



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA "JÚLIO DE MESQUITA FILHO"  
Instituto de Geociências e Ciências Exatas  
Campus de Rio Claro

# Explorando as definições de cônicas

João Calixto Garcia

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre

Orientador  
Prof. Dr. Vanderlei Marcos do Nascimento

2013

111      Garcia, João Calixto  
X111x      Explorando as definições de cônicas/ João Calixto Garcia- Rio  
Claro: [s.n.], 2013.  
69 f.:fig.  
  
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas.  
Orientador: Vanderlei Marcos do Nascimento  
  
1. Cônicas. 2. Foco-diretriz. 3. Foco-foco. 4. Secções. I. Título

# TERMO DE APROVAÇÃO

João Calixto Garcia

EXPLORANDO AS DEFINIÇÕES DE CÔNICAS

Dissertação APROVADA como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, pela seguinte banca examinadora:

Prof. Dr. Vanderlei Marcos do Nascimento  
Orientador

Profa. Dra. Suzinei Aparecida Siqueira Marconato  
Departamento de Matemática - Unesp - Rio Claro

Profa. Dra. Karina Schiabel Silva  
Departamento de Matemática - Universidade Federal de São Carlos

**Rio Claro, 15 de Março de 2013**

*A meus pais  
À minha esposa e à minha filha*

# Agradecimentos

"Pode deixar que eu vou devagarzinho pegar umas coisas no mercadinho": minha mãe por telefone, acometida de uma crise de artrose, depois de saber que eu estava ocupado com os estudos. A meus pais, meus agradecimentos pelo apoio incondicional na nossa formação escolar, a vida toda.

Agradeço à minha esposa e minha filha pela compreensão, ao permitirem que me dedicasse de maneira intensa ao curso.

Aos colegas de classe pelas trocas de ideias, auxiliando-me no acompanhamento dos estudos e, sobretudo, pela amizade que recebi de todos.

Aos nossos professores e tutores, pelo empenho, dedicação e comprometimento com o ensino, pelo estímulo e também pela amizade.

Aos idealizadores, organizadores e coordenadores do Profmat por acreditarem ser fundamental o aprimoramento na formação do professor do ensino básico.

Ao meu professor orientador Vanderlei, pela paciência, por me ensinar o rigor que devo ter com as palavras na Matemática, por me transmitir segurança, tranquilidade e sabedoria, pelo empenho e preocupação com o trabalho, dedicando seus fins de semana e férias.

*A Geometria faz com que possamos adquirir o hábito de raciocinar, e esse hábito pode ser empregado, então, na pesquisa da verdade e ajudar-nos na vida. (Jacques Bernoulli)*

# Resumo

Neste trabalho exploramos as definições mais usuais de cônicas, em duas direções. Uma delas trata da equivalência entre tais definições; a outra trata de estabelecer propriedades das figuras então definidas, em uma sequência natural que valoriza o pensamento geométrico.

**Palavras-chave:** Cônicas, Foco-diretriz, Foco-foco, Secções.

# Abstract

In this work we explore the most usual definitions of the conics, in two directions. One of them deals with the equivalence of the definitions themselves; the other one looks for properties of the figures just defined, stated in a natural sequence that enrichs the geometric thought.

**Keywords:** Conics, Focus-diretrix, Focus-focus, Sections.



# Lista de Figuras

|      |                                                                                           |    |
|------|-------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 2.1  | Construção de pontos de uma parábola . . . . .                                            | 19 |
| 2.2  | O vértice $V$ da parábola como ponto de tangência de $\lambda$ com $s$ . . . . .          | 20 |
| 2.3  | Não existem três pontos da parábola na reta $s$ , com $s \perp r$ . . . . .               | 21 |
| 2.4  | Na paralela a $d$ passando por $V$ há apenas esse ponto da parábola . . . . .             | 21 |
| 2.5  | Não há pontos da parábola nas retas verticais à direita de $V$ . . . . .                  | 21 |
| 2.6  | Em cada reta paralela a $r$ só há um ponto da parábola . . . . .                          | 22 |
| 2.7  | Circunferências com centros em $s$ , tangentes em $F$ e à reta $d$ . . . . .              | 22 |
| 2.8  | Obtenção das medidas $x$ e $y$ . . . . .                                                  | 23 |
| 2.9  | Se $x = x_1$ , então $m = x_1$ . . . . .                                                  | 23 |
| 2.10 | Se $y = x_2$ , então $n = x_2$ . . . . .                                                  | 24 |
| 2.11 | O caso das retas focais coincidirem . . . . .                                             | 24 |
| 2.12 | O caso das retas focais serem paralelas e distintas . . . . .                             | 24 |
| 2.13 | O vértice não é o único ponto da parábola na reta $s$ . . . . .                           | 25 |
| 2.14 | A parábola como secção de um cone reto . . . . .                                          | 26 |
| 2.15 | A parábola como secção de um cone reto qualquer . . . . .                                 | 27 |
| 2.16 | A parábola como secção de um cone reto qualquer . . . . .                                 | 28 |
| 2.17 | A parábola como secção de um cone reto qualquer . . . . .                                 | 28 |
| 2.18 | Construção de pontos $A$ e $A'$ de uma elipse . . . . .                                   | 29 |
| 2.19 | Construção de pontos $P$ e $P'$ de uma elipse, não pertencentes à reta $r$ . . . . .      | 30 |
| 2.20 | Os vértices $A$ e $A'$ da elipse como pontos de tangência entre $\lambda$ e $s$ . . . . . | 30 |
| 2.21 | Não existem três pontos da elipse na reta $s$ , com $s \perp r$ . . . . .                 | 31 |
| 2.22 | Nas paralelas a $d$ por $A$ e $A'$ não há pontos da elipse senão esses . . . . .          | 32 |
| 2.23 | Não há pontos da elipse fora da faixa "vertical" delimitada por $A$ e $A'$ . . . . .      | 32 |
| 2.24 | Não há três pontos da elipse na reta passando por $F$ . . . . .                           | 33 |
| 2.25 | O ponto da elipse mais distante de $F$ é $A'$ . . . . .                                   | 33 |
| 2.26 | Localização de alguns elementos da elipse . . . . .                                       | 34 |
| 2.27 | O ponto $F'$ como outro foco e a reta $d'$ como outra diretriz de uma elipse . . . . .    | 34 |
| 2.28 | O caso em que $P = D$ , com $DF \perp r$ . . . . .                                        | 35 |
| 2.29 | Simetria da elipse com respeito à reta perpendicular a $r$ , passando por $C$ . . . . .   | 36 |
| 2.30 | $PC$ decresce à medida que $P$ se aproxima de $s$ . . . . .                               | 36 |
| 2.31 | Elipses com distância foco-diretriz fixa e excentricidade variável . . . . .              | 37 |

|      |                                                                                                    |    |
|------|----------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 2.32 | Elipses com excentricidade fixa e distância foco-diretriz variável . . . . .                       | 38 |
| 2.33 | A reta $l$ , passando por $C$ , intersecta a elipse em exatamente dois pontos . . . . .            | 38 |
| 2.34 | A $t_1$ e $t_2$ correspondem pontos $P$ e $Q$ da elipse, e somente estes . . . . .                 | 39 |
| 2.35 | Posições de $\tilde{r}$ e de $\tilde{s}$ com relação a $C$ e a $r$ . . . . .                       | 40 |
| 2.36 | Não há mais do que 4 pontos de uma elipse à dada distância do centro $C$ . . . . .                 | 40 |
| 2.37 | Localização da reta $d$ e dos pontos $F$ , $F'$ , $C$ e $X$ na reta $r$ . . . . .                  | 41 |
| 2.38 | Não há pontos de $K$ fora da faixa "vertical" delimitada por $A$ e $A'$ . . . . .                  | 42 |
| 2.39 | $PF + PF' = 2a$ implica $\frac{PF}{Pd} = e$ . . . . .                                              | 42 |
| 2.40 | O caso em que $DF \perp r$ . . . . .                                                               | 43 |
| 2.41 | A elipse como secção de um cone reto . . . . .                                                     | 44 |
| 2.42 | As diretrizes e a excentricidade da elipse via secção de cone . . . . .                            | 45 |
| 2.43 | Construção dos vértices $A$ e $A'$ de uma hipérbole . . . . .                                      | 46 |
| 2.44 | Construção de pontos $P$ e $P'$ de uma hipérbole, fora da reta $r$ . . . . .                       | 47 |
| 2.45 | Construção dos pontos $T$ e $T'$ de uma hipérbole, fora da reta $r$ . . . . .                      | 48 |
| 2.46 | Os vértices $A$ e $A'$ da hipérbole como pontos de tangência de $\lambda$ com $s$ e $s'$ . . . . . | 48 |
| 2.47 | Não há pontos da hipérbole na faixa "vertical" delimitada por $A$ e $A'$ . . . . .                 | 49 |
| 2.48 | Localização de alguns elementos da hipérbole . . . . .                                             | 50 |
| 2.49 | O ponto $F'$ como outro foco e a reta $d'$ como outra diretriz de hipérbole . . . . .              | 51 |
| 2.50 | O caso em que $P = D$ , com $DF \perp r$ . . . . .                                                 | 51 |
| 2.51 | Simetria da hipérbole com respeito à reta perpendicular a $r$ , por $C$ . . . . .                  | 52 |
| 2.52 | $P$ fica mais perto de $r$ quanto mais próximo de $s$ . . . . .                                    | 53 |
| 2.53 | Posições de $\tilde{s}$ e de $\tilde{t}$ com relação a $s$ . . . . .                               | 54 |
| 2.54 | Localização da reta $d$ e dos pontos $F$ , $F'$ , $C$ e $X$ na reta $r$ . . . . .                  | 55 |
| 2.55 | Não há pontos de $W$ na faixa "vertical" delimitada por $A$ e $A'$ . . . . .                       | 55 |
| 2.56 | $ PF - PF'  = 2a$ implica $\frac{PF}{Pd} = e$ . . . . .                                            | 56 |
| 2.57 | O caso em que $DF \perp r$ . . . . .                                                               | 56 |
| 2.58 | A hipérbole como secção de um cone reto de duas folhas . . . . .                                   | 57 |
| 2.59 | Adequação de sistema de coordenadas para reconhecimento de cônica . . . . .                        | 58 |
| 3.1  | Construção de cônicas a partir dos componentes da tripla $(F, d, e)$ . . . . .                     | 62 |
| 3.2  | As cônicas como lugar geométrico . . . . .                                                         | 64 |
| 3.3  | A parábola como lugar geométrico . . . . .                                                         | 64 |
| 3.4  | A hipérbole como lugar geométrico . . . . .                                                        | 65 |
| 3.5  | A elipse como lugar geométrico . . . . .                                                           | 66 |
| 3.6  | Casos de tangência a $\lambda_1$ e $\lambda_2$ em uma situação particular . . . . .                | 66 |
| 3.7  | A elipse como secção de um cilindro reto . . . . .                                                 | 67 |

# Sumário

|          |                                                         |           |
|----------|---------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>Introdução</b>                                       | <b>17</b> |
| <b>2</b> | <b>Explorando as definições de cônicas</b>              | <b>19</b> |
| 2.1      | Parábola . . . . .                                      | 19        |
| 2.1.1    | Definição de parábola via foco e diretriz . . . . .     | 19        |
| 2.1.2    | Definição de parábola via secção em cone . . . . .      | 25        |
| 2.2      | Elipse . . . . .                                        | 29        |
| 2.2.1    | Definição de elipse via foco e diretriz . . . . .       | 29        |
| 2.2.2    | Definição de elipse via distâncias a focos . . . . .    | 40        |
| 2.2.3    | Definição de elipse via secção em cone . . . . .        | 43        |
| 2.3      | Hipérbole . . . . .                                     | 46        |
| 2.3.1    | Definição de hipérbole via foco e diretriz . . . . .    | 46        |
| 2.3.2    | Definição de hipérbole via distâncias a focos . . . . . | 54        |
| 2.3.3    | Definição de hipérbole via secção em cones . . . . .    | 57        |
| <b>3</b> | <b>Conclusões</b>                                       | <b>61</b> |
|          | <b>Referências</b>                                      | <b>69</b> |

# 1 Introdução

O assunto, cônicas, é tão antigo em Matemática que torna difícil sabermos em que, de fato, são baseadas nossas falas sobre ele. Nossa motivação para este trabalho foi, justamente, investigar nossas próprias convicções sobre o assunto, adquiridas sabe-se lá como, de modo a podermos falar dele com mais propriedade. Justamente pela idade do tema, é quase certo que as preocupações a que nos ativemos já tenham sido tratadas alhures. Mesmo assim, pensando que a dinâmica do ensino pode, e deve, ser aprimorada sempre, vislumbramos possibilidade de conseguir isso apresentando os resultados na forma e sequência que ora apresentamos. A forma busca valorizar os argumentos geométricos e a sequência busca mostrar passos naturais numa investigação em Matemática. Considerando o tratamento que os textos didáticos dão ao assunto, depois de todos os nossos questionamentos, somos levados a observar, também aqui, o que foi observado por Lebesgue [2] dizendo respeito aos números reais no ensino: "a preocupação não é quanto ao que se diz, é quanto ao que não se diz". Quisemos dizer o que não se diz, sob o risco de estarmos dizendo o óbvio. De qualquer forma, acreditamos que o trabalho constitui-se um material interessante para ser explorado no ensino médio e a justificativa para essa crença é a seguinte: por um lado, tratar de equivalências é, por excelência, uma atividade da Matemática e com ela se objetiva tanto possibilitar olhares distintos para um mesmo objeto, quanto identificar objetos aparentemente distintos; por outro lado, é claro que esse objetivo não pode ser alcançado sem que exploremos a essência dos objetos em questão, e justamente na busca disso que se constituirá essência é que se dá o desenvolvimento do pensamento matemático. Se estivermos certos, então será claro que é fundamental que um material didático propicie esse desenvolvimento, passo a passo como todo desenvolvimento se dá. Do contrário, como observou Lebesgue, "a Matemática deixa de ser um monumento e passa a ser um empilhamento".

A descrição das seções cônicas pela equação geral, pressupõe que a questão da classificação do conjunto solução seja tratada nalgum lugar. Não a incluímos aqui porque em nada alteraríamos a forma como ela é usualmente apresentada. É muito comum os textos dizerem que as cônicas, nelas caracterizadas de pronto por equações em sistemas especiais de coordenadas, são seções cônicas. Contudo, parece-nos, é nada usual apre-

sentarem uma justificativa que não seja justamente as figuras em suposta concordância. Essa é a razão pela qual decidimos incluir algo disso no material. Deixamos isso para o final, justamente para que o material pudesse ser utilizado sem pendências em quase toda sua totalidade.

## 2 Explorando as definições de cônicas

### 2.1 Parábola

#### 2.1.1 Definição de parábola via foco e diretriz

Dados um ponto  $F$  e uma reta  $d$  com  $F \notin d$  em um plano, o conjunto de todos os pontos  $P$  desse plano cuja razão das distâncias a  $d$  e a  $F$  é 1 é chamado a parábola de foco  $F$  e diretriz  $d$ . Vamos denotá-la, às vezes, por  $(F, d, 1)$ .

Consideremos  $r$  a reta perpendicular a  $d$  passando por  $F$  e seja  $\{X\} = r \cap d$ . O único ponto  $V$  dessa cônica pertencente a  $r$  é o ponto médio do segmento  $FX$ . De fato, sendo  $V'$  um ponto de  $r$  distinto de  $V$ , se  $V'$  está na semirreta com origem  $V$  contendo  $F$ , tem-se  $V'F < V'd$ . E, se  $V'$  está na semirreta oposta, tem-se  $V'F > V'd$ . Chamaremos o ponto  $V$  de vértice da parábola.

Além do vértice, podemos garantir a existência de uma infinidade de outros pontos da parábola  $(F, d, 1)$ , como vemos na construção geométrica a seguir.

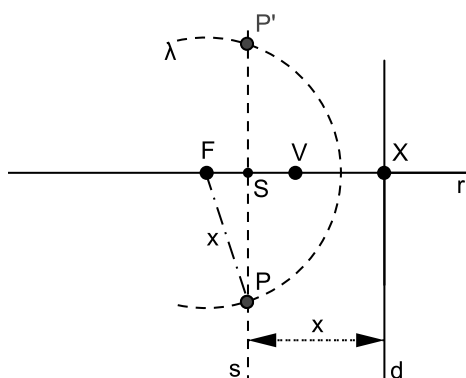


Figura 2.1: Construção de pontos de uma parábola

Consideramos uma circunferência  $\lambda$  centrada em  $F$  de raio  $x$  e traçamos, no semiplano determinado pela reta  $d$  ao qual pertence  $F$ , a reta  $s$  à distância  $x$  de  $d$ . Afiramos que, para  $x > VF$ ,  $\lambda \cap s$  contém pontos fora de  $r$ , ou seja, tem-se que

$x > FS$ . De fato, se  $x > FX$ , é claro que  $x > x - FX = FS$ . Para  $FX = x$ ,  $S$  coincide com  $F$  e naturalmente tem-se  $x > FS$ . Neste particular, a reta  $s$  é perpendicular a  $r$  em  $F$ , e, daí,  $\lambda$ , tendo centro nesse ponto, certamente intersecta  $s$ . Já, se  $x < FX$ , se tivéssemos  $x \leq FX - x = FS$ , concluiríamos que  $VX \geq x$ , ou,  $VF \geq x$ , adverso do que tomamos para  $x$ .

Observemos que, para  $VF = x$ , temos  $s \cap \lambda = \{V\}$ . A figura a seguir ilustra essa situação.

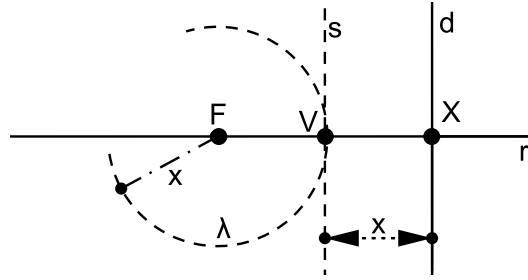


Figura 2.2: O vértice  $V$  da parábola como ponto de tangência de  $\lambda$  com  $s$

Vê-se claramente que os pontos  $P$  e  $P'$  da intersecção entre a reta  $s$  e a circunferência  $\lambda$  pertencem à parábola em questão. Na figura 2.1, observamos que o ponto  $P'$  é simétrico de  $P$  em relação à reta  $r$ , dada à congruência entre os triângulos  $FPS$  e  $FP'S$  e, no caso de  $P$  ser tal que  $FP \perp r$ , o ponto  $P'$  fica evidentemente à mesma distância da reta  $d$  que o ponto  $P$ , implicando também que  $P'$  pertence a essa parábola. Desde que  $VF < x$ , tantos pares de pontos da parábola são obtidos quanto se quiser, equidistantes da reta  $r$  e pertencentes a retas perpendiculares à  $r$ .

Constatamos com isso que existem pontos da parábola fora de  $r$ , reta esta que chamamos de reta focal.

**Proposição 2.1.** Seja a parábola  $(F, d, 1)$  e  $r$  sua reta focal. Então:

- i) Em cada paralela à diretriz  $d$  existem no máximo dois pontos da parábola.
- ii) Em apenas uma paralela à  $d$  é que existe um único ponto da parábola.
- iii) Dentre as retas paralelas à diretriz, somente naquelas cujas interseções com  $r$  pertencem à semirreta de origem  $V$  contendo  $F$  é que há pontos da parábola.
- iv) Em cada reta perpendicular à diretriz existe um único ponto da parábola.

*Demonstração.*

- i) Primeiro, observamos que, se um ponto  $P$  pertence à parábola, então seu simétrico com relação à  $r$  também pertence, o que é simples constatar. Suponhamos que existisse

um terceiro ponto da parábola na reta  $s$  que contém  $P$  e  $P'$ . Então teríamos  $PF = Pd = P''d = P''F$ , o que claramente não é verdade.

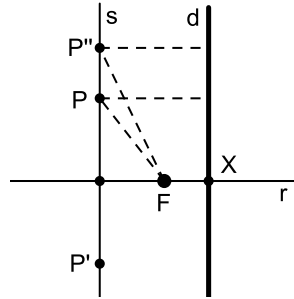


Figura 2.3: Não existem três pontos da parábola na reta  $s$ , com  $s \perp r$

ii) É claro que na paralela a  $d$  passando por  $V$  há apenas  $V$  na parábola (fig.2.4). Se existisse uma segunda reta paralela a  $d$  com um único ponto da parábola, esse ponto deveria, pela simetria com relação a  $r$ , pertencer à reta  $r$ , mas sabemos que nessa reta apenas  $V$  pertence à parábola.

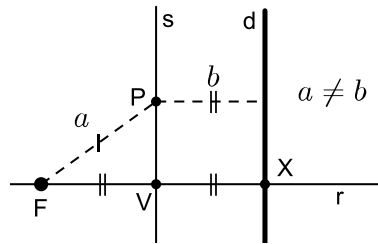


Figura 2.4: Na paralela a  $d$  passando por  $V$  há apenas esse ponto da parábola

iii) Se  $Q$  é um ponto qualquer da reta  $d$  ou do semiplano determinado por essa reta, que não contém o ponto  $F$ , então  $Qd = 0$  ou  $QF > Qd$ . Daí,  $Q$  não pertence à parábola. Se  $P$  é um ponto qualquer de uma reta  $s$  paralela à diretriz  $d$ , que intersecta  $r$  em um ponto entre  $V$  e  $\{X\} = r \cap d$ , então  $PF > VF$  e  $Pd < Vd$ , ou seja,  $PF > Pd$ . Portanto, não há ponto da parábola na reta  $s$ . Essas situações estão ilustradas na figura seguinte.

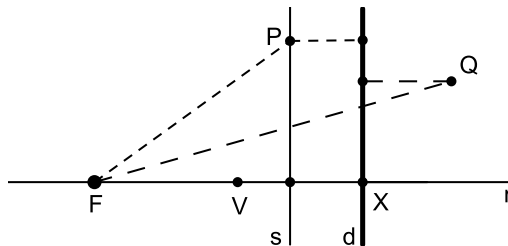


Figura 2.5: Não há pontos da parábola nas retas verticais à direita de  $V$



iv) Tomemos uma reta  $s$  perpendicular a  $d$  e seja  $S$  ponto de intersecção entre elas. É fácil verificar que o ponto comum  $P$  entre  $s$  e a mediatriz do segmento  $FS$  pertence a essa parábola. E esse ponto é único da reta  $s$  na parábola, pois tal mediatriz é distinta de  $s$ , e a definição de parábola exige que um tal ponto esteja nessa mediatriz. A ilustração desse fato segue.

