UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Câmpus de Rio Claro - SP

Artur Rezzieri Gambera

Uma história da definição rigorosa das integrais definidas de Cauchy, Riemann e Jordan

Rio Claro - SP
2022

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“Júlio de Mesquita Filho”
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

Artur Rezzieri Gambera

Uma história da definição rigorosa das integrais definidas de Cauchy, Riemann e Jordan

Tese de Doutorado apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas do Câmpus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Educação Matemática.

Orientador: Henrique Lazari

Rio Claro - SP
2022

G189h

Gambera, Artur Rezzieri

Uma história da definição rigorosa das integrais definidas de Cauchy, Riemann e Jordan / Artur Rezzieri Gambera. -- Rio Claro, 2022

115 p.

Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp), Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro

Orientador: Henrique Lazari

1. Cálculo integral. 2. Integrais definidas. 3. História. 4. Matemática estudo e ensino. 5. Matemática historiografia. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“Júlio de Mesquita Filho”
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

ARTUR REZZIERI GAMBERA

Uma história da definição rigorosa das integrais definidas de Cauchy, Riemann e Jordan

Tese de Doutorado apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas do Câmpus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Educação Matemática.

Comissão Examinadora

Prof. Dr. HENRIQUE LAZARI
IGCE / UNESP/Rio Claro (SP)

Prof. Dra. MARCOS VIEIRA TEIXEIRA
IGCE / UNESP/Rio Claro (SP)

Profa. Dra. MARTA CILENE GADOTTI
IGCE / UNESP/Rio Claro (SP)

Prof. Dr. GUSTAVO BARBOSA
UNILA / Foz do Iguaçu (PR)

Prof. Dra. ADRIANA DE BORTOLI
FATEC / Lins (SP)

Conceito: Aprovado.

Rio Claro (SP), 9 de novembro de 2022.

Dedico a todos os estudantes e professores de cálculo e de análise.

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais Agostinho e Silma, por todo o prazer pelo estudo que me proporcionaram.

Aos meus irmãos de sangue Laura e Tuco por todo o afeto que me prodigaram.

Ao meu irmão por afinidade Antônio, que está presente na minha vida desde a época da escola.

À minha mulher Mariela que vem me acompanhando há mais de uma década com amor, carinho e paciência, e que é para mim um exemplo de virtudes.

Ao professor Hermes Antônio Pedroso, que me apresentou à História da Matemática.

À professora Adriana de Bortoli, que me indicou o caminho para que eu pudesse estudar o que eu gosto, e que me deu o prazer de tê-la na banca examinadora da presente tese.

À professora Arlete de Jesus Brito, que me mostrou um jeito de ver a história de um modo não ingênuo.

Ao professor Irineu Bicudo (in memoriam), que me acolheu e me orientou com toda atenção quando ingressei na pós-graduação.

Ao professor Henrique Lazari, com seu entusiasmo e bom humor, que me orientou durante este percurso com todo o carinho de um pai.

Á professora Rosa Monteiro, com seu afeto, que me mostrou que ensinar é cuidar.

Ao professor Fumikazu Saito, por nortear um modo de organização e análise de fontes históricas.

Aos professores Marcos Vieira Teixeira, Marta Cilene Gadotti e Gustavo Barbosa por terem aceitado o convite para compor a banca examinadora.

A todos os queridos alunos que tive no período em que lecionei Cálculo Diferencial e Integral para os cursos de Física, Meteorologia e Engenharia de Produção da UNESP de Bauru.

Ao Maestro Raumsol que, com seus ensinamentos e seu método, me ensina sobre a realidade dos pensamentos, e como cultivar os bons e rechaçar os ruins, buscando ser cada dia mais consciente da minha responsabilidade como servidor da humanidade.

À Capes pelo financiamento via processo nº 88887.357102/2019-00. O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

O passado é, por definição, um dado que nada mais modificará. Mas o conhecimento do passado é uma coisa em progresso, que incessantemente se transforma e aperfeiçoa.
(BLOCH, 2001, p. 43)

RESUMO

Tecemos uma história das integrais definidas sob o ponto de vista do rigor. Nossa pesquisa busca compreender como o rigor se manifestou no cálculo integral durante o século 19. Para isso, analisamos três fontes históricas de diferentes momentos do referido século que tratam da estrutura lógica da concepção de cálculo integral: o *Résumé des leçons données a l'École Royale Polytechnique sur le calcul infinitésimal* de Augustin-Louis Cauchy (1789 - 1857), o *Ueber die Darstellbarkeit einer Fuction durch eine trigonometrische Reihe* de Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826 - 1866), e o *Remarques sur les intégrales définies* de Marie Ennemond Camille Jordan (1838 - 1922). Fazemos uma análise epistêmica e contextual de partes de cada uma das fontes, assistidos por historiografias que delas tratam. Brindamos traduções de algumas das lições do tratado de Cauchy, referentes a integrais definidas e elementos dela, e do artigo de Jordan na íntegra. Plotamos, e mostramos como fazer, o gráfico de uma função com infinitas descontinuidades apresentada por Riemann, identificando a construção do referido gráfico como um recurso didático para aulas de análise.

Palavras-chave: história da análise, rigor, cálculo integral.

ABSTRACT

We have written a history of definite integrals form the point of view of rigor. Our research seeks to understand how rigor occurred in integral calculus in the 19th century. For this, we analyzed three historical sources that deal with the logical structure of the concept of integral calculus from different moments of that century: the Augustin-Louis Cauchy's Résumé des leçons données a l'École Royale Polytechnique sur le calcul infinitésimal; the Georg Friedrich Bernhard Riemann's Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe, and the Marie Ennemond Camille Jordan's Remarques sur les intégrales définies. We make an epistemic and contextual analysis of parts of each of the sources, assisted by historiographies that deal with them. We provide translations into Portuguese of some of the lessons from Cauchy's treatise, referring to definite integral and elements thereof, and Jordan's article. We plot, and show how to do it, the graph of a function with infinite discontinuities presented by Riemann, identifying it as a didactic resource for classes in analysis.

Keywords: history of analysis, rigor, integral calculus.

Lista de Figuras

Sumário

Introdução

É com muita alegria que apresento esta tese, que foi uma realização muito prazerosa e ao mesmo tempo muito árdua. A ideia veio de dois grandes interesses: a matemática e a história. A primeira sempre convidou o meu entendimento a decifrá-la. A segunda foi despertada pela afinidade que sinto por sua pesquisa e pela classe de questões que levanta. O estudo de ambas atraem meu espírito desde minhas primeiras recordações.

A pesquisa que faço é na história do cálculo integral, sub-área da história da análise. Esta tese é continuação da pesquisa que iniciei no mestrado, em que estudei a concepção de integral definida de Henri Lebesgue, inspirado por uma surpresa ao estudá-la numa disciplina da pós-graduação em Matemática Pura. O que nela me intrigou e estimulou minha vontade de estudar foi a pergunta: então existem integrais outras que não são a de Riemann? A construção de Lebesgue é elegante, simples e expande a abrangência de funções integráveis para além dos limites da concepção de Riemann. Naturalmente, o interesse por entender as concepções de integral anteriores a Lebesgue emergiram com a conclusão da dissertação.

Para delimitar o recorte, nos apoiamos na historiografia publicada sobre o tema, que nomeou o século 19 como o "século do rigor". Nele vários tratados que fundamentam a matemática surgiram; em particular sobre o cálculo integral. Definimos o objetivo como sendo o de realizar um mapeamento inicial de como esse rigor se manifestou na estrutura do cálculo integral produzido no século 19. Definimos rigor como uma prática discursiva do matemático – daquele que produz matemática. A expressão escrita do pensamento matemático é onde procuramos indícios desse rigor.

Assim, escolhemos três fontes sobre o assunto nesse período. Em cada terço do século 19 surgiu um tratado fundamental sobre o cálculo integral. Fundamental porque aborda seus fundamentos e, consequentemente sua estrutura. O rigor se manifesta na solidez desta estrutura. Cada texto é de autoria de um nome reconhecido no meio matemático atual: Cauchy, Riemann e Jordan. Muitas vezes reconhece-se os nomes e só; as histórias sobre eles são comumente ignoradas. A primeira fonte é o curso de cálculo infinitesimal publicado por Cauchy em 1823, que resume as aulas de cálculo infinitesimal que ministrou a alunos que viriam a cursar as diversas modalidades das engenharias; a segunda é a tese que habilitou Riemann à docência no nível superior, defendida em 1854 na Universidade de Gotinga; e a terceira um artigo de Jordan, publicado na França em 1892.

Buscamos realizar análises epistêmicas e contextuais de cada fonte, auxiliadas por historiografias afins com o tema. Resultaram-se disso três ensaios, um para cada texto. Em cada um discutimos a construção lógica da integral definida contida lá, mas também investigamos o contexto em que se deu o acontecimento. Cada texto possui rigores distintos. O rigor possui uma dimensão subjetiva, individual de cada matemático, mas cada texto foi escrito para um público diferente, demandando comunicações diferentes, consequentemente exigindo rigores diferentes também.

A historiografia afim com nosso tema relata que havia uma concepção inicial de cálculo integral, feita por Leibniz, e que por mais de um século não foi revisitada ou formulada, sendo o texto de Cauchy o primeiro a fazê-lo. A análise desta concepção anterior se mostrou oportuna, pois nos revelou um exemplo do "não-rigor".

Desta forma, a tese se divide em 4 capítulos. Cada um é um ensaio historiográfico independente, mas juntos complementam-se. A pesquisa que ensejou cada um teve também alcances distintos, determinados por questões como acessibilidade às fontes, e por serem temas mais ou menos historiografados.

O primeiro capítulo busca em dois textos de Leibniz, do século 17, uma primeira concepção do que seria um cálculo integral. Tive uma dificuldade linguística ao acessar estas fontes: foram originalmente escritas em latim e ainda me falta perícia para compreendê-lo. Há traduções de trechos para o inglês, mas nada na íntegra, e não existem traduções para o português, o que representa uma enorme falta para nossa classe de pesquisa. Nestes textos a ausência de rigor é identificada pelo próprio autor, mas justificada pela funcionalidade do método. Leibniz lega à posteridade a explicação da estrutura da ferramenta que construiu. Mas os termos e símbolos, e até as regras, são os mesmos que emprega-se até hoje. A discussão acerca do rigor envolve mais personagens igualmente célebres, como Newton e Berkeley. Newton criou um método análogo, com outros símbolos e procedimentos, mas que junto ao de Leibniz configurou-se como base do que é o cálculo. Berkeley foi quem, reconhecendo a utilidade do procedimento, criticou exatamente a sua falta de rigor. A crítica respinga em Leibniz. Os métodos em questão baseavam-se em diferenças e momentos, entendidas como variações momentâneas, ou infinitamente pequenas. Estas, dependendo da conveniência, significavam coisas distintas: às vezes eram iguais a 0 e às vezes não. Essa imprecisão no significado foi duramente criticada por Berkeley. Era uma crítica à falta de rigor na estrutura lógica da nova ferramenta; qualquer conclusão baseada no uso de quantidades imprecisas seria inválida, ainda que levasse a resultados verdadeiros. Leibniz não se incomodou muito em justificar suas regras, e expôs sua ideia de identificar uma área limitada por uma curva como uma soma infinita de áreas infinitesimais. Esta construção é pouco rigorosa porque falta clareza nos objetos e nos procedimentos.

O segundo capítulo é dedicado ao curso de cálculo que Cauchy ministrou para alunos de engenharia, publicado em 1823. Neste curso tratou do cálculo integral, estabelecendo o que é uma integral definida e resolvendo o problema do rigor nos infinitamente pequenos definindo-os claramente. Na introdução do livro argumenta que seu objetivo era o de conciliar o rigor com a simplicidade do uso dos infinitamente pequenos. A historiografia narra que o que motivou isso foi uma exigência institucional. O curso foi ministrado na École Polytechnique, onde Cauchy lecionou por volta de 15 anos. Foi aluno lá também, e estudou cálculo através do método dos limites. Quando lá retornou como docente, uma norma recém aprovada exigia que o cálculo fosse ensinado através do método dos infinitamente pequenos. Alegavam que este era mais simples, e que os alunos estavam seguindo as especialidades da engenharia sem bases o suficiente para empregar o cálculo de maneira satisfatória. Ainda que os professores tenham oposto resistência, a norma continuou em vigor – conseguiram, pelo menos, a permissão de ensinar por outros métodos, desde que fosse provada a relação deste com o do exigido. Cauchy contornou esta situação mesclando os dois métodos referidos, conciliando, assim, o rigor com a simplicidade. A fundação desta abordagem é a definição de infinitamente pequeno como sendo uma quantidade variável com limite zero. Dentre os diversos tópicos em que ocorreu esta conciliação, há o conceito de integral definida. A integral vinha sendo tratada como sub-área do cálculo diferencial, e sua definição se limitava à de operação inversa da derivação. Cauchy apresenta seu novo cálculo integral, fundamentado por uma caracterização clara e exata da integral definida. Seu livro é bipartido, cada metade é destinada a um dos cálculos. Essa conformação inédita é preservada até hoje, na organização que nossa época faz do cálculo. Ainda que alguns conceitos pareçam imprecisos para um olhar do século 21, a construção é rigorosa no sentido de esclarecer o papel cumprido por cada elemento, e a demonstração de existência da integral é essencialmente a mesma de hoje: dada uma partição de um intervalo em subintervalos com comprimento suficientemente pequenos, qualquer repartição de cada um deles resultará em uma diferença insensível nas respectivas somas, indicando a existência de um limite para estas somas. A ideia continua sendo a de aproximar o valor da área sob uma curva através de uma soma com um número suficientemente grande de áreas suficientemente pequenas de retângulos. O limite para o qual elas convergem dá um significado para a área delimitada pela curva, que será então o valor da integral definida. As curvas consideradas são, em geral, contínuas; dessa forma a definição vale somente para este tipo de função. Cauchy elabora uma extensão de sua teoria para os casos em que os limites de integração são infinitos ou quando a função assume valor infinito. São as nossas integrais impróprias. Depois de discutir os casos em que a tentativa de atribuir valores resulta em indeterminações, ele prova um critério para resolvê-las. Para isso define integrais definidas singulares, que são integrais tomadas em intervalos com extremos infinitamente pequenos, que se aproximam do infinito ou de um valor finito a, tal que $f(a)$ é infinito. Uma integral imprópria possui valor finito se, e somente se, o valor de cada uma de suas integrais definidas singulares é 0. Aqui a curiosidade em relação a este teorema me fez investigar se ele existe nos livros atuais. Encontrei enunciados que envolvem partes dele, mas não encontrei nenhuma demonstração – geralmente são deixadas como exercício. Cauchy é uma das pessoas mais historiografadas do mundo da matemática, mas sua produção foi enorme, e ainda há muito a ser pesquisado sobre ele. O tema rigor é bastante presente em seus trabalhos, e uma historiografia do rigor em Cauchy é um tema prolífico.

O terceiro capítulo foca uma tese de Riemann que revisita a estrutura criada por Cauchy. Foi feita para uma habilitação para lecionar no ensino superior, análoga ao atual doutorado. Ela foi defendida em 1854, mas veio a ser publicada apenas em 1867, um ano após a morte prematura do matemático. A obra em si trata de funções com infinitas descontinuidades, e uma pequena parte dela é dedicada à redefinição da integral definida. Este tipo de função não foi contemplado pela teoria de Cauchy, que tinha por hipótese a continuidade. Riemann retira esta exigência, argumentando que ela é desnecessária e restritiva, demonstrando que ainda assim pode existir limite para a soma definida por Cauchy. Na sequência dá um exemplo surpreendente de uma integral de uma destas funções. Este exemplo é identificado como um dos recursos didáticos que a história costuma oferecer para a área da Educação Matemática. Na tese de Riemann não há gráfico, e a vontade de visualizá-lo me moveu para domínio das Tecnologias Digitais. Assim, elaborei um modo de construí-lo, e descrevo-o na tese. Isso criou-me movimentos novos acerca do ensino de Análise nas universidades: em geral os livros dessa área não possuem gráficos, e eu sempre achei que isso era devido ao fato deles serem "invisualizáveis", como a famosa função de Dirichlet, que nos valores irracionais de x vale a, e nos valores racionais vale $b \neq a$. A construção da função de Riemann revelou um belo gráfico que ficaria lindo num dos livros da área; e mais do que isso, a experiência com a docência de Análise no curso de bacharelado, durante um estágio docência, levou-me a descobrir outro gráfico visualizável que está ausente nos livros. Claramente há espaço para futuros projetos, ainda na área de ensino de análise, sobre a identificação e classificação destas funções e de seus gráficos, bem como sobre as estratégias para construí-los com o recurso das tecnologias. Isso evidencia a interrelação que há entre história e educação matemática, ou as interfaces que compartilham. Quanto ao rigor, este é bem diferente daquele visto em Cauchy; este escreveu para alunos, e tinha o propósito de oferecer-lhes uma instrução elementar, Riemann, por outro lado, escreveu para uma banca de avaliadores. Um dos membros é nada menos do que Gauss. nNo há intenção de instruir, mas de trazer algo novo para a área de pesquisa. A historiografia apresenta a obra de Riemann, que não é tão extensa, como criativa e filosófica. Também diz que ele sofreu críticas, quanto ao rigor, de colegas como Weierstrass. Em relação ao acesso às fontes, me vali tanto da publicação de 1867, em alemão, como de uma tradução para o francês. Não encontramos traduções para o português de seus trabalhos.

O quarto e último capítulo é sobre um artigo de Jordan que refaz totalmente a estrutura do cálculo integral a partir de novos elementos advindos da teoria sobre conjuntos de Cantor – uma novidade da época. O artigo, publicado em 1892, intermedeia duas edições completamente diferentes do curso de análise de Jordan. Assim como Cauchy, ele estudou e lecionou na École Polytechnique. Na primeira edição de seu curso, de 1882, a concepção de integral é ainda a de Cauchy; desconsidera-se a de Riemann. A historiografia atribui isso à menor circulação de tratados alemães no território francês. Isso muda com o próprio Jordan que, absorvendo as novidades alemãs, reorganiza completamente o curso. O artigo que analisamos precede em um ano esta publicação, e é reproduzido nela sem maiores modificações. A ideia continua essencialmente a mesma: definir subconjuntos do domínio, que não se sobrepõem, com medida variável para zero, e definir o limite da soma de todas estas medidas como a integral, que será uma medida também; dependendo da dimensão trabalhada, ela será uma área, um volume, etc. Jordan argumenta que muito já se falou sobre a natureza das funções nesta questão, mas pouco sobre a dos conjuntos que nela podem ser estabelecidos. Argumenta também que a hipótese de que qualquer conjunto tem um tamanho determinado está longe de ser evidente, assim a primeira parte de seu artigo é dedicada à discussão sobre os conjuntos e à atribuição de um sistema de medidas para eles. Sua definição de integral transcende o plano e alcança espaços de maiores dimensões. Há também uma discussão referente às "integrais impróprias", mas com um método diferente do de Cauchy. Jordan peca em apenas um aspecto: não há um exemplo sequer de integral nessa nova estrutura, e isso faz uma tremenda falta. Reconhecemos o nome de Jordan em algumas ferramentas matemáticas, e até me recordo de ter visto seu nome vagamente associado a integrais no R^n, mas, por mais interessante e rigorosa que seja, não é muito ensinada atualmente. Em minha pesquisa de mestrado vi que Lebesgue o cita como fonte de inspiração, ao abrir a questão da integral vista como medida de um conjunto. Junto a isso, Jordan também não é uma figura muito historiografada. Ele pesquisou de maneira vasta, em diversos campos da matemática, e publicou bastante material. Tal como os outros, não tem ainda traduções de suas obras.

Pensamos que com isso cumprimos satisfatoriamente o objetivo de mapear historicamente o comportamento da função rigor não só através da variável tempo, mas num domínio um pouco mais contextual. A história é um campo de investigação muito profícuo, sendo enriquecido cada vez mais. Esse trabalho me introduziu mais fundo no ofício de historiador, e me reafirmou o desejo de investigar cada vez mais. Durante a expedição fiz inestimáveis amigos, colegas de área de investigação, e descobri que este é um ramo que não se realiza sozinho. O mapeamento dos sistemas de conhecimento do passado é uma tarefa tão gigantesca que fazê-lo sozinho resulta humanamente impossível. É impraticável analisar todos os tratados que já existiram, e os recortes que cada historiador faz são essenciais para tornar possível algum desenvolvimento historiográfico do que se propõe estudar. Mas o compartilhamento das descobertas permitem desbravar esse passado, e nos enchem de estímulos para realizar nossas pesquisas. Tive a grata experiência de participar, durante o doutorado, de congressos de história da ciência, e ter a sensação de ter encontrado com irmãos que eu não conhecia, tamanho o vínculo formado. Descobri também que habitava em mim um rigor de pesquisa histórica; um rigor envolvido com a estruturação da conclusão advinda da análise das fontes. Esse rigor exigia a existência de uma conexão entre a conclusão e a fonte, ainda que o pensamento passasse por intermediários, como traduções e interpretações historiográficas. Essa conexão, devendo ser lógica, não podia ser desfeita. Talvez numa espécie de tentativa de mesclar ambos os rigores que vivem em mim – o matemático e o histórico – escrevi destacando as definições em negrito, e mantive isso na versão final. Por sugestões da banca, as demonstrações estão destacadas tal como são nos livros de matemática de nossa época, com os famosos quadradinhos pretos que marcam o fim de uma argumentação. Também trago parte das traduções das fontes que realizei, e adianto que tenho boa parte do livro de Cauchy traduzida, e pretendo publicá-la futuramente. Percebi que a prática de traduzir para a língua materna as fontes estudadas é comum entre os historiadores, ainda que não venham a pulicá-las. A tradução é o primeiro estudo que se faz do texto, e nesse exercício vão surgindo diversas indagações que levam a caminhos inexplorados. Traduções comentadas são sempre obras historiográficas, muito ricas para quem estuda a fonte.

Desejo que a leitura deste trabalho seja tão prazerosa como foi a escrita. O cálculo e análise compõem um corpo de conhecimentos que é uma das criações mais maravilhosas da razão humana. Conhecer a história destes conhecimentos é conhecê-los melhor. A história auxilia na docência muitas vezes de maneira sutil, não se limitando em apenas uma metodologia para se fugir do ensino tradicional. A História da Matemática é um ramo da Matemática e por isso é necessário que esteja cada vez mais presente na formação do pesquisador e do professor de Matemática. Finalmente, parafraseando Marc Bloch, ainda que ela não tivesse utilidade nenhuma, pelo menos ela entretém. E como entretém!

1 O *calculus integrallis* de Leibniz

O cálculo de hoje herdou do trabalho de Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716) não só o nome, como também as notações e diversos termos técnicos. A ideia de seu método é publicada principalmente em dois artigos:

1684 *Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illi calculi genus* – ou, Um novo método para máximos e mínimos, assim como tangentes, que não é impedido por quantidades fracionárias nem irracionais, e um singular tipo de cálculo para isso.

1686 *De geometria recondita et analysi indivisibilium atque infinitorum* – ou, Sobre uma geometria recôndita e a análise dos indivisíveis e infinitos.

Tratam, respectivamente, das regras gerais do *calculus differentialis* e do *calculus integralis*, chamado também de *calculus summatorius*; este apresentado como método inverso daquele. Introduz as operações de **diferença** e de **soma**, opostas entre si. Infelizmente não encontramos tradução de nenhum dos dois para a língua portuguesa e nos valemos da coletânea de traduções para o inglês fornecida por Struik (2014) e Child (2005).

No primeiro destes artigos, traduzido na íntegra (Leibniz, 1684 apud Struik, 2014, p. 272), ele apresenta a diferença, que é processo que chamamos hoje de *diferenciação*. Para isso faz a seguinte construção geométrica. Seja uma curva YY, representada assim como costume na época, significando que todos os seus pontos serão chamados de Y; e seja também AX um eixo de referência para esta curva. Curva e eixo são associados de modo que seja possível encontrar para todo ponto Y um par de coordenadas chamadas **ordenada** e **abscissa**. A ordenada é definida como o segmento de reta XY perpendicular ao eixo AX, e leva o nome de y. A abscissa é o segmento AX, tomando o nome de x. O ponto A cumpre o papel de *origem* nesse sistema. Seja agora uma reta tangente à curva no ponto Y, interceptando o eixo no ponto D. A diferença de x, ou dx, é definida como sendo um segmento de reta qualquer – inclusive infinitamente pequeno – sobre AX, que gera um segmento dy, sobre XY, que está para dx assim como y está para XD. A Figura 1.1 representa esta construção.

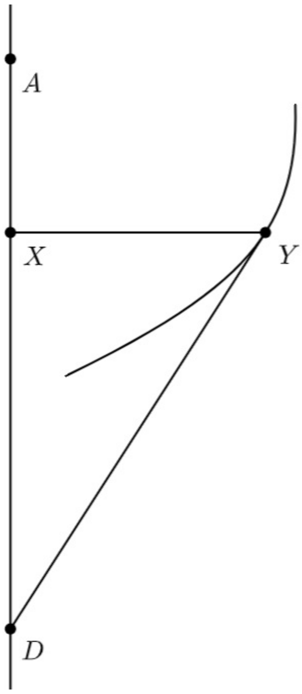


Figura 1.1: Coordenadas de um ponto de tangência de uma curva, adaptado da imagem encontrada em (STRUIK, 2014, p. 274).
Fonte: elaborado pelo autor.

Na sequência, Leibniz enuncia, sem provar, as regras das diferenças:

1 se a é uma constante dada, então $da = 0$ e $d(ax) = a\ dx$;

2 se todas as ordenadas y de uma curva são iguais às ordenadas v de outra, então $dy = dv$;

3 se $z - y + w + x = v$, então $d(z - y + w + x) = dv = dz - dy + dw + dx$;

4 $d(xv) = x\ dv + v\ dx$.

A primeira regra soluciona uma dúvida natural que surge desta concepção: *e se a tangente relacionada à curva em questão for paralela ao eixo AX?* Nesse caso o ponto D não existe, e o segmento dx relacionado a ele na construção feita não poderia ter um comprimento determinado; logo o estabelecimento de $dy = 0$ para qualquer comprimento possível de dx oferece uma solução inteligente para essa restrição geométrica. A segunda regra estabelece que não é possível que a uma mesma ordenada seja associada mais de uma diferença; a terceira corresponde às operações de soma e subtração de diferenças.

Para comentar sobre a quarta regra, é necessário falar um pouco do *Método das Fluxões* de Isaac Newton (1643 - 1727). As diferenças aqui tratadas cumprem na prática um papel análogo aos **momentos** no referido método. Momento é entendido como um incremento (ou decremento) momentâneo que uma variável sofre enquanto cresce (ou diminui) através de um movimento contínuo (Newton, 1974, p. 249). Os momentos não são considerados finitos, e também são chamados de **fluxões** ou velocidade do incremento. À cada quantidade variável A é associado um momento a, analogamente ao x e dx de Leibniz. A quarta regra, enunciada por este, mas sem receber qualquer explicação, ganha uma demonstração nas mãos de Newton:

Proposição 1.1. O momento de um retângulo AB é $Ab + bA$.

Demonstração: Um retângulo AB qualquer aumentado por um fluxo contínuo, quando faltava dos lados A e B metade de seus momentos $1/2a$ e $1/2b$, era $A - 1/2a$ vezes $B - 1/2b$, ou $AB - 1/2aB - 1/2bA + 1/4ab$; mas tão logo os lados A e B são aumentados pela outra metade de seus momentos, o retângulo torna-se $A + 1/2a$ vezes $B + 1/2b$, ou $AB + 1/2aB + 1/2bA + 1/4ab$. Subtraia deste retângulo o anterior, e restará o excesso $aB + bA$. Portanto, com os incrementos totais a e b dos lados, o incremento $aB + bA$ do retângulo é gerado. C.Q.D. (Ibid., p. 250).[1]

■

A Figura 1.2 ilustra a demonstração.

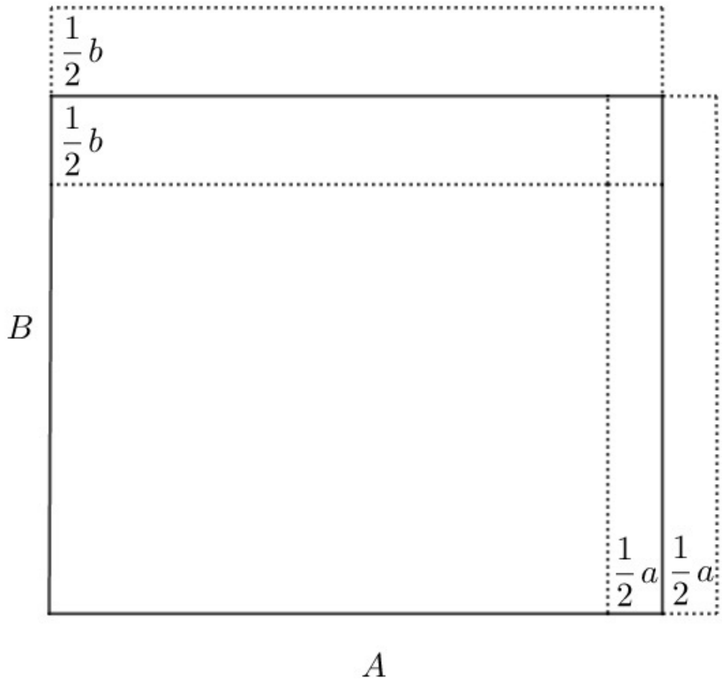


Figura 1.2: Incremento do retângulo
Fonte: elaborada pelo autor.

A partir desta proposição, toda a teoria de ambos os métodos é construída. Ela foi alvo de severas críticas, sendo a principal delas a do irlandês George Berkeley (1685 - 1753), que a julgou problemática e confusa. Segundo ele, os métodos não são muito diferentes entre si, e assim a crítica recai em Newton e Leibniz:

> Como nas Fluxões, o ponto de primeira importância, e que pavimenta o caminho para o resto, é encontrar a Fluxão de um Produto de duas Quantidades indeterminadas, então no *calculus differentialis* (cujo método é suposto ter sido emprestado do primeiro com algumas pequenas Alterações)

[1] Any rectangle, as AB, augmented by a continual flux, when, as yet, there wanted of the sides A and B half their moments $1/2a$ and $1/2b$, was $A - 1/2a$ into $B - 1/2b$, or $AB - 1/2aB - 1/2bA + 1/4ab$; but as soon as the sides A and B are augmented by the other half-moments, the rectangle becomes $A + 1/2a$ into $B + 1/2b$, or $AB + 1/2aB + 1/2bA + 1/4ab$. From this rectangle subtract the former rectangle, and there will remain the excess $aB + bA$. Therefore with the whole increments a and b of the sides, the increment $aB + bA$ of the rectangle is generated. Q.E.D.

> o Ponto principal é obter a diferença de tal Produto. Agora, a Regra para isso é obtida rejeitando o Produto ou Retângulo das Diferenças. E, em geral, é suposto que nenhuma Quantidade é maior ou menor pela Adição ou subtração de seu Infinitesimal: e de que consequentemente nenhum erro pode surgir de tal rejeição de Infinitesimais (Berkeley, 1734, p. 28).[2]

Ele critica a natureza incerta dos momentos ou diferenças, e a imprecisão com que são definidos. Em seu comentário sobre a demonstração da Proposição 1.1 questiona se faz sentido tomar a metade de uma quantidade infinitamente pequena. Segundo ele, o método verdadeiro e direto de determinar o momento do retângulo AB é tomando os incrementos dos lados totais e multiplicando-os para obter

$$(A + a)(B + b) = AB + aB + bA + ab,$$

então o incremento seria

$$aB + bA + ab.$$

Tal resultado difere do valor obtido por Newton em ab, e Berkeley questiona o porquê de terem sido desprezados. Sua crítica à argumentação lógica de um fundamento do método de Newton invalidaria todas as construções que fossem baseadas nele. Uma análise mais detalhada dessa crítica é feita por D'Ottaviano e Bertato (2015).

Para Leibniz, a possibilidade de se tomar dx e dy proporcionais a diferenças momentâneas é dada como um fato certo que não foi suficientemente explorado. A explicação é deixada para a posteridade, pois as regras funcionavam e permitiam a resolução de diversos problemas. As diferenças momentâneas são identificadas como *incrementos* ou *decrementos*, tal como em Newton. Segundo Leibniz, é sempre possível expressar uma distância infinitamente pequena por uma diferença determinada. O processo de descobrir uma *tangente* é identificado com o de desenhar uma reta que conecta dois pontos de uma curva a uma distância infinitamente pequena.

A operação inversa da diferença, ou seja, a soma, é publicada em 1686. Infelizmente, encontramos apenas uma tradução parcial do artigo em Struik (2014). Nele, Leibniz introduz o sinal

$$\int$$

e explica, de modo breve, que "[...] como potências e raízes no cálculo comum, soma e diferença, ou $\int$ e d, são opostas entre si". (Leibniz, 1686 apud Struik, 2014, p. 282).[3] Um exemplo do uso dessa nova notação é dado através da equação diferencial

$$p\,dy = x\,dx$$

que, submetida ao processo de soma, implica em

$$\int p\,dy = \int x\,dx = \frac{1}{2}xx.$$

[2]As in Fluxions the Point of first importance, and which paves the way to the rest, is to find de Fluxion of a Product of two indeterminate Quantities, so in the *calculus differentialis* (which Method is supposed to have been borrowed from the former with some small Alterations) the main Point is to obtain the difference of such Product. Now the Rule for this is got by rejecting the Product or Rectangle of the Differences. And in general it is supposed, that no Quantity is bigger or lesser for the Addition or Subduction of the Infinitesimal: and that consequently no error can arise from such rejection of Infinitesimals.

[3][...] like powers and roots in ordinary calculations, so here sum and difference, or $\int$ and d are each other's converse.

Um manuscrito não datado fornece mais informações sobre esta soma. O título do artigo é *Elementa calculi novi pro differentiis et summis, tangentibus et quadraturis, maximis et minimis, dimensionibus linearum, superficierum, solidorum, aliisque communem calculum trancendentibus* (ou, Os elementos do novo cálculo para diferenças e somas, tangentes e quadraturas, máximos e mínimos, dimensões de linhas, superfícies, e sólidos, e para outras coisas que transcendem outros meios de cálculo) e encontra-se em Child (2005, p. 136). Nele é feita a seguinte construção. Seja CC uma curva em relação a um eixo AB com ordenadas e abscissas BC e AB respectivamente. As coordenadas são consideradas no plural, pois B possui um caráter variável, de modo que assume posições B_1, B_2, ... ao longo do eixo AB. A cada um destes pontos está associado uma abscissa AB_i e uma ordenada B_iC_i, para $i = 1,\ 2,\ \ldots$. Estas ordenadas e abscissas são chamadas indistintamente de y e x respectivamente. Para cada C_i é tomado um ponto D_i no segmento $B_{i+1}C_{i+1}$ de modo que o segmento C_iD_i é paralelo ao eixo AB. As diferenças dx e dy são aqui identificadas com os segmentos C_iD_i, e os segmentos D_iC_{i+1}, respectivamente.

É dito que a linha BC desce ao longo da reta AB, e que tem seu comprimento aumentado; o que em linguagem matemática contemporânea é o mesmo que dizer que a curva é estritamente crescente. Se dx e dy são considerados infinitamente pequenos, cada D_iC_{i+1} representa o incremento momentâneo da linha BC. É tido como certo que a distância entre os pontos C_i e C_{i+1} será menor do que qualquer comprimento. Um **elemento da curva** é identificado como o segmento de reta $C_{i+1}C_i$, e também como o lado de um polígono de infinitos ângulos que representa a curva. A reta que passa por $C_{i+1}C_i$ e cruza o eixo no ponto T_i será tangente à curva, e os segmentos T_iB_i, denotados por t estão para as ordenadas B_iC_i assim como C_iD_i está para D_iC_{i+1}. Assim tem-se

$$\frac{t}{y} = \frac{dx}{dy}.$$

A Figura 1.3 ilustra esta construção

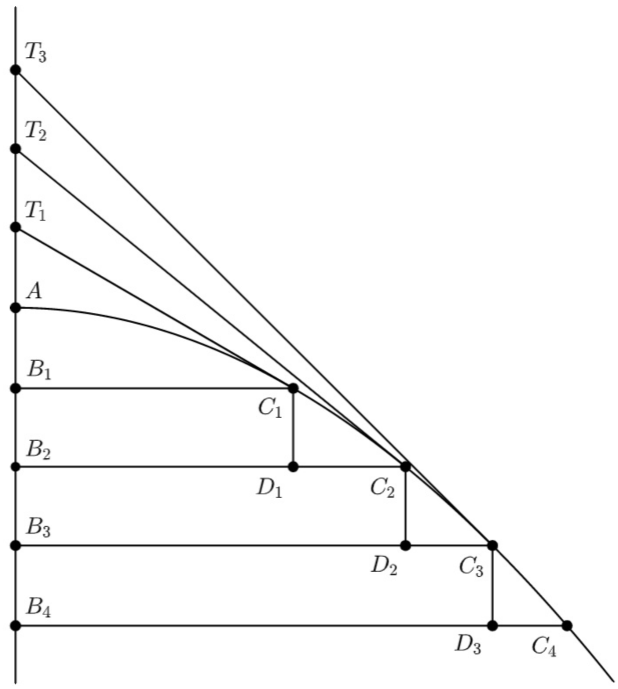


Figura 1.3: Diferenciais na curva de Leibniz, adaptado da imagem encontrada em (CHILD, 2005 p. 137).
Fonte: elaborado pelo autor.

Leibniz concebe o segmento B_iC_i como a soma de todas as diferenças $D_{i-1}C_i$, mesmo que sejam em número infinito. Então entre este segmento e o ponto A, que também é da curva, há tantas diferenças dy quantas possa ser desejado, até infinitas, de modo que a soma delas seja y. Isso é representado com o sinal

$$\int dy = y.$$

E a área da curva é representada pela soma de todos os retângulos formados pelas ordenadas e as diferenças das abscissas, ou a soma dos retângulos formados por y e dx, ou seja,

$$\int y\,dx.$$

Leibniz garante, também sem provar, que os triângulos $C_iD_iC_{i+1}$ podem ser omitidos sem risco, visto que são infinitamente pequenos comparados aos ditos retângulos.

Esta construção apela bastante para a intuição do leitor. No século seguinte, as *diferenças* e as *somas* se transformariam nas derivadas e nas integrais, respectivamente. A organização do método de Leibniz em dois cálculos perde força, e qualquer definição feita de uma integral dependia da de derivada; fazendo daquela uma subseção desta. Esta organização da disciplina voltou a ganhar força no século 19 com a definição formal de *integral definida*, que estabeleceu o cálculo integral independentemente do cálculo diferencial. Este é o tema do próximo capítulo.

2 A integral definida de Cauchy

O francês Augustin-Louis Cauchy (1789-1857), nascido em Paris, foi quem retomou a organização do cálculo em duas partes, como nos é familiar até hoje. Fez isso estabelecendo as *integrais definidas* como fundamento do cálculo integral. Até aquele momento, integrais vistas como uma soma infinita vinham sido consideradas um conceito intuitivo sem afirmação rigorosa. Os fatos de serem resultado do processo inverso ao das derivadas, e de estas terem sido mais exploradas no século 18, ofereciam um acesso às integrais via *Teorema Fundamental do Cálculo.*[1].

Cauchy revisitou o conceito de integral vista como soma infinita e o recriou como um limite somas, construindo-o a partir da partição do intervalo em subintervalos, fazendo-os diminuir de comprimento até o limite 0. Por exigências institucionais, ele teve de realizá-lo através do método dos *infinitamente pequenos*, o que faz mesclando-o com o método dos *limites* de maneira original.

