UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"

FACULDADE DE CIÊNCIAS - CAMPUS DE BAURU

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO PARA A CIÊNCIA

Rodrigo Dantas de Lucas

O SOFTWARE GEOGEBRA NO ENSINO DE FUNÇÕES PARA LICENCIANDOS EM MATEMÁTICA: UMA ABORDAGEM SOCIOCULTURAL

Bauru

2019

Rodrigo Dantas de Lucas

O SOFTWARE GEOGEBRA NO ENSINO DE FUNÇÕES PARA LICENCIANDOS EM MATEMÁTICA: UMA ABORDAGEM SOCIOCULTURAL

Tese apresentada à Faculdade de Ciências da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" – UNESP, Campus de Bauru, Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência, como um dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em Educação para a Ciência (Área de Concentração: Ensino de Ciências), sob a orientação do Prof. Dr. Aguinaldo Robinson de Souza e coorientação da Profa. Dra. Emília de Mendonça Rosa Marques

Bauru
2019

Lucas, Rodrigo Dantas de
O software GeoGebra no ensino de funções para licenciandos em Matemática: uma abordagem sociocultural / Rodrigo Dantas de Lucas. --2019
241 p. : il, tabs.

Tese (Doutorado)– Universidade Estadual Paulista (Unesp), Faculdade de Ciências, Bauru
Orientador: Aguinaldo Robinson de Souza
Coorientadora: Emília de Mendonça Rosa Marques

1. Ensino de Matemática. 2. Ensino superior. 3. Tecnologias digitais. 4. GeoGebra. 5. Funções Elementares. I. Título.

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Câmpus de Bauru

Faculdade de Ciências

ATA DA DEFESA PÚBLICA DA TESE DE DOUTORADO DE RODRIGO DANTAS DE LUCAS, DISCENTE DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO PARA A CIÊNCIA , DA FACULDADE DE CIÊNCIAS - CÂMPUS DE BAURU.

Aos 20 dias do mês de março do ano de 2019, às 14:00 horas, no(a) Anfiteatro da Pós-Graduação da Faculdade de Ciências - Unesp/Bauru-SP, reuniu-se a Comissão Examinadora da Defesa Pública, composta pelos seguintes membros: Prof. Dr. AGUINALDO ROBINSON DE SOUZA - Orientador(a) do(a) Departamento de Química / Faculdade de Ciências - UNESP/Bauru, Prof. Dr. MARCELO MAIA CIRINO do(a) Departamento de Química / Universidade Estadual de Londrina, Prof. Dr. NELSON JOSÉ PERUZZI do(a) Departamento de Ciências Exatas / FCAV / UNESP - Jaboticabal, Prof. Dr. PAULO ANTONIO SILVANI CAETANO do(a) CCET / Universidade Federal de São Carlos/São Carlos (SP), Prof. Dr. NELSON ANTONIO PIROLA do(a) Depto. de Educação / UNESP/Bauru, sob a presidência do primeiro, a fim de proceder a arguição pública da TESE DE DOUTORADO de RODRIGO DANTAS DE LUCAS, intitulada **O SOFTWARE GEOGEBRA NO ENSINO DE FUNÇÕES PARA DISCENTES DE MATEMÁTICA: UMA ABORDAGEM SÓCIO-CULTURAL.**. Após a exposição, a discente foi arguida oralmente pelos membros da Comissão Examinadora, tendo recebido o conceito final: APROVADO . Nada mais havendo, foi lavrada a presente ata, que após lida e aprovada, foi assinada pelos membros da Comissão Examinadora.

Prof. Dr. AGUINALDO ROBINSON DE SOUZA

Prof. Dr. MARCELO MAIA CIRINO

Prof. Dr. NELSON JOSÉ PERUZZI

Prof. Dr. PAULO ANTONIO SILVANI CAETANO

Prof. Dr. NELSON ANTONIO PIROLA

À minha família, em especial a minha esposa Poliana e às minhas filhas Maria Rita e Sofia, que se privou de minha presença por diversas vezes para que eu concluísse este trabalho.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus, por ter me permitido realizar este trabalho, capacitando-me e dando-me todas as condições para a realização deste Doutorado.

Ao meu orientador, professor Doutor Aguinaldo Robinson de Souza e minha co-orientadora, Profa. Dra. Emília de Mendonça Rosa Marques pela orientação e parceria durante estes longos quatro anos de doutorado.

Aos Professores Doutores, Nelson José Peruzzi, Marcelo Maia Cirino, Paulo Antonio Silvani Caetano e Nelson Pirola pela disponibilidade e contribuições para a concretização deste trabalho.

A todos os professores e funcionários do programa de Pós Graduação em Educação para a Ciência pela dedicação a este programa de doutorado.

Ao amigo e parceiro Hélio por sua sempre disponibilidade a ajudar e pelas ótimas dicas durante o curso que contribuíram muito para o enriquecimento deste trabalho.

Aos alunos de Licenciatura em Matemática da Unesp Bauru que se prontificaram a participar desta pesquisa e a todos meus alunos que sempre contribuíram para meu aprendizado e crescimento profissional.

RESUMO

Nesta tese investigamos como ocorreu a produção de significados em estudantes de licenciatura em Matemática utilizando uma sequência didática propostas para serem desenvolvidas com um software de geometria dinâmica (no presente trabalho foi utilizado o software GeoGebra), visando verificar o nível de domínio e apropriação dos conceitos de funções de uma variável real. A fundamentação teórica, baseada na teoria da ação mediada de James Wertsch, tem como foco o estudo sociocultural da mente e a memória coletiva sobre os aspectos históricos mediados pelas ferramentas culturais concernentes ás instituições formais de ensino. Wertsch propõe uma abordagem sociocultural à mente, onde as vozes da psicologia e da semiótica possam entrar em um diálogo produtivo com as vozes de outras disciplinas para a compreensão dos processos mentais e seus contextos culturais, históricos e institucionais. O público alvo consistiu em doze (12) estudantes (50% do sexo feminino) do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual Paulista - UNESP, localizada na cidade de Bauru, no estado de São Paulo, Brasil. A pesquisa teve caráter qualitativo, caracterizada como um estudo de caso, pois envolveu a busca por significados atribuídos aos sujeitos da pesquisa relativos às suas vivências e experiências pessoais. Registrou-se o áudio das falas e a tela do computador dos estudantes que formaram grupos de três (03) e duas pessoas (02) com o objetivo de coletar as descrições, conversas e diálogos , bem como os apontamentos feitos por escrito com o intuito, também, de preservação dos dados coletados para uma posterior análise. As atividades foram desenvolvidas em quatro (04) módulos: 1) Atividades com funções quadráticas; 2) Atividades com funções racionais; 3) Atividades com funções exponenciais e logarítmicas e 4) Atividades com funções trigonométricas. As atividades com o software de geometria dinâmica contribuíram para a experimentação, a criação de estratégias, a produção de conjecturas, a argumentação qualitativa e a dedução de propriedades matemáticas relativas aos conteúdos de funções de uma variável real. Os estudantes com uma maior base teórica em Matemática exploraram os recursos

computacionais com maior destreza, acuidade e precisão conseguindo, dessa forma, um aprofundamento nos conteúdos explorados. Esses alunos apresentaram, ainda, um detalhamento em suas explicações sobre os conteúdos abordados cometendo poucos erros de notação simbólica. Como uma extensão do trabalho, um Ambiente Virtual de Aprendizagem (AVA) está sendo elaborado com vistas à divulgação e disponibilização da metodologia e estratégias educacionais desenvolvidas.

Palavras chave: Ensino de Matemática. Tecnologias Digitais. Funções Elementares. GeoGebra. Ensino Superior.

ABSTRACT

In this thesis we investigated how the production of meanings occurred in undergraduate students in Mathematics using a didactic sequence proposed to be developed with software of dynamic geometry (in the present work was used GeoGebra software), aiming to verify the level of domination and appropriation of the concepts of functions of a real variable. The theoretical foundation, based on James Wertsch's theory of mediated action, focuses on the sociocultural study of the mind and collective memory on the historical aspects mediated by the cultural tools concerning formal educational institutions. Wertsch proposes a sociocultural approach to the mind, where the voices of psychology and semiotics can enter into a productive dialogue with the voices of other disciplines for the understanding of mental processes and their cultural, historical and institutional contexts. The target audience consisted of twelve (12) female students (50% female) of the Mathematics Undergraduate course at Universidade Estadual Paulista - UNESP, located in the city of Bauru, in the state of São Paulo, Brazil. The research had a qualitative character, characterized as a case study, since it involved the search for meanings attributed to the research subjects related to their experiences and personal experiences. The audio of the speeches and the computer screen of the students who formed groups of three (03) and two people (02) were recorded in order to collect the descriptions, conversations and dialogues, as well as the notes made in writing with the intention , also, of preservation of the data collected for later analysis. The activities were developed in four (04) modules: 1) Activities with quadratic functions; 2) Activities with rational functions; 3) Activities with exponential and logarithmic functions and 4) Activities with trigonometric functions. The activities with dynamic geometry software contributed to the experimentation, the creation of strategies, the production of conjectures, the qualitative argumentation and the deduction of mathematical properties related to the contents of functions of a real variable. Students with a greater theoretical base in Mathematics explored computational resources with greater dexterity, acuity and precision, thus achieving

a deepening in the contents explored. These students also presented a detail in their explanations about the contents addressed with few errors of symbolic notation. As an extension of the work, a Virtual Learning Environment (VLE) is being developed with a view to disseminating and making available the methodology and educational strategies developed.

Keywords: Mathematics Teaching. Digital Technologies. Elementary Functions. GeoGebra. Superior Education.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Imagem do logo do software (https://www.maplesoft.com/).....18
Figura 2: Visualizador de retas no espaço.....20
Figura 3: Imagem do conteúdo da disciplina Funções Elementares.....45
Figura 4: Imagem dos registros de um grupo em um encontro.....48
Figura 5: Imagem da tela de computador capturada pelo OBS.....48
Figura 6: Questionário criado no Survey Monkey 50
Figura 7: Continuação do questionário criado no Survey Monkey 50
Figura 8: Folha de atividades do primeiro encontro.....55
Figura 9: Imagem da tela de um grupo na atividade de reconhecimento do GeoGebra.....58
Figura 10: Imagem do caderno de respostas do grupo 1.....59
Figura 11: Imagem do caderno de respostas do grupo 2.....60
Figura 12: Imagem do caderno de respostas do grupo 3.....62
Figura 13: Imagem do caderno de respostas do grupo 4.....63
Figura 14: Imagem do GeoGebra de um dos grupos.....64
Figura 15: Imagem do caderno de respostas do grupo 1.....65
Figura 16: Imagem do caderno de repostas do grupo 1 66
Figura 17: Imagem do caderno de respostas do grupo 2.....67
Figura 18: Imagem do caderno de respostas do grupo 2.....68
Figura 19: Imagem do caderno de respostas do grupo 3.....69
Figura 20: Imagem do caderno de respostas do grupo 4.....70
Figura 21: Imagem do caderno de respostas do grupo 4.....71
Figura 22: Imagem dos gráficos de f(x), g(x) e q(x) gerados no GeoGebra por um dos grupos na atividade proposta.....72
Figura 23: Imagem do caderno de respostas do grupo 1.....73
Figura 24: Imagem da tela do GeoGebra do grupo 2 74
Figura 25: Imagem do caderno de respostas do grupo 2.....75
Figura 26: Imagem do caderno de respostas do grupo 3.....76
Figura 27: Imagem do caderno de respostas do grupo 4.....77
Figura 28: Imagem do caderno de respostas do grupo 4.....78
Figura 29: Gráfico da função f(x) no GeoGebra 84
Figura 30: Imagem do caderno de respostas do grupo 1.....85
Figura 31: Imagem do caderno de respostas do grupo 1.....86
Figura 32: Imagem do caderno de respostas do grupo 2.....88
Figura 33: Imagem do caderno de respostas do grupo 2.....89
Figura 34: Imagem do caderno de respostas do grupo 3.....90
Figura 35: Imagem do caderno de respostas do grupo 3.....91
Figura 36: Imagem do caderno de respostas do grupo 4.....92
Figura 37: Imagem do caderno de respostas do grupo 4.....93
Figura 38: Imagem do caderno de respostas do grupo 4.....94
Figura 39: Imagem da função g(x) gerado no GeoGebra por um dos grupos.....95

Figura 40: Imagem do caderno de respostas do grupo 1.....96
Figura 41: Imagem do caderno de respostas do grupo 2.....97
Figura 42: Imagem do caderno de respostas do grupo 3.....99
Figura 43: Imagem do caderno de respostas do grupo 4.....101
Figura 44: Imagem da tela do GeoGebra para a função h(x).....102
Figura 45: Imagem do caderno de respostas do grupo 1.....103
Figura 46: Imagem do caderno de respostas do grupo 1.....104
Figura 47: Imagem do caderno de respostas do grupo 2.....105
Figura 48: Imagem do caderno de respostas do grupo 2.....106
Figura 49: Imagem do caderno de respostas do grupo 3.....107
Figura 50: Imagem do caderno de respostas do grupo 3.....108
Figura 51: Imagem do caderno de respostas do grupo 4.....109
Figura 52: Imagem do caderno de respostas do grupo 4.....110
Figura 53: Imagem da tela do GeoGebra para a função p(x).....111
Figura 54: Imagem do caderno de respostas do grupo 1.....112
Figura 55: Imagem do caderno de respostas do grupo 2.....113
Figura 56: Imagem do caderno de respostas do grupo 3.....114
Figura 57: Imagem do caderno de respostas do grupo 4.....115
Figura 58: Imagem do caderno de respostas do grupo 4.....115
Figura 59: Imagem do GeoGebra com o arquivo de fractal.....118
Figura 60: Atividade com fractal do grupo 1.....119
Figura 61: Atividade com fractal do grupo 2.....120
Figura 62: Atividade com fractal do grupo 3.....120
Figura 63: Folha de atividades do segundo encontro.....122
Figura 64: Continuação da folha de atividades do segundo encontro.....124
Figura 65: Resposta de um dos grupos para o domínio e imagem da função exponencial $fx = 3x$.....125
Figura 66: Resposta do grupo 2 para o domínio e imagem da função exponencial $fx = 3x$l 125
Figura 67: Resposta do grupo 1 para atividade com número de Euler.....126
Figura 68: Resposta do grupo 2 para atividade com número de Euler.....127
Figura 69: Resposta do grupo 3 para atividade com número de Euler.....128
Figura 70: Resposta do grupo 1 para atividade de função exponencial.....128
Figura 71: Resposta do grupo 2 para atividade de função exponencial.....129
Figura 72: Gráficos das funções exponenciais trabalhadas na atividade.....130
Figura 73: Resposta do grupo 3 para atividade de função exponencial.....131
Figura 74: Resposta do grupo 1 para atividade de função exponencial.....132
Figura 75: Resposta do grupo 2 para atividade de função exponencial.....132
Figura 76: Resposta do grupo 3 para atividade de função exponencial.....132
Figura 77: Imagem da tela do GeoGebra do grupo 1.....133
Figura 78: Respostas do grupo 1 para atividade de simetria das funções exponenciais.....134
Figura 79: Respostas do grupo 2 para atividade de simetria das funções exponenciais.....135
Figura 80: Respostas do grupo 3 para atividade de simetria das funções exponenciais.....136
Figura 81: Imagem da tela do GeoGebra do grupo 3.....137
Figura 82: Anotação do domínio e imagem das funções logarítmicas.....138

Figura 83: Anotação do domínio e imagem das funções logarítmicas do grupo 1 138
Figura 84: Anotação do domínio e imagem das funções logarítmicas do grupo 2139
Figura 85: Anotação do domínio e imagem das funções logarítmicas do grupo 3. 139
Figura 86: Funções exponenciais e logarítmicas no GeoGebra 140
Figura 87: Resposta de um grupo dando destaque ao GeoGebra.....141
Figura 88: Função logarítmica com base "a" feita no GeoGebra.....141
Figura 89: Resposta do grupo 2 para a questão 35 142
Figura 90: Resposta do grupo 3 para a questão 35 142
Figura 91: Tela do GeoGebra para a função $fx = 2x + a + b$ 143
Figura 92: Resposta do grupo 1 para a questão 37 144
Figura 93: Gráfico da função inversa de $fx = \log 2x - 0{,}2 + 0{,}5$ do grupo 1 144
Figura 94: Resposta do grupo 2 para a questão 37 145
Figura 95: Gráfico da função inversa de $fx = \log 2x - 2 + 0{,}5$ do grupo 2 146
Figura 96: Resposta do grupo 3 para a questão 37 147
Figura 97: Resposta do grupo 3 para a questão 37 147
Figura 98: Cálculo da função inversa de $fx = \log 2x - 0{,}2 + 0{,}5$ realizada pelo grupo 3148
Figura 99: Tela do GeoGebra mostrando as funções calculadas no item pelo grupo 3.....148
Figura 100: Folha de atividades do quarto encontro 151
Figura 101: Continuação da folha de atividades do quarto encontro 152
Figura 102: Resposta do grupo 1 para a questão 3 153
Figura 103: Resposta do grupo 2 para a questão 3 153
Figura 104: Resposta do grupo 3 para a questão 3 153
Figura 105: Resposta do grupo 4 para a questão 3 154
Figura 106: Respostas do grupo 1 para as questões 4 a 6 155
Figura 107: Respostas do grupo 2 para as questões de 4 a 6 156
Figura 108: Respostas do grupo 3 para as questões de 4 a 6 156
Figura 109: Respostas do grupo 4 para as questões de 4 a 6 157
Figura 110: Gráficos das funções seno geradas no GeoGebra pelo grupo 1 158
Figura 111: Resposta do grupo 1 para o item 7.....158
Figura 112: Resposta do grupo 1 para o item 8.....159
Figura 113: Resposta do grupo 2 para o item 7.....160
Figura 114: Resposta do grupo 2 para o item 8.....160
Figura 115: Resposta do grupo 3 para o item 7.....161
Figura 116: Resposta do grupo 3 para o item 8.....162
Figura 117: Resposta do grupo 4 para o item 7.....162
Figura 118: Resposta do grupo 4 para o item 8.....163
Figura 119: Gráficos das funções seno geradas no GeoGebra pelo grupo 2 163
Figura 120: Resposta do grupo 1 para o item 9.....164
Figura 121: Resposta do grupo 2 para o item 9.....164
Figura 122: Resposta do grupo 3 para o item 9.....165
Figura 123: Resposta do grupo 4 para o item 9.....166
Figura 124: Gráficos das funções seno geradas no GeoGebra pelo grupo 2 166
Figura 125: Respostas do grupo 1 para os itens 10 e 11 167
Figura 126: Resposta do grupo 2 para o item 10.....167
Figura 127: Resposta do grupo 2 para o item 11.....168

Figura 128: Resposta do grupo 3 para o item 10 168
Figura 129: Resposta do grupo 3 para o item 11 169
Figura 130: Resposta do grupo 1 para o item 13 169
Figura 131: Resposta do grupo 1 para o item 14 169
Figura 132: Resposta do grupo 1 para o item 15 170
Figura 133: Resposta do grupo 2 para os itens 13 e 14 170
Figura 134: Resposta do grupo 2 para o item 15 171
Figura 135: Resposta do grupo 3 para o item 13 171
Figura 136: Resposta do grupo 3 para o item 14 171
Figura 137: Resposta do grupo 3 para o item 15 172
Figura 138: Resposta do grupo 4 para os itens 13 e 14 172
Figura 139: Resposta do grupo 4 para o item 15 173
Figura 140: Gráficos das funções cosseno geradas no GeoGebra 173
Figura 141: Resposta do grupo 1 para a função cosseno 174
Figura 142: Resposta do grupo 1 para as funções $fx = \cos 2x$ e $fx = \cos 4x$ 174
Figura 143: Resposta do grupo 1 para diferenças e semelhanças entre as funções $fx = \cos 2x$ e $fx = \cos 4x$ 175
Figura 144: Gráficos das funções cosseno geradas no GeoGebra 176
Figura 145: Resposta do grupo 1 para diferenças e semelhanças entre as funções $fx = \cos -x, fx = \cos(-2x)$ e $fx = \cos(-4x)$ 176
Figura 146: Resposta do grupo 1 para a função $fx = \cos a.x$ 177
Figura 147: Resposta do grupo 1 para a função $fx = \mathrm{a}.\cos x$ 177
Figura 148: Resposta do grupo 2 para a função cosseno 178
Figura 149: Resposta do grupo 3 para a função cosseno 179
Figura 150: Resposta do grupo 4 para a função cosseno 180
Figura 151: Gráficos das funções $fx = \mathrm{tg}x$ e $gx = \mathrm{tg}2x$ geradas no GeoGebra pelo grupo 1 181
Figura 152: Gráficos da função $fx = \mathrm{tg}x$ 182
Figura 153: Resposta do grupo 1 para a função tangente 183
Figura 154: Resposta do grupo 1 para a função tangente 183
Figura 155: Resposta do grupo 1 para a função tangente 184
Figura 156: Resposta do grupo 1 para comparação das funções $fx = \mathrm{tg}x$ e $fx = \mathrm{tg} - x$ 184
Figura 157: Resposta do grupo 1 para a função $fx = \mathrm{tg}(a.x)$ 185
Figura 158: Resposta do grupo 1 para a função $fx = \mathrm{a}.\mathrm{tg}(x)$ 185
Figura 159: Resposta do grupo 2 para a função tangente 186
Figura 160: Resposta do grupo 2 para as funções $fx = \mathrm{tg}2x$ e $fx = \mathrm{tg}4x$ 187
Figura 161: Resposta do grupo 2 para as funções $fx = tg - x$, $fx = \mathrm{tg} - 2x$ e $fx = \mathrm{tg} - 4x$ 188
Figura 162: Resposta do grupo 2 para a função $fx = a.\mathrm{tg}(x)$ 188
Figura 163: Resposta do grupo 3 para a função $fx = \mathrm{tg}(x)$ 189
Figura 164: Resposta do grupo 3 para a função $fx = tg(a.x)$ 190
Figura 165: Resposta do grupo 3 para a função $fx = a.tg(x)$ 191
Figura 166: Resposta do grupo 4 para a função $fx = tg(x)$ 191
Figura 167: Resposta do grupo 4 para as funções $fx = \mathrm{tg}(2x)$ e $fx = \mathrm{tg}(4x)$ 192

Figura 168: Resposta do grupo 4 para as funções $fx = \text{tg}(-x)$, $fx = \text{tg}(-2x)$ e $fx = \text{tg}(-4x)$.....193
Figura 169: Gráficos das funções $fx = \text{tg}(2x)$ e $fx = \text{tg}(-2x)$ no GeoGebra.....194
Figura 170: Gráficos das funções $fx = senx + b$, $fx = cosx + b$ e $fx = tgx + b$ produzidos no GeoGebra.....195
Figura 171: Resposta do grupo 1 para análise das funções $fx = senx + b$, $fx = cosx + b$ e $fx = tgx + b$.....196
Figura 172: Resposta do grupo 2 para análise das funções $fx = senx + b$, $fx = cosx + b$ e $fx = tgx + b$.....197
Figura 173: Resposta do grupo 3 para análise das funções $fx = senx + b$, $fx = cosx + b$ e $fx = tgx + b$.....197
Figura 174: Resposta do grupo 4 para análise das funções $fx = senx + b$, $fx = cosx + b$ e $fx = tgx + b$.....198
Figura 175: Gráficos das funções $fx = a.senb.x + c + d$ e $gx = a.cosb.x + c + d$ realizadas pelo grupo 1.....199
Figura 176: Resposta do grupo 1 para alterações nas funções trigonométricas com a introdução de parâmetros.....200
Figura 177: Resposta do grupo 2 para alterações nas funções trigonométricas com a introdução de parâmetros.....201
Figura 178: Resposta do grupo 3 para alterações nas funções trigonométricas com a introdução de parâmetros.....202
Figura 179: Tela do GeoGebra com mensagem de erro para atividade do grupo 4.....203
Figura 180: Sequência de atividades para resolução de equações trigonométricas.....204
Figura 181: Tela do GeoGebra para atividade com equações trigonométricas.....205
Figura 182: Resposta do grupo 1 para solução da equação trigonométrica no GeoGebra.205
Figura 183: Resposta do grupo 2 para solução da equação trigonométrica no GeoGebra.206
Figura 184: Resposta do grupo 3 para solução da equação trigonométrica no GeoGebra.207
Figura 185: Resposta do grupo 4 para solução da equação trigonométrica no GeoGebra.208
Figura 186: Problema proposto envolvendo função trigonométrica.....209
Figura 187: Gráfico da função para resolução do problema proposto.....210
Figura 188: Respostas do grupo 1 para o problema proposto envolvendo função trigonométrica.....211
Figura 189: Gráfico da função plotada no GeoGebra pelo grupo 2 para resolução do problema proposto.....212
Figura 190: Respostas do grupo 3 para o problema proposto envolvendo função trigonométrica.....213
Figura 191: Respostas do grupo 4 para o problema proposto envolvendo função trigonométrica.....214
Figura 192: Ciclo trigonométrico criado por um dos alunos do grupo 1.....219

LISTA DE TABELAS

Tabela 1: Perfil dos alunos envolvidos na pesquisa 51
Tabela 2: Grupos e participantes do primeiro encontro.....54
Tabela 3: Tempos de vídeo e áudio gerados no primeiro encontro.....79
Tabela 4: Grupos e participantes do segundo encontro 80
Tabela 5: Tempos de vídeo e áudio gerados no segundo encontro 116
Tabela 6: Grupos e participantes do terceiro encontro 117
Tabela 7: Tempos de vídeo e áudio gerados no terceiro encontro 149
Tabela 8: Grupos e participantes do quarto encontro 150
Tabela 9: Tempos de vídeo e áudio gerados no quarto encontro 215

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO *18*

2 REFERENCIAL TEÓRICO *25*

2.1 TEORIA DA AÇÃO MEDIADA **25**

2.1.1 A ação mediada na perspectiva sociocultural 26

2.1.2 A irredutibilidade da ação mediada 28

2.1.3 O significado e o propósito das ferramentas culturais e as vozes 30

2.1.4 Internalização como domínio e apropriação 32

2.2 Uso de tecnologias no ensino tradicional **34**

3 METODOLOGIA *44*

4 ANÁLISE E RESULTADOS *53*

4.1 PRIMEIRO ENCONTRO **54**

4.2 SEGUNDO ENCONTRO **80**

4.3 TERCEIRO ENCONTRO **117**

4.4 QUARTO ENCONTRO **150**

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS *216*

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS *220*

APÊNDICES *224*

APÊNDICE I **225**

APÊNDICE II **228**

APÊNDICE III **232**

APÊNDICE IV **236**

APÊNDICE V **241**

1 INTRODUÇÃO

Ao cursar Licenciatura em Matemática, no ano de 2002, pude ter meu primeiro contato com um software voltado à Matemática. Cursando a disciplina "Cálculo Diferencial e Integral A" naquele ano, fomos apresentados e incentivados a utilizar o software Maple V (figura 1) para auxiliar no entendimento de limites, derivadas e integrais.

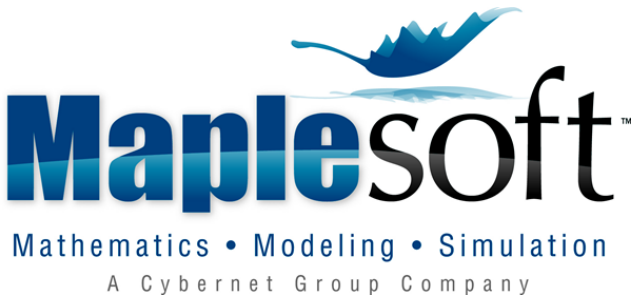


Figura 1: Imagem do logo do software (https://www.maplesoft.com/)

Fomos incentivados pelo professor da disciplina a utilizar e "programar" algumas simulações que eram propostas e entregues na forma de trabalho. Apesar de eu já ter concluído uma graduação na época (Engenharia Mecânica na UNESP), meu único contato com software tinha sido com o AutoCad em meu último ano de curso (1997) e mesmo assim muito breve. Nunca tinha tido contato com um software voltado à Matemática e isso realmente me deixou deslumbrado.

Comecei a me interessar pela ideia de utilizar o software para aprender e me ajudar a entender melhor os assuntos abordados na disciplina. Já havia cursado Cálculo na engenharia, mas a abordagem com o uso do Maple V era novidade para mim, que só conhecia o ensino tradicional até o momento. Percebi que conseguia ir muito além do básico que era proposto e fiquei empolgado com a possibilidade de utilizá-lo para ensinar Matemática. Passei então a me interessar pela área de tecnologia e por outros softwares e conheci o Cabri Geometry que, também me fascinou com a possibilidade de mover os objetos, mantendo suas

propriedades iniciais, característica “principal” do software de geometria dinâmica.

Os termos, “geometria dinâmica”, “ícones”, “clicar”, “mouse”, “tela”, “monitor”, pertencem a este universo tecnológico utilizado para o contexto de ensino e aprendizagem e, muitas vezes, causam uma certa estranheza àqueles que não estão inseridos nessa realidade do uso das tecnologias para ensinar e aprender Matemática. É possível que, atualmente, estas palavras sejam mais comuns a uma parte da sociedade. Entretanto, o acesso aos computadores, no âmbito escolar, há dezesseis anos era muito limitado, para não dizer inexistente. Neste contexto a nossa formação inicial de futuros professores de Matemática começava a reconhecer as potencialidades e as dificuldades do uso de diferentes tecnologias e mídias digitais na Educação Matemática.

Nesta época eu lecionava em um curso de licenciatura em Matemática de uma faculdade particular, além de aulas em colégios particulares no ensino médio e comecei a mostrá-los a meus alunos através de atividades e demonstrações, que antes eu considerava difíceis de serem assimiladas e assim senti a necessidade de me envolver mais profundamente em estudos e experiências com tecnologias digitais e com a Educação Matemática.

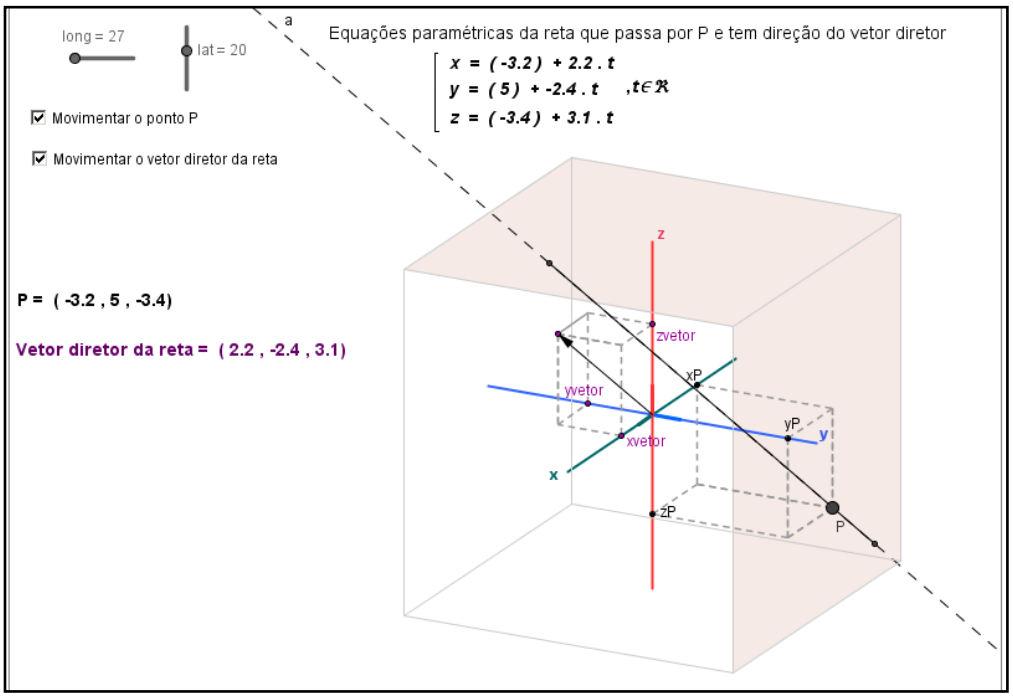
Em meu último ano de graduação na licenciatura, desenvolvi em meu trabalho de graduação, uma lousa virtual que permitia construções geométricas desenvolvido em Java, como alternativa ao Cabri que era um software pago.

De 2005 a 2009, tive a oportunidade ainda de lecionar em alguns cursos de formação continuada, como o projeto Teia do Saber do Governo do Estado de São Paulo e em um curso de Especialização em Educação Matemática em uma faculdade particular, onde minha área de interesse era o uso de tecnologias no processo de ensino e aprendizagem. Nesta época ingressei no curso de Mestrado Profissional na UFSCar e minha dissertação foi sobre o uso do Moodle e o GeoGebra no ensino de Geometria Analítica (LUCAS, 2010).

Na dissertação “desenvolvemos” um visualizador em 3D no GeoGebra

(não existia ainda o GeoGebra 3D) para ajudar na visualização de retas, pontos e planos no espaço, ensinados na disciplina de Geometria Analítica no curso de licenciatura. Na figura abaixo, um exemplo de visualizador criado no GeoGebra em minha dissertação.

Figura 2: Visualizador de retas no espaço



Fonte: Acervo do autor.

Durante esse período, precisei lidar com a transição entre a linguagem da notação Matemática, seus significados e as diferentes sintaxes de linguagens computacionais. E ainda lidar com outros idiomas, além do português. Cada software exigia que eu aprendesse como utilizar suas ferramentas e modos peculiares de uso. Havia sempre a necessidade de estar apto a trabalhar com as especificidades de cada sistema operacional, que cada software poderia ser instalado. Uma das dificuldades era que sempre havia questões correlatas aos limites de processamento e armazenamento em memórias físicas e virtuais dos computadores.

Assim, cada vez mais me interessava pelas questões de

aprendizagem mediada por uso de tecnologias. Em 2015, ingressei no programa de doutorado e meu interesse desde o início foi continuar a tentar entender como o uso destas tecnologias poderia auxiliar o processo de ensino e aprendizagem em Matemática.

Assim, este trabalho surgiu do interesse sobre a mediação de recursos tecnológicos e da possibilidade de se utilizar o GeoGebra no ensino de funções, além dos questionamentos frequentes sobre como ocorre a aprendizagem em Matemática e de que forma estes recursos podem contribuir para uma aprendizagem que consideramos mais significativa no sentido de entenderem melhor o que estão fazendo ao calcular, por exemplo, o domínio de uma função. Em entrevista com a prof. Emília, docente de Matemática da Unesp de Bauru e co-orientadora deste trabalho, sobre o sentimento de que os alunos não entendem de fato o que pensamos ser importante como, por exemplo, domínio de funções, associações de gráficos a funções elementares, imagem de funções dentre outras questões, pensamos em abordar a disciplina de Funções Elementares do curso de Licenciatura em Matemática com o uso do GeoGebra através da perspectiva da Ação Mediada de James V. Wertsch (1991b, 1998), que visa compreender as relações entre a subjetividade do agente, as ferramentas culturais, a apropriação e domínio, a criatividade e as convenções culturais.

Nesse sentido, adotamos a perspectiva de Wertsch para tratarmos sobre o significado dos conceitos. Para isso, criamos um ambiente que consideramos favorável para melhor dispor as ações realizadas pelos estudantes ao utilizar meios mediacionais, isto é, as ferramentas socioculturais. Tais ferramentas podem ser físicas (imagens, textos, animação, vídeos e simulação por objetos de aprendizagem) e não físicas (fala, enunciados, expressões e conceitos).

Pensando ainda que a disciplina é oferecida para futuros professores de Matemática, torna-se importante o uso de recursos computacionais no sentido de já incentivar o uso dos mesmos pelos discentes e assim contribuir para que adotem esta prática também em suas metodologias de ensino no futuro.

De acordo com Moran et al. (2000, p.66):

> [...] a aprendizagem em informática, por ser algo novo, que não faz parte usualmente dos conhecimentos profissionais docentes adquiridos na formação inicial e que não é algo com o qual todos os professores se identifiquem aparentemente num primeiro contato, parece requerer um esforço maior de sua parte.

O autor destaca ainda:

> [...] O computador parece ser um recurso mecânico, técnico, com os hardwares e softwares todos prontos em que basta observar os procedimentos para aprender a manuseá-lo. Porém, a aprendizagem de como "gerenciá-lo" não é apenas um ato mecânico, requer pensamento e ação para que os procedimentos saiam corretos. Por estarem no estágio inicial de aprendizagem, alguns professores demonstram não internalizar com facilidade os conhecimentos necessários para operá-lo, recorrendo a muitas tentativas e ajuda de outras pessoas. (MORAN et al., 2000, p.66)

Nesta mesma linha de pensamento, destaca Kenski (2007, p.57):

> [...] A análise de vários casos já relatados em pesquisas e publicações na área da educação mostra alguns problemas recorrentes, que estão na base de muitos fracassos no uso das tecnologias mais atuais na educação. O primeiro deles é a falta de conhecimento dos professores para o melhor uso das tecnologias, seja ela nova ou velha. Na verdade, os professores não são formados para o uso pedagógico das tecnologias, sobretudo as TIC.[...] na maioria das vezes esses profissionais de ensino estão preocupados em usar as tecnologias que têm a sua disposição para "passar o conteúdo", sem se preocupar com o aluno, aquele que precisa aprender.

Concordando com os autores acima, nos sentimos impulsionados a fazer uma diferença na formação inicial destes futuros professores utilizando o computador e o Geogebra para que eles se sentissem mais motivados e confiantes num futuro próximo em suas práticas pedagógicas.

Na mesma linha de pensamento, cita Bittar (2001, p.77):

> [...] é fundamental que os cursos de licenciatura preparem o professor para o uso das novas tecnologias. De fato, uma vez que a informática parece estar chegando realmente às salas de aulas, é preciso formar um profissional consciente e apto a fazer uso deste novo instrumento didático. Porém isto não tem sido sistematicamente objeto de estudo dos licenciados, o que implica novos professores sendo colocados no mercado de trabalho sem formação no uso das novas tecnologias educacionais. Para esses professores, assim como para tantos outros que estão trabalhando há muitos anos e que não tiveram acesso a esse tipo de formação, é necessário oferecer cursos de formação continuada para que eles se atualizem.

Acreditamos que os cursos de formação continuada sejam cruciais para termos professores mais bem preparados e engajados nessa difícil tarefa de ensinar, porém sentimos que esta formação deve iniciar-se já na graduação.

Segundo Borba e Penteado (2003), o interesse pela Informática Educativa está ganhando cada vez mais força nas escolas, e pensando nas potencialidades que a informática pode proporcionar, devemos nos capacitar sempre, em busca de uma melhora no processo de ensino e aprendizagem em Matemática.

Aprender é o processo de assimilação de qualquer forma de conhecimento, desde o mais simples onde a criança aprende a manipular os brinquedos, aprende a fazer contas, lidar com as coisas, nadar, andar de bicicleta etc., até processos mais complexos onde uma pessoa aprende a escolher uma profissão, lidar com as outras. Dessa forma as pessoas estão sempre aprendendo (LIBÂNEO, 1994). A aprendizagem é algo que modifica o pensamento, não se trata de uma estagnação onde os conteúdos em nada influenciam na forma do individuo agir. Para que se possa haver a aprendizagem o aluno necessita ser estimulado com conteúdos de seu alcance, textos que tratem de sua realidade. Somente quando o aluno demonstra através de ações alguma forma de mudança crítica

podemos dizer que realmente existiu a aprendizagem.

Ensinar é a atividade que tem por finalidade que o outro obtenha o conhecimento. Segundo Libâneo (1994, p. 90):

> A relação entre ensino e aprendizagem não é mecânica, não é uma simples transmissão do professor que ensina para um aluno que aprende. O ensino visa estimular, dirigir, incentivar, impulsionar o processo de aprendizagem dos alunos.

Ensinar envolve toda uma estrutura que tem por finalidade alcançar a aprendizagem do aluno através de conteúdo. A relação de ensino e aprendizagem não deve ter como base a memorização, por outro lado os alunos também não devem ser deixados de lado sozinhos procurando uma forma de aprender o assunto, o professor nesse caso sendo apenas um facilitador (LIBÂNEO, 1994). Ainda, afirma Libâneo (1994, p. 91):

> O processo de ensino, ao contrario, deve estabelecer exigências e expectativas que os alunos possam cumprir e, com isso, mobilizem suas energias. Tem, pois o papel de impulsionar a aprendizagem e, muitas vezes, a precede.

Portanto o ensino é uma relação onde o professor põe em prática o tripé: objetivo, conteúdo e método, e dessa forma espera obter a aprendizagem do aluno como resultado, o que nem sempre acontece.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

A relação existente entre o ensino da Matemática e a informática não é evidente e clara. Ela necessita de uma reflexão para ser entendida. Apesar de muitos acharem que o uso da informática já é algo integrado à sala de aula de Matemática, acreditamos que na maioria das escolas o ensino de Matemática tem seguido os métodos tradicionais centrados no professor, na transmissão do conhecimento e na memorização, sendo reservado ao aluno um papel passivo.

2.1 TEORIA DA AÇÃO MEDIADA

James V. Wertsch é um psicólogo americano e professor da Washington University em Saint Louis, atuando no Departamento de Educação, onde atualmente é um dos teóricos mais expressivos da psicologia sociocultural. Wertsch é um adepto das ideias de Vigotski na corrente sociocultural, tendo como foco o estudo sociocultural da mente (WERTSCH, 1991b) e a memória coletiva sobre os aspectos oficiais da história, mediadas pelas ferramentas culturais concernentes às instituições formais de ensino na antiga União Soviética e nos Estados Unidos (WERTSCH, 1998).

Seu trabalho é pautado principalmente na crítica de que as pesquisas contemporâneas em psicologia, principalmente nos EUA, fazem estudos sobre o funcionamento mental humano como se ele fosse isento do meio cultural, institucional e histórico, tratando-se apenas do indivíduo de forma isolada. Porém, essa crítica não é nova, ela foi primeiramente dirigida por John Dewey em seu discurso intitulado "Psicologia e Práticas Sociais", proferido na Associação Americana de Psicologia em 1901. As ideias de Dewey nunca foram adiante em meio à comunidade científica dos EUA. Portanto, o que Wertsch propõe em seu trabalho é uma abordagem sociocultural à mente, onde as "vozes" da psicologia e da semiótica possam entrar em um diálogo produtivo com as vozes de outras disciplinas para a compreensão entre os processos mentais e seus contextos culturais, históricos e institucionais (WERTSCH, 1991b, p.3).

Nosso objetivo neste trabalho é trazer as contribuições de Wertsch para estudarmos as formas de domínio e a apropriação dos conceitos de funções elementares mediados por computador no ambiente de ensino.

A Teoria da Ação Mediada considera os sistemas semióticos, dentre eles a linguagem, determinantes no processo de elaboração de significados, pois é por meio da fala que ocorrem as principais e mais significativas ações humanas (GIORDAN, 2008). O significado é um conceito central para a aproximação sociocultural à ação mediada. Como o significado só existe na interação social, a elaboração de significados é um processo ativo e dialógico por natureza.

2.1.1 A ação mediada na perspectiva sociocultural

A unidade de análise que Wertsch utiliza para sustentar suas pesquisas sobre os processos mentais é a ação mediada. A ação mediada se refere à ação humana, e essa ação, normalmente, está vinculada a instrumentos de mediação, como as ferramentas materiais e a linguagem. Tais instrumentos moldam a ação de forma essencial, portanto, é justificável e útil fazer uma distinção analítica entre ação e instrumentos de mediação, tornando-se mais adequado falar de agentes agindo com ferramentas socioculturais ao invés de falar de indivíduos isoladamente (WERTSCH, 1991b, p.12). Para analisar tais ações, é preciso considerar a voz e seus enunciados como partes integrantes do processo.

A voz, nos trabalhos de Wertsch, é um termo empregado a partir das pesquisas de Mikhail Bakhtin (1981, 1984, 1986) e Vigotski, refletindo três ideias básicas. A primeira delas diz que, para a compreensão da ação humana, é necessário entender os dispositivos semióticos empregados para mediar tal ação. A segunda ideia é a de que o funcionamento mental humano se fundamenta nos processos comunicativos, ou seja, a voz está relacionada aos processos psicológicos, mesmo o indivíduo estando isolado, que são vistos como envolvendo a natureza comunicativa. A terceira ideia diz respeito ao funcionamento mental humano e que somente as práticas comunicativas dão origem ao funcionamento

mental do indivíduo (WERTSCH, 1985, 1991b).

A noção de voz ajuda a manter a suposição sobre a estreita relação entre os processos comunicativos sociais e os processos psicológicos individuais, baseados na noção de ação mediada. As ideias de Bakhtin salientam que esses dois processos são caracterizados pela dialogicidade das vozes, ou seja, a existência de, pelo menos, duas vozes.

O termo sociocultural é utilizado por Wertsch na pretensão de entender como a ação mental está situada no contexto cultural, histórico e institucional. Wertsch alerta que se deve tomar cuidado em utilizar o termo sociocultural, pois as dimensões históricas podem receber pouca atenção, mas deixar de incorporar a palavra cultural pode trazer maiores prejuízos, tal como reduzir as diferenças culturais a diferenças históricas (WERTSCH, 1991b, p.16).

Para realizar um estudo mais profundo das abordagens socioculturais, Wertsch recorre aos escritos de Vigotski e a algumas ideias de Bakhtin. As ideias de Bakhtin, das quais Wertsch recorre, estão ligadas especialmente ao enunciado, voz, linguagem social e diálogo para ampliar as declarações de Vigotski sobre a mediação humana por sinais. O entendimento das abordagens socioculturais à mente, portanto, inicia com o pressuposto de que a ação é mediada, e não existe separação do meio em que é realizada. Desse modo, a mente é definida com base em suas propriedades sociais e mediacionais e não em algo baseado apenas no indivíduo.

A partir dos escritos de Vigotski, Wertsch (1991b, p.19) esboçou três pilares gerais: 1) a confiança no método genético ou evolutivo; 2) a afirmação de que as funções mentais superiores no indivíduo derivam da vida social; 3) a afirmação de que a ação humana, tanto no plano individual como no social, é mediada por instrumentos e signos. Porém, é no terceiro tema que Wertsch concentra maiores esforços, apontando que a propriedade definidora do funcionamento mental superior, exclusiva dos seres humanos, é mediada por

ferramentas e signos, tais como a linguagem.

A defesa dessa ideia é um debate contra o individualismo metodológico que as pesquisas contemporâneas em ciências sociais, principalmente em psicologia, adotam, especialmente nos Estados Unidos (WERTSCH, 1985). Ao considerar o individualismo, esse tipo de pesquisa se baseia no pressuposto de que é possível, e até mesmo desejável, estudar o indivíduo, ou áreas específicas do funcionamento mental desse sujeito, de maneira isolada. A justificativa está na afirmativa de que, para resolver os problemas deve-se simplificá-los para obter resultados concretos (WERTSCH, 1991b). Como afirmam Pereira e Ostermann (2012), isso se caracteriza como um reducionismo social, que foi classificado por Cole e Wertsch (1996 apud PEREIRA e OSTEMANN, 2012) como "antinomia indivíduo-sociedade". Essa postura adotada nas pesquisas praticamente obriga os pesquisadores a escolherem a defesa de uma das posições e a negar a outra no estudo do funcionamento metal humano.

Outro autor a quem Wertsch faz grande referência, para defender suas ideias, é Kenneth Burke, dedicando boa parte da sua obra à análise de seus escritos (1966, 1969a, 1969b, 1972, 1984). Apesar dos trabalhos de Burke terem implicações para a literatura, Wertsch argumenta que tais ideias também podem ser utilizadas em diversos outros campos acadêmicos, sendo difícil confiná-las a uma única disciplina. O que Wertsch resgata dos escritos de Burke é especialmente o dramatismo para explicar as múltiplas perspectivas da ação humana.

2.1.2 A irredutibilidade da ação mediada

Para entender irredutibilidade da ação mediada vamos trazer alguns exemplos que esclareçam melhor tal questão. De acordo com Wertsch (1998), essa irredutibilidade seria o núcleo da aproximação sociocultural, em que observa a ação humana em um cenário histórico, cultural e institucional.

Iremos usar duas metáforas para explicar tal irredutibilidade e como as ferramentas culturais podem influenciar no resultado da ação em um

determinado contexto histórico.

Consideremos um exemplo adaptado de Pereira e Ostermann (2012), onde se considera a internet como uma ferramenta cultural que surgiu recentemente. Suponha que um professor universitário de Matemática queira indicar um livro sobre o aprender Matemática com o GeoGebra, porém ele não se lembra do título e rapidamente acessa a internet do smartphone, indo até um site de busca e digitando as seguintes palavras-chave: livro e GeoGebra. Logo aparece uma lista de links que o direcionam para sites de vendas de livros. Ao acessar um desses sites, é exibido um catálogo com vários títulos, no qual é possível localizar aquele que ele estava procurando. Portanto, quem lembrou o título? O professor ou a internet acessada por meio do smartphone? A princípio, parece ter sido o professor, pois ele é o agente ativo dessa ação e, sem ele, a internet não funcionaria. Porém, ele não foi capaz de lembrar-se do título do livro sem a ajuda da internet, mas a internet não pode levar todo o mérito porque ela sozinha não realizaria a ação. Considerando a aproximação sociocultural, do ponto de vista da ação mediada, tanto o agente como a ferramenta cultural estavam envolvidos na ação, então é mais adequado falar que o professor agindo com a internet (acessada do smartphone) lembraram do título do livro. Outros exemplos podem ser utilizados para ilustrar a irredutibilidade da ação mediada, porém não nos estenderemos, alguns destes podem ser encontrados em Wertsch (1998, p.28) e Pereira e Ostermann (2012, p.27) sobre o ensino de Matemática básica.

É importante salientar que a ferramenta por si só não possui e nem executa nenhuma ação, é necessário uma pessoa habilidosa que, ao usar tais meios mediacionais, consiga produzir significados com sua aprendizagem (WERTSCH, 1998). Além disso, Martins e Moser (2012 p.12) alertam que o "significado está na utilização da palavra realizada pelas pessoas. Os meios são opacos por si sós: dependem do contexto, da cultura e da utilização que se faz deles". Esses meios mediacionais ou ferramentas culturais alteram a ação humana e as estruturas psicológicas, trazendo grandes implicações na maneira como são

utilizadas. Para ilustrar essa questão, podemos citar a metáfora do "salto com vara" exposto por Wertsch (1998) e utilizada como exemplo por vários autores, dentre eles Martins e Moser (2012, p.12), que o apresentam resumidamente de forma clara:

Trata-se da metáfora do salto com vara. Sem vara, o salto humano alcançou apenas pouco mais de 2 metros de altura. A vara foi usada para o salto em 1896, quando o atleta deveria correr 38,1 m com a vara para saltar sobre uma barra suspensa por dois pilares. Como a vara era pesada e pouco flexível, o salto foi de 3,30 m. A partir de 1900, foi iniciado o uso de varas de bambu, que permitiam saltos mais altos. Em 1943, Cornelius Warmerdam saltou 5,78 m, recorde que durou até 1959. Após, foram introduzidas as varas de alumínio e, finalmente, as varas feitas de fibra de vidro, que permitiram a Sergei Bubka saltar mais de 7 metros.

Como pode ser observado por meio dessa metáfora, o resultado da ação foi radicalmente alterado com a inserção das novas varas feitas por um plástico com reforço de compósito de vidro, viabilizando um recorde bem maior do que o alcançado com varas de bambu. Tal discussão, portanto, não pode limitar-se a dizer que, para efeito de comparação dos resultados, as ferramentas usadas deveriam ser semelhantes, pois, como dito anteriormente, esses meios dependem do contexto histórico e cultural em que estão inseridos. O mais adequado, então, seria discutir que a ação de saltar pode ser radicalmente influenciada pela ferramenta cultural utilizada (MARTINS & MOSER, 2012).

A ação mental, nessa perspectiva, não pode ser vinculada ao indivíduo agindo no vácuo. Ela deve ir além, isto é, buscar uma interação com as ferramentas culturais.

2.1.3 O significado e o propósito das ferramentas culturais e as vozes envolvidas

A posição que Wertsch defende sobre o significado e o propósito das ferramentas culturais está vinculada às ideias de Zinchenko (1985), o qual refaz

uma leitura de Vigotski sobre o significado atribuído aos signos como ferramentas psicológicas. Assim como Wertsch, Zinchenko também se apoia em Bakhtin e "observa que nem toda ferramenta é dotada de significado, mas pode sim, ser dotada de propósito. Assim, as ações podem ser mediadas por ferramentas desprovidas de significado, mas plenas de propósitos" (GIORDAN, 2008, p.77). Por isso, podemos dizer que as ferramentas são dotadas de significados quando as utilizamos para uma determinada finalidade em que esses significados sejam internalizados pelo sujeito, e caso não ocorra a internalização dessa atividade, a ferramenta poderá ser manipulada "mecanicamente" e estará provida apenas de propósito, isto é, será utilizada, por exemplo, apenas para executar uma tarefa que foi estabelecida, mas o sujeito não entende os conceitos ali estabelecidos.

Diante do exposto, Giordan (2008,p.78) levanta a seguinte questão: "Se, no entanto, aquilo que se internaliza, ou seja, se converte de ação externa em ação interna, é o significado da ferramenta, como explicar a internalização do significado de ferramentas que, na ação externa, são desprovidas de significados?" A resposta é colocada por Zinchenko ao propor-se pensar no "significado do objeto", que seria internalizado em um processo de atividade conjunta e, posteriormente, se transformaria em significado. Mas como acontece essa transformação? De acordo com Zinchenko (1985, p.102 apud GIORDAN 2008), só ocorrerá a transformação do significado do objeto para significado real quando a ação externa for dotada pelo propósito e pelo significado concomitantemente. Em outras palavras, e voltando às ideias de Martins e Moser (2012), a internalização é verificada apenas por meio da externalização, ou seja, é pelo uso da palavra e da ação externa que estabelecemos o significado.

Nesse sentido é que Wertsch adota a ação mediada como unidade de análise para estudar os processos mentais, deixando claro que a ação interna não deve ser separada da ação externa, onde "o processo de internalização é aquele pelo qual ocorre a formação de uma estrutura interna e não a transferência da atividade externa ou de signos e ferramentas para um plano interno preexistente."

(GIORDAN, 2008, p.78). A partir dessas considerações, as formas de mediação, semiótica e instrumental passam a não ter diferenças e a ação mediada decorre do uso de qualquer ferramenta, sem priorizar a palavra ou qualquer outro meio (GIORDAN, 2008).

Outra marca que orienta o sentido é a utilização de signos, como já foi descrito anteriormente e que estamos particularmente interessados em estudar na sala de aula. Em uma determina situação, existem várias formas de indexação da voz e, uma delas, talvez a que se dê menos importância em vários estudos, são as formas enunciativas não-indexadas, ou seja, aquelas nas quais as crenças e os valores culturais são determinantes em relação às referências institucionais, conferindo um alto grau apreciativo. Diante disso, concordamos com Giordan (2008, p.83) ao argumentar que:

> O fato de estas formas enunciativas não-indexadas manifestarem valores apreciativos sobre os critérios utilizados na resolução de problemas pode nos informar a respeito de como os estudantes conferem sentido aos meios mediacionais, ou aos dispositivos de pensamento, pertencentes a uma determinada esfera de comunicação e atividade. Sendo assim, a observação e a análise da evolução das formas enunciativas em situações estruturadas de ensino são meios potencialmente eficazes para se avaliar a elaboração de conceitos.

Em resumo, Wertsch busca defender a ação mediada no estudo da consciência humana, expondo as limitações da abordagem semiótica por meio de Zinchenko. Já em Vigotski, Wertsch reforça o uso do signo em detrimento de outras ferramentas, destacando as questões socioinstitucionais para demarcar as propriedades semióticas.

2.1.4 Internalização como domínio e apropriação

A ênfase das ideias de Wertsch está em como o uso de determinadas ferramentas culturais podem desenvolver habilidades específicas, em vez de habilidades ou aptidões generalizadas (WERTSCH, 1998).

Para entender as formas de ação mediada que realmente o indivíduo

pode realizar, devemos mudar os domínios genéticos, da filogênese para a história sociocultural, ontogênese e microgênese, ou seja, é necessário examinar a história de encontros reais dos sujeitos com instrumentos de mediação materiais. A análise de como as ferramentas culturais são dominadas pelos indivíduos na ontogênese é frequentemente formulada em termos de "internalização" (ibidem, p. 48). Porém, como Wertsch (1998, p.48) já havia explicado em outros estudos (WERTSCH, 1993, 1995), essa expressão pode ser enganosa, uma vez que ela encoraja a se engajar na busca de conceitos, regras e outras entidades mentais internas que são bastante suspeitas aos olhos dos filósofos, como Wittgenstein (1972).

A construção de internalização parece implicar uma oposição entre os processos internos e externos, porém o termo internalização é bastante utilizado tanto no contexto do cotidiano como no contexto do profissional. Sendo assim, Wertsch (1998) afirma não se opor e nem substituir o uso do termo, mas esclarece o processo de internalização por meio da ação mediada, preferindo utilizar os termos domínio e apropriação.

O domínio se refere a saber como utilizar uma ferramenta cultural habilmente, a questão se pauta em "saber como" em vez de "saber o que" (WERTSCH, 2002 apud PEREIRA &OSTERMANN, 2012, p.32):

> Segundo o autor, a noção de domínio possui importantes vantagens com relação à noção mais geral de internalização. Isso porque essa última evoca uma imagem na qual os processos realizados inicialmente em um plano externo passam a ser realizados em uma espécie de plano interno. Tal imagem é encorajada por análises como a de Vygotsky (1994) sobre como a ação de contar ocorre originalmente no plano externo, com a ajuda dos dedos, para, posteriormente, sumir de vista, quando o processo é internalizado. De acordo com o autor, muitas formas de ação mediada são (e devem ser) realizadas no plano externo.

A apropriação é o processo de tomar para si algo pertencente ao outro (WERTSCH, 1998, p.53); esse termo é emprestado dos escritos de Bakhtin (1981). Nessa perspectiva, a apropriação das palavras do outro para si não acontece de

qualquer maneira, mas, sim, na produção dos significados. De outra maneira, a apropriação é carregada de intenções próprias em benefício da construção de significados. Ao "se apropriarem da palavra de outros, os agentes as utilizam em um novo contexto, com sua própria intenção, imprimindo seu próprio acento" (PEREIRA & OSTERMANN, 2012, p.2012).

Em se tratando do uso de instrumentos, o domínio ocorre em saber como utilizá-los para o propósito ao qual foi destinado. Por exemplo, suponha o uso de um simulador computacional para explicar os estados físicos da água; então, aprender a manusear corretamente a ferramenta para explanar sobre as mudanças de estado caracteriza-se como domínio, pois essa ferramenta foi perfeitamente utilizada para o propósito para o qual foi designada. Caso a ferramenta seja utilizada em outro contexto, como, por exemplo, explicar fenômenos geográficos que envolvam as mudanças de estado da matéria, esse processo é característico da apropriação. Aqui, foi tomado para si o que pertencia ao outro, ou seja, a ferramenta foi utilizada a partir do propósito para o qual ela havia sido designada para outro de interesse exclusivo do agente. É importante salientar que o domínio e a apropriação se referem às ferramentas culturais e, como descrito anteriormente, elas podem ser físicas (computador, livros, objetos de aprendizagem) e não físicas (palavra, signos, enunciados e inclusive os conceitos). Desse modo, fica entendido que pode ocorrer o domínio, mas nem sempre ocorrerá a apropriação.

Neste trabalho, nossa questão de pesquisa é o significado do conceito e o nível de domínio e de apropriação ao utilizarem o computador e o software GeoGebra. Para tanto, será impossível analisar essas questões e deixar passar despercebido o processo de domínio e apropriação, tendo em vista que tanto os conceitos como os objetos (computador e GeoGebra) fazem parte do "kit de ferramentas" (ou caixa de ferramentas) culturais e podem transformar a ação dos sujeitos.

2.2 Uso de tecnologias no ensino tradicional

Conciliar a metodologia de ensino tradicional com o uso de novas tecnologias é o que acreditamos ser melhor e mais desejável nos dias de hoje. Essa conciliação, porém, deve ser feita de forma cautelosa, uma vez que são enormes os problemas e obstáculos a serem enfrentados. Problemas que vão desde a falta de computadores em quantidade suficiente para as salas (na maioria das vezes numerosas), passando pela inércia de muitos professores já acostumados ao ensino tradicional e indo até a formação dos novos professores como já foi discutido neste texto anteriormente.

Assim, parece mais sensato aproveitar a introdução gradativa do computador na escola e, no bojo dessa nova tecnologia, introduzir modificações na orientação pedagógica do ensino da Matemática, com o apoio de softwares adequados e eficientes para se alcançar o objetivo da melhoria do aprendizado em Matemática.

De acordo com as colocações de Cotta Júnior (2002, p.43)

> [...] em ambientes informatizados não têm importância e nem interessam os métodos pedagógicos tradicionais, instrucionistas, que privilegiam a transmissão do conhecimento e a memorização de conteúdos. No ambiente informatizado, ganham importância os recursos usados na aprendizagem numa perspectiva construtivista, os quais partem da concepção de que o conhecimento é construído a partir de percepções e ações do sujeito, constantemente mediadas por estruturas mentais já construídas ou em construção, em consonância com o próprio processo de aprendizagem.

Nesta mesma linha de pensamento, Gravina e Santarosa (1998) afirmam que, na perspectiva construtivista, a aprendizagem da Matemática depende de ações que caracterizam o fazer Matemática: experimentar, interpretar, visualizar, induzir, conjecturar, abstrair, generalizar e enfim demonstrar. É o aluno agindo, diferentemente de seu papel passivo frente a uma apresentação formal do conhecimento, baseada essencialmente na transmissão ordenada de fatos, geralmente na forma de definições e propriedades. Numa tal apresentação formal

e discursiva, os alunos não se engajam em ações que desafiem suas capacidades cognitivas, sendo-lhes exigido no máximo memorização e repetição, e não são autores das construções que dão sentido ao conhecimento matemático.

A maioria dos professores e pesquisadores na área de educação concorda que a introdução pura e simples do computador na escola não tem a virtude de mudar a qualidade da educação. Em concordância com Cotta Júnior (2002, p.44)

> [...] a introdução do computador deve vir acompanhada de mudanças adequadas na orientação pedagógica da educação, sem o que o computador torna-se apenas mais uma sofisticação tecnológica, que faz parecer que a escola tornou-se mais moderna, mas que não traz nenhum benefício prático para a educação.

Assim, quando usado adequadamente, o computador é uma poderosa ferramenta para melhorar a qualidade dos processos de ensino e de aprendizagem. A introdução pura e simples dessa ferramenta na escola em nada modifica o ensino. É necessário planejar o seu uso dentro de uma nova metodologia que potencialize as suas utilidades. Sempre pensando desta forma é que idealizamos as atividades que serão utilizados neste trabalho. Portanto, percebemos que nesta abordagem não se busca uma melhor transmissão de conteúdos, nem a informatização do processo ensino-aprendizagem, mas sim uma transformação educacional. Esta transformação deve significar uma mudança de paradigma e favorecer a formação de cidadãos mais críticos com autonomia para construir o próprio conhecimento. Mais ainda, que possam participar da construção de uma sociedade mais justa e com qualidade de vida mais igualitária. O uso de computadores na educação pode potencializar tais mudanças.

A abordagem sobre o uso de tecnologias na educação descrita anteriormente é chamada de construcionista, uma vez que visa a construção do conhecimento pelo aluno com a ajuda de ferramentas tecnológicas.

Como afirma Cotta Junior (2002, p.40)

> O construcionismo é, assim, uma síntese da teoria construtivista da psicologia do desenvolvimento e das oportunidades oferecidas pelas tecnologias para embasar a educação, incluindo a ciência e a Matemática, em atividades nas quais os estudantes trabalham em direção à construção de uma entidade inteligível em lugar da aquisição de conhecimentos e fatos sem um contexto no qual possam ser imediatamente usados e entendidos.

Papert (1994, p.124) opõe o construcionismo ao instrucionismo e

> [...] a palavra instrucionismo significa algo muito diferente de pedagogia ou a arte de ensinar. Ela deve ser lida num nível mais ideológico ou programático como expressando a crença de que a via para uma melhor aprendizagem deve ser o aperfeiçoamento da instrução — se a Escola é menos que perfeita, então sabemos o que fazer; ensinar melhor. O construcionismo é uma filosofia de uma família de filosofias educacionais que nega esta verdade óbvia.

Além de se tomar o devido cuidado com a forma de abordagem das novas tecnologias, temos o problema da resistência e da deficiência na formação dos futuros professores de Matemática, que muitas vezes passam todo o curso de graduação sem tomar contato com tais concepções.

Dewey (1979, p.70) diz:

> [...] assim, é fundamental que alunos e professores se engajem em atividades de investigação que desencadeiem uma reflexão sobre as experiências significativas; que sejam constantemente repensadas ou reconstruídas; e que permitam estabelecer conexões entre os conhecimentos adquiridos anteriormente para a construção ou reelaboração de novos conhecimentos.

No entanto os alunos, por crescerem em uma sociedade permeada de recursos tecnológicos, são hábeis manipuladores da tecnologia, mesmo aqueles pertencentes às classes menos favorecidas. A percepção desses alunos sobre tais

recursos é diferente da percepção do professor, que cresceu em uma época em que o convívio com a tecnologia era menos intenso, assim os alunos se familiarizam mais rapidamente com tais recursos. O professor, preparado para usar o computador como uma máquina de transmissão de informações através de softwares, questiona sobre qual será o seu papel e o futuro de sua profissão, uma vez que afloram na sociedade outros espaços de conhecimento e de aprendizagem fora do ambiente escolar.

Mesmo o professor preparado para utilizar o computador para a construção do conhecimento é obrigado a se questionar constantemente, pois geralmente se vê diante de um equipamento cujos recursos não consegue dominar em sua totalidade. Além disso, precisa compreender e investigar os temas ou questões que surgem no contexto e que se transformam em desafios para sua prática – uma vez que nem sempre são de seu pleno domínio, tanto no que diz respeito ao conteúdo quanto à sua estrutura.

Isto explica a grande resistência de muitos professores em utilizarem e incorporarem em sua prática pedagógica as novas tecnologias e, em especial, os computadores e notebooks.

Para diminuirmos estes obstáculos é necessário desenvolver nos professores em formação a tomada de consciência sobre como se aprende e como se ensina, levando-os a compreender a própria prática e a transformá-la em prol de seu desenvolvimento pessoal e profissional, bem como em benefício do desenvolvimento de seus alunos.

Como diz Almeida (2000a, p.46):

> [...] assim, a preparação do professor que vai usar o computador com seus alunos deve ser um processo que o mobilize e o prepare para incitar seus educandos a: aprender a aprender; ter autonomia para selecionar as informações pertinentes à sua ação; refletir sobre uma situação-problema; escolher a alternativa adequada de atuação para resolver o problema; refletir sobre os resultados obtidos; depurar seus procedimentos,

> reformulando suas ações; buscar compreender os conceitos envolvidos; ou levantar e testar outras hipóteses.

Valente (1993) considera que o conhecimento necessário para que o professor assuma esta postura "não é adquirido através de treinamento. É necessário um processo de formação permanente, dinâmico e integrador, que se fará através da prática e da reflexão sobre esta prática" – do qual se extrai o substrato para a busca da teoria que revela a razão de ser da prática.

Não se trata de uma formação apenas na dimensão pedagógica nem de uma acumulação de teorias e técnicas. Mas de uma formação que articula a prática, a reflexão, a investigação e os conhecimentos teóricos requeridos para promover uma transformação na ação pedagógica.

Em outro texto, Valente (1994, p.9) pergunta:

> Mas o que se espera desse sonhado processo educacional? Dentre as inúmeras qualificações, espera-se que os seus beneficiários sejam capazes de usar o conhecimento existente e se tornem pensadores ativos e críticos. Além disso, espera-se também que eles sejam capazes de conhecer o seu potencial intelectual, e utilizá-lo no desenvolvimento de suas habilidades e aquisição de novos conhecimentos.

O professor para alcançar o objetivo proposto precisa aprender a fazer seu planejamento pautado nas possíveis dificuldades dos alunos com relação ao tema da aula. Esse planejamento precisa contemplar também a mediação do professor durante a aula, no sentido de favorecer aos alunos momentos em que possam apresentar suas soluções para eventuais discussões.

Como diz Valente (1994, p.19):

> [...] na abordagem construcionista cabe ao professor promover a aprendizagem do aluno para que este possa construir o conhecimento dentro de um ambiente que o desafie e o motive para a exploração, a reflexão, a depuração de idéias e a descoberta. Antes de propor um plano, que deverá ser resultado de um trabalho cooperativo dos que estão

> envolvidos na aprendizagem, o professor precisa conhecer as potencialidades de seus alunos e suas experiências anteriores. Além disso, o professor cria situações para usar o computador como instrumento de cultura, para propiciar o pensar-com e o pensar-sobre-o-pensar e identificar o nível de desenvolvimento do aluno e seu estilo de pensar. Ao mesmo tempo, o educador é um eterno aprendiz, que realiza uma "leitura" e uma reflexão sobre sua própria prática. O professor procura constantemente, depurar a sua prática, o seu conhecimento. Sua atitude transforma-se em um modelo para o educando, uma vez que vivencia e compartilha com os alunos a metodologia que está preconizando.

De acordo com Bakhtin (2006, p.32), a compreensão é uma cadeia ideológica que nunca se quebra, pois ela se manifesta por meio de um material semiótico (o discurso interior) – advindo das experiências do mundo exterior – de uma consciência individual para outra consciência individual com experiências diferentes, é uma cadeia de ligação contínua. A compreensão é a aproximação de um signo apreendido de outros signos já conhecidos, é a resposta a um signo por intermédio de outro signo, que se move em direção para um novo signo (BAKHTIN, 2006, p. 32).

A respeito da sala de aula, Giordan (2008, p.62) diz:

> Esta aproximação nos parece bastante útil para focarmos as investigações sobre a formação de conceitos em situações de sala de aula, nas quais temos observado uma diversificada fonte de influências, desde a especificidade das relações sociais, dos papéis ocupados por alunos, professores e interlocutores próximos, passando por aspectos da organização do ensino como o caráter problematizador ou descritivo das atividades, a função e a diversidade dos meios mediacionais, chegando às formas particulares de interação verbal da sala de aula, como o caráter dialógico dos enunciados. Nesse sentido, não é possível reduzir o processo de construção de significados na sala de aula à lógica subjacente aos princípios teóricos das áreas de conhecimento.

Desta forma, podemos inferir que as situações de ensino não devem ser consideradas como um sistema simples, com alunos sendo classificados como

tabulas rasas do conhecimento. Esse sistema é complexo e necessita de um olhar mais crítico, que dê valor a ótica dialógica, aos processos semióticos e aos diversos meios mediacionais, sejam eles físicos ou não físicos, uma vez que cada indivíduo possui uma introspecção diferente dos conceitos advindos das relações sociais de ensino (COSTA, 2016, p. 49).

Ao transpormos as ideias de Bakhtin (2003, 2006) para a sala de aula, é necessário ficar claro que o enunciado cumpre o principal papel na comunicação verbal. Ele é organizado dentro e fora do indivíduo, é parte integrante do processo de compreensão, pois o resultado da introspecção (ato de compreensão), antes citado, só é alcançado por uma manifestação externa, sendo esta o enunciado e podendo ser classificada como compressão responsiva. Para Bakhtin (2003, p. 294-295), a fala não tem início e nem fim, é marcada pela alternância dos sujeitos falantes por meio do enunciado que, antes de tudo, se manifesta como enunciados dos outros e, depois de seu fim, como enunciados responsivos dos outros. “ O locutor termina seu enunciado para passar a palavra ao outro ou para dar lugar à compreensão responsiva ativa do outro"(Ibidem, p.295).

Se a fala não tem início e nem fim, mas é orientada pelo enunciado, então quem impõe os limites e direciona o enunciado? É o momento histórico, a situação em que os enunciados estão sendo realizados e a audiência que impõe restrições ao enunciado (BAKHTIN, 2006, p. 127), pois cada indivíduo desenvolve suas introspecções, apreciações e motivações, através de uma audiência social própria e bem definida (ibidem, p. 115). O enunciado é sempre direcionado a um interlocutor, a uma audiência organizada socialmente.

Voltando ao contexto escolar, onde encontramos uma audiência bem organizada, podemos observar que são vários os enunciados presentes nesse ambiente, que são identificados pelas diversas vozes que ali estão, seja a voz do professor, dos alunos, do livro didático, de um áudio, revista etc. Desse modo, a formação de conceitos que se desenvolve no cenário do ensino formal deve considerar as relações estabelecidas entre as vozes, que nos darão a possibilidade

de analisar a formação dos enunciados e identificar a evolução dos sentidos e significados destes a um determinado fim (GIORDAN, 2008).

Os conceitos de “sentido” e “significado” são distintos para Vigotski:

> O sentido de uma palavra é o agradado de todos os fatos psicológicos que surgem em nossa coexistência como um resultado da palavra. O sentido é uma formação dinâmica, fluida e complexa que possui diversas zonas que variam em sua estabilidade. O significado é apenas uma dessas zonas do sentido que a palavra adquire no contexto do discurso. É a mais estável, unificada e precisa dessas zonas. Em contextos diferentes, o sentido de uma palavra muda. Em contraste, o significado é um ponto comparativamente fixo e estável, o qual permanece constante com todas as mudanças do sentido da palavra que estão associadas ao seu uso em vários contextos (VIGOTSKI, 1987 apud DANIELS, 2011, p. 46).

Os alunos se apropriam de palavras e podem utilizá-las em contextos diferentes e com sentidos coerentes (ou não) com a Ciência, mas o significado mais estável perpassa por um processo complexo de apropriação e (re)elaborações do conceito, da capacidade de abstração e generalização, ao ter consciência sobre o conceito e que permite o uso e interpretação de diferentes situações e contextos.

A noção de sentido e significado que Bakhtin apresenta está relacionada ao tema, que é caracterizado como o sentido da enunciação completa. O tema é único e se apresenta em uma situação histórica concreta que originou a enunciação (BAKHTIN, 2006, p.131). A unicidade do tema se dá pelo sentido que qualquer enunciação toma a cada vez que é proferida, ou seja, um mesmo enunciado pode ser dito de diversas maneiras, dependendo da situação histórica que originou a enunciação, tomando outro sentido. Então, para compreender adequadamente a enunciação, não se pode perder de vista os elementos de seu tema, que são os verbais (palavras, entonações, formas morfológicas e sintática e sons) e os não verbais (gestos, expressões, interações). Isto é, deve-se tomar a enunciação em toda sua amplitude concreta para que possamos enxergar seu tema.

No contexto escolar, para que haja maiores interações e compreensões ativas dos conceitos, é preciso ampliar o horizonte apreciativo dos interlocutores, os alunos. Somente assim daremos maiores capacidades criativas a esses sujeitos para que possam transitar por diferentes grupos sociais ou auditórios, em diversificados contextos (GIORDAN, 2008, p.71). Isso é tão importante nas aulas de Matemática, que pode seguir esse mesmo caminho e facilitar o processo de significação dos conceitos de funções. Para esse propósito, é importante não reduzirmos todo o processo à esfera do cotidiano, nem mesmo ficarmos presos ao rigor científico que muitas vezes é conferido aos livros didáticos. Como já foi dito, é preciso alargamos o horizonte apreciativo, e isto pode ser feito pelo desenvolvimento de situações de ensino diferentes dos habituais ao tradicionalismo, pela valorização do diálogo e pela negociação de significados (MORTIMER & SCOTT, 2002).

3 METODOLOGIA

O referencial teórico utilizado no processo de ensino e pesquisa deste trabalho foi baseado na Teoria da Ação Mediada de James V. Wertsch, no qual buscou-se analisar a produção de significados dos alunos com as ferramentas utilizadas e as interações sociais entre eles.

Este estudo foi realizado no laboratório de informática do Departamento de Matemática da UNESP de Bauru fora do horário regular da disciplina Funções Elementares, com o acompanhamento do professor responsável pela disciplina. Os alunos participantes (12 alunos) foram voluntários da turma de primeiro ano do curso de Licenciatura em Matemática no período noturno da referida Universidade.

Inicialmente foi conversado com o professor responsável pela disciplina sobre os assuntos que seriam abordados na mesma e quais eram suas percepções em relação às dificuldades dos alunos em anos anteriores.

A percepção foi que depois de um semestre abordando as principais funções elementares no sentido de domínio, imagem, gráficos, paridade e injetividade por exemplo, observava-se erros simples de conceitos como diferenciar uma equação de uma função e confundir as raízes da função com pontos onde determinadas funções não são definidas.

O assunto principal da disciplina é funções e os principais tipos de funções que são estudados em Cálculo, chamadas funções elementares.

Na figura 3, temos o conteúdo da disciplina proposta.

Figura 3: Imagem do conteúdo da disciplina Funções Elementares

Conteúdo

1 Função de uma Variável Real
1.1. Definições, propriedades, representação gráfica, bijetividade e função inversa
1.2 Natureza e comportamento de funções
1.3 Funções Polinomiais

2. Funções Modular
2.1. Definição, domínio, imagem e representação gráfica
2.2. Propriedades da função exponencial
2.3. Equações e inequações modulares

3. Funções Exponenciais
3.1. Função exponencial: definição, domínio, imagem e representação gráfica
3.2. Propriedades da função exponencial
3.3. Equações e inequações exponenciais

4. Função Logarítmica
4.1. Definição, domínio, imagem e representação gráfica
4.2. Propriedades das funções logarítmicas
4.3. Equações e inequações logarítmicas

5. Funções Trigonométricas
5.1. Funções circulares diretas
5.2. Adição, multiplicação e bissecção de arcos
5.3. Transformação em produto
5.4. Equações fundamentais. Redução de arcos ao 1º quadrante
5.5. Funções circulares inversas

Fonte: Acervo do autor.

Desta forma, foi pensado em se realizar quatro encontros com os alunos, onde seriam propostas atividades a serem realizadas junto ao computador/notebook com auxílio do software GeoGebra afim de que tentássemos entender o porque desta dificuldade e com a realização destas atividades, fossem minimizadas as dúvidas que percebíamos sempre frente a nossos alunos.

Segundo Silva e Menezes (2001, p. 20) a pesquisa é qualitativa quando a forma de abordar o problema considera:

> [...] que há uma relação dinâmica entre o mundo real e o sujeito, isto é, um vínculo indissociável entre o mundo objetivo e a subjetividade do sujeito que não pode ser traduzido em números. A interpretação dos fenômenos e a atribuição de significados são básicos no processo de pesquisa qualitativa. Não requer o uso de métodos e técnicas estatísticas. O ambiente natural é a fonte direta para coleta de dados e o pesquisador é o instrumento-chave. É descritiva. Os pesquisadores tendem a analisar seus dados indutivamente. O processo e seu significado são os focos principais

de abordagem (SILVA; MENEZES, 2001, p. 20).

A tentativa de compreensão mais detalhada dos significados e situações são características da pesquisa qualitativa. Esse tipo de pesquisa é rico em dados descritivos que o pesquisador obtém no contato direto com os sujeitos da pesquisa, com o ambiente e com as conversas, preocupando-se em retratar as perspectivas dos participantes. Além disso, essa abordagem de pesquisa privilegia a compreensão dos comportamentos, dos valores, das crenças, das representações, das opiniões e das atitudes. O pesquisador investiga o sujeito com o intuito de compreender suas experiências ou como eles as interpretam e o modo como se estrutura o ambiente que convivem (BOGDAN; BIKLEN, 1994).

Em função destas características apresentadas por Silva e Menezes (2001) e Bogdan e Biklen (1994) consideramos esta pesquisa como de cunho qualitativo.

A estratégia de pesquisa utilizada foi o estudo de caso qualitativo, pois segundo Platt (1992) citado por Godoy (2010), esse tipo de estudo tem a característica fundamental de envolver a busca por significados que são atribuídas pelos sujeitos às suas vivências e experiências pessoais.

Segundo Stake(1994) citado por Godoy (2010):

> [...] quando falamos em estudo de caso, não estamos nos referindo a uma escolha metodológica, mas, fundamentalmente, à escolha de um determinado objeto a ser estudado, que pode ser uma pessoa, um programa, uma instituição, uma empresa ou determinado grupo de pessoas que compartilham o mesmo ambiente e a mesma experiência (STAKE, 1994 apud GODOY, 2010, p. 119).

Para a etapa da coleta de dados registrou-se o áudio das falas e o vídeo da tela de computador (com o apoio do software OBS - Open Broadcaster Software) (https://obsproject.com/pt-br) onde ocorreram as manipulações do GeoGebra. Essa forma de conduzir a coleta de dados teve como objetivo, coletar

as descrições, conversas e diálogos, bem como seus apontamentos por escrito e manipulação do GeoGebra, com o intuito de preservar os dados a serem analisados (BOGDAN; BIKLEN, 1994).

Para que essa coleta de dados oferecesse os subsídios necessários, a participação dos alunos foi de acordo com o termo de consentimento.livre e esclarecido. (Anexo V)

Em quatro datas combinadas antecipadamente com os alunos, fomos (professor da disciplina e pesquisadores deste trabalho) ao laboratório de informática realizar as atividades propostas por nós. Vale destacar que, antes do início do primeiro encontro, foi apresentado o termo de consentimento livre e esclarecido para cada um dos entrevistados e todos concordaram e assinaram. As atividades foram idealizadas em quatro módulos, a saber:

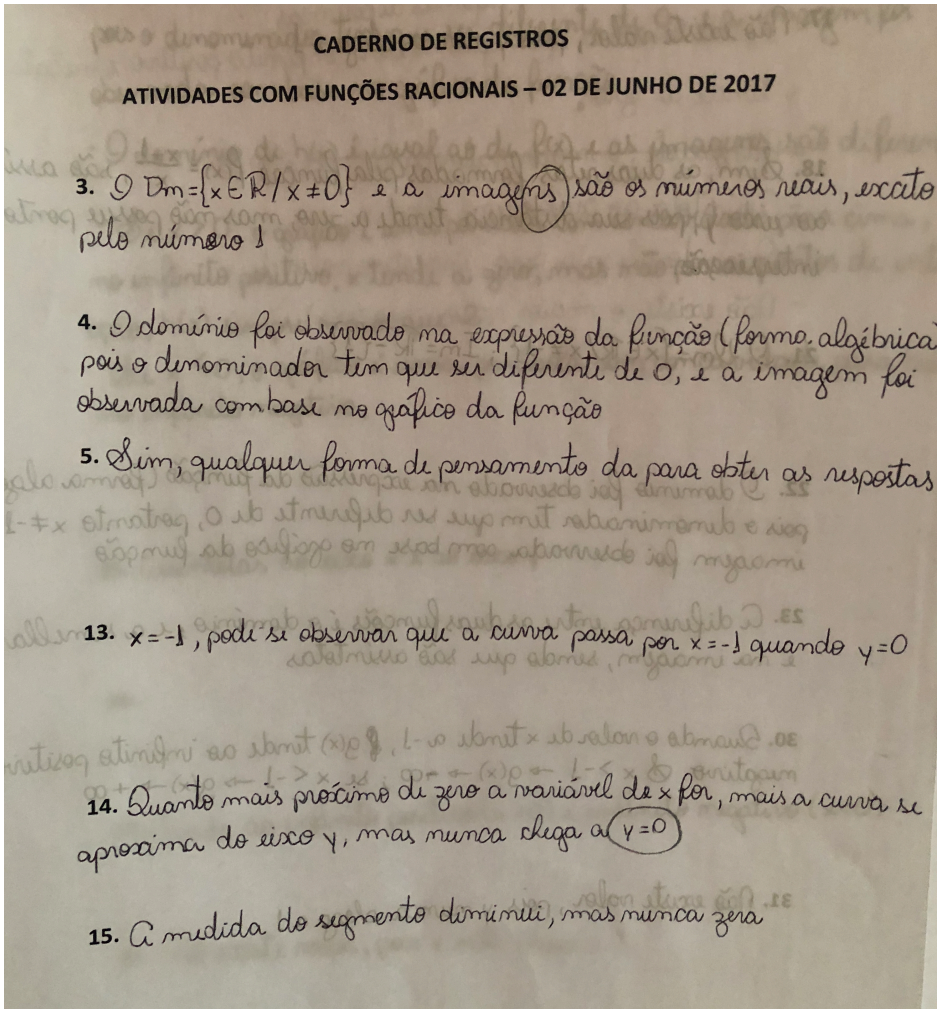
- Módulo 1: Atividades com Funções Quadráticas
- Módulo 2: Atividades com Funções Racionais
- Módulo 3: Atividades com Funções Exponenciais e Logarítmicas
- Módulo 4: Atividades com Funções Trigonométricas

Os encontros seriam a cada duas semanas para que não sobrecarregássemos os alunos, uma vez que os encontros eram fora do horário de aula e para que os mesmos fossem assimilando melhor o que estávamos pretendendo. Devido a um feriado, teve um encontro que ocorreu com três semanas de intervalo.