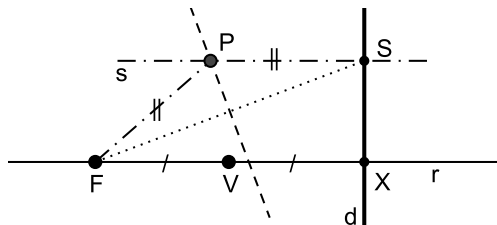


Figura 2.6: Em cada reta paralela a  $r$  só há um ponto da parábola

□

A proposição seguinte é motivada pela figura 2.7, imaginando a existência dos pontos  $A$  e  $B$  centros daquelas circunferências.

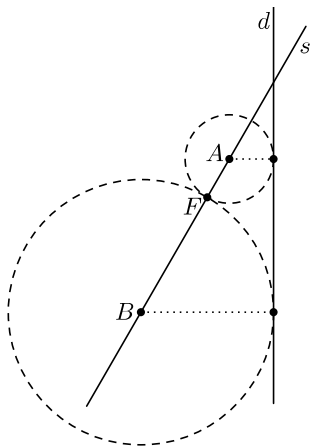
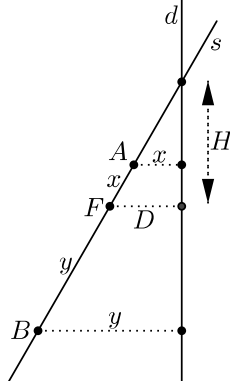


Figura 2.7: Circunferências com centros em  $s$ , tangentes em  $F$  e à reta  $d$

**Proposição 2.2.** Toda reta,  $s$ , passando por  $F$  e distinta de  $r$  contém exatamente dois pontos da parábola.

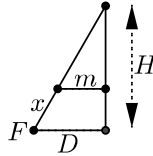
*Demonstração.* Pela construção apresentada no início, sabemos que o resultado é verdadeiro quando  $s$  é paralela a  $d$ . Consideremos, então, que  $s$  intersecta  $d$ . Queremos garantir que existem e são únicos  $x$  e  $y$  como na figura:

Figura 2.8: Obtenção das medidas  $x$  e  $y$ 

Se um tal  $x$  existir, deverá satisfazer  $\frac{H}{D} = \frac{\sqrt{x^2 - (D-x)^2}}{D-x}$  e, portanto, chamando  $k = \frac{H}{D}$ ,  $(k^2 + 1)(D-x)^2 = x^2$ . Analogamente, se um tal  $y$  existir, deverá satisfazer  $\frac{H}{D} = \frac{\sqrt{y^2 - (y-D)^2}}{y-D}$ , ou seja, a mesma equação quadrática que  $x$ . Isso mostra que em  $s$  não existem mais que dois pontos da parábola.

É simples ver que as raízes de (qualquer) uma dessas equações quadráticas são distintas, a saber,  $x_1 = \frac{D}{k^2} (\tilde{k} - \sqrt{\tilde{k}})$  e  $x_2 = \frac{D}{k^2} (\tilde{k} + \sqrt{\tilde{k}})$ , onde  $\tilde{k} = k^2 + 1$ .

Notando que  $\tilde{k} - \sqrt{\tilde{k}} > 0$ , consideremos a figura a seguir e mostremos que, tomando  $x = x_1$ , temos também  $m = x_1$ , determinando, portanto, um ponto da parábola em  $s$ .

Figura 2.9: Se  $x = x_1$ , então  $m = x_1$ 

Ora, de  $\frac{m}{D} = \frac{\sqrt{H^2 + D^2} - x_1}{\sqrt{H^2 + D^2}}$ , obtemos  $m = D - \frac{Dx_1}{\sqrt{H^2 + D^2}} = D - \frac{x_1}{\sqrt{\tilde{k}}} = D - \frac{1}{\sqrt{\tilde{k}}} \cdot \frac{D}{k^2} (\tilde{k} - \sqrt{\tilde{k}}) = \frac{D}{k^2} (k^2 - \sqrt{\tilde{k}} + 1) = \frac{D}{k^2} (\tilde{k} - \sqrt{\tilde{k}}) = x_1$ .

Também, analogamente, consideremos a figura a seguir, onde tomamos  $y = x_2$ , e mostremos que  $n = x_2$ .

Ora, de  $\frac{x_2}{n-D} = \frac{\sqrt{H^2 + D^2}}{D} = \sqrt{\tilde{k}}$ , temos  $n = D + \frac{1}{\sqrt{\tilde{k}}} \cdot \frac{D}{k^2} (\tilde{k} + \sqrt{\tilde{k}}) = \frac{D}{k^2} (k^2 + \sqrt{\tilde{k}} + 1) = \frac{D}{k^2} (\tilde{k} + \sqrt{\tilde{k}}) = x_2$ .

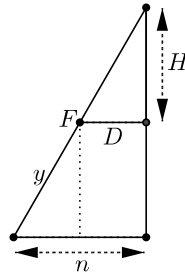


Figura 2.10: Se  $y = x_2$ , então  $n = x_2$

□

**Observação 2.3.** Dada a reta  $s$ ,  $\tilde{k}$  fica presumivelmente dado. Assim,  $x_1$  e  $x_2$  são construtíveis com régua e compasso.

**Proposição 2.4.** Uma parábola é definida por uma única tripla  $(F, d, 1)$ .

*Demonstração.* Suponhamos que  $(F', d', 1)$  também a definisse e seja  $r'$  a reta focal correspondente.

- i) Para  $r = r'$ , como  $V$  é ponto da parábola em  $r = r'$ , temos  $F = F'$  se, e somente se,  $d = d'$ . Assim, se  $r = r'$ , resta considerar  $F \neq F'$  e  $d \neq d'$ . Nesse caso, novamente, por  $V$  pertencer à parábola, a única solução possível, a menos pôr linha e tirar linha, é ilustrada na figura seguinte.

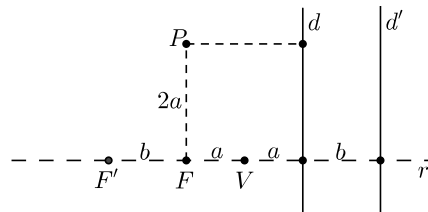


Figura 2.11: O caso das retas focais coincidirem

Mas é claro que  $\frac{Pd'}{PF'} \neq 1$ , a menos que  $b = 0$ , caso em que se tem  $F = F'$  e  $d = d'$ .

- ii) Para  $r \neq r'$ , mas  $r \parallel r'$ , a impossibilidade de  $(F', d', 1)$  vir a definir a mesma parábola está no fato de que, sendo  $r'$  uma reta focal, o simétrico de  $V$  com relação a  $r'$  deve estar na parábola. E isso não é verdade. Essa discussão está ilustrada na figura seguinte.

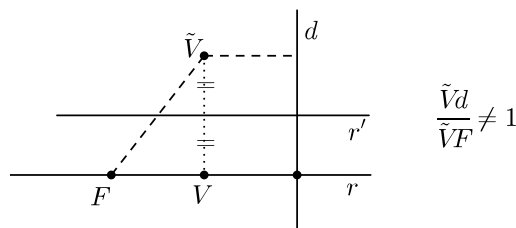


Figura 2.12: O caso das retas focais serem paralelas e distintas

- iii) Também não podemos ter  $r \perp r'$ , pois a simetria com relação a  $r'$  garantiria a existência de dois pontos da parábola em uma perpendicular à diretriz  $d$ , o que contrariaria a Proposição 2.1 em seu item *iv*.
- iv) Excluídos os casos anteriores, falta analisar o caso em que  $r'$  não coincide com  $r$ , não é paralela a  $r$ , nem paralela a  $d$ . Nesse caso, consideraríamos a paralela a  $r'$  passando por  $F$ , a qual intersectaria, pela Proposição 2.2, a parábola em dois pontos. Isso contradiria  $r'$  ser reta focal.

□

**Proposição 2.5.** Se uma reta  $s$  passa pelo vértice  $V$  de uma parábola e não é paralela nem perpendicular à sua diretriz  $d$ , então o vértice não é o único ponto da parábola em  $s$ .

*Demonstração.* Na figura seguinte vemos que  $a = FV = Vd$ ,  $\alpha$  é o ângulo agudo entre  $s$  e  $d$ ,  $X$  é a intersecção da reta focal com  $d$  e  $Y$  é a intersecção com  $d$  da reta que passa por  $F$  e é perpendicular a  $s$ . Consideramos o ponto  $Z$  de modo que  $Y$  seja o ponto médio entre  $X$  e  $Z$ . Traçamos uma perpendicular a  $d$  por  $Z$ . Chamemos  $P$  a intersecção dessa perpendicular com  $s$ . Afirmamos que  $PZ = PF$ , ou seja, que  $P$  é outro ponto da parábola em  $s$ , além de  $V$ . De fato, com as informações que a figura traz, chegamos a  $PZ = a(1 + 4 \operatorname{tg}^2 \alpha)$ . Também obtemos  $BP = a \operatorname{tg} \alpha (4 \sec \alpha - \cos \alpha)$  e, aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo  $FBP$  chegamos a igual medida de  $PZ$  para  $FP$ .

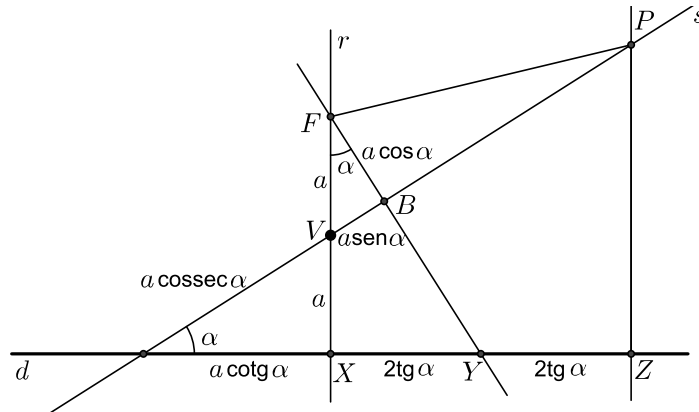


Figura 2.13: O vértice não é o único ponto da parábola na reta  $s$

□

### 2.1.2 Definição de parábola via secção em cone

**Proposição 2.6.** Consideremos um cone reto de duas folhas de vértice  $V$  e eixo  $t$ . Seja também um plano  $\pi$  que não contém  $V$ . Se  $\pi$  é paralelo a uma única geratriz do cone, então a intersecção entre  $\pi$  e o cone é uma parábola.

*Demonstração.* Seja  $\Lambda$  a esfera com centro em  $t$ , tangente ao cone (chamemos  $\lambda$  a circunferência de tangência), e ao referido plano  $\pi$  (chamemos  $F$  o ponto de tangência). Na figura seguinte vemos  $\Lambda$  e o ponto  $P$  na intersecção do plano  $\pi$  com o cone. À direita, está um esboço da intersecção de um plano que passa pelo eixo do cone e é perpendicular ao plano  $\pi$ .

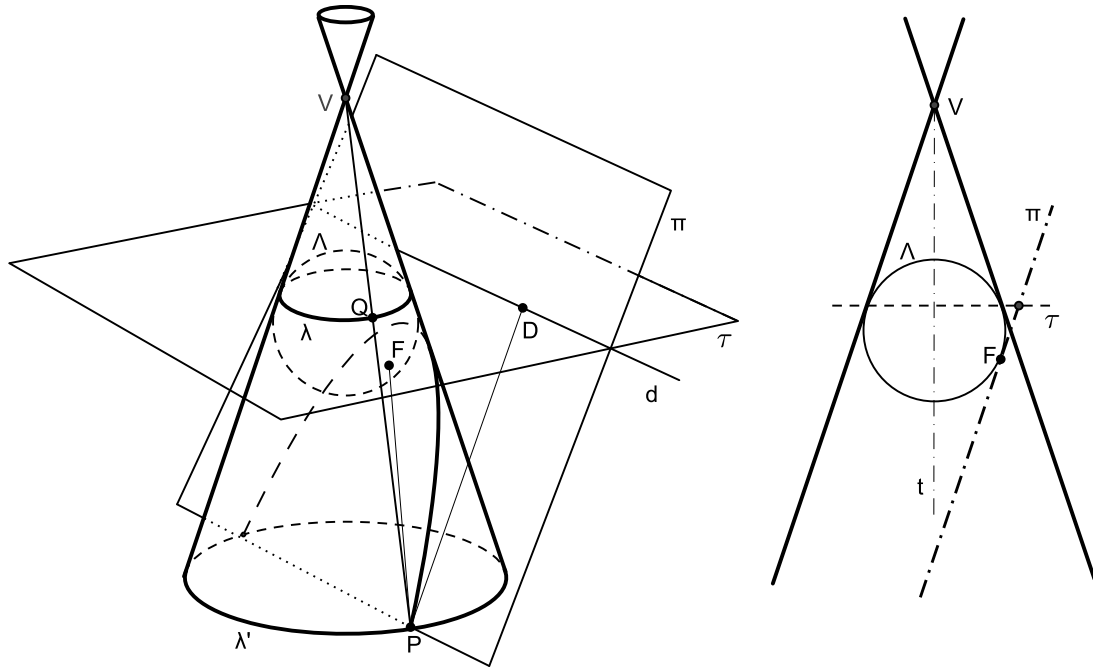


Figura 2.14: A parábola como secção de um cone reto

Seja  $Q$  o ponto de intersecção da geratriz que contém  $P$  com a circunferência  $\lambda$ .

Como as retas  $PQ$  e  $PF$  são tangentes à  $\Lambda$  nos pontos  $Q$  e  $F$ ,  $PQ = PF$ .

Sejam agora o plano  $\tau$  contendo a circunferência  $\lambda$ , e a reta  $d$ , resultado da intersecção entre esse plano e o plano  $\pi$ . Consideremos também o plano paralelo a  $\tau$  e que contém o ponto  $P$ , assim como a circunferência  $\lambda'$ , intersecção entre esse plano e o cone. Vemos, com isso, que  $PQ$  é a geratriz de um tronco de cone com bases delimitadas pelas circunferências  $\lambda$  e  $\lambda'$ .

Sendo o ponto  $D$  a projeção de  $P$  na reta  $d$ , como  $\pi$  é paralelo a uma geratriz do cone, e, portanto, paralelo a uma geratriz do referido tronco desse cone, então temos  $PQ = PD$ , ou seja,  $PF = Pd$ . Isso quer dizer que a secção está contida na parábola de foco  $F$  e diretriz  $d$ .

A inclusão contrária também acontece. De fato: suponhamos que existisse  $P' \in \pi$  um ponto da parábola que não estivesse no cone; então consideraríamos o plano que contém  $P'$  e é paralelo a  $\tau$ . Esse plano intersectaria o cone em uma circunferência  $\lambda'$  contendo dois pontos da secção e, portanto, da parábola.  $P'$  não podendo ser um deles, teríamos três pontos da parábola em uma paralela à diretriz.

□

A figura abaixo é motivadora da proposição seguinte.

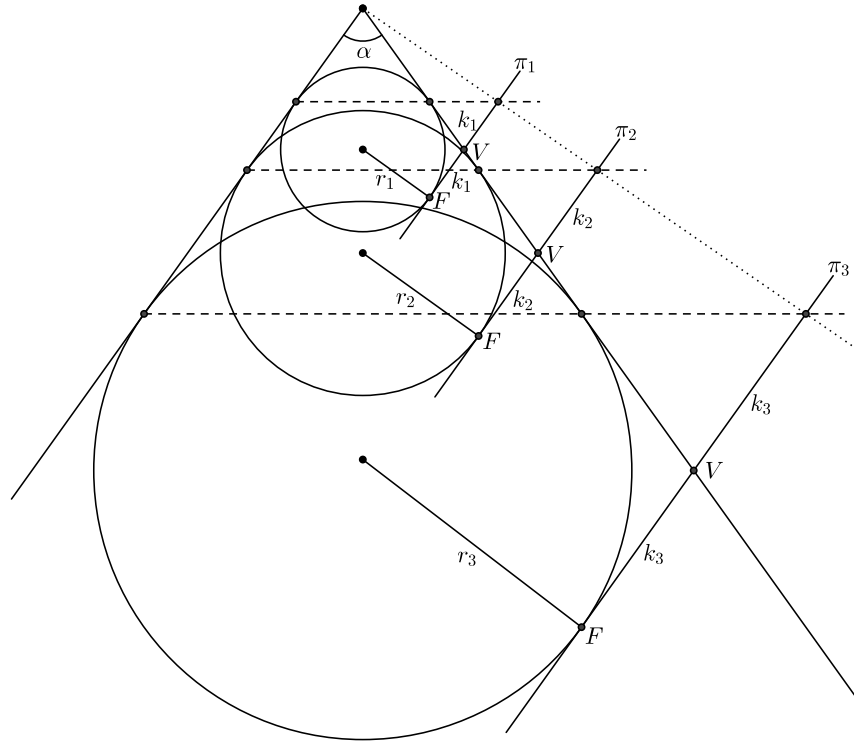


Figura 2.15: A parábola como secção de um cone reto qualquer

**Proposição 2.7.** Toda parábola é resultado da intersecção de um plano com um cone reto qualquer.

*Demonstração.* Seja uma parábola  $\wp$  e  $\alpha$  o ângulo de vértice de um dado cone. Trataremos de encontrar o raio  $r$  da esfera de centro  $O$  tangente ao cone, com  $O$  em seu eixo, de modo que um plano secante ao cone seja tangente a essa esfera, tendo  $\wp$  como secção. A figura seguinte exhibe a intersecção de um plano que passa pelo eixo do cone e é perpendicular a um plano  $\pi$ , secante ao cone. Se a parábola  $\wp$  em  $\pi$  é secção desse cone, então seu foco  $F$  e seu vértice  $V$  estão como na figura. Ponhamos  $k$  a distância entre eles. Notemos que o ângulo  $QOV$  tem medida  $\alpha/2$  pois o quadrilátero  $OQVF$ , com dois pares de lados consecutivos congruentes, é inscritível e o ângulo  $QVD$  tem medida  $\alpha$ . Observando o triângulo retângulo  $OQV$ , temos  $r = k \cotg(\alpha/2)$ . Assim,  $r$  é o candidato a raio da esfera que na figura supusemos existir.

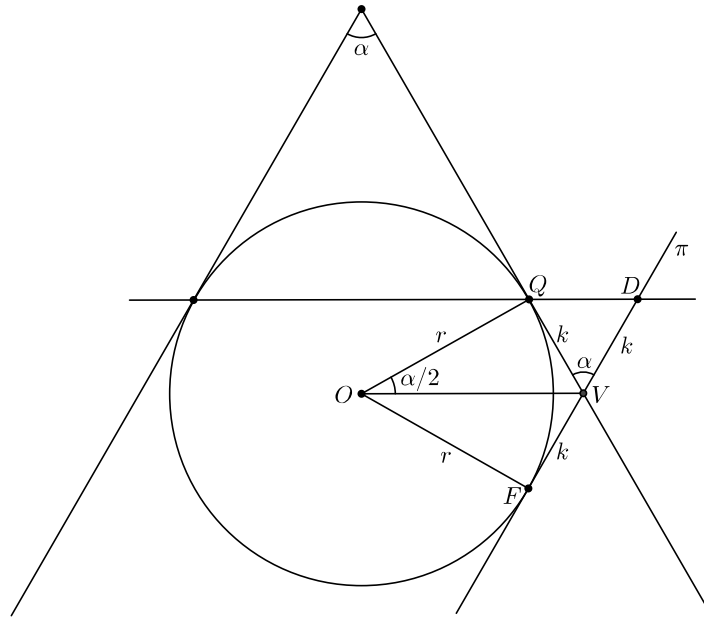


Figura 2.16: A parábola como secção de um cone reto qualquer

O centro  $O$  pode ser obtido como intersecção entre o eixo do cone e uma paralela à diretriz, à distância  $r$  desta.

□

Ilustramos a seguir intersecções de planos que passam pelos eixos de dois cones retos de ângulo de vértice diferentes, perpendiculares a planos secantes  $\pi_1$  e  $\pi_2$  em parábolas congruentes.

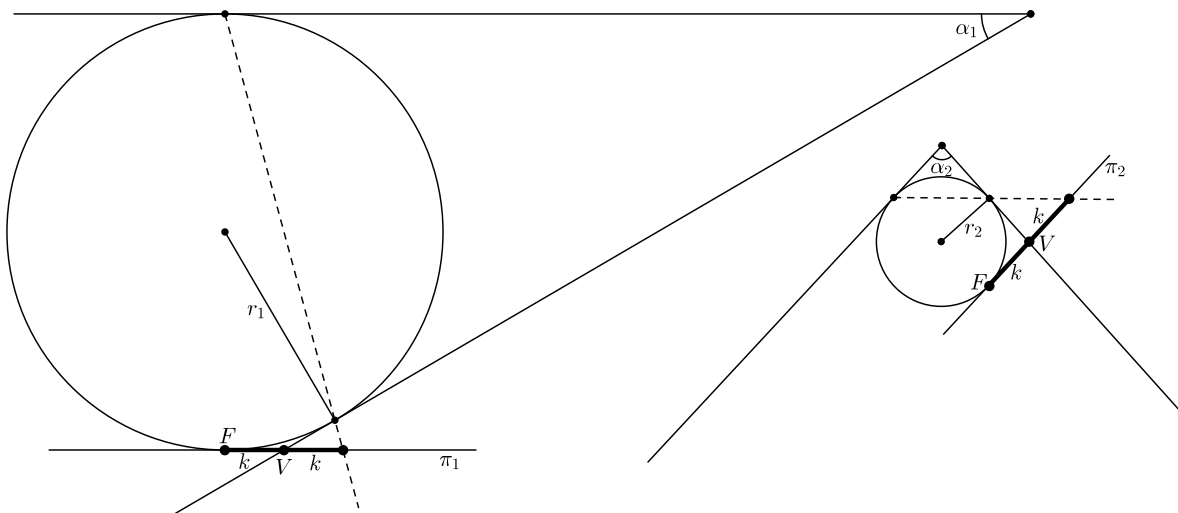


Figura 2.17: A parábola como secção de um cone reto qualquer

## 2.2 Elipse

### 2.2.1 Definição de elipse via foco e diretriz

Dado o número  $0 < e < 1$  e dados um ponto  $F$ , uma reta  $d$  em um plano, com  $F \notin d$ , o conjunto de todos os pontos do plano cuja razão das distâncias a  $d$  e a  $F$  é  $e$  é chamado a elipse de excentricidade  $e$ , foco  $F$  e diretriz  $d$ . Vamos denotá-la por  $(F, d, e)$ .

A elipse  $(F, d, e)$  é um conjunto não vazio. De fato, na reta  $r$ , passando por  $F$  e perpendicular a  $d$ , existem dois pontos da elipse. Para ver isso, consideremos a seguinte construção geométrica.

