



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"

Câmpus de São José do Rio Preto

Eduardo da Fonseca Martins

Geometria de Superfícies de Revolução de Frontais

São José do Rio Preto
2024

Eduardo da Fonseca Martins

Geometria de Superfícies de Revolução de Frontais

Dissertação de Mestrado apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de São José do Rio Preto.

Orientadora: Profa. Dra. Luciana de Fátima Martins

Financiadora: CNPq - 131255/2022-3

São José do Rio Preto
2024

M386g Martins, Eduardo da Fonseca
Geometria de Superfícies de Revolução de Frontais /
Eduardo da Fonseca Martins. -- São José do Rio Preto, 2024
81 p. : il.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista
(UNESP), Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas,
São José do Rio Preto
Orientadora: Luciana de Fátima Martins

1. Matemática. 2. Geometria diferencial. 3. Singularidades
(Matemática). 4. Superfícies (Matemática). I. Título.

Eduardo da Fonseca Martins

Geometria de Superfícies de Revolução de Frontais

Dissertação de Mestrado apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de São José do Rio Preto.

Financiadora: CNPq - 131255/2022-3

Comissão Examinadora

Profa. Dra. Luciana de Fátima Martins
Orientadora

Prof. Dr. João Carlos Ferreira Costa
Departamento de Matemática - UNESP - Câmpus de São José do Rio Preto

Profa. Dra. Bruna Oréface Okamoto
ICMC - USP - Câmpus de São Carlos

São José do Rio Preto
24 de outubro 2024

AGRADECIMENTOS

Agradeço a toda minha família por terem incentivado a busca por conhecimento durante toda a minha vida. Em especial aos meus pais, Telma e Antônio, por apoiarem e acompanharem a minha educação até os dias de hoje, e ao meu irmão Thiago pelo companheirismo que cresce a cada dia. Tenho muitos motivos para agradecê-los, e registro neste trabalho o meu amor por cada um de vocês.

Agradeço a todos professores que fizeram parte desta caminhada. Ao professor Weber e à professora Juliana que, como tutor e colaboradora do PET durante os anos em que fui membro do programa, foram essenciais no meu desenvolvimento pessoal e acadêmico. Em especial agradeço à professora Luciana, que aceitou me orientar durante o mestrado, contribuindo imensamente ao meu desenvolvimento profissional, e tornado possível o desenvolvimento deste trabalho. Agradeço a todos pela confiança.

Agradeço também a todos os amigos que fizeram parte da minha história como aluno de graduação e mestrado no Ibilce. Ao grupo de amigos que fiz ao entrar na graduação em 2019, que auxiliaram o desenvolvimento de um bom aprendizado das matérias básicas do curso, e continuaram presentes durante toda a graduação. Aos amigos que os anos como integrante do PET me trouxeram, em especial Milena, Murillo, Guilherme Zahra, Maria Clara, Maria Fernanda e Sérgio, por serem uma parte fundamental da minha formação, e da minha vida. Também agradeço a todos amigos que fiz durante o mestrado. Em especial, agradeço à minha namorada Ana Gabriela, que me acompanha desde o início do mestrado, e me apoiou em todos os momentos desta caminhada.

Por último, agradeço ao professor João Carlos e à professora Bruna Oréfica por comporem a comissão examinadora deste trabalho, e ao Centro Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) por financiar os estudos por meio do processo 165080/2021-3.

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo estudar superfícies de revolução singulares, expandindo o entendimento clássico dessas superfícies no âmbito da geometria diferencial. Tradicionalmente, superfícies de revolução são estudadas tendo como curvas geratrizes, curvas regulares que não interceptam o eixo de rotação, garantindo assim que a superfície seja regular. No entanto, abordamos casos em que essas condições não sejam satisfeitas, obtendo assim superfícies singulares, e utilizamos ferramentas da teoria das singularidades para classificar os pontos singulares das superfícies a partir da análise de suas curvas geratrizes. O segundo capítulo oferece uma introdução às teorias de singularidades e de geometria diferencial clássica, introduzindo alguns resultados que relacionaremos com outros semelhantes nos estudos seguintes. No terceiro e no quarto capítulo, examinamos curvas e superfícies singulares. Introduzimos conceitos como frontais, frentes de onda, curvas de Legendre e “framed surfaces”, estabelecendo a base para o estudo das superfícies de revolução. No capítulo final estudamos superfícies de revolução de frontais. Apresentamos resultados, dentre eles os que fornecem maneiras de construir uma superfície de revolução com curvatura Gaussiana ou curvatura média dadas, e critérios para classificação de singularidades. Concluímos com informações sobre as superfícies focais e paralelas dessas superfícies de revolução, observando que ocorre algo similar com o caso de superfícies regulares. Os principais resultados deste trabalho estão nos artigos [7] e [15].

Palavras-chave: Geometria. Singularidades. Superfícies de Revolução. Curvas de Legendre. “Framed Surfaces”.

ABSTRACT

This work aims to study singular surfaces of revolution, expanding the classical understanding of these surfaces within the framework of differential geometry. Traditionally, these surfaces are studied having profile curves that are regular curves and do not intersect the axis of rotation, ensuring the regularity of the surface. However, we address cases where these conditions are not met, obtaining singular surfaces, and then use tools from singularity theory to classify the singular points of the surfaces by analyzing their profile curves. The second chapter provides an introduction to singularity theory and classical differential geometry, presenting some results that will be related to others in the following studies. In the third and fourth chapters, we examine singular curves and surfaces. We introduce concepts such as frontals, wavefronts, Legendre curves, and framed surfaces, establishing the foundation for the study of revolution surfaces. In the final chapter, we study revolution surfaces of frontals. We present results, including those that provide methods for constructing a surface of revolution with a given Gaussian curvature or mean curvature, and criteria for classifying singularities. We conclude with informations about the focal and parallel surfaces of these surfaces of revolution, noting that similar things occur when dealing with regular surfaces. The main results in this dissertation come from the papers [7] and [15].

Keywords: Geometry. Singularities. Surfaces of Revolution. Legendre Curves. Framed Surfaces.

Lista de Ilustrações

2.1	Gráficos de f e g representados em azul e vermelho, respectivamente. Fonte: Elaborada pelo autor.	13
2.2	Gráficos de f , f' e f'' , do Exemplo (2.9), em azul, vermelho e roxo, respectivamente. Fonte: Elaborada pelo autor.	15
2.3	Circunferência unitária à esquerda. Parábola no centro. Espiral logarítmica à direita. Fonte: Elaborada pelo autor.	16
2.4	γ com curvatura negativa à esquerda e positiva à direita. Fonte: Figura 2.1 de [1].	17
2.5	Parábola em azul e sua evoluta em preto na esquerda. Parábola em azul e suas curvas paralelas em outras cores no centro. Todas curvas simultaneamente na direita. Fonte: Elaborada pelo autor.	19
2.6	Traços das aplicações dos Exemplos (2.21), (2.22) e (2.23). Fonte: Elaborada pelo autor.	20
2.7	Superfície $f(u, v)$ em vermelho e folhas da focal em azul e verde. Fonte: Elaborada pelo autor.	24
2.8	Catenoide à esquerda; Superfície S do exemplo (2.38) à direita. Fonte: Elaborada pelo autor.	26
3.1	Cúspides do Exemplo (3.3). Fonte: Elaborada pelo autor.	29
3.2	$3/2$ -cúspide γ em azul. Evoluta de γ nos pontos regulares em preto. Curva paralela γ_λ em verde. Seção regular de γ_λ e evoluta nesses pontos em vermelho. Fonte: Elaborada pelo autor.	35
3.3	Na figura a esquerda temos a $3/2$ -cúspide em azul e sua evoluta em preto. No centro temos a cúspide em azul e algumas de suas curvas paralelas em outras cores. Na direita temos todas as curvas simultaneamente. Fonte: Elaborada pelo autor.	38
4.1	Traços das superfícies do Exemplo (4.3). Fonte: Elaborada pelo autor.	40
4.2	Na esquerda temos a superfície \mathbf{x} ($3/2$ -cuspidal edge) e duas de suas superfícies paralelas. No centro temos \mathbf{x} e sua superfície focal. A direita temos todas superfícies simultaneamente. Fonte: Elaborada pelo autor.	54
5.1	Esquerda: Superfícies de revolução \mathbf{x} e \mathbf{z} de uma curva que não cruza nenhum dos eixos. Centro: Superfícies de revolução \mathbf{x} e \mathbf{z} de uma curva que cruza o eixo x . Direita: Superfícies de revolução \mathbf{x} e \mathbf{z} de uma curva que cruza o eixo z . Fonte: Elaborada pelo autor.	59
5.2	Superfícies de revolução \mathbf{x} e \mathbf{z} de uma curva regular que passa pela origem. Fonte: Elaborada pelo autor.	59

5.3	Esquerda: Superfícies de revolução \mathbf{x} e \mathbf{z} de uma curva singular que não cruza nenhum dos eixos. Centro: Superfícies de revolução \mathbf{x} e \mathbf{z} de curvas que cruzam o eixo z e o eixo x , respectivamente. Direita: Superfícies de revolução \mathbf{x} e \mathbf{z} de uma curva singular que cruza ambos os eixos simultaneamente. Fonte: Elaborada pelo autor.	59
5.4	Tractriz γ , à esquerda, e pseudo-esfera \mathbf{z} , à direita. Fonte: Elaborada pelo autor.	66
5.5	Curva γ , à esquerda, e catenoide com singularidade, à direita. Fonte: Elaborada pelo autor.	67
5.6	Esquerda: Superfície \mathbf{z} descrita no item (a) do Exemplo (5.23). Direita: Superfície \mathbf{z} descrita no item (b) do Exemplo (5.23). Fonte: Elaborada pelo autor.	74
5.7	Tractriz em vermelho e duas de suas curvas paralelas à esquerda. Pseudo-esfera e duas de suas superfícies paralelas à direita. Fonte: Elaborada pelo autor.	77
5.8	Na esquerda temos a tractriz γ (azul) e sua evoluta (amarelo); Na direita temos a pseudo-esfera \mathbf{z} (vermelho) e sua superfície focal (azul). Fonte: Elaborada pelo autor.	79

Sumário

1	Introdução	10
2	Preliminares	12
2.1	Teoria de Singularidades	12
2.1.1	Germes de aplicações suaves	12
2.1.2	Grupos de Mather	13
2.1.3	Classificação de germes	14
2.2	Geometria Diferencial	15
2.2.1	Curvas regulares	15
2.2.2	Curvas paralelas e evolutas	18
2.2.3	Superfícies regulares	19
2.2.4	Teoremas de existência e unicidade	22
2.2.5	Superfícies paralelas e focais	23
2.3	Superfícies de revolução	24
2.3.1	Introdução	24
2.3.2	Superfícies paralelas e focais	26
3	Curvas de Legendre	28
3.1	Frontais e frentes de onda	28
3.2	Definições e resultados iniciais	29
3.3	Paralelas e evolutas	32
4	Framed Surfaces	39
4.1	Frontais e frentes de onda	39
4.2	Definições e exemplos	41
4.3	Teoremas fundamentais para framed surfaces	45
4.4	Curvaturas de framed surfaces	47
4.5	Superfícies paralelas e focais de uma framed surface	52
5	Superfícies de Revolução de Frontais	55
5.1	Resultados iniciais	55
5.2	Superfícies de revolução com curvatura dada	61
5.3	Problemas de classificação	67
5.4	Superfícies paralelas e focais	76
6	Conclusão	80
	Referências	81

1 Introdução

Uma superfície clássica na geometria diferencial é a superfície de revolução. Essas superfícies são geradas pela rotação de curvas em torno de uma reta, e para seu estudo com as ferramentas usuais da geometria diferencial de superfícies regulares, toma-se a curva geratriz sendo regular e não cruzando o eixo de rotação. Dessa maneira, a superfície obtida é regular. O objetivo deste trabalho é o estudo da geometria de superfícies de revolução de curvas que não necessariamente satisfaçam essas condições, ou seja, curvas singulares ou que cruzam o eixo de rotação. Além disso, veremos que é possível classificar as singularidades dessas superfícies através do estudo das singularidades de sua curva geratriz.

O Capítulo 2 conta com definições e resultados introdutórios para o entendimento dos capítulos seguintes, tendo como referências os livros [2] e [8]. De início apresentamos os conceitos necessários da teoria de singularidades, e alguns resultados que utilizaremos ao longo do trabalho. Em seguida apresentamos um resumo da teoria clássica de geometria diferencial, além de estudar brevemente a evoluta de uma curva e o conjunto focal de uma superfície. Na última seção definimos superfícies de revolução regulares e apresentamos alguns resultados já conhecidos.

No Capítulo 3 tratamos de uma categoria de curvas singulares, tendo como principais referências os artigos [5] e [6]. Primeiramente apresentamos a definição de curvas que são frontais e frentes de onda, um conceito muito utilizado nesse estudo, seguido de alguns exemplos. Em seguida definimos curvas de Legendre e sua curvatura, e apresentamos os teoremas de existência e unicidade para uma curva de Legendre, comparando com o resultado clássico de curvas regulares. Utilizaremos este ponto de vista para estudar as curvas geratrizes das superfícies de revolução no capítulo final. Por último definiremos curvas paralelas e evolutas de uma curva de Legendre.

O Capítulo 4 tem como referência principal o artigo [7] e é destinado ao estudo de uma categoria de superfícies em \mathbb{R}^3 que possui uma base ortonormal bem definida ao longo de seus pontos. Essas superfícies são chamadas *framed surfaces*. Esse estudo é importante pois, como veremos, superfícies de revolução de curvas de Legendre são *framed surfaces*. Assim como feito no capítulo anterior, começamos definindo superfícies que são frontais e frentes de onda. Em seguida veremos a definição de *framed surfaces*, seus invariantes básicos, e teoremas de existência e unicidade. Definiremos também as curvaturas de uma framed surface, e finalizamos o capítulo com a definição das superfícies paralelas e focais de uma framed surface.

O capítulo final é o principal do trabalho, e tem como principal referência o artigo [15]. Nele estudaremos as superfícies de revolução de frontais. A princípio veremos alguns resultados que fornecem critérios para que superfícies de revolução de uma frontal sejam frentes ou apenas frontais. Na próxima seção apresentaremos teoremas de construção de

superfícies de revolução com curvaturas dadas. Em seguida discutiremos problemas de classificação para as singularidades de uma superfície de revolução, obtendo critérios que utilizam as singularidades da curva geratriz. Por último, finalizamos o trabalho estudando as superfícies paralelas e focais de uma superfície de revolução como framed surface, e veremos que assim como para superfícies de revolução regulares, as superfícies paralelas são dadas pelas superfícies de revolução das curvas paralelas da curva geratriz, e seu conjunto focal é formado pela superfície de revolução da evoluta da curva geratriz, e pela superfície que está contido no eixo de revolução.

As imagens apresentadas ao longo deste trabalho foram feitas utilizando o programa Mathematica[®].

2 Preliminares

Neste primeiro capítulo apresentamos definições e resultados que são essenciais para o nosso estudo. Na primeira seção, introduzimos conceitos fundamentais da Teoria de Singularidades, como germes e \mathcal{A} -equivalência para aplicações. Na segunda seção, revisamos a Geometria Diferencial de superfícies regulares. Finalmente, na última seção, discutimos definições e resultados específicos relativos a superfícies de revolução regulares, com o intuito de relacioná-los ao caso singular que será estudado nos capítulos centrais do trabalho. As principais referências utilizadas neste capítulo foram, [2] e [8].

2.1 Teoria de Singularidades

Nesta seção, a fim de estudar conjuntos e aplicações localmente, discutiremos o conceito de germes. Além disso, apresentaremos algumas ferramentas da teoria de singularidades para a classificação dos pontos singulares de aplicações suaves, como as relações de equivalência entre germes geradas pela composição de difeomorfismos locais.

2.1.1 Germes de aplicações suaves

Ao longo deste trabalho buscamos estudar algumas propriedades locais de curvas e superfícies. Para isso, utilizamos o conceito de germes que, dada uma aplicação f , reduz todas outras aplicações que coincidem com f em torno de algum ponto a apenas uma classe de equivalência. Deste modo, trabalhar com germes nos fornece uma maneira de estudar todos os representantes de uma mesma classe através de um único germe em torno de um ponto. A referência utilizada no estudo de germes foi o livro [10].

Definição 2.1. Sejam X e Y subconjuntos de \mathbb{R}^n contendo $p \in \mathbb{R}^n$. Dizemos que X é **equivalente** a Y se existe um conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^n$, com $p \in U$, tal que $X \cap U = Y \cap U$.

Definição 2.2. Sejam U, V abertos em \mathbb{R}^n contendo $p \in \mathbb{R}^n$, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $g : V \rightarrow \mathbb{R}^m$ aplicações suaves. Dizemos que f é **equivalente** a g , se existe um aberto $W \subset U \cap V$, tal que $f|_W = g|_W$. Denotaremos por $f \sim g$.

As definições acima geram relações de equivalência nos subconjuntos de \mathbb{R}^n que contém p , e no conjunto das aplicações de \mathbb{R}^n em \mathbb{R}^m . A classe de equivalência de um subconjunto X é chamada de **germe** de X em p e é denotada por (X, p) . Já a classe de equivalência da aplicação f também é chamada de **germe** da aplicação f e é denotada por $f : (\mathbb{R}^n, p) \rightarrow \mathbb{R}^m$. Quando queremos explicitar que $f(p) = q$, denotamos por $f : (\mathbb{R}^n, p) \rightarrow (\mathbb{R}^m, q)$. Além disso, o germe de uma aplicação f é chamado de **suave** (respectivamente, **germe de difeomorfismo**) se um de seus representantes, e desta maneira todos, é suave em p (respectivamente, um difeomorfismo local em p).

Exemplo 2.3. Sejam $f : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ funções dadas por $f(x) = x^2$ e $g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \in (-1, 1) \\ 1 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus (-1, 1) \end{cases}$.

Note que na vizinhança $(-1, 1)$ de 0, temos $f(x) = g(x)$, ou seja, $f \sim g$. Os gráficos de f e g estão representados na figura (2.1). \diamond

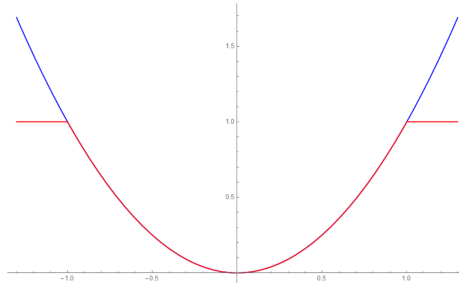


Figura 2.1: Gráficos de f e g representados em azul e vermelho, respectivamente. Fonte: Elaborada pelo autor.

Denotamos por \mathcal{E}_n o conjunto dos germes de funções suaves na origem de \mathbb{R}^n , e por $\mathcal{E}(n, m)$ o conjunto de todos os germes de aplicações suaves de \mathbb{R}^n em \mathbb{R}^m . Note que $\mathcal{E}_n = \mathcal{E}(n, 1)$. É possível verificar que estão bem definidas as operações de adição e multiplicação em \mathcal{E}_n , geradas pelas operações usuais de funções, e que com essa estrutura \mathcal{E}_n é uma \mathbb{R} -álgebra, isto é, tem estrutura de um anel comutativo com unidade e de um espaço vetorial real.

Já $\mathcal{E}(n, m)$ é um \mathcal{E}_n -módulo, ou seja, um grupo abeliano em relação a adição, gerada pela adição usual de aplicações, e para todo $f \in \mathcal{E}_n$ e $g \in \mathcal{E}(n, m)$, temos que $fg \in \mathcal{E}(n, m)$.

Agora seja $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação suave. Dizemos que f é **singular** em p , se o posto da sua diferencial df_p não é máximo. Se um dos representantes de um germe $f : (\mathbb{R}^m, p) \rightarrow \mathbb{R}^m$ é singular em p , então o germe em si é chamado de singular em p .

2.1.2 Grupos de Mather

Para classificar as singularidades de um germe, utilizamos os grupos de Mather, que definem relações de equivalência entre germes.

Seja \mathcal{R} o grupo de $\mathcal{E}(n, m)$ com relação a composição, formado pelos germes de difeomorfismos φ de \mathbb{R}^n tais que $\varphi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, onde $\mathbf{0}$ é a origem de \mathbb{R}^n . Este grupo é chamado de grupo de mudanças de coordenadas no domínio (ou fonte). De maneira análoga, o grupo \mathcal{L} de $\mathcal{E}(n, m)$ formado pelos germes de difeomorfismo ψ de \mathbb{R}^m tais que $\psi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ é chamado de grupo de mudanças de coordenadas na imagem (ou meta). A partir desses conjuntos definimos as relações de equivalência a seguir.

Definição 2.4. Dois germes $f, g : (\mathbb{R}^n, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^m, \mathbf{0})$ são **\mathcal{R} -equivalentes** se existe $\varphi \in \mathcal{R}$ tal que $g = f \circ \varphi^{-1}$. Dizemos que os germes são **\mathcal{L} -equivalentes** se existe $\psi \in \mathcal{L}$ tal que $g = \psi \circ f$. Denotaremos por $f \sim_{\mathcal{R}} g$ e $f \sim_{\mathcal{L}} g$, respectivamente.

Individualmente, as equivalências poder ser utilizadas para a classificação das singularidades, mas também é possível utilizá-las simultaneamente. Para isso, definimos o grupo de mudanças de coordenadas no domínio e na imagem como sendo o produto de \mathcal{R} e \mathcal{L} , isto é, $\mathcal{A} = \mathcal{R} \times \mathcal{L}$.

Definição 2.5. Dois germes $f, g : (\mathbb{R}^n, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^m, \mathbf{0})$ são **\mathcal{A} -equivalentes** se existe $(\varphi, \psi) \in \mathcal{A}$ tal que $g = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$.

2.1.3 Classificação de germes

Definida a \mathcal{R} -equivalência em \mathcal{E}_1 , queremos encontrar uma classificação para as classes geradas por essa relação, de modo que o representante seja o mais simples possível, ou seja, encontrar uma **forma normal** para a classe. Inicialmente consideramos a seguinte definição.

Definição 2.6. Seja $f : (\mathbb{R}, t_0) \rightarrow \mathbb{R}$ um germe em t_0 e k um número inteiro positivo. Dizemos que f é uma **singularidade A_k** em t_0 , ou que t_0 é um **zero de ordem $k + 1$** , se $f^{(i)}(t_0) = 0$, para $1 \leq i \leq k$ e $f^{(k+1)}(t_0) \neq 0$, onde $f^{(i)} = d^i f / dt^i$. Além disso f é uma singularidade A_0 se $f'(t_0) \neq 0$, e uma singularidade $A_{\geq k}$ quando $f^{(i)}(t_0) = 0$, para $1 \leq i \leq k$. Denotamos a ordem de f em t_0 por $\text{ord}(f)(t_0)$.

Exemplo 2.7. Considere a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(t) = t^k$. Observe que

$$\frac{d^n f}{dt^n}(t) = \frac{k!}{(k-n)!} t^{k-n},$$

para $n \leq k$. Portanto, em $t = 0$, $f(0) = 0$, $f^{(n)}(0) = 0$ para $n < k$ e $f^{(k)}(0) = k! \neq 0$, isto é, f tem ordem k em $t = 0$. \diamond

Um resultado fundamental para funções com singularidades A_k , e que será utilizado durante o trabalho, é conhecido como Lema de Hadamard e será enunciado a seguir.

Teorema 2.8. (Lema de Hadamard) *Seja $f : (\mathbb{R}, t_0) \rightarrow \mathbb{R}$ um germe em t_0 . Se f é uma singularidade $A_{\geq k-1}$ em t_0 , com $k \geq 2$, então existe $h : (\mathbb{R}, t_0) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(t) = f(t_0) + (t - t_0)^k h(t)$. Além disso, f é uma singularidade A_{k-1} se, e somente se, $h(t_0) \neq 0$.*

O Teorema (2.8) nos permite encontrar a forma normal de todo germe $f \in \mathcal{E}_1$ em torno de 0 tal que f seja uma singularidade A_{k-1} em 0 e $f(0) = 0$. Este resultado é conhecido como *Teorema de Classificação*, e garante que se um germe $f : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ é uma singularidade A_k em 0, então f é \mathcal{R} -equivalente a $\pm x^k$, onde o sinal é dado pelo sinal de $f^{(k)}(0)$.

Nem todo germe $f : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(0) = 0$ é uma A_k singularidade. Abaixo apresentamos um exemplo clássico de um germe que chamamos de **germe chato**, isto é, um germe g tal que $g^{(k)}(0) = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Exemplo 2.9. Seja $f : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ um germe tal que $f(t) = e^{\frac{1}{t}}$ para $t > 0$ e $f(t) = 0$ para todo $t \leq 0$. É possível verificar por indução que $f^{(k)}(0) = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Os gráficos de f e suas derivadas de primeira e segunda ordem estão ilustrados na imagem (2.2). \diamond

Definiremos nos capítulos seguintes, quando apresentarmos os exemplos, algumas classificações para germes de aplicações de \mathbb{R} em \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^2 em \mathbb{R}^3 , ou seja, curvas e superfícies respectivamente.

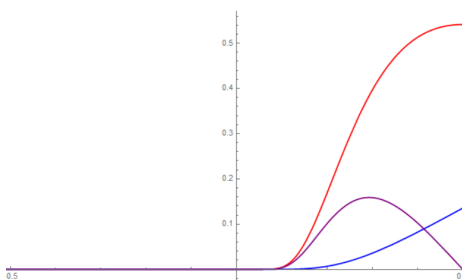


Figura 2.2: Gráficos de f , f' e f'' , do Exemplo (2.9), em azul, vermelho e roxo, respectivamente. Fonte: Elaborada pelo autor.

2.2 Geometria Diferencial

Nesta seção recordaremos definições e resultados clássicos da geometria diferencial de curvas e superfícies regulares, com o intuito de compará-los com os obtidos para curvas e superfícies singulares. As referências utilizadas nesta seção foram [2] e [8].

2.2.1 Curvas regulares

Daremos foco para o estudo de curvas regulares planas e suas propriedades, mas consideraremos essas curvas imersas no espaço tri-dimensional quando trabalharmos com as curvas geratrizes de superfícies de revolução.

Definição 2.10. Um subconjunto $C \subset \mathbb{R}^2$ é dito uma **curva regular plana** se para cada $p \in C$, existem um aberto $V \subset \mathbb{R}^2$, tal que $p \in V$, um intervalo $I \subset \mathbb{R}$ e $\gamma : I \rightarrow V \cap C$ um homeomorfismo diferenciável tal que $\gamma'(t)$ é não nulo para todo $t \in I$.

O homeomorfismo γ é chamado de **parametrização** de C em p . Ao longo deste trabalho iremos estudar a geometria de curvas majoritariamente através de suas parametrizações. Para isso temos a seguinte definição.

Definição 2.11. Uma **curva parametrizada diferenciável no plano** é uma aplicação $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe C^∞ onde I é um intervalo. A curva γ é dita **regular** se $\gamma'(t)$ é não nulo para todo t . Um ponto t_0 é dito **singular** se $\gamma'(t_0) = (0, 0)$.

Deste ponto em diante, iremos nos referir a curvas parametrizadas regulares apenas por curvas regulares, sempre que não causar confusão.

Exemplo 2.12. (a) A circunferência unitária S^1 é uma curva regular. Temos $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\gamma(s) = (\cos(s), \sin(s))$ uma parametrização de S^1 . Observe que nesse caso γ não é injetora (Figura (2.3), esquerda).

(b) Seja $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = x^2\}$, então C é uma curva regular, com parametrização $\gamma(t) = (t, t^2)$ (Figura (2.3), centro).

(c) A espiral logarítmica E , é uma curva regular parametrizada por

$$\gamma(t) = (ae^{bt} \cos(t), ae^{bt} \sin(t)),$$

onde $t \in \mathbb{R}$, $a > 0$ e $b < 0$ (Figura (2.3), direita).

◇

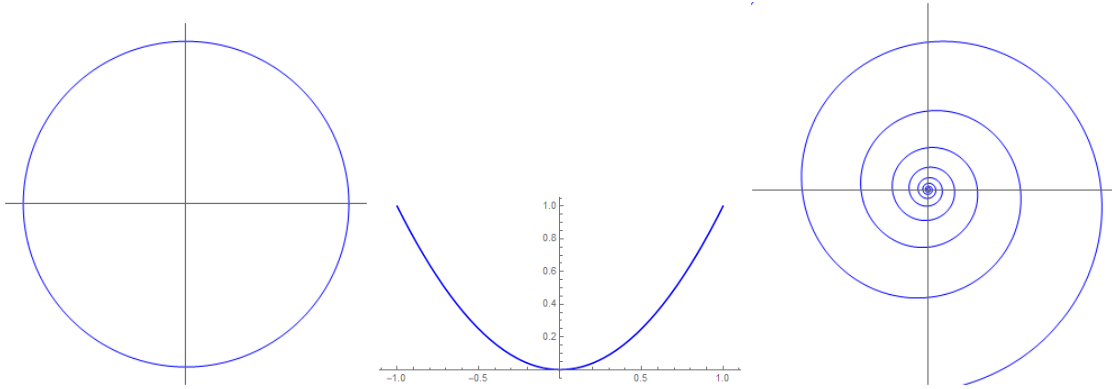


Figura 2.3: Circunferência unitária à esquerda. Parábola no centro. Espiral logarítmica à direita. Fonte: Elaborada pelo autor.

Se $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma curva regular, podemos reparametrizar γ por um difeomorfismo $h : J \rightarrow I$ de modo que $\gamma \circ h : J \rightarrow \mathbb{R}^2$ satisfaz $\|\gamma'(h(s))\| = 1$, para todo $s \in J$. O parâmetro s é chamado de comprimento de arco, e dizemos que γ está parametrizada por comprimento de arco. Um exemplo é a parametrização γ da circunferência \mathbb{S}^1 dada no exemplo (2.12). Observe que uma mudança de parâmetros h pode alterar a orientação de γ , isto é $\gamma'(t)$ e $\gamma'(h(u))$ podem apontar para sentidos opostos.

Suponhamos que γ é uma curva regular em \mathbb{R}^2 parametrizada por comprimento de arco. Denotamos por $\mathbf{t}(s)$ o vetor tangente unitário $\mathbf{t}(s) = \gamma'(s)$, e por $\mathbf{n}(s) = J(\mathbf{t}(s))$ o vetor normal unitário de γ , onde J é a rotação no sentido antihorário por um ângulo de $\pi/2$ em \mathbb{R}^2 . Observe que $\mathbf{t}(s)$ e $\mathbf{n}(s)$ são ortogonais por definição. Além disso, como $|\mathbf{t}(s)|^2 = \langle \mathbf{t}(s), \mathbf{t}(s) \rangle = 1$, para todo s , então $\langle \mathbf{t}(s), \mathbf{t}'(s) \rangle = 0$, para todo s , ou seja, $\mathbf{t}'(s)$ é ortogonal a $\mathbf{t}(s)$ e paralelo a $\mathbf{n}(s)$. Analogamente $\mathbf{n}'(s)$ é ortogonal a $\mathbf{n}(s)$ e paralelo a $\mathbf{t}(s)$. Portanto podemos escrever $\mathbf{t}'(s)$ e $\mathbf{n}'(s)$ como nas seguintes equações, mais conhecidas como *Fórmulas de Frenet*.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{t}'(s) \\ \mathbf{n}'(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa(s) \\ -\kappa(s) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{t}(s) \\ \mathbf{n}(s) \end{pmatrix},$$

onde $\kappa(s) = \langle \mathbf{t}'(s), \mathbf{n}(s) \rangle$ é chamada de **curvatura** da curva γ . Mesmo se γ não parametrizada por comprimento de arco podemos definir $\mathbf{t}(t) = \gamma'(t)/\|\gamma'(t)\|$ e $\mathbf{n}(t) = J(\mathbf{t}(t))$. Da mesma maneira são obtidas as Fórmulas de Frenet abaixo:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{t}'(t) \\ \mathbf{n}'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \|\gamma'(t)\|\kappa(t) \\ -\|\gamma'(t)\|\kappa(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{t}(t) \\ \mathbf{n}(t) \end{pmatrix}, \quad (2.1)$$

onde $\kappa(t) = \det(\gamma'(t), \gamma''(t))/\|\gamma'(t)\|^3$ é a curvatura da curva γ em t . Dizemos que um ponto $t_0 \in I$ é **ponto de inflexão** de γ se $\kappa(t_0) = 0$, e dizemos que é um **vértice** de γ se $\kappa'(t_0) = 0$. Observamos que $\kappa(t)$ independe da parametrização a menos de sinal, isto é, ela coincide com a curvatura de qualquer reparametrização de γ que preserve sua orientação. A figura (2.4) nos dá exemplos de uma curva γ parametrizada com curvatura negativa à esquerda, e positiva à direita.

As definições e exemplos acima são de curvas planas. A seguir definiremos curvas regulares espaciais para posteriormente considerarmos curvas planas como curvas no espaço.

Definição 2.13. (a) Um subconjunto $C \in \mathbb{R}^3$ é uma **curva regular espacial** se para

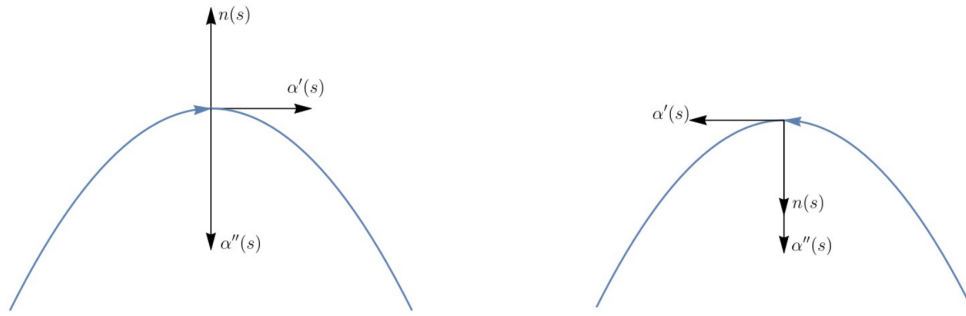


Figura 2.4: γ com curvatura negativa à esquerda e positiva à direita. Fonte: Figura 2.1 de [1].

cada $p \in C$ existem V aberto de \mathbb{R}^3 , com $p \in V$, um intervalo $I \subset \mathbb{R}$ e $\gamma : I \rightarrow V \cap C$ um homeomorfismo diferenciável tal que $\gamma'(t)$ é não nulo para todo $t \in I$.

- (b) Uma **curva parametrizada diferenciável no espaço** é uma aplicação de classe C^∞ $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, onde I é um intervalo de \mathbb{R} . A curva γ é chamada de regular se $\gamma'(t)$ é não nulo para todo t , ou seja, se $\gamma(I)$ é uma curva regular. Um ponto t_0 é dito singular se $\gamma'(t_0) = (0, 0)$.

Como visto para curvas planas, podemos reparametrizar uma curva γ por comprimento de arco, ou seja, $\|\gamma'(s)\| = 1$, para todo s . Observamos novamente que uma mudança de parâmetros h pode alterar a orientação de γ .

Seja γ uma curva regular em \mathbb{R}^3 parametrizada por comprimento de arco, definimos por $\mathbf{t}(s) = \gamma'(s)$ o vetor tangente unitário de γ . Assim como observado para curvas planas, $\mathbf{t}'(s) = \gamma''(s)$ é ortogonal a $\mathbf{t}(s)$, pelo fato de \mathbf{t} ser unitário. Sendo assim, o vetor normal de curvas regulares espaciais é definido como $\mathbf{n}(s) = \gamma''(s)/\|\gamma''(s)\|$ e o número $\|\gamma''(s)\| = \kappa(s)$ é chamado de curvatura da curva γ . Note que para curvas espaciais a curvatura $\kappa(s)$ é sempre positiva.

Temos dois vetores ortogonais e unitários definidos para γ , e através do produto vetorial em \mathbb{R}^3 , obtém-se um terceiro vetor unitário $\mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}(s)$ de modo que são ortogonais dois a dois, e a base $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$ é positivamente orientada. O vetor $\mathbf{b}(s)$ é chamado de vetor binormal de γ em s . Abaixo estão as *Fórmulas de Frenet* para curvas no espaço.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{t}'(s) \\ \mathbf{n}'(s) \\ \mathbf{b}'(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa(s) & 0 \\ -\kappa(s) & 0 & -\tau(s) \\ 0 & \tau(s) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{t}(s) \\ \mathbf{n}(s) \\ \mathbf{b}(s) \end{pmatrix},$$

onde o número $\tau(s) = \langle \mathbf{b}(s), \mathbf{n}(s) \rangle$ é chamado de **torção** de γ em s . Caso γ não esteja parametrizada por comprimento, também é possível definir os vetores tangente, normal e binormal (este resultado é apresentado no Teorema (7.13) de [8]). Uma interpretação geométrica da curvatura e da torção de uma curva pode ser encontrada em [2].

Toda curva regular plana pode ser vista como uma curva regular no espaço. Basta considerar uma parametrização $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ da curva, e teremos assim parametrização $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $\beta(t) = (x(t), y(t), 0)$ para essa curva em \mathbb{R}^3 . Assim, dizemos que uma curva $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ é **plana** se existir um plano $\Pi \subset \mathbb{R}^3$ contendo $\gamma(I)$. Nesse caso, Π é o plano gerado por γ' e \mathbf{n} , e $\tau(t) = 0$ para todo $t \in I$.

Para uma curva regular, as funções curvatura e torção, κ e τ , são unicamente definidas. Reciprocamente, dadas duas funções suaves κ e τ , existe uma curva, a menos de uma

translação e rotação. Esse resultado é conhecido como *Teorema Fundamental da Teoria Local das Curvas*, enunciado mais rigorosamente abaixo.

Teorema 2.14. (Teorema Fundamental da Teoria Local das Curvas, [2]) *Sejam $\kappa : I \rightarrow \mathbb{R}$ e $\tau : I \rightarrow \mathbb{R}$ funções diferenciáveis, tais que $\kappa(s) > 0$, $s \in I$. Então existe uma curva parametrizada regular $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, tal que s é o comprimento de arco e $\kappa(s)$ e $\tau(s)$ são a curvatura e torção de γ em s , respectivamente. Além disso, γ é única a menos de um movimento rígido.*

Para o caso de curvas planas temos a seguinte restrição do teorema anterior:

Teorema 2.15. (Teorema Fundamental das Curvas Planas, [8], Teorema 5.14) *Dada uma função suave $\kappa : I \rightarrow \mathbb{R}$, existe uma curva $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ parametrizada por comprimento de arco onde:*

$$\begin{cases} \gamma(s) = \left(\int \cos \theta(s) ds + c, \int \sin \theta(s) ds + d \right), \\ \theta(s) = \int \kappa(s) ds + \theta_0, \end{cases}$$

Resultados semelhantes aos Teorema (2.14) e (2.15) serão apresentados nos capítulos centrais do trabalho.

2.2.2 Curvas paralelas e evolutas

Considere $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular plana, e $t_0 \in I$ tal que $\kappa(t_0) \neq 0$. O número real $R(t_0) = 1/|\kappa(t_0)|$ é chamado de **raio de curvatura** de γ em t_0 , e o ponto $C(t_0) = \gamma(t_0) + (1/\kappa(t_0))\mathbf{n}(t_0)$ é chamado de **centro de curvatura** de γ em t_0 . Conhecendo esses conceitos, definem-se duas curvas originadas de uma de γ chamadas de curvas paralelas e evoluta.