Cauchy realizou isto enquanto lecionava análise – que era o nome da disciplina que ensinava cálculo – na *École Royale Polytechnique* (*EP*), básica para os cursos de engenharia da época. Como fruto deste labor, surgiu em 1823 o livro *Résumé des leçons données a l'École Royale Polytechnique sur le calcul infinitésimal* (ou, Resumo das lições dadas na Escola Real Politécnica sobre o cálculo infinitesimal), que chamaremos simplesmente de *Résumé* daqui em diante. Este livro é a nossa principal fonte histórica no presente capítulo. Nele encontram-se 40 lições, 20 dedicadas ao *cálculo diferencial* e 20 ao *cálculo integral.* A ambos é dedicado um número igual de lições, criando uma simetria que sugere a importância que o autor atribuiu às integrais definidas, colocando-as num mesmo patamar que as derivadas. A dita simetria é reforçada pelo fato de que cada lição ocupa, na edição original de 1823, exatamente 4 páginas.

Tratamos aqui da construção do fundamento do cálculo integral feita no *Résumé.* Após uma breve consideração acerca do contexto em que se deu a publicação do tratado, é feita uma apreciação da concepção de Cauchy sobre as integrais definidas, levando em conta o que expressa do que considerava rigoroso. Analisamos a demonstração de existência da integral definida de uma função contínua e a sua interpretação geométrica na obra. Por fim vemos como ele extrapola o conceito criado buscando dar um significado ao que chamamos de *integrais impróprias.*

No fim do capítulo encontram-se as traduções que realizamos das lições do *Résumé* utilizadas nesta análise.

[1] Teorema que relaciona as duas operações de diferenciação e integração unificando os cálculos numa teoria só. Seu enunciado contemporâneo é: se uma função $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ possui derivada integrável, então

$$F(b) - F(a) = \int_a^b F'(t)\, dt$$

(Lima, 2010a, p. 324).

2.1 Revisão bibliográfica

Cauchy foi muito prolífico, e como tal, muito historiografado. Logo, o mapeamento de tudo o que já se escreveu acerca de sua pessoa e obra resulta num corpus documental muito grande, impossível de avaliar num curto espaço de tempo. Buscamos realizar como este fato histórico é trazido pelos historiadores

Gillispie (1981) resume a produção de Cauchy nas diversas áreas do conhecimento em que se ocupou, além de traçar uma breve biografia. Foi, segundo o autor, quem definiu as integrais impróprias, o valor principal de uma integral e as integrais singulares, que identifica como integrais de funções infinitamente grandes sobre intervalos infinitamente pequenos. No entanto, não discorre sobre isso.

Grabiner (1981) traduz para o inglês e comenta as demonstrações sobre a *integral definida* e a *indefinida* do *Résumé*. Seu foco está na identificação de possíveis fontes para o pensamento de Cauchy em relação às ideias fundamentais do cálculo. Uma de suas argumentações é a de que ele, estando na função docente, se viu na posição de ter que explicar um conceito e por isso focou na fundamentação de ideias básicas do cálculo; portanto, uma motivação didática. Uma outra é a de que havia uma demanda manifesta – Fourier, por exemplo, com sua integral de funções não diferenciáveis em todos os pontos – por operar com integrais definidas enxergadas como áreas. No entanto, pouco menciona o papel das quantidades infinitamente pequenas na integral definida de Cauchy em seu breve comentário sobre sua extensão da teoria para as integrais impróprias.

Belhoste (1991) narra uma biografia de Cauchy e discute algumas de suas ideias, como a teoria de integração. Ao tratar das integrais impróprias, concentra sua atenção ao método utilizado para determinação de valores aproximados para estas, que é um tópico que precede a argumentação do critério para *integração imprópria* que avaliamos no presente trabalho. Ambos os conceitos utilizam a noção de *integral definida singular*. O autor mostra a definição de *valor principal* de uma integral, mas nada comenta sobre seu *valor geral*, que é um conceito correlato. Ele também não menciona a presença das quantidades infinitamente pequenas e o papel que cumprem nessa abordagem. Também não diz nada a respeito do critério de convergência de integrais impróprias de Cauchy.

Lützen (2003) observa que houve um movimento de rigorização no século 19, durante o qual a instrução matemática passou a ser realizada mais em escolas e universidades do que em escolas técnicas. Segundo o autor, Cauchy leva a fama de iniciador desse movimento devido à repercussão de seus livros, que contém a organização do cálculo nas aulas que ministrou na *EP*. Quanto à integral definida, reproduz algumas ideias da demonstração de existência de Cauchy e tece um breve comentário sobre a expansão do conceito para uma classe maior de funções, referente ao caso das integrais impróprias. No entanto, o autor não diz nada a respeito do critério para convergência destas, e não menciona os *infinitamente pequenos*.

Schubring (2005) busca rastrear o contexto em que Cauchy produziu suas integrais definidas, descobrindo que no ambiente interno da *EP* houve mudanças curriculares que exigiam o ensino de cálculo através do método dos *infinitamente pequenos*. Segundo o autor, os programas das aulas de Cauchy evidenciam a transição do uso exclusivo do método dos limites para a mescla entre este e o dos infinitamente pequenos. Os programas também evidenciam o deslocamento da noção de integral definida da posição de anexo das derivadas, algo comum na época, para a de fundamento do cálculo integral. O autor, ao tratar das integrais definidas, comenta a demonstração e argumenta que nela os *infinitamente pequenos* assumem um caráter funcional, mas não menciona o critério para integrais impróprias, que é uma evidência dessa funcionalidade mencionada.

Cates (2019) traduz o *Résumé* para o inglês tecendo comentários ao longo do texto. Ele argumenta que a razão primária do livro é a de cobrir o conteúdo, a ser estudado pelos alunos da *EP*, que seria avaliado por um professor externo à instituição – informação também presente em Schubring (2005, passim.). Isto evidencia, portanto, que o detalhamento das questões enredadas no cálculo é feito no *Résumé* na medida da exigência consensual entre os professores de análise envolvidos no processo avaliativo citado. Cates reproduz as lições que tratam do critério de convergência de integrais impróprias de Cauchy, mas é econômico nos comentários a respeito dela.

Nossa contribuição ao tema consiste numa descrição detalhada da demonstração da integral definida de Cauchy, bem como de suas aplicações na determinação de valores exatos e aproximados para seus valores, e do critério de convergência para integrais impróprias. Em ambas, fazemos notar o papel cumprido pelos *infinitamente pequenos*, que ganha no *Résumé* uma formulação rigorosa.

2.2 Contexto em que Cauchy produziu o *Résumé*

Na época de Cauchy, a *EP* funcionava como uma escola preparatória para as diferentes escolas de aplicação que formavam tanto engenheiros militares como civis. Ele estudou na *EP* entre 1805 e 1807, depois optou por concluir sua formação na *École des Ponts et Chaussées*.[2] A *EP* era responsável pela coordenação entre si e as escolas de aplicação; naquele então, não se limitava apenas à formação para serviços públicos, mas também visava uma educação científica. A disciplina *Análise*, comum a todas as especialidades da engenharia, era baseada completamente no método analítico. Como já dito, tratava-se do ensino de cálculo, que era concebido como uma teoria sobre curvas com fundamentação algébrica. A disciplina era tratada sob a concepção do método dos *limites*.

Em 1811 o Conselho de Aperfeiçoamento, que era um comitê responsável pela fundamentação e aplicação do que era ensinado na *EP*, decidiu que o caráter teórico das disciplinas oferecidas pela instituição fosse limitado apenas ao que poderia ser empregado nos serviços públicos, excluindo as questões que ainda não possuíssem aplicação direta. Exigiu, com isso, que soluções analíticas fossem substituídas pelas sintéticas ou aproximativas, consideradas menos rigorosas, menos elegantes, mas preferíveis para a formação dos futuros engenheiros por serem mais curtas e mais simples. Dessa forma, a escola abandonou a perspectiva educacional teórica independente e passou a integrar uma exclusiva para engenheiros. Essa mudança acarretou numa revisão dos cursos, enfocando a *análise* através do método dos *infinitamente pequenos*. Uma história mais detalhada do ocorrido pode ser vista em Schubring (2005). Segundo (Schubring; Roque, 2016 p. vi), "essa decisão representa a maior ruptura nas concepções de ensino nessa instituição, pois significa uma ruptura definitiva com a concepção analítica, dominante desde a Revolução Francesa."

Esta resolução não foi implementada tão facilmente; o corpo docente, acostumado

[2]Escola de Pontes e Estradas.

com práticas algébricas, opôs resistência à resolução. Além disso não havia livros-texto disponíveis para o novo método e o Conselho de Aperfeiçoamento demandava continuamente que os instrutores publicassem suas aulas com urgência. Enquanto a demanda não era satisfeita, foi permitida excepcionalmente a adoção do *Traité élémentaire* de Sylvestre François Lacroix (1843 - 1765), que havia sido docente de Cauchy na disciplina e praticava o método dos limites. Professores que resistiam à mudança no currículo, interpretando a resolução, concluíram que o Conselho de Aperfeiçoamento não apresentou um novo programa para o ensino de análise. O Conselho, então, nomeou um grupo interno à *EP* responsável pela criação deste programa que, dessa forma, logrou aprovar um no qual o método dos infinitamente pequenos não fosse mais exclusivo, permitindo ensinar por outros métodos, desde que a compatibilidade destes com aquele fosse evidenciada.

Foi nesse contexto de mudanças curriculares que Cauchy, no final de 1815, retornou à *EP*, agora na condição de docente, e lá trabalhou até 1830. Em 1823 publica seu *Résumé*, que contém um registro de como ele lidou com essa exigência da instituição.

O problema do rigor é advertido logo no início de seu livro. O objetivo é realizar uma conciliação entre a simplicidade decorrente do uso direto das *quantidades infinitamente pequenas* e o rigor é admitido como uma exigência autoimposta. A palavra "rigor" era recorrente no vocabulário de Cauchy, aparecendo em seus livros, artigos e cartas. Ele o considerava necessário às ciências matemáticas, e a mudança curricular que teve que acatar carecia, em seu julgamento, do rigor que professava. A estratégia, para lidar com isso, foi a de um espírito ativo que soube se adaptar de forma produtiva a ambas as exigências: definir os *infinitamente pequenos* como variáveis com limite zero. Essa conciliação bem sucedida permitiu que ele praticasse e divulgasse seu método, que se tornou muito bem conhecido por todo o mundo.

2.3 A integral definida de Cauchy

Uma construção rigorosa para Cauchy era uma construção geométrica, ou seja, realizada a partir de elementos básicos, caracterizada no método sintético. Na seguinte citação justifica seu juízo:

> Quanto aos métodos, procurei dar-lhes todo o rigor que exigimos na geometria, de modo a jamais recorrer às razões advindas da generalidade da álgebra. As razões desta espécie, mesmo comumente admitidas, [...], só podem ser consideradas, me parece, como induções apropriadas para fazer pressentir, às vezes, a verdade, mas que pouco concordam com a exatidão tão vangloriada das ciências matemáticas. Devemos ainda observar que elas tendem a atribuir às formulas algébricas uma extensão indefinida, enquanto que, na realidade, a maior parte destas fórmulas subsistem unicamente sob certas condições, e para certos valores das quantidades que contêm. Determinando estas condições e estes valores, e fixando de uma maneira precisa o sentido das notações que me sirvo, faço desaparecer toda incerteza; e assim as diferentes fórmulas não apresentam mais do que as relações entre as quantidades reais, relações que são sempre fáceis de verificar pela substituição dos números pelas próprias quantidades. É verdade que, para me manter constantemente fiel a estes princípios, me vi forçado a admitir vá-

> rias proposições que possivelmente parecerão um pouco difíceis à primeira vista. (Cauchy, 1821, p. ij).[3]

A crítica que faz à respeito da *generalidade da álgebra* aqui é a de que ela, por si só, não é suficiente para fundamentar um conceito, visto que permite uma aplicação que excede, por vezes, o espaço de sua validade; daí que vêm as indeterminações. Em suma, a álgebra da época consistia em regras úteis para a resolução de problemas; ao serem aplicadas sem o devido cuidado podiam levar a resultado inconsistentes.[4] A citação nos indica que o rigor de Cauchy está associado à determinação das condições e valores para as quais as fórmulas fazem sentido. Veremos que ele segue este princípio na construção da integral definida ao determinar primeiro as condições para o conceito ser válido, e em seguida ao atribuir-lhe notação.

Inicialmente vamos olhar para o que ele define por **limite**, **quantidade infinitamente pequena** e **função contínua**. Um conceito básico às três noções é o de quantidade **variável**. Todas elas encontram-se explicadas nas duas primeiras Lições do *Résumé*, que se encontram traduzidas no fim do capítulo.

Uma quantidade variável y é entendida como recebendo diversos valores sucessivos que, em muitos casos, são dados por uma variação Δy. Em oposição, uma quantidade **constante** recebe apenas um valor. Para Cauchy, quantidade não se identifica com **número**:

> Adotaremos sempre a denominação de *número* no sentido empregado na Aritmética, fazendo nascer os números da medida absoluta das grandezas, e aplicaremos unicamente a denominação de *quantidades* às quantidades *reais positivas* ou *negativas*, isto é, aos números precedidos de sinais $+$ ou $-$ (Id, p. 17).[5]

Nota-se que o autor busca na geometria a natureza do número, fazendo este surgir de uma medida, o que lhe-impõe a restrição de ser sempre positivo. Quantidades são definidas a partir da ideia de número precedido de um sinal, admitindo valores negativos e positivos. Cauchy esclarece a finalidade de cada um:

[3]Quanto aux méthodes, j'ai cherché à leur donner toute la rigueur qu'on exige en géométrie, de manière à ne jamais recourir aux raisons tirées de la généralité de l'algèbre. Les raisons de cette espèce, quoique assez communément admises, [...], ne peuvent être considérées, ce me semble, que comme des inductions propres à faire pressentir quelquefois la vérité, mais que s'accordent peu avec l'exactitude si vantée des sciences mathématiques. On doit même observer qu'elles tendent à faire attribuer aux formules algébriques une étendue indéfinie, tandis que, dans la réalité, la plupart de ces formules subsistent uniquement sous certaines conditions, et pour certaines valeurs des quantités qu'elles renferment. En determinant ces conditions et ces valeurs, et en fixant d'une manière précise le sens des notations dont je me sers, je fais disparaître toute indcertitude; et alors les différentes formules ne présentent plus que des relations entre les quantités réelles, relations qu'il est toujours facile de vérifier par la substitution des nombres aux quantités elles-mêmes. Il est vrai que, pour rester constamment fidèle à ces principes, je me suis vu forcé d'admettre plusieurs propositions qui paraîtront peut-être un peu dures au premier abord.

[4]Isso é próprio do método analítico, no qual se supõe verdadeira a regra algébrica e, a partir disso, busca-se os valores que a torna válida. A integral concebida como resultado do processo inverso das derivadas é claramente um apelo à *generalidade da álgebra*.

[5]Nous prendrons toujours la dénomination de *nombres* dans le sens où on l'emploie en Arithmétique, en faisant naître les nombres de la mesure absolue des grandeurs, et nous appliquerons uniquement la dénomination de *quantités* aux *quantités réelles positives* ou *négatives*. c'est-à-dire aux nombres précédés des signes $+$ ou $-$.

> [...] consideraremos as quantidades como destinadas à exprimir acréscimos ou diminuições, de modo que uma grandeza dada será simplesmente representada por um número, se nos contentarmos a compará-la a uma outra grandeza de mesma espécie tomada por unidade, e por este número precedido do sinal $+$ ou do sinal $-$, se a consideramos como devendo servir ao crescimento ou à diminuição de uma grandeza fixa da mesma espécie (Ibid., p. 17).[6]

Números servem, assim, para medir e as quantidades para representar um tipo de variação.

O limite de uma quantidade variável é o valor fixo para o qual os sucessivos valores a ela atribuídos aproximam-se indefinidamente de modo a diferir tão pouco quanto desejado; a quantidade cujo limite é 0 é dita tornar-se *infinitamente pequena*.

Uma função de uma variável é uma variável com uma relação de interdependência com a primeira. Uma delas é escolhida como parâmetro e chamada de **independente**, e as outras recebem o nome de funções desta. Nas palavras de Cauchy:

> Quando quantidades variáveis são relacionadas entre si de tal forma que, sendo o valor de uma delas dado, podemos concluir os valores de todas as outras, concebemos comumente estas diversas quantidades expressas por meio de uma entre elas, que toma então o nome de *variável independente*; e as outras quantidades, expressas por meio da variável independente, são o que chamamos de *funções* desta variável (Id., 1823, p. 5).[7]

Assim, y é função de x se

$$y = f(x)$$

e a variação que sofrem é determinada pela fórmula

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x).$$

A continuidade é estabelecida fazendo $\Delta x = i$ um acréscimo infinitamente pequeno da variável x. Cauchy define:

> A função $f(x)$ admitindo um valor único e finito para todos os valores de x compreendidos entre dois limites dados, quando a diferença
>
> $$f(x + i) - f(x)$$

[6][...] nous regarderons les quantités comme destinées à exprimer des accroissements ou des diminutions; en sorte qu'une grandeur donnée sera simplement représentée par un nombre, si l'on se contente de la comparer à une autre grandeur de même espèce prise pour unité, et par ce nombre précédé du signe $+$ ou du signe $-$, si on la considère comme devant servir à l'accroissement ou à la diminution d'une grandeur fixe de la même espèce.

[7]Lorsque des quantités variables sont tellement liées entre elles, que, la valeur de l'une d'elles étant donnée, on puisse en conclure les valeurs de toutes les autres, on conçoit d'ordinaire ces diverses quantités exprimées au moyen de l'une d'entre elles, qui prend alors le nom de *variable indépendante*; et les autres quantités, exprimées au moyen de la variable indépendante, sont ce qu'on appelle des *fonctions* de cette variable.

> sempre é uma quantidade infinitamente pequena entre estes limites, dizemos que $f(x)$ é *função contínua* da variável x entre os limites em questão (ibid., p. 8).[8]

A integral definida de uma função $f(x)$ contínua entre os valores finitos x_0 e X, tal como Cauchy a enunciou na 21ª lição do *Résumé*, é apresentada como o limite da soma

$$S = (x_1 - x_0)f(x_0) + (x_2 - x_1)f(x_1) + \cdots + (X - x_{n-1})f(x_{n-1}) \tag{2.1}$$

quando o valor de cada uma das diferenças

$$x_1 - x_0,\ x_2 - x_1,\ x_3 - x_2, \ldots,\ X - x_n \tag{2.2}$$

torna-se infinitamente pequeno através do aumento indefinido da variável n. As diferenças (2.2) são chamadas de **elementos** da diferença $X - x_0$, o que as caracteriza como fundamento da construção, claramente de cunho sintético. Ele demonstra que a quantidade (2.1) tem um limite determinado quando a partição considerada é refinada constantemente de modo que a medida de cada subintervalo tenda a zero. Faz isso observando que S depende do modo de divisão de $X - x_0$, que é configurado nos n elementos de $X - x_0$ e de seus valores numéricos. A existência do limite se baseia na ideia de que se o número de elementos for aumentado e, com isso, seus valores numéricos diminuídos indefinidamente, então o modo de divisão de $X - x_0$ não influenciará perceptivelmente sobre o valor de S, que se tornará sensivelmente constante. Disso conclui-se que a soma S alcançará um limite que depende apenas da expressão de $f(x)$ e dos valores extremos do intervalo x_0 e X. É uma abordagem aproximativa do valor exato seguindo o princípio do método da exaustão de Eudoxo.

O argumento se baseia na comparação entre dois valores de S considerando dois modos de divisão diferentes; primeiro para o caso em que um destes modos consiste na partição de uma partição dada, e na sequência para o caso em que os dois modos não possuem necessariamente uma interdependência. Se o modo de divisão fornece elementos com valor numérico suficientemente pequeno, a diferença entre os valores de S é insensível. A palavra *insensível* no texto de Cauchy sugere a ideia de erro desprezível na aproximação do valor procurado. A exaustão de Eudoxo terminaria neste ponto. Cauchy dá continuidade ao processo de reparticionar o intervalo e argui que assim a soma (2.1) se aproxima de um valor constante: o limite que será então a integral definida.

A demonstração é como segue. Se for considerado a diferença $X - x_0$ como o único elemento, então tem-se

$$S = (X - x_0)f(x_0). \tag{2.3}$$

Quando a diferença $X - x_0$ é dividida em n elementos $x_1 - x_0$, $x_2 - x_1$, $\ldots$, $X - x_{n-1}$, o valor de S é igual à soma desses elementos multiplicada por uma média entre os

[8] Lorsque, la fonction $f(x)$ admettant une valeur unique et finie pour toutes les valeurs de x comprises entre deux limites données, la diférence

$$f(x + i) - f(x)$$

est toujours entre ces limites une quantité infiniment petite, on dit que $f(x)$ est *fonction continue* de la variable x entre les limites dont il s'agit.

coeficientes $f(x_0)$, $f(x_1)$, ..., $f(x_{n-1})$.[9] Isso é consequência de um resultado, provado em (Id, 1821, p. 28), e reescrito aqui com alguma modificação visando a simplicidade:

Proposição 2.1. Sejam α_1, α_2, α_3, ..., α_n quantidades de mesmo sinal e a_1, a_2, a_3, ..., a_n quantidades quaisquer, então a soma

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_n a_n$$

é equivalente ao produto de

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$$

por uma média entre as quantidades a_1, a_2, ..., a_n.

Como todos os elementos tem mesmo sinal, então segue deste resultado que

$$(x_1 - x_0)f(x_0) + (x_2 - x_1)f(x_1) + \cdots + (X - x_{n-1})f(x_{n-1}) = (X - x_0)M,$$

em que M é a média entre os valores $f(x_0)$, $f(x_1)$, ..., $f(x_{n-1})$.

O valor de M é determinado como segue: como cada coeficiente $f(x_j)$, com $j = 0, 1, \ldots, n$, é um valor particular da expressão

$$f[x_0 + \theta(X - x_0)],$$

com $0 \leq \theta \leq 1$, então a média procurada também tem a expressão acima para um valor particular de θ. Portanto a equação (2.1) pode ser substituída por

$$S = (X - x_0)f[x_0 + \theta(X - x_0)], \tag{2.4}$$

para um valor particular de θ.

Para demonstrar a convergência da soma são dois casos a considerar:

(i) as expressões (2.2) são particionadas em novos elementos;

(ii) são escolhidas duas partições quaisquer.

No caso (i) os n elementos na expressão são reparticionados em novos elementos mais finos, ou seja, tem-se para cada diferença $x_{j+1} - x_j$ a decomposição

$$x_{j+1} - x_j = (y_1 - x_j) + (y_2 - y_1) + (y_3 - y_2) + \cdots + (y_m - y_{m-1}) + (x_{j+1} - y_m),$$

com m natural. Assim, cada uma das expressões

$$(x_{j+1} - x_j)f(x_j)$$

em (2.1), pelas mesmas razões que fornecem (2.4), podem ser reescritas da forma

$$(x_{j+1} - x_j)f[x_j + \theta_j(x_{j+1} - x_j)],$$

[9]Para Cauchy (1821, p. 365), uma quantidade h é uma média entre várias quantidades $x_1 < \cdots < x_n$ se for uma quantidade compreendida entre x_1 e x_n. Isso ocorre quando as duas diferenças

$$x_n - h, \quad h - x_1$$

têm mesmo sinal. Dessa forma, qualquer x_i, $i = 2, \ldots, n-1$, pode ser uma média entre x_1, x_2, ..., x_n. Em suma, uma média entre quantidades é qualquer valor intermediário à maior e à menor delas.

com $0 \leq \theta_j \leq 1$.

Com este novo modo de divisão o valor de S variará para

$$S = (x_1 - x_0)f[x_0 + \theta_0(x_1 - x_0)] + \cdots + (X - x_{n-1})f[x_{n-1} + \theta_{n-1}(X - x_{n-1})]. \quad (2.5)$$

A continuidade da função f permite reescrever cada expressão

$$f[x_j + \theta_j(x_{j+1} - x_j)] \quad \text{como} \quad f(x_j) \pm \varepsilon_j,$$

e assim, obtêm-se

$$S = (x_1 - x_0)[f(x_0) \pm \varepsilon_0] + \cdots + (X - x_{n-1})[f(x_{n-1}) \pm \varepsilon_{n-1}], \quad (2.6)$$

que é o mesmo que

$$S = (x_1 - x_0)f(x_0) + \cdots + (X - x_{n-1})f(x_{n-1}) \pm \varepsilon_0(x_1 - x_0) \pm \cdots \pm \varepsilon_{n-1}(X - x_{n-1}). \quad (2.7)$$

Cauchy argumenta que para elementos com valores numéricos muito pequenos, cada uma das quantidades $\pm\varepsilon_j$ será também muito pequena. Não há consenso na literatura sobre Cauchy a respeito desta passagem: para ser válida nos critérios atuais é exigida a hipótese de que a função f é uniformemente contínua.[10] No entanto, (Cauchy, 1823, p. 93) afirma como hipóteses na construção da integral definida que: (1) os limites x_0, X são quantidades finitas, e (2) a função $f(x)$ permanece finita e contínua entre estes mesmos limites. O modo como Cauchy opera, mostra que os valores $f(x_0)$ e $f(X)$ são sempre considerados, assim as funções consideradas por ele são, em termos atuais, limitadas e definidas no intervalo fechado $[x_0, X]$. Uma função contínua nestas condições é uniformemente contínua.[11] Dessa maneira, a hipótese discutida como necessária para que a afirmação do início do parágrafo seja válida, em realidade não o é, por ser consequência das hipóteses admitidas na construção da integral definida.

Retomando a demonstração, a soma

$$\pm\varepsilon_0(x_1 - x_0) \pm \cdots \pm \varepsilon_{n-1}(X - x_{n-1})$$

[10] A continuidade simples, do modo como atualmente é definida, não garante que a diminuição indefinida do valor numérico do elemento acarrete em valores cada vez menores de ε_j. Um exemplo é a função

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

tomada entre os valores 0 e 1. Dado $\varepsilon_j > 0$, para qualquer $\delta > 0$, existe x tal que $x < \delta$ e $x < \dfrac{1}{3\varepsilon_j}$, de modo que

$$\left| x + \frac{\delta}{2} - x \right| < \delta,$$

mas a diferença

$$\left| f(x) - f\left(x + \frac{\delta}{2}\right) \right| = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{x + \frac{\delta}{2}} \right| = \left| \frac{\delta}{x(2x + \delta)} \right| > \frac{\delta}{3\delta x} = \frac{1}{3x} > \varepsilon_j.$$

Isso quer dizer que mesmo f sendo uma função contínua na definição de Cauchy, ela não obedece à propriedade por ele enunciada. A continuidade uniforme resolve este problema. Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é *uniformemente contínua* quando, para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $x,\ y \in X$, $|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$, (Lima, 2010a, p. 241).

[11] Decorre do teorema: se X é um intervalo compacto, i. e. fechado e limitado, então a função contínua $f : X \to \mathbb{R}$ é uniformemente contínua, (Lima, 2010a, p. 243).

também terá um valor muito pequeno e a diferença entre (2.1) e (2.7) resultará insensível. Isso significa que se já são considerados elementos com valores suficientemente pequenos, a repartição destes resultará em uma alteração desprezível no valor procurado.

Para o caso (ii), no qual considera-se dois modos de divisão diferentes, se os elementos em cada um já possuem valores numéricos suficientemente pequenos, basta compará-los a um terceiro modo formado pelas duas partições. Nas palavras de Cauchy:

> Poderemos comparar estes dois modos a um terceiro escolhido de tal modo que cada elemento, tanto do primeiro como do segundo modo, seja formado pela reunião de vários elementos do terceiro. Para que esta condição seja cumprida, será suficiente que todos os valores de x, interpostos nos dois primeiros modos entre os limites x_0, X, sejam empregados no terceiro, e provaremos que altera-se muito pouco o valor de S, passando do primeiro ou do segundo modo ao terceiro, consequentemente passando do primeiro ao segundo (Id., 1823, p. 83).[12]

Pelo que foi provado em (i), altera-se muito pouco o valor de S quando se passa do primeiro ou do segundo modo ao terceiro. Em decorrência disso, altera-se muito pouco passando do primeiro ao segundo.

Quando os elementos da diferença $X - x_0$ tornam-se infinitamente pequenos, o que nesta concepção ocorre através de aplicações sucessivas infinitas de qualquer um dos dois processos descritos acima, então o modo de divisão não terá influência sobre o limite de S. Assim, Cauchy conclui sua demonstração:

> [...] se fizermos decrescer indefinidamente os valores numéricos destes elementos, aumentando seu número, o valor de S acabará sendo sensivelmente constante ou, em outros termos, ele terminará alcançando um certo limite que dependerá unicamente da forma da função $f(x)$ e dos valores extremos x_0, X atribuídos à variável x. Este limite é o que chamamos uma *integral definida.* (ibid., p. 83).[13]

Conforme observa Grabiner (2005), há aqui uma suposição implícita de que se os valores de S tornam-se cada vez mais próximos entre si, a medida em que n cresce e $(x_j - x_{j-1})$ decresce correspondentemente, então existe limite para a variável S. Guardadas as lógicas distinções entre o *cálculo integral* de hoje e o daquela época, a ideia de refinamento das partições contidas no trabalho de Cauchy ainda está presente nos cursos de análise real.

[12]On pourra comparer ces deux modes à un troisième tellement choisi, que chaque élément, soit du premier, soit du second mode, se trouve formé par la réunion de plusieurs élémens du troisième. Pour que cette condition soit remplie, il suffira que toutes les valeurs de x, interposées dans les deux premiers modes entre les limites x_0, X, soient employées dans le troisième, et l'on prouvera que l'on altère très-peu la valeur de S, en passant du premier ou du second mode au troisième, par conséquent, en passant du premier au second.

[13][...] si l'on fait décroître indéfiniment les valeurs numériques de ces élémens, en augmentant leur nombre, la valeur de S finira par être sensiblement constante, ou, en d'autres termes, elle finira par atteindre une certaine limite qui dépendra uniquement de la forme de la fonction $f(x)$, et des valeurs extrêmes x_0, X attribuées à la variable x. Cette limite est ce qu'on appelle une *intégrale définie*.

Para vincular a construção feita com a notação vigente, ele considera todos os elementos $(x_j - x_{j-1})$ com valores numéricos iguais a uma quantidade finita $\Delta x = h = dx$[14], escrevendo

$$S = \sum hf(x) = \sum f(x)\Delta x;$$

e empregando ao limite para o qual converge S, quando os elementos da diferença $X - x_0$ tornam-se infinitamente pequenos, a notação

$$\int hf(x) \quad \text{ou} \quad \int f(x)\,dx,$$

na qual a letra Σ substituída por $\int$ indica, não mais uma soma de produtos, mas o limite de uma tal soma.

Ele argumenta que pelo fato desta definição depender dos limites de integração, é convencionado indicá-los na notação; e apresenta três delas:

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx, \quad \int f(x)\,dx \left[\begin{array}{c} x_0 \\ X \end{array}\right], \quad \int f(x)\,dx \left[\begin{array}{c} x = x_0 \\ x = X \end{array}\right], \tag{2.10}$$

escolhendo por simplicidade a primeira, a qual credita a Fourier, e é a que nos é familiar atualmente.

Há uma interpretação geométrica para esta concepção:

> Concebamos agora que, sendo o limite X superior a x_0, e a função $f(x)$ positiva de $x = x_0$ a $x = X$, x, y designando coordenadas retangulares, e A a superfície compreendida, por uma parte, entre o eixo dos x e a curva $y = f(x)$, por outra parte, entre as ordenadas $f(x_0)$, $f(X)$. Esta superfície, que tem por base o comprimento $X - x_0$ medido sobre o eixo dos x, será uma média entre as áreas de dois retângulos construídos sobre a base $X - x_0$ com as alturas respectivamente iguais à menor e à maior das ordenadas elevadas pelos diferentes pontos desta base. Ela será então equivalente a um retângulo construído sobre uma ordenada média representada por uma expressão da forma $f[x_0 + \theta(X - x_0)]$; de modo que teremos
>
> $$A = (X - x_0)f[x_0 + \theta(X - x_0)], \tag{2.11}$$
>
> θ designando um número inferior à unidade. Se dividirmos a base $X - x_0$ em elementos muito pequenos $x_1 - x_0$, $x_2 - x_1 \ldots X - x_{n-1}$, a superfície A se

[14] O uso da notação para essa quantidade é o mesmo utilizado na 4ª lição para designar a **diferencial** da variável x, definida como segue. Sejam h uma quantidade finita e α, i quantidades infinitamente pequenas de modo que $i = \alpha h$. Disso segue

$$\frac{f(x+i) - f(x)}{i} = \frac{f(x+\alpha h) - f(x)}{\alpha h},$$

que acarreta em

$$\frac{f(x+\alpha h) - f(x)}{\alpha} = \frac{f(x+i) - f(x)}{i}h. \tag{2.8}$$

A diferencial da função $f(x)$ é definida como o limite do primeiro membro da equação (2.8) quando α tende a zero. Então tem-se

$$df(x) = f'(x)h. \tag{2.9}$$

Ele prova que $h = dx$ aplicando $f(x) = x$ na equação (2.9) (Cauchy, 1823, p. 13).

encontrará dividida em elementos correspondentes cujos valores serão dados pelas equações semelhantes à fórmula (2.11). Teremos, portanto, ainda

$$\begin{aligned} A = (x_1 - x_0)f[x_0 + \theta_0(x_1 - x_0)] + (x_2 - x_1)f[x_1 + \theta(x_2 - x_1)] + \cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + (X - x_{n-1})f[x_{n-1} + \theta_{n-1}(X - x_{n-1})], \end{aligned} \tag{2.12}$$

θ_0, $\theta_1 \ldots \theta_{n-1}$ designando números inferiores à unidade. Se neste última equação fizermos decrescer indefinidamente os valores numéricos dos elementos de $X - x_0$, obteremos, passando aos limites,

$$A = \int_{x_0}^{X} f(x)\,dx. \tag{2.13}$$

(Ibid., p. 91).[15]

Conforme observa Schubring (2005, p. 453), Cauchy empregava o símbolo

$$\lim .$$

como uma abreviação sem indicação nem da variável nem da quantidade para a qual aquela tende. No caso das integrais definidas, o que está variando é o número n tendendo a infinito, e o comprimento de cada um dos n elementos tendendo a zero.

A abordagem feita para definir a integral permitiu a Cauchy discutir soluções aproximadas e exatas. Por exemplo, sejam quantidades x_0, x_1, …, x_{n-1}, X em progressão aritmética, cada elemento terá comprimento

$$i = \frac{X - x_0}{n}.$$

Assim, as fórmulas

$$\begin{aligned} S_1 &= (x_1 - x_0)f(x_0) + f(x_1 - x_2)f(x_1) + \cdots + (X - x_{n-1})f(x_{n-1}), \\ S_2 &= (x_1 - x_0)f(x_1) + f(x_1 - x_2)f(x_2) + \cdots + (X - x_{n-1})f(X), \end{aligned}$$

obtidas da fórmula (2.5) quando se considera $\theta_0 = \theta_1 = \cdots = \theta_{n-1} = 0$ na primeira e $\theta_0 = \theta_1 = \cdots = \theta_{n-1} = 1$ na segunda, tornam-se

$$S_1 = i[f(x_0) + f(x_0 + i) + f(x_0 + 2i) + \cdots + f(X - 2i) + f(X - i)], \tag{2.14}$$

[15] Concevons à présent que, la limite X étant supérieure à x_0, et la fonction $f(x)$ étant positive depuis $x = x_0$ jusqu'à $x = X$, x, y désignent des coordonnées rectangulaires, et A la surface comprise d'une part entre l'axe des x et la courbe $y = f(x)$, d'autre part entre les ordonnées $f(x_0)$, $f(X)$. Cette surface, qui a pour base la longueur $X - x_0$ comptée sur l'axe des x, sera une moyenne entre les aires des deux rectangles construits sur la base $X - x_0$ avec des hauteurs respectivement égales à la plus petite et à la plus grande des ordonnées élevées par les differens points de cette base. Elle sera donc équivalente à un rectangle construit sur une ordonnée moyenne représentée par une expression de la forme $f[x_0 + \theta(X - x_0)]$; en sorte qu'on aura (2.11), θ désignant un nombre inférieur à l'unité. Si l'on divise la base $X - x_0$ en élémens très-petits, $x_1 - x_0$, $x_2 - x_1 \ldots X - x_{n-1}$, la surface A se trouvera divisée en élémens correspondans dont les valeurs seront données par les équations semblables à la formule (2.11). On aura donc encore (2.12), θ_0, $\theta_1 \ldots \theta_{n-1}$ désignant des nombres inférieurs à l'unité. Si dans cette dernière équation on fait décroître indéfiniment les valeurs numériques des élémens de $X - x_0$, on en tirera, en passant aux limites, (2.13).

$$S_2 = i[f(x_0+i) + f(x_0+2i) + \cdots + f(X-2i) + f(X-i) + f(X)]. \tag{2.15}$$

Uma escolha adequada de i permite uma aproximação satisfatória da integral que se deseja calcular, mas ele observa que esta equação permite também encontrar o valor exato de algumas integrais. Por exemplo:

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{X} x\,dx &= \lim .i[x_0 + (x_0+i) + (x_0+2i) + \cdots + (x_0+(n-1)i)]\\ &= \lim .in\left[\frac{x_0 + x_0 + (n-1)i}{2}\right]\\ &= \lim .in\left[\frac{x_0 + (x_0+ni) - i}{2}\right]\\ &= \lim .in\left[\frac{x_0 + X - i}{2}\right]\\ &= \lim .\frac{(X-x_0)(x_0+X-i)}{2}\\ &= \frac{X^2 - {x_0}^2}{2}.\end{aligned}$$

conforme consta em Moigno (1844, p. 43).[16]

Observamos que neste exemplo o limite incide sobre a variável i, que depende de n. Além disso, pela fórmula de soma parcial da progressão aritmética

$$S_n = \frac{n(x_0+x_n)}{2},$$

faz-se desaparecer os termos x_j diferentes de x_0 e X. Aplicando o limite, o resultado é exatamente o que se encontra empregando o Teorema Fundamental do Cálculo.

Ainda em relação às formas de determinação de valores aproximados das integrais, Cauchy observa que as equações (2.4) e (2.5) podem também representar a integral definida:

> De fato, estas equações, subsistindo uma e outra, enquanto subdividimos ou a diferença $X - x_0$, ou as quantidades $x_1 - x_0$, $x_2 - x_1$ ... $X - x_{n-1}$ em elementos infinitamente pequenos, serão ainda verdadeiras no limite, de modo que teremos
>
> $$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = (X-x_0)f[x_0 + \theta(X-x_0)], \text{ e} \tag{2.16}$$
>
> $$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = (x_1-x_0)f[x_0+\theta_0(x_1-x_0)] + (x_2-x_1)f[x_1+\theta_1(x_2-x_1)] + \cdots$$
> $$\cdots\cdots + (X-x_{n-1})f[x_{n-1}+\theta_{n-1}(X-x_{n-1})], \tag{2.17}$$

[16]Cauchy não indica no livro o método utilizado para resolver esta integral definida, restando-nos imaginar que o fizesse em sua lousa. François Napoléon-Marie Moigno (1804-1884), que foi aluno de Cauchy em 1824, embora não na *EP*, escreveu livros de cálculo diferencial e integral indicando no subtítulo que foram redigidos de acordo com os métodos de seu antigo professor. Seus livros reproduzem as ideias do *Résumé* e contém alguns desenvolvimentos nele ausentes.

