



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Campus de Rio Claro

Cálculo Variacional: aspectos teóricos e aplicações

Ana Paula Ximenes Flores

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação – Mestrado Profissional em Matemática Universitária do Departamento de Matemática como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre

Orientadora
Profª. Dra. Renata Zotin Gomes de Oliveira

2011

517.4 Flores, Ana Paula X.
F634c Cálculo Variacional: aspectos teóricos e aplicações/ Ana Paula Ximenes Flores- Rio Claro: [s.n.], 2011.
69 f. : il., fig., tab.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas.
Orientadora: Renata Zotin Gomes de Oliveira

1. Cálculo de Variações. 2. Equação de Euler. 3. Fronteiras Fixas.
4. Problemas com restrições. I. Título

Ficha Catalográfica elaborada pela STATI - Biblioteca da UNESP
Campus de Rio Claro/SP

TERMO DE APROVAÇÃO

Ana Paula Ximenes Flores

CÁLCULO VARIACIONAL: ASPECTOS TEÓRICOS E APLICAÇÕES

Dissertação APROVADA como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática Universitária do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, pela seguinte banca examinadora:

Profa. Dra. Renata Zotin Gomes de Oliveira
Orientadora

Profa. Dra. Suzinei Ap. Siqueira Marconato
IGCE - Unesp/Rio Claro(SP)

Profa. Dra. Maria Beatriz Ferreira Leite
PUC/Campinas(SP)

Rio Claro, 03 de Fevereiro de 2011

*Dedico a minha família:
José, Lindalva,
José Eduardo e Kelly.*

Agradecimentos

Primeiramente a Deus, pela vida.

À minha orientadora Renata, pela dedicação, paciência e amizade.

Aos professores e funcionários do IGCE que colaboraram para a realização deste trabalho.

À banca examinadora da qualificação e defesa do mestrado: Maria Beatriz, Suzinei e Wladimir.

Aos funcionários municipais da saúde de Novo Horizonte, especialmente à amiga Eveline. Bem como à equipe da Unidade de Terapia de Queimados do Hospital Padre Albino, Catanduva - SP, pelo cuidado.

Aos amigos: Alyne, Ana Paula, Belisa, Camila, Cristiane, Cristina, Daniela, Denise, Inaiá, Íris, Josy, Juliana, Karina, Larissa, Liliane, Manuella, Marcos Proença, Marjory, Maurício, Marinéia, Roselaine, Vânia e Viviane.

Qualquer caminho é apenas um caminho e não constitui insulto algum - para si mesmo ou para outros - abandoná-lo quando assim ordena o seu coração. (...) Olhe cada caminho com cuidado e atenção. Tente-o tantas vezes quantas julgar necessárias... Então, faça a si mesmo e apenas a si mesmo uma pergunta: esse caminho possui um coração? Em caso afirmativo, o caminho é bom. Caso contrário, esse caminho não possui importância alguma.

Carlos Castañeda

Resumo

O principal objetivo deste trabalho é o estudo da teoria do Cálculo de Variações com ênfase na Equação de Euler, que trata de uma condição necessária para uma função ser extremo de um funcional. Existe uma grande variedade de problemas, mas neste trabalho trataremos de problemas com fronteiras fixas, tempo final livre, estado final livre, funcional dependente de mais de uma função e problemas com alguns tipos de restrições. Dois problemas do Cálculo de uma variável e um exemplo de controle ótimo são estudados para ilustrar a aplicabilidade do Cálculo Variacional.

Palavras-chave: Cálculo de Variações, Equação de Euler, Fronteiras Fixas, Problemas com restrições.

Abstract

The main purpose of this work is the study of the theory of the Calculus of Variations, with emphasis on the Euler equation, that is a necessary condition for a function to be an extreme of a functional. There are a large variety of problems but we will consider the problem of fixed boundary, free final time, free final state, functionals that contain several independent functions and problems with some constraints. Two problems of the Calculus of one variable and an example of optimal control problem are studied to illustrate the applicability of Variational Calculus.

Keywords: Calculus of Variations, Euler's Equation, Fixed Boundary, Problems with constraints.

Lista de Figuras

2.1	Extremo x^* e vizinhança.	22
3.1	(a) fronteiras fixas, (b) $x(t_f)$ livre.	27
3.2	Extremo e uma curva admissível para o problema com t_f e $x(t_f)$ livres.	30
3.3	t_f e $x(t_f)$ livres e relacionados pela curva $\theta(t)$	34
4.1	Tronco de cone.	46
4.2	Tangente ao gráfico de x no ponto $(c_i, x(c_i))$	46
4.3	Família de catenárias.	50
4.4	Partição de $[a, b]$	51
4.5	Solução para o exemplo 4.1.	53

Sumário

1	Introdução	17
2	Preliminares	19
3	O Cálculo Variacional e a Equação de Euler	23
3.1	Problemas com fronteiras fixas e a equação de Euler	23
3.2	Problemas com fronteira móvel	27
3.2.1	Tempo final especificado e $x(t_f)$ livre	27
3.2.2	Tempo final e $x(t_f)$ livres	30
3.3	Funcionais envolvendo várias funções independentes	35
3.3.1	Problemas com fronteiras fixas	35
3.3.2	Problemas com fronteiras móveis	40
4	Problemas Clássicos do Cálculo Variacional - condições necessárias	45
4.1	Superfície Mínima de Revolução	45
4.1.1	Funcional do Problema	46
4.1.2	Resolução do Problema	47
4.2	Problema do Comprimento de Arco	50
4.2.1	Funcional do Problema	50
4.2.2	Resolução do Problema	51
5	Problemas Variacionais com restrições	55
5.1	Restrições da forma $\varphi(x, t) = 0$	55
5.2	Restrições da forma $\varphi(x, x', t) = 0$	57
5.3	Restrições Isoperimétricas	58
5.4	Exemplo: Um problema de controle ótimo	60
6	Considerações Finais	65
	Referências	67
A	Anexo	69

1 Introdução

Resolver um problema de otimização significa, como o próprio nome diz, buscar o melhor resultado, de acordo com algum critério pré-estabelecido. Na Matemática os problemas de otimização são representados por problemas de máximos e mínimos sendo frequentes os termos: lucro máximo, custo mínimo, tempo mínimo, tamanho ótimo e caminho mais curto. Uma área da Matemática que é muito útil na solução de problemas de otimização é o Cálculo de Variações, que generaliza a teoria de máximos e mínimos do Cálculo Diferencial para funções cujo domínio é constituído por um conjunto de curvas admissíveis.

Pela lenda, a Rainha Dido de Cartago, foi aparentemente a primeira pessoa a atacar brilhantemente um desses problemas. Foi prometido a Dido a extensão de terra que ela pudesse cercar com o couro de um boi. Ela preparou uma extensa correia com o couro do boi e cercou um terreno semi-circular, beirando o Mar Mediterrâneo. Essa é a lendária história da fundação de Cartago contada por Virgílio (70 a.C.-19 a.C.) no livro Eneida. Embora a história do Cálculo de Variações data da Grécia antiga, foi a partir do século XVII, na Europa Ocidental, que um progresso substancial foi feito [1].

Em 1696 Isaac Newton (1642-1727) usou princípios variacionais para determinar a forma de um corpo que se move no ar, de modo que a resistência seja mínima.

Os irmãos Jackes (1654-1705) e Jean Bernoulli (1667-1748) são frequentemente considerados os inventores do Cálculo de Variações [2]. Jean por ter proposto em 1696 o problema da braquistócrona (encontrar a curva que minimiza o tempo de queda de um corpo, entre dois pontos num plano vertical, liberado de um ponto inicial e sujeito apenas à força da gravidade) e Jackes por propor e discutir o problema das figuras isoperimétricas (caminhos planos fechados de uma dada espécie e perímetro fixo que abarcam uma área máxima). O problema de Dido é um problema isoperimétrico.

Por volta de 1700 a maior parte do Cálculo que hoje se vê nos cursos de graduação já fora estabelecida, juntamente com tópicos mais avançados como o Cálculo de Variações[3].

Lagrange (1736-1813) é em geral o mais notável matemático do século XVIII, sendo somente Euler (1701-1783) um sério rival. A primeira e talvez maior contribuição de Lagrange para a Matemática foi em Cálculo de Variações. Esse era um ramo novo da Matemática, cujo nome se originou das notações usadas por Lagrange aproxima-

mente a partir de 1760. Em 1755 Lagrange havia escrito a Euler sobre os métodos gerais que tinha desenvolvido para tratar de problemas de isoperimetria e de mais rápida queda, e Euler generosamente retardou a publicação de um trabalho seu sobre tema semelhante, a fim de que o autor mais jovem recebesse todo o crédito pelos novos métodos que Euler considerava superiores [2].

Carl Gustav Jacobi (1804-1851) também contribuiu para essa área e David Hilbert (1862-1943) estudou Cálculo de Variações de 1900 a 1905. Outros problemas específicos foram resolvidos e uma teoria geral desenvolvida ao longo dos anos [3].

As primeiras aplicações de Cálculo de Variações em Economia surgiram no final de 1920 e início de 1930 por Roos, Evans, Hotelling e Ramsey, com outras aplicações publicadas mais tarde [4].

Uma nova era começou no início de 1960 com grupos de economistas e cientistas do gerenciamento interessados em certos problemas dinâmicos. A Teoria do Controle Ótimo, desenvolvida na Rússia por Pontryagin e seus colaboradores no final de 1950 e publicada na língua inglesa em 1962, é uma generalização do Cálculo de Variações, que amplia a aplicabilidade matemática [4].

O objetivo deste trabalho é apresentar resultados fundamentais da Teoria do Cálculo de Variações e aplicações. Embora exista uma variedade grande de problemas, nos restringiremos ao problema clássico de fronteiras fixas, tempo final livre, estado final livre, funcional dependente de mais de uma função e problemas com alguns tipos de restrições. Dentre as aplicações, apresentamos a obtenção do funcional a ser minimizado assim como as condições necessárias de otimalidade para dois problemas clássicos do Cálculo Variacional, o problema da superfície mínima e o problema do comprimento de arco mínimo.

O trabalho está estruturado da seguinte forma:

- Capítulo 1 - Um breve histórico do desenvolvimento do Cálculo Variacional.
- Capítulo 2 - Apresenta definições básicas do Cálculo Variacional e resultados que são utilizados no desenvolvimento deste trabalho.
- Capítulo 3 - Obtenção da Equação de Euler, que se trata de uma importante ferramenta na busca de extremos para um funcional, e estudo de condições adicionais para alguns tipos de condições de contorno.
- Capítulo 4 - São apresentados dois Problemas Clássicos do Cálculo Variacional: de superfícies mínimas e de comprimento de arco mínimo. As condições necessárias para a existência de extremos desses dois problemas são estabelecidas.
- Capítulo 5 - São expostos problemas variacionais com restrições e um problema de controle ótimo analisado através do Cálculo Variacional.

2 Preliminares

Neste capítulo apresentamos algumas definições e resultados importantes do Cálculo Variacional que serão utilizados durante o trabalho.

Definição 2.1. *A norma de uma função é uma regra de correspondência que associa a cada função $x \in \Omega$, definida para $t \in [t_0, t_f]$, um número real, denotado por $\|x\|$, e que deve satisfazer as seguintes propriedades:*

1. $\|x\| \geq 0$ e $\|x\| = 0$ se e somente se $x(t)=0$ para todo $t \in [t_0, t_f]$.
2. $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ para quaisquer $x, y \in \Omega$.

Definição 2.2. *Um funcional J é uma regra de correspondência que associa a cada função x em uma certa classe Ω , um único número real. O conjunto Ω é chamado domínio de um funcional e o conjunto de números reais associados com as funções em Ω é chamado de conjunto imagem do funcional.*

O domínio de um funcional é uma classe de funções. Intuitivamente, pode-se dizer que um funcional é uma “função de uma função”.

Definição 2.3. *J é um funcional linear se:*

1. $J(\alpha x) = \alpha J(x)$, para todo $x \in \Omega$ e para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, tais que $\alpha x \in \Omega$.
2. $J(x + y) = J(x) + J(y)$, para todo $x, y \in \Omega$ e $x + y \in \Omega$.

Definição 2.4. *Se x e $x + \delta x$ são funções para os quais o funcional J está definido, então o incremento de J , denotado por ΔJ é dado por*

$$\Delta J = J(x + \delta x) - J(x),$$

onde δx é chamado de variação da função x .

O incremento ΔJ também pode ser denotado por $\Delta J(x, \delta x)$ para enfatizar que depende das funções x e δx .

Exemplo 2.1. Seja o funcional $J(x(t)) = \int_a^b x(t)x'(t)dt$, definido em $C^1[a, b]$. Se $x(t) = t$ e $x_1(t) = t^2$, o incremento de J é dado por

$$\Delta J = J(x_1(t)) - J(x(t)) = \int_0^1 t^2 2t dt - \int_0^1 t 1 dt = \int_0^1 (2t^3 - t) dt = 0.$$

Definição 2.5. O incremento de um funcional pode ser escrito como

$$\Delta J(x, \delta x) = \delta J(x, \delta x) + g(x, \delta x) \cdot \|\delta x\|,$$

sendo δJ linear em δx .

Se $\lim_{\|\delta x\| \rightarrow 0} g(x, \delta x) = 0$ então J é dito ser diferenciável em x e δJ é a variação de J calculada em x .

A variação de um funcional desempenha o mesmo papel em determinar extremos de funcionais que a diferencial de uma função desempenha em encontrar máximo e mínimo de funções.

A variação de um funcional J (δJ) é a aproximação linear para a diferença no funcional J causada pela comparação de duas curvas. Se as curvas comparadas são próximas ($\|\delta x\|$ pequena), então a variação deveria ser uma boa aproximação para o incremento do funcional (ΔJ). No entanto, δJ pode ser uma aproximação fraca para ΔJ se as curvas comparadas forem distantes.

Exemplo 2.2. Considere o funcional $J(x(t)) = \int_a^b [x(t)]^2 dt$, definido em $C[a, b]$.

O incremento de J é dado por

$$\Delta J(x(t)) = \int_a^b (x(t) + \delta x(t))^2 dt - \int_a^b [x(t)]^2 dt = \int_a^b 2x(t)\delta x(t) dt + \int_a^b (\delta x(t))^2 dt. \quad (2.1)$$

O primeiro termo do segundo membro da equação (2.1) é linear em relação a $\delta x(t)$, para cada $x(t)$ fixo.

Analisando o segundo termo, temos

$$\int_a^b (\delta x(t))^2 dt = \int_a^b |\delta x(t)|^2 dt \leq \left[\max_{a \leq t \leq b} |\delta x(t)| \right]^2 \int_a^b dt = (b-a) \|\delta x(t)\| \|\delta x(t)\|$$

onde $\|\delta x(t)\| = \max_{a \leq t \leq b} |\delta x(t)|$.

Se $\|\delta x(t)\| \rightarrow 0$ temos que $(b-a) \|\delta x(t)\| \rightarrow 0$.

Assim, o incremento ΔJ é representado como um termo linear em δx e um termo que é um infinitésimo comparado a $\delta x(t)$. Então, J é diferenciável em x e a variação δJ é dada por

$$\delta J(x(t)) = 2 \int_a^b x(t)\delta x(t) dt.$$

Definição 2.6. Um funcional J com domínio Ω tem um extremo relativo em x^* se existe um $\epsilon > 0$ tal que, para todas as funções $x \in \Omega$ que satisfaçam $\|x - x^*\| < \epsilon$, o incremento de J tem o mesmo sinal.

Se $\Delta J = J(x) - J(x^*) \geq 0$, x^* é um mínimo relativo; se $\Delta J = J(x) - J(x^*) \leq 0$, x^* é um máximo relativo.

Se a desigualdade é satisfeita para todo ϵ positivo, então $J(x^*)$ é um mínimo ou máximo absoluto ou global.

A seguir, apresentaremos dois resultados que serão utilizados na busca de candidatos a extremos de funcionais.

Lema 2.1. Lema Fundamental do Cálculo de Variações

Se a função $h(t)$ é contínua em $[t_0, t_f]$ e

$$\int_{t_0}^{t_f} h(t)\delta x(t)dt = 0$$

para toda função $\delta x(t)$ contínua no intervalo $[t_0, t_f]$, então $h(t)$ deve ser nula em todo intervalo $[t_0, t_f]$.

