UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS E CIÊNCIAS EXATAS

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Nilton Cezar Ferreira

Uma proposta de ensino de Álgebra Abstrata Moderna, com a utilização da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, e suas contribuições para a Formação Inicial de Professores de Matemática

Rio Claro
2017

Nilton Cezar Ferreira

Uma proposta de ensino de Álgebra Abstrata Moderna, com a utilização da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, e suas contribuições para a Formação Inicial de Professores de Matemática

Trabalho de Conclusão de Tese apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", campus de Rio Claro, como requisito para obtenção do grau de Doutor em Educação Matemática.

Orientadora: Lourdes de la Rosa Onuchic

Rio Claro

2017

512.02 Ferreira, Nilton Cezar
F383p Uma proposta de ensino de álgebra abstrata moderna, com a utilização da metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de matemática através da resolução de problemas, e suas contribuições para a formação inicial de professores de matemática / Nilton Cezar Ferreira. - Rio Claro, 2017
281 f. : il., figs., tabs., quadros, fots.

Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Orientador: Lourdes de la Rosa Onuchic

1. Álgebra abstrata. 2. Construção de conhecimento. 3. Educação básica. I. Título.

Ficha Catalográfica elaborada pela STATI - Biblioteca da UNESP
Campus de Rio Claro/SP

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", campus de Rio Claro, como requisito para obtenção do grau de Doutor em Educação Matemática.

Orientadora: Lourdes de la Rosa Onuchic

Comissão examinadora

Profa. Dra. Lourdes de la Rosa Onuchic - Orientadora
IGCE/UNESP/Rio Claro (SP)

Profa. Dra. Rosa Lúcia Sverzut Baroni
IGCE/UNESP/Rio Claro (SP)

Prof. Dr. Henrique Lazari
IGCE/UNESP/Rio Claro (SP)

Prof. Dr. Glen César Lemos
IFG/Goiânia (GO)

Prof. Dr. José Pedro Machado Ribeiro
IME/UFG/Goiânia (GO)

Rio Claro, 03 de março de 2017.

À minha querida esposa, Edna, pelo carinho, amor e compreensão.

AGRADECIMENTOS

Após mais de três anos nessa empreitada, com grande satisfação de ter conseguido chegar até aqui, não poderia deixar de reconhecer que nada disso seria possível se não fossem as inúmeras pessoas que, direta ou indiretamente, estiveram comigo, me ajudando, me apoiando ou me incentivando. Mesmo com receio de cometer alguma injustiça, eu não poderia deixar de agradecer:

À Deus por ter me dado força e me amparado, principalmente nos momentos mais difíceis.

Aos meus pais, Antônio e Divina, que sempre me incentivaram.

À minha orientadora, Lourdes, que nunca mediu esforços para me atender, me ajudar, me ensinar e estar sempre ao meu lado nessa caminhada.

À minha banca de qualificação e defesa, Glen César Lemos, Henrique Lazzari, Rosa Baroni e José Pedro Machado Ribeiro, pelas valiosas contribuições. E aos suplentes Rosana Miskulin**,** Andresa Justulin**,** Edna Zuffi, por aceitarem fazer parte desse processo.

Aos colegas do GTERP – Grupo de Trabalho e Estudo em Resolução de Problemas – Márcio, Luiz, Cecília, Sabrina, Lilian, Beatriz, Roger, Elizabeth, Fabiane, Tatiane, Rosilda, Andresa, Fernanda, Egídio, Malu e Raquel.

À minha amada esposa, Edna, e meus queridos filhos, Natália e Gabriel, pelas alegrias que sempre me proporcionaram e por terem suportado a minha ausência.

Aos alunos e professores do IFG que me ajudaram durante a implementação do nosso projeto de ensino. Em especial aos alunos: Claudinei, Maria da Conceição, Marlúcia, Jefferson, Francilene, Taynara, Elton, Michele e Ana Lúcia, por terem aceitado participar voluntariamente desse processo de investigação.

Aos meus amigos: Glen César Lemos, Luciano Duarte e Márcio Urel, pelo apoio e companheirismo durante essa empreitada.

As instituições de ensino UNESP e IFG, por terem me dado condições de realizar este feito.

Aos meus professores que contribuíram muito com a minha formação. Em especial a professora Rosana que sempre me apoiou, me incentivou, leu meu projeto e esteve disponível para me ajudar.

“Os que se encantam com a prática sem a ciência são como os timoneiros que entram no navio sem timão nem bússola, nunca tendo certeza do seu destino” **(Leonardo da Vinci).**

RESUMO

Este trabalho teve como principal objetivo investigar as contribuições que a Álgebra Abstrata Moderna (onde se trabalham as teorias de Grupos, Anéis e Corpos, dentre outras), ministrada como uma disciplina em cursos de Licenciatura em Matemática no Brasil, poderia dar à Formação Inicial de Professores de Matemática. Esta pesquisa teve caráter qualitativo e foi apoiada no Modelo Metodológico de Romberg-Onuchic. Visando alcançar esse objetivo, propusemos uma pesquisa de campo, desenvolvida em 2015, com uma turma do quinto período de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Goiás (IFG). Para isso, elaboramos e implementamos um projeto de ensino com o propósito de levar os alunos dessa turma a construírem um conhecimento satisfatório de Álgebra Abstrata Moderna e mostrar a relação de seus conteúdos com os da Educação Básica. Para a construção desse conhecimento, fizemos uso da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, figurada no campo da Educação Matemática e consolidada por diversas pesquisas como eficiente no processo de ensino, aprendizagem e avaliação de Matemática em diversos níveis – Fundamental, Médio e Superior. A correlação entre os conteúdos de Álgebra Abstrata Moderna e os da Educação Básica se deu através da proposição, aos estudantes da referida turma, de atividades extraclasse, que, sempre, em um momento posterior, eram discutidas, em sala de aula, por todos os integrantes desse processo: alunos, pesquisador e professor da disciplina. Contou, ainda, com dois encontros exclusivos para se trabalhar, discutir e analisar essa associação – Álgebra Abstrata Moderna e Educação Básica. A coleta de evidências foi feita através da observação do pesquisador durante a aplicação do projeto; materiais produzidos pelos alunos; mídias (gravações em áudio e vídeo dos encontros realizados); e uma avaliação diagnóstica que teve como foco: Formação de Professores, Álgebra e Resolução de Problemas. Os resultados confirmaram que a Álgebra Abstrata, se trabalhada de forma adequada, poderá trazer contribuições significativas à formação de professores de Matemática.

Palavras-chave: Álgebra Abstrata Moderna. Resolução de Problemas. Construção de Conhecimento. Educação Básica. Formação Inicial de Professores.

ABSTRACT

The main purpose of the present work was to investigate the contributions that Modern Abstract Algebra (which the theories of Groups, Rings and Fields, among others, are worked on), as a discipline in Degree courses in Mathematics in Brazil, might give to initial Teacher Education in Mathematics. The present research has a qualitative approach and it was grounded on the Methodological Model of Romberg-Onuchic. In order to achieve that goal, we proposed a field research, developed in 2015, involving a class of fifth semester students of Degree in Mathematics at Instituto Federal de Goiás (IFG). To that end, we elaborated and implemented a teaching project with the purpose of enabling that group of students to build satisfactory knowledge on Modern Abstract Algebra and showing the relationship of its contents to the ones of Elementary Education. In order to build such knowledge, we used the Methodology of Teaching-Learning-Evaluation in Mathematics through Problem Solving, found in the field of Mathematics Education and consolidated by several researches as effective in the process of Mathematics teaching, learning and evaluation in several levels – Elementary, Middle and Higher Education. The correlation between the contents of Modern Abstract Algebra and the ones of Elementary Education came about through the proposition to that group of students of extracurricular activities which were always discussed further in classroom by all people involved in that process: students, researcher and teacher. There were also two meetings with the only purpose of working, discussing and analysing this association – Modern Abstract Algebra and Elementary Education. The evidence-gathering was made through the researcher's observation during the project application, the materials produced by the students, the media (audio and video recordings of the meetings) and a diagnostic evaluation focused on Teacher Education, Algebra and Problem Solving. The results confirmed that Abstract Algebra, if properly worked on, might bring significant contributions to Teacher Education in Mathematics.

Keywords: Modern Abstract Algebra. Problem Solving. Knowledge Building. Elementary Education. Initial Teacher Education.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE QUADROS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

AAM – Álgebra Abstrata Moderna.

CNPE/CP – Conselho Nacional de Educação/ Conselho Pleno.

EG – Estratégia Geral.

ENADE – Exame Nacional de Desempenho dos Estudantes.

GTERP – Grupo e Estudo e Trabalho em Resolução de Problemas.

IFG – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás.

LDB – Lei de Diretrizes e Bases da Educação.

MEAAMaRP – Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.

MEC – Ministério da Educação.

MMM – Movimento da Matemática Moderna.

NEPEM – Núcleo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática.

PCN – Parâmetros Curriculares Nacionais.

PG – Procedimento Geral.

PIBID – Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência.

PPP – Projeto Político Pedagógico.

RP – Resolução de Problemas.

SEF – Secretaria de Ensino Fundamental.

TCC – Trabalho de Conclusão de Curso.

TDM – Teoria da Disciplina Mental.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Esta pesquisa teve como Fenômeno de Interesse a Formação Inicial de Professores de Matemática. O processo de investigação nos levou a propor três temas: Formação Inicial de Professores de Matemática, Álgebra e Resolução de Problemas.

Para melhor compreensão de todo esse processo, discorreremos aqui sobre *os caminhos trilhados pelo pesquisador* e suas motivações para esta pesquisa, a explicitação da pesquisa e como a tese foi organizada.

O texto foi escrito, basicamente, na primeira pessoa do plural fazendo referência ao trabalho conjunto pesquisador-orientadora. Porém, em alguns momentos, o texto aparecerá na primeira pessoa do singular. Isso ocorrerá sempre que algum fato se referenciar exclusivamente ao pesquisador.

1.1 Os caminhos trilhados pelo pesquisador e suas motivações para a pesquisa

Ser professor! O que levaria um ser humano a se enveredar por caminhos de tantas incertezas? Há mais de vinte anos na profissão docente e, certo dia, me perguntei: “o que é ser professor?”, “os conteúdos que ensino realmente são importantes para meus alunos?”, “a metodologia que utilizo, em sala de aula, é capaz de levar meu aluno a produzir um conhecimento satisfatório de matemática?”. Além dessas perguntas muitas outras surgiram e ainda surgem.

Certamente, o que me trouxe até aqui não seguiu um curso natural. Ao longo de minha caminhada, repleta de dúvidas e obstáculos, descobri minha vocação pela profissão docente. Minha busca começou em 1990, quando ingressei no curso de Processamento de Dados, nas Faculdades Objetivo, onde permaneci durante dois anos. Em 1992, aprovado em vestibular para Matemática na UFG – Universidade Federal de Goiás, sem titubear, deixei esse curso e comecei minha nova caminhada. Ao terminar o segundo ano do curso de Matemática, tive que optar entre Licenciatura ou Bacharelado. Apesar de, na época, eu já atuar como professor da Educação Básica em escolas da Secretaria Estadual de Educação de Goiás, fiz a opção por Bacharelado por, ainda, não estar certo de que eu, realmente, queria continuar sendo professor, pelo menos no Ensino Fundamental ou Médio. Em 1996, recém graduado no Bacharelado em Matemática pela UFG, minha carreira tomou novos rumos. Sem deixar de ser professor da Educação Básica, ingressei, como professor convidado, para atuar em cursos de Graduação na Universidade Católica de Goiás, atualmente PUC-Goiás. A partir daí, meu destino foi traçado e, com a conclusão do meu Mestrado em 2001, também em matemática pela UFG, passei a me dedicar, exclusivamente, à carreira docente em cursos de Graduação. Além da PUC Goiás, fui professor, também, nas Faculdades Objetivo; Universo-Universidade Salgado de Oliveira; UEG – Universidade Estadual de Goiás; e IFG-Instituto Federal de Goiás, sendo que, nessa última instituição permaneço até os dias atuais.

Com perguntas do tipo: "Para que eu preciso estudar isso?", feitas durante minhas aulas de Cálculo nos cursos de Engenharia, surgiram minhas primeiras inquietações por não saber responder esses tipos perguntas. Essas inquietações não chegavam a me incomodar, pois eu não me sentia na obrigação de responder perguntas desse tipo. Afinal, só um engenheiro poderia responder onde se usa Cálculo Diferencial e Integral na prática profissional de um Engenheiro. Porém, quando comecei a trabalhar nos cursos de Licenciatura em Matemática, percebi que estudantes, que pretendiam ser professor, também faziam perguntas semelhantes. Como, por exemplo: "Para que eu preciso aprender Integrais Triplas se vou ser professor da Educação Básica?", "Para que eu preciso estudar Espaços Vetoriais se pretendo dar aulas no Ensino Fundamental?", "O que tem a ver a Teoria de Grupos com os conteúdos do Ensino Fundamental e Médio?". Se um Engenheiro deveria saber responder para que serve um curso de Cálculo na Engenharia, um professor deveria saber para que servem os conteúdos que ele ensina na Licenciatura, para a prática de um professor da Educação Básica. Essas inquietações de outrora passaram a ser um incômodo constante. A busca de resposta para esses tipos de questões me levou propor esta pesquisa.

1.2 Explicitação da pesquisa

Nesta pesquisa, buscamos compreender quais as contribuições que uma disciplina, intitulada nos livros didáticos por Álgebra Abstrata ou Álgebra Moderna, cujos conteúdos têm por base as teorias de Grupo, Anel e Corpo, podem dar a um professor da Educação Básica.

Durante a pesquisa procuramos investigar a real necessidade desses conteúdos e, também, a forma como essa disciplina poderia ser trabalhada, nos cursos de Licenciatura em Matemática, para que sua aprendizagem se consolidasse e os alunos pudessem fazer uso desse conhecimento em sua futura prática docente.

Usamos, como aporte fundamental para nossa investigação, a Resolução de Problemas. Muitas pesquisas têm mostrado que existe uma forte relação entre Resolução de Problemas e Pedagogia. Isto é, ela, a Resolução de Problemas, vem se consolidando, a cada dia, como uma Teoria importante no contexto didático-pedagógico, tendo um papel fundamental no processo de ensino, aprendizagem e avaliação de matemática. Para que nossa pesquisa se consolidasse foi necessária uma pesquisa de campo, com um trabalho desenvolvido em uma turma do quinto período do curso de Licenciatura em Matemática do IFG, no primeiro semestre de 2015. O pesquisador aplicou, nesse período, um projeto de ensino que fazia uso da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas na inserção dos principais conceitos da AAM (Álgebra Abstrata Moderna). Essa metodologia foi desenvolvida pelo GTERP, Grupo de Trabalho e Estudo em Resolução de Problemas da Unesp/Rio Claro. Pesquisas desenvolvidas pelo mesmo grupo têm mostrado que ela é capaz de levar o aluno a ser coconstrutor de seu próprio conhecimento. Com isso, o aluno seria capaz de produzir um conhecimento novo de Álgebra. Ao mesmo tempo em que esses novos conhecimentos iam sendo construídos, discussões e atividades buscavam levar os alunos a perceber e refletir sobre a utilização dos novos conhecimentos por eles produzidos, em sua futura prática profissional.

Diante disso, procuramos responder as seguintes questões:

- **Quais as contribuições de um curso de Álgebra Abstrata Moderna (AAM) para a formação de professores da Educação Básica, ministrado para alunos do quinto período de Licenciatura em Matemática do IFG**?

- **Como, utilizando a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, podemos levar o aluno da Licenciatura em Matemática do IFG a construir conhecimentos de Álgebra Abstrata Moderna?**

1.3 A organização da tese

No Capítulo 1, temos a presente introdução, que faz uma apresentação da vida acadêmica e profissional do pesquisador e os caminhos que o levaram a fazer esta investigação. É apresentada, também, uma proposta de pesquisa e como o texto foi organizado.

No Capítulo 2, apresentamos o Modelo Metodológico de Romberg-Onuchic como metodologia cientifica que guiasse nossos passos durante toda a pesquisa. Seguindo a estrutura proposta por esse modelo, definimos como variáveis-chave: Formação Inicial de Professores, Álgebra e Resolução de problemas. Para cada um desses três temas, nos propusemos a fazer um levantamento bibliográfico, o que Romberg chama de “relacionar com ideias de outros”. Nesse momento nos ativemos especificamente em “ouvir os outros”.

No Capítulo 3, estudamos um pouco da história da Formação de Professores no Brasil e as normativas legais que regem, atualmente, os cursos de Licenciatura em nosso país. Ouvimos um pouco das discussões e das reflexões de alguns pesquisadores sobre a Formação de Professores e sua profissionalização, bem como o papel do professor de matemática nesse cenário.

No Capítulo 4, fizemos um estudo amplo sobre a Álgebra, desde quando ela era pensada como um conjunto de métodos para resolver equações até a era intitulada moderna, dando destaque às Estruturas Algébricas. Estudamos também as diversas concepções da Álgebra, apresentadas por Usiskin, 1988, em seu artigo “*Conceptions of school algebra and uses of variables”* (Concepções da álgebra escolar e usos de Variáveis), traduzido e publicado no livro “As *ideias da álgebra”* , por Hygino H. Domingues (1995), com o título *“Concepções sobre a álgebra da escola média*[1] *e suas utilizações das variáveis”*. Fizemos, também, um estudo de como, quando e porquê a Álgebra foi inserida nos currículos dos cursos de Licenciatura no Brasil e, ainda, como a Álgebra está inserida no contexto desta pesquisa.

No Capítulo 5, fizemos um estudo sobre Resolução de Problemas dentro do contexto didático-pedagógico. Começamos analisando como se coloca a Resolução de Problemas dentro das diversas Teorias Pedagógicas apresentadas a partir do

[1] O tradutor traduziu “middle school” por escola média, aos anos 6, 7 e 8 da escola norte americana, correspondentes ao nosso Ensino Fundamental II.

século XIX. Em seguida, nos inteiramos sobre as três formas de abordagem no cenário educacional. E, por fim, apresentamos a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas discutindo suas potencialidades evidenciadas em diversas pesquisas.

No Capítulo 6, retomamos o Modelo Metodológico de Romberg-Onuchic, discutindo a influência dos outros na nossa pesquisa. Apresentamos as mudanças ocorridas pelo aprofundamento teórico descrito nos Capítulos 3, 4 e 5. E, por causa dessas mudanças, propusemos uma nova estrutura para a nossa pesquisa (Modelo Modificado) e, finalmente, propusemos as perguntas da pesquisa.

No Capítulo 7, para respondermos as perguntas da pesquisa, como estabelece o segundo bloco do Modelo Metodológico de Romberg-Onuchic, definimos uma estratégia geral ("o que fazer?") e um respectivo procedimento geral ("como fazer?"). Apresentamos também, nesse capítulo, um Plano de Ensino que estabelece todas as etapas da coleta de evidências, isto é, o procedimento geral em ação.

No Capítulo 8, apresentamos como foi trabalhada cada etapa do projeto criado e foi feita sua análise. Fizemos uma descrição detalhada de cada encontro, apresentamos alguns diálogos afim de inteirar o leitor com o que ocorreu em sala de aula e apresentamos relatos e documentos produzidos pelos alunos durante a implementação do Projeto de Ensino, com uma análise do pesquisador fundamentada em outras pesquisas.

No final deste trabalho, Capítulo 9, apresentamos as Considerações Finais, momento em que retomamos as perguntas da pesquisa para uma última reflexão. No intuito de consolidar as respostas apresentadas, submetemos nossa pesquisa ao processo de avaliação proposto por Romberg (2007). Enfatizamos as principais contribuições desta pesquisa com o campo da Educação Matemática, apresentamos seus resultados e propusemos novos trabalhos.

2 METODOLOGIA DA PESQUISA

Meu primeiro contato com a Educação Matemática foi marcado pela necessidade de compreender os princípios e fundamentos de uma Metodologia de pesquisa. Em minha formação acadêmica, um Bacharelado e um Mestrado em Matemática, não tive, em nenhum momento, a oportunidade, nem mesmo a necessidade, de me preocupar com questões dessa natureza. Diante da dificuldade de transição da "Matemática Pura" para o campo da "Educação Matemática", meu primeiro passo foi buscar orientações que me conduzissem ao processo de investigação científica. Fiorentini & Lorenzato (2006) relatam claramente o motivo de minha dificuldade e fortalecem minha crença em iniciar uma pesquisa em Educação Matemática pela busca de uma metodologia adequada à investigação a que me proponho.

> Enquanto os matemáticos, de um lado, estão preocupados em produzir, por meio de processos hipotético-dedutivos, novos conhecimentos e ferramentas matemáticas que possibilitam o desenvolvimento da matemática pura e aplicada, os educadores matemáticos, de outro, realizam seus estudos utilizando métodos interpretativos e analíticos das ciências sociais e humanas, tendo como perspectiva o desenvolvimento de conhecimentos e prática pedagógica que contribuam para uma formação mais integral, humana e crítica do aluno e do professor (FIORENTINI; LORENZATO, 2006, p. 4).

Como pesquisador iniciante na área de Educação, particularmente em Educação Matemática, resolvi buscar apoio em pesquisadores mais experientes e, de preferência, aqueles que tiveram as mesmas dificuldades que eu. Essa necessidade de me apoiar em outros pesquisadores, principalmente os que produziram pesquisas semelhantes, é apontada como um caminho respeitável por Kilpatrick (1996):

> [...] eu passei a ter um maior respeito para com os estudos reproduzidos, talvez não só por ajudar pesquisadores novos a se orientarem no campo, mas também para uma contribuição com o próprio campo (KILPATRICK, 1996, p.105).

Allevato (2005) diz que a complexidade do cenário em que se realiza o Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática leva os professores e os pesquisadores a buscarem fundamentação e perspectivas para investigar as variadas questões que surgem nesse cenário. Ela ainda afirma que essa complexidade é decorrente da presença e de inter-relações de diversos fatores trazidos ao contexto escolar, por pelo menos cinco elementos: o professor, os alunos, a disciplina, a escola e a sociedade.

Na busca por uma metodologia adequada, comecei analisando o caráter da pesquisa que eu pretendia desenvolver. Do ponto de vista da abordagem do problema ou da conjectura, ela é classificada como uma "pesquisa qualitativa", onde:

> [...] os dados qualitativos consistem em descrições detalhadas de situações com o objetivo de compreender os indivíduos em seus próprios termos. Esses dados não são padronizáveis como os dados quantitativos, obrigando o pesquisador a ter flexibilidade e criatividade no momento de coletá-los e analisá-los (GOLDENBERG, 2004, p. 53).

Para Bicudo (2010), o qualitativo engloba a ideia do subjetivo, passível de expor sensações e opiniões.

> O significado atribuído a essa concepção de pesquisa também engloba noções a respeito de percepções de diferenças e semelhanças de aspectos comparáveis de experiências, como, por exemplo, da vermelhidão do vermelho, etc. Entende-se que a noção do rigor não seria aplicável a dados qualitativos, uma vez que a eles faltaria precisão e objetividade, dificultando ou impossibilitando a aplicação de quantificadores (BICUDO, 2004, p. 106).

Kauark et al (2010, p.26) dizem que uma pesquisa qualitativa considera a existência de uma relação dinâmica entre o mundo real e o sujeito, isto é, um vínculo indissociável entre o mundo objetivo e a subjetividade do sujeito que não pode ser traduzida em números.

Portanto, por eu ter uma formação puramente matemática, a pesquisa que busquei desenvolver foi de caráter qualitativo, por eu estar passando por uma transição da "Matemática Pura" para a "Educação Matemática" e por buscar uma investigação em um cenário tão complexo – Ensino-Aprendizagem-Avaliação, resolvi adotar como guia para minha investigação a metodologia de pesquisa desenvolvida por Thomas A. Romberg[2], publicada inicialmente no ano de 1992, em um artigo intitulado "*Perspectives on Scholarship and Research Methods",* traduzido por Onuchic e Boero e impresso na revista do *Boletim de Educação Matemática (Bolema)* no ano 2007*,* de responsabilidade do Programa de Pós-graduação em Educação Matemática da Unesp-Rio Claro/SP, sob o título: *"Perspectivas sobre o Conhecimento e Métodos de Pesquisa".*

[2] Romberg é matemático e educador matemático, professor da Universidade de Wisconsin, no National Center for Research in Mathematical Sciences Education, Madison, USA.

Com o objetivo de orientar o pesquisador, Thomas A. Romberg, nesse artigo, apresentou um modelo em que ele descreve um conjunto de atividades que pode auxiliá-lo durante sua investigação científica. Porém, ele chama a atenção para o fato de o modelo não ser algo exclusivo, visto que a maioria das metodologias de pesquisa faz algo semelhante. Outro fator levantado por Romberg é que, esse modelo não é algo obrigatório a ser seguido, ele pode servir apenas como uma orientação e seus passos não necessariamente precisam ser seguidos na sequência apresentada.

Esse modelo, há alguns anos, vem servindo de referência às pesquisas desenvolvidas pelo GTERP[3]. Com base em vários trabalhos de pesquisadores desse grupo, que adotaram o modelo de Romberg como metodologia científica para suas pesquisas, o grupo tem sugerido algumas alterações no modelo inicial proposto por Romberg e, ainda, acrescentou uma nova atividade a ser desenvolvida. O modelo, com as alterações sugeridas, denominado *Modelo de Romberg-Onuchic,* foi publicado, em 2014, no terceiro capítulo do livro: “*Resolução de Problemas – Teoria e Prática”*.

> Durante alguns anos de pesquisa, observação e uso do Modelo Metodológico de Romberg, os membros do GTERP, que utilizaram e utilizam esse modelo para compor as suas dissertações e teses, perceberam que alguns passos poderiam ser alterados a fim de estabelecer um modelo mais completo para a realidade e os objetivos do grupo (ONUCHIC e NOGUTI, 2014, p. 57).

As alterações propostas pelo grupo consistem em uma atividade a mais e de novas interpretações a respeito das atividades desenvolvidas ao longo do fluxograma proposto por Romberg.

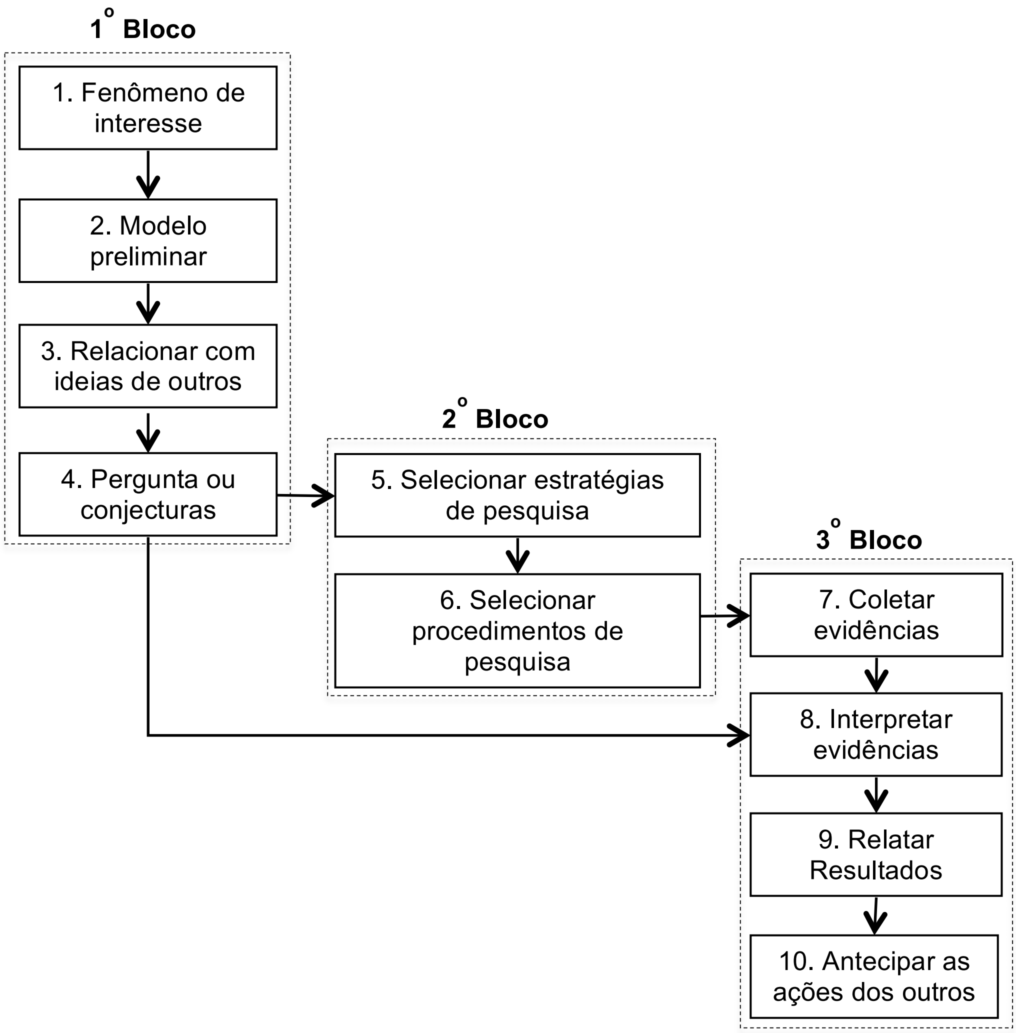
---

[3] GTERP - Grupo de Trabalho e Estudos em Resolução de Problemas, sob a coordenação da profa. Dra. Lourdes de la Rosa Onuchic.

2.1 O Modelo de Romberg-Onuchic

Neste item apresentaremos o Modelo de Romberg e o Modelo de Romberg-Onuchic, modelo que servirá de apoio para o desenvolvimento do nosso processo de investigação.

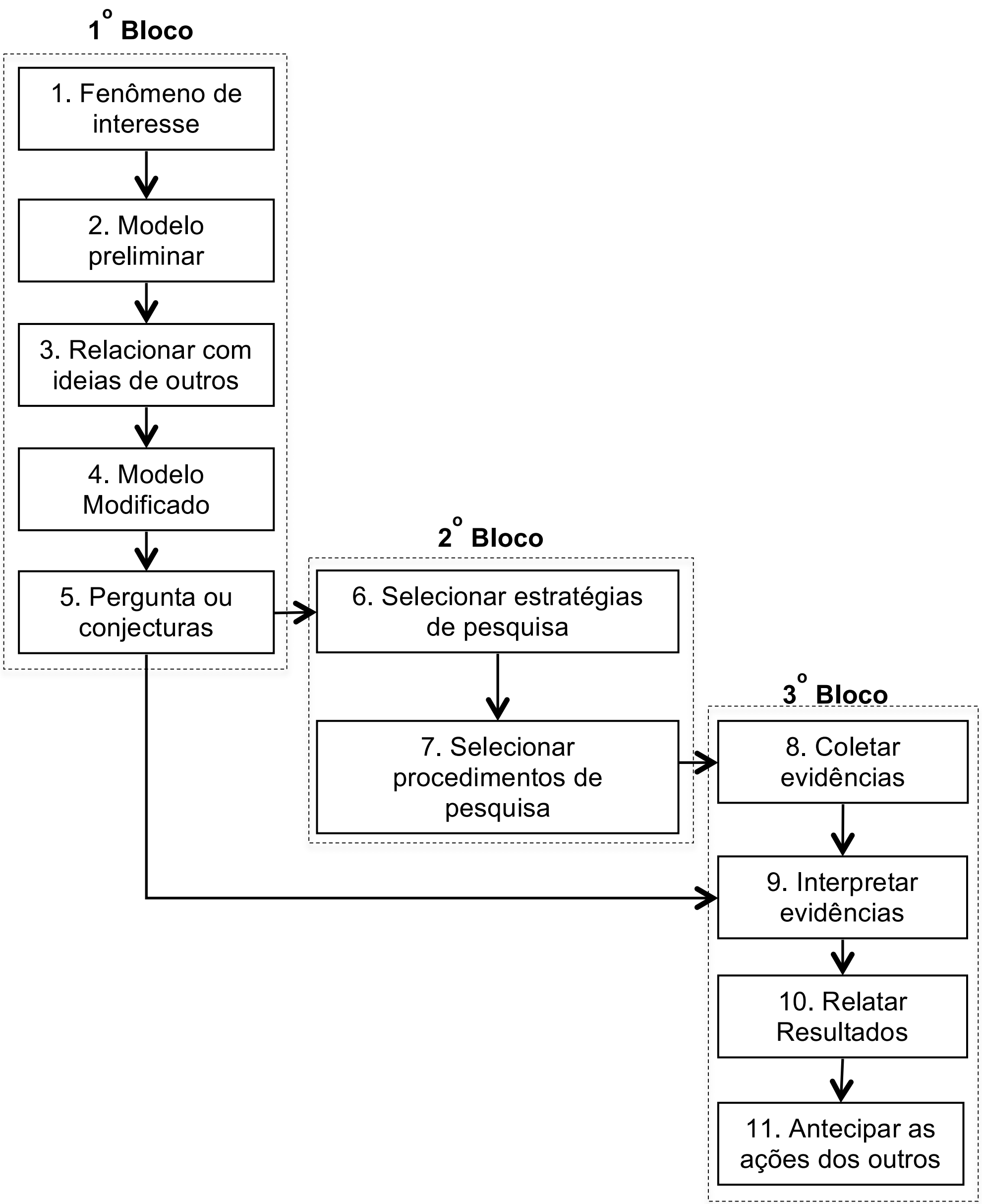
Figura 1 – Modelo de Romberg



Fonte: Romberg (2007)

Este Modelo é composto por dez atividades distribuídas em três blocos: o primeiro pelas atividades 1 a 4, o segundo pelas atividades 5 e 6 e o terceiro de 7 a 10. O primeiro bloco é considerado por Romberg o mais importante de todos, pois é onde se encontra a ideia central do que o pesquisador deseja fazer, ou seja, é o momento em que ele decide o que investigar. No segundo bloco, o pesquisador, buscando resolver o problema criado, estabelece estratégias (o quê?) e correspondentes procedimentos (como?). No terceiro bloco acontece a coleta de evidências na aplicação do procedimento geral, a análise das evidências e a apresentação dos resultados em um relatório. Ainda busca antecipar ações de outros pesquisadores.

Figura 2 – Modelo de Romberg-Onuchic



Fonte: Onuchic et al (2014)

O Modelo de Romberg-Onuchic apresenta, como podemos ver na Figura 2, uma nova atividade – *Modelo Modificado*. Acredita-se que após “relacionar com ideias de outros” novos elementos podem surgir e, possivelmente, modificar a ideia inicial que o pesquisador tinha sobre a pesquisa. Além de acrescentar essa nova atividade ao modelo de Romberg, Onuchic fez algumas interpretações, não mencionada por Romberg em seu artigo. Ela, através dos trabalhos desenvolvidos pelo GTERP, percebeu que: antes de pôr em ação a Atividade 3, o pesquisador precisa evidenciar temas importantes que o Fenômeno de Interesse e o Modelo Preliminar trazem (variáveis-chave), para identificar quem são “os outros” para a pesquisa; a seleção de estratégias e procedimentos deve ser feita a partir uma *Estratégia Geral* e de seu respectivo *Procedimento Geral*, onde a Estratégia Geral demanda uma classe de *estratégias auxiliares* e, analogamente, o Procedimento Geral requer um conjunto de *procedimento auxiliares*; e para ser possível fazer a coleta de evidências é preciso colocar o Procedimento Geral em ação.

A seguir, faremos uma descrição de cada uma das atividades do modelo de Romberg-Onuchic.

2.1.1 Fenômeno de Interesse

Segundo dicionário de filosofia, *fenômeno* significa “objeto do conhecimento humano, qualificado e delimitado pela relação com o homem” (ABBAGNANO, 2007, p. 437). Assim, o primeiro passo de uma pesquisa é identificar esse objeto e nossas relações com ele que nos incomodam e que gostaríamos de observar, estudar, entender e, possivelmente, modificar. Em outras metodologias o fenômeno de interesse é conhecido como o “objeto da pesquisa”. O fenômeno de interesse, em geral, nasce de uma curiosidade do pesquisador no contexto em que ele está inserido: na comunidade onde reside, no trabalho, ou em qualquer ambiente que ele frequenta.

2.1.2 O Modelo Preliminar

O Modelo Preliminar é uma ideia inicial que o pesquisador tem dos procedimentos que deverá seguir durante a pesquisa. Esses procedimentos são suposições feitas pelo pesquisador e o modelo é de extrema importância pois serve como um guia para suas ações. Mediante o Modelo Preliminar criado pelo pesquisador, poderá ser originada uma pergunta norteadora para pesquisa. Esse

Modelo Preliminar também evidencia variáveis importantes sobre o fenômeno de interesse apontando temas que o pesquisador deverá estudar, analisar e fazer uso para fundamentar sua pesquisa. Em geral, esse modelo poderá sofrer modificações ocorrentes, dentre outros motivos, pela ampliação de seus conhecimentos sobre as variáveis constatadas.

2.1.3 Relacionar com ideias de outros

Relacionar com ideias de outros significa, primeiramente, ouvir pessoas que já trilharam os mesmos caminhos que pretendemos trilhar, isto é, ouvir pesquisadores que já trabalharam sobre os mesmos temas que queremos investigar, ou sobre alguma das variáveis elencadas pelo modelo preliminar. De acordo com Romberg (2007), se alguém busca examinar a contribuição potencial das ideias de outros, deve relacionar aquelas ideias a uma particular visão de mundo. Nesta etapa, ouvir os outros não significa que tudo que ouvimos é relevante para o nosso trabalho, ou que devemos concordar e aceitar todas as ideias que esses “outros” defendem. Precisamos refletir, analisar e selecionar o que, de fato, vem ao encontro de nossas necessidades e que podem trazer contribuições ao nosso trabalho. Observamos que, mesmo as ideias com que não concordamos podem nos fazer refletir e ajudar a fortalecer nossa crença sobre o que defendemos ou, até mesmo, nos submeter a um estudo mais aprofundado em busca de uma fundamentação para nossas suposições.

2.1.4 O Modelo Modificado

O *Modelo Modificado* não aparece no fluxograma inicial proposto por Romberg. Ele é umas das contribuições, já mencionadas anteriormente, propostas pelo GTERP. A necessidade de um modelo modificado é justificada em Noguti e Onuchic (2014), pela defasagem do Modelo Preliminar após o pesquisador ter ouvido “outros”, quando dizem que:

> [...] após “ouvir os outros”, o pesquisador percebe que seu Modelo Preliminar encontra-se defasado ou possui poucas informações para ajudá-lo a formular uma Pergunta da Pesquisa (ONUCHIC e NOGUTI, 2014, p. 62).

2.1.5 Perguntas ou conjecturas

Segundo Romberg (2007), um dos passos-chave no processo de pesquisa são as perguntas ou conjecturas levantadas porque, quando se examina um fenômeno particular, um determinado número de questões potenciais inevitavelmente surge, e decidir quais questões examinar não é fácil. Ele diz também que, mais do que simplesmente levantar questões interessantes, os pesquisadores geralmente fazem uma ou mais conjecturas (suposições ou predições racionais) sobre o que seria necessário para responder as questões. As conjecturas baseiam-se na relação entre as variáveis que caracterizam o fenômeno de interesse e nas ideias sobre aquelas variáveis-chave e sua relação com o esboçado no Modelo Preliminar.

A partir da formulação das perguntas ou conjecturas, termina o primeiro bloco de Romberg-Onuchic. Os itens 2.1.6 e 2.1.7, que serão descritos a seguir, apresentam as atividades do segundo bloco. Nesse bloco, faz-se um planejamento da pesquisa, isto é, uma seleção de estratégias e procedimentos correspondentes, em que, apoiados nas variáveis-chave evidenciadas no Modelo Preliminar, nos torne capazes de responder as perguntas da pesquisa ou verificar a veracidade das conjecturas.

2.1.6 Selecionar estratégias de pesquisa

O segundo bloco de Romberg-Onuchic inicia-se logo após a elaboração da pergunta ou da conjectura da pesquisa. Neste ponto deve-se elaborar uma Estratégia Geral, que se constitui como um ponto de partida para o planejamento das ações necessárias para responder as questões evidenciadas pelo Modelo Modificado, relativas ao Fenômeno de Interesse. Esse planejamento é oriundo das reflexões sobre “o que devo fazer?” para responder as questões levantadas. Durante esse planejamento, são necessárias estratégias auxiliares que possibilitem atingir o objetivo proposto na Estratégia Geral.

> A decisão sobre que métodos utilizar segue diretamente das questões que se seleciona a partir da visão de mundo na qual as questões estão situadas; do modelo preliminar que foi construído afim de explicar o “fenômeno de interesse”; e da conjectura que se faz sobre a evidência necessária (ROMBERG, 2007, p.102).

2.1.7 Selecionar procedimentos específicos da pesquisa

Após elaborar as estratégias, isto é, já sabermos o que devemos fazer para resolver o problema da pesquisa, surge uma outra pergunta: “como eu vou fazer isso?”. Esta pergunta deve ser respondida com a elaboração de procedimentos adequados às estratégias levantadas. Assim, para a Estratégia Geral, corresponderá um Procedimento Geral e, cada Estratégia Auxiliar demanda um Procedimento Auxiliar.

Após configurado o Procedimento Geral, este deverá ser aplicado. Para a aplicação do Procedimento Geral é necessário que cada Procedimento Auxiliar seja aplicado antes.

2.1.8 Coletar evidências

Nesse momento iniciamos o terceiro bloco de Romberg-Onuchic. É Nesse bloco que tomamos as decisões sobre quais dados são relevantes para a pesquisa, fazemos a coleta desses dados e tiramos conclusões.

> Para responder as questões específicas que foram levantadas, evidências deve ser coletadas. É neste passo que as técnicas usualmente ensinadas em cursos de métodos de pesquisa são importantes: como selecionar uma amostra, como coletar uma informação (entrevista, pergunta, observação, teste), como organizar a informação uma vez que ela tenha sido coletada, e assim por diante. Há um grande número de procedimentos específicos que se poderia seguir para diferentes tipos de questões. Deve-se tomar o cuidado em selecionar procedimentos que irão esclarecer as questões (ROMBERG, 2007, p. 102).

O primeiro passo, a coleta de evidências, deve ser bem cuidadoso, visto que, no momento em que colocamos os procedimentos em ação, muitas evidências poderão surgir, porém o pesquisador deve ter a habilidade em saber selecionar apenas aquelas que são relevantes para sua pesquisa.

2.1.9 Interpretar evidências

Após coletar as evidências consideradas relevantes, é necessário que o pesquisador faça uma análise sobre os dados coletados. Nesse momento, deve entrar fortemente o posicionamento do pesquisador. Ele, embasado em uma fundamentação teórica, deve interpretar os dados a fim de tirar as conclusões necessárias para concluir a pesquisa, ou seja, responder as questões da pesquisa. Segundo Romberg (2007), o pesquisador pode utilizar tanto métodos quantitativos –

no caso em que se atribui números às informações – quanto os métodos qualitativos – métodos de análise quando os números não forem necessariamente utilizados. Ele ainda diz que, dentre as informações coletadas, parte delas é relevante, parte é irrelevante e parte é não compreensível. É nesse momento que o pesquisador é mais exigido, cabe a ele selecionar as evidências realmente importantes para sua pesquisa.

2.1.10 Relatar resultados a outros

Segundo Romberg (2007), após a interpretação das evidências é importante relatar, à comunidade de pesquisadores, os resultados encontrados, para que eles possam emitir suas opiniões e fazer críticas sobre o trabalho, o que seria uma espécie de julgamento, feito por outros especialistas, no campo em que a pesquisa foi desenvolvida. Essas opiniões são de suma importância para que o próprio pesquisador tome consciência do nível de qualidade de sua pesquisa.

2.1.11 Antecipar as ações de outros

Após concluir o que foi proposto pela pesquisa, os resultados devem ser divulgados para a sociedade, dando oportunidade à comunidade do campo trabalhado de avaliá-la, criticá-la e possivelmente sugerir modificações, ou fazer uso dos resultados produzidos por ela, para desenvolver novas pesquisas. Pensando dessa forma é que Romberg coloca a última atividade do seu Modelo Metodológico, a de "antecipar ações de outros", pois os resultados que a pesquisa traz são algo novo que poderá servir de base para novos trabalhos.

2.2 Minha pesquisa no Modelo de Romberg-Onuchic

A partir de agora, apoiado no Modelo Metodológico de Romberg-Onuchic, apresentaremos os passos da nossa pesquisa. Neste momento, apresentaremos somente as duas primeiras atividades, pois, como é proposto nesse Modelo Metodológico, após a criação de um "Modelo Preliminar" é preciso fazer um estudo mais aprofundado sobre alguns temas – *variáveis-chave*. Esse aprofundamento constitui a terceira atividade – *Relacionar com ideias de outros* e, só após "ouvir os outros", será possível dar continuidade ao nosso trabalho.

2.2.1 Identificando meu fenômeno de interesse

Como professor de matemática há mais de vinte anos, inicialmente em Ensino Básico e atualmente em Ensino Superior, incluindo cursos de Licenciatura em Matemática, há algum tempo venho tendo algumas inquietações em relação à metodologia que tenho usado ao longo desses anos. Essas inquietações aumentaram principalmente depois que comecei a atuar como professor formador de professores. Isso se deve ao fato de que os cursos de Licenciatura em Matemática precisam formar professores preparados para trabalhar nos Ensinos Fundamental e Médio. Com isso, uma disciplina de matemática ministrada nos cursos de Licenciatura deveria ser ministrada de uma forma diferente da dos outros cursos, como, por exemplo, Engenharia, Computação, etc. O conteúdo ministrado não necessariamente precisaria ser diferente mas, sim, a metodologia. Entretanto, a metodologia não deveria apenas produzir um método capaz de resolver problemas através de uma sequência de passos bem definidos. Ela deveria levar em consideração a produção de conhecimento, formando um ser pensante, crítico, produtivo e, principalmente, criativo. Essa metodologia deveria também ser capaz de dar, ao recém formado, uma formação matemática bem fundamentada, capaz de ser aplicada à sua prática profissional, bem como lhe dar condições de ingressar em cursos de Pós-Graduação.

Parece ser opinião unânime, para os professores de Ensino Superior, que a maioria dos alunos que chegam à universidade tem uma formação básica de matemática bastante deficiente. Isso acaba se refletindo na qualidade do profissional que necessita de matemática para sua formação e, consequentemente, para sua prática no mercado de trabalho. Isso foi percebido, inclusive, no final do século XIX, pelo grande matemático alemão Felix Klein.

> Felix Klein percebe que as possibilidades industriais da Alemanha, que há pouco havia sido organizada como uma nação, dependiam de uma renovação da educação secundária, sobretudo modernizando o ensino da matemática (D’AMBRÓSIO, 1996, p. 53).

Isso aponta para uma necessidade de melhorias na formação do professor, tanto na formação inicial como na continuada. Melhorar a qualidade dos alunos, que chegam à universidade, não deve depender de um processo seletivo que absorve os melhores e exclui os piores. O aumento do número de faculdades gera uma demanda cada vez maior de alunos ingressantes e, consequentemente, absorverá um número maior de alunos com conhecimento deficitário ou deixar vagas ociosas em diversos cursos universitários. Os dois casos trazem grandes prejuízos. No primeiro caso, será preciso investir em uma recuperação do conhecimento básico dos alunos ingressantes, ou correr o risco de formar maus profissionais para o mercado de trabalho. No segundo caso, teremos uma grande quantidade de vagas disponíveis nas universidades e uma grande quantidade de jovens sem estudar, pela falta de competência em adquirir uma dessas vagas.

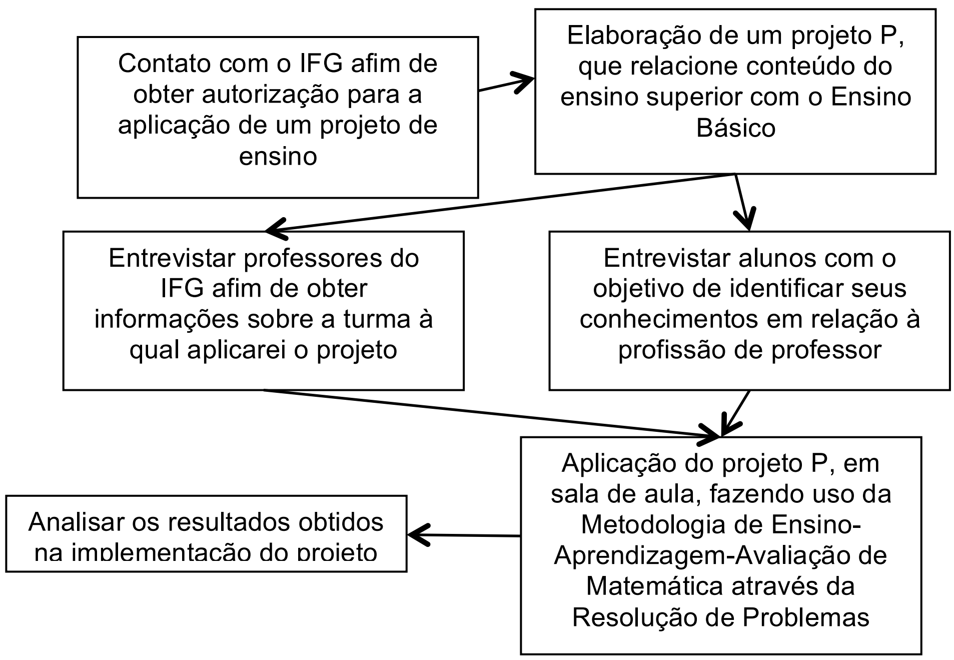
Enfim, as minhas preocupações e reflexões diante desses fatores foi o que me fizeram estabelecer, como prioridade, um trabalho que buscasse a melhoria da formação de professores da Educação Básica. Essa inquietude sobre a atual formação de professores e preocupação com a melhoria da formação básica, dos alunos que chegam à universidade, deu origem ao meu fenômeno de interesse:

"A Formação Inicial de Professores de Matemática".

2.2.2 Meu Modelo Preliminar

Como ideia inicial dos procedimentos que deveria executar, idealizei minha pesquisa como um conjunto de ações em uma ordem pré-estabelecida, como ilustra a Figura 3.

Figura 3 – Modelo preliminar



Fonte: Elaborada pelo autor

Esse "Modelo preliminar" foi desenvolvido tendo como base meu Fenômeno de Interesse – *"A formação inicial do professor de matemática"* e, como contexto da pesquisa, o curso de Licenciatura em Matemática do IFG – Instituto Federal de Goiás. Essa pesquisa se concretiza como uma pesquisa de campo, havendo assim a necessidade de conhecer o perfil de cada personagem desse contexto. A questão inicial que pretendia responder era: *"De que forma podemos relacionar os conteúdos das disciplinas, ministradas no curso de Licenciatura em Matemática do IFG, com os conteúdos da Educação Básica, utilizando a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas?"* Esse Modelo Preliminar aponta variáveis, que o pesquisador precisará levar em consideração para obter êxito na pesquisa. As variáveis consideradas relevantes, denominadas *variáveis-chave,* foram identificadas, na minha pesquisa, como: A *Formação Inicial de Professores de Matemática*, *Resolução de Problemas*, e *uma disciplina de matemática,* parte integrante do currículo do curso de Licenciatura em Matemática do IFG. Escolhemos a disciplina *Álgebra II*[4] por ser exclusiva do curso de Licenciatura em Matemática e pelo fato de o pesquisador ter feito sua Dissertação de Mestrado nessa área. Para cada uma das variáveis-chave criamos um capítulo para relatar o que "os outros" disseram a esse respeito e, consequentemente, contribuíram ou influenciaram de alguma forma nosso trabalho. Portanto os capítulos 3, 4 e 5 tratam, respectivamente, sobre três eixos: Formação Inicial de Professores de Matemática, Álgebra Abstrata Moderna e Resolução de Problemas.

[4] Ementa do curso de Álgebra II: Grupos, Subgrupos, Homomorfismo e Isomorfismo de Grupos, Teorema de Cayley, Classes Laterais e o Teorema de Lagrange, Grupo Cíclico, Subgrupos Normais e Grupo Quociente. Anéis, anéis comutativo e anéis com unidade. Subanéis. Homomorfismo e Isomorfismo de anéis: propriedades elementares. Anéis de Integridade e Corpos.

3 FORMAÇÃO INICIAL DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA

Neste capítulo apresentaremos diferentes posições sobre a formação inicial de professores de matemática para Educação Básica, evidenciando alguns trabalhos relativos a aspectos importantes dessa formação. Faremos também uma explanação da estrutura funcional do curso de Licenciatura em Matemática do IFG-Campus Goiânia – contexto da proposta da pesquisa.

3.1 Um breve histórico da formação de professores de matemática no Brasil

Os cursos específicos e regulares de formação de professores no Brasil, segundo Gatti (2010), surgiram no início do século XX, por volta de 1930, nas Faculdades de Filosofia. Esses cursos consistiam no sistema “3+1”, onde, nos três primeiros anos, os estudantes recebiam uma formação de bacharel e, em seguida, lhes eram acrescido um ano de formação pedagógica, isto é, o último ano de sua formação seria composta por disciplinas da área de educação. Esse modelo, de acordo com Silva (1999), foi fortemente criticado, por especialistas da área de Educação, pela nítida separação entre os conhecimentos específico e pedagógico. Isso se reflete, ainda hoje, com uma clara separação que se faz entre o conhecimento da teoria e da prática, e que é bem posta por Pimenta (1995) com e expressão “na teoria a prática é outra”.

Nas palavras postas por Moreira e David (2007), a partir da década de 70 começaram a se configurar mudanças estruturais nos cursos de Licenciatura no Brasil. De acordo com Maués (2003), essas mudanças não ocorreram apenas no Brasil, elas são consequências de muitas transformações econômicas, políticas e sociais. Entre elas, destaca-se o esgotamento do modelo fordista/keynisiano[5] que gerou (e ainda gera) mudanças no mundo do trabalho e, consequentemente, na educação oferecida à sociedade e gerenciada pelos governos de Estado, através das políticas públicas. Entre as propostas e concepções em debate, destaca-se a perspectiva em que o processo de formação de professores deveria se desenvolver de maneira mais integrada. Apontava-se também a necessidade de se aprofundar a formação do professor como educador, ocorrendo, então, uma modificação gradual

[5] Informações detalhadas sobre esse modelo podem ser obtidas em http://www2.dbd.puc-rio.br/pergamum/tesesabertas/1112605_2013_cap_2.pdf

na estruturação dos cursos, de modo que a formação pedagógica não deveria se limitar mais à apresentação de técnica de ensino e passaria a incluir disciplinas como Sociologia da Educação, Política Educacional e outras. Porém, a "formação de conteúdo" é ainda considerada a mais importante e continua sob a responsabilidade de especialistas, isto é, matemáticos, historiadores, etc., planejando e lecionando as disciplinas técnicas. Permanece, contudo, o problema da integração da teoria e da prática.

Na década de 80, na intenção de resolver esse problema, isto é, o problema da integração da teoria com a prática, criam-se as chamadas disciplinas integradoras como, por exemplo, o "estágio docente". Constitui-se, assim, um novo modelo, que se mantém essencialmente até hoje. Maués (2003) afirma que essas reformas também são decorrentes dos mesmos princípios que produziram reformas anteriores.

> [...] as mudanças econômicas impostas pela globalização, exigindo maior eficiência e produtividade dos trabalhadores, a fim de que eles se adaptem mais facilmente às exigências do mercado. Essas reformas apresentam um objetivo político bem definido, que envolve a estrutura administrativa e pedagógica da escola, a formação de professores, os conteúdos a serem ensinados, os aportes teóricos a serem adotados, enfim tudo o que possa estar relacionado com o processo de ensino-aprendizagem (MAUÉS, 2003, p. 94).

Nos anos 90, segundo Silva Júnior (2002, p.76-77), no contexto das reuniões mundiais organizadas pela Unesco, desencadeou-se um processo de reformas educacionais na América Latina e consequentemente no Brasil. As orientações para a implantação dessas reformas fizeram-se através dos documentos políticos: *Declaração Mundial sobre a Educação para Todos,* (UNESCO, 1990) e *Declaração de Nova Delhi, (UNESCO, 1993), sendo que:*

> Os compromissos assumidos por meio de tais documentos internacionais, com as agências internacionais, aqui com destaque para as de ordem financeira, devem realizar-se sob a orientação de um ajuste estrutural do país (SILVA JÚNIOR, 2002, p. 101).

No Brasil, na esfera educacional, o documento *Plano Decenal de Educação para Todos* (1993-2003), como afirma Silva Júnior (2002, p. 78), "é a expressão brasileira do movimento planetário orquestrado pela Unesco, Bird/Banco Mundial e assumido como orientador das políticas públicas para a educação [...]" .

Segundo Rabelo et. al (2009), no ano 2000, a era do novo milênio, o mundo passou por um processo crescente de globalização dominado pelos campos tecnológicos e científicos e as atenções se voltaram para o desenvolvimento social baseado no crescimento econômico. No Brasil tem-se, como uma forte propaganda, o slogan: “a sociedade da informação e do conhecimento”, que em breve se transformou em “sociedade da comunicação”. No campo Educacional, as Nações Unidas organizaram o encontro Marco de Ação de Dakar em 2000 para adiarem os prazos estabelecidos para o cumprimento das metas colocadas de 1990 até o ano 2000, na Conferência Mundial sobre Educação para Todos, que norteou e definiu as diretrizes das políticas educacionais em países considerados de capitalismo periférico. As metas não cumpridas foram reduzidas e os prazos adiados até 2015. Isso se refletiu em um número crescente de novas instituições na área de formação de professores e, além disso, diversas políticas públicas vêm sendo elaboradas e executadas nas últimas décadas. No Brasil, foram aprovados vários documentos na área educacional e, entre eles, uma nova Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB nº 9394/96); os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) que visam a apresentar, através de concepções chamadas interacionistas, conteúdos, metodologias e formas de efetuar a avaliação do aprendizado dos alunos em todas as disciplinas e séries da Educação Básica e uma proposta de diretrizes para a formação inicial de professores da Educação Básica, em cursos de nível superior.

3.2 Normativas legais sobre a formação inicial de professores

Os cursos de Licenciatura, de acordo com as propostas curriculares, têm como objetivo formar profissionais, definidos por um conjunto de competências que só podem ser construídas na prática e na reflexão coletiva sobre a prática. Para que se cumpra isso, foram definidos princípios orientadores e diretrizes para um programa nacional de formação de professores, que organizam no tempo e no espaço a estruturação dos cursos de Licenciatura.

A LDB (lei nº 9.394, sancionada em 20 de dezembro de 1996), enfatiza a associação entre teoria e prática, e institui um mínimo de 300 horas para a prática de ensino de todos os cursos de Licenciatura (artigo 65), sendo que a mesma foi antecipada em no mínimo 1 ano, fazendo com que os licenciando entrem em contato com os alunos mais cedo e durante mais tempo em sua formação acadêmica (BRANDÃO, 2005). As 300 horas, como citado, são apenas o mínimo, abaixo desse número de horas presume-se que não seja possível dar conta das exigências de qualidade necessárias ao ensino. Com isso, foi elaborada uma resolução que institui a obrigatoriedade de 400 horas para a prática de ensino, que diz ser “procedente acrescentar ao tempo mínimo já estabelecido em lei (300 horas) mais um terço (1/3) desta carga, perfazendo um total de 400 horas” (CNE/CP[6] 28/2001).

A resolução nº 2 do CNE/CP, de 1º de julho de 2015, apresenta orientações para garantir uma base curricular comum aos cursos de formação inicial de professores. Essas orientações estabelecem para os cursos de Licenciatura, um mínimo de 3200 (três mil e duzentas) horas de efetivo trabalho acadêmico, em cursos com duração de, no mínimo, 8 (oito) semestre ou 4 (quatro) anos, sendo:

i) 400 (quatrocentas) horas de prática distribuída ao longo do processo formativo;

ii) 400 (quatrocentas) horas de estágio supervisionado;

iii) pelo menos 2200 (duas mil e duzentas) horas dedicadas a atividades formativas[7].

iv) 200 (duzentas) horas em atividades teórico-práticas de aprofundamento em áreas específicas de interesse dos estudantes (iniciação científica, iniciação à docência, seminários, palestras, etc.).

Além dessas orientações, essa resolução apresenta um conjunto de princípios, fundamentos e procedimentos a serem observados na organização institucional e curricular de cada estabelecimento de ensino, e aplicam-se a todas as etapas e modalidades da Educação Básica. Esse documento enfatiza a valorização da prática durante os cursos de formação de professores e, numa nova visão da prática que, segundo o documento, deverá estar presente desde o início do curso e permanecer durante toda a formação e, ainda, deverá ser desenvolvida com ênfase nos procedimentos de observação e reflexão, visando à atuação de forma contextualizada, e à resolução de situações-problema.

As Diretrizes Curriculares para os cursos de Licenciatura em Matemática, estabelecem que o professor egresso de um curso de Licenciatura deve ter uma adequada preparação para sua carreira em que a matemática seja utilizada de forma essencial, assim como para um processo contínuo de aprendizagem e, ainda,

[6] Conselho Nacional de Educação/Conselho Pleno.
[7] As atividades formativas estão definidas nos incisos I e II do artigo 12 desta resolução. Endereço eletrônico: http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=17719-res-cne-cp-002-03072015&category_slug=julho-2015-pdf&Itemid=30192

uma formação pedagógica voltada para sua prática, que possibilite a vivência crítica da realidade e uma formação geral complementar envolvendo outros campos do conhecimento, necessários ao exercício do magistério. De acordo com as Diretrizes Curriculares, os profissionais formados nos cursos de Licenciatura e, em especial, na Licenciatura em Matemática, devem ter uma visão abrangente do papel social do educador na sociedade; capacidade de compreender, criticar e utilizar novas ideias e tecnologias; participar de programas de formação continuada e trabalhar em equipes multidisciplinares.

3.3 Reflexões sobre a formação de professores

A sociedade está passando por um momento de muitas transformações. Avanços demasiadamente rápidos na ciência e na tecnologia geraram uma grande competitividade e, consequentemente, provocaram um aumento nas exigências da produtividade e qualidade em diversos segmentos do setor comercial e da vida humana.

> A sociedade contemporânea tem colocado na ciência toda a sua expectativa de melhores condições de vida. Assim, não é atoa que o conhecimento científico vem substituindo inclusive o poder religioso e, em muitos casos, tem balizado os posicionamentos éticos (CUNHA, 2005, p. 17).

Consequentemente, isso vem se refletindo cada vez mais na educação, exigindo professores mais capacitados não apenas na sua formação técnica. Neste contexto, passou a exigir a figura do educador e os saberes que servem de base para sua prática. Saberes que não podem ser desvinculados de outras dimensões do ensino. Não se pode pensar em educação sem pensar em uma formação de professores de qualidade. Para isso é preciso exigir qualificação, valorização profissional e política adequadas, além de muita pesquisa, reformas e quiçá uma revolução na área educacional.

Paulo Freire (1996) acreditava na qualificação pela reflexão crítica sobre a própria prática:

> [...] na formação permanente dos professores, o momento fundamental é o da reflexão crítica sobre a própria prática. É pensando criticamente a prática de hoje ou de ontem que se pode melhorar a próxima prática. O próprio discurso teórico, necessário à reflexão crítica, tem de ser de tal modo concreto que quase se confunde com a prática (FREIRE, 1996, p.18).

Ponte e Serrazina (2003) também discorrem sobre esse assunto e chamam atenção para o fato de que isso está acontecendo não apenas com professores de Educação Básica, mas, também, com professores de Ensino Superior e até mesmo em outras áreas, como *saúde*, *serviço social* e outros que, frequentemente, defrontam-se com numerosos problemas, muitos dos quais de grande complexidade e, em vez de esperar por soluções externas, esses profissionais têm procurado, cada vez mais, investigar diretamente esses problemas. Eles ainda afirmam que a investigação da própria prática deve ser encarada como qualquer outra pesquisa, identificando o problema, escolhendo uma metodologia adequada, etc. Eles apontam a característica principal da investigação da própria prática:

> A característica definidora desta forma particular de investigação refere-se apenas ao fato de o investigador ter uma relação muito particular com o objeto de estudo – ele estuda não um objeto qualquer, mas um aspecto da sua própria prática profissional (PONTE; SERRAZINA, 2003, p. 53–54).

Segundo Garcia (1995), quando abordamos a formação de professores, podemos estar adotando posições epistemológicas, ideológicas e culturais em relação ao ensino, ao professor e aos alunos. Assim, a formação de professores deve propiciar situações que viabilizem a reflexão e a tomada de consciência das limitações sociais, culturais e ideológicas da profissão docente, considerando como horizonte um projeto pessoal e coletivo.

Nóvoa (1997) aponta novas abordagens a respeito da formação de professores, saindo de uma perspectiva centrada na dimensão acadêmica para uma perspectiva no terreno profissional, pessoal e de organização, a partir do contexto escolar. Ele alerta, inclusive, que a formação de professores tem ignorado o desenvolvimento pessoal, confundindo “formar e formar-se”.

Garcia (1999) afirma que o conceito **formação** está associado a alguma atividade, sempre que se trata de formação de algo. Assim, a formação de professores pode ser entendida:

> **[...] como formação social** de transmissão de saberes, de saber-fazer ou do saber-ser que exerce em benefício do sistema socioeconômico, ou da cultura dominante. [...] **como um processo de desenvolvimento e de estruturação da pessoa** que se realiza com o duplo efeito de maturação interna e de possibilidades de aprendizagem, de experiências dos sujeito. [...] **formação como instituição**, quando nos referimos à estrutura organizacional que planifica e desenvolve as actividades de formação (GARCIA, 1999, p. 19).

Garcia(1999) também aponta como uma peculiaridade da formação, o fato dela ocorrer em um contexto específico com uma determinada organização material e com certas regras de funcionamento. Nessa estrutura, o formador sozinho, ou com os formandos, escolhe os meios, os métodos, os objetivos específicos e as formas de avaliação.

3.4 Os saberes profissionais do professor

Neste tópico nos apoiaremos fortemente no artigo de Tardif: *Saberes profissionais dos professores e conhecimentos universitários,* de 2000. Tardif começa seu artigo afirmando que a atual conjuntura social é um contexto paradoxal, considerando que se pede aos professores para se tornarem profissionais no momento em que o profissionalismo, a formação profissional e as profissões mais assentadas atravessam um período de crise profunda. Ele se justifica apontando e discorrendo sobre os fatores que geram ou viabilizam a crise do profissionalismo.

Tardif (2000), em primeiro lugar, baseado em outros autores, aponta a crise da perícia profissional, ou seja, dos conhecimentos, estratégias e técnicas profissionais por meio dos quais certos profissionais (médicos, engenheiros, psicólogos, formadores, professores, etc.) procuram solucionar situações problemáticas concretas. Ele enfatiza que a perícia profissional perdeu progressivamente sua aura de ciência aplicada para aproximar-se de um saber muito mais ambíguo, de um saber socialmente situado e localmente construído. A perícia profissional está sendo, cada vez mais, percebida hoje em dia de acordo com o modelo de uma racionalidade limitada, de uma racionalidade improvisada, na qual o processo reflexivo, a improvisação, a indeterminação, a criatividade, a intuição, o senso comum desempenham um grande papel, apoiando-se, ao mesmo tempo, em rotinas próprias a cada tradição profissional.

Em segundo lugar, disse ele que

> Essa crise da perícia profissional provoca um impacto profundo na formação profissional. Na maioria das profissões, esse impacto se manifesta por meio de uma grande insatisfação e de críticas muitas vezes ferrenhas contra a formação universitária oferecida nas faculdades e institutos profissionais (Clark e Neave, 1992; Lessard e Tardif, 1998 Apud Tardif, 2000).

Em terceiro lugar, ele chama a atenção para a crise do poder profissional e para a confiança que o público e os clientes depositam nele. É preciso entender, aqui, o termo “poder” tanto no sentido político quanto no de capacidade ou competência. Por um lado, no sentido político, o poder profissional parece, com demasiada frequência, estar servindo muito mais aos interesses dos profissionais do que aos interesses de seus clientes e do público em geral. Por outro lado, se pensarmos em termos de capacidade, o poder profissional perde tanto quanto ganha e, quando ganha, seus êxitos são muitas vezes ambíguos e portadores de efeitos imprevistos e às vezes perversos.

Por último, Tardif disse que a crise profissional é a crise da ética profissional, isto é, dos valores que deveriam guiar os profissionais. Ainda disse que, nos últimos trinta anos, observa-se que a maioria dos setores sociais onde atuam profissionais tem sido permeada por conflitos de valores para os quais torna-se, cada vez mais difícil, achar ou inventar princípios reguladores e consensuais. Esses conflitos de valores parecem ainda mais graves, nas profissões cujos “objetos de trabalho” são seres humanos, como é o caso do magistério. Valores como a saúde, a justiça e a igualdade perderam sua transparência, seu poder de evidência e sua força de integração. Para os profissionais, essa situação se expressa por meio de uma complexificação crescente de discernimento e de atividade profissionais: se os valores que devem guiar o agir profissional não são mais evidentes, então a prática profissional supõe uma reflexão sobre os fins almejados, em oposição ao pensamento tecnoprofissional situado apenas no âmbito dos meios. A reflexão sobre a ética profissional cessa de existir como um discurso que é exterior à prática e que domina a ação: ela reside doravante no próprio cerne do discernimento profissional a ser exercido na prática cotidiana e coconstitui essa prática.

> O movimento de profissionalização busca renovar os fundamentos epistemológicos do oficio de professor. [...] A questão da epistemologia da prática profissional se encontra, evidentemente, no cerne desse movimento de profissionalização. De fato, no mundo do trabalho, o que distingue as profissões das outras ocupações é, em grande parte, a natureza dos conhecimentos que estão em jogo (TARDIF, 2000, p. 6).

Tardif (2000) fala sobre as principais características do conhecimento profissional tais como se acham expressas, nos últimos vinte anos, na literatura sobre as profissões:

> Em sua prática, os profissionais devem se apoiar em conhecimentos especializados e formalizados, na maioria das vezes, por intermédio das disciplinas científicas em sentido amplo, incluindo, evidentemente, as ciências naturais e aplicadas, mas também as ciências sociais e humanas,

> assim como as ciências da educação. [...] Embora possam basear-se em disciplinas científicas ditas "puras", os conhecimentos profissionais são essencialmente pragmáticos, ou seja, são modelados e voltados para a solução de situações problemáticas concretas, como, por exemplo, construir uma ponte, ajudar um cliente a resolver seus conflitos psicológicos, resolver um problema jurídico, facilitar a aprendizagem de um aluno que está com dificuldades etc. (TARDIF, 2000, p. 6–7).

