UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Câmpus de São José do Rio Preto

Thaís Guinami Pereira Alves

Integrais racionais lineares do fluxo geodésico em superfícies e 4-webs

São José do Rio Preto - SP
2023

Thaís Guinami Pereira Alves

Integrais racionais lineares do fluxo geodésico em superfícies e 4-webs

Tese apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Câmpus de São José do Rio Preto.

Orientador: Prof. Dr. Serguei Agafonov

Financiadora: CAPES

São José do Rio Preto - SP
2023

A474i

Alves, Thaís Guinami Pereira
Integrais racionais lineares do fluxo geodésico em superfícies e 4-webs / Thaís Guinami Pereira Alves. -- São José do Rio Preto, 2023
50 p.

Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp), Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas, São José do Rio Preto
Orientador: Serguei Agafonov

1. Integrais racionais lineares em momento. 2. Fluxo geodésico. 3. Folheações geodésicas. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas, São José do Rio Preto. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

Thaís Guinami Pereira Alves

Integrais racionais lineares do fluxo geodésico em superfícies e 4-webs

Tese apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Câmpus de São José do Rio Preto.

Prof. Dr. Serguei Agafonov
Orientador

Prof. Dr. Michelle Ferreira Zanchetta Morgado
UNESP- Câmpus de São José do Rio Preto

Prof. Dr. Juan José Nuño Ballesteros
Universitat de València

Prof. Dr. Mikhail Malakhaltsev
Universidad de los Andes

Prof. Dr. Hernan Maycol Falla Luza
Universidade Federal Fluminense

São José do Rio Preto - SP
28 de Junho de 2023

Ao meu esposo Daniel e
aos meus pais, Aparecido e Marilda,
dedico.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, pelo dom da vida e por ter sido meu sustento até aqui.

Ao meu orientador, grande professor e pesquisador, a qual tenho uma admiração enorme, lhe agradeço por todos os ensinamentos, correções e valiosas sugestões que foram essenciais para a conclusão deste trabalho. Agradeço também por sua paciência comigo e por toda sua dedicação nessa orientação.

À minha família, por entender minhas decisões, principalmente à meu esposo que eu tanto amo e que sempre permaneceu ao meu lado, me dando forças e ânimo para continuar em frente.

Ao Corpo Docente e colegas do Departamento de Matemática do IBILCE, que contribuiriam direta ou indiretamente na minha formação acadêmica. De forma especial agradeço aos meus queridos amigos, Elaine, Rodrigo, Ronísio e Yino por todas discussões e incentivo no decorrer do doutorado.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

"De fato, é um segredo bem simples:
é somente com o coração que podemos ver corretamente;
o essencial é invisível aos olhos."
Saint-Exupéry, 2020, p.88

RESUMO

O objetivo desse trabalho é estudar integrais racionais lineares. Mostramos que a dimensão local do espaço das integrais fatorado pela ação natural de grupo de Möbius é máxima e igual a 2 se, e somente se, a curvatura Gaussiana é constante e possui dimensão 0 se, e somente se, a curvatura Gaussiana é não constante. Apresentamos também uma caracterização geométrica de integrais racionais lineares do fluxo geodésico por meio de folheações e webs: o fluxo geodésico em uma superfície bidimensional admite uma integral racional linear se, e somente se, existem quatro folheações geodésicas de forma que a razão cruzada de suas inclinações é constante.

Palavras-chave: Integrais racionais lineares em momento. Fluxo geodésico. Folheações geodésicas.

ABSTRACT

The objective of this work is to study linear rational integrals. We show that the local dimension of the space of integrals factored by the natural action of Möbius group is maximum and equal to 2 if, and only if, the Gaussian curvature is constant and has dimension 0 if, and only if, the Gaussian curvature is not constant. We also present a geometric characterization of linear rational integrals of the geodesic flow, through foliations and webs: the geodesic flow on a two-dimensional surface admits a linear rational integral if, and only if, there are four geodesic foliations such that the cross ratio of their slopes is constant.

Keywords: Linear rational integrals in momentum. Geodesic flow. Geodesic foliations.

SUMÁRIO

Introdução **11**

1 Preliminares **15**
1.1 Integrabilidade do fluxo geodésico 15
1.2 Webs e integrais polinomiais homogêneas em momento 17
1.3 Integral racional linear em momento 18
1.4 Invariantes diferenciais 20
1.5 Teorema de Frobenius 24

2 Integrais racionais lineares **26**
2.1 Ação do grupo SL_2 no conjunto das integrais 26
2.2 Derivada de Darboux e sistema de invariantes 27
2.3 Dimensão do espaço de integrais 30

3 4-webs de Nakai geodésicos **37**
3.1 Construção de folheações geodésicas 37
3.2 4-webs de Nakai geodésicos 38

4 Conclusões **44**
4.1 Campos projetivos 44

Referências **46**

INTRODUÇÃO

Considere uma superfície S munida de uma métrica g, um ponto s na superfície e seja v um vetor tangente a S no ponto s. Esse vetor define uma direção, ponto e direção determinam unicamente uma geodésica. A pergunta natural é: qual a dinâmica desse vetor ao longo dessa curva? O vetor diretor vai ser sempre tangente a curva geodésica e o módulo da velocidade é sempre constante, coincidindo com o mesmo da posição inicial. Essas duas condições geométricas, determinam unicamente o fluxo geodésico. Além da definição geométrica natural do fluxo geodésico, podemos destacar sua estrutura algébrica, ou seja, o fluxo geodésico é um sistema Hamiltoniano no fibrado tangente TS com Hamiltoniano $H = \frac{1}{2}g(\xi, \xi)$ e devido ao isomorfismo canônico entre T_sS e T_s^*S podemos escrever o fluxo geodésico tanto no fibrado tangente quanto no fibrado cotangente (ver [25]).

Esse problema também é motivado pela mecânica, onde podemos pensar na seguinte situação: dada uma superfície, se uma partícula pode se mover ao longo dessa superfície sem fricção e sem forças exteriores, então ela está se movendo ao longo da geodésica com módulo da velocidade constante. Dessa forma, o movimento da partícula sem forças exteriores e sem fricção é a descrição do fluxo geodésico. O problema da integrabilidade do fluxo geodésico é um problema clássico da mecânica e despertou interesse em ser estudado por muitos físicos e matemáticos. Lembre que o Hamiltoniano é uma primeira integral, segue pelo Teorema de Liouville (veja [6] para um tratamento moderno) que é suficiente encontrar apenas uma primeira integral extra, ou seja uma função F que seja constante nas trajetórias e que F e H sejam funcionalmente independentes, para que o fluxo geodésico seja integrável.

Dizemos que uma primeira integral I_n do fluxo geodésico é uma integral polinomial homogênea em momento de grau n, se é da forma

$$I_n = \sum_{i=0}^{n} b_i(x, y)p^{n-i}q^i,$$

onde (x, y) são coordenadas locais e (p, q) coordenadas do momento. Estamos concentrados no estudo de integrais definidas localmente, esse problema é importante e vem motivando estudos pelos seguintes fatos: se temos uma integral analítica real, então qualquer parte homogênea em momento de sua expansão de Taylor em relação aos momentos também é uma primeira integral, ou seja, a existência de integral analítica implica na existência de integral polinomial. A segunda razão que torna o problema relevante é que

a superfície no fibrado cotangente onde a velocidade é zero é uma superfície de dimensão n, em qualquer ponto dessa superfície o campo Hamiltoniano se anula, a existência da integral nesses pontos singulares não é algo trivial, tornando a existência uma restrição forte.

O estudo da integrabilidade do fluxo geodésico por meio de integrais polinomiais homogêneas vem sendo estudado desde meados do século XIX por Darboux [10], Dini [11], Koenigs [15] (veja [9], [18] para mais bibliografias).

O conjunto das integrais polinomiais homogêneas de grau n é um espaço vetorial de dimensão finita. No que refere-se a dimensão segue pelo Teorema de Noether que integrais lineares estão em uma correspondência biunívoca com isometrias infinitesimais e a dimensão do espaço de integrais lineares é 0, 1 ou 3, sendo: 0 (caso genérico), 1 (para as superfícies localmente isométricas às superfícies de revolução), ou 3 (para superfícies de curvatura Gaussiana constante). No caso de integrais quadráticas o estudo da dimensão do espaço foi feito por Koenigs [15] e constatado que a dimensão possível é 1, 2, 3, 4 ou 6.

Já no caso de integrais cúbicas o que foi demonstrado é que o espaço de integrais cúbicas é no máximo 10-dimensional, tal limite foi realizado em superfícies de curvatura Gaussiana constante. Além disso, foi mostrado por Kruglikov em [16] que para o caso de curvatura Gaussiana não constante, a dimensão é no máximo 7.

Uma continuação natural é estudar integrais racionais em momento, cujo numerador e denominador são polinômios homogêneos em momento de mesmo grau. O estudo dessas integrais foi iniciado por Kozlov [17]. Em [27],[4], [5] Agapov e Shubin investigaram integrais racionais lineares

$$\frac{A(x,y)p + B(x,y)q}{C(x,y)p + E(x,y)q},$$

em particular eles exibiram de forma explícita métricas Riemannianas em superfícies cujos os fluxos geodésicos admitem uma primeira integral racional em momento com o numerador e denominador linear.

Neste trabalho contribuímos para a descrição analítica e geométrica de integrais racionais lineares do fluxo geodésico. Observe que diferente das integrais polinomiais homogêneas o conjunto das integrais racionais lineares não é um espaço vetorial, toda a geometria virá da ação do grupo de Möbius que age naturalmente no conjunto das integrais racionais lineares. Mostramos no capítulo 2 que a dimensão do espaço das integrais racionais lineares fatorado pela ação do grupo SL_2 é 2 no caso de curvatura Gaussiana constante e a dimensão é 0 no caso de curvatura Gaussiana não constante.

Um outro tema clássico, bastante explorado, é a geometria dos webs ([8], [26]) onde estuda-se invariantes locais para uma determinada configuração de folheações em posição geral, onde por folheação entendemos como curvas integrais de uma equação diferencial ordinária no plano.

Podemos construir webs por meio de integral polinomial em momento, por exemplo, a construção de um 3-web por meio de uma integral polinomial cúbica é dada da seguinte forma: tome $\xi = dx$ e $\eta = dy$, logo

$$b_0 dx^3 + b_1 dx^2 dy + b_2 dx dy^2 + b_3 dy^3 = 0.$$

Dividindo por dx^3, obtemos a seguinte equação diferencial ordinária,

$$b_0 + b_1 \frac{dy}{dx} + b_2 \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + b_3 \left(\frac{dy}{dx}\right)^3 = 0.$$

Na região onde temos 3 raízes reais, integrando obtemos 3-webs.

Dizemos que um 3-web é hexagonal se para qualquer ponto não singular existe um difeomorfismo aplicando as folhas do web em alguma vizinhança do ponto em 3 famílias de segmentos de retas paralelos.

Em um primeiro momento é normal pensarmos que esses dois tópicos de estudos, a geometria dos webs e a dinâmica do fluxo geodésico, não possuem nenhum tipo de relação entre si, mas caracterizar geometricamente integrais polinomiais em momento do fluxo geodésico por meio de folheações e webs é um tema de bastante interesse.

O Teorema de Graf e Sauer [14] diz que 3-web linear é hexagonal se, e somente se, todas as retas são tangentes a uma mesma curva dual a cúbica. Note que a generalização natural desse Teorema para o caso de uma superfície S munida com uma métrica g, seria nos questionar se existe 3-web geodésico hexagonal para essa superfície, quais as condições geométricas ou invariantes para que exista 3-web geodésico hexagonal, a história por trás desse questionamento perdura no final do século 19 e pode ser visto em [13], [28], [29], [33]. Em seu último livro sobre teoria dos webs [7] Blaschke destacou essa questão, ou seja, o problema de encontrar um critério intrínseco para a existência de 3-webs geodésicos hexagonais, mas não foi solucionado em sua época.

Em 2021, Agafonov encontrou uma solução invariante para o problema destacado por Blaschke e provou em seu artigo [1] que 3-web geodésico é hexagonal se, e somente se, o fluxo geodésico admite integral polinomial de grau 3 em momento. Em resumo, integrabilidade significa hexagonalidade.

