéias sobre uma nebulosa solar primordial, em que um número infinito dos corpos com um movimento constante através do vácuo colidiam e eram submetidos a processos de acreção, aparecem nas escritas do atomista grego Leucipo do século V a.C. Num certo sentido, o pensamento de Leucipo foi capaz de antecipar as idéias cosmogônicas que serão propostas vinte e três séculos mais tarde (Cosmogonia de Kant-Laplace).

Hoje, sabemos que o Sol, igual a outras estrelas, se formou como resultado de um colapso gravitacional de um grande volume de poeira e gás interestelar (Shu et al., 1987). Devido ao fato que este material interestelar tem certa quantidade de momento angular, a maior parte não foi capaz de cair diretamente no proto-sol e passou a formar parte de um disco de gás e poeira (a nebulosa solar) em órbita ao redor do Sol primitivo. Uma vez que o material interestelar se incorpora à nebulosa mediante um processo de acreção, parte dele foi perdendo seu momento angular para precipitar-se no Sol primitivo. Sendo que a maior parte deste material passa a formar parte do proto-sol, uma pequena fração dele mesmo permanece em um disco para dar lugar ao sistema planetário solar. Considerando um fluxo do gás puramente kepleriano (axialmente simétrico) na nebulosa solar, é sabido que as partículas se precipitam em direção à estrela central seguindo uma trajetória espiral. Se considerarmos o gradiente de pressão, o fluxo deixa de ser puramente kepleriano. Isto se deve, principalmente, pela diferença sistemática entre a velocidade do gás, que é suportada pela pressão, e a velocidade que caracteriza os movimentos puramente keplerianos (Weidenschilling, 1977).

A esse respeito, no trabalho de mestrado: “Captura, difusão e acreção num sistema coorbital imerso em um meio gasoso” de 2005, estudamos as trajetórias de partículas decaindo segundo um caminho espiral, devido ao arrasto gasoso, que são perturbadas pela gravidade de um corpo secundário (planeta ou satélite) com uma razão de massa de  $10^{-6}$  em relação ao corpo primário. O objetivo desse trabalho era estudar a formação dos sistemas coorbitais. Num trabalho recente (Chanut et al., 2008), estendemos nossa pesquisa para varias razões de massa  $\mu_2$  de  $10^{-7}$  até  $10^{-3}$ ,

mostrando que a eficiência das capturas das partículas nos pontos de equilíbrio lagrangianos não depende somente do tamanho das partículas, mas também da razão de massa do corpo secundário. Foi mostrado que a eficiência maior das capturas em ressonância 1:1 ocorre para uma razão de massa  $\mu_2$  da ordem de  $10^{-6}$  (ver Tabela 1). Além do mais mostramos que nessas condições o tamanho ideal dessas capturas é da ordem do metro por unidade astronômica (UA). Vimos também que o raio de colisão não muda a dinâmica das capturas e que essas capturas são quase inexistentes quando se alcança uma razão de massa  $\mu_2$  da ordem de  $10^{-4}$ .

RAZÃO DE MASSA	RAIO DE COLISÃO	COORBITAIS	COLISÕES	DIFUSÕES	OUTROS
$\mu_2 = 10^{-7}$	$0.005R_{Hill}$	3%	12%	68%	17%
	$0.05R_{Hill}$	3%	43%	41%	13%
$\mu_2 = 10^{-6}$	$0.005R_{Hill}$	8%	7%	79%	6%
	$0.05R_{Hill}$	7%	28%	59%	6%
$\mu_2 = 10^{-5}$	$0.005R_{Hill}$	5%	4%	88%	3%
	$0.05R_{Hill}$	5%	23%	69%	3%
$\mu_2 = 10^{-4}$	$0.005R_{Hill}$	< 1%	1%	98%	< 1%
	$0.05R_{Hill}$	< 1%	24%	75%	< 1%
$\mu_2 = 10^{-3}$	$0.005R_{Hill}$	–	23%	77%	–
	$0.05R_{Hill}$	–	27%	73%	–

**Tabela1:** Distribuição das capturas na ressonância 1:1, das colisões, das difusões e outras possibilidades (como ressonâncias) relacionadas à dinâmica de planetesimais submetidos ao efeito do arrasto gasoso. A distribuição leva em conta várias razões de massa do corpo secundário e dois raios de colisão. Neste caso, não foi considerada a existência de falha na nebulosa.

A teoria prediz que ondas espirais são geradas em ressonâncias de Lindblad no disco. Uma ressonância de Lindblad é descrita como  $n:\Omega$ ; onde  $\Omega$  é a velocidade angular do disco e  $n$  é o movimento médio do corpo secundário (satélite ou planetas). Essas ressonâncias horizontais ou ressonâncias de Lindblad ocorrem em até uma distância do corpo secundário de somente a escala de altura  $H_0$ . Em um disco de acreção, a matéria do disco perde momento angular e espirala em direção ao objeto central enquanto um mecanismo viscoso devido ao gás transporta momento angular para fora do disco. Lin e papaloizou (1980) mostraram que o transporte viscoso do momento angular é sobrecarregado quando a razão de massa  $\mu_2$  ultrapassa  $10^{-4}$ . Isso é devido ao fato que, segundo Hourigan e Schwarz (1984), a força gravitacional gera



ondas de densidades quando o corpo secundário atinge a massa crítica. Essas ondas de densidades são variações de densidade no disco e são mais fortes nas ressonâncias de Lindblad. Na presença de uma forte densidade nebular, o momento angular pode ser transferido das ondas de densidade à matéria do disco, o que conduz à abertura de uma falha. Peale (1993) mostrou que essa falha começa a ser aberta quando o corpo secundário é maior que 30 massas terrestres ou  $30 M_{\oplus}$ . Quando essa falha é formada, é esperado que a densidade e a velocidade angular do gás mudem. A densidade na falha diminui em até 10 vezes quando o corpo secundário atinge  $300 M_{\oplus}$ . A presença da falha significa que o gradiente radial de pressão negativo é acentuado dentro da falha, reduzindo ainda mais a velocidade angular do gás nebular, mas o gradiente de pressão é revertido fora do intervalo levando a uma velocidade angular que excede o valor kepleriano, como mostra a equação seguinte:

$$\left(\frac{\Omega}{n_0}\right)^2 = \left(\frac{a}{r}\right)^3 - \frac{1}{2}\left(\frac{H_0}{a}\right)^2\left(\frac{3}{2} + p + \frac{q}{2}\right)\left(\frac{a}{r}\right)^{q+2} + \frac{b\frac{a}{r}\left(1 - \frac{a}{r}\right)e^{-\left(\frac{r-a}{H_0}\right)^2}}{1 - be^{-\left(\frac{r-a}{H_0}\right)^2}}$$

onde  $0 < b < 1$ ,  $a$  é o semi-eixo maior,  $r$ , a distância radial e  $n_0$  é o movimento médio do planetesimal. O parâmetro  $p = 0$  não é realista para a nebulosa inteira, mas como a região local de nosso estudo é a região coorbital, podemos simplificar o modelo e escolher valores de nosso interesse (Peale, 1993). Weidenschilling (1977) mostrou alguns modelos com  $0.5 \leq q \leq 1.0$ . Observações de discos em torno das estrelas T-Tauri implicam numa distribuição de temperatura na superfície com  $q \approx 1/2$  a  $3/4$  (Beckwith et al., 1990). Nesse caso foi adotado o modelo simplificado de Malhotra (1993) onde  $q = 1$  e  $H_0 = 0.005$  é a escala que representa neste caso uma constante que mede a diferença entre a velocidade do gás e a velocidade kepleriana local. Os resultados com a presença da falha na nebulosa são mostrados na Tabela 2 a seguir.

RAZÃO DE MASSA	RAIO DE COLISÃO	COORBITAIS	COLISÕES	DIFUSÕES	OUTROS
$\mu_2 = 10^{-4}$	$0.005R_{Hill}$	—	80%	1%	19%
	$0.05R_{Hill}$	—	81%	<1%	19%
$\mu_2 = 3 \cdot 10^{-4}$	$0.005R_{Hill}$	1%	94%	1%	4%
	$0.05R_{Hill}$	1%	95%	<1%	4%
$\mu_2 = 10^{-3}$	$0.005R_{Hill}$	< 1%	85%	15%	<1%
	$0.05R_{Hill}$	< 1%	98%	<1%	2%

**Tabela2:** Distribuição das capturas na ressonância 1:1, das colisões, das difusões e outras possibilidades (como ressonâncias) relacionadas à dinâmica de planetesimais submetidos ao efeito do arrasto gasoso. A distribuição leva em conta varias razões de massa do corpo secundário e dois raios de colisão. Neste caso, foi considerada a existência de falha na nebulosa.

Como podemos constatar na Tabela 2 não existem mais capturas na ressonância 1:1 quando a massa relativa do corpo secundário alcança o valor de  $10^{-4}$ . Isso se deve ao fato que, segundo Hourigan e Schwarz (1984), as perturbações são maiores nas ressonâncias de Lindblad. Isso pode ser visto na Tabela 2 onde 19% das partículas ficam presas nessas ressonâncias no caso de  $\mu_2 = 10^{-4}$ . Outra causa é que perto do corpo secundário as ressonâncias são mais densas ( Hourigan e Ward , 1984) e seus efeitos se sobrepõem fazendo colidirem as partículas com o corpo secundário numa taxa maior que 80%, qualquer que seja o raio de colisão. A variação de densidade dentro da falha muda a posição das ressonâncias de Lindblad. O aumento da massa do corpo secundário diminui drasticamente a densidade do gás no interior da falha e tem como consequência a diminuição da quantidade de matéria presa naquelas ressonâncias, como podemos ver na Tabela 2 no caso de  $\mu_2 \geq 3 \cdot 10^{-4}$ . Além disso, a diminuição da densidade perto da região coorbital muda essas ressonâncias para mais próximas do corpo secundário aumentando a taxa de colisão. Um fato interessante é a reparação das capturas coorbitais. Constatamos que essas capturas são de satélites planetários como mostra a Figura1. Podemos concluir que a aparição de uma falha na nebulosa tem duas consequências: A primeira é que a quantidade de matéria e densidade diminui drasticamente no seu interior à medida que a massa do corpo secundário, por exemplo, Júpiter, aumenta até chegar a sua massa atual. Isso tem como consequência a inibição das capturas na ressonância 1:1. Finalmente, a Tabela 2 mostra que a falha serve como atrator de matéria devido à proximidade das ressonâncias de Lindblad com o corpo secundário. As partículas têm mais chance de

fazer um encontro próximo e assim colidirem ou ser capturadas pelo planeta. Podemos concluir que o crescimento do planeta foi acelerado durante este período de sua formação e que a falha na nebulosa pode ser uma explicação para a existência desses satélites mais externos.

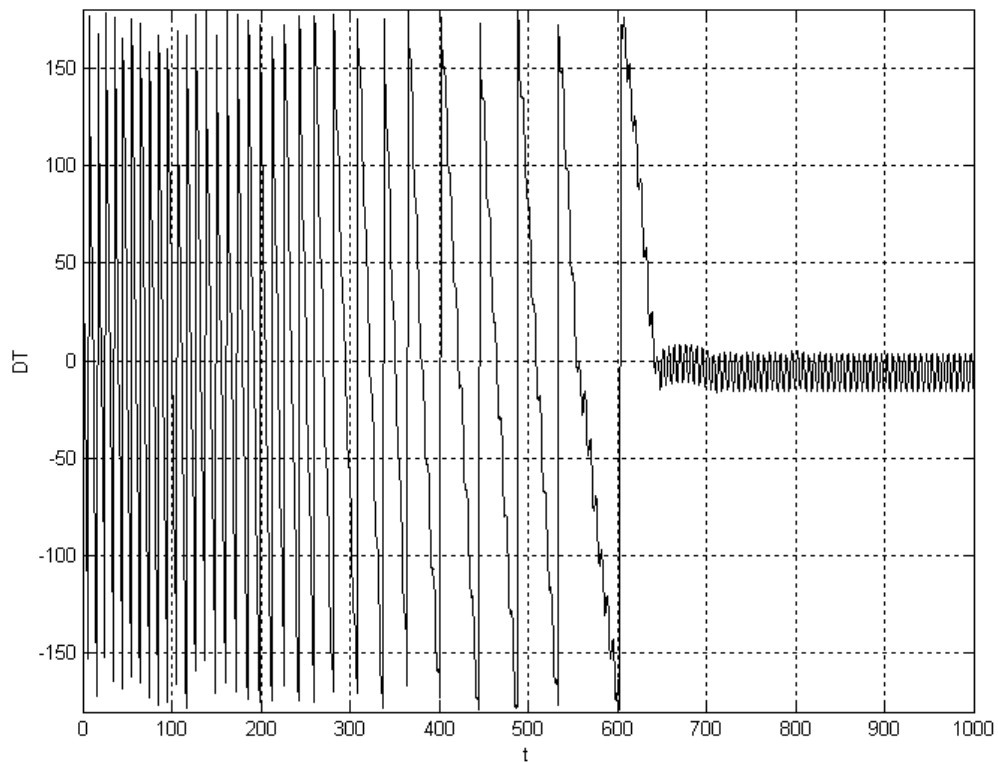


Figura 1: Comportamento da longitude de uma partícula no processo de captura com relação ao corpo secundário na presença de falha. A massa relativa  $\mu_2$  do corpo secundário é  $10^{-3}$ . A longitude em relação ao corpo secundário fica em torno de 0 caracterizando um satélite planetário.

A partir deste trabalho decidimos enfocar nossos estudos sobre a formação planetária. Nessa busca para tentar explicar uma etapa da formação planetária, certos autores apontaram que o cenário esperado era que os planetas crescessem de planetesimais de tamanho quilométrico até proto-planetas pela interação gravitacional entre eles. Os planetesimais teriam se formado dentro do disco proto-planetário enquanto o gás estava presente. Um problema importante desse cenário é o decaimento rápido, associado ao arrasto gasoso, que transporta pequenos corpos em direção ao Sol numa escala de tempo de 100 a 1000 anos (Weidenschilling 1977).

Um cenário atrativo proposto para a formação dos núcleos planetários assume que o aumento da concentração de partículas nos núcleos de vórtices anticiclônicos pode provocar um estado de instabilidade gravitacional capaz de formar os núcleos planetários (e.g. Barge & Sommeria 1995; Adams & Watkins 1995; Tanga et al. 1996). Um vórtice (ou vórtex) é um escoamento giratório onde as linhas de corrente apresentam um padrão circular ou espiral. São movimentos espirais ao redor de um centro de rotação. Na atmosfera terrestre, no Hemisfério Sul, os anticiclones são sistemas de alta pressão que originam ventos em sentido anti-horário. Ao contrário do anticiclone, o vórtice ciclônico é um sistema de baixa pressão que atrai ventos e gira no sentido horário. No hemisfério norte é o vórtice anticiclônico que gira no sentido horário. No sistema solar, a grande mancha vermelha de Jupiter é o maior vórtice anticiclônico do sistema solar em atividade.

Os planetas gigantes do sistema solar possuem um núcleo de material de alta densidade cercado por um envelope de hidrogênio metálico e uma atmosfera externa. De acordo com um dos modelos clássicos, o núcleo rochoso de alta densidade com uma massa de  $\approx 10M_{\oplus}$  deve se formar primeiro, antes que uma quantidade razoável de gás nebular seja acrescida pelo proto-planeta gigante. Segundo o modelo clássico, núcleos rochosos se formam pela aglomeração de partículas incrustadas no disco residual de gás que persiste por um tempo em torno da maioria das estrelas recém-nascidas. Simulações indicam que pelo menos  $10^6$  anos são necessários para formar um núcleo de  $10M_{\oplus}$  (Lissauer 1987) e que outros  $10^7$  anos são exigidos para que este núcleo adicione  $300M_{\oplus}$  de gás nebular. Existem fortes evidências observacionais de discos circunstelares em torno de jovens objetos estelares, mas que não permitiram até hoje compreender claramente suas evoluções. A redução da poeira é relacionada ao aumento de partículas maiores, como planetesimais, e nos dá uma indicação do período que iniciou a formação planetária. Para explicar a evolução da massa e do momento angular e igualmente as restrições deduzidas dos dados de meteoritos (Palme & Boynton 1993), tais discos são provavelmente turbulentos durante um período de suas vidas (e.g. Lin 1981; Morfill 1985; Boss 1988). Estruturas coerentes em grande escala foram sugeridas para crescer nesses discos turbulentos (Barge & Sommeria

1994, 1995), como acontece na dinâmica de fluidos bidimensionais, na qual estruturas organizadas são conhecidas para emergir de turbulências aleatórias como fluxo giratório de cisalhamento. Esses fluxos de cisalhamento são tensões que provocam a deformação do fluido. Mais recentemente, o crescimento de tais estruturas, num fluxo kepleriano, foi simulado numericamente começando com um campo aleatório de vórtices, no caso incompressível, (Bracco et al. 1998), assim como no caso de água pouco profunda (Bracco et al. 1999). Barge e Sommeria (1994, 1995) acharam que vórtices anticiclônicos, em grande escala, podem capturar e concentrar muito eficientemente as partículas sólidas da nebulosa, e tiveram um papel central no primeiro estágio da formação planetária. Eles concluíram que gigantes vórtices persistentes podem ser os lugares mais apropriados para a formação dos planetesimais e núcleos planetários e que, conseqüentemente, a captura no vórtice pode ajudar a explicar o nascimento dos planetas gigantes em menos de um milhão de anos. Um prova da existência desses vórtices foi achada através de observações fotométricas da proto-estrela KH15D que foram interpretadas por Barge e Viton (2003) como um vórtice gigante orbitando a uma distancia de 0,2 UA da estrela e cobrindo 120° da órbita. A nova geração de telescópios como o projeto ALMA (ver Wolf e Klahr, 2002) poderão certamente comprovar a evidência de atividade de vórtices em discos proto-planetários.

No próximo capítulo faremos uma revisão bibliográfica, apresentando o que já foi feito na literatura sobre formação planetária, captura, vórtices e auto-gravidade. Os objetivos desse trabalho de tese serão também apresentados neste capítulo.

No capítulo 2, analisaremos os processos físicos que condicionam a interação entre partículas de poeira e um meio gasoso, com o objetivo de justificar as equações do movimento das partículas que se utilizaram posteriormente. Apresentaremos o modelo clássico de nebulosa solar (Hayashi, 1981b) e o potencial gravitacional para nebulosas massivas.

No capítulo 3, apresentaremos os conceitos de acreção na literatura sobre a formação do sistema solar. Veremos um modelo simplificado de sedimentação (Hayashi et al. 1985) para simular o processo de crescimento de massa das

partículas, com objetivo de analisar seu efeito sobre suas trajetórias quando elas se aproximam do vórtice.

No capítulo 4, veremos o conceito de vorticidade na teoria da formação planetária. As equações de um vórtice bidimensional serão apresentadas de um ponto de vista hidrodinâmico achando as soluções das equações de Euler no caso incompressível e bidimensional. Veremos também as condições de capturas das partículas no vórtice. As integrais elípticas para resolver a auto-gravidade da nebulosa serão rerepresentadas sendo que, desta vez, mostraremos que devemos levar em conta a contribuição do disco para calcular a velocidade angular do gás.

No capítulo 5, faremos uma análise detalhada das condições iniciais e das simulações numéricas e no capítulo 6 apresentaremos os resultados obtidos visando à conclusão de nosso trabalho de tese.

## Capítulo 1

### Revisão de literatura e objetivos desse trabalho de tese

#### 1.1 Trabalhos já realizados

Barge e Sommeria (1994, 1995) consideraram vórtice em grande escala, duradouros com tamanhos da ordem da metade da espessura do disco protoplanetário. Eles utilizaram o modelo clássico de nebulosa solar de Hayashi (1981b) com vórtices de alongação 2. A alongação é a razão entre o semi-eixo maior com o menor. Esses autores obtiveram núcleo acumulado num vórtice de  $16M_{\oplus}$  numa escala temporal da ordem de 500 órbitas do vórtice a 5UA, supondo que todas as partículas tinham o mesmo tamanho (eficiência de captura de  $\approx 80\%$  para partículas de 40 cm.). Esses autores utilizaram em seus cálculos a aproximação epicíclica, não consideraram distribuição de tamanho para as partículas e seu campo de velocidade para o vórtice não é uma solução exata das equações de Euler.

Tanga et al. (1996) exploraram a possibilidade de que vórtices quase bidimensionais (altura muito pequena) de grande tamanho na nebulosa solar atuem como regiões de capturas de partículas. Esses autores consideraram um padrão vortical, não único, com

vórtices que tinham um diâmetro típico  $\leq 0,01$  UA a uma distância de 5UA do Sol. Suas redes de vórtices incluem vórtices mais alongados (com um quociente entre os semi-eixos ou alongação igual a 4) e eram estáticos. Eles não consideraram a fusão entre os vórtices e nem o decrescimento exponencial da amplitude do raio com o tempo. Eles estimaram analiticamente que, dependendo do valor do arrasto, a escala temporal de captura das partículas num pequeno vórtice anticiclônico localizado a 5UA do Sol seria da ordem de 20 a 1000 anos, ou seja, entre 2 e 100 períodos orbitais em torno do Sol. A massa que pode se acumular no núcleo de tal vórtice é da ordem de  $10^{-5} M_{\oplus}$  nessa escala de tempo.

Bracco et al. (1998) resolveram a equação da vorticidade e mostraram que os vórtices anticiclônicos podem ser estáveis e sobreviverem num fluxo de gás da nebulosa protoplanetária durante muitos períodos orbitais. Seus cálculos simplificados, não levam em conta a compressibilidade do fluxo do gás. Além disso, os vórtices elípticos desses autores não eram muito alongados (com alongação compreendida entre 1,7 e 2,5) e o tempo de parado,  $T_s$ , tinha um valor fixo. Isso quer dizer que esses autores não levaram em conta que o tempo de parado,  $T_s$ , varia com o tempo à medida que as partículas derivam em direção ao Sol. O tempo de parado é o tempo característico para que a velocidade de uma partícula diminua de  $\bar{v}$  a  $\bar{v}/e$  ( $e = 2,71828\dots$ ) em conseqüência do arrasto. No que se refere à captura de partículas, seus resultados mostram que o processo de concentração é maior para partículas acima de 1 cm de raio a 5UA. Esses autores mostraram também que os vórtices que têm seus raios decrescendo exponencialmente em amplitude podem capturar partículas. Os vórtices de alongação 2 correspondem ao valor ótimo para as capturas, apesar de que, este valor não é um valor realista.

Godon e Lívio (2000) fizeram uma simulação de um disco politrópico bidimensional viscoso e compressível, no objetivo de estudar a formação e o papel desempenhado por vórtices em discos protoplanetários. Uma estrutura esférica formada por um gás, cuja equação de estado é a dos fluidos politrópicos (gases ideais) submetida à influência exclusiva do campo gravitacional de sua própria massa, é chamada de politropo e o perfil de densidade e pressão em função da distância ao centro é dada

pela equação de Lane-Emden. Num trabalho anterior (Godon e Lívio, 1999b) mostraram que os vórtices se desintegram numa escala de tempo da ordem de 10 a 100 órbitas, sendo que essa escala temporal é inversamente proporcional ao valor do parâmetro de viscosidade do gás  $\alpha$  (10 órbitas correspondem à  $\alpha = 10^{-3}$ ). Os vórtices formados em suas simulações são bastante alongados (com uma alongação da ordem de 4 a 10), de maneira que são diferentes dos vórtices encontrados por Barges e Sommeria ou por Bracco e seu grupo. Esses autores não proporcionaram nenhuma discussão sobre o efeito que teriam diferentes valores da alongação do vórtice sobre o processo de capturas, como não levaram em conta o efeito do decrescimento exponencial em amplitude do raio do vórtice sobre o ritmo das capturas.

Chavanis (2000) melhorou os trabalhos de investigação preliminares (Barges e Sommeria 1995; Tanga et al. 1996) utilizando uma solução exata para o campo de velocidades do vórtice obtido a partir das equações de Euler bidimensionais incompressíveis e a aproximação epicíclica. Em seu trabalho, este autor estudou a escala temporal de captura e o ritmo de capturas das partículas em função do tempo de parada  $T_s$ . Este autor confirmou a validade dos resultados obtidos por Barge e Sommeria e mostrou que a captura tem um valor ótimo na região da nebulosa onde se encontra atualmente a Terra.

de La Fuente Marcos e Barge (2001) confirmaram a eficiência da captura descrita por Barge e Sommeria (1994, 1995) no caso de vórtices anticiclônicos. Eles usaram um modelo de vórtices dinâmicos com decrescimento exponencial em amplitude do raio com alongação da ordem de 1 a 10, enfocando seu trabalho para vórtices com uma alongação de 2 a 4. Eles mostraram que a eficiência máxima para captura ocorre quando o tamanho da partícula é da ordem de 30 cm, para a qual o parâmetro de arrasto  $\tau_s = \Omega T_s$  é da ordem de 1 e o tempo de vida está perto de seu máximo. Eles não apoiaram a idéia de que a região ocupada pela Terra pode ter condições apropriadas para uma concentração eficaz, tendo em vista que a vida média de um vórtice nessa região é 10 vezes mais curta que a equivalente para um vórtice situado a 5 UA. Como um vórtice típico tenderia a 0,4 UA de diâmetro, sua eficiência seria muito reduzida para captura de material com um valor de vida média das partículas da ordem de



centenas de anos. Eles sugeriram que o mecanismo, ainda é robusto para os tamanhos estudados, mesmo numa nebulosa quente (1000 k) ou massiva ( $0.01-0.04 M_{\odot}$ ). Porém, esses autores não mostraram o efeito da auto-gravidade do disco de nebulosas mais massivas, nem o efeito do crescimento das partículas sobre o mecanismo de captura do material sólido pelo vórtice.

Tanga et al. (2002) consideraram pela primeira vez o efeito gravitacional no vórtice, isto é, a interação gravitacional mútua entre as partículas presentes dentro do vórtice. Eles modelaram um “cluster” ou conjunto de 0,1 UA de raio com a mesma elongação que no trabalho de Barge e Sommeria (1995). Este gira em torno de seu centro e possui uma distribuição de partículas de mesmo tamanho no seu interior. Para estudar a interação gravitacional entre as partículas eles consideraram dois casos. O cluster é inserido no disco a 5UA do Sol sendo considerado isolado ou não. A comparação entre os dois casos foi feita para estudar o efeito gravitacional do disco sobre o Cluster. O efeito gravitacional entre as partículas no cluster é de dispersão e sugeriram que enquanto o colapso gravitacional não ocorre, a gravitação mutua modifica a velocidade inicial da distribuição, resultando num aumento de excentricidade e semi-eixo das partículas. Eles acharam que o efeito do disco sobre a dispersão das partículas é desprezível no curto período de evolução do conjunto e que essa dispersão não depende do tamanho das partículas. Concluíram que, mesmo no caso de um colapso do mesmo devido a uma instabilidade gravitacional, não ocorrem configurações estáveis. Um ponto importante que foi destacado é que um conjunto instável gravitacionalmente pode colapsar e emergir num núcleo compacto e massivo, num curto período de tempo, antes mesmo que a velocidade de dispersão destrua a concentração inicial. Por fim, sugeriram que a presença do gás, através do arrasto, se traduz na dissipação da energia cinética do conjunto, impedindo um aumento da velocidade de dispersão. Essa sugestão é somente valida para um sistema de partículas de mesmo tamanho.

Johansen et al. (2004) fizeram pela primeira vez um modelo hidrodinâmico de vórtices em três dimensões para explorar as sugestões de Barges e Sommeria (1995). Mostraram que vórtices em três dimensões sofrem inúmeras instabilidades lineares e a sobrevida deles por mais que uma órbita parece ser surpreendente. Sugerem que eles

podem resistir por muito mais tempo quando a viscosidade do gás é baixa. Este modelo tem um perfil de densidade do disco mais realístico e foi obtido usando coordenadas mais naturais do fluxo do vórtice em vez das coordenadas elípticas. Porém, não é uma solução global das equações de Euler e da continuidade, com uma transição gradual entre o vórtice e o fluxo kepleriano em volta. Essa descontinuidade no fluxo de velocidade entre a borda interna e externa do vórtice limita um pouco este modelo.

Klahr e Bodenheimer (2006) discutiram mais a possibilidade dos vórtices anticiclônicos serem menos turbulentos que o gás ambiente, o que tornaria as velocidades de dissipação baixas o suficiente para prevenir a fragmentação. Notaram que os vórtices podem ser utilizados para formar rapidamente planetesimais de tamanho quilométrico e sendo ejetados pelo desacoplamento do gás poderiam formar planetas independentemente do vórtice. Isso ocorreria por uma rápida coagulação entre os planetesimais. Evidenciaram que não precisaria de uma massa do disco maior que a massa mínima para produzir os núcleos dos planetas gigantes e sugeriram que a auto-gravidade dificultaria a delicada agregação de um núcleo no olho do vórtice.

Lyra et al. (2009) sugeriram que as ondas de Rossby parecem ser um processo robusto na formação de vórtice. As Ondas de Rossby são zonas turbulentas gigantes nas correntes de fluidos de proporção planetária. Em atmosferas planetárias, as ondas de Rossby formam-se devido a variação do efeito da força de Coriolis com a latitude. Mostraram que dentro do vórtice modelado em 2D, a acumulação rápida de sólidos ocorre, e faz com que as partículas colapsem em objetos de massa proto-planetária numa escala de tempo de algumas órbitas. Um ponto importante é que dentro do vórtice a velocidade colisional entre as partículas é muito reduzida, então mediram a velocidade relativa entre elas. Acharam que a maioria delas nunca experimentou aproximações maiores que  $1 \text{ m s}^{-1}$ . Introduziram o efeito da auto-gravidade do disco no estudo da formação dos vórtices e concluíram que a auto-gravidade modifica a evolução da turbulência mostrando a aparição de mais vórtices. Infelizmente não fizeram o mesmo estudo sobre a dinâmica de captura do material sólido.

## 1.2 Objetivos deste trabalho de tese

Muitos trabalhos recentes sobre turbulência em discos proto-planetários mostram a importância da vorticidade para a teoria de formação planetária. Klahr e Bodenheimer (2006) propuseram um modelo em que a formação dos planetas é provavelmente caracterizada por três fases.

**Fase 1:** Formação de vórtices anticiclônicos devido à ocorrência de instabilidades no disco pré-planetário.

**Fase 2:** Acumulação de matéria sólida dentro do vórtice para formar o núcleo proto-planetário.

**Fase 3:** Acreção de gás em torno do núcleo proto-planetário.

Este trabalho de tese levará em conta somente a segunda fase da formação planetária e nosso objetivo principal será: o de estudar a dinâmica de captura de partículas por um vórtice realístico girando em torno do Sol numa velocidade kepleriana.

Quando uma partícula se aproxima de um vórtice, a sua trajetória pode ter três comportamentos possíveis:

- 1) A partícula pode ser capturada pelo vórtice.
- 2) A partícula pode atravessar o vórtice e continuar caindo em direção ao Sol.
- 3) A partícula pode atravessar o vórtice e regressar a região do vórtice depois de dar uma volta completa ao redor do Sol.

Esses comportamentos serão mostrados, e também como um vórtice acumula as partículas ao longo do tempo.

Estudaremos também, centrando nossa atenção no ritmo de acumulação do material sólido, o efeito da auto-gravidade em discos proto-planetários.

Nosso último objetivo será focado sobre o crescimento das partículas fora do vórtice.

Estudaremos a distribuição da massa dentro do vórtice através do espectro de massa e veremos se existe o que chamamos de concentração seletiva.

## **Capítulo 2**

### **Modelo de um disco de acreção proto-planetário**

#### **2.1. Introdução**

Neste Capítulo analisaremos os processos físicos que condicionam a interação entre partículas de poeira e um meio gasoso, com o objetivo de justificar as equações do movimento das partículas que serão utilizadas posteriormente. Ao longo dos anos foram propostos inúmeros modelos para a nebulosa solar (Morfill et al. 1993; Palme e Boynton 1993) . Entretanto, existe uma quantidade de propriedades gerais comuns a todos:

1. A temperatura da nebulosa solar decresce à medida que se incrementa a distância heliocêntrica.
2. O gás nebular possui aproximadamente a mesma composição que o Sol.
3. A nebulosa solar acresce material em forma de gás e poeira a partir da nuvem interestelar que a circunda.

A Nebulosa apresenta uma composição química similar à do Sol e gira em torno deste, sendo submetida, portanto, aos efeitos da gravidade solar. As partículas se encontram misturadas ao gás da nebulosa, constituindo o que em Mecânica de Fluidos se denomina um sistema fluido de duas fases. Para a etapa evolutiva da nebulosa que estudaremos, podemos supor que a fase constituída pelas partículas está formada por grãos sólidos similares aos interestelares, cujo comportamento é influenciado consideravelmente pelo gás circundante com o qual estão mesclados uniformemente. A densidade média da componente sólida nessas condições não representaria mais que 1% da densidade total do gás, tendo em vista que a influência dos sólidos sobre a dinâmica do gás pode ser desprezada.

## 2.2 Propriedades físicas da nebulosa proto-planetária

Adotaremos uma formulação simples das características físicas da nebulosa Solar definindo a densidade superficial de massa do disco proto-planetário  $\sigma(r)$  e a temperatura do disco  $T(r)$  mediante as leis de potência:

$$\sigma(r) = \sigma_0 \left( \frac{r}{r_0} \right)^{-p}, \quad (2.1)$$

$$T(r) = T_0 \left( \frac{r}{r_0} \right)^{-q}, \quad (2.2)$$

onde  $r_0$  é distância radial de referência com a frequência orbital  $\Omega_0$  e  $p$  e  $q$  são parâmetros definidos através de observações. Suponha-se que o disco é verticalmente isoterma ( $T = \text{constante}$ ) com temperatura  $T(r)$ . A escala de altura vertical (semi-espessura do disco)  $H$  é dada pela equação:

$$H = \frac{\sqrt{\pi} C_s}{2\Omega} = \left( \frac{2K}{\mu m_H} \right)^{1/2} T^{1/2} \Omega^{-1},$$

e pode também ser escrita da forma:

$$H = \left( \frac{2K}{\mu m_H} \right)^{1/2} T_0^{1/2} \Omega_0^{-1} \left( \frac{r}{r_0} \right)^{3/2-q/2} = H_0 \left( \frac{r}{r_0} \right)^{3/2-q/2}, \quad (2.3)$$

onde  $C_s$  é a velocidade do som,  $\Omega$  a frequência angular,  $K$  a constante de Boltzmann,  $\mu$  é a massa molecular média ( $\mu \approx 2,34$  u), onde u é igual a 1/12 da massa do isótopo carbono-12,  $^{12}\text{C}$  e  $m_H$  é a massa de um átomo de hidrogênio. Assim, a densidade do gás é descrita por:

$$\rho_g = \frac{\sigma}{2H} = \frac{\sigma_0}{2H_0} \left( \frac{r}{r_0} \right)^{-(p-q/2+3/2)} = \rho_0 \left( \frac{r}{r_0} \right)^{-s}. \quad (2.4)$$

Por outro lado a pressão é dada por:

$$P = \frac{\rho_g K T}{\mu m_H} = \frac{\rho_0 K T_0}{\mu m_H} \left( \frac{r}{r_0} \right)^{-(s+q)}. \quad (2.5)$$

A pequena perturbação à força radial devido ao gradiente de pressões (Adachi et al. 1976 ; Nakagawa et al. 1986) é descrita pela equação:

$$\Psi = -\left(\frac{1}{2\rho_g r\Omega^2}\right)\frac{\partial P}{\partial r} = \frac{(p+q/2+3/2)KT_0}{2r_0^2\Omega_0^2\mu m_H}\left(\frac{r}{r_0}\right)^{(1-q)}. \quad (2.6)$$

A equação (2.6) vem do fato de considerar a existência do gradiente de pressões no disco. Neste caso, a força por unidade de massa devido ao gradiente de pressão é

$$\Delta g = 1/\rho(\partial P/\partial r),$$

sendo que o equilíbrio das forças exige que

$$V_g^2/r = V_k^2/r + \Delta g,$$

onde  $V_g$  é a velocidade do gás e  $V_k = \Omega r$  é a velocidade kepleriana. Agora substituindo na equação da diferença de velocidades  $\Delta V = V_k - V_g$  temos:

$$\Delta V = V_k - \sqrt{V_k^2 + \Delta g r} = V_k \left(1 - \sqrt{1 + \frac{\Delta g}{g}}\right), \quad (2.7)$$

onde  $g = V_k^2/r$ . O desenvolvimento em serie de Taylor de primeira ordem para gradiente de pressões pequeno nós da:

$$\Delta V \approx V_k \left(1 - \left(1 + \frac{\Delta g}{2g}\right)\right) = -\frac{V_k}{2} \frac{\Delta g}{g}. \quad (2.8)$$

Levando em conta a equação (2.8) teremos

$$\Psi = \frac{\Delta V}{V_k} = 1 - \frac{V_g}{V_k} = -\frac{r}{2\rho V_k^2} \frac{\partial P}{\partial r} = -\frac{1}{2\rho\Omega^2 r} \frac{\partial P}{\partial r}, \quad (2.9)$$

e o desvio da velocidade kepleriana é dado pela equação (2.6).

Podemos obter a densidade superficial de massa de referência em termos dos parâmetros globais do disco protoplanetario normalizando na forma:

$$\sigma_0 = \left(\frac{2-p}{2\pi R_0^2}\right)\left(\frac{R_D}{R_0}\right)^{p-2} M_D, \quad (2.10)$$

onde  $M_D$  é a massa da nebulosa circumestelar e  $R_D$  seu raio.

Utilizando evidencias observacionais e valores deduzidos dos modelos teóricos (Beckwith et al. 1990; Beckwith e Sargent 1991; Cassen 1992) podemos deduzir os seguintes intervalos de valores dos parâmetros  $p$  e  $q$ :

$$\frac{1}{2} < q < \frac{3}{4}, \quad 0 < p < \frac{5}{3},$$

e a seguinte expressão para a temperatura  $T_0$ :

$$T_0 \approx 200(1 - \sigma_0 k)^{1/4} \approx 280K, \quad (2.11)$$

onde  $k$  é a opacidade nebular no infravermelho (Pollack et al. 1985; Mizuno e Nakazawa 1988; Cuzzi e Weidenschilling 1992; Miyake e Nakagawa 1992, 1993). Assim, da Eq.(2.6), para uma nebulosa planetária pouco turbulenta, o parâmetro da perturbação  $\Psi$  é aproximadamente  $10^{-3}$ . O gás da nebulosa solar órbita com uma velocidade local  $V_g = V_K(1 - \Psi)$ .

### 2.3. Modelo clássico de Nebulosa solar

Neste trabalho de tese será usado um modelo de nebulosa solar circunstelar de massa mínima em que as densidades superficiais do gás e das partículas e a temperatura são dadas por leis de potências decrescentes com a distância heliocêntrica da forma  $r^{-3/2}$  e  $r^{-1/2}$  respectivamente. Este modelo recebe o nome de modelo de Hayashi. Além disso, considera-se a existência de equilíbrio hidrostático na direção vertical, estudando-se principalmente a dinâmica das partículas numa região anelar em torno da órbita atual de Júpiter. O tamanho das partículas é compreendido entre valores centímetros e métricos.

Neste tipo de nebulosa solar temos os valores da massa do disco  $M_D = 0,0425M_\odot$ , e os parâmetros  $p = 1,5$  e  $q = 0,5$ . Isso conduz a uma densidade superficial de massa para o gás  $\sigma_0 \approx 17.000Kgm^{-2}$  a uma distância radial de referência  $r_0 = 1UA$  (adotaremos para todas as nossas medidas o sistema internacional (SI)). Por outro lado, a densidade do gás a 1UA é  $1,4 \times 10^{-8} Kgm^{-3}$  e a temperatura é 280 K. A nuvem molecular de  $1M_\odot$  a partir da qual se formou a nebulosa solar mediante colapso gravitacional estava caracterizada por uma temperatura típica de  $\approx 10K$  e uma densidade de  $\approx 10^{-17} Kgm^{-3}$ . A velocidade do som em  $cm s^{-1}$  para o gás da nuvem molecular é dada pela expressão:

$$C_s = \left( \frac{8KT}{\pi\mu m_H} \right)^{1/2} = 3,00 \times 10^4 \left( \frac{T}{10K} \right)^{1/2} \left( \frac{2,34}{\mu} \right)^{1/2}, \quad (2.12)$$

onde  $\mu = 2,34u$  é o peso molecular médio do gás composto principalmente de  $H_2$  e  $He$  e  $m_H$ , a massa de um átomo de hidrogênio.

