


UNESP  UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
CAMPUS DE GUARATINGUETÁ

GISELE DE LOURDES MONTEIRO

**CONSIDERAÇÕES HISTÓRICAS SOBRE O INFINITO E ALGUNS DE SEUS
PARADOXOS**

Guaratinguetá-SP

2015

GISELE DE LOURDES MONTEIRO

CONSIDERAÇÕES HISTÓRICAS SOBRE O INFINITO E ALGUNS DE SEUS
PARADOXOS

Trabalho de Graduação apresentado ao Conselho de Curso de Graduação em Licenciatura em Matemática da Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, como parte dos requisitos para obtenção do diploma de Graduação em Licenciatura em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Fabiane Mondini

Guaratinguetá

2015

M775c Monteiro, Gisele de Lourdes
Considerações históricas sobre o infinito e alguns de seus paradoxos /
Gisele de Lourdes Monteiro – Guaratinguetá, 2015.
70 f : il.
Bibliografia: f. 64-68

Trabalho de Graduação em Licenciatura em Matemática – Universidade
Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, 2015.
Orientadora: Prof^a Dr^a Fabiane Mondini

1. Matemática - Historiografia 2. Paradoxos 3. Teoria dos conjuntos
4. Infinito I. Título

CDU 51(091)


Gisele de Lourdes Monteiro

ESTE TRABALHO DE GRADUAÇÃO FOI JULGADO ADEQUADO COMO
PARTE DO REQUISITO PARA A OBTENÇÃO DO DIPLOMA DE
"GRADUADO EM LICENCIATURA EM MATEMÁTICA"

APROVADO EM SUA FORMA FINAL PELO CONSELHO DE CURSO DE
GRADUAÇÃO EM LICENCIATURA EM MATEMÁTICA


Prof. Dra. Vivian Martins Gomes
Coordenadora

BANCA EXAMINADORA:


Prof. Dra. Fabiane Mondini
Orientadora/UNESP-FEG


Prof. Dra. Rosa Monteiro Paulo
UNESP-FEG


Prof. Dr. Antonio Carlos de Souza
UNESP-FEG

Dezembro de 2015

DEDICATÓRIA

Este trabalho é dedicado a Ermelinda e João (*in memoriam*), meus pais, que me deram, com muito carinho e enfrentando todo tipo de dificuldades, as bases sobre as quais desenvolvi minha educação superior, me incentivando nos momentos mais adversos e incertos, sobretudo sempre acreditando que seria capaz de vencer mais uma batalha.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por me permitir caminhar até aqui.

À minha família pelo estímulo, apoio e incentivo irrestrito em todos os momentos desta e de outras caminhadas.

Aos meus amados amigos, em especial a amiga Thalita Sani pelo apoio, amizade, momentos de alegria, carinho e atenção, mesmo quando distantes.

À minha orientadora, Dra. Fabiane Mondine pela ajuda, apoio e consideração desde o início.

A todos os meus professores, desde o Ensino Fundamental, por terem contribuído para minha formação.

EPÍGRAFE

“Ninguém nos expulsará do paraíso que Cantor nos colocou”.

David Hilbert

MONTEIRO, G. de L. Considerações Históricas Sobre o Infinito e Alguns de Seus Paradoxos. 2015. 70f. Trabalho de Graduação (Graduação em Licenciatura em Matemática) – Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá. Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2015.

RESUMO

Esta pesquisa pretende elucidar alguns aspectos históricos sobre a ideia de infinito no decorrer do desenvolvimento do Cálculo e da Teoria dos Conjuntos. Além disso, busca levantar discussões sobre a natureza do infinito: infinito atual e infinito potencial. Para isso, realizamos uma pesquisa com abordagem qualitativa na forma de um estudo exploratório. Este estudo baseou-se em livros de História da Matemática e outros trabalhos científicos como artigos, teses e dissertações sobre o tema. Nesse trabalho trataremos a visão de alguns filósofos e pensadores acerca do infinito, por exemplo: Pitágoras, Platão, Aristóteles, Galilei, Agostinho, Cantor. A pesquisa será apresentada de acordo com a ordem cronológica. O objetivo da pesquisa é compreender o infinito desde a Grécia antiga com os paradoxos de Zenão, época em que imperava o conflito entre as concepções atomística e continuísta, sendo nesse contexto que Zenão lança seus paradoxos que contradizem tanto uma concepção quanto outra, até a teoria de conjunto de Cantor, trazendo alguns paradoxos relativos a essa teoria, a saber, paradoxo de Russel e o paradoxo de Hilbert. O estudo também apresenta esses paradoxos mencionados sob o ponto de vista matemático e a luz do Cálculo e Teoria dos Conjuntos.

PALAVRAS-CHAVE: Paradoxos de Zenão. Hilbert. Teoria dos Conjuntos. Cálculo. História da Matemática.

MONTEIRO, G. de L. **Historical Considerations Infinity and Some of Its Paradoxes** 2015. 70f. Work Degree (Undergraduate Degree in Mathematics) – Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá. Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2015.

ABSTRACT

This research aims to elucidate some of the historical aspects of the idea of infinity during the creation of calculus and set theory. It also seeks to raise discussions about the nature of infinity: current infinite and potential infinite. For this, we conducted a survey with a qualitative approach in the form of exploratory study. This study was based on books of Mathematics' History and other scientific works such as articles, theses and dissertations on the subject. This work will bring the view of some philosophers and thinkers about the infinite, such as: Pythagoras, Plato, Aristotle, Galilei, Augustine, Cantor. The research will be presented according to chronological order. The objective of the research is to understand the infinite from ancient Greece with the paradoxes of Zeno, during the time which the conflict between the conceptions atomistic and continuity were dominant, and in this context that Zeno launches its paradoxes which contradict much a concept as another, until the theory Cantor set, bringing some paradoxes related to this theory, namely paradox of Russell and Hilbert's paradox. The study also presents these paradoxes mentioned under the mathematical point of view and the light of calculus and set theory.

KEYWORDS: Zeno's Paradoxes. Hilbert. Set Theory. Calculus. Mathematics' History.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Representação esquemática da dicotomia (bissecção sucessiva) de um segmento de reta (adaptado de MACHADO, SCHUCK, WAGNER 2013).	43
Figura 2 - Representação das sucessivas posições de Aquiles aproximando-se cada vez mais da tartaruga (adaptado de VIVAN, 2014).	46
Figura 3 - Representação esquemática do paradoxo da flecha (FORUM DE DISCURSUS). 48	
Figura 4 - Posição relativa das filas (adaptado de BOYER et al, 1996, p. 52; BROLEZZI, 1996, p. 23).	51
Figura 5 - Posição relativa das filas após o primeiro instante (adaptado de BOYER, 1996, p. 52; BROLEZZI, 1996, p. 23).	51
Figura 6 - Imagem ilustrativa do HH (MADEIRA, COSTA, 2012,p. 53).	57

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1 INTRODUÇÃO.....	11
CAPÍTULO 2 METODOLOGIA.....	12
2.1 PESQUISA QUALITATIVA	12
2.2 A PESQUISA QUALITATIVA NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA	13
2.3 ESTUDO EXPLORATÓRIO	14
CAPÍTULO 3 ALGUMAS CONSIDERAÇÕES SOBRE O INFINITO ATRAVÉS DOS TEMPOS.....	16
3.1 ERA GREGA.....	16
3.2 IDADE MÉDIA	20
3.3 UM GRANDE PERÍODO: DE XVII A XIX	21
3.3.1 Iminência do Cálculo	21
3.3.2 Criação do Cálculo.....	25
3.3.3 Período de transição do Cálculo para a Análise	26
3.3.4 Nascimento da Análise Real.....	28
3.4 SÉCULO XX: DAVID HILBERT	32
3.5 ANÁLISE NÃO-STANDARD: FUNDAMENTAÇÃO DO CÁLCULO INFINITESIMAL	34
CAPÍTULO 4 ALGUNS PARADOXOS DO INFINITO.....	36
4.1 PARADOXO	36
4.1.1 Paradoxos falsídicos.....	38
4.1.2 Antinomias.....	38
4.1.3 Paradoxos verídicos	39
4.2 PARADOXOS DE ZENÃO	39
4.2.1 Dicotomia	42
4.2.2 Aquiles.....	44

4.2.3	Flecha	47
4.2.4	Estádio.....	50
4.3	PARADOXO DE RUSSEL - PARADOXO DO CONJUNTO DE TODOS OS CONJUNTOS	52
4.4	PARADOXO DE HILBERT – HOLTEL DE HILBERT	56
CAPÍTULO 5 – CONSIDERAÇÕES FINAIS.....		62
	REFERÊNCIAS.....	64

CAPÍTULO 1 INTRODUÇÃO

Em busca de compreender o infinito sob o ponto de vista da Matemática, realizamos uma pesquisa de natureza qualitativa, desenvolvida na perspectiva de um estudo exploratório, ou seja, fez-se uma pesquisa inicial abordando aspectos históricos sobre o infinito e alguns paradoxos que surgem desse conceito e que figuraram ao longo dos tempos.

Para tanto, adotou-se a cronologia histórica começando pela Grécia Antiga, que foi o berço do Cálculo Infinitesimal e de conflitos envolvendo a ideia de infinito. Em seguida, aborde-se a perspectiva do pensamento na Idade Média, que enfraquece um pouco a relação do infinito com a Matemática e o aproxima de Deus. Passaremos pelas contribuições renascentistas, período que trouxe novas ideias, e se dá o surgimento do Cálculo Infinitesimal, principal mecanismo matemático para tratar do infinito (SAMPAIO, 2008). Também serão apresentados, brevemente, resultados obtidos pelos matemáticos nos séculos XVII e XVIII. E, por fim, se faz menção ao trabalho de Cantor, com a teoria de conjuntos e os conjuntos infinitos. Traremos ainda algumas questões do infinito matemático na atualidade (SAMPAIO, 2008).

O infinito passou por diversas concepções e representações de acordo com a época e a sociedade. É um conceito abstrato, contrário à intuição e bastante complexo que sempre causou um desamparo lógico para os que se aventuraram na busca por compreendê-lo. Sempre foi tema de intensas reflexões filosóficas, além de ter sido responsável pelo surgimento de vários paradoxos. O infinito é controverso tanto na sua forma atual como potencial, é um conceito que percorre todo o desenvolvimento da Matemática, isto é, dos números irracionais no século VI a.C. aos números hiper-reais do século XXI (MACHADO, SCHUCK, WAGNER, 2013).

Muitos matemáticos já se dedicaram a compreender este tema que sempre suscitou dúvidas e questões. Exemplo disso são os paradoxos de Zenão de Eleia e os paradoxos envolvendo a teoria dos conjuntos infinitos. A incompreensão do infinito gerou problemas inexplicáveis e muitos matemáticos se dedicaram a clarificar tal conceito. Com o objetivo de compreender o que é o infinito para a Matemática, escrevemos esse Trabalho de Conclusão de Curso (TCC), que sintetiza o estudo desenvolvido.

CAPÍTULO 2 METODOLOGIA

Uma pesquisa só é iniciada se existir uma pergunta norteadora, algo que incomoda o pesquisador, um questionamento para o qual se busca respostas. Desse modo, pesquisar é buscar, incessantemente, por respostas que parem o incômodo causado pelo problema de partida. Dessa busca podem surgir novas perguntas e, assim, o ciclo sempre se renova (GERHARDT, SILVEIRA, 2009, p. 12).

O presente trabalho está norteado pela seguinte interrogação: “O que é o infinito?”. Trata-se de uma interrogação complexa, que pode ser abordada em diferentes perspectivas. Para respondê-la, nesse texto, escolhemos o seguinte percurso: estudamos o que é o infinito na perspectiva da história da Matemática e como ele se presentifica em alguns paradoxos que se fundamentam nessa ideia.

Nesse capítulo, vamos tratar de alguns aspectos da metodologia de pesquisa na qual esse trabalho se fundamentou: pesquisa de natureza qualitativa, desenvolvida na perspectiva de um estudo exploratório.

2.1 PESQUISA QUALITATIVA

Antes de abordar a pesquisa qualitativa vamos discutir um pouco sobre o que é o ato de pesquisar e o sentido do adjetivo qualitativo. De acordo com Bicudo (1993), a ação de pesquisar pode ser entendida como a busca por compreensões a partir de uma indagação, por diferentes perspectivas. Entende-se, também, como a procura por explicações cada vez mais consistentes e claras acerca da interrogação feita a priori. Contudo, a resposta a encontrar não é necessariamente única e tampouco definitiva, existindo, sempre, a possibilidade de uma nova compreensão e interpretações a serem consideradas para que, dessa forma, se aproxime mais e de forma mais plena das múltiplas dimensões de um fenômeno interrogado. Para tanto, é preciso sempre um andar cuidadoso fundamentado no rigor e sistematicidade (BICUDO, 1993, p. 18).

“Interrogação (problema, pergunta), cuidado, rigor, sistematicidade são aspectos essenciais da pesquisa, qualquer que seja a área onde ela venha a ocorrer e qualquer que seja a concepção de ciência assumida pelo pesquisador” (BICUDO, 1993, p. 18) .

A pesquisa é entendida como o “(...) procedimento racional e sistemático que tem como objetivo proporcionar respostas aos problemas que são propostos. A pesquisa desenvolve-se

por um processo constituído de várias fases, desde a formulação do problema até a apresentação e discussão dos resultados” (GIL, 2007 *apud* GERHARDT, SILVEIRA, 2009, p. 48).

Agora vamos olhar para o termo “qualitativo” que, de acordo com Bicudo (2011), é o um adjetivo que transforma a natureza da pesquisa, indicando que esta trabalha com análise referente à qualidade dos dados.

Contudo, quando se deseja definir o que se entende por pesquisa qualitativa, se esbarra em, pelo menos, duas dificuldades. A primeira “diz respeito à abrangência do conceito, à especificidade de sua ação, aos limites deste campo de investigação. Este obstáculo, que se apresenta para atingir uma noção mais ou menos clara deste tipo de pesquisa, não é fácil de ultrapassar”. Já, a segunda dificuldade está “na busca de uma concepção precisa da ideia de pesquisa qualitativa, que é muito mais complexa e emerge dos suportes teóricos fundamentais que a alimentam” (TRIVIÑOS, 1987, p. 120).

2.2 A PESQUISA QUALITATIVA NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Podemos dizer que pesquisar em Educação Matemática não é pesquisar em Matemática, nem é pesquisar em Educação, mesmo que verse sobre assuntos concernentes às duas áreas, isto é, trabalhe com a Matemática e vale-se de procedimentos relativos à maneira de investigar próprios da Educação (BICUDO, 1993, p. 19).

Vejamos o pensamento da autora a respeito da pesquisa no limiar entre a Educação e a Matemática:

As pesquisas elaboradas no horizonte da região de inquérito da Educação Matemática trabalham em tomo dessas preocupações, interrogando o compreender matemático, o fazer matemático, os significados sociais, culturais e históricos da Matemática. São, portanto, pesquisas que solicitam domínio compreensivo de um vasto horizonte de conhecimentos, como os horizontes da Psicologia, da História, da Filosofia... e, certamente, da Matemática (BICUDO, 1993, p. 20).

A autora, ainda destaca a importância da junção da Matemática com a Educação para facilitar a realização de diálogo entre as duas áreas contribuindo para a produção mútua e avanços para ambas. Portanto, a conversa entre essas áreas é válida e ambas devem ter a mesma importância sem que uma se sobreponha a outra (BICUDO, 2012, p. 24).

Isso significa, conforme minha compreensão, que ao pesquisar em Educação Matemática, ambas as esferas de saber devem estar presentes, constituindo o solo em que seu pensar se movimenta, donde a lógica de produção de ambas as disciplinas, bem como os respectivos conteúdos temáticos e discursos que articulam as ideias que se mostram nucleares aos seus campos de significados devem ser de domínio do seu cotidiano (BICUDO, 2012, p. 24-25).

Na pesquisa em Educação Matemática, historicamente, podemos observar que prevalece a abordagem qualitativa, sendo essa uma de suas características, fato que se justifica quando pensamos no que se busca saber com os processos de investigação. Podemos ressaltar uma diversidade de temas de pesquisa na intersecção das duas áreas (Educação e Matemática). Observa-se tal fato nas pesquisas que se interessam em compreender o modo pelos quais os estudantes constroem o conhecimento matemático (BICUDO, 2012, p. 24). Por exemplo, se ocorre

individualmente, com os colegas, com a mídia, em contextos específicos; de atividades de ensino, da realidade escolar, dos textos que servem de mediadores ao ensino, mas que não são entendidos como neutros ideológica e cientificamente, donde atentar-se pelo que dizem além do dito. O mesmo ocorre com os documentos que sustentam instituições e a própria Educação Pública (BICUDO, 2012, p. 24).

Portanto, do ponto de vista da autora, a pesquisa qualitativa em Educação Matemática se justifica, pois ela possibilita que se compreenda a Matemática de maneira mais efetiva, se perceba o modo pelo qual ela é erguida, os significados da Matemática como um todo e sua expressividade no mundo. Dessa forma, a Educação Matemática contribui com Educação e com a Matemática. À Matemática por buscar meios que ajudem a compreendê-la melhor. À Educação por auxiliar em ações político-pedagógicas (BICUDO, 1993, p. 22).

2.3 ESTUDO EXPLORATÓRIO

O estudo exploratório é uma abordagem da pesquisa de cunho qualitativo indicado quando se conhece pouco sobre a temática a ser trabalhada. Esse estudo tem como objetivo buscar informações relevantes sobre o assunto para que, dessa maneira, o tema se torne mais claro e, assim, possibilite construir interrogações mais relevantes para condução da pesquisa (RAUPP, BEUREN, 2003, p. 80-81).

Desse modo, explorar um tema sugere reunir mais informações e buscar aliar novas características ao conteúdo tema da pesquisa. O estudo exploratório é uma forma de se ter um

primeiro contato no campo científico e se obter novas ideias de pesquisa, mais aprofundada, sobre o tema de interesse (RAUPP, BEUREN, 2003, p. 80-81).

Os estudos exploratórios permitem ao investigador aumentar sua experiência em torno de determinado problema. O pesquisador parte de uma hipótese e aprofunda seu estudo nos limites de uma realidade específica, buscando antecedentes, maior conhecimento, para, em seguida, planejar uma pesquisa descritiva ou do tipo experimental. Outras vezes, deseja delimitar ou manejar com maior segurança uma teoria cujo enunciado resulta demasiado amplo para os objetivos da pesquisa que tem em mente realizar. Pode ocorrer também que o investigador, baseado numa teoria, precise elaborar um instrumento, uma escala de opinião, por exemplo, que cogita num estudo descritivo que está planejando. Então, o pesquisador planeja um estudo exploratório para encontrar os elementos necessários que lhe permitam, em contato com determinada população, obter os resultados que deseja. Um estudo exploratório, por outro lado, pode servir para levantar possíveis problemas de pesquisa (TRIVIÑOS, 1987, p. 109).

O desenvolvimento de um estudo exploratório, por sua aparência simplista, não elimina o rigor no tratamento científico que todo pesquisador tem na condução de seus trabalhos de pesquisa. Este tipo de estudo, não dispensa a revisão da literatura, as entrevistas, questionário entre outros. O estudo exploratório é conduzido dentro de um esquema elaborado com o rigor e severidade característicos de uma pesquisa científica (TRIVIÑOS, 1987, p. 109-110).