Existe uma caracterização por meio de webs também para integral de grau 2, Agafonov provou em [2] que a existência de integral polinomial quadrática do fluxo geodésico ocorre se, e somente se, a superfície carrega uma rede geodésica $\mathcal{G}$ tal que um (e, portanto, qualquer) 3-subweb do 4-web formada por $\mathcal{G}$ e sua rede bissetriz $\mathcal{N}$ é hexagonal.

A caracterização para a integral de grau 1, é clássica, a aplicação do Teorema de Noether. Pelo Teorema de Noether, a existência de uma integral linear do fluxo geodésico sobre uma superfície é equivalente à existência de um campo vetorial de Killing, que é a projeção de TS a S do campo vetorial Hamiltoniano correspondente a integral.

O problema de caracterizar integrais polinomiais em momento através de webs ainda é um problema em aberto e para integrais de grau maior que 3 ainda não há até o momento uma caracterização. Nosso estudo foi motivado por essa caracterização geométrica relacionando webs com integrais polinomiais e nosso objetivo foi conseguir uma caracterização geométrica por meio de webs para integrais polinomiais racionais lineares do fluxo geodésico.

Podemos definir 1-web com $I = \lambda$, onde

$$I = \frac{A\xi + B\eta}{C\xi + E\eta},$$

é uma integral racional linear em termos da velocidade (ξ, η) que é dual ao momento (p, q) e λ uma constante, ou seja, se existe integral racional linear então existe família de folheações geodésicas a 1-parâmetro. Tomando quatro dessas folheações, obtém-se um 4-web geodésico com razão cruzada das tangentes às quatro folheações em cada ponto constante.

Nakai estudou esse tipo de web em [21] e não é difícil ver que para um 4-web do plano cuja razão cruzada é constante, basta que um dos 3-subwebs seja não hexagonal para que todos sejam não-hexagonais e, além disso, todos eles têm a mesma curvatura de Blaschke ([21]). Dufour e Lehmann também estudam webs do tipo Nakai e provam em [12] que Nakai's webs possuem posto 0 ou 1 e apresentaram exemplos para posto 1.

No capítulo 3 obtivemos por meio do Teorema 3.4 uma caracterização geométrica que relaciona integral racional linear e 4-webs, mostramos que existir uma integral fracional linear é equivalente a existir 4 folheações geodésicas de forma que a razão cruzada das tangentes às quatro folheações em cada ponto é constante.

Todos os resultados obtidos nessa tese são locais e todas funções aqui trabalhadas são suaves (C^∞).

CAPÍTULO 1

PRELIMINARES

Neste capítulo trataremos de alguns conceitos que irão auxiliar o leitor em uma completa compreensão dos resultados tratados neste trabalho. Dividiremos o capítulo em cinco sessões para melhor adequação.

Na primeira seção veremos conceitos geométricos, onde destacamos entre eles: fluxo geodésico, primeira integral do fluxo geodésico e integrabilidade no sentido de Liouville. Para uma leitura aprofundada acerca dos temas podem ser consultados [6], [22], [23] e [30].

Já na seção 2 definiremos formalmente integrais polinomiais homogêneas em momento e também veremos conceitos relacionados a teoria de webs. Serão enunciados os Teoremas que dão uma caracterização geométrica para integrais cúbicas e quadráticas por meio de webs geodésicos. O leitor pode consultar [1], [2], [8], [26].

Utilizaremos a seção 3 para apresentar formalmente a definição de integral racional linear em momento. Também constará, de forma explícita, o sistema que implica na existência de uma primeira integral racional linear do fluxo geodésico da métrica em coordenadas conformes $g = \Lambda(x, y)(dx^2 + dy^2)$ (ver [27],[4],[5],[17]).

Na quarta seção apresentaremos conceitos relacionados a invariantes diferenciais, será dada uma noção de como prolongar uma ação de grupos ao espaço de jatos e também definiremos derivada de Darboux. (ver [22], [23], [30], [31]).

Por fim a última seção será reservada para o Teorema de Frobenius que será enunciado na versão de formas diferenciais e também de campos vetoriais. A principal referência utilizada para essa seção foram [31] e [34], mas também podem ser consultadas [22] e [30].

1.1 Integrabilidade do fluxo geodésico

Localmente, o fluxo geodésico é descrito por meio de um sistema de equações diferenciais ordinárias de segunda ordem dado por:

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} + \Gamma^i_{jk}\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt} = 0, \tag{1.1}$$

onde $x = (x^i)$ é um sistema de coordenadas de S e $\Gamma^i_{jk}(x)$ são os símbolos de Christoffel da conexão de Levi-Civita da métrica g, com $i, j, k = 1, 2$.

O sistema (1.1) pode ser escrito na forma Hamiltoniana. Para isso, considere T^*S como uma variedade simplética com coordenadas canônicas (x^i, p_i) e a forma simplética

padrão $\Omega = \sum dp_i \wedge dx^i$. Assim, o sistema (1.1) é equivalente, na sua forma Hamiltoniana conforme a definição abaixo:

Definição 1.1. O fluxo geodésico em (S, g) é um sistema Hamiltoniano

$$\frac{dx^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \frac{dp^i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i},$$

onde $H = \frac{1}{2} g^{ij} p_i p_j$ para $i, j = 1, 2$, (p_1, p_2) são coordenadas do momento em T^*S e $g^{ij} = g_{ij}^{-1}$.

Observação 1.2. O isomorfismo canônico de T_sS e T_s^*S via $g(\xi, *) = \langle f, * \rangle$ torna o momento $f = (p_1, p_2)$ conjugado à x^1 e x^2, respectivamente, ou seja,

$$\begin{aligned} \{x^i, x^j\} &= \{p^i, p^j\} = 0, \\ \{x^i, p^j\} &= \delta_{ij}, \end{aligned}$$

onde $\{\}$ é o colchete de Poisson canônico. Com isso, podemos escrever o fluxo geodésico tanto no fibrado tangente quanto no fibrado cotangente.

Introduziremos agora a definição de uma primeira integral do fluxo geodésico, como segue:

Definição 1.3. Dizemos que uma função F é uma primeira integral do fluxo geodésico se, e somente se, F é constante nas trajetórias, ou de forma equivalente, $\{F, H\} = 0$.

Vale lembrar que:

$$\{F, H\} = 0 \Longleftrightarrow \frac{\partial H}{\partial x^1}\frac{\partial F}{\partial p_1} - \frac{\partial F}{\partial x^1}\frac{\partial H}{\partial p_1} + \frac{\partial H}{\partial x^2}\frac{\partial F}{\partial p_2} - \frac{\partial F}{\partial x^2}\frac{\partial H}{\partial p_2} = 0.$$

Enunciaremos na sequência o Teorema de Liouville (veja [6]), ele prova com esse Teorema que se em um dado sistema Hamiltoniano de dimensão $2n$,onde n primeiras integrais independentes em involução são conhecidas, então o sistema é integrável por quadraturas.

Teorema 1.4 (Teorema de Liouville,[6])**.** *Suponha que sejam dados n funções, F_1, F_2, $\ldots$, F_n, em involução ($\{F_i, F_j\} = 0$) em uma variedade simplética $2n$-dimensional. Considere o conjunto de nível das funções F_i por*

$$M_f = \{x : F_i(x) = f_i, i = 1, 2, \cdots, n\}.$$

Assuma ainda que as n funções F_i são independentes em M_f (isto é, as n 1-formas dF_i são linearmente independentes em cada ponto de M_f). Então:

1. *M_f é uma variedade diferenciável, invariante sob o fluxo de fase com função Hamiltoniana $H = F_1$ (e para todo F_i também).*

2. *Se a variedade M_f é compacta e conexa, então ela é difeomorfa ao n-dimensional toro*

$$T^n = \{(\varphi_1, \cdots, \varphi_n) \mod 2\pi\}.$$

3. *O fluxo de fase com função hamiltoniana H determina um movimento condicionalmente periódico em M_f, isto é, em coordenadas $\varphi = (\varphi_1, \cdots, \varphi_n)$ temos:*

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega, \qquad \omega = \omega(f).$$

4. *As equações canônicas com função hamiltoniana H podem ser integradas por quadraturas.*

Pelo Teorema de Liouville, temos a seguinte definição:

Definição 1.5. O fluxo geodésico em superfície é integrável se existir uma primeira integral adicional F, sendo F e H funções funcionalmente independentes.

1.2 Webs e integrais polinomiais homogêneas em momento

Definição 1.6. Uma primeira integral I_n do fluxo geodésico é chamada de integral polinomial homogênea em momento de grau n, se é da forma:

$$I_n = \sum_{i=0}^{n} a_i(x, y) p^{n-i} q^i,$$

onde (x, y) são coordenadas locais e (p, q) o momento correspondente.

Observação 1.7. O conjunto das integrais polinomiais homogêneas em momento de grau n é um espaço vetorial de dimensão finita com as operações usuais de soma e produto por escalar.

A existência de integrais quadráticas e cúbicas pode ser descrita em termos geométricos via webs geodésicos. Veremos a seguir uma coletânea de definições e resultados acerca disso.

Definição 1.8. Um $d-$web é uma coleção de d folheações em posição geral.

Observação 1.9. Para os fins desse trabalho, entendemos folheação como curvas integrais de uma equação diferencial ordinária no plano.

Definição 1.10. Um 3-web é hexagonal se para qualquer ponto não singular existe um difeomorfismo aplicando as folhas do web em alguma vizinhança do ponto em 3 famílias de segmentos de retas paralelos.

Devido ao isomorfismo canônico entre o fibrado e tangente e o fibrado cotangente podemos escrever a integral polinomial homogênea em momento I_n em termos de (ξ, η) que é dual a (p, q), obtendo assim:

$$\tilde{I}_n = \sum_{i=0}^{n} b_i(x, y) \xi^{n-i} \eta^i.$$

Construiremos agora 3-web por meio da integral cúbica $\tilde{I}_3 = b_0 dx^3 + b_1 dx^2 dy + b_2 dx dy^2 + b_3 dy^3$.

Fazendo $\tilde{I}_3 = 0$ e considerando $\xi = dx$ e $\eta = dy$, segue que:

$$b_0 dx^3 + b_1 dx^2 dy + b_2 dx dy^2 + b_3 dy^3 = 0,$$

dividindo por dx^3, obtemos a seguinte equação diferencial ordinária,

$$b_0 + b_1 \frac{dy}{dx} + b_2 \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + b_3 \left(\frac{dy}{dx}\right)^3 = 0.$$

Na região onde temos 3 raízes reais, integrando obtemos 3-webs.

Definição 1.11. Chamamos uma direção $[\xi : \eta] \in \mathbb{RP}^1$ de raiz real de um polinômio homogêneo $I \in \mathbb{R}[\xi, \eta]$, se $I(\xi, \eta) = 0$.

Note que qualquer integral cúbica do fluxo geodésico é, por definição, homogênea em p,q sendo os coeficientes funções suaves de um ponto (x, y) na superfície.

O resultado a seguir provado por Agafonov [1] fornece um critério intrínseco para a existência de 3-web geodésico hexagonais, problema esse que foi destacado por Blaschke em seu último livro sobre a teoria de webs [7].

Teorema 1.12 (Agafonov,[1])**.** *Uma superfície (M^2, g) carrega um 3-web geodésico hexagonal se, e somente se, o fluxo geodésico nesta superfície admite uma primeira integral cúbica com 3 raízes reais distintas.*

A caracterização geométrica para integrais quadráticas foi provada também por Agafonov [2], vejamos algumas definições antes de enunciarmos o resultado de classificação.

Definição 1.13. Considere uma rede geodésica $\mathcal{G}$, definimos sua rede bissetriz $\mathcal{N}$ como sendo formada pelas curvas integrais de direções que dividem os ângulos nos quais as geodésicas da rede $\mathcal{G}$ se interceptam. Por construção, a rede $\mathcal{N}$ é ortogonal.

Definição 1.14. Uma rede ortogonal é chamada conformemente flat se for localmente difeomorfa a uma rede formada por linhas de coordenadas de algum sistema de coordenadas isotérmicas.