A evolução do sistema solar começa a partir de uma nebulosa solar pré-planetária, composta de gás e poeira, com uma massa de  $(0,01- 0,04 M_{\odot})$  que tem estrutura de disco e em que a gravidade solar, a pressão do gás e a força centrífuga estão em equilíbrio. Para construir este modelo de nebulosa solar, supõe-se que o gás e a poeira de origem interestelar estão bem mesclados e que a distribuição radial da densidade superficial de massa do disco é de tal forma que os planetas terrestres atuais, assim como os planetas gigantes, se formaram mediante um processo de migração mínima da poeira na direção radial. A hipótese de uma nebulosa pouco massiva é proposta levando em conta a massa atual do sistema solar e a presença de certa quantidade de  $H_2$  e  $He$  que reproduzem a abundância química solar. O valor  $0,01 M_{\odot}$  é considerado unicamente como uma massa mínima, já que podemos levar em conta que uma massa comparável a esta pode cair sobre o Sol durante as diferentes etapas do processo de formação planetária.

A distribuição radial da massa da nebulosa é justificada neste modelo a partir das massas e das órbitas dos planetas no sistema solar atual. A Nebulosa em equilíbrio é um disco plano girando em torno da estrela com uma velocidade um pouco mais baixa que a velocidade Kepleriana devido à presença de um pequeno gradiente de pressões do gás na direção radial. A temperatura da nebulosa é determinada pela compensação entre o aquecimento devido à radiação solar e o resfriamento devido à emissão de radiação térmica. A nebulosa pouco massiva não se fragmenta devido a sua pequena auto-gravidade e, em princípio, as partículas começam a cair em direção a seu plano equatorial. Quando a maioria das partículas se depositou no plano equatorial, a nebulosa chega a ser transparente à radiação solar visível e, como resultado, a temperatura do gás é determinada principalmente por essa radiação. A temperatura  $T$  a uma distância  $r$  do sol, utilizando a equação (2.11), é dada por:

$$T = 280 \left( \frac{L}{L_{\odot}} \right)^{1/4} \left( \frac{r}{1UA} \right)^{-1/2}, \quad (2.13)$$



onde  $L$  e  $L_{\odot}$  são a luminosidade nesta etapa e no momento atual respectivamente. Levando em conta a pouca dependência de  $T$  com  $L$ , utilizaremos a aproximação  $L = 1L_{\odot}$ . No modelo de nebulosa de Hayashi, a etapa transparente se caracteriza por uma distribuição de densidade superficial das partículas com um deslocamento radial mínimo. A equação para essa densidade superficial é:

$$\sigma_s = \begin{cases} 71 \times \left(\frac{r}{1UA}\right)^{-3/2} \text{ Kg m}^{-2} \text{ para } 0,35UA < r < 2,7UA \\ 300 \times \left(\frac{r}{1UA}\right)^{-3/2} \text{ Kg m}^{-2} \text{ para } 2,7UA < r < 36UA \end{cases}, \quad (2.14)$$

A diferença entre os coeficientes na equação (2.14) provém de que, junto com os materiais rochosos, na região externa, tem materiais gelados e como a temperatura nessa região é  $T < 170K$  (temperatura de condensação do gelo), esses materiais podem condensar. Segundo a equação (2.13), este valor da temperatura corresponde a uma distância radial  $r > 2,7UA$ .

Por outra parte, a densidade superficial do gás necessária para produzir a composição química Solar pode ser expressa da seguinte forma:

$$\sigma_g = 1,7 \times 10^4 \left(\frac{r}{1UA}\right)^{-3/2} \text{ Kg m}^{-2} \text{ para } 0,35UA < r < 36UA. \quad (2.15)$$

Alem disso, Hayashi (1981) obteve, a partir da condição de equilíbrio na direção  $z$ , a densidade do gás  $\rho_g$  no plano equatorial e a espessura média da nebulosa  $H_0$ .

Assim:

$$\rho_g = 1,4 \times 10^{-6} \left(\frac{r}{1UA}\right)^{-11/4} \text{ Kg m}^{-3}. \quad (2.16)$$

e da equação (2.3) temos

$$H = \left(\frac{2KT}{\mu m_H} \frac{r^3}{GM_{\odot}}\right)^{1/2} = 0,047 \left(\frac{r}{1UA}\right)^{5/4} UA. \quad (2.17)$$

## 2.4. A Nebulosa massiva

Se considerarmos que a massa do disco é suficientemente grande para que a contribuição da sua gravidade seja significativa, o potencial gravitacional em um ponto qualquer de um disco fino é dado pela expressão (Binney e Tremaine 1987):

$$V(r, \phi, z, u, \alpha) = -G \int_0^{2\pi} \int_{R_s}^{R_D} \sigma(u) \frac{1}{\sqrt{r^2 + u^2 + z^2 - 2ru \cos(\phi - \alpha)}} u du d\alpha, \quad (2.18)$$

onde  $\sigma(u)$  é a densidade superficial de massa do disco,  $r$  é a coordenada radial da partícula,  $u$  é a variável radial para a integração da contribuição ao potencial da densidade de massa do disco,  $\alpha$  é a variável angular correspondente a mesma integração,  $\phi$  é a coordenada angular da partícula e  $z$  é a altura sobre o plano da nebulosa no sistema de coordenadas cilíndricas. Por outro lado, se considerarmos um disco axialmente simétrico, o potencial gravitacional não dependerá da coordenada angular. Neste caso, para  $\phi = 0$ , podemos fazer a substituição seguinte:

$$\sqrt{r^2 + u^2 + z^2 - 2ru \cos \alpha} = \sqrt{(r+u)^2 + z^2} \sqrt{1 - k^2 \cos^2(\alpha/2)}, \quad (2.19)$$

onde  $k^2 = \frac{4ru}{(r+u)^2 + z^2}$  e  $1 + \cos \alpha = 2 \cos^2(\alpha/2)$ . Substituindo a relação (22) na

equação (2.18), fazendo  $x = \cos(\alpha/2)$ , obtemos:

$$V(r, z) = -4G \int_{R_s}^{R_D} \frac{\sigma(u) u du}{\sqrt{(r+u)^2 + z^2}} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2 x^2)}}. \quad (2.20)$$

Fazendo uso das integrais elípticas de Legendre de primeira e segunda espécie:

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2 x^2)}},$$

$$E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi} d\phi = \int_0^1 \sqrt{\frac{1 - k^2 x^2}{1 - x^2}} dx,$$

e da relação entre elas:

$$\frac{d(kK(k))}{dk} = \frac{E(k)}{1 - k^2}.$$

A equação (2.20) se transforma em:

$$V(r, z) = -\frac{2G}{\sqrt{r}} \int_{R_s}^{R_D} K(k) k \sigma(u) \sqrt{u} du. \quad (2.21)$$

Para calcular a força gerada pelo potencial, derivamos a expressão anterior em relação a  $r$ . Assim obtemos :

$$\frac{\partial V}{\partial r}(r, z) = \frac{G}{r^{3/2}} \int_{R_*}^{R_D} \left[ kK(k) - 2r \frac{d(kK(k))}{dk} \frac{\partial k}{\partial r} \right] \sigma(u) \sqrt{u} du . \quad (2.22)$$

Ampliando a relação entre as integrais elípticas de primeira e segunda espécie e usando a relação :

$$2r \frac{\partial k}{\partial r} = \frac{k^3}{4} \left( \frac{u}{r} - \frac{r}{u} + \frac{z^2}{ru} \right),$$

Obtemos a expressão da força:

$$F_D = -\frac{G}{r^{3/2}} \int_{R_*}^{R_D} \left[ K(k) - \frac{1}{4} \left( \frac{k^2}{1-k^2} \right) \left( \frac{u}{r} - \frac{r}{u} + \frac{z^2}{ru} \right) E(k) \right] k \sigma(u) \sqrt{u} du . \quad (2.23)$$

Levando em conta que  $z = 0$  e que a densidade superficial  $\sigma(u) = \sigma_0 / u^{3/2}$ , a equação (2.23) cai na forma:

$$F_D = -\frac{G\sigma_0}{r^{3/2}} \int_{R_*}^{R_D} \left[ K(k) - \frac{1}{4} \left( \frac{k^2}{1-k^2} \right) \left( \frac{u}{r} - \frac{r}{u} \right) E(k) \right] k u^{-1} du , \quad (2.24)$$

equação que pode ser simplificada, fazendo  $W = k^2 / (1-k^2)$ , obtendo a expressão que denominaremos auto-gravidade do disco e designaremos como  $\Phi$  :

$$\Phi = -\frac{G\sigma_0}{r^{3/2}} \int_{R_*}^{R_D} \left[ K(k) - \frac{1}{4} W \left( \frac{u}{r} - \frac{r}{u} \right) E(k) \right] k u^{-1} du . \quad (2.25)$$

Embora em  $z = 0$  a expressão anterior seja singular quando  $k = 1$ , podemos introduzir um fator de suavidade para evitar a singularidade que, por outro lado, é integrável, tratando-se de uma integral imprópria de segunda espécie (singularidade no domínio de integração). Assim, nos cálculos numéricos utilizaremos este fator de suavização quando a região estudada será o plano médio da nebulosa.

## 2.5. Equações do movimento e modelo de arrasto

O movimento de uma partícula sólida submetida à atração da estrela central, ao arrasto por fricção com o gás da nebulosa protoplanetária e à auto-gravidade da nebulosa no caso que esta seja massiva, pode expressar-se num sistema inercial centrado no Sol mediante a equação:

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -GM_{\odot} \frac{\vec{r}}{r^3} - \frac{\vec{u}}{T_s} - \vec{\Phi} - \frac{3}{s} \frac{ds}{dt} \frac{d\vec{r}}{dt}, \quad (2.26)$$

sendo  $\vec{r}$  o vetor posição da partícula,  $\vec{u}$  a velocidade da partícula em relação ao gás,  $T_s$  o tempo de parada,  $G$  a constante de gravitação universal, e  $M_{\odot}$  a massa do Sol. O terceiro termo a direita leva em conta a auto-gravidade da nebulosa devendo ser calculado numericamente mediante a equação (2.25) e o quarto termo leva em conta o aumento de tamanho da partícula por acreção, onde  $s$  é o raio da partícula.

Com o objetivo de estudar a dinâmica das partículas submetidas ao arrasto do gás nebuloso, considera-se um sistema de referência inercial com origem no Sol. A velocidade relativa de uma partícula em relação ao gás,  $\vec{u}$ , define-se através da relação entre a velocidade da partícula no sistema escolhido e a velocidade do gás,  $V_g$ , pela expressão:

$$\vec{u} = \vec{v} - \vec{V}_g. \quad (2.27)$$

As partículas respondem ao arrasto do gás de maneira diferente dependendo de seus tamanhos. A variável mais útil no estudo da resposta diferencial das partículas frente às forças de fricção é o tempo de parada,  $T_s$  (Whipple 1973). Essa escala temporal é a característica para que a velocidade de uma partícula diminua de  $\vec{v}$  a  $\vec{v}/e$  ( $e = 2,71828\dots$ ) em consequência da fricção e depende não somente da massa e da velocidade da partícula como também de sua distância heliocêntrica. O regime de arrasto depende do número de Knudsen, a relação entre o tamanho da partícula e o caminho médio livre das moléculas do gás ( $\lambda = m_H \mu / \rho_g \sigma_{H_2}$ , com  $\sigma_{H_2} \approx 2 \times 10^{-19} m^2$ ) e do número de Reynolds, a relação entre as forças inerciais e a viscosidade. A equação que define o tempo de parada  $T_s$  é :

$$T_s = \begin{cases} \frac{\rho_p}{\rho_g} \frac{s}{C_s} & \text{se } s \leq 9/4\lambda \quad (\text{regime de Epstein}) \\ \frac{8\rho_p}{3\rho_g} \frac{s}{C_D u} & \text{Outros casos} \quad (\text{regime de Stokes}) \end{cases} \quad (2.28)$$

Onde  $\rho_g$  é a densidade do gás,  $C_s$  sua velocidade térmica,  $\rho_p$ , a densidade do material sólido ( será assumido um valor médio de  $2000 \text{ Kg m}^{-3}$ ),  $s$ , o raio da partícula e  $C_D$  é um coeficiente adimensional que depende do número de Reynolds  $Re = 2s\rho_g v / \eta_g$  ( $\eta_g$  é a viscosidade dinâmica do gás,  $\eta_g = 1/2\rho_g \lambda C_s$ ). A viscosidade é a propriedade dos fluidos correspondente ao transporte microscópico de quantidade de movimento por difusão molecular. Ou seja, quanto maior a viscosidade, menor será a velocidade em que o fluido se movimenta. A velocidade térmica é dada por  $C_s = \sqrt{8KT / \pi \mu m_H}$ , onde  $K$  é a constante de Boltzmann,  $\mu$  a massa molar média ( $\mu \approx 2,34 \text{ u}$ ),  $T$  a temperatura e  $m_H$  é a massa de um átomo de hidrogênio. Na equação de  $T_s$ , o regime de Epstein corresponde a uma aproximação para o caso subsônico quando  $\lambda \geq 2s$ , o que simplifica a força de arrasto se  $v \ll C_s$  transformando-a em  $F = AC_s \rho s^2 v$ , onde  $A \approx 4\pi/3$  se o coeficiente de integração dos átomos ou das moléculas sobre uma esfera movendo-se no meio é igual a unidade (Whipple 1973). Seguindo Weidenschilling (1977), o coeficiente adimensional de arrasto é dado por:

$$C_D = \begin{cases} \frac{24}{Re} & \text{se } Re < 1 \\ \frac{24}{Re^{0,6}} & \text{se } 1 < Re < 800, \\ 0,44 & \text{se } Re > 800. \end{cases} \quad (2.29)$$

Vamos agora caracterizar o coeficiente de arrasto  $\tau_s = \Omega T_s$  que representa a resposta de uma partícula que está se movendo no gás da nebulosa sofrendo fricção. Uma partícula pequena, com  $\tau_s \ll 1$ , está acoplada ao gás, isto é, a força de arrasto domina a solar e a partícula tende a mover-se de forma solidária ao gás. Para um corpo

grande, com  $\tau_s \gg 1$ , o arrasto do gás fica pequeno comparado à gravidade solar e o corpo se move em órbita kepleriana. Segundo Chavannis (2000), fixando o raio das partículas existe uma distância específica ao Sol para a transição entre o regime de Epstein e o regime de Stokes. Como também dependendo da distância ao Sol podemos calcular o raio crítico para a transição entre os dois regimes. Essa distância pode ser calculada por:

$$r_c = \left( \frac{4}{9} \frac{s}{1cm} \right)^{4/11} UA, \quad (2.30)$$

Sendo que neste caso  $\lambda = (r/1UA)^{11/4} cm$ . Assim, para a distância atual de Júpiter temos  $\lambda = 93cm$ . No caso da terra,  $\lambda = 1cm$ .

## Capítulo 3

### Crescimento das partículas

#### 3.1. Introdução

Nesta capítulo, veremos um modelo simplificado para simular o processo de acreção de massa com o objetivo de analisar seus efeitos, tanto qualitativamente como quantitativamente, sobre o movimento das partículas. Entre os processos que exigem uma determinação empírica, encontra-se o estudo da natureza das colisões a baixa velocidade tanto entre os grãos de poeira como entre os agregados de partículas. Este tipo de experimentos são extraordinariamente difíceis de serem realizados utilizando procedimentos clássicos e na maioria dos casos as ferramentas numéricas são as únicas disponíveis, incluindo experimentos de simulação de longa duração para estudar a eficiência do processo de acreção planetária. Crê-se que a formação do sistema solar teve duas etapas:

1. A coagulação dos grãos de poeira mediante a qual se formarão os planetesimais (objetos de tamanho quilométrico).

2. A acreção subsequente destes planetesimais para formar núcleos planetários.

Esta subdivisão esta motivado pelos seguintes fatos:

a) Os corpos de tamanho inferior ao quilômetro estão acoplados ao gás nebular, enquanto que os corpos de maior tamanho se desacoplam perfeitamente do movimento do gás. Isso significa que o movimento dos objetos pré-planetesimais está determinado pelo movimento do gás no disco de acreção pré-solar. Ao contrário do movimento dos corpos de maiores tamanho que pode ser considerado independente das condições do gás e movem-se em órbitas keplerianas.

b) A atração gravitacional entre os objetos de pequeno tamanho é desprezível comparada com as forças inter-partículas, sendo atrativas (força de Van Der Waals entre partículas neutras) ou repulsivas (forças eletrostáticas devidas à presença de partículas carregadas). Isso significa que esses corpos não se estabilizam mediante sua auto-gravidade mais pela intervenção de outros processos como a atuação das forças de superfície e ligações químicas. Para os objetos cujo tamanho é quilométrico, a interação gravitacional é sem dúvida um parâmetro importante. Este é certo para as propriedades estáticas, como a preponderância da atração gravitacional frente às forças inter-partículas e também para as propriedades dinâmicas, como a maior importância das velocidades de escape frente às velocidades relativas entre os diferentes objetos.

A consideração das condições físico-químicas na nebulosa solar necessita de dados experimentais de laboratório para compreender as interações entre corpos pré-planetesimais e pré-planetários no sistema solar primitivo e poder deduzir expressões analíticas que reproduzam o processo de crescimento. Os experimentos de laboratório demonstram que sob um amplo número de condições as partículas muito pequenas (micrométricas) se grudam literalmente umas as outras, formando agregados de maior tamanho. Neste tipo de tamanhos o mecanismo de agregação de partículas dominante é a atuação das forças de Van Der Waals. Weidenschilling (1980) chegou à conclusão que as forças de Van Der Waals por si só podiam produzir agregados de tamanho centimétrico numa nebulosa proto-planetária laminar, em que as velocidades relativas são devidas ao movimento térmico entre outros. Essa conclusão parece ser válida para uma nebulosa com uma viscosidade moderada ( $\alpha \leq 10^{-2}$ ); as partículas nesta ordem de grandeza parecem estar fortemente acopladas ao gás, de maneira que seus movimentos turbulentos são correlativos e têm pouca influência sobre suas velocidades relativas. O crescimento de corpos maiores cria um problema de difícil solução. Os incrementos

das velocidades relativas com o tamanho e as diferenças em tamanho dão lugar a muitas outras possibilidades com efeitos contrários ao crescimento por adesão: processos de repulsão entre partículas, erosão com perda de massa, e inclusive rupturas dos corpos em colisão.

Existem poucos dados experimentais em processos de colisão de agregados pouco coesos. Weidenschilling (1988c) projetou experimentos com partículas de poeira de pedra de pómez não consolidada, fazendo as bater com alvos constituídos por outras partículas de poeira e chegando a conclusão de que se produz uma perda de massa para velocidades de impacto com um valor maior que  $10 \text{ m s}^{-1}$ . Pinter et al. (1989) e Blum et al. (1989) projetaram experimentos para colisões de agregados plumosos (minerais cristalinos) sub-centimétricos com velocidades relativas superiores a uns poucos metros por segundo. Esses autores encontraram que o processo de coagulação acontece com uma probabilidade de adesão superior a 10 % e o processo de fragmentação ocorre com velocidades relativas maiores que  $6 \text{ m s}^{-1}$ , implicando uma pressão de impacto da ordem de  $10^4 \text{ Joules m}^{-3}$ . Os agregados que se formam são esferas cristalinas ligadas por uma capa de hidrocarbonetos; o grau de similaridade destes constituintes com o material nebular ainda é incerto. Os mais recentes experimentos de (Blum et al. 1999, 2000) com partículas micrométricas e sub-métricas em ambiente que reproduzem as condições da nebulosa proto-planetária estão permitindo uma melhor compreensão dos processos de sedimentação das partículas pré-planetesimais. Os resultados obtidos indicam que a reestruturação dos agregados, e conseqüentemente, o incremento gradual da dimensionalidade fractal dos mesmos se convertem em processos importantes quando as partículas alcançarão um valor superior a uns poucos centímetros.

### **3.2. Sedimentação ou acreção das partículas**

Com o objetivo de obter as principais conseqüências dinâmicas relacionadas ao crescimento de massa usaremos um modelo de acreção simplificado. Suponha que o material sólido que se encontra muito perto, se junta à partícula esférica considerada com uma probabilidade  $\delta$  (coeficiente de sedimentação ou acreção), podemos escrever a variação de sua massa e de seu raio da forma (Hayadashi et al. 1985):



$$\frac{dm_s}{dt} \approx \pi s^2 \bar{\rho}_s \Delta V_s \delta = 4\pi \rho_s s^2 \frac{ds}{dt}, \quad (3.1)$$

sendo que

$$\frac{ds}{dt} = \frac{\bar{\rho}_s \Delta V_s}{4\rho_s} \delta, \quad (3.2)$$

integrando temos

$$s = s_0 + \delta \frac{\bar{\rho}_s \Delta V_s t}{4\rho_s}, \quad (3.3)$$

onde  $\rho_s$  é a densidade volumétrica da partícula,  $\bar{\rho}_s$  é a densidade volumétrica do material sólido,  $s_0$  é o raio inicial da partícula,  $\Delta V_s$  é a velocidade relativa da partícula em relação ao gás e  $s$  representa o raio da partícula. Disso podemos tirar a escala de tempo para o crescimento da massa da partícula dada por:

$$t_{m,d} = m_s \left( \frac{dm_s}{dt} \right)^{-1} \approx \frac{4\rho_s s}{3\bar{\rho}_s \Delta V_s} \frac{1}{\delta}, \quad (3.4)$$

E é aproximadamente um fator  $\Delta V_s / (\delta v_k)$  inferior a escala de tempo da deriva simples no caso de uma partícula no regime de Stokes (vários metros), supondo uma nebulosa axialmente simétrica. No caso de partículas pequenas (regime de Epstein), a escala de tempo de deriva dada por (Weidenschilling 1977) é:

$$\tau_l = \frac{\bar{\rho}_s}{20\rho_s} \frac{C_s}{s} \frac{v_k}{\Delta V_s} \frac{1}{\Omega_k^2}, \quad (3.5)$$

e a escala de tempo de crescimento por sedimentação é aproximadamente um fator  $(\rho_s / \bar{\rho}_s) s^2 \Omega_k^2 / (C_s v_k \delta)$  superior a vida média das partículas na nebulosa levando em conta só a deriva simples, onde  $v_k$  é a velocidade kepleriana. Tendo em visto que dependendo de seus raios iniciais e posições heliocêntricas, as partículas podem sofrer uma mudança de regime durante o crescimento.

## Capítulo 4

### Vórtices na nebulosa solar

#### 4.1. Introdução

Em grande parte dos estudos recentes sobre turbulência em discos proto-planetário tem se destacado a importância da vorticidade na teoria da formação planetária. Um dos mecanismos recentemente proposto para explicar a formação dos núcleos dos planetas gigantes postula que a concentração de partículas de poeiras nas regiões centrais de vórtices anticiclônicos pode dar lugar a instabilidade gravitacional capaz de formar os ditos núcleos (Barge e Sommeria 1994, 1995; Adams e Watkins 1995; Tanga et al. 1996).

As teorias da estrutura dos planetas gigantes de nosso sistema solar consideram que estes possuam um núcleo de matéria de alta densidade rodeado por um envelope de hidrogênio metálico e uma atmosfera externa. Segundo um dos modelos clássico de formação planetária, um núcleo denso e rochoso com uma massa de  $\approx 1M_{\oplus}$  se formou primeiro, antes que quantidades consideráveis de gás fossem atraídas pelo proto-planeta gigante. De acordo com o modelo básico, os núcleos rochosos se formarão mediante a aglomeração dos grãos de poeira imersos no disco residual de gás que permanece depois a formação da maioria das estrelas. As simulações indicam que são necessárias ao menos  $10^6$  anos para formar um núcleo rochoso de  $10M_{\oplus}$  (Lissauer 1987).

Resultados observacionais recentes (Brandner et al. 2000 ) parecem indicar que os discos circum-estelares perdem seu conteúdo de poeira em 5 à 15 milhões de anos. O desaparecimento da poeira está relacionada com a aglomeração de partículas de maior tamanho (planetesimais), constituindo assim um indicador do começo da etapa de formação planetária em discos proto-planetários. Crê-se que tais discos são turbulentos durante parte de sua existência (Lin 1981; Morfill 1985; Boss 1988), o que explicaria a evolução de suas massas e momento angular. Com objetivo de entender o problema de formação planetária e tomando como base as idéias originais de Alfvén e Arrhenius (1976), se propõe ( Barge e Sommeria 1994, 1995 ; Tanga et al. 1996; de La

Fuente Marcos e Barge 2001) que vórtices quase-bidimensionais em grande escala na nebulosa solar poderiam ter atuado como regiões de capturas das partículas sólidas. Estes tipos de estruturas podem aparecer na nebulosa com rotação diferencial (Nezlin e Snezhkin 1993) ou serem geradas devido a instabilidades específicas como a instabilidade de Rossby (Lovelace et al. 1999; Li et al. 2000, 2001; Lyra et al. 2009) ou instabilidade baroclínica (Bracco et al. 1998, 1999; Godon e Lívio 1999a, b, 2000; Klahr e Bodenheimer, 2000, 2003). Um fluxo baroclínico é um fluxo onde a pressão  $P$  depende da temperatura  $T$  e o não alinhamento do gradiente de densidade com o da pressão cria uma instabilidade chamada instabilidade baroclínica.

Exemplos da existência dessas estruturas na natureza são os vórtices atmosféricos persistentes nos planetas gigantes como a grande mancha vermelha de Júpiter. Esses fenômenos foram reproduzidos em experimentos de laboratório (Sommeria et al. 1988; Nezlin e Snezhkin 1993) e tem sido explicado em termos de mecânica estatística aplicada ao estudo da turbulência bidimensional (Sommeria et al. 1991; Miller et al. 1992). Mais recentemente, o crescimento de estruturas coerentes de grande escala num fluxo kepleriano foram simuladas numericamente a partir de um campo de vorticidade inicialmente aleatório no caso incompressível (Bracco et al. 1998) e também utilizando no caso de água pouco profunda (Bracco et al. 1999). Barge e Sommeria (1994, 1995) encontraram que os vórtices anticiclônicos de grande escala podem capturar e concentrar muito eficientemente as partículas sólidas da nebulosa e propuseram que estes vórtices podem desempenhar um papel fundamental nas primeiras etapas da formação planetária. Esses autores chegaram à conclusão de que vórtices gigantes persistentes seriam os lugares mais apropriados para a formação de planetesimais e dos núcleos planetários e, portanto, o mecanismo de captura de partículas pelo vórtice ajudaria a explicar a formação dos planetas gasosos gigantes. Mas, como as partículas podem superar a etapa do tamanho de metro?

Uma possível resposta poderia residir na formação das estruturas vorticais na nebulosa solar. Vórtices quase bidimensionais de grande escala foram sugeridos por Von Weizsäcker (1944, 1948) para explicar a regularidade na distribuição da distância dos planetas ao Sol. Nos cálculos se considera um modelo bidimensional baseado nos resultados obtidos por Hayashi et al. (1985). De seus resultados se deduz que a

aproximação bidimensional esta plenamente justificada, já que os processos dinâmicos na direção vertical dão lugar a um disco muito fino em comparação com sua dimensão radial, e sempre que se esta considerando a região dos planetas gigantes.

Num trabalho basicamente analítico, os hipotéticos vórtices presentes na nebulosa poderiam ser estudados como estruturas dinâmicas gasosas, essencialmente planas, descritas pelas equações da hidrodinâmica em duas dimensões. Embora, no princípio, esta afirmação possa parecer contraditória, desde que a componente gasosa do disco seja formada por bolhas (elementos de fluido) cujo movimento ocorreria praticamente sem colisões, porém uma análise aprofundada do fenômeno permita justificar um estudo hidrodinâmico. Na realidade, o fenômeno é similar ao que se produz em física de plasma quando as partículas carregadas são submetidas a um campo magnético intenso e se movem em órbitas de Larmor por causa da força de Lorentz. Neste caso, o movimento perpendicular ao campo magnético devido à força de Lorentz é isotrópico, e o raio de Larmor é equivalente ao trajeto livre médio das partículas na nebulosa solar. Estes fatos justificam o uso das equações não colisionais da magneto-hidrodinâmica para descrever o movimento do plasma no sentido perpendicular de um campo magnético forte, desde que o movimento é lento em comparação com o período associado à frequência de Larmor e a escala grande em comparação com o raio de Larmor. Este resultado é conhecido como teorema de Chew, Goldberger e Low (1956). No caso do disco da nebulosa solar os vórtices gasosos são similares as órbitas de Larmor. Se o raio dos vórtices é pequeno comparado com o raio do disco nebular e por analogia com o caso da magneto-hidrodinâmica, a utilização de uma descrição bidimensional é plenamente justificada, já que o movimento das bolhas pode supor-se rápido em comparação com a velocidade de rotação do disco e a escala grande em comparação com o raio do vórtice.

No estudo da dinâmica das partículas, dois modelos diferentes para a nebulosa protoplanetaria serão usados: uma nebulosa solar da massa mínima (Whipple et al. 1972; Hayashi et al. 1985) e uma nebulosa maciça protoplanetaria (Adams et al. 1989) em que os efeitos da força da gravidade devido ao próprio disco (auto-gravidade) têm uma importância significativa. Além disso, numa nebulosa solar maciça, a força de reação da camada de gás sobre as partículas é mais fraca do que numa nebulosa da

massa mínima, desde que mais maciça a nebulosa mais intensa é a turbulência, assim a mistura das partículas é maior e a densidade da camada das partículas é menor. No caso de sistemas onde a auto-gravidade é desprezível ou muito pequena as perturbações devidas aos vórtices são capazes de se manter por mais tempo. Adams e Laughlin (1996) propuseram que os vórtices previamente formados podiam persistir durante uma fração significativa da existência dos discos circunstelares. Como se forma um grande vórtice? Qual é a característica dos vórtices estáveis? Como a presença de um vórtice afeta o movimento das partículas? Nos últimos anos tivemos respostas as duas primeiras questões sendo que cálculos mais recente (Godon e Lívio 1999a, 1999b, 2000) levam a crer que no caso mais realista a escala de tempo para a estabilidade desses vórtices seja da ordem de uns 300 anos.

#### 4.2. Equações básicas de um vórtice bidimensional

Em principio, podemos dizer que sistemas fluidos diferenciais girando naturalmente produzem vórtices. De um ponto de visto estritamente hidrodinâmico, um vórtice é uma região do espaço onde se produz concentração de vorticidade ou rotação em torno de um ponto fixo ou móvel. Em mecânica dos fluidos a vorticidade é definida como

$$\vec{\omega} = \vec{\nabla} \wedge \vec{V}_g, \quad (4.1)$$

onde  $\vec{V}_g$  é o campo de velocidades no caso considerado de gás nebuloso.

As equações de Navier-Stokes do fluxo (Acheson 1990) são

$$\frac{\partial \vec{V}_g}{\partial t} + (\vec{V}_g \cdot \vec{\nabla}) \vec{V}_g = -\frac{1}{\rho_g} \vec{\nabla} P + \frac{\eta_g}{\rho_g} \nabla^2 \vec{V}_g - GM_o \frac{\vec{r}}{r^3}, \quad (4.2)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V}_g = 0, \quad (4.3)$$

Onde P é a pressão do gás,  $\eta_g$  é sua viscosidade dinâmica e  $\rho_g$  sua densidade.

Tomando o rotacional da Eq. (2) obtemos

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + (\vec{V}_g \cdot \vec{\nabla}) \vec{\omega} = (\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V}_g - \vec{\nabla} \frac{1}{\rho_g} \times \vec{\nabla} P + \frac{\eta_g}{\rho_g} \nabla^2 \vec{\omega}. \quad (4.4)$$

O segundo termo do membro a direita da Eq. (4.4) é um termo fonte para vorticidade. Este termo não é zero se  $P = P(\rho_g, T)$  (fluxo baroclínico) e se anula se  $P = P(\rho_g)$  (fluxo barotrópico). Em geral a vorticidade pode ser gerada pelo não alinhamento de  $\vec{\nabla}(1/\rho)$  com  $\vec{\nabla}P$  (instabilidade baroclínica). O último termo a direita da Eq.(4.4) é responsável pela dissipação viscosa da vorticidade. Na ausência de efeitos dissipativos (fluido ideal,  $\eta_g = 0$ ) e para um fluxo barotrópico, O fluxo de vorticidade na superfície de um fluido é constante (Teorema de circulação de Kelvin, Acheson 1990).

Se o fluxo não é exatamente barotrópico (como resultado, por exemplo, do reprocessamento dos fótons estelares, a vorticidade pode gerar-se diretamente. Este trabalho não investiga sobre quais condições os vórtices se formam no disco, nem se eles são estáveis ou quanto tempos eles podem sobreviver no disco. Como indicamos anteriormente, simulações recentes tanto no caso incompressível como compressível, mostraram que uma vez formados, os vórtices anticiclônicos podem sobreviver durante dezenas ou centenas de órbitas (ver Godon e Livio 1999b, 2000). Não está claro até hoje como se produz a formação inicial dos vórtices no disco. Godon e Livio (2000) encontraram que os vórtices anticiclônicos podem formar-se a partir de uma perturbação aleatória inicial do campo de vorticidade. Se a vorticidade é gerada continuamente a um ritmo constante no fluxo (e.g. por convecção), então um grande vórtices pode formar-se e subsistir (por exemplo mediante a fusão de vórtices menores).

Outro mecanismo para explicar a formação dos vórtices em fluxos keplerianos se fundamenta na presença de instabilidade baroclínica. (Klahr e Bodenheimer 2000, 2003). Os trabalhos de Li e seus colaboradores (2001) propuseram um mecanismo físico baseado na instabilidade das ondas de Rossby que poderia produzir vórtices de grande escala. Todavia, Godon e Lívio (1999b) obtiveram resultados numéricos robustos sobre a sobrevivência de vórtices anticiclônicos coerentes num fluxo kepleriano submetido a forças de cisalhamento de grande magnitude. De acordo com Godon e Lívio, os vórtices ciclônicos se dissipam rapidamente enquanto os anticiclônicos podem sobreviver no fluxo dezenas de órbitas. Quando se gera mais de um vórtice, eles interagem entre si mediante ondas de vorticidade e se fundem para formar vórtices maiores em um curto lapso de tempo, de maneira que nossos cálculos

se restringirão a um único vórtice girando ao redor do sol a uma distância  $r_0$  numa órbita circular kepleriana. Godon e Lívio (1999b) mostraram que a amplitude do vórtice decresce de acordo com a lei  $A \propto e^{-t/\tau}$ , onde  $\tau$ , escala temporal do vórtice se incrementa à medida que a viscosidade diminui. Isso é consequência do último termo da Eq.(4.4) sendo responsável pela dissipação viscosa da vorticidade. O objetivo de simular a dissipação do vórtice considera-se um raio do vórtice dependente do tempo dado pela equação:

$$R = R_0 e^{-t/\tau}, \quad (4.5)$$

onde  $R_0$  é o valor inicial do raio do vórtice. Em suas simulações Bracco e seus colaboradores (1998, 1999) que a formação de vórtices coerentes é possível quando os parâmetros do disco planetário tomam valores comumente aceitos para a nebulosa solar.

Entretanto, Godon e Lívio (1999b) mostraram que a vida média dos vórtices é inversamente proporcional ao parâmetro  $\alpha$ , e seu valor seria de uns 10-100 períodos orbitais com uma viscosidade  $\alpha$  de  $10^{-4}$  a  $10^{-3}$ . Embora estudasse o caso menos favorável, conservamos o modelo clássico de nebulosa solar para facilitar a comparação com os trabalhos anteriores neste campo. Nos cálculos que foram realizados, o tamanho característico (ou raio) inicial do vórtice é igual à espessura ou escala vertical  $H_0$  da nebulosa e corresponde ao limite para os movimentos subsônicos.

Considerando o gás como um fluido ideal em que os efeitos da viscosidade e da condutividade são desprezíveis, as equações de Euler que descrevem o movimento do fluido mediante o campo de velocidade em coordenadas cartesianas são:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial X} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial Y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial X}, \\ \frac{\partial V_y}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_y}{\partial X} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial Y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial Y}, \\ \frac{\partial V_x}{X} + \frac{\partial V_y}{Y} &= 0. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Considerando o caso incompressível, estacionário e supondo que o movimento do fluido apenas afeta o gradiente de pressão (obtido utilizando a hipótese de equilíbrio

hidrostático), resolveremos as equações de Euler na ordem zero e o gradiente de pressão em coordenadas polares será dado por:

$$|dP/dr| = \rho GM_{\odot} / r^2 = \rho \Omega^2 r$$

e em coordenadas cartesianas por

$$dP/dX = \rho \Omega^2 X \text{ e } dP/dY = \rho \Omega^2 Y$$

onde  $\Omega$  é a frequência kepleriana ( $\sqrt{GM_{\odot}/r^3}$ ),  $G$  é a constante de gravitação universal,  $X$  e  $Y$  as coordenadas cartesianas, e  $M_{\odot}$  é a massa do sol.

Substituindo nas Eq.(4.6) temos

$$V_x \frac{\partial V_x}{\partial X} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial Y} = -\Omega^2 X, \quad (4.7)$$

$$V_x \frac{\partial V_y}{\partial X} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial Y} = -\Omega^2 Y, \quad (4.8)$$

$$\frac{\partial V_x}{\partial X} + \frac{\partial V_y}{\partial Y} = 0. \quad (4.9)$$

E substituindo a Eq.(4.9) nas Eq.(4.7) e (4.8), chegamos às soluções para o campo de velocidade:

$$\begin{aligned} V_x &= -\Omega Y, \\ V_y &= \Omega X. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Se as soluções dadas pelas equações (4.10) são escritas num sistema de referência centrado no vórtice com  $x$  a coordenada azimutal e  $y$  a coordenada radial, temos:

$$\begin{aligned} (V_g)_x &= -\frac{1}{2}\Omega y, \\ (V_g)_y &= \frac{1}{2}\Omega x. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Dado que o sistema das equações (4.11) é local ao vórtice, mas este está girando também em um disco em que o campo das velocidades é descrito pelas equações (4.10), é necessário relacionar ambos os campos de velocidades mediante uma transformação matemática que proporciona uma transição suave entre eles. Por outro lado, esta transformação deve reproduzir qualitativamente comportamentos como observados em redemoinhos terrestres. Uma das funções que intuitivamente cumpre



esses requisitos é a exponencial decrescente. Portanto, a transformação como se vera mais adiante que verifica todas essas restrições é

$$(V_g)_x = -\frac{3}{2}\Omega_0 y - \frac{3}{f^2 - 1}\Omega_0 y e^{-\frac{\left(x^2 + \frac{2f}{f^2+1}y\right)}{2R^2}}, \quad (4.12)$$

$$(V_g)_y = \frac{3}{2} \frac{(f^2 + 1)}{f(f^2 - 1)}\Omega_0 x e^{-\frac{\left(x^2 + \frac{2f}{f^2+1}y\right)}{2R^2}}, \quad (4.13)$$

onde  $R$  é o raio do vórtice. O parâmetro  $f$  é a elipticidade ou alongação do vórtice,  $f = a/b$ , com valores de  $(1, \infty)$ , onde  $a$  e  $b$  são os semi-eixos maior e menor do vórtice. O campo de velocidade dado pelas equações (4.12) e (4.13) não é uma solução exata das equações de Euler mais constitui uma solução aproximada de primeira ordem. Se em dúvida este campo de velocidades reproduz o comportamento clássico ( $\dot{x} = -(3/2)\Omega_0 y$ ,  $\dot{y} = 0$ ), constituindo uma solução exata fora do vórtice. Sabendo que o vórtice é uma estrutura dissipativa, devemos introduzir um decrescimento exponencial na equação de  $R$  que leva em conta sua diminuição de tamanho. Essa equação é  $R = R_0 e^{-t/\tau}$ , onde  $R_0$  é o tamanho inicial do vórtice e  $\tau$  é a vida média característica (estimada em mais ou menos 600 anos).