Demonstração. Suponha que num ponto $\bar{t} \in (t_0, t_f)$, $h(\bar{t}) \neq 0$. Como a função $h(t)$ é contínua, ela mantém seu sinal em uma certa vizinhança de \bar{t} ($t_1 \leq \bar{t} \leq t_2$). Assim, escolhendo uma função $\delta x(t)$ que mantém seu sinal neste intervalo e se anula fora dele, temos:

$$\int_{t_0}^{t_f} h(t)\delta x(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} h(t)\delta x(t)dt \neq 0.$$

contradizendo a hipótese.

Portanto, $h(t) \equiv 0 \quad \forall t \in [t_0, t_f]$. □

Teorema 2.1. Teorema Fundamental do Cálculo de Variações

Seja x uma função em Ω e $J(x)$ um funcional diferenciável em x . Suponha que as funções em Ω não sejam limitadas. Se x^* é um extremo, a variação de J deve se anular em x^* , isto é, $\delta J(x^*, \delta x) = 0$ para todo δx admissível.

Demonstração. : Por contradição [5].

Vamos supor que x^* é um extremal e $\delta J(x^*, \delta x) \neq 0$. Mostraremos que $\delta J(x^*, \delta x)$ muda de sinal numa vizinhança de x^* .

$$\Delta J(x^*, \delta x) = J(x^* + \delta x) - J(x^*) = \delta J(x^*, \delta x) + g(x^*, \delta x)\|\delta x\|,$$

onde $g(x^*, \delta x) \rightarrow 0$ quando $\|\delta x\| \rightarrow 0$.

Assim, existe uma vizinhança $\|\delta x\| < \epsilon$ onde $g(x^*, \delta x)\|\delta x\|$ é pequena o suficiente tal que δJ domine a expressão para ΔJ .

Vamos considerar a variação

$$\delta x = \alpha \delta \bar{x}, \tag{2.2}$$

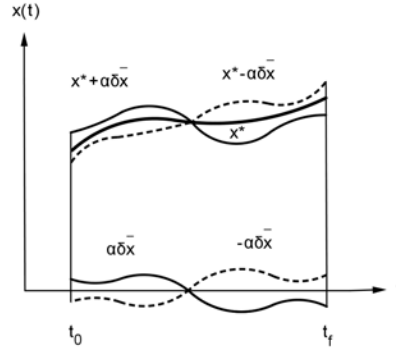


Figura 2.1: Extremo x^* e vizinhança.

onde $\alpha > 0$ e $\|\alpha \delta \bar{x}\| < \epsilon$.

Suponha que $\delta J(x^*, \delta x) < 0$, para δx dado por (2.2). Como δJ é linear temos:

$$\delta J(x^*, \delta x) = \delta J(x^*, \alpha \delta \bar{x}) = \alpha \delta J(x^*, \delta \bar{x}) < 0. \quad (2.3)$$

Assim os sinais de ΔJ e δJ são os mesmos para $\|\alpha \delta \bar{x}\| < \epsilon$ e implicam que $\Delta J(x^*, \alpha \delta \bar{x}) < 0$.

Considere, agora $\delta x = -\alpha \delta \bar{x}$, mostrada na figura 2.1.

Claramente $\|\alpha \delta \bar{x}\| < \epsilon \rightarrow \|-\alpha \delta \bar{x}\| < \epsilon$. O sinal de $\Delta J(x^*, -\alpha \delta \bar{x})$ é o mesmo de $\delta J(x^*, -\alpha \delta \bar{x})$.

Novamente,

$$\delta J(x^*, \delta x) = \delta J(x^*, -\alpha \delta \bar{x}) = -\alpha \delta J(x^*, \delta \bar{x}) \stackrel{(2.3)}{=} \delta J(x^*, -\alpha \delta \bar{x}) > 0.$$

Logo se $\delta J(x^*, \delta x) \neq 0$, numa vizinhança de x^* , $\Delta J(x^*, \alpha \delta \bar{x}) < 0$ e $\Delta J(x^*, -\alpha \delta \bar{x}) > 0$, contradizendo que x^* é extremo. Portanto, $\delta J(x^*, \delta x) = 0$ para todo δx . \square

3 O Cálculo Variacional e a Equação de Euler

Problemas envolvendo a investigação de máximo e mínimo para funcionais são análogos a problemas que determinam o ponto que torna máximo ou mínimo o valor de uma função no Cálculo de uma variável. Esta comparação não será explícita nesse trabalho e pode ser encontrada em Elsgolts [5].

Neste capítulo é feita a dedução da equação de Euler, que trata de uma importante ferramenta na busca de extremos para um funcional. Satisfazer a equação de Euler é condição necessária para que uma função seja um extremo do funcional.

3.1 Problemas com fronteiras fixas e a equação de Euler

Considere x uma função de classe C^1 . Um problema clássico do Cálculo Variacional consiste em encontrar a função x^* candidata a extremo do funcional:

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), x'(t), t) dt. \quad (3.1)$$

A notação $J(x)$ significa que J é um funcional da função x . Consideraremos g de classe C^2 , t_0 e t_f fixos e $x(t_0)$ e $x(t_f)$ representados por x_0 e x_f , respectivamente. Curvas na classe Ω , ou seja funções de classe C^1 que também satisfaçam as condições de fronteiras, são chamadas admissíveis.

O objetivo é encontrar as curvas admissíveis (se existir alguma) que sejam extremos relativos de $J(x)$. A busca começa pelas curvas que satisfaçam o Teorema Fundamental do Cálculo de Variações. Assim, tomando x em Ω temos:

$$\begin{aligned}
\Delta J(x, \delta x) &= J(x + \delta x) - J(x) \\
&= \int_{t_0}^{t_f} g(x(t) + \delta x(t), x'(t) + \delta x'(t), t) dt - \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), x'(t), t) dt \\
&= \int_{t_0}^{t_f} [g(x(t) + \delta x(t), x'(t) + \delta x'(t), t) - g(x(t), x'(t), t)] dt
\end{aligned}$$

A dependência em x' e $\delta x'$ não estão indicadas em ΔJ porque x' depende de x e $\delta x'$ de δx , onde

$$x' = \frac{d}{dt}[x(t)] \text{ e } \delta x'(t) = \frac{d}{dt}[\delta x(t)].$$

Eventualmente, ΔJ será expresso inteiramente em termos de $x, x', \delta x$ e $\delta x'$.

Expandindo o integrando numa série de Taylor em torno do ponto $(x(t), x'(t))$ obtém-se:

$$\begin{aligned}
\Delta J &= \int_{t_0}^{t_f} \left\{ g(x(t), x'(t), t) + \left[\frac{\partial g}{\partial x}(x(t), x'(t), t) \right] \delta x(t) + \left[\frac{\partial g}{\partial x'}(x(t), x'(t), t) \right] \delta x'(t) \right. \\
&\quad \left. + R(x(t), x'(t), t, \delta x(t), \delta x'(t)) - g(x(t), x'(t), t) \right\} dt. \\
&= \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \left[\frac{\partial g}{\partial x}(x(t), x'(t), t) \right] \delta x(t) + \left[\frac{\partial g}{\partial x'}(x(t), x'(t), t) \right] \delta x'(t) \right. \\
&\quad \left. + \int_{t_0}^{t_f} R(x(t), x'(t), t, \delta x(t), \delta x'(t)) dt, \right.
\end{aligned}$$

onde $R(x(t), x'(t), t, \delta x(t), \delta x'(t))$ denota o termo complementar na expansão de Taylor.

Vamos supor que as derivadas parciais de segunda ordem de $g(x(t), x'(t), t)$ com respeito a $x(t)$ e $x'(t)$ são limitadas (em valor absoluto) por uma constante $M > 0$. Assim,

$$\int_{t_0}^{t_f} |R(x(t), x'(t), t, \delta x(t), \delta x'(t))| dt \leq 2M \int_{t_0}^{t_f} \|\delta x\|^2 dt = 2M(t_f - t_0) \|\delta x\|^2$$

onde $\|\delta x\| = \max_{t_0 \leq x \leq t_f} (|\delta x|, |\delta x'|)$. Logo, $\int_{t_0}^{t_f} R(x(t), x'(t), t, \delta x(t), \delta x'(t)) dt$ é um infinitésimo de segunda ordem com respeito a $\|\delta x\|$. Desta forma o funcional J é diferenciável em $C^1[a, b]$ e sua variação é dada por

$$\delta J(x, \delta x) = \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \left[\frac{\partial g}{\partial x}(x(t), x'(t), t) \right] \delta x(t) + \left[\frac{\partial g}{\partial x'}(x(t), x'(t), t) \right] \delta x'(t) \right\} dt.$$

Usando o Teorema Fundamental do Cálculo, $\delta x(t) = \int_{t_0}^t \delta x'(s) ds + \delta x(t_0)$. Assim, escolhendo $\delta x, \delta x'$ é unicamente determinado. Integrando por partes o termo envolvendo

$\delta x'(t)$ obtemos:

$$\int_{t_0}^{t_f} \frac{\partial g}{\partial x'} \delta x'(t) dt = \frac{\partial g}{\partial x'}(x(t), x'(t), t) \delta x(t) \Big|_{t_0}^{t_f} - \int_{t_0}^{t_f} \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial g}{\partial x'}(x(t), x'(t), t) \right] \delta x(t) dt. \quad (3.2)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \delta J(x, \delta x) &= \frac{\partial g}{\partial x'}(x(t), x'(t), t) \delta x(t) \Big|_{t_0}^{t_f} \\ &+ \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \frac{\partial g}{\partial x}(x(t), x'(t), t) - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial g}{\partial x'}(x(t), x'(t), t) \right] \right\} \delta x(t) dt. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Como todas as curvas admissíveis devem passar pelos pontos $x(t_0)$ e $x(t_f)$ então $\delta x(t_0) = 0 = \delta x(t_f)$. Assim,

$$\delta J(x, \delta x) = \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \frac{\partial g}{\partial x}(x(t), x'(t), t) - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial g}{\partial x'}(x(t), x'(t), t) \right] \right\} \delta x(t) dt$$

para toda curva admissível.

Considere agora uma curva extremal x^* . Aplicando o Teorema Fundamental do Cálculo de Variações resulta que

$$\delta J(x^*, \delta x) = 0 = \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \frac{\partial g}{\partial x}(x^*(t), x^{*'}(t), t) - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial g}{\partial x'}(x^*(t), x^{*'}(t), t) \right] \right\} \delta x(t) dt.$$

Aplicando o Lema Fundamental do Cálculo de Variações segue que a condição necessária para x^* ser um extremal de (3.1) é:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x^*(t), x^{*'}(t), t) - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial g}{\partial x'}(x^*(t), x^{*'}(t), t) \right] = 0, \quad (3.4)$$

que é chamada **equação de Euler**. Tal equação é em geral, uma equação diferencial não linear que não possui solução analítica e necessita de um tratamento numérico.

Exemplo 3.1. Considere o funcional

$$J(x(t)) = \int_0^1 \{ [x'(t)]^2 + 12tx(t) \} dt$$

$x(0) = 0$ e $x(1) = 1$. Neste caso, $g(x(t), x'(t), t) = [x'(t)]^2 + 12tx(t)$. Para buscarmos os candidatos a extremo desse funcional, aplicamos a equação de Euler:

$$\frac{\partial}{\partial x} ([x'(t)]^2 + 12tx(t)) - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial x'} ([x'(t)]^2 + 12tx(t)) \right] = 0$$

$$\Rightarrow 12t - \frac{d}{dt} [2x'(t)] = 0 \Rightarrow 12t - 2x''(t) = 0 \Rightarrow -6t + x''(t) = 0$$

Resolvendo a equação diferencial:

$$x''(t) = 6t \Rightarrow x'(t) = \int 6t dt = 3t^2 + C_1 \Rightarrow x(t) = \int (3t^2 + C_1) dt = t^3 + C_1 t + C_2.$$

Para determinar as constantes de integração são usadas as condições de contorno,

$$x(0) = 0 \Rightarrow 0^3 + C_1 0 + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = 0,$$

$$x(1) = 1 \Rightarrow 1^3 + C_1 1 = 1 \Rightarrow C_1 = 1 - 1 = 0.$$

Logo, $x^*(t) = t^3$ é um candidato a extremo. A seguir, verificamos algebricamente, que x^* é um mínimo local.

$$J(x^*(t)) = \int_0^1 \{ [3t^2]^2 + 12tt^3 \} dt = \int_0^1 21t^4 dt.$$

Em seguida, calcula-se $J(x^*(t) + \delta x(t))$.

$$\begin{aligned} J(x^*(t) + \delta x(t)) &= \int_0^1 \{ (3t^2 + \delta x'(t))^2 + 12t(t^3 + \delta x(t)) \} dt \\ &= \int_0^1 \{ 9t^4 + 6t^2 \delta x'(t) + \delta x'(t)^2 + 12t^4 + 12t \delta x(t) \} dt \\ &= J(x^*(t)) + \int_0^1 6t^2 \delta x'(t) dt + \int_0^1 \delta x'(t)^2 dt + \int_0^1 12t \delta x(t) dt \end{aligned}$$

Integrando por partes,

$$\int_0^1 6t^2 \delta x'(t) dt = \underbrace{6t^2 \delta x(t)}_{=0} \Big|_0^1 - \int_0^1 12t \delta x(t) dt.$$

Daí,

$$\begin{aligned} J(x^*(t) + \delta x(t)) &= J(x^*(t)) - \int_0^1 12t \delta x(t) dt + \int_0^1 \delta x'(t)^2 dt + \int_0^1 12t \delta x(t) dt \\ &= J(x^*) + \underbrace{\int_0^1 \delta x'(t)^2 dt}_{\geq 0}. \end{aligned}$$

Portanto, para qualquer $\delta x(t)$, $J(x^* + \delta x(t)) \geq J(x^*(t))$, ou seja, $x^*(t)$ é um mínimo local.

3.2 Problemas com fronteira móvel

Entende-se por problemas com fronteira móvel (ou livre) aqueles em que as condições finais (iniciais) ou tempo final (inicial) não são fixas. Serão considerados aqui apenas problemas com $x(t_f)$ livre ou tempo final livre. Problemas com condições de fronteira livre no tempo inicial podem ser tratados similarmente. Para um melhor entendimento será feito primeiro o caso tempo final especificado e $x(t_f)$ livre e em seguida quando ambos são livres.

3.2.1 Tempo final especificado e $x(t_f)$ livre

Considere o funcional

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), x'(t), t) dt,$$

onde t_0 , $x(t_0)$ e t_f são especificados e $x(t_f)$ é livre.

As curvas admissíveis começam no mesmo ponto e terminam numa linha vertical. A figura 3.1 mostra uma família de curvas admissíveis para o problema com fronteiras fixas em comparação a curvas admissíveis para o caso abordado.

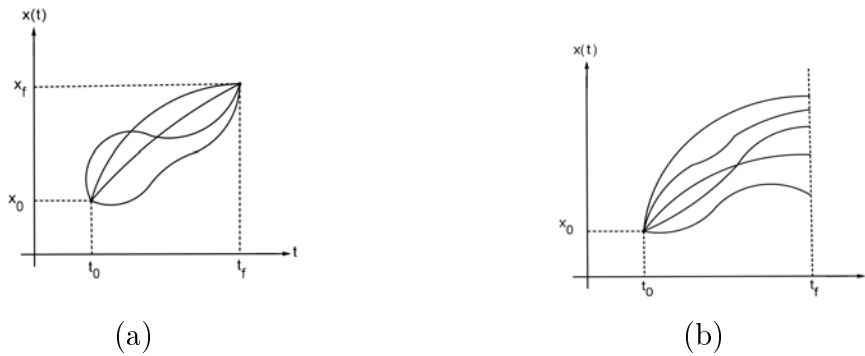


Figura 3.1: (a) fronteiras fixas, (b) $x(t_f)$ livre.