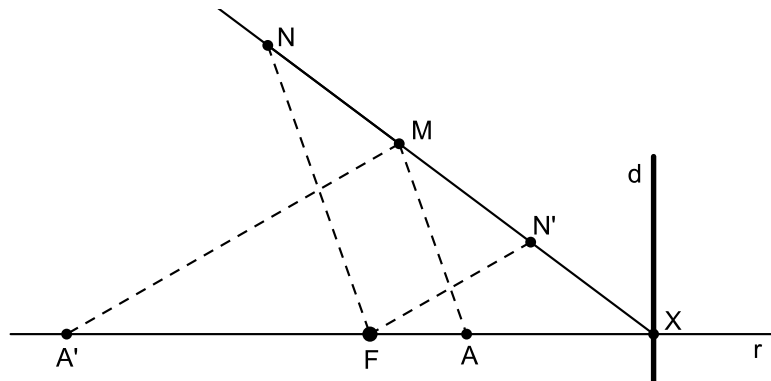


Figura 2.18: Construção de pontos  $A$  e  $A'$  de uma elipse

Consideramos uma semirreta com origem em  $X$ , onde  $\{X\} = r \cap d$  e direção diferente daquela de  $r$  e, nela, marcamos os pontos  $M$ ,  $N$  e  $N'$  de modo que o segmento  $MX$  tenha comprimento unitário, o segmento  $NX$  tenha comprimento  $1 + e$  e o segmento  $N'X$ ,  $1 - e$ . As retas que passam por  $M$  e são paralelas a  $NF$  e a  $N'F$  intersectam a reta  $r$  respectivamente nos pontos  $A$  e  $A'$ . Com a aplicação do Teorema de Tales vê-se que  $A$  e  $A'$  são pontos da tal elipse.

**Proposição 2.8.** Na reta  $r$  descrita acima, apenas  $A$  e  $A'$  estão na elipse em questão. Esses pontos são chamados vértices da elipse.

*Demonstração.* De fato, se, além de  $A$ ,  $A''$  fosse outro vértice entre  $F$  e  $X$ , teríamos  $\frac{AF}{AX} = \frac{A''F}{A''X}$  e, além disso,  $A''F = AF \pm k$  e  $A''X = AX \mp k$ , sendo  $k > 0$  um número real. Chegaríamos, com isso, a  $\frac{AF}{AX} = -1 \neq e$ . Se tivéssemos, além de  $A'$ ,  $A''$  na semirreta  $FA'$ , teríamos,  $\frac{A'F}{A'X} = \frac{A''F}{A''X}$  e, também,  $A''F = A'F \pm k$  e  $A''X = A'X \pm k$ , sendo  $k > 0$  um número real. Chegaríamos, com isso, a  $\frac{A'F}{A'X} = 1 \neq e$ . Por fim, observemos que  $F$  e  $X$  claramente não podem ser pontos da elipse.

□



Verificamos a existência de pontos da elipse fora da reta  $r$  com a construção geométrica apresentada a seguir.

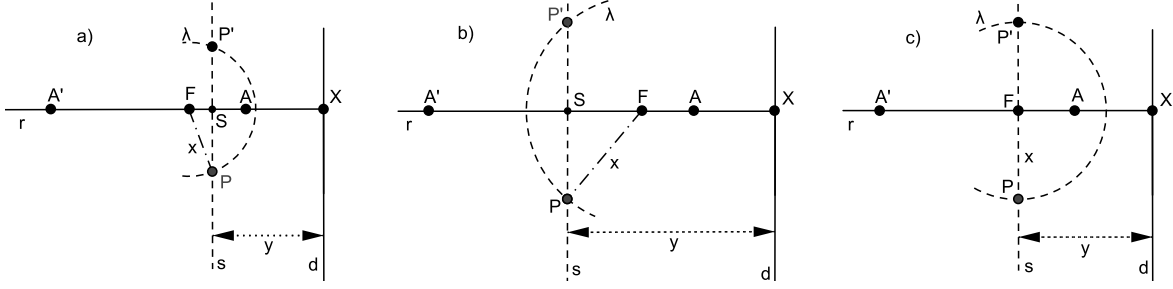


Figura 2.19: Construção de pontos  $P$  e  $P'$  de uma elipse, não pertencentes à reta  $r$

Consideramos uma circunferência  $\lambda$  centrada em  $F$  de raio  $x$ . Traçamos, no semi-plano determinado pela reta  $d$  ao qual pertence  $F$ , a reta  $s$  à distância  $y = \frac{x}{e}$  de  $d$ . Agora, notemos que existe  $x$  tal que  $AF < x < A'F$ , pois, como  $\frac{AF}{AX} = \frac{A'F}{A'X} = e$ , como  $AX < A'X$ , temos  $AF < A'F$ .

Afirmamos que para tais  $x$ ,  $\lambda \cap s$  contém pontos fora de  $r$ . Se  $FX = y$ , a reta  $s$  é perpendicular a  $r$  no ponto  $F$  e, daí, é claro que  $\lambda$ , tendo centro nesse ponto, intersecta  $s$  (fig. 2.19c). Se  $FX > y$ , queremos ver que  $x > FX - y = FS$  (fig. 2.19a.). De fato, suponhamos o contrário, isto é, que  $FX > y$  e  $x \leq FX - y$ , ou seja,  $FX \geq x + y = (1+e)y$ . Sabendo que  $\frac{AF}{AX} = \frac{x}{y} = e$ , então  $FX = AF + AX = (1+e)AX$ . Com isso, concluiríamos que  $AX \geq y$  e, daí, que  $AF \geq x$ , diferentemente do que tomamos para  $x$ .

Já, se tivéssemos  $FX < y$  e  $x \leq y - FX = FS$ , ou seja,  $y \geq FX + x$ , sabendo que  $\frac{A'F}{A'X} = \frac{x}{y} = e$  e que  $FX = A'X - A'F$ , então, a desigualdade  $y \geq FX + x$  poderia ser escrita assim:  $y \geq A'X - A'F + ey$ , ou,  $(1-e)y \geq (1-e)A'X$ , ou ainda,  $y \geq A'X$ . Isso significa que  $x \geq A'F$ , o contrário do que consideramos para a medida  $x$  (fig. 2.19b.).

Observemos que, para  $AF = x$ , temos  $AX = y$ . Assim sendo,  $s \cap \lambda = \{A\}$ . E, para  $A'F = x$ , temos  $A'X = y$ , implicando em  $s \cap \lambda = \{A'\}$ . A figura a seguir ilustra cada uma dessas situações.

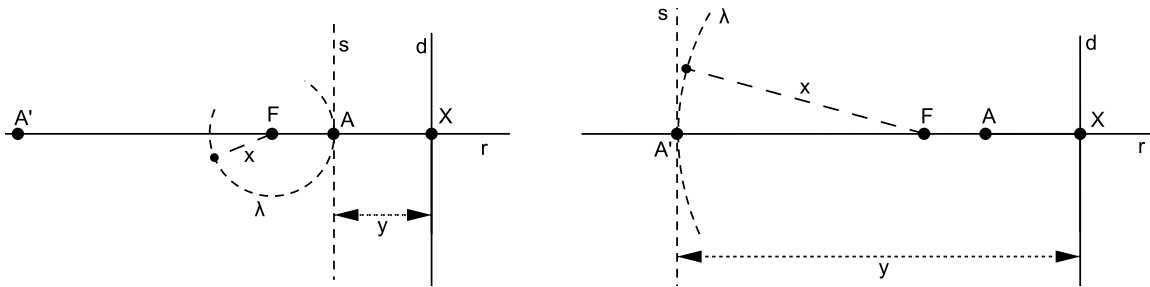


Figura 2.20: Os vértices  $A$  e  $A'$  da elipse como pontos de tangência entre  $\lambda$  e  $s$

Os pontos  $P$  e  $P'$  obtidos da intersecção de  $s$  com  $\lambda$  pertencem claramente à elipse em questão. Como ilustra a figura 2.19, eles são equidistantes da reta  $r$ , dada à congruência entre os triângulos  $FPS$  e  $FP'S$ . E, no caso de a reta  $s$  ser tal que  $s \cap r = \{F\}$ , as distâncias deles à reta  $r$  também são as mesmas, iguais ao raio da referida circunferência. À medida que tomamos valores para  $x$ , contanto que  $AF < x < A'F$ , tantos pares de pontos da elipse são obtidos quanto se quiser, equidistantes da reta  $r$  e pertencentes a retas perpendiculares à  $r$ .

Constatamos com isso que existem pontos da elipse fora da reta  $r$ .

**Proposição 2.9.** Seja a elipse  $(F, d, e)$  e seja  $r$  a reta que passa por  $F$  e é perpendicular a  $d$ . Então:

- i) Em cada paralela à diretriz  $d$  existem no máximo dois pontos da elipse.
- ii) Dentre as paralelas à  $d$  em apenas duas é que existe um único ponto da elipse.
- iii) Nas retas paralelas à diretriz, cujas interseções com  $r$  não pertencem ao segmento  $AA'$ , não há pontos da elipse.

*Demonstração.* i) Primeiro, observamos que se um ponto  $P$  pertence à elipse, então seu simétrico com relação à  $r$  também pertence, o que é simples constatar. Suponhamos que existisse um terceiro ponto  $P''$  da elipse na reta  $s$  que contém  $P$  e  $P'$ . Então teríamos  $\frac{PF}{Pd} = \frac{P''F}{Pd}$ , que implicaria em  $PF = P''F$ , o que claramente não é verdade.

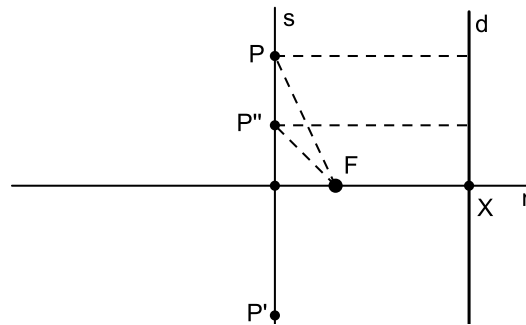


Figura 2.21: Não existem três pontos da elipse na reta  $s$ , com  $s \perp r$

ii) As duas retas paralelas a  $d$  que passam por  $A$  e por  $A'$  contêm só esses pontos da elipse. De fato, como podemos constatar na figura seguinte, se  $P$  e  $Q$  são pontos respectivamente das retas  $s$  e  $t$ , perpendiculares a  $r$ , distintos de  $A$  e  $A'$ , então  $FP \neq AF$  e  $FQ \neq A'F$ , e, daí,  $\frac{PF}{Pd}$  e  $\frac{QF}{Qd}$  são diferentes de  $e$ . Portanto,  $P$  e  $Q$  não são pontos da elipse. Se existisse uma terceira reta paralela a  $d$  com um único ponto da elipse, esse ponto deveria, pela simetria da elipse com relação a  $r$ , pertencer à reta  $r$ , o que

contradiz a Proposição 2.8.

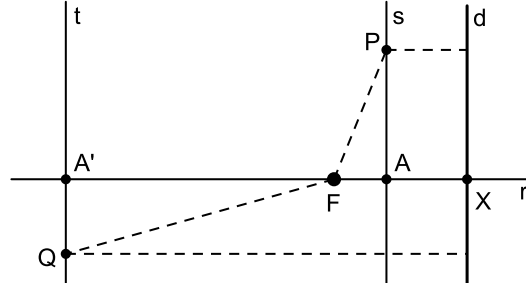


Figura 2.22: Nas paralelas a  $d$  por  $A$  e  $A'$  não há pontos da elipse senão esses

iii) Se  $Q$  é um ponto qualquer da reta  $d$  ou do semiplano determinado por essa reta e que não contém o ponto  $F$ , então  $Qd = 0$  ou  $QF > Qd$ . Daí,  $Q$  não pertence à elipse (fig. 2.23a). Se  $P$  é um ponto qualquer de uma reta  $s$  paralela à diretriz  $d$ , que intersecta  $r$  em um ponto entre  $A$  e  $\{X\} = r \cap d$ , então  $PF > AF$  e  $Pd < Ad$ , ou seja,  $\frac{PF}{Pd} \neq \frac{AF}{Ad} = e$ . Portanto, não há ponto da elipse na reta  $s$  (fig. 2.23a). E, se  $R$  é qualquer ponto de uma paralela  $t$  à  $d$ , que intersecta  $r$  em um ponto  $S$ , tal que  $A'$  fique entre  $S$  e  $F$ , temos também  $R$  fora da elipse. Para provar isso, observemos inicialmente que  $RF > A'F$  e  $Rd > A'd$ . Assim sendo, existem os reais positivos  $k$  e  $k'$  tais que  $RF = A'F + k$  e  $Rd = A'd + k'$ . Como  $A'F = e \cdot A'd$ , então, se  $R$  pertencesse à elipse, teríamos  $e \cdot A'd + k = A'F + k = RF = e \cdot Rd = e \cdot A'd + ek'$ , ou seja,  $k = ek' < k'$ . Por outro lado, como  $SF < RF$ , então,  $SA' + A'F < RF$ , ou  $SA' < RF - A'F$ , ou ainda,  $k' < k$ . Portanto, na reta  $t$  também não há ponto da elipse (fig 2.23b).

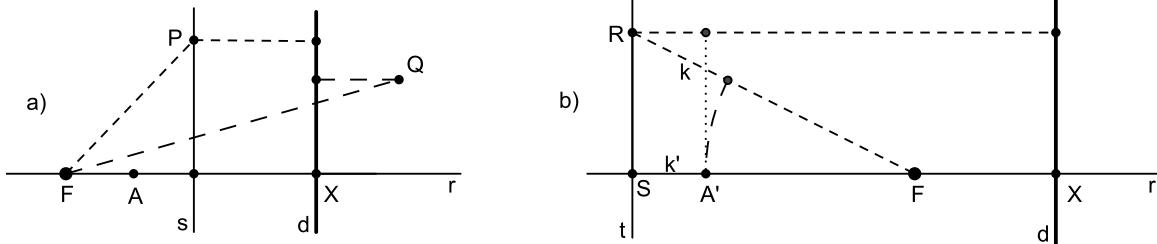


Figura 2.23: Não há pontos da elipse fora da faixa "vertical" delimitada por  $A$  e  $A'$

□

**Proposição 2.10.** Toda reta passando pelo foco  $F$  da elipse  $(F, d, e)$  a intersecta em no máximo dois pontos.

*Demonstração.* Se a reta é paralela à diretriz, o resultado segue do item  $i$  da proposição anterior. Suponhamos que intersecte a diretriz.

Os pontos  $M$  e  $N$ , como na figura 2.24a, não podem estar ambos na elipse. Da semelhança de triângulos, temos que  $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} \implies \frac{x}{a+c} \neq \frac{y}{b+c}$ . Se a reta intersectasse a

elipse em três pontos, como nenhum dos pontos  $M$  ou  $N$  poderá ser  $F$ , necessariamente uma das situações ocorreria.

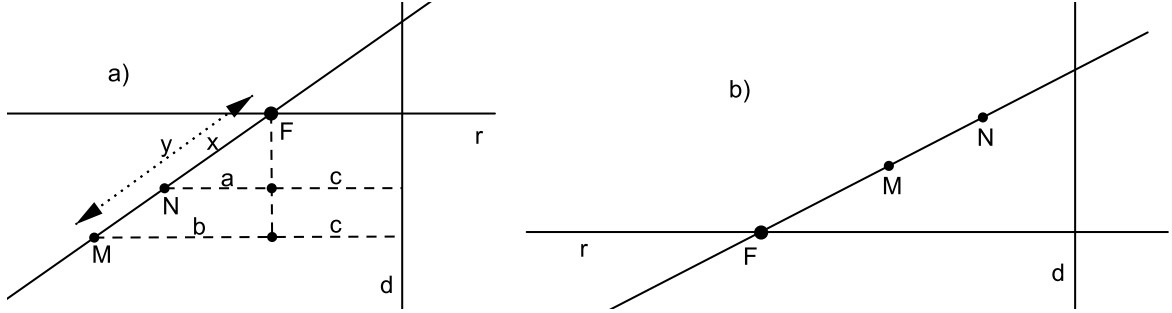


Figura 2.24: Não há três pontos da elipse na reta passando por  $F$

O caso, como na figura 2.24b, é claramente impossível.  $\square$

**Proposição 2.11.** O ponto da elipse  $(F, d, e)$  mais distante de  $F$  é o vértice  $A'$ .

*Demonstração.* Seja  $P$  um ponto dessa elipse. Vamos construir uma expressão para a distância  $x = PF$  em função da distância  $y = Pr$ . Alternativamente, queremos provar que o valor máximo de  $x$  ocorre quando  $y$  se anula, ou seja, quando  $P = A'$ . A figura seguinte auxilia nesse estudo.

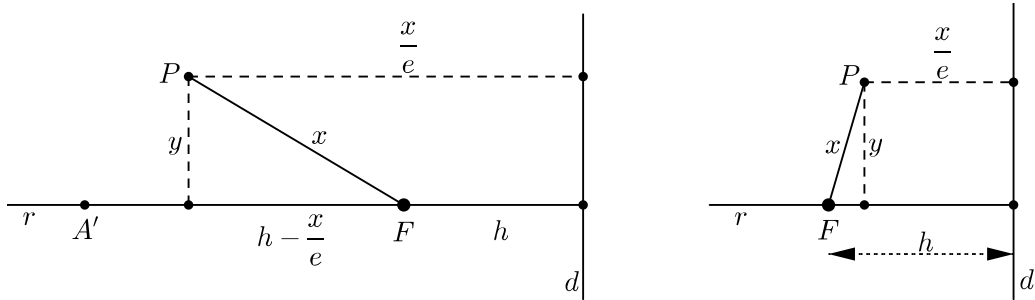


Figura 2.25: O ponto da elipse mais distante de  $F$  é  $A'$

Pondo  $h = Fd$ , se  $P$  é tal que  $PF \perp r$ , então  $x = he < \frac{he}{1-e} = A'F$ . E, em qualquer dos casos expostos na figura verificamos que a relação entre  $x$  e  $y$  é:  $x^2 = y^2 + \left(\frac{x}{e} - h\right)^2$ . Isolando  $x$ , ficamos com  $x = e \cdot \frac{h \pm \sqrt{e^2 h^2 + y^2(e^2 - 1)}}{1 - e^2}$ . Como  $e \cdot \frac{h - \sqrt{e^2 h^2 + y^2(e^2 - 1)}}{1 - e^2} < e \cdot \frac{h + \sqrt{e^2 h^2 + y^2(e^2 - 1)}}{1 - e^2}$  e como  $e^2 - 1 < 0$ ,  $x$  assume valor máximo com  $y$  se anulando, como esperávamos.  $\square$

Vamos agora considerar o ponto  $F'$  entre  $AA'$  tal que  $AF = A'F'$ ; o ponto  $X'$  na semirreta contida em  $r$ , com origem em  $A'$  e que não contém o ponto  $F$ , de tal forma que  $A'X' = AX$ , e a reta  $d'$  perpendicular à reta  $r$ , com  $r \cap d' = \{X'\}$ . Seja também  $C$  o ponto médio do segmento  $FF'$ .

Para simplicidade de notação, ponhamos  $h = FX$ ,  $c = CF$  e  $a = CA$ . Com isso, podemos escrever:  $2c = FF'$  e  $2a = AA'$ .

Um esboço dessas considerações é apresentado na figura a seguir.

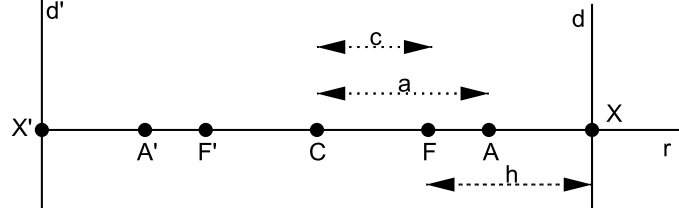


Figura 2.26: Localização de alguns elementos da elipse

**Proposição 2.12.** A elipse  $(F, d, e)$  coincide com a elipse  $(F', d', e)$ .

*Demonstração.* Primeiramente, vamos estabelecer alguns resultados.

Sendo  $\frac{AF}{AX} = e$  e  $AF + AX = h$ , então:  $AX = A'X' = \frac{h}{1+e}$  e  $AF = A'F' = \frac{he}{1+e}$ .

Daí,  $e = \frac{A'F'}{A'X'} = \frac{A'F' + FF'}{A'F' + FF' + FX} = \frac{\frac{he}{1+e} + 2c}{\frac{he}{1+e} + 2c + h}$ .

Com isso:  $c = CF = CF' = \frac{he^2}{1-e^2}$ , ou seja,  $2c = FF' = \frac{2he^2}{1-e^2}$ .

Também:  $XX' = FX + FF' + F'X' = 2h + 2c = \frac{2h}{1-e^2}$ , ou seja,  $CX = \frac{h}{1-e^2}$ .

E também:  $2a = AA' = XX' - XA - X'A' = \frac{2h}{1-e^2} - 2\frac{h}{1+e} = \frac{2he}{1-e^2}$ , ou seja,

$a = AC = A'C = \frac{he}{1-e^2}$ , fazendo-nos concluir que  $e = \frac{CF}{CA} = \frac{c}{a}$ .

Na figura a seguir observamos que, se  $P$  é um ponto qualquer dessa elipse, fora de  $r$ , e, se pusermos  $PF = u$ ,  $Pr = PZ = y$ ,  $Pd = PY = t$  e  $Pd' = PY' = t'$ , então  $t = \frac{u}{e}$  e  $t' = XX' - t = \frac{2h}{1-e^2} - \frac{u}{e}$ .

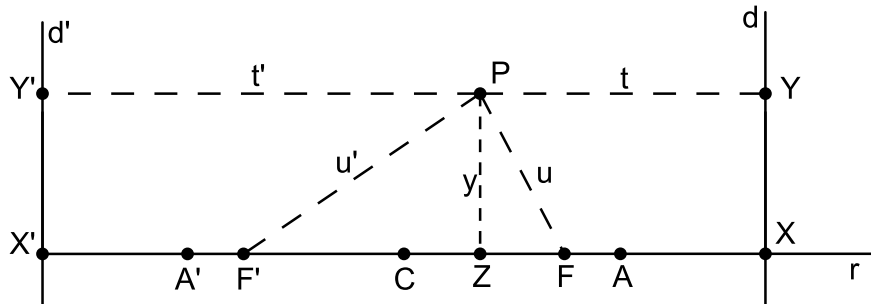


Figura 2.27: O ponto  $F'$  como outro foco e a reta  $d'$  como outra diretriz de uma elipse

Para  $P = D$ , tal que  $DF \perp r$ , tem-se o triângulo retângulo  $DFD'$ , com catetos  $DF = u = he$  e  $FF' = \frac{2he^2}{1-e^2}$ , e hipotenusa  $DF' = u'$ , como se pode constatar na próxima figura.