As equações do campo de velocidades do gás descritas anteriormente verificam a terceira equação de Euler, também chamada de condição de incompressibilidade bidimensional:

$$\frac{\partial(V_g)_x}{\partial x} + \frac{\partial(V_g)_y}{\partial y} = \left( \frac{3\Omega_0 y x}{R^2(f^2 - 1)} - \frac{3\Omega_0 y x}{R^2(f^2 - 1)} \right) e^{-\frac{\left(x^2 + \frac{2f}{f^2+1}y\right)}{2R^2}} = 0. \quad (4.14)$$

Para comprovar as duas primeiras equações de Euler, vamos restringir os cálculos ao caso próximo ao centro do vórtice, de maneira que a exponencial pode ser aproximada por 1. Neste caso o campo de velocidades toma a forma:

$$(V_g)_x \approx -\frac{3}{2} \left( \frac{f^2 + 1}{f^2 - 1} \right) \Omega_0 y, \\ (V_g)_y \approx \frac{3}{2} \frac{(f^2 + 1)}{f(f^2 - 1)} \Omega_0 x. \quad (4.15)$$

As equações (4.15) são uma solução exata das equações bidimensionais incompressíveis de Euler. Esta solução é diferente da solução clássica utilizada por Chavanis (2000). Portanto, o campo de velocidades obtido é uma solução exata dentro e fora do vórtice e aproximada (primeira ordem) entre ambas. E substituindo nas duas primeiras equações de Euler, obtemos as equações diferenciais parciais seguintes para a pressão:

$$-\frac{3}{2}\Omega_0\left(\frac{f^2+1}{f^2-1}\right)(V_g)_y - \frac{9}{4}\frac{(1+f^2)^2}{f(f^2-1)^2}\Omega_0^2x = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}, \quad (4.16)$$

$$\frac{3}{2}\Omega_0\frac{(f^2+1)}{f(f^2-1)}(V_g)_x - \frac{9}{4}\frac{(1+f^2)^2}{f(f^2-1)^2}\Omega_0^2y = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y}. \quad (4.17)$$

Incluindo nas equações anteriores as expressões de  $(V_g)_x$  e  $(V_g)_y$ , chegamos ao sistema de equações:

$$\begin{aligned} \frac{9}{2}\frac{\Omega_0^2\rho x(1+f^2)^2}{f(f^2-1)^2} &= \frac{\partial P}{\partial x}, \\ \frac{9}{2}\frac{\Omega_0^2\rho y(1+f^2)^2}{f(f^2-1)^2} &= \frac{\partial P}{\partial y}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

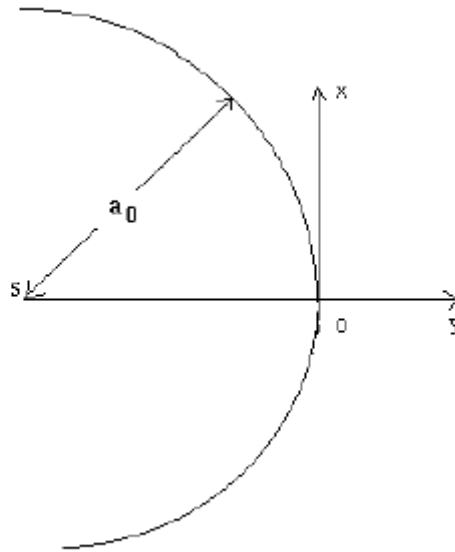
Resolvendo, Chegamos à solução:

$$P(x, y) = \frac{9}{4}\frac{\Omega_0^2\rho(1+f^2)^2}{f(f^2-1)^2}(x^2 + y^2) + K. \quad (4.19)$$

Para determinar o valor da constante  $K$ , imponhamos a condição de fronteira para  $x = 0$  e  $y = 0$  com o valor da pressão a uma distância  $d_v$  do vórtice. Isto é :

$P(0,0) = (\rho_0/\mu)R_gT_0(d_v/r_0)^{-(s+q)}$ , onde  $s$  é uma função dos parâmetros  $p$  e  $q$  da nebulosa planetária. Em nosso modelo, os parâmetros  $p$  e  $q$  são  $p = 3/2$  e  $q = 1/2$  e neste caso o valor de  $s$  é  $s = (2p - q + 3)/2 = 11/4$ . Levando em conta estes valores dos parâmetros nebulares, a constante  $K$  tenderia ao valor:

$$K = P(d_v) = \frac{\rho_0 R_g T_0}{\mu} \left( \frac{d_v}{r_0} \right)^{-13/4}. \quad (4.20)$$



**Figura 4.1:** Sistema de referência centrado no sol e sistema de referencia centrado no vórtice girando ao redor do sol a uma distância  $a_0 = r_0$  numa órbita circular kepleriana.

Considera-se agora o movimento de uma partícula perto do vórtice a uma distância heliocêntrica  $r_0$  do Sol. O movimento da partícula num sistema inercial de referência  $(X, Y)$  centrado no sol (ver Figura (4.1)) é dado pela equação:

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -GM_{\odot} \frac{\vec{r}}{r^3} - \frac{\vec{u}}{T_s}, \quad (4.21)$$

onde  $\vec{u} = \vec{v} - \vec{V}_g$  e  $\vec{V}_g$  é a velocidade do gás.  $T_s$  é o tempo de parada, isto é, a escala temporal característica do arrasto que depende da massa e da velocidade da partícula, mas também da distância heliocêntrica.

Por conveniência, considera-se um sistema de referência centrado no vórtice e girando com uma velocidade angular constante  $\Omega_0 = \sqrt{GM_{\odot} / r_0^3}$  (ver Figura (4.1)), no qual as coordenadas da partícula são  $(x, y)$ . Este sistema de referência cartesiano não inercial é tal que o eixo  $y$  aponta na direção oposta ao sol. No sistema inercial de referência as coordenadas de posição são  $X = r \cos \theta$  e  $Y = r \sin \theta$  e em termos das variáveis  $x$  e  $y$  centradas no ponto  $(r_0, \theta_0)$ , posição do vórtice girando com o disco, as equações são:

$$r = r_0 + y,$$

$$x = r(\theta - \theta_0) = r(\theta - \Omega_0 t). \quad (4.22)$$

De maneira que a relação entre as coordenadas  $(X, Y)$  e  $(x, y)$  é dada por:

$$X = (r_0 + y) \cos\left(\theta_0 + \frac{x}{r}\right),$$

$$Y = (r_0 + y) \text{sen}\left(\theta_0 + \frac{x}{r}\right). \quad (4.23)$$

Em função dessas variáveis as velocidades podem ser escritas

$$\dot{X} = \dot{y} \cos\left(\theta_0 + \frac{x}{r}\right) - \Omega_v (r_0 + y) \text{sen}\left(\theta_0 + \frac{x}{r}\right),$$

$$\dot{Y} = \dot{y} \text{sen}\left(\theta_0 + \frac{x}{r}\right) - \Omega_v (r_0 + y) \cos\left(\theta_0 + \frac{x}{r}\right), \quad (4.24)$$

onde  $\Omega_v = \Omega_0 + \dot{x}/r - x\dot{y}/r^2$ , sendo que  $\Omega_0 = \dot{\theta}_0$ . Utilizando o sistema de equações (4.23), as velocidades tornam-se:

$$\dot{X} = -\Omega_0 Y + \frac{\dot{y}}{r} X - (\Omega_v - \Omega_0) Y,$$

$$\dot{Y} = -\Omega_0 X + \frac{\dot{y}}{r} Y - (\Omega_v - \Omega_0) X. \quad (4.25)$$

As equações (4.25) devem se aproximar de

$$(V_g)_x = \dot{X} = -\Omega Y,$$

$$(V_g)_y = \dot{Y} = \Omega X, \quad (4.26)$$

a uma longa distância do vórtice. O sistema de equações (4.26) descreve o campo de velocidades keplerianas axialmente simétrico sem a perturbação do vórtice. Levando em conta que das aproximações consideradas neste trabalho de tese, um campo vortical de velocidades estacionário seria uma solução das equações de Euler incompressíveis e bidimensionais como a aproximação ao campo clássico de velocidades keplerianas fora do vórtice. No nosso sistema de referência girante, o campo vortical de velocidades é dado por:

$$\dot{x} = -\frac{3}{2} \Omega_0 y - \frac{3}{f^2 - 1} \Omega_0 y e^{-(x^2 + hy^2)/2R^2},$$

$$\dot{y} = \frac{3}{2} \frac{1 + f^2}{f(f^2 - 1)} \Omega_0 y e^{-(x^2 + hy^2)/2R^2}. \quad (4.27)$$

Onde  $h = 2f/(1+f^2)$  e  $f$  é um parâmetro do modelo. Como se estabeleceu anteriormente, esse campo de velocidade tende ao campo clássico de velocidades fora do vórtice:  $\dot{x} = -(3/2)\Omega_0 y, \dot{y} = 0$ . Dentro do vórtice as equações tendem à:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\frac{3}{2}\Omega_0 y \frac{1+f^2}{f^2-1}, \\ \dot{y} &= \frac{3}{2}\Omega_0 x \frac{1+f^2}{f(f^2-1)}.\end{aligned}\quad (4.28)$$

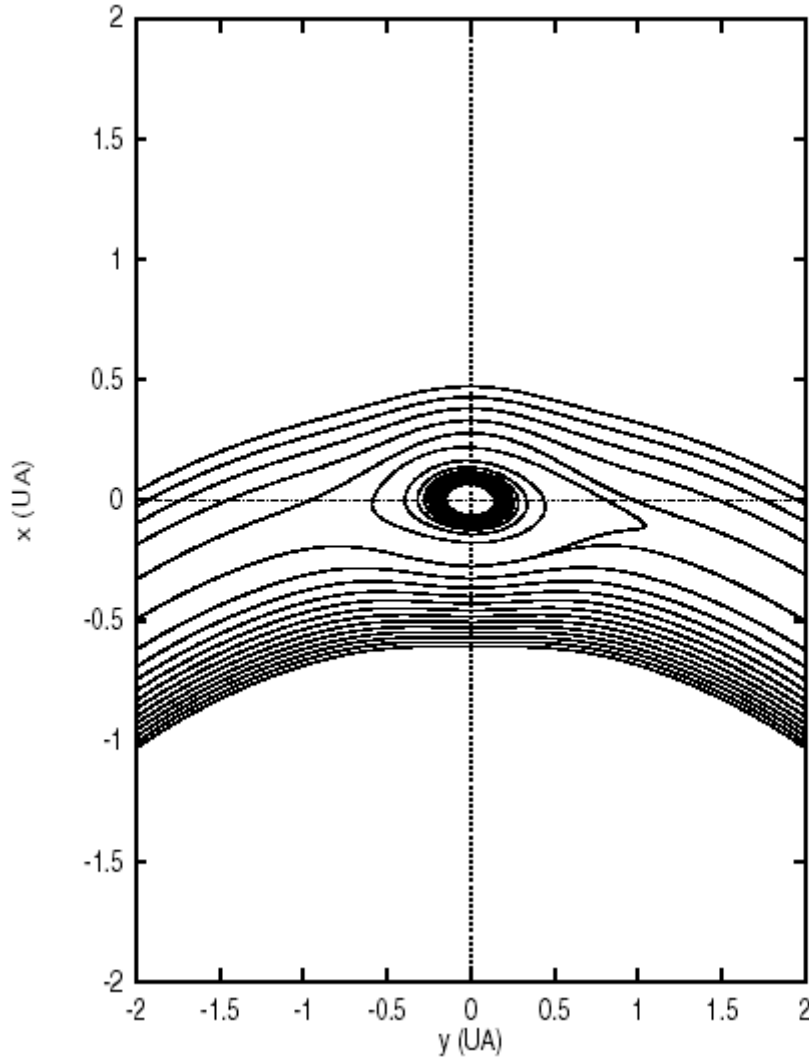
Essas equações reproduzem as linhas de correntes que são elipses keplerianas com alongação  $f = a/b$  ( $a, b$  são os semi-eixos maiores nas direções  $x$  e  $y$  respectivamente). A alongação é o parâmetro  $q$  utilizado por Chavanis (2000). Se  $f$  tende a 1 obtemos um vórtice circular e se  $f \rightarrow \infty$  obtemos um vórtice infinitamente alongado. Os vórtices utilizados por Barge e Sommeria (1994, 1995) têm uma alongação igual a 2, os vórtices utilizados por Tanga e seus colaboradores (1996) têm uma alongação  $f \approx 4$ , a faixa de  $f$  para o trabalho de Bracco e seu grupo (1998, 1999) é 1,7-2,5 e Godon e Lívio (1999b, 2000) trabalharam com vórtices de uma alongação na faixa  $f \approx 4-10$ . Um parâmetro chave para o fluxo rotacional é sua vorticidade ( $\omega = \vec{\nabla} \times \vec{v}$ ). Num fluxo bidimensional estamos interessados no seu módulo, no nosso caso:

$$\omega = \frac{3}{2} \frac{f^2 + 1}{f(f-1)} \Omega_0. \quad (4.29)$$

Para vórtice circulares a Eq. (4.29) dá um valor infinito e para vórtices muito alongados tende ao valor de  $3/2\Omega_0$ . O vórtice utilizado por Barge e Sommeria (1994, 1995) possui um valor  $f = 2$ , mas não é exatamente uma solução das equações de Euler incompressíveis, eles obtiveram  $\omega = 5/2\Omega_0$  no lugar do valor correto  $\omega = 15/4\Omega_0$ . Os vórtices realistas utilizados por Tanga e seus colaboradores tinham  $\omega \approx 2,1 \Omega_0$  e os mas alongados em Godon e Lívio (1999b, 2000) com  $f = 10$  tinham  $\omega \approx 1,7 \Omega_0$ . Os vórtices menos alongados em Godon e Livio tinham  $f = 4$ . Dessa forma, o campo de velocidades vortical anticiclônico que estamos considerando aqui é capaz de reproduzir os vórtices dos outros autores. Levando em conta as equações anteriores, o campo de velocidades do gás em torno do vórtice pode ser escrito como

$$\begin{aligned} (V_g)_x &= -\Omega_0 Y \left(1 - \frac{3}{2} \frac{y}{r_0}\right) + \Omega_f \left(\frac{2}{h} xX + 2yY\right) K_e, \\ (V_g)_y &= \Omega_0 X \left(1 - \frac{3}{2} \frac{y}{r_0}\right) + \Omega_f \left(\frac{2}{h} xY - 2yX\right) K_e, \end{aligned} \quad (4.30)$$

onde  $\Omega_f = (3/2)\Omega_0 / r (1/(f^2 - 1))$  e  $K_e = e^{-(x^2+hy^2)/2R^2}$ .



**Figura 4.2:** Padrão de fluxo na nebulosa solar para a solução aproximada Eq.(30) descrita no texto. O parâmetro  $f$  para essas linhas de correntes é 4, um valor típico que esta de acordo com as predições resultantes das simulações hidrodinâmicas (Godon e Lívio 1999b, 2000) e da teoria (Chavanis 2000).

Na primeira ordem, as equações (4.30) convergem para as expressões clássicas (Eq.(4.26)) na vizinhança do vórtice. Um exemplo de linhas de corrente para este campo de velocidade com um valor de  $f = 4$  é dado na Figura (4.2).

Num sistema de referência centrado no sol e girando com velocidade do gás ( $\Omega_0$ ), ver Figura (4.1), as órbitas circulares conduzem a movimentos cujo sentido depende de se a partícula é mais lenta ou mais rápida que  $a_0\Omega_0$ . Por outra parte, as órbitas elípticas conduzem a oscilações ao redor de um centro guia (vórtice). A representação das trajetórias num sistema de Referência centrado no sol, mas girando com o movimento do gás (o centro do vórtice) conduz a partículas orbitando ao redor do Sol em princípio; depois, quando as partículas alcançam o vórtice, seguem uma trajetória espiral ao redor do centro do vórtice se são capturadas ou continuam girando ao redor do sol depois de ter sido afetadas. Num sistema inercial de referência, as trajetórias caem até o sol seguindo uma espiral, mas no sistema girante discutido acima são mais complexas. A separação entre órbitas adjacentes das partículas se incrementa quando a partícula se aproxima do vórtice, já que o movimento radial se mantém constante visto que o movimento azimutal é cada vez mais lento. Uma vez que a partícula cruza a órbita do vórtice, se não é capturada, sua velocidade azimutal muda de sentido e a espiral se faz mais apertada.

Se considerarmos uma aproximação local e um sistema de eixos de coordenadas cartesianas é utilizado, onde  $x$  é a direção radial,  $y$  a direção azimutal e  $z$  a direção vertical, podemos estudar as condições sob as quais as partículas tendem a acumular-se na região aonde esta o vórtice. Podemos identificar as regiões de convergência com aquelas posições onde a divergência da velocidade da partícula é negativa. Considerando a equação do momento linear no sistema de coordenadas mencionado temos

$$\frac{\partial \vec{V}_g}{\partial t} = \vec{g} - 2\vec{\Omega} \times \vec{u} + 2q\Omega^2 \frac{\vec{x}}{|x|} - T_s^{-1}(\vec{u} - \vec{V}_g). \quad (4.31)$$

Sendo  $V_g$  a velocidade do gás,  $\vec{u}$  a velocidade da partícula,  $q$  o expoente que proporciona a dependência da temperatura com o raio na nebulosa planetária,  $\vec{x}/|x|$  é o vetor unitário na direção radial e  $T_s$  o tempo de parada. Em discos finos,  $\vec{g} = (0,0,-\Omega^2 z)$ . No caso especial de  $T_s^{-1} = 0$ , essa equação tem uma solução estacionária  $\vec{u} = -q\Omega x(\vec{y}/|y|)$ , onde  $\vec{y}/|y|$  é o vetor unitário na direção  $y$ . Utilizando a

aproximação de Barge e Sommeria (1995) e de Tanga e seus colaboradores (1996), no caso bidimensional, sendo  $\vec{V}_g = ((V_g)_x, (V_g)_y, 0)$ , com  $\partial/\partial z = 0$  e  $\vec{\Omega} = (0, 0, \Omega)$ . Suponhamos, além disso, que o fluxo é solenoidal:  $\vec{\nabla} \cdot \vec{V}_g = 0$ . Se calcularmos separadamente, o rotacional e a divergência desta equação se obtêm duas equações escalares para as incógnitas:  $\vec{\nabla} \cdot \vec{u}$  e  $2\vec{\Omega} \cdot \vec{\omega}_s$ , onde  $\vec{\omega}_s = \vec{\nabla} \times \vec{u}$  é a vorticidade da partícula. A expressão para a vorticidade no caso bidimensional é reduzida à  $\omega_s = \partial_x (V_g)_y - \partial_y (V_g)_x$ . Assim, as equações tomam a forma

$$\frac{\partial}{\partial t} (2\vec{\Omega} \cdot \vec{\omega}_s) = -4\Omega^2 (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) - 2\vec{\Omega} T_s^{-1} (\vec{\omega}_s - \vec{\omega}), \quad (4.32)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) = 2\vec{\Omega} \cdot \vec{\omega}_s + (2q - 1)\Omega^2 - T_s^{-1} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}). \quad (4.33)$$

Tendo em conta que  $\vec{\nabla} \cdot \vec{g} = -\Omega^2$ ,  $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\Omega} \times \vec{u}) = -\vec{\Omega} \cdot \vec{\omega}_s$ ,  $\vec{\nabla} \cdot (\Omega^2 \vec{x}/|x|) = \Omega^2$  e  $\vec{\nabla} \cdot (T_s^{-1} (\vec{u} - \vec{V}_g)) = T_s^{-1} \vec{\nabla} \cdot \vec{u}$ . Além disso, se verifica que  $\vec{\nabla} \times \vec{u} = \vec{\omega}_s$ ,  $\vec{\nabla} \times \vec{V}_g = \vec{\omega}$ ,  $\vec{\nabla} \times \vec{g} = 0$ ,  $\vec{\nabla} \times (\Omega^2 \vec{x}/|x|) = 0$  e  $\vec{\nabla} \times (\vec{\Omega} \times \vec{u}) = \vec{\Omega} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u})$ . Utilizando as equações (4.32) e (4.33), podemos eliminar  $2\vec{\Omega} \cdot \vec{\omega}_s$  obtendo finalmente a equação:

$$\left[ 4\Omega^2 T_s^2 + (1 + T_s \partial t)^2 \right] (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) = \vec{\Omega} T_s \left[ 2\vec{\omega} + (2q - 1)\vec{\Omega} \right]. \quad (4.34)$$

Suponha que numa nebulosa de massa mínima o valor de  $q$  é  $3/2$ . Em estado estacionário a equação (4.34) se reduz à:

$$\left[ 4\Omega^2 T_s^2 + 1 \right] (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) = 2\vec{\Omega} T_s \left[ \vec{\omega} + \vec{\Omega} \right], \quad (4.35)$$

e a partícula será capturada pelo vórtice quando a divergência do fluxo da velocidade da partícula seja negativa, isto é:

$$2\vec{\Omega} \cdot (\vec{\omega} + \vec{\Omega}) < 0. \quad (4.36)$$

Em ausência de cisalhamento turbulento, a captura das partículas pelo vórtice ocorreria naqueles lugares onde a vorticidade do gás é oposta ao vetor de rotação, isto é o vórtice deve ser anticiclônico. Este resultado está em concordância com as conclusões obtidas por Tanga e seus colaboradores (1996) e com os resultados obtidos por Godon e Livio (1999a, 1999b, 2000).



### 4.3. Condições de captura das partículas no vórtice

Já é sabido que a eficiência das capturas não depende somente das condições do gás e da distância ao Sol, mas também da elongação do vórtice.

Para estudar essa dependência na eficiência das capturas, vamos considerar o seguinte problema de autovalores. Utilizando a equação (4.21) e as equações (4.30) para a velocidade do gás achamos soluções de capturas da forma:

$$x = x_i e^{-\lambda t}, \quad y = y_i e^{-\lambda t}, \quad (4.37)$$

onde  $\lambda$  é o autovalor e  $(x_i, y_i)$  são as coordenadas da partícula quando se aproxima do vórtice no sistema girante e o autovalor é um número complexo com a parte real positiva (em caso de captura). Verificando-se, portanto que se  $\dot{x} = -\lambda x$ ,  $\dot{y} = -\lambda y$ ,  $\ddot{x} = -\lambda^2 x$ ,  $\ddot{y} = \lambda^2 y$  e levando em conta que a aproximação  $e^{-(x^2+hy^2)/2R^2} \approx e^{-1}$  é válida quando a partícula atravessa a separatriz do vórtice, se utilizamos essa solução na equação (4.21) com o campo de velocidade do vórtice, obtemos depois de alguns cálculos a equação característica:

$$A\lambda^2 - B\lambda + C = 0, \quad (4.38)$$

onde

$$A = 1 + \frac{3y_i}{r_0},$$

$$B = \frac{1}{T_s} \left( 1 + \frac{y_i}{r_0} \right) + 2 \frac{y_i}{x_i} \Omega_0,$$

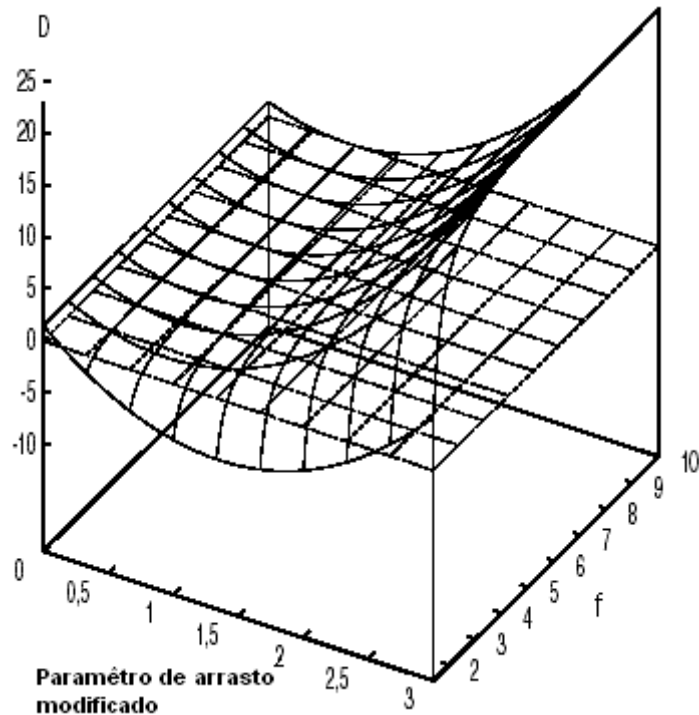
$$C = \frac{3}{2} \frac{\Omega_0}{T_s} \frac{y_i}{x_i} \left[ 1 + \frac{2}{e(f^2 - 1)} \right],$$

e se aproximamos o fator  $K_e$  por  $1/e$  na fronteira do vórtice. O discriminante da equação de segundo grau toma a forma:

$$D = (1 + y_r + 2\tau_s^*)^2 - 6\tau_s^* \left( 1 + \frac{2}{e(f^2 - 1)} \right) (1 + 3y_r), \quad (4.39)$$

Onde  $y_r = y_i / r_0$  e  $\tau_s^* = \Omega_0 T_s (y_i / x_i)$ . Para um valor fixo de  $y_r$ , o sinal do discriminante  $D$  é função da elongação do vórtice e do parâmetro de arrasto modificado  $\tau_s^*$ . Dado certo valor de  $y_r$ ,  $D$  produz soluções negativas para uma escala de valores de  $\tau_s^*$ , mas acima de certo valor de  $f$  não existe mais solução negativas.

Se escolhermos um valor em torno de 0.1 para  $y_r$ , a captura não é mais possível se  $f > 8-9$  como mostra a Figura (4.3).

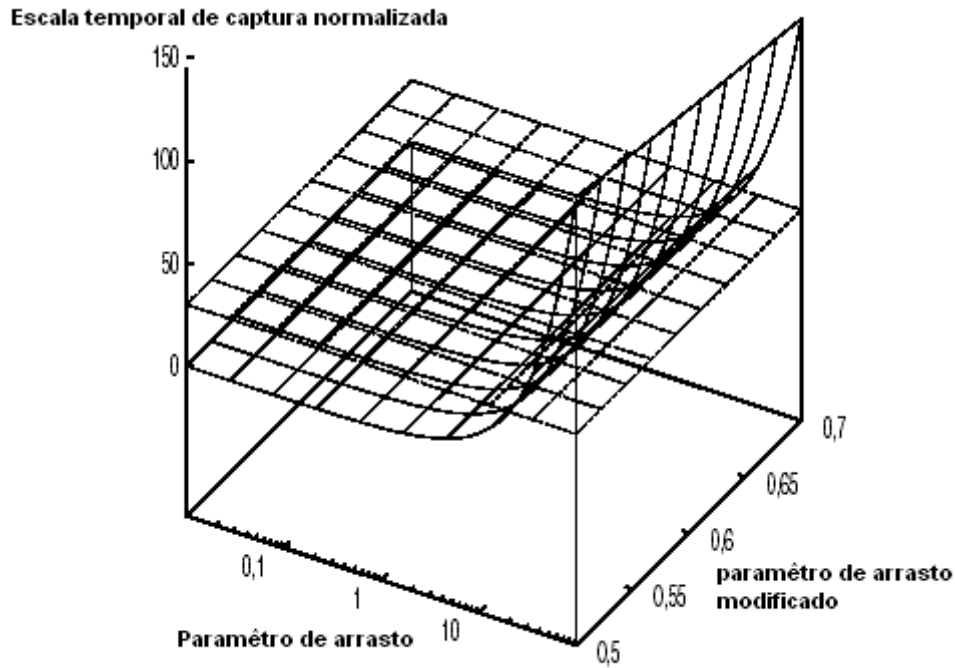


**Figura 4.3:** Discriminante da equação característica (38) em função do parâmetro  $f$  e do parâmetro de arrasto modificado  $\tau_s^*$ . A escolha para  $y_r$  é aproximadamente 0.1. Se a elongação do vórtice é significativa não temos raízes complexas e, portanto a captura não é possível (de la Fuentes Marcos e Barge, 2001) .

Se  $D$  é negativo (autovalores complexo), temos trajetória espirais em direção a estrela e a escala temporal de captura normalizada é:

$$t_{cap} \Omega_0 = \frac{2\tau_s(1+3y_r)}{1+y_r+2\tau_s^*}. \quad (4.40)$$

Essa escala temporal característica esta normalizada por período orbital do vórtice. A Figura (4.4) representa esta escala temporal de captura normalizada em função do parâmetro de arrasto, considerando um intervalo apropriado para os valores de  $\tau_s^*$ . A escala temporal de captura para partículas grandes é maior que a vida média do vórtice, o que sugere que a eficiência do processo de captura é desprezível para partículas com tamanho superior a vários metros.



**Figura 4.4:** Escala temporal de captura normalizada  $t_{cap}\Omega_0$  em função do parâmetro de arrasto  $\tau_s$  e do parâmetro de arrasto modificado  $\tau_s^*$  como a mesma escolha de  $y_r$  da Fig. (3). O plano horizontal representa a vida média de um vórtice típico (30 períodos orbitais). O intervalo de  $\tau_s^*$  foi selecionada da Fig.(4.3) para que se obtenham raízes complexas (de la Fuentes Marcos e Barge, 2001) .

As soluções da equação em  $\lambda$  são de tal forma que para se obter soluções conjugadas e, por conseguinte se cumprem as condições de captura da partícula, deve verificar-se que o discriminante seja negativo, e tendo em conta a definição de parâmetro de impacto  $p = y/x = y_i/x_i$ , teremos com demonstrou de la Fuentes Marcos na sua tese em 2001:

$$\left( \frac{2x}{(1 + y_i/r_0)} + 1 \right)^2 - \frac{6(1 + f^2)x}{(f^2 - 1)} \left( 1 + \frac{2y_i/r_0}{(1 + y_i/r_0)} \right) < 0, \quad (4.41)$$

onde  $x = \tau_s p$  e o parâmetro de arrasto  $\tau_s = \Omega_0 T_s$ .

Se o parâmetro de entrada da partícula no vórtice,  $y_i/r_0$ , tem o valor de  $y_i/r_0 \approx 0,07$  e  $f = 4$ , valor utilizado por Tanga e seus colaboradores (1996) e também por Godon e Lívio (1999a, 1999b, 2000) obtemos a desigualdade:

$$3,51x^2 - 3,91x + 1 < 0, \quad (4.42)$$

e se satisfaz para valores de x:

$$0,40 < x = p\tau_s < 0,72. \quad (4.43)$$

O intervalo de valores de x que se obtém na desigualdade (4.43) dá lugar a um discriminante negativo para a equação dos autovalores (4.38), a qual conduz a soluções complexas conjugadas para os ditos autovalores. Isso mostra que para este intervalo de valores do parâmetro de impacto:  $0,40/\tau_s < p < 0,72/\tau_s$ , o vórtice é capaz de capturar partículas como mostra a Fig.(4.4).

#### 4.4. Auto-gravidade na nebulosa solar

Nessa secção teremos uma aproximação similar à Utilizada por Binney e Tremaine (1987). Se um disco planetário tem uma certa massa, o outro efeito que deve ser incluído nos cálculos é a auto-gravidade do disco. Se considerarmos um disco fino, o potencial é dado por:

$$V(r) = -\frac{G}{r} \int_0^{2\pi} \int_{R_*}^{R_D} \frac{\sigma(r')r'dr'd\phi'}{\sqrt{1 + \left(\frac{r'}{r}\right)^2 - 2\frac{r'}{r}\cos\phi'}}, \quad (4.44)$$

Onde  $R_*$  é o raio estelar. Depois de varias substituições e arranjos mostrados na secção 2.4 do capítulo 2, a força radial (supondo simetria) é dada por:

$$\psi = \Delta \int_{R_*}^{R_D} \left[ K(k) - \frac{1}{4} W\left(\frac{r'}{r} - \frac{r}{r'}\right) E(k) \right] k \sigma(r') \sqrt{r'} dr', \quad (4.45)$$

onde  $k^2 = 4rr'/(r+r')^2$ ,  $W = k^2/(1-k^2)$ ,  $\Delta = G/r^{3/2}$  e

$$K(k) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

$$E(k) = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-k^2t^2}{1-t^2}} dt,$$

são as integrais de Legendre de primeira e segunda espécie . Se considerarmos que a densidade superficial é  $\sigma(r) = \sigma_0 / r^{3/2}$ , a força radial é:

$$\Phi = \frac{G\sigma_0}{r^{3/2}} \int_{R_*}^{R_D} \left[ K(k) - \frac{1}{4} W\left(\frac{r'}{r} - \frac{r}{r'}\right) E(k) \right] kr' dr'. \quad (4.46)$$

Utilizando integrais elípticas (Press et al. 1992) , podemos integrar a expressão (4.46) como foi mostrado na secção 2.4 do capítulo 2 sobre nebulosas massivas. Este cálculo é

computacionalmente muito demorado e assim, de um ponto de vista prático, é melhor ajustar a variação da força do disco proto-planetário mediante uma lei de potências que reproduz os resultados obtidos da integral elíptica (Eq. (4.46)). Essas leis de potências, já são comunamente utilizadas na dinâmica das nebulosas onde os potenciais ou forças são proporcionais ou inversamente proporcionais a distância heliocêntrica. No que se refere ao gás, para calcular a velocidade angular do disco, é necessário levar em conta as contribuições da força da estrela central de massa  $M_o$  e do disco em si mesmo. Podemos calcular a contribuição do disco diretamente utilizando as integrais elípticas (Binney e Tremaine 1987) mais por conveniência computacional se adotará a seguinte aproximação para o sistema constituído pela estrela e o disco:

$$\Omega(r) = \left[ \frac{GM(r)}{r^3} \right]^{1/2}, \quad (4.47)$$

onde

$$M(r) = M_o + 2\pi \int_0^r \sigma r dr. \quad (4.48)$$

Consideramos o disco quase bidimensional pelo fato que a escala vertical é muito pequena em relação a sua escala horizontal e pelo fato de tratar a massa do disco como se estivesse distribuída esfericamente no que diz respeito ao cálculo da força gravitacional (Lin e Pringle 1990), temos:

$$M(r) = M_o + 2\pi\sigma_0 \int_0^r r^{-3/2} r dr = M_o + 4\pi\sigma_0 r^{1/2}. \quad (4.49)$$

Depois de substituir essa equação para  $M(r)$  na equação para  $\Omega(r)$  podemos encontrar facilmente um valor aproximado para a velocidade angular do disco.

## Capítulo 5

### Condições iniciais e resolução numérica

O problema dinâmico é estudado através das equações do movimento para partículas individuais submetidas à gravidade solar e ao arrasto do gás nebular. Em todos os cálculos realizados, as partículas são colocadas inicialmente numa órbita kepleriana num anel ao redor do Sol. Os valores internos e externos desse anel variam de acordo com a região da nebulosa solar que queremos estudar. Como queremos estudar a região onde se formou Júpiter, as condições iniciais desse anel variam de 4,8 UA para o raio interno até 6,0 UA para o raio externo, sendo que as condições limite vão de 4,4 UA até 6,7 UA. Consideramos que as partículas se movem inicialmente numa órbita quase circular ( $e < 0,01$ ). Para as excentricidades iniciais das partículas, vamos escolher uma distribuição aleatória similar a função de massa de Safranov no intervalo  $[0,0002, 0,0005]$ . A distância heliocêntrica inicial  $r$  será escolhida entre as fronteiras interna e externa do anel inicial e sua velocidade se obtém a partir da equação  $V^2 = GM_{\odot}/r$ . A posição inicial escolhe-se com uma longitude e um semi-eixo maior.

Escolhemos para a dinâmica do gás, o modelo de nebulosa Solar axialmente simétrica de Hayashi (1981b). Vimos no capítulo 2, que a diferença entre a velocidade angular do gás e a frequência Kepleriana é:  $\Delta\Omega = -\Psi\Omega(r)$ , onde  $\Psi$  é um fator pequeno devido ao gradiente de pressões. Com o modelo de nebulosa utilizado e considerando  $r_0 = 1UA$ ,  $\Psi = 1,81 \times 10^{-3} (r/UA)^{1/2}$ . Na região onde está Júpiter atualmente, a mudança entre o regime de Epstein e o regime de Stokes ocorre quando o raio da partícula chega a valor crítico de 2,10 m. Como as partículas são sujeitas a diferentes arrastos gasosos, um sorteio aerodinâmico por tamanho ocorre dentro do vórtice. A consequência disso é que a primeira estrutura foi formada por partículas da mesma espécie. Isso é interessante, pois é um fato observável que os planetesimais se formaram de blocos construídos de mesmo tamanho (Scott e Krot, 2005). Deste modo, vamos escolher duas massas diferentes para as simulações, 1000 Kg e 80000 Kg que

representam partículas cujos raios são respectivamente 50 cm e 2,12 m., sendo que o enfoque maior deste trabalho de tese será para partículas de 50 cm.

O tipo de vórtice utilizado nessa tese é dinâmico, exponencialmente decrescente com o tempo e tem uma alongação  $f = 4$ , o que chamamos de vórtice realista. Quando  $\alpha$  é da ordem de  $10^{-4}$ - $10^{-5}$ , assumimos que neste caso  $H \approx 0,37UA$  corresponde ao raio inicial do vórtice. Como vimos anteriormente, o decaimento exponencial do raio do vórtice é inversamente proporcional ao parâmetro  $\alpha$  da viscosidade do gás. O tempo de integração é de 300 anos, ( $\approx 25$  períodos orbitais). Tempo suficiente durante o qual o Vórtice se mantém estável. A quantidade inicial de partículas postas no anel é de 10000. Este número será reduzido durante a simulação à medida que elas são capturadas pelo vórtice ou saem das condições limites do anel. Consideramos que há capturas das partículas pelo vórtice quando elas alcançam uma distância em relação ao centro do vórtice menor que  $0,0007UA$ , o que seria o ciclo limite ou olho do vórtice quando não se leva em conta a auto-gravidade.

De um ponto de visto prático, é melhor ajustar a variação da força do disco proto-planetário mediante uma lei de potências. Vamos escolher os valores obtidos por de La Fuentes Marcos em 2001 no seu trabalho de tese. Assim, a aproximação numérica para  $\Phi$  será  $(M_D / M_\odot)(3,60424464 / r^{2,425})$ , onde  $M_D [0.01- 0.04 M_\odot]$  e  $\sigma_0$  vem dado pela equação. 2.10. Quando se leva em conta a acreção, consideramos que as partículas crescem até se aproximar a uma distância de 1,4 raio do vórtice (correspondente à região de influência do mesmo). Pelo tamanho inicial das partículas, vamos considerar que ele ocorre estocasticamente com uma probabilidade de adesão  $\delta = 0,2$ . Para todos os cálculos a unidade de distância escolhida é a unidade astronômica (UA) (distância entre a Terra e o Sol) e a unidade de massa, o  $Kg$ .

Num sistema de referência centrado no Sol, as componentes da aceleração de uma partícula são dadas por:

$$\frac{d^2 X}{dt^2} = -GM_\odot \frac{X}{r^3} - \frac{(v_X - (V_g)_X)}{T_s} - \Phi_X - \frac{3v_X}{s} \frac{ds}{dt},$$

$$\frac{d^2 Y}{dt^2} = -GM_\odot \frac{Y}{r^3} - \frac{(v_Y - (V_g)_Y)}{T_s} - \Phi_Y - \frac{3v_Y}{s} \frac{ds}{dt},$$

O terceiro termo a direita é devido à auto-gravidade da nebulosa quando ela é levada em conta e o quarto termo representa a contribuição no aumento da massa da partícula por acreção, onde  $s$  é o raio da partícula (ver P 44). No sistema de referência centrado no Sol e no girante as componentes de velocidade do gás são:

$$(V_g)_x = -\Omega_0 Y - (v_g)_x \frac{Y}{r} + (v_g)_y \frac{X}{r},$$

$$(V_g)_y = \Omega_0 X + (v_g)_x \frac{X}{r} + (v_g)_y \frac{Y}{r},$$

onde  $\Omega_0$  é a velocidade angular Kepleriana na distância considerada e  $(v_g)_x$ ,  $(v_g)_y$  (ver Eq. 4.30), as componente radial e tangencial da velocidade perturbada do gás. Podemos destacar que nas simulações numéricas, não foi levado em conta o efeito gravitacional do vórtice.

