



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”

Faculdade de Ciências e Tecnologia
Câmpus de Presidente Prudente

Introdução à Teoria de Controle Ótimo Estocástico: Uma aplicação em um problema de estoque

Bruno de Carvalho Meneguello

Orientador: Prof. Dr. Fabiano Borges da Silva

Programa: Matemática Aplicada e Computacional

Presidente Prudente, janeiro de 2025

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
Faculdade de Ciências e Tecnologia de Presidente Prudente
Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional

**Uma Introdução a Teoria de Controle
Ótimo Estocástico: Uma aplicação em um
problema de estoque**

Bruno de Carvalho Meneguello

Orientador: Prof. Dr. Fabiano Borges da Silva

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional da Faculdade de Ciências e Tecnologia da UNESP para obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada e Computacional.

Presidente Prudente, janeiro de 2025

M541i Meneguello, Bruno de Carvalho
Introdução à Teoria de Controle Ótimo Estocástico: Uma aplicação em um problema de estoque / Bruno de Carvalho Meneguello. -- Presidente Prudente, 2025
100 p. : il.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista (UNESP), Faculdade de Ciências e Tecnologia, Presidente Prudente
Orientador: Fabiano Borges da Silva

1. Equações Diferenciais Estocásticas. 2. Movimento Browniano. 3. Teoria de Controle Ótimo Estocástico. 4. Equação de Hamilton-Jacobi-Bellman. I. Título.

CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO: Introdução à Teoria de Controle Ótimo Estocástico: Uma aplicação em um problema de estoque

AUTOR: BRUNO DE CARVALHO MENEGUELLO

ORIENTADOR: FABIANO BORGES DA SILVA

Aprovado como parte das exigências para obtenção do Título de Mestre em Matemática Aplicada e Computacional, pela Comissão Examinadora:

Prof. Dr. FABIANO BORGES DA SILVA (Participação Virtual)
Departamento de Matemática / UNESP/Câmpus de Bauru



Documento assinado digitalmente

FABIANO BORGES DA SILVA

Data: 30/01/2025 08:58:26-0300

Verifique em <https://validar.itl.gov.br>

Prof. Dr. ELARD JUAREZ HURTADO (Participação Virtual)
Departamento de Matemática / Câmpus de Bauru

Prof. Dr. FERNANDO LUIZ PIO DOS SANTOS (Participação Virtual)
Departamento de Biodiversidade e Bioestatística / Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" – Instituto de Biociências

Presidente Prudente, 29 de janeiro de 2025

Agradecimentos

Gostaria de expressar minha mais profunda gratidão a todos os meus professores do PosMac e do curso de Licenciatura em Matemática da Faculdade de Ciências da Unesp, campus de Bauru-SP, que foram fundamentais para minha formação e despertaram em mim o interesse pela pesquisa e pela docência.

Agradeço especialmente ao meu orientador, Professor Dr. Fabiano Borges da Silva, por sua valiosa orientação, pela disponibilidade para esclarecer minhas dúvidas, pela paciência e por acreditar em minha capacidade ao longo de todo este processo.

Sou imensamente grato aos grandes amigos que fiz durante a graduação e o mestrado, pelo acolhimento e pelas conversas que compartilharam comigo as alegrias, os desafios e os anseios da pós-graduação. Levarei essas memórias e aprendizados para toda a vida.

Agradeço também aos meus pais, por todos os esforços realizados para que eu pudesse concluir meus estudos, pela compreensão e pelo apoio incondicional durante todos esses anos.

Por fim, estendo minha gratidão à equipe do PosMac, pela dedicação e prontidão nos atendimentos, e à Universidade Virtual do Estado de São Paulo (UNIVESP), pela concessão da bolsa de estudos que tornou possível a realização deste sonho.