Usando o mesmo raciocínio da seção 3.1, segue que a variação de J é dada por (3.3), ou seja,

$$\begin{aligned} \delta J(x, \delta x) &= \frac{\partial g}{\partial x'}(x(t_f), x'(t_f), t_f) \delta x(t_f) - \frac{\partial g}{\partial x'}(x(t_0), x'(t_0), t_0) \delta x(t_0) \\ &+ \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \frac{\partial g}{\partial x}(x(t), x'(t), t) - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial g}{\partial x'}(x(t), x'(t), t) \right] \right\} \delta x(t) dt. \end{aligned}$$

Como $\delta x(t_0) = 0$ e $\delta x(t_f)$ é arbitrário para toda curva admissível, considerando x^* uma curva extremal para o funcional dado, pelo Teorema Fundamental do Cálculo

Variacional temos:

$$\begin{aligned} \delta J(x^*, \delta x) &= \frac{\partial g}{\partial x'}(x^*(t_f), x^{*'}(t_f), t_f) \delta x(t_f) \\ &+ \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \frac{\partial g}{\partial x}(x^*(t), x^{*'}(t), t) - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial g}{\partial x'}(x^*(t), x^{*'}(t), t) \right] \right\} \delta x(t) dt = 0. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Um extremal para o problema com fronteira móvel é também um extremal para o problema com fronteira fixa com os mesmos pontos final e inicial e com o mesmo funcional. Então, independentemente das condições de fronteira, a equação de Euler é uma condição necessária e deve ser satisfeita, ou seja,

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x^*(t), x^{*'}(t), t) - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial g}{\partial x'}(x^*(t), x^{*'}(t), t) \right] = 0$$

para todo $t \in [t_0, t_f]$. Assim, a equação (3.5) é reduzida à

$$\left[\frac{\partial g}{\partial x'}(x^*(t_f), x^{*'}(t_f), t_f) \right] \delta x(t_f) = 0.$$

Como $x(t_f)$ é livre $\delta x(t_f)$ é arbitrário, logo é necessário que

$$\frac{\partial g}{\partial x'}(x^*(t_f), x^{*'}(t_f), t_f) = 0. \quad (3.6)$$

Essa equação é conhecida como condição natural de contorno.

Exemplo 3.2. Considere o funcional

$$J(x(t)) = \int_0^1 \{ [x(t)]^2 + [x'(t)]^2 \} dt \quad (3.7)$$

$x(0) = 1$ e $x(1)$ arbitrário. Para analisarmos os candidatos a extremo deste funcional, aplicamos a equação de Euler para $g(x(t), x'(t), t) = [x(t)]^2 + [x'(t)]^2$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}([x(t)]^2 + [x'(t)]^2) - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial x'}([x(t)]^2 + [x'(t)]^2) \right] &= 0 \\ \Rightarrow 2x(t) - \frac{d}{dt} [2x'(t)] &= 2x(t) - 2x''(t) = 0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

Para resolver a equação diferencial (3.8) deve-se resolver primeiramente a equação característica associada,

$$-2\lambda^2 + 2 = 0 \Rightarrow \lambda^2 = 1 \Rightarrow \lambda = \pm 1.$$

Portanto, um candidato a extremo de J é $x^*(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t}$.

Para determinar as constantes de integração é usada a condição inicial de contorno

$$x(0) = 1 \Rightarrow c_1 e^0 + c_2 e^0 = 1 \Rightarrow c_1 + c_2 = 1,$$

e a condição natural de contorno (3.9),

$$\frac{\partial g}{\partial x'}(x^*(1), x^{*'}(1), 1) = 0 \Rightarrow 2x^{*'}(1) = 0 \Rightarrow 2c_1e - 2c_2e^{-1} = 0, \quad (3.9)$$

que dão origem ao sistema,

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ 2c_1e - 2c_2e^{-1} = 0 \end{cases}$$

cujas soluções são $c_1 = \frac{e^{-1}}{e + e^{-1}}$ e $c_2 = \frac{e}{e + e^{-1}}$.

Logo, $x^*(t) = \frac{e^{t-1} + e^{1-t}}{e + e^{-1}}$ é um candidato a extremo. A seguir, verificamos algebricamente que $x^*(t)$ é um mínimo local para (3.7).

$$J(x^*(t)) = \int_0^1 \{ [x^*(t)]^2 + [x^{*'}(t)]^2 \} dt.$$

Em seguida, calcula-se $J(x^*(t) + \delta x(t))$

$$\begin{aligned} J(x^*(t) + \delta x(t)) &= \int_0^1 \{ [x^*(t) + \delta x(t)]^2 + [x^{*'}(t) + \delta x'(t)]^2 \} dt \\ &= \int_0^1 \{ [x^*(t)]^2 + 2x^*(t)\delta x(t) + [\delta x(t)]^2 + [x^{*'}(t)]^2 + 2x^{*'}(t)\delta x'(t) + [\delta x'(t)]^2 \} dt \\ &= J(x^*(t)) + 2 \int_0^1 \{ x^*(t)\delta x(t) \} dt + 2 \int_0^1 \{ x^{*'}(t)\delta x'(t) \} dt + \int_0^1 \{ [\delta x(t)]^2 + [\delta x'(t)]^2 \} dt \end{aligned}$$

Integrando por partes,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \{ x^{*'}(t)\delta x'(t) \} dt &= x^{*'}(t)\delta x(t) \Big|_0^1 - \int_0^1 \{ x^{*''}(t)\delta x(t) \} dt \\ &= \underbrace{x^{*'}(1)\delta x(1)}_{=0 \text{ (3.9)}} - \underbrace{x^{*'}(0)\delta x(0)}_{=0 \text{ } x(0) \text{ é fixo}} - \int_0^1 \{ x^{*''}(t)\delta x(t) \} dt. \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned}
 J(x^*(t) + \delta x(t)) &= J(x^*(t)) + 2 \int_0^1 \{x^*(t)\delta x(t)\} dt - 2 \int_0^1 \{x^{*''}(t)\delta x(t)\} dt \\
 &\quad + \int_0^1 \{\delta x(t)^2 + \delta x'(t)^2\} dt \\
 &\stackrel{x^{*''}(t) \equiv x^*(t)}{=} J(x^*(t)) - 2 \int_0^1 \{x^*(t)\delta x(t)\} dt + 2 \int_0^1 \{x^*(t)\delta x(t)\} dt \\
 &\quad + \int_0^1 \{\delta x(t)^2 + \delta x'(t)^2\} dt \\
 &= J(x^*(t)) + \underbrace{\int_0^1 \{\delta x(t)^2 + \delta x'(t)^2\} dt}_{\geq 0}.
 \end{aligned}$$

Portanto, para qualquer $\delta x(t)$, $J(x^* + \delta x(t)) \geq J(x^*(t))$, ou seja, $x^*(t)$ é um mínimo local.

Condições suficientes para extremos de funcionais são encontradas em Elsgolts [5].

3.2.2 Tempo final e $x(t_f)$ livres

Considere o funcional:

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), x'(t), t) dt,$$

onde t_0 e $x(t_0) = x_0$ são especificados e t_f e $x(t_f)$ são livres. A figura 3.2 compara um extremal x^* com uma curva admissível x para este problema.

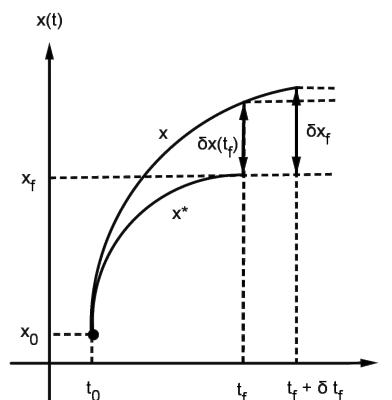


Figura 3.2: Extremo e uma curva admissível para o problema com t_f e $x(t_f)$ livres.

Da figura 3.2 observamos que $\delta x(t_f) = x(t_f) - x^*(t_f)$ e $\delta x_f = x(t_f + \delta t_f) - x^*(t_f)$ e que em geral, $\delta x(t_f) \neq \delta x_f$.

Calculando o incremento, temos:

$$\Delta J = \int_{t_0}^{t_f + \delta t_f} g(x(t), x'(t), t) dt - \int_{t_0}^{t_f} g(x^*(t), x'^*(t), t) dt.$$

que pode ser escrito como:

$$\Delta J = \int_{t_0}^{t_f} [g(x(t), x'(t), t) - g(x^*(t), x'^*(t), t)] dt + \int_{t_f}^{t_f + \delta t_f} g(x(t), x'(t), t) dt.$$

Como $\delta x(t) = x(t) - x^*(t) \Rightarrow x(t) = x^*(t) + \delta x(t)$, substituindo no primeiro integrando:

$$\begin{aligned} \Delta J &= \int_{t_0}^{t_f} g(x^*(t) + \delta x(t), x'^*(t) + \delta x'(t), t) - g(x^*(t), x'^*(t), t) dt \\ &\quad + \int_{t_f}^{t_f + \delta t_f} g(x(t), x'(t), t) dt. \end{aligned}$$

Expandindo $g(x^*(t) + \delta x(t), x'^*(t) + \delta x'(t), t)$ em uma série de Taylor em torno de $(x^*(t), x'^*(t))$:

$$\begin{aligned} g(x^*(t) + \delta x(t), x'^*(t) + \delta x'(t), t) &= g(x^*(t), x'^*(t), t) + \frac{\partial g}{\partial x}(x^*(t), x'^*(t), t) \delta x(t) \\ &\quad + \frac{\partial g}{\partial x'}(x^*(t), x'^*(t), t) \delta x'(t) + o(\delta x(t), \delta x'(t)). \end{aligned}$$

onde $o(\delta x(t), \delta x'(t))$ denota os termos a partir da segunda ordem em $(\delta x(t), \delta x'(t))$. A seguir $\int_{t_0}^{t_f} o(\delta x(t), \delta x'(t))$ será indicada por $o(\cdot)$.

Substituindo o termo expandido no primeiro integrando,

$$\begin{aligned} \Delta J &= \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \left[\frac{\partial g}{\partial x}(x^*(t), x'^*(t), t) \right] \delta x(t) + \left[\frac{\partial g}{\partial x'}(x^*(t), x'^*(t), t) \right] \delta x'(t) \right\} dt, \\ &\quad + o(\cdot) + \int_{t_f}^{t_f + \delta t_f} g(x(t), x'(t), t) dt. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Na segunda integral, usando o Teorema do Valor Médio temos

$$\int_{t_f}^{t_f + \delta t_f} g(x(t), x'(t), t) dt = g|_{t=t_f + \theta \delta t_f} \delta t_f,$$

onde $0 < \theta < 1$.

Da continuidade de g teremos $g|_{t=t_f + \theta \delta t_f} = g(x(t), x'(t), t)|_{t=t_f} + \epsilon$, onde $\epsilon \rightarrow 0$ quando $\delta t_f \rightarrow 0$ e $\delta x(t_f) \rightarrow 0$.

$$\text{Assim } \int_{t_f}^{t_f+\delta t_f} g(x(t), x'(t), t) dt = g(x(t), x'(t), t) \Big|_{t=t_f} \delta t_f + \epsilon \delta(t_f).$$

Integrando por partes o termo envolvendo $\delta x'(t)$ em (3.10):

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{t_f} \left[\frac{\partial g}{\partial x'}(x^*(t), x^{*'}(t), t) \right] \delta x'(t) dt \\ &= \frac{\partial g}{\partial x'}(x^*(t), x^{*'}(t), t) \delta x(t) \Big|_{t_0}^{t_f} - \int_{t_0}^{t_f} \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial g}{\partial x'}(x^*(t), x^{*'}(t), t) \right] \delta x(t) dt \\ & \stackrel{\delta x(t_0)=0}{=} \frac{\partial g}{\partial x'}(x^*(t_f), x^{*'}(t_f), t_f) \delta x(t_f) - \int_{t_0}^{t_f} \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial g}{\partial x'}(x^*(t), x^{*'}(t), t) \right] \delta x(t) dt \end{aligned}$$

Substituindo o termo expandido e a integral por partes em ΔJ , temos:

$$\begin{aligned} \Delta J &= \left[\frac{\partial g}{\partial x'}(x^*(t_f), x^{*'}(t_f), t_f) \right] \delta x(t_f) + [g(x(t_f), x'(t_f), t_f)] \delta t_f \\ &+ \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \frac{\partial g}{\partial x}(x^*(t), x^{*'}(t), t) - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial g}{\partial x'}(x^*(t), x^{*'}(t), t) \right] \right\} \delta x(t) dt + o(\cdot). \end{aligned}$$

Expandindo $g(x(t_f), x'(t_f), t_f) = g(x^*(t_f) + \delta x(t_f), x^{*'}(t_f) + \delta x'(t_f), t_f)$ em uma série de Taylor em torno de $(x^*(t_f), x^{*'}(t_f))$:

$$\begin{aligned} g(x(t_f), x'(t_f), t_f) &= g(x^*(t_f), x^{*'}(t_f), t_f) + \frac{\partial g}{\partial x}(x^*(t_f), x^{*'}(t_f), t_f) \delta x(t_f) \\ &+ \frac{\partial g}{\partial x'}(x^*(t_f), x^{*'}(t_f), t_f) \delta x'(t_f) + o(\cdot). \end{aligned}$$

O incremento ΔJ é calculado a fim de que seja encontrada a variação δJ . Como δJ é a parte linear de ΔJ , $g(x(t_f), x'(t_f), t_f)$ será aproximado linearmente por $g(x^*(t_f), x^{*'}(t_f), t_f)$. Substituindo em ΔJ ,

$$\begin{aligned} \Delta J &= \left[\frac{\partial g}{\partial x'}(x^*(t_f), x^{*'}(t_f), t_f) \right] \delta x(t_f) + [g(x^*(t_f), x^{*'}(t_f), t_f)] \delta t_f \\ &+ \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \frac{\partial g}{\partial x}(x^*(t), x^{*'}(t), t) - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial g}{\partial x'}(x^*(t), x^{*'}(t), t) \right] \right\} \delta x(t) dt + o(\cdot). \end{aligned}$$

Da figura 3.2 $\delta x(t_f)$ pode ser relacionado com δt_f e δx_f por

$$\delta x_f = \delta x(t_f) + x'(t_f) \delta t_f.$$

Como a curva extremal x^* é também uma curva admissível, temos

$$\delta x_f = \delta x(t_f) - x^{*'}(t_f) \delta t_f.$$

Substituindo na equação e agrupando os termos, é obtida a variação de J:

$$\begin{aligned} \delta J(x^*, \delta x) &= \left[\frac{\partial g}{\partial x'}(x^*(t_f), x^{*'}(t_f), t_f) \right] \delta x_f \\ &+ \left\{ g(x^*(t_f), x^{*'}(t_f), t_f) - \left[\frac{\partial g}{\partial x'}(x^*(t_f), x^{*'}(t_f), t_f) \right] x^{*'}(t_f) \right\} \delta t_f \quad (3.11) \\ &+ \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \frac{\partial g}{\partial x}(x^*(t), x^{*'}(t), t) - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial g}{\partial x'}(x^*(t), x^{*'}(t), t) \right] \right\} \delta x(t) dt. \end{aligned}$$

Como argumentado na seção anterior, independentemente das condições de fronteira, a equação de Euler deve ser satisfeita e portanto a integral se anula. Assim,

$$\begin{aligned} \delta J(x^*, \delta x) &= \left[\frac{\partial g}{\partial x'}(x^*(t_f), x^{*'}(t_f), t_f) \right] \delta x_f \\ &+ \left\{ g(x^*(t_f), x^{*'}(t_f), t_f) - \left[\frac{\partial g}{\partial x'}(x^*(t_f), x^{*'}(t_f), t_f) \right] x^{*'}(t_f) \right\} \delta t_f. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Vimos que se x^* é um extremo, $\delta J(x^*, \delta x) = 0$. Na prática, existem muitas possibilidades para t_f e $x(t_f)$. No entanto, neste trabalho, serão considerados apenas dois casos:

1. t_f e $x(t_f)$ não são relacionados, ou seja, δt_f e δx_f são independentes um do outro (arbitrários). Dessa forma, os coeficientes de δx_f e δt_f em (3.12) devem ser nulos, ou seja,

$$\frac{\partial g}{\partial x'}(x^*(t_f), x^{*'}(t_f), t_f) = 0 \quad (3.13)$$

e

$$g(x^*(t_f), x^{*'}(t_f), t_f) - \left[\frac{\partial g}{\partial x'}(x^*(t_f), x^{*'}(t_f), t_f) \right] x^{*'}(t_f) = 0. \quad (3.14)$$

De (3.13) e (3.14) resulta,

$$g(x^*(t_f), x^{*'}(t_f), t_f) = 0. \quad (3.15)$$

Note que (3.13) foi a condição encontrada quando $x(t_f)$ estava livre e t_f especificado. Se fosse considerado $x(t_f)$ especificado e t_f livre (3.13) não valeria, logo a condição encontrada seria (3.14).

