



Aneliza Leandro Longhi

*Modelos Matemáticos para o Problema Integrado
de Dimensionamento de Lotes e Corte de Estoque
Undimensional*

Dissertação de Mestrado
Pós-Graduação em Matemática

Aneliza Leandro Longhi

*Modelos Matemáticos para o Problema
Integrado de Dimensionamento de Lotes e
Corte de Estoque Unidimensional*

Orientador:
Prof. Dr. Silvio Alexandre de Araujo

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
INSTITUTO DE BIOCÊNCIAS, LETRAS E CIÊNCIAS EXATAS
CAMPUS DE SÃO JOSÉ DO RIO PRETO

São José do Rio Preto

15 de março de 2013

Longhi, Aneliza Leandro .

Modelos Matemáticos para o Problema Integrado de Dimensionamento de Lotes e Corte de Estoque Undimensional / Aneliza Leandro Longhi. São José do Rio Preto: [s.n.], 2013.

80 f. : il. ; 30 cm.

Orientador: Silvio Alexandre de Araujo.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas.

1. Otimização Matemática. 2. Pesquisa Operacional. 3. Problema de Corte de Estoque. 4. Programação Inteira. I. Araujo, Silvio Alexandre II. Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas III. Título.

CDU - 519.8

Aneliza Leandro Longhi

Modelos Matemáticos para o Problema Integrado de Dimensionamento de Lotes e Corte de Estoque Undimensional

Dissertação apresentada para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de Análise Aplicada, junto ao Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de São José do Rio Preto.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Silvio Alexandre de Araujo
Professor Adjunto
UNESP - São José do Rio Preto
Orientador

Prof. Dr. Marcos Nereu Arenales
Professor Titular
USP-São Carlos

Prof^a. Dr^a. Maria do Socorro Nogueira Rangel
Professora Adjunta
UNESP - São José do Rio Preto

São José do Rio Preto, 15 de março de 2013.

Aos meus pais, Adelino e Márcia
Aos meu irmãos, Priscila e Jorge
Dedico

Agradecimentos

A Deus, por estar sempre presente em minha vida..

Ao meu orientador, Dr. Silvio Alexandre de Araujo, pela atenção, paciência, compreensão, disponibilidade demonstradas durante a realização deste trabalho. Agradeço principalmente pela valiosa orientação e ensinamentos transmitidos durante esses anos.

Aos meu pais e irmãos, testemunhas de toda minha dedicação e esforço por este trabalho. Pelo amor, carinho, paciência apoio e educação incondicionais, por sempre acreditarem em mim e por me ensinarem a acreditar nos nossos sonhos. Principalmente por sempre terem vibrado com minhas conquistas e me incentivado a nunca desistir de um projeto iniciado. Um agradecimento especial à minha irmã, Priscila, companheira desde a graduação, por me ajudar e apoiar sempre, seja nas inúmeras caronas até a faculdade ou na atenção que me dava nos momentos difíceis.

Ao Deivison, pelo companheirismo, cumplicidade, paciência e amor demonstrados durante estes anos. Agradeço pelo auxílio na parte computacional e pelos incentivos e palavras de carinho nos momentos mais difíceis. Agradeço também à sua família pela admiração, apoio e compreensão.

A toda minha família pelo incentivo e carinho ao longo de todos esses anos.

A todos os professores que participaram da minha formação, pelo conhecimento transmitido, que muito contribuíram para o meu crescimento pessoal, intelectual e profissional.

Aos velhos amigos de Macaubal, que fazem parte de toda a minha vida e mesmo distantes, torceram por mim.

Aos meus amigos de graduação e pós-graduação que estiveram presentes nos momentos difíceis e tensos de estudo e nos momentos de descontração, indispensáveis nesta etapa de estudos. Um muito obrigado especial a Aline, Jhonny, Juliana, Letícia e Vanessa.

A todos do grupo de otimização do Ibilce pelas dicas, conselhos e ajudas. Em especial a Gislaíne e Michelli que, quando precisei, sempre me ajudaram.

A todos os colegas, pessoas e funcionários do Ibilce, em especial ao Getúlio e Thiago e a

todos do DCCE/DMAP.

A CAPES, pela credibilidade e apoio financeiro a este projeto.

E finalmente a todos que contribuíram direta ou indiretamente na realização desse trabalho. Sintam-se todos agradecidos!

Mantenha seus pensamentos positivos, porque seus pensamentos tornam-se suas
palavras.

Mantenha suas palavras positivas, porque suas palavras tornam-se suas atitudes.

Mantenha suas atitudes positivas, porque suas atitudes tornam-se seus hábitos.

Mantenha seus hábitos positivos, porque seus hábitos tornam-se seus valores.

Mantenha seus valores positivos, porque seus valores... Tornam-se seu destino.

Mahatma Gandhi

Resumo

Os problemas de dimensionamento de lotes e corte de estoque unidimensional têm importante papel em diversos setores industriais, tais como, fábricas de móveis tubulares e de papel, metalúrgicas, entre outros e geralmente são tratados de maneira independente. Neste trabalho, abordamos os dois problemas de maneira integrada. Estudamos um modelo clássico do problema de dimensionamento de lotes, bem como, sua reformulação baseada no problema de caminho mínimo. Para o problema de corte de estoque unidimensional, foram estudados três diferentes modelos matemáticos propostos na literatura. Apresentamos os modelos estudados de maneira integrada e fizemos um estudo computacional, utilizando dados gerados aleatoriamente, comparando os diferentes modelos para o problema integrado.

Palavras-chave: Problemas de dimensionamento de lotes, Problemas de corte de estoque unidimensional, Problemas integrados.

Abstract

The lot-sizing and the one-dimensional cutting-stock problems have an important role in the production sector, such as, tubular furniture and paper factories, metallurgical, among others and generally are dealt independently. In this work, we approach both problems in an integrated way. We studied a classical model for lot sizing problem and its reformulation based on the shortest path problem. For the one-dimensional cutting stock problem, three different models proposed in the literature were studied. We present the studied models in an integrated way and we made a computational study using randomly generated data, comparing the different models for the integrated problem.

Keywords: Lot-sizing problems, One-dimensional cutting stock problems, Integrated problems.

Sumário

Lista de símbolos	p. 11
Lista de Tabelas	p. 13
Lista de Figuras	p. 14
1 Introdução	p. 15
2 O Problema de dimensionamento de lotes	p. 18
2.1 Formulação clássica para o problema de dimensionamento de lotes (CL)	p. 19
2.2 Reformulação para o problema de dimensionamento de lotes (SP) . . .	p. 23
3 O Problema de corte de estoque	p. 28
3.1 O problema de corte de estoque unidimensional	p. 31
3.2 Modelo de Kantorovich (KT)	p. 32
3.3 Modelo de Gilmore e Gomory (GG)	p. 34
3.4 Modelo de Valério de Carvalho (VC)	p. 36
3.4.1 Modelo de Valério de Carvalho com critérios de redução (VCcr)	p. 40
3.4.2 Modelo de Valério de Carvalho com geração de colunas (VCG)	p. 43
4 Problemas integrados de dimensionamento de lotes e corte de estoque	p. 47
4.1 Modelos matemáticos integrados	p. 50
4.1.1 Modelo clássico de dimensionamento de lotes integrado ao modelo de Kantorovich (CLKT)	p. 51

4.1.2	Modelo clássico de dimensionamento de lotes integrado ao modelo de Valério de Carvalho (CLVC)	p. 52
4.1.3	Modelo clássico de dimensionamento de lotes integrado ao modelo de Gilmore e Gomory (CLGG)	p. 54
4.1.4	Modelo reformulado de dimensionamento de lotes integrado ao modelo de Kantorovich (SPKT)	p. 55
4.1.5	Modelo reformulado de dimensionamento de lotes integrado ao modelo de Valério de Carvalho (SPVC)	p. 56
4.1.6	Modelo reformulado de dimensionamento de lotes integrado ao modelo de Gilmore e Gomory (SPGG)	p. 57
4.2	Métodos de resolução	p. 58
4.2.1	Métodos exatos	p. 58
4.2.2	Método heurísticos	p. 58
5	Estudo computacional	p. 60
5.1	Geração dos dados	p. 60
5.2	Resultados computacionais	p. 62
5.2.1	Modelos exatos	p. 63
5.2.2	Modelos heurísticos	p. 70
6	Conclusões e propostas futuras	p. 73
	Referências Bibliográficas	p. 75

Lista de símbolos

Índices:

$t = 1, 2, \dots, T$: períodos de tempo;

$i = 1, 2, \dots, m$: itens;

$k = 1, 2, \dots, K$: objetos disponíveis em estoque e

$j = 1, 2, \dots, n$: padrões de corte

Parâmetros:

sc_{it} : custo de preparação de máquina para a produção do item i no período t ;

hc_{it} : custo unitário de estocagem do item i no período t ;

d_{it} : demanda do item i no período t ;

sd_{itr} : soma das demandas do item i do período t até r ;

cv_{itr} : custo para estocar o item i no período t em quantidade que satisfaça as demandas para os períodos t até r ;

W : comprimento do objeto;

w_i : comprimento do item i ;

d_i : demanda do item i ;

a_j : padrão de corte j ;

α_{ij} : número de itens de comprimento w_i cortados no padrão de corte j ;

$\widehat{c}_{jl}$: custo reduzido e

co : custo associado ao corte de um objeto

Variáveis:

X_{it} : unidades do item i produzidas no período t ;

S_{it} : unidades do item i estocadas no período t ;

Y_{it} : variável binária que indica se a máquina está preparada para a produção do item i no período t ;

zv_{itr} : variável binária que indica se o plano de produção do item i no período t satisfaz a demanda do item i do período t até o período r ;

y_k : variável binária, indica se o objeto k é cortado;

h_{ik} : quantidade do item i cortadas no objeto k ;

x_j : número de objetos cortados utilizando o padrão de corte j ;

f : fluxo que passa pela rede;

z_{jl} : número de itens de largura $(l - j)$ colocados em z_{jl} padrões de corte.

u_j : variáveis duais associadas às restrições de fluxo;

v_d : variáveis duais associadas às restrições de atendimento à demanda;

y_{kt} : variável binária, indica se o objeto k é utilizado no período t ;

h_{ikt} : quantidade do item i cortadas no objeto k no período t ;

x_{jt} : número de objetos cortados segundo o padrão de corte j no período t ;

f_t : fluxo que passa pela rede no período t e

z_{jlt} : número de itens de largura $(l - j)$ colocados em z_{jl} padrões de corte no período t

Lista de Tabelas

1	Matriz de restrições	p. 39
2	Matriz de restrições após aplicar os critérios de redução	p. 42
3	Definição das classes de exemplos	p. 62
4	Quantidade de exemplos com estouro de memória - Métodos Exatos . .	p. 63
5	Número de nós médios considerando exemplos com estouro de memória	p. 64
6	Tempo computacional (segundos) médio considerando exemplos com es- touro de memória	p. 64
7	Dimensão dos modelos para um exemplo	p. 65
8	Limitantes Inferiores	p. 66
9	Tempo Computacional para resolver a Relaxação Linear	p. 67
10	Limitantes Superiores	p. 68
11	<i>GAP</i> e número de soluções ótimas	p. 69
12	Tempo Computacional	p. 69
13	Quantidade de exemplos com estouro de memória - Métodos heurísticos	p. 70
14	Número de Iterações dual Simplex e Relaxação Linear	p. 71

Lista de Figuras

1	Móveis Tubulares	p. 16
2	Representação do exemplo	p. 25
3	Representação do período 1 ($1 = zv_{i11} + zv_{i12} + zv_{i13} + zv_{i14}$)	p. 25
4	Representação do período 2 ($zv_{i11} = zv_{i22} + zv_{i23} + zv_{i24}$)	p. 25
5	Representação do período 3 ($zv_{i12} + zv_{i22} = zv_{i33} + zv_{i34}$)	p. 26
6	Representação do período 4 ($zv_{i13} + zv_{i23} + zv_{i33} = zv_{i44}$)	p. 26
7	Representação da solução ótima do exemplo	p. 26
8	Diferença entre os problemas de corte e de empacotamento.	p. 29
9	Problema de corte unidimensional	p. 29
10	Problema de corte bidimensional	p. 30
11	Problema de corte tridimensional	p. 30
12	Padões de corte homogêneos.	p. 34
13	Representação geométrica da variável do problema	p. 37
14	Grafo completo associado ao exemplo	p. 38
15	Grafo do problema após aplicar os critérios de redução	p. 42
16	Desvio padrão - Limitante inferior	p. 66
17	Desvio padrão - Tempo computacional para resolver a relaxação linear	p. 67
18	Desvio padrão - Limitante superior	p. 68

Capítulo 1

Introdução

Com a revolução industrial iniciada na Inglaterra no século XVIII, a maneira de produzir bens e serviços foi alterada. Ao invés de produzir de forma manufaturada e em pouca quantidade, a produção passou a ser feita por máquinas e em grande quantidade, melhorando a economia e gerando concorrências. Essa concorrência permanece até os dias de hoje e as indústrias buscam meios de melhorar o planejamento de sua produção com a diminuição dos custos da sua produção e/ou o aumentando a eficiência de seus processos produtivos.

O Brasil, apesar de apresentar um crescimento considerável no setor industrial, ainda enfrenta a concorrência de países como China, que consegue competir com os produtos brasileiros graças ao seu baixo custo de produção. Sendo assim, as indústrias brasileiras precisam de processos produtivos cada vez mais eficientes, que atendam a demanda e minimizem custos, tais como, custo com produção, estocagem e preparação de máquinas e que também minimize a perda de matéria prima. Para que isso aconteça, modelos matemáticos tem sido amplamente estudados e utilizados na prática.

Uma questão que se faz presente em várias indústrias é como determinar, com custo mínimo, o tamanho dos lotes de produção de cada item a ser produzido em uma ou mais máquinas em cada período ao longo de um horizonte de planejamento finito, ou seja, como resolver o problema de dimensionamento de lotes.

Este problema pode interagir com outros problemas de uma indústria, como sequenciamento da produção e o problema que iremos abordar neste texto, ou seja, o problema de corte de estoque, que consiste basicamente em determinar a melhor forma de cortar peças maiores, que chamamos de objetos em peças menores de diferentes tamanhos, isto é, itens. Os problemas integrados estão presentes em indústrias de móveis, papel, metalúrgica, entre outras, em que o processo de corte está presente.

Na prática, o problema integrado de dimensionamento de lotes e corte de estoque tem sido resolvido de forma isolada, ou seja, primeiro determina-se uma solução para o problema de dimensionamento de lotes e, para cada lote determinado, resolve-se o problema de corte de estoque. Porém, o planejamento da produção que minimiza os custos de preparação e estocagem (custos relacionados ao problema de dimensionamento de lotes) pode fazer com que aumente a perda de material no processo de corte. Em contrapartida, o número de objetos que minimiza a perda, pode levar a custos de produção elevados. O ideal seria uma solução com custos e perdas de material baixos. Uma forma de fazer isso, é tornar os dois problema dependentes entre si e resolvê-los de maneira integrada, ou seja, um único problema determina quando, quanto e como cortar cada item. Dessa forma, de acordo com Poldi e Arenales (2010), novas combinações podem ser consideradas, pois um item que não é demandado em um período pode ser antecipado se sua combinação com os demais itens faz diminuir a perda de material.

O interesse desta dissertação é voltado para o problema de dimensionamento de lotes integrado ao problema de corte de estoque unidimensional. Observa-se que este problema tem utilidade prática uma vez que pode ser encontrado em indústrias, tais como, de papel (Respício *et al* (2002), Menon e Schrage (2002), Poltronieri *et al* (2007)) e nas indústrias de móveis tubulares (Figura 1).



Figura 1: Móveis Tubulares

O processo produtivo para a fabricação de móveis tubulares, segundo o Centro Tecnológico de Mobiliários, é relativamente simples e para que a matéria-prima (objeto) se torne um produto acabado, inicialmente é necessário o corte dos objetos para que então possa ser realizado as dobras e curvaturas necessárias para a obtenção do móvel. Em seguida, ele segue para o processo de furação e montagem da estrutura. Depois, é necessário banhos para preparar a superfície dos itens cortados, pintura ou qualquer outro

tipo de acabamento. Por fim, os acessórios são montados e o móvel segue para o setor de embalagem.

O problema de corte de estoque unidimensional também já foi estudado no contexto da indústria aeronáutica em Abuabara e Morabito (2008) e segundo os autores é um problema com poucos itens e geralmente de diferentes tamanhos, caracterizando um problema de *bin packing*. Assim, o problema estudado neste trabalho tem potencial para ser aplicado na indústria aeronáutica.

Neste trabalho, modelos para o problema de dimensionamento de lotes integrado ao problema de corte de estoque são estudados, de acordo com alguns modelos propostos na literatura para cada um dos problemas de maneira isolada. Para o problema de dimensionamento de lotes consideramos o problema com vários itens, monoestágio e sem restrição de capacidade. Foram estudadas a formulação clássica, que denotaremos ao longo do texto por CL e a reformulação proposta por Eppen e Martin (1987), que consiste na representação do problema como um problema de caminho mínimo (*shortest path*) e será denotada por SP. As formulações atribuída à Kantorovich (1939), denotada por KT, Gilmore e Gomory (1961, 1963) (GG) e Valério de Carvalho (1999, 2002) (VC) foram consideradas para o problema de corte de estoque unidimensional. Tais formulações foram integradas entre si e resultados computacionais são mostrados.

No Capítulo 2 será definido o problema de dimensionamento de lotes, algumas características que permitem classificá-lo são citadas e são apresentados os modelos clássico e a reformulação de Eppen e Martin (1987), bem como, o método de resolução de Wagner e Whitin (1958). No Capítulo 3 apresenta-se o problema de corte de estoque e os modelos atribuído à Kantorovich (1939), Gilmore e Gomory (1961, 1963) e Valério de Carvalho (1999, 2002).

No Capítulo 4 serão apresentadas as integrações utilizando as diferentes formulações de dimensionamento de lotes e corte de estoque. No Capítulo 5 os resultados dos testes computacionais realizados são apresentados. Finalmente, no Capítulo 6, são apresentadas as conclusões e algumas propostas para trabalhos futuros.

Capítulo 2

O Problema de dimensionamento de lotes

O problema de dimensionamento de lotes soluciona a questão de quantos itens produzir, em uma ou várias máquinas, em cada período do horizonte de planejamento, de forma a atender a demanda e minimizar uma certa função objetivo, por exemplo, a soma dos custos de produção, estocagem e preparação. Pode-se acrescentar restrições ao modelo, tais como, restrições de limitação da capacidade.