> θ, θ_0, θ_1 ... θ_{n-1} designando números desconhecidos, mas todos inferiores à unidade (Cauchy, 1823, p. 87).[17]

A argumentação acima refere-se à existência de valores θ, θ_0, θ_1,..., θ_{n-1} que satisfazem as igualdades (2.16) e (2.17), mas não os determina. Sendo o comprimento de cada subintervalo $x_k - x_{k-1}$ igual a i, obtém-se

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = i[f(x_0 + \theta_0 i) + f(x_0 + i + \theta_1 i) + \cdots + f(X - i + \theta_{n-1} i)]. \tag{2.18}$$

Se a função f é monótona no intervalo $[x_0, X]$, Cauchy apresenta como aproximação da integral a *demi-somme*[18] dos valores (2.14) e (2.15), ou seja, a soma das metades de S_1 e S_2:

$$\frac{1}{2}(S_2 + S_1) = i\left[\frac{1}{2}f(x_0) + f(x_0 + i) + \cdots + f(X - i) + \frac{1}{2}f(X)\right]. \tag{2.19}$$

A Figura 2.1 ilustra essa aproximação.

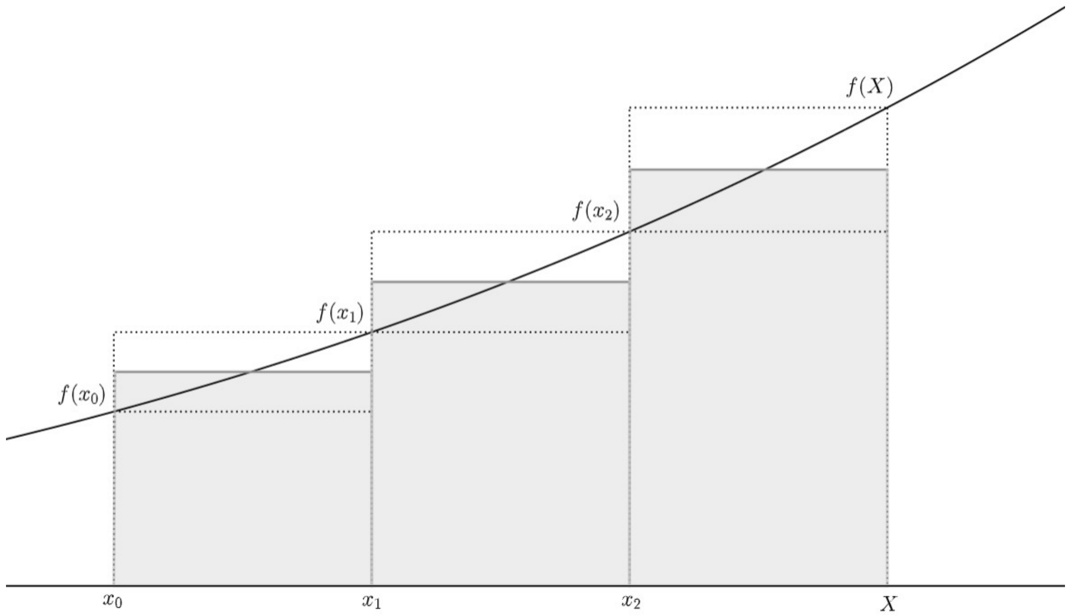


Figura 2.1: Representação gráfica da "meia-soma" de Cauchy para $n = 3$.
Fonte: elaborado pelo autor

O erro cometido nesta aproximação é, em módulo, menor do que

$$i\left[\frac{1}{2}f(X) - \frac{1}{2}f(x_0)\right].^{19}$$

[17]En effet, ces équations, subsistant l'une et l'autre, tandis que l'on subdivise ou la différence $X - x_0$, ou les quantités $x_1 - x_0$, $x_2 - x_1$, ..., $X - x_{n-1}$ en éléments infiniment petits, seront encore vraies à la limite, en sorte qu'on aura (2.16), et (2.17), θ, θ_0, θ_1, ..., θ_{n-1} désignant des nombres inconnus, mais tous inférieurs à l'unité.

[18]Traduz-se do francês como "meia-soma."

[19]Não há justificativa para essa afirmação nem no livro de Cauchy nem no de Moigno. Ela é válida

Quando a condição da função f ser crescente ou decrescente não é satisfeita, a estratégia oferecida é decompor o intervalo de integração em vários subintervalos de modo que em cada um deles ela o seja.

Esta construção, além de servir de fundamento para o *cálculo integral*, liberava-o da noção de derivada. Essa nova organização da disciplina em dois *cálculos* se consolidou no que até os dias de hoje é celebrado como uma das maiores criações das matemáticas.

2.4 As integrais impróprias de Cauchy

Após discorrer sobre a integral definida e suas propriedades, Cauchy extrapola o domínio de validade de sua definição e discute a possibilidade de determinar valores finitos de integrais em que:

(i) os valores extremos x_0 e X são infinitos;

(ii) ou o valor de $f(x)$ torna-se infinito para um valor entre valores finitos de x_0 e X.

As lições dedicadas a isso apresentam duas definições que, conforme atesta Moigno (1844, p. 61), são de autoria de Cauchy: a de **integrais definidas singulares** e a de **valor geral** de uma integral definida. Atentemo-nos a elas:

Dada uma função f e um certo valor a, a integral definida de f tomada entre limites de integração infinitamente próximos de a é chamada de **integral definida singular** quando $a = \pm\infty$ ou $f(a) = \pm\infty$. Nas contas, os limites de integração são ambos ou menores ou maiores do que a, apesar disso não ser explícito no texto. Um exemplo é dado como segue: sejam ε uma variável infinitamente pequena, μ e ν duas constantes positivas arbitrárias, e a finito tal que $f(a) = \pm\infty$, então

$$\int_{a-\varepsilon}^{a-\varepsilon\mu} f(x)\,dx \quad \text{e} \quad \int_{a+\varepsilon\nu}^{a+\varepsilon} f(x)\,dx \tag{2.20}$$

configuram-se em integrais definidas singulares de $f(x)$.

Os limites de integração das integrais (2.20) são variáveis cujo limite é o mesmo valor a, sendo a única característica que as distingue o fator multiplicado ao infinitesimal. Este, sendo uma variável que recebe múltiplos valores em sequência de modo a aproximar cada vez mais de 0, ao ser multiplicado por um fator diferente de 1 sofre uma mudança de passo em sua variação. A analogia com a velocidade é inevitável: se ε se aproxima do limite 0 a uma velocidade fixa, os infinitesimais $\varepsilon\mu$ e $\varepsilon\nu$ se aproximarão mais ou menos rapidamente de 0, conforme seja o valor de μ e ν. Dessa forma, as duas constantes μ e ν são tacitamente supostas diferentes de 1, pois caso contrário, uma

pois, sendo os valores das expressões (2.18) e (2.19) iguais a A e B respectivamente, e supondo f crescente no intervalo $[x_0, X]$, segue

$$\begin{aligned} S_1 \le A \le S_2 &\Rightarrow 2S_1 \le 2A \le 2S_2 \\ &\Rightarrow S_1 \le 2A - S_1 \le 2S_2 - S_1 \\ &\Rightarrow S_1 - S_2 \le 2A - S_1 - S_2 \le S_2 - S_1 \\ &\Rightarrow 2|A - B| \le S_2 - S_1 \\ &\Rightarrow |A - B| \le \frac{1}{2}(S_2 - S_1) = \frac{i}{2}[f(X) - f(x_0)], \end{aligned}$$

sendo a demonstração análoga para o caso de f ser decrescente no mesmo intervalo.

integral cujo intervalo de integração é nulo entraria na definição de integral definida singular. No texto não é provado que o comprimento do intervalo de integração tende a 0 com a variação de ε para 0. Dada a impossibilidade de se desenhar uma integral definida singular, a Figura 2.2 ilustra o que seria uma fotografia desta enquanto os pontos $a - \varepsilon$ e $a - \varepsilon\mu$ variam em direção ao ponto a.

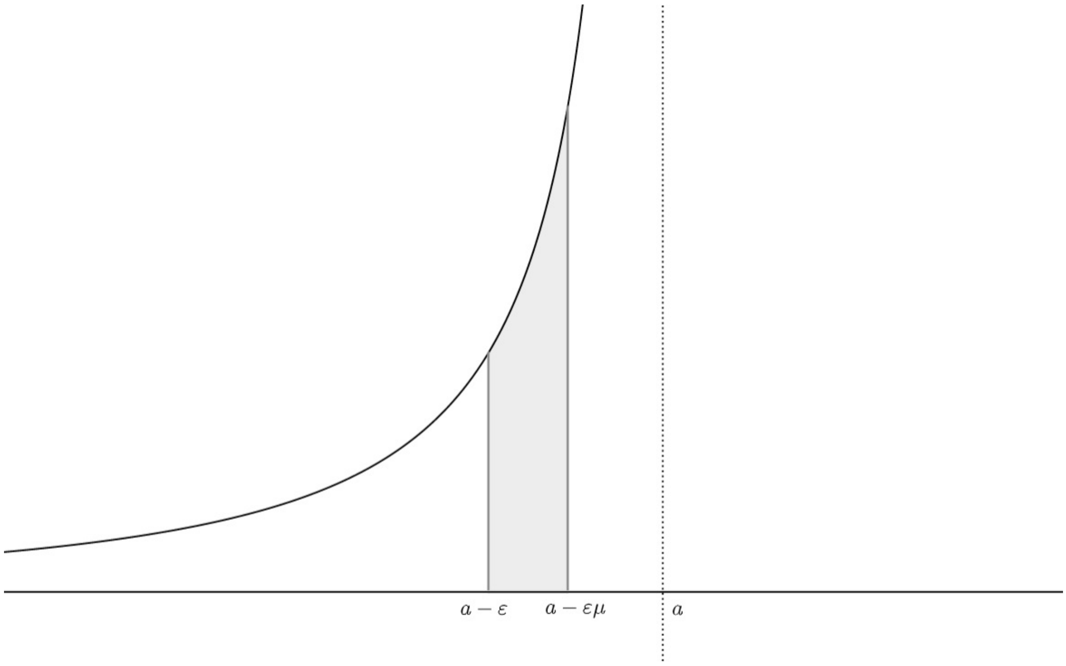


Figura 2.2: Esboço de uma integral definida singular.
Fonte: elaborado pelo autor

Uma integral definida singular é, então, o limite de integrais definidas cujos limites de integração tendem de maneira distintas para um mesmo limite. A *Analyse Algébrique* de Cauchy oferece uma pista do que ele quis dizer com essa denominação:

> Quando, para um sistema de valores atribuídos às variáveis que ela contém, uma função de uma ou várias variáveis admite apenas um valor, este valor único deduz-se comumente da própria definição da função. Caso se apresente um caso particular no qual a definição dada não possa mais fornecer imediatamente o valor da função que consideramos, procuramos o limite ou os limites para os quais esta função converge, enquanto as variáveis se aproximam indefinidamente de valores particulares que lhe são atribuídos; e se existe um ou vários limites desta espécie, eles são também considerados como valores da função na hipótese admitida. Nomearemos *valores singulares* da função proposta aqueles que se encontram determinados como acabamos de dizer. (Id., 1821, p. 51).[20]

[20]Lorsque, pour un système de valeurs attribuées aux variables qu'elle renferme, une fonction d'une ou de plusieurs variables n'admet qu'une seule valeur, cette valeur unique se déduit ordinairement de la définition même de la fonction. S'il se présente un cas particulier dans lequel la définition donnée ne puisse plus fournir immédiatement la valeur de la fonction que l' on considère, on cherche la limite ou les limites vers lesquelles cette fonction converge, tandis que les variables s'approchent indéfiniment des valeurs particulières qui leur sont assignées; et, s'il existe une ou plusieurs limites de cette espèce, elles sont regardées comme autant de valeurs de la fonction dans l'hypothèse admise. Nous nommerons

Assim, valores singulares de uma função são seus limites infinitos ou no infinito, ou seja, são os valores de uma função f quando x tende a infinito, ou quando o próprio valor $f(x)$ da função tende a infinito quando x tende a um valor qualquer. Esses valores, podendo ser infinitos, serão considerados valores de fato da função. Se considerarmos uma integral definida como uma função cujas variáveis são $a - \varepsilon$ e $a - \varepsilon\mu$, seu valor singular é o limite para o qual essa função converge quando ε tende a 0. Em suma, uma integral definida singular é um valor singular de uma função. O interesse a esse tipo de solução é manifesto:

> A procura por valores singulares das funções é uma das questões mais importantes e mais delicadas da Análise: ela oferece mais ou menos dificuldade, segundo a natureza das funções e o número das variáveis que elas admitem. (Ibid., p. 51).[21]

E o emprego das integrais definidas singulares é descrito como o meio mais simples de resolver a questão das integrais definidas nos casos (i) e (ii).

O método utilizado para a solução desta questão envolve os conceitos de **valor principal** e **valor geral**. O problema proposto é dar um sentido à expressão

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{+\infty} f(x)\,dx, \tag{2.21}$$

em que x_0, x_1, …, x_{n-1} são pontos em que o valor de $f(x)$ torna-se infinito. O valor principal da integral (2.21) é definido por

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim.\left\{\int_{-\frac{1}{\varepsilon}}^{x_1-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{x_1+\varepsilon}^{x_2-\varepsilon} f(x)\,dx + \cdots + \int_{x_m+\varepsilon}^{\frac{1}{\varepsilon}} f(x)\,dx\right\}, \tag{2.22}$$

enquanto o valor geral da mesma integral é definido por

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim.\left\{\int_{-\frac{1}{\varepsilon}\mu}^{x_1-\varepsilon\mu_1} f(x)\,dx + \int_{x_1+\varepsilon\nu_1}^{x_2-\varepsilon\mu_2} f(x)\,dx + \cdots + \int_{x_m+\varepsilon\nu_m}^{\frac{1}{\varepsilon\nu}} f(x)\,dx\right\}, \tag{2.23}$$

em que μ, ν, μ_1, ν_1, …, μ_m, ν_m são constantes arbitrárias (tacitamente menores do que 1) e ε é o *infinitamente pequeno* correspondente ao limite. A Figura 2.3 ilustra, como exemplo, o valor principal de

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim.\left\{\int_{-\frac{1}{\varepsilon}}^{x_1-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{x_1+\varepsilon}^{x_2-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{x_2+\varepsilon}^{\frac{1}{\varepsilon}} f(x)\,dx\right\}, \tag{2.24}$$

enquanto ε varia para 0.

valeurs singulières de la fonction proposée celles qui se trouvent déterminées comme on vient de le dire.

[21] La recherche des valeurs singulières des fonctions est une des questions les plus importantes et les plus délicates de l'Analyse: elle offre plus ou moins de difficultés, suivant la nature des fonctions et le nombre des variables qu'elles renferment.

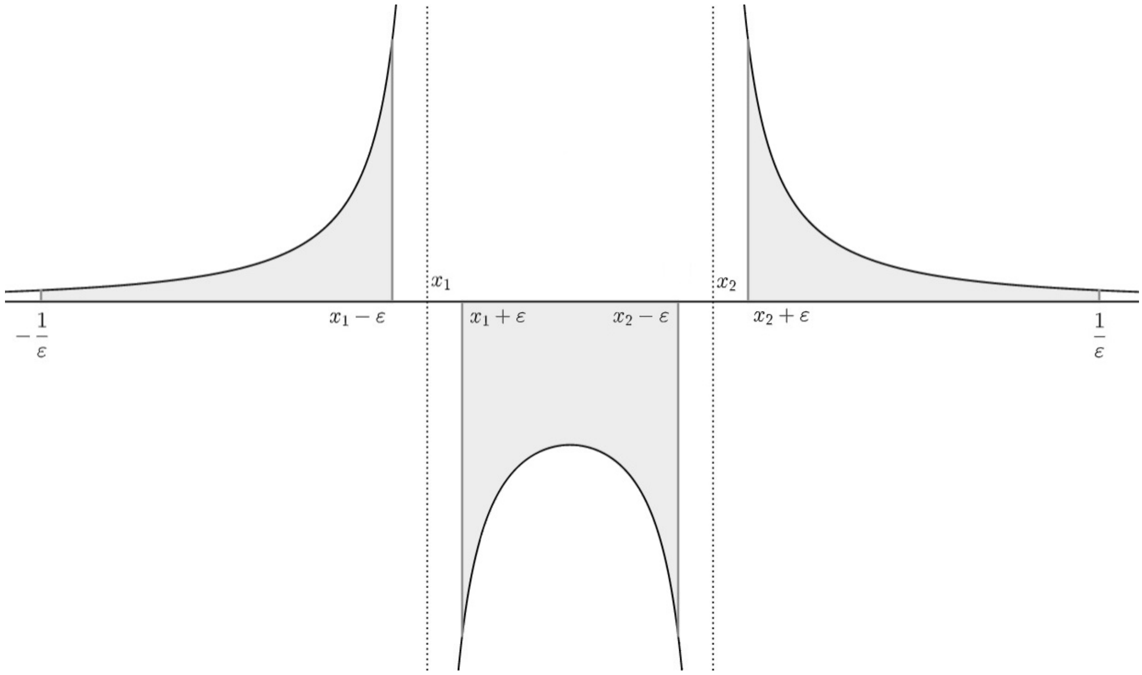


Figura 2.3: Esboço da equação (2.24).
Fonte: elaborado pelo autor.

A terminologia "valor principal" de um *infinitamente pequeno*, comumente encontrada em obras de adeptos da época ao método infinitesimal, significa uma escolha de um representante, dentre vários infinitamente pequenos codependentes, para servir de termo de comparação entre eles, como é visto em Sturm (1877, p. 10) e Haag (1890, p. 2). Ele cumpre uma função semelhante no emprego do valor principal da integral definida de Cauchy, pois (2.22) é uma referência de comparação.

Com estas duas definições, Cauchy demonstra uma proposição que permite examinar a questão da existência de valores finitos para integrais definidas nos caos (i) e (ii). Em termos contemporâneos, é um critério de convergência para integrais impróprias: (2.21) converge se, e somente se, as integrais (2.25) tendem a zero com a variável ε. Visando a simplicidade, é reescrita aqui com alguma modificação:

Teorema 2.2. Para que o valor geral da integral (2.21) seja finito e determinado, é necessário e suficiente que os valores gerais das integrais singulares

$$\int_{-\frac{1}{\varepsilon\mu}}^{-\frac{1}{\varepsilon}} f(x)\,dx, \quad \int_{x_1-\varepsilon}^{x_1-\varepsilon\mu_1} f(x)\,dx, \quad \int_{x_1+\varepsilon\nu_1}^{x_1+\varepsilon} f(x)\,dx, \ldots, \quad \int_{x_m+\varepsilon\nu_m}^{x_m+\varepsilon} f(x)\,dx, \quad \int_{\frac{1}{\varepsilon}}^{\frac{1}{\varepsilon\mu}} f(x)\,dx, \tag{2.25}$$

que se encontram comprimidos na diferença $A - B$, reduzam-se a zero, para valores infinitamente pequenos de ε, quaisquer que sejam, além disso, os valores finitos ou infinitamente pequenos atribuídos aos coeficiências μ, ν, μ_1, ν_1, $\ldots$, μ_m, ν_n (Cauchy, 1823, p. 100).

Demonstração: Se para valores infinitamente pequenos de ε, e para valores finitos ou infinitamente pequenos dos coeficientes arbitrários μ, ν, μ_1, ν_1, $\ldots$, μ_m, ν_m, pelo menos uma das integrais (2.25) obtivessem valor infinito ou finito, mas diferente de zero, então a integral (2.21) seria evidentemente infinita ou indeterminada. Logo, é necessário que as integrais (2.25) sejam todas convergentes para 0 para que (2.21) possa ter valor determinado.

Reciprocamente, sejam

$$E = \int_{-\frac{1}{\varepsilon\mu}}^{x_1-\varepsilon\mu_1} f(x)\,dx + \int_{x_1+\varepsilon\nu_1}^{x_2-\varepsilon\mu_2} f(x)\,dx + \cdots + \int_{x_m+\varepsilon\nu_m}^{\frac{1}{\varepsilon\mu}} f(x)\,dx \tag{2.26}$$

e

$$F = \int_{-\frac{1}{\varepsilon}}^{x_1-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{x_1+\varepsilon}^{x_2-\varepsilon} f(x)\,dx + \cdots + \int_{x_m+\varepsilon}^{\frac{1}{\varepsilon}} f(x)\,dx. \tag{2.27}$$

E sejam $A = \lim E$ e $B = \lim F$ os valores geral e principal respectivamente da integral (2.21). A diferença $E - F$ é a soma das integrais definidas singulares

$$E - F = \int_{-\frac{1}{\varepsilon\mu}}^{-\frac{1}{\varepsilon}} f(x)\,dx + \int_{x_1-\varepsilon}^{x_1-\varepsilon\mu_1} f(x)\,dx + \int_{x_1+\varepsilon\nu_1}^{x_1+\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{x_2-\varepsilon}^{x_2-\varepsilon\mu_2} f(x)\,dx + \\ + \int_{x_2+\varepsilon\nu_2}^{x_2+\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{x_3-\varepsilon}^{x_3-\varepsilon\mu_3} f(x)\,dx + \cdots + \int_{x_m+\varepsilon\nu_m}^{x_m+\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{\frac{1}{\varepsilon}}^{\frac{1}{\varepsilon\mu}} f(x)\,dx. \tag{2.28}$$

Tem-se, portanto, $A - B = \lim(E - F)$. Mostrando que essa diferença é sensivelmente nula, mostra-se que, tanto o valor principal como o geral da integral em questão, são iguais.

■

A Figura 2.4 ilustra a soma de integrais definidas singulares dada por $E - F$ para o caso em que $n = 3$.

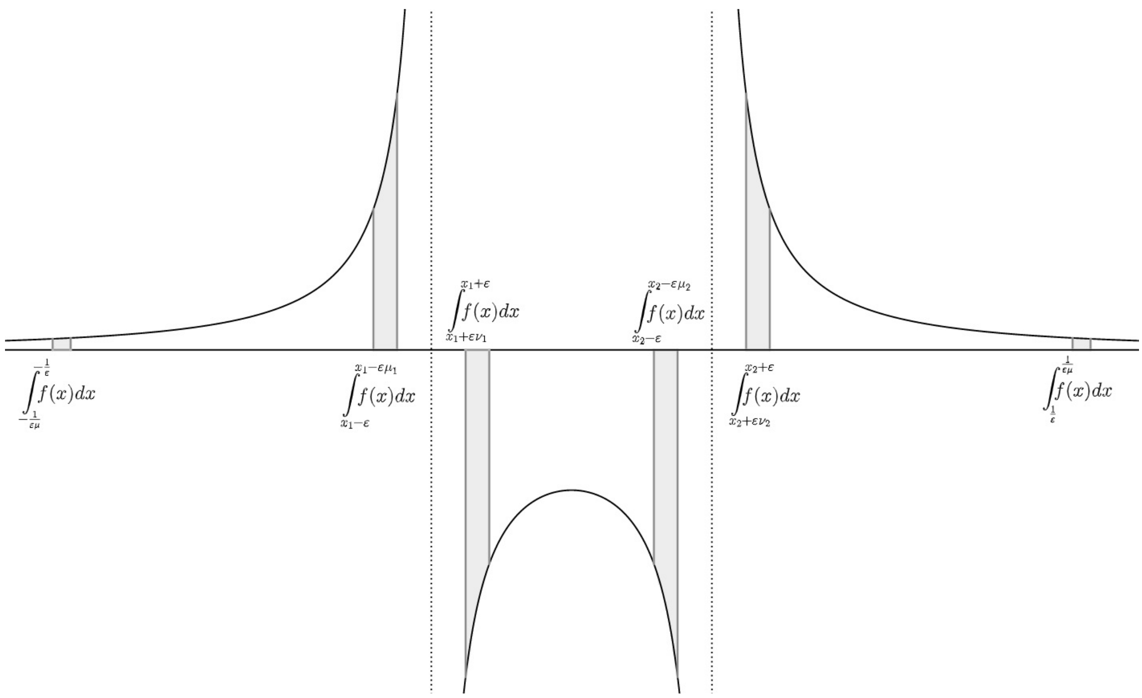


Figura 2.4: $E - F$ no caso em que $n = 3$.
Fonte: elaborado pelo autor.

A demonstração faz um uso de ε e δ similar ao contemporâneo e, segundo Grabiner (2005), foi nas aulas de Cauchy publicadas no *Résumé* que fizeram sua primeira aparição em demonstrações desse tipo. Seja δ um número muito pequeno e suponha ε

escolhido de modo que, para os valores μ, ν, μ_1, ν_1, $\ldots$, μ_m, ν_n inferiores à unidade, cada uma das integrais (2.25) tenha valor numérico inferior a

$$\frac{1}{2(m+1)}\delta.$$

Assim a soma de cada uma delas será inferior à δ. Nas palavras de Cauchy, então "o valor aproximado de B, representado por F, será uma quantidade finita que não conterá mais nada de arbitrário" (Id., p. 100). Logo, se forem atribuídos aos coeficientes μ, ν, μ_1, ν_1, $\ldots$, μ_m, ν_n valores infinitamente pequenos, então E, que se aproxima indefinidamente de A, será delimitado por $F-\delta$ e $F+\delta$. Logo A é delimitado pelos mesmos valores e, consequentemente, é possível encontrar uma quantidade finita F cujo módulo da diferença $F-A$ seja menor do que δ. Disso conclui-se que o valor geral A da integral (2.21) será, na hipótese admitida, uma quantidade finita e determinada. Dessa forma, Cauchy prova um critério para determinar se a integral imprópria em questão terá um valor finito, mostrando que E e F possuem o mesmo limite, ou, o que é o mesmo, que $A=B$.

As versões contemporâneas deste teorema não carregam o nome de Cauchy. São exemplos desta atualização:

Teorema 2.3. Seja a um número e f uma função contínua por partes em todo intervalo $[a,x]$ para $x>a$. Então

$$\int_a^\infty f \tag{2.29}$$

converge se, e somente se, dado ε existe $B>0$ tal que sempre que $x,\ y\geq B$, então

$$\left|\int_a^x f-\int_a^y f\right| = \left|\int_y^x\right| < \varepsilon. \tag{2.30}$$

(Lang, 1997, p. 330).[22]

E

Teorema 2.4. Para $f:(a,b]\to\mathbb{R}$ contínua arbitrária, a integral imprópria

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

existe se, e somente se, dado $\varepsilon>0$, pode-se achar $\delta>0$ tal que

$$a<c<d<a+\delta \Rightarrow \left|\int_c^d f(x)\,dx\right| < \varepsilon$$

(Lima, 2010b, p. 181).

Em ambos os casos observa-se que sozinhos não contemplam toda a abrangência do teorema de Cauchy. Veremos no capítulo 4 dois resultados análogos para uma integral concebida num contexto multidimensional. Cauchy não é mencionado, e a demonstração não parece ser inspirada na sua. Isso mostra um aspecto de sua teoria que não sobreviveu ao crivo dos padrões de rigor que se sucederam.

[22]Let a be a number, and f a piecewise continuous function in every interval $[a,x]$ for $x>a$. Then (2.29) converges if and only if, given ε there exists $B>0$ such that whenever $x,y\ \geq B$ (2.30).

A própria definição de integral carregou seu nome por pouco tempo, e no mesmo século passaria a ser associada a outro matemático que a redefiniu: Riemann. Havia um detalhe em sua construção que limitava sua abrangência, e portanto devia ser refeita. Esta nova construção é o tema do próximo capítulo.

A seguir, as traduções das lições do *Résumé* que analisamos para compor este capítulo. Ressaltamos que estas fazem parte de um projeto maior do tradução por completo deste manual de cálculo do século 19.

2.5 Tradução de algumas lições do *Résumé*

2.5.1 Variáveis, seus limites e Quantidades infinitamente pequenas (1ª lição)

Denominamos quantidade *variável* aquela que consideramos receber sucessivamente vários valores diferentes uns dos outros. Denominamos ao contrário quantidade *constante* toda quantidade que recebe um valor fixo e determinado. Quando os valores sucessivamente atribuídos à uma mesma variável se aproximam indefinidamente de um valor fixo, de modo a terminar por diferir dele tão pouco quanto se queira, este será chamado de *limite* de todos os outros.

Assim a superfície do círculo é o limite para o qual convergem as superfícies dos polígonos regulares inscritos, enquanto o número de seus lados cresce mais e mais; e o raio vetor, emanado do centro de uma hipérbole à um ponto da curva que se distancia cada vez mais de seu centro, forma com o eixo x um ângulo que tem por limite o ângulo formado pela assíntota com o mesmo eixo; etc.... Indicaremos o limite para o qual converge uma variável dada pela abreviação lim. colocada antes desta variável.

Frequentemente os limites para os quais convergem algumas expressões variáveis apresentam-se sob uma forma indeterminada, e no entanto é possível fixar, com a ajuda de métodos particulares, os verdadeiros valores destes mesmos limites. Assim, por exemplo, os limites aos quais se aproximam indefinidamente as duas expressões variáveis

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha}, \qquad (1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}},$$

quando α converge para zero, apresentam-se sob as formas indeterminadas

$$\frac{0}{0}, \qquad 1^{\pm\infty};$$

e no entanto estes dois limites possuem valores fixos que podem ser calculados como segue.

Tem-se evidentemente, para valores numéricos bem pequenos de α,

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} > \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha} > \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

Consequentemente, a razão $\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha}$, compreendida sempre entre as duas quantidades $\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} = 1$ e $\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha} = \cos\alpha$, em que a primeira serve de limite à segunda, terá a unidade por limite.

Determinemos agora o limite ao qual converge a expressão $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$, enquanto α se aproxima indefinidamente de zero. Se supusermos primeiro que a quantidade α seja positiva e da forma $\frac{1}{m}$, com m sendo um número inteiro variável suscetível de um crescimento indefinido, teremos

$$(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = \left(1+\frac{1}{m}\right)^m$$
$$= 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2}\left(1-\frac{1}{m}\right) + \frac{1}{1.2.3}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right) + \cdots$$
$$\cdots + \frac{1}{1.2.3\cdots m}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{m-1}{m}\right).$$

Como, no segundo membro desta última fórmula, os termos que contém a quantidade m são todos positivos, e crescem em valores e em número ao mesmo tempo que esta quantidade, é claro que a expressão $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ crescerá com o número inteiro m, permanecendo sempre compreendida entre as duas somas

$$1 + \frac{1}{1} = 2$$

e

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \&c \cdots = 1 + 1 + 1 = 3;$$

então ela se aproximará indefinidamente, para valores crescentes de m, a um certo limite localizado entre 2 e 3. Este limite é um número que cumpre um grande papel no cálculo infinitesimal, e que convencionamos designar pela letra e. Se tomarmos $m = 10000$, encontraremos por valor aproximado de e, fazendo uso de tabelas de logaritmos decimais,

$$\left(\frac{10001}{10000}\right)^{10000} = 2,7183.$$

Este valor aproximado é exato até o milésimo decimal, como veremos adiante.

Suponhamos agora que α, sempre positivo, não seja mais da forma $\frac{1}{m}$. Designemos nesta hipótese por m e $n = m + 1$, os dois números inteiros imediatamente inferior e superior à $\frac{1}{\alpha}$, de modo que tenhamos

$$\frac{1}{\alpha} = m + \mu = n - \nu,$$

μ e ν sendo números tomados entre zero e a unidade. A expressão $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ estará evidentemente compreendida entre as seguintes

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^{\frac{1}{\alpha}} = \left[\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\right]^{1+\frac{\mu}{m}}, \quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}} = \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^{1-\frac{\nu}{n}};$$

e, como, para valores de α decrescentes ao infinito, ou, o que é o mesmo, para valores sempre crescentes de m e n, as duas quantidades $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, ambas convergentes ao limite e, enquanto $1+\frac{\mu}{m}$, $1-\frac{\nu}{n}$, aproximam-se indefinidamente do limite 1, resulta que cada uma das expressões

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^{\frac{1}{\alpha}}, \quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}},$$

e consequentemente a expressão intermediária $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ convergirão também para o limite e.

Suponhamos enfim que α torne-se uma quantidade negativa. Se fizermos nesta hipótese

$$1+\alpha = \frac{1}{1+\beta},$$

β será uma quantidade positiva, que convergirá para zero, e encontraremos

$$(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = (1+\beta)^{\frac{1+\beta}{\beta}} = \left[(1+\beta)^{\frac{1}{\beta}}\right]^{1+\beta},$$

então, passando aos limites,

$$\lim{(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}} = e^{\lim(1+\beta)} = e.$$

Quando os valores numéricos sucessivos de uma mesma variável decrescem indefinidamente de maneira a ser menor do que todo número dado, esta variável torna-se o que chamamos de *infinitamente pequena* ou uma quantidade infinitamente pequena. Uma variável desta espécie tem zero por limite. Tal como a variável α nos cálculos que precedem.

Quando os valores numéricos sucessivos de uma mesma variável crescem de modo a se elevarem acima de todo número dado, dizemos que esta variável tem por limite o infinito positivo indicado pelo signo ∞, se trata-se de uma variável positiva; e o infinito negativo indicado pela notação $-\infty$, se trata-se de uma variável negativa. Tal como o número variável m que empregamos no exemplo acima.

2.5.2 Funções contínuas e descontínuas. Representação geométrica das Funções contínuas (2ª Lição)

Quando quantidades variáveis são relacionadas entre si de tal forma que, sendo o valor de uma delas dado, podemos concluir os valores de todas as outras, concebemos comumente estas diversas quantidades expressas por meio de uma entre elas, que toma então o nome de *variável independente*; e as outras quantidades, expressas por meio da variável independente, são o que chamamos de *funções* desta variável.

Quando quantidades variáveis estão relacionadas entre si de tal modo que, sendo os valores de algumas sendo dadas, é possível concluir os valores de todas as outras, concebemos estas diversas quantidades expressas por meio de várias entre elas, que tomam então o nome de *variáveis independentes*; e as quantidades restantes, expressas por meio das variáveis independentes, são o que chamamos de *funções* destas mesmas variáveis.[23] As diversas expressões que a álgebra e a trigonometria fornecem, quando contém variáveis consideradas independentes, são todas funções destas variáveis. Assim, por exemplo,

$$\mathrm{L}(x) \qquad \operatorname{sen} x, \qquad \&\mathrm{c}\ldots$$ [24]

são funções da variável x;

$$x+y, \qquad x^y, \qquad xyz, \quad \ldots\ldots$$

[23]NDT. Este parágrafo, que pouco difere do anterior, define função de várias variáveis.

[24]NDT. $\mathrm{L}(x)$ significa o logaritmo de x dada uma base A. Cauchy usa a letra minúscula $\mathrm{l}(x)$ quando a base em questão é o número e.

funções das variáveis x e y, ou x, y e z; &c....

Quando funções de uma ou várias variáveis encontram-se, como nos exemplos precedentes, imediatamente expressas por meio de suas variáveis, elas são nomeadas *funções explícitas*. Mas quando damos somente as relações entre as funções e as variáveis, isto é, as equações que estas quantidades devem satisfazer, até que estas não sejam resolvidas algebricamente, as funções, não sendo expressas imediatamente por meio das variáveis, são chamadas *funções implícitas*. Para torná-las explícitas, é suficiente resolver, quando possível, as equações que as determinam. Por exemplo y sendo uma função implícita de x determinada pela equação

$$\mathrm{L}(y) = x,$$

se nomeamos A como a base do sistema de logaritmos que consideramos, a mesma função tornada explícita pela resolução da equação dada, será

$$y = A^x.$$

Quando queremos designar uma função explícita de uma só variável x, ou de várias variáveis x, y, $z\ldots$, sem determinar a natureza desta função, empregamos uma das notações

$$f(x),\quad F(x),\quad \phi(x),\quad \chi(x),\quad \psi(x),\quad \varpi(x),\ldots \&\text{c.},$$
$$f(x,y,z,\ldots),\quad F(x,y,z,\ldots),\quad \phi(x,y,z,\ldots),\ \&\text{c.}$$

Frequentemente, no cálculo, nos servimos da característica Δ para indicar os acréscimos simultâneos de duas variáveis que dependem uma da outra. Dito isto, se a variável y é expressa em função da variável x pela equação

$$y = f(x), \tag{2.31}$$

Δy, ou o acréscimo de y correspondente ao acréscimo Δx da variável x, será determinado pela fórmula

$$y + \Delta y = f\left(x + \Delta x\right). \tag{2.32}$$

De forma mais geral, se supusermos

$$F(x,y) = 0, \tag{2.33}$$

teremos

$$F(x + \Delta x, y + \Delta y) = 0.^{25} \tag{2.34}$$

É bom observar que das equações (2.31) e (2.32) concluímos

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x). \tag{2.35}$$

[25]NDT. Aqui prepara o terreno para a definição de função derivada, pois se

$$F(x,y) = \frac{y}{x}$$

é uma razão entre variáveis, então

$$F(x + \Delta x, y + \Delta y) = 0 \Rightarrow \frac{y + \Delta y}{x + \Delta x} = 0.$$

Sejam agora h e i duas quantidades distintas, a primeira finita, e a segunda infinitamente pequena, e $\alpha = \frac{1}{h}$ a razão infinitamente pequena destas duas quantidades. Se atribuímos à Δx o valor finito h, o valor de Δy, dado pela equação (2.35), se tornará o que chamamos de *diferença finita* da função $f(x)$, e será usualmente uma quantidade finita. Se ao contrário atribuirmos a Δx um valor infinitamente pequeno, se fizermos por exemplo

$$\Delta x = i = \alpha h,$$ [26]

o valor de Δy, a saber,

$$f(x+i) - f(x) \quad \text{ou} \quad f(x+\alpha h) - f(x),$$

será usualmente uma quantidade infinitamente pequena. Isto se verifica facilmente com relação às funções

$$A^x, \quad \operatorname{sen} x, \quad \cos x,$$

às quais correspondem as diferenças

$$A^{x+i} - A^x = (A^i - 1)A^x,$$

$$\operatorname{sen}(x+i) - \operatorname{sen} x = 2 \operatorname{sen} \frac{i}{2} \cos\left(x + \frac{i}{2}\right),$$

$$\cos(x = i) - \cos x = -2 \operatorname{sen} \frac{i}{2} \operatorname{sen}\left(x + \frac{i}{2}\right),$$

em que cada uma possui um fator $A^i - 1$ ou $\operatorname{sen} \frac{i}{2}$, que converge indefinidamente com i para o limite zero.

Quando, a função $f(x)$ admitindo um valor único e finito para todos os valores de x compreendidos entre dois limites dados, a diferença

$$f(x+i) - f(x)$$

sempre é uma quantidade infinitamente pequena entre estes limites, dizemos que $f(x)$ é *função contínua* da variável x entre os limites em questão.

Dizemos ainda que a função $f(x)$ é, na vizinhança de um valor particular atribuído à variável x, função contínua desta variável, toda vez que ela é contínua entre dois limites, mesmo muito próximos, que contenha o valor em questão.

Enfim, quando uma função deixa de ser contínua na vizinhança de um valor particular da variável x, dizemos que ela se torna *descontínua*, e que existe *solução de continuidade* para este valor particular. Assim, por exemplo, há soluções de continuidade na função $\frac{1}{x}$, para $x = 0$; e na função $\operatorname{tg} x$, para $x = \pm\frac{(2k+1)\pi}{2}$, k sendo um número inteiro qualquer; &c.[27]

[26] NDT. É dada a propriedade de que o produto entre uma quantidade finita e uma infinitamente pequena resulta em uma infinitamente pequena.

[27] Para qualquer vizinhança de $x = 0$, mesmo infinitamente pequena, não ocorre de

$$f(x+i) - f(x)$$

ter limite zero em qualquer uma das funções citadas.

De acordo com estas explicações, será fácil de reconhecer entre quais limites uma função dada da variável x é contínua, em relação a esta variável. (Veja, para maiores desenvolvimentos, o capítulo II da 1ª parte do *Cuso de análise*, publicado em 1821.)

Construamos agora a curva que tem por equação em coordenadas retangulares $y = f(x)$. Se a função $f(x)$ é contínua entre os limites $x = x_0$ e $x = X$, à cada abscisa x entre estes limites corresponderá uma só ordenada; além disso, x vindo a ter um acréscimo infinitamente pequeno Δx, y terá um acréscimo infinitamente pequeno Δy. Consequentemente, às duas abscissas muito próximas x e $x + \Delta x$ corresponderão dois pontos muito próximos um do outro, pois sua distância $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ será também uma quantidade infinitamente pequena. Estas condições só podem ser satisfeitas enquanto os diferentes pontos formem uma linha contínua entre os limites $x = x_0$ e $x = X$.