Os alunos foram organizados em duplas, com exceção de um trio, de forma que interagissem ao realizar as atividades. Para registrar esta interação, os áudios de cada grupo foram gravados e as telas durante todas as atividades também, assim poderíamos ouvir e ver o que estavam fazendo ao mesmo tempo. Além disso, os alunos registravam as repostas de suas conclusões em uma folha de repostas (figura 4) entregues a eles. Assim, tínhamos o registro das conversas,

as imagens do que estavam fazendo no GeoGebra e como formalizavam suas conclusões por escrito.

Figura 4: Imagem dos registros de um grupo em um encontro



CADERNO DE REGISTROS

ATIVIDADES COM FUNÇÕES RACIONAIS – 02 DE JUNHO DE 2017

3. O $Dm=\{x \in \mathbb{R} / x \neq 0\}$ e a imagens são os números reais, exceto pelo número 1

4. O domínio foi observado na expressão da função (forma algébrica) pois o denominador tem que ser diferente de 0, e a imagem foi observada com base no gráfico da função

5. Sim, qualquer forma de pensamento da para obter as respostas

13. $x=-1$, pode se observar que a curva passa por $x=-1$ quando $y=0$

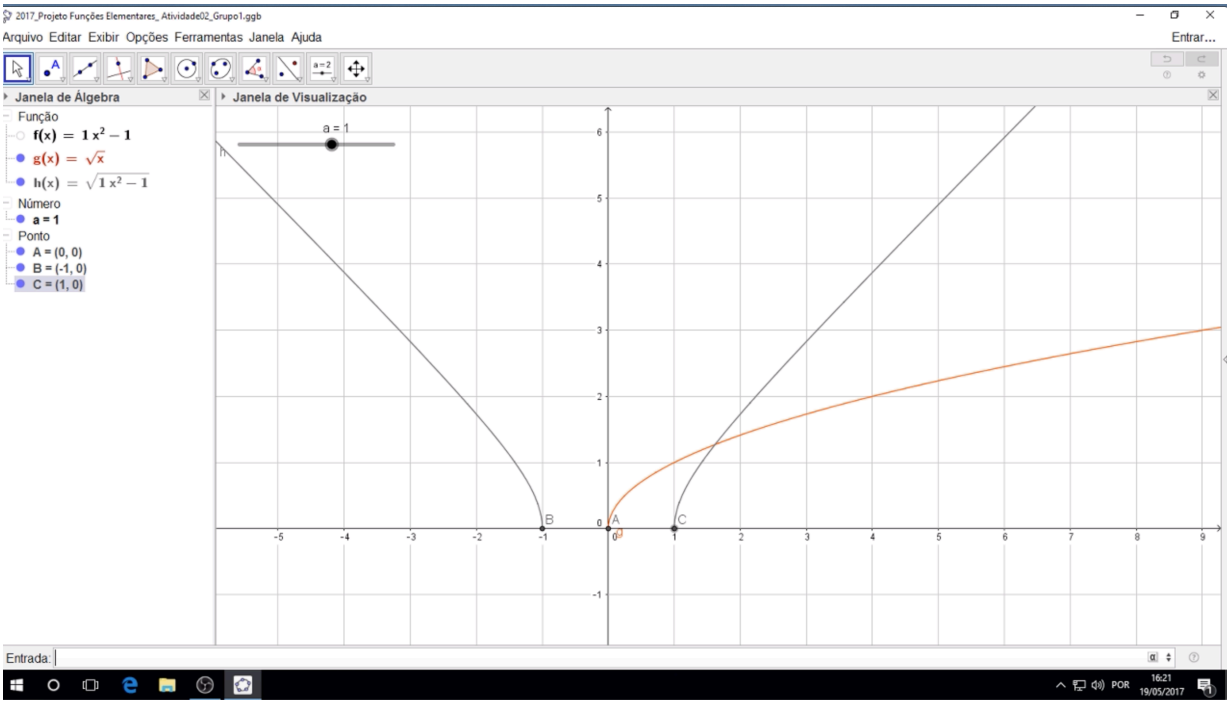
14. Quanto mais próximo do zero a variável de x for, mais a curva se aproxima do eixo y, mas nunca chega a $(y=0)$

15. A medida do segmento diminui, mas nunca zera

Fonte: Acervo do autor.

Na figura 5 segue uma imagem da tela registrada com o OBS em um grupo.

Figura 5: Imagem da tela de computador capturada pelo OBS

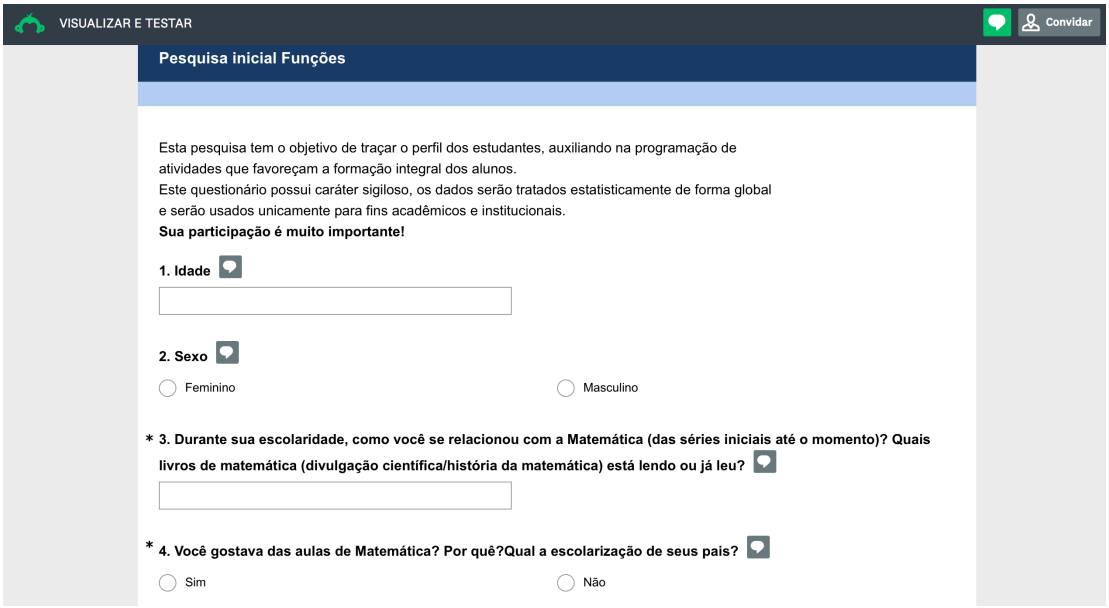


Fonte: Acervo do autor.

As atividades propostas foram sendo elaboradas conforme ocorriam os encontros, de modo que pensávamos em ajustes de acordo com o que íamos observando em termos de dificuldades e ideias para exploração dos assuntos tratados.

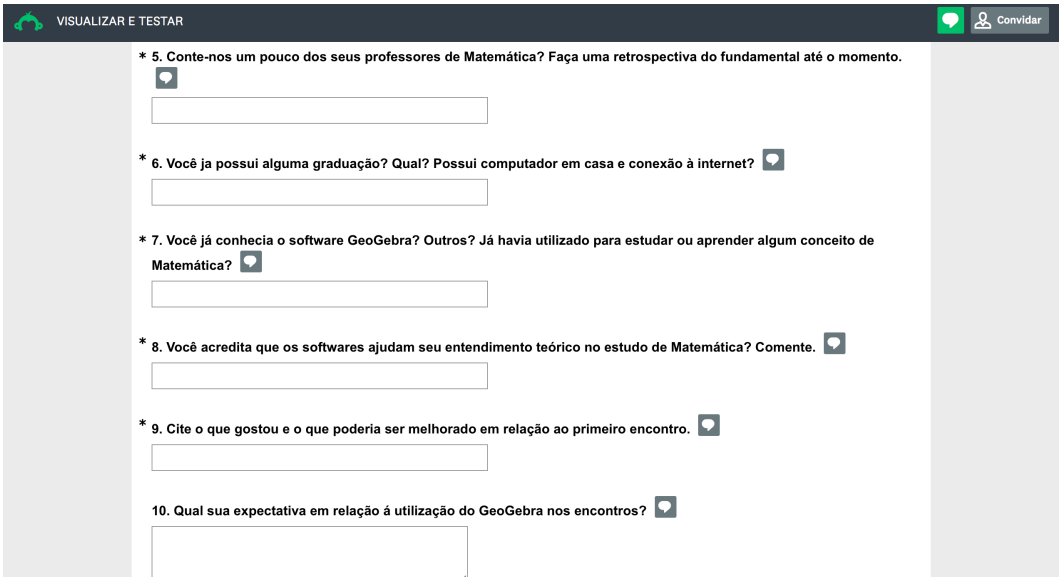
Ainda durante os encontros, foi enviado através do *Survey Monkey* um questionário para ser respondido on line para que conhecêssemos o perfil dos alunos e o quanto tinham conhecimento de softwares ligados ao ensino de Matemática. Nas figuras 6 e 7 seguem imagens do questionário proposto.

Figura 6: Questionário criado no Survey Monkey



Fonte: Acervo do autor

Figura 7: Continuação do questionário criado no Survey Monkey



Fonte: Acervo do autor.

De acordo com Merriam (1988) citado por Godoy (2010), dependendo da natureza dos seus objetivos, o estudo de caso pode ser realizado por três tipos

diferentes: descritivo, interpretativo e avaliativo. O segundo tipo, o estudo de caso interpretativo, foi a opção escolhida, pois busca uma rica descrição do fenômeno estudado, procura padrões nos dados, possibilitando que o fenômeno seja interpretado ou teorizado.

Na tabela 1 apresentamos um perfil dos alunos envolvidos na pesquisa, onde a sigla $LU21^{M}$ representa um aluno do sexo masculino de 21 anos de idade e $IS19^{F}$ representa um aluno do sexo feminino de 19 anos de idade. As duas primeiras letras são iniciais dos nomes dos alunos.

Tabela 1: Perfil dos alunos envolvidos na pesquisa

Aluno	Idade(anos)	Comp. e internet em casa	GeoGebra	Encontros
$LU21^{M}$	21	Sim	Sim	1,2,3 e 4
$MA18^{M}$	18	Sim	Não	1,3 e 4
$EL35^{M}$	35	Sim	Não	1,2,3 e 4
$AL24^{M}$	24	Sim	Não	1,2 e 4
$GU18^{M}$	18	Sim	Não	1,2,3 e 4
$IS19^{F}$	19	Sim	Não	1,2 e 4
$VE18^{F}$	18	Sim	Não	2 e 4
$NA35^{F}$	35	NR	NR	1,2 e 4
$JA21^{F}$	21	NR	NR	1,2 e 4
$MI18^{F}$	18	NR	NR	1 e 2
$GI18^{F}$	18	NR	NR	3 e 4
$LE18^{M}$	18	NR	NR	3 e 4

Fonte: Elaboração própria

Tivemos a participação de 12 alunos no total (40% da turma de alunos ingressantes), mas somente 3 destes participaram de todos os encontros. O questionário enviado pelo *Suvey Monkey* foi respondido por 7 alunos. Na questão que levantamos como os mesmos se relacionavam com a Matemática no Ensino Básico, todos afirmaram gostarem e sentirem facilidade com a disciplina. Dois alunos relataram terem professores motivadores/inspiradores que o levaram a cursar a Licenciatura. Um aluno manifestou o interesse ao participar da OBMEP.

Somente um aluno já possui graduação (FATEC), e todos os alunos possuem computador/notebook com acesso à internet em casa. Um único aluno respondeu conhecer o GeoGebra, através de demonstrações realizadas pelo seu professor do ensino médio.

Para finalizar a análise, realizamos uma entrevista, após um ano do último encontro, que foi gravada em áudio sobre a percepção do ponto de vista deles (alunos) das atividades realizadas e se haviam dado continuidade na utilização do GeoGebra e os recursos computacionais em outras disciplinas ou não. Nessa entrevista/conversa nossa ideia foi dar um retorno aos alunos do que haviam realizado, de algumas percepções que tivemos e procurar analisar o efeito da mediação causado nos mesmos após os encontros.

4 ANÁLISE E RESULTADOS

As atividades foram aplicadas a alguns alunos voluntários de uma turma da disciplina Funções Elementares do primeiro ano (primeiro semestre) do curso de Licenciatura em Matemática noturno de Bauru na UNESP, com o acompanhamento do professor responsável pela disciplina. A carga horária desta disciplina é de 4 aulas semanais com 50 minutos. A aplicação foi realizada nos meses de maio, junho e julho em um laboratório de informática da referida Universidade fora do horário de aula regular.

O conteúdo de Funções Elementares é normalmente apresentado de forma tradicional. Os gráficos das funções são apresentados na lousa, sendo estáticos e as mudanças ocorridas devido a diferentes coeficientes dependendo da função é entendido na teoria, muitas vezes sem a visualização em softwares. Da mesma forma, no ensino tradicional espera-se que o aluno consiga, a partir da expressão algébrica de funções, entender o significado destas expressões no gráfico desenhado, suas variações, raízes, domínio e imagem. Com a abordagem de ensino via tecnologias da informação proposta neste trabalho acredita-se que a construção do conhecimento tenha ocorrido de forma mais significativa, com maior dinamismo no ensino e aprendizagem, respeitando o ritmo de aprendizagem de cada grupo e explorando um pouco mais o caráter investigativo e dedutivo dos assuntos abordados.

Após os encontros, foram assistidos todos os vídeos gerados. No primeiro e segundo encontros foram quatro grupos (três duplas e um trio) onde foram gerados em torno de 21 horas de gravação. No terceiro encontro foram três grupos (todas duplas) gerando 8h de vídeos. Neste encontro, os alunos estavam preocupados com avaliações do curso regular e por isso tivemos algumas abstenções. No quarto encontro, foram 4 grupos (três trios e uma dupla) que geraram 11h de vídeos.

Neste último encontro tivemos a participação de mais alunos que no primeiro encontro e percebemos que isso ocorreu devido a conversas dos mesmos

em sala de aula sobre o quão interessante estavam sendo os encontros.

4.1 PRIMEIRO ENCONTRO

Neste primeiro encontro, tivemos a participação de 9 alunos que foram divididos em três duplas e um trio de acordo com a afinidade existente entre eles. Os grupos com os integrantes é mostrado na tabela 2.

Tabela 2: Grupos e participantes do primeiro encontro

Grupo 1	$LU21^{M}$ e $MA18^{M}$
Grupo 2	$IS19^{F}$ e $NA35^{F}$
Grupo 3	$JA21^{F}$ e $GU18^{M}$
Grupo 4	$EL35^{M}$, $AL24^{M}$ e $MI18^{F}$

Fonte: Elaboração própria.

Inicialmente, apresentamos o termo de consentimento a eles e após todos concordarem iniciamos mostrando como os mesmos deveriam proceder para que suas atividades fossem gravadas no OBS.

Exposto isso, disponibilizamos uma folha de atividades com alguns comandos básicos do GeoGebra que utilizaríamos na atividade proposta do dia. Os alunos foram reconhecendo os comandos sem preocupação com tempo e demoraram entre 40min a 50 min nesta atividade.

Em seguida, entregamos a folha com a atividade (figura 8) proposta e a folha que chamamos de caderno de registros.

Figura 8: Folha de atividades do primeiro encontro

ATIVIDADE COM FUNÇÃO QUADRÁTICA – 19/05/2017

Atividade 1

1. No campo "Entrada" digite a função $f(x) = ax^2 - 1$
2. Como "a" não foi definido, será criado um controle deslizante para valores possíveis de "a"
3. Movimente o controle deslizante de "a" para variar os valores do mesmo e observe os gráficos de acordo com os valores do parâmetro "a"
4. Que conclusões você tira sobre os gráficos? Anote as observações do grupo no caderno de registros.
5. **Salve o gráfico com o nome: 2017_Projeto Funções Elementares_Atividade 01_Grupo *"número do seu grupo"***
6. Qual o domínio e a imagem desta função? Você consegue generalizar o domínio e a imagem de acordo com os valores do parâmetro "a"? Anote no caderno de registros de seu grupo.
7. Coloque o controle deslizante em 1. Existem raízes reais para a função $f(x)$? (OBS.: Utilize o comando Raiz[*função, valor inicial, valor final*] = Raiz[*f*,-10,10] para determinar as raízes da função *f*)
8. **Salve o gráfico com o nome: 2017_Projeto Funções Elementares_Atividade 02_Grupo *"número do seu grupo"***
9. Voltando à função $f(x) = ax^2 - 1$, existe uma expressão para se determinar as raízes? Qual? Desenvolva isso em seu caderno de registros.
10. Movimente o controle deslizante. Observe o que acontece e anote suas observações no caderno de registros.
11. Digite, agora, no campo "Entrada" a função $g(x) = \sqrt{x}$ (g(x)=sqrt(x))
12. Faça a função composta $h(x) = g \circ f\ (x) = \sqrt{ax^2 - 1}$
13. Movimente o controle deslizante de "a" para variar os valores do mesmo e observe os gráficos de acordo com os valores do parâmetro "a".
14. Que conclusões você tira sobre os gráficos? Anote suas observações no caderno de registros.
15. Qual o domínio e a imagem destas funções? Você consegue generalizar o domínio e a imagem de acordo com os valores do parâmetro "a"?
16. Quais as semelhanças e diferenças entre os domínios e a imagens das três funções, f, g e h? Anote em seu caderno de registros.
17. Coloque o controle deslizante em 1. Existem raízes reais para essas duas funções? (Utilize o comando Raiz[*função, valor inicial, valor final*] para determinar as raízes das funções *g* e *h*, caso existam.)
18. Movimente o controle deslizante. Observe o que acontece e anote suas observações no caderno de registros.
19. Caso vocês tenham obtido raízes para as duas funções, compare-as e explique o que está acontecendo e por quê.
20. **Salve o gráfico com o nome: 2017_Projeto Funções Elementares_Atividade 03_Grupo *"número do seu grupo"***
21. Digite, agora, no campo "Entrada" a função $q(x) = \sqrt[3]{ax^2 - 1}$; (Lembre-se que a raiz cúbica pode ser dada pela potência 1/3)
22. Movimente o controle deslizante de "a" para variar os valores do mesmo e observe os gráficos de acordo com os valores do parâmetro "a".
23. Que conclusões você tira sobre os gráficos? Anote suas observações no caderno de registros.
24. Existem raízes reais? Existe uma expressão para se determinar as raízes? Qual?
25. Compare as raízes das funções *f, h* e *q*.
26. Qual o domínio e a imagem desta função? Você consegue generalizar o domínio e a imagem de acordo com os valores do parâmetro "a"?
27. Qual as semelhanças e diferenças entre os domínios e imagens dessas funções?
28. **Salve o gráfico com o nome: 2017_Projeto Funções Elementares_Atividade 04_Grupo *"número do seu grupo"***

Fonte: Acervo do autor.

Ao analisar os vídeos com os áudios deste encontro, encontramos uma diferença entre os grupos no sentido de independência e conhecimento prévio dos assuntos abordados, uma vez que as funções estudadas já deveriam ser do conhecimento deles, pois são vistas no ensino médio.

Na tarefa de reconhecimento do software tivemos as seguintes observações:

- Grupo 1

- buscam entender os comandos testando e retestando várias vezes;

- têm uma excelente interação, conversando bastante para entrarem em um consenso e esclarecerem suas dúvidas;

- possuem bom domínio dos conceitos matemáticos básicos estudados na atividade.

- Grupo 2

- menos independentes que o grupo 1 em relação ao software (solicitaram 3 vezes a ajuda do professor para entenderem determinado comando);

- existe uma diferença de idade maior entre os participantes desta dupla e por isso, a aluna mais nova “confia” na aluna mais velha, em relação às dúvidas;

- Grupo 3

- no reconhecimento do software, analisavam o comando antes de digitar tentado entender o que o comando faria;

- exploraram bastante o recurso do zoom para observarem onde ocorriam as intersecções de gráficos com os eixos coordenados;

- único grupo que percebeu a mistura de cor dos gráficos na composição de funções.

- Grupo 4

- único grupo com três participantes, mas um dos membros participa menos que os demais;

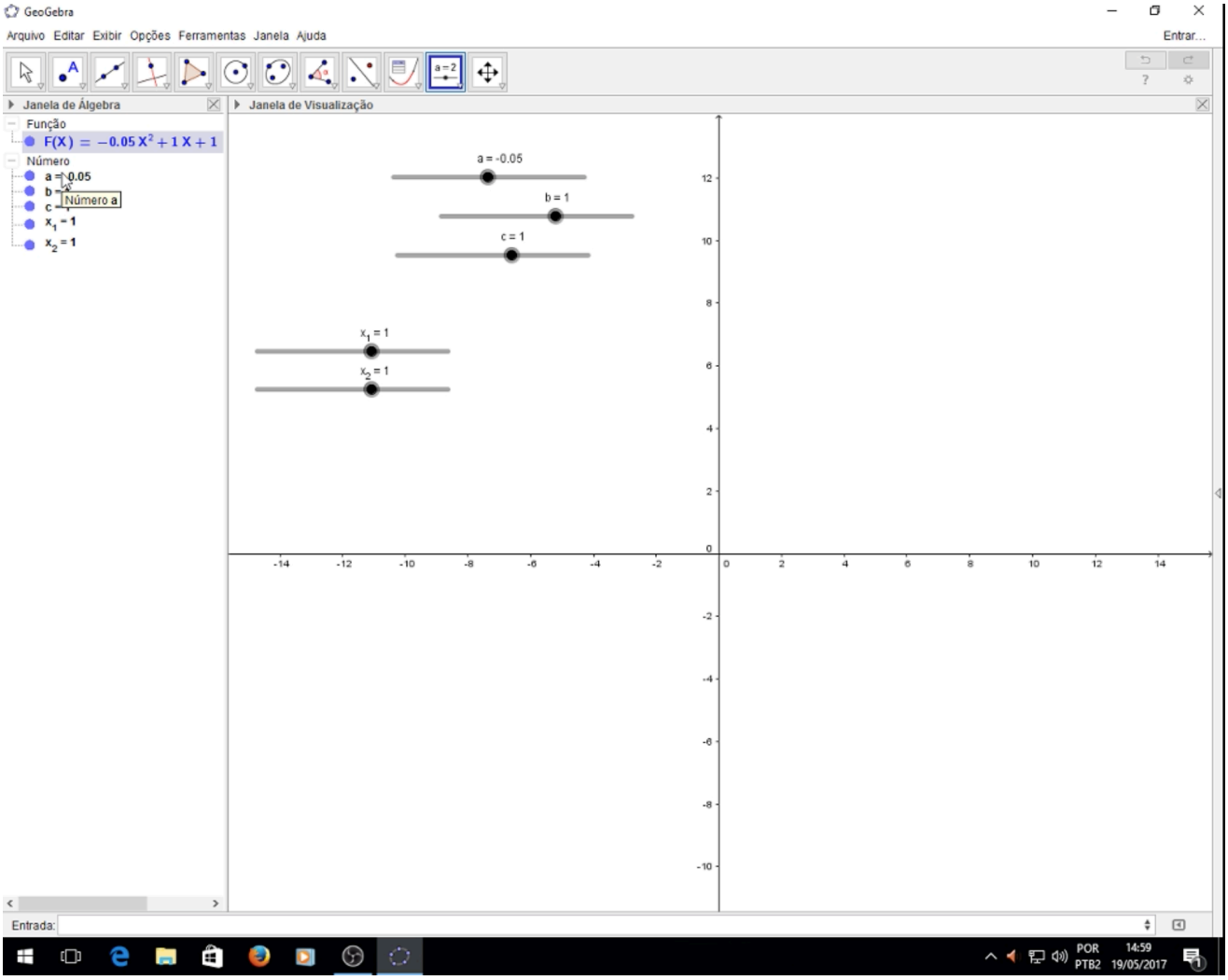
- utilizaram uma versão do GeoGebra diferente (os ícones tinham uma apresentação diferente, mas com as mesmas funções) dos demais e utilizaram um notebook ao invés de um desktop;

- exploraram bem os comandos de reconhecimento.

Uma observação interessante em relação a todos os grupos ocorreu numa atividade de reconhecimento do software GeoGebra, onde deveriam digitar

uma função $f(x) = ax^2 + bx + c$, delimitando o domínio da mesma de x_1 a x_2 através de controles deslizantes para os parâmetros *a, b, c,* x_1 *e* x_2. Ocorreu que ao criar os controles deslizantes de x_1 e x_2, os mesmos assumiram o valor numérico igual a um. Quando digitaram a expressão da função, não aparecia nenhum gráfico na tela do GeoGebra, já que não existia intervalo de domínio para isso. (figura 9) Todos os grupos demoraram a entender que x_2 deveria ser maior que x_1 para existir o gráfico (para isso deveriam mover os controles deslizantes de x_1 ou x_2). Apagavam o comando e redigitavam de novo, acreditando que haviam feito algo de errado. O interessante deste fato aparentemente simples é que isso não ocorre no caderno ou lousa, pois estamos habituados a desenhar o gráfico (se soubermos como é) sem pensar no domínio da função. Esta instabilidade criada nesta situação mostrou a importância de se analisar o que está sendo feito e pensar a respeito do porque não estava sendo mostrado o gráfico, o que não ocorreria sem o software.

Figura 9: Imagem da tela de um grupo na atividade de reconhecimento do GeoGebra

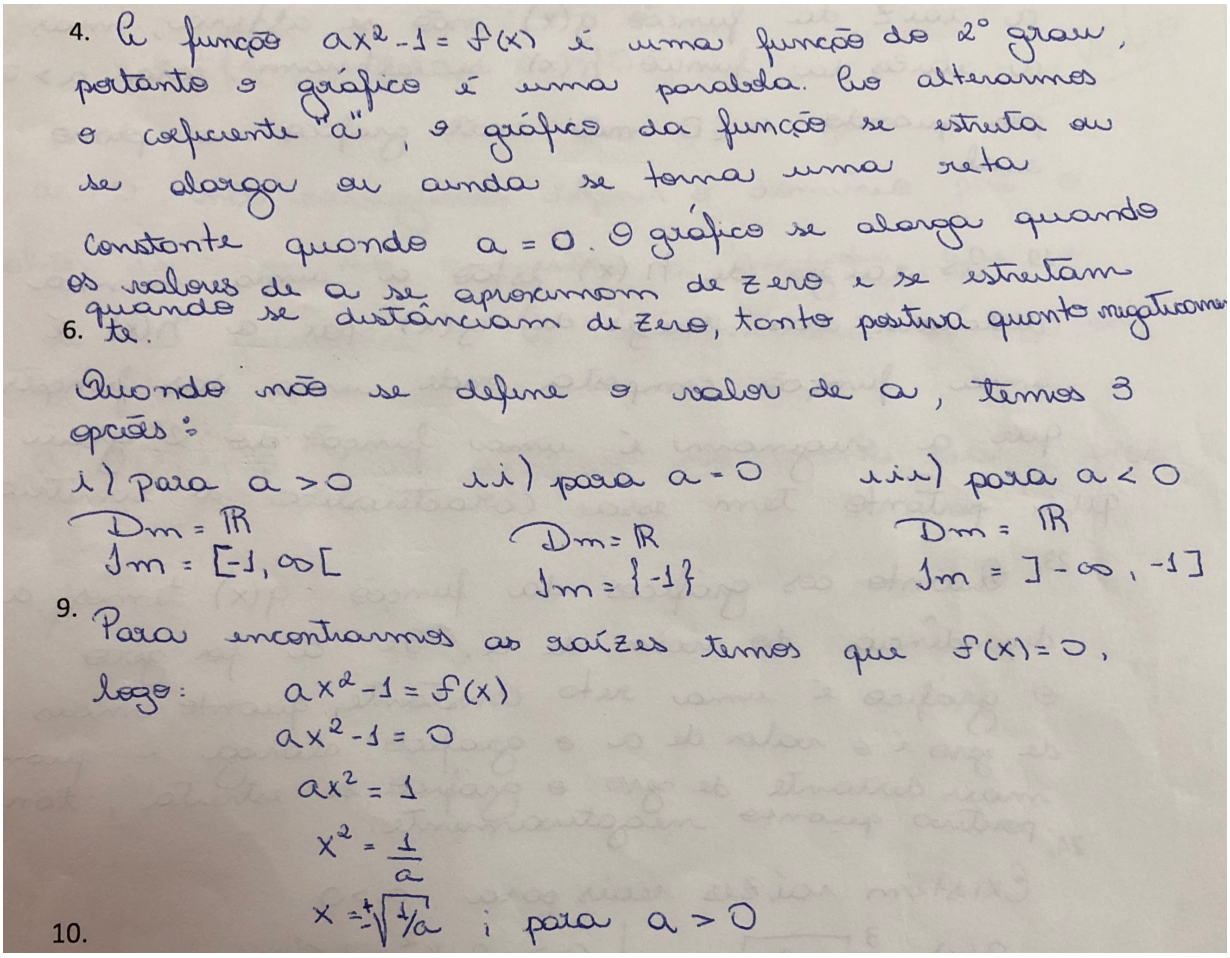


Fonte: Acervo do autor.

Nos itens 1 a 10 da atividade proposta, pedimos aos alunos que digitassem a função $f(x) = ax^2 - 1$, e explorassem as variações quanto a forma dos gráficos, domínio, imagem, raízes e generalizações possíveis a partir do parâmetro *a* da função.

O grupo 1 utilizou o software para explorar as variações de forma do gráfico e perceber as raízes. Discutiram as questões de forma bastante objetiva e formalizaram muito bem as respostas de todas as questões propostas como podemos observar na figura 10.

Figura 10: Imagem do caderno de respostas do grupo 1

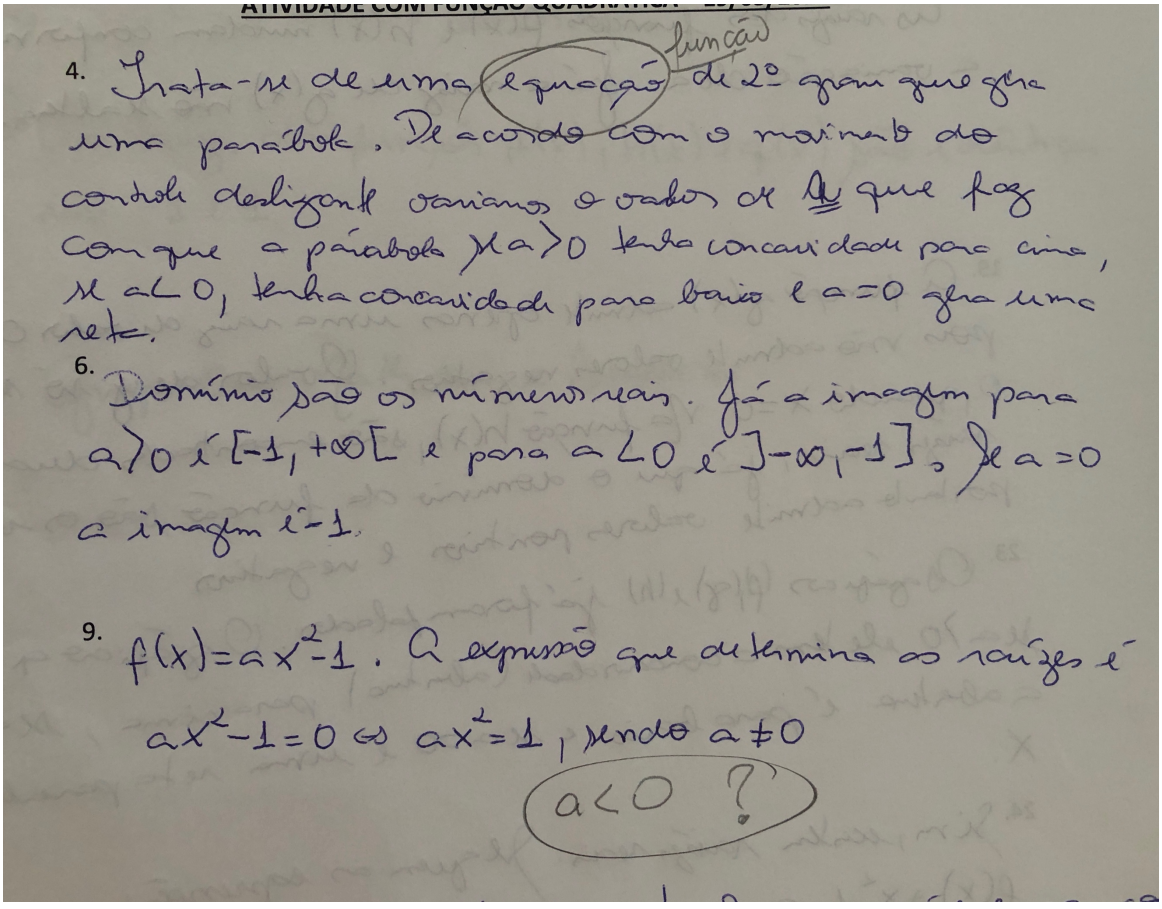


Fonte: Acervo do autor.

O grupo 2 também trabalhou bem as questões, mas cometeram alguns enganos na formalização das respostas e nas falas. Confundiram equação com função (item 4 na figura 11) e na expressão da generalização das raízes da função escreveram uma equação que não poderia ser resolvida com o parâmetro *a* negativo, ($ax^2 = 1$) onde tomaram o cuidado de definir que $a \neq 0$, mas se *a* for negativo a equação não terá raízes reais. Isso mostra que a exploração do software não consegue esclarecer algumas dificuldades de conhecimento de base Matemática, mas com atividades deste tipo, podemos identificar estes erros de maneira mais fácil do que somente na aula tradicional onde o professor apenas expõe o conteúdo. Assim, acreditamos ser este o melhor caminho no sentido de um melhor processo de ensino e aprendizagem. Este grupo apresentou uma certa

dificuldade em definir o domínio e a imagem da função e utilizaram o gráfico no GeoGebra para compreender, além de pedirem “ajuda” ao grupo 1 sobre a diferença entre domínio e imagem de uma função. Mesmo com a ajuda, não conseguiam entender se o intervalo da imagem era aberto ou fechado no valor -1. Recorreram ao gráfico gerado pelo software aplicando “zoom” para ver se era próximo de -1 ou atingia o valor -1. Mesmo observando no gráfico, uma aluna dizia que poderia ser muito próximo e não tocar (ideia de limite, sendo que não tiveram a disciplina de Cálculo ainda). Outro fato interessante na “conversa” desta dupla foi em determinado momento uma das alunas “culpar” não saberem o domínio e a imagem da função porque não haviam tido este assunto na aula de Funções Elementares.

Figura 11: Imagem do caderno de respostas do grupo 2



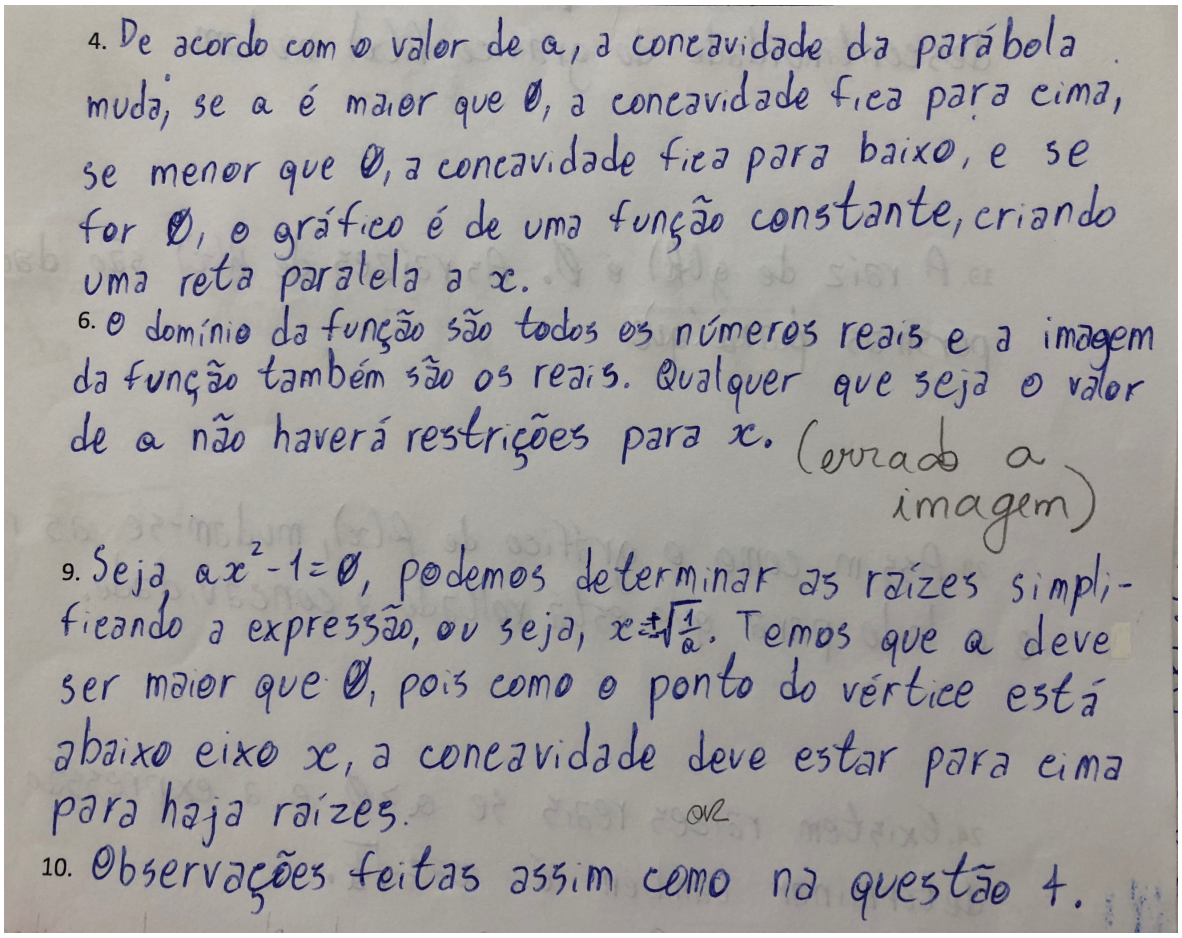
Fonte: Acervo do autor

O grupo 3 teve dificuldade em definir o domínio e a imagem da função. Através do áudio e da formalização escrita, confundem o domínio com a imagem da função. Assim concluíram que como não havia restrições para *x*, a imagem seria todo o conjunto dos números reais (figura 12). Neste caso, o gráfico gerado no software não ajudou a dupla a entender, pois havia uma dúvida na definição de domínio e imagem no grupo. Assim a construção de significados dos conceitos não ocorreu da forma que pretendíamos nesta parte do trabalho. Para encontrar as raízes da função, utilizaram o GeoGebra para confirmar o que estavam pensando e formalizando no caderno de respostas e interagiam muito bem entre si.

É importante observarmos, que a interação, os meios mediacionais inseridos, os conhecimentos prévios e os conceitos outrora estudados, passaram a influenciar de maneira significativa a produção de novos significados e algumas ideias começavam a ser reformuladas. Portanto, não podemos falar em produção de significados dos conceitos apenas considerando as ideias dos alunos no momento presente e num contexto isolado, sendo mais adequado nos referirmos aos estudantes agindo com ferramentas socioculturais (WERSTCH, 1991a, 1991b, 1998). Giordan (2008, p.292) ainda alerta que:

> O que se inicia em um contexto situacional de uma atividade conjunta, mais tarde se torna contexto mental compartilhado de uma experiência, permitindo que o professor e alunos continuem o processo de elaboração de ideias apenas por meio da fala, da escrita ou de outras linguagens. Neste movimento da sala de aula, a atividade e o discurso do passado tornam-se contexto mental compartilhado no presente.

Figura 12: Imagem do caderno de respostas do grupo 3

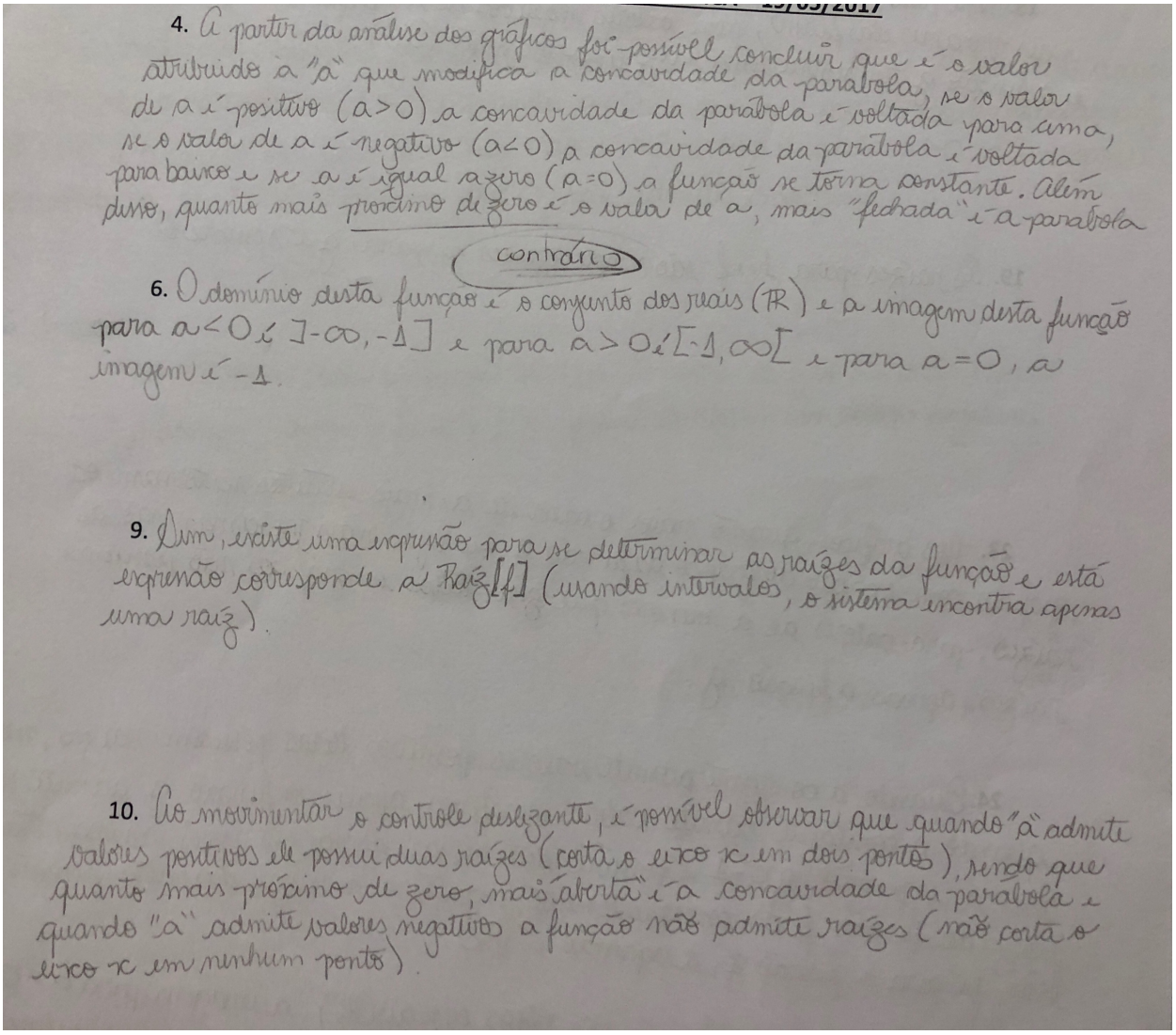


Fonte: Acervo do autor

O grupo 4 entendeu bem as questões, mas cometeram um engano na formalização sobre a forma com que a parábola torna-se mais “aberta” ou mais “fechada” com a mudança de valores para o parâmetro *a* (figura 13). Por meio do áudio entenderam e observaram corretamente, mas na formalização da resposta no caderno escreveram o contrário. Nota-se que este engano aconteceu por um pouco de falta de atenção do “redator” do grupo, pois o grupo era composto por três alunos sendo que ficou para um deles a função de redigir enquanto os outros dois discutiam mais e manipulavam o software. Em outro item, formalizaram corretamente esta questão levando à conclusão de uma falta de atenção no momento. No item de generalização das raízes da função não entenderam a ideia da proposta e colocaram o comando do software que indicava as raízes da função. Isto nos leva

a refletir que embora para quem pensa na atividade, algumas ideias estejam muito claras, nem sempre isso acontece com nossos alunos.

Figura 13: Imagem do caderno de respostas do grupo 4

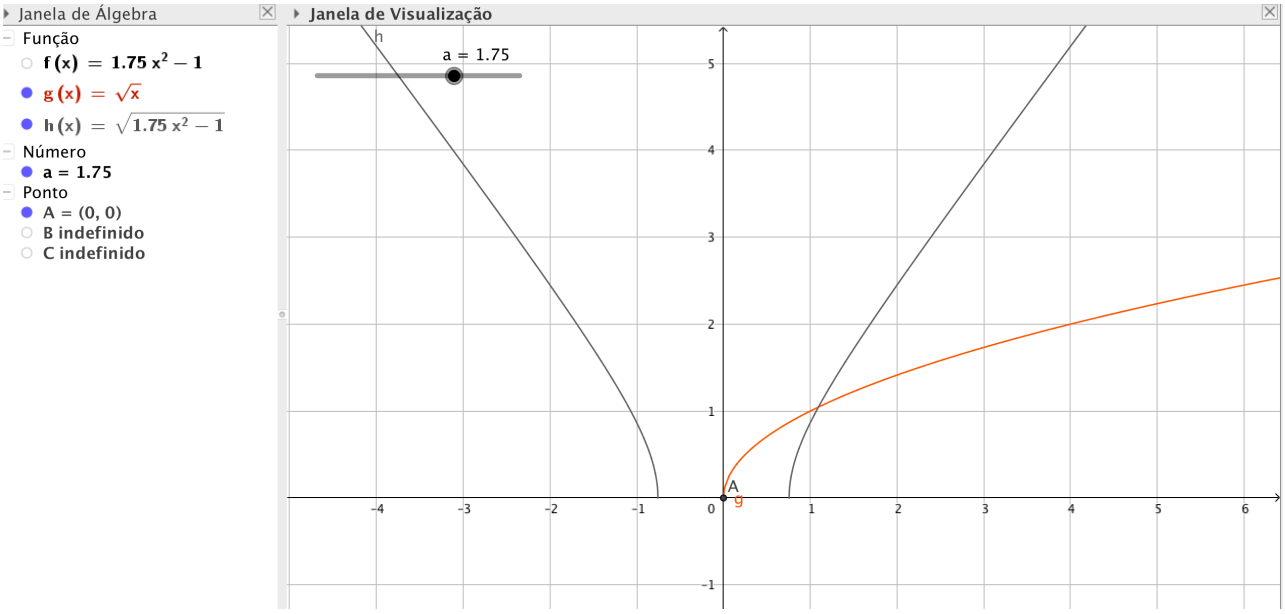


Fonte: Acervo do autor.

Nos itens 11 a 19 da atividade, pedimos que os alunos digitassem as funções $g(x) = \sqrt{x}$ e a função composta $h(x) = gof(x) = \sqrt{ax^2 - 1}$ (figura 14). Nossa ideia ao propor estes itens é que o aluno construísse o conceito de domínio, imagem e forma do gráfico de maneira bem clara com a ajuda do software, já que eles poderiam fazer várias mudanças nas funções e respectivos gráficos e entender

como estas variações influenciavam as funções comparando-as para entender de que forma cada “parte” influencia as mesmas nestes quesitos.

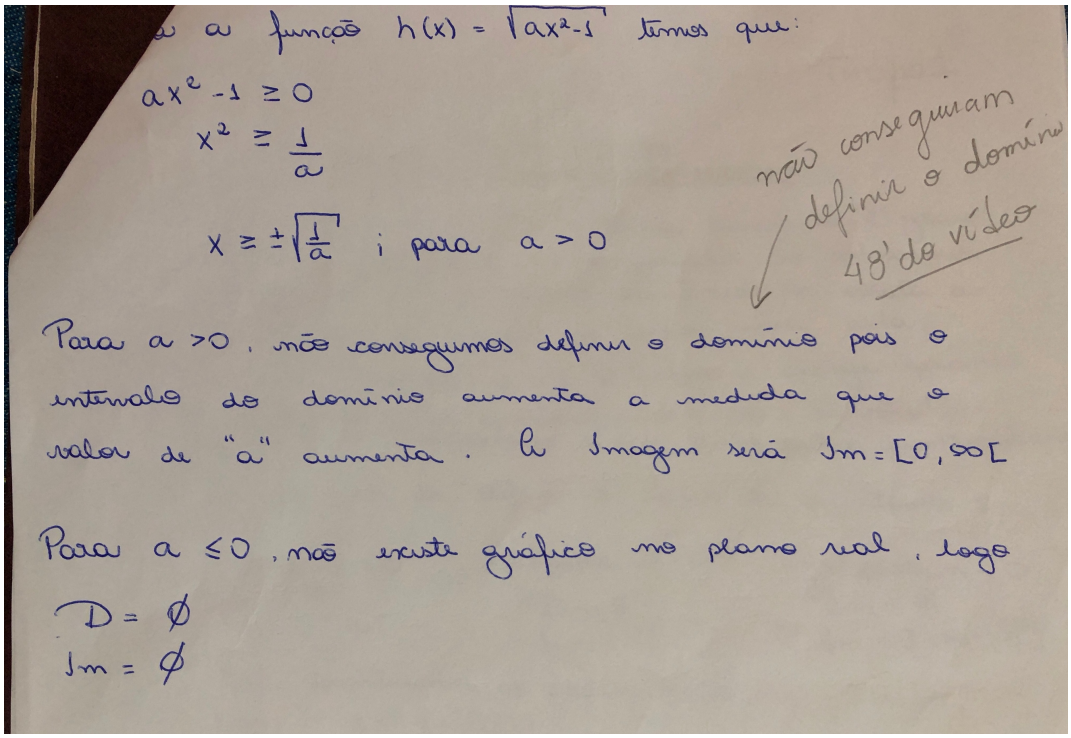
Figura 14: Imagem do GeoGebra de um dos grupos



Fonte: Acervo do autor.

O grupo 1 explorou muito bem o software, as funções e construiu as ideias e argumentações de forma bastante clara e correta. Quando perguntamos sobre o domínio da função h(x) responderam que não era possível defini-lo sem saber o valor do parâmetro *a*. Nossa ideia neste ponto era que os grupos generalizassem como haviam feito para a função f(x), ou seja, definir o domínio para intervalos do parâmetro *a*. O que ocorreu na verdade foi um erro ao tentar encontrar o intervalo do domínio como podemos ver na figura 15.

Figura 15: Imagem do caderno de respostas do grupo 1



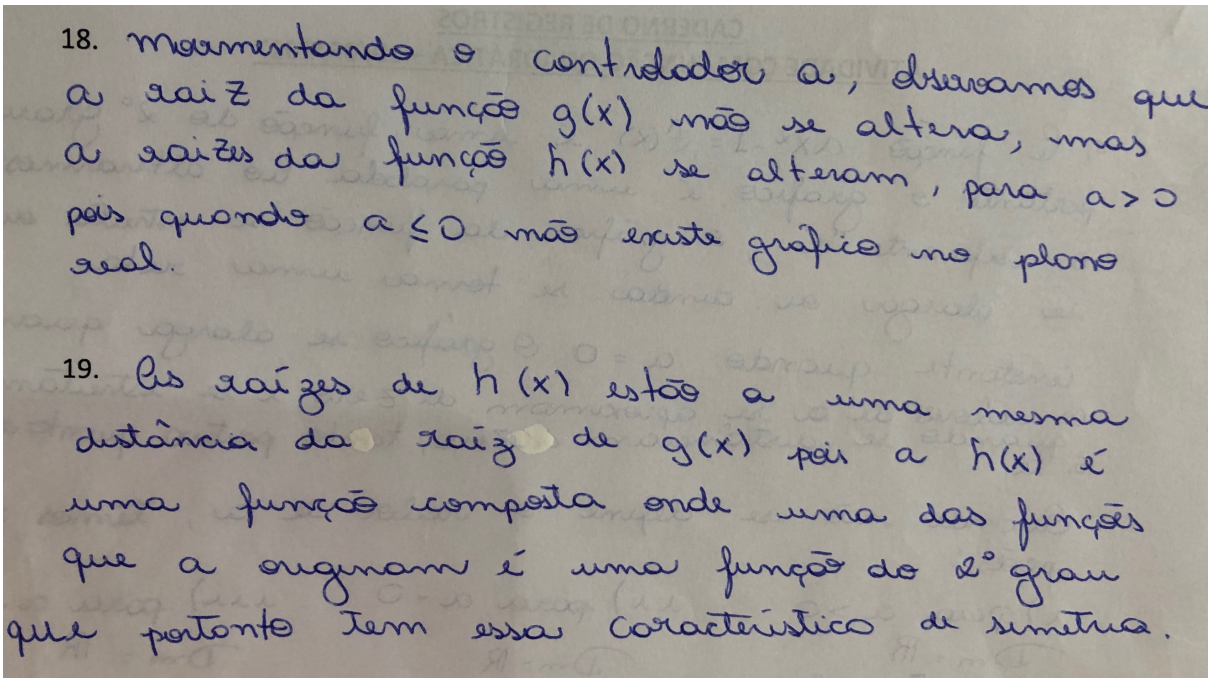
Fonte: Acervo do autor.

Note que os alunos resolveram a inequação do segundo grau gerada como se a mesma fosse uma equação do segundo grau. Não analisaram que seria impossível um valor de *x* que fosse maior que $\pm\sqrt{\frac{1}{a}}$. A mesma poderia ser maior que $\sqrt{\frac{1}{a}}$ ou menor que $-\sqrt{\frac{1}{a}}$ e assim teriam determinado o intervalo do domínio de h(x).

No diálogo a dupla fez isso corretamente, mas na formalização das respostas não conseguiram escrever o que conversaram.

Outro ponto interessante foi em relação as raízes de h(x). Perceberam que eram as mesmas de f(x) no áudio, mas no caderno de respostas anotaram somente o fato das raízes de h(x) serem simétricas da raiz de g(x) (figura 16). Assim como temos que tomar cuidado ao redigir as questões, talvez para esta dupla este fato muito claro (para eles) não necessitasse ser registrado tentando registrar um fato que consideraram fosse mais relevante.

Figura 16: Imagem do caderno de repostas do grupo 1



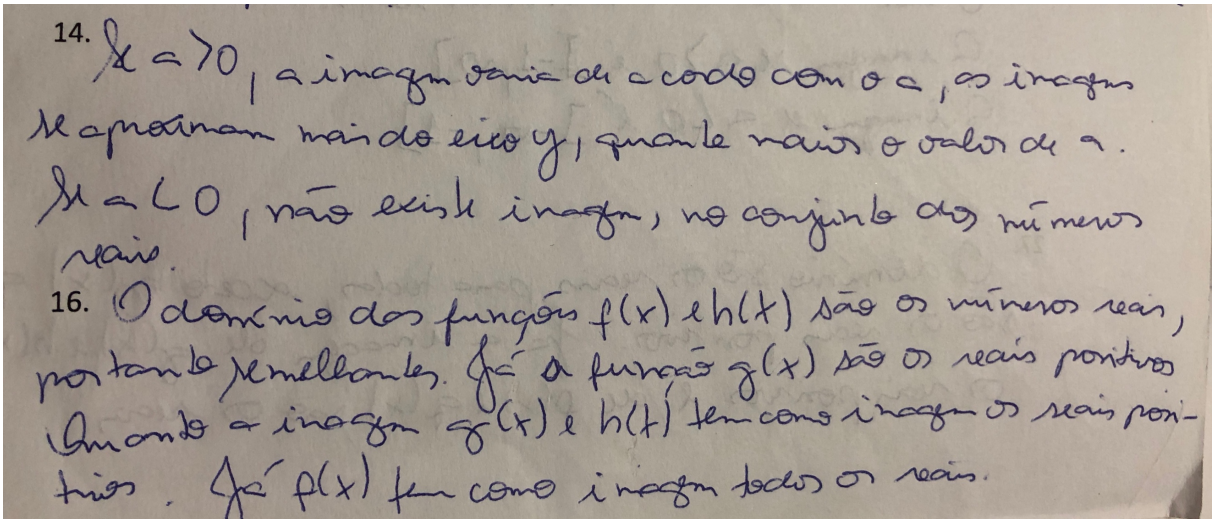
Fonte: Acervo do autor.

O grupo 2 não conseguiu atingir o que esperávamos com estes exercícios. Construíram corretamente os gráficos, mas apresentam defasagem de conceitos que dificultam compreender domínio e imagem, por exemplo, mesmo com o gráfico para auxiliar. Outro ponto a ser analisado é a falta de atenção e compreensão mesmo do que estavam fazendo. No item 6, mostrado na figura 11, descrevem corretamente o domínio para f(x) em função do parâmetro *a*, mas quando pedimos para compararem as funções f(x), g(x) e h(x) escrevem que f(x) tem como imagem todos os reais, contradizendo o que haviam escrito no item citado acima.

O grupo confunde a imagem com o gráfico quando dizem que a imagem de h(x) se aproxima do eixo *y* (figura 17) (a imagem é um subconjunto dos valores de *y*) quando o parâmetro *a* é positivo, quando na verdade quisessem dizer que o gráfico se aproxima do eixo das ordenadas e se *a* for negativo não existe imagem no conjunto dos reais, quando na verdade, neste caso, a função não está definida. Em relação ao domínio, formalizaram que f(x) e h(x) têm o mesmo domínio que são todos os números reais mas que g(x) possuía somente os reais positivos.

Não conseguiram relacionar que se g(x) possuía restrições sobre os valores que a variável *x* pudesse assumir devido a existência de uma raiz quadrada em sua expressão, o mesmo fato deveria ocorrer na função h(x). E isso estava sendo observado nos gráficos gerados. Um dos membros do grupo em determinado momento (31'10") diz: "é difícil o domínio não ser todos os reais, a não ser quando tem *x* embaixo da expressão e ele não pode ser zero". O que percebemos é que sem os conceitos básicos do que pretendemos ensinar, uma atividade que pensávamos ajudar ainda mais a compreensão, não atingiu os resultados esperados.

Figura 17: Imagem do caderno de respostas do grupo 2

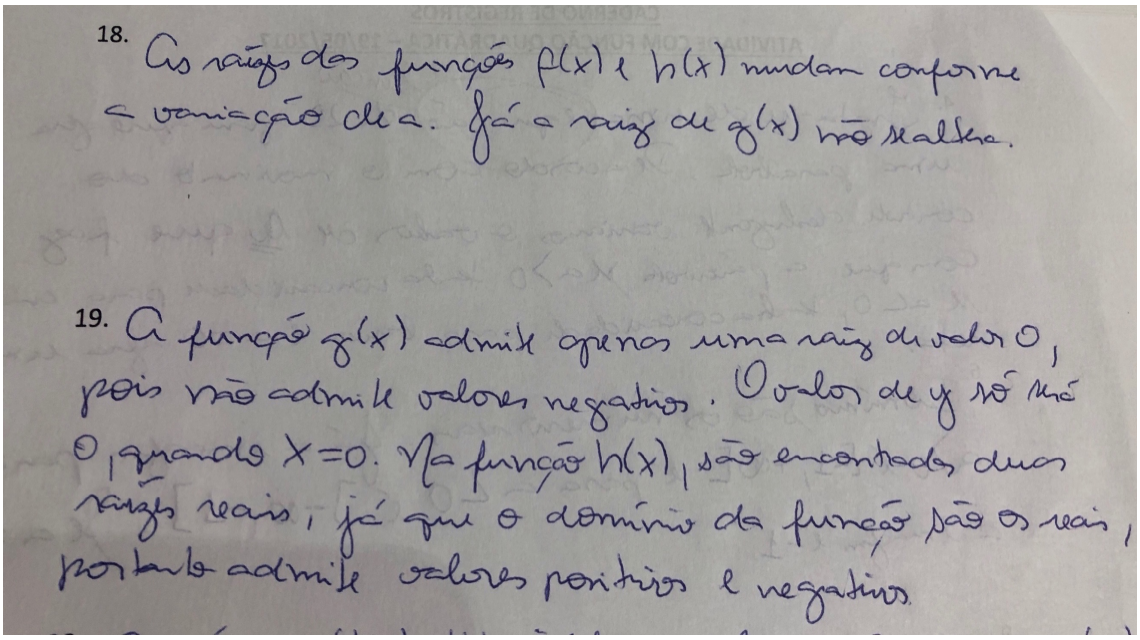


Fonte: Acervo do autor.

Embora não tenham formalizado, no áudio a dupla passa um tempo discutindo porque o gráfico de h(x) não aparece dos "dois lados". Quando um dos integrantes diz que seria devido a existência ou não da raiz quadrada de *x*, mas o outro integrante argumenta se não seria $\pm\sqrt{x}$. Novamente esta dupla confunde função com resolução de uma equação. Não chegam a nenhuma conclusão e continuam a atividade com dúvidas. O pensamento desta dupla ficou muito confuso e com isso a formalização da resposta ao item 19 ficou completamente equivocada e de difícil entendimento como mostrado na figura 18.

O grupo percebe que as raízes de f(x) e h(x) variam mas não comparam isso e nem generalizam como obter as mesmas.

Figura 18: Imagem do caderno de respostas do grupo 2



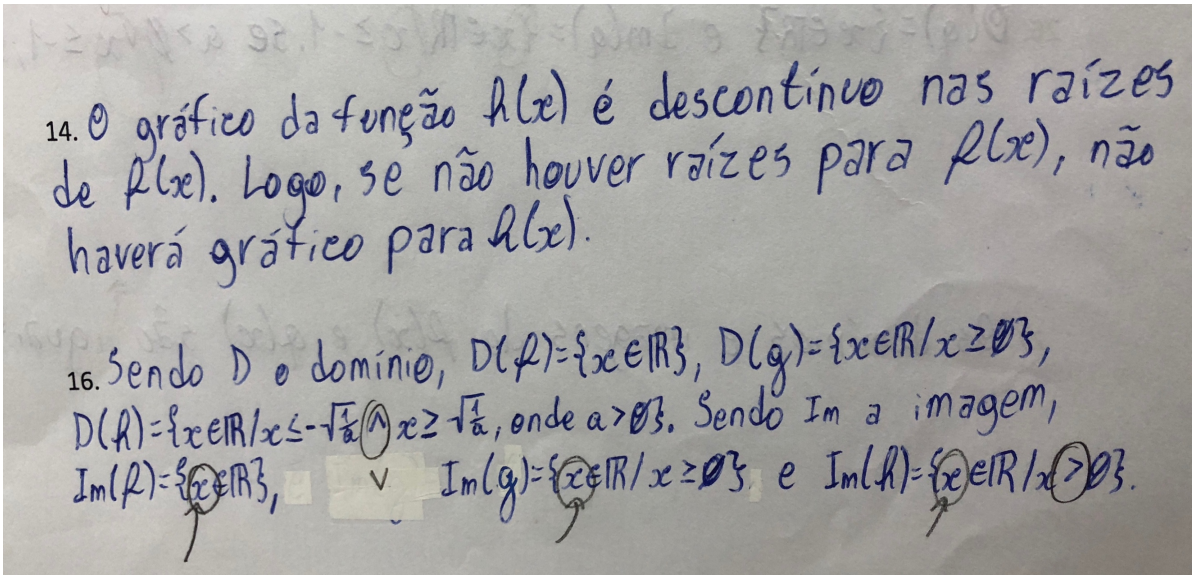
Fonte: Acervo do autor.

Através do vídeo gerado pela captura das telas na atividade, nota-se que o grupo 3 utilizou bastante o GeoGebra para explorar as funções e entender o comportamento das mesmas indo na mesma direção do que pensamos ao propor a atividade. Falaram em vários momentos sobre a função não ser contínua e formalizaram isso no caderno de respostas mostrado na figura 19. Como ainda não tiveram a disciplina de Cálculo, a ideia de continuidade para eles provém do fato da função ter um “espaço” sem ligação. Assim do ponto de vista da Matemática formal escrevem errado, mas a ideia deles não está completamente equivocada e já começam a conjecturar sobre fatos que irão aprender ainda. Descrevem muito bem o domínio das funções e para isso utilizaram bastante o recurso do software.

Em relação a imagem este grupo pensou corretamente mas formalizou os conjuntos imagens escrevendo a variável *x* como elemento e não a variável *y* (item 16 da figura 19). Este fato pode advir da formação escolar dos alunos no Ensino Básico, eles são cobrados sobre o conjunto solução de equações onde sempre tem que escrever “*x* pertence aos reais tal que...” e assim isso ficou internalizado nos mesmos. Além disso utilizaram conectivos de lógica na descrição

dos conjuntos, mas de novo equivocadamente como podemos observar na figura 19.

Figura 19: Imagem do caderno de respostas do grupo 3



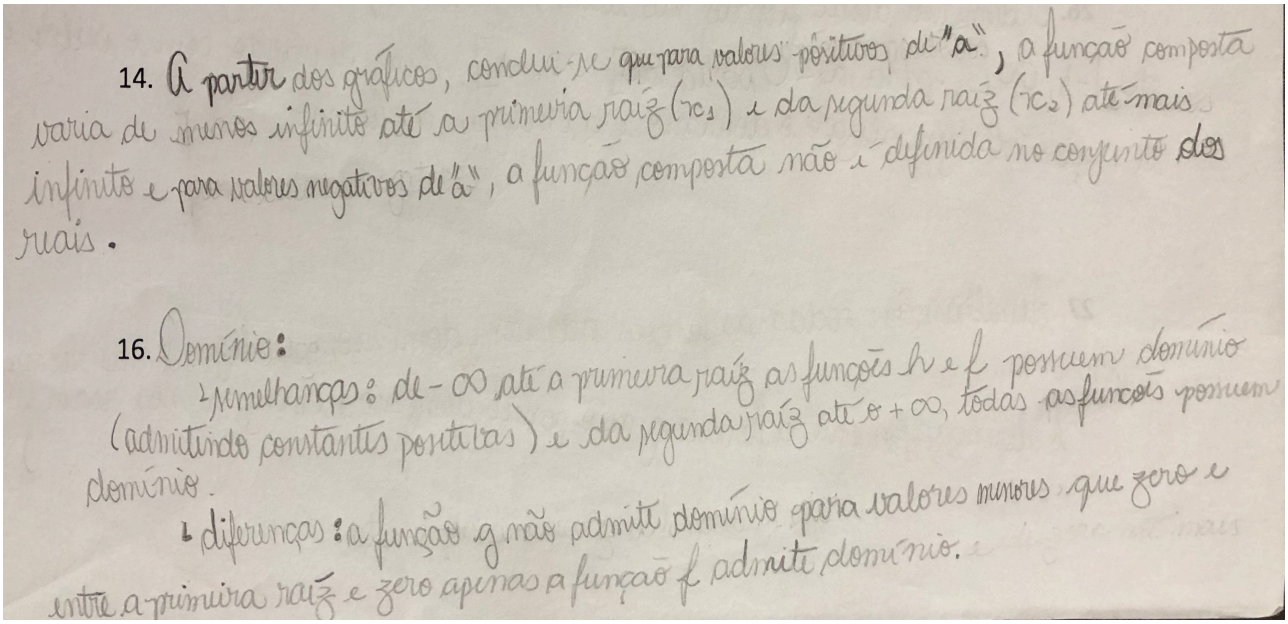
Fonte: Acervo do autor.

Conseguiram relacionar as raízes de f(x) e h(x) observando no gráfico e conferindo com a expressão e novamente falam em descontinuidade. A princípio, pensamos que algum dos alunos pudesse ter cursado algum curso superior anteriormente e estivesse tentando fazer a conexão com conteúdos já aprendidos, mas ao analisar o questionário respondido por eles no Survey Monkey constatamos que isso não havia ocorrido.

O grupo 4 trabalhou e alcançou o que havíamos pensado ao propor a atividade. Discutiram bastante com a participação dos três membros e utilizaram bastante o software para chegar as conclusões do que formalizariam no caderno de respostas (análise dos vídeos e áudios gerados). Conseguiram descrever bem o domínio da função h(x), como pode ser observado na resposta ao item 14 na figura 20 , mas sem utilizar notação de conjuntos e perceberam a relação existente entre as raízes. Dois fatos, observados no áudio que chamaram a atenção, foram o fato de um dos membros não conhecer a notação de função composta (assunto do primeiro ano do Ensino Médio) e em determinado momento elogiam bastante o software e a forma como estão conseguindo interagir com o mesmo.

Assim, notamos que o uso das tecnologias está sendo relevante para o processo de domínio e apropriação dos assuntos abordados na atividade, reconhecido pelos próprios estudantes.

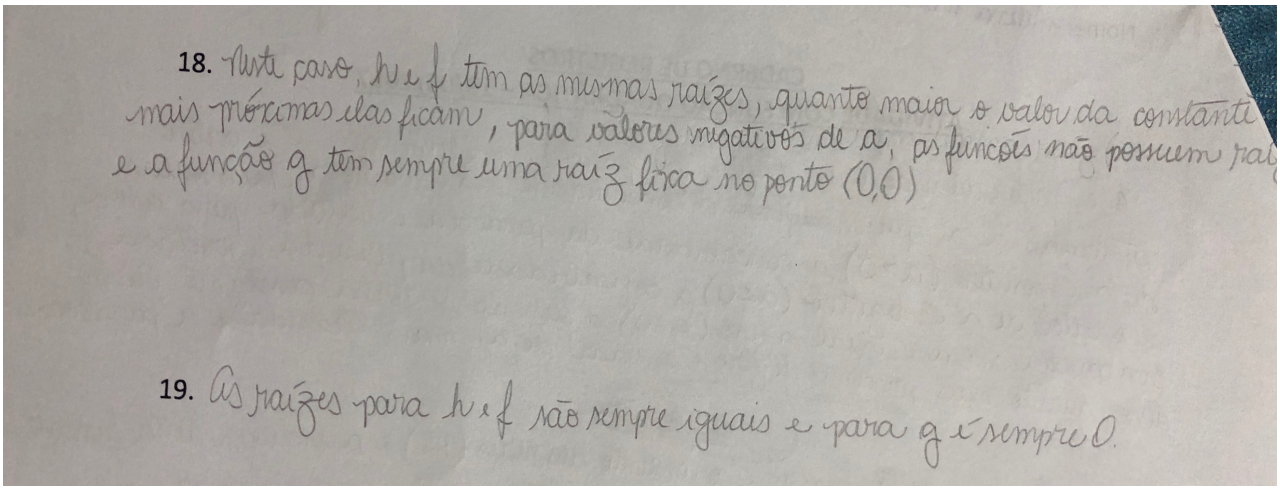
Figura 20: Imagem do caderno de respostas do grupo 4



Fonte: Acervo do autor.

Ainda, sobre as raízes observaram que ao aumentar o valor do parâmetro *a*, menor era a distância entre as mesmas (item 18 da figura 21), mas não se aprofundaram neste fato e nem tentaram entender o porque. Quando pensamos na atividade, não cogitamos essa hipótese e talvez pudéssemos ter explorado este fato e avaliar como os alunos teriam trabalhado algebricamente o fato observado “facilmente” no gráfico.

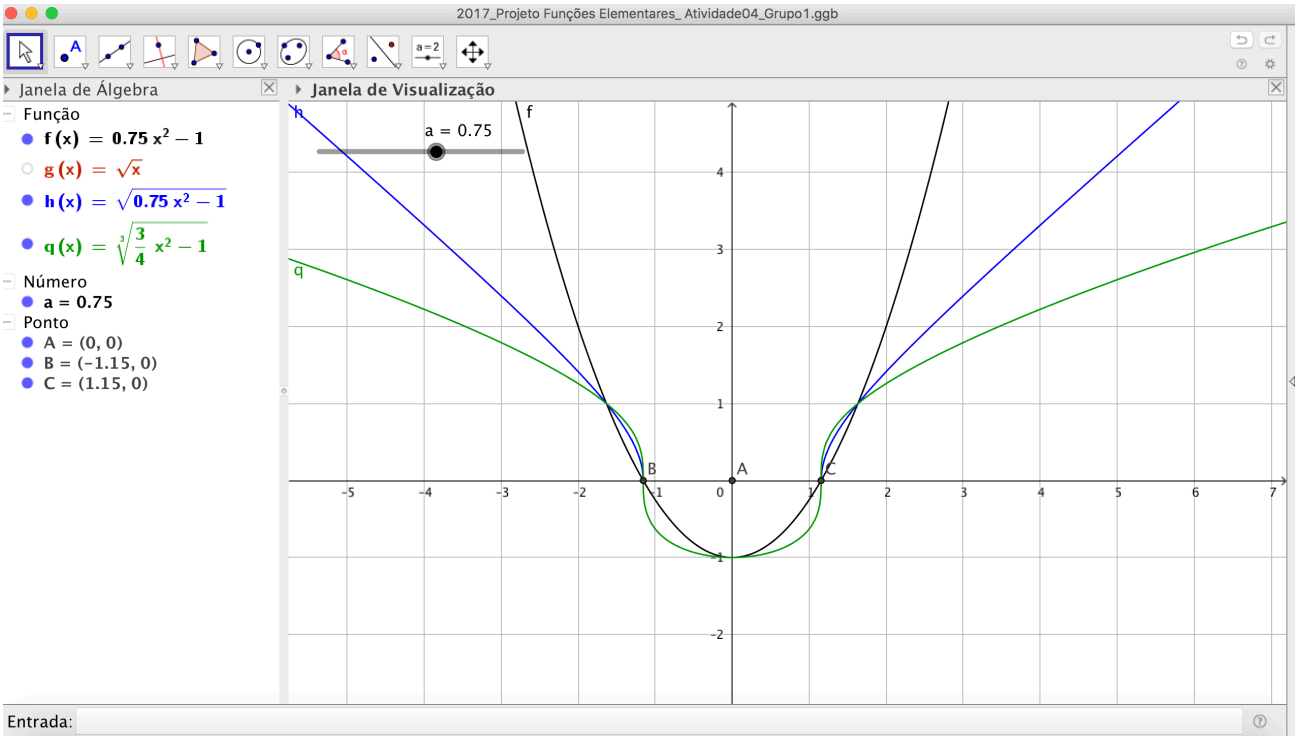
Figura 21: Imagem do caderno de respostas do grupo 4



Fonte: Acervo do autor.

Para finalizar a atividade deste dia, propusemos a função $q(x) = \sqrt[3]{ax^2 - 1}$ e da mesma forma, analisarem os gráficos, domínio e imagem além de compararem esta função com as funções trabalhadas anteriormente. Nossa ideia ao pensar nesta finalização era que os alunos compreendessem as restrições em relação ao domínio, entendessem um pouco das formas possíveis de gráficos a serem formados e relacionasse isso à imagem das funções. Como a raiz cúbica de um número real sempre existe, acreditamos que eles poderiam relacionar esse fato a função de q(x) e entendessem assim o porque das restrições do domínio que nem sempre são todos os números reais. Esperávamos que relacionassem as raízes das funções anteriores, os domínios e imagens e conseguissem generalizar domínio e imagem de todas as funções em função do parâmetro *a*. Os gráficos das funções trabalhadas, gerado pelo GeoGebra, é mostrado na figura 22.

Figura 22: Imagem dos gráficos de f(x), g(x) e q(x) gerados no GeoGebra por um dos grupos na atividade proposta

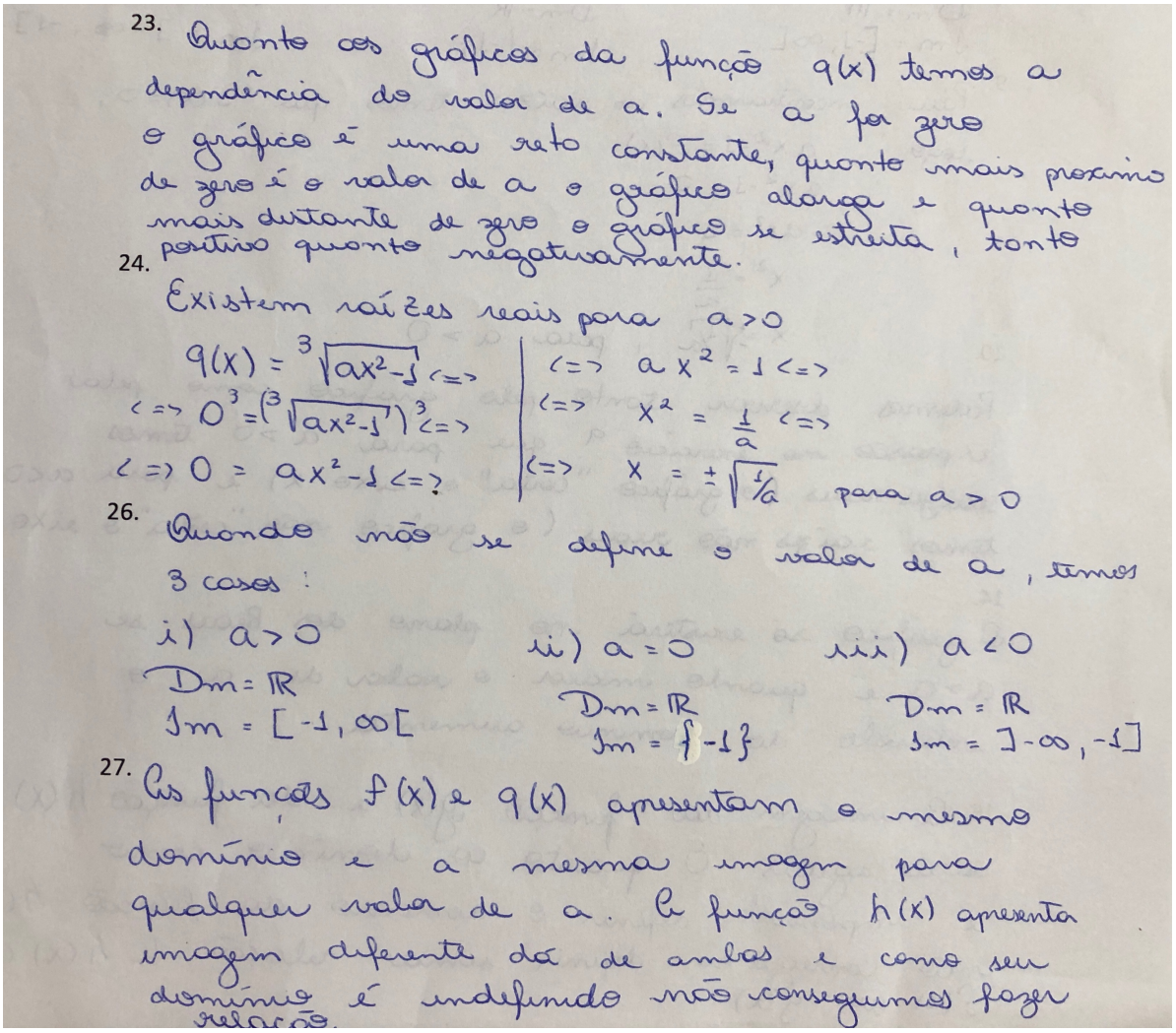


Fonte: Acervo do autor.

O grupo 1 atendeu as expectativas que tínhamos no início ao propor a atividade. Existia uma ótima interação entre eles e utilizavam muito bem o GeoGebra para tirar suas conclusões e resolver possíveis dúvidas que surgiam. Acreditamos que isso aconteceu porque os alunos possuíam bom domínio dos conceitos abordados e assim a atividade criou instabilidades que foram esclarecidas analisando as funções e suas respectivas variações na forma. Isto dificilmente teria acontecido sem a mediação do computador com o software, pois seria muito complicado eles entenderem as formas dos gráficos, por exemplo, sem um conhecimento maior das ferramentas de Cálculo como limites e suas derivadas para estudarem pontos de máximo, mínimo e inflexão.

Generalizaram muito bem as raízes, domínio e imagens da função q(x) em função do parâmetro *a* e relacionaram as funções anteriores com bastante convicção e segurança como podemos observar na figura 23.

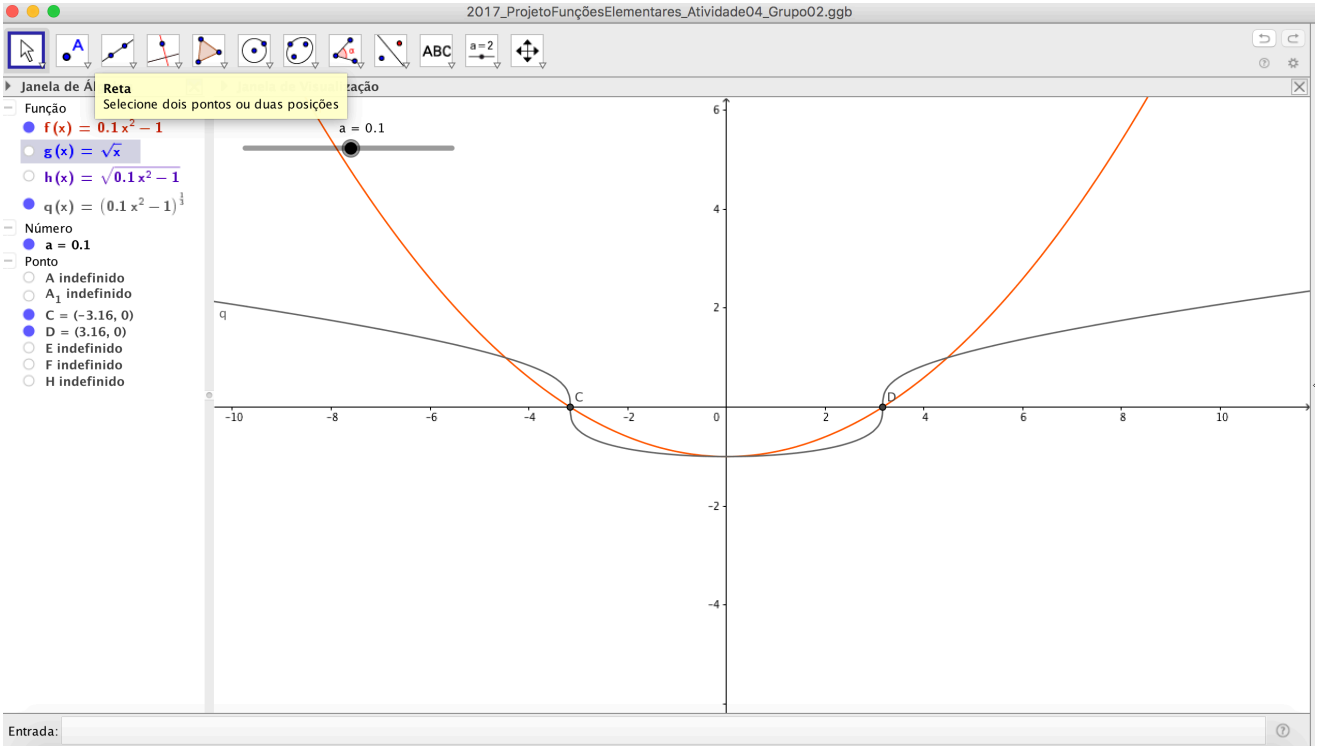
Figura 23: Imagem do caderno de respostas do grupo 1



Fonte: Acervo do autor.