2. t_f e $x(t_f)$ são relacionados. Por exemplo, o valor de x deve estar restrito a uma curva $\theta(t)$ (veja figura 3.3), isto é,

$$x^*(t_f) = \theta(t_f). \quad (3.16)$$

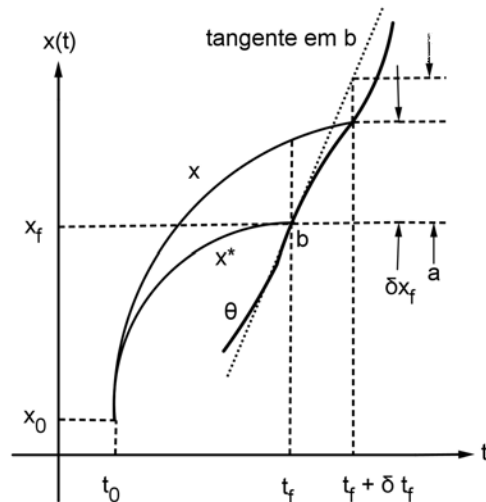


Figura 3.3: t_f e $x(t_f)$ livres e relacionados pela curva $\theta(t)$.

Da figura 3.3,

$$\frac{d\theta}{dt}(t_f) = \frac{a}{\delta t_f}.$$

A distância **a** é uma aproximação linear para δx_f , que então é relacionado com δt_f por:

$$\delta x_f \approx \frac{d\theta}{dt}(t_f) \delta t_f.$$

Substituindo em $\delta J(x^*, \delta x)$, agrupando os termos semelhantes e considerando que δt_f é arbitrário tem-se:

$$\left[\frac{\partial g}{\partial x'}(x^*(t_f), x^{*'}(t_f), t_f) \right] \left[\frac{d\theta}{dt}(t_f) - x^{*'}(t_f) \right] + g(x^*(t_f), x^{*'}(t_f), t_f) = 0. \quad (3.17)$$

Essa equação é chamada de condição de transversalidade.

Em ambos os casos considerados, através da equação de Euler encontra-se a solução $x^*(c_1, c_2, t)$ onde c_1 e c_2 são constantes de integração. As constantes c_1 , c_2 e t_f podem ser determinadas através das equações (3.13) e (3.15) e $x^*(c_1, c_2, t_0) = x_0$ se $x(t_f)$ e t_f não são relacionados. Se $x(t_f)$ e t_f são relacionados usamos as equações (3.16) e (3.17).

Exemplo 3.3. Considere o funcional $J(x) = \int_0^{t_f} \sqrt{1 + (x'(t))^2} dt$ que tem $x(0) = 2$ e termina na curva $\theta(t) = -4t + 5$. Como o funcional dado depende somente de $x'(t)$, a Equação de Euler é dada por

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{x^{*'}(t)}{\sqrt{1 + (x^{*'}(t))^2}} \right] = 0,$$

cujas solução é $x^*(t) = c_1 t + c_2$. De $x^*(0) = 2$ temos $c_2 = 2$.

Como t_f e $x(t_f)$ são relacionados, para determinar c_1 usamos a condição de transversalidade (3.17), que neste caso é dado por

$$\frac{x^{*'}(t_f)}{\sqrt{1 + x^{*'}(t_f)^2}} [-4 - x^{*'}(t_f)] + \sqrt{1 + x^{*'}(t_f)^2} = 0.$$

Simplificando, temos $1 - 4x^{*'}(t_f) = 0 \rightarrow x^{*'}(t_f) = \frac{1}{4}$. Assim, $c_1 = \frac{1}{4}$ e $x^*(t) = \frac{1}{4}t + 2$ é candidato a extremo do funcional J .

3.3 Funcionais envolvendo várias funções independentes

Até agora os funcionais considerados dependiam apenas de uma função e sua derivada. A discussão será generalizada incluindo funcionais que dependam de várias funções independentes e suas derivadas. Esta seção é baseada nos resultados da seção anterior. O objetivo é obter uma versão matricial da equação (3.11).

3.3.1 Problemas com fronteiras fixas

Considere o funcional

$$J(x_1, x_2, \dots, x_n) = \int_{t_0}^{t_f} g(x_1(t), \dots, x_n(t), x_1'(t), \dots, x_n'(t), t) dt$$

sendo x_1, x_2, \dots, x_n funções independentes de classe C^1 e g de classe C^2 ; t_0 e t_f são especificados e as condições de contorno são

$$\begin{aligned} x_1(t_0) &= x_{1_0}; & x_1(t_f) &= x_{1_f}; \\ \vdots & & \vdots & \\ x_n(t_0) &= x_{n_0}; & x_n(t_f) &= x_{n_f}. \end{aligned}$$

Para encontrar uma condição para que $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$ seja um extremo para o funcional, será usado o Teorema Fundamental, e para isso é determinado o incremento.

$$\Delta J = \int_{t_0}^{t_f} \left\{ g(x_1(t) + \delta x_1(t), \dots, x_n(t) + \delta x_n(t), x_1'(t) + \delta x_1'(t), \dots, x_n'(t) + \delta x_n'(t), t) - g(x_1(t), \dots, x_n(t), x_1'(t), \dots, x_n'(t), t) \right\} dt$$

Expandindo $g(x_1(t) + \delta x_1(t), \dots, x_n(t) + \delta x_n(t), x_1'(t) + \delta x_1'(t), \dots, x_n'(t) + \delta x_n'(t), t)$ em uma série de Taylor em torno de $(x_1(t), \dots, x_n(t), x_1'(t), \dots, x_n'(t))$,

$$\begin{aligned}
& g(x_1(t) + \delta x_1(t), \dots, x_n(t) + \delta x_n(t), x'_1(t) + \delta x'_1(t), \dots, x'_n(t) + \delta x'_n(t), t) \\
&= g(x_1(t), \dots, x_n(t), x'_1(t), \dots, x'_n(t), t) \\
&\quad + \frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1(t), \dots, x_n(t), x'_1(t), \dots, x'_n(t), t) \delta x_1 + \dots \\
&\quad + \frac{\partial g}{\partial x_n}(x_1(t), \dots, x_n(t), x'_1(t), \dots, x'_n(t), t) \delta x_n \\
&\quad + \frac{\partial g}{\partial x'_1}(x_1(t), \dots, x_n(t), x'_1(t), \dots, x'_n(t), t) \delta x'_1 + \dots \\
&\quad + \frac{\partial g}{\partial x'_n}(x_1(t), \dots, x_n(t), x'_1(t), \dots, x'_n(t), t) \delta x'_n \\
&\quad + \text{termos de ordem maior que um em } \delta x_i(t), \delta x'_i(t), 1 \leq i \leq n \\
&= g(x_1(t), \dots, x_n(t), x'_1(t), \dots, x'_n(t), t) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_i}(x_1(t), \dots, x_n(t), x'_1(t), \dots, x'_n(t), t) \delta x_i \\
&\quad + \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial x'_i}(x_1(t), \dots, x_n(t), x'_1(t), \dots, x'_n(t), t) \delta x'_i \\
&\quad + \sum_{i=1}^n (\text{termos de ordem maior que um em } \delta x_i(t), \delta x'_i(t)).
\end{aligned}$$

Substituindo no incremento,

$$\begin{aligned}
\Delta J &= \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_i}(x_1(t), \dots, x_n(t), x'_1(t), \dots, x'_n(t), t) \delta x_i \right. \\
&\quad + \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial x'_i}(x_1(t), \dots, x_n(t), x'_1(t), \dots, x'_n(t), t) \delta x'_i \\
&\quad \left. + \sum_{i=1}^n (\text{termos de ordem maior que um em } \delta x_i(t), \delta x'_i(t)) \right\} dt
\end{aligned}$$

A variação δJ é determinada retendo-se apenas os termos lineares em δx_i e $\delta x'_i$, pois J é diferenciável em x .

$$\begin{aligned} \delta J = & \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_i}(x_1(t), \dots, x_n(t), x'_1(t), \dots, x'_n(t), t) \delta x_i \right. \\ & \left. + \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial x'_i}(x_1(t), \dots, x_n(t), x'_1(t), \dots, x'_n(t), t) \delta x'_i \right\} dt \end{aligned}$$

Integrando por partes os termos contendo $\delta x'_i$,

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial x'_i}(x_1(t), \dots, x_n(t), x'_1(t), \dots, x'_n(t), t) \delta x'_i dt \\ & = \sum_{i=1}^n \int_{t_0}^{t_f} \frac{\partial g}{\partial x'_i}(x_1(t), \dots, x_n(t), x'_1(t), \dots, x'_n(t), t) \delta x'_i dt \\ & = \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\partial g}{\partial x'_i}(x_1(t), \dots, x_n(t), x'_1(t), \dots, x'_n(t), t) \delta x_i \Big|_{t_0}^{t_f} \right. \\ & \quad \left. - \int_{t_0}^{t_f} \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial g}{\partial x'_i}(x_1(t), \dots, x_n(t), x'_1(t), \dots, x'_n(t), t) \right] \delta x_i(t) dt \right\}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \delta J = & \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial x'_i}(x_1(t), \dots, x_n(t), x'_1(t), \dots, x'_n(t), t) \delta x_i \Big|_{t_0}^{t_f} \\ & + \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial g}{\partial x_i}(x_1(t), \dots, x_n(t), x'_1(t), \dots, x'_n(t), t) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial g}{\partial x'_i}(x_1(t), \dots, x_n(t), x'_1(t), \dots, x'_n(t), t) \right] \right) \delta x_i(t) \right\} dt. \end{aligned}$$

Como as condições de fronteiras são fixas para toda função x_i , $\delta x_i(t_0) = 0$ e $\delta x_i(t_f) = 0$, ($i = 1, \dots, n$) e os termos fora da integral se anulam,

$$\begin{aligned} \delta J = & \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial g}{\partial x_i}(x_1(t), \dots, x_n(t), x'_1(t), \dots, x'_n(t), t) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial g}{\partial x'_i}(x_1(t), \dots, x_n(t), x'_1(t), \dots, x'_n(t), t) \right] \right) \delta x_i(t) \right\} dt. \end{aligned}$$

Em um extremal, $\delta J = 0$, ou seja,

$$\begin{aligned} \delta J = 0 = & \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial g}{\partial x_i}(x_1^*(t), \dots, x_n^*(t), x_1'^*(t), \dots, x_n'^*(t), t) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial g}{\partial x'_i}(x_1^*(t), \dots, x_n^*(t), x_1'^*(t), \dots, x_n'^*(t), t) \right] \right) \delta x_i(t) \right\} dt. \end{aligned}$$

Como os δx_i 's são independentes, podemos então fazer $\delta x_i = 0, i = 2, \dots, n, \delta x_1 \neq 0$ e δx_1 assume valores arbitrários no intervalo (t_0, t_f) .

$$\delta J = 0 = \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1^*(t), \dots, x_n^*(t), x_1'(t), \dots, x_n'(t), t) - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial g}{\partial x_1'}(x_1^*(t), \dots, x_n^*(t), x_1'(t), \dots, x_n'(t), t) \right] \right\} \delta x_1(t) dt.$$

Aplicando o Lema Fundamental, o coeficiente de $\delta x_1(t)$ deve ser zero no intervalo $[t_0, t_f]$. Assim,

$$\frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1^*(t), \dots, x_n^*(t), x_1'(t), \dots, x_n'(t), t) - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial g}{\partial x_1'}(x_1^*(t), \dots, x_n^*(t), x_1'(t), \dots, x_n'(t), t) \right] = 0$$

Repetindo esse argumento para cada $\delta x_i, i = 1, \dots, n$ e $t \in [t_0, t_f]$

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(x_1^*(t), \dots, x_n^*(t), x_1'(t), \dots, x_n'(t), t) - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial g}{\partial x_i'}(x_1^*(t), \dots, x_n^*(t), x_1'(t), \dots, x_n'(t), t) \right] = 0.$$

São n equações de Euler para serem resolvidas, ou seja n equações diferenciais, em geral não lineares, ordinárias e difíceis de serem resolvidas analiticamente. A complexidade aumenta devido ao fato de cada x_i^* ter que satisfazer a todas as equações simultaneamente.

Da forma como a teoria vem sendo desenvolvida é muito trabalhoso escrever os argumentos das funções. É mais conveniente a partir daqui adotar notação matricial. O processo será feito usando matrizes e vetores.

O funcional a ser considerado é:

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), x'(t), t) dt,$$

e as condições de contorno $x(t_0) = x_0$ e $x(t_f) = x_f$, sendo

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad x'(t) = \begin{bmatrix} \frac{d}{dt}x_1(t) \\ \vdots \\ \frac{d}{dt}x_n(t) \end{bmatrix}.$$

O incremento torna-se

$$\Delta J = \int_{t_0}^{t_f} \{g(x(t) + \delta x(t), x'(t) + \delta x'(t), t) - g(x(t), x'(t), t)\} dt.$$

Após a expansão de Taylor,

$$\Delta J = \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \left[\frac{\partial g}{\partial x}(x(t), x'(t), t) \right]^T \delta x(t) + \left[\frac{\partial g}{\partial x'}(x(t), x'(t), t) \right]^T \delta x'(t) + [\text{termos não lineares em } \delta x(t) \text{ e } \delta x'(t)] \right\} dt,$$

com $\frac{\partial g}{\partial x}(x(t), x'(t), t) = \left[\frac{\partial g}{\partial x_1}(x(t), x'(t), t), \dots, \frac{\partial g}{\partial x_n}(x(t), x'(t), t) \right]^T$ e, analogamente, para $\frac{\partial g}{\partial x'}$, matrizes coluna $n \times 1$.

Descartando os termos que não são lineares em $\delta x(t)$ e $\delta x'(t)$ e integrando por partes, obtém-se a variação.

$$\begin{aligned} \delta J(x, \delta x) &= \left[\frac{\partial g}{\partial x'}(x(t_f), x'(t_f), t_f) \right]^T \underbrace{\delta x(t_f)}_{=0} - \left[\frac{\partial g}{\partial x'}(x(t_0), x'(t_0), t_0) \right]^T \underbrace{\delta x(t_0)}_{=0} \\ &+ \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \frac{\partial g}{\partial x}(x(t), x'(t), t) - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial g}{\partial x'}(x(t), x'(t), t) \right] \right\}^T \delta x(t) dt \end{aligned}$$

$\mathbf{0}$ é a matriz coluna $n \times 1$ nula e a representação matricial da equação de Euler é:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x^*(t), x^{*'}(t), t) - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial g}{\partial x'}(x^*(t), x^{*'}(t), t) \right] = 0$$

Note que a equação (3.4) é um caso particular da equação de Euler na forma matricial, sendo x um escalar.