Exemplos. Construir as curvas representadas pelas equações

$$y = x^m, \quad y = \frac{1}{x^m} \quad y = A^x, \quad y = \mathrm{L}(x), \quad y = \operatorname{sen} x,$$

em que A designa uma constante positiva, e m é um número inteiro.

Determinar as formas gerais destas mesmas curvas.

2.5.3 Integrais definidas (21ª Lição)

Suponhamos que, a função $y = f(x)$ sendo contínua em relação a variável x entre dois limites finitos $x = x_0$, $x = X$, designemos por x_1, $x_2 \dots x_{n-1}$ novos valores de x interpostos entre estes limites, em ordem sempre crescente ou decrescente desde o primeiro limite até o segundo. Podemos nos servir destes valores para dividir a diferença $X - x_0$ em elementos

$$x_1 - x_0,\, x_2 - x_1,\, x_3 - x_2,\, \dots\, X - x_{n-1} \tag{2.36}$$

que serão todos de mesmo sinal. Dito isto, multiplicaremos cada elemento pelo valor de $f(x)$ correspondente à *origem* deste mesmo elemento, a saber, o elemento $x_1 - x_0$ por $f(x_0)$, o elemento $x_2 - x_1$ por $f(x_1)$, &c.., enfim o elemento $X - x_{n-1}$ por $f(x_{n-1})$; e seja

$$S = (x_1 - x_0)f(x_0) + (x_2 - x_1)f(x_1) + \cdots + (X - x_{n-1})f(x_{n-1}) \tag{2.37}$$

a soma dos produtos assim obtidos. A quantidade S dependerá evidentemente, 1º do número n de elementos em que teremos dividido a diferença $X - x_0$, 2º dos próprios valores destes elementos e, consequentemente, do modo de divisão adotado. Ora é importante observar que, se os valores numéricos dos elementos tornam-se muito pequenos e o número n muito considerável, o modo de divisão não terá mais do que uma influência insensível sobre o valor de S. Isto é efetivamente o que podemos demonstrar, como segue.

Se supusermos todos os elementos da diferença $X - x_0$ reduzidos a um só que será esta mesma diferença, teremos simplesmente

$$S = (X - x_0)f(x_0). \tag{2.38}$$

Quando ao contrário tomamos as expressões (2.36) por elementos da diferença $X - x_0$, o valor de S, determinado neste caso pela equação (2.37), é igual à soma dos elementos multiplicados por uma média entre os coeficientes

$$f(x_0),\, f(x_1),\, f(x_2), \dots f(x_{n-1})$$

[veja nas preliminares do *Curso de análise*, o corolário do 3º teorema]. Além disso, sendo estes coeficientes valores particulares da expressão

$$f[x_0 + \theta(x - x_0)]$$

que correspondem a valores de θ compreendidos entre zero e a unidade, provaremos, por raciocínios semelhantes àqueles que usamos na 7ª Lição, que a média em questão é um outro valor da mesma expressão correspondente a um valor de θ compreendido entre os mesmos limites. Podemos então substituir a equação (2.37) pela seguinte

$$S = (X - x_0)f[x_0 + \theta(X - x_0)],^{28} \tag{2.39}$$

na qual θ será um número inferior à unidade.

Para passar do modo de divisão que consideramos para um outro no qual os valores numéricos dos elementos de $X - x_0$ sejam ainda menores, será suficiente particionar cada uma das expressões (2.36) em novos elementos. Então devemos substituir, no segundo membro da equação (2.37), o produto $(x_1 - x_0)f(x_0)$ por uma soma de produtos semelhantes, a qual poderemos substituir por uma expressão da forma

$$(x_1 - x_0)f[x_0 + \theta_0(x_1 - x_0)],$$

sendo θ_0 um número inferior à unidade, entendido que haverá entre esta soma e o produto $(x_1 - x_0)f(x_0)$ uma relação semelhante à que existe entre os valores de S fornecidos pelas equações (2.39) e (2.38). Pela mesma razão, deveremos substituir o produto $(x_2 - x_1)f(x_1)$ por uma soma de termos que poderá ser apresentada sob a forma

$$(x_2 - x_1)f[x_1 + \theta_1(x_2 - x_1)],$$

θ_1 designando novamente um número inferior à unidade. Continuando deste modo, chegaremos a concluir que, no novo modo de divisão, o valor de S será da forma

$$\begin{aligned} S = (x_1 - x_0)f[x_0 + \theta_0(x_1 - x_0)] + (x_2 - x_1)f[x_1 + \theta_1(x_2 - x_1)] + \cdots \\ + (X - x_{n-1})f[x_{n-1} + \theta_{n-1}(X - x_{n-1})]. \end{aligned} \tag{2.40}$$

Se fizermos nesta última equação

$$\begin{aligned} &f[x_0 + \theta_0(x_1 - x_0)] = f(x_0) \pm \varepsilon_0,\ f[x_1 + \theta_0(x_2 - x_1)] = f(x_1) \pm \varepsilon_1, \ldots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \ f[x_{n-1} + \theta_{n-1}(X - x_{n-1})] = f(x_{n-1}) \pm \varepsilon_{n-1}, \end{aligned}$$

teremos

$$S = (x_1 - x_0)[f(x_0) \pm \varepsilon_0] + (x_2 - x_1)[f(x_1) \pm \varepsilon_1] + \cdots + (X - x_{n-1})[f(x_{n-1}) \pm \varepsilon_{n-1}], \tag{2.41}$$

então, desenvolvendo os produtos,

$$\begin{aligned} S = (x_1 - x_0)f(x_0) + (x_2 - x_1)f(x_1) + \cdots + (X - x_{n-1})f(x_{n-1}) \\ \pm \varepsilon_0(x_1 - x_0) \pm \varepsilon_1(x_2 - x_1) \pm \cdots \pm \varepsilon_{n-1}(X - x_{n-1}). \end{aligned} \tag{2.42}$$

[28]NDT. Uma das fórmulas do valor médio: Seja $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ contínua, existe $c \in (a, b)$ tal que $\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b - a)$.

Adicionemos que, se os elementos $x_1 - x_0$, $x_2 - x_1, \ldots X - x_{n-1}$ têm valores numéricos muito pequenos, cada uma das quantidades $\pm\varepsilon_0$, $\pm\varepsilon_1, \cdots \pm \varepsilon_{n-1}$ diferirá muito pouco de zero, então ocorrerá o mesmo com a soma

$$\pm\varepsilon_0(x_1 - x_0) \pm \varepsilon_1(x_2 - x_1) \pm \cdots \pm \varepsilon_{n-1}(X - x_{n-1}),$$

que é equivalente ao produto de $X - x_0$ por uma média entre estas diversas quantidades. Dito isto, resulta das equações (2.37) e (2.42) comparadas entre si, que o valor de S, calculado por um modo de divisão em que os elementos da diferença $X - x_0$ tenham valores numéricos muito pequenos, não terá alteração sensível, se passarmos a um segundo modo no qual cada um destes elementos seja subdividido em vários outros.

Consideremos agora dois modos de divisão da diferença $X - x_0$, nos quais os elementos desta diferença tenham valores numéricos bastante pequenos. Poderemos comparar estes dois modos a um terceiro escolhido de tal modo que cada elemento, tanto do primeiro como do segundo, seja formado pela reunião de vários elementos do terceiro. Para que esta condição seja cumprida, será suficiente que todos os valores de x, interpostos nos dois primeiros modos entre os limites x_0, X, sejam empregados no terceiro, e provaremos que altera-se muito pouco o valor de S, passando do primeiro ou do segundo modo ao terceiro, consequentemente passando do primeiro ao segundo. Logo, quando os elementos da diferença $X - x_0$ tornam-se infinitamente pequenos, o modo de divisão não terá mais do que uma influência insensível sobre o valor de S; e se fizermos decrescer indefinidamente os valores numéricos destes elementos, aumentando seu número, o valor de S acabará sendo sensivelmente constante ou, em outros termos, ele terminará alcançando um certo limite que dependerá unicamente da forma da função $f(x)$ e dos valores extremos x_0, X atribuídos à variável x. Este limite é o que chamamos uma *integral definida*.

Observemos agora que, se designarmos por $\Delta x = h = dx$ um incremento finito atribuído à variável x, os diferentes termos que compõem o valor S, tais como os produtos $(x_1 - x_0)f(x_0), (x_2 - x_1)f(x_1)$, &c..., serão todos comprimidos na fórmula geral

$$hf(x) = f(x)dx, \tag{2.43}$$

da qual deduziremos um após o outro, pondo primeiro $x = x_0$ e $h = x_1 - x_0$, depois $x = x_1$ e $h = x_2 - x_1$, &c.... Podemos enunciar que a quantidade S é uma soma de produtos semelhantes à expressão (2.43); o que exprimimos às vezes com ajuda da característica Σ, escrevendo

$$S = \sum hf(x) = \sum f(x)\Delta x. \tag{2.44}$$

Quanto à integral definida para a qual converge a quantidade S, enquanto os elementos da diferença $X - x_0$ tornam-se infinitamente pequenos, é conveniente de representá-la pela notação $\int hf(x)$ ou $\int f(x)\,dx$, na qual a letra $\int$, substituindo a letra Σ, indica, não mais uma soma de produtos semelhantes à expressão (2.43), mas o limite de uma soma desta espécie. Além disso, como o valor da integral definida que consideramos depende dos valores extremos x_0, X atribuídos à variável x, é conveniente colocá-los, o primeiro abaixo, o segundo acima da letra $\int$, ou escrevê-los ao lado da integral, que designaremos em consequência por uma das notações

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx, \quad \int f(x)\,dx \begin{bmatrix} x_0 \\ X \end{bmatrix}, \quad \int f(x)\,dx \begin{bmatrix} x = x_0 \\ x = X \end{bmatrix}. \tag{2.45}$$

A primeira destas notações, imaginada por M. Fourier, é a mais simples. No caso particular em que a função $f(x)$ é substituída por uma quantidade constante a, encontramos, seja qual for o modo de divisão da diferença $X - x_0$, $S = a(X - x_0)$, e concluímos

$$\int_{x_0}^{X} a dx = a(X - x_0). \tag{2.46}$$

Se, nesta última fórmula, pusermos $a = 1$, obteremos

$$\int_{x_0}^{X} dx = X - x_0. \tag{2.47}$$

2.5.4 Fórmulas para a determinação dos valores exatos ou aproximados das integrais definida (22ª lição)

De acordo com o que foi dito na última lição, se dividirmos $X - x_0$ em elementos infinitamente pequenos $x_1 - x_0$, $x_2 - x_1 \ldots X - x_{n-1}$, a soma

$$S = (x_1 - x_0)f(x_0) + (x_2 - x_1)f(x_1) + \cdots + (X - x_{n-1})f(x_{n-1}) \tag{2.48}$$

convergirá para um limite representado pela integral definida

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\, dx. \tag{2.49}$$

Dos princípios sobre os quais fundamos esta proposição resulta que chegaríamos ainda ao mesmo limite se o valor de S, ao invés de ser determinado pela equação (2.48), sendo deduzido de fórmulas semelhantes às equações (2.40) e (2.41) (21ª Lição), isto é, se supusermos

$$\begin{aligned} S = (x_1 - x_0)f[x_0 + \theta_0(x_1 - x_0)] + (x_2 - x_1)f[x_1 + \theta_1(x_2 - x_1)] + \cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + (X - x_{n-1})f[x_{n-1} + \theta_{n-1}(X - x_{n-1})], \end{aligned} \tag{2.50}$$

θ_0, $\theta_1 \ldots \theta_{n-1}$ designando números quaisquer inferiores à unidade, ou

$$S = (x_1 - x_0)[f(x_0) \pm \varepsilon_0] + (x_2 - x_1)[f(x_1) \pm \varepsilon_1] + \cdots + (X - x_{n-1})[f(x_{n-1}) \pm \varepsilon_{n-1}], \tag{2.51}$$

ε_0, $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_{n-1}$ designando números sujeitos a se evanescerem com os elementos da diferença $X - x_0$. A primeira das duas fórmulas precedentes reduz-se à equação (2.48), quando tomamos $\theta_0 = \theta_1 = \cdots = \theta_{n-1} = 0$. Se fizermos ao contrário $\theta_0 = \theta_1 = \cdots = \theta_{n-1} = 1$, encontraremos

$$S = (x_1 - x_0)f(x_1) + (x_2 - x_1)f(x_2) + \cdots + (X - x_{n-1})f(X). \tag{2.52}$$

Quando, nesta última fórmula, intercambiamos as duas quantidades x_0, X, assim como todos os termos colocados a distâncias iguais dos dois extremos na sequência x_0, $x_1 \ldots x_{n-1}$, X, obtemos um novo valor de S igual, mas oposto em sinal ao fornecido pela equação (2.48). O limite para o qual convergirá este novo valor de S deverá então ser igual, mas oposto em sinal, à integral (2.49), da qual deduziremos trocando mutualmente as duas quantidades x_0, X. Portanto teremos de forma geral

$$\int_{X}^{x_0} f(x)\, dx = -\int_{x_0}^{X} f(x)\, dx. \tag{2.53}$$

Frequentemente empregamos as fórmulas (2.48) e (2.52) na busca por valores aproximados de integrais definidas. Por maior simplicidade, supomos ordinariamente que as quantidades x_0, $x_1 \ldots x_{n-1}$, X nestas fórmulas estão em progressão aritmética. Então os elementos da diferença $X - x_0$ tornarão-se todos iguais à fração $\dfrac{X - x_0}{n}$; e designando esta fração por i, descobrimos que as equações (2.48) e (2.52) reduzem-se às duas seguintes:

$$S = i[f(x_0) + f(x_0 + i) + f(x_0 + 2i) + \cdots + f(X - 2i) + f(X - i)], \tag{2.54}$$

$$S = i[f(x_0 + i) + f(x_0 + 2i) + \cdots + f(X - 2i) + f(X - i) + f(X)]. \tag{2.55}$$

Poderíamos supor ainda que as quantidades x_0, $x_1 \ldots x_{n-1}$, X formam uma progressão geométrica cuja razão difere muito pouco da unidade. Adotando esta hipótese, e fazendo $\left(\dfrac{X}{x_0}\right)^{\frac{1}{n}} = 1 + \alpha$, obteremos das fórmulas (2.48) e (2.52) dois novos valores de S, o primeiro será

$$S = \alpha \left\{ x_0 f(x_0) + x_0(1+\alpha) f[x_0(1+\alpha)] + \cdots + \frac{X}{1+\alpha} f\left(\frac{X}{1+\alpha}\right) \right\}. \tag{2.56}$$

É essencial observar que, em vários casos, podemos deduzir das equações (2.54) e (2.56), não somente valores aproximados da integral (2.49), mas também seu valor exato ou $\lim . S$. Encontraremos, por exemplo,

$$\int_{x_0}^{X} x\, dx = \lim \frac{(X - x_0)(X + x_0 - i)}{2} = \lim \frac{X^2 - x_0^2}{2 + \alpha} = \frac{X^2 - x_0^2}{2}; \tag{2.57}$$

$$\int_{x_0}^{X} A^x\, dx = \lim \frac{i(A^X - A^{x_0})}{A^i - 1} = \frac{A^x - A^{x_0}}{\mathrm{l}(A)}, \quad \int_{x_0}^{X} e^x\, dx = e^X - e^{x_0}; \tag{2.58}$$

$$\int_{x_0}^{X} x^\alpha\, dx = \lim \frac{\alpha(X^{\alpha+1} - x_0^{\alpha+1})}{(1+\alpha)^{\alpha+1} - 1} = \frac{X^{\alpha+1} - x_0^{\alpha+1}}{\alpha + 1}, \quad \int_{x_0}^{X} \frac{dx}{x} = \lim n\alpha = \mathrm{l}\left(\frac{X}{x_0}\right); \tag{2.59}$$

a última equação devendo restringir-se ao caso em que as quantidades x_0, X são afetadas pelo mesmo sinal. Vamos acrescentar que é frequentemente fácil reduzir a determinação de uma integral definida à de uma outra integral de mesma espécie. Assim, por exemplo, obteremos da fórmula (2.48)

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{X} a\varphi(x)\, dx &= \lim . a[(x_1 - x_0)\varphi(x_0) + \cdots + (X - x_{n-1})\varphi(x_{n-1}))] \\ &= a \int_{x^0}^{X} \varphi(x)\, dx;\end{aligned} \tag{2.60}$$

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{X} f(x + a)\, dx &= \lim . [(x_1 + x_0) f(x_0 + a) + \cdots + (X - x_{n-1}) f(x_{n-1} + a)] \\ &= \int_{x_0 + a}^{X + a} f(x)\, dx;\end{aligned} \tag{2.61}$$

$$\int_{x_0}^{X} f(x-a)\,dx = \int_{x_0-a}^{X-a} f(x)\,dx, \qquad \int_{x_0}^{X} \frac{dx}{x-a} = \int_{x_0-a}^{x-a} \frac{dx}{x} = \mathrm{l}\left(\frac{X-a}{x_0-a}\right); \quad (2.62)$$

a última devendo ser restrita ao caso em que x_0-a e $X-a$ são quantidades afetadas pelo mesmo sinal. Além disso, obteremos da fórmula (2.55), pondo $x_0 = 0$, e substituindo $f(x)$ por $f(X-x)$,

$$\int_{0}^{X} f(X-x)\,dx = \lim .i[f(X-i) + f(X-2i) + \cdots + f(2i) + f(i) + f(0)]$$
$$= \int_0^X f(x)\,dx; \quad (2.63)$$

então concluiremos [tendo em conta a equação (2.61)]

$$\int_0^{X-x_0} f(X-x)\,dx = \int_0^{X-x_0} f(x+x_0)dx = \int_{x_0}^{X} f(x)\,dx. \quad (2.64)$$

Enfim, se colocarmos na fórmula (2.56) $f(x) = \dfrac{1}{x\,\mathrm{l}(x)}$ e $\mathrm{l}(1+\alpha) = \beta$, obteremos

$$\int_{x_0}^{X} \frac{dx}{x\,\mathrm{l(x)}} = \lim .\beta\left[\frac{1}{\mathrm{l}(x_0)} + \frac{1}{\mathrm{l}(x_0)+\beta} + \cdots + \frac{1}{\mathrm{l}(X)-\beta}\right]\left(\frac{e^\beta - 1}{\beta}\right) = \int_{l(x_0)}^{l(X)} \frac{dx}{x}$$
$$= \mathrm{l}\left[\frac{\mathrm{l}(X)}{\mathrm{l}(x_0)}\right], \quad (2.65)$$

as quantidades x_0, X devendo ser positivas, e ambas superiores ou ambas inferiores à unidade.

Uma observação importante a fazer é que as formas sob as quais se apresenta o valor de S, nas equações (2.51) e (2.52) da lição precedente, convêm igualmente à integral (2.49). De fato, estas equações subsistindo uma e outra, enquanto subdividimos ou a diferença $X - x_0$, ou as quantidades $x_1 - x_0$, $x_2 - x_1, \ldots X - x_{n-1}$ em elementos infinitamente pequenos, serão ainda verdadeiras no limite, de modo que teremos

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = (X-x_0)f[x_0 + \theta(X-x_0)], \text{ e} \quad (2.66)$$

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = (x_1-x_0)f[x_0+\theta_0(x_1-x_0)] + (x_2-x_1)f[x_1+\theta_1(x_2-x_1)]$$
$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + (X-x_{n-1})f[x_{n-1}+\theta_{n-1}(X-x_{n-1})], \quad (2.67)$$

θ, θ_0, $\theta_1 \ldots \theta_{n-1}$ designando números desconhecidos, mas todos inferiores à unidade. Se, por mais simplicidade, supusermos as quantidades $x_1 - x_0$, $x_2 - x_1 \ldots X - x_{n-1}$ iguais entre si, então, fazendo $i = \dfrac{X-x_0}{n}$, encontraremos

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = i[f(x_0+\theta_0 i) + f(x_0+i+\theta_1 i) + \cdots + f(X-i+\theta_{n-1}i)] \quad (2.68)$$

Quando a função $f(x)$ é sempre crescente ou sempre decrescente, desde $x = x_0$ até $x = X$, o segundo membro da fórmula (2.68) permanece evidentemente compreendido entre os dois valores de S fornecidos pelas equações (2.54) e (2.55), valores cuja diferença é $\pm i[f(X) - f(x_0)]$. Consequentemente, nesta hipótese, considerando a meia-soma destes dois valores, ou a expressão

$$i\left[\frac{1}{2}f(x_0) + f(x_0+i) + f(x_0+2i) + \cdots + f(X-2i) + f(X-i) + \frac{1}{2}f(X)\right] \tag{2.69}$$

por valor aproximado da integral (2.68), cometemos um erro menor do que a semi-diferença $\pm i\left[\frac{1}{2}f(X) - \frac{1}{2}f(x_0)\right]$.

Exemplo. Se supusermos $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $x_0 = 0$, $X = 1$, $i = \frac{1}{4}$, a expressão (2.69) se tornará $\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} + \frac{16}{17} + \frac{4}{5} + \frac{16}{25} + \frac{1}{4}\right) = 0,78\ldots$ Consequentemente $0,78$ é o valor aproximado da integral $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$. O erro cometido neste caso não poderá ultrapassar $\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{16}$. Ele estará efetivamente abaixo de um centésimo, como veremos mais adiante.

Quando a função $f(x)$ é às vezes crescente e às vezes decrescente entre os limites $x = x_0$, $x = X$, o erro que cometemos, considerando um dos valores de S fornecidos pelas equações (2.54) e (2.55) para valor aproximado da integral (2.49), é evidentemente inferior ao produto de $ni = X - x_0$ pelo maior valor numérico que pode obter a diferença

$$f(x+\Delta x) - f(x) = \Delta x\ f'(x+\theta\Delta x) \tag{2.70}$$

quando supomos x compreendido entre os limites x_0, X, e Δx entre os limites 0, i. Então, se chamamos k o maior dos valores numéricos que recebe $f(x)$, enquanto x varia desde $x = x_0$ até $x = X$, o erro cometido estará certamente entre os limites

$$-ki(X-x_0), \qquad +ki(X-x_0).$$

2.5.5 Decomposição de uma Integral definida em várias outras. Integrais definidas imaginárias. Representação geométrica de Integrais definidas reais. Decomposição da Função sob o sinal $\int$ em dois Fatores em que um conserva sempre o mesmo sinal (23ª lição)

Para dividir a integral definida

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx \tag{2.71}$$

em várias outras de mesma espécie, é suficiente decompor em várias partes ou a função sob o sinal $\int$, ou a diferença $X - x_0$. Suponhamos primeiro $f(x) = \varphi(x) + \chi(x) + \psi(x) + \cdots$; concluiremos $(x_1 - x_0)f(x_0) + \cdots + (X - x_{n-1})f(x_{n-1}) = (x_1 - x_0)\varphi(x_0) + \cdots + (X - x_{n-1})\varphi(x_{n-1}) + (x_1 - x_0)\chi(x_0) + \cdots + (X - x_{n-1})\chi(x_{n-1}) + (x_1 - x_0)\psi(x_0) + \cdots + (X - x_{n-1})\psi(x_{n-1}) + \&c.$, então passando aos limites,

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{X} \varphi(x)\,dx + \int_{x_0}^{X} \chi(x)\,dx + \int_{x_0}^{X} \psi(x)\,dx + \&c\ldots$$

Desta última fórmula junto à equação (2.60) [22ª lição] obteremos, designando por u, v, $w\ldots$ diversas funções da variável x, e por a, b, $c\ldots$ quantidades constantes,

$$\int_{x_0}^{X}(u+v+w+\cdots)\,dx=\int_{x_0}^{X}u\,dx+\int_{x_0}^{X}v\,dx+\int_{x_0}^{X}w\,dx+\cdots; \tag{2.72}$$

$$\int_{x_0}^{X}(u+v)\,dx=\int_{x_0}^{X}u\,dx+\int_{x_0}^{X}v\,dx, \qquad \int_{x_0}^{X}(u-v)\,dx=\int_{x_0}^{X}u\,dx-\int_{x_0}^{X}v\,dx; \tag{2.73}$$

$$\int_{x_0}^{X}(au+bv+cw+\cdots)\,dx=a\int_{x_0}^{X}u\,dx+b\int_{x_0}^{X}v\,dx+c\int_{x_0}^{X}w\,dx+\cdots \tag{2.74}$$

Quando estendemos a definição que demos da integral (2.71), ao caso em que a função $f(x)$ torna-se imaginária, a equação (2.74) subsiste para valores imaginários das constantes a, b, $c\ldots$. Temos por exemplo

$$\int_{x_0}^{X}(u+v\sqrt{-1})\,dx=\int_{x_0}^{X}u\,dx+\sqrt{-1}\int_{x_0}^{X}v\,dx. \tag{2.75}$$

Suponhamos agora que, depois de dividir a diferença $X-x_0$ em um número finito de elementos representados por x_1-x_0, $x_2-x_1\ldots X-x_{n-1}$, particionemos cada um destes elementos em vários outros cujos valores numéricos sejam infinitamente pequenos, e que modifiquemos consequentemente o valor de S fornecido pela equação (2.48) [22ª lição]. O produto $(x_1-x_0)f(x_0)$ se encontrará substituído por uma soma de produtos semelhantes que terá por limite a integral $\int_{x_0}^{x_1}f(x)\,dx$. Analogamente, os produtos $(x_2-x_1)f(x_1),\ldots(X-x_{n-1})$ serão substituídos pelas somas que terão por limites as integrais definidas $\int_{x_1}^{x_2}f(x)\,dx$, &c..., $\int_{x_{n-1}}^{X}f(x)\,dx$. Além disso, reunindo as diferentes somas em questão, obteremos por resultado uma soma total cujo limite será precisamente a integral (2.71). Logo, como o limite de uma soma de várias quantidades é sempre equivalente à soma de seus limites, teremos em geral

$$\int_{x_0}^{X}f(x)\,dx=\int_{x_0}^{x_1}f(x)\,dx+\int_{x_1}^{x_2}f(x)\,dx+\cdots+\int_{x_{n-1}}^{X}f(x)\,dx. \tag{2.76}$$

É essencial recordar-se de que aqui devemos atribuir ao número inteiro n um valor finito. Quando entre os limites x_0, X interpusermos um só valor de x representado por ξ, a equação (2.76) se reduzirá a

$$\int_{x_0}^{X}f(x)\,dx=\int_{x_0}^{\xi}f(x)\,dx+\int_{\xi}^{X}f(x)\,dx. \tag{2.77}$$

É fácil provar que as equações (2.76) e (2.77) subsistiriam mesmo no caso em que algumas das quantidades x_1, $x_2\ldots x_{n-1}$, ξ deixassem de estar comprimidas entre os limites x_0, X, e naquele em que as diferenças x_1-x_0, $x_2-x_1\ldots X-x_{n-1}$, $\xi-x_0$, $X-\xi$ não seriam mais quantidades de mesmo sinal. Admitamos, por exemplo, as diferenças $\xi-x_0$, $X-\xi$ sejam de sinais contrários. Então, segue que se supusermos x_0 entre ξ e X, ou X entre x_0 e ξ, teremos

$$\int_{\xi}^{X}f(x)\,dx=\int_{\xi}^{X}f(x)\,dx+\int_{x_0}^{X}f(x)\,dx, \quad \text{ou}$$

$$\int_{x_0}^{\xi}f(x)\,dx=\int_{x_0}^{X}f(x)\,dx+\int_{X}^{\xi}f(x)\,dx.$$

Ora, a fórmula (2.53) da 22ª lição é suficiente para mostrar como as duas equações que acabamos de obter estão de acordo com a equação (2.77). Esta última sendo estabelecida em todas as hipóteses, podemos deduzir diretamente a equação (2.76), quaisquer que sejam x_1, $x_2 \dots x_{n-1}$.

Vimos, na lição precedente, como foi fácil encontrar, não somente os valores aproximados da integral (2.71), mas também os limites dos erros cometidos, quando a função $f(x)$ é sempre crescente ou sempre decrescente desde $x = x_0$ até $x = X$. Quando esta condição não é mais satisfeita, podemos evidentemente, com ajuda da fórmula (2.76), decompor a integral (2.71) em várias outras, para cada uma das quais a mesma condição é cumprida.

Concebamos agora que, sendo o limite X superior a x_0, e a função $f(x)$ positiva de $x = x_0$ a $x - X$, x, y designando coordenadas retangulares, e A a superfície compreendida, por uma parte, entre o eixo dos x e a curva $y = f(x)$, por outra parte, entre as ordenadas $f(x_0)$, $f(X)$. Esta superfície, que tem por base o comprimento $X - x_0$ medido sobre o eixo dos x, será uma média entre as áreas de dois retângulos construídos sobre a base $X - x_0$ com as alturas respectivamente iguais à menor e à maior das ordenadas elevadas pelos diferentes pontos desta base. Ela será então equivalente a um retângulo construído sobre uma ordenada média representada por uma expressão da forma $f[x_0 + \theta(X - x_0)]$; de modo que teremos

$$A = (X - x_0)f[x_0 + \theta(X - x_0)], \tag{2.78}$$

θ designando um número inferior à unidade. Se dividirmos a base $X - x_0$ em elementos muito pequenos $x_1 - x_0$, $x_2 - x_1 \dots X - x_{n-1}$, a superfície A se encontrará dividida em elementos correspondentes cujos valores serão dados pelas equações semelhantes à fórmula (2.78). Teremos, portanto, ainda

$$\begin{aligned} A = (x_1 - x_0)f[x_0 + \theta_0(x_1 - x_0)] + (x_2 - x_1)f[x_1 + \theta(x_2 - x_1)] + \cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots + (X - x_{n-1})f[x_{n-1} + \theta_{n-1}(X - x_{n-1})], \end{aligned} \tag{2.79}$$

θ_0, $\theta_1 \dots \theta_{n-1}$ designando números inferiores à unidade. Se nesta última equação fizermos decrescer indefinidamente os valores numéricos dos elementos de $X - x_0$, obteremos, passando aos limites,

$$A = \int_{x_0}^{X} f(x)\, dx. \tag{2.80}$$

Exemplos. Aplicar a fórmula (2.80) às curvas $y = ax^2$, $xy = 1$, $y = e^x$,....

Terminando esta Lição, faremos conhecer uma propriedade notável de integrais definidas reais. Se supusermos $f(x) = \varphi(x)\chi(x)$, $\varphi(x)$ e $\chi(x)$ sendo duas funções novas que permanecem contínuas entre os limites $x = x_0$, $x = X$, e que a segunda conserva sempre o mesmo sinal entre estes limites, o valor de S dado pela equação (2.48) da 22ª lição se tornará

$$S = (x_1 - x_2)\varphi(x_0)\chi(x_0) + (x_2 - x_1)\varphi(x_1)\chi(x_1) + \cdots + (X - x_{n-1})\varphi(x_{n-1})\chi(x_{n-1}), \tag{2.81}$$

e será equivalente à soma

$$(x_1 - x_0)\chi(x_0) + (x_2 - x_1)\chi(x_1) + \cdots + (X - x_{n-1})\chi(x_{n-1})$$

multiplicada por uma média entre os coeficiente $\varphi(x_0)$, $\varphi(x_1)\ldots\varphi(x_{n-1})$, ou, o que é o mesmo, por uma quantidade da forma $\varphi(\xi)$, ξ designando um valor de x compreendido entre x_0 e X. Teremos então

$$S = [(x_1 - x_0)\chi(x_0) + (x_2 - x_1)\chi(x_1) + \cdots + (X - x_{n-1})\chi(x_{n-1})]\varphi(\xi), \tag{2.82}$$

e concluiremos, buscando o limite de S,

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{X} \varphi(x)\chi(x)\,dx = \varphi(\xi)\int_{x_0}^{X} \chi(x)\,dx, \tag{2.83}$$

ξ designando sempre um valor de x compreendido entre x_0 e X.

Exemplos. Se tomarmos sucessivamente

$$\chi(x) = 1, \qquad \chi(x) = \frac{1}{x}, \qquad \chi(x) = \frac{1}{x-a},$$

obteremos as fórmulas

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = f(\xi)\int_{x_0}^{X} dx = (X - x_0)f(\xi), \tag{2.84}$$

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \xi f(\xi)\int_{x_0}^{X} \frac{dx}{x} = \xi f(\xi) \mathrm{l}\left(\frac{X}{x_0}\right), \tag{2.85}$$

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = (\xi - a)f(\xi - a)\int_{x_0}^{X} \frac{dx}{x-a} = (\xi - a)f(\xi - a)\mathrm{l}\left(\frac{X-a}{x_0-a}\right), \tag{2.86}$$

em que a primeira coincide com a equação (2.66) da 22ª lição. Acrescentamos que a razão $\dfrac{X}{x_0}$ na segunda fórmula, e a razão $\dfrac{X-a}{x_0-a}$ na terceira, devem devendo ser consideradas positivas.

2.5.6 Integrais definidas cujos Valores são infinitos ou indeterminados. Valores principais das Integrais determinadas (24ª Lição)

Nas Lições precedentes demonstramos várias propriedades notáveis da integral definida

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx, \tag{2.87}$$

mas supondo, 1º que os limites x_0, X eram quantidades finitas, 2º que a função $f(x)$ permanecia finita e contínua entre estes mesmos limites. Quando estas duas espécies de condições encontram-se satisfeitas, então, designando por x_1, $x_2\ldots x_{n-1}$ novos valores de x interpostos entre os valores extremos x_0, X, temos

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{X} f(x)\,dx. \tag{2.88}$$

Quando os valores interpostos reduzem-se a dois, um muito pouco diferente de x_0, e representado por ξ_0, a equação (2.88) se torna

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{\xi_0} f(x)\,dx + \int_{\xi_0}^{\xi} f(x)\,dx + \int_{\xi}^{X} f(x)\,dx,$$

e pode ser escrita como:

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = (\xi_0 - x_0) f[x_0 + \theta_0(\xi_0 - x_0)] + \int_{\xi_0}^{\xi} f(x)\,dx + (X - \xi) f[\xi + \theta(X - \xi)],$$

θ_0, θ designando dois números inferiores à unidade. Se, na última fórmula, fizermos convergir ξ_0 para o limite x_0, e ξ para o limite X, obteremos, passando aos limites,

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \lim.\int_{\xi_0}^{\xi} f(x)\,dx. \tag{2.89}$$

Quando os valores extremos x_0, X tornam-se infinitos, ou quando a função $f(x)$ não permanece finita e contínua de $x = x_0$ até $x = X$, não podemos mais afirmar que a quantidade designada por S nas lições precedentes tem um limite fixo, e consequentemente não vemos mais qual significado devemos atribuir à notação (2.87) que serviu para representar de forma geral o limite de S. Para eliminar toda incerteza e retornar à notação (2.87), em todos os caos, uma significação clara e precisa, é suficiente expandir por analogia as equações (2.88) e (2.89) aos casos em que elas não podem mais ser rigorosamente demonstradas. E é o que vamos mostrar em alguns exemplos.

Consideremos, em primeiro lugar, a integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^x\,dx. \tag{2.90}$$

Se designarmos por ξ_0 e ξ duas quantidades variáveis, em que a primeira converge para o limite $-\infty$, e a segunda para o limite ∞, obteremos da fórmula (2.89)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^x\,dx = \lim.\int_{\xi_0}^{\xi} e^x\,dx = \lim.(e^{\xi} - e^{\xi_0}) = e^{\infty} - e^{-\infty} = \infty.$$

Assim, a integral (2.90) possui um valor infinito positivo.

Consideremos, em segundo lugar, a integral

$$\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{x} \tag{2.91}$$

tomada entre dois limites em que um é infinito, enquanto o outro torna infinito a função sob o sinal $\int$, a saber $\frac{1}{x}$. Designando por ξ_0 e ξ duas quantidades positivas, em que a primeira converge para o limite zero, e a segunda para o limite ∞, obteremos da fórmula (2.89)

$$\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim.\int_{\xi_0}^{\xi} \frac{dx}{x} = \lim.\mathrm{l}\left(\frac{\xi}{\xi_0}\right) = \mathrm{l}\left(\frac{\infty}{0}\right) = \infty.$$

Assim, a integral (2.91) tem ainda um valor infinito positivo.

É essencial observar que, se a variável x e a função $f(x)$ permanecem ambas finitas para um dos limites da integral (2.87), poderemos reduzir a fórmula (2.89) a uma das duas seguintes:

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \lim.\int_{x_0}^{\xi} f(x)\,dx, \qquad \int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \lim.\int_{\xi_0}^{X} f(x)\,dx. \tag{2.92}$$

Obteremos em particular destas últimas

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^x\,dx = e^0 - e^{-\infty} = 1, \qquad \int_0^{\infty} e^x\,dx = e^{\infty} - e^0 = \infty; \\ \displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{dx}{x} = \mathrm{l}(0) = -\infty, \qquad \int_0^1 \frac{dx}{x} = \mathrm{l}\left(\frac{1}{0}\right) = \infty. \end{cases} \tag{2.93}$$

Consideremos agora a integral

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x}, \tag{2.94}$$

na qual a função sob o sinal $\int$, a saber $\frac{1}{x}$, torna-se infinita para o valor particular $x = 0$ compreendido entre os limites $x = -1$, $x = +1$. Obteremos da fórmula (2.88)

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x} = \int_{-1}^{0} \frac{dx}{x} + \int_0^1 \frac{dx}{x} = -\infty + \infty. \tag{2.95}$$

O valor da integral (2.94) parece então indeterminado. Para se assegurar que ela o é efetivamente, é suficiente observar que, se designarmos por ε um número infinitamente pequeno, e por μ, ν duas constantes positivas, mas arbitrárias, teremos, em virtude das fórmulas (2.92),

$$\int_{-1}^{0} \frac{dx}{x} = \lim.\int_{-1}^{-\varepsilon\mu} \frac{dx}{x}, \qquad \int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim.\int_{\varepsilon\nu}^{1} \frac{dx}{x}. \tag{2.96}$$

Consequentemente, a fórmula (2.95) se tornará

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x} = \lim\left\{\int_{-1}^{-\varepsilon\nu} \frac{dx}{x} + \int_{\varepsilon\nu}^{1} \frac{dx}{x}\right\} = \lim\left[\mathrm{l}\,(\varepsilon\mu) + \mathrm{l}\left(\frac{1}{\varepsilon\nu}\right)\right] = \mathrm{l}\left(\frac{\mu}{\nu}\right), \tag{2.97}$$

e fornecerá para a integral (2.94) um valor completamente indeterminado, já que este valor será o logaritmo Neperiano da constante arbitrária $\frac{\mu}{\nu}$.

Concebamos agora que a função $f(x)$ torne-se infinita entre os limites $x = x_0$, $x = X$, para os valores particulares de x representados por $x_1, x_2 \dots x_m$. Se designarmos por ε um número infinitamente pequeno, e por μ_1, ν_1, μ_2, $\nu_2 \dots \mu_m$, ν_m as constantes positivas, mas arbitrárias, obteremos das fórmulas (2.88) e (2.89)

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{X} f(x)\,dx &= \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \cdots + \int_{x_m}^{X} f(x)\,dx \\ &= \lim\left\{\int_{x_0}^{x_1-\varepsilon\mu_1} f(x)\,dx + \int_{x_1+\varepsilon\nu_1}^{x_2-\varepsilon\mu_2} f(x)\,dx + \cdots + \int_{x_m+\varepsilon\nu_m}^{X} f(x)\,dx\right\}. \end{aligned} \tag{2.98}$$

Se os limites x_0, X fossem substituídos por $-\infty$ e $+\infty$, teríamos

$$\begin{gathered} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \\ \lim.\left\{\int_{-\frac{1}{\varepsilon\mu}}^{x_1-\varepsilon\mu_1} f(x)\,dx + \int_{x_1+\varepsilon\nu_1}^{x_2-\varepsilon\mu_2} f(x)\,dx + \cdots + \int_{x_m+\varepsilon\nu_m}^{\frac{1}{\varepsilon\nu}} f(x)\,dx\right\}, \end{gathered} \tag{2.99}$$

μ, ν designando duas novas constantes positivas, mas arbitrárias. Adicionemos que no segundo membro da fórmula (2.99) deveremos restabelecer X no lugar de $\dfrac{1}{\varepsilon\nu}$, ou x_0 no lugar de $-\dfrac{1}{\varepsilon}$, se das duas quantidades x_0, X, uma única tornar-se infinita. Em todo caso, os valores das integrais

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx, \tag{2.100}$$

deduzidos das equações (2.98) e (2.99), poderão ser, segundo a natureza da função $f(x)$, ou quantidades infinitas, ou quantidades finitas e determinadas, ou quantidades indeterminadas que dependerão dos valores atribuídos às constantes arbitrárias μ, ν, μ_1, $\nu_1 \ldots \mu_m$, ν_m.