Os saberes dos professores são temporais, isto é, são adquiridos ao longo do tempo. Uma boa parte do que os professores sabem sobre ensino, sobre os papéis do professor e sobre como ensinar vem da sua história e sobretudo de sua vida escolar. Ou seja, diferentemente de outras profissões, o espaço de trabalho do professor é mesmo de sua formação.

> Essa imersão se manifesta através de toda uma bagagem de conhecimentos anteriores, de crenças, de representações e de certezas sobre a prática docente. Esses fenômenos permanecem fortes e estáveis ao longo do tempo (WIDEEN et all, 1998 apud TARDIF, 2000, p. 13).

Os alunos passam pelos cursos de formação de professores sem modificar suas crenças anteriores sobre o ensino. E, quando começam a trabalhar como professores, são principalmente essas crenças que eles reativam para solucionar seus problemas profissionais. Hubermann (1989) e Huberman et all. (1989) apud Tardif (2000, p. 14) dizem que os saberes profissionais são temporais no sentido de que os primeiros anos de prática profissional são decisivos na aquisição do sentimento de competência e no estabelecimento das rotinas de trabalho, ou seja, na estruturação da prática profissional. A maioria dos professores aprende a trabalhar na prática, por tentativa e erro.

> Essa aprendizagem, frequentemente difícil e ligada àquilo que denominamos sobrevivência profissional, quando o professor deve dar provas de sua capacidade, ocasiona a chamada edificação de um saber experiencial, que se transforma muito cedo em certezas profissionais, em truques do ofício, em rotinas, em modelos de gestão da classe e de transmissão da matéria (FEINMAN NEMSER, 1983; HUBERMAN *et al.*, 1989; RYAN *et al.*, 1980; ZEICHNER; GORE, 1990; ZEICHNER e HOEFT, 1996 apud TARDIF, 2000, p.14).

Finalmente os saberes profissionais são temporais pois são utilizados e se desenvolvem no âmbito de uma carreira, isto é, de um processo de vida profissional de longa duração do qual fazem parte dimensões identitárias e dimensões de socialização profissional, bem como fases e mudanças.

Um outro ponto que Tardif chama a atenção é que os saberes profissionais são personalizados e situados.

> [...] por isso, o estudo dos saberes profissionais não pode ser reduzido ao estudo da cognição ou do pensamento dos professores (*teacher's thinking*). Os professores dispõem, evidentemente, de um sistema cognitivo, mas eles não são somente sistemas cognitivos, coisa que é muitas vezes esquecida! Um professor tem uma história de vida, é um ator social, tem emoções, um corpo, poderes, uma personalidade, uma cultura, ou mesmo culturas, e seus pensamentos e ações carregam as marcas dos contextos nos quais se inserem (TARDIF, 2000, p. 15).

Como conclusão ficaremos com a fala de Carter:

> O que as pesquisas sobre os saberes profissionais mostram é que eles são fortemente personalizados, ou seja, que se trata raramente de saberes formalizados, de saberes objetivados, mas sim de saberes apropriados, incorporados, subjetivados, saberes que é difícil dissociar das pessoas, de sua experiência e situação de trabalho (CARTER, 1990 apud TARDIF, 2000, p. 15).

3.5 O papel do professor de matemática no processo de ensino e aprendizagem

Para Moysés (2014), o ensino da matemática ou sua aprendizagem continua sendo difícil para muitos alunos. O erro começa pela noção da proporcionalidade que deveria servir para a vida e não para resolver apenas os problemas propostos pela escola. Não é possível preparar alunos capazes de solucionar problemas, ensinando conceitos matemáticos desvinculados da realidade, ou que se mostrem sem significado para eles, esperando que saibam como utilizá-los no futuro ou diante de suas necessidades propostas em seu trabalho. Professor e aluno se defrontam com sentenças, regras e símbolos matemáticos sem que nenhum deles consiga dar sentido e significado a tal simbologia, então a escola continua a negar ao aluno uma das formas essenciais de ler, interpretar e explicar o mundo.

Vitti (1999) tenta explicar os principais motivos pelos quais o ensino da matemática é marcado por traumas, medo e dificuldades.

> O ensino inadequado da Matemática, a maneira como o professor trata os assuntos em sala de aula, a deficiência dos currículos (que não deveriam ser baseados num conteúdo pré-fixado, nem tampouco voltados a uma realidade estrangeira, mas no desenvolvimento de valores científicos ligados à nossa realidade), a má qualidade dos livros didáticos, a pressão do vestibular, a carência de bibliotecas e materiais de ensino, a falta de base do aluno, o medo na hora da prova, notas baixas, reprovações, o

> ensino divorciado da nossa realidade e das aplicações da Matemática no dia-a-dia, contribuem para que o aluno goste ou não desta disciplina, queira ou não continuar seus estudos sobre ela ou simplesmente passe a procurar cursos ou até mesmo uma profissão (embora seja difícil escolher qualquer profissão em que a Matemática, se não ocupa posição de destaque, pelo menos não se faça presente) em que a Matemática seja muito pouco utilizada. (VITTI, 1999, p. 39).

Vitti (1999) e Moysés (2014) nos dizem que parece não haver continuidade entre o que se aprende na escola e o conhecimento que existe fora dela. Muitos educadores trabalham de forma mecânica, através de atividades repetitivas, deixando de estimular o raciocínio lógico matemático e a criatividade para solucionar desafios. Nesta prática, o educador assume o papel de transmissor de conhecimentos e o educando de receptor, sem o menor interesse e compreensão naquilo que está aprendendo.

Rabelo e Lorenzato (1994) acreditam que para pensar numa mudança é preciso antes de tudo ter coragem, é preciso ousar, criar e experimentar, é preciso buscar uma mudança de paradigmas para testar e avaliar o potencial de nossos alunos e vê-los sob uma perspectiva de competência, mas isso significa antes de tudo um teste e a avaliação de nós mesmos enquanto profissionais.

Nesse sentido, Silva (2004) explica que muitos fatores interferem na aprendizagem do aluno como, por exemplo, espaço físico, ambiente tranquilo, criatividade, capacitação docente, predisposição a aprender, estímulos, metodologia de ensino adequada, entre outros, e complementa afirmando que: para haver aquisição de conhecimento, não existe um método de ensino que seja considerado melhor, pois em determinados momentos um complementa o outro. O importante é que uma boa aula de matemática requer planejamento criterioso e estratégias bem definidas baseadas no conteúdo matemático a ser trabalhado, levando o aluno a pensar, refletir, analisar e concluir, atingindo o objetivo proposto.

Os cursos de formação de professores de matemática devem se preocupar com uma boa formação de conteúdo dos professores da Educação Básica, porém, atualmente, o papel do professor passou a ter múltiplas dimensões, como afirmam os PCN (1998), que reproduzo aqui na sua inteireza:

> Tradicionalmente, a prática mais frequente no ensino de Matemática tem sido aquela em que o professor apresenta o conteúdo oralmente, partindo de definições, exemplos, demonstração de propriedades, seguidos de exercícios de aprendizagem, fixação e aplicação, e pressupõe que o aluno aprenda pela reprodução. Assim, considera-se que uma reprodução correta é evidência de que ocorreu a aprendizagem.

Essa prática de ensino tem se mostrado ineficaz, pois a reprodução correta pode ser apenas uma simples indicação de que o aluno aprendeu a reproduzir alguns procedimentos mecânicos, mas não apreendeu o conteúdo e não sabe utilizá-lo em outros contextos.
É relativamente recente a atenção ao fato de que o aluno é agente da construção do seu conhecimento, pelas conexões que estabelece com seu conhecimento prévio num contexto de resolução de problemas.
Naturalmente, à medida que se redefine o papel do aluno diante do saber, é preciso redimensionar também o papel do professor que ensina Matemática no ensino fundamental.
Numa perspectiva de trabalho em que se considere o aluno como protagonista da construção de sua aprendizagem, o papel do professor ganha novas dimensões. Uma faceta desse papel é a de organizador da aprendizagem; para desempenhá-la, além de conhecer as condições socioculturais, expectativas e competência cognitiva dos alunos, precisará escolher os problemas que possibilitam a construção de conceitos e procedimentos e alimentar os processos de resolução que surgirem, sempre tendo em vista os objetivos a que se propõe atingir.
Além de organizador o professor também é facilitador nesse processo. Não mais aquele que expõe todo o conteúdo aos alunos, mas aquele que fornece as informações necessárias, que o aluno não tem condições de obter sozinho. Nessa função, faz explanações, oferece materiais, textos etc.
Outra de suas funções é como mediador, ao promover a análise das propostas dos alunos e sua comparação, ao disciplinar as condições em que cada aluno pode intervir para expor sua solução, questionar, contestar. Nesse papel, o professor é responsável por arrolar os procedimentos empregados e as diferenças encontradas, promover o debate sobre resultados e métodos, orientar as reformulações e valorizar as soluções mais adequadas. Ele também decide se é necessário prosseguir o trabalho de pesquisa de um dado tema ou se é o momento de elaborar uma síntese, em função das expectativas de aprendizagem previamente estabelecidas em seu planejamento.
Atua também como organizador ao estabelecer as condições para a realização das atividades e fixar prazos, respeitando o ritmo de cada aluno.
Como um incentivador da aprendizagem, o professor estimula a cooperação entre os alunos, tão importante quanto a própria interação professor-aluno. O confronto entre o que o aluno pensa e o que pensam seus colegas, seu professor e as demais pessoas com quem convive é uma forma de aprendizagem significativa, principalmente por pressupor a necessidade de formulação de argumentos (dizendo, descrevendo, expressando) e de validá-los (questionando, verificando, convencendo).
Destaca-se ainda a tarefa de avaliador do processo, que também é parte integrante do papel do professor. Ao procurar identificar e interpretar, mediante observação, diálogo e instrumentos apropriados, sinais e indícios das competências desenvolvidas pelos alunos, o professor pode julgar se as capacidades indicadas nos objetivos estão se desenvolvendo a contento ou se é necessário reorganizar a atividade pedagógica para que isso aconteça. Também faz parte de sua tarefa como avaliador levar os alunos a ter consciência de suas conquistas, dificuldades e possibilidades para que possam reorganizar suas atitudes diante do processo de aprendizagem.
Além da interação entre professor-aluno, a interação entre alunos desempenha papel fundamental no desenvolvimento das capacidades cognitivas, afetivas e de inserção social. Em geral, explora-se mais o aspecto afetivo dessas interações e menos sua potencialidade em termos de construção de conhecimento. Ao tentar compreender outras formas de resolver uma situação, o aluno poderá ampliar o grau de compreensão das noções matemáticas nela envolvidas.
Assim, trabalhar coletivamente, por sua vez, favorece o desenvolvimento de capacidades como:

- perceber que além de buscar a solução para uma situação proposta

> devem cooperar para resolvê-la e chegar a um consenso;
> - saber explicitar o próprio pensamento e procurar compreender o pensamento do outro;
> - discutir as dúvidas, supor que as soluções dos outros podem fazer sentido e persistir na tentativa de construir suas próprias ideias;
> - incorporar soluções alternativas, reestruturar e ampliar a compreensão acerca dos conceitos envolvidos nas situações e, desse modo, aprender.
>
> Essas aprendizagens só serão possíveis à medida que o professor proporcionar um ambiente de trabalho que estimule o aluno a criar, comparar, discutir, rever, perguntar e ampliar ideias.
>
> É importante atentar para o fato de que a explicitação clara de papéis e de responsabilidades é fundamental para nortear as interações que ocorrem na sala de aula — entre professor e aluno ou entre alunos. Também é necessário avaliar em conjunto essas relações em função dos papéis e responsabilidades definidas para redirecionar os rumos do processo de ensino e aprendizagem (BRASIL, 1998, p. 37–39).

3.6 A formação inicial do professor de matemática

Segundo Ponte (1995), a formação do professor é um mundo onde se inclui formação inicial, contínua e especializada, em que é preciso considerar modelos, teorias e investigação empírica sobre a formação, analisar a legislação e a regulamentação e, o que não é de menor importância, estudar as práticas reais dos professores e das instituições e suas experiências inovadoras.

Para García (1999), a formação inicial de professores deve contribuir para o desenvolvimento pessoal, para a tomada de consciência da responsabilidade no desenvolvimento da escola e dos alunos, para a aquisição de uma atitude reflexiva acerca dos processos de ensino e de aprendizagem. Ele também nos chama a atenção a respeito das consequências do conhecimento ou desconhecimento que o professor tem do conteúdo que ele irá ensinar.

> O conhecimento que os professores possuem do conteúdo a ensinar também influencia o que e como ensinam. Por outro lado, a falta de conhecimentos do professor pode afectar o nível de discurso na classe, assim como o tipo de perguntas que os professores formulam (GARCIA, C M, 1999, p. 87).

Sousa e Fernandes (2004) apontam a falta da relação entre teoria e prática, quando dizem que a formação de professores é bastante teórica em muitas universidades, estando afastada da realidade da Educação Básica, dando-se ainda, pouca importância à prática e supervalorizando a teoria. Os autores ainda afirmam que faz-se necessário, que se mude a ideia “de que a formação teórica recebida nos primeiros anos da formação inicial é uma espécie de receituário, em que a prática é uma aplicação da teoria", e ainda, muito se fala ao acadêmico sobre "como deve ser um professor, o que deve fazer, que conteúdos estudar e os métodos para os ensinarem, mas pouco ou nada lhes é dito, por exemplo, acerca do controle e disciplina dos alunos". Esse autores ainda apontam às críticas feitas pelos professores estagiários em relacionar a teoria à prática.

> [...] o conflito entre a formação teórica e a dificuldade em se transferir esses conhecimentos para a prática, que é uma das críticas habituais dos professores estagiários e que não deixa de ser um aspecto crítico da formação inicial merecedor de reflexão (SOUSA; FERNANDES, 2004, p. 92).

Betancur (1990) pensa na formação inicial do professor de matemática como um caminho a ser construído por ele mesmo, que lhe permita integrar, através de sua prática docente, o conhecimento específico da matemática (a história, os processos, os algoritmos, os conceitos e as aplicações), a matemática escolar, e as diferentes metodologias para a construção do saber matemático; entender a apropriação e a compreensão da matemática, por parte do sujeito que aprende (processos de meta-aprendizagem dos alunos); e conhecer as relações da matemática com outros saberes específicos (como os do tipo interdisciplinar, poli disciplinar e transdisciplinar), científicos ou não.

Segundo Ponte (1994), o professor está longe de ser um profissional acabado e amadurecido no momento em que recebe sua habilitação profissional. Por outro lado, o professor de matemática não pode ser encarado como um mero receptáculo de formação, mas sim, como um ser humano com potencialidades e necessidades diversas, que importa descobrir, valorizar e ajudar a desenvolver. Por esse motivo, um curso de formação inicial de professores de matemática deve ser necessariamente diferente de um curso que visa formar matemáticos para se dedicarem prioritariamente à investigação. O professor é um profissional em permanente desenvolvimento.

Ainda, nessa linha de pensamentos, vemos que a formação de professores é influenciada por inúmeros fatores, que devem ser estudados adequadamente, para que, assim, se possa intervir de maneira construtiva na formação dos acadêmicos que futuramente estarão regendo atividades didáticas em sala de aula. Essa formação, "deve estimular uma perspectiva crítico-reflexiva, que forneça aos professores os meios de um pensamento autônomo e que facilite as dinâmicas de auto-formação participada” (NÓVOA, 1997, p.25).

> É preciso fazer com que os professores e futuros professores vejam “a escola como um ambiente educativo, onde trabalhar e formar não sejam atividades distintas. A formação deve ser encarada como um processo permanente” (NÓVOA,1997, p. 29).

Shulman (1986), faz uma discussão dos conhecimentos adquiridos pelos professores durante a formação inicial. Suas investigações apontam para a falta de pesquisas que discutem questões relacionadas ao conteúdo, o que ele considera como sendo o problema do “paradigma perdido”. Dessa forma, o autor chama a atenção para a importância de estudos relacionados ao conteúdo que o professor ensina, porém sem deixar de discutir o entendimento pedagógico e curricular do conteúdo a ser ensinado. Shulman (1986) estabelece como base de conhecimento do professor a união de três vertentes:

- **Conhecimento de conteúdo:** refere-se ao conhecimento técnico, isto é, ao conhecimento do conteúdo da disciplina que o professor irá ensinar.
- **Conhecimento pedagógico:** diz respeito às diversas representações que o professor faz uso, durante suas aulas, para ensinar os conteúdos aos seus alunos, ou seja, o seu entendimento sobre como ensinar determinados conteúdos.
- **Conhecimento curricular:** refere-se ao conhecimento que o professor tem sobre os materiais didáticos disponíveis para uso em sala de aula. Por exemplo: materiais concretos, mídias, softwares, dentre outros.

As três vertentes apontadas por Schulman (1996) devem ser levadas em consideração em pesquisas relacionadas à formação de professores. Nesse aspecto deve-se sempre pensar sobre os conhecimentos adquiridos pelos professores durante a formação inicial.

Sousa e Fernandes (2004) falam da importância sobre o Estágio Supervisionado, afirmando tratar-se de uma parte importante da relação teoria e prática, e precisa ser visto como uma aproximação da realidade da sala de aula e da escola, sendo que esta leva a uma reflexão teórica sobre a prática, sobre tudo o que observamos e vivenciamos durante a mesma, propiciando ao aluno a oportunidade de fazer uma síntese da teoria e da prática.

3.7 A formação de professores no contexto da pesquisa

O Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás (IFG) foi criado em dezembro de 2008, pela Lei Federal nº 11.892, que transformou os Centros Federais de Educação Tecnológica–CEFETs (antigas Escolas Técnicas Federais) em Institutos especializados na oferta de educação profissional e tecnológica.

Atualmente o IFG-Campus Goiânia, conta com quatro cursos de Licenciatura: História, Matemática, Física e Letras. O curso de Licenciatura em Matemática foi o segundo curso de licenciatura oferecido pelo IFG-Campus Goiânia e começou a ser ofertado no primeiro semestre de 2010 em cumprimento da Lei n. 11.892/2008, em seu art. 7º, a prerrogativa de que os Institutos Federais devem ofertar cursos de licenciatura.

> Observadas as finalidades e características definidas no art. 6º desta Lei, são objetivos dos Institutos Federais: (…) ministrar em nível de educação superior: (...) cursos de licenciatura, bem como programas especiais de formação pedagógica, com vistas na formação de professores para a educação básica, sobretudo nas áreas de ciências e matemática, e para a educação profissional (BRASIL, 2008).

Esse curso, segundo o site oficial[8], estabelece como:

> **Objetivos:**
> - Formar um profissional apto a atuar na área acadêmica como professor e Coordenador de Matemática ou em outras atividades que exijam raciocínio lógico-matemático, funções para as quais existe uma grande demanda no mercado.
> - Contribuir com a formação de professores para a Educação Básica a partir da construção de processos formativos fundamentados na estruturação de um Currículo Integrado e nas Políticas de Inclusão.
> - Formar professores capacitados para atividades de pesquisas no campo de atuação, em laboratórios de ensino e, sobretudo, na produção de materiais didáticos manipuláveis.
> - Preparar profissionais que tenham domínio dos conteúdos em Matemática, bem como conhecimento sobre técnicas, estratégias e metodologias apropriadas ao processo de ensino-aprendizagem.
>
> **Perfil Profissional:**
>
> O curso deve levar em conta a construção de um perfil, no qual o futuro professor:
> - faça mediações entre o conhecimento matemático e o aluno, tornando o saber matemático acumulado em um saber escolar, passível de ser ensinado/aprendido;
> - organize as situações que favoreçam a construção de conceitos, procedimentos e atitudes dos seus alunos, incluindo o uso de novas tecnologias, laboratórios, promova debates, socializando as soluções

---
[8] http://ifg.edu.br/matematica/index.php/licenciatura-em-matematica

encontradas e sistematize o conhecimento adquirido;

- conheça obstáculos envolvidos no processo de construção de um determinado conceito para que possa compreender melhor alguns aspectos da aprendizagem de seus alunos e desenvolva habilidades para tomada de decisões;
- reconheça que o processo de transformação do saber científico em saber escolar é marcado significativamente por condições de ordem social e cultural, que resultam na elaboração de saberes intermediários, como aproximações provisórias, necessárias e intelectualmente formadoras;
- reconheça a importância de se conhecer as referências culturais e sociais dos alunos e seus conhecimentos prévios - informais e formais;
- saiba identificar as principais características da Matemática, de seus métodos, de suas ramificações e aplicações;
- que saiba lidar com várias concepções metodológicas para atuação nas diversas frentes para os quais serão formados;
- que desenvolva habilidades de articulação, numa perspectiva interdisciplinar;
- que domine os métodos e técnicas pedagógicas necessárias à transmissão e produção de conhecimentos nos diferentes níveis de ensino;
- que incorpore conhecimentos básicos necessários para o seu desenvolvimento profissional numa perspectiva verticalizada.

Mercado de Trabalho:

O licenciado em Matemática estará apto a atuar como professor na Educação Básica e Superior; em institutos de pesquisa; área financeira de empresas e indústrias; pesquisas científicas acadêmicas e profissionais.

Período de Funcionamento e Duração:
O Curso tem a duração de 4 anos e será oferecido no período vespertino.

O curso de Licenciatura em Matemática do IFG possui regime semestral, tendo, portanto, dois processos seletivos anuais. O curso possui à sua disposição, cerca de trinta professores efetivos[9] e alguns professores temporários (substitutos). A maioria possui formação de Mestrado ou Doutorado em Matemática. Um número pequeno possui alguma formação em Educação Matemática e, ainda, alguns possuem apenas curso de Especialização em Matemática. Trata-se de um curso no horário vespertino (das 13:00h às 18:00h) previsto para oito semestres totalizando 3219 horas[10], distribuídas da seguinte forma:

---

[9] Contratados por tempo indeterminado.
[10] Informações obtidas no primeiro semestre de 2015.

Tabela 1 – Distribuição das Hablitações

Habilitação:	Número de horas
Carga Horária:	2.106 horas
TCC	108 horas
Estágio Curricular	405 horas
Prática como Componente Curricular	400 horas
Atividades Complementares	200 horas
Carga Horária Total	**3.219 horas**

As Tabelas de 2 a 9 apresentam as distribuições das disciplinas por período.

Tabela 2 – Disciplina do primeiro período

DISCIPLINA	CARGA HORÁRIA semestral	AULAS semestrais
Filosofia da Educação	54	72
Estudo de Funções	54	72
Tópicos de Álgebra Elementar	54	72
Fundamentos de Geometria	54	72
Língua Portuguesa	54	72
História da Educação	54	72

Fonte: http://www.ifg.edu.br/matematica/index.php/grade-curricular

Tabela 3 – Discplinas do segundo período

DISCIPLINA	CARGA HORÁRIA semestral	AULAS semestrais
Probabilidade	54	72
Psicologia da Educação	54	72
Cálculo Diferencial e Integral I	81	108
Geometria Analítica e Cálculo Vetorial	54	72
Teorias da Educação	54	72
Educação de Jovens e Adultos	54	72

Fonte: http://www.ifg.edu.br/matematica/index.php/grade-curricular

Tabela 4 – Disciplinas do terceiro período

DISCIPLINA	**CARGA HORÁRIA** semestral	**AULAS** semestrais
Física Geral I	54	72
Álgebra Linear	54	72
Física Experimental I	27	36
Cálculo Diferencial e Integral II	81	108
Metodologia do Ensino de Matemática	54	72
Políticas e Gestão da Educação Brasileira	54	72

Fonte: http://www.ifg.edu.br/matematica/index.php/grade-curricular

Tabela 5 – Disciplinas do quarto período

DISCIPLINA	**CARGA HORÁRIA** semestral	**AULAS** semestrais
Didática	54	72
Física Geral II	54	72
Física Experimental II	27	36
Cálculo Diferencial e Integral III	54	72
Álgebra I	54	72
Metodologia Científica	54	72
Relações Étnico-Raciais e Cultura Afro-brasileira e Indígena	27	36

Fonte: http://www.ifg.edu.br/matematica/index.php/grade-curricular

Tabela 6 – Disciplinas do quinto período

DISCIPLINA	**CARGA HORÁRIA** semestral	**AULAS** semestrais
Estatística	81	108
Álgebra II	54	72
Cálculo Numérico	54	72
Equações Diferenciais Ordinárias	54	72
Estágio Supervisionado I	81	108

Fonte: http://www.ifg.edu.br/matematica/index.php/grade-curricular

Tabela 7 – Disciplinas do sexto período

DISCIPLINA	CARGA HORÁRIA semestral	AULAS semestrais
Tecnologias no Ensino de Matemática	54	72
Funções de Variáveis Complexas	54	72
Análise Real I	54	72
Formação Integrada na Educação Básica Superior, Educação Profissional e Tecnológica	54	72
Estágio Supervisionado II	108	144

Fonte: http://www.ifg.edu.br/matematica/index.php/grade-curricular

Tabela 8 – Disciplinas do sétimo período

DISCIPLINA	CARGA HORÁRIA semestral	AULAS semestrais
Análise Real II	54	72
Matemática Financeira	54	72
Geometria Euclidiana	54	72
Estágio Supervisionado III	54	72
Letras – Libras	108	144

Fonte: http://www.ifg.edu.br/matematica/index.php/grade-curricular

Tabela 9 – Disciplinas do oitavo período

DISCIPLINA	CARGA HORÁRIA semestral	AULAS semestrais
Trabalho de Conclusão de Curso - TCC	108	144
História da Matemática	54	72
Estágio Supervisionado IV	108	144
Optativa*	54	72

***Disciplinas Optativas**

1. Geometria Diferencial
2. Equações Diferenciais Parciais
3. Topologia Geral
4. Tópicos de Álgebra Linear
5. Tópicos de Álgebra
6. Inglês Instrumental
7. Tópicos Especiais para Laboratórios e Tecnologias
8. Tendências de Pesquisas em Educação Matemática

Fonte: http://www.ifg.edu.br/matematica/index.php/grade-curricular

Encontram-se, à disposição do curso de Licenciatura em Matemática do IFG-Campus Goiânia: dois laboratórios de informática, um laboratório de ensino e, recentemente, foi criado um núcleo de pesquisa (NEPEM – Núcleo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática). Na primeira avaliação de curso realizada pelo ENADE-MEC[11], em 2014, o curso obteve nota 4,0.

---

[11] Exame Nacional de Desempenho de Estudantes de acordo Portaria Normativa nº 40 de 12 de dezembro de 2007.

4 ÁLGEBRA: ORIGEM E CONCEPÇÕES

Um professor de matemática, assim como os de outras disciplinas, não está isento de se ver em uma situação embaraçosa quando é inquirido, pelos seus alunos, por perguntas sobre algo que ele nunca se atentou. Assim, quantos professores de matemática se sentiriam acossados pela pergunta: *o que é Álgebra?* Com certeza, uma pergunta como esta não deve possuir uma resposta simples ou, pelo menos, não uma que se aplique a todos os contextos algébricos. De fato, se a pergunta é feita por um aluno da *Educação Básica,* a resposta será bem diferente da resposta dada a um aluno de *Graduação*. Até mesmo poderiam ser dadas duas respostas diferentes para dois estudantes de mesmo nível de escolaridade como, por exemplo dois alunos de graduação, visto que um dos alunos poderia estar se referindo à Álgebra Moderna e o outro à Álgebra Linear. Sem dúvida, a Álgebra é um dos temas mais importantes e presentes em, praticamente, todas as áreas da matemática, desde estudos elementares até tópicos mais avançados. Ela tem um papel de extrema importância na representação dos mais variados elementos estudados em matemática. Apesar de estudantes, professores e profissionais de diversas áreas fazerem uso da Álgebra com muita frequência e de ela ter um papel importante no ensino e na aprendizagem, algumas questões relativas à Álgebra são deixadas de lado, como: *o que é Álgebra? o que é pensamento algébrico? o que diferencia a Álgebra da Aritmética? qual a relação existente entre a Álgebra da Educação Básica e a Álgebra do Ensino Superior, que nos permite chamar ambas de Álgebra?* e muitas outras.

Neste capítulo faremos uma abordagem geral sobre o tema “Álgebra”, tentando entender seu significado, suas relações e sua importância no ensino e na aprendizagem de matemática. Começaremos fazendo uma abordagem de como e quando ela surgiu, para podermos entender suas diversas concepções – da álgebra mais elementar até alguns tópicos mais avançados. Daremos ênfase também, à importância da álgebra no ensino e no seu uso em diversas aplicações. Um tratamento especial será dado ao ensino de Álgebra nos cursos de Licenciatura em Matemática, nos atendo especialmente à Álgebra, denominada pelos principais autores de livros didáticos nessa área, por *Álgebra Moderna* ou *Álgebra Abstrata* que, neste trabalho, denominaremos de *Álgebra Abstrata Moderna* e, em muitos momentos, a abreviaremos para *AAM*.

4.1 A Origem da Álgebra

Não se sabe ao certo quando se deu origem ao que hoje conhecemos como Álgebra. Porém, a forma como ela é apresentada atualmente é recente, em comparação com a Aritmética e a Geometria. Apesar de Diophanto[12] já fazer uso de variáveis no século III a Álgebra só se fortaleceu e tomou as dimensões que possui hoje a partir do século XVI.

4.1.1 As origens

"A palavra Álgebra – al jebr em árabe – foi usada primeiramente por Mohammed de Kharizm[13], que ensinava matemática em Bagdá [...]" (PINTER, 2013, p. 3). A palavra "Álgebra" pode ser traduzida como "reunião" e, para Kharizm, significava uma reunião de métodos para coletar os termos de uma equação, afim de resolvê-la. A origem da palavra "álgebra" reflete claramente o contexto daquela época, que era, principalmente, o de resolver equações. De fato, Omar Khayyam, que era conhecido por seus brilhantes poemas da coleção *Rybaiyat* – mas que, também, era um importante matemático da época (séculos XI e XII) – define explicitamente a Álgebra como *a ciência de resolver equações,* e foi um dos precursores dos métodos para resolver equação de terceiro grau, descobrindo um método geométrico capaz de resolver alguns tipos dessas equações.

Na fala de Pinter (2013), no século XVI iniciou-se a era clássica da Álgebra, cujo tema central era claramente resolução de equações, isto é, a Álgebra servia como sinônimo de *procedimentos usados para resolver uma equação*. Métodos para resolver equações polinomiais de primeiro e segundo grau já eram bastante conhecidos e muitos matemáticos lutavam para descobrir métodos para resolver equações polinomiais de graus maiores. E, ainda naquele século, conseguiram para as equações de terceiro e quarto grau. Como já citamos, essas descobertas começaram com o método geométrico de Khayyam (1048–1131) para resolver alguns tipos de equações do terceiro grau. E, em 1535, Niccolò Fontana (1499–1557), conhecido como Tartaglia, encontrou, não se sabe se por seus próprios méritos ou por apropriação de informações de outros, uma maneira algébrica de resolver equações de terceiro grau. Mais tarde, sucumbido pelo poder de persuasão

[12] Diofanto de Alexandria. Matemático grego que viveu, aproximadamente, entre os séculos III e IV.
[13] Abū ʻAbd Allāh Muhammad ibn Mūsā al-Khwārizmī, nasceu e viveu em Bagdad (780-850). Foi matemático, astrônomo, astrólogo e geógrafo.

do famoso médico, físico, astrônomo e matemático Girolamo Cardano (1501–1576), Tartaglia entregou a ele todos os seus segredos acerca das equações de terceiro grau. Sem hesitar em trair a confiança de Tartaglia, Cardano publicou, em seu livro *Ars Magna*, de forma sistemática, todos os procedimentos para se resolver uma equação de grau três. Apesar de todas as contestações feitas por Tartaglia, ele não recebeu nenhum crédito oficial pela sua descoberta. Porém, hoje, o método usado para resolver uma equação do terceiro grau é conhecido como *método de Cardano-Tartaglia* na maioria das comunidades matemáticas.

A próxima grande etapa no progresso de construção da Álgebra, foi feita por outro integrante do mesmo ciclo, o servo pessoal de Cardano, Ludovico Ferrari que descobriu um método geral para resolver equação do quarto grau, ou seja, qualquer equação da forma $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx = d$. Desde garoto Ferrari, trabalhando para Cardano, aprendeu latim, grego e matemática. Ele ganhou fama após derrotar Tartaglia em uma competição, em 1548.

Cardano, depois de uma carreira brilhante, porém taxada como inescrupulosa pelo que fez com Tartaglia, entrou em decadência. Primeiro sofreu um grande baque quando seu filho foi condenado à morte e executado em 1560, acusado de ter matado sua esposa infiel. Em 1570, Cardano foi preso, acusado de heresia pela inquisição, após publicar um *mapa astral* de Cristo. Depois de passar vários meses na prisão foi libertado, porém perdeu seu cargo na universidade e foi proibido de publicar livros.

> Nos anos que precederam 1576, via-se nas ruas de Roma um homem de vestes estranhas, perambulando num passo irregular, às vezes gritando para ninguém em particular e ignorado por todos. Ele já fora um dia celebrado em toda a Europa por ter sido um famoso astrólogo, médico dos nobres da corte e professor de medicina na Universidade de Pavia. Criara invenções duradouras, entre elas um precursor do cadeado com código e da junta universal, que é usada hoje nos automóveis. (MLODINOW, 2009, p.18).

Ele Morreu em Roma, no dia 20 de setembro de 1576, poucos dias antes do seu aniversário de 75 anos.

4.1.2 A era moderna

Para Pinter (2013), a era moderna da Álgebra, que deu origem ao nome *Álgebra Moderna*, foi a era de Niels Abel[14], século XIX, onde vários matemáticos, trabalhando independentemente, em diversas partes da Europa, começaram a levantar questões sobre Álgebra que nunca tinham sido consideradas antes. Suas pesquisas, em diferentes áreas da matemática, focaram o estudo da Álgebra em questões não convencionais – eles precisavam resolver problemas ligados à Álgebra que nada tinham a ver com resolução de equações. Seus trabalhos tinham importantes aplicações, que obrigavam os matemáticos a aumentar suas concepções sobre a Álgebra. Novas vertentes da Álgebra foram surgindo com perfeita naturalidade, no desenvolvimento das conexões que aplicavam a matemática aos problemas práticos. No surgimento dessas novas Álgebras, podemos destacar *a Álgebra das Matrizes* e *a Álgebra Booleana.*

A Álgebra das Matrizes surgiu pela necessidade de se resolver sistemas de equações lineares, porém atualmente é usada em diversos ramos da matemática, como, por exemplo, no Cálculo Diferencial de Funções de Várias Variáveis e em aplicações sofisticadas como Códigos *Corretores de Erro* e *Computação Gráfica.*

A Álgebra Booleana foi desenvolvida na metade do século XIX, pelo matemático inglês George Boole. Ela possui inúmeras aplicações em diversas áreas, não apenas na matemática, mas principalmente na Engenharia e na Informática. Essa Álgebra pode ser vista como uma espécie de formalização da Lógica, isto é, uma algebrização do raciocínio lógico-matemático.

4.1.3 Estruturas algébricas

Com o surgimento de novas álgebras, muitos matemáticos se atentaram para as novas vertentes que o egrégio tema da matemática tomava. Passava a ser inconcebível aceitar a Álgebra meramente como uma *ciência de resolver equações.* “Ela tinha que ser vista como uma ampla área da matemática, capaz de revelar princípios gerais que se aplicassem a todas as áreas do conhecimento e a todas as álgebras possíveis” (PINTER, 2013, p. 10).

---

[14] Niels Henrik Abel (1802-1829), matemático norueguês com importantes trabalhos na área da álgebra.

Com o surgimento dessas novas Álgebras, podemos levantar as seguintes questões: o que todas as Álgebras têm em comum? Qual é a característica comum que elas compartilham que nos permite chamá-la a todas de “Álgebra”?

De um modo geral, cada Álgebra consiste de um conjunto cujos elementos podem ser qualquer coisa (números, matrizes, funções, pessoas, etc.) e uma operação binária definida nesse conjunto. Uma operação binária é simplesmente uma forma em que a combinação de quaisquer dois elementos do conjunto produz um único elemento do mesmo conjunto.

Assim, somos levados a um novo e moderno campo de estudos – as *Estruturas Algébricas*. Portanto, uma Estrutura Algébrica pode ser entendida como um conjunto arbitrário, com uma ou mais operações nele definidas. A Álgebra, então, pode ser definida como *o estudo das Estruturas Algébricas.*

Para Pinter (2003, p.10) é importante nos atentarmos que, para concebermos essa nova ideia de Álgebra, precisamos descartar todas as noções pré-concebidas do que a Álgebra é e olhar essa nova noção de Estruturas Algébricas em sua simplicidade nua e crua. A ideia de se tomar um conjunto qualquer com uma ou mais regras que combinem pares de elementos desse conjunto a um único elemento do mesmo conjunto, é desprovida de uma conexão com qualquer área da matemática, ou seja, para se pensar estruturas algébricas não é preciso nenhum pré-requisito, é como se começássemos a aprender a matemática do zero. Essa concepção é que nos remete ao termo “abstrato”, levando muitos matemáticos a chamar alguns estudos das estruturas algébricas de “Álgebra Abstrata”. “Abstrair é operação intelectual em que um objeto de reflexão é isolado de fatores que comumente lhe estão relacionados na realidade” (Houaiss, 2009). Por exemplo, considere o conjunto de todas as cores (cores puras, bem como as suas combinações), e considere uma regra como a ação de misturar duas cores obtendo uma nova cor. Isto pode ser considerado como uma estrutura algébrica, pois temos um conjunto (conjunto das cores) com uma operação binária definida nele (a mistura de cada par de cores do conjunto produz uma nova cor no mesmo conjunto). Outros incontáveis exemplos podem ser facilmente formulados, bastando um pouco de observação e reflexão.

Apesar das estruturas algébricas terem surgido fortemente no século XIX, elas só se tornaram mais familiares e foram completamente aceitas, pela comunidade matemática, a partir da metade do século XX, crescendo de forma notória a cada dia, pela sua força em aplicações na tecnologia, principalmente na área da tecnologia da informação.

4.2 Concepções da Álgebra

Neste tópico, vamos nos ater especificamente na fala de Zalman Usiskin em seu trabalho *Conceptions of School Algebra and Uses of Variables* (concepções da álgebra escolar e usos das variáveis) traduzido por Hygino Domingues como *Concepções sobre álgebra da escola média e suas utilizações das variáveis*[15], publicado no livro *as Ideias da Álgebra, em 1995, q*ue reproduzo aqui, quase que na sua inteireza.

Neste trabalho Usiskin mostra que, a álgebra não pode ser conceituada de forma única para contextos diferentes, visto que ela possui quatro concepções e, inclusive, pode ter concepções diferente no mesmo contexto, dependendo de como se pensa a álgebra.

Usiskin (1995) diz que não é fácil definir Álgebra e reforça o fato de que o conceito de álgebra é diferente em contextos diferentes, ao afirmar que a álgebra do ensino fundamental tem conotações muito diferentes daquela ensinada em cursos superiores. Ele traz como referência o trabalho de Saunders Mac Lane e Garret Birkhoff (1967).

> A álgebra começa como a arte de manipular somas, produtos e potências de números. As regras para essas manipulações valem para todos os números, de modo que as manipulações podem ser levadas a efeito com as letras que representem os números. Revela-se então que as mesmas regras valem para diferentes espécies de números [...] e que as regras inclusive se aplicam a coisas [...] que de maneira nenhuma são números. Um sistema algébrico, como veremos, consiste em um conjunto de elementos de qualquer tipo sobre os quais operam funções como a adição e a multiplicação, contanto apenas que essas operações satisfaçam certas regras básicas (SAUNDERS MAC LANE; GARRET BIRKHOFF,1967, apud USISKIN,1995, p.9).

Na análise de Usiskin, a primeira sentença dessa citação refere-se à aritmética e a segunda refere-se à álgebra da Educação Básica, e conclui que nesses termos a álgebra tem a ver com a compreensão do significado das “letras” (hoje comumente chamadas de variáveis) e das operações com elas, e considera que os alunos estão estudando álgebra quando encontram variáveis pela primeira

[15] A Álgebra a que Usiskin se refere, nesse artigo, é dedicada, na realidade, à Educação Básica, isto é, Fundamental I e II, e Ensino Médio. Isso pode, ao leitor brasileiro, confundir os graus médios do ensino americano: 6º, 7º e 8º anos, com o nosso Ensino Médio.

vez. Usiskin ainda fala das multifaces do conceito de variável e, que, por isso, a redução da álgebra ao estudo das variáveis não responde a pergunta “O que é álgebra da Educação Básica?”. Para justificar esta afirmação, ele apresentou cinco equações, onde o produto de dois números é igual a um terceiro:

1. $A = b \cdot h$
2. $40 = 50x$
3. $senx = \cos x \cdot tgx$
4. $1 = n \cdot \left(1/n \right), \ n \neq 0$
5. $y = kx$

A equação (1) é chamada de *fórmula* e *A, b, h* representam, respectivamente, área, altura e base e possui caráter de uma coisa conhecida. Em (2), pensamos em x como *incógnita*, ou seja, um número desconhecido a ser determinado. Em (3), x é o *argumento* de uma função, isto é, representa valores de um dado conjunto. A equação (4), ao contrário das outras, *generaliza* um modelo aritmético. Em (5), x é mais uma vez o *argumento* de uma função, y é o valor da função e k uma constante (parâmetro, dependendo de como é usado). Somente em (5) há o caráter de “variabilidade”, do qual resulta o termo *variável*. Mesmo assim, tal caráter não estará presente se imaginarmos aquela equação como uma representação analítica de uma reta de inclinação k, passando pela origem.

As concepções de variável mudam com o tempo. Num texto da década de 1950 (Hart, 1951 apud Usiskin, 1995) só se mencionava a palavra variável na discussão de sistema, sendo descrita como “um número imutável”. O uso de letras para representar números é a principal característica da álgebra (Hart, 1951 apud Usiskin, 1995). Ainda, na mesma década, encontramos autores com concepções diferentes, como podemos ver na seguinte citação de May e Van Engen.

> Uma variável, grosso modo, é um símbolo pelo qual se substituem os nomes de alguns objetos, comumente números, em álgebra. Uma variável está associada a um conjunto de objetos cujos nomes podem ser substituídos por ela. Esses objetos chamam-se valores da variável (MAY; VAN ENGEN, 1959 apud USISKIN, 1995, p. 11).

Muitos alunos acham que todas as variáveis são letras que representam números. Contudo, os valores assumidos por uma variável nem sempre são números, mesmo na matemática do Ensino Médio. Na geometria, as variáveis muitas vezes representam pontos, retas, etc. Na lógica, as variáveis muitas vezes representam proposições; na análise, muitas vezes representa uma função; na álgebra linear, a variável pode representar uma matriz ou um vetor; e em álgebra abstrata moderna * pode representar uma operação. O último exemplo, mostra que não há necessidade de se representar uma variável por letras.

As finalidades da álgebra são determinadas por, ou se relacionam com, concepções diferentes da álgebra que correspondem à diferente importância relativa dada aos diversos usos das variáveis.

Usiskin (1995) estabeleceu quatro concepções para a álgebra:

4.2.1 A álgebra como aritmética generalizada

Nesta concepção, as variáveis são pensadas como generalizadoras de modelos. Por exemplo, generaliza-se $3+5=5+3$ como $a+b=b+a$.

Em um nível mais avançado, a noção de variável como generalizadora de modelos é fundamental em modelagem matemática.

> Dentro dessa concepção de álgebra, as instruções-chave para o aluno são *traduzir* e *generalizar*. Trata-se de técnicas importantes, não só para a álgebra mas também para a aritmética (USISKIN; BELL, 1984 apud USISKIN, 1995, p. 13–14).

Diz esse autor, num compêndio de aplicações da aritmética, que ele e Max Bell concluíram que é impossível estudar aritmética adequadamente sem lidar implicitamente ou explicitamente com variáveis. O que é mais fácil, “O produto de qualquer número por zero é zero” ou “Para todo $n, n \cdot 0 = 0$? ”. A superioridade da linguagem algébrica sobre a linguagem *vernácula,* nas descrições de relações numéricas, deve-se à similaridade das duas sintaxes. A descrição algébrica assemelha-se à descrição numérica; a vernácula não.

4.2.2 A álgebra como um estudo de procedimentos para resolver certos tipos de problemas

Consideremos o seguinte problema “Adicionando 3 ao quíntuplo de um certo número, a soma dá 40, achar o número”.

Facilmente se traduz o problema para a linguagem da álgebra assim $5x+3=40$. Se o problema for observado dentro da concepção da álgebra como generalizadora, o problema terminou. Porém, dentro da concepção da álgebra como um estudo de procedimentos, estamos apenas começando. É nesse ponto que começaremos os procedimentos algébricos para a resolução do problema. Como exemplo de procedimento "somar (-3) em ambos os membros da equação $5x+3=40$".

Ao resolver problemas desse tipo, muitos alunos têm dificuldades na passagem da aritmética para a álgebra. Enquanto a resolução aritmética ("de cabeça") consiste em subtrair 3 e dividir por 5, a forma algébrica $5x+3$ envolve a multiplicação por 5 e a adição de 3, as operações inversas. Isto é, para armar a equação, devemos raciocinar exatamente de maneira contrária à que empregaríamos para resolver o problema aritmeticamente.

Nesta concepção de álgebra, as variáveis são *incógnitas* ou *constantes*. Enquanto as instruções-chave, no uso de uma variável como generalizadora de modelos, são traduzir e generalizar, neste caso as instruções-chave são *simplificar* e *resolver*. Na verdade, "simplificar" e "resolver" são às vezes, dois nomes diferentes para a mesma ideia.

4.2.3 A Álgebra como um Estudo de Relações entre Grandezas

Quando escrevemos $A=bh$, fórmula da área de um retângulo, estamos expressando uma relação entre três grandezas. Não se tem a sensação de estar lidando com incógnitas, pois não estamos resolvendo nada. Fórmulas como $A=bh$ transmitem uma sensação diferente de generalizações como $1=n\cdot\left(1/n\right), n\neq 0$, embora se possa pensar numa fórmula como um tipo especial de generalização.

Considerando que a concepção de álgebra como relações pode começar com fórmulas, a distinção crucial entre esta concepção e a anterior é que, neste caso, as variáveis *variam*. Que há uma diferença fundamental entre essas concepções fica evidente pela resposta que os alunos geralmente dão à seguinte pergunta:

O que ocorre com o valor de $\dfrac{1}{x}$ quando x se torna cada vez maior?

A questão parece simples, mas é suficiente para confundir os alunos. Não pedimos o valor de x, portanto x não é incógnita. Não pedimos ao aluno que traduza. Há um modelo para ser generalizado, mas não se trata de um modelo que se pareça com a aritmética. (Não tem sentido perguntar o que acontece com o valor de $\frac{1}{2}$ quando 2 se torna cada vez maior). Trata-se de um modelo fundamentalmente algébrico.

4.2.4 A Álgebra como um Estudo das Estruturas

A concepção 4, última delas para Usiskin, refere-se à álgebra dos cursos de graduação. O estudo da álgebra, nos cursos superiores, envolve estruturas como grupos, anéis, domínios de integridade, corpos e espaços vetoriais. Isso parece ter pouca semelhança com o estudo da álgebra do Ensino Médio, embora os corpos dos números reais e dos números complexos e os vários anéis de polinômios fundamentarem a teoria da álgebra, e as propriedades dos domínios de integridade e dos grupos explicarem porque certas equações podem ser resolvidas e outras não. Contudo, reconhecemos a álgebra como o estudo das estruturas pelas propriedades que atribuímos às operações com números reais e polinômios.

Algumas considerações sobre as concepções apresentadas podem ser extraídas desse texto de Usiskin quando ele chama a atenção para a existência de muitas críticas contra a prática pela qual um "simbolismo extremado" vem dominando as primeiras experiências com a álgebra. Chamamos a isso de manipulação "cega" quando o condenamos e de técnica "automática" quando o elogiamos. Em última análise, é desejado que os alunos tenham facilidade suficiente com os símbolos algébricos, para poderem lidar abstratamente com as técnicas adequadas. Mas a chave da questão é: O que significa "facilidade suficiente"?

Diz ele ainda que é uma ironia que as duas manifestações desse uso da variável – teoria e manipulação – sejam vistas, muitas vezes, como campos opostos quando se estabelece uma política visando ao currículo de álgebra, com aqueles que priorizam a manipulação de um lado e os que priorizam a teoria do outro. Todos eles partem da mesma visão de álgebra.

A Tabela 9 apresenta um resumo do significado das quatro concepções apresentadas por Usiskin.

Quadro 1 – As concepções da Álgebra

Concepções da álgebra	***Uso das variáveis***
Aritmética generalizada	Generalizadora de modelos (traduzir, generalizar)
Meio de resolver certos problemas	Incógnitas, constantes (resolver, simplificar)
Estudo de relações	Argumentos, parâmetros (relacionar, gráficos)
Estrutura	Sinais arbitrários no papel (manipular, justificar)

Fonte: Usiskin (1995) pág. 20

Usiskin concluiu seu trabalho levantando uma questão importante. Com o advento do computador e suas novas potencialidades, o destino das técnicas manipulatórias torna-se uma questão relativa à importância da álgebra como uma estrutura, como o estudo dos sinais arbitrários no papel, como o estudo das relações arbitrárias entre símbolos. O ponto de vista predominante hoje, ao que parece, é que esse não deveria ser o critério principal, tão pouco o único, para se determinar o conteúdo da álgebra. Considerando ainda a questão do papel das ideias de função no estudo da álgebra, trata-se mais uma vez de uma questão da importância relativa a visão da álgebra como o estudo de relações entre quantidades, em que a variável se manifesta predominantemente como argumento, em comparação com os outros papéis da álgebra: como aritmética generalizada ou como provedora de meios para a resolução de problemas. Porém, as outras concepções da álgebra não perderam sua importância apenas se alteraram com a explosão das aplicações da matemática e com a onipresença dos computadores. Já não cabe classificar a álgebra apenas como aritmética generalizada, pois ela é muito mais que isso. A álgebra continua sendo um veículo para a resolução de problemas, mas também é mais do que isso. Ela fornece meios para se desenvolver e se analisar relações. E é a chave para a concretização e a compreensão das estruturas matemáticas. Sendo, portanto a área-chave de estudo da matemática da escola secundária.

4.3 A álgebra nos cursos de Licenciatura do Brasil

Segundo Miorim (1998), o ensino brasileiro foi organizado, predominantemente, por mais de duzentos anos, pelos padres jesuítas. Os jesuítas defendiam, para o que na época correspondia ao ensino médio de hoje, uma educação baseada apenas em disciplinas como a retórica, as humanidades e a gramática. “As matemáticas”, pouco estudadas, eram vistas em cursos superiores de filosofia e ciências.

“A Álgebra foi introduzida no Brasil a partir de 1822, através das chamadas *aulas régias*, isto é, aulas de disciplinas isoladas cujo objetivo era o preenchimento da lacuna deixada quando da eliminação da estrutura escolar jesuítica” (MIORIM, 1998, p. 83).

A inserção da Álgebra nos currículos brasileiros não o foi por nenhuma necessidade, mas simplesmente por motivação política, como afirma Mondini (2009).

> A justificativa para a introdução da Álgebra nos currículos escolares era a importância dela para as nações “mais adiantadas”, como a França, a Inglaterra, Estados Unidos e Portugal. O Brasil, uma nação que possuía o ideal politico de se igualar a esses países, precisava dominar o conhecimento que eles consideravam importante (MONDINI, 2009, p. 30).

Com a mudança no regime político brasileiro, houve uma grande reformulação no modo clássico do ensino brasileiro, dando lugar a um ensino mais técnico e cientifico.

> Na fase republicana, a Reforma Benjamim Constant, oficializada pelo Decreto n°891 de 8 de novembro de 1890, representou uma ruptura com a tradição clássico-humanista do ensino secundário brasileiro na busca de se introduzir uma formação científica nos moldes do positivismo de Augusto Comte. Em relação ao programa de Matemática, a Álgebra juntamente com a Aritmética ficaram distribuídas no 1° ano dos sete anos reservados pela proposta para o ensino secundário (MIORIM, 1998, p. 88).

Apesar de terem ocorrido várias mudanças nas leis que regiam o ensino antes de 1930, nenhuma delas provocou mudanças relevantes com relação à Álgebra. Porém, o conteúdo de Álgebra era, de certa forma, excluído dentre os conteúdos trabalhados, por ser a última disciplina da grade curricular. Na tentativa de resolver esse problema entrou em vigor o “Decreto n° 18.564, de 15 de janeiro de 1929” (MIORIM, 1998, p. 92). A inovação desse decreto, em relação à Álgebra, era que ela, juntamente com outras disciplinas, seria distribuída em diferentes momentos do currículo escolar.

Após essas mudança começou-se a perceber a necessidade de se formar professores em nível superior e isso ocorreu como exigência do Decreto lei N° 5.846 de 1933. Em 1934, foi criada a Universidade de São Paulo-USP, que incorporou o já existente Instituto de Educação, que era responsável pela formação de professores de matemática e aperfeiçoamento daqueles que já exerciam a profissão.

Em 1939 foi criada, no estado do Rio de Janeiro, a Faculdade Nacional de Filosofia. Ela contava com, além de outros cursos, o curso de Licenciatura em Matemática composta por disciplinas sendo que, nos três primeiros anos, comuns ao Bacharelado e, no último ano, disciplinas pedagógicas. Essa era uma configuração curricular muito comum à época e que perdurou até recentemente.

Entre as décadas de 1930 e 1960, a Educação brasileira foi influenciada pelo movimento internacional para a modernização do ensino da matemática, mais conhecido como *Matemática Moderna*. Nesse período, a Álgebra passou a ter um lugar de destaque com seus elementos unificadores dos campos da matemática, como as estruturas algébricas e a teoria dos conjuntos.

Em 1962, os cursos de Licenciaturas começaram a se organizar, como podemos ver pela afirmação de Mondini:

> Com relação aos cursos de formação de professores, na tentativa de organizá-los, entrou em vigor a Lei de Diretrizes e Bases da Educação n° 4.024, de 1961, e o Parecer n° 292, de 14 de novembro de 1962, que estabelece currículos mínimos para as Licenciaturas (MONDINI, 2009, p. 32).

Nesse Parecer, que vigora até os dias atuais, a Álgebra é instituída, dentre outras, como disciplinas obrigatórias aos curso de Licenciatura e Bacharelado em Matemática. É importante observar que a Álgebra, e outras disciplinas, foram introduzidas ao currículo mínimo dos cursos de Licenciatura em Matemática, com um objetivo que não faz referência à formação de professores, ou seja, não elenca nada mais que uma formação acadêmica de Álgebra para o professor, sem pensar em quão útil isso seria para sua prática.

4.4 A Álgebra no Contexto da pesquisa

O curso de Licenciatura em Matemática do IFG-Campus Goiânia, foi compilado com cinco disciplinas que contemplam fortemente elementos algébricos nas diversas concepções com o objetivo de resgatar ou promover uma formação algébrica. A seguir, listaremos essas disciplinas, juntamente com o momento, objetivo, ementa e bibliografia. Todas essas informações foram obtidas no site oficial do curso: www.ifg.edu.br/matematica.

4.4.1 Tópicos de Álgebra Elementar

Disciplina Tópicos de Álgebra Elementar é oferecida no primeiro período e tem por objetivo revisar conteúdos de Álgebra da Educação Básica, necessários para a compreensão dos novos conteúdos, em níveis mais avançados, que serão abordados durante o curso.

Ementa:

Sequências, progressão aritmética, progressão geométrica, matrizes, determinantes, sistemas lineares, números complexos, polinômios e equações polinomiais.

Bibliografia

LIMA, Elon Lajes. A matemática do Ensino Médio, vol. 2. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2003.

LIMA, Elon ... A matemática do Ensino Médio, vol. 3. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2003.

IEZZI, Gelson e HAZZAN, Samuel. Fundamentos de Matemática Elementar, vol. 4. São Paulo: Atual Editora, 2001.

IEZZI, Gelson e HAZZAN, Samuel. Fundamentos de Matemática Elementar, vol. 6. São Paulo: Atual Editora, 2001.

4.4.2 Estudo de Funções

A disciplina Estudo de Funções é oferecido no primeiro período e tem como objetivo revisar e reforçar conceitos importantes para o aprendizado de conteúdos que serão abordados em outras disciplinas do curso.

Ementa

Conjuntos, definição de função, domínio e imagem, funções quadráticas, função modular, função composta, função inversa, função exponencial, função logarítmica, funções trigonométricas e funções hiperbólicas.

Bibliografia

LIMA, Elon Lajes. A Matemática do Ensino Médio, vol. 1 Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2003.

IEZZI, Gelson e MURAKAMI, Carlos. Fundamentos de Matemática Elementar, vol. 1. São Paulo: Atual Editora, 2006.

IEZZI, G. et all. Fundamentos da Matemática Elementar. Logaritmos, volume 2, Atual Editora, 2004.

IEZZI, G. et all. Fundamentos da Matemática Elementar. Trigonometria, volume 3, Atual Editora, 2004.

4.4.3 Álgebra Linear

O curso de Álgebra Linear é oferecido no terceiro período e introduz a primeira noção de estruturas algébricas avançadas.

Ementa:

Sistemas Lineares e Matrizes, Espaços Vetoriais, Transformações Lineares, Autovalores e Autovetores, Diagonalização de Operadores, Produto Interno, Aplicações.

Bibliografia:

BOLDRINI, J. L., COSTA, S. I. R., FIGUEIREDO, V. L., WETZLER, H. G., - Álgebra Linear,3ª Edição. São Paulo: Editora Harbra Ltda., 1986.

LANG, Serge. Álgebra Linear. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2003.

SILVA, V. V., - Álgebra Linear. Goiânia: CEGRAF UFG, 1998.

LIMA, E. L., - Álgebra Linear. Rio de Janeiro: Projeto Euclides, IMPA/CNPq, 2001.

HERSTEIN, I. N. - Tópicos de Álgebra. Editora Polígono, São Paulo, 1970.

HOFFMAN, K. e KUNZE, H., - Álgebra Linear. Editora Polígono, São Paulo, 1971.

4.4.4 Álgebra I

A Álgebra I é uma disciplina oferecida no quarto período. Nela é feita uma introdução à Teoria de Números e uma preparação para o estudo das estruturas algébricas que serão abordadas na *Álgebra II.*

Ementa:

Noções sobre demonstrações; aritmética dos inteiros; produto cartesiano; relações, funções e operações.

Bibliografia:

Domingues, Hygino H, Gelson Iezzi. Álgebra Moderna- 4. Edição reformulada – São Paulo: Atual, 2003.
Plínio, O. José. Introdução a Teoria dos Números - Rio de Janeiro: IMPA, 2002.
Silva, Valdir Vilmar. Números, Construções e Propriedades – Goiânia: Ed. UFG, 2005.
Landau, Edmund. Teoria Elementar dos Números – São Paulo: Ed. Moderna, 2002.
MILIES, C. P.; COELHO, S. P. Números: Uma Introdução à Matemática. São Paulo, EDUSP, 2000
VIDIGAL, AVRITZER, SOARES..., Fundamentos de álgebra. Belo Horizonte, Editora UFMG, 2005.

4.4.5 Álgebra II

A Álgebra II é oferecida no quinto período e nela se estudam as estruturas algébricas: *grupos, anéis e corpos.*

Ementa:

Grupos, Subgrupos, Homomorfismo e Isomorfismo de Grupos,Teorema de Cayley, classes laterais e o teorema de Lagrange, Grupos Cíclicos, subgrupos Normais e Grupos Quocientes. Anéis, anéis comutativos e anéis com unidade. Subanéis. Homomorfismos e Isomorfismo de anéis: propriedades elementares. Anéis de Integridade e Corpos.

Bibliografia

DOMINGUES, Hygino Hugueros; IEZZI, Gelson. Álgebra moderna. 2 ed. São Paulo: Ed. Saraiva, 2003
BIRKHOFF, Garrett; MACLANE, Saunders. Álgebra moderna básica. 4 ed. Rio de Janeiro: Guanabara Dois S.A. 1980.
CLARK, Allan. Elements of abstract algebra. New York: Dover Publications, 1970.
FRALEIGH, John B. A first course in abstact algebra. USA: Addison-Wesley publiching company, 1997.
GONÇALVES, Adilson. Introdução a algebra. Rio de Janeiro: IMPA, 1979.
Herstein, I. N. Tópics in álgebra. New York: Wiley, 1964.
LANG, Serge. Undergraduate álgebra. 2 ed. New Haven: Springer, 2001.

Apesar de todas as disciplinas de matemática do curso fazerem uso de alguma forma, da variável e, consequentemente, de usar a álgebra, essas cinco disciplinas citadas não apenas fazem uso, elas introduzem novos conceitos algébricos e fundamentam o conhecimento da álgebra, segundo algumas das concepções apresentada. A Álgebra II, elemento importante de nossa pesquisa, é a última dessas disciplinas e, portanto, espera-se que o estudante, ao concluir essa disciplina, esteja pronto para analisar e criticar seu conhecimento algébrico adquirido, bem como perceber a existência, ou não, de uma relação entre o conhecimento de álgebra construído na sua formação com sua prática profissional.

5 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

É fato que, desde o início da civilização humana, o Homem se depara com problemas do seu cotidiano e busca maneiras de resolvê-los. Logo, falar sobre problemas e resolução de problemas de uma forma geral abrangeria, praticamente, todas as áreas do conhecimento humano e isso fugiria de nosso propósito. Neste capítulo, iremos tratar resolução de problemas num contexto pedagógico, mais especificamente problemas e resolução de problemas como um agente motivador para a inserção de novos conceitos de matemática. Começaremos com um breve histórico sobre o uso da resolução de problemas como um elemento de auxílio pedagógico, mostrando como e quando a resolução de problemas passou a ser refletida e inserida como um elemento didático-pedagógico. Em seguida, olharemos a resolução de problemas em suas principais abordagens como metodologia de ensino: *ensinar sobre resolução de problemas*, *ensinar para resolver problemas* e *ensinar através da resolução de problemas.* Por fim, apresentaremos a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, base principal do nosso trabalho.

5.1 Um breve histórico sobre Resolução de Problemas (RP) no contexto didático-pedagógico

Com a inserção de teorias da aprendizagem na pedagogia, a Resolução de Problemas passou a ter destaque nesse contexto.

Segundo Morais e Onuchic (2014), na passagem do século XIX para o século XX, as teorias pedagógicas eram ancoradas na teoria psicológica intitulada Teoria da Disciplina Mental (TDM), desenvolvida pelo psicólogo alemão Christian Wolff, em 1740. De acordo com essa teoria, o conhecimento humano está na mente do individuo e o papel do professor é ajudar o aluno a trazer esse conhecimento para seu nível da consciência. Por essa razão, é dada pouca ênfase ao conteúdo a ser estudado. O importante é treinar e desenvolver uma coleção de faculdades ou capacidades mentais, desligados de aplicações e de quaisquer problemas práticos. As faculdades apontadas por Wolff são: percepção, memória, intuição ou razão, imaginação e compreensão. Acreditava-se que era suficiente treinar uma dessas faculdades e que, automaticamente, ocorreria uma transferência para todas as outras.

Thorndike e Woodworth, em 1902, no artigo “A influência da melhoria em uma função mental sobre a eficiência de outra função”[16], apresentam elementos bastante fortes que contradizem a TDM. A partir daí surgiu uma nova teoria psicológica sobre a aprendizagem, que ficou conhecida como “Teoria do Conexionismo”[17]. Essa teoria estabelece que a aprendizagem se dá por conexões entre estímulos e reações. No caso do conexionismo (associacionismo) de Thorndike a aprendizagem é resultante de conexões nervosas estabelecidas entre as impressões sensoriais e os impulsos para a ação. Três leis primárias regem essa teoria:

Lei do efeito: As reações que são seguidas por um estado recompensador de eventos vão ser fortalecidas e vão se tornar habituais para aquela situação;

Lei da prontidão: Se o estímulo acontece no momento em que o individuo está pronto, isto é, a conexão está pronta para transmitir, então a transmissão é satisfatória, caso contrário a transmissão é perturbada;

Lei do exercício ou da repetição: Quanto mais uma conexão for usada mais ela se fortalece e quanto menos ela for usada mais ela se enfraquece.

Essa nova teoria considerou a resolução de problemas como um elemento importante para a aprendizagem, tanto que, no livro: “Os Métodos de Aritmética”, de Thorndike, o capítulo 7 é exclusivo sobre resolução de problemas. Nesse capítulo, ele apresenta um algoritmo para resolver problemas:

1) Se você sabe resolver o problema, siga em frente;

2) Se você não vê uma forma de resolver o problema então, faça as seguintes perguntas: “Qual a pergunta a ser feita?”, “Como devo usar esses dados?”, “O que devo fazer com esses números?”;

3) Planejar o que você irá fazer, e porquê, e organizar o seu trabalho de modo que você saiba o que fez;

4) Cheque as respostas obtidas para ver se valem e se o raciocínio feito está de acordo com o que você solicitou no enunciado do problema.

Morais e Onuchic (2014) falam também sobre novas teorias contrapondo o conexionismo no cenário educacional, dizendo que

> [...] a ênfase do ensino de matemática, a partir da segunda metade da década de 1930 até por volta do final da década de 1940, nos Estados Unidos, esteve sobre os “processos” de aprendizagem e não somente sobre os “produtos”. A teoria psicológica que sustentou essa corrente foi a “teoria

[16] The influence of improvement in one mental function upon the efficiency of the other function.
[17] Connectionism theory.

> significativa", de Willian Brownell (MORAIS; ONUCHIC, 2014, p. 22).

Morais e Onuchic (2014) ainda afirmam que, no período em que vigorou a teoria significativa, a Resolução de Problemas se constituiu como uma teoria, pelo matemático e pesquisador George Polya, apresentada no grande clássico How to solve it traduzido por – "A arte de resolver problemas".

Polya acreditava que os professores precisavam ser bons resolvedores de problemas e que fizessem de seus alunos também bons resolvedores de problemas. Para auxiliar o professor nessa árdua tarefa, ele propôs quatro fases que julgava serem importantes a todos bons resolvedores de problemas, a saber:

1) **Compreensão do problema:** "É tolice responder a uma pergunta que não tenha sido compreendida" (POLYA, 2006, p. 5);

2) **Estabelecimento de um plano:** "Temos um plano quando conhecemos, pelo menos de um modo geral, quais as contas, os cálculos ou os desenhos que precisamos executar para obter a incógnita" (POLYA, 2006, p. 7);

3) **Execução do plano:** "[...] Para se conseguir isso é preciso, além de conhecimentos anteriores, de bons hábitos mentais e de concentração no objetivo" (POLYA, 2006, p. 10);

4) **Retrospecto:** "[...] Se fizerem um retrospecto da resolução completa, reconsiderando e reexaminando o resultado final e o caminho que levou até este, os alunos poderão consolidar seu conhecimento e aperfeiçoar sua capacidade de resolver problemas" (POLYA, 2006, p. 12).

Seguindo essa linha, Polya produziu outras obras também bastante significativas. Todos os livros escritos por Polya eram voltados para os professores, com muitos problemas trabalhados e discutidos para que o professor pudesse inovar suas aulas, tornando-as atrativas e efetivas.

Nos anos que se seguiram, a Resolução de Problemas ganhou força, como afirmam Morais e Onuchic (2014):

> Apesar do livro "How to solve it" ter sido lançado ainda no ano de 1945, a RP enquanto pesquisa ganhou força nos Estados Unidos e, mais tarde, em outros países do mundo, a partir do final da década de 1960, com pesquisas importantes como as de Jeremy Kilpatrick que fez, em 1967, uma extensa revisão da pesquisa existente sobre RP em Matemática" (MORAIS; ONUCHIC, 2014, p. 24).

A Resolução de Problemas perdeu força no período em que vigorou o *Movimento da Matemática Moderna* (MMM), iniciado na década de 1950, permanecendo até a década de 1970. Porém, com o fracasso do MMM[18], a RP voltou a se tornar o foco do ensino de matemática, principalmente nos Estados Unidos, é o que afirmam Morais e Onuchic (2014):

> No ano de 1980, o documento "Uma Agenda para Ação – Recomendações para a Matemática Escolar para a década de 1980"[19], publicado pelo NCTM, propôs que a Resolução de Problemas fosse o foco da matemática escolar nos anos 1980. (MORAIS; ONUCHIC, 2014, p. 28).

A partir daí, muitas discussões e pesquisas sobre o tema RP ocorreram, principalmente nos Estados Unidos.

Atualmente, Resolução de Problemas vem ocupando, cada vez mais, um lugar importante nos currículos escolares, graças aos esforços de muitos matemáticos, educadores matemáticos e principalmente pesquisadores e grupos de pesquisa consolidados. Além da grande contribuição de George Polya, podemos destacar: Frank Lester, Thomas Schroeder, Jeremy Kilpatrick, Jinfa Cai, Schoenfeld, nos Estados Unidos; Erkki Pehkonen, na Finlândia; e Lourdes Onuchic, Norma Allevato, Luiz Dante, no Brasil. Diversos grupos de pesquisa, nessa área, já estão consolidados e novos grupos vêm se formando a cada dia. No Brasil, podemos destacar o GTERP – Grupo de Trabalho e Estudos em Resolução de Problemas, coordenado pela professora Dra. Lourdes de la Rosa Onuchic, e que tem produzido trabalhos bastante significativos.

5.2 Resolução de problemas: abordagens e concepções

Como já mencionamos no início deste capítulo, a palavra "problema" tem um sentido bastante amplo e, portanto, uma definição precisa desse termo não é algo fácil. Schoenfeld (1985) fala sobre essa dificuldade:

> A dificuldade em se definir o termo *problema* é que, resolver problema é relativo. A mesma tarefa que requer esforços significativos de alguns estudantes pode muito bem ser exercícios rotineiros para outros (SCHOENFELD, 1985, p. 74).

---

[18] O livro "O Fracasso da Matemática Moderna" de Morris Kline, publicado pela editora Ibrasa em 1976, traz informações detalhadas desse movimento.

[19] An Agenda for Action – recommendations for School Mathematics of the 1980s.

De acordo com Chi e Glaser (1992), resolver problemas é algo com que o ser humano se habitua desde sua infância. As pessoas solucionam problemas, apresentados pelo mundo, adquirindo e organizando as informações em estruturas de conhecimentos sobre objetos, eventos e pessoas. Tais estruturas englobam corpos de entendimento, modelos mentais, crenças e convicções que influenciam na forma com que elas resolvem seus problemas.