No grupo 2 notamos um certo cansaço ao final da atividade onde as alunas discutiam as questões e utilizavam bem o software para suas conclusões, mas não anotavam tudo no caderno de respostas. Além do aparente cansaço continuou um pouco da falta de atenção (ou concentração talvez), pois no item 26 respondem corretamente o domínio e a imagem de q(x), mas no item seguinte voltam a afirmar que a imagem de f(x) e q(x) são todos os números reais, contradizendo o que estava registrado tanto no item anterior como no tela do GeoGebra da atividade (figura 24) salva por elas.

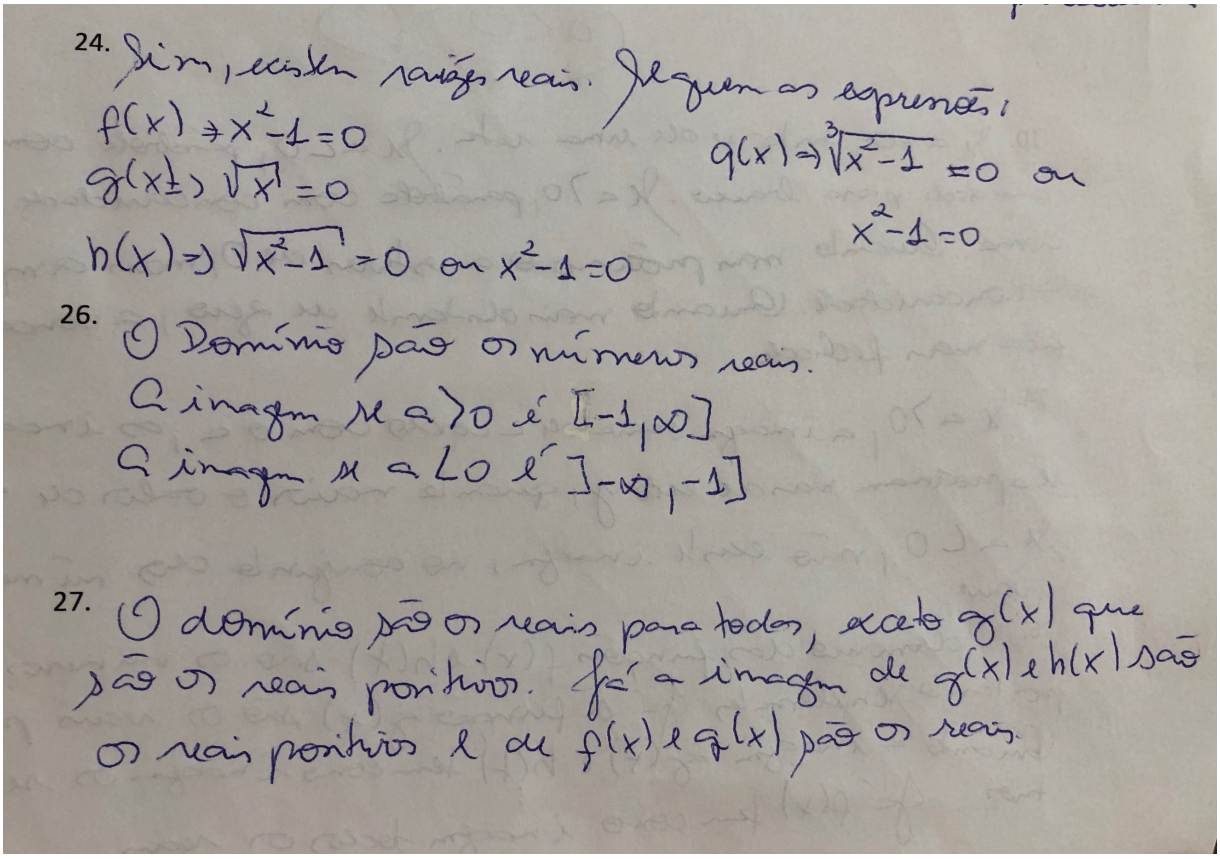
Figura 24: Imagem da tela do GeoGebra do grupo 2



Fonte: Acervo do autor.

Na figura 25 temos a imagem das repostas aos itens acima citados anteriormente. O que percebemos com este grupo é que alguns alunos começam a ficar muito impacientes mesmo com uma atividade que exigia atenção e não fosse tão monótona, mas que não era resolvido em poucos minutos.

Figura 25: Imagem do caderno de respostas do grupo 2

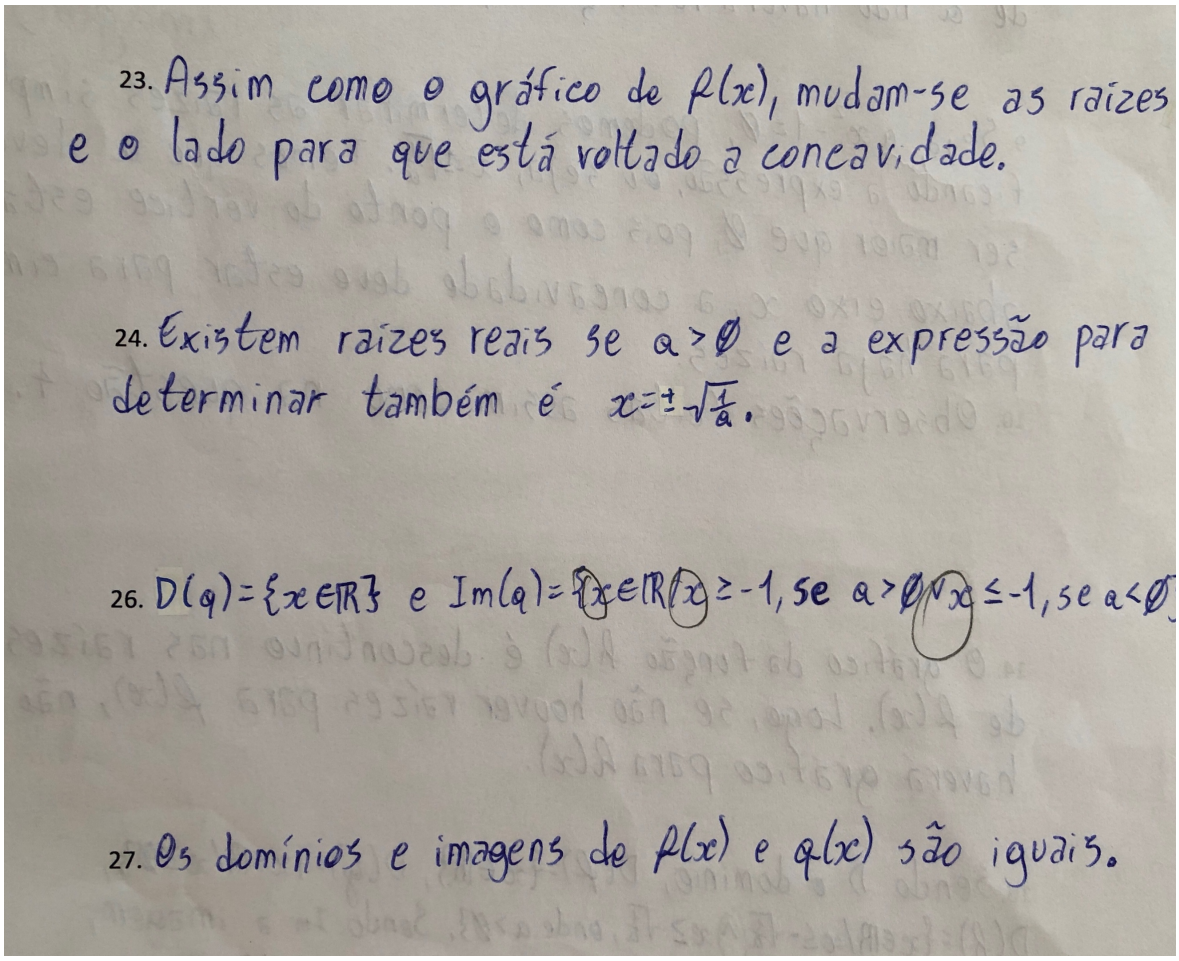


Fonte: Acervo do autor.

Com base no áudio e na produção dos alunos, notou-se que os integrantes deste grupo parecem mais acostumados com a aula tradicional e a forma mecânica de resolver alguns exemplos semelhantes ao exposto na aula sem ter muita interpretação e participação na resolução e discussão do que foi ensinado.

O grupo 3 ao verem o gráfico gerado no GeoGebra, concluíram que a função tinha o mesmo comportamento da função f(x) e por isso responderam com certa rapidez as questões da atividade não se atentando muito em compará-la com todas as outras funções estudadas traçando assim semelhanças e diferenças e o por que de cada uma destas propriedades. Novamente têm a ideia correta da imagem da função (assim como aconteceu anteriormente), mas registraram erroneamente como podemos observar na figura 26.

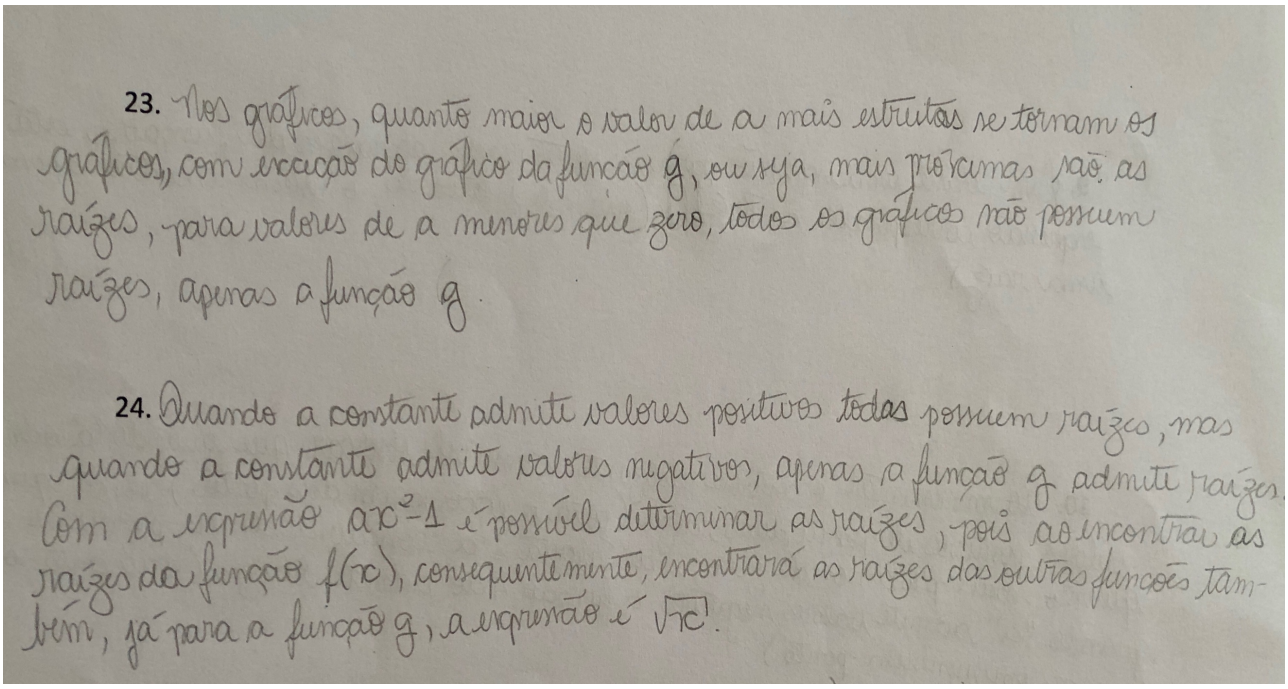
Figura 26: Imagem do caderno de respostas do grupo 3



Fonte: Acervo do autor.

O grupo 4 discutiu bastante as questões de semelhanças e diferenças das funções e conseguiu expressar bem suas ideias na formalização registrada no caderno (figura 27). Foi o único grupo que registrou o fato de que para encontrar as raízes de h(x) e q(x) bastaria encontrar as raízes de f(x) desde que o parâmetro *a* fosse positivo (item 24 da figura 27).

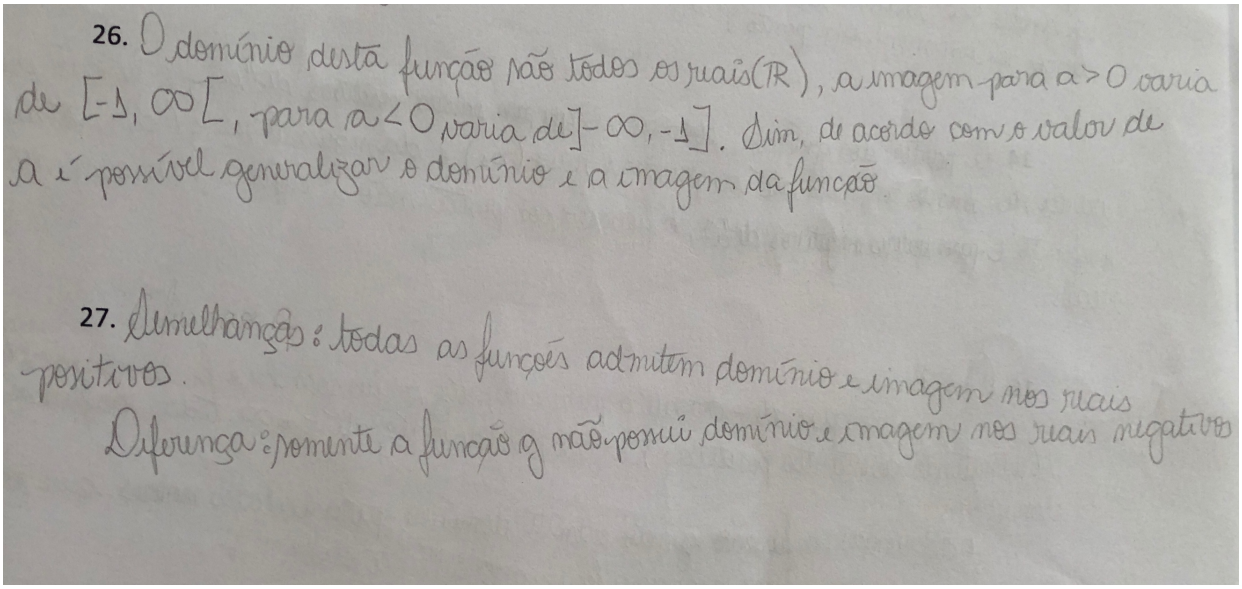
Figura 27: Imagem do caderno de respostas do grupo 4



Fonte: Acervo do autor.

Este grupo não teve problemas em definir o domínio e a imagem também para a função q(x) e trabalharam bem as semelhanças e diferenças entre as funções como podemos observar na figura 28.

Figura 28: Imagem do caderno de respostas do grupo 4



Fonte: Acervo do autor.

Ao final da atividade, questionamos os participantes da pesquisa sobre as possíveis dúvidas que tenham surgido e não tenham entendido, e todos disseram que haviam entendido o que fora pedido e que não tinham dúvidas. Assim foi marcado o próximo encontro para dali a 14 dias. Outra questão é que durante as atividades os alunos solicitaram pouco a ajuda tanto da professora da disciplina como do pesquisador, restringindo as questões um pouco em relação a comandos do GeoGebra e não a conteúdos da disciplina. Provavelmente isto ocorreu por ser o primeiro contato dos alunos com o GeoGebra.

Neste dia foi gerado 9h21’46” de vídeos das telas dos computadores dos grupos, juntamente com os áudios, as folhas com as conclusões registradas e as atividades realizadas no GeoGebra foram salvas para análise do que haviam realizado. A distribuição dos tempos, mostrada na Tabela 3, vai ao encontro do analisado e discutido, onde o grupo 2 foi o que terminou primeiro com 2h08’10” no total e o grupo 4 por último com 2h28’47”. O grupo 3 foi o grupo que mais explorou o software no início com 1h02’ contra 42’ dos outros grupos.

Tabela 3: Tempos de vídeo e áudio gerados no primeiro encontro

	Grupo 1	**Grupo 2**	**Grupo 3**	**Grupo 4**
Reconhecimento do software	41’46”	44’24”	1h02’	45’27”
Atividade 1	1h36’28”	1h23’46”	1h24’35”	1h43’20”
Tempo Total	2h18’14”	2h08’10”	2h26’35”	2h28’47”

Fonte: Elaboração própria

4.2 SEGUNDO ENCONTRO

O segundo encontro ocorreu quinze dias após o primeiro e tivemos a participação de 9 alunos que foram divididos em três duplas e um trio, sendo o grupo 1 com um aluno do primeiro encontro e uma aluna que não participou do primeiro encontro. Os grupos 2, 3 e 4 foram os mesmos do encontro anterior. Os grupos com os integrantes é mostrado na tabela 4.

Tabela 4: Grupos e participantes do segundo encontro

Grupo 1	$LU21^{M}$ e $VE18^{F}$
Grupo 2	$IS19^{F}$ e $NA35^{F}$
Grupo 3	$JA21^{F}$ e $GU18^{M}$
Grupo 4	$EL35^{M}$, $AL24^{M}$ e $MI18^{F}$

Fonte: Elaboração própria

Inicialmente apresentamos alguns comandos que seriam utilizados na atividade através de um texto retirado do site “ogeogebra.com.br” que apresentava como construir perpendiculares, paralelas, bissetrizes, mediatrizes e medianas no GeoGebra.

Uma vez que os alunos realizaram as atividades com estes comandos, demoraram em torno de 15 minutos nesta ambientação, disponibilizamos a folha de atividades para este dia juntamente com a folha onde registrariam por escrito as conclusões e pensamentos a respeito das atividades.

Nesta atividade pensamos em trabalhar as funções racionais dando destaque novamente ao domínio, imagem e gráficos, além de trabalharmos as assíntotas. Com as assíntotas trabalhamos a ideia de limite intuitivamente em algumas questões, mas não mencionamos, em nenhum momento, formalmente o conceito de limites de funções.

Como esta disciplina, de certa forma, serve como um nivelamento e preparação para Cálculo no semestre seguinte, entendemos que seria interessante entender como poderíamos tornar o processo de apropriação deste conceito mediado pelo computador e software um pouco diferente da forma que normalmente

é apresentado com definições e teoremas. Nossa ideia é que ao aprender limites no semestre seguinte, os alunos se lembrassem da atividade realizada tornando o aprendizado mais facilitado.

Inicialmente trabalhamos com as funções $f(x) = \frac{x+1}{x}$ e $g(x) = \frac{x}{x+1}$ comparando-as quanto ao domínio, à imagem e a forma do gráfico e assíntotas e em seguida as funções $h(x) = \frac{x^2+1}{x}$ e $p(x) = \frac{x}{x^2+1}$ da mesma forma.

ATIVIDADE COM FUNÇÃO RACIONAL – 02/06/2017

1. Inicie a gravação e abra o GeoGebra.
2. No campo "Entrada" digite a função $f(x) = \frac{x+1}{x}$.
3. Qual o domínio e qual a imagem desta função? Anote em seu Caderno de Registro.
4. Vocês responderam à pergunta do item 3 com base na expressão da função (forma algébrica) ou com base no gráfico da função (forma geométrica)? Justifique em seu Caderno de Registro.
5. Vocês conseguem obter as respostas da pergunta do item 2 usando a outra forma de pensamento citada no item 3? Faça em seu Caderno de Registro.
6. No campo "Entrada" digite *y* = 1. Clique na reta (botão direito) e em "Propriedades" para alterar o estilo da reta para tracejado.
7. Coloque um ponto qualquer sobre o eixo-*x*.
8. Construa uma reta perpendicular ao eixo-*x* passando no ponto criado no item anterior.
9. Crie o ponto intersecção dessa reta com a curva.
10. Construa uma reta perpendicular ao eixo-*y* passando no ponto criado sobre a curva (item 9).
11. Crie o ponto intersecção dessa reta com o eixo-*y* e oculte a reta.
12. Crie um segmento de reta entre o ponto da curva e o ponto no eixo-*y*.
13. Qual o valor de *x* tal que *f*(*x*)=0? Como você observa isso no gráfico? Anote em seu Caderno de Registro.

14. Movimente o ponto do eixo-*x* de forma a responder à questão: O que acontece com a função quando o valor da variável *x* se aproxima do zero? Anote em seu Caderno de Registro.
15. O que acontece com a medida do segmento formado entre os pontos da curva e do eixo-*y*? Anote em seu Caderno de Registro.
16. A função está definida para x = 0, ou seja, existe *f*(0)? Anote em seu Caderno de Registro.
17. Para qual valor de *x* temos que *f*(*x*)=1? Como você observa isso no gráfico? Anote em seu Caderno de Registro.
18. Sabendo que: "Uma reta é chamada de **Assíntota ao Gráfico** de uma função quando a distância entre a reta e o gráfico tendo à zero, entretanto a reta e o gráfico não possuem pontos de interseção", vocês identificam na construção feita alguma(s) reta(s) que possa ser chamada de assíntota ao gráfico? Qual(is)? Justifique em seu Caderno de Registro.
19. **Salve o gráfico com o nome: 2017_Projeto Funções Elementares_Atividade 05_Grupo *"número do seu grupo"***
20. No campo "Entrada" digite a função $g(x) = \frac{x}{x+1}$.
21. Qual o domínio e qual a imagem desta função? Anote em seu Caderno de Registro.
22. Você respondeu à pergunta do item 21 com base na expressão da função ou com base no gráfico da função? Vocês conseguem descrever as duas formas de resolver? Anote em seu Caderno de Registro.
23. Descrevam em seu Caderno de Registro, semelhanças e diferenças entre as funções $f(x) = \frac{x+1}{x}$ e $g(x) = \frac{x}{x+1}$.
24. No campo "Entrada" digite "Assíntotas[*g*]". Nas propriedades destas retas mude o estilo para tracejado.
25. Crie um ponto sobre o gráfico da função *g*.
26. Construa uma reta perpendicular ao eixo-*x* passando por este ponto e outra reta perpendicular ao eixo-*y* passando pelo mesmo ponto.
27. Crie os pontos na intersecção destas retas com os eixos coordenados.

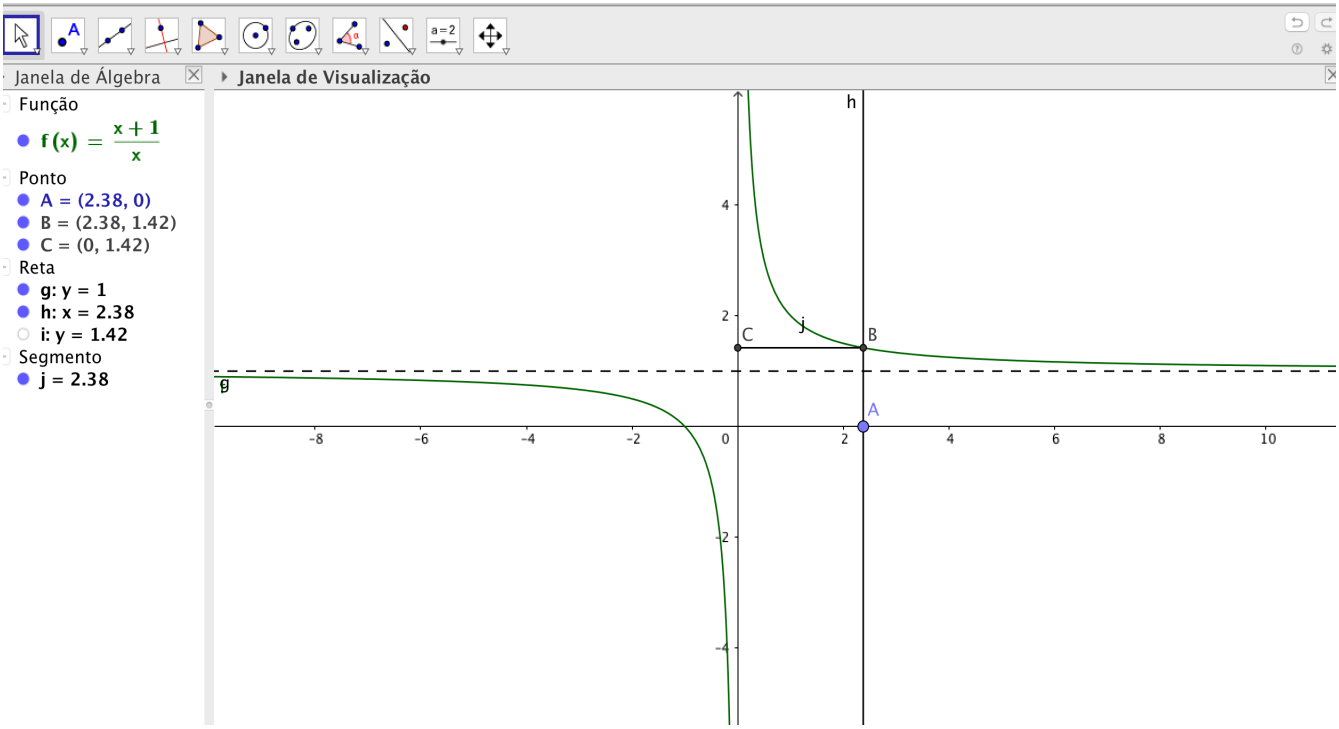
28. Oculte as retas perpendiculares e crie os segmentos que unem o ponto sobre a hipérbole e o ponto nos eixos coordenados.
29. Mude o estilo destes segmentos para tracejado.
30. Movimente o ponto sobre a curva e observe o que acontece com os valores da função quando o valor de *x* tende a -1? E quando este tende a infinito (positivo e negativo). Anote em seu Caderno de Registro.
31. Para qual valor de *x* tem-se que *g*(*x*)=1? Como você observa isso no gráfico? Anote em seu Caderno de Registro.
32. **Salve o gráfico com o nome: 2017_Projeto Funções Elementares_Atividade 06_Grupo *"número do seu grupo"***
33. No campo "Entrada" digite a função $h(x) = \frac{x^2+1}{x}$.
34. Vamos repetir os passos de 21 a 30, excetuando o item 24, para essa função.
35. Você sabe quais são as assíntotas para esse gráfico? Anote em seu Caderno de Registro.
36. Sem usar o comando "Assíntotas", desenhe no GeoGebra, as retas anotadas em seu Caderno de Registro.
37. O que acontece com a função quando o valor da variável tende a 0?
38. Qual o valor de *x* tal que *h*(*x*)=1? Como você observa isso no gráfico? Anote em seu Caderno de Registro.
39. **Salve o gráfico com o nome: 2017_Projeto Funções Elementares_Atividade 07_Grupo *"número do seu grupo"***
40. Repita os passos, de 34 a 38, para a função $p(x) = \frac{x}{x^2+1}$.
41. **Salve o gráfico com o nome: 2017_Projeto Funções Elementares_Atividade 08_Grupo *"número do seu grupo"***

Ao analisar os vídeos da atividade de reconhecimento de alguns comandos notamos algumas dificuldades em relação ao conhecimento de bissetrizes e mediatrizes e não em relação ao software. Os alunos estavam bem a vontade com o GeoGebra, mas como existia falta de conhecimento de bissetriz e

mediatriz acabavam se confundindo com o que era apresentado na tela do computador. Um dos grupos ao não conseguir construir a bissetriz clicando em duas retas, conjecturou que deveriam selecionar uma única reta para que o GeoGebra construísse a bissetriz. Este fato, em nossa opinião, mostra que o grupo não entende muito bem o que é bissetriz, pois não seria possível dividir um ângulo em duas partes congruentes com apenas uma reta, uma vez que não teríamos ângulos. Isso mostra, mais uma vez, que o software pode contribuir muito para o processo de ensino e aprendizagem, mas são necessários alguns conceitos básicos. Mesmo sem entender, o grupo continuou a atividade sem entender bissetriz, como a utilizaria e com conjecturas erradas sobre a mesma.

Nos itens 1 a 19 da atividade proposta, pedimos aos alunos que digitassem a função $f(x) = \frac{x+1}{x}$ na entrada do GeoGebra (figura 29) e exploramos as ideias intuitivas de limites onde a função não estava definida e para onde não existia imagem da função.

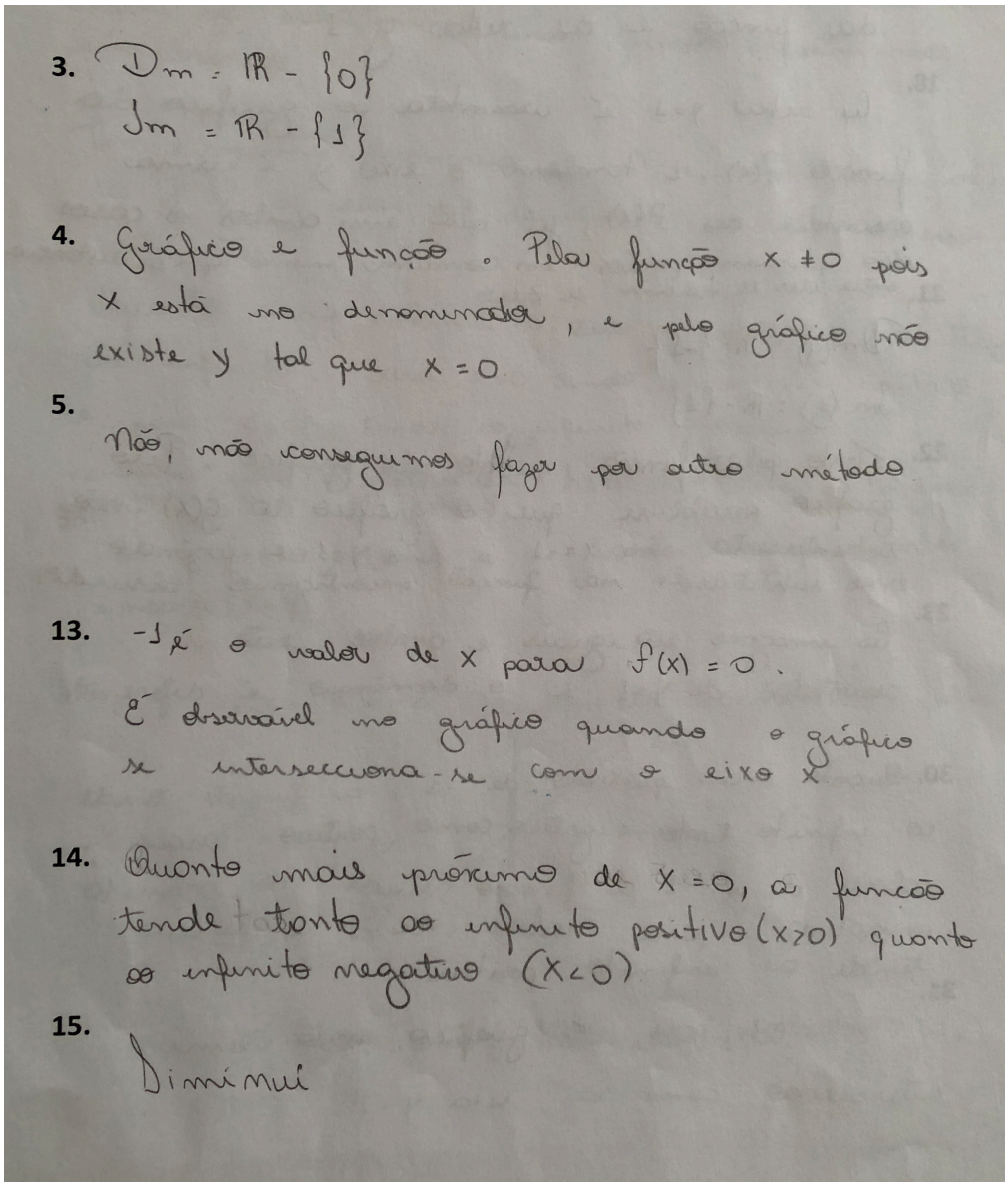
Figura 29: Gráfico da função f(x) no GeoGebra



Fonte: Acervo do autor.

O grupo 1 utilizou o software de forma bastante direta e objetiva. Discutiram as questões com clareza e formalizaram muito bem as respostas de todas as questões propostas como podemos observar na figura 30.

Figura 30: Imagem do caderno de respostas do grupo 1

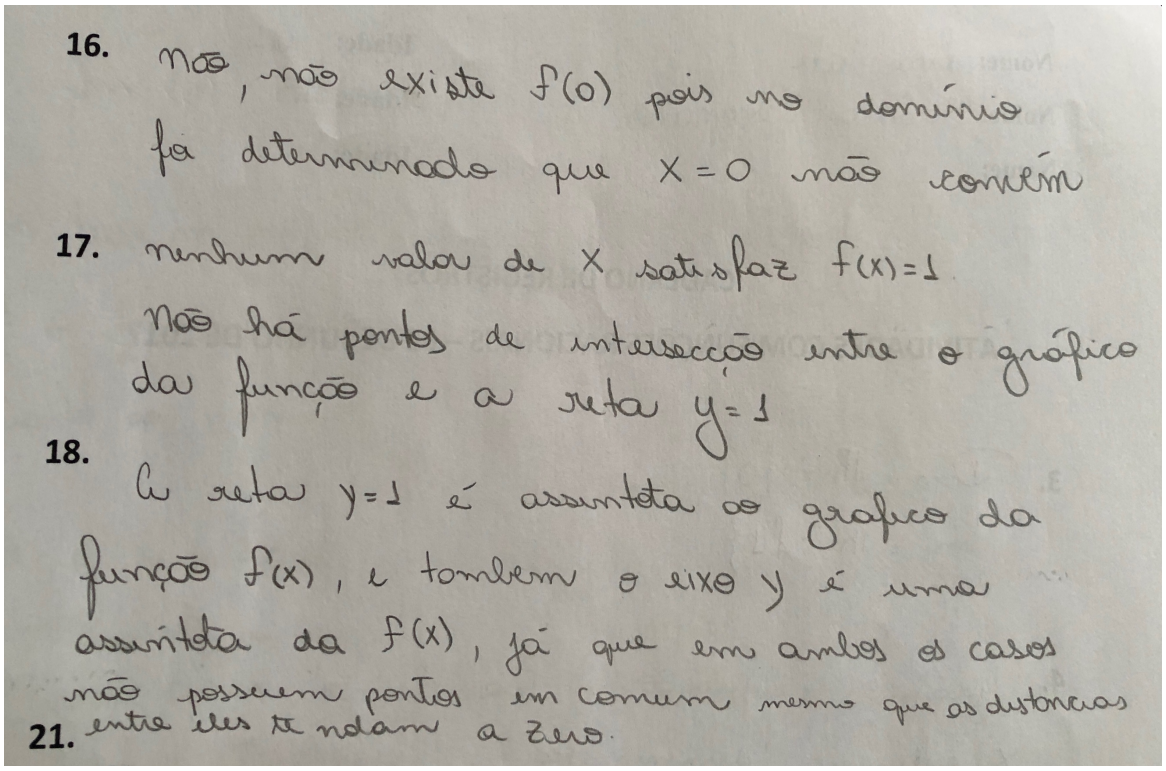


Fonte: Acervo do autor.

No Item 14 observamos claramente a ideia dos limites laterais para a função quando x tende a zero. Outro fato que chamou a atenção no vídeo foi o fato

dos alunos terem percebido um erro cometido na resposta da imagem da função em itens anteriores e terem corrigido no caderno de respostas. Eles perceberam o erro no item 17 quando foi perguntado qual valor do domínio teria como imagem o valor 1 (figura 31). Apesar de terem analisado o gráfico, não haviam percebido que a função não tocava a assíntota horizontal de equação y=1. Acreditamos assim, que neste momento aconteceu uma apropriação do conceito de assíntota mediado pelo software e computador.

Figura 31: Imagem do caderno de respostas do grupo 1



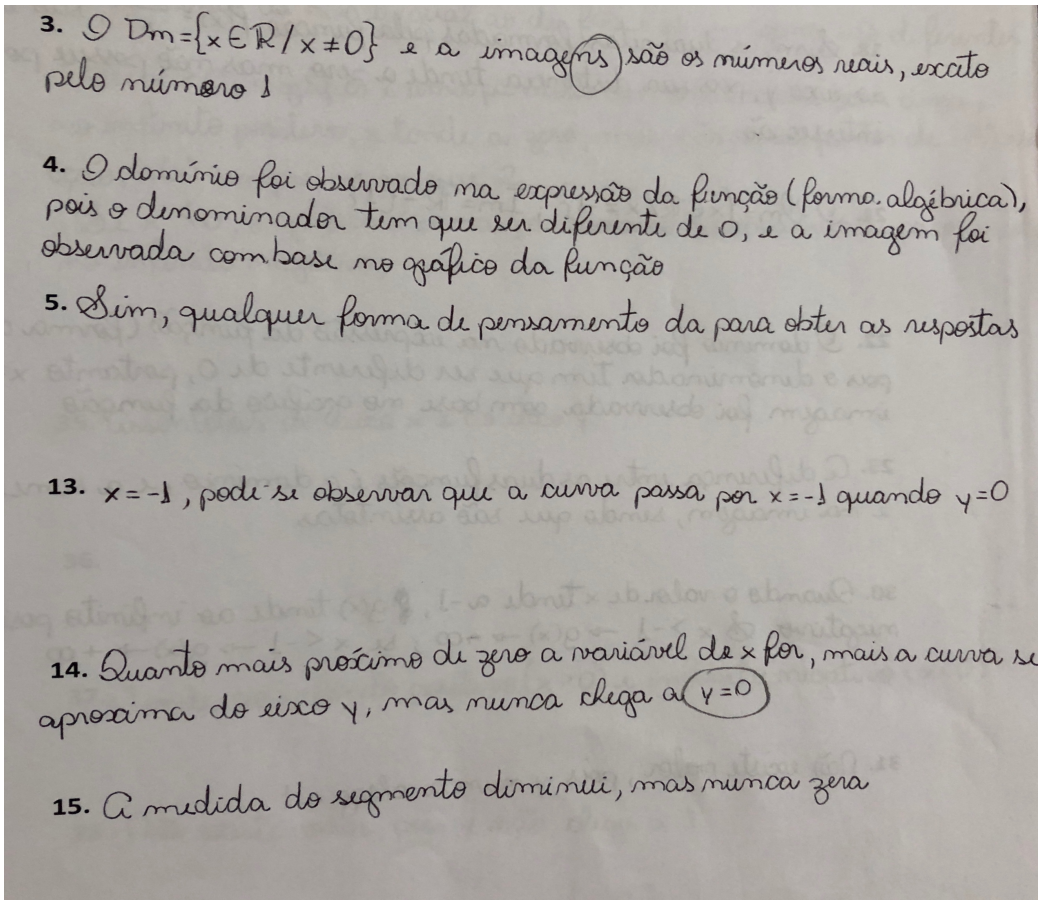
Fonte: Acervo do autor.

O grupo 2 trabalhou tanto a expressão quanto o gráfico da função para responderem sobre o domínio e a imagem. Assim como o grupo 1 corrigiram a imagem da função após algum tempo, mas isto mostra que neste encontro estavam mais atentos que no encontro anterior onde contradiziam em itens posteriores o que haviam formalizado anteriormente.

Solicitaram em determinado momento a ajuda de outro grupo para entenderem um item e estavam com um pouco de dificuldade em relação a curva da função. Isto pôde ser observado, quando não associaram que f(x)=0 seria a raiz da função, ou seja, bastava ver onde o gráfico interceptava o eixo das abcissas. Para encontrar as raízes fizeram cálculos algébricos.

Notamos nos itens 13 e 14 uma contradição na resposta deste grupo, quando afirmam que a raiz de f(x) é o valor x = -1, pois neste valor de x temos y=0 e no item seguinte escrevem que a função nunca chega a y=0 (figura 32). Inferimos neste momento que a dupla não tem o conceito de raiz e sua interpretação geométrica muito bem definida e seguem um pouco por instinto não refletindo sobre o que realmente estão calculando e analisando. No item 17 perceberam o erro sobre a imagem assim como o grupo 1. Assim, acreditamos que a sequencia criada atinge o que pretendíamos pois levou os alunos a entenderem e perceberem o que antes não haviam conseguido.

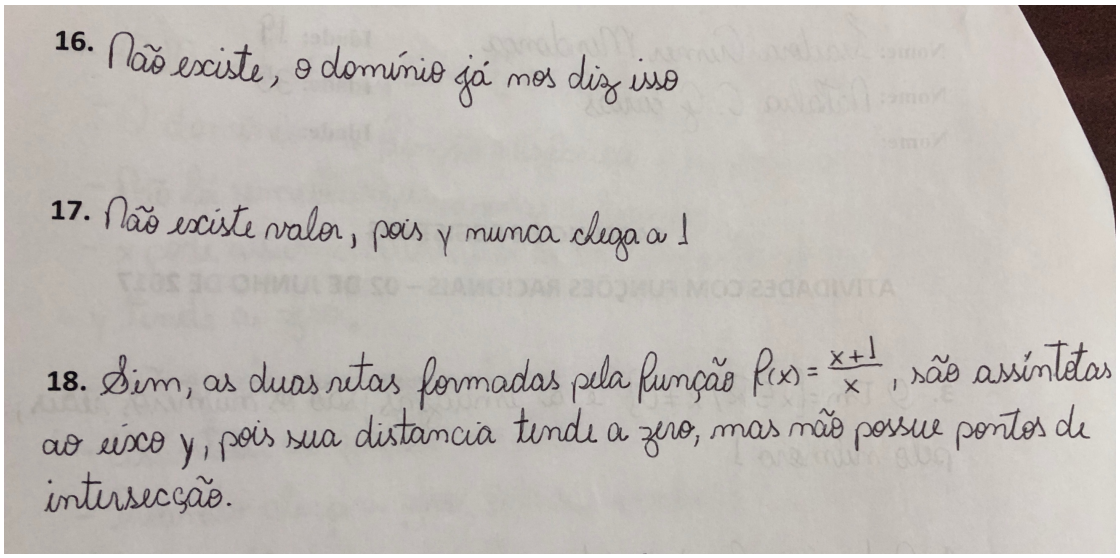
Figura 32: Imagem do caderno de respostas do grupo 2



Fonte: Acervo do autor.

Neste grupo percebemos certa confusão ao explicar as assíntotas no item 18. Note que as alunas afirmam identificar assíntotas na construção feita no GeoGebra mas afirmam ser as duas retas formadas pela função f(x). Quais retas são estas? Na figura 33 respondem que são assíntotas ao eixo y, quando na realidade poderiam escrever que o eixo y é uma assíntota do gráfico. Não conseguiram identificar as assíntotas para esta função.

Figura 33: Imagem do caderno de respostas do grupo 2

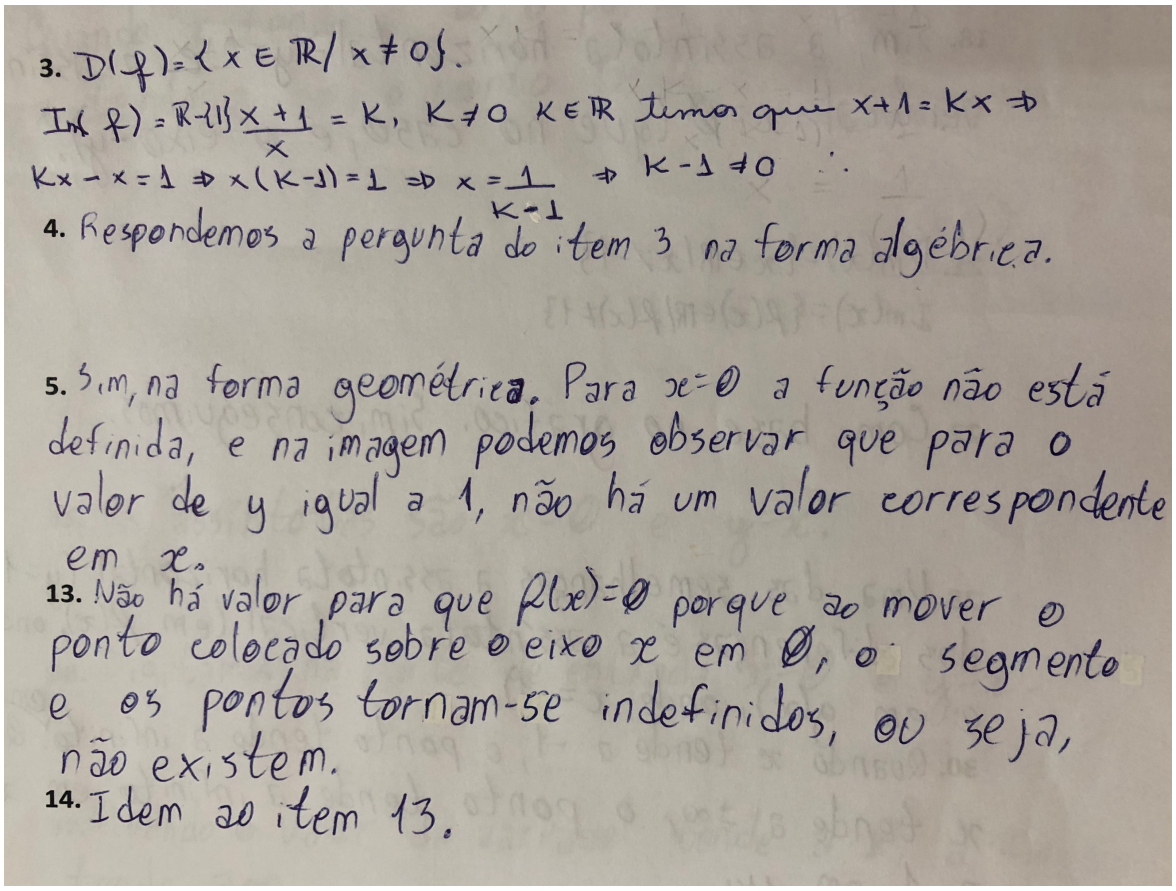


Fonte: Acervo do autor.

Assim como no encontro anterior percebeu-se uma certa influência de uma das alunas que confunde muito os conceitos básicos e com isso deixa o outro aluno em dúvida (mesma dupla do primeiro encontro). Muitas vezes um dos alunos estava com ideias corretas, mas fica indeciso com os argumentos e conclusões do outro integrante.

O grupo 3 trabalhou muito bem tanto o gráfico no software como a formalização das respostas no caderno de registros. Definiram corretamente o domínio e a imagem da função f(x) e foram os primeiros a definir a imagem algebricamente (figura 34). Confirmaram o que haviam calculado algebricamente no gráfico gerado pelo GeoGebra como podemos observar na figura 34.

Figura 34: Imagem do caderno de respostas do grupo 3



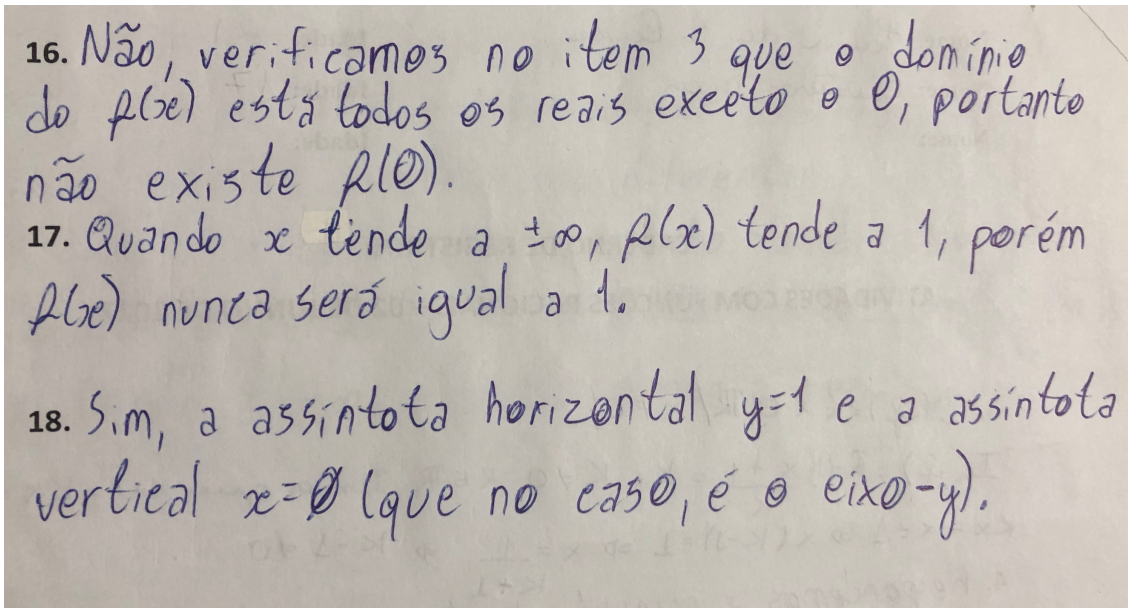
Fonte: Acervo do autor.

Interessante observar que no item 13, quando perguntamos qual valor de *x* tal que *f(x)=0*, ou seja, quais as raízes da função, o grupo se confunde em afirmar que não existe *x*. Pelo padrão da resposta, inferimos que o grupo entendeu qual o valor da função para *x=0* e responderam que a função não está definida para este valor de x, o que está correto, porém a pergunta não foi essa. Notamos uma certa confusão (*f(x)=0 e f(0))* dos alunos com estas notações e por isso mesmo colocamos estas questões na atividade pensando numa forma dos grupos refletirem sobre o que iriam responder. A diferença entre para qual valor de *x* temos *f(x)=0* e o item 14, quando perguntamos, o que acontecia com a função quando a variável *x* se aproxima de zero não foi percebida por este grupo. Responderam que era a mesma resposta obtida no tem 13. Poderiam ter analisado que, dificilmente,

perguntaríamos a mesma coisa três vezes e então pensar melhor a respeito das questões, mas isso não aconteceu.

No item 16 responderam corretamente que não existe *f(0)*, mas novamente não tiveram a ideia de comparar com *f(x)=0*, que confundiram anteriormente. Observamos um padrão de resposta que consideramos muito interessante no item 17, uma vez que os alunos não tiveram, ainda, aula de Cálculo, como pode ser observado na figura 35.

Figura 35: Imagem do caderno de respostas do grupo 3



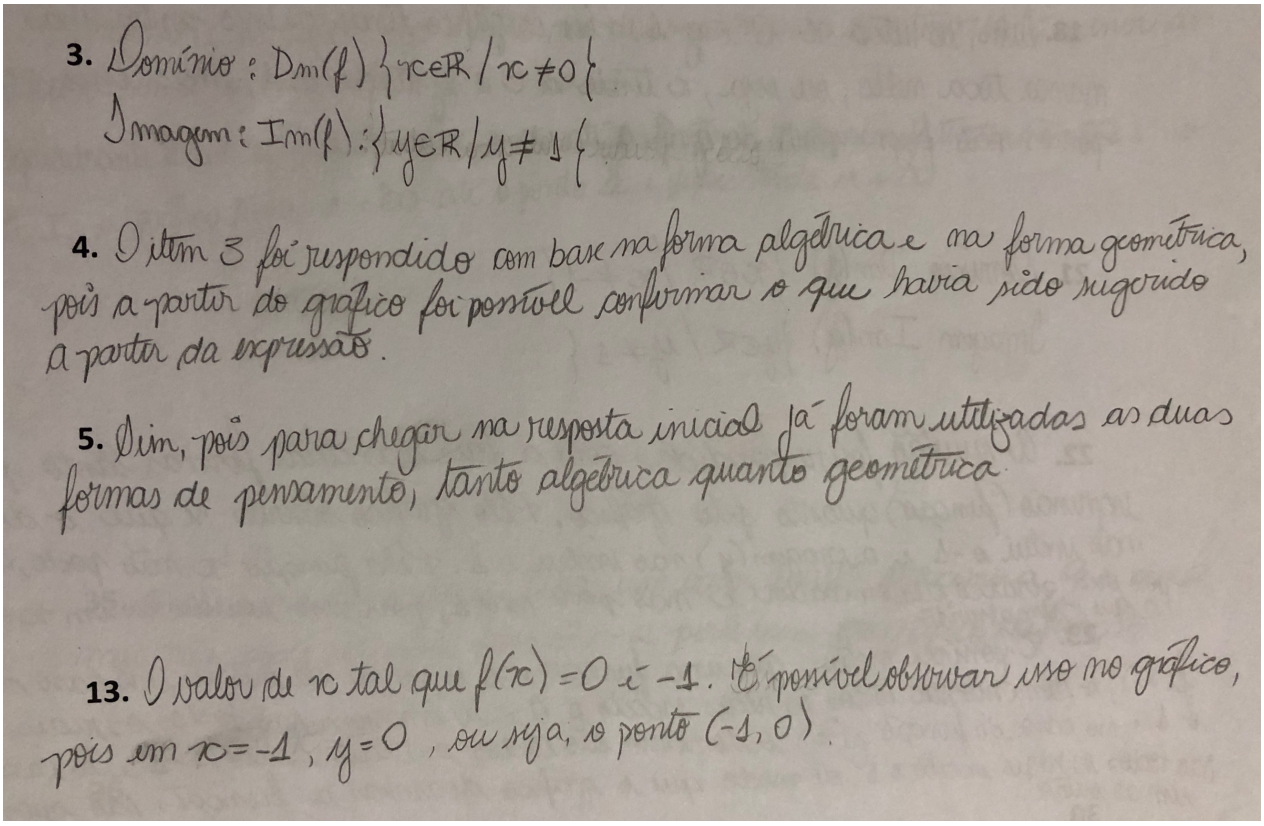
Fonte: Acervo do autor.

Sobre as assíntotas, do item 18, parecem ter entendido muito bem, pois responderam corretamente e discutiram muito bem no vídeo e áudio gravados, colocando inclusive as equações das assíntotas do gráfico da função.

O grupo 4 também foi o mesmo do encontro anterior e o único com 3 elementos. Da mesma forma que no encontro anterior, notamos uma participação maior de dois alunos, mas parece que com o entrosamento o terceiro aluno está opinando e ajudando mais que no encontro anterior. O grupo entendeu o domínio e a imagem bem e responderam corretamente no caderno de registros (item 3 da

figura 36). Um fato interessante aconteceu quando estavam tentando responder qual a imagem da função. A princípio acreditaram serem todos os números reais, mas estavam relutantes que fosse isso realmente. Notaram que *y=1* não estava sendo "atingido" e para confirmarem foram criando vários pontos sobre a função com valores de *x* cada vez maiores e observando na janela de álgebra as coordenadas dos pontos para ver que a ordenada ficava próxima do valor igual a 1, mas não atingia este valor. O que nos chamou a atenção foi a forma de observar isso, pois os mesmos poderiam "apenas" ter movido o ponto que já havia sido criado sobre a função. Assim percebemos que cada grupo ou aluno tem uma linha de pensamento diferente, mas o mais importante é atingir a ideia e o fato do software "aceitar" todas estas possibilidades.

Figura 36: Imagem do caderno de respostas do grupo 4

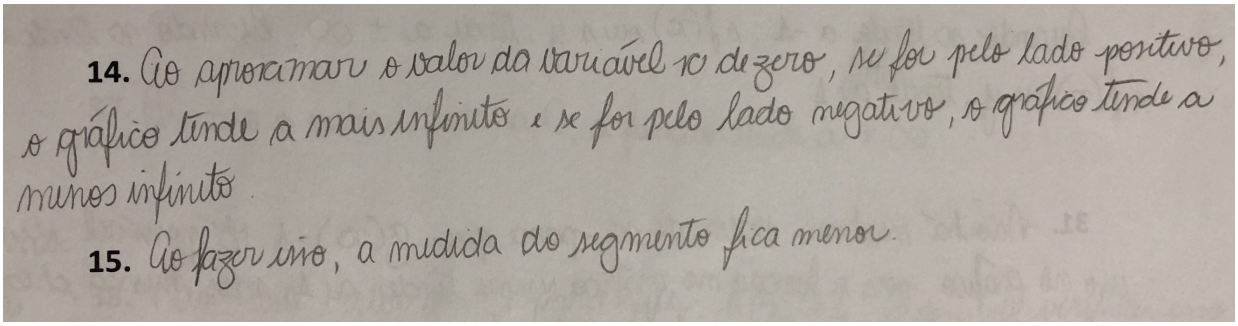


Fonte: Acervo do autor.

O grupo 4 respondeu e analisou corretamente a raiz da função no item 13 (figura 36) e analisou como esperávamos a diferença entre *f(x)=0* e *f(0)*, ou seja, as raízes da função e um valor de *x* que não pertence ao domínio, visto que não temos função definida neste ponto.

Note que no item 14, na figura 37, estão claramente definidos os limites laterais sem que mencionássemos em qualquer momento o mesmo. Acreditamos e esperamos que desta forma os alunos terão um bom entendimento de limites no próximo semestre em Cálculo o que é uma das ideias da disciplina ofertada e que consideramos ser um pouco mais difícil sem a mediação do computador neste caso.

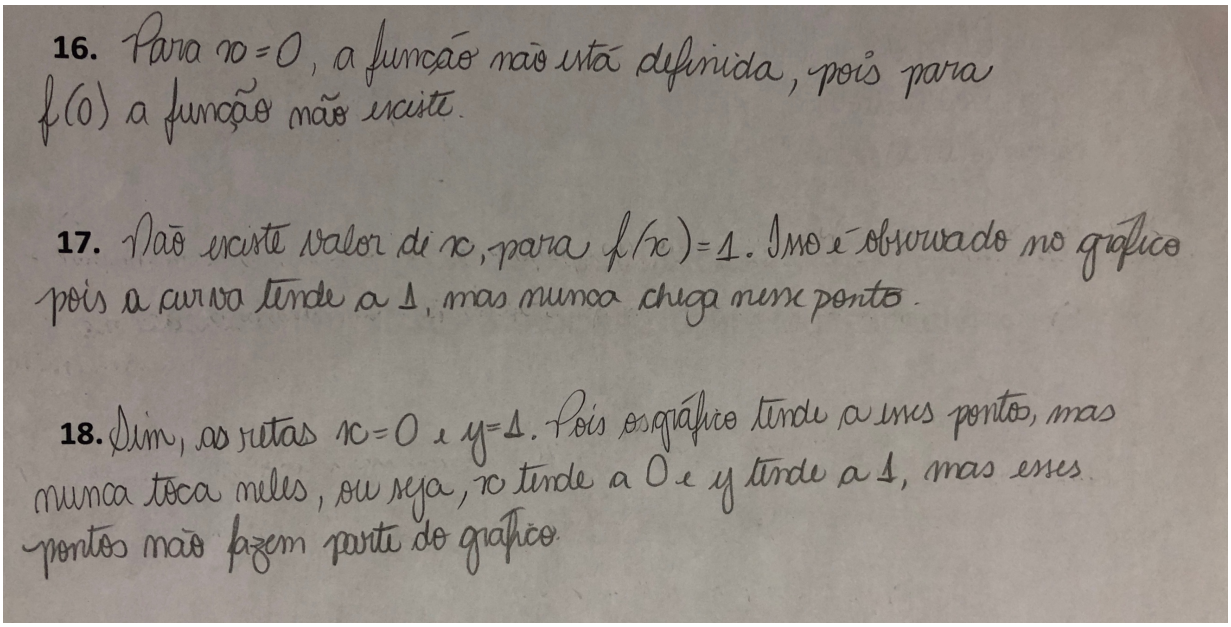
Figura 37: Imagem do caderno de respostas do grupo 4



Fonte: Acervo do autor.

Em relação às assíntotas, o grupo entendeu muito bem respondendo com equações e com padrões de repostas corretos, como observado nos itens 17 e 18 da figura 38, principalmente para alunos de primeiro semestre sem noção de Cálculo ainda, já que utilizam termos como “a curva tende a 1” e “x tende a zero”.

Figura 38: Imagem do caderno de respostas do grupo 4

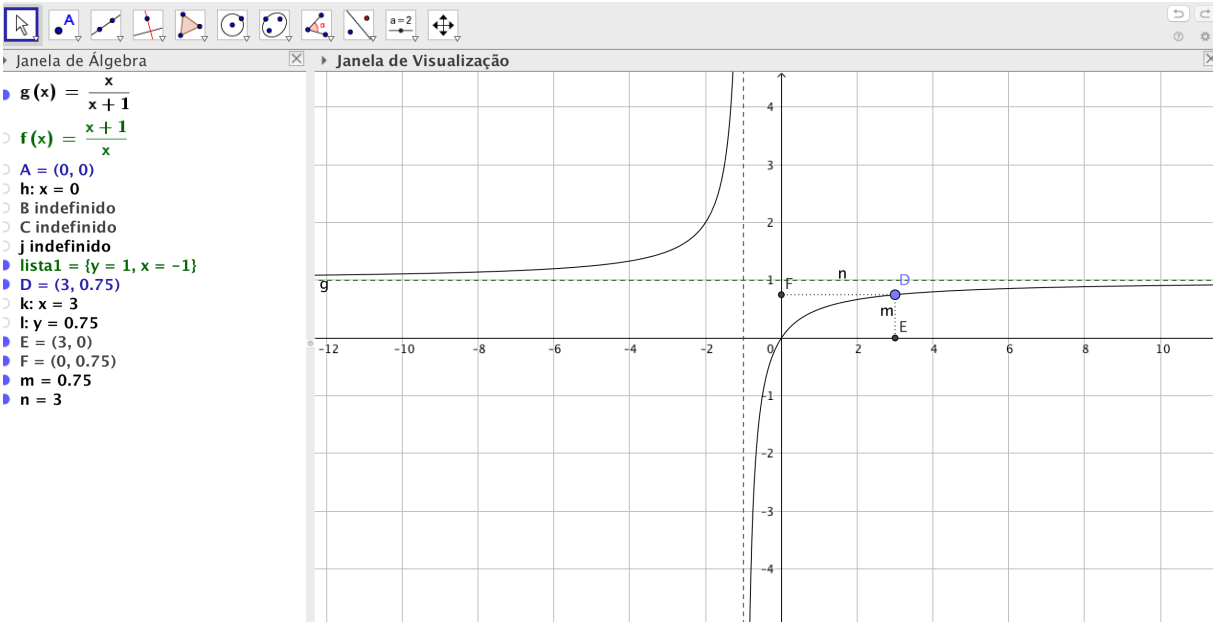


Fonte: Acervo do autor.

Após estudarem o gráfico de *f(x)*, foi pedido que analisassem a função $g(x) = \frac{x}{x+1}$ de forma semelhante ao que fizeram nos itens anteriores, mas desta vez apresentamos o comando *"Assíntotas[função]"* em determinado item.

Na figura 39 temos a imagem da tela do GeoGebra para a função *g(x)* realizada por um dos grupos e que foi salvo no dia.

Figura 39: Imagem da função g(x) gerado no GeoGebra por um dos grupos



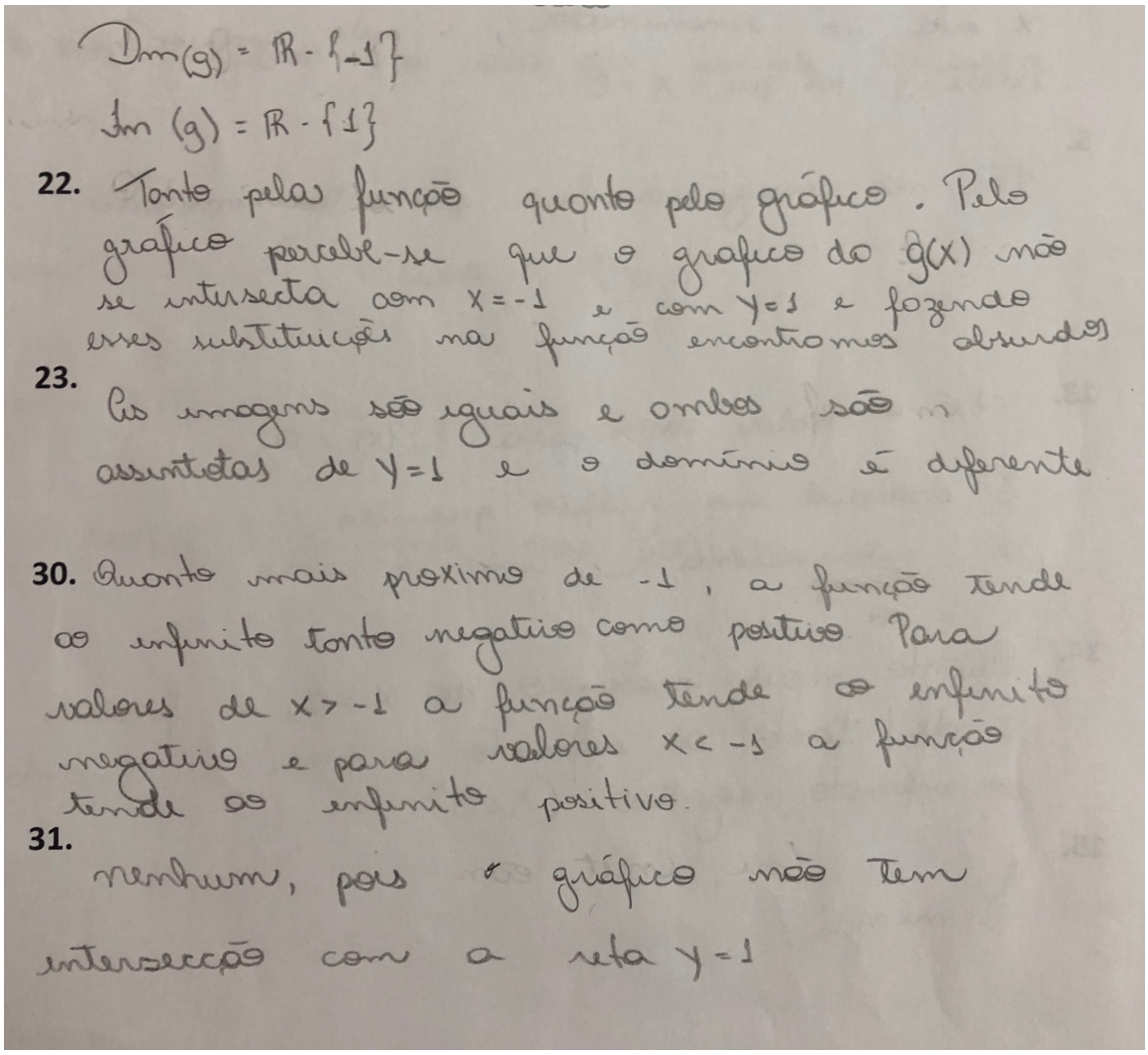
Fonte: Acervo do autor.

Assim como nos itens anteriores, o grupo 1 trabalhou muito bem o gráfico e a "análise" da expressão da função (itens 22 e 23 da figura 40), registrando no caderno o que realmente esperávamos. A dupla divide-se bem em grupo alternando-se entre os trabalhos de digitar no software, discutir a respeito das questões e registrar o que entenderam no caderno.

Um ponto a ser registrado foi não terem analisado o que ocorre com a função quando o valor de *x* tende a infinito positivo e negativo. Esta questão foi perguntada juntamente com o fato do que ocorre com a função quando o valor de *x* tende a -1, no item 30. Os alunos responderam muito bem e, analisando o vídeo e áudio percebemos que a dupla esqueceu-se de fazer a segunda análise.

Outro ponto interessante foi terem escrito "quanto mais próximo de -1" na resposta deste item. Lendo toda a resposta, ao item 30 na figura 40, fica claro que se referem a *x* próximo de -1, mas poderiam ter escrito com este detalhe. Como analisam a função para $x > -1$ e $x < -1$ (limites laterais), é possível entender que o valor -1 refere-se a x e fica bem interessante esta análise para um estudo de limites laterais da função com x tendendo a -1.

Figura 40: Imagem do caderno de respostas do grupo 1



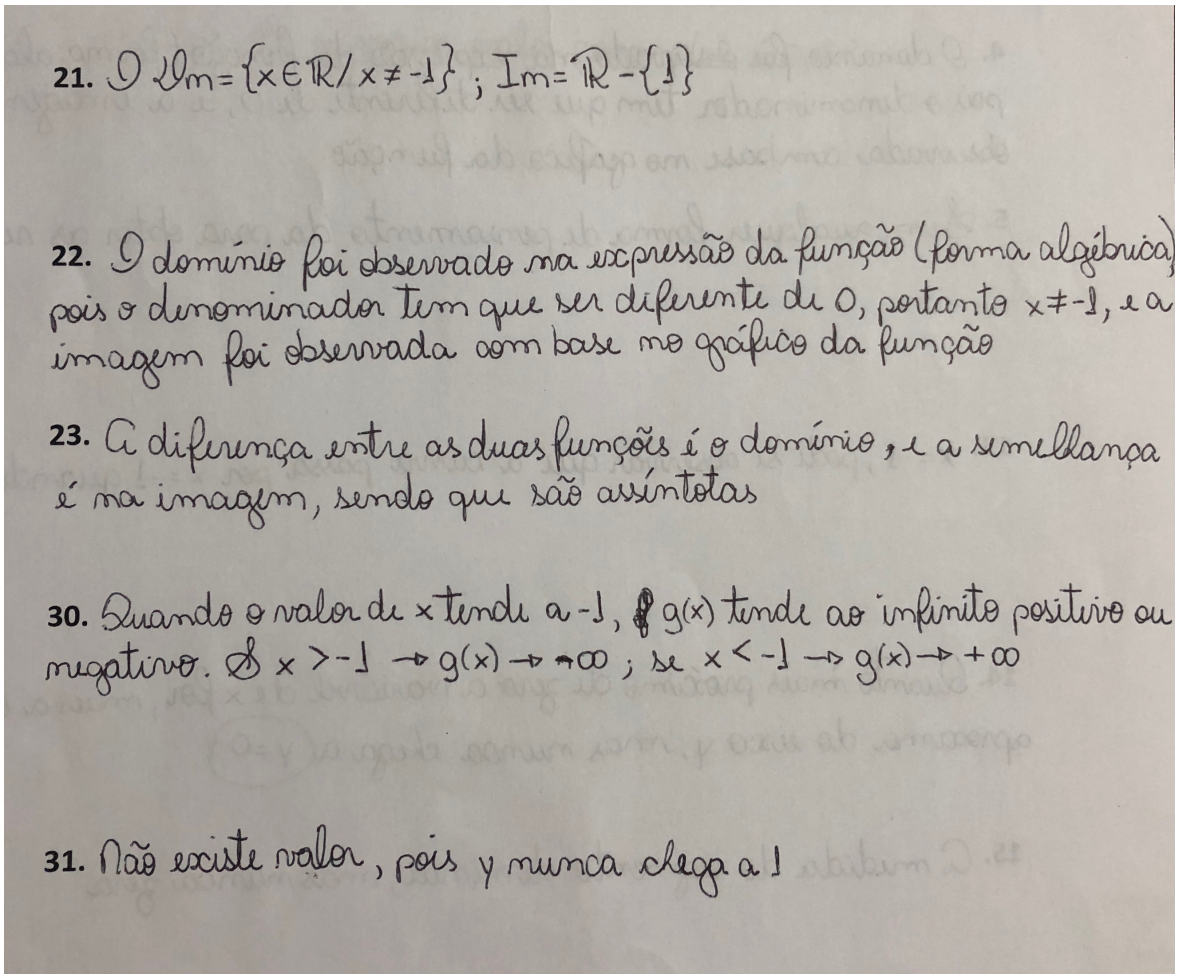
Fonte: Acervo do autor.

O grupo 2 conseguiu definir corretamente o domínio e a imagem da função como observado no item 21 da figura 41. Entendem melhor o domínio analisando a expressão e a imagem através da análise do gráfico gerado pelo software.

No item 23, da figura 41, observamos uma resposta que mostra que o conceito de assíntotas não está muito claro para eles, pois escrevem que as funções trabalhadas até o momento têm as mesmas imagens (correto), *"sendo que são assíntotas"*. (analisando o áudio, não foi possível entender o que quiseram dizer com isto)

Talvez quisessem dizer que a reta de equação *y = 1* é assíntota das duas funções, mas não ficou claro a ideia deles no áudio e menos ainda no caderno de registros.

Figura 41: Imagem do caderno de respostas do grupo 2



Fonte: Acervo do autor.

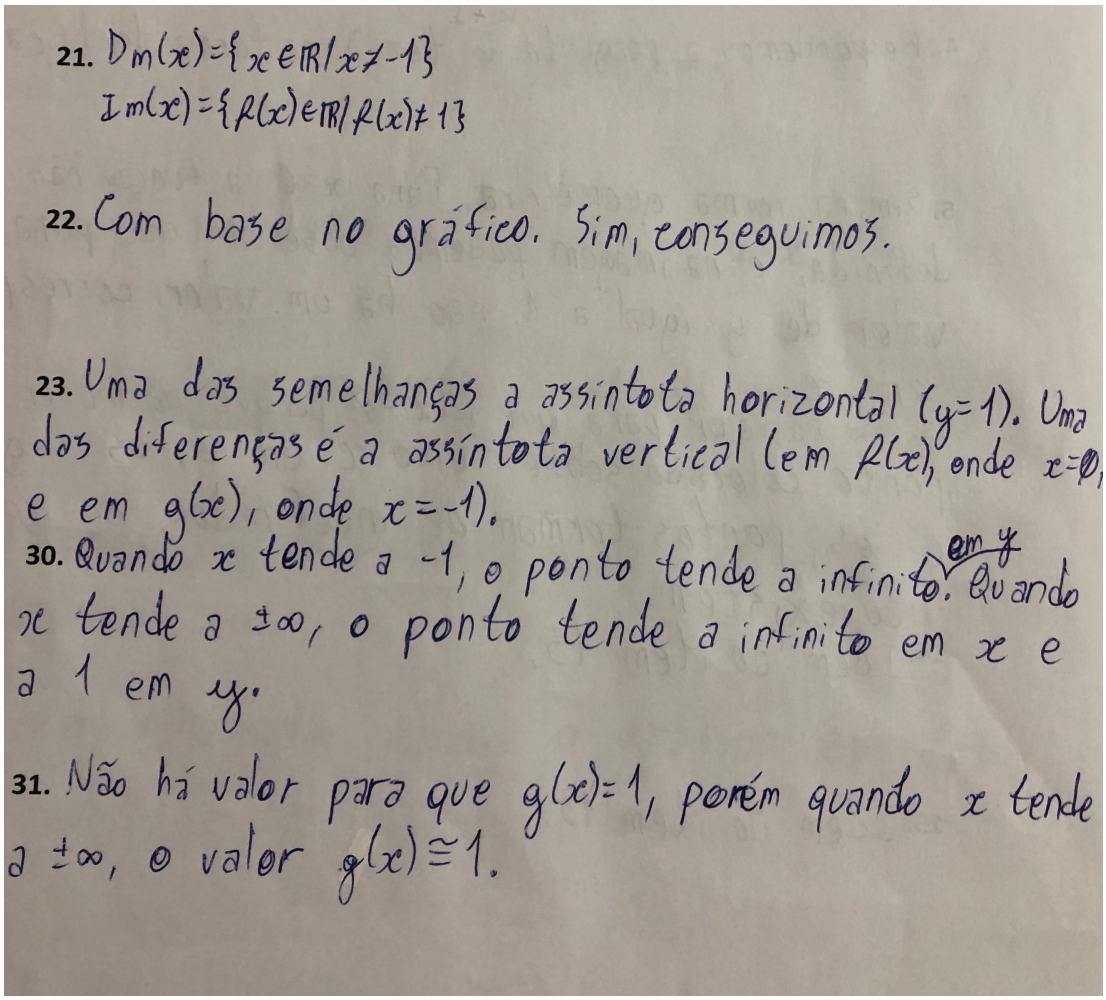
Assim como o grupo 1, esqueceram de analisar a função com *x* tendendo ao infinito no item 30. O fato de dois grupos terem se esquecido de fazer tal análise, leva-nos a pensar que não é interessante fazer mais de uma questão no mesmo item, pois os alunos não prestam muita atenção e ao se envolverem na análise da primeira questão, acabam esquecendo a outra. A notação utilizada no item 30 é bastante interessante como mostrado na figura 41.

O grupo 3 fez a análise do domínio e imagem da função g(x) corretamente como mostrado no item 21 da figura 42, mas no registro da imagem no caderno escrevem errado, porém melhor do que haviam feito no encontro anterior quando anotaram a imagem como sendo um conjunto formado por elementos *x*. Desta vez anotaram *f(x)*, mas temos que lembrar que a função é *g(x)* e se tivessem utilizado *y* ou a notação utilizada no item 3 deste encontro teria ficado melhor.

Nas diferenças e semelhanças entre *f(x)* e *g(x)* compararam as assíntotas apresentando as equações das mesmas como mostra a figura 42 no item 23, enquanto os dois grupos anteriores compararam o domínio e imagem das funções.

No item 30 fizeram a análise correta e foram o primeiro grupo a analisar as duas questões propostas, mas apresentam alguns erros de notação no caderno de registros. Embora tenham erros na notação, a ideia está totalmente correta para estes itens e é bastante interessante como entenderam que a medida que *x* aumenta seu valor numérico positivamente ou diminui negativamente, a função se aproxima do valor 1 como é mostrado no item 31 da figura 42.

Figura 42: Imagem do caderno de respostas do grupo 3



Fonte: Acervo do autor.

O grupo 4 entendeu bem as ideias como pode ser observado no caderno de registros da figura 43, cometendo alguns erros na formalização por escrito, porém as ideias parecem ter ficado claras.

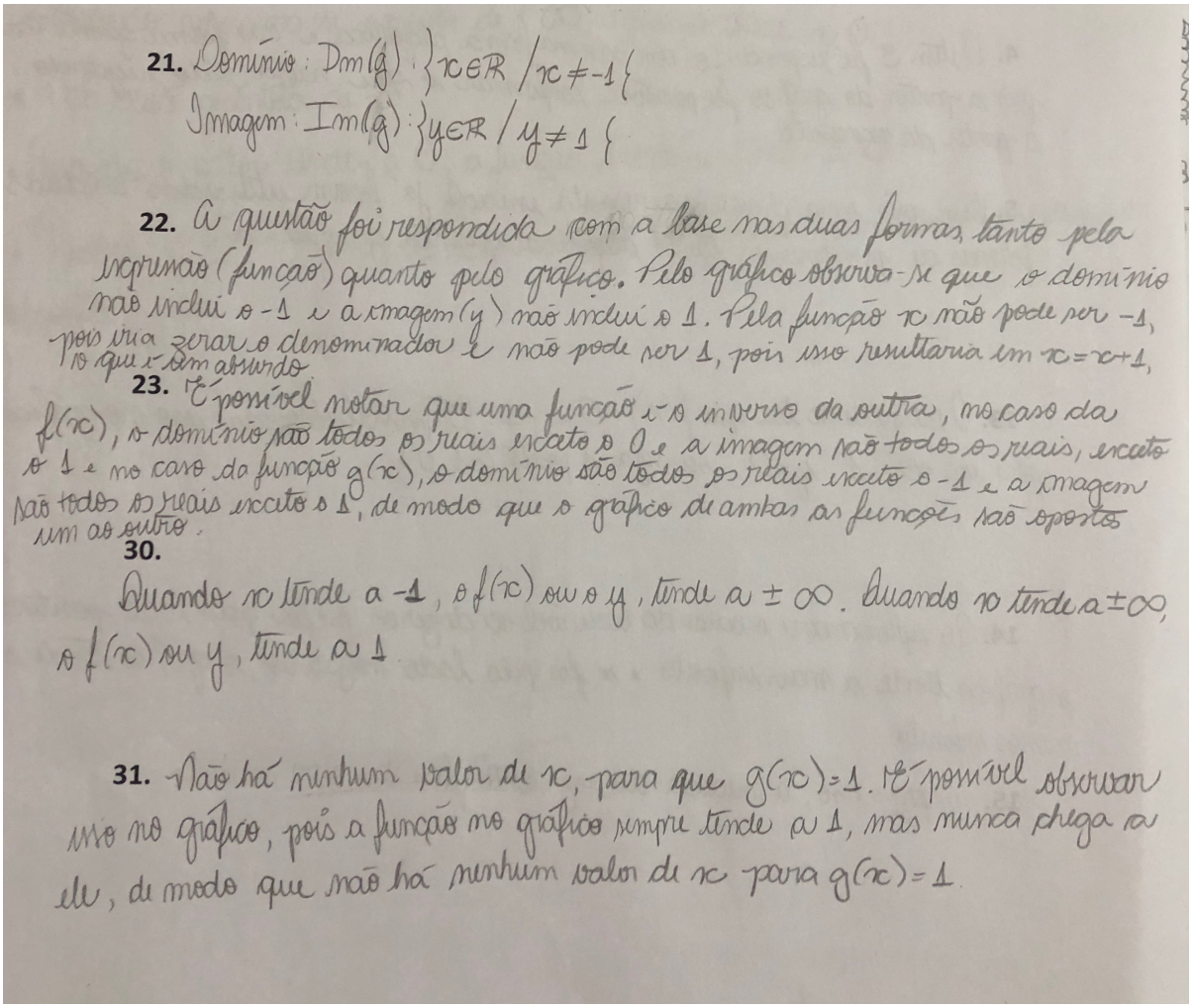
Para entender o domínio e a imagem de *g(x)* utilizaram tanto a expressão da função como o gráfico gerado no GeoGebra. No item 23 (figura 43) cometem um erro do ponto de vista matemático e conceitual ao dizerem que *f(x)* e *g(x)* são funções inversas. Acreditamos que esta fala ocorreu, pois invertemos o denominador e o numerador da fração da função dada. O problema é que o conceito de função inversa vai muito além deste fato, tendo que se analisar se a função é

bijetora e não somente inverter uma fração. Estes conceitos devem ser enfocados na sala de aula e com esta atividade foi possível identificar esta falha. Quando pensamos na questão, nossa ideia era justamente provoca-los a pensar sobre o que aconteceria apenas invertendo a fração, mas não que isso gerasse a inversa da função.

Poderiam ter analisado a simetria das duas funções em relação a reta $y = x$ para ver se tinham realmente duas funções inversas. Isto seria uma forma de investigar o que estavam falando, mas acreditamos que nem tenham falado em inversa neste sentido e sim somente em relação a trocar numerador por denominador.

O grupo analisou as duas questões propostas no item 30, assim tivemos dois grupos que se esqueceram e dois grupos mais atentos para as duas questões propostas. Neste item os alunos registram a função *f(x)* quando na verdade estávamos falando de *g(x)* (item 30 da figura 43). Além disso, apresentam um erro na hora de escrever suas ideias no item 31. Acreditamos, pelo áudio e vídeos gravados, que os alunos entenderam o conceito das assíntotas para esta função, mas na hora de escrever colocam que a *"função no gráfico sempre tende a 1"* o que não é verdade. Isto ocorre somente quando pensamos em valores cada vez maiores ou então cada vez menores para *x*.

Figura 43: Imagem do caderno de respostas do grupo 4

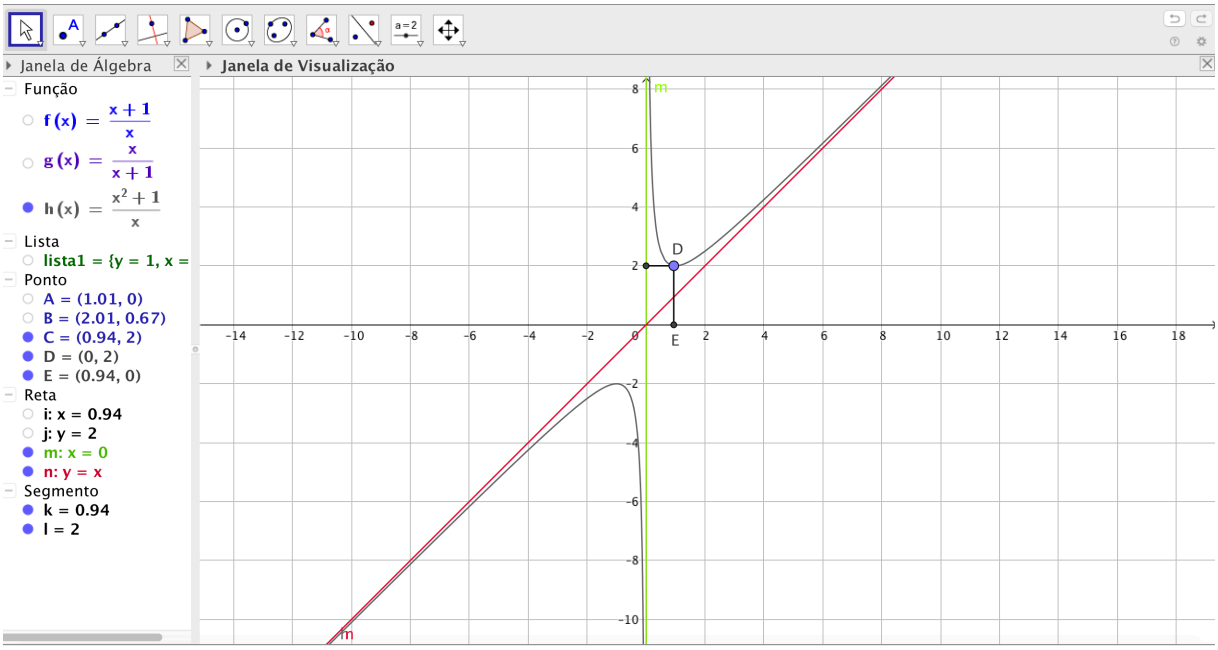


Fonte: Acervo do autor.