Definição 2.16. Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular e $\mathbf{n} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ seu vetor normal unitário.

- (a) Se $\kappa(t) \neq 0$, para todo $t \in I$, os centros de curvatura $C(t)$ descrevem uma curva chamada de **evoluta** de γ , a qual denotamos por $\mathcal{E}(\gamma)$, ou seja,

$$\mathcal{E}(\gamma)(t) = \gamma(t) + \frac{1}{\kappa(t)}\mathbf{n}(t).$$

- (b) Dado $\lambda \in \mathbb{R}$, a curva $\gamma_\lambda : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\gamma_\lambda(t) = \gamma(t) + \lambda\mathbf{n}(t)$ é chamada de **curva paralela** à curva γ .

Observação 2.17. Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular com $\kappa(t) \neq 0$, para todo $t \in I$. É possível verificar que dado $\lambda \in \mathbb{R}$, a curva paralela γ_λ é regular em $t_0 \in I$ se, e somente se, $\lambda \neq 1/\kappa(t_0)$. Em outras palavras, γ_λ é singular em t_0 se, e somente se, $\gamma_\lambda(t_0)$ pertence ao traço da evoluta de γ . Para a evoluta de γ , é possível verificar que $\mathcal{E}(\gamma)$ é regular em $t_0 \in I$ se, e somente se, $\kappa'(t_0) \neq 0$, ou seja, se t_0 não é um vértice. \diamond

A observação acima nos diz que os pontos singulares da família de curvas $\{\gamma_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ descrevem a evoluta da curva γ . A seguir apresentamos visualmente exemplos de curvas paralelas e evoluta da parábola $y = x^2$ e na figura (2.5) a direita podemos observar esse fato.

Exemplo 2.18. Seja γ dada no Exemplo (2.12) (b), abaixo temos a evoluta de γ e algumas de suas curvas paralelas. \diamond

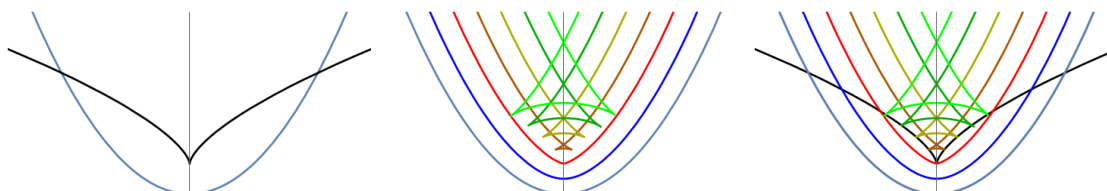


Figura 2.5: Parábola em azul e sua evoluta em preto na esquerda. Parábola em azul e suas curvas paralelas em outras cores no centro. Todas curvas simultaneamente na direita. Fonte: Elaborada pelo autor.

2.2.3 Superfícies regulares

Nessa subseção apresentaremos definições, exemplos, propriedades e resultados clássicos do estudo de superfícies regulares. Começamos pela definição e alguns exemplos.

Definição 2.19. Um subconjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ é uma **superfície regular** se, para todo $p \in S$, existe um aberto $V \subset \mathbb{R}^3$ com $p \in V$ e uma aplicação diferenciável $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S \cap V$, definida no aberto U , tal que:

- (1) $\mathbf{x} : U \rightarrow S \cap V$ é um homeomorfismo;
- (2) $d\mathbf{x}_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é injetora para todo $q \in U$.

A aplicação \mathbf{x} é chamada de **parametrização** de S em p .

Assim como para curvas, podemos estudar as propriedades locais de uma superfícies utilizando suas parametrizações. Para isso consideramos a seguinte definição.

Definição 2.20. Uma **superfície parametrizada** $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma aplicação diferenciável de um conjunto aberto U em \mathbb{R}^3 . O conjunto $\mathbf{x}(U)$ é chamado **traço** de \mathbf{x} . Ainda, \mathbf{x} é regular se a diferencial $d\mathbf{x}_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é injetora, para todo $q \in U$.

Ao longo do trabalho iremos nos referir a superfícies parametrizadas regulares apenas como superfícies regulares, desde que fique claro. A seguir temos alguns exemplos.

Exemplo 2.21. O parabolóide $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = x^2 + y^2\}$ (Figura (2.6), esquerda) é uma superfície regular, com parametrização $\mathbf{x} : \mathbb{R}^2 \rightarrow P \cap \mathbb{R}^3 = P$ dada por $\mathbf{x}(x, y) = (x, y, x^2 + y^2)$. \diamond

Exemplo 2.22. O toro de revolução T (Figura (2.6), centro) obtido pela rotação do círculo de centro $(0, a, 0)$ e raio r é uma superfície regular. Diferentemente do parabolóide P , o toro não pode ser coberto com apenas uma parametrização. Apresentaremos essas parametrizações na próxima seção. \diamond

Exemplo 2.23. Seja $\mathbf{x} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ a aplicação diferenciável dada por $\mathbf{x}(u, v) = (u, v, u^3 - 3uv)$. Temos que \mathbf{x} é uma superfície regular, conhecida como sela de macaco (Figura (2.6), direita). \diamond

Observação 2.24. A condição 2) é equivalente a dizer que $\mathbf{x}_u(q) \times \mathbf{x}_v(q) \neq (0, 0, 0)$, $\forall q \in U$, onde \mathbf{x}_u e \mathbf{x}_v são as derivadas de \mathbf{x} em relação as variáveis u e v . Ou ainda, $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ é um conjunto L.I. e nos garante a existência de um plano gerado por essa base, o qual será chamado de plano tangente de S em $\mathbf{x}(p)$. \diamond

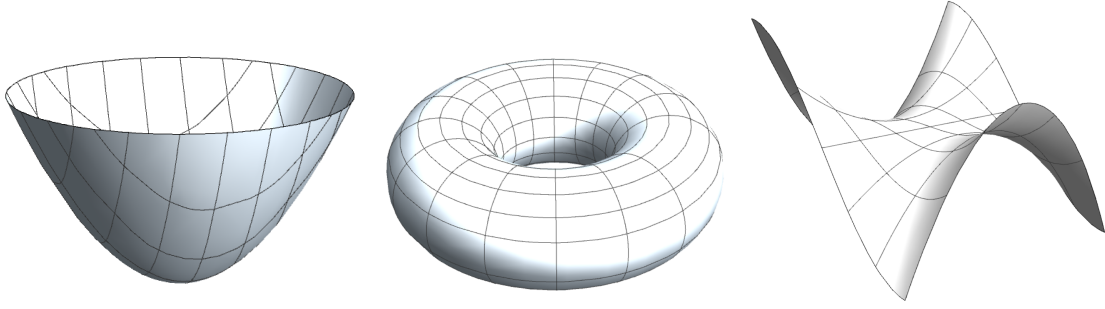


Figura 2.6: Traços das aplicações dos Exemplos (2.21), (2.22) e (2.23). Fonte: Elaborada pelo autor.

A seguir serão apresentadas as definições e construções das aplicações utilizadas no estudo da geometria de superfícies, como suas curvaturas Gaussiana e média.

Definição 2.25. Sejam $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular, $p \in S$. O **plano tangente** a S em p é o subespaço vetorial do \mathbb{R}^3 formado pelos vetores tangentes a S em p , e denotado por $T_p S$. Dada uma parametrização $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbf{x}(U)$ de S em $p = \mathbf{x}(q)$, temos que $d\mathbf{x}_q(\mathbb{R}^2) = T_p S$.

A existência do plano tangente em cada ponto nos permite definir localmente um campo diferenciável de vetores normais unitários à S , sendo o vetor normal ao plano tangente em cada ponto, isto é, $N(u, v) = \mathbf{x}_u(u, v) \times \mathbf{x}_v(u, v) / \|\mathbf{x}_u(u, v) \times \mathbf{x}_v(u, v)\|$, onde \mathbf{x} é uma parametrização com $p = \mathbf{x}(q)$. Se existe um campo de vetores normais unitários diferenciável em toda a superfície, dizemos que S é **orientável** e que N é a **aplicação normal de Gauss** de S . Utilizando o produto vetorial induzido em $T_p S$, são definidas duas aplicações essenciais no estudo da geometria de superfícies, a primeira e a segunda formas fundamentais.

Definição 2.26. Sejam S uma superfície regular, $p \in S$.

- (a) A forma quadrática $I : T_p S \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $I(v) = \langle v, v \rangle$ é chamada de **primeira forma fundamental** da superfície S em p .
- (b) Suponha S orientável, e seja N sua aplicação normal de Gauss. A forma quadrática $II : T_p S \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $II(v) = -\langle dN_p(v), v \rangle$ é chamada de **segunda forma fundamental** da superfície S em p .

Dada uma parametrização \mathbf{x} para a superfície S , podemos expressar as formas fundamentais em relação à base $\{\mathbf{x}_u(q), \mathbf{x}_v(q)\}$ do plano tangente. Para isso, seja $w = (a, b) \in T_p S$ e considere as seguintes aplicações:

$$\begin{aligned} E(q) &= \langle \mathbf{x}_u(q), \mathbf{x}_u(q) \rangle; & l(q) &= \langle -N_u(q), \mathbf{x}_u(q) \rangle = \langle N(q), \mathbf{x}_{uu}(q) \rangle; \\ F(q) &= \langle \mathbf{x}_u(q), \mathbf{x}_v(q) \rangle; & m(q) &= \langle -N_u(q), \mathbf{x}_v(q) \rangle = \langle N(q), \mathbf{x}_{uv}(q) \rangle; \\ G(q) &= \langle \mathbf{x}_v(q), \mathbf{x}_v(q) \rangle; & n(q) &= \langle -N_v(q), \mathbf{x}_v(q) \rangle = \langle N(q), \mathbf{x}_{vv}(q) \rangle. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Dessa forma é possível verificar que as formas fundamentais são dadas por $I(w) = a^2 E(q) + 2abF(q) + b^2 G(q)$ e $II(w) = al(q) + 2abm(q) + bn(q)$ onde $p = \mathbf{x}(q)$. As funções E, F, G são chamadas de coeficientes da primeira forma fundamental, e satisfazem $E > 0$, $G > 0$ e $EG - F^2 > 0$. Do mesmo modo as funções l, m, n são chamadas de coeficientes da segunda forma fundamental.

Tendo definidas as aplicações I e II , é possível definir a aplicação $\kappa_{n_p} : T_p S \rightarrow \mathbb{R}$ chamada de **curvatura normal** de S em p , que para cada vetor $v \in T_p S$, associa o valor $\kappa_{n_p}(v) = II_p(v)/I_p(v)$. Uma motivação e uma construção mais rigorosa para a definição dessa aplicação pode ser encontrada em [2]. Desta definição, temos que $\kappa_{n_p}(v) = \kappa_{n_p}(\lambda v)$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, ou seja, podemos considerar κ_{n_p} apenas no compacto $\|v\| = 1$ de $T_p S$ e dessa maneira concluímos que κ_{n_p} admite valores máximos e mínimos em $T_p S$. Denotaremos esses valores por $\kappa_1(p)$ e $\kappa_2(p)$, e os chamaremos de curvaturas principais. Os vetores $v_1, v_2 \in T_p S$ tais que $\kappa_{n_p}(v_1) = \kappa_1(p)$ e $\kappa_{n_p}(v_2) = \kappa_2(p)$ são chamados de direções principais.

Se considerarmos uma curva $\gamma : I \rightarrow S$ em S passando por p , parametrizada por comprimento de arco, temos que o vetor γ'' é ortogonal a γ' , e assim está no plano gerado por N e por $N \times \gamma'$, isto é:

$$\gamma''(s) = \langle N(\gamma(s)), \gamma''(s) \rangle N(\gamma(s)) + \langle N(\gamma(s)) \times \gamma'(s), \gamma''(s) \rangle N(\gamma(s)) \times \gamma'(s)$$

Podemos ver que $\kappa_{n_p}(\gamma'(s)) = \langle N(\gamma(s)), \gamma''(s) \rangle$, e denotaremos apenas por $\kappa_{n_p}(s)$. O número $\langle N(\gamma(s)) \times \gamma'(s), \gamma''(s) \rangle$ é chamado de **curvatura geodésica** de γ em s , denotado por $\kappa_g(s)$. Dessa maneira:

$$\gamma''(s) = \kappa_{n_p}(s)N(\gamma(s)) + \kappa_g(s)N(\gamma(s)) \times \gamma'(s).$$

Dessa relação, e da definição da curvatura de uma curva em \mathbb{R}^3 , obtemos:

$$\kappa_\gamma(s)^2 = \|\gamma''(s)\|^2 = \kappa_{n_p}(s)^2 + \kappa_g(s)^2$$

onde $\kappa_\gamma(s)$ é a curvatura de γ em s . Observe que novamente omitimos a construção da curvatura geodésica, que pode ser encontrada em maiores detalhes em [2]. Através do que vimos até o momento, são definidas as seguintes curvas contidas em uma superfície.

Definição 2.27. Seja S uma superfície regular e $\mathbf{x} : U \rightarrow S$ uma parametrização de S em $\mathbf{x}(U)$, dada por $\mathbf{x}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$.

- (a) As curvas $\gamma(u) = (x(u, v_0), y(u, v_0), z(u, v_0))$ e $\beta(v) = (x(u_0, v), y(u_0, v), z(u_0, v))$, com $u_0, v_0 \in \mathbb{R}$ fixados, são chamadas de **curvas coordenadas** da parametrização \mathbf{x} .
- (b) Uma curva regular conexa $C \in S$ é uma **linha de curvatura** de S se, para cada ponto $p \in C$, a direção tangente a C em p é uma direção principal de S em p .
- (c) Uma curva regular conexa $C \in S$ é uma **linha assintótica** de S se, para todo ponto $p \in C$, a direção tangente de C em p tem curvatura normal nula.
- (d) Seja $v \in T_p S$ um vetor unitário e $\Pi(N(p), v)$ o plano paralelo ao plano gerado por v e $N(p)$ passando por p . A interseção $S \cap \Pi(N(p), v)$ é uma curva chamada de **seção normal** de S em p na direção v .
- (e) Uma curva $C \in S$ com parametrização γ é uma **geodésica** se $\kappa_g \equiv 0$.

Definição 2.28. Sejam $p \in S$ e $dN_p : T_p S \rightarrow T_p S$ a diferencial da aplicação normal de Gauss em p . O determinante de dN_p é chamado de **curvatura Gaussiana \mathbf{K}** de S em p , e o negativo da metade do traço de dN_p é chamado de **curvatura média \mathbf{H}** de S em p .

No caso em que $\{e_1, e_2\}$ é uma base ortonormal de $T_p S$ formada de autovetores de dN_p , então:

$$\mathbf{K}(p) = \kappa_1(p)\kappa_2(p) \text{ e } \mathbf{H}(p) = \frac{\kappa_1(p) + \kappa_2(p)}{2},$$

onde $\kappa_1(p)$ e $\kappa_2(p)$ são as curvaturas principais de S em p .

Observação 2.29. (a) Se mudarmos a orientação de S , a curvatura Gaussiana não muda, mas a curvatura média muda de sinal.

(b) Se considerarmos a base $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$, escrevemos $N_u = a_{11}\mathbf{x}_u + a_{12}\mathbf{x}_v$ e $N_v = a_{21}\mathbf{x}_u + a_{22}\mathbf{x}_v$. Desta forma, a matriz de dN_p em relação a essa base é a matriz $(a_{ij})_{i \times j}$, e $\mathbf{K} = \det(a_{ij})$. Também é possível verificar que $\mathbf{H} = -\frac{1}{2}(a_{11} + a_{22})$. \diamond

Podemos classificar os pontos de uma superfície utilizando as curvaturas Gaussiana e média da seguinte maneira.

Definição 2.30. (a) Dizemos que $p \in S$ é um ponto **elíptico** quando $K(p) > 0$.

(b) Dizemos que $p \in S$ é um ponto **hiperbólico** quando $K(p) < 0$.

(c) Dizemos que $p \in S$ é um ponto **parabólico** quando $K(p) = 0$ e $H(p) \neq 0$.

(d) Dizemos que $p \in S$ é um ponto **planar** quando $K(p) = H(p) = 0$.

Quando um ponto p de uma superfície S tem curvaturas principais de mesmo valor, isto é, $\kappa_1(p) = \kappa_2(p)$, dizemos que p é um ponto **umbílico**. Observe que se p é um ponto umbílico, então p é um ponto elíptico (neste caso dizemos que p é umbílico não chato) ou planar (umbílico chato). Além de classificar os pontos de uma superfície utilizando suas curvaturas, dizemos que a superfície S é uma **superfície mínima** quando sua curvatura média é identicamente nula.

2.2.4 Teoremas de existência e unicidade

Diferentemente de curvas planas e espaciais, onde apenas a curvatura e torção já definem unicamente uma curva, a menos de movimentos rígidos, o que foi apresentado acima não é suficiente para obtermos resultados parecidos. Nessa subseção apresentaremos as definições e construções que faltam para podermos obter o que desejamos.

Considere S uma superfície regular orientável, e seja $\mathbf{x} : U \rightarrow S$ uma parametrização de S . Para cada ponto $x(u, v)$ podemos associar a base $\{\mathbf{x}_u(u, v), \mathbf{x}_v(u, v), N(u, v)\}$ e assim, expressar as derivadas parciais de \mathbf{x}_u , \mathbf{x}_v e N como combinação linear desses vetores da seguinte maneira.

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{uu} &= \Gamma_{11}^1 \mathbf{x}_u + \Gamma_{11}^2 \mathbf{x}_v + L_1 N \\ \mathbf{x}_{uv} &= \Gamma_{12}^1 \mathbf{x}_u + \Gamma_{12}^2 \mathbf{x}_v + L_2 N \\ \mathbf{x}_{vu} &= \Gamma_{21}^1 \mathbf{x}_u + \Gamma_{21}^2 \mathbf{x}_v + L_2 N \\ \mathbf{x}_{vv} &= \Gamma_{22}^1 \mathbf{x}_u + \Gamma_{22}^2 \mathbf{x}_v + L_4 N \\ N_u &= a_{11} \mathbf{x}_u + a_{12} \mathbf{x}_v \\ N_v &= a_{21} \mathbf{x}_u + a_{22} \mathbf{x}_v \end{aligned} \tag{2.3}$$

Pelas equações (2.2), temos que $L_1 = l$, $L_2 = L_3 = m$ e $L_4 = n$ e além disso, a_{ij} , $i, j = 1, 2$ são dados na observação (2.29). Os coeficientes Γ_{ij}^k , $i, j, k = 1, 2$ são chamados de **símbolos de Christoffel** de S na parametrização \mathbf{x} . Como $\mathbf{x}_{uv} = \mathbf{x}_{vu}$, então $\Gamma_{12}^k = \Gamma_{21}^k$ para $k = 1, 2$.

Essas construções são feitas com mais detalhes no capítulo 4 de [2], e é mostrado que os símbolos de Christoffel satisfazem:

$$\left(\Gamma_{12}^2\right)_u - \left(\Gamma_{11}^2\right)_v + \Gamma_{12}^1\Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2\Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{11}^1\Gamma_{12}^2 = -EK, \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} l_v - m_u &= l\Gamma_{12}^1 + m(\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) - n\Gamma_{11}^2, \\ m_v - n_u &= l\Gamma_{22}^1 + m(\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1) - n\Gamma_{12}^2. \end{aligned} \quad (2.5)$$

onde as equações (2.4) e (2.5) são conhecidas como fórmula de Gauss e equações de Mainardi-Codazzi, respectivamente. Em conjunto são conhecidas como equações de compatibilidade da teoria de superfícies. Agora podemos enunciar o teorema de existência e unicidade para superfícies regulares.

Teorema 2.31. (Bonnet, p.282 [2]) *Sejam E, F, G, l, m, n funções diferenciáveis definidas em um conjunto aberto $V \subset \mathbb{R}^2$, com $E > 0$, $G > 0$. Suponha que as funções dadas satisfazem formalmente as equações de Gauss e Mainardi-Codazzi e que $EG - F^2 > 0$. Então, para todo $q \in V$ existe uma vizinhança $U \subset V$ de q e um difeomorfismo $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbf{x}(U) \subset \mathbb{R}^3$ tal que a superfície regular $\mathbf{x}(U)$ tem E, F, G e l, m, n como coeficientes da primeira e segunda formas fundamentais, respectivamente. Além disso, se U é conexo e se $\tilde{\mathbf{x}} : U \rightarrow \tilde{\mathbf{x}}(U) \subset \mathbb{R}^3$ é um outro difeomorfismo satisfazendo as mesmas condições, então existe uma traslação T e uma transformação ortogonal ρ em \mathbb{R}^3 tal que $\tilde{\mathbf{x}} = T \circ \rho \circ \mathbf{x}$.*

2.2.5 Superfícies paralelas e focais

Para curvas definimos as curvas paralelas a uma curva parametrizada γ como a curva dada por $\gamma^\lambda(t) = \gamma + \lambda\mathbf{n}(t)$, onde \mathbf{n} é o campo de vetores normais a γ . Para superfícies, utilizamos a aplicação normal de Gauss e definimos a **superfície paralela** a uma superfície parametrizada por $f(u, v)$, como a superfície parametrizada por $f^\lambda(u, v) = f(u, v) + \lambda N(u, v)$ onde N é a aplicação normal de Gauss de f . Note que localmente $N(u, v)$ existe e está bem definido.

O conjunto dos centros de curvatura de uma curva regular é uma curva chamada de evoluta, como vimos anteriormente neste trabalho. Nesta seção estudaremos o conceito equivalente para superfícies regulares, isto é, o **conjunto focal** da superfície é o conjunto dos seus centros de curvatura, ou seja, o local geométrico centros das esferas que melhor aproximam a superfície em cada ponto. A principal referência utilizada foi a dissertação de mestrado [14].

Definição 2.32. Seja S uma superfície sem pontos parabólicos. O **conjunto focal** de S é o subconjunto $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ de \mathbb{R}^3 , onde

$$\mathcal{F}_i = \left\{ p + \frac{1}{\kappa_i(p)} N(p) \mid p \in S \right\}, \quad i = 1, 2,$$

com $\kappa_1(p)$ e $\kappa_2(p)$ sendo as curvaturas principais de S em p , e $N(p)$ a aplicação normal de S em p .

Como S não possui pontos parabólicos, então todo ponto umbílico de S é um ponto elíptico, ou seja, as curvaturas principais são não nulas. Os conjuntos \mathcal{F}_1 e \mathcal{F}_2 são chamados de **folhas** do conjunto focal \mathcal{F} . Esses conjuntos se interseccionam somente quando p é um ponto umbílico. Além disso, pela definição, as duas folhas de \mathcal{F} estão no mesmo semiespaço gerado pelo plano tangente a S em p quando p é um ponto elíptico, e

estão em semiespaços diferentes quando p é um ponto hiperbólico. Assim como a evoluta de uma curva regular pode possuir singularidades, o mesmo pode ocorrer para a superfície focal \mathcal{F} .

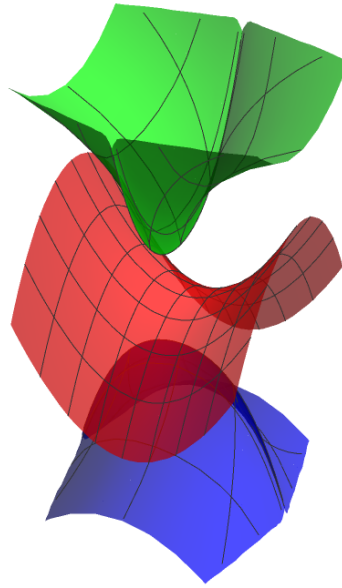


Figura 2.7: Superfície $f(u, v)$ em vermelho e folhas da focal em azul e verde. Fonte: Elaborada pelo autor.

Exemplo 2.33. Seja $f(u, v) = (u, v, u^2 - v^2)$ o parabolóide hiperbólico. As imagens (2.7) apresentam partes das superfícies focais de $f(u, v)$. \diamond

Pela definição da superfície focal, podemos parametrizar suas folhas utilizando uma parametrização para a superfície S . Dessa maneira, seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma parametrização para S . As parametrizações das folhas do conjunto focal são dadas por:

$$\mathcal{F}_1(u, v) = f(u, v) + \frac{1}{\kappa_1(u, v)}N(u, v), \quad \mathcal{F}_2(u, v) = f(u, v) + \frac{1}{\kappa_2(u, v)}N(u, v), \quad (2.6)$$

onde κ_i são as curvaturas principais de S , e $N(u, v)$ é a aplicação normal de Gauss em $(u, v) \in U$.

2.3 Superfícies de revolução

Na seção anterior apresentamos resultados gerais da teoria de superfícies regulares. Como o objetivo deste trabalho é estudar a geometria e as singularidades de superfícies de revolução de curvas singulares, apresentaremos nesta seção resultados específicos para o caso de curvas regulares, isto é, superfícies geradas pela rotação de uma curva regular em torno de uma reta disjunta a curva.

2.3.1 Introdução

Definição 2.34. Seja $\Pi \subset \mathbb{R}^3$ um plano, $C \subset \Pi$ uma curva regular e $r \subset \Pi$ uma reta tal que $C \cap r = \emptyset$. A superfície S obtida girando a curva C em torno da reta r é chamada de

superfície de revolução com geratriz C e eixo de revolução r . As curvas $C_\theta \subset S$ obtidas pela rotação de C por um ângulo θ são chamadas de **meridianos** de S , e os círculos descritos pela rotação de cada ponto de C são chamados de **paralelos** de S .

Para uma superfície de revolução S , podemos considerar o plano Π como sendo o plano xz e o eixo de rotação como sendo o eixo Oz . Dessa forma, parametrizamos a curva geratriz C por $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (x(t), 0, z(t))$, e obtemos a seguinte parametrização para S :

$$f : I \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ f(t, \theta) = (x(t) \cos \theta, x(t) \sin \theta, z(t)).$$

Esta parametrização é chamada de **parametrização padrão** da superfície S . Observe que neste caso os paralelos e meridianos são parametrizados pelas curvas coordenadas de f . Observe que podemos supor que $x(t) > 0$ para todo t , pois γ não cruza o eixo de revolução, e caso $x(t) < 0$ a superfície de revolução de γ coincide com a reflexão de γ . Ao longo desta seção consideraremos $x(t) > 0$.

Exemplo 2.35. No Exemplo (2.22) vimos que o toro T é uma superfície regular, mas além disso é uma superfície de revolução. Considere C o círculo de raio r e centro $(0, a, 0)$ no plano yz como curva geratriz de T , e o eixo Oz como eixo de rotação. Nesse caso, a parametrização padrão do toro é:

$$f : (0, 2\pi) \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ f(u, v) = ((a + r \cos(u)) \cos(v), (a + r \cos(u)) \sin(v), r \sin(u)).$$

e cobre o toro menos o paralelo $u = 0$ e o meridiano $v = 0$. Basta utilizarmos mais duas parametrizações dessa forma para cobrirmos completamente o toro T . \diamond

Exemplo 2.36. O catenóide é a superfície de revolução obtida girando a catenária $y = a \cosh(\frac{z}{a})$, $x = 0$ em torno do eixo Oz com $a > 0$. Sua parametrização padrão é dada por $f(u, v) = (a \cosh(u) \cos(v), a \cosh(u) \sin(v), au)$, $u \in \mathbb{R}$ e $v \in (0, 2\pi)$. \diamond

Observação 2.37. ([8], Teorema 16.6) Em [8] os autores mostram que toda superfície de revolução regular que seja uma superfície mínima, isto é, tem curvatura média identicamente nula, está contida em um catenoide, ou em um plano. \diamond

Exemplo 2.38. Considere a curva $\gamma(t) = (\sin(t) + 2, 0, t)$, $t \in \mathbb{R}$. A superfície S parametrizada por $f(t, \theta) = ((\sin(t) + 2) \cos \theta, (\sin(t) + 2) \sin \theta, t)$ é uma superfície de revolução regular, e para $(t, \theta) \in (-2\pi, 0) \times (0, 2\pi)$ temos a imagem abaixo. \diamond

A seguir apresentaremos alguns resultados conhecidos para superfícies de revolução, omitindo as demonstrações, e alguns serão relacionados com resultados semelhantes para o caso singular que será estudado posteriormente. Como superfícies de revolução regulares são um caso específico de superfícies regulares, temos bem definidas as curvaturas Gaussiana e média. O resultado abaixo apresenta fórmulas para calcularmos estas funções através das funções coordenadas da curva geratriz.

Proposição 2.39. ([8], Teorema 15.12) *As curvaturas principais de uma superfície de revolução parametrizada da maneira padrão são dadas por:*

$$\kappa_1 = \frac{l}{E} = \frac{z'}{x \operatorname{sign} x \sqrt{x'^2 + z'^2}}, \quad \kappa_2 = \frac{n}{G} = \frac{(\operatorname{sign} x)(x'z'' - x''z')}{(x'^2 + z'^2)^{3/2}}.$$

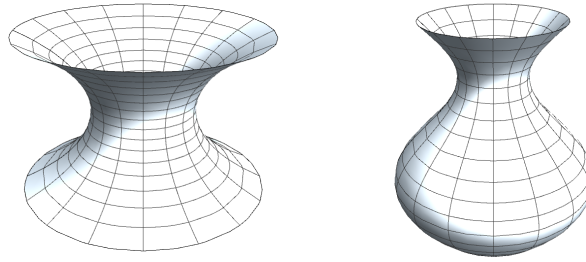


Figura 2.8: Catenoide à esquerda; Superfície S do exemplo (2.38) à direita. Fonte: Elaborada pelo autor.

A curvatura Gaussiana e a curvatura média são dadas por:

$$\mathbf{K} = \frac{z'^2 x'' - x' z' z''}{x(x'^2 + z'^2)^2}, \quad \mathbf{H} = \frac{x(x' z'' - x'' z') + z'(x'^2 + z'^2)}{2|x|(x'^2 + z'^2)^{3/2}},$$

onde x e z são as funções coordenadas da parametrização da curva geratriz.

Observe que κ_2 é a função curvatura da curva geratriz, e κ_1 descreve as curvaturas de cada um dos paralelos. Além disso, as funções κ_1 , κ_2 , \mathbf{K} e \mathbf{H} obtidas na proposição (2.39) não dependem do parâmetro θ da rotação, isto é, são constantes ao longo de um paralelo. De modo geral temos o corolário abaixo.

Corolário 2.40. ([8], Corolário 15.13) *Em uma superfície de revolução parametrizada da maneira padrão as funções κ_1 , κ_2 , \mathbf{K} , \mathbf{H} , E , F , G , l , m e n são constantes ao longo de um paralelo.*

Os resultados anteriores são importantes para alguns cálculos feitos ao longo do trabalho, mas também utilizaremos a seguinte proposição.

Proposição 2.41. ([8] Teorema 15.7) *Em uma superfície de revolução S , os meridianos e paralelos são linhas de curvatura.*

2.3.2 Superfícies paralelas e focais

A proposição (2.39) nos permite obter uma parametrização para as superfícies paralelas, e para as folhas da superfície focal de uma superfície de revolução S parametrizada da maneira padrão. Utilizando a parametrização padrão de uma superfície de revolução, veremos que as superfícies paralelas são dadas pelas superfícies de revolução das curvas paralelas a curva geratriz, e que uma das folhas do conjunto focal é dada pela superfície de revolução da evoluta da curva geratriz e a outra está contida no eixo de revolução. Para isto, sejam $\gamma(t) = (x(t), z(t))$ uma curva com curvatura κ , e $f(t, \theta) = (x(t) \cos \theta, x(t) \sin \theta, z(t))$ a sua superfície de revolução. Como $\gamma'(t) = (x'(t), z'(t)) \neq (0, 0)$, então $x'(t) \neq 0$ ou $z'(t) \neq 0$, a seguir estamos supondo sem perda de generalidade que $z'(t) \neq 0$. Relembrando que $\mathbf{n}(t) = (1/\sqrt{x'(t)^2 + z'(t)^2})(-z'(t), x'(t))$, considere $\lambda \in \mathbb{R}$ e note que a aplicação normal de Gauss de f pode ser dada por $N(t, \theta) = (1/\sqrt{x'(t)^2 + z'(t)^2})(-z'(t) \cos \theta, -z'(t) \sin \theta, x'(t))$. Dessa maneira, uma pa-

rametrização para a superfície paralela f^λ é dada por:

$$\begin{aligned} f^\lambda(t, \theta) &= f(t, \theta) + \lambda N(t, \theta) \\ &= \left(\left(x(t) - \frac{\lambda z'(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + z'(t)^2}} \right) \cos \theta, \left(x(t) - \frac{\lambda z'(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + z'(t)^2}} \right) \sin \theta, \right. \\ &\quad \left. z(t) + \frac{\lambda x'(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + z'(t)^2}} \right). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Dessa expressão podemos concluir que f^λ é a superfície de revolução da curva paralela γ^λ . Para a superfície focal, vimos anteriormente que a curvatura κ é dada pela curvatura κ_2 obtida na proposição (2.39), concluímos que a evoluta de γ é dada por:

$$\mathcal{E}(\gamma)(t) = \left(x(t) - \frac{z'(t)(x'(t)^2 + z'(t)^2)}{x'(t)z''(t) - x''(t)z'(t)}, z(t) + \frac{x'(t)(x'(t)^2 + z'(t)^2)}{x'(t)z''(t) - x''(t)z'(t)} \right). \quad (2.8)$$

Utilizando as parametrizações obtidas em (2.6), temos que a folha \mathcal{F}_2 de f é dada por:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_2(t, \theta) &= f(t, \theta) + \frac{1}{\kappa_2(t, \theta)} N(t, \theta) \\ &= \left(\left(x(t) - \frac{z'(t)(x'(t)^2 + z'(t)^2)}{x'(t)z''(t) - x''(t)z'(t)} \right) \cos \theta, \left(x(t) - \frac{z'(t)(x'(t)^2 + z'(t)^2)}{x'(t)z''(t) - x''(t)z'(t)} \right) \sin \theta, \right. \\ &\quad \left. z(t) + \frac{x'(t)(x'(t)^2 + z'(t)^2)}{x'(t)z''(t) - x''(t)z'(t)} \right) \end{aligned} \quad (2.9)$$

Portanto \mathcal{F}_2 é a superfície de revolução de $\mathcal{E}(\gamma)$. Agora parametrizamos a folha \mathcal{F}_1 utilizando a curvatura κ_1 obtida na proposição (2.39).

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1(t, \theta) &= f(t, \theta) + \frac{1}{\kappa_1(t, \theta)} N(t, \theta) \\ &= (x(t) \cos \theta, x(t) \sin \theta, z(t)) + (-x(t) \cos \theta, -x(t) \sin \theta, \frac{x'(t)x(t)}{z'(t)}) \\ &= (0, 0, z(t) + \frac{x'(t)x(t)}{z'(t)}). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Concluímos que a folha \mathcal{F}_1 do conjunto focal de uma superfície de revolução regular está contido no eixo de revolução.

3 Curvas de Legendre

Neste capítulo faremos um estudo breve de frontais, frentes e curvas de Legendre. Os resultados desenvolvidos serão utilizados posteriormente no estudo de superfícies de revolução destes tipos de curvas. Ao longo deste capítulo assumiremos que as aplicações são suaves e I denotará um intervalo aberto de \mathbb{R} . As principais referências utilizadas são [5] e [6].

3.1 Frontais e frentes de onda

A seguir estudaremos frontais e frentes de onda, que são ferramentas essenciais no estudo da geometria de curvas e superfícies singulares. Nesta seção estudaremos apenas curvas, deixando o estudo de frontais e frentes como superfícies para o capítulo seguinte. Na próxima seção apresentaremos outra maneira de trabalhar com curvas singulares, diretamente relacionada com frontais, e que será o foco deste trabalho no estudo de curvas.

Definição 3.1. Uma aplicação $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma **frontal** se existe um campo unitário de vetores $\nu : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ normais à γ , isto é, $\langle \gamma'(t), \nu(t) \rangle = 0$, para todo $t \in I$. Se $(\gamma, \nu) : I \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ é uma imersão, então γ é uma **frente de onda** (ou simplesmente uma frente).

No restante deste capítulo consideraremos apenas curvas em \mathbb{R}^2 . Observe que, neste caso, aplicação ν coincide nos pontos regulares com o campo de vetores \mathbf{n} definido na Seção (2.2.1), a menos de sinal, ou seja, se t é um ponto regular, então $\nu(t) = \mathbf{n}(t)$ ou $\nu(t) = -\mathbf{n}(t)$.

Exemplo 3.2. Se $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma curva regular, então γ é uma frente. De fato, basta tomar $\nu(t) = \mathbf{n}(t)$, para todo t , ou $\nu(t) = -\mathbf{n}(t)$, para todo t , com $\mathbf{n}(t)$ sendo o vetor normal de γ em t . (Exemplo (2.12)). \diamond

Exemplo 3.3.

- (a) Seja $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ a curva dada por $\gamma(t) = (t^2, t^3)$ (Figura (3.1), esquerda), conhecida como 3/2-cúspide. Temos que $t = 0$ é o único ponto singular de γ . Tomando o campo de vetores normais a γ dado por $\nu(t) = (1/\sqrt{9t^2 + 4})(-3t, 2)$, obtemos que γ é frente. De fato, nos pontos regulares (γ, ν) é imersão. Agora para $t = 0$, como $\gamma'(0) = (0, 0)$, basta verificar que $\nu'(0)$ é não nulo, o que é verdadeiro pois $\nu'(t) = (1/(9t^2 + 4)^{\frac{3}{2}})(-12, -18t)$, o que implica que $\nu'(0) = (-3/2, 0)$.

(b) Seja $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\gamma(t) = (t^3, t^4)$ (Figura (3.1), centro), conhecida como 4/3-cúspide. Temos que $t = 0$ também é o único ponto singular de γ . Tomando o campo de vetores normais a γ dado por $\nu(t) = (1/\sqrt{16t^2 + 9})(-4t, 3)$, concluímos que γ é uma frente. De fato, para $t = 0$, $\gamma'(0) = (0, 0)$, então basta verificar que $\nu'(0)$ é não nulo, o que é verdadeiro pois $\nu'(t) = (1/(16t^2 + 9)^{\frac{3}{2}})(-36, -48t)$, o que implica que $\nu'(0) = (-4/3, 0)$.

(c) Seja $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\gamma(t) = (t^2, t^5)$ (Figura (3.1), direita), conhecida como 5/2-cúspide. Temos que $t = 0$ também é o único ponto singular de γ , como nos exemplos anteriores. Tomando o campo de vetores normais a γ dado por $\nu(t) = (1/\sqrt{25t^6 + 4})(-5t^3, 2)$, concluímos que γ não é uma frente, apenas uma frontal. De fato, para $t = 0$, $\gamma'(0) = (0, 0)$ e $\nu'(t) = (1/(26t^6 + 4)^{\frac{3}{2}})(-60t^2, -150t^5)$, o que implica que $\nu'(0) = (0, 0)$.

◇

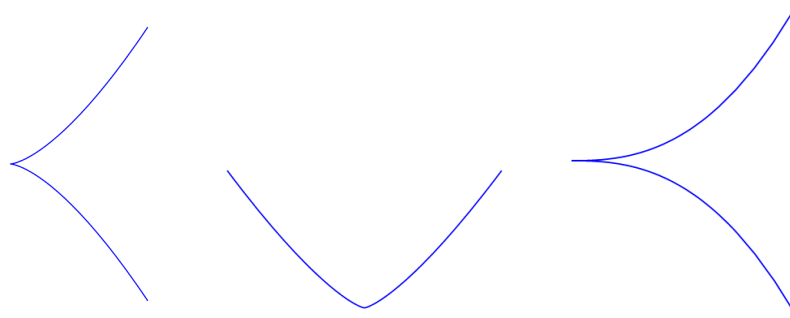


Figura 3.1: Cúspides do Exemplo (3.3). Fonte: Elaborada pelo autor.