Teorema 1.15 (Agafonov, [2])**.** *O fluxo geodésico em uma superfície admite uma primeira integral quadrática se, e somente se, a superfície carrega uma rede geodésica G tal que uma (e, portanto, qualquer) 3-subweb da 4-web formada por G e sua rede bissetriz N é hexagonal ou, equivalentemente, tal que a rede N é conformemente flat.*

1.3 Integral racional linear em momento

Em qualquer superfície S existem coordenadas onde a métrica é escrita da forma $g = \Lambda(x, y)(dx^2 + dy^2)$, nesta seção definiremos integral racional linear do fluxo geodésico e iremos escrever o sistema de equações diferenciais parciais da existência dessa integral com a métrica $g = \Lambda(x, y)(dx^2 + dy^2)$.

Definição 1.16. Seja S uma superfície com coordenadas locais (x, y) e momento (p, q). Dizemos que I é uma integral racional linear, se I é dada por

$$I = \frac{A(x, y)p + B(x, y)q}{C(x, y)p + E(x, y)q},$$

e I é uma primeira integral.

Podemos caracterizar a existência de uma integral racional linear de um fluxo geodésico por meio de um sistema de equações diferenciais parciais como segue:

Lema 1.17 (Kozlov,[17]). *Seja S uma superfície com coordenadas locais (x, y) e momento (p, q). O fluxo geodésico da métrica $g = \Lambda(x, y)(dx^2 + dy^2)$ admite*

$$I = \frac{A(x,y)p + B(x,y)q}{C(x,y)p + E(x,y)q}$$

como uma integral fracional linear se, e somente se,

$$\begin{aligned}
2\Lambda(CA_x - AC_x) - \Lambda_y(AE - BC) &= 0,\\
2\Lambda(EA_x - AE_x + CA_y - AC_y + CB_x - BC_x) + \Lambda_x(AE - BC) &= 0,\\
2\Lambda(EA_y - AE_y + CB_y - BC_y + EB_x - BE_x) - \Lambda_y(AE - BC) &= 0,\\
2\Lambda(EB_y - BE_y) + \Lambda_x(AE - BC) &= 0.
\end{aligned}$$

Demonstração. O Hamiltoniano da métrica $g = \Lambda(x, y)(dx^2 + dy^2)$ é dado por

$$H = \frac{p^2 + q^2}{2\Lambda}.$$

Do fato de $\{I, H\} = 0$, obtemos o polinômio homogêneo de grau 3 em p, q na forma:

$$\begin{aligned}
& (2\Lambda CA_x - 2\Lambda AC_x - \Lambda_y AE + \Lambda_y BC)p^3\\
+\ & (2\Lambda EA_x - 2\Lambda AE_x + 2\Lambda CA_y - 2\Lambda AC_y + 2\Lambda CB_x - 2\Lambda BC_x + \Lambda_x AE - \Lambda_x BC)p^2q\\
+\ & (2\Lambda EA_y - 2\Lambda AE_y + 2\Lambda CB_y - 2\Lambda BC_y + 2\Lambda EB_x - 2\Lambda BE_x - \Lambda_y AE - \Lambda_y BC)pq^2\\
+\ & (2\Lambda EB_y - 2\Lambda BE_y + \Lambda_x AE - \Lambda_x BC)q^3 = 0.
\end{aligned}$$

Uma vez que A, B, C e E não dependem de p, q o polinômio homogêneo acima é equivalente ao sistema de equações homogêneas:

$$\begin{aligned}
2\Lambda(CA_x - AC_x) - \Lambda_y(AE - BC) &= 0,\\
2\Lambda(EA_x - AE_x + CA_y - AC_y + CB_x - BC_x) + \Lambda_x(AE - BC) &= 0,\\
2\Lambda(EA_y - AE_y + CB_y - BC_y + EB_x - BE_x) - \Lambda_y(AE - BC) &= 0,\\
2\Lambda(EB_y - BE_y) + \Lambda_x(AE - BC) &= 0.
\end{aligned}$$

Logo, temos o desejado. □

Agapov e Shubin mostraram em [5] alguns resultados sobre fluxos geodésicos que admitem integral racional linear e apresentaram exemplos explícitos dessas integrais para a métrica em coordenadas conformes $g = \Lambda(x, y)(dx^2 + dy^2)$.

Definição 1.18. A função de Bessel de primeira espécie é representada para $m = 0, 1, 2, 3, \ldots$ por:

$$J_m(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+m)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+m}.$$

Para os exemplos a seguir, considere a solução

$$\varphi(u, v) = \frac{d^m}{ds^m}(e^{su} J_0(sv)) \mid_{s=s_0}.$$

Exemplo 1.19. Dados $m = 2$ e $s_0 = 0$, segue que, $\varphi(u, v) = u^2 - \frac{1}{2}v^2$. Tome $u = e^x \cos(y)$, $v = e^x \operatorname{sen}(y)$. Então,

$$\Lambda(x, y) = e^{4x}(1 + 3\cos^2(y)).$$

Esta função é analítica em todo o plano de variáveis reais (x, y) e sempre positiva. Neste caso o fluxo geodésico admite a primeira integral

$$F = e^x \frac{\operatorname{sen}(y)p + 2\cos(y)q}{3\operatorname{sen}(y)\cos(y)p + (2 - 3\operatorname{sen}^2(y))q}.$$

Exemplo 1.20. Para $m = 3$ e $s_0 = 0$ e multiplicando, convenientemente por $\dfrac{2}{3}$, obtemos que $\varphi(u, v) = \dfrac{2}{3}u^2 - uv^2$. Considerando $u = e^x \cos(y)$, $v = e^x \operatorname{sen}(y)$, então

$$\Lambda(x, y) = e^{6x}(4\cos^4(y) + \operatorname{sen}^4(y)).$$

Esta função também é analítica em todo o plano de variáveis reais (x, y) e sempre positiva. O fluxo geodésico admite a primeira integral

$$F = 2e^x \frac{2\operatorname{sen}(2y)p + (1 + 3\cos(2y))q}{(\operatorname{sen}(y) + 5\operatorname{sen}(3y))p + (3\cos(y) + 5\cos(3y))q}.$$

Exemplo 1.21. Se considerarmos a solução $\varphi(u, v) = e^u J_0(v)$, e as funções harmônicas conjugadas $u = x$ e $v = y$ obtemos a métrica:

$$g = e^{2x}(J_0^2(y) + J_1^2(y))(dx^2 + dy^2).$$

Essa métrica também é uma função analítica em todo o plano de variáveis reais (x, y) e é sempre positiva. O fluxo geodésico proveniente dessa métrica admite a primeira integral:

$$F = x - y\frac{J_0(y)p - J_1(y)q}{J_1(y)p + J_0(y)q} = \frac{(xJ_1(y) - yJ_0(y))p + (xJ_0(y) + J_1(y))q}{J_1(y)p + J_0(y)q}.$$

1.4 Invariantes diferenciais

A razão cruzada é um invariante da ação natural de SL_2 em $\mathbb{P}^1$, para isso, apresentamos as seguintes definições:

Definição 1.22. A razão cruzada de quatro pontos p_1, p_2, p_3 e p_4, dois a dois distintos, é o quociente:

$$[p_1, p_2, p_3, p_4] = \frac{(p_1 - p_2)(p_3 - p_4)}{(p_1 - p_3)(p_2 - p_4)}.$$

Definição 1.23. O grupo linear $GL_n(\mathbb{K})$ é o conjunto das matrizes invertíveis de ordem n munido com a operação usual de produto de matrizes. O subgrupo normal $SL_n(\mathbb{K}) = \{M \in GL_n(\mathbb{K}) : \det(M) = 1\}$ é chamado de grupo linear especial de ordem n. O grupo $PSL_2 = SL_2/\{-Id, +Id\}$ é chamado grupo de Möbius.

Definição 1.24. Um grupo de transformação agindo em uma variedade diferenciável M é determinado por um grupo de Lie G e uma aplicação diferenciável $\Theta : G \times M \to M$ denotada por $\Theta(a, x) = a \cdot x$, satisfazendo:

$$\begin{aligned} e \cdot x &= x, \\ a \cdot (b \cdot x) &= (ab) \cdot x, \end{aligned}$$

para todo $x \in M$ e $a, b \in G$.

Definição 1.25. Seja G um grupo de transformações agindo sobre uma variedade M. Um invariante de G é uma função de valores reais $I : M \to \mathbb{R}$ satisfazendo:

$$I(a \cdot x) = I(x), \quad \forall a \in G \text{ e } \forall x \in M.$$

Exemplo 1.26. Considere a ação projetiva do grupo $SL_2(\mathbb{R})$ no produto cartesiano $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \cdots \times \mathbb{P}^1$:

$$(p_1, p_2, \ldots, p_n) \mapsto \left(\frac{\alpha p_1 + \beta}{\gamma p_1 + \delta}, \frac{\alpha p_2 + \beta}{\gamma p_2 + \delta}, \ldots, \frac{\alpha p_n + \beta}{\gamma p_n + \delta} \right), \quad \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{R}). \tag{1.2}$$

Vamos nos concentrar no subconjunto aberto M constituído pelas n-uplas de coordenadas distintas, isto é,

$$M = \{(p_1, p_2, \ldots, p_n);\ p_i \neq p_j, \text{ se } i \neq j\}.$$

Para $n \leq 3$, a ação é transitiva em M e não existe invariantes não constantes. De fato, podemos aplicar quaisquer três pontos distintos (p_1, p_2, p_3) na esfera de Riemann para qualquer forma desejada, por exemplo $(0, 1, \infty)$, por uma transformação fracionária linear adequada. Para $n = 4$, a razão cruzada

$$[p_1, p_2, p_3, p_4] = \frac{(p_1 - p_2)(p_3 - p_4)}{(p_1 - p_3)(p_2 - p_4)}, \tag{1.3}$$

é um invariante. Uma forma canônica de normalizar é considerar $(1, 0, \infty, \lambda)$ onde λ pode ser qualquer outro valor, cujo coordenada é fixado pela razão cruzada $\dfrac{1}{\lambda - 1}$ (ver [23]).

Observação 1.27. Localmente iremos identificar $SL_2(\mathbb{R})$ e $PSL_2(\mathbb{R})$, uma vez que trabalhamos com transformações de Möbius próximas do elemento neutro. A ação vista no exemplo acima é na verdade a ação do grupo de Möbius PSL_2.

Veremos agora que o grupo agindo em uma variedade pode ser prolongado para o espaço de jatos de funções. As coordenadas do espaço de jato representarão as derivadas das variáveis dependentes.

Considere uma função diferenciável $f : X \to U$ dada por $f(x) = u$, onde $x = (x_1, x_2, \cdots, x_r)$, $X \subset \mathbb{R}^r$ e $U \subset \mathbb{R}$.

Dado um conjunto de índices $J = (j_1, j_2, \cdots, j_k)$, com $1 \leq j_1 \leq j_2 \leq \cdots \leq j_k \leq r$, denotamos a $k-$ésima derivada de f indexada por J como:

$$\partial_J f(x) = \frac{\partial^k f(x)}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2} \cdots \partial x_{j_k}}.$$

Dessa forma, existem

$$r_k = \begin{pmatrix} r+k-1 \\ k \end{pmatrix}$$

diferentes derivadas parciais de f de ordem k.

De forma mais geral, se $f : X \to U$ é uma função diferenciável com $X \subset \mathbb{R}^r$ e $U \subset \mathbb{R}^s$, assim $u = (u_1, u_2, \cdots, u_s) = (f_1(x), f_2(x), \cdots, f_r(x))$. Note que para cada $1 \leq t \leq s$ existem uma quantidade r_k de derivadas parciais de ordem k de $f_t(x) = u_t$, pois $(u_t)_J = \partial_J f_t(x)$. Ao considerarmos todas as s entradas de u teremos uma quantidade de $s \cdot r_k$ de derivadas parciais de ordem k. Seja $U_k \subset \mathbb{R}^{s \cdot r_k}$ o espaço Euclidiano de dimensão $s \cdot r_k$ dos elementos de coordenadas $(u_t)_J$, com $t = 1, 2, \cdots, s$ e todos os multi-índices $J = (j_1, j_2, \cdots, j_k)$ de ordem k, por convenção para $k = 0$, temos $U_0 = U$. Representemos o espaço produto cartesiano $U \times U_1 \times \cdots \times U_l$ por $U^{(n)}$, isto é, $U^{(n)}$ é constituído pelos elementos cujas coordenadas representam todas as derivadas da função $u = f(x)$ de todas as ordens de 0 até n. Note que $U^{(n)}$ é um espaço Euclidiano de dimensão:

$$s + sr_1 + sr_2 + \cdots + sr_n = s \begin{pmatrix} r+n \\ n \end{pmatrix}.$$

Denotemos um ponto do conjunto $U^{(n)}$ por $u^{(n)}$.