Para resolver as equações do movimento, o integrador numérico escolhido é o Bulirsch-Stoer. Este método numérico que tem melhor rendimento e precisão que o Adams-Moulton ou o Runge-Kutta., já as excentricidades das órbitas das partículas submetidas a ação do vórtice podem aumentar de forma continua significativamente. O código Ndisk desenvolvido na linguagem FORTRAN por de La fuente Marcos e Barge (2001) foi modificado e adaptado para nosso estudo. Os gráficos e as figuras foram gerados com o auxilio do MATLAB. Os dados foram armazenados em arquivos para cada intervalo de tempo, representando as posições, semi-eixos, velocidades das partículas e o espectro de massa quando consideramos o crescimento. Um arquivo foi criado para as partículas capturadas pelo vórtice, e um quando elas saem das condições limites.



## Capítulo 6

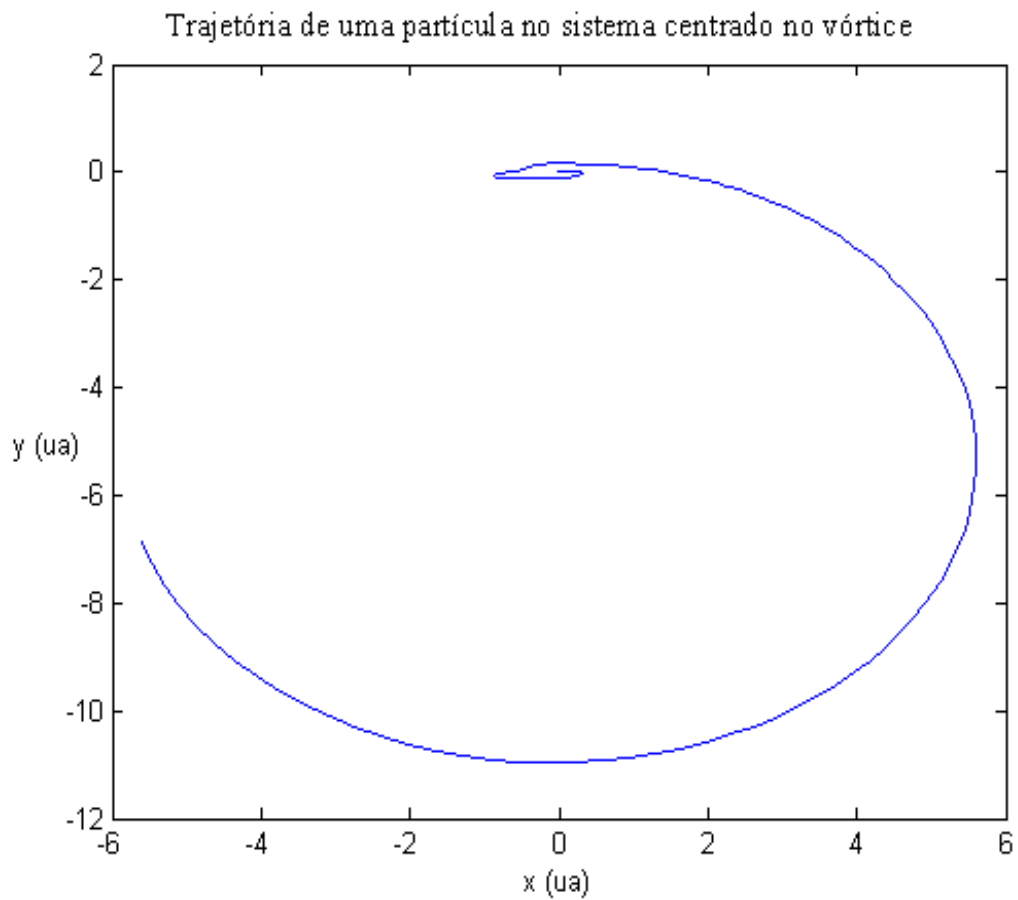
### Resultados das simulações

Uma partícula aproximando-se de um vórtice não segue uma órbita exatamente kepleriana, mas descreve uma trajetória mais complexa devido ao movimento do gás. A partícula pode ser capturada ou repelida pelo vórtice dependendo do sinal da rotação do gás. Num sistema de referência centrado no vórtice e girante, a partícula sofre a força de Coriolis, a força centrífuga e o arrasto do gás. No caso dos vórtices anticiclônicos, a partícula pode permanecer capturada devido ao fato que a força de Coriolis age no sentido contrário a força centrífuga. No caso dos vórtices ciclônicos, a partícula é repelida pelo fato que essas forças atuam na mesma direção. Nas figuras 6.1 e 6.2 temos uma captura onde a partícula fica com uma trajetória espiral em torno do vórtice do centro do vórtice até ser capturada. Mais especificamente, a partícula saiu do vórtice e regressou a região do vórtice depois de dar uma volta completa ao redor do Sol (figura 6.2). O comportamento da distância radial em relação ao sol durante o processo da captura é mostrado na figura 6.3. Essa trajetória é mostrada no caso do modelo epicíclico de campo de velocidades do vórtice utilizado nessa tese. Vários autores (Tanga et al. 1996; Bracco et al. 1998, 1999; Chavanis 2000) evidenciaram que o processo de captura não depende da maneira crítica do perfil de velocidade dentro do vórtice. Mas, se levamos em conta a auto-gravidade do disco, diferenças notáveis podem ser evidenciadas nas figuras 6.4 e 6.5. Essas diferenças, se considerarmos o efeito de um disco com uma massa  $M_D = 0.04 M_\odot$ , aparecem na trajetória da partícula dentro do vórtice. A primeira diferença é que o centro de gravidade da captura parece ter sido deslocado (ver figura 6.2 e 6.5). Isso tem como efeito de aumentar sensivelmente a excentricidade das partículas capturadas.

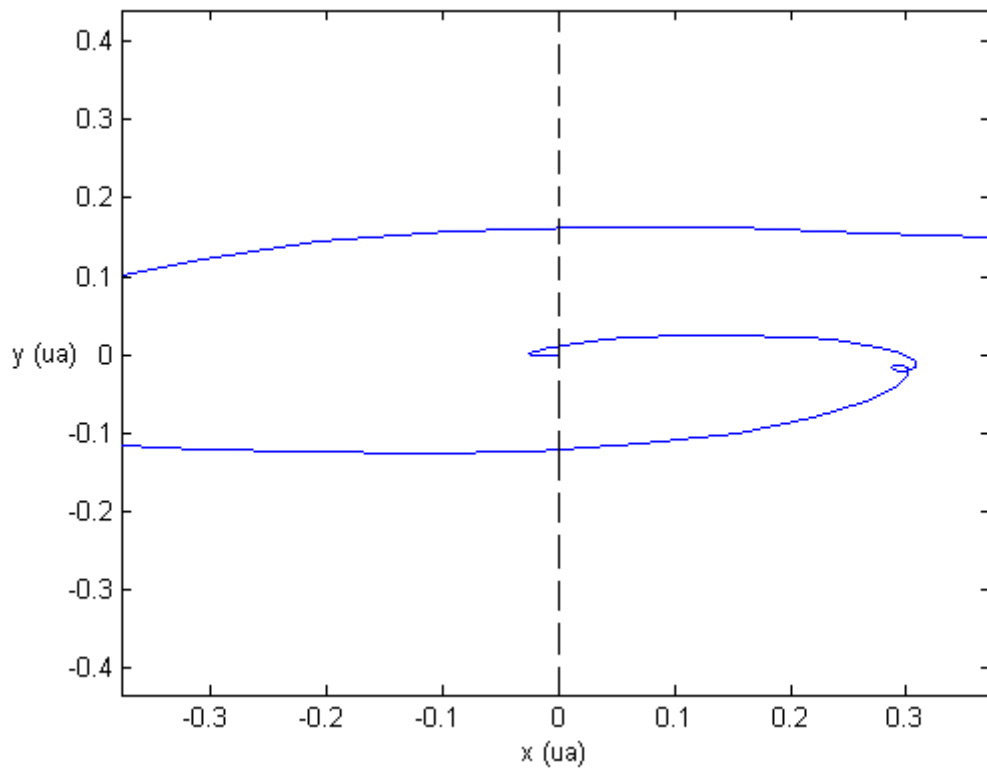
Notamos que a trajetória se finaliza em um ciclo limite. Ciclo limite que parece ser maior que aquele obtido por Tanga e seus colaboradores (1996). Esse ciclo limite, também é evidente na figura 6.6 onde a escala temporal de captura parece ser reduzida quando levamos em conta a auto-gravidade do disco da nebulosa proto-planetária.

Confirmando o fato que a velocidade colisional entre as partículas é muito reduzida quando elas são capturadas pelo vórtice, as figuras 6.7 e 6.8 mostram que a

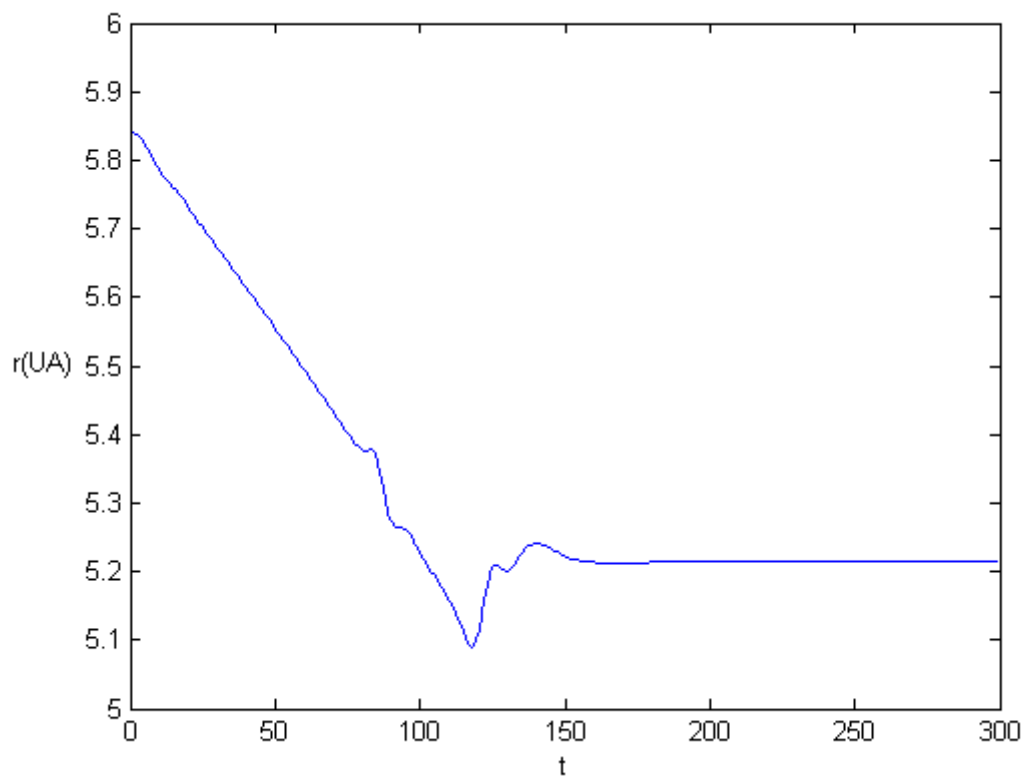
excentricidade da maioria das partículas dentro do vórtice é muito pequena ( $< 0,005$ ). Isso confirma a idéia de que os vórtices forneçam um favorável ambiente para o crescimento planetário. A distribuição das excentricidades mostra também que as partículas menores sofrem mais o efeito das turbulências do disco quando aumentamos a viscosidade do gás tornando a nebulosa um pouco mais instável (ver Figura 6.7). Ao contrário das partículas maiores que experimentam o regime de Stokes e sofrem menos os efeitos da turbulência ( $e < 0,001$ ) como podemos ver na Figura 6.8 .



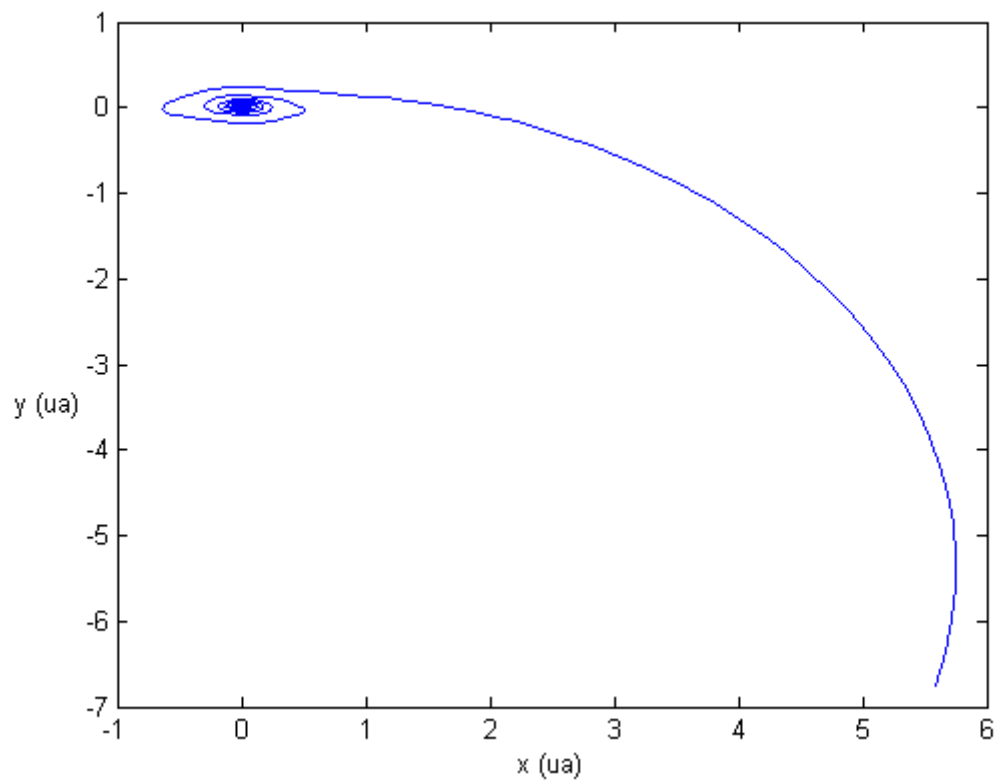
**Figura 6.1:** Trajetória de captura de uma partícula dentro de um vórtice com alongação  $f = 4$ . O raio da partícula é de 50 cm e o vórtice é situado na distância atual de júpiter. O sistema de referência é centrado no núcleo do vórtice que esta girando ao redor do Sol. O raio do vórtice aqui é 0,37 UA. Neste caso não foi considerado a auto-gravidade da nebulosa.



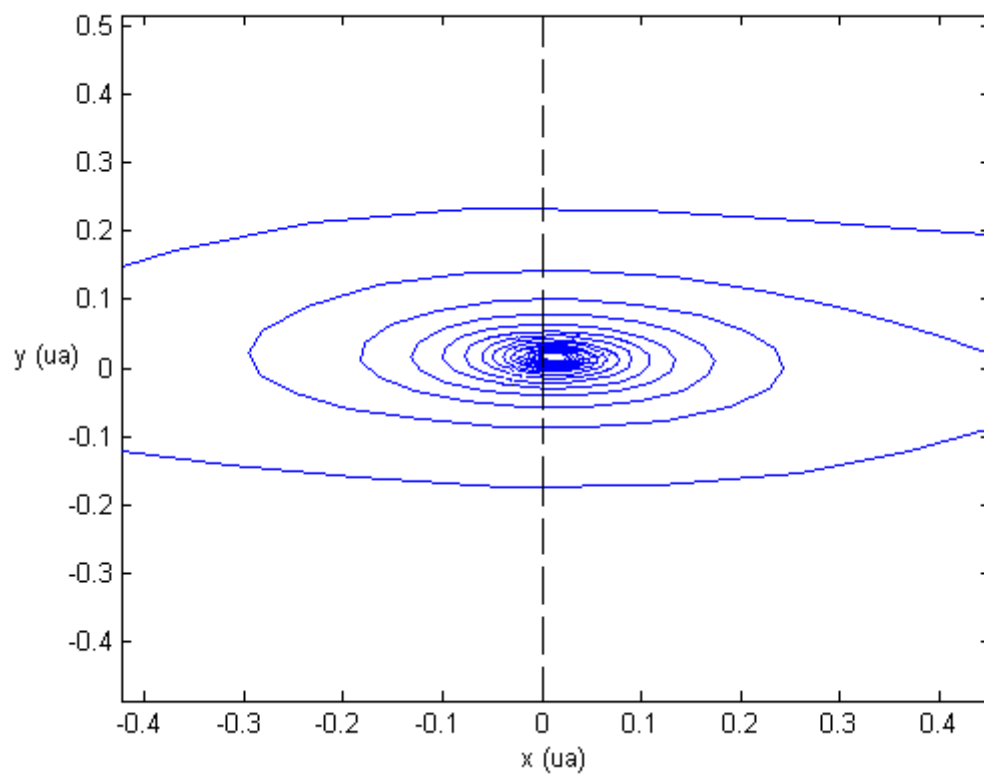
**Figura 6.2:** Trajetória de captura da mesma partícula que a da Figura 6.1. Uma vez que ela cruza pela primeira vez separatriz do vórtice, ela gira em torno descrevendo uma trajetória espiral.



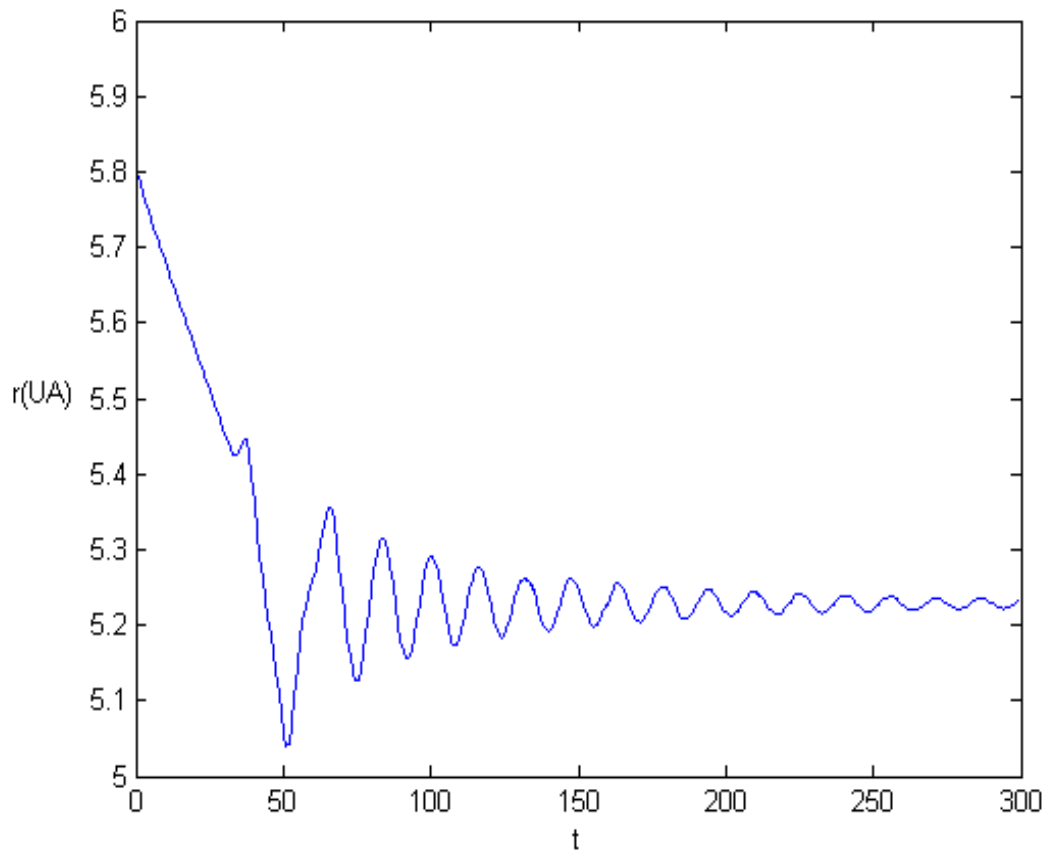
**Figura 6.3:** Representação do comportamento distância radial em relação ao tempo para a mesma partícula que a das Figuras (6.1) e (6.2). Nessa figura se vê claramente a captura.



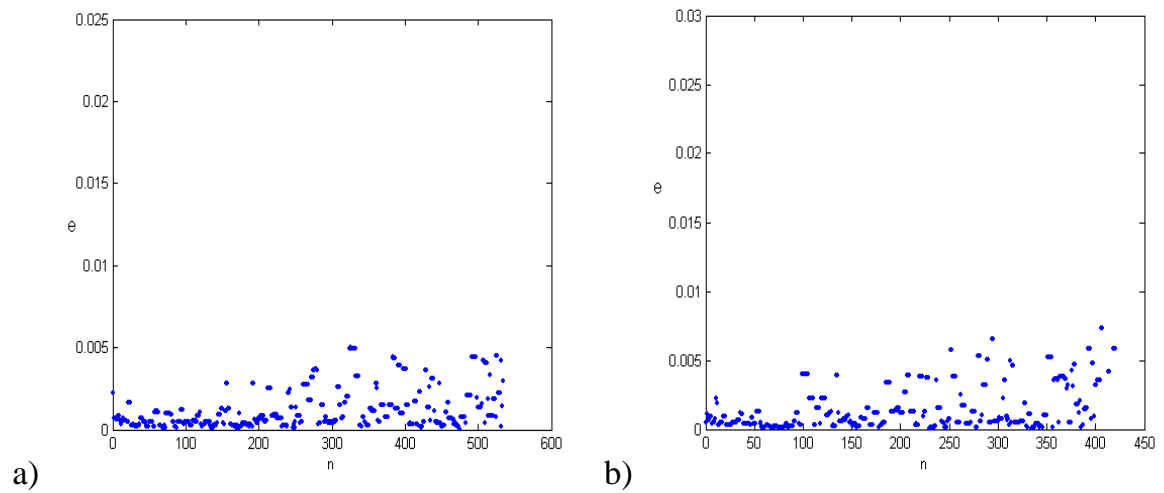
**Figura 6.4:** Trajetória de captura de uma partícula dentro de um vórtice com alongação  $f = 4$ . O raio da partícula é de 50 cm. Aqui, consideramos uma auto-gravidade da nebulosa onde  $M_D = 0.04 M_\odot$ .



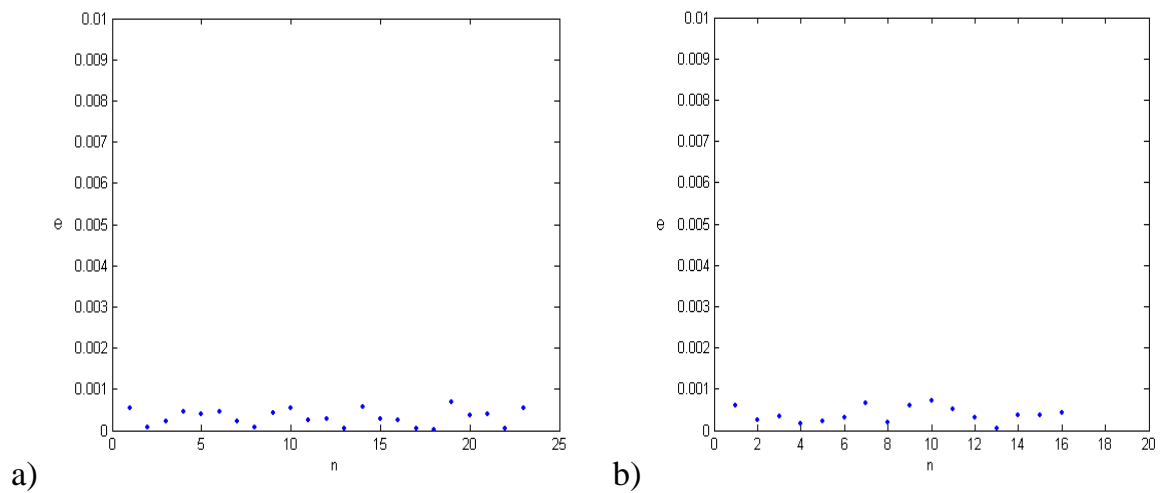
**Figura 6.5:** Trajetória de captura da mesma partícula que a da Figura 6.4. A captura no vórtice não ocorre mais no centro devido à auto-gravidade da nebulosa.



**Figura 6.6:** Representação do comportamento distância radial em relação ao tempo para a mesma partícula que a das Figuras (6.4) e (6.5). Nessa figura se vê claramente como na Figura (6.5) que se alcança um ciclo limite. Além disso, a escala temporal para a captura parece ser menor quando se leva em conta a auto-gravidade.



**Figura 6.7:** Distribuição das excentricidades das partículas à medida que elas foram capturadas pelo vórtice com  $f = 4$  depois de 300 anos. Neste caso não foi considerada a auto-gravidade da nebulosa. Essas excentricidades são das partículas que alcançaram a distância de 0,0007 UA em relação ao centro do vórtice. O raio das partículas é de 50 cm. A viscosidade do gás é: a)  $\alpha = 10^{-5}$ , b)  $\alpha = 10^{-4}$



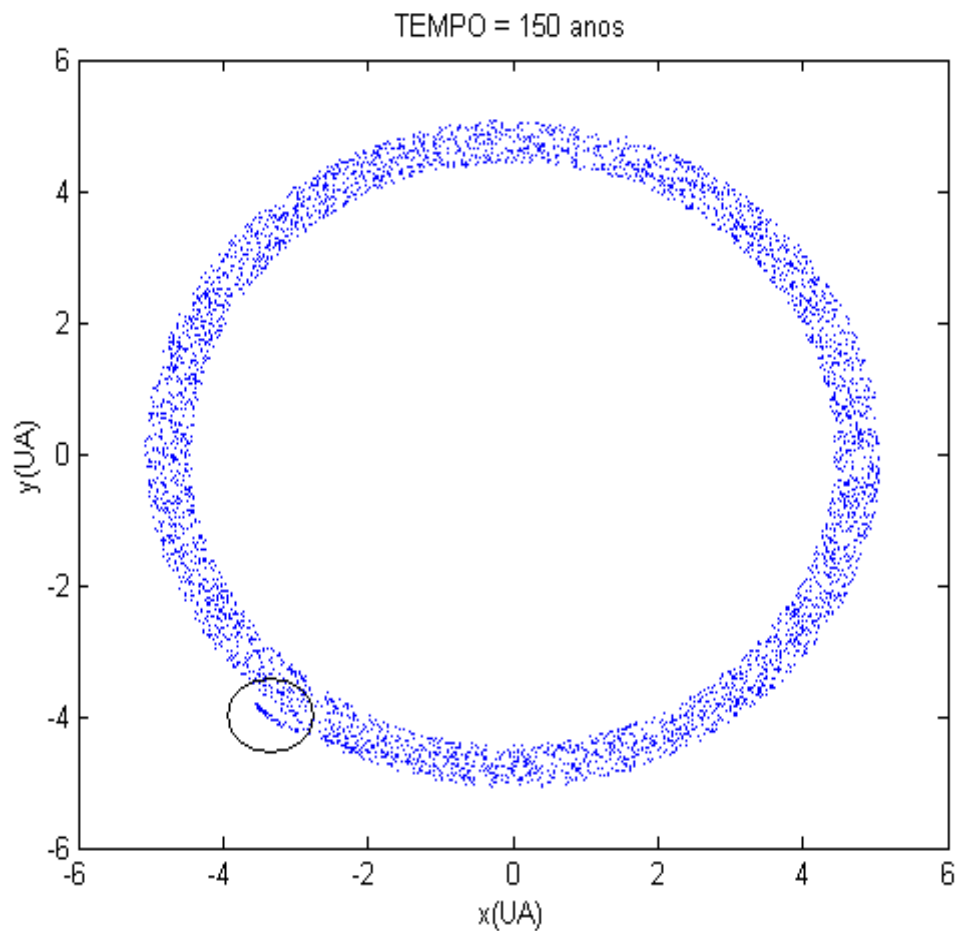
**Figura 6.8:** Distribuição das excentricidades das partículas à medida que elas foram capturadas pelo vórtice com  $f = 4$  depois de 300 anos. Neste caso não foi considerada a auto-gravidade da nebulosa. Essas excentricidades são das partículas que alcançaram a distância de 0,0007 UA em relação ao centro do vórtice. O raio das partículas é de 2,12 m. A viscosidade do gás é: a)  $\alpha = 10^{-5}$ , b)  $\alpha = 10^{-4}$

Para a elaboração das simulações numéricas desta tese, levamos em conta um único vórtice no disco, com uma razão da espessura do disco dividido pela distância radial de valor  $H/r \approx 0,07$  a 5,2 UA, Como prediz o modelo clássico de nebulosa solar. Começando com uma distribuição uniforme e aleatória de partículas no disco, elas acabam se concentrando no vórtice com o decorrer do tempo. No caso mostrado na Figura 6.9, temos as condições ótimas em relação ao tamanho das partículas (50 cm) e a viscosidade do gás. Com uma viscosidade  $\alpha$  de  $10^{-5}$ , o decaimento do raio é mínimo e favorece assim uma boa eficiência das capturas por mais tempo. Aumentando a viscosidade em 10 vezes (Fig. 6.10), podemos ver que depois do mesmo de tempo decorrido, a eficiência das capturas é menor devido ao decaimento exponencial do raio do vórtice. Se fizermos a mesma comparação para partículas maiores (2,12 m), a concentração dessas partículas dentro do vórtice se reduz bastante como se pode ver na figura 6.11. Isso mostra que a eficiência das capturas no vórtice não só depende da alongação como mostraram de La fuente Marcos e Barges (2001), mas também do tamanho das partículas sendo que a faixa ótima como demonstraram vários autores é [ 10 - 50 cm]. Lyra e seu grupo (2009) estudaram o efeito da auto-gravidade do disco proto-planetário sobre a formação dos vórtices mostrando que ela modifica a turbulência. Nesta tese, propomos estudar este efeito do ponto de vista da dinâmica da partícula. Comparando a figura 6.12 com a figura 6.11, constatamos que no caso onde se considera um disco proto-planetário com  $0.04 M_{\odot}$ , a escala do tempo de vida das partículas no disco parece ser mais curta. Para poder apreciar claramente a evolução temporal do mecanismo de confinamento vortical para o caso de um vórtice realista com alongação  $f = 4$ , levando em conta a auto-gravidade da nebulosa, geramos as figuras 6.13 a 6.20. A escala temporal evolutiva começa depois de 40 anos e como já foi visto, escolhemos partículas de 50 cm de raio pelo fato que este tamanho pertence à faixa ótima para o mecanismo de capturas. No primeiro caso, quando não levamos em conta a auto-gravidade, comparamos a evolução da concentração das partículas para dois valores de  $\alpha$ . O decrescimento exponencial do raio do vórtice ao longo do tempo reduz sensivelmente a acumulação das partículas dentro do vórtice como podemos ver nas figuras 6.14 e 6.16. Para o segundo caso, escolhemos o valor maior de  $\alpha$ , para mostrar a concentração de partículas em condições de maior

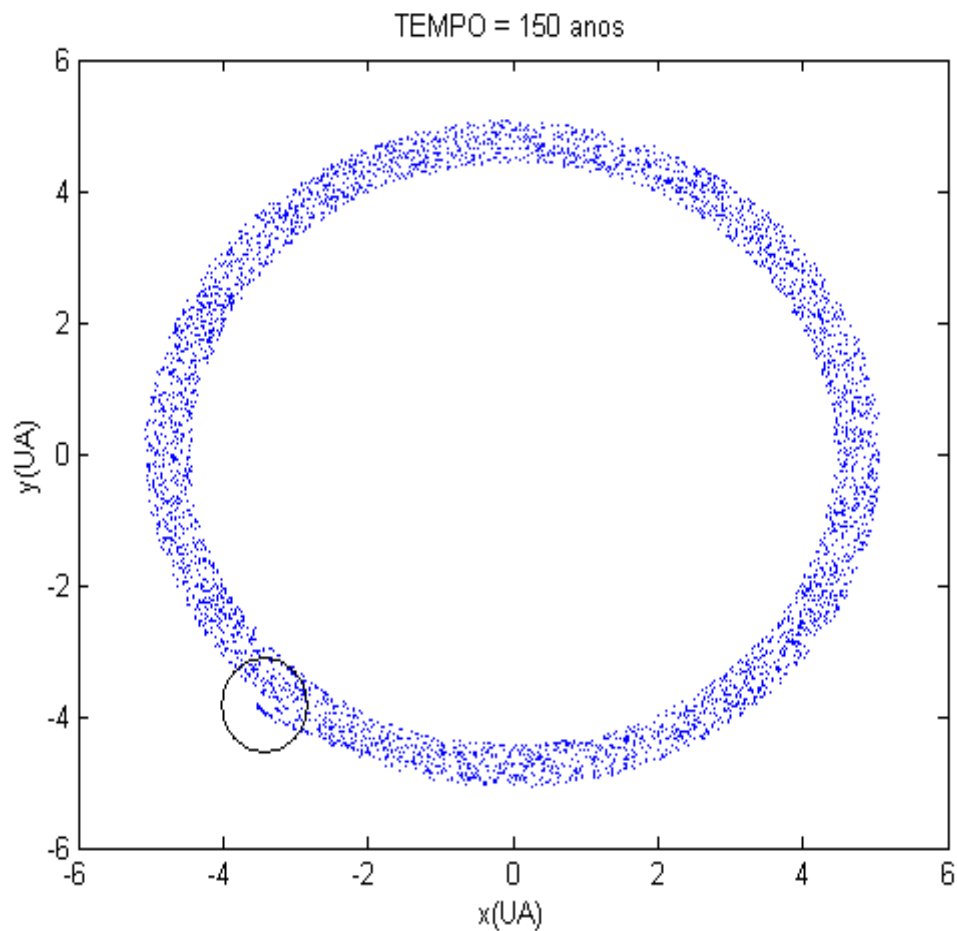
turbulência, condições mais realistas quando se leva em conta a auto-gravidade do disco proto-planetário. Vendo as figuras 6.16 e 6.18, constatamos que não tem muita diferença depois de 70 anos na concentração das partículas quando a massa do disco proto-planetário é de  $M_D = 0.01 M_\odot$ . Se consideramos agora que a massa do disco necessária para a formação dos planetas do sistema solar foi de  $M_D = 0.04 M_\odot$  e aplicamos essa auto-gravidade do disco a dinâmica das partículas, obtemos as figuras 6.19 e 6.20. A concentração das partículas no vórtice fica bem mais visível. Esse contraste maior do vórtice em relação ao resto do disco mostra um espalhamento maior das partículas no vórtice. Isso se deve pelo fato que a auto-gravidade aumenta sensivelmente o ciclo limite das partículas capturadas pelo vórtice. Porém, comparando as figuras 6.15 e 6.17 com a figura 6.19, percebemos que a concentração das partículas no interior do vórtice é mais rápida quando se leva em conta a auto-gravidade do disco. Este fato é muito interessante e será confirmado depois quando mostraremos a densidade de distribuição das partículas no interior do vórtice. Outro fato visível é a confirmação de que a escala temporal de vida das partículas no disco é menor quando elas são submetidas a auto-gravidade do disco proto-planetário.

Assim mostramos que até agora que a eficácia do processo de confinamento das partículas no interior do vórtice depende do modelo escolhido. de La fuente Marcos e Barges (2001) mostraram essencialmente que ela depende do tamanho das partículas, do modelo de vórtice escolhido (estático ou decrescente exponencialmente com o tempo) e da elongação do vórtice. Nessa tese, mostramos até agora que ela também depende do modelo do disco proto-planetário.

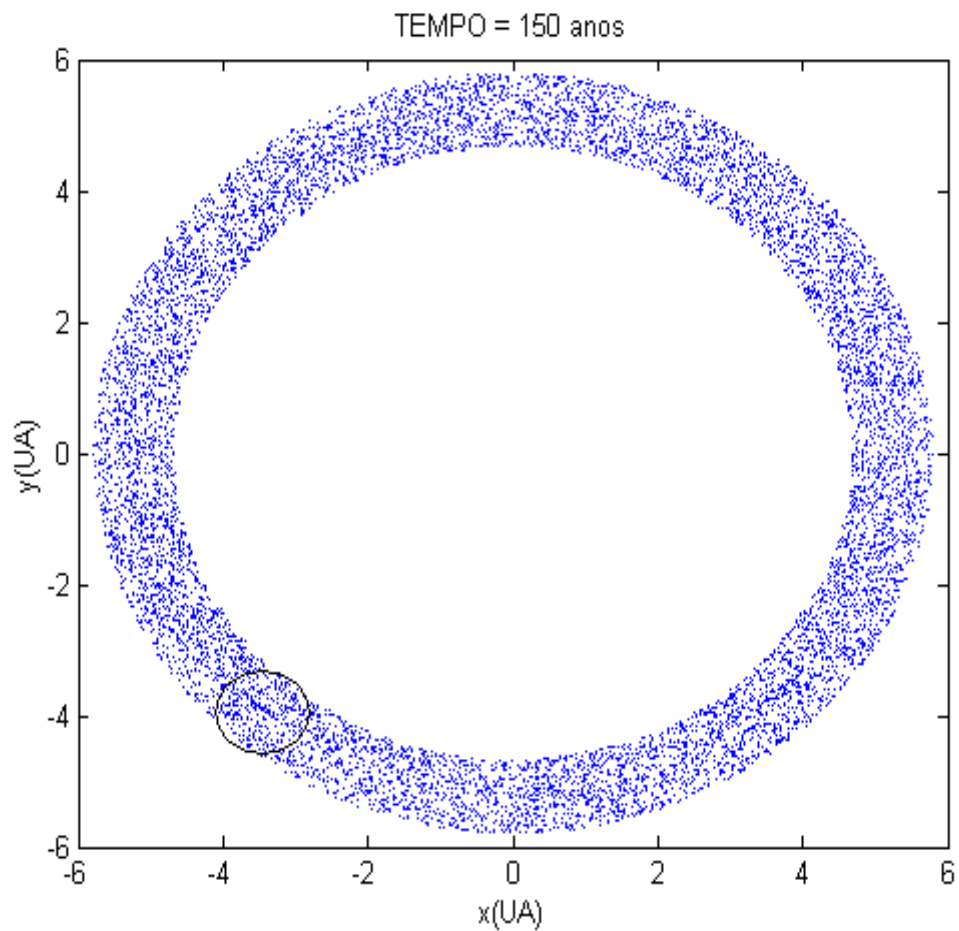




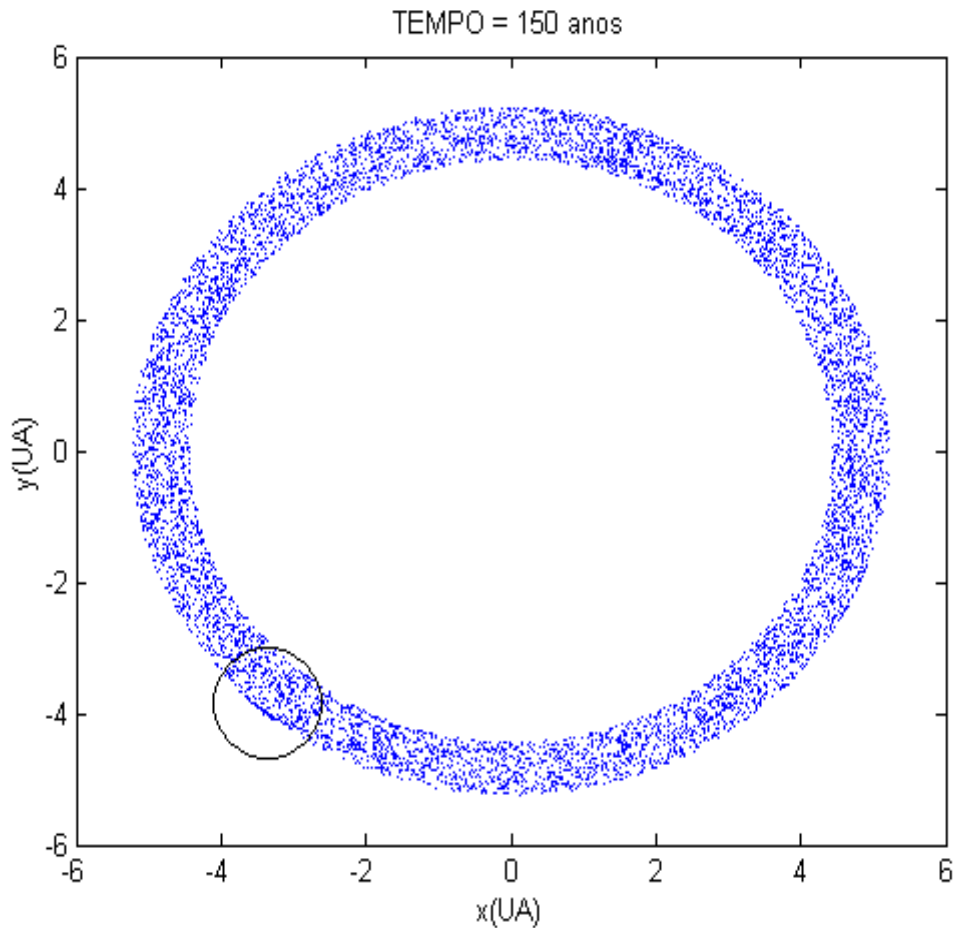
**Figura 6.9:** Configuração das partículas depois de 150 anos para um vórtice realista com ( $f = 4$ ) incluindo decaimento na amplitude com o tempo. O vórtice é visível na parte inferior esquerda. O raio inicial do vórtice era de 0,37 UA, mas depois de 150 anos para uma viscosidade  $\alpha = 10^{-5}$ , o raio é de 0,36 UA. O número de partículas é  $N = 10000$  com um raio de 50 cm e foram distribuídas uniformemente e aleatoriamente no domínio (4,8- 6,0 UA, Valor inicial do raio interno e externo do anel). Nesse caso não foi considerado a auto- gravidade do disco. Nessa figura se vê que o vórtice confinou uma quantidade apreciável de partículas mostrando a boa eficiência desse processo nessas condições.