Resumo

A teoria de controle ótimo oferece técnicas de modelagem matemática capazes de representar e otimizar situações do mundo real. Neste trabalho, apresentamos uma introdução ao controle ótimo estocástico, com foco em sua aplicação a um problema de gestão de estoques. Para isso, abordamos conceitos do Cálculo Estocástico, como o movimento Browniano, a integral de Itô e a fórmula de Itô, além de princípios da teoria de controle ótimo, como a equação diferencial parcial de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB). Buscamos compreender os resultados da aplicação por meio de simulações computacionais realizadas na linguagem Python, analisando a influência da taxa de demanda — uma função variável no tempo — sobre a trajetória do nível de estoque ótimo.

Palavras-Chave: *Equações diferenciais estocásticas, movimento Browniano, teoria de controle ótimo estocástico, equação de Hamilton-Jacobi-Bellman.*

Abstract

The theory of optimal control offers mathematical modeling techniques capable of representing and optimizing real-world situations. In this work, we present an introduction to stochastic optimal control, focusing on its application to an inventory management problem. To this end, we cover concepts from Stochastic Calculus, such as Brownian motion, the Itô integral, and Itô's formula, as well as principles of optimal control theory, including the Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) partial differential equation. We aim to understand the results of the application through computational simulations performed in the Python programming language, analyzing the influence of the demand rate—a time-varying function—on the trajectory of the optimal inventory level.

Keywords: *Stochastic differential equations, Brownian motion, stochastic optimal control theory, Hamilton-Jacobi-Bellman equation.*

Lista de Figuras

1.1	Uma trajetória amostral para o movimento Browniano	25
1.2	Cinco trajetórias amostrais para o movimento Browniano	26
3.1	Caminho Ótimo	58
4.1	Trajetoária amostral para I_t^*	77
4.2	Trajetoária amostral para I_t^*	78
4.3	50 trajetórias amostrais para I_t^*	79
4.4	100 trajetórias amostrais para I_t^*	80
4.5	Gráfico da função $R(t)$	84
4.6	Função $S_t = \text{sen}(t)$	85
4.7	Função $S_t = 1 + \text{sen}(4t)$	85
4.8	Soluções para a EDO e EDE	86
4.9	Soluções para a EDO e EDE	87
4.10	Soluções para a EDO e EDE	87
4.11	Trajetoária da EDO	88
4.12	50 trajetórias amostrais	89
4.13	100 trajetórias amostrais	89
4.14	Trajetoária amostral com $S_t = 1 + \text{sen}(t)$	90
4.15	$B = 3$	91
4.16	$B = 0, 4$	91
4.17	$B=3$	91

Conteúdo

Resumo	5
Abstract	7
Lista de Figuras	8
Introdução	13
1 Noções de probabilidade e processos estocásticos	17
1.1 Uma introdução à teoria de probabilidade	17
1.1.1 Distribuição Gaussiana e Esperança	19
1.1.2 Esperança Condicional	20
1.2 Uma introdução a processos estocásticos	22
1.2.1 Martingales e Movimento Browniano	22
2 A integral de Itô e equações diferenciais estocásticas	35
2.1 Uma introdução à Integral de Itô	35
2.1.1 Diferenciação estocástica	44
2.1.2 Fórmula de Itô	45
2.1.3 Equações diferenciais estocásticas (EDEs)	49
3 Uma introdução à teoria de controle ótimo determinístico	53
3.1 Definições preliminares	53
3.1.1 A Função Objetivo e o Problema de Controle Ótimo	56
3.1.2 A Equação de Hamilton-Jacobi-Bellman	57

4	Uma introdução à teoria de controle ótimo estocástico	63
4.1	A equação de Hamilton-Jacobi-Bellman: versão estocástica	63
4.2	Um problema estocástico de estoque de produção	66
4.2.1	Solução para o problema estocástico de estoque de produção: taxa de demanda constante	69
4.2.2	Solução para o problema estocástico de estoque de produção: taxa de demanda variando no tempo	81
	Bibliografia	96