Existem vários trabalhos na literatura que tratam o problema de dimensionamento de lotes de forma isolada. Algumas revisões bibliográficas podem ser encontradas em Bahl *et al* (1987), Maes *et al* (1991), Kuik *et al* (1994), Drexel e Kimms (1997), Karimi *et al* (2003), Jans e Degraeve (2007, 2008), Wolsey (2002) e outros.

Devido a Bahl *et al* (1987) tal problema passou a ser classificado em um sistema de produção multiestágio e monoestágio. Quando a produção de um item depende da produção de outros itens, dizemos que o sistema de produção é multiestágio, já quando um item independe de outro para ser produzido, o sistema de produção é dito monoestágio. Neste trabalho, consideraremos o problema monoestágio com vários itens e sem restrição de capacidade.

Os primeiros estudos referentes ao problema em questão ocorreram com o Economic Order Quantity (EOQ) (Harris (1913)) em que os modelos foram considerados sem restrição de capacidade e para apenas um item. Posteriormente surgiram outros modelos para o problema de dimensionamento de lotes, sempre buscando retratar a realidade de uma indústria. Um modelo bastante conhecido para problemas de dimensionamento de lotes foi proposto por Wagner e Whitin (1958) para resolver um modelo monoestágio, sem restrição de capacidade, com custo de preparação e um único item. Considera-se um horizonte de planejamento finito dividido em vários períodos discretos com demanda

determinística e dinâmica, ou seja, a demanda pode variar a cada período e é conhecida ou estimada.

Baseados na propriedade de otimalidade propostas em Wagner e Whitin (1958), Eppen e Martin (1987) utilizaram de redefinição a variáveis para apresentar uma reformulação, como um problema de caminho mínimo, para o problema de dimensionamento de lotes sem restrição de capacidade. Neste capítulo serão apresentados alguns desses modelos para o problema de dimensionamento de lotes. Na seção a seguir é apresentado o modelo clássico e o método de solução de Wagner e Whitin e posteriormente é apresentada a reformulação para o problema.

2.1 Formulação clássica para o problema de dimensionamento de lotes (CL)

Esse modelo determina a produção dos lotes de vários itens para diversos períodos de tempo, minimiza a soma dos custos de preparação e estocagem e garante que a demanda seja atendida.

Considere os seguintes índices:

- $t = 1, 2, \dots, T$ Períodos de tempo.
- $i = 1, 2, \dots, m$ Itens.

Os dados considerados são:

- sc_{it} Custo de preparação para a produção do item i no período t .
- hc_{it} Custo unitário de estocagem do item i no período t .
- d_{it} Demanda do item i no período t .
- sd_{itr} Soma das demandas do item i do período t até o período r .

E as variáveis de decisão:

- X_{it} Unidades do item i produzidas no período t .

- S_{it} Unidades do item i estocadas no período t .
- Y_{it} Variável binária que indica se a máquina está preparada para a produção do item i no período t .

Assim, o modelo clássico (CL) do problema de Dimensionamento de Lotes é dado como a seguir:

Modelo CL

$$\text{minimizar } \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^m hc_{it}S_{it} + \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^m sc_{it}Y_{it} \quad (2.1)$$

sujeito a:

$$X_{i1} - S_{i1} = d_{i1} \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (2.2)$$

$$S_{i,t-1} + X_{it} - S_{it} = d_{it} \quad i = 1, 2, \dots, m \text{ e } t = 2, 3, \dots, T \quad (2.3)$$

$$X_{it} - sc_{it}Y_{it} \leq 0 \quad i = 1, 2, \dots, m \text{ e } t = 1, 2, \dots, T \quad (2.4)$$

$$Y_{it} \in \{0, 1\} \quad i = 1, 2, \dots, m \text{ e } t = 1, 2, \dots, T \quad (2.5)$$

$$X_{it}, S_{it} \in \mathbb{R}^+ \quad i = 1, 2, \dots, m \text{ e } t = 1, 2, \dots, T \quad (2.6)$$

No modelo acima, a função objetivo (2.1) minimiza os custos de estocagem e preparação. Observe que não foram considerados custos de produção. As restrições (2.2) e (2.3) são de balanceamento de estoque e garantem que a demanda seja satisfeita. Os conjuntos de restrições (2.4) e (2.5) asseguram que haverá produção apenas quando houver preparação de máquina e (2.6) são restrições de não-negatividade das variáveis.

Note que o modelo (2.1)-(2.6) trata-se de um modelo de dimensionamento de lotes monoestágio, com custo de preparação, vários itens e sem restrição de capacidade. Este modelo pode ser decomponível por itens, isto é, decomposto em m subproblemas que podem ser resolvidos por algum algoritmo de programação dinâmica, por exemplo, o algoritmo ótimo desenvolvido por Wagner e Whitin (1958).

Para um dado item i fixo, este método resolve este problema de maneira ótima em tempo polinomial e baseia-se na propriedade de otimalidade, que garante que a demanda de um período t deve ser satisfeita completamente com o estoque do período $t - 1$ (S_{t-1})

ou com a produção do período t (X_t), isto pode ser escrito em termos matemáticos como $S_{t-1}X_t = 0$ para $t = 1, 2, \dots, T$. Dessa forma, não é permitido produzir parcialmente a demanda de um período futuro.

Para este algoritmo, utilizam-se os seguintes dados:

- C_{tj} custo de preparação e estoque para produzir no período t a soma de demandas desde o início de período t até o início do período $j-1$.
- g_t custo mínimo para o período de planejamento t .

E o sistema de equações a seguir é resolvido para obter a solução ótima:

$$g_t = \min_{j>t}(C_{tj} + g_j), t = T, T-1, \dots, 2, 1 \quad (2.7)$$

$$\text{Condição Final : } g_{T+1} = 0 \quad (2.8)$$

As equações (2.7) e (2.8) determinam o planejamento da produção que fornece o custo mínimo. O algoritmo é resolvido recursivamente e, primeiramente deve-se calcular os custos C_{tj} , que são dados pela fórmula:

$$C_{tj} = sc_t + hc_t d_{t+1} + (hc_t + hc_{t+1})d_{t+2} + (hc_t + hc_{t+1} + hc_{t+2})d_{t+3} + \dots + (hc_t + hc_{t+1} + \dots + hc_{j-2})d_{j-1}$$

para $t = 1, 2, \dots, T$ e $j = t+1, t+2, \dots, (T+1)$

Para ilustrar o algoritmo de Wagner e Whitin, considere o seguinte exemplo retirado de Araujo (1999):

Exemplo 2.1. *Uma firma que fabrica um determinado produto deseja fazer um planejamento da produção para um horizonte de quatro semanas. Sabe-se que a demanda para estas quatro semanas será de 104, 174, 46 e 112 unidades. Suponha que a firma faça no máximo uma preparação de máquinas a cada semana e que não haja restrição de capacidade de produção. Considere $sc_t = \$150,00$, $t = 1, 2, \dots, T$ e $hc_t = \$2,00$, $t = 1, 2, \dots, T$.*

Inicialmente, precisamos calcular C_{tj} , $t = 1, 2, \dots, T$ e $j = t + 1, t + 2, \dots, T + 1$.

$$C_{1,2} = 150$$

$$C_{1,3} = 150 + 2 \times 174 = 498$$

$$C_{1,4} = 150 + 2 \times [174 + (46 \times 2)] = 682$$

$$C_{1,5} = 150 + 2 \times [174 + (46 \times 2) + (112 \times 3)] = 1354$$

$$C_{2,3} = 150$$

$$C_{2,4} = 150 + 2 \times 46 = 242$$

$$C_{2,5} = 150 + 2 \times [46 + (112 \times 2)] = 690$$

$$C_{3,4} = 150$$

$$C_{3,5} = 150 + 2 \times 112 = 374$$

$$C_{4,5} = 150$$

Com os custos calculados, basta encontrarmos o custo mínimo de planejamento para cada período com a aplicação das fórmulas (2.7) e (2.8):

$$g_5 = 0 \text{ condição final}$$

$$g_4 = \min_{j>4}(C_{4,j} + g_j) = \min\{150\} = 150$$

$$g_3 = \min_{j>3}(C_{3,j} + g_j) = \min\{300, 374\} = 300$$

$$g_2 = \min_{j>2}(C_{2,j} + g_j) = \min\{450, 392, 690\} = 392$$

$$g_1 = \min_{j>1}(C_{1,j} + g_j) = \min\{542, 798, 832, 1354\} = 542$$

Dessa forma, verificamos que na semana 1 o mínimo ocorre em $j = 2$ então a quantidade produzida na semana 1 deve atender somente a demanda desta semana, ou seja, 104 unidades. Na semana 2, o valor ótimo de j é $j = 4$, assim a quantidade produzida na semana 2 precisa atender a demanda da semana 2 somada a demanda da semana 3, ou seja, 220 unidades. O próximo período é a semana 4, na qual o valor mínimo de j ocorre em $j = 5$ e assim, a quantidade produzida na semana 4 será 112 unidades pois atende a demanda da própria semana.

Baseados no algoritmo de Wagner e Whitin (1958), surgiram vários trabalhos propondo implementações mais eficientes, como é o caso de Evans (1985) que propõe um algoritmo, que apesar de ter a mesma complexidade do algoritmo de Wagner e Whitin, é mais eficiente.

Federgruen e Tzur (1991), Wagelmans *et al* (1992) e Aggarwal e Park (1993) apresentam novos algoritmos de menor complexidade computacional que resolvem o problema. Revisões bibliográficas mais completas deste problema podem ser encontradas em Wolsey (1995) e Brahimi *et al* (2006).

2.2 Reformulação para o problema de dimensionamento de lotes (SP)

Um modelo para um problema de otimização pode ser reformulado de maneira equivalente com modificações nas variáveis e/ou restrições. Geralmente faz-se reformulações para aumentar a eficiência da formulação original, obtendo assim melhores resultados.

Nesta dissertação vamos estudar a reformulação para o problema de dimensionamento de lotes sem restrição de capacidade proposta por Eppen e Martin (1987). Os autores basearam-se em uma representação em rede para a propriedade de Wagner e Whitin e utilizaram uma técnica de redefinição de variáveis para reformular o problema de dimensionamento de lotes, que originou uma formulação baseada no problema do caminho mínimo.

Para um dado item i , cada nó do grafo representa um período do horizonte de planejamento, incluindo um período falso $T + 1$. Existe um arco entre cada par de nós t e q ($t < q$) que representa a opção de produção da soma da demanda entre o período t e o período $q-1$ no período t . O valor de cada arco é dado pelo custo da respectiva opção de produção e o objetivo é encontrar o menor caminho entre os nós 1 e $T+1$.

Para a formulação de Eppen e Martin precisamos do seguinte parâmetro:

cv_{itr} : custo para estocar o item i no período t em quantidade que satisfaça as demandas para os períodos t até r .

$$cv_{itr} = \sum_{s=t+1}^r \sum_{u=t}^{s-1} hc_{iu}d_{is}$$

E também da seguinte variável:

zv_{itr} : variável binária que indica se o plano de produção do item i no período t satisfaz a demanda do item i do período t até o período r .

Na formulação clássica, a quantidade produzida do item i no período t é dada pela variável X_{it} . Nesta reformulação, será dada em termos da variável zv_{itr} . Dessa forma:

$$X_{it} = d_{it}zv_{itt} + (d_{it} + d_{it+1})zv_{itt+1} + \dots + (d_{it} + d_{it+1} + \dots + d_{iT})zv_{iT}$$

ou seja,

$$X_{it} = \sum_{r=t}^T sd_{itr}zv_{itr}, \quad i = 1, 2, \dots, m \text{ e } t = 1, 2, \dots, T$$

Assim, o modelo reformulado (SP) é dado por (2.9)-(2.14):

Modelo SP

$$\text{minimizar } \sum_{i=1}^m \sum_{t=1}^T sc_{it}Y_{it} + \sum_{i=1}^m \sum_{t=1}^T \sum_{r=t}^T cv_{itr}zv_{itr} \quad (2.9)$$

sujeito a:

$$1 = \sum_{r=1}^T zv_{i1r} \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (2.10)$$

$$\sum_{r=1}^{t-1} zv_{irt-1} = \sum_{r=t}^T zv_{itr} \quad i = 1, 2, \dots, m \text{ e } t = 2, 3, \dots, T \quad (2.11)$$

$$\sum_{r=t}^T zv_{itr} \leq Y_{it}, \quad i = 1, 2, \dots, m \text{ e } t = 1, 2, \dots, T \quad (2.12)$$

$$Y_{it} \in \{0, 1\} \quad i = 1, 2, \dots, m \text{ e } t = 1, 2, \dots, T \quad (2.13)$$

$$zv_{itr} \in \mathbb{R}_+ \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad t = 1, 2, \dots, T \text{ e } r \in T : r \geq t \quad (2.14)$$

A função objetivo (2.9) minimiza o custo de estoque e preparação. As restrições (2.10) e (2.11) definem as restrições de conservação de fluxo e definem um plano de produção. Para cada item, uma unidade de fluxo é enviada na rede. As restrições (2.12) definem se existe ou não produção no período t . As variáveis de decisão em (2.13) são binárias e (2.14) garantem a não-negatividade das variáveis zv_{itk} . Observe que na solução ótima essas variáveis serão 0 ou 1.

Podemos representar o problema do exemplo 2.1 como o problema de encontrar o caminho mínimo no grafo a seguir:

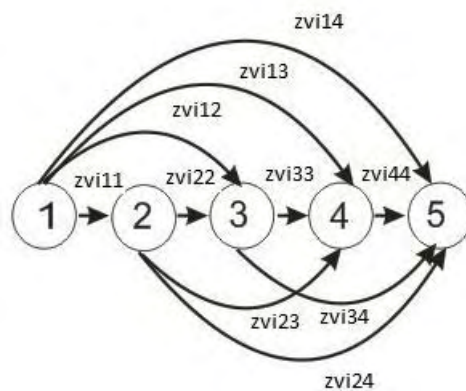
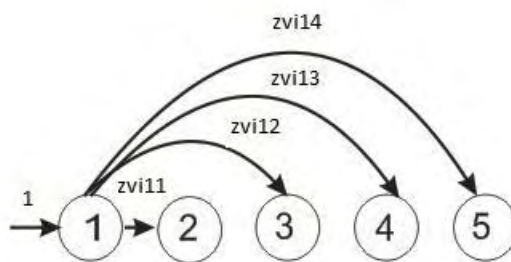
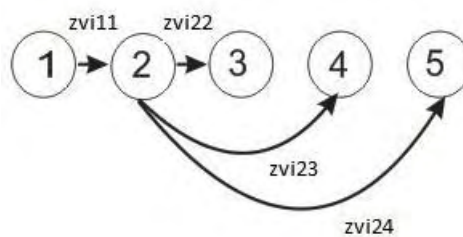


Figura 2: Representação do exemplo

A Figura 2 representa as opções de produção de um item i para quatro períodos e as Figuras 3, 4, 5 e 6 representam os possíveis planos de produção para o item i , para cada período separadamente.

Figura 3: Representação do período 1 ($1 = zv_{i11} + zv_{i12} + zv_{i13} + zv_{i14}$)Figura 4: Representação do período 2 ($zv_{i11} = zv_{i22} + zv_{i23} + zv_{i24}$)

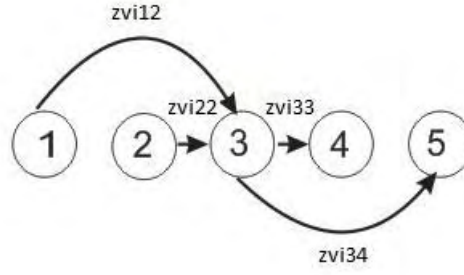


Figura 5: Representação do período 3 ($zv_{i12} + zv_{i22} = zv_{i33} + zv_{i34}$)

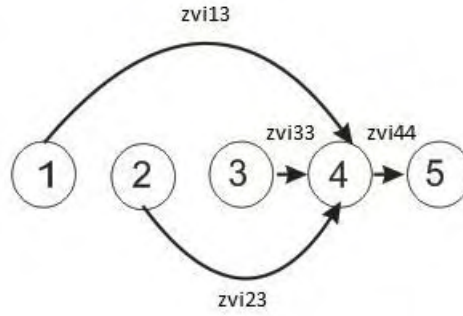


Figura 6: Representação do período 4 ($zv_{i13} + zv_{i23} + zv_{i33} = zv_{i44}$)

E a política ótima para este exemplo pode ser denotada como o caminho no grafo orientado apresentado na Figura 7 :

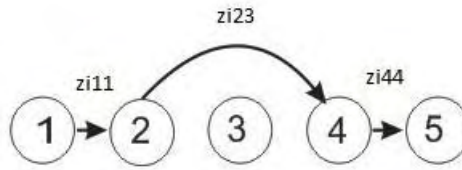


Figura 7: Representação da solução ótima do exemplo

Se restrições de capacidade fossem adicionadas ao modelo (2.9)-(2.14), a variável zv_{itr} poderia ter valores fracionários já que é possível que a capacidade impeça a produção da soma das demandas do período t até o período r . A interpretação para um valor fracionário, por exemplo, 0.4 para uma variável zv_{itr} é a seguinte: produzir no período t , 40% do total da demanda do período t até o período r .

Jans e Degraeve (2004) estenderam o modelo reformulado por Eppen e Martin para o problema de dimensionamento de lotes com restrições de capacidade. Sural *et al* (2009)

aplicaram a relaxação Lagrangiana em uma reformulação do problema de dimensionamento de lotes com uma única máquina e sem custos de preparação. Fiorotto e Araujo (2012) aplicaram a relaxação Lagrangiana na reformulação de Eppen e Martin, a fim de obter limitantes inferiores de boa qualidade para o problema com máquinas paralelas. Alfieri *et al* (2002) mostrou que as relaxações lineares de SP e da reformulação como um problema de transporte fornecem valores em torno de 60% maiores do que os valores obtidos pela relaxação linear da formulação clássica. Além disso, os autores mostraram que a relaxação linear de SP foi resolvida mais rapidamente. Uma revisão bibliográfica sobre reformulações para o problema de dimensionamento de lotes pode ser encontrada em Denizel *et al* (2007).