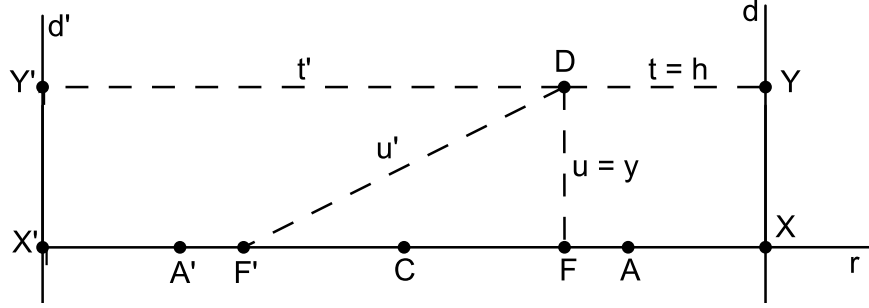


Figura 2.28: O caso em que  $P = D$ , com  $DF \perp r$

Com isso,  $(u')^2 = h^2e^2 + \frac{4h^2e^4}{(1-e^2)^2}$ , ou,  $u' = \frac{he(1+e^2)}{1-e^2}$ .

Como  $t' = Dd' = XX' - h = \frac{2h}{1-e^2} - h = \frac{h(1+e^2)}{1-e^2}$ , temos, nesse particular,  $e = \frac{u'}{t'} = \frac{DF'}{Dd'}$ .

Notemos que  $u + u' = he + \frac{he(1+e^2)}{1-e^2} = \frac{2he}{1-e^2} = AA'$ .

De um modo geral, tem-se casos que recaem no exposto pela figura 2.27. Ali, se observa que  $(u')^2 - (ZF')^2 = u^2 - (ZF)^2$  e, portanto,  $(u')^2 = u^2 + FF' \cdot (ZF' - ZF) = u^2 + FF' \cdot (FF' - 2ZF)$ . Como  $FF' = \frac{2he^2}{1-e^2}$  e  $ZF = ZX - FX = \frac{u}{e} - h$ , então,  $(u')^2 = u^2 + \frac{2he^2}{1-e^2} \left( \frac{2he^2}{1-e^2} - \frac{2u}{e} + 2h \right) = u^2 - \frac{4heu}{1-e^2} + \frac{4h^2e^2}{(1-e^2)^2} = \left( u - \frac{2he}{1-e^2} \right)^2 = (u - AA')^2$ .

Do que obtivemos na proposição anterior, sabemos que  $u = PF < A'F < AA'$ . Então, já que  $(u')^2 = (u - AA')^2$ , segue que  $u + u' = AA'$  e, por isso,  $u' = \frac{2he}{1-e^2} - u = e \left( \frac{2h}{1-e^2} - \frac{u}{e} \right) = e(XX' - t) = et'$ , ou seja,  $e = \frac{u'}{t'}$ .

Por fim, notemos que os vértices  $A$  e  $A'$  naturalmente pertencem à elipse  $(F', d', e)$ , visto que  $A'F' = AF$  e  $A'd' = Ad$  e, também que  $AF' = A'F$  e  $Ad' = A'd$ .

De tudo isso, concluímos que  $(F, d, e) \subset (F', d', e)$ .

Reciprocamente, se um ponto pertence à elipse  $(F', d', e)$ , então pertence à elipse  $(F, d, e)$ . Mostramos que o ponto  $F$  e a reta  $d$  servem de foco e diretriz para  $(F', d', e)$ , trocando  $F$  por  $F'$  e  $d$  por  $d'$ , na argumentação acima.

□



é dada por uma expressão quadrática com coeficiente do termo dominante  $e^2 > 0$  cujo ponto de mínimo é  $t = \frac{h}{1-e^2} = D$ . Como  $AX \leq t \leq D$  (dada à Proposição 2.9), concluímos que, em função de  $t$ ,  $(PC)^2$  (ou  $PC$ ) decresce nesse intervalo. Assim sendo, o ponto da elipse que está mais próximo do centro encontra-se sobre a reta  $s$ .

Dada à simetria que a elipse possui em relação a  $r$  e a  $s$ , esse mesmo fato ocorre em cada uma das outras três porções do plano delimitada por essas retas.  $\square$

Como consequência disso, concluímos que existem somente duas retas paralelas a  $r$  que intersectam a elipse em um único ponto. Sendo  $B$  e  $B'$  tais pontos, não há pontos da elipse nas retas paralelas a  $r$  cujas intersecções com  $s$  não pertencem ao segmento  $BB'$ .

No início (pág. 32) apresentamos uma construção geométrica para pontos de uma elipse. Com ela, bem podemos traçar tantos pontos quanto desejarmos para concebermos uma ideia da forma dessa figura. Como nunca teremos construído todos os pontos, é interessante ter as Proposições 2.9 e 2.15 em auxílio na formação daquela ideia. Contando com um recurso da informática nas construções geométricas, elaboramos as figuras abaixo.

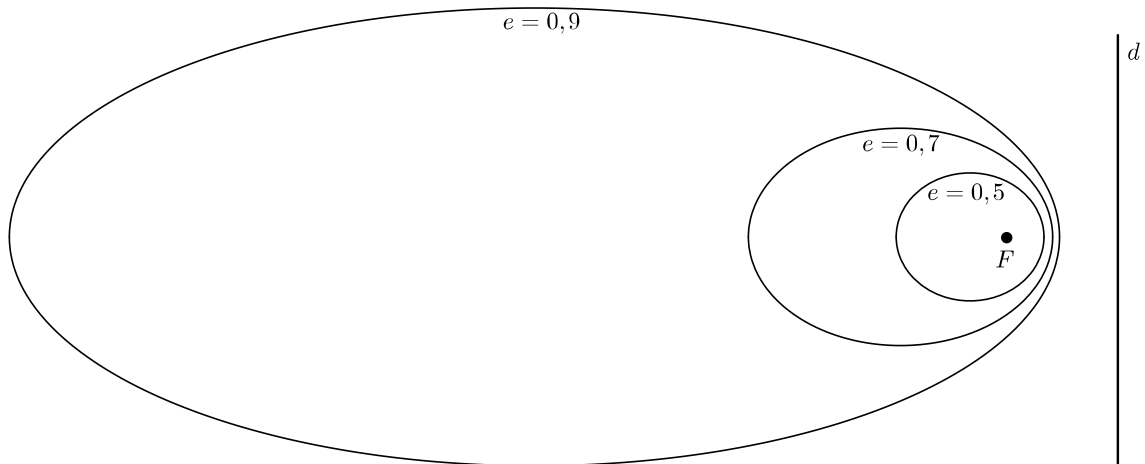


Figura 2.31: Elipses com distância foco-diretriz fixa e excentricidade variável



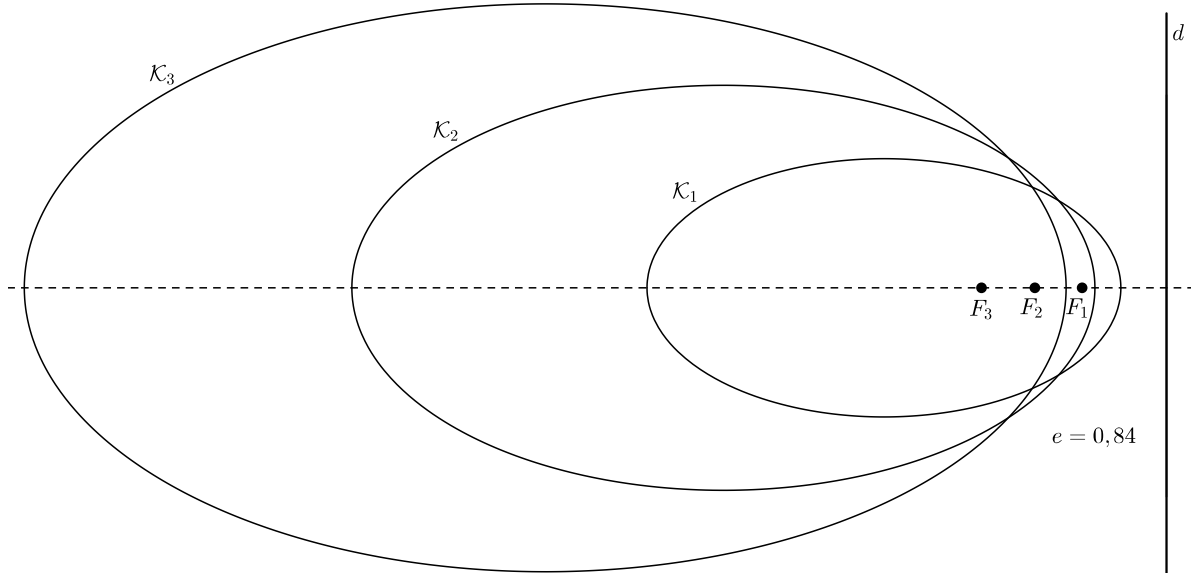


Figura 2.32: Elipses com excentricidade fixa e distância foco-diretriz variável

**Proposição 2.16.** Com a notação da Proposição 2.12, sejam a elipse  $(F, d, e) = (F', d', e)$  e  $C$  o ponto médio do segmento  $FF'$ . Toda reta  $l$  passando por  $C$  intersecta a elipse em exatamente dois pontos.

*Demonstração.* A demonstração segue os mesmos passos dados na demonstração da Proposição 2.10 e, por isso, omitiremos alguns deles. Se  $l$  é perpendicular à reta  $r$  determinada por  $F$  e  $F'$ , por construção (pág. 30), temos a existência dos pontos, como afirmada. O mesmo vale se  $l = r$ . Suponhamos  $l \neq r$  e  $l$  não perpendicular a  $r$ . Então  $l$  intersecta a diretriz  $d$  e podemos considerar que a situação é como mostrada na figura seguinte, onde  $P$  é um suposto ponto como desejado.

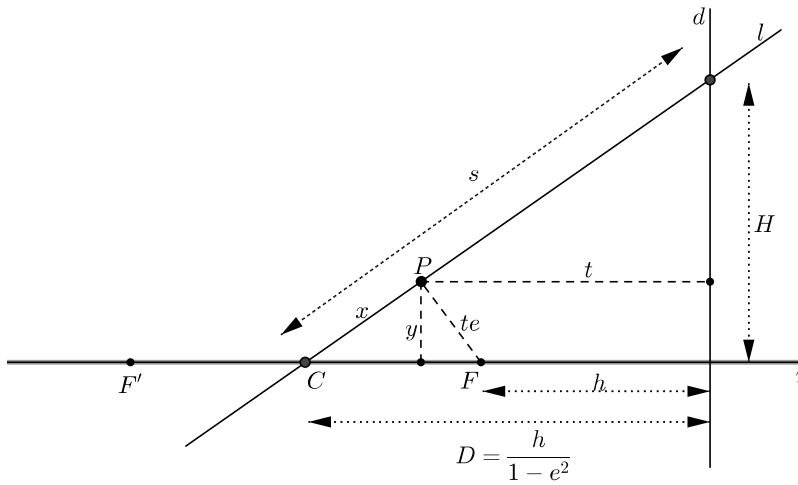


Figura 2.33: A reta  $l$ , passando por  $C$ , intersecta a elipse em exatamente dois pontos

Assim, as relações  $\frac{H}{y} = \frac{s}{x}$ ;  $\left(\frac{h}{1-e^2}\right)^2 + H^2 = s^2$ ;  $\left(\frac{h}{1-e^2} - t\right)^2 + y^2 = x^2$  e  $y^2 = (te)^2 - (t-h)^2$  deverão ser satisfeitas. E, sendo o caso, obtemos  $\left(1 - \frac{D^2}{H^2}(e^2 - 1)\right)t^2 - 2D\left(\frac{hD}{H^2} + 1\right)t + D^2\left(1 + \frac{h^2}{H^2}\right) = 0$ . (\*)

O discriminante dessa equação em  $t$  é  $\Delta = \frac{4D^2h^2}{H^4(1-e^2)}(h^2e^2 + H^2(2 - e^2 - e^4))$ .

Como  $e^2 + e^4 < 2$ , já que  $e < 1$ , concluímos que  $\Delta > 0$ , portanto, (\*) tem raízes  $t_1 \neq t_2$ .

Com um pouco mais de trabalho, verifica-se que a  $t_1$  e  $t_2$  correspondem pontos  $P$  e  $Q$  da elipse como desejados e ilustrados na figura seguinte, e que não há outros.

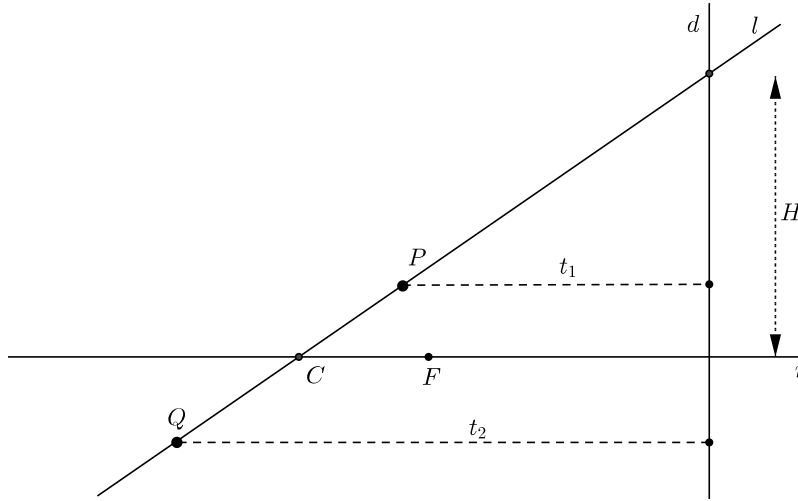


Figura 2.34: A  $t_1$  e  $t_2$  correspondem pontos  $P$  e  $Q$  da elipse, e somente estes

□

**Teorema 2.17.** Seja a elipse  $(F, d, e) = (F', d', e)$ . Nenhuma reta além daquela contendo  $F$  e  $F'$  é reta focal da elipse.

*Demonstração.* Suponhamos que existisse reta  $\tilde{r} \neq r$  contendo focos da elipse. A reta  $\tilde{r}$  não poderia ser paralela a  $r$  pois, se fosse, o ponto simétrico do vértice  $A$  com relação a  $\tilde{r}$  deveria estar na elipse e isso contrariaria a Proposição 2.9. Se  $\tilde{r}$  fosse perpendicular a  $r$  e não passasse pelo centro  $C$ , o mesmo argumento acima se aplicaria, agora tomando o ponto  $B$  e seu simétrico com relação a  $\tilde{r}$ ; caso passasse por  $C$ , então,  $C$  também seria o centro em  $\tilde{r}$  e, pela Proposição 2.15 teríamos  $AC > BC$ , considerando  $r$ , bem como  $BC > AC$ , considerando  $\tilde{r}$ .

Não ocorrendo os casos acima, a reta  $\tilde{s}$  que é perpendicular a  $\tilde{r}$  e passa por  $C$  estaria nas condições da Proposição 2.16. Sejam  $P$  e  $Q$  pontos de intersecção de  $\tilde{s}$  com  $(F, d, e)$  e seja  $\{\tilde{C}\} = \tilde{r} \cap \tilde{s}$ .

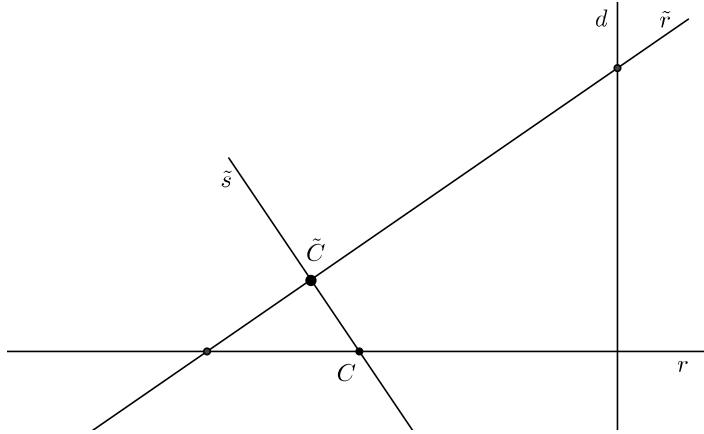


Figura 2.35: Posições de  $\tilde{r}$  e de  $\tilde{s}$  com relação a  $C$  e a  $r$

Como  $\tilde{s}$  passa por  $C$ , por um lado, o Corolário 2.14 garante que  $PC = QC$  e, por outro lado, a Proposição 2.9 garante que  $P\tilde{C} = Q\tilde{C}$ . Portanto, teríamos  $C = \tilde{C}$ , já que  $C$  e  $\tilde{C}$  estão em  $\tilde{s}$ . Agora, se  $\tilde{C} = C$ , construiríamos, como ilustrado a seguir, um retângulo não quadrado com um lado paralelo a  $r$  com os vértices na elipse, cada qual em um quadrante relativo a  $r$  e  $s$ , e centro em  $C$ . Os pontos simétricos, com relação a  $\tilde{r}$ , dos vértices desse retângulo forneceriam, além dos próprios vértices, pelo menos mais dois pontos da elipse a uma mesma distância de  $C$ . Isso contrariaria o Corolário 2.14.

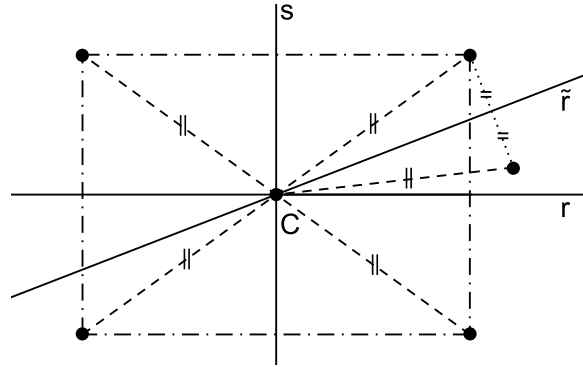


Figura 2.36: Não há mais do que 4 pontos de uma elipse à dada distância do centro  $C$

□

## 2.2.2 Definição de elipse via distâncias a focos

**Proposição 2.18.** Sejam  $F$  e  $F'$  dois pontos do plano  $\pi$  e seja uma constante  $2a > FF'$ . Se  $K = \{P \in \pi; PF + PF' = 2a\}$ , então existem reta  $d$  e número  $0 < e < 1$  tais que  $\frac{PF}{Pd} = e$ , qualquer que seja  $P \in K$ . Noutras palavras,  $K \subset (F, d, e)$ .

*Demonstração.* Primeiramente, vamos estabelecer alguns resultados.

Seja  $C$  o ponto médio do segmento  $FF'$  e  $r$  a reta que o contém. Ponhamos  $c = CF$ .

Definamos  $e = \frac{c}{a}$ . Assim,  $2c = 2CF = FF' < 2a$  e, com isso,  $0 < e < 1$ .

Consideremos a reta  $d$  perpendicular a  $r$  no ponto  $X$  tal que  $F$  esteja entre  $C$  e  $X$  e tal que a distância dessa reta ao ponto  $F$  seja  $h = \frac{a(1-e^2)}{e}$ .

A figura seguinte ilustra essas considerações.

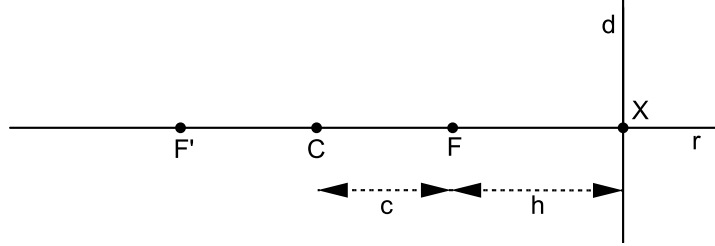


Figura 2.37: Localização da reta  $d$  e dos pontos  $F$ ,  $F'$ ,  $C$  e  $X$  na reta  $r$

Fato 1: Afirmamos que na reta  $r$  existem somente dois pontos do conjunto  $K$ .

De fato, se  $A$  é um ponto de  $K$  na semirreta  $FX$ , tem-se  $2a = AF + AF' = 2AF + FF' = 2AF + 2c$ . Daí,  $AF = a - c$  e, com isso,  $AC = a$ . Tomemos  $A$  na semirreta  $FX$  tal que  $AF = a - c$ . Notemos que  $A$  está entre  $F$  e  $X$ , uma vez que  $FX = h = \frac{a(1-e^2)}{e} = \frac{a}{e} - ae > \frac{c}{e} - c = a - c = AF$ . Ainda, para outro ponto  $A''$  distinto de  $A$  nessa semirreta  $FX$ , existiria o número real  $k > 0$ , tal que  $A''F + A''F' = AF \pm k + AF' \pm k = 2a \pm 2k \neq 2a$ . Portanto,  $A$  é o único ponto de  $K$  na semirreta  $FX$ .

Com o mesmo argumento justifica-se que não pode haver outro ponto de  $K$ , além de  $A'$ , na semirreta de origem  $F'$  não contendo  $C$ . Com esse argumento verifica-se que  $A'F' = a - c$  e  $A'C = a$ .

Por fim, observamos que, se  $A''$  é um ponto do segmento  $FF'$ , então  $A''F + A''F' = FF' = 2c \neq 2a$  e, portanto, nenhum ponto do segmento  $FF'$  pertence a  $K$ .

Fato 2: Afirmamos que nas retas paralelas à  $d$  cuja intersecção com  $r$  não estão no segmento  $AA'$  não há ponto do conjunto  $K$ .

De fato, como vemos na figura seguinte, se  $P$  pertencesse a  $K$  e à reta  $s$  perpendicular a  $r$  no ponto  $S$ , com  $A$  entre  $F$  e  $S$ , teríamos:

$$(2a - u)^2 - (a + c + AS)^2 = u^2 - (a - c + AS)^2 \iff a^2 - au = (a + AS)c.$$

Sabendo que  $e = \frac{c}{a}$ , chegaríamos a  $AS = \frac{a - c - u}{e} = \frac{AF - u}{e} < 0$ , pois  $u > AF$ , o que não pode ocorrer.

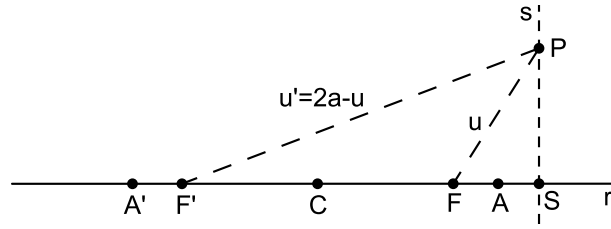


Figura 2.38: Não há pontos de  $K$  fora da faixa "vertical" delimitada por  $A$  e  $A'$

Analogamente se mostra que não há pontos de  $K$ , além de  $A'$ , pertencentes a retas perpendiculares a  $r$  em pontos da semirreta com origem em  $A'$  não contendo  $F$ .

Fato 3: Afirmamos que, se  $P \in K$ , então  $\frac{PF}{Pd} = e$ .

Para  $P = A$  vimos que  $AF = a - c < h$ . E, como  $Ad = h - (a - c) = \frac{a - ae^2}{e} - (a - c) = \frac{a - ae^2 - ae + ec}{e} = \frac{a - ec - c + ec}{e} = \frac{a - c}{e}$ , nesse particular, tem-se  $\frac{AF}{Ad} = e$ . No caso  $P = A'$ , igualmente chegamos a  $\frac{A'F}{A'd} = e$ .