Introdução

Embora o Cálculo Determinístico seja uma ferramenta eficaz para modelar problemas do mundo real, existem situações em que a incerteza desempenha um papel crucial e precisa ser considerada. Nesses casos, o Cálculo Estocástico se destaca ao permitir uma descrição mais precisa e realista do problema. Em termos gerais, situações que envolvem incerteza em sua evolução são modeladas por equações diferenciais estocásticas, uma extensão do cálculo diferencial tradicional que lida com processos estocásticos. Entre as diversas áreas de aplicação dessa teoria, destacam-se Finanças e Engenharia, nas quais o Cálculo Estocástico é amplamente utilizado para previsões relacionadas a investimentos de risco, modelos de portfólio e controle ótimo — sendo este último o foco deste trabalho. Essas aplicações podem ser estudadas em Oksendal (2003), Klebaner (2005), Steele (2001) e Kurtz (2001). Além dessas áreas, o Cálculo Estocástico também é aplicado em biologia como por exemplo, no estudo de crescimento populacional sob variação estocástica, e em física, para modelar o movimento aleatório de partículas. Para mais detalhes dessas aplicações, conferir Mao (2007), Allen (2010) e Maia (2003).

Este trabalho também está inserido no contexto da otimização, que é uma área específica da pesquisa operacional que se dedica ao estudo de problemas de decisão, utilizando modelos matemáticos para representar e otimizar situações do mundo real. O termo *pesquisa operacional* está ligado à invenção do radar na Inglaterra em 1934 e se desenvolveu durante as operações na Segunda Guerra Mundial como manutenção e inspeção de aviões, escolha do tipo de avião para uma missão e melhoria da probabilidade da destruição de submarinos. Após o final da guerra, a pesquisa operacional evoluiu rapidamente na Inglaterra e Estados Unidos e a partir da década de 1950 até o final da década de 1960, a pesquisa operacional foi aplicada em uma variedade de

problemas de produção e logística, incluindo indústrias de alimentação, automóveis, aviação, computadores, eletrônica, petróleo e entre outros. Uma definição de pesquisa operacional foi proposta na Inglaterra em 1967, que de forma sucinta, consiste no desenvolvimento de métodos científicos de sistemas complexos, com a finalidade de prever e comparar estratégias. Assim, a pesquisa operacional é um enfoque científico sobre a tomada de decisão e faz uso de modelos matemáticos que procuram representar um problema real (ARENALES et al., 2007).

A teoria de controle ótimo está relacionada à pesquisa operacional e trata da resolução de problemas de otimização em sistemas dinâmicos — sistemas que evoluem no tempo e são descritos por equações diferenciais. O objetivo é controlar esses sistemas de modo a maximizar ou minimizar um determinado funcional. As operações de maximização ou minimização de funcionais baseiam-se no Cálculo das Variações.

O objetivo desta dissertação é apresentar uma introdução à teoria de controle ótimo estocástico, voltada ao controle de sistemas dinâmicos descritos por equações diferenciais estocásticas (EDEs), com foco em sua aplicação a um problema de gestão de estoque. Para isso, são abordados os fundamentos matemáticos dessa teoria, seguidos pela análise de um problema de controle estocástico em um sistema de estoque de produção, proposto por Sethi e Thompson (1981), que utiliza a equação de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB). Esse problema visa determinar a variável de controle ótimo que orienta a solução da equação de estado (uma EDE), de forma a maximizar uma função objetivo, também chamada de função custo.

A equação de Hamilton-Jacobi-Bellman, uma equação diferencial parcial, é amplamente utilizada no estudo de problemas de controle ótimo determinístico e estocástico por meio da programação dinâmica. Conforme destacado por Lopes e Filho (1997), a solução da HJB, conhecida como função valor, incorpora uma parte essencial do problema de controle ótimo, orientando o sistema em direção ao menor custo possível, seja ele exato ou aproximado.