Na Seção (2.1) do capítulo (2) dissemos que iríamos apresentar as classificações para singularidades de curvas quando surgissem os exemplos. Os exemplos apresentados anteriormente são casos específicos de frontais conhecidos como cúspides. A seguir temos a definição de uma j/i -cúspide utilizando a \mathcal{A} -equivalência.

Definição 3.4. Seja $\gamma : (I, t_0) \rightarrow \mathbb{R}^2$ o germe de curva diferenciável. Dizemos que γ em t_0 é uma j/i -cúspide, onde $(i, j) = (2, 3), (2, 5), (3, 4), (3, 5)$ se γ é \mathcal{A} -equivalente ao germe $t \mapsto (t^i, t^j)$ na origem.

3.2 Definições e resultados iniciais

Vamos estudar nesta seção curvas de Legendre em \mathbb{R}^2 e utilizaremos os conceitos apresentados para trabalhar com superfícies de revolução no capítulo (5).

Definição 3.5. Sejam $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $\nu : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ aplicações suaves, com ν unitário, isto é, $\|\nu(t)\| = 1$, para todo t . Dizemos que $(\gamma, \nu) : I \rightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$ é uma **curva de Legendre** se $\langle \gamma'(t), \nu(t) \rangle = 0$, para todo $t \in I$. Se (γ, ν) for uma imersão, então (γ, ν) é dita ser uma **imersão de Legendre**.

Note que com essa definição podemos dizer que $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma frontal (resp. frente) se existe $\nu : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que (γ, ν) é uma curva de Legendre (resp. imersão de Legendre).

Observação 3.6. Pela definição, se (γ, ν) é uma imersão de Legendre, então $(\gamma, -\nu)$ também é. ◇

Exemplo 3.7. Considerando as frontais e frentes dadas nos Exemplos (2.12) e (3.3), temos exemplos de curvas e imersões de Legendre. \diamond

Veremos a seguir equações para frontais semelhantes às equações de Frenet para curvas regulares. Para isso, seja $(\gamma, \nu) : I \rightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$ uma curva de Legendre, e tomamos $\mu(t) = J(\nu(t))$, onde J é a rotação no sentido anti-horário por um ângulo de $\pi/2$. Obtemos assim uma base $\{\nu, \mu\}$ de \mathbb{R}^2 ao longo da frontal γ .

Como $\|\nu(t)\| = \|\mu(t)\| = 1$, para todo t , temos $\nu'(t)$ e $\mu'(t)$ ortogonais a $\nu(t)$ e $\mu(t)$, respectivamente, ou seja, $\nu'(t)$ é paralelo a $\mu(t)$ e $\mu'(t)$ é paralelo a $\nu(t)$. Sendo assim, existe

$$\ell(t) = \langle \nu'(t), \mu(t) \rangle$$

tal que

$$\nu'(t) = \ell(t)\mu(t)$$

e

$$\mu'(t) = -\ell(t)\nu(t),$$

pois $\langle \nu(t), \mu(t) \rangle = 0$, e derivando obtemos $\langle \nu'(t), \mu(t) \rangle = -\langle \nu(t), \mu'(t) \rangle$.

Ainda, como $\langle \gamma'(t), \nu(t) \rangle = 0$, temos $\gamma'(t)$ é paralelo a $\mu(t)$, e assim temos as fórmulas a seguir em representação matricial.

$$\begin{pmatrix} \nu'(t) \\ \mu'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \ell(t) \\ -\ell(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu(t) \\ \mu(t) \end{pmatrix}, \quad \gamma'(t) = \beta(t)\mu(t) \quad (3.1)$$

onde $\beta(t) = \langle \gamma'(t), \mu(t) \rangle$ e, portanto, $|\beta(t)| = \|\gamma'(t)\|$, para todo t .

Definição 3.8. Com as notações acima, o par $(\ell, \beta) : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ é chamado de **curvatura** da curva de Legendre (γ, ν) .

Observação 3.9. (a) Observe que nas notações acima, (γ, ν) é uma imersão de Legendre se, e somente se, $(\ell(t), \beta(t)) \neq (0, 0)$ para todo t . De fato, temos $\mu(t) \neq (0, 0)$, para todo t , $\gamma'(t) = \beta(t)\mu(t)$ e $\nu'(t) = \ell(t)\mu(t)$. Se (γ, ν) é uma imersão, então $\gamma'(t) \neq (0, 0)$ ou $\nu'(t) \neq (0, 0)$, e assim $\beta(t) \neq 0$ ou $\ell(t) \neq 0$. Reciprocamente, se $(\ell(t), \beta(t)) \neq (0, 0)$ para todo t , as igualdades acima nos garantem que $\gamma'(t) \neq (0, 0)$ ou $\nu'(t) \neq (0, 0)$, ou seja, (γ, ν) é uma imersão.

(b) Como $\gamma'(t) = \beta(t)\mu(t)$ e $\mu(t) \neq (0, 0)$ para todo t , então γ é singular em t se, e somente se, $\beta(t) = 0$. Isso nos garante que se (γ, ν) é uma imersão de Legendre, e γ é singular em t , então $\ell(t) \neq 0$.

(c) Se (γ, ν) é uma curva de Legendre com curvatura (ℓ, β) , então $(\gamma, -\nu)$ é uma curva de Legendre com curvatura $(\ell, -\beta)$. De fato, note que $J(-\nu) = -\mu$. Portanto segue que $\gamma(t) = \beta(t)\mu(t) = -\beta(t)(-\mu(t))$, e $\nu'(t) = \ell(t)\mu(t)$, ou seja, $-\nu'(t) = \ell(t)(-\mu(t))$.

(d) A curvatura (ℓ, β) depende da parametrização da curva (γ, ν) , isto é, se $(\bar{\gamma}, \bar{\nu})$ é uma reparametrização pela mudança de parâmetro $s : I \rightarrow \bar{I}$, temos $(\ell, \beta) \neq (\bar{\ell}, \bar{\beta})$. De fato, suponhamos que $(\bar{\gamma}(t), \bar{\nu}(t)) = (\gamma(s(t)), \nu(s(t)))$. Derivando obtemos $\bar{\gamma}'(t) = \gamma'(s(t))s'(t)$ e $\bar{\nu}'(t) = \nu'(s(t))s'(t)$, ou seja, $\bar{\beta}(t) = s'(t)\beta(s(t))$ e $\bar{\ell}(t) = s'(t)\ell(s(t))$. \diamond

No caso regular, a função curvatura define unicamente uma curva, a menos de um movimento rígido, e é essencial no estudo da geometria de curvas. Os exemplos a seguir relacionam a curvatura κ definida na seção (2.2) com a aplicação (ℓ, β) , motivando sua nomenclatura.

Exemplo 3.10.

(a) Seja $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ a circunferência dada por $\gamma(t) = (a + r \cos(t/r), b + r \sin(t/r))$, com campo de vetores $\nu(t) = (-\cos(t/r), -\sin(t/r))$, isto é, (γ, ν) é uma curva de Legendre. Por definição, $\mu(t) = (\sin(t/r), -\cos(t/r))$. Fazendo os cálculos, temos que $\gamma'(t) = -\mu(t)$ e $\nu'(t) = (1/r)\mu(t)$. Portanto, $\ell(t) = 1/r$ e $\beta(t) = -1$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Note também que $\kappa(t) = 1/r$, ou seja, $\ell(t) = -\beta(t)\kappa(t)$.

(b) Seja $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ a parábola dada por $\gamma(t) = (t, t^2)$, com campo de vetores $\nu(t) = (2t, -1)/\sqrt{4t^2 + 1}$, isto é, (γ, ν) é uma curva de Legendre. Temos, por definição, que $\mu(t) = (1, 2t)/\sqrt{4t^2 + 1}$. Sendo assim, $\gamma'(t) = \sqrt{4t^2 + 1}\mu(t)$ e $\nu'(t) = (2/\sqrt{4t^2 + 1}^2)\mu(t)$. Por último, $\kappa(t) = (2/\sqrt{4t^2 + 1}^3)$, e desta maneira, $\ell(t) = \beta(t)\kappa(t)$.

(c) Seja $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ a 3/2-cúspide dada por $\gamma(t) = (t^2, t^3)$ e com campo de vetores normais $\nu(t) = (1/\sqrt{9t^2 + 4})(-3t, 2)$, como visto no Exemplo (3.3) (a). Dessa maneira (γ, ν) é uma curva de Legendre. Por definição, $\mu(t) = (1/\sqrt{9t^2 + 4})(-2, -3t)$, e como $\gamma'(t) = (2t, 3t^2)$ e $\nu'(t) = (1/(9t^2 + 4)^{\frac{3}{2}})(-12, -18t)$, então a curvatura (ℓ, β) é dada por $\ell(t) = 6/(9t^2 + 4)$ e $\beta(t) = -t\sqrt{9t^2 + 4}$. Observe que para $t \neq 0$, γ é uma curva regular e sua curvatura κ como definida para curvas regulares é dada por $\kappa(t) = 6/(|t|(9t^2 + 4)^{\frac{3}{2}})$. Portanto, para $t > 0$ concluímos que $\ell(t) = -\beta(t)\kappa(t)$ e para $t < 0$, $\ell(t) = \beta(t)\kappa(t)$. \diamond

Nos exemplos vistos, concluímos que ou $\ell = -\beta\kappa$, ou $\ell = \beta\kappa$, nos parâmetros regulares de uma curva de Legendre. A proposição a seguir nos fornece a relação exata entre essas funções, isto é, uma relação válida para os pontos regulares de uma curva de Legendre qualquer.

Proposição 3.11. ([6], Lema 3.1) *Seja $(\gamma, \nu) : I \rightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$ uma imersão de Legendre com curvatura (ℓ, β) . Se γ é regular em t , então $\ell(t) = |\beta(t)|\kappa(t)$, onde κ é a curvatura de γ no parâmetro regular t .*

Demonstração. Suponhamos γ regular em t . Assim, pela Observação (3.9), item (b), $\beta(t) \neq 0$. Temos $\gamma'(t) = \beta(t)\mu(t)$ e $\gamma''(t) = \beta'(t)\mu(t) - \beta(t)\ell(t)\nu(t)$. Logo, utilizando propriedades do determinante e que $\det(\nu(t), \mu(t)) = 1$, obtemos:

$$\begin{aligned} \kappa(t) &= \frac{\det(\gamma'(t), \gamma''(t))}{\|\gamma'(t)\|^3} = -\frac{\det(\beta(t)\mu(t), \beta(t)\ell(t)\nu(t))}{|\beta(t)|^3} = \\ &= \frac{\beta(t)^2\ell(t)}{|\beta(t)|^3} = \frac{\ell(t)}{|\beta(t)|} \Rightarrow \ell(t) = |\beta(t)|\kappa(t). \end{aligned}$$

\square

Para curvas regulares, o teorema (2.14) de existência e unicidade de curvas com uma curvatura dada é um resultado clássico conhecido como o Teorema Fundamental das Curvas, como vimos nos Teoremas (2.14) e (2.15). Apresentaremos a seguir teoremas semelhantes para curvas de Legendre, omitindo suas demonstrações, que podem ser encontradas no artigo [5]. Notamos que, como para curvas regulares, a unicidade ocorre a menos de um movimento rígido. Primeiramente apresentamos a definição de congruência para curvas de Legendre.

Definição 3.12. $(\gamma, \nu) : I \rightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$ e $(\tilde{\gamma}, \tilde{\nu}) : I \rightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$ são curvas de Legendre ditas **congruentes** se existe uma rotação constante A e uma translação \mathbf{a} em \mathbb{R}^2 tais que $\tilde{\gamma}(t) = A(\gamma(t)) + \mathbf{a}$ e $\tilde{\nu}(t) = A(\nu(t))$.

A seguir, enunciamos o teorema de existência para uma curva de Legendre dada a curvatura (ℓ, β) . Este resultado também fornece uma maneira de construir a curva, semelhante ao Teorema (2.15).

Teorema 3.13. (Existência de curva de Legendre, [5], Teorema 1.4) *Seja $(\ell, \beta) : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma aplicação suave. Existe uma curva de Legendre $(\gamma, \nu) : I \rightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$, cuja curvatura é dada por (ℓ, β) . Ainda, (γ, ν) é dada por:*

$$\begin{aligned}\gamma(t) &= \left(- \int \beta(t) \operatorname{sen} \left(\int \ell(t) dt \right) dt, \int \beta(t) \operatorname{cos} \left(\int \ell(t) dt \right) dt \right) \\ \nu(t) &= \left(\operatorname{cos} \left(\int \ell(t) dt \right), \operatorname{sen} \left(\int \ell(t) dt \right) \right).\end{aligned}$$

Agora enunciamos o teorema de unicidade. Não é difícil verificar que se duas curvas de Legendre são congruentes, suas curvaturas coincidem. A recíproca segue do fato de que dadas duas curvas de Legendre, podemos obter uma terceira curva, congruente a uma delas, e que coincide em um ponto com a outra. Como suas curvaturas são iguais, então estas curvas seriam iguais, ou seja, as curvas iniciais são congruentes.

Teorema 3.14. (Unicidade de Curva de Legendre, [5], Teorema 1.5) *Sejam $(\gamma, \nu), (\tilde{\gamma}, \tilde{\nu}) : I \rightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$ curvas de Legendre com curvaturas da curva de Legendre (ℓ, β) e $(\tilde{\ell}, \tilde{\beta})$ respectivamente. Então (γ, ν) e $(\tilde{\gamma}, \tilde{\nu})$ são congruentes se, e somente se, (ℓ, β) e $(\tilde{\ell}, \tilde{\beta})$ coincidem.*

3.3 Paralelas e evolutas

Nesta seção apresentaremos as definições da evoluta e das curvas paralelas de uma curva de Legendre (γ, ν) qualquer. Estas definições são feitas de modo que coincidem com as apresentadas na Seção (2.2.1) quando γ é uma curva regular e ν é dado pelo vetor normal \mathbf{n} de γ . Em [6], os autores definem curvas paralelas para uma imersão de Legendre. No entanto, a definição também é válida para curvas de Legendre que não são imersões. No que segue *assumiremos que o conjunto dos pontos singulares de γ é finito.*

Definição 3.15. Seja $(\gamma, \nu) : I \rightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ uma curva de Legendre. Uma **curva paralela** $\gamma_\lambda : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ de (γ, ν) é dada por $\gamma_\lambda(t) = \gamma(t) + \lambda\nu(t)$, para cada $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exemplo 3.16. Seja $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ a 3/2-cúspide dada por $\gamma(t) = (t^2, t^3)$. Como vimos, $\nu(t) = (1/\sqrt{9t^2 + 4})(-3t, 2)$, então para $\lambda \in \mathbb{R}$ temos que $\gamma_\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ é dada por:

$$\gamma_\lambda(t) = \left(t^2 - \frac{3\lambda t}{\sqrt{9t^2 + 4}}, t^3 + \frac{2\lambda}{\sqrt{9t^2 + 4}} \right).$$

◇

Na Proposição 2.7 de [6] os autores mostram que curvas paralelas de imersões de Legendre são frentes. Apresentamos abaixo o mesmo resultado, mas também considerando o caso geral de curvas de Legendre que não são imersões. Nesse caso as curvas paralelas são apenas frontais e não frentes. Além disso também calculamos a curvatura da curva paralela em função da curvatura (ℓ, β) da curva de Legendre.

Proposição 3.17. ([6], Proposição 2.7) *Seja $(\gamma, \nu) : I \rightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ uma curva de Legendre com curvatura (ℓ, β) . As curvas paralelas γ_λ de (γ, ν) , para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, são frontais. Se (γ, ν) é uma imersão de Legendre, então γ_λ é uma frente. Ainda mais, para cada λ , as curvas de Legendre $(\gamma_\lambda, \nu_\lambda)$ tem curvatura $(\ell, \beta + \lambda\ell)$.*

Demonstração. Seja $\lambda \in \mathbb{R}$. Tome $\nu_\lambda : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ dado por $\nu_\lambda(t) = \nu(t)$. Mostraremos que ν_λ é normal a γ_λ e, se (γ, ν) for uma imersão, então $(\gamma_\lambda, \nu_\lambda)$ também será.

Como $\gamma_\lambda(t) = \gamma(t) + \lambda\nu(t)$, segue que $\gamma'_\lambda(t) = \gamma'(t) + \lambda\nu'(t)$. Calculando o produto interno entre $\nu_\lambda(t)$ e $\gamma'_\lambda(t)$, obtemos $\langle \nu_\lambda(t), \gamma'_\lambda(t) \rangle = \langle \nu(t), \gamma'(t) \rangle + \lambda\langle \nu(t), \nu'(t) \rangle$. Por hipótese (γ, ν) é uma curva de Legendre, então $\langle \nu(t), \gamma'(t) \rangle = 0$, para todo t , e como $\langle \nu(t), \nu(t) \rangle = \|\nu(t)\|^2 = 1$, para todo t , derivando, concluímos que $\langle \nu(t), \nu'(t) \rangle = 0$, para todo t . Assim $\langle \nu_\lambda(t), \gamma'_\lambda(t) \rangle = 0$ para todo t e, portanto, γ_λ é uma frontal.

Suponha agora que (γ, ν) é uma imersão de Legendre e que $\gamma'_\lambda(t_0) = (0, 0)$, para algum $t_0 \in I$, ou seja, $\gamma'(t_0) + \lambda\nu'(t_0) = (0, 0)$. Se $\nu'(t_0) = (0, 0)$, então $\gamma'(t_0) = (0, 0)$, contradizendo a hipótese de que (γ, ν) é uma imersão. Portanto $\nu'(t_0) \neq (0, 0)$ e assim (γ_λ, ν) é uma imersão, isto é, γ_λ é uma frente.

Por último, seja $(\gamma_\lambda, \nu_\lambda)$ a curva de Legendre com curvatura $(\ell_\lambda, \beta_\lambda)$. Como $\nu_\lambda = \nu$, então $\mu_\lambda = J(\nu_\lambda) = J(\nu) = \mu$, ou seja, $\ell_\lambda = \ell$. Agora, como $\gamma'_\lambda(t) = \gamma'(t) + \lambda\nu'(t)$, pelas equações (3.1) temos $\gamma'_\lambda(t) = \beta(t)\mu(t) + \lambda\ell(t)\mu(t) = (\beta(t) + \lambda\ell(t))\mu(t)$. Portanto, $\beta_\lambda = \beta + \lambda\ell$. \square

Denotamos por $\kappa_\lambda(t)$ a curvatura da curva paralela γ_λ nos seus parâmetros regulares. O lema a seguir apresenta uma relação entre a curvatura (ℓ, β) de uma curva de Legendre (γ, ν) , e a curvatura $\kappa_\lambda(t)$, quando γ_λ é regular em t .

Proposição 3.18. ([6], Lema 3.1) *Seja $(\gamma, \nu) : I \rightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ uma curva de Legendre com curvatura (ℓ, β) . Se γ_λ é regular em t , então $\ell(t) = |\beta(t) + \lambda\ell(t)|\kappa_\lambda(t)$.*

Demonstração. Consideremos γ_λ uma curva paralela de γ tal que γ_λ é regular em t . Pela Proposição (3.17) temos $(\ell_\lambda, \beta_\lambda) = (\ell, \beta + \lambda\ell)$. Aplicando a Proposição (3.11) para γ_λ obtemos o resultado desejado. \square

Para a definição da evoluta de uma curva de Legendre, o seguinte resultado será importante.

Proposição 3.19. ([6], Proposição 2.8) *Seja $(\gamma, \nu) : I \rightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ uma curva de Legendre. Se γ é uma curva regular e $\lambda \neq 1/\kappa(t)$ (quando $\nu(t) = \mathbf{n}(t)$) (resp. $\lambda \neq -1/\kappa(t)$ se $\nu(t) = -\mathbf{n}(t)$), então a curva paralela γ_λ também é regular e as evolutas coincidem, ou seja, $\mathcal{E}(\gamma_\lambda)(t) = \mathcal{E}(\gamma)(t)$, para todo t .*

Demonstração. Suponha que $\nu(t) = \mathbf{n}(t)$ para todo t . Temos $\gamma_\lambda(t) = \gamma(t) + \lambda\nu(t) = \gamma(t) + \lambda\mathbf{n}(t)$. Pelas fórmulas de Frenet, $\gamma'_\lambda(t) = \|\gamma'(t)\|(1 - \lambda\kappa(t))\mathbf{t}(t)$. Segue que γ_λ é regular em t se, e somente se, $\|\gamma'(t)\|(1 - \lambda\kappa(t))\mathbf{t}(t) \neq (0, 0)$, isto é, $1 - \lambda\kappa(t) \neq 0$, pois $\mathbf{t}(t) \neq (0, 0)$ e $|\gamma'(t)| \neq 0$. Portanto, obtemos a condição $\lambda \neq 1/\kappa(t)$ para a regularidade da curva paralela γ_λ .

Para mostrar que as evolutas coincidem, note que $\gamma''_\lambda(t) = \gamma''(t)(1 - \lambda\kappa(t)) - \lambda\kappa'(t)\gamma'(t)$ e ainda:

$$\mathbf{t}_\lambda(t) = \frac{\gamma'_\lambda(t)}{\|\gamma'_\lambda(t)\|} = \frac{1 - \lambda\kappa(t)}{|1 - \lambda\kappa(t)|} \mathbf{t}(t) \Rightarrow \mathbf{n}_\lambda(t) = J(\mathbf{t}_\lambda(t)) = \frac{1 - \lambda\kappa(t)}{|1 - \lambda\kappa(t)|} \mathbf{n}(t).$$

Além disso, calculando a curvatura de γ_λ , obtemos:

$$\begin{aligned}\kappa_\lambda(t) &= \frac{\det(\gamma'_\lambda(t), \gamma''_\lambda(t))}{\|\gamma'_\lambda(t)\|^3} = \frac{\det((1 - \lambda\kappa(t))\gamma'(t), (1 - \lambda\kappa(t))\gamma''(t))}{|1 - \lambda\kappa(t)|^3 \|\gamma'(t)\|^3} = \\ &= \frac{(1 - \lambda\kappa(t)^2) \det(\gamma'(t), \gamma''(t))}{|1 - \lambda\kappa(t)|^3 \|\gamma'(t)\|^3} = \frac{\kappa(t)}{|1 - \lambda\kappa(t)|}\end{aligned}$$

Pela definição da evoluta de uma curva regular

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(\gamma_\lambda)(t) &= \gamma_\lambda(t) + \frac{1}{\kappa_\lambda(t)} \mathbf{n}_\lambda(t) = \gamma(t) + \lambda \mathbf{n}(t) + \frac{|1 - \lambda\kappa(t)|}{\kappa(t)} \frac{1 - \lambda\kappa(t)}{|1 - \lambda\kappa(t)|} \mathbf{n}(t) = \\ &= \gamma(t) + \lambda \mathbf{n}(t) + \frac{1}{\kappa(t)} \mathbf{n}(t) - \lambda \mathbf{n}(t) = \gamma(t) + \frac{1}{\kappa(t)} \mathbf{n}(t) = \mathcal{E}(\gamma)(t),\end{aligned}$$

como queríamos. A demonstração para o caso em que $\nu(t) = -\mathbf{n}(t)$ segue de maneira análoga. \square

Definição 3.20. ([6], Definição 2.10) Seja $(\gamma, \nu) : I \rightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ uma imersão de Legendre tal que a curvatura $\kappa(t)$ de γ não se anula nos parâmetros regulares. A **evoluta** $\mathcal{E}(\gamma) : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ de (γ, ν) é dada por:

$$\mathcal{E}(\gamma)(t) = \begin{cases} \gamma(t) + \frac{1}{\kappa(t)} \mathbf{n}(t) & \text{se } t \text{ é um ponto regular} \\ \gamma_\lambda(t) + \frac{1}{\kappa_\lambda(t)} \mathbf{n}_\lambda(t) & \text{se } t \in I_\delta = (t_0 - \delta, t_0 + \delta), \\ & \text{onde } t_0 \text{ é um ponto singular de } \gamma, \end{cases}$$

sendo $\delta \in \mathbb{R}$ suficientemente pequeno de modo que t_0 é o único ponto singular de γ em I_δ , e $\lambda \in \mathbb{R}$ não nulo satisfazendo $\lambda \neq 1/\kappa(t)$, se $\nu(t) = \mathbf{n}(t)$, ou $\lambda \neq -1/\kappa(t)$, se $\nu(t) = -\mathbf{n}(t)$, para todo $t \in I_\delta - t_0$.

As seguintes observações nos garantem que a definição acima não tem inconsistências, e dessa maneira a evoluta está bem definida.

Observação 3.21. (a) Como (γ, ν) é imersão de Legendre, então $(\ell(t), \beta(t)) \neq (0, 0)$, para todo t . Assim, se t_0 é um ponto singular de γ , então $\ell(t_0) \neq 0$ pela Observação (3.9). Como $\gamma'_\lambda(t_0) = \gamma'(t_0) + \lambda\nu'(t_0) = \lambda\ell(t_0)\mu(t_0)$, e $\mu(t_0) \neq (0, 0)$, concluímos que γ_λ é regular em t_0 . Mais ainda, como $\lambda \neq 1/\kappa(t)$, para todo $t \in I_\delta$, segue que γ_λ é regular em I_δ . Portanto, γ_λ está na hipótese da Proposição (3.18) e, conseqüentemente, $\ell(t_0) = |\lambda\ell(t_0)|\kappa_\lambda(t_0)$, de onde segue que $\kappa_\lambda(t_0) \neq 0$. Quando t é um parâmetro regular de γ , temos a relação $\kappa_\lambda(t) = \kappa(t)/|1 - \lambda\kappa(t)|$, e como $\kappa(t) \neq 0$, então $\kappa_\lambda(t) \neq 0$.

(b) Note que é importante supor que (γ, ν) seja imersão de Legendre (e não apenas uma curva de Legendre) pois, como vimos no item (a), isso garante que as curvas paralelas de γ são regulares em I_δ , o que é necessário para a definição da sua evoluta.

(c) Como γ é regular em todo $t \in I_\delta$ tal que $t \neq t_0$, então segue da Proposição (3.19) que as evolutas de γ e γ_λ coincidem em todo parâmetro regular $t \in I_\delta$

(d) Se temos $\lambda_1, \lambda_2 \neq 1/\kappa(t)$, para todo $t \in I_\delta$, com $\lambda_1 \neq \lambda_2$, então, por (b), ambas curvas paralelas γ_{λ_1} e γ_{λ_2} são regulares em I_δ . Além disso, como $\lambda_2 = \alpha + \lambda_1$, para algum $\alpha \in \mathbb{R}$ não nulo, então $\gamma_{\lambda_2}(t) = \gamma(t) + (\lambda_1 + \alpha)\nu(t) = \gamma_{\lambda_1}(t) + \alpha\nu(t)$, ou seja, γ_{λ_2} é curva paralela de γ_{λ_1} . Pela Proposição (3.19), suas evolutas coincidem. Portanto a definição independe do λ escolhido.

\diamond

Exemplo 3.22. Considere novamente a 3/2-cúspide $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\gamma(t) = (t^2, t^3)$, e $\nu(t) = (1/\sqrt{9t^2+4})(-3t, 2)$. Temos que o único ponto singular de γ é $t = 0$. Por definição, se $t \neq 0$, a evoluta de γ é dada por:

$$\mathcal{E}(\gamma)(t) = \gamma(t) + \frac{1}{\kappa(t)} \mathbf{n}(t).$$

Observe que neste caso $\kappa(t) = 6/(|t|(9t^2+4)^{3/2})$ e $\mathbf{n}(t) = (1/(|t|\sqrt{9t^2+4}))(-3t^2, 2t)$. Portanto, concluímos que

$$\mathcal{E}(\gamma)(t) = \left(-\frac{1}{2}(9t^4 + 2t^2), \frac{4}{3}(3t^3 + t) \right), \quad (3.2)$$

para todo $t \neq 0$.

Para obtermos a evoluta em $t = 0$, sejam $\delta = 1/10$ e $\lambda = 3/10$ números reais satisfazendo as condições da definição (3.20), e $\gamma_\lambda(t) = \gamma(t) + \lambda\nu(t)$ uma curva paralela a γ . Temos que γ_λ é regular em $I_\delta = (-\delta, \delta)$. Além disso, pela Proposição (3.18), segue que $\kappa_\lambda(t) = \ell(t)/|\beta(t) + \lambda\ell(t)|$, onde (ℓ, β) é a curvatura da curva de Legendre (γ, ν) . Podemos verificar que $\beta(t) + \lambda\ell(t) > 0$ para todo $t \in I_\delta$. Logo, como $\gamma'_\lambda(t) = (\beta(t) + \lambda\ell(t))\mu(t)$, segue que $\mathbf{n}_\lambda(t) = -\nu(t)$, para todo $t \in I_\delta$. Portanto, pela definição da evoluta, concluímos o seguinte:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\gamma)(t) &= \gamma_\lambda(t) + \frac{\beta(t) + \lambda\ell(t)}{\ell(t)} \mathbf{n}_\lambda(t) \\ &= \gamma(t) + \lambda\nu(t) - \frac{\beta(t)}{\ell(t)} \nu(t) - \lambda\nu(t) \\ &= \gamma(t) - \frac{\beta(t)}{\ell(t)} \nu(t), \end{aligned} \quad (3.3)$$

para todo $t \in I_\delta$. Utilizando a curvatura calculada no Exemplo (3.10) (c), obtemos:

$$\mathcal{E}(\gamma)(t) = \left(-\frac{1}{2}(9t^4 + 2t^2), \frac{4}{3}(3t^3 + t) \right),$$

para todo $t \in I_\delta$, isto é, coincide com a parametrização que obtemos em (3.2) para $t \neq 0$, e passa pela origem em $t = 0$. \diamond

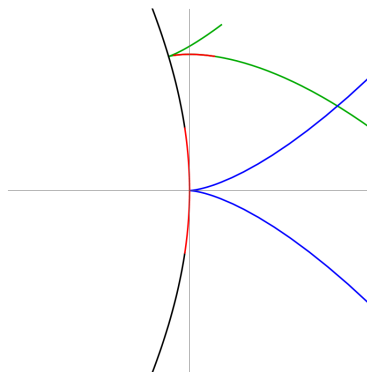


Figura 3.2: 3/2-cúspide γ em azul. Evoluta de γ nos pontos regulares em preto. Curva paralela γ_λ em verde. Seção regular de γ_λ e evoluta nesses pontos em vermelho. Fonte: Elaborada pelo autor.

No exemplo anterior obtemos a equação (3.3) para a evoluta da 3/2-cúspide em torno de seu ponto singular. O resultado a seguir mostra que essa equação é uma forma simplificada de parametrizar a evoluta de uma imersão de Legendre $(\gamma, \nu) : I \rightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$ para todo $t \in I$, utilizando sua curvatura (ℓ, β) . Primeiramente observemos que, em um parâmetro singular t de γ , $\beta(t) = 0$ e assim, $\ell(t) \neq 0$ pois estamos trabalhando com uma imersão. Agora, se t é regular, então $\beta(t) \neq 0$ e assim $\ell(t) \neq 0$, sempre que $\kappa(t) \neq 0$.

Teorema 3.23. ([6], Teorema 3.3) *Seja $(\gamma, \nu) : I \rightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ uma imersão de Legendre com curvatura (ℓ, β) , e $\kappa(t) \neq 0$, para todo parâmetro regular $t \in I$. A evoluta $\mathcal{E}(\gamma)$ da frente γ é dada por*

$$\mathcal{E}(\gamma)(t) = \gamma(t) - \frac{\beta(t)}{\ell(t)}\nu(t), \quad (3.4)$$

e $(\mathcal{E}(\gamma), J(\nu(t)))$ é uma imersão de Legendre com curvatura

$$\left(\ell, \frac{d}{dt} \left(\frac{\beta}{\ell} \right) \right).$$

Demonstração. Suponha que t é um ponto regular de γ . Como $\gamma'(t) = \beta(t)\mu(t)$, então $|\beta(t)| = \|\gamma'(t)\| \neq 0$ e assim, $\mathbf{t}(t) = \frac{\beta(t)}{|\beta(t)|}\mu(t)$ e $\mathbf{n}(t) = J(\mathbf{t}(t)) = -\frac{\beta(t)}{|\beta(t)|}\nu(t)$. Pela Proposição (3.11) temos $\kappa(t) = \frac{\ell(t)}{|\beta(t)|}$. Portanto, pela definição da evoluta

$$\mathcal{E}(\gamma)(t) = \gamma(t) + \frac{1}{\kappa(t)}\mathbf{n}(t) = \gamma(t) + \frac{|\beta(t)|}{\ell(t)} \left(-\frac{\beta(t)}{|\beta(t)|}\nu(t) \right) = \gamma(t) - \frac{\beta(t)}{\ell(t)}\nu(t).$$

Agora suponha que t_0 é um ponto singular de γ . Considere γ_λ uma curva paralela de γ regular no intervalo $I_\delta = (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$, para $\delta \in \mathbb{R}$ satisfazendo as condições da definição (3.20). Seja $t \in I_\delta$, como $\gamma'_\lambda(t) = (\beta(t) + \lambda\ell(t))\mu(t)$, então $|(\beta(t) + \lambda\ell(t))| \neq 0$. Assim $\mathbf{t}_\lambda(t) = \frac{(\beta(t) + \lambda\ell(t))}{|(\beta(t) + \lambda\ell(t))|}\mu(t)$ e $\mathbf{n}_\lambda(t) = -\frac{(\beta(t) + \lambda\ell(t))}{|(\beta(t) + \lambda\ell(t))|}\nu(t)$. Pela Proposição (3.18), temos que $\kappa_\lambda(t) = \frac{\ell(t)}{|\beta(t) + \lambda\ell(t)|}$ e $\ell(t) \neq 0$, e pela definição da evoluta

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\gamma)(t) &= \gamma_\lambda(t) + \frac{1}{\kappa_\lambda(t)}\mathbf{n}_\lambda(t) = \gamma(t) + \lambda\nu(t) + \frac{|\beta(t) + \lambda\ell(t)|}{\ell(t)} \left(-\frac{\beta(t) + \lambda\ell(t)}{|\beta(t) + \lambda\ell(t)|}\nu(t) \right) = \\ &= \gamma(t) + \lambda\nu(t) - \frac{\beta(t) + \lambda\ell(t)}{\ell(t)}\nu(t) = \gamma(t) - \frac{\beta(t)}{\ell(t)}\nu(t) \end{aligned}$$

Portanto o resultado é válido para todos os parâmetros $t \in I$, como queríamos. Falta mostrar que $(\mathcal{E}(\gamma), \mu)$ é uma imersão de Legendre. De fato, note que

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\gamma)'(t) &= \beta(t)\mu(t) - \left(\frac{\beta}{\ell} \right)'(t)\nu(t) - \frac{\beta(t)}{\ell(t)}\ell'(t)\mu(t) = - \left(\frac{\beta}{\ell} \right)'(t)\nu(t) \\ &\Rightarrow \langle \mathcal{E}(\gamma)'(t), \mu(t) \rangle = - \left(\frac{\beta}{\ell} \right)'(t) \langle \nu(t), \mu(t) \rangle = 0 \end{aligned}$$

Isso nos garante que $(\mathcal{E}(\gamma), \mu)$ é uma curva de Legendre. Para mostrarmos que é uma imersão basta observar que $\mu'(t) = -\ell(t)\nu(t)$ é não nulo, pois $\ell(t) \neq 0$, e assim, $(\mathcal{E}(\gamma), \mu)$ é uma imersão de Legendre. Por último, temos $J(\mu(t)) = -\nu(t)$, ou seja, $\mu_\mathcal{E}(t) = -\nu(t)$. Como $\mathcal{E}(\gamma)'(t) = -\left(\frac{\beta}{\ell}\right)'(t)\nu(t) = \left(\frac{\beta}{\ell}\right)'(t)\mu_\mathcal{E}(t)$, então $\beta_\mathcal{E} = \left(\frac{\beta}{\ell}\right)'$. Mais

ainda, $\mu'(t) = -\ell(t)\nu(t) = \ell(t)\mu_{\mathcal{E}}(t)$, e assim $\ell_{\mathcal{E}} = \ell$. Portanto, a curvatura da imersão de Legendre $\mathcal{E}(\gamma)$ é

$$\left(\ell, \frac{d}{dt} \left(\frac{\beta}{\ell} \right) \right),$$

concluindo a demonstração. \square

Observação 3.24. Segue da Definição (3.20), que a evoluta de uma frente independente da parametrização. Observe também que pela Proposição (3.17), uma curva paralela γ_{λ} é singular em t se, e somente se, $\lambda = -\beta(t)/\ell(t)$. Logo, pelo Teorema (3.23), γ_{λ} é singular em t se, e somente se, $\gamma_{\lambda}(t)$ pertence ao traço da evoluta de γ , assim como vimos para curvas regulares. \diamond

No Exemplo (3.22) concluímos que a evoluta da curva γ satisfaz $\mathcal{E}(\gamma)(0) = (0, 0)$, onde $t = 0$ é o ponto singular de γ . Além disso, também temos que $\gamma(0) = (0, 0)$. O seguinte corolário garante que isto ocorre para toda curva de Legendre.

Corolário 3.25. *Seja $(\gamma, \nu) : I \rightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$ uma imersão de Legendre. Se $t_0 \in I$ é um ponto singular de γ , então $\mathcal{E}(\gamma)(t_0) = \gamma(t_0)$.*

Demonstração. Segue de (3.4), e da Observação (3.9) (b). \square

Conhecemos a definição de ponto de inflexão para uma curva regular, sendo dada em função da curvatura κ . Vejamos a definição para imersões de Legendre.

Definição 3.26. *Seja $(\gamma, \nu) : I \rightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$ uma imersão de Legendre com curvatura (ℓ, β) . Dizemos que $t_0 \in I$ é um **ponto de inflexão** da frente γ (ou da imersão de Legendre (γ, ν)) se $\ell(t_0) = 0$.*

Se t_0 é ponto regular de γ então $\beta(t_0) \neq 0$ e, portanto, segue da Proposição (3.11), que t_0 é ponto de inflexão de γ se e somente se $\kappa(t_0) = 0$. Logo, a definição de ponto de inflexão acima coincide com a definição para curvas regulares. Por outro lado, pontos singulares de uma imersão de Legendre (γ, ν) não são pontos de inflexão uma vez que, se t_0 é ponto singular, então $\beta(t_0) = 0$ e, portanto, $\ell(t_0) \neq 0$.

Para uma curva regular γ , sua evoluta é regular em t se, e somente se, a curvatura de γ satisfaz $\kappa'(t) \neq 0$ (isto é, fora de vértices de γ). O seguinte resultado apresenta uma condição necessária e suficiente para que um parâmetro singular da curva γ seja um parâmetro regular da sua evoluta.