Afim de ilustrar esse conceito vejamos o seguinte exemplo:

Exemplo 1.28. Considere $r = 2$ e $s = 1$. Então, $X \subset \mathbb{R}^2$ possui coordenadas $(x_1, x_2) = (x, y)$ e $U \subset \mathbb{R}$ tem coordenada u. O espaço U_1 é isomorfo a $\mathbb{R}^2$ com coordenadas (u_x, u_y), o espaço U_2 é isomorfo a $\mathbb{R}^3$ e possui coordenadas (u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}), representando as derivadas parciais de segunda ordem de u. De forma geral, $U_k \subset \mathbb{R}^{k+1}$, uma vez que existem $k+1$ distintas derivadas parciais de ordem k de u. Em particular, o espaço $U^{(2)} \subset \mathbb{R}^6$ possui coordenadas $u^{(2)} = (u; u_x, u_y; u_{xx}, u_{xy}, u_{yy})$, o qual representa todas as derivadas parciais de u com respeito a x e y de ordem máxima 2.

Definição 1.29. Dado uma função diferenciável $f : X \to U$ com $u = f(x)$, a função induzida $u^{(n)} = pr^{(n)} f(x)$ é chamada de $n-$ésimo prolongamento de f, a qual é definida pelas equações

$$u_J^t = \partial_J f^t(x).$$

Retornando ao exemplo (1.28), temos que $u^{(2)} = pr^{(2)} f(x, y)$ é dado por

$$(u; u_x, u_y; u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}).$$

Observação 1.30. Uma outra forma de apresentar o n-ésimo prolongamento de uma função diferenciável f é pela representação do polinômio de Taylor de grau n da função f no ponto x.

Definição 1.31. O espaço total $X \times U^{(n)}$ é chamado espaço de jatos de ordem n relativo ao espaço $X \times U$. O n-ésimo prolongamento $pr^{(n)} f(x)$ é também chamado n-jato de f.

Em muitas situações é comum termos equações diferenciais definidas apenas localmente, visando assim se $M \subset X \times U$ é um subconjunto aberto, podemos definir o espaço de n-jatos

$$M^{(n)} = M \times U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_n$$

de M. Se $u = f(x)$ é uma função cujo gráfico está em M, então o n-ésimo prolongamento de f é uma função cujo gráfico está no espaço de n-jatos de M.

Podemos prolongar uma ação de grupos ao espaço de jatos, de fato se G é um grupo de transformação agindo localmente no subconjunto aberto $M \subset X \times U$, então existe uma ação local induzida de G no espaço dos n-jatos $M^{(n)}$, chamada ação n-ésima da prolongação de G em M. Mais especificamente, dado $z_0 = (x_0, u_0) \in M$ e $a \in G$ podemos obter uma função transformada $a \cdot f$ [23] que está definida em uma vizinhança do ponto $(\tilde{x}_0, \tilde{u}_0) = a \cdot (x_0, u_0)$, com $u_0 = f(x_0)$ e $u_0^{(n)} = pr^{(n)} f(x_0)$, assim a ação da transformação de grupos prolongada $pr^{(n)}a$ no ponto $(x_0, u_0^{(n)})$ é dada explicitamente por:

$$pr^{(n)}a \cdot (x_0, u_0^{(n)}) = (\tilde{x}_0, \tilde{u}_0^{(n)}),$$

onde

$$\tilde{u}_0^{(n)} = pr^{(n)}(a \cdot f)(\tilde{x}_0).$$

Definição 1.32. Um invariante diferencial é uma função no espaço de jatos que é invariante sob o prolongamento da ação do grupo.

Um jeito efetivo de se obter invariantes diferenciais é a derivada de Darboux [30], antes de a definirmos formalmente vejamos algumas considerações.

Seja G um grupo de Lie, a translação a esquerda $L_a : G \to G$ dada por $L_a(b) = ab$ é um difeomorfismo e assim induz o isomorfismo entre espaços tangentes dado por:

$$(dL_a)^{-1} : T_aG \to T_eG,$$

para todo $v \in T_aG$.

Definição 1.33. Seja G um grupo de Lie e $\mathfrak{g} = T_eG$ álgebra de Lie. A forma de Maurer-Cartan invariante a esquerda $\omega_G : TG \to \mathfrak{g}$ é dada por

$$\omega_{G_a}(v_a) = (dL_a)^{-1}(v_a).$$

Note que o termo invariante a esquerda significa que ω_G é invariante sob translação a esquerda, ou seja $dL_h\omega_G = \omega_G$, com $v \in T_aG$.

A equação de estrutura $d\omega + \omega \wedge \omega = 0$ para a forma Mauren-Cartan leva a uma condição necessária de que uma 1-forma com valores em $\mathfrak{g}$ na variedade M seja uma derivada de Darboux de uma aplicação $f : M \to G$.

Definição 1.34 (Sharpe)**.** Seja $f : M \to G$ uma aplicação diferenciável entre a variedade M e o grupo de Lie G e ω_G a forma de Maurer- Cartan. A derivada de Darboux de f é a 1-forma diferencial com valores na álgebra de Lie:

$$\omega_f := f^*\omega_G,$$

isto é, ω_f é o pullback de ω_G por f. A função f é chamada integral ou primitiva de ω_f.

1.5 Teorema de Frobenius

Nesta seção enunciaremos o Teorema de Frobenius na versão de campos vetorias e também na forma dual, ou seja, na versão via formas diferenciais. O Teorema de Frobenius foi peça fundamental no trabalho, em especial no capítulo 2, onde aplicamos o Teorema na versão de formas diferenciais afim de de introduzir coordenadas no conjunto de soluções de forma local, que irão definir subvariedades integrais.

Comecemos com uma coletânea de definições que são essenciais para enunciarmos o Teorema de Frobenius na versão de campos vetorias.

Definição 1.35. Definimos uma distribuição k-dimensional D^k na variedade n-dimensional M como:

$$D^k : M^n \longrightarrow \bigcup_{p\in M} \{ \text{ subespaços de dimensão } k \text{ no } T_pM\}.$$

Dizemos que D^k é suave se para qualquer $p_0 \in M$ existe um aberto U (com $p_0 \in U$) e campos vetoriais $X_1, X_2, \cdots, X_k$ diferenciáveis de forma que $\langle X_1, X_2, \cdots, X_k\rangle_p = D^k_p$ para todo $p \in U$.

Por simplicidade, denotaremos uma distribuição k- dimensional simplesmente por D.

Definição 1.36. Dizemos que D é involutiva, se $[X, Y] \in D$ para todo $X, Y \in D$.

Definição 1.37. Uma subvariedade (N, ψ) de M é uma variedade integral de uma distribuição D em M se:

$$d_\psi(T_nN) = D_{\psi(n)}, \qquad \text{para todo } n \in N.$$

Uma condição necessária e suficiente para que existam variedades integrais de D passando por cada ponto de M é que D seja involutivo.

Proposição 1.38. *Se a distribuição D é suave e para todo $m \in M$ passa uma variedade integral, então D é involutiva.*

Teorema 1.39 (Frobenius)**.** *Seja M^n uma variedade diferenciável, D uma distribuição suave involutiva. Então, dado $m \in M^n$, existe uma variedade integral passando por m. Além disso, existe um sistema de coordenadas (U, φ) centrado em m, com funções coordenadas $\varphi = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ tal que as placas $\{p \in U : x_i(p) = \ cte\ , i > k\}$ são variedades integrais de D.*

Veremos agora conceitos na forma dual, ou seja via formas diferenciais afim de enunciarmos o Teorema de Frobenius na versão de formas diferencias.

Definição 1.40. Seja D uma distribuição de dimensão k. Uma forma aniquilada, ou simplesmente aniquilador, de D é uma forma diferencial $\omega \in \Omega^1(U)$ satisfazendo $\omega(X) = 0$ se $X \in D$ e $U \subset M$ um aberto da variedade.

Observação 1.41. Note que os valores dos aniquiladores de D em p formam um subespaço do T^*_pM de dimensão $n-k$ onde $n = \dim(M)$. Dessa forma, utilizando os conceitos de álgebra linear podemos escolher localmente $n-k$ formas ω_i linearmente independentes sobre o anel de funções tais que:

$$X \in D \Longleftrightarrow \omega_i(X) = 0 \qquad i = 1, 2, \cdots, n-k.$$

Então localmente, podemos definir uma distribuição D escolhendo $n-k$ formas diferenciais tais que os valores delas sejam linearmente independentes para todo p.

Teorema 1.42 (Frobenius)**.** *Um distribuição D é involutiva se, e somente se, para todo aniquilador ω de D é válido $d\omega(X,Y) = 0$ para todo $X, Y \in D$.*

Corolário 1.43. *Uma Distribuição definida pelos aniquiladores ω_i, $i = 1, 2, \cdots, l$ é involutiva se, e somente se, existem 1-formas Ω^i_j tais que $d\omega_i = \sum_j \Omega^i_j \wedge \omega_j$.*

CAPÍTULO 2

INTEGRAIS RACIONAIS LINEARES

O objetivo principal desse capítulo é determinar a dimensão do espaço das integrais racionais lineares fatorado pela ação do grupo SL_2, abordaremos aqui: a ação do grupo SL_2 no conjunto das integrais racionais lineares além da derivada de Darboux e o sistema dos invariantes.

Posteriormente, serão estudadas condições de compatibilidade afim de demonstrarmos que a dimensão do espaço das integrais fatorado por essa ação de grupo é máxima (ou seja, 2) se, e somente se, a curvatura Gaussiana K é constante, e possui dimensão 0 se, e somente se K é não constante. Aplicaremos o Teorema de Frobenius para introduzir coordenadas no conjunto de soluções, de forma local, que irão definir unicamente subvariedades integrais.

2.1 Ação do grupo SL_2 no conjunto das integrais

Suponha que o fluxo geodésico em uma superfície bidimensional S munido com uma métrica g, admita em coordenadas (x, y) e momento (p, q), uma integral racional linear,

$$I = \frac{A(x,y)p + B(x,y)q}{C(x,y)p + E(x,y)q}, \tag{2.1}$$

podemos normalizar A, B, C, E da seguinte maneira: $A(x,y)E(x,y) - B(x,y)C(x,y) = 1$.

A integral I define a aplicação

$$\begin{array}{rccl} m: & S & \longrightarrow & SL_2(\mathbb{R}) \\ & (x,y) & \mapsto & m(x,y), \end{array}$$

dada por

$$m(x,y) = \begin{pmatrix} A(x,y) & B(x,y) \\ C(x,y) & E(x,y) \end{pmatrix}.$$

A fim de facilitar a escrita vamos denotar a função $A(x, y)$ por simplesmente A e de forma análoga faremos para as funções $B(x, y), C(x, y)$, $E(x, y)$ e $m(x, y)$.

O grupo de Lie $SL_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} : \ \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R} \text{ com } \alpha\delta - \beta\gamma = 1 \right\}$ age de maneira natural no conjuntos das integrais racionais lineares da seguinte forma:

$$h \cdot I = \frac{\alpha I + \beta}{\gamma I + \delta} = \frac{\alpha \left(\dfrac{Ap + Bq}{Cp + Eq} \right) + \beta}{\gamma \left(\dfrac{Ap + Bq}{Cp + Eq} \right) + \delta} = \frac{(\alpha A + \beta C)p + (\alpha B + \beta E)q}{(\gamma A + \delta C)p + (\gamma B + \delta E)q}, \tag{2.2}$$

onde $h = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{R})$. Essa ação é chamada transformação fracionária linear ou transformação de Möbius.