Nesse sentido, o que Chi e Glaser (1992) chamaram de "a capacidade de resolver problemas" estaria relacionada aos processos cognitivos e às organizações mentais que uma pessoa desenvolveu. "A resolução de problemas é uma habilidade cognitiva complexa que caracteriza uma das habilidades humanas mais inteligentes" (CHI; GLASER, 1992, p. 249). Para esses autores, o aspecto principal de um problema é que ele possui um *estado inicial* e tem algum *objetivo* (*estado desejado*). Eles ainda chamam a atenção para a importância da representação de um problema e dos aspectos elencados por essa representação. A representação precisa incorporar aspectos essenciais do problema e a falta de um ou mais aspectos do problema ou inserção de aspectos impróprios dificultam a resolução ou mesmo pode impedir a obtenção de uma resposta. "A *representação* consiste essencialmente da interpretação ou compreensão do problema por aquele que o soluciona" (CHI; GLASER, 1992, p. 255).

Em tudo que foi dito, podemos perceber a importância não apenas dos problemas, mas da resolução de problemas na formação do cidadão e, consequentemente, a importância de se levar isso para o contexto escolar. É o que apontam Stanic e Kilpatrick (1989):

> Os problemas ocupam um lugar central nos currículos desde a Antiguidade, mas a resolução de problemas não. Só recentemente apareceram educadores matemáticos aceitando a ideia de que o desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas merece atenção especial (STANIC; KILPATRICK, 1989, p. 1).

5.2.1 Problema e resolução de problemas

"Um problema é uma situação na qual você está tentando alcançar algum objetivo e deve encontrar um meio para se chegar lá."(CHI; GLASER, 1992, p. 251).

Para Polya (1985):

> Temos um problema sempre que procuramos os meios para atingir um objetivo. Quando temos um desejo, que não podemos satisfazer

> imediatamente, pensamos nos meios de satisfazê-lo e assim se põe um problema. (POLYA, 1985, p. 13 apud NOGUTI, 2014, p. 27).

Mayer (1985) diz:

> Um problema ocorre quando vocês são confrontados com uma dada situação – vamos chamar de estado meta – mas não há um caminho óbvio para conseguir essa meta. (MAYER, 1985, p. 123).

Dante no seu livro DIDÁTICA DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE MATEMÁTICA, após apresentar a justificativa de alguns educadores matemáticos sobre a importância da resolução de problemas no ensino de matemática, diz que um problema "É qualquer situação que exija o pensar do indivíduo para solucioná-la."(DANTE, 1991, p. 9). Ele diz também que um problema de matemática "É qualquer situação que exija a maneira matemática de pensar e conhecimentos matemáticos para solucioná-la" (DANTE, 1991, p. 10).

Schoenfeld (1985) diz que um problema é caracterizado pela relação particular entre o individuo e uma dada tarefa:

> [...] um problema não é uma propriedade inerente de uma tarefa matemática. Antes, é uma relação particular entre o indivíduo e a tarefa que faz da tarefa um problema para ele.(SCHOENFELD, 1985, p. 74).

Os Parâmetros Curriculares Nacionais explicam o significado de problema matemático baseado em três características:

> Um problema matemático é uma situação que demanda a realização de uma sequência de ações ou operações para obter um resultado. Ou seja, a solução não está disponível de início, mas é possível construí-la.
> Em muitos casos, os problemas usualmente apresentados aos alunos não constituem verdadeiros problemas, porque, via de regra, não existe um real desafio, nem a necessidade de verificação para validar o processo de solução.
> O que é problema para um aluno pode não ser para outro, em função dos conhecimentos de que dispõe (BRASIL, 1998, p. 41).

Finalmente, Onuchic (1999), sintetiza dizendo que "problema é tudo aquilo que não sabemos fazer mas que estamos interessados em resolver". (ONUCHIC, 1999, p. 215).

5.2.2 Resolução de problemas e suas abordagens

A relação entre Resolução de Problemas e Educação Matemática é apresentada, por Schroeder e Lester (1989, p. 31), sob três formas de abordagem:

ensinar sobre resolução de problemas, ensinar matemática para resolver problemas e ensinar através da resolução de problemas. A seguir, descreveremos, de forma sucinta, cada uma destas abordagens:

1. Ensinar sobre resolução de problemas

Esta forma de abordagem refere-se ao processo de resolver problemas. Polya (1945, 2006) sugere um modelo, mostrando como o professor pode trabalhar sobre resolução de problemas, um modelo que estabelece quatro fases distintas: compreender o problema, estabelecer um plano, executar o plano e fazer um retrospecto reconsiderando e reexaminando o resultado final e o caminho que levou à solução;

2. Ensinar para resolver problemas

Esta abordagem refere-se a ensinar a matemática necessária para resolver problemas. Neste aspecto, o professor se concentra na maneira como a matemática é ensinada e o que dela pode ser aplicada na resolução de problemas rotineiros e não-rotineiros. Embora a aquisição de conhecimento matemático seja importante, a proposta essencial para aprender matemática é ser capaz de usá-la;

3. Ensinar através da resolução de problemas

Esta abordagem refere-se ao uso da resolução de problemas como uma metodologia de ensino. Nesse caso, o professor tem por objetivo levar o aluno a produzir um novo conhecimento. Para isso, ele deve propor um problema e, durante a resolução desse problema por parte do aluno, tendo o professor como mediador, novos conceitos, conteúdos ou procedimentos vão sendo evidenciados de forma que o aluno possa construir novos conhecimentos. Onuchic e Allevato (2011) sugerem um roteiro, mostrando como essa abordagem pode ser executada pelo professor. Esse roteiro, bem como uma metodologia de ensino que trabalha com essa abordagem, será apresentada no item 5.3, a seguir.

5.3 A Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas

Esta metodologia foi desenvolvida, em um processo de estudos e pesquisas, pelo GTERP – Grupo de Trabalho e Estudos em Resolução de Problemas, sob a coordenação da prof[a]. Dr[a]. Lourdes de la Rosa Onuchic que, ao longo do tempo, vem pesquisando, orientando alunos de mestrado e doutorado, e divulgando e incentivando o uso dessa metodologia em sala de aula.

Essa metodologia se caracteriza por "o problema é ponto de partida e, na sala de aula, através da resolução de problemas, os alunos devem fazer conexões entre diferentes ramos da matemática, gerando novos conceitos e novos conteúdos." (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011, p. 81).

Tanto o professor quanto os alunos precisam estar engajados nesse processo e assumir as novas responsabilidades essenciais nessa metodologia.

> O professor precisa preparar, ou escolher, problemas apropriados ao conteúdo ou ao conceito que pretende construir. Precisa deixar de ser o centro das atividades, passando para os alunos a maior responsabilidade pela aprendizagem que pretendem atingir. Os alunos, por sua vez, devem entender e assumir essa responsabilidade. Esse ato exige de ambos, portanto, mudanças de atitude e postura, o que, nem sempre, é fácil conseguir (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011, p. 82).

5.3.1 O termo Ensino-Aprendizagem-Avaliação

Pode causar estranheza a composição das três palavras: Ensino, Aprendizagem e Avaliação. Onuchic e Allevato (2011, p. 80) explicam a primeira composição:

> O século XX, século de muitas reformas no ensino de Matemática, passou a entender, porém, que ensino e aprendizagem deveriam ocorrer simultaneamente. Adotando este objetivo, nosso grupo de trabalho e estudo – GTERP – passou a utilizar a palavra composta ensino-aprendizagem (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011, p. 80).

No mesmo artigo, essas autoras afirmam que:

> Ocorre que, mais recentemente, também o conceito de avaliação começou a ser repensado nos ambientes de ensino. A partir da compreensão da necessidade de adotar os princípios da avaliação contínua e formativa, esta passou a ser incorporada mais ao desenvolvimento dos processos e menos ao julgamento dos resultados obtidos com esses processos. No ensino-aprendizagem a avaliação é um componente extremamente importante (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011, p. 80).

Finalmente, Onuchic e Allevato justificam o uso do segundo hífen:

> Ao considerar o ensino-aprendizagem-avaliação, isto é, ao ter em mente um trabalho em que estes três elementos ocorrem simultaneamente, pretende-se que, enquanto o professor *ensina*, o aluno, como um participante ativo, *aprenda*, e que a avaliação se realize por ambos. O aluno analisa seus próprios métodos e soluções obtidas para os problemas, visando sempre à construção de conhecimento (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011, p. 81).

5.3.2 Trabalhar a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas

Onuchic e Alevatto (2011) dizem que não há formas rígidas de se trabalhar através de problemas. Porém, por perceber a dificuldade que os professores tinham para colocar em prática essa metodologia, em 1998, com a participação de 52 professores em formação continuada, foi criado, pela primeira autora, um roteiro de atividades para auxiliar a implementação dessa metodologia em sala de aula, cuja primeira versão era composta por: "formar grupos e entregar uma atividade; o papel do professor; registrar os resultados na lousa; realizar uma plenária; analisar os resultados; buscar um consenso; fazer a formalização" (ONUCHIC, 1999).

Posteriormente esse roteiro sofreu algumas alterações. Com as novas alterações Onuchic e Allevato (2011, p.83), produziram um Segundo Roteiro. Esse Segundo Roteiro sugere o seguinte:

1. *Preparação do problema* **-** Selecionar um problema, visando à construção de um novo conceito, princípio ou procedimento. Esse problema será chamado problema gerador. É bom ressaltar que, sempre que possível, o conteúdo matemático necessário para a resolução do problema não tenha, ainda, sido trabalhado em sala de aula.

2. *Leitura individual* - Entregar uma cópia do problema para cada aluno e solicitar que seja feita sua leitura.

3. *Leitura em conjunto* - Formar grupos e solicitar nova leitura do problema, agora nos grupos.
   - Se houver dificuldade na leitura do texto, o próprio professor pode auxiliar os alunos, lendo o problema.
   - Se houver, no texto do problema, palavras desconhecidas para os alunos, surge um problema secundário. Busca-se uma forma de poder esclarecer as dúvidas e, se necessário, pode-se, com os alunos, até consultar um dicionário.

4. *Resolução do problema* - A partir do entendimento do problema, sem dúvidas quanto ao enunciado, os alunos, em seus grupos, em um trabalho cooperativo e

colaborativo, buscam resolvê-lo. Considerando os alunos como co-construtores da *matemática nova* que se quer abordar, o problema gerador é aquele que, ao longo de sua resolução, conduzirá os alunos para a construção do conteúdo planejado pelo professor para aquela aula.

5. *Observar e incentivar* – Nessa etapa, o professor não tem mais o papel de transmissor do conhecimento. Enquanto os alunos, em grupos, buscam resolver o problema, o professor observa, analisa o comportamento dos alunos e estimula o trabalho colaborativo. Ainda, o professor, como mediador, leva os alunos a pensar, dando-lhes tempo e incentivando a troca de ideias entre eles.
   - O professor incentiva os alunos a utilizarem seus conhecimentos prévios e técnicas operatórias, já conhecidas, necessárias à resolução do problema proposto. Estimula-os a escolher diferentes caminhos (métodos, estratégias) a partir dos próprios recursos de que dispõem. Entretanto, é necessário que o professor atenda os alunos em suas dificuldades, colocando-se como interventor e questionador. Acompanha suas explorações e os ajuda, quando necessário, a resolver problemas secundários que podem surgir no decurso da resolução: notação; passagem da linguagem vernácula para a linguagem matemática; conceitos relacionados e técnicas operatórias; a fim de possibilitar a continuação do trabalho.

6. *Registro das resoluções na lousa* – Representantes dos grupos são convidados a registrar, na lousa, suas resoluções. Resoluções certas, erradas ou feitas por diferentes processos devem ser apresentadas para que todos os alunos as analisem e discutam.

7. *Plenária* – Para esta etapa são convidados todos os alunos, a fim de discutirem as diferentes resoluções registradas na lousa pelos colegas, para defenderem seus pontos de vista e esclarecerem suas dúvidas. O professor se coloca como guia e mediador das discussões, incentivando a participação ativa e efetiva de todos os alunos. Este é um momento bastante rico para a aprendizagem.

8. *Busca do consenso* – Depois de sanadas as dúvidas e analisadas as resoluções e soluções obtidas para o problema, o professor tenta, com toda a classe, chegar

a um consenso sobre o resultado correto.

9. *Formalização do conteúdo* – Neste momento, denominado *formalização*, o professor registra na lousa uma apresentação *formal* – organizada e estruturada em linguagem matemática – padronizando os conceitos, os princípios e os procedimentos construídos através da resolução do problema, destacando as diferentes técnicas operatórias e as demonstrações das propriedades qualificadas sobre o assunto.

6 A INFLUÊNCIA DOS NOSSOS OUTROS E O MODELO MODIFICADO

No Capítulo 2 estabelecemos as variáveis chave que deram origem aos capítulos 3, 4 e 5, sobre Formação Inicial de Professores, Álgebra e Resolução de Problemas, respectivamente. Após "ouvir os outros" apresentaremos, neste Capítulo 6, o "Modelo Modificado", originado a partir do nosso Fenômeno de Interesse, do Modelo Preliminar e de fatores relevantes obtidos no aprofundamento teórico que fizemos. Ressaltemos que outros elementos, como discussões com professores e colegas, participação em seminários e palestras, disciplinas cursadas pelo pesquisador e nossas reflexões a respeito da pesquisa, também influenciaram na mudança do modelo preliminar. Esse Modelo Modificado deverá guiar os nossos passos até o final da pesquisa.

6.1 Os Outros e a nossa pesquisa

O relacionar com os outros, terceira atividade do Modelo Metodológico de Romberg-Onuchic, nos mostrou a necessidade de uma reformulação no planejamento da investigação que apresentamos no Capítulo 2 (Modelo Preliminar).

O estudo sobre Formação Inicial de Professores, Capítulo 3, nos mostrou elementos importantes, como Freire (1996), Ponte (2003), dentre outros, falando da necessidade de uma reflexão crítica do professor sobre sua própria prática. Essas reflexões são apontadas como elementos fundamentais para a melhoria de práticas futuras. Para Garcia (1995;1999) e Nóvoa (1997), as reflexões não devem se ater especificamente à atuação do professor em sala de aula, devem também levar em consideração questões epistemológicas, ideológicas e culturais e, além disso, não devem ser uma ação apenas dos professores da Educação Básica, mas também dos professores do Ensino Superior e, até mesmo, de outras áreas. As críticas e reflexões apontadas por esses teóricos, juntamente com as múltiplas dimensões do papel do professor de matemática apresentadas nos PCN(1998), nos mostraram que nossa pesquisa necessitava ser melhor articulada, não apenas visando a sala de aula, mas, visando todo o contexto da instituição onde ela seria aplicada. Assim, precisávamos reformular nosso modelo de forma que ficasse clara essa articulação. O contato com a instituição, citado no modelo preliminar, deveria se desdobrar em parcerias com o Coordenador do curso e o professor da disciplina, levando em conta a grade curricular que faz parte dos documentos oficiais do curso.

A Álgebra, possui um papel importante na pesquisa que pretendemos desenvolver. A princípio, qualquer disciplina de matemática do curso de Licenciatura em Matemática poderia ser usada com o mesmo propósito, tanto que, o nosso Modelo Preliminar não faz referência à disciplina a ser trabalhada em sala de aula. Inicialmente, pretendíamos trabalhar com Cálculo Diferencial e Integral, por ser uma das primeiras disciplinas em nível superior que os alunos de Licenciatura em Matemática têm contato; por ser uma disciplina fácil de se explorar, no sentido de que muitos dos seus conteúdos estão relacionados, de alguma forma, com conteúdos da Educação Básica; e por existir muitas pesquisas no campo da Educação Matemática fornecendo-nos elementos para fundamentar nossa pesquisa. Porém optamos por Álgebra Abstrata Moderna, por ser uma disciplina difícil de ensinar e aprender e, também, de poder relacionar seus conteúdos com os da Educação Básica, visto que alunos que fizeram essa disciplina e até mesmo professores de matemática, com quem tivemos contato, relataram não conseguir ver nenhuma relação dessa disciplina com a prática de um professor da Educação Básica. Assim, acreditamos que pesquisas envolvendo a AAM poderá trazer contribuições relevantes à formação de professores de matemática. Um outro fator que contribuiu para escolhermos a AAM é o fato de ela ser uma disciplina exclusiva dos cursos de Matemática (Licenciatura e Bacharelado), diferentemente do Cálculo Diferencial e Integral, cujas turmas, em geral, além de alunos de Matemática, têm alunos de Engenharia, Computação, e/ou outros. E, por fim, por existir poucas pesquisas envolvendo AAM, se comparado com outras disciplinas dos cursos de Licenciatura em Matemática – o que antes acreditávamos ser um ponto negativo, passamos a encarar como um diferencial em nossa pesquisa.

A criação da AAM, juntamente com outras Álgebras também consideradas modernas, foi motivada pela necessidade de se resolver, no século XX, problemas mais recentes e mais avançados (criptografia, códigos corretores de erros, etc.), elaborados pelo homem. As tecnologias atuais foram e estão sendo desenvolvidas com a utilização dessas novas matemáticas. Assim, acreditamos que conteúdos, com tantas aplicações em tecnologias atuais, não podem ficar fora das pretensões de um curso que tem, por objetivo, formar um professor de matemática capaz de relacionar o conteúdo que ensina com o dia-a-dia de seu aluno. As concepções da Álgebra, apresentadas no Capítulo 4, nos convenceram de que é possível relacionar Estruturas Matemáticas – a própria AAM – com outras álgebras e, até mais que isso, às vezes sem percebermos, estamos praticando AAM dentro da Álgebra Elementar, ao fazermos manipulações "às cegas", ou seja, operações com variáveis que são assim trabalhadas como um símbolo arbitrário. Em suma, a AAM possui importância significativa em áreas avançadas da matemática, porém, pode ser tratada de forma elementar. Ainda ela pode ser estudada isoladamente de outras matemáticas, mas, acreditamos que relacioná-la com diversos conteúdos de matemática, inclusive da Educação Básica, pode ser a melhor forma de se ensinar e aprender AAM. Assim, a criação do projeto P, proposto no modelo preliminar, se manteve porém ganhou novas dimensões, as nossas reflexões nos levaram a perceber que não seria possível aos alunos, futuros professores, relacionar a AAM com os conteúdos da Educação Básica sem ter aprendido essa Álgebra de maneira sólida. Além disso, seria inviável fazer um projeto que conseguisse dar conta de todo conteúdo de AAM, utilizando a metodologia que estávamos propondo e por isso o projeto P deveria ser feito em parceria com o professor da disciplina de Álgebra II.

No Capítulo 5 (*Resolução de Problemas*) fizemos um aprofundamento sobre o uso da resolução de problemas de matemática no ensino. Nossos estudos a respeito desse assunto nos mostraram a força que o uso da Resolução de Problemas em um contexto didático-pedagógico pode ter no processo de Ensino Aprendizagem e Avaliação de matemática. As pesquisas realizadas nessa área, dando destaque ao GTERP, reforçam que uma metodologia que faça uso correto de resolução de problemas pode ser uma proposta de ensino muito eficiente. E, especificamente, as pesquisas realizadas nesse grupo, com o uso da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas vêm obtendo resultados bastante satisfatórios, pois essa metodologia vem ao encontro de nossas aspirações em **tornar o aluno coconstrutor do seu próprio conhecimento**. Como afirma Justulin (2014):

> A pesquisa investigou também algumas crenças de (futuros) professores antes, durante e depois de vivenciarem a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. Os resultados indicaram que a Metodologia ajudou os (futuros) professores a saírem do estado de ouvintes e a se tornarem questionadores, investigativos e participativos, sendo coconstrutores de seus próprios conhecimentos (JUSTULIN, 2014, p. 77).

Isso reforça a importância da utilização dessa metodologia na nossa pesquisa. Observamos também que não existem muitas pesquisas que utilizem resolução de problemas em curso superior, principalmente nos cursos de formação inicial de professores. No estudo que fizemos não identificamos nenhuma pesquisa que faça uso da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas na área de Álgebra Abstrata Moderna em cursos de Licenciatura em Matemática, e isso confere originalidade à nossa pesquisa.

6.2 As Mudanças na Proposta Inicial da nossa pesquisa

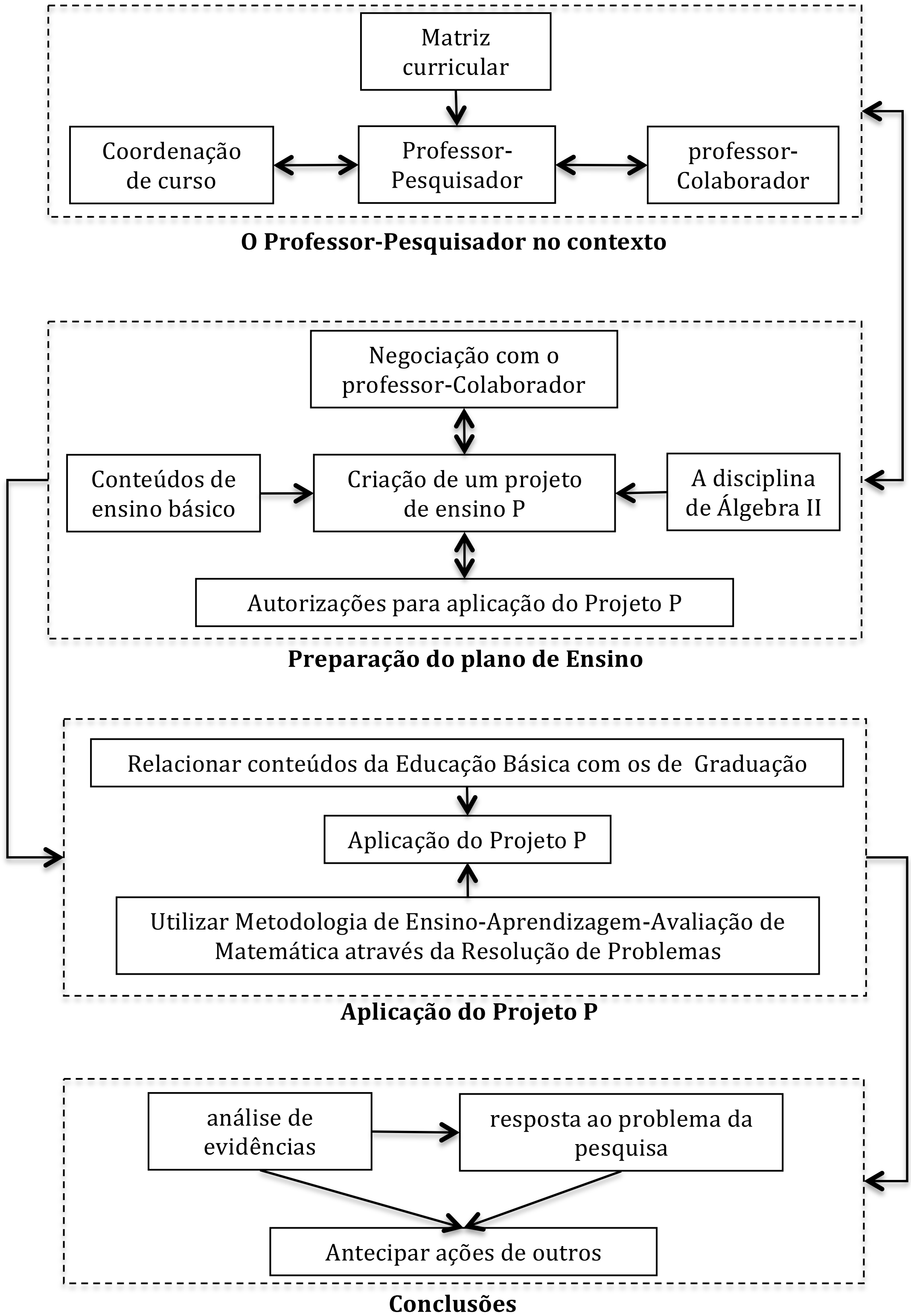
O fato de “ouvir os outros” gerou um processo de mudança na proposta inicial de nossa pesquisa. Durante esse processo, alguns elementos foram elencados e outros descartados, como, por exemplo, a escolha da disciplina a ser trabalhada. Inicialmente seria Cálculo Diferencial e Integral I, que inclusive foi proposto no projeto apresentado na aula inaugural em março de 2014[20] e mudou para AAM. Os motivos principais da escolha da Álgebra são: ela é uma disciplinas exclusiva do curso de Licenciatura ou Bacharelado em Matemática e o Pesquisador fez Mestrado na área de Álgebra. No Modelo Preliminar, propusemos uma entrevista com professores do IFG. Essa entrevista tinha como objetivo obter informações sobre o nível de conhecimento e engajamento dos alunos, do quinto período do curso de Licenciatura em Matemática, do IFG-Campus Goiânia. Porém, nosso aprofundamento sobre resolução de problemas, Capítulo 5, nos mostrou elementos convincentes de que durante a aplicação da MEAAMaRP podemos obter informações necessárias sobre o conhecimento prévio do alunos, assim, passamos a acreditar que essa entrevista não era mais relevante para nossa investigação. Pretendíamos, também, fazer uma entrevista com os alunos antes e depois da aplicação de um projeto de ensino, para observar uma possível presença de ressignificação de uma suposta prática docente desses alunos, provocada pela Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, ou seja, verificar se essa metodologia seria capaz de provocar mudanças significativas na forma como o estudante de Licenciatura em Matemática do IFG se vê como professor. Porém, após discussões com colegas e professores do curso de Pós-Graduação em Educação Matemática da UNESP-Rio Claro, passamos a acreditar que o processo de ressignificação só aconteceria

[20] A aula inaugural é um encontro anual promovido pelo Departamento de Educação Matemática da Unesp-Rio Claro. Nesse evento, todos os alunos de doutorado, que completarem um ano no programa, devem apresentar seu projeto de doutorado para apreciação.

realmente se ele provocasse uma mudança na prática do individuo. Nesse caso, ficaríamos impossibilitados de avaliar se essa ressignificação ocorreria, pois, salvo exceções, esses alunos ainda não possuíam uma prática docente. Um outro elemento que apareceu durante o estudo e a avaliação da proposta de pesquisa oferecida foi a ideia de se investigar as relações sociais provocadas pela Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. A ideia era fazer um levantamento de possíveis elementos da *comunidade de prática*, apresentados em Wenger (2000), que apareceria durante a aplicação do Plano de Ensino. No entanto, passamos a acreditar que esse não seria um momento adequado para esse estudo, pois, correríamos o risco de perder o foco da pesquisa. E, esse levantamento poderia ser deixado para ser feito em futuras pesquisas.

As ideias que surgiram, durante o estudo sobre os temas principais, relacionados à nossa proposta inicial de pesquisa e à análise detalhada do modelo preliminar, nos fez propor um novo modelo de trabalho, que denominamos Modelo Modificado. Nesse modelo propusemos como ação principal, a criação e a aplicação de um projeto de ensino, denominado Projeto P. O Modelo Modificado é dividido em quatro blocos, como mostra a Figura 4.

Figura 4 – Modelo Modificado



Fonte: Elaborada pelo autor

O primeiro bloco refere-se ao *pesquisador no contexto da pesquisa*. É preciso que o pesquisador faça contato com a instituição à qual ele pretende aplicar o projeto, conheça todos os detalhes do curso de Licenciatura, seus responsáveis e a disciplina que ele pretende trabalhar.

O segundo bloco refere-se à preparação de um Plano de Ensino. Após o contato inicial com a instituição, o Professor-Pesquisador deverá elaborar um projeto de ensino da disciplina que ele pretende trabalhar em sala de aula. Esse projeto deverá relacionar conteúdos da Educação Básica com a AAM. Para que esse projeto possa ser implementado é necessária a autorização do Coordenador do curso e do professor da disciplina. Como esse projeto não abrangerá todo o curso de Álgebra II será preciso negociar com o professor dessa disciplina detalhes como número de aulas, o papel de cada integrante, etc.

No terceiro bloco encontra-se a parte principal da nossa pesquisa. É o momento da aplicação do Plano de Ensino para, depois, fazermos a coleta de evidências. As aulas precisam estar focadas na teoria e na prática, no sentido de introduzir os conceitos de AAM e ao mesmo tempo, evidenciar a relação com os conteúdos da Educação Básica – prática do futuro professor. Nesse momento, entra fortemente a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de problemas dando todo o suporte necessário à produção de novo conhecimento.

De posse das evidências levantadas, durante a aplicação do Plano de Ensino, partimos para o quarto bloco. Agora, com todo suporte teórico adquirido no aprofundamento teórico e com as evidências ao seu alcance, entra o posicionamento do pesquisador. Nesse momento, ele já deverá ter dados suficientes para interpretá-los e responder as questões da pesquisa, fazendo, o quê, no Modelo de Romberg-Onuchic, é denominado “antecipar ações de outros”.

6.3 A Pergunta da pesquisa

O Modelo Modificado com a influência dos outros, levando-se em conta o fenômeno de interesse, nos fez propor uma pergunta norteadora para nossa pesquisa:

Quais as contribuições de um curso de Álgebra Abstrata Moderna (AAM) para a formação de professores da Educação Básica, ministrado para alunos do quinto período de Licenciatura em Matemática do IFG?

Além da pergunta norteadora, que acabamos de apresentar, durante o processo de investigação surgiu uma outra questão, não menos relevante, à nossa pesquisa.

Como, utilizando a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, podemos levar o aluno da Licenciatura em Matemática do IFG a construir conhecimentos de Álgebra Abstrata Moderna?

Acreditamos que só será possível responder a pergunta norteadora da nossa pesquisa, ou seja, mostrar quais as contribuições da AAM para a Formação de Matemática, se o aluno (futuro professor de matemática) aprender, de forma satisfatória, conteúdos dessa disciplina. Para que isso aconteça, propomos o uso da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas para a construção de tais conhecimentos. E, isso justifica a necessidade dessa segunda questão.

7 ESTRATÉGIAS E PROCEDIMENTOS

O Modelo de Romberg-Onuchic, em seu segundo bloco nos orienta a selecionar estratégias e procedimentos a fim de que possamos direcionar nossos esforços para o objetivo principal da nossa investigação que é – responder as questões da pesquisa. Essas estratégias precisam ser pensadas de forma que os procedimentos elencados por elas, quando colocados em ação, sejam capazes de produzir resultados significativos à nossa pesquisa, isto é, sejam capazes de fornecer informações suficientes para respondermos as questões propostas no decorrer da investigação. Para o modelo constituído no capítulo anterior – Modelo Modificado – devemos estabelecer uma Estratégia Geral, ou seja, “o que fazer?” e um respectivo Procedimento Geral, isto é, “como fazer?” e, em seguida, devemos colocar esse procedimento em ação.

7.1 Estratégias e Procedimentos da pesquisa

Nesta etapa devemos elaborar um plano de ação. Este plano de ação deve estar focado no Modelo Modificado e abranger todos os elementos relevantes que aparecem durante o processo de investigação. Por isso, o pesquisador precisa planejar bem as estratégias e os procedimentos, antes de colocá-los em ação para que haja êxito no seu trabalho.

Frente às questões propostas:

- **Quais as contribuições de um curso de Álgebra Abstrata Moderna (AAM) para a formação de professores da Educação Básica, ministrado para alunos do quinto período de Licenciatura em Matemática do IFG?**

- **Como, utilizando a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, podemos levar o aluno da Licenciatura em Matemática do IFG a construir conhecimentos de Álgebra Abstrata Moderna?**

Propomos um plano de ação baseado nas seguintes estratégias:

Estratégia Geral (EG)

Criar um projeto de ensino P a ser aplicado no curso de Álgebra II.

Para que a Estratégia Geral se consolide, precisarmos assumir

Estratégias Auxiliares

E_1: Consultar o Coordenador do curso de Licenciatura em Matemática do IFG – Campos Goiânia – sobre a possibilidade de aplicação do projeto de ensino P na disciplina Álgebra II, dessa instituição;

E_2 : Consultar o professor da disciplina Álgebra II sobre a possibilidade de um trabalho colaborativo, dele com o Professor-Pesquisador, na aplicação do projeto P;

E_3 : Elaborar um roteiro de atividades para a disciplina Álgebra II, que utilize a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas;

E_4 : Elaborar um Termo de Compromisso e Responsabilidade entre os alunos e o Professor-Pesquisador, visando ao trabalho em sala de aula;

E_5 : Executar o roteiro de atividades;

E_6 : Analisar resultados e tirar conclusões.

Procedimento Geral (PG)

A criação de um Projeto Ensino P a ser aplicado no curso de Álgebra II.

Para que o Procedimento Geral possa ser desenvolvido, precisamos assumir

Procedimentos Auxiliares:

P_1: Reunião com o Coordenador do curso de Licenciatura em Matemática- Campus Goiânia;

P_2: Reunião com o professor de Álgebra II;

P_3: Elaboração do roteiro de atividades para o curso de Álgebra II, utilizando a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas;

P_4: Elaboração de um Termo de Compromisso e Responsabilidade entre os alunos e o Professor-Pesquisador;

P_5: Execução do roteiro de atividades, pelos participantes do curso;

P_6: Análise dos resultados e conclusões.

7.2 Procedimentos Auxiliares em Ação

Para poder executar o procedimento geral (PG), primeiramente foi preciso executar os procedimentos auxiliares P_1, P_2, P_3 e P_4.

A seguir, descreveremos como se deu a execução desses procedimentos P_1, P_2, P_3 e P_4.

7.2.1 Reunião com o Coordenador do curso de Licenciatura em Matemática

A proposta de pesquisa que apresentamos foi elaborada com o propósito de ser realizada no IFG, instituição a que pertence o Professor-Pesquisador. A autorização para a aplicação de qualquer projeto que vise a sala de aula, nessa instituição, é de competência do Coordenador do curso. Por esse motivo, fez-se necessária uma reunião com o Coordenador do curso de Licenciatura em Matemática – campus Goiânia, para obter uma autorização para a aplicação do projeto P nessa instituição.

O Coordenador deu total apoio à aplicação desse projeto e se colocou à disposição para quaisquer assuntos pertinentes.

7.2.2 Reunião com o professor de Álgebra II

A aplicação do projeto P deverá contar com a colaboração do professor da disciplina, que designaremos por Professor-Colaborador. O Professor-Pesquisador não deverá assumir totalmente a disciplina de Álgebra II, apenas entrará em sala de aula em momentos pré-estabelecidos, assumindo, nesses momentos, o papel de professor da disciplina, porém contando com a ajuda do Professor-Colaborador.

Para obter a autorização e a colaboração do professor da disciplina, fez-se necessário duas reuniões com ele. A primeira com o objetivo de apresentar a proposta da pesquisa e pedir sua autorização e colaboração na aplicação do projeto de ensino P, em sua turma de Álgebra II. O professor de Álgebra II deu total apoio à aplicação desse projeto e colocou-se à disposição durante todo decorrer do processo. A segunda reunião teve o propósito de negociação. Nesse momento foi definido o número de aulas que o Professor-Pesquisador deveria utilizar para aplicar o projeto sem comprometer o cumprimento do conteúdo da disciplina. Ficou definido também o conteúdo a ser ministrado em todo o semestre letivo.

O curso de Álgebra II deve ser ministrado com um mínimo de 72 aulas de 45 minutos, distribuídas em dois encontros semanais de duas aulas cada, totalizando 36 encontros de 90 minutos. A ementa do curso é: *Grupos; Subgrupos; Homomorfismo e Isomorfismo de grupos; Teorema de Cayley; Classes Laterais e Teorema de Lagrange; Grupos Cíclicos; Subgrupos Normais e Grupo Quociente; Anéis, Anéis comutativos e com unidade; Subanéis; Homomorfismo e Isomorfismo de anéis; Anéis de Integridade e Corpo.*

O conteúdo programático – documento que define o conteúdo que será dado em sala de aula e a ordem em que serão introduzidos; os objetivos; a metodologia; as avaliações; e a bibliografia – deve ser elaborado pelo professor da disciplina, entregue na coordenação e apresentado aos alunos no primeiro dia de aula.

O conteúdo programático completo, elaborado pelo Professor-Colaborador, se encontra no Apêndice A e se apresenta assim:

1. Grupos Infinitos
2. Grupos Finitos
3. Subgrupos
4. Classes Laterais
5. Teorema de Lagrange
6. Homomorfismo e Isomorfismo de Grupos
7. Teorema de Cayley
8. Grupos Normais e Quocientes
9. Anéis
10. Subanéis e Ideais
11. Homomorfismo de Anéis
12. Domínio de Integridade
13. Corpos
14. Corpos Finitos

Após negociação entre o Professor-Pesquisador e o Professor-Colaborador, ficou decidido que o Professor-Pesquisador acompanhará todo o curso, porém, assumirá o papel de professor da disciplina apenas nos momentos em que será aplicado o projeto de ensino P. Nesses momentos o Professor-Pesquisador terá total autonomia sobre as aulas e isso deverá ocorrer em 16 encontros de duas aulas cada, totalizando 32 aulas.

A distribuição dos conteúdos programáticos entre Professor-Colaborador e Professor-Pesquisador ocorreu, dentro de uma escolha conveniente a cada um.

O Professor-Pesquisador, ao fazer uso da MEAAMaRP buscou trabalhar em seu projeto, a construção, pelos alunos, de conceitos importantes da Álgebra II: Grupo, Anel, Domínio de Integridade e Corpo e outros conteúdos a eles relacionados.

Embora os alunos estivessem participando da mesma disciplina, Álgebra II, eles puderam perceber a diferença na forma de trabalhar, ora a metodologia tradicional ora a MEAAMaRP.

A distribuição dos conteúdos mais conveniente a ambos foi:

1, 2, 3, 9, 12, 13 e 14 – Professor-Pesquisador;

4, 5, 6, 7, 8, 10, 11 – Professor-Colaborador;

Além disso, os professores acreditaram ser importante, também, trabalhar com a MEAAMaRP o conceito *Classes de Equivalência* para evitar grande ruptura no processo de transição entre as duas metodologias, visto que seria preciso mostrar a relação entre esse conteúdo e *Classes Laterais* para enunciar e demonstrar o *Teorema de Lagrange*.

7.2.3 Elaboração do Termo de Compromisso e Responsabilidade

O Termo de Compromisso Responsabilidade foi construído em negociação entre o Professor-Pesquisador e os alunos da turma de Álgebra II. Ele serviu para definir a relação entre professor e alunos durante todo o processo de investigação na sala em aula.

Nesse documento, o Professor-Pesquisador deve apresentar uma proposta inicial dos termos que ele considera necessários e convenientes para ambas as partes (professor e alunos) e que torne possível desenvolver as atividades de ensino e aprendizagem em sala de aula. As sugestões e modificações, que possam surgir, deverão ser analisadas e aprovadas pelo Professor-Pesquisador e pelos alunos. Após acordo firmado pela maioria, esse documento será assinado por todos os presentes. Uma cópia desse documento se encontra no Apêndice B deste trabalho.

7.2.4 Elaboração do roteiro de atividades em que o Professor-Pesquisador atuará como professor da disciplina de Álgebra II

Na aplicação do Projeto P – Procedimento Geral – não temos o propósito de fazer qualquer alteração nos conteúdos da disciplina Álgebra II, nem mesmo criticar ou propor qualquer alteração curricular. O que pretendemos é propor, na introdução de alguns conceitos, uma metodologia diferente da tradicional vigente. Metodologia essa que acreditamos ser capaz de provocar um verdadeiro processo de reificação em ideias consideradas muito abstratas, isto é, trazer essas ideias para um nível de entendimento dos alunos através de uma relação com conhecimentos que esses alunos já possuem.

Após os alunos adquirirem conhecimentos de AAM – conhecimento para a formação acadêmica – pretendemos inquirir: "o que esse conhecimento poderá provocar na formação profissional desses alunos – futuros professores da Educação Básica?". Para isso, em alguns encontros o Professor-Pesquisador trabalhará exemplos de situações que relacionam conteúdos de AAM com conteúdos da Educação Básica. Esse trabalho não tem como objetivo convencer os alunos da importância de AAM na sua formação. Pelo contrário, pretende provocar e instigar cada aluno a tomar partido e apresentar argumentos sobre necessidade, ou não, dessa disciplina na sua formação profissional.

Os problemas geradores que apresentaremos a seguir, nas atividades a serem desenvolvidas em cada encontro, foram selecionadas ou criadas de acordo com os conceitos a serem introduzidos durante as aulas.

Os encontros em que o Professor-Pesquisador não atuará como professor da disciplina ocorrerão na metodologia tradicional, respeitando a sequência das aulas sem que haja lacunas no desenvolvimento do processo de ensino dessa disciplina. Da mesma forma, os encontros que utilizarão a metodologia apresentada pelo Professor-Pesquisador deverão dar continuidade às aulas anteriores, sem provocar interrupções no processo de ensino.

A seguir, apresentaremos o projeto de ensino P e, no Capítulo 8, os resultados da implementação desse projeto.

7.3 O Projeto de Ensino (P)

Este projeto foi elaborado com atividades a serem desenvolvidas em dezesseis encontros durante a disciplina Álgebra II, do curso de Licenciatura em Matemática do IFG. Cada encontro tem previsão de duração de uma hora e trinta minutos. Durante a sua implementação, em alguns momentos, utilizaremos a

Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas – MEAAMaRP e, em outros, trabalharemos Atividades Extraclasse, importantes para fixar os conceitos introduzidos e relacionar esses conceitos com conteúdos da Educação Básica. Em dois desses encontros será trabalhada uma lista de Exercícios em que aparecem situações onde podemos utilizar a AAM no auxílio do entendimento de conteúdos da Educação Básica. Ainda, para o último encontro, está prevista uma avaliação diagnóstica. Essa avaliação abordará três temas: *A Formação do Professor de Matemática*, *Álgebra* e *Resolução de Problemas*.

Objetivo Geral: Levar os alunos do curso de Licenciatura em Matemática do IFG a construir um conhecimento satisfatório de Álgebra Abstrata Moderna e, torná-los capazes de refletir sobre as potencialidades que esse conhecimento poderá ter em sua futura prática docente.

Os Encontros

1º Encontro:

No primeiro encontro, o Professor-Pesquisador fará uma apresentação geral do trabalho a ser desenvolvido durante o semestre letivo, bem como o papel de cada um dos integrantes nesse processo. Ainda, discorrerá sobre Resolução de Problemas no contexto didático-pedagógico; apresentará a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, mostrando suas potencialidades. Em seguida, será apresentado aos alunos o Termo de Compromisso e Responsabilidade, para ser discutido e aprovado, com as devidas modificações, caso as haja. Também, nesse encontro, será trabalhado o primeiro problema (Atividade 1) para introduzir o conceito de *Operação Binária* e mostrar, na prática, como será trabalhada a metodologia proposta.

Objetivos do Encontro

- Apresentar a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas de forma que os alunos possam compreender como serão trabalhadas as aulas em encontros posteriores;
- Motivar os alunos a uma nova forma de estudar, instigando o raciocínio e as diferentes formas de pensar;
- Incentivar o trabalho em grupo de forma colaborativa e cooperativa;
- Introduzir o conceito de Operação Binária;

Atividade 1

Dois amigos, A e B, conversam sobre seus filhos. A dizia a B que tinha 3 filhas, quando B perguntou a idade das mesmas. Sabendo A que B gostava de problemas de aritmética, respondeu da seguinte forma: "O produto das idades das minhas filhas é 36. A soma de suas idades é o número daquela casa ali em frente". Depois de algum tempo, B retrucou: "Mas isso não é suficiente para que eu possa resolver o problema". A pensou um pouco e respondeu: "Tem razão. Esqueci de dizer que a mais velha toca piano". Com base nesses dados, B resolveu o problema. Pergunta-se: qual a idade das filhas de A?

Fonte: Internet: http://www.ebah.com.br/content/ABAAAAjIcAH/raciocinio-logico?part=6

Conteúdos Específicos

Operação de Adição e Multiplicação de Números Naturais.

Conceitos Novos a serem Introduzidos:

Operações Binárias sobre conjuntos infinitos.

Possível forma esperada da resolução do problema:

Como se trata de três números inteiros positivos cujo produto dá 36, temos uma quantidade finita de possibilidades que podem ser expressas sem muita dificuldade. Inicialmente vamos determinar todos as ternas de números inteiros e positivos, cujo produto dá 36. Para facilitar, começaremos fixando os dois primeiros números em 1 e 1 e, consequentemente, a única possibilidade para o terceiro é 36. Mantemos o primeiro número ainda fixo em 1, e mudamos o segundo para 2 e, consequentemente, o terceiro será 18. Prosseguiremos dessa forma até esgotar todas as possibilidades, como mostrado na Tabela 10:

Tabela 10 – Todos os ternos de números cujo produto é 36

Idade da 1ª filha	Idade da 2ª filha	Idade da 3ª filha	Soma das idades
1	1	36	38
1	2	18	21
1	3	12	16
1	4	9	14
1	6	6	**13**
2	2	9	**13**
2	3	6	11
3	3	4	10

Fonte: Elaborada pelo autor

Observando os valores da Tabela 10 podemos concluir que a única forma do amigo não saber a resposta, conhecendo o número da casa em frente, seria se a soma fosse 13, pois, existem duas possibilidades para esse caso: *1, 6 e 6* (linha 5) e *2, 2* e *9* (linha 6). A informação: "a mais velha toca piano" elimina a primeira possibilidade, pois, com idades 1, 6 e 6 não temos "**a** mais velha" e sim, " **as** mais velhas". Portanto, a idade das filhas deve ser: **2, 2** e **9.**

Plenária

Cada grupo deverá colocar sua resolução na lousa e apresentar justificativas para a sua solução. Em seguida, será feita a plenária – discussão do problema e do método de resolução utilizado pelos grupos. O Professor-Pesquisador, juntamente com o Professor-Colaborador, deverá levar os alunos a perceber que os conteúdos usados na resolução - *multiplicação* e *adição* – possuem uma importante propriedade – *fechamento.* Propriedade esta que caracteriza as operações binárias nas Estruturas Algébricas.

Formalização

Como o objetivo específico do problema é relembrar e/ou fixar o conceito de operação, estudado em Álgebra I, na formalização constará apenas a definição de Operação Binária.

Definição: Seja E um conjunto não vazio. Denominamos operação binária em E qualquer função definida de $E \times E \to E$ *. Ou seja, qualquer regra que associe cada par (x, y) de* $E \times E$ *a um único elemento de* E *.*

2º Encontro

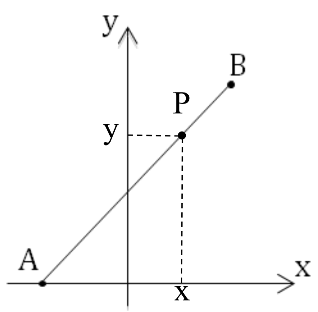
O professor-Pesquisador iniciará esse encontro com uma apresentação sobre Álgebra. Nessa apresentação o professor deverá comentar quando o termo "Álgebra" começou a ser usado, qual seu significado nessa época, bem como as mudanças que a Álgebra teve, desde quando ela era pensada apenas como um conjunto de métodos para resolver equações até os dias atuais, dando ênfase, principalmente, ao surgimento das Álgebras Modernas. Em seguida, será proposta a Atividade 2 a ser trabalhada com MEAAMaRP.

Objetivos do Encontro:

- Levar os alunos a conhecer um pouco da história da Álgebra, as diversas formas com que ela se apresenta em diversos contextos, desde o Ensino Básico até o Superior;
- Introduzir o conceito de Grupo;

Atividade 2

Uma partícula percorre o segmento de reta AB, saindo do ponto A em direção a B. Quando a partícula se encontra no ponto P=(x,y), o valor x (abscissa) representa a posição horizontal dessa partícula, e y (ordenada) a altura dela, em relação a x.



Sendo A=(-5,0) e B=(7,12), determine o deslocamento horizontal dessa partícula, quando sua altura for o dobro da sua posição horizontal.

Fonte: Elaborada pelo autor

Conteúdos Específicos

Segmento da reta, sistema de coordenadas, equação da reta;

Conceitos Novos a serem Introduzidos

Propriedades de uma operação – Elementos neutro, inverso aditivo e inverso multiplicativo; associativa – e a construção do conceito de grupo.

Possíveis formas esperadas de resolução do problema

1) Usando equação da reta:

Sendo A = (-5, 0) e B = (7, 12), o coeficiente angular m da reta que passa por estes pontos são: $m = \frac{12-0}{7-(-5)} = \frac{12}{12} = 1$. Logo, a equação do segmento de reta que passa pelos pontos A e B é: $y - 0 = 1 \cdot (x-5) \Rightarrow y = x-5,\ -5 \le x \le 7$.

Considerando a altura igual ao dobro do deslocamento horizontal, temos: $y = 2x$. Substituindo essa equação na equação do segmento de reta, temos:

$$2x = x+5 \Rightarrow -x+2x = -x+(x+5) \Rightarrow x = (-x+x)+5 \Rightarrow x = 0+5$$
$$\Rightarrow x = 5.$$

Logo, o deslocamento horizontal da partícula é a variação de x: de -5 a 0 mais de 0 a 5, isto é, 10.

2) Usando semelhança de triângulos

Seja P = (x, 2x) a posição da partícula, quando a sua altura valer o dobro do seu deslocamento. Considerando Q = (x, 0) e C = (7, 0), os triângulos ABC e APQ são semelhantes. Logo,

$$\frac{12}{2x} = \frac{12}{x+5} \Rightarrow \frac{1}{2x} = \frac{1}{x+5} \Rightarrow$$
$$x+5 = 2x \Rightarrow -x+(x+5) = -x+2x \Rightarrow$$
$$(-x+x)+5 = x \Rightarrow 0+5 = x \Rightarrow$$
$$x = 5.$$

Portanto, o deslocamento horizontal da partícula vale $5+x$, isto é, 10.

3) Usando distância entre dois pontos

Seja P=(x, 2x) a posição da partícula quando sua altura vale o dobro do seu deslocamento horizontal, então sendo A = (-5, 0), B = (7, 12) e P pertencente a reta determinada por A e B

$$d(A,P)+d(P,B)=d(A,P) \Rightarrow$$

$$\sqrt{(x+5)^2+(2x-0)^2}+\sqrt{(7-x)^2+(12-2x)^2}=\sqrt{(7+5)^2+(12-0)^2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x+5)^2+4x^2}+\sqrt{(7-x)^2+(12-2x)^2}=\sqrt{12^2+12^2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{(7-x)^2+(12-2x)^2}=12\sqrt{2}-\sqrt{(x+5)^2+4x^2}$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{(7-x)^2+(12-2x)^2}\right)^2=\left(12\sqrt{2}-\sqrt{(x+5)^2+4x^2}\right)^2$$

$$\Rightarrow 49-14x+x^2+144-48x+4x^2=288-24\sqrt{2}\sqrt{(x+5)^2+4x^2}+x^2+10x+25+4x^2$$

$$\Rightarrow 24\sqrt{2}\sqrt{(x+5)^2+4x^2}=120+72x \Rightarrow \sqrt{2}\sqrt{(x+5)^2+4x^2}=5+3x$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{2}\sqrt{(x+5)^2+4x^2}\right)^2=(5+3x)^2 \Rightarrow 25+30x+9x^2=2\left[(x+5)^2+4x^2\right]$$

$$\Rightarrow 25+30x+9x^2=10x^2+20x+50 \Rightarrow x^2-10x+25=0 \Rightarrow (x-5)^2=0 \Rightarrow x=5\,.$$

Portanto, o deslocamento da partícula vale $|-5|+5=10$.

<u>Plenária</u>

Após cada grupo expor sua resolução, será feita uma discussão do problema e das diferentes formas de resolução. Algumas perguntas serão pertinentes nesse momento com o objetivo de se atentar para as propriedades das operações quando se quer resolver equações. Perguntas como: “por que podemos passar um número para o outro lado com operação inversa?” , “por que podemos escolher quais valores somar primeiro?”, “O que o zero representa para a operação de adição e o 1 para a multiplicação”. Essa discussão deve promover o entendimento das propriedades das operações, destacando-se principalmente os *elementos neutro*, *inversos* e a *associativa.*

<u>Formalização</u>

Neste momento introduziremos a definição formal de grupo.

Definição: Seja G *um conjunto não vazio, e* $*$ *uma operação binária em* G*, isto é, uma regra que associa cada elemento de* $G \times G$ *a um único elemento de* G*. Dizemos que* $(G,*)$ *(*G *juntamente com a operação) é um grupo se* $*$ *possuir as seguintes propriedades:*

i) $(a*b)*c = a*(b*c), \forall\, a,b,c \in G$ *(associativa)*

ii) $\exists\, e \in G$ *tal que* $e*a = a*e = a,\ \forall\, a \in G$ *(existência do neutro)*

iii) $\forall a \in G$ *existe* $a' \in G$ *tal que* $a*a' = a'*a = e$ *(existência de inverso)*

Atividade Extraclasse 1

Faça uma lista, com o maior número possível, de cada conteúdo que você já estudou em toda sua vida acadêmica (primeiro e segundo graus e superior) que você acredita ser uma Estrutura de Grupo.

3º Encontro

O Professor-Pesquisador iniciará o encontro pedindo para que cada aluno coloque a solução, da sua atividade extraclasse 1, na lousa. Em seguida, deverá ser feita uma discussão sobre cada solução apresentada, analisando e concluindo se ela está, ou não, correta. Depois, o professor irá usar uma dinâmica de modo a levar o aluno a perceber a importância da operação para que se tenha uma Estruturas de Grupo.

Objetivos do Encontro

- Fixar o conceito de Grupo, apresentado no encontro passado;
- Levar o aluno a perceber a presença da estrutura de Grupo em conteúdos da Educação Básica;
- Fazer com que o aluno aprenda a verificar se uma dada estrutura é um Grupo;

4º Encontro

Nesse encontro será trabalhada a Atividade 3 com a MEAAMaRP.

Objetivos do Encontro:

- Fazer com que os alunos percebam que é possível definir operações em conjuntos finitos;
- Introduzir os conceitos de Grupos Finitos, Tábuas de Operações e Ordem de um Grupo;

Atividade 3

Joãozinho sonhou que havia um grupo de seres estranhos se comunicando em um idioma que ele nunca tinha ouvido. Sempre que um dos seres pronunciava duas palavras distintas, ou não, de um grupo de palavras, que ele identificou como: pok, simb, climb, tend e memb, os outros respondiam, em coro, uma palavra desse grupo. Ele observou que as respostam não eram aleatórias, isto é, se um par de palavras se repetisse, a resposta também se repetia. De posse de um pedaço de papel e uma caneta, ele construiu uma tabela onde se pode identificar a resposta para cada par de palavras, como podemos ver a seguir:

	pok	**simb**	**climb**	**tend**	**memb**
pok	*pok*	*simb*	*climb*	*tend*	*memb*
simb	*simb*	*climb*	*tend*	*memb*	*pok*
climb	*climb*	*tend*	*memb*	*pok*	*simb*
tend	*tend*	*memb*	*pok*	*simb*	*climb*
memb	*memb*	*pok*	*simb*	*climb*	*tend*

Por exemplo, para saber a resposta dada ao par (tend, climb) basta olhar, na tabela, a palavra que se encontra na mesma linha (horizontal) da palavra tend e mesma coluna (vertical) da palavra climb. Logo, podemos escrever (tend, climb) = pok.

Observando a tabela, responda:

a) Para cada par de palavras (distintas ou não), retiradas das cinco palavras citadas, tem-se uma resposta dentre as cinco palavras?

b) Qual a resposta para ((tend, climb),simb) ? e para (tend, (climb, simb))?

c) Existe alguma palavra que quando está em algum par, a resposta é sempre a outra palavra desse par?

d) Para cada palavra dada, existe uma outra palavra que, ao formar par com ela, tem-se como resposta a palavra pok? se existir, determine essa outra palavra para cada uma das cinco palavras.

e) Qual é a palavra x, tal que ((x, climb), (x, tend)) = memb?

Fonte: Elaborada pelo autor

Conteúdos Específicos:

Operações definidas em conjuntos finitos e suas propriedades.

Conceitos Novos a serem Introduzidos:

Grupos Finitos, Tábua de Operação de Grupo e Ordem de um Grupo.

Possível forma esperada de resolução do problema:

a) Sim. O fato da tabela estar completamente preenchida nos garante que qualquer par de palavras está associada a uma palavra;

b) $((\text{tend}, c\text{limb}), \text{simb}) = (\text{pok}, \text{simb}) = \text{simb}$ e $(\text{tend}, (c\text{limb}, \text{simb})) = (\text{tend}, \text{tend}) = \text{simb};$

c) Sim. a palavra pok. De fato, $(x, \text{pok}) = x$, qualquer que seja a palavra x. Analogamente, $(pok, x) = x$, para qualquer palavra x dentre as palavras citadas.

d) Sim.

para pok temos a própria *pok*. De fato, *(pok, pok) = pok* ;

para *simb* temos *memb*. De fato, *(simb, memb) = pok* ;

para *climb* temos *tend*. De fato, *(climb, tend) = pok* ;

para *tend* temos *climb*. De fato, *(tend, climb) = pok* ;

para *memb* temos *simb*. De fato, *(memb, simb) = pok* ;

e) (*(x, climb), (x, tend)*) = *memb.* Observe que todas os pares cujo resultado dá *memb* são:

$$(pok, memb) = memb$$
$$(simb, tend) = memb$$
$$(climb, climb) = memb$$
$$(tend, simb) = memb$$
$$(memb, pok) = memb.$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
&(1) \quad (x, climb) = pok \;\; e \;\; (x, tend) = memb \; ou \\
&(2) \quad (x, climb) = simb \;\; e \;\; (x, tend) = tend \; ou \\
&(3) \quad (x, climb) = climb \;\; e \;\; (x, tend) = climb \; ou \\
&(4) \quad (x, climb) = tend \;\; e \;\; (x, tend) = simb \; ou \\
&(5) \quad (x, climb) = memb \;\; e \;\; (x, tend) = pok
\end{aligned}
$$

Em (1), x deve ser *tend e simb* ao mesmo tempo. Logo, não existe x.
Em (2), x deve ser *memb e pok* ao mesmo tempo. Logo, não existe x.
Em (3), x deve ser *pok e memb* ao mesmo tempo. Logo, não existe x.
Em (4), x deve ser *simb e tend* ao mesmo tempo. Logo, não existe x.
Em (5), x deve ser *climb nos dois casos.* Logo, a única possibilidade para *x* é $x = climb$.

Plenária:

Após a exposição das possíveis soluções para o problema, deve ser feita uma discussão, tendo como foco as operações definidas em um conjunto finito e, com isso, perceber que o conjunto de palavras dadas no problema, juntamente com a operação definida pela tabela, forma um grupo.

Formalização:

Seja $(G,*)$ um grupo. Se *G* é um conjunto finito, dizemos que $(G,*)$ é um grupo finito e a quantidade de elementos de *G* é denominada ordem de *G* e denotada por $\circ G$ ou $|G|$.

No final desse encontro será deixada a seguinte atividade extraclasse:

Atividade Extraclasse 2

1) Considere o conjunto $Z_6 = \{0,1,2,3,4,5\}$ e defina, sobre Z_6, $\overset{6}{+}$ e $\overset{6}{\bullet}$ como:

$$a \overset{6}{+} b = \textit{resto da divisão de } a+b \textit{ por } 6 \text{ e}$$

$$a \overset{6}{\bullet} b = \textit{resto da divisão de } a \cdot b \textit{ por } 6 \text{ ,}$$

onde $+$ e $\cdot$ são as operações usuais de adição e multiplicação de números inteiros respectivamente. Baseado nessas informações, mostre que:

a) $\overset{6}{+}$ e $\overset{6}{\bullet}$ são operações binárias em Z_6 e construa suas tábuas de operações;

b) $(Z_6, \overset{6}{+})$ é um grupo;

c) $(Z_6 - \{0\}, \overset{6}{\bullet})$ é um grupo;

2) Pesquise e/ou construa outros exemplos de grupos finitos;

Fonte: Elaborado pelo autor

5º Encontro

Neste encontro será trabalhada a Atividade Extraclasse 2. Os alunos deverão expor suas resoluções para a questão 1 e, em seguida, deverá ser feita uma discussão sobre as soluções apresentadas. Na questão 2, primeiramente os alunos deverão mostrar os exemplos de Grupos que conseguiram encontrar e, após discussão sobre esses exemplos, os professores, Pesquisador e Colaborador, deverão apresentar novos exemplos.

Objetivos do Encontro

- Fixar o conceito de grupos finitos;
- Apresentar aos alunos os conjuntos Z_n e as operações de adição e multiplicação usuais definidas neles;

6º Encontro

Neste encontro será trabalhada a Atividade 4. Durante sua resolução deverá ser observado que a adição é uma operação binária no conjunto dos números pares e não o é no conjunto de números ímpares. Fazendo uso dessa observação dever-se-á concluir que o conjunto de números pares é um Grupo contido no Grupo dos números inteiros e, com isso, será introduzido o conceito de *subgrupo.*

Objetivo do Encontro:

Introduzir o conceito de Subgrupo.

Atividade 4

João comprou um livro e reparou que ele tinha 200 páginas. Seu irmão mais novo arrancou ao acaso 25 folhas e somou os números das 50 páginas. Explique porque o resultado dessa soma não pode ser igual a 1998. Atenção: Cada folha tem duas páginas. A primeira folha tem as páginas 1 e 2, a segunda folha tem as páginas 3 e 4, e assim por diante.

Fonte: Revista Eureka N^o 4 – 1999, página 14.

Conteúdos Específicos:

Números inteiros, paridade e suas propriedades.

Conceitos Novos a serem introduzidos:

Subgrupo.

Possíveis formas esperadas de resolução do problema:

1) Primeiro raciocínio:

Cada folha contém duas páginas, cujas páginas são números consecutivos. Assim, se uma página é par a outra página, da mesma folha, é ímpar. Logo, a soma das páginas da mesma folha é ímpar. De fato, a soma de um número par com um número ímpar é ímpar. Assim, a soma das páginas de duas folhas é par, pois, a soma de dois ímpares é par. Logo, a soma das páginas de 24 folhas é par. Com efeito, a soma de números pares é sempre par. Acrescentando à soma das páginas das 24 folhas, que é um número par, a soma das páginas da última folha, que é um número ímpar, obtemos um número ímpar, pois, soma de par com ímpar dá ímpar. Portanto, a soma de todas as páginas não pode ser 1998, pois 1998 é par.

2) Segundo raciocínio

Observe que, cada folha tem uma página par e uma ímpar. Logo, em 25 folhas, teremos 25 páginas pares e 25 páginas ímpares. Somando as 25 páginas pares obteremos um número par. De fato, a soma de dois números pares é par. Somando as 25 páginas ímpares teremos um número ímpar. Pois, a soma de uma quantidade ímpar de números ímpares é ímpar. Logo, adicionando soma das páginas pares (número par) com a soma das ímpares (número ímpar) teremos um número ímpar. Portanto, o resultado não pode ser 1998, nem qualquer outro número par.

3) Prova formal

Em cada folha, teremos sempre um número par e um número ímpar, sendo um total 25 pares e 25 ímpares. Escrevemos os números pares e ímpares, respectivamente, por: $2n_1, 2n_2, ..., 2n_{25}$ e $2n_1+1, 2n_2+1, ..., 2n_{25}+1$ tal que $n_1, n_2, ..., n_{25} \in \mathbb{Z}$.

A soma dos números de todas as páginas é:

$$2n_1 + 2n_2 + ... + 2n_{25} + (2n_1+1) + (2n_2+1) + ... + (2n_{25}+1) =$$

$$2n_1 + 2n_2 + ... + 2n_{25} + 2n_1 + 2n_2 + ... + 2n_{25} + 25 =$$

$$2n_1 + 2n_2 + ... + 2n_{25} + 2n_1 + 2n_2 + ... + 2n_{25} + 2 \cdot 12 + 1 =$$

$$2(n_1 + n_2 + ... + n_{25} + n_1 + n_2 + ... + n_{25} + 12) + 1 = 2m+1 \text{, onde:}$$

$$m = n_1 + n_2 + ... + n_{25} + n_1 + n_2 + ... + n_{25} + 12 \in \mathbb{Z} .$$

Logo, a soma é $2m+1$, ou seja, um número ímpar. Portanto, a soma de todas as páginas não pode ser 1998.

Plenária:

Na Plenária, após a exposição das soluções de cada grupo, será promovida uma discussão, sobre a adição usual dos Inteiros[21] quando ela se restringe aos pares e ímpares, para que os alunos percebam que o conjunto dos números pares é um Grupo, dentro do Grupo dos Inteiros e, com isso, introduzir o conceito de Subgrupo.

[21] Quando escrevemos os (nos) Inteiros, Naturais, Pares, etc. (primeira letra maiúscula) estamos nos referindo a: conjunto dos números inteiros, conjunto dos números naturais, conjunto dos números, pares, etc.

<u>**Formalização:**</u>

Na formalização será apresentada a definição de subgrupo e um teorema que apresentamos a seguir:

Definição: Seja (G,) um Grupo e H um subconjunto, não vazio, de G. Se (H,*), H com a mesma operação de G, for um Grupo, dizemos que H é um Subgrupo de G e denotamos* $H \leq G$.

Teorema 1: *Seja (G, *) um Grupo e H um subconjunto, não vazio, de G. Para que H seja um Subgrupo de G é necessário e suficiente que as duas condições a seguir, sejam satisfeitas:*

i) $a, b \in H \Rightarrow a * b \in H$

ii) $a \in H \Rightarrow a' \in H$ *onde* a' *é o simétrico de* a.

Atividade Extraclasse 3

1. Faça uma lista de todos os subgrupos dos grupos listados na atividade extraclasse do segundo encontro.
2. Mostre que se $H \leq G$ então o elemento neutro de *H* é o mesmo do de *G.*
3. O item ii) do Teorema 1, pode ser substituído por: "$e \in H$ *, onde* e *é o elemento neutro de G* " ? justifique.
4. Mostre que as duas condições i) e ii) do Teorema 1, podem ser trocadas pela condição única: "$a, b \in H \Rightarrow a * b' \in H$"

Fonte: Elaborada pelo autor

7º Encontro

Neste encontro será trabalhada a Atividade Extraclasse 3. Essa atividade deverá levar os alunos, novamente, a uma reflexão entre a relação da AAM com o Ensino Básico. Será retomada a discussão feita no segundo encontro, porém, dessa vez, para Subgrupo, evidenciando a presença dessa Estrutura nos Grupos já apresentados e discutidos.

Objetivos do Encontro

- Revisar e fixar o conceito de grupo;
- Fixar o conceito de Subgrupo;
- Evidenciar os Subgrupos dos Grupos elencados da Educação Básica;
- Utilizar Teoremas para verificar se uma estrutura é um subgrupo;

8º Encontro

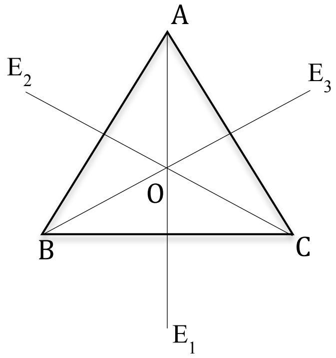
Neste encontro será trabalhada a Atividade 5. Essa atividade apresenta-se como um exemplo de um Grupo não-abeliano. Os professores, Pesquisador e Colaborador, visando evidenciar, em sala de aula, a existência de Grupos não-abelianos, para que os alunos não passem a considerar a propriedade comutativa inerente a todas as operações existentes, originando uma deficiência na sua formação, apresentam essa atividade com o intuito de evitar essa deficiência.

Objetivo do Encontro:

Construir um exemplo de grupo não-comutativo e estudar algumas características desses Grupos. Pretendemos também motivar os alunos a pesquisarem e estudarem Grupos não-abelianos clássicos.

Atividade 5

Considere um triângulo equilátero de vértices A, B e C. Chame E_1, E_2 e E_3 as retas que passam pelas medianas desse triângulo, como é ilustrado pela figura a seguir. Descreva todos os movimentos, no plano e no espaço, que se pode aplicar a esse triângulo sem alterar a sua posição, isto é, desconsiderando A, B e C e as retas E_1, E_2 e E_3, visualmente o triângulo parece então inalterado.



Fonte: Adaptado de (GARCIA, A; LEQUAIN, 2002, p. 124)

<u>Conteúdos Específicos:</u>

Triângulo equilátero e suas propriedades; rotações planas e espaciais.

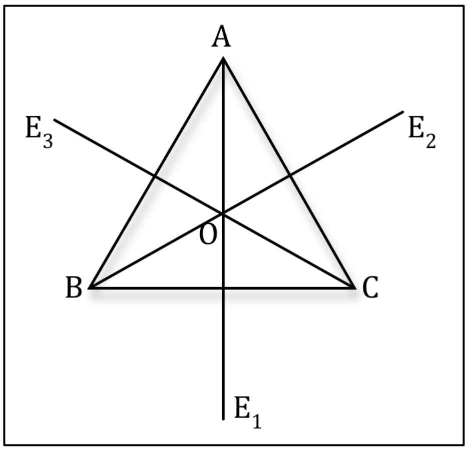
<u>Conceitos Novos a serem Introduzidos:</u>

Grupo não-abeliano;

<u>Possível forma esperada de resolução do problema:</u>

Para facilitar a visualização chamaremos de A, B, C os vértices do triângulo e chamaremos de E_1, E_2 e E_3 as retas do espaço que passam pela mediana do triângulo, como mostra a Figura 5:

Figura 5 – Triângulo equilátero com as suas medianas



Fonte: Elaborada pelo autor

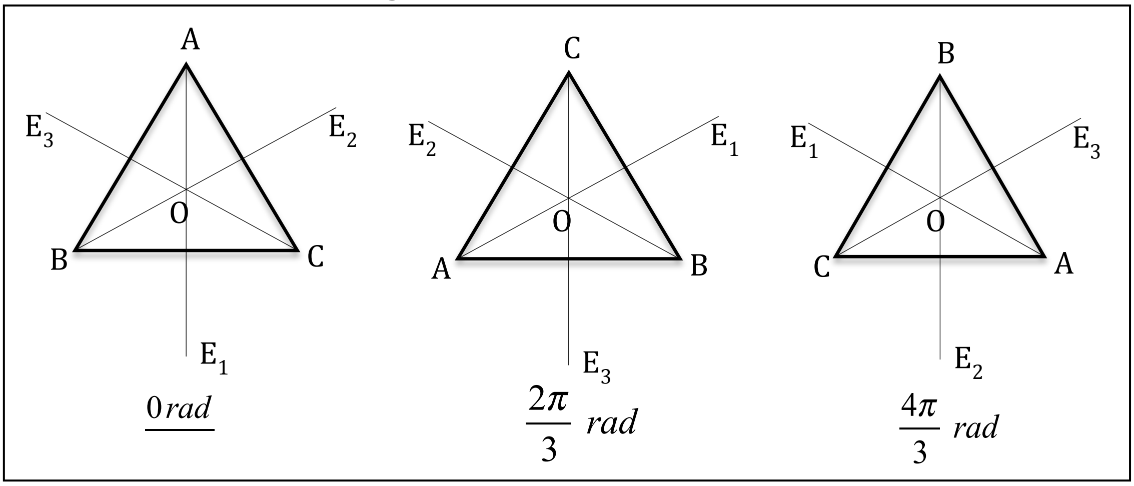
Observando as Figuras 6 e 7, a seguir, podemos ver que os possíveis movimentos que preservam o triângulo são as rotações no plano em torno do ponto O e as rotações no espaço em torno de E_1, E_2, E_3.