Proposição 3.27. ([6], Proposição 3.8) *Seja $(\gamma, \nu) : I \rightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ uma imersão de Legendre sem pontos de inflexão. Suponha que t_0 é um ponto singular de γ . Então t_0 é um ponto regular de $\mathcal{E}(\gamma)$ se, e somente se, $\gamma''(t_0) \neq (0, 0)$.*

Demonstração. Seja t_0 um ponto regular de $\mathcal{E}(\gamma)$. Temos

$$(0, 0) \neq \mathcal{E}(\gamma)'(t_0) = -\frac{\beta'(t_0)\ell(t_0) - \beta(t_0)\ell'(t_0)}{\ell(t_0)^2} \nu(t_0) \quad (3.5)$$

Por hipótese $\beta(t_0) = 0$ e $\ell(t_0) \neq 0$, pois temos uma imersão de Legendre, então $\beta'(t_0) \neq 0$. Como $\gamma'(t) = \beta(t)\mu(t)$, derivando, $\gamma''(t) = \beta'(t)\mu(t) - \beta(t)\ell(t)\nu(t)$. Logo $\gamma''(t_0) = \beta'(t_0)\mu(t_0)$ é não nulo. A recíproca segue dos mesmos argumentos. \square

Exemplo 3.28. Neste exemplo calcularemos novamente a evoluta da 3/2-cúspide $\gamma(t) = (t^2, t^3)$, que obtemos no Exemplo (3.22), utilizando o Teorema (3.23).

Seja $\nu(t) = (1/\sqrt{9t^2 + 4})(-3t, 2)$. Como calculamos no Exemplo (3.10), temos $\ell(t) = 6/(9t^2 + 4)$ e $\beta(t) = -t\sqrt{9t^2 + 4}$. Portanto, segue do Teorema (3.23) que a evoluta de γ é dada por:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\gamma)(t) &= \gamma(t) - \frac{\beta(t)}{\ell(t)}\nu(t) \\ &= (t^2, t^3) - \frac{-t(9t^2 + 4)}{6}(-3t, 2) \\ &= \left(-\frac{1}{2}(9t^4 + 2t^2), \frac{4}{3}(3t^3 + t)\right), \end{aligned} \quad (3.6)$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Portanto essa parametrização coincide com a obtida no Exemplo (3.22). \diamond

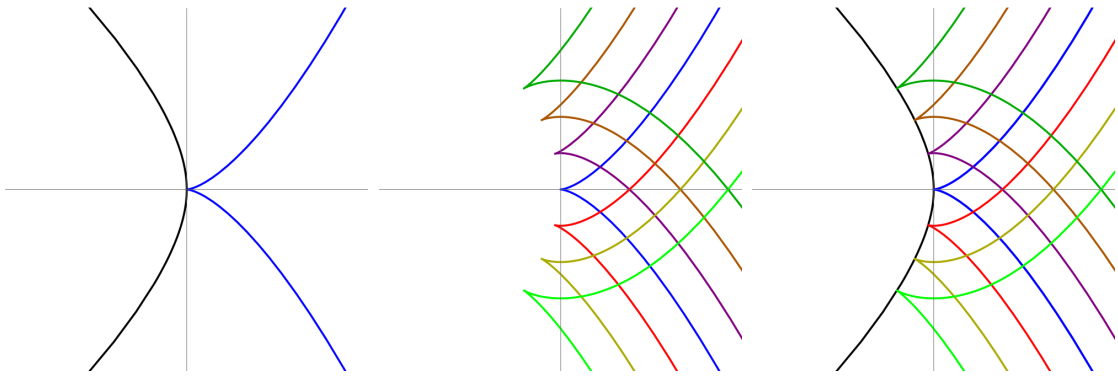


Figura 3.3: Na figura a esquerda temos a 3/2-cúspide em azul e sua evoluta em preto. No centro temos a cúspide em azul e algumas de suas curvas paralelas em outras cores. Na direita temos todas as curvas simultaneamente. Fonte: Elaborada pelo autor.

4 Framed Surfaces

Neste capítulo estudaremos superfícies singulares que possuem um referencial, similar ao que ocorre com uma superfície parametrizada regular $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, onde $\{\mathbf{x}_u(u, v), \mathbf{x}_v(u, v), N(u, v)\}$ é uma base (referencial) em \mathbb{R}^3 , para cada $(u, v) \in U$, e consideraremos U um domínio simplesmente conexo, \mathbb{S}^2 a esfera unitária em \mathbb{R}^3 e $\Delta = \{(a, b) \in \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2 : \langle a, b \rangle = 0\}$. Na literatura essas superfícies são chamadas de “framed surfaces” e optamos por manter esse nome, sem traduzir. A principal referência para esse estudo é o artigo [7]. Apresentaremos as definições, e alguns exemplos. Em seguida estudaremos a geometria de uma framed surface utilizando uma aplicação relacionada com as curvaturas Gaussiana e média de uma superfície regular. Definiremos também as superfícies paralelas de uma framed surface, e suas superfícies focais.

4.1 Frontais e frentes de onda

Nesta seção apresentaremos as definições de frontais e frentes de onda e imersões de Legendre para superfícies, como feito para curvas. No que segue, $U \subset \mathbb{R}^2$ será um domínio simplesmente conexo e $\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \|(x, y, z)\| = 1\}$ a esfera unitária em \mathbb{R}^3 .

Definição 4.1. Uma aplicação suave $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma **frontal** se existe um campo suave $\nu : U \rightarrow \mathbb{S}^2$ de vetores normais a \mathbf{x} , isto é, $\langle \mathbf{x}_u, \nu \rangle = \langle \mathbf{x}_v, \nu \rangle = 0$, para todo $(u, v) \in U$. Se $(\mathbf{x}, \nu) : U \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2$ é uma imersão, \mathbf{x} é dita uma **frente de onda** (ou simplesmente uma **frente**).

Exemplo 4.2. Toda superfície regular em \mathbb{R}^3 é uma frente de onda, onde o campo unitário de vetores é a sua aplicação normal de Gauss. \diamond

Exemplo 4.3. (a) (3/2-Cuspidal edge) Seja $\mathbf{x}(u, v) = (u, v^2, v^3)$. Esta aplicação é uma frente de onda. De fato, os pontos singulares de \mathbf{x} são os pontos $(u, v) = (u, 0)$ pois $\mathbf{x}_v(u, 0) = (0, 0, 0)$. Tomando $\nu(u, v) = (0, -3v^2, 2v)/\sqrt{9v^4 + 4v^2} = (0, -3v, 2)/\sqrt{9v^2 + 4}$, obtemos uma aplicação suave, normal a γ , e bem definida nos pontos singulares, ou seja, γ é uma frontal. Mais ainda, como $\mathbf{x}_u(u, 0) = (1, 0, 0)$ e $\nu_v(u, 0) = (0, -3/2, 0)$, então (\mathbf{x}, ν) é uma imersão. Portanto \mathbf{x} é uma frente.

(b) (Rabo de andorinha) Seja $\mathbf{x}(u, v) = (3u^4 + u^2v, -4u^3 - 2uv, v)$. Essa aplicação é uma frente. De fato, como $\mathbf{x}_v(u, v) = (u^2, -2u, 1) \neq (0, 0, 0)$ para todo (u, v) e $\mathbf{x}_u(u, v) = (12u^3 + 2uv, -12u^2 - 2v, 0)$, então os pontos singulares de \mathbf{x} são os pontos $(u, v) = (u, -6u^2)$. Agora tomando $\nu : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ dado por $\nu(u, v) = (1, u, u^2)/\sqrt{1 + u^2 + u^4}$, obtemos uma aplicação suave, normal a γ , e bem definida nos pontos singulares, ou seja, γ é uma frontal. Mais ainda, como $\mathbf{x}_v(u, v)$ e $\nu_u(u, v)$ são não nulos para todo $u \in \mathbb{R}$, então (\mathbf{x}, ν) é uma imersão, e assim \mathbf{x} é uma frente de onda.

(c) (**Cuspidal cross-cap**) Seja $\mathbf{x}(u, v) = (u, v^2, uv^3)$. Essa aplicação é um exemplo de uma frontal que não é uma frente. De fato, note que os pontos singulares de \mathbf{x} são os pontos $(u, v) = (u, 0)$ pois $\mathbf{x}_v(u, v) = (0, 2v, 3uv^2)$, e assim $\mathbf{x}_v(u, 0) = (0, 0, 0)$. Tomando $\nu : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ o campo de vetores dado por $\nu(u, v) = (-2v^3, -3uv, 2)/\sqrt{4v^6 + 9u^2v^2 + 4}$. Temos ν bem definido para os pontos singulares, e coincidindo com a aplicação normal de Gauss nos pontos regulares, e assim temos uma frontal. Para verificarmos que $\mathbf{x} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ não é uma frente, note que

$$\nu_u(u, v) = \frac{1}{(4v^6 + 9u^2v^2 + 4)^{\frac{3}{2}}}(18uv^5, -12v(v^6 + 1), -18uv^2)$$

$$\nu_v(u, v) = \frac{1}{(4v^6 + 9u^2v^2 + 4)^{\frac{3}{2}}}(-12v^2(2 + 3u^2v^2), 12u(2v^6 - 1), -6(3u^2v + 4v^5)),$$

logo $\nu_u(0, 0) = \nu_v(0, 0) = (0, 0, 0)$, ou seja, (\mathbf{x}, ν) não é uma imersão em $(0, 0)$, e portanto \mathbf{x} não é uma frente.

(d) (**Cross-cap**) Seja $\mathbf{x}(u, v) = (u, uv, v^2)$. Dessa maneira, \mathbf{x} é um exemplo de uma aplicação que não é uma frontal. De fato, \mathbf{x} é singular em $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ pois, $\mathbf{x}_v(0, 0) = (0, 0, 0)$. Suponha que existe $\nu : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ um campo de vetores unitários suave e normal a \mathbf{x} . Então ν é coincide com a aplicação normal de Gauss N ou com $-N$, nos pontos regulares. Sem perda de generalidade suponhamos $\nu = N$ nos pontos regulares de \mathbf{x} . Calculando, obtemos $\nu(u, v) = (2v^2, -2v, u)/\sqrt{4v^4 + 4v^2 + u^2}$, que não está definido em $(u, v) = (0, 0)$. Note que o limite de ν , quando (u, v) tende a $(0, 0)$ pelo caminho $(u, v) = (u, 0)$, é $(0, 0, 1)$. Por outro lado, o limite pelo caminho $(u, v) = (0, v)$ é $(0, 1, 0)$, o que contradiz a continuidade, e assim, a diferenciabilidade de ν , portanto \mathbf{x} não é uma frontal. Veremos posteriormente que o traço de \mathbf{x} pode ser parametrizado por uma frontal. \diamond

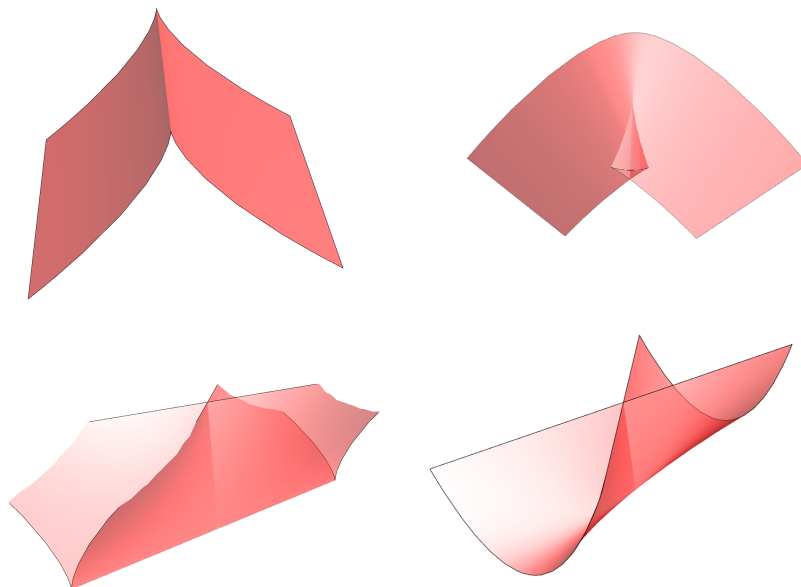


Figura 4.1: Traços das superfícies do Exemplo (4.3). Fonte: Elaborada pelo autor.

Os exemplos acima são clássicos, tanto de superfícies que não são frontais, superfícies que são apenas frontais mas não são frentes, e superfícies que são frentes. Além disso são motivações para as seguintes definições.

Definição 4.4. Seja $\mathbf{x} : (U, p) \rightarrow \mathbb{R}^3$ o germe de uma aplicação diferenciável. Então:

- a) \mathbf{x} é um **cross-cap** em p se é \mathcal{A} -equivalente ao germe $(u, v) \mapsto (u, uv, v^2)$.
- b) \mathbf{x} é um **cuspidal cross-cap** em p se é \mathcal{A} -equivalente ao germe $(u, v) \mapsto (u, v^2, v^3)$.
- c) \mathbf{x} é um **j/i -cuspidal edge** em p , onde $(i, j) = (2, 3), (2, 5), (3, 4), (3, 5)$ se é \mathcal{A} -equivalente ao germe $(u, v) \mapsto (u, v^i, v^j)$.
- d) \mathbf{x} é um **rabo de andorinha** em p se é \mathcal{A} -equivalente ao germe $(u, v) \mapsto (3u^4 + u^2v, 4u^3 + 2uv, v)$.

Definição 4.5. Sejam $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ e $\nu : U \rightarrow \mathbb{S}^2$ aplicações suaves, para todo $(u, v) \in U$. Dizemos que $(\mathbf{x}, \nu) : U \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2$ é uma **superfície de Legendre** se $\langle \mathbf{x}_u(u, v), \nu(u, v) \rangle = \langle \mathbf{x}_v(u, v), \nu(u, v) \rangle = 0$, para todo $(u, v) \in U$. Se, além disso, (\mathbf{x}, ν) é uma imersão, então (\mathbf{x}, ν) é dita **imersão de Legendre**.

Assim, se $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma frontal (resp. frente) então existe $\nu : U \rightarrow \mathbb{S}^2$ tal que (\mathbf{x}, ν) é uma superfície de Legendre (resp. imersão de Legendre). A partir dos exemplos de frontais dados em (4.3), obtemos exemplos de superfícies de Legendre.

4.2 Definições e exemplos

No estudo de curvas de Legendre, foi definida a curvatura de uma curva de Legendre, através de uma base ortonormal do \mathbb{R}^2 ao longo da curva. A seguir estudaremos superfícies de outro ponto de vista, mas com o mesmo objetivo de estudar suas propriedades utilizando uma base ortonormal em cada ponto. Todas as aplicações consideradas ao longo desse trabalho são suaves, isto é, de classe C^∞ .

Definição 4.6. Dizemos que $(\mathbf{x}, \mathbf{n}, \mathbf{s}) : U \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta$ é uma **framed surface** se

$$\langle \mathbf{x}_u(u, v), \mathbf{n}(u, v) \rangle = \langle \mathbf{x}_v(u, v), \mathbf{n}(u, v) \rangle = 0,$$

para todo $(u, v) \in U$. Neste caso, dizemos que \mathbf{x} é uma **framed base surface**. Ainda, se $(\mathbf{x}, \mathbf{n}, \mathbf{s})$ é uma imersão, dizemos que é uma **framed immersion**.

Pela definição, toda superfície parametrizada regular \mathbf{x} é uma *framed base surface*, bastando considerar \mathbf{n} sua aplicação normal de Gauss, e $\mathbf{s} = \mathbf{x}_u / \|\mathbf{x}_u\|$. Além disso, uma *framed base surface* \mathbf{x} é uma frontal, onde \mathbf{n} é seu campo de vetores normais e unitários, e localmente, dada uma frontal \mathbf{x} com vetor normal ν , basta tomar $\mathbf{s} = \mathbf{x}_u / \|\mathbf{x}_u\|$ ou $\mathbf{x}_v / \|\mathbf{x}_v\|$ ou $\nu_u / \|\nu_u\|$ ou $\nu_v / \|\nu_v\|$, onde $\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \nu_u$ ou ν_v não se anulam, respectivamente, e assim \mathbf{x} é uma *framed base surface*.

Considere $\mathbf{t}(u, v) = \mathbf{n}(u, v) \times \mathbf{s}(u, v)$. Então $\{\mathbf{n}(u, v), \mathbf{s}(u, v), \mathbf{t}(u, v)\}$ é uma base ortonormal positiva ao longo de $\mathbf{x}(u, v)$. Pela condição de ortogonalidade entre \mathbf{n} e \mathbf{x} , temos as seguintes relações:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}_u \\ \mathbf{x}_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{s} \\ \mathbf{t} \end{pmatrix}, \quad (4.1)$$

onde $a_i, b_i : U \rightarrow \mathbb{R}, i = 1, 2$ são funções suaves e, além disso, como \mathbf{n}, \mathbf{s} e \mathbf{t} são unitários, suas derivadas parciais se escrevem como combinação linear dos outros dois. Essas relações são dadas da seguinte maneira,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{n}_u \\ \mathbf{s}_u \\ \mathbf{t}_u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & e_1 & f_1 \\ -e_1 & 0 & g_1 \\ -f_1 & -g_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{n} \\ \mathbf{s} \\ \mathbf{t} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \mathbf{n}_v \\ \mathbf{s}_v \\ \mathbf{t}_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & e_2 & f_2 \\ -e_2 & 0 & g_2 \\ -f_2 & -g_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{n} \\ \mathbf{s} \\ \mathbf{t} \end{pmatrix}, \quad (4.2)$$

sendo $e_i, f_i, g_i : U \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2$ funções suaves. Observe que utilizamos as relações $\langle \mathbf{n}, \mathbf{s} \rangle = \langle \mathbf{n}, \mathbf{t} \rangle = \langle \mathbf{s}, \mathbf{t} \rangle = 0$, o que implica, por exemplo, que $\langle \mathbf{n}_u, \mathbf{s} \rangle = -\langle \mathbf{n}, \mathbf{s}_u \rangle = e_1$.

Definição 4.7. Com a notação anterior, as funções suaves a_i, b_i, e_i, f_i, g_i são chamadas de **invariantes básicos** da *framed surface* $(\mathbf{x}, \mathbf{n}, \mathbf{s})$. Denotaremos as matrizes dadas em (4.1) e (4.2) por \mathcal{G} , \mathcal{F}_1 e \mathcal{F}_2 , respectivamente, sendo essas matrizes também chamadas de **invariantes básicos** da *framed surface*.

Como \mathbf{x} é uma aplicação suave, então $\mathbf{x}_{uv} = \mathbf{x}_{vu}$. Com esta condição, e por (4.1) e (4.2), temos que os invariantes básicos da *framed surface* satisfazem as condições:

$$\begin{cases} a_{1v} - b_1g_2 = a_{2u} - b_2g_1 \\ b_{1v} - a_2g_1 = b_{2u} - a_1g_2 \\ a_1e_2 + b_1f_2 = a_2e_1 + b_2f_1 \end{cases} \quad (4.3)$$

Além disso, como \mathbf{n} , \mathbf{s} e \mathbf{t} também são aplicações suaves, pelas condições de integrabilidade $\mathbf{n}_{uv} = \mathbf{n}_{vu}$, $\mathbf{s}_{uv} = \mathbf{s}_{vu}$ e $\mathbf{t}_{uv} = \mathbf{t}_{vu}$, temos que \mathcal{F}_1 e \mathcal{F}_2 satisfazem $\mathcal{F}_{2u} - \mathcal{F}_{1v} = \mathcal{F}_1\mathcal{F}_2 - \mathcal{F}_2\mathcal{F}_1$, e assim os invariantes também devem satisfazer ao sistema:

$$\begin{cases} e_{1v} - f_1g_2 = e_{2u} - f_2g_1 \\ f_{1v} - e_2g_1 = f_{2u} - e_1g_2 \\ g_{1v} - e_1f_2 = g_{2u} - e_2f_1 \end{cases} \quad (4.4)$$

Exemplo 4.8. Os próximos exemplos são referentes aos exemplos (4.3)

(a) (**Cuspidal edge**) A frente $\mathbf{x}(u, v) = (u, v^2, v^3)$ é uma *framed base surface*. De fato, basta tomar $\mathbf{n} = \nu$ como no exemplo (4.3)(a) e $\mathbf{s} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ constante dado por $\mathbf{s}(u, v) = (1, 0, 0)$, e assim $(\mathbf{x}, \mathbf{n}, \mathbf{s})$ é uma *framed surface*.

A aplicação $\mathbf{t} = \mathbf{n} \times \mathbf{s}$ é dada por:

$$\mathbf{t}(u, v) = \frac{1}{\sqrt{9v^2 + 4}}(0, 2, 3v).$$

Portanto obtemos os seguintes invariantes básicos da *framed surface*:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & v\sqrt{9v^2 + 4} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} e_1 & f_1 & g_1 \\ e_2 & f_2 & g_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-6}{9v^2+4} & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) (**Rabo de andorinha**) A frente $\mathbf{x}(u, v) = (3u^4 + u^2v, -4u^3 - 2uv, v)$ é uma *framed base surface*. De fato, basta tomar $(\mathbf{n}, \mathbf{s}) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \Delta$ dados da seguinte maneira:

$$\mathbf{n}(u, v) = \frac{1}{\sqrt{1 + u^2 + u^4}}(1, u, u^2),$$

$$\mathbf{s}(u, v) = \frac{1}{\sqrt{1 + u^2}}(u, -1, 0).$$

Assim $(\mathbf{x}, \mathbf{n}, \mathbf{s}) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta$ é uma *framed surface*. Calculando $\mathbf{t} = \mathbf{n} \times \mathbf{s}$ obtemos:

$$\mathbf{t}(u, v) = \frac{1}{\sqrt{(1 + u^2 + u^4)(1 + u^2)}}(u^2, u^3, -1 - u^2),$$

e portanto obtemos os invariantes básicos a seguir:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (12u^2 + 2v)\sqrt{1+u^2} & 0 \\ \frac{u(2+u^2)}{\sqrt{1+u^2}} & \frac{-\sqrt{1+u^2+u^4}}{\sqrt{1+u^2}} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} e_1 & f_1 & g_1 \\ e_2 & f_2 & g_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{(1+u^2+u^4)(1+u^2)}} & \frac{-u(2+u^2)}{(1+u^2+u^4)\sqrt{1+u^2}} & \frac{u^2}{\sqrt{1+u^2+u^4}(1+u^2)} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) (**Cuspidal cross-cap**) A frontal $\mathbf{x}(u, v) = (u, v^2, uv^3)$ é uma *framed base surface*. De fato, basta tomar $\mathbf{n} = \nu$ como no exemplo (4.3)(c) e $\mathbf{s} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ da seguinte maneira

$$\mathbf{s}(u, v) = \frac{1}{\sqrt{1+v^6}}(1, 0, v^3),$$

e assim $(\mathbf{x}, \mathbf{n}, \mathbf{s})$ é uma *framed surface*.

Segue que $\mathbf{t} = \mathbf{n} \times \mathbf{s}$ é dado por:

$$\mathbf{t}(u, v) = \frac{1}{\sqrt{(4v^6 + 9u^2v^2 + 4)(1 + v^6)}}(-3uv^4, 2v^6 + 2, 3uv)$$

e temos os invariantes básicos a seguir:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{1+v^6} & 0 \\ \frac{3uv^5}{\sqrt{1+v^6}} & \frac{v\sqrt{4v^6+9u^2v^2+4}}{\sqrt{1+v^6}} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} e_1 & f_1 & g_1 \\ e_2 & f_2 & g_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-6v\sqrt{1+v^6}}{4v^6+9u^2v^2+4} & 0 \\ \frac{-6v^2}{\sqrt{(4v^6+9u^2v^2+4)(1+v^6)}} & \frac{6u(2v^6-1)}{(4v^6+9u^2v^2+4)\sqrt{1+v^6}} & \frac{9uv^3}{\sqrt{4v^6+9u^2v^2+4}(1+v^6)} \end{pmatrix}.$$

(d) (**Cross-cap**) Vimos no exemplo (4.3)(d) que o *cross-cap* $\mathbf{x}(u, v) = (u, uv, v^2)$ não é uma frontal. Porém, tomando o difeomorfismo dado por $\phi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$, obtemos uma parametrização $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x} \circ \phi$, de modo que $\bar{\mathbf{x}}$ é uma frontal, como demonstrado em [4]. Temos que $\bar{\mathbf{x}}(r, \theta) = (r \cos \theta, r^2 \cos \theta \sin \theta, r^2 \sin^2 \theta)$, e podemos tomar a aplicação $(\mathbf{n}, \mathbf{s}) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \Delta$ da seguinte maneira:

$$\mathbf{n}(r, \theta) = \frac{1}{\sqrt{4r^2 \sin^4 \theta + 3 \sin^2 \theta + 1}}(-2r \sin^2 \theta, 2 \sin \theta, -\cos \theta),$$

$$\mathbf{s}(r, \theta) = \frac{1}{\sqrt{3 \sin^2 \theta + 1}}(0, \cos \theta, 2 \sin \theta).$$

Logo, $(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{n}, \mathbf{s}) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta$ é uma *framed surface*, ou seja, $\bar{\mathbf{x}}$ é uma *framed base surface*.

Agora, calculando $\mathbf{t} = \mathbf{n} \times \mathbf{s}$, obtemos:

$$\mathbf{t}(r, \theta) = \frac{1}{\sqrt{(4r^2 \sin^4 \theta + 3 \sin^2 \theta + 1)(3 \sin^2 \theta + 1)}}(3 \sin^2 \theta + 1, 4r \sin^3 \theta, -2r \sin^2 \theta \cos \theta)$$

Segue então que os invariantes básicos, dados em \mathcal{G} , são dados por:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2r \sin \theta (\sin^2 \theta + 1)}{\sqrt{3 \sin^2 \theta + 1}} & \frac{\cos \theta \sqrt{4r^2 \sin^4 \theta + 3 \sin^2 \theta + 1}}{\sqrt{3 \sin^2 \theta + 1}} \\ r^2 \cos \theta \sqrt{3 \sin^2 \theta + 1} & -\frac{r \sin \theta \sqrt{4r^2 \sin^4 \theta + 3 \sin^2 \theta + 1}}{\sqrt{3 \sin^2 \theta + 1}} \end{pmatrix},$$

e os invariantes básicos dados pelas matrizes \mathcal{F}_1 e \mathcal{F}_2 são:

$$\begin{pmatrix} e_1 & f_1 & g_1 \\ e_2 & f_2 & g_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2 \operatorname{sen}^2 \theta \sqrt{3 \operatorname{sen}^2 \theta + 1}}{4r^2 \operatorname{sen}^4 \theta + 3 \operatorname{sen}^2 \theta + 1} & 0 \\ \frac{-2}{\sqrt{(4r^2 \operatorname{sen}^4 \theta + 3 \operatorname{sen}^2 \theta + 1)(3 \operatorname{sen}^2 \theta + 1)}} & \frac{2r \operatorname{sen} \theta \cos \theta (3 \operatorname{sen}^2 \theta + 2)}{(4r^2 \operatorname{sen}^4 \theta + 3 \operatorname{sen}^2 \theta + 1)\sqrt{3 \operatorname{sen}^2 \theta + 1}} & \frac{-4r \operatorname{sen}^2 \theta}{(3 \operatorname{sen}^2 \theta + 1)\sqrt{4r^2 \operatorname{sen}^4 \theta + 3 \operatorname{sen}^2 \theta + 1}} \end{pmatrix}.$$

◇

Tendo definidos os conceitos anteriores, podemos começar a introduzi-los ao estudo de superfícies de revolução, como no exemplo a seguir.

Exemplo 4.9. ([15], **Proposição 3.1 e 3.2**) Seja $(\gamma, \nu) : I \rightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ uma curva de Legendre, com curvatura (ℓ, β) , onde $\gamma(t) = (x(t), z(t))$ e $\nu(t) = (a(t), b(t))$. Por definição, $\langle (x'(t), z'(t)), (a(t), b(t)) \rangle = 0$ e $a(t)^2 + b(t)^2 = 1$. Pelas equações (3.1), temos:

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = \beta(t) \begin{pmatrix} -b(t) \\ a(t) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a'(t) \\ b'(t) \end{pmatrix} = \ell(t) \begin{pmatrix} -b(t) \\ a(t) \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

Consideremos $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$ como sendo o plano (x, z) no espaço (x, y, z) . Vamos tomar a superfície de revolução de γ em torno do eixo x , $\mathbf{x} : I \times [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3$, dada por

$$\mathbf{x}(t, \theta) = (x(t), z(t) \cos \theta, z(t) \operatorname{sen} \theta),$$

e veremos que \mathbf{x} é uma *framed base surface*. Pelas equações (4.5), temos:

$$\mathbf{x}_t(t, \theta) = \beta(t)(-b(t), a(t) \cos \theta, a(t) \operatorname{sen} \theta) \text{ e } \mathbf{x}_\theta(t, \theta) = -z(t)(0, \operatorname{sen} \theta, -\cos \theta).$$

Observando que os vetores $(-b(t), a(t) \cos \theta, a(t) \operatorname{sen} \theta)$ e $(0, \operatorname{sen} \theta, \cos \theta)$ são unitários, tomemos o campo de vetores unitários \mathbf{n}^x dado pelo produto vetorial dos vetores acima, ou seja,

$$\mathbf{n}^x(t, \theta) = (-a(t), -b(t) \cos \theta, -b(t) \operatorname{sen} \theta),$$

e podemos tomar $\mathbf{s}^x(t, \theta) = (0, \operatorname{sen} \theta, -\cos \theta)$ de forma que $(\mathbf{x}, \mathbf{n}^x, \mathbf{s}^x) : I \times [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta$ é uma *framed surface*.

Segue que $\mathbf{t}^x(t, \theta) = \mathbf{n}^x(t, \theta) \times \mathbf{s}^x(t, \theta) = (b(t), -a(t) \cos \theta, -a(t) \operatorname{sen} \theta)$. Temos que $\mathbf{x}_t(t, \theta) = -\beta(t)\mathbf{t}^x(t, \theta)$ e $\mathbf{x}_\theta(t, \theta) = -z(t)\mathbf{s}^x(t, \theta)$, logo a matriz de invariantes básicos \mathcal{G}^x é dada por:

$$\mathcal{G}^x = \begin{pmatrix} 0 & -\beta(t) \\ -z(t) & 0 \end{pmatrix}$$

Para calcular as matrizes de invariantes básicos \mathcal{F}_1^x e \mathcal{F}_2^x , basta calcularmos \mathbf{n}_t^x , \mathbf{s}_t^x , \mathbf{n}_θ^x , \mathbf{s}_θ^x . Então temos:

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_t^x(t, \theta) &= (\ell(t)b(t), -\ell(t)a(t) \cos \theta, -\ell(t)a(t) \operatorname{sen} \theta) = \ell(t)\mathbf{t}^x(t, \theta), \\ \mathbf{n}_\theta^x(t, \theta) &= (0, b(t) \operatorname{sen} \theta, -b(t) \cos \theta) = b(t)\mathbf{s}^x(t, \theta), \\ \mathbf{s}_t^x(t, \theta) &= 0, \\ \mathbf{s}_\theta^x(t, \theta) &= (0, \cos \theta, \operatorname{sen} \theta) = -b(t)\mathbf{n}^x(t, \theta) - a(t)\mathbf{t}^x(t, \theta), \end{aligned}$$

e segue que as matrizes \mathcal{F}_1^x e \mathcal{F}_2^x são:

$$\mathcal{F}_1^x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ell(t) \\ 0 & 0 & 0 \\ -\ell(t) & 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathcal{F}_2^x = \begin{pmatrix} 0 & b(t) & 0 \\ -b(t) & 0 & -a(t) \\ 0 & a(t) & 0 \end{pmatrix}.$$

Podemos também considerar a superfície de revolução de γ em torno do eixo z , dada por

$$\mathbf{z}(t, \theta) = (x(t) \cos \theta, x(t) \sin \theta, z(t))$$

e, como feito para a superfície \mathbf{x} , mostrar que é uma *framed base surface*, onde $\mathbf{n}^z(t, \theta) = (a(t) \cos \theta, a(t) \sin \theta, b(t))$, $\mathbf{s}^z(t, \theta) = (\sin \theta, -\cos \theta, 0)$ e seus invariantes básicos são:

$$\mathcal{G}^z = \begin{pmatrix} 0 & -\beta(t) \\ -x(t) & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{F}_1^z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\ell(t) \\ 0 & 0 & 0 \\ \ell(t) & 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathcal{F}_2^z = \begin{pmatrix} 0 & -a(t) & 0 \\ a(t) & 0 & b(t) \\ 0 & -b(t) & 0 \end{pmatrix}.$$

◇

4.3 Teoremas fundamentais para framed surfaces

Ao estudar propriedades básicas de *framed surfaces*, é natural buscar por teoremas fundamentais de existência e unicidade, similares ao Teorema (2.31) para superfícies regulares. No capítulo anterior, a aplicação (ℓ, β) foi utilizada na construção de uma curva nos teoremas de existência e unicidade para curvas de Legendre. Para *framed surfaces* utilizaremos os invariantes básicos para obtermos os teoremas fundamentais de existência e unicidade. Para superfícies regulares a unicidade ocorre a menos de um movimento rígido, ou seja, de uma congruência, e o mesmo ocorrerá para *framed surfaces*.

Definição 4.10. Duas *framed surfaces* $(\mathbf{x}, \mathbf{n}, \mathbf{s}), (\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{n}}, \tilde{\mathbf{s}}) : U \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta$ são **congruentes** se existe uma rotação A e uma translação de $a \in \mathbb{R}^3$ tal que

$$\tilde{\mathbf{x}}(u, v) = A(\mathbf{x}(u, v)) + a, \tilde{\mathbf{n}}(u, v) = A(\mathbf{n}(u, v)), \tilde{\mathbf{s}}(u, v) = A(\mathbf{s}(u, v)),$$

para todo $(u, v) \in U$.

A existência de soluções de equações diferenciais parciais nos garante que, dadas as condições de integrabilidade (4.3) e (4.4), existem uma base ortonormal $\{\mathbf{n}, \mathbf{s}, \mathbf{t}\}$ satisfazendo (4.2), e uma aplicação $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que (4.1) é satisfeito. Logo temos o teorema a seguir.

Teorema 4.11. (Teorema de Existência, [7], Teorema 1) *Seja U um domínio simplesmente conexo em \mathbb{R}^2 e $a_i, b_i, e_i, f_i, g_i : U \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2$ funções suaves com as condições de integrabilidade (4.3) e (4.4). Então existe uma framed surface $(\mathbf{x}, \mathbf{n}, \mathbf{s}) : U \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta$ com invariantes básicos $(\mathcal{G}, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$.*

Afim de demonstrar a unicidade, precisamos primeiramente do seguinte lema.

Lema 4.12. ([7], Lema 2) *Se $(\mathcal{G}, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) = (\tilde{\mathcal{G}}, \tilde{\mathcal{F}}_1, \tilde{\mathcal{F}}_2)$ e $(\mathbf{x}, \mathbf{n}, \mathbf{s})(u_0, v_0) = (\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{n}}, \tilde{\mathbf{s}})(u_0, v_0)$, para algum $(u_0, v_0) \in U$, então $(\mathbf{x}, \mathbf{n}, \mathbf{s}) = (\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{n}}, \tilde{\mathbf{s}})$.*

Demonstração. Seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(u, v) = \langle \mathbf{n}(u, v), \tilde{\mathbf{n}}(u, v) \rangle + \langle \mathbf{s}(u, v), \tilde{\mathbf{s}}(u, v) \rangle + \langle \mathbf{t}(u, v), \tilde{\mathbf{t}}(u, v) \rangle$. Pela definição dos invariantes básicos, temos

$$f_u = (e_1 - \tilde{e}_1)\langle \mathbf{s}, \tilde{\mathbf{n}} \rangle + (f_1 - \tilde{f}_1)\langle \mathbf{t}, \tilde{\mathbf{n}} \rangle + (\tilde{e}_1 - e_1)\langle \mathbf{n}, \tilde{\mathbf{s}} \rangle + (\tilde{f}_1 - f_1)\langle \mathbf{n}, \tilde{\mathbf{t}} \rangle + (g_1 - \tilde{g}_1)\langle \mathbf{t}, \tilde{\mathbf{s}} \rangle + (\tilde{g}_1 - g_1)\langle \mathbf{s}, \tilde{\mathbf{t}} \rangle$$

Por hipótese, $\mathcal{F}_1 = \tilde{\mathcal{F}}_1$, logo $f_u(u, v) = 0$ para todo $(u, v) \in U$ e, analogamente, $f_v(u, v) = 0$ para todo $(u, v) \in U$, ou seja, f é uma função constante em U . Agora, como $(\mathbf{n}, \mathbf{s})(u_0, v_0) = (\tilde{\mathbf{n}}, \tilde{\mathbf{s}})(u_0, v_0)$, segue que $f(u, v) = f(u_0, v_0) = 3$, para todo $(u, v) \in U$. Portanto $\langle \mathbf{n}, \tilde{\mathbf{n}} \rangle = \langle \mathbf{s}, \tilde{\mathbf{s}} \rangle = \langle \mathbf{t}, \tilde{\mathbf{t}} \rangle = 1$, isto é, $\mathbf{n} = \tilde{\mathbf{n}}$, $\mathbf{s} = \tilde{\mathbf{s}}$ e $\mathbf{t} = \tilde{\mathbf{t}}$, para todo $(u, v) \in U$.

Para mostrarmos que $\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{x}}$, observamos que $\mathbf{x}_u = a_1\mathbf{s} + b_1\mathbf{t} = \tilde{a}_1\tilde{\mathbf{s}} + \tilde{b}_1\tilde{\mathbf{t}} = \tilde{\mathbf{x}}_u$ e $\mathbf{x}_v = a_2\mathbf{s} + b_2\mathbf{t} = \tilde{a}_2\tilde{\mathbf{s}} + \tilde{b}_2\tilde{\mathbf{t}} = \tilde{\mathbf{x}}_v$, isto é, $(\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}})_u = (\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}})_v = 0$, para todo $(u, v) \in U$. Logo $(\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}})$ é constante. Como para (u_0, v_0) temos $(\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}})(u_0, v_0) = 0$, segue que $\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{x}}$ para todo $(u, v) \in U$. \square

Teorema 4.13. (Teorema de Unicidade, [7], Teorema 2) *Sejam $(\mathbf{x}, \mathbf{n}, \mathbf{s}), (\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{n}}, \tilde{\mathbf{s}}) : U \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta$ framed surfaces com invariantes básicos $(\mathcal{G}, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$ e $(\tilde{\mathcal{G}}, \tilde{\mathcal{F}}_1, \tilde{\mathcal{F}}_2)$, respectivamente. Então $(\mathbf{x}, \mathbf{n}, \mathbf{s})$ e $(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{n}}, \tilde{\mathbf{s}})$ são congruentes como framed surfaces se, e somente se, seus invariantes básicos coincidem.*

Demonstração. Se $(\mathbf{x}, \mathbf{n}, \mathbf{s})$ e $(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{n}}, \tilde{\mathbf{s}})$ são congruentes como framed surfaces, isto é, existem uma rotação A e uma translação a satisfazendo a definição, então basta notar que A é uma aplicação linear, pois é uma rotação e dado este fato, o resultado é obtido de cálculos diretos.