Desse modo, esse trabalho apresenta um estudo exploratório sobre o que é o infinito na perspectiva da História da Matemática, de modo a permitir que nós, autoras, tenhamos uma compreensão inicial a respeito desse assunto. Para tanto, foram feitos os seguintes procedimentos de pesquisa: primeiramente estabeleceu-se uma pergunta norteadora (o que é o infinito?) e, em busca de respostas a essa interrogação, se deu todo o desenrolar do trabalho. Na revisão da literatura consultaram-se diversos livros de História da Matemática e História do Cálculo. Dentre estes podemos destacar os de autoria de Howard Eves e Carl B. Boyer, além de trabalhos científicos pertinentes à temática de interesse, tais como artigos, teses e dissertações. Posteriormente foi feito um estudo de alguns paradoxos que envolvem a ideia de infinito, desde a era grega até a atualidade, com o objetivo de explicitar a relação entre desses paradoxos e a ideia de infinito.

CAPÍTULO 3 ALGUMAS CONSIDERAÇÕES SOBRE O INFINITO ATRAVÉS DOS TEMPOS

O objetivo deste capítulo é discorrer sobre as diferentes formas de ver o infinito, bem como algumas abordagens sobre a história da Análise, desde a antiguidade até o século XX, uma vez que a história do infinito e a história da Análise estão intrinsecamente relacionadas. Ainda serão apresentadas algumas contribuições dos principais matemáticos que discorriam sobre o tema.

3.1 ERA GREGA

Desde os pré-socráticos, até Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845-1918), que as preocupações com o infinito, de modo intermitente, sempre foram controversas ao pensamento humano. Considerações das mais diversas ordens, por exemplo, filosófica e matemática aguçaram a curiosidade sobre o infinito e seus paradoxos. Os paradoxos de Zenão parecem ter sido uma das primeiras abordagens de algo ligado ao infinito ou paradoxal. Os antigos atomistas gregos também pensaram sobre essa questão do infinito. Para eles, os átomos em número infinito, se moviam em um espaço vazio infinito. Aristóteles, por outro lado, muito mais sistemático e metódico, separou o infinito de duas formas distintas: o infinito potencial e o infinito atual¹. No entanto, ele mesmo só considerava o potencial como real. O outro, o infinito atual, entretanto, não correspondia a nada, era inexistente. Dessa forma, os gregos apresentavam uma espécie de horror ao infinito atual, o infinito acabado. Mesmo no famoso livro de Euclides, *Os Elementos*, não se faz afirmativa acerca da infinidade dos números primos, senão que os números primos são mais numerosos que toda quantidade que tenha sido posta de números primos (CINDRA, 2012, p.1).

As ideias fundamentais do Cálculo Infinitesimal têm origem na Grécia Antiga. De acordo com a História, os gregos possuíam, já na época de Euclides e seu “Os Elementos”, quase todos os elementos fundamentais para o desenvolvimento do Cálculo, contudo a ideia de infinito não teve boa aceitação (BROLEZZI, 1999).

¹ “*Infinito atual* é aquele que pode ser concebido como uma entidade “completa”, “acabada”: todos os seus elementos podem ser pensados num ato único, ou ainda, no infinito como objeto”. Esta distinção é muito importante: o infinito potencial consiste num processo através do qual um número cresce para além dos limites finitos; o infinito atual não é um processo, é ele próprio um número” (SENA, 2011, p. 13).

O infinito, enquanto saber também criado, passou por diversos modos de concepção e de representação, mudando nosso olhar, nossa forma de representar e de concebê-lo nas diferentes épocas e sociedades. Tema abstrato, contrário à intuição e experiências quotidianas, centro de intensas reflexões filosóficas, foi responsável pela emergência de inúmeros paradoxos e negado por muito tempo como real objeto de estudo matemático. Controverso, oscilando entre ato e potência, o infinito perpassa praticamente todo o desenvolvimento histórico da Matemática: dos números irracionais no século VI a.C. aos atuais números hiper-reais no século XXI – passando pelo cálculo diferencial e integral no século XVIII e pela teoria de conjuntos no século XIX. Perpassa, portanto, uma série de conteúdos matemáticos que se estendem do ensino básico ao ensino superior (MACHADO, SCHUCK, WAGNER, 2013).

A Matemática grega mostra como os fundamentos originais do Cálculo têm início em considerações que envolvem tanto ideias de grandezas discretas quanto de grandezas contínuas, servindo ambas para se chegar aos resultados do Cálculo (MORAES et al, 2013).

Com isso, os gregos foram pioneiros na busca de compreender os fenômenos relacionados ao infinito, ao contínuo, ao infinitésimo, na busca de uma explicação para o movimento. Da ideia de movimento virão os primeiros conceitos do Cálculo Infinitesimal (BROLEZZI, 1999).

Por volta de 450 A.C., discípulo de Parmênides, Zeno de Eléa, mais conhecido como Zenão, ficou marcado na História da Matemática por afirmar que a ideia de infinitésimos é absurda, ou seja, caso possua algum comprimento, então uma quantidade infinita deles irá compor uma reta de comprimento infinito; e em caso contrário, não possui comprimento, então uma quantidade infinita deles tampouco terá comprimento. Ademais, afirmou ainda: aquilo que acrescentado a outro não o faz maior, e subtraído de outro não o faz menor, é simplesmente nada. Com isso Zenão de Eleia, e por meio dos seus paradoxos, trouxe o horror ao infinito (BROLEZZI, 1999).

Em suas teorias matemáticas os gregos faziam considerações sobre o infinito, porém na prática sempre fugiam (AMADEI, 2005, p. 26-27). O método de exaustão é exemplo disso. Foi com ele que os gregos encontraram uma forma para não confrontarem diretamente o infinito. Podemos observar este fato na citação que se segue:

É desse modo, descartando e evitando o uso do conceito de infinito em suas ações que os matemáticos gregos procuravam resolver a anomalia que Zenão havia causado. Eudoxo (408 – 355 a.C.), membro da antiga escola de Pitágoras, desenvolve a teoria das proporções e o seu “método de exaustão”, nos quais a teoria dos números é incorporada à estrutura geométrica e o conceito de infinito é evitado. Dois grandes matemáticos, Arquimedes e Euclides, assimilam, desenvolvem, e aplicam o método de exaustão de Eudoxo à problemas geométricos. Usam este método para manipular operações com limites sem invocar o conceito de infinito (REZENDE, 2003, p. 99 - 100).

Isso se deve à impossibilidade deles de tratar as ideias abstratas do infinito e do contínuo, em oposição às ideias do infinito discreto. A concepção continuísta se opunha a atomista, a primeira concepção considera número, espaço, tempo e matéria como divisíveis ao infinito, enquanto a segunda concepção preconiza a existência de elementos primitivos indivisíveis. Zenão, no entanto, considera ambas as concepções, igualmente, geradoras de impasses, esse fato é explicitado nos paradoxos de Zenão de Eléia (AMADEI, 2005, P.26-27).

Com os argumentos acerca da inconsistência dos infinitésimos, criou quatro paradoxos relativos ao tempo e ao movimento que mais tarde foram estudados por Aristóteles (384-322 A.C.). Aristóteles intitulou os paradoxos por: Aquiles, Seta, Dicotomia e Estádio, nomes pelos quais ficaram conhecidos até os dias de hoje. Com esses problemas, Zenão mostrou que um segmento de reta com comprimento finito, pode ser dividido em infinitos segmentos de reta também de comprimentos finitos. Estes argumentos culminaram à discussão entre o infinito atual e o infinito potencial por séculos. Dessa forma surgem as primeiras preocupações sobre como definir e interpretar o infinito. Mesmo Aristóteles tendo negado o infinito atual, acabou alimentando especulações sobre do tema. Para ele o infinito potencial era uma construção da mente humana, necessária, por vezes, para resolver problemas envolvendo grandezas contínuas infinitamente pequenas ou infinitamente grandes, enquanto que o infinito atual já admitia a existência de entidades de dimensão não finita, passíveis de formalizações (SAMPAIO, 2008).

Entretanto a grande questão por trás dos paradoxos de Zenão está no fato de se considerar tempo contínuo e espaço discreto, ou vice versa. Os paradoxos contrariam o senso comum e dão a sensação de certo desamparo intuitivo, uma vez que relatam uma situação de perplexidade comum ante à continuidade e ao infinito. Exemplo disso, no caso do Paradoxo da Dicotomia, Zenão nos coloca diante da aparente impossibilidade de percorrermos um número de infinitas distâncias num tempo finito. Já no caso do Paradoxo da Flecha, Zenão vai de encontro à noção de espaço e tempo constituído por partes indivisíveis. Os paradoxos de Zenão ilustram a perplexidade da mente humana ante os fenômenos do movimento e da velocidade, trazendo à tona controvérsias inerentes que, em geral, tendem a passar despercebidas (BROLEZZI, 1999).

Um dos exemplos mais antigos das inconsistências causadas pelo infinito na história da matemática são esses paradoxos. Os paradoxos de Zenão trazem propriedades contra intuitiva do infinito e alguns impasses quando se busca um sentido nos fenômenos que o envolvem. Porém as raízes, de fato, da ideia de infinito estão no trabalho realizado por Pitágoras (569-

500 A.C.), um século antes de Zenão e só milênios mais tarde que os números irracionais protagonizaram a concepção de cardinalidade dos conjuntos infinitos (AMADEI, 2005, P.28).

Com a descoberta dos irracionais os argumentos de Zenão começaram a aborrecer ainda mais os matemáticos da época. Nas últimas décadas do século V a.C., os pitagóricos, discípulos de Pitágoras, perceberam que não conseguiam estabelecer uma razão entre o lado e a diagonal de um quadrado por meio de números racionais. No entanto, também existem outros exemplos de relação de segmentos de reta ou até mesmo curvas cujas medidas escapavam aos números racionais, tais como a diagonal do quadrado de lado um e a razão entre uma circunferência e seu diâmetro. Tais relações eram então consideradas grandezas e não números, sendo chamadas de incomensuráveis. O texto mais antigo, que se conhece, sobre a história da Matemática, que resistiu até aos nossos dias, é a obra *De architectura* de Marcus Vitruvius Pollio (90-20 A.C.), onde se afirma que Pitágoras encontrou com os irracionais por meio de segmentos de reta incomensuráveis. Porém, muitos historiadores contemporâneos consideram não ter sido ele próprio, mas os pitagóricos (SAMPAIO, 2008, p. 208).

Pois, a série dos números ímpares, começando com a unidade e Aristóteles escreve que os pitagóricos e Platão consideraram o ilimitado ou indeterminado com existência própria, não como um acidente de algo mais. E que os pitagóricos chegaram a considerar o infinito (ilimitado, indeterminado) cognoscível pelos sentidos, pois eles não separavam os números das coisas. Os pitagóricos consideravam que o ilimitado se encontra além do céu. Platão, pelo contrário, asseverava que nenhum corpo material estaria além do céu. No tocante aos números inteiros, os pitagóricos identificaram o “indeterminado” com os números pares e o “determinado” com os números ímpares terminado em $2n - 1$ é igual a n^2 . Enquanto a série dos números, começando com dois e terminando em $2n$ é indeterminada (CINDRA, 2012,p.3).

Percebe-se, nos Diálogos de Platão (429-348 A.C.), que os matemáticos da época ficaram perturbados com a descoberta da incomensurabilidade. A escola platônica, para contornar os infinitesimais, usou um método indireto e rigoroso, nas demonstrações de cálculos de áreas e volumes, envolvendo somente o uso da lógica formal, o método da exaustão (assim intitulado por Grégoire de Saint-Vicent (1584-1667), em 1647). É, porém, de se ressaltar que, para que se possa utilizar este método, era necessário conhecer o resultado previamente. Dessa forma o infinito ficou assim “eliminado” da Matemática grega (SAMPAIO, 2008, p. 208).

Eudoxo de Cnido (390 a.C. – 337 a.C.) e Arquimedes de Siracusa (287 – 212 a.C), dois grandes matemáticos gregos, levaram adiante as ideias de infinito preconizadas por Zenão.

Esses dois matemáticos utilizaram as quantidades infinitesimais para o cálculo de áreas e volumes. Os Elementos de Euclides, livro V, apresenta a maior realização de Eudoxo, o método da exaustão, desenvolvido para calcular áreas e volumes. Por meio desse método não é preciso supor a existência real de quantidades infinitesimais, basta presumir a existência de quantidades “tão pequenas quanto se queira”. Portanto esse método nos desobriga de enfrentar o infinito, mas por outro lado, o método trata de uma introdução ao conceito de infinito potencial que foi fonte de inspiração dos matemáticos do século XIX para introduzir o limite como fundamento do cálculo. (AMADEI, 2005, p. 29).

3.2 IDADE MÉDIA

Na Idade Média predominava o teocentrismo² e, por esse motivo, não houve grande avanço das atividades científicas. (SAMPAIO, 2008, p. 210). Nessa época, destaca-se Santo Agostinho de Hipona (345 – 430), teocentrista, teólogo, filósofo e progressista, com a concepção de que o conhecimento era um presente de Deus, e de que a filosofia era submissa à fé cristã, ou seja, o conhecimento não podia ser contraditório aos dizeres da Bíblia. Sua *teoria da natureza divina* foi aceita durante muito tempo pela maioria dos críticos de sua época, tendo sido contestada somente nas universidades de Oxford e de Paris, anos mais tarde (século XIII). Em sua obra *Civitas Dei*, Santo Agostinho diz que uma sequência de números inteiros seria um *infinito atual*, fazendo-se pensar que o infinito seria uma qualidade de Deus. (REZENDE, 2003, p. 119-120).

Ainda de acordo com Rezende (2003, p. 125), foi sob a ótica da divisibilidade infinita e dos agregados infinitos que os filósofos medievais deram continuidade ao desenvolvimento de aspectos do infinito. Exemplo disso, Petros Hispanus, também conhecido como Papa João Paulo XXI (1215 - 1277), em sua obra *Summulae Logicales*, admitiu dois tipos de infinito, a saber: *infinito categoremático* – no qual todos os elementos são realizados – e *infinito sincategoremático* – limitado pela potencialidade. A partir do século XIII, considerações de Aristóteles a respeito da análise matemática são retomadas, passando a gerar interesse nos filósofos e, de uma forma geral, desencadearam uma reação negativa da Igreja Católica para

² O Teocentrismo consiste em adotar Deus como o alicerce de tudo o que existe no mundo. Na Idade Média, esta foi a doutrina que imperou. Seus principais fundamentos são respeito, moderação, humildade, abnegação e atenção. O teocentrismo é uma forte característica da Idade Média, já que nesta época tudo era explicado de acordo com os princípios de Deus e do pensamento teológico cristão. Um dos principais defensores desse modo de pensar é Santo Agostinho, pois este prega a salvação espiritual e a condição do homem no mundo, concluindo que há a dupla origem do homem – origem divina e origem do pecado original (VAZ, 2015).

com a ciência, pois alguns teólogos fundamentalistas temiam que a heresia acometesse os cientistas, uma vez que alguns pensamentos de Aristóteles se faziam contrários ao que mandavam as Escrituras (REZENDE, 2003, p. 120).

São Tomás de Aquino, mestre da Igreja Católica, possuía ideias contrárias a esses teólogos. Colocando-se contra o conceito de que todo conhecimento seria proveniente de iluminação divina, chegou a um consenso entre o cristianismo e o aristotelismo, favorecendo a criação de novos caminhos para a ciência da Europa Ocidental, haja vista que os filósofos escolásticos já não compartilhavam do horror que os gregos sentiam pelo infinito, uma vez que conviviam com este conceito e até mais do que isto: suas especulações sobre o tema reavivaram a discussão sobre o infinito, o que culminou com o desenvolvimento do Cálculo Infinitesimal no século XVII. (REZENDE, 2003, p. 120 – 121; SAMPAIO, 2008, p. 210).

3.3 UM GRANDE PERÍODO: DE XVII A XIX

3.3.1 Iminência do Cálculo

Já no século XVII, com a criação da geometria analítica e da álgebra, tem-se um grande avanço na matemática, sendo este século considerado por muitos como um século de gênios. (SAMPAIO, 2008, p. 208). De acordo com Rezende (2003, p. 78), o Cálculo Diferencial e Integral, antes deste período, não era mais que geometria, aritmética e filosofia natural. A partir do século XVIII, época em que se dá o desenvolvimento da Análise, estudiosos da área preocupam-se com a fundamentação dos conceitos e métodos analíticos para a construção do Cálculo. Outro fato que corrobora para o século XVII se destacar é, sem dúvida, a descoberta do Teorema Fundamental do Cálculo, inicialmente por Torricelli, tendo sua primeira demonstração fundamentalmente geométrica feita por James Gregory e por Barrow posteriormente. No entanto, esse teorema só foi de fato um elo entre os dois cálculos – o cálculo diferencial que se ocupava das “tangentes” e “velocidades”, e o integral, que se preocupava com “quadraturas” e “cubaturas” - até então existentes com Newton e Leibniz (REZENDE, 2003, p. 79).

Além disso, a tradução das obras de Arquimedes, em 1558, por Federigo Comandini (1559 - 1575), os latinos puderam ter acesso aos seus métodos, em particular o método da exaustão, e esse fato contribui para o desenvolvimento do Cálculo Infinitesimal. Johann Kepler (1571 – 1630), ministro luterano, utilizou e modificou este método, tendo como

mentores Nicolau de Cusa e Giordano Bruno, para considerar somas infinitas em seus trabalhos de astronomia (SAMPAIO, 2008, p. 211; REZENDE, 2003, p. 143).

Ainda nesse contexto é possível destacar as contribuições do matemático Galileu Galilei (1564-1642) acerca da natureza do infinito. Colaborou com o desenvolvimento da ideia de infinito atual, pois, até esse período, o conceito que se tinha era quase que restrito à ideia salutar de infinito potencial. No tratado *Diálogos sobre as duas novas ciências, de 1638*, Galileu aborda a divisão de um círculo em triângulos infinitesimais, de modo que este possa ser considerado como um polígono com um número infinito de lados (AMADEI, 2005, p. 30).

Galileu considerou o infinito como uma grandeza e mostrou-se muito mais interessado na correspondência de agregados infinitos, do que na razão de grandezas finitas para grandeza infinita. Esta concepção do infinito enquanto dissociada dos agregados infinitos que o geram é, sem dúvida, um dos principais obstáculos epistemológicos para a construção do seu próprio conceito. A correção desse desvio será feita pelo uso inicial de um maravilhoso instrumento inventado pelo cálculo: as séries infinitas. Tal ferramenta se constituiu, com efeito, num poderoso instrumento nessa passagem do discreto para o contínuo (REZENDE, 2003, p.125).

De acordo com Cindra (2012, p. 12) e Sampaio (2008, p. 211), é a Galileu Galilei que se deve a primeira conjectura explícita sobre conjuntos infinitos. Em *Diálogos sobre as duas novas ciências*, Galileu aborda conjuntos infinitos estabelecendo uma correspondência biunívoca entre os conjuntos dos inteiros e dos quadrados perfeitos. Entretanto, faltou a ele concluir que ambos os conjuntos possuem infinitos elementos e mesmo cardinal. Sua conclusão foi que, embora ambos os conjuntos tenham infinitos elementos, sempre ficará a impressão de que existem menos números quadrados do que inteiros, fato que se justifica quando se considera um intervalo finito de comparação entre esses dois conjuntos. Como exemplo, se considerarmos o conjunto dos números naturais entre 1 e 100. O conjunto dos números que são quadrado de outro número nesse intervalo é composto por apenas 10 elementos. Dessa forma, Galileu teve a sagacidade de perceber que as leis que regem conjuntos finitos podem não ser validadas em conjuntos infinitos. Assim sendo, escreveu que os atributos “igual a”, “maior que” ou “menor que” não deviam ser utilizados para comparar conjuntos infinitos.

Ainda de acordo com Sampaio (2008, p. 211), esta obra concerne num diálogo cujos três personagens são *Salviati*, um sábio homem de boa formação científica, *Sagredo*, um leigo inteligente, e *Simplicius*, um indivíduo que crê cegamente nas concepções aristotélicas.