Para  $P \in K$  com projeção  $Z$  sobre  $r$  entre  $C$  e  $F$ , como vemos na figura seguinte, pondo  $u = PF$  e  $u' = PF'$ , temos  $u' = 2a - u$  e  $Pd = ZF + FX = ZF + h$ .

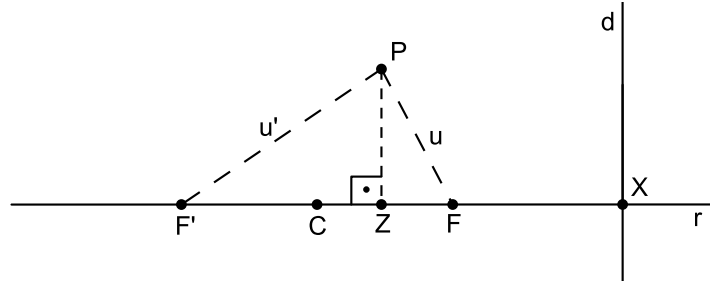


Figura 2.39:  $PF + PF' = 2a$  implica  $\frac{PF}{Pd} = e$

Vemos que  $(u')^2 - (ZF')^2 = u^2 - ZF^2$ . Com isso:

$$(2a - u)^2 - u^2 = (ZF' + ZF)(ZF' - ZF) \implies 4a^2 - 4au = 2c(FF' - 2ZF) \implies$$

$$2(a^2 - au) = c(2c - 2ZF) \implies ZF = c - \frac{a^2}{c} + \frac{a}{c}u.$$

E, como  $e = \frac{c}{a}$ , ficamos com  $ZF = \frac{ae^2 + u - a}{e}$ . Daí:

$$\frac{PF}{Pd} = \frac{u}{ZF + h} = \frac{u}{\frac{ae^2 + u - a}{e} + \frac{a(1-e^2)}{e}} = \frac{u}{\frac{u}{e}} = e$$

Para  $D \in K$ , tal que  $DF \perp r$ , como ilustrado na figura a seguir, temos:  $(2a - u)^2 = u^2 + 4c^2 \implies u = a - \frac{c^2}{a} = a - ec$  e, daí,  $\frac{DF}{Dd} = \frac{u}{h} = \frac{a - ec}{\frac{a(1-e^2)}{e}} = e$ .

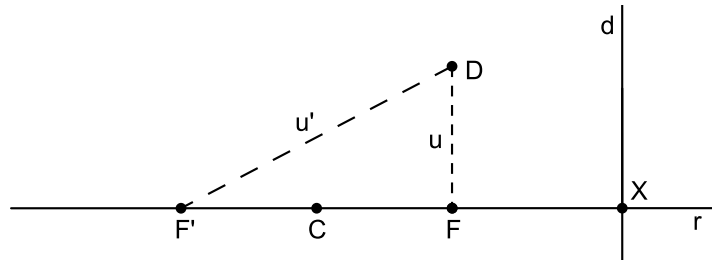


Figura 2.40: O caso em que  $DF \perp r$

De um modo geral, tem-se casos que recaem no exposto pela figura 2.39, nos quais chegamos de maneira semelhante à mesma conclusão. □

Do resultado que culminou na observação 2.13, vimos que, se  $P$  é um ponto da elipse  $(F, d, e)$ , então existe o ponto  $F'$  de modo que, sendo  $2a$  a distância entre seus vértices  $A$  e  $A'$ , tem-se  $PF + PF' = 2a$ . Com isso e com o que obtivemos na proposição anterior, concluímos que  $(F, d, e)$  pode também ser definida tendo-se de partida os dois focos e a distância  $2a$ , ou seja, as definições de elipse via foco e diretriz e por distâncias a focos são equivalentes.

### 2.2.3 Definição de elipse via secção em cone

**Proposição 2.19.** Consideremos um cone reto de duas folhas, de vértice  $V$  e eixo  $t$ . Seja também um plano  $\pi$  não perpendicular à  $t$  e que não contém  $V$ . Se  $\pi$  intersecta todas as geratrizes de uma das folhas do cone, então a intersecção é uma elipse.

*Demonstração.* Sejam  $\Lambda$  e  $\Lambda'$  as duas esferas com centros em  $t$ , que são tangentes ao cone (nas circunferências  $\lambda$  e  $\lambda'$ ) e ao referido plano  $\pi$  (nos pontos  $F$  e  $F'$ ). Na figura seguinte vemos um ponto  $P$  na intersecção do plano  $\pi$  com o cone. À direita, está um esboço da intersecção de um plano que passa pelo eixo do cone e é perpendicular ao plano  $\pi$ .

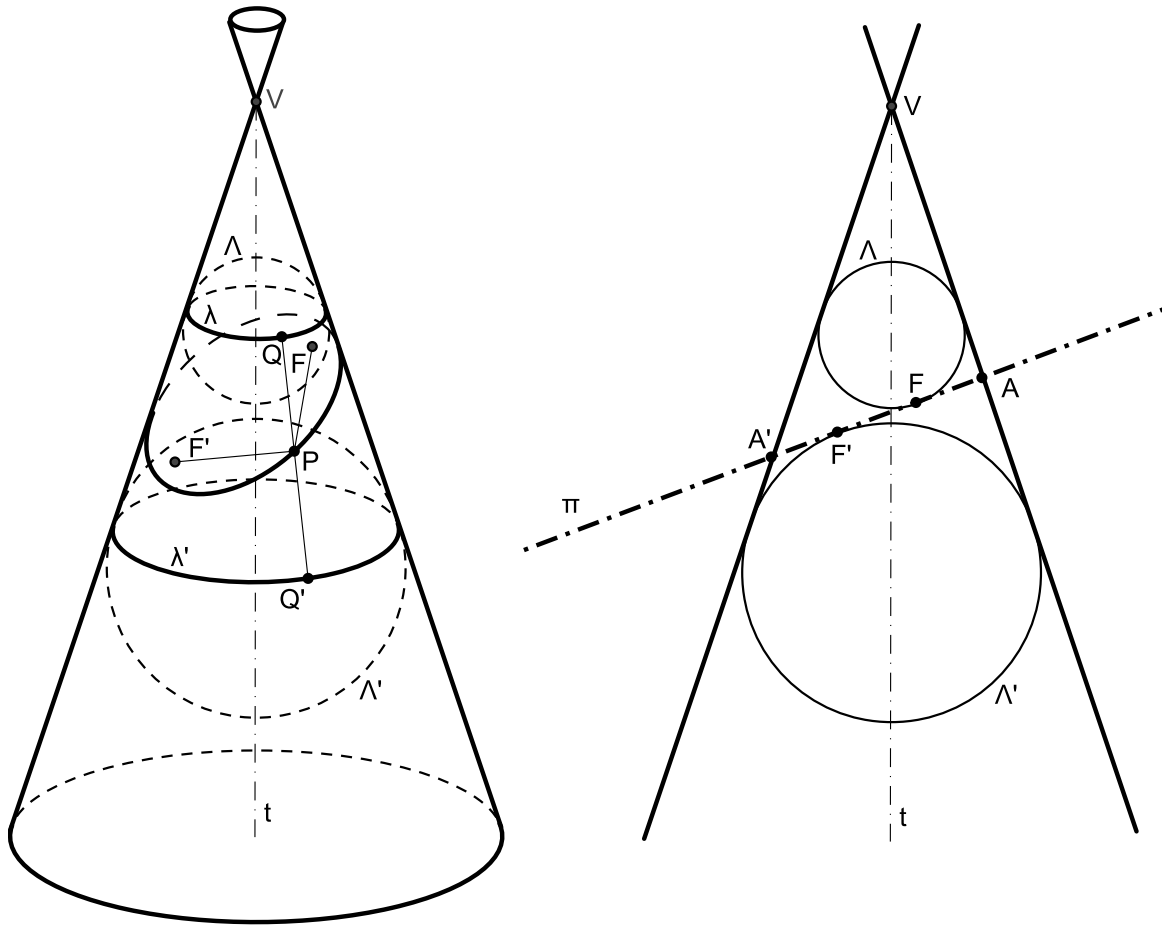


Figura 2.41: A elipse como secção de um cone reto

Consideremos  $Q$  e  $Q'$  os pontos de intersecção da geratriz que contém  $P$  com as circunferências  $\lambda$  e  $\lambda'$ , nessa ordem.

Como as retas  $PQ$  e  $PF$  são tangentes à  $\Lambda$  nos pontos  $Q$  e  $F$ ,  $PQ = PF$ . Pelo mesmo motivo se tem  $PQ' = PF'$ . Então  $PF + PF' = PQ + PQ' = QQ'$ , que é constante.

Assim, concluímos que todo ponto  $P$  da intersecção do plano  $\pi$  com o cone verificam a igualdade  $PF + PF' = QQ'$  (constante). Da secção anterior, segue que tais pontos estão contidos numa elipse em  $\pi$ , com focos  $F$  e  $F'$ .

□

Afirmamos que somente aqueles pontos  $P$  da secção que verificam a referida igualdade são da elipse com focos  $F$  e  $F'$ .

Primeiro, notemos o seguinte. O ponto  $F$  de  $\pi$  está no interior do cone e, portanto, toda reta em  $\pi$  que passa por  $F$  intersecta a secção cônica em dois pontos. Como a secção cônica está contida na elipse, temos aí dois pontos da elipse nessa reta. Se houvesse um ponto da elipse que não estivesse na secção, consideraríamos a reta (em  $\pi$ ) que passa por ele e por  $F$  e, essa, conteria três pontos da elipse, o que contradiria

a Proposição 2.10.

**Proposição 2.20.** Nas condições da proposição anterior, sejam os planos  $\tau$  e  $\tau'$  contendo as circunferências  $\lambda$  e  $\lambda'$ , respectivamente. Sejam também as retas  $d$  e  $d'$ , tais que  $d = \pi \cap \tau$  e  $d' = \pi \cap \tau'$ . Consideremos ainda o ângulo  $\alpha$  entre o eixo  $t$  e uma geratriz do cone, e o ângulo agudo  $\beta$  entre o eixo  $t$  e o plano  $\pi$ . Então, as retas  $d$  e  $d'$  são as diretrizes da elipse em questão, e o quociente  $\frac{\cos \beta}{\cos \alpha}$ , sua excentricidade.

*Demonstração.* Na ilustração a seguir está parte dos elementos expostos acima. Observamos o foco  $F$  da elipse e um ponto seu  $P$  com as projeções ortogonais  $D$  na reta  $d$  e  $R$  no plano  $\tau$ . Além disso, pomos  $V$  como vértice do cone e  $Q \in \tau$  como ponto de tangência entre a geratriz  $VP$  e a esfera  $\Lambda$ , de centro  $O$ .

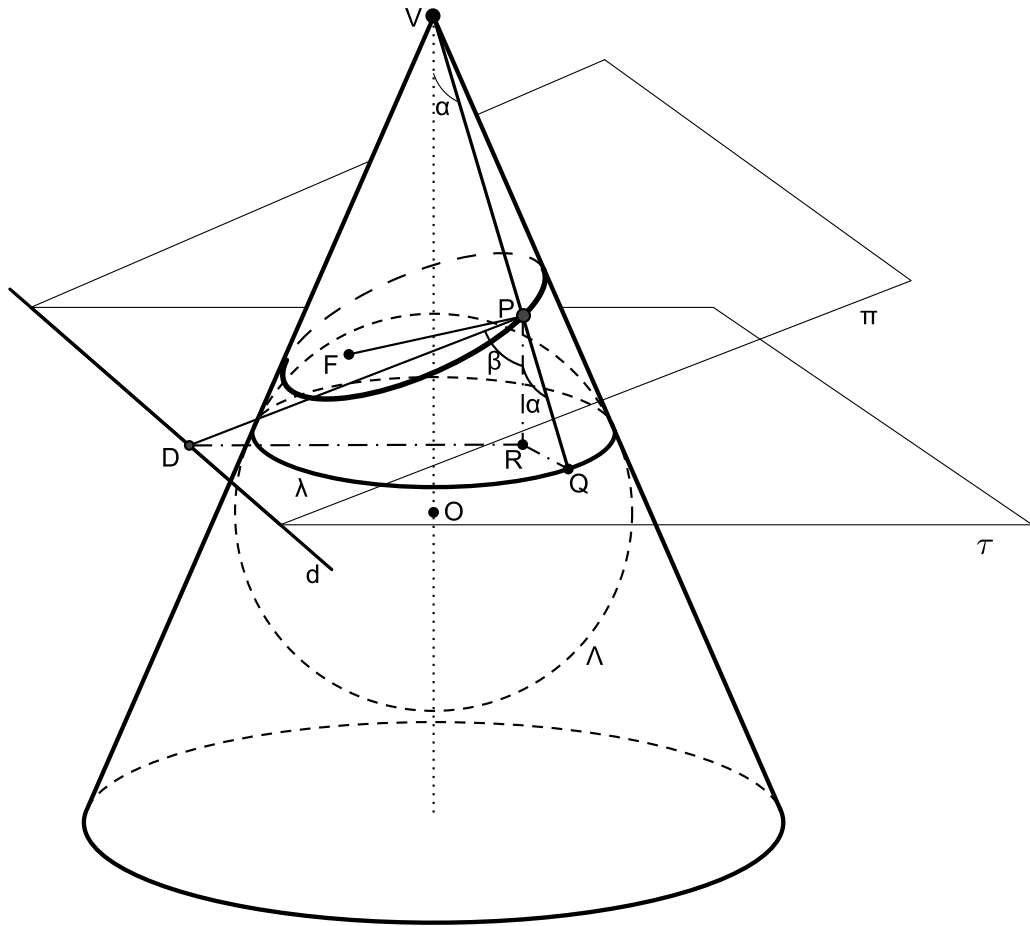


Figura 2.42: As diretrizes e a excentricidade da elipse via secção de cone

Observemos, com isso, que os triângulos  $PRQ$  e  $PRD$  são retângulos em  $R$ , e o cateto comum  $PR$ , paralelo à  $t$ . Daí,  $\alpha = \angle OVP = \angle RPQ$  e  $PR = PQ \cos \alpha = PF \cos \alpha$ . Também, temos  $PR = PD \cos \beta$ . Portanto,  $\frac{PF}{Pd} = \frac{\cos \beta}{\cos \alpha}$ , que é constante. Observemos que o ângulo agudo  $\alpha$  é menor do que o ângulo agudo  $\beta$  e, por isso,  $\frac{\cos \beta}{\cos \alpha} < 1$ ,



como esperado. Como o ponto  $P$  é arbitrário na secção, temos que ela é  $(F, d, \frac{\cos \beta}{\cos \alpha})$ . Igualmente se conclui que  $d'$  é outra diretriz dessa elipse.

□

**Corolário 2.21.** Em cada cone podemos encontrar uma elipse com excentricidade desejada.

*Demonstração.* De fato, dado um cone de semiângulo de vértice  $\alpha$ , temos  $0 < e = \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} < \sec \alpha$ . Como  $\sec \alpha > 1$ , segue o resultado.

□

## 2.3 Hipérbole

### 2.3.1 Definição de hipérbole via foco e diretriz

Dado o número  $e > 1$ , e dados um ponto  $F$ , uma reta  $d$  em um plano, com  $F \notin d$ , o conjunto de todos os pontos do plano cuja razão das distâncias a  $d$  e a  $F$  é  $e$  é chamado a hipérbole de excentricidade  $e$ , foco  $F$  e diretriz  $d$ . Assim como a elipse, vamos denotá-la por  $(F, d, e)$ .

A hipérbole  $(F, d, e)$  é um conjunto não vazio. De fato, a reta  $r$ , passando por  $F$  e perpendicular a  $d$ , contém dois de seus pontos, como pode ser constatado na seguinte construção geométrica.

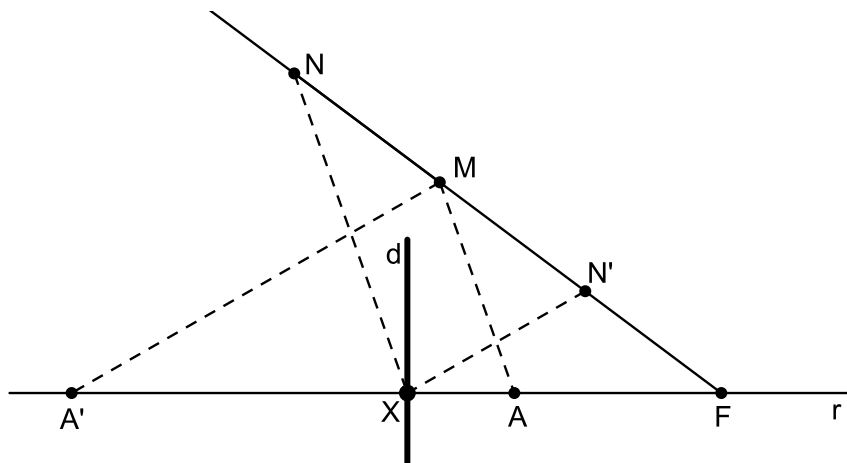


Figura 2.43: Construção dos vértices  $A$  e  $A'$  de uma hipérbole

Consideramos uma semirreta com origem em  $F$  e direção diferente daquela de  $r$ , e, nela, marcamos os pontos  $M$ ,  $N$  e  $N'$ , de modo que o segmento  $MF$  tenha comprimento igual a  $e$ , o segmento  $NF$  tenha comprimento  $e + 1$  e o segmento  $N'F$ ,  $e - 1$ . As retas que passam por  $M$  e são paralelas a  $NX$  e a  $N'X$  intersectam a reta  $r$  respectivamente nos pontos  $A$  e  $A'$  procurados. Com a aplicação do Teorema de Tales, vê-se que  $A$  e

$A'$  são vértices da tal hiperbole.

**Proposição 2.22.** Na reta  $r$  descrita acima, apenas  $A$  e  $A'$  estão na hiperbole em questão. Esses pontos são chamados vértices da hiperbole.

*Demonstração.* De fato, se, além de  $A$ ,  $A''$  fosse outro vértice entre  $F$  e  $X$ , teríamos  $\frac{AF}{AX} = \frac{A''F}{A''X}$  e, além disso,  $A''F = AF \pm k$  e  $A''X = AX \mp k$ , sendo  $k > 0$  um número real. Cheg r amos, com isso, a  $\frac{AF}{AX} = -1 \neq e$ . Se tivéssemos, além de  $A'$ ,  $A''$  na semirreta  $XA'$ , teríamos,  $\frac{A'F}{A'X} = \frac{A''F}{A''X}$  e, também,  $A''F = A'F \pm k$  e  $A''X = A'X \pm k$ , sendo  $k > 0$  um número real. Cheg r amos, com isso, a  $\frac{A'F}{A'X} = 1 \neq e$ . Por fim, observemos que os pontos  $F$  e  $X$  claramente não podem ser pontos da hiperbole.  $\square$

Verificamos também a existência de pontos da hiperbole fora da reta  $r$  com a construção geométrica que apresentamos a seguir.

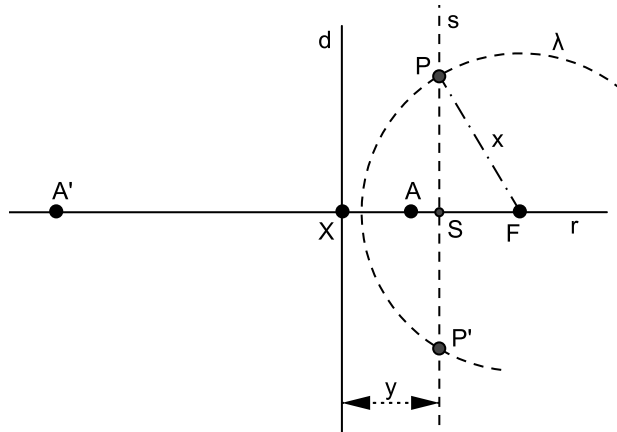


Figura 2.44: Construção de pontos  $P$  e  $P'$  de uma hiperbole, fora da reta  $r$

Tomemos a medida  $x$ , tal que  $AF < x$ . Consideramos uma circunferência  $\lambda$  centrada em  $F$  de raio  $x$ . Traçamos no semiplano, determinado pela reta  $d$  ao qual pertence  $F$ , a reta  $s$    distância  $y = \frac{x}{e}$  de  $d$ .

Afirmamos que, para esses valores de  $x$ ,  $\lambda \cap s$  cont m pontos fora de  $r$ . Se  $FX = y$ , a reta  $s$  é perpendicular a  $r$  no ponto  $F$  e, daí, é claro que  $\lambda$ , tendo centro nesse ponto, intersecta  $s$ . Se  $FX > y$ , queremos ver que  $x > FX - y = FS$ . De fato, suponhamos o contrário, isto é, que tivéssemos  $FX > y$  e  $x \leq FX - y$ , ou seja,  $FX \geq x + y = (1 + e)y$ . Sabendo que  $\frac{AF}{AX} = \frac{x}{y} = e$ , então  $FX = AF + AX = (1 + e)AX$ . Com isso, concluiríamos que  $AX \geq y$  e, daí, que  $AF \geq x$ , diferentemente do que tomamos para  $x$ .

Já, se tivéssemos,  $y > FX$ , e  $x \leq y - FX$ , sabendo-se que  $e = \frac{x}{y} = \frac{A'F}{A'X}$  e que  $FX = A'F - A'X$ , então, a desigualdade  $x \leq y - FX$  poderia ser escrita assim:  $ey \leq y - A'F + A'X$ , ou,  $y(e-1) \leq A'X(1-e)$ , ou ainda,  $y + A'X \leq 0$ , o que é impossível.

Sabendo que  $e = \frac{x}{y} = \frac{A'F}{A'X}$ , para  $x > A'F$ , tem-se  $y > A'X$ . Multiplicando-se essa última desigualdade por  $e - 1 > 0$ , ficamos com  $ye - y > A'X \cdot e - A'X$ , ou,  $x > A'F - A'X + y$ , que é o mesmo que escrever  $x > FX + y$ . Observemos, nesse caso, que a circunferência  $\lambda$ , além de  $s$ , intersecta também a reta  $s'$ , simétrica da reta  $s$  com relação à diretriz  $d$ . Esse fato está ilustrado na figura seguinte.