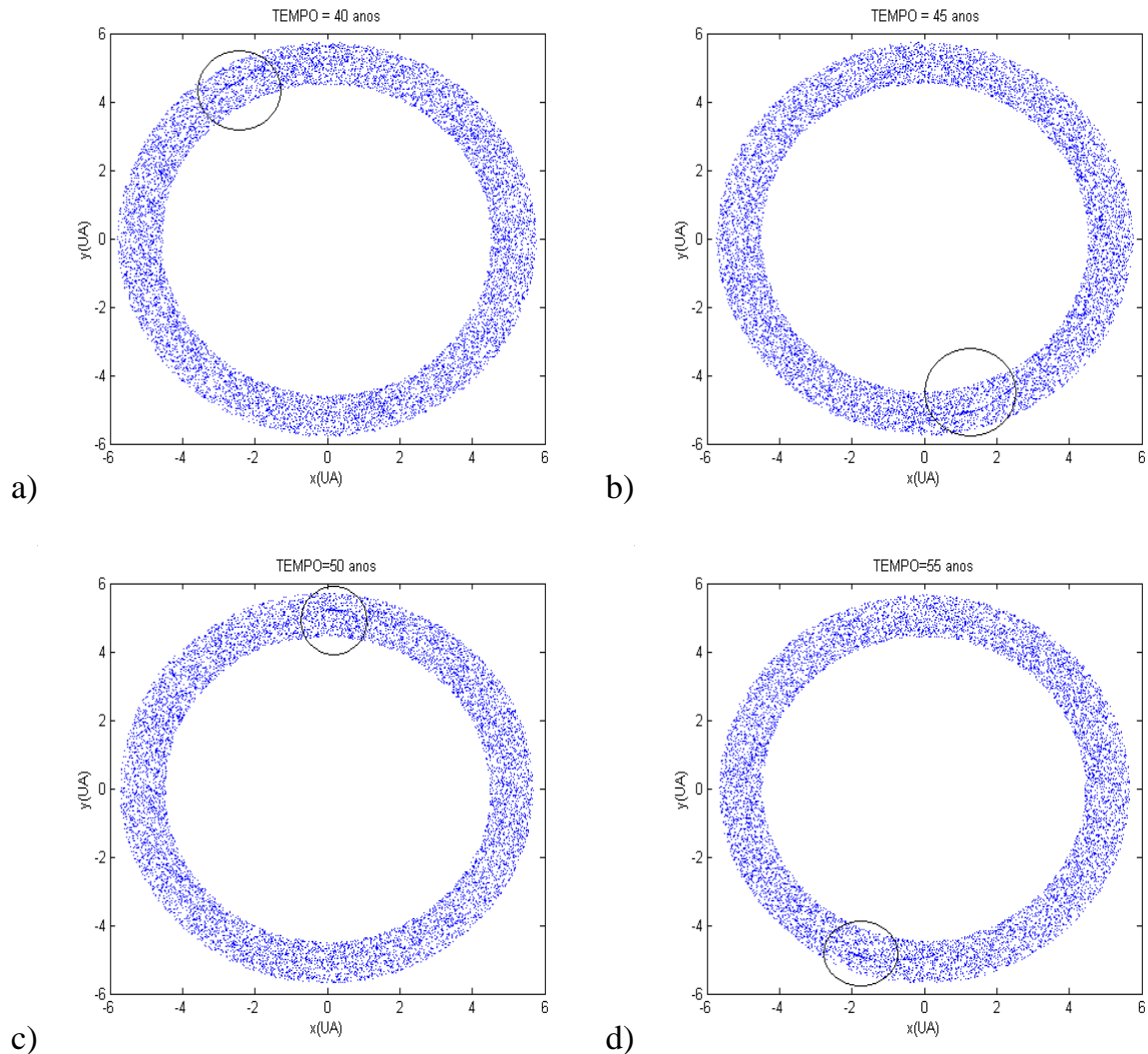
**Figura 6.10:** Configuração das partículas depois de 150 anos para um vórtice realista com ( $f = 4$ ) incluindo decaimento na amplitude com o tempo. O vórtice é visível na parte inferior esquerda. O raio inicial do vórtice era de 0,37 UA, mas depois de 150 anos para uma viscosidade  $\alpha = 10^{-4}$ , o raio é de 0,27 UA. O número de partículas é  $N = 10000$  com um raio de 50 cm e foram distribuídas uniformemente e aleatoriamente no domínio (4,8- 6,0 UA, Valor inicial do raio interno e externo do anel). Nesse caso não foi considerado a auto-gravidade do disco. Nessa figura se vê que o vórtice confinou também uma certa quantidade de partículas mostrando a eficiência desse processo nessas condições.



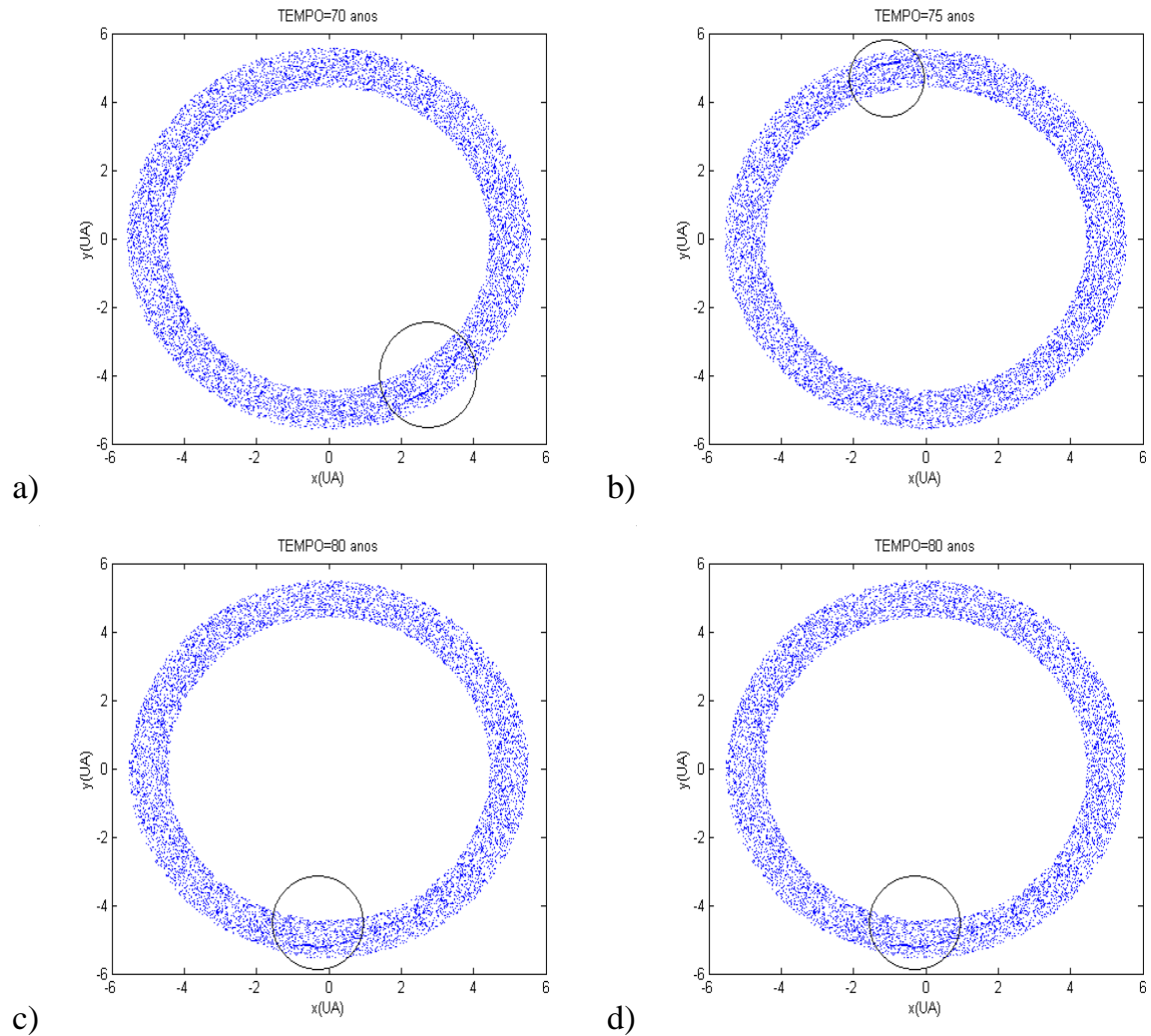
**Figura 6.11:** Configuração das partículas depois de 150 anos para um vórtice realista com  $(f = 4)$  incluindo decaimento na amplitude com o tempo. O vórtice é visível na parte inferior esquerda. O raio inicial do vórtice era de 0,37 UA, mas depois de 150 anos para uma viscosidade  $\alpha = 10^{-4}$ , o raio é de 0,27 UA. O número de partículas é  $N = 10000$  com um raio de 2,12 m e foram distribuídas uniformemente e aleatoriamente no domínio (4,8- 6,0 UA, Valor inicial do raio interno e externo do anel). Nesse caso não foi considerado a auto-gravidade do disco.



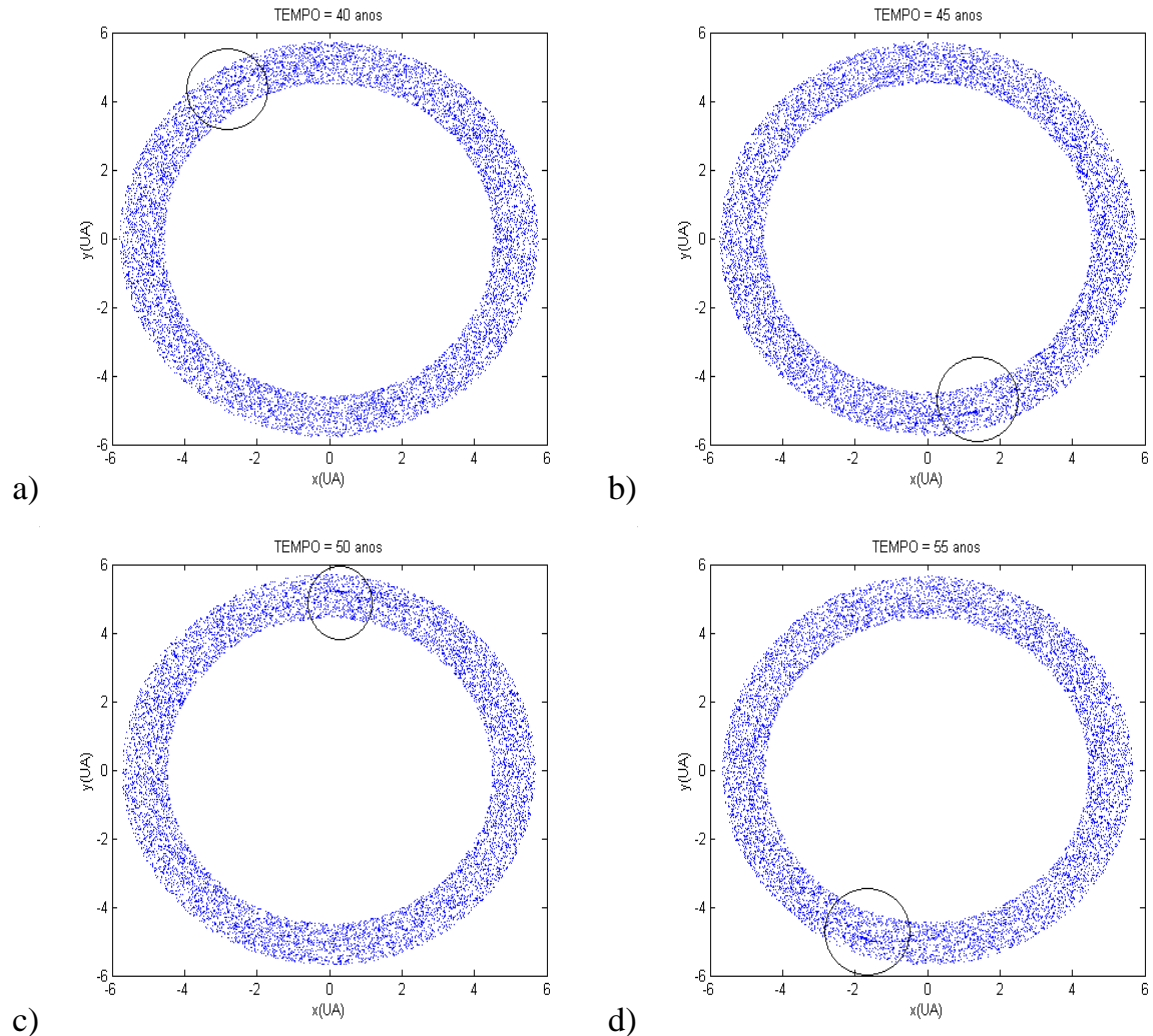
**Figura 6.12:** Configuração das partículas depois de 150 anos para um vórtice realista com ( $f = 4$ ) incluindo decaimento na amplitude com o tempo. O vórtice é visível na parte inferior esquerda. O raio inicial do vórtice era de 0,37 UA, mas depois de 150 anos para uma viscosidade  $\alpha = 10^{-4}$ , o raio é de 0,27 UA. O número de partículas é  $N = 10000$  com um raio de 2,12 m e foram distribuídas uniformemente e aleatoriamente no domínio (4,8- 6,0 UA, Valor inicial do raio interno e externo do anel). Nesse caso foi considerado a auto-gravidade do disco de  $0.04 M_{\odot}$ . Vemos aqui que a auto-gravidade aumenta a velocidade de decaimento das partículas pela posição do vórtice se a comparamos com a figura 6.11.



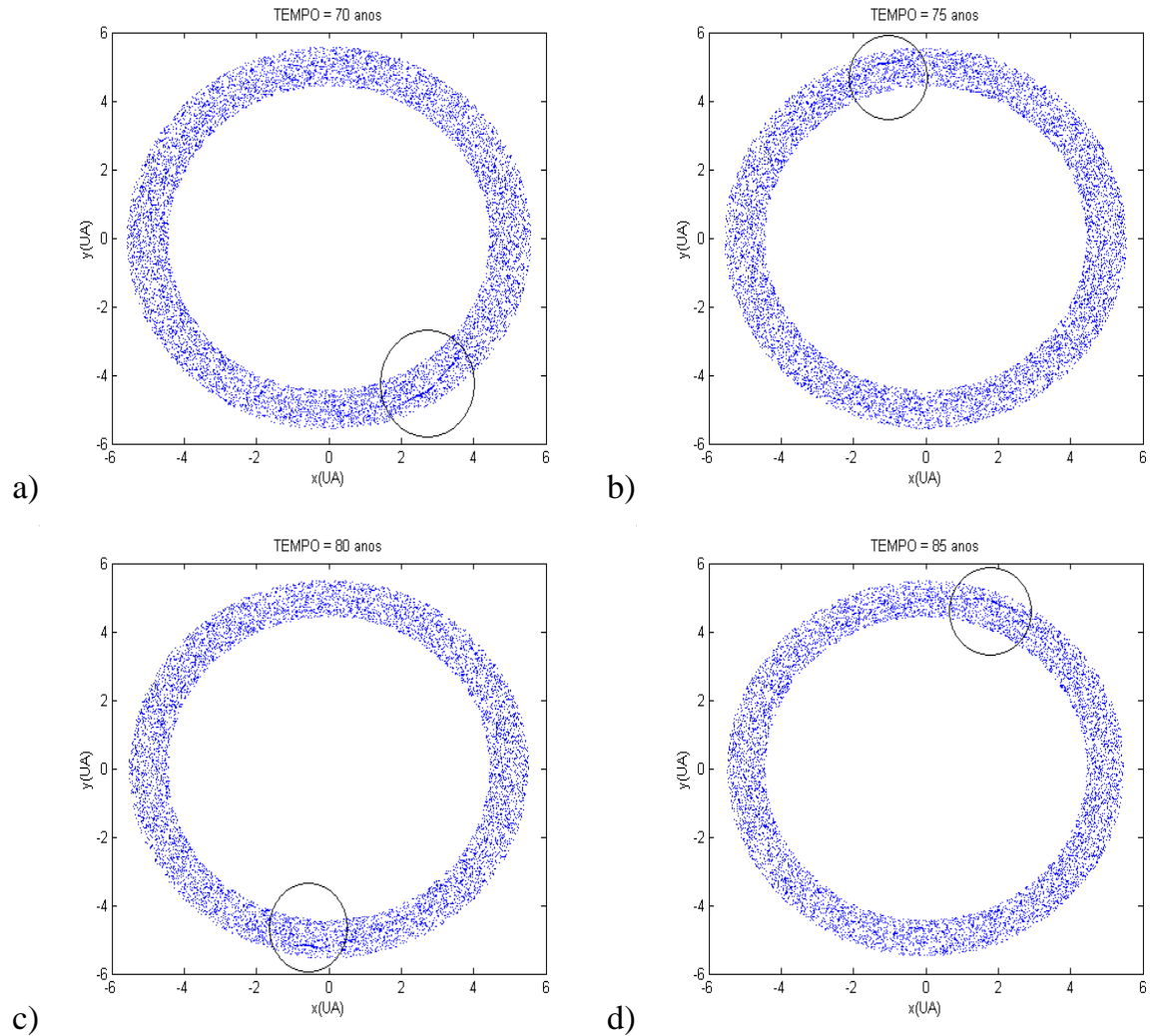
**Figura 6.13:** a) Configuração das partículas num disco proto-planetário depois de 40 anos para um vórtice realista com ( $f = 4$ ) incluindo decaimento na amplitude com o tempo. b) Configuração das partículas depois de 45anos. c) Configuração das partículas depois de 50anos. d) Configuração das partículas depois de 55anos. O raio inicial do vórtice era de 0,37 UA. O número de partículas é  $N = 10000$  com um raio de 50 cm e foram distribuídas uniformemente e aleatoriamente no domínio (4,8-6,0 UA, Valor inicial do raio interno e externo do anel). A viscosidade do gás é  $\alpha = 10^{-5}$ . Nesse caso não foi levado em conta a auto-gravidade do disco.



**Figura 6.14:** a) Configuração das partículas num disco proto-planetário depois de 70 anos para um vórtice realista com ( $f = 4$ ) incluindo decaimento na amplitude com o tempo. b) Configuração das partículas depois de 75anos. c) Configuração das partículas depois de 80anos. d) Configuração das partículas depois de 85anos. O raio inicial do vórtice era de 0,37 UA. O número de partículas é  $N = 10000$  com um raio de 50 cm e foram distribuídas uniformemente e aleatoriamente no domínio (4,8-6,0 UA, Valor inicial do raio interno e externo do anel). A viscosidade do gás é  $\alpha = 10^{-5}$ . Nesse caso não foi levado em conta a auto-gravidade do disco.

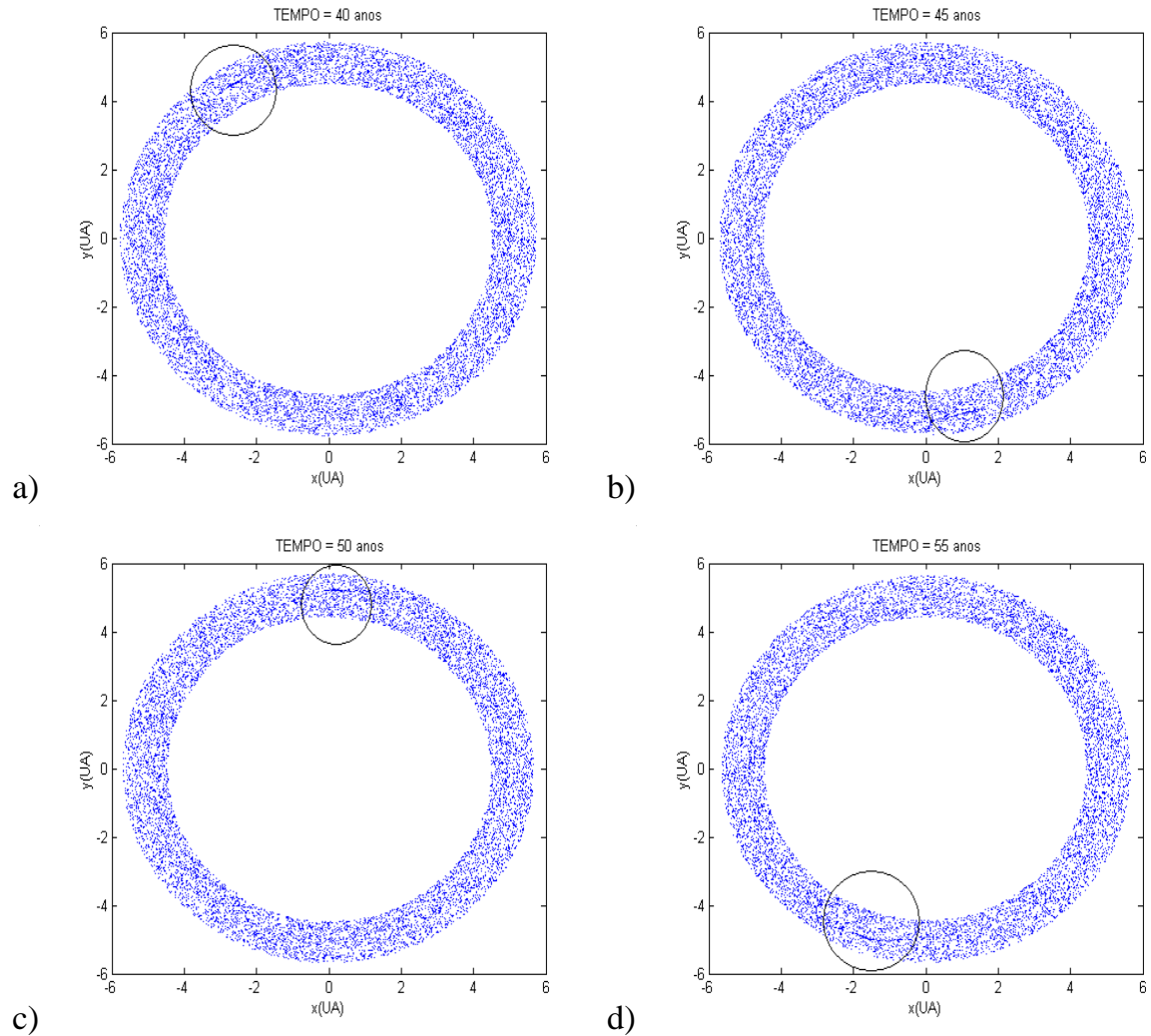


**Figura 6.15:** a) Configuração das partículas num disco proto-planetário depois de 40 anos para um vórtice realista com ( $f = 4$ ) incluindo decaimento na amplitude com o tempo. b) Configuração das partículas depois de 45anos. c) Configuração das partículas depois de 50anos. d) Configuração das partículas depois de 55anos. O raio inicial do vórtice era de 0,37 UA. O número de partículas é  $N = 10000$  com um raio de 50 cm e foram distribuídas uniformemente e aleatoriamente no domínio (4,8-6,0 UA, Valor inicial do raio interno e externo do anel). A viscosidade do gás é  $\alpha = 10^{-4}$ . Neste caso não foi levado em conta a auto-gravidade do disco.

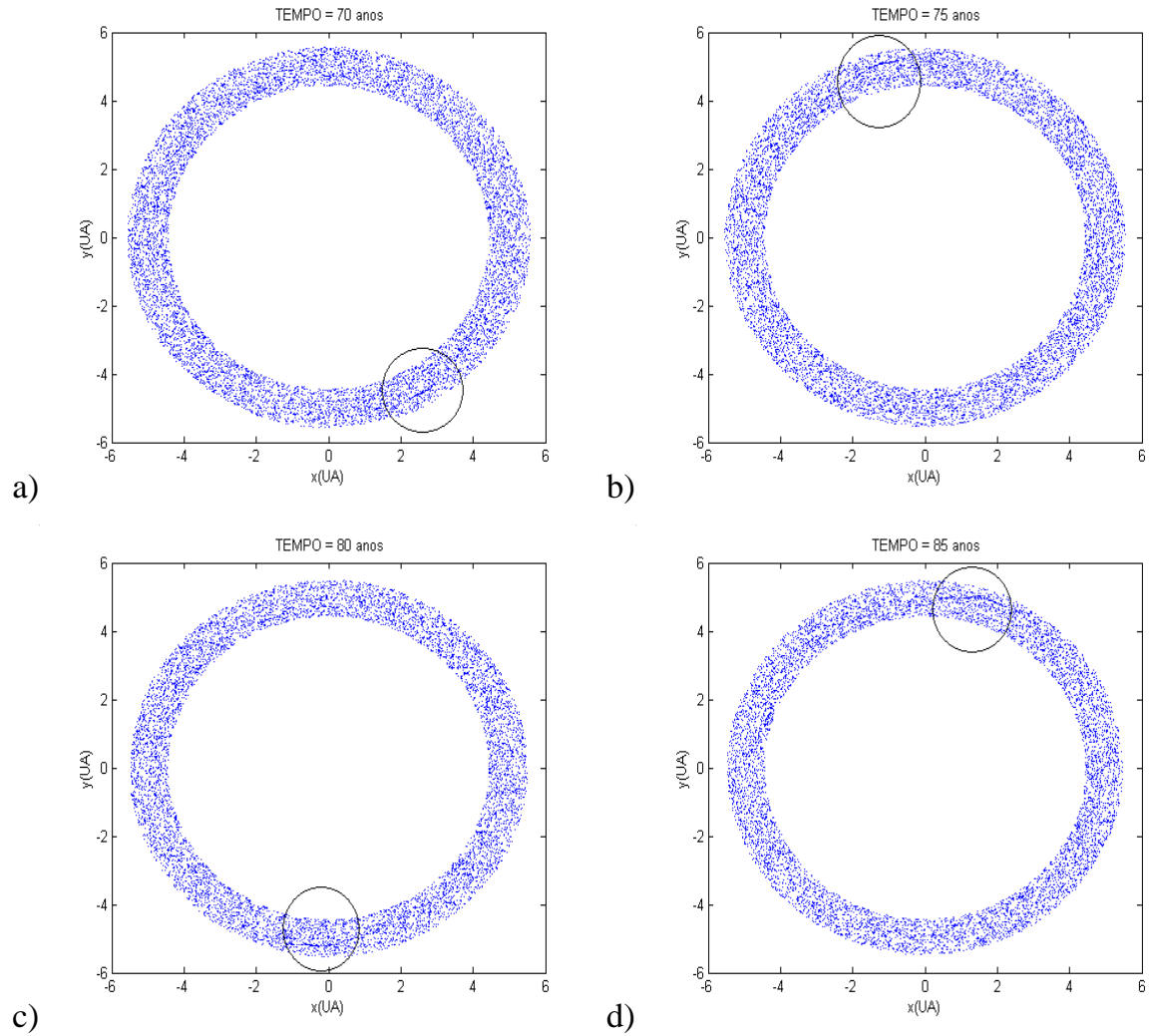


**Figura 6.16:** a) Configuração das partículas num disco proto-planetário depois de 70 anos para um vórtice realista com ( $f = 4$ ) incluindo decaimento na amplitude com o tempo. b) Configuração das partículas depois de 75anos. c) Configuração das partículas depois de 80anos. d) Configuração das partículas depois de 85anos. O raio inicial do vórtice era de 0,37 UA. O número de partículas é  $N = 10000$  com um raio de 50 cm e foram distribuídas uniformemente e aleatoriamente no domínio (4,8-6,0 UA, Valor inicial do raio interno e externo do anel). A viscosidade do gás é  $\alpha = 10^{-4}$ . Neste caso não foi levado em conta a auto-gravidade do disco.

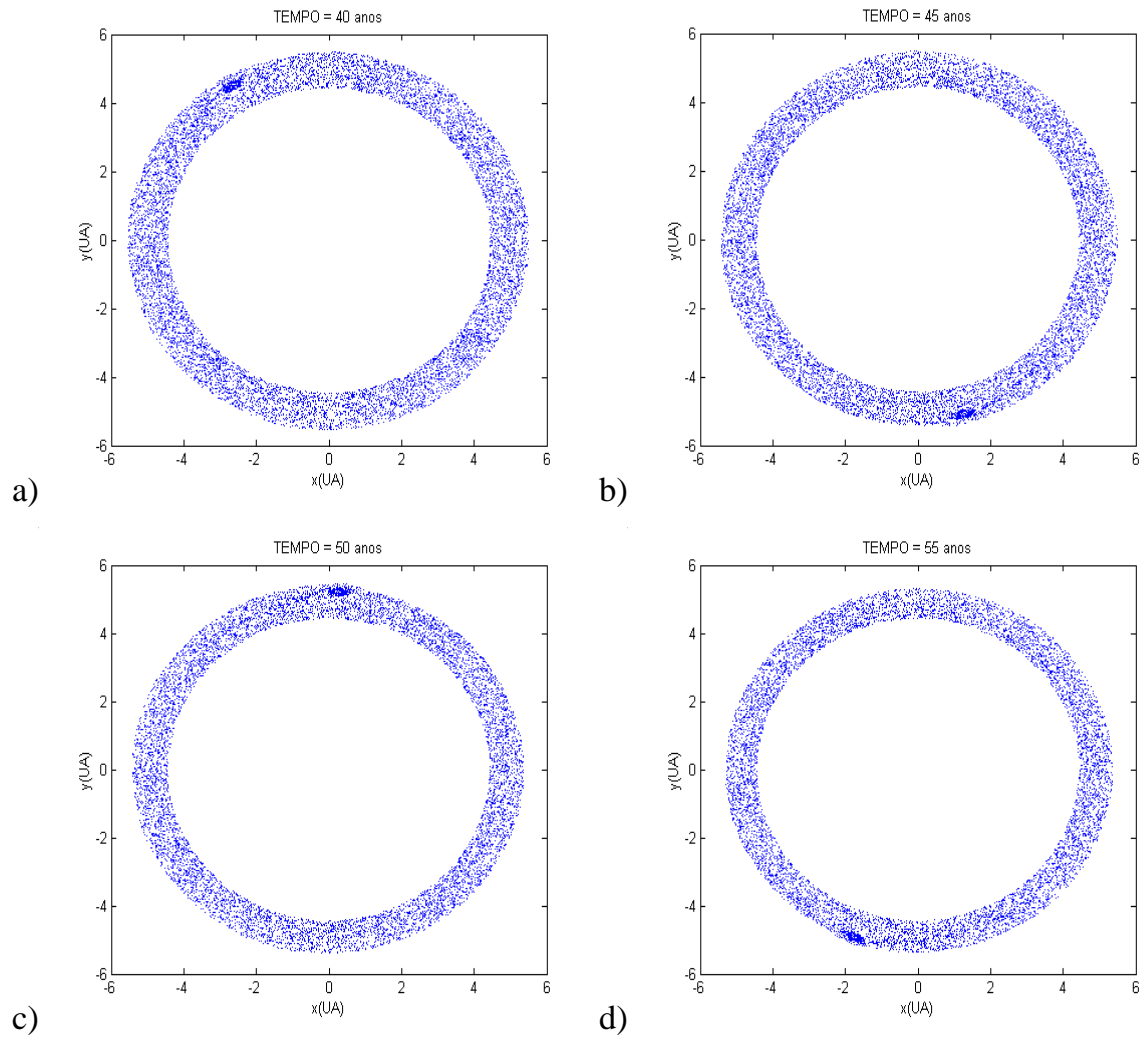




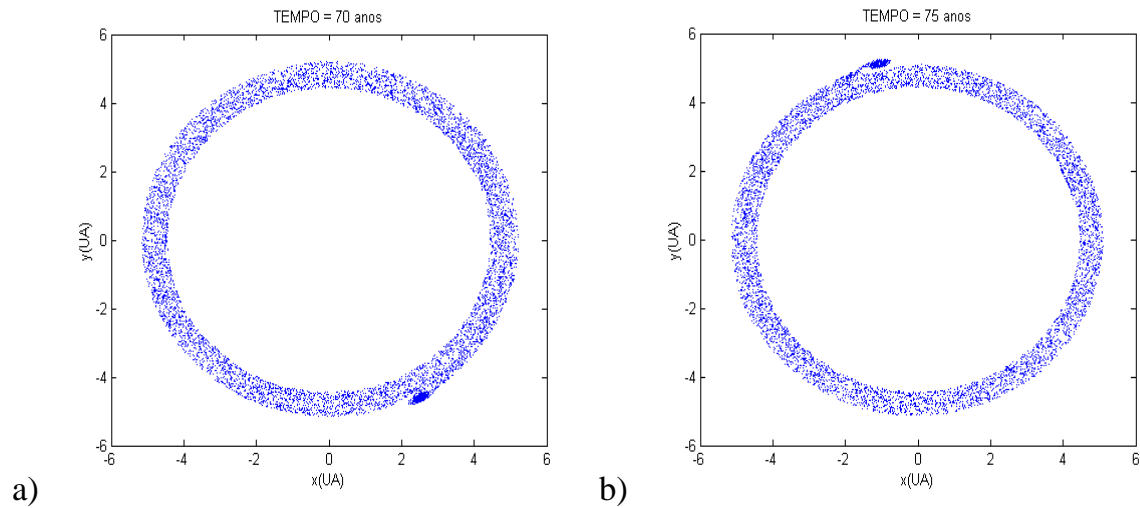
**Figura 6.17:** a) Configuração das partículas num disco proto-planetário depois de 40 anos para um vórtice realista com ( $f = 4$ ) incluindo decaimento na amplitude com o tempo. b) Configuração das partículas depois de 45anos. c) Configuração das partículas depois de 50anos. d) Configuração das partículas depois de 55anos. O raio inicial do vórtice era de 0,37 UA. O número de partículas é  $N = 10000$  com um raio de 50 cm e foram distribuídas uniformemente e aleatoriamente no domínio (4,8-6,0 UA, Valor inicial do raio interno e externo do anel). A viscosidade do gás é  $\alpha = 10^{-4}$ . Neste caso foi levado em conta a auto-gravidade do disco onde  $M_D = 0.01 M_{\odot}$ .



**Figura 6.18:** a) Configuração das partículas num disco proto-planetário depois de 70 anos para um vórtice realista com ( $f = 4$ ) incluindo decaimento na amplitude com o tempo. b) Configuração das partículas depois de 75anos. c) Configuração das partículas depois de 80anos. d) Configuração das partículas depois de 85anos. O raio inicial do vórtice era de 0,37 UA. O número de partículas é  $N = 10000$  com um raio de 50 cm e foram distribuídas uniformemente e aleatoriamente no domínio (4,8-6,0 UA, Valor inicial do raio interno e externo do anel). A viscosidade do gás é  $\alpha = 10^{-4}$ . Neste caso foi levado em conta a auto-gravidade do disco onde  $M_D = 0.01 M_\odot$ .



**Figura 6.19:** a) Configuração das partículas num disco proto-planetário depois de 40 anos para um vórtice realista com ( $f = 4$ ) incluindo decaimento na amplitude com o tempo. b) Configuração das partículas depois de 45anos. c) Configuração das partículas depois de 50anos. d) Configuração das partículas depois de 55anos. O raio inicial do vórtice era de 0,37 UA. O número de partículas é  $N = 10000$  com um raio de 50 cm e foram distribuídas uniformemente e aleatoriamente no domínio (4,8-6,0 UA, Valor inicial do raio interno e externo do anel). A viscosidade do gás é  $\alpha = 10^{-4}$ . Neste caso foi levado em conta a auto-gravidade do disco onde  $M_D = 0.04 M_\oplus$ .



**Figura 6.20:** a) Configuração das partículas num disco proto-planetário depois de 70 anos para um vórtice realista com ( $f = 4$ ) incluindo decaimento na amplitude com o tempo. b) Configuração das partículas depois de 75anos. O raio inicial do vórtice era de 0,37 UA. O número de partículas é  $N = 10000$  com um raio de 50 cm e foram distribuídas uniformemente e aleatoriamente no domínio (4,8-6,0 UA, Valor inicial do raio interno e externo do anel). A viscosidade do gás é  $\alpha = 10^{-4}$ . Neste caso foi levado em conta uma auto-gravidade do disco onde  $M_D = 0.04 M_\odot$ . Nessa figura o contraste entre o vórtice e os arredores é suficientemente importante para mostrar um espalhamento maior da matéria capturada pelo vórtice quando se inclua a auto-gravidade do disco.

Tanga e seus colaboradores (2002) mostraram a evolução temporal de um “cluster” quando se leva em conta a atração gravitacional mútua entre as partículas. Vamos mostrar aqui a evolução temporal da densidade de distribuição das partículas dentro do vórtice quando se leva em conta a auto-gravidade do disco. Escolhemos dois tempos representativos da evolução da dinâmica das capturas, depois de 20 anos e depois de 50 anos. Aqui, vamos comparar os três casos onde não há auto-gravidade do disco,  $M_D = 0.01 M_\odot$  e  $M_D = 0.04 M_\odot$ . Se comparamos, as figuras 6.21, 6.22 e 6.23, percebemos que depois de 20 anos a concentração no centro do vórtice é maior para os dois primeiros casos. Na figura 6.23, podemos ver que a densidade de partículas começa a aumentar onde se situa o vórtice. Depois de 50 anos, a quantidade de partículas dentro do vórtice é maior para os dois últimos casos (figuras 6.25 e 6.26) e menor, para na figura 6.24.. Destacaremos a figura 6.26, onde aparece uma grande quantidade de partículas dentro do vórtice formando um conjunto mais denso na borda. Para completar nosso estudo sobre a acumulação de partículas dentro dos vórtices, vamos mostrar o ritmo das capturas em relação ao tempo. A figura 6.27 mostra uma diferença a partir de 80 anos entre o ritmo das capturas quando variamos o parâmetro da viscosidade do gás  $\alpha$  de  $10^{-5}$  a  $10^{-4}$ . Isso mostra que o decaimento exponencial do vórtice tem um efeito sobre a dinâmica das capturas somente depois de no mínimo seis ou sete órbitas.