Note que,

$$\tilde{I} = \frac{(\alpha A + \beta C)p + (\alpha B + \beta E)q}{(\gamma A + \delta C)p + (\gamma B + \delta E)q}$$

também é uma integral racional linear, uma vez que qualquer função de integral primeira é novamente uma integral primeira. Além disso,

$$(\alpha A + \beta C)(\gamma B + \delta E) - (\alpha B + \beta E)(\gamma A + \delta C) = 1$$

e assim $\tilde{I}$ também possui a mesma normalização de I. Dessa forma, podemos estender a definição natural de órbitas de ação de grupos para o caso de integrais fracionais lineares, como segue:

Definição 2.1. Dizemos que duas integrais racionais lineares, I e $\tilde{I}$, são equivalentes se existe $h \in SL_2(\mathbb{R})$ tal que $h \cdot I = \tilde{I}$. Neste caso, dizemos ainda que I e $\tilde{I}$ estão na mesma órbita e escrevemos tal órbita como

$$\mathcal{O}(I) = \{h \cdot I : \ h \in SL_2(\mathbb{R})\}.$$

Na seção seguinte buscaremos fazer uma redução no número de variáveis por meio da maneira padrão de se obter invariantes, mais especificamente, utilizaremos a derivada de Darboux.

2.2 Derivada de Darboux e sistema de invariantes

Dada a aplicação $m : S \to SL_2(\mathbb{R})$, a derivada de Darboux de m é a 1-forma diferencial $\omega = m^{-1} \cdot dm$ (conforme [30]). Note que:

$$m^{-1} \cdot dm = \begin{pmatrix} E & -B \\ -C & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dA & dB \\ dC & dE \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} EdA - BdC & EdB - BdE \\ -CdA + AdC & -CdB + AdE \end{pmatrix}. \tag{2.3}$$

Uma vez que

$$\begin{aligned} dA &= A_x dx + A_y dy \\ dB &= B_x dx + B_y dy \\ dC &= C_x dx + C_y dy \\ dE &= E_x dx + E_y dy, \end{aligned}$$

substituindo em (2.3), temos que:

$$\begin{aligned} m^{-1}\cdot dm &= \begin{pmatrix} (EA_x - BC_x)dx + (EA_y - BC_y)dy & (EB_x - BE_x)dx + (EB_y - BE_y)dy \\ (AC_x - CA_x)dx + (AC_y - CA_y)dy & (AE_x - CB_x)dx + (AE_y - CB_y)dy \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} EA_x - BC_x & EB_x - BE_x \\ AC_x - CA_x & AE_x - CB_x \end{pmatrix} dx + \begin{pmatrix} EA_y - BC_y & EB_y - BE_y \\ AC_y - CA_y & AE_y - CB_y \end{pmatrix} dy. \end{aligned}$$

Como o grupo não age em coordenadas independentes temos que dx e dy são formas diferenciais invariantes. Além disso, $(hm)^{-1}\cdot d(hm) = m^{-1}\cdot h^{-1}\cdot h\cdot d(m) = m^{-1}\cdot d(m)$, logo $m^{-1}\cdot d(m)$ é invariante, conforme a Definição 1.25.

Note que dessa forma cada entrada da matriz $m^{-1}\cdot dm$ é uma 1-forma diferencial que por construção é invariante. A forma diferencial $m^{-1}\cdot dm$ assume valores em álgebra de Lie desse grupo.

Do fato de $det(m) = 1$, podemos supor sem perda de generalidade que $A \neq 0$ e assim escrever E e suas derivadas parciais da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} E &= \frac{BC+1}{A}, \\ E_x &= \frac{BC_x + CB_x}{A} - \frac{(BC+1)A_x}{A^2}, \\ E_y &= \frac{BC_y + CB_y}{A} - \frac{(BC+1)A_y}{A^2}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Afim de facilitar os cálculos futuros, denotaremos as entradas da matriz $m^{-1}\cdot dm$, como segue:

$$\begin{aligned} P &= EA_x - BC_x, \\ Q &= EB_x - BE_x, \\ R &= AC_x - CA_x, \\ X &= EA_y - BC_y, \\ Y &= EB_y - BE_y, \\ Z &= AC_y - CA_y, \end{aligned}$$

Derivando a expressão $AE - BC = 1$ em relação a x, temos $A_xE + AE_x - (B_xC + BC_x) = 0$, ou seja, $P = EA_x - BC_x = -(AE_x - CB_x)$ e assim $AE_x - CB_x = -P$. Da mesma forma, derivando $AE - BC = 1$ em relação a y temos $X = EA_y - BC_y = -(AE_y - CB_y)$, logo $AE_y - CB_y = -X$. Podemos então escrever:

$$m^{-1}\cdot dm = \begin{pmatrix} P & Q \\ R & -P \end{pmatrix} dx + \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & -X \end{pmatrix} dy. \tag{2.5}$$

Substituindo E, E_x, E_y de (2.4), obtemos:

$$\begin{aligned} P &= \frac{BC+1}{A}A_x - BC_x, \\ Q &= \frac{B^2C+B}{A^2}A_x + \frac{1}{A}B_x - \frac{B^2}{A}C_x, \\ R &= AC_x - CA_x, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X &= \frac{BC+1}{A}A_y - BC_y, \\ Y &= \frac{B^2C+B}{A^2}A_y + \frac{1}{A}B_y - \frac{B^2}{A}C_y, \\ Z &= AC_y - CA_y. \end{aligned}$$

Resolvendo tais equações com respeito a $A_x, B_x, C_x, A_y, B_y, C_y$, respectivamente, e fazendo as devidas simplificações, obtemos:

$$\begin{aligned} A_x &= PA + RB, \\ B_x &= QA - PB, \\ C_x &= \frac{PAC + RBC + R}{A}, \\ A_y &= XA + ZB, \\ B_y &= YA - XB, \\ C_y &= \frac{XAC + ZBC + Z}{A}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Para nossos próximos resultados, afim de simplificar os cálculos, iremos considerar a métrica na forma $g = L(x,y)dxdy$ tal como foi escolhida por Lie e Koenigs em seus artigos clássicos (ver [15], [19]), essa métrica da forma com que é escrita não está definida mas ela é relacionada com uma métrica definida por meio da seguinte substituição complexa $x = u + iv$ e $y = u - iv$, obtendo assim:

$$g = L(x,y)dxdy = \Lambda(u+iv, u-iv)(du^2 + dv^2).$$

Todas as equações diferenciais que obtivemos em nossos resultados a seguir são polinomiais e o procedimento a qual as manuseamos é puramente algébrico, logo os resultados obtidos são válidos para as duas métricas. A fim de facilitar a notação escreveremos apenas L ao nos referirmos a função $L(x,y)$, o mesmo vale para as suas derivadas.

Lema 2.2. *Suponha que o fluxo geodésico da métrica g em uma superfície S admita uma integral fracional linear*

$$I = \frac{A(x,y)p + B(x,y)q}{C(x,y)p + E(x,y)q}.$$

Então, os invariantes P, Q, R, X, Y, Z da 1-forma diferencial $m^{-1} \cdot dm$ como em (2.5) satisfazem as seguintes equações:

$$P = -\frac{Y}{2} - \frac{L_x}{2L}, \tag{2.7}$$

$$\begin{aligned} Q &= 0, \\ X &= \frac{R}{2} + \frac{L_y}{2L}, \\ Z &= 0. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Demonstração. Para a métrica $g = L(x,y)dxdy$, o Hamiltoniano tem a forma

$$H = \frac{2pq}{L},$$

e da condição $\{I, H\} = 0$, temos o polinômio homogêneo de grau 3 em p, q como segue,

$$\begin{aligned}
&- \; L(AC_y - CA_y)p^3 \\
&+ \; (-LAC_x - L_yAE - LAE_y + LCA_x + LEA_y + L_yBC - LBC_y + LB_yC)p^2q \\
&+ \; (L_xAE - LAE_x + LEA_x - L_xBC - LBC_x - LBE_y + B_xCL + B_yEL)pq^2 \\
&- \; L(BE_x - EB_x)q^3 = 0.
\end{aligned}$$

Que é equivalente ao sistema de equações homogêneas a seguir, pois A, B, C e E não dependem de p, q.

$$\begin{aligned}
L(AC_y - CA_y) &= 0, \\
L(-AE_y - AC_x + CA_x + CB_y - BC_y + EA_y) - L_y(AE - BC) &= 0, \\
L(-BE_y - BC_x + EA_x + EB_y - AE_x + CB_x) + L_x(AE - BC) &= 0, \\
L(BE_x - EB_x) &= 0.
\end{aligned}$$

Fazendo uso da normalização $AE - BC = 1$, substituindo E, E_x, E_y como em (2.4) e substituindo também as derivadas parciais $A_x, B_x, C_x, A_y, B_y, C_y$ como dadas em (2.6), obtemos o sistema equivalente para os invariantes

$$\begin{aligned}
LZ &= 0, \\
2LX - LR - L_y &= 0, \\
2LP + LY + L_x &= 0, \\
LQ &= 0.
\end{aligned}$$

O que nos fornece,

$$\begin{aligned}
Z &= 0, \\
X &= \frac{LR + L_y}{2L}, \\
P &= -\frac{LY + L_x}{2L}, \\
Q &= 0.
\end{aligned}$$

Como queríamos demonstrar. □

2.3 Dimensão do espaço de integrais

Com relação a métrica g temos a seguinte observação:

Observação 2.3. A curvatura Gaussiana da métrica $g = L(x, y)dxdy$ é

$$K = -\frac{LL_{xy} - L_xL_y}{L^3}. \tag{2.9}$$

As derivadas parciais da curvatura Gaussiana K são:

$$\begin{aligned}
K_x &= -\frac{L_{xxy}}{L^2} + \frac{L_{xx}L_y + 3L_{xy}L_x}{L^3} - \frac{3L_x^2L_y}{L^4}, \\
K_y &= -\frac{L_{xyy}}{L^2} + \frac{L_{yy}L_x + 3L_{xy}L_y}{L^3} - \frac{3L_y^2L_x}{L^4}.
\end{aligned}$$

Vamos agora relacionar os invariantes da matriz $m^{-1}\cdot dm$ com a curvatura Gaussiana K e suas derivadas por meio da derivada de Darboux, a qual satisfaz a equação de estrutura $d\omega + \omega \wedge \omega = 0$ [30]. Diante disso, as seguintes equações são verificadas:

$$2RY - R_x - Y_y + 2LK = 0, \tag{2.10}$$

$$LY^2 + L_xY - LY_x = 0, \tag{2.11}$$

$$LR^2 + L_yR - LR_y = 0, \tag{2.12}$$

Resolvendo as equações (2.11) e (2.12) em relação a Y_x e R_y, respectivamente, temos:

$$Y_x = Y^2 + \frac{L_x}{L}, \tag{2.13}$$

$$R_y = R^2 + \frac{L_y}{L}. \tag{2.14}$$

Note que a equação (2.10) pode ser escrita como

$$R_x + Y_y = 2(RY + LK). \tag{2.15}$$

Definimos F por:

$$2F := R_x - Y_y, \tag{2.16}$$

onde F é uma função incógnita de x, y.

Por (2.15) e (2.16) temos que,

$$R_x = RY + F + LK, \tag{2.17}$$
$$Y_y = RY - F + LK. \tag{2.18}$$

Obtemos então o sistema de equações diferenciais exteriores em $\mathbb{R}^8$ com coordenadas A, B, C, R, Y, F, x, y, dado por:

$$dA = \left(RB - \frac{L_x}{2L}A - \frac{YA}{2}\right)dx + \left(\frac{L_y}{2L}A + \frac{RA}{2}\right)dy, \tag{2.19}$$

$$dB = \left(\frac{L_x}{2L}B + \frac{YB}{2}\right)dx + \left(YA - \frac{L_y}{2L}B - \frac{RB}{2}\right)dy, \tag{2.20}$$

$$dC = \left(\frac{BRC}{A} + \frac{R}{A} - \frac{L_x}{2L}C - \frac{YC}{2}\right)dx + \left(\frac{L_y}{2L}C + \frac{RC}{2}\right)dy, \tag{2.21}$$

$$dR = (YR + F + LK)dx + \left(R^2 + \frac{L_y}{L}R\right)dy, \tag{2.22}$$

$$dY = \left(Y^2 + \frac{L_x}{L}Y\right)dx + (RY - F + LK)dy, \tag{2.23}$$

Lema 2.4. *Se o sistema anterior possui uma solução então:*

$$\begin{aligned} F_x &= 3FY + \frac{L_x}{L}F + LK_x, \\ F_y &= 3FR + \frac{L_y}{L}F - LK_y, \\ F^2 &= \frac{1}{3}LK_{xy} - \frac{1}{2}LK_xR - \frac{1}{2}LK_yY. \end{aligned}$$

Demonstração. Do fato de $d(dY) = 0$, temos que:

$$F_x - 3FY + \left(\frac{LL_{xy} - L_xL_y}{L^2}\right)Y + LKY - \frac{L_x}{L}F - LK_x = 0.$$

De forma equivalente, temos que:

$$F_x = 3FY - \left(\frac{LL_{xy} - L_xL_y}{L^2}\right)Y - LKY + \frac{L_x}{L}F + LK_x.$$

Ou ainda,

$$F_x = 3FY + \frac{L_x}{L}F + LK_x, \tag{2.24}$$

uma vez que a curvatura Gaussiana é dada como em (2.9).