Capítulo 3

O Problema de corte de estoque

Os problemas de corte e empacotamento tem sido estudados desde o trabalho pioneiro de Kantorovich (1939), que veio ao conhecimento do Ocidente apenas em 1959 quando foi traduzido para o inglês e publicado em 1960. A partir de então, muitos trabalhos foram publicados, inclusive os trabalhos de Gilmore e Gomory (1961, 1963, 1965), talvez os mais repercutidos até os dias atuais. Outros trabalhos que tratam o problema de corte de estoque podem ser encontrados em Dyckhoff *et al* (1997), Wang e Wäscher (2002), Oliveira e Wäscher (2007) e Morabito *et al* (2009). Revisões de bibliografias são encontradas em Hinxman (1980), Dyckhoff (1990) e Morabito e Arenales (1992). Tem-se ainda uma classificação dos problemas em Wäscher *et al* (2007).

Quando resolvemos um problema de corte de estoque estamos determinando a melhor maneira de utilizar objetos para cortar itens menores, de dimensões bem especificadas para atender uma demanda. A função objetivo a ser otimizada pode representar vários aspectos, como por exemplo, a minimização da perda total de material ou ainda do número total de objetos utilizados. Trata-se de um problema importante, presente constantemente em ambientes industriais e interessante, devido à sua complexidade computacional.

Em processos industriais os objetos podem ser barras de aço, bobinas de papel, de tecido, de alumínio, chapas de metal, de madeira, entre outros. Os problemas de corte são equivalentes às alocações de materiais em contêineres de navios, nas carrocerias de caminhões e vagões de trens. Nestes casos os problemas são chamados de problemas de empacotamento. Os dois problemas citados são paralelamente estudados pois, a parte de material que será cortada para produzir um item, pode ser identificada como o espaço ocupado por este item (Figura 8).

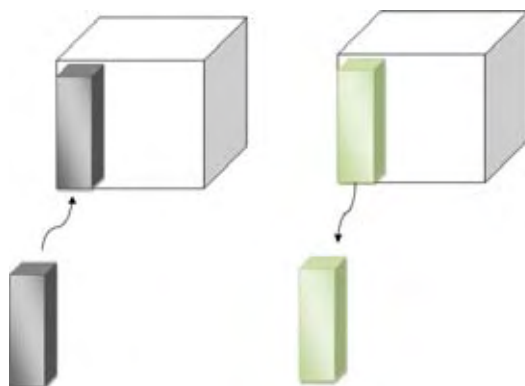


Figura 8: Diferença entre os problemas de corte e de empacotamento.

Uma característica dos problemas de corte de estoque é que a demanda média de cada tipo de item é grande, diz-se que se tem um fator de multiplicidade alto. Além disso, os objetos em estoque podem ser de um único tipo ou de vários tipos e cada tipo de objeto pode ou não estar disponível em grande quantidade. Neste trabalho, será considerado o caso para um único tipo de objeto em quantidade suficiente para atender a demanda.

Os problemas de corte de estoque podem ser classificados de acordo com as dimensões que são levadas em consideração no processo de corte.

No problema de corte de estoque unidimensional apenas uma dimensão do objeto a ser cortado é relevante no processo de corte. Como aplicações, podemos citar as indústrias de papel, onde bobinas maiores são cortadas em bobinas menores; indústrias de fios de cobre e também nos processos de cortes de bobinas de aço. Na Figura 9 abaixo, representamos os objetos em estoque de comprimento W , itens demandados de comprimentos w_1, w_2 e w_3 , e algumas maneiras de cortar.

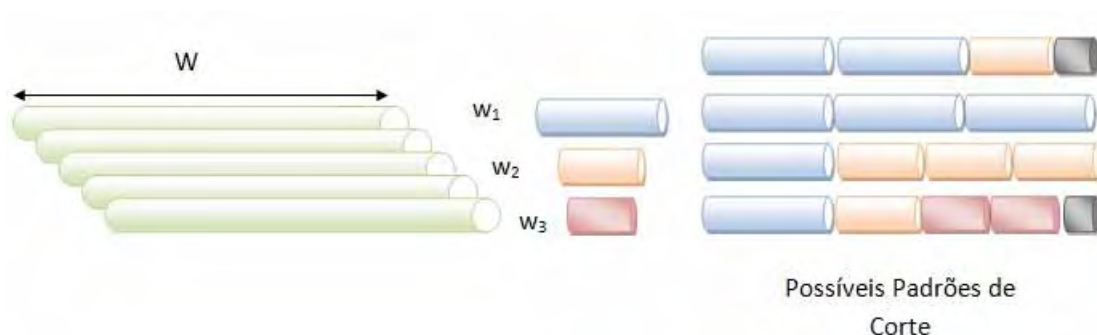


Figura 9: Problema de corte unidimensional

O problema de corte é classificado como bidimensional quando duas dimensões do objeto (comprimento e largura) são relevantes na obtenção da solução (Figura 10). Resolver

este problema consiste em "alocar" as peças a serem cortadas ao longo do comprimento e da largura do objeto em estoque. Entre as aplicações de problemas bidimensionais podemos citar o corte de placas de madeira na indústria moveleira, chapas de aço, placas de vidro, entre outros, em que placas retangulares grandes são cortadas em placas retangulares menores.



Figura 10: Problema de corte bidimensional

Dizemos que o problema de corte é tridimensional quando três dimensões são levadas em consideração no processo de corte (Figura 11). Basicamente, trata-se de arranjar itens espaciais, sem sobrepô-los, dentro de objetos maiores. Este problema aparece nas indústrias de colchões e travesseiros, entre outras.



Figura 11: Problema de corte tridimensional

Podemos ainda considerar o problema de corte bidimensional com uma das dimensões variável, que denominamos problema de corte 1.5 dimensional. Há ainda, o problema de corte 2.5 dimensional, ou seja, um problema tridimensional com uma das dimensões variável, e o problema de corte multidimensional, em que mais de três dimensões são relevantes no processo de corte e surge quando a produção de um item requer simultaneamente diferentes recursos independentes e limitados.

Neste capítulo faremos uma breve discussão sobre o problema de corte de estoque unidimensional, de que trata este trabalho e apresentaremos os modelos, denominados aqui por modelo de Kantorovich (KT), Gilmore e Gomory (GG) e Valério de Carvalho (VC) para o problema de corte de estoque unidimensional.

3.1 O problema de corte de estoque unidimensional

O problema de corte de estoque unidimensional será parte do enfoque principal deste trabalho e, de acordo com a tipologia proposta por Wäscher *et al* (2007), é classificado como problema de corte de estoque unidimensional com um único tipo de objeto (*One-Dimensional Simple Stock Size Cutting Stock Problem*) (1D-SSSCSP) e segundo Garey e Johnson (1979), pertencem a classe dos problemas NP-difíceis, ou seja, problemas improváveis de serem resolvidos, em um tempo limitado, por um algoritmo com número de passos definidos em termos dos seus dados.

Basicamente, este problema pode ser definido da seguinte maneira: suponha que temos objetos em estoque, de comprimento W , em número suficiente para cortar m tipos de itens em quantidade demandadas d_i e comprimento correspondente w_i , com $i = 1, 2, \dots, m$. Então devemos encontrar a melhor maneira de cortar os itens de modo que a demanda de cada item seja atendida e uma certa função objetivo otimizada.

Similar ao problema de corte de estoque unidimensional é o problema de empacotamento de "bins" (*bin packing*) que consiste em distribuir m itens de comprimento $w_i, i = 1, 2, \dots, m$ em um número de caixas de capacidade W de modo que a capacidade das caixas não seja excedida e o número de caixas usadas seja minimizado. Este problema caracteriza-se pelo fato de ter muitos tipos de itens de diferentes comprimentos e com baixa demanda, gerando um fator de multiplicidade baixo, ou seja, a demanda média por item é baixa. O problema *bin packing* também pertence a classe dos problemas NP-difíceis.

Apesar dos problemas de corte de estoque unidimensional e *bin packing* serem bastante semelhantes, tem sido usados métodos de solução distintos para resolvê-los. No caso do problema de corte unidimensional, a programação linear tem sido bastante usada, já que de forma geral as instâncias possuem um *gap* (diferença entre os valores ótimo do problema com variáveis inteiras e da sua relaxação linear) inferior a uma unidade, então aplicam-se heurísticas de arredondamento para obter a solução para o problema com variáveis inteiras. Essa propriedade é designada propriedade de arredondamento para cima (*Integer Round Up Property*) (Marcotte, (1985), (1986)).

Por outro lado, se o fator de multiplicidade for baixo, como ocorre com o *bin packing*, as variáveis de decisão na solução ótima da relaxação linear são valores fracionários menores que um e não é fácil para os métodos heurísticos encontrar uma solução de boa qualidade. Então, outras técnicas tem sido empregadas para obter a solução ótima do problema *bin packing* (Martello e Toth (1990), Scholl *et al* (1997), Schwerin e Wäscher (1999))

Segundo Valério de Carvalho (1999, 2002), Kantorovich (1939) apresentou o primeiro modelo matemático para o problema de corte de estoque unidimensional em que um limitante superior para a quantidade necessária de objetos deve ser conhecida *à priori*. Um ponto fraco deste modelo é que ele produz limitantes inferiores ruins.

Com a necessidade de obter limitantes inferiores melhores, pode-se aplicar o método de decomposição de Dantzig-Wolfe (Dantzig-Wolfe (1960)) no modelo de Kantorovich e obtêm-se uma nova formulação que é a mesma proposta por Gilmore e Gomory (1961, 1963). Segundo Scheithauer e Terno (1995), a relaxação linear desta formulação é mais forte mas o número de colunas cresce exponencialmente e assim, mesmo problemas com tamanhos moderados podem apresentar um grande número de variáveis tornando-se inviável enumerar todas as colunas para resolver a relaxação linear. Para contornar esse problema, Gilmore e Gomory introduziram a geração de colunas para este problema que evita a enumeração explícita de todas as variáveis.

Valério de Carvalho (1999, 2002) mostrou uma formulação alternativa para o problema de corte de estoque. Trata-se de um problema de fluxo mínimo com restrições adicionais impondo a satisfação da demanda. Esta formulação apresenta uma relaxação linear tão forte quanto a formulação de Gilmore e Gomory.

A seguir esses modelos são apresentados de forma mais detalhada.

3.2 Modelo de Kantorovich (KT)

Para muitos autores, Kantorovich (1939) é considerado o pioneiro na literatura de problemas de corte, já que neste trabalho o autor apresenta modelos matemáticos de programação linear para o planejamento e organização da produção. Mas o modelo (3.1)-(3.4), que para muitos autores é atribuído a Kantorovich, não aparece explicitamente no trabalho. Tal modelo pode representar um problema de designação ou um problema *bin packing* e o objetivo é minimizar o número de objetos cortados.

Modelo KT

$$\text{minimizar } \sum_{k=1}^K y_k \tag{3.1}$$

sujeito a

$$\sum_{k=1}^K h_{ik} = d_i, \quad i = 1, \dots, m \quad (3.2)$$

$$\sum_{i=1}^m w_i h_{ik} \leq W y_k, \quad k = 1, \dots, K \quad (3.3)$$

$$h_{ik} \in \mathbb{Z}+, \quad y_k \in \{0, 1\}, \quad i = 1, \dots, m, k = 1, \dots, K \quad (3.4)$$

onde K é um limitante superior conhecido para o número de objetos necessários, $y_k = 1$ se o objeto k for usado e é igual a 0 caso contrário e, h_{ik} é a quantidade de vezes que o item i é cortado no objeto k . O primeiro conjunto de restrições (3.2) garantem que a quantidade cortada de cada item satisfaça a sua demanda d_i , as restrições (3.3) indicam que, se o objeto k for usado, a combinação dos itens que nele aparecem não deve exceder seu comprimento W e o último conjunto de restrições (3.4) indicam o domínio das variáveis. A função objetivo (3.1) minimiza a quantidade de objetos utilizados.

Quando relaxamos as restrições de integralidade das variáveis, ou seja, quando as substituímos por $h_{ik} \geq 0$ e $0 \leq y_k \leq 1$ para $i = 1, 2, \dots, m$ e $k = 1, 2, \dots, K$, encontramos um limitante inferior para o valor ótimo do problema. Porém, Martello e Toth (1990) mostraram que o limitante inferior resultante da relaxação linear deste modelo pode ser muito fraco. Eles mostraram esse fato para o problema *bin packing*, mas, segundo Valério de Carvalho (1999, 2002), o resultado pode ser facilmente estendido para o problema de corte de estoque. No problema *bin packing*, no qual os itens são considerados separadamente, ou seja, é demandada apenas uma unidade de cada item, o limitante inferior fornecido pela relaxação linear do modelo é igual a $\lceil \sum_{i=1}^m w_i / W \rceil$. Este limitante é igual a menor quantidade de espaço que é necessário para acomodar todos os itens e pode ser muito fraco em algumas instâncias. No pior caso, quando todos os itens tem comprimento $\lfloor W/2 + 1 \rfloor$, a solução ótima do problema é dada pela quantidade de itens demandados, pois em uma caixa, é possível alocar apenas um item. Assim, quando W cresce, a relação entre o limitante inferior e a solução ótima se aproxima de $1/2$.

Esta é uma desvantagem do modelo (3.1)-(3.4), pois quando se usa métodos de solução para problemas lineares para resolver problemas inteiros, os limitantes inferiores devem ser de boa qualidade. Para melhorar esse limitante, formulações mais fortes, isto é, formulações que fornecem melhores limitantes inferiores podem ser usadas.

3.3 Modelo de Gilmore e Gomory (GG)

Será apresentado, nesta seção, o modelo de Gilmore e Gomory (1961, 1963), que teve grande repercussão na literatura em se tratando de problema de corte e é amplamente utilizado até os dias de hoje.

Definição 3.1. *A maneira como um objeto em estoque é cortado para a produção dos itens é chamada de padrão de corte. A um padrão de corte está associado um vetor m -dimensional que contabiliza os itens produzidos:*

$$a = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\}$$

onde α_i é a quantidade de itens do tipo i produzidas no padrão de corte.

Definimos ainda padrão de corte homogêneo ao padrão de corte que produz apenas um tipo de item. Seu vetor associado terá a forma:

$$a = \{0, 0, \dots, \alpha_i, \dots, 0\} \text{ em que } \alpha_i \neq 0$$



Figura 12: Padrões de corte homogêneos.

No primeiro trabalho, Gilmore e Gomory formularam o problema por programação linear inteira, em que as colunas do problema representam os padrões de corte. Assim, a modelagem do problema de corte de estoque é feita em duas etapas:

- Definir todos os padrões de corte possíveis
- Definir quantas vezes cada padrão de corte será usado para atender a demanda.

No caso unidimensional, o vetor associado a um padrão de corte deve satisfazer a restrição física do problema da mochila (Martelo e Toth (1990)). Então definir os padrões de corte significa encontrar todas as possíveis soluções para as inequações apresentadas a seguir:

$$w_1\alpha_1 + w_2\alpha_2 + \dots + w_m\alpha_m \leq W \quad (3.5)$$

$$\alpha_i \in \mathbb{R}+, i = 1, 2, \dots, m \quad (3.6)$$

Sejam $a_1, a_2, \dots, a_n$ os n padrões de corte definidos anteriormente:
 $a_1 = [\alpha_{11}, \alpha_{21}, \dots, \alpha_{m1}]^T$, $a_2 = [\alpha_{12}, \alpha_{22}, \dots, \alpha_{m2}]^T$, $\dots$, $a_n = [\alpha_{1n}, \alpha_{2n}, \dots, \alpha_{mn}]^T$ e x_j a variável que indica o número de vezes que o objeto é cortado utilizando o padrão de corte j .

Dessa forma, podemos formular o problema de corte de estoque, com o objetivo de minimizar o número de objetos a serem cortados, da seguinte forma:

Modelo GG

$$\text{minimizar } \sum_{j=1}^n x_j \quad (3.7)$$

sujeito a

$$\sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_j = d_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (3.8)$$

$$x_j \in \mathbb{Z}+ \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (3.9)$$

A j -ésima coluna, $[\alpha_{1j}, \alpha_{2j}, \dots, \alpha_{mj}]^T$ da matriz de restrições representa o j -ésimo padrão de corte e α_{ij} é o número de itens de comprimento w_i cortados neste padrão.

A função objetivo (3.7) minimiza o número total de objetos cortados. As restrições (3.8) garantem o atendimento da demanda e (3.9) definem o domínio das variáveis de decisão $x_j, j = 1, 2, \dots, n$ que é o número de objetos cortados segundo o padrão j .

O número de possíveis padrões de corte é muito grande e por isso o número de colunas/variáveis cresce exponencialmente, portanto conhecer todas as colunas *à priori* é inviável. Então para resolver a relaxação linear deste modelo, os autores introduziram a técnica de geração de colunas.

Esta técnica se inicia resolvendo um problema mestre restrito (PMR) do problema (3.7)-(3.9), ou seja, o problema obtido ao considerarmos apenas com um subconjunto das colunas. O PMR inicial tem tantas colunas quanto o número de itens e os padrões de corte iniciais são os homogêneos. Então, resolve-se a relaxação linear do PMR atual pelo método simplex. Iterativamente, resolve-se um subproblema (problema do *pricing*), que

maximiza a contribuição da coluna para a redução do valor da função objetivo. Com a solução deste subproblema pode-se verificar se a solução atual é ótima. Em caso negativo, gera uma nova coluna para entrar na base e com isso temos um novo PMR para resolver. A solução obtida é fracionária e fornece um limitante inferior para o ótimo inteiro. Uma solução inteira pode ser encontrado com heurísticas.

No problema de corte de estoque, em que as quantidades demandadas são grandes, a solução da relaxação linear é usualmente usada para obter uma solução heurística de boa qualidade para o problema inteiro. No entanto, se o número de itens de cada comprimento é muito pequeno, como ocorre do problema *bin packing*, a solução ótima fracionária pode não ser útil para obtermos soluções inteiras arredondadas.

3.4 Modelo de Valério de Carvalho (VC)

Nesta seção será apresentado o modelo proposto por Valério de Carvalho (1999, 2002) para o problema de corte de estoque unidimensional baseado no problema de fluxo em arcos.

Dados objetos de comprimento W e m itens de comprimento $w_1, w_2, \dots, w_m$, Valério de Carvalho (1999, 2002) modelou o problema de determinar um padrão de corte válido como um problema de encontrar um caminho em um grafo acíclico e orientado $G = (V, A)$ com $W+1$ vértices, em que a distância de um vértice a outro representa uma unidade de comprimento de objeto. Os arcos são representados pelo conjunto A que é definido como $A = \{(j, l); 0 \leq j < l < W \text{ e } l - j = w_i \text{ para } i = 1, 2, \dots, m\}$, ou seja, existe um arco entre dois vértices j e l se e somente se $l - j = w_i$ para algum $i = 1, 2, \dots, m$.