Exemplo 3.4. Considere o funcional

$$J(x(t)) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ [x_1'(t)]^2 + [x_2'(t)]^2 + 2x_1x_2(t) \right\} dt \quad (3.18)$$

$x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 0$, $x_1(\frac{\pi}{2}) = 1$ e $x_2(\frac{\pi}{2}) = 1$. Para analisarmos os candidatos a extremo aplicamos a equação de Euler para x_1 e x_2 onde $g(x(t), x'(t), t) = [x_1'(t)]^2 + [x_2'(t)]^2 + 2x_1x_2(t)$.

$$\frac{\partial}{\partial x_1} ([x_1'(t)]^2 + [x_2'(t)]^2 + 2x_1x_2(t)) - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial x_1'} ([x_1'(t)]^2 + [x_2'(t)]^2 + 2x_1x_2(t)) \right] = 0$$

$$\Rightarrow 2x_2(t) - \frac{d}{dt} [2x_1'(t)] = 2x_2(t) - 2x_1''(t) = 0 \Rightarrow x_2(t) - x_1''(t) = 0$$

e

$$\frac{\partial}{\partial x_2} ([x_1'(t)]^2 + [x_2'(t)]^2 + 2x_1x_2(t)) - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial x_2'} ([x_1'(t)]^2 + [x_2'(t)]^2 + 2x_1x_2(t)) \right] = 0$$

$$\Rightarrow 2x_1(t) - \frac{d}{dt} [2x_2'(t)] = 2x_1(t) - 2x_2''(t) = 0 \Rightarrow x_1(t) - x_2''(t) = 0$$

Agora resolve-se o sistema de equações diferenciais,

$$\begin{cases} x_2(t) - x_1''(t) = 0 \\ x_1(t) - x_2''(t) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2(t) = x_1''(t) \\ x_1(t) = x_2''(t) \end{cases}$$

$$x_1 - (x_1'')'' = 0 \Rightarrow x_1 - x_1^{(4)} = 0 \Rightarrow -(x_1^{(4)} - x_1) = 0 \Rightarrow x_1^{(4)} - x_1 = 0$$

Para resolver esta equação diferencial deve-se primeiramente determinar a equação característica associada,

$$\lambda^4 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda^4 = 1 \Rightarrow \lambda = \pm 1 \text{ ou } \lambda = \pm i.$$

Assim, $x_1^*(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + c_3 \cos t + c_4 \sin t$.

$$x_2^*(t) = x_1^{**}(t) \Rightarrow x_2^* = c_1 e^t + c_2 e^{-t} - c_3 \cos t - c_4 \sin t.$$

Para determinar as constantes de integração são usadas as condições iniciais de contorno

$$x_1(0) = 0 \Rightarrow c_1 e^0 + c_2 e^0 + c_3 \cos(0) + c_4 \sin(0) = 0 \Rightarrow c_1 + c_2 + c_3 = 0,$$

$$x_2(0) = 0 \Rightarrow c_1 e^0 + c_2 e^0 - c_3 \cos(0) - c_4 \sin(0) = 0 \Rightarrow c_1 + c_2 - c_3 = 0,$$

$$x_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \Rightarrow c_1 e^{\frac{\pi}{2}} + c_2 e^{-\frac{\pi}{2}} + c_3 \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + c_4 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \Rightarrow c_1 e^{\frac{\pi}{2}} + c_2 e^{-\frac{\pi}{2}} + c_4 = 1,$$

$$\text{e } x_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \Rightarrow c_1 e^{\frac{\pi}{2}} + c_2 e^{-\frac{\pi}{2}} - c_3 \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - c_4 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \Rightarrow c_1 e^{\frac{\pi}{2}} + c_2 e^{-\frac{\pi}{2}} - c_4 = 1,$$

que dão origem ao sistema:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = 0 \\ c_1 + c_2 - c_3 = 0 \\ c_1 e^{\frac{\pi}{2}} + c_2 e^{-\frac{\pi}{2}} + c_4 = 1 \\ c_1 e^{\frac{\pi}{2}} + c_2 e^{-\frac{\pi}{2}} - c_4 = 1. \end{cases}$$

cuja solução é $c_1 = \frac{1}{e^{\frac{\pi}{2}} - e^{-\frac{\pi}{2}}}$, $c_2 = \frac{-1}{e^{\frac{\pi}{2}} - e^{-\frac{\pi}{2}}}$, $c_3 = c_4 = 0$.

Logo, $x_1^*(t) = x_2^*(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{e^{\frac{\pi}{2}} - e^{-\frac{\pi}{2}}} = \frac{\sinh(t)}{\sinh\left(\frac{\pi}{2}\right)}$ que é um candidato a extremo de J dado por (3.18).

3.3.2 Problemas com fronteiras móveis

Nesta seção serão tratados os problemas dependendo de n funções e suas derivadas e que não possuem o tempo final t_f ou $x(t_f)$ especificados. Para tanto, considere o funcional,

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), x'(t), t) dt$$

sendo $x = (x_1, \dots, x_n)$ funções independentes de classe C^1 e g de classe C^2 , $x(t_0)$ e t_0 são dados, $x(t_f)$ e t_f são livres. Neste caso, para encontrar uma condição a ser satisfeita pelo extremo é realizado o mesmo processo da seção 3.2.2, mas usando vetores de funções ao invés de funções. Tomando o incremento, integrando por partes o termo envolvendo $\delta x'(t)$, retendo os termos lineares em $\delta x(t)$ e $\delta x'(t)$ e relacionando $\delta x(t_f)$ com δx_f e δt_f por $\delta x(t_f) = \delta x_f - x^*(t_f) \delta t_f$ é obtida a variação:

$$\begin{aligned}
 \delta J(x^*, \delta x) &= \left[\frac{\partial g}{\partial x'}(x^*(t_f), x^{*'}(t_f), t_f) \right]^T \delta x_f \\
 &+ \left\{ g(x^*(t_f), x^{*'}(t_f), t_f) - \left[\frac{\partial g}{\partial x'}(x^*(t_f), x^{*'}(t_f), t_f) \right] x^{*'}(t_f) \right\}^T \delta t_f \\
 &+ \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \frac{\partial g}{\partial x}(x^*(t), x^{*'}(t), t) - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial g}{\partial x'}(x^*(t), x^{*'}(t), t) \right] \right\}^T \delta x(t) dt.
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

Como argumentado anteriormente, um extremo para o problema de fronteira fixa é também um extremal para o problema com fronteiras móveis, x^* deve ser uma solução da equação de Euler.

$$\boxed{\frac{\partial g}{\partial x}(x^*(t), x^{*'}(t), t) - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial g}{\partial x'}(x^*(t), x^{*'}(t), t) \right] = 0} \tag{3.20}$$

A condição procurada é dada por:

$$\boxed{\begin{aligned}
 \delta J(x^*, \delta x) = 0 &= \left[\frac{\partial g}{\partial x'}(x^*(t_f), x^{*'}(t_f), t_f) \right]^T \delta x_f \\
 &+ \left\{ g(x^*(t_f), x^{*'}(t_f), t_f) - \left[\frac{\partial g}{\partial x'}(x^*(t_f), x^{*'}(t_f), t_f) \right] x^{*'}(t_f) \right\}^T \delta t_f.
 \end{aligned}} \tag{3.21}$$

As equações (3.20) e (3.21) são centrais na busca de extremos, por resumirem as condições necessárias que os extremos devem satisfazer. A equação (3.20) é condição necessária para todos os tipos de problema. Para encontrar condições de contorno além das especificadas, são feitas substituições adequadas ao problema na equação (3.21).

Por exemplo, se $x(t_f)$ é livre e x_f é dado, $\delta x(t_f) \neq \mathbf{0}$ e $\delta t_f = \mathbf{0}$. Assim,

$$\left[\frac{\partial g}{\partial x'}(x^*(t_f), x^{*'}(t_f), t_f) \right]^T \delta x(t_f) = 0 \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial x'}(x^*(t_f), x^{*'}(t_f), t_f) = \mathbf{0}.$$

Se $x(t_f)$ é dado, mas x_f é livre, $\delta x(t_f) = \mathbf{0}$ e $\delta t_f = \mathbf{0}$. Então,

$$\begin{aligned}
 &\left\{ g(x^*(t_f), x^{*'}(t_f), t_f) - \left[\frac{\partial g}{\partial x'}(x^*(t_f), x^{*'}(t_f), t_f) \right] x^{*'}(t_f) \right\}^T \delta t_f = 0 \\
 &\Rightarrow g(x^*(t_f), x^{*'}(t_f), t_f) - \left[\frac{\partial g}{\partial x'}(x^*(t_f), x^{*'}(t_f), t_f) \right]^T x^{*'}(t_f) = 0
 \end{aligned}$$

Exemplo 3.5. Considere o funcional

$$J(x(t)) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{[x_1'(t)]^2 + [x_2'(t)]^2 + 2x_1x_2(t)\} dt \quad (3.22)$$

$x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 0$, $x_1(\frac{\pi}{2})$ livre e $x_2(\frac{\pi}{2}) = 1$.

A equação de Euler para esse problema é a mesma do exemplo 3.4, pois o funcional é o mesmo. O que diferencia esse problema do anterior, é que neste caso, $x_1(\frac{\pi}{2})$ é livre. Assim, o candidato a extremo é:

$$x_1^*(t) = c_1e^t + c_2e^{-t} + c_3 \cos t + c_4 \sin t \text{ e } x_2^*(t) = c_1e^t + c_2e^{-t} - c_3 \cos t - c_4 \sin t.$$

Para determinar as constantes de integração são usadas as condições iniciais de contorno

$$x_1(0) = 0 \Rightarrow c_1e^0 + c_2e^0 + c_3 \cos(0) + c_4 \sin(0) = 0 \Rightarrow c_1 + c_2 + c_3 = 0,$$

$$x_2(0) = 0 \Rightarrow c_1e^0 + c_2e^0 - c_3 \cos(0) - c_4 \sin(0) = 0 \Rightarrow c_1 + c_2 - c_3 = 0,$$

$$\text{e } x_2(\frac{\pi}{2}) = 1 \Rightarrow c_1e^{\frac{\pi}{2}} + c_2e^{-\frac{\pi}{2}} - c_3 \cos(\frac{\pi}{2}) - c_4 \sin(\frac{\pi}{2}) = 1 \Rightarrow c_1e^{\frac{\pi}{2}} + c_2e^{-\frac{\pi}{2}} - c_4 = 1.$$

É usada também a equação (3.21) que, devido as características do problema, dá origem à condição:

$$\frac{\partial g}{\partial x_1'} \left(x \left(\frac{\pi}{2} \right), x' \left(\frac{\pi}{2} \right), \frac{\pi}{2} \right) = 0 \Rightarrow 2(c_1e^{\frac{\pi}{2}} - c_2e^{-\frac{\pi}{2}} - c_3) = 0$$

que juntas dão origem ao sistema:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = 0 \\ c_1 + c_2 - c_3 = 0 \\ c_1e^{\frac{\pi}{2}} + c_2e^{-\frac{\pi}{2}} - c_4 = 1. \\ 2(c_1e^{\frac{\pi}{2}} - c_2e^{-\frac{\pi}{2}} - c_3) = 0, \end{cases}$$

cuja solução é $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ e $c_4 = -1$.

Logo, $x_1^*(t) = -x_2^*(t) = -\sin(t)$ é um candidato a extremo de (3.22).

Observamos assim que, se $x_1(\frac{\pi}{2})$ é livre, o candidato a extremo do funcional não é o mesmo encontrado quando $x_1(\frac{\pi}{2})$ é fixo no exemplo 3.4.

A tabela 3.1 a seguir sintetiza as condições adicionais que devem ser satisfeitas na busca de candidatos a extremos, para algumas condições sobre t_f e $x(t_f)$ tratadas neste capítulo.

Problema	Condições Adicionais
$x(t_f)$ e t_f especificados	$x^*(t_0) = x_0; x^*(t_f) = x_f$
$x(t_f)$ livre e t_f especificado	$x^*(t_0) = x_0$ $\frac{\partial g}{\partial x'}(x^*(t_f), x^{*'}(t_f), t_f) = 0$
t_f livre e $x(t_f)$ especificado	$x^*(t_0) = x_0; x^*(t_f) = x_f$ $g(x^*(t_f), x^{*'}(t_f), t_f) - \left[\frac{\partial g}{\partial x'}(x^*(t_f), x^{*'}(t_f), t_f) \right]^T x^{*'}(t_f) = 0$
t_f e $x(t_f)$ livres e independentes	$x^*(t_0) = x_0$ $\frac{\partial g}{\partial x'}(x^*(t_f), x^{*'}(t_f), t_f) = 0$ $g(x^*(t_f), x^{*'}(t_f), t_f) = 0$
t_f e $x(t_f)$ restritos a curva $\theta(t)$	$x^*(t_0) = x_0$ $x^*(t_f) = \theta(t_f)$ $\left[\frac{\partial g}{\partial x'}(x^*(t_f), x^{*'}(t_f), t_f) \right] \left[\frac{d\theta}{dt}(t_f) - x^{*'}(t_f) \right] + g(x^*(t_f), x^{*'}(t_f), t_f) = 0$

Tabela 3.1: Condições Adicionais para algumas situações sobre t_f e $x(t_f)$.

No capítulo seguinte abordaremos dois problemas clássicos do Cálculo Variacional.

4 Problemas Clássicos do Cálculo Variacional - condições necessárias

Um dos problemas clássicos mais famosos no Cálculo Variacional é o Problema da Braquistócrona, proposto por Jean Bernoulli, que desafiou os matemáticos da época (junho de 1696) com o seguinte anúncio num jornal "Dados dois pontos P e Q em um plano vertical e em desnível (isto é, a reta que os contém não está na horizontal e nem na vertical), qual é a curva que os liga de tal modo que uma partícula partindo do repouso do ponto mais alto P e deslizando sobre ela sem atrito, sob ação da gravidade, gasta o menor tempo para atingir o ponto mais baixo Q?".

Essa curva, segundo sugestão de Leibniz, ficou conhecida por braquistócrona (do grego bráquis - que significa menor e cronos que significa tempo). O mesmo jornal de maio de 1697 trazia artigos sobre o problema de seis dos mais renomados matemáticos da época: Jean Bernoulli, Jackes Bernoulli, Isaac Newton, Marquês de L'Hospital, Gottfried Leibniz e Ehrenfried Tschirnhaus.

Os problemas clássicos a serem tratados nesse capítulo serão: o problema da superfície mínima de revolução e o problema do comprimento mínimo de arco. Será dada atenção especial a estes problemas por já serem conhecidos pelos alunos desde o Cálculo de uma variável, quando dada uma função $y = f(x)$, determina-se a expressão para o cálculo do comprimento de arco para $x \in [a, b]$ ou a área da superfície gerada pela rotação do gráfico de f em torno do eixo x . Como nas referências bibliográficas consultadas o funcional a ser minimizado já é fornecido, apresentamos nesses dois problemas a obtenção de cada funcional e as condições necessárias para otimalidade.

4.1 Superfície Mínima de Revolução

O problema de superfície mínima consiste em encontrar uma curva com fronteiras fixas, cuja rotação em torno do eixo das abscissas gera uma superfície de área mínima.

4.1.1 Funcional do Problema

Sabe-se da geometria que a área lateral de um tronco de cone circular reto, de geratriz g , raio da base maior R e raio da base menor r , é igual a área do trapézio de altura g , base maior $2\pi R$ e base menor $2\pi r$, ou seja,

$$\text{área lateral do tronco} = \pi(R + r)g.$$

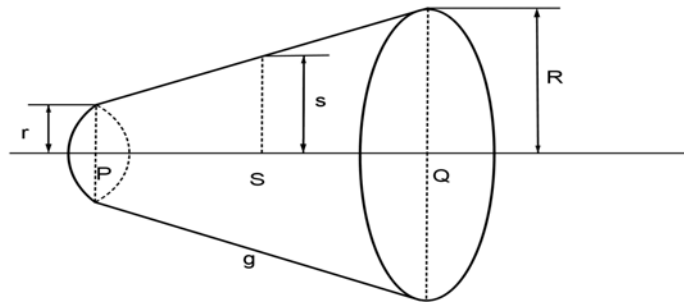


Figura 4.1: Tronco de cone.

Sendo S o ponto médio do segmento PQ , a altura s indicada na figura 4.1 é dada por:

$$s = \frac{R + r}{2}, \text{ daí } \pi(R + r)g = 2\pi sg.$$

Assim,

$$\boxed{\text{área lateral do tronco do cone} = 2\pi sg.}$$

Usando a área lateral de um tronco de cone, vejamos como calcular a área da superfície obtida pela rotação, em torno do eixo t , do gráfico de uma função $x(t)$, com derivada contínua e $x(t) \geq 0$ no intervalo $[t_0, t_f]$.

Seja então, $P : t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = t_f$ uma partição de $[a, b]$ e $c_i = \frac{t_i + t_{i-1}}{2}$ o ponto médio do intervalo $[t_{i-1}, t_i]$.

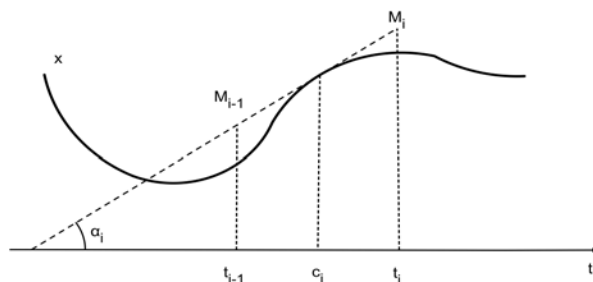


Figura 4.2: Tangente ao gráfico de x no ponto $(c_i, x(c_i))$.