Da mesma forma, de $d(dR) = 0$ segue que:

$$F_y - 3FR - \left(\frac{LL_{xy} - L_xL_y}{L^2}\right)R - LKR - \frac{L_y}{L}F - LK_y = 0.$$

Logo, se $d(dR) = 0$ então:

$$F_y = 3FR + \frac{L_y}{L}F - LK_y. \tag{2.25}$$

Assim, as 1-formas diferenciais dR e dY são fechadas se, e somente se,

$$dF = \left(3FY + \frac{L_x}{L}F + LK_x\right)dx + \left(3FR + \frac{L_y}{L}F - LK_y\right)dy. \tag{2.26}$$

Usando $d(dF) = 0$ na equação (2.26), temos:

$$F^2 = \frac{1}{3}LK_{xy} - \frac{1}{2}LK_xR - \frac{1}{2}LK_yY, \tag{2.27}$$

□

Note que definindo F nas equações (2.22) e (2.23) como em (2.27) obtemos um sistema do tipo finito, ou seja, todas as derivadas de R, Y são dadas.

Corolário 2.5. *O sistema (2.22, 2.23), com F dado por (2.27), está em involução se, e somente se, (2.24) e (2.25) são satisfeitas por causa de (2.22) e (2.23).*

Note que se o sistema (2.22, 2.23), com F dado por (2.27) está em involução então o sistema formado pelas equações de (2.19) á (2.23) com F dado por (2.27) também está em involução, assim pelo Teorema de Frobenius os valores de A_0, B_0, C_0, R_0, Y_0 em um ponto (x_0, y_0) na superfície determinam localmente uma superfície integral. Podemos então escolher A_0, B_0, C_0, R_0, Y_0 como coordenadas locais no espaço de integrais.

Note que o subsistema formado pelas equações (2.22) e (2.23) é fechado e não dependem de A, B e C, então qualquer solução determinam a órbita, pois se R e Y são soluções fixas, pelo Teorema de Frobenius, todas as soluções A_0, B_0, C_0 ficam em uma órbita de PSL_2, mais especificamente, considerando as triplas A_0, B_0, C_0 e $\tilde{A}_0, \tilde{B}_0$, $\tilde{C}_0$ existe uma única transformação de Möbius que aplica uma na outra.

Dados R e Y, o sistema (2.19, 2.20, 2.21) é um sistema Automorfo, ou seja, quaisquer duas soluções são equivalentes (para mais detalhes a respeito de sistema Automorfo consultar [24],[32]).

Definamos agora o espaço das integrais racionais lineares fatorado pela a ação do grupo SL_2.

Definição 2.6. Seja V o conjunto das integrais racionais lineares, com normalização $\det(m) = 1$, ou seja, $AE - BC = 1$. Definimos o espaço quociente das integrais racionais lineares, com relação a ação de SL_2, pelo conjunto

$$\mathcal{V} := (V/\sim).$$

Nosso objetivo principal é determinar $dim(\mathcal{V})$.

Lema 2.7. *Suponha que o fluxo geodésico em uma superfície S admita uma integral fracional linear*

$$I = \frac{A(x,y)p + B(x,y)q}{C(x,y)p + E(x,y)q}.$$

Então, a curvatura Gaussiana K é constante se, e somente se,

$$F = \frac{R_x - Y_y}{2} = 0.$$

Demonstração. Suponha que a curvatura Gaussiana é constante, isto é,

$$K_{xy} = K_x = K_y = 0.$$

Logo, da equação (2.27) segue que $F = 0$.

Por outro lado, se $F = 0$, então $F_x = F_y = 0$ e assim pelo Lema 2.4 segue que:

$$F_x = 3FY + \frac{L_x}{L}F + LK_x \quad \Rightarrow \quad LK_x = 0,$$
$$F_y = 3FR + \frac{L_y}{L}F - LK_y. \quad \Rightarrow \quad LK_y = 0.$$

Ou seja, $K_x = K_y = 0$ e portanto K é constante. □

Lema 2.8. *Se K é constante então o sistema (2.22, 2.23) está em involução.*

Demonstração. Suponha que K é constante, logo pelo Lema anterior segue que $F = 0$ e pelo Corolário 2.5 segue que o sistema (2.22, 2.23) está em involução. □

Para uma análise mais concisa a cerca da $dim(\mathcal{V})$ precisaremos da seguinte proposição:

Proposição 2.9. *Suponha que o fluxo geodésico em uma superfície S admita uma integral racional linear*

$$I = \frac{A(x,y)p + B(x,y)q}{C(x,y)p + E(x,y)q}.$$

Se uma das derivadas parciais da curvatura Gaussiana é identicamente nula então a curvatura Gaussiana é constante.

Demonstração. Sem perda da generalidade suponha que $K_x = 0$ e $K_y \neq 0$. Da equação (2.27) temos que $Y = -\dfrac{2F^2}{LK_y}$, dessa forma derivando em relação a x obtemos:

$$Y_x = -\frac{12F^2}{LK_y}Y - \frac{2L_xF^2}{L^2K_y}. \tag{2.28}$$

Igualando as equações (2.13) e (2.28) temos

$$L^2K_yY^2 + (12LF^2 + LL_xK_y)Y + 2F^2L_x = 0.$$

Substituindo $Y = -\dfrac{2F^2}{LK_y}$ nesta equação obtemos:

$$\frac{20F^4}{K_y} = 0.$$

Portanto $F = 0$, e assim pelo Lema 2.7, segue que K é constante. □

A proposição anterior nos diz que se $F \neq 0$ obrigatoriamente as derivadas parciais de K são não nulas, o que nos leva ao seguinte resultado.

Teorema 2.10. *Suponha que o fluxo geodésico em uma superfície S admita uma integral fracional linear*

$$I = \frac{A(x,y)p + B(x,y)q}{C(x,y)p + E(x,y)q}.$$

Então $dim(\mathcal{V}) = 0$ se, e somente se, a curvatura Gaussiana não é constante.

Demonstração. Suponha que a curvatura Gaussiana K não é constante, logo $F \neq 0$ e pela Proposição 2.9 $K_x \neq 0$ e $K_y \neq 0$. Mostremos que F, Y e R são determinados.

Podemos resolver a equação (2.27) em relação a R,

$$R = \frac{2K_{xy}}{3K_x} - \frac{K_y}{K_x}Y - \frac{2F^2}{LK_x}, \tag{2.29}$$

e considerar o sistema formado pelas equações (2.23, 2.26) com R dado como acima. Então o sistema para F e Y é do tipo finito e condições de compatibilidade são dadas como em (2.22).

Diferenciando a equação (2.29), obtemos:

$$R_x = \left(\frac{-K_{xy}}{K_x} + \frac{K_{xx}K_y}{K_x^2}\right)Y - \frac{K_y}{K_x}Y_x + \left(\frac{2L_x}{L^2K_x} + \frac{2K_{xx}}{LK_x^2}\right)F^2 \tag{2.30}$$

$$-\frac{4F_xF}{LK_x} + \frac{2K_{xxy}}{3K_x} - \frac{2K_{xx}K_{xy}}{3K_x^2},$$

$$R_y = \left(\frac{-K_{yy}}{K_x} + \frac{K_{xy}K_y}{K_x^2}\right)Y - \frac{K_y}{K_x}Y_y + \left(\frac{2L_y}{L^2K_x} + \frac{2K_{xy}}{LK_x^2}\right)F^2 \tag{2.31}$$

$$-\frac{4F_yF}{LK_x} + \frac{2K_{xyy}}{3K_x} - \frac{2K_{xy}^2}{3K_x^2}.$$

Igualando as equações (2.17) e (2.30) e substituindo a expressão de R dada anteriormente, chega-se a seguinte equação

$$\left(\frac{2L_x}{L^2K_x} - \frac{2K_{xx}}{LK_x^2}\right)F^2 + \left(\frac{10F^2}{LK_x} + a_1\right)Y + 5F - a_2 = 0, \tag{2.32}$$

onde:

$$a_1 = -\frac{K_{xx}K_y}{K_x^2} + \frac{5K_{xy}}{3K_x} + \frac{L_xK_y}{LK_x};$$

$$a_2 = \frac{2K_{xxy}}{3K_x} - \frac{2K_{xx}K_{xy}}{3K_x^2} + \frac{L_{xy}}{L} - \frac{L_xL_y}{L^2}.$$

De forma similar, igualando (2.14) e (2.31) obtemos:

$$\frac{10K_{xy}}{3LK_x^2}F^2 - \frac{20}{L^2K_x^2}F^4 - \left(\frac{10K_yF^2}{LK_x^2} + b_1\right)Y - \frac{5K_y}{K_x}F + b_2 = 0, \tag{2.33}$$

onde:

$$b_1 = \frac{5K_{xy}K_y}{3K_x^2} - \frac{K_{yy}}{K_x} + \frac{L_yK_y}{LK_x},$$

$$b_2 = -\frac{2K_{xyy}}{3K_x} + \frac{10K_{xy}^2}{9K_x^2} + \frac{2L_yK_{xy}}{3LK_x} - \frac{L_{xy}K_y}{LK_x} + \frac{L_xL_yK_y}{L^2K_x}.$$

Se $\frac{10F^2}{LK_x} + a_1 \neq 0$, podemos resolver a equação (2.32) em relação a Y. Como a equação (2.33) tem o termo quártico não nulo, substituindo o valor de Y em (2.33), segue que F admite 4 soluções (não necessariamente distintas e reais) ficando assim determinado, e consequentemente Y fica determinado na equação (2.32).

Se $\frac{10F^2}{LK_x} + a_1 = 0$ segue que, $F^2 = -\frac{a_1LK_x}{10}$, logo F é determinado e assim F_x é também determinado. Por fim, pela equação (2.24) conclui-se que Y é também determinado. De forma análoga mostra-se que R é também determinado. Portanto $dim(\mathcal{V}) = 0$.

A recíproca segue direto do Lema 2.8. □

Teorema 2.11. *Suponha que o fluxo geodésico em uma superfície S admita uma integral racional linear*

$$I = \frac{A(x,y)p + B(x,y)q}{C(x,y)p + E(x,y)q}.$$

Então $dim(\mathcal{V}) = 2$, se, e somente se, a curvatura Gaussiana é constante.

Demonstração. Se $dim(\mathcal{V}) = 2$, segue do Teorema 2.10 que K é constante.

Reciprocamente, se K é constante, segue do Lema 2.8 que o sistema (2.22-2.23) está em involução e $dim(\mathcal{V}) = 2$. $\square$

CAPÍTULO 3

4-WEBS DE NAKAI GEODÉSICOS

O principal objetivo desse capítulo é o de apresentar e demonstrar o Teorema 3.4. Este resultado relaciona a existência de integrais racionais lineares com a existência de 4-webs de Nakai geodésicos.

3.1 Construção de folheações geodésicas

Seja S uma 2-superfície com coordenadas locais (x, y) e a métrica dada na forma $g = \Lambda(x, y)\,(dx^2 + dy^2)$. Suponha que o fluxo geodésico em (S, g) admita uma integral racional linear em momento como segue:

$$I = \frac{A(x,y)p + B(x,y)q}{C(x,y)p + E(x,y)q}. \tag{3.1}$$

Assim como fizemos no capítulo 2, para facilitar a escrita vamos denotar a função $A(x, y)$ por simplesmente A e de forma análoga faremos para as funções $B(x, y), C(x, y)$ e $E(x, y)$. Logo, com essa abreviação, no decorrer de todo esse capítulo iremos trabalhar com a integral racional linear,

$$I = \frac{Ap + Bq}{Cp + Eq}.$$

Além disso, a integral racional linear I dada em momento (p, q) pode ser reescrita em termos do vetor velocidade (ξ, η) através do isomorfismo canônico $\psi : TM \to T^*M$: o momento (p, q) corresponde ao vetor (ξ, η), sendo

$$(\xi, \eta) = \frac{1}{\Lambda^2}(\Lambda p, \Lambda q) = \left(\frac{p}{\Lambda}, \frac{q}{\Lambda}\right).$$

Dessa forma, a integral racional linear I em termos de (ξ, η), é expressa por:

$$\tilde{I} = \frac{A\Lambda\xi + B\Lambda\eta}{C\Lambda\xi + E\Lambda\eta} = \frac{A\xi + B\eta}{C\xi + E\eta}. \tag{3.2}$$

Dada uma integral racional linear do fluxo geodésico, construímos uma família de folheações a 1-parâmetro como segue:

Dado $\lambda \in \mathbb{R}$, a fração racional

$$\tilde{I} - \lambda = \frac{(A - C\lambda)\xi + (B - E\lambda)\eta}{C\xi + E\eta}$$

é uma integral, uma vez que $\tilde{I}$ é uma integral.