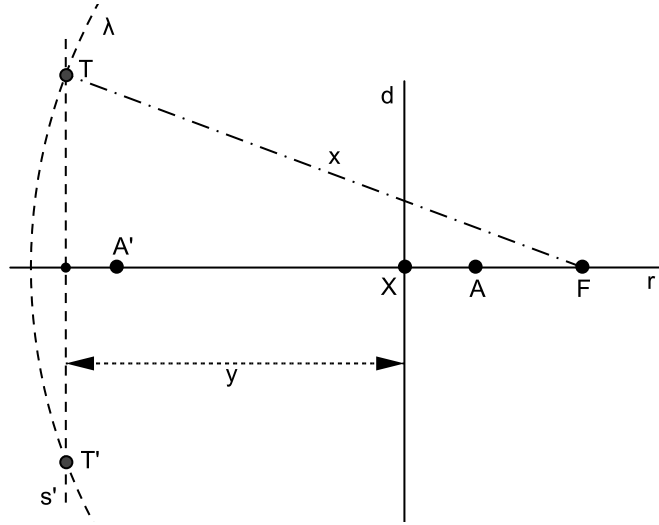


Figura 2.45: Construção dos pontos  $T$  e  $T'$  de uma hipérbole, fora da reta  $r$

Observemos ainda que, para  $AF = x$ , temos  $AX = y$ . Assim sendo,  $s \cap \lambda = \{A\}$ . E, para  $x = A'F$ , temos  $y = A'X$ , implicando que  $A'$  é ponto de tangência entre  $s'$  e  $\lambda$ . A figura a seguir ilustra cada uma dessas situações.

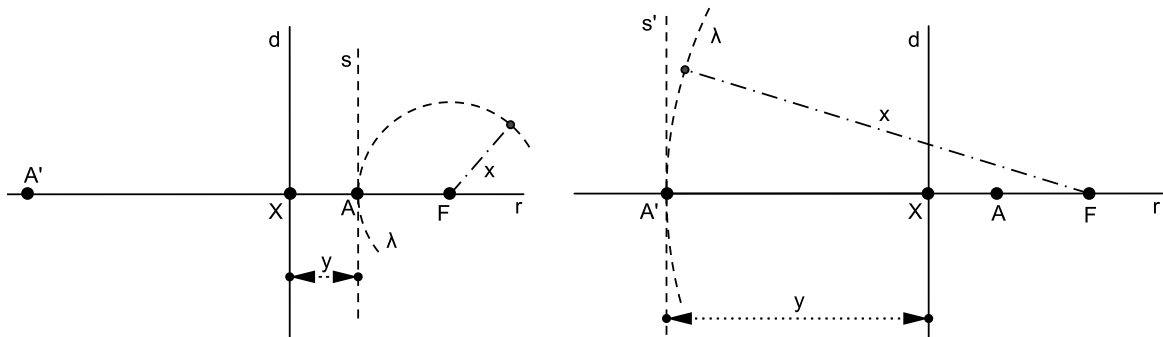


Figura 2.46: Os vértices  $A$  e  $A'$  da hipérbole como pontos de tangência de  $\lambda$  com  $s$  e  $s'$

Os pontos  $P$  e  $P'$  obtidos da intersecção de  $s$  com  $\lambda$  pertencem claramente à referida hipérbole, assim como  $T$  e  $T'$ , de  $s'$  com  $\lambda$ . Além disso,  $P$  e  $P'$  são equidistantes da

Constatamos, com isso, que existem pontos da hipérbole fora da reta  $r$ .

- i) Em cada paralela à diretriz  $d$  existem no máximo dois pontos da hipérbole.
- ii) Dentre as paralelas à  $d$  em apenas duas é que existe um único ponto da hipérbole.
- iii) Nas retas paralelas à diretriz cujas interseções com  $r$  pertencem ao segmento  $AA'$ , exceto suas extremidades, não há pontos da hipérbole.

iii) Seja  $P$  um ponto qualquer de uma reta  $s$  paralela à  $d$ , que intersecta  $r$  em  $S$  entre  $A'$  e  $A$ . Suponhamos que  $P$  pertença à hipérbole. Como  $Pd < A'd$  e como  $\frac{PF}{Pd} = \frac{A'F}{A'd}$ , temos  $PF < A'F$ . Assim sendo, existem os reais positivos  $k$  e  $k'$  tais que  $\frac{PF}{Pd} = \frac{A'F}{A'd} - k$  e  $Pd = A'd - k'$ . Como  $A'F = e \cdot A'd$ , então teríamos  $e \cdot A'd - k = A'F - k = PF = e \cdot Pd = e \cdot A'd - ek'$ , ou seja,  $k = ek' > k'$ . Por outro lado, como  $SF < PF$ , então,  $A'F - SA' < PF$ , ou,  $SA' > A'F - PF$ , ou ainda,  $k' > k$ . Portanto, na reta  $s$  não há ponto da hipérbole. Segue a ilustração dessa discussão.

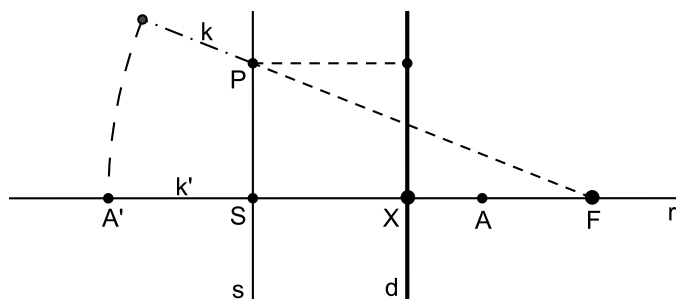


Figura 2.47: Não há pontos da hipérbole na faixa "vertical" delimitada por  $A$  e  $A'$

9

Vamos agora considerar o ponto  $X'$  entre  $A'$  e  $X$  tal que  $AX = A'X'$ . Podemos assim tomar  $X'$  pois, como  $AF < A'F$  e  $\frac{AF}{AX} = \frac{A'F}{A'X'}$ , temos  $AX < A'X'$ . Seja a reta  $d'$  perpendicular a  $r$ , passando por  $X'$ ; o ponto  $F'$  na semirreta de origem  $A'$ , não contendo o ponto  $X'$ , de modo que  $AF = A'F'$ , e o ponto  $C$ , médio do segmento  $FF'$ . Para simplicidade de notação, ponhamos:  $h = FX$ ,  $c = CF$  e  $a = CA$ .

Um esboço dessas considerações é apresentado na figura a seguir.

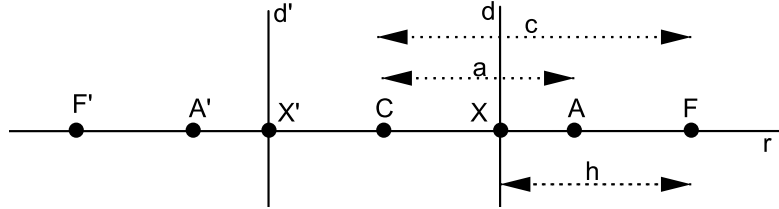


Figura 2.48: Localização de alguns elementos da hipérbole

**Proposição 2.24.** A hipérbole  $(F, d, e)$  coincide com a hipérbole  $(F', d', e)$ .

*Demonstração.* Primeiramente, estabeleceremos alguns resultados.

Assim como para a elipse, temos  $AX = A'X' = \frac{h}{e+1}$  e  $AF = A'F' = \frac{he}{e+1}$ .

$$\text{Daí, } e = \frac{A'F}{A'X} = \frac{FF' - A'F'}{FF' - A'F' - FX} = \frac{2c - \frac{he}{e+1}}{2c - \frac{he}{e+1} - h}.$$

$$\text{Com isso: } c = CF = CF' = \frac{he^2}{e^2 - 1}, \quad \text{ou seja, } 2c = FF' = \frac{2he^2}{e^2 - 1}.$$

$$\text{Também: } XX' = FF' - FX - F'X' = 2c - 2h = \frac{2h}{e^2 - 1}, \quad \text{ou seja, } CX = \frac{h}{e^2 - 1};$$

$$\text{E também: } 2a = AA' = XX' + XA + X'A' = \frac{2h}{e^2 - 1} + 2\frac{h}{e+1} = \frac{2he}{e^2 - 1}, \quad \text{ou seja,}$$

$$a = AC = A'C = \frac{he}{e^2 - 1}, \quad \text{de onde se conclui que } e = \frac{CF}{CA} = \frac{c}{a}.$$

Na figura seguinte observamos que, se  $P$  é um ponto qualquer dessa hipérbole, fora da reta  $r$  e com projeção  $Z$  nessa reta (com  $Z$  pertencente à semirreta de origem  $AF$ ), pondo  $PF = u$ ,  $Pr = PZ = y$ ,  $Pd = PY = t$  e  $Pd' = PY' = t'$ , temos  $t = \frac{u}{e}$  e  $t' = XX' + t = \frac{2h}{e^2 - 1} + \frac{u}{e}$ .

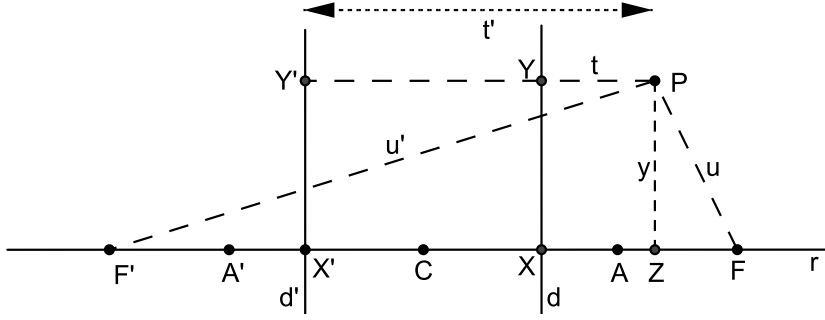


Figura 2.49: O ponto  $F'$  como outro foco e a reta  $d'$  como outra diretriz de hipérbole

Para  $P = D$ , tal que  $DF \perp r$ , tem-se o triângulo retângulo  $DF F'$ , com catetos  $DF = u = he$  e  $FF' = \frac{2he^2}{e^2 - 1}$ , e hipotenusa  $DF' = u'$ , como se pode constatar na próxima figura.

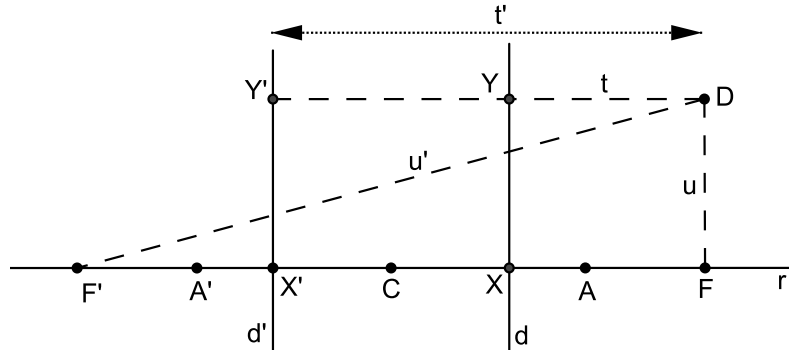


Figura 2.50: O caso em que  $P = D$ , com  $DF \perp r$

Com isso,  $(u')^2 = h^2 e^2 + \frac{4h^2 e^4}{(e^2 - 1)^2}$ , ou,  $u' = \frac{he(e^2 + 1)}{e^2 - 1}$ .

Como  $t' = Dd' = XX' + h = \frac{2h}{e^2 - 1} + h = \frac{h(e^2 + 1)}{e^2 - 1}$ , temos, nesse particular,  $e = \frac{u'}{t'} = \frac{DF'}{Dd'}$ .

Notemos que  $u' - u = \frac{he(e^2 + 1)}{e^2 - 1} - he = \frac{2he}{e^2 - 1} = AA'$ .

De um modo geral, tem-se casos que recaem no exposto pela figura 2.49. Ali se observa que:  $(u')^2 - (ZF')^2 = u^2 - (ZF)^2$  e, portanto,  $(u')^2 = u^2 + FF' \cdot (ZF' - ZF) = u^2 + FF' \cdot (FF' - 2ZF)$ . Como  $FF' = \frac{2he^2}{e^2 - 1}$  e  $ZF = FX - ZX = h - \frac{u}{e}$ , então,  $(u')^2 = u^2 + \frac{2he^2}{e^2 - 1} \left( \frac{2he^2}{e^2 - 1} - 2h + \frac{2u}{e} \right) = u^2 + \frac{4heu}{e^2 - 1} + \frac{4h^2 e^2}{(e^2 - 1)^2} = \left( u + \frac{2he}{e^2 - 1} \right)^2 = (u + AA')^2$ .

Disso segue que  $u' - u = AA'$ . Se tivéssemos considerado o ponto  $P$  tal que sua projeção  $Z$  na reta  $r$  estivesse na semirreta com origem em  $A'$  contendo  $F'$ , obte-

riamos, de modo inteiramente análogo,  $u - u' = AA'$ . Podemos então resumir assim a relação entre essas distâncias:  $|u - u'| = AA'$ . Para o caso estudado, temos  $u' = u + \frac{2he}{e^2 - 1} = e \left( \frac{u}{e} + \frac{2h}{e^2 - 1} \right) = e(t + XX') = et'$ . Para o outro caso, chegamos igualmente a essa conclusão. De qualquer forma, se tem, então:  $e = \frac{u'}{t'}$ .

Por fim, notemos que os vértices  $A$  e  $A'$  naturalmente pertencem à hipérbole  $(F', d', e)$ , visto que  $AF' = A'F$  e  $Ad' = A'd$  e, também que  $A'F' = AF$  e  $A'd' = Ad$ .

De tudo isso, concluímos que  $(F, d, e) \subset (F', d', e)$ .

Reciprocamente, se um ponto pertence à hipérbole  $(F', d', e)$ , então pertence à hipérbole  $(F, d, e)$ . Mostramos que o ponto  $F$  e a reta  $d$  servem de foco e diretriz para  $(F', d', e)$ , trocando  $F$  por  $F'$  e  $d$  por  $d'$ , na argumentação acima.

□

**Observação 2.25.** Para uso posterior, registramos o fato contido na demonstração acima:  $|PF - PF'| = AA'$ , para todo ponto  $P \in (F, d, e)$ .

**Corolário 2.26.** A hipérbole  $W$  também é simétrica em relação à reta  $s$ , perpendicular à  $r$ , passando por  $C$ . Como também é simétrica em relação a  $r$ , a hipérbole é simétrica com relação ao ponto  $C$ .

De fato, na figura abaixo observa-se que, se  $P \in W$  e  $P'$  é seu simétrico em relação à  $s$ , os trapézios  $FPYX$  e  $F'P'Y'X'$  são congruentes e, daí,  $e = \frac{FP}{Pd} = \frac{F'P'}{P'd'}$ . Com isso,  $P' \in W$ .

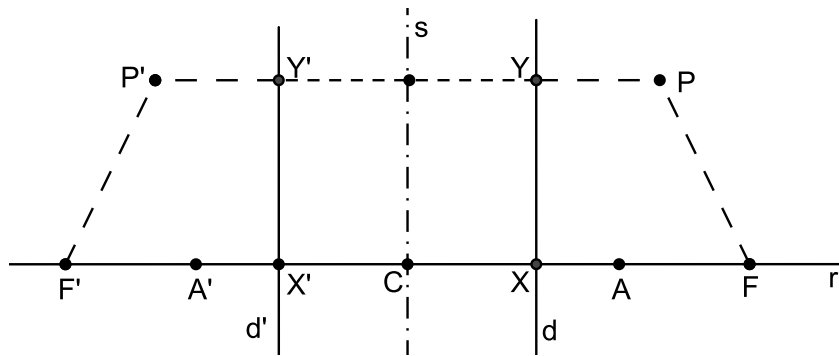


Figura 2.51: Simetria da hipérbole com respeito à reta perpendicular a  $r$ , por  $C$

O ponto  $C$  é chamado centro da hipérbole. Chamemos  $r$  de reta focal.

**Proposição 2.27.** Os pontos da hipérbole se afastam da reta  $r$  à medida que se distanciam da reta  $s$ .

*Demonstração.* Observemos na figura seguinte o ponto  $P$  em uma porção do plano delimitada pelas retas  $r$  e  $s$ , e ponhamos  $y = Pr$ ,  $t = Pd$  e  $h = FX$ .

Analisemos a relação de dependência de  $y^2$  com  $t$ .

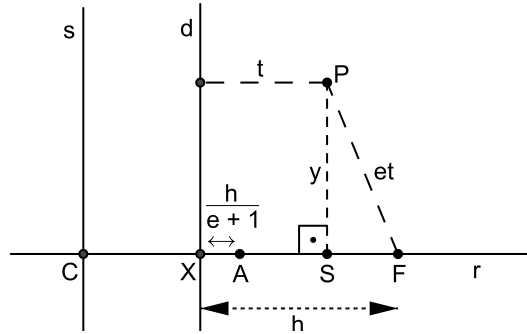


Figura 2.52:  $P$  fica mais perto de  $r$  quanto mais próximo de  $s$

Como  $PF = et$  e  $SF = h - t$ , temos  $y^2 = (et)^2 - (h - t)^2 = (e^2 - 1)t^2 + 2ht - h^2$ . Portanto,  $y^2$  depende de  $t$  por uma expressão quadrática com coeficiente do termo dominante  $e^2 - 1 > 0$ , o que indica que  $y^2$  (ou  $y$ ) assume 0 com valor mínimo, se estendida para  $t$  tal que se anule, onde  $t = \frac{h}{e + 1} = AX$ . Devido à natureza da relação de dependência entre  $y^2$  e  $t$ , verificamos que os pontos da hipérbole ficam mais distantes da reta  $r$  quanto mais distantes de  $C$  suas projeções nessa reta estiverem. Ainda, para dado real positivo  $k$ , não é difícil encontrar o valor de  $t > \frac{h}{e + 1}$  para o qual  $y = k$ .

Dada à simetria que a hipérbole possui em relação a  $r$  e a  $s$ , esse mesmo fato ocorre em cada uma das outras três porções do plano delimitada por essas retas.  $\square$

Como consequência disso, concluímos que cada reta paralela a  $r$  intersecta a hipérbole em exatamente dois pontos.

**Proposição 2.28.** Seja  $l$  uma reta passando pelo centro da hipérbole.  $l$  intersecta a hipérbole se, e somente se, sua inclinação (relativamente a  $r$ ) é menor do que  $\sqrt{e^2 - 1}$ .

Omitiremos a demonstração dessa proposição por ser análoga à Proposição 2.16.

**Definição 2.29.** Assíntotas de uma hipérbole são duas retas passando por  $C$  e com inclinação  $\pm\sqrt{e^2 - 1}$ , com respeito a  $r$ .

**Teorema 2.30.** Apenas a reta que contém  $F$  e  $F'$  é reta focal da hipérbole  $(F, d, e) = (F', d', e)$ .

*Demonstração.* Utilizaremos  $r$ ,  $s$ ,  $C$  e  $A$  com os significados que temos carregado. Suponhamos que  $\tilde{r}$  fosse outra reta focal.

- i)  $\tilde{r}$  não é  $s$ , pois  $s$  não contém pontos da hipérbole mas  $\tilde{r}$ , sendo focal, contém.
- ii)  $\tilde{r}$  não é paralela a  $r$ , pois o simétrico de  $A$  com relação a  $\tilde{r}$  está na hipérbole mas não pode estar na perpendicular a  $r$  passando por  $A$ .



Seja  $\tilde{C} \in \tilde{r}$  ponto que, tal qual  $C$ , chamaríamos centro da hipérbole.

$\tilde{C}$  está sobre  $s$ : ora, por um lado, a paralela a  $r$  passando por  $\tilde{C}$  contém exatamente dois pontos da hipérbole, simétricos um do outro com relação a  $s$ ; por outro lado,  $\tilde{C}$  sendo centro, esses mesmos pontos devem ser simétricos um do outro com relação a  $\tilde{C}$ .

iii)  $\tilde{C} \neq C$ , pois, levando em consideração i) e ii), o mesmo argumento apresentado na demonstração do Teorema 2.17, na situação análoga, se aplica, agora de posse da Proposição 2.27, para mostrar que  $\tilde{C} = C$  é impossível.

Seja  $\tilde{s}$  a perpendicular a  $\tilde{r}$  passando por  $\tilde{C}$  e seja  $\tilde{t}$  a paralela a  $\tilde{r}$  passando por  $C$ . Considerando i), ii) e iii), a situação que temos é a da figura seguinte.

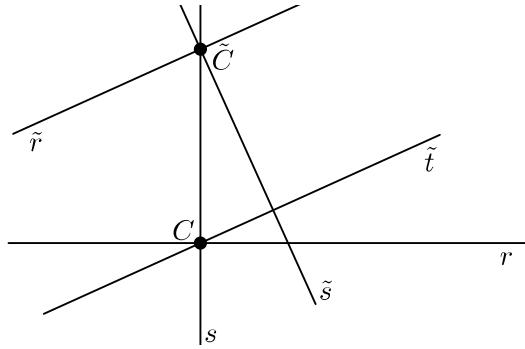


Figura 2.53: Posições de  $\tilde{s}$  e de  $\tilde{t}$  com relação a  $s$

Como  $\tilde{t}$  é paralela a uma reta focal,  $\tilde{t}$  contém exatamente dois pontos da hipérbole, simétricos um do outro com relação a  $\tilde{s}$ , mas também com relação a  $C$ . É claro que isso não é possível e esgota as possibilidades de existência de  $\tilde{r}$ .  $\square$

### 2.3.2 Definição de hipérbole via distâncias a focos

**Proposição 2.31.** Sejam  $F$  e  $F'$  dois pontos de um plano  $\pi$  e seja uma constante  $2a < FF'$ . Se  $W = \{P \in \pi; |PF - PF'| = 2a\}$ , então existem reta  $d$  e número  $e > 1$  tais que  $\frac{PF}{Pd} = e$ , ou seja, que  $P \in W$ . Noutras palavras,  $W \subset (F, d, e)$ .

*Demonstração.* Primeiramente, vamos estabelecer alguns resultados.

Seja  $C$  o ponto médio do segmento  $FF'$  e  $r$  a reta que o contém. Ponhamos  $c = CF$ .

Definamos  $e = \frac{c}{a}$ . Temos  $e > 1$ , pois  $2c = 2CF = FF' > 2a$ .

Consideremos a reta  $d$  perpendicular a  $r$  no ponto  $X$  que esteja entre  $C$  e  $F$  e tal que a distância dessa reta ao ponto  $F$  seja  $h = \frac{a(e^2 - 1)}{e}$ .

A figura seguinte ilustra essas considerações.

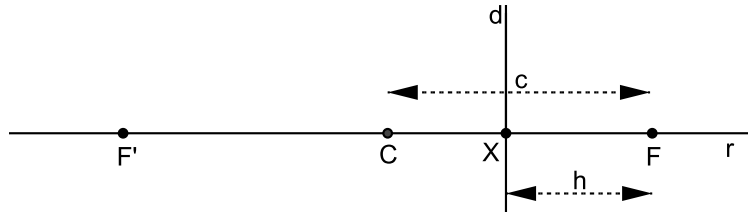


Figura 2.54: Localização da reta  $d$  e dos pontos  $F$ ,  $F'$ ,  $C$  e  $X$  na reta  $r$

Fato 1: Afirmamos que na reta  $r$  existem somente dois pontos do conjunto  $W$ .