Para finalizar a atividade deste dia pedimos que refizessem os itens para mais duas funções e comparassem suas conclusões.

A função $h(x) = \frac{x^2+1}{x}$ tem seu gráfico mostrado na figura 44, onde notamos uma assíntota um pouco mais difícil de ser percebida. Pedimos em determinado momento se os alunos conseguiam dizer qual era a assíntota sem utilizar o recurso do GeoGebra que fornecia as mesmas. Apenas um grupo conseguiu identificar sem o comando do software, dando uma indicação que a mediação utilizada deve ajudar em conceitos entendidos visualmente mas que ainda não foram muito bem entendidos algebricamente pelos alunos.

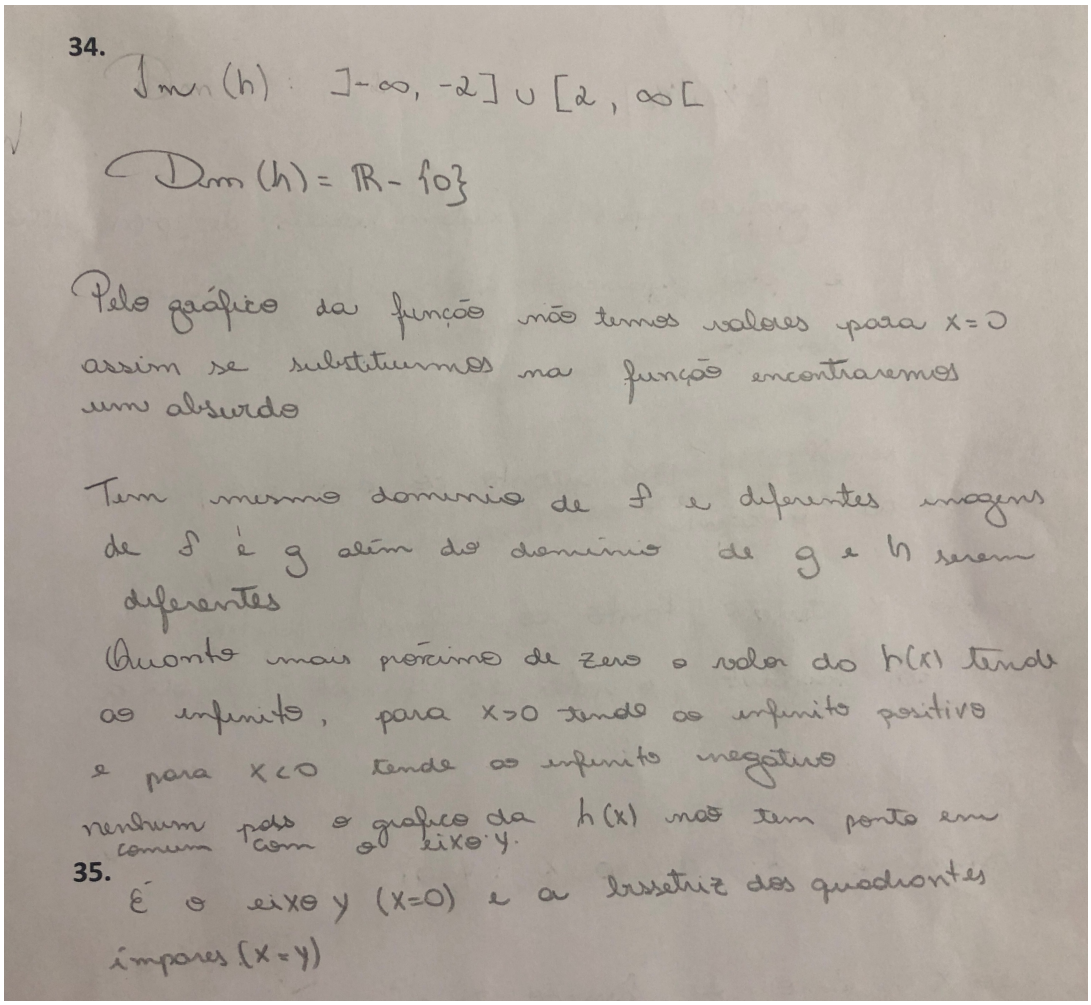
Figura 44: Imagem da tela do GeoGebra para a função h(x)



Fonte: Acervo do autor.

O grupo 1 definiu o conjunto imagem utilizando corretamente a notação de conjuntos como observa-se no item 34 da figura 45. Conseguiram definir as assíntotas e suas equações no item 35 sem utilizar o software. Interessante que no caderno de registros, anotaram tanto a equação das assíntotas como escreveram que uma das assíntotas era a bissetriz dos quadrantes ímpares (figura 45) demonstrando ter conhecimento do que estava sendo estudando.

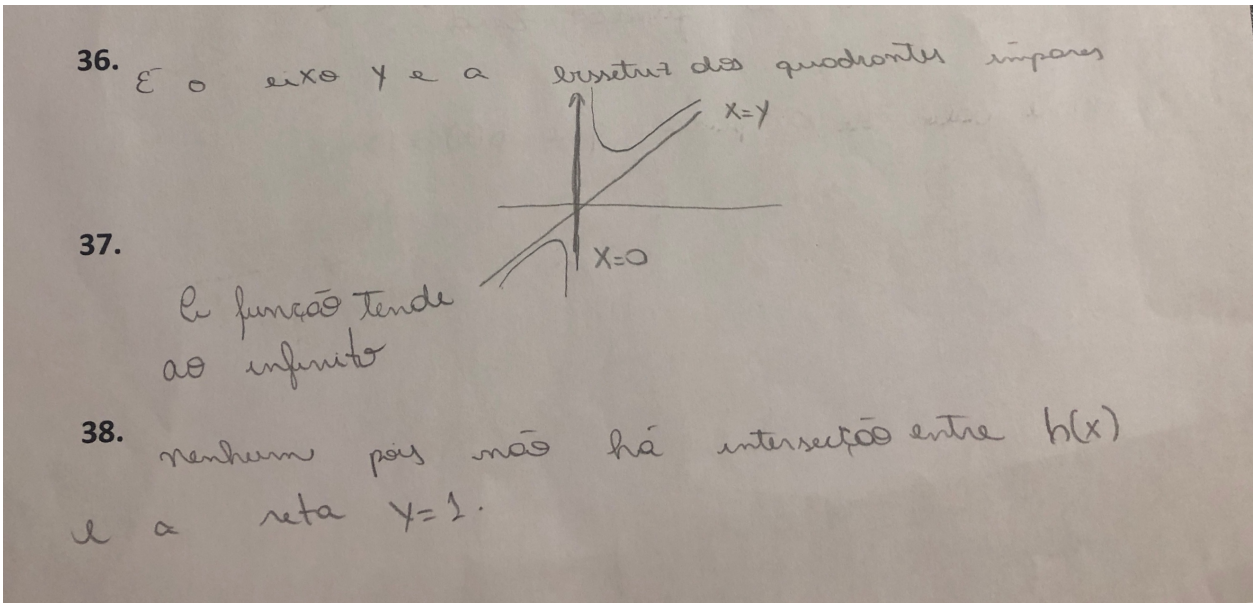
Figura 45: Imagem do caderno de respostas do grupo 1



Fonte: Acervo do autor.

Trabalharam muito bem todos os itens e com muita clareza nas falas e formalizações das respostas no caderno como podemos observar na figura 46. Note que, novamente, analisam a função para valores de *x* próximos de zero pelos dois lados (figura 45), conceito que será muito utilizado no estudo de limites no próximo semestre.

Figura 46: Imagem do caderno de respostas do grupo 1

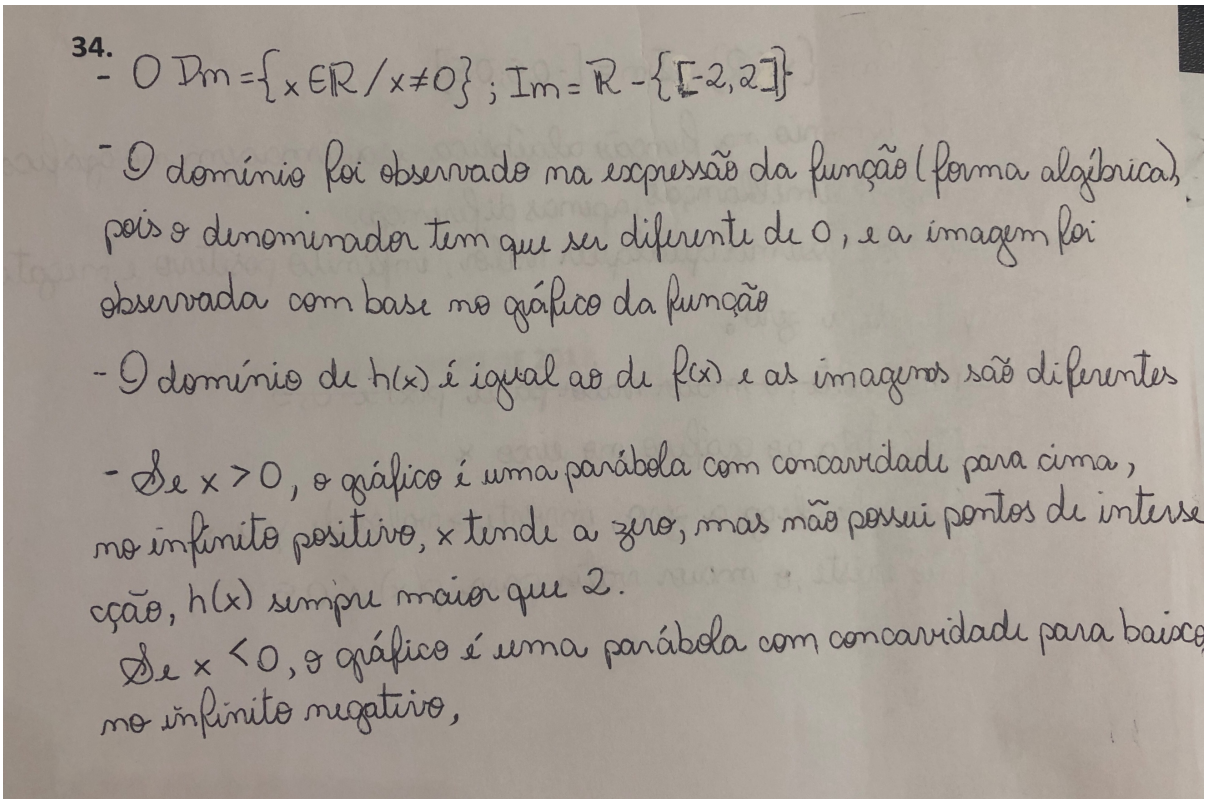


Fonte: Acervo do autor.

Desenharam no caderno a função *h(x)* e suas assíntotas com suas respectivas equações além de identificarem uma das assíntotas como a bissetriz dos quadrantes ímpares (figura 46), mostrando ter um bom conhecimento da matemática básica utilizada nestas questões.

O grupo 2 entendeu o domínio através da expressão e para a imagem utilizaram o gráfico da função. No caderno escreveram o conjunto domínio corretamente, mas cometeram vários erros na notação do conjunto imagem como pode ser observado no item 34 da figura 47. Misturaram a notação de conjunto com a notação de intervalo, além de terem excluído os valores 2 e -2 da imagem, uma vez que em sua resposta excluíram o intervalo fechado de -2 a 2. No vídeo demostram muito dúvida na forma de escrever a imagem e isso se refletiu no que anotaram no caderno de registros. Outro ponto mostrado em suas conclusões foram dúvidas sobre a hipérbole onde chamam-na de parábola com concavidade para baixo ou para cima. (figura 47) Podemos notar pequenos erros conceituais, mas que levam a erros e dúvidas maiores em itens posteriores.

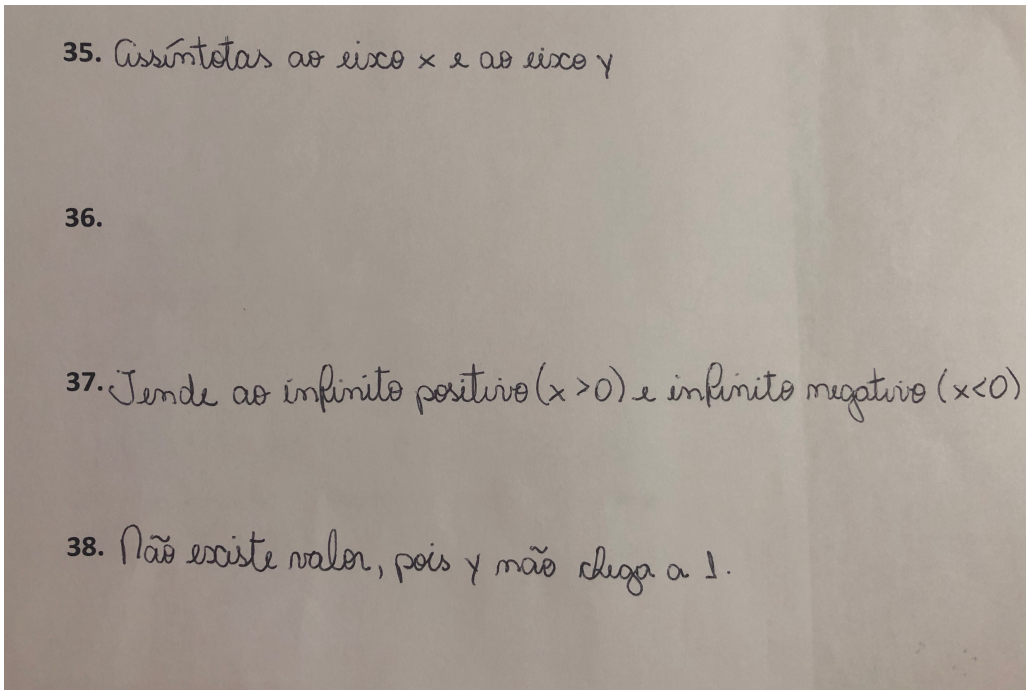
Figura 47: Imagem do caderno de respostas do grupo 2



Fonte: Acervo do autor.

O grupo ainda não entendeu o que são as assíntotas ao gráfico e com isso não conseguem definir as equações das mesmas para a função mesmo com o gráfico. Elas entendem a ideia de que a função tende a um determinado valor sem atingir este valor, mas não conseguem escrever o que entendem como podemos observar na figura 48, quando escrevem “assíntotas ao eixo *x* e ao eixo *y*” . Utilizaram o recurso do software para identificar as assíntotas, mas como havíamos pedido que não utilizassem este comando, não registraram no caderno deixando o item 36 em branco na figura 48. Após observarem a assíntota criada pelo GeoGebra, tentaram criar uma reta que fosse assíntota criando pontos e uma reta passando por estes pontos, mas a ideia não deu certo, pois não sabiam onde criar os pontos para que a reta não tocasse a função. Responderam corretamente o que acontece com a função quando a variável *x* tende a zero analisando os dois lados do valor zero no item 37. (limites laterais)

Figura 48: Imagem do caderno de respostas do grupo 2



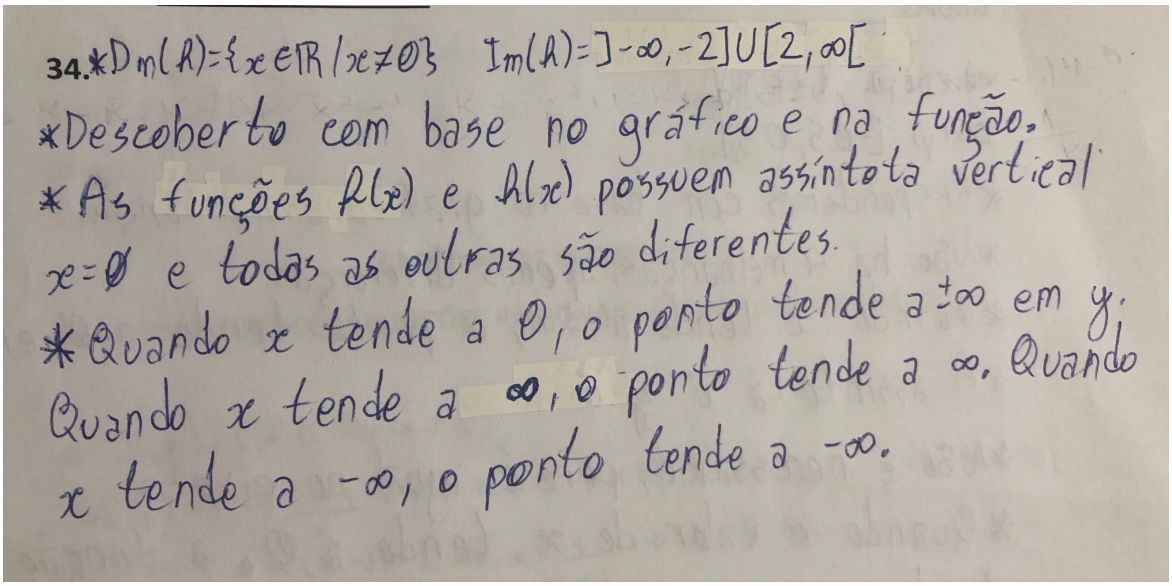
Fonte: Acervo do autor.

O grupo 3 conseguiu definir o domínio e a imagem corretamente e formalizar suas conclusões no caderno (item 34 na figura 49). Uma observação em relação a seus registros foi escreverem que "*quando x tende a zero, o ponto tende a* $\pm\infty$ em y*"* (figura 49). Devemos notar que a ideia está correta, mas quem tende ao infinito é a função ou a ordenada do ponto criado por eles sob a função quando a coordenada *x* do mesmo ponto tende a zero. O que queremos destacar com isso é o cuidado que devemos ter ao registrar e expressar nossos conceitos sem deixar margem a erros de interpretação e assim formar excelentes profissionais na área de ensino de Matemática.

Não podemos nos esquecer que são alunos do primeiro semestre do curso ainda, mas introduzindo conceitos corretos desde agora, provavelmente formaremos melhores professores e mais cuidadosos ao ensinar no futuro.

O vídeo e áudio deste grupo deram problemas com uma hora de gravação e assim ficamos apenas com o registro dos cadernos para analisar o que entenderam.

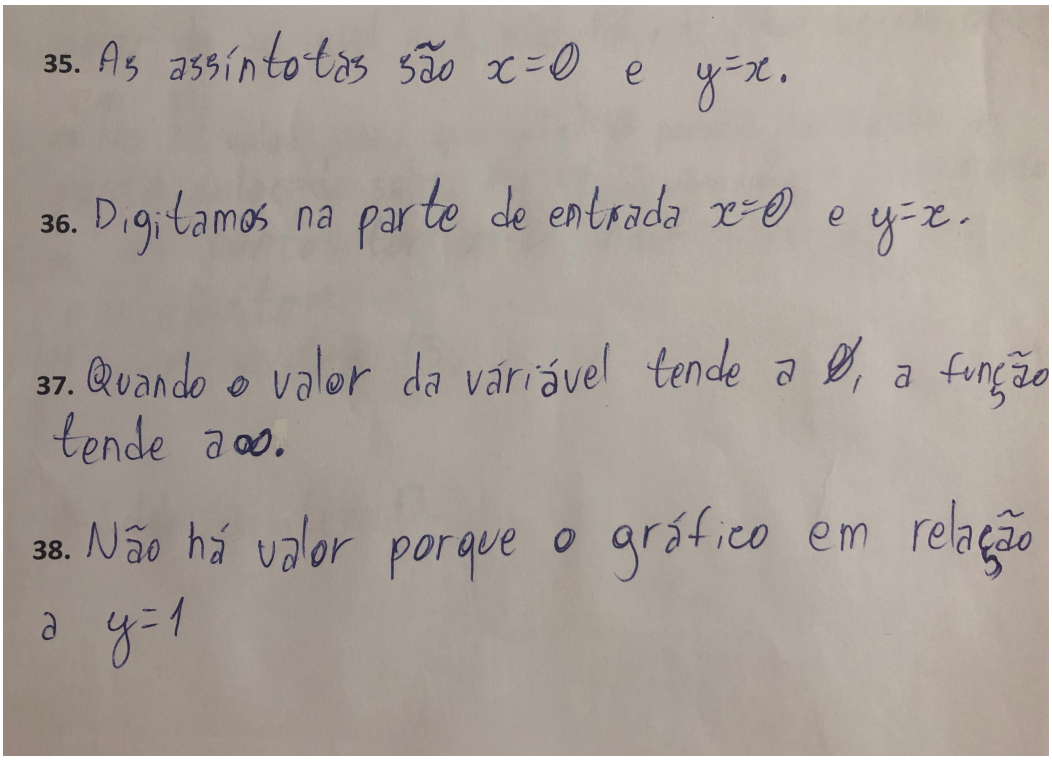
Figura 49: Imagem do caderno de respostas do grupo 3



Fonte: Acervo do autor.

Pelo registro no caderno, entenderam as assíntotas e escreveram suas equações corretamente (item 35 da figura 50). Vale um registro para o item 38 na figura 50, onde não conseguimos entender o que quiseram dizer com a resposta a este item. A questão era se a função tocava a reta de equação $y = 1$ e bastava observar no gráfico ou mesmo comparar com a imagem dada anteriormente. Como não temos o áudio desta parte do trabalho, ficou difícil inferir qualquer afirmação a respeito do que tentaram dizer.

Figura 50: Imagem do caderno de respostas do grupo 3



Fonte: Acervo do autor.

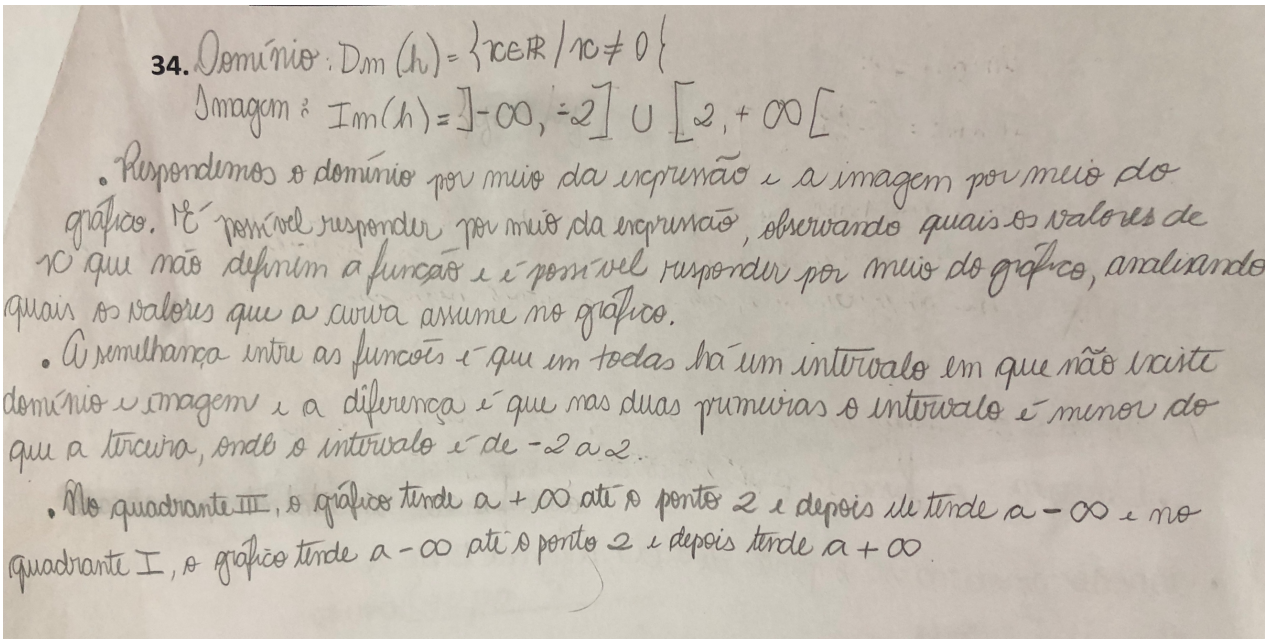
O conceito de domínio e imagem parece ter ficado bem entendido para o grupo 4 analisando as respostas no caderno de registros e as falas do áudio e vídeo gerados no encontro. Utilizaram corretamente a notação de intervalos para descrever o domínio e a imagem da função como observado no item 34 da figura 51.

Trabalharam muito bem os recursos do GeoGebra para entenderem, principalmente a imagem da função.

Ao descrever as diferenças e semelhanças entre as funções estudadas até o momento, o grupo anotou como semelhança o fato de todas as funções terem restrições para o conjunto dos números reais no domínio. (figura 51) Para descrever a diferença entre as funções, comparam as imagens das mesmas, mas ficou difícil perceber este fato na anotação do caderno como pode ser observado na figura 51 onde escrevem “ a diferença é que nas duas primeiras o intervalo é menor do que na terceira, onde o intervalo é de -2 a 2”. Isso nos mostra

que dentre as várias possibilidades de se comparar as funções, algumas diferenças e semelhanças são percebidas por alguns e não por outros. Assim seria muito interessante neste tipo de abordagem que se compartilhasse os resultados de cada grupo com toda a turma após os encontros ou se destacasse o que cada grupo analisou mostrando as diferenças entre eles.

Figura 51: Imagem do caderno de respostas do grupo 4



Fonte: Acervo do autor.

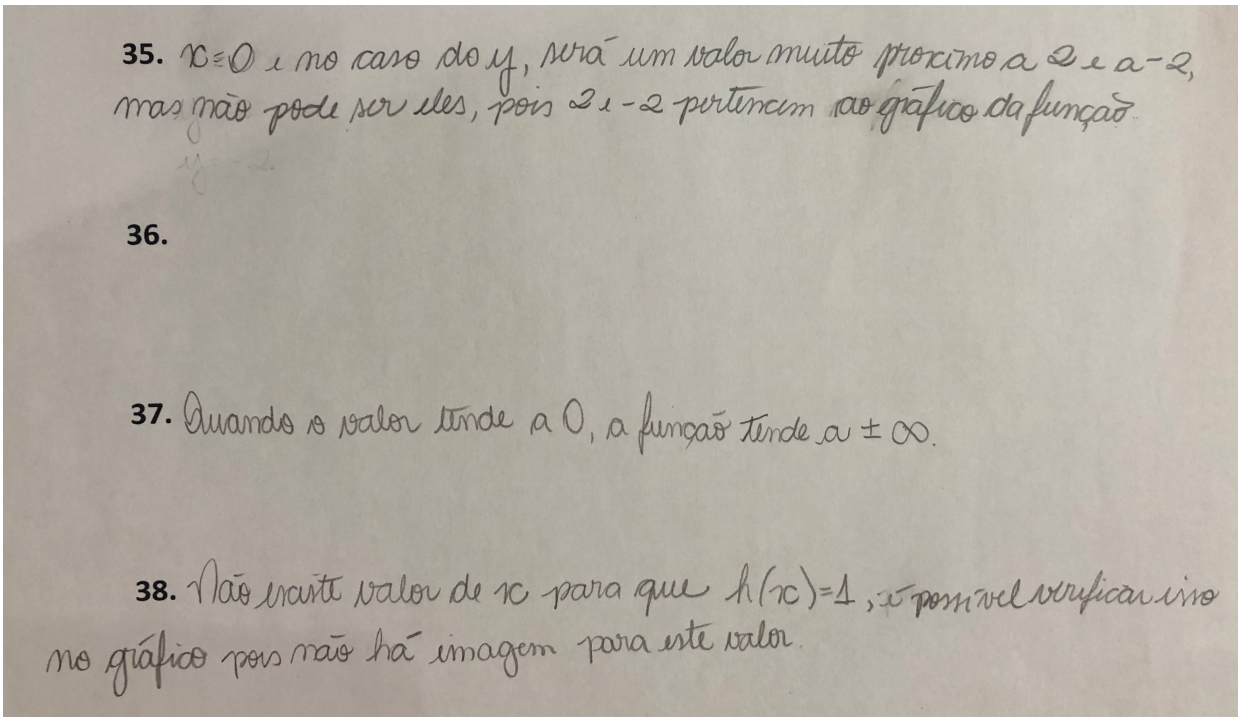
Ainda na figura 51, percebemos um erro cometido pelo grupo ao analisar a função nos quadrantes onde a mesma estava plotada no GeoGebra. Analisando o vídeo, acreditamos que a ideia fosse entender o crescimento e decrescimento da mesma nos quadrantes.

O grupo confundiu os quadrantes e assim a análise ficou bastante confusa e equivocada. Devemos notar o que o grupo escreveu no item 34 da atividade: *"No terceiro quadrante o gráfico tende a $+\infty$ até o ponto 2"*. O valor 2 é a abcissa ou a ordenada do ponto? No terceiro quadrante, o gráfico da função tende a $-\infty$ à medida que *x* tende a valores cada vez mais negativos. Se *x=-1*, temos a imagem -2 e a medida que *x* tende a zero por valores negativos a função tende a

novamente a $-\infty$. O mesmo erro ocorreu quando mencionaram o primeiro quadrante.

Novamente reforçamos o fato de estarmos trabalhando com futuros professores de Matemática e erros ou ideias equivocadas podem confundir muito os alunos que estariam aprendendo. Devemos ter um rigor muito grande com a forma como nos expressamos para minimizar eventuais dúvidas que possam surgir.

Figura 52: Imagem do caderno de respostas do grupo 4



Fonte: Acervo do autor.

No item 35 (figura 52) não conseguiram identificar umas das assíntotas do gráfico e utilizaram o comando do software para ver esta assíntota, mas não anotaram no caderno, pois era perguntado se conseguiam identificar as assíntotas sem utilizar o comando no software. Mesmo após terem observado a assíntota $y = x$ no GeoGebra, não conseguem defini-la como podemos observar na resposta apresentada no caderno. Novamente uma resposta um pouco vaga ao escreverem que a assíntota é próxima a 2 e -2. Na ideia dos alunos do grupo talvez

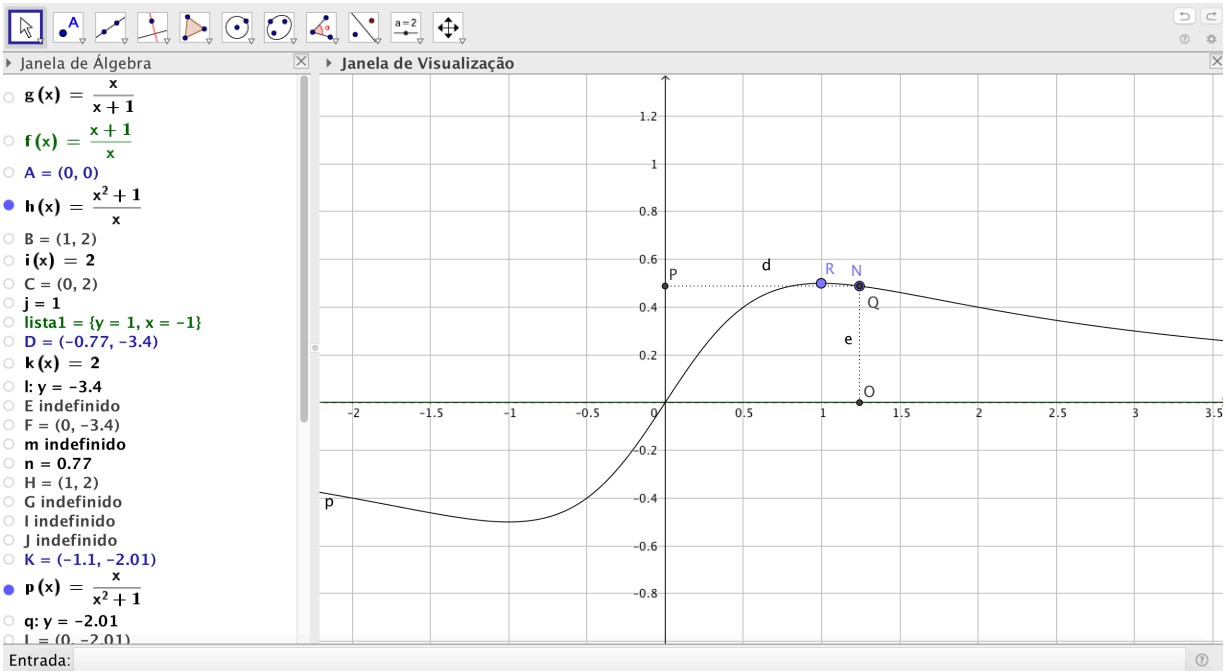
isto até estivesse claro, mas fica muito vago para uma pessoa entender o que estão dizendo com estes valores 2 e -2. Não se sabe se são valores de *x* ou de *y*.

Este grupo utilizou bastante o recurso do "zoom" do software para entender se 2 e -2 faziam parte do conjunto imagem da função e isso é interessante já que sem o GeoGebra ficaria difícil perceber isso.

No item 37 (figura 52) anotam que a função tende a $\pm\infty$ quando o valor de *x* tende a zero, mas sem anotar por qual lado do valor x = 0 a função tende a infinito positivo e por qual lado a função tende a infinito negativo e no item 38 observam que a função não possui imagem igual a 1 através do gráfico.

A função $p(x) = \frac{x}{x^2+1}$ tem seu gráfico mostrado na figura 53, onde a única assíntota é o eixo x. Pedimos novamente que os alunos identificassem as assíntotas sem utilizar o recurso do GeoGebra que fornecia as mesmas. Apenas um grupo não conseguiu identificar dizendo que o gráfico não possuía assíntotas, nos dando um forte indício que o conceito parece estar mais claro a medida que exploramos mais as funções e seus gráficos gerados pelo GeoGebra.

Figura 53: Imagem da tela do GeoGebra para a função p(x)



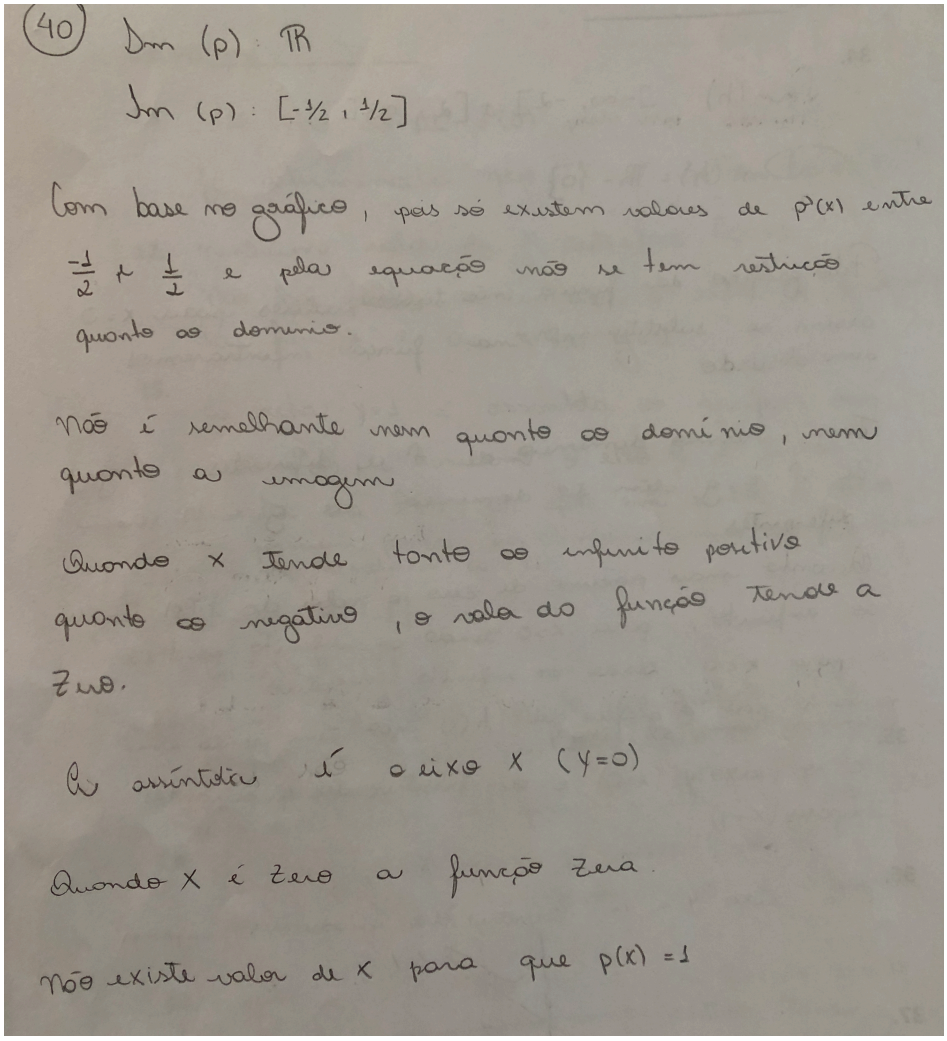
Fonte: Acervo do autor.

O grupo 1 definiu o conjunto domínio e imagem utilizando corretamente a notação de conjuntos (item 40 da figura 54). Conseguiram definir a assíntota sem utilizar o software e depois construíram a mesma no software confirmando o que haviam pensado.

Interessante como registraram com muito cuidado e corretamente suas observações. Este cuidado, em nossa opinião, é extremamente benéfico para o bom entendimento dos conceitos abordados.

Ainda na figura 54 é possível verificar que identificam a raiz e os limites da função quando x tendo ao infinito positivo e negativo, corretamente.

Figura 54: Imagem do caderno de respostas do grupo 1

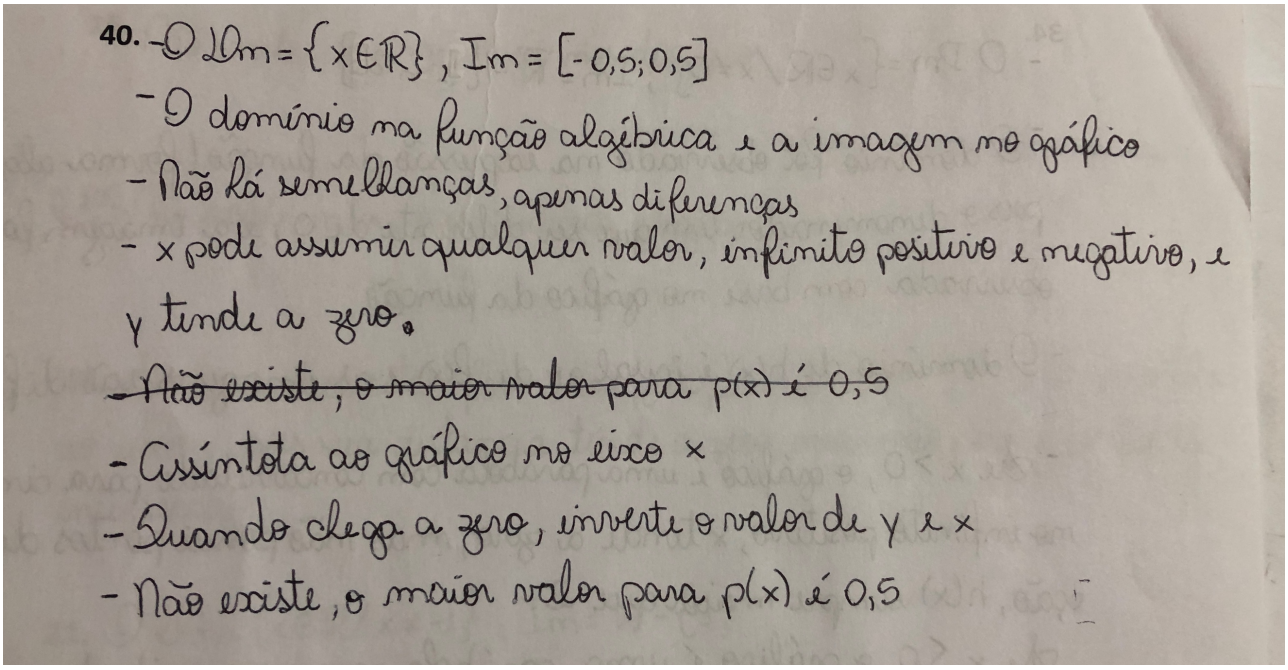


Fonte: Acervo do autor.

O grupo 2 entendeu o domínio e a imagem, mas não confiaram ou não entendem muito bem como analisar o domínio utilizando o gráfico, assim recorreram à álgebra para o domínio e o gráfico somente para a imagem. (figura 55)

Sobre as assíntotas, percebe-se uma insegurança ainda, embora tenham respondido corretamente. Fazem algumas observações um pouco vagas como *"quando chega a zero, inverte o valor de y e x"*. No vídeo, percebe-se que não entendem muito bem assíntotas ainda e suas anotações confirmam estas dúvidas como podemos observar na figura abaixo.

Figura 55: Imagem do caderno de respostas do grupo 2



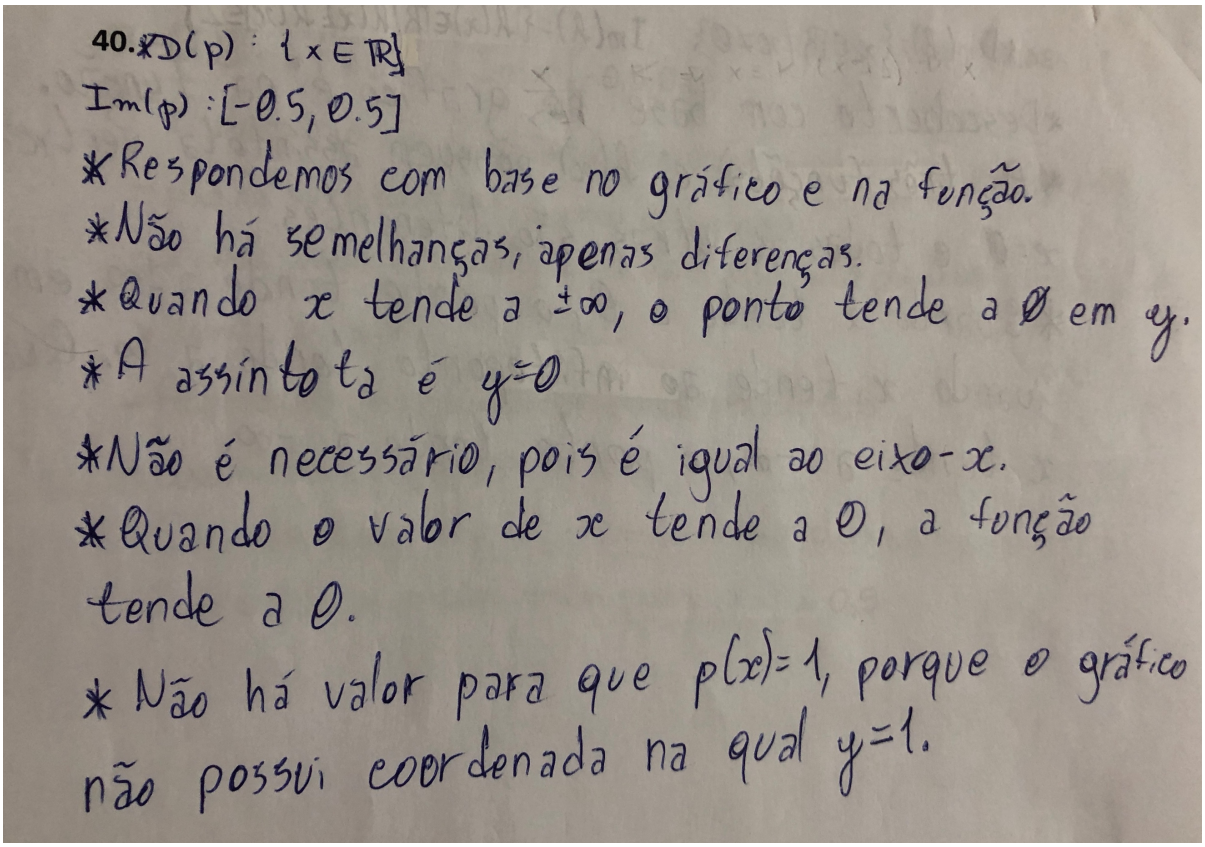
Fonte: Acervo do autor.

Outro ponto foi não terem explorado mais, através da comparação dos gráficos das funções, a relação entre elas limitando-se apenas a dizer que não possuíam semelhanças. Não tentaram relacionar o fato de que as funções eram invertidas em relação a numerador e denominador e o que isso causava em seus domínios, imagens, assíntotas e gráficos. Novamente percebemos uma certa ansiedade em terminar as atividades o mais rápido possível, quando os alunos

demonstram no vídeo gravado uma pressa em responder as questões mesmo quando possuíam dúvidas.

Nota-se que o grupo 3 entendeu bem as questões observando-se as anotações no caderno de registros (figura 56), pois o vídeo deste grupo apresentou problemas na gravação e foi interrompido com 15 minutos não permitindo uma análise mais aprofundada de como estavam analisando as questões para registrar no caderno. De qualquer forma, anotaram corretamente a assíntota e os limites da função quando x tende a mais ou menos infinito. Anotaram ainda, corretamente, que a função tende a zero quando x tende a zero, mas não escreveram em nenhum momento que zero é a raiz da função (em Cálculo irão aprender que o limite da função com x tendendo a zero ser igual a função quando x=0, nos levará a continuidade da função neste ponto).

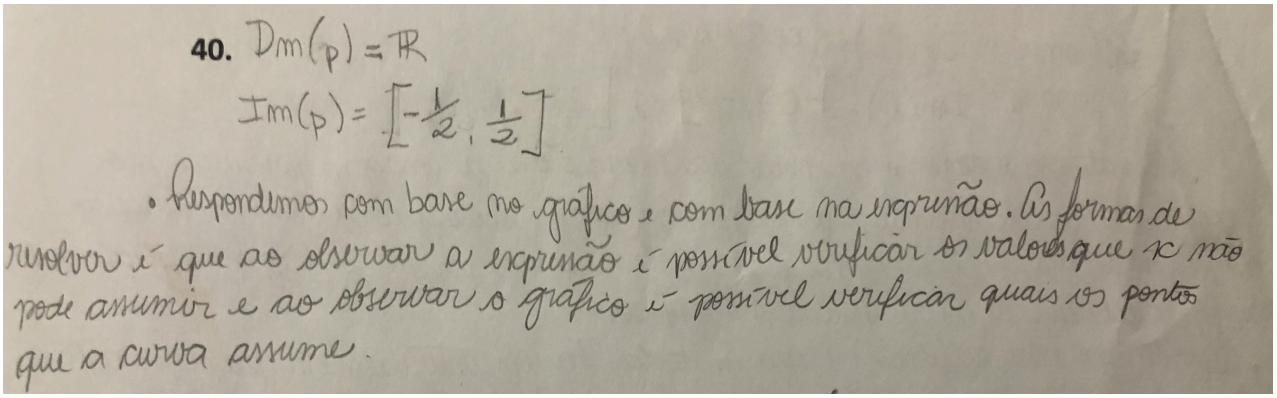
Figura 56: Imagem do caderno de respostas do grupo 3



Fonte: Acervo do autor.

O grupo 4 nos mostra ter entendido bem domínio e imagem da função como mostra a figura 57, mas não entenderam muito bem o que são assíntotas.

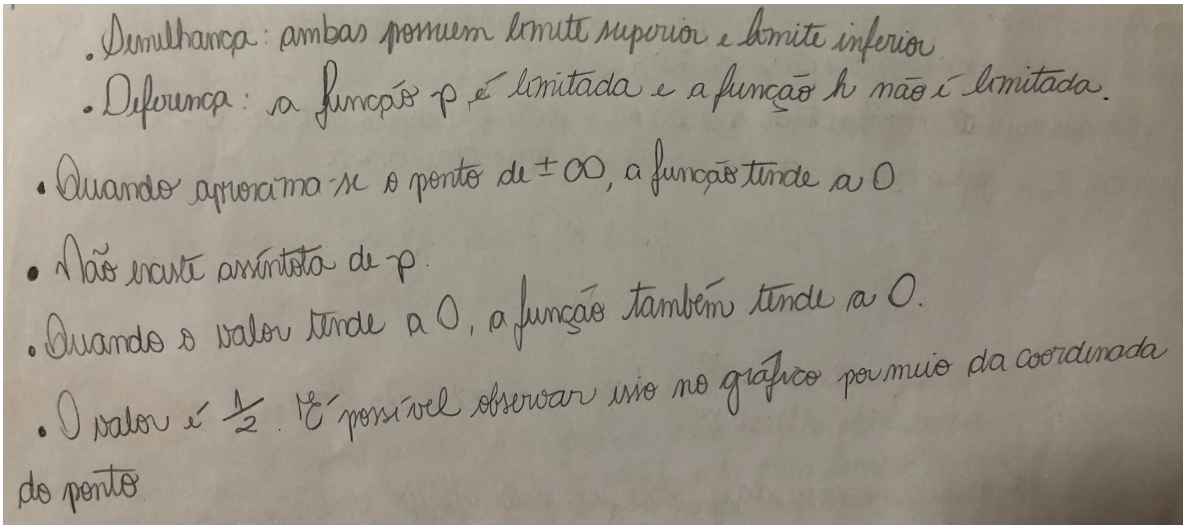
Figura 57: Imagem do caderno de respostas do grupo 4



Fonte: Acervo do autor.

Anotaram que o gráfico de p(x) não possui assíntota (figura 58) e o que percebemos assistindo o vídeo do grupo é que eles confundem com a reta que tangencia o gráfico em determinados pontos do mesmo.

Figura 58: Imagem do caderno de respostas do grupo 4



Fonte: Acervo do autor.

Voltavam ao gráfico de h(x) para olhar a assíntota $y = x$ e por isso pensavam em assíntota como sendo $y = 1/2$ neste caso.

Ainda na figura 58, observamos um descuido quando escrevem "quando aproxima-se o ponto de $\pm\infty$, a função tende a 0" e " quando o valor tende a 0, a função também tende a 0". Para quem está participando no momento da atividade, talvez esteja claro que querem dizer que quando o valor de *x* tende a mais ou a menos infinito, a função tende a zero e que quando o valor da variável *x* tende a zero, a função tende a zero, mas deve-se ter muito cuidado ao anotar estas observações por escrito e ao expressar estes fatos para não deixar dúvidas sobre estes limites.

Neste dia foi gerado uma gravação com duração de 7h13'20" de vídeos das telas dos computadores dos grupos, juntamente com os áudios, as folhas com as conclusões registradas e as atividades realizadas no GeoGebra salvas. A distribuição dos tempos, mostrada na Tabela 5, vai na mesma direção do analisado e discutido, onde o grupo 1 foi o que terminou primeiro com 1h36'03" no total e o grupo 4 por último com 2h22'38". O grupo 3 foi o grupo que menos explorou o software no início com 5'45" contra 18' em média dos outros grupos.

Tabela 5: Tempos de vídeo e áudio gerados no segundo encontro

	Grupo 1	**Grupo 2**	**Grupo 3**	**Grupo 4**
Reconhecimento do software	18'00"	14'01"	5'45"	21'54"
Atividade 2	1h18'03""	1h47'23"	1h07'30"	2h00'44"
Tempo Total	1h36'03"	2h01'24"	1h13'15"	2h22'38"

Fonte: Elaboração própria.

4.3 TERCEIRO ENCONTRO

O terceiro encontro ocorreu vinte e um dias após o segundo e tivemos a participação de 6 alunos que foram divididos em três duplas, sendo o grupo 1 o mesmo do primeiro encontro, o grupo 2 com um aluno que não participou de nenhum encontro anterior e o grupo 3 com uma aluna que não havia participado nenhuma vez também. Os grupos com os integrantes é mostrado na tabela 6.

Tabela 6: Grupos e participantes do terceiro encontro

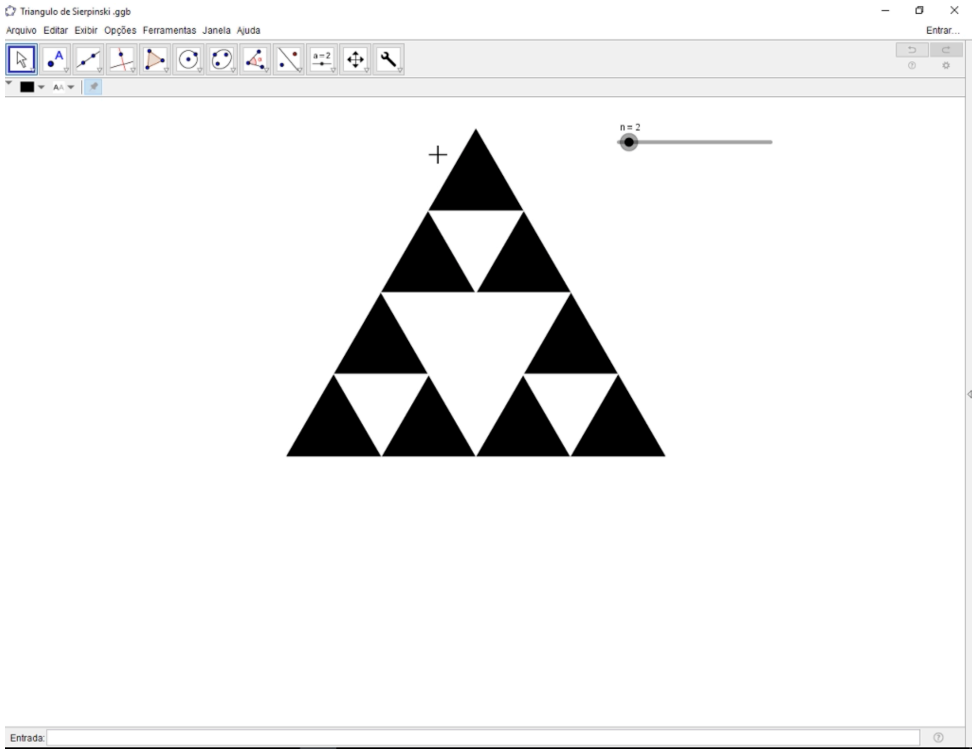
Grupo 1	$LU21^{M}$ e $MA18^{M}$
Grupo 2	$EL35^{M}$ e $LE18^{M}$
Grupo 3	$GI18^{F}$ e $GU18^{M}$

Fonte: Elaboração própria.

Devido a provas e outros compromissos dos alunos, tivemos uma menor participação neste encontro, porém dois novos alunos iniciaram no projeto.

Inicialmente apresentamos uma atividade com fractal em um arquivo já pronto, onde era pedido aos alunos que tentassem identificar uma sistemática de contagem dos triângulos escuros gerados no GeoGebra a partir de um número *n* de iterações. (figura 59)

Figura 59: Imagem do GeoGebra com o arquivo de fractal

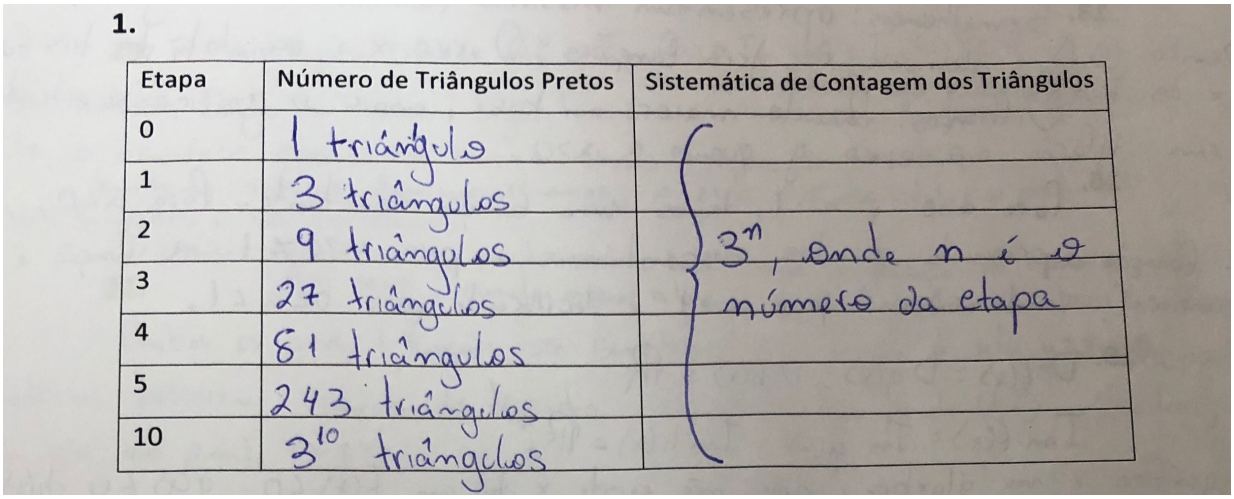


Fonte: Acervo do autor.

Ao alterar os valores do controle deslizante, cada triangulo “preto” é dividido em 4 novos triângulos equiláteros dos quais três são pretos e um é branco. Assim para n=0, temos apenas 1 triângulo preto, para n=1 três triângulos pretos e um branco, para n=2 temos 9 triângulos pretos e 4 triângulos brancos e assim por diante.

O grupo 1 trabalhou esta questão com bastante tranquilidade. Um fato é que como estas divisões começam a gerar triângulos cada vez menores, a partir de n=4, o arquivo não realizava mais as divisões. Este grupo incialmente tentou aplicar o zoom para ver se os triângulos estavam sendo divididos e esta divisão não era percebida visualmente, mas chegaram a conclusão que nada acontecia a partir de n=4.

Figura 60: Atividade com fractal do grupo 1



1.

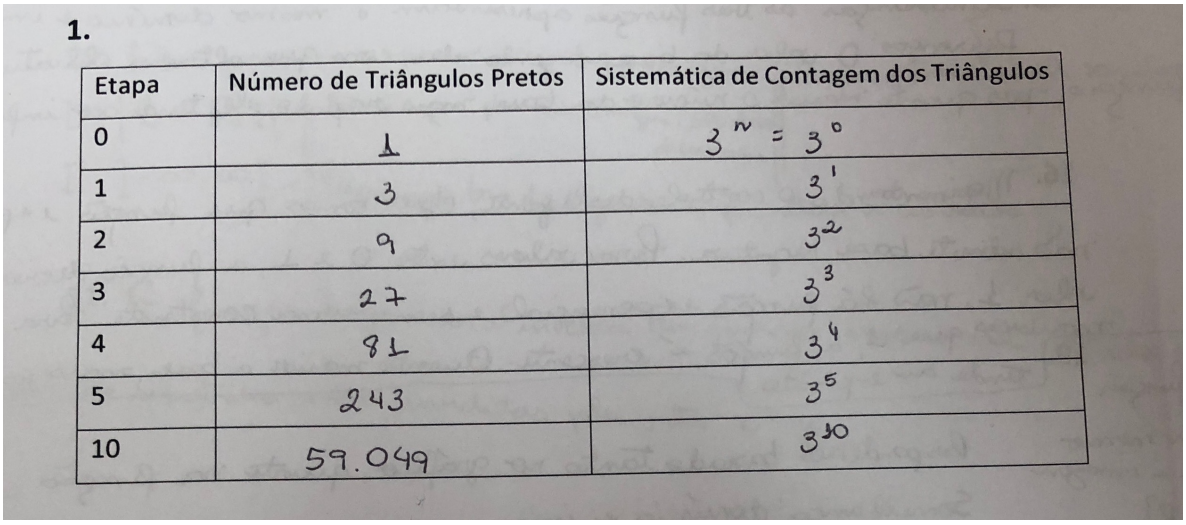
Etapa	Número de Triângulos Pretos	Sistemática de Contagem dos Triângulos
0	1 triângulo	
1	3 triângulos	
2	9 triângulos	3^n, onde n é o número da etapa
3	27 triângulos	
4	81 triângulos	
5	243 triângulos	
10	3^{10} triângulos	

Fonte: Acervo do autor.

Para preencher a tabela, foram alterando o seletor e contando os triângulos pretos até a etapa 3, quando perceberam que os valores eram potências de 3 a partir de n = 0. (figura 60)

Um fato que chamou a atenção ocorreu com os grupos 2 e 3, onde os alunos não sabiam o que significava a sistemática de contagem dos triângulos. O grupo 2 chegou a pesquisar no Google o significado da palavra sistemática, mas ambos os grupos acabaram solicitando ajuda da professora da disciplina para saber o que deveriam responder neste item. Entenderam a ideia da contagem rapidamente (figuras 61 e 62), mas não sabiam o que era pedido com a sistemática de contagem. A meu ver isso nos remete a um outro problema que é a falta de leitura de nossos alunos e da população brasileira de modo geral. Com a falta de leitura, vemos também muita dificuldade na interpretação e isto atrapalha enormemente o entendimento de Matemática.

Figura 61: Atividade com fractal do grupo 2

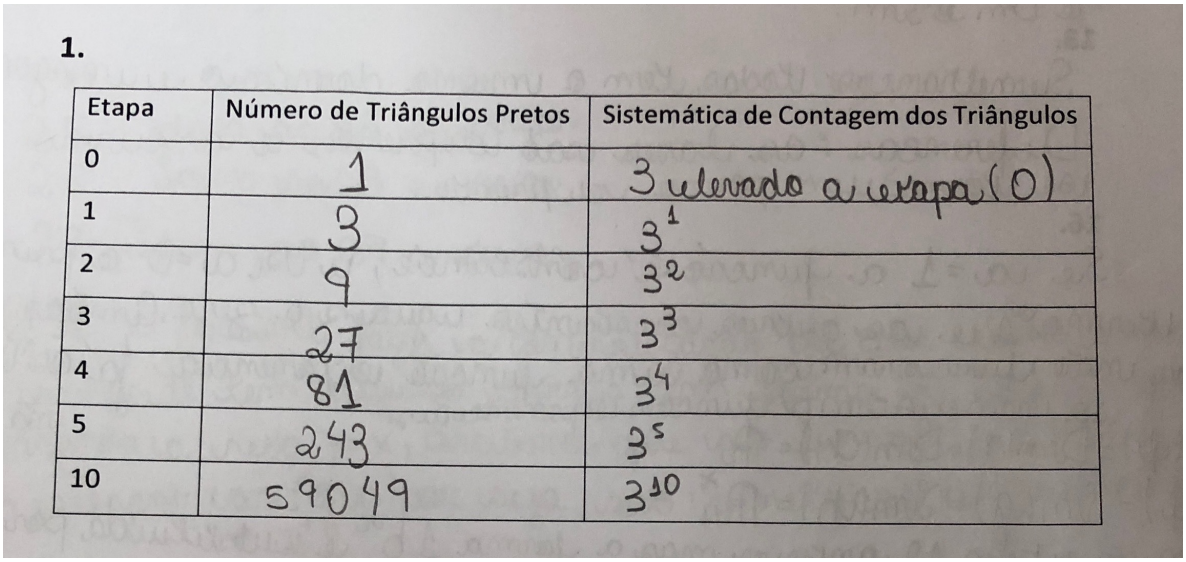


1.

Etapa	Número de Triângulos Pretos	Sistemática de Contagem dos Triângulos
0	1	$3^n = 3^0$
1	3	3^1
2	9	3^2
3	27	3^3
4	81	3^4
5	243	3^5
10	59.049	3^{10}

Fonte: Acervo do autor.

Figura 62: Atividade com fractal do grupo 3



1.

Etapa	Número de Triângulos Pretos	Sistemática de Contagem dos Triângulos
0	1	3 elevado a etapa (0)
1	3	3^1
2	9	3^2
3	27	3^3
4	81	3^4
5	243	3^5
10	59049	3^{10}

Fonte: Acervo do autor.

Após este início com o fractal, iniciamos a atividade do dia pensando em trabalhar as funções exponenciais e logarítmicas dando destaque novamente ao domínio, imagem e gráficos, além de trabalharmos as assíntotas e funções inversas através da simetria destas duas funções em relação à reta y = x.

Foi introduzido também a ideia intuitiva de limite para apresentação do número de Euler que é bastante utilizado como base das funções exponenciais e logarítmicas principalmente com aplicações em Física, Estatística, Economia, Biologia e Química. Muitos dos alunos chegam ao ensino superior desconhecendo este número ou quando conhecem não fazem a menor ideia de como se chega a ele.

Figura 63: Folha de atividades do segundo encontro

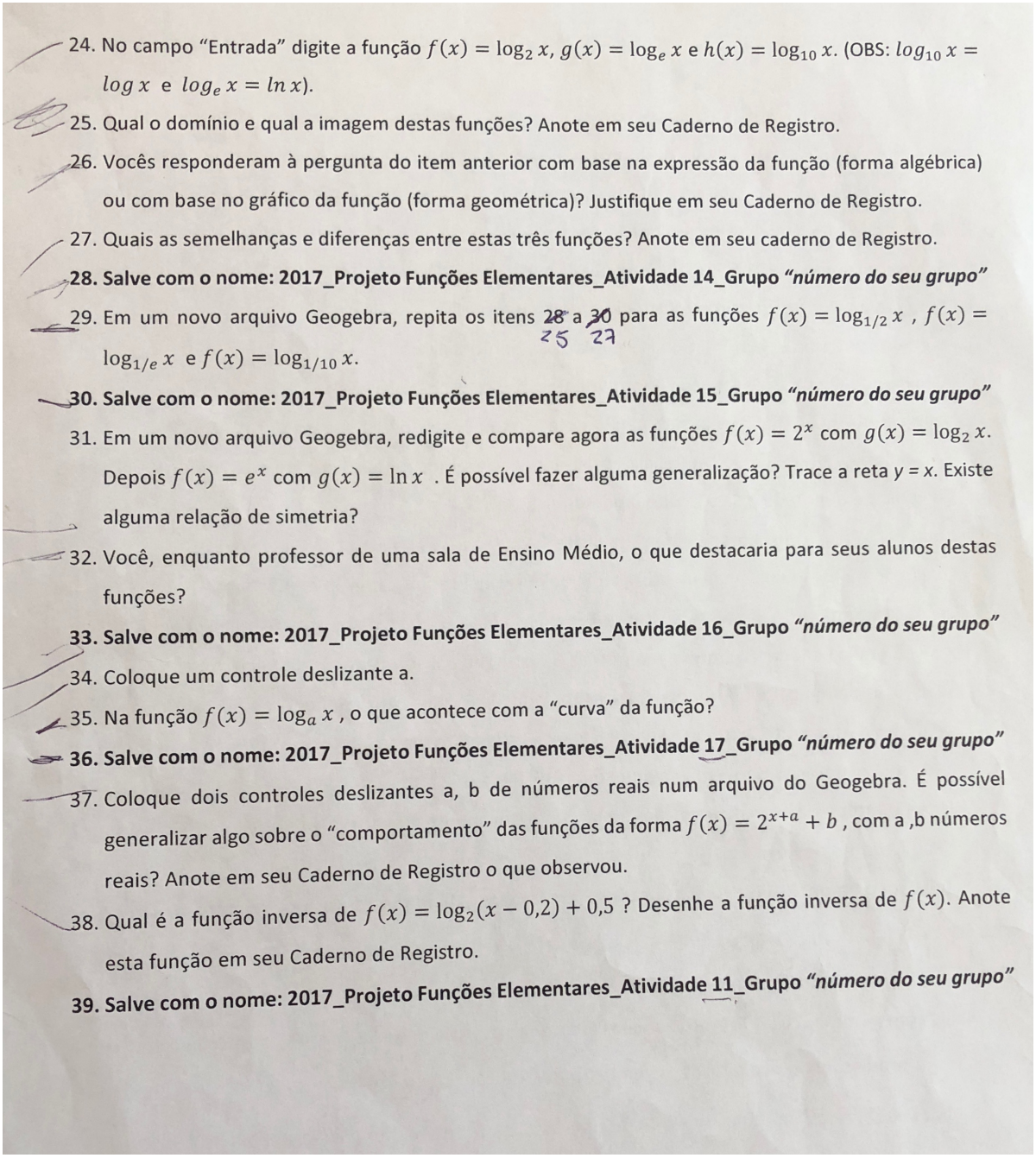
ATIVIDADE COM FUNÇÕES EXPONENCIAL E LOGARITMICA – 23/06/2017

1. Inicie a gravação e abra o GeoGebra. Abra o arquivo do Triângulo de Sierpinski, ele é um exemplo de Fractal. Movimente o controle deslizante e preencha a tabela em seu Caderno de Registro.
2. Abra um novo arquivo do Geogebra. No campo "Entrada" digite a função $f(x) = 3^x$ (digitar 3^x).
3. Qual o domínio e qual a imagem desta função? Anote em seu Caderno de Registro.
4. **Salve com o nome: 2017_Projeto Funções Elementares_Atividade 09_Grupo *"número do seu grupo"***
5. Coloque um controle deslizante n, de números inteiros. D
6. Digite o ponto (n,(1+1/n)^n). Habilite o rastro do ponto digitado.
7. Movimente n e registre em seu Caderno de Registro suas observações.
8. Digite a reta y=2.718. O que aconteceu? Anote em seu Caderno de Registro.
9. Esse valor 2.718 obtido da sequência acima quando fazemos n muito grande é chamado de Número de Euler e é denotado por *e*. Oculte o ponto digitado.
10. Digite $g(x) = e^x$ (no campo de entrada digite "exp(x)") e $h(x) = 10^x$.
11. Qual o domínio e qual a imagem destas funções? Anote em seu Caderno de Registro.
12. Vocês responderam à pergunta do item 14 com base na expressão da função (forma algébrica) ou com base no gráfico da função (forma geométrica)? Justifique em seu Caderno de Registro.
13. Quais as semelhanças e diferenças entre as três funções? Anote em seu Caderno de Registro.
14. **Salve com o nome: 2017_Projeto Funções Elementares_Atividade 10_Grupo *"número do seu grupo"***
15. Num arquivo novo do Geogebra coloque um controle deslizante a
16. Digite no campo de entrada a função $f(x) = a^x$. Movimente o controle e descreva suas observações no seu Caderno de Registro.
17. **Salve com o nome: 2017_Projeto Funções Elementares_Atividade 11_Grupo *"número do seu grupo"***
18. Digite as funções $f(x) = \frac{1}{2^x}$, $g(x) = \frac{1}{e^x}$ e $h(x) = \frac{1}{10^x}$ em um novo arquivo do Geogebra.
19. Repita os itens 14 a 16 para essas novas funções.
20. **Salve com o nome: 2017_Projeto Funções Elementares_Atividade 12_Grupo *"número do seu grupo"***
21. Em um arquivo novo redigite os seguintes pares de funções: $f(x) = 2^x$ e $g(x) = \frac{1}{2^x}$ e ainda as funções $h(x) = e^x$ e $l(x) = \frac{1}{e^x}$. Observe as duas primeiras funções e depois as outras duas, é possível fazer alguma generalização? Existe alguma simetria? Anote suas observações em seu Caderno de Registro.
22. Pensando em uma atuação como professor de uma sala de Ensino Médio, o que vocês consideram importante destacar para seus alunos a respeito destas funções? Anote.
23. **Salve com o nome: 2017_Projeto Funções Elementares_Atividade 13_Grupo *"número do seu grupo"***

Fonte: Acervo do autor.

Começamos trabalhando com as funções exponenciais mais simples e depois com as funções logarítmicas para então trabalharmos as constantes que deslocam as funções e consequentemente a imagem, curvatura e taxa de crescimento das mesmas como pode ser observado nas folhas de atividades da figuras 63 e 64.

Figura 64: Continuação da folha de atividades do segundo encontro

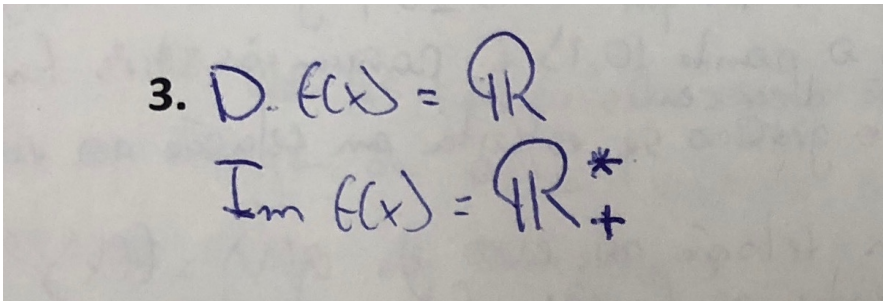


24. No campo "Entrada" digite a função $f(x) = \log_2 x$, $g(x) = \log_e x$ e $h(x) = \log_{10} x$. (OBS: $log_{10} x = log\, x$ e $log_e x = ln\, x$).
25. Qual o domínio e qual a imagem destas funções? Anote em seu Caderno de Registro.
26. Vocês responderam à pergunta do item anterior com base na expressão da função (forma algébrica) ou com base no gráfico da função (forma geométrica)? Justifique em seu Caderno de Registro.
27. Quais as semelhanças e diferenças entre estas três funções? Anote em seu caderno de Registro.
28. **Salve com o nome: 2017_Projeto Funções Elementares_Atividade 14_Grupo *"número do seu grupo"***
29. Em um novo arquivo Geogebra, repita os itens 28 a 30 para as funções $f(x) = \log_{1/2} x$, $f(x) = \log_{1/e} x$ e $f(x) = \log_{1/10} x$.
30. **Salve com o nome: 2017_Projeto Funções Elementares_Atividade 15_Grupo *"número do seu grupo"***
31. Em um novo arquivo Geogebra, redigite e compare agora as funções $f(x) = 2^x$ com $g(x) = \log_2 x$. Depois $f(x) = e^x$ com $g(x) = \ln x$. É possível fazer alguma generalização? Trace a reta *y = x*. Existe alguma relação de simetria?
32. Você, enquanto professor de uma sala de Ensino Médio, o que destacaria para seus alunos destas funções?
33. **Salve com o nome: 2017_Projeto Funções Elementares_Atividade 16_Grupo *"número do seu grupo"***
34. Coloque um controle deslizante a.
35. Na função $f(x) = \log_a x$, o que acontece com a "curva" da função?
36. **Salve com o nome: 2017_Projeto Funções Elementares_Atividade 17_Grupo *"número do seu grupo"***
37. Coloque dois controles deslizantes a, b de números reais num arquivo do Geogebra. É possível generalizar algo sobre o "comportamento" das funções da forma $f(x) = 2^{x+a} + b$, com a ,b números reais? Anote em seu Caderno de Registro o que observou.
38. Qual é a função inversa de $f(x) = \log_2(x - 0{,}2) + 0{,}5$? Desenhe a função inversa de $f(x)$. Anote esta função em seu Caderno de Registro.
39. **Salve com o nome: 2017_Projeto Funções Elementares_Atividade 11_Grupo *"número do seu grupo"***

Fonte: Acervo do autor.

Iniciando a atividade, para a função $f(x) = 3^x$, todos os grupos identificaram de maneira correta tanto o domínio como a imagem da função e todos utilizaram o recurso gráfico do GeoGebra. (figuras 65 e 66)

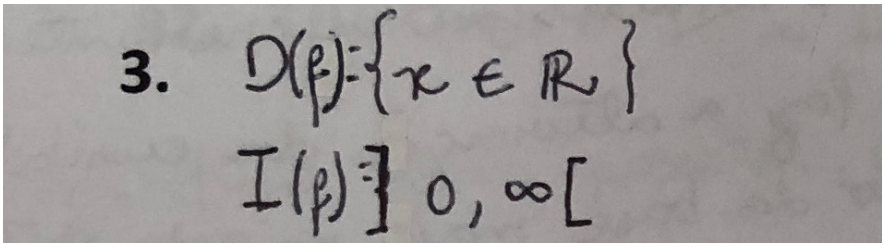
Figura 65: Resposta de um dos grupos para o domínio e imagem da função exponencial $f(x) = 3^x$



Fonte: Acervo do autor.

Uma dúvida que surgiu no grupo 2 foi a inclusão ou não do zero na imagem desta função. O aluno que nunca participou estava com bastante dúvida e neste momento foi muito interessante a atitude que o outro aluno teve na dupla, explicando como o zero não faz parte da imagem da função utilizando-se do recurso de zoom do GeoGebra para mostrar que o gráfico não "toca" o eixo das abcissas. Mesmo assim, falaram em intervalo fechado no zero para a imagem, mas registraram corretamente no caderno de registros. É possível notar a rasura (figura 66) na notação do intervalo da imagem. (um dos alunos estava bem confuso e chega a dizer que "o intervalo é fechado no zero, mas que nunca chega no zero" - contradição)

Figura 66: Resposta do grupo 2 para o domínio e imagem da função exponencial $f(x) = 3^x$|

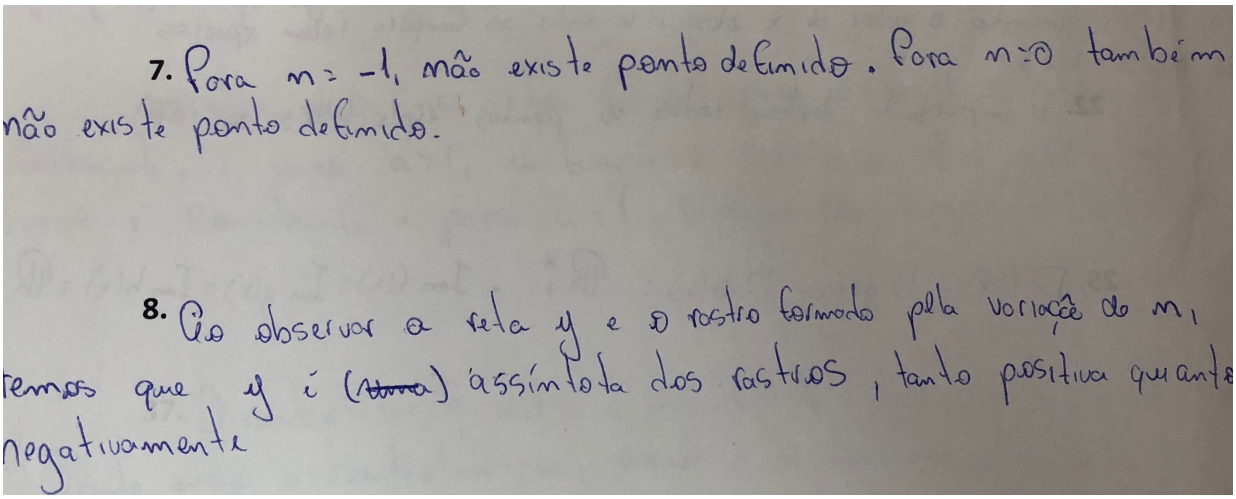


Fonte: Acervo do autor.

Em seguida, foi pedido que criassem um controle deslizante "n" de números inteiros e digitassem o ponto $\left(n; \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)$ e observassem o que acontecia com o rastro deste ponto ao variarem os valores de "n" no controle.

O grupo 1 alterou a faixa de valores de n para observarem mais pontos do rastro e perceberam a existência de uma assíntota para o rastro. Investigaram bem todos os valores e demonstraram ter entendido bem a não existência do ponto para o valor de n=-1, como mostrado na figura 67.

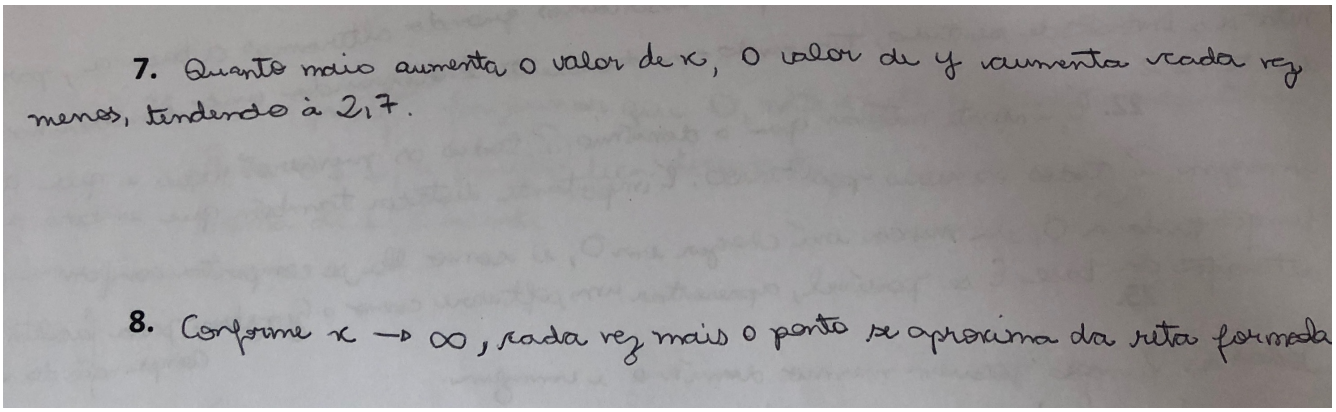
Figura 67: Resposta do grupo 1 para atividade com número de Euler



Fonte: Acervo do autor.

O grupo 2 demorou bem mais que o grupo 1 para entender o número de Euler, mas o interessante desta forma de aprender é respeitar o ritmo de cada indivíduo ou grupo. Elogiou bastante o projeto, e o fato de estarem participando do mesmo e como as tecnologias ajudam no entendimento. “Muitos fatos são jogados pelos professores sem com que os alunos saibam de onde vem ou o porque destes valores” disse um dos alunos deste grupo no vídeo gravado. Entendera, bem a assíntota e a tendência do rastro como observamos nas anotações do grupo na figura 68.

Figura 68: Resposta do grupo 2 para atividade com número de Euler

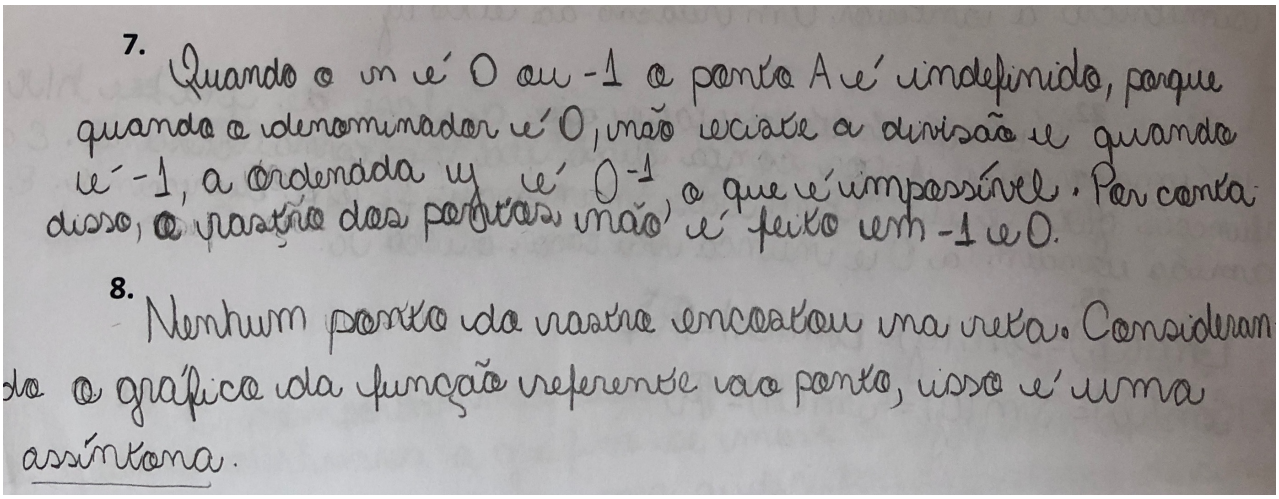


Fonte: Acervo do autor.

O grupo 3 foi o que menos entendeu o número de Euler. Tentaram entender porque o ponto não estava definido para os valores de *n = 0* e *n = -1*, mas estavam cometendo erros básicos nos cálculos algébricos e acabaram pedindo auxílio para a professora.