As partes não ocupadas nos objetos são representadas por arcos adicionais entre os vértices $(j, j+1)$, $j = 0, 1, \dots, W-1$ e representam as perdas de material, desde que não exista item de comprimento igual a 1. O número de variáveis é polinomial em função do comprimento dos objetos e do número de itens e é da ordem de $O(mW)$.

Então determinar um padrão de corte válido pode ser modelado como determinar um caminho entre os vértices 0 e W no grafo $G = (V, A)$. Os arcos que formam um caminho definem um padrão de corte. Dessa forma, um padrão de corte nesta formulação não é definido por apenas uma coluna, como nas formulações anteriores, mas por várias.

Quando se têm restrições de atendimento da demanda, o modelo resultante resolve o problema de corte de estoque e foi apresentando por Valério de Carvalho (1999, 2002). A formulação do problema é a seguinte:

Modelo VC

$$\text{minimizar } f \quad (3.10)$$

sujeito a

$$\sum_{(j,l) \in A} z_{jl} - \sum_{(l,k) \in A} z_{lk} = \begin{cases} -f, & \text{se } l = 0 \\ 0, & \text{se } l = 1, 2, \dots, W-1 \\ f, & \text{se } l = W \end{cases} \quad (3.11)$$

$$\sum_{(k,k+w_i) \in A} z_{k,k+w_i} = d_i, i = 1, 2, \dots, m \quad (3.12)$$

$$z_{jl} \in \mathbb{Z}+, \quad \forall (j, l) \in A \quad (3.13)$$

Trata-se de um problema de minimização de fluxo entre o vértice 0 e o vértice W com restrições adicionais impondo que a soma dos fluxos dos arcos representando cada pedido deve ser maior ou igual a demanda deste pedido. O conjunto de restrições (3.11) correspondem às restrições de conservação de fluxo, já as restrições (3.12) garantem que a demanda seja atendida. A variável z_{jl} , $j < l$ representa o número de itens de comprimento $(l - j)$ que aparecem em z_{jl} padrões de corte e $d_i, i = 1, 2, \dots, m$ é a demanda de cada item. Observe na Figura 13 que um item de comprimento $l - j$ (5-3) é colocado a uma distância de j (3) unidades do início do objeto e z_{35} representa a quantidade de padrões de corte em que isso ocorre. A função objetivo (3.10) minimiza o fluxo que passa pela rede e como uma unidade de fluxo define um caminho que por sua vez define um padrão de corte, o fluxo total que passa pela rede pode ser interpretada como a quantidade de objetos cortados.

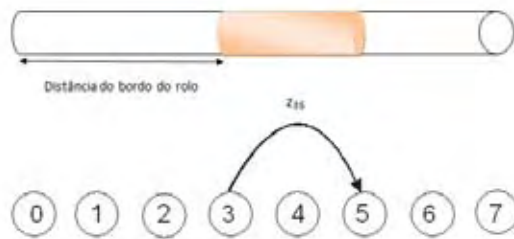


Figura 13: Representação geométrica da variável do problema

Proposição 1. *As relaxações lineares dos modelos de Valério de Carvalho (3.10)-(3.13) e*

de Gilmore e Gomory (3.7)-(3.9) são equivalentes e então os limitantes inferiores fornecidos por ambos são iguais.

A demonstração desta proposição pode ser encontrada em Valério de Carvalho (1999).

Considere o seguinte exemplo retirado de Valério de Carvalho (1996):

Exemplo 3.1. : Considere uma instância com objetos de largura $W=7$ e pedidos de largura $w_1 = 5$, $w_2 = 3$ e $w_3 = 2$ nas quantidades $d_1 = 1$, $d_2 = 3$ e $d_3 = 2$. A matriz de restrições associada ao exemplo e o grafo e padrões de corte são mostrados na Figura 14 e na Tabela 1.

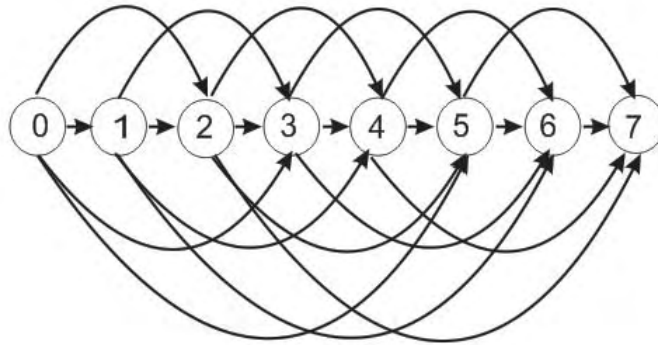


Figura 14: Grafo completo associado ao exemplo

Analisando a Tabela 1, o primeiro conjunto são as restrições de fluxo e nota-se que existe uma restrição para cada vértice do grafo, ou seja, $W + 1$ restrições. Em cada restrição, as entradas são 0, 1 ou -1. Será 1 quando o arco estiver chegando no vértice considerado, por exemplo a variável z_{02} tem coeficiente 1 na restrição referente ao vértice 2. E o coeficiente será -1 quando o arco estiver saindo do vértice considerado, por exemplo, a variável z_{45} tem coeficiente -1 na restrição referente ao vértice 4. Caso contrário, tem-se o coeficiente igual a 0 e, para facilitar a leitura, estes não foram incluídos na matriz de restrições da Tabela 1.

O segundo conjunto de restrições é relativo às restrições de atendimento a demanda. Há uma restrição para cada tipo de item, ou seja, m restrições (então o modelo VC terá no máximo $W + 1 + m$ restrições). Nesse conjunto há apenas coeficientes iguais a 0 ou 1, sendo 1 quando a entrada corresponde ao comprimento de um item demandado.

As primeiras variáveis na matriz de restrições correspondem às variáveis de perda, o segundo conjunto são as variáveis correspondentes aos itens de comprimento 2, o terceiro conjunto corresponde aos itens de comprimento 3 e, finalmente, o último conjunto são as variáveis correspondentes aos itens de comprimento 5.

3.4.1 Modelo de Valério de Carvalho com critérios de redução (VCcr)

O modelo (3.10)-(3.13) apresenta muitas soluções simétricas, ou seja, muitas soluções alternativas que correspondem aos mesmos padrões de corte. Por exemplo, em um objeto de comprimento igual a 7, cortar dois itens de comprimento $w_3 = 2$ e em seguida um de comprimento $w_2 = 3$ é equivalente a cortar um item de comprimento $w_3 = 2$, um de $w_2 = 3$ e por fim outro $w_3 = 2$. Por isso, Valério de Carvalho (1996, 1999, 2002) apresentou alguns critérios que permitem eliminar arcos do grafo sem que nenhum padrão de corte seja eliminado, reduzindo consideravelmente a quantidade de padrões de corte (colunas do problema).

Critério 1: Considere que os itens são ordenados por valor decrescente de comprimento, isto é, se $i_1 < i_2$ então $w_{i_1} > w_{i_2}$. Um arco associado ao item i_2 , designado por $(k, k + w_{i_2})$, apenas pode ter origem em um nó k que seja destino de outro arco associado a um pedido i_1 , $(k - w_{i_1}, k)$, ou a partir do vértice 0, ou seja, do início do objeto.

O critério 1 coloca os itens no padrão de corte de maneira ordenada por valor decrescente de comprimento. No objeto de comprimento 7 citado anteriormente, os itens de

comprimento $w_2 = 3$ e $w_3 = 2$ seriam colocados no padrão de corte da seguinte maneira: $w_2 = 3, w_3 = 2, w_3 = 2$. Com esse critério muitas soluções simétricas são eliminadas.

Critério 2: Todos os arcos de perda $j, j + 1$ devem ter valores nulos para $j < w_m$, onde w_m é o comprimento de menor item demandado.

O critério 2 impede que um padrão de corte seja iniciado com perdas.

Critério 3 Sejam i_1 e i_2 quaisquer dois itens de comprimentos tais que $w_{i_1} > w_{i_2}$. Dado qualquer nó k que é o destino de um arco de tamanho w_{i_1} ou $k = 0$, os únicos arcos válidos de tamanho w_{i_2} são aqueles que começam nos nós $k + sw_{i_2}, s = 0, 1, \dots, d_{i_2} - 1$ e $k + sw_{i_2} \leq W$, onde d_{i_2} é a demanda dos itens de comprimento w_{i_2} .

Pode não ser possível que o Critério 3 evite a produção em excesso dos itens demandados, porém ele diminui essa produção excedente. Por exemplo, considere o grafo apresentado na Figura 15, o caminho $\{(0,2), (2,3), (3,5), (5,7)\}$ tem três itens de comprimento 2. Esse critério é importante quando se tem que as restrições de atendimento a demanda (3.12) são de desigualdade ($\geq$).

Os critérios de redução apresentados anteriormente são úteis para eliminar alguns arcos do grafo sem que nenhum padrão de corte válido seja perdido. Porém, mesmo após os critérios serem aplicados, podem haver alguns padrões que não satisfazem os critérios.

Como dito na Proposição 1, os limitantes inferiores obtidos pela relaxação linear dos modelos VC e GG são iguais. Seja L_{VC} e L_{GG} esses limitantes e $L_{VC'}$ o limitante inferior do modelo de Valério de Carvalho após aplicar os critérios acima. Então, vale a seguinte relação:

$$L_{GG} = L_{VC} \leq L_{VC'} \quad (3.14)$$

Exemplo 3.2. Considere a instância apresentada no exemplo 3.1. Após aplicar os critérios de redução a matriz de restrições (Tabela 2) e o grafo associado ao exemplo (Figura 15) serão:

Tabela 2: Matriz de restrições após aplicar os critérios de redução

	f	z_{23}	z_{34}	z_{45}	z_{56}	z_{67}	z_{02}	z_{24}	z_{35}	z_{57}	z_{03}	z_{36}	z_{05}	
vértice 0	1						-1				-1		-1	= 0
vértice 1														= 0
vértice 2		-1					1	-1						= 0
vértice 3		1	-1						-1		1	-1		= 0
vértice 4			1	-1				1						= 0
vértice 5				1	-1				1	-1			1	= 0
vértice 6					1	-1						1		= 0
vértice 7	-1					1				1				= 0
item 1													1	≥ 1
item 2											1	1		≥ 3
item 3							1	1	1	1				≥ 2

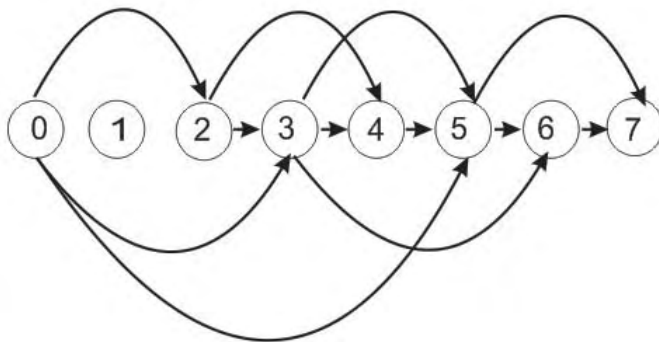


Figura 15: Grafo do problema após aplicar os critérios de redução

Observe, por exemplo, que o arco z_{46} não pertence ao conjunto de arcos porque foi eliminado pelo critério 3, já que são requeridas apenas 2 itens de comprimento 2. Os pedidos deste item devem aparecer após os itens de comprimento 3 ou 5, ou colocados no início do objeto (Critério 1). Isso permitiu eliminar, por exemplo, o arco z_{13} . Além disso, os arcos de perda z_{01} e z_{12} foram eliminados pelo critério 2.

Observe que somente estes critérios podem não evitar completamente a simetria no conjunto de soluções. Na Figura 15, existem os caminhos $\{(0,3), (3,5), (5,6), (6,7)\}$ e $\{(0,2), (2,3), (3,6), (6,7)\}$ que correspondem exatamente ao mesmo padrão de corte.

Se considerarmos a solução da relaxação linear do modelo, novas formas de melhorar o modelo podem ser implementadas, como veremos na seção seguinte.

3.4.2 Modelo de Valério de Carvalho com geração de colunas (VCG)

Podemos resolver a relaxação linear do modelo VC adicionando, inicialmente todas as colunas ao problema, ou seja, todos os arcos $A = \{(j, l); 0 \leq j < l < W \text{ e } l - j = w_i \text{ para } i \leq m\}$. No entanto, o conjunto A é, na maioria das vezes, muito grande e resolver o problema com todas as colunas pode se tornar inviável. Um método de solução alternativo é a técnica de Geração de Colunas em que inicia-se apenas com os padrões homogêneos, isto é, aqueles caminhos formados por arcos de tamanhos iguais e, a cada iteração um sub-problema é resolvido e, um conjunto de arcos (colunas) é introduzido no problema mestre.

Proposição 2. *Seja $u_j, j = 0, 1, \dots, W$ as variáveis duais associadas às restrições de conservação de fluxo (3.11) e $v_k, k = 1, 2, \dots, m$ as variáveis duais associadas às restrições de satisfação de demanda (3.12). Então uma coluna é atrativa se:*

$$-(-u_j + u_l + v_k) \leq 0$$

De fato;

Seja B a base corrente do problema primal restrito, $\pi = (u, v) = c_B B^{-1}$ sua solução dual e A_{jl} a coluna correspondente a variável z_{jl} . Sabemos, pelo método simplex, que a coluna A_{jl} é atrativa se o seu custo reduzido $\widehat{c}_{jl} = c_{jl} - \pi A_{jl}$ for negativo, onde c_{jl} é o custo da variável z_{jl} na função objetivo. Como nesta formulação todos os custos c_{jl} são nulos, temos $\widehat{c}_{jl} = -\pi A_{jl} = -(u, v)A_{jl}$.

Cada coluna possui apenas três elementos diferentes de zero. Tem-se -1 na posição j , +1 na posição l e +1 na posição k , onde k é tal que $w_k = l - j$. Logo;

$$\widehat{c}_{jl} = -(u, v) \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ -1 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = -(-u_j + u_l + v_k)$$

Logo, a variável será atrativa se $-(-u_j + u_l + v_k) \leq 0$

Como já foi visto, um padrão de corte é um caminho no grafo. Para determinar o caminho mais atrativo, resolve-se um subproblema (3.15)-(3.17), que tem a propriedade de integralidade:

$$\text{minimizar} \quad \sum_{(j,l) \in A} \widehat{c}_{jl} z_{jl} \quad (3.15)$$

sujeito a

$$\sum_{(j,l) \in A} z_{jl} - \sum_{(l,k) \in A} z_{lk} = \begin{cases} -1, & \text{se } l = 0 \\ 0, & \text{se } l = 1, 2, \dots, W-1 \\ 1, & \text{se } l = W \end{cases} \quad (3.16)$$

$$z_{jl} \in \mathbb{Z}+, \quad \forall (j, l) \in A \quad (3.17)$$

Se o valor ótimo do subproblema for estritamente menor que 0, então existe um caminho atrativo, isto é, um novo padrão de corte será adicionado ao problema mestre. Se, por outro lado, o valor ótimo do subproblema for positivo, a solução do problema mestre é ótima.

Os arcos (colunas) correspondentes às variáveis que já fazem parte do problema mestre também são considerados no subproblema, pois tais arcos podem fazer parte de um caminho que ainda não pertence ao problema principal.

A cada iteração, se o arco (j, l) é parte de um caminho atrativo, o algoritmo checa se as restrições de conservação de fluxo para os nós j e l já pertencem ao problema mestre. Se não pertencer, essas restrições são adicionadas ao problema. É verificado também quais arcos já foram considerados no problema, e os que não estiverem no modelo são adicionados. Dessa forma, o modelo cresce em duas direções, no número de restrições e de colunas.

A relaxação linear, em geral, fornece uma boa aproximação para o problema inteiro. Porém, alguma técnica de arredondamento deve ser utilizada para obter uma solução inteira para o problema original. Métodos heurísticos para a obtenção de soluções inteiras podem ser encontrados em Stadtler (1990), Wäscher e Gau (1996), Poldi e Arenales (2009), entre outros.

A seguir apresentaremos algumas formas de fortalecer o modelo usando o valor da relaxação linear.

Seja z_{LP} o valor ótimo da relaxação linear do modelo (3.10)-(3.13) e $\lceil z_{LP} \rceil$ o valor

de z_{LP} arredondado para cima. O espaço não ocupado por itens deve ser ocupado por perdas. E o menor valor da perda total é dado a seguir:

Definição 3.2. O valor de perda mínima é $T_{min} = \lceil z_{LP} \rceil W - \sum_{i=1}^m w_i d_i$

O valor da perda mínima está bem definido, pois subtraímos do comprimento total dos objetos utilizados, o comprimento total dos itens cortados. Se o exemplo possuir a propriedade de arredondamento para cima, a perda total será exatamente igual a T_{min} .

Com essa definição, podemos introduzir um limitante inferior para o valor da perda mínima que força o número de arcos de perda a ser, pelo menos, em quantidade igual a perda mínima T_{min} , e é dado pela seguinte proposição:

Proposição 3. A restrição $\sum_{(k,k+1) \in A} z_{k,k+1} \geq T_{min}$ é uma inequação válida para o problema inteiro.

A proposição seguinte é relevante apenas se o exemplo tiver a propriedade de arredondamento para cima e pode ser aplicada após a resolução da relaxação linear.

Proposição 4. Se a instância tem a propriedade de arredondamento para cima e a perda satisfaz $T < W - w_m$, todos os arcos de perda $z_{k,k+1}, k = w_m, \dots, W - T_{min} - 1$ podem ser fixados em zero.

Depois de resolver a relaxação linear do problema, pode ser possível eliminar todos os arcos que não fazem parte do caminho entre os vértices 0 e W . O seguinte critério pode ser particularmente importante quando a quantidade de perda é muito pequena.

Critério 4: Considere a solução da relaxação linear de um exemplo que possui a propriedade de arredondamento para cima e o conjunto de arcos que restam depois de aplicar a proposição anterior. Seja z_{jl} um arco deste conjunto. Se o vértice l não é origem de nenhum arco com fluxo positivo (arcos de perda ou de item) o arco z_{jl} pode ser fixado em 0.

Voltando ao exemplo 3.1, a solução da sua relaxação linear produz um valor ótimo $z_{LP} = 2.75$. Com isso, podemos calcular o valor da perda mínima:

$$T_{min} = \lceil z_{LP} \rceil W - \sum_{i=1}^m w_i d_i \Rightarrow T_{min} = 3 \times 7 - (5 \times 1 + 3 \times 3 + 2 \times 2) \Rightarrow T_{min} = 3$$

Como esse exemplo satisfaz a propriedade de arredondamento para cima e $T_{min} < W - w_m$, podemos fixar as variáveis z_{23} e z_{34} em 0 (Proposição 4) e inserir a inequação $z_{45} + z_{56} + z_{67} \geq 3$, que de acordo com a proposição 3 é uma inequação válida para o problema.