De fato, se  $A$  é um ponto de  $W$  no segmento  $CF$ , tem-se  $2a = AF' - AF = FF' - 2AF = 2c - 2AF$ . Daí,  $AF = c - a$  e, com isso,  $AC = a$ .  $A$  está entre  $F$  e  $X$ , uma vez que  $FX = h = \frac{a(e^2 - 1)}{e} = ae - \frac{a}{e} > c - \frac{c}{e} = c - a = AF$ . Ainda, para outro ponto  $A''$  distinto de  $A$  nesse segmento  $CF$ , existiria o número real  $k > 0$ , tal que  $A''F' - A''F = AF' \pm k - (AF \mp k) = 2a \pm 2k \neq 2a$ . Portanto,  $A$  é o único ponto de  $W$  no segmento  $CF$ .

Com o mesmo argumento justifica-se que não pode haver, além de  $A'$ , outro ponto de  $W$  no segmento  $CF'$ . Com esse argumento, verifica-se que  $A'F' = c - a$  e  $A'C = a$ . Neste caso, deve-se usar o fato de que  $2a = A'F' - A'F'$ .

Por fim, observamos que, se  $A''$  é um ponto da semirreta com origem em  $F$ , não contendo  $A$ , então  $A''F' - A''F = FF' = 2c \neq 2a$ . E, se  $A''$  está na semirreta de origem em  $F'$  não contendo  $A'$ , então  $A''F' - A''F' = FF' = 2c \neq 2a$ . Portanto, nenhum ponto dessas semirretas pertence a  $W$ .

Fato 2: Afirmamos que nas retas paralelas à  $d$ , cuja intersecção com  $r$  estão no segmento  $AA'$ , exceto suas extremidades, não há ponto do conjunto  $W$ .

De fato, como vemos na figura seguinte, se  $P$  pertencesse a  $W$  e à reta  $s$  perpendicular a  $r$  no ponto  $S$ , entre  $C$  e  $A$ , teríamos:

$$(2a + u)^2 - (a + c - AS)^2 = u^2 - (c - a + AS)^2 \iff a^2 + au = (a - AS)c.$$

Sabendo que  $e = \frac{c}{a}$ , chegaríamos a  $AS = \frac{c - a - u}{e} = \frac{AF - u}{e} < 0$ , pois  $u > AF$ , o que não pode ocorrer.

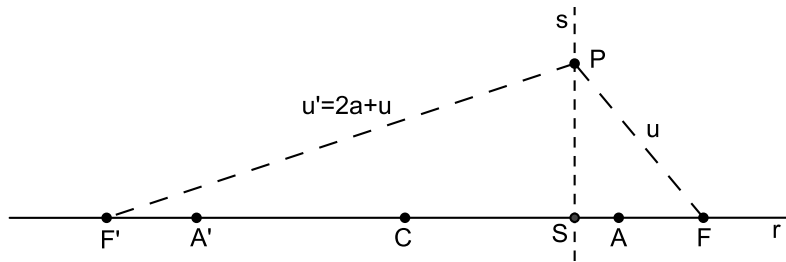


Figura 2.55: Não há pontos de  $W$  na faixa "vertical" delimitada por  $A$  e  $A'$

O caso em que o ponto  $S$  fica entre  $A'$  e  $C$  é excluído analogamente.

Fato 3: Afirmamos que, se  $P \in W$ , então  $\frac{PF}{Pd} = e$ .

No caso de  $P = A$ , vimos que  $AF = c - a < h$ . E, como  $Ad = h - (c - a) = \frac{ae^2 - a}{e} - (c - a) = \frac{ae^2 - a - ce + ae}{e} = \frac{ce - a - ce + c}{e} = \frac{c - a}{e}$ , nesse particular, tem-se  $\frac{AF}{Ad} = e$ . No caso  $P = A'$ , analogamente chegamos a  $\frac{A'F}{A'd} = e$ .

Para  $P \in W$ , com projeção  $Z$  sobre  $r$  na semirreta  $AF$ , como vemos na figura seguinte, pondo  $u = PF$  e  $u' = PF'$ , temos  $u' = 2a + u$  e  $Pd = FX - ZF = h - ZF$ .

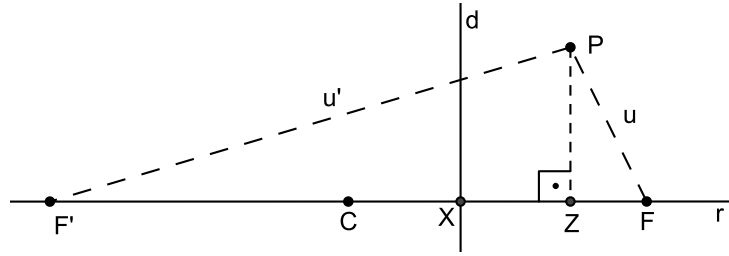


Figura 2.56:  $|PF - PF'| = 2a$  implica  $\frac{PF}{Pd} = e$

Vemos que  $(u')^2 - (ZF')^2 = u^2 - ZF^2$ . Com isso:

$$(2a + u)^2 - u^2 = (ZF' + ZF)(ZF' - ZF) \implies 4a^2 + 4au = 2c(FF' - 2ZF) \implies$$

$$2(a^2 + au) = c(2c - 2ZF) \implies ZF = c - \frac{a^2}{c} - \frac{a}{c}u.$$

E, como  $e = \frac{c}{a}$ , ficamos com  $ZF = \frac{ae^2 - u - a}{e}$ . Daí:

$$\frac{PF}{Pd} = \frac{u}{h - ZF} = \frac{u}{\frac{a(e^2-1)}{e} - \frac{ae^2-u-a}{e}} = \frac{u}{\frac{u}{e}} = e$$

Para  $D \in W$ , tal que  $DF \perp r$ , como ilustrado na figura a seguir, temos:  $(2a + u)^2 = u^2 + 4c^2 \implies u = \frac{c^2}{a} - a = ec - a$  e, daí,  $\frac{DF}{Dd} = \frac{u}{h} = \frac{ec - a}{\frac{a(e^2-1)}{e}} = e$ .

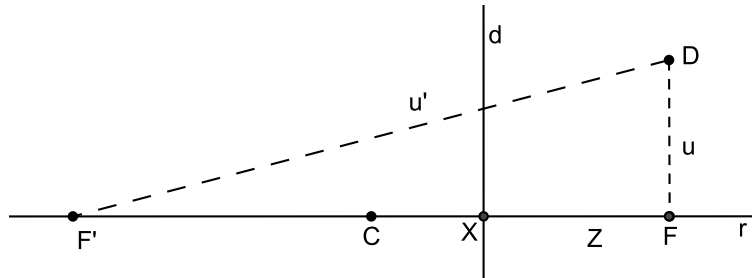


Figura 2.57: O caso em que  $DF \perp r$

De um modo geral, tem-se casos que recaem no exposto pela figura 2.56, nos quais chegamos de maneira semelhante à mesma conclusão.  $\square$

Do resultado que culminou na observação 2.25, vimos que, se  $P$  é um ponto da hipérbole  $(F, d, e)$ , então existe o ponto  $F'$  de modo que, sendo  $2a$  a distância entre seus vértices  $A$  e  $A'$ , se tem  $|PF - PF'| = 2a$ . Com isso e com o que obtivemos na proposição anterior, concluímos que  $(F, d, e)$  pode também ser definida tendo-se de partida os dois focos e a distância  $2a$ , ou seja, as definições de hipérbole via foco e diretriz e por distâncias a focos são equivalentes.

### 2.3.3 Definição de hipérbole via secção em cones

**Proposição 2.32.** Consideremos um cone reto de duas folhas, de eixo  $t$  e vértice  $V$ . Seja também um plano  $\pi$  que não passa por  $V$ . Se  $\pi$  é paralelo a duas geratrizes de cada um dos cones, então a intersecção entre  $\pi$  e os cones é uma hipérbole.

*Demonstração.* Sejam  $\Lambda$  e  $\Lambda'$  as duas esferas com centros em  $t$ , que são tangentes a cada cone (nas circunferências  $\lambda$  e  $\lambda'$ ) e ao referido plano  $\pi$  (nos pontos  $F$  e  $F'$ ). Na figura seguinte vemos um ponto  $P$ , na intersecção do plano  $\pi$  com os cones. À direita, está um esboço da intersecção de um plano que passa pelo eixo dos cones e é perpendicular ao plano  $\pi$ .

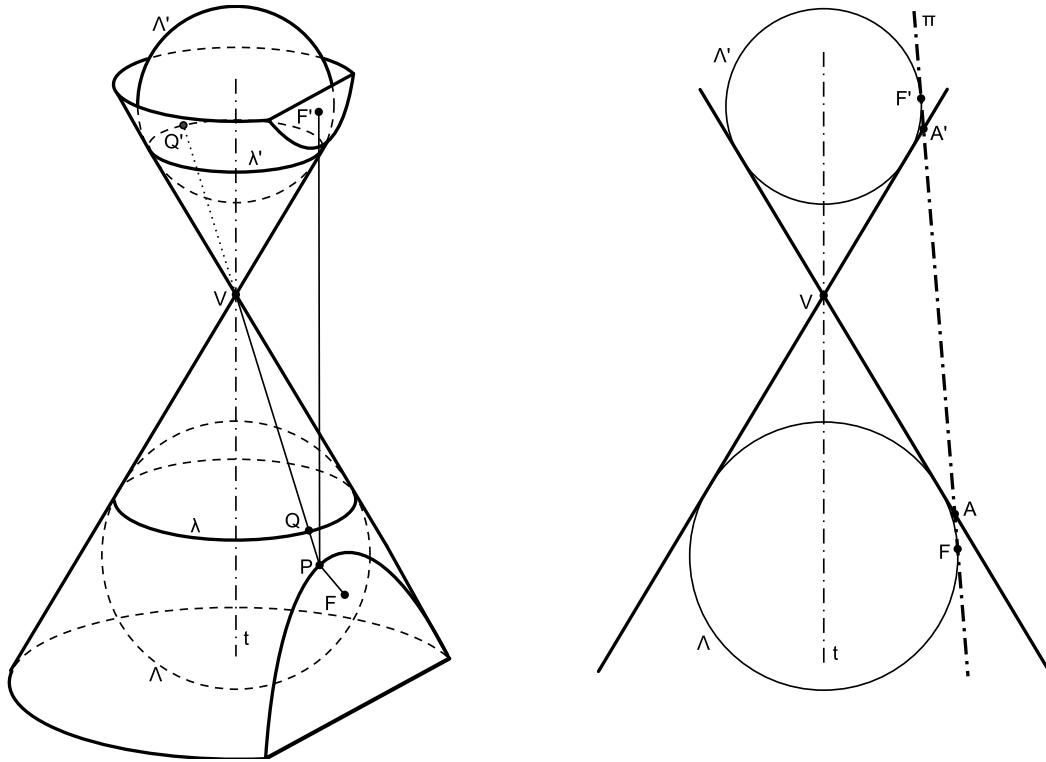


Figura 2.58: A hipérbole como secção de um cone reto de duas folhas

Consideremos  $Q$  e  $Q'$  os pontos de intersecção da geratriz que contém  $P$  com as circunferências  $\lambda$  e  $\lambda'$ , nessa ordem.

Como as retas  $PQ$  e  $PF'$  são tangentes a  $\lambda'$  nos pontos  $Q'$  e  $F'$ ,  $PQ' = PF'$ . Pelo mesmo motivo se tem  $PQ = PF$ . Então  $PF' - PF = PQ' - PQ = QQ'$ . Se o ponto  $P$  tivesse sido considerado na outra folha do cone, igualmente chegaríamos a  $PF - PF' = PQ - PQ' = QQ'$ . Ou seja, de qualquer forma, se tem, para  $P$  nessa intersecção,  $|PF - PF'| = QQ'$ , que é constante.

Assim, concluímos que todo ponto  $P$  da intersecção do plano  $\pi$  com os cones verificam a igualdade  $|PF - PF'| = QQ'$  (constante). Da seção anterior, segue que tais pontos estão contidos numa hipérbole em  $\pi$ , com focos  $F$  e  $F'$ .  $\square$

A inclusão contrária a que acabamos de nos referir, segue de modo análogo ao caso abordado na elipse.

**Observação 2.33.** A determinação das diretrizes e da excentricidade é feita da mesma maneira que consta na Proposição 2.20. Observemos que, neste caso, o ângulo agudo  $\alpha$  é maior do que o ângulo agudo  $\beta$  e, por isso,  $\frac{\cos \beta}{\cos \alpha} > 1$ , como esperado. Notemos ainda que o análogo do corolário 2.21 não vale para o caso da hipérbole.

## Equações para as secções cônicas

Em um sistema ortogonal de coordenadas, o cone  $\kappa$ , cujo vértice é a origem e cujo eixo é o eixo  $z$ , tem equação  $Az^2 = x^2 + y^2$ , com  $A > 0$ . Dado um plano  $\pi$ , trataremos de encontrar a equação para  $\kappa \cap \pi$  em um sistema ortogonal de coordenadas apropriado para o reconhecimento dessa figura, qual seja, um sistema com origem e com dois eixos em  $\pi$  e outro eixo perpendicular a  $\pi$ .

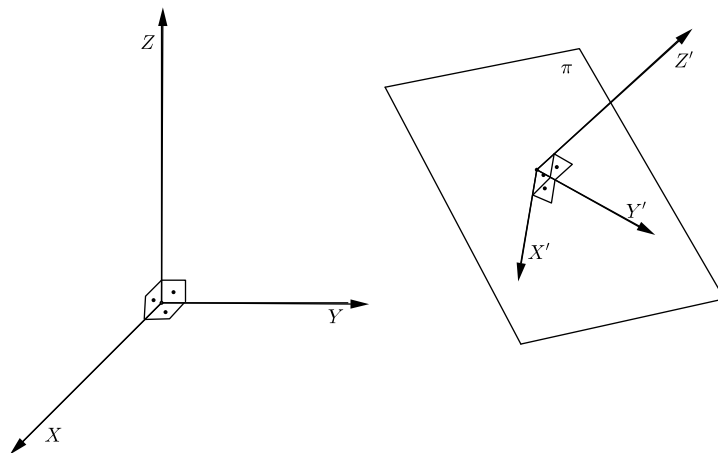


Figura 2.59: Adequação de sistema de coordenadas para reconhecimento de cônica

**Caso 1:**  $\pi$  tem equação  $z = c$  (constante)

Neste caso, consideramos a mudança de coordenadas  $z' = z - c$ ,  $y' = y$  e  $x' = x$ . A equação de  $\pi$  fica  $z' + c = c$  e a equação de  $\kappa$  fica  $A(z' + c)^2 = (x')^2 + (y')^2$ , de modo que  $\pi \cap \kappa$  é descrita por:

$$\begin{cases} Ac^2 = (x')^2 + (y')^2 \\ z' = 0 \end{cases}$$

Como  $A > 0$ , essa é equação de uma circunferência se  $c \neq 0$ , e de um ponto (o vértice), se  $c = 0$ .

**Caso 2:**  $\pi$  é paralelo ao eixo  $z$

Sendo o cone, ele próprio, obtido por rotação de uma reta (geratriz) em torno do eixo  $z$ , nenhuma geometria é perdida quando supomos  $\pi$  é paralelo ao eixo  $y$ . Suponhamos, então. Segue que  $\pi$  tem equação  $x = c$  (constante).

Analogamente ao caso anterior, consideramos novas coordenadas  $x' = x - c$ ,  $y' = y$  e  $z' = z$ . Nelas,  $\pi$  tem equação  $x' = 0$  e o cone tem equação  $A(z')^2 = (x' + c)^2 + (y')^2$ .  $\pi \cap \kappa$  fica descrito, portanto, por:

$$\begin{cases} A(z')^2 = c^2 + (y')^2 \\ x' = 0 \end{cases}$$

Se  $c = 0$ , reconhecemos aí duas geratrizes simétricas com relação ao eixo do cone; se  $c \neq 0$ , reconhecemos aí uma hipérbole no plano  $\pi$  ( $x' = 0$ ).

**Caso 3:**  $\pi$  não é paralelo ao eixo  $z$  nem está na condição do caso 1. Então, novamente supondo  $\pi$  paralelo ao eixo  $y$ , temos que  $\pi$  é descrito pela equação  $x + Bz = D$ , com  $B \neq 0$ .

Tomemos em  $\pi$  os pontos  $O' = (D, 0, 0)$ ,  $X' = (D - B, 0, 1)$  e  $Y' = (D, 1, 0)$ , e, na reta perpendicular a  $\pi$ , passando por  $O$ , tomemos  $Z' = (D + 1, 0, B)$ . Tomemos como eixos coordenados aqueles determinados por  $O'X'$ ,  $O'Y'$  e  $O'Z'$ . Então, as coordenadas  $x$ ,  $y$  e  $z$  de um ponto têm coordenadas  $x'$ ,  $y'$  e  $z'$ , correspondentes, dadas por:

$$\begin{aligned} x' &= -\frac{B}{\sqrt{B^2 + 1}}x + \frac{1}{\sqrt{B^2 + 1}}z + DB \\ y &= y' \\ z' &= \frac{1}{\sqrt{B^2 + 1}}x + \frac{B}{\sqrt{B^2 + 1}}z \end{aligned}$$

Equivalentemente,

$$x = -\frac{B}{\sqrt{B^2 + 1}}x' + \frac{1}{\sqrt{B^2 + 1}}z' + D$$

$$y = y'$$

$$z = \frac{1}{\sqrt{B^2 + 1}}x' + \frac{B}{\sqrt{B^2 + 1}}z'$$

Nesse novo sistema de coordenadas,  $\pi$  tem equação  $D = x + Bz = D + \frac{B^2 + 1}{\sqrt{B^2 + 1}}z'$ , ou seja,  $z' = 0$ , enquanto  $\kappa$  tem equação:

$$0 = x^2 + y^2 - Az^2 = \left( -\frac{B}{\sqrt{B^2 + 1}}x' + \frac{1}{\sqrt{B^2 + 1}}z' + D \right)^2 + (y')^2 - A \left( \frac{1}{\sqrt{B^2 + 1}}x' + \frac{B}{\sqrt{B^2 + 1}}z' \right)^2$$

Portanto, fazendo  $z' = 0$ , obtemos a equação para  $\pi \cap \kappa$ :

$$0 = \left( -\frac{B}{\sqrt{B^2 + 1}}x + D \right)^2 + (y')^2 - \frac{A}{B^2 + 1}(x')^2 = \frac{B^2 - A}{B^2 + 1}(x')^2 - \frac{2BD}{B^2 + 1}x' + (y')^2 + D^2$$

Efetuando-se rotação e translação em  $\pi$ , como aprendemos no curso de Geometria Analítica, podemos reconhecer a figura em questão. Dependendo de  $A$ ,  $B$  e  $D$ , essa figura será uma geratriz, ou duas não simétricas, ou uma elipse, ou uma parábola, ou uma hipérbole, ou o vértice.

**Caso 3.1:**  $D = 0$ . É o caso em que o plano passa pelo vértice do cone.

Neste caso ficamos com  $0 = \frac{B^2 - A}{B^2 + 1}(x')^2 + (y')^2$ , que tem solução se, e somente se,  $A \geq B^2$ . Havendo solução, isto é, se o plano  $\pi$  intersecta o cone em mais pontos que o próprio vértice, esses são definidos por  $y' = \pm \frac{A - B^2}{B^2 + 1} \cdot x'$ , reconhecidamente duas geratrizes se  $A - B^2 > 0$  e uma única geratriz se  $A = B^2$ .

**Caso 3.2:**  $D \neq 0$

**3.2.1:**  $\pi$  é paralelo a uma única geratriz do cone

Acontece se, e somente se,  $B^2 = A$

**3.2.2:**  $\pi$  é paralelo a duas geratrizes do cone

Acontece se, e somente se,  $B^2 < A$

**3.2.3:**  $\pi$  não é paralelo a nenhuma geratriz do cone

Acontece se, e somente se,  $B^2 > A$

Com a classificação (ver [3], por exemplo), o conjunto solução de uma equação quadrática em duas incógnitas, através dos coeficientes da mesma, constata-se facilmente que, sendo  $D \neq 0$ , quando  $B^2 = A$ , temos uma parábola, quando  $B^2 < A$ , temos uma hipérbole e, quando  $B^2 > A$ , temos uma elipse.

## 3 Conclusões

### Implicações e aplicações no ensino

O assunto cônicas mostra-se um belo instrumento para o ensino da Matemática. As definições via foco e diretriz são simples, e é surpreendente que a chamada excentricidade seja responsável por curvas de natureza tão distintas, conforme seja menor, maior ou igual 1. É claro que uma tal surpresa não existirá se o aluno não for conduzido a ela; o caminho da construção geométrica é o que propomos. (Lembramos que hoje temos a ajuda da informática à disposição). O apelo geométrico das secções cônicas é forte e vale a pena explorá-lo tanto quanto possível; é então que a distinção das curvas aparece naturalmente e, mais, separar excentricidade em 3 classes agora pode ser interpretado como separar planos seccionantes (com certas exceções) em 3 classes, conforme sejam paralelos a uma única, a duas, ou a nenhuma geratriz do cone. Também, não há dúvida de que a noção de assíntotas de uma hipérbole são evidentes de serem introduzidas quando pensamos na secção cônica e longe de ser evidente nas outras duas definições. Contudo, a demonstração de que essas secções podem ser descritas também via foco e diretriz parece não ser tão natural para a elipse e para a hipérbole. Mas parece mais natural se olharmos para a definição bifocal. Claro que essa suposta naturalidade talvez não justificasse o trabalho de se mostrar mais uma equivalência entre definições; mas há outros ganhos. Por exemplo, é claro que as simetrias dessas figuras são muito mais facilmente concebidas via definição bifocal do que via foco e diretriz. Em resumo, não há definição que possamos considerar a melhor sem que digamos para qual propósito. Para que o aluno perceba isso, é fundamental que ele próprio faça conjecturas sobre o objeto definido, de um ou outro modo, e seja incentivado a investigá-las.

Ainda que tenhamos evitado bastante descrever as cônicas através de equações, o pouco que não evitamos merece alguns comentários. Quando fazemos a classificação dos conjuntos-solução de uma equação geral do segundo grau em duas incógnitas, aparecem como possibilidades, exatamente, as seguintes: o vazio, pares de retas paralelas, par de retas concorrentes, uma única reta ou um único ponto. Esqueçamos o vazio. Apenas um par de retas paralelas não pode ser visto como uma secção cônica. Con-



tudo, como sabemos, um par de retas pode ser definido como sendo o conjunto dos pontos do plano cuja distância a uma dada reta é uma dada constante. O que isso nos diz é que mesmo todas as secções cônicas não são capazes de justificar o nome cônica que se usa sempre quando uma equação daquelas está em estudo; a álgebra é bastante abrangente e convém fazê-la se acompanhar por bastante geometria antes de tudo.