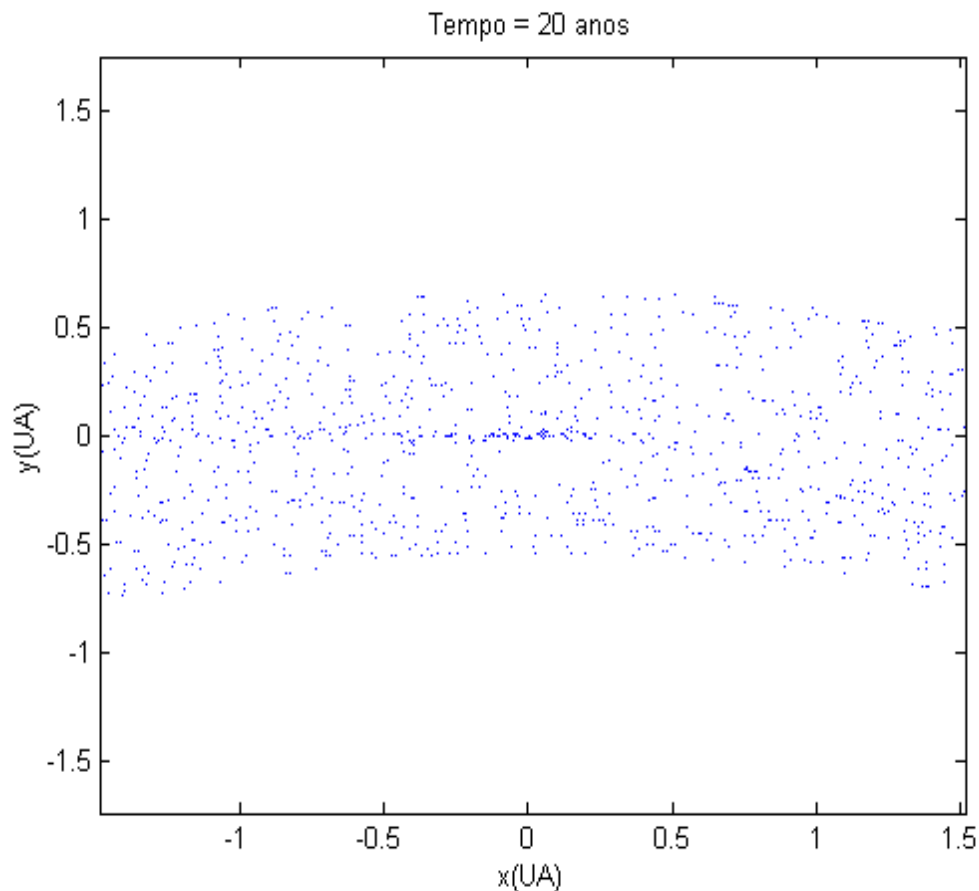
Lyra e seus colaboradores (2009) mostraram que a escala temporal por um colapso gravitacional capaz de formar um embrião do tamanho de Marte poderia ocorrer em somente cinco órbitas ( $\approx 60$  anos). Assim nossa escolha por um parâmetro  $\alpha$  mais realista ( $10^{-4}$ ) quando se leva em conta a auto-gravidade do disco não modificara em nada os resultados finais.

Pelo fato de que a auto-gravidade do disco e a interação gravitacional mútua têm como consequência de espalhar a matéria (Tanga et al., 2002) ou modificar a turbulência (Lyra et al, 2009) era de se esperar que a auto-gravidade do disco como sugeriram (de La fuente Marcos e Barges , 2001) diminua o ritmo das capturas. Porém, o gráfico da figura 6.28, quando consideramos as primeiras cinco órbitas, mostra que a

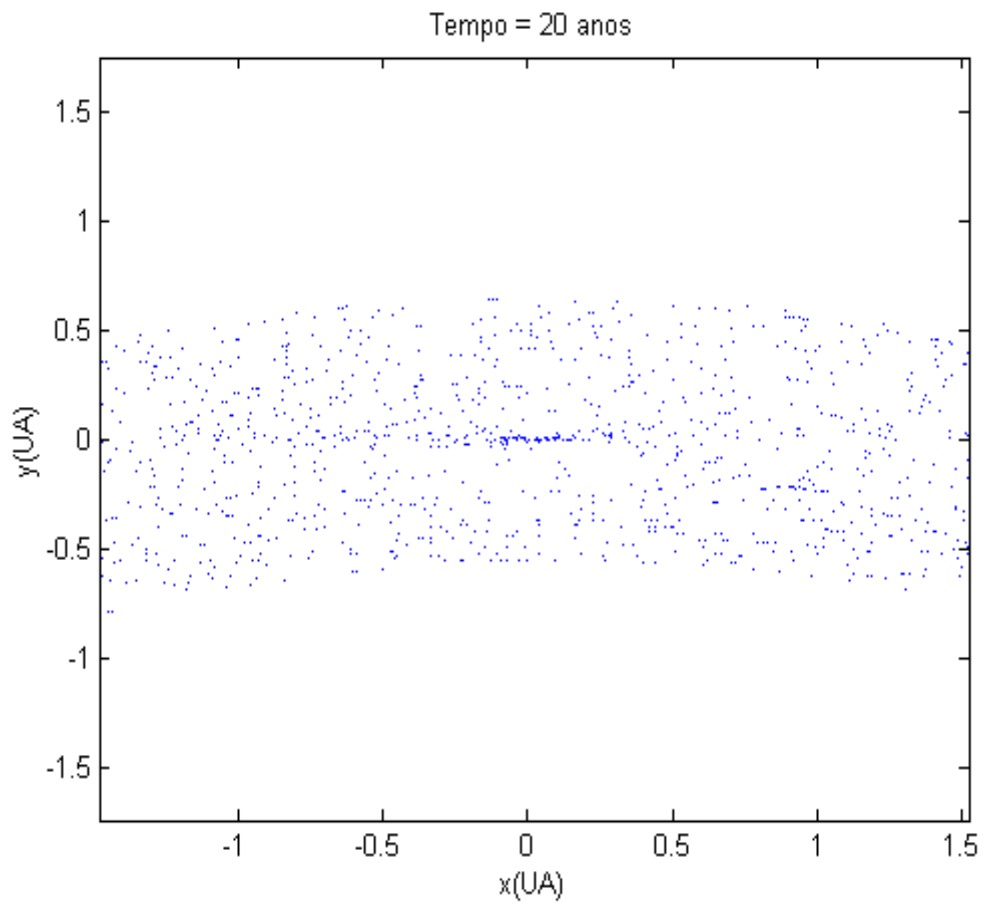
auto-gravidade do disco durante esse período acelera o ritmo das capturas. Uma das limitações para gerar este gráfico é o fato de que o ciclo limite aumenta sensivelmente quando se considera a auto-gravidade. Assim, tivemos que aumentar o raio de capturas para 0,2 UA, desfavorecendo inicialmente o caso do disco com uma massa de  $M_D = 0.04 M_\odot$ . Beckwith e Sargent (1997), já sugeriram que uma nebulosa menor que  $0.01 M_\odot$  só seria capaz de produzir planetas terrestres sem a presença das gigantes gasosas. Recentemente, Klahr e Bodenheimer (2006) evidenciaram que não precisaria de uma massa do disco maior que a massa mínima para produzir os núcleos dos planetas gigantes. O crescimento por coagulação para a formação planetária tem sido evitado porque a escala de tempo para a coagulação é muito maior que a escala de tempo para um colapso gravitacional. O papel dos vórtices parece ser uma idéia muito bem aceita.

Um dos modelos de Klahr e Bodenheimer (2006) assume que as partículas não se acumulam no centro do vórtice formando um núcleo gigante, mas formam uma região de núcleo enriquecida de massa sólida contendo ainda o gás. Essa camada de partículas pode eventualmente submeter-se ao colapso gravitacional (Goldreich e Ward, 1973). Mesmo se o vórtice não é 100% kepleriano ou migra radialmente, a tendência das partículas é ficar no vórtice. Mas provavelmente, uma parte dos planetesimais é ejetada pelo desacoplamento do gás. Assim, os vórtices podem ser utilizados para constituir planetesimais de tamanho quilométrico que formariam planetas independentemente do vórtice. Isso ocorreria por uma rápida coagulação entre os planetesimais. Essa questão na formação planetária (colapso gravitacional ou coagulação) pode começar a ser respondida aqui quando consideramos a auto-gravidade do disco. Quando incluímos a auto-gravidade, os resultados que obtivemos mostram que a acumulação da matéria dentro vórtice é bem mais rápida. Temos uma concentração maior numa escala de tempo menor. Isso poderia favorecer o caso citado acima. É um ponto muito importante na formação dos núcleos planetários até hoje bastante discutido. De fato, a formação dos núcleos planetários dos planetas gigantes precisa da acumulação de material maior que  $1M_\oplus$  em muito pouco tempo para que o colapso ocorra antes do efeito gravitacional dentro vórtice começar a expulsar os planetesimais ( Tanga et al, 2002). A auto-gravidade até então bastante negligenciada

por muitos autores seria uma ferramenta necessária a ser incluído no modelo de formação planetária para explicar tal fato. Os efeitos da auto-gravidade na dinâmica das partículas tem outra implicação. A auto-gravidade reduz a escala temporal de vida das partículas da nebulosa proto-planetária. A figura 6.29 mostra claramente este fato. Podemos concluir que as nebulosas mais massivas têm um tempo de vida mais curta para a formação planetária que as nebulosas de massa mínima.

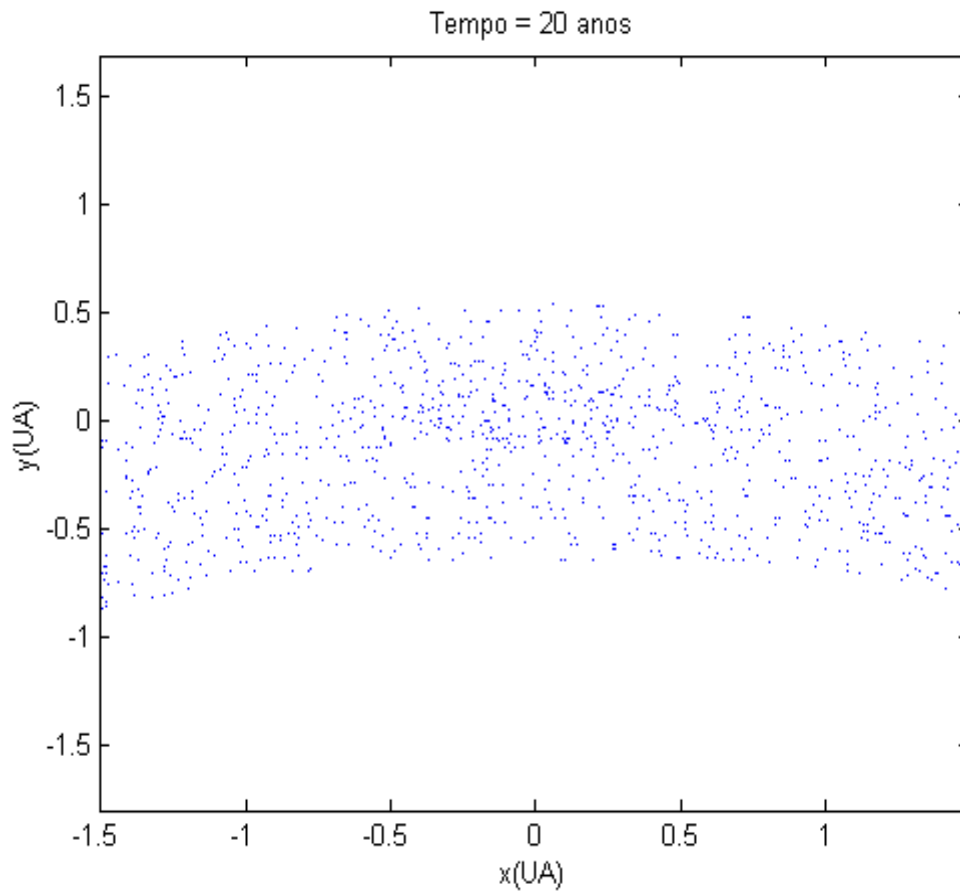


**Figura 6.21:** Configuração das partículas no sistema de coordenadas centrado no vórtice depois de 20 anos. O raio inicial do vórtice era de 0,37 UA. O número de partículas é  $N = 10000$  com um raio de 50 cm. A viscosidade do gás é  $\alpha = 10^{-4}$ . Neste caso não foi levado em conta a auto-gravidade do disco. Essa figura foi focalizada no vórtice para ver a eficiência do processo de confinamento.

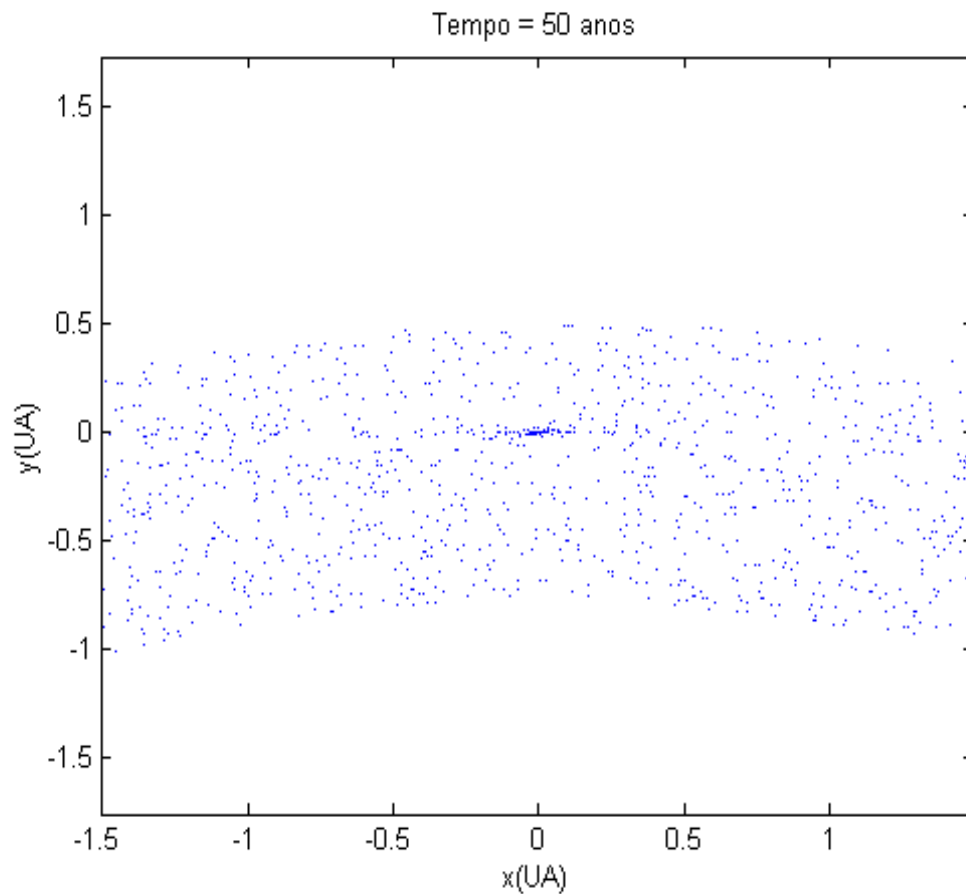


**Figura 6.22:** Configuração das partículas no sistema de coordenadas centrado no vórtice depois de 20 anos. O raio inicial do vórtice era de 0,37 UA. O número de partículas é  $N = 10000$  com um raio de 50 cm. A viscosidade do gás é  $\alpha = 10^{-4}$ . Neste caso foi levado em conta a auto-gravidade do disco onde  $M_D = 0.01 M_{\odot}$ . Essa figura foi focalizada no vórtice para ver a eficiência do processo de confinamento.

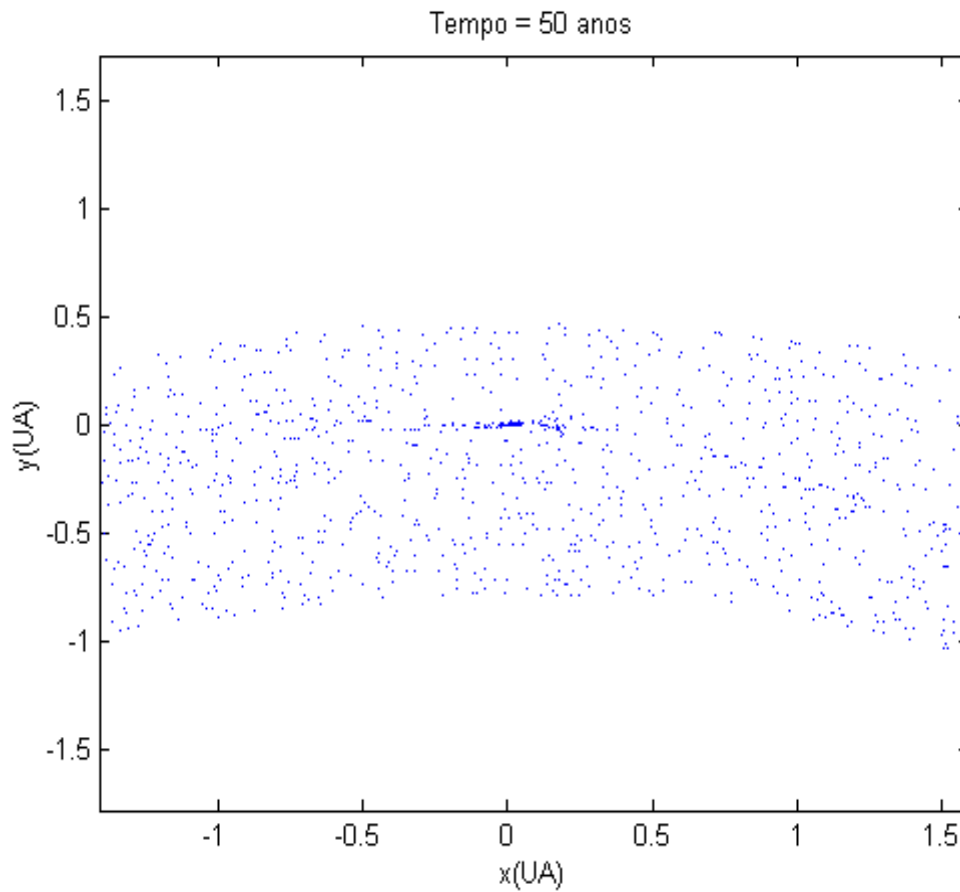




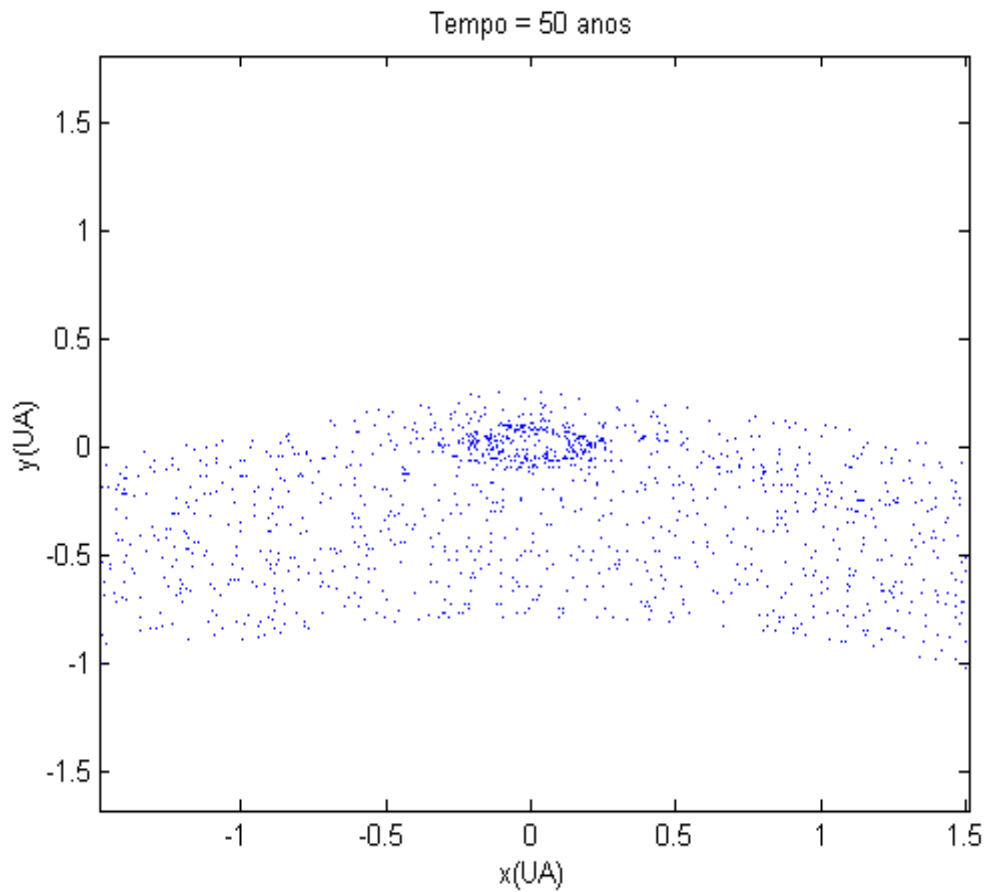
**Figura 6.23:** Configuração das partículas no sistema de coordenadas centrado no vórtice depois de 20 anos. O raio inicial do vórtice era de 0,37 UA. O número de partículas é  $N = 10000$  com um raio de 50 cm. A viscosidade do gás é  $\alpha = 10^{-4}$ . Neste caso foi levado em conta a auto-gravidade do disco onde  $M_D = 0.04 M_\odot$ . Essa figura foi focalizada no vórtice para ver a eficiência do processo de confinamento.



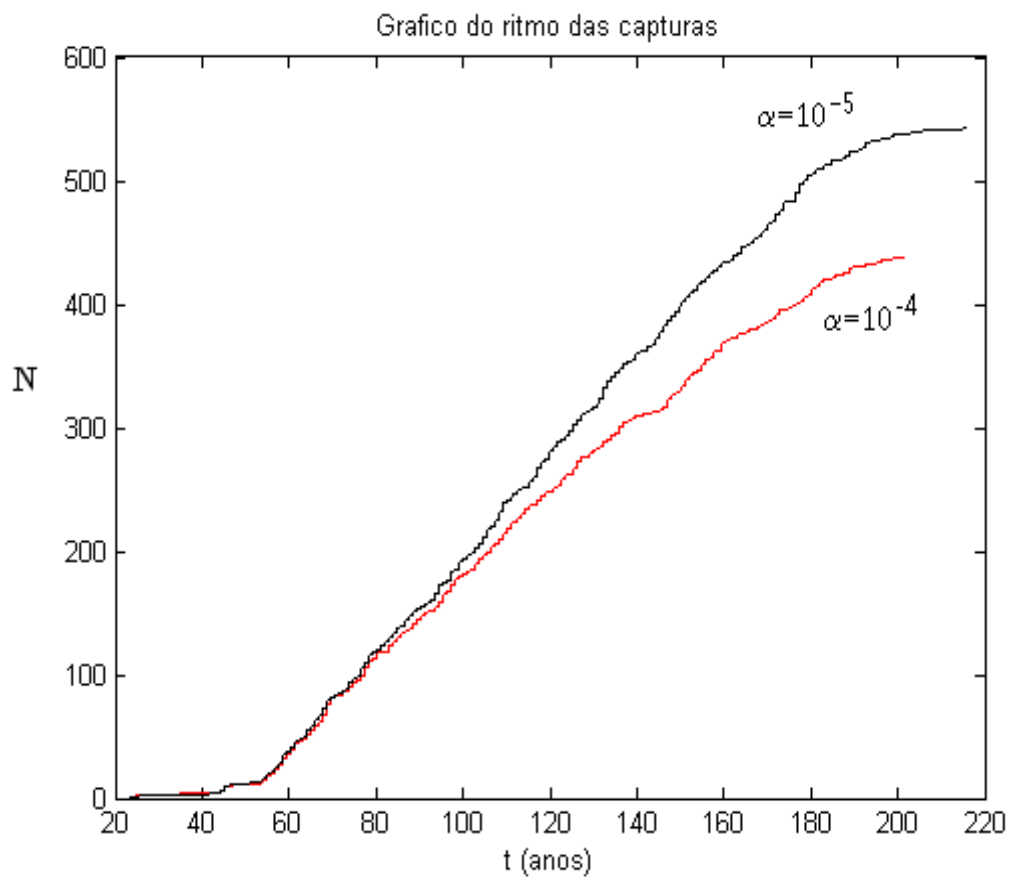
**Figura 6.24:** Configuração das partículas no sistema de coordenadas centrado no vórtice depois de 50 anos. O raio inicial do vórtice era de 0,37 UA. O número de partículas é  $N = 10000$  com um raio de 50 cm. A viscosidade do gás é  $\alpha = 10^{-4}$ . Neste caso não foi levado em conta a auto-gravidade do disco. Essa figura foi focalizada no vórtice para ver a eficiência do processo de confinamento.



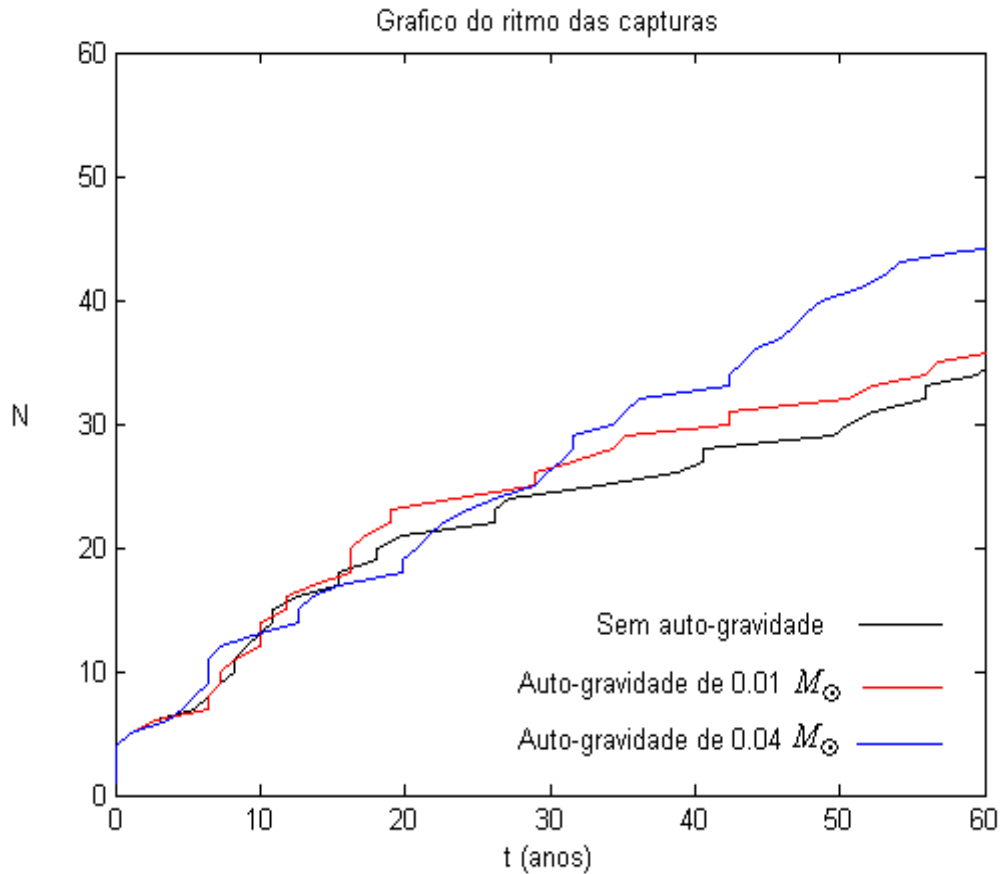
**Figura 6.25:** Configuração das partículas no sistema de coordenadas centrado no vórtice depois de 50 anos. O raio inicial do vórtice era de 0,37 UA. O número de partículas é  $N = 10000$  com um raio de 50 cm. A viscosidade do gás é  $\alpha = 10^{-4}$ . Neste caso foi levado em conta a auto-gravidade do disco onde  $M_D = 0.01 M_\odot$ . Essa figura foi focalizada no vórtice para ver a eficiência do processo de confinamento.



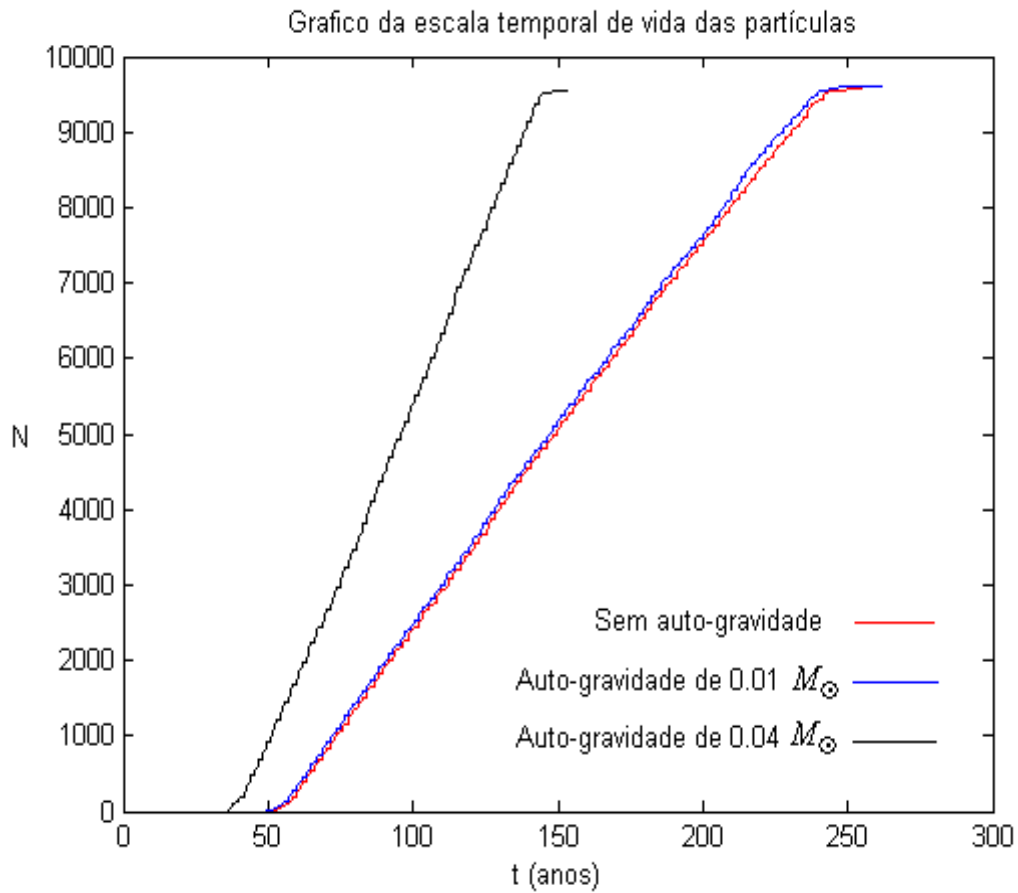
**Figura 6.26:** Configuração das partículas no sistema de coordenadas centrado no vórtice depois de 50 anos. O raio inicial do vórtice era de 0,37 UA. O número de partículas é  $N = 10000$  com um raio de 50 cm. A viscosidade do gás é  $\alpha = 10^{-4}$ . Neste caso foi levado em conta a auto-gravidade do disco onde  $M_D = 0.04 M_\odot$ . Essa figura foi focalizada no vórtice para ver a eficiência do processo de confinamento.



**Figura 6.27:** Ritmo de captura de partículas por um vórtice com alongação  $f = 4$  e decaimento exponencial na amplitude com o tempo. O disco é constituído de 10000 partículas com 50 cm de raio. As viscosidades do gás escolhidas são  $\alpha = 10^{-5}$  e  $\alpha = 10^{-4}$ . Neste caso não foi levado em conta a auto-gravidade do disco



**Figura 6.28:** Ritmo de captura de partículas por um vórtice com alongação  $f = 4$  e decaimento exponencial na amplitude com o tempo. Foi considerado três casos para as partículas de 50 cm de raio, sem auto-gravidade, com auto-gravidade do disco onde  $M_D = 0.01 M_{\odot}$  e finalmente com auto-gravidade do disco onde  $M_D = 0.04 M_{\odot}$ . O disco é constituído de 1000 partículas e a viscosidade do gás escolhida é  $\alpha = 10^{-4}$ .



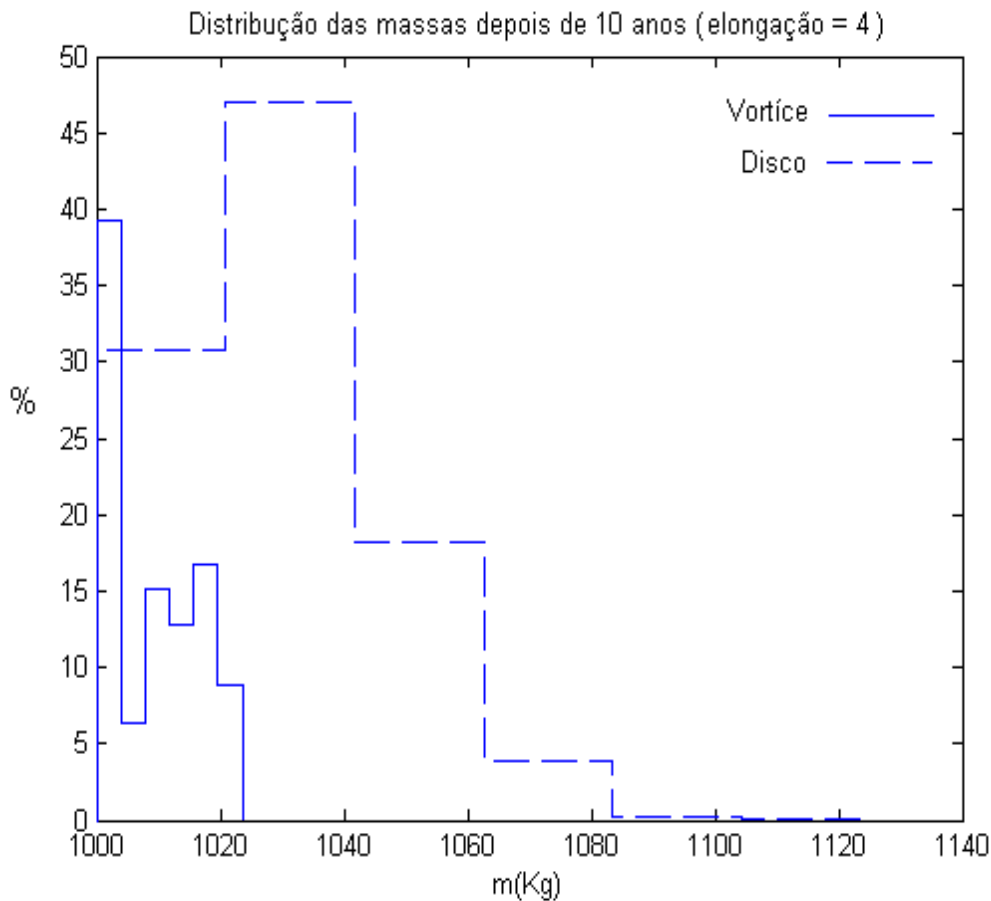
**Figura 6.29:** Escala temporal de vida das partículas no domínio do disco que vai de 4,4 UA para o raio interno até 6,7 UA para o raio externo. Foi considerado três casos para as partículas de 50 cm de raio, sem auto-gravidade, com auto-gravidade do disco onde  $M_D = 0.01 M_{\odot}$  e finalmente com auto-gravidade do disco onde  $M_D = 0.04 M_{\odot}$ . A quantidade inicial de partículas é de 10000 e o coeficiente  $\alpha$  da viscosidade do gás é  $10^{-4}$ . No final aparece uma queda devido às capturas temporárias.

A fragmentação é uma peça importante da realidade que não foi incluída no nosso modelo. Pinter e seus colaboradores (1989) e Blum e seu grupo (Blum et al. 1989) projetaram experimentos para colisões de agregados plumosos sub-centimétricos com velocidades relativas superiores a uns poucos metros por segundo. Esses autores encontraram que o processo de coagulação acontece com uma probabilidade de adesão superior a 10 % e que o processo de fragmentação ocorre com velocidades relativas ( $= 6 \text{ m s}^{-1}$ ) implicando uma pressão de impacto da ordem de ( $10^4 \text{ joules m}^{-3}$ ). Existe a possibilidade dos vórtices anticiclônicos serem menos turbulentos que o gás ambiente, o que tornaria as velocidades de dissipação baixas o suficiente para prevenir a fragmentação. Lyra e seu grupo (2009) mostraram que a maioria das partículas dentro do vórtice nunca foi envolvida em colisões com uma velocidade maior que  $1 \text{ m s}^{-1}$ . Isso é uma boa notícia para a formação planetária. Deste modo, escolhemos um modelo que não incluía colisões entre as partículas dentro do vórtice. O objeto de nosso interesse aqui não será compreender o mecanismo do crescimento em partículas sub-métricas ou o efeito desse crescimento sobre a vida média das partículas na nebulosa como fez de La Fuentes Marcos em 2001 no seu trabalho de tese, mas sim, estudar o efeito desse crescimento na dinâmica de captura dos vórtices da nebulosa solar. Os espectros de massa do crescimento das partículas no interior do disco depois de 10 anos, 20 anos e 30 anos (ver Fig. 6.30 a 6.32) mostram claramente que se faz uma seleção na captura das partículas pelo vórtice. As partículas capturadas pelo vórtice não cresceram ou cresceram muito pouco. Isso se confirma na figura 6.33 quando essas partículas alcançam o centro do vórtice.