Agora, suponhamos que $(\mathcal{G}, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) = (\tilde{\mathcal{G}}, \tilde{\mathcal{F}}_1, \tilde{\mathcal{F}}_2)$. Fixado um ponto $(u_0, v_0) \in U$, existe uma rotação A e uma translação por $a \in \mathbb{R}^3$ tais que $(\mathbf{x}, \mathbf{n}, \mathbf{s})(u_0, v_0) = (A(\tilde{\mathbf{x}}) + a, A(\tilde{\mathbf{n}}), A(\tilde{\mathbf{s}}))(u_0, v_0)$. Pelo lema (4.12), obtemos $(\mathbf{x}, \mathbf{n}, \mathbf{s}) = (A(\tilde{\mathbf{x}}) + a, A(\tilde{\mathbf{n}}), A(\tilde{\mathbf{s}}))$, isto é, $(\mathbf{x}, \mathbf{n}, \mathbf{s})$ e $(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{n}}, \tilde{\mathbf{s}})$ são congruentes como framed surfaces. \square

Vamos estudar agora, o efeito de uma mudança de parâmetros no domínio U de uma framed surface.

Proposição 4.14. ([7], Proposição 3) *Seja $(\mathbf{x}, \mathbf{n}, \mathbf{s}) : U \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta$ uma framed surface, com invariantes básicos $(\mathcal{G}, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$, e $\phi : V \rightarrow U, (p, q) \mapsto (u(p, q), v(p, q))$ uma mudança de parâmetros. Então $(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{n}}, \tilde{\mathbf{s}}) = (\mathbf{x}, \mathbf{n}, \mathbf{s}) \circ \phi : V \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta$ é uma framed surface com invariantes básicos $\tilde{a}_i, \tilde{b}_i, \tilde{e}_i, \tilde{f}_i$ e $\tilde{g}_i, i = 1, 2$ dados por*

$$\begin{pmatrix} \tilde{a}_1 & \tilde{b}_1 \\ \tilde{a}_2 & \tilde{b}_2 \end{pmatrix} (p, q) = \begin{pmatrix} u_p & v_p \\ u_q & v_q \end{pmatrix} (p, q) \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} (\phi(p, q))$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{e}_1 & \tilde{f}_1 & \tilde{g}_1 \\ \tilde{e}_2 & \tilde{f}_2 & \tilde{g}_2 \end{pmatrix} (p, q) = \begin{pmatrix} u_p & v_p \\ u_q & v_q \end{pmatrix} (p, q) \begin{pmatrix} e_1 & f_1 & g_1 \\ e_2 & f_2 & g_2 \end{pmatrix} (\phi(p, q)).$$

Demonstração. Primeiramente, note que $\tilde{\mathbf{t}} = \tilde{\mathbf{n}} \times \tilde{\mathbf{s}}$ é dado por $\tilde{\mathbf{t}}(p, q) = \mathbf{t}(\phi(p, q))$. Agora basta aplicar a regra da cadeia para $\tilde{\mathbf{x}}_u, \tilde{\mathbf{x}}_v, \tilde{\mathbf{n}}_u, \tilde{\mathbf{n}}_v, \tilde{\mathbf{s}}_u, \tilde{\mathbf{s}}_v, \tilde{\mathbf{t}}_u$ e $\tilde{\mathbf{t}}_v$, e obtemos as equações desejadas. \square

O seguinte resultado estuda o efeito de um difeomorfismo na imagem de \mathbf{x} em \mathbb{R}^3 , obtendo uma nova framed surface. Como não é um resultado essencial para o desenvolvimento deste trabalho, omitiremos a demonstração.

Proposição 4.15. ([7], Proposição 4) *Seja $(\mathbf{x}, \mathbf{n}, \mathbf{s}) : U \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta$ uma framed surface, e $\psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ um difeomorfismo. Então existe uma aplicação suave $(\mathbf{n}^\psi, \mathbf{s}^\psi) : U \rightarrow \Delta$ tal que $(\psi \circ \mathbf{x}, \mathbf{n}^\psi, \mathbf{s}^\psi) : U \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta$ é uma framed surface.*

4.4 Curvaturas de framed surfaces

Nesta seção consideramos $(\mathbf{x}, \mathbf{n}, \mathbf{s}) : U \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ uma *framed surface* com invariantes básicos $(\mathcal{G}, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$. Com o intuito de estudar a geometria de uma *framed surface* apresentaremos a seguir aplicações relacionadas as curvaturas Gaussiana e média de uma superfície regular e definidas utilizando os invariantes básicos de $(\mathbf{x}, \mathbf{n}, \mathbf{s})$.

Suponhamos primeiro que \mathbf{x} é uma superfície parametrizada regular com coordenadas u, v e tomemos \mathbf{n} como sendo sua aplicação normal de Gauss. Escrevendo \mathbf{n}_u e \mathbf{n}_v como combinação linear da base $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ como nas equações (2.3), temos

$$\begin{aligned}\mathbf{n}_u &= a_{11}\mathbf{x}_u + a_{12}\mathbf{x}_v, \\ \mathbf{n}_v &= a_{21}\mathbf{x}_u + a_{22}\mathbf{x}_v.\end{aligned}$$

Substituindo \mathbf{x}_u e \mathbf{x}_v pelas combinações lineares de \mathbf{s} e \mathbf{t} obtidas em (4.1), obtemos uma representação das derivadas parciais de \mathbf{n} como combinações lineares da base $\{\mathbf{s}, \mathbf{t}\}$, dada em forma matricial por

$$\begin{pmatrix} \mathbf{n}_u \\ \mathbf{n}_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{s} \\ \mathbf{t} \end{pmatrix}. \quad (4.6)$$

Por outro lado, as equações (4.2) fornecem outra maneira de expressar \mathbf{n}_u e \mathbf{n}_v como combinação linear de \mathbf{s} e \mathbf{t} , e como essa relação é dada de maneira única, conclui-se que:

$$\begin{pmatrix} e_1 & f_1 \\ e_2 & f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}. \quad (4.7)$$

Pela suposição de que \mathbf{x} é regular, temos que a matriz \mathcal{G} possui inversa dada por $\mathcal{G}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathcal{G})} \begin{pmatrix} b_2 & -b_1 \\ -a_2 & a_1 \end{pmatrix}$. Multiplicando os dois lados da equação (4.7) por \mathcal{G}^{-1} a direita, obtemos

$$\frac{1}{\det(\mathcal{G})} \begin{pmatrix} e_1 b_2 - f_1 a_2 & -e_1 b_1 + f_1 a_1 \\ e_2 b_2 - f_2 a_2 & -e_2 b_1 + f_2 a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

As equações (4.7) e (4.8) envolvem a matriz $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, que está relacionada com as curvaturas Gaussiana e média da superfície como visto na observação (2.29), sendo uma motivação para a seguinte definição para uma *framed surface*.

Definição 4.16. A *curvatura da framed surface* é uma aplicação suave

$$C_F = (J_F, K_F, H_F) : U \rightarrow \mathbb{R}^3$$

dada por:

$$\begin{aligned}J_F &= \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}, & K_F &= \det \begin{pmatrix} e_1 & f_1 \\ e_2 & f_2 \end{pmatrix}, \\ H_F &= -\frac{1}{2} \left[\det \begin{pmatrix} a_1 & f_1 \\ a_2 & f_2 \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} b_1 & e_1 \\ b_2 & e_2 \end{pmatrix} \right].\end{aligned}$$

Observação 4.17. Pela condição de integrabilidade (4.4), temos $K_F = g_{1v} - g_{2u}$. \diamond

A seguinte proposição explicita a motivação para a definição anterior, relacionando a curvatura de uma *framed surface* com as curvaturas Gaussiana e média de uma superfície regular.

Proposição 4.18. ([7], Proposição 5) *Com as notações acima, se \mathbf{x} é uma superfície regular, a curvatura Gaussiana \mathbf{K} e a curvatura média \mathbf{H} de \mathbf{x} satisfazem*

$$\mathbf{K} = K_F/J_F \text{ e } \mathbf{H} = H_F/J_F$$

.

Demonstração. Primeiramente, por propriedades de determinante, segue de (4.7) que $K_F = \mathbf{K} \cdot J_F$, ou seja, $\mathbf{K} = K_F/J_F$.

Agora para a equação (4.8), calculando os traços das matrizes obtemos a igualdade $(a_1f_2 - a_2f_1 - b_1e_2 + b_2e_1)/J_F = (a_{11} + a_{22})$. Por outro lado:

$$a_1f_2 - a_2f_1 - b_1e_2 + b_2e_1 = \det \begin{pmatrix} a_1 & f_1 \\ a_2 & f_2 \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} b_1 & e_1 \\ b_2 & e_2 \end{pmatrix}.$$

Pela Observação (2.29), temos que $\mathbf{H} = -\frac{1}{2}(a_{11} + a_{22})$ e substituindo a igualdade obtida, concluímos:

$$\mathbf{H} = -\frac{1}{2} \left[\det \begin{pmatrix} a_1 & f_1 \\ a_2 & f_2 \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} b_1 & e_1 \\ b_2 & e_2 \end{pmatrix} \right] \frac{1}{J_F} = \frac{H_F}{J_F}.$$

□

As proposições a seguir fornecem critérios para que uma *framed surface* seja uma imersão. No que segue, supomos $(\mathbf{x}, \mathbf{n}, \mathbf{s}) : U \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta$ uma *framed surface* e $p \in U$. Primeiramente obteremos uma condição para que \mathbf{x} seja uma imersão.

Proposição 4.19. $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ *é uma imersão (ou seja, \mathbf{x} é uma superfície regular), em uma vizinhança de p , se, e somente se, $J_F(p) \neq 0$.*

Demonstração. Temos que \mathbf{x} é uma imersão p se, e somente se, $\mathbf{x}_v \times \mathbf{x}_u(p)$ é não nulo. Como $\mathbf{x}_u(p) = a_1(p)\mathbf{s}(p) + b_1(p)\mathbf{t}(p)$ e $\mathbf{x}_v(p) = a_2(p)\mathbf{s}(p) + b_2(p)\mathbf{t}(p)$, $\mathbf{x}_v \times \mathbf{x}_u(p) \neq 0$ é equivalente a $(a_1(p)\mathbf{s}(p) + b_1(p)\mathbf{t}(p)) \times (a_2(p)\mathbf{s}(p) + b_2(p)\mathbf{t}(p)) \neq 0$. Por propriedades de produto vetorial

$$\begin{aligned} (a_1(p)\mathbf{s}(p) + b_1(p)\mathbf{t}(p)) \times (a_2(p)\mathbf{s}(p) + b_2(p)\mathbf{t}(p)) \neq 0 &\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (a_1(p)b_2(p) - a_2(p)b_1(p))\mathbf{s}(p) \times \mathbf{t}(p) \neq 0. \end{aligned}$$

Pela definição de \mathbf{t} , temos que $\mathbf{s} \times \mathbf{t}(p) = \mathbf{n}(p)$, que é sempre não nulo. Portanto, \mathbf{x} é uma imersão se, e somente se, $0 \neq a_1(p)b_2(p) - a_2(p)b_1(p) = J_F(p)$. □

Agora, a próxima proposição fornece uma condição para que (\mathbf{x}, \mathbf{n}) seja uma imersão de Legendre, isto é, \mathbf{x} seja uma frente de onda.

Proposição 4.20. ([7], Proposição 8) $(\mathbf{x}, \mathbf{n}) : U \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2$ *é uma imersão de Legendre em p se, e somente se, $C_F(p)$ é não nula.*

Demonstração. Suponhamos $C_F(p)$ nulo e mostremos que (\mathbf{x}, \mathbf{n}) não é uma imersão. De fato, temos que $J_F(p) = 0$, isto é, as colunas da matriz \mathcal{G} são múltiplas, ou seja, existem $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ tais que $k_1^2 + k_2^2 \neq 0$ e $k_1(a_1, a_2) + k_2(b_1, b_2) = (0, 0)$ em p . Analogamente, como $K_F(p) = 0$, existem $h_1, h_2 \in \mathbb{R}$ com $h_1^2 + h_2^2 \neq 0$ e $h_1(e_1, e_2) + h_2(f_1, f_2) = (0, 0)$ em p .

Para k_i e h_i , $i = 1, 2$, ao menos um elemento de cada um desses pares deve ser não nulo. Podemos simplificar essa condição para os seguintes quatro casos: $k_1h_1 \neq 0$, $k_1h_2 \neq 0$,

$k_2h_1 \neq 0$ ou $k_2h_2 \neq 0$. Suponhamos $k_1h_1 \neq 0$. Nesse caso $(a_1, a_2) = -(k_2/k_1)(b_1, b_2)$ e $(e_1, e_2) = -(h_2/h_1)(f_1, f_2)$ em p .

Considere $w_1 = -(k_2/k_1)\mathbf{s} + \mathbf{t}$ e $w_2 = -(h_2/h_1)\mathbf{s} + \mathbf{t}$, então $\mathbf{x}_u = b_1w_1$, $\mathbf{x}_v = b_2w_1$, $\mathbf{n}_u = f_1w_2$ e $\mathbf{n}_v = f_2w_2$. Como w_1, w_2 são vetores não nulos, então:

$$\text{rank} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_u & \mathbf{n}_u \\ \mathbf{x}_v & \mathbf{n}_v \end{pmatrix} (p) = \text{rank} \begin{pmatrix} b_1w_1 & f_1w_2 \\ b_2w_1 & f_2w_2 \end{pmatrix} (p) < 2 \Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} b_1 & f_1 \\ b_2 & f_2 \end{pmatrix} (p) = 0.$$

Suponhamos então que $\det \begin{pmatrix} b_1 & f_1 \\ b_2 & f_2 \end{pmatrix} (p) \neq 0$. Como $H_F(p) = 0$, temos:

$$0 = \det \begin{pmatrix} a_1 & f_1 \\ a_2 & f_2 \end{pmatrix} (p) - \det \begin{pmatrix} b_1 & e_1 \\ b_2 & e_2 \end{pmatrix} (p) = \left(-\frac{k_2}{k_1} + \frac{h_2}{h_1} \right) \det \begin{pmatrix} b_1 & f_1 \\ b_2 & f_2 \end{pmatrix} (p).$$

Segue então que

$$-\frac{k_2}{k_1} + \frac{h_2}{h_1} = 0 \Rightarrow \frac{k_2}{k_1} = \frac{h_2}{h_1}.$$

Por outro lado, pela condição de integrabilidade (4.3),

$$0 = \det \begin{pmatrix} a_1 & e_1 \\ a_2 & e_2 \end{pmatrix} (p) + \det \begin{pmatrix} b_1 & f_1 \\ b_2 & f_2 \end{pmatrix} (p) = \left(\frac{k_2h_2}{k_1h_1} + 1 \right) \det \begin{pmatrix} b_1 & f_1 \\ b_2 & f_2 \end{pmatrix} (p).$$

Portanto temos

$$\frac{k_2h_2}{k_1h_1} + 1 = 0 \Rightarrow \frac{h_2^2}{h_1^2} + 1 = 0 \Rightarrow h_2^2 + h_1^2 = 0,$$

o que é uma contradição. Concluimos que $\det \begin{pmatrix} b_1 & f_1 \\ b_2 & f_2 \end{pmatrix} (p) = 0$, e segue que (\mathbf{x}, \mathbf{n}) não é uma imersão. Os outros casos são análogos.

Agora, se $\text{rank} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_u & \mathbf{n}_u \\ \mathbf{x}_v & \mathbf{n}_v \end{pmatrix} (p) < 2$, então existem $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$, com $k_1^2 + k_2^2 \neq 0$ e $k_1(a_1, b_1, e_1, f_1) + k_2(a_2, b_2, e_2, f_2) = (0, 0, 0, 0)$ em p . Substituindo essas relações em C_F , temos $C_F(p)$ é nulo. \square

Por último, para que possamos obter uma condição para que $(\mathbf{x}, \mathbf{n}, \mathbf{s})$ seja uma imersão, precisamos primeiro da seguinte definição.

Definição 4.21. A aplicação concomitante da framed surface $(\mathbf{x}, \mathbf{n}, \mathbf{s})$ é a aplicação suave $I_F : U \rightarrow \mathbb{R}^8$ dada por:

$$I_F = \left(C_F, \det \begin{pmatrix} a_1 & g_1 \\ a_2 & g_2 \end{pmatrix}, \det \begin{pmatrix} b_1 & g_1 \\ b_2 & g_2 \end{pmatrix}, \det \begin{pmatrix} e_1 & g_1 \\ e_2 & g_2 \end{pmatrix}, \det \begin{pmatrix} f_1 & g_1 \\ f_2 & g_2 \end{pmatrix}, \det \begin{pmatrix} a_1 & e_1 \\ a_2 & e_2 \end{pmatrix} \right).$$

Finalmente, tendo definida a aplicação concomitante de uma framed surface temos o seguinte resultado.

Proposição 4.22. ([7], Proposição 9) $(\mathbf{x}, \mathbf{n}, \mathbf{s}) : U \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta$ é uma imersão em p se, e somente se, $I_F(p)$ é não nulo.

Demonstração. Suponha que $I_F(p)$ é nulo. Para que $(\mathbf{x}, \mathbf{n}, \mathbf{s})$ seja uma imersão em p , precisaríamos que

$$\text{rank} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_u & \mathbf{n}_u \\ \mathbf{x}_v & \mathbf{n}_v \end{pmatrix} (p) = 2, \text{ ou } \text{rank} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_u & \mathbf{s}_u \\ \mathbf{x}_v & \mathbf{s}_v \end{pmatrix} (p) = 2, \text{ ou } \text{rank} \begin{pmatrix} \mathbf{n}_u & \mathbf{s}_u \\ \mathbf{n}_v & \mathbf{s}_v \end{pmatrix} (p) = 2$$

Pela suposição de que $C_F(p) = 0$, segue da Proposição (4.20) que $\text{rank} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_u & \mathbf{n}_u \\ \mathbf{x}_v & \mathbf{n}_v \end{pmatrix} (p) < 2$.

Mostremos que $\text{rank} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_u & \mathbf{s}_u \\ \mathbf{x}_v & \mathbf{s}_v \end{pmatrix} (p) < 2$. Como $J_F(p) = 0$ e $\det \begin{pmatrix} e_1 & g_1 \\ e_2 & g_2 \end{pmatrix} = 0$, então existem $k_1, k_2, h_1, h_2 \in \mathbb{R}$, tais que $k_1^2 + k_2^2 \neq 0$, $h_1^2 + h_2^2 \neq 0$, $k_1(a_1, b_1) + k_2(a_2, b_2) = (0, 0)$ e $h_1(e_1, e_2) + h_2(g_1, g_2) = 0$ em p . Como feito na demonstração anterior, temos os quatro casos $k_i h_j \neq 0$, $i, j = 1, 2$.

Suponha que $k_1 h_1 \neq 0$. Então $(a_1, a_2) = -(k_2/k_1)(b_1, b_2)$ e $(e_1, e_2) = -(h_2/h_1)(g_1, g_2)$ em p . Tomando $w_1 = -(k_2/k_1)\mathbf{s} + \mathbf{t}$ e $w_2 = -(h_2/h_1)\mathbf{n} + \mathbf{t}$ então:

$$\text{rank} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_u & \mathbf{s}_u \\ \mathbf{x}_v & \mathbf{s}_v \end{pmatrix} (p) = \text{rank} \begin{pmatrix} b_1 w_1 & g_1 w_2 \\ b_2 w_1 & g_2 w_2 \end{pmatrix} (p) < 2 \Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} b_1 & g_1 \\ b_2 & g_2 \end{pmatrix} (p) = 0.$$

Pela suposição de que $I_F(p)$ é nulo, então $\det \begin{pmatrix} b_1 & g_1 \\ b_2 & g_2 \end{pmatrix} (p) = 0$, portanto, concluímos

que $\text{rank} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_u & \mathbf{s}_u \\ \mathbf{x}_v & \mathbf{s}_v \end{pmatrix} (p) < 2$. Os outros casos seguem de maneira análoga.

Agora para mostrar que $\text{rank} \begin{pmatrix} \mathbf{n}_u & \mathbf{s}_u \\ \mathbf{n}_v & \mathbf{s}_v \end{pmatrix} (p) < 2$ usamos o mesmo raciocínio, porém com as condições $K_F(p) = 0$ e $\det \begin{pmatrix} e_1 & g_1 \\ e_2 & g_2 \end{pmatrix} (p) = 0$. Portanto, se $I_F(p)$ é nulo, $(\mathbf{x}, \mathbf{n}, \mathbf{s})$ não é uma imersão.

Suponha que $(\mathbf{x}, \mathbf{n}, \mathbf{s})$ não é imersão em p , ou seja, $\text{rank} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_u & \mathbf{n}_u & \mathbf{s}_u \\ \mathbf{x}_v & \mathbf{n}_v & \mathbf{s}_v \end{pmatrix} (p) < 2$. Isto significa que as linhas são múltiplas, ou seja, existem $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ tais que $k_1^2 + k_2^2 \neq 0$ e $k_1(a_1, b_1, e_1, f_1, g_1) + k_2(a_2, b_2, e_2, f_2, g_2) = 0$ em p . Substituindo essas relações em I_F , temos $I_F(p)$ nulo. \square

Note que se \mathbf{x} é uma imersão, então (\mathbf{x}, \mathbf{n}) é uma imersão, e segue que $(\mathbf{x}, \mathbf{n}, \mathbf{s})$ também é uma imersão.

Observação 4.23. Como visto nos pontos regulares, $K = K_F/J_F$ e $H = H_F/J_F$, e pela Proposição (4.20), se (\mathbf{x}, \mathbf{n}) é uma imersão em p , e p é ponto singular de \mathbf{x} , então a curvatura Gaussiana K ou a curvatura média H de \mathbf{x} deve ser divergente em p . Além disso, se $C_F(p)$ é nulo, então \mathbf{x} é uma frontal, mas não uma frente no ponto p . \diamond

Exemplo 4.24. Estudamos abaixo as curvaturas das *framed surfaces* do Exemplo (4.8).

(a) (*Cuspidal edge*) Utilizando os invariantes calculados no Exemplo (4.8)(a), segue que $C_F(u, v)$ é dado por:

$$J_F(u, v) = v\sqrt{9v^2 + 4}, \quad K_F(u, v) = 0, \quad H_F(u, v) = \frac{3}{9v^2 + 4}.$$

Note que $H_F(u, v) \neq 0$ para todo $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, e assim $C_F(u, v)$ é sempre não nulo. Portanto \mathbf{x} é uma frente pela Proposição (4.20).

(b) (Rabo de andorinha) Utilizando os invariantes calculados no Exemplo (4.8)(b), segue que $C_F(u, v)$ é dado por:

$$J_F(u, v) = 2(6u^2 + v)\sqrt{1 + u^2 + u^4}, \quad K_F(u, v) = 0, \quad H_F(u, v) = -\frac{1 + 5u^2 + 4u^4 + u^6}{2(1 + u^2 + u^4)(1 + u^2)}.$$

Note que $H_F(u, v) \neq 0$ para todo $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, logo $C_F(u, v)$ é não nulo para todo $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. Portanto \mathbf{x} é uma frente pela Proposição (4.20).

(c) (Cuspidal cross-cap) Utilizando os invariantes calculados no Exemplo (4.8)(c), segue que $C_F(u, v)$ é dado por:

$$J_F(u, v) = v\sqrt{4v^6 + 9u^2v^2 + 4}, \quad K_F(u, v) = -\frac{36v^3}{(4v^6 + 9u^2v^2 + 4)^{3/2}},$$

$$H_F(u, v) = -\frac{3u(5v^6 - 1)}{4v^6 + 9u^2v^2 + 4}.$$

Neste caso, $C_F(0, 0) = (0, 0, 0)$, ou seja, pela Proposição (4.20) \mathbf{x} é apenas uma frontal em $(0, 0)$, assim como vimos no Exemplo (4.3).

(d) (Cross-cap) Utilizando os invariantes calculados no Exemplo (4.8)(d), segue que $C_F(r, \theta)$ é dado por:

$$J_F(r, \theta) = \frac{r^2(2\sin\theta(\sin^2\theta + 1) + \cos^2\theta + 1)\sqrt{4r^2\sin^4\theta + 3\sin^2\theta + 1}}{3\sin^2\theta + 1},$$

$$K_F(r, \theta) = \frac{2\sin^2\theta}{(4r^2\sin^4\theta + 3\sin^2\theta + 1)^{2/3}},$$

$$H_F(r, \theta) = -\frac{2\cos\theta(-3r^2\sin^6\theta + 8r^2\sin^4\theta + 3r^2\sin^2\theta + 3\sin^2\theta + 2)}{(4r^2\sin^4\theta + 3\sin^2\theta + 1)(2\sin^2\theta + 1)}.$$

Note que $C_F(r, \theta) \neq (0, 0, 0)$ para todo $(r, \theta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, pois $K_F(r, \theta) = 0$ se, e somente se, $\theta = n\pi$, para $n \in \mathbb{Z}$, e quando θ assume esses valores, $H_F(r, n\pi) = 4\cos(n\pi) = \pm 4 \neq 0$. Portanto \mathbf{x} é uma frente, pela Proposição (4.20). \diamond

No exemplo a seguir, continuamos o estudo de superfícies de revolução como *framed surfaces*, iniciado no Exemplo (4.9), calculando as curvaturas $C_F^x(t, \theta)$ e $C_F^z(t, \theta)$.

Exemplo 4.25. ([15], Proposição 3.1 e 3.2) Sejam \mathbf{x}, \mathbf{z} as superfícies de revolução de uma curva γ . No Exemplo (4.9) vimos que \mathbf{x} e \mathbf{z} são *framed base surfaces* e calculamos seus invariantes básicos. Dessa forma, a curvaturas C_F^x de \mathbf{x} é dada por:

$$J_F^x(t, \theta) = \det \begin{pmatrix} 0 & -\beta(t) \\ -z(t) & 0 \end{pmatrix} = -\beta(t)z(t),$$

$$K_F^x(t, \theta) = \det \begin{pmatrix} 0 & \ell(t) \\ b(t) & 0 \end{pmatrix} = -b(t)\ell(t),$$

$$H_F^x(t, \theta) = -\frac{1}{2} \left[\det \begin{pmatrix} 0 & \ell(t) \\ -z(t) & 0 \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} -\beta(t) & 0 \\ 0 & b(t) \end{pmatrix} \right]$$

$$= -\frac{1}{2}(z(t)\ell(t) + \beta(t)b(t)).$$

Analogamente a curvatura C_F^z de \mathbf{z} é dada por:

$$J_F^z(t, \theta) = -\beta(t)x(t), \quad K_F^z(t, \theta) = -a(t)\ell(t), \quad H_F^z(t, \theta) = \frac{1}{2}(x(t)\ell(t) + \beta(t)a(t)).$$

\diamond

4.5 Superfícies paralelas e focais de uma framed surface

Na Seção (2.2) apresentamos as superfícies paralelas e o conjunto focal de uma superfície regular, que pode ser composto de duas superfícies focais. A seguir apresentamos a construção de superfícies análogas para uma *framed surface* qualquer, de modo que coincidam com o caso regular.

Definição 4.26. Seja $(\mathbf{x}, \mathbf{n}, \mathbf{s}) : U \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta$ uma *framed surface*. Uma **superfície paralela** da *framed surface*, é a superfície $\mathbf{x}^\lambda : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $\mathbf{x}^\lambda(u, v) = \mathbf{x}(u, v) + \lambda \mathbf{n}(u, v)$, onde $\lambda \in \mathbb{R}$.

A seguir verificamos que uma superfície paralela \mathbf{x}^λ de uma *framed surface* $(\mathbf{x}, \mathbf{n}, \mathbf{s})$, é uma *framed surface* tal que $\mathbf{n}^\lambda = \mathbf{n}$ e $\mathbf{s}^\lambda = \mathbf{s}$.

Proposição 4.27. ([7], Proposição 13) *Seja $(\mathbf{x}, \mathbf{n}, \mathbf{s}) : U \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta$ uma framed surface com invariantes $(\mathcal{G}, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$. Então $(\mathbf{x}^\lambda, \mathbf{n}, \mathbf{s}) : U \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta$ é uma framed surface com invariantes $(\mathcal{G}^\lambda, \mathcal{F}_1^\lambda, \mathcal{F}_2^\lambda)$, dados por*

$$\mathcal{G}^\lambda = \mathcal{G} + \lambda \begin{pmatrix} e_1 & f_1 \\ e_2 & f_2 \end{pmatrix}, \mathcal{F}_1^\lambda = \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2^\lambda = \mathcal{F}_2.$$

Mais ainda, a curvatura $C_F^\lambda = (J_F^\lambda, K_F^\lambda, H_F^\lambda)$ da *framed surface* $(\mathbf{x}^\lambda, \mathbf{n}, \mathbf{s})$ é dada por

$$J_F^\lambda = J_F - 2H_F\lambda + K_F\lambda^2, \quad K_F^\lambda = K_F, \quad H_F^\lambda = H_F - K_F\lambda.$$

Demonstração. Primeiramente mostremos que $(\mathbf{x}^\lambda, \mathbf{n}, \mathbf{s})$ é uma *framed surface*. De fato, como $(\mathbf{x}, \mathbf{n}, \mathbf{s})$ é uma *framed surface*, os vetores \mathbf{n} e \mathbf{s} são unitários. Calculando as derivadas parciais de \mathbf{x}^λ , temos

$$\mathbf{x}_u^\lambda(u, v) = \mathbf{x}_u(u, v) + \lambda \mathbf{n}_u(u, v) \text{ e } \mathbf{x}_v^\lambda(u, v) = \mathbf{x}_v(u, v) + \lambda \mathbf{n}_v(u, v),$$

então

$$\langle \mathbf{x}_u^\lambda(u, v), \mathbf{n}(u, v) \rangle = \langle \mathbf{x}_v^\lambda(u, v), \mathbf{n}(u, v) \rangle = 0.$$

Logo, $(\mathbf{x}^\lambda, \mathbf{n}, \mathbf{s})$ é uma *framed surface*.

Agora, como os campos de vetores são os mesmos, e \mathcal{F}_1 e \mathcal{F}_2 só dependem de \mathbf{n} e \mathbf{s} , então $\mathcal{F}_i^\lambda = \mathcal{F}_i$, $i = 1, 2$. De (4.1), (4.2) e das derivadas parciais calculadas anteriormente, obtemos

$$\mathbf{x}_u^\lambda(u, v) = (a_1(u, v) + \lambda e_1(u, v))\mathbf{s}(u, v) + (b_1(u, v) + \lambda f_1(u, v))\mathbf{t}(u, v)$$

e

$$\mathbf{x}_v^\lambda(u, v) = (a_2(u, v) + \lambda e_2(u, v))\mathbf{s}(u, v) + (b_2(u, v) + \lambda f_2(u, v))\mathbf{t}(u, v),$$

portanto:

$$\mathcal{G}^\lambda = \mathcal{G} + \lambda \begin{pmatrix} e_1 & f_1 \\ e_2 & f_2 \end{pmatrix}.$$

Note que $a_i^\lambda = a_i + \lambda e_i$, $b_i^\lambda = b_i + \lambda f_i$, $e_i^\lambda = e_i$, $f_i^\lambda = f_i$ e $g_i^\lambda = g_i$ para $i = 1, 2$. Então, $K_F^\lambda = K_F$ e calculando J_F^λ segue que:

$$J_F^\lambda = \det \begin{pmatrix} a_1 + \lambda e_1 & b_1 + \lambda f_1 \\ a_2 + \lambda e_2 & b_2 + \lambda f_2 \end{pmatrix} = \begin{matrix} a_1 b_2 + \lambda a_1 f_2 + \lambda b_2 e_1 + \lambda^2 e_1 f_2 - \\ - a_2 b_1 - \lambda a_2 f_1 - \lambda b_1 e_2 - \lambda^2 e_2 f_1 \end{matrix} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} + \lambda \left(\det \begin{pmatrix} a_1 & f_1 \\ a_2 & f_2 \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} b_1 & e_1 \\ b_2 & e_2 \end{pmatrix} \right) + \lambda^2 \det \begin{pmatrix} e_1 & f_1 \\ e_2 & f_2 \end{pmatrix} = \\
 &= J_F - 2H_F\lambda + K_F\lambda^2
 \end{aligned}$$

Por último, calculando H_F^λ , obtemos:

$$\begin{aligned}
 H_F^\lambda &= -\frac{1}{2} \left(\det \begin{pmatrix} a_1 + \lambda e_1 & f_1 \\ a_2 + \lambda e_2 & f_2 \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} b_1 + \lambda f_1 & e_1 \\ b_2 + \lambda f_2 & e_2 \end{pmatrix} \right) = \\
 &= -\frac{1}{2} \left(\det \begin{pmatrix} a_1 & f_1 \\ a_2 & f_2 \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} b_1 & e_1 \\ b_2 & e_2 \end{pmatrix} \right) - \lambda \det \begin{pmatrix} e_1 & f_1 \\ e_2 & f_2 \end{pmatrix} = H_F - K_F\lambda,
 \end{aligned}$$

concluindo a demonstração. \square

Expomos a seguir a definição de superfície focal para *framed surfaces*. Relembramos que para uma superfície regular \mathbf{x} , com vetor normal \mathbf{n} , podemos parametrizar as componentes da superfície focal por $\mathcal{E}(\mathbf{x})(u, v) = \mathbf{x}(u, v) + \frac{1}{\kappa_i(u, v)}\mathbf{n}(u, v)$, $i = 1, 2$, onde k_1 e k_2 são as curvaturas principais da superfície. Recordemos também que k_1 e k_2 são soluções da equação:

$$\lambda^2 - 2\mathbf{H}\lambda + \mathbf{K} = 0 \tag{4.9}$$

onde \mathbf{H} é a curvatura média de \mathbf{x} , e \mathbf{K} é a curvatura Gaussiana de \mathbf{x} .

Considerando \mathbf{x} como uma *framed surface*, temos pela Proposição (4.18) que $\mathbf{K} = K_F/J_F$ e $\mathbf{H} = H_F/J_F$. Assim, para λ não nulo temos:

$$\begin{aligned}
 \lambda^2 - 2\mathbf{H}\lambda + \mathbf{K} = 0 &\Rightarrow \lambda^2 - 2\frac{H_F}{J_F}\lambda + \frac{K_F}{J_F} = 0 \Rightarrow \\
 1 - 2\frac{H_F}{J_F}\frac{1}{\lambda} + \frac{K_F}{J_F}\frac{1}{\lambda^2} = 0 &\Rightarrow J_F + 2H_F\frac{1}{\lambda} + K_F\frac{1}{\lambda^2} = 0.
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

Portanto $1/\kappa_1$ e $1/\kappa_2$ são soluções de $K_F\lambda^2 - 2H_F\lambda + J_F = 0$. Dessa maneira, a definição pode ser estendida para uma *framed surface* qualquer, da seguinte maneira:

Definição 4.28. Seja $(\mathbf{x}, \mathbf{n}, \mathbf{s}) : U \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ uma *framed surface*. Uma **superfície focal (ou evoluta)** $\mathcal{E}(\mathbf{x}) : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ da *framed surface* é dada por

$$\mathcal{E}(\mathbf{x})(u, v) = \mathbf{x}(u, v) + \lambda(u, v)\mathbf{n}(u, v),$$

onde $\lambda(u, v)$ é solução da equação

$$K_F(u, v)\lambda^2 - 2H_F(u, v)\lambda + J_F(u, v) = 0, \tag{4.11}$$

para todo $(u, v) \in U$.

Observação 4.29. Quando estamos considerando superfície focal, estamos supondo que \mathbf{K} e \mathbf{H} não se anulam simultaneamente. Note que se $K_F(u, v) = 0$, para todo $(u, v) \in U$, temos apenas uma superfície focal quando $H_F(u, v) \neq 0$. Na Proposição (4.27) calculamos a curvatura C_F^λ , e vimos que $J_F^\lambda = K_F\lambda^2 - 2H_F\lambda + J_F$. Portanto, se \mathbf{x}^λ é singular em (u_0, v_0) , isto é, $J_F^\lambda(u_0, v_0) = 0$, então $\mathbf{x}^\lambda(u_0, v_0)$ pertence ao traço de uma superfície focal de \mathbf{x} . \diamond

Exemplo 4.30. Considere a superfície $\mathbf{x} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $\mathbf{x}(u, v) = (u, v^2, v^3)$. Vimos nos Exemplos (4.3) e (4.24) que o campo de vetores normais \mathbf{n} e a curvatura C_F de \mathbf{x} são dados por

$$\mathbf{n}(u, v) = (1/\sqrt{9v^2 + 4})(0, -3v, 2)$$

e

$$C_F(u, v) = (J_F(u, v), K_F(u, v), H_F(u, v)) = (v\sqrt{9v^2 + 4}, 0, 3/(9v^2 + 4)).$$

Como $K_F(u, v) = 0$ e $H_F(u, v) \neq 0$ para todo $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, então existe apenas uma superfície focal de \mathbf{x} . Concluímos portanto que a função $\lambda : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, que é solução da equação (4.11), é dada por $\lambda(u, v) = (v(9v^2 + 4)^{\frac{3}{2}})/6$. Portanto a superfície focal de \mathbf{x} é dada por:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\mathbf{x})(u, v) &= \mathbf{x}(u, v) + \lambda(u, v)\mathbf{n}(u, v) \\ &= (u, v^2, v^3) + \frac{9v^2 + 4}{6}(0, -3v^2, 2v) \\ &= \left(u, -\frac{1}{2}(9v^4 + 2v^2), \frac{4}{3}(3v^3 + v)\right). \end{aligned} \quad (4.12)$$

Observe que assim como a $3/2$ -cuspidal edge \mathbf{x} é dada por $(u, \gamma(v))$, onde $\gamma(v) = (v^2, v^3)$ é a $3/2$ -cúspide, sua superfície focal é dada por $(u, \mathcal{E}(\gamma)(v))$, onde

$$\mathcal{E}(\gamma)(v) = \left(-\frac{1}{2}(9v^4 + 2v^2), \frac{4}{3}(3v^3 + v)\right)$$

é a evoluta de γ , obtida no Exemplo (3.28). ◇

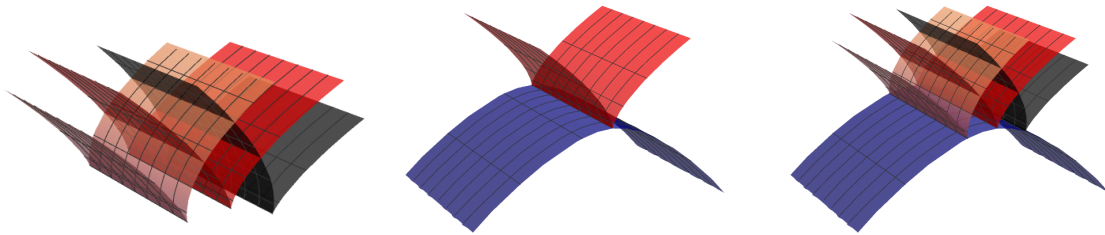


Figura 4.2: Na esquerda temos a superfície \mathbf{x} ($3/2$ -cuspidal edge) e duas de suas superfícies paralelas. No centro temos \mathbf{x} e sua superfície focal. A direita temos todas superfícies simultaneamente. Fonte: Elaborada pelo autor.

5 Superfícies de Revolução de Frontais

Neste capítulo utilizamos os conceitos estudados nos capítulos anteriores para estudarmos superfícies de revolução de frontais do ponto de vista de *framed surfaces*, como visto nos Exemplos (4.9) e (4.25), onde a curva geratriz será uma curva de Legendre. Ao longo do capítulo utilizaremos notações de capítulos anteriores. A principal referência deste capítulo é o artigo [15].

5.1 Resultados iniciais

Nesta seção iremos considerar um intervalo I da reta e $(\gamma, \nu) : I \rightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$ uma curva de Legendre com curvatura (ℓ, β) . Denotando $\gamma(t) = (x(t), z(t))$ e $\nu(t) = (a(t), b(t))$, como no Exemplo (4.9), temos as relações dadas nas equações (4.5). Além disso, como $\nu(t) \in \mathbb{S}^1$, para todo t , então existe uma função suave $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $a(t) = \cos \varphi(t)$, $b(t) = \sin \varphi(t)$ e $\varphi'(t) = \ell(t)$.