<u>Rotações no plano</u>:

As rotações no plano que preservam o triângulo são: $0\ rad$, $\frac{2\pi}{3}\ rad$, $\frac{4\pi}{3}\ rad$.

Veja a ilustração, a seguir:

Figura 6 – Rotações no plano

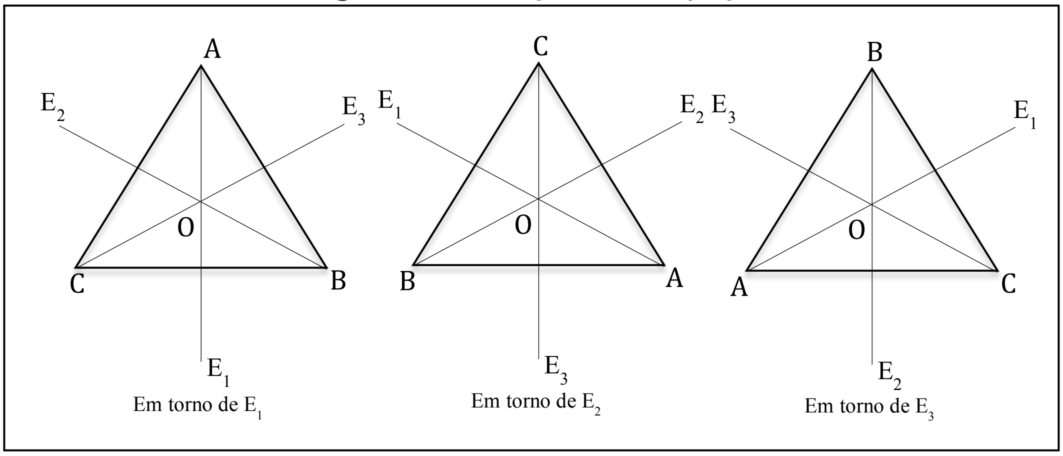


Fonte: Elaborada pelo autor

Rotações no espaço:

As rotações no espaço em torno de E_1, E_2, E_3 são todas de $\pi\, rad$.

Figura 7 – Rotações no espaço



Fonte: Elaborada pelo autor

Plenária

Após a apresentação da solução do problema, por cada grupo de alunos, deverá ser feita uma discussão observando-se a possibilidade de construir um conjunto formado por todos os movimentos de rotação, no plano e no espaço, descritos anteriormente, e de se definir uma operação como sendo a composição de dois desses movimentos. Em seguida, os professores deverão levar os alunos a perceber que esse conjunto com essa operação formam uma estrutura de Grupo, porém, essa operação não é comutativa.

Formalização:

Sejam $I, R_{\frac{2\pi}{3}}, R_{\frac{4\pi}{3}}$ e $R_1, R_2 \; e \; R_3$ as rotações do triângulo ABC no plano e no espaço, respectivamente. Defina $S_\Delta = \{I, R_{\frac{2\pi}{3}}, R_{\frac{4\pi}{3}}, R_1, R_2, R_3\}$ e $\circ$ como sendo a composição de cada par de elementos de S_Δ. $(S_\Delta, \circ)$ é um Grupo e esse Grupo é não-abeliano, ou seja, existe pelo menos um par $(a,b) \in S_\Delta$ tal que $a \circ b \neq b \circ a$.

Ao término do encontro será deixada a seguinte Atividade Extraclasse:

Atividade Extraclasse 4

1) Determine todos os subgrupos de $(S_\Delta, \circ)$ e verifique se eles são abelianos;
2) Pesquise exemplos de subgrupos não-abelianos;

Fonte: Elaborado pelo autor

9º Encontro

Neste encontro será trabalhada a Atividade 6. Durante sua resolução deverá ser introduzido o conceito de *Classes de Equivalência*. Serão também introduzidos resultados importantes sobre Classes de Equivalência, sua relação com as Classes Laterais e o conceito de Relação de Equivalência.

Objetivo do encontro:

Introduzir os conceitos de Classes de Equivalência, Relação de Equivalência e observar a ligação desses conceitos com conteúdos da Educação Básica.

Atividade 6

Um programador de computadores decidiu elaborar um jogo. Nesse jogo, um de seus objetos se encontrará fixado na origem de um sistema de coordenadas cartesianas do plano, e esse objeto deverá apontar na direção de um ponto D sempre que o usuário der um dado comando. O ponto para o qual esse objeto será apontado é calculado por $D(n)=(0,-1)^n$, onde:

$$D(n)=(0,-1)^n=\begin{cases}(1,0),\ se\ n=0\\(0,-1)\cdot(0,-1)^{n-1},\ se\ n\geq 1\\-(0,-1)^{-n},\ se\ n<0\end{cases}$$

sendo n um número inteiro determinado pela ação do usuário e, o produto "$\cdot$" é definido por $(a,b)\cdot(c,d)=(ac-bd,ad+bc)$ e $-(a,b)=(-a,-b)$, para $a,b,c,d\in\mathbb{Z}$.

De acordo com essas informações:

a) Determine o ponto D para $n=0,1,2,3,4$ e o represente geometricamente;

b) Determine o ponto $D(1687)$;

c) Responda: “para quantas direções distintas esse objeto do jogo poderá ser apontado?”;

d) Separe, em conjuntos distintos, os valores de n cujo objeto aponte para a mesma direção;

Fonte: Elaborado pelo autor

<u>Conteúdos Específicos:</u>

Adição e multiplicação de números inteiros, divisão inteira, par ordenado do plano e sistema de coordenadas cartesianas no plano.

<u>Conceitos Novos a serem Introduzidos:</u>

Classe de Equivalência e Relação de Equivalência.

<u>Possíveis formas esperadas de resolução do problema:</u>

a) Para $n=0\Rightarrow D(0)=(0,-1)^0=(1,0)$

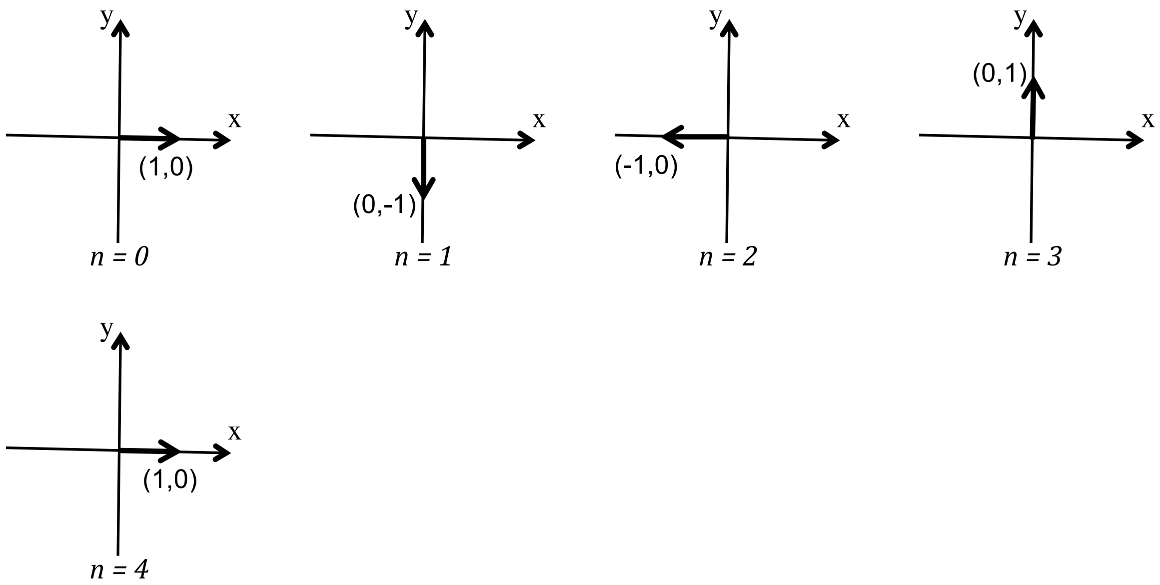
Para $n = 1 \Rightarrow D(1) = (0,-1)^1 = (0,-1)\cdot(0,-1)^0 = (0,-1)\cdot(1,0) = (0,-1)$

Para $n = 2 \Rightarrow D(2) = (0,-1)^2 = (0,-1)\cdot(0,-1)^1 = (0,-1)\cdot(0,-1) = (-1,0)$

Para $n = 3 \Rightarrow D(3) = (0,-1)^3 = (0,-1)\cdot(0,-1)^2 = (0,-1)\cdot(-1,0) = (0,1)$

Para $n = 4 \Rightarrow D(4) = (0,-1)^4 = (0,-1)\cdot(0,-1)^3 = (0,-1)\cdot(0,1) = (1,0)$

Representação geométrica:



b) Pelo item a) percebemos que D(0) = D(4). É fácil perceber também que essa igualdade acontece para todos os múltiplos de 4. Ou seja, $D(0) = D(4) = D(8) = ... = D(4n),\ \forall n \in \mathbb{Z}$. Como o maior múltiplo de 4 menor que 1687 vale 1684, temos:

$$D(1684) = (1,0) \Rightarrow D(1685) = (0,-1)^{1685} = (0,-1)\cdot(0,-1)^{1684} = (0,-1)\cdot(1,0) = (0,-1)$$

$$\Rightarrow D(1686) = (0,-1)^{1686} = (0,-1)\cdot(0,-1)^{1685} = (0,-1)\cdot(0,-1) = (-1,0)\ .$$

Logo, $D(1687) = (0,-1)^{1687} = (0,-1)\cdot(0,-1)^{1686} = (0,-1)\cdot(-1,0) = (0,1)$

c) Pelos itens a) e b) podemos concluir que existem apenas 4 possibilidades distintas para D. Ou seja, 4 direções possíveis.

d) Observe que:

$$D(0) = D(4) = D(8) = ... = D(4k),\ \forall k \in \mathbb{Z}\ .$$

$$D(1) = D(5) = D(9) = ... = D(4k+1),\ \forall k \in \mathbb{Z}$$

$D(2) = D(6) = D(10) = ... = D(4k+2),\ \forall k \in \mathbb{Z}$

$D(3) = D(7) = D(11) = ... = D(4k+3),\ \forall k \in \mathbb{Z}$.

Portanto, os inteiros podem ser divididos nas seguintes classes:

direção $(1,0)$ $\forall n \in \{0,4,8,...\} = \{4k \mid k \in \mathbb{Z}\}$

direção $(0,-1)$ $\forall n \in \{1,5,9,...\} = \{4k+1 \mid k \in \mathbb{Z}\}$

direção $(-1,0)$ $\forall n \in \{2,6,10,...\} = \{4k+2 \mid k \in \mathbb{Z}\}$

direção $(0,1)$ $\forall n \in \{3,7,11,...\} = \{4k+3 \mid k \in \mathbb{Z}\}$

Plenária:

Durante a apresentação das soluções, por cada grupo, deverá ser discutido cada item do problema, dando uma atenção especial ao item d), pois, a solução desse item é uma divisão do Conjunto dos Números Inteiros em Classes de Equivalência. Assim, os alunos poderão ver como se constitui uma classe de equivalência, mesmo antes dela ser definida formalmente.

Formalização:

Definição 1: Seja R uma relação definida em um conjunto E. Dizemos que R é uma Relação de Equivalência se as três condições a seguir forem satisfeitas:

i) $(a,a) \in R,\ \forall\ a \in R$ *(reflexiva)*

ii) $(a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \in R,\ \forall\ a,b \in R$ *(simétrica)*

iii) $(a,b) \in R\ e\ (b,c) \in R \Rightarrow (a,c) \in R,\ \forall\ a,b,c \in R$ *(transitiva)*

Obs.: uma Relação de Equivalência, em geral, é denotada por ~ e usualmente usa-se $a \sim b$ *ao invés de* $(a,a) \in \sim$.

Definição 2: Seja E um conjunto não vazio e ~ uma Relação de Equivalência em E. Denominamos Classe de Equivalência de $x \in E$ ao conjunto $\overline{x} = \{y \in E : y \sim x\}$.

Atividade Extraclasse 5

1) Procure, no Ensino Básico, exemplos de Relações de Equivalência e determine as Classes de Equivalência definidas por essas relações; 2) Que relação existe entre uma classe lateral e uma Relação de Equivalência?

Fonte: Elaborado pelo autor

10º Encontro

Neste encontro será proposta a Atividade 7. Essa atividade é composta por um problema que utiliza matrizes em criptografia, cuja resolução fará uso das principais propriedades das operações de matrizes. Isso será usado para introduzir o conceito de anéis.

Objetivo do encontro:

Introduzir os conceitos de *Anel* e de *Domínio* de *Integridade*.

Atividade 7

Uma maneira de se criptografar uma mensagem é através de operações com matrizes. Vamos associar cada letra do nosso alfabeto a um número, segundo a correspondência a seguir:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

U	V	W	X	Y	Z
21	22	23	24	25	26

Podemos formar matrizes numéricas correspondentes a uma determinada mensagem. Por exemplo, suponha que a nossa mensagem seja "PUXA VIDA". A matriz X correspondente a essa mensagem é

$X = \begin{bmatrix} P & U & X \\ A & - & V \\ I & D & A \end{bmatrix}$ e sua representação numérica é: $X = \begin{bmatrix} 16 & 21 & 24 \\ 1 & 0 & 22 \\ 9 & 4 & 1 \end{bmatrix}$.

Descreveremos três métodos de cifração, a seguir:

1º Método (Adição)

$Y = X + C$, onde: *X, Y* e *C* são as matrizes mensagem inicial, mensagem criptografada e a chave (senha responsável em garantir a segurança da informação), respectivamente.

2º Método (Multiplicação)

$Y = C \cdot X$, onde: *X, Y* e *C* são as matrizes: mensagem inicial, mensagem criptografada e a chave, respectivamente.

3º Método (Afim)

$Y = C \cdot X + K$, onde: *X, Y, C* e *K* são as matrizes: mensagem inicial, mensagem criptografada e as chaves, respectivamente.

Com base nessas informações:

a) Criptografe a mensagem "ESTUDANTE" usando cada um dos métodos, com as chaves: $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $K = \begin{bmatrix} -4 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$;

b) Você recebeu a mensagem 17 29 9 54 46 -9 29 30 0 criptografada no sistema de *Multiplicação* com a chave $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Decifre a mensagem.

c) Decifre a mensagem 5 3 3 1 -8 40 15 10 27, sabendo que ela foi criptografada pelo sistema *Afim* com as chaves: $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $K = \begin{bmatrix} -30 & -30 & -30 \\ -20 & -20 & -20 \\ -10 & -10 & -10 \end{bmatrix}$;

d) Determine a função de decifração de cada um dos métodos apresentados, estabelecendo as devidas restrições, caso haja.

Fonte: Adaptado de Boldrini (1980, p. 94)

<u>Conteúdos Específicos:</u>

Operações com matrizes e suas propriedades, determinante e matriz inversa;

<u>Conceitos Novos a serem Introduzidos:</u>

Anel e Domínio de Integridade.

<u>Possível forma esperada de resolução do problema:</u>

a) A mensagem apresentada pode ser escrita em forma de matriz, assim $X = \begin{bmatrix} E & S & T \\ U & D & A \\ N & T & E \end{bmatrix}$ e, em formato numérico, $X = \begin{bmatrix} 5 & 19 & 20 \\ 21 & 4 & 1 \\ 14 & 20 & 5 \end{bmatrix}$.

Método da adição: $Y = X + C = \begin{bmatrix} 5 & 19 & 20 \\ 21 & 4 & 1 \\ 14 & 20 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 20 & 19 \\ 21 & 6 & 2 \\ 13 & 20 & 6 \end{bmatrix}$.

Logo, a mensagem cifrada é: 7 20 19 21 6 2 13 20 6;

Método da multiplicação:

$$Y = C \cdot X = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 19 & 20 \\ 21 & 4 & 1 \\ 14 & 20 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & 22 & 36 \\ 56 & 28 & 7 \\ 9 & 1 & -15 \end{bmatrix}.$$

Logo, a mensagem cifrada é: 17 22 36 56 28 7 9 1 -15;

Método afim: $Y = C \cdot X + K = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 19 & 20 \\ 21 & 4 & 1 \\ 14 & 20 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} =$

$$= \begin{bmatrix} 17 & 22 & 36 \\ 56 & 28 & 7 \\ 9 & 1 & -15 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 21 & 36 \\ 56 & 23 & 6 \\ 9 & 0 & -13 \end{bmatrix}.$$

Logo, a mensagem cifrada é: 13 21 36 56 23 6 9 0 -13;

b) $Y = C \cdot X \Rightarrow C^{-1} \cdot Y = X$, como $Y = \begin{bmatrix} 17 & 29 & 9 \\ 54 & 46 & -9 \\ 29 & 30 & 0 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, temos

$C^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$. Logo, $X = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 17 & 29 & 9 \\ 54 & 46 & -9 \\ 29 & 30 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 14 & 9 \\ 13 & 15 & 0 \\ 16 & 15 & 0 \end{bmatrix}$.

Portanto, a mensagem é: “ANIMO – PO”;

c) Devemos determinar X tal que $Y = C \cdot X + K$, onde $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$,

$K = \begin{bmatrix} -30 & -30 & -30 \\ -20 & -20 & -20 \\ -10 & -10 & -10 \end{bmatrix}$ e $Y = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 1 & -8 & 40 \\ 15 & 10 & 27 \end{bmatrix}$.

$Y = C \cdot X + K \Rightarrow Y - K = (C \cdot X + K) - K \Rightarrow Y - K = C \cdot X + (K - K)$

$\Rightarrow Y - K = C \cdot X + 0 \Rightarrow C \cdot X = Y - K$, se *C for invertível,* $C \cdot X = Y - K \Rightarrow$

$C^{-1} \cdot (C \cdot X) = C^{-1} \cdot (Y - K) \Rightarrow (C^{-1} \cdot C) \cdot X = C^{-1} \cdot (Y - K) \Rightarrow I \cdot X = C^{-1} \cdot (Y - K) \Rightarrow$

$$X = C^{-1} \cdot (Y - K) \Rightarrow X = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 1 & -8 & 40 \\ 15 & 10 & 27 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -30 & -30 & -30 \\ -20 & -20 & -20 \\ -10 & -10 & -10 \end{bmatrix} \right)$$

$= \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 35 & 33 & 33 \\ 21 & 12 & 60 \\ 25 & 20 & 37 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 18 & 15 \\ 6 & 5 & 19 \\ 19 & 15 & 18 \end{bmatrix}$. Portanto, a mensagem é:

16 18 15 6 5 19 19 15 18 que corresponde a palavra: “PROFESSOR”.

<u>Plenária:</u>

Primeiramente, cada grupo deverá apresentar a solução para o problema e, em seguida, deverão ser discutidas as operações com matrizes e suas propriedades. Com isso, serão apresentados os conceitos de *Anel* e *Domínio de Integridade.*

<u>Formalização:</u>

Seja A um conjunto não vazio, “+” e “$\cdot$” duas operações definidas em A. Dizemos que (A,+,$\cdot$) é um anel, se as seguintes propriedades forem satisfeitas:

A1) $a + (b + c) = (a + b) + c, \forall\, a,b,c \in A$;

A2) $\exists\, 0 \in A | 0 + a = a + 0 = a, \quad \forall\, a \in A;$;

A3) $\forall\; a \in A, \exists\; -a \in A \,|\, a + (-a) = -a + a = 0$

A4) $a + b = b + a, \forall\; a,b \in A$;

A5) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c, \forall\, a,b,c \in A$;

A6) $c \cdot (a+b) = c \cdot a + c \cdot b$ e $(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c, \quad \forall\, a,b,c \in A;$

Se um anel (A,+,$\cdot$) satisfaz a propriedade:

A7) Se $\exists\, 1 \in A, 1 \neq 0 \mid 1 \cdot a = a \cdot 1 \quad \forall\, a \in A;$, dizemos que A é um *anel com unidade;*

A8) Se $a \cdot b = b \cdot a, \forall\ a,b \in A$, dizemos que A é um *anel comutativo*;

A9) Se $a,b \in A, a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0$ ou $b = 0$, dizemos que A é um *anel sem divisores de zero;*

Se (A,+,$\cdot$) for um anel comutativo, com unidade e sem divisores de zero dizemos que (A,+,$\cdot$) é um *domínio de integridade;*

Atividade Extraclasse 6

Faça uma lista dos conteúdos da Educação Básica que você pode identificar como um anel e verifique quais deles são *domínios de integridade*.

Fonte: Elaborado pelo autor

11º Encontro

Neste encontro será trabalhada a Atividade Extraclasse 6 com o objetivo de verificar a presença do conceito de Anéis nos conteúdos da Educação Básica. Para isso, os professores deverão iniciar o encontro pedindo para que cada aluno coloque sua solução na lousa. Em seguida, deverá ser feita uma discussão sobre cada solução apresentada, analisando e concluindo se ela está, ou não, correta. Depois, os professores deverão propor novos exemplos de Anel e Domínio de Integridade apoiados nos conteúdos da Educação Básica, como os Inteiros, os Polinômios e as Matrizes. Outros conteúdos devem ser evidenciados, como Números Complexos, Vetores, etc.

Objetivos do Encontro

- Levar o aluno a fixar os conceitos de Anel e Domínio de Integridade;
- Levar o aluno a perceber que a estrutura de Anel está presente no Ensino Básico;
- Fazer o aluno perceber que as operações entre conteúdos que pertencem à mesma estrutura possuem as mesmas propriedades;

12º Encontro

Neste encontro será proposto um problema cuja solução poderá ser determinada através do *inverso multiplicativo* de um número racional. Isso deverá ser usado para levantar uma discussão sobre *inverso multiplicativo* e mostrar que a existência dele é o que caracteriza um *corpo*, ou seja, faz de um Domínio de Integridade um *Corpo.*

Objetivo do Encontro:

Introduzir o conceito de Corpo, tendo como base o Corpo dos Racionais e Reais.

Atividade 8

Um reservatório de água está com 15% da sua capacidade. Sabe-se que um dia chuvoso produz em média, para o reservatório, uma quantidade equivalente a 2,05% do volume que ele comporta. Sabe-se também que o consumo diário de água do reservatório corresponde, em média, a 0,8% da sua capacidade. Em média, deverá chover quantos dias consecutivos para encher completamente o reservatório?

Fonte: Elaborada pelo autor

Conteúdos Específicos:

Razão, porcentagem, frações e operações básicas com números racionais.

Conceitos Novos a serem Introduzidos:

Corpo.

Possível forma esperada de resolução do problema:

Chamando de V a capacidade total do reservatório temos:

- chove por dia = 2,05% de V;
- consumo diário = 0,8% de V;

- volume de enchimento diário do reservatório = 2,05%V – 0,8%V = $1,25\%\,V = \frac{1,25}{100}V = \frac{125}{10000}V = \frac{1}{80}V$. Logo, o volume de água do reservatório aumentará $\frac{1}{80}V$ por dia.

Se *n* é o número de dias necessários para encher o reservatório, temos: $n \cdot \frac{1}{80}V = \frac{85}{100}V \Rightarrow n \cdot \frac{1}{80} \cdot \frac{100}{85} = 1 \Rightarrow n \cdot \frac{1}{68} = 1$. Logo, o número de dias, *n* , para encher o reservatório é o inverso multiplicativo de $\frac{1}{68}$, isto é, $n = 68$.

Portanto, são necessários 68 dias consecutivos de chuva para encher o reservatório.

Plenária:

A discussão sobre a resolução do problema deverá levar ao "inverso multiplicativo de números racionais". Para isso, os professores deverão enfatizar a necessidade do inverso multiplicativo durante a resolução da equação que aparecerá na resolução do problema.

Formalização:

Definição: Seja $(K,+,\cdot)$ um domínio de integridade, isto é, um Anel comutativo com unidade e sem divisor de zeros. Dizemos que $(K,+,\cdot)$ é um corpo se $\forall\, a \in K - \{0\},\ \exists\, a^{-1} \in K$ tal que $a \cdot a^{-1} = 1$.

13º Encontro

Neste encontro iremos propor um problema em que, durante sua resolução, o aluno deverá perceber que o inverso multiplicativo também poderá aparecer para todos os elementos não nulos de um conjunto, mesmo que esse conjunto seja finito. E, consequentemente, que um Corpo pode ser finito.

Objetivo do Encontro:

Mostrar uma aplicação de Corpo e mostrar, também, que um corpo não necessariamente, precisa ser infinito.

Atividade 9

Considere a correspondência entre as letras do nosso alfabeto e os números naturais, dada por:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19

U	V	W	X	Y	Z
20	21	22	23	24	25

Sobre o conjunto $\mathbb{Z}_{26} = \{0,1,2,...,25\}$ defina as operações:

$$a \overset{26}{+} b = \textit{resto da divisão de } a+b \textit{ por 26}$$
$$a \overset{26}{\cdot} b = \textit{resto da divisão de } a \cdot b \textit{ por 26}$$

Um sistema de criptografia pode ser definido por $y = c \overset{26}{\cdot} x$, onde *c* é uma chave fixada de $\mathbb{Z}_{26}$, *x* é o número correspondente à letra a ser criptografada e y é o número correspondente à letra criptografada. Por exemplo, escolhendo a chave *c* = *7*, podemos criptografar a letra “F” (Correspondente a 5) por $y = 7 \overset{26}{\cdot} 5 = 9$ (9 corresponde a J). Logo, “F” é transformada em “J” por este sistema.

De acordo com essas informações:

a) Use *c* = 3 e criptografe a palavra “VIVER”;

b) Determine a função que decifra as mensagens cifradas por $y = 3 \overset{26}{\cdot} x$ e $y = c \overset{26}{\cdot} x$;

c) Para quais valores de *c* existe uma função de decifração?

d) $(\mathbb{Z}_{26}, \overset{26}{+}, \overset{26}{\cdot})$ é um corpo? e $(\mathbb{Z}_5, \overset{5}{+}, \overset{5}{\cdot})$?

Fonte: Elaborada pelo autor

<u>Conteúdos Específicos:</u>

Operações de adição e multiplicação de números inteiros e divisão inteira.

Conceitos Novos a serem Introduzido:

Corpo finito.

Possível forma esperada de resolução do problema:

a)

$$\text{V} \rightarrow 21 \Rightarrow y = 3 \overset{26}{\cdot} 21 = 11 \rightarrow \text{L}$$

$$\text{I} \rightarrow 8 \Rightarrow y = 3 \overset{26}{\cdot} 8 = 24 \rightarrow \text{Y}$$

$$\text{E} \rightarrow 4 \Rightarrow y = 3 \overset{26}{\cdot} 4 = 12 \rightarrow \text{M}$$

Logo, a palavra criptografia é “LYLMZ”.

b) $y = 3 \overset{26}{\cdot} x \Rightarrow 3^{-1} \overset{26}{\cdot} y = 3^{-1} \overset{26}{\cdot} (3 \overset{26}{\cdot} x) \Rightarrow 3^{-1} \overset{26}{\cdot} y = (3^{-1} \overset{26}{\cdot} 3) \overset{26}{\cdot} x \Rightarrow 3^{-1} \overset{26}{\cdot} y = 1 \overset{26}{\cdot} x \Rightarrow x = 3^{-1} \overset{26}{\cdot} y$.

Observe que 3^{-1} é um número do conjunto $\{0,1,2,...,25\}$ tal que $3^{-1} \overset{26}{\cdot} 3 = 1 \Rightarrow 3^{-1} = 9$.

Portanto, $x = 9 \overset{26}{\cdot} y$.

Analogamente,

$y = c \overset{26}{\cdot} x \Rightarrow c^{-1} \overset{26}{\cdot} y = c^{-1} \overset{26}{\cdot} (c \overset{26}{\cdot} x) \Rightarrow c^{-1} \overset{26}{\cdot} y = (c^{-1} \overset{26}{\cdot} c) \overset{26}{\cdot} x \Rightarrow c^{-1} \overset{26}{\cdot} y = 1 \overset{26}{\cdot} x \Rightarrow x = c^{-1} \overset{26}{\cdot} y$. Onde c^{-1} é um número do conjunto $\{0,1,2,...,25\}$, tal que, $c^{-1} \overset{26}{\cdot} c = 1$.

c) Observando em todas as operações possíveis entre dois elementos de $\mathbb{Z}_{26}$ (isso pode ser feito construindo uma tábua de operações) quais elementos são invertíveis, obtivemos: 1, 3, 5, 9, 11, 15, 17, 19, 21, 23 e 25.

d) $(\mathbb{Z}_{26}, \overset{26}{+}, \overset{26}{\cdot})$ não é um corpo, pois nem todos os seus elementos possuem inverso multiplicativo, isso foi observado no item c). $(\mathbb{Z}_5, \overset{26}{+}, \overset{26}{\cdot})$ é um corpo pois é um domínio de integridade, não tem divisores de zero e todos os seus elementos são invertíveis.

Plenária:

Durante a plenária, os alunos deverão perceber que a estrutura que constitui a Atividade 9 possui todas as propriedades de um Corpo, isto é, é um Domínio de

Integridade onde todos os seus elementos possuem inverso multiplicativo. Com isso, os alunos deverão constatar a existência de Corpos Finitos.

Formalização:

Definição: Um corpo $(K,+,\cdot)$ *é um Corpo Finito* se *K é um conjunto finito.*

Encontros 14 e 15

Nestes dois encontros deverá ser feita uma relação entre conteúdos estudados em AAM com os conteúdos da Educação Básica. Essa relação dar-se-á pela observação da presença da AAM no Ensino Básico e pelo uso da AAM para justificar propriedades da Educação Básica.

Para isso, os professores deverão apresentar uma lista de atividades a serem trabalhadas nesses encontros. Essas atividades deverão ajudar o aluno a perceber a relação entre AAM e os conteúdos da Educação Básica e, consequentemente, dar condições de ele avaliar a necessidade, ou não, dessa disciplina na sua formação profissional. Vale destacar que, nas atividades a serem trabalhadas, serão apresentadas apenas algumas situações em que se pode usar a AAM no Ensino Básico. Porém, não se pretende com isso esgotar todas as situações possíveis. Pretende-se também estimular os alunos a procurarem situações, dentro da matemática elementar, que possam ser justificadas, analisadas, criticadas e, até mesmo, reformuladas, com base nos seus conhecimentos de matemática, em nível superior.

Durante esses dois encontros os alunos deverão ter, também, a oportunidade de apresentarem outras situações onde se possa fazer uso da AAM no Ensino Básico. O material a ser trabalhado nesses dois encontros estão, na sua íntegra, no Apêndice D.

16º Encontro

Nesse encontro será feita uma avaliação diagnóstica. Essa avaliação tem como objetivos identificar: quais e como os principais conceitos estudados em AAM são lembrados pelos alunos; como eles veem a AAM na sua formação profissional; como eles veem a formação de professores e, em particular, a sua própria formação; e como eles veem a Resolução de Problemas no contexto didático-pedagógico e, em particular, a metodologia adotada. Para isso, em um primeiro momento, será promovido um debate com os temas: *Formação de Professores*, *Resolução de Problemas* e *Álgebra*. Aproveitando o clima pós-debate, eles deverão responder um questionário sobre esse tema. Esse questionário se encontra no Apêndice E.

8 COLETA E ANÁLISE DE EVIDÊNCIAS

Daremos início ao terceiro bloco de Romberg-Onuchic. É, nesse momento, que se faz a coleta, a interpretação e a análise das evidências surgidas, levando à produção do resultado da pesquisa. Neste capítulo, começaremos descrevendo como se deu a coleta dessas evidências, colocando o Procedimento Geral em ação. Uma vez que tenham sido executados os procedimentos auxiliares e, em seguida, expressadas essas evidências em uma análise, buscaremos responder as perguntas da pesquisa.

8.1 Procedimento Geral em ação

Colocar o Procedimento Geral em ação significa implementar o projeto P. Esse projeto foi elaborado com o objetivo de coletar evidências suficientes para responder as perguntas da pesquisa. Para isso, ele foi dividido em duas partes. Na primeira, (Parte I), o foco principal foi a construção, por parte do aluno, de um conhecimento satisfatório em AAM. Nessa etapa, utilizamos a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, pois acreditamos, baseados em pesquisas referenciadas nos aportes teóricos, que ela é capaz de levar o aluno a ser construtor do seu próprio conhecimento. Na segunda, (Parte II), o foco foi levar os alunos a refletir sobre as potencialidades que seu conhecimento em AAM poderá ter em sua futura prática docente. Para esse caso, foram elaborados problemas ou situações que relacionassem os conteúdos estudados em AAM com conteúdos da Educação Básica. Nessa relação, o aluno, fazendo uso da AAM, deveria observar, analisar, criticar e justificar alguns conceitos e proposições que aparecem com frequência no Ensino Básico.

8.1.1 Os encontros

Os encontros aconteceram nos momentos em que o Professor-Pesquisador esteve em sala de aula, aplicando o projeto P, trabalhando, observando e analisando cada acontecimento. O Professor-Pesquisador registrou em mídia (gravações de áudios e vídeos) e em diário de campo todos os detalhes desses encontros. O diário de campo foi preenchido imediatamente ao término de cada encontro e, cada anotação possuía dois apontamentos: *descrição,* um relatório detalhado de tudo que havia ocorrido em sala de aula; e, *o olhar do pesquisador*: observações intrínsecas levando em conta a percepção do pesquisador, com relação ao comportamento dos alunos, do Professor-Colaborador e dele próprio como professor.

Esses encontros foram trabalhados de três diferentes formas:

i. Com a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas

Momentos em que o Professor-Pesquisador, partindo de um problema de nível básico, introduzia um novo conceito pertinente à AAM, sendo que a maneira trabalhada seguiu o roteiro descrito em 5.3.2;

ii. Com a exposição e discussão de atividades

Durante esses momentos foram trabalhadas as atividades extraclasse, com o propósito de fixar os conteúdos estudados e relacionar conteúdos de AAM com conteúdos da Educação Básica. Seguiu-se a seguinte dinâmica: os alunos colocavam as soluções das suas atividades extraclasse na lousa, depois era feita uma discussão sobre cada solução apresentada e, finalmente, eram tiradas as conclusões devidas;

iii. Com a resolução de uma lista de exercícios

Esse trabalho foi feito já no final do curso e teve como objetivo apresentar, identificar, discutir e criticar as contribuições que um conhecimento de AAM poderia dar a um futuro professor da Educação Básica. Para isso, foi entregue aos alunos uma lista de exercícios. Alunos e Professor-Pesquisador trabalharam essa lista observando e discutindo algumas situações das quais seria possível perceber a presença, ou poder fazer uso da AAM na Educação Básica.

Além dessas formas trabalhadas, o Professor-Pesquisador utilizou um dos encontros para fazer uma avaliação diagnóstica sobre Álgebra, Resolução de Problemas e Formação de Professores.

Na descrição desses encontros, em determinados momentos apresentaremos alguns diálogos, isto é, a fala dos alunos, do Professor-Pesquisador e do Professor-Colaborador. É conveniente esclarecer que, para uma melhor organização e preservação da identidade dos alunos, adotamos as seguintes convenções:

- A_1, A_2, ..., A_9 denotará cada um dos alunos que participou do diálogo;
- P_p denota o Professor-Pesquisador;
- P_c denota o Professor-Colaborador;
- Usaremos a palavra "*Alunos*" quando nos referirmos à fala de mais de um aluno, não necessariamente todos;
- Usaremos (...) para indicar que um diálogo continuou;
- Usaremos (...pausa) para nos referirmos a uma pausa no diálogo;
- Usaremos (...silêncio) para indicar que houve um instante de silêncio durante um diálogo;
- A escrita entre parênteses não faz parte do diálogo, são apenas comentários para ajudar o leitor a entender o diálogo.

Figura 8 – Os representantes dos grupos colocando suas resoluções na lousa

Fonte: Dados de pesquisa

1º Encontro

No primeiro encontro compareceram seis alunos dos nove matriculados. O Professor-Pesquisador iniciou esse encontro com uma apresentação expositiva e dialogada (professor e alunos). Nessa apresentação, fazendo uso de slides (projetados por um Datashow), ele fez uma breve introdução à Resolução de Problemas. Inicialmente falou sobre algumas Teorias da Aprendizagem chamando a atenção para a necessidade da utilização de novas metodologias de ensino.

Quadro 2 – Primeiro slide da apresentação sobre Resolução de Problemas

- No fim do século XIX as Teorias Pedagógicas passaram a se ancorar nas Teorias Psicológicas.

Como as pessoas aprendem?
Todas as pessoas aprendem da mesma forma?

Fonte: Elaborado pelo autor

> Teorias pedagógicas se desenvolvem ancoradas em teorias psicológicas e as razões se justificam pela complexidade que é inerente à aprendizagem, especialmente em se tratando de sua ocorrência, ou não, em um contexto tão diverso, o da sala de aula. Assim, considerar teorias psicológicas e pedagógicas, vigentes na virada do século XIX para o século XX, pode nos levar a melhor compreender a forma como novas teorias foram se configurando e as razões por terem, ou não, se estabelecido nos currículos escolares (ONUCHIC et al, 2014, p. 18).

Quadro 3 – Segundo slide da apresentação sobre Resolução de Problemas

- Na passagem do século XIX para o século XX vigorava a TDM – **Teoria da Disciplina Mental.**
  Essa teoria entendia a mente humana como uma coleção de faculdades ou capacidades:
  1) Percepção
  2) Memória
  3) Intuição ou Razão
  4) Imaginação e Compreensão

Fonte: Onuchic et al (20014)

> Na passagem do século XIX para o século XX, a Teoria da Disciplina Mental (TDM) vigorava como teoria psicológica e era ela quem orientava o currículo escolar. Essa teoria entendia a mente humana como uma detalhada hierarquia, isto é, uma coleção de faculdades ou capacidades, a saber: percepção, memória, intuição ou razão, imaginação ou compreensão. Treinando uma faculdade, acreditava-se que ocorria uma transferência geral da mente para todas as outras e, assim, o ensino se ocupava mais em desenvolver essas faculdades do que com os conteúdos que seriam ensinados (ONUCHIC et al, 2014, p. 18 e 19).

Quadro 4 – Terceiro slide da apresentação sobre Resolução de Problemas

- No início do século XX, mudança da sociedade agrária para a sociedade industrial, as pessoas precisavam de matemática aplicável à vida.
- A pesquisa de Thorndike e Woodorth, em 1902, apresentou fortes elementos que contradiziam a TDM. Sucedendo a essa pesquisa, Thorndike direcionou esforços para o desenvolvimento de uma teoria psicológica, que ficou conhecida como Conexionismo. Segundo essa teoria, os processos de aprendizagem eram regidos por:
    1) Lei do efeito;
    2) Lei da prontidão ou maturidade específica;
    3) Lei do exercício ou repetição;

Thorndike escreveu, em 1921, um livro chamado "Os novos métodos da aritmética". O Capítulo 7 chamava "Resolução de problemas". Neste capítulo ele apresentou um algoritmo para resolver problemas:

1) Se você sabe resolver o problema, siga em frente;

2) Se não vê uma forma de resolver o problema, então faça as seguintes perguntas: "qual pergunta é feita?", "o que eu faço para descobri-la?", "como usar esses dados?", "e o que eu faço com eles?";

3) Planejar o que irá fazer, e porquê e organizar o trabalho de modo que você saiba o que fez;

4) Cheque as respostas para ver se valem e se o raciocínio está de acordo com o que o enunciado solicitou.

Fonte: Adaptado de Onuchic et al (2014)

A partir do quarto slide (Quadro 6) da apresentação, o Professor-Pesquisador passou a falar sobre a inserção da Resolução de Problemas no contexto didático-pedagógico.

Quadro 5 – Quarto slide da apresentação sobre Resolução de Problemas

- Em 1930, Willian Brownell, através de suas pesquisas, apresentou elementos fortes que contradiziam a teoria do *Conexionismo*. Ele defendia a necessidade de compreensão, e apresentou uma nova teoria denominada **Teoria Significativa**.
- Neste cenário a **Resolução de Problemas** ganhou forças e se desenvolveu como teoria da aprendizagem, pelas mãos do matemático **George Polya**, apresentada no livro: "A arte de resolver problemas" (*How to solve it:a new aspect of mathematical method).*
- Polya acreditava que os professores precisavam ser bons resolvedores de problemas e que fizessem de seus alunos também bons resolvedores de problemas. E, apresentou 4 fases que julgou ser importante para todos os bons resolvedores de problemas:
  1) Compreender o problema;
  2) Estabelecer um plano;
  3) Executar o plano;
  4) Examinar a solução obtida.

Além disso, Polya orientava os professores:

- Comece com algo que é familiar ou útil, ou desafiador. Que possua alguma conexão com o mundo ao nosso redor.
- Não tenha medo de usar uma linguagem coloquial. Não coloque termos técnicos antes que os estudantes possam ver necessidade para eles.
- Não entre muito cedo ou muito em detalhes pesados de uma *demonstração.* Dê primeiro uma ideia geral ou apenas o germe intuitivo da prova.
- De modo geral, se aprende por etapas. Primeiro um esboço do assunto, para percebermos as conexões e interesses.

Fonte: Adaptado de Onuchic et al (2014)

Quadro 6 – Quinto slide da apresentação sobre Resolução de Problemas

- De 1950 a 1970, teve nos Estados Unidos uma teoria de ensino denominado **Movimento da Matemática Moderna**. Este movimento chegou no Brasil em 1961 através de cursos dados aos professores e, em 1963 por livros didáticos;

- Esse movimento se baseava na lógica dedutível e era fundamentada na Teoria dos Conjuntos, aplicada a todos os níveis de escolaridade;

> "[...] O nível de desempenho dos estudantes de matemática não havia atingido o mínimo desejado, pois eles não aprendiam as abstrações e suas habilidades básicas tinham se perdido na mal sucedida pressa de ensinar às crianças muito jovens, coisas como a nova Teoria Numérica." (SCHOENFELD, 1991/1996, p. 63)

- Somando tudo isso ao despreparo dos professores e a dificuldades dos pais em ajudar seus filhos nas tarefas escolares, provocou um retrocesso às bases "teoria do conexionismo" proposta por Thorndike na década de 1920. Esse retrocesso só ocorreu nos Estados Unidos e não teve força.

- Nesse cenário a Resolução de Problemas ganhou novamente espaço nos currículos escolares, primeiro nos Estados Unidos e posteriormente em diversos países do mundo;

Fonte: Adaptado do livro Onuchic et al (2014)

No quinto slide foi dada ênfase às três abordagens da Resolução de Problemas:

Quadro 7 – Sexto slide sobre Resolução de Problemas

- Shroeder e Lester (1989, apud ONUCHIC, 1999, p. 206) apresentam três maneiras de abordar a resolução de problemas:

  1) *Ensinar **sobre** resolução de problemas.* Usado por Polya que enfoca as 4 fases descritas anteriormente: compreender o problema, estabelecer um plano, executar o plano, fazer um retrospecto afim de validar a solução encontrada;

  2) *Ensinar **para** resolver problemas*: Deve-se ensinar matemática e evidenciar as estratégias necessárias para usar essa matemática na resolução de problemas.

  3) *Ensinar **através** da resolução de problemas*: Utiliza-se um problema como ponto de partida e durante a resolução desse problema introduzem-se conceitos, conteúdos ou procedimentos novos.

Fonte: Adaptado de Onuchic (1999, p.206)

O Professor-Pesquisador finalizou a apresentação falando de Resolução de Problemas como uma metodologia pedagógica, dando atenção especial à Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, que tem sido bastante trabalhada em pesquisas desenvolvidas pelo GTERP.

Quadro 8 – Sétimo slide sobre Resolução de Problemas

- Onuchic e Alevato (2011, p. 83) apresentam um roteiro para utilização em sala de aula, e uma metodologia que elas chamaram de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, sendo que por Ensino-Aprendizagem-Avaliação entende-se Ensino e Aprendizagem ocorrem simultaneamente e a avaliação integrada ao Ensino promove a Aprendizagem.

1) **Preparação do problema**: selecionar um problema visando à construção de um novo conceito, conteúdo ou procedimento;

2) **Leitura Individual**: Entregar uma cópia do problema para cada aluno e solicitar sua leitura;

3) **Leitura em Grupo**: Formar grupos e refazer a leitura do problema, agora em grupo. Se houver dificuldade no entendimento o professor poderá intervir nesse momento buscando ajudá-los na compreensão do texto do problema;

4) **Resolução do Problema**: Depois que o enunciado ficar claro, os alunos, em grupo e de forma cooperativa e colaborativa, buscam resolvê-lo;

5) **Observar e Incentivar:** Nessa etapa o professor não tem mais o papel de transmissor do conhecimento. O professor apenas observa, analisa o comportamento dos alunos, leva-os a pensar, dando-lhes tempo e incentivando a troca de ideias entre eles;

6) **Registro na Lousa**: Um representante de cada grupo deve registrar, na lousa, suas resoluções certas, erradas, ou mesmo incompletas. Todas as maneiras feitas ou pensadas;

7) **Plenária**: Faz-se uma discussão das soluções apresentadas por cada grupo;

8) **Busca do Consenso**: O professor, junto com os alunos, devem buscar um consenso sobre o resultado;

9) **Formalização do Conteúdo**: Nesse momento o professor registra na lousa uma apresentação formal do novo conhecimento construído;

Fonte: Onuchic e Alevato (2011)

A após a apresentação do sétimo slide (Quadro 9), o Professor-Pesquisador falou aos alunos sobre nosso Projeto de Ensino, explicando a proposta de trabalho a ser desenvolvida na disciplina Álgebra II. Disse como deveria ser o papel de cada integrante no processo e da importância da aceitação e cumprimento dessa proposta. Fez uma breve leitura do Termo de Compromisso, que se encontra no Apêndice B, porém, deixou a discussão e assinaturas para um próximo encontro, em que todos pudessem estar presentes.

Ao término da apresentação, seguiu-se um momento em que cada aluno pôde fazer uso da palavra para se apresentar, tirar dúvidas, ou falar sobre qualquer outro assunto que lhe parecera pertinente. Poucos alunos falaram e suas falas foram, na maioria, relativas às Teorias de Aprendizagem, assunto que pareceu ser uma novidade para eles. Surgiram comentários do tipo: “Eu nunca tinha pensado que as pessoas aprendem de formas diferentes”.

Em seguida, foram formados dois grupos com três alunos cada, cuja escolha foi feita por eles próprios. Logo após, foi entregue a cada aluno um problema (Atividade 1) e o Professor-Pesquisador seguiu as instruções de trabalho de acordo com o roteiro estabelecido em 5.3.2. Essa atividade tinha dois objetivos: mostrar, na prática, como se trabalha a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas; e introduzir o conceito de Operação Binária.

Atividade 1: Dois amigos, A e B, conversam sobre seus filhos. A dizia a B que tinha 3 filhas, quando B perguntou a idade das mesmas. Sabendo A, que B gostava de problemas de aritmética, respondeu da seguinte forma: “O produto das idades das minhas filhas é 36. A soma de suas idades é o número daquela casa ali em frente”. Depois de algum tempo, B retrucou: “Mas isto não é suficiente para que eu possa resolver o problema”. A pensou um pouco e respondeu: “Tem razão. Esqueci de dizer que a mais velha toca piano”. Com base nesses dados, B resolveu o problema. Pergunta-se: qual a idade das filhas de A?

Fonte: Internet: http://www.ebah.com.br/content/ABAAAAjIcAH/raciocinio-logico?part=6

Os alunos tentaram buscar uma resolução para o problema dado. Não sabiam o que fazer. sentiam-se desconfortáveis, devido à falta de prática de se trabalhar de forma colaborativa e, principalmente, cooperativa. Os professores, Pesquisador e Colaborador, precisaram, por diversas vezes, intervir, ao perceberem que os alunos procuravam se isolar, tentando resolver a atividade sozinhos, ou esperar que outro colega do grupo o fizesse. Ou seja, não havia a preocupação de compartilhar suas ideias com os colegas e o grupo. Os professores tentaram lhes dizer o que era trabalhar em grupos. Que qualquer ideia que fosse levantada, deveria ser explorada por todos, abrindo um caminho que pudesse levá-los a entender o que aqueles números dados queriam dizer.

As intervenções dos professores foram fundamentais para o sucesso dessa atividade. A princípio, nenhum aluno conseguia 'sair do lugar'. Essas intervenções, que se deram por meio de perguntas, levavam os alunos a refletir sobre elementos simples, porém fundamentais para o processo. Perguntas como: "você conhece três números cujo produto dê 36?". "Será que há muitas ternas de números cujo produto é 36?". "Seria possível fazer uma lista de todos as ternas de números cujo produto é 36?". Ao responderem essas perguntas, os alunos puderam ser conduzidos ao processo da resolução do problema proposto. Um fator importante de se destacar é que eles queriam sempre compartilhar suas ideias com os professores e não com os colegas do grupo, fazendo perguntas do tipo "professor, o que estou fazendo está certo?". O professor inquirido sempre procurava responder com outra pergunta, como, por exemplo, "o que os seus colegas de grupo pensam sobre essa sua ideia?".

Apesar de algumas dificuldades, os dois grupos conseguiram resolver corretamente o problema. Após os questionamentos, pelos professores, a respeito do primeiro dado do problema, os alunos conseguiram usar corretamente o segundo e o terceiro dado. Isto é, fizeram a soma de todas as ternas de números inteiros e positivos cujo produto era 36. E finalmente, conseguiram perceber que, o fato do amigo B dizer que não seria possível resolver o problema apenas com os dois primeiros dados, se dava exatamente pela soma das ternas ser treze. Em seguida, um representante de cada grupo colocou sua resolução na lousa e explicou como seu grupo procedeu para chegar à solução do problema.

Quadro 9 – Um esboço da resolução aprensentada pelos alunos na lousa

Possível idade da 1ª filha de A	Possível idade da 2ª filha de A	Possível idade da 3ª filha de A	Soma das possível idades das filhas de A
1	1	36	38
1	2	18	21
1	3	12	16
1	4	9	14
1	6	6	**13**
2	2	9	**13**
2	3	6	11
3	3	4	10

Como B não pôde resolver o problema apenas com os dois primeiros dados, concluímos que a soma das idades das filhas de A só poderia ser 13, pois, para qualquer outro resultado o problema já estaria resolvido. O último dado do problema "a mais velha toca piano" serviu para descartar a possibilidade 1, 6 e 6, pois, nessa situação teríamos duas mais velhas. Portanto, o resultado é 2, 2 e 9.

Fonte: Adaptado dos dados da pesquisa

Para surpresa dos professores, Pesquisador e Colaborador, durante a plenária foi possível perceber que alguns alunos, mesmo participando da resolução do problema, ainda não haviam entendido completamente sua resolução, como mostra o diálogo, a seguir:

> A_1: Professor eu, sinceramente, não consegui entender por que o número da casa em frente é 13?
> P_p: Olhe para todas as possíveis soluções na lousa. Se o número da casa em frente fosse 38, quais seriam as idades das filhas de A?
> A_1: 1, 1 e 36
> P_p: Você teria alguma dúvida quanto a isso?
> A_1: Não.
> P_p: E, se o número fosse 21?
> A_1: 1, 2 e 18?
> P_p: Alguma dúvida quanto a essa resposta?
> A_1: Não.
> P_p: E, se o número da casa fosse 13?
> A_1: Poderia ser 2, 2 e 9.
> P_c: E porque não poderia ser 1, 6 e 6?
> A_1: É isso que não sei.
> P_p: Será que não foi por isso que B disse não poder dar ainda a resposta?
> P_c: Qual é o último dado do problema?
> A_1: A mais velha toca piano?
> P_p: Sim, e tem a mais velha em 1, 6 e 6?
> A_1: Têm duas mais velhas.
> P_c: Mas, você percebe que a afirmação foi feita no singular, ou seja, o enunciado do problema fala de uma única mais velha.
> A_1: Ah, agora sim, entendi!

Percebemos depois, que outros alunos também tinham a mesma dúvida. E, isso mostrou a importância da Plenária, pois, se o processo de resolução tivesse terminado após cada grupo chegar à solução correta do problema, muitos alunos ainda teriam dúvidas e o professor nem teria conhecimento disso. Nesse instante podemos ver, além de tudo, a presença forte da avaliação.

Após ter considerado o problema resolvido, o Professor-Pesquisador sentiu-se preocupado novamente com o problema dado. Pensou: “será que o enunciado desse problema não está bem formulado?”. “Será que entre as duas afirmações, *o produto das idades das minhas filhas é 36* e *a soma de suas idades é o número daquela casa ali em frente* colocadas nesse enunciado deveria haver uma resposta de B à primeira pergunta dizendo não ter podido, com os dados fornecido por A, dar logo uma resposta para o problema? Então, logo depois, é que deveria aparecer a segunda afirmação: *a soma de suas idades é o número daquela casa ali em frente*, com a posição de B de que ainda não poderia descobrir as idades das meninas?”. “Será que como foram colocadas, no enunciado, as duas afirmações propostas, não levaram os alunos a fazerem as duas tabelas seguidas e, depois chegar à resposta?”.

Nessa análise, o Professor-Pesquisador pôde perceber que, com suas intervenções, os alunos não precisaram criar estratégias para a resolução do problema, pois simplesmente montaram as tabelas e, pensando, chegaram à solução. Possivelmente, isso poderia ter sido diferente se o enunciado do problema fosse:

> Dois amigos, A e B, conversam sobre seus filhos. A dizia a B que tinha 3 filhas, quando B perguntou a idade das mesmas. Sabendo A, que B gostava de problemas de aritmética, respondeu da seguinte forma: “O produto das idades das minhas filhas é 36. B disse: “essa informação não é suficiente para que eu possa resolver o problema”. A falou: “a soma de suas idades é o número daquela casa ali em frente”. Depois de algum tempo, B retrucou: “Mas isto, ainda, não é suficiente para que eu possa resolver o problema”. A pensou um pouco e respondeu: “Tem razão. Esqueci de dizer que a mais velha toca piano”. Com base nesses dados, B resolveu o problema. Pergunta-se: qual a idade das filhas de A.

O Professor-Pesquisador acredita que sem suas intervenções os alunos poderiam tentar resolver o problema equacionando-o. A seguir, apresentamos uma discussão sobre essa forma de pensar a resolução desse problema:

Considere as idades das filhas de A como x, y e z. Utilizando o primeiro dado do problema, obtemos a equação:

$$x \cdot y \cdot z = 36$$

Considerando o número da casa em frente igual a uma constante k (um valor desconhecido, porém fixo), obtemos uma segunda equação:

$$x + y + z = k$$

As duas equações formam o sistema S, apresentado a seguir:

$$S: \begin{cases} x \cdot y \cdot z = 36 \\ x + y + z = k \end{cases}$$

Observe que o sistema S, além de possuir duas equações e três variáveis, ainda, possui um quarto valor desconhecido, k. Dessa forma, não seria possível determinar a solução desse sistema, utilizando apenas os métodos de resolução conhecidos (métodos de substituição, comparação e adição). Porém, se os alunos seguissem esse caminho, o Professor-Pesquisador poderia aproveitar para discutir diversos conceitos matemáticos importantes como: variável, incógnita, constante e sistemas de equações lineares, juntamente com seus possíveis métodos de resolução, enfatizando inclusive a quantidade de soluções possíveis para cada tipo de sistema. Além disso, qualquer um dos métodos de resolução de sistemas de equações mencionados, transformaria o sistema S em uma única equação de duas variáveis. Como por exemplo, o método da substituição, que poderia ser utilizado isolando z na primeira equação de S e substituindo, o resultado, na segunda equação desse mesmo sistema. Isto é, $z = \frac{36}{xy} \Rightarrow x + y + \frac{36}{xy} = k$. Com isso, se poderia trabalhar o conceito de *parâmetro livre*, discutir o conjuntos das possíveis soluções dessa equação e observar que a solução, do problema proposto, só poderia ser encontrada a partir dessa equação, pelo fato dele ser um problema de matemática discreta, isto é, x, y e z são números inteiros e positivos, consequentemente, $\frac{36}{xy}$ também deve ser um número inteiro e positivo. Logo, xy deve dividir 36, portanto, os possíveis valores para xy são: 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18 e 36. Assim:

- Se $xy=1$, então, $x=1$ e $y=1$. Logo, $z=\frac{36}{xy}=\frac{36}{1\cdot 1}=\frac{36}{1}=36$ e $k=1+1+36=38$.

  Observe que a solução da equação, para este caso, é exatamente a que aparece na primeira linha, numérica, apresentada no Quadro 10.

- Se $xy=2$, então, $x=1$ e $y=2$ (Observe que para $x=2$ e $y=1$ o resultado é o mesmo). Logo, $z=\frac{36}{xy}=\frac{36}{1\cdot 2}=\frac{36}{2}=18$ e $k=1+2+18=21$. Observe que a solução da equação, para este caso, é exatamente a que aparece na segunda linha, numérica, apresentada no Quadro 10.

- Se $xy=3$, então, $x=1$ e $y=3$. Logo, $z=\frac{36}{xy}=\frac{36}{1\cdot 3}=\frac{36}{3}=12$ e $k=1+3+12=16$.

  Observe que a solução da equação, para este caso, é exatamente a que aparece na terceira linha, numérica, apresentada no Quadro 10.

- Se $xy=4$, então, $x=1$ e $y=4$ ou $x=2$ e $y=2$.

  - Para $x=1$ e $y=4$, temos: $z=\frac{36}{xy}=\frac{36}{1\cdot 4}=\frac{36}{4}=9$ e $k=1+4+9=14$.

    Observe que a solução da equação, para este caso, é exatamente a que aparece na quarta linha, numérica, apresentada no Quadro 10.

  - Para $x=2$ e $y=2$, temos: $z=\frac{36}{xy}=\frac{36}{2\cdot 2}=\frac{36}{4}=9$ e $k=2+2+9=13$.

    Observe que a solução da equação, para este caso, é exatamente a que aparece na sexta linha, numérica, apresentada no Quadro 10.

- Se $xy=6$, então, $x=1$ e $y=6$ ou $x=2$ e $y=3$.

  - Para $x=1$ e $y=6$, temos: $z=\frac{36}{xy}=\frac{36}{1\cdot 6}=\frac{36}{6}=6$ e $k=1+6+6=13$.

    Observe que a solução da equação, para este caso, é exatamente a que aparece na quinta linha, numérica, apresentada no Quadro 10.

  - Para $x=2$ e $y=3$, temos: $z=\frac{36}{xy}=\frac{36}{2\cdot 3}=\frac{36}{6}=6$ e $k=2+3+6=11$.

    Observe que a solução da equação, para este caso, é exatamente a que aparece na sétima linha, numérica, apresentada no Quadro 10.

- Se $xy = 9$, então, $x = 1$ e $y = 9$ ou $x = 3$ e $y = 3$. Observe que o caso $x = 1$ e $y = 9$ é equivalente ao $x = 1$ e $y = 4$, isto é, produz a mesma solução.
  - Para $x = 3$ e $y = 3$, temos: $z = \frac{36}{xy} = \frac{36}{3 \cdot 3} = \frac{36}{9} = 4$ e $k = 3 + 3 + 4 = 10$.

    Observe que a solução da equação, para este caso, é exatamente a que aparece na oitava linha, numérica, apresentada no Quadro 10.

Os casos em que $xy = 12$, $xy = 18$ e $xy = 36$ não produzem novas soluções, apenas soluções já encontradas.

Observe que essa forma de resolver o problema, equacionando-o, apenas produziu as mesmas oito possibilidades, listadas no Quadro 10, de forma sistemática. A partir dessas oito possibilidades, só podemos chegar à solução do problema proposto por meio da interpretação correta do último dado do problema "a mais velha toca piano". Porém, apesar dessa maneira ser mais trabalhosa, ela proporciona ao professor condições de envolver mais conceitos matemáticos e, portanto, produzir mais aprendizagem.

Após sanar todas as dúvidas sobre a resolução dessa atividade, durante a Plenária o Professor-Pesquisador aproveitou para introduzir o conceito de *Operação Binária*. O diálogo, a seguir, mostra em detalhes como foi feita a introdução desse conceito.

> *P_p*: Quais conceitos matemáticos foram necessários para resolver esse problema?
> *Alunos*: Apenas adição e multiplicação.
> *P_p*: E o que são adição e multiplicação?
> Alunos: Operações
> *P_p*: E o que é uma operação?

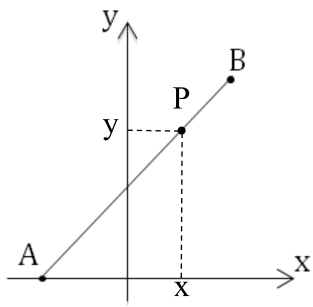
Após essa pergunta, seguiu-se um silêncio e, depois, os alunos começaram a conversar entre eles, mas não chegaram a nenhuma conclusão a respeito do conceito de operação. Apesar desse conceito já ter sido estudado na disciplina Álgebra I, no semestre anterior, nenhum dos alunos conseguia se lembrar dele. Fazendo uso da resolução do problema que ainda se encontrava na lousa, o Professor-Pesquisador levou os alunos a perceberem que as operações de adição e multiplicação associavam cada par de números a um novo número e, em seguida, generalizou essa ideia fazendo a formalização do conceito de Operação Binária, ou seja:

> ***Definição:*** *Seja E um conjunto não vazio, denominamos operação binária em E a qualquer função definida de $E \times E \rightarrow E$. Ou seja, qualquer regra que associe cada par (x, y) de $E \times E$ a um único elemento de E.*

2º Encontro

Neste encontro faltaram dois alunos. Ressaltemos também a ausência do Professor-Colaborador, que teria viajado para apresentar um trabalho no XI SNHM-Seminário Nacional de História da Matemática, em Natal-RN.

O Professor-Pesquisador começou tecendo um breve comentário sobre o encontro anterior, enfatizando o que fora abordado, reexplicando a metodologia trabalhada, com o objetivo de inteirar os alunos que não haviam participado do encontro anterior e sanar dúvidas que ainda houvessem. Em seguida, propôs a Atividade 2, que apresentamos a seguir, e que foi trabalhada, seguindo o mesmo roteiro da atividade desenvolvida no encontro anterior.

> **Atividade 2:** Uma partícula percorre o segmento de reta AB, saindo do ponto A em direção a B. Quando a partícula se encontra num ponto P=(x,y), o valor x (abscissa) representa a posição horizontal dessa partícula, e y (ordenada) altura dela, em relação a x.
>
> 
>
>
> Sendo A=(-5,0) e B=(7,12), determine o deslocamento horizontal dessa partícula, quando sua altura for o dobro da sua posição horizontal.

Fonte: Elaborada pelo autor

A princípio, os alunos sentiram dificuldade para trabalhar essa atividade. Parecia que a dificuldade se dava pela falta de conhecimento da matemática necessária para resolver o problema. Assim, o Professor-Pesquisador fez algumas perguntas sobre alguns conceitos que poderiam ajudar na resolução. Essas perguntas referiam-se a conceitos como: equação da reta, distância entre dois pontos e semelhança de triângulos. Porém, para sua surpresa, os alunos já possuíam conhecimento desses conteúdos e, nesse instante, o Professor-Pesquisador pôde perceber que a dificuldade que os alunos tinham era a de identificar qual matemática utilizar para resolver o problema e não se sentiam muito à vontade em arriscar um caminho. Ao perceber isso, o Professor-Pesquisador incentivou os alunos a escolher um caminho, utilizando a matemática que eles acreditavam ser capaz de resolver o problema. Havia três grupos (dois com dois alunos e um com três). Um dos grupos tentou resolver o problema usando distância entre dois pontos. Porém, desistiu quando a quantidade de cálculos começou a ficar muito grande. Em seguida, passaram a usar, na resolução, a equação da reta, da mesma forma que os outros grupos estavam fazendo desde o início.

A seguir, apresentamos alguns diálogos que ocorreram nesse encontro, para mostrar o comportamento do professor e dos alunos, durante o processo:

No entendimento do problema

> P_p: Vocês entenderam o problema? entenderam o que o problema quer dizer com “posição horizontal” e “altura em relação a x”?
> A_8: Seria a distância da partícula até o eixo x?
> P_p: Todos concordam com sua colega A_8?
> A_4: No enunciado, o problema fala que a altura é y... em relação ao eixo x.
> A_8: y é o valor da altura, mas o professor quer saber o que é a altura. Não é isso, professor?... tipo, para eu saber a altura eu preciso encontrar y...
> P_p: Sim, mas ainda não pareceu estar claro o que significa “altura em relação a x” e “posição horizontal”.
> A_4: Essa posição horizontal aí, eu achei mais complicado. Você poderia explicar, para ver se eu entendi?
> P_p: E o que você entendeu?
> A_4: Eu acho que é x,... quero dizer x é o valor. A posição horizontal é a distância que a partícula percorreu, não é?
> P_p: Todos concordam?
> Alunos: sim...
> A_8: Eu acho que não porque a partícula está andando em cima da reta...
> A_4: Mas estou falando da distância que ela percorre horizontalmente.
> A_8: Mesmo assim não é. Se o valor de x for três, a partícula percorreu oito horizontalmente, porque ela saiu do menos cinco até chegar no zero ela já percorreu cinco e depois mais três para chegar no três.
> P_p: Exatamente. Todos entenderam o que A_8 disse?
> (...)

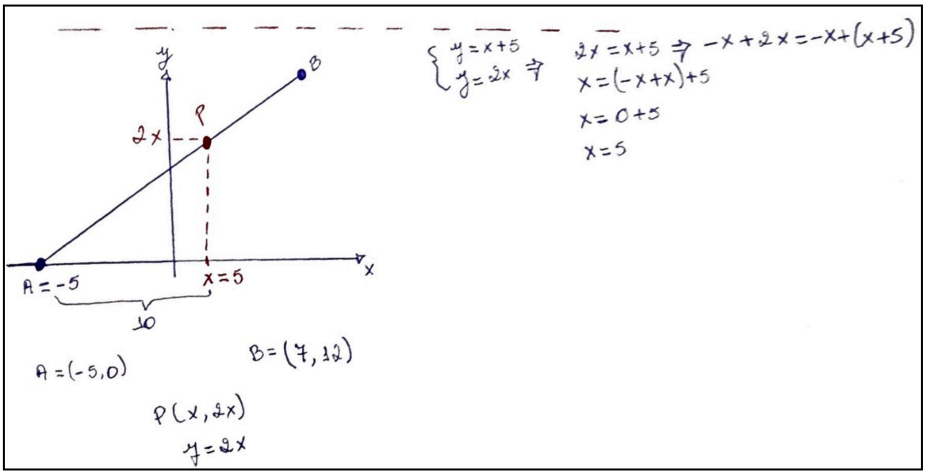
No caminho para resolver o problema

> *Alunos*: Professor, não temos nem ideia de como começar a resolver o problema.
> P_p: Que dados vocês têm?

> A_1: Acho que só os valores de A e B
> P_p: O que diz no final do enunciado?
> A_1: Para determinar o deslocamento horizontal da partícula quando a sua altura, em relação a x, for o dobro da sua posição horizontal.
> P_p: Qual seria o valor da altura e do deslocamento?
> A_1: Não seria x e y? x deslocamento e y altura?
> P_p: Então como você escreveria matematicamente a informação "a altura é o dobro do deslocamento"?
> A_1: y = 2x?... Mas e agora?
> P_p: O fato da partícula estar sobre uma reta não estabelece uma relação entre x e y?
> A_1: Como assim?...
> P_p: y não poderia ser uma função de x, ou vice-versa?
> A_8: Aí usamos a equação da reta, não é professor?
> P_p: Discuta com o grupo para ver o que eles acham e procurem trabalhar juntos.

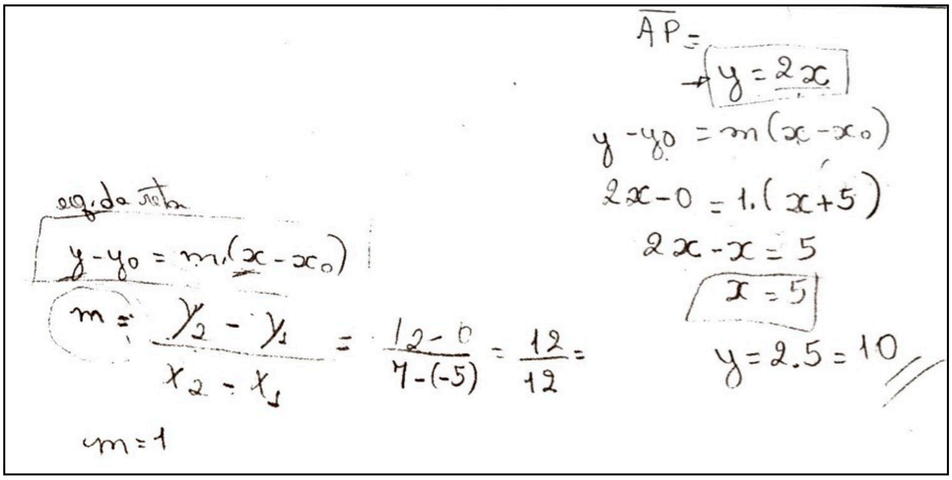
As Figuras 9 e 10 mostram como os grupos resolveram o problema.

Figura 9 – Resolução da Atividade 2 por um dos grupos (a)



Fonte: Dados da pesquisa

Figura 10 – Resolução da Atividade 2 por um dos grupos (b)



Fonte: Dados da pesquisa

Na plenária, discutiu-se a resolução do problema proposto. O Professor-Pesquisador observou que, por todos os métodos resolvidos pelos grupos, o resultado final era solução de uma equação do primeiro grau. Ele então colocou essa equação na lousa e pediu que um dos alunos a resolvesse novamente, porém, dessa vez, destacando cada propriedade usada durante a resolução. Para entender como isso foi feito mostramos, a seguir, como a equação apresentada pela Figura 10, foi novamente resolvida:

$$2x - 0 = 1 \cdot (x+5) \qquad (1)$$

$$2x = x + 5 \qquad (2)$$

$$-x + 2x = -x + (x+5) \qquad (3)$$

$$-x + 2x = (-x + x) + 5 \qquad (4)$$

$$x = 0 + 5 \qquad (5)$$

$$x = 5 \qquad (6)$$

O Professor-Pesquisador deu ênfase às propriedades utilizadas nas passagens: da equação (2) para (3); da (3) para (4); da (4) para (5) e da (5) para (6). Mostrando a necessidade do uso das propriedades, *associativa, existência do simétrico* e *elemento neutro*. Com a discussão dessas propriedades foi introduzido o conceito de *grupo*, ou seja, após seu entendimento, foi feita a formalização desse conceito, como mostra o diálogo a seguir:

> P_p: (Apontando para a equação (1), na lousa) Quando resolvemos uma equação, como a equação (1), o que buscamos encontrar?
> *Alunos*: O valor de x.
> P_p: O que seria o valor de x? um número?
> *Alunos:* Sim, um número.
> P_p: Que tipo de número? inteiro? racional?
> *Alunos:* Um número real.
> P_p: (Apontando para a lousa) Qual propriedade usamos na passagem de (2) para (3)?
> *Alunos*: Somamos menos x dos dois lados.
> P_p: E o que é menos x?
> A_3: Como assim professor?
> A_8: É oposto de x. Não é isso?
> P_p: Sim, e se o x não tivesse oposto?
> (... silêncio)
> P_p: Teria como continuar a resolução da equação?
> A_8: Acho que não.
> P_p: E de (3) para (4), qual propriedade usamos?
> *Alunos:* Associativa.
> P_p: Sem a propriedade associativa, teria como resolver a equação?
> A_3: Não.
> P_p: Fizemos uso de mais alguma propriedade?