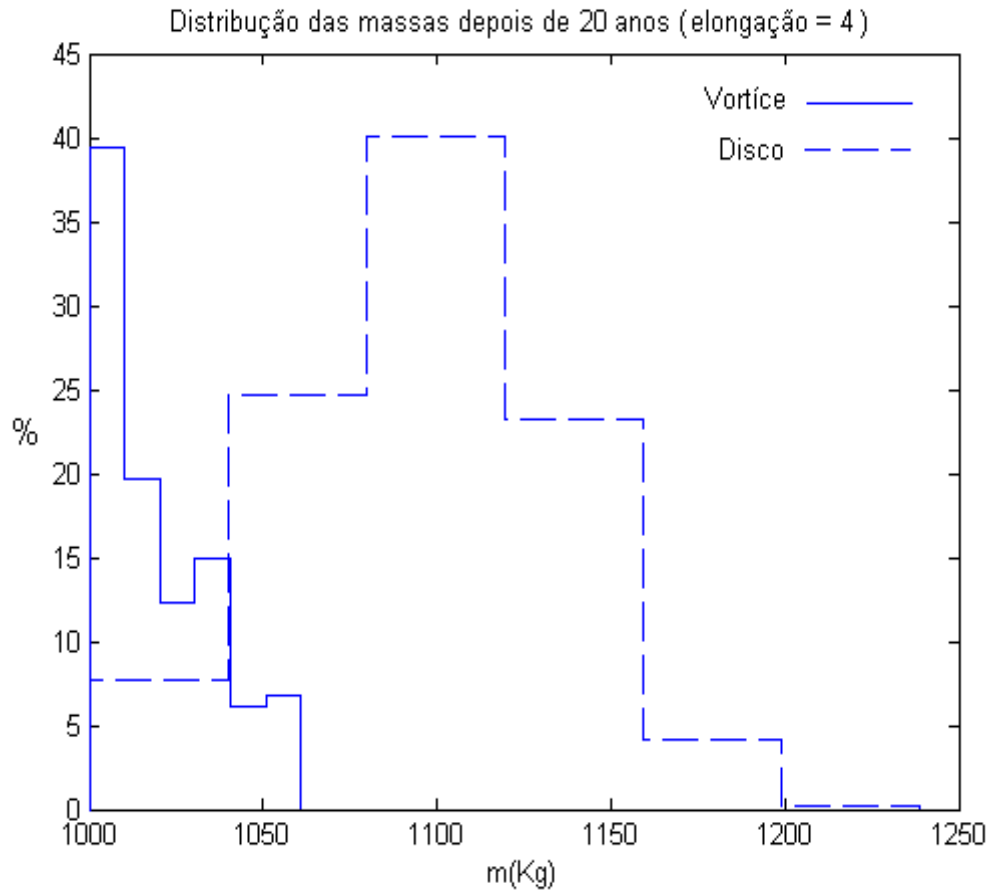
Como as partículas são sujeitas a diferentes arrastos gasosos, um sorteio aerodinâmico por tamanho ocorre dentro do vórtice. Uma outra explicação neste caso se refere à seção 4.3 desta tese. É necessário que o parâmetro de impacto  $p$ , com foi demonstrado para um vórtice realista com uma alongação igual a 4, esteja num certo intervalo de valores para as partículas serem capturadas pelo vórtice. O crescimento das partículas modifica suas trajetórias aumentando sensivelmente a suas excentricidades deixando-as fora desse intervalo quando elas vêm crescendo muito. Assim, podemos sugerir pelo que foi discutido até agora que o crescimento por auto-sedimentação, quando as partículas alcançam o tamanho sub-métrico, não é muito



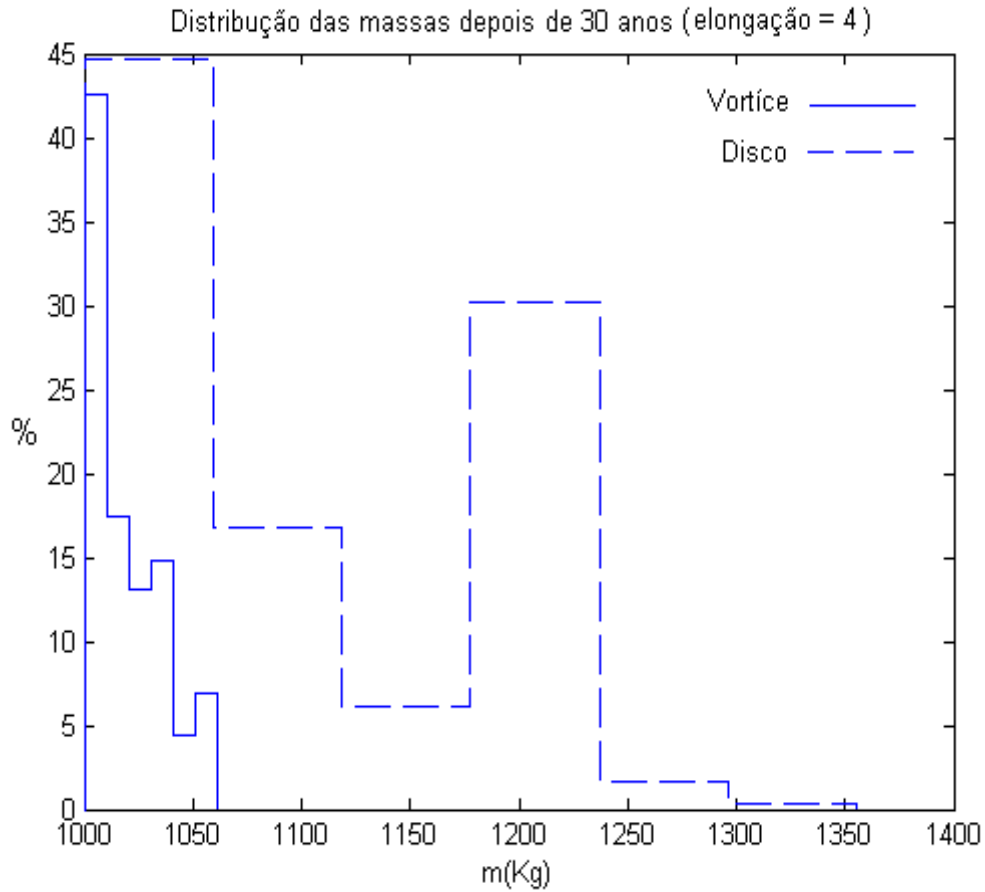
eficiente para formar planetesimais e precisam de outro processo para alcançar o tamanho quilométrico. Esses resultados são importantes porque eles mostram uma seleção pelo vórtice para formar planetesimais. Isso é interessante, pois é um fato observável que os planetesimais se formaram de blocos construídos de mesmo tamanho (Scott e Krot, 2005).



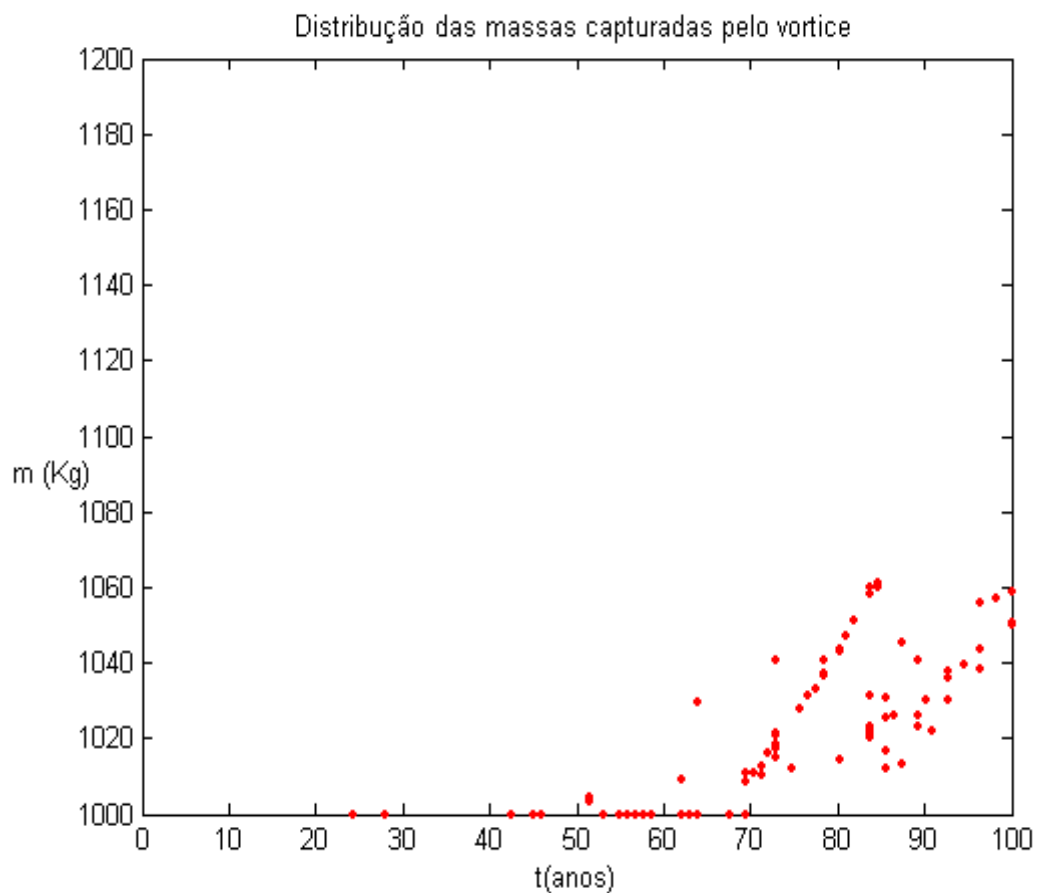
**Figura 6.30:** Comparação das distribuições das massas das partículas dentro e fora do vórtice depois de 10 anos quando levamos em conta o crescimento das partículas. O crescimento para quando elas se aproximam a uma distância de 1,4 raio do vórtice, correspondente a região de influência do mesmo. A massa inicial de todas as partículas é de 1000 Kg, correspondente a um raio de 50cm. A elongação  $f$  do vórtice é 4. O raio do vórtice decresce exponencialmente com o tempo, sendo que aqui o coeficiente  $\alpha$  da viscosidade do gás é  $10^{-4}$ . Neste caso não foi levado em conta a auto-gravidade do disco.



**Figura 6.31:** Comparação das distribuições das massas das partículas dentro e fora do vórtice depois de 20anos quando levamos em conta o crescimento das partículas. O crescimento para quando elas se aproximam a uma distância de 1,4 raio do vórtice, correspondente a região de influência do mesmo. A massa inicial de todas as partículas é de 1000 Kg, correspondente a um raio de 50cm. A alongação  $f$  do vórtice é 4. O raio do vórtice decresce exponencialmente com o tempo, sendo que aqui o coeficiente  $\alpha$  da viscosidade do gás é  $10^{-4}$ . Não há auto-gravidade do disco.



**Figura 6.32:** Comparação das distribuições das massas das partículas dentro e fora do vórtice depois de 30 anos quando levamos em conta o crescimento das partículas. O crescimento para quando elas se aproximam a uma distância de 1,4 raio do vórtice, correspondente a região de influência do mesmo. A massa inicial de todas as partículas é de 1000 Kg, correspondente a um raio de 50cm. A elongação  $f$  do vórtice é 4. O raio do vórtice decresce exponencialmente com o tempo, sendo que aqui o coeficiente  $\alpha$  da viscosidade do gás é  $10^{-4}$ . Não há auto-gravidade do disco.



**Figura 6.33:** Distribuições das massas das partículas capturadas pelo vórtice quando levamos em conta o crescimento das partículas. O crescimento para quando elas se aproximam a uma distância de 1,4 raio do vórtice, correspondente a região de influência do mesmo. A massa inicial de todas as partículas é de 1000 Kg, correspondente a um raio de 50cm. A elongação  $f$  do vórtice é 4. O raio do vórtice decresce exponencialmente com o tempo, sendo que aqui o coeficiente  $\alpha$  da viscosidade do gás é  $10^{-4}$ . Neste caso não levamos em conta a auto-gravidade do disco.

## Capítulo 7

### Conclusões

Neste trabalho de tese exploramos as sugestões de Barge e Sommeria (1995) de captura de partículas em vórtices anticiclônicos criados devido a instabilidades na nebulosa proto-planetária. Nos últimos anos, a teoria de vórtice vem ganhando popularidade como local para formação dos planetesimais e núcleos planetários. Um prova da existência desses vórtices foi achada através de observações fotométricas da proto-estrela KH15D que foram interpretadas por Barge e Vítton (2003) como um vórtice gigante orbitando a uma distância de 0,2 UA da estrela e cobrindo  $120^\circ$  da órbita. Este estudo foi feito através de simulações de um disco kepleriano bidimensional e incompressível. Examinamos o processo de concentração de partículas dentro de um grande vórtice através de um modelo não colisional de partículas individualmente submetidas à gravidade solar e ao arrasto do gás nebuloso. Para modelar o vórtice, utilizamos as equações de Euler bidimensionais incompressíveis da hidrodinâmica. O modelo de disco proto-planetário axi-simétrico escolhido para nosso trabalho de tese foi exposto no capítulo 2. Com o objetivo de obter as principais consequências dinâmicas relacionadas ao crescimento de massa foi utilizado um modelo de acreção simplificado mostrado no capítulo 3. No capítulo 4, apresentamos o modelo de vórtice de Chavanis (2000) que melhorou os trabalhos de investigação preliminares (Barges e Sommeria 1995; Tanga et al. 1996) utilizando uma solução exata para o campo de velocidades do vórtice obtido a partir das equações de Euler bidimensionais incompressíveis e a aproximação epicíclica. Mostramos as condições de capturas por um vórtice realista com uma alongação igual a 4, introduzindo a definição de parâmetro de impacto. Mostramos que se um disco planetário tem uma certa massa, o outro efeito que deve ser incluído nos cálculos é a auto-gravidade do disco. Podemos calcular a contribuição do disco diretamente (Binney e Tremaine 1987) mais por conveniência computacional se adotará uma aproximação para o sistema constituído pela estrela e o disco. Isso é equivalente a considerar a massa do disco como se estivesse distribuída esfericamente no que diz respeito ao cálculo da força gravitacional (Lin e Pringle 1990). Quando se leva em

conta a auto-gravidade, notamos que a trajetória se finaliza em um ciclo limite. O ciclo limite parece ser maior que aquele obtido por Tanga e seus colaboradores (1996). Mostramos que a eficiência das capturas no vórtice depende do tamanho das partículas sendo que vários autores mostraram que a faixa ótima é [10 - 50 cm].

Nessa tese, mostramos que a eficácia das capturas também depende do modelo do disco proto-planetário. Klahr e Bodenheimer (2006) evidenciaram que não precisaria de uma massa do disco maior que a massa mínima ( $0,01 M_{\odot}$  -  $0,04 M_{\odot}$ ) para produzir os núcleos dos planetas gigantes. O crescimento por coagulação para a formação planetária tem sido evitado porque a escala de tempo para a coagulação é muito maior que a escala de tempo para um colapso gravitacional. O papel dos vórtices parece ser uma idéia muito bem aceita. Lyra e seu grupo (2009) mostraram que a escala temporal por um colapso gravitacional capaz de formar um embrião planetário poderia ocorrer em somente cinco órbitas ( $\approx 60$  anos).

Um achado muito importante nesse trabalho de tese pode começar a esclarecer a questão sobre a formação planetária: colapso gravitacional ou coagulação? Quando incluímos a auto-gravidade, os resultados que obtivemos mostram que a acumulação da matéria dentro vórtice é bem mais rápida. Isso permite uma concentração maior numa escala de tempo menor. É um ponto muito importante na formação dos núcleos planetários até hoje bastante discutido. De fato, a formação dos núcleos planetários dos planetas gigantes precisa da acumulação de material maior que  $1M_{\oplus}$  em muito pouco tempo para que o colapso ocorra antes do efeito gravitacional dentro vórtice começar a expulsar os planetesimais (Tanga et al, 2002). A auto-gravidade até então bastante negligenciada por muitos autores pode se revelar uma ferramenta necessária a ser incluído no modelo de formação planetária para explicar tal fato. Além disso, a auto-gravidade pode explicar as suposições de Goldreich e Ward (1973) de instabilidade gravitacional levando ao colapso da camada de partículas formada na região de núcleo sugerida por Klahr e Bodenheimer (2006).

A fragmentação é uma peça importante da realidade que não foi incluída no nosso modelo. Não obstante, Lyra e seu grupo (2009) mostraram que a maioria das partículas dentro do vórtice nunca foram envolvidas em colisões com uma velocidade maior que  $1\text{m s}^{-1}$ . Mostramos que o crescimento por auto-sedimentação das partículas

com tamanho sub-métrico, não é muito eficiente para formar planetesimais. Parece que o vórtice captura partículas com um tamanho preferencial para formar planetesimais. Isso é interessante, pois é um fato observável que os planetesimais se formaram de blocos construídos de mesmo tamanho (Scott e Krot, 2005). Esses resultados são somente válidos para nosso modelo mais precisariam ser investigados por outros autores.

Num trabalho futuro, queremos reproduzir esses resultados melhorando o modelo do disco proto-planetário introduzindo a hidrodinâmica. Isto é, modelando uma dinâmica de fluido e adaptando o vórtice a essa dinâmica.

## REFERÊNCIAS

- Acheson, D. J. **Elementary Fluid Dynamics**. Clarendon Press. Oxford, 1990
- Adachi, I., Hayashi, C., and Nakazawa, K. **The gas drag effect on the elliptical motion of a solid body in the primordial solar nebula**. Prog. Theor. Phys. **56**, 1756-1771, 1976
- Adams, F. C., Freese, K., Adams, Levin, J., McDowell, J. **Spectral distortions of the cosmic microwave background** Ap. J., **344**, 24-34, 1989
- Adams, F. C., Laughlin, G. **Vortex Propagation and Survival in Circumstellar Disks** Bulletin of the American Astronomical Society, **28**, p1139, 1996
- Adams, F. C., Watkins, R. **Vortices in circumstellar disks**. Astrophys J. vol. **451**, 314, 1995
- Alfvén, H., Arrhenius, G. **Evolution of the Solar System**, NASA Sp-345, 1976
- Barge, P., and J. Sommeria. **Circumstellar Dust Disks and Planet Formation**. Proceedings of the 10th IAP Astrophysics Meeting, editions Frontières. 295, 1994
- Barge, P., and J. Sommeria. **Did planet formation begin inside persistent gaseous vortices?** Astron. Astrophys. **295**, L1-L4, 1995
- Barge, P., and Viton, M. **KH15D: a star eclipsed by large-scale dusty vortex?** ApJ, **593**, 117-120, 2003
- Beckwith, S., Sargent, A., Chini, R. S., and Güsten, R. **A survey for circumstellar disk around young stellar objects**. Astron. J. **99**, 924-944, 1990

- Beckwith, S., and Sargent, A. **Particle emissivity in circumstellar disks.** *Astrophys. J* 381, 250-258, 1991
- Beckwith, S., and Sargent, A. **Circumstellar disks and the search for neighbouring planetary system.** *Nature*, **383**, 294- 305, 1996
- Binney, J., Tremaine, S. **Galactic Dynamics.** Princeton University Press, Princeton. 72, 1987
- Blum, J. **Coagulation of protoplanetary dust.** *Bull. Amer. Astron. Soc.* vol. **22**, 1082, 1989
- Blum, J., Wurm, G., Poppe, T., and Heim, L.-O. **Aspects of Laboratory Dust Aggregation with Relevance to the Formation of Planetesimals.** *Laboratory Astrophysics and Space Research*, Kluwer, Dordrecht, **236**, 399-423, 1999
- Blum, J., Wurm, G. **Experiments on Sticking, Restructuring and Fragmentation of Preplanetary Dust Aggregates.** *Icarus*. **143**, 138-146, 2000
- Boss, A. P. **Binary Stars: Formation by Fragmentation.** *Comm. Astrophys J.* vol. **12**, 169-190 , 1988
- Bracco, A., Provenzale, A., Spiegel, E. A., and Yecko, P. **Theory of Black Hole Accretion Disks.** ed. A. Abramowicz, G. Björnsson, & J. E. Pringle (Cambridge: Cambridge University Press), 254, 1998
- Bracco, A., Chavanis, P. H., Provenzale, A. **Particle aggregation in a turbulent keplerian flow.** *Phys. Fluids*, **11**, 2280-2286, 1999
- Brandner, W. et al. **Timescales of Disk Evolution and Planet: HST, Adaptive Optics, and ISO Observations of Weak-Line and Post-T TAURI Stars.** *Astronomical Journal*, **120**, 950-962, 2000
- Cassen, P. M. **Thermal models of the primitive solar nebula.** *Lunar Planet. Sci. Conf. XXIII*, 207-208, 1992
- Chanut, T. **Captura, difusão e acreção num sistema coorbital imerso em um meio gasoso.** *Dissertação de Mestrado*, Feg-UNESP, Guaratinguetá, 2005
- Chanut, T., Winter, O. C., and Tsuchida, M. **Nebular gas drag and Co-órbital system dynamics.** *Astron.Astrophys.* **481**, 519-527, 2008
- Chavanis, P. H. **Trapping of dust by coherent vortices in the solar nebula.** *Astron.Astrophys.* **356**, 1089–1111, 2000



- Chew G. F., Goldberger, M. L., Low, F. E. **The Boltzmann Equation and the One-Fluid Hydromagnetic Equations in the Absence of Particle Collisions.** Proceedings of the Royal Society. Series A. Mathematical and Physical Sciences. Issue 1204, **236A**, 112-118, 1956
- Cuzzi, J. N., and Weidenschilling, S. J. **Grain growth and nebular opacity.** Presented at conference on Disk Dispersal. Institute of Theoretical Physics. University of California. Santa Barbara, 1992
- Cuzzi, J. N., Doborvolksis, A. R., and Champney, J. M. **Particle-gas dynamics in the midplane of a protoplanetary nebula.** *Icarus* **106**, 102–134, 1993
- de la Fuente Marcos, C., and Barge, P. **The effect of long-lived vortical circulation on the dynamics of dust particles in the mid-plane of a protoplanetary disc.** *Mon. Not. R. Soc.* **323**, 601–614, 2001
- Godon, P. and Livio, M., **On the Non-Linear Hydrodynamic Stability of Thin Keplerian Disks.** *Astrophys. J.* **521**, 319-327, 1999a
- Godon, P., and Livio, M. **Vortices in protoplanetary disks.** *Astrophys. J.* **523**, 350–356, 1999b
- Godon, P., and Livio, M. **The Formation and Role of Vortices in Protoplanetary Disks.** *Astrophys. J.* **537**, 396–404, 2000
- Goldreich, P., and Ward, W. R. **The Formation of Planetesimals.** *ApJ*, **183**, 1051-1062, 1973
- Hayashi, C. **Structure of the solar nebula, growth and decay of magnetic fields and effects of magnetic and turbulent viscosities on the nebula.** *Progress of Theoretical Physics Suppl.* **70**, 35-53, 1981
- Hayashi, C., Nakazawa, K., Nakagawa, Y. **Formation of the solar system.** *Protostars & Planets II.* University of Arizona Press, Tucson, 1100-1153, 1985
- Hourigan, K., and Schwarz, M. P. **Nebula tides and gap formation.** *Astronomical Society of Australia*, **vol. 5** (4), 461-464, 1984
- Hourigan, K., and Ward, W. R. **Radial migration of preplanetary material: Implications for accretion time scale problem.** *Icarus*, **60**, 29-39, 1984
- Johansen, A., Andersen A.C., and Brandenburg A. **Simulations of dust-trapping vortices in protoplanetary discs.** *Astron.Astrophys.* **417**, 361-374, 2004
- Klahr, H., and Bodenheimer, P. **Planetary Systems in the Universe.** *International Astronomical Union Symposium no. 202*, Manchester, 2000

Klahr, H., and Bodenheimer, P. **Turbulence in Accretion Disks: Vorticity Generation and Angular Momentum Transport via the Global Baroclinic Instability** *Astrophys. J.* **582**, 869-892, 2003

Klahr, H., Bodenheimer, P. **Planet formation via Core Accretion in a Vortex.** *Astrophysical Journal* **639**, 432-440, 2006

Li, H., Finn, J. M., Lovelace, R. V. E., and Colgate, S. A. **Rossby Wave Instability of thin accretion disk. II. Detailed linear theory.** *Astrophys. J.* **533**, 1023-1034, 2000

Li, H., Colgate, S. A., Wendroff, B., and Liska, R. **Rossby Wave Instability of thin accretion disk. III. Nonlinear simulations.** *Astrophys. J.* **551**, 874-896, 2001

Lin, D. N. C., and Papaloisou, J. **On the structure and evolution of the primordial solar nebula.** *Mon. Not. R. astr. Soc.* **191**, 37-48, 1980

Lin, D. N. C. **Convective-accretion-disc model for the primordial solar nebula** *Astrophys. J.* **246**, 972-984, 1981

Lissauer, J. J. **Timescale for planetary accretion and the structure of the protoplanetary disk .** *Icarus*, **69**, 249-265, 1987

Lovelace, R.V.E., Li, H., Colgate, S.A., and Nelson, A.F. **Rossby Wave Instability of Keplerian Accretion Disks.** *ApJ.* **513**, 805, 1999

Lyra, W. et al. **Planet formation bursts at the borders of the dead zone in 2D numerical simulations of circumstellar disks.** *Astron. Astrophys.* **497**, 869–888, 2009

Malhotra, R. **Orbital resonances in the solar nebula: Stengths and weaknesses.** *Icarus* **106**, 264-273, 1993.

Miller, J., Weichman, P.B., and Cross, M.C. **Statistical mechanics, Euler equations, and Jupiter's red spot.** *Phys. Rev.* **A45**, 2328-2359, 1992

Miyake, K., and Nakagawa, Y. **Effects of Growth on spectral energy distribution of protoplanetary nebulae.** Presented at Conference on Disk Dispersal. Institute of Theoretical Physics. University of California. Santa Barbara, 1992

Miyake, K., and Nakagawa, Y. **Effects on particle growth on opacity curves of protoplanetary disks around T Tauri stars.** *Icarus.* **106**, 20, 1993

Mizuno, H., and Nakazawa, K. **Primordial Atmosphere Surrounding a Protoplanet and Formation of Jovian Planets** *Progress of Theoretical Physics*, **96**, 266-273, 1988

Morfill, G. E. **Physics and chemistry in the primitive solar nebula.** In Birth and Infancy of Stars (eds. R. Lucas and A. Omont), North Holland Press, Amsterdam. 693-794, 1985

Morfill G. E., Spruit, H., and Levy, E. H. **Physical Processes and Conditions Associated with the Formation of Protoplanetary Disks.** Protostars & Planets III. University of Arizona Press, Tucson. 939-978, 1993

Nakagawa, Y., Sekiya, M., Hayashi, C. **Settling and growth of particles in a laminar phase of a low-mass solar nebula.** Icarus. **67**, 375-390, 1986

Nezlin, M. V., and Snezhkin E. N. **Rossby Vortices, Spiral Structures.** Solitons Springer-Verlag. Berlin, 1993

Palme, H., and Boynton, W. V. **Meteoritic constraints on conditions in the solar nebula.** Protostars & Planets III, University of Arizona Press. Tucson, 979-1004, 1993

Peale, S.J. **The Effect of the Nebula on the Trojan Precursors.** Icarus **106**, 308, 1993.

Pinter, S., Blum, J., and Grün, E. **Physics and Mechanics of Cometary Materials** Proc. Intl. Workshop on the Physics and Mechanics of Cometary Materials, ESA SP-**302**, 215-219, 1989

Pollack, J. B., McKay, Y C., Christofferson, B. **A calculation of the Rosseland mean opacity of dust grains in primordial solar system nebulae.** Icarus, **64**, 471-492, 1985  
Shu, F. H., Adams, F. C., Lizano, S. **Star Formation in Molecular Clouds: Observation and Theory.** Annual Review of Astronomy & Astrophysics, **25**, 23-81, 1987

Scott, E.R.D., and Krot A.N. **Thermal processing of silicate dust in the solar nebula: clues from primitive chondrite matrices.** Astrophys. J. **623**, 571-578, 2005

Sommeria, J., Meyers, S.D., and Swinney, H.L. **Laboratory simulation of Jupiter's Great Red Spot.** Nature, **331**, 689-693, 1988

Sommeria, J., Nore, C., Dumont, T., and Robert, R. **Théorie statistique de la tache rouge de Jupiter.** C.R. Acad. Sci. Paris **312**, 999-1005, 1991

Tanga, P., Babiano A., Dubrulle, B., and Provenzale, A. **Forming planetesimal in vortices.** Icarus. **121**, 158-170, 1996

Tanga P., Michel P., Richardson D.C. **Planetesimal clusters in a Keplerian disk.** Astron. Astrophys. **395**, 613-623, 2002

Weidenschilling, S.J. **Aerodynamics of solid bodies in the solar nebula.** Mon. Not. Roy. Ast. Soc. **180**, 57-70, 1977.

Weidenschilling, S.J. **Dust to planetesimals: Settling and coagulation in the solar nebula.** Icarus **44**,172-189, 1980

Weidenschilling, S.J., and Davis D. R. **Dust to Dust: Low-Velocity Impacts of Fragile Projectiles.** Lunar and Planetary Science, vol. **XIX**, 1253, 1988

Weidenschilling, S. J., Cuzzi, J. N. **Formation of Planetesimals in the Solar Nebula.** Protostars and Planets III. Ed. E. H. Levy & J. I. Lunine (Tucson: Univ. Arizona Press). 1031-1060, 1993

Whipple, F. L. **On uma certain aerodynamic processes for asteroids and comets.** In From Plasma to Planet. Proceedings of the Nobel Symposium 21 (A. Elvius, Ed). Wiley. New York, 1972

Whipple, F. L. **Evolutionary and Physical Properties of Meteoroids, Proceedings of IAU.** Colloquium 13. NASA SP. **319**, 345, 1973

Wolf, S., Klahr, H. **Large-Scale Vortices in Protoplanetary Disks:On the Observability of Possible Early Stages of Planet Formation.** Astrophysical Journal **578**, 79–82, 2002.

## ANEXO 1

# Nebular gas drag and co-orbital system dynamics

T. Chanut<sup>1</sup>, O. C. Winter<sup>1</sup>, and M. Tsuchida<sup>2</sup>

<sup>1</sup> São Paulo State University – UNESP, Grupo de Dinâmica Orbital & Planetologia, CP 205, Guaratinguetá, CEP 12516-410, SP, Brazil  
e-mail: madamechanut@terra.com.br; ocwinter@feg.unesp.br

<sup>2</sup> São Paulo State University – UNESP, DCCE – IBILCE, São Jose do Rio Preto, SP, Brazil  
e-mail: tsuchida@ibilce.unesp.br

Received 11 June 2007 / Accepted 7 December 2007

## ABSTRACT

**Aims.** We study trajectories of planetesimals whose orbits decay due to gas drag in a primordial solar nebula and are perturbed by the gravity of the secondary body on an eccentric orbit whose mass ratio takes values from  $\mu_2 = 10^{-7}$  to  $\mu_2 = 10^{-3}$  increasing ten times at each step. Each planetesimal ultimately suffers one of the three possible fates: (1) trapping in a mean motion resonance with the secondary body; (2) collision with the secondary body and consequent increase of its mass; or (3) diffusion after crossing the orbit of the secondary body.

**Methods.** We take the Burlirsh-Stoer numerical algorithm in order to integrate the Newtonian equations of the planar, elliptical restricted three-body problem with the secondary body and the planetesimal orbiting the primary. It is assumed that there is no interaction among planetesimals, and also that the gas does not affect the orbit of the secondary body.

**Results.** The results show that the optimal value of the gas drag constant  $k$  for the 1:1 resonance is between 0.9 and 1.25, representing a meter size planetesimal for each AU of orbital radius. In this study, the conditions of the gas drag are such that in theory, L4 no longer exists in the circular case for a critical value of  $k$  that defines a limit size of the planetesimal, but for a secondary body with an eccentricity larger than 0.05 when  $\mu_2 = 10^{-6}$ , it reappears. The decrease of the cutoff collision radius increase the difusions but does not affect the distribution of trapping. The contribution to the mass accretion of the secondary body is over 40% with a collision radius  $0.05R_{\text{Hill}}$  and less than 15% with  $0.005R_{\text{Hill}}$  for  $\mu_2 = 10^{-7}$ . The trappings no longer occur when the drag constant  $k$  reaches 30. That means that the size limit of planetesimal trapping is 0.2 m per AU of orbital radius. In most cases, this accretion occurs for a weak gas drag and small secondary eccentricity. The diffusions represent most of the simulations showing that gas drag is an efficient process in scattering planetesimals and that the trapping of planetesimals in the 1:1 resonance is a less probable fate. These results depend on the specific drag force chosen.

**Key words.** planets and satellites: formation – minor planets, asteroids – celestial mechanics

## 1. Introduction

In 1788, in *Analytical Mechanics*, Lagrange demonstrated that in the restricted three-body problem, distinct particular solutions exist. These particular solutions are known as Lagrangian points and in the bi-dimensional system we have five Lagrangian points. Three of these are the collinear points (L1, L2 and L3) that are the points located on the line that joins the primary and secondary body, and the other two (L4 and L5) are the triangular points, since they are on the vertices of the equilateral triangles formed jointly with the two bodies. From the theoretical point of view it is known that tadpole orbits could exist from oscillations around L4 or L5, while horseshoe orbits could exist from oscillations around L4, L3 and L5 (e.g. Brown & Shook 1964). Confirming the theoretical demonstration of the existence of these types of steady orbits, in 1906 was observed the asteroid 588 Achille, librating around L4. Today hundreds of asteroids, called Trojans, have been discovered librating around L4 and L5. In 1980, images from the Voyager spacecraft showed that in the Saturn-Tethys system, two satellites librate around the Lagrangian points. One of them, called Telesto, oscillates around L4. The other, Calypso, oscillates around L5. Also in 1980, Voyager found a singular pair of co-orbital satellites in the Saturn system: Janus and Epimetheus (the Janus mass is approximately four times the mass of Epimetheus) and in

the Saturn-Dione system found a satellite of mass much less than Dione, called Helene, librating around L4. More recently, Cassini found Polideuces in the Saturn-Dione system librating around L5. There are various ideas concerning the origin of the co-orbital systems. Yoder (1979) suggested three possibilities: first, that Jupiter captured the asteroids throughout the whole history of its growth. Second, these objects originally may have been satellites of Jupiter and through some process (collision or escape) moved through the interior Lagrangian point. Finally, this population of co-orbital objects may have been trapped in a mean motion resonance with the secondary body. The stability of Trojan asteroid orbits when submitted to the dissipative forces such as drag due to the gas of the primitive solar nebula has been a focus of divergences of point of view found in literature (Peale 1993). Murray (1994) analyzed the stability for small librations showing that a certain class of drag forces lead to asymptotical stability. In particular, Murray demonstrated that this occurs for a force proportional to the velocity in the inertial system. Kary & Lissauer (1995) reviewed the third idea of Yoder and they suggested that in the case of moderate or high eccentricities of the secondary body, the capture is feasible. More recently, Morbidelli et al. (2005) suggested that the Trojans could have formed in more distant regions and been subsequently captured into co-orbital motion with Jupiter during the time when the giant planets migrated.

The purpose of this work is to investigate how the 1:1 resonance captures occur. We analyse the evolution of the semi-major axis and eccentricity of the planetesimal, and what conditions are favorable for this type of capture. For example, the angular distribution between the planetesimal and the secondary body at the moment of its entrance in the co-orbital region, the average of the longitude between the planetesimal and the secondary body during the trapping in the 1:1 resonance, the values of orbital eccentricity of the secondary body, as well as the values of the drag constant (see Sect. 2.2 for a definition of  $k$ ). The mass ratio  $\mu_2 = 10^{-6}$  for the secondary body is the aim of the work but we set the values of the drag constant for  $\mu_2 = 10^{-7}$  to  $\mu_2 = 10^{-3}$ , according to Murray's critical value  $k = 0.7265(v_K^2/v_{\text{gas}}^2)\mu_2$  (Murray 1994) where L4 no longer exists in the circular case. On the other hand we establish statistics of the collision rate for two cutoff collision radii for a close approach of the planetesimal of less than  $0.005R_{\text{Hill}}$  and  $0.05R_{\text{Hill}}$  from the secondary body, which implies in an increase of the mass of the secondary body. We also study the statistics of the diffusion rate that represents the planetesimals crossing the co-orbital region towards the primary body, or being scattered by the secondary body. In Sect. 2 we describe the equations of motion and the nebular model that we use in this paper. We then present how the simulations are set in Sect. 3 and discuss the simulation results in Sect. 4. Conclusions are given in Sect. 5.

## 2. Dynamical system

In reality, each small planetesimal is subject to a number of external disturbances of different magnitudes that are added to the gravitational forces. Some studies have been performed considering the effect of radiation pressure as a leading perturbation (Colombo et al. 1966; Schuerman 1980; Simmons et al. 1985) and others the dynamic effect of nebular drag forces (Peale 1993; Murray 1994; Kary & Lissauer 1995). Here, we consider the dynamic effect of the nebular drag forces on a planetesimal in the elliptic restricted three-body problem.

### 2.1. Equations of motion

Let us consider the motion of a small planetesimal of negligible mass moving under the gravitational influence of two bodies with masses  $m_1$  and  $m_2$  ( $m_1 > m_2$ ). We assume that these bodies have elliptic orbits about their common center of mass  $O$ , and the planetesimal cannot affect these orbits. Let  $\mu_1 = m_1/(m_1 + m_2)$  and  $\mu_2 = m_2/(m_1 + m_2)$  and consider the inertial coordinate system  $(\xi, \eta)$ . Let the coordinates of the two masses in this reference frame be  $(\xi_1, \eta_1)$  and  $(\xi_2, \eta_2)$ . Adopting the distance between the two masses (semimajor axis) as unity and total mass unity, the mean motion of the two-body system becomes unity, and the equations of the motion of the planetesimal are

$$\ddot{\xi} = \mu_1 \frac{\xi_1 - \xi}{r_1^3} + \mu_2 \frac{\xi_2 - \xi}{r_2^3} + F_\xi(\xi, \eta, \dot{\xi}, \dot{\eta}), \quad (1)$$

$$\ddot{\eta} = \mu_1 \frac{\eta_1 - \eta}{r_1^3} + \mu_2 \frac{\eta_2 - \eta}{r_2^3} + F_\eta(\xi, \eta, \dot{\xi}, \dot{\eta}), \quad (2)$$

where

$$r_1^2 = (\xi_1 - \xi)^2 + (\eta_1 - \eta)^2 \quad (3)$$

$$r_2^2 = (\xi_2 - \xi)^2 + (\eta_2 - \eta)^2 \quad (4)$$

and  $F_\xi$  and  $F_\eta$  are the  $\xi$  and  $\eta$  components of the gas drag which can be expressed as a function of the position and velocity in the inertial frame.

### 2.2. Nebular drag

As the nebular gas turns around the primary body with an angular velocity smaller than the Keplerian value, a planetesimal orbiting with a Keplerian velocity will suffer a headwind that continuously reduces its orbital energy and angular momentum (Weidenschilling 1977). The resistance to the motion of a body due to the gas is produced by differences of pressure and friction. When the relative velocity  $v_{\text{rel}}$  is high, the pressure differences dominate, thus the resistance is proportional to the dynamic pressure ( $\rho v_{\text{rel}}^2/2$ ) or the drag force  $F_d \propto \rho v_{\text{rel}}^2 S$ , where  $S$  is the cross section. At low velocity the friction dominates, then the resistance is proportional to  $v_{\text{rel}}$ . Generally, we adopt the  $v_{\text{rel}}^2$  representation and use a variable drag coefficient to accommodate all relative velocities. Thus, we can write for a spherical planetesimal (e.g. Prantl 1952)

$$\frac{F_d}{m_p} = -\frac{c_d \pi R^2 \rho}{2m_p} v_{\text{rel}} \mathbf{V}_{\text{rel}} = -\frac{3c_d \rho}{8\rho_p R} v_{\text{rel}} \mathbf{V}_{\text{rel}} \quad (5)$$

where  $m_p$  is the planetesimal mass,  $R$  the planetesimal radius,  $\rho_p$  is the planetesimal density,  $\rho$  the gas density and  $c_d$  the drag coefficient which is a function of the Reynolds number. Malhotra (1993) used a simplified form of Peale's drag force where  $c_d = 0.5$  is constant. It is customary to adopt  $\rho = 10^{-10}$  g/cm<sup>3</sup> and  $\rho_p = 2$  g/cm<sup>3</sup> (Malhotra 1993; Kary & Lissauer 1995; Marzari & Scholl 1997). In these units, the value of the drag constant  $k = (3/8)c_d(\rho/\rho_p)/R_p$  is 0.014 per AU of orbital radius for  $R_p = 100$  m. Finally,

$$\mathbf{V}_{\text{rel}} = \mathbf{V} - \mathbf{V}_{\text{gas}} = (\dot{\xi} + \eta \Omega) \mathbf{e}_\xi + (\dot{\eta} - \xi \Omega) \mathbf{e}_\eta \quad (6)$$

where  $\mathbf{V}$  is the planetesimal velocity with components  $\dot{\xi}$  and  $\dot{\eta}$  along the orthogonal directions denoted by the unit vectors  $\mathbf{e}_\xi$  and  $\mathbf{e}_\eta$  on the midplane of the nebula and  $\Omega$  is the gas angular velocity. All the motions are confined to the midplane of the nebula.

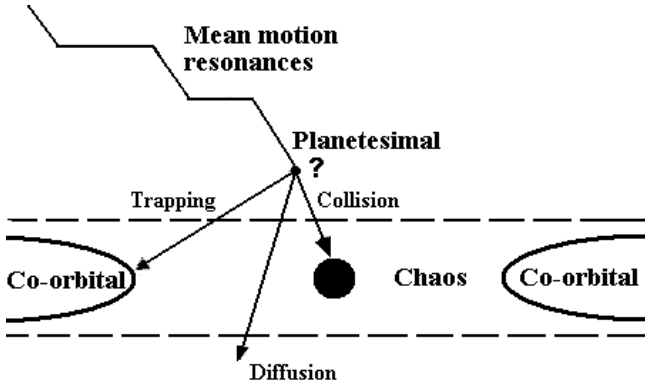
## 3. Numerical simulations

The Burlirsh-Stoer numerical algorithm integrates the Newtonian equations in the planar, elliptical restricted three-body problem with the secondary body and the planetesimal orbiting the primary. The described model of nebular drag was presented by Peale (1993). It is assumed that there is no interaction among planetesimals, and also that the gas does not affect the orbit of the secondary body. The initial position of the secondary body is taken always at its pericenter and the planetesimals are disposed in a ring with width 10 to 30 Hill spheres ( $R_{\text{Hill}} = (\mu_2/3)^{1/3}$  since  $a = 1$ , where  $a$  is the secondary body semimajor axis). We chose  $\mu_2 = 10^{-7}$  up to  $\mu_2 = 10^{-3}$  because it represents a large number of relative mass systems. The initial positions of planetesimals are at each 30° in the ring and initial velocities are given by the Keplerian velocity. The simulation time is about  $10^5$  units of time, or about 16 000 secondary body orbital periods, and it is enough for the planetesimals to define their final destiny.