Galileu assume a personagem de Salviati e com ele faz uso de quantidades infinitesimais de forma fantasiosa. Exemplo disso é no diálogo entre *Salviati* e *Simplicius*, no qual eles discorrem sobre o fato de um segmento de reta conter um infinito de partes, porém, em outro momento, apresenta os indivisíveis como conceitos transcendentais ao nosso conhecimento e, como citado acima, essa obra de Galileu apresenta o paradoxo entre os números inteiros e o quadrado perfeito, na qual conclui que o cardinal desses conjuntos nem é este menor que aquele e nem aquele menor que este. Abaixo se transcreve um trecho do diálogo:

Salviati. (...) Se eu disser que os números tomados na sua totalidade, incluindo os quadrados e os não quadrados, são mais numerosos do que os quadrados sozinhos, enunciarei uma proposição verdadeira, não é?

Simplicius. Certamente

Salviati. De seguida, se eu perguntar agora quantos quadrados há, podemos responder, sem nos enganarmos, que há tantas quantas as raízes quadradas correspondentes, atendendo a que todo o quadrado tem a sua raiz e toda a raiz o seu quadrado, que um quadrado não tem mais do que uma raiz, nem uma raiz mais do que um quadrado.

Simplicius. Exactamente.

Salviati. Mas se eu perguntar quantas raízes há, não se pode negar que há tantas quantos os números, porque todo o número é a raiz de algum quadrado. Assim sendo, será, portanto, preciso dizer que há tantos números quadrados como números, uma vez que eles são tantos como as raízes e que as raízes representam o conjunto dos números. No entanto dizíamos de princípio que há mais números do que quadrados, já que a maior parte dos números não são quadrados. (...)

Sagredo. Então, qual a conclusão a tirar nestas condições?

Salviati. Aos meus olhos, a única conclusão possível é dizer que o conjunto dos números, dos quadrados, das raízes é infinito; que o total dos números quadrados não é inferior ao conjunto dos números, nem este superior àquele. E finalmente, que os atributos igual, maior e menor não têm sentido para quantidades infinitas, mas somente para quantidades finitas (GALILEI, 1638 *apud* SAMPAIO 2008, p. 212).

Em relação a grandezas contínuas, Galileu afirmava que estas eram compostas por partes indivisíveis. Em análise aos paradoxos de Zenão, em particular o de Aquiles e a tartaruga e o da Dicotomia, ele se da conta que a solução desses paradoxos está associada a uma série infinita. Posto isso, Galileu dá um passo para a Análise. Todavia, uma vez mais antecipa a essência de um problema, porém sem propor uma conclusão para tal. Questões referentes à convergência, ou não, de séries serão analisadas posteriormente, embora ainda de forma vaga, por Isaac Newton (REZENDE, 2003, p. 147).

Ainda no século XVII, podemos destacar as contribuições de Bonaventura Cavalieri – 1587 a 1647 – professor da Universidade de Bolonha e aluno de Galileu. Esse matemático retoma o conceito de indivisíveis, considerando um contexto fundamentalmente geométrico. Em sua obra *Geometria indivisibilium continuorum nova quadam promota*, de 1635, desenvolve metodicamente as ideias de Kepler. Foi nessa obra que Bonaventura Cavalieri

chegou a um grande resultado, atualmente conhecido pelo nome de “princípio de Cavalieiri”. Para tanto, transformou o uso de retas e superfície em uma técnica imponente para comparar áreas e volumes. Não obstante, Cavalieri também abordou os infinitesimais. Exemplo disso é o caso de métodos para buscar tangente a uma curva em dado ponto (REZENDE, 2003, p. 148; SAMPAIO, 2008, p. 212).

Cavalieri ganhou visibilidade entre os matemáticos de sua época com *Geometria indivisibilius*, sendo essa uma das obras mais consultadas para o desenvolvimento de trabalhos em geometria, porém também foi muito criticado por alguns nomes como Paul Guldin, que acusava a teoria de Cavalieri de conduzir às falácias lógicas (paradoxos). Por exemplo, sendo o número de indivisíveis infinito, eles se tornariam incomparáveis entre si (REZENDE, 2003, p. 150).

John Wallis (1616 - 1703) em 1655 em sua obra intitulada *Arithmetica infinitorum*, tentou superar Cavalieri. Muito embora Wallis faça uso de métodos com pouco rigor, deve-se a ele primeira aplicação do símbolo ∞ com a finalidade de representar a fração $\frac{1}{0}$. Além do mais, fez uso de expoentes negativos, decimais e complexos, bem como deu início ao estudo de sucessões infinitas (SAMPALIO, 2008, p. 212).

É verdade que René Descartes (1596 – 1650) conhecia a visão que os antigos, medievais escolásticos e seus contemporâneos tinham sobre os infinitesimais. Esse filósofo e matemático francês, muito provavelmente, tenha até mesmo feito uso dessas ideias para calcular centros de gravidade, áreas e volumes. Todavia, após sua famosa obra *Géometrie*, de 1637, Descartes perde parte de sua vontade em estudar os infinitesimais do Cálculo, dedicando-se com afinco à Geometria Analítica e a métodos algébricos, justificando que apenas por intermédio da álgebra é possível alcançar a verdade (REZENDE, 2003, p. 164).

Pierre de Fermat (1601 – 1665), em um artigo de 1638 publicou um método inovador para solucionar problemas relativos a máximos e mínimos. Vale observar que nessa obra Fermat começa a inserir termos e expressões analíticas. Assim, o conceito de função surge e, gradualmente, é inserido no desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral. Outra contribuição de Fermat é o método das tangentes, no qual são utilizadas quantidades infinitesimais. O que se sobressai no trabalho de Fermat é a antecipação da ideia de integração como limite da soma de retângulos. (REZENDE, 2003, p. 66 - 67). Carl B. Boyer (1949, p. 161) comenta em seu livro (*The history of the calculus and its conceptual development*) que, apesar de Fermat dominar todos os aspectos e seu método, faltou a ele

uma explicação clara da operação de limite, bem como perceber o elemento fundamental de seu método em si próprio.

3.3.2 Criação do Cálculo

Isaac Newton (1642 - 1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716) criaram o Cálculo por diferentes meios, ou seja, tanto o modo como fizeram suas notações como na concepção de suas ideias. Newton preocupava-se com problemas referentes à velocidade (cinemática), enquanto que Leibniz abordava as tangentes (geométrica). Em outras palavras, Newton teria criado o Cálculo por intermédio do contínuo, enquanto Leibniz pelo conceito de discreto. As duas concepções foram importantes, uma vez que como ainda não se tinha a ideia de limite, o conceito de contínuo e discreto guiaram as tentativas de entender as variações (BROLEZZI, 1999, p. 29 - 30).

Newton, em sua *teoria das flexões* – escrita em 1655-66, porém publicada apenas em 1742 sob o nome de *Methodus fluxionum et serium inifinitorium* – denominava os infinitésimos por momentos de fluxões e introduziu a ideia de limite, ainda que de forma não muito clara. Concomitantemente, Leibniz também descobriu o Cálculo nos anos correspondentes ao período de 1673 e 1676. Hoje em dia, a notação – dx e dy – que utilizamos para as expressões do Cálculo deve-se fundamentalmente a Leibniz, bem como o nome *calculus integralis* e *calculus differentialis*. Seu primeiro trabalho em cálculo diferencial foi publicado em 1684 sob o título de *Nova methodus pró maximis et minimis, itemque tangentibus qua necirracionales quantitates moratur*, na qual o autor aplica o cálculo diferencial para determinar tangentes, e o cálculo integral para quadraturas (SAMPAIO, 2008, p. 212 - 213).

Numa das suas cartas a Foucher, em 1693, elogia Grégoire de Saint Vicent por ter determinado o local exacto onde Aquiles iria encontrar-se com a tartaruga, tendo resolvido este paradoxo de Zenão, aceitando desta forma o infinito actual. Grégoire de Saint Vicent refere explicitamente à soma de um número infinito de grandezas, considerações importantíssimas para o Cálculo integral. Esta manipulação de somas infinitas tornou-se então de uso corrente na Matemática. No entanto, há que salientar que Leibniz só concebia o infinito/infinitesimal como facilitador do cálculo e cujo resultado se exprimia sempre em função de quantidades finitas (SAMPAIO, 2008, 213).

As ideias de Newton e Leibniz iniciaram de maneiras distintas, porém acabaram convergindo para um lugar comum: o Cálculo. Por conseguinte, o Cálculo é o lugar no qual o

discreto e o contínuo interagem de maneira única. Com a finalidade de se obter um melhor entendimento do Cálculo, fez-se necessário compreender a teoria sobre o contínuo, bem como da reta real, pois o Cálculo se sustenta nos números reais e a noção de limite (BROLEZZI, 1999, p. 33).

Os métodos do Cálculo Infinitesimal, nessa época, foram duramente criticados por sua falta de clareza, em particular pelo filósofo bispo britânico George Berkeley (1683 - 1753) no texto *The Analyst*. Nesse texto, mostrou a necessidade de maior esclarecimento e confiabilidade nos princípios que os autores desse século empregaram ao Cálculo. Sobretudo, suas críticas foram direcionadas aos métodos de Newton, servindo também ao trabalho de Leibniz (REZENDE, 2003, p. 221).

Criticou ainda a dedução da fluxão de x^n baseado no comportamento contraditório da quantidade infinitamente pequena “o”, que, primeiro, é diferente de zero (para dividir) e, depois, igual a zero (para que desapareçam os termos com potências de “o”). Mostra, portanto, que a existência do “o” é inconcebível do ponto de vista lógico (REZENDE, 2003, p. 222).

Na visão de Berkeley, o processo de divisibilidade infinita era de fato irrealidade e as quantidades infinitamente pequenas inconcebíveis, por estas não poderem ser percebidas pela consciência por meio dos sentidos. Para o autor, até mesmo a matemática teria o compromisso de se relacionar com o mundo real, ou seja, da percepção sensorial. O resultado dessas críticas foi bastante frutífero, uma vez que, nos próximos anos, surgiram cerca de três dezenas de artigos tentando justificar suas críticas (REZENDE, 2003, p. 223).

3.3.3 Período de transição do Cálculo para a Análise

Leonhard Euler (1707 - 1783), teólogo e matemático suíço, marcou a passagem do Cálculo para a Análise Real, publicando 530 obras em vida e muitas outras póstumas. Foi sem dúvida um escritor de grande produtividade, figurando em praticamente todos os ramos da Matemática. Devem-se a Euler as seguintes notações, dentre outras: $f(x)$ para funções; e para a base dos logaritmos naturais; e \sum para somatórios. Dentre suas inúmeras obras, ganham destaque *Introductio in analysin infinitorum* (1748, em dois volumes), cujo primeiro volume trata substancialmente de processos infinitos, no qual a ideia de função assume papel central na análise matemática conservado até os dias de hoje; *Institutiones calculi differentialis* (1755) e *Institutiones calculi integralis* (1768 – 74, em três volumes). Além

disso, a sua célebre igualdade, representada pela equação: $e^{i\pi} + 1 = 0$ – equação (1) – que relaciona cinco dos mais importantes números da matemática, também ganha destaque (EVES, 1997, p. 471 – 474; ESTRADA et al, 2000, p. 579).

De acordo com Boyer (1996, p. 306), “pode ser dito com justiça que Euler fez pela análise de Newton e Leibniz o que Euclides fizera pela geometria de Eudoxo e Teatetus, ou o que Viète fizera pela álgebra de al-Khowarizmi e Cardano”. No que concerne às quantidades infinitesimais, a visão de Euler foi bastante singular, aproximando-se, por vezes, da de Wallis. Para Euler, uma quantidade infinitamente pequena era algo tão somente igual à zero. Seu modo simplista de pensar poderia ter fundamentado uma interpretação do conceito de limite, em que as diferenciais sejam variáveis tendendo a zero. Porém, não ocorreu dessa maneira. Para o autor, essas quantidades eram sumariamente zero. Contudo, a pesar de ter aceitado uma porção infinita de infinitesimais, continuou cético de que eram todos iguais a zero e, dessa forma, a ideia de derivada era tão somente a razão de incrementos infinitesimais (REZENDE, 2003, p. 228 - 229).

É conhecido o fato de Euler e o matemático Jean Round d’Alembert (1717 - 1783) trocarem correspondência periodicamente. Para D’Alembert, o termo infinitesimal expressava “indefinidamente pequeno” e, sendo assim, procurou expressar essa condição em termos de limite, ou seja, o Cálculo deveria basear-se fundamentalmente no conceito de limite. Da mesma forma que Euler, ele acreditava na possibilidade da existência de quantidades infinitamente grandes assim como infinitamente pequenas. Portanto, foi com D’Alembert que a ideia de limite passou a ser disseminada no Cálculo. Uma vez que ele trabalhava com grandezas geométricas, nunca concebeu o *infinito atual*, aceitando somente o *infinito potencial*, justificando que determinada grandeza ou tem magnitude ou então nada é (REZENDE, 2003, p. 231 – 232; SAMPAIO, 2008, p. 214).

Um grande matemático do período da Revolução francesa, Joseph-Louis Lagrange (1736 - 1813), foi absolutamente contrário à ideia de limite de Newton e d’Alembert, considerando exclusivamente um embasamento do Cálculo por meio da Álgebra. Compôs a obra *Theorie des fonctions analytiques* em 1697, na qual aparecem as notações $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$,..., $f^{(n)}(x)$ para representar as funções e suas derivadas de ordens maiores. Acreditava na possibilidade de banir o uso de limites ou infinitésimo, entretanto não tardou a aparecerem alguns enganos em suas justificativas. (SAMPALIO, 2008, p. 214).

D’Alembert e Lagrange merecem ser referenciados por sua audácia na busca de uma fundamentação com mais rigor para o Cálculo Infinitesimal. D’Alembert buscou desenvolver

o Cálculo por meio da ideia de limite, enquanto Lagrange voltou-se para o Cálculo baseado no desenvolvimento das funções em séries de potências. (ESTRADA et al, 2000, p. 579).

Os matemáticos contemporâneos e posteriores a Berkeley, com seu orgulho ferido devido às suas críticas, começaram um árduo trabalho em busca da resposta para as questões propostas pelo filósofo britânico. No século XVIII, esses pormenores que geravam dúvidas permaneceram insolúveis, tendo sido apenas no século seguinte que o Cálculo superou de vez essa penumbra com a inserção dos seguintes conceitos: quantidades variáveis dão origem ao conceito de função; razões de diferenciais passam à função derivada; e as quantidades infinitesimais são substituídas pelo conceito de limite. (REZENDE, 2003, p. 238).

3.3.4 Nascimento da Análise Real

O século XIX foi marcado por uma forte investigação a propósito dos fundamentos da análise matemática. Os conceitos de função, limite, série convergente, continuidade, continuidade uniforme, derivada, integral, convergência uniforme começaram a ser esclarecidos. Deve-se a Bernard Bolzano (1781 – 1848) e Augustin Louis Cauchy (1789 - 1857) grande parte dessa busca por rigor na análise, conceitos que não dependessem da intuição geométrica. Esse processo ficou conhecido como a aritmetização da análise, que atingiu seu apogeu nos trabalhos de Karl Weierstrass³ (1815 – 1897). (SÁ, 2000, p. 579).

O embasamento teórico da análise matemática só foi possível com a clarificação da ideia de número e com a construção de sistemas numéricos gerais. Richard Dedekind (1831 – 1916) e Gerog Cantor (1845 – 1918) fizeram grandes contribuições nesse cenário. Tal feito conduziu à teoria dos conjuntos, sendo esta o pilar de quase toda a matemática moderna. (ESTRADA et al, 2000, p. 579 - 580).

Este século também foi marcado por uma dissociação entre a matemática pura e a aplicada, um momento de reflexão acerca das bases da matemática. Chagar aos resultados já não era o bastante. Era preciso pensar em seu significado, ou seja, no âmbito do cálculo, o que vem a ser uma função de variável real entre outros conceitos. Essa discussão fez ressurgir o impasse em relação ao infinito atual. (SAMPAIO, 2008, p. 215).

³ “A definição de limite de Weierstrass (a definição usual $\varepsilon - \delta$: o limite da função $f(x)$ definida numa vizinhança de a quando x tende para a é igual a a finito se para qualquer número $\varepsilon > 0$ for possível encontrar um número $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que $|f(x) - a| < \varepsilon$ sempre que x satisfaça a condição $|x - a| < \delta$) veio libertar o Cálculo de especulações metafísicas, assim nascendo a moderna Análise” (MADEIRA, COSTA, 2012, p. 82).

Cauchy foi considerado um dos mais célebres matemáticos no estudo da análise do início do século XIX. Desenvolveu pesquisa relativa a convergência e divergência de séries infinitas, teoria das funções reais e complexas e equações diferenciais no ramo da análise. Seu nome imaterializou-se nos livros de cálculo até os dias de hoje devido ao *teste da razão de Cauchy*, *teste da raiz de Cauchy*, *desigualdade de Cauchy*, *fórmula integral de Cauchy*, *teorema integral de Cauchy* e *equações diferenciais de Cauchy-Riemann*. Deve-se também a Cauchy boa parte do cálculo conhecido hoje na literatura da área de exatas. Por exemplo, conceitos básicos de limite e continuidade. Suas principais obras que contribuíram para o avanço do Cálculo envolvem *Cours d'analyse de l'Ecole Royale Polytechnique*, de 1821, *Résumé des leçons sur le Calcul infinitesimal* – volume I, de 1823 – e *Leçons sur le Calcul différentiel*, de 1829. Cauchy entendia a integral definida como sendo um limite de soma de conjunto que cresce indefinidamente, no qual suas partes tendem a zero, muito similar ao que fazemos hoje. Além disso, definiu a derivada de acordo com a equação (2), na qual $y = f(x)$, quando $\Delta x \rightarrow 0$: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ (EVES, 1997, p. 531 – 532; SAMPAIO, 2008, p.215).

Este matemático concebia que os infinitésimos não eram zero nem tampouco uma constante tão pequena quanto se queira, considerando o infinitésimo como uma varável que tende a zero. Vale observar que a noção de infinitésimo surgia da noção de limite, fato que seus antecessores não compartilhavam, uma vez que pensavam nessa quantidade infinitamente pequena como um elemento metafísico. (REZENDE, 2003, p. 243).

Outro matemático que se destacou como precursor no processo de aritmetização da análise foi Bolzano. Este processo teve início em 1700, porém seu ápice se deu com o rompimento entre a Análise e a geometria por volta do século XIX. A partir disso, o conceito de limite estava isento da ideia de movimento, quantidades geométricas e quantidades infinitamente pequenas. Embora não tenha sido reconhecido por seus contemporâneos e parte de suas obras tenha sido póstuma, fez grande contribuição para a análise, nomeadamente: *teorema de Bolzano-Weierstrass*, fundamental na teoria de conjuntos; e *teorema do valor intermediário*. Bolzano expandiu a ideia de Cauchy, levando esse conceito para a teoria dos conjuntos e admitindo o infinito atual. (EVES, 1997, p. 529 – 530; REZENDE, 2003, p. 244).

Foi com Bolzano que uma mudança ocorreu na compreensão do infinito. Este matemático defendia o infinito atual relativamente a paradoxos do infinito, fato que se comprova em sua obra póstuma, de 1851, *Paradoxien des unendlichen*. Em sua teoria, distinguir um conjunto por suas características já era o suficiente, sendo desnecessário enumerar elemento por elemento do mesmo. Também era de seu conhecimento que, no caso

dos conjuntos infinitos, as regras não eram tão categóricas, a pesar de compartilhar do pressuposto de Arquimedes de que o todo é maior que as partes. (SAMPAIO, 2008, p. 215 - 216).