Alunos: Sim, elemento neutro!
P_p: Percebem que só foi possível resolver essa equação porque a operação de adição possui as propriedades associativa, existência de elemento neutro e inverso aditivo no conjunto dos números reais?
A_2: Isso significa que, se fosse em outro conjunto, não seria possível resolver?
P_p: Se a operação não possuísse essas propriedades nesse outro conjunto, não seria possível resolver. Por exemplo, se x fosse um número natural, ele não teria um oposto natural e portanto não poderíamos somar –x dos dois lados.
A_7: A gente sempre resolve uma equação sem pensar nisso...
P_p: Exatamente. E, o objetivo principal da Álgebra Abstrata, na Licenciatura, é estudar e discutir as estruturas matemáticas, ou seja, as operações e suas propriedades em um dado conjunto. Todo conjunto não vazio, com uma operação definida nele, de forma que essa operação seja associativa, possui elementos neutro e simétrico, forma uma estrutura matemática denominada Grupo. Lembre-se, o grupo é formado pelo conjunto e sua operação.

Após esse diálogo, o Professor-Pesquisador foi até a lousa e escreveu a seguinte definição:

Definição: *Seja G um conjunto não vazio e * uma operação em G. Se forem válidas as três condições: i), ii) e iii), a seguir, então (G,*) é denominado Grupo.*

$i)\ (a*b)*c = a*(b*c),\ \forall a,b,c \in G;\ (associativa)$

$ii)\ \exists\, e \in G \mid a*e = e*a,\ \forall a \in G;\ (existência\ de\ elemento\ neutro)$

$iii)\ \forall a \in G, \exists\, a' \in G \mid a*a' = a'*a = e;\ (existência\ de simétrico)$

Ao término do encontro, o professor deixou uma Atividade Extraclasse, que apresentamos a seguir:

Atividade Extraclasse 1

Faça uma lista, com o maior número possível, de conteúdos que você já estudou em toda sua vida acadêmica (primeiro e segundo graus, ou superior) e que acredita ser uma estrutura de grupo.

3º Encontro

No terceiro encontro compareceram todos os alunos. Os professores, Pesquisador e Colaborador, aproveitaram a presença de todos para discutir e assinar o Termo de Compromisso (apêndice B). Em seguida, o Professor-Pesquisador pediu aos alunos que colocassem, na lousa, suas resoluções da Atividade Extraclasse 1, para que fossem discutidas. Dos nove alunos, apenas cinco haviam feito essa atividade. Então, os professores reforçaram a necessidade de mais compromisso por parte dos alunos, para o sucesso da aprendizagem nessa disciplina.

A Atividade Extraclasse 1, pedia que se buscasse, nos conteúdos da Educação Básica (fundamental e médio) ou superior, estruturas que pudessem ser identificadas como um grupo.

Após a apresentação das resoluções da Atividade Extraclasse 1, feitas por alguns alunos, cada aluno, que havia feito a atividade, explicava por que a estrutura apresentada por ele se constituía um grupo. Logo após, promoveu-se uma discussão sobre questões relevantes a cada caso. Como, por exemplo, qual era a operação da estrutura apresentada e como verificar a existência das propriedades dessas operações que caracterizavam essa estrutura como um grupo e o que aconteceria se fosse mudada a operação. Isso foi feito para o aluno perceber que o que caracteriza um grupo é a operação e não o conjunto.

Vale ressaltar que um outro objetivo, também importante, era o de levar o aluno a perceber a presença da estrutura de grupo na Educação Básica e mostrar que, ao tratar esses conteúdos como uma estrutura algébrica, se pode correlacionar tal conteúdo com outro de mesma estrutura algébrica, e fazer uso de propriedades comuns de sua operação quando for necessário. Porém, os professores, Pesquisador e Colaborador, perceberam que esse momento serviu fortemente para fixar o conceito de grupo que, para muitos alunos, ainda não estava claro. Para entendermos melhor, apresentamos o diálogo, a seguir:

> P_p: Dos grupos que vocês encontraram na Educação Básica, quais deles vocês consideram o mais simples?
> *Alunos:* O grupo dos Naturais?
> P_p: Um conjunto sozinho forma um grupo?
> *Alunos:* Não.
> P_p: Para se ter um grupo precisamos de que, então?
> *Alunos:* Conjunto e operação.
> P_p: Com qual operação os Naturais forma um grupo?
> *Alunos:* Adição.
> P_p: Quais propriedades a operação adição precisam assumir para que o conjunto dos Naturais se constitua um grupo?
> *Alunos:* Elemento neutro, simétrico e... associativa.
> P_p: Qual seria o elemento neutro da operação adição nos Naturais?
> *Alunos:* O zero.
> P_p: Todo número natural possui um simétrico, ou seja, um inverso aditivo que também seja natural?
> *(... silêncio)*
> A_8: Não professor. O dois, por exemplo, não tem, pois, seria o menos dois, que não é natural.
> P_p: Que conclusão vocês tiram disso?
> A_1: Ih... os Naturais não formam grupo?
> A_4: Os Inteiros é! Não é professor?

> *P_p:* O conjunto dos Inteiros com qual operação?
> *A_4:* Com a adição, uai.
> *(...)*

Nesse diálogo, podemos perceber que os alunos, apesar de já conhecerem o conceito de grupo, ainda tinham dificuldades em usar esse conceito para justificar se um conjunto, com a operação devida, era ou não um grupo. Outro fator que pôde ser observado é que até esse momento, os alunos não consideraram a operação como essencial ao conceito de grupo.

A partir daí, os diálogos seguiram o mesmo curso. Os alunos adotaram os Inteiros, com a operação usual de adição, como sendo o Grupo mais simples e consideraram, como critério de simplicidade usado, o fato de ser o primeiro conjunto que um aluno tem contato e que pode se constituir como uma estrutura de Grupo. O restante do encontro seguiu a mesma dinâmica. Os Racionais com a adição foi o próximo Grupo a ser considerado, seguido pelos Reais e pelos Complexos, ambos também com a adição. Apareceu, também, dentre os conjuntos propostos, o conjunto de matrizes de ordem n.

Um outro caso levantado pelos professores foi a mudança da operação de adição para a multiplicação nesses conjuntos discutidos, isto é, Inteiros, Racionais, Reais e Complexos, como pode ser visto no diálogo a seguir:

> *P_p:* Se colocássemos a multiplicação no lugar da adição nesses grupos, continuariam sendo grupos?
> *Alunos:* Continuariam.
> *P_p:* Vamos ver... começaremos com os Inteiros. Quem seria o elemento neutro da multiplicação?
> *Alunos:* O um.
> *P_p:* Todos os números inteiros têm inverso multiplicativo?
> *Alunos:* Não.
> *P_p:* Então, os inteiros, com a multiplicação, é um grupo?
> *Alunos:* Não.
> (...)
> *P_p:* E os racionais com a multiplicação? Quem seria o elemento neutro?
> *Alunos:* O um também.
> *A_2:* Com a multiplicação todos têm que ser um.
> *P_p:* Todo número racional tem inverso multiplicativo?
> *Alunos:* Sim.
> *P_p:* Quem seria o inverso do número racional zero?
> *A_1:* Não tem, pois, não existe um sobre zero.
> *A_2:* Só por causa do zero deixa de ser grupo?
> *P_p:* Tem como resolver isso?
> (*...silêncio*)
> *P_p:* E se a gente retirasse o zero do conjunto?
> *Alunos:* Pode fazer isso?
> *P_p:* Era o que eu ia perguntar... Basta observar se a multiplicação continua sendo associativa, se ainda tem elemento neutro e se todo elemento racional, agora sem o zero, tem inverso multiplicativo.

> A_1*:* Então, em todos os outros conjuntos tem que tirar o zero, também, para ser grupo, com a operação de multiplicação...
> *(...)*

Ao término do encontro, o Professor-Pesquisador sugeriu que os alunos verificassem se alguns conjuntos estudados em disciplinas do curso superior, com uma dada operação, constituíam-se como estrutura de grupo. Por exemplo: os vetores no plano e no espaço, com a adição usual de vetores; o conjunto de vetores no espaço, com a multiplicação vetorial; O conjunto de funções reais com valores reais, com a adição e com a multiplicação de funções; o conjunto das funções contínuas e o conjunto das funções deriváveis também com a adição e com a multiplicação de funções.

4º Encontro

Neste encontro estavam presentes seis alunos. O Professor-Pesquisador fez uma apresentação expositiva e dialogada sobre álgebra. Apresentou um breve histórico sobre a origem da álgebra; falou sobre as suas diferentes abordagens e suas aplicações, enfatizando as estruturas algébricas.

Durante a apresentação do primeiro slide, o Professor-Pesquisador comentou sobre quando a palavra Álgebra começou a ser usada e o que ela representava. Como podemos ver no slide mostrado no Quadro 11:

Quadro 10 – Primeiro slide da apresentação sobre Álgebra

As origens

A palavra álgebra – al jebr em árabe – foi usada primeiramente por Mohammed Kharizm, que ensinava matemática em Bagdá. A palavra "álgebra" pode ser traduzida como "reunião" e, para Kharizm, descreve a reunião de métodos para coletar os termos de uma equação, afim de resolvê-la. A origem da palavra "álgebra" reflete claramente o contexto daquela época, que era, principalmente, o de resolver equações. De fato, Omar Khayyam, que era conhecido por seus brilhantes poemas da coleção *Rybaiyat* – mas que também era um importante matemático da época – define explicitamente a álgebra como *a ciência de resolver equações* e, foi um dos precursores dos métodos para resolver equação de terceiro grau, descobrindo um método geométrico capaz de resolver alguns tipos dessas equações.

Fonte: Adaptado de Pinter (2013)

Durante a exposição do segundo slide, Quadro 12, o Professor-Pesquisador discutiu as concepções da Álgebra de acordo com Usiskin (1995), apresentado em detalhes no Capítulo 4 desta tese.

Quadro 11 – Segundo slide da apresentação sobre Álgebra

O que é álgebra?

Definir álgebra não é algo muito fácil. Pois, ela possui diversas concepções e essas concepções estão ligadas ao contexto em que está inserida. As principais pesquisas nessa área apontam para 4 concepções:

- **A álgebra como aritmética generalizada;**
- **A álgebra como um estudo de procedimentos para resolver certos tipos de problemas;**
- **A Álgebra como um Estudo de Relações entre Grandezas;**
- **A Álgebra como um Estudo das Estruturas;**

Fonte: Adaptado de Usiskin (1995)

No terceiro slide, Quadro 13, o Professor-Pesquisador falou sobre as Álgebras Modernas enfatizando as Estruturas Algébricas, foco de estudo da disciplina Álgebra II.

Quadro 12 – Terceiro slide da apresentação sobre Álgebra

Com o surgimento de novas álgebras, muitos matemáticos se atentaram para as novas vertentes que o egrégio tema da matemática tomava. Passava a ser inconcebível aceitar a álgebra meramente como uma *ciência de resolver equações.* "Ela tinha que ser vista como uma ampla área da matemática capaz de revelar princípios gerais que se aplicassem a todas as áreas do conhecimento e a todas as álgebras possíveis" (PINTER, 2013, p. 10).

Algumas questões, então, foram levantadas. O que todas as álgebras têm em comum? Qual é a característica comum que elas compartilham e que nos permite chamá-la todas de "álgebra"? De um modo geral, cada álgebra consiste de um conjunto cujos elementos podem ser qualquer coisa (números, matrizes, funções, pessoas, etc.) e uma operação binária definida nesse conjunto. Uma operação binária é simplesmente uma forma em que a combinação de quaisquer dois elementos de um conjunto produz um único elemento do mesmo conjunto.

Assim, somos levados a um novo e moderno campo de estudos – as *estruturas algébricas*. Portanto, uma estrutura algébrica pode ser entendida como um conjunto arbitrário, com uma ou mais operações definidas nele. E a álgebra, então, pode ser definida como *o estudo das estruturas algébricas.*

Fonte: Pinter (2013)

Ao término da apresentação, houve um momento para perguntas e comentários e, logo em seguida, foi proposta a Atividade 3, apresentada a seguir:

Atividade 3: Joãozinho sonhou que havia um grupo de seres estranhos se comunicando em um idioma que ele nunca tinha ouvido. Sempre que um dos seres pronunciava duas palavras distintas, ou não, de um grupo de palavras, que ele identificou como: pok, simb, climb, tend e memb, os outros respondiam, em coro, uma palavra desse grupo. Ele observou que as respostam não eram aleatórias, isto é, se um par de palavras se repetisse, a resposta também se repetia. De posse de um pedaço de papel e uma caneta, ele construiu uma tabela onde se pode identificar a resposta para cada par de palavras, como podemos ver a seguir:

	pok	***simb***	***climb***	***tend***	***memb***
pok	*pok*	*simb*	*climb*	*tend*	*memb*
simb	*simb*	*climb*	*tend*	*memb*	*pok*
climb	*climb*	*tend*	*memb*	*pok*	*simb*
tend	*tend*	*memb*	*pok*	*simb*	*climb*
memb	*memb*	*pok*	*simb*	*climb*	*tend*

Por exemplo, para saber a resposta dada ao par (tend, climb) basta olhar, na tabela, a palavra que se encontra na mesma linha (horizontal) da palavra tend e mesma coluna (vertical) da palavra climb. Logo, podemos escrever (tend, climb) = pok.

Observando a tabela, responda:

a) Para cada par de palavras (distintas ou não), retiradas das cinco palavras citadas, tem-se uma resposta dentre as cinco palavras?

b) Qual a resposta para ((tend, climb),simb) ? e para (tend, (climb, simb))?

c) Existe alguma palavra que quando está em algum par, a resposta é sempre a outra palavra desse par?

d) Para cada palavra dada, existe uma outra palavra que, ao formar par com ela, tem-se como resposta a palavra pok? se existir, determine essa outra palavra para cada uma das cinco palavras.

e) Qual é a palavra x, tal que ((x, climb), (x, tend)) = memb?

Fonte: Elaborado pelo autor

O objetivo desse encontro foi mostrar aos alunos que uma estrutura de grupo pode ser finita, isto é, é possível estabelecer uma operação binária em um conjunto finito, de forma que essa operação possua as propriedades que caracterizam um grupo. A experiência, tanto do Professor-Pesquisador como do Professor-Colaborador, no ensino de álgebra, tem mostrado a dificuldade que os alunos têm para conceber a ideia de operações em conjuntos finitos e, consequentemente, entender estruturas finitas. Por esse motivo, os professores acharam necessário um encontro especificamente para dar ênfase aos grupos finitos. Além disso, é mais fácil entender, explorar e justificar conceitos e conteúdos definidos em conjuntos com poucos elementos, como, por exemplo, a propriedade associativa. Esse momento foi também aproveitado para introduzir o conceito de Tábua de Operação.

O encontro seguiu o mesmo padrão já citado anteriormente. Primeiro uma leitura individual e, em seguida, uma leitura em grupo. Ao término da leitura, seguiu-se um tempo para a resolução do problema. Eram dois grupos, com três alunos cada. Não houve dificuldade inicial para a resolução do problema, como ocorreu em encontros anteriores. A dificuldade que ainda persistia era a de se trabalhar de forma colaborativa e cooperativa. Assim sendo, os professores dispenderam a maior parte do tempo em incentivar esse tipo de trabalho, bem mais do que conduzi-los à resolução do problema. Apenas no item e) os alunos tiveram alguma dificuldade na resolução, porém sanada após a intervenção dos professores.

Na plenária, os professores levaram os alunos a perceber que:

- O item a) sendo verdadeiro caracterizava a relação estabelecida pela Tabela, como uma operação binária definida no conjunto *{pok, simb, climb, tend, memb}*;
- Os dois valores, calculados no item b), são iguais e isso constitui um caso particular da propriedade associativa. Porém, é preciso que todas as outras possibilidades também sejam verdadeiras, para se afirmar que essa operação é associativa;
- O item c) mostra que a palavra *pok* é o elemento neutro da operação definida pela Tabela;
- O item d) mostra que cada elemento do conjunto *{pok, simb, climb, tend, memb}* é inversível;
- Os três itens a), b) e c) mostram que o conjunto *{pok, simb, climb, tend, memb},* com a operação estabelecida pela Tabela é um grupo;
- E o item e) mostra um exemplo de uma equação em um grupo finito, cuja solução pode ser determinada por tentativas, ou pelo uso das propriedades das operações.

A seguir, apresentamos um dos diálogos ocorridos na plenária:

> P_p: O que vocês puderam concluir do item a)?
> Alunos: Que é uma operação binária.
> P_p: O que é uma operação binária?
> A_8: É quando associa um par de elementos de um conjunto a um elemento desse conjunto.

P_p: Ok. Mas, no problema, onde está a operação?
Alunos: Na tabela.
P_p: E o que vocês perceberam no item b)?
Alunos: associativa.
P_p: Como assim, associativa?
A_3: O grupo é associativo.
P_p: O grupo? ainda nem sabemos se temos um grupo. E mais, todo grupo é associativo.
A_8: A operação, professor, que é associativa.
A_4: É isso, eu queria dizer que a operação é associativa.
P_p: E os itens c) e d)?
Alunos: Elemento neutro e Inverso.
P_p: Então o que podem dizer do conjunto formado por: *pok, simb, climb, tend, memb* com a operação definida pela tabela?
Alunos: É um grupo.
P_p: Quantos elementos possui esse grupo?
Alunos: cinco.
(...)

No diálogo apresentado, podemos perceber que os alunos não tiveram dificuldade em associar a solução, de cada item, com os conceitos estudados anteriormente. Pois, eles já sabiam que o Professor-Pesquisador pretendia introduzir um novo conceito utilizando a resolução do problemas e seus conhecimentos prévios. Como os conceitos já estudados, nessa disciplina, eram apenas *operação binária, grupo e as propriedades associativa, elemento neutro e existência de simétrico*, eles buscavam associar a resolução de cada item, do problema proposto neste encontro, com um desses conceitos que lhes pareciam mais pertinentes.

No final do encontro, o Professor-Pesquisador propôs mais uma Atividade Extraclasse.

Atividade Extraclasse 2

1) Considere o conjunto $Z_6 = \{0,1,2,3,4,5\}$ e defina, sobre Z_6 , $\overset{6}{+}$ e $\overset{6}{\bullet}$ como:

$$a \overset{6}{+} b = \textit{resto da divisão de } a+b \textit{ por } 6 \text{ e}$$

$$a \overset{6}{\bullet} b = \textit{resto da divisão de } a \cdot b \textit{ por } 6 \text{ ,}$$

onde $+$ e $\cdot$ são as operações usuais de adição e multiplicação de números inteiros, respectivamente. Baseado nessas informações, mostre que:

a) $\overset{6}{+}$ e $\overset{6}{\bullet}$ são operações binárias em Z_6 e construa suas tábuas de operações;

b) $(Z_6, \overset{6}{+})$ é um grupo;

c) $(Z_6 - \{0\}, \overset{6}{\bullet})$ é um grupo;

2) Pesquise e/ou construa outros exemplos de grupos finitos;

Fonte: Elaborado pelo autor

Apesar desses alunos já terem tido contato com conjuntos desse tipo ($Z_n,\ n \in \mathbb{N} - \{0\}$), em Álgebra I, a dificuldade com a notação ainda era visível. O Professor-Pesquisador explicou que Z_6 era o conjunto de todos os possíveis restos da divisão de um número inteiro por 6 e, as operações $\overset{6}{+}$ e $\overset{6}{\cdot}$ se diferenciava da adição e multiplicação usual apenas por ter que tomar como resultado não a soma ou o produto, mas o resto da divisão inteira, da soma ou produto usual, por 6. Mesmo com esses esclarecimentos os alunos alegaram, posteriormente, dificuldades com a notação, como podemos ver o no 5º Encontro, a seguir.

5º Encontro

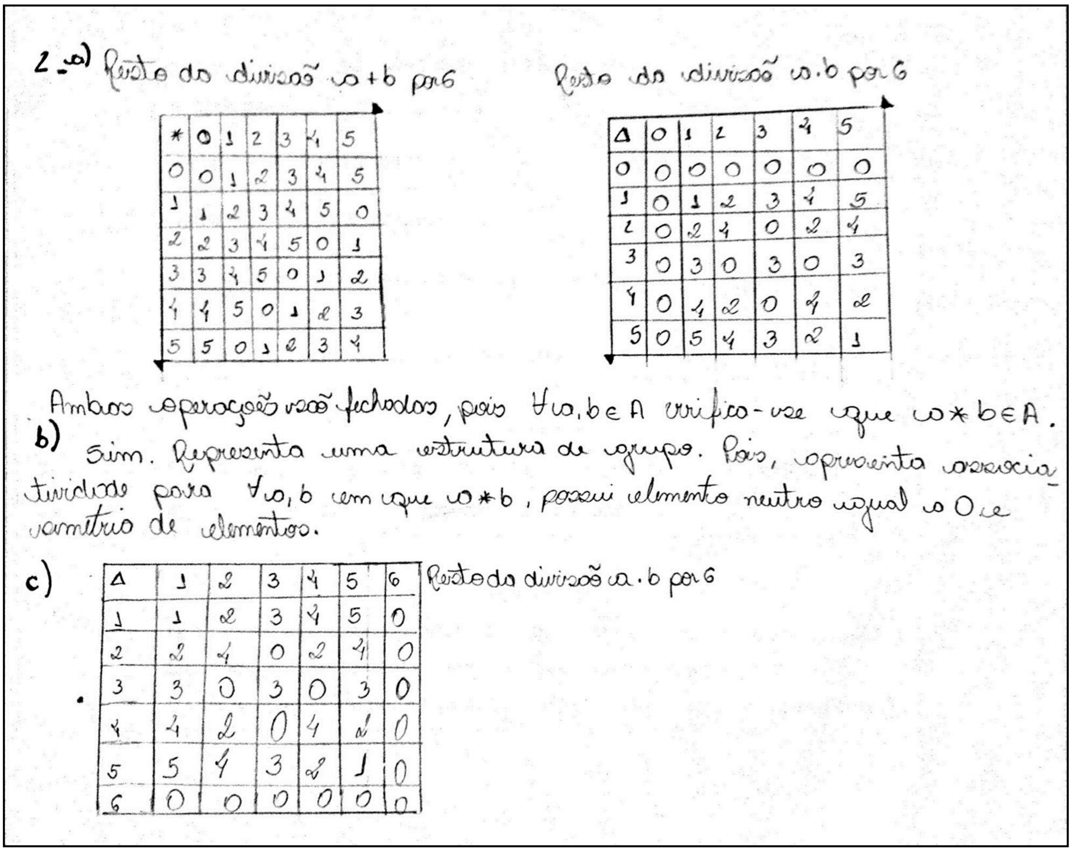
Neste encontro, compareceram oito alunos. A aula foi trabalhada exclusivamente com a Atividade Extraclasse 2. Os alunos alegaram que tiveram muitas dificuldades para resolver essa atividade sozinhos. Assim, os professores decidiram dar um tempo para que, em grupo, eles pudessem resolver a questão 1, dessa atividade, em sala de aula. Primeiramente, discutiu-se o entendimento do enunciado do problema e, só depois, os alunos deram início à sua resolução. Os professores, agindo como mediadores, incentivaram, mais uma vez, o trabalho cooperativo e colaborativo.

A aluna A_8, mais interessada na resolução desse problema, conseguiu envolver seu grupo na busca de compreender o que era pedido nele.

Depois do entendimento do problema, os alunos não tiveram muitas dificuldades nessa atividade. A princípio ficaram um pouco confusos com algumas notações, mas durante a resolução do item a), aparentemente as dúvidas foram sanadas e todos os grupos resolveram parcialmente o problema. Em seguida, colocaram suas soluções na lousa e promoveu-se uma discussão sobre a solução do problema e outras dúvidas que surgiram naquele momento. Logo em seguida, os professores mostraram uma aplicação desse grupo e de grupos semelhantes.

Na Figura 11 é apresentada a resolução desse problema feita por um dos grupos:

Figura 11 – Resolução da Atividade Extraclasse 2



Fonte: Dados da pesquisa

Observe, na Figura 11, que a resolução do problema está incompleta e com alguns erros. Durante a apresentação e a discussão desse problema, os professores chamaram a atenção para o cuidado com a forma que se escreve. Foi possível perceber que o erro na escrita não era por falta de conhecimento dos conceitos algébricos, mas pelos alunos não saberem expressar esse conhecimento e, até mesmo, por eles não considerarem isso importante, como podemos ver no diálogo a seguir:

> P_p: (apontando para a resolução na lousa, ilustrada aqui pela Figura 11) O que significam esse asterisco e esse triângulo (Δ)?
> A_8 *:* As operações.
> P_p: São esses os nomes das operações que são apresentados no enunciado do problema?
> A_8*:* Não.
> P_p*:* E quais são?
> A_8: $\overset{6}{+}$ e $\overset{6}{\bullet}$
> P_p*:* Por que vocês mudaram o nome das operações?
> A_8*:* É o costume. Toda operação nova o professor usa asterisco ou triângulo.
> *Alunos:* No livro usa asterisco e triângulo também.
> (...)

> P_p: O que é mesmo um grupo?
> *Alunos:* Um conjunto não vazio, com uma operação associativa, com elemento neutro que todo elemento tem inverso.
> P_p: Olhe para o que está escrito no item b) (apontando novamente para a resolução mostrada pela Figura 11) e me diz se o que está escrito aqui, realmente, justifica que $(Z_6, \overset{6}{+})$ é um grupo.
> A_3: A associativa não é isso aí não, né professor?
> P_p: E o que significa simetria de elementos?
> A_8: Ah professor, dá pra entender.
> P_p: Quem já sabe pode até entender o que vocês queriam dizer. Mas vocês serão professores e terão que escrever para quem ainda não sabe.
> *(...)*

A escrita correta das simbologias e terminologias matemáticas é uma das grandes dificuldades que os professores, Pesquisador e Colaborador, perceberam durante este e outros encontros. Acreditamos que é preciso trabalhar com mais afinco essa parte, não apenas na disciplina de Álgebra, mas em todas as disciplinas da formação de professores. Se os alunos da Licenciatura não aprenderem a colocar, no papel e na lousa, suas ideias de forma correta e compreensível, como irão ensinar matemática? Acreditamos, também, que a grande dificuldade que os estudantes têm em fazer demonstrações matemáticas está relacionadas à falta de capacidade de grafar suas ideias de forma organizada e compreensível. Assim, cada professor formador de professores deveria dispender esforços afim de corrigir esse problema.

No restante do encontro, alguns alunos apresentaram exemplos de grupos finitos que eles haviam pesquisado (segunda questão dessa atividade). E a discussão principal continuou em torno da escrita, ou seja, de como justificar, por escrito, que um conjunto com uma operação definida nele é um grupo.

6º Encontro

O objetivo deste encontro foi o de introduzir o conceito de subgrupo. Para isso foi trabalhada a Atividade 4 de forma que, durante sua resolução, os alunos pudessem perceber que a operação adição de inteiros é fechada nos Pares e, consequentemente, possuía a propriedade associativa – herdada da associatividade dos inteiros – pois todo número par é inteiro. Além disso, os Pares possuem elemento neutro da adição. Ainda, se considerarmos também os pares negativos, cada número par possui um simétrico aditivo. Essas propriedades caracterizam o conjunto dos números pares como um grupo aditivo, contido grupo dos Inteiros e, com isso, foi introduzido o conceito de subgrupo, como um subconjunto de um grupo que, com a operação desse grupo, também se constitui um grupo.

Neste encontro compareceram oito alunos e foi utilizada a Metodologia de Ensino–Aprendizagem–Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. Primeiramente, foi apresentada aos alunos a Atividade 4, como descrita a seguir:

Atividade 4: João comprou um livro e reparou que ele tinha 200 páginas. Seu irmão mais novo arrancou ao acaso 25 folhas e somou os números das 50 páginas. Explique porque o resultado dessa soma não pode ser igual a 1998. Atenção: Cada folha tem duas páginas. A primeira folha tem as páginas 1 e 2, a segunda folha tem as páginas 3 e 4, e assim por diante.

Fonte: Revista Eureka N^o 4 – 1999, página 14.

Formaram-se três grupos. Dois deles com três integrantes e um com dois. O enunciado do problema pareceu claro para todos os alunos, porém, eles não sabiam por onde começar sua resolução. Um dos grupos decidiu simular uma situação, considerando que as páginas fossem: 1, 2, ..., 50. O objetivo, desse grupo, era o de tentar provar que a soma dessas páginas era sempre maior que 1998. Montaram uma P.A. (progressão aritmética) de razão 1, e obtiveram a soma 1275. Isso mostrava que a soma de 50 páginas poderia ser inferior a 1998. O Professor-Pesquisador sugeriu que se fizesse a mesma coisa, considerando as últimas páginas: 176, 177,... ,200. Eles fizeram a soma dessas páginas e encontraram 8775. Com isso, perceberam que, a princípio, a soma de 50 páginas aleatórias poderia ser qualquer valor entre 1275 e 8775. Então, seria preciso procurar um outro caminho para resolver o problema.

O Professor-Pesquisador, ao perceber que os alunos não conseguiam tomar uma direção que os conduzisse à solução do problema, interveio, como mediador, e começou a fazer perguntas com o propósito de levar os alunos a refletir e identificar dados ocultos no problema. Para entendermos melhor a ação do Professor-Pesquisador e o comportamento dos alunos diante disso, apresentaremos uma parte desse diálogo:

P_p: Quantas páginas possui cada folha?
Alunos: duas.

> *P_p*: Ao escolhemos, aleatoriamente, uma folha, qual a relação entre as páginas dessas folhas? Por exemplo, se uma das páginas for 30 qual é a outra?
> *Alunos:* Trinta e um ou vinte e nove.
> *P_p*: Quais são as primeiras páginas do livro?
> *Alunos*: Um e dois
> *P_p*: E as páginas da terceira folha?
> *Alunos*: Cinco e seis?
> *P_p*: Então, o número trinta será o primeiro ou o segundo número de uma da folhas?
> *Alunos*: O segundo. O primeiro é vinte e nove.
> *P_p*: Por que essa folha não poderia conter as páginas trinta e, trinta e um?
> *Alunos*: por que o ímpar sempre vem primeiro, tipo: 1 e 2, 3 e 4, 5 e 6, e assim por diante.
> *(...)*

Essa questão da página ímpar anteceder à par, não é relevante para a resolução do problema. O autor do problema, só acrescenta a informação de que a primeira página do livro é 1, para não dar margem a especuladores, visto que, existem livros onde as primeiras paginas não são enumeradas e livros de coleções (com mais de um volume), onde a primeira página é a continuação da última página do volume anterior; e outras situações que possam ocorrer. Porém, o objetivo do Professor-Pesquisador em insistir nesse ponto, isto é, quais números estão na primeira e na segunda página de uma determinada folha, foi o de levar os alunos a perceber a existência de um dado importante do problema, que é: “cada folha possui uma página par e uma ímpar“. A partir daí, os alunos passariam a ter um caminho que os levasse à direção da solução do problema. Continuemos com o diálogo:

> *P_p*: O que vocês concluíram sobre a primeira página de cada folha?
> *Alunos*: É impar
> *P_p*: E a segunda ?
> *Alunos*: É sempre par .
> *Pp*: E a soma das páginas de cada folha?
> *Alunos*: Dá impar
> *P_p*: Por que?
> *Alunos*: A soma de ímpar com par, é ímpar
> *P_p*: Parece que surgiu uma informação importante. Vou dar mais um tempo para vocês trabalharem no problema.

Não demorou muito para que um dos grupos conseguisse resolver o problema. A resolução do problema, por esse grupo, foi muito comemorada. Uma das alunas não conteve a emoção, levantou-se, dançou e começou a contar, em voz alta, como encontraram a solução. Pouco depois, os outros dois grupos também resolveram o problema.

Na plenária, houve duas resoluções, de certa forma distintas. Em uma delas, foi considerada a soma das páginas de cada folha, observando que essa soma dava sempre impar e, a soma de vinte cinco números impares daria ímpar e, portanto, não poderia ser 1998 que é par. Na outra resolução, o grupo observou que as primeiraa páginas de cada folha eram sempre impares e, consequentemente, sua soma seria ímpar. De forma análoga, a segunda página de cada folha era sempre par e a soma delas daria par. Logo, a soma final seria a soma de um ímpar (soma das páginas ímpares) com um par (soma das páginas pares) cujo resultado é ímpar e, portando, não poderia ser 1998.

O diálogo, a seguir, mostra como o Professor-Pesquisador conduziu essa plenária de forma a introduzir o conceito de subgrupo:

> P_p: Que matemática foi preciso para resolver o problema?
> A_3: Só somar mesmo.
> A_4: Tivemos que somar os pares e ímpares separadamente.
> P_p: O que vocês podem dizer sobre a soma de números pares?
> A_8: A soma de dois números pares dá par.
> P_p: O que podemos dizer da adição no conjunto dos números pares?
> A_8: É fechada?
> P_p: O que é uma operação binária mesmo?
> Alunos: É uma regra que associa cada par de elementos de um conjunto a um único elemento desse conjunto.
> A_8: Então a adição é uma operação no conjunto dos pares, não é?
> P_p: Exatamente. A adição usual dos inteiros é também uma operação no conjunto dos número pares. Essa operação é associativa no conjunto dos número pares?
> A_1: Acho que sim.
> P_p: A adição, nos Inteiros, é associativa?
> A_8: É sim, os Inteiros é um grupo.
> P_p: Os números pares são inteiros?
> *Alunos*: São.
> P_p: O que podemos concluir com isso?
> A_1: Como assim?
> P_p: Sobre a associatividade da adição no conjunto dos número pares.
> A_8: É associativa, porque todo par é inteiro também. Não é isso, professor?
> P_p: Isso mesmo. O Conjunto dos números pares tem elemento neutro?
> A_4: Tem. O zero.
> P_p: Todo número par tem um simétrico também par?
> A_1: Acho que não? o simétrico de 2 seria -2... -2 é par?
> P_p: Vocês acham que um número negativo também pode ser par?
> A_1: Eu nunca vi falar que negativo é par.
> P_p: E o que é um número par?
> A_8: Todo número divisível por 2.
> P_p: -2, -4, -8, etc. são divisíveis por 2?
> A_8: São. Então são pares.
> P_p: O que podemos concluir do conjunto dos números pares, incluindo positivos e negativos, com a operação de adição dos inteiros?
> A_8: É um grupo.
> P_p: Por que?
> A_8: É associativa, tem elemento neutro e todo elemento tem inverso.

P_p: Então temos um grupo dentro de outro grupo, com a mesma operação. Isto é, o grupo dos Pares está dentro do grupo dos Inteiros, ambos com a adição. Sabe como chamaremos o grupo dos Pares?
A_2: Subgrupo.
P_p: Exatamente. Toda vez que um subconjunto se constituir um grupo com a mesma operação do grupo maior, ele será chamado subgrupo desse grupo.
(...)

Com isso, o Professor-Pesquisador fez a formalização de subgrupo da seguinte forma:

Definição: Seja (G,*) um grupo e H um subconjunto não vazio de G. Dizemos que H é um subgrupo de G, e denotaremos por $H \leq G$, se H for ele próprio um grupo com a mesma operação de G.

Logo em seguida, o Professor-Pesquisador aproveitou a discussão para introduzir um resultado importante sobre subgrupos, como podemos ver a seguir:

Pp: Ficou claro o que é um subgrupo?
A1: Sim professor... é um grupo dentro de outro.
Pp: Qual deve ser a operação do subgrupo?
A1: A mesma do grupo.
Pp: Como a gente verifica se um subconjunto é um subgrupo?
A8: Verificar se a operação é associativa, tem elemento neutro e simétrico.
Pp: Precisamos verificar se a operação é associativa?
A8: Claro que sim.
Pp: Como descobrimos que a adição era associativa no conjunto dos número pares?
A8: Porque ela é associativa nos inteiros e todo par é inteiro.
Pp: Então, se temos um grupo, todo elemento de um subconjunto desse grupo é um elemento do grupo. Não podemos usar esse mesmo argumento?
A8: Acho que sim. Então não precisamos verificar associatividade?
Pp: Por esse argumento percebemos que não. Mas tem uma coisa importante que precisamos verificar e que não foi mencionada. Alguém sabe o que é?
A1: Ah professor. Aí você já está complicando.
Pp: Por que os Ímpares não são um subgrupo dos Inteiros?
A8: Porque a soma de dois ímpares não dá ímpar. Ah, então precisamos verificar se é fechado.
Pp: Exatamente. A operação do grupo precisa ser também uma operação no subconjunto e isso é a primeira coisa a ser verificada. Se não funcionar já não é subgrupo. Precisamos verificar se o subconjunto tem elemento neutro?
A4: Temos, e, no caso, é o próprio elemento neutro do grupo.
Pp: Mas, se a operação do grupo for uma operação no subconjunto, ou seja, a operação pega cada par de elementos do subconjunto e retorna um elemento do subconjunto e, ainda, se cada elemento do subconjunto tiver um simétrico também no subconjunto, não dá pra concluir que o neutro do grupo está no subconjunto?
A1: Não entendi.
Pp: (O Professor-Pesquisador foi a lousa e escreveu o conjunto {..., -4, -2, 2, 4,...} e apontou). Esse conjunto é fechado com a operação de adição?
A2: É.
Pp: Qual a soma de -2 com 2?

A2: Zero.
Pp: Zero está no conjunto?
A2: Não. Então não é fechado.
Pp: Então, se todo elemento do subconjunto possui um inverso no subconjunto, o que podemos concluir?
A8: O neutro tem que estar nele. Deixa eu ver se entendi... para eu provar que é subgrupo eu não preciso provar a propriedade associativa e nem que tem elemento neutro?
Pp: Exatamente. O que você vai precisar provar?
A2: Só a existência do simétrico.
Pp: Mais nada?
A8: Tem que provar o fechamento também, não é? tem que provar que é fechado e que todo elemento tem simétrico.
Pp: Isso mesmo. E isso é um teorema cuja demonstração, basicamente, já fizemos. A associativa é herdada do grupo, o simétrico a gente precisa verificar e o neutro decorre da existência do simétrico e do fechamento.

Em seguida o Professor-Pesquisador enunciou e demonstrou formalmente o Teorema 1, que mostramos a seguir:

Teorema 1: Seja (G,*) um grupo e H um subconjunto não vazio de G. $H \leq G$ se, e somente se, forem válidas as seguintes condições:

i) $a,b \in H \Rightarrow a*b \in H$; (fechamento)

ii) $a \in H \Rightarrow a' \in H$, onde a' é o simétrico de a em G. (existência de simétrico)

Demonstração:

Observe que se $H \leq G$ então, pela própria definição de subgrupo, valem i) e ii). Precisamos mostrar que se valem i) e ii) então $H \leq G$.

a) Como * é associativa em G e $H \subset G$ temos que * é associativa em H (hereditariedade);

b) Se $a \in H$, pela hipótese ii), $a' \in H$. Logo, pela hipótese i), $a*a' \in H \Rightarrow e \in H$;

Portanto, por valer a), b) e a hipótese ii) temos $H \leq G$ ■

No final do encontro os professores, Pesquisador e Colaborador, chamaram a atenção para a necessidade da demonstração de algumas afirmações, como: “A soma de par com ímpar é ímpar”; “a soma de vinte cinco números ímpares dá impar”; “A soma de vinte cinco números pares dá par”. Ainda foi proposta uma atividade extraclasse com o objetivo de fixar o conceito estudado e a fazer uma relação dos conteúdos estudados com os conteúdos da Educação Básica. Apresentamos, a seguir, essa atividade:

Atividade Extraclasse 3

1. Faça uma lista de todos os subgrupos dos grupos listados na atividade extraclasse do segundo encontro.

2. Mostre que, se $H \leq G$, então, o elemento neutro de *H* é o mesmo do de *G.*

3. O item ii) do Teorema 1, pode ser substituído por: “$e \in H$ *, onde* e *é o elemento neutro de G*” ? justifique.

4. Mostre que as duas condições i) e ii) do Teorema 1, podem ser trocadas pela condição única: $"a, b \in H \Rightarrow a * b' \in H"$

7º Encontro

Neste encontro foi trabalhada a Atividade Extraclasse 3. Essa atividade foi distribuída em duas partes: A primeira parte composta pela questão 1, que buscava relacionar o conceito de subgrupo com conteúdos da Educação Básica; e, a segunda parte, pelas questões 2, 3 e 4, que tinham por objetivo introduzir novos resultados envolvendo subgrupos, fixar os conceitos estudados e trabalhar o processo de demonstração, muito importante no curso de Álgebra Abstrata e em outras áreas da Matemática.

Todos os alunos compareceram a esse encontro. O Professor-Pesquisador, pediu que os alunos entregassem a Atividade Extraclasse 3 e que, depois de recebida pelo professor, fossem colocadas na lousa. Em seguida, os professores promoveram uma discussão sobre essas soluções apresentadas. Primeiramente foi pedido que o aluno identificasse e comentasse os subgrupos dos Inteiros. Alguns alunos apontaram os Naturais como um desses subgrupos, mas os próprios colegas, levaram esses alunos a perceber a falta do simétrico aditivo, nos Naturais. O conjunto dos números pares foi lembrado pelos alunos como um subconjunto dos Inteiros e os professores lhes chamaram a atenção sobre a existência dos subgrupos triviais (o próprio grupo ou o grupo formado apenas pelo elemento neutro), não apenas nos Inteiros, mas em todos os grupos. Em seguida, passou-se para os números racionais, primeiro com a adição e, depois, com a multiplicação. Por ultimo, discutiu-se o subgrupo dos números reais, porém, sem formalismo ou muito aprofundamento. Nessa etapa, destacamos alguns diálogos, apresentados a seguir:

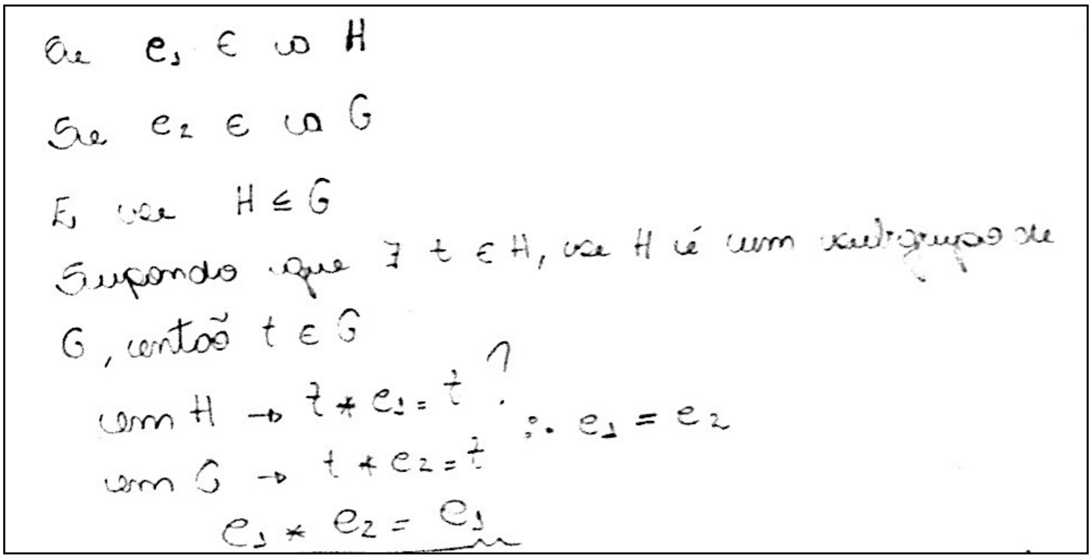
A_3: Professor, o conjunto dos números pares é um subgrupo dos Racionais?
P_p: Já mostramos anteriormente que o conjunto dos números pares é um subgrupo aditivo dos Inteiros. E acabamos de mostrar que os Inteiros são um subgrupo aditivo dos Racionais. Você acha que, com isso, podemos concluir que o conjunto dos números pares é um subgrupo dos Racionais?
A_3: Ah,... nesse caso sim. Mas... Eu estava falando sobre as frações pares.
P_p: Frações pares?
A3: As frações do tipo $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, ...$
P_p: Entendi, porém gostaria de lembrar que "par " e "ímpar" são definidos apenas para números inteiros. Mas, podemos construir um conjunto formado por essas frações, que você chamou de pares, e verificar se esse conjunto, com uma operação fixada, é um subgrupo dos Racionais. Que operação você pensou em usar nesse conjunto?
A_3: Adição.
P_p: Ok. Qual seria o elemento neutro?
A_3: Parece que não tem.
A_1: Tem sim, 0 é o mesmo que $\frac{0}{2}$.
P_p: Mas, pelo que eu entendi, A3 pensou no conjunto de todas as frações com numerador 1 e denominador par. Podemos escrever o zero nessa forma?
A_1: Não.
A_8: E,... se a gente colocasse o zero nesse conjunto? pegar as frações que o A_3 falou e incluir, nesse conjunto, o zero. Aí, teria o elemento neutro, não teria?
P_p: Parece uma ideia interessante. Será que em todo subgrupo que a gente for construir, precisamos colocar o elemento neutro do grupo nele?
A_2: Tem. Sem o neutro não temos subgrupo.
P_p: Mas o neutro do subgrupo precisa ser o mesmo do grupo?
A_8: O exercício dois está pedindo pra provar isso.
(...)
P_p: Nesse conjunto, proposto pelo o A_3, com a inclusão do zero, sugerida pela A_8, todo elemento possui simétrico?
A_3: Se a gente colocar, nesse conjunto, os negativos também, aí tem.
P_p: A adição é associativa nesse conjunto?
A_1: É sim, pois, os Racionais são associativos e esses elementos são racionais.
P_p: O que A1 quis dizer é que a adição é associativa nos Racionais. Logo é associativa em qualquer subconjunto dos Racionais.
A_3: Herda associatividade, é isso mesmo?
P_p: Isso mesmo. Então, o conjunto que acabamos de construir, com frações de numerador 1, denominador par, incluindo positivos e negativos e também o zero, é um subgrupo dos Racionais?
Alunos : Sim.
P_p: Não falta verificar nada?
Alunos: Não .
P_p: O que diz o Teorema 1, visto na aula passada?
A_8: O teorema diz que bastam duas condições para ser subgrupo.
P_p: Qual é a primeira?
A_8: Para todo a e todo b pertencentes a H, a operado com b pertence a H.
P_p: O que isso significa ?
A_8: Que H é fechado com essa operação.
P_p: Exatamente, o subconjunto precisa ser fechado com a operação do grupo, senão a operação do grupo não será, também, uma operação no subconjunto.
A_1: Então, se a gente somar duas frações desse conjunto tem que dar uma fração desse mesmo conjunto .

P_p: vamos verificar se isto é verdade ?
(...)

Após essa discussão, os alunos perceberam, através de um exemplo, que a adição não era fechada nesse conjunto e, portanto, o conjunto dessas frações não era um subgrupo dos Racionais. Os alunos acharam interessante essa discussão, reconhecendo a necessidade de compreender bem os conceitos e tomar cuidado antes de fazer uma afirmação.

No restante do encontro foi feita uma discussão rápida sobre os subconjuntos dos Reais e, em seguida, passamos para as questões 2, 3 e 4. A Figura 12 mostra a resolução da questão 2 feita por um dos alunos.

Figura 12 – Resolução da questão 2


Se $e_1 \in$ o H
Se $e_2 \in$ o G
E, se $H \leq G$
Supondo que $\exists\, t \in H$, se H é um subgrupo de G, então $t \in G$
em $H \to t * e_1 = t$?
em $G \to t * e_2 = t$ $\therefore e_1 = e_2$
$e_1 * e_2 = e_1$

Fonte: Dados da pesquisa

Apesar da maioria dos alunos apresentar o desenvolvimento correto da questão 2, notadamente eles não tinham convicções do que haviam feito. Todos os alunos que resolveram essa questão fizeram de forma análoga à apresentada na Figura 12. Porém, quando esses alunos foram questionados sobre sua própria resolução, a maioria não tinha ideia do que eles haviam feito. Isso demonstra que eles estavam preocupados em apresentar uma solução para a atividade proposta, mas não na aprendizagem proporcionada por ela. Muitos deles, simplesmente, copiaram a resolução de algum livro ou de um colega, sem mesmo refletir ou procurar entender o que estavam copiando e se justificaram alegando ter muita dificuldade em fazer demonstrações ou mesmo de entendê-las. Percebe-se, pela Figura 12, alguns erros como, por exemplo, não ter sido mencionado que e_1 e e_2 são os elementos neutros de H e G, respectivamente. Os erros de escrita também persistiram como podemos ver, também na Figura 12, um "a" entre o símbolo "pertence" e o conjunto. Assim, ter um momento próprio para discutir as Atividades Extraclasse, passa a ser de suma importância nesse processo de ensino, aprendizagem e, principalmente, de avaliação. Pois, nesse momento, o professor pode perceber o envolvimento do aluno e seu entendimento sobre conteúdos específicos, identificando os erros cometidos por ele. De posse dessas informações, o professor poderá estimular o aluno a discutir, refletir, analisar e corrigir seus próprios erros.

A principal dúvida levantada sobre a questão 2 foi entender que, a priori, um dado elemento de um subgrupo pode se comportar como elemento neutro no subgrupo e, não necessariamente, no grupo todo. Apresentamos a seguir, alguns questionamentos dos alunos sobre a resolução dessa questão.

> A_2: Professor, se eu sei que H é um subgrupo então ele é um grupo também, certo?
> P_p: Certo.
> A_2: Se ele é um grupo ele tem que ter um elemento neutro, não tem?
> P_p: Tem.
> A_2: Mas já sabemos que o elemento neutro de um grupo é único. Então o elemento neutro de H tem que ser o mesmo de G. Se fossem diferentes o G teria dois elementos neutros, porque o elemento neutro de H, que seria diferente do de G, também estaria em G. Assim, não vejo porque precisamos provar isso.
> P_p: O que é o elemento neutro?
> A_2: Um elemento que somado com qualquer outro dá o outro.
> A_1: Somado não, operado.
> A_2: Isso mesmo, o elemento que operado com qualquer outro dá o outro.
> P_p: Imagine que se tivesse um elemento em H que operado com qualquer outro elemento de H desse esse outro elemento. Mas, que se eu operasse esse mesmo elemento com algum elemento de G, que não está em H, não desse esse mesmo elemento de G. Esse elemento que estamos imaginando seria neutro de H? seria neutro de G, também?
> A_2: Deixa eu ver se entendi. Eu opero ele com qualquer outro elemento de H e dá esse outro elemento de H?
> P_p: Sim.
> A_2: Então ele é elemento neutro.
> P_p: De qual conjunto?
> A_2: De H.
> P_p: É elemento neutro de G também?
> A_2: Não, porque o senhor falou que se eu operar ele com um elemento que não está em H não dá esse outro elemento.
> P_p: Então, a princípio, eu poderia ter um elemento neutro de H que não fosse elemento neutro de G.
> A_2: Então teria dois elementos neutros.

P_p: Não. Pois esse elemento que imaginamos seria elemento neutro só de H.
A_2: Mas o elemento neutro de G seria elemento neutro de H também, não seria?
P_p: Se ele não estivesse em H, não.
A_2: Ah, entendi!... Mas tem como isso acontecer?
P_p: Não. Mas precisamos provar.
A_1: Nossa, professor. Toda essa discussão sobre a possibilidade de um elemento em que acontecesse tudo isso e que na verdade nem existe?
P_p: Isso mesmo. Mas só teremos certeza que essa possibilidade não existe se a gente provar.

Nenhum aluno resolveu corretamente as questões 3 e 4. Aparentemente eles não conseguiram entender o enunciado e provavelmente não encontraram suas resoluções em nenhum livro. O Professor-Pesquisador promoveu uma discussão sobre o entendimento dos problemas e depois resolveu-os na lousa. A seguir, mostramos como se deu a discussão sobre o entendimento das questões 3 e 4.

A_8: Professor, porque minha questão 3 está errada?
P_p: O que pede a questão 3?
A_8: Para trocar o item ii) do Teorema 1 por essa afirmação, não é?
P_p: Na verdade, essa questão pergunta se podemos fazer essa troca. Ou seja, saber se o Teorema 1 continuaria valendo depois dessa troca.
A_8: Continua valendo, não continua?
P_p: Você se lembra como demonstramos o Teorema 1?
A_8: Mais ou menos.
P_p: Foi preciso provar a associatividade?
A_8: Não, porque ela é herdada do grupo?
P_p: O que nós provamos no Teorema 1, então?
(... pausa)
A_8: Provamos que o elemento neutro do grupo está em H.
P_p: Isso. Provamos que se H é fechado com a operação do grupo e todo elemento de H possui um simétrico em H então, necessariamente, o neutro do grupo está em H. Certo?
A_8: Certo.
P_p: Agora a questão 3 quer que a gente tire a hipótese de que todo elemento de H possui simétrico em H e coloque qual hipótese?
A_8: Que o elemento neutro de G está em H?
P_p: Isso mesmo. E fazendo isso, o que vai ser preciso provar?
A_8: Ah... professor, tá complicado.
P_p: Considerando que a associativa é sempre válida, para ser grupo, precisamos provar duas coisas, quais são?
A_8: Existência do neutro e do simétrico.
P_p: Certo. O Teorema 1 diz que se a hipótese da existência do simétrico valer então a existência do neutro pode ser provada. O exercício está invertendo, colocando a existência do neutro como hipótese, o que precisaria ser provado então?
A_8: A existência do simétrico?
P_p: Exatamente.
(...)
A_8: Professor, a questão 4 tá dizendo que podemos provar que um subconjunto é um subgrupo só com uma condição.
P_p: Isso mesmo. Qualquer subconjunto não vazio de um grupo, se satisfizer essa única condição, é um subgrupo.
A_8: Nossa! mas como a gente prova isso?
P_p: É o que eu ia te perguntar. Me diz apenas o que precisamos provar?

A₈: Que só precisamos de uma condição no Teorema 1.
P_p: E o que isso significa? quais seriam a hipótese e a tese desse teorema?
A_8: Hipótese é $a,b \in H \Rightarrow a*b' \in H$ e a tese é que o Teorema 1 é válido.
P_p: Qual é a tese mesmo?
A_8: Que H é um subgrupo?
P_p: Isso. Então, considerando a hipótese válida, isto é, $a,b \in H \Rightarrow a*b' \in H$ precisaríamos provar que H é um subgrupo de G. Mas como se prova que um subconjunto é um subgrupo?
A_8: Associativa, elemento neutro e simétrico.
P_p: Precisa provar a associativa?
A_8: Não, é herdada do grupo. E se provamos a existência de simétrico a gente consegue provar que existe elemento neutro.
(...)

O Professor-Pesquisador pretendia convidar um dos alunos para ir à lousa e, com a participação de todos, fazer as demonstrações pedidas nas questões 3 e 4. Porém, devido ao tempo, o próprio professor fez a demonstração procurando envolver ao máximo os alunos durante esse processo. A seguir apresentamos a demonstração feita pelo Professor-Pesquisador:

Considere o grupo $(G,*)$ e H um subconjunto não vazio de G.

$(\Rightarrow)$ ***Primeira parte*** *– Supondo que H é um subgrupo de G, devemos provar que $\forall\, a,b \in H \Rightarrow a*b' \in H$.*

Considere $a,b \in H$. Como H é subgrupo de G, $b' \in H$ e H é fechado, logo, $a*b' \in H$.

$(\Leftarrow)$ ***Segunda parte*** *– Supondo que $\forall\, a,b \in H \Rightarrow a*b' \in H$, devemos provar que H é subgrupo de G (fechado e o simétrico de cada elemento de H está em H).*

Considerando $\forall\, a,b \in H \Rightarrow a*b' \in H$ e tomando $b=a$, temos $a*a' \in H \Rightarrow e \in H$. Isto prova que H possui o elemento neutro.

Agora considere a um elemento qualquer de H. Como $e \in H$, temos $e,a \in H \Rightarrow e*a' \in H \Rightarrow a' \in H$. Isto prova que o simétrico de cada elemento de H está em H.

Para finalizar, se $a,b \in H$, então, $a,b' \in H$ (pois $b' \in H$). Logo, pela hipótese, $a,b' \in H \Rightarrow a*(b')' \in H \Rightarrow a*b \in H$. Isto prova que H é fechado.

Portanto, como H é fechado com a operação $*$ e todo elemento de H possui seu simétrico também em H, pelo Teorema 1, H é um subgrupo de G. ■

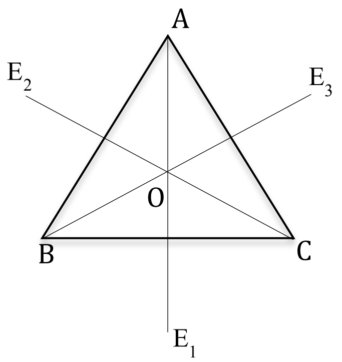
8º Encontro

Neste encontro compareceram sete alunos. O objetivo deste encontro foi definir grupo abeliano. Para isso foi trabalhada a Atividade 5. Essa atividade apresentou um exemplo de um grupo não-abeliano levando os alunos a perceber que nem sempre a comutativa está presente em estruturas matemáticas. Na maioria dos conteúdos, estudados na Educação Básica, as operações possuem a propriedade comutativa e, nas poucas situações em que isso não ocorre, surgem muitos transtornos para os alunos, por desconhecerem, ou mesmo, não se dar importância às propriedades das operações. Muitas vezes, essas propriedades só são percebidas, ou valorizadas quando algo dá errado.

A seguir, apresentamos a Atividade 5, que foi trabalhada neste encontro:

Atividade 5

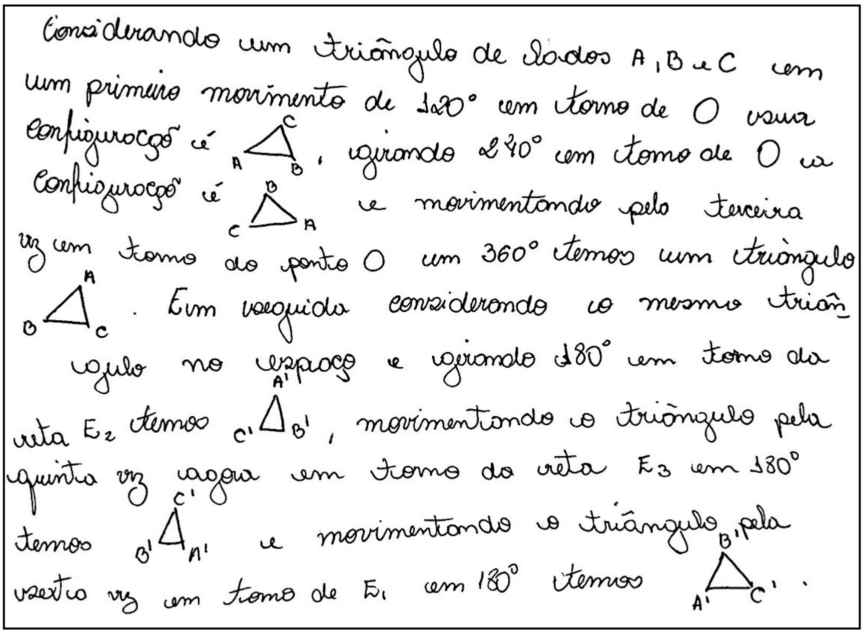
Considere um triângulo equilátero de vértices A, B e C. Chame E_1, E_2 e E_3 as retas que passam pelas medianas desse triângulo, como é ilustrado pela figura a seguir. Descreva todos os movimentos, no plano e no espaço, que se pode aplicar a esse triângulo sem alterar a sua posição, isto é, desconsiderando A, B e C e as retas E_1, E_2 e E_3, visualmente o triângulo parece então inalterado.



Fonte: Adaptado de (GARCIA, A; LEQUAIN, 2002, p. 124)

Sete alunos participaram desse encontro. Formaram-se um grupo com três alunos e dois grupos com dois. Inicialmente houve grande dificuldade para se entender o enunciado do problema. A frase “sem alterar a sua posição” não pareceu clara para todos os alunos. Mas, com a intervenção dos professores isso foi resolvido. Após o entendimento do problema, sua resolução fluiu sem muitas dificuldades. Porém, os movimentos no espaço eram de difícil visualização. Para resolver esta questão, um dos alunos teve a ideia de recortar uma folha de papel em forma de um triângulo equilátero e, através de sua manipulação, começou a visualizar os movimentos espaciais. Com isso, todos os possíveis movimentos foram identificados. Em seguida, o professor pediu que cada um dos grupos colocasse suas resoluções na lousa. A Figura 13 mostra uma das soluções apresentadas por um dos grupos.

Figura 13 – Uma das resoluções da Atividade 5


Considerando um triângulo de lados A, B e C com um primeiro movimento de 120° em torno de O sua configuração é A B C, girando 240° em torno de O a configuração é C B A e movimentando pela terceira vez em torno do ponto O em 360° temos um triângulo B A C. Em seguida considerando o mesmo triângulo no espaço e girando 180° em torno da reta E_2 temos C' A' B', movimentando o triângulo pela quinta vez agora em torno da reta E_3 em 180° temos B' C' A' e movimentando o triângulo pela sexta vez em torno de E_1 em 180° temos A' B' C'.

Fonte: Dados da pesquisa

Observe que houve um erro logo na primeira linha da resolução apresentada na Figura 13. A palavra “lado” significa, na verdade, vértice. Esse erro foi corrigido imediatamente na colocação dessa resolução na lousa. Os próprios alunos perceberam também que não havia necessidade de mudar o nome dos vértices do triângulo, para A’, B’ e C’, como aparece na solução do problema, ou seja, poderiam manter os vértices com sendo A, B e C mesmo. Dessa forma, A’, B’ e C’ foram mudados para B, C e A, respectivamente. Assim como a solução apresentada pela Figura 13, todas as outras soluções descreveram cada movimento em linguagem vernácula.

Durante a plenária, o Professor-Pesquisador sugeriu que os alunos criassem uma simbologia para representar cada movimento e, em seguida, construíssem, como resposta para o problema, um conjunto formado por esses movimentos. Por sugestão dos Professores, Pesquisador e Colaborador, o conjunto dos movimentos foi escrito da seguinte forma:

$$S_{\Delta} = \{I, R_{\frac{2\pi}{3}}, R_{\frac{4\pi}{3}}, R_1, R_2, R_3\}$$

onde: $$\begin{cases} S_\Delta \ = Conjunto\,dos\,movimentos\,do\,Triângulo \\ I \ = \ Identidade\ (não\,houve\,movimento) \\ R_{\frac{2\pi}{3}} = Rotação\,de\ 120^0\ em\,torno\,do\,ponto\ O \\ R_{\frac{4\pi}{3}} = Rotação\,de\ 240^0\ em\,torno\,do\,ponto\ O \\ R_1\ é\ Rotação\ em\,torno\,de\,E_1 \\ R_2\ é\ Rotação\ em\,torno\,de\,E_2 \\ R_3\ é\,Rotação\,em\,torno\,de\,E_3. \end{cases}$$

Os elementos desse conjunto, na ordem em que são apresentados, representam: a posição original do triângulo; rotação no plano de 120° ($\frac{2\pi}{3}rad$); rotação no plano de 240° ($\frac{4\pi}{3}rad$); rotação de 180° ($\pi\,rad$), no espaço, em torno de E_1; rotação de 180° ($\pi\,rad$), no espaço, em torno de E_2; e rotação de 180° ($\pi\,rad$), no espaço, em torno de E_3.

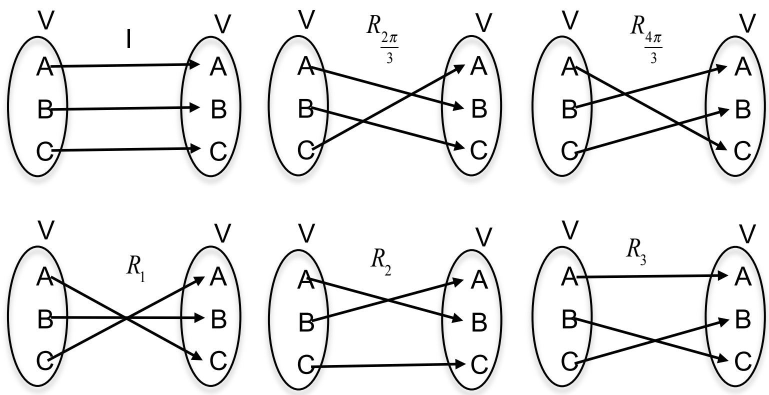
No diálogo apresentado a seguir, o Professor-Pesquisador tentou levar os alunos a perceber que cada um dos movimentos, feitos com o triângulo, poderia ser visto como uma função definida de V em V, onde V é o conjunto dos vértices do triângulo, V= {A, B, C}.

> P_p: O que cada um dos movimentos faz?
> *Alunos*: Uma rotação no triângulo.
> P_p: Como podemos perceber qual movimento ocorreu?
> (...silêncio)
> P_p: Por exemplo, (apontando para a solução na lousa, que é ilustrada aqui pela Figura 13), quando olhamos para um desses triângulos, como sabemos que ele foi originado de uma das rotações e qual delas?
> A_1: Ah, olhando a posição de A, B e C.
> P_p: Então podemos dizer que cada movimento, na verdade, apenas muda os vértices de lugar?
> A_1: De certa forma sim.
> P_p: Se considerarmos V={A, B, C} (o professor pediu para que um dos alunos escrevesse esse conjunto na lousa), que conceito matemático estaríamos trabalhando ao fazer um dos movimentos no triângulo, ou seja, mudando as posições de A, B e C?
> A_2: Rotações.
> P_p: Ok. Mas se deixássemos a ideia geométrica de lado e pensássemos apenas que estamos mudando a posição de A, B e C. Por exemplo, no triângulo original temos ABC, nessa posição, com uma rotação de 120° no sentindo anti-horário passaríamos a ter CAB (apontando para o primeiro triângulo ilustrado aqui pela Figura 13), não poderíamos pensar que A se transformou em C, B se transformou em A e C se transformou em B?

> *A1*: Acho que sim.
> P_p: Que conceito matemático faz isso? Transforma cada elemento de um conjunto em outro?
> A_4: Transformação.
> A_2: Não seria uma relação?
> P_p: Os dois estão corretos. Mas o que é uma transformação?
> (...silêncio)
> P_p: Essa transformação transforma cada elemento de V em quantos elementos?
> A_1: Como assim?
> P_p: Quando aplicamos essa transformação no elemento A obtemos apenas o B ou mais elementos?
> A_1: Apenas o B.
> A_8: Então é uma função... É isso?
> P_p: Exatamente.
> A_1: Como assim? não entendi.
> A_8: Cada vez que a gente faz um movimento no triângulo mudam A, B e C de lugar. É como se A fosse levado a um outro elemento, B e C também. Então é como se houvesse uma função.
> A_1: Nossa, mas isso é muito complicado!
> P_p: Então vamos escrever isso para descomplicar.

O professor pediu à aluna A_8 que fosse à lousa e escrevesse, com ajuda de todos, o caso particular da função de rotação de 120°, em torno de O e no sentido anti-horário. Em seguida, por sugestão dos próprios alunos, todos os movimentos foram escritos em forma de função, como ilustramos na Figura 14:

Figura 14 – Representação dos movimentos em forma de função



Fonte: Dados da pesquisa

Pensando cada um dos movimentos como uma função, de acordo com a Figura 14, o Professor-Pesquisador observou que de dois movimentos seguidos, uma composição de duas funções, retornava um único elemento de S_Δ. Isso foi suficiente para que os alunos percebessem que a composição definia uma operação binária em S_Δ. O Professor-Pesquisador sugeriu que os alunos fizessem a tábua de operações da composição dessas funções. De posse dessa tábua de operações, os próprios alunos se questionaram se S_Δ, com a operação composição, era um grupo. A existência de neutro e inverso foi percebida imediatamente. A associativa foi testada apenas para alguns casos particulares, mas foi suficiente para que os alunos acreditassem que a composição definida em S_Δ era associativa.

Tabela 11 – Tábua de operações de S_Δ

$\circ$	I	$R_{\frac{2\pi}{3}}$	$R_{\frac{4\pi}{3}}$	R_1	R_2	R_3
I	I	$R_{\frac{2\pi}{3}}$	$R_{\frac{4\pi}{3}}$	R_1	R_2	R_3
$R_{\frac{2\pi}{3}}$	$R_{\frac{2\pi}{3}}$	$R_{\frac{4\pi}{3}}$	I	R_3	R_1	R_2
$R_{\frac{4\pi}{3}}$	$R_{\frac{4\pi}{3}}$	I	$R_{\frac{2\pi}{3}}$	R_2	R_3	R_1
R_1	R_1	R_2	R_3	I	$R_{\frac{2\pi}{3}}$	$R_{\frac{4\pi}{3}}$
R_2	R_2	R_3	R_1	$R_{\frac{4\pi}{3}}$	I	$R_{\frac{2\pi}{3}}$
R_3	R_3	R_1	R_2	$R_{\frac{2\pi}{3}}$	$R_{\frac{4\pi}{3}}$	I

Fonte: Elaborada pelo autor

Depois da constatação de que esse conjunto, com a operação (composição de funções) definida nele, era um grupo, o Professor-Pesquisador fez a seguinte pergunta: "a ordem da composição altera o resultado?". Não demorou muito para que um dos alunos apresentasse um exemplo que respondesse essa pergunta, apenas observando a tábua de operações. O que esse aluno fez foi observar que $R_1 \circ R_2 = R_{\frac{2\pi}{3}}$ e $R_2 \circ R_1 = R_{\frac{4\pi}{3}}$, portanto, $R_1 \circ R_2 \neq R_2 \circ R_1$. Logo depois, outros alunos apresentaram novos exemplos mostrando que o resultado de dois movimentos seguidos dependia da ordem em que eram feitos. Assim que ficou claro que o resultado da operação dependia da ordem em que esses elementos eram operados, o Professor-Pesquisador fez a formalização da propriedade comutativa definindo *grupo abeliano*. Essa formalização é mostrada a seguir.