Se, nas fórmulas (2.98) e (2.99) reduzimos à unidade as constantes arbitrárias μ, ν, μ_1, $\nu_1 \ \ldots \mu_m$, ν_m, encontraremos

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \lim.\left\{\int_{x_0}^{x_1-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{x_1+\varepsilon}^{x_2-\varepsilon} f(x)\,dx + \cdots + \int_{x_m+\varepsilon}^{X} f(x)\,dx\right\}, \tag{2.101}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim.\left\{\int_{-\frac{1}{\varepsilon}}^{x_1-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{x_1+\varepsilon}^{x_2-\varepsilon} f(x)\,dx + \cdots + \int_{x_m+\varepsilon}^{\frac{1}{\varepsilon}} f(x)\,dx\right\}. \tag{2.102}$$

Toda vez que as integrais (2.100) tornam-se indeterminadas, as equações (2.101) e (2.102) fornecerão para cada uma delas apenas um valor particular ao qual daremos o nome de *valor principal*. Se tomarmos por exemplo a integral (2.94) cujo valor geral é indeterminado, reconheceremos que seu valor principal se reduz a zero.

2.5.7 Integrais definidas singulares (25ª Lição)

Concebamos que uma integral relativa a x, e na qual a função sob o sinal $\int$ é designada por $f(x)$, seja tomada entre dois limites infinitamente próximos de um certo valor particular a atribuído à variável x. Se este valor a é uma quantidade finita, e se a função $f(x)$ permanece finita e contínua na vizinhança de $x = a$, então, em virtude da fórmula (2.66) [22ª lição], a integral proposta será sensivelmente nula. Mas ela poderá obter um valor finito diferente de zero, ou mesmo um valor infinito, se tivermos $a = \pm\infty$, ou $f(a) = \pm\infty$. Neste último caso, a integral em questão se tornará o que chamaremos uma *integral definida singular*. Será ordinariamente fácil de calcular seu valor com auxílio das fórmulas (2.85) e (2.86) da 23ª lição, como veremos.

Sejam ε um número infinitamente pequeno, e μ, ν duas constantes positivas, mas arbitrárias. Se a é uma quantidade finita, mas tomada entre as raízes da equação $f(x) = \pm\infty$, e se f designa o limite para onde converge o produto $(x-a)f(x)$, enquanto seu primeiro fator converge para zero, os valores das integrais singulares $\displaystyle\int_{a-\varepsilon}^{a-\varepsilon\mu} f(x)\,dx$, $\displaystyle\int_{a+\varepsilon\nu}^{a+\varepsilon} f(x)\,dx$ serão aproximadamente [em virtude da fórmula (2.86), 23ª lição]

$$\int_{a-\varepsilon}^{a-\varepsilon\mu} f(x)\,dx = \mathrm{f}\,l\,(\mu)\,, \tag{2.103}$$

$$\int_{a+\varepsilon\nu}^{a+\varepsilon} f(x)\,dx = \mathrm{f}\,\mathrm{l}\left(\frac{1}{\nu}\right). \tag{2.104}$$

Se supusermos ao contrário $a = \pm\infty$, chamando de f o limite para o qual converge o produto $xf(x)$, enquanto que a variável x converge para o limite $\pm\infty$, teremos sensivelmente [23ª lição, equação (2.85)]

$$\int_{-\frac{1}{\varepsilon\mu}}^{-\frac{1}{\varepsilon}} f(x)\,dx = \mathrm{f}\,\mathrm{l}(\mu), \tag{2.105}$$

$$\int_{\frac{1}{\varepsilon}}^{\frac{1}{\varepsilon\nu}} f(x)\,dx = \mathrm{f}\,\mathrm{l}\left(\frac{1}{\nu}\right). \tag{2.106}$$

É essencial observar que o limite do produto $(x-a)f(x)$ ou $xf(x)$ depende às vezes do sinal de seu primeiro fator. Assim, por exemplo, o produto $x(x^2+x^4)^{-\frac{1}{2}}$ converge para o limite $+1$ ou -1, já que seu primeiro fator, ao se aproximar de zero, permanece positivo ou negativo. Segue desta observação que a quantidade designada por f muda às vezes de valor na passagem da equação (2.103) à equação (2.104), ou da equação (2.105) à equação (2.106).

A consideração das integrais definidas singulares fornece o meio de calcular o valor geral de uma integral indeterminada, quando conhecemos seu valor principal. De fato, seja

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx \tag{2.107}$$

a integral em questão, e, admitindo as notações da lição precedente, fazemos

$$\mathrm{E} = \int_{x_0}^{x_1-\varepsilon\mu_1} f(x)\,dx + \int_{x_1+\varepsilon\nu_1}^{x_2-\varepsilon\mu_2} f(x)\,dx + \cdots + \int_{x_m+\varepsilon\nu_m}^{X} f(x)\,dx, \tag{2.108}$$

$$\mathrm{F} = \int_{x_0}^{x_1-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{x_1+\varepsilon}^{x_2-\varepsilon} f(x)\,dx + \cdots + \int_{x_m+\varepsilon}^{X} f(x)\,dx. \tag{2.109}$$

Sejam, além disso, $\mathrm{A} = \lim.\mathrm{E}$ o valor geral e $\mathrm{B} = \lim.\mathrm{F}$ o valor principal da integral (2.107). A diferença $\mathrm{A} - \mathrm{B} = \lim.(\mathrm{E}-\mathrm{F})$ será equivalente à soma das integrais singulares

$$\int_{x_1-\varepsilon}^{x_1-\varepsilon\mu_1} f(x)\,dx,\ \int_{x_1+\varepsilon\nu_1}^{x_1+\varepsilon} f(x)\,dx,\ \int_{x_2-\varepsilon}^{x_2-\varepsilon\mu_2} f(x)\,dx, \cdots \int_{x_m+\varepsilon\nu_m}^{x_m+\varepsilon} f(x)\,dx, \tag{2.110}$$

isto é, ao limite para o qual se aproxima a soma das integrais (2.110), enquanto ε decresce indefinidamente. Além disso, se designamos por $\mathrm{f}_1,\ \mathrm{f}_2 \ldots \mathrm{f}_m$ os limites para os quais convergem os produtos

$$(x-x_1)f(x),\ (x-x_2)f(x)\ldots(x-x_m)f(x),$$

enquanto seus primeiro fatores convergem para zero, e se estes limites são independentes dos sinais destes primeiros fatores, encontraremos que a soma das integrais (2.110) se reduz sensivelmente à

$$\mathrm{f}_1.\mathrm{l}\left(\frac{\mu_1}{\nu_1}\right) + \mathrm{f}_2.\mathrm{l}\left(\frac{\mu_2}{\nu_2}\right) + \cdots + \mathrm{f}_m.\mathrm{l}\left(\frac{\mu_m}{\nu_m}\right). \tag{2.111}$$

Quando temos $x_1 = x_0$ ou $x_m = X$, a diferença A−B compreende uma integral singular a menos, a saber, a primeira ou a última das integrais (2.110).

Quando supusermos $x_0 = -\infty$, $X = +\infty$, as equações (2.108) e (2.109) devem ser substituídas pelas seguintes:

$$\mathrm{E} = \int_{-\frac{1}{\varepsilon\mu}}^{x_1-\varepsilon\mu_1} f(x)\,dx + \int_{x_1+\varepsilon\nu_1}^{x_2-\varepsilon\mu_2} f(x)\,dx + \cdots + \int_{x_m+\varepsilon\nu_m}^{\frac{1}{\varepsilon\nu}} f(x)\,dx, \tag{2.112}$$

$$\mathrm{F} = \int_{-\frac{1}{\varepsilon}}^{x_1-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{x_1+\varepsilon}^{x_2-\varepsilon} f(x)\,dx + \cdots + \int_{x_m+\varepsilon}^{\frac{1}{\varepsilon}} f(x)\,dx. \tag{2.113}$$

Na mesma hipótese, é necessário às integrais (2.110) acrescentar as duas seguintes

$$\int_{-\frac{1}{\varepsilon\mu}}^{-\frac{1}{\varepsilon}} f(x)\,dx, \quad \int_{\frac{1}{\varepsilon}}^{\frac{1}{\varepsilon\mu}} f(x)\,dx, \tag{2.114}$$

cuja soma será sensivelmente equivalente à expressão

$$\mathrm{fl}\left(\frac{\mu}{\nu}\right), \tag{2.115}$$

se o produto $xf(x)$ converge para o limite f, enquanto a variável x converge para um dos dois limites $-\infty$, $+\infty$. Se apenas uma das duas quantidades x_0, X tornam-se infinitas, apenas uma das integrais (2.114) devem ser mantidas na diferença A−B.

Quando para valores infinitamente pequenos de ε, e para valores finitos ou infinitamente pequenos dos coeficientes arbitrários μ, ν, μ_1, $\nu_1 \ldots \mu_m$, ν_m, as integrais singulares (2.110) e (2.114), ou pelo menos algumas delas, obtêm ou valores infinitos, ou valores finitos, mas diferentes de zero, as integrais $\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ são evidentemente infinitas ou indeterminadas. Isto é o que acontece todas as vezes que as quantidades f_1, $\mathrm{f}_2 \ldots \mathrm{f}_m$ não são simultaneamente nulas. Mas a recíproca não é verdadeira, e poderia acontecer que, estas quantidades sendo nulas todas ao mesmo tempo, as integrais (2.110) e (2.114), ou pelo menos algumas delas, obtivessem valores finitos diferentes de zero para valores infinitamente pequenos dos coeficientes μ, ν, μ_1, $\nu_1 \ldots \mu_m$, ν_m. Assim, por exemplo, se tomarmos $f(x) = \dfrac{1}{x\mathrm{l}(x)}$, o produto $xf(x)$ se evanescerá para $x = 0$, e contudo a integral singular

$$\int_{\varepsilon}^{\varepsilon\nu} \frac{dx}{x\mathrm{l}(x)} = \mathrm{l}\left[1 + \frac{\mathrm{l}(\nu)}{\mathrm{l}(\varepsilon)}\right]$$

deixará de se evanescer para valores infinitamente pequenos de ν.

Quando as integrais singulares compreendidas na diferença A − B se evanescem todas para valores infinitamente pequenos de ε, quaisquer que sejam os valores finitos ou infinitamente pequenos atribuídos aos coeficientes μ, ν, μ_1, $\nu_1 \ldots \mu_m$, ν_m, estamos certos que o valor geral da integral (2.107) se reduz a uma quantidade finita e determinada. Seja de fato, nesta hipótese, δ um número muito pequeno, e suponhamos ε escolhido de modo que, para valores de μ, ν, μ_1, $\nu_1 \ldots \mu_m$, ν_m inferiores à unidade, cada uma das integrais (2.110) e (2.114) possui um valor numérico inferior a $\dfrac{1}{2(m+1)}\delta$. O valor aproximado de B, representado por F, será uma quantidade finita que não conterá mais nada de arbitrário; e, se atribuirmos aos coeficientes μ, ν, μ_1, $\nu_1 \ldots \mu_m$, ν_m valores infinitamente pequenos, E se aproximará indefinidamente de A, permanecendo compreendido entre os limites $\mathrm{F} - \delta$, $\mathrm{F} + \delta$. A estará então compreendido entre os mesmos limites, e consequentemente poderemos encontrar uma quantidade finita F que difere de A por uma quantidade menor do que um número dado δ. Devemos concluir que o valor geral A da integral (2.107) será, na hipótese admitida, uma quantidade finita e determinada.

Dos princípios que estabelecemos deduzimos imediatamente a seguinte proposição:

Teorema. *Para que o valor geral da integral* (2.103) *seja finito e determinado, é necessário e suficiente que os das integrais singulares* (2.110) *e* (2.114) *que se acham compreendidos na diferença* $\mathrm{A} - \mathrm{B}$ *reduzam-se a zero, para valores infinitamente pequenos de* ε*, quaisquer que sejam os valores finitos ou infinitamente pequenos atribuídos aos coeficientes* μ, ν, μ_1, $\nu_1 \ldots \mu_m$, ν_m.

Exemplo. Seja $\dfrac{f(x)}{\mathrm{F}(x)}$ uma função racional. Para que a integral $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{\mathrm{F}(x)}\, dx$ conserve um valor finito e determinado, será necessário e suficiente: $1^{\underline{o}}$ que equação $\mathrm{F}(x) = 0$ possua apenas raízes reais; $2^{\underline{o}}$ que o grau do denominador $\mathrm{F}(x)$ supere, pelo menos em duas unidades, o grau do numerador $f(x)$.

3 A integral definida de Riemann

O alemão Georg Friedrich Bernard Riemann (1826-1866), natural de Hanôver, revisou a concepção de integral de Cauchy, transformando-a na *Integral de Riemann* que está atualmente na maioria dos livros contemporâneos de cálculo e análise. Diferentemente de Cauchy, que publicou sua integral num livro didático, Riemann trata desta ideia em uma tese destinada à obtenção de um título acadêmico. O trabalho não foi publicado até a morte do autor em 1866, tendo circulado em um grupo restrito de matemáticos, segundo Klein (1898) que foi seu aluno. A tese foi defendida em 1854 e só veio a ser publicada em 1867. Não se sabe ao certo o motivo, mas o aparente desinteresse de Riemann em fazê-lo é intrigante; a tese trata de uma importante mudança no fundamento do cálculo integral aceito até então. Laugwitz (2008) sugere que este desinteresse é devido ao fato da tese ser um esboço destinado a uma qualificação acadêmica. De qualquer forma, não é conhecido qualquer registro de uma reelaboração deste material feita pelo autor visando publicação.

A tese, intitulada *Ueber die Darstellbarkeit einer Fuction durch eine trigonometrische Reihe* (ou, Sobre a representabilidade de uma função dada por uma série trigonométrica), foi publicada por Richard Dedekind. Nela Riemann aborda o problema da função do francês Jean Baptiste Joseph Fourier (1768 - 1830) que usou o cálculo para estudar a distribuição de calor como função do tempo, publicando em 1822 o tratado *Théorie analystique de la chaleur* (ou, Teoria analítica do calor). Fourier fez isso antes da *integral definida* de Cauchy, mas se apoiava claramente na validade de uma concepção de integral vista como área, evidenciando uma demanda científica para esse conceito. No entanto o tipo de função contemplada envolvia séries de integrais de funções trigonométricas, um verdadeiro monstro cujo enunciado nos abstemos de fazer. O que ocorre é que esta função de Fourier não é esclarecida pela concepção de integral de Cauchy, que supõe funções contínuas, por ter um número infinito de descontinuidades.

Riemann percebeu e demonstrou que a hipótese de continuidade na definição de integral é dispensável numa nota que precede sua discussão sobre possíveis representações de funções dadas por séries trigonométricas. Com isso dá um novo critério de integrabilidade, e fornece um exemplo surpreendente de uma função passível de integração, que não fazia sentido na concepção vigente, e passaria a ser conhecida como *Função de Riemann* a partir de então.

Pelo fato desta definição ter sido publicada em uma tese, o rigor aceitável para suas construções é completamente diferente daquele exigido para a docência, como visto no trabalho de Cauchy (ver capítulo anterior). O que se sabe é que Riemann submeteu sua tese, sob orientação de Gauss, para obtenção do título que permitiria que lecionasse na Universidade de Göttingen. Isso indica que o autor não estava explicando um fundamento para iniciantes no tema, mas oferecendo um resultado inédito a uma banca de eruditos no assunto que eram também detentores do poder de aprovar ou não quem poderia obter tal título. O rigor percebido no tratado não exige a explicação minuciosa de todas as passagens, e diversos resultado não triviais são supostos conhecidos do leitor e não recebem maiores justificativas. Isso foi compensado pela novidade introduzida no assunto.

Neste capítulo tratamos da reconstrução que Riemann fez da integral de Cauchy, em sua tese. Nossa falta de familiaridade com a língua alemã nos levou a buscar auxílio em uma tradução da obra em língua francesa feita por Laugel (1898). Analisamos a demonstração do novo critério de integração e a construção da *Função de Riemann*. Realizamos também a construção do gráfico desta função com auxílio da plataforma digital Geogebra, e a disponibilizamos através do link https://geogebra.org/classic/djgzbrah; no fim do capítulo descrevemos como a realizamos.

3.1 Revisão bibliográfica

Riemann faleceu prematuramente com 40 anos de idade, e não teve uma farta produção científica. Boa parte da literatura sobre ele aborda sua obra como um todo, apontando sua fecundidade em diversos campos de pesquisa. As integrais definidas são destacadas em sua obra pela importante mudança que acarretou no fundamento do cálculo integral aceito até então. O exemplo da função dada é também bastante comentado e reinterpretado na literatura.

Gillispie (1981b) traz informações biográficas sobre Riemann, e apresenta algumas de suas ideias; mas é bastante breve no comentário destinado à integral definida.

Dugac (2003) comenta a tese de Riemann sobre as séries trigonométricas, e menciona que o interesse em redefinir a integral é devido à conclusão de que é possível representar por uma série trigonométrica toda função periódica que é suscetível de integração e que tenha um número finito de máximos e de mínimos no intervalo. Mas comenta superficialmente sobre o exemplo de função integrável com infinitas descontinuidades.

Horchkirchen (2003) comenta a definição de integral de Riemann, comparando-a com a de Cauchy, utilizando notação matemática contemporânea; utiliza-a também para reescrever o exemplo de Riemann. É econômico nos gráficos.

Laugwitz (2008) traça uma biografia de Riemann e discute suas ideias. Ele sugere que a não publicação da tese sobre séries trigonométricas seja atribuída à insatisfação de Riemann com seus resultados, visto que é um esboço destinado à uma qualificação acadêmica. Ele reescreve o exemplo da função com infinitas descontinuidades com uma notação contemporânea, mas não apresenta gráfico algum.

Ruch (2017) elaborou um interessante plano de aula utilizando fontes históricas para abordar as integrais de Cauchy e de Riemann. Ele chega a exibir o gráfico da *Função de Riemann*, mas se limita a isso e não discute a construção dessa função.

Nossa contribuição com o tema é uma interpretação algébrica da função integrável dada por Riemann, de modo que seja possível plotar seu gráfico com recursos digitais. Julgamos que isso possa ser utilizado como recurso didático para o ensino de Análise.

3.2 A integral definida de Riemann

O interesse de Riemann em revisitar a definição de integral está no alcance que esta pode ter. Ele redefine sua fundamentação justificando que nela ainda reinam incertezas (Riemann, 1876, p. 225; 1898, p. 239). Sua nova definição de integral é essencialmente a dada por Cauchy com uma hipótese enfraquecida: não é necessária a continuidade da função integrando.

Assim procede: dados dois valores finitos a e b, sejam $a < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < b$. Não utiliza o termo *elemento* para designar as diferenças $x_1 - a$, $x_2 - x_1$, $\ldots$, $b - x_{n-1}$, mas indica-as por δ_1, δ_2, $\ldots$, δ_n respectivamente. Também substitui os valores θ_j de Cauchy por ε_j, especificando que são frações menores do que a unidade, ou numa linguagem moderna, $\varepsilon_j \in (0,1) \cap \mathbb{Q}$ em que $j = 1,\ 2, \ldots, n-1$. A soma S então é dada por

$$S = \delta_1 f(a + \varepsilon_1\delta_1) + \delta_2 f(x_1 + \varepsilon_2\delta_2) + \delta_3 f(x_2 + \varepsilon_3\delta_3) + \cdots + \delta_n f(x_{n-1} + \varepsilon_n\delta_n),$$

em que f é uma função arbitrária. A integral definida

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

é estabelecida como o limite da soma S; então é válida a propriedade de que, para quaisquer ε_j e δ_j, S se aproxima indefinidamente desse limite.

Riemann menciona também uma generalização dessa noção para integrais impróprias que, segundo ele, é aceita por todos os geômetras: seja $f(x)$ uma função que se torna infinita quando seu argumento x se aproxima de um valor particular $c \in (a,b)$, se a expressão

$$\int_a^{c+\alpha_1} f(x)\,dx + \int_{c+\alpha_2}^b f(x)\,dx$$

se aproxima de um limite quando α_1 e α_2 tornam-se infinitamente pequenos, esse limite será a integral definida de f no intervalo (a,b). Não é exatamente o critério de Cauchy, mas um caso particular. Não é dito nada sobre a autoria deste resultado.

Seu interesse está em mostrar que, retirando a restrição de continuidade, uma classe maior de funções podem ser integradas. As integrais de Cauchy permitiam a resolução de funções com algumas descontinuidades, bastando aplicar finitas vezes o método em cada intervalo em que fossem contínuas; mas as de Riemann permitiam que para qualquer intervalo houvessem descontinuidades, sendo estas assim em número infinito. Para mostrar que sua definição permite esse novo tipo de integração, Riemann define o conceito de **maior oscilação** da função num intervalo como sendo a diferença entre o maior e o menor valor que ela assume nele. Sejam D_1, D_2, $\ldots$, D_n as maiores oscilações dos intervalos $a - x_1$, $x_2 - x_1$, $\ldots$, $b - x_{n-1}$ respectivamente, então a soma

$$\delta_1 D_1 + \delta_2 D_2 + \cdots + \delta_n D_n, \tag{3.1}$$

no caso em que f é uma função finita em todo o intervalo, incluindo seus pontos extremos a e b, deve tornar-se infinitamente pequena com as quantidades δ_j. Não é dito, mas isso vale pois D_j é sempre finito e δ_j tende a zero.

Supondo Δ o maior valor que a soma (3.1) possa tomar quando todos os δ [sic] são menores do que um valor finito e positivo d dado, e observando que Δ é uma função de d que diminui quando este também o faz, ele prova dois teoremas recíprocos que permitem a integração de funções em intervalos cuja maior oscilação é sempre maior do que zero:

Teorema 3.1. Para que a soma S convirja, quando todos os δ tornam-se infinitamente pequenos, é necessário, além da finitude da função $f(x)$, que o tamanho total dos intervalos, em que as respectivas oscilações são $> \sigma$, qualquer que seja σ, possa ser arbitrariamente pequeno por uma escolha conveniente de d.

Esta proposição admite uma recíproca:

Se a função $f(x)$ é sempre finita, e se, com um decréscimo infinito de todas as quantidades δ, o tamanho total s dos intervalos, em que as oscilações da função são maiores do que uma quantidade σ dada, possa sempre se tornar infinitamente pequeno, então a soma S converge quando todos os δ tornam-se infinitamente pequenos (Id, p. 227; p. 242).[1]

Demonstração: Se S converge, seja s a soma total dos intervalos em que as respectivas oscilações são maiores do que uma quantidade σ. Tem-se, com isso

$$\sigma s \leq \delta_1 D_1 + \cdots + \delta_n D_n \leq \Delta,$$

o que implica em

$$s \leq \frac{\Delta}{\sigma}.$$

Se σ é fixo, a fração $\dfrac{\Delta}{\sigma}$ torna-se infinitamente pequena pela escolha conveniente de d. Então o mesmo ocorre com s.

Reciprocamente, se os intervalos cujas correspondentes oscilações são maiores do que σ, então as parcelas de (3.1) correspondentes a estes intervalos somadas é menor do que s multiplicado pela maior oscilação da função entre a e b, que é finita por hipótese. As parcelas restantes de (3.1) somadas resultam num valor menor do que $\sigma(b-a)$. Logo

$$\delta_1 D_1 + \delta_2 D_2 + \cdots + \delta_n D_n < s D_{(a,b)} + \sigma(b-a),$$

em que $D_{(a,b)}$ é a maior oscilação de f em (a,b). Como σ e s podem ser tomados tão pequenos quanto desejado, a soma (3.1) converge para zero. Consequentemente a soma S converge para o valor fixo que representa a integral definida.

■

Em uma nota anexa ao trabalho, Riemann complementa esta demonstração, usando um argumento parecido com o de Cauchy, considerando duas partições independentes S' e S'' comparadas a uma terceira formada por todos os pontos daquelas. A convergência de S garante a existência da integral; isso era suficiente para o desenvolvimento que fez na sequência: um exemplo de função integrável nesta sua concepção que não poderia ser abarcado na de Cauchy.

[1] Damit die Summe S, wenn sämmtliche δ unendlich klein werden, convergirt, ist ausser der Endlichkeit der Function $f(x)$ noch erforderlich, dass die Gesammtgrösse der Intervalle, in welchen die Schwankungen $> \sigma$ sind, was auch σ sei, durch geeignete Wahl von d beliebig klein gemacht werden kann.

Dieser Satz lässt sich auch umkehren:

Wenn die Function $f(x)$ immer endlich ist, und bei unendlichem abnehmen sämmtlicher Grössen δ die Gesammtgrösse s der Intervalle, in welchen die Schawankungen der Function $f(x)$ grösser, als eine gegebene Grösse σ, sind, stets zuletzt unendlich klein wird, so convergirt die Summe S, wenn sämmtliche δ unendlich klein werden.

3.3 Uma função com infinitas descontinuidades integrável

A sutileza da alteração na definição de Riemann quanto à integral contrasta com a complexidade do exemplo dado de função integrável. Ele inicia a construção deste exemplo definindo (x) como o **excedente**[2] de x sobre o número inteiro mais próximo, ou zero, se x é igual à distância de dois números inteiros consecutivos. A primeira dificuldade que se apresenta aqui é a interpretação do que é um "excedente", sobretudo quando o inteiro mais próximo é maior do que x; o excedente de x sobre este inteiro é negativo. Julgamos razoável reescrever a função como:

$$(x) = \begin{cases} x - \lfloor x \rfloor & , \quad \text{se } \; x - \lfloor x \rfloor < \lceil x \rceil - x \\ \quad 0 & , \quad \text{se } \; x - \lfloor x \rfloor = \lceil x \rceil - x \\ x - \lceil x \rceil & , \quad \text{se } \; x - \lfloor x \rfloor > \lceil x \rceil - x \end{cases} ,$$

em que $\lfloor x \rfloor$ e $\lceil x \rceil$ denotam respectivamente as funções **maior inteiro** e **menor inteiro**.

Todos os autores citados na revisão bibliográfica que tratam deste exemplo apresentam suas interpretações algébricas dessa função. O tratado de Riemann não diz nada a respeito de uma expressão algébrica para sua função; a definição de (x) é totalmente verbal. Fazemos também uma interpretação, diferente das dos autores consultados. A nossa escolha foi bastante motivada pela maneira como poderia ser descrita em linguagem computacional.

Esta função é contínua para todo x real, exceto para os valores dados por

$$\frac{p}{2},$$

em que p é um número ímpar. A função é limitada, pois

$$|(x)| < \frac{1}{2}. \tag{3.2}$$

Os limites laterais da função aplicada nos pontos de descontinuidade são distintos:

$$\lim_{x \to \frac{p}{2}^+} (x) = -\frac{1}{2},$$
$$\lim_{x \to \frac{p}{2}^-} (x) = +\frac{1}{2}.$$

Por fim, a função é integrável na nova definição em qualquer intervalo tomado.

A Figura 3.1 ilustra o gráfico desta função em torno da origem.

[2] Ueberschuss no original na língua alemã, significando: excesso, excedente, saldo positivo.

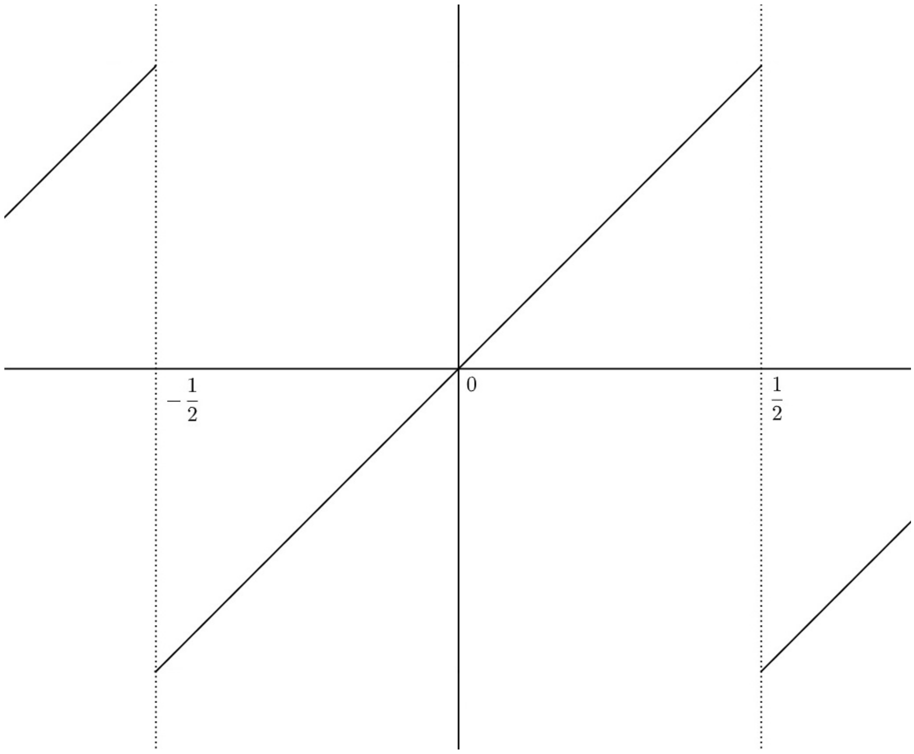


Figura 3.1: Gráfico de (x).
Fonte: elaborado pelo autor

Na sequência, Riemann define a função

$$f(x) = \frac{(x)}{1} + \frac{(2x)}{4} + \frac{(3x)}{9} + \cdots = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(mx)}{m^2}, \tag{3.3}$$

dada por uma série convergente, pois devido a (3.2), temos

$$\left|\frac{(nx)}{n^2}\right| < \frac{1}{2n^2},$$

e como

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2m^2}$$

é convergente, segue que (3.3) também o é. A função (3.3) é descontínua para todo x com valor

$$\frac{p}{2n},$$

Além disso, os limites laterais da função aplicada nestes valores são, na notação de Riemann,

$$f(x+o) = f(x) - \frac{1}{2n^2}\left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \cdots\right) = f(x) - \frac{\pi^2}{16n^2},$$
$$f(x-o) = f(x) + \frac{1}{2n^2}\left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \cdots\right) = f(x) + \frac{\pi^2}{16n^2}.$$

A função é integrável em qualquer intervalo, pois dada uma grandeza σ, o número de variações bruscas de f superiores a σ é sempre finito; além disso é possível tomar d

de modo que os intervalos em que estas ocorrem sejam arbitrariamente pequenos e nos demais intervalos ocorram oscilações menores do que σ. O exemplo se resume a essa demonstração, e não há uma discussão a respeito da expressão algébrica dessa integral definida. As figuras (3.2), (3.3) e (3.4) ilustram, respectivamente, alguns gráficos das somas parciais da série (3.3) e o gráfico da função f, que é o limite desta soma. As figuras dão uma ideia de como o gráfico das somas parciais da série se aproximam do gráfico limite.

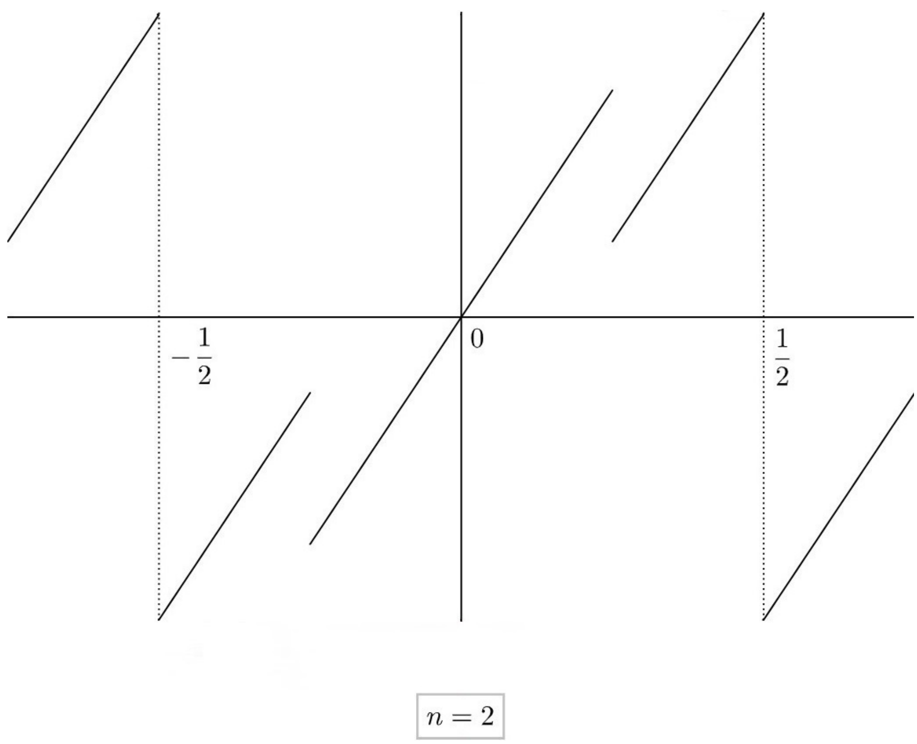
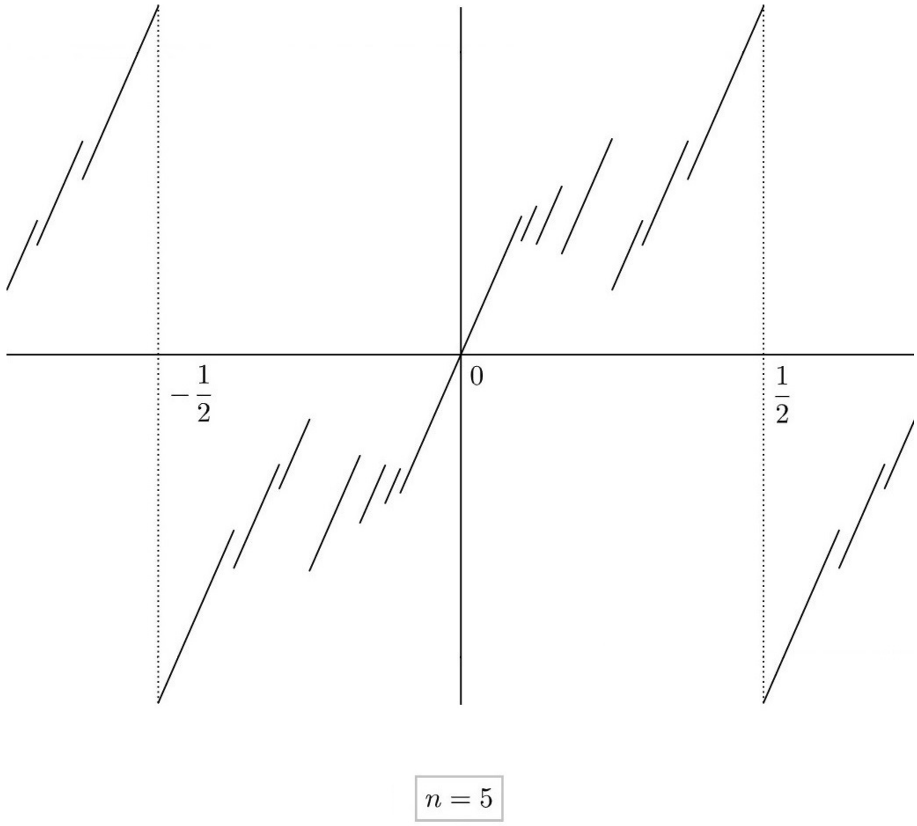


Figura 3.2: Gráficos da soma parcial da série (3.3) para $n = 2$.
Fonte: elaborado pelo autor



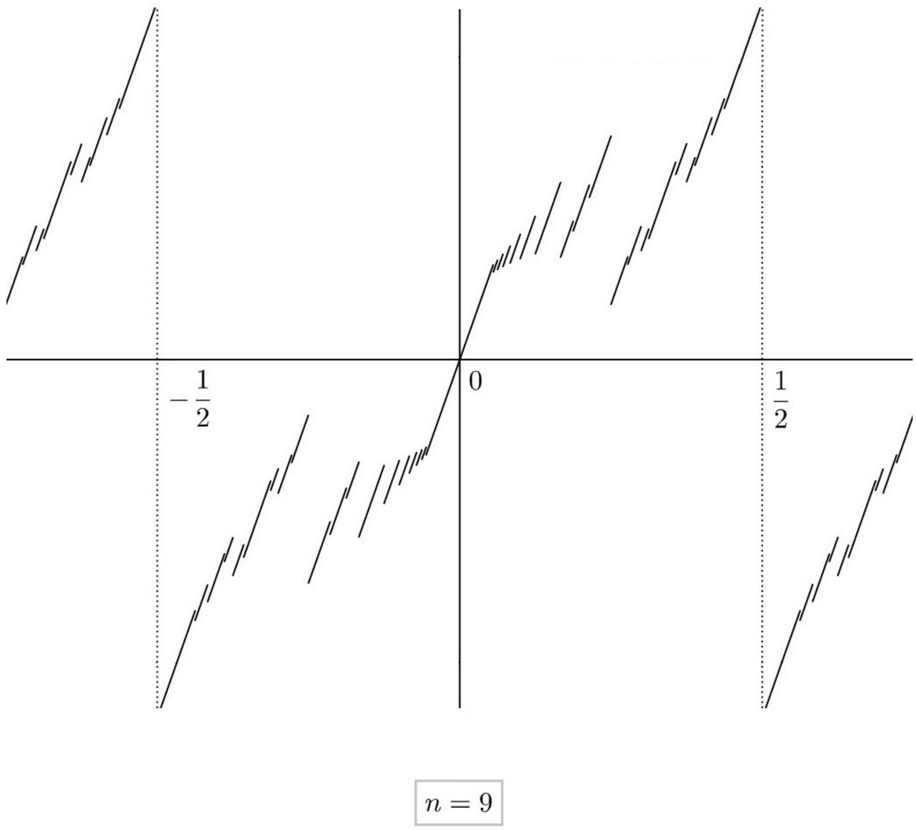


Figura 3.3: Gráficos das somas parciais da série (3.3) para $n = 5$ e $n = 9$.
Fonte: elaborado pelo autor

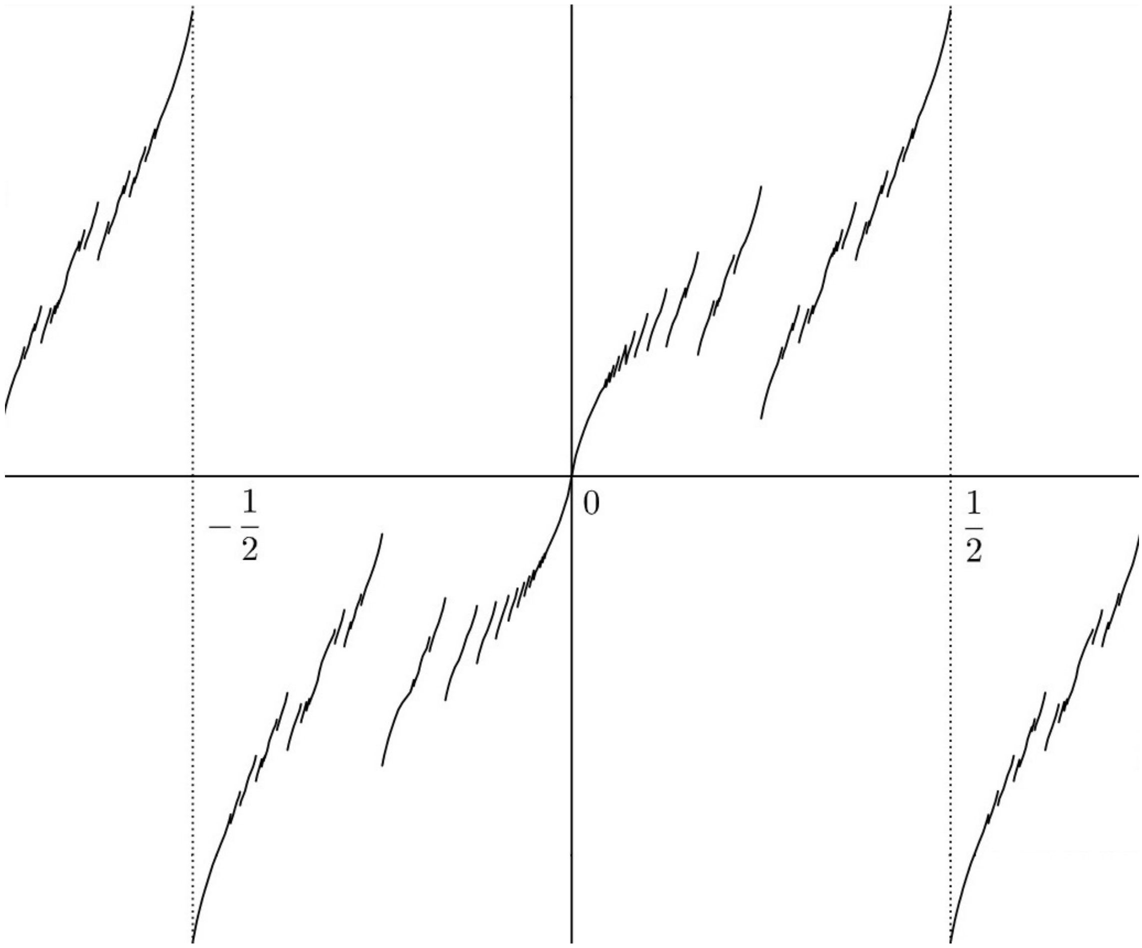


Figura 3.4: Gráficos da *Função de Riemann.*
Fonte: elaborado pelo autor

Na sequência mostramos o procedimento que seguimos para a realização dessa construção gráfica.