Além disso, Bolzano analisou o paradoxo de Galileu Galilei, bem como exemplos análogos referentes à bijeção entre o conjunto dos números inteiros e os quadrados perfeitos, e tentou estabelecer relação entre conjuntos infinitos. Nesse contexto, Bolzano parece ter se dado conta da diferença existente entre o infinito dos números reais e dos conjuntos inteiros. O trabalho de 1851 traz algumas características muito importantes para a teoria dos conjuntos infinitos. Porém, faltou a Bolzano concluir que uma bijeção entre dois conjuntos seria suficiente para afirmar que ambos possuem o mesmo cardinal. (EVES, 1997, p. 530; SAMPAIO, 2008, p. 216).

Weierstrass foi um dos principais contribuidores da aritmetização da Análise. Foi através de seu intermédio que a Análise foi libertada, de uma vez por todas, de quantidades geométricas e da ideia de movimento. (REZENDE, 2003, p. 256). Este autor escreveu vários artigos a propósito de integrais hiperelípticas, funções abelianas e equações diferenciais algébricas, sendo sua obra mais conhecida a *teoria das funções complexas* através de série de potências. Weierstrass tinha especial interesse pelo estudo de funções inteiras e funções definidas por produtos infinitos. Seu trabalho também foi singular na descoberta da convergência uniforme, e reduziu os princípios de análise ao conceito de números reais. (EVES, 1997, p. 612).

Aplicação de Weierstrass seria conceber a Análise fundamentada tão somente na ideia de número. Para tanto, foi necessário definir um número racional de forma independente do limite. A solução alcançada pelo matemático foi definir número como uma sequência que converge para o próprio número. Sendo assim, $\sqrt{2}$, por exemplo, não seria o limite da sequência (1; 1,4; 1,41; 1,414; ...), mas a própria sequência a convergir. (REZENDE, 2003, p. 252).

Dedekind, por sua vez, dedicou-se a fundamentar uma minuciosa teoria acerca dos irracionais, tendo como uma de suas inspirações a teoria de Eudoxo de Cnido sobre proporções. Deve-se a ele a criação dos números reais e, sobretudo, os primeiros estudos sistemáticos sobre teoria dos conjuntos. Desta forma, estabelece correspondência biunívoca entre a reta e o conjunto dos números reais. Resultado disto foi o estabelecimento de uma relação um para um entre conjuntos infinitos, ou seja, migrando do infinito potencial para o atual. Em sua obra *Stetigkeit und irrationale Zahlen* – traduzida como *A continuidade e os*

números irracionais, de 1872 – Dedekind define conjunto infinito e, em 1888, no livro *Was sind und was sollen die Zahlen?* – tradução: *O que são e para que servem os números?* – expande essa ideia. Com isso, o autor chega à seguinte conclusão: dado um conjunto S, este é infinito se e somente se for equipotente a um conjunto próprio. (SAMPAIO, 2008, p. 216 - 217).

Em resumo, Dedekind caracteriza a continuidade da reta pela afirmação que todo “corte” da reta é produzido por um ponto dela mesma, isto é, qualquer que seja o corte (A, B), gerado pelos subconjuntos A e B, existe sempre um ponto da reta que “separa” as duas classes (A) e (B). Esta afirmação, da qual “*nem a mim nem a ninguém é possível dar uma demonstração qualquer*”, tornou-se conhecida desde então como o postulado da continuidade de Dedekind. Os números reais são obtidos, a partir deste postulado, por uma extensão dos racionais para um domínio contínuo. (REZENDE, 2003, p. 255).

Até mesmo na Matemática, a aceitação do infinito atual ocorreu somente em meados do século XIX. Até então, excetuando-se alguns casos específicos, foi apenas o infinito potencial aristotélico que figurou. Inclusive, Weierstrass fundamentou sua Análise por meio do infinito potencial. A absorção do infinito atual traz à tona um impasse próprio de conjuntos infinitos, isto é, um universo no qual a parte é igual ao todo. Ou seja, há possibilidade de um subconjunto ser posto em bijeção com o próprio conjunto. Alguns matemáticos como Bolzano e Cauchy já haviam percebido essa propriedade. Porém, este fato não foi bem aceito por Cauchy, que apresentou resistência à aceitação da existência do infinito atual. Em contrapartida, Dedekind e Cantor tiveram aproveitaram-se de tal fato. (REZENDE, 2008, p. 258).

No entanto, foi com Cantor que a teoria dos conjuntos foi além. Ele desenvolveu a teoria dos conjuntos infinitos. Seu maior feito foi mostrar que o conjunto dos racionais pode se corresponder de forma biunívoca com o conjunto dos inteiros. Isto é, estes dois conjuntos têm a mesma potência, sendo sua representação \aleph_0 (discreto), fato que já não procede com o conjunto dos reais. Ou seja, o conjunto dos números reais possui uma potência superior, representada por \aleph_1 (contínuo). \aleph_0 e \aleph_1 simbolizam as potências do infinito e recebem o nome de números transfinitos, sendo $\aleph_0 < \aleph_1$. Nos dias atuais já se conhecem números transfinitos superiores a \aleph_1 , todavia não se tem exemplo de nenhum número entre essas duas potências. Isto posto, vale dizer que para os conceitos básicos do Cálculo, \aleph_0 e \aleph_1 de Cantor são suficientes. (REZENDE, 2003, p. 259).

O desenvolvimento da teoria dos conjuntos infinitos por Cantor foi duramente criticado por Leopold Kronecker (1823 - 1891), professor da Universidade de Berlim. Com base no

infinito atual, Cantor desenvolve toda a sua teoria conhecida como teoria dos números cardinais transfinitos. Para obter seus resultados, foi preciso construir os números reais dependentes apenas da aritmética. Um fato muito importante que Cantor concluiu foi referente ao cardinal dos conjuntos: há infinitos iguais e diferentes. Desta forma, Cantor mostrou que subconjuntos infinitos dos conjuntos discretos têm o mesmo cardinal, e que o conjunto dos racionais é numerável – isto é, é possível estabelecer uma bijeção entre este conjunto e o dos naturais. Provou também que o conjunto dos reais não é numerável, ou seja, não é possível estabelecer uma relação biunívoca entre os reais e os naturais. (SAMPAIO, 2008. p. 217 - 218).

Não satisfeito com esses resultados, Cantor desejou ir além partindo em busca de outros infinitos, ou seja, infinitos entre \aleph_0 e \aleph_1 , ou maiores que \aleph_1 . Seria natural supor que conjuntos contínuos com dimensão maior que um também tivessem infinitos maiores. Porém, Cantor provou que o senso comum estava errado quando conseguiu estabelecer uma relação biunívoca entre o intervalo $[0, 1]$ e $[0, 1]^n$, para todo n natural, em sua obra intitulada *Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre* – traduzida como *Uma contribuição para a teoria dos conjuntos*, de 1788. A existência de infinitos maiores foi provada mais adiante, porém infinitos intermediários entre o discreto e o contínuo não foi provada tampouco refutada até hoje, e essa dicotomia ficou conhecida pela *Hipótese do contínuo*. A teoria dos conjuntos infinitos de Cantor carreteou mudanças para a matemática: o infinito atual foi aceito de vez. Contudo, sua teoria não estava livre de inconsistências. Algumas delas descobertas pelo próprio autor, por exemplo, a impossibilidade de haver o conjunto de todos os conjuntos, e outras foram solucionadas no século XX. (SAMPAIO, 2008, p. 218).

3.4 SÉCULO XX: DAVID HILBERT

O matemático David Hilbert (1862 – 1943), nascido em Königsberg (Prússia), estudou na Universidade de Königsberg. Seu principal professor foi Heinrich Weber (1842 – 1913). Um de seus principais interesses era a teoria dos invariantes, porém contribuiu nas mais diversas áreas da Matemática como será mostrado adiante. (BOYER, 1996, p. 421 - 422).

Hilbert foi um matemático muito participativo dos eventos da área, porém um deles ficou marcado na história: o II Congresso Internacional de Matemática⁴, ocorrido em Paris,

⁴ O primeiro congresso internacional de matemática foi realizado em Zurique, na Suíça, em 1897 com aproximadamente 200 participantes. Os principais temas tratados foram Funções Analíticas, a Teoria dos

em 1900. Nesse congresso, Hilbert apresentou a conferência *Problemas de Matemática*, cujo teor tornou-se um clássico da área. Em outras palavras, nesse evento Hilbert apresentou uma lista contendo 23 problemas que necessitavam de resposta, com o objetivo de obter avanços e despertar interesse pelo estudo da disciplina (BOYER, 1996, p. 424 - 425).

Dentre os 23 problemas, vamos nos ater ao de número um, “A Hipótese do Contínuo de Cantor” – que foi solucionado por Paul Joseph Cohen em 1960 – o qual está dentro do propósito do trabalho, a saber, compreender as diferentes concepções de infinito, desde a era grega até os dias atuais.

O problema “A Hipótese do Contínuo de Cantor” divide-se em outros dois: se há um número transfinito entre o numerável e o contínuo, e se é possível o contínuo ser bem ordenado. (SAMPAIO, 2008, p. 219; BOYER, 1996, p. 245). Em outras palavras, a segunda parte deste problema interessa-se em saber se o conjunto dos números reais pode ser ordenado de forma que todo seu subconjunto tenha um “primeiro elemento” esse fato está intrinsicamente relacionado ao axioma da escolha, elaborado pelo alemão Ernst Zermelo (1871 – 1956) em 1904. Esse axioma afirma “dado qualquer conjunto de conjuntos mutuamente disjuntos não-vazios, existe pelo menos um conjunto que contém um e um só elemento em comum com cada um dos conjuntos não-vazios”. David Hilbert, um dos mais influentes matemáticos alemães do século XX, deixou inúmeras contribuições em diversos ramos da matemática. Ressaltam-se aqui algumas relativas à análise: estudo de equações integrais – Teoria Espectral e Conceito de Espaço – cálculo das variações e problema de Dirichlet. Estabeleceu a forma mais geral do princípio de Dirichlet, transformando-o num problema de variações. (BOYER, 1996, p. 425, 427; ROSA, 2010, p. 53).

O axioma da escolha, indispensável em análise, Kurt Gödel (1906 – 1978) em 1940 provou ser consistente com outros axiomas da teoria dos conjuntos; mas, em 1963, foi provado por Paul Cohen (n. 1934) que o axioma da escolha é independente dos outros axiomas num certo sistema de teoria dos conjuntos, mostrando assim que o axioma não pode ser provado dentro desse sistema. Isso parece excluir uma solução definida para o primeiro problema de Hilbert. (BOYER, 1996, p. 425).

Resumindo, as contribuições de Gödel e de Cohen mostram que a Hipótese do Contínuo não pode ser provada nem tampouco refutada quando se considera apenas os axiomas da base da teoria dos conjuntos. (SAMPAIO, 2008, p. 220).

Conjuntos de Cantor, Fundamentos da Lógica e Funções das Funções. A segunda versão do evento contou com cerca de 260 participantes. Este é um evento periódico, que ocorre a cada quatro anos e teve algumas edições interrompidas por conta da I Guerra Mundial. (ROSA, 2010, p. 34).

Notemos que um sistema axiomático deve satisfazer três condições: ser consistente, ser completo e cada postulado ser independente dos demais. Em 1931, o austríaco Kurt Gödel (...) surpreendeu os matemáticos de então com uma demonstração de que o método axiomático apresenta limites, ou seja, demonstrou que existem verdades matemáticas impossíveis de demonstrar por via lógica e qualquer sistema lógico não demonstra a sua consistência lógica. (SAMPAIO, 2008, p. 220).

Em outras palavras, de acordo com o teorema da incompletude, qualquer sistema axiomático não pode ser consistente e completo, fato afirmado por Gödel. E, por esta limitação, o método axiomático no qual se baseia toda a matemática é, por definição, incompleto, ou seja, qualquer que seja o conjunto de axiomas sempre permitirá enunciados verdadeiros não decorrentes desse sistema. Vale ainda dizer que a consistência dos axiomas não consegue ser demonstrada pelo próprio sistema. (ROSA, 2010, p. 44).

A pesar de tudo, a existência dos infinitamente pequenos ainda não havia sido incorporada à teoria de Cantor, e somente com a análise não standard esse conceito será incorporado pela matemática. Essa análise foi formulada por Abraham Robinson (1918 - 1974) em 1961. (SAMPAIO, 2008, p. 220).

3.5 ANÁLISE NÃO STANDARD: FUNDAMENTAÇÃO DO CÁLCULO INFINITESIMAL

Thoralf Albert Skolen (1887 - 1963) foi o precursor da análise não-standard com sua proposta de trabalho com números naturais indefinidamente grandes por meio de função e teoria de conjuntos que vão para o infinito. (SAMPAIO, 2008, p. 221).

O matemático Robinson, em 1960, desenvolveu a Análise Não-Standard (ANS). Seu artigo *Nonstandard analysis*, de 1961, marcou oficialmente o aparecimento o surgimento da ANS. A Análise Não-Standard veio para estabelecer a fundamentação lógica que o conceito de infinitesimal necessitava desde a criação do Cálculo. Na obra citada, o matemático fez uso de um modelo não convencional para a construção da nova análise, e mostra algumas vantagens de seu método sobre os demais. (SAMPAIO, 2008, p. 222; REZENDE, 2003, p. 262).

Nesse cenário, entende-se infinitesimal como sendo o menor número maior que zero. Note que o conjunto dos reais é um corpo arquimediano, ou seja, dados dois números **a, b** positivos com **a < b**, existe **n** natural tal que **n.a > b**. Dessa forma, pode-se perceber que os infinitesimais perturbaram esta ordem e não foram bem vistos, de imediato, pelos acadêmicos. Uma vez que, seja **dx** um número infinitesimal pelo axioma de Arquimedes,

existe n natural tal que $n \cdot dx > 1$. Então $1/n$ seria menor que dx , o que é contraditório a menos que dx fosse o próprio zero, pois, por definição, dx é o menor número maior que zero. Dada a estrutura arquimediana dos reais, uma quantidade infinitesimal é necessariamente nula (REZENDE, 2003, p.258).

(...) Abraham Robinson descobriu um novo método de interpretar e resolver o duplo problema do cálculo infinitesimal levantado por Berkeley: a “existência dos infinitesimais” e o de como “operar com eles [os infinitesimais]” (caso eles existam). Tendo observado que os infinitesimais não podem existir como números “ordinários”, Robinson sugeriu um “alargamento” do sistema de números reais – os conjuntos dos hiper-reais *R ; um conjunto contendo tanto os números infinitesimais quanto infinitos, e que contém um subconjunto isomorfo ao conjunto dos números reais (REZENDE, 2003, p. 265).

Para operar com esses novos conceitos, foi preciso introduzir o número ϵ (infinitesimal), pois em matemática é necessário o rigor para saber quando uma quantidade não nula é demasiadamente pequena para ser desprezada e o momento exato em que isto pode ocorrer. Simbolicamente, essa ideia resume-se na seguinte expressão: $\exists \epsilon \neq 0: \forall x \in {}^*R, -x < \epsilon < x$. Foi com a construção de um corpo não-arquimediano, ou seja, com os hiper-reais (extensão dos reais) que foi possível dar sentido a este tipo de expressão. (SAMPAIO, 2008, p. 221).

Howard Keisler, em 1976, em seu livro *Elementary Calculus: an infinitesimal approach* axiomatizou o conjunto dos hiper-reais. Um ano depois, em 1977, Edward Nelson axiomatizou a ANS, englobando todas as áreas da matemática. (SAMPAIO, 2008, p. 221)⁵.

Finalizado esse panorama histórico, apresentaremos no próximo capítulo alguns dos paradoxos que envolvem o conceito de infinito, fazendo uma análise destes, buscando torná-los claro e apontando algumas possíveis soluções matemáticas, mas sem a pretensão de propor uma resolução definitiva.

⁵ Em 1963, Newton Carneiro Affonso da Costa (1929) introduziu os cálculos paraconscientes de predicados $C_n^=$, $1 \leq n \leq \omega$. Porém, não discutiremos esse tópico no trabalho, devido a sua complexidade (CARVALHO, D’OTTAVIANO, 2005, p. 79).

CAPÍTULO 4 ALGUNS PARADOXOS DO INFINITO

O presente capítulo vai tratar de alguns paradoxos que envolvem a ideia de infinito no decorrer dos séculos. Iniciaremos definindo paradoxos de acordo com língua portuguesa e também uma visão filosófica. Posteriormente, apresentaremos os paradoxos de Zenão, Galileu e Hilbert.

4.1 PARADOXO

O vocábulo paradoxo é composto, etimologicamente, pelo prefixo grego “para” (contra) e pelo sufixo “doxa” (senso). Ou seja, um paradoxo é uma afirmação que expressa ou parece expressar uma incoerência lógica, uma sequência de pensamentos que leva a um absurdo, uma ideia contrária ao senso comum (PINTO, 2010, p. 4; MORIN, 1809 *apud* BALIEIRO FILHO, 2010, p. 1752).

De acordo com dicionário Michaelis de Língua Portuguesa temos a seguinte definição: “Paradoxo: **1** Opinião contrária à comum. **2** Afirmação, na mesma frase, de um conceito mediante aparentes contradições ou termos incompatíveis” (MICHAELIS, 2012).

Segundo o *Dicionário de Filosofia*, entende-se o paradoxo da seguinte maneira:

PARADOXO: O que é contrário à "opinião da maioria", ou seja, ao sistema de crenças comuns a que se fez referência, ou contrário a princípios considerados sólidos ou a proposições científicas. Aristóteles, em *Refutações sofisticas* (cap. 12), considera a redução de um discurso a uma opinião paradoxal como o segundo fim da Sofística (o primeiro é a refutação, ou seja, provar a falsidade da asserção do adversário). Bernhard Bolzano intitulou *Paradoxos do infinito* (1851) o livro no qual introduziu o conceito de infinito como um tipo especial de grandeza, dotado de características próprias, e não mais como limite de uma série. Esse conceito seria consolidado na matemática por Cantor e Dedekind. A exemplo dele, foram chamados às vezes de P. as contradições oriundas do uso do procedimento reflexivo, na maioria das vezes chamadas de *antinomias*. No sentido religioso, chamou-se P. a afirmação dos direitos da fé e da verdade do seu conteúdo em oposição às exigências da razão. P. é, p. ex., a transcendência absoluta e a infalibilidade de Deus, afirmada pela teologia *negativa*; P. é o "*credo quia absurdum*" (v.) de Tertuliano; P. é toda a fé, segundo Kierkegaard, porque todas as categorias do pensamento religioso são impensáveis, e a fé, não obstante, crê em tudo e assume todos os riscos (cf. *Die Krankheit zum Tode*, 1849). Kierkegaard viu como P. a própria relação entre o homem e Deus: "O P. não é uma concessão, mas uma *categoria*: uma determinação ontológica que expressa a relação entre um espírito existente e cognoscente e a verdade eterna" (ABBAGNANO, 1998, p. 742).

Já, de acordo com o livro *Compêndios de Matemática e Lógica Matemática*, de autoria de Carlos Magno Corrêa Dias, a definição do termo é dada como:

Paradoxo é um argumento que produz uma conclusão surpreendente, à qual é contrária à nossa intuição. Os paradoxos podem ser classificados em Paradoxos Verídicos (aqueles que apresentam conclusões verdadeiras) e em Paradoxos Falsídicos (aqueles que apresentam conclusões falsas) (DIAS, 1999, p. 53).

Então, como se pode perceber, as definições dadas pela filosofia, matemática e Língua Portuguesa não estão em contradição, embora cada área apresente sua especificidade.