Na figura 4.2, $x'(c_i) = tg\alpha_i$; o segmento $M_{i-1}M_i$ é tangente ao gráfico de x no ponto $(c_i, x(c_i))$. Então,

$$\overline{M_{i-1}, M_i} = \frac{\Delta t_i}{|\cos \alpha_i|} = |\sec \alpha_i| \Delta t_i = \sqrt{1 + [x'(c_i)]^2} \Delta t_i.$$

A área da superfície gerada pela rotação, em torno do eixo t do segmento $M_{i-1}M_i$ é a área da superfície lateral de um tronco de cone de geratriz $\overline{M_{i-1}, M_i}$:

$$2\pi x(c_i) \overline{M_{i-1}, M_i} = 2\pi x(c_i) \sqrt{1 + [x'(c_i)]^2} \Delta t_i$$

e se Δt_i for suficientemente pequeno, esta área será uma boa aproximação para a área da superfície gerada pela rotação em torno do eixo t , do trecho do gráfico entre as retas $t = t_{i-1}$ e $t = t_i$.

Como a função $2\pi x(t) \sqrt{1 + [x'(c_i)]^2}$ é contínua em $[t_0, t_f]$, segue que:

$$\lim_{\text{máx } \Delta t_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n 2\pi x(t_i) \sqrt{1 + [x'(c_i)]^2} \Delta t_i = \int_{t_0}^{t_f} 2\pi x(t) \sqrt{1 + [x'(t)]^2} dt$$

Logo, a área da superfície obtida pela rotação do gráfico de x , em torno do eixo de t é definida por:

$$A = \int_{t_0}^{t_f} 2\pi x(t) \sqrt{1 + [x'(t)]^2} dt.$$

4.1.2 Resolução do Problema

Como visto anteriormente, a área de uma superfície de revolução é dada por:

$$A = 2\pi \int_{t_0}^{t_f} x(t) \sqrt{1 + [x'(t)]^2} dt.$$

Desta forma, o funcional do Problema da Superfície de Revolução a ser minimizado é,

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_f} 2\pi x(t) \sqrt{1 + [x'(t)]^2} dt. \quad (4.1)$$

Neste caso $g(x(t), x'(t), t) = 2\pi x(t) \sqrt{1 + [x'(t)]^2}$. A fim de analisarmos os candidatos a extremo do funcional, aplicando a equação de Euler, temos:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial x} \left(2\pi x(t) \sqrt{1 + [x'(t)]^2} \right) - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial x'} \left(2\pi x(t) \sqrt{1 + [x'(t)]^2} \right) \right] = 0 \\
& \Rightarrow 2\pi \sqrt{1 + [x'(t)]^2} - \frac{d}{dt} \left(\frac{2\pi x(t)x'(t)}{\sqrt{1 + [x'(t)]^2}} \right) = 0 \\
& \Rightarrow 2\pi \sqrt{1 + [x'(t)]^2} - 2\pi \left[\frac{\frac{d}{dt} \left(x(t)x'(t) \right) \sqrt{1 + [x'(t)]^2} - x(t)x'(t) \frac{d}{dt} \left(\sqrt{1 + [x'(t)]^2} \right)}{1 + [x'(t)]^2} \right] = 0 \\
& \Rightarrow 2\pi \sqrt{1 + [x'(t)]^2} - 2\pi \left[\frac{([x'(t)]^2 + x(t)x''(t)) \sqrt{1 + [x'(t)]^2} - \frac{[x'(t)]^2 x(t)x''(t)}{\sqrt{1 + [x'(t)]^2}}}{1 + [x'(t)]^2} \right] = 0 \\
& \Rightarrow 2\pi \sqrt{1 + [x'(t)]^2} - 2\pi \left[\frac{[x'(t)]^2 + [x'(t)]^4 + x(t)x''(t)}{(1 + [x'(t)]^2)^{\frac{3}{2}}} \right] = 0 \\
& \Rightarrow 2\pi \left[\frac{(1 + [x'(t)]^2)^2 - [x'(t)]^2 - [x'(t)]^4 - x(t)x''(t)}{(1 + x'(t))^{\frac{3}{2}}} \right] = 0 \\
& \Rightarrow 2\pi \left[\frac{1 + [x'(t)]^2 - x(t)x''(t)}{(1 + x'(t))^{\frac{3}{2}}} \right] = 0 \tag{4.2}
\end{aligned}$$

A equação (4.2) multiplicada por $x'(t)$ pode ser escrita como:

$$2\pi \frac{d}{dt} \left(\frac{x(t)}{\sqrt{1 + [x'(t)]^2}} \right) = 0.$$

Através da equação de Euler, o candidato a extremo para o problema da superfície mínima é dado por:

$$\frac{x(t)}{\sqrt{1 + [x'(t)]^2}} = C_1. \tag{4.3}$$

Outra forma de se abordar a equação de Euler, é considerando-se que no Problema da Superfície Mínima de Revolução, g depende apenas de $x(t)$ e $x'(t)$. Assim, a equação de Euler

$\frac{\partial g}{\partial x}(x^*(t), x'^*(t), t) - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial g}{\partial x'}(x^*(t), x'^*(t), t) \right] = 0$, pode ser expandida do seguinte modo:

$$\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial^2 g}{\partial t \partial x'} - \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial x'} \left(\frac{dx}{dt} \right) - \frac{\partial^2 g}{\partial x'^2} \left(\frac{d^2 x}{dt^2} \right) = 0.$$

Como $g = 2\pi x(t) \sqrt{1 + x'(t)^2}$ depende apenas de $x(t)$ e de $x'(t)$, $\frac{\partial^2}{\partial t \partial x'} g(x(t), x'(t)) = 0$.

$$\frac{\partial}{\partial x} g(x(t), x'(t)) - \frac{\partial^2}{\partial x \partial x'} g(x(t), x'(t)) \left(\frac{dx}{dt} \right) - \frac{\partial^2}{\partial x'^2} g(x(t), x'(t)) \left(\frac{d^2 x}{dt^2} \right) = 0. \quad (4.4)$$

Multiplicando (4.4) por $\frac{dx}{dt}$:

$$\frac{\partial g}{\partial x} \left(\frac{dx}{dt} \right) - \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial x'} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 - \frac{\partial^2 g}{\partial x'^2} \left(\frac{dx}{dt} \right) \left(\frac{d^2 x}{dt^2} \right) \quad (4.5)$$

Somando e subtraindo $\left(\frac{d^2 x}{dt^2} \right) \frac{\partial}{\partial x'} g(x(t), x'(t))$ em (4.5) temos,

$$\frac{d}{dt} \left(g(x(t), x'(t)) - \frac{dx}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial x'} g(x(t), x'(t)) \right) \right) = 0. \quad (4.6)$$

Assim, se g depende somente de $x(t)$ e $x'(t)$, a equação de Euler se reduz a,

$$g(x(t), x'(t)) - \frac{dx}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial x'} g(x(t), x'(t)) \right) = C_1.$$

Outros casos particulares são discutidos em Elsgolts [5], como por exemplo $g(x(t), t)$, ou seja, g dependendo apenas de $x(t)$ e t .

Logo, a equação de Euler para o problema de superfície mínima é dada por:

$$x(t) \sqrt{1 + x'(t)^2} - x'(t) \left(\frac{2x(t)x'(t)}{2\sqrt{1 + x'(t)^2}} \right) = x(t) \sqrt{1 + x'(t)^2} - \frac{xx'^2}{\sqrt{1 + x'^2}} = C_1.$$

Após simplificação:

$$\frac{x(t)}{\sqrt{1 + x'(t)^2}} = C_1. \quad (4.7)$$

Como esperado, a equação (4.3) é a mesma que (4.7).

Para resolver a equação diferencial (4.7), é feita a substituição $\frac{dx}{dt} = \sinh(s)$. Então, de (4.7), $x(t) = C_1 \sqrt{1 + \sinh(s)^2} = C_1 \cosh s$ e,

$$x'(t) = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dt = \frac{dx}{x'(t)} = \frac{C_1 \sinh(s) ds}{\sinh(s)} = C_1 ds \Rightarrow t = C_1 s + C_2$$

A superfície buscada é formada pela revolução de uma curva, cuja equação na forma paramétrica é:

$$\begin{aligned}t &= C_1 s + C_2 \\x &= C_1 \cosh s.\end{aligned}$$

Eliminando o parâmetro s é obtido:

$$x = C_1 \cosh \left(\frac{t - C_2}{C_1} \right). \quad (4.8)$$

As curvas (4.8) são conhecidas como uma família de catenárias e são candidatas a extremo do funcional (4.1); as superfícies geradas por elas são os catenóides. Para determinar C_1 e C_2 são usadas as condições de contorno.

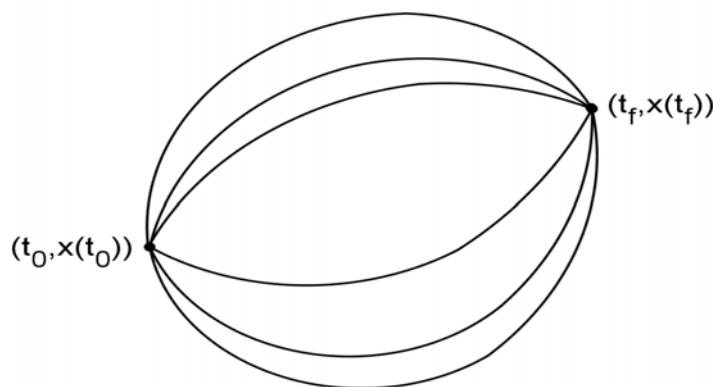


Figura 4.3: Família de catenárias.

Condições suficientes para otimalidade de (4.8) podem ser encontradas em [5].

4.2 Problema do Comprimento de Arco

O Problema do comprimento de arco consiste em encontrar a equação de uma curva de classe C^1 com comprimento mínimo que conecta dois pontos distintos (fixos).

4.2.1 Funcional do Problema

Seja $y = x(t)$ com derivada contínua em $[a, b]$ e seja $P : a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$ uma partição de $[a, b]$. Indicando por $L(P)$ o comprimento da poligonal de vértices $P_i = (t_i, x(t_i))$, $i = 1, 2, \dots, n$,

$$L(P) = \sum_{i=1}^n \sqrt{(t_i - t_{i-1})^2 + (x(t_i) - x(t_{i-1}))^2}$$

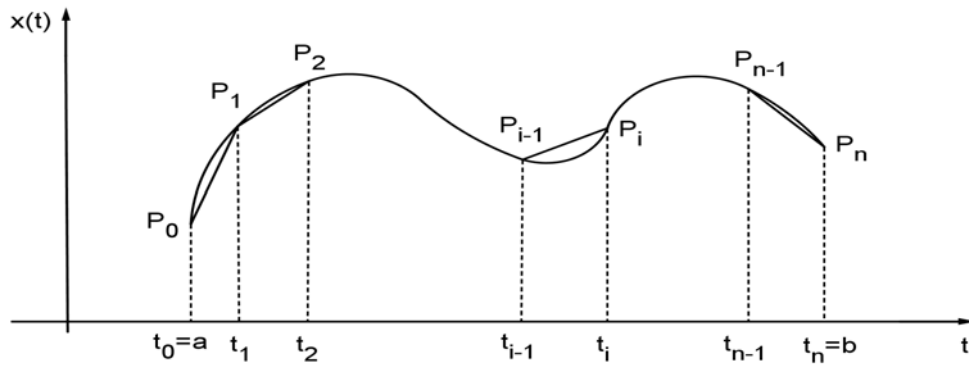


Figura 4.4: Partição de $[a,b]$.

Pelo Teorema do Valor Médio, para cada i , $i = 1, 2, \dots, n$ existe c_i , $t_{i-1} < c_i < t_i$, tal que

$$x(t_i) - x(t_{i-1}) = x'(c_i)\Delta t_i, \text{ onde } \Delta t_i = t_i - t_{i-1}.$$

Segue que

$$L(P) = \sum_{i=1}^n \sqrt{\Delta t_i^2 + (x'(c_i)\Delta t_i)^2} = \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + (x'(t_i))^2} \Delta t_i.$$

Assim, tomando limite para $\max \Delta t_i \rightarrow 0$, é possível mostrar que $L(P)$ tenderá para $\int_a^b \sqrt{1 + (x'(t))^2} dt$, ([6]). O comprimento do gráfico de $x(t)$ no intervalo $[a, b]$ é definido então por

$$C = \int_a^b \sqrt{1 + (x'(t))^2} dt.$$

4.2.2 Resolução do Problema

Como visto na seção anterior, o funcional do problema do comprimento de arco a ser minimizado é,

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_f} \sqrt{1 + (x'(t))^2} dt.$$

Neste caso $g(x(t), x'(t), t) = \sqrt{1 + (x'(t))^2}$. A fim de analisarmos os candidatos a extremo do funcional, aplicamos a equação de Euler:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial x} \left(\sqrt{1 + (x'(t))^2} \right) - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial x'} \left(\sqrt{1 + (x'(t))^2} \right) \right] = 0 \\
& \Rightarrow -\frac{d}{dt} \left[\frac{x'(t)}{\sqrt{1 + (x'(t))^2}} \right] = 0 \\
& \Rightarrow \frac{x''(t) \sqrt{1 + (x'(t))^2} - x'(t) \frac{2x'(t)}{2\sqrt{1 + (x'(t))^2}} x''(t)}{1 + (x'(t))^2} = 0 \\
& \Rightarrow \frac{x''(t)}{\underbrace{[1 + (x'(t))^2]^{\frac{3}{2}}}_{\geq 1}} = 0 \Rightarrow x''(t) = 0 \Rightarrow x(t) = C_1 t + C_2.
\end{aligned}$$

Através da equação de Euler, o candidato a extremo para o problema do comprimento de arco é dado por:

$$x(t) = C_1 t + C_2. \quad (4.9)$$

Do mesmo modo como realizado para o problema da superfície mínima de revolução a equação de Euler pode ser tratada, observando-se que neste caso $g = \sqrt{1 + (x'(t))^2}$ depende somente de $x'(t)$. A equação de Euler reduzir-se-ia a $\frac{\partial^2 g(x')}{\partial x'^2} \left(\frac{d^2 x}{dt^2} \right) = 0$ e o candidato a extremo também é $x(t) = C_1 t + C_2$.

Exemplo 4.1. Qual a equação da curva que une o ponto $x(0) = 1$ à reta $t = 5$ com comprimento mínimo?

Como o problema a ser resolvido é de comprimento de curva, o funcional a ser minimizado é

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_f} \sqrt{1 + (x'(t))^2} dt,$$

cujo candidato a extremo é dado por $x^*(t) = C_1 t + C_2$.

Do enunciado do problema são tiradas as condições iniciais de contorno: $t_0 = 0$, $x(t_0) = 1$, $t_f = 5$ e $x(t_f)$ é livre, que serão usadas pra determinar as constantes de integração C_1 e C_2 .

$$x(0) = 1 \Rightarrow 0 + C_2 = 1 \Rightarrow C_2 = 1.$$

Por $x(5)$ ser livre é usada a condição natural de contorno (3.6).

$$\frac{\partial g}{\partial x'}(x^*(t_f), x^{*'}(t_f), t_f) = 0 \Rightarrow \frac{x^{*'}(t_f)}{\sqrt{1 + x^{*'}(t_f)^2}} = 0 \Rightarrow x^{*'}(t_f) = 0 \Rightarrow C_1 = 0.$$

Assim, o candidato a extremo para o problema de comprimento de arco é $x^*(t) = 1$. Vamos provar algebricamente que x^* é de fato o mínimo para o problema.

Temos que

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_f} \sqrt{1 + (x'(t))^2} dt \Rightarrow J(x^*) = \int_{t_0}^{t_f} \sqrt{1} dt \text{ e } J(x^* + \delta x) = \int_{t_0}^{t_f} \sqrt{1 + \delta x'^2} dt.$$

$$\text{Logo, } \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \underbrace{\sqrt{1 + \delta x'^2}}_{\geq \sqrt{1}} - \sqrt{1} \right\} dt \geq 0 \Rightarrow J(x^* + \delta x) \geq J(x^*), \quad \forall \delta x.$$

Portanto a equação da curva que minimiza a distância do ponto à reta é $x^*(t) = 1$, que é o segmento de reta paralelo ao eixo x unindo o ponto à reta.