Diferente da maioria dos problemas de programação inteira em que não é fácil estabelecer um limitante superior para a diferença entre os valores ótimos do problema inteiro e da sua relaxação linear (*gap*), as instâncias do problema de corte unidimensional, em geral, possui um *gap* inferior a uma unidade. Então, o valor ótimo do problema inteiro é igual ao arredondamento para cima do valor ótimo da sua relaxação linear. Assim, a perda será exatamente igual a T_{min} , pois o valor ótimo inteiro é $\lceil z_{LP} \rceil$. Porém, se a instância não possuir a propriedade de arredondamento para cima, o valor de da perda será:

Proposição 5. *Em qualquer solução inteira, a perda será $T = T_{min} + nW$, onde n é um número inteiro não negativo.*

Capítulo 4

Problemas integrados de dimensionamento de lotes e corte de estoque

De acordo com Gramani e França (2006), alguns processos de produção consistem em três estágios. O primeiro recebe-se os pedidos demandados, analisa-se a quantidade de cada tipo de produto final e a data de entrega. O segundo estágio converte esta demanda de produtos finais em demanda de itens que compõem os produtos finais. E, no terceiro estágio, resolve-se o problema de dimensionamento de lotes combinado ao corte de estoque, isto é, decide quanto produzir de cada item em cada período do horizonte de planejamento, minimizando os custos associados com estoque de itens, preparação de máquinas e desperdício de matéria prima. Neste trabalho, realizaremos o estudo do terceiro estágio, isto é, não será considerado a composição dos itens em produtos finais (Poldi e Arenales (2010), Gramani e França (2006), Poltronieri *et al* (2007)). Além disso, consideraremos o caso unidimensional.

Quando os objetos são cortados em pedaços menores, existe, frequentemente, perda de material. Porém, se a demanda dos itens cresce, este desperdício pode se tornar menor, diminuindo os custos finais do processo de produção. Logo, para diminuir os custos de produção e o desperdício de material, pode-se buscar antecipar a produção de alguns itens, que precisam ser estocados para entrega posterior, o que gera custo de estocagem. Existe também, custos de preparação de máquinas a cada período em que houver produção. Por isso, uma dúvida sobre adiantar ou não a produção de alguns itens se faz presente. Essa questão nos leva a combinar os problemas de dimensionamento de lotes e corte de estoque.

Há alguns anos, os problemas de dimensionamento de lotes e corte de estoque estão sendo cada vez mais tratados de maneira integrada, visto que o crescimento da com-

petitividade mundial leva a necessidade das empresas tornarem seus procedimentos mais eficientes.

Farley (1988) foi possivelmente o primeiro trabalho que integra o problema de corte de estoque ao problema de dimensionamento de lotes. O autor aplicou o trabalho em uma indústria de roupas, em que o problema envolve cortes bidimensionais irregulares. Os padrões de corte foram definidos como retângulos com comprimento igual a largura do rolo de tecido e diversas larguras. Tais retângulos foram utilizados para cortar os itens finais.

Hendry *et al* (1996) realizaram um estudo de caso em uma fábrica de componentes de cobre. A produção consiste em derreter pedaços de cobre em uma fornalha produzindo barras de diâmetros específicos que são cortadas a fim de produzir os itens finais. O objetivo do trabalho foi investigar métodos alternativos de geração de planos de produção para a fundição a fim de minimizar os custos e atender a demanda. Os autores propuseram um procedimento de solução de duas fases. Na primeira fase são investigados métodos heurísticos alternativos e uma solução ótima utilizando programação inteira foi proposta para a segunda fase.

Nonas e Thorstenson (2000) estudaram o problema combinado de corte de estoque e dimensionamento de lotes com custo de setup, em uma companhia norueguesa que produz um tipo especial de caminhões *off-road*. A empresa precisa de um planejamento da produção que minimize os custos totais no processo de corte e linha de produção. Os autores apresentaram um modelo matemático e propuseram diferentes métodos de solução.

Gramani e França (2006) formularam um modelo matemático para o problema de dimensionamento de lotes acoplado ao problema de corte de estoque. O objetivo do modelo é minimizar a perda e os custos de estocagem e *setup*. Neste trabalho, os autores também propuseram um método de solução baseado em uma analogia com o problema do caminho mínimo em uma rede. Resultados computacionais comparando o método proposto ao método utilizado em indústrias são apresentados.

Poltronieri *et al* (2007) estudaram o problema integrado de dimensionamento de lotes e corte de estoque inserido em uma indústria de papel. Os autores analisam o processo de produção, propuseram um modelo matemático para máquinas que operam em paralelo e apresentaram dois métodos heurísticos baseados na relaxação lagrangiana. Um resolve inicialmente o problema de dimensionamento de lotes e em seguida o problema de corte de estoque, e o outro inicia-se com a resolução do problema de corte de estoque. Testes computacionais foram realizados e mostram que a segunda heurística é mais eficiente que a primeira.

Gramani *et al* (2009) apresentaram um modelo de dimensionamento de lotes integrado ao corte de estoque que incorpora a conjectura que é mais vantajoso antecipar a produção de determinados lotes de produtos finais. É proposto um método heurístico baseado no método de relaxação Lagrangiana com o método do subgradiente para atualizar os vetores multiplicadores de Lagrange. O método foi testado computacionalmente com dados gerados de maneira aleatória e comparado com a decomposição heurística, isto é, a prática industrial de tratar os problemas de dimensionamento de lotes e corte de estoque de forma separada.

Ghidini e Arenales (2009) tratam os problemas de dimensionamento de lotes e corte de estoque de maneira acoplada em uma indústria de móveis. Para resolver o problema, que considera composição final dos produtos, os autores propõem duas heurísticas baseadas no método primal simplex com geração de colunas. Uma das heurísticas resolve o modelo acoplado e a outra, a heurística de decomposição, separa o modelo acoplado em dois modelos menores e os resolvem por um procedimento 2-estágios. No trabalho, é proposto também procedimentos para que uma solução inteira seja obtida.

Poldi e Arenales (2010) estudam o problema de corte de estoque unidimensional multiperíodo. Os autores resolvem a relaxação linear do modelo proposto através do método simplex com geração de colunas e duas abordagens para o arredondamento são propostas e testadas. As técnicas desenvolvidas são de horizonte rolante, isto é, uma solução inteira é obtida para o primeiro período e para os demais períodos a solução continua fracionária. Na próxima etapa, após o primeiro período ter sido resolvido, novos pedidos podem ser incluídos ou pedidos podem ser cancelados. Então, a carteira de pedidos é atualizada e um novo problema de corte multiperíodo é resolvido.

Santos *et al* (2011) apresentaram um modelo de otimização inteira mista para o problema de dimensionamento de lotes integrado ao problema de corte de estoque no contexto de uma fábrica de móveis. Os autores usaram os padrões de corte usados pela indústria e padrões de corte n-grupos para resolver o problema com um conjunto de dados reais fornecidos pela fábrica.

Gramani *et al* (2011) também estudaram um método de otimização linear para a relaxação linear do problema acoplado de dimensionamento de lotes e corte de estoque no contexto de uma fábrica de móveis. Os autores propuseram um modelo para o problema integrado e decompuseram este modelo em dois, um para o problema de dimensionamento de lotes e outro para o problema de corte de estoque a fim de retratar o método de solução que as indústrias praticam. O problema integrado foi resolvido usando a técnica de geração de colunas e resultados computacionais, inclusive comparando a técnica de geração

de colunas e a técnica da decomposição, foram apresentados. É mostrado que a técnica de geração de colunas é capaz de obter ganhos acima de 12,7% quando comparado com o modelo de decomposição, usado na prática.

Alem e Morabito (2012) utilizaram ferramentas de otimização robusta para resolver o problema de dimensionamento de lotes integrado ao corte de estoque quando os custos de produção e produtos demandados são parâmetros incertos. Testes computacionais foram realizados utilizando dados reais e simulados.

Vanzela *et al* (2012) trataram o problema integrado de dimensionamento de lotes e corte de estoque também no contexto de uma fábrica moveleira de pequeno porte, baseado no modelo proposto em Gramani *et al* (2011). No trabalho foi simulado parcialmente a prática da fábrica em questão e proposto um modelo integrando os dois problemas, que se mostrou mais vantajoso.

Leão e Arenales (2012) estudaram uma simplificação do modelo estudado em Poltronieri *et al* (2007). Duas abordagens são estudadas, sendo que, na primeira um único tipo de objeto é considerado e na segunda, vários tipos de objetos diferentes são considerados. Foram propostos três modelos para cada abordagem: a formulação compacta, baseada no modelo de Kantorovich, a formulação estendida, baseada na formulação proposta por Gilmore e Gomory e a formulação estendida combinada com a decomposição de Dantzig-Wolfe. Os autores resolvem as duas últimas formulações por métodos de geração de colunas, e ao final do método, as variáveis foram redefinidas como inteiras para determinar uma solução factível.

4.1 Modelos matemáticos integrados

Nesta seção, apresentaremos modelos para o problema integrado de dimensionamento de lotes e corte de estoque que são resolvidos com todos os padrões de corte inseridos no modelo *à priori*. Estes modelos envolvem os modelos clássico (CL) e baseado no problema de caminho mínimo (SP) para o problema de dimensionamento de lotes e de Kantorovich (KT) e Valério de Carvalho (sem geração de colunas) (VC) para o problema de corte de estoque unidimensional.

Também serão apresentados os modelos CLGG e SPGG que são resolvidos com a técnica de geração de colunas. Além destes modelos, os modelos integrados envolvendo a relaxação linear do modelo de Valério de Carvalho (CLVCG e SPVCG), que não serão apresentados nesta seção, pois, são muito parecidos com os modelos CLVC e SPVC, tam-

bém foram resolvidos pelo método simplex com geração de colunas.

4.1.1 Modelo clássico de dimensionamento de lotes integrado ao modelo de Kantorovich (CLKT)

O primeiro modelo integrado utiliza o modelo de Kantorovich e o modelo clássico de dimensionamento de lotes, apresentados nas seções 3.2 e 2.1, respectivamente. O modelo KT minimiza a quantidade de objetos utilizados em um único período e os custos de preparação e estocagem não são levados em consideração. Já no modelo CL, a função objetivo minimiza os custos de preparação de máquina e estoque, porém o número de objetos não é considerado.

O modelo apresentado a seguir integra os dois modelos citados de modo que o problema de corte seja resolvido em todos os períodos.

Além das variáveis, parâmetros e índices já considerados, defina a variável binária y_{kt} que indica se o objeto k é utilizado no período t e a variável h_{ikt} que indica a quantidade do item i cortada no objeto k no período t e o parâmetro co que é o custo fixo associado ao corte do objeto.

Dessa forma, o modelo integrado é apresentado a seguir:

Modelo CLKT

$$\text{minimizar } \sum_{i=1}^m \sum_{t=1}^T hc_{it}S_{it} + \sum_{i=1}^m \sum_{t=1}^T sc_{it}Y_{it} + \sum_{k=1}^K \sum_{t=1}^T coy_{kt} \quad (4.1)$$

sujeito a

$$X_{i1} - S_{i1} = d_{i1} \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (4.2)$$

$$S_{i,t-1} + X_{it} - S_{it} = d_{it} \quad i = 1, 2, \dots, m \text{ e } t = 2, 3, \dots, T \quad (4.3)$$

$$X_{it} - sd_{it}Y_{it} \leq 0 \quad i = 1, 2, \dots, m \text{ e } t = 1, 2, \dots, T \quad (4.4)$$

$$\sum_{i=1}^m w_i h_{ikt} \leq W y_{kt} \quad k = 1, 2, \dots, K \text{ e } t = 1, 2, \dots, T \quad (4.5)$$

$$\sum_{k=1}^K h_{ikt} = X_{it} \quad i = 1, 2, \dots, m \text{ e } t = 1, 2, \dots, T \quad (4.6)$$

$$h_{ikt} \in \mathbb{Z}+ \quad i = 1, 2, \dots, m \text{ e } t = 1, 2, \dots, T \text{ e } k = 1, 2, \dots, K \quad (4.7)$$

$$X_{it}, S_{it} \in \mathbb{R}+ \quad i = 1, 2, \dots, m \text{ e } t = 1, 2, \dots, T \quad (4.8)$$

$$Y_{it}, y_{kt} \in \{0, 1\} \quad i = 1, 2, \dots, m \text{ e } t = 1, 2, \dots, T \text{ e } k = 1, 2, \dots, K \quad (4.9)$$

Esse modelo consiste então, em determinar o tamanho dos lotes para cada período de planejamento e a quantidade de objetos de modo a minimizar a soma dos custos de preparação e estocagem e o corte de objetos.

A função objetivo minimiza os custos de preparação de máquinas e estocagem e a quantidade de objetos utilizados. As restrições (4.2), (4.3) e (4.4) provém do problema de dimensionamento de lotes e os dois primeiros conjuntos garantem que a demanda é satisfeita e as restrições (4.4) asseguram que os custos de preparação são considerados quando existe produção. O conjunto de restrições (4.5) vêm do problema de corte de estoque e garante que se o objeto k for usado, a combinação dos itens que nele são cortadas não deve exceder seu comprimento W . As restrições (4.6) são as responsáveis pelo acoplamento da decisão de dimensionamento de lotes com o corte de estoque, pois ela relaciona a variável de produção com a variável de corte. Observe que as restrições (4.6) podem ser substituídas em (4.2, 4.3 e 4.4) e assim, a quantidade de restrições do modelo apresentado seria menor.

Assim como no modelo de corte de Kantorovich, é necessário fornecermos um limitante superior para a quantidade de objetos utilizados. Se o valor de K for muito grande, o número de variáveis e restrições também será grande, mas se for muito pequeno o problema pode se tornar infactível. Por isso a determinação do valor de K é de grande importância nesse modelo. Na prática, pode-se fazer uma estimativa do valor de K considerando a solução com os padrões de corte homegêneos.

4.1.2 Modelo clássico de dimensionamento de lotes integrado ao modelo de Valério de Carvalho (CLVC)

O modelo apresentado a seguir integra o modelo de Valério de Carvalho ao modelo clássico para o problema de dimensionamento de lotes. Além dos parâmetros, variáveis e índices já citadas (seção 3.1), considere as novas variáveis para o modelo CLVC.

- f_t fluxo na rede no período t .
- z_{jlt} quantidade de itens de comprimento $l - j$ colocados em z_{jl} padrões de corte

no período t .

Modelo CLVC

$$\text{minimizar } \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^m hc_{it} S_{it} + \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^m sc_{it} Y_{it} + \sum_{t=1}^T cof_t \quad (4.10)$$

sujeito a

$$X_{i1} - S_{i1} = d_{i1}, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (4.11)$$

$$S_{i,t-1} + X_{it} - S_{it} = d_{it} \quad i = 1, 2, \dots, m \text{ e } t = 2, 3, \dots, T \quad (4.12)$$

$$X_{it} - sd_{i,t,T} Y_{it} \leq 0 \quad i = 1, 2, \dots, m \text{ e } t = 1, 2, \dots, T \quad (4.13)$$

$$- \sum_{(0,l) \in A} z_{0lt} = -f_t \quad t = 1, 2, \dots, T \quad (4.14)$$

$$\sum_{(j,l) \in A} z_{jlt} - \sum_{(l,k) \in A} z_{lkt} = 0 \quad l = 1, 2, \dots, W-1 \text{ e } t = 1, 2, \dots, T \quad (4.15)$$

$$\sum_{(j,W) \in A} z_{jWt} = f_t \quad t = 1, 2, \dots, T \quad (4.16)$$

$$\sum_{(h,h+w_i) \in A} z_{h,h+w_i,t} = X_{it} \quad i = 1, 2, \dots, m \text{ e } t = 1, 2, \dots, T \quad (4.17)$$

$$z_{jlt}, f_t \in \mathbb{Z}^+ \quad (j, l) \in A \text{ e } t = 1, 2, \dots, T \quad (4.18)$$

$$X_{it}, S_{it} \in \mathbb{R}^+ \quad t = 1, 2, \dots, T \text{ e } i = 1, 2, \dots, m \quad (4.19)$$

$$Y_{it} \in \{0, 1\} \quad i = 1, 2, \dots, m \text{ e } t = 1, 2, \dots, T \quad (4.20)$$

Como mencionado, a função objetivo (4.10) minimiza o somatório dos custos de produção e o fluxo da rede, que pode ser entendido como a quantidade de objetos utilizados. As restrições (4.11), (4.12) e (4.13) provêm do problema de dimensionamento de lotes e são como anteriormente e (4.14), (4.15) e (4.16) são as restrições de conservação de fluxo. As restrições responsáveis por integrar os dois problemas são dadas por (4.17). Por último, as restrições (4.18), (4.19) (4.20) referem-se ao domínio das variáveis.

Novamente, as restrições (4.17) podem ser usadas para substituir o valor de X_{it} nas restrições anteriores.

4.1.3 Modelo clássico de dimensionamento de lotes integrado ao modelo de Gilmore e Gomory (CLGG)

Apresentaremos a seguir a formulação clássica do problema de dimensionamento de lotes integrada, agora, ao modelo de Gilmore e Gomory para o problema de corte de estoque

Além das variáveis, parâmetros e índices definidos anteriormente, considere a variável x_{jt} que é a quantidade de objetos cortados segundo o padrão de corte j no período t e o parâmetro cg_{jt} que indica o custo de cortar um objeto utilizando o padrão de corte j no período t . O modelo integrado é dado a seguir:

Modelo CLGG

$$\text{minimizar } \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^m hc_{it} S_{it} + \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^m sc_{it} Y_{it} + \sum_{t=1}^T \sum_{j=1}^n cox_{jt} \quad (4.21)$$

sujeito a

$$X_{i1} - S_{i1} = d_{i1} \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (4.22)$$

$$S_{i,t-1} + X_{it} - S_{it} = d_{it} \quad i = 1, 2, \dots, m \text{ e } t = 2, 3, \dots, T \quad (4.23)$$

$$X_{it} - sd_{i,t,T} Y_{it} \leq 0 \quad i = 1, 2, \dots, m \text{ e } t = 1, 2, \dots, T \quad (4.24)$$

$$\sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_{jt} = X_{it}, \quad i = 1, 2, \dots, m \text{ e } t = 1, 2, \dots, T \quad (4.25)$$

$$x_{jt} \in \mathbb{Z}^+ \quad j = 1, 2, \dots, n \text{ e } t = 1, 2, \dots, T \quad (4.26)$$

$$X_{it}, S_{it} \in \mathbb{R}^+ \quad i = 1, 2, \dots, m \text{ e } t = 1, 2, \dots, T \quad (4.27)$$

$$Y_{it} \in \{0, 1\} \quad i = 1, 2, \dots, m \text{ e } t = 1, 2, \dots, T \quad (4.28)$$

A função objetivo (4.21) minimiza o somatório dos custos de preparação e estocagem e a quantidade de objetos utilizados para o processo de corte. Os conjuntos de restrições (4.22) e (4.23) são de balanceamento de estoque. As restrições (4.24) asseguram que o custo de preparação é considerado quando existe produção. As restrições de integração são as (4.25) que relacionam as variáveis de corte com a variável de produção.