Definição: Seja (G,*) um grupo. Se $a * b = b * a,\ \forall a,b \in G$ (propriedade comutativa) dizemos que o grupo G é abeliano.

No final desse encontro foi proposta a seguinte Atividade Extraclasse:

Atividade Extraclasse 4

1) Determine todos os subgrupos de $(S_\Delta, \circ)$ e verifique se eles são abelianos;

2) Pesquise exemplos de subgrupos não-abelianos;

Fonte: Elaborado pelo autor

9º Encontro

Neste encontro compareceram cinco alunos. Ressaltemos que, devido aos alunos não terem a aula seguinte nesse dia, este encontro teve uma maior duração. Primeiramente foi trabalhada a Atividade Extraclasse 4. Nenhum aluno havia feito essa atividade alegando ter dificuldade em resolvê-la ou por falta de tempo. Novamente os professores, Pesquisador e Colaborador, cobraram mais compromisso por parte dos alunos. Assim, o Professor-Pesquisador pediu que um dos alunos escrevesse, na lousa, a tábua de operações de S_Δ desenvolvida no encontro anterior e apresentado neste texto pela Tabela 11.

O Professor-Pesquisador pediu que um dos alunos fosse à lousa e, com a ajuda de todos, começasse a determinar os subgrupos de S_Δ. O processo de determinação dos subgrupos seguiu a seguinte dinâmica: o Professor-Pesquisador promoveu uma discussão de forma que, através de resultados já estudados, fosse possível determinar os elementos de cada subgrupo. E o aluno que se encontrava à lousa ia anotando os elementos na mesma. Para entendermos, como se deu esse processo, apresentamos o diálogo a seguir:

> *Pp*: Chamaremos de H_1 o primeiro subgrupo de S_Δ. Alguém poderia sugerir o primeiro elemento de H_1?
> *A1*: I.
> *Pp*: Porque você escolheu o elemento I?
> *A1*: Não pode escolher qualquer um?
> *A8*: Tem que ser I, porque o elemento neutro do grupo tem que estar em qualquer subgrupo. Não é, professor?
> *Pp*: Você entendeu A_1?
> *A1*: Entendi. Isso quer dizer que de todos os subgrupos que eu for construir já conheço um elemento que precisa estar nele.

P_p: Exatamente. Se a gente quisesse parar, ou seja, se o conjunto H_1 só tivesse esse elemento, H_1 seria um subgrupo de S_Δ ?
A_2: Só com um elemento eu acho que não.
P_p: Por que? que condições é preciso para que H_1 seja subgrupo?
A_8: Associativa não precisa (risos). Basta ser fechado e todo elemento ter simétrico, não é?
P_p: É fechado? o que dá I composta com I.
A_1: *Dá* I. É fechado.
P_p: Qual o simétrico de I?
A_2: I?
A_8: Então é subgrupo. I é elemento neutro, o inverso de I é I e é fechado.
P_p: Então já determinamos o primeiro subgrupo. Todos entenderam?
Alunos: Sim.
(... pausa)
P_p: Chamaremos de H_2 o segundo subgrupo. Qual o primeiro elemento que colocaremos em H_2?
Alunos: I...
P_p: Alguém quer escolher o segundo?
A_2: $R_{\frac{2\pi}{3}}$.
A_1: Tem que ser $R_{\frac{2\pi}{3}}$? Não poderia ser outro?
P_p: Pode. Qual você escolheria?
A_1: Ah... R_2 .
P_p: Tudo bem. Temos então I e R_2 em H_2. Podemos parar por aqui?
A_1: Acho que sim.
A_8: Precisa ser fechado, né professor?
P_p: É fechado?
A_4: É sim. I operado com R_2 é R_2 e R_2 operado com R_2 é I. Fechado.
P_p: Então já determinamos H_2. Se o resultado de R_2 operado com R_2 fosse diferente de I e diferente R_2 , esse resultado teria que estar em H_2 e a gente deveria continuar até o conjunto ficar fechado.
A_1: E se não ficar fechado?
P_p: Em algum momento vai ficar fechado. Na pior das hipótese daria todo S_Δ .
A_4: Mas o subgrupo pode ser o grupo todo?
P_p: Por que não?... é fechado? tem elemento neutro? o simétrico de todo elemento está no conjunto?
(...)

Devido ao tempo não foram determinados todos os subgrupos, ficando, novamente, como uma atividade extraclasse. O Professor-Colaborador se comprometeu a que, durante suas aulas, trabalharia novos exemplos de grupos não-abelianos como os quatérnios, os diedrais e o grupo de permutações.

Como os alunos não conseguiram exemplos, na Educação Básica, de operações não-comutativas, o Professor-Pesquisador falou da multiplicação de matrizes e, em seguida, questionou se o conjunto das matrizes quadradas, com a multiplicação usual de matrizes, era um grupo. Através de um exemplo, o Professor-

Pesquisador mostrou que nem toda matriz possui um simétrico multiplicativo e, consequentemente, a resposta ao questionamento era “não”. Porém, se nos restringíssemos ao conjunto das matrizes invertíveis, com a operação usual de multiplicação, teríamos um exemplo de grupo não-abeliano.

Logo em seguida, foi trabalhada a Atividade 6, que apresentaremos a seguir.

Atividade 6

Um programador de computadores decidiu elaborar um jogo. Nesse jogo, um de seus objetos se encontrará fixado na origem de um sistema de coordenadas cartesianas do plano, e esse objeto deverá apontar, na direção de um ponto D, sempre que o usuário der um dado comando. O ponto para o qual esse objeto será apontado é calculado por $D(n)=(0,-1)^n$, onde:

$$D(n)=(0,-1)^n=\begin{cases}(1,0),\ se\ n=0\\(0,-1)\cdot(0,-1)^{n-1},\ se\ n\geq 1\\-(0,-1)^{-n},\ se\ n<0\end{cases}$$

sendo n um número inteiro determinado pela ação do usuário e, o produto $"\cdot"$ é definido por $(a,b)\cdot(c,d)=(ac-bd,ad+bc)$ e $-(a,b)=(-a,-b)$, para $a,b,c,d\in\mathbb{Z}$.

De acordo com essas informações:

a) Determine o ponto D para $n=0,1,2,3,4$ e o represente geometricamente;

b) Determine o ponto $D(1687)$;

c) Responda: “para quantas direções distintas esse objeto do jogo poderá ser apontado?”;

d) Separe, em conjuntos distintos, os valores de n cujo objeto aponte para a mesma direção;

Fonte: Elaborado pelo autor

O objetivo dessa atividade era introduzir o conceito de *partição*, *relação de equivalência* e *classes de equivalência*

A resolução desse problema levou os alunos a fazer uma partição do conjunto dos números inteiros e perceber que os subconjuntos dos Inteiros que compõem essa participação são disjuntos e que sua união dá exatamente o conjunto dos números inteiros. Com isso, o Professor-Pesquisador pôde formalizar o conceito de partição e, depois, associou esse conceito ao conceito de relação de equivalência e de classe de equivalência. Esses conceitos já haviam sido estudados em Álgebra I, porém, os professores, Pesquisador e Colaborador, decidiram trabalhá-los também em Álgebra II devido à importância desses conceitos no relacionamento e no entendimento de alguns conteúdos como *Classes Laterais*, *Teorema de Lagrange* e *Conjunto-Quociente* que seriam trabalhados nesse curso, pelo Professor-Colaborador, em aulas posteriores.

Nenhum dos grupos, exceto por algum erro de cálculo, teve dificuldade em resolver o item a). Porém, com o item b) foi diferente, pois, os alunos não tinham a mínima ideia de como começar sua resolução, necessitando, então, da ação do Professor-Pesquisador. A seguir mostramos como isso ocorreu:

> A_1: Professor, eu não vou precisar fazer essas contas 1687 vezes, vou?
> P_p: Quais as soluções você encontrou no item a)?
> A_1: (1,0), (0,-1), (-1,0), (0,1), (1,0).
> P_p: O que você pode dizer das respostas para n=0 e n=4?
> A_1: São iguais.
> P_p: Que resposta você acha que daria para n=8?
> A_4: O mesmo de n=0 e n=4?
> A_2: Então, é só fazer de oito em oito, não é?
> A_4: Se for assim, é melhor já ir direto ao múltiplo de 4 mais perto de 1687.
> A_1: Ah, mas como eu acho esse valor?
> A_4: Podemos testar... 1687 não é múltiplo de 4, pois é impar.
> *(...pausa)*
> A_4: Achei! professor. É 1684, não é?
> P_p: E agora? Como você vai chegar à solução, a partir disso?
> A_4: Eu sei que $(0,-1)^{1684}$ vale $(1,0)$. Agora, é só fazer a partir desse valor até chegar em 1687, não é?
> A_1: Não precisa nem fazer mais cálculos. De cabeça, dá pra ver que é $(0,1)$.
> *(...)*

Observe que, nesse diálogo, houve pouca intervenção do Professor-Pesquisador.

O item c) foi resolvido facilmente, pois, apoiados no item anterior, perceberam que só havia quatro possibilidades de direções distintas. Alguns alunos tiveram dificuldade para entender o enunciado do item d), porém, após sua compreensão, não tiveram dificuldade para resolvê-lo.

Na plenária, cada grupo colocou sua resolução na lousa. Discutiram-se cada resolução e facilmente chegou-se a um consenso, visto que todos os grupos obtiveram a mesma solução. Em seguida, o Professor-Pesquisador pediu que um dos alunos escrevesse o conjunto dos números inteiros na lousa e que todos os alunos olhassem para solução do item d), composta pelos quatro conjuntos que apresentamos a seguir:

$$\{\ldots,-8,-4,0,4,8,\ldots\}$$

$$\{...,-11,-7,-3,1,5,9,...\}$$
$$\{...,-10,-6,-2,2,6,10,...\}$$
$$\{...,-9,-5,-1,3,7,11,...\}$$

O Professor-Pesquisador chamou atenção sobre as seguintes propriedades pertinentes a esses conjuntos: todos eram subconjuntos do conjunto dos inteiros; eles eram, dois a dois, disjuntos; e a união de todos eles dava o próprio conjunto dos números inteiros. Com isso, o Professor-Pesquisador formalizou o conceito de partição. Que apresentamos, a seguir:

> ***Definição***: *Seja E um conjunto não vazio e* $E_1, E_2, ..., E_n$ *subconjuntos não vazios de E. Dizemos que* $P(E) = \{E_1, E_2, ..., E_n\}$ *é uma partição de E, se forem válidas as seguintes condições:*
>
> *i)* $E_1 \cup E_2 \cup ... \cup E_n = E$ *;*
>
> *ii)* $E_i \cap E_j = \phi$ *sempre que* $i \neq j$ *, para todo* $i, j \in \{1,2,...,n\}$

Após discussão e a compreensão dessa definição, o Professor-Pesquisador entregou, aos alunos, um material produzido por ele próprio. Esse material, que se encontra no Apêndice C, contém as definições de Relação de Equivalência e Classes de Equivalência e alguns exemplos. Após a leitura e a discussão conjunta desse material, o Professor-Pesquisador colocou na lousa a seguinte questão:

> *A relação* R*, definida por* $aRb \Leftrightarrow a \text{ e } b$ *deixam o mesmo resto quando divididos por 4, é uma relação de equivalência em* $\mathbb{Z}$ *?*

Os alunos pediram um tempo para tentar resolver. Depois de algum tempo a aluna A_8 foi à lousa e apresentou a seguinte solução:

> *i)* aRa é verdade, pois, a e a deixam o mesmo resto quando divididos por 4.
>
> ii) Se aRb é verdade então, a e b deixam mesmo resto quando divididos por 4. Logo, bRa também é verdade.
>
> iii) se aRb e bRc são verdadeiras então a e b deixam o mesmo resto quando divididos por 4 e b e c também deixam o mesmo resto quando divididos por 4. Então, a e c deixam o mesmo resto quando divididos por 4. Logo, aRc é verdade.
>
> Como são válidas i), ii) e iii) R é uma relação de equivalência em $\mathbb{Z}$.

O Professor-Pesquisador elogiou a aluna A_8 e comentou sobre ser desnecessário dizer que aRb é verdade, pois, ao dizer aRb significa que a se relaciona com b pela relação R e, implicitamente, já está considerando isso verdadeiro. Em seguida, o Professor-Pesquisador pediu aos alunos que construíssem as classes de equivalência de cada número inteiro, definidas pela relação R que, na verdade, passou a ser chamada de ~. O professor sugeriu que eles começassem determinando a classe de equivalência de 0 (zero), seguido por 1, e assim por diante. Apresentamos a seguir, alguns questionamentos dos alunos:

> A_8: Professor, pela definição aqui, a classe de equivalência de *a* são todos os elementos que se relacionam com *a*. Então a classe de equivalência de zero são todos os números que se relacionam com zero, é isso?
> P_p: Exatamente.
> A_1: Mas como eu vou saber quem se relaciona com zero?
> P_p: Quando dois elementos se relacionam, de acordo com essa relação?
> A_2: É quando deixam mesmo resto, né?
> P_p: Mesmo resto, quando divididos por...?
> A_1: Quatro.
> A_8: Então, como zero deixa resto zero quando dividido por 4, basta eu encontrar todo número que deixa resto zero quando dividido por 4, não é isso professor?
> P_p: Exatamente.
> A_1: Então seria 4, 8, 12,... é isso?
> P_p: E o zero? e os negativos?
> A_4: Ah, professor. Dá o mesmo conjunto que encontramos para o item d) do problema.
> A_8: Ah! é mesmo. Então a classe de equivalência de 1 dá o segundo conjunto da solução do item d. E os outros também devem dar a mesma coisa.
> A_2: Então, nem precisa fazer.
> (...)

O quadro, a seguir apresenta as divisões de números inteiros por 4:

Quadro 13 – Divisão de números inteiros por 4

divisões com resto zero					divisões com resto um				
$\begin{array}{r\|l} 0 & 4 \\ \hline 0 & 0 \end{array}$	$\begin{array}{r\|l} 4 & 4 \\ \hline 0 & 1 \end{array}$	$\begin{array}{r\|l} 8 & 4 \\ \hline 0 & 2 \end{array}$	$\begin{array}{r\|l} 12 & 4 \\ \hline 0 & 3 \end{array}$	...	$\begin{array}{r\|l} 1 & 4 \\ \hline 1 & 0 \end{array}$	$\begin{array}{r\|l} 5 & 4 \\ \hline 1 & 1 \end{array}$	$\begin{array}{r\|l} 9 & 4 \\ \hline 1 & 2 \end{array}$	$\begin{array}{r\|l} 13 & 4 \\ \hline 1 & 3 \end{array}$	...
$\begin{array}{r\|l} -4 & 4 \\ \hline 0 & -1 \end{array}$	$\begin{array}{r\|l} -8 & 4 \\ \hline 0 & -2 \end{array}$	$\begin{array}{r\|l} -12 & 4 \\ \hline 0 & -3 \end{array}$	$\begin{array}{r\|l} -16 & 4 \\ \hline 0 & -4 \end{array}$	...	$\begin{array}{r\|l} -3 & 4 \\ \hline 1 & -1 \end{array}$	$\begin{array}{r\|l} -7 & 4 \\ \hline 1 & -2 \end{array}$	$\begin{array}{r\|l} -13 & 4 \\ \hline 1 & -3 \end{array}$	$\begin{array}{r\|l} -15 & 4 \\ \hline 1 & -4 \end{array}$	...
divisões com resto dois					**divisões com resto três**				
$\begin{array}{r\|l} 2 & 4 \\ \hline 2 & 0 \end{array}$	$\begin{array}{r\|l} 6 & 4 \\ \hline 2 & 1 \end{array}$	$\begin{array}{r\|l} 10 & 4 \\ \hline 2 & 2 \end{array}$	$\begin{array}{r\|l} 14 & 4 \\ \hline 2 & 3 \end{array}$	...	$\begin{array}{r\|l} 3 & 4 \\ \hline 3 & 0 \end{array}$	$\begin{array}{r\|l} 7 & 4 \\ \hline 3 & 1 \end{array}$	$\begin{array}{r\|l} 11 & 4 \\ \hline 3 & 2 \end{array}$	$\begin{array}{r\|l} 15 & 4 \\ \hline 3 & 3 \end{array}$	...
$\begin{array}{r\|l} -2 & 4 \\ \hline 2 & -1 \end{array}$	$\begin{array}{r\|l} -6 & 4 \\ \hline 2 & -2 \end{array}$	$\begin{array}{r\|l} -10 & 4 \\ \hline 2 & -3 \end{array}$	$\begin{array}{r\|l} -14 & 4 \\ \hline 2 & -4 \end{array}$	...	$\begin{array}{r\|l} -1 & 4 \\ \hline 3 & -1 \end{array}$	$\begin{array}{r\|l} -5 & 4 \\ \hline 0 & -2 \end{array}$	$\begin{array}{r\|l} -9 & 4 \\ \hline 0 & -3 \end{array}$	$\begin{array}{r\|l} -13 & 4 \\ \hline 0 & -4 \end{array}$	...

Fonte: Elaborado pelo autor

Os conjuntos $\{...,-8,-4,0,4,8,...\}$, $\{...,-11,-7,-3,1,5,9,...\}$, $\{...,-10,-6,-2,2,6,10,...\}$, $\{...,-9,-5,-1,3,7,11,...\}$, referidos pela a aluna A_4 no diálogo anterior e já apresentados como solução do item d), são uma partição do conjunto dos números inteiros, $\mathbb{Z}=\{...,-2,-1,0,1,2,...\}$, pois, são dois a dois disjuntos e a união dá todo $\mathbb{Z}$.

Com isso, os alunos perceberam que toda relação de equivalência, sobre um conjunto produz uma partição nesse conjunto e os elementos dessa partição (que também são conjuntos) são as Classes de Equivalência estabelecidas por essa relação.

No final do encontro foi proposta a Atividade Extraclasse 5 que apresentamos a seguir:

Atividade Extraclasse 5

1) Procure, na Educação Básica, exemplos de relações de equivalência e determine as classes de equivalência definidas por essas relações;
2) Que relação existe entre uma classe lateral e uma relação de equivalência.

Fonte: Elaborada pelo autor

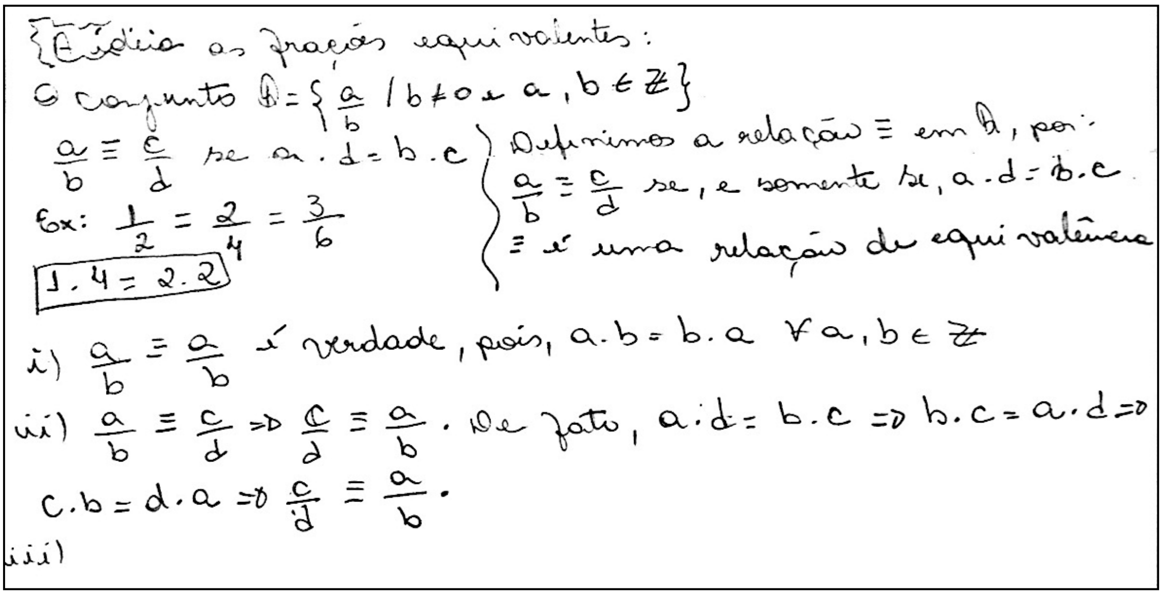
Observamos que o conteúdo *Classes Laterais* seria trabalhado pelo Professor-Colaborador nas aulas seguintes, antes de nosso décimo encontro ao qual os alunos deveriam entregar essa atividade.

10º Encontro

Neste encontro compareceram todos os alunos. Formaram-se três grupos com três alunos cada.

O encontro teve início com a Atividade Extraclasse 5, deixada no último encontro. Dessa atividade, os alunos conseguiram resolver apenas a questão 1). Eles colocaram sua resolução na lousa e, em seguida, iniciou-se uma discussão a respeito dos exemplos apresentados como solução dessa atividade. Durante a discussão, novos exemplos foram sugeridos e discutidos. Apresentamos, a seguir, algumas soluções apresentadas pelos alunos:

Figura 15 – Uma resolução da Atividade Extraclasse 5


{A idéia das frações equivalentes:
O conjunto $A = \{ \frac{a}{b} \mid b \neq 0$ e $a, b \in \mathbb{Z} \}$
$\frac{a}{b} \equiv \frac{c}{d}$ se $a.d = b.c$
Definimos a relação $\equiv$ em A, por: $\frac{a}{b} \equiv \frac{c}{d}$ se, e somente se, $a.d = b.c$
$\equiv$ é uma relação de equivalência
Ex: $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6}$
$\boxed{1.4 = 2.2}$
i) $\frac{a}{b} \equiv \frac{a}{b}$ é verdade, pois, $a.b = b.a \ \forall a, b \in \mathbb{Z}$
ii) $\frac{a}{b} \equiv \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{c}{d} \equiv \frac{a}{b}$. De fato, $a.d = b.c \Rightarrow b.c = a.d \Rightarrow$
$c.b = d.a \Rightarrow \frac{c}{d} \equiv \frac{a}{b}$.
iii)

Fonte: Dados da pesquisa

Figura 16 – Outra resolução da Atividade Extraclasse 5

1) T = { x | tal que x é um triângulo congular }

x, y ∈ T,

x ≡ y ⟺ x ~ y (~ semelhante)

i) ok! Todo triângulo é semelhante a ele próprio

ii) ok! Se x ~ y então y ~ x

iii) ok! Se x ~ y e y ~ z então x ~ z

Fonte: Dados da pesquisa

Logo depois, o Professor-Pesquisador resolveu a questão 2 na lousa, isto é, mostrou que toda classe lateral é uma classe de equivalência, resultado importante para o Professor-Colaborador, nas aulas seguintes, enunciar e demonstrar o Teorema de Lagrange e introduzir o conceito de Conjunto-Quociente. Vale ressaltar que o Professor-Pesquisador tentou, ao máximo, envolver os alunos durante a demonstração, porém foi notável a grande dificuldade, até mesmo uma certa resistência, da maioria dos alunos em acompanhar esse processo, que mostramos a seguir:

As definições de classes laterais à esquerda e à direita, são:

Seja $(G,\cdot)$ *um grupo e* $H \leq G$*. Para cada* $x \in G$*:*

- $xH = \{xh \mid h \in H\}$ *- classe lateral à esquerda de H em G.*
- $Hx = \{hx \mid h \in H\}$ *- classe lateral à direita de H em G.*

A seguir, definimos uma relação em G e demonstramos que ela é uma relação de equivalência:

- *Considere a seguinte relação:* $\text{se } a,b \in G, \text{ então, } a \sim b \Leftrightarrow a \cdot b^{-1} \in H$.
- *Afirmação: ~ é uma relação de equivalência. De fato:*

i) $a \cdot a^{-1} = e \in H \Rightarrow a \sim a$ *(reflexiva);*

ii) $a \sim b \Rightarrow a \cdot b' \in H$ *, logo,* $(a \cdot b^{-1})^{-1} \in H$ *. Como* $(a \cdot b^{-1})^{-1} = (b^{-1})^{-1} \cdot a^{-1} = b \cdot a^{-1}$ *, temos* $b \cdot a^{-1} \in H$

$\Rightarrow b \sim a$ *(simétrica)*

iii) $a \sim b$ *e* $b \sim c \Rightarrow a \cdot b^{-1} \in H$ *e* $b \cdot c^{-1} \in H$, *logo,* $(a \cdot b^{-1}) \cdot (b \cdot c^{-1}) \in H \Rightarrow a \cdot (b^{-1} \cdot (b \cdot c^{-1})) \in H \Rightarrow$

$a \cdot ((b^{-1} \cdot b) \cdot c^{-1}) \in H \;\; a \cdot (e \cdot c^{-1}) \in H \Rightarrow a \cdot c^{-1} \in H \Rightarrow a \sim c$ *(transitiva).*

Utilizando a relação de equivalência ~ ,que acabamos de apresentar, demonstramos que toda classe lateral é uma classe de equivalência:

- *Considere a classe de equivalência* $\overline{a}$ *da relação de equivalência ~, ou seja,*

  $x \in \overline{a} \Leftrightarrow x \sim a \Leftrightarrow x \cdot a^{-1} \in H \Leftrightarrow x \cdot a^{-1} = h$, *para algum* $h \in H \Leftrightarrow (x \cdot a^{-1}) \cdot a = h \cdot a$

  $\Leftrightarrow x \cdot (a^{-1} \cdot a) = h \cdot a \Leftrightarrow x = h \cdot a \Leftrightarrow x \in Ha$.

  Portanto, $\overline{a} = Ha$. ■

De modo análogo, considerando a relação de equivalência $a \sim b \Leftrightarrow a^{-1} \cdot b \in H$, podemos provar que $\overline{a} = aH$.

Ainda no 10º encontro foi trabalhada a atividade 7, que apresentamos, a seguir:

Atividade 7

Uma maneira de se criptografar uma mensagem é através de operações com matrizes. Vamos associar cada letra do nosso alfabeto a um número, segundo a correspondência a seguir:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

U	V	W	X	Y	Z
21	22	23	24	25	26

Podemos formar matrizes numéricas correspondentes a uma determinada mensagem. Por exemplo, suponha que a nossa mensagem seja "PUXA VIDA". A matriz X correspondente a essa mensagem é $X = \begin{bmatrix} \text{P} & \text{U} & \text{X} \\ \text{A} & \text{-} & \text{V} \\ \text{I} & \text{D} & \text{A} \end{bmatrix}$ *e sua representação numérica é:* $X = \begin{bmatrix} 16 & 21 & 24 \\ 1 & 0 & 22 \\ 9 & 4 & 1 \end{bmatrix}$.

Descreveremos três métodos de cifração, a seguir:

1º Método (Adição)

$Y = X + C$*, onde: X, Y e C são as matrizes mensagem inicial, mensagem criptografada e a chave (senha responsável em garantir a segurança da cifração),* respectivamente.

2º Método (Multiplicação)

$Y = C \cdot X$, onde: *X, Y* e *C* são as matrizes mensagem inicial, mensagem criptografada e a chave, respectivamente.

3º Método (Afim)

$Y = C \cdot X + K$, onde: *X, Y, C* e *K* são as matrizes mensagem inicial, mensagem criptografada e as chaves, respectivamente.

Com base nessas informações:

a) Criptografe a mensagem "ESTUDANTE" usando cada um dos métodos com as chaves: $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $K = \begin{bmatrix} -4 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$;

b) Você recebeu a mensagem 17 29 9 54 46 -9 29 30 0 criptografada no sistema de *Multiplicação* com a chave $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Decifre a mensagem.

c) Decifre a mensagem 5 3 3 1 -8 40 15 10 27, sabendo que ela foi criptografada pelo sistema *Afim* com as chaves: $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $K = \begin{bmatrix} -30 & -30 & -30 \\ -20 & -20 & -20 \\ -10 & -10 & -10 \end{bmatrix}$;

d) Determine a função de decifração para cada um dos métodos apresentados, estabelecendo as devidas restrições, caso haja.

Fonte: Adaptado de Boldrini et al (1980, p. 94)

O objetivo deste encontro foi o de introduzir o conceito de *anel*. Para isso, partiu-se de um problema de criptografia cujo sistema criptográfico se dava pelas operações com matrizes. Com isso, discutiram-se as propriedades das operações de adição e multiplicação de matrizes e, a partir delas, foi feita a introdução do conceito de *anel.*

Inicialmente, o Professor-Pesquisador fez uma exposição oral e breve, sobre criptografia para inteirar os alunos com o assunto. Após as leituras, individual e em grupo, da Atividade 7, foram feitas algumas perguntas sobre o entendimento do problema. Após esse entendimento, foi dado um tempo para que cada grupo trabalhasse e buscasse uma solução para ele.

Durante a resolução, alguns problemas secundários surgiram. Problemas como: ”como se multiplica duas matrizes” e “como determinar a inversa de uma matriz”. O tempo usado para resolver esses problemas secundários inviabilizou a resolução completa da Atividade 7, proposta para esse encontro, ficando partes da mesma para serem resolvidas no encontro seguinte. Por este motivo, apenas os itens a) e b) foram trabalhados neste encontro. Os itens c) e d); a plenária e a formalização ficaram para o encontro seguinte. Descrevemos a seguir, alguns diálogos que ocorreram neste encontro:

> A_2: Professor não tenho nenhuma ideia de como resolver esse item b.
> P_p: O que você entendeu sobre esse item? Entendeu os dados e o que o problema pede?
> A_2: Eu não sei o que fazer com esses números.
> P_p: Você perguntou a seus colegas de grupo se eles entenderam?
> A_2: Eles também não entenderam.
> P_p: No início do enunciado há um exemplo de como criptografar uma mensagem. Vocês leram e entenderam esse exemplo?
> A_2: Mas lá é dada a mensagem para criptografar e, nesse item aqui, esses números é o texto criptografado.
> P_p: Que método de criptografia foi usado?
> A_2: O multiplicativo.
> P_p: Como criptografar com esse método?
> A_2: Tá aqui, Y é C vezes X.
> P_p: O que são: Y, C e X?
> A_2: Não entendi.
> A_4: Matrizes?...
> A_2: Ah sim. São matrizes.
> P_p: Dessas matrizes, Y, C e X, quais foram dadas no anunciado?
> A_2: Só a matriz C.
> P_p: Com os números dados no enunciado você não poderia montar a matriz X ou a matriz Y?
> A_2: Acho que sim.
> P_p: Qual seria a matriz que você poderia montar com esses valores?
> A_4: Eu acho que é a matriz Y.
> P_p: Então tentem fazer isso.
> (...)
> A_2: Professor, veja se o que a gente fez está certo.
> P_p: O que vocês fizeram?
> A_2: Escrevemos a matriz Y, a matriz C, só falta a X.
> P_p: O que é a matriz X?
> A_4; A matriz mensagem inicial.

> P_p: E, o que o problema pede?
> A_2: A matriz inicial.
> A_4: Ah, então o que precisamos fazer é encontrar a matriz X.
> (...)

Após esse diálogo os alunos em seus grupos, conseguiram perceber que, para encontrar a solução do problema, bastava multiplicar ambos os membros da equação $Y = C \cdot X$ pela matriz inversa de C. Porém, eles não sabiam como determinar uma matriz inversa. Assim, o Professor-Pesquisador, auxiliado pelo Professor-Colaborador, deu uma aula expositiva sobre matriz inversa recordando o que os alunos deveriam ter aprendido no Ensino Médio. Falou especificamente da definição e de métodos para se determinar a inversa de uma matriz. Em seguida, utilizando as explicações sobre matriz inversa, feita pelos professores, os alunos determinaram C^{-1} e, a partir dessa matriz, chegaram à solução do item b).

Ao término do encontro, os alunos entregaram o que haviam feito e, ficou estabelecido que, no encontro seguinte, dariam continuidade à resolução desse problema.

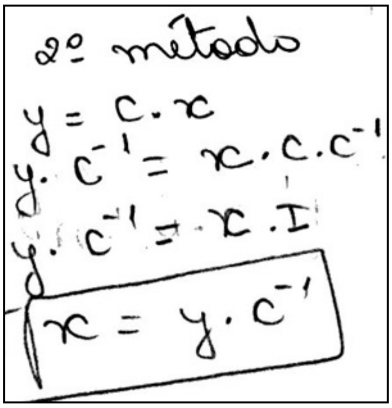
11º Encontro

Neste encontro compareceram todos os alunos e mantiveram os mesmos grupos do encontro passado. Os alunos deram continuidade à resolução da Atividade 7.

O entendimento e a leitura do problema já haviam sidos trabalhados, pelos alunos, no encontro anterior. Então, eles foram diretos para a resolução dos itens c) e d). Esses dois itens focavam basicamente as principais propriedades da adição e da multiplicação de matrizes, necessárias para a caracterização de um anel e, consequentemente, daria subsídios ao Professor-Pesquisador para introduzir esse conceito novo.

Após a resolução dos itens c) e d), cada grupo colocou sua resolução na lousa e, em seguida, foi feita a Plenária. Durante a Plenária, um representante de cada grupo explicou sua resolução. Como todos os grupos resolveram os itens da mesma forma, não houve dificuldade para se chegar a um consenso. Logo, em seguida, os professores, Pesquisador e Colaborador, questionaram os grupos que não tiveram o cuidado de expressar corretamente, na escrita, as propriedades das operações que foram utilizadas durante a resolução das questões. A Figura 17 apresenta a resolução feita por um dos grupos, que denominaremos de Grupo A, mostrando um exemplo onde isso ocorre:

Figura 17 – Resolução do item d) da Atividade 7, com o 2º método, pelo Grupo A



Fonte: Dados da pesquisa

Observe que, na solução mostrada pela Figura 17, ao multiplicar ambos os membros da expressão $Y = C \cdot X$ por C^{-1}**,** os alunos não tiveram a preocupação de, no segundo membro, colocar parênteses para que ficasse claro que C^{-1} estaria multiplicando todo o segundo membro, ou seja, $C \cdot X$ e não apenas *C*, além disso, fez uso da comutatividade da multiplicação de matrizes, que nem mesmo existe. Consequentemente, omitiu-se o uso da propriedade associativa. Propriedade essa que nos dá a garantia de podermos multiplicar *C* por C^{-1}, antes de multiplicar por *X*. Assim, a Plenária serviu fortemente para discutir coisas dessa natureza, que constituem a essência das estruturas algébricas. Os professores destacaram o uso das duas operações, adição e multiplicação, e enfatizaram as propriedades dessas operações, em particular no conjunto das matrizes quadradas e, também, no caso geral, de qualquer Estrutura Algébrica. O diálogo a seguir retrata um pouco dessa parte da Plenária:

> Pp: (apontando para a resolução, apresentada aqui pela Figura 17) O que temos no primeiro membro dessa equação?
> Alunos: y.
> Pp: E no segundo membro?
> Alunos: C vezes x.
> Pp: Os dois membros foram multiplicados por qual valor?
> Alunos: Por c inverso.
> Pp: Do jeito que está escrito, no segundo membro, c inverso está multiplicando x vezes c ou apenas c?
> (...silêncio)

> A8: Pelo que tá escrito, só está multiplicando c.
> A1: Tem diferença?
> Pp: Como a gente deixaria claro que c inverso está multiplicando todo o segundo membro?
> A8: Igual o nosso grupo fez, colocando parênteses.
> A1: Mas não é a mesma coisa? No final não dá o mesmo resultado?
> Pp: O que vocês acham?
> A2: Eu acho que não. Tem que ter alguma propriedade.
> A8: Se valer a propriedade associativa... aí eu acho que dá a mesma coisa.
> (...)

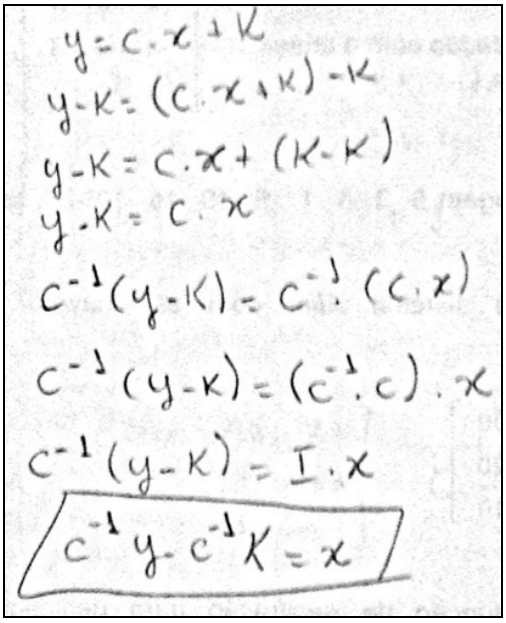
As Figuras 18 e 19 mostram como um outro grupo, que denominaremos Grupo B, usou corretamente as propriedades das operações de adição e multiplicação de matrizes, na resolução do item d). O item d) pedia a utilização de três métodos para criptografar uma mesma mensagem, a Figura 18 apresenta uma solução com o uso do segundo método e a Figura 19 do terceiro.

Figura 18 – Resolução do item d) da Atividade 7 com o 2º método, pelo Grupo B

$$y = c \cdot x$$
$$c^{-1} \cdot y = c^{-1} \cdot (c \cdot x)$$
$$c^{-1} \cdot y = (c^{-1} \cdot c) \cdot x$$
$$c^{-1} \cdot y = I \cdot x$$
$$x = c^{-1} \cdot y$$

Fonte: Dados da pesquisa

Figura 19 – Resolução do item d) da Atividade 7 com o 3º método, pelo Grupo B



Fonte: Dados da pesquisa

O Professor-Pesquisador, retomando a discussão das propriedades postas corretamente pelo grupo B, principalmente a do terceiro método do item d), ilustrado pela Figura 19, observou que as propriedades das operações de adição e multiplicação de matrizes: associativas da adição e da multiplicação, neutro aditivo, simétrico aditivo, comutatividade da adição e distributiva caracterizam um conjunto de matrizes de mesma ordem como sendo um *Anel*. E, aproveitando esse exemplo, fez a formalização do conceito geral de Anel e de Domínio de Integridade, que apresentamos a seguir:

Definição: *Seja A um conjunto não vazio munido de duas operações binárias* $+$ e $\cdot$. $(A,+,\cdot)$ *é denominado Anel se, para quaisquer* $a,b,c \in A$ *, forem válidas as seis propriedades:*

1) $(a+b)+c = a+(b+c)$ *;* (associativa da adição)

2) $a+b = b+a$ *;* (comutativa da adição)

3) $\exists\, 0 \in A \mid a+0 = 0+a = a$ *;* (existência de elemento neutro da adição)

4) $\exists -a \in A \mid a+(-a) = -a+a = 0$ *;* (existência de elemento simétrico da adição)

5) $(a \cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c)$ *;* (associativa da multiplicação)

6) $a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c$ *;* (distributiva da multiplicação em relação a adição)

Se, além disso forem válidas:

7) $a\cdot b = b\cdot a$ *.* (comutativa da multiplicação)

8) $\exists\, 1 \in A \mid 1\cdot a = a\cdot 1 = a$ *;* (existência de elemento neutro da multiplicação)

9) $a\cdot b = 0 \Rightarrow a = 0$ *ou* $b = 0$ *;* (inexistência de divisor de zero)

$(A,+,\cdot)$ *é denominado Domínio de Integridade.*

O encontro terminou com a proposta da Atividade Extraclasse 6, apresentada a seguir:

Atividade Extraclasse 6

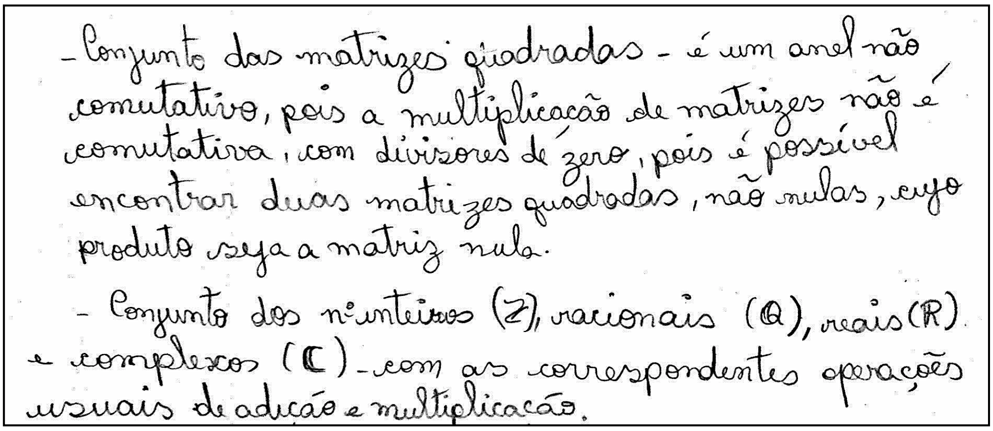
Faça uma lista dos conteúdos da Educação Básica que você identifica como um Anel e verifique quais deles são *Domínios de Integridade*. Procure argumentar cada afirmação.

Fonte: Elaborado pelo autor

12º Encontro

Neste encontro compareceram oito alunos. Primeiramente, foi trabalhada a Atividade Extraclasse 6, proposta no encontro anterior. A pedido do Professor-Pesquisador, os alunos colocaram suas resoluções na lousa e fizeram argumentações orais sobre os exemplos apresentados. Em seguida, professores e alunos escolheram alguns dos exemplos apresentados para se fazer uma verificação formal, com o propósito de verificar se as Estruturas apresentadas eram, ou não, *Anel e Domínio de Integridade*. A Figura 20, a seguir, mostra uma resolução apresentada por um dos alunos.

Figura 20 – Resolução da Atividade Extraclasse 6 feita por um dos alunos


- Conjunto das matrizes quadradas - é um anel não comutativo, pois a multiplicação de matrizes não é comutativa, com divisores de zero, pois é possível encontrar duas matrizes quadradas, não nulas, cujo produto seja a matriz nula.

- Conjunto dos nº inteiros (Z), racionais (Q), reais (R) e complexos (C) - com as correspondentes operações usuais de adição e multiplicação.

Fonte: Dados da pesquisa

Note que na resolução apresentada por esse aluno, na Figura 20, não foi feita nenhuma referência às operações de matrizes ao afirmar que as Matrizes eram um Anel. E, ainda, a única propriedade mencionada foi a comutativa da multiplicação, referindo-se apenas à não comutatividade do produto de matrizes. Um outro fator importante que precisamos destacar é a falta de uso de notações algébricas adequadas. Como esse erro foi frequente nas atividades apresentadas pelos alunos, os professores utilizaram parte deste encontro para discutir questões dessa natureza. Ou seja, chamarem a atenção para a necessidade de enfatizar as operações e suas propriedades e de se usar corretamente as notações matemáticas, visto que elas compõem uma linguagem muito importante para a leitura e o entendimento de conteúdos matemáticos. A seguir apresentamos um trecho do diálogo, em que isso ocorreu:

> Pp: Um anel pode ser constituído apenas por um conjunto?
> Alunos: Não. Tem que ter conjunto e operação.
> Pp: Quantas operações?
> Alunos: Duas.
> Pp: (Apontando para a resolução ilustrada aqui pela Figura 20), o conjunto das matrizes quadradas formam um anel?
> Alunos: Sim.
> Pp: Somente o conjunto?
> Alunos: Com as operações.
> Pp: Quais operações?
> Alunos: Adição e multiplicação.
> Pp: Essa solução (apontando novamente para a resolução ilustrada na Figura 20) faz referência às operações?
> Alunos: Não.
> (...)

Após essa discussão os alunos, por inciativa própria, buscaram corrigir os erros dessa resolução e recorriam ao Professor-Pesquisador sempre que tinham alguma dúvida.

Na segunda parte desse encontro, foi trabalhada a Atividade 8.

Atividade 8

Um reservatório, de água está com 15% da sua capacidade. Sabe-se que um dia chuvoso produz, em média, para o reservatório, uma quantidade equivalente a 2,05% do volume que ele comporta. Sabe-se também que o consumo diário de água do reservatório corresponde, em média, a 0,8% da sua capacidade. Em média, deverá chover quantos dias consecutivos para encher completamente o reservatório?

Fonte: Elaborada pelo autor

O objetivo desta atividade era discutir uma nova propriedade para operação de multiplicação: “a existência de inverso multiplicativo” e, consequentemente, introduzir o conceito de corpo.

Para isso, formaram-se dois grupos com três alunos e um com dois. Foi feita uma leitura individual e, depois uma leitura em grupo.

Os professores questionaram os alunos a respeito da compreensão do enunciado do problema e, aparentemente, eles não tinham dúvidas. Logo em seguida, os grupos partiram para a resolução do problema.

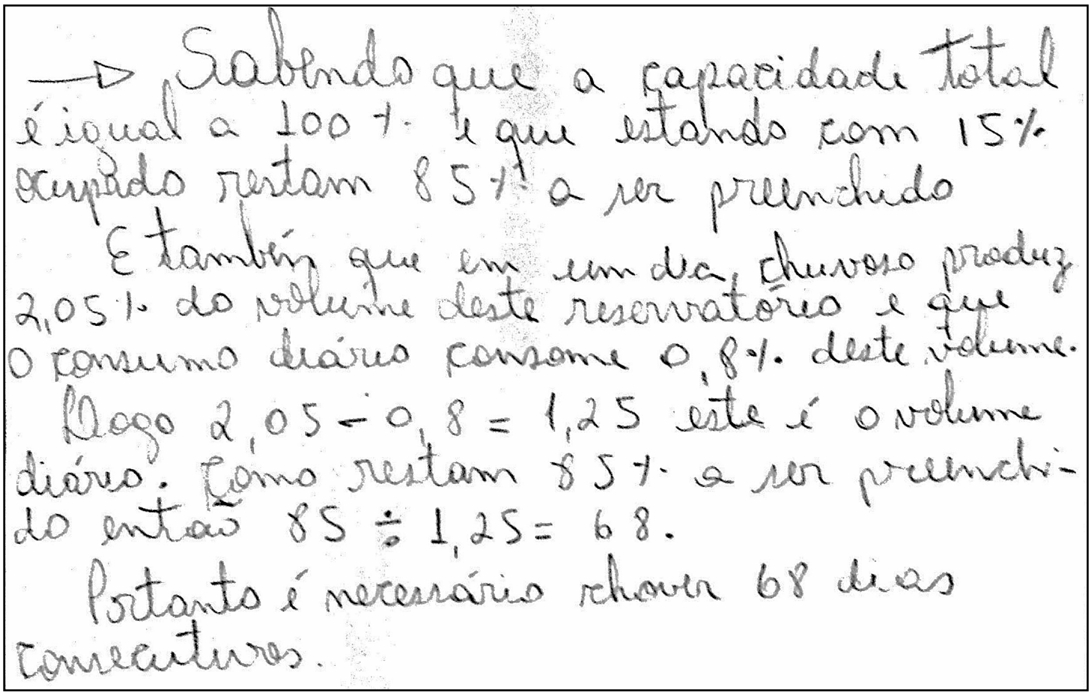
Durante a resolução, poucas dúvidas foram levantadas. Uma das poucas dúvidas que surgiram é apresentada, a seguir, em um diálogo entre o Professor-Pesquisador e um dos alunos:

> *A_7*: Professor, se eu fizer o cálculo dos 2,05% que é o volume que o reservatório recebe em um dia, e depois fizer o cálculo dos 0,8% que sai dele, e depois subtrair, dá o mesmo resultado de eu subtrair 0,8% de 2,05% e depois calcular o volume, correspondente a esse percentual?
> *Pp:* O que você acha?
> *A_7*: Acho que dá a mesma coisa.
> Pp: O que seus colegas do grupo acham?
> *A_7*: Falaram que vai dar o mesmo valor.
> *Pp*: Por que vocês não fazem um teste?
> *A_7:* Como? resolver das duas maneiras?
> *Pp*: Poderia ser. Mas, não seria mais fácil utilizar um valor numérico para o volume, apenas para testar?
> A_7: Vamos tentar então.
> (...)

Essa questão, levantada pelo aluno A_7, poderia ter sido melhor explorada pelo Professor-Pesquisador. Ele poderia, ao invés de sugerir que os alunos fizessem um cálculo particular, deixar os próprios alunos buscarem estratégias para resolver essa questão. Porém, devido ao pouco tempo e focado no objetivo, o Professor-Pesquisador preferiu não prolongar muito esse assunto.

Após a resolução do problema, um representante de cada grupo colocou na lousa sua resolução. As Figuras 21 e 22, a seguir, mostram a resolução da Atividade 8 por dois grupos, que denominaremos A e B:

Figura 21 – Resolução da Atividade 8 pelo grupo A



→ Sabendo que a capacidade total é igual a 100% e que estando com 15% ocupado restam 85% a ser preenchido

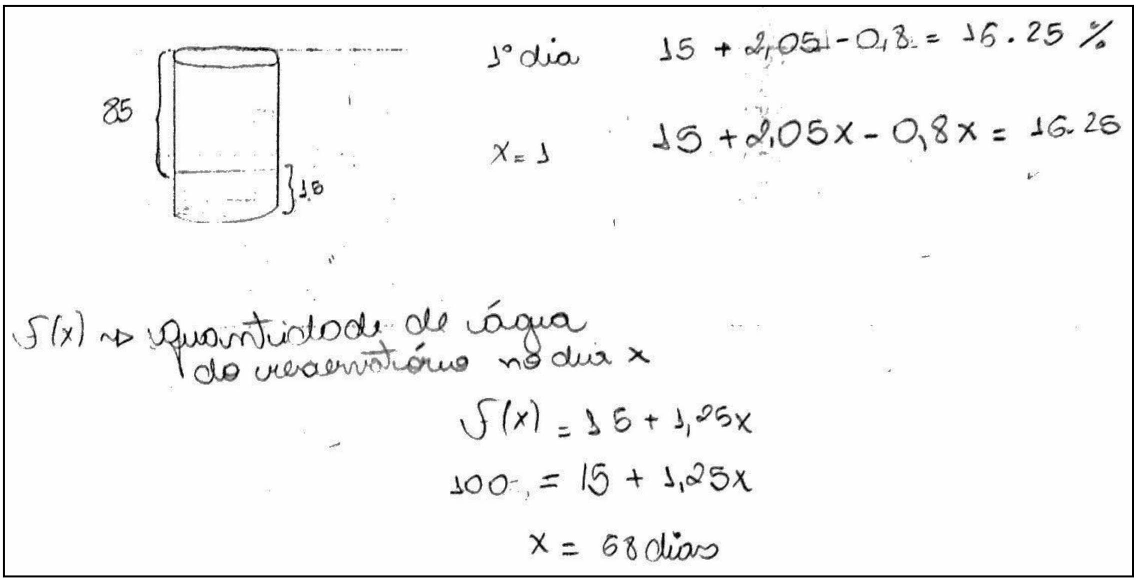
E também que em um dia chuvoso produz 2,05% do volume deste reservatório e que o consumo diário consome 0,8% deste volume.

Logo 2,05 − 0,8 = 1,25 este é o volume diário. Como restam 85% a ser preenchido então 85 ÷ 1,25 = 68.

Portanto é necessário chover 68 dias consecutivos.

Fonte: Dados da pesquisa

Figura 22 – Resolução da Atividade 8 feita pelo grupo B



Fontes: Dado da pesquisa

Todos os três grupos chegaram à mesma solução. O grupo A descreveu em detalhes como chegou à solução (Figura 21). O grupo B apresentou uma resolução bem interessante. Construíram uma função que retornava o volume V, para *x* dias de chuva. E, quando considerou o volume igual a 100%, pôde resolver o problema simplesmente, determinando o valor de *x* ao resolver uma equação do primeiro grau.

Na Plenária, os professores chamaram a atenção para a necessidade de se escrever com clareza todo o processo de resolução. E, principalmente, não omitir as unidades de medida envolvidas.

O Professor-Pesquisador retomou o problema e propôs a seguinte solução:

Considerando V o volume do reservatório, em um dia, chove 2,05% de V por dia e o consumo é 0,8% de V por dia. Logo, o reservatório enche por dia: 2,05% $V/_{dia}$ – 0,8% $V/_{dia}$ = 1,25% $V/_{dia}$.

Como, $1{,}25\%\ V/_{dia} = \frac{1{,}25}{100}\ V/_{dia} = \frac{125}{10000}\ V/_{dia} = \frac{1}{80}\ V/_{dia}$, o volume de água do reservatório aumentará $\frac{1}{80}\ V/_{dia}$.

Se *n* é o número de dias necessários para encher o reservatório e sabendo-se que faltam 85% para enchê-lo, temos: $n \cdot \frac{1}{80}\ V/_{dia} = 85\%\ \text{de V} \Rightarrow n \cdot \frac{1}{80}\ \cancel{V}/_{dia} = \frac{100}{85}\ \cancel{V} \Rightarrow n \cdot \frac{1}{80} \cdot \frac{100}{85}\ 1/_{dia} = 1$

$n \cdot \frac{1}{68} = 1\ \text{dia}$. Logo, o número de dias, *n* , para encher o reservatório é o inverso multiplicativo de $\frac{1}{68}$, isto é, $n = 68$ dias.

A partir daí, o Professor-Pesquisador questionou se todos os números racionais possuíam inverso multiplicativo. As respostas dadas pelos alunos foram "sim". Quando o Professor-Pesquisador questionou "qual é o inverso multiplicativo de zero?" os alunos perceberam que a resposta deveria ser "não". Porém, eles não tiveram dúvidas de que o único número racional que não possuía inverso multiplicativo era zero. Em seguida, o Professor-Pesquisador relembrou que os Racionais, juntamente com suas operações usuais de adição e multiplicação, constituíam um Domínio de Integridade. Com isso, ele formalizou o conceito de corpo, que apresentamos a seguir:

> ***Definição:*** *Um domínio de integridade* $(K,+,\cdot)$ *é denominado um corpo se* $\forall\, a \in K - \{0\}, \exists a^{-1} \in K$ *tal que* $a \cdot a^{-1} = 1$.

Após essa formalização, o Professor-Pesquisador questionou quais conjuntos estudados na Educação Básica, e já identificados como domínio de integridade no curso de Álgebra II, constituía um corpo. Por esses conjuntos já terem sido discutidos várias vezes na verificação de eles constituírem um grupo, um subgrupo, um anel e um domínio de integridade, não foi difícil identificar os principais conjuntos estudados no Educação Básica que são corpos. Isso pode ser visto pela resposta da aluna A8, a seguir:

> A_8: Os domínios de integridade que conhecemos são os Inteiros, os Racionais e os Reais... acho que os Complexos também são. Os inteiros não têm inverso multiplicativo. Então tem que ser só os Racionais, os Reais e os Complexos, ou tem mais?
> (...)

13º Encontro

O objetivo deste encontro foi o de apresentar um exemplo de corpo finito, ou seja, o de mostrar aos alunos que estruturas mais completas também podem estar restritas a conjuntos com poucos elementos. Para isso foi trabalhada a atividade 9. Essa atividade utiliza uma aplicação matemática – criptografia – para mostrar a necessidade do inverso multiplicativo em uma estrutura matemática. Uns dos benefícios de se trabalhar com corpos finitos é o de poder entender melhor as propriedades de um corpo, pois é possível analisar em detalhes todas as possibilidades para suas operações.

Essa atividade é composta por três questões a serem resolvidas. Itens a), b) e c). O objetivo do item a) foi o de familiarizar os alunos com o problema, ou seja, levar os alunos a entender como efetuar as operações definidas no enunciado. O item b) objetivava discutir inverso da operação multiplicação apresentada no problema. Isto é, levar os alunos a perceber que nem sempre uma operação admite inverso para todos os elementos do conjunto em que ela está definida. O propósito do item c) foi o de discutir as propriedades das duas operações apresentadas e, com isso, introduzir o conceito de *Corpo Finito.*

Neste encontro compareceram todos os alunos. Formaram-se três grupos com três alunos cada e, em seguida, foi feita uma leitura individual e, logo após, uma leitura, no grupo, da Atividade 9. Como as operações definidas nessa atividade já eram familiares aos alunos, não houve muita dificuldade para entender o problema. O item a) foi resolvido por todos os grupos de forma natural e rapidamente. Os itens b), c) e d) precisaram da intervenção do Professor-Pesquisador. Essa atividade é apresentada a seguir:

Atividade 9

Considere a correspondência entre as letras do nosso alfabeto e os números naturais, dada por:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Sobre o conjunto $\mathbb{Z}_{26} = \{0,1,2,...,25\}$ defina as operações:

$$a \overset{26}{+} b = \textit{resto da divisão de } a+b \textit{ por } 26$$
$$a \overset{26}{\cdot} b = \textit{resto da divisão de } a \cdot b \textit{ por } 26$$

Um sistema de criptografia pode ser definido por $y = c \overset{26}{\cdot} x$, onde *c* é uma chave fixada de $\mathbb{Z}_{26}$, *x* é o número correspondente à letra a ser criptografada e y é o número correspondente à letra criptografada. Exemplo, escolhendo a chave $c = 7$, podemos criptografar a letra "F" (correspondente a 5) por $y = 7 \overset{26}{\cdot} 5 = 9$ (9 corresponde a J). Logo, "F" é transformada em "J" por este sistema.

De acordo com essas informações:

a) Use *c* = 3 e criptografe a palavra "VIVER";

b) Determine a função que decifra as mensagens cifradas por $y = 3 \overset{26}{\cdot} x$ e $y = c \overset{26}{\cdot} x$;

c) Para quais valores de *c* existe uma função de decifração?

d) $(\mathbb{Z}_{26}, \overset{26}{+}, \overset{26}{\cdot})$ é um corpo? e $(\mathbb{Z}_5, \overset{5}{+}, \overset{5}{\cdot})$?

Fonte: Elaborada pelo autor

No início, a principal dúvida era sobre algumas palavras que apareceram no enunciado do problema, como podemos ver no diálogo a seguir:

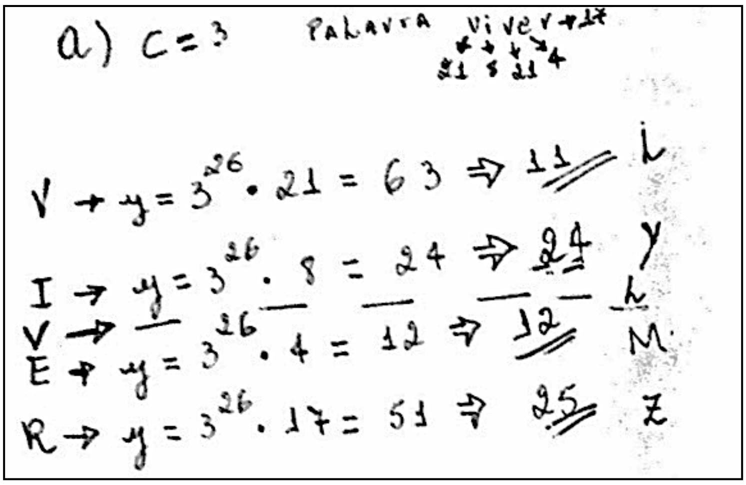
A_1: Professor, não entendi o que é "função que decifra"?

> P_p: Essa função dada no problema $y = 3^{26} \cdot x$ serve pra que?
> A_1: Eu coloco um valor para *x* e encontro *y*
> P_p: Quais valores você coloca para *x*?
> A_1: O número que eu quero que a função criptografe.
> P_p: O que é *y*?
> A_1: O valor criptografado.
> P_p: Se você conhecesse o valor *y* e quisesse determinar x, como você faria?
> A_1: não tenho a mínima ideia.
> P_p: Assim como você tem uma função, em que, colocando o valor para *x* determina *y*, não seria possível ter uma função onde se você colocasse *y* encontraria *x*?
> A_1: Acho que sim.
> P_p: Se essa função existir, ela serviria para que?
> A_1: Para descriptografar?
> P_p: Exatamente. Costumamos chamar essa função de “função de decifração”
> (...)

O item a) foi resolvido por todos os grupos sem nenhuma dificuldade. O que dificultava a resolução do itens b) e c) era a falta de conhecimento sobre função inversa. Como essa dificuldade era unânime e o tempo era pouco, o Professor-Pesquisador decidiu fazer uma breve apresentação expositiva sobre o conceito de função inversa. Essa apresentação se restringiu apenas aos conteúdos que os alunos precisariam para resolver o problema proposto. Após sanarem suas dúvidas em como determinar uma função inversa, os itens b) e c) foram parcialmente resolvidos.

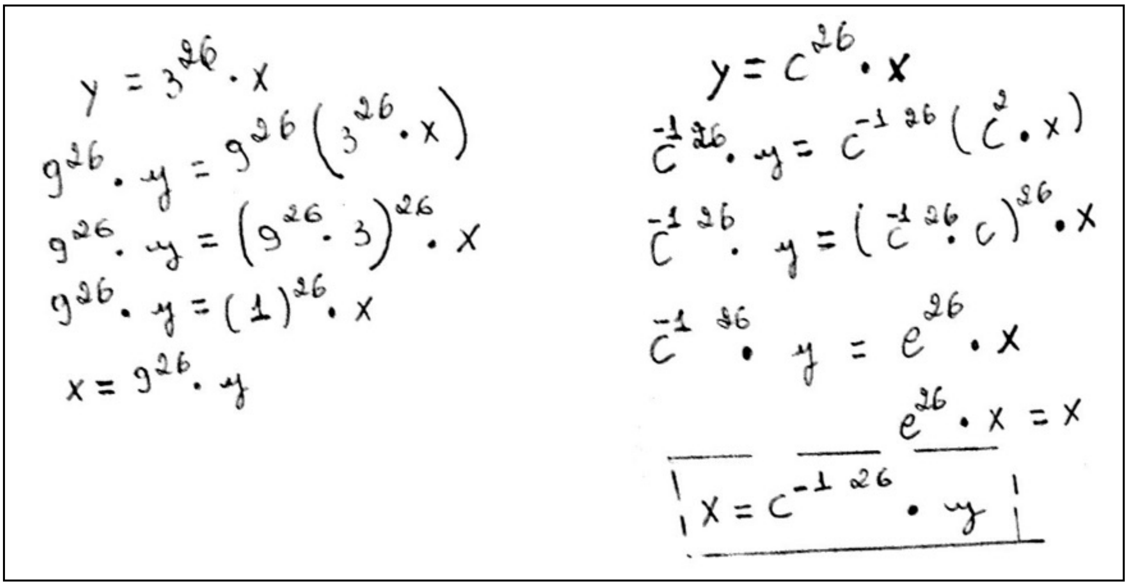
As Figuras 23 e 24 mostram a resolução dos itens a) e b) de um dos grupos.

Figura 23 – Resolução do item a)



Fonte: Dados da pesquisa

Figura 24 – Resolução do item b)



Fonte: Dados da pesquisa

Durante a plenária, os professores exploraram bastante o conceito de função inversa e promoveram uma discussão sobre uma maneira mais formal de resolver o item c). Para alguns alunos a pergunta "*para quais valores de c existe uma função de decifração?"* ainda parecia não fazer sentido, pois e*les* acreditavam que qualquer valor do conjunto $\mathbb{Z}_{26}$ poderia ser usado como chave *c*. Para que os alunos compreendessem que isso não era verdade, o Professor-Colaborador interveio, sugerindo aos alunos que tentassem determinar a função de decifração quando a chave fosse $c = 2$. Com isso, os alunos teriam que isolar *x* na função $y = 2 \overset{26}{\cdot} x$, ou seja, multiplicar módulo 26, ambos os lados da igualdade pelo inverso de 2, na operação $\overset{26}{\cdot}$. O inverso de 2 nessa operação deveria ser um número do conjunto $\mathbb{Z}_{26}$, cujo produto usual dele por 2 deixasse resto 1 quando dividido por 26. Nesse ponto os alunos tiveram muitas dificuldades, como apresentamos a seguir:

> A_1: Professor, para isolar x, eu não teria que passar o 2 dividindo?
> P_p: Existe divisão no conjunto $\mathbb{Z}_{26}$?
> A_1: Não tem não.
> A_2: Só temos a adição e multiplicação módulo 26, não é isso professor?
> P_p: Isso mesmo?
> A_1: Então como vou isolar x nessa equação?
> A_4: Temos que multiplicar pelo inverso multiplicativo de 2 nessa operação, não é professor?
> P_p: Exatamente.
> A_1: E quem é o inverso de 2?

> A_4: É o que estamos tentando descobrir. O que sabemos é que quando a gente multiplicar o inverso de 2 pelo 2, com essa multiplicação, tem que dar 1. Aí é que tá pegando.
> P_p: Como se faz essa operação de multiplicação definida no problema?
> A_4: multiplica e divide por 26 e o resto é o resultado.
> P_q: Quando fazemos uma divisão inteira o que obtemos com resultado?
> A_4: Um número.
> P_p: Quociente e...
> A_4: O resto.
> (...)

Quando os professores perceberam que os alunos não conseguiam chegar a nenhuma conclusão, o Professor-Pesquisador foi até à lousa e, usando do dispositivo prático da divisão, observou que deveria existir algum quociente *q* no conjunto $\mathbb{Z}_{26}$, tal que $2 \cdot 2^{-1} = 26q + 1$, onde 2^{-1} é o inverso de 2 na operação $\overset{26}{\cdot}$. Novamente promoveu-se uma discussão.

> P_p: O que podemos dizer do primeiro membro dessa equação?
> A_4: É que duas vezes dois elevado a menos 1 dá 1.
> P_p: Verdade. Mas o que queremos determinar?
> A_1: 2^{-1}.
> P_p: Então não podemos trocar o primeiro membro dessa equação por 1, podemos?
> A_4: Ah... não. nós precisamos é isolar 2^{-1}.
> P_p: O que podemos dizer de um número que pode ser escrito como duas vezes outro número.
> A_2: É par, não é?
> P_p: Exatamente. Podemos dizer que o primeiro membro dessa equação é par?
> Alunos: Podemos.
> P_p: E o segundo membro? também é par?
> A_1: Não professor, acho que é ímpar.
> P_p: E como a gente verifica se é ímpar?
> A_4: Só escrever na forma 2n + 1.
> P_p: Quer tentar escrever o segundo membro na forma 2n + 1?
> (... pausa)
> A_4: Consegui! Duas vezes 13q mais um. Não é isso?
> P_p: Se o primeiro membro dessa igualdade é par e o segundo membro é ímpar, o que podemos concluir?
> A_2: Que não é verdade.
> P_p: O que estamos procurando?
> A_1: Quem é 2^{-1}.
> P_p: O que podemos concluir com isso?
> A_2: Não existe?
> (...)

Em seguida o Professor-Pesquisador foi até a lousa e escreveu o que havia sido concluído nesse diálogo, da seguinte forma:

O primeiro membro dessa igualdade é par (o dobro de um inteiro) e o segundo é ímpar, pois, $26q+1=2(13q)+1$*. Logo, não existe* 2^{-1} *na operação* $\overset{26}{\cdot}$*. Consequentemente, para* $c=2$*, a função* $y=2\overset{26}{\cdot}x$ *não possui inverso.*

Alguns alunos questionaram, preocupados, se deveriam testar, dessa forma, todos os valores de $\mathbb{Z}_{26}$. Mas, alguns alunos, imediatamente perceberam que, quando *c* fosse par, a função de cifração não seria invertível, pelo mesmo argumento e eles próprios, concluíram que os valores de *c* deveriam ser todos os números ímpares. Novamente, o Professor-Colaborador sugeriu que eles testassem *c* = 13. Nesse momento, um dos alunos buscou recorrer à tábua de operações de $\overset{26}{\cdot}$ construída em aulas anteriores. Com o uso dessa tábua, os alunos perceberam que para esse valor de *c* a função de cifração também não possuía inversa. O Professor-Pesquisador pediu que os alunos tentassem justificar formalmente essa afirmação. Como eles não conseguiram, o Professor-Pesquisador foi à lousa e, com a participação de todos, justificou formalmente o motivo de 13 não possuir inverso na operação $\overset{26}{\cdot}$. Para isso, bastou observar que $13\cdot 13^{-1}=13(2q)+1$ para algum inteiro *q*, onde 13^{-1} é o inverso de 13 na operação $\overset{26}{\cdot}$. Como o primeiro membro é um múltiplo de 13 e o segundo é sucessor de um múltiplo de 13, eles não poderiam ser iguais.

Após a conclusão do item c), os alunos conseguiram perceber que um valor de *c* só teria inverso nessa operação, se não possuísse um divisor diferente de 1, comum com 26.

O item d) foi consequência das discussões do item c). Mesmo assim, alguns alunos só compreenderam sua solução após a intervenção dos professores. No primeiro caso, foi fácil levar os alunos a concluir que $(\mathbb{Z}_{26},\overset{26}{+},\overset{26}{\cdot})$ não era um corpo, bastou lembrar que o número 2 não possui inverso na operação $\overset{26}{\cdot}$. O segundo caso foi um pouco mais difícil, pois alguns alunos não conseguiam ver que um número primo não possui divisor, diferente de 1, comum com outro número, que não fosse ele próprio ou múltiplo dele. Mostrando, assim, uma deficiência no seu conhecimento prévio sobre números inteiros.

Após o término da Plenária, o Professor-Pesquisador fez a formalização de Corpo Finito. Apresentamos essa formalização a seguir:

***Definição**: Dizemos que um corpo $(K,+,\cdot)$ é finito se K for um conjunto finito.*

14º Encontro

Neste, e no encontro seguinte, foi trabalhado um material intitulado: “Números Inteiros: um domínio de integridade”, elaborado pelo Professor-Pesquisador. Esse material encontra-se, na sua íntegra, no apêndice D. Faremos aqui uma descrição desse material, explicando sua composição e os objetivos de cada parte que o compõe. Ele começa apresentando a definição de um Domínio de Integridade, com o objetivo de revisar esse conceito visto em encontros anteriores. Logo depois, temos a Proposição 1, composta por seis afirmações importantes no contexto da AAM e necessárias para a resolução de três exercícios, que aparecem logo em seguida. Esses exercícios, além de servir para fixar conceitos estudados, têm o propósito de fazer uma ligação entre alguns conteúdos da Álgebra Abstrata Moderna com conteúdos da Educação Básica. Mais especificamente, a Proposição 1, juntamente com as propriedades de um Domínio de Integridade, são utilizadas, nesses exercícios, para justificar as *regras das operações com sinais*, trabalhadas por professores da Educação Básica. Essas regras são apresentadas aos alunos do Ensino Fundamental, em geral, sem justificativas e, às vezes, o próprio professor que as ensina não sabe justificá-las. A forma com que foi trabalhada a justificativa dessas regras, utilizando AAM, nem sempre poderia ser trabalhada com alunos da Educação Básica. Porém, se o professor souber justificar aquilo que ele ensina, ele terá maiores condições de desenvolver estratégias para trabalhar, de forma mais consistente os conteúdos e, consequentemente, produzir maior aprendizagem.