Não perceberam que o rastro tendia ao número de Euler, pois não entendiam o salto que o rastro do ponto dava por não estar definido para os valores de *n = 0* e *n = -1*. Criaram uma função $g(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ e neste momento poderia ser discutido a diferença entre contínuo e discreto. Não conhecem o número de Euler e demonstram bastante dificuldade em entender o conceito de função (principalmente a aluna que nunca participou – em um dado momento é pedido que digitem a reta $y = 2{,}718$ e a aluna pergunta: “mas que função? “). Em outro momento, acham que o número de Euler é uma variável e ainda não sabem bem o que são assíntotas (escrevem “assíntonas” como mostra a figura 69).

Figura 69: Resposta do grupo 3 para atividade com número de Euler

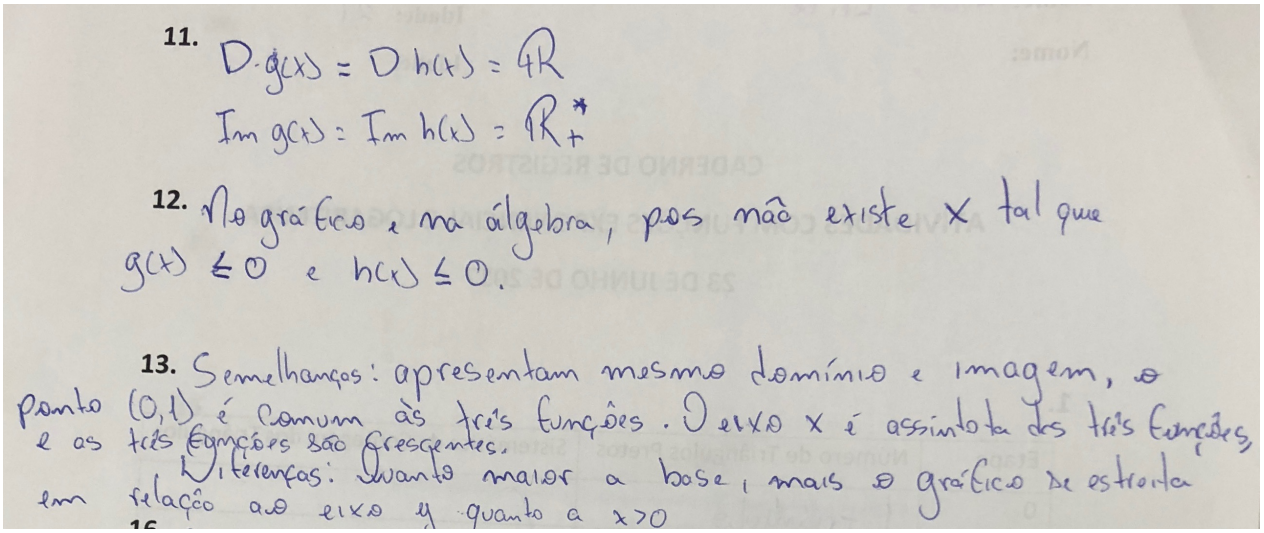


Fonte: Acervo do autor.

Pensando em fazê-los entender como a base da função exponencial influi no gráfico da mesma, pedimos que digitassem no GeoGebra as funções $g(x) = e^x$ e $h(x) = 10^x$ e comparassem as três funções em relação a domínio, imagem e forma do gráfico.

Novamente o grupo 1 trabalhou sem maiores dificuldades anotando no caderno suas observações corretamente como podemos observar na figura 70.

Figura 70: Resposta do grupo 1 para atividade de função exponencial



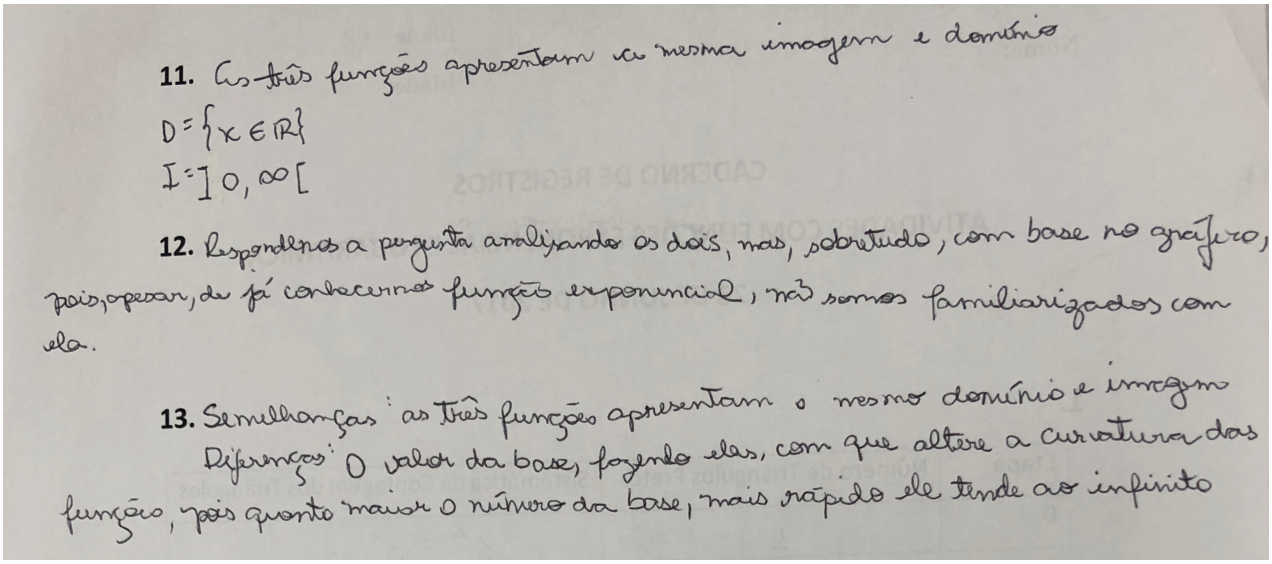
Fonte: Acervo do autor.

O grupo 2 trabalhou muito bem as semelhanças e diferenças também e em vários momentos elogiam o uso desta tecnologia para entender e aprender e como as atividades tem auxiliado a aprendizagem deles.

Dizem “...essa é a questão do projeto, o legal é que se você ver esta função na sala de aula, você não consegue enxergar isso, agora você estudando aqui, vendo e debatendo né, é uma coisa que quando você ver lá que é um 3^x, você já vai saber que funciona assim...” e em outro momento “...imagina o professor fala isso e joga na lousa e você vê isso como funciona é totalmente diferente né, essa é a questão do uso da tecnologia, facilita e faz diferença no entendimento...”.

Para responder as questões utilizam basicamente o gráfico das funções geradas no GeoGebra, mas sempre colocam no caderno que utilizaram a álgebra e os gráficos como mostrado na figura 71.

Figura 71: Resposta do grupo 2 para atividade de função exponencial

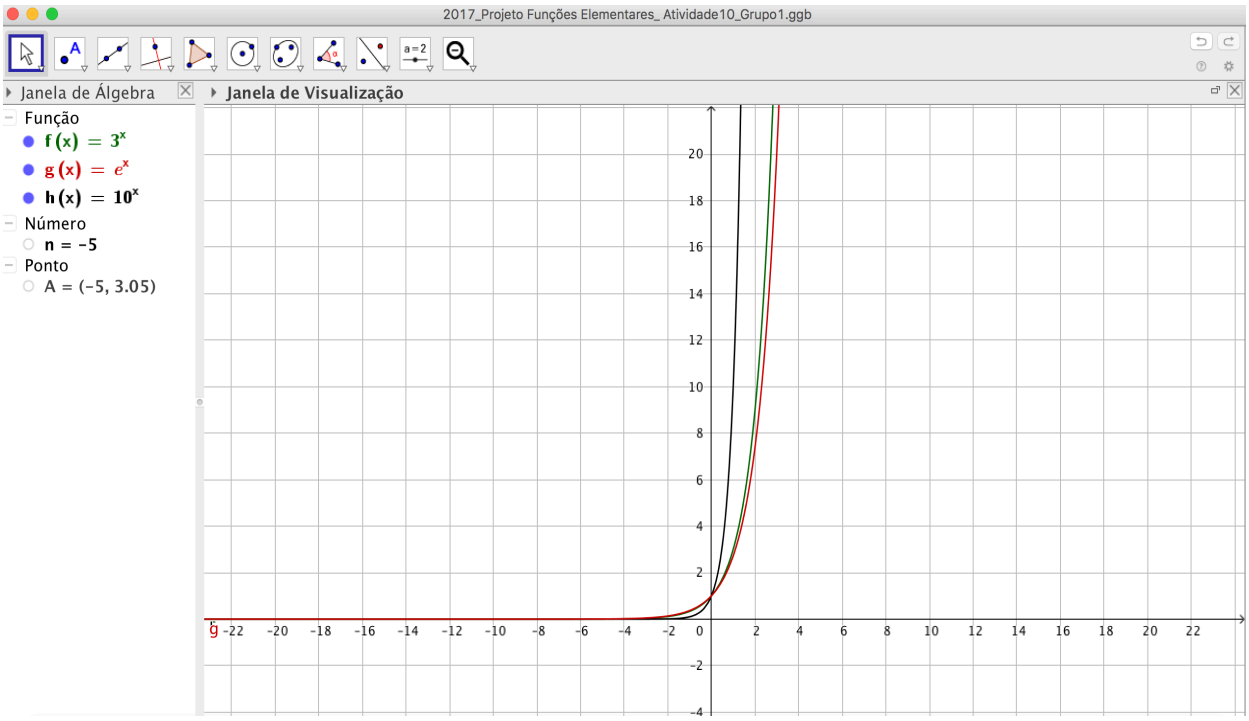


Fonte: Acervo do autor.

O grupo 3 faz algumas observações interessantes a respeito do domínio. Observando os gráficos, ficam intrigados como é possível o domínio ser todos os reais, já que “parece que o mesmo sobe tão rápido que não parece ser definido para valores muito grandes de x” segundo palavras do grupo. Observando

o gráfico na figura 72 realmente temos esta impressão, mas a expressão algébrica nos ajudar a entender que a função existe realmente para todos os valores de x, uma vez que é possível efetuar os cálculos das funções mesmo para valores grandes de x. Este fato não foi observado por nenhum outro grupo e é possível realmente acreditar não atingir todos os valores de x se observarmos o gráfico gerado no software da figura 72.

Figura 72: Gráficos das funções exponenciais trabalhadas na atividade



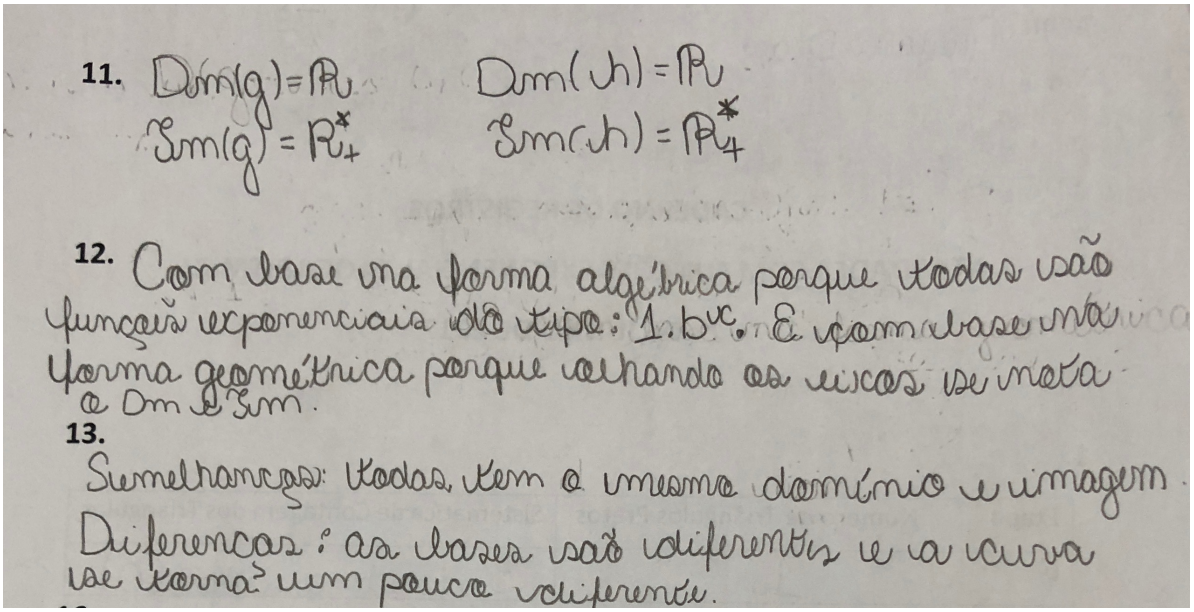
Fonte: Acervo do autor.

Outra observação é quando um dos membros diz que decorou o domínio e a imagem da função exponencial. Veremos nos próximos itens que o GeoGebra vai facilitar o entendimento deste fato que por eles estava definido (erroneamente).

Eles acreditavam que a imagem seria sempre os números reais estritamente positivos, mas se subtrairmos uma constante da função exponencial $f(x) = a^x$ com $a > 0$, teremos deslocamento vertical da função e assim a imagem

pode atingirá valores negativos na imagem contrariando a ideia do grupo de a imagem da função exponencial ser sempre os números reais estritamente positivos. Este fato foi observado por eles mesmos e por isso colocam no caderno de registros a função $f(x) = 1.b^x$(item 12 da figura 73). Não sabem como chamar o número que colocam na frente da função (constante) e para isso pesquisam no Google.

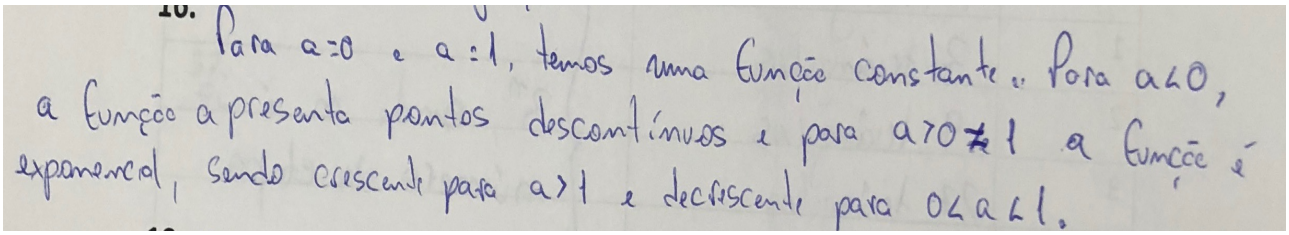
Figura 73: Resposta do grupo 3 para atividade de função exponencial



Fonte: Acervo do autor.

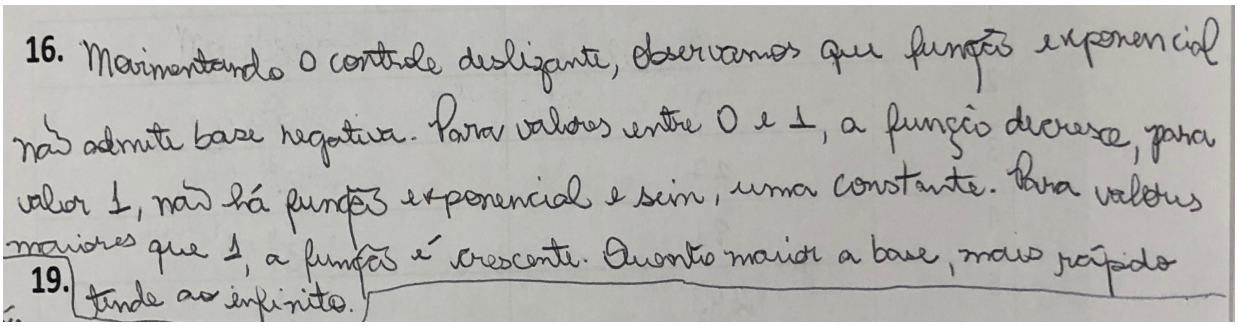
Na sequência da atividade, generalizamos a função exponencial pedindo que criassem um controle deslizante "a" para a função $f(x) = a^x$. Os três grupos não tiveram dificuldades em analisar o comportamento das funções de acordo com os valores da base como podemos observar nas figuras 74 a 76.

Figura 74: Resposta do grupo 1 para atividade de função exponencial



Fonte: Acervo do autor.

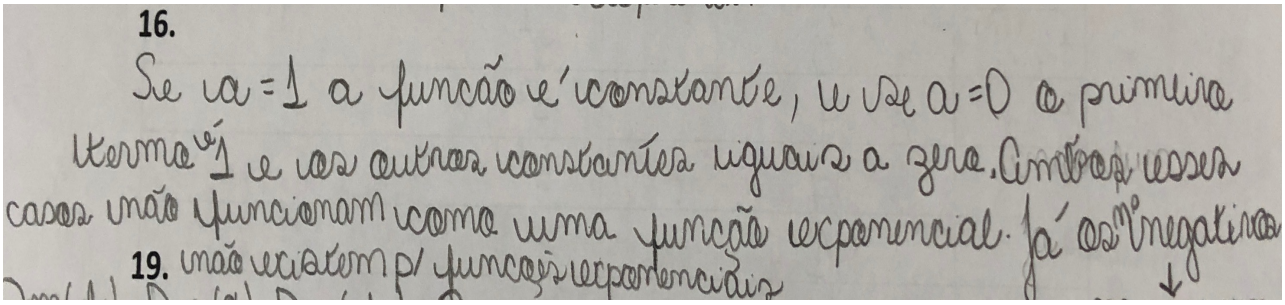
Figura 75: Resposta do grupo 2 para atividade de função exponencial



Fonte: Acervo do autor.

O grupo 3 é um pouco confuso na anotação como pode ser observado na figura 76, mas pelo vídeo é possível perceber melhor a compreensão deste item.

Figura 76: Resposta do grupo 3 para atividade de função exponencial

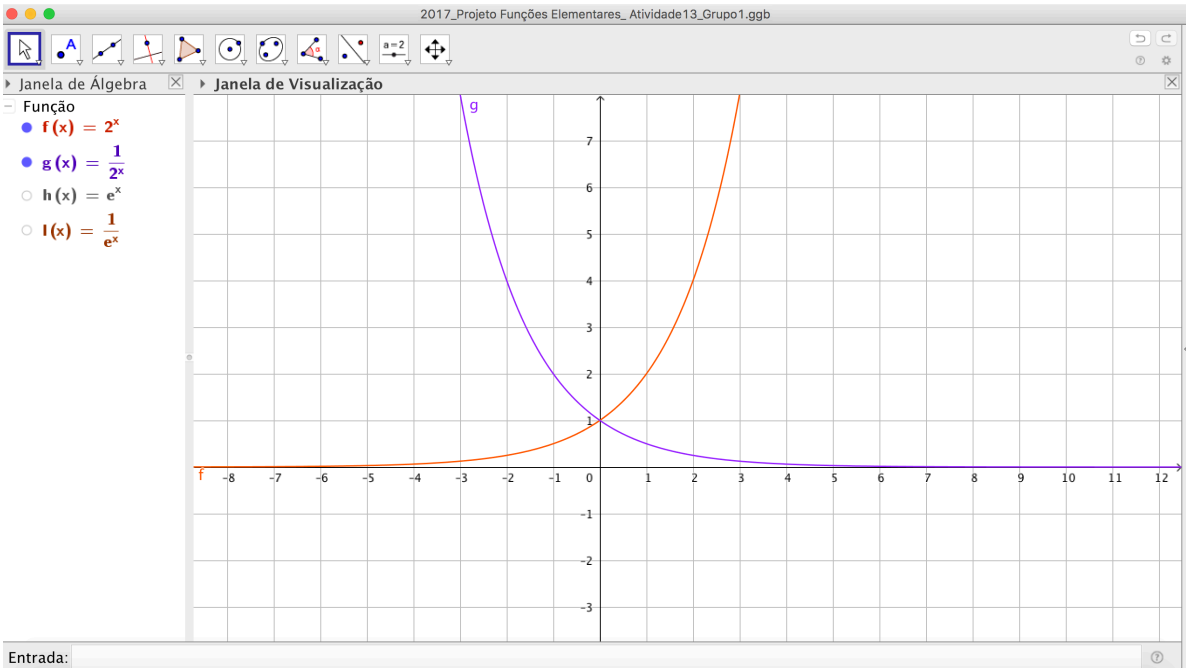


Fonte: Acervo do autor.

Nas funções exponenciais com bases menores do que 1(funções decrescentes), todos responderam corretamente o domínio e imagem. Pedimos

então que comparassem as funções $f(x) = 2^x$ e $g(x) = \frac{1}{2^x}$ (figura 77). Nossa ideia era que os alunos percebessem a simetria existente em relação ao eixo das ordenadas e tentassem explicar o fato. $(f(x) = g(-x))$

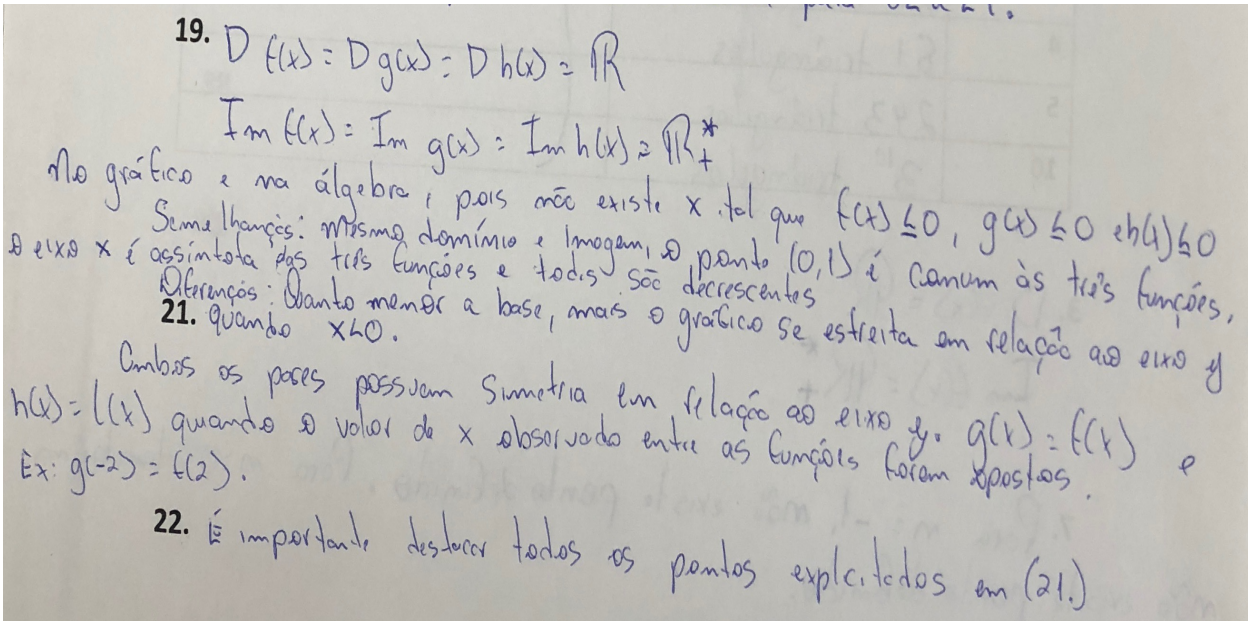
Figura 77: Imagem da tela do GeoGebra do grupo 1



Fonte: Acervo do autor.

O grupo 1 inicialmente pensou na função par como explicação para a simetria, mas logo perceberam a confusão(figura 78). Perceberam a relação entre $f(x)$ e $g(x)$, mas escreveram que ambas são iguais (pelo vídeo e pelo exemplo logo na sequência percebemos que deva ter sido um erro na hora de anotar a resposta e não de conceito).

Figura 78: Respostas do grupo 1 para atividade de simetria das funções exponenciais



Fonte: Acervo do autor.

O grupo 2 respondeu muito bem às questões, mas não entenderam a simetria. Embora não tenham anotado no caderno, ficam em dúvida no vídeo se as funções são inversas. Um outro cuidado que devemos ter é em relação à escrita e fala correta, pois ao sermos professores, seremos a referência para muitos alunos. Notamos na figura 79 vários erros de concordância destacados à lápis.

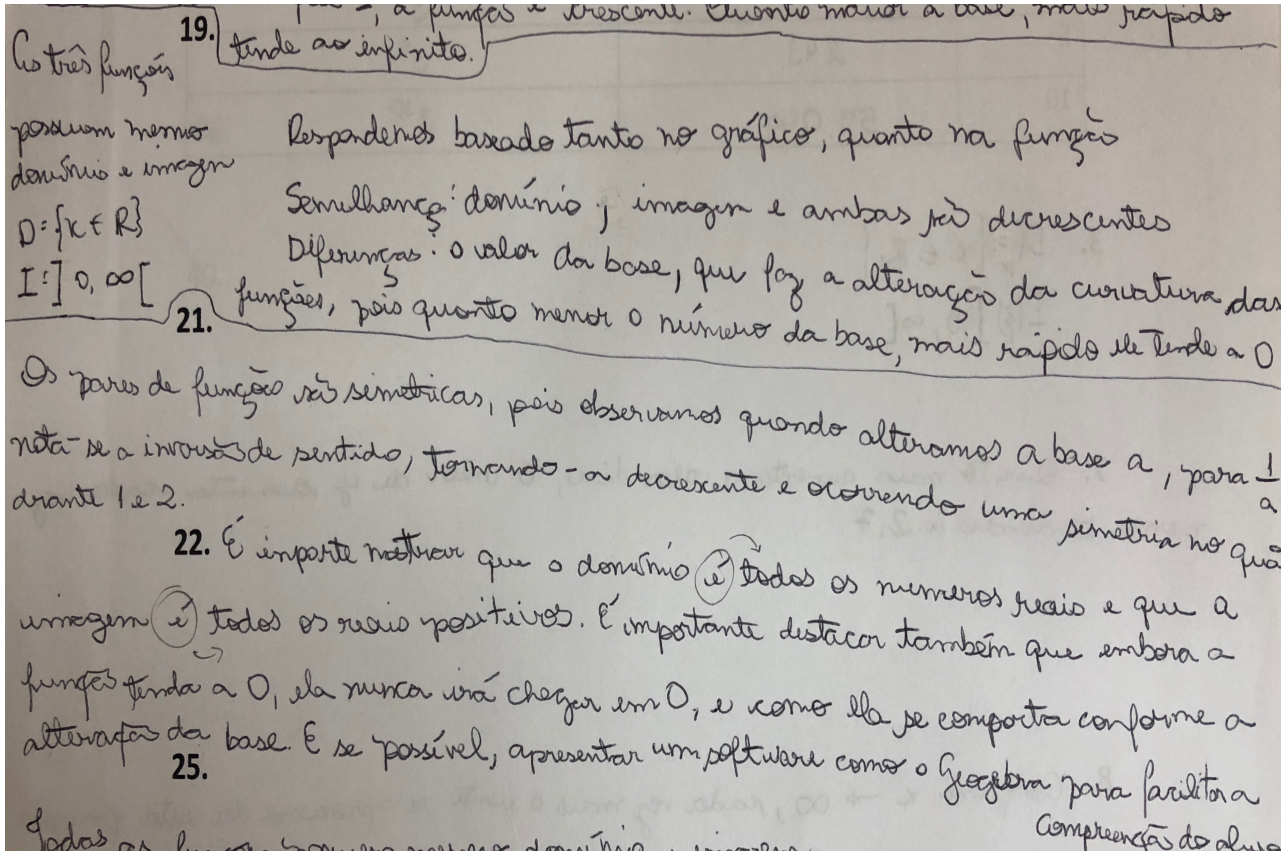
Novamente este grupo destaca a importância que têm notado ao se utilizar o GeoGebra para melhor entendimento destas funções. Em entrevista, um ano após o último encontro, com dois alunos que participaram do projeto pudemos constatar que os mesmos haviam incorporado o uso destas tecnologias em seus estudos motivados pela participação no projeto.

Um dos participantes, nesta entrevista, diz: *"...eu uso ele (GeoGebra) bastante também, porque eu estou dando monitoria em uma escola já né, então eu até apresento para os alunos: tem este software gratuito e dá para vocês usarem pra bastante coisa, pra resolver bastante problema e quando dá um tempo eu até mostro pra eles porque eu acredito que está se formando agora, tem que estar mais*

sintonizado com a tecnologia porque você é cobrado disso também e porque todo mundo tem um celular na mão. Tem o GeoGebra pra celular e quando estou na minha monitoria com eles e eles já não tem mais dúvidas eu apresento pra eles algo diferente...”.

No item 22 (figura 79), destacam o fato da função exponencial não tocar o eixo das abcissas embora fique cada vez mais próximo deste eixo. Isto realmente é um fato que deve ser abordado no ensino médio e que merece destaque e que não foi observado pelo grupo anterior.

Figura 79: Respostas do grupo 2 para atividade de simetria das funções exponenciais



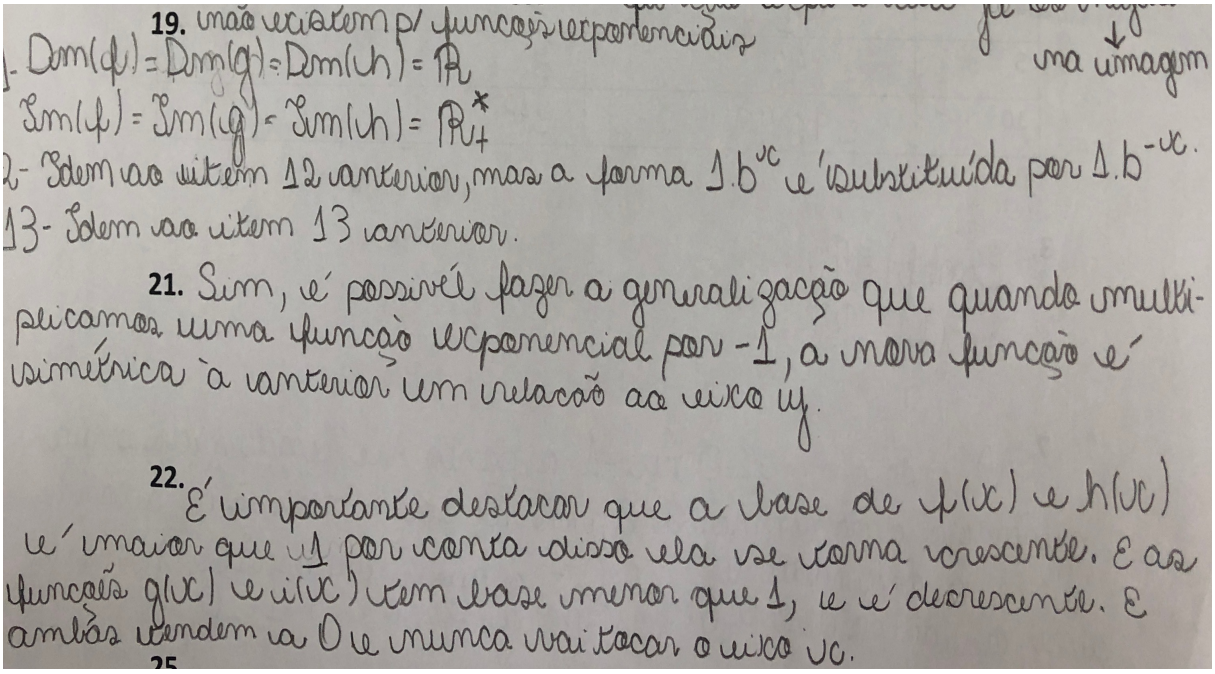
Fonte: Acervo do autor.

As respostas do grupo 3 para estes itens são um pouco vagas. Repetem que são iguais à itens anteriores, mas não tomam o cuidado por exemplo

em dizer que as funções que eram crescentes tornam-se decrescentes por exemplo. Na resposta do item 21 (figura 80) cometem um erro bastante grave e simples quando dizem que para termos funções exponenciais simétricas em relação ao eixo y, basta multiplica-la por -1.

No item 22 (figura 80), escrevem que todas as funções exponenciais tendem a zero mas nunca irão tocar o eixo x. Esta afirmação não é totalmente correta, pois para a função $f(x) = 2^x$, por exemplo, isso ocorre somente se o valor de x tender a menos infinito e caso os valores de x tendam a valores cada vez maiores, a função tenderá ao infinito positivo. Novamente destacamos o cuidado que os alunos devem ter ao escrever e falar o que pensam, pois os mesmos serão os propagadores do conhecimento muito em breve.

Figura 80: Respostas do grupo 3 para atividade de simetria das funções exponenciais

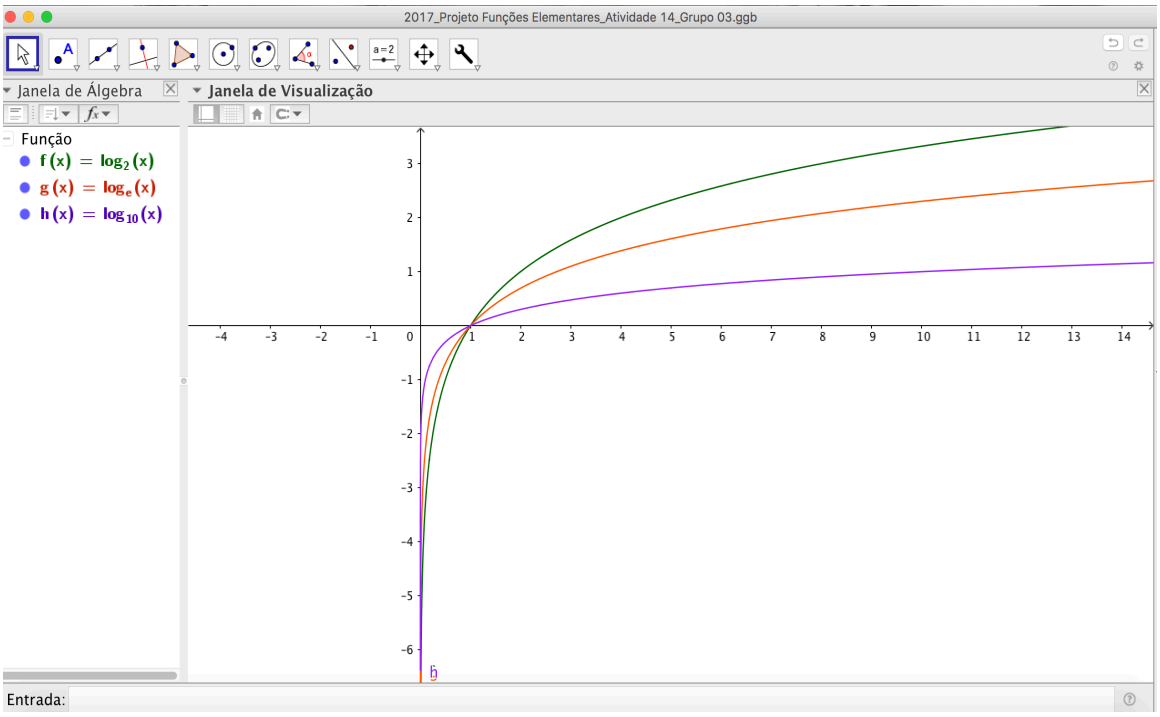


Fonte: Acervo do autor.

No próximo item trabalhamos a forma do gráfico, o domínio e a imagem das funções logarítmicas com base maior do que 1. Nossa ideia era que os alunos percebessem a função crescente e a influência das bases na taxa de

crescimento das funções, além é claro, da não existência de valores negativos no domínio e da assíntota vertical. Tudo isso pode ser melhor observado com a ajuda do software GeoGebra mostrado na figura 81.

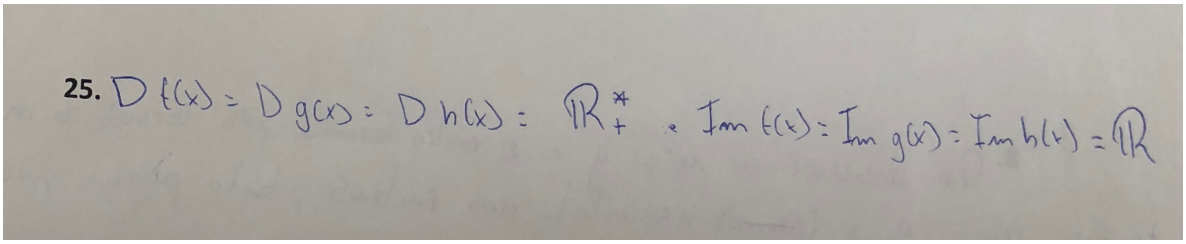
Figura 81: Imagem da tela do GeoGebra do grupo 3



Fonte: Acervo do autor.

Todos os grupos responderam o domínio e imagem das funções corretamente (figura 82) e acreditamos que neste ponto, com os gráficos, todos estão entendendo bem estes conceitos, mesmo a maioria respondendo que analisaram o gráfico e a expressão algébrica para responder esta questão.

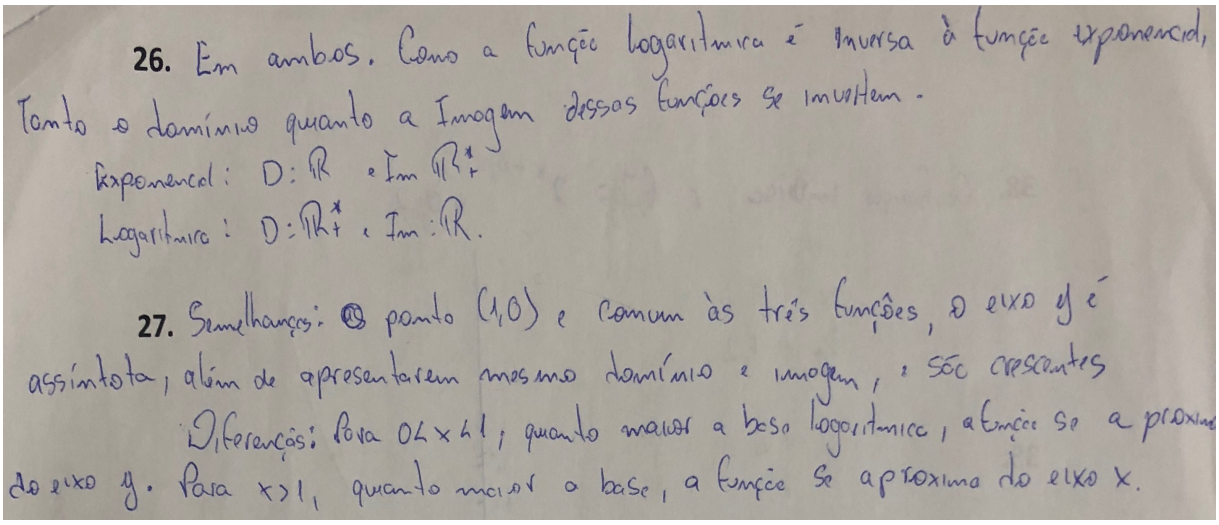
Figura 82: Anotação do domínio e imagem das funções logarítmicas



Fonte: Acervo do autor.

Observamos um envolvimento maior do grupo 1 nas respostas aos itens que propusemos. Isto pode ser observado claramente nas respostas aos itens 26 e 27 da figura 83, quando perguntamos quais as diferenças e semelhanças entre estas três funções. Notaram ainda que a função logarítmica é a função inversa da função exponencial e portanto invertem domínio e imagem.

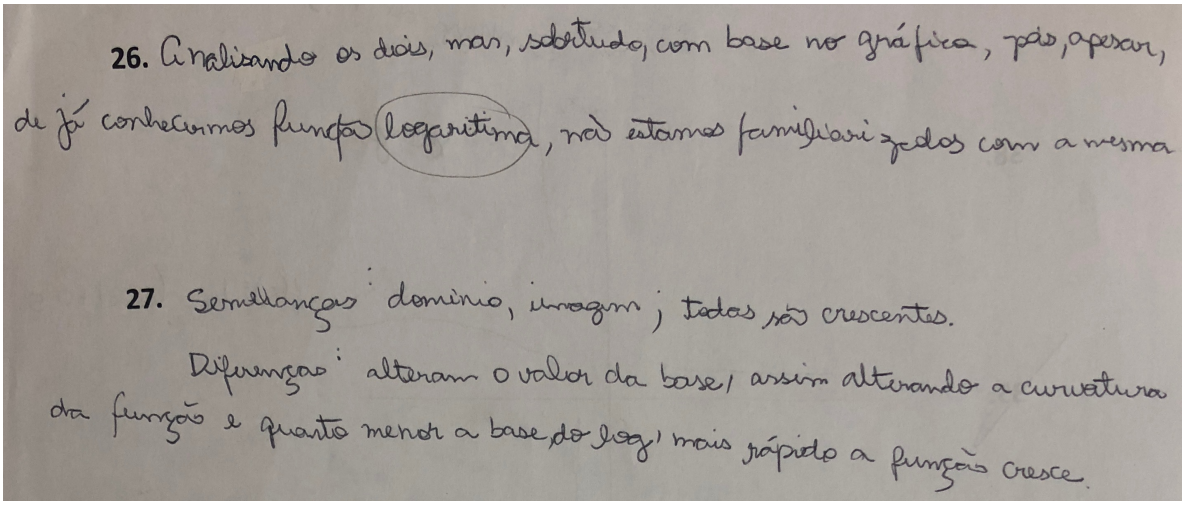
Figura 83: Anotação do domínio e imagem das funções logarítmicas do grupo 1



Fonte: Acervo do autor.

O grupo 2 não teve problemas com estas questões também, mas não anotaram que a função exponencial e logarítmica são funções inversas. Foram bem objetivos nas respostas. (figura 84)

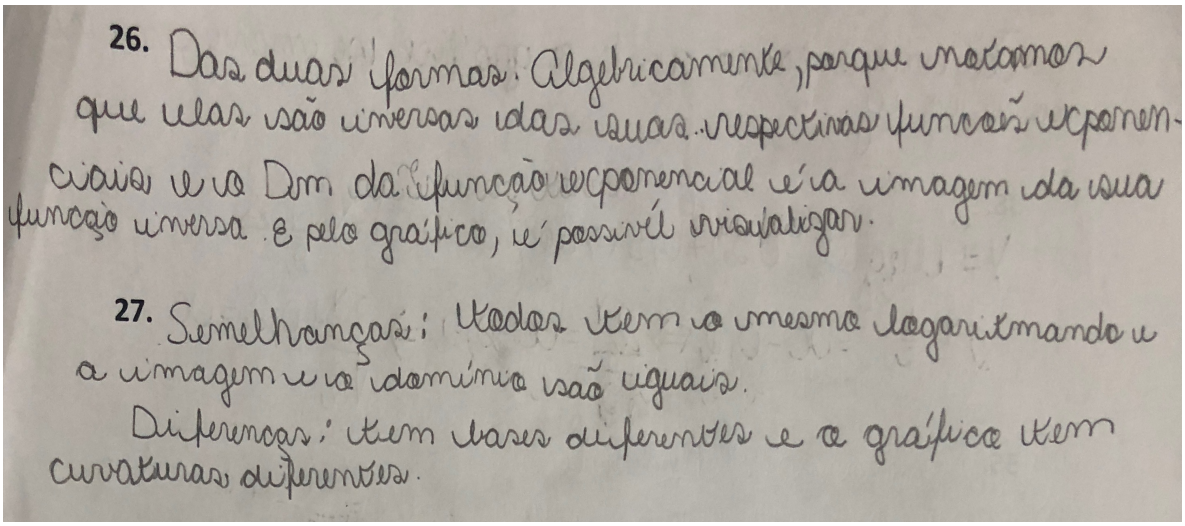
Figura 84: Anotação do domínio e imagem das funções logarítmicas do grupo 2



Fonte: Acervo do autor.

O grupo 3 respondeu corretamente e conseguiu associar as funções exponenciais e logarítmicas como funções inversas (figura 85). Pesquisaram no Google o porquê de não existir logaritmo de números negativos. Isto demonstra um pouco da falta de conhecimento destas funções por parte dos alunos deste grupo, mas é interessante a iniciativa de buscar a informação e não simplesmente aceitar.

Figura 85: Anotação do domínio e imagem das funções logarítmicas do grupo 3.

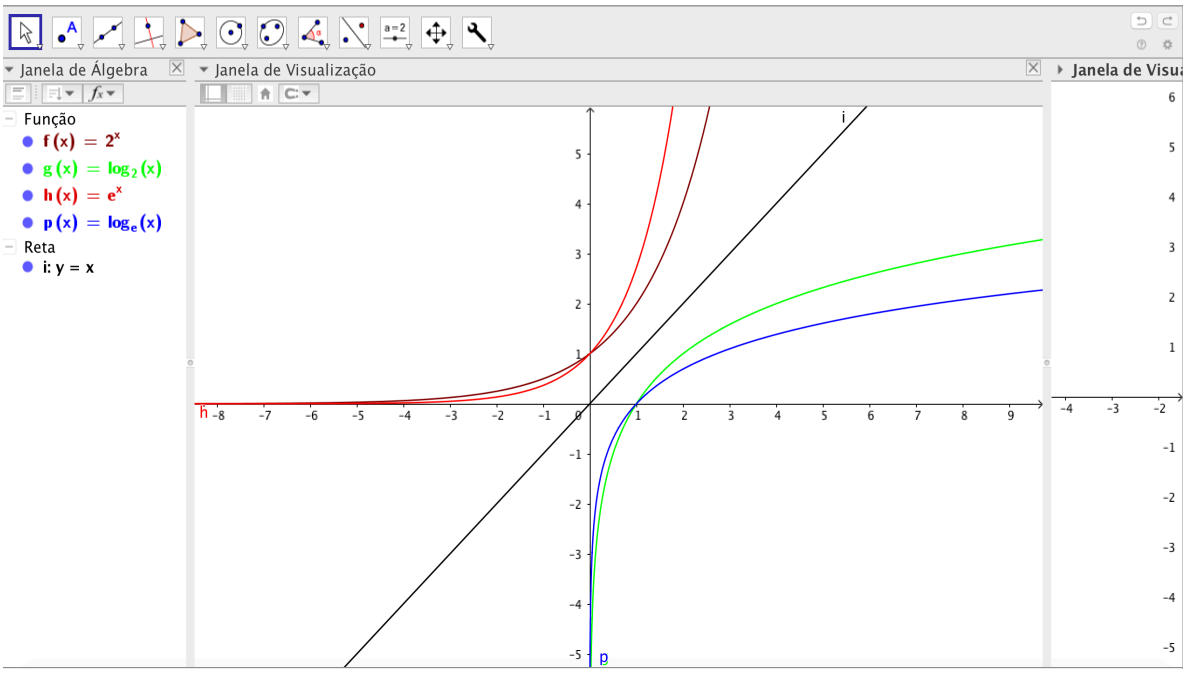


Fonte: Acervo do autor.

No item 29 foi pedida a mesma análise dos itens 26 e 27, porém para funções logarítmicas com base menor do que 1, ou seja para funções decrescentes. Os grupos não tiveram problemas neste item.

Em seguida, pensamos em comparar as funções exponenciais e logarítmicas com mesma base para que reforçássemos a ideia das funções inversas já percebidas por alguns alunos mesmo sem termos comentado ou sugerido nada nas atividades anteriores. (figura 86)

Figura 86: Funções exponenciais e logarítmicas no GeoGebra

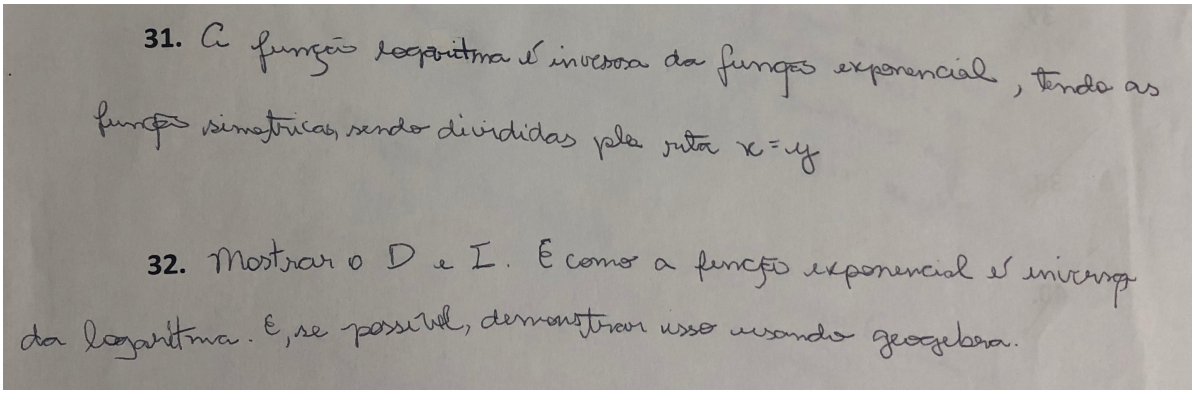


Fonte: Acervo do autor.

Todos os grupos trabalharam bem esta questão e destacaram a importância da inversão de domínio e imagem pelas funções inversas.

Um fato interessante e curioso foi nenhum grupo ter aproveitado esta ideia para reforçar a importância das funções serem bijetoras para que possamos calcular sua função inversa. Outro ponto que merece destaque foi um grupo ter salientado que para o ensino médio seria interessante a utilização do GeoGebra em sala de aula para facilitar o entendimento e visualização das propriedades matemáticas como mostrado na figura 87.

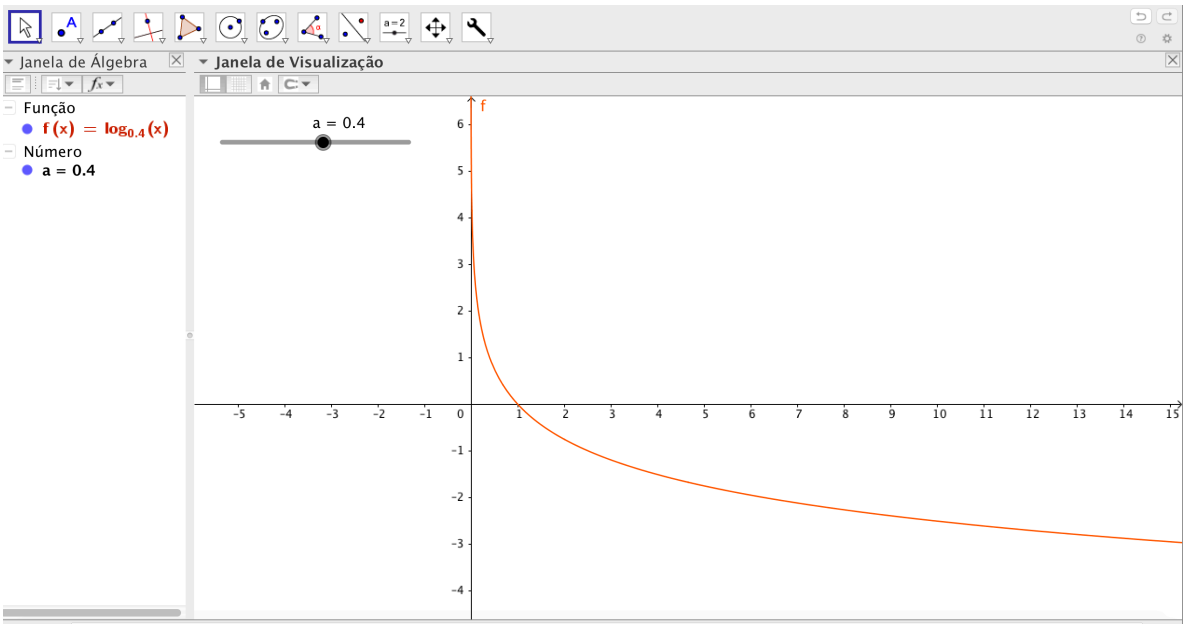
Figura 87: Resposta de um grupo dando destaque ao GeoGebra



Fonte: Acervo do autor.

A seguir, como forma de generalização da função logaritmica, pedimos que os alunos criassem um controle deslizante para a base de uma função logarítmica e que anotassem suas observações (figura 88). Nossa ideia era que os alunos observassem a forma da curva para diferentes bases e conseguissem entender o que determina a função ser crescente ou decrescente, além da não existência da função logarítmica para valores da base menores ou igual a zero e 1.

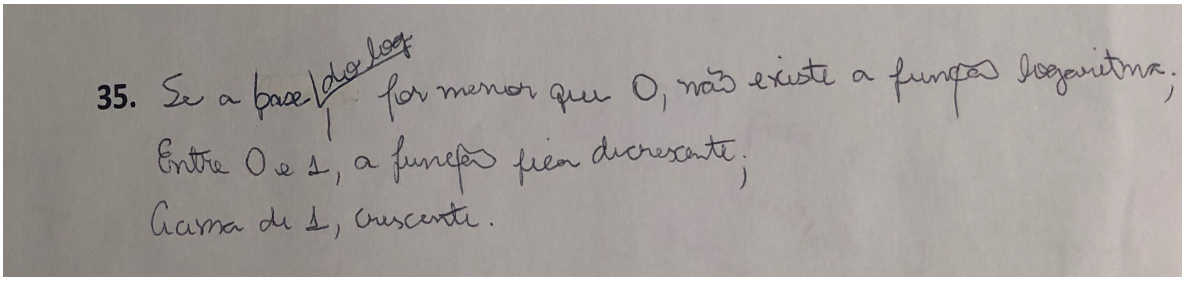
Figura 88: Função logarítmica com base “a” feita no GeoGebra



Fonte: Acervo do autor.

Os grupos 1 e 2 responderam corretamente e atingiram o que pretendíamos com a atividade como podemos observar nas respostas à questão 35 (figura 89).

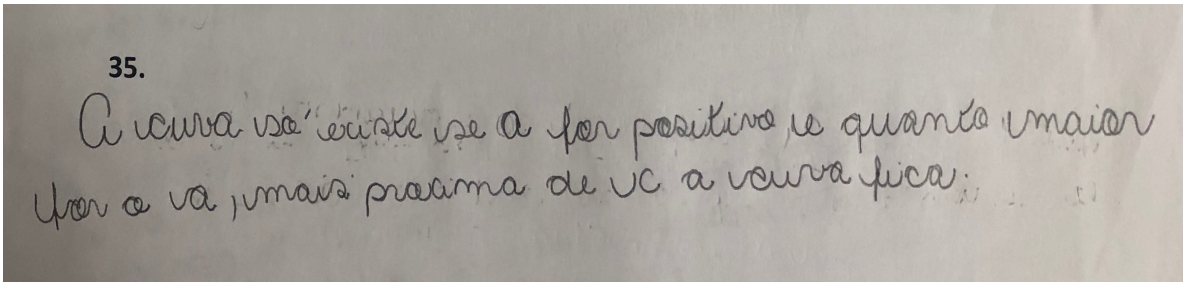
Figura 89: Resposta do grupo 2 para a questão 35



Fonte: Acervo do autor.

Na resposta do grupo 3 não notamos nenhuma indicação a respeito da base deste tipo de função estar associado à função ser crescente ou decrescente que seria o mais simples, porém mais importante neste tipo de generalização. Anotam uma ideia um pouco vaga dizendo que "*quanto maior for o valor do controle deslizante, mais próximo do eixo x, a curva fica"* (figura 90) o que não é verdade para a base entre 0 e 1.

Figura 90: Resposta do grupo 3 para a questão 35



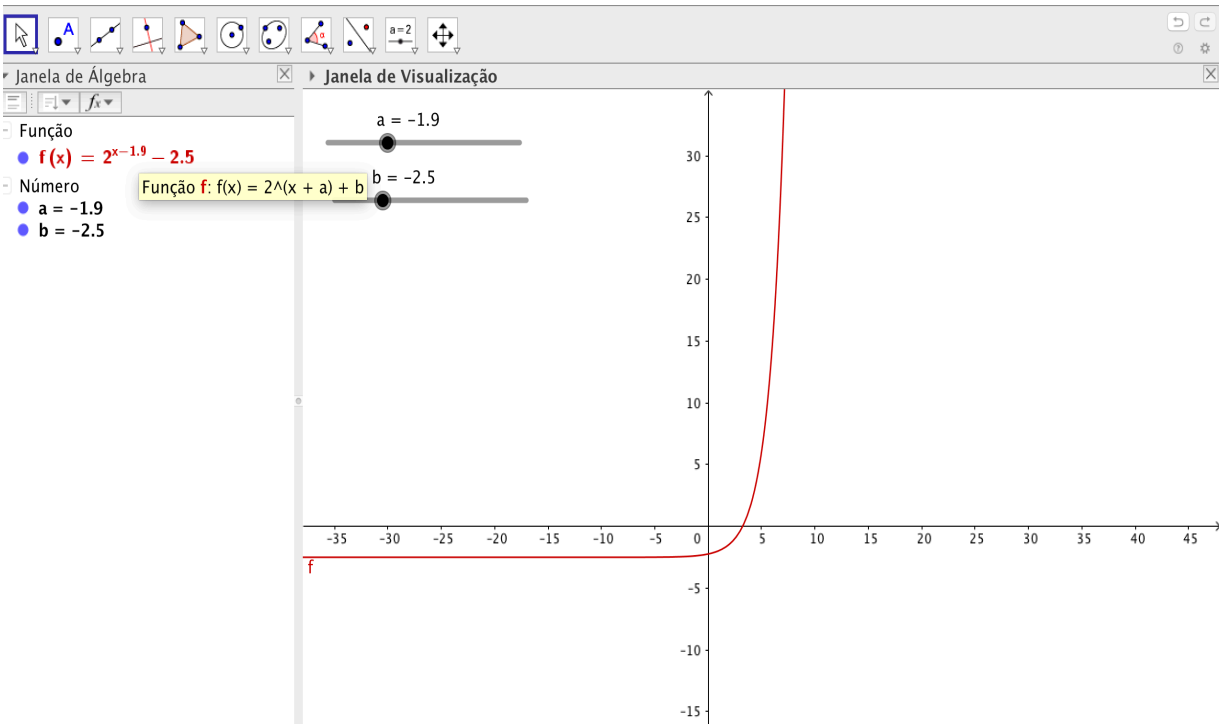
Fonte: Acervo do autor.

O problema neste tipo de resposta é a falta de cuidado que não podemos deixar de ter ao ensinar Matemática. Pelas respostas aos itens anteriores, não acreditamos ser falta de conhecimento, mas talvez um pouco de falta de comprometimento que também é um dos principais problemas encontrados na educação de hoje. Assim, embora o ensino mediado pelo computador e software

possam ajudar o processo ensino aprendizagem, percebemos que a falta de comprometimento pode afetar mais do que a falta destes recursos.

Para finalizarmos o encontro, pensamos em estudar o comportamento da função da forma $f(x) = 2^{x+a} + b$ com *a* e *b* sendo criados através de controles deslizantes e em seguida responder qual seria a função inversa de $f(x) = \log_2(x - 0{,}2) + 0{,}5$. A ideia era que os alunos utilizassem os gráficos das funções no GeoGebra (figura 91) e a simetria das mesmas em relação a reta $y = x$ para encontrar a expressão da função inversa ajustando os parâmetros e assim tentar generalizar a função inversa de acordo com estes parâmetros *a* e *b*.

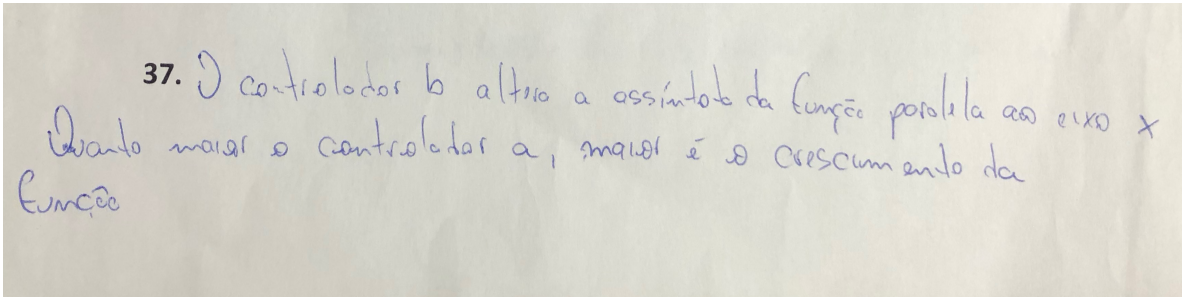
Figura 91: Tela do GeoGebra para a função $f(x) = 2^{x+a} + b$



Fonte: Acervo do autor.

O grupo 1 analisou corretamente a influência dos parâmetros no gráfico da função logarítmica destacando a assíntota horizontal de acordo com a alteração do parâmetro *b* e a taxa de crescimento da função em relação à alteração do parâmetro *a*. (figura 92)

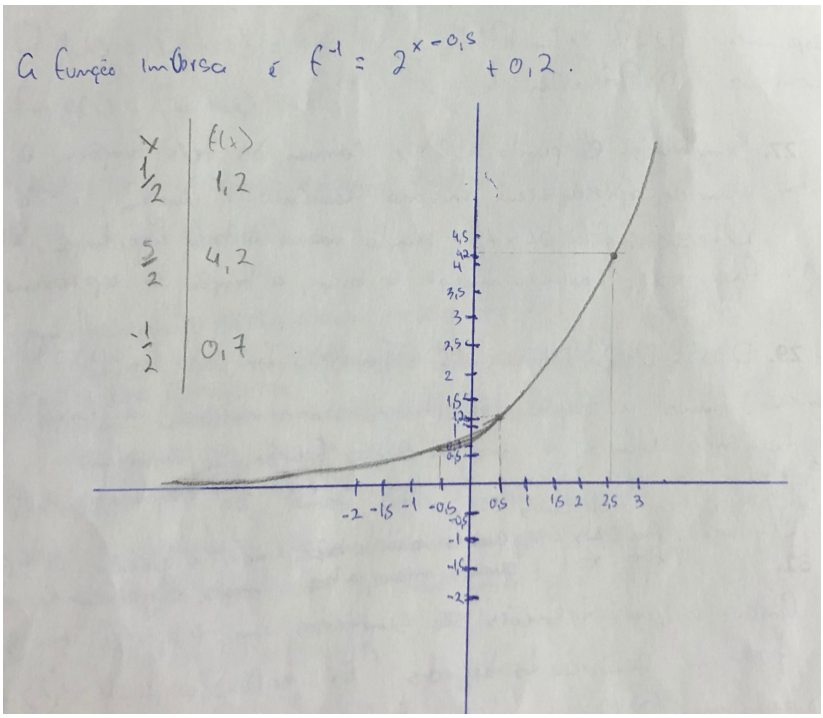
Figura 92: Resposta do grupo 1 para a questão 37



Fonte: Acervo do autor.

Para encontrar a função inversa da função logarítmica dada utilizaram o GeoGebra alterando os valores dos parâmetros como esperávamos e no caderno de registros anotaram alguns valores para a função e desenharam a mesma conforme mostra a figura 93. Neste caso o GeoGebra auxiliou muito tanto o entendimento como na obtenção da expressão da função reforçando a ideia de simetria das funções inversas em relação a reta $y = x$.

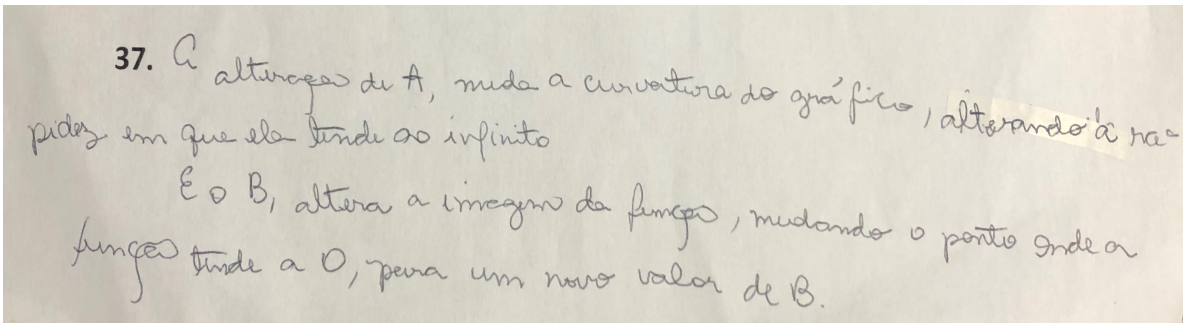
Figura 93: Gráfico da função inversa de $f(x) = \log_2(x - 0{,}2) + 0{,}5$ do grupo 1



Fonte: Acervo do autor.

O grupo 2 também atingiu o que pretendíamos com a atividade na interpretação da influência dos parâmetros *a* e *b* da função exponencial em seu gráfico. Percebem que o parâmetro *a* altera a curvatura e o parâmetro *b* altera a imagem da mesma como escrevem em seu caderno de repostas no item 37 da figura 94. Embora tenhamos entendido bem o que querem dizer, temos que tomar cuidado quando escrevem o ponto onde a função tende a zero, já que este ponto na verdade é um limite.

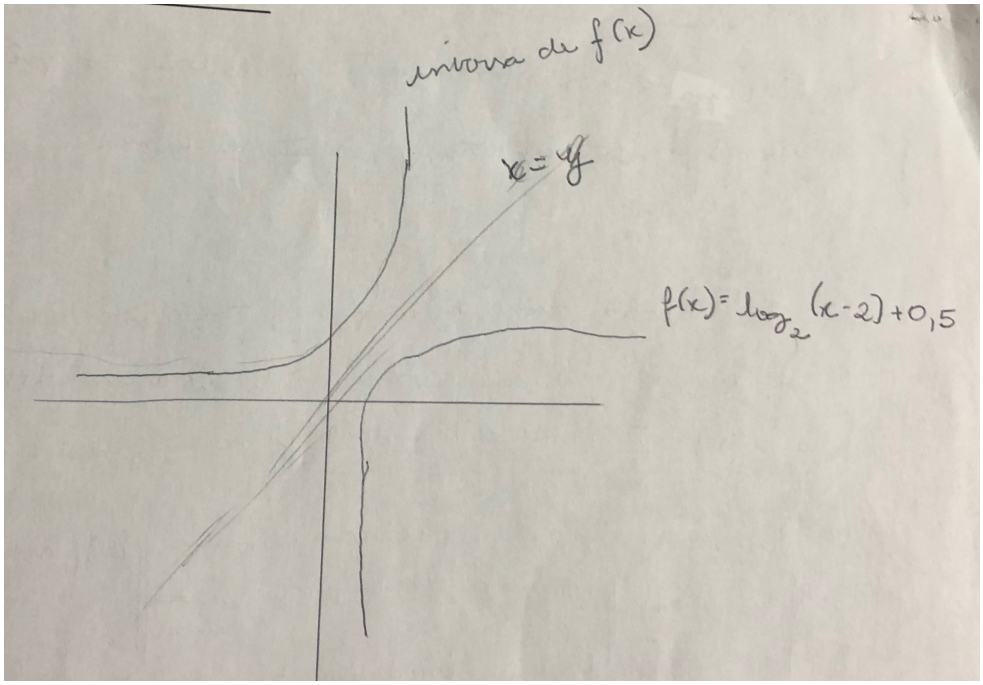
Figura 94: Resposta do grupo 2 para a questão 37



Fonte: Acervo do autor.

Para encontrar a função inversa da função $f(x) = \log_2(x - 0{,}2) + 0{,}5$ cometeram um erro ao ler escrevendo a função $f(x) = \log_2(x - 2) + 0{,}5$, mas isso não mudaria o entendimento do que pretendíamos. Utilizaram o GeoGebra somente para desenhar a função e a partir do gráfico reproduziram no caderno de respostas (figura 95) um gráfico simétrico em relação a reta $y = x$ como sendo a função inversa.

Figura 95: Gráfico da função inversa de $f(x) = \log_2(x-2) + 0{,}5$ do grupo 2

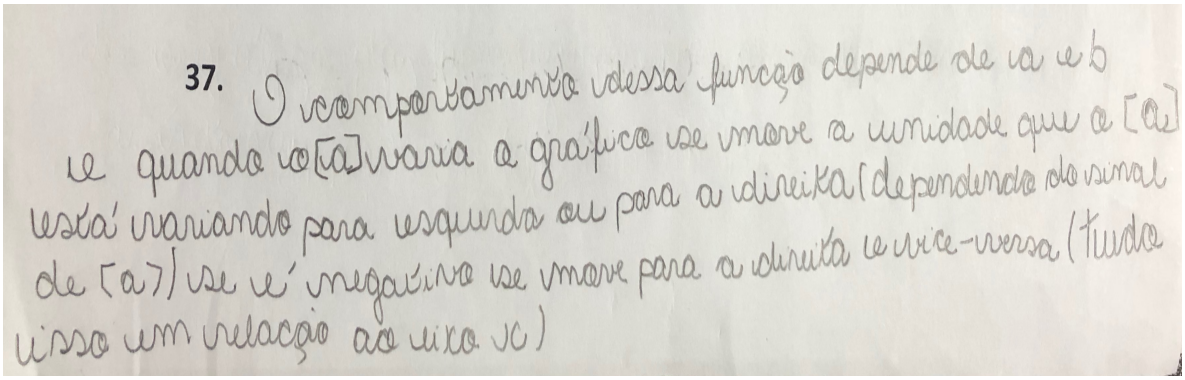


Fonte: Acervo do autor.

Esta forma de realizar a atividade é interessante e fica compreendida a ideia dos gráficos, porém poderiam utilizar o software para encontrar a função inversa. Esperávamos que eles utilizassem a função com os parâmetros *a* e *b* que haviam feito na atividade anterior para encontrar a expressão da função inversa. Assim teriam o gráfico e a expressão da mesma. Percebemos que nem todos os alunos tem a iniciativa de aproveitar todas as potencialidades do software, mas isso é bastante compreensível já que não existe a familiaridade de uso do mesmo no dia a dia escolar dos alunos.

O grupo 3 não conseguiu explicar muito bem como os parâmetros influenciam no gráfico da função. O que anotaram no caderno está muito confuso como podemos observar nas figuras 96 e 97.

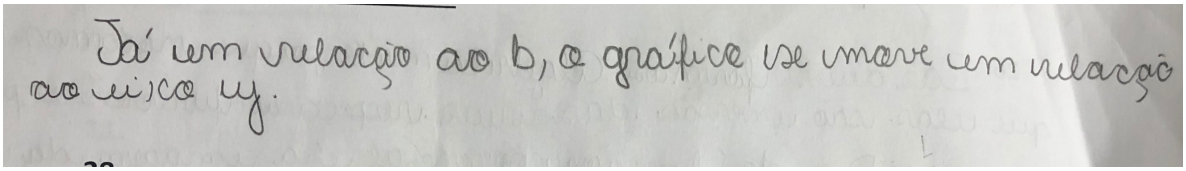
Figura 96: Resposta do grupo 3 para a questão 37



Fonte: Acervo do autor.

A influência do parâmetro *a* está muito confusa e difícil de entender o que querem dizer. O parâmetro *b* escrevem melhor (figura 97), mas sem mencionar assíntotas ou a imagem da função que seria mais interessante do ponto de vista da compreensão das características da função.

Figura 97: Resposta do grupo 3 para a questão 37

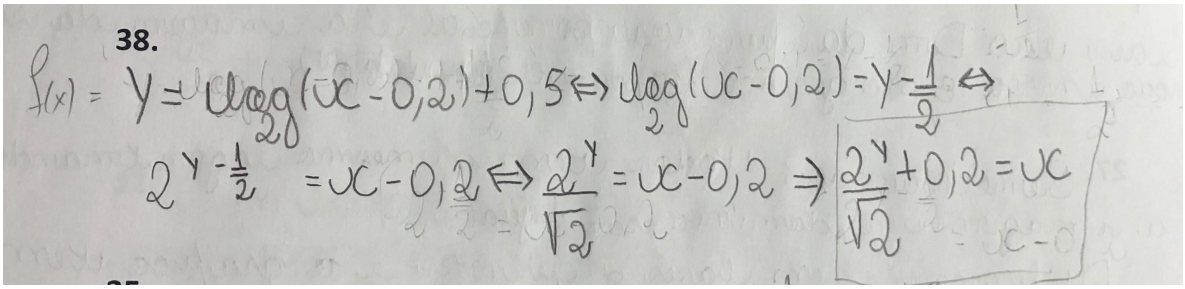


Fonte: Acervo do autor.

Para encontrar a função inversa de $f(x) = \log_2(x - 0{,}2) + 0{,}5$ seguiram o caminho da álgebra (figura 98) o que é interessante e depois fizeram o gráfico no GeoGebra para confirmar a simetria em relação a reta $y = x$. Utilizaram o software somente para confirmar os gráficos enquanto poderiam ter utilizado novamente a função com parâmetros criada anteriormente.

De qualquer forma utilizaram o software e confirmaram terem entendido bem as propriedades da função inversa nesse caso.

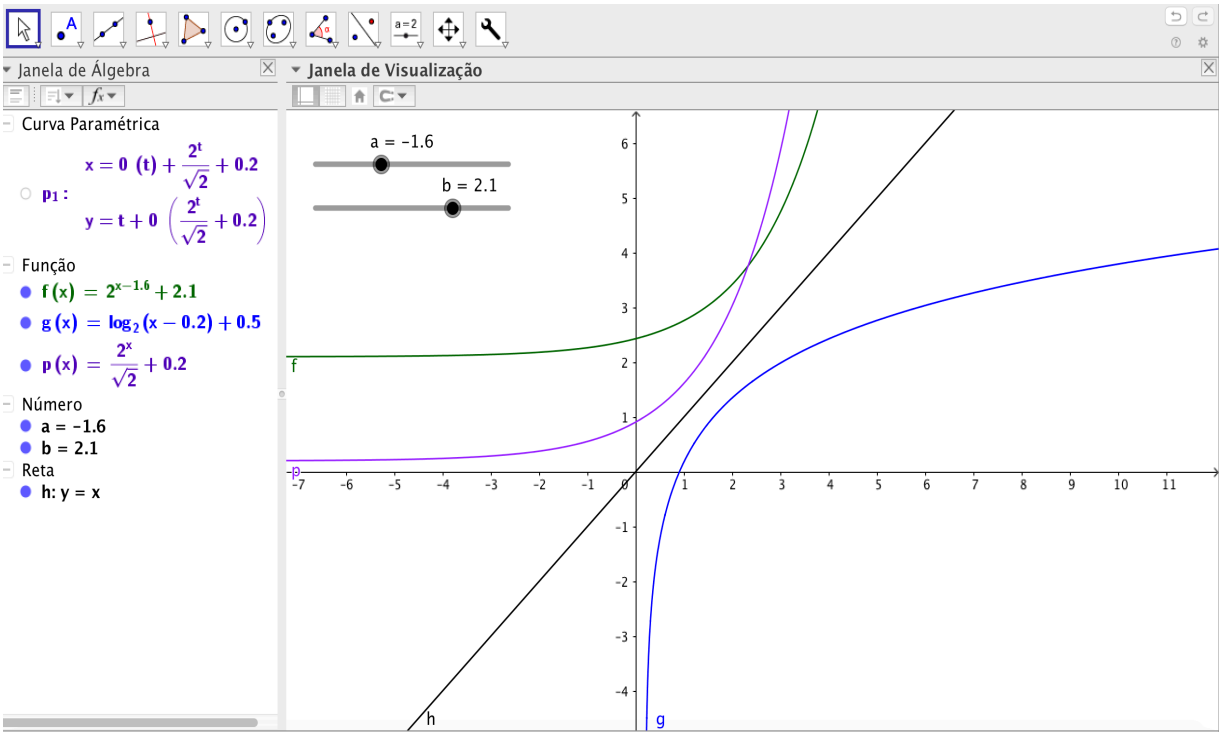
Figura 98: Cálculo da função inversa de $f(x) = \log_2(x - 0{,}2) + 0{,}5$ realizada pelo grupo 3



Fonte: Acervo do autor.

Notamos no cálculo da função inversa terem um bom conhecimento das propriedades de potenciação e equações.

Figura 99: Tela do GeoGebra mostrando as funções calculadas no item pelo grupo 3



Fonte: Acervo do autor.

Na figura 99 observa-se a função $g(x) = \log_2(x - 0{,}2) + 0{,}5$ e sua inversa $p(x)$ calculada algebricamente sem o uso do software. Notamos ainda a

função $f(x)$ criada com os parâmetros, e que poderia ter sido utilizada para encontrar a função inversa de g(x) pedida e mostrando qual a relação entre os parâmetros na função dada e na sua inversa como pode ser observado nesta figura.

Neste dia foi gerado 4h55’54” de vídeos das telas dos computadores dos grupos, juntamente com os áudios, as folhas com as conclusões registradas e as atividades realizadas no GeoGebra foram salvas para análise do que haviam realizado. A distribuição dos tempos é mostrada na Tabela 7.

Tabela 7: Tempos de vídeo e áudio gerados no terceiro encontro

	Grupo 1	**Grupo 2**	**Grupo 3**
Atividade 3	1h25’27”	2h14’53”	1h15’34”

Fonte: Elaboração própria.

4.4 QUARTO ENCONTRO

O quarto encontro ocorreu duas semanas após o terceiro e tivemos a participação de 11 alunos que foram divididos em três trios e uma dupla. Os grupos com os integrantes é mostrado na tabela 8.

Tabela 8: Grupos e participantes do quarto encontro

Grupo 1	$LU21^{M}$, $MA18^{M}$ e $VE18^{F}$
Grupo 2	$AL24^{M}$,$NA35^{F}$ e $EL35^{M}$
Grupo 3	$JA21^{F}$ e $GU18^{M}$
Grupo 4	$IS19^{F}$, $GI18^{F}$ e $LE18^{M}$

Fonte: Elaboração própria.

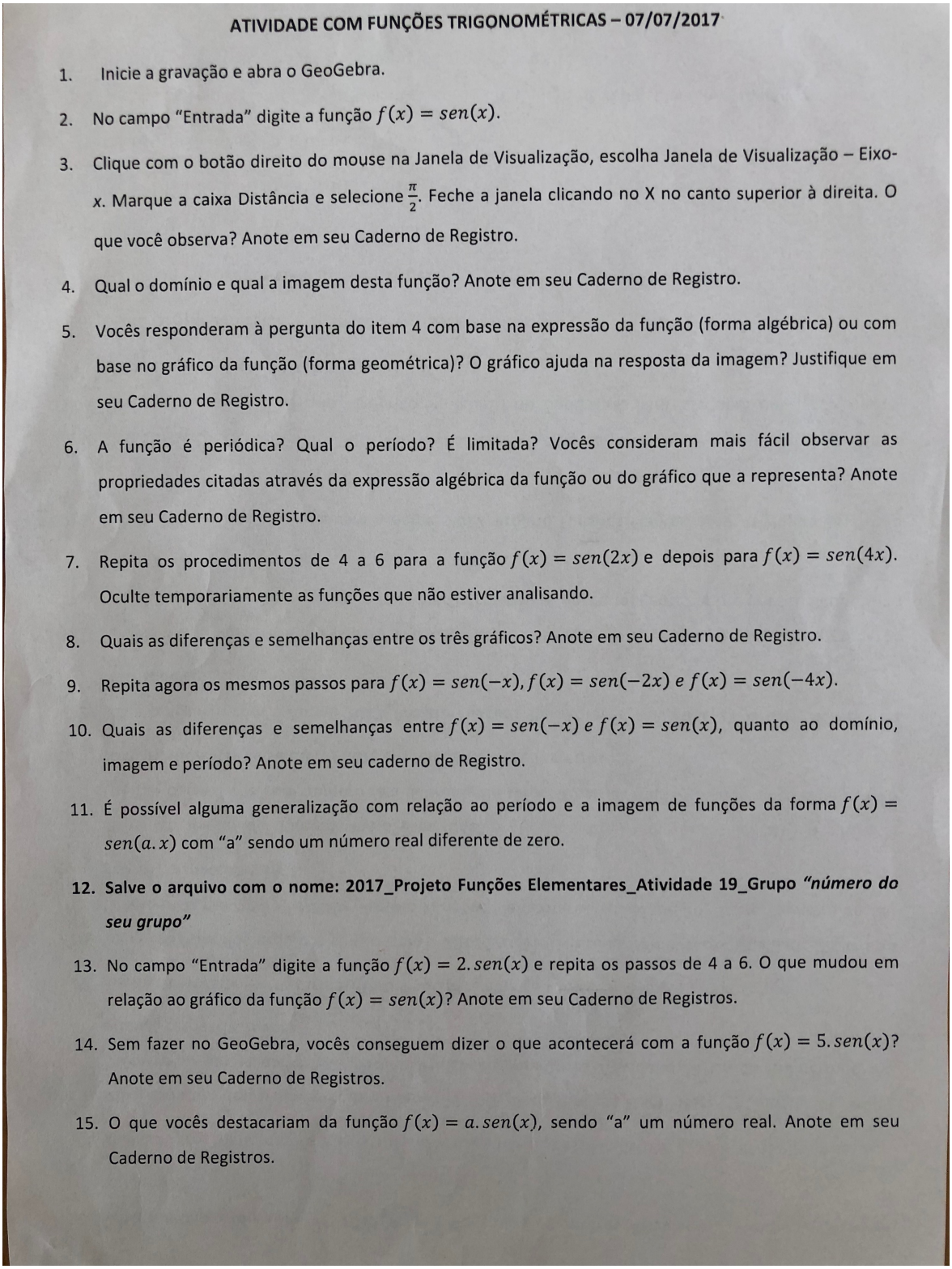
Como era nosso último encontro e os alunos estavam estudando para as provas, acreditamos ter tido uma participação maior devido à preocupação deles em ter alguma dica ou aprendizado que os ajudasse na avaliação final da disciplina, além do interesse nas atividades e nas facilidades de aprendizagem geradas pelas mesmas.

Iniciamos as atividades de funções trigonométricas (figuras 100 e 101) com a função seno trabalhando os conceitos de domínio, imagem, periodicidade e limitações desta função.

Pedimos, inicialmente, que digitassem a função $f(x) = sen\, x$ e em seguida alterassem o eixo das abcissas para marcações em radianos de $\frac{\pi}{2}$ em $\frac{\pi}{2}$. A ideia era que notassem que para as funções trigonométricas é mais interessante termos os gráficos com o eixo das abcissas dessa forma, pois facilita a ligação dos valores das funções ao ciclo trigonométrico.

Para realizar esta mudança é necessário alterar a “distância” através de uma configuração na Janela de Visualização. Embora tenhamos indicado o procedimento na folha de atividades, todos os grupos tiveram dificuldade em realizar este procedimento, sendo que dois grupos tiveram que solicitar ajuda à professora para este item.