Como visto, o termo paradoxo possui diversos significados. Neste trabalho, porém, esse termo será utilizado em sua acepção que designa uma proposição ou crença contrárias ao senso comum e à intuição. Sendo assim, consideramos três principais acepções diferentes do termo (BALIEIRO FILHO, 2010, p. 1753):

- a) Proposições aparentemente verdadeiras, no entanto falsas (paradoxos falsídicos);
- b) Afirmações impossíveis de ser classificadas como falsas ou verdadeiras (antinomias);
- c) Proposições aparentemente falsas, no entanto são verdadeiras (paradoxos verídicos).

Os paradoxos foram de suma importância para o desenvolvimento da Matemática, pois na busca de solução para o desamparo lógico que eles causavam foi desenvolvido o rigor matemático, em especial na área da lógica. Os paradoxos sempre foram motivo de reflexão na Matemática.

Para identificar um paradoxo é necessário observar características implícitas ou explícitas do argumento que leva a uma sanção aparentemente falsa ou inconsistente. Quando a afirmação é falsa ou incoerente, surge a necessidade de refutá-la. Porém nem sempre isto é imediato, haja vista que muitas vezes o argumento é aparentemente consistente. Por exemplo, na declaração “esta afirmação é falsa” é paradoxal porque se a declaração for falsa é verdadeira e se for verdadeira é falsa. Afirmações deste tipo são controversas a ideia de que não há frases declarativas com valores diferentes de verdadeiro ou falso. Desta forma, percebe-se que nem sempre é simples verificar que um argumento, ou conjunto deles, ocasione paradoxos. Para resolver tal empasse, deve-se mostrar que o argumento em que se baseia não é coerente, seja porque é inválido ou porque se fundamenta em premissas falsas (BALIEIRO FILHO, 2010, p. 1753).

Para efeitos didáticos, vamos utilizar neste trabalho a classificação adotada por Quine (1976), a saber: paradoxos falsídicos, verídicos e antinomias⁶.

4.1.1 Paradoxos falsídicos

Os paradoxos falsídicos são aqueles cujos argumentos são aparentemente consistentes, porém nos levam a conclusões absurdas. Dentre esses paradoxos, estão os de Zenão, que partem de argumentos a priori consistentes e chegam à conclusão inconcebível da impossibilidade do movimento (BARKER, 1976 *apud* DORTA, 2013, p.29). Em suma, os paradoxos falsídicos são aqueles que apresentam conclusões sempre falsas e a inconsistência se encontra em algum dos argumentos ou em alguma inferência (QUINE, 1976 *apud* DORTA, 2013, p. 39).

4.1.2 Antinomias

As antinomias resultam de uma inconsistência entre duas afirmações em que cada uma delas é igualmente verossímil (QUINE, 1976 *apud* DORTA, 2013, p. 30). No *Dicionário de Filosofia*, Abbagnano, encontra-se a seguinte definição:

ANTINOMIAS: Com esse termo ou com o termo paradoxos são chamadas as contradições propiciadas pelo uso da noção absoluta de todos em matemática e em lógica. Nesse sentido, as A. não eram desconhecidas na Antiguidade, porque fizeram parte dos raciocínios insolúveis ou conversíveis de que se compraziam megáricos e estóicos e que às vezes também foram chamados de dilemas. Tais raciocínios são tratados na Escolástica tardia, nas coleções de Insolubilia ou de Obrigatória; o mais famoso é o do mentiroso, que Cícero já recordava: "Se dizes que mentes, ou estás dizendo a verdade e então estás mentindo, ou estás dizendo mentira e então dizes a verdade" (Acad, TV, 29, 96). Esse paradoxo era discutido no séc. XIV por Ockham (Summa log., III, III, 38). Na lógica contemporânea, a primeira contradição desse gênero foi evidenciada por Burali Forti em 1897 e se referia à série dos números ordinais: se a série de todos os números ordinais tem um número ordinal, que seja p. ex. co, CO também será um número ordinal, de tal modo que a série de todos os números ordinais terá o número $co + 1$, maior do que co, e co não será o número ordinal de todos os ordinais ("Uma questão sobre os números transfinitos", em Rend dei Circolo Matematico diPalermo, 1897). Mas o mais famoso paradoxo, o que chamou mais a atenção, foi o de Russell, referente à classe de todas as classes que não são membros de si mesmas (ABBAGNANO, 1998, p. 63).

⁶ "Quine (1976) e Barker (1976) adotam a mesma classificação para os paradoxos. Barker (1976) divide os paradoxos em três classes, entretanto não usa nomenclatura específica para estas classes. Com isso, julgamos conveniente utilizar a nomenclatura adotada por Quine (1976)" (DORTA, 2013, p. 30).

Barker (1976, p. 111), embora não utilize a nomenclatura “antinomias”, define estas como uma situação na qual sempre é possível encadear raciocínio crível com aparência de algo que pode ser perfeitamente falso e verdadeiro ao mesmo tempo. Um exemplo de antinomia seria o paradoxo de Russel (Paradoxo do Conjunto de Todos os Conjuntos) e famoso paradoxo de mentiroso.

4.1.3 Paradoxos verídicos

Essa classe de paradoxos é formada por aqueles que partem de uma ideia aparentemente impossível, porém são conduzidos para um desfecho verdadeiro (DORTA, 2013, p. 33). De acordo com Barker “na linguagem ordinária, o termo paradoxo pode ser utilizado para fazer referência a situações que parecem impossíveis ou mesmo autocontraditórias, mas que, não obstante, são verdadeiras” (BARKER, 1976, p.110). Os paradoxos verídicos compreendem os paradoxos relacionados à teoria de Cantor (BARKER *apud* DORTA, 2013, p. 29).

4.2 PARADOXOS DE ZENÃO

Durante o século V a.C., as ideias pitagóricas sofreram algumas críticas, em especial provenientes dos seus vizinhos da corrente filosófica fundada por Parmênides de Eléia (515 – 450 a.C.), movimento filosófico rival. Deve-se aos pensadores eleatas a invenção da *dialética* e do método de demonstração por *redução ao absurdo*⁷ (ESTRADA et al, 2000, p. 240; PESSOA JR, 2008, p. 7; BOYER, 1996, p. 51).

A escola pitagórica era mais direcionada para o abstrato, afirmando que o número, em toda a sua pluralidade, era o constituinte básico de todos os fenômenos. Este conceito atomístico de número, representado pelos números figurativos, foi fortemente questionado pelos seguidores da escola Eleática. “O artigo de fé básico dos eleáticos era a unidade e permanência do ser, visão que contrastava com as ideias pitagóricas de multiplicidade e mudança” (BOYER, 1996, p. 51). Zenão de Eléia, cujo mestre foi Parmênides, foi discípulo mais conhecido dessa escola e isso se deve aos seus paradoxos (Dicotomia, Aquiles, Flecha e

⁷ “Modo de provar uma proposição que consiste em aceitar por momentos a sua negação e daí deduzir uma contradição” (ESTRADA et al, 2000, p. 240).

Estádio), que são paradoxos falsídicos. Zenão escreveu um livro contendo por volta de 40 paradoxos, mas esta obra foi perdida. O que se sabe sobre seu trabalho foi transmitido por Platão e Aristóteles. Em seus paradoxos, Zenão apresenta argumentos para provar a fragilidade dos conceitos de multiplicidade e divisibilidade. Ele adotava a dialética partindo das premissas aparentemente consistentes e chegando a conclusões absurdas como, por exemplo, a impossibilidade do movimento (PESSOA JR, 2008, p. 7; BOYER, 1996, p. 51).

Parmênides foi o fundador da escola eleática e mentor de três princípios básicos, a saber: o princípio da identidade, o princípio da unidade e o princípio da imutabilidade. Todavia, na Matemática, em sua época, havia dois tipos de concepções que divergiam. Uma delas tratava dos elementos discretos separados e indivisíveis, ou seja, os números. A outra dizia respeito à continuidade, ou seja, tratava de segmentos de retas e medidas de um modo geral com a propriedade de serem infinitamente divisíveis. O que é importante observar é que esse fato é contrário ao princípio da identidade. E foi desse conflito entre discreto e contínuo que nasceram os paradoxos de Zenão (REZENDE, 2003, p. 94-95).

Zenão defendia as ideias de seu mestre, exaltando a unicidade e permanência em detrimento da pluralidade⁸ e do movimento. Seu método consistia em supor uma tese e, a partir disso, desenvolver uma consequência que fosse contrária à sua suposição e, dessa forma, chegar ao absurdo (PESSOA JR, 2008, p. 7).

A escola pitagórica acreditava que o espaço e o tempo podiam ser constituídos de pontos e instantes, respectivamente. Por outro lado, todavia, o tempo e o espaço também possuem a propriedade conhecida como continuidade. Agora “suponha-se que os elementos terminais que constituíam uma pluralidade, de um lado possuíam as características da unidade geométrica – o ponto – e por outro possuíam certas características de unidade numérica” (BOYER, 1996, p. 51). Esse foi o ponto culminante dos paradoxos e foi contra essa dualidade que Zenão propôs seus paradoxos (BOYER, 1996, p. 51).

“A questão está em se considerar tempo contínuo e espaço discreto, ou vice versa. Os paradoxos de Zenão recolhem essa sensação de certo desamparo intuitivo, pois relatam uma situação de perplexidade comum frente à continuidade e ao infinito” (BROLEZZI, 1996, p. 22).

Com esses paradoxos Zenão queria atacar a existência do movimento, que de acordo com ele não passavam de ilusões provocadas pelos sentidos humano. Porém é importante lembrar que Zenão era um eleata e sobretudo filósofo e lógico, portanto essas questões da

⁸ “O estado de haver muitas coisas distintas, ao invés de uma só” (PESSOA JR, 2008, p. 7).

impossibilidade do movimento eram abordadas, por essa escola, muito mais filosoficamente do que matematicamente. Vale ainda ressaltar que esses paradoxos contribuíram para a matemática avançar com o desenvolvimento do rigor lógico, pois eles provocaram, desde a antiguidade até os dias atuais, muitos pensadores a buscarem soluções para o impasse gerado, essas tentativas de explicação conduziram a muitas reflexões sobre o tema. Esses paradoxos foram considerados insolúveis até a criação do cálculo e o desenvolvimento das ideias de continuidade e infinito (MONTEIRO, 2008, P.12).

Dentre os seus paradoxos, podemos agrupar o da Dicotomia e o de Aquiles por possuírem semelhanças, ou seja, ambos os paradoxos partem da suposição de que o espaço é infinitamente divisível, e, que assim sendo, para ser percorrido por um objeto ou corredor possui infinitos pontos e que esses, para cruzarem a linha de chegada ou alvo, precisariam, antes de tudo, percorrer todos eles, ou seja, estes jamais cruzariam a linha de chegada ou alcançariam o alvo. Com esse argumento, parece-nos que o movimento é impossível, o que vemos é uma simples ilusão (PESSOA JR, 2008, p. 8).

No entanto, no paradoxo de Aquiles, por exemplo, nos parece óbvio dizer que Aquiles atinge a meta de alcançar a tartaruga, tornando a conclusão do eleata sem sentido, pois foge da realidade e por esta razão tal paradoxo deveria ser refutado. Todavia não basta constatar a inconsistência com a realidade, faz-se necessário apontar quais às falhas da narrativa de Zenão em cada um de suas quatro aporias⁹, procedimento tipicamente do pensamento matemático e necessário para validar ou refutar de um argumento (MONTEIRO, 2008, p.12).

Para os matemáticos gregos, que não tinham uma real concepção de convergência em particular para o infinito, estes raciocínios eram incompreensíveis. Aristóteles considerou-os e resolveu pô-los de parte, ficando ao “abandono” por quase 2500 anos. Hoje, com o desenvolvimento da Matemática, nomeadamente no estudo de somas infinitas e de conjuntos infinitos, estes Paradoxos podem ser explicados de um modo razoavelmente satisfatório. Mas ainda agora, o debate continua sobre a validade dos Paradoxos e as suas racionalizações (MONTEIRO, 2008, p.12).

Zenão, em seus paradoxos da Dicotomia e de Aquiles, argumenta contra a hipótese de o espaço ser dividido infinitamente. Já nos paradoxos da Flecha e do Estádio, ele questiona a possibilidade de um segmento ser formado por uma quantidade finita de divisões. Sem utilizar a ideia de indivisibilidade do tempo, ou seja, instantes, unidade mínima de tempo, o raciocínio de Zenão não faria sentido. O paradoxo da Flecha contradiz os defensores da

⁹ Aporia é um termo usado no sentido de dúvida racional, isto é, de dificuldade inerente a um raciocínio, e não no de estado subjetivo de incerteza. É, portanto, a dúvida objetiva, a dificuldade efetiva de um raciocínio ou da conclusão a que leva um raciocínio (ABBAGNANO, 1998, p. 75).

concepção atomista de tempo e espaço, pois esta concepção é a geradora desse paradoxo (MONTEIRO, 2008, p. 23).

Embora estejamos acostumados lidar diariamente, mesmo que intuitivamente, com a ideia de velocidade e movimento esses são, sem dúvida, conceitos bem abstratos. E deve-se a isso a importância dos paradoxos de Zenão. O paradoxo da Flecha e o do Estádio são, de fato, reais, se o tempo for composto unidades mínimas indivisíveis e o espaço por pontos discretos. Em contra partida se tempo e espaço for considerados contínuos surgem os paradoxos da Dicotomia de Aquiles. Dessa forma Zenão cerca por todos os lados a ideia de movimento e de velocidade, mostrando controvérsias contundentes que por vezes passam despercebidas aos olhos já acostumados a observar o movimento (BROLEZZI, 1996, p. 23). “A atitude mais comum, já na época de Zeno, é a do filósofo que, após ouvir as explicações de Zeno sobre a impossibilidade do movimento, ficou um instante pensativo e, levantando-se, disse que a solução de todos eles era “pôr-se a andar”, e foi-se embora” (BROLEZZI, 1996, p. 23). A atitude do filósofo simboliza bem o pensamento grego da época diante das dificuldades de compreender fenômenos relacionados com o conceito de discreto e contínuo e com tudo que remetesse a ideia de infinito (BROLEZZI, 1996, p. 23).

A seguir vamos enunciar e fazer uma abordagem matemática de cada um dos quatro paradoxos mencionados (Dicotomia, Aquiles, Flecha e Estádio) em separado sob o ponto de vista da física e à luz do Cálculo Diferencial e Integral, mostrando o que causa o paradoxo e buscando solver o dilema não como uma proposta de resolução definitiva, mas uma sugestão de reflexão sobre o paradoxo e o infinito.

4.2.1 Dicotomia

Esse paradoxo afirma que para um determinado objeto percorrer certa distância deve percorrer a primeira metade desse espaço, mas, antes disso, precisa percorrer metade da metade desse espaço e, antes disso, a metade da metade da metade e assim indefinidamente por meio de uma infinidade de subdivisões. Portanto, o movimento não chega nem a começar (BOYER, 1996, p. 51; ESTRADA et al, 2000, p. 240).

O paradoxo da dicotomia ataca o fato do espaço ser infinitamente divisível, pois apresentar um raciocínio que partindo dessa ideia chega-se a impossibilidade do movimento. Pode-se apontar como falha nesse paradoxo o fato de se tratar distância infinitamente

divisível como distância infinita, isto é, entre dois pontos não se tem distância infinita, mas sim uma distância que se pode dividir indefinidamente (MONTEIRO, 2008, p. 14).

Na continuidade do texto faremos uma análise matemática desse paradoxo utilizando as ferramentas do Cálculo e respeitando as imposições do problema, sugerindo uma solução à luz dos conceitos da Matemática e da Física contemporâneas.

Represente-se por S a distância que o objeto pretende percorrer e seja t um tempo finito. Consideramos ainda que o objeto percorre o trajeto em velocidade constante¹⁰ denominada v . No entanto, antes de percorrer a distância total S , o objeto deverá percorrer a metade da distância, ou seja, $\frac{S}{2}$ e é verdade que resta $\frac{S}{2}$ a ser percorrido. Porém, antes de percorrer $\frac{S}{2}$, o objeto deverá percorrer a distância de $\frac{S}{2^2}$. Agora observe que falta $\frac{S}{2} + \frac{S}{2^2}$ a ser percorrido e, assim, indefinidamente de acordo com a Figura 1 (BALIEIRO, SOARES, 2009, p. 162).

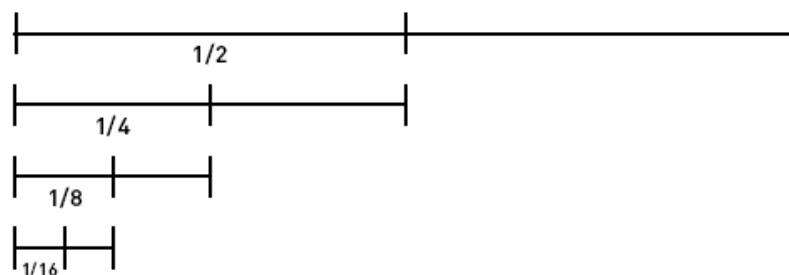


Figura 1 - Representação esquemática da dicotomia (bisseção sucessiva) de um segmento de reta (adaptado de MACHADO, SCHUCK, WAGNER 2013).

Dessa forma, Zenão de Eléia assumiu dividir a distância S a ser percorrida pelo objeto a um número infinito de segmentos, todos com comprimento diferente de zero, e, com isso, a distância total S resultaria da soma desses infinitos segmentos não nulos. Zenão, todavia, não tinha em sua época a ideia de soma de série para aferir tal fato. No entanto, sua ideia estava correta e hoje pode ser descrita como a convergência de uma série real, de acordo com a equação (3) (BALIEIRO, SOARES, 2009, p. 163; ESTRADA et al, 2000, p. 241):

$$\frac{S}{2} + \frac{S}{2^2} + \dots + \frac{S}{2^n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{S}{2^n} = S \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n} = S \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} - 1 \right) = S \left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}} - 1 \right) = S \quad (3)$$

¹⁰ “Note que, nessas condições, em um tempo finito t , o móvel percorrerá a distância vt ” (BALIEIRO, SOARES, 2009, p. 162).

Talvez pelo fato dos gregos não possuírem um modelo geométrico conveniente para o tempo, como tinham para a distância, Zenão afirmou que seria impossível dividir o tempo finito $t = \frac{S}{v}$, que será gasto para perfazer a distância S , em um número infinito de parcelas todas maiores que zero que resultasse numa soma finita. Entretanto, é verdade que para perfazer o trajeto $\frac{S}{2}$, o tempo que o objeto gastará será $\frac{t}{2}$. Observe, ainda, que para percorrer a distância $\frac{S}{2^2}$, o objeto gastará $\frac{t}{2^2}$, e assim indefinidamente. Dessa forma, é possível dividir o tempo t que o móvel gasta para perfazer a distância S em infinitas parcelas maiores que zero cuja soma resultante seja finita, como pode ser observado através da equação (4) (BALIEIRO, SOARES, 2009, p. 163):

$$\frac{t}{2} + \frac{t}{2^2} + \dots + \frac{t}{2^n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t}{2^n} = S \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n} = t \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} - 1 \right) = t \left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}} - 1 \right) = t \quad (4)$$

De acordo com a equação (3) (soma da série S), fica claro, e respeitando as condições estabelecidas na proposição de Zenão, que este partiu a distância a ser percorrida em partes infinitas e a soma dessas parcelas resulta em uma soma finita. A série t também evidencia que é possível dividir o tempo de forma adequada de maneira a perfazer S no tempo $t = \frac{S}{v}$. Esse resultado está em desacordo com a argumentação de Zenão de que não é possível percorrer infinitos intervalos num tempo limitado (BALIEIRO, SOARES, 2009, p. 163).