As restrições (4.25) podem ser substituídas em (4.22), (4.23) e (4.24). Este modelo, assim como GG, não necessita de um limitante superior para a quantidade de objetos a serem utilizados.

4.1.4 Modelo reformulado de dimensionamento de lotes integrado ao modelo de Kantorovich (SPKT)

A reformulação do modelo de dimensionamento de lotes proposta por Eppen e Martin (1987) também foi integrada aos modelos de corte de estoque e tais modelos são apresentados a seguir:

Modelo SPKT

$$\text{minimizar } \sum_{i=1}^m \sum_{t=1}^T sc_{it} Y_{it} + \sum_{i=1}^m \sum_{t=1}^T \sum_{r=t}^T cv_{itr} zv_{itr} + \sum_{k=1}^K \sum_{t=1}^T coy_{kt} \quad (4.29)$$

sujeito a

$$\sum_{r=1}^T zv_{i1r} = 1 \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (4.30)$$

$$\sum_{r=1}^{t-1} zv_{irt-1} = \sum_{r=t}^T zv_{itr} \quad i = 1, 2, \dots, m \quad e \quad t = 2, 3, \dots, T \quad (4.31)$$

$$\sum_{r=t}^T zv_{itr} \leq Y_{it} \quad i = 1, 2, \dots, m \quad e \quad t = 1, 2, \dots, T \quad (4.32)$$

$$\sum_{i=1}^m w_i h_{ikt} \leq W y_{kt} \quad k = 1, 2, \dots, K \quad e \quad t = 1, 2, \dots, T \quad (4.33)$$

$$\sum_{k=1}^K h_{ikt} = \sum_{r=t}^T sd_{itr} zv_{itr} \quad i = 1, 2, \dots, m \quad e \quad t = 1, 2, \dots, T \quad (4.34)$$

$$zv_{itr} \in \mathbb{R}_+ \quad i = 1, 2, \dots, m \quad e \quad t, r = 1, 2, \dots, T : r \geq t \quad (4.35)$$

$$h_{ikt} \in \mathbb{Z}_+ \quad i = 1, 2, \dots, m \quad e \quad t = 1, 2, \dots, T \quad e \quad k = 1, 2, \dots, K \quad (4.36)$$

$$Y_{it}, y_{kt} \in \{0, 1\} \quad i = 1, 2, \dots, m \quad e \quad t = 1, 2, \dots, T \quad e \quad k = 1, 2, \dots, K \quad (4.37)$$

A função objetivo (4.29) minimiza a soma dos custo de preparação de máquina e de estoque além da quantidade de objetos necessários para atender a demanda. As restrições (4.30) e (4.31) definem as restrições de fluxo. Para cada item, uma unidade de fluxo é enviada pela rede e é imposto que a demanda total de cada item deve ser satisfeita. As restrições (4.32) definem se existe ou não produção no período t . Já as restrições (4.33), asseguram que, se o objeto k é utilizado, a soma dos itens cortados dele não ultrapassa seu comprimento. As restrições de integração são dadas pelas restrições (4.34). E por último, as restrições (4.35), (4.36) e (4.37) fornecem o domínio das variáveis.

4.1.5 Modelo reformulado de dimensionamento de lotes integrado ao modelo de Valério de Carvalho (SPVC)

Da mesma maneira que o modelo anterior este integra o modelo reformulado para o problema de dimensionamento de lotes ao modelo de Valério de Carvalho.

Modelo SPVC

$$\text{minimizar} \sum_{i=1}^m \sum_{t=1}^T sc_{it} Y_{it} + \sum_{i=1}^m \sum_{t=1}^T \sum_{r=t}^T cv_{itr} z_{vitr} + \sum_{t=1}^T cof_t \quad (4.38)$$

sujeito a

$$\sum_{r=1}^T z_{v_{ir}r} = 1 \quad i = 1, \dots, m \quad (4.39)$$

$$\sum_{r=1}^{t-1} z_{v_{ir}r} = \sum_{r=t}^T z_{v_{ir}r} \quad i = 1, \dots, m \quad e \quad t = 2, \dots, T-1 \quad (4.40)$$

$$\sum_{r=t}^T z_{v_{ir}r} \leq Y_{it} \quad i = 1, \dots, m \quad e \quad t = 1, \dots, T \quad (4.41)$$

$$-\sum_{(0,l) \in A} z_{0lt} = -f_t \quad t = 1, \dots, T \quad (4.42)$$

$$\sum_{(j,l) \in A} z_{jlt} - \sum_{(l,k) \in A} z_{lkt} = 0 \quad l = 1, \dots, W-1 \quad e \quad t = 1, \dots, T \quad (4.43)$$

$$\sum_{(j,W) \in A} z_{jWt} = f_t \quad t = 1, \dots, T \quad (4.44)$$

$$\sum_{(h,h+w_i) \in A} z_{h,h+w_i,t} = \sum_{r=t}^T z_{v_{ir}r} sd_{itr} \quad i = 1, \dots, m \quad e \quad t = 1, \dots, T \quad (4.45)$$

$$z_{jlt}, f_t \in \mathbb{Z}^+ \quad (j,l) \in A \quad e \quad t = 1, \dots, T \quad (4.46)$$

$$z_{v_{ir}r} \in \mathbb{R}^+ \quad i = 1, \dots, m \quad e \quad t, r = 1, \dots, T : r \geq t \quad (4.47)$$

$$Y_{it} \in \{0, 1\} \quad i = 1, \dots, m \quad e \quad t = 1, \dots, T \quad (4.48)$$

A função objetivo (4.38) minimiza a soma dos custos assim como o fluxo que passa pela rede. As restrições (4.39) e (4.40) definem as restrições de fluxo do modelo SP. O conjunto de restrições (4.41) definem se existe ou não produção no período t . As restrições (4.42), (4.43) e (4.44) são de conservação de fluxo característica do modelo de Valério de

Carvalho. O conjunto de restrições (4.45) integra os dois problemas e garante que a demanda de todos os períodos seja atendida. Por último, as restrições (4.46), (4.47) e (4.48) são os domínios das variáveis.

4.1.6 Modelo reformulado de dimensionamento de lotes integrado ao modelo de Gilmore e Gomory (SPGG)

Assim como os modelos anteriores, este integra o modelo SP para dimensionamento de lotes, porém agora, com o modelo de Gilmore e Gomory para o problema de corte de estoque.

Modelo SPGG

$$\text{minimizar} \sum_{i=1}^m \sum_{t=1}^T sc_{it} Y_{it} + \sum_{i=1}^m \sum_{t=1}^T \sum_{r=t}^T cv_{itr} zv_{itr} + \sum_{j=1}^n \sum_{t=1}^T cox_{jt} \quad (4.49)$$

sujeito a

$$\sum_{r=1}^T zv_{i1r} = 1 \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (4.50)$$

$$\sum_{r=1}^{t-1} zv_{irt-1} = \sum_{r=t}^T zv_{itr} \quad i = 1, 2, \dots, m \text{ e } t = 2, 3, \dots, T \quad (4.51)$$

$$\sum_{r=1}^T zv_{itr} \leq Y_{it} \quad i = 1, 2, \dots, m \text{ e } t = 1, 2, \dots, T \quad (4.52)$$

$$\sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_{jt} = \sum_{r=t}^T zv_{itr} sd_{itr} \quad i = 1, 2, \dots, m \text{ e } t = 1, 2, \dots, T. \quad (4.53)$$

$$zv_{itr} \in \mathbb{R}^+ \quad i = 1, 2, \dots, m \text{ e } t, r = 1, 2, \dots, T : r \geq t \quad (4.54)$$

$$Y_{it}, x_{jt} \in \{0, 1\} \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad t = 1, 2, \dots, T \text{ e } j = 1, 2, \dots, n \quad (4.55)$$

A função objetivo (4.49) minimiza a soma dos custos de estocagem e preparação provenientes do problema de dimensionamento de lotes além de minimizar a quantidade de objetos utilizados para o corte. As restrições (4.50) e (4.51) definem as restrições de fluxo e o conjunto de restrições (4.52) definem se existe ou não produção no período t e (4.53) integram os dois problemas, ou seja, garante que a quantidade de um determinado

item a ser produzida determinada pelo problema de dimensionamento de lotes seja cortada pelo problema de corte de estoque. Finalmente, (4.54) e (4.55) definem o domínio das variáveis.

4.2 Métodos de resolução

Nesta seção apresentaremos os métodos utilizados para resolver os modelos integrados. Os modelos envolvendo KT, VC e VCcr forma resolvidos de maneira exata enquanto que os modelos envolvendo VC e VCG forma resolvidos de forma heurística com a relaxação linear das restrições de integralidade das variáveis.

4.2.1 Métodos exatos

Os modelos integrados envolvendo KT e VC, ou seja, CLKT, CLVC, SPKT e SPVC foram considerados com todos os possíveis padrões de corte e resolvidos pelo método *branch and price* do pacote CPLEX. Além deste modelos, os envolvendo CLVCcr e SPVCcr também foram resolvidos dessa forma, porém, após os critério de resução terem sido aplicados.

4.2.2 Método heurísticos

Os modelos CLGG e SPGG, além de CLVCG e SPVCG foram resolvidos de maneira heurística pelo método simplex com geração de colunas. As heurísticas implementadas consistem em resolver as relaxações lineares dos modelos citados e, posteriormente, com a colunas ótimas para o problema linear fixadas, resolvê-se o problema com as variáveis inteiras.

O problema mestre restrito (PMR) foi construído considerando inicialmente todos as colunas referentes ao problema de dimensionamento de lotes além dos padrões de corte homogêneos do problema de corte de estoque, que no caso dos modelos CLVCG e SPVCG, são os caminhos formados apenas por arcos que representam o mesmo item. O PMR é resolvido pelo CPLEX (Cplex 2009) e, para cada período, as variáveis duais são recuperadas. Para os modelos integrados envolvendo GG, essas variáveis duais são associadas à restrição de acoplamento. Já no caso dos modelo CLVCG e SPVCG, as variáveis duais re-

cuperadas são associadas às restrições de conservação de fluxo e atendimento à demanda.

Para cada período, o subproblema *pricing* é resolvido. Para os modelos CLGG e SPGG, esse subproblema consiste em um problema da mochila, que maximiza a contribuição dos itens, onde o custo de cada item é dado pela variável dual associada à restrição de acoplamento daquele item e respeita às restrições (3.5) e (3.6). Para a resolução do subproblema (3.15)-(3.17), o custo reduzido é calculado para todo arco pertencente ao conjunto A e com esse valor o subproblema é resolvido a fim de encontrar novos padrões de corte que podem melhorar a solução atual do PMR. O período que fornecer a melhor (menor) solução para o subproblema, terá essa solução inserida no PMR e o processo é repetido. O processo é interrompido quando a solução do subproblema for positiva para todos os períodos.

Ao final deste procedimento, o problema original é resolvido com todas as colunas geradas anteriormente e uma solução inteira pode ser encontrada.

Capítulo 5

Estudo computacional

Neste capítulo apresentaremos os resultados computacionais para avaliar e comparar o desempenho dos modelos propostos no Capítulo 4. Estes experimentos foram realizados com dados gerados aleatoriamente baseados em Poldi e Arenales (2010). Os modelos foram escritos na sintaxe do AMPL (Fourer *et al* (2002)) e como *solver* utilizamos o CPLEX 12.1 (IBM 2009). O tempo máximo de processamento foi fixado em 600 segundos e o *gap* em 0,1%. Para os testes computacionais foi utilizado um computador com processador Intel Core i7 (3,4 GHz 3,4 GHz) com 16 GB de memória RAM, sob a plataforma do Windows 7.

5.1 Geração dos dados

Na literatura, encontramos o CUTGEN (Gau e Wäscher 1995) que é um gerador de dados muito usado para o problema de corte unidimensional. Porém, não pode ser utilizado nos testes que serão realizados, já que o problema integrado requer mais parâmetros que o problema de corte de estoque. Desenvolvemos um gerador em que a demanda, o comprimento dos itens, comprimento do objeto e número de períodos são como em Poldi e Arenales (2010). Os custos de preparação de máquina e estocagem são gerados de maneira aleatória pois, estes não são gerados em Poldi e Arenales (2010).

Como Poldi e Arenales (2010) estudam o problema com vários tipos de objetos em estoque, neste trabalho, consideramos apenas o comprimento do primeiro tipo de objeto no arquivo de dados.

Os experimentos estão divididos em 8 classes de problemas, sendo 4 classes com custo de preparação alto e 4 classes com custo de preparação baixo e, para cada classe foram gerados 20 exemplos.

Os dados de Poldi e Arenales (2010), nos quais nos baseamos, segue a seguinte configuração:

- número de períodos: $T=3$ e 6 ;
- número de tipos de itens demandados: $m=10$ e 20 ;
- comprimento dos objetos em estoque: $W_l \in [300, 1000]$; (Poldi e Arenales (2010) estudam o problema com vários tipos de objetos e neste trabalho consideramos apenas um tipo)
- comprimento dos itens demandados: $w_i \in [0, 1\overline{W}, 0, 4\overline{W}]$, onde $\overline{W} = \sum_{l=1}^L W_l \setminus L$, em que L é a quantidade de tipos de objetos
- demanda dos itens: $d_{it} \in [10, 200]$ (A demanda é mantida constante para todos os exemplos de uma mesma classe)

Além destes valores, os custos co associados ao corte dos objetos foi fixado igual a 1.

Para gerar os custos de estocagem e preparação de máquinas, inicialmente, nos baseamos em Trigeiro *et al* (1989) que geram custos de estocagem no intervalo $[1, 5]$ e consideram dois intervalos para gerar os custos de preparação de máquina, $[100, 500]$ e $[200, 1000]$, gerando assim, classes com custo de preparação baixo e alto. Porém, como os custos do problema integrado favorecem a redução da perda e, conseqüentemente o aumento de estoque e redução de preparações, os custos dos dados de Trigeiro *et al* (1989) (que são para o problema de dimensionamento de lotes) fizeram com que ocorresse produção apenas no primeiro período, para uma grande quantidade de exemplos.

Por causa disso, após alguns testes computacionais, alteramos os intervalos de geração de custo de preparação de máquina e mantivemos o intervalo de geração de custo de estoque.

- custo de estocagem: $hc_{it} \in [1, 5]$;
- custo de preparação: $sc_{it} \in [50, 200]$ (para as classes com custos de preparação baixo);
- custo de preparação: $sc_{it} \in [100, 400]$ (para as classes com custos de preparação alto);

Dessa forma, os parâmetros que definem as 8 classes são dados na Tabela 3

Classes	Períodos (t)	Itens (m)	Custo de Preparação
Classe 1	3	10	Alto
Classe 2	3	20	Alto
Classe 3	3	10	Baixo
Classe 4	3	20	Baixo
Classe 5	6	10	Alto
Classe 6	6	20	Alto
Classe 7	6	10	Baixo
Classe 8	6	20	Baixo

Tabela 3: Definição das classes de exemplos

Como já foi dito anteriormente, para o modelo KT, é necessário um limitante superior (K) para a quantidade de objetos. Foram realizados testes computacionais, para o problema de corte de estoque KT, com K igual à solução ótima fornecida por VC, bem como, para K igual a múltiplos desse valor ótimo. Após estes testes, o valor de K para os modelos integrados CLKT e SPKT foi fixado igual ao triplo da solução fornecida por CLVC.

5.2 Resultados computacionais

Nesta seção, vamos apresentar os resultados computacionais obtidos ao resolvermos os modelos integrados apresentados no Capítulo 4. Inicialmente, vamos analisar os resultados dos métodos exatos e compará-los, considerando o *gap*, número de nós na árvore *branch and bound*, limitantes superiores e inferiores além do tempo computacional para resolver a relaxação linear e o problema inteiro. Deve-se observar que em vários casos, devido à limitação do tempo computacional, uma solução aproximada é apresentada e não a solução ótima. Apresentaremos também os mesmos resultados para os modelos envolvendo Valério de Carvalho, porém após aplicarmos os Critérios de Redução 1 e 2 (VCcr). Observa-se que não aplicamos o critério 3, pois este evita a produção em excesso, porém, nos nossos modelos integrados, consideramos restrições de igualdade, fazendo desnecessária a aplicação deste critério.

Mais adiante, apresentamos os resultados para os modelos resolvidos de forma heurísticos e vamos considerar o valor da relaxação linear, o número de iterações simplex, o valor da solução arredondada e o número de nós *branch and bound* necessários para encontrar

essa solução.

Para tais comparações, apresentamos os resultados computacionais obtidos em tabelas contendo a média de cada classe e a média final.

5.2.1 Modelos exatos

Neste tópico, realizaremos o estudo computacional dos modelos CLKT, CLVC, CLVCcr, SPKT, SPVC e SPVCcr. Para alguns exemplos resolvidos por esses modelos, o CPLEX não conseguiu provar a otimalidade utilizando a memória disponível, porém uma solução inteira foi fornecida. Por isso, mesmo os exemplos com estouro de memória serão considerados nos resultados. A quantidade de exemplos, a média dos números de nós das árvores *branch and bound* e a média do tempo computacional dos exemplos com estouro de memória em cada classe e para cada modelo são mostrados nas tabelas 4, 5 e 6, respectivamente.

Tabela 4: Quantidade de exemplos com estouro de memória - Métodos Exatos

Classes	CLKT	CLVC	CLVCcr	SPKT	SPVC	SPVCcr
Classe1	5	0	0	8	0	0
Classe2	0	0	0	0	0	0
Classe3	15	0	0	18	0	0
Classe4	8	0	0	5	0	0
Classe5	17	0	0	18	0	0
Classe6	20	0	0	19	0	0
Classe7	19	0	0	19	1	0
Classe8	20	0	0	19	5	0

Os exemplos das classes 6 e 8 (maiores classes), estouraram a memória após pesquisar poucos nós e no caso do modelo SPKT, no nó raiz.