3.4 Construção do gráfico da função de Riemann no Geogebra

Julgamos ser sempre útil ter à disposição um recurso gráfico na prática docente, principalmente quando o conceito em questão tem uma relação tão direta com a geometria. Aqui fazemos a construção do gráfico da *Função de Riemann.*

Utilizamos o software Geogebra, disponibilizado gratuitamente, sem necessidade de instalação, através do link: *https://geogebra.org/classic*, por computador ou celular. Realizamos a construção do gráfico acessando a ferramenta por um computador. A interface que irá aparecer ao acessar o site é como na figura (3.5)

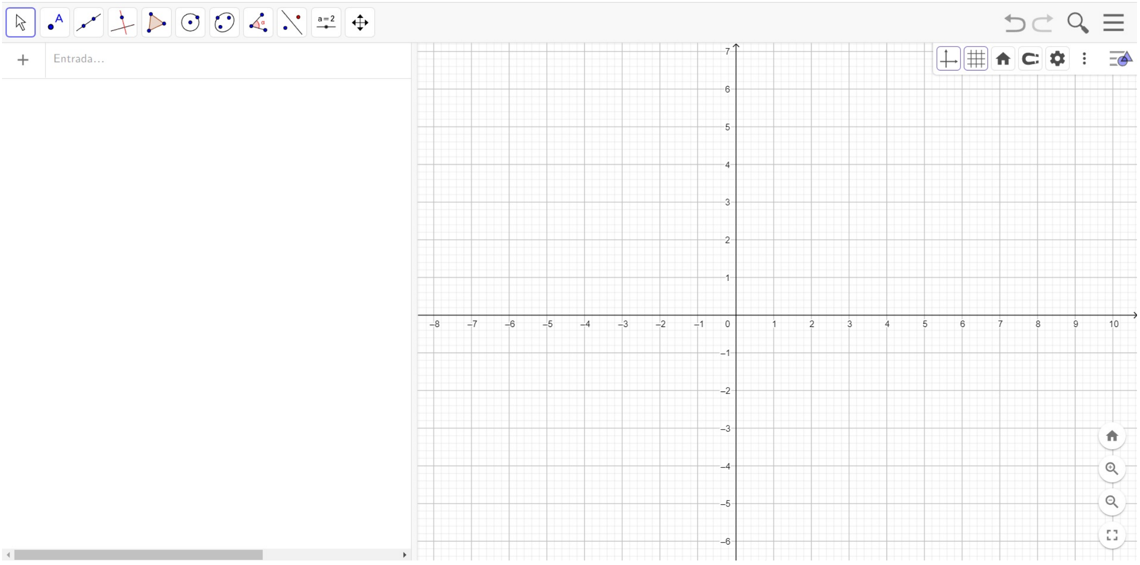


Figura 3.5: Página inicial ao acessar o link *https://geogebra.org/classic*.
Fonte: imagem capturada pelo autor

O campo escrito *Entrada* é onde digitamos com os comandos para a plotagem do gráfico. Ao lado situa-se um *plano cartesiano*, que é onde o gráfico será plotado. A primeira etapa é construir o gráfico da função (x), que a partir de agora chamamos de $p(x)$. Temos

$$p(x) = \begin{cases} x - \lfloor x \rfloor \quad , & \text{se } \; x - \lfloor x \rfloor < \lceil x \rceil - x \\ \\ \quad 0 \qquad\;\; , & \text{se } \; x - \lfloor x \rfloor = \lceil x \rceil - x \\ \\ x - \lceil x \rceil \quad , & \text{se } \; x - \lfloor x \rfloor > \lceil x \rceil - x \end{cases} .$$

Os comandos para $\lfloor \; \rfloor$ e $\lceil \; \rceil$ são respectivamente **floor( )** e **ceil( )**. Utilizamos duplamente o comando **Se(Condição, Então, Senão)** para expressar a função p escrevendo

$$p(x) = \text{Se}(x - \text{floor}(x) < \text{ceil}(x) - x,\ x - \text{floor}(x),\ \text{Se}(x - \text{floor}(x) > \text{ceil}(x) - x,\ x\text{-ceil}(x),\ 0))$$

Ao clicar *Enter*, o gráfico de p surgirá e o comando se transformará, conforme figura (3.6).

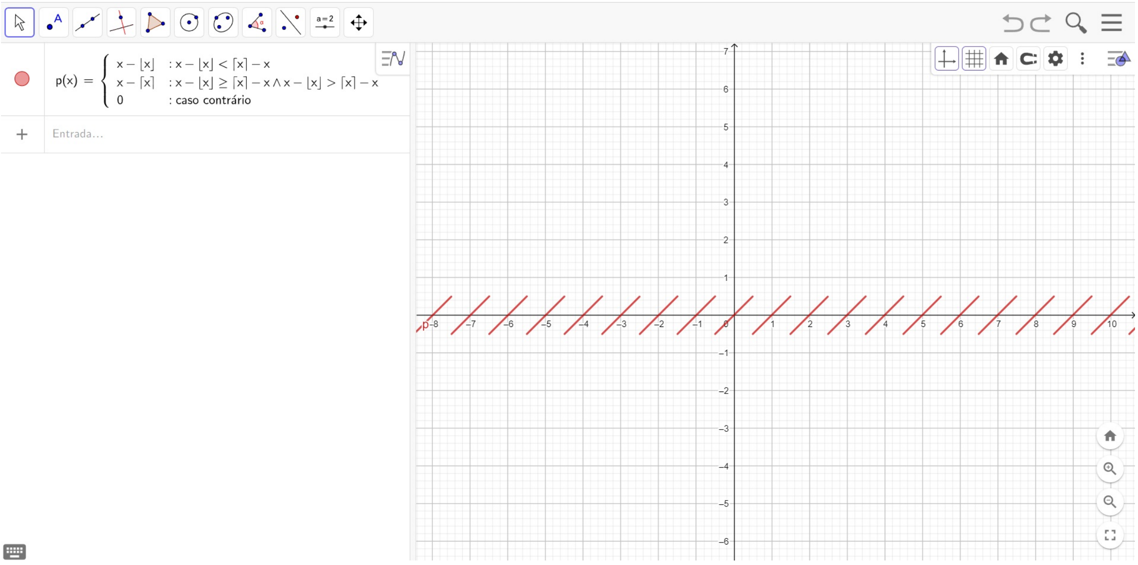


Figura 3.6: Expressão algébrica e gráfico de $p(x)$.
Fonte: imagem capturada pelo autor

A segunda etapa é construir o gráfico de

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p(nx)}{n^2},$$

ou, mais exatamente, uma aproximação

$$f(x) = \sum_{n=1}^{m} \frac{p(nx)}{n^2}, \tag{3.4}$$

em que m é suficientemente grande. Essa variável m será o número de fatores somados da soma (3.4), e o valor 60 é suficientemente grande para que somas com um número maior de fatores não acarrete numa mudança visível no gráfico. Ou, utilizando um vocabulário próximo ao usado por Cauchy (ver capítulo anterior), a partir de $m = 60$, a diferença entre quaisquer uma das somas (3.4) é *sensivelmente* nula. É claro que essa escolha é livre, mas alertamos que o tempo de processamento para valores muito grandes é também maior.

Utilizamos o comando **Soma(Expressão, Variável, Valor Inicial, Valor Final)** para a expressão da f da seguinte maneira:

$$f(x) = \text{Soma}((p(nx)/n\hat{\ }2),n,1,60), \tag{3.5}$$

e surgirá o gráfico de f. Desabilitando a visualização do gráfico de p e ampliando a imagem o tanto quanto desejado, utilizando o ícone de lupa com o sinal $+$ no canto inferior direito, obtém-se algo parecido com a figura (3.7)

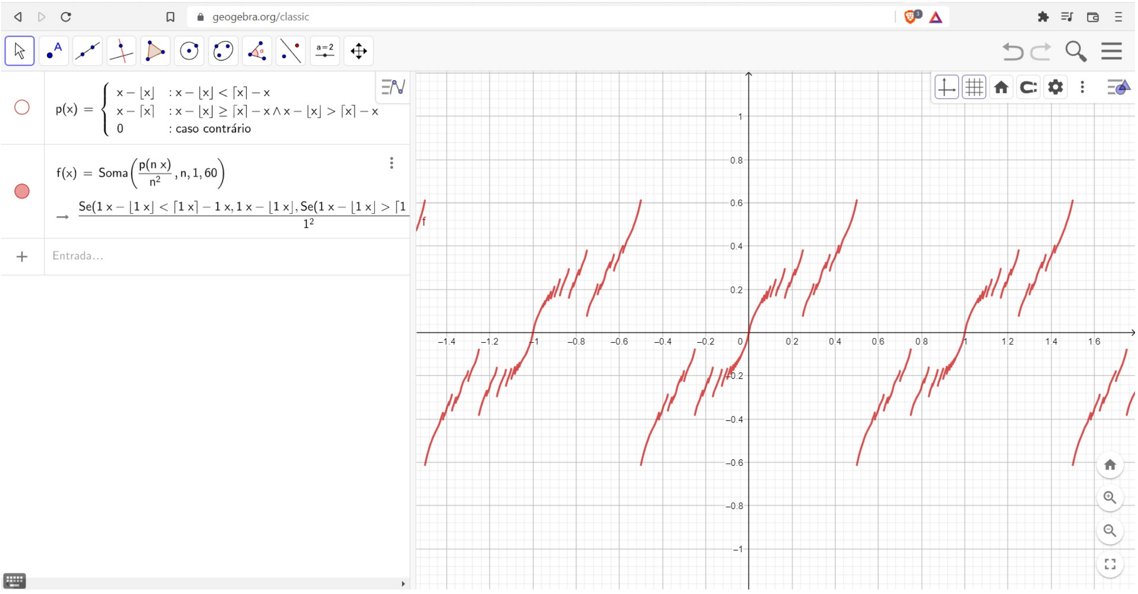


Figura 3.7: Gráfico de (3.4) para $m = 60$.
Fonte: imagem capturada pelo autor

É possível também criar também um controle deslizante para a variável m, permitindo sua variação e consequente contemplação dos gráficos de cada uma das somas parciais de f. Para isso clicamos no ícone *Controle Deslizante* na parte superior da tela, e em seguida em qualquer lugar do *plano cartesiano*. Surgirá uma janela solicitando informações para a variável, conforme figura (3.8)

Figura 3.8: Informações para a variação de m.
Fonte: imagem capturada pelo autor

Em seguida substituímos o valor 60 na equação (3.5) po m:

$$f(x) = \text{Soma}((p(nx)/n\hat{\ }2),n,1,m).$$

A Figura (3.9) mostra, como exemplo, o gráfico correspondente a $m = 6$. Com isso é possível visualizar as alterações que o gráfico da função sofre a medida em que é considerado um número maior de somas parciais e, com isso, a convergência para a função f.

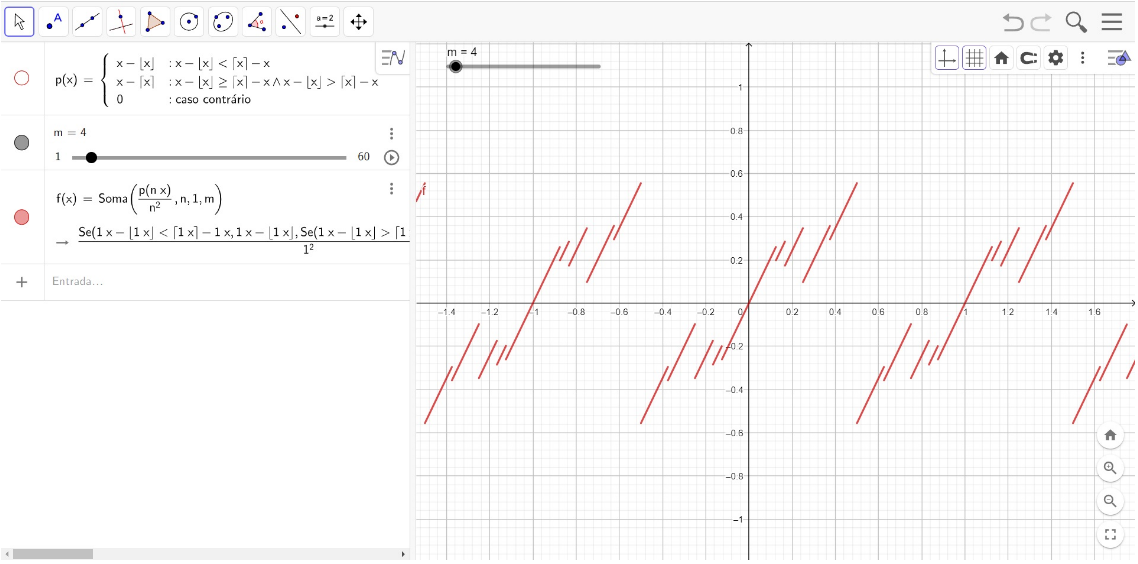


Figura 3.9: Gráfico de (3.4) para $m = 6$.
Fonte: imagem capturada pelo autor

Com isso, julgamos ter disponibilizado um recurso didático valioso para aulas de análise e quiçá de cálculo. A ausência de tal recurso na época de Riemann nos faz indagar se ele tinha algum esboço deste gráfico, ainda que mental. A nosso juízo, parece uma função bastante árdua de ser plotada à mão.

No final do século, um outro matemático voltou a revisitar a fundamentação do *cálculo integral*, identificando novos elementos a serem considerados. Dessa forma o refez, levando o conceito para um contexto multidimensional. Tratamos, no próximo capítulo, dessa nova construção.

4 A integral definida de Jordan

O francês Marie Ennemond Camille Jordan (1838 - 1922), nascido em Lyon, formulou uma teoria de integração que é válida para qualquer espaço euclidiano de dimensão n, tornando as concepção de Cauchy e de Riemann casos particulares. O tratado em que isso ocorre é um artigo intitulado *Remarques sur les intégrales définies* (ou, Observações sobre as integrais definidas), publicado em 1892.

Assim como Cauchy, Jordan estudou na *EP* e lá retornou como docente e, como tal, devia publicar suas notas de aula. Ele fez isso duas vezes, e o *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique* possui duas edições completamente diferentes. A primeira delas, de 1882, não é muito diferente dos manuais de *análise* da época, e a concepção de integral é ainda a de Cauchy, mesmo a tese de Riemann já estando traduzida para o francês desde 1873. O artigo de 1892 precede a publicação da segunda edição ocorrida no ano seguinte. Esta edição reorganiza completamente a disciplina, incorporando em sua fundamentação a *teoria dos conjuntos* do russo Georg Cantor (1845 - 1918). O artigo antecipa essa reconstrução na parte concernente às integrais definidas, que é reproduzida sem maiores modificações no *Cours*.

Jordan justifica sua reformulação da integral no artigo observando que a natureza do conjunto em que ocorre a integração ainda não havia sido explorada, e que sua proposta é fazê-lo (Jordan, 1892, p. 69). Reconhece a importância das definições vigentes, dessa vez considerando Riemann, mas argumenta que elas enfocam o tema da perspectiva das funções. Ele adapta a estratégia de particionar o intervalo de integração para o contexto dos conjuntos, e define nisso seus elementos. A partir daí o procedimento é o já conhecido: somar o produto de cada elemento com o valor da função em um ponto dele, e fazer com que essa soma varie com a diminuição indefinida dos elementos.

O rigor percebido no artigo é impecável em relação às construções e à discussão da teoria, mas não são feitos exemplos para desenredar algumas ideias, o que faz uma tremenda falta para ilustrar alguma integral definida tomada em um conjunto não mensurável. Em relação ao rigor da escrita matemática há passagens que poderiam ser apontadas como carentes de rigor por um olhar do nosso século. No *Cours*, Jordan permanece econômico em dá-los; não há figuras também. As quantidades infinitamente pequenas cumprem o mesmo papel de variável tendendo a zero, e no livro ganham maiores explicações sobre seu método num capítulo anterior ao dos conjuntos. O fato de a elas serem atribuído graus, criando um meio de comparação com seu *valor principal* que teria grau um, resulta na curiosa identificação de toda quantidade finita como um *infinitamente pequeno de grau zero*.

Neste capítulo tratamos dessa nova interpretação da integral feita por Jordan em seu artigo. Analisamos sua fundamentação com conjuntos e a definição que faz da integral. Identificamos no trabalho dois resultados da teoria que se configuram num critério análogo ao de Cauchy para integrais impróprias, vistas no capítulo 2; tais resultados são analisados também. A tradução do artigo completo encontra-se no final do capítulo.

4.1 Revisão bibliográfica

A segunda edição do *Cours* de Jordan se configura num tratado completo de cálculo, que ganhou outras edições, tornando-se referência no assunto. Sua publicação marca uma importante mudança de postura, por parte dos franceses, em relação aos tratados estrangeiros: até aquele momento seus resultados não eram mencionados nos manuais de cálculo. Ela reúne maior potencial de assuntos matemáticos a serem pesquisados, atraindo mais atenção que o artigo tratado aqui. Assim, é acentuado o enfoque que a literatura sobre Jordan dá à segunda edição do *Cours*. Infelizmente não encontramos muitos trabalhos historiográficos tratando do seu artigo ou de sua integral.

Gisbert-Chambaz (1982) compara as duas primeiras edições do *Cours* de Jordan e foca nos conceitos básicos das duas obras. É mais detalhista no comentário sobre a teoria dos conjuntos. Faz o enunciado das integrais definidas, e menciona que há resultados que estendem esta noção, mas não comenta nenhum em particular.

Horchkirchen (2003) observa que o método de Jordan remete ao procedimento bem conhecido de particionar o conjunto de integração e refiná-lo. Ele explica esse método utilizando uma notação matemática mais moderna e não menciona resultado algum que estenda a definição de integral.

Baroni e Otero-Garcia (2014) situam o *Cours* entre os principais trabalhos publicados no século XIX que foram importantes para a consolidação da *Análise Real* de hoje. Eles trazem algumas informações biográficas, reproduzem a partição do plano que Jordan realiza e enunciam a definição de integral, mas não mencionam os resultados decorrentes dela.

Nossa contribuição com o tema é uma descrição da demonstração da integral definida de Jordan e os resultados que estendem sua definição.

4.2 Fundamentação com a teoria dos conjuntos

Para melhor compreender a definição da integral de Jordan, vamos olhar para algumas noções fundamentais em sua teoria.

Um **ponto** do espaço de n dimensões é definido por ele como um sistema de valores a, b, $\ldots$ atribuídos às n variáveis x, y, $\ldots$ (Jordan, 1893, p. 8). A uma **quantidade variável** x é atribuída uma sequência de valores $x_1, \ldots, x_n, \ldots$, que convergirá para um **limite** c se, para todo $\varepsilon > 0$, é possível encontrar um inteiro ν tal que

$$|x_n - c| < \varepsilon,$$

para todo valor de n superior a ν (Ibid., p. 8). Seguindo a teoria publicada por Cantor, Jordan define **conjunto** como uma coleção de pontos; conjuntos vazios não são levados em conta. A definição de **função** é enunciada como segue:

> As quantidades x, y, $\ldots$, são ditas *independentes*, se não existe entre elas nenhuma relação, de tal modo que cada uma delas possa assumir todos os valores que é suscetível, mesmo após o valor das outras ter sido fixado.

> Seja, ao contrário, u uma nova variável, relacionada às precedentes de tal modo que a cada ponto $(x, y, \dots)$ pertencente a um conjunto E, corresponda um valor determinado de u. Diremos que esta relação define u como *função* de x, y, ... no conjunto E (Id., 1892, p. 31).[1]

A notação é $f(x, y, \dots)$.

A novidade aqui é o conceito de **domínio**. Este é definido como um conjunto perfeito que contém pontos interiores (Ibid., p. 22). **Conjuntos perfeitos**, assim como **pontos limites** e **derivado** são noções de Cantor. Um ponto limite de um conjunto E é o ponto chamado de π tal que, para qualquer ε positivo, é possível determinar um ponto p em E diferente de π, cuja distância até este seja menor do que ε; essencialmente a definição contemporânea de *ponto de acumulação*. O derivado de E é o conjunto de seus pontos limites, e leva a notação E'. Conjunto perfeito é aquele que contém seu derivado; em outras palavras, seus pontos limites pertencem ao conjunto. Os pontos **interiores**, **exteriores** e **fronteiriços** de um conjunto E advêm da definição de conjunto **complementar**: este é o conjunto E_1 formado por todos os pontos que não pertencem a E. Dessa forma, Jordan classifica os pontos do espaço em três classes:

> 1º Os pontos *interiores* à E. São aqueles que pertencem à E sem pertencer a E_1'. Para cada um dos p poderemos atribuir uma quantidade ε tal que todo ponto cuja distância a p é $< \varepsilon$ pertence a E e não a E_1.
>
> 2º Os pontos *exteriores*, que pertencem a E_1 sem pertencer a E'.
>
> 3º Os pontos *fronteiriços*, que pertencem ao mesmo tempo a um dos conjuntos E, E_1' e ao derivado do outro (Ibid. p. 72).[2]

Então um domínio é um conjunto que contém seus pontos fronteiriços, mas nem todos os seus pontos o são. A figura (4.1) ilustra um domínio no plano.

---

[1] Des quantités variables, x, y, ..., sont dites *indépendantes*, s'il n'existe entre elles aucun lien, de telle sorte que chacune d'elles puisse encore prendre toutes les valeurs dont elle est susceptible, après qu'on a fixé la valeur des autres.
Soit, au contraire, u une nouvelle variable, liée aux précédentes de telle sorte qu'à chaque point $(x, y, \dots)$ appartenant a un certain ensemble E, corresponde une valeur déterminée de u. On dira que cette relation définit u comme *fonction* de x, y, ... dans l'ensemble E.

[2] 1º Les points *intérieurs* à E. Ce sont ceux qui appartiennent à E sans appartenir à E_1'. Pour chacun d'eux p on pourra assigner une quantité ε telle que tout point dont l'écart à p est $< \varepsilon$ appartient à E et non à E_1.
2º Les points *extérieurs*, qui appartiennent à E_1 sans appartenir à E'.
3º Les *points frontières*, qui appartiennent à la fois à l'un des ensembles E, E_1 et au dérivé de l'autre.

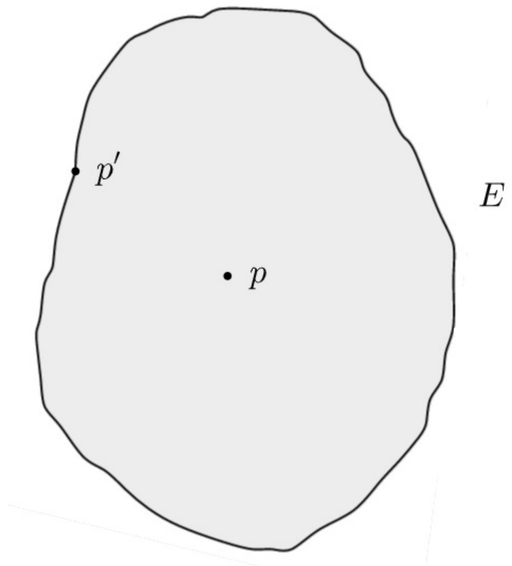


Figura 4.1: Domínio E de dimensão dois. Tanto os pontos p, interiores a E, como os p', de sua fronteira, pertencem a E.
Fonte: elaborado pelo autor

Outra noção que introduz é a de **tamanho** de um conjunto.[3] Segundo ele, o tamanho de um conjunto **limitado** será um comprimento, uma área, um volume, etc., conforme seja o número de dimensões do conjunto em questão. Ele trabalha com a dimensão 2 para construir a ideia. Um conjunto de pontos (x, y) é dito limitado se as coordenadas de todos os seus pontos permanecem compreendidas entre números fixos M e m. Seja E um conjunto limitado no plano coordenado, que é decomposto em paralelas aos eixos formando quadrados de lado r. A reunião dos quadrados que são interiores a E formam um domínio S interior a E; e a reunião dos quadrados que contêm pontos fronteiriços ou que são interiores a E formam o conjunto $S + S'$. E é interior a $S + S'$ e estes conjuntos possuem área determinada. No trabalho de Jordan, as notações para um conjunto e para sua área confundem-se numa só; então, por exemplo, conjunto S possui área S. A Figura 4.2 ilustra esta construção.

[3] *Étendue* no original em francês

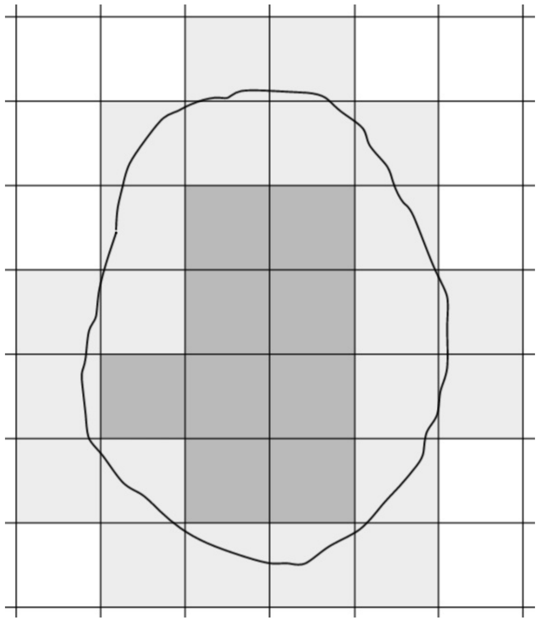


Figura 4.2: Os conjuntos S, $S + S'$ e E. S está representado com a tonalidade mais escura.

Fonte: elaborado pelo autor.

Usando uma notação contemporânea, temos então

$$S \subset E \subset S + S' \quad \text{e} \quad S \leq (\text{área de } E) \leq S + S'.$$

A ideia de Jordan é fazer a decomposição do plano variar, de modo que r tenda a zero, fazendo com que as áreas de S e $S + S'$ tendam para limites fixos; se estes limites coincidirem, o conjunto E será dito **mensurável**, e o valor $S = S + S'$ será o seu tamanho. Primeiro ele prova a existência destes limites.

A existência do limite de S é demonstrada considerando primeiro o conjunto de todos os valores de S para um r limitado; esse conjunto também é limitado e admite um máximo A. Dado $\varepsilon > 0$, é sempre possível encontrar uma decomposição do plano, de modo que a área do conjunto S tenha um valor S_1 maior do que $A - \varepsilon$. A **fronteira** F do conjunto E é definida como o conjunto dos pontos fronteiriços de E, e é conjunto perfeito.[4]

Estas duas fronteiras serão conjuntos **separados**. Para explicar o que é isso, é necessário a concepção de **distância** entre conjuntos. Uma distância pp' entre dois pontos $p = (a, b, \dots)$ e $p' = (a', b', \dots)$, é definida pela relação

$$pp' = |a' - a| + |b' - b| + \cdots .$$

Não sendo exatamente uma distância euclidiana, numa concepção atual, pode-se dizer que é uma distância originada pela norma da soma (Lima, 2010b, p. 6). Uma distância entre conjuntos sem pontos em comum é o valor mínimo Δ do conjunto de todas as

[4]A demonstração baseia-se na ideia de que a existência de um ponto q, pertencente a F', acarreta na existência de infinitos pontos em F convergentes a q. Se há uma infinidade deles comuns a E e a E_1', então q pertence a E' e a E_1', e como q já pertence ou a E ou a E_1, então q pertence a F. Caso não haja uma infinidade de pontos comuns a E e a E_1' e seu número seja finito, o restante destes pontos, em número infinito, será comum a E' e a E_1. A partir disso, com um raciocínio análogo, conclui-se que q pertence a F (Jordan, 1892, p. 73).

distâncias possíveis entre p, pertencente ao primeiro, e p', pertencente ao segundo. Jordan apela:

> De acordo com um teorema bem conhecido, existe então um *mínimo* Δ, positivo ou nulo, tal: 1º que nenhuma das distâncias pp' seja $< \Delta$; 2º que exista uma menor do que $\Delta + \varepsilon$, qualquer que seja a quantidade positiva ε (Ibid., p. 74).[5]

Quando $\Delta > 0$ os conjuntos em questão são ditos separados.

Ele prova que dois conjuntos perfeitos que não possuem pontos em comum são necessariamente separados, e é o que ocorre com a fronteira de S_1 e F. Logo, a distância entre elas é um valor δ maior do que zero. Considerando agora uma nova decomposição em quadrados de lado menor do que

$$\gamma = \frac{\delta}{2},$$

a distância máxima entre dois pontos de um mesmo quadrado é menor do que δ. Então todos os quadrados com pelo menos um ponto pertencente a S_1 estão por inteiro no interior de E. Assim o domínio S contém S_1 e tem uma área maior do que ou igual a $A - \varepsilon$, e menor do que A. Dessa forma o valor de S tende para A quando r tende para 0.

Para provar a existência do limite das áreas que formam $S + S'$, Jordan argumenta que elas formam um conjunto de números positivos que admite um mínimo A, e que há uma decomposição do plano para o qual essa soma tome um valor $S_1 + S_1'$ menor do que $a + \varepsilon$. Seja δ a distância da fronteira de E à do domínio $S_1 + S_1'$. Considerando uma outra decomposição qualquer em que r seja menor do que γ, todos os quadrados que possuem pelo menos um ponto pertencente a E ou a F serão interiores a $S_1 + S_1'$. Tem-se então

$$a \leq S + S' \leq S_1 + S_1' \leq a + \varepsilon,$$

então a é o limite das somas $S + S'$.

Os valores A e a são chamados de **tamanho interior** e **tamanho exterior** respectivamente; e se $a = A$, o conjunto E é dito mensurável. Como consequência, um conjunto E é mensurável se, e somente se, sua fronteira tem tamanho nulo.

Com estas definições ele dá sua reinterpretação da integral para uma função definida num conjunto de dimensão n.

4.3 A integral definida de Jordan

A função de várias variáveis $f(x, y, \dots)$ é inicialmente suposta limitada no interior de um domínio E mensurável. Este domínio é decomposto em domínios elementares e_1, e_2, $\dots$ mensuráveis e de natureza qualquer. O máximo e o mínimo que a função assume em E são denotados por M e m respectivamente; e o máximo e o mínimo que a função assume em cada um dos elementos e_k são M_k e m_k respectivamente. São formadas as somas

$$S = \sum M_k e_k \quad \text{e} \quad s = \sum m_k e_k,$$

[5] D'après un théorème bien connu, il existe donc un *minimum* Δ, positif ou nul, tel: 1º qu'aucun des écarts pp' ne soit $< \Delta$; 2º qu'il en existe un moindre que $\Delta + \varepsilon$, quelle que soit la quentité positive ε.

e pelo fato de

$$m \leq m_k \leq M_k \leq M,$$

tem-se que S e s estão compreendidos entre

$$M \sum e_k = ME \quad \text{e} \quad m \sum e_k = mE.$$

Seja L o maior entre os módulos $|M|$ e $|m|$, então tem-se que S e s valem no máximo LE.

De acordo com um resultado atribuído ao francês Gaston Darboux (1842 - 1917),[6] sempre existe limite para cada uma das somas

$$\delta_1 M_1 + \cdots + \delta_n M_n \quad \text{e} \quad \delta_1 m_1 + \cdots + \delta_n m_n,$$

e a função é integrável se estes limites são iguais. Nestas condições Jordan prova a existência do limite de S:

Os valores da soma S formam um conjunto limitado que admite um mínimo T. É possível uma decomposição particular δ_1 de modo que a soma correspondente S_1 esteja compreendida entre T e $T + \frac{\varepsilon}{2}$. Sejam $e_1, \ldots, e_n$ os elementos desta decomposição, então

$$E = \sum_1^n e_k \quad \text{e} \quad S_1 = \sum M_k e_k.$$

Os elementos de uma nova decomposição do domínio Δ classificam-se em dois tipos:

(1º) aqueles que estão contidos por inteiro em um dos elementos e_k, designados por $e_{k1}, \ldots, e_{ki}, \ldots$;

(2º) aqueles que possuem pontos em vários dos elementos $e_1, e_2, \ldots$, designados por $e'_1, \ldots, e'_l, \ldots$.

Sejam M_{ki} e M'_l os máximos de f em e_{ki}, e_l, então tem-se $M_k \geq m$, $M_{ki} \leq M_k$, $M'_l \leq M$ e

$$E = \sum_{k,i} e_{ki} + \sum_l e'_l = \sum_k e_k.$$

A soma S correspondente à decomposição Δ é, então,

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i,k} M_{ki} e_{ki} + \sum_l M'_l e'_l \\ &\leq \sum_k M_k \sum_i e_{ki} + M \sum_l e'_l \\ &\leq S_1 - \sum_k M_k \left(e_k - \sum_i e_{ki} \right) + M \sum_l e'_l \\ &\leq T + \frac{\varepsilon}{2} + (M - m) \sum_k \left(e_k - \sum_l e_{ki} \right). \end{aligned}$$

[6] Que é reconhecido por ter reescrito a condição de integrabilidade de Riemann, e constatado que, se são definidas uma **soma inferior** e uma **soma superior**, haverá sempre limites s e S para cada uma delas respectivamente, ao ser refinada indefinidamente a partição; ou seja, sempre existem as *integrais inferior* e *superior*, não importa o comportamento que a função tenha.

Como T é o mínimo das somas S, tem-se

$$T \leq S \leq T + \frac{\varepsilon}{2} + (M - m) \sum_k \left(e_k - \sum_l e_{ki} \right).$$

Como os domínios $e_1, \ldots, e_n$ são mensuráveis, a diferença entre e_k e a soma $\sum e_{ki}$ tendem para zero junto com o diâmetro destes elementos. Então para todo ε maior do que zero, existem n e δ maiores do que zero tais que, se todos os elementos têm diâmetro menor do que δ, cada uma das n somas

$$e_k - \sum_i e_{ki}$$

é menor do que

$$\frac{\varepsilon}{2n(M - m)}.$$

Portanto

$$T \leq S \leq T + \varepsilon.$$

O número $T = \lim S$ leva o nome de **integral por excesso** da função $f(x, y, \ldots)$ no interior de E. A existência do limite t, que é o valor máximo das somas s, é análoga, e não é feita. Este limite $t = \lim s$ é chamada **integral por falta** da mesma função. A função será **integrável** quando $T = t$, e este valor é sua integral, que é representada por

$$S_E \, f(x, y, \ldots) \, de.$$

Este resultado inovou pois a integral de uma função de várias variáveis é abordada diretamente, sem a necessidade de considerar que uma tal integral seria resultado de uma integração dupla ou tripla.

Não se sabe ao certo por que Jordan não conserva a notação clássica, $\int$, para funções de várias variáveis. Nos seus livros, justifica que esta notação é reservada para integrais de funções tomadas em intervalos de extremidades a e b, e escrita como

$$\int_a^b f(x) \, dx.$$

Ainda nos livros o símbolo S da integral de função com várias variáveis é ampliado, conforme Figura 4.3

$$\mathbf{I} = \mathbf{S}_{\mathbf{E}} f(x, y, \ldots) \, de;$$

Figura 4.3: Notação da integral de f no domínio E.
Fonte: (Jordan, 1893, p. 37).

Uma primeira propriedade que decorre desta integral é que se o domínio E é particionado em vários domínios mensuráveis $E_1, E_2, \ldots$, as integrais por excesso e por falta tomadas em E são a soma destas integrais tomadas nestes domínios parciais. E se uma sequência de domínios mensuráveis $E_1, \ldots, E_n, \ldots$, em que cada um deles é interior ao seguinte e a E, as integrais, por excesso e por falta, tomadas em E serão limites das sequências de integrais, por excesso e por falta, tomadas em cada um dos E_n, com n tendendo ao infinito. Isso vale, pois a diferença entre, por exemplo, S_E e S_{E_n} é uma integral por excesso tomada no domínio $E - E_n$. Seu módulo não pode ser maior do que $L(E - E_n)$, que tende para zero quando n cresce.

Jordan usa este resultado para mostrar que não é necessário supor, como foi feito, que o domínio E seja mensurável: se E é limite de uma sequência de domínios mensuráveis $E_1, \ldots, E_n, \ldots$, cujos tamanhos convergem para um limite que é, por definição, o tamanho interior de E, então a integral (por excesso ou por falta) tomada em E_n tende para um limite, pois o módulo da diferença entre as integrais tomadas em E_n e E_{n+p} é no máximo igual a

$$L(E_{n+p} - E_n),$$

que é menor do que $L(E - E_n)$. Com o crescimento de n, este módulo tende para zero. O limite da integral tomada em E_n é considerado como o valor da integral no domínio não mensurável E. Aqui, infelizmente, Jordan também não dá nenhum exemplo.