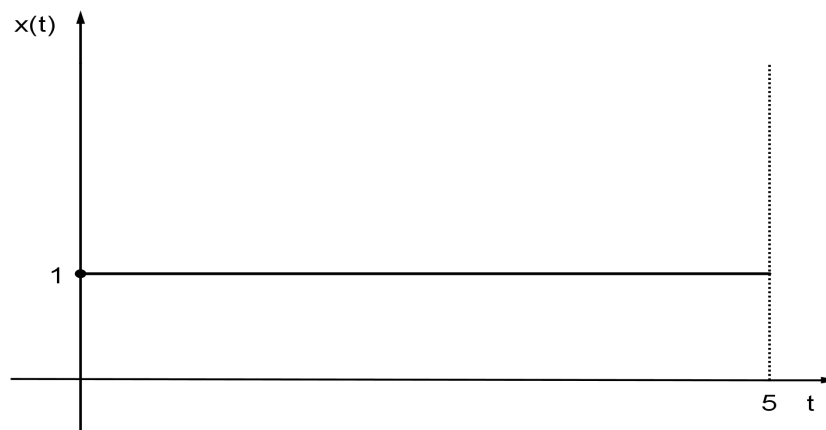


Figura 4.5: Solução para o exemplo 4.1.

A seguir, trataremos de alguns problemas variacionais que apresentam restrições sobre a função que é procurada como extremo de um funcional.

5 Problemas Variacionais com restrições

Problemas Variacionais com restrições (vínculos) são problemas em que se procura um extremo do funcional J , sendo que são impostas certas condições que devem ser satisfeitas pelo extremo. Tais condições são chamadas de restrições. Embora existam várias formas de restrições, apresentaremos aqui três casos: $\varphi(x, t) = 0$, $\varphi(x, x', t) = 0$ e isoperimétricas.

5.1 Restrições da forma $\varphi(x, t) = 0$

Vamos determinar um conjunto de condições necessárias para uma função x^* ser extremo do funcional

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), x'(t), t) dt,$$

onde x é um vetor de funções de dimensões $(n + m) \times 1$, $n, m \geq 1$ que deve satisfazer n restrições da forma:

$$\varphi_i(x, t) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

A presença dessas n restrições significa que apenas m das $n + m$ componentes de x são independentes.

Um método que poderia ser usado para encontrar o extremo desse funcional seria resolver o sistema $\varphi_i(x, t) = 0$, $(i = 1, 2, \dots, n)$ para x_1, x_2, \dots, x_n (ou outras n funções x_i) e substituir no funcional $J(x)$, obtendo um funcional $\bar{J}(x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m})$ que depende de m funções independentes e então pode ser resolvido pelos métodos desenvolvidos anteriormente. As restrições são, geralmente, equações algébricas não lineares, que inviabilizam este método de resolução. Usaremos então o Método dos Multiplicadores de Lagrange, também conhecido como Método dos Coeficientes Indeterminados, que oferece uma técnica mais eficiente para eliminar a dependência do funcional J nas funções x_1, x_2, \dots, x_n . Esse método consiste em construir a partir do problema, um novo funcional, a ser investigado.

$$\begin{aligned} \bar{J} = \int_{t_0}^{t_f} \{ & g(x(t), x'(t), t) + \lambda_1(t) [\varphi_1(x(t), t)] + \lambda_2(t) [\varphi_2(x(t), t)] + \dots \\ & + \lambda_n(t) [\varphi_n(x(t), t)] \} dt. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Podemos escrever (5.1) em notação matricial:

$$\bar{J} = \int_{t_0}^{t_f} \left\{ g(x(t), x'(t), t) + \lambda^T(t) [\varphi(x(t), t)] \right\} dt. \quad (5.2)$$

Como as restrições devem ser satisfeitas para todo $t \in [t_0, t_f]$, os multiplicadores de Lagrange $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ são funções de t . A variação do funcional \bar{J} é encontrada da mesma forma que no capítulo 3, porém aplicando variações nas funções λ também.

$$\begin{aligned} \delta \bar{J}(x, \delta, \lambda, \delta \lambda) = \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \left[\frac{\partial g^T}{\partial x}(x(t), x'(t), t) + \lambda^T(t) \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x(t), t) \right] \right] \delta x(t) \right. \\ \left. + \left[\frac{\partial g^T}{\partial x'}(x(t), x'(t), t) \right] \delta x'(t) + [\varphi^T(x(t), t)] \delta \lambda(t) \right\} dt. \end{aligned}$$

Integrando por partes o termo envolvendo $\delta x'$ obtemos:

$$\begin{aligned} \delta \bar{J}(x, \delta, \lambda, \delta \lambda) = \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \left[\frac{\partial g^T}{\partial x}(x(t), x'(t), t) + \lambda^T(t) \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x(t), t) \right] \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial g^T}{\partial x'}(x(t), x'(t), t) \right] \right] \delta x(t) + [\varphi^T(x(t), t)] \delta \lambda(t) \right\} dt \\ + \left[\frac{\partial g^T}{\partial x'}(x(t), x'(t), t) \right] \delta x(t) \Big|_{t_0}^{t_f}. \end{aligned}$$

Considerando primeiramente o caso em que $x(t_0)$ e $x(t_f)$ são fixos. Pelo Teorema do Cálculo Variacional a variação deve se anular no extremo, isto é, $\delta \bar{J}(x^*, \lambda) = 0$. Além disso, o extremal deve satisfazer as restrições, $\varphi(x^*(t), t) = 0$, $t \in [t_0, t_f]$. Podemos então escolher n multiplicadores de Lagrange arbitrários que anulam o coeficiente de $\delta x(t)$ no intervalo $[t_0, t_f]$. Restam $(n+m) - n = m$ componentes que são independentes. Pelo Lema Fundamental,

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x^*(t), x'^*(t), t) + \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x^*(t), t) \right]^T \lambda^*(t) - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial g}{\partial x'}(x^*(t), x'^*(t), t) \right] = 0. \quad (5.3)$$

Podemos definir o argumento da integral (5.2) como:

$$\bar{g} = g(x(t), x'(t), t) + \lambda^T(t) [\varphi(x(t), t)].$$

A equação (5.3) é escrita como:

$$\frac{\partial \bar{g}}{\partial x}(x^*(t), x'^*(t), \lambda^*(t), t) - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \bar{g}}{\partial x'}(x^*(t), x'^*(t), \lambda^*(t), t) \right] = 0, \quad (5.4)$$

ou seja, podemos aplicar as equações de Euler ao problema inicial,

$$\bar{J} = \int_{t_0}^{t_f} \bar{g}(x^*(t), x'^*(t), \lambda^*(t), t) dt,$$

obtendo $n + m$ equações diferenciais de (5.4) e o conjunto de n restrições. Ao todo, temos $2n + m$ equações para encontrarmos os $n + m$ x^* 's e os n λ 's. Se $x(t_f)$ ou t_f não forem fixos são obtidas condições adicionais, analogamente aos capítulos anteriores.

5.2 Restrições da forma $\varphi(x, x', t) = 0$

Vamos agora encontrar condições necessárias para a função x^* ser um extremo para o funcional

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), x'(t), t) dt.$$

x é um vetor $(n + m)$ de funções ($n, m \geq 1$) que deve satisfazer a n equações diferenciais

$$\varphi_i(x(t), x'(t), t) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

e tal que t_0 , $x(t_0)$, t_f e $x(t_f)$ são conhecidos.

Restrições deste tipo representam as condições de estado em problemas de controle ótimo. Apenas m dos $n + m$ componentes de x são independentes por causa das n restrições. Usando o método de Lagrange, construímos o funcional aumentado:

$$\begin{aligned} \bar{J} = \int_{t_0}^{t_f} \{ & g(x(t), x'(t), t) + \lambda_1(t) [\varphi_1(x(t), x'(t), t)] + \lambda_2(t) [\varphi_2(x(t), x'(t), t)] + \dots \\ & + \lambda_n(t) [\varphi_n(x(t), x'(t), t)] \} dt. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Podemos escrever (5.5) em notação matricial:

$$\bar{J} = \int_{t_0}^{t_f} \left\{ g(x(t), x'(t), t) + \lambda^T(t) [\varphi(x(t), x'(t), t)] \right\} dt. \quad (5.6)$$

Se as restrições são satisfeitas, $\bar{J} = J$ para algum $\lambda(t)$. A variação de \bar{J} é dada por:

$$\begin{aligned} \delta \bar{J}(x, \delta, \lambda, \delta \lambda) = \int_{t_0}^{t_f} \left\{ & \left[\frac{\partial g^T}{\partial x}(x(t), x'(t), t) + \lambda^T(t) \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x(t), x'(t), t) \right] \right] \delta x(t) \right. \\ & + \left[\frac{\partial g^T}{\partial x'}(x(t), x'(t), t) + \lambda^T(t) \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x'}(x(t), x'(t), t) \right] \right] \delta x'(t) \\ & \left. + [\varphi^T(x(t), x'(t), t)] \delta \lambda(t) \right\} dt. \end{aligned}$$

Admitindo que as fronteiras sejam fixas, integrando por partes o termo envolvendo $\delta x'$ e considerando apenas os termos dentro da integral, obtemos

$$\begin{aligned} \delta \bar{J}(x, \delta, \lambda, \delta \lambda) = & \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \left[\frac{\partial g^T}{\partial x}(x(t), x'(t), t) + \lambda^T(t) \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x(t), x'(t), t) \right] \right. \right. \\ & - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial g^T}{\partial x'}(x(t), x'(t), t) \right] + \lambda^T(t) \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x'}(x(t), x'(t), t) \right] \left. \right] \delta x(t) \\ & \left. + [\varphi^T(x(t), x'(t), t)] \delta \lambda(t) \right\} dt. \end{aligned}$$

Em um extremal, a variação deve ser zero e as restrições devem ser satisfeitas. Usando o Lema Fundamental do Cálculo Variacional, temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x}(x^*(t), x'^*(t), t) + \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x^*(t), x'^*(t), t) \right]^T \lambda^*(t) \\ - \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial g}{\partial x'}(x^*(t), x'^*(t), t) \right\} + \lambda^T(t) \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x'}(x^*(t), x'^*(t), t) \right] \right\} = 0. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Como na seção anterior, se definirmos,

$$\bar{g} = g(x(t), x'(t), t) + \lambda^T(t) [\varphi(x(t), x'(t), t)],$$

escrevemos (5.7) como:

$$\frac{\partial \bar{g}}{\partial x}(x^*(t), x'^*(t), \lambda^*(t), t) - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \bar{g}}{\partial x'}(x^*(t), x'^*(t), \lambda^*(t), t) \right] = 0. \quad (5.8)$$

Ou seja, podemos aplicar as equações de Euler ao problema inicial,

$$\bar{J} = \int_{t_0}^{t_f} \bar{g}(x^*(t), x'^*(t), \lambda^*(t), t) dt.$$

São $n+m$ equações diferenciais de (5.8) e o conjunto de n restrições, ao todo $2n+m$ equações para encontrarmos os $n+m$ x^* 's e os n λ^* 's.

5.3 Restrições Isoperimétricas

As restrições isoperimétricas são da forma:

$$\int_{t_0}^{t_f} e_i(x(t), x'(t), t) dt = c_i \quad (i = 1, \dots, r). \quad (5.9)$$

As constantes c_i 's são dadas. Em problemas de controle estas restrições costumam representar o combustível ou energia necessária para a realização da tarefa requerida. Vamos encontrar condições necessárias para x^* ser um extremal do funcional:

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), x'(t), t) dt \quad (5.10)$$

sujeito às restrições isoperimétricas (5.9).

Definindo uma nova variável $z_i(t)$ escrevemos as restrições (5.9) como equações diferenciais:

$$z_i(t) = \int_{t_0}^t e_i(x(t), x'(t), t) dt \quad (i = 1, \dots, r). \quad (5.11)$$

Com a presença das variáveis adicionais $z_i(t)$, surgem as condições de contorno $z_i(t_0) = 0$ e $z_i(t_f) = c_i$. Derivando (5.11) com relação a t :

$$z'_i(t) = e_i(x(t), x'(t), t) \quad (i = 1, \dots, r).$$

ou, em notação vetorial,

$$z'(t) = e(x(t), x'(t), t). \quad (5.12)$$

A equação (5.12) é um conjunto de r restrições na forma de equações diferenciais que, como na seção anterior, serão utilizadas na construção da função aumentada

$$\bar{g}(x(t), x'(t), \lambda(t), z'(t), t) = g(x(t), x'(t), t) + \lambda^T(t) [e(x(t), x'(t), t) - z'(t)]. \quad (5.13)$$

De modo análogo ao desenvolvimento feito para obtermos as equações (5.7), encontramos um conjunto de $n + m$ equações

$$\frac{\partial \bar{g}}{\partial x}(x^*(t), x^{*'}(t), \lambda^*(t), z^{*'}(t), t) - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \bar{g}}{\partial x'}(x^*(t), x^{*'}(t), \lambda^*(t), z^{*'}(t), t) \right] = 0, \quad (5.14)$$

e um conjunto de r equações

$$\frac{\partial \bar{g}}{\partial z}(x^*(t), x^{*'}(t), \lambda^*(t), z^{*'}(t), t) - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \bar{g}}{\partial z'}(x^*(t), x^{*'}(t), \lambda^*(t), z^{*'}(t), t) \right] = 0. \quad (5.15)$$

Substituindo (5.13) em (5.15) e fazendo os cálculos, como \bar{g} não depende de z , $\partial \bar{g} / \partial z = 0$ e $\partial \bar{g} / \partial z' = -\lambda^*(t)$. Assim (5.15) é simplificada por

$$\lambda^{*'}(t) = 0, \quad (5.16)$$

implicando que os multiplicadores de Lagrange são constantes.

Temos um total de $(n + m + r)$ equações envolvendo $(n + m + r + r)$ funções (w^*, λ^*, z^*) . As outras r equações necessárias para determinar as variáveis são

$$z^{*'}(t) = e(x^*(t), x^{*'}(t), t) \quad (5.17)$$

cujas soluções devem satisfazer as condições de contorno $z^*_i(t_f) = c_i$, $(i = 1, \dots, r)$.

Em resumo, para um problema com restrições isoperimétricas, as condições necessárias são dadas pelas equações (5.14), (5.16) e (5.17).

5.4 Exemplo: Um problema de controle ótimo

Vamos utilizar as técnicas do Cálculo Variacional para encontrar condições necessárias para um problema de controle ótimo. Para resolver um problema de controle ótimo devemos encontrar um controle admissível u^* que satisfaz o sistema de equações

$$x'(t) = a(x(t), u(t), t) \quad (5.18)$$

e o extremo x^* que minimiza o funcional

$$J(u) = h(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), u(t), t) dt. \quad (5.19)$$

Vamos assumir que as restrições de estado (seção 5.2) e a região de controle não são limitadas e que as condições iniciais $x(t_0) = x_0$ e o tempo inicial t_0 são especificados. A variável x é um vetor $n \times 1$ e u um vetor $m \times 1$. Temos um problema envolvendo $n + m$ funções que devem satisfazer as n equações diferenciais (5.18). Os m controles são funções independentes.