Tabela 5: Número de nós médios considerando exemplos com estouro de memória

Classes	CLKT	SPKT	SPVC
Classe1	42.830	59.571,43	-
Classe2	-	-	-
Classe3	56.687,5	54.700	-
Classe4	12.892,89	15880	-
Classe5	6.988,75	11.513,64	-
Classe6	201,03	181,82	-
Classe7	7.333,33	8126,04	15.000
Classe8	176,94	0	20.000

Tabela 6: Tempo computacional (segundos) médio considerando exemplos com estouro de memória

Classes	CLKT	SPKT	SPVC
Classe1	429,29	352,51	-
Classe2	-	-	-
Classe3	365,29	392,52	-
Classe4	402,95	522,21	-
Classe5	269,42	333,81	-
Classe6	86,87	112,24	-
Classe7	297,64	297,54	335,37
Classe8	106,09	87,38	388,92

Os modelos envolvendo KT apresentam problemas com estouro de memória. Acreditamos que isso ocorre devido ao grande número de variáveis no modelo (em parte, provenientes do limitante superior para a quantidade de objetos disponíveis) e da qualidade ruim dos limitantes inferiores obtidos pela relaxação linear do modelo.

Para facilitar as comparações entre as formulações, apresenta-se na Tabela 7 o número de variáveis e restrições de cada modelo, para um exemplo com 6 períodos, 20 itens, comprimento do objeto igual a 992 e limitante superior para a quantidade de objetos necessários igual a 2430.

Modelos	Restrições	Variáveis
CLKT	14.940	306.540
CLVC	6.318	103.710
CLVCcr	6.318	18.204
SPKT	14.940	306.720
SPVC	6.318	103.890
SPVCcr	6.318	18.384

Tabela 7: Dimensão dos modelos para um exemplo

Limitantes inferiores: relaxação linear

Comparamos os limitantes inferiores, obtidos ao resolver a relaxação linear dos modelos resolvidos de forma exata. A Tabela 8 apresenta os resultados computacionais para tais modelos e a Figura 16 apresenta o desvio padrão médio de cada classe para cada modelo. Como esperado, em todas as classes, o modelo CLKT apresentou limitantes inferiores piores que CLVC. O mesmo acontece quando comparamos SPVC com SPKT. Porém, se fixarmos o modelo de corte de estoque KT, para efeito de comparação, podemos observar que o modelo integrado utilizando a reformulação para o problema de dimensionamento de lotes apresenta melhores limitantes inferiores para a grande maioria das classes. O modelo CLVC apresenta melhores limitantes inferiores para a todas as classes quando comparamos com CLVC, o que faz com que a média final do modelo CLVC seja 13,17% melhor que CLVC. Observa-se uma grande vantagem dos modelos envolvendo a reformulação SP para as classes com 6 períodos. Os critérios de redução melhoraram suavemente o limitante inferior, confirmando a equação 3.14.

Observa-se na Figura 16, que há um aumento no desvio padrão das classes com 6 períodos, sendo que o maior valor ocorre na classe 7 para o modelo SPKT. Além disso, para todos os modelos, os valores de desvio padrão são próximos para as classes com 3 períodos.

Tempo computacional: nó raiz

O tempo computacional para resolver a relaxação linear no nó raiz (incluindo os cortes) em cada modelo é comparado, as médias são apresentadas na Tabela 9 e o desvio padrão na Figura 17. Em todas as classes, o modelo CLKT encontrou o valor da relaxação linear mais rápido que CLVC, porém demorou mais que o modelo SPKT. Se olharmos para os modelos CLVC e SPVC, o último resolveu a relaxação linear mais rápido em todas as classes. Acreditamos que isso ocorreu devido ao fato do modelo SP apresentar uma

Tabela 8: Limitantes Inferiores

Classes	CLKT	CLVC	CLVCcr	SPKT	SPVC	SPVCcr
Classe1	4.454,54	4.452,60	4.457,23	4.454,54	4.457,10	4.455,73
Classe2	9.824,38	9.827,01	9.827,17	9.856,35	9.852,16	9.858,72
Classe3	2.703,64	2.705,88	2.706,47	2.730,89	2.732,97	2.733,41
Classe4	5.764,29	5.765,29	5.765,54	5.920,20	5.921,72	5.921,98
Classe5	7.657,96	7.668,77	7.669,23	9.145,40	9.158,82	9.159,15
Classe6	14.376,22	14.384,89	14.385,35	16.000,98	16.999,22	16.999,55
Classe7	4.213,21	4.214,99	4.215,32	5.072,79	5.767,96	5.781,86
Classe8	8.214,21	8.215,60	8.215,88	9.866,04	11.022,63	11.023,03
Média	7.151,06	7.154,38	7.155,27	7.880,90	8.239,07	8.241,68

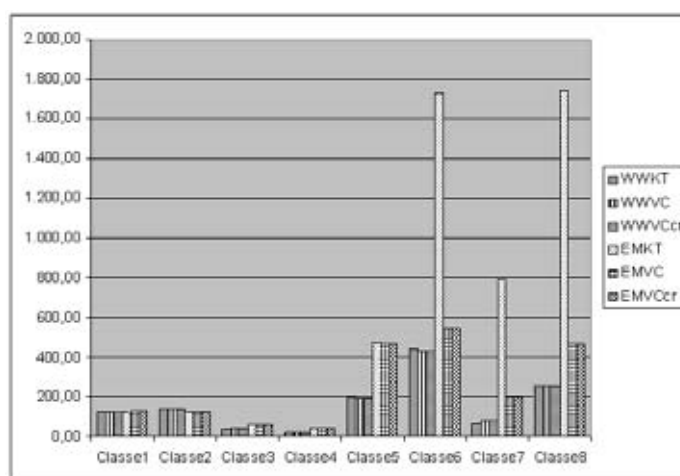


Figura 16: Desvio padrão - Limitante inferior

relaxação linear mais forte que o modelo CL, sendo que, este último necessita da aplicação de vários cortes para fortalecer a relaxação linear.

Por causa da redução da quantidade de variáveis, os modelos CLVCcr e SPVCcr encontraram o limitante inferior em um tempo consideravelmente menor que os respectivos modelos sem critério de redução, sendo que SPVCcr foi mais rápido neste quesito.

Para todas as classes, o desvio padrão (Figura 17) é maior para o modelo CLVC. O desvio padrão do modelo SPVCcr não ultrapassou 0,2 segundos para todas as classes e de CLVCcr não ultrapassou 0,8 segundos.

Limitantes superiores

As médias dos valores das funções objetivos para cada classe e cada modelo, assim como a média geral das classes se encontram na Tabela 10 e o desvio padrão na Figura 18. Os modelos envolvendo VC melhora os valores dos limitantes superiores em torno de 1,1% em relação aos modelos integrados envolvendo KT. Dos modelos CLKT e SPKT, o último mostrou-se um pouco melhor. Dos modelos envolvendo VC e VCcr,

Tabela 9: Tempo Computacional para resolver a Relaxação Linear

Classes	CLKT	CLVC	CLVCcr	SPKT	SPVC	SPVCcr
Classe1	0,08	0,47	0,03	0,05	0,19	0,02
Classe2	0,63	2,42	0,19	0,15	1,10	0,09
Classe3	0,12	0,51	0,04	0,04	0,21	0,02
Classe4	1,05	2,70	0,19	0,17	1,08	0,10
Classe5	0,92	3,13	0,15	0,21	0,81	0,05
Classe6	2,43	7,18	0,63	1,43	1,90	0,21
Classe7	1,00	2,93	0,13	0,56	0,90	0,06
Classe8	2,93	6,52	0,61	1,56	2,40	0,22
Média	1,14	3,23	0,25	0,52	1,07	0,10

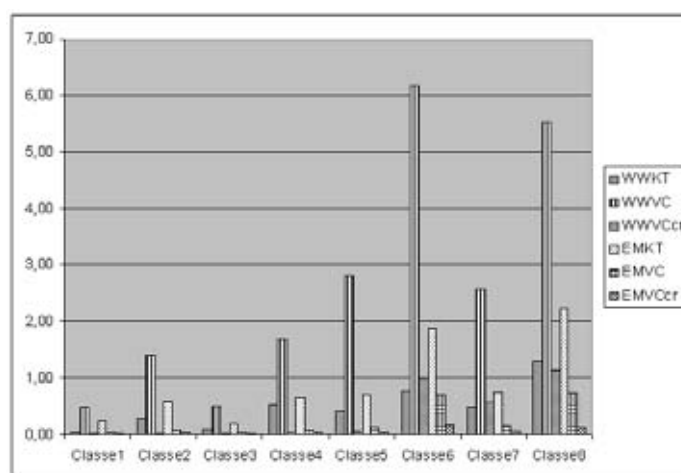


Figura 17: Desvio padrão - Tempo computacional para resolver a relaxação linear

pode-se dizer que todos os modelos apresentaram soluções equivalentes.

O modelo SPVC não encontrou solução inteira para 7 exemplos da classe 6, 11 da classe 7 e 12 da classe 8 e por isso, esses exemplos foram retirados de todos os modelos para efeito de comparação.

Nota-se na Figura 18, que o desvio padrão aumenta nas classe com 6 períodos. Porém, os valores da classe 6 para os modelos CLKT e SPKT estão mais dispersos. A maior variação em torno da média ocorre para o modelo CLKT na classe 5. Os valores das classes 1, 2, 3, 4, 7 e 8 mostram-se bem próximos das média para todos os modelos.

GAP e número de soluções ótimas

O *gap* exibido é fornecido pelo pacote CPLEX, e é calculado da seguinte forma: $gap = |LS - LI| / (e^{-10} + |LS|)$, em que LS e LI são, respectivamente, os valores dos limitantes superiores e inferiores. A Tabela 11 apresenta o *gap* médio, em porcentagem, de cada classe e a média geral de cada modelo.

Em consequência dos resultados dos limitantes inferiores e superiores, o *gap* dos mo-

Tabela 10: Limitantes Superiores

Classes	CLKT	CLVC	CLVCcr	SPKT	SPVC	SPVCcr
Classe1	4.459,95	4.458,10	4.458,40	4.459,85	4.458,30	4.458,55
Classe2	9.865,90	9.861,75	9.862,80	9.866,25	9.862,40	9.861,20
Classe3	2.736,05	2.734,65	2.735,00	2.736,85	2.734,55	2.734,90
Classe4	5.929,60	5.929,05	5.924,60	5.929,95	5.924,50	5.925,10
Classe5	8.697,95	9.172,89	9.172,58	9.176,32	9.172,05	9.173,47
Classe6	17.727,08	16.859,77	16.846,38	17.493,23	16.845,92	16.845,69
Classe7	5.772,44	5.765,44	5.765,56	5.772,44	5.764,56	5.765,00
Classe8	10.800,38	10.544,38	10.546,75	10.784,25	10.546,75	10.542,38
Média	8.248,67	8.165,75	8.164,01	8.277,39	8.163,63	8.163,29

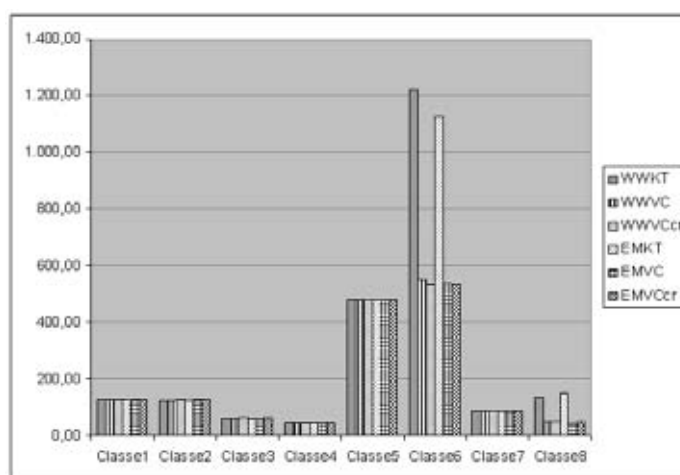


Figura 18: Desvio padrão - Limitante superior

delos envolvendo o modelo KT para o problema de corte são maiores quando comparados aqueles envolvendo VC. Nota-se que os modelos CLKT e SPKT apresentam dificuldade em resolver as classes de problemas com 6 períodos, principalmente as classes com 20 itens. A alteração do modelo para o problema dimensionamento de lotes não produz diferenças significativas, pois os modelos envolvendo SP produzem melhores limitantes inferiores e os modelos envolvendo CL produzem melhores limitantes superiores.

A coluna SO da Tabela 11 representa a quantidade de exemplos de cada classe que o CPLEX provou a otimalidade. Como observado anteriormente, como um dos critérios de parada foi fixado um valor para o *gap* de 0,1%, por isso, a otimalidade de alguns exemplos foi provada dentro do MIP *gap*, o que justifica a diferença dos limitantes superiores e dos *gaps* entre aqueles exemplares em que foi provada a otimalidade. Podemos perceber que, mais uma vez, os modelos integrados envolvendo VC apresenta vantagem significativa sobre aqueles envolvendo KT.

Tabela 11: *GAP* e número de soluções ótimas

	CLKT		CLVC		CLVCcr		SPKT		SPVC		SPVCcr	
Classes	Gap	SO	Gap	SO	Gap	SO	Gap	SO	Gap	SO	Gap	SO
Classe1	0,10	12	0,02	20	0,02	20	0,10	12	0,03	20	0,03	20
Classe2	0,10	14	0,03	20	0,04	20	0,09	11	0,04	20	0,02	20
Classe3	0,16	1	0,05	20	0,05	20	0,17	0	0,05	20	0,05	20
Classe4	0,23	0	0,04	20	0,04	20	0,16	0	0,05	20	0,05	20
Classe5	0,25	2	0,04	20	0,06	20	0,24	1	0,04	20	0,06	20
Classe6	6,91	0	0,13	20	0,04	20	5,00	0	0,05	20	0,06	20
Classe7	0,49	0	0,06	20	0,04	20	0,49	0	0,05	18	0,04	20
Classe8	5,35	0	0,05	20	0,06	20	3,73	0	0,03	16	0,05	20
Média	1,70		0,05		0,04		1,25		0,04		0,04	

Tempo computacional

O tempo computacional médio utilizado em cada modelo para resolver o problema encontra-se na Tabela 12. Podemos observar que, quando utilizamos o modelo CL para o problema de dimensionamento de lotes, o modelo CLVC apresenta tempos computacionais 76% melhores que CLKT. O mesmo acontece quando comparamos os modelos SPKT e SPVC, sendo que neste caso, a média geral de SPVC é 70% melhor que SPKT. Já com respeito aos modelos CLVC e SPVC, para as classes com 3 períodos, o tempo computacional para os dois modelos não altera muito, porém para as classes com 6 períodos, a diferença é mais significativa.

Como esperado, quando aplicamos critérios de redução no modelo CLVC e SPVC, o tempo para a resolução do problema apresentam reduções de 85% e 90% respectivamente.

Tabela 12: Tempo Computacional

Classes	CLKT	CLVC	CLVCcr	SPKT	SPVC	SPVCcr
Classe1	225,18	0,95	0,09	185,71	0,79	0,13
Classe2	381,25	3,94	0,46	474,44	3,19	0,34
Classe3	395,49	2,22	0,17	401,23	1,69	0,19
Classe4	513,35	4,57	0,67	580,66	5,80	0,60
Classe5	302,76	37,53	2,16	346,37	20,57	1,33
Classe6	71,51	112,31	30,98	126,36	188,68	19,83
Classe7	311,99	90,05	3,41	350,72	163,93	5,10
Classe8	83,83	87,30	12,64	98,30	386,03	44,99
Média	285,67	42,36	6,32	320,47	96,33	9,07

5.2.2 Modelos heurísticos

Apresentaremos nesta seção, os resultados computacionais obtidos ao resolvermos os modelos CLGG, CLVCG, SPGG e SPVCG utilizando o método simplex com geração de colunas. Para cada modelo, apresentaremos o valor da relaxação linear e o número de iterações dual simplex.

A Tabela 13 apresentam a quantidade de exemplares que tiveram estouro de memória, durante o processo de arredondamento para encontrar uma solução inteira. O modelo SPGG não encontrou solução inteira para um exemplo da classe 1, um exemplo da classe 3 e três exemplos da Classe 5, por causa de infactibilidade. Pelo mesmo motivo, o modelo SPVCG não encontrou solução inteira para um exemplo da Classe 1 e um exemplo da Classe 2.

Tabela 13: Quantidade de exemplos com estouro de memória - Métodos heurísticos

	CLGG	CLVCG	SPGG	SPVCG
Classe1	0	0	5	1
Classe2	0	0	0	3
Classe3	0	0	15	15
Classe4	0	4	13	18
Classe5	1	4	7	12
Classe6	4	13	16	16
Classe7	8	12	19	19
Classe8	16	19	20	20

Podemos observar que as maiores ocorrências de estouros de memória estão nas classes mais altas, que geram os modelos maiores. Tais estouros de memória ocorreram após a solução da relaxação linear, por isso, apesar de não obtermos o valor da solução inteira, o valor do limitante inferior foi fornecido.

A Tabela 14 apresentam os valores médios analisados para cada modelo e cada classe. O limitante inferior é a solução ótima do problema linear e o número de iterações dual simplex é a quantidade de iterações que o CPLEX utilizou para encontrar a relaxação linear.

Tabela 14: Número de Iterações dual Simplex e Relaxação Linear

Classes	Número de Iterações Dual Simplex				Limitante Inferior			
	CLGG	CLVCG	SPGG	SPVCG	CLGG	CLVCG	SPGG	SPVCG
Classe1	10,00	18,80	40,00	44,95	3.718,04	3.718,04	4.457,10	4.457,10
Classe2	20,00	53,10	80,00	108,75	7.949,84	7.949,84	9.858,57	9.858,57
Classe3	10,00	20,30	40,00	47,15	2.147,14	2.147,14	2.732,97	2.732,97
Classe4	20,00	55,70	80,00	112,10	4.406,72	4.406,72	5.921,72	5.921,72
Classe5	54,05	89,10	100,00	126,35	5.675,76	5.675,76	9.158,83	9.158,83
Classe6	97,20	208,80	200,00	295,10	10.295,11	10.295,11	16.999,21	16.999,21
Classe7	44,70	83,30	100,00	128,65	3.195,62	3.195,62	5.767,97	5.767,97
Classe8	88,60	167,20	200,00	288,25	6.138,34	6.138,34	11.022,63	11.022,63
Média	42,69	87,04	105,00	143,91	5.440,82	5.440,82	8.239,87	8.239,87

Como foi visto no Capítulo 3, os modelos VCG e GG são equivalentes e por isso fornecem o mesmo limitante inferior, como pode ser observado na Tabela 14, os modelos CLGG e CLVCG, assim como os modelos SPGG e SPVCG, possuem a mesma solução para a relaxação linear do problema. Também podemos concluir que a relaxação linear da reformulação para o problema de dimensionamento de lotes é mais forte que a relaxação linear do modelo clássico, já que os modelos SPGG e SPVCG apresentam limitantes inferiores 33,97% mais altos se comparados com CLGG e CLVCG.