Consideremos $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$ como sendo o plano (x, z) no espaço (x, y, z) . Vamos considerar as superfícies de revolução em torno do eixo x e em torno do eixo z , cuja curva geratriz é a frontal γ . Denotando essas superfícies por $\mathbf{x}, \mathbf{z} : I \times [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3$, respectivamente, temos

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t, \theta) &= (x(t), z(t) \cos \theta, z(t) \sin \theta), \\ \mathbf{z}(t, \theta) &= (x(t) \cos \theta, x(t) \sin \theta, z(t)).\end{aligned}$$

Vimos no Exemplo (4.9) que essas aplicações são *framed base surfaces*, apresentando seus campos de vetores \mathbf{n}^x , \mathbf{s}^x , \mathbf{n}^z e \mathbf{s}^z que satisfazem as condições para que $(\mathbf{x}, \mathbf{n}^x, \mathbf{s}^x)$ e $(\mathbf{z}, \mathbf{n}^z, \mathbf{s}^z)$ sejam *framed surfaces* e além disso calculamos seus invariantes básicos. Também calculamos suas curvaturas C_F^x e C_F^z no Exemplo (4.25). Os dois próximos resultados resumem o que obtemos naqueles exemplos.

Proposição 5.1. ([15], Proposição 3.1) *Com as notações acima, $(\mathbf{x}, \mathbf{n}^x, \mathbf{s}^x) : I \times [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta$ é uma framed surface com invariantes básicos*

$$\begin{aligned}\mathcal{G}^x &= \begin{pmatrix} 0 & -\beta(t) \\ -z(t) & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{F}_1^x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ell(t) \\ 0 & 0 & 0 \\ -\ell(t) & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \mathcal{F}_2^x &= \begin{pmatrix} 0 & b(t) & 0 \\ -b(t) & 0 & -a(t) \\ 0 & a(t) & 0 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

onde $\mathbf{n}^x(t, \theta) = (-a(t), -b(t) \cos \theta, -b(t) \sin \theta)$ e $\mathbf{s}^x(t, \theta) = (0, \sin \theta, -\cos \theta)$.

Além disso, a curvatura $C_F^x = (J_F^x, K_F^x, H_F^x) : I \times [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3$ é dada por $J_F^x(t, \theta) = -\beta(t)z(t)$, $K_F^x(t, \theta) = -b(t)\ell(t)$ e $H_F^x(t, \theta) = -\frac{1}{2}(z(t)\ell(t) + \beta(t)b(t))$.

Proposição 5.2. ([15], Proposição 3.2) *Com as notações acima, $(\mathbf{z}, \mathbf{n}^z, \mathbf{s}^z) : I \times [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta$ é uma framed surface com invariantes básicos*

$$\mathcal{G}^z = \begin{pmatrix} 0 & -\beta(t) \\ -x(t) & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{F}_1^z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\ell(t) \\ 0 & 0 & 0 \\ \ell(t) & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{F}_2^z = \begin{pmatrix} 0 & -a(t) & 0 \\ a(t) & 0 & b(t) \\ 0 & -b(t) & 0 \end{pmatrix},$$

onde $\mathbf{n}^z(t, \theta) = (a(t) \cos \theta, a(t) \sin \theta, b(t))$ e $\mathbf{s}^x(t, \theta) = (\sin \theta, -\cos \theta, 0)$.

Além disso, a curvatura $C_F^z = (J_F^z, K_F^z, H_F^z) : I \times [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3$ é dada por $J_F^z(t, \theta) = -\beta(t)x(t)$, $K_F^z(t, \theta) = -a(t)\ell(t)$ e $H_F^z(t, \theta) = \frac{1}{2}(x(t)\ell(t) + \beta(t)a(t))$.

Utilizando as curvaturas calculadas para as superfícies \mathbf{x} e \mathbf{z} , podemos verificar para quais pontos $(t, \theta) \in I \times [0, 2\pi)$ essas superfícies serão singulares, através do critério obtido na Proposição (4.19). Dessa maneira, \mathbf{x} é singular em (t, θ) se, e somente se, $J_F^x(t, \theta) = -\beta(t)z(t) = 0$, isto é, se a curva geratriz γ é singular em t ($\beta(t) = 0$) ou cruza o eixo de rotação de \mathbf{x} ($z(t) = 0$). Analogamente, \mathbf{z} é singular em (t, θ) quando γ é singular em t ou cruza o eixo de rotação de \mathbf{z} . Podemos observar que tanto C_F^x quanto C_F^z não dependem de θ , ou seja, são constantes ao longo de um paralelo, assim como vimos na Proposição (2.40), então se \mathbf{x} ou \mathbf{z} for singular em (t_0, θ_0) , também será singular em (t_0, θ) para todo θ . Quando não houver dúvida, iremos denotar $J_F^x(t, \theta)$, $J_F^z(t, \theta)$, $K_F^x(t, \theta)$, $K_F^z(t, \theta)$, $H_F^x(t, \theta)$ e $H_F^z(t, \theta)$ por $J_F^x(t)$, $J_F^z(t)$, $K_F^x(t)$, $K_F^z(t)$, $H_F^x(t)$ e $H_F^z(t)$, respectivamente.

Pelos cálculos feitos, as curvaturas das *framed surfaces* $(\mathbf{x}, \mathbf{n}^x, \mathbf{s}^x)$ e $(\mathbf{z}, \mathbf{n}^z, \mathbf{s}^z)$ se relacionam diretamente com a curvatura (ℓ, β) da frontal γ , ambas importantes para verificar se uma aplicação é frente ou apenas frontal, conforme a Observação (3.9)(a) e a Proposição (4.20), nos permitindo relacionar esses resultados através da seguinte proposição.

Proposição 5.3. ([15], Proposição 3.3) *Nas notações anteriores, valem:*

- (a) *As superfícies de revolução \mathbf{x} e \mathbf{z} são frontais mas não frentes em (t_0, θ) se, e somente se, γ é uma frontal mas não uma frente em t_0 .*
- (b) *A superfície de revolução \mathbf{x} ou a superfície de revolução \mathbf{z} é uma frente se, e somente se, γ é uma frente.*

Demonstração. (a) Primeiramente suponhamos \mathbf{x} e \mathbf{z} são frontais mas não frentes em (t_0, θ) , isto é, $(\mathbf{x}, \mathbf{n}^x)$ e $(\mathbf{z}, \mathbf{n}^z)$ não são imersões de Legendre nesse ponto. Pela Proposição (4.20) segue que C_F^x e C_F^z se anulam em t_0 e, portanto, das Proposições (5.1) e (5.2), obtemos:

$$\begin{cases} \beta(t_0)z(t_0) = 0, & b(t_0)\ell(t_0) = 0, & \frac{1}{2}(z(t_0)\ell(t_0) + \beta(t_0)b(t_0)) = 0, \\ \beta(t_0)x(t_0) = 0, & a(t_0)\ell(t_0) = 0, & \frac{1}{2}(x(t_0)\ell(t_0) + \beta(t_0)a(t_0)) = 0. \end{cases} \quad (5.1)$$

Se $\ell(t_0) \neq 0$, teríamos por (5.1) que $a(t_0) = b(t_0) = 0$, o que contradiz $\nu(t_0) = (a(t_0), b(t_0)) \in \mathbb{S}^1$, portanto $\ell(t_0) = 0$. Logo, novamente por (5.1), obtemos que $\beta(t) = 0$, ou seja, (ℓ, β)

se anula em t_0 e, pela Observação (3.9)(a), concluí-se que γ é uma frontal mas não frente em t_0 .

Suponhamos agora que γ é uma frontal mas não uma frente em t_0 , isto é, $\ell(t_0) = \beta(t_0) = 0$. Segue que

$$\begin{aligned} J_F^x(t_0) &= -\beta(t_0)z(t_0) = 0, & J_F^z(t_0) &= -\beta(t_0)x(t_0) = 0, \\ K_F^x(t_0) &= -b(t_0)\ell(t_0) = 0, & K_F^z(t_0) &= -a(t_0)\ell(t_0) = 0, \\ H_F^x(t_0) &= -\frac{1}{2}(z(t_0)\ell(t_0) + \beta(t_0)b(t_0)) = 0, \\ H_F^z(t_0) &= \frac{1}{2}(x(t_0)\ell(t_0) + \beta(t_0)a(t_0)) = 0. \end{aligned}$$

Portanto, pela Proposição (4.20) segue que $(\mathbf{x}, \mathbf{n}^x)$ e $(\mathbf{z}, \mathbf{n}^z)$ não são imersões em (t_0, θ) , isto é, \mathbf{x} e \mathbf{z} não são frentes.

(b) Pela Observação (3.9)(a) e pela Proposição (4.20), basta mostrar que a curvatura (ℓ, β) da curva γ é não nula se, e somente se, pelo menos uma das curvaturas C_F^x e C_F^z é não nula.

Suponhamos primeiramente que (ℓ, β) é não nula. Então, para cada $t \in I$, $\ell(t) \neq 0$ ou $\beta(t) \neq 0$. Se $\ell(t) \neq 0$, então como $K_F^x(t) = -b(t)\ell(t)$, $K_F^z(t) = -a(t)\ell(t)$ e $(a(t), b(t)) \neq (0, 0)$ concluímos que $K_F^x(t) \neq 0$ ou $K_F^z(t) \neq 0$, ou seja, C_F^x é não nula ou C_F^z é não nula em t . Se $\ell(t) = 0$, temos $\beta(t) \neq 0$, $H_F^x(t) = -\frac{\beta(t)b(t)}{2}$ e $H_F^z(t) = \frac{\beta(t)a(t)}{2}$. Como $(a(t), b(t)) \neq (0, 0)$ concluímos que $H_F^x(t) \neq 0$ ou $H_F^z(t) \neq 0$, ou seja, C_F^x é não nula ou C_F^z é não nula em t .

Reciprocamente, suponhamos que pelo menos uma das curvaturas C_F^x e C_F^z seja não nula em t , para todo t . Pela Proposição (4.19), se (t, θ) é um ponto regular da superfície \mathbf{x} ou da superfície \mathbf{z} , sabemos que γ é regular em t , então $\beta(t) \neq 0$. Portanto $(\ell, \beta)(t) \neq (0, 0)$.

Agora se t é um ponto singular de \mathbf{x} e de \mathbf{z} simultaneamente, temos que $J_F^x(t) = -\beta(t)z(t) = 0$ e $J_F^z(t) = -\beta(t)x(t) = 0$. Se $\beta(t) \neq 0$, já obtemos $(\ell, \beta)(t) \neq (0, 0)$. Agora, se $\beta(t) = 0$, as curvaturas $C_F^x(t)$ e $C_F^z(t)$ são dadas por:

$$\begin{aligned} C_F^x(t) &= \left(0, -b(t)\ell(t), -\frac{z(t)\ell(t)}{2} \right) = \ell(t) \left(0, -b(t), -\frac{z(t)}{2} \right), \\ C_F^z(t) &= \left(0, -a(t)\ell(t), \frac{x(t)\ell(t)}{2} \right) = \ell(t) \left(0, -a(t), \frac{x(t)}{2} \right). \end{aligned}$$

Por hipótese, $C_F^x(t) \neq (0, 0, 0)$ ou $C_F^z(t) \neq (0, 0, 0)$, portanto $\ell(t) \neq 0$, ou seja, $(\ell, \beta)(t) \neq (0, 0)$. \square

Para o próximo resultado, recordemos o conceito de ordem do zero de uma função definido no Capítulo 2, isto é, um ponto t_0 é um zero de ordem $k + 1$ de uma função f se $f(t_0) = f'(t_0) = \dots = f^{(k)}(t_0) = 0$ e $f^{(k+1)}(t_0) \neq 0$.

Em uma curva de Legendre (γ, ν) com curvatura (ℓ, β) , temos que $\text{ord}(\beta)(t_0) \geq 1$ em um ponto singular t_0 de γ , pois $\beta(t_0) = 0$. O seguinte resultado mostra que podemos verificar se γ é uma frente, utilizando a ordem das funções coordenadas de ν .

Proposição 5.4. ([15], Proposição 3.20) *Sejam $(\gamma, \nu) : I \rightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$ uma curva de Legendre, onde $\gamma(t) = (x(t), z(t))$ e $\nu(t) = (a(t), b(t))$, e $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave tal que $K_F^z(t) = \alpha(t)J_F^z(t)$. Suponhamos que $x(t_0) \neq 0$ e $\alpha(t_0) \neq 0$ em um ponto singular t_0 de γ . Então são válidos:*

- (a) Se $a(t_0) \neq 0$, então γ é uma frontal mas não uma frente em t_0 .
- (b) A frontal γ é uma frente em t_0 se, e somente se, $\text{ord}(a)(t_0) = \text{ord}(\beta)(t_0)$.

Demonstração. Note que estamos nas hipóteses do item (a) do Teorema (5.10), $K_F^z(t) = \alpha(t)J_F^z(t)$, isto é, $-\ell(t)a(t) = -\alpha(t)\beta(t)x(t)$. Se $a(t_0) \neq 0$, então

$$\ell(t) = \frac{\alpha(t)\beta(t)x(t)}{a(t)}$$

em uma vizinhança de t_0 . Como $\beta(t_0) = 0$, pois t_0 é um ponto singular de γ , então $(\ell, \beta)(t_0) = (0, 0)$. Portanto γ é uma frontal, mas não uma frente em t_0 , e segue que é válida a afirmação (a).

Se $a(t_0) = 0$, então $\text{ord}(a) \geq 1$. Sejam $\text{ord}(a)(t_0) = m + 1$ e $\text{ord}(\beta)(t_0) = n + 1$ para m e n inteiros positivos. Pelo Lema de Hadamard (2.8), existem funções suaves \hat{a} e $\hat{\beta}$ em torno de t_0 tais que $\hat{a}(t_0) \neq 0$, $\hat{\beta}(t_0) \neq 0$, $a(t) = (t - t_0)^{m+1}\hat{a}(t)$ e $\beta(t) = (t - t_0)^{n+1}\hat{\beta}(t)$. Se $m > n$, então $(t - t_0)^{m-n}\hat{a}(t)\ell(t) = \alpha(t)\hat{\beta}(t)x(t)$. Segue que $\alpha(t_0)\hat{\beta}(t_0)x(t_0) = 0$, o que é um absurdo, logo $n \geq m$. Isolando $\ell(t)$, obtemos

$$\ell(t) = \frac{(t - t_0)^{n-m}\alpha(t)\hat{\beta}(t)x(t)}{\hat{a}(t)}.$$

Portanto a frontal γ é uma frente em t_0 , isto é, $\ell(t_0) \neq 0$ se, e somente se, $n = m$, isto é, $\text{ord}(a)(t_0) = \text{ord}(\beta)(t_0)$. □

Corolário 5.5. *Nas hipóteses da Proposição (5.4), valem:*

- (a) Se $a(t_0) \neq 0$, então \mathbf{x} e \mathbf{z} são frontais mas não frentes em (t_0, θ) , para todo θ .
- (b) Se $\text{ord}(a)(t_0) = \text{ord}(\beta)(t_0)$, então \mathbf{x} é uma frente ou \mathbf{z} é uma frente.

Demonstração. Basta aplicar as Proposições (5.3) e (5.4) para obter o resultado. □

Observação 5.6. Na demonstração do item (b) da Proposição (5.3), consideramos o caso em que (t_0, θ) é um ponto regular de pelo menos uma das superfícies de revolução e o caso em que (t_0, θ) é um ponto singular tanto de \mathbf{x} quanto de \mathbf{z} . Para que o primeiro ocorra, γ precisa ser regular e pode cruzar apenas o eixo x (\mathbf{z} é regular), apenas o eixo z (\mathbf{x} é regular) ou nenhum dos eixos (ambas são regulares) (Figura (5.1)). Agora para que o segundo caso ocorra temos mais possibilidades. Se γ for regular em t_0 , então deve cruzar ambos os eixos simultaneamente, isto é, cruzá-los na origem. Se γ for singular, então pode não cruzar nenhum eixo em t_0 , cruzar apenas um dos eixos, ou cruzar ambos os eixos simultaneamente (Figuras (5.2) e (5.3)). ◇

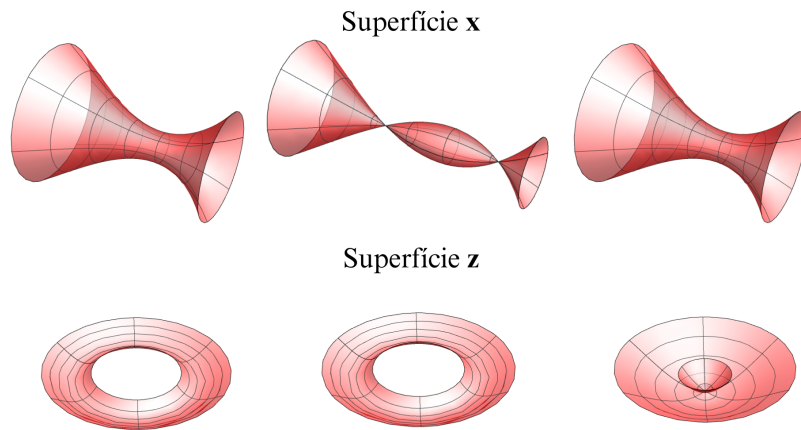


Figura 5.1: Esquerda: Superfícies de revolução x e z de uma curva que não cruza nenhum dos eixos. Centro: Superfícies de revolução x e z de uma curva que cruza o eixo x . Direita: Superfícies de revolução x e z de uma curva que cruza o eixo z . Fonte: Elaborada pelo autor.

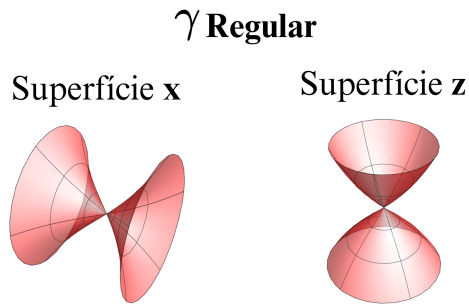


Figura 5.2: Superfícies de revolução x e z de uma curva regular que passa pela origem. Fonte: Elaborada pelo autor.

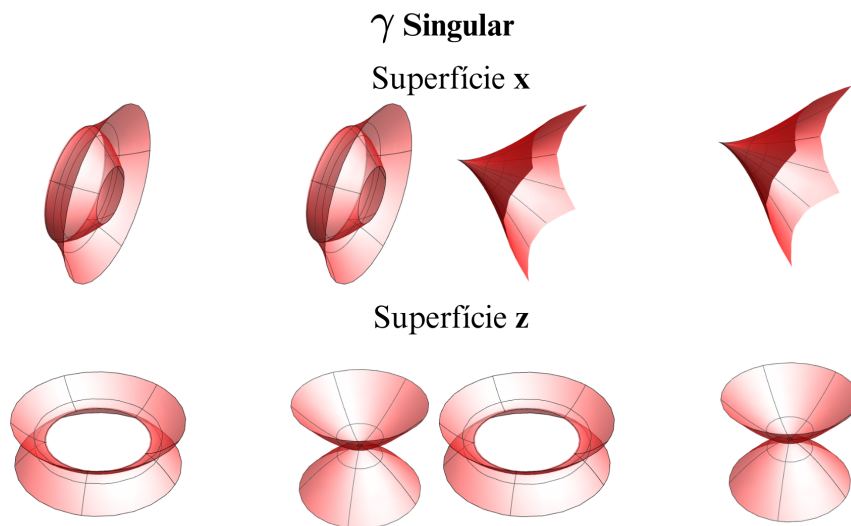


Figura 5.3: Esquerda: Superfícies de revolução x e z de uma curva singular que não cruza nenhum dos eixos. Centro: Superfícies de revolução x e z de curvas que cruzam o eixo z e o eixo x , respectivamente. Direita: Superfícies de revolução x e z de uma curva singular que cruza ambos os eixos simultaneamente. Fonte: Elaborada pelo autor.

Como vimos, em um ponto (t, θ) , as superfícies de revolução \mathbf{x} e \mathbf{z} podem ser ambas singulares, ambas regulares ou uma singular e a outra regular. Dessa maneira, não podemos, em geral, relacionar essas superfícies utilizando difeomorfismos. A proposição a seguir nos fornece as condições, e a construção da curva geratriz para que \mathbf{x} e \mathbf{z} sejam congruentes como *framed surfaces*, isto é, satisfaçam as condições da Definição (4.10).

Proposição 5.7. ([15], Proposição 3.4) *Seja $(\gamma, \nu) : I \rightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$ uma curva de Legendre com curvatura (ℓ, β) . Sejam \mathbf{x} e \mathbf{z} as superfícies de revolução de γ . Então $(\mathbf{x}, \mathbf{n}^x, \mathbf{s}^x)$ e $(\mathbf{z}, \mathbf{n}^z, \mathbf{s}^z)$ são congruentes como *framed surfaces* se, e somente se, a curva de Legendre $(\gamma, \nu) : I \rightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$ é dada por*

$$\gamma(t) = \left(\pm \int \frac{1}{\sqrt{2}} \beta(t) dt, \pm \int \frac{1}{\sqrt{2}} \beta(t) dt \right), \quad \nu(t) = \left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \mp \frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

Demonstração. Pelo Teorema (4.13), $(\mathbf{x}, \mathbf{n}^x, \mathbf{s}^x)$ e $(\mathbf{z}, \mathbf{n}^z, \mathbf{s}^z)$ são congruentes como *framed surfaces* se, e somente se, $(\mathcal{G}^x, \mathcal{F}_1^x, \mathcal{F}_1^x)$ e $(\mathcal{G}^z, \mathcal{F}_1^z, \mathcal{F}_1^z)$ coincidem, isto é, $(\mathcal{G}^x, \mathcal{F}_1^x, \mathcal{F}_1^x)(t, \theta) = (\mathcal{G}^z, \mathcal{F}_1^z, \mathcal{F}_1^z)(t, \theta)$ para todo $(t, \theta) \in I \times [0, 2\pi)$. Escrevendo em forma matricial obtemos:

$$\begin{pmatrix} 0 & -\beta(t) \\ -z(t) & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\beta(t) \\ -x(t) & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ell(t) \\ 0 & 0 & 0 \\ -\ell(t) & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\ell(t) \\ 0 & 0 & 0 \\ \ell(t) & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & b(t) & 0 \\ -b(t) & 0 & -a(t) \\ 0 & a(t) & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -a(t) & 0 \\ a(t) & 0 & b(t) \\ 0 & -b(t) & 0 \end{pmatrix}.$$

Portanto $x(t) = z(t)$, $\ell(t) = 0$ e $a(t) = -b(t)$ para todo $t \in I$. De $\ell(t) = 0$ para todo t , segue que $a(t)$ e $b(t)$ são constantes e, como $a(t)^2 + b(t)^2 = 1$ com $a(t) = -b(t)$, obtemos $\nu(t) = (\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \mp \frac{1}{\sqrt{2}})$. Por último, de $x'(t) = -\beta(t)b(t)$ e $z'(t) = \beta(t)a(t)$ obtemos $\gamma(t) = (x(t), z(t))$ por integração. \square

No capítulo anterior apresentamos os teoremas de existência e unicidade para *framed surfaces* utilizando os invariantes básicos. Para o caso específico de superfícies de revolução podemos também garantir a existência e unicidade da curva geratriz.

Teorema 5.8. ([15], Teorema 3.5) *Sejam $(\mathcal{G}^x, \mathcal{F}_1^x, \mathcal{F}_2^x)$ e $(\mathcal{G}^z, \mathcal{F}_1^z, \mathcal{F}_2^z)$ dados nas proposições (5.1) e (5.2), de modo que $x'(t) = -\beta(t)b(t)$, $z'(t) = \beta(t)a(t)$, $a'(t) = -\ell(t)b(t)$, $b'(t) = \ell(t)a(t)$ e $a(t)^2 + b(t)^2 = 1$. Então existe uma única curva de Legendre $(\gamma, \nu) : I \rightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$ com curvatura (ℓ, β) tais que os invariantes básicos das superfícies de revolução de γ em torno dos eixos x e z são $(\mathcal{G}^x, \mathcal{F}_1^x, \mathcal{F}_2^x)$ e $(\mathcal{G}^z, \mathcal{F}_1^z, \mathcal{F}_2^z)$ respectivamente.*

Demonstração. Para provarmos a existência basta definir $\gamma(t) = (x(t), z(t))$ e $\nu(t) = (a(t), b(t))$. Então (γ, ν) é uma curva de Legendre com curvatura (ℓ, β) cujas superfícies de revolução \mathbf{x} e \mathbf{z} em torno dos eixos x e z , respectivamente, tem invariantes básicos dados por $(\mathcal{G}^x, \mathcal{F}_1^x, \mathcal{F}_2^x)$ e $(\mathcal{G}^z, \mathcal{F}_1^z, \mathcal{F}_2^z)$.

Por fim, suponhamos que exista outra curva de Legendre $(\tilde{\gamma}, \tilde{\nu})$ satisfazendo o resultado. Pelo Teorema (3.14), como sua curvatura também é (ℓ, β) , então $(\tilde{\gamma}, \tilde{\nu})$ é congruente a (γ, ν) , isto é, existem uma rotação A por um ângulo α e uma translação $p = (c, d)$ tais que $\tilde{\gamma}(t) = A(\gamma(t)) + p = (\cos(\alpha)x(t) + \sin(\alpha)z(t), -\sin(\alpha)x(t) + \cos(\alpha)z(t)) + (c, d)$. Calculando a superfície de rotação $\tilde{\mathbf{x}}$ de $\tilde{\gamma}$ em torno do eixo x , obtemos:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}}(t, \theta) = & (\cos(\alpha)x(t) + \sin(\alpha)z(t) + c, (-\sin(\alpha)x(t) + \cos(\alpha)z(t) + d) \cos \theta, \\ & (-\sin(\alpha)x(t) + \cos(\alpha)z(t) + d) \sin \theta). \end{aligned}$$

Portanto, o invariante básico $\tilde{\mathcal{G}}_F^x$ de \mathbf{x} é dado por:

$$\tilde{\mathcal{G}}_F^x = \begin{pmatrix} 0 & -\beta \\ -(\cos(\alpha)x(t) + \sin(\alpha)z(t) + c) & 0 \end{pmatrix},$$

que não coincide com \mathcal{G}_F^x , o que é um absurdo. Portanto (γ, ν) é única. \square

A partir deste ponto os resultados serão estudados para apenas a superfícies de revolução \mathbf{z} da frontal γ , mas resultados análogos podem ser demonstrados para a superfície \mathbf{x} .

5.2 Superfícies de revolução com curvatura dada

Para superfícies de revolução regulares, vimos na Proposição (2.41) que os meridianos e paralelos são linhas de curvatura, isto é, são as curvas de curvaturas máxima e mínima passando por um ponto da superfície. Como os paralelos são circunferências, sua curvatura é constante e não nula, já os meridianos são congruentes a curva geratriz, logo tem a mesma curvatura. Denotando as curvaturas máxima e mínima (ou curvaturas principais) em um ponto p por $k_1(p)$ e $k_2(p)$ e a curvatura Gaussiana por $\mathbf{K}(p)$, temos que $\mathbf{K}(p) = k_1(p)k_2(p)$.

A partir disso, se uma superfície de revolução regular tem curvatura Gaussiana identicamente nula, segue que alguma das curvaturas principais é nula. Como mencionado, os paralelos tem curvatura não nula, logo os meridianos têm curvatura identicamente nula, ou seja, a curva geratriz tem curvatura nula e portanto é parte de uma reta. Este mesmo resultado está enunciado abaixo para superfícies de revolução singulares, utilizando a curvatura C_F^z da *framed surface* \mathbf{z} .

Proposição 5.9. ([15], Proposição 3.7) *Se $K_F^z(t, \theta) = 0$ para todo $(t, \theta) \in I \times [0, 2\pi)$, então γ é parte de uma reta.*

Demonstração. Por hipótese e pela Proposição (5.2), $a(t)\ell(t) = 0$ para todo $t \in I$. Derivando essa igualdade, obtemos $b(t)\ell^2(t) + a(t)\ell'(t) = 0$. Se $\ell(t) \neq 0$, segue da primeira igualdade que $a(t) = 0$ e, substituindo na segunda equação, concluímos que $b(t) = 0$, contradizendo o fato que $a(t)^2 + b(t)^2 = 1$, uma vez que $\nu(t) = (a(t), b(t))$. Portanto $\ell(t) = 0$ para todo $t \in I$. Logo $a(t)$ e $b(t)$ são constantes, ou seja, γ é parte de uma reta. \square

Pela Proposição (5.9), as superfícies de revolução de uma frontal que satisfazem $K_F^z(t, \theta) = 0$ para todo $(t, \theta) \in I \times [0, 2\pi)$ são dadas apenas por partes de um cone, de um cilindro, de um plano, ou de uma reta. Se γ é parte de uma reta transversal ao eixo z , temos o primeiro caso. Se γ é parte de uma reta paralela e não coincidente ao eixo de revolução, temos o segundo caso. Se γ é perpendicular ao eixo de revolução temos o terceiro caso. Por último, se γ está contida no eixo de revolução temos o quarto caso.

Na Proposição (5.9) caracterizamos todas as superfícies de revolução de frontais com curvatura K_F^z identicamente nula. A seguir consideramos casos gerais, isto é, quando é dada alguma das curvaturas K_F^z , H_F^z ou J_F^z . Começamos pelo caso em que é dada a curvatura K_F^z .

Teorema 5.10. ([15], Teorema 3.8) *Seja $(\gamma, \nu) : (I, t_0) \rightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$ um germe de curva de Legendre com $\gamma(t) = (x(t), z(t))$ e $\nu(t) = (\cos \varphi(t), \sin \varphi(t))$ com curvatura (φ', β) .*

- (a) Se $\beta : (I, t_0) \rightarrow \mathbb{R}$ é um germe de função real analítica e é dado um germe de função suave $\alpha : (I, t_0) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $K_F^z(t) = \alpha(t)J_F^z(t)$ e $\alpha(t)\beta^2(t)(t - t_0)^2$ é uma função real analítica em torno de t_0 , então $x(t)$ é uma solução de

$$\beta(t)x''(t) - \beta'(t)x'(t) + \alpha(t)\beta^3(t)x(t) = 0$$

em torno de t_0 ,

$$z(t) = \pm \int \beta(t) \left(1 - \left(\int \alpha(t)\beta(t)x(t)dt \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} dt$$

e

$$\cos \varphi(t) = \pm \left(1 - \left(\int \alpha(t)\beta(t)x(t)dt \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \text{ sen } \varphi(t) = \int \alpha(t)\beta(t)x(t)dt.$$

- (b) Suponha que $x(t_0) > 0$ e que são dados germes de funções suaves $J, K : (I, t_0) \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo $J_F^z(t) = J(t)$ e $K_F^z(t) = K(t)$. Então a curva de Legendre (γ, ν) é dada por

$$x(t) = \left(-2 \int J(t) \left(\int K(t)dt \right) dt \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$z(t) = \mp \int \frac{J(t)}{x(t)} \left(1 - \left(\int K(t)dt \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} dt$$

e

$$\cos \varphi(t) = \pm \left(1 - \left(\int K(t)dt \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \text{ sen } \varphi(t) = - \int K(t)dt.$$

Demonstração. (a) Pela Proposição (5.2), $K_F^z(t) = -\varphi'(t) \cos \varphi(t)$ e $J_F^z(t) = -\beta(t)x(t)$. Assim, $\varphi'(t) \cos \varphi(t) = \alpha(t)\beta(t)x(t)$. Das equações (4.5) temos $x'(t) = -\beta(t) \text{sen } \varphi(t)$ e segue que $x''(t) = -\beta'(t) \text{sen } \varphi(t) - \alpha(t)\beta^2(t)x(t)$. Logo, multiplicando essa igualdade por $\beta(t)$, $\beta(t)x''(t) = \beta'(t)x'(t) - \alpha(t)\beta^3(t)x(t)$, ou seja, $x(t)$ satisfaz a EDO linear de segunda ordem dada por $\beta(t)x''(t) - \beta'(t)x'(t) + \alpha(t)\beta^3(t)x(t) = 0$. Homogenizando a EDO, e observando que $(t - t_0)\beta'(t)/\beta(t)$ e $\alpha(t)\beta^2(t)(t - t_0)^2$ são analíticas, temos que t_0 é um ponto singular regular da EDO. Portanto, pelo método de Frobenius, existe uma solução $x(t)$ em torno de t_0 .

Como $(d/dt)(\text{sen } \varphi(t)) = \varphi'(t) \cos \varphi(t) = \alpha(t)\beta(t)x(t)$, e $\cos \varphi(t) = \pm(1 - \text{sen}^2(t))^{\frac{1}{2}}$, então:

$$\text{sen } \varphi(t) = \int \alpha(t)\beta(t)x(t)dt, \text{ cos } \varphi(t) = \pm \left(1 - \left(\int \alpha(t)\beta(t)x(t) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Além disso, como $z'(t) = \beta(t) \cos \varphi(t)$, temos

$$z(t) = \int \beta(t) \cos \varphi(t)dt = \pm \int \beta(t) \left(1 - \left(\int \alpha(t)\beta(t)x(t) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} dt.$$

- (b) Temos que $J(t) = J_F^z(t) = -\beta(t)x(t)$ e $K(t) = K_F^z(t) = -\varphi'(t) \cos \varphi(t)$. Logo, $(d/dt)(\text{sen } \varphi(t)) = \varphi'(t) \cos \varphi(t) = -K(t)$ e assim

$$\text{sen } \varphi(t) = - \int K(t)dt, \text{ cos } \varphi(t) = \pm \left(1 - \left(\int K(t)dt \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Além disso, pelas equações (3.1), $x'(t) = -\beta(t) \operatorname{sen} \varphi(t)$ e $z'(t) = \beta(t) \operatorname{cos} \varphi(t)$, e segue que

$$\frac{d}{dt} x^2(t) = 2x(t)x'(t) = -2\beta(t)x(t) \operatorname{sen} \varphi(t) = -2J(t) \int K(t)dt.$$

Portanto, como $x(t_0) > 0$, temos que em torno de t_0 , $x(t)$ é dado por:

$$x(t) = \left(-2 \int J(t) \left(\int K(t)dt \right) dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Ainda, como $x(t) > 0$ em torno de t_0 , temos $z'(t) = -(J(t)/x(t)) \operatorname{cos} \varphi(t)$ e assim

$$z(t) = \mp \int \frac{J(t)}{x(t)} \left(1 - \left(\int K(t)dt \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} dt.$$

□

Observação 5.11. Se γ é uma curva de Legendre nas condições do teorema anterior, podemos obter critérios para que γ seja uma frente, através da Proposição (5.4). ◇

Em [11] os autores obtêm superfícies de revolução singulares com curvatura média prescrita e não limitada. A seguir apresentamos um resultado semelhante ao provado em [11] para superfícies de revolução com curvatura média dada, porém utilizando a curvatura C_F^z e as notações de curva de Legendre e *framed surfaces* usadas neste trabalho.

Teorema 5.12. ([15], Teorema 3.9) *Seja $(\gamma, \nu) : (I, t_0) \rightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$ um germe de uma curva de Legendre com $\gamma(t) = (x(t), z(t))$ e $\nu(t) = (\operatorname{cos} \varphi(t), \operatorname{sen} \varphi(t))$ com curvatura (φ', β) . Suponha que $x(t_0) > 0$. Se $\beta : (I, t_0) \rightarrow \mathbb{R}$ é um germe de função e existe um germe de função $\alpha : (I, t_0) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $H_F^z(t) = \alpha(t)J_F^z(t)$, então (γ, ν) é dado por*

$$x(t) = (F^2(t) + G^2(t))^{\frac{1}{2}}, \quad z(t) = \int \frac{\beta(t)}{x(t)} (F(t) \operatorname{sen} \eta(t) - G(t) \operatorname{cos} \eta(t)) dt \quad (5.2)$$

e

$$\operatorname{cos} \varphi(t) = \frac{F(t) \operatorname{sen} \eta(t) - G(t) \operatorname{cos} \eta(t)}{x(t)}, \quad \operatorname{sen} \varphi(t) = \frac{F(t) \operatorname{cos} \eta(t) + G(t) \operatorname{sen} \eta(t)}{x(t)},$$

onde

$$F(t) = - \int \beta(t) \operatorname{cos} \eta(t) dt, \quad G(t) = - \int \beta(t) \operatorname{sen} \eta(t) dt, \quad \eta(t) = 2 \int \alpha(t) \beta(t) dt.$$

Demonstração. Pela Proposição (5.2), $H_F^z(t) = (1/2)(\varphi'(t)x(t) + \beta(t) \operatorname{cos} \varphi(t))$ e $J_F^z(t) = -\beta(t)x(t)$. Como $H_F^z(t) = \alpha(t)J_F^z(t)$, então $\varphi'(t)x(t) + \beta(t) \operatorname{cos} \varphi(t) = -2\alpha(t)\beta(t)x(t)$. Multiplicando ambos os lados desta equação por $\operatorname{cos} \varphi(t)$ e por $\operatorname{sen} \varphi(t)$, temos

$$\begin{aligned} \varphi'(t) \operatorname{cos} \varphi(t)x(t) + \beta(t) \operatorname{cos}^2 \varphi(t) &= -2\alpha(t)\beta(t)x(t) \operatorname{cos} \varphi(t), \\ \varphi'(t) \operatorname{sen} \varphi(t)x(t) + \beta(t) \operatorname{cos} \varphi(t) \operatorname{sen} \varphi(t) &= -2\alpha(t)\beta(t)x(t) \operatorname{sen} \varphi(t). \end{aligned}$$

Defina $X(t) = x(t) \operatorname{sen} \varphi(t) + ix(t) \operatorname{cos} \varphi(t)$, onde $i^2 = -1$, então pelas equações (4.5),

$$\begin{aligned} X'(t) &= -\beta(t) \operatorname{sen}^2 \varphi(t) + \varphi'(t)x(t) \operatorname{cos} \varphi(t) \\ &\quad - i(\beta(t) \operatorname{cos} \varphi(t) \operatorname{sen} \varphi(t) + \varphi'(t) \operatorname{sen} \varphi(t)x(t)) \\ &= -\beta(t) + \beta(t) \operatorname{cos}^2 \varphi(t) + \varphi'(t)x(t) \operatorname{cos} \varphi(t) \\ &\quad - i(\beta(t) \operatorname{cos} \varphi(t) \operatorname{sen} \varphi(t) + \varphi'(t) \operatorname{sen} \varphi(t)x(t)) \\ &= -\beta(t) - 2\alpha(t)\beta(t)(x(t) \operatorname{cos} \varphi(t) + ix(t) \operatorname{sen} \varphi(t)) \\ &= -\beta(t) + 2i\alpha(t)\beta(t)X(t). \end{aligned}$$

Uma solução para a equação diferencial ordinária linear de primeira ordem obtida, isto é, $X'(t) - 2i\alpha(t)\beta(t)X(t) = -\beta(t)$, é dada por $X(t) = (F(t) - iG(t))(\cos \eta(t) + i \sin \eta(t))$, conforme os artigos [11] e [15], onde

$$F(t) = - \int \beta(t) \cos \eta(t) dt, \quad G(t) = - \int \beta(t) \sin \eta(t) dt, \quad \eta(t) = 2 \int \alpha(t) \beta(t) dt. \quad (5.3)$$

Pela igualdade de números complexos, segue que

$$\begin{aligned} x(t) \cos \varphi(t) &= F(t) \sin \eta(t) - G(t) \cos \eta(t) \\ x(t) \sin \varphi(t) &= F(t) \cos \eta(t) - G(t) \sin \eta(t), \end{aligned}$$

então $x^2(t) = F^2(t) + G^2(t)$. Como $x(t_0) > 0$, temos

$$\begin{aligned} x(t) &= \left(F^2(t) + G^2(t) \right)^{\frac{1}{2}}, \\ \cos \varphi(t) &= \frac{F(t) \sin \eta(t) - G(t) \cos \eta(t)}{x(t)}, \\ \sin \varphi(t) &= \frac{F(t) \cos \eta(t) + G(t) \sin \eta(t)}{x(t)}, \end{aligned} \quad (5.4)$$

em torno de t_0 . Além disso, como $z'(t) = \beta(t) \cos \varphi(t)$, segue por integração que

$$z(t) = \int \frac{\beta(t)}{x(t)} (F(t) \sin \eta(t) - G(t) \cos \eta(t)) dt,$$

concluindo a demonstração do teorema. \square

Observação 5.13. Considere a curva de Legendre (γ, ν) obtida no Teorema (5.12) com curvatura $(\varphi'(t), \beta(t))$. Derivando a segunda equação de (5.4), obtemos:

$$\begin{aligned} -\varphi'(t) \sin \varphi(t) &= \frac{(F'(t) \sin \eta(t) + \eta'(t) F(t) \cos \eta(t)) x(t)}{x^2(t)} \\ &\quad - \frac{(G'(t) \cos \eta(t) + G(t) \eta'(t) \sin \eta(t)) x(t)}{x^2(t)} \\ &\quad + \frac{(F(t) \sin \eta(t) - G(t) \cos \eta(t)) \beta(t)}{x^2(t)} \sin \varphi(t). \end{aligned}$$

De (5.3) obtemos $F'(t) = -\beta(t) \cos \eta(t)$, $G'(t) = -\beta(t) \sin \eta(t)$ e $\eta'(t) = 2\alpha(t)\beta(t)$. Assim:

$$-\varphi'(t) \sin \varphi(t) = \left(2\alpha(t) + \frac{F(t) \sin \eta(t) - G(t) \cos \eta(t)}{x^2(t)} \right) \beta(t) \sin \varphi(t).$$

Portanto, $\varphi'(t) = -\beta(t)A(t)$, onde

$$A(t) = 2\alpha(t) + \frac{F(t) \sin \eta(t) - G(t) \cos \eta(t)}{x^2(t)}.$$

Concluimos assim que a curvatura (φ', β) se anula em um ponto singular t_0 de γ , ou seja, γ é uma frontal mas não uma frente em t_0 , pela Proposição (4.20). Além disso, pela Proposição (5.3), \mathbf{z} também é uma frontal mas não uma frente. O caso em que γ é uma frente foi tratado em [11]. \diamond

O próximo resultado também tem como objetivo construir a curva geratriz a partir de informações dadas para a curvatura C_F^z da superfície \mathbf{z} . Nele temos um caso onde apenas é dada a função J_F^z e outro onde temos apenas H_F^z .