A diferença entre o funcional (5.19) e os funcionais abordados nas seções anteriores é o termo $h(x(t_f), t_f)$. Assumindo que h é uma função diferenciável, podemos escrever

$$h(x(t_f), t_f) = \int_{t_0}^{t_f} \frac{d}{dt} [h(x(t), t)] dt + h(x(t_0), t_0). \quad (5.20)$$

Substituindo (5.20) em (5.19), podemos reescrever o funcional como:

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_f} \left\{ g(x(t), u(t), t) + \frac{d}{dt} [h(x(t), t)] \right\} dt + h(x(t_0), t_0). \quad (5.21)$$

Como $x(t_0)$ e t_0 são fixos, a minimização do funcional não afeta $h(x(t_0), t_0)$, podemos considerar então apenas o funcional:

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_f} \left\{ g(x(t), u(t), t) + \frac{d}{dt} [h(x(t), t)] \right\} dt. \quad (5.22)$$

Usando a Regra da Cadeia para derivação,

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_f} \left\{ g(x(t), u(t), t) + \left[\frac{\partial h}{\partial x} [h(x(t), t)] \right]^T x'(t) + \frac{\partial h}{\partial t} (x(t), t) \right\} dt. \quad (5.23)$$

Usando multiplicadores de Lagrange, incluímos as restrições no funcional e construímos o funcional aumentado:

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_f} \left\{ g(x(t), u(t), t) + \left[\frac{\partial h}{\partial x} [h(x(t), t)] \right]^T x'(t) + \frac{\partial h}{\partial t} (x(t), t) + \lambda^T(t) [a(x(t), u(t), t) - x'(t)] \right\} dt. \quad (5.24)$$

Definimos então a função aumentada \bar{g} como:

$$\begin{aligned} \bar{g}(x(t), x'(t), u(t), \lambda(t), t) &= g(x(t), u(t), t) + \left[\frac{\partial h}{\partial x} [h(x(t), t)] \right]^T x'(t) \\ &+ \frac{\partial h}{\partial t} (x(t), t) + \lambda^T(t) [a(x(t), u(t), t) - x'(t)], \end{aligned} \quad (5.25)$$

e simplificamos o funcional (5.24) por:

$$\bar{J}(u) = \int_{t_0}^{t_f} \bar{g}(x(t), x'(t), u(t), \lambda(t), t) dt. \quad (5.26)$$

Assumimos que t_f pode ser fixo ou livre. Para determinar a variação de \bar{J} acrescentamos as variações δx , $\delta x'$, δu , $\delta \lambda$ e δt_f , pois \bar{g} depende de x , x' , u , λ e t , sendo que t_f pode ser livre. O cálculo de $\delta \bar{J}$ é feito como no capítulo 3. No extremal, o incremento é zero.

$$\begin{aligned} \delta \bar{J}(u^*) = 0 &= \left[\frac{\partial \bar{g}}{\partial x'} (x^*(t_f), x^{*'}(t_f), u^*(t_f), \lambda^*(t_f), t_f) \right]^T \delta x_f \\ &+ \left\{ \bar{g}(x^*(t_f), x^{*'}(t_f), u^*(t_f), \lambda^*(t_f), t_f) \right. \\ &- \left. \left[\frac{\partial \bar{g}}{\partial x'} (x^*(t_f), x^{*'}(t_f), u^*(t_f), \lambda^*(t_f), t_f) \right]^T x^{*'}(t_f) \right\} \delta t_f \\ &+ \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \left[\frac{\partial \bar{g}}{\partial x} (x^*(t), x^{*'}(t), u^*(t), \lambda^*(t), t) \right]^T \right. \\ &- \left. \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \bar{g}}{\partial x'} (x^*(t), x^{*'}(t), u^*(t), \lambda^*(t), t) \right]^T \right\} \delta x(t) \\ &+ \left[\frac{\partial \bar{g}}{\partial u} (x^*(t), x^{*'}(t), u^*(t), \lambda^*(t), t) \right]^T \delta u(t) \\ &+ \left[\frac{\partial \bar{g}}{\partial \lambda} (x^*(t), x^{*'}(t), u^*(t), \lambda^*(t), t) \right]^T \delta \lambda(t) \Big\} dt. \end{aligned} \quad (5.27)$$

Vamos considerar os termos dentro da integral em (5.27) que envolvem a função h . Como h depende apenas de x e de t , serão considerados somente os termos de $\partial \bar{g} / \partial x$ e os termos de $\partial \bar{g} / \partial x'$ já que em (5.25) temos $[\partial h / \partial x]^T x'$.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\left[\frac{\partial h}{\partial x} (x^*(t), t) \right]^T x^{*'}(t) + \frac{\partial h}{\partial t} (x^*(t), t) \right]^T - \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial}{\partial x'} \left[\left[\frac{\partial h}{\partial x'} (x^*(t), t) \right]^T x^{*'}(t) \right] \right\},$$

que é equivalente a:

$$\left[\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} (x^*(t), t) \right] x^{*'}(t) + \left[\frac{\partial^2 h}{\partial t \partial x} (x^*(t), t) \right] - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial h}{\partial x} (x^*(t), t) \right],$$

ou, se aplicarmos a regra da cadeia para o último termo,

$$\left[\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x^*(t), t) \right] x^{*'}(t) + \left[\frac{\partial^2 h}{\partial t \partial x}(x^*(t), t) \right] - \left[\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x^*(t), t) \right] x^{*'}(t) - \left[\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial t}(x^*(t), t) \right],$$

Assumindo que as segundas derivadas parciais sejam contínuas, a ordem de diferenciação pode ser trocada e os termos que envolvem h se anulam na integral, então,

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \left[\frac{\partial g}{\partial x}(x^*(t), u^*(t), t) \right]^T + \lambda^{*T}(t) \left[\frac{\partial a}{\partial x}(x^*(t), u^*(t), t) \right] - \frac{d}{dt} [-\lambda^{*T}(t)] \right\} \delta x(t) \\ & + \left\{ \left[\frac{\partial g}{\partial u}(x^*(t), u^*(t), t) \right]^T + \lambda^{*T}(t) \left[\frac{\partial a}{\partial u}(x^*(t), u^*(t), t) \right] \right\} \delta u(t) \\ & + \left[a(x^*(t), u^*(t), t) - x^{*'}(t) \right]^T \delta \lambda(t) \Big\} dt. \end{aligned} \quad (5.28)$$

A integral (5.28) deve ser nula no extremo, independentemente das condições iniciais de contorno. Como as restrições (5.18) devem ser satisfeitas pelo extremo, temos,

$$x^{*'}(t) = a(x^*(t), u^*(t), t), \quad (5.29)$$

e o coeficiente de $\delta \lambda(t)$ é zero em (5.28).

Os multiplicadores de Lagrange são arbitrários, então podemos escolhê-los de forma a anular o coeficiente de $\delta x(t)$ em (5.28), ou seja,

$$\lambda^{*'}(t) = - \left[\frac{\partial a}{\partial x}(x^*(t), u^*(t), t) \right]^T \lambda^*(t) - \frac{\partial g}{\partial x}(x^*(t), u^*(t), t). \quad (5.30)$$

Restou apenas o termo referente a $\delta u(t)$. Como $\delta u(t)$ é arbitrário, seu coeficiente deve ser nulo e portanto,

$$\frac{\partial g}{\partial u}(x^*(t), u^*(t), t) + \left[\frac{\partial a}{\partial u}(x^*(t), u^*(t), t) \right]^T \lambda^*(t) = 0. \quad (5.31)$$

No incremento (5.27), como a integral se anula, restaram apenas os termos fora da integral. Usando (5.29) aplicada a t_f e temos

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\partial h}{\partial x}(x^*(t_f), t_f) - \lambda^*(t_f) \right]^T \delta x_f \\ & + \left\{ \bar{g}(x^*(t_f), u^*(t_f), t_f) + \frac{\partial h}{\partial t}(x^*(t_f), t_f) + \lambda^{*T}(t_f) [a(x^*(t_f), u^*(t_f), t_f)] \right\} \delta t_f = 0. \end{aligned} \quad (5.32)$$

As equações (5.29), (5.30), (5.31) e (5.32) compõem o conjunto de condições necessárias para o problema de controle ótimo. Essas equações são formadas por um conjunto de $2n$ equações diferenciais de primeira ordem (equações (5.29) e (5.30)).

Para encontrar as $2n$ constantes de integração, usamos as n equações $x^*(t_0) = x_0$ e o conjunto adicional de n ou $n+1$ equações (se t_f não é conhecido, precisamos determiná-lo e para isso (5.32) é incluída no conjunto). Além disso, tem-se um conjunto de m funções algébricas que devem ser satisfeitas no intervalo $[t_0, t_f]$ (equações (5.31)).

A seguir, reescrevemos o conjunto de condições necessárias utilizando a função H conhecida como função Hamiltoniana, que é definida por:

$$H(x(t), u(t), \lambda(t), t) = g(x(t), u(t), t) + \lambda^T(t)[a(x(t), u(t), t)]. \quad (5.33)$$

Usando esta notação, escrevemos as condições necessárias como:

$$x^{*'}(t) = \frac{\partial H}{\partial \lambda}(x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t), t), \quad (5.34)$$

$$\lambda^{*'}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t), t), \quad (5.35)$$

$$\frac{\partial H}{\partial u}(x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t), t) = 0, \quad (5.36)$$

e

$$\left[\frac{\partial h}{\partial x}(x^*(t_f), t_f) - \lambda^*(t_f) \right]^T \delta x_f + \left[H(x^*(t_f), u^*(t_f), \lambda^*(t_f), t_f) + \frac{\partial h}{\partial t}(x^*(t_f), t_f) \right] \delta t_f = 0 \quad (5.37)$$

Vale a pena ressaltar que estas condições obtidas se referem ao problema de controle ótimo clássico dado pelas equações (5.18) e (5.19) onde os controles e os estados admissíveis não são limitados. Vejamos um exemplo.

Exemplo 5.1. Um sistema de primeira ordem é descrito pela equação de estado

$$x'(t) = x(t) + u(t). \quad (5.38)$$

Encontre o controle que minimiza o funcional

$$J = \int_0^T [1, 5x^2(t) + 0, 5u^2(t)] dt. \quad (5.39)$$

T é fixo e $x(T)$ é livre.

Temos que $H(x(t), u(t), \lambda(t), t) = 1, 5x^2(t) + 0, 5u^2(t) + \lambda x(t) + \lambda u(t)$.

Pela equação (5.34),

$$x^{*'}(t) = x^*(t) + u^*(t). \quad (5.40)$$

Por (5.35),

$$\lambda^{*'}(t) = -3x^*(t) - \lambda^*(t). \quad (5.41)$$

Por (5.36),

$$u^*(t) + \lambda^*(t) = 0. \quad (5.42)$$

E por (5.37), como $t_f = T$ é fixo e $x(t_f)$ é livre,

$$\lambda^*(T) = 0. \quad (5.43)$$

Isolando $u^*(t)$ em (5.42) e substituindo em (5.40) podemos isolar $\lambda^*(t)$ para substituir em (5.41). Temos a equação diferencial de 2ª ordem

$$-x^{*''}(t) + 4x^*(t) = 0,$$

cujas soluções são dadas por $x^*(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t}$, e c_1 e c_2 são constantes de integração a serem determinadas.

Da equação (5.41) temos $\lambda^*(t) = -c_1 e^{2t} + 3c_2 e^{-2t}$. Utilizando a equação (5.42), temos que o candidato a controle ótimo $u^*(t)$ é dado por $u^*(t) = c_1 e^{2t} - 3c_2 e^{-2t}$. Utilizando (5.43) obtemos $c_2 = c_1 e^{4T}/3$ e substituindo em $u^*(t)$ resulta

$$u^*(t) = c_1 (e^{2t} - e^{(4T-2t)}).$$

Se conhecidas as condições iniciais de contorno podemos determinar a constante de integração c_1 .

Problemas de controle ótimo dados por (5.18) e (5.19) com limitações nas variáveis de estado e/ou de controle são muito comuns em engenharia, no controle de pragas, em tratamento quimioterápico, etc ([7], [8] e [9]). Em [7] é apresentado um conjunto de equações diferenciais ordinárias que descreve a interação do sistema imunológico com o vírus HIV quando um tratamento quimioterápico é introduzido. Com o objetivo de minimizar o número de células tumorais e o custo do tratamento, resolve-se o problema de controle ótimo, que representa o efeito da quimioterapia sobre a produção viral, obtendo assim uma estratégia ótima de tratamento.

O efeito de limitações nas variáveis de estado e/ou de controle nos levam à condições necessárias diferentes das obtidas anteriormente. Assim, a generalização do Teorema Fundamental nos leva ao Princípio do Mínimo de Pontryagin, que pode ser encontrado em [1] para maiores detalhes.

6 Considerações Finais

Neste trabalho empenhamo-nos em apresentar resultados fundamentais da Teoria do Cálculo de Variações e aplicações. Embora exista uma variedade grande de problemas, nos restringimos ao problema clássico de fronteiras fixas, tempo final livre, estado final livre, funcional dependente de mais de uma função e problemas com alguns tipos de restrições.

Como optamos por estudar condições necessárias para extremos de funcionais, procuramos mostrar algebricamente, em alguns exemplos, que o candidato a extremal minimiza o funcional estudado. Condições suficientes para extremos de funcionais podem ser encontradas em [5].

Resolver problemas do Cálculo de uma variável via Cálculo de Variações, conferiu ao trabalho um caráter mais aplicado e o tornou mais prazeroso. A dedução das expressões dos funcionais de cada um dos problemas apresentados no capítulo 4 proporcionou uma melhor compreensão deles, haja vista que na maioria das bibliografias, o funcional é dado.

O estudo de um problema de Controle Ótimo foi feito utilizando as técnicas do Cálculo de Variações, permitindo assim observar como essa teoria influenciou o desenvolvimento da Teoria de Controle Ótimo.

Referências

- [1] KIRK, D. E. *Optimal Control Theory: An Introduction*. New Jersey: Prentice Hall, 1970.
- [2] BOYER, C. B. *História da Matemática*. 2. ed. São Paulo: Editora Edgard Blücher, 1996.
- [3] EVES, H. *Introdução à História da Matemática*. 2. ed. Campinas: Editora Unicamp, 1997.
- [4] SCHWARTZ, M. I. K. e N. L. *Dynamic Optimization: The Calculus of Variations and Optimal Control in Economics and Management*. New York: Elsevier Science Publishing, 1981.
- [5] ELSGOLTS, L. *Differential Equations and the Calculus of Variations*. [S.l.]: MIR, 1970.
- [6] GUIDORIZZI, H. L. *Um curso de Cálculo - Volume 1*. 5. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 2003.
- [7] KIRSCHNER, S. L. D.; SERBIN, S. Optimal control of the chemotherapy of HIV. *Journal of Mathematical Biology*, v. 35, p. 775–792, 1997.
- [8] OLIVEIRA R. C. BASSANEZI, H. M. Y. R. Z. G.; ADAMI, A. A model for optimal chemical control of leaf area damaged by fungi population - parameter dependence. *Journal of Biological Systems*, v. 12, p. 105–122, 2004.
- [9] COSTA, J. L. B. M. I. S.; BASSANEZI, R. C. Optimal control of populations developing drug resistance. *Journal of Mathematics Applied in Medicine and Biology*, v. 9, p. 215–226, 1992.
- [10] GUIDORIZZI, H. L. *Um curso de Cálculo - Volume 2*. 5. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 2008.

A Anexo

A seguir, escrevemos algumas definições que foram omitidas no corpo do trabalho. As definições foram escritas para duas variáveis e retiradas de [10].

Definição A.1. *Função de Classe C^1 .*

Dizemos que $f(x, y)$ é de classe C^1 no aberto A se $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ existirem e forem contínuas em A .

Definição A.2. *Função de Classe C^2 .*

Dizemos que $f(x, y)$ é de classe C^2 no aberto A se $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ existirem e forem contínuas em A .

Definição A.3. *Fórmula de Taylor com resto de Lagrange.*

Seja $f(x, y)$ de classe C^{n+1} no aberto $A \subset \mathbb{R}^2$ e sejam $(x_0, y_0) \in A$ e $(h, k) \neq (0, 0)$ tais que o segmento de extremidades (x_0, y_0) e $(x_0 + h, y_0 + k)$ esteja contido em A . Nestas condições

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + \sum_{r=1}^n \frac{1}{r!} \left[\binom{r}{p} \frac{\partial^r f}{\partial x^{r-p} \partial y^p}(x_0, y_0) h^{r-p} k^p \right] + E(h, k)$$

onde

$$E(h, k) = \frac{1}{(n+1)!} \sum_{p=0}^{n+1} \binom{n+1}{p} \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1-p} \partial y^p}(\bar{x}, \bar{y}) h^{(n+1-p)} k^p$$

para algum (\bar{x}, \bar{y}) interno ao segmento de extremidades (x_0, y_0) e $(x_0 + h, y_0 + k)$.

Definição A.4. *Multiplicadores de Lagrange.*

Seja $f(x, y)$ diferenciável no aberto A e seja $B = \{(x, y) \in A \mid g(x, y) = 0\}$, onde g é suposta de classe C^1 em A , e $\nabla g(x, y) \neq (0, 0)$ para todo $(x, y) \in B$. Uma condição necessária para que $(x_0, y_0) \in B$ seja extremante local de f em B é que exista um real λ_0 tal que

$$\nabla f(x_0, y_0) = \lambda_0 \nabla g(x_0, y_0).$$