Muitos dos exemplares não obtiveram soluções inteiras, seja por estouros de memória (Tabela 13) ou pelo fato de as colunas ótimas para o problema linear serem ineficazes para o problema inteiro. Apenas alguns exemplos das Classes 1, 2 e 3 foram resolvidos por todos os modelos. Para tais exemplos, os modelos integrados envolvendo VCG apresentaram melhores limitantes superiores que os modelos envolvendo GG. Além disso, a reformulação para o problema de dimensionamento de lotes também melhora o valor do limitante superior. Assim, o modelo SPVCG apresentou melhores soluções para o problema integrado. Com relação ao número de nós pesquisados na árvore *branch and bound*, observa-se que os modelos CLGG e CLVCG pesquisam uma quantidade menor de nós que os modelos SPGG e SPVCG.

Capítulo 6

Conclusões e propostas futuras

No presente trabalho realizamos um estudo de modelos matemáticos, encontrados na literatura, para os problemas integrados de dimensionamento de lotes e corte de estoque unidimensional. Para o problema de dimensionamento de lotes, estudamos o modelo clássico e uma reformulação baseada na propriedade do caminho mínimo, já para o problema de corte de estoque, estudamos os modelos de Kantorovich (1939), Gilmore e Gomory (1961, 1963) e Valério de Carvalho (1999, 2002), sendo que este último foi mostrado com mais detalhes já que não encontramos na literatura modelos integrados utilizando este modelo.

Apresentamos diferentes combinações de modelos para o problema integrado de dimensionamento de lotes e corte de estoque, sendo que alguns modelos foram resolvidos com um método exato (porém com limitação no tempo de resolução) e outros com um método heurístico. Tais modelos foram implementados em uma linguagem de modelagem e resolvidos com um pacote de otimização. Foi realizada uma análise computacional com o intuito de comparar as diferentes formulações.

Para os métodos exatos, podemos concluir que os modelos integrados envolvendo a formulação de Valério de Carvalho, apresentam melhores resultados quando comparados aos seus respectivos modelos envolvendo a formulação de Kantorovich.

Com relação ao valor da relaxação linear, os modelos envolvendo a reformulação para o problema de dimensionamento de lotes, apresentam limitantes inferiores consideravelmente mais fortes do que os modelos envolvendo o modelo clássico.

Quando critérios de redução são aplicados aos modelos integrados envolvendo a formulação de Valério de Carvalho, o *gap* tem uma pequena redução. Porém, a diferença mais significativa dos modelos com e sem critério de redução, é o tempo computacional que é significativamente mais baixo quando aplicamos tais critérios.

A solução dos métodos heurísticos nos mostraram que, apesar da relaxação linear ser a mesma, o modelo de Valério de Carvalho contribuiu para que os modelos integrados fornecessem limitantes superiores suavemente melhores quando comparamos aos modelos integrados envolvendo Gilmore e Gomory. Além disto, concluímos que os modelos integrados envolvendo a reformulação como problema de caminho mínimo fornecem melhores limitantes inferiores e superiores que os modelos clássicos de dimensionamento de lotes.

Deve-se observar que, de forma geral, o pacote computacional utilizado teve dificuldades em encontrar uma solução inteira utilizando apenas as colunas oriundas da resolução da relaxação linear do problema. Como trabalhos futuros, estes métodos devem ser revistos e possíveis testes com os parâmetros do pacote computacional poderão ser feitos. Além de aplicarmos os critérios de redução nos modelos envolvendo Valério de Carvalho, alguns outros critérios podem ser aliados ao método simplex com geração de colunas para resolver as relaxações lineares dos modelos integrados.

É conhecido que o limitante superior para a quantidade de objetos interfere bastante no modelo de Kantorovich, já que se esse valor for pequeno, o problema pode se tornar infactível e se for muito grande, o modelo também cresce bastante e assim, pode ser inviável resolvê-lo. Por isso, realizar novos testes computacionais para os modelos integrados envolvendo Kantorovich para diferentes comprimentos de objeto é um ponto importante e interessante para ser desenvolvido em pesquisa futuras.

Os modelos integrados apresentados são extensões do problema de corte de estoque unidimensional multiperíodo, por isso, pode ser interessante considerar os modelos para esse problema em trabalhos futuros.

Novos testes, com dados que representam exemplos maiores, devem ser realizados para testar a capacidade dos métodos exatos em resolver o problema. Outro tema interessante para ser explorado em trabalhos futuros é considerarmos a composição final das peças, ou seja, produzir os itens que fazem parte de um produto final e então, compor o produto demandado. Para o problema de dimensionamento de lotes, podem-se considerar variáveis de atraso e restrições de capacidade.

Referências Bibliográficas

- [1] ABUABARA, A e MORABITO, R. Modelos de Programação inteira mista para o planejamento do corte unidimensional de tubos metálicos na indústrias aeronáutica agrícola. *Gestão e Produção*, v.15, p.605-617, 2008.
- [2] AGGARWAL, A. e PARK, J. K. Improved Algorithms for Economic Lot Size Problems. *Operations Research*, v.41, p.549-571, 1993.
- [3] ALEM, D.J e MORABITO, R. Production planning in furniture settings via robust optimization. *Computers and Operations Research*, v.39, p.139-150, 2012.
- [4] ALFIERI, A; BRANDIMARTE, P e D’ORAZIO, S. Lp-based heuristics for the capacited lot-sizing problem: The interaction of model formulation and solution algorithm. *International Journal of Production Research*, v.40, p.441-458, 2002.
- [5] ARAUJO, S.A. *Estudos de Problemas de Dimensionamento de Lotes Monoestágio com Restrição de Capacidade*. Dissertação de Mestrado, Universidade de São Paulo, São Carlos/SP, 1999.
- [6] BAHL, H.C.; RITZMAN, L.P. e GUPTA, J.N.D. Determining lot sizes and resources requirements: a review. *Operations Research*, v.35, p.329-348, 1987.
- [7] BRAHIMI, N.; DEUZERE-PERES, S.N.; NAJID, M. e NORDLI, A. Single Item Lot Sizing Problem. *European Journal of Operational Research*, v.1, p.1-16, 2006.
- [8] CPLEX ILOG CPLEX 12.1 Users manual and reference manual. ILOG S.A., 2009.
- [9] DANTZIG, G.B. e WOLFE, P. The decomposition algorithm for linear programming. *Operations Research*, v.8, p.101-111, 1960.
- [10] DENIZEL, M.; ALTEKIN, F.T.; SURAL, H e STADTLER, H. Equivalence of the LP relaxations of two strong formulations for the capacited lot-sizing problem with setup times. *OR Spectrum*, v.30, p.773-785, 2007.
- [11] DREXL, A. e KIMMS, A. Lot sizing and scheduling - survey and extensions. *European Journal of Operational Research*, v.99, p.221-235, 1997.
- [12] DYCKHOFF, H. A Typology of cutting and packing problems. *European Journal of Operational Research*, v.44, p.145-159, 1990.
- [13] DYCKHOFF, H.; SCHEITHAUER, G. e TERNO, J. Cutting and packing. *Annotated Bibliographies in Combinatorial Optimization*, p.393-413, 1997.
- [14] EPPEN, G.D. e MARTIN, R.K. Determining safety stock in the presence of stochastic lead time and demand. *Management Science*, v.34, p.1380-1390, 1987.

- [15] EVANS, J.R. An Efficient Implementation of the Wagner-Whitin Algorithm for Dynamic Lot-Sizing. *Journal of Operational Management*, v.5, p.229-253, 1985.
- [16] FARLEY, A. A. Mathematical programming models for cutting-stock problems in the clothing industry. *Journal of Operations Research Society*, v. 1, p.41-53, 1988.
- [17] FEDERGRUEN, A. e TZUR, M. A Simple Forward Algorithm to Solve General Dynamic Lot Sizing Models with n Periods in $O(n \log n)$ or $O(n)$ Time. *Management Science*, v.37, p.909-925, 1991.
- [18] FIOROTTO, D.J. e ARAUJO, S.A. Relaxação Lagrangiana Aplicada ao Problema de Dimensionamento de Lotes em Máquina Paralelas: Limitantes Inferiores. *TEMA*, v.13, p.13-24, 2012.
- [19] FOURER, R; GAY, D.M. e B.W. KERNIGHAN B.W. *AMPL: a Modeling Language for Mathematical Programming*. Duxbury Press, 2002.
- [20] GAREY, M.R. E JOHNSON, D.S. Computers and Intractability: A guide to the theory of NP-Completeness. *W.H. Freeman, São Francisco*. 1979.
- [21] GAU, T. e WÄSCHER, G. CUTGEN: A problem generator for the standard one-dimensional cutting stock problem. *European Journal of Operations Research*, v.84, p.572-579, 1995.
- [22] GHIDINI, C.T.L.S e ARENALES, M.N. Otimização de processos acoplados na indústria de móveis: dimensionamento de lotes e corte de estoque. *Anais do CNMAC-Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional*, 2009.
- [23] GILMORE, P.C. e GOMORY, R.E. A linear programming approach to the cutting stock problem. *Operations Research*, v.9, p.848-859, 1961.
- [24] GILMORE, P.C. e GOMORY, R.E. A linear programming approach to the cutting stock problem - Part II. *Operations Research*, v.11, p.863-888, 1963.
- [25] GILMORE, P.C. e GOMORY, R.E. Multistage cutting stock problems of two and more dimensions. *Operational Research*, v.14, p.1045-1074, 1965.
- [26] GRAMANI, M.C.N e FRANÇA, P.M. The combined cutting stock and lot sizing problem in industrial process. *European Journal of Operational Research*, v.74, p.509-521, 2006.
- [27] GRAMANI, M.C.N; FRANÇA, P.M e ARENALES, M.N. A Lagrangian relaxation approach to a coupled lot-sizing and cutting stock problem. *International Journal of Production Economics*, v.119, p.219-227, 2009.
- [28] GRAMANI, M.C.N; FRANÇA, P.M e ARENALES, M.N. A linear optimization approach to the combined production planning model. *Journal of the Franklin Institute*, v.348, p.1523-1536, 2011.
- [29] HARRIS, F. W. How Many Parts to Make at Once. *Operations Research*, v.38, p. 947-950, 1990.

- [30] HENDRY, L. C.; FOK, K. K. e SHEK, K. W. A cutting stock and scheduling problem in the copper industry. *Journal of Operational Research Society*, v.47, p.38-47, 1996.
- [31] HINXMAN, A.I. The trim-loss and assortment problems: A survey. *European Journal of Operational Research*, v.5, p.8-18, 1980.
- [32] JANS, R e DEGRAEVE, Z. Improved lower bounds for capacitated lot sizing problem with setup time. *Operation Research Letters*, v.32, p.185-195, 2004.
- [33] JANS, R e DEGRAEVE, Z. Meta-Heuristics for Dynamic Lot Sizing: A Review and Comparison of Solution Approaches. *European Journal of Operational Research*, v.177, p.1855-1875, 2007.
- [34] JANS, R e DEGRAEVE, Z. Modeling Industrial Lot Sizing Problems: A Review. *International Journal of Production Research*, v.46(6), p.1619-1643, 2008.
- [35] KARIMI, B.; GHOMI, S. M. T. F. e WILSON, J. M. The capacitated lot sizing problem: a review of models and algorithms. *The International Journal of Management Science*, v.31, p.365-378, 2003.
- [36] KANTOROVICH, L.V. Mathematical methods of organizing and planning production(traduzido de um trabalho russo datado de 1939). *Management Science*, v.6, p.366-422, 1960.
- [37] KUIK, R.; SALOMON, M. e VAN WASSENHOVE, L. N. Batching Decisions: Structure and Models. *European Journal of Operational Research*, v.75, p.243-263, 1994.
- [38] LEÃO, A.P.S e ARENALES, M.N. Análise de modelos matemáticos para o problema de corte de estoque unidimensional acoplado ao dimensionamento de lotes. *Anais do XLIV SBPO - Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional, Rio de Janeiro - RJ*, 2012.
- [39] MAES, J.; McCLAIN, J. O. e VAN WASSENHOVE, L. N. Multilevel capacited lotsizing complexity and LP-based heuristics. *European Journal of Operational Research*, v.53, p.131-148, 1991.
- [40] MARCOTTE, O. The cutting stock problem and integer rounding. *European Journal of Operational Research*, v.44, p.197-208, 1985.
- [41] MARCOTTE, O. An instance of the cutting stock problem for which the rounding property does not hold. *Operations Research Letters*, v.4, p.239-243, 1986.
- [42] MARTELLO, S. e TOTH, P. Knapsack Problems: Algorithms and Computer Implementations, *Wiley*. 1990.
- [43] MENON, S. e SCHRAGE, L. Order Allocation for Stock Cutting in the Paper Industry. *Operations Research*, v.50, p.324-332, 2002.
- [44] MORABITO, R. e ARENALES, M.N. Um exame do problemas de corte e empacotamento. *Pesquisa Operacional*, v.12, p.1-20, 1992.
- [45] MORABITO, R.; ARENALES, M.N e YANASSE, H.H. Special issue on cutting, packing and related problems. *International Transactions in Operations Research*, v.16(6), p.659, 2009.

- [46] NONAS, S.L. e THORSTENSON, A. A combined cutting-stock and lot-sizing problem. *European Journal of Operational Research*, v.120, p.327-342, 2000.
- [47] OLIVEIRA, J.F. e WÄSCHER, G. Cutting and packing. *European Journal of Operational Research*, v.183(3), p.1106-1108, 2007.
- [48] POLDI, K.C. e ARENALES, M.N. Heuristics for the one-dimensional cutting stock problem with limited multiple stock lengths. *Computers and Operational Research*, v.36, p.2074-2081, 2009.
- [49] POLDI, K.C. e ARENALES, M.N. O Problema de Corte de Estoque unidimensional Multiperíodo. *Pesquisa Operacional*, v.30, p. 153-174, 2010.
- [50] POLTRONIERI, S. C.; POLDI, K. C.; TOLEDO, F. M. B. e ARENALES, M. N. A coupling cutting stock-lot sizing problem in the paper industry. *Annals of Operations Research*, v.157, p.91-104, 2007.
- [51] RESPÍCIO, A.; CAPTIVO, M.E. e RODRIGUES, A.J. A DSS for Production Planning and Scheduling in the Paper Industry. *International Conference On Decision Making and Decision Support in the Internet Age*, University College Cork, Cork, Ireland, p.298-308, 2002.
- [52] SANTOS, S.G.; ARAUJO, S.A. e RANGEL, S. Integrated Cutting Machine Programming and Lot Sizing in Furniture Industry. *Revista Eletrônica Pesquisa Operacional para o Desenvolvimento*, v.3, p.249-266, 2011.
- [53] SCHOLL, P.; KLEIN, R. e JUERGENS, C. A fast hybrid procedure for exactly solving the one-dimensional bin-packing problem. *Computers and Operations Research*, v.24, p.627-645, 1997.
- [54] SCHWERIN, P. e WÄSCHER, G. A new lower bound for the bin-packing problem and its integration into MTP. *Pesquisa Operacional*, v.19, p.111-129, 1999.
- [55] STADTLER, H. A one-dimensional cutting stock in the aluminium industry and its solution. *European Journal of Operational Research*, v.44, p.209-223, 1990.
- [56] SURAL, H.; DENIZEL, M. e VAN WASSENHOVE, L.N. Lagrangean relaxation based heuristic for lot sizing with setup times. *European Journal of Operational Research*, v.195, p.51-63, 2009.
- [57] TRIGEIRO, W. W.; THOMAS, L.J. e MCCLAIN, J.O. Capacited Lot-Sizing with Setup Times. *Management Science*, v.35, p.353-366, 1989.
- [58] VALÉRIO DE CARVALHO, J.M. Solução exacta de problemas de corte unidimensional usando o método de partição e avaliação sucessivas e geração diferida de colunas. *Gestão & Produção*, v.3(1), p.33-48, 1996.
- [59] VALÉRIO DE CARVALHO, J.M. Exact solution of bin-packing problems using column generation and branch-and-bound. *Annals of Operations Research*, v.86, p.629-659, 1999.
- [60] VALÉRIO DE CARVALHO, J.M. LP models for bin packing and cutting stock problems. *European Journal of Operational Research*, v.144, p.253-273, 2002.

- [61] VANDERBECK, F. Exact algorithm for minimizing the number of setups in the one-dimensional cutting stock problem. *Operational Research*, v.48, p.915-926, 2000.
- [62] VANZELA, M.; RANGEL, S.; ARAUJO, S. e CARRAVILLA, M.A. Um estudo de problema integrado de dimensionamento de lotes e corte de estoque para uma fábrica de móveis de pequeno porte. *Anais do XLIV SBPO - Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional, Rio de Janeiro - RJ*, 2012.
- [63] WAGELMANS, A.; van HOESEL, S. e KOLEN, A. Economic Lot Sizing: an $O(n \log n)$ Algorithm that Runs in Linear Time in the Wagner-Whitin Case. *Operations Research*, v.40, p.S145-S156, 1992.
- [64] WAGNER, H.M. e WHITIN, T.M. Dynamic version of the economic lot size model. *Management Science*, v.5(1), p.89-96, 1958.
- [65] WANG, P. Y. e WÄSCHER, G. Editorial on cutting and packing. *European Journal of Operational Research*, v.141(2), p.239-240, 2002.
- [66] WÄSCHER, G e GAU, T. Heuristics for the integer one-dimensional cutting stock problem: a computational study. *OR Spektrum*, v.18, p.131-144, 1996.
- [67] WÄSCHER, G; HAUBNER, H. e SCHUMANN, H. An improved typology of cutting and packing problems. *European Journal of Operational Research*, v.183, p.1109-1130, 2007.
- [68] WOLSEY, L. A. Progress with Single-Item lot-Sizing. *European Journal of Operational Research*, v.86, p.395-401, 1995.
- [69] WOLSEY, L.A. Solving multi-item lot-sizing problems with an MIP solver using classification and reformulation. *Management Science*, v. 48, p.1587-1602, 2002.

Autorizo a reprodução xerográfica para fins de pesquisa.

São José do Rio Preto, 15 de Março de 2013.

Aneliza Leandro Longhi