Após os três primeiros exercícios, vem a Definição 2. Vale ressaltar que essa definição é, em geral, trazida, nos livros de Teoria dos Números, ou mesmo nos de Álgebra Moderna, como um Teorema. Porém, como não temos o propósito de demonstrar esse resultado, preferimos apresentá-lo como uma Definição.

Definição 2: *Sejam* a *e* $b \neq 0$ *dois números inteiros.* q *e* r são denominados, respectivamente, quociente e resto da divisão inteira de a *por* b*, se:* $$\begin{cases} a = b \cdot q + r \\ 0 \leq r < \vert b \vert \end{cases}$$

O objetivo dessa Definição, neste trabalho, foi mostrar aos alunos a possibilidade de se fazer uso de propriedades de uma dada estrutura algébrica para se tirar conclusões de outras estruturas algébricas semelhantes. Mais especificamente, mostrar, aos alunos, que os Inteiros e os Polinômios, com suas respectivas operações de adição e multiplicação usual, possuem a mesma Estrutura Algébrica, isto é, ambas são Domínios de Integridade. Consequentemente, pode-se fazer definições, relacionadas aos Polinômios, análogas às dos Inteiros e, principalmente, observar que propriedades válidas nos Inteiros, que dependem apenas das propriedades das operações de adição e multiplicação, são válidas também nos Polinômios. Essa relação é trabalhada nos exercícios 4 e 5. O exercício 6 busca evidenciar que as estruturas algébricas estão fundamentadas nas operações e, principalmente, em suas propriedades. Assim, a validade de alguns resultados, como, por exemplo, um “produto notável”, dependem de como se comportam a adição e a multiplicação no conjunto em que se está trabalhando.

O encontro 14 restringiu-se à Definição 1, à Proposição 1 e aos exercícios de 1 a 3. O restante do material foi trabalhado no 15º encontro. A seguir, descrevemos como se deu o 14º encontro.

Todos os alunos compareceram ao 14º encontro. Porém, o Professor-Colaborador não pôde comparecer. O Professor-Pesquisador começou o encontro entregando o material já mencionado. Em seguida, pediu-se que fosse feita uma leitura da Definição 1 (Apêndice D) e, após essa leitura, o professor fez algumas perguntas para que os alunos refletissem a respeito. As perguntas foram: "vocês entenderam a Definição 1?"; "Há alguma propriedade apresentada por essa definição que vocês não entenderam?" ; "Quais Domínios de Integridade vocês conhecem?".

Aparentemente, todos os alunos entenderam a Definição 1. Porém, não conseguiram, em suas respostas, apresentar nenhum exemplo de Domínio de Integridade, exceto os Inteiros, que compunha o próprio material.

O professor, com a participação dos alunos, releu e discutiu todos os detalhes da Definição1 e, após sanar todas as dúvidas que apareceram, fez o mesmo para a Proposição 1. Em seguida, foi dado um tempo para que os alunos resolvessem os exercícios 1, 2 e 3. Os próprio alunos sugeriram a resolução em grupo, da mesma forma que se fizera em encontros anteriores, com a MEAAMaRP. Assim, formaram-se três grupos com três integrantes cada. Primeiro resolveram o Exercício 1 e, só após a discussão coletiva desse exercício, é que partiram para a resolução dos outros.

O Exercício 1 pedia para que se demonstrasse a Proposição 1.

Quadro 14 – Propriedades de um domínio de integridade

- **Proposição 1:** Se $(D,+,\cdot)$ é um domínio de integridade então, para quaisquer $a,b \in D$ valem as seguintes propriedades:

i. $a \cdot 0 = 0$

ii. $-(1 \cdot a) = (-1) \cdot a = 1 \cdot (-a)$

iii. $-(a \cdot b) = (-a) \cdot b = a \cdot (-b)$

iv. $-a - b = -(a+b)$, onde, por definição, $a - b = a + (-b)$

v. $-(-a) = a$

vi. $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$

Fonte: Retirado de um material didático elaborado pelo autor (Apêndice D)

Porém, mesmo com o Professor-Pesquisador agindo como mediador, nenhum dos grupos conseguiu demonstrar todos os itens dessa proposição. No diálogo que segue o Professor-Pesquisador buscou levar os alunos a compreender que mesmo uma afirmação, aparentemente óbvia, precisa ser bem entendida e justificada dentro do contexto em que ela está inserida.

A_6: Professor, esse item i) não é óbvio?
P_p: Por que você acha óbvio?
A_6: Todo número multiplicado por zero não dá zero?
P_p: Mas é isso que tá escrito no item i)?

A_6: Sim. Está escrito que *a* vezes zero é zero.
P_p: E o que é *a*?
A_6: Não é um número?
P_p: Todo Domínio de Integridade é composto por números?
(...)

A discussão, apesar de levar os alunos a compreenderem o que precisava ser provado, não foi capaz de levar os alunos a fazer essa demonstração. Foi necessário que o próprio Professor-Pesquisador demonstrasse o item i), na lousa, com a participação dos alunos. Essa demonstração é apresentada a seguir:

i) $a \cdot 0 = a \cdot 0 \Rightarrow a \cdot (0+0) = a \cdot 0 \Rightarrow a \cdot 0 + a \cdot 0 = a \cdot 0 \Rightarrow -(a \cdot 0) + (a \cdot 0 + a \cdot 0) = -(a \cdot 0) + a \cdot 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (-(a \cdot 0) + a \cdot 0) + a \cdot 0 = 0 \Rightarrow 0 + a \cdot 0 = 0 \Rightarrow a \cdot 0 = 0$ ■.

Os alunos conseguiram resolver o item ii), após a seguinte discussão com o Professor-Pesquisador:

P_p: Agora que resolvemos o item i), tentem resolver o item ii).
A_1: Não tenho a mínima ideia do que fazer.
P_p: O que significa $-(1 \cdot a)$?
A_1: O simétrico?
P_p: Simétrico de quem?
A_1: De *a*?
A_2: Simétrico de 1 vezes *a*. Não é professor?
P_p: Exatamente. O que significa o simétrico de um elemento?
A_8: O valor que somado com o elemento dá o neutro.
P_p: Somado com qual elemento? e quem é o neutro?
A_1: O neutro não é o zero?
A_8: Significa que $-(1 \cdot a)$ é o elemento que somado com $(1 \cdot a)$ dá zero. Não é isso?
P_p: Isso mesmo.
A_1: E aí professor?
P_p: Quantos simétricos um elemento possui?
Alunos: O simétrico é único.
P_p: Então, qualquer elemento que for igual ao simétrico tem que fazer o mesmo que o simétrico faz, não é?
A_4: Não entendi.
$_P$p: (O Professor-Pesquisador escreveu na lousa e perguntou) quanto dá $-(1 \cdot a) + (1 \cdot a)$?
Alunos: zero.
P_p: Se $-(1 \cdot a) = (-1) \cdot a$ então o que podemos dizer de $(-1) \cdot a + (1 \cdot a)$?
A_1: Tem que dar zero também?
P_p: Por que?
A_8: Porque $(-1) \cdot a$ também será simétrico de $(1 \cdot a)$.
P_p: Então o que precisamos provar?
A_8: $(-1) \cdot a + 1 \cdot a = 0$.
(...)

Após algum tempo, os alunos fizeram a demonstração desse item. Apresentamos, a seguir, parte da demonstração desse item, uma vez que a parte restante tinha demonstração análoga.

$$(-1)\cdot a+1\cdot a=(-1+1)\cdot a=0\cdot a=0 \blacksquare .$$

Os alunos fizeram os itens iii) e v) de forma análoga ao item ii). O Professor-Pesquisador resolveu o item iv), na lousa.

O Exercício 2 era composto por seis itens cujas resoluções eram aplicações da Proposição 1, conjuntamente com as propriedades do Domínio de Integridade dos Inteiros.

Quadro 15 – Exercício 2

2) Utilize as propriedades apresentadas na Proposição 1 para discutir e justificar que:

a) $-0+0=0$ b) $-(-5)=5$ c) $-2-3=-5$

d) $-5+2=-3$ e) $3\cdot(-2)=-6$ f) $-3\cdot(-2)=6$

Fonte: Retirado de um material didático elaborado pelo autor (Apêndice D)

Todos os grupos conseguiram resolver os itens a) e b) sem intervenção do professor e, com a mediação do professor, os itens c), e) e f). Apenas o item d) não foi resolvido por nenhum dos grupos. Porém, depois foi resolvido pelo Professor-Pesquisador e com a participação dos alunos. Após a resolução de todos os itens do Exercício 2, foi discutida a generalização deles, produzindo assim as conhecidas regras de sinais usadas nas operações de adição e multiplicação dos números inteiros.

Alguns alunos ficaram surpresos, pois, acreditavam que essas regras eram definições e que deviam aceitá-las sem uma justificativa. A seguir, apresentamos alguns dos diálogos que ocorreram durante esse encontro mostrando a participação de alguns alunos e como se deu a intervenção do Professor-Pesquisador, nesse processo.

A_1: Professor, não sabemos como mostrar que $-2-3=-5$.
P_p: Olhe o item iv) da Proposição 1.
A_1: Ah... mas olhando a Proposição, então, nem tem o que fazer.
P_p: Sim, você pode usar direto o resultado. Mas, também pode fazer o mesmo que fizemos para demonstrar esse item. Por que não tentar trabalhar como fizemos para demonstrar o item iv?
A_1: Vamos tentar.

P_p: É importante que vocês entendam o que querem justificar. Observe que o enunciado da questão pede para que se discuta e justifique.
A_1: Como assim?
P_p: O que significa -2 , -3 e -5?
A_1: Menos uma vez dois, menos uma vez três... não é isso?
P_p: Isso é um dos resultados que provamos na Proposição 1. Porém -2, -3 e -5, na Álgebra, possui outro significado...
A_8: O oposto de 2, 3 e 5, é isso?
P_p: Isso mesmo. Que quer dizer que -2 somado com...
Alunos: 2 dá zero!
P_p: Exatamente, o elemento neutro da adição.
(...)
A_1: É estranho justificar essas coisas. Parece que estamos usando as mesmas coisas que queremos justificar. Isso é muito confuso, mesma hora que podemos usar o que sabemos já não podemos usar mais.
P_p: O que queremos justificar são as regras das operações de adição e multiplicação dos inteiros. Então, devemos partir do princípio que sabemos somar e multiplicar números naturais, mas não sabemos somar e multiplicar números inteiros. Usaremos a Proposição 1 e as propriedades das operações, para conseguir fazer adição e multiplicação de números inteiros.
A_4: Então, no caso aqui, $-2-3=-5$, eu parto de que não sei somar $-2-3$?
P_p: Exatamente.
A_4: Aí é só trocar (-2) por $(-1)\cdot 2$ e (-3) por $(-1)\cdot 3$ e depois é só usar a distributiva, não é assim, professor?
P_p: Isso mesmo.
A_1: Ah, e 2+3 nós sabemos somar porque são naturais.
P_p: Isso mesmo.
A_1: Agora entendi.

Por falta de tempo, o exercício 3 não foi resolvido, ficando como atividade extraclasse .

15º Encontro

Este encontro foi uma continuação do encontro anterior. Neste encontro foi apresentada e discutida a Definição 2 e trabalhados os exercícios 4 a 6. O objetivo de se trabalhar essa definição foi o de chamar a atenção de resultados equivalentes para as mesmas estruturas algébricas. Em particular, olhar os Inteiros e os Polinômios como mesma estrutura algébrica e, consequentemente, perceber que eles gozam de propriedades comuns. Vale ressaltar que, todas as estruturas elencadas nesse encontro são estruturas presentes nos conteúdos de Educação Básica. Com isso, novamente estamos mostrando relações entre AAM com conteúdos do Ensino Básico e, o mais importante, incentivando os estudantes a buscarem relações entre o conhecimento adquirido em sua formação, com sua futura prática docente.

Neste encontro, como ocorreu no encontro anterior, compareceram todos os estudantes. O encontro se iniciou com uma leitura individual da Definição 2. O

Professor-Pesquisador pediu que os alunos refizessem os exemplos contidos no material didático proposto, com o objetivo de entender a Definição 2. Em seguida, por sugestão dos próprios estudantes, formaram-se três grupos com três alunos cada e iniciaram a resolução dos exercícios. A única dificuldade que os alunos tiveram na questão 4 foi a de estabelecer uma condição para os Polinômios, equivalente à segunda condição da Definição 2. Isso se deve ao fato de que, os Polinômios não possuem uma relação de ordem. A seguir, apresentamos o exercício 4 e um diálogo que ocorreu durante sua resolução:

Quadro 16 – Exercício 4

4) Qual seria uma definição de divisão de polinômios, equivalente à divisão inteira de números inteiros?

Fonte: Retirado de um material elaborado pelo autor (Apêndice D)

> A_1: Professor não entendi a questão 4.
> P_p: Você entendeu a Definição 2?
> A_1: Acho que sim. Ela diz como a gente faz divisão de números inteiros, não é isso?
> P_p: Na verdade a definição apenas diz o que são quociente e resto de uma divisão inteira. Ela vem apenas fundamentar um processo de divisão que a gente já sabia e praticava desde o primário. Se *a* e *b* forem positivos como eu determino o quociente?
> A_2: Como assim?
> A_4: Ah... se eu tiver, por exemplo, 5 dividido por 2, eu preciso de um número que multiplicado por 2 dê 5 ou menor que 5.
> A_2: Mas tem que ser o maior número que multiplicado por 2 dê 5 ou menor. Não é professor?
> P_p: Correto. Então, se no lugar de números inteiros fossem polinômios?
> A_2: Como assim? no lugar do 5 fosse um polinômio e no lugar do 2 também fosse um polinômio?
> P_p: Exatamente. Como a gente determinaria o quociente e o resto da divisão?
> A_1: Aí complicou.
> A_2: Não é da mesma forma?
> A_8: Eu acho que é do mesmo jeito. A gente tem que encontrar um polinômio que multiplicado pelo divisor, que também é um polinômio, dê o dividendo que é um polinômio também.
> A_2: Igual ao dividendo ou então menor.
> P_p: E quando um polinômio é menor que outro?
> A_1: Tem jeito?
> P_p: O que vocês acham?
> A_8: Ah... acho que não tem como. O grau é que tem que ser menor, não é isso?
> (...)

Com isso, o Professor-Pesquisador aproveitou para reforçar o fato de que Inteiros e Polinômios compartilham apenas as propriedades algébricas, ou seja, as propriedades das operações de adição e multiplicação. E, quando fazemos referências a outro conceito ou propriedade, que não são inerentes a essas operações, podemos não ter nenhuma relação entre essas duas estruturas.

Depois dessa discussão um dos alunos foi à lousa e, com a participação dos colegas, baseando-se na Definição 2, escreveu uma nova definição, denominada Definição 2', da seguinte forma:

Definição 2': *Sejam* $a(x)$ *e* $b(x) \neq 0$ *dois polinômios.* $q(x)$ *e* $r(x)$ são denominados, respectivamente, quociente e resto da divisão de $a(x)$ *por* $b(x)$ *se:* $\begin{cases} a(x) = b(x) \cdot q(x) + r(x) \\ 0 \leq grau\ de\ r(x) < grau\,de\,b(x) \end{cases}$

O Exercício 5 foi trabalhado como uma continuação do 4. A seguir, apresentamos o Exercício 5 e parte de um diálogo sobre o seu entendimento.

Quadro 17 – Exercício 5

5) Qual a relação algébrica existente entre os inteiros e os polinômios? discuta suas potencialidades.

Fonte: Retirado de um material elaborado pelo autor (Apêndice D)

A_2: Professor, o que quer dizer relação algébrica, aqui na questão 5?
P_p: Os Inteiros, com as operações de adição e multiplicação, formam que estrutura algébrica?
A_4: Grupo?
P_p: Um grupo é composto por quantas operações?
A_4: Acho que só uma.
P_p: Então, os Inteiros com as duas operações: adição e multiplicação, seria...
A_4: Um anel, não é?
P_p: Anel comutativo?... tem elemento unidade?... possui divisor de zero?
A_8: Um domínio de integridade, professor.
A_4: Ah... sim. Um domínio de integridade.
P_p: E os Polinômios, com as operações usuais de adição e multiplicação de polinômios, que estrutura é?
A_4: A mesma dos Inteiros, é isso?
P_p: Vamos testar as propriedades.
(...)
A_4: Ah! então a relação algébrica dos Polinômios com os Inteiros é porque os dois são domínio de integridade? é isso?
P_p: Sim. Eles formam uma mesma estrutura algébrica. Que vantagens podemos tirar disso?
A_4: Ah... professor, não sei.
A_3: A gente pode fazer definições equivalentes, igual fizemos à divisão inteira. É isso?
P_p: Sim. Desde que essas definições dependam apenas das operações definidas na estrutura.

A_1: Então, a gente pode fazer as mesmas coisas nos Polinômios que fazemos nos Inteiros?
P_p: Essas mesmas coisas a que você se refere têm que estar relacionadas com as propriedades algébricas. Por exemplo, temos uma relação de ordem nos Inteiros e não temos nos Polinômios. Isto é, um número inteiro pode ser maior ou menor que outro, mas, essa comparação não está definida nos Polinômios. A relação de ordem não depende das propriedades algébricas.
A_1: Não podemos dizer que um polinômio é maior que outro se o grau for maior?
P_p: Quantos polinômios de grau três existem?
A_1: Ah... infinitos.
P_p: Todos os infinitos polinômios de grau três são iguais?
A_1: Claro que não.
P_p: Se a gente definisse que um polinômio seria maior que outro se ele tivesse grau maior do que esse outro, para dois polinômios serem iguais não bastaria ter mesmo grau?
A_1: Sim.
P_p: Então todos os polinômios de grau três deveriam ser iguais.
A_8: Então, as potencialidades de Inteiros e Polinômios serem uma mesma estrutura algébrica seria a de poder fazer os mesmos cálculos nos Polinômios que fazemos nos Inteiros?
P_p: Se esses cálculos dependerem apenas das propriedades algébricas.
A_4: Mas o que são as propriedades algébricas?
A_1: São aquelas propriedades das operações: associativa, comutativa, elemento neutro..., não é professor?
P_p: Isso mesmo.
A_4: Quer dizer que se eu estiver resolvendo alguma coisa nos Polinômios e não souber, posso fazer nos Inteiros?
A_1: Só se estiver usando as propriedades algébricas.
P_p: As propriedades algébricas são as mesmas embora as formas de aplicação sejam diferentes.
(...)

No Exercício 6, primeiramente o Professor-Pesquisador perguntou se algum aluno sabia fazer a demonstração da afirmação apresentada nesse exercício. A aluna A_8 respondeu que sim e fez essa demonstração na lousa. Apresentamos a seguir o enunciado desse exercício juntamente com a resolução feita por essa aluna.

Quadro 18 – Exercício 6

6) Considerando a afirmação $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, responda
a) Essa afirmação é verdadeira para a e b inteiros, racionais e reais?
b) Essa afirmação é verdadeira para a e b matrizes?
c) Essa afirmação é verdadeira para a e b polinômios?
d) Evidencie as propriedades algébricas necessárias para que essa afirmação seja verdadeira. Para quais estruturas algébricas essa afirmação é verdadeira?

Fonte: Retirado de um material elaborado pelo autor (Apêndice D)

Demonstração:

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = (a+b)a + (a+b)b = a^2 + ba + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Durante essa demonstração, a aluna A_8 enfatizou que $ba+ab$ só seria $2ab$ se a e b pertencessem a uma estrutura algébrica comutativa. A partir disso, as respostas pedidas no Exercício 6 fluíram sem muita dificuldade, visto que os alunos tinham acabado de ver, no Exercício 5, que os Inteiros e os Polinômios eram Domínios de Integridade e, consequentemente, comutativos. Além disso, a maioria dos alunos lembrava que os Racionais e os Reais eram estruturas ainda mais completas – eram um Corpo. Assim, ao responder os item a) e d) da questão 6, quando se perguntou se $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ era verdadeira para Inteiros, Racionais, Reais e Polinômios, a resposta dada foi sim. Porém, a resposta para o item c) – se a mesma afirmação seria válida para *a* e *b* matrizes – a resposta foi não.

Ao término do encontro, os alunos fizeram comentários e elogiaram muito essa aula. Alguns sugeriram a construção de uma lista de todos os conteúdos da AAM, mostrando como relacioná-los com conteúdos da Educação Básica. Porém, o Professor-Pesquisador observou que o objetivo desses dois últimos encontros não era o de criar uma receita, a ser seguida para relacionar a AAM com os conteúdos da Educação Básica, mas incentivar os próprios alunos a buscarem relações existentes, não apenas entre a AAM, mas, também, entre todas as disciplinas de matemática da Licenciatura, com sua prática docente.

16º Encontro

Neste encontro foi feita uma avaliação diagnóstica. Essa avaliação abordou três temas: Formação de Professores, Álgebra e Resolução de Problemas. O objetivo desta avaliação foi o de obter informações sobre o que esses temas representam para os alunos, isto é, como esses alunos veem sua formação profissional, o que eles apontariam como pontos positivos e quais seriam os desafios na Formação de Professores de Matemática no IFG. Sobre Álgebra, queríamos investigar, primeiramente, que conteúdos ficaram vivos na mente dos alunos, logo após o término do curso de Álgebra II, e que foram trabalhados com a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através de Resolução de Problemas. Além disso, pretendíamos verificar se esses alunos acreditavam que a AAM pode trazer contribuições significativas para sua formação. E ainda, inquirir se o curso de AAM deveria mudar e, em caso afirmativo, o que deveria mudar. Sobre Resolução de Problemas, gostaríamos de evidenciar, do ponto de vista dos alunos, a influência da MEAAMaRP no seu aprendizado de AAM e se eles utilizariam essa metodologia em sua prática docente.

Neste encontro estavam presentes o Professor-Pesquisador e todos os alunos. Este encontro foi dividido em duas etapas. Na primeira, o Professor-Pesquisador promoveu um debate com os três temas já citados: Formação de Professores, Álgebra e Resolução de Problemas. O objetivo de promover esse debate foi o de estimular os alunos a refletir sobre esses temas, antes de responderem, por escrito, a uma Avaliação Diagnóstica. Na segunda etapa, aproveitando os alunos ainda no clima da discussão, o Professor-Pesquisador lhes entregou um questionário para que os alunos respondessem. Uma cópia deste questionário se encontra no Apêndice E. Vale ressaltar que este encontro teve uma duração maior que os anteriores, pois as atividades do semestre letivo já haviam se encerrado e os alunos não tinham outros compromissos acadêmicos com a instituição, além da disciplina de Álgebra II.

A seguir, apresentaremos algumas falas dos alunos durante o debate e, em seguida, alguns recortes dos questionários de alguns alunos:

> A2: Metodologia de ensino... eu acho que isso é um diferencial para os professores. Porque, ir lá no quadro explicar, isso eu já vi através do PIBID[22] e através de outras realidades, o conhecimento da pessoa lá no quadro não vai fazer muita diferença para ela passar para os alunos. O que vai fazer diferença na aula é a metodologia. Porque, na prática, hoje, a gente percebe isso, sabe? se você não tiver uma metodologia de ensino que encante seu aluno, você pode nem conseguir dar aula. Por melhor que seja seu conhecimento e suas notas na faculdade você precisa de uma metodologia diferenciada.
> A1: Você está falando da formação de professores aqui do instituto?
> Pp: Quero que falem, especificamente, sobre a formação de vocês.
> A1: Acho que, sobre o que nosso colega acabou de dizer, tem parte de professores aqui que acham que estão formando qualquer pessoa menos professores, porque o que eles passam para a gente é o que não se deve fazer como professor. A forma com que eles nos tratam... não dão atenção e até se recusam a tirar dúvidas. Eles acham que é só jogar conteúdos e o aluno se vira. Não são todos, mas é a grande maioria. São poucos os que se importam em trazer um jeito diferente de dar aula e, mesmo um olhar diferente sobre os conteúdos, pensando nos benefícios que isso trará à nossa formação, inclusive para que a gente reflita e tente fazer algo diferente quando a gente for dar aula nas escolas. Há professores que vêm, incentivam a gente a ser professor, mostram o lado bom, coisas interessantes, mas vêm outros e te dão uma porrada depois. Alguns chegam a te chamar de burro. Ninguém pensa que a maioria dos alunos que estão aqui vieram de escolas públicas, não sabem mesmo, mas estão aqui para aprender. Há muitos conteúdos do Ensino Médio que eu nunca vi e do jeito que alguns professores fazem desanima a gente. A maioria dos professores dão aula para quem sabe mais e os que sabem menos são

[22] Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência

deixados de lado. O que parece é que, muitos dos nossos professores nunca aprendeu a dar aula... pensam que estão formando professores pra serem iguais a eles.
A6: Eu quero é falar da Álgebra, porquê, assim, eh... no curso de matemática para mim nenhuma disciplina tem sido fácil. Eu sempre tive comigo que nunca aprendi matemática, porque, a meu ver, a matemática pra mim precisa ter uma relação de significado, digo significado real, concreto... coisa do dia-a-dia e, a Álgebra, ao meu ver, permeia várias atividades humanas. A maneira como ela é expressada do ponto de vista lógico e algébrico é que complica a nossa situação enquanto aluno, a falta de uma relação com o concreto. Eu sinto que a Álgebra ajuda a gente a pensar, quanto mais a gente estuda Álgebra mais a gente vai melhorando o raciocínio... em toda minha vida que estudei matemática, na maioria das vezes, eu não via a matemática dialogada, discutida, sentida, percebida no campo do raciocínio lógico e a Álgebra possibilita isso para os estudantes de matemática ou qualquer, né, que se interesse.
A2: Principalmente um momento na aula para você poder discutir e isso, nessas aulas que tivemos, foi um diferencial que foi bom.
A7: Mas talvez seja devido à metodologia de ensino.
A2: É.
A7: Porque pra mim, até essas últimas atividades que fizemos, foram as aulas que consegui ver, enxergar algumas coisas, entre coisas, de útil para mim, como professor do Ensino Fundamental e Médio, pois, trabalhou coisas do Ensino Básico que a gente já sabia, mas, que não sabia provar o porquê e de onde veio. Então, essa aula foi legal. Talvez, também, foi a metodologia que você apresentou que esclareceu isso pra nós. Até, então, a Álgebra era algo muito abstrato e na maioria dos conteúdos a gente não sabe pra que isso.
A8: Assim... eu concordo que a gente tinha que partir do princípio que tínhamos um conjunto e uma operação para se ter um grupo. Mas e aí? a gente faz o quê com esse grupo? agora, assim... a gente foi encaixando a Álgebra no que a gente já conhecia, assim faz sentido.
A7: Agora, na questão de Formação de Professores, na última semana da matemática, eu fiquei um tempão conversando com o Coordenador do nosso curso... tem vários professores, não vou citar todos, mas a maioria... eles estão aqui dando esse curso para poder levar... o que eles querem é levar os alunos para o mestrado e o doutorado. A maioria deles não tem a intenção de formar os alunos para ser um professor do curso lá de Educação Básica, Ensino Médio, esse tipo de coisa. Foi tanto, que falei para o Coordenador – eu tô aqui, e não tô afim de ir para um mestrado, ir para um doutorado. Pode ser que eu vá, mas até então, eu não quero isso... eles têm que ensinar a gente de acordo com... é Licenciatura aqui, é Licenciatura, eu tenho que estudar de acordo com o campo que eu vou ocupar.
A4: Eu olho o nosso curso assim, mais no geral. O que estou vendo é que cada um tá pegando uma parte específica da formação, né... porque, eu para ser professor, eu preciso ter conhecimento matemático e, nesse conhecimento, se ele tiver significado pra mim eu vou poder dar significado para o aluno. Você tem que fazer um curso que vai aprofundar seu conhecimento sim, que vai ajudar a descobrir como resolver, como encontrar, como calcular, mas com significado. (...) são poucos professores que não têm nada a oferecer, que a gente possa aproveitar. Quando ele não tem uma metodologia didática que associa o que você está estudando com o Ensino Fundamental e Médio, mas tem uma metodologia capaz de fazer você compreender aquele conteúdo e como ele se desenvolve. Porque não tem como você fazer uma formação separada aqui. Você quer ir para o Ensino Médio, tá bom. Mas, nós temos as disciplinas que nos ajudam a trabalhar esse lado didático, que é a “Metodologia de Ensino”, a “Didática”. Isso tudo favorece. Os conteúdos, nos dados, são por partes e são essas partes que nos são dadas que devemos construir. Ninguém vai

> fazer algo completo para nós irmos para sala de aula e aplicar da maneira que deveria ser. Porque eu acho que não existe um jeito, porque isso vai ser desenvolvido individualmente.
> A2: O que A7 falou eu acho que pode ser um dos motivos da evasão. Porque, nitidamente, existe um conflito do que a gente trás aqui para o curso de Licenciatura. Na Licenciatura o professor deveria focar mais nas questões pertinentes da Licenciatura e se alguém quisesse fazer um mestrado deveria aprofundar depois nos conteúdos de matemática. Mas para o nosso exercício da profissão, lá no Ensino Básico, nós não precisamos ter esse conhecimento rebuscado da matemática não. Nós, precisamos sim, e isso eu vejo nítido, de metodologia de ensino. Se na nossa grade isso já é muito superficial, por exemplo, o "Geogebra" a gente vê só algumas partes, coisa desse tipo devia ser uma disciplina. "Tecnologia" da matemática deveria ter mais, porque é isso que vai fazer a gente ser um bom professor.
> A1: Eu não sei porque não usar as "Práticas Profissionais" para trabalhar novas metodologias? Por que não usar as "Práticas Profissionais" para trabalhar uma metodologia nova como essa que a gente usou em Álgebra?
> A3: A Álgebra para mim é tipo... eu sempre tive dificuldade na matéria de álgebra, como Álgebra Linear, Álgebra I e até na Álgebra II. Só que eu acho que são conteúdos difíceis, mas, quando a gente estuda igual estudamos Álgebra II, vendo o porquê, a gente tá estudando cada conteúdo, a gente vê a importância e fica mais interessado em aprender e se esforça mais, porque você vê que é importante para quando você for ser professor. Sobre a formação de professores eu acho que tem que ter matérias para dar base para a gente atuar no Ensino Básico, mas, também tem que ter disciplinas mais puxadas para aquele aluno que quer fazer um mestrado. Sobre a metodologia de ensino, a gente consegue perceber o professor que tem uma formação em Educação só pelo jeito dele dar aula. Essa metodologia de resolução de problemas, usada na Álgebra II, confesso que, no início, achei que não ia ser legal. Mas, logo na primeira aula, quando introduziu o conceito de operação, achei muito interessante, pois, eu já tinha estudado operação em Álgebra I, mas não ficou, agora quando fala sobre operação eu lembro da aula do problema das idades e lembro o que é operação. Mas, acho que para dar certo, os problemas têm que ser interessantes e acho que não é fácil elaborar problemas que se encaixem. O professor precisa ter muita experiência com isso.

A seguir, apresentamos o questionário da Avaliação Diagnóstica e alguns recortes das respostas dadas pelos alunos, juntamente com uma análise do Professor-Pesquisador sobre elas. No Anexo I, temos o questionário completo, respondido por todos os alunos, exceto pelo aluno A_6 que não pôde ficar até o final do 16º encontro. Este aluno entregou suas respostas posteriormente, porém o Professor-Pesquisador resolveu desconsiderá-las, para efeito de análise, por acreditar que as respostas apresentadas pudessem ter sofrido alguma influência externa, comprometendo o resultado da análise.

Quadro 19 – Avaliação Diagnóstica

1) Faça uma lista de todos os conteúdos de álgebra abstrata que você consegue se lembrar e, relate tudo que você sabe sobre eles.
2) Destaque os pontos positivos e os pontos negativos da disciplina de álgebra, que você cursou este semestre. Se pudesse mudar alguma coisa, o que você mudaria?
3) Sobre os conteúdos estudados em álgebra II, você considera algum deles desnecessários para sua formação como professor do ensino básico? se sim, quais?
4) Você considera o curso de álgebra II importante para a sua formação como professor do ensino básico? se sim, quais as contribuições que esse curso poderá dar à sua formação?
5) Faça um comentário sobre à Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, destacando o que você considera mais relevante e evidencie os prós e os contra dessa metodologia.
6) Você utilizaria a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas na sua prática docente? por que?
7) Disserte sobre outros pontos que você considerar importantes, relacionados à disciplina de álgebra II, na formação de professores.

Fonte: Elaborada pelo autor

O objetivo da primeira questão foi o de verificar o significado da disciplina Álgebra II para esses alunos, em termos de conteúdo. Ou seja, que conteúdos de AAM ainda estavam presentes na mente desses alunos após o término da disciplina.

Figura 25 – Uma das resposta da questão 1

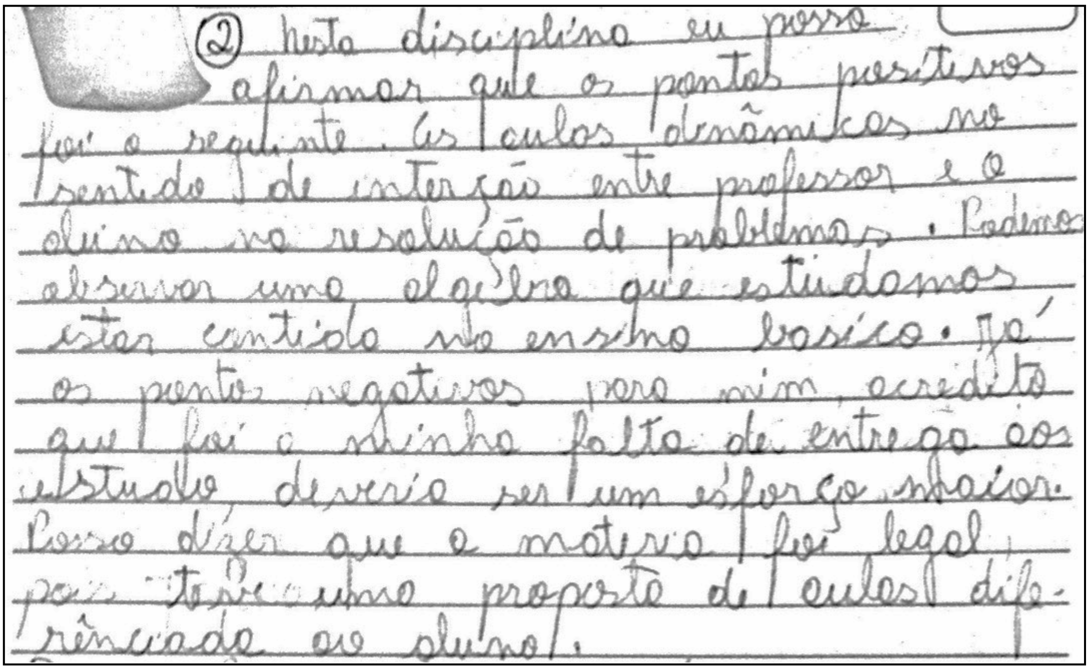
01 - Operações: sendo A um conjunto não vazio, toda a aplicação $f: A \times A \to A$ é uma operação sobre A.
É * uma lei de composição interna em A.
Propriedades que * pode apresentar.
i) $x*(y*z)=(x*y)*z \to$ associativa
ii) $x*y=y*x \to$ comutativa
iii) $\forall x \in A \Rightarrow x*e=a \to$ elemento neutro
iv) $\exists\ x' \in A,\ x'*x=e \to$ elemento simetrizável
→ Com a aplicação das operações: da adição e multiplicação
→ Grupo: G é um conjunto não vazio e (*) uma operação em G, dizemos que $(G,*)$ é grupo se:
i) $(x*y)*z=x*(y*z)$
ii) $x*y=y*x$
iii) $\exists\ 0 \in G;\ a+e=a$
iv) $\exists -a \in G;\ a+(-a)=e$
e com o axioma da comutatividade, o grupo é abeliano $(G,+)$
→ v) $(a.b).c=a.(b.c)$
vi) $a.(b+c)=ab+ac$
$(G,+,.)$ é um anel se valem todos estes axiomas;
vii) $a.b=b.a \to$ anel comutativo;
viii) $\exists\ 1 \in G;\ 1.a=a \to$ existência de unidade ou identidade;
ix) $a.b=0 \to a=0$ ou $b=0 \to$ não possui divisor de zero;
anel de integridade
x) $\exists\ a' \in G;\ a.a^{-1}=1 \to$ a estrutura algébrica que satisfaz todos os axiomas citados é um CORPO.

Fonte: Dados da pesquisa

Nessa questão, todos os alunos fizeram referência ao conceito de grupo. Anéis e corpos também foram lembrados pela maioria dos estudantes. A maioria dos conceitos postos pelos alunos, em suas respostas, foram introduzidos com a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. Podemos observar também, pela Figura 25 e nos dados apresentados no anexo I, que houve uma preocupação, por parte dos estudantes, em escrever formalmente suas ideias e, consequentemente, houve muitos erros na escrita, reforçando o que já havíamos percebido durante todo o trabalho feito em sala de aula, isto é, a grande dificuldade que os alunos dessa disciplina tinham em expressar formalmente suas ideias. Com isso, chamamos a atenção para a necessidade de um trabalho voltado para essa questão, ou seja, os professores formadores de professores precisam, em todas as disciplinas do curso de Formação de Professores observar como o aluno escreve e, diante disso, fazer as devidas intervenções. Afinal, esses alunos futuramente estarão em sala de aula, escrevendo na lousa, elaborando materiais didáticos, elaborando e corrigindo atividades dos alunos, etc. Acreditamos que esse trabalho, de leitura e escrita em matemática, não pode se restringir a apenas alguns professores como, por exemplo, os de Didática e Estágios Supervisionados. Esse trabalho deveria ser feito por todos os professores envolvidos nesse processo de formação.

A Figura 26 apresenta uma das respostas dadas à questão 2:

Figura 26 – Uma das respostas da questão 2


(2) Nesta disciplina eu posso afirmar que os pontos positivos foi o seguinte. As aulas dinâmicas no sentido de interção entre professor e o aluno na resolução de problemas. Podemos observar uma algebra que estudamos estar contida no ensino basico. Já os pontos negativos para mim, acredito que foi a minha falta de entrega aos estudos deveria ser um esforço maior. Posso dizer que o motivo foi legal, pois teve uma proposta de aulas diferenciada ao aluno.

Fonte: Dados da pesquisa

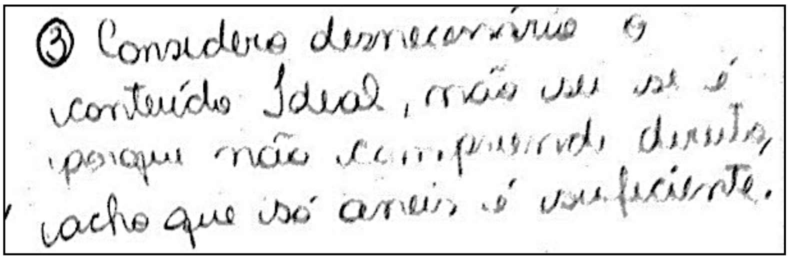
Os estudantes apontaram como principal ponto positivo da disciplina Álgebra II, na forma em que ela foi trabalhada, *a forma diferenciada de trabalho.* Entendemos que os alunos, neste ponto, se referiram à MEAAMaRP e à constante busca, na

Educação Básica, da presença de cada conteúdo de AAM que era introduzido. Ambos os casos promoviam aulas mais dinâmicas, maior interação professor-aluno e aluno-aluno, maior envolvimento de todos os alunos, uma visão mais ampla de conteúdos que eles já haviam aprendido e maior entusiasmo com a disciplina.

Foram poucos os pontos negativos apresentados pelos alunos. Os únicos citados foram: certa dificuldade em se conceber a presença de dois professores trabalhando de formas diferentes numa mesma disciplina; A falta de um momento próprio para discutir dúvidas gerais pertinentes à disciplina; e falta de tempo para se trabalhar melhor alguns conteúdos como, por exemplo, os relacionados ao conceito de corpo. E, a única mudança sugerida foi a de se trabalhar todos os tópicos da AAM sempre relacionando com os conteúdos da Educação Básica, não apenas alguns como foi feito durante a aplicação do projeto.

A questão 3 perguntava se havia algum conteúdo, dado durante a disciplina Álgebra II, que eles consideravam desnecessários à sua formação. A única resposta positiva, foi a que apresentamos na Figura 27, a seguir.

Figura 27 – Uma das respostas da questão 3

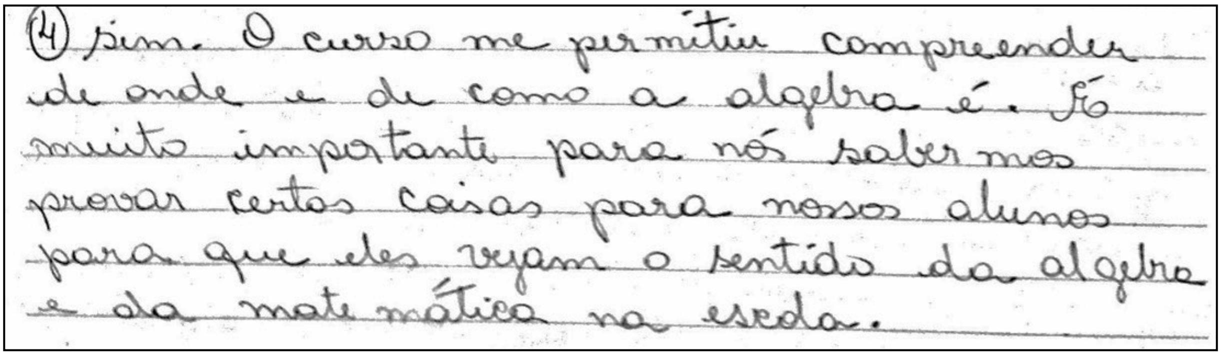

3 Considero desnecessário o conteúdo Ideal, não sei se é porque não compreendi direito, acho que só anéis é suficiente.

Fonte: Dados da pesquisa

Esperávamos que fossem apontados mais conteúdos de AAM que eles achassem desnecessários à sua formação, pois, sempre que conversamos com algum estudante, que já cursou essa disciplina anteriormente, ele diz não ter entendido e não vê motivos da presença dessa disciplina em curso de Licenciatura em Matemática. Não sabemos se não apareceram mais respostas apontando outros conteúdos que eles, os alunos investigados, consideraram desnecessários, porque realmente acreditavam ser possível relacionar todo conteúdo da AAM com a Educação Básica, ou se eles não tinham argumentos para defender o contrário. Pois, como podemos observar, não existe uma justificativa plausível para a resposta apresentada na Figura 27.

Na questão 4, todos os alunos consideraram a Álgebra II como importante para sua formação. As respostas para esta questão, apresentadas pelos alunos, nos levam a crer que a forma com que trabalhamos essa disciplina, durante a nossa investigação, contribuiu para que todos considerassem a AAM importante para a sua formação.

Figura 28 – Uma das respostas da questão 4

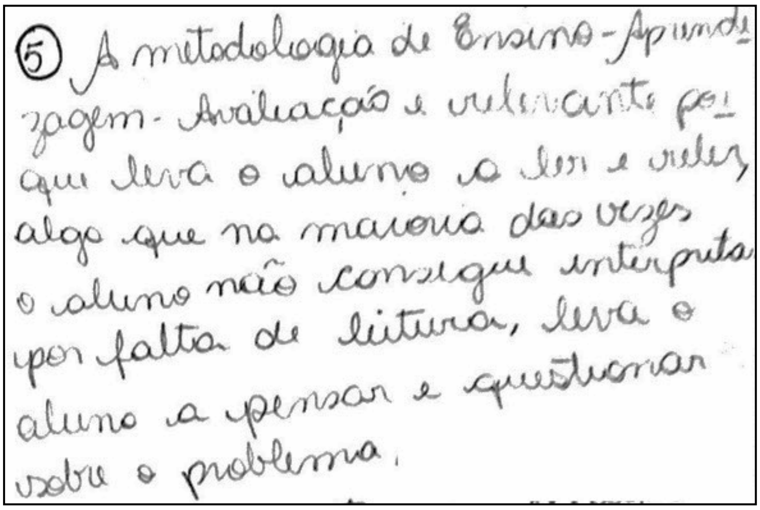


(4) Sim. O curso me permitiu compreender de onde e de como a algebra é. É muito importante para nós sabermos provar certos coisas para nossos alunos para que eles vejam o sentido da algebra e da matemática na escola.

Fonte: Dados da pesquisa

Na questão 5, todos os comentários sobre a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas foram elogiosos, como podemos ver na Figura 29.

Figura 29 - Uma das respostas da questão 5

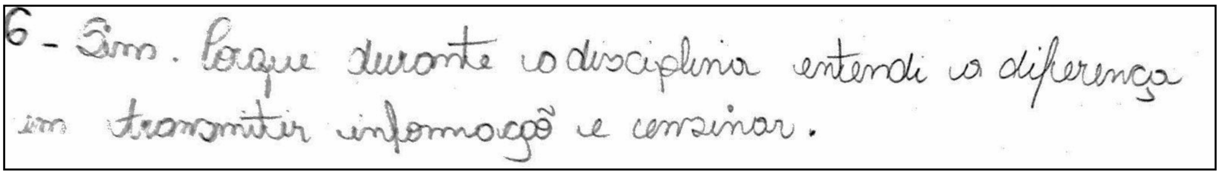


(5) A metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação é relevante porque leva o aluno a ler e reler algo que na maioria das vezes o aluno não consegue interpretar por falta de leitura, leva o aluno a pensar e questionar sobre o problema.

Fonte: Dados da pesquisa

A questão 6, mostrou que os alunos têm interesse em trabalhar MEAAMaRP em suas futuras práticas docentes. Mas sabemos que para isso acontecer necessitaríamos de um trabalho voltado a isso. A Figura 30, apresenta a resposta da questão 6 apresentada por um dos alunos.

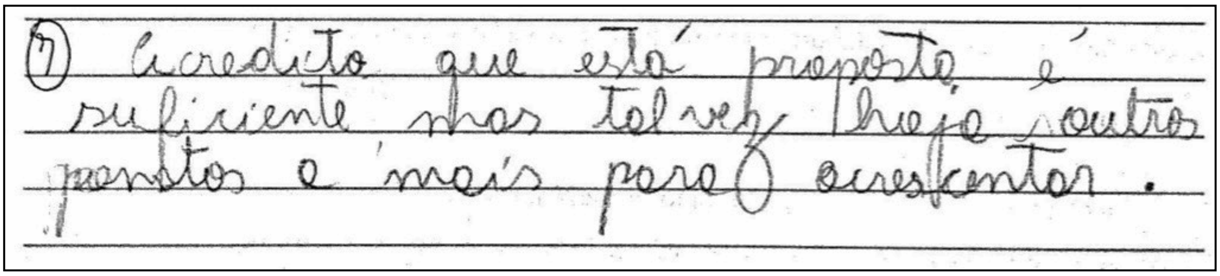
Figura 30 – Umas das respostas da questão 6


6 - Sim. Porque durante a disciplina entendi a diferença em transmitir informação e ensinar.

Fonte: Dados da pesquisa

Nem todos os alunos responderam a questão 7 e as respostas apresentadas foram um tanto vagas, como pode ser visto na Figura 31.

Figura 31 – Uma das respostas da questão 7


7 Acredito que está proposta é suficiente mas tal vez haja outros pontos a mais para acrescentar.

Fonte: Dados da pesquisa

Acreditamos que o fato de poucos alunos responderem a questão 7 e, ainda, os poucos que responderam apresentaram resposta vaga, se deve à falta de experiência e oportunidades em opinar sobre questões relativas às disciplinas que eles estudam.

8.2 Um diálogo com a literatura

Nesta etapa buscamos associar os dados apresentados no item 8.1 com recortes da literatura, isto é, aprofundamento teórico obtido durante a pesquisa. Entendemos que “relacionar com ideias de outros”, terceira atividade do modelo metodológico de Romberg-Onuchic, se divide em dois momentos: *ouvir os outros* e *se posicionar a respeito do que esses outros disseram*. Como uma investigação é um processo de idas e vindas, esse primeiro momento, o de ouvir os outros, pode ocorrer durante todo o desenrolar de uma pesquisa, desde o embrião, que dá origem a um sistema de investigação, até a divulgação final dos resultados encontrados durante as atividades desenvolvidas. No nosso caso, dispensamos um tempo exclusivo para esse primeiro momento, ouvir os outros. Isso nos proporcionou, de antemão, um aprofundamento teórico dando-nos condições de escrever os capítulos

3, 4 e 5 desta tese, que nos serviram de apoio para a compreensão de elementos essenciais que ocorrem durante todo o restante do nosso trabalho. Muito do que ouvimos não teve uma relação direta com as evidências que surgiram durante nossa investigação mas, muitas vezes, nos levaram a uma reflexão sobre nossas ações durante o processo de criação das estratégias de pesquisa, coleta e análise de evidências. Porém, como já era esperado, ao longo de nossa investigação “outros” surgiram e aqueles, considerados importantes à nossa pesquisa, aparecem no segundo momento onde *nos posicionamos a respeito desses outros.*

Nossa pesquisa teve caráter qualitativo, pois *considerou a existência de uma relação dinâmica entre o mundo real e o sujeito* (KAUARK et al, 2010, p.26) e, essa relação, de maneira nenhuma, poderia ser traduzida em números. *Os dados consistiram em descrições detalhadas de situações com o objetivo de compreender os indivíduos em seus próprios termos [...] obrigando o pesquisador a ter flexibilidade e criatividade no momento de coletá-los* (GOLDENBERG, 2004, p.53). Diante desse aspecto, já apresentamos, neste capítulo, uma descrição detalhada do que ocorreu durante nossa coleta de evidências, sob o olhar do Pesquisador que sempre buscava compreender os indivíduos diante da situação que lhes era posta.

A aplicação do nosso Projeto de Ensino contemplou três momentos: Introduzir um conhecimento novo através da Resolução de Problemas, Relacionar os conhecimentos adquiridos na disciplina Álgebra II com os da Educação Básica e observar o posicionamento dos alunos, em relação ao trabalho desenvolvido, frente à sua formação como professor. Com isso se objetivava: levar o aluno a construir um conhecimento satisfatório de AAM e relacionar conhecimentos construídos com conteúdos da Educação Básica, proporcionando-lhe uma relação entre teoria e prática.

8.2.1 A construção de conhecimento

Na construção de conhecimento nos apoiamos fortemente na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. Acreditamos ter cumprido bem o primeiro passo *[...] O professor precisa preparar, ou escolher, problemas apropriados ao conteúdo ou ao conceito que pretende construir* (ONUCHIC; ALLEVATO, 2001, p.82). Porém, em alguns momentos, percebemos que poderíamos ter adequado melhor o problema escolhido ao nosso propósito. Isso pode ser observado já no primeiro problema trabalhado em que, durante a análise do que ocorreu nesse encontro, constatamos que o enunciado desse problema poderia ter sido melhor, facilitando o processo de intervenção do professor como mediador que, nesse caso, também consideramos falho, visto que o professor pesquisador, em sua intervenção, antecipou-se ao raciocínio do aluno ao fazer perguntas do tipo: "você conhece três números cujo produto é 36?". Mesmo assim, o problema foi bastante rico, pois possibilitou a introdução do conceito de *operação binária* ao longo da resolução e discussão do problema e, ainda, apareceu com clareza o processo de avaliação. *Ao considerar o ensino-aprendizagem-avaliação [...] pretende-se que, enquanto o professor ensina, o aluno, como participante ativo, aprenda, e que a avaliação se realize por ambos, integrando a avaliação ao ensino promovendo a aprendizagem, isto é, construindo conhecimento matemático novo enquanto se está resolvendo o problema* (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011, p.81). Nos Encontros que se seguiram, e que foram trabalhados com o objetivo de introduzir um novo conceito de AAM, pudemos observar, nas descrições apresentadas neste capítulo, que procuramos sempre cumprir as exigências propostas pela Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, principalmente em levar o aluno a ser coconstrutor do seu próprio conhecimento. *O professor precisa deixar de ser o centro das atividades, passando para o aluno a maior responsabilidade pela aprendizagem que se pretende atingir* (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011, p.82).

Quando nos referimos à *produção de conhecimento* nos colocamos em um cenário muito amplo, que poderia levar a várias discussões, e isso fugiria do nosso propósito. Porém, buscamos observar o que alguns pesquisadores falaram a respeito desse tema e relacionar, essas falas, com as evidências que surgiram durante nossa investigação. Além de não termos o intuito de fazer uma discussão ampla sobre o processo de construção de conhecimento, também não foi nosso propósito nos posicionarmos a respeito de um ou outro teórico, apenas nos apoiamos em alguns deles para justificarmos a grande contribuição da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de problemas com nossa pesquisa. Devemos ressaltar que, quando falamos em justificativa, não temos a pretensão de provar que nossos alunos construíram um conhecimento sólido de AAM, mesmo porque não dispusemos de instrumentos para inferir a quantidade de conhecimento construído por eles. Apenas buscamos mostrar que os principais elementos necessários para a construção de conhecimento, apontados por esses teóricos, apareceram de maneira consistente durante a aplicação de nosso Projeto de Ensino.

Para Nilson José Machado, o processo de construção de conhecimento é representado por imagens tácitas:

> Existem muitas imagens para representar o processo de construção do conhecimento. Conhecer é como encher um balde de matéria, ou como construir um cuidadoso encadeamento de temas, ou como tecer uma teia de significações, ou como fazer emergir como a ponta de um iceberg algo que existe dentro de nós [...] (MACHADO, 2004, P.15).

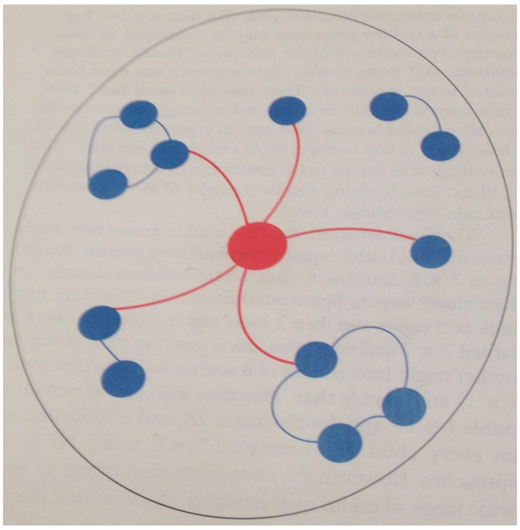
Para ele, Machado, a imagem do *balde* consiste em ver o aluno como um balde vazio, que o professor deve preencher com conteúdos e, de tempos em tempos, utilizar um mecanismo (em geral, prova escrita e individual) para medir a quantidade de conteúdo existente no balde. Ele cita como exemplo da presença do "baldismo", frases como "nível do aluno", "nível de conhecimento" e "conhecimento acumulado". A imagem do conhecimento como *cadeia* é considerada, por ele, quando se subdivide uma tarefa em partes suficientemente pequenas para serem aprendidas com clareza e então enumerar tais fragmentos, reconstruindo o objeto por meio de um encadeamento lógico linear. A presença dessa imagem do conhecimento pode ser observada quando se organiza o conteúdo a ser estudado, por exemplo, em seriação ou por pré-requisitos. O conhecimento pode ser visto como uma *rede*. Nesta forma, podemos imaginá-lo como uma grande teia, cujos nós são as significações e os fios, que compõem esses nós, relações estabelecidas entre algo, ou um significado que se constrói, e o resto do mundo. A ideia norteadora da imagem do conhecimento como *iceberg* é a de que nosso conhecimento sobre qualquer tema é sempre apenas parcialmente explícito ou passível de explicitação, isto é, cada um de nós sempre sabe muito mais, sobre qualquer assunto, do que aquilo que consegue explicitar, expressar em palavras. Machado (2004) ainda afirma que, discutir qual seria a imagem mais correta ou qual deveria ser a escolha do professor para melhor orientar sua prática docente, não faz o menor sentido, pois cada imagem propicia uma perspectiva, uma "visão" parcial do conhecimento. Se nosso interesse é conhecer o conhecimento, ou conhecer como se conhece, devemos compor as imagens. Ele finaliza, dizendo:

> Há, naturalmente, o fato de que conhecer é como tecer, enredar, articular por meio de relações temas aparentemente desconectados. E há a dimensão tácita do conhecimento, que é imprescindível para a sua caracterização, uma vez que nada parece mais visível do que o fato de conhecermos muito mais do que conseguimos expressar. O próprio fato de que imagens do conhecimento como as quatro anteriormente referidas orientam as ações docentes, influenciam a organização da escola, ainda que pouco falemos dela, ainda que elas operem tacitamente, é altamente revelador da relevância da dimensão tácita do conhecimento. (MACHADO, 2004, p.19 e 20).

Van de Walle (2001, p. 26 e 27) discorre sobre o conhecimento, apresentando os principais elementos responsáveis para a construção de uma nova ideia. Ele faz uma comparação hipotética entre a construção de um conhecimento e uma construção no mundo físico. Para construir ou ampliar alguma coisa no mundo físico, precisamos de ferramentas, materiais e esforços. A construção das nossas ideias (conhecimento) pode ser vista de forma análoga. As ferramentas que usamos, para construir novos conhecimentos, são nossas ideias existentes, o conhecimento que já possuímos. Os materiais que usamos para construir as novas ideias, são coisas que vemos, ouvimos ou tocamos – elementos à nossa volta. Algumas vezes, os materiais são nossos próprios pensamentos e ideias. O esforço que devemos aplicar são pensamentos ativos e reflexivos. Se a mente não pensar ativamente, nada acontece.

A Figura 32, apresenta uma metáfora para a construção de uma nova ideia. Ela representa uma pequena seção que compõe o nosso sistema cognitivo.

Figura 32 – Construção de uma nova ideia a partir de ideias existentes



Fonte: Van de Walle (2001, p. 27)

Na figura acima, os pontos azuis representam ideias existentes. As linhas que ligam as ideias representam nossas conexões lógicas ou as relações que desenvolvemos entre as ideias. O ponto vermelho é uma ideia que surge, que é construída. Todas as ideias (pontos azuis) usadas na construção, necessariamente estão conectadas à nova ideia, porque foram elas que deram sentido a esse conhecimento que acabou de ser construído. Se uma ideia potencialmente relevante pode acrescentar mais significado à nova ideia, mas ela não está presente na mente ou não está ativamente envolvida, então a conexão potencial com a nova ideia simplesmente não pode ser feita. Obviamente, o número de conexões entre as ideias existentes e as ideias novas varia de aluno para aluno. Cada aluno pode usar ideias diferentes para dar significado à mesma ideia. Isso significa que o conhecimento construído, certamente pode ser diferente para cada aluno, mesmo em ambiente semelhante como, por exemplo, a sala de aula.

Para construir e compreender uma nova ideia, precisamos pensar ativamente sobre ela, buscando responder perguntas do tipo: “como isso se encaixa no que eu já sei?” e “como posso entender isso diante do conhecimento que eu possuo sobre essa ideia?”. Ideias matemáticas não podem ser “vestidas” em pensamentos passivos. O indivíduo deve ser mentalmente ativo para poder aprender. Em sala de aula os alunos devem ser encorajados a discutir suas ideias, fazer parte de grupos de trabalho e questionar suas próprias ideias e as dos outros. Em poucas palavras, a construção de conhecimento requer pensamentos reflexivos e, para isso, é preciso discutir ativamente esses pensamentos ou trabalhar mentalmente suas ideais. Pensamento reflexivo significa selecionar ideias existentes, a fim de encontrar aquelas que parecem ser mais úteis para dar significado à nova ideia.

Durante a implementação do Projeto de Ensino, descrito na seção 8.1 deste capítulo, em dez encontros foi trabalhada a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, com o objetivo de introduzir um conceito novo de AAM, de forma a levar o aluno a conceber esse novo conceito e, consequentemente, produzir um conhecimento novo. Foi possível perceber, durante o processo, que cada conceito novo precisava ser amadurecido (fixado). Assim, após o uso da metodologia, foi necessário trabalhar outras atividades com esse intuito. Com tudo isso, foi notória a presença, durante a aplicação do projeto, das imagens tácitas do conhecimento, descritas por Nilson

Machado. A própria organização da disciplina, separando e ordenando os conceitos a serem introduzidos; a escolha dos conteúdos que seriam trabalhados em cada metodologia; a ordem das atividades propostas, etc., caracterizavam uma construção de conhecimento de forma fragmentada, isto é, a *imagem da cadeia*. A necessidade de memorização de conceitos fundamentais, como, por exemplo, *Grupos*, para o entendimento de novos conceitos, é um exemplo claro do que Machado chama de *baldismo:* sem um conhecimento prévio “acumulado” não se pode construir um novo. A cada discussão entre professor e aluno ou mesmo entre os próprios alunos, surgiam ideias novas, revelando a existência, dentro de cada aluno, de mais conhecimento do que outrora se imaginava, caracterizando a *imagem do iceberg.* A *imagem da rede* apareceu fortemente, dentre outros momentos, durante a resolução de cada problema e na plenária. A todo momento, o aluno buscava relacionar o conceito novo a algum conhecimento que ele possuía e, as intervenções dos Professores, Pesquisador e Colaborador, como mediadores, principalmente durante a resolução do problema e a Plenária, buscavam estabelecer as conexões necessárias entre o conhecimento prévio (conhecimento que o aluno já possuía) e o conhecimento novo (conhecimento a ser construído), caracterizando assim, a presença da imagem do conhecimento, denominada por Nilson Machado, como *rede.*

Os elementos apontados por Van de Walle (2001), *ferramentas, materiais e esforços*, responsáveis pela produção de conhecimento novo de um indivíduo, apareceram claramente em todo processo onde se utilizou a MEAAMaRP. Cada problema gerador, foi escolhido, ou elaborado, com base no nível de conhecimento prévio do aluno, ou seja, esses problemas poderiam ser resolvidos utilizando-se apenas conteúdos da Educação Básica. Não bastasse, durante a leitura do problema, os conteúdos necessários para sua resolução eram evidenciados pelos próprios alunos e, muitas vezes, reforçados (expostos e discutidos) pelo Professor, Pesquisador ou Colaborador, como ocorreu, por exemplo, com *matrizes inversas.* Assim, os alunos, durante a discussão do entendimento e da resolução do problema, evidenciavam ou adquiriam as ferramentas necessárias para a construção do conhecimento novo de AAM. Atividades escritas, imagens, discussões, intervenções dos professores e as reflexões dos alunos, podem ser vistas como os *materiais*. Por fim, a competição que surgia durante a resolução do problema, o incentivo dos professores e dos próprios colegas, dentre outras coisas, motivavam os alunos e, consequentemente, surgia o *esforço* necessário à produção da nova ideia.

Com tudo isso, não temos dúvidas de que, durante esses momentos onde buscamos a construção de um novo conhecimento com o uso da MEAMaRP, proporcionamos condições necessárias para levar os alunos a serem coconstrutores do seu próprio conhecimento. Isso foi referendado pelos próprios estudantes, durante o processo de avaliação em forma escrita e falada, mostrada neste trabalho na descrição do décimo sexto encontro.

8.2.2 A Álgebra Abstrata Moderna e a Educação Básica

A utilidade de muitos conteúdos estudados em Matemática é questionada por alunos, pesquisadores e até mesmo por professores de Matemática. Essa crítica, sobre a importância dos conteúdos estudados, torna-se mais acentuada quando se trata de disciplinas de Matemática Superior. Nos cursos de Licenciatura em Matemática ela é bastante evidenciada nas disciplinas de Álgebra Abstrata e Análise Real. Para se constatar isso, basta uma simples conversa com alunos ou ex-alunos, que fizeram alguma dessas disciplinas, para ouvir frases como "não sei para que estudar isso", "não aprendi nada e não me faz falta", "não vejo nenhuma utilidade", etc. O pesquisador Hardy, em 1967, já afirmava:

> Se o conhecimento útil é (...) o conhecimento que, provavelmente agora ou num futuro próximo, contribuirá para o conforto material da humanidade de modo que a mera satisfação intelectual seja irrelevante, então a maior parte da Matemática Superior é inútil (Hardy, 1967,p.135 apud Skovsmose, 2012, p.32).

Com isso, podemos perceber a grandiosidade de desafios como este – trabalhar uma disciplina como a AAM buscando evidenciar sua importância na formação de professores. A primeira coisa que pudemos constatar em relação a isso, foi a necessidade de uma mudança na prática dos professores que trabalham essa disciplina e para isso precisa-se, primeiramente, de uma reflexão da própria prática. Neste sentido, esbarramos no que diz Paulo Freire (1996), apresentado no Capítulo 3 deste trabalho, "é pensando criticamente a prática de hoje ou de ontem que se pode melhorar a próxima prática"; e Ponte (2003), quando chama a atenção para a reflexão sobre a prática não apenas na Educação Básica mas, também, no Ensino Superior. As críticas sobre a prática do professor formador, notadas nos desabafos dos alunos durante o 16º encontro e apresentadas neste capítulo, com certeza levarão esses estudantes a refletir também sobre suas atitudes durante sua carreira docente, mesmo porque, alguns deles já atuam como professores da Educação Básica ou participam do PIBID e, durante o debate promovido no último encontro, buscavam comparar sua prática com a de seus professores.

Ainda em relação à prática, chamamos a atenção sobre como trabalhamos a AAM, buscando sempre relacionar seus conteúdos com os da Educação Básica, ou seja, uma relação teoria e prática, dentro das orientações da LDB (Lei de Diretrizes e Bases nº 9.394) e do CNE/CP (2015), também apresentadas no Capítulo 3. Buscamos não dissociar a teoria da prática, ou seja, não "entupir" os alunos com teorias de AAM para depois relacionar essas teorias com a futura prática desses alunos. Como pode ser observado, a partir do segundo encontro, buscávamos, ao término da introdução de um conceito de AAM, deixar uma Atividade Extraclasse que seria discutida em aulas posteriores. Essa atividade, além de desempenhar o papel de relacionar uma nova teoria apresentada com a prática do futuro professor, servia também como uma atividade de fixação do conteúdo novo introduzido. Dessa forma, os alunos se sentiam motivados a trabalhar de forma efetiva essa atividade, consequentemente aperfeiçoando seu conhecimento sobre esse novo conteúdo. Porém, foi notória a dificuldade que os estudantes tiveram para promover e, até mesmo, entender essa associação entre um conceito da Matemática Superior com os da Educação Básica, como já apontavam Sousa e Fernandes (2004):

> [...] o conflito entre a formação teórica e a dificuldade em se transferir esses conhecimentos [produzidos durante a formação teórica] para a prática, que é uma das críticas habituais dos professores estagiários e que não deixa de ser um aspecto crítico da formação inicial merecedor de reflexão (SOUSA; FERNANDES, 2004, p.92).

Apesar da disciplina Álgebra II, na forma como foi trabalhada, ter trazido grandes contribuições para os alunos no âmbito de uma postura profissional, como acabamos de apresentar, acreditamos que as maiores contribuições da AAM, para essa turma, foram dadas nas formações matemática e didática do aluno. Quando o Professor-Pesquisador buscava relacionar um conteúdo de AAM com conteúdos da Educação Básica, ou incentivar e proporcionar situações para que os estudantes buscassem sempre essa relação, ele levava os alunos a perceber a importância dessa disciplina para sua formação e que cada conceito, que eles iam aprendendo, não serviria apenas para garantir sua aprovação nessa disciplina, mas os ajudaria a melhorar sua compreensão sobre algum conteúdo da Educação Básica. Ou seja, os conteúdos da Álgebra Abstrata serviam para justificar conteúdos elementares, como as definições e propriedades das operações dos números inteiros, a importância do *zero* e do *um* para as operações numéricas e a relação existente entre estruturas como matrizes e polinômios, dentre outros.

> O conhecimento que os professores possuem do conteúdo a ensinar também influencia o quê e como ensinam. Por outro lado, a falta de conhecimentos do professor pode afectar o nível de discurso na classe, assim como o tipo de perguntas que os professores formulam (GARCIA, 1999, p. 87).

Outro fator, que vale a pena destacar, foi a grande motivação dos alunos ao conhecerem algumas das aplicações dessa Álgebra em coisas importantes do mundo real, como ocultação de informação (criptografia) e transmissão de informações (teorias de códigos). Pois,

> O ensino inadequado da Matemática, a maneira como o professor trata os assuntos em sala de aula, a deficiência dos currículos (que não deveriam ser baseados num conteúdo pré-fixado, nem tampouco voltados a uma realidade estrangeira, mas no desenvolvimento de valores científicos ligados à nossa realidade), a má qualidade dos livros didáticos, a pressão do vestibular, a carência de bibliotecas e materiais de ensino, a falta de base do aluno, o medo na hora da prova, notas baixas, reprovações, o **ensino divorciado da nossa realidade e das aplicações da Matemática no dia-a-dia, contribuem para que o aluno goste ou não desta disciplina, queira ou não continuar seus estudos sobre ela ou simplesmente passe a procurar cursos ou até mesmo uma profissão (embora seja difícil escolher qualquer profissão em que a Matemática, se não ocupa posição de destaque, pelo menos não se faça presente) em que a Matemática seja muito pouco utilizada**[23] (VITTI, 1999, p. 39).

Com tudo isso, não temos dúvidas da importância da disciplina de AAM na formação inicial de professores de matemática. Porém, sem uma metodologia pedagógica adequada, que leve o aluno a participar ativamente do seu processo de produção de conhecimento, essa disciplina, como tantas outras trabalhadas em curso Superior, poderá ser, como afirma Hardy (1967), inútil.

---

[23] Destacado (negritado) por nós.

9 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesta parte do trabalho, procuramos cumprir a décima atividade do Modelo Metodológico de Romberg-Onuchic – *Relatar Resultados* – e a décima primeira – *Antecipar as ações de outros*. Para isso, primeiramente retomamos as perguntas da pesquisa para refletir sobre as respostas apresentadas; em seguida faremos uma avaliação da pesquisa, de acordo com os critérios estabelecidos por Romberg (2007); apresentaremos as contribuições da pesquisa; e, por fim, os principais resultados evidenciados.

9.1 Retomando as perguntas da pesquisa

Como já foi mencionado por diversas vezes neste trabalho, nossa pesquisa foi norteada em duas perguntas. Em todo o processo de produção, descrição e análise de evidências objetivamos responder tais questões. Neste tópico, retomamos cada pergunta de pesquisa e fazemos uma reflexão sobre elas, bem como sobre os elementos que nos levaram às suas respostas.