Assim sendo, as argumentações de Zenão são aparentemente consistentes. No entanto, quando investigadas à luz do Cálculo Diferencial e Integral, em particular a convergência de séries, o quadro defendido por Zenão se mostra falso e evidencia uma realidade paradoxal, ou seja, este é um paradoxo falsídico (BALIEIRO, SOARES, 2009, p. 163; ESTRADA et al, 2000, p. 241; DORTA, 2013, p. 39).

4.2.2 Aquiles

Esse paradoxo é semelhante ao primeiro, com a diferença das bissecções sucessivas serem progressivas em vez de regressivas: se Aquiles, o corredor mais veloz da Ática¹¹,

¹¹ “É uma região administrativa e histórica que engloba a cidade de Atenas, capital da Grécia. A região histórica é centrada na península Ática, que se projeta no Mar Egeu. A região administrativa moderna da Ática é mais

apostar corrida com uma lenta tartaruga nunca mais conseguirá alcançá-la, por mais depressa que corra. Com efeito, quando Aquiles chegar ao local inicial de onde a tartaruga partiu, esta já terá avançado um pouco mais e se encontrará em outra posição adiante dele e, quando Aquiles cobrir esta distância, a tartaruga já terá realizado novo avanço e assim esse processo continua indefinidamente. Portanto, conclui-se que Aquiles jamais poderá atingir a lenta tartaruga (BOYER, 1996, p. 52; ESTRADA et al, 2000, p. 240)

Nesse paradoxo, têm-se dois corpos que se movimentam com velocidades distintas. Como o senso comum nos mostra, Aquiles ultrapassa a tartaruga, todavia, o raciocínio desenvolvido por Zenão está correto com exceção da conclusão que é absurda: Aquiles nunca poderá atingir a tartaruga. Com os paradoxos da Dicotomia e Aquiles, Zenão buscava ruir a crença da continuidade do movimento, ou seja, seus paradoxos iam de encontro com a infinita divisibilidade do espaço. Neste paradoxo, bem como no da Dicotomia, mistura-se a ideia de distância infinita com distância infinitamente divisível. Isto é, podemos considerar que, no paradoxo de Aquiles, este deve percorrer infinitos intervalos, que são aqueles trechos nos quais a tartaruga tem vantagem sobre o corredor (MONTEIRO, 2008, p. 20).

Para analisar matematicamente o problema, considera-se o seguinte: Aquiles e a tartaruga são objetos que estão em movimento retilíneo uniforme, na mesma direção e sentido, e no mesmo instante de tempo. Considera-se ainda que as sucessivas posições desses objetos sejam determinadas no sentido positivo sobre um eixo orientado Ox com origem em O . De acordo com o estabelecido por Zenão em seu paradoxo, a velocidade da tartaruga (v_t) é uma fração própria da velocidade de Aquiles (v_a). Aquiles (ocupa a posição A_0 em relação à origem do sistema Ox) está a uma distância d_0 da tartaruga (posição T_0 em relação à origem do sistema Ox). Dessa forma, podem-se supor as seguintes posições ocupadas pela tartaruga: $(T_k)_{k \in \mathbb{N}}$, onde T_k indica a k -ésima posição da tartaruga. Para Aquiles, as sucessivas posições ficam como segue: $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$, onde A_k indica a k -ésima posição de Aquiles. Considere-se ainda $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$, em que t_k indica o k -ésimo instante de tempo do processo. E seja $(d_k)_{k \in \mathbb{N}}$ a distância entre as posições ocupadas pela tartaruga, T_k , e as posições ocupadas por Aquiles, A_k , sobre o sistema de eixos Ox (BALIEIRO, SOARES, 2009, p. 164-165).

Posto isto, e de acordo com as condições pré-estabelecidas pelo paradoxo, tem-se a seguinte sugestão de resolução. Com efeito, as velocidades de Aquiles e da tartaruga podem ser expressas pela equação (5): $v_t = r v_a$, sendo r um número Real, $r \in]0,1[$. Portanto, indicando que a velocidade da tartaruga é uma fração própria da velocidade de Aquiles. Seja

extensa do que a região histórica e inclui as Ilhas de Salônica, Citera, e do município de Troizinia no continente Peloponeso” (A ENCICLOPÉDIA LIVRE).

v_a constante num determinado tempo t . Aquiles perfaz uma distância $v_a t$ e a tartaruga um espaço $v_t t$. Dessa forma, no instante de tempo $t_1 = \frac{d_0}{v_a}$ e isso implica na equação (6) $d_0 = v_a t_1$. Concomitantemente, do deslocamento da tartaruga de T_0 para T_1 , vem a equação (7): $d_1 = v_t t_1$. Substituindo as equações (5) e (6) na equação (7), gera-se a equação (8): $d_1 = v_t t_1 = (r v_a) t_1 = r(v_a t_1) = r d_0$. Com isso, pode-se dizer que nesse instante Aquiles ocupa a posição $A_1 = T_0$ distante d_0 de A_0 . No entanto, nesse mesmo instante, a tartaruga ocupa a posição T_1 distante d_1 de T_0 . Transcorrido o instante $t_2 = \frac{d_1}{v_a}$, isso implica na equação (9): $d_1 = v_a t_2$. Da mesma forma e ao mesmo tempo, do deslocamento da tartaruga de T_1 para T_2 vem a equação (10): $d_2 = v_t t_2$. Substituindo as equações (5), (9) e (8) na equação (10), gera-se a equação (11): $d_2 = v_t t_2 = (r v_a) t_2 = r(v_a t_2) = r d_1 = r(r d_0) = r^2 d_0$. Nessa altura, podemos observar que Aquiles está na posição $A_2 = T_1$ distante d_1 de A_1 . Já a tartaruga, nesse mesmo instante, ocupa a posição T_2 distante d_2 de T_1 . Este processo se repete indefinidamente, ou seja, decorrido um instante $t_k = \frac{d_{k-1}}{v_a}$, ter-se-á a equação (12) $d_k = r^k d_0$. Desse fato decorre que a distância entre Aquiles e a tartaruga diminui paulatinamente (como ilustra a Figura 2). É verdade, e se pode comprovar tal fato aplicando o limite na equação (12), o que resulta na equação (13): $\lim_{k \rightarrow \infty} d_k = \lim_{k \rightarrow \infty} r^k d_0 = d_0 \lim_{k \rightarrow \infty} r^k = 0$ (BALIEIRO, SOARES, 2009, p. 165).

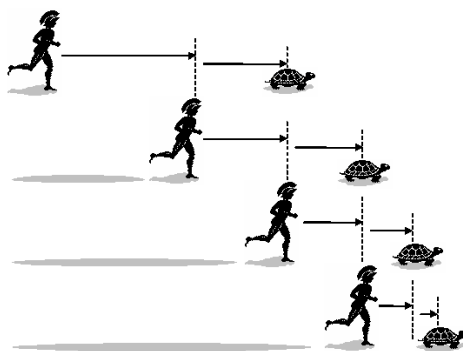


Figura 2 - Representação das sucessivas posições de Aquiles aproximando-se cada vez mais da tartaruga (adaptado de VIVAN, 2014).

Zenão e seus contemporâneos não admitiam a ideia de infinito que permitisse aos gregos deste período explicar os fenômenos uma vez que se precisavam do conceito de limite para serem resolvidos. Com isso, Zenão afirmava que para percorrer infinitos trechos não nulos, que separam Aquiles da tartaruga, seria necessário um tempo também infinito. Ou seja,

de fato seria impossível que Aquiles alcançasse a tartaruga. Agora, já desenvolvidas as ferramentas do Cálculo, nota-se, entretanto, que a soma S das infinitas distâncias d_k que Aquiles percorre para alcançar a tartaruga é finita: $S = \sum_{k=0}^{\infty} d_k = d_0 \sum_{k=0}^{\infty} r^k = \frac{d_0}{1-r}$, equação (14). Como o tempo que Aquiles leva para perfazer a distância d_k é $t_{k+1} = \frac{d_k}{v_a}$, decorre que para percorrer S , o tempo t que Aquiles gastará também será finito dado pela equação (15) (BALIEIRO, SOARES, 2009, p. 166):

$$t = \sum_{k=0}^{\infty} t_{k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d_k}{v_a} = \frac{1}{v_a} \sum_{k=0}^{\infty} d_k = \frac{1}{v_a} \sum_{k=0}^{\infty} d_0 r^k = \frac{d_0}{v_a} \sum_{k=0}^{\infty} r^k = \frac{d_0}{v_a} \cdot \frac{1}{1-r} = \frac{d_0}{v_a(1-r)}$$

(15)

A possibilidade de decompor uma grandeza limitada numa infinidade de partes parece ser o pretenso absurdo a que Zenão chega com esses dois argumentos. Ainda que questões desse tipo não pudessem, no século V a. C., ser compreendidas em profundidade, parece digno de nota que já tão cedo tenham sido postas de modo bem agudo, criticando os sistemas filosófico-científicos estabelecidos e estimulando o aparecimento de outros. Mas o desafio mais sério às concepções da escola de Crotona viria a ter origem na aplicação à geometria das próprias técnicas da aritmética pitagórica (ESTRADA et al, 2000, p. 242).

É possível observar, na argumentação de Zenão, que este assume um modelo geométrico para o espaço infinitamente divisível em partes não nulas e cada vez menores. Com isso, para percorrer cada uma dessas partes, é necessária uma quantidade de tempo que também pode ser subdividida em frações cada vez menores e o tempo total será equivalente à soma de todas essas frações. Portanto, o que Zenão quer dizer quando afirma que Aquiles nunca alcançará a tartaruga é que Aquiles não alcançará a mesma em tempo finito, ou seja, pode-se inferir que Zenão de Eléia não estabelece um modelo geométrico para o tempo e, dessa forma, não pode dividi-lo em um número infinito de partes cuja soma resultante seja zero (BALIEIRO, SOARES, 2009, p. 166).

4.2.3 Flecha

Neste paradoxo, Zenão afirma que se tempo é formado por instantes indivisíveis, então uma flecha voando ao encontro de seu alvo está na verdade parada. De fato, em cada instante a seta ocupa uma posição fixa, ou seja, em cada instante a flecha está parada. Sendo isso verdadeiro, a flecha está sempre parada, como ilustra a Figura 3 (BOYER, 1996, p. 52;

ESTRADA et al, 2000, p. 240; EVES, 1997, p. 418). O paradoxo da flecha tem por objetivo provar que se o tempo é composto de instantes, e o espaço composto por mínimos indivisíveis, então um corpo em movimento está, na verdade, sempre em repouso, além de levantar reflexão acerca da natureza do movimento e a ideia de velocidade instantânea. Nos dias atuais define-se o movimento de um corpo pela sua velocidade e não pela mudança do espaço que este ocupa (MONTEIRO, 2008, p. 11).

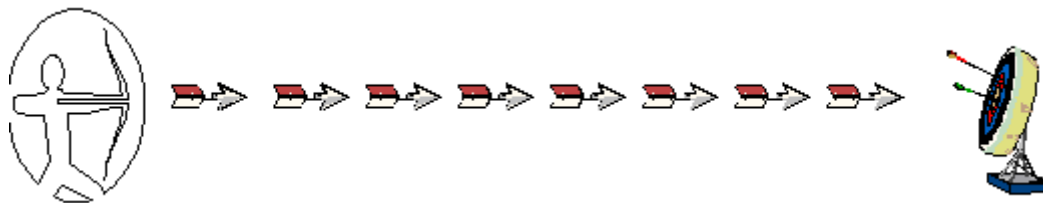


Figura 3 - Representação esquemática do paradoxo da flecha (FORUM DE DISCURSUS).

O conceito de velocidade média convencionalmente é definido pela razão entre a variação de espaço percorrido e a variação de tempo decorrido num determinado percurso. Essa ideia, anos mais tarde por volta da metade do século XVII, com a descoberta do cálculo infinitesimal, é generalizada ao nível do instante – fato desconhecido pelos gregos antigos – e dessa visão mais alargada nasce o conceito de velocidade instantânea como consequência dessa generalização. Portanto, no contexto de velocidade instantânea, não faz sentido se falar em mudança de posição ou em espaço percorrido (MONTEIRO, 2008, p. 24).

Para analisarmos o problema matematicamente fazemos algumas considerações: supomos que o atirador de flechas esteja a uma distância x (em metros) do alvo para o qual deseja lançar a flecha, consideramos ainda que a flecha percorra uma trajetória retilínea e com movimento uniforme¹². Seja t (em segundos) o tempo que a flecha leva para percorrer a distância x e seja a equação (16) $x(t) = at^2 + bt$ uma função contínua e diferenciável em todos os pontos do seu domínio e que nos forneça as posições do objeto em função do tempo t , com a e b constantes reais positivas.

Posto isso, vamos calcular a velocidade média v_m (quociente entre variação do espaço e a variação do tempo: $v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t}$) desse objeto para dois instantes distintos t_1 e t_2 , com $t_2 > t_1$: então, de acordo com as condições iniciais do problema, temos velocidade média definida pela equação (17) $v_m = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1}$. Substituindo t_1 e t_2 em (16) e, depois em (17), obtém-

¹² “Percorre espaços iguais em intervalos iguais” (LOURA, 2002, p. 34)

se a equação (18) $v_m = \frac{at_2^2 + bt_2 - at_1^2 - bt_1}{t_2 - t_1}$, colocando os fatores a e b em evidência na equação (18), resulta na equação (19) $v_m = \frac{a(t_2^2 - t_1^2) + b(t_2 - t_1)}{t_2 - t_1}$, donde podemos concluir que v_m é estritamente maior que zero, pois as constantes a e b são maiores que zero e como $t_2 > t_1$ a diferença $t_2 - t_1 > 0$. Além disso, é evidente que o quociente entre valores positivos é também um valor positivo. No entanto, nada ainda nos permite concluir que Zenão estava errado ao afirmar que em cada instante a flecha está parada. Para poder fazer tal afirmação, recorreremos ao conceito de derivada de uma função num ponto (isto é velocidade instantânea) formalizada por Bolzano e Cauchy no século XIX, cuja história contou-se no capítulo anterior.

Então vamos calcular a velocidade instantânea do móvel, cujo deslocamento é dado pela equação (16). Para isso, temos que calcular o limite da função quando h tende a zero e esse resultado deve ser estritamente positivo para que possamos concluir a falha no argumento de Zenão. Assim, por definição, temos que a velocidade instantânea do móvel é dada por esse limite da equação (20):

$$x'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h} \quad (20)$$

Fazendo as devidas substituições, obtemos a equação (21):

$$x'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a(t+h)^2 + b(t+h) - at^2 - bt}{h} \quad (21)$$

Fazendo a distributiva, chegamos à equação (22):

$$x'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{at^2 + 2ath - ah^2 + bt + bh - at^2 - bt}{h} \quad (22)$$

Colocando h evidência, vem a equação (23):

$$x'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2at + ah + b)}{h} \quad (23)$$

Portanto, a velocidade instantânea pode ser descrita pela equação (24):

$$x'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2at + ah + b)}{h} = 2at + b \quad (24)$$

Dessa forma, temos a velocidade instantânea $x'(t) = 2at + b$ estritamente positiva para qualquer que seja o t , pois a e b são valores positivos por hipótese e t é referente a tempo e, portanto, sempre positivo, donde podemos concluir a falha no argumento de Zenão e afirmar que a flecha não está parada em cada ponto, pois, como mostrado, a velocidade instantânea é diferente de zero em qualquer que seja o instante t . Portanto, a flecha está em movimento em todos os pontos do percurso.

4.2.4 Estádio

O paradoxo do Estádio¹³ é provavelmente o mais complexo de descrever dentre os paradoxos de Zenão e pode ser enunciado como segue. Considerem-se três filas de objetos idênticos, uma fileira paralela à outra, como pode ser observado na Figura 4. Seja a primeira fila contendo T_1, T_2, T_3, T_4 corpos idênticos entre si e imóveis; seja a segunda fileira contendo T_5, T_6, T_7, T_8 corpos, também idênticos entre si e aos da primeira fileira, que se move num dos sentidos (de acordo com a Figura 4) de modo que cada corpo da segunda fileira passa por um corpo da primeira num instante (unidade de tempo indivisível). Sejam $T_9, T_{10}, T_{11}, T_{12}$ também corpos idênticos aos oito primeiros e entre si que se movem uniformemente na mesma direção, mas em sentido oposto aos corpos da segunda fileira (como ilustra Figura 4), de maneira que cada corpo da terceira fila passa por um corpo da primeira num instante de tempo. Num dado momento, os corpos ocupam as posições relativas de acordo com a Figura 4. Dessa forma, decorrido um instante de tempo, cada um dos corpos em movimento (fileiras 2 e 3) passa por um corpo da fila em repouso (Figura 5) e, portanto, um corpo de uma fila passa por um corpo da outra fila em metade desse tempo. Então, a unidade de tempo é igual ao seu dobro (BOYER, 1996, p. 52; ESTRADA et al, 2000, p. 240).

¹³ “O *estádio* é uma das unidades de comprimento utilizada na Grécia antiga. Como era habitual na Antiguidade não havia uma só medida para o estádio, pois, por exemplo, o estádio que empregou Eratóstenes para medir a circunferência da Terra era aproximadamente 158 metros (estádio egípcio), enquanto, o comprimento do estádio olímpico (estádio ático) era de 192 metros” (BALIEIRO, SOARES, 2009, p. 164).

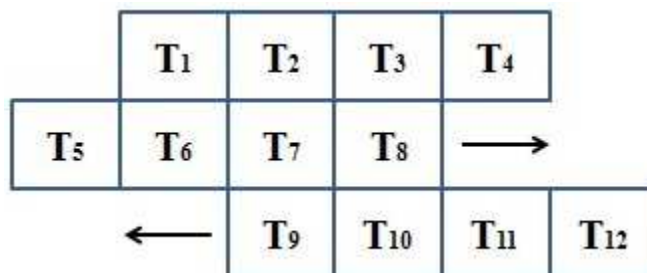


Figura 4 - Posição relativa das filas (adaptado de BOYER et al, 1996, p. 52; BROLEZZI, 1996, p. 23).

Assim, passado apenas um instante de tempo, ou seja, decorrida uma subdivisão do tempo, as posições relativas estarão como mostra a Figura 5:

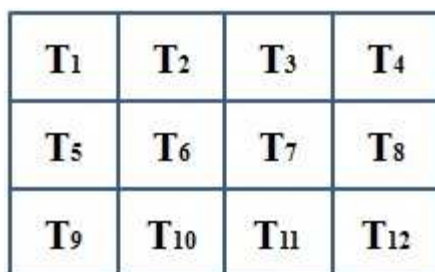


Figura 5 - Posição relativa das filas após o primeiro instante (adaptado de BOYER, 1996, p. 52; BROLEZZI, 1996, p. 23).

Observando as posições relativas das Figuras 4 e 5 podemos perceber que T_9 terá passado pelos corpos T_5 e T_6 . Logo, o instante não serve como unidade mínima de tempo, uma vez que podemos tomar como um novo instante que seja menor que o primeiro T_9 leva para transpor T_5 e T_6 e assim indefinidamente, ou seja, não é possível adotar uma unidade mínima de tempo (BOYER, 1996, p. 52).