Considerando $\tilde{I} - \lambda = 0$ e tomando $\xi = dx$ e $\eta = dy$, segue que:

$$\frac{(A - C\lambda)dx + (B - E\lambda)dy}{Cdx + Edy} = 0.$$

Obtendo a equação diferencial ordinária de primeiro grau:

$$(A - C\lambda) + (B - E\lambda)\frac{dy}{dx} = 0. \tag{3.3}$$

Integrando obtemos uma folheação por curvas integrais.

Proposição 3.1. *A folheação construída acima é geodésica.*

Demonstração. De fato, escolhendo um ponto inicial (x_0, y_0) e fazendo $\tilde{I} - \lambda = 0$ é fixado uma direção, ponto e direção determinam uma geodésica. Note que $\tilde{I}$ é constante ao longo da geodésica, o que implica que $\tilde{I} = 0$ nas soluções de (3.3), logo pelo Teorema da unicidade de solução, as soluções são geodésicas. □

3.2 4-webs de Nakai geodésicos

O Teorema demonstrado nessa seção é o foco principal desse capítulo, ele é uma contribuição geométrica para 4-webs e caracteriza famílias de 4 folheações geodésicas que vem de uma integral racional linear.

Definição 3.2. Um 4-web planar é chamado de web de Nakai se a razão cruzada das tangentes às quatro folheações em cada ponto for constante e se não tiver 3-subweb hexagonal.

Observação 3.3. No caso em que a curvatura Gaussiana K da métrica g é nula, temos a hexagonalidade, pois podemos escrever explicitamente as integrais e construir 3-web a partir dessas integrais que sejam hexagonais e dessa forma nesse caso o 4-web não é de Nakai. Mas no geral, trabalharemos com 4-web de Nakai geodésicos.

Teorema 3.4. *Existe uma integral racional linear* $I = \dfrac{Ap + Bq}{Cp + Eq}$ *se, e somente se, existem* 4 *folheações geodésicas tais que a razão cruzada das tangentes às quatro folheações em cada ponto é constante.*

Demonstração. Seja I uma integral racional linear. Por (3.3), a equação diferencial ordinária que define a folheação é dada por:

$$(A - C\lambda) + (B - E\lambda)\frac{dy}{dx} = 0,$$

e dessa forma,

$$\frac{A + BP}{C + EP} = \lambda, \tag{3.4}$$

onde P é a inclinação da reta tangente a folha.

Dado $m = \begin{pmatrix} A & B \\ C & E \end{pmatrix}$, temos por (3.4) que $m \cdot P = \lambda$ para todo $(x, y) \in S$, e assim $P = m^{-1} \cdot \lambda$.

Considere agora um 4-web, onde λ_i, com $i = 1, 2, 3, 4$, são os parâmetros para cada folheação. A ação do grupo SL_2 em $\mathbb{P}^1$ possui um invariante, chamado de razão cruzada (ver 1.26), dado por:

$$\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_3} \cdot \frac{\lambda_3 - \lambda_4}{\lambda_4 - \lambda_1}.$$

Note que $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ e λ_4 são constantes, decorre assim que,

$$r = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_3} \cdot \frac{\lambda_3 - \lambda_4}{\lambda_4 - \lambda_1}, \tag{3.5}$$

também é constante.

Definimos,

$$P_i := m^{-1} \cdot \lambda_i = \frac{E - B\lambda_i}{-C + A\lambda_i},$$

curvas integrais dos campos $\partial_x + P_i \partial_y$, com $i = 1, \cdots, 4$, definem o 4-web. Da equação anterior, para $i = 1, \cdots 4$, segue que:

$$\frac{P_1 - P_2}{P_2 - P_3} \cdot \frac{P_3 - P_4}{P_4 - P_1} = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_3} \cdot \frac{\lambda_3 - \lambda_4}{\lambda_4 - \lambda_1} = r,$$

então a razão cruzada de inclinações $\partial_x + P_1\partial_y$, $\partial_x + P_2\partial_y$, $\partial_x + P_3\partial_y$ e $\partial_x + P_4\partial_y$ é constante.

Reciprocamente, suponha que existam 4 folheações geodésicas definidas pelos campos $\partial_x + J\partial_y$, $\partial_x + M\partial_y$, $\partial_x + N\partial_y$ e $\partial_x + T\partial_y$, tais que

$$\frac{J - M}{M - N} \cdot \frac{N - T}{T - J} = r, \tag{3.6}$$

onde r é constante.

Observe que devido as inclinações das quatro folheações serem distintas, segue da razão cruzada que $r \neq 0$ e $r \neq 1$. Resolvendo a equação (3.6) com relação a T, temos:

$$T = \frac{rJM - (r-1)JN - MN}{J + (r-1)M - rN}.$$

As derivadas parciais de T são:

$$T_x = \frac{r(r-1)(M-N)^2 J_x + r(J-N)^2 M_x - (r-1)(J-M)^2 N_x}{(J + (r-1)M - rN)^2},$$

$$T_y = \frac{r(r-1)(M-N)^2 J_y + r(J-N)^2 M_y - (r-1)(J-M)^2 N_y}{(J + (r-1)M - rN)^2}.$$

Por outro lado, a derivada total ao longo da curva integral $y = y(x)$ do campo $\partial_x + P\partial_y$, com relação a x é

$$\frac{d^2y}{dx^2} = P_x + PP_y. \tag{3.7}$$

Além disso, as soluções da equação (3.4) são geodésicas e assim esse campo de direção é um campo de Jacobi [20]. Dessa forma, podemos reescrever a equação da geodésica não parametrizada.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\Gamma^2_{11} + (\Gamma^1_{11} - 2\Gamma^2_{12})\frac{dy}{dx} - (\Gamma^2_{22} - 2\Gamma^1_{12})\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \Gamma^1_{22}\left(\frac{dy}{dx}\right)^3,$$

como sendo

$$P_x + PP_y = -\Gamma^2_{11} + (\Gamma^1_{11} - 2\Gamma^2_{12})P - (\Gamma^2_{22} - 2\Gamma^1_{12})P^2 + \Gamma^1_{22}P^3,$$

onde Γ^i_{jk} são os símbolos de Christoffel da conexão de Levi-Civita.

Assim para cada campo $\partial_x + J\partial_y$, $\partial_x + M\partial_y$, $\partial_x + N\partial_y$ e $\partial_x + T\partial_y$, temos:

$$\begin{aligned}
&J_x + JJ_y - \frac{\Lambda_y}{2\Lambda} + \frac{\Lambda_x}{2\Lambda}J - \frac{\Lambda_y}{2\Lambda}J^2 + \frac{\Lambda_x}{2\Lambda}J^3 = 0,\\
&M_x + MM_y - \frac{\Lambda_y}{2\Lambda} + \frac{\Lambda_x}{2\Lambda}M - \frac{\Lambda_y}{2\Lambda}M^2 + \frac{\Lambda_x}{2\Lambda}M^3 = 0,\\
&N_x + NN_y - \frac{\Lambda_y}{2\Lambda} + \frac{\Lambda_x}{2\Lambda}N - \frac{\Lambda_y}{2\Lambda}N^2 + \frac{\Lambda_x}{2\Lambda}N^3 = 0,\\
&T_x + TT_y - \frac{\Lambda_y}{2\Lambda} + \frac{\Lambda_x}{2\Lambda}T - \frac{\Lambda_y}{2\Lambda}T^2 + \frac{\Lambda_x}{2\Lambda}T^3 = 0. \qquad (3.8)
\end{aligned}$$

Resolvendo as três primeiras equações acima para J_x, M_x, N_x, respectivamente, e fazendo as devidas simplificações, obtemos

$$J_x = -\frac{\Lambda_x J^3 - \Lambda_y J^2 + (2\Lambda J_y + \Lambda_x)J - \Lambda_y}{2\Lambda}, \qquad (3.9)$$

$$M_x = -\frac{\Lambda_x M^3 - \Lambda_y M^2 + (2\Lambda M_y + \Lambda_x)M - \Lambda_y}{2\Lambda}, \qquad (3.10)$$

$$N_x = -\frac{\Lambda_x N^3 - \Lambda_y N^2 + (2\Lambda N_y + \Lambda_x)N - \Lambda_y}{2\Lambda}. \qquad (3.11)$$

Substituindo J_x, M_x, N_x, T, T_x e T_y na equação (3.8), obtemos o quociente:

$$\frac{r(r-1)(J-M)(J-N)(M-N)u}{2\Lambda(J+(r-1)M-rN)^3} = 0, \qquad (3.12)$$

onde,

$$u = \Lambda_x(J-M)(J-N)(M-N) + 2\Lambda((J-M)N_y - (J-N)M_y + (M-N)J_y).$$

Cada fator do produto $r(r-1)(J-M)(J-N)(M-N)$ do numerador de (3.12) é não nulo, ou seja, $u = 0$. Note ainda, que $J + (r-1)M - rN \neq 0$, pois caso contrário, da razão cruzada (3.6), chega-se que $J = N$.

Para mostrar a existência de uma integral racional linear do fluxo geodésico, iremos construir a aplicação $m : S \longrightarrow SL_2(\mathbb{R})$ dada por $m = \begin{pmatrix} A & B \\ C & E \end{pmatrix}$, escolhendo assim que:

$$\frac{A+BJ}{C+EJ}=0, \quad \frac{A+BM}{C+EM}=1, \quad C+EN=0, \quad AE-BC=1, \tag{3.13}$$

$\left(\text{onde } \dfrac{A+BN}{C+EN}=\infty\right)$.

Note que, pelo Lema 1.17, para que $I=\dfrac{Ap+Bq}{Cp+Eq}$ seja uma integral racional linear basta que:

$$\begin{aligned}
2\Lambda(CA_x-AC_x)-\Lambda_y &= 0,\\
2\Lambda(EA_x-AE_x+CA_y-AC_y+CB_x-BC_x)+\Lambda_x &= 0,\\
2\Lambda(EA_y-AE_y+CB_y-BC_y+EB_x-BE_x)-\Lambda_y &= 0,\\
2\Lambda(EB_y-BE_y)+\Lambda_x &= 0.
\end{aligned}$$

Inicialmente, note que das três primeiras equações de (3.13) temos que

$$A=\frac{J(M-N)E}{J-M}, \tag{3.14}$$

$$B=-\frac{(M-N)E}{J-M}, \tag{3.15}$$

$$C=-NE. \tag{3.16}$$

Da equação (3.14) , obtemos as derivadas parciais de A como seguem,

$$A_x=-\frac{EM(M-N)J_x}{(J-M)^2}+\frac{EJ(J-N)M_x}{(J-M)^2}+\frac{E_xJ(M-N)}{J-M}-\frac{EJN_x}{J-M}, \tag{3.17}$$

$$A_y=-\frac{EM(M-N)J_y}{(J-M)^2}+\frac{EJ(J-N)M_y}{(J-M)^2}+\frac{E_yJ(M-N)}{J-M}-\frac{EJN_y}{J-M}. \tag{3.18}$$

Da mesma forma, da equação (3.15), obtemos as derivadas parciais de B como sendo:

$$B_x=\frac{E(M-N)J_x}{(J-M)^2}-\frac{E(J-N)M_x}{(J-M)^2}-\frac{E_x(M-N)}{J-M}+\frac{EN_x}{J-M}, \tag{3.19}$$

$$B_y=\frac{E(M-N)J_y}{(J-M)^2}-\frac{E(J-N)M_y}{(J-M)^2}-\frac{E_y(M-N)}{J-M}+\frac{EN_y}{J-M}. \tag{3.20}$$