As a planetesimal migrates toward the secondary body it may have one of several possibilities shown in Fig. 1. It can be trapped in an exterior resonance having or not a close encounter with the secondary body. It can also cross the secondary body orbit and continue its migration toward the primary body. Alternatively, the encounter could result in the capture of the planetesimal into a stable libration within the 1:1 resonance. The

**Table 1.** Distribution of trapping in the 1:1 resonance, collisions, diffusions and other events related to the dynamics of a planetesimal submitted to the effect of gaseous drag. The distribution is for several mass ratios and for the cutoff collision radius  $0.005R_{\text{Hill}}$  and  $0.05R_{\text{Hill}}$ .

Mass ratio	Collision radius	Co-orbitals	Collisions	Diffusions	Others
$\mu_2 = 10^{-7}$	$0.005R_{\text{Hill}}$	3%	12%	68%	17%
	$0.05R_{\text{Hill}}$	3%	43%	41%	13%
$\mu_2 = 10^{-6}$	$0.005R_{\text{Hill}}$	8%	7%	79%	6%
	$0.05R_{\text{Hill}}$	7%	28%	59%	6%
$\mu_2 = 10^{-5}$	$0.005R_{\text{Hill}}$	5%	4%	88%	3%
	$0.05R_{\text{Hill}}$	5%	23%	69%	3%
$\mu_2 = 10^{-4}$	$0.005R_{\text{Hill}}$	<1%	1%	98%	<1%
	$0.05R_{\text{Hill}}$	<1%	24%	75%	<1%
$\mu_2 = 10^{-3}$	$0.005R_{\text{Hill}}$	–	23%	77%	–
	$0.05R_{\text{Hill}}$	–	27%	73%	–

**Fig. 1.** Illustration showing the several possibilities of trajectory evolution of a planetesimal when it comes close to the secondary body co-orbital zone.

planetesimal could also collide with the secondary body, increasing its mass.

If the planetesimal remains orbiting the primary body with a semimajor axis within  $1R_{\text{Hill}}$  around the secondary body's orbit then it is assumed to be trapped in the 1:1 resonance. We choose two cutoff collision radii ( $<0.005R_{\text{Hill}}$ ) and ( $<0.05R_{\text{Hill}}$ ). If the planetesimal comes too close to the secondary body center (collision radius) then the integration is stopped, and a collision is assumed. We consider the diffusion if the planetesimal semimajor axis  $a_p$  becomes smaller than 0.9 which is away from  $1R_{\text{Hill}}$  below the co-orbital semimajor axis when  $\mu_2 = 10^{-3}$ . In our study, theoretically (Murray 1994) for the case of a secondary body with a circular orbit, L4 and L3 are displaced and disappear when  $k > 0.7265(v_K^2/v_{\text{gas}}^2)\mu_2$ . For example, if  $v_{\text{gas}}/v_K = 0.005$  and  $\mu_2 = 10^{-6}$ , all the values of the gas drag constant larger than  $k \approx 0.029$  satisfy this condition. This means that L4 no longer traps planetesimals smaller than 0.05 km per AU. At 5 AU from the Sun, the critical value of  $R_p$  in this case is 250 m. When  $\mu_2 = 10^{-7}$ , the critical value of  $k$  is 0.0029 and for  $\mu_2 = 10^{-3}$ ,  $k$  is 29. Thus we can take for the initial condition of  $k$  from 0.0025 to 0.1 with intervals of 0.0025 for  $\mu_2 = 10^{-7}$ , 0.025 to 1.0 with intervals of 0.025 for  $\mu_2 = 10^{-6}$ , 0.25 to 10 with intervals of 0.25 for  $\mu_2 = 10^{-5}$ , etc. For the eccentricity of the secondary body, we take values from 0 to 0.7 with intervals of 0.07.

## 4. Results

In Table 1, we present our numerical data on the trapping in the 1:1 resonance, collisions, diffusions and other events related to the dynamics of a planetesimal in a gaseous nebula. The first

column gives the mass ratio of the secondary body. We list the percentage of events for two different cutoff collision radii,  $0.005R_{\text{Hill}}$  and  $0.05R_{\text{Hill}}$ . The co-orbitals column represents the percentage of bodies trapped in the 1:1 resonance. The results show that the mass ratio where the largest number of trapping occurs (8%) for  $\mu_2 = 10^{-6}$  and decreases to less than 1% for  $\mu_2 = 10^{-4}$ . When  $\mu_2 = 10^{-3}$ , trapping in the 1:1 resonance does not occur. The collisions column shows that the choice of the cutoff collision radius has an importance in relation to the accretion rate while it seems to be unimportant for the trapping results. Furthermore the collision rate is higher when the secondary body mass is lower. For a mass ratio of  $\mu_2 = 10^{-7}$  it represents 44% for  $0.05R_{\text{Hill}}$  and 12% for  $0.005R_{\text{Hill}}$ . These numbers decrease below 25% and 1% respectively when  $\mu_2 = 10^{-4}$ .  $\mu_2 = 10^{-3}$  is a special case because the cutoff collision radius does not change the results and a particular approach will be necessary. The diffusions represent the larger part of the simulations and increase when the cutoff collision radius decreases. We note other events: the resonances external to the co-orbital region or the fact that the planetesimal did not pass the limit to be considered diffusion by the end of the simulation.

In Tables 2 and 3, we list our numerical data relative to the values of the drag constant  $k$  for each mass ratio. The second column represents the extreme values of the intervals chosen relative to Murray's critical limit. The cutoff collision radius in Table 2 is  $0.005R_{\text{Hill}}$  and in Table 3,  $0.05R_{\text{Hill}}$ . If we consider only the gas drag constant  $k$  for all the values of  $e$  as shown in Tables 2 and 3, we can affirm that the optimal value of  $k$  for the 1:1 resonance trapping is between 0.9 and 1.25, representing a meter size planetesimal per AU. This value represents Murray's critical limit when  $\mu_2$  is larger than  $10^{-6}$  and smaller than  $10^{-5}$ . For  $\mu_2 = 10^{-7}$ , we can suppose that part of the material trapped in an external resonance may collide with the secondary body, increasing its rate when  $k < 0.0125$ . So, we can affirm that the accretion rate is higher when the gas drag constant is near the limit defined by Murray for each mass ratio. This impact probability generally decreases with increasing drag rate  $k$ , but this dependency is smaller when the cutoff collision radius is larger, as shown in Table 3. This will be explained later. In the opposite case, the diffusions are higher when the cutoff collision radius is  $0.005R_{\text{Hill}}$ . This is more than 90% when  $k > 9.0$  and the dependency of  $k$  is greater for a lower cutoff collision radius. The external resonances and other events do not depend on the cutoff collision radius. At each mass ratio these events are insignificant when the drag rate is higher. This means that the majority of planetesimals of large dimensions have collided or been trapped in some external resonance while the planetesimals of small dimensions have crossed the co-orbital zone.



**Table 2.** Distribution of trapping in the 1:1 resonance, collisions, diffusions and other events related to the dynamics of a planetesimal submitted to the effect of gaseous drag. The distribution is for the extreme values of the drag constant  $k$  relative to several mass ratios and for the cutoff collision radius  $0.005R_{\text{Hill}}$ .

Mass ratio	Drag constant	Co-orbitals	Collisions	Diffusions	Others
$\mu_2 = 10^{-7}$	$k < 0.0125$	1%	9%	7%	83%
	$k > 0.09$	3%	7%	89%	1%
$\mu_2 = 10^{-6}$	$k < 0.125$	4%	8%	35%	53%
	$k > 0.9$	6%	4%	90%	–
$\mu_2 = 10^{-5}$	$k < 1.25$	6%	8%	58%	28%
	$k > 9.0$	2%	2%	96%	–
$\mu_2 = 10^{-4}$	$k < 12.5$	1%	2%	94%	3%
	$k > 90.0$	–	1%	99%	–

**Table 3.** Distribution of trapping in the 1:1 resonance, collisions, diffusions and other events related to the dynamics of a planetesimal submitted to the effect of gaseous drag. The distribution is for the extreme values of the drag constant  $k$  relative to several mass ratios and for the cutoff collision radius  $0.05R_{\text{Hill}}$ .

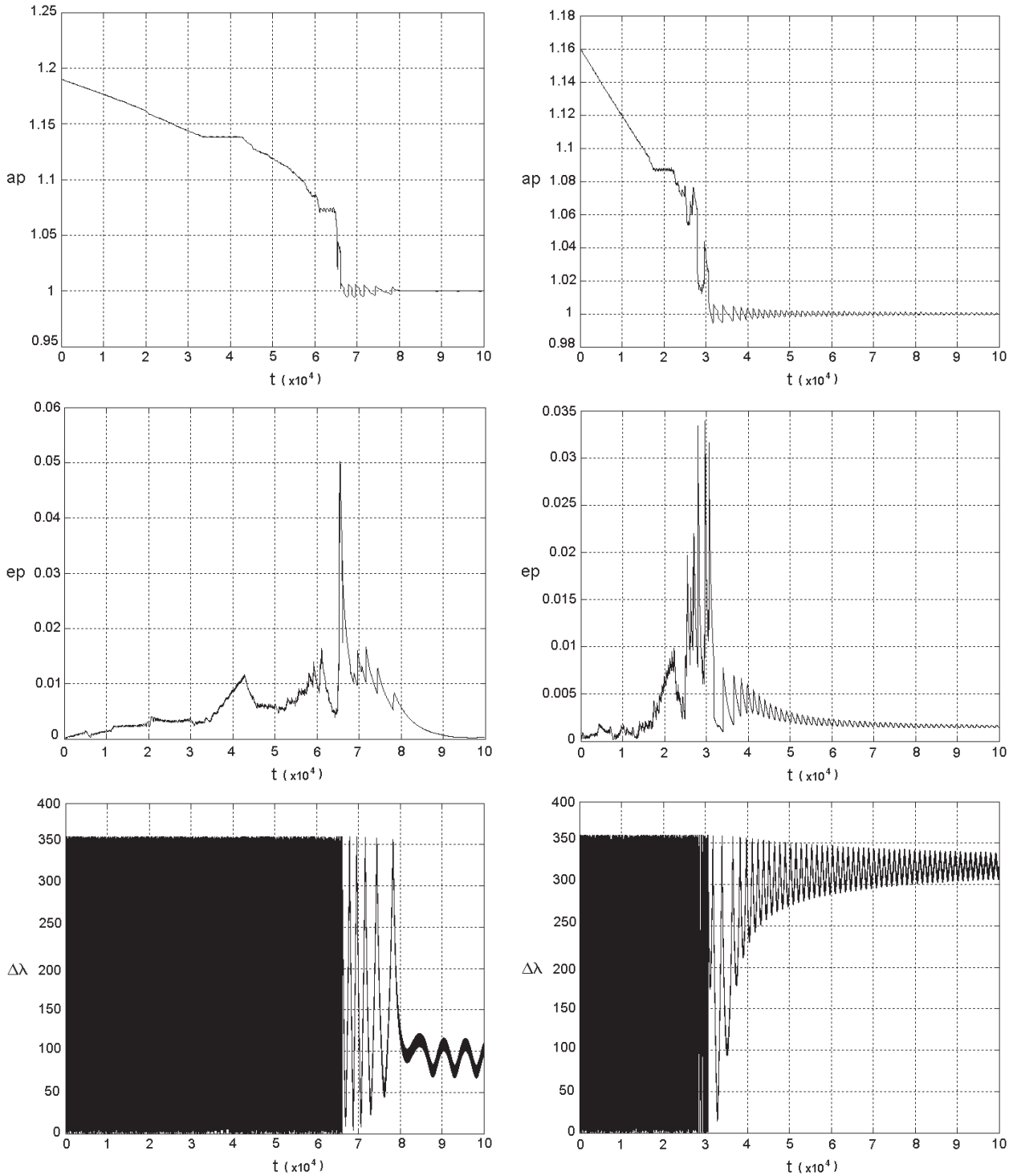
Mass ratio	Drag constant	Co-orbitals	Collisions	Diffusions	Others
$\mu_2 = 10^{-7}$	$k < 0.0125$	<1%	30%	<1%	69%
	$k > 0.09$	2%	34%	63%	1%
$\mu_2 = 10^{-6}$	$k < 0.125$	4%	26%	19%	51%
	$k > 0.9$	5%	18%	77%	–
$\mu_2 = 10^{-5}$	$k < 1.25$	6%	30%	37%	28%
	$k > 9.0$	2%	17%	81%	–
$\mu_2 = 10^{-4}$	$k < 12.5$	1%	53%	43%	3%
	$k > 90.0$	–	10%	90%	–

The results show that the greater number of trappings in the 1:1 resonance occur when  $\mu_2 = 10^{-6}$ . The drag conditions, in this case, seem to contribute more to the trapping. For this reason we have taken as the main goal of our work this mass ratio for the secondary body. Peale (1993) shows that the symmetry between L4 and L5 is broken in the presence of gaseous drag with the secondary body in a noncircular orbit. As did Kary & Lissauer (1995), we choose values of the constant of drag that are high enough so that L4 and L3 disappear in the circular case (Murray 1994). However, one of our goals is to show what happens with the planetesimal at the moment of trapping in the 1:1 resonance, when, decaying in its orbit, it comes near to the secondary body. In Fig. 2, two examples are shown comparing the time variations of semimajor axis, eccentricity and longitude when the mass ratio of the secondary body is  $\mu_2 = 10^{-6}$ . The capture in an external resonance increase the eccentricity and the probability of the planetesimal to encounter the secondary body. When the planetesimal crosses the secondary body's orbit, there is a large increase in its eccentricity, which can be explained by an exchange of angular momentum with the secondary body. After that, the oscillations of its eccentricity and semimajor axis diminish, stabilizing its orbit. Figure 2 shows that, if the secondary body's eccentricity is 0.07, the L4 point reappears. Here,  $\mu_2 = 10^{-6}$ . We can see that the number of oscillations during and after the trapping around L4 is smaller than around L5. This can be explained by the fact that the friction due to the drag is smaller ( $k = 0.025$ ), characterizing a larger size for the planetesimal (Marzari & Sholl 1997). Now, the goal is to know what the angles are between the planetesimal and the secondary body that favor the trapping in the 1:1 resonance after the encounter. A first analysis shows that, in the majority of the trappings, the entrance of the planetesimal in the co-orbital region occurs close to the secondary body in more than 70% of the cases (Fig. 3). These entrances occur in the region between  $0^\circ$  and  $30^\circ$ . Increasing the eccentricity, Fig. 3d shows that the attracting region around the L5 point increases when L5 starts to

move in the direction of the secondary body. When the eccentricity reaches its maximum (0.07), the region of the largest number of planetesimals is situated on the other side of the secondary body, between  $-30^\circ$  and  $0^\circ$ . It also seems that the feeding region is larger to the side of the L5 point when the eccentricity of the secondary body is larger. This corroborates Kary & Lissauer (1995) affirmation that the secondary body's epicyclical motion due to the eccentricity increases the relative velocity between the planetesimal and the secondary body and enlarges the size of the feeding region. Increasing the size of the feeding region gives the planetesimal more opportunities to have close encounters with the secondary body. The average of the longitude between the planetesimal and the secondary body during the trapping shows if the planetesimal was captured by the point L5 or L4. From Figs. 4a, b, we see that the majority of captures is around the L5 point. From Figs. 4c, d, we note, when the eccentricity is greater than 0.05, that some averages of the longitude are between  $60^\circ$  and  $90^\circ$ , characterizing a trapping around the L4 point and  $120^\circ$  characterizing a horseshoe orbit. These orbits appear in an angular position that is lesser than the critical value established by Murray (1994),  $108^\circ$  for  $k$  larger than approximately 0.025 when  $\mu_2 = 10^{-6}$ . Namouni & Murray (2000) have shown that the eccentricity displaces the L4 point towards the secondary body and the L5 point moves in the opposite direction. The greater the eccentricity the greater the displacement of the Lagrangian points in the direction opposite to the displacement due to the gas drag. Thus, it is evident that from an eccentricity of 0.05 this displacement become sufficiently large for the re-appearance of trapping around L4.

Kary & Lissauer (1995) studied in an analytical way the probability of impact for a planetesimal approaching a secondary body in two idealized limits: (1) the gravity force of the secondary body can be neglected (1-body approximation) and (2) the gravity force of the secondary body only affects the planetesimal when the two are close enough that the effect of the primary body on the planetesimal's motion relative to the secondary body

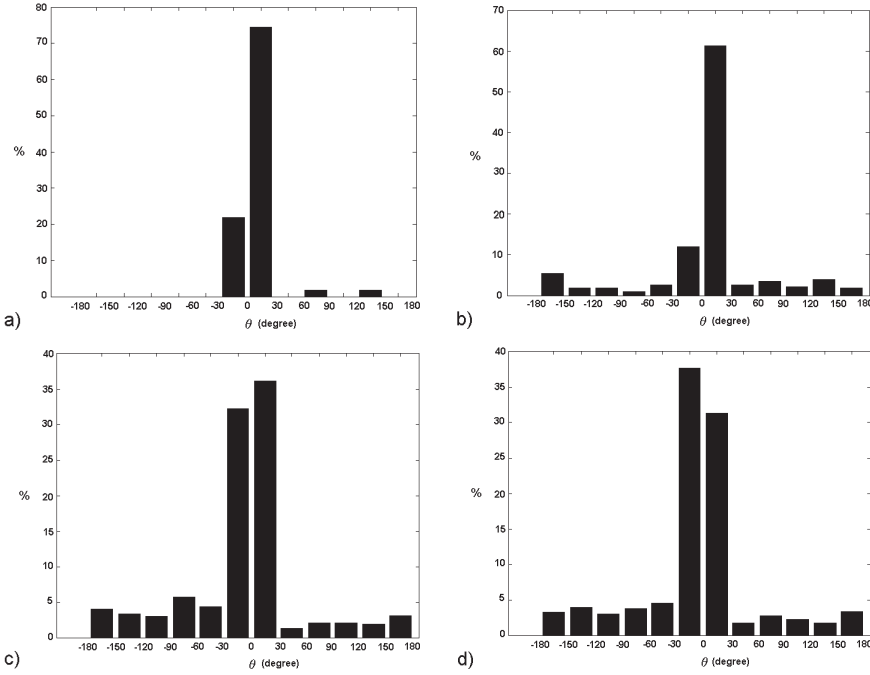




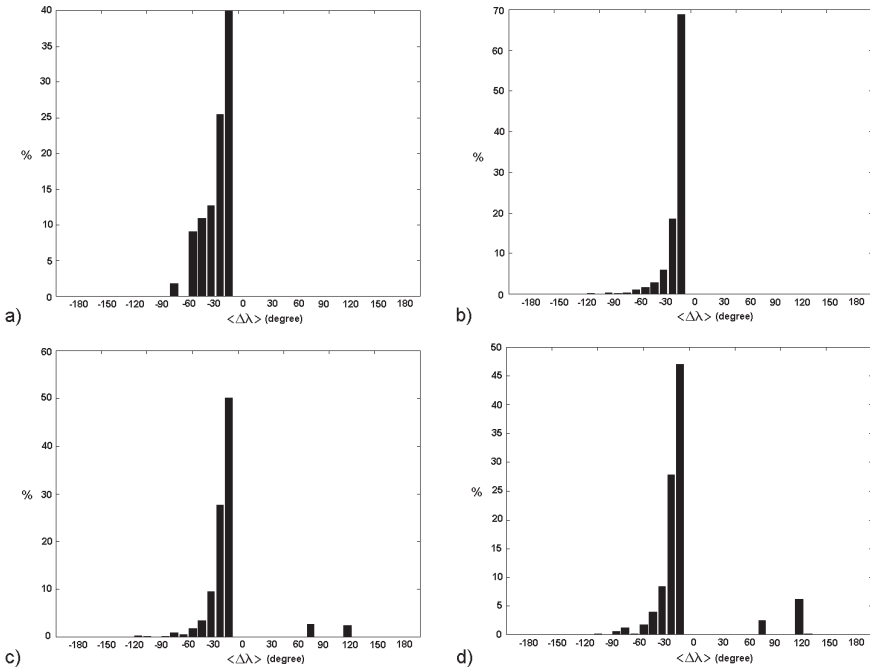
**Fig. 2.** Temporal evolution of the semi-major axis (*top*), the eccentricity (*middle*) and the longitude (*bottom*) of a planetesimal. In this case  $\mu_2 = 10^{-6}$  for the secondary body and the initial conditions are  $r_0 = 1.16$ ,  $e_2 = 0.056$  and  $k = 0.075$  (*left column*),  $r_0 = 1.19$ ,  $e_2 = 0.07$  and  $k = 0.025$  (*right column*).

can be neglected (2+2-body approximation). Figure 5 illustrates well this behavior when the approaches to the secondary body increase its eccentricity in a significant way, reducing the impact probability per conjunction. In the case of a secondary body in an eccentric orbit, we have a relative velocity high enough to increase the disturbance effect of the secondary body on the planetesimal's eccentricity, allowing a 2+2-body approximation. There, the planetesimal no longer has an instantaneous circular orbit, as is shown in Fig. 5. But as the drag reduces the

eccentricity of the planetesimal between the conjunctions, the greater the drag, the more quickly the eccentricity will be reduced. This means that the drag decreases the disturbance effect of the secondary body, needing the full three-body treatment. In reality, the 3-body effect comes to dominate the accretion behavior and numerical models become important. The distribution of trappings, collisions and diffusions relative to the secondary body eccentricity (Fig. 6) and the gas drag (Fig. 8) for the two cutoff collision radii when the mass ratio is  $10^{-6}$  shows that the



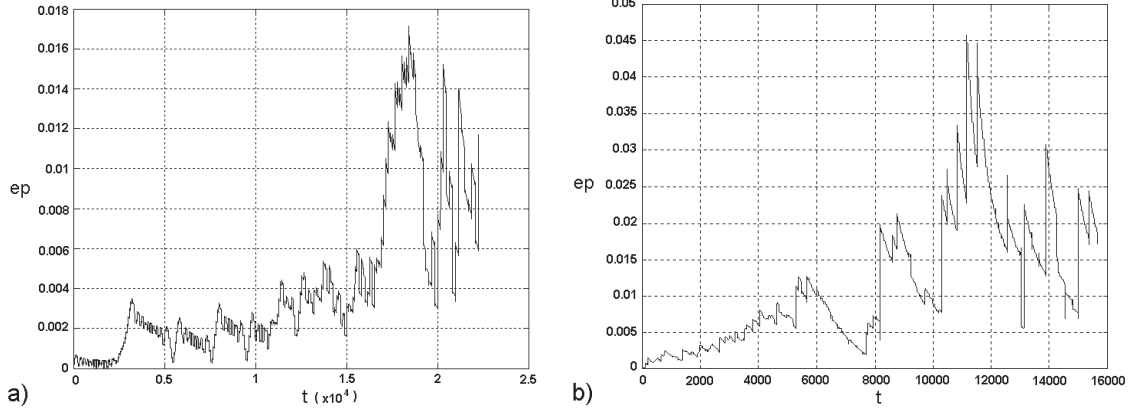
**Fig. 3.** Distribution of the angle  $\theta$  between the planetesimal and the secondary body at the moment of its entrance in the co-orbital region, when it was trapped in the 1:1 resonance. They are for all the values of  $0.025 < k < 1.0$  and for the eccentricities of the following secondary body's orbits when  $\mu_2 = 10^{-6}$ : **a)**  $e = 0.007$ ; **b)**  $e = 0.014$ ; **c)**  $e = 0.063$  and **d)**  $e = 0.07$ .



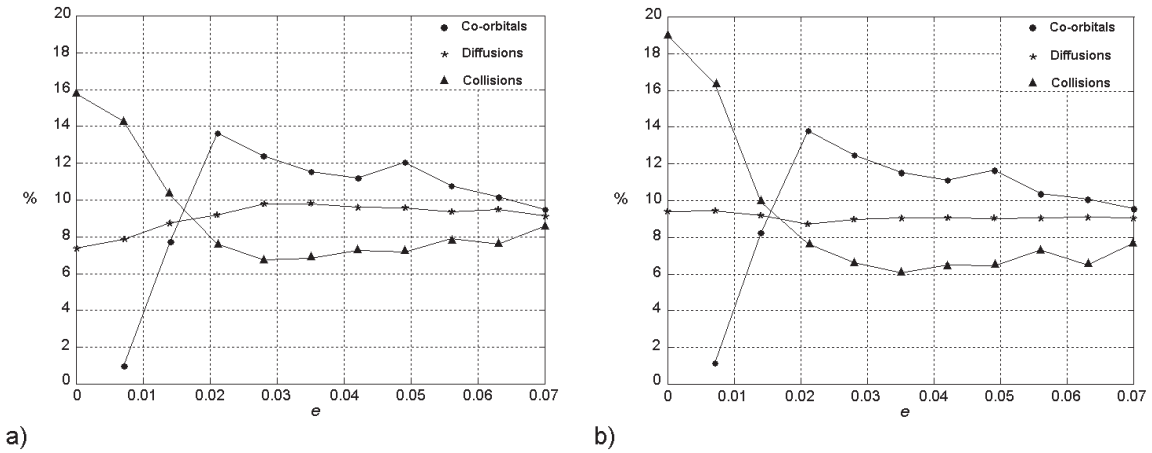
**Fig. 4.** Average of the longitude  $\langle \Delta \lambda \rangle$  between the planetesimal and the secondary body during the trapping in the 1:1 resonance, for all the values of  $0.025 < k < 1.0$  and for the eccentricities of the following secondary body's orbits when  $\mu_2 = 10^{-6}$ : **a)**  $e = 0.007$ ; **b)**  $e = 0.014$ ; **c)**  $e = 0.063$  and **d)**  $e = 0.07$ .

cutoff collision radius for these two values do not change the behavior of the distribution. Now, observing Fig. 6, we notice that the number of trappings is maximum for  $e = 0.021$  and  $k = 0.3$ , decreasing almost linearly when their values increase. In our model, these conditions seem to favor the co-orbital trappings. We also notice that as the value of the eccentricity increases the distribution of the three events tends to be equal, but the co-orbital events dominate for  $e > 0.021$  (Fig. 6). The trapping distributions for  $10^{-5}$  and  $10^{-4}$  (Fig. 7) occurs for a higher eccentricity of the secondary body. For example, when  $\mu_2 = 10^{-4}$  the trappings begin over 0.04. The maximum trapping occurs when  $e = 0.05$  for  $\mu_2 = 10^{-5}$  and is larger than 0.07 for  $\mu_2 = 10^{-4}$ . Looking at the collision rate we see that it is higher (40% of the cases) when  $e = 0$  to  $e = 0.014$ , which means the eccentricity increases the relative velocity between the secondary body and the planetesimal and decreases the accretion rate per

encounter (Fig. 6). At a very low value of  $k$  the eccentricity determines the distribution but when  $k$  is higher the dependency of the eccentricity does not occur (Fig. 7b). In Figs. 8 and 9 we notice that the gas drag diminishes the trapping distribution. The higher the drag rate, more quickly the decrease of the trappings occurs. Figure 9 shows that the trappings do not occur when  $k$  reaches the limit of 30. That means that the size limit of the planetesimal trapping is 0.2 m per AU. For example, at 5 AU from the Sun, Jupiter might not capture planetesimals smaller than 1 m. If we compare the collision distribution relative to the gas drag constant  $k$ , independent of the eccentricity of the secondary body, we see a maximum (15% of cases) when  $k = 0.2$  and a linear decrease from this value (Fig. 8). The diffusion distribution is different to the collisions. This distribution increases with the increase of the value of  $k$  as is shown in Figs. 8 and 9. The diffusion rate depends on the value of the gas drag constant



**Fig. 5.** Behavior of the eccentricity of the planetesimal during its process of approach before the collision with the secondary body. The initial conditions in this case are  $r_0 = 1.08$  for the planetesimal, and  $k = 0.050$  for the constant of the gas drag and  $\mu_2 = 10^{-6}$ . The eccentricity of the secondary body: **a)**  $e = 0$  and **b)**  $e = 0.042$ .



**Fig. 6.** Distribution of co-orbitals, collisions and diffusions of the whole planetesimal simulation as a function of the secondary body's eccentricity for a mass ratio of  $10^{-6}$ . The cutoff collision radius is **a)**  $0.05R_{\text{Hill}}$  and **b)**  $0.005R_{\text{Hill}}$ .

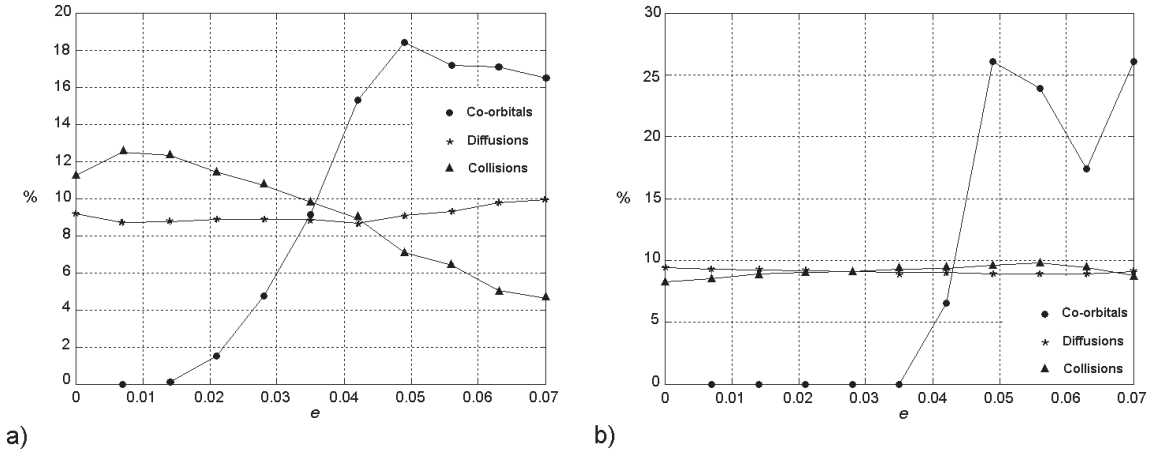
and becomes dominant when its value is above half of the intervals, while there is almost no dependency on the eccentricity of the secondary body (Figs. 6 and 7).

## 5. Conclusions

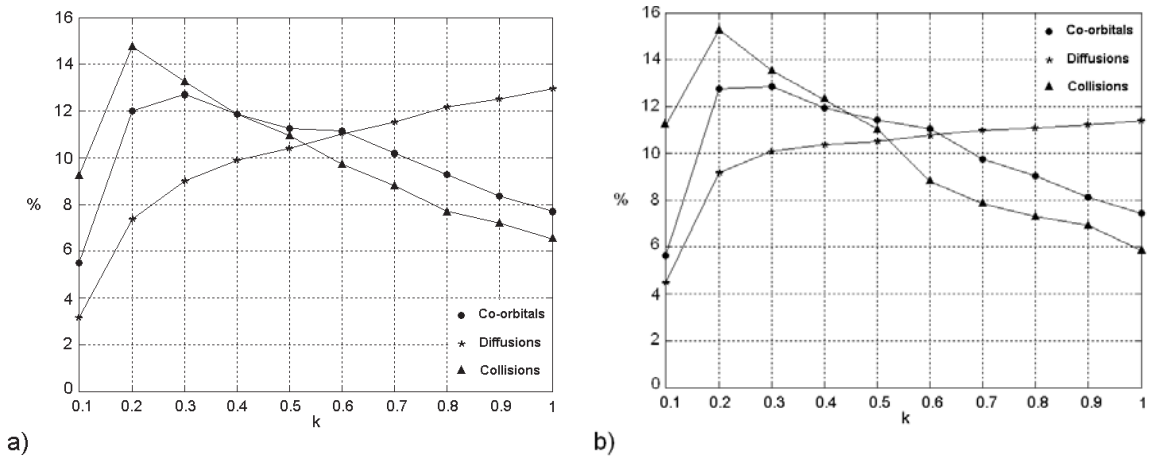
1. In the present work, we chose the drag model of a primordial solar nebula defined by Murray (1994) and for the dynamic system we used the conditions of Kary & Lissauer (1995). We studied trajectories of planetesimals whose orbits decay due to gas drag and are perturbed by the gravity of a secondary body on an eccentric orbit with a mass ratio that takes values from  $\mu_2 = 10^{-7}$  to  $\mu_2 = 10^{-3}$ . Each planetesimal ultimately suffers one of three possible fates: (1) trapping in a mean motion resonance with the secondary body; (2) collision with the secondary body increasing the secondary mass; or (3) diffusion, crossing the orbit of the secondary body. We established statistics of the collision rate for two cutoff collision radii  $0.005R_{\text{Hill}}$  and  $0.05R_{\text{Hill}}$  that implies an increase of the mass of the secondary body, and statistics of the diffusion rate that represent the planetesimals crossing the co-orbital region towards the primary body, or being scattered by the secondary body.
2. In the case of captures in the 1:1 resonance with the secondary body, we have shown that, in the process of the capture, an exchange of angular momentum between the

planetesimal and the secondary body occurs, the oscillations are reduced and the eccentricity of the planetesimal tends to a certain limit. We also have shown that the eccentricity of the secondary body changes the configuration of the equilibrium points L4 and L5, where the L4 point reappears, even if the drag conditions are over the limit defined by Murray (1994). The configuration with drag and eccentricity increases the attractive power of the region where the L5 point lies beyond its displacement in the direction of the secondary body. Thus there will occur more trappings than in the L4 point and the planetesimals will have smaller dimensions with larger oscillations, increasing the probability of collisions between them.

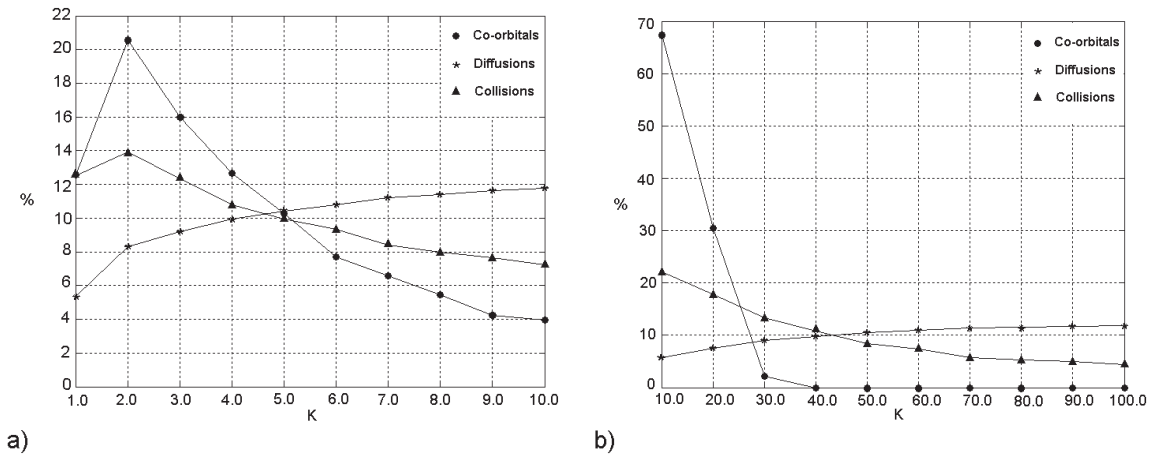
3. The results show that the mass ratio where the largest number of trappings occurs (8%) is  $\mu_2 = 10^{-6}$  and decreases to less than 1% for  $\mu_2 = 10^{-4}$ . When  $\mu_2 = 10^{-3}$ , trappings in the 1:1 resonance do not occur. The eccentricity increases the relative velocity between the secondary body and the planetesimal and decreases the accretion rate per encounter. The optimal value of  $k$  for the 1:1 trapping is between 0.9 and 1.25, representing a meter size planetesimal per AU. The choice of the cutoff collision radius is important for the accretion rate while it seems to be unimportant for the trapping results. The fact that the trappings do not occur when  $k$  reaches the limit of 30 means that the size limit of the planetesimal trapping is 0.2 m per AU. Thus the collision rate is larger (40% of



**Fig. 7.** Distribution of co-orbitals, collisions and diffusions of the whole planetesimal simulation as a function of the secondary body's eccentricity. The cutoff collision radius is  $0.05R_{\text{Hill}}$  and the mass ratio is **a)**  $10^{-5}$  and **b)**  $10^{-4}$ .



**Fig. 8.** Distribution of co-orbitals, collisions and diffusions of the whole planetesimal simulation as a function of the drag constant  $k$  for a mass ratio of  $10^{-6}$ . The cutoff radius collision is **a)**  $0.05R_{\text{Hill}}$  and **b)**  $0.005R_{\text{Hill}}$ .



**Fig. 9.** Distribution of co-orbitals, collisions and diffusions of the whole planetesimal simulation as a function of the drag constant  $k$ . The cutoff collision radius is  $0.05R_{\text{Hill}}$  and the mass ratio is **a)**  $10^{-5}$  and **b)**  $10^{-4}$ .

the cases) when  $e = 0$  to  $e = 0.014$ . For all the values of the secondary body's eccentricity we have a maximum (15% of the cases) when  $k = 0.2$  and a linear decrease from this value when  $\mu_2 = 10^{-6}$ . This seems to indicate that in the initial formation of the celestial bodies the number of impacts of bodies of large dimension was larger, contributing to a fast mass accretion. We saw that the diffusion rate is directly

related to the value of the gas drag constant and is maximum for high values of  $k$ , showing that gas drag is an efficient process in scattering planetesimals and the trapping of planetesimals in the 1:1 resonance is the less probable fate. These results depends on the specific drag force chosen. Finally,  $\mu_2 = 10^{-3}$  is a special case because the cutoff collision radius does not change the results and a particular approach will be

necessary. Peale (1993) showed that a secondary body larger than 30 terrestrial masses opens a gap in the nebula. This gap decreases the nebula density by up to 10 times when the secondary body reaches 300 terrestrial masses. In a paper in preparation we treat the consequences of this gap for the planetesimal behavior when it decays close to the co-orbital zone.

*Acknowledgements.* This work was supported by CAPES, CNPq and Fapesp. The authors thank the referee for suggestions that improved the paper.

## References

- Brown, E. W., & Shook, C. A. 1964, *Planetary Theory* (New York: Dover Publications)
- Colombo, G., Lautman, D. A., & Shapiro, I. I. 1966, *J. Geophys. Res.*, 71, 5705
- Kary, D. M., & Lissauer, J. J. 1995, *Icarus*, 117, 1
- Lagrange, J. L. 1889, *Mécanique Analytique* (Paris: Gauthier-Villars & fils), 4th Ed., 2
- Malhotra, R. 1993, *Icarus*, 106, 264
- Marzari, F., & Sholl, H. 1997, *Icarus*, 131, 41
- Morbidelli, A., Levison, H. F., Tsiganis, K., & Gomes, R. 2005, *Nature*, 435, 35
- Murray, C. D. 1994, *Icarus*, 112, 465
- Namouni, F., & Murray, C. D. 2000, *Celest. Mech.*, 76, 131
- Peale, S. J. 1993, *Icarus*, 106, 308
- Prantl, L. 1952, *Essentials of Fluid Dynamics* (New York: Hafner Publishing Company), 174
- Schuerman, D. 1980, *ApJ*, 238, 337
- Simmons, J. F. L., McDonald, A. J. C., & Brown, J. C. 1985, *Celest. Mech.*, 35, 145
- Yoder, C. F. 1979, *Icarus*, 40, 341
- Weidenschilling, S. J. 1977, *MNRAS*, 180, 57