Hoje em dia, de acordo com as leis da Física, se dois corpos com a mesma velocidade e direção, mas em sentidos opostos, passam um pelo outro, a velocidade do conjunto será considerada igual à soma das velocidades de cada corpo. Portanto, essa velocidade será igual ao dobro da velocidade de cada um dos corpos analisado separadamente. O que gera a situação paradoxal, nesse caso, é considerar que uma fileira ultrapassaria outra sempre ao mesmo tempo, estando ela parada ou em movimento. O objetivo desse paradoxo, assim como o da flecha, é questionar os defensores do espaço e tempo composto por um número finito de unidades indivisíveis, isto é, aqueles que defendiam a concepção atomista de Demócrito e consideravam espaço e tempo grandezas discretas, pois se considerarmos a existência dessas unidades finitas e indivisíveis de espaço e tempo, isto implicaria em aceitar que um corpo que

viaja a velocidade constante deve passar em cada instante por uma quantidade fixa de pontos (unidades mínimas de espaço), estando esses em repouso ou não. Em suma, tal paradoxo é resultado de se considerar que um corpo leva tempo igual para passar por outro corpo estando este em movimento ou em repouso (MONTEIRO, 2008, p. 27).

4.3 PARADOXO DE RUSSEL - PARADOXO DO CONJUNTO DE TODOS OS CONJUNTOS

Bertrand Russell (1872 – 1970) elaborou um paradoxo (antinomia) que ficou conhecido como o “paradoxo do conjunto de todos os conjuntos” ou simplesmente “paradoxo de Russel”, direcionando uma crítica à lógica de Frege a respeito da sua teoria de conjuntos. Essa crítica de Russel direcionada a Frege foi feita por carta no ano de 1902, no momento em que este estava na iminência de publicar o segundo volume da sua obra, o qual visava fundamentar toda a aritmética na teoria de conjuntos (BASSANI, 2007, p. 167; ÁVILA, 2000, p. 8).

Frege reagiu à crítica com essas palavras:

Não há nada mais calamitoso para um homem de ciência do que ver ruir fundamentos de seu trabalho, quando pensa ter acabado sua obra. Foi o que me aconteceu ao receber uma carta do senhor Bertrand Russell, no momento em que meu livro ia ser impresso (SCIENTIFIC AMERICAN BRASIL, *apud* DORTA, 2013, p. 32).

Grande parte da teoria de Frege foi desenvolvida com base no seguinte axioma (BASSANI, 2007, p. 167): “dada qualquer propriedade, existe o conjunto de todas as coisas que têm esta propriedade” (BASSANI, 2007, p. 167) e, de acordo com Russel, este axioma, era um grande gerador de inconsistências. Exemplificando, considere as propriedades: “alunos desta sala” ou “professores do curso de Matemática” compõem um determinado conjunto de pessoas, nos quais os elementos obedecem a uma propriedade específica. De acordo com a teoria de Frege isso acontece com quaisquer outras propriedades que se possa imaginar. De início, parece ser um axioma obvio mas, não na visão de Russell. Segundo ele, esse axioma pode levar a situações paradoxais na teoria de conjuntos e, por essa razão, deve ser banido da Matemática (BASSANI, 2007, p. 167).

O paradoxo acontece, na teoria dos conjuntos, se aceitarmos o seguinte axioma: “existe um conjunto de todos os conjuntos que obedecem a uma determinada propriedade”, e

adotarmos como propriedade o que segue: “o conjunto de todos os conjuntos que não são elementos de si próprios”. Agora, assumindo o axioma e analisemos um conjunto que obedece a propriedade mencionada. Portanto, seja R um conjunto definido pela propriedade anterior e expresso matematicamente da maneira que segue: $R = \{x|x \notin x\}$, isto é, se $x \in R \rightarrow x \notin x$; e, se $x \notin R \rightarrow x \in x$, como x é uma variável qualquer podemos fazer, sem perda de generalidade, $x = R$ e assim, estarmos numa situação paradoxal de natureza lógica, ou seja, $R \in R \rightarrow R \notin R$; e, se $R \notin R \rightarrow R \in R$. Esse paradoxo, proposto por Russel, foi, na verdade, uma tentativa de mostrar que a lógica de Frege não estava livre de inconsistências, e admitia situações do tipo afirmar e negar a mesma proposição simultaneamente. E, dessa forma, Russel conclui que a teoria dos conjuntos não poderia assumir tal axioma, pois este era um gerador de paradoxo de natureza lógica. E aceitar uma lógica inconsistente implica em aceitar inconsistências na própria Matemática, algo inaceitável para lógicos e matemáticos. Frege admitiu que seu trabalho continha falhas, todavia, embora tenha se esforçado em busca de melhorias, não foi capaz de livrar sua obra de situações paradoxais. Foi o próprio Russel que apresentou uma proposta melhorada do trabalho de Frege¹⁴ (BASSANI, 2007, p. 167-168).

É fundamental observar que o “paradoxo do conjunto de todos os conjuntos que não são elementos de si mesmos” foi mais que uma inconsistência lógica. Foi, sobretudo, um marco na História da Matemática, pois a repercussão causada por esse paradoxo teve impacto na teoria dos conjuntos infinitos de Cantor, acarretando uma crise nos fundamentos na matemática moderna. A contradição lógica que esse paradoxo criou foi responsável por deixar desamparada toda teoria dos conjuntos de Cantor. Com isso, podemos dizer que Russel, com seu paradoxo, atacou a afirmação de Cantor referente à existência de um cardinal maior que todos os outros cardinais, ou seja, concluiu-se então que não pode haver um cardinal maior que todos os outros cardinais (SCIENTIFIC AMERICAN BRASIL *apud* DORTA, 2013, p. 32; D’OTTAVIANO E FEITOSA, 2003 *apud* DORTA, 2013, p. 32).

Podemos perceber a expressividade desses paradoxos observando, a seguir, o grande número de trabalhos que buscaram formular um sistema axiomático livre das inconsistências existentes e de outras tantas que pudessem surgir, e com isso, sanar a crise gerada pelos paradoxos (ÁVILA, 2000, p.10; DORTA, 2013, p. 32):

¹⁴ Essa proposta se trata de um trabalho desenvolvido com a colaboração de Alfred North Whitehead (1861-1947), na qual Russell desenvolve a obra *Principia Mathematica*, em três volumes, publicados respectivamente em 1910, 1912 e 1913. Assim, reformula e recupera o programa logicista de Frege baseando-se para isso no bloqueio dos círculos viciosos através da doutrina dos tipos lógicos. Resulta daí a denominada *teoria dos tipos* (PROBST, 2004, p. 8)..

Russell e Whitehead, com a publicação dos *Principia Mathematica* em 1910, 1912 e 1913 (Whitehead & Russell 1973), inauguram um novo período na história da lógica, solucionando o problema das antinomias semânticas e sintáticas (D'Ottaviano 1990). Introduzem a teoria ramificada de tipos, um sistema que incorpora o esquema de notação lógica de Peano (1894-1908) e estabelece uma hierarquia de tipos e coleções.

A teoria dos conjuntos, nascente no começo do século XX, teve suporte para resistir à crise dos paradoxos. Dois sistemas de teoria de conjuntos evoluíram dos trabalhos de Zermelo (1908), Fraenkel (1922), Skolem (1923), von Neumann (1925-1929), Bernays (1937-1954) e Gödel (1940): a Teoria de Conjuntos de Zermelo-Fraenkel (Teoria ZF) e a Teoria de Conjuntos von Neumann-Bernays-Gödel (Teoria GBN). O Sistema NF de Quine e a Teoria Tarski-Morse-Kelley surgiram posteriormente. As teorias de conjuntos (Halmos 1970, Di Prisco 1997 e Hrbacek & Jech 1978) apresentam solução parcial para o problema dos paradoxos, eliminando os paradoxos sintáticos da Matemática, e constituem sistemas potentes para a fundamentação da Matemática (D'OTTAVIANO, FEITOSA, 2003, p.9).

Esse tipo de paradoxo (antinomias) é uma ampla fonte de atividades recreativas, com as quais os matemáticos, lógicos e filósofos adoram brincar. O paradoxo de Russel é só mais um exemplo dos muitos casos de antinomias, em que pensadores ficaram perplexos diante de um impasse lógico aparentemente insolúvel. Inclusive, o paradoxo de Russel apresenta algumas versões mais populares (DORTA, 2013, p. 33).

O famoso paradoxo do barbeiro é uma dessas versões mais conhecidas do paradoxo de Russel. Esse célebre paradoxo diz que: numa pequena cidade existia um único barbeiro que, por ordens do prefeito, deveria barbear todos os homens que não se barbeavam a si mesmos. A situação paradoxal surge quando chega a vez do barbeiro se barbear; se ele barbeia-se a si mesmo, então está no grupo dos que se barbeiam a si próprios, e, portanto não deveria se barbear (paradoxo); agora, caso ele não se barbear a si mesmo, então pertence ao grupo dos que não se barbeiam a si mesmo, e dessa forma, deveria se barbear (outra vez um paradoxo). Ou seja, qualquer que fosse a decisão do barbeiro, ele desobedeceria às ordens do prefeito, estando assim, diante de um paradoxo (BASSANI, 2007, p. 171).

De acordo com os construtivistas,¹⁵ esse tipo de paradoxo ocorre sempre que há um problema temporal inserido na classificação, entre os elementos que compõem o conjunto, isto é, se um determinado grupo faz parte de um conjunto ou de outro. Essas interferências temporais aparecem quando fatos futuros intervêm nas classificações feitas no presente. Analisando a ordem imposta ao barbeiro, ela só poderia ser executada, caso expressasse um limite temporal, ou seja, a ordem deveria exigir que uma classificação prévia fosse realizada, afim de excluir possíveis ambiguidades na execução (BASSANI, 2007, p. 171)

¹⁵ “O construtivismo (Filosofia da Matemática também conhecida como antirrealismo) considera que um conjunto existe apenas quando *todos* os elementos puderem, de alguma forma, ser construídos” (BASSANI, 2007, p. 169).

Os construtivistas buscaram fundamentos para solidificar a Matemática na tentativa de superar os paradoxos e incoerências que ameaçavam ruir tal ciência no século XIX. Esses filósofos, em geral, concluíram que o infinito atual era um grande causador de paradoxos (BASSANI, 2007, p. 174). “O problema de falta de limite temporal na verificação é justamente o problema que aparece quando for feita uma verificação (impossível) de conjuntos infinitos atuais” (BASSANI, 2007, p. 174).

Vejamos outra análise do problema:

É óbvio que desta forma um homem está sendo classificado como aquele que se barbeia a si mesmo se em qualquer tempo, seja no passado ou no futuro, ele se barbeia a si mesmo. Mas o futuro é impredicativo, e se deve reconhecer que nossas operações não devem envolver predições sobre o futuro. É suficientemente evidente, entretanto, que a ordem não é propriamente executada, porque envolve uma situação operacionalmente indeterminada, e devemos estar preparados para o paradoxo (BRIDGMAN, 1934 *apud* BASSANI, 2007, p.172).

Se o limite temporal fosse imposto, o barbeiro saberia exatamente a qual dos dois grupos pertenceria: aqueles que se barbeiam a si próprios, caso possuísse esta propriedade; ou pertenceria àquele grupo cuja barba não era feita por si próprio, se fosse este o caso. Tal paradoxo aparece porque a classificação no presente permite, ainda na metade, uma nova situação futura: a classificação do próprio barbeiro, que interfere na circunstância presente, não permitindo uma classificação atual, isto é, uma situação do futuro interferindo na classificação do presente (BASSANI, 2007, p.172).

Uma maneira alternativa e mais filosófica de solucionar o dilema do barbeiro, seria considerar que, obedecendo às imposições do paradoxo, o barbeiro não poderia existir, pois aceitar a existência do barbeiro, nas circunstâncias impostas pelo paradoxo, seria equivalente a aceitar que um indivíduo pode ter, concomitantemente, mais de x metros de altura e menos de x metros de altura. Tal afirmação é, evidentemente, uma calúnia, porque um indivíduo com essa característica não pode existir. Isto é, um barbeiro que faz a barba a todos os homens de uma determinada cidade, que não faz a barba a si mesmo, mas nunca faz a barba a qualquer pessoa que faz a própria barba, obviamente não pode existir, porque há uma contradição: e o barbeiro, a que conjunto pertence? As duas classificações possíveis, a recordar: o barbeiro faz a própria barba; e o barbeiro não faz a própria barba, como visto anteriormente, implicam em contradição. Dessa forma, análogo ao exemplo das alturas, um barbeiro assim não pode existir (SMULLYAN, 1998 *apud* BASSANI, 2007, p.173).

Ernst Zermelo (1871 – 1953) foi um matemático bem sucedido na criação de axiomas consistentes para a teoria dos conjuntos. Em suas observações acerca dos paradoxos

envolvendo conjuntos infinitos, nomeadamente o paradoxo de Russel e o paradoxo de Cantor¹⁶, Zermelo destacou que dois fatores não podiam coexistir, a saber: a definição livre de conjunto, como, por exemplo, conjunto universal; e a utilização de propriedade dos elementos de um conjunto para caracterizá-lo. Como o último fator é muito natural, não há razões para descartá-lo. Dessa forma, Zermelo teve que optar pela impossibilidade de se considerar a definição de conjunto irrestritamente, notadamente no caso “do conjunto de todos os conjuntos”, ou ainda o “conjunto de todos os conjuntos que não pertencem a si mesmos”. Zermelo percebeu a possibilidade de criar novos conjuntos infinitos sempre a partir de outro conjunto infinito já existente. Exemplificando, a partir do conjunto dos naturais N , podemos tomar dois pares (a, b) , $b \neq 0$ e, a partir deles, obter os racionais Q . A partir dos racionais, construímos os reais R e dos reais obtemos os complexos I (ÁVILA, 2000, p.10).

4.4 PARADOXO DE HILBERT – HOTEL DE HILBERT

O Hotel Infinito de Hilbert é um paradoxo verídico e pode ser descrito da seguinte maneira: considere um hotel com infinito quartos, situado em Infinitópolis, cujos quartos podem ser enumerados pelo conjunto números naturais N^* , ou seja, podem ser colocados em correspondência biunívoca com este conjunto (do um ao infinito), que se encontra com todos os quartos ocupados, isto é, em cada quarto há um hóspede. A esse hotel denominamos Hotel de Hilbert (HH) - ilustrado pela Figura 6 (MADEIRA, COSTA, 2012, p. 52; DORTA, 2013, p. 33; KRAGH, 2014, p.2).

¹⁶ Um dos paradoxos mais antigos da teoria dos conjuntos, indicado pelo próprio Cantor. De acordo com a definição de conjunto de Cantor, existe um conjunto U de todos os conjuntos. Tal conjunto seria o conjunto universal. Portanto, teria o maior cardinal, já que U é a reunião de todos os conjuntos. Sabe-se ainda, que ele teria que estar contido em si próprio, pois é conjunto um de todos os conjuntos, inclusive si próprio. Todavia, quando consideramos o conjunto $P(U)$ (conjunto das partes de U), concluimos, pela definição, que $P(U) > U$. O que contradiz a hipótese de existir um conjunto de todos os conjuntos (ÁVILA, 2000, p. 8).

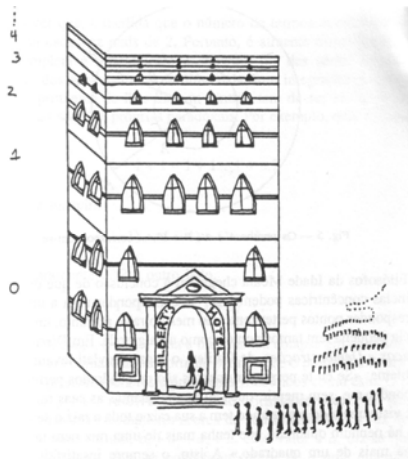


Figura 6 - Imagem ilustrativa do HH (MADEIRA, COSTA, 2012,p. 53).

Agora, suponha que chegue um viajante em Infinitópolis para pernoitar no HH. Será possível o gerente encontrar um quarto vago para o hóspede? Surpreendentemente, embora o HH esteja lotado, a resposta é sim. O gerente pede ao novo hóspede que se dirija ao quarto de número um. Para que isso seja possível, o gerente pede, pelo alto-falante do hotel, ao hóspede um que está no quarto um que vá para o quarto dois, ao hóspede dois que está no quarto dois que vá para o quarto três e assim por diante. O gerente pede ao hóspede k que está no quarto k que vá para o quarto $k+1$ (com $k \in \mathbb{N}^*$). E como isso, o quarto de número um fica vago e o viajante pode, tranquilamente, acomodar-se no HH sem que qualquer hóspede tenha que deixar o hotel (MADEIRA, COSTA, 2012, p. 52; DORTA, 2013, p. 33; KRAGH, 2014, p.2).

Portanto, a solução apresentada pelo gerente pode ser descrita por uma função bijetora. Seja v_1 o viajante que foi hospedado no quarto de número um e f uma função que relaciona o número dos hóspedes com o número dos quartos. Vem o seguinte, e a equação (25): $f : \mathbb{N}^* \cup \{v_1\} \rightarrow \mathbb{N}^*$ (FREITAS, VIANA, 2013, p. 11).

$$f(k) = \begin{cases} k + 1, & k \in \mathbb{N}^* \\ 1, & k = v_1 \end{cases} \quad (25)$$

Agora, e se ao invés de um chegassem dois viajantes para se hospedar no HH? A solução seria muito semelhante, bastaria pedir para o hóspede um mudar-se para o quarto três, para hóspede do quarto dois mudar-se para o quarto quatro e assim por diante. O hóspede do quarto k se deslocaria para o quarto $k+2$. E mais uma vez teria uma função bijetora que representa as ordens do gerente; sejam os viajantes v_1 e v_2 , temos o seguinte e a equação (26): $f : \mathbb{N}^* \cup \{v_1, v_2\} \rightarrow \mathbb{N}^*$ (FREITAS, VIANA, 2013, p. 11).

$$f(k) = \begin{cases} k + 1, & k \in N^* \\ 2, & k = v_2 \\ 1, & k = v_1 \end{cases} \quad (26)$$

Com isso, podemos concluir que se chegassem n (com n finito) novos viajantes seria possível que todos se hospedassem sem que qualquer hóspede precisasse deixar o HH. E a função bijetora seria a que segue: sejam $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$, os viajantes, portanto temos $f : N^* \cup \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \rightarrow N^*$ e a equação (27) (FREITAS, VIANA, 2013, p. 11).

$$f(k) = \begin{cases} k + n, & k \in n^* \\ i, & k = v_i \end{cases} \quad (27)$$

Portanto, dizer que todos os quartos do HH estão ocupados não implica em dizer que não há como hospedar novos hóspedes. Isso é de fato contra intuitivo. Embora não seja um paradoxo propriamente dito, é um paradoxo no sentido lógico do termo, ou seja, um paradoxo verídico. No entanto, é tão contra intuitivo que sugere que o infinito atual contável não pertence ao mundo real em que vivemos (KRAGH, 2014, p.2).

No dia seguinte ocorreu uma situação um pouco mais interessante no HH, com a chegada de um ônibus infinito, com infinitos turistas para conhecer a cidade de Infinitópolis, o HH foi novamente requisitado para hospedar esses infinitos viajantes. Já vimos que com quantidades finitas é fácil reorganizar os quartos e conseguir acomodar todos os hóspedes, mas e agora com quantidade infinita? A solução vai ter que ser um pouco mais criativa, e nosso gerente acerta mais uma vez ao solicitar, no alto-falante, para que o hóspede do quarto um vá para o quarto dois, e o hóspede do quarto dois vá para o quarto quatro, o do três vá para o seis, isto é, que o hóspede do quarto k vá para o quarto $2k$. dessa forma todos os hóspedes que estavam no HH se acomodam nos quartos de números pares, deixando os quartos ímpares desocupados, que deverão ser ocupados da seguinte forma: passageiro da poltrona um se dirige para o quarto de número um, o da poltrona dois vai para o quarto três e assim sucessivamente, ou seja, o passageiro da poltrona k se dirige para o quarto $2k-1$ (DORTA, 2013, p.34). Podemos escrever isso matematicamente com a seguinte função bijetora definida por ramos, de acordo com a equação (28):

$$f(k) = \begin{cases} 2k, & \text{se o hóspede já estava no HH} \\ 2k - 1, & \text{se o hóspede for passageiro no ônibus} \end{cases} \quad (28)$$

Na semana seguinte ocorre algo ainda mais curioso. Como Infinitópolis estava ficando famosa por causa do HH, vieram infinitos ônibus, cada um com infinitos passageiros para visitar a cidade e todos esses turistas com pretensão de se hospedar no HH que já se encontrava todo ocupado. Para resolver o problema, novamente o gerente solicita aos hóspedes que troquem de quarto. A troca deve ocorrer da seguinte maneira: o hóspede do quarto um vai para o dois, o do quarto dois vai para o quatro, o do três vai para o oito, isto é, o hóspede do quarto k deve se mudar para o quarto cujo número seja o resultado de 2^k , (DORTA, 2013, p.34).