Figura 100: Folha de atividades do quarto encontro

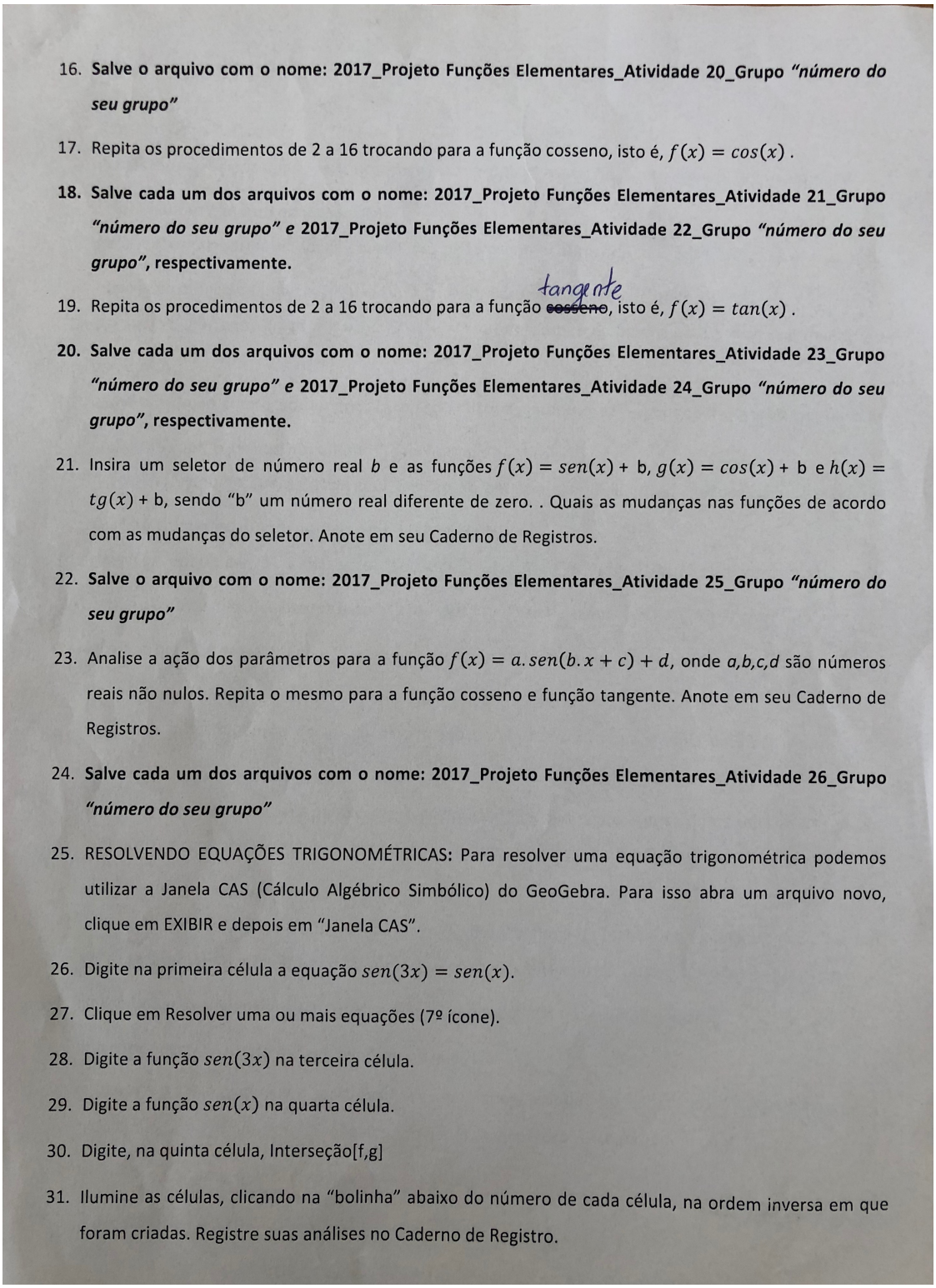


ATIVIDADE COM FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS – 07/07/2017

1. Inicie a gravação e abra o GeoGebra.
2. No campo "Entrada" digite a função $f(x) = sen(x)$.
3. Clique com o botão direito do mouse na Janela de Visualização, escolha Janela de Visualização – Eixo-x. Marque a caixa Distância e selecione $\frac{\pi}{2}$. Feche a janela clicando no X no canto superior à direita. O que você observa? Anote em seu Caderno de Registro.
4. Qual o domínio e qual a imagem desta função? Anote em seu Caderno de Registro.
5. Vocês responderam à pergunta do item 4 com base na expressão da função (forma algébrica) ou com base no gráfico da função (forma geométrica)? O gráfico ajuda na resposta da imagem? Justifique em seu Caderno de Registro.
6. A função é periódica? Qual o período? É limitada? Vocês consideram mais fácil observar as propriedades citadas através da expressão algébrica da função ou do gráfico que a representa? Anote em seu Caderno de Registro.
7. Repita os procedimentos de 4 a 6 para a função $f(x) = sen(2x)$ e depois para $f(x) = sen(4x)$. Oculte temporariamente as funções que não estiver analisando.
8. Quais as diferenças e semelhanças entre os três gráficos? Anote em seu Caderno de Registro.
9. Repita agora os mesmos passos para $f(x) = sen(-x), f(x) = sen(-2x)$ e $f(x) = sen(-4x)$.
10. Quais as diferenças e semelhanças entre $f(x) = sen(-x)$ e $f(x) = sen(x)$, quanto ao domínio, imagem e período? Anote em seu caderno de Registro.
11. É possível alguma generalização com relação ao período e a imagem de funções da forma $f(x) = sen(a.x)$ com "a" sendo um número real diferente de zero.
12. **Salve o arquivo com o nome: 2017_Projeto Funções Elementares_Atividade 19_Grupo *"número do seu grupo"***
13. No campo "Entrada" digite a função $f(x) = 2.sen(x)$ e repita os passos de 4 a 6. O que mudou em relação ao gráfico da função $f(x) = sen(x)$? Anote em seu Caderno de Registros.
14. Sem fazer no GeoGebra, vocês conseguem dizer o que acontecerá com a função $f(x) = 5.sen(x)$? Anote em seu Caderno de Registros.
15. O que vocês destacariam da função $f(x) = a.sen(x)$, sendo "a" um número real. Anote em seu Caderno de Registros.

Fonte: Acervo do autor.

Figura 101: Continuação da folha de atividades do quarto encontro



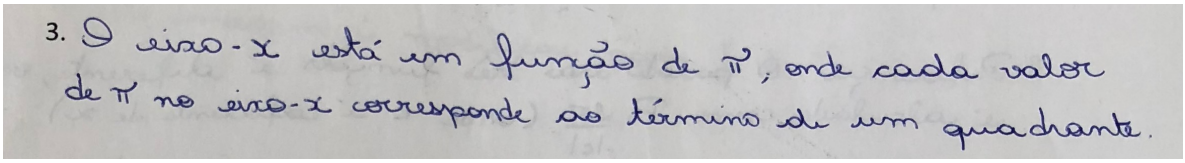
16. **Salve o arquivo com o nome: 2017_Projeto Funções Elementares_Atividade 20_Grupo *"número do seu grupo"***
17. Repita os procedimentos de 2 a 16 trocando para a função cosseno, isto é, $f(x) = cos(x)$.
18. **Salve cada um dos arquivos com o nome: 2017_Projeto Funções Elementares_Atividade 21_Grupo *"número do seu grupo"* e 2017_Projeto Funções Elementares_Atividade 22_Grupo *"número do seu grupo"*, respectivamente.**
19. Repita os procedimentos de 2 a 16 trocando para a função ~~cosseno~~ tangente, isto é, $f(x) = tan(x)$.
20. **Salve cada um dos arquivos com o nome: 2017_Projeto Funções Elementares_Atividade 23_Grupo *"número do seu grupo"* e 2017_Projeto Funções Elementares_Atividade 24_Grupo *"número do seu grupo"*, respectivamente.**
21. Insira um seletor de número real b e as funções $f(x) = sen(x)$ + b, $g(x) = cos(x)$ + b e $h(x) = tg(x)$ + b, sendo "b" um número real diferente de zero. . Quais as mudanças nas funções de acordo com as mudanças do seletor. Anote em seu Caderno de Registros.
22. **Salve o arquivo com o nome: 2017_Projeto Funções Elementares_Atividade 25_Grupo *"número do seu grupo"***
23. Analise a ação dos parâmetros para a função $f(x) = a.sen(b.x + c) + d$, onde *a,b,c,d* são números reais não nulos. Repita o mesmo para a função cosseno e função tangente. Anote em seu Caderno de Registros.
24. **Salve cada um dos arquivos com o nome: 2017_Projeto Funções Elementares_Atividade 26_Grupo *"número do seu grupo"***
25. RESOLVENDO EQUAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS: Para resolver uma equação trigonométrica podemos utilizar a Janela CAS (Cálculo Algébrico Simbólico) do GeoGebra. Para isso abra um arquivo novo, clique em EXIBIR e depois em "Janela CAS".
26. Digite na primeira célula a equação $sen(3x) = sen(x)$.
27. Clique em Resolver uma ou mais equações (7º ícone).
28. Digite a função $sen(3x)$ na terceira célula.
29. Digite a função $sen(x)$ na quarta célula.
30. Digite, na quinta célula, Interseção[f,g]
31. Ilumine as células, clicando na "bolinha" abaixo do número de cada célula, na ordem inversa em que foram criadas. Registre suas análises no Caderno de Registro.

Fonte: Acervo do autor.

Perguntamos então o que eles observavam com esta mudança.

O grupo 1 respondeu corretamente associando ainda os valores de π aos quadrantes no ciclo trigonométrico. Foi possível identificar no áudio a ideia correta da marcação, pois cada quadrante corresponde a $\frac{\pi}{2}$, mas no caderno registraram de maneira equivocada como mostrado na figura 102.

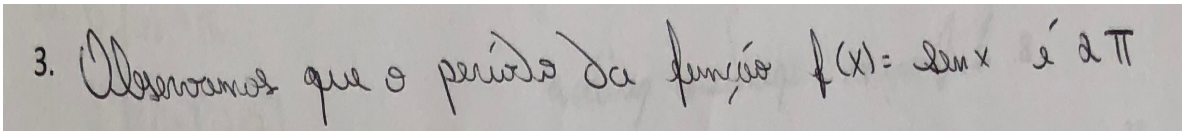
Figura 102: Resposta do grupo 1 para a questão 3



Fonte: Acervo do autor.

O grupo 2 respondeu sobre o período da função seno. (figura 103) Não era essa nossa ideia neste item, pois perguntamos sobre periodicidade nas questões seguintes.

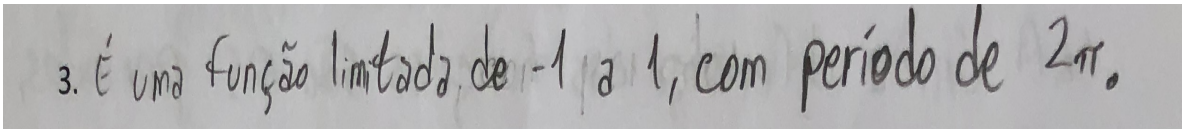
Figura 103: Resposta do grupo 2 para a questão 3



Fonte: Acervo do autor.

O grupo 3 respondeu sobre a função ser limitada e periódica (figura 104) também não atendendo a nossas expectativas. Interessante como respondem o que conhecem da função e não o que estão realizando no momento. Existe um certo engessamento das ideias e isso não permite muitas vezes ir além nas observações, justificando somente conhecimentos já adquiridos.

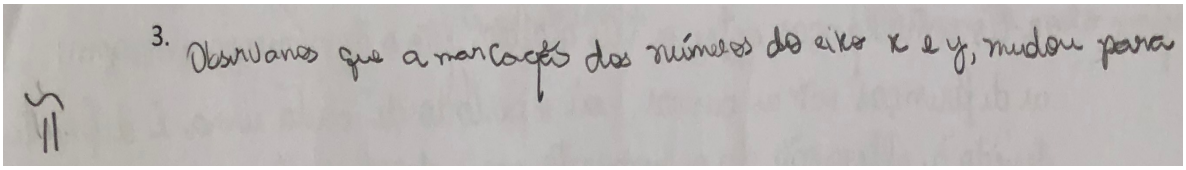
Figura 104: Resposta do grupo 3 para a questão 3



Fonte: Acervo do autor.

O grupo 4 respondeu que os números dos eixos x e y mudaram para π (figura 105). A alteração ocorreu somente no eixo x e portanto não prestaram muita atenção no que estavam fazendo. Este grupo parece estar participando mas sem muito envolvimento na aprendizagem.

Figura 105: Resposta do grupo 4 para a questão 3

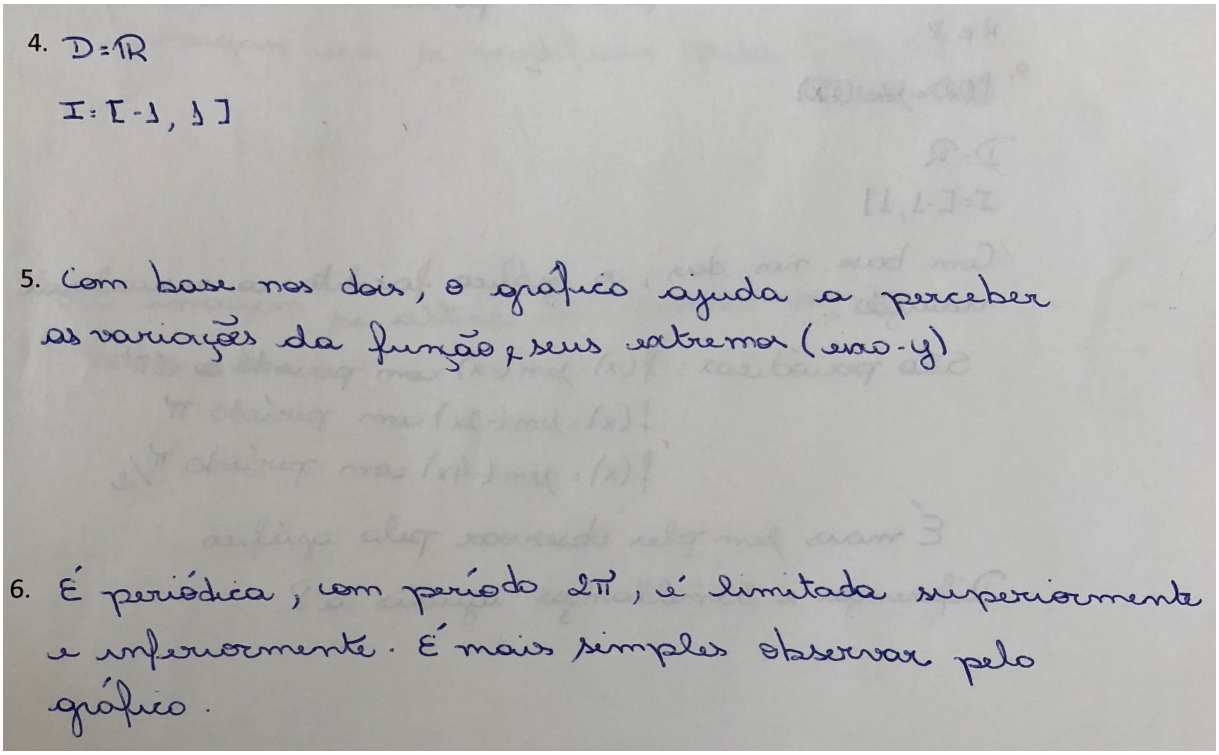


Fonte: Acervo do autor.

Em seguida, solicitamos que determinassem o domínio, imagem, período e se a mesma possui limitações.

O grupo 1 não teve dificuldade e respondeu corretamente todos os itens como podemos observar na figura 106. No item 5 referem-se a extremos como sendo os limites superior e inferior da função seno (colocam eixo –y para denotar essa ideia como pode ser observado no item 5 da figura 106).

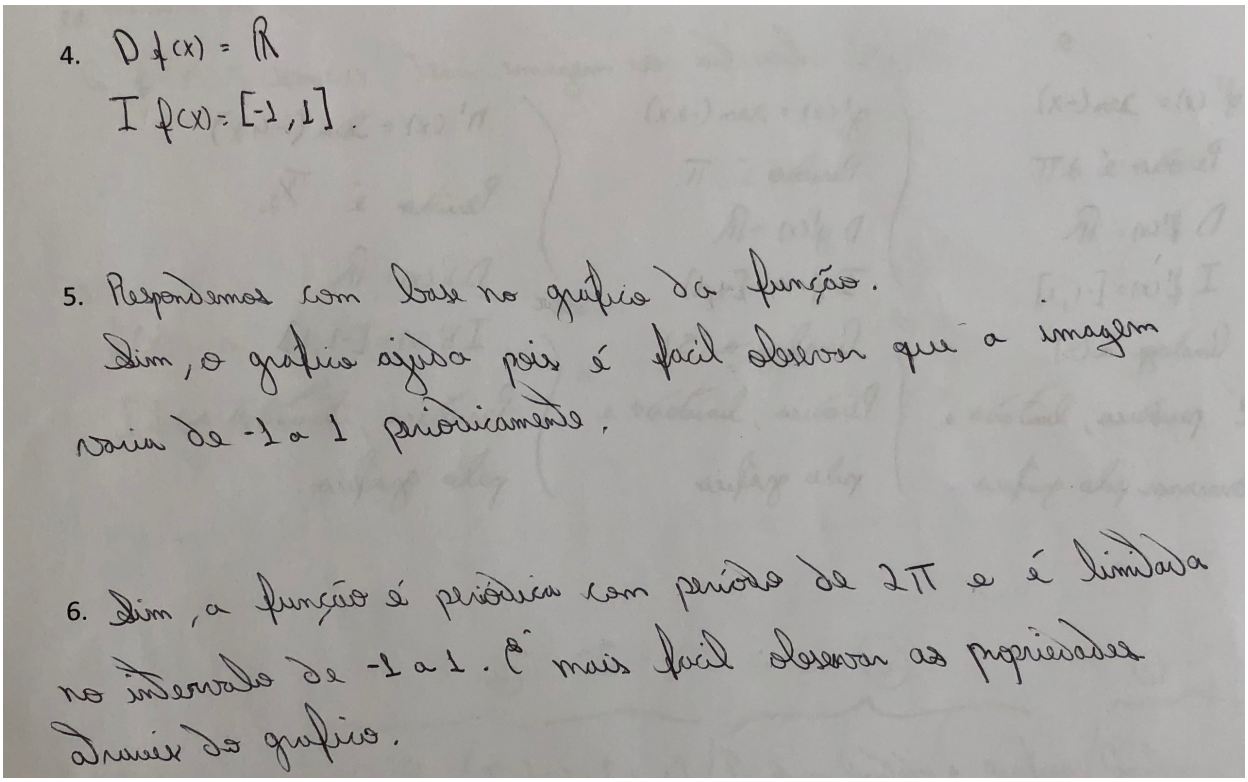
Figura 106: Respostas do grupo 1 para as questões 4 a 6



Fonte: Acervo do autor.

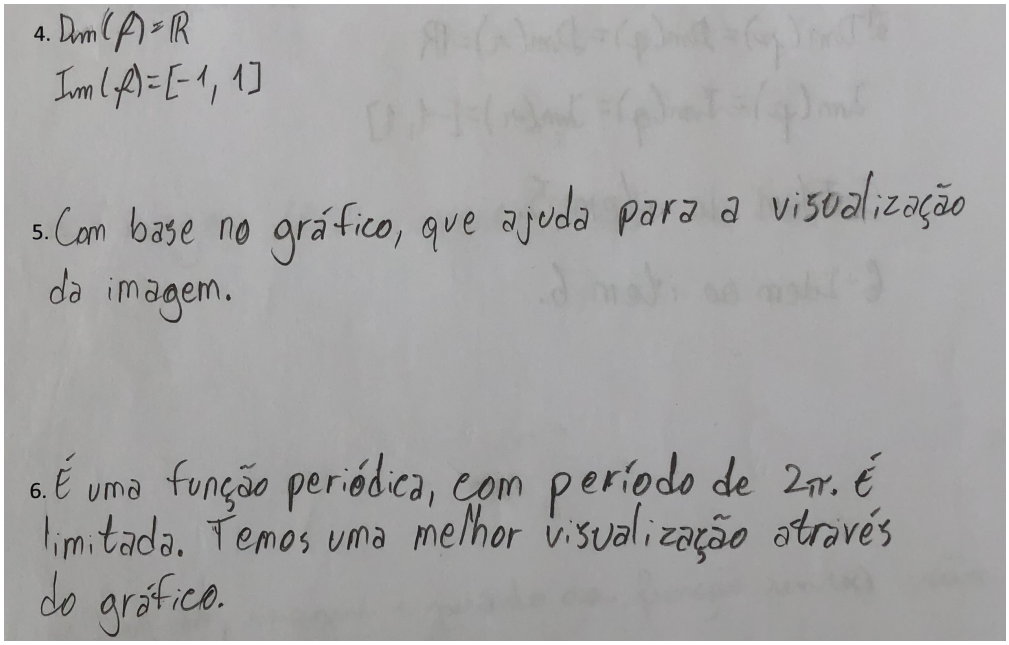
Os grupos 2, 3 e 4 também responderam corretamente, mas citaram a forma gráfica como a mais fácil para a visualização das questões pedidas como mostrado nas figuras 107 a 109 (item 5), com o grupo 4 afirmando ser "*de suma importância*" a forma gráfica para responder estes itens. (item 5 da figura 109)

Figura 107: Respostas do grupo 2 para as questões de 4 a 6



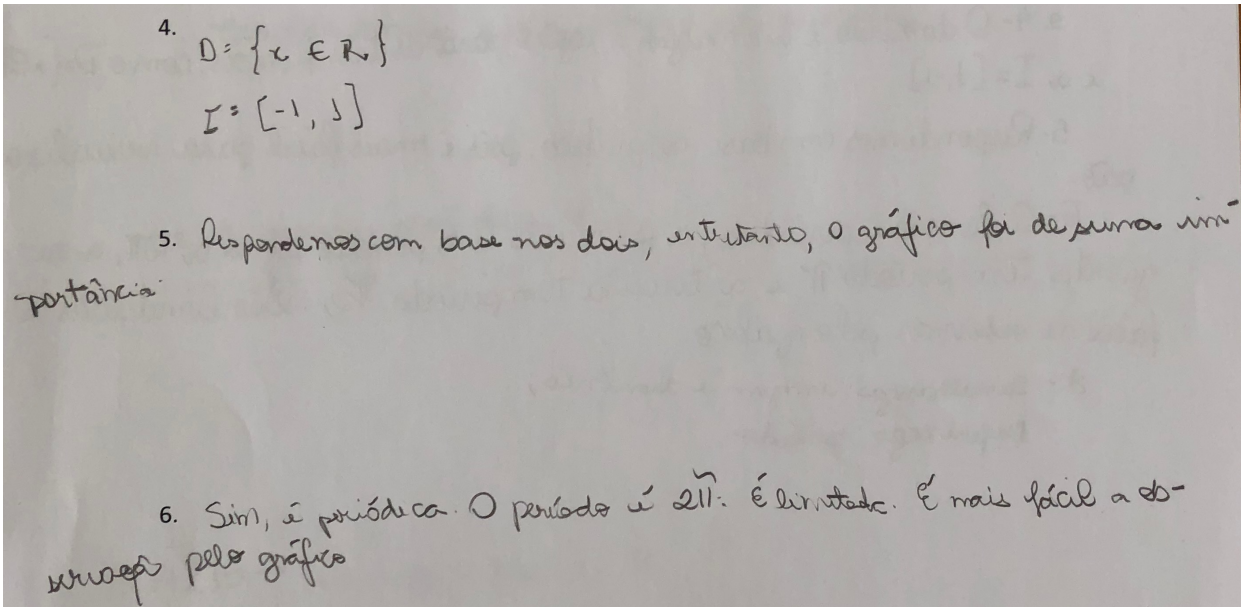
Fonte: Acervo do autor.

Figura 108: Respostas do grupo 3 para as questões de 4 a 6



Fonte: Acervo do autor.

Figura 109: Respostas do grupo 4 para as questões de 4 a 6

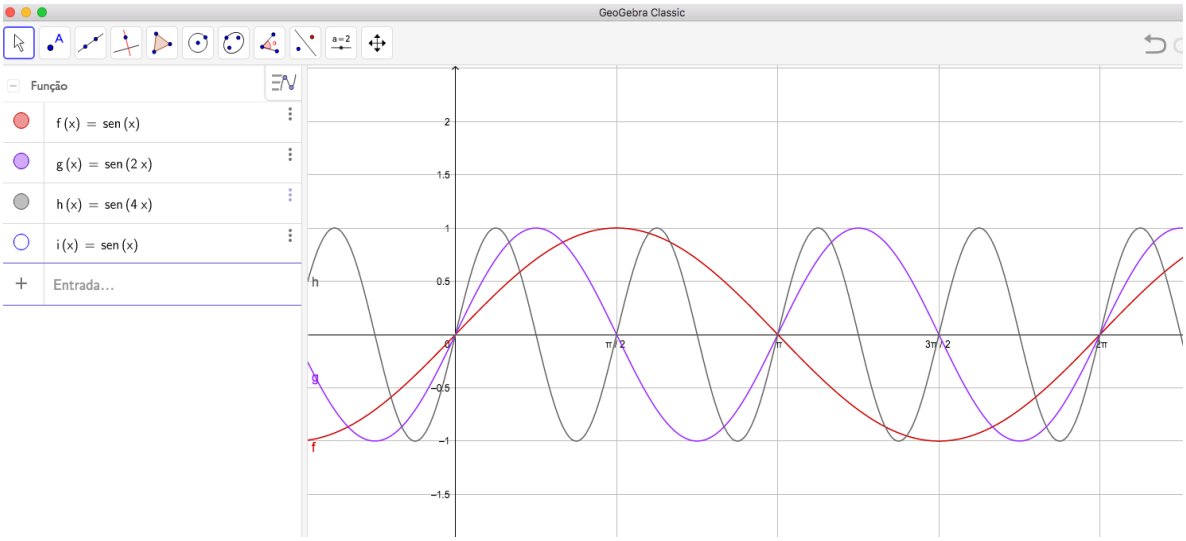


Fonte: Acervo do autor.

Na sequência da atividade, pedimos que analisassem as funções $f(x) = sen(2x)$ e $f(x) = sen(4x)$ quanto a domínio, imagem e período e em seguida apontassem diferenças e semelhanças entre estas funções. Ao pensar na atividade, nosso intuito era que os alunos percebessem as variações que ocorrem no período das funções com a introdução das constantes e que conseguissem generalizar este comportamento, nos dando um indício do domínio e apropriação do conceito. Um problema que surgiu foi não termos mudado o nome das funções e ao digitar *f(x)* no GeoGebra para as novas funções, perdia-se a função anterior, pois possuíam o mesmo nome (*f(x)*).

O grupo 1 ao perceber este fato, alterou o nome da função para $g(x) = sen(2x)$ e $h(x) = sen(4x)$ como mostrado na figura 110. Esta iniciativa consideramos importante, pois mostra que o grupo já criou segurança e autonomia para entender que seria interessante ter todas as funções para que pudessem compará-las e assim alterar o nome das mesmas não cause prejuízos para a atividade.

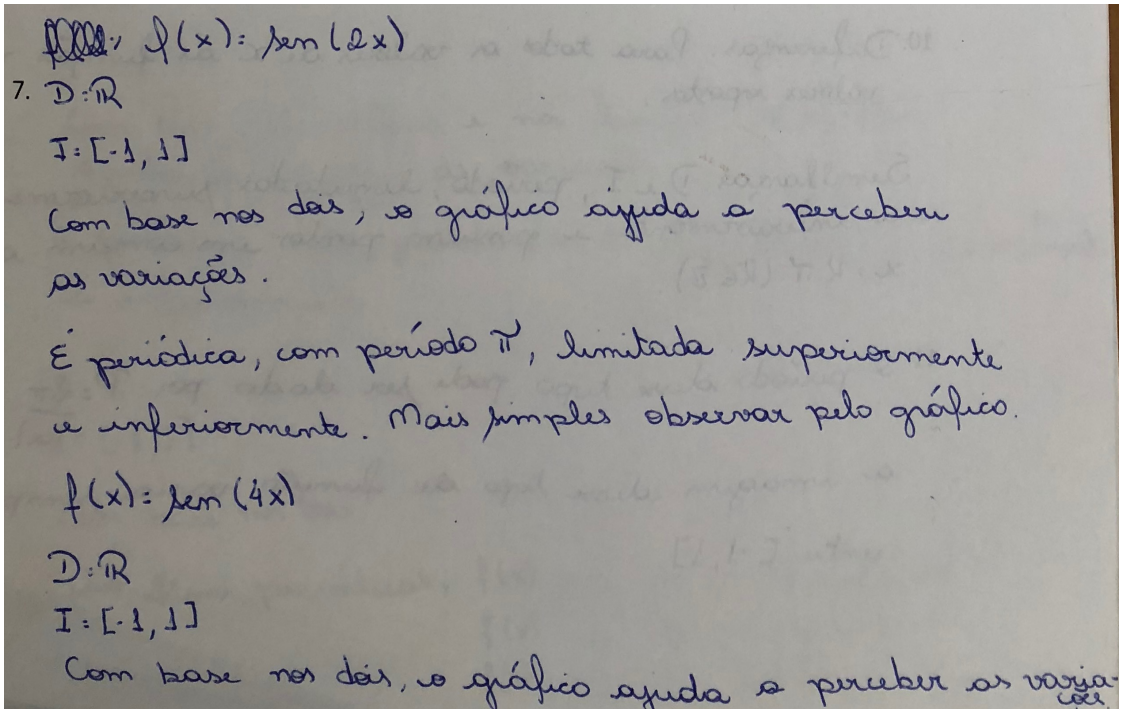
Figura 110: Gráficos das funções seno geradas no GeoGebra pelo grupo 1



Fonte: Acervo do autor.

Em relação as comparações entre as funções, o grupo 1 foi bastante claro nas respostas como observado nas figuras 111 e 112.

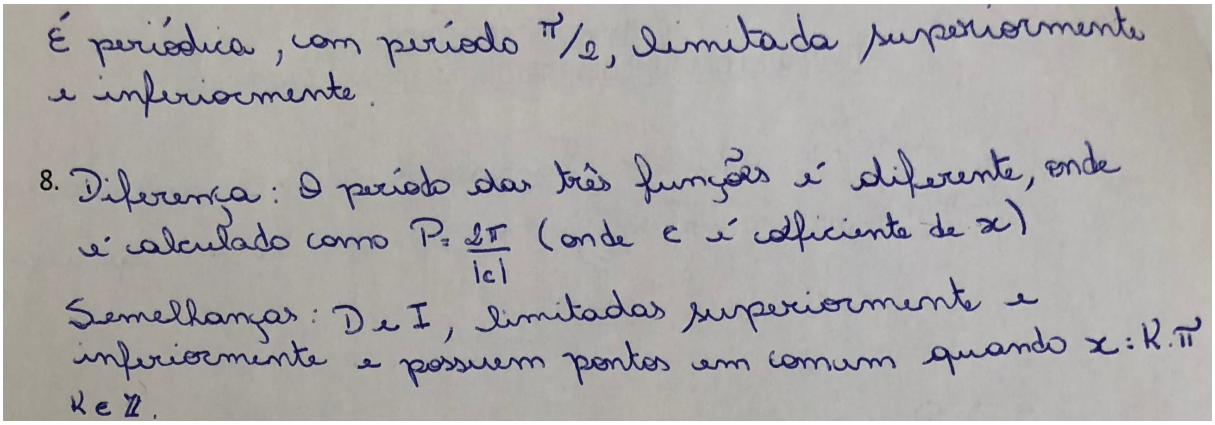
Figura 111: Resposta do grupo 1 para o item 7



Fonte: Acervo do autor.

Muito interessante como tomam cuidado ao generalizar o período no item 8 colocando o módulo de *c* (“*coeficiente de x”*) e em perceberem os pontos comuns entre as três funções e anotarem onde isso ocorre. ($x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$) demonstrando terem um bom entendimento como mostrado na figura 112.

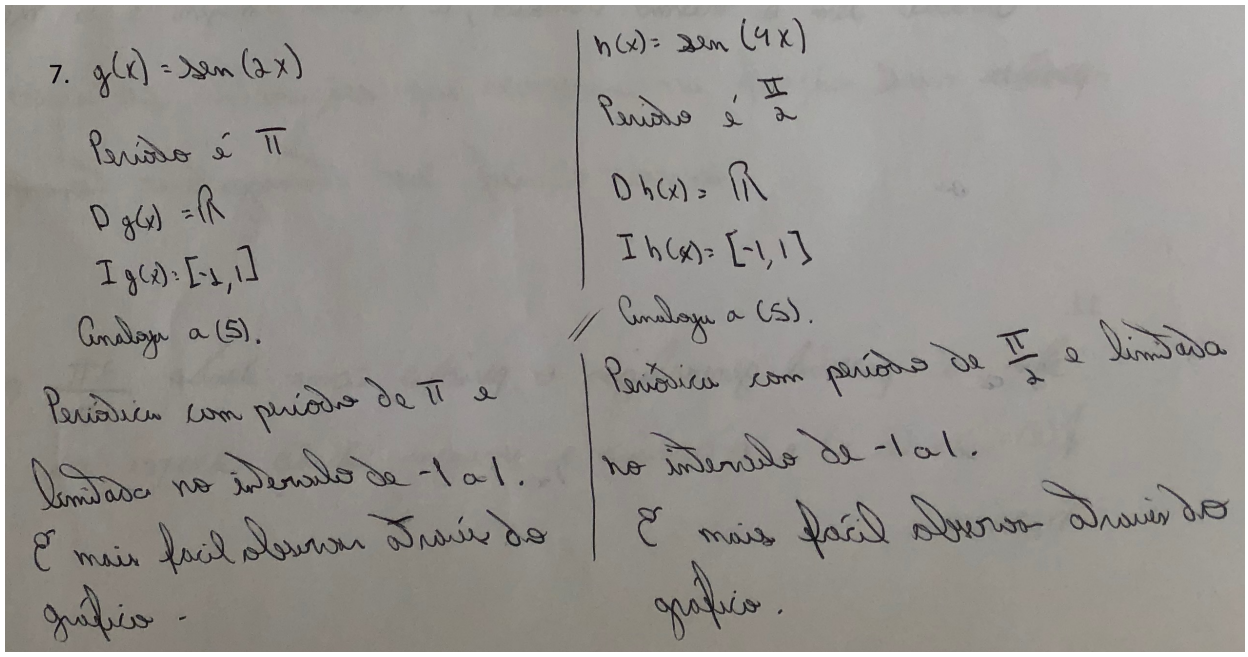
Figura 112: Resposta do grupo 1 para o item 8



Fonte: Acervo do autor.

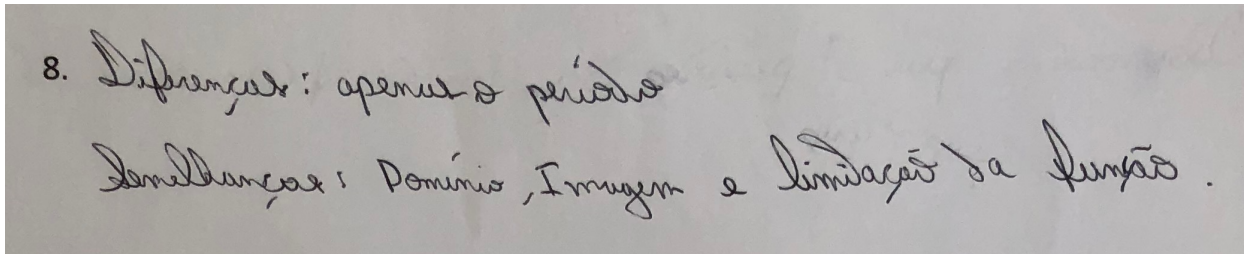
O grupo 2 também responde corretamente às comparações entre as funções, alteram o nome das funções para *g(x)* e *h(x)* mas não generalizam o período como fez o grupo 1. Temos nas figuras 113 e 114 as respostas do grupo para os itens 7 e 8 onde escrevem ser mais fácil realizar as comparações através dos gráficos das funções. O termo “ *Análogo a (5)* “ refere-se a terem respondido à questão com base no gráfico da função.

Figura 113: Resposta do grupo 2 para o item 7



Fonte: Acervo do autor.

Figura 114: Resposta do grupo 2 para o item 8

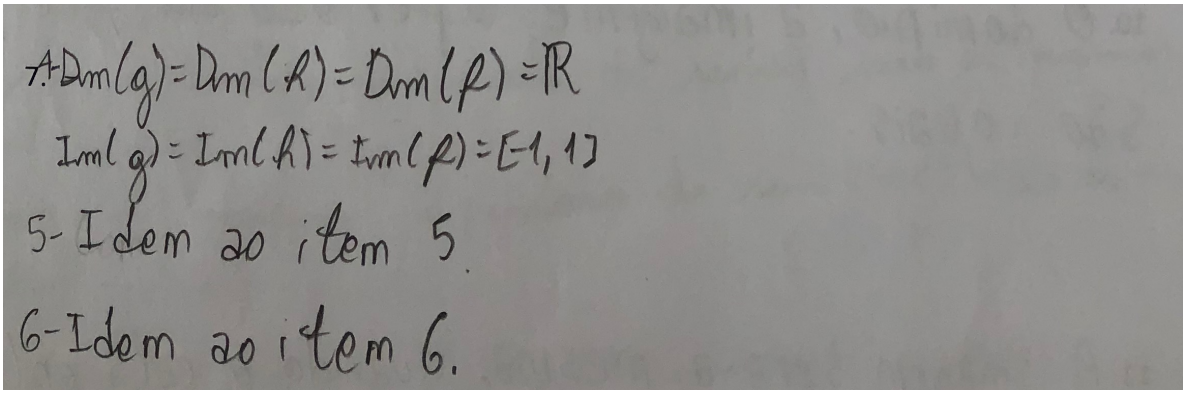


Fonte: Acevo do autor.

No vídeo gravado o grupo 2 conversa sobre como o software ajuda no entendimento destas funções que não são tão triviais para eles. Citam: "*...a gente não tem tanta familiaridade, somos alunos do 1º ano...acho que daqui um tempo, a gente vai conseguir saber...assim como a função do 2º grau, a gente já sabe se a concavidade da parábola é pra cima, pra baixo, agora as outras...acho que aí entra o programa pra nos ajudar, quando a gente não está familiarizado ainda com ela (função)...muito bom pra ver e entender!!!* "

O grupo 3 responde corretamente o domínio e imagem das funções e um fato interessante aconteceu ao grupo introduzir as funções $f(x) = sen(2x)$ e $f(x) = sen(4x)$, pois digitaram somente "*sen(2x)* e *sen(*4x*)* " no campo de entrada do software e assim o próprio GeoGebra nomeou as funções como $g(x) = sen(2x)$ e $h(x) = sen(4x)$ não apagando, assim, a função $f(x) = sen(x)$ e o grupo nem percebeu que havíamos colocado o mesmo nome nas funções. Em relação ao período das funções respondem de maneira não muito clara, quando escrevem " *idem ao item 6* " afirmando ser o mesmo período da função anterior o que não ocorre, pois o período das funções é alterado. (figura 115).

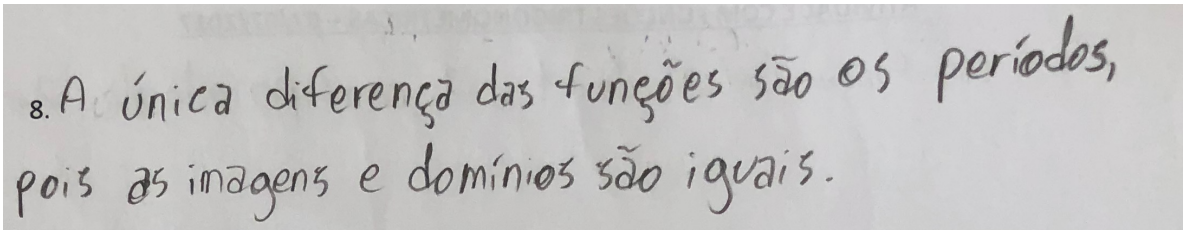
Figura 115: Resposta do grupo 3 para o item 7



Fonte: Acervo do autor.

No vídeo gravado não discutem este fato e, portanto, ficou difícil entender o que querem dizer. O curioso é que no item seguinte, mostrado na figura 116, afirmam que a diferença entre as funções é o período. Assim concluímos que a resposta não poderia ser idêntica a anterior, mas o grupo não se atentou para isso.

Figura 116: Resposta do grupo 3 para o item 8

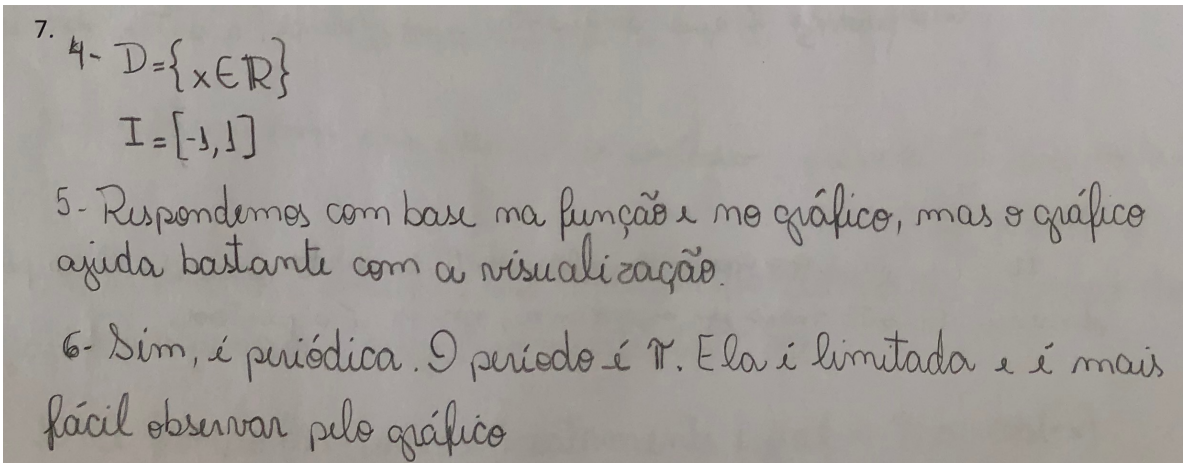


Fonte: Acervo do autor.

O grupo 4 apresentou dificuldades em entender o período das funções e não se atentaram em alterar o nome das funções $f(x) = sen(2x)$ e $f(x) = sen(4x)$ como relatamos ter feito os grupos 1 e 2. Assim ficavam digitando $f(x) = sen(2x)$ e aí voltavam para $f(x) = sen(x)$. Como não conseguiram chegar a nenhuma conclusão de como resolver o problema, pediram ajuda à professora.

No caderno de respostas, mostrado nas figuras 117 e 118, escrevem corretamente domínio, imagem e período das funções, mas mesmo com o software não conseguiram entender sozinhos, pois solicitaram ajuda à professora novamente para entender estes itens.

Figura 117: Resposta do grupo 4 para o item 7

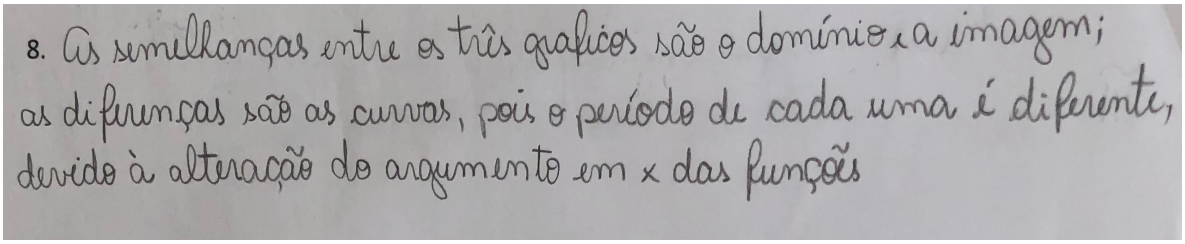


Fonte: Acervo do autor.

O que percebemos no vídeo gravado é que o grupo foi composto por 3 alunos que não participaram de todos os encontros e por isso não apresentaram tanta segurança e autonomia com o software, para alterar o nome da função por

exemplo, e explorar mais os recursos com o gráfico gerado comparando os períodos, as imagens e pontos em comum como fizeram os outros grupos.

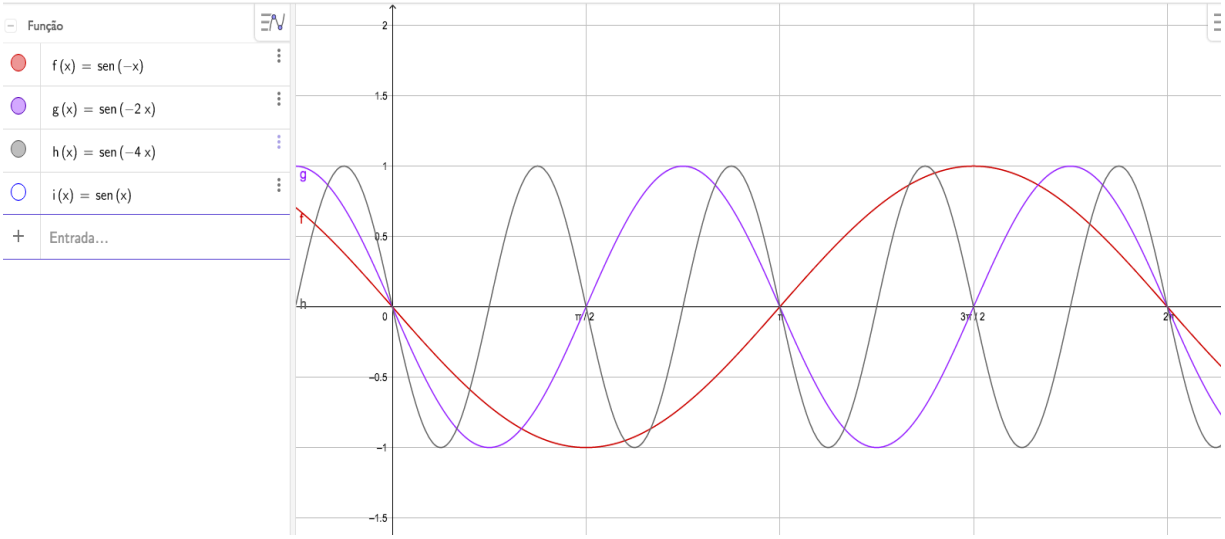
Figura 118: Resposta do grupo 4 para o item 8



Fonte: Acervo do autor.

Na sequência pedimos que comparassem as funções $f(x) = sen(-x)$, $g(x) = sen(-2x)$ e $h(x) = sen(-4x)$ quanto ao domínio, imagem e período. Os gráficos destas funções, realizado pelo grupo 2, é mostrado na figura 119.

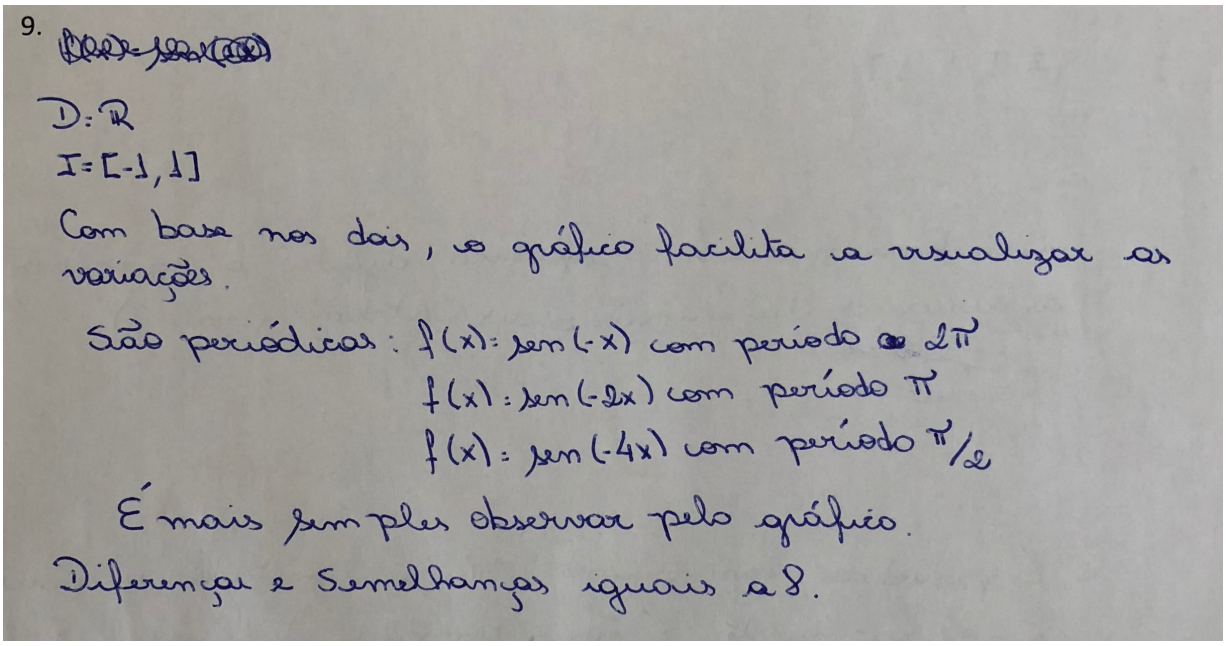
Figura 119: Gráficos das funções seno geradas no GeoGebra pelo grupo 2



Fonte: Acervo do autor.

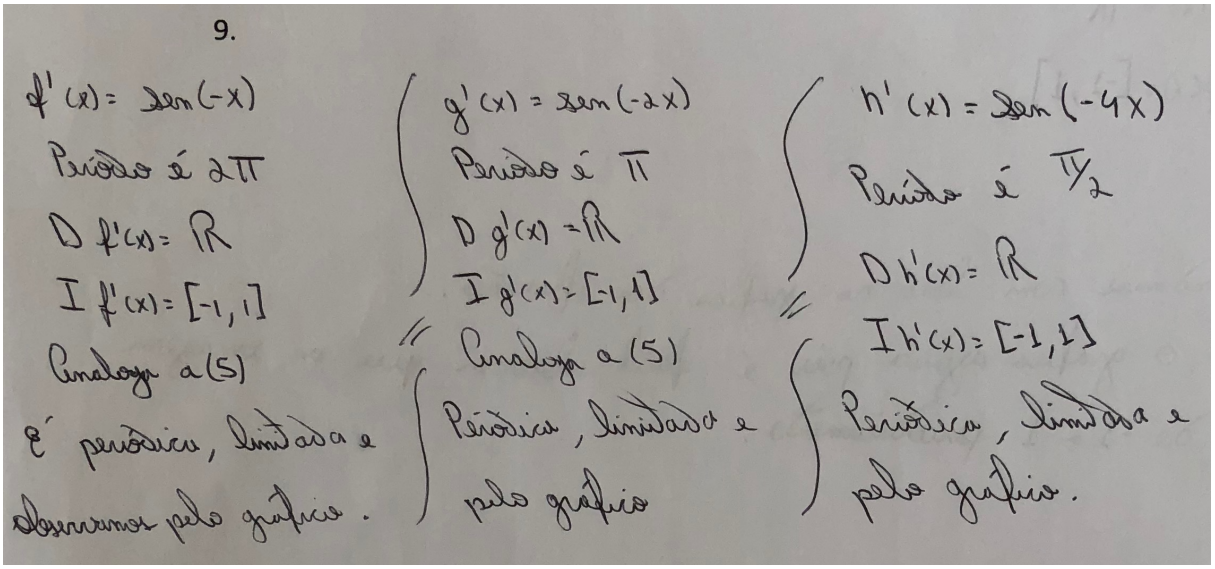
Os grupos 1, 2 respondem corretamente este item como podemos observar nas figuras 120 a 121, além de demonstrar terem entendido pela conversa no vídeo gravado e concluírem ser mais fácil as comparações pelos gráficos gerados no software.

Figura 120: Resposta do grupo 1 para o item 9



Fonte: Acervo do autor.

Figura 121: Resposta do grupo 2 para o item 9

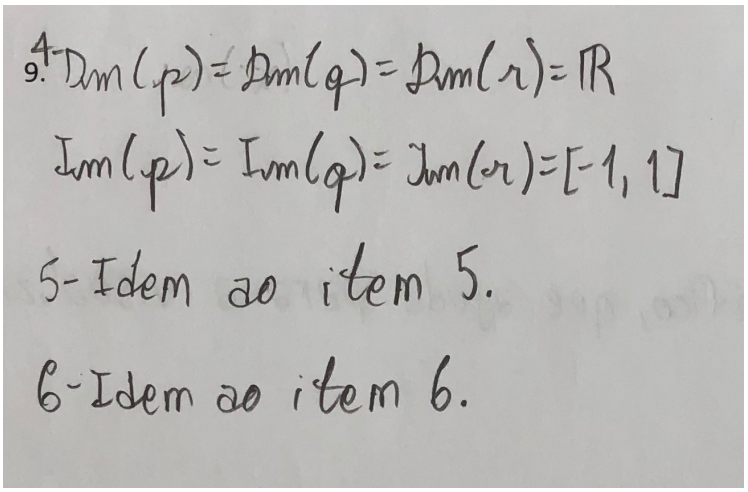


Fonte: Acervo do autor.

O grupo 3 comete o mesmo erro que na questão anterior quando escrevem " *Idem ao item 6* " (mesmo período para as funções), já que o período das

funções é alterado com a introdução das constantes no argumento das funções seno como mostrado na figura 122. No vídeo gravado demonstram não estarem muito entrosados, pois não discutem as dúvidas e não tentam explorar as funções. Podemos observar uma diferença no detalhamento da resposta deste grupo com os grupos 1 e 2.

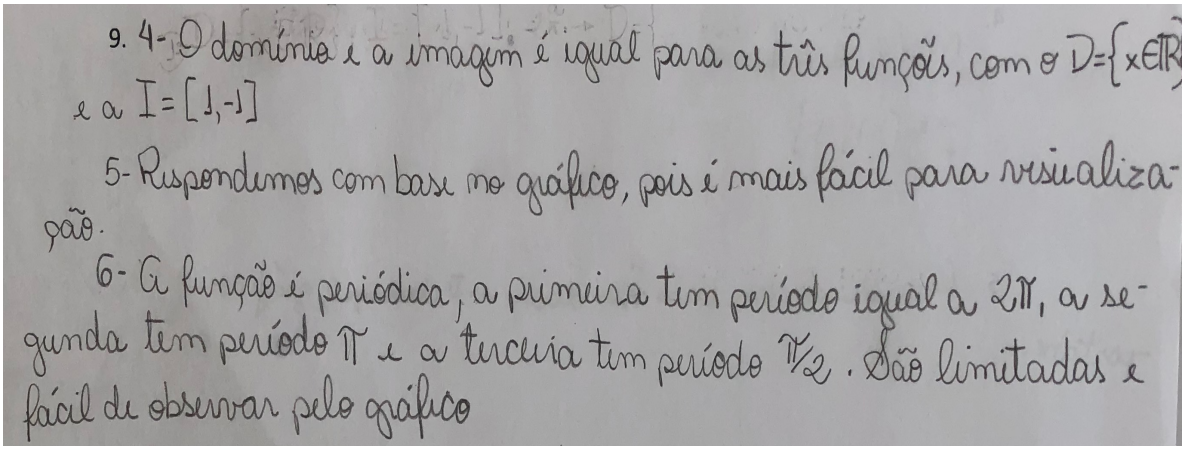
Figura 122: Resposta do grupo 3 para o item 9



Fonte: Acervo do autor.

O grupo 4 respondeu corretamente (figura 123), porém pediu ajuda, novamente, à professora para entender as mudanças ocorridas nas funções dadas. O interessante neste grupo foi que analisaram sempre as funções 2 a 2 ($f(x) = sen(2x)$ e $g(x) = sen(-2x)$, por exemplo), para entender as variações e isso facilitou para o grupo quando a professora interveio por pedido deles.

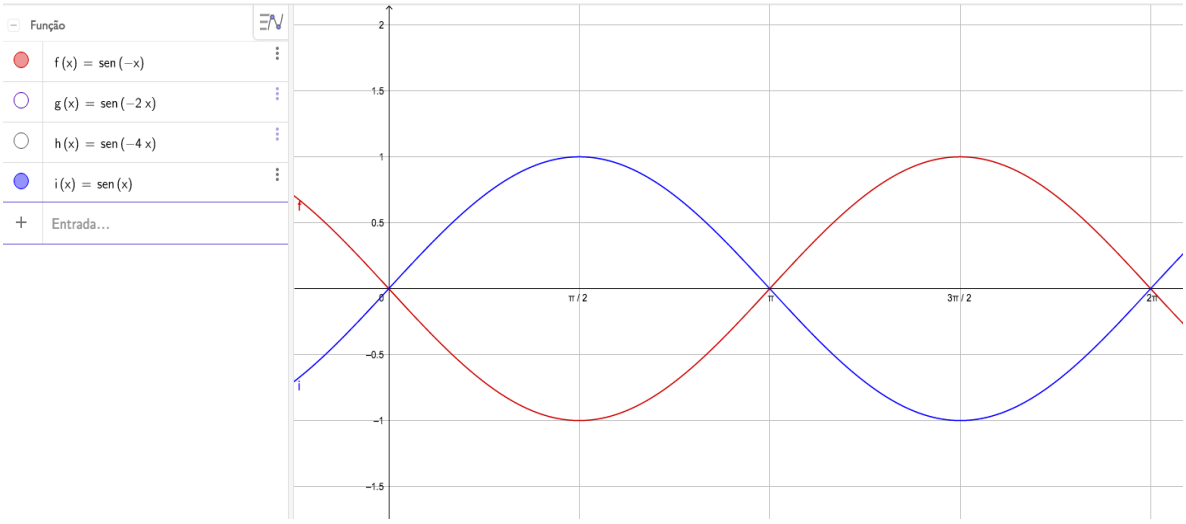
Figura 123: Resposta do grupo 4 para o item 9



Fonte: Acervo do autor.

Com estes gráficos plotados no GeoGebra, pedimos que comparassem somente as funções $f(x) = sen(x)$ e $i(x) = sen(-x)$ e depois tentassem generalizar sobre o comportamento da função $f(x) = sen(\, a.x)$ com *a* um número real diferente de zero. O gráfico destas funções é mostrado na figura 124.

Figura 124: Gráficos das funções seno geradas no GeoGebra pelo grupo 2

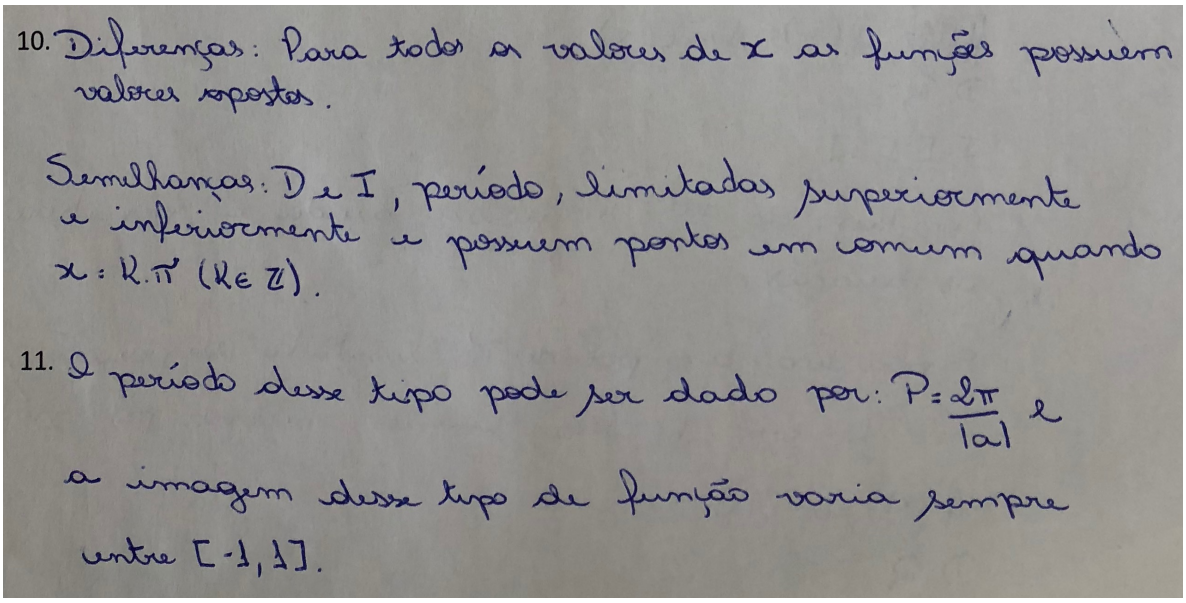


Fonte: Acervo do autor.

O grupo 1 consegue definir bem as semelhanças e diferenças como podemos observar na figura 125. Este grupo não criou um controle deslizante *a* para

a função $f(x) = sen(\ a.x)$. Mesmo assim, pelo padrão de respostas, nota-se que o assunto está bem assimilado e generalizam muito bem o período desta função tomando cuidado, inclusive, para o módulo do parâmetro *a*. Outra observação realizada foram os pontos em comum entre as funções. ("$x = k.\pi\ (k \in \mathbb{Z})$")

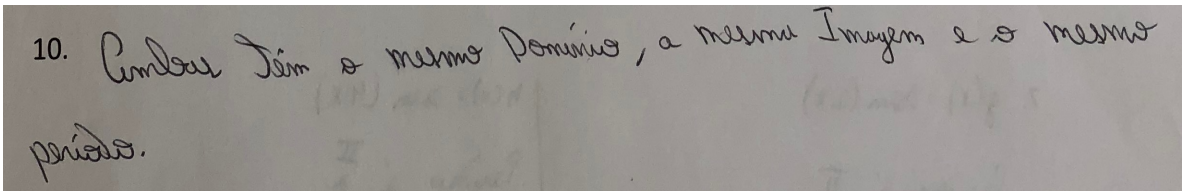
Figura 125: Respostas do grupo 1 para os itens 10 e 11



Fonte: Acervo do autor.

O grupo 2 responde corretamente as semelhanças entre as funções, mostrado na figura 126.

Figura 126: Resposta do grupo 2 para o item 10

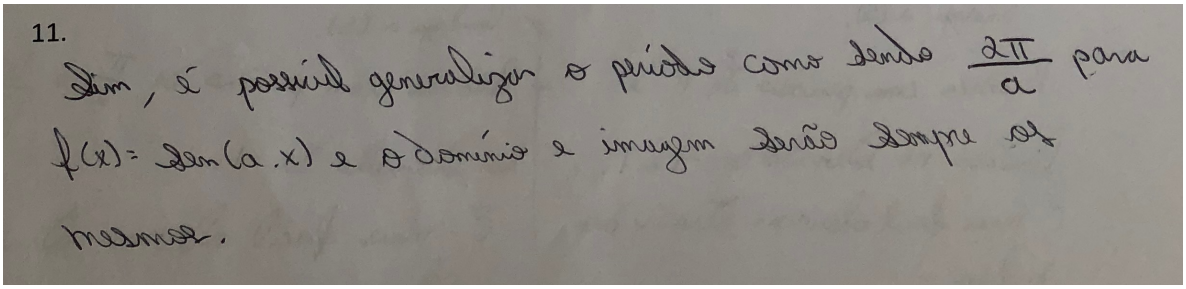


Fonte: Acervo do autor.

Percebem a simetria dos gráficos em relação ao eixo x (chamam de "*inversão em relação ao eixo x*"), mas não anotam na folha de respostas pois dizem que não foi perguntado. No entanto o grupo poderia ter anotado este fato quando pedimos as diferenças entre as funções.

Outro ponto interessante foi que conseguiram obter uma generalização para o período da função $f(x) = sen(\ a.x)$, mas esqueceram de observar que a "fórmula" do período só é válida para valores positivos de *a*, ou deveriam colocar o módulo de *a* como fez o grupo 1. (figura 127)

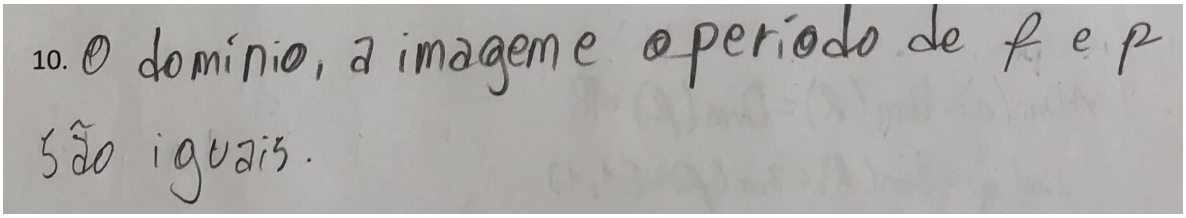
Figura 127: Resposta do grupo 2 para o item 11



Fonte: Acervo do autor.

O grupo 3 responde sobre as semelhanças no domínio, imagem e período das funções, mas não anotam nenhuma diferença como mostra a figura 128.

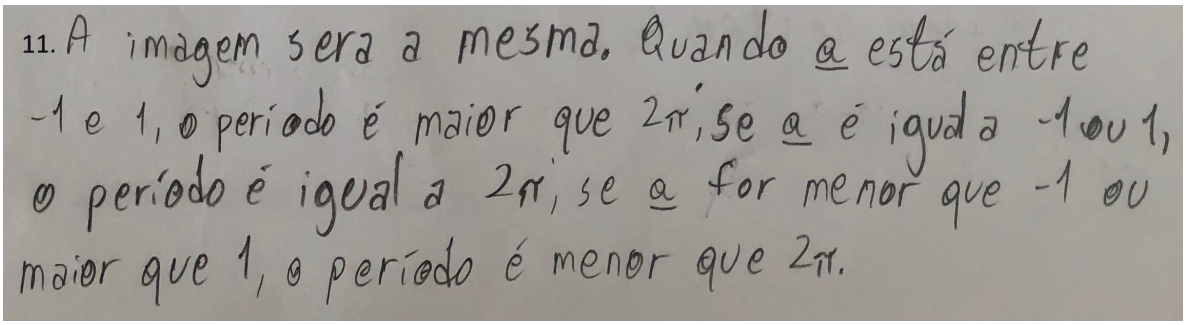
Figura 128: Resposta do grupo 3 para o item 10



Fonte: Acervo do autor.

Na generalização do período da função $f(x) = sen(\ a.x)$ criam um seletor como esperávamos que fizessem para encontrar uma expressão para o período, mas não conseguem e assim escrevem o que observam (figura 129). Interessante como percebem as variações no período de acordo com as variações do seletor *a* criado, porém ficou um pouco confusa a análise. O grupo continua muito tempo em silêncio e com pouca interação.

Figura 129: Resposta do grupo 3 para o item 11

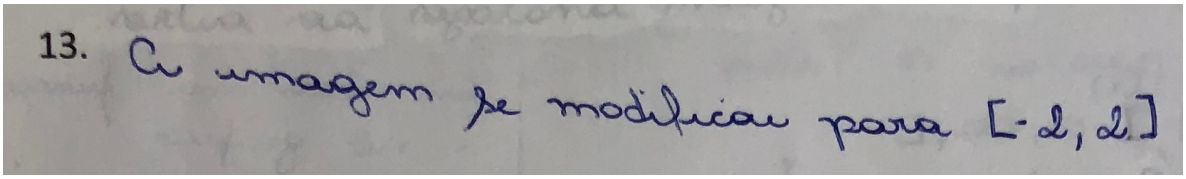


Fonte: Acervo do autor.

Para finalizar as observações a respeito da função seno, pedimos que comparassem a função $f(x) = 2.sen(\ x)$ com a função $f(x) = sen(\ x)$. Em seguida, se conseguiam analisar a função $f(x) = 5.sen(\ x)$ e finalmente como generalizariam a função $f(x) = a.sen(\ x)$ sendo *a* um número real.

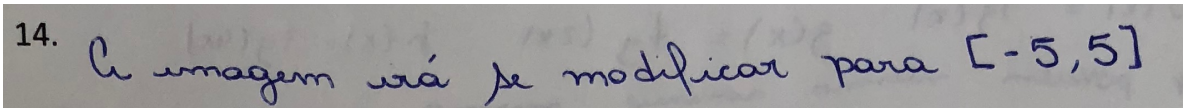
O grupo 1 analisou domínio, imagem e período corretamente, mas anotou somente a imagem na folha de respostas como mostrado nas figuras 130 e 131.

Figura 130: Resposta do grupo 1 para o item 13



Fonte: Acervo do autor.

Figura 131: Resposta do grupo 1 para o item 14

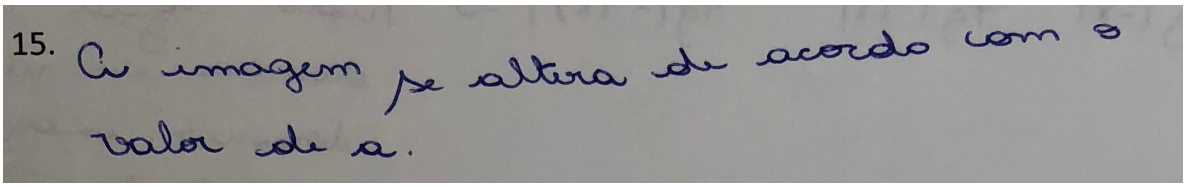


Fonte: Acervo do autor.

Na generalização da função $f(x) = a.sen(\ x)$ entenderam a ideia e tentaram criar a função com um seletor *a* no GeoGebra, mas não conseguiram e acabaram desistindo. Assim a reposta que escreveram está correta, mas não da

forma que esperávamos. Nossa ideia ao propor este item é que entendessem que ocorria uma variação somente na imagem, como fizeram, mas que conseguissem expressar a imagem como o conjunto [-a ; a]. A reposta do grupo 1 encontra-se na figura 132.

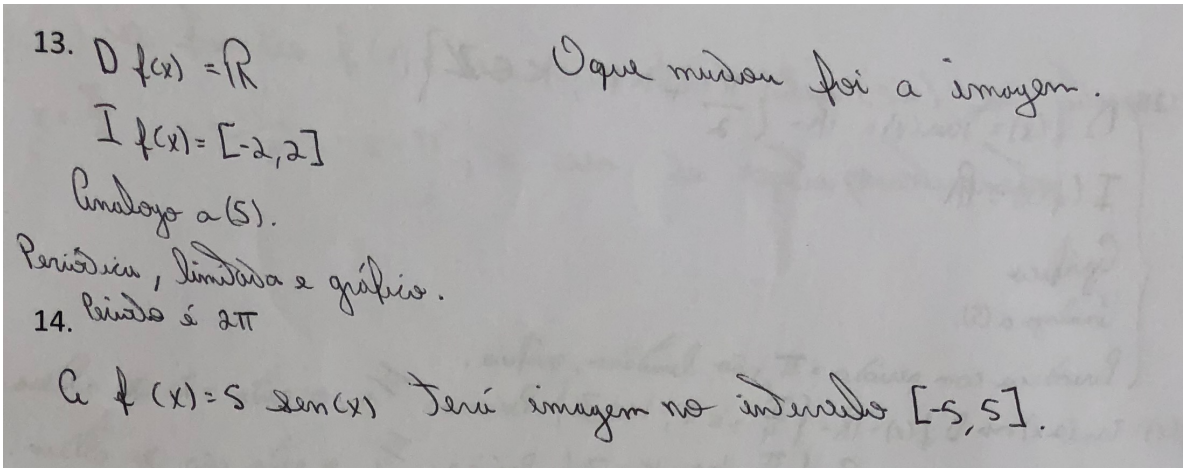
Figura 132: Resposta do grupo 1 para o item 15



Fonte: Acervo do autor.

O grupo 2 foi mais completo na resposta escrita, como mostrado na figura 133, e anotou que a mudança nas funções ocorria somente na imagem.

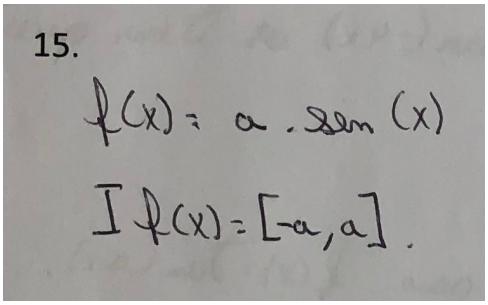
Figura 133: Resposta do grupo 2 para os itens 13 e 14



Fonte: Acervo do autor.

Em relação a generalização também não criaram um seletor para observar os gráficos, mas conseguiram exprimir o conjunto imagem da maneira que pensamos (figura 134). Um fato interessante ocorreu durante a realização das atividades quando o grupo destaca: "*....quando ela passa tudo isso em sala e põe na lousa, a gente não entende como aqui fazendo com o programa...*"

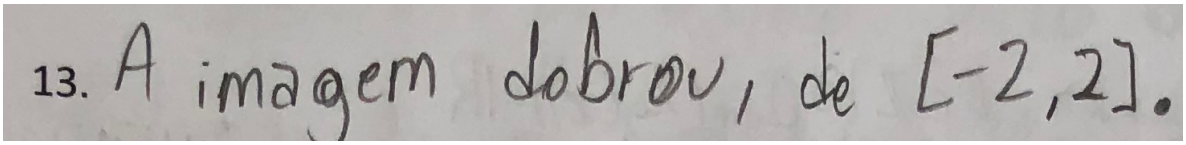
Figura 134: Resposta do grupo 2 para o item 15



Fonte: Acervo do autor.

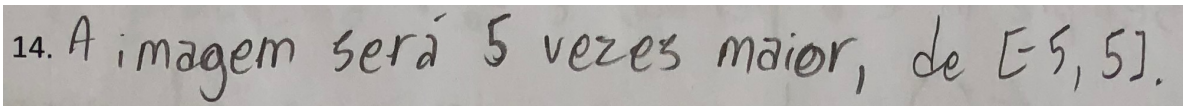
O grupo 3 não discute nada sobre o domínio e o período das funções neste item e restringem-se somente ao conjunto imagem. Em um primeiro momento ficam em dúvida sobre o conjunto imagem ser um intervalo aberto ou fechado, mas registram corretamente como mostrado nas figuras 135 e 136.

Figura 135: Resposta do grupo 3 para o item 13



Fonte: Acervo do autor.

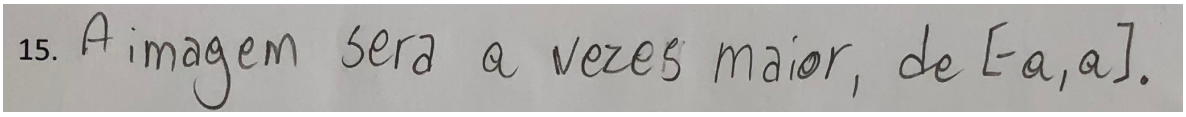
Figura 136: Resposta do grupo 3 para o item 14



Fonte: Acervo do autor.

Conseguiram criar um controle deslizante *a* para a função $f(x) = a.sen(x)$ e generalizar o conjunto imagem corretamente também (figura 137). Ficam em dúvida, num determinado momento, sobre o valor do $sen(180°)$. Afirmam ser igual a 1, mas depois analisam no gráfico da função e entendem o valor correto.

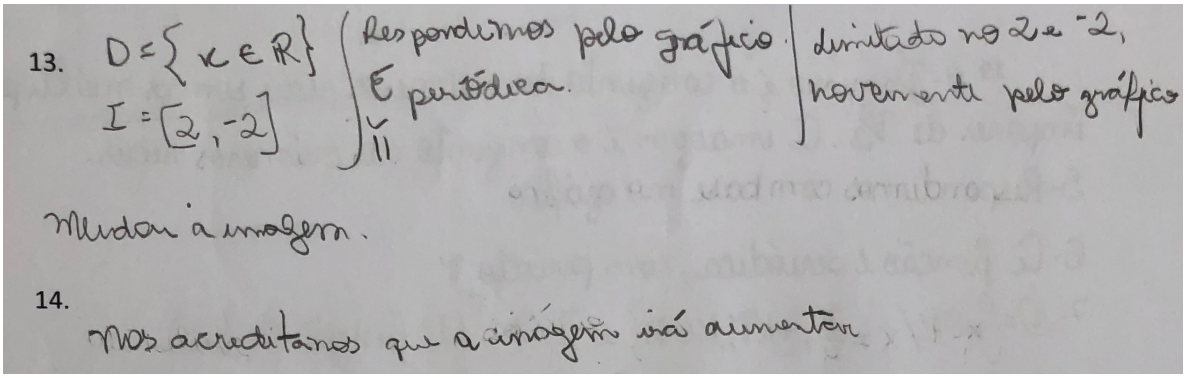
Figura 137: Resposta do grupo 3 para o item 15



Fonte: Acervo do autor.

O grupo 4 respondeu sobre o domínio, imagem e período, mas cometem alguns erros por falta de atenção. Escrevem na folha de respostas (figura 138) que o período das funções é π, mas no vídeo falam corretamente (2π). Outro erro é na forma como escrevem o conjunto imagem (I = [2,-2]). Anotam que a mudança ocorre somente na imagem e no item 15 escrevem que a imagem irá aumentar. Vale destacar que o intervalo do conjunto imagem irá aumentar e assim o grupo deve tomar cuidado com a forma que expressam as repostas para que tenhamos um rigor maior no ensino. Além disso poderiam ter colocado o conjunto imagem como fizeram no item 13. (I = [-5,5])

Figura 138: Resposta do grupo 4 para os itens 13 e 14

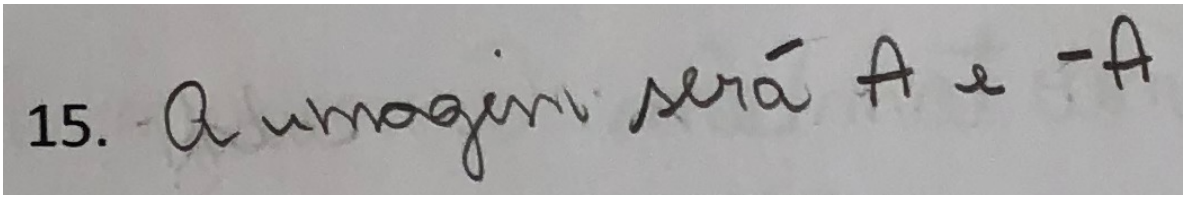


Fonte: Acervo do autor.

Na generalização para a função $f(x) = a.sen(x)$ escrevem "*A imagem será A e –A*" como mostra a figura 139. O que se nota com esta resposta é que o grupo entendeu a variação causada na imagem da função, mas não sabem ou não prestam muita atenção no que estão anotando. O conjunto imagem desta

função não é A e –A e sim um intervalo de valores compreendidos entre *–a* e *a*, o que é bem diferente.

Figura 139: Resposta do grupo 4 para o item 15

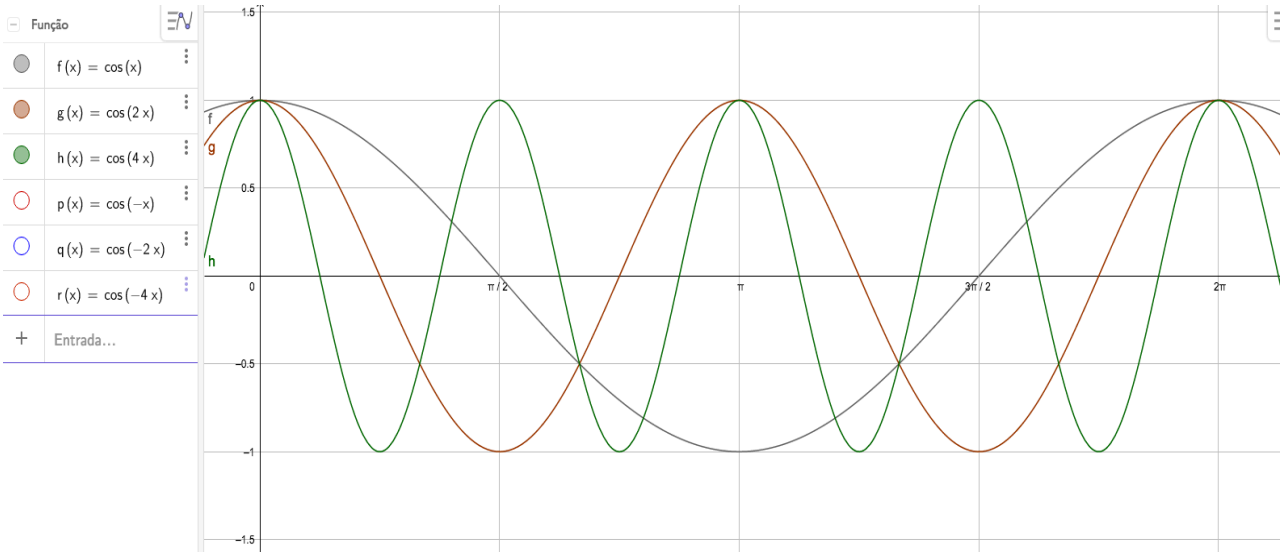


Fonte: Acervo do autor.

Com este item finalizamos os trabalhos com a função seno e pedimos que realizassem os mesmos procedimentos para a função cosseno.

Na figura 140 temos os gráficos das funções $f(x) = \cos x$, $f(x)\ f(x) = \cos 2x$ e $f(x) = \cos 4x$.

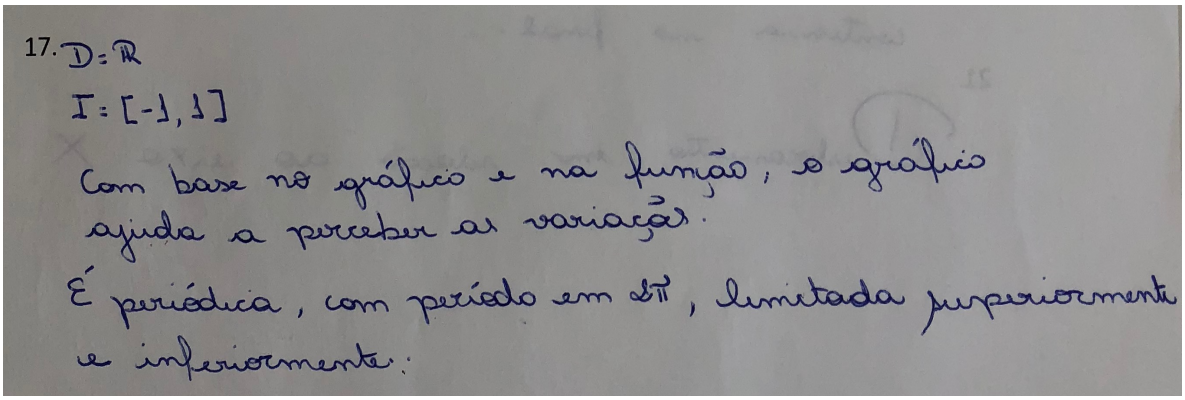
Figura 140: Gráficos das funções cosseno geradas no GeoGebra



Fonte: Acervo do autor.

O grupo 1 entendeu bem a função cosseno como podemos observar na reposta do grupo na figura 141. Afirmam que o gráfico ajuda na visualização.

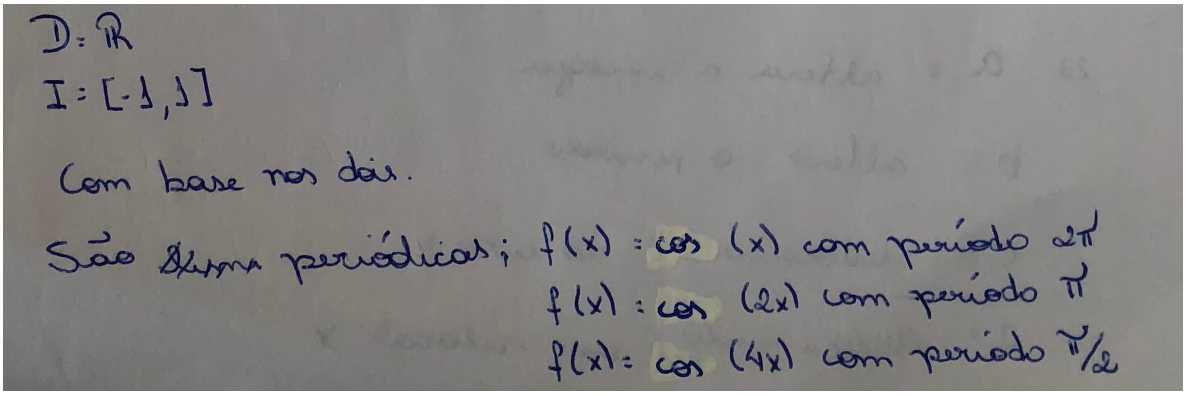
Figura 141: Resposta do grupo 1 para a função cosseno



Fonte: Acervo do autor.

Da mesma forma, trabalham bem com as funções $f(x) = \cos 2x$ e $f(x) = \cos 4x$ destacando os períodos de cada função como mostrado na figura 142. Quando escrevem "*Com base nos dois*" referem que responderam a questão com base na forma algébrica e na forma gráfica da função, mas o que percebemos com os vídeos é que o grupo faz as análises com base no gráfico da função.

Figura 142: Resposta do grupo 1 para as funções $f(x) = \cos 2x$ e $f(x) = \cos 4x$

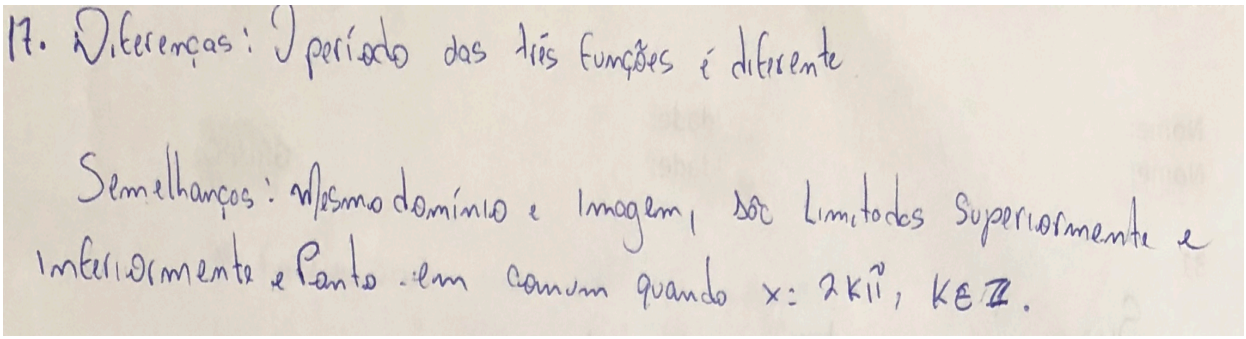


Fonte: Acervo do autor.