Teorema 5.14. ([15], Teorema 3.11) *Seja $(\gamma, \nu) : (I, t_0) \rightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$ um germe de curva de Legendre com $\gamma(t) = (x(t), z(t))$ e $\nu(t) = (\cos \varphi(t), \sin \varphi(t))$ com curvatura (φ', β) .*

(a) *Suponha que $x(t_0) > 0$ e seja $J : (I, t_0) \rightarrow \mathbb{R}$ um germe de função suave tal que $J(t) = J_F^z(t)$. Então γ é dado por*

$$x(t) = \left(2 \int J(t) \sin \varphi(t) dt \right)^{\frac{1}{2}}, \quad z(t) = - \int \frac{J(t)}{x(t)} \cos \varphi(t) dt.$$

(b) *Suponha que $\cos \varphi(t_0) \neq 0$ e seja $H : (I, t_0) \rightarrow \mathbb{R}$ um germe de função suave tal que $H(t) = H_F^z(t)$. Então γ é dado por*

$$x(t) = \frac{1}{\cos \varphi(t)} \left(- \int 2H(t) \sin \varphi(t) dt \right), \quad z(t) = \int (2H(t) - \varphi'(t)x(t)) dt.$$

Demonstração. (a) Pela Proposição (5.2), $J(t) = -\beta(t)x(t)$. Além disso, temos que $x'(t) = -\beta(t) \sin \varphi(t)$. Calculando a derivada de $x^2(t)$, obtemos:

$$\frac{d}{dt} x^2(t) = 2x(t)x'(t) = -2x(t)\beta(t) \sin \varphi(t) = 2J(t) \sin \varphi(t).$$

Logo

$$x^2(t) = 2 \int J(t) \sin \varphi(t) dt.$$

Como $x(t_0) > 0$, então

$$x(t) = \left(2 \int J(t) \sin \varphi(t) dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Além disso, como $z'(t) = \beta(t) \cos \varphi(t)$ e $\beta(t) = -J(t)/x(t)$, obtemos:

$$z(t) = - \int \frac{J(t)}{x(t)} \cos \varphi(t) dt.$$

(b) Por hipótese, $2H(t) = \varphi'(t)x(t) + \beta(t) \cos \varphi(t)$. Logo

$$\cos \varphi(t)x'(t) = -\beta(t) \cos \varphi(t) \sin \varphi(t) = \sin \varphi(t)\varphi'(t)x(t) - 2H(t) \sin \varphi(t),$$

ou seja,

$$\cos \varphi(t)x'(t) - \varphi'(t) \sin \varphi(t)x(t) = -2H(t) \sin \varphi(t),$$

e assim,

$$\frac{d}{dt} \cos \varphi(t)x(t) = -2H(t) \sin \varphi(t).$$

Como $\cos \varphi(t_0) \neq 0$, concluí-se que

$$x(t) = \frac{1}{\cos \varphi(t)} \left(-2 \int H(t) \sin \varphi(t) dt \right).$$

Agora para $z(t)$, temos que $z'(t) = \beta(t) \cos \varphi(t)$, e $\beta(t) = (2H(t) - \varphi'(t)x(t))/\cos \varphi(t)$, portanto:

$$z(t) = \int (2H(t) - \varphi'(t)x(t)) dt.$$

□

Exemplo 5.15. (a) Sejam $\beta, \alpha : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ funções reais dadas por $\beta(t) = \cotg t$ e $\alpha(t) = -1$. Note que essas funções estão nas condições do Teorema (5.10)(a). Então a função coordenada x é dada pela solução da equação a seguir.

$$\begin{aligned} \frac{\cos(t)}{\sen(t)}x''(t) + \frac{1}{\sen^2(t)}x'(t) - \frac{\cos^3(t)}{\sen^3(t)}x(t) &= 0 \Rightarrow \\ \sen^2(t)\cos(t)x''(t) + \sen(t)x'(t) - \cos^3(t)x(t) &= 0. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Dessa maneira, $x(t) = \sen(t)$ satisfaz (5.5) e, com isso, a função coordenada z é dada por

$$z(t) = \cos(t) + \ln(\tg(t/2))$$

, ou seja, $\gamma(t) = (x(t), z(t))$ é uma **tractriz**. Portanto, a superfície de revolução $\mathbf{z} : (0, \pi) \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3$ da curva γ é a **pseudo-esfera** dada por

$$\mathbf{z}(t, \theta) = (\sen(t)\cos\theta, \sen(t)\sen\theta, \cos(t) + \ln(\tg(t/2))).$$

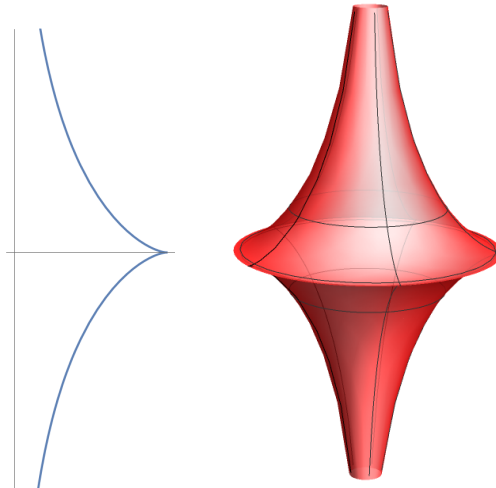


Figura 5.4: Tractriz γ , à esquerda, e pseudo-esfera \mathbf{z} , à direita. Fonte: Elaborada pelo autor.

(b) Seja $\alpha(t)$ uma função satisfazendo $H_F^z(t, \theta) = \alpha(t)J_F^z(t, \theta)$ para a superfície de revolução $\mathbf{z}(t, \theta)$ da curva de Legendre $\gamma(t) = (x(t), z(t))$. Se $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ são os valores iniciais das funções $F(t)$ e $G(t)$ dadas em (5.3), $\beta(t) = t$ e $\alpha(t) = 0$ para todo $t \in [0, 2\pi)$ então, pelo Teorema (5.12), a frontal $\gamma(t)$ é dada por:

$$\gamma(t) = \left(\sqrt{(c_1^- t^2/2)^2 + c_2^2}, -c^2 \ln \left(-2c_1 + t^2 + \sqrt{4c^2 + (-2c_1 + t^2)^2} \right) \right).$$

Observe que $\alpha(t) = 0$ é equivalente a dizer que a curvatura média de \mathbf{z} nos pontos regulares é identicamente nula, e como mencionado em (2.37), segue que \mathbf{z} é um catenoide. Tomando $c_1 = 1/5$ e $c_2 = 3/10$, temos um catenoide com singularidade cujo traço está representado na figura (5.5).

◇

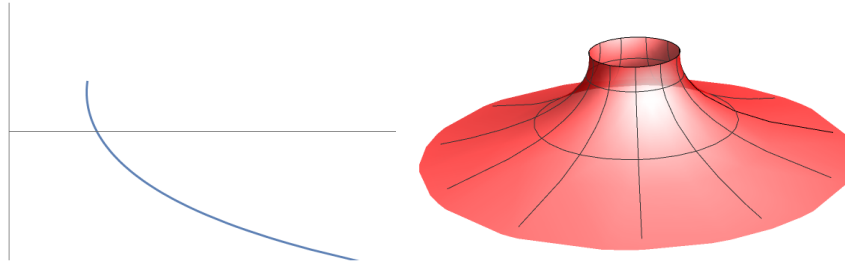


Figura 5.5: Curva γ , à esquerda, e catenoide com singularidade, à direita. Fonte: Elaborada pelo autor.

5.3 Problemas de classificação

Nesta seção trabalharemos com germes de curvas e superfícies, usando as notações $x_0 = x(t_0)$, $z_0 = z(t_0)$, $\gamma_0 = \gamma(t_0)$ e $\mathbf{z}_0 = \mathbf{z}(t_0, \theta_0) = (x_0 \cos \theta_0, x_0 \sin \theta_0, z_0)$, para a frontal $\gamma : (I, t_0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, (x_0, z_0))$, onde $\gamma = (x, z)$, e para sua superfície de revolução \mathbf{z} em torno do eixo z . O objetivo desta seção é estudar problemas de classificação para as singularidades de \mathbf{z} , através da caracterização das singularidades da curva geratriz γ .

Os próximos dois resultados dizem que a frontal γ é difeomorfa a uma curva $\tilde{\gamma}$ se, e somente se, suas superfícies de revolução \mathbf{z} e $\tilde{\mathbf{z}}$ são difeomorfas, e possibilitarão relacionar as singularidades da curva geratriz e de sua superfície de revolução. No primeiro consideramos o caso $x_0 > 0$, isto é, γ não cruza o eixo de rotação em t_0 .

Teorema 5.16. ([15], Teorema 3.15) *Sejam $\gamma : (I, t_0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, (x_0, z_0))$ e $\tilde{\gamma} : (\tilde{I}, \tilde{t}_0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, (\tilde{x}_0, \tilde{z}_0))$ germes de curvas suaves tais que $x_0, \tilde{x}_0 > 0$, e $\mathbf{z} : (I \times [0, 2\pi), (t_0, \theta_0)) \rightarrow ((\mathbb{R}^2 - 0) \times \mathbb{R}, \mathbf{z}_0)$ e $\tilde{\mathbf{z}} : (\tilde{I} \times [0, 2\pi), (\tilde{t}_0, \theta_0)) \rightarrow ((\mathbb{R}^2 - 0) \times \mathbb{R}, \tilde{\mathbf{z}}_0)$ suas superfícies de revolução em torno do eixo z , respectivamente.*

- (a) *Se existem germes de difeomorfismos $\phi : (I, t_0) \rightarrow (\tilde{I}, \tilde{t}_0)$ e $\psi : (\mathbb{R}^2, \gamma_0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, \tilde{\gamma}_0)$ satisfazendo $\psi \circ \gamma = \tilde{\gamma} \circ \phi$, então os germes de difeomorfismos $\Phi : (I \times [0, 2\pi), (t_0, \theta_0)) \rightarrow (\tilde{I} \times [0, 2\pi), (\tilde{t}_0, \theta_0))$ e $\Psi : ((\mathbb{R}^2 - 0) \times \mathbb{R}, \mathbf{z}_0) \rightarrow ((\mathbb{R}^2 - 0) \times \mathbb{R}, \tilde{\mathbf{z}}_0)$ dados por*

$$\Phi(t, \theta) = (\phi(t), \theta),$$

$$\Psi(X, Y, Z) = \left(\frac{X\psi_1(\sqrt{X^2 + Y^2}, Z)}{\sqrt{X^2 + Y^2}}, \frac{Y\psi_1(\sqrt{X^2 + Y^2}, Z)}{\sqrt{X^2 + Y^2}}, \psi_2(\sqrt{X^2 + Y^2}, Z) \right),$$

satisfazem $\Phi \circ \mathbf{z} = \tilde{\mathbf{z}} \circ \Phi$.

- (b) *Se existem germes de difeomorfismo $\Phi : (I \times [0, 2\pi), (t_0, \theta_0)) \rightarrow (\tilde{I} \times [0, 2\pi), (\tilde{t}_0, \theta_0))$ e $\Psi : ((\mathbb{R}^2 - 0) \times \mathbb{R}, \mathbf{z}_0) \rightarrow ((\mathbb{R}^2 - 0) \times \mathbb{R}, \tilde{\mathbf{z}}_0)$ dados por $\Phi(t, \theta) = (\phi(t), \theta)$ e $\Psi(X, Y, Z) = (\Psi_1(X, Y, Z), \Psi_2(X, Y, Z), \Psi_3(X, Y, Z))$ satisfazendo $\Psi \circ \mathbf{z} = \tilde{\mathbf{z}} \circ \Phi$, então o germe de difeomorfismo $\psi : (\mathbb{R}^2, \gamma_0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, \tilde{\gamma}_0)$, $\psi(X, Z) = (\psi_1(X, Z), \psi_2(X, Z))$ dado por*

$$\psi_1(X, Z) = \Psi_1(X \cos \theta_0, X \sin \theta_0, Z) \cos \theta_0 + \Psi_2(X \cos \theta_0, X \sin \theta_0, Z) \sin \theta_0,$$

$$\psi_2(X, Z) = \Psi_3(X \cos \theta_0, X \sin \theta_0, Z),$$

satisfaz $\psi \circ \gamma = \tilde{\gamma} \circ \phi$.

Demonstração. (a) Queremos mostrar que os germes de aplicações Φ e Ψ dados no enunciado são germes de difeomorfismos, e que $\Psi \circ \mathbf{z} = \tilde{\mathbf{z}} \circ \Phi$.

Primeiramente mostremos que Φ é um germe de difeomorfismo. De fato, como $\Phi_t(t, \theta) = (\phi'(t), 0)$ e $\Phi_\theta(t, \theta) = (0, 1)$, então o determinante da matriz jacobiana de Φ em (t_0, θ_0) é dado por

$$\det(J\Phi(t_0, \theta_0)) = \begin{pmatrix} \phi'(t_0) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \phi'(t_0). \quad (5.6)$$

Como ϕ é um germe de difeomorfismo, segue que $\phi'(t_0) \neq 0$ e portanto Φ é um germe de difeomorfismo. Para verificarmos que Ψ é um germe de difeomorfismo, calcularemos o determinante da sua matriz Jacobiana em \mathbf{z}_0 . Note que as derivadas parciais de suas funções coordenadas são dadas por:

$$\begin{aligned} \Psi_{1X}(X, Y, Z) &= \left(\frac{\psi_1(\sqrt{X^2 + Y^2}, Z)Y^2}{\sqrt{X^2 + Y^2}} + X^2\psi_{1x}(\sqrt{X^2 + Y^2}, Z) \right) \frac{1}{X^2 + Y^2}, \\ \Psi_{1Y}(X, Y, Z) &= \left(XY\psi_{1x}(\sqrt{X^2 + Y^2}, Z) - \frac{\psi_1(\sqrt{X^2 + Y^2}, Z)XY}{\sqrt{X^2 + Y^2}} \right) \frac{1}{X^2 + Y^2}, \\ \Psi_{1Z}(X, Y, Z) &= \frac{X\psi_{1z}(\sqrt{X^2 + Y^2}, Z)}{\sqrt{X^2 + Y^2}}, \\ \Psi_{2X}(X, Y, Z) &= \left(XY\psi_{1x}(\sqrt{X^2 + Y^2}, Z) - \frac{\psi_1(\sqrt{X^2 + Y^2}, Z)XY}{\sqrt{X^2 + Y^2}} \right) \frac{1}{X^2 + Y^2}, \\ \Psi_{2Y}(X, Y, Z) &= \left(\frac{\psi_1(\sqrt{X^2 + Y^2}, Z)X^2}{\sqrt{X^2 + Y^2}} + Y^2\psi_{1x}(\sqrt{X^2 + Y^2}, Z) \right) \frac{1}{X^2 + Y^2}, \\ \Psi_{2Z}(X, Y, Z) &= \frac{Y\psi_{1z}(\sqrt{X^2 + Y^2}, Z)}{\sqrt{X^2 + Y^2}}, \quad \Psi_{3X}(X, Y, Z) = \frac{X\psi_{2x}(\sqrt{X^2 + Y^2}, Z)}{\sqrt{X^2 + Y^2}}, \\ \Psi_{3Y}(X, Y, Z) &= \frac{Y\psi_{2x}(\sqrt{X^2 + Y^2}, Z)}{\sqrt{X^2 + Y^2}}, \quad \Psi_{3Z}(X, Y, Z) = \psi_{2z}(\sqrt{X^2 + Y^2}, Z). \end{aligned} \quad (5.7)$$

Calculando essas funções em \mathbf{z}_0 obtemos:

$$\begin{aligned} \Psi_{1X}(\mathbf{z}_0) &= \frac{\psi_1(x_0, z_0) \sen^2 \theta_0 + x_0\psi_{1x}(x_0, z_0) \cos^2 \theta_0}{x_0}, \\ \Psi_{1Y}(\mathbf{z}_0) &= \frac{(x_0\psi_{1x}(x_0, z_0) - \psi_1(x_0, z_0)) \cos \theta_0 \sen \theta_0}{x_0}, \\ \Psi_{1Z}(\mathbf{z}_0) &= \psi_{1z}(x_0, z_0) \cos \theta_0, \\ \Psi_{2X}(\mathbf{z}_0) &= \frac{(x_0\psi_{1x}(x_0, z_0) - \psi_1(x_0, z_0)) \cos \theta_0 \sen \theta_0}{x_0}, \\ \Psi_{2Y}(\mathbf{z}_0) &= \frac{\psi_1(x_0, z_0) \cos^2 \theta_0 + x_0\psi_{1x}(x_0, z_0) \sen^2 \theta_0}{x_0}, \\ \Psi_{2Z}(\mathbf{z}_0) &= \psi_{1z}(x_0, z_0) \sen \theta_0, \quad \Psi_{3X}(\mathbf{z}_0) = \psi_{2x}(x_0, z_0) \cos \theta_0, \\ \Psi_{3Y}(\mathbf{z}_0) &= \psi_{2x}(x_0, z_0) \sen \theta_0, \quad \Psi_{3Z}(\mathbf{z}_0) = \psi_{2z}(x_0, z_0). \end{aligned} \quad (5.8)$$

Calculando o determinante da matriz Jacobiana de Ψ em \mathbf{z}_0 , com auxílio do programa *Mathematica*, concluímos que

$$\begin{aligned} \det(J\Psi(\mathbf{z}_0)) &= \frac{\psi(x_0, z_0)}{x_0} (\psi_{1x}(x_0, z_0)\psi_{2z}(x_0, z_0) - \psi_{1z}(x_0, z_0)\psi_{2x}(x_0, z_0)) = \\ &= \frac{\tilde{x}_0}{x_0} \det(J\psi(\gamma_0)) \neq 0, \end{aligned} \quad (5.9)$$

pois $x_0, \tilde{x}_0 > 0$, e ψ é um germe de difeomorfismo em $\gamma_0 = (x_0, z_0)$. Portanto Ψ é um germe de difeomorfismo. Por último, da hipótese, temos $(\tilde{x}(\phi(t)), \tilde{z}(\phi(t))) = (\psi_1(x(t), z(t)), \psi_2(x(t), z(t)))$, logo:

$$\begin{aligned}\Phi \circ \mathbf{z}(t, \theta) &= \Psi(x(t) \cos \theta, x(t) \sen \theta, z(t)) \\ &= (\psi_1(x(t), z(t)) \cos \theta, \psi_1(x(t), z(t)) \sen \theta, \psi_1(x(t), z(t))) \\ &= (\tilde{x}(\phi(t)) \cos \theta, \tilde{x}(\phi(t)) \sen \theta, \tilde{z}(t)) \\ &= \tilde{\mathbf{z}} \circ \Phi(t, \theta).\end{aligned}$$

(b) Como $\Phi(t, \theta) = (\phi(t), \theta)$, segue de (5.6) que $\phi'(t_0) \neq 0$, portanto ϕ é um germe de difeomorfismo. Para mostrar que ψ é um germe de difeomorfismo, calculamos as derivadas parciais das funções coordenadas de ψ .

$$\begin{aligned}\psi_{1X}(X, Z) &= \Psi_{1X}(X \cos \theta_0, X \sen \theta_0, Z) \cos^2 \theta_0 + \Psi_{1Y}(X \cos \theta_0, X \sen \theta_0, Z) \cos \theta_0 \sen \theta_0 + \\ &+ \Psi_{2X}(X \cos \theta_0, X \sen \theta_0, Z) \cos \theta_0 \sen \theta_0 + \Psi_{2Y}(X \cos \theta_0, X \sen \theta_0, Z) \sen^2 \theta_0, \\ \psi_{1Z}(X, Z) &= \Psi_{1Z}(x \cos \theta_0, x \sen \theta_0, z) \cos \theta_0 + \Psi_{2Z}(x \cos \theta_0, x \sen \theta_0, z) \sen \theta_0, \\ \psi_{2X}(X, Z) &= \Psi_{3X}(X \cos \theta_0, X \sen \theta_0, Z) \cos \theta_0 + \Psi_{3Y}(X \cos \theta_0, X \sen \theta_0, Z) \sen \theta_0, \\ \psi_{2Z}(X, Z) &= \Psi_{3Z}(X \cos \theta_0, X \sen \theta_0, Z).\end{aligned}\tag{5.10}$$

Em $\gamma_0 = (x_0, z_0)$ temos:

$$\begin{aligned}\psi_{1X}(x_0, z_0) &= \Psi_{1X}(\mathbf{z}_0) \cos^2 \theta_0 + \Psi_{1Y}(\mathbf{z}_0) \cos \theta_0 \sen \theta_0 + \\ &+ \Psi_{2X}(\mathbf{z}_0) \cos \theta_0 \sen \theta_0 + \Psi_{2Y}(\mathbf{z}_0) \sen^2 \theta_0, \\ \psi_{1Z}(x_0, z_0) &= \Psi_{1Z}(\mathbf{z}_0) \cos \theta_0 + \Psi_{2Z}(\mathbf{z}_0) \sen \theta_0, \\ \psi_{2X}(x_0, z_0) &= \Psi_{3X}(\mathbf{z}_0) \cos \theta_0 + \Psi_{3Y}(\mathbf{z}_0) \sen \theta_0, \\ \psi_{2Z}(x_0, z_0) &= \Psi_{3Z}(\mathbf{z}_0).\end{aligned}\tag{5.11}$$

Por hipótese temos que $\Psi \circ \mathbf{z} = \tilde{\mathbf{z}} \circ \Phi$, ou seja

$$\begin{aligned}\tilde{x}(\phi(t)) \cos \theta &= \Psi_1(x(t) \cos \theta, x(t) \sen \theta, z(t)), \\ \tilde{x}(\phi(t)) \sen \theta &= \Psi_2(x(t) \cos \theta, x(t) \sen \theta, z(t)), \\ \tilde{z}(\phi(t)) &= \Psi_3(x(t) \cos \theta, x(t) \sen \theta, z(t)).\end{aligned}$$

Derivando as equações acima em relação a θ obtemos

$$\begin{aligned}-\tilde{x}(\phi(t)) \sen \theta &= \Psi_{1X}(x(t) \cos \theta, x(t) \sen \theta, z(t))(-x(t) \sen \theta) \\ &+ \Psi_{1Y}(x(t) \cos \theta, x(t) \sen \theta, z(t))x(t) \cos \theta \\ &= -\Psi_2(x(t) \cos \theta, x(t) \sen \theta, z(t)). \\ \tilde{x}(\phi(t)) \cos \theta &= \Psi_{2X}(x(t) \cos \theta, x(t) \sen \theta, z(t))(-x(t) \sen \theta) \\ &+ \Psi_{2Y}(x(t) \cos \theta, x(t) \sen \theta, z(t))x(t) \cos \theta \\ &= \Psi_1(x(t) \cos \theta, x(t) \sen \theta, z(t)). \\ 0 &= \Psi_{3X}(x(t) \cos \theta, x(t) \sen \theta, z(t))(-x(t) \sen \theta) \\ &+ \Psi_{3Y}(x(t) \cos \theta, x(t) \sen \theta, z(t))x(t) \cos \theta.\end{aligned}\tag{5.12}$$

Lembrando que $x(t) > 0$ numa vizinhança de t_0 , podemos simplificar ψ_{1X} substituindo (5.12) em (5.11) de modo que $\psi_{1X}(x_0, z_0) = \Psi_{1X}(\mathbf{z}_0) + \Psi_{2Y}(\mathbf{z}_0) - (\tilde{x}_0/x_0)$. Dessa forma,

o determinante da matriz jacobiana de ψ é dado por:

$$\begin{aligned} \det(J\psi(x_0, z_0)) &= (\Psi_{1X}(\mathbf{z}_0) + \Psi_{2Y}(\mathbf{z}_0) - \frac{\tilde{x}_0}{x_0})\Psi_{3Z}(\mathbf{z}_0) \\ &\quad - (\Psi_{1Z}(\mathbf{z}_0)\cos\theta_0 + \Psi_{2Z}(\mathbf{z}_0)\sin\theta_0)(\Psi_{3X}(\mathbf{z}_0)\cos\theta_0 + \Psi_{3Y}(\mathbf{z}_0)\sin\theta_0) \\ &= \Psi_{1X}(\mathbf{z}_0)\Psi_{3Z}(\mathbf{z}_0) + \Psi_{2Y}(\mathbf{z}_0)\Psi_{3Z}(\mathbf{z}_0) - \Psi_{3Z}(\mathbf{z}_0)\frac{\tilde{x}_0}{x_0} \\ &\quad - \Psi_{1Z}(\mathbf{z}_0)\Psi_{3X}(\mathbf{z}_0) - \Psi_{2Z}(\mathbf{z}_0)\Psi_{3Y}(\mathbf{z}_0). \end{aligned}$$

Usando o que calculamos acima concluímos que o determinante da matriz jacobiana de ψ é não nulo, portanto ψ é um germe de difeomorfismo. Por último,

$$\begin{aligned} \psi \circ \gamma(t) &= (\psi_1(x(t), z(t)), \psi_2(x(t), z(t))) \\ &= (\Psi_1(x(t)\cos\theta_0, x(t)\sin\theta_0, z(t))\cos\theta_0 \\ &\quad + \Psi_2(x(t)\cos\theta_0, x(t)\sin\theta_0, z(t))\sin\theta_0, \Psi_3(x(t)\cos\theta_0, x(t)\sin\theta_0, z(t))) \\ &= (\tilde{x}(\phi(t))\cos^2\theta_0 + \tilde{x}(\phi(t))\sin^2\theta_0, \tilde{z}(\phi(t))) \\ &= \tilde{\gamma} \circ \phi(t), \end{aligned}$$

ou seja, γ é difeomorfo a $\tilde{\gamma}$. □

Agora consideramos o caso em que γ e $\tilde{\gamma}$ cruzam o eixo de rotação, isto é, $x_0 = 0$ e $\tilde{x}_0 = 0$.

Teorema 5.17. ([15], Teorema 3.23) *Sejam $\gamma : (I, t_0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ e $\tilde{\gamma} : (\tilde{I}, \tilde{t}_0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ germes de curvas suaves, e sejam $\mathbf{z} : (I \times [0, 2\pi), (t_0, \theta_0)) \rightarrow (\mathbb{R}^3, 0)$ e $\tilde{\mathbf{z}} : (\tilde{I} \times [0, 2\pi), (\tilde{t}_0, \theta_0)) \rightarrow (\mathbb{R}^3, 0)$ germes das superfícies de revolução em torno do eixo z de γ e $\tilde{\gamma}$, respectivamente.*

- (a) *Se existem germes de difeomorfismo $\phi : (I, t_0) \rightarrow (\tilde{I}, \tilde{t}_0)$ e $\psi : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ da forma $\psi(X, Y) = (X, \varphi(X^2, Z))$ tais que $\psi \circ \gamma = \tilde{\gamma} \circ \phi$, então existem germes de difeomorfismo $\Phi : (I \times [0, 2\pi), (t_0, \theta_0)) \rightarrow (\tilde{I} \times [0, 2\pi), (\tilde{t}_0, \theta_0))$ da forma $\Phi(t, \theta) = (\phi(t), \theta)$ e $\Psi : (\mathbb{R}^3, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^3, 0)$ da forma $\Psi(X, Y, Z) = (X, Y, \varphi(X^2 + Y^2, Z))$ tais que $\Psi \circ \mathbf{z} = \tilde{\mathbf{z}} \circ \Phi$.*
- (b) *Se existem germes de difeomorfismo $\Phi : (I \times [0, 2\pi), (t_0, \theta_0)) \rightarrow (\tilde{I} \times [0, 2\pi), (\tilde{t}_0, \theta_0))$ da forma $\Phi(t, \theta) = (\phi(t), \theta)$ e $\Psi : (\mathbb{R}^3, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^3, 0)$ da forma $\Psi(X, Y, Z) = (X, Y, \varphi(X^2 + Y^2, Z))$ tais que $\Psi \circ \mathbf{z} = \tilde{\mathbf{z}} \circ \Phi$, então existem germes de difeomorfismo $\phi : (I, t_0) \rightarrow (\tilde{I}, \tilde{t}_0)$ e $\psi : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ da forma $\psi(X, Y) = (X, \varphi(X^2, Z))$ tais que $\psi \circ \gamma = \tilde{\gamma} \circ \phi$.*

Demonstração. (a) Como ϕ é um germe de difeomorfismo, então $\Phi(t, \theta) = (\phi(t), \theta)$ é um germe de difeomorfismo pois suas funções coordenadas são. Além disso, como ψ é um germe de difeomorfismo em $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$, temos que o determinante da matriz Jacobiano de ψ em $(0, 0)$, isto é:

$$\det(J\psi(0, 0)) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varphi_z(0, 0) \end{pmatrix} = \varphi_z(0, 0) \neq 0. \quad (5.13)$$

Calculando a matriz Jacobiana de Ψ , obtemos:

$$J\Psi(X, Y, Z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2X\varphi_x(X^2 + Y^2, Z) \\ 0 & 1 & 2Y\varphi_x(X^2 + Y^2, Z) \\ 0 & 0 & \varphi_z(X^2 + Y^2, Z) \end{pmatrix}.$$

Sendo assim, calculando em $(0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$ obtemos $\det(J\Psi(0, 0, 0)) = \varphi_z(0, 0) \neq 0$, pelo obtido na equação (5.13), isto é, Ψ é um germe de difeomorfismo.

Para verificarmos que $\Psi \circ \mathbf{z} = \tilde{\mathbf{z}} \circ \Phi$, note que, por hipótese, $(x(t), \varphi(x^2(t), z(t))) = (\tilde{x}(\phi(t)), \tilde{z}(\phi(t)))$. Portanto:

$$\begin{aligned} \Phi \circ \mathbf{z}(t, \theta) &= (x(t) \cos \theta, x(t) \sin \theta, \varphi(x^2(t), z(t))) \\ &= (\tilde{x}(\phi(t)) \cos \theta, \tilde{x}(\phi(t)) \sin \theta, \tilde{z}(\phi(t))) \\ &= \mathbf{z} \circ \Phi(t, \theta). \end{aligned}$$

(b) Segue do processo inverso ao feito para a demonstração do item (a). □

O seguinte resultado fornece uma condição para que a superfície \mathbf{z} , tal que $x_0 = 0$ em um ponto singular $(t_0, \theta_0) \in I \times [0, 2\pi)$, seja difeomorfa ao cone $f(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u)$ em $(0, \theta_0)$.

Proposição 5.18. ([15], Proposição 3.6) *Se $x(t_0) = 0$, $\beta(t_0) \neq 0$, $a(t_0) \neq 0$ e $b(t_0) \neq 0$, então a superfície de revolução $\mathbf{z} : I \times [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3$ em (t_0, θ_0) é difeomorfa ao cone f em $(0, \theta_0)$.*

Demonstração. Note que $x'(t) = -\beta(t)b(t)$ e $z'(t) = \beta(t)a(t)$. Então em t_0 temos $x'(t_0) \neq 0$ e $z'(t_0) \neq 0$. Logo, existe $\varepsilon > 0$ tal que $x'(t) \neq 0$ e $z'(t) \neq 0$ para todo $t \in I_\varepsilon = (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$, ou seja, x e z são difeomorfismos em I_ε . Seja $J = x(I_\varepsilon)$, dessa forma, as aplicações $h : I_\varepsilon \times [0, 2\pi) \rightarrow J \times [0, 2\pi)$ e $\varphi : \mathbb{R}^2 \times J \rightarrow \mathbb{R}^3$ dadas por $h(t, \theta) = (x(t), \theta)$ e $\varphi(u, v, w) = (u, v, z \circ x^{-1}(w))$ são difeomorfismos.

Para mostrar que \mathbf{z} em (t_0, θ_0) é difeomorfo ao cone f em $(0, \theta_0)$ basta verificarmos que $h(t_0, \theta_0) = (0, \theta_0)$ e $(\varphi \circ f \circ h)(t_0, \theta_0) = \mathbf{z}(t_0, \theta_0)$. De fato, como $x(t_0) = 0$, obtemos $\mathbf{z}(t_0, \theta_0) = (0, 0, z(t_0))$ e $h(t_0, \theta_0) = (0, \theta_0)$. Finalmente, $(\varphi \circ f \circ h)(t_0, \theta_0) = (\varphi \circ f)(0, \theta_0) = \varphi(0, 0, 0) = (0, 0, z(t_0)) = \mathbf{z}(t_0)$. □

Observação 5.19. As condições da proposição anterior nos dizem que em (t_0, θ_0) \mathbf{z} será difeomorfo ao cone f no ponto $(0, \theta_0)$ se a curva geratriz da superfície \mathbf{z} for regular e cruzar o eixo de rotação (eixo z) em t_0 , mas sem que seu vetor tangente seja paralelo a algum dos eixos coordenados x e z nesse ponto. ◇

A partir deste ponto apresentaremos resultados de classificação de singularidades para o caso em que a curva geratriz não cruza o eixo de revolução, em outras palavras, $x_0 \neq 0$.

Nos Capítulos 3 e 4 vimos as definições de j/i -cúspide e j/i -cuspidal edge. Utilizando o Teorema (5.16), caracterizamos as singularidades do tipo j/i -cuspidal edge da superfície \mathbf{z} de revolução de γ através dos pontos de j/i -cúspide da curva, conforme o seguinte corolário.

Corolário 5.20. ([15], Corolário 3.17) *Seja $\gamma = (x, z) : (I, t_0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, (x_0, z_0))$ o germe de uma curva suave com $x_0 > 0$. Então γ em t_0 é uma j/i -cúspide se, e somente se, a superfície de revolução \mathbf{z} de γ em torno do eixo z é uma j/i -cuspidal edge em (t_0, θ_0) , para todo θ_0 .*

Demonstração. (\Rightarrow) Suponhamos que γ é uma j/i -cúspide em t_0 , ou seja, γ é \mathcal{A} -equivalente a $\tilde{\gamma}(t) = (c + t^i, t^j)$, onde $c > 0$. Então pelo Teorema (5.16), o germe da superfície de revolução \mathbf{z} de γ é \mathcal{A} -equivalente a $\tilde{\mathbf{z}}(t, \theta) = ((c + t^i) \cos \theta, (c + t^i) \sin \theta, t^j)$. Considere o germe de aplicação $\Psi : (\mathbb{R}^3, (0, c, 0)) \rightarrow (\mathbb{R}^3, \tilde{\mathbf{z}}_0)$ dado por $\Psi(X, Y, Z) = (Y \cos X, Y \sin X, Z)$ e o germe $f : (\mathbb{R}^2, (0, 0)) \rightarrow (\mathbb{R}^3, (0, c, 0))$ dado por $f(t, \theta) = (\theta, c + t^i, t^j)$. Então

$\tilde{z}(t, \theta) = \Psi \circ f(t, \theta)$, ou seja, $\tilde{\mathbf{z}}$ é \mathcal{A} -equivalente a f , que por sua vez é \mathcal{A} -equivalente a j/i -cuspidal edge usual. Portanto, por transitividade, \mathbf{z} é uma j/i -cuspidal edge em (t_0, θ_0) .

(\Leftarrow) Reciprocamente, se \mathbf{z} é uma j/i -cuspidal edge em (t_0, θ_0) , ou seja, \mathbf{z} é \mathcal{A} -equivalente a $f(t, \theta) = (\theta, t^i, t^j)$ em $(0, 0)$, existem germes de difeomorfismos $\Phi(t, \theta) = (\phi(t), \theta)$ e Ψ tais que $\Psi \circ \mathbf{z}(t, \theta) = (\theta, \phi^i(t), \phi^j(t))$. Note que $\phi(t_0) = 0$ e $\phi'(t_0) \neq 0$ pois $\Psi \circ \mathbf{z}(t_0, \theta_0) = f(0, 0) = (0, 0, 0)$ e ϕ é um germe de difeomorfismo. Pelo Teorema (5.16), existe um germe de difeomorfismo ψ tal que $\psi \circ \gamma(t) = (\phi^i(t), \phi^j(t))$ e portanto, $\psi \circ \gamma \circ \phi^{-1}(t) = (t^i, t^j)$, isto é, γ é uma j/i -cúspide em t_0 . \square

Para verificar se uma curva suave γ é uma j/i -cúspide num ponto t_0 , já são conhecidos os seguintes critérios utilizando suas derivadas $\gamma^{(k)}$. A seguir enunciamos esses resultados, a fim de apresentar condições semelhantes que utilizam a curvatura (φ', β) da curva de Legendre (γ, ν) onde $\nu(t) = (\cos \varphi(t), \sin \varphi(t))$.