Vimos que o estudo das definições de cônicas pressupõe o conhecimento da Geometria, quer sintética, quer analítica, podendo contar com o auxílio de seu laboratório: as Construções Geométricas. Elas proporcionam uma exploração de qualidade maior, didaticamente falando, e que pode ser potencializada quando se conta com os recursos da computação, por meio dos chamados *softwares* de Geometria Dinâmica, sobretudo como expediente para implementação nos currículos do ensino básico. Esses *aplicativos* são especialmente indicados para curvas que são traçadas ponto a ponto por Construção Geométrica, como é o caso em questão.

No sentido exposto, apresentamos a seguir algumas situações que envolvem esse processo investigativo.

### Construindo e explorando cônicas definidas pela tripla $(F, d, e)$

Vamos construir uma cônica a partir dos elementos da tripla  $(F, d, e)$  que a define.

No plano, localizamos a diretriz  $d$  e o foco  $F$ .

Sabemos que um ponto  $P$  da cônica, por definição via foco e diretriz, cumpre a condição  $\frac{e}{1} = \frac{PF}{Pd}$ . Seguindo as construções que aparecem nas figuras 2.1, 2.19 ou 2.44, criado o segmento de medida unitária, estabelecemos segmentos de medidas  $e$  e  $x = PF$  a partir dos quais obtemos a medida  $y = Pd$  com o Teorema de Tales. Traçamos a reta focal  $r$  e, no mesmo semiplano com respeito à  $d$  contendo  $F$ , a reta  $s$  à distância  $y$  de  $d$ . Fazendo uso de um programa de Geometria Dinâmica, podemos ter acesso ao lugar geométrico a que pertence  $P$  quando  $x$  varia.

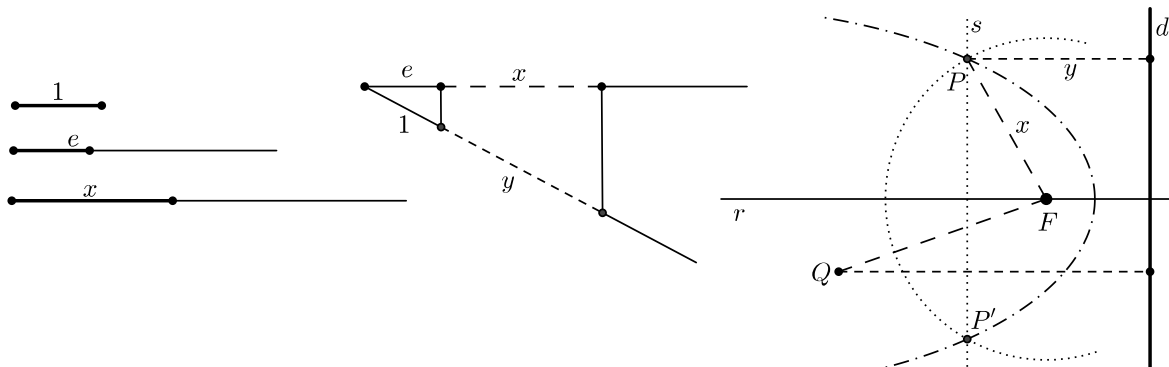


Figura 3.1: Construção de cônicas a partir dos componentes da tripla  $(F, d, e)$

Para tanto, é interessante que os segmentos de medidas  $e$  e  $x$  estejam contidos em semirretas fazendo coincidir uma das extremidades com a origem delas. O ato de deslizar a outra extremidade variando a medida  $x$  produz um deslocamento do ponto  $P$  ao longo da cônica de excentricidade  $e$ . Já o deslizamento da extremidade para variar a medida  $e$ , provocará a mudança na excentricidade da cônica. Visualizar a medida  $e$  desse segmento permite que identifiquemos o tipo da cônica que aparece, quando a comparamos com a unidade.

Propomos, por fim, uma investigação do quociente  $\frac{QF}{Qd}$  para um ponto  $Q$  tomado no plano de forma arbitrária (ver figura anterior). Isso permite que identifiquemos, para  $F$  e  $d$  fixos, regiões do plano onde estão elipses e hipérboles, separadas pela parábola.

## Construindo e explorando cônicas definidas por distâncias a focos

As cônicas podem ser vistas como lugares geométricos de centros de circunferências que passam por certo ponto e são tangentes a uma circunferência dada (no caso da elipse ou da hipérbole) ou a uma reta dada (no caso da parábola). O tratamento com recursos computacionais de GD também se sugere.

Para o caso da elipse, consideramos uma circunferência  $\lambda$  de centro  $F$  e um ponto  $F'$  na região delimitada por ela. O lugar geométrico dos centros  $P$  das circunferências tangentes a  $\lambda$  que passam pelo ponto  $F'$  é uma elipse (fig. 3.2a). De fato, para cada ponto  $X$  de  $\lambda$ , obtemos um ponto  $P$  como intersecção de  $XF$  com a mediatriz de  $XF'$  e, sendo  $r$  o raio de  $\lambda$ , verificamos que  $PF + PF' = PF + PX = r$ , o que significa que  $P$  está na elipse de focos  $F$  e  $F'$ .

Para o caso da hipérbole, consideramos o ponto  $F'$  fora da região delimitada por  $\lambda$  (fig. 3.2b). Observemos que agora duas circunferências são tangentes a  $\lambda$ , passando pelo ponto  $F'$ . O centro de cada uma está em cada um dos ramos de que é formada. Verificamos na figura que  $PF' - PF = PX - PF = r$  e que  $QF - QF' = QF - QY = r$ .

O lugar geométrico dos centros das circunferências que passam por um ponto  $F$  e são tangentes a uma reta  $d$  dada, que não contém  $F$ , é uma parábola. Observamos na figura 3.2c que, tomando um ponto  $X$  arbitrário da reta  $d$ , o centro  $P$  da circunferência tangente à  $d$  e que passa por  $F$  é a intersecção da mediatriz de  $FX$  com a perpendicular a  $d$  por  $X$ , pois, com isso se tem  $Pd = PF$ .

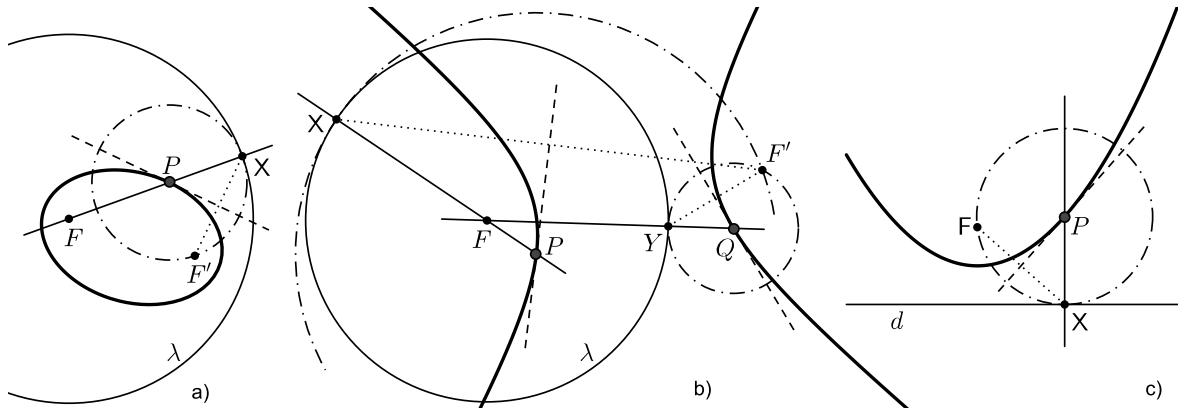


Figura 3.2: As cônicas como lugar geométrico

Uma vez construídas por um *software* de Geometria Dinâmica, é interessante "arrastar" o ponto  $X$  para observar tanto as circunferências tangenciando a circunferência (ou reta) dada como seus centros percorrendo a cônica.

Caracterizações decorrentes das anteriores, com construções geométricas envolvidas igualmente importantes, são as seguintes:

i) Dadas no plano uma reta  $d$  e uma circunferência  $\lambda$ , os pontos do plano que são centros de circunferências tangentes a  $d$  e a  $\lambda$  pertencem a uma parábola. De fato, como podemos observar na próxima figura, em duas situações diferentes, traçando-se uma paralela  $\tilde{d}$  a  $d$ , à distância  $r$  desta, no semiplano determinado por  $d$  que não contém  $O$ , não é difícil verificar que cada ponto da parábola de foco  $O$  e diretriz  $\tilde{d}$  é equidistante de  $d$  e  $\lambda$ . Efetuamos a construção de cada ponto da parábola como descrito anteriormente.

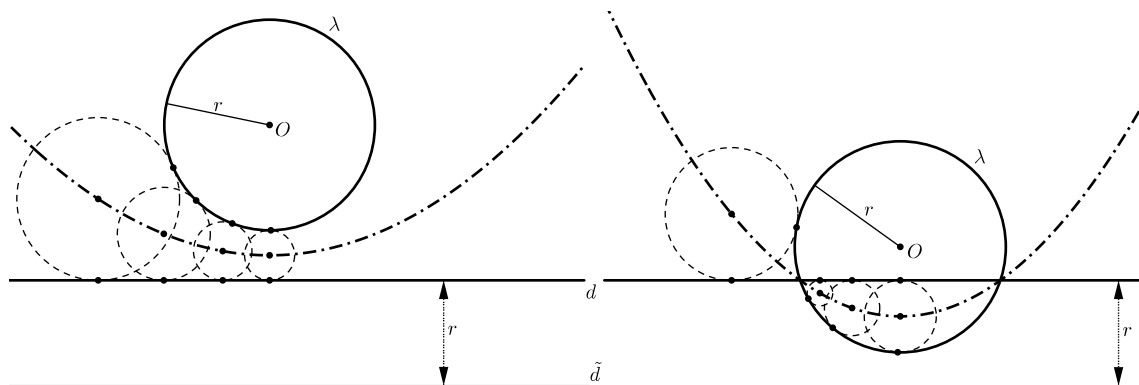


Figura 3.3: A parábola como lugar geométrico

ii) Sejam no plano duas circunferências  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  de raios com medidas diferentes, em que a região delimitada por uma é disjunta da delimitada por outra. Os pontos

do plano que são centros de circunferências tangentes a  $\lambda_1$  e a  $\lambda_2$  pertencem a uma hipérbole.

Na próxima figura, onde são apresentadas duas situações, em cada qual aparece um ramo da hipérbole, observamos uma semirreta  $O_1X$ , com  $X$  um ponto arbitrário de  $\lambda_1$ . Para obter um ponto dessa semirreta que seja centro de circunferência tangente às circunferências dadas, marcamos um ponto  $D$  na semirreta, tal que esteja entre  $O_1$  e  $X$  e que  $DX = r_2$ . O ponto  $P$ , resultado da intersecção entre a semirreta  $O_1X$  e a mediatriz do segmento  $DO_2$  pertence a uma hipérbole de focos  $O_1$  e  $O_2$ . De fato, na figura da esquerda temos  $PO_1 - PO_2 = PD + DO_1 - PO_2 = DO_1 = r_1 - r_2$ , enquanto na da direita,  $PO_2 - PO_1 = PY - r_2 - (PX - r_1) = r_1 - r_2$ , constante.

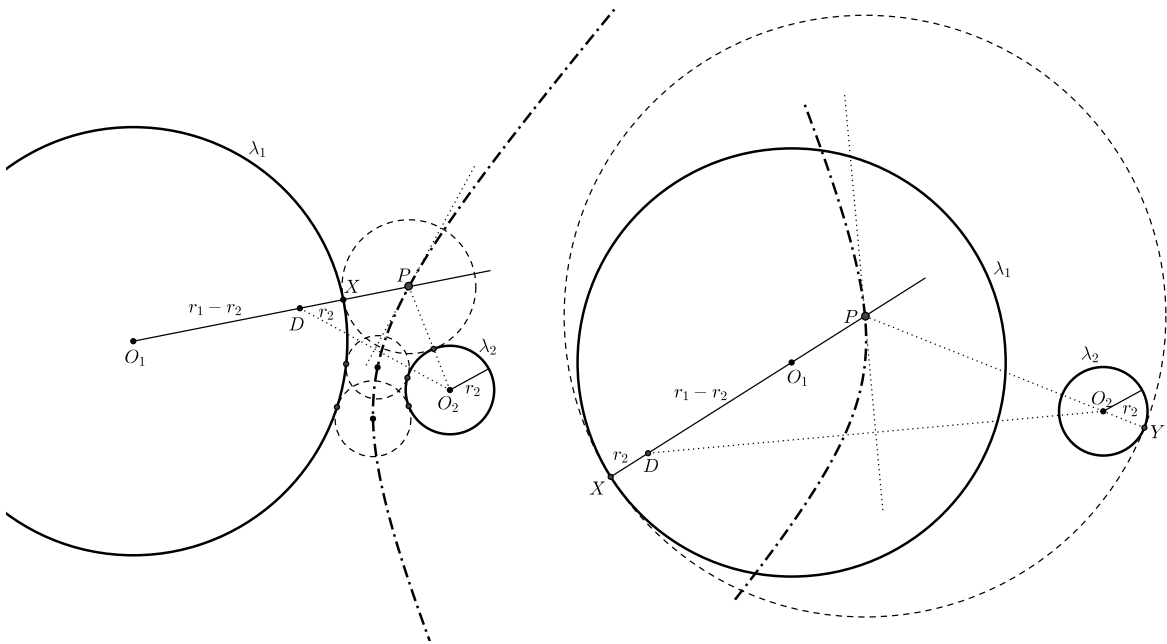


Figura 3.4: A hipérbole como lugar geométrico

Convém salientar que existem duas posições para o ponto  $X$  em  $\lambda_1$  para as quais a reta  $O_1X$  fica paralela à bissetriz de  $DO_2$ . Pode-se constatar esse fato com auxílio dos referidos recursos da informática, sendo razoável admitir que a tal bissetriz, nessa disposição, é uma assíntota da hipérbole.

iii) Com construção e justificativa análogas conclui-se que a elipse é constituída dos centros de circunferências tangentes a duas circunferências dadas, em que a região delimitada por uma está contida na delimitada por outra. Observemos a figura a seguir, onde apresentamos duas situações diferentes.

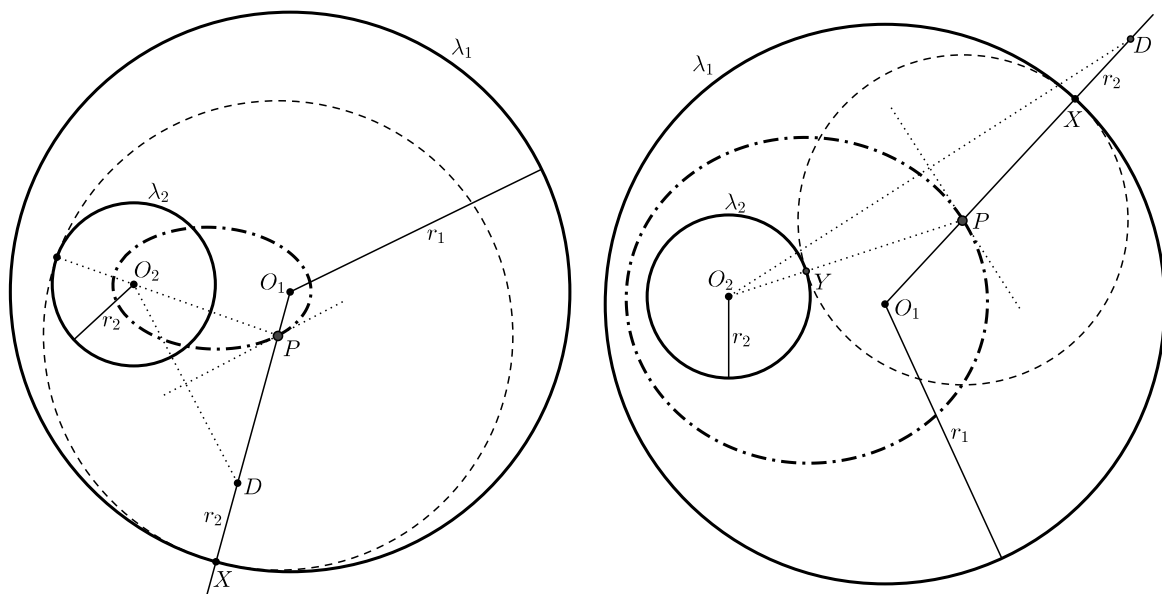


Figura 3.5: A elipse como lugar geométrico

Na figura da esquerda, temos  $PO_1 + PO_2 = r_1 - PD - r_2 + PO_2 = r_1 - r_2$ . À direita, temos  $PO_1 + PO_2 = r_1 - PX + PY + r_2 = r_1 + r_2$ .

Após a exploração dos casos acima, um interessante exercício a se propor a alunos do ensino básico é o estudo da tangência de circunferências às circunferências dadas quando estas se intersectam em exatamente dois pontos. A figura seguinte ilustra os possíveis casos de tangência e sugere os respectivos lugares geométricos.

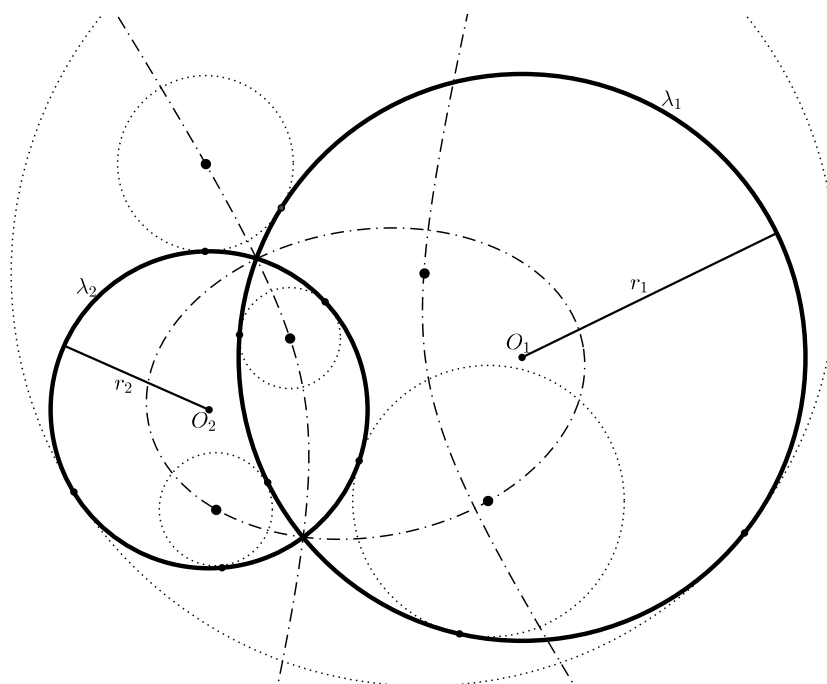


Figura 3.6: Casos de tangência a  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  em uma situação particular

## A elipse como secção de um cilindro reto

Seccionando um cilindro reto com um plano não paralelo nem perpendicular a uma geratriz, a interseção é também uma elipse. A constatação desse fato, que é uma repetição do que fizemos na secção do cone, proposta a alunos do ensino básico, constitui-se um profícuo exercício de imaginação espacial e de aplicação da geometria espacial básica. A figura da esquerda ilustra essa situação e motiva a construção de um modelo físico que auxilia nessa constatação. A outra figura, quando construída geometricamente e justificada em detalhe, promove a revisão de conceitos e resultados básicos de geometria plana. A construção geométrica equivalente para o caso do cone tem igual finalidade. Quando se utiliza um programa de Geometria Dinâmica para tanto, a movimentação da projeção do plano  $\pi$  permite a observação do posicionamento dos focos da elipse.

Observemos que, além da circunferência, uma única reta ou um par de retas paralelas podem ser obtidos como secção no cilindro, possibilidades que aparecem na classificação dos conjuntos-solução de uma equação geral do segundo grau em duas incógnitas, como mencionado anteriormente.

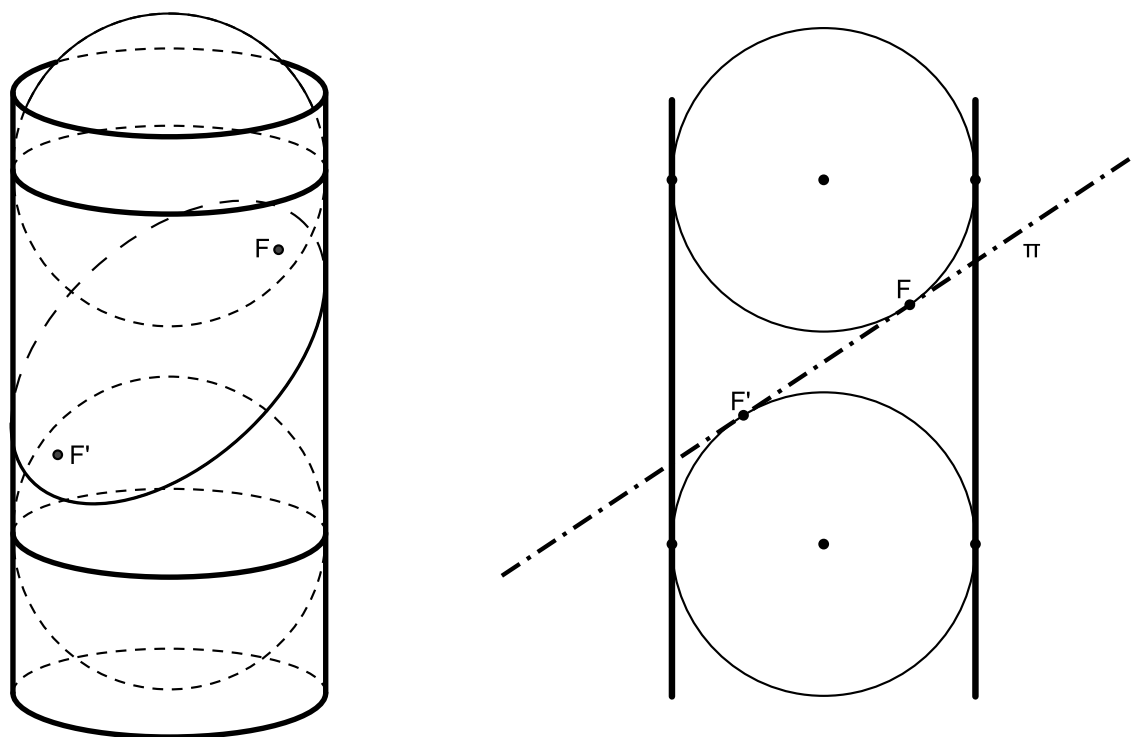


Figura 3.7: A elipse como secção de um cilindro reto

# Referências

- [1] KUTUZOV, B. V. *Studies in Mathematics - Geometry - Volume 4*. 3. ed. Chicago: School Mathematics Study Group, 1960.
- [2] LEBESGUE, H. *Measure and the integral*. San Francisco: Holden-Day, 1966.
- [3] OLIVA, W. M. *Vetores e Geometria*. 1. ed. São Paulo: Editora Edgard Blücher LTDA, 1971.