Sobre as diferenças e semelhanças entre estas funções destacamos que o grupo escreve uma expressão para as abcissas dos pontos em comum das três funções (figura 143). Este foi o único grupo que anotou esta semelhança. Anotam como $x = 2k\pi$ com $k \in \mathbb{Z}$, mas não notaram que entre 0 e 2π, por exemplo,

há mais dois pontos comuns que são $\frac{2\pi}{3}$ e $\frac{4\pi}{3}$. Assim a expressão correta para a abcissa dos pontos comuns entre as três funções será $x = \frac{2k\pi}{3}$ com $k \in \mathbb{Z}$. De qualquer forma é interessante como os gráficos das funções possibilitaram ao grupo visualizar esta semelhança que acreditamos ser difícil conseguir na sala de aula sem ajuda do software.

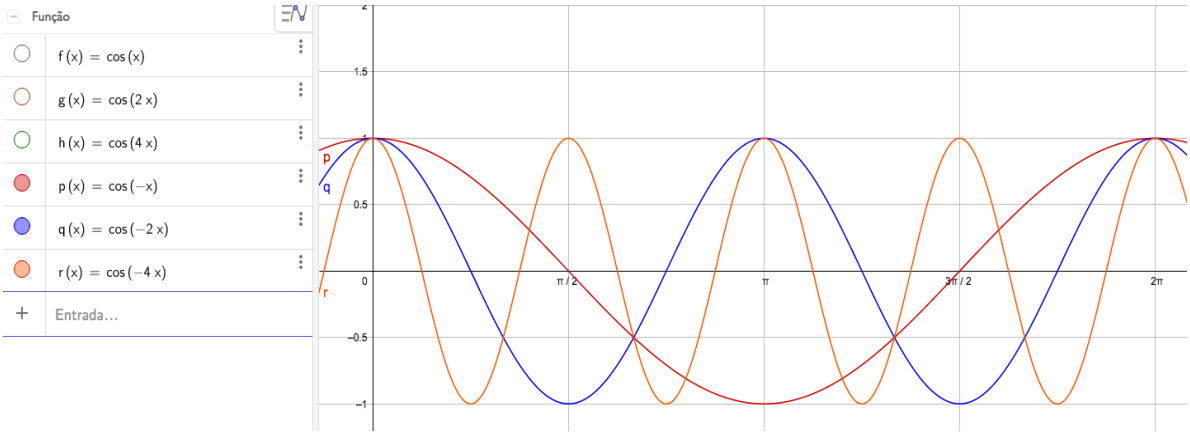
Figura 143: Resposta do grupo 1 para diferenças e semelhanças entre as funções $f(x) = \cos 2x$ e $f(x) = \cos 4x$



Fonte: Acervo do autor.

Para comparar as funções $f(x) = \cos(-x)$, $f(x) = \cos(-2x)$ e $f(x) = \cos(-4x)$ o grupo criou corretamente os gráficos no GeoGebra mostrado na figura 144. A princípio houve um espanto no grupo, pois não havia diferenças nos gráficos das funções $f(x) = \cos(x)$ e $f(x) = \cos(-x)$. Esperavam uma inversão como ocorreu com a função seno, mas após pensarem no círculo trigonométrico entenderam. Não pensaram em função par e ímpar para explicar esta semelhança.

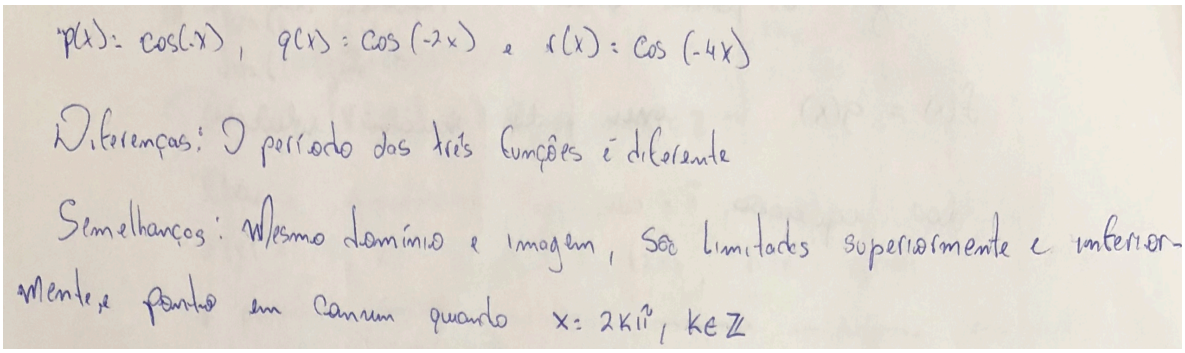
Figura 144: Gráficos das funções cosseno geradas no GeoGebra



Fonte: Acervo do autor.

Novamente anotaram o ponto comum entre as funções de maneira equivocada e não perceberam o erro que já haviam cometido na comparação anterior (figura 145). Como não houve mudanças nos gráficos não anotaram os períodos citando apenas que os períodos são diferentes.

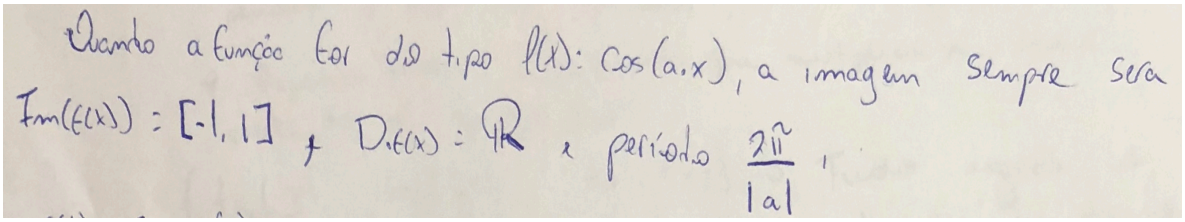
Figura 145: Resposta do grupo 1 para diferenças e semelhanças entre as funções $f(x) = \cos(-x), f(x) = \cos(-2x)$ e $f(x) = \cos(-4x)$



Fonte: Acervo do autor.

Para a função $f(x) = \cos(a.x)$, com *a* real, entenderam e anotaram corretamente como observamos na figura 146. Não demonstraram dificuldade em analisar as funções e suas características (domínio, imagem e período) e não criaram uma função utilizando o seletor.

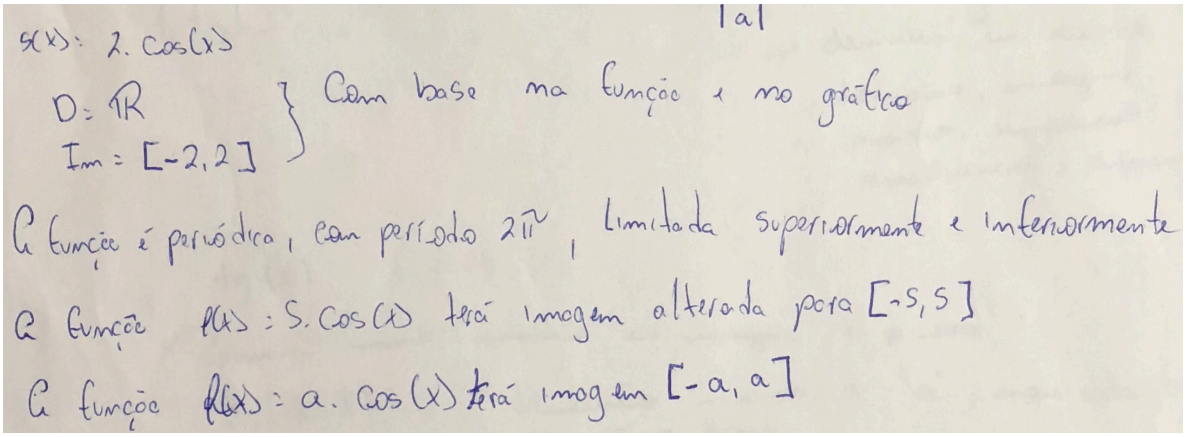
Figura 146: Resposta do grupo 1 para a função $f(x) = \cos(a.x)$



Fonte: Acervo do autor.

Na análise das funções do tipo $f(x) = a.\cos(x)$, com *a* real, também não apresentaram dificuldade e diferentemente da função seno anotaram a imagem da forma que esperávamos e que não haviam feito anteriormente, mostrando que entenderam e conseguem generalizar corretamente. A resposta para estas análises é apresentada na figura 147.

Figura 147: Resposta do grupo 1 para a função $f(x) = \mathrm{a}.\cos(x)$



Fonte: Acervo do autor.

O grupo 2 anotou o domínio, imagem e período para a função $f(x) = \cos x$ e concluem que as alterações são análogas às mudanças ocorridas na função seno realizada anteriormente como mostra a figura 148. Ao assistir o vídeo gravado notamos que o grupo realizou todas as etapas, mas não anotou na folha de respostas restringindo-se apenas a dizer que as mudanças são análogas.

Em determinado momento dizem que a função cosseno é a função inversa da função seno. O diálogo é:

Aluno 1: *Cosseno ele é a função inversa né...de seno.*

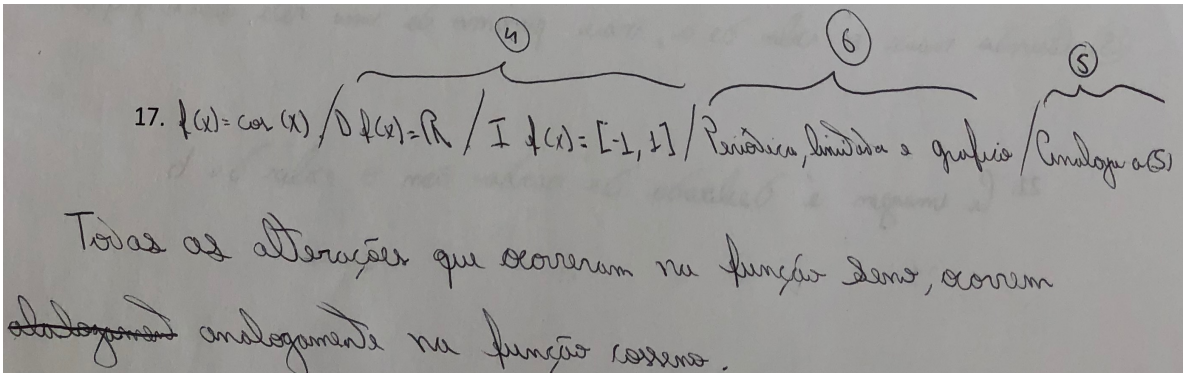
Aluno 2: *É...acho que é.*

Aluno 3: *Não...a inversa é menos seno.*

Resolvem colocar as funções juntas e percebem que estão enganados, pois não há simetria em relação à reta bissetriz dos quadrantes ímpares, mas não sabem qual seria a função inversa das funções trigonométricas.

Escreveram pouco e não anotam nada na folha a respeito da paridade das funções. Esta seria uma diferença bastante interessante entre a função seno e cosseno que poderiam ter analisado e anotado com base nos gráficos das funções.

Figura 148: Resposta do grupo 2 para a função cosseno



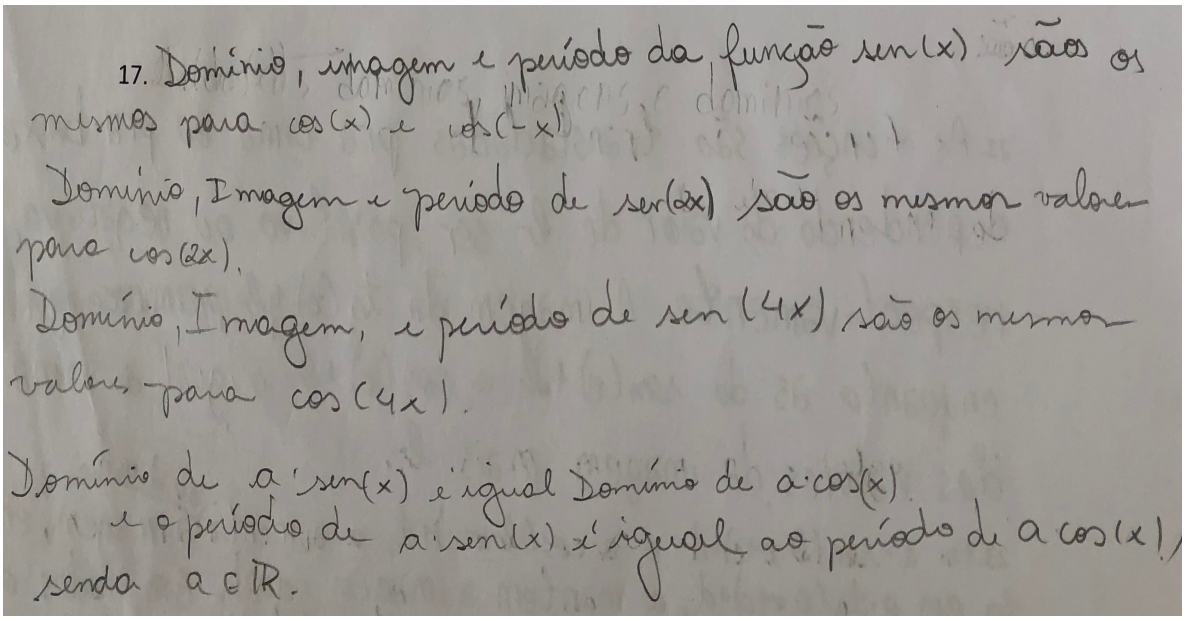
Fonte: Acervo do autor.

O grupo 3 entendeu o domínio, imagem e período das funções cosseno e anotaram no caderno comparando sempre com a função seno como mostrado na figura 149. Este grupo interagiu muito pouco durante o vídeo gravado e deixaram de destacar algumas diferenças e semelhanças. Não notaram que os gráficos de $f(x) = \cos x$ e $f(x) = \cos(-x)$ ficaram sobrepostos e por isso nem tentaram explicar tal fato. Analisando o vídeo percebemos que estavam com muitos gráficos traçados ficando difícil perceber esta semelhança citada.

Assim como o GeoGebra ajuda a traçar os gráficos e facilita a exploração das propriedades da função e visualização de domínio, imagem e

período, por exemplo, deve-se tomar cuidado para não sobrecarregar a janela com muitos gráficos. Uma opção seria " esconder" alguns gráficos plotados, mas o grupo não realizou esta ação.

Figura 149: Resposta do grupo 3 para a função cosseno



Fonte: Acervo do autor.

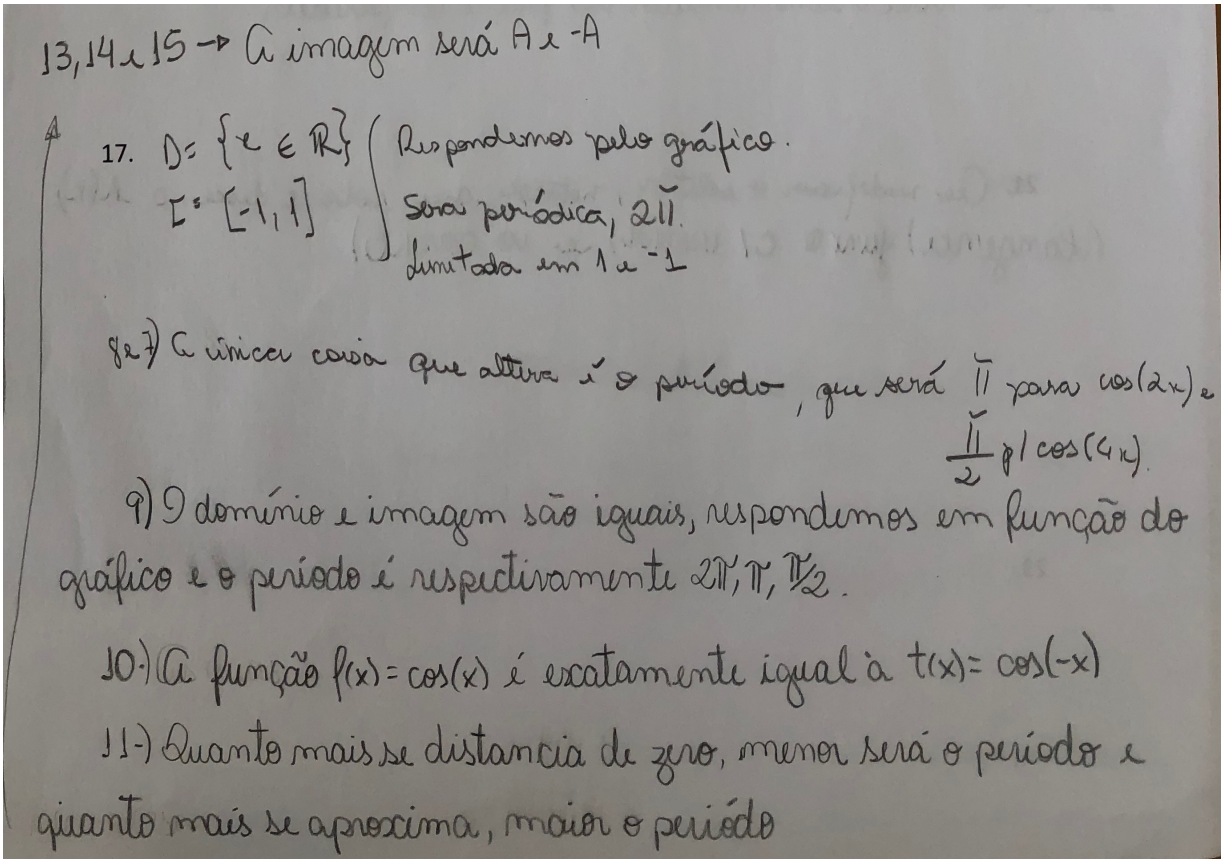
O grupo 4 responde corretamente domínio, imagem e período da função $f(x) = \cos x$. Anotam a diferença entre os períodos das funções $f(x) = \cos 2x$ e $f(x) = \cos 4x$ corretamente destacando não haver mudança no domínio e imagem destas funções mostrado na figura 150. Percebem que as funções $f(x) = \cos x$ e $f(x) = \cos -x$ possuem o mesmo gráfico quando afirmam "*A função* $f(x) = \cos x$ *é exatamente igual à* $f(x) = \cos(-x)$", mas não tentam justificar e nem demonstram entender o porque no vídeo. Falam, apenas, que para a função seno os gráficos ficaram invertidos e para a função cosseno não, mas não tentam entender o porque e nem discutem nada.

Quando pedimos as diferenças e semelhanças entre as funções $f(x) = \operatorname{sen} x$, $f(x) = \operatorname{sen}(-x)$, $f(x) = \cos x$ e $f(x) = \cos(-x)$ pensamos em função par e ímpar, mas percebemos que a maioria dos alunos não teve esta percepção e

mesmo os grupos que tiveram, não anotaram na folha de respostas levando-nos a refletir que talvez numa atividade futura pudéssemos explorar mais as funções em relação a paridade e seus respectivos gráficos.

Na análise da função $f(x) = a.\cos x$ cometem o mesmo erro que cometeram na análise da função $f(x) = a.\operatorname{sen} x$ escrevendo "*A imagem será A e –A*" como podemos ver na figura 150 o que nos indica que não houve apropriação do conceito. Ao realizar as atividades para a função cosseno poderiam ter repensado esta resposta e corrigido como aconteceu em itens anteriores por outros grupos e até por eles, mas não percebem e não corrigem.

Figura 150: Resposta do grupo 4 para a função cosseno

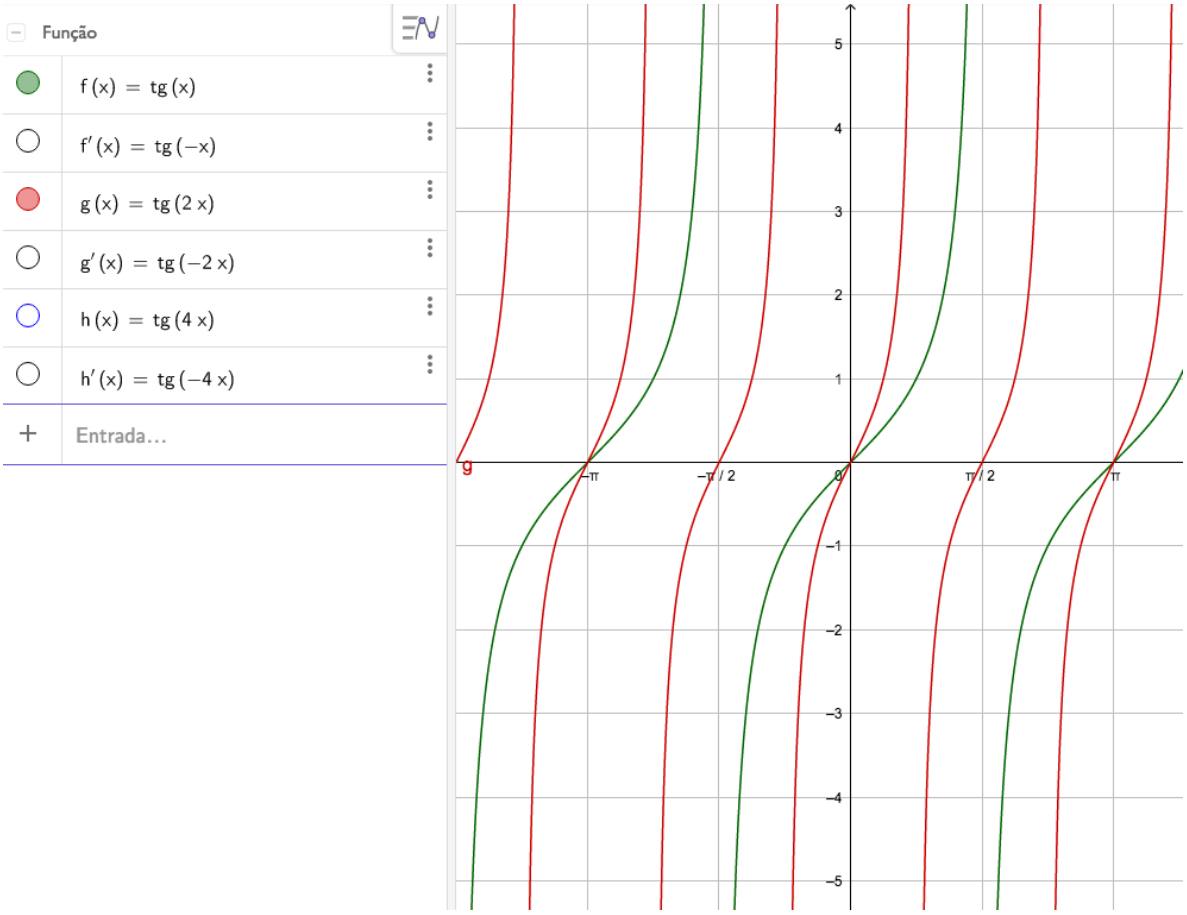


Fonte: Acervo do autor.

Para finalizar o trabalho com as funções trigonométricas, pedimos que os grupos repetissem os passos realizados, com as funções seno e cosseno, para

a função tangente. Na figura 151 podemos observar os gráficos de $f(x) = \operatorname{tg} x$ e $g(x) = \operatorname{tg} 2x$ gerados no GeoGebra pelo grupo 1.

Figura 151: Gráficos das funções $f(x) = \operatorname{tg} x$ e $g(x) = \operatorname{tg} 2x$ geradas no GeoGebra pelo grupo 1



Fonte: Acervo do autor.

O grupo 1 iniciou a análise plotando os gráficos no software e em seguida observando o domínio e imagem. Escreveram corretamente a imagem, mas ficaram com dúvida sobre o intervalo da mesma ser aberto ou fechado. Como se tratava de um intervalo com valores infinitos, concluíram ser um intervalo aberto, mas é possível ver que rasuraram a resposta na folha mostrado na figura 153. Escrevem que realizaram as observações com base na função e no gráfico, mas o

que percebemos ao assistir o vídeo gravado é que realizam as observações somente pelo gráfico. Entendem o período e anotam corretamente. (figura 153)

O domínio da função tangente foi entendido pelo grupo, mas não conseguiram expressar o mesmo corretamente na folha de respostas. Anotam que o domínio da função $f(x) = \text{tg}\, x$ é o conjunto $\left\{x \in \mathbb{R} \backslash x \neq k.\frac{\pi}{2}\right\}$ com $k \in \mathbb{Z}$. Falam corretamente no vídeo e quando escrevem estão pensando em todos valores da forma $\pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \pm\frac{5\pi}{2}, \ldots$, ou seja, k ímpar e não inteiro, pois estão olhando para o gráfico apresentado na figura 152.

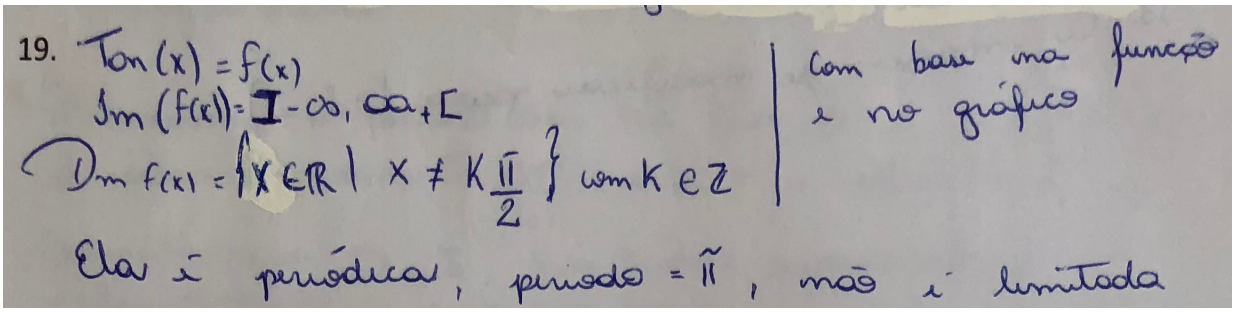
Figura 152: Gráficos da função $f(x) = \text{tg}\, x$



Fonte: Acervo do autor.

Não analisaram, por exemplo, a expressão com $k = 2$ que resultaria em $x \neq \pi$. Um pouco de atenção na expressão que deram como resposta, provavelmente, faria que percebessem o erro.

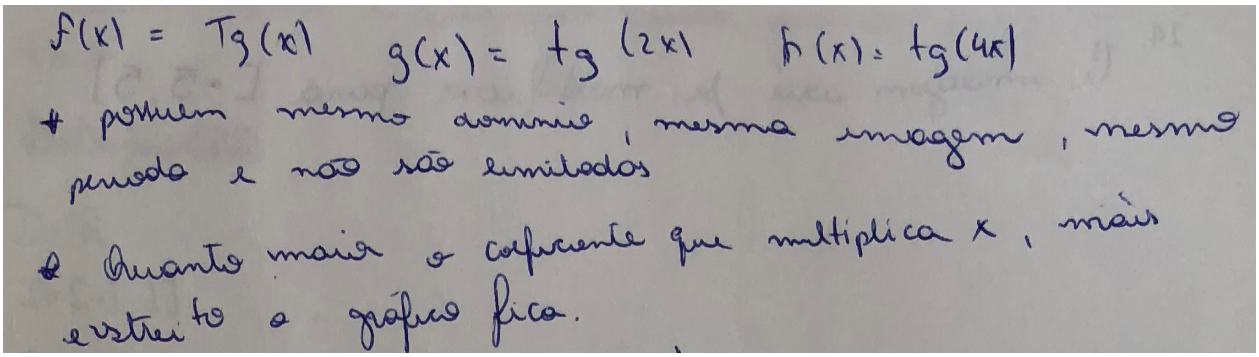
Figura 153: Resposta do grupo 1 para a função tangente



Fonte: Acervo do autor.

Para analisar as funções $f(x) = \text{tg}\,2x$, $f(x) = \text{tg}\,4x$ observam os gráficos da figura 151 e anotam que possuem o mesmo domínio, imagem e período da função $f(x) = \text{tg}\,x$. O que percebemos no vídeo é que o grupo analisou os itens de forma automática sem tomar cuidado com possíveis alterações, entrando em contradição nas respostas que deram sem perceber. Escrevem na folha de respostas que " *Quanto maior o coeficiente que multiplica x, mais estreito o gráfico fica*" como mostrado na figura 154. Não pensaram que se há alteração na curva, há alteração no domínio e no período.

Figura 154: Resposta do grupo 1 para a função tangente

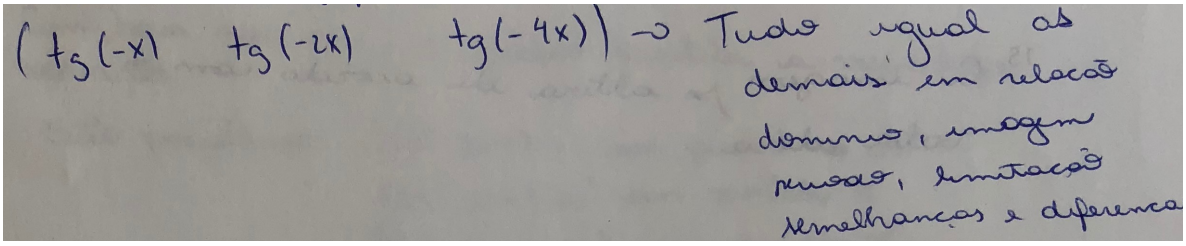


Fonte: Acervo do autor.

Observando a resposta, mostrada na figura 155, para a comparação das funções $f(x) = \text{tg}(-x)$, $f(x) = \text{tg}(-2x)$ e $f(x) = \text{tg}(-4x)$ notamos que escrevem não haver alterações, mas poderiam ter citado a simetria existente entre

as funções $f(x) = \text{tg}(x)$ e $f(x) = \text{tg}(-x)$ justificando a paridade das mesmas. Nota-se ainda que a resposta deixa dúvidas em relação a quem estão comparando quando escrevem "*Tudo igual as demais em relação domínio, imagem, período, limitação, semelhanças e diferenças*" mostrado na figura 155.

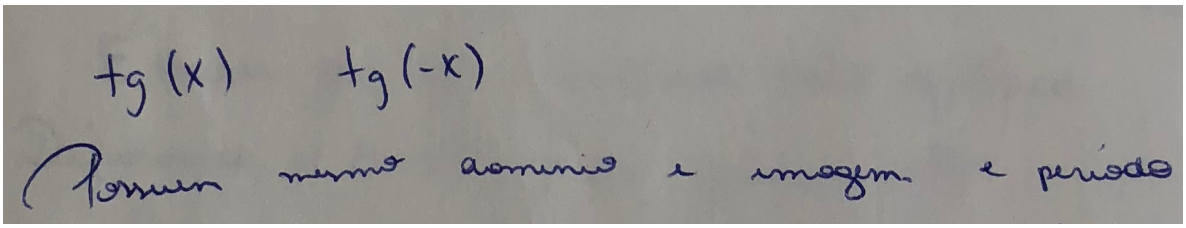
Figura 155: Resposta do grupo 1 para a função tangente



Fonte: Acervo do autor.

Para as funções $f(x) = \text{tg}(x)$ e $f(x) = \text{tg}(-x)$ concluem ter o mesmo domínio, imagem e período, mas não citam nada a respeito da forma das curvas (figura 156). Simetrias e diferenças são ignoradas pelo grupo. Podemos notar no vídeo que estavam resolvendo de maneira automática sem prestar atenção aos detalhes e por isso não percebendo erros que estavam cometendo deixando de perceber diferenças entre as funções. Em determinado momento reclamam de cansaço do final de semestre e isso pode ser uma das causas da falta de atenção.

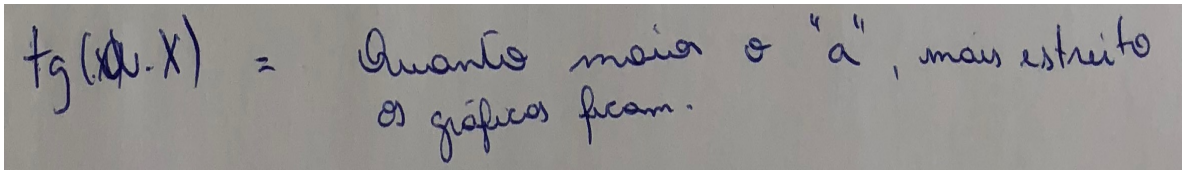
Figura 156: Resposta do grupo 1 para comparação das funções $f(x) = \text{tg}(x)$ e $f(x) = \text{tg}(-x)$



Fonte: Acervo do autor.

Em relação à generalização da função $f(x) = \text{tg}(a.x)$ anotam simplesmente que os gráficos se estreitam como mostrado na figura 157 não anotando nada sobre o domínio e período.

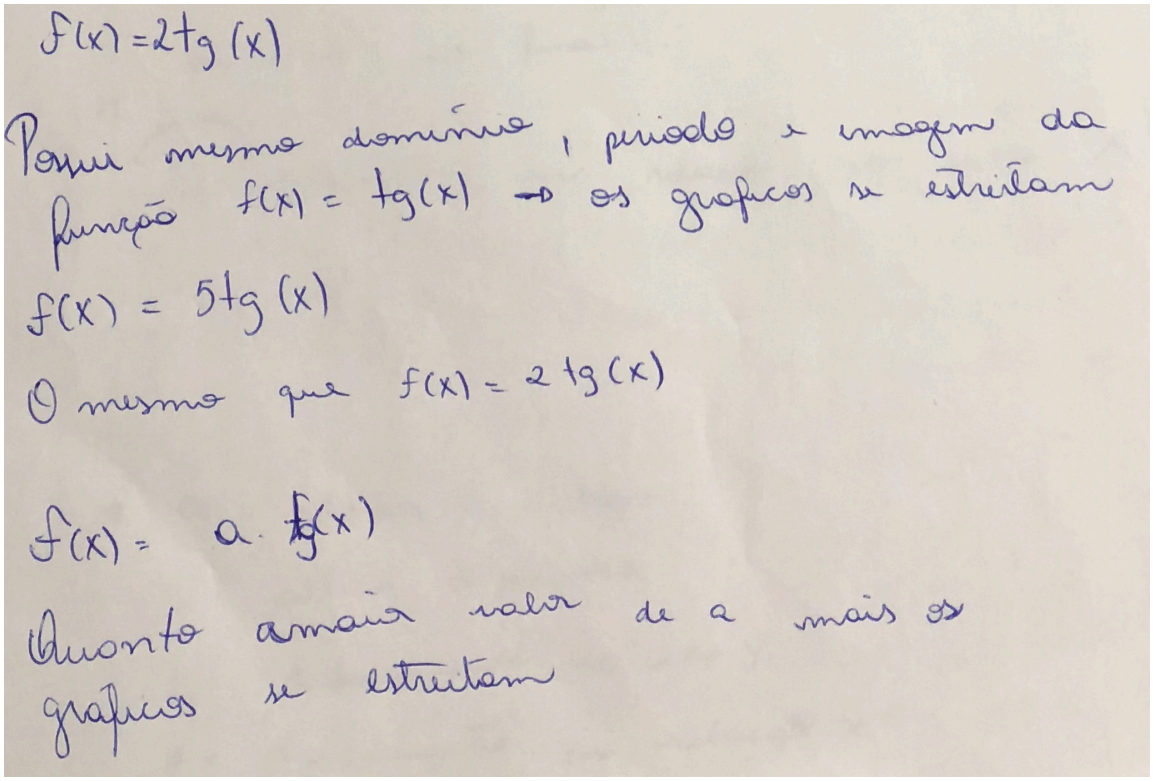
Figura 157: Resposta do grupo 1 para a função $f(x) = \mathrm{tg}(a.x)$



Fonte: Acervo do autor.

Finalizam a atividade de tangentes analisando as funções do tipo $f(x) = a.\mathrm{tg}(x)$ concluindo que os "*gráficos se estreitam*" e possuem o mesmo domínio, período e imagem da função $f(x) = \mathrm{tg}(x)$. Um cuidado que tiveram em itens anteriores e não demonstraram neste momento foi com o parâmetro *a*, pois se o mesmo for negativo teremos uma mudança na curva da função tangente. Assim poderiam ter respondido que as curvas se estreitam quanto maior for o módulo de *a*. A resposta do grupo é mostrada na figura 158.

Figura 158: Resposta do grupo 1 para a função $f(x) = \mathrm{a}.\mathrm{tg}(x)$

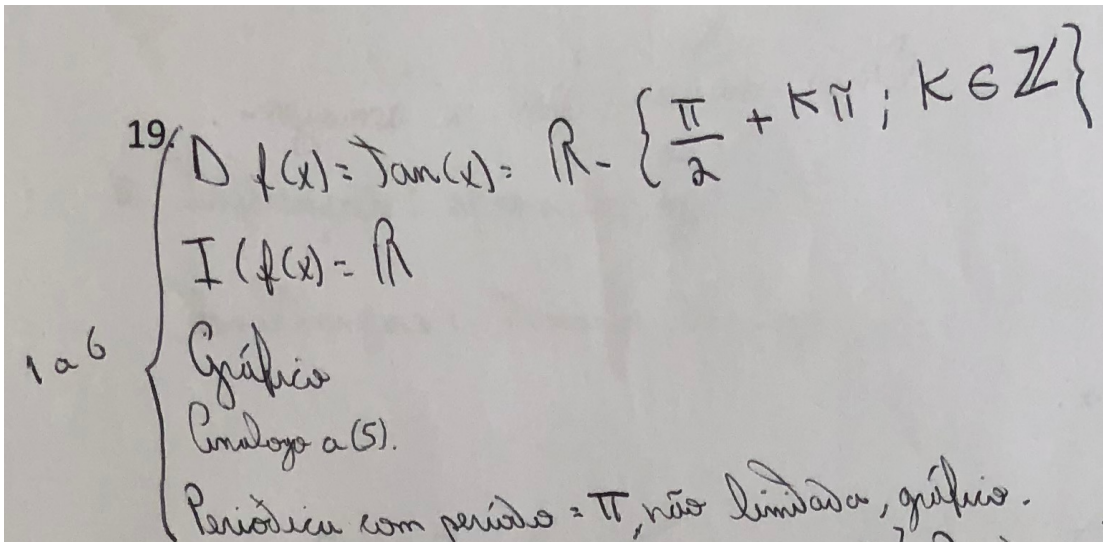


Fonte: Acervo do autor.

O grupo 2 iniciou a análise plotando o gráfico no software e entendendo o conjunto imagem através do gráfico.

Mesmo com o recurso do GeoGebra não conseguiram escrever o domínio da função e para isso procuraram no caderno, que utilizam na disciplina, a forma de escrever o domínio da função. Com o caderno de sala de aula e o gráfico plotado demonstram entender anotando corretamente o domínio, imagem e período da função além de afirmarem que a função não é limitada como vemos na figura 159.

Figura 159: Resposta do grupo 2 para a função tangente

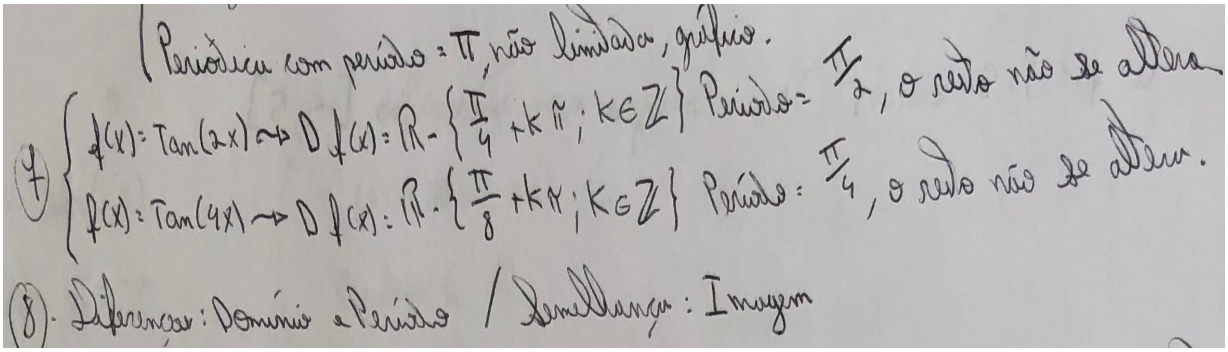


Fonte: Acervo do autor.

Para a função $f(x) = \operatorname{tg} 2x$ e $f(x) = \operatorname{tg} 4x$ analisaram o gráfico e utilizaram o recurso do "zoom" do software para observar onde as funções não estavam definidas. Embora tenham visualizado e entendido onde a função não estava definida, ou seja, quais eram as restrições para o domínio das funções, não conseguem expressar corretamente o domínio destas funções. Na verdade, falam corretamente onde as funções não estão definidas, mas acreditam que é sempre somando-se $k.\pi$ e não testam a expressão para diferentes valores de k.

Anotam corretamente os períodos das funções e cometem um erro na notação dos domínios como podemos ver na figura 160.

Figura 160: Resposta do grupo 2 para as funções $f(x) = \text{tg}\, 2x$ e $f(x) = \text{tg}\, 4x$

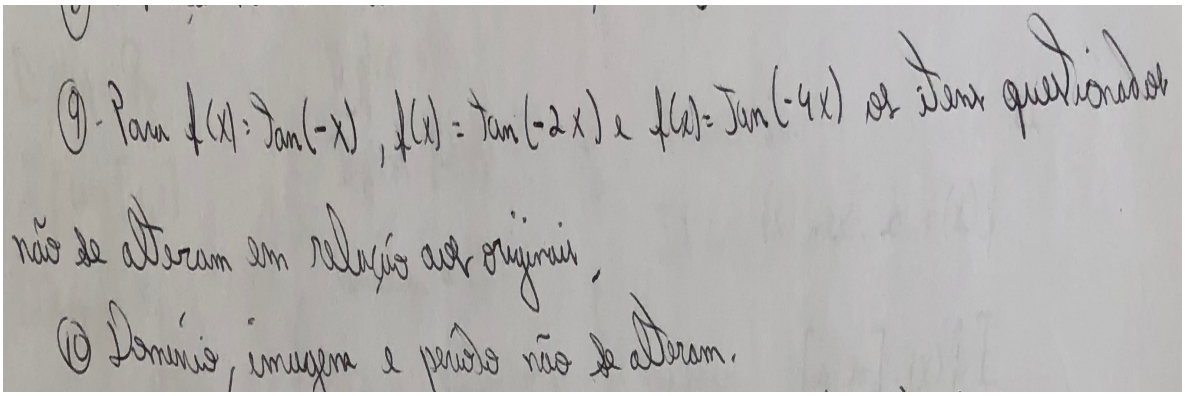


Fonte: Acervo do autor.

Para a função $f(x) = \text{tg}\, 2x$ temos como domínio o conjunto $\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}\right\}$ onde nota-se uma pequena diferença para a resposta do grupo. Da mesma forma para a função $\text{f}(x) = \text{tg}\, 4x$ o conjunto domínio será $\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{4}; k \in \mathbb{Z}\right\}$. O que podemos perceber, no vídeo gravado, é que o grupo consegue visualizar onde as funções não estão definidas, mas não conseguem escrever isso através de uma expressão. Não tentam utilizar a expressão com diferentes valores de k para comprovar os valores onde a função não está definida.

Com as funções $f(x) = tg(-x)$, $f(x) = \text{tg}(-2x)$ e $f(x) = \text{tg}(-4x)$ escrevem que não houve mudanças no domínio, imagem e período em relação às funções $f(x) = tg(x)$, $f(x) = \text{tg}(2x)$ e $f(x) = \text{tg}(4x)$ como podemos ver na figura 161. Utilizam bastante o software para entenderem e visualizarem as propriedades e mudanças nas funções. Comparam duas a duas para facilitar a visualização.

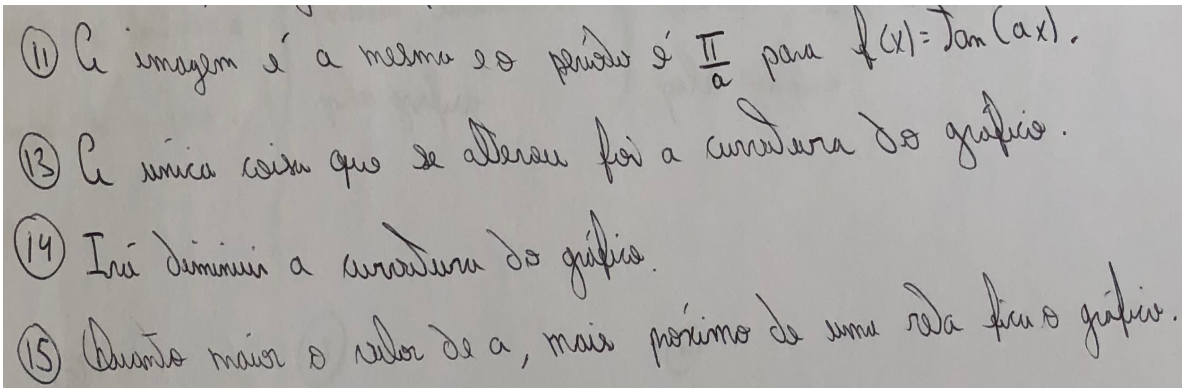
Figura 161: Resposta do grupo 2 para as funções $f(x) = tg(-x)$, $f(x) = \text{tg}(-2x)$ e $f(x) = \text{tg}(-4x)$



Fonte: Acervo do autor.

Na generalização da função $f(x) = tg(a.x)$, com *a* real anotam que o período da função será $\frac{\pi}{a}$, enquanto o correto seria $\frac{\pi}{|a|}$ mostrado na figura 158. Podemos notar que, para o grupo, quando escrevem esta expressão obtemos sempre valores positivos para *a* e por isso não se preocupam em colocar módulo. Cometeram o mesmo erro com o período da função $f(x) = sen(a.x)$. Este é um erro que percebo, em minha experiência como docente, com os alunos quando trabalhamos com constantes e generalizações, sendo importante destacar com os mesmos estas falhas. Não destacaram e não comentaram nada sobre paridade das funções devido a simetria existente.

Figura 162: Resposta do grupo 2 para a função $f(x) = a.\text{tg}(x)$



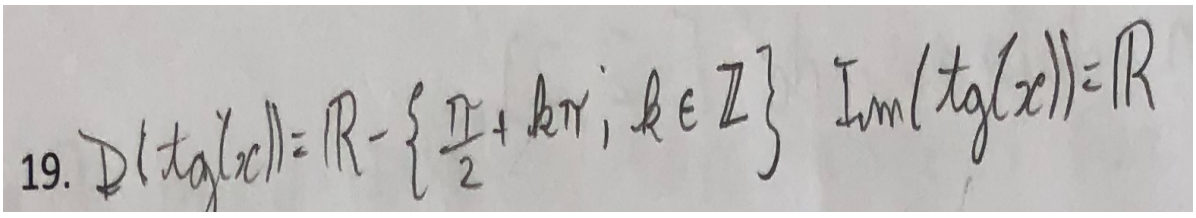
Fonte: Acervo do autor.

Nos itens 13, 14 e 15 da figura 162 temos a resposta do grupo 2 para as alterações nas funções $f(x) = 2.tg(x)$, $f(x) = 5.\mathrm{tg}(x)$ e $f(x) = \mathrm{a}.\mathrm{tg}(x)$ respectivamente. Anotam que a curvatura se altera ficando próxima de uma reta à medida que aumenta-se os valores de *a*. Novamente analisaram somente para os valores positivos. Um dos alunos destaca "*sem olhar no GeoGebra eu não saberia falar isso*" mostrando que o recurso tem ajudado a entender e analisar melhor as funções estudadas. Não criaram um seletor *a* para a função $f(x) = \mathrm{a}.\mathrm{tg}(x)$ e assim pensaram somente para valores positivos do parâmetro.

O grupo 3 inicia a atividade plotando o gráfico de $f(x) = \mathrm{tg}(x)$ e comentando que a função tangente é mais complicada que as funções estudadas anteriormente. Um recurso interessante utilizado pelo grupo, que não foi utilizado pelos grupos anteriores, foi a criação da assíntota da função através da entrada no GeoGebra. O problema é que o software retornou apenas uma assíntota e não todas como esperavam. Para descrever o domínio da função analisam o gráfico e testam algebricamente também a expressão que anotam como resposta, mas ficam com dúvida se o valor de *k* que apresentam na resposta ao domínio é real ou inteiro. Testam e chegam a conclusão que *k* deve ser inteiro como mostra a figura 163.

Anotam a imagem da função corretamente e comentam no vídeo sobre o período, mas acabam esquecendo de anotar na folha de respostas, pois enquanto um membro do grupo estava escrevendo, o outro começou a analisar as funções $f(x) = \mathrm{tg}\,2x$ e $f(x) = \mathrm{tg}\,4x$. A ideia do trabalho em grupo é a troca de ideias, discussão e o auxílio gerado pelos diferentes níveis de conhecimento entre os membros do grupo, mas é preciso tomar cuidado para que haja colaboração entre os membros.

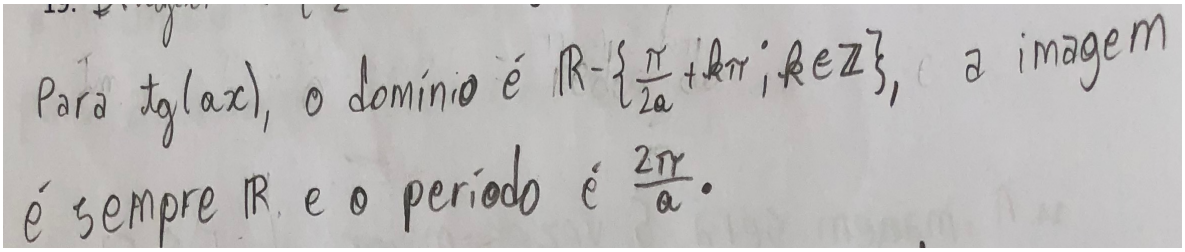
Figura 163: Resposta do grupo 3 para a função $f(x) = \mathrm{tg}(x)$



Fonte: Acervo do autor.

Para estudar as funções $f(x) = \text{tg}(2x)$ e $f(x) = \text{tg}(4x)$ afirmam, no vídeo, que terão que escrever muita coisa e resolver escrever somente a generalização para a função $f(x) = \text{tg}(a.x)$. Como resolvem generalizar, a partir do momento que veem os gráficos de $f(x) = \text{tg}(2x)$ e $f(x) = \text{tg}(4x)$, e para isso não criam um seletor *a* para $f(x) = \text{tg}(a.x)$, deixam de analisar esta função para valores negativos de *a*, ou seja, não percebem a paridade da função e há "inversão" das curvas da função tangente. A resposta do grupo é mostrada na figura 164.

Figura 164: Resposta do grupo 3 para a função $f(x) = tg(a.x)$



Fonte: Acervo do autor.

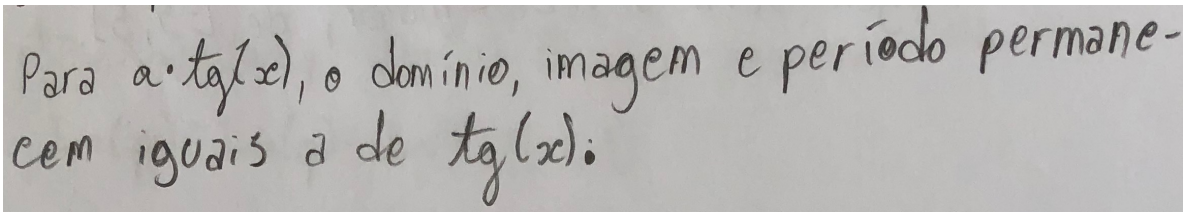
Notamos que cometem o mesmo erro que o grupo 2 levando-nos a acreditar que os alunos não entenderam muito bem a expressão que escreveram como resposta para o domínio. Na mesma figura nota-se o período incorreto para a função $f(x) = tg(a.x)$ onde anotam $\frac{2\pi}{a}$ quando o correto seria $\frac{\pi}{|a|}$. A ideia nesta generalização seria dividir o período da função tangente pelo módulo do parâmetro *a* e como percebemos erram tanto o módulo como o período ao escreverem 2π dividido por *a*.

Não escrevem e nem analisam as funções $f(x) = \text{tg}(-x)$, $f(x) = \text{tg}(-2x)$ e $f(x) = \text{tg}(-4x)$, pois acreditam terem feito isso na generalização.

Na sequência criam um seletor *a* para a função $f(x) = a.tg(x)$ e utilizam o comando assíntota para verificar se o domínio da função tangente era alterado. Anotam a resposta corretamente, figura 165, mas não comentam nada novamente sobre as curvas no caso de valores negativos do parâmetro *a*. No vídeo evitam alterar *a* para valores negativos e não comentam nada sobre a mudança na

forma da curva. O grupo passou pela função tangente de maneira muito superficial e rápida não atingindo nossos objetivos com a atividade e carregando muitas dúvidas e erros conceituais sobre a função tangente.

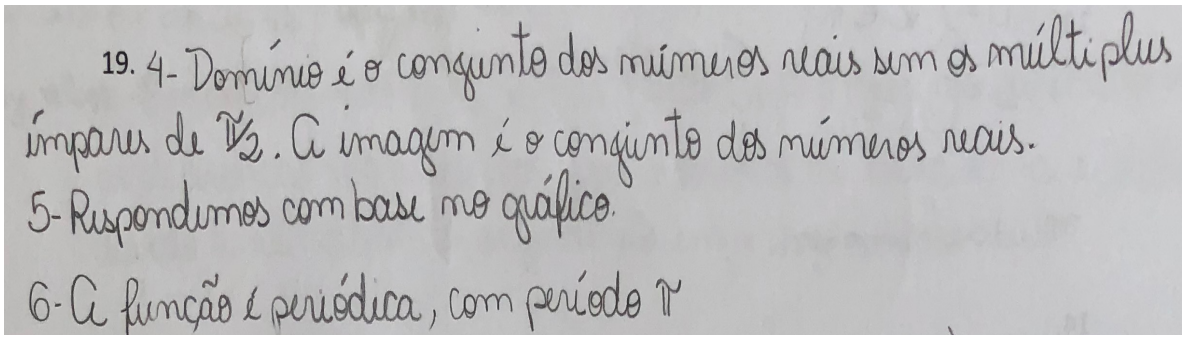
Figura 165: Resposta do grupo 3 para a função $f(x) = a.tg(x)$



Fonte: Acervo do autor.

O grupo 4 iniciou a atividade plotando o gráfico de $f(x) = tg(x)$ e observando onde a função não estava definida para escrever o domínio. Perceberam os valores de *x* onde a função não existe, mas buscam no caderno da disciplina que utilizam na sala de aula para descrever o domínio. Ficam muito tempo em silêncio procurando no caderno a forma de escrever ao invés de utilizar os recursos do software para tentar entender melhor este conjunto. Como não conseguem encontrar uma expressão, escrevem a reposta por extenso como mostrado na figura 166. Embora o gráfico tenha ajudado a visualizar, escrevem baseado no que têm no caderno e não no gráfico como afirmam no item 5, mostrado na mesma figura.

Figura 166: Resposta do grupo 4 para a função $f(x) = tg(x)$



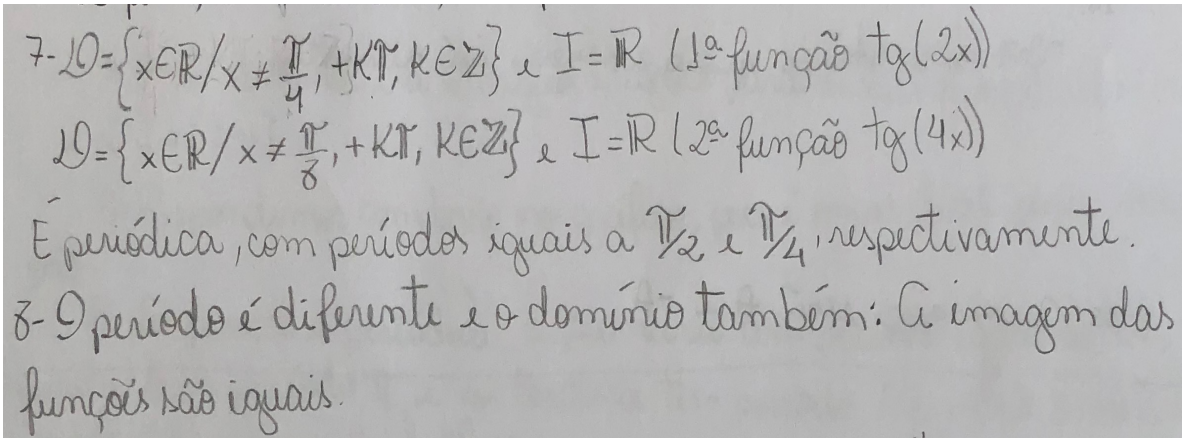
Fonte: Acervo do autor.

Para responder o período e a imagem utilizam o gráfico gerado pelo software. Uma observação sobre este grupo é a não participação nas discussões por um dos membros. Este é um problema que pode acontecer quando temos grupos maiores (neste caso o grupo possui 3 alunos).

Na sequência plotam os gráficos de $f(x) = \text{tg}(2x)$, $f(x) = \text{tg}(4x)$ e $f(x) = \text{tg}(a.x)$ onde *a* é um seletor criado no software. Alteram o valor máximo do seletor para verificar se os gráficos tornam-se retas à medida que aumentam os valores de *a*.

Passam aproximadamente 10 minutos analisando e tentando entender o domínio e não chegam a nenhuma conclusão, pois um dos alunos demonstra não estar entendendo nada a respeito do que estão tentando estudar e o outro não participa. Perguntam a outro grupo como escrever o domínio das funções $f(x) = \text{tg}(2x)$ e $f(x) = \text{tg}(4x)$ e mesmo com a ajuda não entendem e escrevem o que conseguem como mostrado na figura 167.

Figura 167: Resposta do grupo 4 para as funções $f(x) = \text{tg}(2x)$ e $f(x) = \text{tg}(4x)$



Fonte: Acervo do autor.

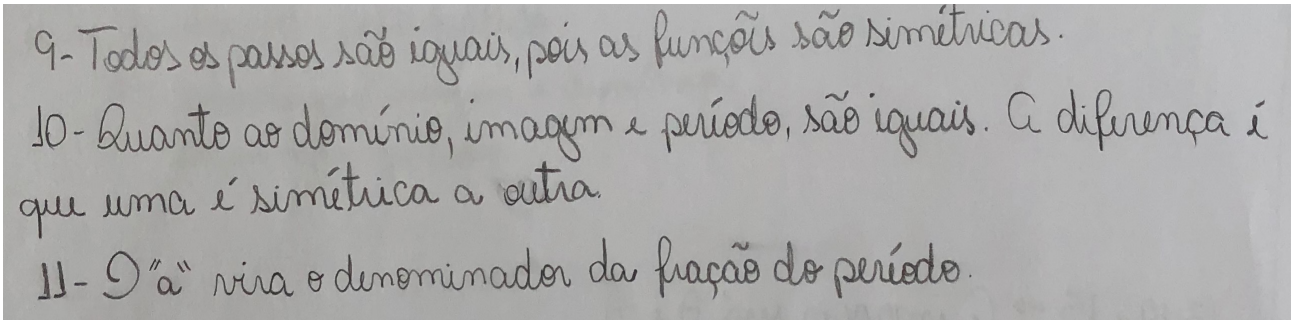
Podemos observar na figura 167 vários erros demonstrando que o grupo não entendeu o que estava escrevendo. Na descrição do domínio utilizam vírgulas antes do sinal de soma e como copiaram do caderno sem entender cometem o mesmo erro cometido pelos grupos anteriores quando escrevem

$\left\{x \in \mathbb{R}/x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}$ ao invés de $\left\{x \in \mathbb{R}/x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}\right\}$. Da mesma forma para a função $f(x) = \text{tg}\,4x$ escrevem $\left\{x \in \mathbb{R}/x \neq \frac{\pi}{8} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}$ ao invés de $\left\{x \in \mathbb{R}/x \neq \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{4}; k \in \mathbb{Z}\right\}$. Em relação ao conjunto imagem percebem não haver alterações e anotam os períodos das respectivas funções corretamente baseando-se nos gráficos das funções e na explicação que receberam do outro grupo.

Um fato interessante foi quando ao tentar explicar onde a função tangente não estava definida, o aluno (outro grupo) pediu que eles pensassem na tangente como sendo a razão entre o seno e o cosseno e assim bastava analisar onde a função cosseno possuía raízes, pois o mesmo deveria ser diferente de zero já que estava no denominador da razão, mas parece que a dúvida do grupo 4 ficou ainda maior.

Na figura 168 temos as respostas do grupo para a análise das funções $f(x) = \text{tg}(-x)$, $f(x) = \text{tg}(-2x)$ e $f(x) = \text{tg}(-4x)$.

Figura 168: Resposta do grupo 4 para as funções $f(x) = \text{tg}(-x)$, $f(x) = \text{tg}(-2x)$ e $f(x) = \text{tg}(-4x)$



Fonte: Acervo do autor.

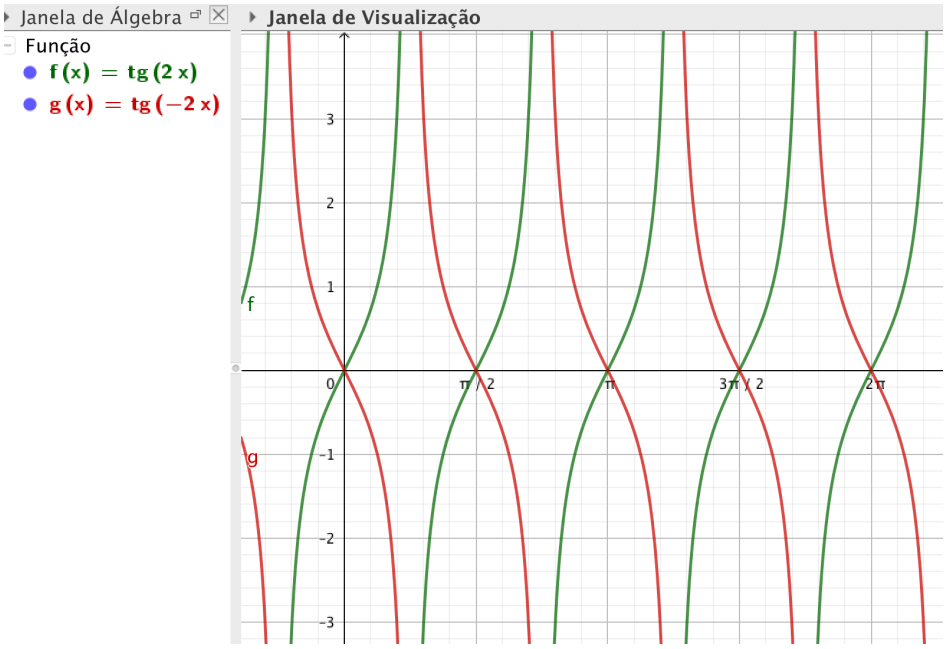
Nesta figura quando dizem que todos os passos são iguais referem-se ao domínio, imagem e período serem os mesmos das funções $f(x) = tg(x)$, $f(x) = \text{tg}(2x)$ e $f(x) = \text{tg}(4x)$ respectivamente. Escrevem que as funções são simétricas, mas no vídeo um dos alunos do próprio grupo diz "*simétrica em relação a o que?*". Esta é exatamente a pergunta que deveria ser respondida pelo grupo,

mas como não conseguem responder, deixam escrito somente que as funções são simétricas.

Na verdade o que temos com o par de funções $f(x) = tg(x)$ e $f(x) = \text{tg}(-x)$ são curvas simétricas em relação à retas verticais de equação $x = k.\pi$ com $k \in \mathbb{Z}$. Da mesma forma as funções $f(x) = \text{tg}(2x)$ e $f(x) = \text{tg}(-2x)$ serão simétricas em relação às retas de equação $x = k.\frac{\pi}{2}$ com $k \in \mathbb{Z}$ como podemos ver na figura 169.

Outro erro cometido pelo grupo está no item 11 da figura 168 quando afirmam que "*o "a" vira denominador da fração do período*". Na verdade as funções da forma $f(x) = \text{tg}(a.x)$ com *a* real tem como período a expressão $\frac{\pi}{|a|}$ já que o parâmetro *a* pode assumir valores negativos por ser real. Assim seria interessante que o grupo tivesse realizado a análise detalhada para as funções com *a* negativo, para perceber as simetrias das curvas, "inversão" nas curvas e concluir sobre o período com o módulo. A atividade foi pensada para que chegassem a estas conclusões, mas não conseguimos atingir este objetivo com o grupo.

Figura 169: Gráficos das funções $f(x) = \text{tg}(2x)$ e $f(x) = \text{tg}(-2x)$ no GeoGebra

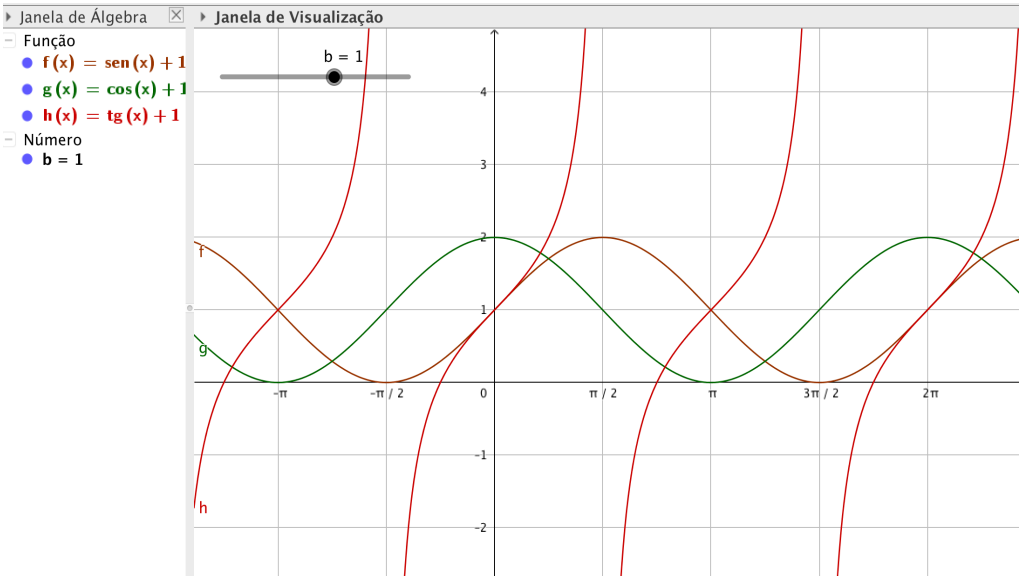


Fonte: Acervo do autor.

Para analisar as funções $f(x) = 2.tg(x)$ e $f(x) = 5.tg(x)$ plotam no GeoGebra os gráficos e não conseguem dizer as semelhanças e diferenças. Não criam a função $f(x) = a.tg(x)$ com *a* real utilizando a opção do seletor. Ficam olhando os gráficos e não concluem nada. Resolvem "pular" os itens desta análise. Percebemos no vídeo pouco envolvimento do grupo em estar pensando a respeito das questões colocadas. Não discutem muito as questões e apesar de possuírem muitas dúvidas não tentam se aprofundar e explorar os recursos para tentarem entender e aprender com o recurso disponível. Se tivessem criado um seletor *a* para a função $f(x) = a.tg(x)$ poderiam ter comparado a função $f(x) = tg(-x)$ com a função $f(x) = -1.tg(x)$, perceber que são as mesmas e a partir daí tentar responder porque isto acontece, por exemplo.

Após termos estudado as funções seno, cosseno e tangente, solicitamos que os alunos criassem um seletor real *b* no GeoGebra, criassem as funções $f(x) = sen(x) + b$, $f(x) = cos(x) + b$ e $f(x) = tg(x) + b$ e analisassem as mudanças nas funções de acordo com as mudanças no seletor. Os gráficos produzidos pelo grupo 1 para *b = 1* são mostrados na figura 170.

Figura 170: Gráficos das funções $f(x) = sen(x) + b$, $f(x) = cos(x) + b$ e $f(x) = tg(x) + b$ produzidos no GeoGebra

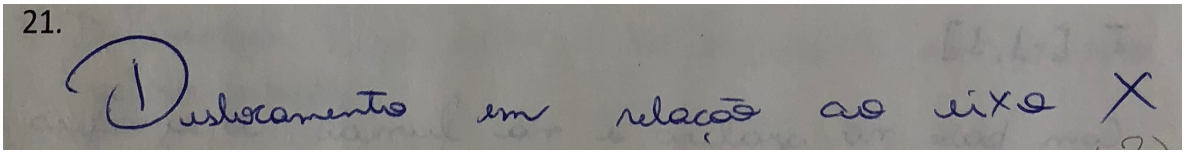


Fonte: Acervo do autor.

Nossa ideia com esta atividade era que os alunos percebessem o deslocamento vertical sofrido pelos gráficos com a adição de uma constante à função trigonométrica.

O grupo 1 percebeu esta variação ao dizerem "*os gráficos sobem e descem*" no vídeo, mas na folha de respostas escreveram que os gráficos sofrem um deslocamento em relação ao eixo x como mostrado na figura 171. Não foi possível entender o que querem dizer, pois não comentam mais nada. Visualizaram todos os gráficos de uma única vez e de maneira muito rápida. Poderiam ter analisado uma função de cada vez para facilitar a conclusão. O que se percebe é que estavam bastante confiantes no que responderam e por isso nem tiveram dúvidas ao escrever.

Figura 171: Resposta do grupo 1 para análise das funções $f(x) = sen(x) + b$, $f(x) = cos(x) + b$ e $f(x) = tg(x) + b$



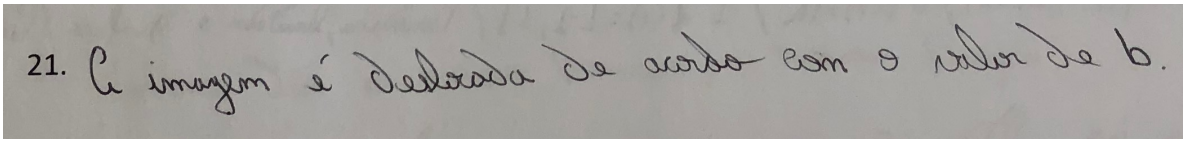
Fonte: Acervo do autor.

O grupo 2 fez uma ótima análise como observado no vídeo, explorando as alterações em uma função de cada vez. Ao analisar as funções seno e cosseno um aluno conclui "*...desloca o gráfico e altera a imagem...*" que é exatamente o que estava ocorrendo. Quando analisam a função tangente acabam se confundindo, pois a imagem da função não se alterava. Dois alunos do grupo acabam convencendo o outro que a imagem é deslocada nas três funções e assim respondem a questão como mostra a figura 172. O que anotam como resposta fica um pouco vago, pois não escrevem se o deslocamento é vertical ou horizontal além de não ser verdade para a função tangente.

Uma observação é que para a função tangente estavam analisando corretamente e observando a mudança nas raízes da função de acordo com as

mudanças no parâmetro *b*, mas acabam se convencendo apenas do "*deslocamento da imagem*".

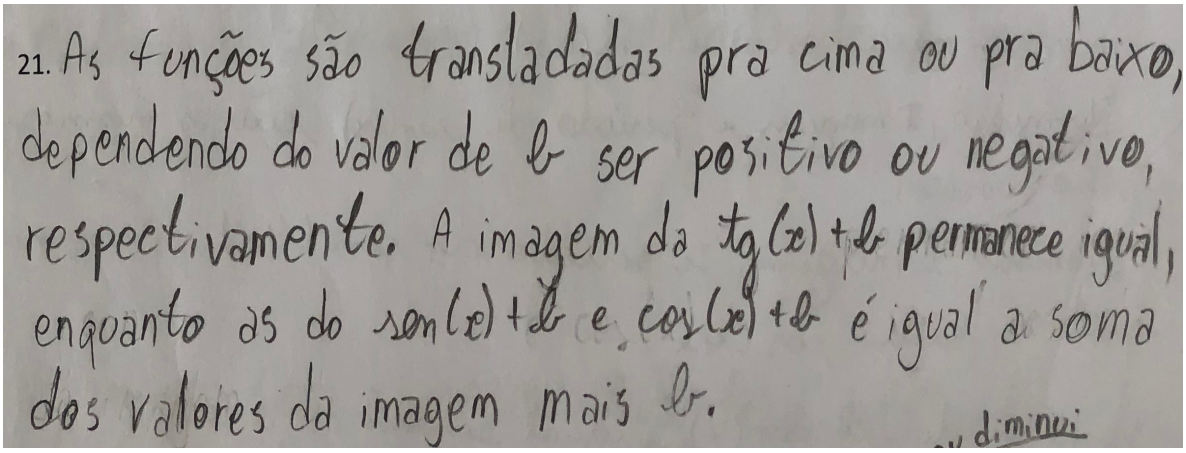
Figura 172: Resposta do grupo 2 para análise das funções $f(x) = sen(x) + b$, $f(x) = cos(x) + b$ e $f(x) = tg(x) + b$



Fonte: Acervo do autor.

O grupo 3 foi o grupo que analisou a questão com mais cuidado e por isso teve a resposta mais completa dos grupos. Trabalharam cada gráfico individualmente analisando o deslocamento e sendo cuidadosos na redação da resposta apresentada na folha como mostrado na figura 173. Descrevem a translação vertical e a mudança na imagem somente nas funções seno e cosseno.

Figura 173: Resposta do grupo 3 para análise das funções $f(x) = sen(x) + b$, $f(x) = cos(x) + b$ e $f(x) = tg(x) + b$



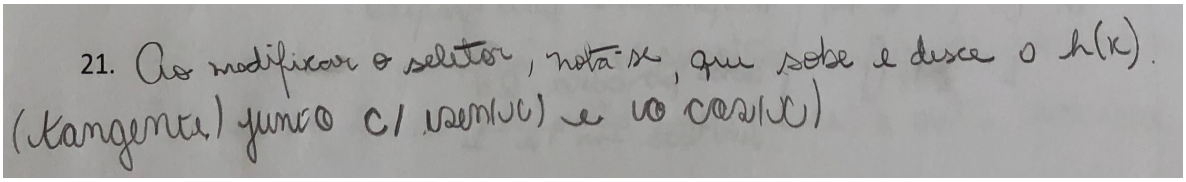
Fonte: Acervo do autor.

O grupo 4 inicia esta questão perguntando novamente ao grupo do lado como criar um seletor. O aluno que pergunta é justamente o que praticamente não participa das discussões e o interessante é que eles já haviam feito neste dia

questões em que criaram o controle deslizante. Isto mostra a falta de atenção e envolvimento de alguns alunos na atividade deste dia.

Conseguem perceber o deslocamento vertical dos gráficos das funções e anotam sem muito cuidado nas notações como podemos ver na figura 174. Não detalham quando o deslocamento é para cima (valores de *b*) e quando o deslocamento é para baixo. Além disso não alteraram o eixo *x* para valores em radianos que ajudaria a perceber os valores para os quais a função tangente se anula. Foi o único grupo que não alterou os valores do eixo *x* para valores em radianos.

Figura 174: Resposta do grupo 4 para análise das funções $f(x) = sen(x) + b$, $f(x) = cos(x) + b$ e $f(x) = tg(x) + b$

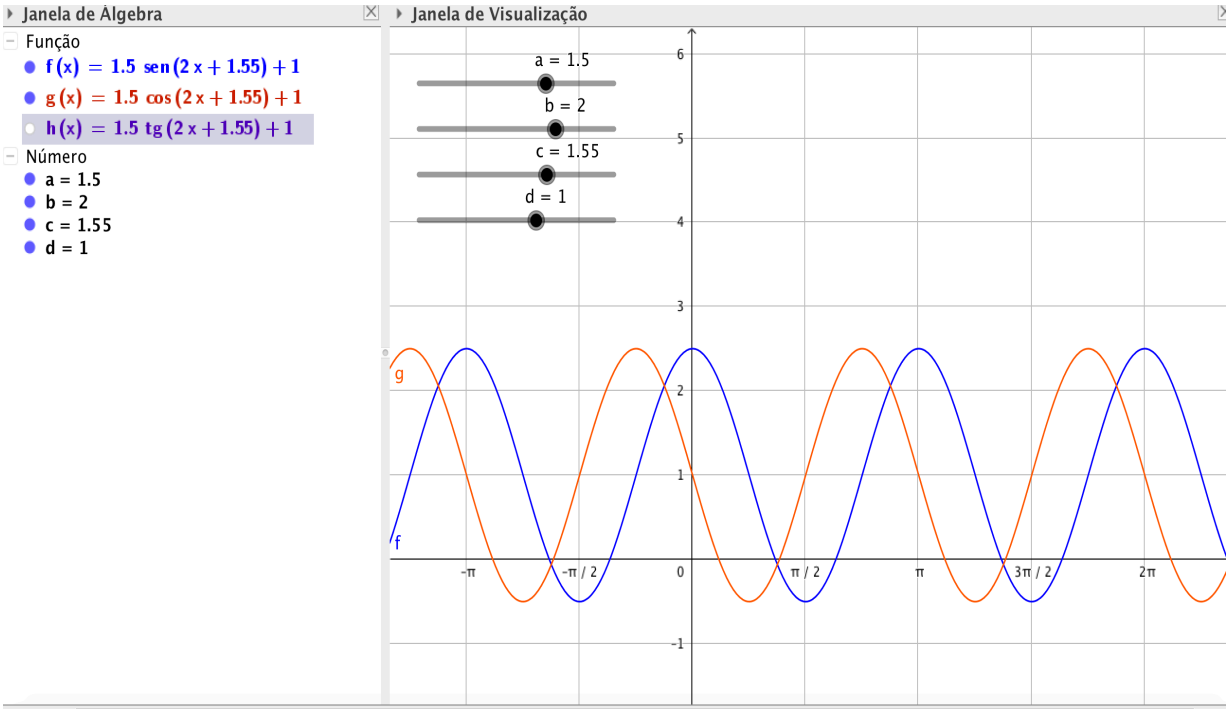


Fonte: Acervo do autor.

Finalizando as variações, causadas por constantes, nos gráficos das funções trigonométricas, pedimos que os grupos analisassem a ação dos parâmetros reais não nulos *a, b, c* e *d* para a função $f(x) = a.sen(b.x + c) + d$ e que repetissem depois o mesmo para as funções cosseno e tangente.

Na figura 175 apresentamos os gráficos das funções seno e cosseno citadas acima.

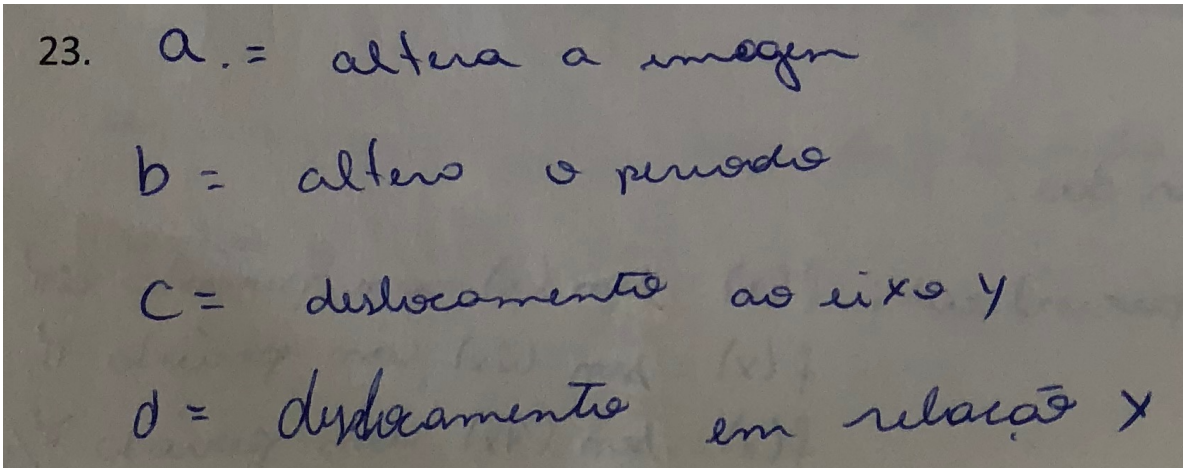
Figura 175: Gráficos das funções $f(x) = a.sen(b.x + c) + d$ e $g(x) = a.cos(b.x + c) + d$ realizadas pelo grupo 1



Fonte: Acervo do autor.

A análise do grupo 1 foi realizada de maneira bastante rápida e sem muitos detalhes e generalizações como mostra a figura 176. O grupo percebeu as alterações mas deixa dúvidas quando escrevem "*deslocamento ao eixo y*" e "*deslocamento em relação x*" não sendo possível entender o que querem dizer quando se lê estas respostas. Outra observação é quando escrevem que o parâmetro *a* altera a imagem. Embora isso seja verdadeiro poderiam ter analisado com mais calma e concluir que é alterado a amplitude da função resultando numa alteração da imagem da mesma. O parâmetro *d* ao deslocar verticalmente a função, também altera o conjunto imagem da função. Analisaram as funções todas juntas enquanto teria sido mais simples analisar separadamente e depois todas juntas. Na conversa gravada dizem que precisam ir embora, pois tinham compromissos e talvez este seja um motivo de não estarem sendo cuidadosos nas respostas destes itens finais.

Figura 176: Resposta do grupo 1 para alterações nas funções trigonométricas com a introdução de parâmetros

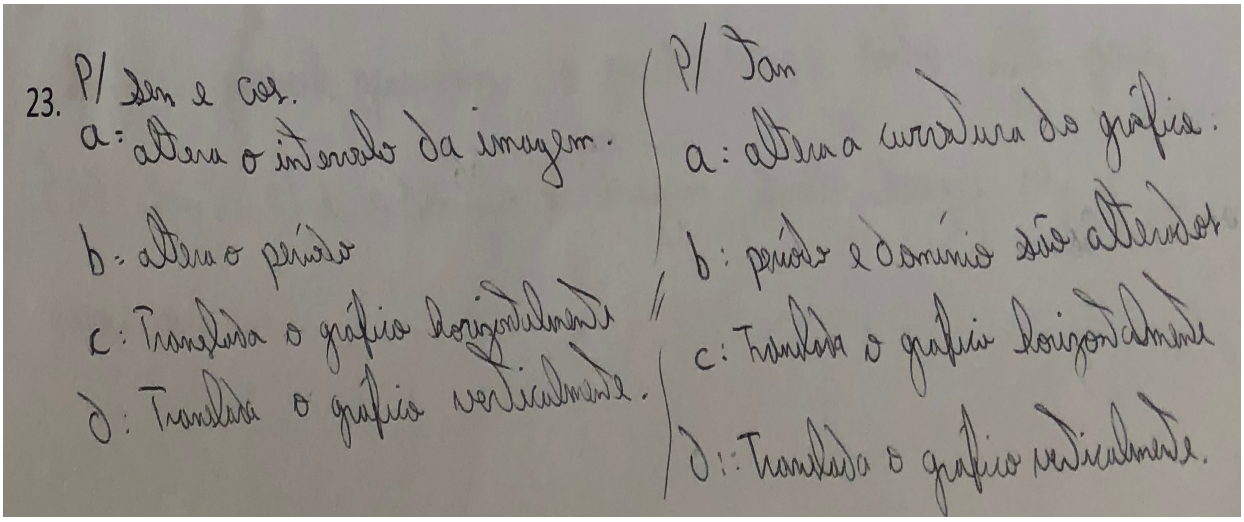


Fonte: Acervo do autor.

O grupo 2 foi mais cuidadoso e analisou separadamente as funções obtendo repostas mais objetivas e completas. Perceberam que o comportamento das funções seno e cosseno eram parecidos e por isso separaram as conclusões para as funções seno e cosseno e depois para a função tangente como mostrado na figura 177.