Em uma série de resultados concernentes às integrais, há dois cujos enunciados evocam o critério de Cauchy para integrais impróprias (ver capítulo 2). O primeiro deles considera E um domínio limitado, e $f(x, y)$ definida em E, uma função que permanece limitada em todo domínio D mensurável, mas não em todo o interior de E. É o caso, então, de uma função que torna-se infinita à medida que o argumento se aproxima de um determinado ponto. O critério que Jordan prova é o de que esta função admite integral por excesso (analogamente, por falta) se, e somente se, S^1_D tende para zero quando D varia de modo que sua área tenda para zero. Em outros termos:

Proposição 4.1. S^1_E existe se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para todo domínio D limitado, perfeito, interior a E, cuja área seja menor do que δ, tem-se

$$|S^1_D| < \varepsilon.$$

Demonstração: Supondo que a última condição seja válida, e considerando dois domínios quaisquer, D e D' mensuráveis, perfeitos e interiores a E, tais que a diferença entre qualquer uma de suas áreas e a área de E seja menor do que $\delta > 0$. Sejam d o conjunto de pontos de D que não pertencem a D', e d' o conjunto de pontos de D' que não pertencem à D. Lembrando que as notações de área confundem-se com a do próprio conjunto, tem-se

$$d < E - D' < \delta \quad \text{e} \quad d' < E - D < \delta,$$

o que acarreta em

$$D - D' = d - d'$$

e, consequentemente, em

$$S^1_D - S^1_{D'} = S^1_d - S^1_{d'}.$$

Logo,

$$|S^1_D - S^1_{D'}| \leq |S^1_d| + |S^1_{d'}| < 2\varepsilon.$$

Portanto o limite S^1_E existe.

Reciprocamente, existe uma quantidade ε para a qual um domínio d tem área menor do que δ e tal que

$$|S^1_d| \geq \varepsilon.$$

Seja D um domínio mensurável e perfeito interior a E, que contenha d, e que $E - D$ seja menor do que δ. Se os pontos interiores a d são removidos de D, obtém-se um novo conjunto $D' = D - d$, cuja área é maior do que $E - 2\delta$. Com o decréscimo de δ, as duas áreas D e D' tendem para E, mas que

$$|S_D^1 - S_{D'}^1| = |S_d^1| \geq \varepsilon.$$

Assim o limite não existirá, o que é um absurdo.

■

Analogamente prova-se que o equivalente deste teorema para a integral por falta S_D^2: quando D tende para E, S_D^2 pode tender para um limite fixo S_E^2, e a condição necessária e suficiente para que isso ocorra é que

$$\lim S_D^2 = 0,$$

quando a área de D tende para zero. Jordan utiliza também as notações

$$\lim_{D=0} S_D^1 = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{D=0} S_D^2 = 0$$

para designar estes limites.

O segundo resultado que remete ao critério de Cauchy considera um domínio E não limitado e uma função definida neste domínio que admite em todo domínio Δ limitado interior a E as integrais por excesso e por falta S_Δ^1 e S_Δ^2. É o caso análogo ao dos limites de integração infinitos. É enunciado como:

Proposição 4.2. Para que exista S_E^1 é necessário e suficiente que a integral

$$S_\Delta^1\, f\, de$$

tenda para zero quando Δ varia de modo que sua distância à origem do plano coordenado tenda para infinito.

Demonstração: Sejam Δ e Δ' dois domínios quaisquer contendo todos os pontos de E cuja distância à origem é menor do que um número R. Sejam d o conjunto dos pontos de Δ que não pertencem a Δ' e d' o conjunto de pontos de Δ' que não pertencem a Δ. Segue que

$$S_\Delta^1 - S_{\Delta'}^1 = S_d^1 - S_{d'}^1,$$

e os dois termos do segundo membro tendem para zero quando R tende para infinito.

Reciprocamente, suponha que a condição não seja satisfeita, então é possível determinar um número ε tal que exista um domínio d mensurável, limitado e perfeito cuja distância à origem seja maior que toda quantidade dada, e para a qual a integral

$$|S_d^1\, f\, de| > \varepsilon.$$

Sejam

- Δ um domínio qualquer;
- R a distância mínima entre a origem e os pontos de E que não pertencem a Δ;
- ρ a distância máxima entre a origem e os pontos de Δ.

Qualquer que seja R e ρ, é possível determinar d de modo que sua distância até a origem seja maior do que ρ. Então a diferença entre as integrais tomadas nos dois domínios Δ e $\Delta + d$ é maior do que ε. Mas Δ e $\Delta + d$ contêm todos os pontos de E cuja origem é menor do que R. Assim a integral S^1_Δ não pode tender para um limite determinado quando R tende para o infinito, o que é absurdo.

■

Obviamente uma proposição análoga pode ser encunciada e provada para a integral por falta. As duas últimas proposições aparecem quase sem alterações no tomo II do seu *Cours* (Id., 1893b, p. 76 et seq.). Percebemos que apesar do enunciado remeter aos resultados de Cauchy sobre integrais impróprias, a demonstrações não são análogas, e os infinitamente pequenos nela não são sequer mencionados.

Na década seguinte, toda essa discussão envolvendo tamanhos de conjuntos e integrais inspirou o francês Henri Léon Lebesgue (1875 - 1941) a realizar também uma reformulação do conceito de integral, ampliando mais ainda o escopo de sua aplicação, e concebendo-a como um conjunto possuindo (ou não) medida. Este tema já foi por nós abordado na dissertação de Mestrado *História da Integral de Lebesgue* defendida em 2017, e não será repetido aqui.

Na sequência, apresentamos a tradução integral do artigo aqui analisado.

4.4 Tradução do artigo: *Observações sobre as integrais definidas*

A integral definida (simples ou múltipla) de uma função f em um domínio E é obtida, como sabemos (quando o campo e os valores da função são limitados), da seguinte maneira:

Decompomos o campo em elementos infinitamente pequenos em todos os sentidos; multiplicamos o tamanho $d\sigma$ de cada um destes elementos por um valor de f em um ponto escolhido à vontade no elemento; e investigamos o limite da soma $\sum f\, d\sigma$ assim formado.

Sabemos de fato que este limite tem um valor bem determinado quando a função f é contínua. Esta propriedade subsiste ainda para uma classe de funções mais geral, definidas de uma maneira precisa por um teorema bem conhecido de Riemann.

Enfim, M. Darboux mostra que, qualquer que seja a função limitada f, as duas somas $\sum M\, d\sigma$, $\sum m\, d\sigma$, em que M e m representam o máximo e o mínimo de f no elemento $d\sigma$, têm sempre um limite perfeitamente determinado.

Estes resultados são bem precisos e esclarecem completamente o papel que tem a função na integral.

A influência da natureza do campo não parece ter sido estudada com o mesmo cuidado. Todas as demonstrações repousam sobre este duplo postulado, que cada campo E possui um tamanho determinado; e que, se o decompusermos em várias partes E_1, $E_2, \dots$, a soma dos tamanhos destas partes é igual ao tamanho total de E. Ora estas proposições estão longe de serem evidentes se for permitido à concepção do domínio toda sua generalidade.

Propomos mostrar nas páginas seguintes que a um campo qualquer E corresponde dois números determinados E' e E'' que podemos chamar seu *tamanho interior* e seu *tamanho exterior*.

Se estes dois números coincidem, diremos que E é mensurável e tem por tamanho o número $E'' = E'$. Para que esta circunstância se apresente, é necessário e suficiente que a fronteira de E tenha um tamanho nulo.

Uma função f, que permanece limitada em todo o interior de E, admite nesta região uma integral por excesso e uma integral por falta.

Se estas duas integrais coincidem, elas representam a integral propriamente dita da função f no campo E.

A determinação de uma integral propriamente dita múltipla resume-se à uma sequência de integrações simples, contanto que o campo seja mensurável.

Se o valor da função $f(x, y)$ não permanece limitado quando o ponto (x, y) se aproxima indefinidamente da fronteira do campo de integração E, ainda suposto limitado, será necessário e suficiente, para que a integral (por excesso ou por falta) tenha um valor finito e determinado, que o valor da integral, tomado em um domínio mensurável e perfeito D interior à E, tenda para zero ao mesmo tempo que a área de D, qualquer que seja a situação deste domínio neste campo.

Se o campo E é infinito, também será necessário que a integral tomada em D tenda para zero, quando D varia de uma maneira qualquer, mas de tal sorte que sua menor distância à origem das coordenadas tenda para ∞.

Se as integrais de $f(x, y)$ por excesso e por falta, no campo E são ambas finitas e determinadas, assim será a integral por excesso da função $\text{mod} f$. Esta condição é suficiente.

Para expor, sem fazer restrição inútil, a teoria da mudança de variáveis nas integrais múltiplas, parece que deveríamos renunciar a nos apoiarmos, como se faz comumente, sobre a redução a uma sequência de integrais simples, estas sendo estabelecido pelas integrais propriamente ditas tomadas em um campo mensurável. O método geométrico, empregado para as integrais duplas ou triplas, em que mudamos simultaneamente todas as variáveis, é preferível a este ponto de vista e se estende assim ao caso de n variáveis. Ele requer no entanto alguns desenvolvimentos para ser feito absolutamente rigoroso. Este estudo nos conduz ao seguinte resultado:

Sejam x, y e u, v dois pares de variáveis ligados pelas relações

$$x = \phi(u, v), \qquad y = \phi_1(u, v)$$

de tal modo que, quando (u, v) descreve um certo domínio E, (x, y) descreverá um domínio correspondente E'.

Supomos: $1^{\underline{o}}$ que a cada ponto de E corresponda um só ponto de E' e reciprocamente; $2^{\underline{o}}$ que em todo ponto interior de E' (salvo nos pontos excepcionais formando um conjunto de extensão nula) as funções ϕ, ϕ_1 admitam derivadas contínuas, cujo jacobiano J não é nulo.

Isto posto, seja $f(x, y)$ uma função qualquer, tal que a integral

$$S_E\, f(x, y)\, dx\, dy$$

(calculada por excesso ou por falta) seja finita e determinada. Seu valor será igual àquele da integral

$$S_E\, f(\phi, \phi_1) \,\text{mod}\, \mathrm{J}\, du\, dv$$

(calculado da mesma maneira).

4.4.1 Noções gerais sobre os conjuntos

1. Sejam $x, y, \ldots, n$ variáveis independentes. Todo sistema de valores $a, b, \ldots$ atribuído a estas variáveis constituirá um ponto de um espaço de n dimensões.

A *distância* pp' de dois pontos $p = (a, b, \ldots)$ e $p' = (a', b', \ldots)$ será definida pela relação

$$pp' = |a' - a| + |b' - b| + \cdots .^7$$

Chamamos conforme M. Cantor:

1º *Conjunto* toda coleção de pontos;

2º *Ponto limite* de um conjunto E todo ponto π tal, que podemos, qualquer que seja ϵ, determinar em E um ponto p diferente de π, e cuja distância à π seja $< \epsilon$;

3º *Derivado* de E o conjunto E' formado pelos pontos limites de E;

4º *Conjunto perfeito* todo conjunto que contém seu derivado.

Um conjunto E', derivado de um outro conjunto E, é necessariamente perfeito. – Seja de fato π um de seus pontos limites; E' conterá um ponto p' tal que $p'\pi$ seja $< \frac{\epsilon}{2}$; mas, p' sendo um ponto limite de E, poderemos determinar em E um ponto p tal que pp' seja $< \frac{\epsilon}{2}$; então teremos

$$p\pi \leq pp' + p'\pi < \epsilon;$$

logo π é um ponto limite de E, e pertencerá à E'.

2. Se o conjunto E não contém todos os pontos possíveis, os pontos que não lhe pertencem formam um conjunto *complementar* E_1.

Seja respectivamente E', E_1' os conjuntos derivados de E, E_1. Os pontos do plano podem ser distribuídos em três classes:

1º Os pontos *interiores* a E. Estes são os que pertencem a E sem pertencer a E_1'. Para cada um dos p poderemos designar uma quantidade ϵ tal que todo ponto cuja distância até p é $< \epsilon$ pertencente a E e não a E_1.

2º Os pontos *exteriores*, que pertencem a E_1 sem pertencerem a E'.

3º Os *pontos fronteiriços*, que pertencem ao mesmo tempo a ambos os conjuntos E, E_1 e a seus derivados.

Podemos facilmente conceber os conjuntos para quais os pontos interiores ou os pontos exteriores, ou ambos, não existam. Mas *existem sempre pontos fronteiriços.*

Sejam de fato $p = (a, b)$ e $\pi = (\alpha, \beta)$ dois pontos quaisquer escolhidos respectivamente em E e em E_1.

Vamos particionar a reta $p\pi$ em 2^n segmentos iguais. Seja p_n o último dos pontos de divisão que pertencem a E, π_n o próximo. É claro que, se fizermos crescer n, os dois pontos p_n e π_n se aproximarão constantemente entre si, e tenderão para um mesmo ponto limite q.

Se n é suficientemente grande, teremos

$$p_n q < \epsilon, \qquad \pi_n q < \epsilon.$$

Então o ponto q pertencerá a ambos E' e E_1' e como também pertence a E ou a E_1', será um ponto fronteiriço.

[7] Esta expressão, na forma como foi escrita, significaria uma soma infinita para um leitor contemporâneo; no entanto o contexto é claro em indicar que Jordan trabalhava com um número finito de termos na soma.

Poderá ocorrer que a partir de um certo valor ν de n, um dos pontos p_n, π_n, o primeiro por exemplo, deixe de se deslocar, mas a consequência seria a mesma. De fato, o ponto $q = p_\nu$ pertenceria a E; além disso este é o limite dos pontos π_n, que pertencem a E_1: então ele pertence à E_1'; é então um ponto fronteiriço.

O conjunto F dos pontos fronteiriços é perfeito. - Seja, de fato, q um ponto limite de F; F conterá uma infinidade de pontos $q_1, \ldots, q_n, \ldots$ convergentes para q. Se entre eles há uma infinidade que seja comum a E e a E_1', o ponto limite q pertencerá aos derivados destes conjuntos; ora E tem por derivado E' e E_1' contém seu derivado. Então q é comum a E' e a E_1'; mas ele pertence também à E ou a E_1: é então um ponto fronteiriço.

Se entre os pontos $q_1, \ldots, q_n, \ldots$, existe só um número limitado comum a E e a E_1', os outros, em número infinito, serão comuns a E_1 e a E_1', e um raciocínio análogo ao precedente conduzirá à mesma consequência.

3. Um conjunto de pontos (x, y) será dito *limitado* se as coordenadas de todos estes pontos permanecem compreendidas entre os números fixos M e m.

TEOREMA DE WEIERSTRASS. – *Todo conjunto limitado que contém uma infinidade de pontos admite ao menos um ponto limite.*

De fato, particionemos o intervalo de m à M em n partes iguais. As duas coordenadas x, y de um ponto qualquer de E se assentará em um destes intervalos. Agrupemos em um conjunto parcial todos estes pontos de E em que x de uma parte e y de outra parte se assentem no mesmo intervalo.

Obteremos assim n^2 conjuntos parciais, cuja reunião constitui E. Pelo menos um E_1 destes novos conjuntos conterá uma infinidade de pontos; e a distância

$$|x' - x| + |y' - y|$$

entre dois destes pontos não poderá ultrapassar $2\dfrac{M-m}{n}$.

Operemos sobre E_1 como sobre E; vamos decompor em n^2 conjuntos parciais, em que ao menos E_2 contenha uma infinidade de pontos, cujas distâncias mútuas não poderão ultrapassar $2\dfrac{M-m}{n^2}$. Poderemos agora operar sobre E_2 como sobre E_1, e assim sucessivamente.

Dito isto, sejam p_1 um ponto escolhido à vontade em E_1; p_2 um outro ponto, escolhido a vontade em E_2, etc. Estes pontos p_1, $p_2, \ldots$ tenderão evidentemente a um ponto limite π.

4. Sejam E, E' dois conjuntos sem pontos em comum. As distâncias dos diversos pontos p de E aos diversos pontos p' de E' formam um conjunto de números não negativos. De acordo com um teorema bem conhecido, existe então um *mínimo* Δ, positivo ou nulo, tal: 1º que nenhuma das distâncias pp' seja $< \Delta$; 2º que existe um número menor que $\Delta + \varepsilon$, qualquer que seja a quantidade positiva ε.

Este mínimo Δ será chamado de *distância* dos conjuntos E, E'. Se esta é > 0, diremos que estes conjuntos são *separados*.

Dois conjuntos limitados e perfeitos E, E', que não possuem pontos comuns, são necessariamente separados; e, se a distância entre eles é Δ, eles conterão ao menos um par de pontos cuja distância mútua é precisamente Δ.

Sejam de fato $p = (x, y), \ldots$ os pontos de $E : p' = (x', y'), \ldots$ os de E'. Associemo-los, dois a dois, de todas as maneiras possíveis de modo a formar novos pontos $(pp') = (x, y, x', y')$ no espaço de quatro dimensões. O conjunto EE' de todos estes novos pontos será evidentemente limitado e perfeito.

Dito isto, se E e E' não contém nenhum par de pontos cuja distância seja Δ, eles conterão pelo menos um par de pontos p_1, p'_1 cuja distância seria $\Delta + \varepsilon_1$, ε_1 tomado a vontade.

Sejam d_1 o distância de p_1 a p'_1, ε_2 um número $< d_1$ e $< \dfrac{\varepsilon_1}{2}$; poderemos determinar um novo par de pontos p_2, p'_2 cuja distância d_2 seja $< \Delta + \varepsilon_2$. Continuando assim obteremos uma sequência infinita de pares $p_1, p'_1; p_2, p'_2; \ldots$ do conjunto EE' admitindo ao menos um ponto limite (pp'), em que os dois pontos componentes tenham por distância Δ. Ora p é um limite do conjunto de pontos $p_1, p_2, \ldots$ que pertencem a E; é então um ponto limite de E, e como este conjunto é perfeito, ele contém p. Mostra-se de forma similar que E' contém p'.

Além disso, Δ não pode ser nulo; pois se fosse, os pontos p, p' se confundindo, E e E' teriam um ponto comum, contrario à hipótese.

5. Diremos que um conjunto E limitado e perfeito é *conexo* se ele não pode ser decomposto em vários conjuntos perfeitos separados.[8]

O caráter distintivo de tal conjunto é o seguinte:

Entre quaisquer dois de seus pontos p, p', podemos sempre, qualquer que seja ε, intercalar uma cadeia de pontos intermediários, pertencentes ao conjunto dado, e tal que a distância entre dois pontos consecutivos seja $< \varepsilon$.

$1^{\underline{o}}$ Esta condição é necessária. De fato, suponhamos que para um número dado ε ela não seja satisfeita. Associemos ao ponto p primeiro todos os de E cuja distância até p seja $< \varepsilon$, depois os cuja distância até um destes seja $< \varepsilon$ e assim sucessivamente. Os pontos assim obtidos formam um conjunto E_1. Os outros pontos de E formam um conjunto E_2, contendo ao menos um ponto, a saber p', e cuja distância até E_1 seja $\geq \varepsilon$. Além disso cada um dos conjuntos E_1, E_2 é perfeito. Seja de fato l_1 um ponto limite de E_1. Ele pertence a E que é suposto perfeito. Então ele pertence a E_1 ou a E_2. Além disso existem pontos de E_1 que distam menos do que ε de l_1. Então ele pertence a E_1 e não a E_2.

Seja por outro lado l_2 um ponto limite de E_2. Ele pertence a E, e como existem pontos de E_2 que distam menos do que ε de l_2, ele não pode pertencer a E_1; então ele pertence a E_2.

[8]NDT. No original o termo usado é "*ensemble d'une seul tenant*" que significa "que se apresenta em um só pedaço, sem divisão". Optamos por traduzir como conjunto conexo. Segundo Domingues, um espaço métrico (M, d) se diz *desconexo* quando existem dois conjuntos abertos G e H, ambos não vazios, de maneira que $G \cap H = \emptyset$ e $G \cup H = M$. Um espaço *conexo* é um espaço que não é desconexo"(Domingues, 1982, p.133).

2º Reciprocamente, esta condição é suficiente. De fato, suponhamos E passível de ser decomposto em dois conjuntos perfeitos separados E_1 e E_2; sejam δ a distância entre eles, p_1 e p_2 dois pontos tomados respectivamente em E_1 e E_2. Se os conectarmos por uma cadeia qualquer de pontos intermediários, esta cadeia conterá necessariamente dois pontos consecutivos pertencentes, um a E_1, o outro a E_2. A distância entre eles será então $\geq \delta$; e a condição do enunciado não será cumprida para os valores de ε menores do que δ.

A proposição acima conduz a esta consequência:

Um conjunto E formado pela reunião de vários conjuntos conexos E_1, E_2,..., em que cada um tenha pelo menos um ponto comum com um dos precedentes, é conexo.

6. *Um conjunto E conexo confunde-se com seu derivado E'* (se ele não se compõe por um só ponto).

De fato, E contém E', por definição. Mas, por outro lado, está contido nele. Sejam, de fato, p, p' dois pontos arbitrariamente escolhidos em E. Podemos intercalar entre eles uma cadeia de pontos p_1, p_2,..., tais que a distância de dois pontos consecutivos quaisquer, e notadamente a de p até p_1, seja $< \varepsilon$. Podemos então, qualquer que seja ε, determinar em E um ponto p_1 cuja distância até p seja $< \varepsilon$. Então p é um ponto limite de E e pertence a E'

7. Seja E um conjunto limitado, formado pelos pontos p, p_1,...; as distâncias entre estes pontos tomados dois a dois formam um máximo d, que chamaremos de *diâmetro* do conjunto E.

8. Busquemos, por outro lado, dar precisão à noção de *tamanho* deste conjunto.

Este tamanho será um comprimento, uma área, um volume, etc., dependendo se o número de dimensões do conjunto é 1, 2, 3,.... Suporemos, para fixar as ideias, que este número seja igual a 2. Cada ponto (u, v) de E poderá ser representado geometricamente sobre um plano pelo ponto em que u, v são as coordenadas retangulares.

Decomponhamos este plano por paralelas aos eixos em quadrados de lados r. O conjunto destes quadrados cujos pontos são todos interiores a E formam um domínio S interior a E; o conjunto dos que são interiores a E ou que contenham um ponto de sua fronteira formam um novo domínio $S + S'$, ao qual E é interior. Estes domínios, sendo formados pela reunião de quadrados, têm áreas determinadas, que podemos igualmente representar por S e $S + S'$.

Façamos variar a decomposição em quadrados, de tal forma que r tenda para zero: *as áreas S e $S + S'$ tenderão para limites fixos.*

1º De fato, consideremos, por exemplo, aquelas áreas S para as quais r não supera um número fixo; elas formam um sistema de números positivos, evidentemente limitado, e admitindo um máximo A. Poderemos encontrar uma decomposição determinada, para a qual esta área leva um valor S_1 maior do que $A - \varepsilon$. A fronteira F de E e a do domínio interior S_1 formam dois conjuntos perfeitos, com distância δ diferente de zero entre eles.

Consideremos agora uma nova decomposição qualquer em quadrados de lado menor do que $\dfrac{\delta}{2}$. A distância máxima entre dois pontos de um mesmo quadrado será $< \delta$. Então todos os quadrados em que um ponto pertence a S_1 estarão inteiramente no interior E. Logo o domínio S conterá S_1, e sua área será $\geq A - \varepsilon$; mas, por outro lado, ela não superará A. As áreas S admitem então um limite igual a A.

2º Consideremos, por outro lado, as áreas $S + S'$. Elas formam um conjunto de números positivos admitindo um mínimo a. Existirá uma decomposição determinada para a qual $S + S'$ tomará um valor $S_1 + S_1'$ menor do que $a + \varepsilon$. Seja δ a distância da fronteira de E até a do domínio $S_1 + S_1'$. Consideremos uma outra decomposição qualquer em que r seja $< \dfrac{\delta}{2}$. Todos os quadrados em que um ponto pertença a E ou a sua fronteira serão interiores a $S_1 + S_1'$. Teremos então

$$S + S' \leq S_1 + S_1' < a + \varepsilon.$$

Mas, por outro lado, $S + S' \geq a$. Então a é o limite das somas $S + S'$.

Como temos sempre

$$S + S' \geq S,$$

a será pelo menos igual a A.

Chamaremos A de *área interior* de E, e de a sua *área exterior*. Se S' tem por limite zero, diremos que E é *quadrável*, e tem por *área* a quantidade $a = A$.

9. Seja E' um novo conjunto interior a E. Sua área exterior, e, *a fortiori*, sua área interior, serão menores do que a área interior de E. Seja, de fato, δ a distância entre as fronteiras de E e de E'. Se decompusermos o plano em quadrados de lados $< \dfrac{\delta}{4}$, é claro que todos os quadrados não exteriores a E', e assim os quadrados adjacentes, serão interiores a E. A área interior de E supera então a área exterior de E' em uma quantidade pelo menos igual à soma das áreas destes últimos quadrados.

10. Suponhamos E formado pela reunião de vários conjuntos parciais E_1, $E_2, \ldots$, e consideremos uma decomposição qualquer do plano em quadrados. Sejam respectivamente S, S_1, $S_2, \ldots$ as somas dos quadrados interiores a E, E_1, $E_2, \ldots$; S', S_1', $S_2', \ldots$ a dos quadrados que encontram as fronteiras daqueles. Todo quadrado interior a um destes conjuntos E_1, $E_2, \ldots$ é interior a E, e, por outro lado, todo quadrado não exterior a E é não exterior a pelo menos um dos conjuntos E_1, $E_2, \ldots$; teremos então

$$S \geq S_1 + S_2 + \cdots, \qquad S + S' \geq S_1 + S_1' + S_2 + S_2' + \cdots,$$

e ao limite

$$A \geq A_1 + A_2 + \cdots, \quad a \leq a_1 + a_2 + \cdots.$$

A, A_1, $A_2, \ldots$ e a, a_1, $a_2, \ldots$ representando as áreas interiores e exteriores dos conjuntos E, E_1, $E_2, \ldots$. Estas desigualdades tornam-se, além disso, em igualdades se os conjuntos são quadráveis.

11. Podemos conceber uma infinidade de decomposições do plano em regiões elementares quadráveis $\Delta\sigma_1$, $\Delta\sigma_2$,..., cujos diâmetros não superam um número dado ρ. Consideremos uma sequência qualquer de decomposições deste gênero, em que ρ tenda para zero. A soma $\Sigma\delta\sigma$, estendida aos elementos interiores de E, terá por limite a área interior a A.

Podemos, de fato, determinar uma decomposição em quadrados, tal que a soma S das áreas dos quadrados interiores seja $> A - \varepsilon$; seja δ a distância entre as fronteiras de E e de S. Assim que ρ tornar-se $< \delta$, todo elementos $\Delta\sigma$ que tem um de seus pontos em S será totalmente interior a E. Então a área $\Sigma\Delta\sigma$ conterá a área S e será $> A - \varepsilon$. Mas, por outro lado, ela não pode ultrapassar A. De fato, seja δ' a distância entre sua fronteira até a de E. Consideremos uma outra decomposição em quadrados, de lado $< \frac{\delta'}{2}$. Todos estes quadrados que têm um ponto comum com a área $\Sigma\Delta\sigma$ serão interiores a E. Então a soma S' dos quadrados interiores é $\geq \Sigma\Delta\sigma$; mas ela não supera A.

Então A é justamente o limite das somas $\Sigma\Delta\sigma$.

Também vemos que a soma $\Sigma\Delta\sigma$, estendida não somente aos elementos interiores a E, mas também aos que encontram sua fronteira, tem por limite a área exterior a.

A soma $\Sigma\Delta\sigma$, limitada aos elementos fronteiriços, será então nula se E é quadrável.

12. As considerações precedentes são evidentemente aplicáveis aos conjuntos de um número qualquer de dimensões. Poderemos determinar para cada um deles um *tamanho interior* e um *tamanho exterior*. Se elas coincidem, o conjunto será *mensurável*.

13. Terminaremos estas observações estabelecendo o seguinte teorema:

Sejam u, v,... funções das variáveis independentes x, y,... que permanecem contínuas quando x, y,... movem-se em um certo conjunto E; Seja F o conjunto dos pontos $(u, v, \dots)$ correspondentes aos diversos pontos $(x, y, \dots)$ de E.

1º Se E é limitado e perfeito, F o será igualmente;

2º Se E é conexo, F o será igualmente.

Suponhamos, de fato, que E seja limitado e perfeito. Se F não é limitado, poderíamos nele determinar um ponto q_0 em que a soma

$$|u| + |v| + \cdots$$

fosse maior que o número dado qualquer L; depois um outro ponto q_1, em que esta soma de módulos fosse $> 2L$; um outro ponto q_2, em que ela fosse $> 4L, \dots$; um novo ponto q_n, em que ela fosse $> 2^n L, \dots$. Sejam p, $p_1, \dots, p_n, \dots$ os pontos correspondentes de E. Eles são todos diferentes, pois u, v,... não possuem mais do que um sistema de valores em cada ponto de E. Seu número sendo infinito, eles admitem ao menos um ponto limite π, que pertence a E. A sequência p_0, p_1, ..., p_n, ... conterá: 1º um ponto p_{x_0} tal que a distância $p_{x_0}\pi$ seja menor do que um número fixo qualquer ε; um ponto p_{x_1} tal que a distância $p_{x_1}\pi$ seja menor do que $p_0\pi$, $p_1\pi$, ..., $p_{\alpha_0}\pi$ e menor do que $\frac{\varepsilon}{2}$; um ponto p_{α_1} tal que $p_{\alpha_1}\pi$ seja menor do que $p_0\pi, \dots, p_{\alpha_1}\pi$ e que $\frac{\varepsilon}{L}, \dots$. Os ponto p_{α_0},

$p_{\alpha_1}, \ldots, p_{\alpha_n}, \ldots$ convergentes para π; além disso, os índices α_0, $\alpha_1, \ldots$ crescem; então $\alpha_n \geq n$ e a soma

$$|u| + |v| + \cdots,$$

até o ponto $q_{\alpha n}$, será ao menos igual a $2^n L$. Existirá então em E pontos tão próximos quanto desejado do ponto π, e para os quais $|u| + |v| + \cdots$ será maior do que todo número atribuível. Este resultado é absurdo; sejam, de fato, U, $V, \ldots$ os valores de u, $v, \ldots$ no ponto π. Poderemos, em virtude da continuidade admitida para estas funções, encontrar um número η tal que, para todo ponto de E cuja distância até π seja $< \eta$, u, $v, \ldots$ diferem de U, $V, \ldots$ em menos do que ε; de onde deduzimos

$$|u| + |v| + \cdots < |U| + \varepsilon + |V| + \varepsilon + \cdots.$$

Resta provar que F é perfeito, isto é, que contém seu derivado F'. Seja q' um ponto de F', para o qual converge uma sequência infinita $q_1, \ldots, q_n, \ldots$ de pontos de F. Sejam $p_1, \ldots, p_n, \ldots$ os pontos correspondentes de E. Eles admitem ao menos um ponto limite π, pertencente a E. Na sequência $p_1, \ldots, p_n, \ldots$, podemos encontrar, como vimos, uma sequência de pontos p_{α_0}, $p_{\alpha_1}, \ldots, p_{\alpha_n}, \ldots$ que convergem para π, e onde os índices α_0, $\alpha_1, \ldots$ crescem. Os pontos $q_{\alpha_0}, \ldots, q_{\alpha_n}, \ldots$ convergirão ao ponto q'. Mas, em virtude da continuidade, eles devem convergir para o ponto de F que corresponde a π. Então q' pertencerá justamente a F e corresponderá ao ponto π.

Suponhamos enfim que E seja conexo, e mostremos que F também é.

Sejam $q = (u, v, \ldots)$ e $Q = (U, V, \ldots)$ dois pontos quaisquer de F; $p = (x, y, \ldots)$ e $P = (X, Y, \ldots)$ os pontos correspondentes de E. Podemos conectá-los por uma cadeia de pontos intermediários p_1, $p_2, \ldots$ tais que a distância

$$|x_{k+1} - x_k| + |y_{k+1} - y_k| + \cdots$$

entre dois pontos consecutivos

$$p_k = (x_k, y_k, \ldots), \quad p_{k+1} = (x_{k+1}, y_{k+1}, \ldots),$$

e *a fortiori* cada um dos módulos

$$|x_{k+1} - x_k|, \quad |y_{k+1} - y_k|, \quad \ldots$$

seja inferior a um dado número η qualquer.

Sejam u_k, $v_k, \ldots$ os valores das funções u, $v, \ldots$ aos pontos x_k, $y_k, \ldots$. Como mostrou M. Lüroth[9], a continuidade sendo uniforme em todo domínio limitado e perfeito E, podemos escolher η suficientemente pequeno para que, para todo valor de k, os módulos

$$|u_{k+1} - u_k|, \qquad |v_{k+1} - v_k|, \qquad \cdots$$

e por consequência sua soma, sejam menores do que uma quantidade ε escolhida arbitrariamente. Ora esta soma representa a distância entre os dois pontos

$$q_k = (u_k, v_k, \ldots) \ \ e \ \ q_{k+1} = (u_{k+1}, v_{k+1}, \ldots).$$

Os pontos $q_1, \ldots, Q$ formam assim uma cadeia onde a distância entre dois pontos consecutivos é $< \varepsilon$. Então nossa proposição está estabelecida.

[9]NDT. Jacob Lüroth (1844 - 1910).

4.4.2 Integrais definidas

14. Seja $f(x, y, ...)$ uma função que conserva um valor limitado no interior de um domínio E, suposto mensurável.

Decomponhamos E em domínios elementares mensuráveis e_1, e_2,.... Designemos por M, m o máximo e o mínimo da função f em E; por M_k, m_k seu máximo e seu mínimo em e_k, e formemos as somas

$$S = \sum M_k e_k, \qquad s = \sum m_k e_k.$$

Como temos evidentemente

$$m \leq m_k \leq M_k \leq M,$$

S e s estarão compreendidos entre

$$M \sum e_k = ME \quad \text{e} \quad m \sum e_k = mE,$$

E seus módulos serão, no máximo, iguais a LE, L designando o maior dos dois módulos $|M|$ e $|m|$ (ou o máximo de $|f|$ no domínio E).

M. Darboux mostrou que, se fizermos variar a decomposição de tal modo que os diâmetros dos elementos tendam para zero, S e s tenderão para limites fixos.

De fato, consideremos, por exemplo, as somas S. Seus valores formam um conjunto limitado, que admite um mínimo T; e poderemos determinar uma decomposição particular Δ_1 tal que a soma correspondente S_1 esteja compreendida entre T e $T + \frac{\varepsilon}{2}$. Sejam e_1,..., e_n os elementos desta decomposição, n o seu número; teremos

$$E = \sum_1^n e_k, \qquad S_1 = \sum M_k e_k.$$

Seja Δ uma outra decomposição qualquer; nós distinguiremos nela dois tipos de elementos: 1º aqueles que estão contidos inteiramente num dos elementos e_1, e_n,..., digamos e_k; designaremo-los por e_k,..., e_{ki},...; 2º aqueles que se estendem sobre vários dos elementos e_1, e_2,...; designemo-los por e'_1,..., e'_l,.... Sejam enfim M_{ki}, M'_l os máximos de f em e_{ki}, e_l; teremos evidentemente

$$M_k \geq m, \qquad M_{ki} \leq M_k, \qquad M'_l \leq M,$$

$$E = \sum_{k,j} e_{ki} + \sum_l e'_l = \sum_k e_k,$$

e enfim, para a soma S correspondente à decomposição Δ,

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i,k} M_{ki} e_{ki} + \sum_l M'_l e'_l, \\ &\leq \sum_k M_k \sum_l e_{ki} + M \sum_l e'_l, \\ &\leq S_1 - \sum_k M_k \left(e_k - \sum_l e_{ki} \right) + M \sum_l e'_l, \\ &\leq T + \frac{\varepsilon}{2} + (M - m) \sum_k \left(e_k - \sum_l e_k i \right). \end{aligned}$$

Por outro lado, T sendo o mínimo das somas de S, teremos

$$S \geq T.$$

Destas duas desigualdades resulta imediatamente a prova que, se o diâmetro dos elementos tende para zero, S tende para T. De fato, os domínios $e_1, \ldots, e_n$ sendo mensuráveis, a diferença entre e_k e a soma $\sum e_{ki}$ dos novos elementos que lhes são interiores tende para zero com o diâmetro destes elementos. Então poderemos, após ter escolhido ε à vontade, que fixará o número n, designar um número δ tal que, se todos os elementos têm um diâmetro $< \delta$, cada uma das n somas

$$e_k - \sum_i eki$$

torna-se menor do que

$$\frac{\varepsilon}{2n(M-m)}.$$

A partir de então, S estará compreendido entre T e $T+\varepsilon$.

Este número fixo $T = \lim S$ se nomeia *integral por excesso* da função $f(x, y, \ldots)$ no interior de E.

Demonstramos do mesmo modo que as somas s tendem para o seu máximo t, que será a *integral por falta* de $f(x, y, \ldots)$.

Temos evidentemente $T \geq t$. Se $T = t$, a função será *integrável*, $T = t$ será sua integral, que poderá ser representada pela notação $S_E f(x, y, \ldots)\, de$.

15. Se particionamos E em vários domínios mensuráveis E_1, $E_2, \ldots$, a integral, seja por excesso, seja por falta, tomada em E, será evidentemente a soma das integrais tomadas nestes domínios parciais.

Vimos, além disso, que podemos determinar uma sequência de domínios mensuráveis $E_1, \ldots$, $E_2, \ldots$ em que cada um seja interior ao seguinte e a E, e cujos tamanhos tenham por limite o tamanho de E. A integral (por excesso ou por falta) tomada em E será o limite para o qual tende, para $n = \infty$, a integral tomada em E_n; pois a diferença entre duas integrais é igual à integral tomada no domínio $E - E_n$, e seu módulo, não podendo superar $L(E - E_n)$, tende para zero quando n tende a ∞.

16. Admitimos, até o presente, que o domínio E é mensurável. Podemos agora suprimir esta restrição. Podemos, de fato, considerar como limite de uma sequência de domínios mensuráveis $E_1, \ldots, E_n, \ldots$ cujas extensões convergem para um limite que, por definição, é a extensão interior de E. A integral (por excesso ou por falta) tomada em E_n tende para um limite; pois a diferença entre as integrais tomadas em E_n e E_{n+p} tem seu módulo no máximo igual a

$$L(E_{n+p} - E_n) < L(E - E_n),$$

e tende para zero para $n = \infty$. Consideraremos este limite da integral tomada em E_n como representando o valor da integral em E.

17. *Se uma função $f(x, y, ...)$ de n variáveis é integrável em um domínio E, de tamanho mensurável, o cálculo da integral múltipla*

$$I = S_E\, f(x, y, ...)\, de$$

se reduzirá ao de n integrais simples sucessivas.

Para maior simplicidade, suporemos $n = 2$ na demonstração. O campo E será representado geometricamente por um conjunto de pontos (x, y) situados em um plano.

Os valores de y, aos quais correspondem os pontos de E, formam um conjunto limitado F. Seja η um deles; os valores de x que associados a η, fornecendo os pontos de E, formam um conjunto limitado G_η. Não podemos afirmar que G_η tem um comprimento mensurável, nem que a função $f(x, \eta)$ seja integrável lá; mas esta função sendo limitada, poderemos sempre determinar no interior de G_η sua integral por excesso e sua integral por falta. Serão funções de η, que poderemos designar por $J(\eta)$ e $j(\eta)$, e que são limitadas no domínio F. Então poderemos determinar no interior de F: $1^{\underline{o}}$ a integral por excesso de $J(\eta)$, que designaremos por K; $2^{\underline{o}}$ a integral por falta de $j(\eta)$, que designaremos por k. Como temos evidentemente $J(\eta) \geq j(\eta)$, k será no máximo igual à integral por falta de $J(\eta)$ e *a fortiori* no máximo igual a K.

Vamos mostrar, por outro lado, que K é no máximo igual à integral dupla I. Para isto, decomponhamos o plano em retângulos infinitamente pequenos por paralelas aos eixos. Aquele destes retângulos que é limitado pelas retas $x = x_i$, $x = x_i + dx_i$, $y = y_k$, $y = y_k + dy_k$ tem por área $dx_i dy_k$; nós a designaremos por e_{ik}, se ela é totalmente interior a E, e por e'_{ik} se ela contém um ponto da fronteira de E. Em cada um dos retângulos e_{ik}, a função $f(x, y)$ admitirá um certo máximo M_{ik}, e na porção dos retângulos e'_{ik} que pertencem a E ela não poderá superar um número fixo M, igual ao máximo de $f(x, y)$ no domínio E.