Mas, agora o gerente precisa acomodar os infinitos passageiros a bordo dos infinitos ônibus e para isso, pede que os passageiros do primeiro ônibus se dirijam aos quartos cujos números são potências de três. Portanto, o passageiro do primeiro ônibus que estiver ocupando o assento de número um deve ir para o quarto 3, o passageiro da poltrona dois deve se acomodar no quarto de número nove, e assim segue, de modo que o passageiro da poltrona k ocupe o quarto de número 3^k . Já os passageiros do segundo ônibus deverão se acomodar nos quartos cujos números resultem de uma potência de cinco, isto é, o passageiro que ocupar a poltrona de número k deve se dirigir para o quarto de número 5^k . Seguindo o raciocínio, os passageiros do terceiro ônibus devem ocupar os quartos cujos números são potências de sete, de forma que o passageiro que ocupar a poltrona k deve se acomodar no quarto de número 7^k . Para garantir que tudo continue a correr bem, basta seguir atribuindo um número primo subsequente para cada ônibus e solicitar aos passageiros que se dirijam ao quarto cujo número é uma potência do primo corresponde ao ônibus elevado ao número da poltrona ocupada pelo passageiro. Isto é, o passageiro do n -ésimo ônibus e que estiver ocupando a k -ésima poltrona deverá se acomodar no quarto de n -ésimo número primo elevado a k -ésima potência (p_n^k), com p primo e n, k naturais (DORTA, 2013, p.34). Podemos descrever isso com a seguinte função definida por ramos, de acordo com a equação (29):

$$f(k) = \begin{cases} p_n^k, & p \text{ primo} - \text{passageiro do } n - \text{ésimo e } k - \text{ésima poltrona} \\ \vdots \\ 3^k, & \text{passageiro do primeiro ônibus e } k - \text{ésima poltrona} \\ 2^k, & \text{se o hóspede já estava no HH} \end{cases} \quad (29)$$

Para garantir que tudo continue a correr bem, basta seguir atribuindo um número primo subsequente para cada ônibus e solicitar aos passageiros que se dirijam ao quarto cujo número é uma potência do primo corresponde ao ônibus elevado ao número da poltrona

ocupada pelo passageiro. Isto é, o passageiro do n -ésimo ônibus e que estiver ocupando a k -ésima poltrona deverá se acomodar no quarto de n -ésimo número primo elevado a k -ésima potência (p_n^k), com p primo e n, k naturais.

E como isso garantimos que hóspedes distintos ocuparão quartos distintos, pois de acordo com o teorema fundamental da aritmética, “todo número natural maior do que 1 ou é primo ou se escreve de modo único como um produto de números primos” (HEFEZ, 2011, p.83). Como, $p_n \neq p_m$, logo $p_n^k \neq p_m^l$, com p primo, para quaisquer que sejam k, l, m, n naturais e $n \neq m$ (DORTA, 2013, p.35).

Voltando a análise filosófica, é fácil concluir que neste paradoxo não se chega a uma conclusão contraditória, mas contra intuitiva. É possível notar que o Hotel de Hilbert é um Paradoxo Verídico, pois não existe contradição no enunciado e nem na conclusão do problema. Apenas são ressaltadas algumas “propriedades surpreendentes” dos conjuntos infinitos, que permeiam as teorias de George Cantor. Dentre elas destacamos para a compreensão do Paradoxo do Hotel de Hilbert, que “subconjuntos infinitos de conjuntos enumeráveis são enumeráveis” (GONÇALVES, GONÇALVES, 2012 *apud* DORTA, 2013, p.35).

Os conjuntos finitos não podem se corresponder com nenhum de seus subconjuntos próprios de maneira biunívoca. Diferentemente dos conjuntos infinitos, a definição matemática de conjunto infinito usa precisamente o fato de o conjunto poder se corresponder de forma biunívoca com algum dos seus subconjuntos próprios (MADEIRA, COSTA, 2012, p. 52-53).

Como o conjunto dos naturais N pode ser posto em correspondência um-a-um com o conjunto dos pares $2N$, (que é seu subconjunto próprio) de acordo com a função $f: N \rightarrow N$, que leva cada elemento N para um único elemento de $2N$: de $f(n) = 2n$, então temos que N é infinito. No caso do HH, o gerente usou o fato (definição) dos conjuntos infinitos poderem se colocar em correspondência biunívoca com seus subconjuntos para deixar de fora um elemento (quarto um), depois dois elementos (quartos um e dois) e assim por diante. Dessa forma, concluímos que este processo pode ser ajustado para deixar de fora quantos elementos quisermos, desde que seja uma quantidade finita, da mesma maneira que ocorreu com os quartos do HH (DORTA, 2013, p.36; MADEIRA, COSTA, 2012, p. 53).

Uma das ações do gerente foi tornar um infinito de quartos disponíveis. Com isso, ele mostrou o curioso resultado de que subtraindo infinitos de infinitos de mesma natureza o resultado vai continuar sendo infinito. Por exemplo, retirando os números pares dos números naturais continuamos com um conjunto infinito, a saber, o conjunto dos ímpares (MADEIRA, COSTA, 2012, p. 53).

Como já foi referido nesse trabalho, Cantor denominou o cardinal dos naturais por \aleph_0 , que é o mesmo do conjunto dos ímpares, dos inteiros e dos racionais. Como o conjunto dos naturais é a reunião do conjunto dos pares com os ímpares, então concluímos que $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$. O raciocínio do gerente do HH também evidenciou que $\aleph_0 - \aleph_0 = \aleph_0$. E essas são apenas algumas das muitas propriedades contra intuitivas que os conjuntos infinitos possuem. Observe mais algumas que ocorreram no HH: $\aleph_0 + 1 = \aleph_0$; $\aleph_0 + 2 = \aleph_0$ dentre outras. Embora essas propriedades desafiem o senso comum, conduzem a uma aritmética consistente para os conjuntos infinitos (MADEIRA, COSTA, 2012, p. 53).

No decorrer dos séculos, o princípio “o todo é maior que a parte” foi aceito amplamente em diversos contextos, em especial por Galileu Galilei e Euclides de Alexandria. Porém, como vimos nas manobras do HH, esse princípio não pode ser aplicado a conjuntos infinitos. E dessa forma chegamos ao paradoxo fundamental de todos os conjuntos infinitos: “o todo não é maior do que algumas de suas partes” (GONZÁLEZ, 2011, p 722; KASNER, NEWMAN, 1968, p. 52).

CAPÍTULO 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo desse trabalho foi compreender o conceito de infinito no decorrer dos séculos, desde a Grécia antiga até a teoria dos conjuntos e os problemas atuais. Abordaram-se algumas questões e paradoxos relacionados com a ideia de infinito que causaram controvérsias ao longo da História e que ainda hoje são discutidos no meio matemático. Com esse estudo exploratório, consideramos que o objetivo foi atingido, no sentido de esclarecer grande parte dos questionamentos desta pesquisadora, na medida em que possibilitou um contato inicial com o tema por meio de consulta a diversos livros e trabalhos científicos pertinentes à problemática do trabalho, levantando alguns dos principais aspectos históricos e pensadores que se aventuraram na busca por respostas a problemas relacionados ao infinito, seja na sua forma atual ou potencial.

Na abordagem histórica foi possível compreender a forma como cultura e sociedade influenciam os problemas envolvendo o infinito. Vejamos alguns exemplos: os gregos, grandes geômetras, tinham seus problemas relacionados ao infinito envolvendo modelos geométricos, isto é, cálculo de áreas, cálculo da diagonal do famoso quadrado de lado unitário e problemas relacionados ao espaço e movimento, como é o caso dos paradoxos de Zenão; na idade média o conceito de infinito é atribuído a Deus, como sendo o único digno de tal qualidade, ideia que estava bastante de acordo com o pensamento cultural e social da época, na qual era predominante o pensamento teológico. Mais adiante, a partir do século XVIII a preocupação dos matemáticos estava bem mais relacionada ao desenvolvimento da análise, álgebra, aritmética e teoria dos números, e percebemos que o infinito acompanhou a evolução, pois nesse período o conceito de infinito foi largamente estudado, sendo este o pilar do desenvolvimento das somas de sucessões infinitas e da teoria dos conjuntos de Cantor. Podemos observar essa abordagem mais abstrata nos paradoxos de Russel e Hilbert. Cantor explicou a natureza do infinito e fez grandes contribuições para o entendimento desse conceito. Foi ele quem dividiu o infinito em enumerável e não enumerável, e com isso foi o precursor de vários estudos nesse ramo.

Temos, ainda, que ressaltar a importância que os paradoxos relacionados com o conceito de infinito tiveram para o desenvolvimento da Matemática. Foram eles que impulsionaram muitos matemáticos a refletir sobre o assunto, que suscitaram dúvidas em filósofos, físicos e outros pensadores, e, em busca de solução para esses problemas, a

Matemática teve grande avanço, em particular para o desenvolvimento do Cálculo Infinitesimal e a Teoria de Conjuntos.

Com essa pesquisa não temos pretensão de trazer respostas definitivas. Queremos apenas sugerir mais discussões acerca do infinito, dada a importância do tema. Pois, como foi possível perceber nesse trabalho, o “infinito” tangencia praticamente todos os ramos da Matemática e, por ser um conceito bastante complexo e contra intuitivo, ainda hoje causa estranhamento àquele que querem estudar Matemática. A discussão do trabalho é bastante pretenciosa e trata de uma questão altamente complexa e inacabada: o infinito. Este foi um estudo inicial que requer continuidade para que possa alcançar outros resultados. Como continuidade, em pesquisas futuras, sugerimos o trabalho com História da Matemática abordando os paradoxos apresentados nesse estudo em turmas de Ensino Médio e Superior, bem como, estudar o que é a ideia de infinito na perspectiva da matemática,. Portanto, a realização desse trabalho foi importante no sentido de colocar a discussão em pauta e sugerir ideias para futuros trabalhos.

Se por um lado compreensões foram constituídas, por outro, novos questionamentos surgiram e, assim, esse processo de pesquisar se renova por diversas vezes. Para expressar esse movimento, destacamos novamente as palavras de (BICUDO, 1993, p. 18) quando a autora afirma que em uma pesquisa “não há uma última resposta, uma solução definitiva, não há compreensão e interpretações plenamente desenvolvidas e que dão conta de todas as dimensões do fenômeno interrogado. Mas há sempre o "andar em tomo... outra vez e outra ainda...” (BICUDO, 1993, p. 18).

REFERÊNCIAS

A ENCICLOPÉDIA LIVRE. Wikipédia. Disponível em: <<https://pt.wikipedia.org/wiki/Ática>>. Acesso em: 20 out. 2015.

ABBAGNANO, N. **Dicionário de filosofia**. 2. ed. São Paulo: Martins Fontes, 1998.

AMADEI, F. L. **O infinito**: um obstáculo no ensino da matemática. 2005. 112 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2005.

ÁVILA, G. Cantor e a teoria dos conjuntos. **Revista do Professor de Matemática**, São Paulo, n. 43, p. 6 – 14, 2000.

BALIEIRO FILHO, I. F. Alguns paradoxos da matemática: um resgate histórico e possibilidades para o ensino e a aprendizagem. In: XXXIII CONGRESSO NACIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL, 1752, 2010. **Anais...** Águas de Lindóia: SBMAC, 2010.

BALIEIRO, I. F.; SOARES, M. R. Uma abordagem da análise matemática para alguns problemas derivados das concepções filosóficas de Zenon, Antifon e Brison. **Revista Brasileira de História da Matemática**, Ilha Solteira, v. 8, p. 155-172, mar. 2009.

BARKER, S.F. **Filosofia da matemática**. Trad. Leônidas Hegenberg. 2. ed. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1976. 141 p.

BASSANI, D. A. Uma análise construtiva de alguns paradoxos. **Tempo da Ciência**, Toledo, v. 14, n. 28, p. 165-177, nov. 2007.

BICUDO, M. A. V. Pesquisa em educação matemática. **Pré-posições**, v. 4, n. 1, p. 18 – 23, 1993.

BICUDO, M. A. V. A pesquisa qualitativa olhada para além dos seus procedimentos. In: _____. **Pesquisa Qualitativa Segundo a Visão Fenomenológica**. 1. ed. São Paulo: Cortês, 2011. p. 11 – 74

BICUDO, M. A. V. A pesquisa em educação matemática: a prevalência da abordagem qualitativa. **Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia**, v. 5, n. 2, 2012.

BOYER, C. B. A century of anticipation. In: _____. **The history of the calculus and its conceptual development: (the concepts of calculus)**. New York: Dover Publications, 1959. p. 96 – 186.

_____. **História da matemática**. 2. ed. São Paulo: Editora Blücher, 1996. 496 p.

BROLEZZI, A. C. **A tensão entre o discreto e o contínuo na história da matemática e no ensino de matemática**. 1996. 95 f. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1996.

_____. Raízes do Cálculo na Grécia antiga. **Revista da Pesquisa e Pós-Graduação**, v. 1, n. 1, 1999.

CARVALHO, T. F. de; D’OTTAVIANO, I. M. L. Sobre o infinitésimo e o cálculo diferencial paraconsistente de da Costa. **Revista Eletrônica Informação e Cognição**, v. 4, n. 1, p. 78 – 102, 2002 – 2005.

CINDRA, J. L. Algumas considerações sobre o infinito. In: SEMINÁRIO NACIONAL DE HISTÓRIA DA CIÊNCIA E DA TECNOLOGIA , 14., 2012, Belo Horizonte. **Anais eletrônicos...** Belo Horizonte: Sociedade Brasileira de História da Ciência, 2012.

DIAS, C. M. C. **Compêndios de matemática e de lógica matemática: uma abordagem extemporânea**. 2. ed. Curitiba: C. M. Corrêa Dias, 1999. 391 p.

DORTA, F. **Os paradoxos e as aulas de matemática: algumas reflexões e sugestões**. 2013. 162 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade de Londrina, Londrina, 2013.

D’OTTAVIANO, I. M. L; FEITOSA, H. de A. Sobre a história da lógica, a lógica clássica e o surgimento das lógicas não-clássicas. In: SEMINÁRIO NACIONAL DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA, 5, 2003, Rio Claro. **Anais...** Rio Claro: UNESP, 2003. p. 1 – 34.

ESTRADA, M. F. et al. **História da matemática**. 1ª ed. Lisboa: Universidade Aberta, 2000. v. único, cap. 9.3, p. 555 – 583.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. 2. ed. Campinas: Editora Unicamp, 1997. 843 p.

FORUM DE DISCURSUS. Wordpress. Disponível em: <forumdediscursus.wordpress.com/antiga-2/tudo-parado>. Acesso em: 10 out. 2015.

FREITAS, R. de; VIANA, P. **Hotel de Hilbert**. Notas de aula. Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal Fluminense, 2013, 89 p.

GERHARDT, T. E.; SILVEIRA, D. T. **Métodos de pesquisa**. 1. ed. Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2009. 120 p.

GONZÁLES, C. G. Paradoxos, o infinito e a intuição geométrica. **Educação e Filosofia**, Uberlândia, v. 25, n. 50, p. 717 – 739, 2011.

KASNER, E.; NEWMAN, J. **Matemática e imaginação**. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1968, 348 p.

KRAGH, H. The true (?) story of hilbert's hotels. **History and Philosophy of Physics**, Aarhus, v. 2, p. 1 – 16, 2014.

LOURA, L. C. do C. de. **Tópicos de matemática**, jul. de 2002. 120 f. Notas de Aula.

MACHADO, R. B.; SCHUCK, C. A.; WAGNER, D. R. Convergências no infinito: discussões sobre arte, matemática e olhar. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO EM MATEMÁTICA, 11, 2013. **Anais...** Curitiba: PUC-PR, 2013.

MADEIRA, M. A. da C. R.; COSTA, J. P. P. da. **História do conceito de infinito**. 2012. 90 f. Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso) – Universidade Lusófona de Humanidades e Tecnologias, 2012.

MICHAELIS, J. D. **Dicionário escolar**: língua portuguesa. São Paulo: Melhoramentos, 2012. 992 p.

MONTEIRO, M. C. S. T. **A evolução do conceito de limite**. 2008. 105 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Portucalense Infante D. Henrique, Porto, 2008.

MORAES, M. S. F. et al. Alguns apontamentos sobre o desenvolvimento histórico do conceito de limite de função. In: SEMINÁRIO NACIONAL DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA, 10, 2013, Curitiba. **Anais...** Campinas: Unicamp, 2013.

PESSOA JR., O. **Filosofia da física clássica**. 2º semestre de 2008. 63 f. Notas de aula.

PINTO, C. F. Sobre paradoxos, falácias e suas relações com a matemática. In: X ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 1, 2010. **Anais...** Salvador: SBEM, 2010.

PROBST, C. M. **Aspectos dos fundamentos de matemática**. 2004. 25 f. Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso) – Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Universidade Federal de Santa Catarina, 2004.

QUINE, W.V. **Ways of paradox and other essays**. Cambridge: Harvard University Press, Massachusetts and London, 1976. 350 p.

RAUPP, F. M.; BEUREN, I. M. Metodologia da pesquisa aplicável às Ciências Sociais. In: BEUREN, I. M. **Como elaborar trabalhos monográficos em contabilidade: teoria e prática**. São Paulo: Atlas, 2003. p. 76 – 97.

REZENDE, W. M. **O Ensino de cálculo: dificuldades de natureza epistemológica**. 2003. 468 f. Tese (Doutorado em Educação, área de Ensino de Ciências e Matemática) - Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2003.

ROSA, C. A. de P. **História da ciência: a ciência e o triunfo do pensamento científico no mundo contemporâneo**. Brasília: Fundação Alexandre de Gusmão, 2010. v. 3, 524 p.

SAMPAIO, P. A. S. R. Infinito: uma história a contar. **Millenium**, n. 34, p. 205-222, 2008.

SENA, C. O. de R. **Uma história sobre o infinito atual**. 2011. 30 f. Monografia (Especialização em Matemática para Professores do Ensino Básico) – Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2011.

TRIVIÑOS, A. N. S. **Introdução à pesquisa em Ciências Sociais: a pesquisa qualitativa em educação**. São Paulo: Atlas, 1987. 87 p.

VAZ, M. **Teocentrismo medieval versus antropocentrismo renascentista**. Disponível em: <<https://www.psicologiamnsn.com/2014/09/teocentrismo-medieval-versus-antropocentrismo-renascentista.html>>. Acesso em: 10 out. 2015.

VIVAN, L. C. **Blog recordando matemática: a matemática simples e descomplicada!** São Paulo, 2014. Disponível em: <<http://recordandomatematica.blogspot.com.br/2014/07/o-paradoxo-de-zenon.html>>. Acesso em: 10 out. 2015.