Proposição 5.21. ([15], Proposição 3.18) *Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva suave e $t_0 \in I$ um ponto singular de γ , isto é, $\gamma'(t_0) = 0$. Então valem:*

- (a) γ é uma $3/2$ -cúspide em t_0 se, e somente se, $\det(\gamma'', \gamma^{(3)})(t_0) \neq 0$.
- (b) γ é uma $5/2$ -cúspide em t_0 se, e somente se $\gamma''(t_0) \neq (0, 0)$, $\gamma^{(3)}(t_0) = c\gamma''(t_0)$, para alguma constante $c \in \mathbb{R}$, e $\det(\gamma'', 3\gamma^{(5)} - 10c\gamma^{(4)})(t_0) \neq 0$.
- (c) γ é uma $4/3$ -cúspide em t_0 se, e somente se, $\gamma''(t_0) = (0, 0)$ e $\det(\gamma^{(3)}, \gamma^{(4)})(t_0) \neq 0$.
- (d) γ é uma $5/3$ -cúspide em t_0 se, e somente se, $\gamma''(t_0) = (0, 0)$, $\det(\gamma^{(3)}, \gamma^{(4)})(t_0) = 0$ e $\det(\gamma^{(3)}, \gamma^{(5)})(t_0) \neq 0$.

Utilizando a Proposição (5.21) e as equações (3.1) para uma curva de Legendre (γ, ν) obtemos o seguinte resultado.

Teorema 5.22. ([15], Teorema 3.19) *Seja $(\gamma, \nu) : (I, t_0) \rightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$ o germe de uma curva de Legendre da forma $\gamma(t) = (x(t), z(t))$, $\nu(t) = (\cos \varphi(t), \sin \varphi(t))$ com curvatura (φ', β) . Suponhamos que t_0 é um ponto singular, ou seja, $\beta(t_0) = 0$. Então são válidos os seguintes resultados.*

- (a) γ é uma $3/2$ -cúspide em t_0 se, e somente se, $\beta'(t_0)\varphi'(t_0) \neq 0$.
- (b) γ é uma $5/2$ -cúspide em t_0 se, e somente se, $\beta'(t_0) \neq 0$, $\varphi'(t_0) = 0$ e $\beta''(t_0)\varphi''(t_0) - \beta'(t_0)\varphi^{(3)}(t_0) \neq 0$.
- (c) γ é uma $4/3$ -cúspide em t_0 se, e somente se, $\beta'(t_0) = 0$ e $\beta''(t_0)\varphi'(t_0) \neq 0$.
- (d) γ é uma $5/3$ -cúspide em t_0 se, e somente se, $\beta'(t_0) = \varphi'(t_0) = 0$ e $\beta''(t_0)\varphi''(t_0) \neq 0$.

Demonstração. Pelas equações (3.1), $\gamma'(t) = \beta(t)\mu(t)$, $\nu'(t) = \ell(t)\mu(t)$ e $\mu'(t) = -\ell(t)\nu(t)$. Além disso, como $\beta(t_0) = 0$, calculamos $\gamma^{(k)}$ em t_0 , para $k = 1, 2, 3, 4, 5$ e obtemos:

$$\begin{aligned}
 \gamma'(t_0) &= (0, 0), \\
 \gamma''(t_0) &= \beta'(t_0)\mu(t_0), \\
 \gamma^{(3)}(t_0) &= \beta''(t_0)\mu(t_0) - 2\beta'(t_0)\varphi'(t_0)\nu(t_0), \\
 \gamma^{(4)}(t_0) &= (\beta^{(3)}(t_0) - 3\beta'(t_0)(\varphi')^2(t_0))\mu(t_0) - (3\beta''(t_0)\varphi'(t_0) + 3\beta'(t_0)\varphi''(t_0))\nu(t_0), \\
 \gamma^{(5)}(t_0) &= (\beta^{(4)}(t_0) - 6\beta''(t_0)(\varphi')^2(t_0) - 12\beta'(t_0)\varphi'(t_0)\varphi''(t_0))\mu(t_0) + \\
 &\quad - (4\beta^{(3)}(t_0)\varphi'(t_0) + 6\beta''(t_0)\varphi''(t_0) - \beta'(t_0)(4(\varphi')^3(t_0) - 4\varphi^{(3)}(t_0)))\nu(t_0).
 \end{aligned} \tag{5.14}$$

Temos que $\det(\gamma'', \gamma^{(3)})(t_0) = 2(\beta')^2(t_0)\varphi'(t_0)$. Portanto, pela Proposição (5.21), a afirmação **a**) é verdadeira.

Para a afirmação **b**), a condição $\gamma''(t_0) \neq (0, 0)$ é equivalente a $\beta'(t_0) \neq 0$. Além disso, note que em (5.14) escrevemos os vetores como combinações lineares da base ortonormal $\{\nu, \mu\}$, logo, $\gamma^{(3)}(t_0) = c\gamma''(t_0)$ para algum $c \in \mathbb{R}$ se, e somente se, $c = \beta''(t_0)/\beta'(t_0)$ e $\varphi'(t_0) = 0$. Nessas condições,

$$\begin{aligned}\gamma^{(4)}(t_0) &= \beta^{(3)}(t_0)\mu(t_0) - 3\beta'(t_0)\varphi''(t_0)\nu(t_0), \\ \gamma^{(5)}(t_0) &= \beta^{(4)}(t_0)\mu(t_0) - (6\beta''(t_0)\varphi''(t_0) + 4\beta'(t_0)\varphi^{(3)}(t_0))\nu(t_0).\end{aligned}$$

Deste modo

$$\det(\gamma'', 3\gamma^{(5)} - 10c\gamma^{(4)})(t_0) = -12\beta'(t_0)(\beta''(t_0)\varphi''(t_0) - \beta'(t_0)\varphi^{(3)}(t_0)).$$

e pela Proposição (5.21) a afirmação **b**) é verdadeira.

Para a afirmação **c**), $\gamma''(t_0) = (0, 0)$ é equivalente a $\beta'(t_0) = 0$. Nessas condições,

$$\begin{aligned}\gamma^{(3)}(t_0) &= \beta''(t_0)\mu(t_0), \\ \gamma^{(4)}(t_0) &= \beta^{(3)}(t_0)\mu(t_0) - 3\beta''(t_0)\varphi'(t_0)\nu(t_0).\end{aligned}\tag{5.15}$$

Portanto

$$\det(\gamma^{(3)}, \gamma^{(4)})(t_0) = 3(\beta'')^2(t_0)\varphi'(t_0),$$

e assim, pela Proposição (5.21), a afirmação **c**) é válida.

Por último, para a afirmação **d**), já vimos que $\gamma''(t_0) = (0, 0)$ se, e somente se, $\beta'(t_0) = 0$. Além disso, quando $\beta'(t_0) = 0$, $\gamma^{(3)}$ e $\gamma^{(4)}$ são escritos como em (5.15), e $\det(\gamma^{(3)}, \gamma^{(4)})(t_0) = 3(\beta'')^2(t_0)\varphi'(t_0)$. Calculando $\gamma^{(5)}(t_0)$ e $\det(\gamma^{(3)}, \gamma^{(5)})(t_0)$ obtemos:

$$\begin{aligned}\gamma^{(5)}(t_0) &= \beta^{(4)}(t_0)\mu(t_0) - 6\beta''(t_0)\varphi''(t_0)\nu(t_0) \\ \det(\gamma^{(3)}, \gamma^{(5)})(t_0) &= 4\beta^{(3)}(t_0)\beta''(t_0)\varphi'(t_0) + 6(\beta'')^2(t_0)\varphi''(t_0),\end{aligned}$$

Do critério $\det(\gamma^{(3)}, \gamma^{(4)})(t_0) = 0$, temos que $\det(\gamma^{(3)}, \gamma^{(5)})(t_0) = 6(\beta'')^2(t_0)\varphi''(t_0)$. Além disso, de $\det(\gamma^{(3)}, \gamma^{(4)})(t_0) = 0$ e $\det(\gamma^{(3)}, \gamma^{(5)})(t_0) \neq 0$, concluímos que $\varphi'(t_0) = 0$ e $\beta''(t_0) \neq 0$, portanto $\beta''(t_0)\varphi''(t_0) \neq 0$ e pela Proposição (5.21), a afirmação **d**) é verdadeira. \square

Pelo Corolário (5.20), os critérios vistos no teorema anterior podem ser utilizados para a caracterização das singularidades da superfície de revolução de uma curva de Legendre (γ, ν) , como faremos nos seguintes exemplos.

Exemplo 5.23. (a) Seja $(\gamma, \nu) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$ a curva de Legendre dada por $\gamma(t) = (t^2 + 1, t^3 + t^2)$ e $\nu(t) = (1/\sqrt{9t^2 + 12t + 8})(-3t - 2, 2)$. Note que $\mu(t) = J(\nu(t)) = (1/\sqrt{9t^2 + 12t + 8})(-2, -3t - 2)$. Calculando γ' e ν' para obtermos a curvatura (ℓ, β) , obtemos

$$\begin{aligned}\gamma'(t) &= (2t, 3t^2 + 2t) = (-t\sqrt{9t^2 + 12t + 8})\mu(t), \\ \nu'(t) &= \frac{(-12, -18t - 12)}{(9t^2 + 12t + 8)^{\frac{1}{2}}} = \frac{6}{9t^2 + 12t + 8}\mu(t),\end{aligned}\tag{5.16}$$

isto é, $\beta(t) = -t\sqrt{9t^2 + 12t + 8}$ e $\ell(t) = 6/(9t^2 + 12t + 8)$. Agora considere $\mathbf{z}(t, \theta) = ((t^2 + 1)\cos\theta, (t^2 + 1)\sin\theta, t^3 + t^2)$ a superfície de revolução de γ em torno do eixo z .

Temos que $(0, \theta) \in \mathbb{R} \times [0, 2\pi)$ é um ponto singular de \mathbf{z} para todo $\theta \in [0, 2\pi)$. Além disso, $\beta(0) = 0$, ou seja, 0 é ponto singular de γ , $\ell(0) = 3/4$ e $\beta'(0) = -\sqrt{8}$. Portanto, $\beta'(0)\ell(0) \neq 0$, e pelo Teorema (5.22) (a), γ é uma 3/2-cúspide. Pelo Corolário (5.20), como $x(0) > 0$, onde $x(t) = t^2 + 1$, \mathbf{z} é uma 3/2-cuspidal edge em $(0, \theta)$ para todo θ .

(b) Seja $(\gamma, \nu) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$ a curva de Legendre dada por $\gamma(t) = (t^3 + 1, t^4)$ e $\nu(t) = (1/\sqrt{9 + 16t^2})(-4t, 3)$. Note que $\mu(t) = J(\nu(t)) = (1/\sqrt{9 + 16t^2})(-3, -4t)$. Calculando γ' e ν' para obtermos a curvatura (ℓ, β) , obtemos

$$\begin{aligned} \gamma'(t) &= (3t^2, 4t^3) = (-t^2\sqrt{9 + 16t^2})\mu(t), \\ \nu'(t) &= \frac{(-36, -48t)}{(9 + 16t^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{12}{9 + 16t^2}\mu(t), \end{aligned} \tag{5.17}$$

isto é, $\beta(t) = -t^2\sqrt{9 + 16t^2}$ e $\ell(t) = 12/(9 + 16t^2)$. Agora considere $\mathbf{z}(t, \theta) = ((t^3 + 1) \cos \theta, (t^3 + 1) \sin \theta, t^4)$ a superfície de revolução de γ em torno do eixo z . Temos que $(0, \theta) \in \mathbb{R} \times [0, 2\pi)$ é um ponto singular de \mathbf{z} para todo $\theta \in [0, 2\pi)$. Além disso, $\beta(0) = 0$, ou seja, 0 é ponto singular de γ , $\ell(0) = 4/3$, $\beta'(0) = 0$ e $\beta''(0) = -6$. Portanto, $\beta''(0)\ell(0) \neq 0$, e pelo Teorema (5.22) (c), γ é uma 4/3-cúspide. Pelo Corolário (5.20), como $x(0) > 0$, onde $x(t) = t^3 + 1$, \mathbf{z} é uma 4/3-cuspidal edge em $(0, \theta)$ para todo θ . \diamond

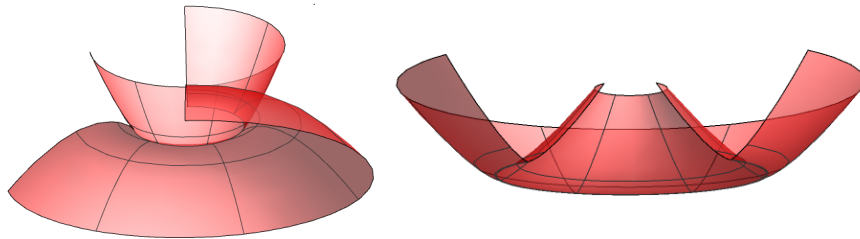


Figura 5.6: Esquerda: Superfície \mathbf{z} descrita no item (a) do Exemplo (5.23). Direita: Superfície \mathbf{z} descrita no item (b) do Exemplo (5.23). Fonte: Elaborada pelo autor.

Observação 5.24. Utilizando a notação para a curva de Legendre (γ, ν) com curvatura (ℓ, β) , o Teorema (5.22) ainda é válido, substituindo ϕ' , ϕ'' e $\phi^{(3)}$ por ℓ , ℓ' e ℓ'' , respectivamente. Podemos também notar que nos itens **a)** e **c)** temos $(\phi', \beta)(t_0) \neq (0, 0)$, ou seja, γ é uma frente quando tem esse tipo de singularidade. Já nos itens **b)** e **d)**, $(\phi', \beta)(t_0) = (0, 0)$, logo γ é uma frontal, mas não uma frente quando tem esse tipo de singularidade. \diamond

Nos próximos dois resultados veremos critérios para j/i -cúspides de curvas satisfazendo algumas das condições dos Teoremas (5.10) e (5.12). Primeiramente, lembramos que pela Proposição (4.18), a curvatura Gaussiana de uma superfície regular é dada por $\mathbf{K} = K_F/J_F$, ou seja, $K_F = \mathbf{K} \cdot J_F$. Sendo assim, o próximo resultado fornece critérios para classificação das j/i -cúspides da curva geratriz de uma superfície de revolução \mathbf{z} com curvatura Gaussiana constante.

Proposição 5.25. ([15], Proposição 3.21) *Sejam $(\gamma, \nu) : (I, t_0) \rightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$ um germe de curva de Legendre com curvatura (ℓ, β) , onde $\gamma(t) = (x(t), z(t))$ e $\nu(t) = (a(t), b(t))$, e $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}$ um germe de função suave tal que $K_F^z(t) = \alpha(t)J_F^z(t)$. Suponha que $x(t_0) \neq 0$ e $\alpha(t) = c$, para todo $t \in I$, onde $c \in \mathbb{R}$ é uma constante não nula. Então:*

- (a) γ tem uma 3/2-cúspide em t_0 se, e somente se, $\text{ord}(a)(t_0) = \text{ord}(\beta)(t_0) = 1$,
- (b) γ tem uma 4/3-cúspide em t_0 se, e somente se, $\text{ord}(a)(t_0) = \text{ord}(\beta)(t_0) = 2$,
- (c) γ tem uma 5/3-cúspide em t_0 se, e somente se, $\text{ord}(a)(t_0) = 1$ e $\text{ord}(\beta)(t_0) = 2$.

Além disso, γ não pode ter uma 5/2-cúspide em t_0 .

Demonstração. Observe que estamos nas mesmas condições da Proposição (5.4), então

$$\ell(t) = \frac{c(t-t_0)^{n-m}\hat{\beta}(t)x(t)}{\hat{a}(t)}, \quad (5.18)$$

onde $a(t) = (t-t_0)^{m+1}\hat{a}(t)$, $\beta(t) = (t-t_0)^{n+1}\hat{\beta}(t)$, $\text{ord}(a)(t_0) = m+1$, $\text{ord}(\beta)(t_0) = n+1$, $\hat{a}(t_0) \neq 0$ e $\hat{\beta}(t_0) \neq 0$.

Inicialmente suponhamos que $m = n$, isto é, γ é uma frente em t_0 pela Proposição (5.4) (b). Nesse caso, $\ell(t) = (c\hat{\beta}(t)x(t))/\hat{a}(t)$, e assim, $\ell(t_0) \neq 0$. Além disso, $\beta'(t_0) \neq 0$ se, e somente se, $n = 0$. Portanto, pelo item (a) do Teorema (5.22), γ tem uma 3/2-cúspide se, e somente se, $\text{ord}(a)(t_0) = \text{ord}(\beta)(t_0) = 1$ e assim a afirmação (a) é verdadeira. Em seguida, $\beta'(t_0) = 0$ e $\beta''(t_0) \neq 0$ se, e somente se, $n = 1$. Portanto pelo item (c) do Teorema (5.22), γ tem uma 4/3-cúspide em t_0 se, e somente se, $\text{ord}(a)(t_0) = \text{ord}(\beta)(t_0) = 2$, e obtemos a afirmação (b).

Agora suponhamos que $m \neq n$, ou seja, $m < n$, como visto na demonstração da Proposição (5.4). Nesse caso, pelo item (b) da Proposição (5.4), γ é uma frontal mas não uma frente em t_0 . Então

$$\ell(t) = (t-t_0)^{n-m}A(t), \quad \beta(t) = t^{n+1}\hat{\beta}(t),$$

onde

$$A(t) = \frac{c\hat{\beta}(t)x(t)}{\hat{a}(t)}.$$

Se $\beta'(t_0) \neq 0$, então $n = 0$. Como $m < n$, então $m < 0$, o que é um absurdo, ou seja, $\beta'(t_0) = 0$. Portanto, γ não pode satisfazer as condições do item (b) do Teorema (5.22) para ter uma 5/2-cúspide em t_0 . Temos que $\beta''(t_0) \neq 0$ se, e somente se, $n = 1$. Nesse caso, como $0 \leq m < n$, obtemos $m = 0$, e assim $\ell(t) = (t-t_0)A(t)$, $\ell'(t) = A(t) + (t-t_0)A'(t)$. Portanto $\ell'(t_0) \neq 0$ pois $A(t_0) \neq 0$. Concluimos pelo item (d) do Teorema (5.22) que γ tem uma 5/3-cúspide em t_0 se, e somente se, $\text{ord}(a)(t_0) = 1$ e $\text{ord}(\beta)(t_0) = 2$, confirmando que a afirmação (c) é verdadeira e finalizando a demonstração da proposição. \square

Exemplo 5.26. Considere a curva γ e a superfície \mathbf{z} obtidas no Exemplo (5.15)(a). Observe que pelo Teorema (5.10) o campo de vetores normais a γ é dado por $\nu(t) = (\cos t, -\sin t)$. Dessa maneira, $\mu(t) = (\sin t, \cos t)$ e a curvatura de (γ, ν) é dada por $(\ell(t), \beta(t)) = (-1, \cotg t)$. Além disso, γ é regular para todo $t \neq \pi/2$. Como $\text{ord}(a)(\pi/2) = \text{ord}(\cos)(\pi/2) = \text{ord}(\cotg)(\pi/2) = \text{ord}(\beta)(\pi/2) = 1$, então pela Proposição (5.25), γ tem uma 3/2-cúspide em $\pi/2$ e \mathbf{z} tem uma 3/2-cuspidal edge em $(\pi/2, \theta)$ para todo $\theta \in (0, 2\pi)$, pelo Corolário (5.20). \diamond

Assim como para a curvatura Gaussiana, a curvatura média de uma superfície regular também satisfaz $H_F = \mathbf{H} \cdot J_F$ (Proposição (4.18)). O resultado abaixo apresenta critérios para j/i -cúspides da curva geratriz γ de uma superfície de revolução \mathbf{z} com curvatura média dada.

Proposição 5.27. ([15], Proposição 3.22) *Seja $(\gamma, \nu) : (I, t_0) \rightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$ um germe de curva de Legendre com curvatura (φ', β) , onde $\gamma(t) = (x(t), z(t))$ e $\nu(t) = (a(t), b(t))$. Suponha que $x(t_0) > 0$ e que existe um germe de função $\alpha : (I, t_0) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $H_F^z(t) = \alpha(t)J_F^z(t)$.*

- (a) *Suponha que $\beta(t_0) = 0$ e que α não é o germe de uma função constante. Então a curva γ obtida no Teorema (5.12) não pode ter nenhuma j/i -cúspide com $(i, j) = (2, 3), (3, 4), (3, 5)$. Além disso, γ tem uma $5/2$ -cúspide em t_0 se, e somente se, $\beta'(t_0)\alpha'(t_0) \neq 0$.*
- (b) *Suponha que o germe de função α é uma função constante $c \in \mathbb{R}$, isto é, $\alpha(t) = c$. Então a curva γ obtida no Teorema (5.12) não possui nenhuma j/i -cúspide com $(i, j) = (2, 3), (2, 5), (3, 4), (3, 5)$.*

Demonstração. (a) Pelas observações (5.13) e (5.24), a curva γ é uma frontal mas não uma frente e assim não possui $3/2$ -cúspides nem $4/3$ -cúspides. Também da observação (5.13), a curvatura (ℓ, β) é dada por $(\ell(t), \beta(t)) = (-\beta(t)X(t), \beta(t))$, onde

$$X(t) = \frac{F(t) \operatorname{sen} \eta(t) - G(t) \operatorname{cos} \eta(t)}{F^2(t) + G^2(t)} + 2\alpha(t).$$

Segue das definições de F , G e η que $F'(t) = -\beta \cos \eta(t)$, $G'(t) = -\beta(t) \operatorname{sen} \eta(t)$ e $\eta'(t) = 2\alpha(t)\beta(t)$, e assim, $F'(t_0) = G'(t_0) = \eta'(t_0) = 0$ pois $\beta(t_0) = 0$. Portanto $X'(t_0) = 2\alpha'(t_0)$. Temos também que $\ell'(t) = -\beta'(t)X(t) - \beta(t)X'(t)$ e $\ell''(t) = -\beta''(t)X(t) - 2\beta'(t)X'(t) - \beta(t)X''(t)$. Logo, $\ell'(t_0) = -\beta'(t_0)X(t_0)$ e $\ell''(t_0) = -\beta''(t_0)X(t_0) - 4\beta'(t_0)\alpha'(t_0)$. Se $\beta'(t_0) = 0$, então $\ell'(t_0) = 0$, e $\beta''(t_0)\ell'(t_0) = 0$, ou seja, γ não satisfaz as condições para ter uma $5/3$ -cúspide em t_0 . Resta verificar as condições para γ possuir uma $5/2$ -cúspide em t_0 . Suponhamos então $\beta'(t_0) \neq 0$, então

$$\beta''(t_0)\ell'(t_0) - \beta'(t_0)\ell''(t_0) = 4\beta'(t_0)\alpha'(t_0).$$

Pelo item (b) do Teorema (5.22), concluímos que γ tem uma $5/2$ -cúspide em t_0 se, e somente se, $\beta'(t_0)\alpha'(t_0) \neq 0$.

(b) Como vimos, γ não tem uma j/i -cúspide com $(i, j) = (2, 3), (3, 4), (3, 5)$. Além disso, se $\alpha(t) = c$, para todo t em uma vizinhança de t_0 , então $\alpha'(t_0) = 0$ e pelo item (a), γ também não possui uma $5/2$ -cúspide em t_0 . \square

5.4 Superfícies paralelas e focais

Nesta seção consideraremos uma frontal γ e suas curvas paralelas γ_λ . Para curvas regulares vimos na seção (2.3) que a superfície de revolução \mathbf{z}^λ da curva γ_λ é uma superfície paralela da superfície de revolução \mathbf{z} de γ . O mesmo resultado é válido para curvas de Legendre.

Proposição 5.28. *Seja $(\gamma, \nu) : I \rightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$ uma curva de Legendre. A superfície paralela $\mathbf{z}^\lambda : I \times [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3$ da superfície de revolução \mathbf{z} da frontal γ é a superfície de revolução de uma curva paralela $\gamma^\lambda : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ da curva de Legendre (γ, ν) .*

Demonstração. Nas notações que estamos usando temos $\gamma(t) = (x(t), z(t))$ e $\nu(t) = (a(t), b(t))$. Por definição, a superfície paralela de $(\mathbf{z}, \mathbf{n}^z, \mathbf{s}^z) : I \times [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta$ é dada por:

$$\mathbf{z}^\lambda(t, \theta) = \mathbf{z}(t, \theta) + \lambda \mathbf{n}^z(t, \theta).$$

Substituindo \mathbf{n}^z pelo calculado na Proposição (5.2) obtemos:

$$\mathbf{z}^\lambda(t, \theta) = ((x(t) + \lambda a(t)) \cos \theta, (x(t) + \lambda a(t)) \sin \theta, z(t) + \lambda b(t)).$$

Como γ_λ é dada por $\gamma_\lambda(t) = \gamma(t) + \lambda\nu(t) = (x(t) + \lambda a(t), z(t) + \lambda b(t))$, segue que a superfície de revolução de γ_λ é dada por \mathbf{z}^λ . \square

Exemplo 5.29. Sejam γ a *tractriz*, e \mathbf{z} a pseudo-esfera γ obtidas no Exemplo (5.15)(a). Então pelo Exemplo (5.26), $\nu(t) = (\cos t, -\sin t)$ e $(\ell(t), \beta(t)) = (-1, \cotg t)$. Portanto o campo de vetores normal a \mathbf{z} é dado por

$$\mathbf{n}^z(t, \theta) = (\cos t \cos \theta, \cos t \sin \theta, -\sin t).$$

Dessa forma, obtemos:

$$\mathbf{z}^\lambda(t, \theta) = ((\sin t + k\lambda \cos t) \cos \theta, (\sin t + \lambda \cos t) \sin \theta, \cos t + \ln(\operatorname{tg}(t/2)) - \lambda \sin t)$$

Os traços de γ e duas de suas curvas paralelas, e os traços de \mathbf{z} e suas superfícies paralelas, são dados nas imagens abaixo. \diamond

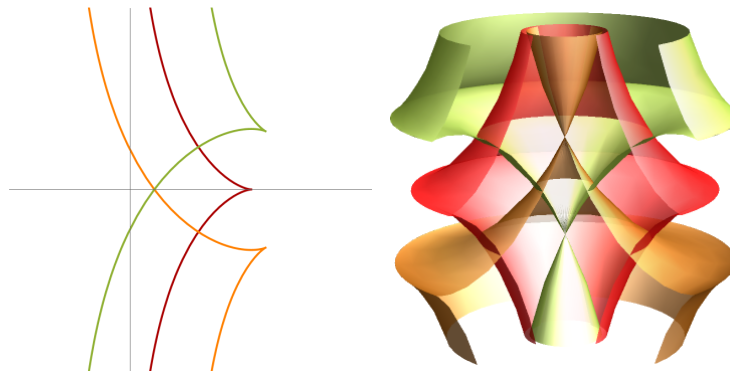


Figura 5.7: Tractriz em vermelho e duas de suas curvas paralelas à esquerda. Pseudo-esfera e duas de suas superfícies paralelas à direita. Fonte: Elaborada pelo autor.

Agora para a superfície focal, vimos na seção (2.3) do Capítulo (2) que para superfícies regulares, uma das folhas do conjunto focal é a superfície de revolução da evoluta da curva geratriz, e a outra folha está contida no eixo de rotação. A seguir veremos que o mesmo vale para as superfícies focais de uma *framed surface*, desde que existam. Denotaremos por \mathcal{E}^z a superfície focal da superfície de revolução \mathbf{z} da frontal γ , como definido em (4.28). Observe que como K_F^z e H_F^z não se anulam simultaneamente, pois estamos considerando superfícies focais, então γ é uma frente, pois caso contrário $(\ell, \beta)(t) = 0$, então $K_F^z(t, \theta) = -a(t)\ell(t) = 0$ e $2H_F^z(t, \theta) = x(t)\ell(t) + \beta(t)a(t) = 0$.

Proposição 5.30. ([15], Proposição 3.6) *Seja $(\gamma, \nu) : I \rightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}$ uma curva de Legendre com curvatura (ℓ, β) .*

- (a) *Suponha que $K_F^z(t, \theta) \neq 0$ para todo $(t, \theta) \in I \times [0, 2\pi)$. Uma das superfícies focais da superfície de revolução da frente γ é a superfície de revolução da evoluta de γ . A outra superfície focal da superfície de revolução da frente é dada por $\mathcal{E}^z(t, \theta) = (0, 0, z(t) - x(t)b(t)/a(t))$, e assim, está contida no eixo de rotação.*

- (b) Suponha que $\ell(t) \neq 0$ para todo $t \in I$. Pelo menos uma das superfícies focais da superfície de revolução da frente γ é a superfície de revolução da evoluta de γ .
- (c) Suponha que $a(t) \neq 0$ para todo $t \in I$. Pelo menos uma das superfícies focais da superfície de revolução da frente γ é dada por $\mathcal{E}^z(t, \theta) = (0, 0, z(t) - x(t)b(t)/a(t))$.

Demonstração. (a) Como $K_F^z(t, \theta) = -a(t)\ell(t) \neq 0$, para todo $(t, \theta) \in I \times [0, 2\pi)$, então $a(t) \neq 0$ e $\ell(t) \neq 0$ para todo $t \in I$. De (4.11) e da Proposição (5.2) obtemos:

$$\begin{aligned} K_F^z(t, \theta)\lambda^2 - 2H_F^z(t, \theta)\lambda + J_F^z(t, \theta) &= 0 \\ \Rightarrow -a(t)\ell(t)\lambda^2 - (x(t)\ell(t) + \beta(t)a(t))\lambda - x(t)\beta(t) &= 0 \\ \Rightarrow -(a(t)\lambda + x(t))(\ell(t)\lambda + \beta(t)) &= 0. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Logo as soluções dessa equação são dadas por $\lambda_1 = -\beta(t)/\ell(t)$ e $\lambda_2 = -x(t)/a(t)$. Portanto uma das superfícies focais de \mathbf{z} é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^z(t, \theta) &= \mathbf{z}(t, \theta) - \frac{\beta(t)}{\ell(t)}\mathbf{n}(t, \theta) \\ &= (x(t)\cos\theta, x(t)\sin\theta, z(t)) - \frac{\beta(t)}{\ell(t)}(a(t)\cos\theta, a(t)\sin\theta, b(t)) \\ &= \left(\left(x(t) - \frac{\beta(t)}{\ell(t)}a(t) \right) \cos\theta, \left(x(t) - \frac{\beta(t)}{\ell(t)}a(t) \right) \sin\theta, z(t) - \frac{\beta(t)}{\ell(t)}b(t) \right), \end{aligned} \quad (5.20)$$

ou seja, é a superfície de revolução da evoluta $\mathcal{E}(\gamma)(t) = \gamma(t) - (\beta(t)/\ell(t))\nu(t)$ da frente γ , conforme o Teorema (3.23). A outra superfície focal é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^z(t, \theta) &= \mathbf{z}(t, \theta) - \frac{x(t)}{a(t)}\mathbf{n}(t, \theta) \\ &= (x(t)\cos\theta, x(t)\sin\theta, z(t)) - \frac{x(t)}{a(t)}(a(t)\cos\theta, a(t)\sin\theta, b(t)) \\ &= \left(0, 0, z(t) - \frac{x(t)}{a(t)}b(t) \right), \end{aligned} \quad (5.21)$$

e assim, está contida no eixo z , que é o eixo de rotação.

(b) Suponha que $\ell(t) \neq 0$ para todo $t \in I$. Então, de (5.19), temos pelo menos a solução $\lambda_1 = -\beta(t)/\ell(t)$. Portanto, pelos mesmos cálculos feitos no item (a), temos pelo menos uma superfície focal, dada pela superfície de revolução da evoluta da frente γ .

(c) Suponha que $a(t) \neq 0$ para todo $t \in I$. Então, de (5.19), temos pelo menos a solução $\lambda_2 = -x(t)/a(t)$, e assim, garantimos a existência da superfície focal dada por $\mathcal{E}^z(t, \theta) = (0, 0, z(t) - x(t)b(t)/a(t))$. \square

Exemplo 5.31. Novamente considere a curva γ e a superfície \mathbf{z} obtidas no Exemplo (5.15)(a). Vimos no Exemplo (5.26) que $\nu(t) = (\cos t, -\sin t)$ e $(\ell(t), \beta(t)) = (-1, \cotg t)$. Pela Proposição (5.2), o campo de vetores normal a \mathbf{z} é dado por

$$\mathbf{n}^z(t, \theta) = (\cos t \cos \theta, \cos t \sin \theta, -\sin t),$$

e como $\ell(t) \neq 0$ para todo $t \in (0, \pi)$, existe pelo menos uma superfície focal de \mathbf{z} , dada pela superfície de revolução da curva evoluta de γ , isto é:

$$\mathcal{E}(\mathbf{z})(t, \theta) = \mathbf{z}(t, \theta) - \frac{\beta(t)}{\ell(t)}\mathbf{n}^z(t, \theta) = \left(\csc t \cos \theta, \csc t \sin \theta, \ln \left(\operatorname{tg} \left(\frac{t}{2} \right) \right) \right). \quad (5.22)$$

A outra superfície focal está definida para todo t tal que $a(t) \neq 0$, isto é, para $t \neq \pi/2$. Nesse caso, a superfície focal está contida no eixo de revolução e é dada por:

$$\mathcal{E}(\mathbf{z})(t, \theta) = \left(0, 0, z(t) - \frac{x(t)b(t)}{a(t)} \right) = \left(0, 0, \ln \left(\operatorname{tg} \left(\frac{t}{2} \right) \right) + \sec t \right). \quad (5.23)$$

◇

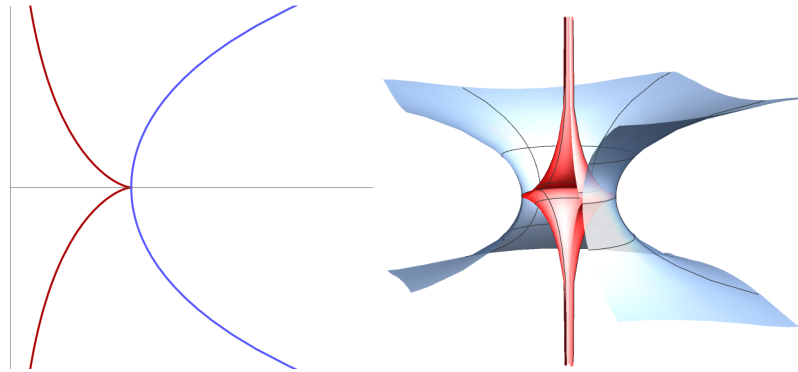


Figura 5.8: Na esquerda temos a tractriz γ (azul) e sua evoluta (amarelo); Na direita temos a pseudo-esfera \mathbf{z} (vermelho) e sua superfície focal (azul). Fonte: Elaborada pelo autor.

6 Conclusão

A aplicação de Gauss é fundamental para o estudo de superfícies regulares em \mathbb{R}^3 . A geometria da superfície pode ser estudada a partir da análise das duas formas quadráticas definidas a partir do plano tangente da superfície em cada ponto, ou equivalentemente, do campo de vetores normais unitários. Quando consideramos superfícies com singularidades, se estas forem de posto 1, podemos encontrar em [12] um texto em português para o estudo da geometria do ponto de vista do contato com planos e esferas, de 2018.

Uma importante superfície singular é a *Cross-cap*. Podemos encontrar o estudo da sua geometria, por exemplo, em [3], de 2010. Por outro lado, se considerarmos frentes de onda em \mathbb{R}^3 , ou seja, superfícies que pode ter singularidades mas que têm um campo de vetores normais bem definidos em cada ponto, o artigo [13] de 2009 é uma referência pioneira para o assunto, e a partir desse trabalho, muitos outros surgiram complementando o que os autores fizeram e também para particulares frentes de onda.

Superfícies regradas e desenvolvíveis em geral possuem singularidades, e sua geometria e singularidades foram estudadas, por exemplo, no artigo [9], de 2001. A superfície focal também apresenta singularidades, e há muita literatura sobre esse tipo de superfície. Para um texto em português, há a dissertação de mestrado [14], de 2018. Diante do exposto, o estudo da geometria de superfícies singulares é um assunto atual de pesquisa, mesmo considerando objetos clássicos, como superfícies de revolução, como pode ser observado pelo artigo [15] que foi nossa principal referência para o estudo que fizemos, publicado em 2020.

Observamos que nas referências que apresentamos acima em português, os trabalhos que foram utilizados pelos autores para o seu estudo encontram-se nas suas respectivas bibliografias.

Referências

- [1] ARAUJO, M. P. *Um estudo da geometria de superfícies via projeção ortogonal: Teorema de Koenderink e extensões*. Dissertação - Instituto de Biociências, letras e ciências exatas, Universidade Estadual Paulista, São José do Rio Preto, 2022.
- [2] CARMO, M. P. *Geometria diferencial de curvas e superfícies*. 2. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2005.
- [3] FONSECA, A. F. *Geometria da Cross-Cap*. Dissertação - UNIFEI, Itajubá, 2010.
- [4] FUKUI, T.; HASEGAWA, M. Fronts of Whitney Umbrella - a differential geometry approach via blowing up. *J. Singula.*, 4, p. 35-67, 2012.
- [5] FUKUNAGA, T.; TAKAHASHI, M. Existence and uniqueness for Legendre curves. *J. Geom.*, 104, p. 297-307, 2013.
- [6] FUKUNAGA, T.; TAKAHASHI, M. Evolutes of fronts in the Euclidean plane. *J. Singula.*, 10, p. 92-107, 2014.
- [7] FUKUNAGA, T.; TAKAHASHI, M. Framed Surfaces in the Euclidean plane. *Bull. Braz. Math. Soc.*, 50, p. 37-65, 2019.
- [8] GRAY, A.; ABBENA, E.; SALAMON, S. *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica*, 3 ed. Flórida: Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, 2006. MR2253203
- [9] IZUMIYA, S.; TAKEUCHI, N. Singularities of Ruled Surfaces in \mathbb{R}^3 *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, v. 130, p. 1–11, 2001.
- [10] IZUMIYA, S.; ROMERO FUSTER M. C.; RUAS, M. A. S.; TARI, F. *Differential geometry from a singularity theory viewpoint*, 1 ed. Singapura: World Scientific, 2016.
- [11] MARTINS, L. F.; SAJI, K.; SANTOS, S. P.; TERAMOTO, K. Singular surfaces of revolution with prescribed unbounded mean curvature. *Anais da Academia Brasileira de Ciências*, v. 91, p. 1–10, 2019.
- [12] NUNEZ, T. G. *Geometria de superfícies de posto 1 em \mathbb{R}^3 do ponto de vista de contato*. Dissertação - Instituto de Biociências, letras e ciências exatas, Universidade estadual Paulista, São José do Rio Preto, 2018.
- [13] SAJI, K.; UMEHARA, M.; YAMADA, K. The geometry of fronts. *Ann. of Math.*, v. 169, p. 491–529, 2009.

-
- [14] SANTOS, S. P. *Geometria Diferencial do conjunto focal*. Dissertação - Instituto de Biociências, letras e ciências exatas, Universidade Estadual Paulista, São José do Rio Preto, 2018.
- [15] TAKAHASHI, M.; TERAMOTO, K. Surfaces of Revolution of Frontals in the Euclidean Space. *Bull. Braz. Math. Soc.*, 51, p. 887-914, 2020.