Perceberam os deslocamentos horizontais e verticais provocados pelos parâmetros *c* e *d*. Outro ponto interessante foi a resposta para as alterações provocadas pelo parâmetro *a* onde escrevem que o mesmo altera o intervalo da imagem para as funções seno e cosseno e altera a curva do gráfico para a função tangente. Poderiam ter especificado as alterações para os valores positivos e negativos sendo assim mais detalhistas nas respostas, mas entendemos que a ideia inicial com a atividade foi alcançada com o grupo. O parâmetro *b* alterou o período das funções seno e cosseno além de alterar o domínio da função tangente fato muito bem observado pelo grupo.

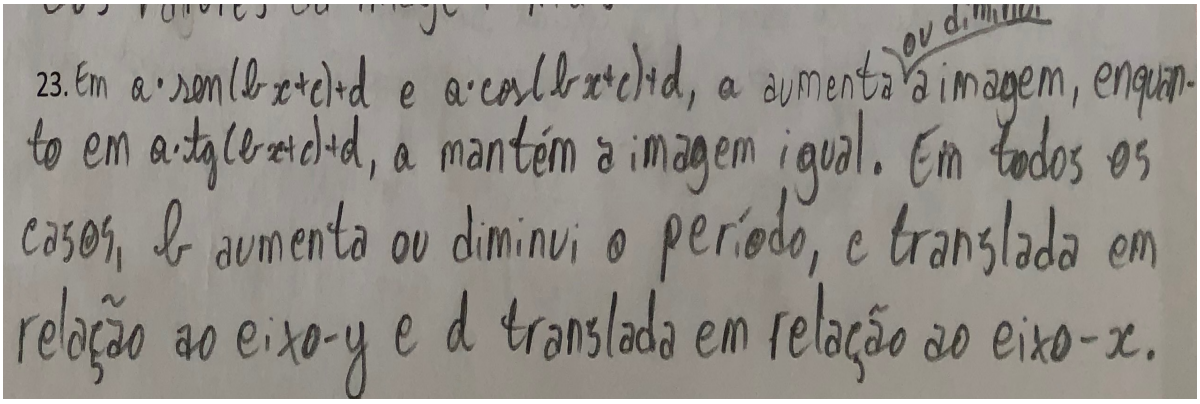
Figura 177: Resposta do grupo 2 para alterações nas funções trigonométricas com a introdução de parâmetros



Fonte: Acervo do autor.

O grupo 3 responde as questões com base no conhecimento que já haviam adquirido utilizando o software apenas para confirmar o que estavam pensando. Respondem corretamente, mas poderiam dar mais detalhes e serem mais precisos nas respostas. Quando escrevem que o parâmetro "*a aumenta ou diminui a imagem*" poderiam escrever que o intervalo do conjunto imagem é aumentado ou diminuído de acordo com o aumento ou diminuição deste parâmetro. Para a função tangente simplesmente escrevem que a imagem não sofre alterações mas poderiam dizer que há alterações na curva da função. O parâmetro *b* foi analisado em relação ao período, mas não citam nada sobre o domínio da função tangente neste caso. Para os parâmetros *c* e *d,* que transladam os gráficos horizontalmente e verticalmente respectivamente, escrevem "*translada em relação ao eixo-y*" e "*translada em relação ao eixo-x*" (figura 178). Assim como observamos para o grupo 1, esta resposta fica difícil de entender qual é o deslocamento vertical e qual é o deslocamento horizontal. Poderiam ter feito a análise para os valores positivos e negativos de cada parâmetro destacando as alterações em cada caso.

Figura 178: Resposta do grupo 3 para alterações nas funções trigonométricas com a introdução de parâmetros



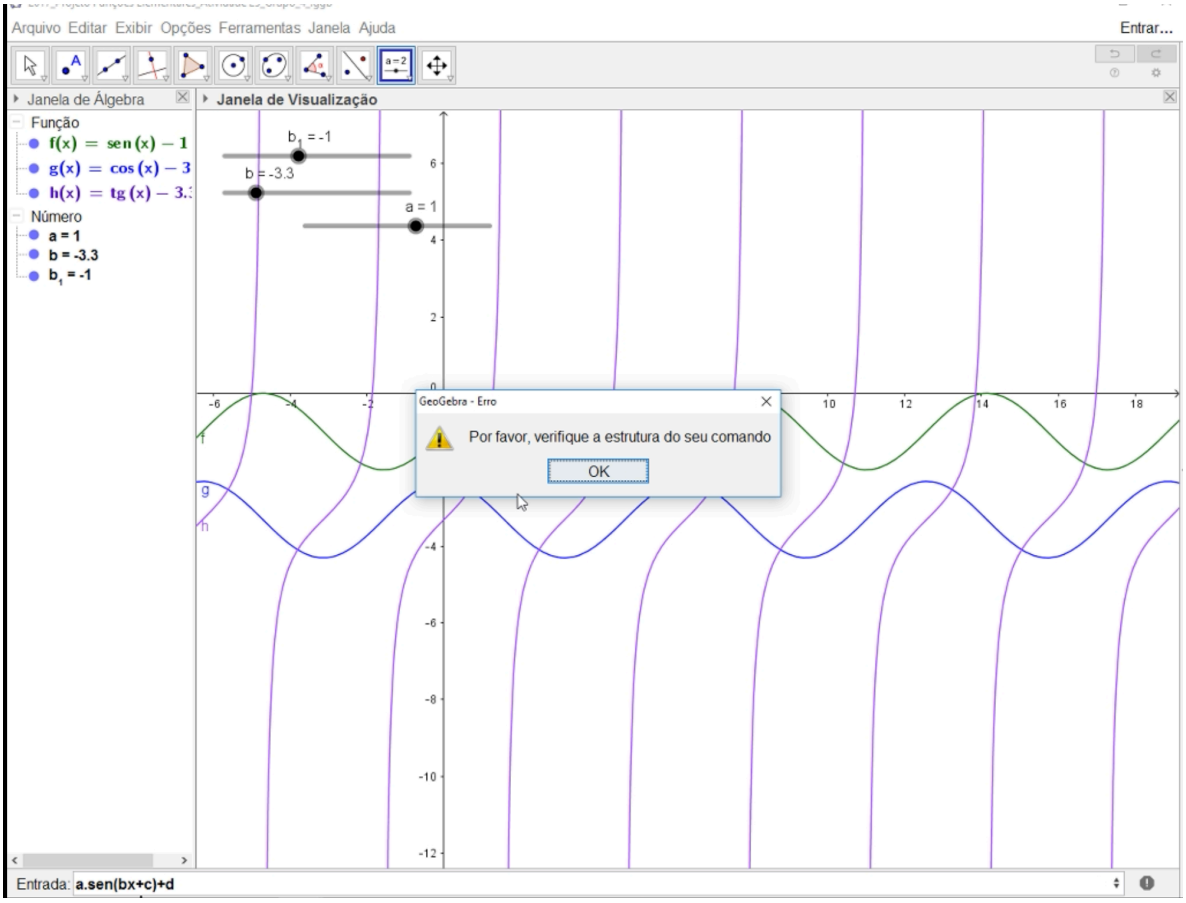
Fonte: Acervo do autor.

O grupo 4 não consegue entrar com a função $f(x) = a.sen(b.x + c) + d$ na entrada do GeoGebra.

O erro que cometem é digitar um ponto entre o parâmetro *a* e a função seno ao invés de * que representa o produto como é mostrado na figura 179. Tentam três vezes sem sucesso e acreditam que o motivo do erro é não terem nomeado a função. Tentam pela última vez colocando $l(x) = a.sen(b.x + c) + d$ que é a primeira letra do nome de um dos alunos e a mensagem de erro continua. Desistem alegando que não sabem e não anotam nada para a questão.

Como já foi comentado anteriormente, este grupo envolveu três alunos que não participaram de todos os encontros e não se sentem muito familiarizados com o software cometendo erros simples de serem resolvidos se tivessem um pouco mais de calma e paciência para tentar entender a mensagem e a estrutura dos comandos que estavam digitando. Apresentam pouca vontade de entender e mesmo levando-se em conta terem tentado três vezes, fazem de modo automático sem analisar o que estão digitando e a mensagem que o software retorna, mostrando não ter havido domínio dos conceitos.

Figura 179: Tela do GeoGebra com mensagem de erro para atividade do grupo 4



Fonte: Acervo do autor.

Finalizadas as atividades com as funções trigonométricas, mostramos como seria possível resolver equações trigonométricas utilizando a janela CAS do GeoGebra. Para isso propusemos a sequência mostrada na figura 180.

A ideia com a atividade era mostrar outros recursos do software para que os alunos se sentissem motivados, curiosos, explorassem outros recursos e possivelmente utilizassem o mesmo ao longo do semestre em outras disciplinas por iniciativa própria. A reposta para esta questão foi respondida um ano depois deste encontro em uma entrevista que realizamos com dois alunos que participaram do projeto que comentaremos mais a frente neste trabalho.

Figura 180: Sequência de atividades para resolução de equações trigonométricas

25. RESOLVENDO EQUAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS: Para resolver uma equação trigonométrica podemos utilizar a Janela CAS (Cálculo Algébrico Simbólico) do GeoGebra. Para isso abra um arquivo novo, clique em EXIBIR e depois em "Janela CAS".
26. Digite na primeira célula a equação $sen(3x) = sen(x)$.
27. Clique em Resolver uma ou mais equações (7º ícone).
28. Digite a função $sen(3x)$ na terceira célula.
29. Digite a função $sen(x)$ na quarta célula.
30. Digite, na quinta célula, Interseção[f,g]
31. Ilumine as células, clicando na "bolinha" abaixo do número de cada célula, na ordem inversa em que foram criadas. Registre suas análises no Caderno de Registro.

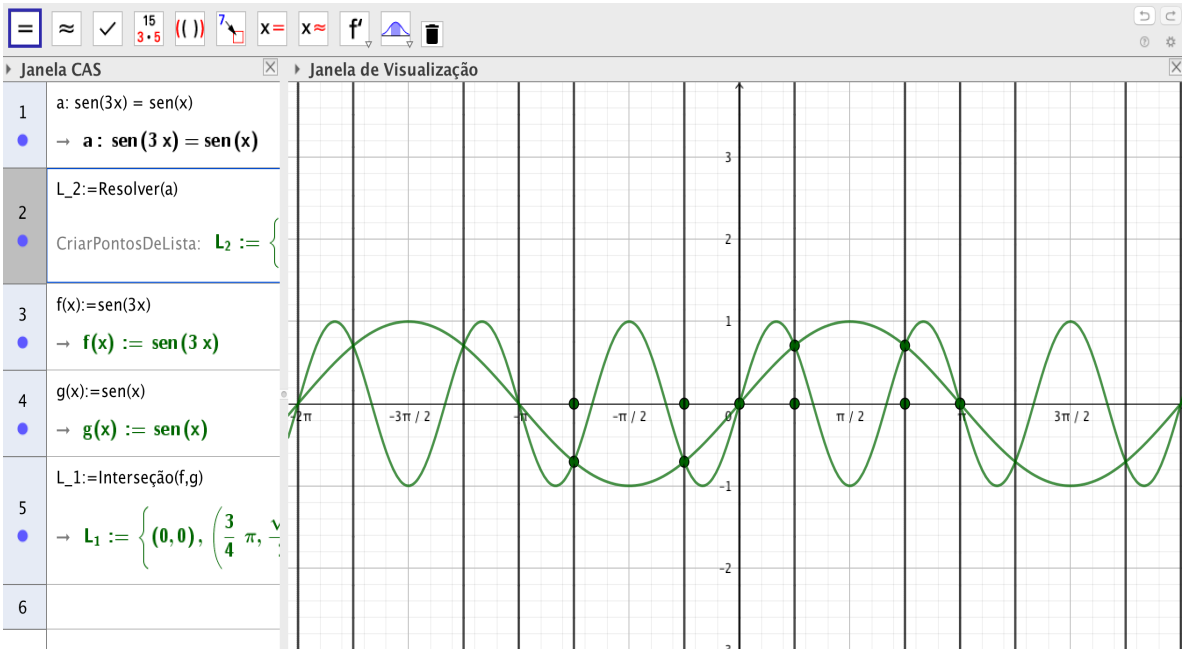
Fonte: Acervo do autor.

Realizando esta sequência os alunos teriam como resultado no GeoGebra uma imagem como a mostrada na figura 181. Nesta imagem observamos os gráficos das funções $f(x) = sen(3x)$ e $g(x) = sen(x)$. É mostrado ainda os pontos de intersecção das funções e as soluções da equação $sen(3x) = sen(x)$. Existe uma diferença entre o comando "*Resolver*" e o comando "*Intersecção*" e nossa ideia era que os alunos percebessem esta diferença.

O comando "*Resolver*" retorna como solução, no gráfico, valores somente em *x*. Isto porque está resolvendo um equação com incógnita de somente uma variável, no caso *x*.

O comando "*Intersecção*" retorna, no gráfico, pontos com coordenadas *(x,y)* já que trata-se da intersecção de duas funções no plano cartesiano. A relação entre os dois comandos seria que as soluções da equação são justamente as abcissas dos pontos de intersecção dos gráficos. Nenhum dos quatro grupos conseguiu perceber esta diferença.

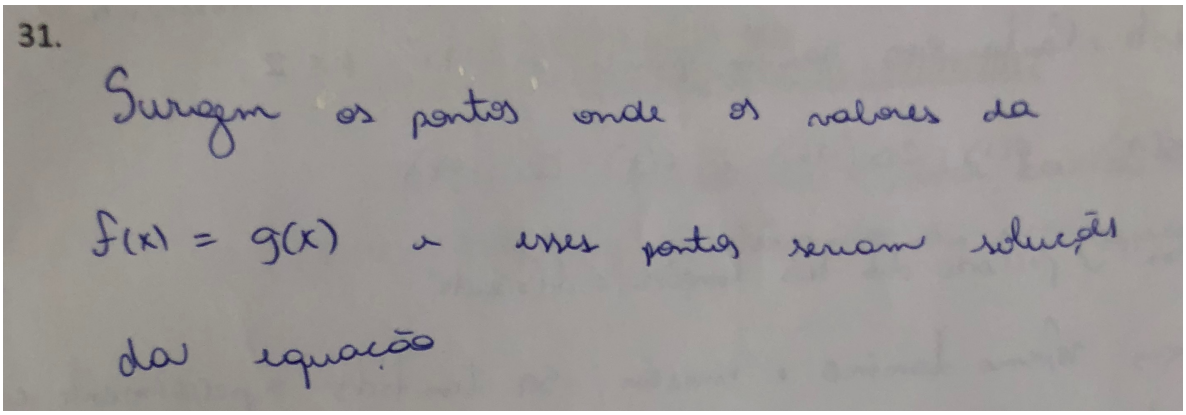
Figura 181: Tela do GeoGebra para atividade com equações trigonométricas



Fonte: Acervo do autor.

O grupo 1 entendeu que os comandos retornavam as soluções da equação como pode ser observado na figura 182.

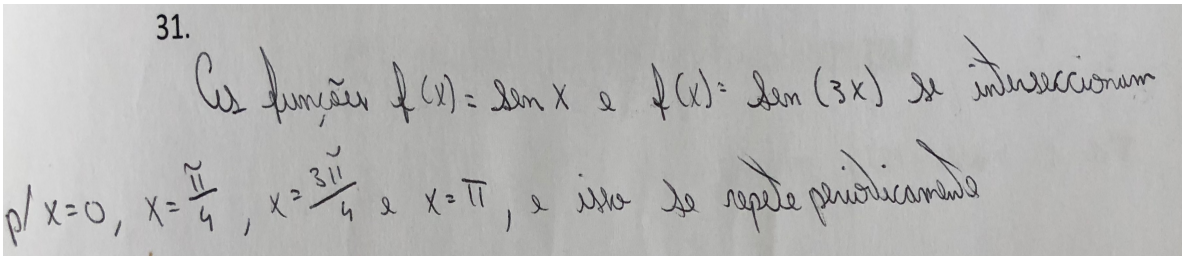
Figura 182: Resposta do grupo 1 para solução da equação trigonométrica no GeoGebra



Fonte: Acervo do autor.

O grupo 2 destaca onde as funções se interseccionam colocando somente valores em *x* como mostrado na figura 183, mas as intersecções devem ser pontos com coordenadas *(x,y)* e as soluções da equação somente valores em *x* como dito anteriormente. Percebem que tanto as intersecções quanto as soluções da equação ocorrem periodicamente, mas não conseguem definir qual é a periodicidade.

Figura 183: Resposta do grupo 2 para solução da equação trigonométrica no GeoGebra



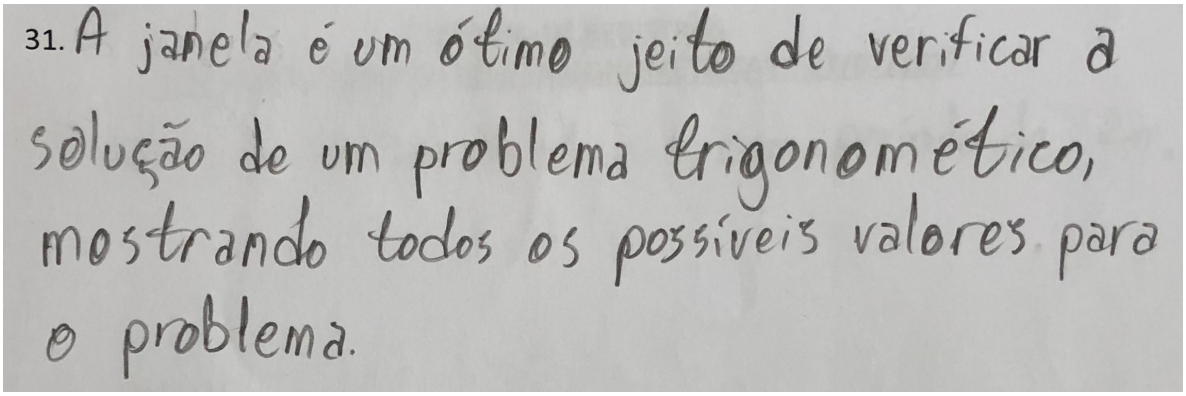
Fonte: Acervo do autor.

O grupo 3 destaca, na folha de repostas, que a janela CAS é uma boa alternativa para verificar a solução da equação como observamos na figura 184, mas não entenderam bem a atividade. Um dos alunos do grupo diz "*o que eu estou resolvendo aqui que eu não entendi* ". Não entenderam as diferenças entre os comandos e ficaram com muita dúvida para a solução apresentada pelo software.

Um problema que tiveram foi que ao criar as funções $f(x) = sen(3x)$ e $g(x) = sen(x)$, o software nomeou as mesmas de *p(x)* e *h(x)*. Assim quando digitaram o comando "*Intersecção*" o software não retornou nada já que não havia função *f(x)* e nem *g(x)*. Não tiveram a ideia e nem perceberam que os nomes das funções estavam diferentes da que digitaram no comando. Um dos alunos comenta "*o que adiantou fazer a intersecção disso e colocar esses dois sendo que não aconteceu nada*" e depois "*eu acho que tem alguma coisa errada com o programa*". Interessante como têm a percepção de algo errado e após analisarem com calma percebem o erro e renomeiam as funções.

Notamos no vídeo que não conseguem entender a diferença nas repostas dos comandos e acabam se conformando em dizer que a janela ajuda na verificação da solução mesmo sem terem entendido.

Figura 184: Resposta do grupo 3 para solução da equação trigonométrica no GeoGebra



Fonte: Acervo do autor.

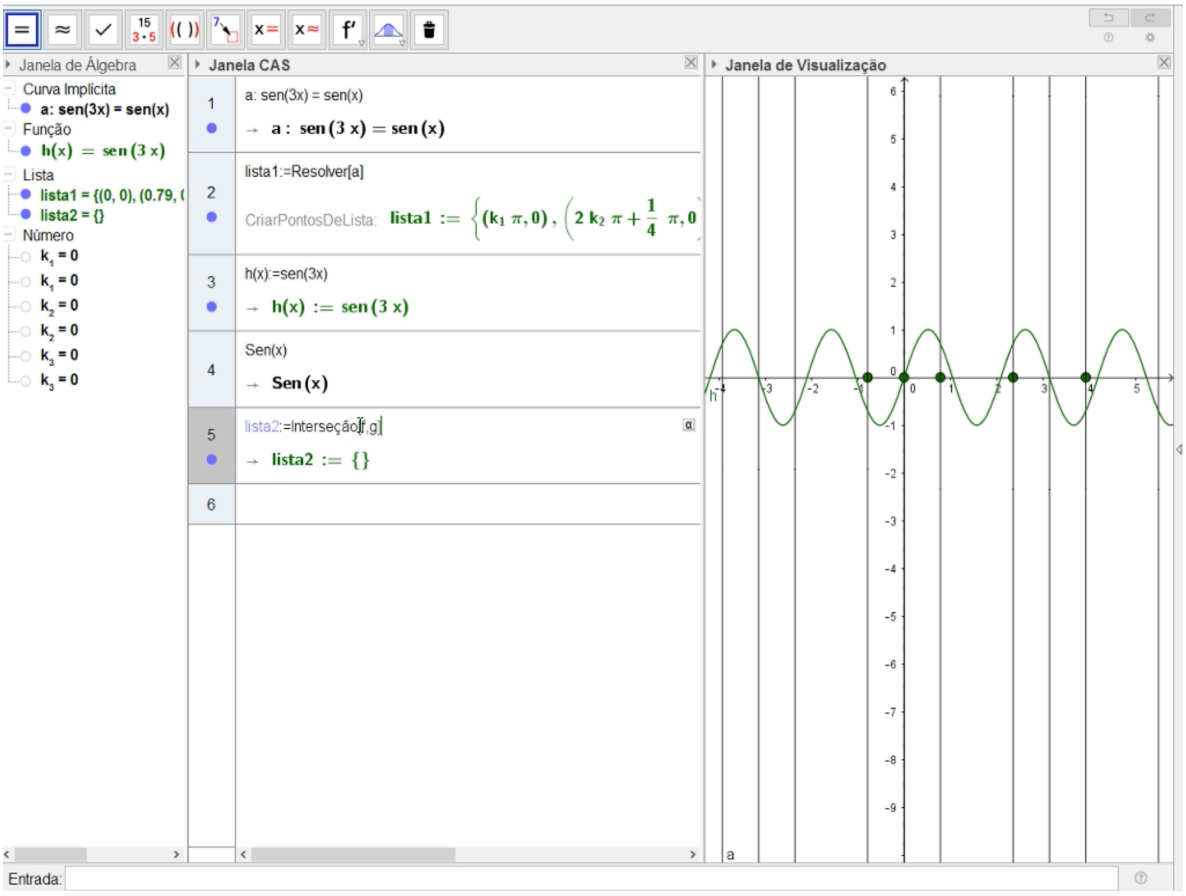
O grupo 4 realiza a atividade e não tentam entender e nem explorar nada. Digitam somente os comandos e não concluem nada, nem respondem na folha de respostas. Na figura 185, temos um "*print*" da tela do vídeo gravado para destacar os erros cometidos na atividade e como poderiam ter resolvido.

Na quarta célula da Janela CAS digitaram "*Sen(x)*" e o software não reconheceu como a função seno já que o "s" estava com letra maiúscula. Quando começam a digitar a função seno, existe uma *"sugestão"* dada pelo software para os comandos existentes e o grupo utilizou esta facilidade várias vezes nas atividades do dia, mas neste momento digitam equivocadamente e ao corrigirem não prestam atenção a este detalhe.

Outro problema foi que, assim como no grupo anterior, o software nomeou a função seno de (3x) como *h(x)* não retornando qualquer intersecção para este comando na célula cinco.

Não exploraram nada nesta atividade e salvam a tela sem responder ou tentar entender o que havia sido proposto com a sequência demonstrando não estarem muito interessados no estudo destas equações.

Figura 185: Resposta do grupo 4 para solução da equação trigonométrica no GeoGebra



Fonte: Acervo do autor.

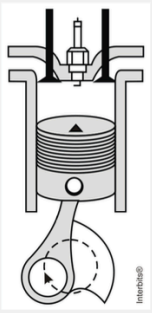
Para finalizar as atividades do dia e encerrar o projeto propusemos um problema de aplicação para ver qual estratégia cada grupo usaria para resolver.

A ideia era ver se utilizariam o GeoGebra ou estratégias de análise que foram desenvolvidas durante as atividades neste dia. O problema é apresentado na figura 186.

Figura 186: Problema proposto envolvendo função trigonométrica

APLICAÇÃO:

4) (UFPR 2013) O pistão de um motor se movimenta para cima e para baixo dentro de um cilindro, como ilustra a figura.



Suponha que em um instante t, em segundos, a altura $h(t)$ do pistão, em centímetros, possa ser descrita pela expressão:

$$h(t) = 4\text{sen}\left(\frac{2\pi\, t}{0{,}05}\right) + 4\,.$$

Analisando a questão acima, responda:

a) Qual a altura máxima e mínima que o pistão atinge?

b) Quantos ciclos completos esse pistão realiza, funcionando durante um minuto?

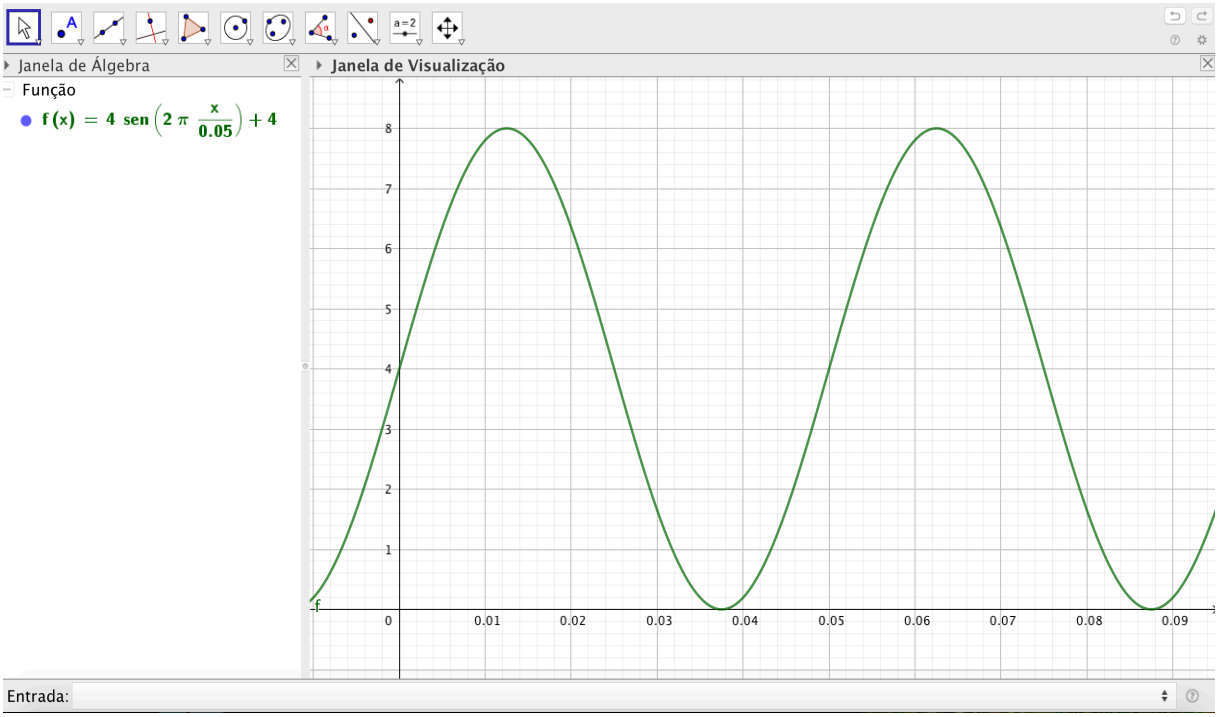
Fonte: acervo do autor.

Dentre as várias possibilidades de resolver este problema, uma alternativa interessante e simples seria plotando o gráfico desta função no GeoGebra para observar os valores máximos e mínimos bem como o período da função. O único inconveniente é que, como o período é muito pequeno, ficaria mais fácil visualizar os valores alterando-se os valores dos eixos cartesianos como fizemos e apresentamos na figura 187.

Note que, neste gráfico, é fácil perceber os valores mínimo e máximo, respectivamente, 0 e 8, além de notar que o período do pistão é de 0,05s. Como é

pedido o número de ciclos durante 1 minuto (60 segundos), basta dividir 60 por 0,05 que resulta em 1200 ciclos por minuto.

Figura 187: Gráfico da função para resolução do problema proposto



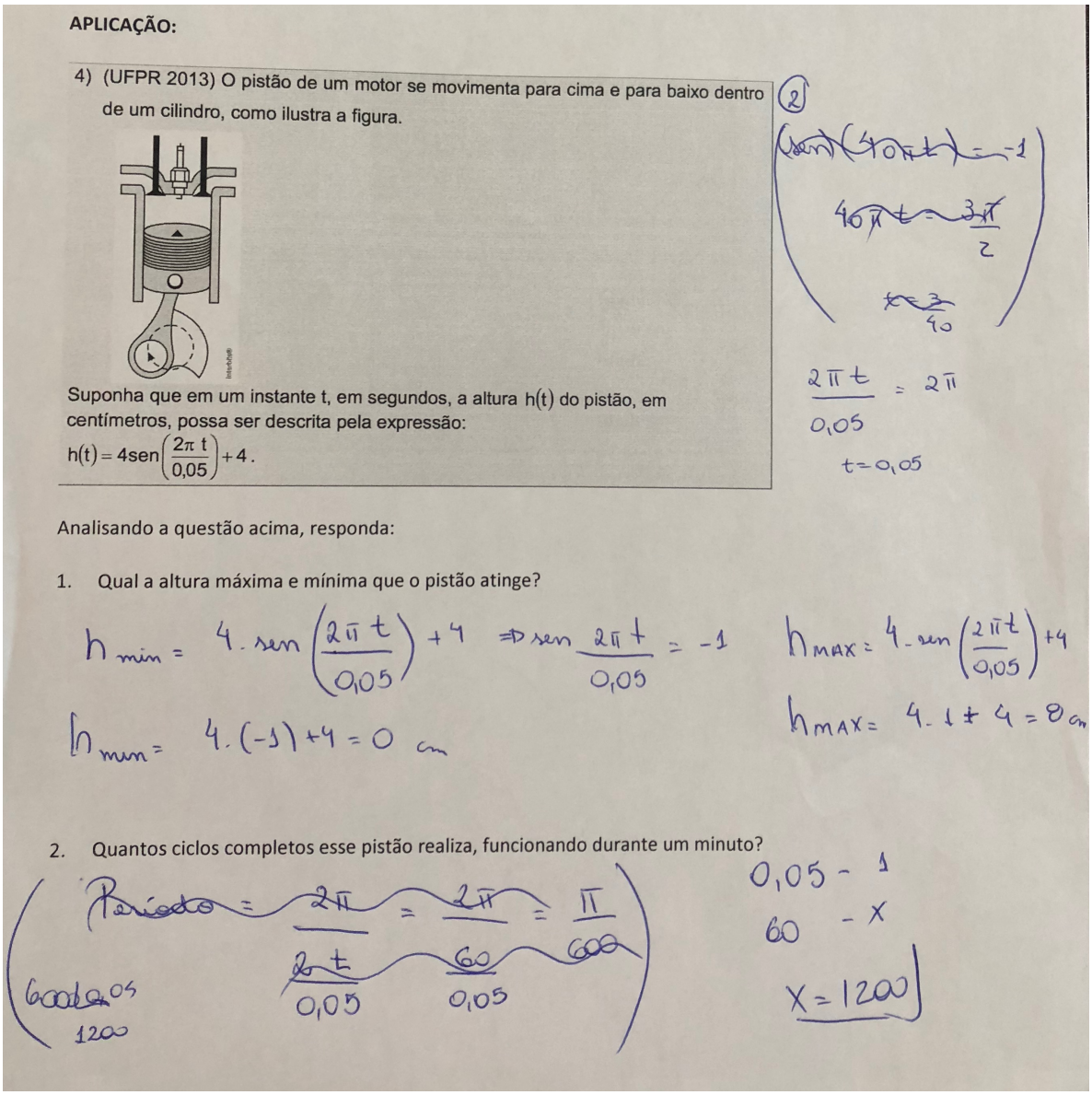
Fonte: Acervo do autor.

O grupo 1 não utilizou o software e analisou as questões utilizando somente a expressão da função e a influência dos parâmetros inseridos na mesma. Conseguiu entender as variações da altura dos pistão corretamente pensando nos limites possíveis para a função seno. Para o período demoraram um pouco mais para entender, mas após alguns cálculos equivocados chegaram no período da função e consequentemente no número de ciclos completos durante um minuto de funcionamento. Os cálculos do grupo são apresentados na figura 188.

Na primeira parte do problema atribuem o valor mínimo (-1) para a função seno e com isso chegam a altura mínima. Da mesma forma atribuindo o valor máximo para a função seno chegam a altura máxima. Isto foi bastante trabalhado nas atividades com as limitações das funções. Para o período utilizam o

período da função seno como sendo 2π e a partir daí chegam a 0,05s como período da função proposta mostrando terem domínio e apropriação do assunto abordado.

Figura 188: Respostas do grupo 1 para o problema proposto envolvendo função trigonométrica

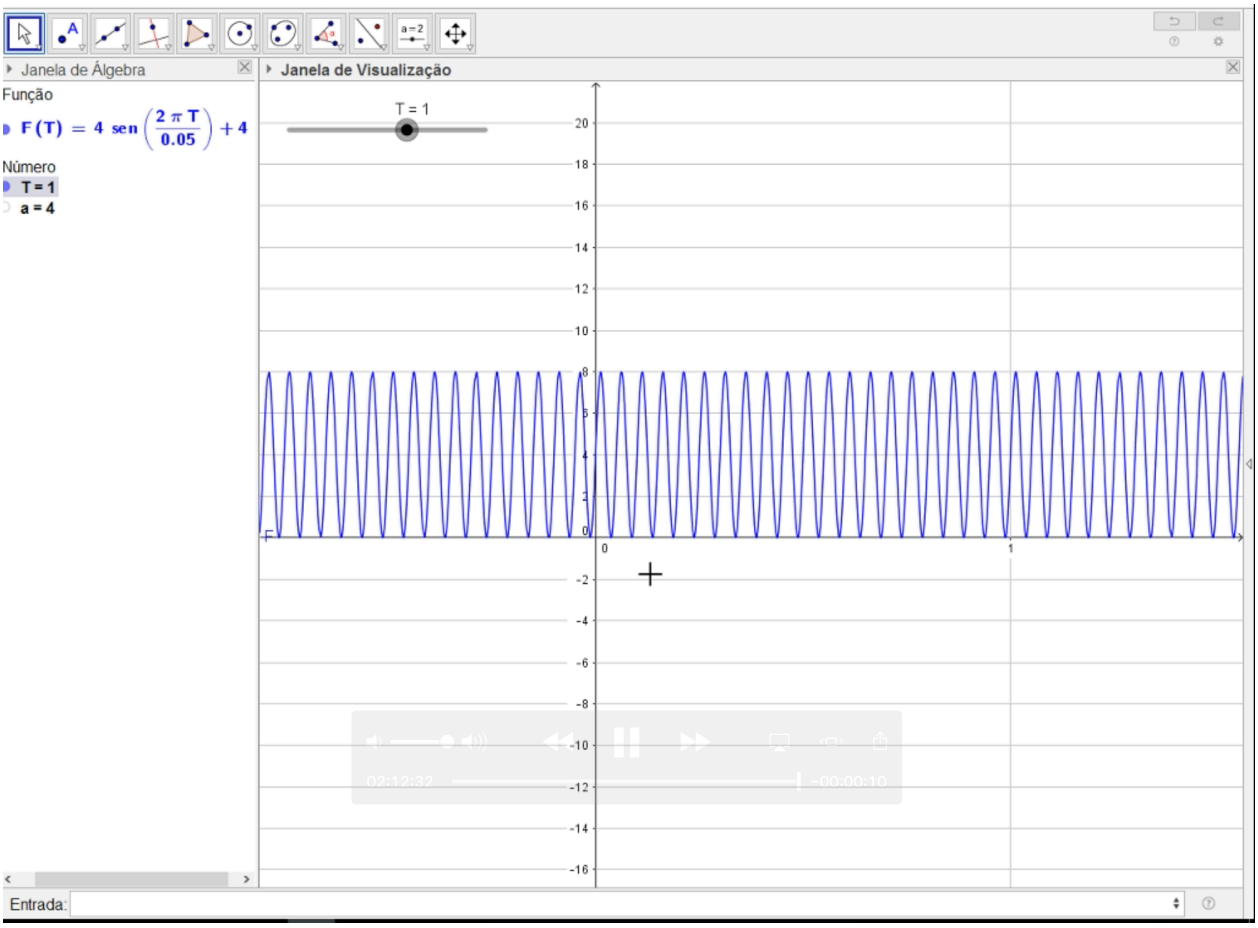


Fonte: Acervo do autor.

O grupo 2 partiu, inicialmente, para o GeoGebra tentando digitar a função na caixa de “Entrada” do software para, a partir do gráfico, responder as

questões. Como o período era muito pequeno tiveram o problema que comentamos anteriormente, mas após algum tempo analisando conseguiram alterar os valores dos eixos e visualizar melhor o gráfico mostrado na figura 189, o que demonstra domínio e apropriação tanto do software como do assunto abordado no problema.

Figura 189: Gráfico da função plotada no GeoGebra pelo grupo 2 para resolução do problema proposto



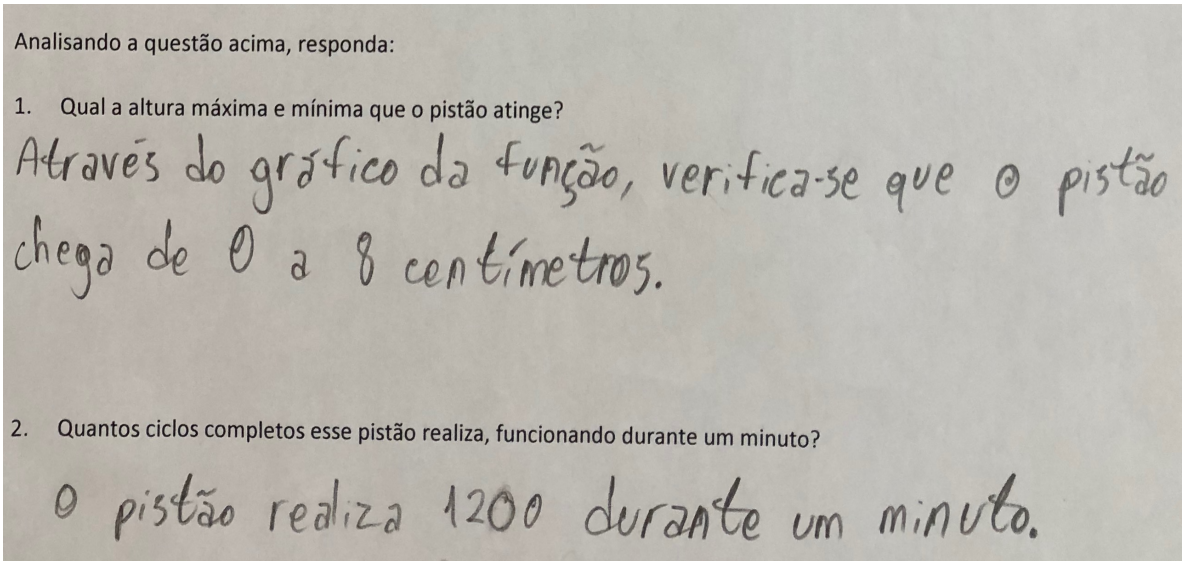
Fonte: Acervo do autor.

Para chegarem aos valores das alturas máxima e mínima pensaram da mesma forma que o grupo 1, pois não estavam conseguindo plotar o gráfico. Chegaram aos valores corretos e quando alteraram os limites dos eixos do gráfico (figura 189) comentaram que eram exatamente os valores que tinham calculado. A partir deste gráfico não tiveram a ideia de diminuir a escala do eixo *x* e para calcular

o número de ciclos contaram quantos períodos havia em um segundo a partir do gráfico plotado.(figura 185) Chegaram a 20 ciclos em um segundo e então multiplicaram por 60s para obter 1200 ciclos por minuto.

O grupo 3 resolve o problema somente utilizando o gráfico da função. Percebem que devem alterar os valores limites dos eixos e facilmente resolvem a questão não analisando a expressão como fizeram os grupos 1 e 2. As respostas apresentadas pelo grupo são mostradas na figura 190.

Figura 190: Respostas do grupo 3 para o problema proposto envolvendo função trigonométrica



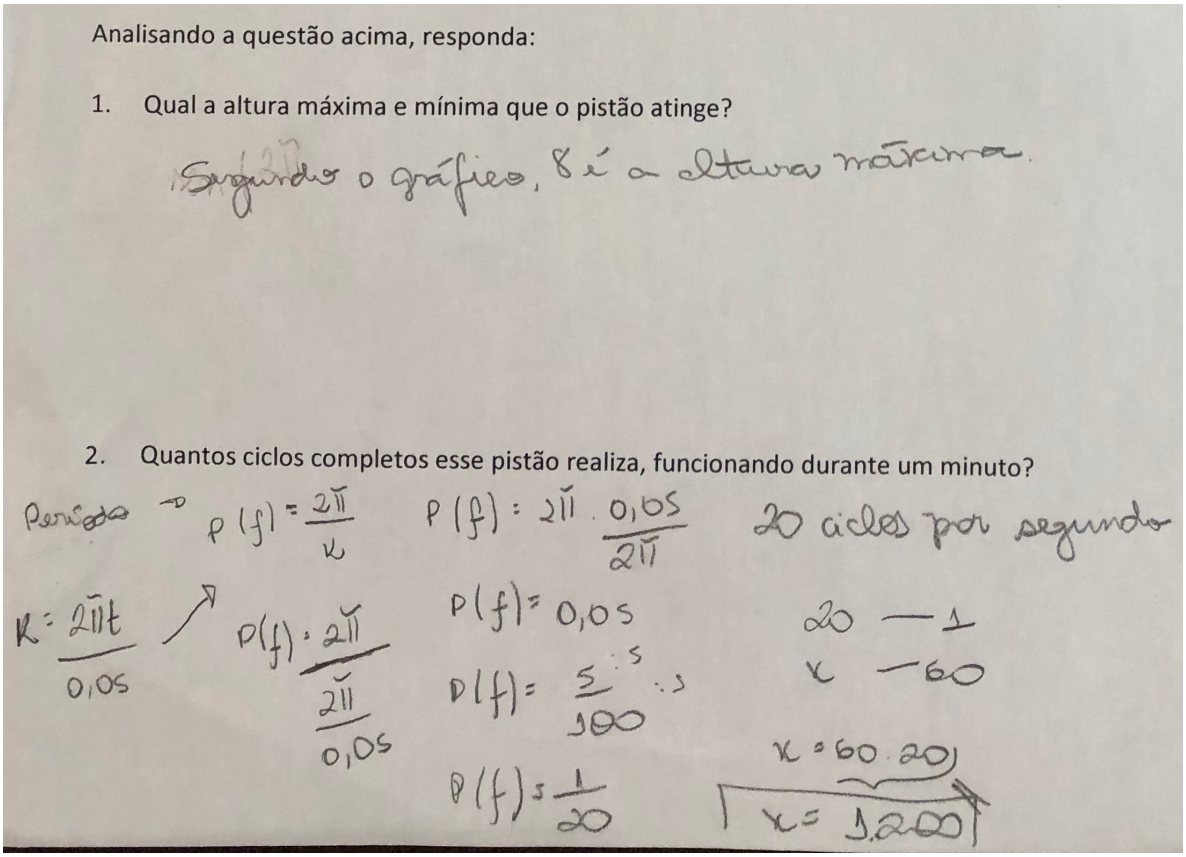
Fonte: Acervo do autor.

O grupo 4 não gravou o vídeo e áudio da resolução do problema. No final do vídeo da atividade do dia é possível ouvir um dos alunos do grupo perguntando ao grupo do lado como haviam resolvido o problema. As respostas do grupo 4 são apresentadas na figura 191 e nota-se que determinaram o período da função através de cálculos chegando a 1200 ciclos por minuto.

Os cálculos apresentados estão corretos e utilizaram a ideia da generalização do período da função seno realizada no início deste dia de atividades

mostrando que apesar de se mostrarem um pouco desatentos, conseguiram utilizar conhecimentos e conceitos trabalhados na atividade. Não apresentaram a altura mínima do pistão e não foi possível saber se foi por falta de conhecimento ou por falta de atenção já que responderam a altura máxima corretamente.

Figura 191: Respostas do grupo 4 para o problema proposto envolvendo função trigonométrica



Fonte: Acervo do autor.

Neste dia foi gerado uma gravação com duração de 8h33’44” de vídeos das telas dos computadores dos grupos, juntamente com os áudios, as folhas com as conclusões registradas e as atividades realizadas no GeoGebra salvas. A distribuição dos tempos, mostrada na Tabela 9, mostra uma distribuição de tempo parecida entre os grupos.

Tabela 9: Tempos de vídeo e áudio gerados no quarto encontro

	Grupo 1	**Grupo 2**	**Grupo 3**	**Grupo 4**
Atividade 4	2h07’44””	2h12’42”	2h01’15”	2h12’03”

Fonte: Elaboração própria.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente trabalho se propôs a investigar como ocorre a produção de significados dos estudantes de licenciatura em Matemática utilizando uma sequência de atividades propostas com o software GeoGebra, visando verificar o nível de domínio e à apropriação dos conceitos de funções de uma variável com a ação mediada por computador, aluno-aluno, aluno-pesquisador.

Assim, partindo do pressuposto, motivação inicial desta pesquisa, que o estudo de funções é de suma importância para o bom entendimento de disciplinas futuras, como Cálculo Diferencial e Integral por exemplo, entendemos que pesquisas que se dedicam a analisar como ocorre a produção de significados dos alunos sobre os conceitos relacionados à referida teoria pode proporcionar novos olhares em direção a perspectivas diferentes das tradicionalmente utilizadas nos cursos introdutórios de Matemática. Dessa maneira, interpretamos que tratar dessas questões de modo mais próximo da realidade deles nos dias de hoje, na qual o aluno aprende a utilizar recursos tecnológicos que os levem a pensar mais do que reproduzir e investigar ao invés de decorar, seja um caminho que as escolas tendam a seguir cada vez mais.

As atividades com o GeoGebra contribuíram para a experimentação, a criação de estratégias, a produção de conjecturas, a argumentação qualitativa e a dedução de propriedades matemáticas relativas à conteúdos matemáticos do Ensino Médio mais especificamente as funções elementares. Assim, a abordagem Matemática no GeoGebra ofereceu aos futuros professores atividades que permitem que este tipo de exploração seja realizada.

A análise dos dados mostra que os alunos com mais base teórica exploram mais os recursos tecnológicos, conseguindo um aprofundamento maior dos conteúdos estudado. Isto foi observado em mais de um grupo de alunos através das respostas aos itens solicitados nas atividades. Apresentam, ainda, um

detalhamento maior em suas explicações e cometem menos erros de notação ao escreverem na linguagem matemática.

Apesar de estarmos trabalhando com funções, assunto já estudado no Ensino Médio e na disciplina do curso de Licenciatura, notamos muitos erros conceituais e muitas dúvidas ainda presentes nos alunos. Notou-se também muitos erros, por falta de atenção na forma de escrever e salientamos na discussão dos resultados que devemos tentar minimizar estas falhas que podem se propagar já que estamos tratando com os futuros professores de Matemática.

A divisão dos alunos em grupos também foi um fator positivo para o desenvolvimento das atividades, uma vez que possibilitou a exploração, investigação e discussão dos assuntos que estavam sendo estudados resultando, de forma geral, em uma maior apropriação e domínio dos conceitos. Isto pôde ser observado nos áudios dos alunos muitas vezes quando citam que estavam entendo naquele momento o que não haviam entendido na sala de aula, além de dizerem que seria muito mais fácil se nas aulas tivessem estes recursos. Por outro lado grupos com 3 alunos possibilita que algum dos alunos, se não tiver interesse, participe menos ou simplesmente nem participe deixando as discussões para os outros dois membros do grupo, mas este é um fator que não podemos ter controle.

A investigação de Jeong e Chi (1997) sugere que pares de estudantes universitários, após estudo conjunto sobre conceitos de Biologia, passaram a compartilhar modelos mentais e conhecimentos, avançando em sua compreensão do assunto tratado em aula. Da mesma forma, Barros, Remold, da Silva e Tagliati (2004) reportam ganhos significativos, em termos de compreensão conceitual e entusiasmo em relação à aprendizagem, obtidos por meio de discussões grupais de alunos de um curso de graduação em Física.

Sabemos da dificuldade, no dia a dia da sala de aula com uma quantidade maior de alunos e de diferentes níveis de conhecimento, de se trabalhar desta forma e ainda mais com uma ementa a ser seguida, mas poderíamos pensar

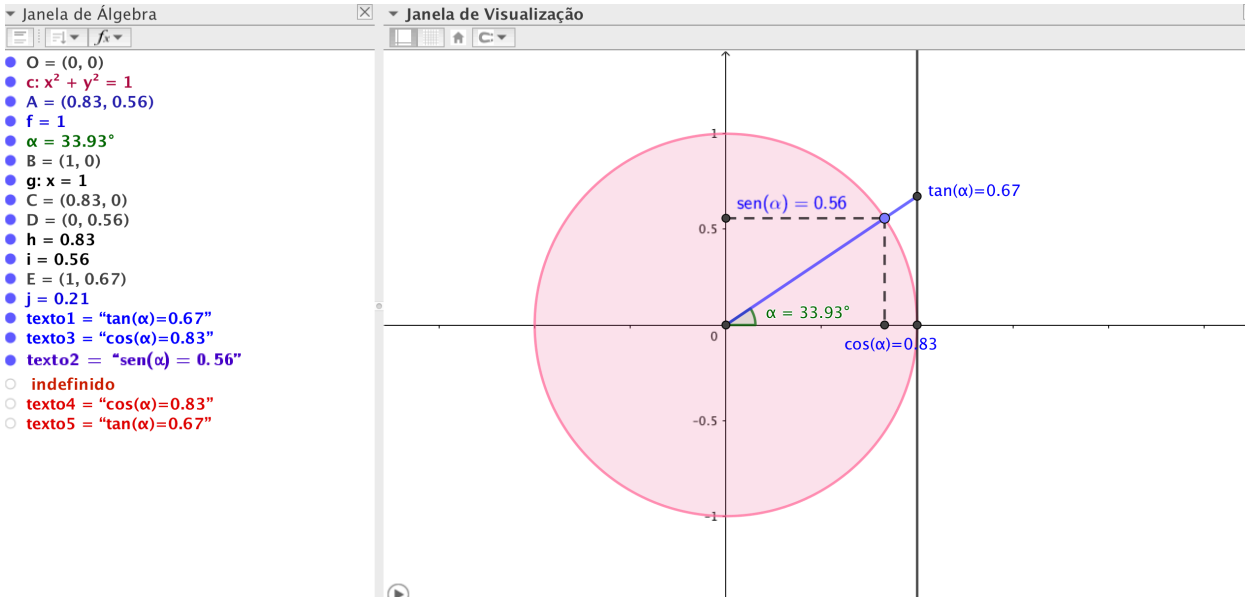
em trabalhar de forma paralela com o uso de um ambiente virtual de aprendizagem, a fim de motivar e facilitar o entendimento das disciplinas do curso, principalmente as disciplinas de nivelamento, onde não se tem muito tempo e por outro lado existe muito conteúdo para ser abordado considerando que os discentes já tenham visto o mesmo no Ensino Médio.

Em entrevista com dois alunos, que participaram de todos os encontros ($LU21^{M}$ e $EL35^{M}$), um ano após o último encontro no laboratório, ouvimos o relato de que continuavam utilizando o software mesmo sem a obrigação das outras disciplinas em utilizar. Relataram estar usando não apenas para estudar, mas também inserindo em suas práticas quando um dos alunos diz já estar trabalhando como monitor em um escola de ensino médio e mostrando o GeoGebra para seus alunos para ajuda-los a entender os assuntos estudados.

Nesta entrevista realizada com um dos alunos, foi relatado que os conhecimentos adquiridos sobre as assíntotas e a forma como foi apresentada nestas atividades realmente ajudou bastante na disciplina de “Cálculo”. Abaixo um trecho da entrevista, realizada um ano após estas atividades com este aluno:
“...pelas assíntotas e tudo mais...não tínhamos contato com limites, mas já estávamos tendo uma noção intuitiva...facilitou bastante...”

Um dos alunos entrevistados relatou, também, ter construído um ciclo trigonométrico no GeoGebra por conta própria para ajudar a ensinar seus alunos de monitoria como mostra a figura 192. Relatou que seus alunos de monitoria entendem mais facilmente quando ele utiliza este círculo para ensinar as funções trigonométricas e seus valores para os ângulos notáveis, relatando ainda que os alunos ficam mais atentos com a utilização deste recurso.

Figura 192: Ciclo trigonométrico criado por um dos alunos do grupo 1



Fonte: Acervo do autor.

Este relato nos deixou bastante contentes, pois mostra que a semente foi plantada e os frutos poderemos colher com alunos mais conectados com as novas possibilidades de ensino e de apropriação das ideias e conceitos matemáticas.

Para futuros trabalhos, destacamos a possibilidade de criação de um Ambiente Virtual de Aprendizagem com o material desenvolvido neste projeto, para trabalhar com uma disciplina de nivelamento com alunos ingressantes dos cursos da universidade estudada, afim de tentar minimizar os altos índices de reprovação em alunos de primeiro ano devido a falta de conhecimentos básicos de Matemática, requeridos nos cursos de graduação, e que são cada dia mais deficientes nos alunos que ingressam nos cursos superiores.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALMEIDA, M. E. Proinfo: Informática e formação de professores. Brasília: Ministério da Educação, SEED, 2000. v. 1. (Série de Estudos; Educação à Distância)

ALMEIDA, M. E. Proinfo: Informática e formação de professores. Brasília: Ministério da Educação, SEED, 2000. v. 2. (Série de Estudos; Educação à Distância)

BAKHTIN, M.M. The dialogic imagination: Four essays by M.M. Bakhtin, ed. Michael Holquist, trans. Caryl Emerson and Michael Holquist. Austin: University of Texas Press, 1981.

_____. (Volochinov).Estética da criação verbal. São Paulo, Martins Fontes, 2003, 478 p.

_____. Problems of Dostoevsky)s poetics,ed. and trans. Caryl Emerson. Minneapolis: University of Minnesota Press, 1984.

_____. Speech genres and other late essays, ed. Caryl Emerson and Michael Holquist, trans. V. W. McGee. Austin: University ofTexas Press, 1986.

_____. Marxismo e filosofia da linguagem. São Paulo, Hucitec, 2006, 200 p.

BARROS, J. A. et al. Revista Brasileira de Ensino de Física, São Paulo, v. 26, n. 1, p. 63-69, 2004.

BITTAR, M. O uso de softwares educacionais no contexto da aprendizagem virtual. In: CAPISANI, Dulcimira. Educação e arte no mundo digital. Universidade Federal do Mato Grosso Sul, Campo Grande, 2001. p.77.

BORBA, M.C.; PENTEADO, M.G. Informática e educação matemática. Belo Horizonte: Autêntica, 2003.

BURKE, K. A grammar of motives. University of California Press, 1969a.

_____. A rhetoric of motives. University of California Press, 1969b.

_____. Attitudes toward history. Berkeley: University of California Press, 1984.

_____. Dramatism and development. Worcester, Mass.: Clark University Press, 1972.

_____. Language as symbolic action: Essays on life, literature, and method. Berkeley: University of California Press, 1966.

COSTA, H.R. Investigando a produção de significados sobre os números quânticos, as formas dos orbitais e as transições eletrônicas do modelo quântico por meio das ferramentas socioculturais. Tese de doutorado- Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Ciências, Bauru 2016.

COTTA JÚNIOR, A. Novas Tecnologias Educacionais no ensino de Matemática: estudo de caso – Logo e do Cabri-Géométre. 2002. 256 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Produção) – Programa de Pós-Gradução em Engenharia de Produção, Universidade Federal de Santa Catarina, 2002.

DEWEY, J., Experiência e Educação. 3ed., São Paulo, Cia. Ed. Nacional, 1979.

GIORDAN, M. Computadores e linguagens nas aulas de ciências. Ijuí: Unijuí, 2008.

GIRALDO, V., CAETANO, P.A.S., MATTOS, F.R.P. Recursos Computacionais no Ensino da Matemática. Editora da SBM, 2013.

GRAVINA, M. A.; SANTAROSA, L.M. A aprendizagem da Matemática em ambientes informatizados. In: CONGRESSO RIBIE'98, 4., Brasília, 1998. Anais... Brasília, 1998.

JEONG, H.; CHI, M. T. H. Construction of shared knowledge during collaborative learning. In: R. HALL, R.; MIYAKE, N.; ENYEDY, J. (Ed.). International Conference On Computer Support For Collaborative Learning, 2., Toronto, 1997. Annals… Toronto, 1997. p. 1-5.

KENSKI, V.M. Educação e tecnologias: O novo ritmo da informação. 3ed. Campinas: Papirus, 2007.

LIBÂNEO, J. C. O processo de ensino na escola. São Paulo: Cortez, 1994. P. 77-118

LIBÂNEO, J. C. Os métodos de ensino. São Paulo: Cortez, 1994. P. 149-176

LUCAS, R. D. GeoGebra e moodle no ensino de geometria analítica. Dissertação de mestrado - UFSCar, São Carlos, 2010.

MARTINS, O. B. ; MOSER, A. . Conceito de mediação em Vygotsky, Leontiev e

Wertsch. Intersaberes (Facinter), v. 7, p. 8-28, 2012.

MORTIMER, E. F.; SCOTT, P. H. Atividade discursiva nas salas de aula de ciências: uma ferramenta sociocultural para analisar e planejar o ensino. Investigações em Ensino de Ciências, Porto Alegre, v. 7, n. 3, p. 283-306, 2002.

MORAN, J.M. et al. Novas Tecnologias e mediação pedagógica. Campinas, Papirus, 2000.

PAPERT, S. Logo: computadores e educação. São Paulo: Brasiliense, 1985.

PAPERT, S. A máquina das crianças: repensando a escola na era da informática. Trad. Sandra Costa. Porto Alegre: Artes Médicas, 1994.

PEREIRA, A. P DE; OSTERMANN, F. A aproximação sociocultural a mente, de James V. Wertsch, e implicações para a educação em ciências. Ciência e Educação, v. 18, n. 1, p. 23-29, 2012.

VALENTE, J. A. (Org.) Formação de profissionais na Área de Informática em Educação. In: _____. Computadores e Conhecimento: repensando a Educação. Campinas: Gráfica Central da Unicamp, 1993.

WERTSCH, J. V. Commentary on J. A. Lawrence and J. Valsiner “Conceptual roots of internalization: from transmission to transformation”. Human Development, Berkley, v. 36, n. 3, p. 168-171, 1993.

_____. Mind as action. New York: Oxford University Press, 1998.

_____. Voices of the mind: a sociocultural approach to mediated action. Cambridge: Harvard University Press, 1991b.

WERTSCH, J. V. Commentary on I. Arievitch and R. van der Veer “Furthering the internalization debate: Gal’perin’s contribution”. Human Development, Berkley, v. 38, n. 2, p. 127-130, 1995.

WERTSCH, J. V. A sociocultural approach to socially shared cognition. In: RESNICK, L. B.; LEVINE, J. M.; TEASLEY, S. D. (Org.). Perspectives on socially shared cognition. Washington: American Psychological Association, p. 85-100, 1991a.

_____.From social interaction to higher psychological processes: a clarification and application of Vygotsky’s theory. Human Development, Berkeley, v. 22, n.1, p. 1-22, 1979.

_____. Voices of collective remembering. New York: Cambridge University

Press, 2002.

_____. Vygotsky y la formación social de la mente. Buenos Aires: Paidós, 1985.
WERTSCH, J. V; DEL RIO, P.; ALVAREZ, A. Estudos socioculturais da mente. Porto Alegre: Artmed, 1998.

WITTGENSTEIN, L. Philosophical investigations. Oxford: Blackwell, 1972.

ZINCHENKO, V. P. Vygotsky' s ideas about units for the analysis of mind. In WERTSCH, J. V (Eds.). Culture, Communication and Cognition. New York, USA: Cambridge Uni. Press, 1985, p.94-118.

SurveyMonkey, http://www.surveymonkey.com (última visita em 19/02/2019)

APÊNDICES

APÊNDICE I

ATIVIDADE I: FUNÇÃO QUADRÁTICA

ATIVIDADE COM FUNÇÃO QUADRÁTICA – 19/05/2017

Atividade 1

1. No campo "Entrada" digite a função $f(x) = ax^2 - 1$
2. Como "a" não foi definido, será criado um controle deslizante para valores possíveis de "a"
3. Movimente o controle deslizante de "a" para variar os valores do mesmo e observe os gráficos de acordo com os valores do parâmetro "a"
4. Que conclusões você tira sobre os gráficos? Anote as observações do grupo no caderno de registros.
5. **Salve o gráfico com o nome: 2017_Projeto Funções Elementares Atividade 01_Grupo *"número do seu grupo"***
6. Qual o domínio e a imagem desta função? Você consegue generalizar o domínio e a imagem de acordo com os valores do parâmetro "a"? Anote no caderno de registros de seu grupo.
7. Coloque o controle deslizante em 1. Existem raízes reais para a função $f(x)$? (OBS.: Utilize o comando Raiz[*função, valor inicial, valor final*] = Raiz[*f*,-10,10] para determinar as raízes da função *f*)
8. **Salve o gráfico com o nome: 2017_Projeto Funções Elementares Atividade 02_Grupo *"número do seu grupo"***
9. Voltando à função $f(x) = ax^2 - 1$, existe uma expressão para se determinar as raízes? Qual? Desenvolva isso em seu caderno de registros.
10. Movimente o controle deslizante. Observe o que acontece e anote suas observações no caderno de registros.
11. Digite, agora, no campo "Entrada" a função $g(x) = \sqrt{x}$ (g(x)=sqrt(x))
12. Faça a função composta $h(x) = g \circ f\ (x) = \sqrt{ax^2 - 1}$
13. Movimente o controle deslizante de "a" para variar os valores do mesmo e observe os gráficos de acordo com os valores do parâmetro "a".
14. Que conclusões você tira sobre os gráficos? Anote suas observações no caderno de registros.

15. Qual o domínio e a imagem destas funções? Você consegue generalizar o domínio e a imagem de acordo com os valores do parâmetro "a"?
16. Quais as semelhanças e diferenças entre os domínios e a imagens das três funções, f, g e h? Anote em seu caderno de registros.
17. Coloque o controle deslizante em 1. Existem raízes reais para essas duas funções? (Utilize o comando Raiz[*função, valor inicial, valor final*] para determinar as raízes das funções *g* e *h*, caso existam.)
18. Movimente o controle deslizante. Observe o que acontece e anote suas observações no caderno de registros.
19. Caso vocês tenham obtido raízes para as duas funções, compare-as e explique o que está acontecendo e por quê.
20. **Salve o gráfico com o nome: 2017_Projeto Funções Elementares Atividade 03_Grupo *"número do seu grupo"***
21. Digite, agora, no campo "Entrada" a função $q(x) = \sqrt[3]{ax^2 - 1}$; (Lembre-se que a raiz cúbica pode ser dada pela potência 1/3)
22. Movimente o controle deslizante de "a" para variar os valores do mesmo e observe os gráficos de acordo com os valores do parâmetro "a".
23. Que conclusões você tira sobre os gráficos? Anote suas observações no caderno de registros.
24. Existem raízes reais? Existe uma expressão para se determinar as raízes? Qual?
25. Compare as raízes das funções *f, h e q* .
26. Qual o domínio e a imagem desta função? Você consegue generalizar o domínio e a imagem de acordo com os valores do parâmetro "a"?
27. Qual as semelhanças e diferenças entre os domínios e imagens dessas funções?
28. **Salve o gráfico com o nome: 2017_Projeto Funções Elementares Atividade 04_Grupo *"número do seu grupo"***

APÊNDICE II

ATIVIDADE II: FUNÇÃO RACIONAL

ATIVIDADE COM FUNÇÃO RACIONAL – 02/06/2017

1. Inicie a gravação e abra o GeoGebra.
2. No campo "Entrada" digite a função $f(x) = \frac{x+1}{x}$.
3. Qual o domínio e qual a imagem desta função? Anote em seu Caderno de Registro.
4. Vocês responderam à pergunta do item 3 com base na expressão da função (forma algébrica) ou com base no gráfico da função (forma geométrica)? Justifique em seu Caderno de Registro.
5. Vocês conseguem obter as respostas da pergunta do item 2 usando a outra forma de pensamento citada no item 3? Faça em seu Caderno de Registro.
6. No campo "Entrada" digite *y* = 1. Clique na reta (botão direito) e em "Propriedades" para alterar o estilo da reta para tracejado.
7. Coloque um ponto qualquer sobre o eixo-*x*.
8. Construa uma reta perpendicular ao eixo-*x* passando no ponto criado no item anterior.
9. Crie o ponto intersecção dessa reta com a curva.
10. Construa uma reta perpendicular ao eixo-*y* passando no ponto criado sobre a curva (item 9).
11. Crie o ponto intersecção dessa reta com o eixo-*y* e oculte a reta.
12. Crie um segmento de reta entre o ponto da curva e o ponto no eixo-*y*.
13. Qual o valor de *x* tal que *f*(*x*)=0? Como você observa isso no gráfico? Anote em seu Caderno de Registro.
14. Movimente o ponto do eixo-*x* de forma a responder à questão: O que acontece com a função quando o valor da variável *x* se aproxima do zero? Anote em seu Caderno de Registro.
15. O que acontece com a medida do segmento formado entre os pontos da curva e do eixo-*y*? Anote em seu Caderno de Registro.
16. A função está definida para x = 0, ou seja, existe *f*(0)? Anote em seu Caderno de Registro.
17. Para qual valor de *x* temos que *f*(*x*)=1? Como você observa isso no gráfico? Anote em seu Caderno de Registro.

18. Sabendo que: “Uma reta é chamada de **Assíntota ao Gráfico** de uma função quando a distância entre a reta e o gráfico tendo à zero, entretanto a reta e o gráfico não possuem pontos de interseção”, vocês identificam na construção feita alguma(s) reta(s) que possa ser chamada de assíntota ao gráfico? Qual(is)? Justifique em seu Caderno de Registro.
19. **Salve o gráfico com o nome: 2017_Projeto Funções Elementares_Atividade 05_Grupo *“número do seu grupo”***
20. No campo “Entrada” digite a função $g(x) = \frac{x}{x+1}$.
21. Qual o domínio e qual a imagem desta função? Anote em seu Caderno de Registro.
22. Você respondeu à pergunta do item 21 com base na expressão da função ou com base no gráfico da função? Vocês conseguem descrever as duas formas de resolver? Anote em seu Caderno de Registro.
23. Descrevam em seu Caderno de Registro, semelhanças e diferenças entre as funções $f(x) = \frac{x+1}{x}$ e $g(x) = \frac{x}{x+1}$.
24. No campo “Entrada” digite “Assíntotas[*g*]”. Nas propriedades destas retas mude o estilo para tracejado.
25. Crie um ponto sobre o gráfico da função *g*.
26. Construa uma reta perpendicular ao eixo-*x* passando por este ponto e outra reta perpendicular ao eixo-*y* passando pelo mesmo ponto.
27. Crie os pontos na intersecção destas retas com os eixos coordenados.
28. Oculte as retas perpendiculares e crie os segmentos que unem o ponto sobre a hipérbole e o ponto nos eixos coordenados.
29. Mude o estilo destes segmentos para tracejado.
30. Movimente o ponto sobre a curva e observe o que acontece com os valores da função quando o valor de *x* tende a -1? E quando este tende a infinito (positivo e negativo). Anote em seu Caderno de Registro.
31. Para qual valor de *x* tem-se que *g*(*x*)=1? Como você observa isso no gráfico? Anote em seu Caderno de Registro.

32. **Salve o gráfico com o nome: 2017_Projeto Funções Elementares_Atividade 06_Grupo *"número do seu grupo"***
33. No campo "Entrada" digite a função $h(x) = \frac{x^2+1}{x}$.
34. Vamos repetir os passos de 21 a 30, excetuando o item 24, para essa função.
35. Você sabe quais são as assíntotas para esse gráfico? Anote em seu Caderno de Registro.
36. Sem usar o comando "Assíntotas", desenhe no GeoGebra, as retas anotadas em seu Caderno de Registro.
37. O que acontece com a função quando o valor da variável tende a 0?
38. Qual o valor de *x* tal que *h*(*x*)=1? Como você observa isso no gráfico? Anote em seu Caderno de Registro.
39. **Salve o gráfico com o nome: 2017_Projeto Funções Elementares_Atividade 07_Grupo *"número do seu grupo"***
40. Repita os passos, de 34 a 38, para a função $p(x) = \frac{x}{x^2+1}$.
41. **Salve o gráfico com o nome: 2017_Projeto Funções Elementares_Atividade 08_Grupo *"número do seu grupo"***

APÊNDICE III

ATIVIDADE III: FUNÇÃO EXPONENCIAL E LOGARÍTMICA

ATIVIDADE COM FUNÇÃO EXPONENCIAL E LOGARITMICA – 23/06/2017

1. Inicie a gravação e abra o GeoGebra. Abra o arquivo do Triângulo de Sierpinski, ele é um exemplo de Fractal. Movimente o controle deslizante e preencha a tabela em seu Caderno de Registro.
2. Abra um novo arquivo do GeoGebra. No campo "Entrada" digite a função $f(x) = 3^x$ (digitar 3^x).
3. Qual o domínio e qual a imagem desta função? Anote em seu Caderno de Registro.
4. **Salve com o nome: 2017_Projeto Funções Elementares_Atividade 09_Grupo "número do seu grupo".**
5. Coloque um controle deslizante n, de números inteiros.
6. Digite o ponto (n,(1+1/n)^n). Habilite o rastro do ponto digitado.
7. Movimente n e registre em seu Caderno de Registro suas observações.
8. Digite a reta y=2.718. O que aconteceu? Anote em seu Caderno de Registro.
9. Esse valor 2.718 obtido na sequencia acima quando fazemos n muito grande é chamado de Número de Euler e é denotado por *e*. Oculte o ponto digitado.
10. Digite $g(x) = e^x$ (no campo de entrada digite "exp(x)") e $h(x) = 10^x$.
11. Qual o domínio e qual a imagem destas funções? Anote em seu Caderno de Registro.
12. Vocês responderam à pergunta do item 11 com base na expressão da função (forma algébrica) ou com base no gráfico da função (forma geométrica)? Justifique em seu Caderno de Registro.
13. Quais as semelhanças e diferenças entre estas três funções? Anote em seu Caderno de Registro.
14. **Salve com o nome: 2017_Projeto Funções Elementares_Atividade 10_Grupo "número do seu grupo".**
15. Num arquivo novo do GeoGebra coloque um controle deslizante a.
16. Digite no campo de entrada a função $f(x) = a^x$. Movimente o controle deslizante e descreva suas observações no seu Caderno de Registro.
17. **Salve com o nome: 2017_Projeto Funções Elementares_Atividade 11_Grupo "número do seu grupo".**

18. Digite as funções $f(x) = \frac{1}{2^x}$, $g(x) = \frac{1}{e^x}$ e $h(x) = \frac{1}{10^x}$ em um novo arquivo do GeoGebra.
19. Repita os itens 11 a 13 para essas novas funções.
20. **Salve com o nome: 2017_Projeto Funções Elementares_Atividade 12_Grupo "número do seu grupo".**
21. Em um novo arquivo redigite os seguintes pares de funções: $f(x) = 2^x$ com $g(x) = \frac{1}{2^x}$ e ainda as funções $h(x) = e^x$ e $l(x) = \frac{1}{e^x}$. Observe as duas primeiras funções e depois as outras duas, é possível fazer alguma generalização? Existe alguma simetria? Anote suas observações em seu Caderno de Registro.
22. Pensando em uma atuação como professor de uma sala de aula de Ensino Médio, o que vocês consideram importante destacar para seus alunos a respeito destas funções? Anote.
23. **Salve os gráficos com o nome: 2017_Projeto Funções Elementares_Atividade 13_Grupo *"número do seu grupo"***
24. No campo "Entrada" digite a função $f(x) = \log_2 x$, $g(x) = \log_e x$ e $h(x) = \log_{10} x$. (OBS: $log_{10} x = log\, x$ e $log_e x = ln\, x$)
25. Qual o domínio e qual a imagem destas funções? Anote em seu Caderno de Registro.
26. Vocês responderam à pergunta do item 3 com base na expressão da função (forma algébrica) ou com base no gráfico da função (forma geométrica)? Justifique em seu Caderno de Registro.
27. Quais as semelhanças e diferenças entre estas três funções? Na função $f(x) = \log_a x$, com $a > 1$, o que acontece com a "curva" da função?
28. **Salve os gráficos com o nome: 2017_Projeto Funções Elementares_Atividade 14_Grupo *"número do seu grupo"***
29. Em um novo arquivo do GeoGebra, repita os itens 25 a 27 para as funções $f(x) = \log_{1/2} x$, $f(x) = \log_{1/e} x$ e $f(x) = \log_{1/10} x$.
30. **Salve os gráficos com o nome: 2017_Projeto Funções Elementares_Atividade 15_Grupo *"número do seu grupo"***

31. Em um novo arquivo de GeoGebra, redigite e compare agora as funções $f(x) = 2^x$ com $g(x) = \log_2 x$. Depois $f(x) = e^x$ com $g(x) = \ln x$. É possível fazer alguma generalização? Trace a reta *y=x*. Existe alguma relação de simetria?.
32. Você, enquanto professor de uma sala de Ensino Médio, o que destacaria para seus alunos destas funções?
33. **Salve os gráficos com o nome: 2017_Projeto Funções Elementares_Atividade 16_Grupo *"número do seu grupo"***
34. Coloque um controle deslizante a**.**
35. Na função $f(x) = \log_a x$, o que acontece com a "curva" da função?
36. **Salve os gráficos com o nome: 2017_Projeto Funções Elementares_Atividade 17_Grupo *"número do seu grupo"***
37. Coloque dois controles deslizantes a, b de números reais num arquivo de GeoGebra. É possível generalizar algo sobre o "comportamento" das funções da forma $f(x) = 2^{x+a} + b$, com a ,b números reais? Anote em seu Caderno de Registro o que observou.
38. Qual é a função inversa de $f(x) = \log_2(x - 0{,}2) + 0{,}5$? Desenhe a função inversa de $f(x)$. Anote esta função em seu Caderno de Registro.
39. **Salve os gráficos com o nome: 2017_Projeto Funções Elementares_Atividade 18_Grupo *"número do seu grupo"***

APÊNDICE IV

ATIVIDADE IV: FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

ATIVIDADE COM FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS – 07/07/2017

1. Inicie a gravação e abra o GeoGebra.
2. No campo "Entrada" digite a função $f(x) = sen(x)$.
3. Clique com o botão direito do mouse na Janela de Visualização, escolha Janela de Visualização – Eixo-x. Marque a caixa Distância e selecione $\frac{\pi}{2}$. Feche a janela clicando no X no canto superior à direita. O que você observa? Anote em seu Caderno de Registro.
4. Qual o domínio e qual a imagem desta função? Anote em seu Caderno de Registro.
5. Vocês responderam à pergunta do item 4 com base na expressão da função (forma algébrica) ou com base no gráfico da função (forma geométrica)? O gráfico ajuda na resposta da imagem? Justifique em seu Caderno de Registro.
6. A função é periódica? Qual o período? É limitada? Vocês consideram mais fácil observar as propriedades citadas através da expressão algébrica da função ou do gráfico que a representa? Anote em seu Caderno de Registro.
7. Repita os procedimentos de 4 a 6 para a função $f(x) = sen(2x)$ e depois para $f(x) = sen(4x)$. Oculte temporariamente as funções que não estiver analisando.
8. Quais as diferenças e semelhanças entre os três gráficos? Anote em seu Caderno de Registro.
9. Repita agora os mesmos passos para $f(x) = sen(-x), f(x) = sen(-2x)$ *e* $f(x) = sen(-4x)$.
10. Quais as diferenças e semelhanças entre $f(x) = sen(-x)$ *e* $f(x) = sen(x)$, quanto ao domínio, imagem e período? Anote em seu caderno de Registro.
11. É possível alguma generalização com relação ao período e a imagem de funções da forma $f(x) = sen(a.x)$ com "a" sendo um número real diferente de zero.
12. **Salve o arquivo com o nome: 2017_Projeto Funções Elementares_Atividade 19_Grupo *"número do seu grupo"***

13. No campo “Entrada” digite a função $f(x) = 2.sen(x)$ e repita os passos de 4 a 6. O que mudou em relação ao gráfico da função $f(x) = sen(x)$? Anote em seu Caderno de Registros.

14. Sem fazer no GeoGebra, vocês conseguem dizer o que acontecerá com a função $f(x) = 5.sen(x)$? Anote em seu Caderno de Registros.

15. O que vocês destacariam da função $f(x) = a.sen(x)$, sendo “a” um número real. Anote em seu Caderno de Registros.

16. **Salve o arquivo com o nome: 2017_Projeto Funções Elementares_Atividade 20_Grupo *“número do seu grupo”***

17. Repita os procedimentos de 2 a 16 trocando para a função cosseno, isto é, $f(x) = cos(x)$.

18. **Salve cada um dos arquivos com o nome: 2017_Projeto Funções Elementares_Atividade 21_Grupo *“número do seu grupo” e* 2017_Projeto Funções Elementares_Atividade 22_Grupo *“número do seu grupo”*, respectivamente.**

19. Repita os procedimentos de 2 a 16 trocando para a função cosseno, isto é, $f(x) = tan(x)$.

20. **Salve cada um dos arquivos com o nome: 2017_Projeto Funções Elementares_Atividade 23_Grupo *“número do seu grupo” e* 2017_Projeto Funções Elementares_Atividade 24_Grupo *“número do seu grupo”*, respectivamente.**

21. Insira um seletor de número real *b* e as funções $f(x) = sen(x)$ + b, $g(x) = cos(x)$ + b e $h(x) = tg(x)$ + b, sendo “b” um número real diferente de zero. . Quais as mudanças nas funções de acordo com as mudanças do seletor. Anote em seu Caderno de Registros.

22. **Salve o arquivo com o nome: 2017_Projeto Funções Elementares_Atividade 25_Grupo *“número do seu grupo”***

23. Analise a ação dos parâmetros para a função $f(x) = a.sen(b.x + c) + d$, onde *a,b,c,d* são números reais não nulos. Repita o mesmo para a função cosseno e função tangente. Anote em seu Caderno de Registros.

24. **Salve cada um dos arquivos com o nome: 2017_Projeto Funções Elementares_Atividade 26_Grupo *"número do seu grupo"***
25. RESOLVENDO EQUAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS**:** Para resolver uma equação trigonométrica podemos utilizar a Janela CAS (Cálculo Algébrico Simbólico) do GeoGebra. Para isso abra um arquivo novo, clique em EXIBIR e depois em "Janela CAS".
26. Digite na primeira célula a equação $sen(3x) = sen(x)$.
27. Clique em Resolver uma ou mais equações (7º ícone).
28. Digite a função $sen(3x)$ na terceira célula.
29. Digite a função $sen(x)$ na quarta célula.
30. Digite, na quinta célula, Interseção[f,g]
31. Ilumine as células, clicando na "bolinha" abaixo do número de cada célula, na ordem inversa em que foram criadas. Registre suas análises no Caderno de Registro.
32. **Salve o arquivo com o nome: 2017_Projeto Funções Elementares_Atividade 27_Grupo *"número do seu grupo"***

GRUPO:_____

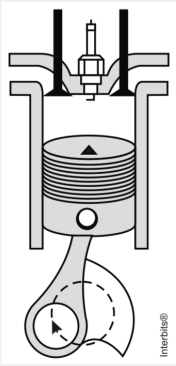
Nome: **Idade:**

Nome: **Idade:**

Nome: **Idade:**

APLICAÇÃO:

4) (UFPR 2013) O pistão de um motor se movimenta para cima e para baixo dentro de um cilindro, como ilustra a figura.



Suponha que em um instante t, em segundos, a altura $h(t)$ do pistão, em centímetros, possa ser descrita pela expressão:

$$h(t) = 4\text{sen}\left(\frac{2\pi\ t}{0{,}05}\right) + 4\ .$$

Analisando a questão acima, responda:

1. Qual a altura máxima e mínima que o pistão atinge?

2. Quantos ciclos completos esse pistão realiza, funcionando durante um minuto?

APÊNDICE V

TERMO DE CONSENTIMENTO PARA UTILIZAÇÃO DOS DADOS

Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE)

Convidamos o (a) Sr. (a) a participar do projeto de pesquisa intitulado "*Uso da ação mediada no ensino de Matemática*", coordenado pelos Profs. Dr. Aguinaldo Robinson de Souza e Emília de Mendonça Rosa Marques , com o objetivo de contribuir no estudo de uma metodologia para auxiliar o estudo de Matemática através de recursos computacionais. O trabalho tem como objetivo estudar como a ação mediada por recursos tecnológicos pode ser utilizada para auxiliar o processo ensino aprendizagem em Matemática no ensino superior.

Nessa pesquisa serão utilizados o software GeoGebra, além de pesquisas com os alunos através de questionários realizados no SurveyMonkey.

A sua participação será como aluno, auxiliando-nos ao responder os questionários que serão analisados pelo doutorando.

Todos os participantes terão seu sigilo e privacidade garantidos e, para isso, todo o material proveniente dessa pesquisa que for publicado, independente da forma ou meio de publicação, apresentará nomes fictícios e não conterá nenhuma imagem que permita a identificação dos participantes.

Devido à natureza da pesquisa, não existem riscos previsíveis ligados à sua participação. Caso aceite participar, estará contribuindo para o estudo de novas possibilidades para a educação em nosso país. O (a) Sr. (a) não terá nenhuma despesa e também não receberá nenhuma remuneração pela sua participação. Mesmo após consentir em participar da pesquisa, o(a) Sr. (a) poderá desistir da participação, em qualquer momento da pesquisa, independente do motivo e sem qualquer prejuízo à sua pessoa. A qualquer momento poderá também solicitar maiores esclarecimentos para o mestrando através do número de telefone (14) 3227-7983 ou ao coordenador da pesquisa através do número de telefone (14) 3103-6088 (ramal 7815), ou no endereço: Universidade Estadual Paulista – UNESP - Faculdade de Ciências, Departamento de Química, Av. Eng. Luiz Edmundo Carrijo Coube, 14-01, Vargem Limpa, CEP: 17033-360, Bauru, São Paulo.

Caso haja alguma dúvida, reclamação ou denúncia em relação aos aspectos éticos da pesquisa, o (a) Sr. (a) poderá entrar em contato com o Comitê de Ética em Pesquisa - CEP

da Faculdade de Ciências da UNESP, campus de Bauru, através do contato apresentado ao final do documento.

Consentimento pós-informação:

Eu, _____, fui informado sobre o que as atividades a serem desenvolvidas durante a pesquisa e as razões da solicitação para a minha participação. Assim, concordo em participar da pesquisa, sabendo que não obterei qualquer lucro financeiro e que poderei desistir a qualquer momento, dependendo da minha vontade. Esse documento é emitido em duas vias que serão ambas rubricadas em cada página e assinadas por mim e pelo pesquisador, ficando uma via com cada uma das partes interessadas.

_____ _____

Assinatura do participante Assinatura do pesquisador

Data: __/__/__ Local:_____

CEP - Comitê de Ética em Pesquisa da FC/Unesp Bauru:
Av. Eng. Luiz Edmundo Carrijo Coube, 14-01, Vargem Limpa. CEP: 17033-360. Bauru, São Paulo.
Fone: (14) 3103-6075
E-mail: cepesquisa@fc.unesp.br
Homepage: www.fc.unesp.br