A resposta à primeira pergunta da pesquisa – "**Como, utilizando a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, podemos levar o aluno da Licenciatura em Matemática do IFG a construir conhecimentos de Álgebra Abstrata Moderna?"** – já foi apresentada no item 8.1.1, durante descrição detalhada de como os novos conceitos de AAM foram introduzidos a partir de problemas. O próprio processo de avaliação, elencado na metodologia de ensino trabalhada, mostrou, aos Professores Pesquisador e Colaborador e também aos alunos, uma produção significativa de conhecimentos de AAM por parte desses alunos. Porém, a descrição, por si só, não faz referência aos processos cognitivos necessários para a aprendizagem dos conteúdos apresentados. Assim sendo, foi necessário nos apoiarmos em trabalhos de outros pesquisadores, para apresentar uma justificativa de que a forma com que trabalhamos essa disciplina exibia elementos suficientes para a produção de conhecimento, como pode ser visto no item 8.2.1.

Devemos enfatizar também os problemas que tivemos durante o desenvolvimento da proposta e do processo de utilização de uma nova metodologia de ensino. A princípio, notamos uma desconfiança dos alunos sobre essa nova forma de se trabalhar. Afinal, eram alunos que traziam consigo, de toda sua vida escolar, uma cultura sobre o significado de ensino fundamentado, exclusivamente, na metodologia tradicional, isto é, aquela em que o professor coloca o conteúdo no lousa, dá um tempo para os alunos copiarem, explica o conteúdo, apresenta alguns exemplos e propõe atividades. Não foi fácil conseguir um engajamento dos alunos levando-os a trabalhar de forma colaborativa e cooperativa. Era hábito deles esperar que um dos colegas começasse a trabalhar a resolução do problema, ou que o professor apresentasse algum caminho que os levasse à solução do mesmo. Sempre que um problema era proposto, os alunos consideravam a solução mais importante do que a aprendizagem promovida pela sua resolução. Assim sendo, eles queriam resolver o problema de maneira rápida, para não correrem o risco de não achar a solução correta antes do término da aula e, consequentemente, não se preocupavam em refletir sobre a matemática envolvida no processo e, às vezes, até se recusavam a prosseguir sem uma garantia de que o caminho adotado por eles estivesse correto, alegando não poder “perder tempo”. Era difícil fazer com que eles percebessem que o mais importante, durante a resolução do problema, era o conhecimento construído por eles e, mesmo que eles tomassem um caminho que não os levasse à solução do problema poderiam, até mesmo, construir mais conhecimento do que se fossem levados direto à solução. Notamos que isso se devia aos métodos de avaliação em que eles estavam acostumados a serem submetidos, ou seja, durante toda sua vida acadêmica eles recebiam uma boa nota se sua resposta estivesse correta, e não recebiam nada se sua resposta estivesse errada, e o que eles aprendiam, durante a busca da resolução do problema, não era levado em consideração. Consequentemente, muitas vezes o Professor-Pesquisador fazia intervenções que direcionavam os alunos, fugindo um pouco ao propósito da metodologia, buscando terminar a atividade dentro do tempo previsto e, consequentemente, atingir o objetivo principal que era o de introduzir um novo conceito de Álgebra Abstrata. Porém, à medida em que o tempo passava, a sintonia entre professor e alunos foi se afinando e, mesmo não chegando ao ideal, houve avanços significativos nesse sentido, ou seja, o de levar os alunos a perceber o verdadeiro propósito da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, levando-os a trabalhar os problemas dentro da proposta dessa metodologia.

Em suma, os dados nos mostraram que, apesar do grande nível de abstração da AAM, é possível, e mais fácil, ensinar seus conteúdos a partir de conexões entre conhecimentos dos próprios alunos, como os aprendidos na Educação Básica ou em outras disciplinas de matemática do Ensino Superior. Essa proposta de ensino vai de encontro à principal característica dessa Álgebra – sua independência de outras matemáticas. Nesse sentido, chamamos a atenção para que, apesar da reificação proposta para cada conteúdo a ser estudado, ou seja, apoiando-nos no concreto para introduzir um novo conceito de AAM (entendendo como concreto não apenas objetos sólidos ou situações do nosso dia-a-dia mas, também, todo conteúdo matemático que os alunos já estudaram e, possivelmente, aprenderam), não podemos permanecer nesse concreto. Após a introdução, compreensão e fixação de cada conceito ou conteúdo, apoiados no concreto, precisamos voltar ao abstrato, não perdendo essa característica principal da AAM – a abstração. Essa abstração é de suma importância à formação matemática do individuo, pois ela dará condições a ele de enxergar a matemática de forma mais ampla e, assim, perceber as conexões existentes, não apenas entre os conteúdos da própria Álgebra Abstrata mas, também, desses conteúdos com os de outras áreas da matemática. Essa percepção servirá de apoio para a aprendizagem de novos conceitos, conteúdos e, principalmente, procedimentos, como por exemplo, demonstrações de teoremas.

Em resposta à segunda pergunta da pesquisa: "**Quais as contribuições de um curso de Álgebra Abstrata Moderna (AAM) para a formação de professores da Educação Básica, ministrado para alunos do quinto período de Licenciatura em Matemática do IFG?",** apresentamos, no item 8.2.2, elementos que justificam a utilidade dessa disciplina em um curso de Licenciatura em Matemática. Esses elementos foram obtidos pela observação do comportamento dos alunos em sala de aula e pela análise das atividades desenvolvidas pelos alunos e de suas falas durante o debate ou na avaliação diagnóstica. Acreditamos que a Álgebra Abstrata Moderna, bem como outras disciplinas de matemática superior, pode trazer contribuições significativas como: levar os alunos a refletir criticamente sobre sua futura prática profissional; buscar sempre uma relação entre novos conteúdos aprendidos com outros conteúdos de seu conhecimento, bem como refletir, analisar e criticar situações onde isso não ocorra; e, principalmente, melhorar sua formação matemática.

Consideramos bastante eficiente a forma como trabalhamos a relação dos conceitos de AAM com os da Educação Básica pois, para cada conceito introduzido era proposta uma atividade extraclasse que buscava promover essa relação. Essa forma trabalhada, além de estabelecer essa relação servia como uma atividade de fixação desse novo conceito de Álgebra construído. Assim, foi possível levar os alunos a perceber que cada conteúdo apresentado em AAM estava presente na Educação Básica e, durante as discussões promovidas na apresentação de cada atividade extraclasse, sempre retomávamos, por várias vezes, o conceito recém introduzido, promovendo, assim, a referida fixação do conteúdo. Os dois encontros, 14º e 15º, foram muito importantes nesse processo, pois, retomou-se a reflexão sobre a conexão de AAM com a Educação Básica. Porém, dessa vez, não apenas com um determinado conceito recém introduzido mas, com vários conceitos trabalhados durante a disciplina Álgebra II. Foi notável o entusiasmo dos alunos ao verem, em exemplos práticos, a importância dessa disciplina para sua formação. Entretanto, vale ressaltar que, é preciso tomar cuidado em não nos restringirmos a uma lista de possíveis conteúdos de AAM e sua respectiva relação com a Educação Básica, sob o risco de promover um processo de memorização dessa lista e perdermos o foco do principal objetivo que é o de incentivar o aluno a refletir sobre a importância de cada conteúdo estudado, em matemática superior, e suas contribuições para sua formação.

Por fim, gostaríamos de enfatizar que a AAM, ou qualquer outra disciplina de matemática superior, poderá dar contribuição para a formação do professor de matemática se for trabalhada de forma adequada, ou seja, com o uso de uma metodologia adequada capaz de levar o aluno a produzir um conhecimento satisfatório dessa disciplina e, ao mesmo tempo, ser capaz de promover uma relação entre a teoria e a prática. Para que isso ocorra, precisamos de professores formadores de professores experientes e, realmente, comprometidos com o processo de formação de professores.

9.2 A avaliação da pesquisa

Segundo Romberg (2007) é comum, especialmente em Educação Matemática, obtermos como resultado de uma pesquisa um *produto* que tem como objetivo melhorar o ensino e a aprendizagem. Ele afirma ainda que existem quatro estágios para o processo de desenvolvimento desse produto: o projeto, a criação, a implementação e o uso. Ele aponta também, quatro metodologias de avaliação desse produto:

> Ao complementar a produção de novos materiais, temos quatro metodologias gerais que os avaliadores têm desenvolvido para determinar a qualidade do produto em cada estágio.
> *Avaliação de necessidades*. Para decidir se o projeto de um novo produto é "bom", o pesquisador deve responder a três questões: (a) Há uma necessidade do produto? (b) Há uma razoável probabilidade de que o produto que está sendo considerado preencherá aquela necessidade? E (c) entre outros produtos, que prioridade este produto tem? Para responder a estas questões, outra evidência existente ou nova é coletada e examinada.
> *Avaliação formativa.* No estágio criativo do desenvolvimento do produto, um avaliador está interessado em saber ou não se o produto vai ao encontro às especificações do projeto. A fim de determinar se o produto é "bom", uma evidência é coletada para responder a quatro questões: (a) o conteúdo do produto é de alta qualidade? (b) O desempenho dos resultados pretendidos é alcançado? (c) O desempenho dos resultados não desejados é identificado? E (d) são fornecidos os serviços de apoio necessários para a instalação?
> *Avaliação somativa*. Para determinar se um produto criado recentemente está pronto ou não para o uso, o pesquisador coleta evidência para responder a quatro questões: (a) quão diferente é o conteúdo do produto de seus concorrentes? (b) Quais diferenças de desempenho existem entre o produto e seus concorrentes? (c) Que diferenças de custo existem entre ele e seus concorrentes? E (d) foram feitas provisões para manter o uso do produto?
> *Avaliação esclarecedora*. Este termo foi criado por Malcolm Parlett e David Hamilton (1976) para caracterizar o estudo de programas "inovadores" em uso efetivo. O procedimento envolve a aplicação de métodos de pesquisa de campo (estudo de caso, etnografia ou pesquisa ação) para a avaliação de novos produtos educacionais. Observe, entretanto, que neste caso, o foco está em contar a história sobre o uso do produto e fazer julgamentos a respeito dele (ROMBERG, 2007, p. 118).

Não há dúvida de que precisamos melhorar o ensino e a aprendizagem de matemática e, para isso, melhorar a formação de professores de matemática. A necessidade de explorar, de forma mais eficiente, as disciplinas de matemática dos cursos de Licenciatura em Matemática, é notória nas críticas e reivindicações de alunos e, até mesmo, de alguns professores, principalmente em relacionar teoria e prática. Um dos aspectos que apareceram fortemente em nossa pesquisa, foi o de uma reflexão sobre a formação de professores apoiada nos conhecimentos especializados que os estudantes adquirem ao longo da sua formação. Isso é apontado por Tardif (2000) como um dos aspectos da formação profissional:

> Em sua prática, os profissionais devem se apoiar em conhecimentos especializados e formalizados, na maioria das vezes, por intermédio das disciplinas científicas[...] Esses conhecimentos especializados devem ser adquiridos por meio de uma longa formação de alto nível, a maioria

> das vezes de natureza universitária ou equivalente.[...] Embora possam basear-se em disciplinas científicas ditas “puras”, os conhecimentos profissionais são essencialmente pragmáticos, ou seja, são modelados e voltados para a solução de situações problemáticas concretas, como, por exemplo, construir uma ponte, ajudar um cliente a resolver seus conflitos psicológicos, resolver um problema jurídico, facilitar a aprendizagem de um aluno que está com dificuldades etc. (TARDIF, 2000, p. 6).

Assim, não temos dúvidas de que a nossa pesquisa atende o primeiro método de avaliação apontado por Thomas A. Romberg.

Durante o processo de implementação do nosso projeto de ensino, identificamos, dentre outras coisas, um crescimento significativo do envolvimento e, consequentemente, da aprendizagem dos alunos. Isso pode ser observado durante o processo de avaliação presente na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, nas atividades desenvolvidas por eles, nos diálogos ocorridos nesse processo (parcialmente relatados neste trabalho) e nos próprios depoimentos dos alunos. Inclusive, isso foi bem observado no depoimento apresentado a seguir:

> A Álgebra para mim é tipo... eu sempre tive dificuldade na matéria de álgebra, como Álgebra Linear, Álgebra I e até na Álgebra II, só que eu acho que são conteúdos difíceis, mas, quando a gente estuda igual estudamos Álgebra II, vendo o porquê a gente tá estudando cada conteúdo, a gente vê a importância e fica mais interessado em aprender e se esforça mais, porque você vê que é importante para quando você for ser professor. (A3, EM DEPOIMENTO).

Com isso, o nosso trabalho também atende às exigências do segundo método de avaliação de Romberg.

Quanto à *avaliação somativa*, observamos que não foi constatada nenhuma pesquisa que busque relacionar, de forma efetiva, a Álgebra Abstrata Moderna com conteúdos da Educação Básica e levando-se em conta, exclusivamente, a formação profissional do professor de Matemática. Além disso, a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas nos confere um grande diferencial, visto que não constatamos nenhuma pesquisa que faz uso dessa metodologia em AAM e isso, além de tudo, certifica a nossa pesquisa como original.

Por fim, como se trata de uma pesquisa de campo, os dados evidenciados, muitos deles relatados no Capítulo 8, e a discussão desses dados ao longo de todo o texto, deixam claro todo o processo, desde a ideia inicial da pesquisa, passando por todo processo de construção do projeto, criação, implementação e seu uso. Isso torna nossa pesquisa *esclarecedora*, cumprindo assim, a última exigência do processo de avaliação, apontado por Romberg.

9.3 Resultados da pesquisa

Apesar de já termos apresentado, ao longo de todo texto, diversos resultados da nossa pesquisa, acrescentamos este tópico com o objetivo de fazer um resumo dos principais resultados obtidos, para que outros pesquisadores nesta área possam analisá-los, criticá-los, compará-los com outras pesquisas de mesma natureza e até mesmo ancorar novas pesquisas. Devemos salientar que os resultados, aqui apresentados, são fruto de uma análise geral de toda a pesquisa e contam com um forte posicionamento do pesquisador. Dessa forma, um outro olhar poderia evidenciar outros elementos que não foram expostos aqui.

Assim, sob o olhar do pesquisador, foi constatado que:

- Os conteúdos de AAM se apresentam de forma bastante significativa nos conteúdos da Educação Básica. É importante que o professor dessa disciplina busque sempre enfatizar essa relação. Pois isso, além de promover uma melhor formação do professor, ao estabelecer uma relação entre teoria e prática, serve como um agente motivador, incentivando os alunos a se dedicarem mais ao estudo dessa disciplina. Acreditamos, também, que o mesmo poderá ser feito para outras disciplinas de matemática superior.
- O conhecimento de AAM pode ser usado como principal instrumento para se fazer justificativas formais de propriedades e, até mesmo, de definições trabalhadas na Educação Básica. De fato, a AAM trata do estudo das propriedades de uma dada operação definida em um conjunto qualquer. Se olharmos atentamente para os conteúdos de matemática da Educação Básica, as proposições (teoremas ou propriedades), quase sempre, estão relacionadas com as operações de adição e/ou multiplicação definidas no conjunto dos Naturais, Inteiros, Racionais, Reais ou Complexos. Assim, as propriedades das operações são fundamentais para se demonstrar essas proposições. Consequentemente, podemos recorrer ao conhecimento de AAM durante esse processo de demonstração. Gostaríamos de observar que, quando nos restringimos ao conjunto dos Irracionais, a AAM perde sua força, visto que os Irracionais não formam uma estrutura algébrica com nenhuma das operações

usuais (adição e multiplicação). Na verdade, a adição e a multiplicação nem mesmo são operações no conjunto dos Irracionais, pois nem sempre a soma ou o produto de dois números irracionais dá um número irracional. Nesta circunstância, onde a AAM não está presente, devemos recorrer a uma outra disciplina tão importante quanto a Álgebra, a Análise Real.

- O conhecimento de AAM ajuda o professor da Educação Básica a identificar semelhanças e diferenças entre os conteúdos que ele irá trabalhar na sua prática profissional e, com isso, ensinar um novo conteúdo, baseando-se nas semelhanças ou diferenças desse novo com outros conteúdos já trabalhados. Isso foi feito durante o nosso Projeto de Ensino. Ao discutirmos as relações de equivalência, buscamos identificar, na Educação Básica, situações onde essas relações ocorriam. Discutimos as semelhanças e diferenças entre os Inteiros e os Polinômios; entre matrizes e inteiros; entre polinômios e matrizes, etc.
- O ensino de AAM, nos cursos de Licenciatura, pode levar os alunos a serem mais criteriosos em relação às hipóteses de propriedades matemáticas e a se preocuparem com a composição da estrutura e dos elementos com que eles estiverem trabalhando. Durante discussões em sala de aula, os alunos a princípio acreditavam que estavam de posse de uma estrutura algébrica e, após uma analise criteriosa, descobriram que estavam enganados, levando-os a perceber que é preciso tomar cuidado em fazer afirmações baseadas apenas em uma primeira observação.
- O ensino de AAM, nos cursos de Licenciatura, pode levar os alunos a serem mais críticos – não aceitar um resultado sem justificativa – e mais criteriosos – até o óbvio precisa ser justificado. Isso apareceu de forma bem contundente durante demonstrações de propriedades algébricas, como, por exemplo, *o produto de um elemento, de um anel ou corpo, por zero, dá zero.*
- O ensino de AAM propicia um ambiente adequado para melhorar a escrita matemática do estudante. De fato, a aprendizagem de conceitos e, principalmente, procedimentos dessa disciplina exige muita escrita e intepretação lógica de textos e simbologias matemáticas. E, a inserção da MEAAMaRP nesse processo ajuda o professor a identificar erros de leitura e escrita dando, assim, condições dele fazer as devidas intervenções.

Porém, para alcançar esses resultados, o professor da disciplina de AAM precisa:

- Promover uma participação ativa dos alunos durante suas aulas;
- Levar os alunos a refletir sobre cada conteúdo trabalhado. Nesse sentido, seria interessante reservar um tempo, em sala de aula, para tal reflexão. Principalmente, na análise das atividades deixadas como tarefa extraclasse;
- Estimular o aluno a expor suas ideias (perguntar, ouvir, promover debates etc.);
- Dispor de um instrumento eficiente de avaliação contínua, não apenas do aluno, mas, principalmente, da metodologia adotada e da sua prática;
- Buscar relacionar cada conteúdo trabalhado com a futura prática dos estudantes. Isso poderá motivar o aluno e ajudar a responder a "famosa" pergunta: "por que eu preciso aprender isso?".

9.4 Contribuições da pesquisa

O curso de Licenciatura em Matemática propicia momentos para se fazer mudanças significativas no ensino da matemática. De fato, durante a formação inicial de professores de Matemática está se formando professores que atuarão no Ensino Fundamental e no Ensino Médio, sendo que, possivelmente, se está dando condições primárias para a promoção de futuros professores formadores de professores e, até mesmo, de pesquisadores em Educação Matemática. Isso apareceu fortemente nos dados da pesquisa, durante relatos diversificados dos alunos investigados sobre suas intenções em relação à sua formação docente.

Assim, acreditamos que nossa pesquisa seja bastante significativa, pois ela está inserida em um contexto que realmente poderá fazer a diferença no processo de ensino e aprendizagem, em diversos segmentos da Educação (Ensino Infantil, Ensino Fundamental, Ensino Médio e Ensino Superior). O fato de nossa pesquisa focar a Álgebra como um dos temas centrais, fortalece ainda mais nosso posicionamento sobre sua relevância, visto que os conteúdos trabalhados em Álgebra estão relacionados com todas as instâncias do saber matemático. Novamente, nos reportamos ao fato de que nossa pesquisa atinge os diversos segmentos da Educação.

Por fim, os dados da pesquisa evidenciaram a necessidade de se trabalhar, de forma mais consistente, novas metodologias de ensino, visto que os alunos, futuros professores de Matemática, anseiam por maneiras mais eficientes de se ensinar matemática. Relatos desses alunos mostraram o descrédito em relação à metodologia tradicional. Nesse ponto, a Resolução de Problemas revelou-se, para esses alunos, como um elemento diferencial no ensino, na aprendizagem e na avaliação de matemática. Pois, pela vivência de cada aula, observando o crescimento conceitual dos alunos, no diálogo professor-aluno, dentro e fora da sala de aula, pelos relatos dos alunos e por pesquisas já consolidadas, comprova-se que a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, além de ser um elemento motivador, coloca o aluno como principal agente no processo de ensino-aprendizagem-avaliação, levando-o a refletir, discutir e tirar suas próprias conclusões, sem esperar que o professor pense por ele e, consequentemente, produzindo aprendizagem. Além disso, foi detectado em alguns momentos, durante o uso dessa metodologia, que o fato de o aluno conseguir resolver um problema não garante sua aprendizagem. Isso serviu para mostrar que realmente nessa metodologia, a avaliação acontece de forma integrada ao ensino, promovendo a aprendizagem.

Durante nossa pesquisa, constatamos também diversos desafios. Acreditamos que esses desafios não se restringem apenas a um ensino de AAM capaz de produzir conhecimentos de forma satisfatória e, consequentemente, trazer contribuições significativas ao professor da Educação Básica. Esses desafios estão relacionados a todo processo de ensino do curso de Licenciatura em Matemática do IFG e, possivelmente, de outros cursos ou, até mesmo, de outras instituições de ensino superior. Fortes relatos e desabafos dos alunos; discussões entre Professor-Pesquisador e alunos; troca de ideias entre Professor-Pesquisador e Professor-Colaborador; dentre outras coisas, apontaram a necessidade de:

- *Um empenho maior por parte do professor formador de professores em buscar novas metodologias de ensino e em relacionar a teoria com a prática.* Isso demandaria uma reformulação na prática desses professores, mexendo, de certa forma, com uma cultura, no mínimo institucional. Precisamos mais que uma atitude isolada de um ou outro professor, precisamos de um projeto institucional ou, quiçá, uma política pública nesse sentido;

- *Uma formação continuada imediatamente à formação inicial*, com o objetivo de inserir e acompanhar, de forma adequada, o novo professor no mercado de trabalho, sob o risco de que todo processo, dessa nova formação, se perca. O professor pode, ainda, não estar preparado para enfrentar as adversidades que possivelmente virão de encontro ao seu novo método de ensino.
- *Uma produção de materiais adequados e voltados para o curso de Licenciatura em Matemática nessa nova perspectiva*. Temos uma grande deficiência nessa parte. Como exemplo, podemos citar a própria AAM, onde não possuímos materiais manipulativos, softwares e até mesmo livros didáticos voltados à formação de professores da Educação Básica.
- *Mais pesquisas nessa linha.* Afinal, o nosso trabalho é pequeno diante da grandiosidade de questões que ainda precisamos resolver.

9.5 O que vem depois

Esperamos que esta pesquisa seja um embrião para um sem-número de outros trabalhos nessa linha. Acreditamos que só podemos melhorar o ensino se mobilizarmos pesquisadores, instituições de ensino superior, professores formadores de professores, professores da Educação Básica, dentre outros, a se empenharem na melhoria da formação de professores. Nesse sentido, precisamos de mais diálogo, formação continuada para os professores formadores e mais pesquisas que busquem associar a formação teórica com a prática do professor.

Esta pesquisa não termina aqui. Pretendemos, posteriormente, trabalhar Resolução de Problemas em outras turmas de Álgebra II, buscando melhorar a introdução dos conceitos apresentados nesta tese e introduzir outros conceitos de AAM, através da Resolução de Problemas, que ainda não foram trabalhados dessa forma. Temos a intenção de produzir artigos com resultados de novas pesquisas e, futuramente, editar um livro didático de Álgebra Abstrata Moderna, voltado para os cursos de Licenciatura em Matemática, com o objetivo de atingir um público maior, tanto alunos de Licenciatura em Matemática quando professores formadores de professores e até pesquisadores dessa área.

Temos consciência de que os desafios são enormes porém não devemos esmorecer. Há muitas coisas para se fazer.

REFERÊNCIAS

ABBAGNANO, N. **Dicionário de Filosofia**. 5ª ed. Tradução por: Benedetti, I. C. São Paulo: Martins Fontes, 2007. 1015p.

ALLEVATO, N. S. G. **Associando o Computador à Resolução de Problemas Fechados**: Análise de uma Experiência. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista Julio de Mesquita Filho, Rio Claro, 2005. 370f.

BETANCUR, M O. Reflexiones sobre: la formación de maestros y los objetivos generales de la educación matemática. **Revista Educación y Pedagogia**, n.2, p. 59–66, 1990.

BICUDO, M. A. V. Pesquisa qualitativa e pesquisa quantitativa segundo a abordagem fenomenológica. In: BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. (Orgs.). **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática**. Coleção Tendências em Educação Matemática. 3ª ed. Belo Horizonte-MG: Autêntica, 2004. p.99-112.

BOLDRINI, J. L. *et al.* **Álgebra Linear**. 3ª ed. São Paulo: Harbra, 1980. 411p.

BRANDÃO, C da F. **LDB Passo a Passo**. 2ª ed. São Paulo-SP: Avercamp, 2005. 200p.

BRASIL. **Lei 11.892**, de 29 de dezembro de 2008. Institui a Rede Federal de Educação Profissional, Científica e Tecnológica, cria os Institutos Federais de Educação, Ciência e Tecnologia, e dá outras providências. Brasília, 2008.

______. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Brasília: SEF, 1998. 148p.

______. **Parecer nº CNE/CP 09/2001**. Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação de Professores da educação básica, em nível superior, curso de licenciatura, de graduação plena Diretrizes. Brasília, 2001.

______. **Parecer nº CNE/CP 07/2015.** Define as Diretrizes Curriculares Nacionais para a formação inicial em nível superior (cursos de licenciatura, cursos de formação pedagógica para graduados e cursos de segunda licenciatura) e para a formação continuada. Brasília, 2015.

CHI, M. T. H; GLASER, R. A capacidade para solução de problemas. In: STERNBERG, R. (Org.). **As capacidades intelectuais humanas:** uma abordagem em processamento de informação. Tradução: Batista, D. Porto Alegre: Artes Médicas, 1992. p.249-275.

CUNHA, M. I. **O professor universitário na transição de paradigmas**. Araraquara: Junqueira & marin, 2005. 118p.

D'AMBRÓSIO, U. **Da teoria à prática**. 17ª ed. Campinas-SP: Papirus, 1996. 112p. (Coleção Perspectivas em Educação Matemática).

DANTE, L. R. **Didática da Resolução de Problemas de Matemática**. 2ª ed. São Paulo: Ática, 1991. 176p.

DAVID, M. M.; MOREIRA, M. M. **A formação matemática do professor:** Licenciatura e prática docente escolar. Belo Horizonte-MG: Autêntica, 2007. 114p.

Eureka. Rio de Janeiro: SBM, 1999. (4).

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em Educação Matemática** (Formação de professores). Campinas: Autores Associados, 2006. 226p.

FREIRE, P. **Pedagogia da Autonomia:** Saberes necessários à prática educativa. São Paulo: Paz e Terra S/A, 1996. 144p.

GARCIA, A.; LEQUAIN, Y. **elementos de álgebra**. Rio de Janeiro: IMPA, 2002. 326p.

GARCIA, C. M. **Formação de professores:** para uma mudança educativa. Tradução por: Isabel Narciso. Lisboa: Porto, 1999. 271p.

GARCIA, C. M. A formação de professores: novas perspectivas baseadas na investigação sobre o pensamento do professor. In: NÓVOA, A. (Coord.). **Os professores e a sua formação**. 2 ed. Lisboa: Dom Quixote, 1995. p. 51-76.

GATTI, A. B. Formação de professores no Brasil: características e problemas. **Educação & Sociedade**, Campinas, v. 31, n. 113, 2010. p. 1355-1379.

GOLDENBERG, M. **A arte de pesquisar**. 8ª ed. Rio de Janeiro: Editora Record, 2004. 110 p.

JUSTULIN, A. M. **A Formação de Professores de Matemática no Contexto da Resolução de Problemas**. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista Julio de Mesquita Filho, Rio Claro, 2014. 309f.

KAUARK, S. F.; MANHÃES, F. C.; MEDEIROS, C. H. **Metodologia de Pesquisa**: um guia prático. Itabuna: Via Litterarum, 2010. 88p.

KILPATRICK, J. Fincando estacas: uma tentativa de demarcar a Educação Matemática como campo profissional e científico. Tradução: Miskulin, G. S. R.; Grado, C. R.; Araújo, E. A. **Zetetiké,** Campinas, v. 4, 1996. p. 99-120.

MACHADO, N. J. **Conhecimento e Valor** (Teoria e Tendência). São Paulo: Moderna, 2004. 165p.

MAUÉS, O. C. Reformas Internacionais da Educação e Formação de Professores. **Caderno de Pesquisa,** São Paulo, n. 118, 2003. p. 89-117.

MAYER, R. E. implications of cognitive psychology for instruction in mathematical problem solving. In: SILVER, E. A. (Org.). **Teaching and the learning mathematical problem solving:** multiple research perspectives. LEA: Hillsdale, 1985. p.123-138.

MIORIN, M. A. **Introdução à História da Educação Matemática.** São Paulo: Atual editora, 1998. 121p.

MLODINOW, L. **O Andar do Bêbado –** Como o acaso determina nossas vidas. Tradução: Alfaro, D. Rio de Janeiro: Zahar, 2009. 76p.

MOYSÉS, L. **Aplicações de Vygotsky à Educação Matemática.** 11ª ed. Campinas: Papirus, 2014. 176p.

MONDINI, F. **Modos de Conceber a Álgebra em Cursos de Formação de Professores de Matemática.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista Julio de Mesquita Filho, Rio Claro-SP, 2009. 177f.

MORAIS, R. S.; ONUCHIC, L. R. Uma Abordagem Historica da Resolução de Problemas. In: ONUCHIC, L. R. *et al.* (Orgs.). **Resolução de Problemas:** Teoria e Prática. Jundiaí: Paco Editorial, 2014. p.17-32.

NOGUTI, F C. **Um Curso de Matemática Básica Através da Resolução de Problemas para Alunos Ingressantes da Universidade Federal do Pampa – Campus Alegrete**. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista Julio de Mesquita Filho, Rio Claro-SP, 2014. 371f.

NÓVOA, A. **Professores e a sua Formação**. Lisboa: Dom Quixote, 1997. 158p.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Pesquisas em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. **BOLEMA** - Boletim de Educação Matemática**,** v. 25, n. 41, 2011. p. 73–98.

ONUCHIC, L. R. Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas. In: BICUDO, M. A. (Org.). **Pesquisa em Educação Matemática:** Concepções e Perspectivas. São Paulo: UNESP, 1999. 313p.

ONUCHIC, L R.; HUANCA, R. R. H. A Licenciatura em Matemática: O desenvolvimento profissional dos formadores de professores. In: FROTA, M. C. R.; BIANCHINI, B. L.; CARVALHO, M. F. T. (Orgs.). **Marcas da Educação Matemática no Ensino Superior**. Campinas: Papirus, 2013. 368p.

ONUCHIC, L. R.; NOGUTI, F. C. A Pesquisa Científica e a Pesquisa Pedagógica. In: ONUCHIC, L. R. *et al.* (Orgs.). . **Resolução de Problemas:** Teoria e Prática. Jundiaí: Paco Editorial, 2014. p. 53-68.

PIMENTA, S. G. **O estágio na formação de professores : unidade teoria e prática.** São Paulo: Cortez, 1995. 200p.

PINTER, C. C. **A Book of Abstract Algebra**. 2ª ed. New York: McGraw-Hill, 2013. 384p.

POLYA, G. **A arte de Resolver Problemas**. Tradução: Araújo, H. L. Rio de Janeiro: Interciência, 2006. 203 p.

______. O ensino por meio de problemas. **Revista do Professor de Matemática.** Tradução Gomide, E.; Hariki, S. Rio de Janeiro: SBM, 1985. p.11-16.

PONTE, J. P.; SERRAZINA L. Professores e Formadores Investigam a Sua Própria Prática: O Papel da Colaboração. **Zetetiké**, v. 11, n. 20, 2003. p. 51-84.

PONTE, J. P. Perspectivas de desenvolvimento profissional de professores de Matemática. In: PONTE, J. P. et al. **Desenvolvimento profissional dos professores de Matemática**: que formação? Lisboa: SEM-SPCE, 1996. p.193-211.

______. O desenvolvimento profissional do professor de Matemática. **Educação e Matemática**, v.31, n. 20. p.9-12.

RABELO, E. H.; LORENZATO, S. A. Ensino da Matemática: reflexoes para uma aprendizagem significativa. **Zetetikè.** Campinas, v.2, n.2, 1994. 37-46.

RABELO, J.; SEGUNDO, M. D. M.; JIMENEZ, S. Educação para todos e reprodução do capital. **Trabalho Necessário**. Revista produção on-line. [on-line]. ano 7, n.9, 2009. disponível em: <http://www.uff.br/trabalhonecessario/> ISSN: 1808-799X.

ROMBERG, T. A. Perspectivas sobre o Conhecimento e o Método de Pesquisa. Tradução: Onuchic, L. R.; Boero, M. L. **BOLEMA** - Boletim de Educação Matemática. Rio Claro: UNESP, n. 27, p. 93–139, 2007. p. 93-139.

SCHOENFELD. **Mathematical Problem Solving.** London: Academic Press Inc. LTD, 1985. 409p.

SKOVSMOSE, O. Matemática em Ação. In: BICUDO M. A. V.; BORBA, M. C. (Orgs.). **Educação Matemática:** pesquisa em movimento. 4ª ed. São Paulo: Cortez editora, 2012. 344p.

SHULMAN, L.S. Those who understands: knowledge growth in teaching. **Educational Researcher**, Washington, v.15, n. 2, p. 4-14, 1986.

SILVA, C. S. B. **Curso de Pedagogia no Brasil: história e identidade.** Campinas: Autores Associados, 1999. 105p.

SILVA JÚNIOR, J. R. S. **Reforma do Estado e da Educação no Brasil de FHC**. São Paulo SP: Xamã, 2002. 135p.

SILVA, S. R. V. **Identidade Cultural do Professor de Matemática a partir de depoimentos**. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista Julio de Mesquita Filho, Rio Claro-SP, 2004. 298f.

SOUSA, M. V.; FERNANDES, J. A. Dificuldades de professores estagiários de Matemática e sua relação com a formação inicial. **Quadrante.** Lisboa, 2004. p.91-113.

STANIC, G. M. A.; KILPATRICK, J. Historical perspectives on problem solving in the mathematics curriculum. **The teaching and assessing of mathematical problem**. Reston-VA: NCTM e Lawrence Erlbaum, 1989. p.1-22.

TARDIF, M. Saberes profissionais dos professores e conhecimentos universitários: Elementos para uma epistemologia da prática profissional dos professores e suas consequências em relação à formação para o magistério. **Revista Brasileira de Educação** v.13, 2000. p.5-24.

UNESCO. **Declaração de Nova Delhi sobre Educação para Todos**. Nova Delhi: Unesco, 1993. Disponível em: <http://unesdoc.unesco.org/images/0013/001393/139393por.pdf>. Acesso em: 17 out. 2014.

UNESCO. **Declaração mundial sobre a educação para todos***:* satisfação das necessidades básicas da aprendizagem (Conferência de Jomtien-Tailândia): Unesco, 1990. Disponível em: <unesdoc.unesco.org/images/0008/000862/086291por.pdf >. Acesso em: 17 set. 2014.

USISKIN, Z. Concepções sobre a álgebra da escola média e utilizações das variáveis. In: ARTUR, F C; ALBERT P. S. (Orgs.). Tradução: Domingues, H. H. **As idéias da álgebra**. Tradução H. D. Hygino. São Paulo: Atual editora, 1995. p. 9-22.

VITTI, C M. **Matemática com prazer, a partir da história e da geometria**. 2ª ed. Piracicaba: UNIMEP, 1999. 103p.

WALLE, J. A. V. **Elementary and Middle School Mathematics:** teaching developmentally. 4ª ed. New York: Longman, 2001. 555p.

WENGER, E. **Communities of Practice:** Learning, Meaning, and Identity. New York: Cambridge University Press, 2008. 318p.

APÊNDICE A – PLANO DE ENSINO DE ÁLGEBRA 2

INSTITUTO FEDERAL GOIÁS Campus Goiânia	**Ministério da Educação** **Instituto Federal de Goiás** **Campus Goiânia** **Departamento de Áreas Acadêmicas 2**	
	Plano de Ensino da Disciplina **Álgebra 2**	

Caracterização	
Curso: Licenciatura em Matemática	**Ano/Semestre letivo:** 2015/1
Período/Série: 5° Período	**Turno:** ( ) Matutino (X) Vespertino ( ) Noturno
Carga horária semanal: 4 aulas (3 h) **Carga horária total:** 72 aulas (54 h)	

Pré-requisitos
Álgebra I

Ementa
Grupos e seus subgrupos, homomorfismos e isomorfismo de grupos, teorema de Cayley, classes laterais e o teorema de Lagrange, subgrupos normais e grupos quocientes. Anéis, anéis comutativos e anéis com unidade. Subanéis. Homomorfismos e isomorfismo de anéis. Anéis de Integridade e Corpos.

Objetivos
Estudar tópicos de álgebra abstrata concernentes às teorias de grupos, anéis e corpos, com a intenção de desenvolver o censo crítico dos alunos neste vasto e profícuo ramo do conhecimento matemático, permitindo-lhes por exemplo, classificar objetos algébricos por suas características bem mais que por sua aparência.

Descrição do conteúdo				
Objetivos	**Conteúdo**	**Data**	**Nº aulas**	**Estratégias de Ensino**

	Grupos – Definição e exemplos		06	MRP
	Subgrupos – Definição e exemplos		06	MRP
	Classes laterais		4	MRP
	Teorema de Lagrange		04	MT
	Homorfismos e isomorfismos		04	MT
	Teorema de Cayley		2	MT
	Subgrupos normais		4	MT
	Grupos quocientes		4	MT
	Teorema de Cauchy		2	MT
	1ª Prova		2	
	Anéis, subanéis e ideiais		06	MRP
	Domínios de integridade e domínios euclideanos		8	MRP
	Homomorfismos de anéis e isomorfismos de anéis		04	MT
	Corpos e corpos finitos		04	MRP
	Corpos e corpos finitos		04	MRP

Metodologia
Para o alcance dos objetivos propostos serão empregados os seguintes procedimentos didáticos: aulas expositivas dialogadas com e sem o auxílio de softwares matemáticos; estudos dirigidos individuais e em grupo. Pesquisas históricas bibliográficas sobre os temas estudados e exibição de vídeos que estendam e mostrem aplicações dos conceitos estudados.
Recursos Didáticos
Quadro negro, giz, livro didático, softwares matemáticos e Datashow.

Bibliografia

Básica:

- Domingues, Hygino H. , Iezzi,G. Álgebra Moderna, 4ª ed. Reform. , São Paulo: Atual, 2003.
- Gonçalves, Adilson. Introdução à Álgebra. Rio de Janeiro: IMPA, 1979.

Complementar:

- Herstein, I. N. Topics in Algebra. New York: Wiley, 1964.
- Rotman, J. J. Advanced Modern Algebra, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 2002.

Avaliação

A avaliação será contínua visando o desenvolvimento integral do aluno na disciplina, englobando provas individuais, trabalhos extra classe, solução e apresentação de exercícios, frequência nas aulas, pontualidade e assiduidade.

DADOS DE APROVAÇÃO

Professor responsável pela disciplina	
Nome: **Glen Cézar Lemos**	
Departamento de origem: **Departamento de áreas acadêmicas II/IFG**	Regime de trabalho: **Dedicação Exclusiva**

Assinatura	
Professor	**Coordenação**

Data de aprovação

APÊNDICE B – TERMO DE COMPROMISSO E RESPONSABILIDADE

Instituto Federal de Educação, Ciências e Tecnologia de Goiás

Quantidade de Alunos: 9
Quantidade de Aulas Prevista: 32
Quantidade de Encontros: 16

Este termo de compromisso, tem por objetivo estabelecer parâmetros para nortear o desenvolvimento e a organização do projeto de ensino P, que será aplicado em caráter de pesquisa, elencando os direitos e as responsabilidades dos alunos, do professor da disciplina e do Professor-Pesquisador. O trabalho será realizado para alunos do 5ª período de Licenciatura em Matemática do IFG – Campus Goiânia.

Normas:

- A pesquisa não deverá interferir no currículo da disciplina, bem como no cumprimento do mesmo;
- O professor da disciplina (Professor-Colaborador) passará o direito e a responsabilidade da aula para o Professor-Pesquisador, durante os 16 encontros definidos e acordados por eles. Os demais encontros serão de responsabilidade do professor da disciplina;
- O Professor-Pesquisador poderá assumir o papel de professor da disciplina, em outro momentos, além dos citados anteriormente, quando for necessário e estiver de comum acordo com o professor da disciplina;
- O Professor-Pesquisador poderá filmar e fotografar as aulas, quando achar necessário. As mídias serão usadas exclusivamente para coleta, análise e fundamentação dos dados da pesquisa. Nenhuma mídia será divulgada, preservando a identidade e a integridade dos participantes e, ficará de posse do pesquisador por um prazo máximo de cinco anos, logo após serão destruídas, de acordo com o que reza em alguns dos principais *códigos de ética e conduta,* destinados a este feito;

- O trabalho será desenvolvido de forma cooperativa e colaborativa. Os estudantes trabalharão em grupos com o objetivo de resolver problemas visando à construção ou reconstrução de conceitos matemáticos;
- Todos deverão engajar-se na resolução e discussão dos problemas apresentados;
- Cada grupo deverá entregar as atividades no final de cada encontro, e serão devolvidas no encontro subsequente, ficando uma cópia das mesmas em posse do Professor-Pesquisador;
- A tarefa extraclasse deverá ser feita e entregue no início do encontro seguinte;
- As avaliações em caráter de aprovação ou reprovação dos alunos é de responsabilidade do Professor da disciplina (Professor-Colaborador), e não deverá sofrer interferência do Professor-Pesquisador. Porém, o Professor-Pesquisador poderá auxiliar o professor da disciplina, nesse processo, caso seja solicitado;
- Questões omissas deverão ser discutidas por todos e valendo-se da opinião da maioria;

Ciente das normas aqui estabelecidas, e de pleno acordo com elas, firma-se o referido compromisso.

Goiânia, ___ de março de 2015.

______________________________	______________________________
Professor-Pesquisador	Professor da disciplina (Álgebra II)
______________________________	______________________________
Aluno(a):	Aluno(a):
______________________________	______________________________
Aluno(a):	Aluno(a):
______________________________	______________________________
Aluno(a):	Aluno(a):
______________________________	______________________________
Aluno(a):	Aluno(a):
______________________________	
Aluno(a):	

APÊNDICE C – RELAÇÃO DE EQUIVALÊNCIA

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia

Prof. Nilton C. Ferreira

Relação de Equivalência

Definição 1: Sejam *A* e *B* dois conjuntos não vazios. Denominamos produto cartesiano de *A* por *B*, o conjunto $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \; e \, y \in B\}$.

Exemplo 1:

Para $A = \{a, x, 1\}$ e $B = \{3, -1\}$ temos: $A \times B = \{(a,3), (a,-1), (x,3), (x,-1), (1,3), (1,-1)\}\}$

Definição 2: Sejam *A* e *B* dois conjuntos não vazios, denominamos relação *R* de *A* em *B* a qualquer subconjunto, não vazio, de $A \times B$; Se *A* = *B,* dizemos que *R* é uma relação em *A*.

Exemplo 2: Considerando $A = \{a, x, 1\}$ e $B = \{3, -1\}$:

i) $R_1 = \{(a,3), (x,-1)\}$ é uma relação de *A* em *B*;

ii) $R_2 = \{(3,1), (-1,1)\}$ é uma relação de *B* em *A*;

iii) $R_3 = \{(a,x), (x,a), (x,x)\}$ é uma relação em *A*;

Observações: Se *R* é uma relação de *A* em *B*:

a) Usualmente escreve-se aRb ao invés de $(a,b) \in R$;

b) Quando $(a,b) \in R$ ou, equivalentemente, aRb, dizemos que *a* se relaciona com *b* pela relação *R;*

Exemplo 3: Considere a relação *R* em $\mathbb{Z}$, tal que xRy se *x* e *y* deixam o mesmo resto quando divididos por 4.

Observe que, no Exemplo 3, a relação *R* possui infinitos elementos. Observe também que xRx, para todo $x \in \mathbb{Z}$; xRy se, e somente se, $x - y = 4q$ para algum inteiro *q.* De fato, dividindo *x* e *y* por 4 temos $x = 4q_1 + r$ e $y = 4q_2 + r \Rightarrow r = x - 4q_1$ e

$r = y - 4q_2 \Rightarrow x - y = 4q_1 - 4q_2 \Rightarrow x - y = 4(q_1 - q_2)$, fazendo $q = q_1 - q_2$, temos $x - y = 4q$, $q \in \mathbb{Z}$.

***Definição* 3:** Seja *R* uma relação em *A*, dizemos que *R* é:

i) **Reflexiva** se $xRx, \forall\, x \in A$;

ii) **Simétrica** se $xRy \Rightarrow yRx$, $\forall\, x, y \in A$;

iii) **Transitiva** se xRy e yRz então, xRz;

Definição 4: Dizemos que, se uma relação *R* em *A* for reflexiva, simétrica e transitiva, ela é denominada uma relação de equivalência, e usualmente denotada por ~ ou $\equiv$.

Exemplo 4: $R = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x \text{ e } y \text{ deixam mesmo resto quando divididos por } 4\}$ é uma relação de equivalência em $\mathbb{Z}$.

Definição 5: Seja ~ uma relação de equivalência em A. Para cada $a \in A$, a classe de equivalência de a, denotada por, $\overline{a}$, é o conjunto $\overline{a} = \{x \in A \mid x \sim a\}$.

Exemplo 5: As classes de equivalência, distintas, de:

$R = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x \text{ e } y \text{ deixam mesmo resto quando divididos por } 4\}$ são:

$\overline{0} = \{..., -8, -4, 0, 4, 8, ...\}$, $\overline{1} = \{..., -11, -7, -3, 1, 5, 9, ...\}$, $\overline{2} = \{..., -10, -6, -2, 2, 6, 10\}$ e $\overline{3} = \{..., -9, -5, -1, 3, 7, 11\}$.

APÊNDICE D – CONTEÚDOS DA SEGUNDA PARTE DO PROJETO

Números inteiros: um Domínio de Integridade

Prof. Nilton Cezar Ferreira

- **Definição 1:** Seja *D* um conjunto não vazio munido de duas operações binárias $+$ e $\cdot$. $(D,+,\cdot)$ é denominado um *domínio de integridade* se, para quaisquer $a,b,c \in D$ forem válidas:

1) $(a+b)+c = a+(b+c)$ *;*

2) $a+b=b+a$ *;*

3) $\exists\, 0 \in D \mid a+0=a$*;*

4) $\exists -a \in D \mid a+(-a)=0$ *;*

5) $(a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c)$ *;*

6) $a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c$ *;*

7) $a\cdot b = b\cdot a$ *;*

8) $\exists\, 1 \in D \mid 1\cdot a = a\cdot 1 = a$*;*

9) $a\cdot b = 0 \Rightarrow a=0 \text{ ou } b=0$.

A saber: *as propriedades de 1)-4) caracterizam (D,+) como um grupo abeliano; de 1)-6) caracterizam* $(D,+,\cdot)$ *como um anel; o acréscimo de 7), nas anteriores, torna o anel comutativo; se em* $(D,+,\cdot)$ *for válida 8), o anel possui unidade ou identidade; o acréscimo de 9 estabelece que o anel não possui divisor de zero.*

- **Proposição 1:** Se $(D,+,\cdot)$ é um domínio de integridade então, para quaisquer $a,b \in D$ valem as seguintes propriedades:

i. $a\cdot 0 = 0$

ii. $-(1\cdot a) = (-1)\cdot a = 1\cdot(-a)$

iii. $-(a\cdot b) = (-a)\cdot b = a\cdot(-b)$

iv. $-a-b = -(a+b)$, onde, por definição, $a-b = a+(-b)$

v. $-(-a) = a$

vi. $(-a)\cdot(-b)=a\cdot b$

Observe que, como os inteiros com as operações de adição e multiplicação usuais é um domínio de integridade, todas as propriedades apresentadas se aplicam a eles.

Exercícios:

1) Prove as seis propriedades apresentadas sobre domínio de integridade.

2) Utilize as propriedades, para discutir e justificar:

a) $-0+0=0$ b) $-(-5)=5$ c) $-2-3=-5$

d) $-5+2=-3$ e) $3\cdot(-2)=-6$ f) $-3\cdot(-2)=6$

3) Verifique se as propriedades apresentadas são válidas para outras estruturas como *matrizes, polinômios, vetores,* etc.

- **Definição 2:** *Sejam* a *e* $b\neq 0$ *dois números inteiros.* q *e* r são denominados, respectivamente, quociente e resto da divisão inteira de a *por* b*, se:*

$$\begin{cases} a=b\cdot q+r \\ 0\leq r<|b| \end{cases}$$

Exemplos:

a) A divisão inteira de 17 por 6 tem como resultado $q=2$ e $r=5$. De fato, $17=6\cdot 2+5$ e $0\leq 5<6$;

b) A divisão inteira de -23 por 7 tem como resultado $q=-4$ e $r=5$. Com efeitos, $-23=(-4)\cdot 7+5$ e $0\leq 5<7$.

Exercícios:

4) Qual seria uma definição de divisão de polinômios, equivalente a divisão inteira dos inteiros?

5) Qual a relação algébrica existente entre os inteiros e os polinômios? discuta suas potencialidades.

6) Considerando a afirmação $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$, responda

a) Essa afirmação é verdadeira para a e b inteiros, racionais e reais?

b) Essa afirmação é verdadeira para a e b matrizes?

c) Essa afirmação é verdadeira para a e b polinômios?

d) Evidencie as propriedades algébricas necessárias para que essa afirmação seja verdadeira. Para quais estruturas algébricas essa afirmação é verdadeira?

APÊNDICE E – AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA

AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA

Prof. Nilton C Ferreira
Aluno:____

1) Faça uma lista de todos os conteúdos de álgebra abstrata que você consegue se lembrar e, relate tudo que você sabe sobre eles.

2) Destaque os pontos positivos e os pontos negativos da disciplina de álgebra, que você cursou este semestre. Se pudesse mudar alguma coisa, o que você mudaria?

3) Sobre os conteúdos estudados em Álgebra II, você considera algum deles desnecessário para sua formação como professor da Educação Básica? se sim, quais?

4) Você considera o curso de Álgebra II importante para sua formação como professor da Educação Básica? Se sim, quais as contribuições que esse curso poderia dar à sua formação?

5) Faça um comentário sobre a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, destacando o que você considera mais relevante e evidencie os prós e os contras dessa metodologia.

6) Você utilizaria a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas em sua prática docente? por quê?

7) Disserte sobre outros pontos que você considera importantes, relacionados à disciplina de Álgebra II, na formação de professores.

ANEXO I – RESPOSTAS DOS ALUNOS À AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA

1) Grupos: Seja G um grupo não vazio, e $*$ uma operação em G. Dizemos que G é grupo se:

i) $\forall\ a, b, c \in G$, tal que;
$(a*b)*c = a*(b*c)$

ii) $\exists\ e \in G, \forall\ a \in G$ t.q.;
$a*e = a$

iii) $\forall\ a \in G, \exists\ a' \in G$ t.q.;
$a*a' = e$

Subgrupo: Seja G um grupo não vazio. Um subconjunto não vazio $H \subset G$ é subgrupo de G se:

→ H é fechado para a operação $(*)$.
$\forall\ a, b \in H,\ a*b \in H$

→ É um grupo $(H, *)$, onde $(*)$ é a restrição de G aos elementos de H.

Se $H \leq G$; $a*b' \in H$, $a, b \in G$.

→ Existência do elemento neutro:
$e_h * e_h = e_h = e_h * e$

→ $\exists\ b' \in H$, $b' \in G$.
$b'_h * b = e_h = e = b' * b$.

Anéis: Seja $(A, +, \cdot)$ um conjunto não vazio, é chamado de anel se somente se;

a) $\forall\ a, b, c \in A$, t.q.

$(a+b)+c = a+(b+c) \to$ Só associativa

b) $\exists\ e \in A, \forall\ a \in A$, t.q.,

$a + e = a \to$ Existência de elemento neutro

$e = a - a = 0$

c) $\forall\ a \in A, \exists\ a' \in A \mid$ q.,

$a + a' = e$

$a + a' = 0$

$a' = -a \to \exists$ o simétrico

d) $\forall\ a, b \in A$ t.q.,

$a + b = b + a \to$ comutatividade

$(A,+)$ é abeliano

i $(A, \cdot)$

M_1: $\forall\ a, b, c \in A$, t.q.,

$(a.b).c = a.(b.c) \to$ Só associativo

M_2: $\forall\ a, b, c \in A$, t.q.,

$a(b+c) = ab + ac \to$ Distributiva.

Então $(A,+,\cdot)$ é chamado de anel.

Anel de integridade: Tem que obedecer aos axiomas acima e tem que ser comutativo, com existência de elemento unitário (ou seja elemento neutro) e não tem divisor de zero.

Seja $(A,\cdot)$, $\forall\ a, b \in A$, t.q.

a) $a.b = b.a \to$ comutativo

b) $\exists\ e \in A$, t.q.;

$a.e = a$

$e = \frac{a}{a} = 1 \to$ elemento unitário

• 2º $a.b=0$, $a=0$ ou $b=0$ → não é divisor de zero.

∴ é anel de integridade.

Sub anel: Seja A um anel, L um subconjunto de A, Dizemos que L é um subanel de A se:

1º $a-b \in L$ } com $a, b \in L$.
2º $a.b \in L$ }

homomorfismo de aneis: Dizemos que é homomorfismo de anel $(B,+,\cdot)$ num anel $(H,+,\cdot)$ uma aplicação $f: B \to H$, para quaisquer $x, y \in B$.

$f(x+y) = f(x) + f(y)$
$f(xy) = f(x).f(y)$

Corpo: Para ser corpo um certo conjunto tem que ser grupo, anel de integridade, com um certo p (primo), onde p é o menor subcorpo do conjunto

FORONI

② A presença uma forma diferenciada de aplicar o conteúdo, por vezes nos mostrou que já sabíamos o conteúdo, mas de uma forma diferente, onde nos proporcionou uma visão mais aberta de conteúdos e formas de estarmos levando para frente com uma nova visão de ensino. A parte ruim foi que ficou muito misturado as coisas pois, tinhamos dois professor, onde o espaço de tempo para cada um tirar as dúvidas dos alunos foi escassa. Deveria se assim continuar com o método que nos foi apresentado pelo menos mais uma aula, pois daria mais tempo para se trabalhar melhor os conteúdos.

③ não

④ sim. O curso me permitiu compreender de onde e de como a algebra é. É muito importante para nós sabermos provar certos coisas para nossos alunos para que eles vejam o sentido da algebra e da matemática na escola.

⑤ É um excelente método, induz o aluno à pensar, antes de saber do que se trata, buscando soluções com a bagagem=

agem que já tem. Para mim a única coisa que eu achei ruim foi o tempo, para se trabalhar com esse método precisaria de mais aula, para que o conteúdo fosse gerado de uma forma mais eficiente e ingerida melhor.

6 Sim, acredito que precisamos de metodologia onde nossos alunos sintam o gosto pela matéria e veja a importância dela na vida escolar e cotidiana, já as outras disciplinas os leva a vê-las de forma diferente, também podemos fazer-los a ver desta forma também.

7

FORONI

AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA

1) FAÇA UMA LISTA DE TODOS CONTEÚDOS DE ÁLGEBRA ABSTRATA QUE VOCÊ CONSEGUE SE LEMBRAR E RELATE TUDO QUE VOCÊ SABE SOBRE ELES.

GRUPO: conj. não vazio e uma operação binária que satisfaz: ASSOCIATIVIDADE, ELEM. NEUTRO e ELEM. INVERSO

Ex: $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$

ANÉIS: é um conjunto com duas operações binárias (soma e produto) representado da forma $(A, +, \cdot)$, satisfazendo as seguintes propriedades:

- $(A, +)$ é um grupo abeliano
- O produto é associativo
- Distributividade na adição

Ex: $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ $(\mathbb{C}, +, \cdot)$

CORPO: é um anel comutativo com unidade em que todo elemento diferente de 0 possui elemento inverso com relação à multiplicação

$\rightarrow (\forall x \in F \setminus \{0\}, \exists y \in F ; x \cdot y = 1)$

credeal

1) $(K, +)$ é um grupo abeliano
2) $(K - \{0\}, \cdot)$ é um grupo abeliano
3) A operação $\cdot$ é distributiva em relação à operação $+$.
EXEMPLOS: Os números complexos, números racionais, números reais.

credeal

2) Pontos positivos: Uma nova maneira de resolver problemas; boa interação entre aluno e professor; resolução de exercícios em sala de aula;

3) NÃO

4) Sim. Aprendi a ter uma nova visão para a resolução de problemas. É uma maneira de compreender melhor a questão e também resolve-la. A interação professor-aluno é outro ponto que destaco pois é muito importante para uma boa aula.

5) Foi o ponto alto da matéria na minha avaliação a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática através da resolução de problemas.
O processo foi dinâmico e contemplou a aprendizagem.
Ao agrupar os alunos podem dispersar um pouco, este é o ponto contra mas que pode ser planejado para evitar transtorno maior

credeal

6) Sim vou utilizar essa metodologia.
Gostei muito do resultado desta metodologia no que se refere a aprendizagem e a interação professor aluno. Contribui para uma aula com bons resultados, faz o aluno discutir e refletir.

7) O uso de tecnologias pode contribuir para aumentar o interesse do aluno.

(i) grupo:

Seja E um conjunto não e G(E, *) um grupo munido com

I) Associativa

$a * (b * c) = (a * b) * c \quad \forall a, b, c \in G$

II Existência do elemento neutro

$\exists\, e \in G$ tal que $a * e = a \quad \forall a \in G$

III) Elemento simétrico

$\exists\, a' \in G$ tal que $a' * a = e$

grupo abeliano

I) Associativa; II) Elemento neutro; III) elemento simétrico e IV) Comutativo

IV) $a * b = b * a \quad \forall a, b \in G$

(i) Subgrupo

(ii) anel; sub anel; homomorfismo de anel

(iii) Corpo

② Nesta disciplina eu posso afirmar que os pontos positivos foi o seguinte. As aulas dinâmicas no sentido de interação entre professor e o aluno na resolução de problemas. Podemos observar uma algebra que estudamos estar contida no ensino basico. Já os pontos negativos para mim, acredito que foi a minha falta de entrega aos estudos, deveria ser um esforço maior. Posso dizer que a materia foi legal, pois teve uma proposta de aulas diferenciada ao aluno.

③ Não. Porque eles são de suma importância.

4) Sim. A algebra te dar a possibilidade de entender o conteúdo do ensino basico com as suas demostrações provas e teoremas propostos no decorrer da disciplina. Com isso o professor irá entender como surgiu cada tópico da algebra.

⑤ A Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através de Resolução de Problemas tem uma carater positivo para o aluno. Porque apresenta a ele uma aula com a proposta de Trabalhar em grupo com leitura e discussão das questões em sala, o professor tirando as duvides em cada grupo. é claro que há uma dificuldade do grupo no início se relacionar mas com o tempo essa barreira vai superando e uma interação melhor para cada pessoa.

6) Sim. Porque como professor te dar a possibilidade de executar uma aula dinâmica, onde há uma interação entre professor e aluno. Podemos compartilha as idéias propostas em cada grupo, o educador faz uma analise de como está a sala turma. Com isso te dar a possibilidade de fazer uma avaliação continua.

7) Acredito que está proposto é suficiente mas talvez haja outros pontos e mais para acrescentar.

01 - Operações: Sendo A um conjunto não vazio, toda a aplicação $f: A \times A \to A$ é uma operação sobre A.
E * uma lei de composição interna em A.
Propriedades que * pode apresentar.
i) $x*(y*z) = (x*y)*z$ → associativa
ii) $x*y = y*x$ → comutativa
iii) $\forall x \in A \Rightarrow x*e = a$ → elemento neutro
iv) $\exists x' \in A$, $x'*x = e$ → elemento simetrizável
→ Com a aplicação das operações: da adição e multiplicação
→ Grupo: G é um conjunto não vazio e (*) uma operação em G, dizemos que $(G,*)$ é grupo se:
i) $(x*y)*z = x*(y*z)$
ii) $x*y = y*x$
iii) $\exists 0 \in G; a+e=a$
iv) $\exists -a \in G; a+(-a)=e$
e com o axioma da comutividade, o grupo é abeliano $(G,+)$
→ v) $(a.b).c = a.(b.c)$
vi) $a.(b+c) = ab+ac$
$(G,+,.)$ é um anel se valem todos estes axiomas;
anel de integridade
vii) $a.b = b.a$ → anel comutativo;
viii) $\exists 1 \in G$; $1.a = a$ → existência de unidade ou identidade;
ix) $a.b = 0 \to a = 0$ ou $b = 0$ → não possui divisor de zero;
x) $\exists a^{-1} \in G$; $a.a^{-1} = 1$ → a estrutura algebrica que satisfaz todos os axiomas citados é um CORPO.

② - * Positivos:

- → Conteúdos bem explicados;
- → Metodologia utilizada
- → Participação dos alunos.
- → Conteúdos trabalhados

* Negativos:

③ Considero todos os conteúdos estudados de super importância.

④ - Sim, primeiro, porque como professora eu devo conhecer as estruturas algébricas, mesmo que não sejam conteúdos específicos do ensino básico, mas o que eu vou transmitir aos meus alunos tem que ter significado para mim, para que venha a ter também para os alunos.

⑤ - Achei o máximo a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da resolução de problemas.

Resolver situações problemas em grupo, para depois ser apresentado à turma o conteúdo do dia e conduzirmos à reflexão, contribui para um aprendizado real.

⑥ - Sim, primeiro, porque minha experiência foi boa, conseguir aprender, ajuda a exercitar minha mente a buscar soluções para o problema. Na prática docente, temos a chance de ajudar nossos alunos a encontrarem soluções, e não somente a reproduzir conhecimentos, pois assim eles não estarão realmente aprendendo. A metodologia de Resoluções de problemas ajuda o aluno a ser responsável por seu aprendizado e seu aprendizado é significativo.

⑦. Considero, que nós graduandos temos que ter uma formação, que nos favoreça, tanto para seguirmos em frente nos estudos, como para ensinarmos com propriedade os nossos alunos. A Álgebra tem dado significado a tantos conhecimentos já adquiridos, como aos novos. O caminho pelo qual ela nos conduz, nos faz mais pensantes, reflexivos.

1) Faça uma lista de todos os conteúdos de álgebra abstrata que você consegue se lembrar e, relate tudo que você sabe sobre eles. números complexos, tudo que eu sei $\sqrt{i} = -1$.

2) Destaque os pontos positivos e os pontos negativos da disciplina de álgebra, que você cursou esse semestre. Se pudesse mudar alguma coisa, o que você mudaria? R: Os pontos positivos é que nos permite estudar mais afundo muitos exercícios que já estudamos que nem sabiamos que era algebra.

3) Sobre os conteúdos estudados em álgebra II, você considera algum deles desnecessários para sua formação como professor do ensino básico? se sim, quais? Não, todos são necessários, para poder ensinar o básico temos que ter um conhecimento que prove o que estamos ensinando, mesmo que não utilizemos no ensino básico o método de provar.

4) Você considera o curso de álgebra II importante para a sua formação como professor do ensino básico? se sim, quais as contribuições que esse curso poderá dar à sua formação? Sim, Mim dá mais segurança no que eu irei ensinar, não tem como existir uma arvore sem raiz.

5) Faça um comentário sobre à Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, destacando o que você considera mais relevante e evidencie os prós e os contra dessa metodologia.

A disciplinariedade em posta pelos professores, isso é mais relevante.

6) Você utilizaria a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas na sua prática docente? por que? Sim, porque a interação dos alunos em grupo é muito bom, nós aprendemos uns com o outro. Eles também vão se descobrir.

7) Disserte sobre outros pontos que você considerar importantes, relacionados à disciplina de álgebra II, na formação de professores.

A interação que tivemos, em nem uma outra disciplina de exatas foi a mesma, eu penso que em grupo foi bem divertido é muito proveitoso.

① Grupos → prova que vale as quatro propriedades: associativa, comutativa, elemento neutro e simétrico e abeliano.

Subgrupos

Anéis → prova que é grupo e valer associatividade na multiplicação, e distributiva da multiplicação para soma.

Anel comutativo.

Anel de integridade.

Subanel, corpo.

Homomorfismo de anéis: se (A,+,.) num anel (B,+,.) a toda aplicação f: A→B tal que, quaisquer que seja X, Y ∈ A.

② Positivo que foi possível visualiza conteúdo ministrados em ensino básico, penetrado em álgebra II.

negativos poderia ter desenvolvido mais exercícios junto com o professor.

Se pudesse mudar desenvolvia todos os conteúdos interligados ao ensino básico.

③ Considero desnecessário o conteúdo Ideal, não sei se é porque não compreendi direito, acho que só anéis é suficiente.

④ Quando desenvolve o conteúdo provando o porque das propriedades utilizadas e como foram construída essas propriedades que utilizamos no ensino básico, sim.

⑤ A metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação é relevante porque leva o aluno a ler e reler algo que na maioria das vezes o aluno não consegue interpreta por falta de leitura, leva o aluno a pensar e questionar sobre o problema, gera uma competição entre as equipe para quem vai conseguir primeiro e de forma correta se torna algo gratificante para o professor avaliar, porque consegue perceber a participação dos alunos e desenvolvimento de cada um. O único ponto contra, não literalmente contra e o tempo que tem que ser bem administrado para a realização das resoluções dos problemas.

(6) Com certeza, porque acho que é a melhor forma de levar o aluno a pensar e a desenvolver com entusiasmo, não em todas as aulas, mais uma vez por semana devido ao tempo.

(7) No meu pensar acho que álgebra II deveria ser associada a outras álgebras, como álgebra I e álgebra linear, para que possa ser construída as disciplinas que nós favoreça mais na licenciatura matemática.

1) Grupo

→ É um conjunto com uma operação, onde a operação entre elementos do conjunto, retorna em um elemento do conjunto.

Também deve valer:

i) associatividade

$(a * b) * c = a * (b * c)$

ii) elemento neutro

$a * e = a$

iii) simétrico

$a * a' = e$

Subgrupo é uma estrutura de grupo menor dentro de um grupo maior, $H \subseteq G$, onde:

i) $a * b' \in H$

O subgrupo possui o mesmo elemento neutro do grupo

Grupo residual

Ex: Z_3 são os números que divididos por 3 deixam resto 0, 1 e 2

$Z_3 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$

Anel é um conjunto com duas operações, onde a 1ª operação com o conjunto apresenta uma estrutura de grupo abeliano e para a 2ª operação valem as propriedades associativas e a distributiva da 2ª operação para a 1ª.

i) Associativa
ii) neutro
iii) simétrico
iv) comutativa

} 1ª operação

v) $a \Delta (b * c) = a \Delta b * a \Delta c$

vi) $(a \Delta b) \Delta c = a \Delta (b \Delta c)$

● Considerando * 1ª Operação e Δ 2ª Operação

Existem aneis comutativos, onde vale a comutatividade para 2ª operação

$a \Delta b = b \Delta a$

aneis unitários quando há elemento neutro p/ 2ª operação

$a \Delta e = a$

aneis de integridade onde há comutatividade e unitário para a segunda operação, além de não possuir divisor de 0, ou seja $a \Delta b = 0$, ou $a = 0$, ou $b = 0$.

Corpos Para ter uma estrutura de corpo é necessário uma estrutura de anel (grupo abeliano + as propriedades de anel) e possuir inverso para a segunda operação. $a \Delta a^{-1} = e$

2- A disciplina teve uma metodologia proveitosa para obtenção de conhecimento, além de esclarecimentos de conteúdos próprios à disciplina. Infelizmente não houve tempo para que a disciplina terminasse de maneira mais esclarecedora no último tópico trabalhado (corpos).

3- Não. Todo conhecimento é válido.

4- Sim. É um curso que esclarece as minhas próprias dúvidas do ensino básico e possibilita que eu possa dar continuação aos meus esclarecimentos. Na atuação como professora é uma oportunidade de usar de metodologias para não ensinar a matemática como um conhecimento pronto e acabado, e sim como uma ciência, onde os conteúdos não são dogmas.

5- É uma metodologia que obriga o aluno a pensar, proporcionando o conhecimento e em seguida a construção de conceitos.

6- Sim. Porque durante a disciplina entendi a diferença em transmitir informação e ensinar.

7- Deveria haver mais tempo para se trabalhar a disciplina. Infelizmente o primeiro semestre deste ano teve muitos feriados e a constante ameaça de greve.

Questão 1

- Grupo

Seja um conjunto não vazio G, uma operação binária sobre G é chamado grupo se essa operação se sujeita aos seguintes axiomas:

i) associatividade

ii) existência do elemento neutro

iii) existência de simétrico

ainda se cumprir o axioma da

iv) comutatividade

e o grupo recebe o nome de grupo abeliano.

- Subgrupo

Seja (G, *) um grupo, não vazio H ⊂ G, seja um subgrupo de G, é necessário e suficiente que a * b' seja um elemento de H sempre que a, b pertencerem a esse conjunto.

Cineas

Avaliação Diagnóstica

Seja A um conjunto não vazio, + e · duas operações binárias sobre A. Dizemos (A, +, ·) é um anel se forem válidas as seguintes propriedades:

i) associatividade
ii) existência do elemento neutro
iii) existência do simétrico
iv) comutatividade

m1) associatividade p/ segunda operação
m2) distributiva da multiplicação p/ soma
v) anel com unidade
vi) anel comutativo
vii) anel de Integridade

Questão 2

Ao longo da proposta pedagógica, os alunos parecem ter concedido significado a essa resolução de problemas. Algumas das dificuldades evidenciadas relacionam-se com a explicação de raciocínios, escolha da melhor estratégia a adotar para a resolução de problemas.

Questão 3

Não.

Avaliação Diagnóstica

Questão 4

Sim, o curso de álgebra II tem como objetivo explicar toda a matemática que está entre linhas em qualquer que seja à teoria, uma explicação, uma resolução de problemas entre outros.

Álgebra abstrata é palavra chave para qualquer pergunta que um aluno do ensino básico possa fazer. O professor tendo o conhecimento da álgebra poderá sanar qualquer dúvida.

Questão 5

A metodologia adotada de caráter exploratório pela realização de atividades de resolução de problemas, cujo foco foram grupos de alunos, no qual, os métodos para a avaliação era a observação, questionamentos, plenária, e a análise de conteúdo. Em que tivemos mais transparência no aprendizado.

Questão 6

Sim, porque mostrou eficiente em todas as vezes que foi aplicado.