Por fim da equação (3.16) segue que as derivadas parciais de C, são dadas por:

$$C_x=-EN_x-E_xN, \tag{3.21}$$

$$C_y=-EN_y-E_yN. \tag{3.22}$$

Substituindo as expressões de A, C, A_x e C_x como em (3.14, 3.16, 3.17, 3.21) e fazendo as devidas simplificações, a expressão

$$2\Lambda(CA_x - AC_x) - \Lambda_y(AE - BC)$$

pode ser escrita como:

$$\frac{2\Lambda E^2 MN(M-N)J_x}{(J-M)^2} - \frac{2\Lambda E^2 JN(J-N)M_x}{(J-M)^2} + \frac{2\Lambda E^2 JMN_x}{J-M} - \frac{\Lambda_y E^2(M-N)(J-N)}{J-M}.$$

Além disso, uma vez que $AE - BC = 1$ e substituindo A, B, e C como em (3.14, 3.15 e 3.16), respectivamente, segue que:

$$E^2 = \frac{J-M}{(M-N)(J-N)}. \tag{3.23}$$

Agora substituindo J_x, M_x e N_x como dadas em (3.9, 3.10, 3.11) e E^2 como dado em (3.23), obtemos a seguinte equação

$$2\Lambda(CA_x - AC_x) - \Lambda_y(AE - BC) = -\frac{uJMN}{(J-M)(M-N)(J-N)}. \tag{3.24}$$

Substituindo as expressões de $A, A_x, A_y, B, B_x, C, C_x, C_y$ como em (3.14, 3.17, 3.18, 3.15, 3.19, 3.16, 3.21 e 3.22) e fazendo as devidas simplificações, podemos escrever a expressão

$$2\Lambda(EA_x - AE_x + CA_y - AC_y + CB_x - BC_x) + \Lambda_x(AE - BC)$$

como sendo:

$$\begin{aligned}
&-\frac{2\Lambda E^2(M-N)(M+N)J_x}{(J-M)^2} + \frac{2\Lambda E^2(J-N)(J+N)M_x}{(J-M)^2} - \frac{2\Lambda E^2(J+M)N_x}{J-M} \\
&+\frac{2\Lambda E^2(J^2MN_y - J^2NM_y - JM^2N_y + JN^2M_y + M^2NJ_y - MN^2J_y)}{(J-M)^2} \\
&+\frac{\Lambda_x E^2(M-N)(J-N)}{(J-M)}.
\end{aligned}$$

Substituindo J_x, M_x, N_x e E^2 como em (3.9, 3.10, 3.11 e 3.23) na expressão acima e fazendo as devidas simplificações, obtemos a seguinte equação

$$2\Lambda(EA_x - AE_x + CA_y - AC_y + CB_x - BC_x) + \Lambda_x(AE - BC) = \frac{u(JN + JM + MN)}{(J-M)(M-N)(J-N)} \tag{3.25}$$

De forma análoga segue as seguintes equações

$$2\Lambda(EA_y - AE_y + CB_y - BC_y + EB_x - BE_x) - \Lambda_y(AE - BC) = -\frac{u(J+M+N)}{(J-M)(M-N)(J-N)}, \tag{3.26}$$

$$2\Lambda(EB_y - BE_y) + \Lambda_x(AE - BC) = \frac{u}{(J-M)(M-N)(J-N)}. \tag{3.27}$$

Note que cada uma das equações (3.24, 3.25, 3.26, 3.27) possui o fator u o qual é identicamente nulo e portanto, obtemos o sistema homogêneo desejado, isto é,

$$\begin{aligned}
2\Lambda(CA_x - AC_x) - \Lambda_y &= 0,\\
2\Lambda(EA_x - AE_x + CA_y - AC_y + CB_x - BC_x) + \Lambda_x &= 0,\\
2\Lambda(EA_y - AE_y + CB_y - BC_y + EB_x - BE_x) - \Lambda_y &= 0,\\
2\Lambda(EB_y - BE_y) + \Lambda_x &= 0.
\end{aligned}$$

Portanto $I = \dfrac{Ap + Bq}{Cp + Eq}$ é uma integral fracional linear. □

CONCLUSÕES

3.3 Campos projetivos

Nos exemplos em que Agapov e Shubin mostraram de forma explícita integrais racionais lineares para a métrica em coordenadas conformes dada por $\Lambda(x,y)(dx^2+dy^2)$ (ver [5] para mais detalhes) verificamos possuir simetria projetiva, conforme podemos ver a seguir.

- Considerando a métrica $g = e^{4x}(1+3\cos^2(y))(dx^2+dy^2)$, o fluxo geodésico admite a primeira integral racional linear dada por:

$$F = e^x \frac{\operatorname{sen}(y)p + 2\cos(y)q}{3\operatorname{sen}(y)\cos(y)p + (2-3\operatorname{sen}^2(y))q}.$$

  A equação da geodésica não parametrizada da métrica $g = e^{4x}(1+3\cos^2(y))(dx^2+dy^2)$ é dada por:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-3\cos(y)\operatorname{sen}(y)}{1+3\cos^2(y)} - 2\frac{dy}{dx} - \frac{3\cos(y)\operatorname{sen}(y)}{1+3\cos^2(y)}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^3. \quad (3.28)$$

Note que na equação (3.28) não há dependência de x, obtemos assim uma simetria infinitesimal ∂_x, mas a métrica g possui dependência de x, logo essa simetria infinitesimal não é uma isometria, segue então que é uma simetria projetiva, ou seja, o fluxo local leva geodésica não parametrizada em geodésica não parametrizada.

- Considerando a métrica $g = e^{2x}(J_0^2(y)+J_1^2(y))(dx^2+dy^2)$, o fluxo geodésico dessa métrica admite a primeira integral:

$$F = \frac{(x-y)J_0(y)p - (x-y)(J_1(y))q}{J_1(y)p + J_0(y)q}$$

  A equação da geodésica não parametrizada é dada por:

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{-2J_0(y)J_1(y) + 2J_1(y)(J_0(y) - \frac{J_1(y)}{y})}{J_0^2(y)+J_1^2(y)} - 2\frac{dy}{dx} \\ &+ \frac{-2J_0(y)J_1(y) + 2J_1(y)(J_0(y) - \frac{J_1(y)}{y})}{J_0^2(y)+J_1^2(y)}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^3\end{aligned}$$

Novamente não há dependência de x na equação da geodésica não parametrizada para essa métrica, obtemos uma simetria infinitesimal ∂_x, e assim como no caso anterior, essa simetria infinitesimal não é uma isometria, pois há dependência de x na métrica, logo é uma simetria projetiva.

O mesmo ocorreu com os demais exemplos expostos no artigo de Agapov e Shubin, todos possuiam campos projetivos. Dessa forma seria interessante um estudo futuro sobre a relação entre a existência de campos projetivos e a existência de integrais racionais lineares.

REFERÊNCIAS

[1] S.I. Agafonov, Hexagonal geodesic 3-webs, *International Mathematics Research Notices,* (2021), 33 p.

[2] S.I. Agafonov, Quadratic integrals of geodesic flow, webs, and integrable billiards, *Journal of Geometry and Physics,* (2021), 10 p.

[3] S.V. Agapov, Rational integrals of a natural mechanical system on the 2-torus, *Sib. Math. Journ,* v. 61:2 (2020) p. 199 - 207

[4] S.V. Agapov, On first integrals of two-dimensional geodesic flows, *Sib. Math. Journ,* v. 61:4, (2020) p. 563 - 574

[5] S. Agapov, V. Shubin, Rational integrals of 2-dimensional geodesic flows: new examples, *Journal of Geometry and Physics,* v. 170 (2021) p. 9

[6] V. I. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics 2. ed.* Spring-Verlag, New York, 1989.

[7] W. Blaschke, Einführung in die Geometrie der Waben. (German) Birkhäuser Verlag, Basel-Stuttgart, 1955. 108 pp.

[8] W. Blaschke, G. Bol, *Geometrie der Gewebe*, Topologische Fragen der Differentialgeometrie. J. Springer, Berlin, 1938.

[9] A.V. Bolsinov, V.S. Matveev, A.T. Fomenko, Two-dimensional Riemannian metrics with an integrable geodesic flow. Local and global geometries, *Mat. Sb.* 189 (10) (1998) 5–32. Engl. translation: *Sb. Math.* 189 (9–10) (1998) 1441–1466.

[10] G. Darboux, *Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitésimal.* Paris: Gautier, Villar, 1891.

[11] U. Dini, Sopra un problema che si presenta nella teoria generale delle rappresentazione geografiche di una superficie su di unaltra. (Italian) *Brioschi Ann.* (2) III, (1869) 269–294.

[12] J. P. Dufour, D. Lehmann, Le rang des tissus de Nakai, *arXiv:2204.10077 [math.DG],* (2022)

[13] S. Finsterwalder, Mechanische Beziehungen bei der Flächendeformation. (German) *Deutsche Math.-Ver.* 6, (1899) No.2, 45–90.

[14] H. Graf, R. Sauer, Über dreifache Geradensysteme in der Ebene, welche Dreiecksnetze bilden, *Sitzungsb. Math.-Naturw. Abt.* (1924), 119-156.

[15] G. Koenigs, Sur les géodesiques a intégrales quadratiques, in: Note II from Darboux *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, vol. IV, Chelsea Publishing, 1896.

[16] B. Kruglikov, Invariant characterization of Liouville metrics and polynomial integrals, *J. Geom. Phys,* v. 58 (2008), p.979–995.

[17] V. V. Kozlov, On Rational Integrals of Geodesic Flows, *Regul. Chaotic Dyn,* v. 19:6 (2014), p.601-606.

[18] V.N. Kolokol'tsov, Geodesic flows on two-dimensional manifolds with an additional first integral that is polynomial with respect to velocities, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* 46 (5) (1982) 994–1010, 1135. Engl. Transl.: *Math. USSR-Izv* 21 (1983) 291–306.

[19] S. Lie, Untersuchungen über geodätische Curven. (German) *Math. Ann.* 20 (1882), no. 3, 357-454.

[20] M. P. do Carmo, *Geometria Riemanniana. 2. ed* Projeto Euclides, Rio de Janeiro, 1988.

[21] I. Nakai,Curvature of curvilinear 4-webs and pencil of one forms., Math. Helv. v.73 (1998) p. 177-205.

[22] P. J. Olver, *Applications of Lie groups to differential equations. 2. ed* Cambridge University Press, New York, 1993.

[23] P. J. Olver, *Equivalence, Invariants, and Symmetry. 1. ed* Cambridge University Press, New York, 1995.

[24] L.V. Ovsiannikov, *Group analysis of differential equations.* Ames. Academic Press, New York-London, 1982.

[25] G. P. Paternain, *Geodesic flows. 1. ed.* Birkhäuser Boston, Boston, 1999.

[26] J. V. Pereira,L. Pirio, *An Invitation to Web Geometry 2. ed.* Springer International Publishing, New York, 2015.

[27] A. Saint-Exupéry, *O pequeno príncipe 1. ed.* Faro Editorial, Barueri, 2020.

[28] R. Sauer, Flächen mit drei ausgezeichneten Systemen geodätischer Linien, die sich zu einem Dreiecksnetz verknüpfen lassen. (German) *Sitzungsberichte München*, 1926, 353-397.

[29] P. Stäckel, Lineare Scharen geodätischer Linien, *Math. Ann.,* v. 56 (1903), p.501-506

[30] R. W. Sharpe, *Differential Geometry: Cartan's Generalization of Klein's Erlangen Program 1. ed.* Springer-Verlag, New York, 1996.

[31] O. Stormark, *Lie's structural approach to PDE systems 1. ed.* Cambridge University Press, New York, 2000.

[32] E. Vessiot, Sur l'intégration des systèmes différentiels qui admettent des groupes continus de transformations, Acta Mathematica. v. 28 (1904) p. 307—349.

[33] O. Volk, Über Flächen mit geodätischen Dreiecknetzen, Sitzungsber. Heidelb. Akad. Wiss., Math.-Naturwiss. Kl. (1929) 2-32.

[34] F. W. Warner, *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups 1. ed.* , University Pennsylania, 1971.