O conjunto G_η é formado pelos pontos comuns a E e à reta $y = \eta$. As paralelas ao eixo x que traçamos decompõem esta reta em segmentos e a integral $J(\eta)$ é igual à soma das integrais parciais tomadas no interior das porções comuns aos seus diversos segmentos e a E.

Suponhamos η compreendido entre y_k e $y_k + dy_k$, k tendo um valor determinado. Seja e_{ik} um destes retângulos interiores a E compreendido entre as retas $y = y_k$ e $y = y_k + dy_k$. O segmento da reta $y = \eta$ contido neste retângulo tem por comprimento dx_i e se encontra por inteiro em E; além disso, a função $f(x, y)$ em cada ponto deste segmento tem um valor no máximo igual a M_{ik}. O valor da integral correspondente não pode então superar $M_{ik} dx_i$.

Seja, por outro lado, e'_{ik} um dos retângulos compreendidos entre $y = y_k$ e $y = y_k + dy_k$ que encontram a fronteira de E. O comprimento (interior) da porção da reta $y = \eta$ comum a este segmento e a E não pode superar M; o valor da integral correspondentes não pode superar $M dx_i$.

Então o valor de $J(\eta)$ não poderá superar a quantidade

$$\mu_k = \sum_i M_{ik} dx_i + M \sum_i dx_i,$$

a primeira soma se estendendo à dos retângulos e_{ik}, e a segunda à dos retângulos e'_{ik}, onde k tem o valor constante que supusemos.

Se então designarmos por I_k o valor da integral por excesso de $J(\eta)$ no intervalo de $\eta = y_k$ a $\eta = y_k + dy_k$, teremos

$$I_k \leq \mu_k dy_k \leq \sum_i M_{ik} e_{ik} + M \sum_i e'_{ik}.$$

Cada um dos elementos dy_k interiores a F dá uma relação desse gênero. Somando as desigualdade obtidas, virá

$$\sum I_k \leq \sum_{i,k} M_{ik} e_{ik} + M \sum_{i,k} e'_{ik}.$$

Observamos que na primeira soma do segundo membro figuram todos os retângulos e_{ik} interiores a E, pois toda paralela aos x que corta um destes retângulos ou passa a uma distância de seu contorno inferior à distância deste contorno até a fronteira de E tem necessariamente pontos comuns com este domínio. De modo contrário, alguns destes retângulos fronteiriços e'_{ik} poderão não estar presentes na segunda soma.

Passemos agora ao limite, supondo que as dimensões dos retângulos decrescem indefinidamente. O primeiro membro terá evidentemente por limite a integral K. A primeira soma do segundo membro terá por limite a integral dupla $S_E f(x, y)\, de$, tomada por excesso. A segunda tem por limite zero, se E é mensurável, como supomos; pois a soma total das áreas dos retângulos fronteiriços tende para zero, assim como, por razão mais forte, a soma $\sum_{i,k} e'_{ik}$, se esta não se estende para além de uma parte destes retângulos.

Vemos assim que a integral K é no máximo igual à integral dupla $S_E f(x, y)\, de$, tomada por excesso.

Demonstraríamos, por um razonamento muito semelhante, que a integral k é pelo menos igual a esta mesma integral dupla tomada por falta.

Até o presente não fizemos nenhum uso da hipótese de que a função $f(x, y)$ é integrável. Se ela é, as duas integrais duplas, por excesso e por falta, coincidem entre si, e, consequentemente, com as integrais K e k. Ora cada uma destas pode ser calculada por duas integrações simples, efetuadas sucessivamente.[10]

18. Seja $f(x, y)$ uma função definida em todo o interior de um domínio E e que permanece limitada em todo o domínio D mensurável e perfeito contido neste interior, sem no entanto desfrutar desta propriedade em todo o interior de E. Esta função admitirá em D uma integral por excesso e uma integral por falta, que representaremos respectivamente por $S^1_D f\, de$ e $S^2_D f\, de$, ou, mais simplesmente, por S^1_D, S^2_D.

Consideremos, por exemplo, a integral por excesso S^1_D. Se nós fizermos variar o domínio D de uma maneira qualquer, mas de tal modo que sua área tenha por limite a área interior de E, poderemos concluir que a integral S^1_D tende para um limite determinado. Diremos neste caso que este limite é a integral por excesso de f no domínio E, e nós a representaremos por S^1_E.

A condição necessária e suficiente para que este limite exista é que a integral S^1_D tenda para zero quando D varia de uma maneira qualquer de tal modo que sua área

[10] (Nota do autor) A demonstração acima supõe que o domínio E é mensurável. Se não fosse, a proposição à estabelecer poderia não se cumprir. Suponhamos, por exemplo, que E seja constituído pelos pontos em que $y \geq 0 \leq 1$ e $x \geq 0 \leq 1$, se y é racional ou $x \leq 0 \geq -1$, se y é irracional, e tomemos por função a integrar uma constante c. A integral dupla $S_{Ec}\, dx\, dy$ será nula, pois a área interior de E é evidentemente nula. Mas, por outro lado, os domínios G_η e F têm um comprimento igual a 1, teremos

$$\int_F d\eta \int_{G_\eta} c\, dx = \int_F c\, d\eta = c.$$

tenda para zero: dito de outro modo que para todo número positivo ε podemos fazer corresponder um outro número δ tal, que para todo domínio D (limitado, perfeito e interior a E) de área menor do que δ, tenhamos

$$|S_D^1| < \varepsilon.$$

De fato, suponhamos esta última condição satisfeita e consideremos dois domínios quaisquer D e D' (mensuráveis, perfeitos e interiores a E) tais que suas áreas D e D' difiram da área interior de E por uma quantidade menor do que δ. Seja d o conjunto dos pontos de D que não pertencem a D'; d' o dos pontos de D' que não pertencem a D; teremos evidentemente

$$d < E - D' < \delta, \qquad d' < E - D < \delta,$$

$$D - D' = d - d'$$

e, consequentemente,

$$S_D^1 - S_{D'}^1 = S_d^1 - S_{d'}^1,$$

$$|S_D^1 - S_{D'}^1| \leq |S_d^1| + |S_{d'}^1| \leq 2\varepsilon,$$

o que prova a existência do limite S_E^1.

Reciprocamente, suponhamos a condição não satisfeita. Existirá uma quantidade ε para a qual não será possível determinar um domínio d, de área inferior a uma quantidade qualquer δ e tal que a integral S_d^1 tenha seu módulo $\geq \varepsilon$.

Seja D um domínio mensurável e perfeito contendo d, interior a E e tal que $E - D$ seja menor do que δ. Se removermos do domínio D os pontos interiores a d, obteremos um novo domínio $D' = D - d$ cuja área D' será $> E - 2\delta$. As duas áreas D e D' tenderão ambas para E se fizermos decrescer δ; mas a diferença das integrais correspondentes

$$S_D^1 - S_{D'}^1 = S_d^1$$

terá seu módulo igual a no mínimo ε. Então o limite S_E^1 não existirá.

As considerações todas semelhantes se aplicam à integral por falta S_D^2. Quando D tende a E, ela poderá tender para um limite fixo S_E^2; e a condição necessária e suficiente para que assim seja é que tenhamos

$$\lim S_D^2 = 0,$$

quando a área tende para zero.

19. As duas integrais

$$S_D^1 f\, de, \qquad S_D^2 f\, de$$

são, por definição, os limites das somas

$$\sum_D M_k\, de_k, \qquad \sum_D m_k\, de_k,$$

em que M_k, m_k são o máximo e o mínimo de f no elemento infinitesimal de_k. O máximo L_k do módulo de f neste elemento será a maior entre as duas quantidades $|M_k|$, $|m_k|$; teremos então

$$|\sum M_k\, de_K| \leq \sum L_k\, de_k,$$

$$|\sum m_k\, de_k| \leq \sum L_k\, de_k,$$

e passando ao limite

$$|S_D^1| \leq S_D^1 |f|\, de, \qquad |S_D^2| \leq S_D^1 |f|\, de.$$

Se então, quando D tende para zero, temos

$$\lim S_D^1 |f|\, de = 0, \tag{4.1}$$

teremos *a fortiori*

$$\lim S_D^1 = 0, \qquad \lim S_D^2 = 0, \tag{4.2}$$

e os dois limites S_E^1, S_E^2 serão determinados.

20. Vamos ver que, reciprocamente, as condições (4.2) resultam como consequência necessária da relação (4.1)

Seja, de fato, f_1 uma função igual a f quando f é positiva, e a zero quando f é nula ou negativa; teremos por hipótese, para todo campo D de área inferior a um certo número δ,

$$|S_D^1 f\, de| < \varepsilon$$

e esta relação deverá subsistir para todo campo D_1 contido em D. Concluímos facilmente que a integral

$$S_D^1 f_1\, de$$

não pode superar ε.

Decomponhamos, de fato, o campo D em elementos de_k infinitamente pequenos; sejam M_k o máximo de f, M_{tk} o de f_1 no elemento de_k.

Podemos tomar os elementos suficientemente pequenos para que a diferença entre as somas

$$\sum M_k\, de_k, \qquad \sum M_{tk}\, de_k$$

e seus mínimos

$$S_{D'}^1 f\, de, \qquad S_{D'}^1 f_1\, de$$

seja menor do que um número arbitrário η.

Assim será *a fortiori* se as somas e as integrais acima forem restritas a uma porção dos elementos de_k.

Ora M_{tk} é igual a M_k em todo elemento em que f toma valores positivos, iguais a zero nos outros; teremos então, designando por D_1 o conjunto de elementos do primeiro tipo,

$$S_D^1 f_1\, de \leq \sum_D M_{tk}\, de_k \leq \sum_{D_1} M_k\, de_k \leq S_{D_1}^1 f\, de + \eta \leq \varepsilon + \eta$$

e, fazendo tender η a zero,

$$S_D^1\, f_1\, de \leq \varepsilon.$$

Observemos em segundo lugar que, o máximo de f em um conjunto qualquer sendo igual e de sinal contrário ao mínimo de f, temos

$$S_D^2\, f\, de = -S_D^1\,(-f)\, de.$$

Por hipótese, o primeiro membro tende para zero ao mesmo tempo que a área de D: portanto o mesmo vale para o segundo; e se f_2 designa uma função igual a $-f$ quando $-f$ é positivo, a zero caso contrário, teremos, pelo que precede,

$$S_D^1\, f_2\, de \leq \varepsilon.$$

Dito isto, temos evidentemente

$$|f| = f_1 + f_2.$$

O máximo de $|f|$ em um conjunto qualquer é então no máximo igual à soma dos máximos de f_1 e de f_2; temos, consequentemente,

$$S_D^1\, |f|\, de \leq S_D^1\, f_1\, de + S_D^1\, f_2\, de \leq 2\varepsilon.$$

Então se D tende a zero, teremos

$$\lim S_D^1\, |f|\, de = 0.$$

Obtemos assim o seguinte teorema:

Para que as integrais, por excesso e por falta, da função f no domínio E sejam ambas determinadas, é necessário e suficiente que a integral por excesso de $|f|$ neste mesmo domínio seja determinada.

Observaremos que neste caso a integral por falta de $|f|$ em E é igualmente determinada. De fato, a integral por falta

$$S_D^2\, |f|\, de$$

tem todos seus elementos positivos ou nulos e no máximo iguais aos da integral por excesso $S_D^1\, |f|\, de$; ela tenderá então para zero ao mesmo tempo que esta última, se D tende para zero.

21. Sejam D_1, D_2,..., D_n uma série determinada, mas suscetível de ser escolhida à vontade, de domínios sucessivos (mensuráveis, perfeitos e interiores a E) tais que cada um deles contenha o precedente e que a distância máxima dos pontos da fronteira de D_n até a fronteira de E tenda para zero, quando n tende para o ∞; a integral

$$S_{D_n}^1\, |f|\, de,$$

será positiva e crescerá com n. Se ela tende para o ∞ ao mesmo tempo que n, a integral $S_E^1\, |f|\, de$ não poderá ser finita e determinada. No caso contrário, ela tenderá para um limite finito A, que será o valor da integral $S_E^1\, |f|\, de$.

De fato, seja D um domínio qualquer (mensurável, perfeito e interior a E), cuja área seja $> E - \delta$. Existe na sequência D_1,..., D_n,... um domínio D_m contendo D por inteiro, e teremos

$$S_D^1\, |f|\, de \leq S_{D_m}^1\, |f|\, de \leq A.$$

Ponhamos, por outro lado,

$$S_{D_n}^1\, |f|\, de = A - \varepsilon_n$$

e designemos por μ_n o máximo de $|f|$ em D_n.

Designemos por d o conjunto de pontos de D_n que não pertencem a D; a área deste conjunto será menor do que $E - D$ e *a fortiori* menor do que δ. Dito isto, teremos

$$S_D^1 |f| \, de \geq S_{D_n}^1 |f| \, de - S_d^1 |f| \, de > A - \varepsilon_n - \mu_n \delta.$$

Tomando n suficientemente grande, e δ suficientemente pequeno, poderemos torná-lo menor do que toda quantidade dada, primeiro ε_n, depois $\mu_n \delta$. Teremos então

$$\lim_{\delta=0} S_D^1 |f| \, de = A,$$

o que deveria ser demonstrado.

22. Sejam enfim E um domínio que não é limitado; $f(x, y)$ uma função definida neste domínio, que admite, em todo o domínio Δ limitado e interior a E, uma integral por excesso S_Δ^1, ou uma integral por falta S_Δ^2.

De acordo com o que vimos acima, a condição necessária e suficiente para que isso assim o seja é que tenhamos

$$\lim_{D=0} S_D^1 = 0 \quad \text{ou} \quad \lim_{D=0} S_D^2 = 0$$

para todo domínio infinitamente pequeno D interior a Δ. E se estas duas condições são satisfeitas de uma vez, elas equivalerão a esta:

$$\lim_{D=0} S_D^1 |f| \, de = 0.$$

Seja R a distância mínima dos pontos de E não contidos em Δ até um ponto fixo, a origem das coordenadas, se quisermos. Façamos variar Δ, de tal modo que R tenda a ∞; se a integral $S_\Delta^1 \, f \, de$, por exemplo, tende para um limite fixo, este limite será chamado *integral por excesso* de f no domínio E, e se representará por $S_E^1 \, f \, de$.

Para que seja assim, é necessário e suficiente que a integral $S_\Delta^1 f \, de$ tenda para zero, se fizermos variar Δ de tal modo que sua distância até a origem tenda para ∞.

De fato, suponhamos esta condição satisfeita. Sejam Δ e Δ' dois domínios quaisquer contendo todos os pontos de E cuja distância até a origem seja $< R$; sejam d o conjunto de pontos de Δ que não pertencem a Δ'; d' o dos pontos de Δ' que não pertencem a Δ; teremos evidentemente

$$S_\Delta^1 - S_{\Delta'}^1 = S_d^1 - S_{d'}^1,$$

e os dois termos do segundo membro tendem para zero para $R = \infty$.

Suponhamos, ao contrário, que esta condição não seja satisfeita. Poderemos determinar um número ε tal que exista um domínio d, mensurável, limitado e perfeito cuja distância até a origem seja maior do que toda quantidade dada, e para a qual a integral $S_d^1 \, f \, de$ tenha módulo $> \varepsilon$.

Dito isto, sejam

Δ um domínio qualquer;
R a distância mínima dos pontos de E que não pertencem a Δ até a origem;
ρ a distância máxima dos pontos de Δ até esta mesma origem.

Podemos, quaisquer que sejam R e ρ, determinar d de tal modo que sua distância à origem supere ρ. Dito isto, as integrais tomadas nos dois domínios Δ e $\Delta + d$ diferirão mais do que ε, embora cada um dos dois contenha todos os pontos de E cuja distância até a origem é $< R$. A integral S^1_Δ não pode então tender para um limite determinado para $R = \infty$.

Os mesmos razonamentos aplicam-se às integrais por falta.

Podemos enfim assegurar-nos, por considerações semelhantes às de números **19** a **21**, que, para que as integrais por excesso e por falta sejam ambas determinadas, será necessário e suficiente que a integral por excesso do módulo de f seja finita.

4.4.3 Mudanças de variáveis

23. Sejam x, y e u, v dois pares de variáveis, ligadas pelas relações

$$x = \phi(u, v), \qquad y = \phi_1(u, v).$$

Suporemos que para todos os pontos (u, v) de um domínio E: $1^{\underline{o}}$ as derivadas parciais de ϕ, ϕ_1 permanecem contínuas; $2^{\underline{o}}$ o jacobiano J delas permanece diferente de zero; $3^{\underline{o}}$ a dois pontos (u, v) distintos corresponde sempre dois pontos (x, y) igualmente distintos.

Ao conjunto E de pontos (u, v) corresponderá pelos pontos (x, y) um conjunto E'; e se (u, v) descreve um conjunto perfeito E_1 de tamanho mensurável, e interior a E, (x, y) descreverá um conjunto perfeito E'_1, interior a E'.

Sejam agora (u, v) um ponto de E_1; $(u+du, v+dv) = (U, V)$ um ponto infinitamente vizinho; (x, y) e $(x + \Delta x, y + \Delta y) = (X, Y)$ os pontos correspondentes; teremos

$$\begin{aligned} \Delta x &= \frac{d\phi}{du}du + \frac{d\phi}{dv}dv + R\,du + R_1\,dv \\ &= dx + R\,du + R_1\,dv, \\ \Delta y &= \frac{d\phi_1}{du} + \frac{d\phi_1}{dv}dv + R_2\,du + R_2\,dv \\ &= dy + R_2\,du + R_2\,dv, \end{aligned}$$

R, R_1, R_2, R_3 tendendo uniformemente para zero com du, dv em todo o domínio E_1. Se então $|du|$ e $|dv|$ permanecem menores do que um número fixo r convenientemente escolhido,

$$|R_1\,du + R_1\,dv| \quad e \quad |R_2\,du + R_2\,dv|$$

serão menores do que $\varepsilon[|du| + |dv|]$.

Ponhamos

$$ds^2 = du^2 + dv^2, \qquad \Delta\sigma^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2, \qquad d\sigma^2 = dx^2 + dy^2;$$

$\dfrac{d\sigma}{ds}$ será em E_1 uma função contínua de u, v, du, dv, homogênea e de grau zero em relação a estas últimas quantidades e sempre positiva. Ela admitirá então um máximo M e um mínimo m, ambos positivos.

Por outro lado, $\Delta\sigma - d\sigma$ é no máximo igual à distância entre os pontos $(x+\Delta x, y+\Delta y)$ e $(x + dx, y + dy)$ que é no máximo igual à soma de suas projeções $|R\,du + R_1\,dv|$ e $|R_2\,du + R_2\,dv|$, quantidade $< 2\varepsilon[|du| + |dv|] \leq 4\varepsilon\,ds$.

A relação $\dfrac{\Delta\sigma}{ds} = \dfrac{d\sigma}{ds} + \dfrac{\Delta\sigma - d\sigma}{ds}$ estará então sempre compreendida entre os dois números fixos $M + 4\varepsilon$ e $m - 4\varepsilon$.

Dito isto, admitamos que o ponto (U, V) descreve um quadrado Q de lado infinitamente pequeno ρ contendo o ponto (u, v). O ponto

$$(x + dx, y + dy)$$

descreverá, como dito, um paralelogramo P de área $|J|\rho^2$ e cujo perímetro p será menor do que $(M + 4\varepsilon)4\rho$. Quanto ao ponto

$$(X, Y) = (x + \Delta x, y + \Delta y),$$

sua distância até o precedente não poderá superar $2\varepsilon[|du| + |dv|]$, quantidade cujo máximo é $4\varepsilon\rho$

Então se construímos dois novos paralelogramos P' e P'', um interior, o outro exterior a P e cujos lados sejam distantes dos de P na quantidade $4\varepsilon\rho$, a região R descrita pelo ponto (X, Y) conterá P', mas será contido em P''. Ora a diferença entre as áreas de P' e de P'' é evidentemente igual a $2.4\varepsilon\rho.p$ e consequentemente menor do que $(M+4\varepsilon)32\varepsilon\rho^2$. Cuja área [exterior ou interior[11]] de R é igual a $[|J|+\varepsilon']\rho^2$, ε' sendo infinitamente pequeno, menor do que

$$(M + 4\varepsilon)32\varepsilon.$$

Disso resulta que o domínio E_1' descrito por (X, Y) quando (U, V) descreve o domínio E_1 é quadrável. De fato, E_1 o sendo, por hipótese, a soma das áreas dos quadrados Q de lado infinitamente pequeno ρ que encontra sua fronteira F será infinitamente pequena. A cada um dos dois corresponde um paralelogramo P'', de área $[|J| + \varepsilon']\rho^2 = [|J| + \varepsilon']Q$. O conjunto destes paralelogramos P'' formará um domínio perfeito envelopando a fronteira F' de E_1' e cuja área será no máximo igual à soma das áreas dos paralelogramos P'' (estes podendo se sobrepor uns aos outros). Designando então por μ o máximo de $|J|$ em E_1, teremos evidentemente

$$\sum P'' \leq |\mu + (M + 4\varepsilon)32\varepsilon| \sum Q,$$

quantidade que tende para zero ao mesmo tempo que $\sum Q$.

24. Seja agora $f(x, y)$ uma função de x, y limitada no domínio E_1'. Ponhamos $f(\phi, \phi_1) = F(u, v)$. A integral, seja por excesso, seja por falta, de $f(x, y)$ no domínio E_1' é igual à integral correspondente de $F(u, v)|J|$ no domínio E_1.

De fato, decomponhamos o plano de u, v em quadrados de lado ρ infinitamente pequenos; sejam Q_k um destes quadrados interior a E_1, R_k o elemento correspondente de E_1' e consideremos, por exemplo, as integrais por excesso. Sejam M_k o máximo de $F(u, v)|J|$ em Q_k; M_k' o de $f(x, y)$ em R_k. Temos que mostrar que as duas somas

$$\sum M_k Q_k, \qquad \sum M_k' R_k$$

têm o mesmo limite.

[11](Nota do autor) Estas duas áreas são iguais, mas ainda não estabelecemos isso

Ora, seja J_k o valor de J em um ponto (u_k, v_k) escolhido arbitrariamente no quadrado Q_k, teremos, como vimos acima,

$$R_k = [|J_k| + \varepsilon'_k]Q_k,$$

ε'_k sendo menor do que $(M + 4\varepsilon)32\varepsilon$.

Por outro lado, o máximo de $F(u, v) = f(x, y)$ em Q_k é evidentemente M'_k; e o de $F(u, v)|J|$ é igual a $M'_k\nu_k$, ν sendo uma quantidade intermediária entre o máximo N_k e o mínimo n_k de $|J|$ em Q_k. Além disso $|J|$ sendo contínua em E_1, podemos escolher ρ suficientemente pequeno para que a diferença entre as quantidades N_k, n_k, e *a fortiori* a das quantidades v_k e $|J_k|$, seja menor do que uma quantidade arbitrária ε''.

Dito isto, teremos

$$\sum M'_k R_k - \sum M_k Q_k,$$

$$\sum [|J_k| + \varepsilon']M'_k Q_k - \sum \nu_k M'_k Q_k,$$

$$\sum [|J_k| + \varepsilon'_k - \nu_k]M'_k Q_k.$$

Ora, se ρ tende para zero, $|J_k| - \nu_k$ e ε'_k tendem uniformemente para zero, $|M'_k|$ permanece abaixo de um limite fixo; enfim $\sum Q_k$ tem por limite a área de E_1. Portanto a diferença tende para zero.

Admitimos até o presente que, em todo o interior de E, as derivadas parciais de ϕ, ϕ_1 permanecem contínuas, e que o jacobiano delas não seja nulo. Suponhamos agora que isto deixe de ser satisfeito em certos pontos de E, mas que o conjunto de pontos de E' que corresponde a estes pontos de exceção tenha uma área nula. Poderemos, qualquer que seja δ, determinar um domínio F' de área menor do que δ, encerrando em seu interior todos os pontos deste último conjunto.

Seja G'_1 o domínio obtido ao subtrair de E'_1 todos os pontos interiores a F'. O teorema será aplicável ao domínio G'_1; teremos então, designando por G_1 o domínio descrito por (u, v), quando (x, y) descreve G'_1,

$$S_{G'_1}\, f(x, y)\, dx\, dy = S_{G_1}\, F(u, v)|J|\, du\, dv.$$

Suponhamos que façamos decrescer indefinidamente o domínio F; G_1 e G'_1 tenderá respectivamente para E_1 e E'_1; e, se a função f é limitada, como supusemos, no domínio E'_1, que é limitado, o primeiro membro tenderá para o limite fixo $S_{E'} f dxdy$. Então o segundo membro tenderá ao mesmo limite, e teremos

$$S_{E'_1}\, f(x, y)\, dx\, dy = S_{E_1}\, F(u, v)|J|\, du\, dv.$$

Façamos enfim tender E'_1 para E_1. Se o primeiro membro desta igualdade tende para um limite fixo, que será, por definição, $S_E f(x, y)\, dx\, dy$, o segundo membro tenderá também para um limite fixo, e teremos

$$S_{E'}\, f(x, y)\, dx\, dy = S_E\, F(u, v)|J|\, du\, dv.$$

Em resumo, para que esta fórmula de transformação seja aplicável, é suficiente, como vimos:

1º Que a cada ponto (x, y) corresponde um só ponto (u, v), e reciprocamente;

2º Que as derivadas de φ, φ_1 sendo usualmente contínuas e o jacobiano J usualmente diferente de zero, o conjunto de pontos de E' que poderiam fazer exceção a esta regra tenha uma área nula;

3º Que a integral a transformar $S_{E'}\, f(x, y)\, dx\, dy$ tenha um valor finito e determinado.

Considerações finais

Buscamos narrar a história de como o rigor no cálculo integral se manifestou durante o século 19. Mas temas históricos dificilmente se esgotam e sempre há novas descobertas e reinterpretações que o acrescem. A seguir discorremos um pouco sobre o que fica por ser investigado acerca do tema.

Pelo menos duas figuras ilustres nessa história foram preteridas, justificado pela falta de espaço de tempo para cumprimento dos prazos do doutorado. A primeira delas, presente nas historiografias, e que não teve seu tratado analisado aqui, foi o francês Jean-Gaston Darboux (1842 - 1917), que revisitou e poliu a estrutura da integral de Riemann, adicionando a ela conceitos que, além de terem sido citados por Jordan, são relembrados ainda hoje nos cursos de análise. Fica para pesquisas futuras a análise epistêmica e contextual do tratado *Mémoire sur les Fonctions Discontinues* de 1875, de autoria de Darboux, junto a um levantamento historiográfico do tema. Tal pesquisa complementaria a presente tese por fornecer mais um marco do rigor na teoria das integrais ocorrido no século 19. Outra figura que ficou de lado foi o francês André-Marie Ampère (1775 - 1836), que já lecionava a disciplina *análise* na *EP*, quando Cauchy lá entrou; ambos alternaram a docência desta disciplina por vários anos. A relação deles é citada por Schubring (2005) como amigável e de influência recíproca. Ainda segundo o autor, ele também teria trabalhado com o conceito de rigor. A pergunta que sintetiza todas as questões que surgem disto é: *como Ampère lida com as integrais definidas?* Tais pesquisas, sem dúvida, complementariam a presente tese, fornecendo mais informações sobre como o rigor do século 19 se manifestou no cálculo integral.

O trabalho em torno de Cauchy envolve ainda um mergulho mais profundo em sua obra. Seu cálculo integral envolve mais temas envolvendo a "conciliação entre o rigor e a simplicidade no uso dos infinitamente pequenos". Um deles é o tratamento que faz da *fórmula de Taylor*. Na apresentação de seu *Résumé* Cauchy diz ter devolvido tal fórmula ao cálculo integral, por julgar que os desenvolvimentos de funções em séries infinitas deveriam ser rejeitados quando estas séries não são convergentes (Cauchy, 1823, p. v). Esta afirmação envolve uma crítica ao "ilustre autor da *Mécanique analytique*", que uma pesquisa rápida indica ser Joseph Louis-Lagrange (1736 - 1813). Ora, aprendemos em cursos de análise da atualidade duas versões da dita fórmula: uma com resto *de Lagrange* e outra com resto *integral*. Seria este resto o mesmo criado por Cauchy? Se for, porque não leva seu nome? O tema me instiga a aprofundá-lo e dele pretendo me ocupar nas próximas investigações.

Voltando-nos para o vastíssimo campo da Educação Matemática, temos uma proposta de pesquisa que refere-se ao ensino de análise e quiçá de cálculo. A experiência como aluno e como docente da referida disciplina me fez perceber uma acentuada ausência de gráficos nos livros que dela tratam. Julguei por muito tempo que isso era ocasionado pela impossibilidade de visualizá-los. Em algumas aulas que tive a oportunidade de ministrar me vi impulsionado a verificar se um dado exemplo de função com infinitas descontinuidades não seria visualizável. O exemplo em questão era a função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 0$ se $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ e $f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{1}{q}$, em que $\frac{p}{q}$ é uma fração irredutível com $q > 0$ e $p \neq 0$. Não logrei construí-lo, mas encontrei-o por acaso. Uma rápida pesquisa revela que a referida função é atribuída ao alemão Carl Johannes Thomae (1840 - 1921) e o fato dela ser integrável na teoria de Riemann indica mais um possível campo para investigação da manifestação do rigor no cálculo integral no século 19. A Figura 4.4 representa tal gráfico.

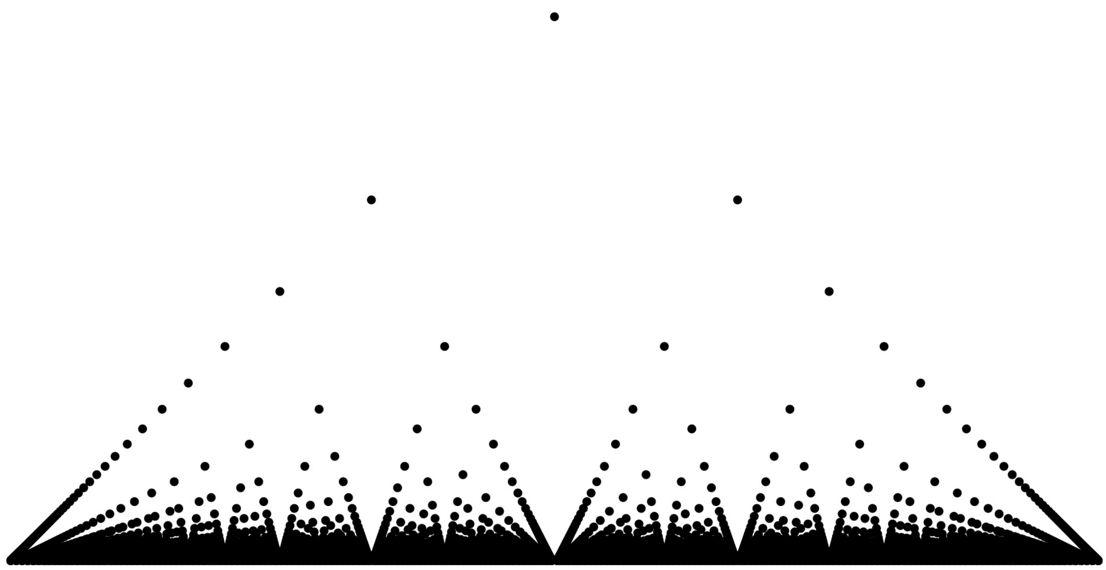


Figura 4.4: Função de Thomae.
Fonte: https://en.wikipedia.org/wiki/Thomae%27s_function. Acesso em 18 jul 2022.

Mas este exemplo junto ao gráfico da função de Riemann nos leva a indagar quais outras funções comuns nos livros de análise seriam visualizáveis. Isso gera todo um trabalho de mapeamento destas funções e construção de seus gráficos, convidando o campo de investigação das tecnologias digitais na educação. A produção de recursos didáticos parece ser muito fecunda para o ensino de análise. Eventualmente um livro todo ilustrado para a disciplina pode vir a surgir. Isto não necessariamente complementaria a presente tese, mas origina-se dela com a construção do gráfico da função de Riemann que aqui fazemos.

Por fim julgamos necessário falar a respeito das traduções a serem feitas para enriquecer o campo de investigação histórica no Brasil. Nossa investigação foi feita com o auxílio de traduções das fontes utilizadas que, longe de substituir as originais, fornecem um apoio inestimável ao pesquisador em história. No entanto não encontramos muito material traduzido para a língua portuguesa. Leibniz, Cauchy e Riemann são importantes figuras para o cálculo, e traduções de suas obras contribuiriam muito com a investigação histórica no Brasil. Assim há um campo vasto para futuros trabalhos.

O que descrevemos são continuações naturais do que foi realizado e apresentado nesta tese, podendo ser acrescido por muito mais ideias e projetos. Esperamos ter mostrado com isso que nossa pesquisa é fecunda em diversas frentes no campo das inter-relações entre História e Educação Matemática.

Referências

BARONI, R. L. S., OTERO-GARCIA, S. C. **Aspectos da história da análise matemática de Cauchy a Lebesgue**. São Paulo: Cultura Acadêmica, 2014. Disponível em: https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/126211/ISBN978857983601 5.pdf. Acesso em: 5 jul. 2022.

BELHOSTE, B. **Augustin-Louis Cauchy**: A Biography. New York: Springer, 1991

BERKELEY, G. **The Analyst**: or a discourse adressed to an Infidel Mathematician. London: J. Tonson, 1734.

BLOCH, M. **Apologia da história**: ou o ofício do historiador. Tradução de André Telles. Rio de Janeiro, Zahar, 2001.

CAJORI, F. **Sir Isaac Newton's Mathematical Principles of Natural Philosophy and his System of the World**: Translated into English by Andrew Motte in 1729. V. 1 Los Angeles: University of California Press, 1974.

CAUCHY, A. L.**Résumé des leçons données a l'ècole Royale Polytechnique, sur le Calcul Infinitésimal**. Paris: Debure Frères, 1822.

CATES, D. M. **Cauchy's calcul infinitésimal**: an annotated english translation. Cham: Springer, 2019. https://doi.org/10.1007/978-3-030-11036-9_4

CHILD, J. M. **The geometrical lectures of Isaac Barrow**: Translated, with notes and proofs, and a discussion on the advance made therein on the work of his predecessors in the ifinitesimal calculus. Chicago: The Open Court Publishing Company, 1916.

DARBOUX, G. Mémoire sur les Fonctions Discontinues. **Annales scientifiques de L'École Normale Supérieure**, Paris, deuxième série, tomme quatrième, p.57-112, 1875.

DIRICHLET, J. P. G. L. Sur la convergence des séries trigonométriques qui servent à représenter une fonction arbitraire enre des limites données. **Journal fur die reine und angewandte Mathematik**, Berlin, v.4. p.157-169, 1829.

DOMINGUES, H. H. **Espaços Métricos e Introdução à Topologia**. São José do Rio Preto: Atual Editora, 1982.

D'OTTAVIANO, I. M. L.; BERTATO, F. M. George Berkeley e os fundamentos do cálculo diferencial e integral. **Cadernos de história e filosofia da ciência**, Campinas, série 4, v. 1, p. 33-73, jan.-jun., 2015.

DUGAC, P. **Histoire de l'analyse**. Paris: Vuibert, 2003.

FOURIER, J. B. J. **Théorie Analytique de la Chaleur**. Paris: Firmin Didot, 1822.

GILLISPIE, C. C. **Dictionary of scientific biografy**. V 3. New York: Charles Scribner's Sons, 1981.

GILLISPIE, C. C. **Dictionary of scientific biografy**. V 11. New York: Charles Scribner's Sons, 1981.

GISPERT-CHAMBAZ, H. **Camille Jordan et les fondements de l'analyse**. 1982. Tese (Doutorado em Matemática) - Universite de Paris-Sud. Paris, 1982.

GRABINER, J. V. **The Origins of Cauchy's Rigourous Calculus**. New York: Dover, 2005.

HAAG, P. **Cours de calcul différentiel et integral**: par Paul Haag, ingénieur en chef des ponts et chaussées, professeur a l'École des Ponts et Chaussées, Répétiteur a l'École Polytechnique. Paris: Dunod, 1893.

HAWKINS, T. **Lebesgue theory of integration**: its origins and development. Providence: Chelsea Publishing, 1938.

HOARE, G. Bernahrd Riemann's Legacy of 1859. **The Mathematical Gazette**, v.93, n.528, p.468-75, nov 2009.

HOCHKIRCHEN, T. Theory of Measure and Integration from Riemann to Lebesgue. In: JAHNKE, H. N. (Ed.) **A History of Analysis**. Providence: American Mathematical society, 2003. p.261-290.

JORDAN, C. **Cours d'Analyse de l'École Polytechnique**. Calcul intégral. Paris: gauthier-Villars, 1882.

JORDAN, C. Remarques sur les intégrales définies. **Journal de Mathématiques pures et appliquées**. Paris: 1892, 69-99.

JORDAN, C. **Cours d'analyse de l'École Polytechnique**: Calcul différentiel. 2.ed. Paris: Gauthier Villars, 1893.

JORDAN, C. **Cours d'analyse de l'École Polytechnique**: Calcul intégral. 2.ed. Paris: Gauthier Villars, 1894.

KATZ, V. **A history of mathematics**: an introduction. 3rd ed. New York: Pearson Education, 2009.

KLEIN, F. Riemann et son influence sur les mathématiques modernes. In: LAUGEL, L. **Oeuvres Mathématiques de Riemann**. Paris: Gauthier-Villars et Fils, 1898.

LAUGWITZ, D. **Bernhard Riemann 1826 - 1866**: turning points in the conception of mathematics. Tradução: Abe Shenitzer. Boston: Birkhäuser, 2008.

LIMA, E. L. **Curso de análise volume 1**. 12.ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2010a.

LIMA, E. L. **Curso de análise volume 2**. 12.ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2010b.

LÜTZEN, J. The Foudantion of Analysis in the 19th Century. In: Jahnke, H. N. (Ed.) **A History of Analysis**. Providence: American Mathematical Society, 2003. p. 155-95.

MOIGNO, A. **Leçons de Calcul Différentiel et de Calcul Intégral**: redigées d'aprés les méthodes et les ouvrages puliés ou inédits de M. A.-L. Cauchy, Membre de l'Institut (Academie des Sciences), de la Societé de Londres, etc. Tome 1^{re}. Calcul différentiel. Paris: Bachelier, 1840.

MOIGNO, A. **Leçons de Calcul Différentiel et de Calcul Intégral**: redigées principalement d'aprés les méthodes de M. A.-L. Cauchy et étendues aux travaux les plus récents des géomètres. Tome 2^{re}. Calcul integral. Paris: Bachelier, 1844.

NEWTON, I. **Mathematical Principles of natural philosophy and his system of the world**. Tradução de Florian Cajori. Berkeley: University of California Press, 1974.

RIEMANN, B. WEBER, H. **Gesammelte Mathematische Werke**. Leipzig: Teugner,. 1876.

RIEMANN, B. **Oeuvres Mathématiques de Riemann**: tradução de L. Laugel. Paris: Gauthier-Villars et Fils, 1898.

RUCH, D. The definite integrals of Cauchy and Riemann. In: **Analysis 11**. Disponível em: https://digitalcommons.ursinus.edu/triumphs_analysis/11. Acesso em: 18 jun 2022.

SCHUBRING, G; ROQUE, T. **Curso de Análise de Cauchy**: uma edição comentada. Rio de Janeiro: SBM, 2016.

SCHUBRING, G. **Conflicts between Generalization, Rigor, and Intuition**: Number Concepts Underlying the Development of Analysis in 17-19th Century France and Germany. New York: Springer, 2005.

STRUIK, D. J. **A Source Book in Mathematics, 1200-1800**. Princeton: Princeton University Press, 1986.

VALSON, C. A. **La vie et les travaux du Baron Cauchy**, membre de l'académie des sciences. Tome I. Paris: Gauthier-Villars, 1868.