Inicialmente, optou-se por apresentar uma introdução à teoria de controle ótimo determinístico, definindo conceitos fundamentais como o princípio da otimalidade de Bellman, a formulação de um problema de controle ótimo, a função objetivo e a equação de Hamilton-Jacobi-Bellman. Essa abordagem facilita a transição para a versão estocástica, que é o foco principal deste trabalho, onde a variável de estado é um

processo estocástico, particularmente uma difusão de Itô, descrita pela EDE

$$dX_t = f(X_t, U_t, t)dt + G(X_t, U_t, t)dB_t,$$

com U_t sendo a variável de controle. Nesse contexto, o problema de controle ótimo consiste em encontrar um controle U^* que maximize a média (ou esperança) da função objetivo, isto é:

$$\begin{cases} \max_{U_t \in \Omega_t} \mathbb{E} \left[S(X_T, T) + \int_0^T F(X_t, U_t, t)dt \right], \\ dX_t = f(X_t, U_t, t)dt + G(X_t, U_t, t)dB_t, \quad X_0 = x_0, \end{cases} \quad (0.1)$$

Este trabalho aborda inicialmente conceitos de controle ótimo determinístico e a formulação da HJB, como base para a compreensão da versão estocástica dessa teoria. Em seguida, é apresentado um problema de controle estocástico aplicado à gestão de estoque. Mais precisamente, trabalhamos com o seguinte problema: Queremos encontrar um controle P^* que maximize a média da função objetivo, ou seja:

$$\begin{cases} \max_{P_t \in \Omega_t} \mathbb{E} \left[BI_T - \int_0^T (P_t^2 + I_t^2)dt \right], \\ dI_t = (P_t - S)dt + \sigma dB_t, \end{cases} \quad (0.2)$$

dado o valor de I_0 . Nesse contexto, que é um caso particular do problema (0.1), I_t representa o nível de estoque no tempo t , que é um processo estocástico, e S é a taxa de demanda.

Neste trabalho, consideramos dois cenários:

Taxa de demanda variável no tempo.

- (i) Taxa de demanda constante;
- (ii) Taxa de demanda variável no tempo.

Para obter uma solução explícita para o problema (0.2), no caso (i), presumimos que o nível de estoque é um processo observável, no sentido de que pode ser determinado diretamente. Utilizamos a versão estocástica da equação de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB), considerando que, conforme Sethi (2019), a maior parte da literatura sobre

esse tipo de problema utiliza a programação dinâmica ou a equação HJB. Buscamos incorporar em nosso texto alguns cálculos omitidos por Sethi (2019). Além disso, como contribuição desta dissertação, exploramos, por meio de simulações computacionais na linguagem de programação *Python*, o caso (ii), que não é abordado em Sethi (2019).

Para o desenvolvimento deste trabalho, julgou-se necessário apresentar noções elementares de probabilidade, processos estocásticos, integral e diferencial estocásticos, fórmula de Itô e equações diferenciais estocásticas. Dessa forma, a organização do trabalho segue a seguinte estrutura: no Capítulo 1, são abordados conceitos básicos da teoria de probabilidade e processos estocásticos. No Capítulo 2, apresentam-se resultados do cálculo estocástico, essenciais para a notação e justificativa de cálculos subsequentes. No Capítulo 3, introduz-se a programação dinâmica determinística e o princípio da otimalidade de Bellman, além da formulação de problemas de controle ótimo e o desenvolvimento da equação HJB. Por fim, no Capítulo 4 formula-se um problema de controle ótimo estocástico, com foco no desenvolvimento da HJB estocástica e sua aplicação a um problema de gestão de estoque de produção. Simulações computacionais em *Python* ilustram graficamente a trajetória das equações diferenciais que modelam o nível de estoque ótimo ao longo do tempo, permitindo observar o comportamento do sistema de acordo com as diferentes demandas consideradas.

Noções de probabilidade e processos estocásticos

Neste primeiro capítulo, tem-se por objetivo apresentar os conceitos básicos da teoria da probabilidade e de processos estocásticos, que serão úteis nas definições de variável aleatória, esperança matemática e movimento Browniano, bem como fixar a notação utilizada neste trabalho. Esses tópicos serão importantes ao longo do texto e podem ser encontrados com detalhes em Oksendal (2003), Calin (2015) e Klebaner (2005).

1.1 Uma introdução à teoria de probabilidade

De acordo com Oksendal (2003) tem-se a seguinte definição para uma σ -álgebra de eventos:

Definição 1. *Se Ω for um determinado conjunto dado, então uma σ -álgebra \mathcal{F} em Ω é uma família \mathcal{F} de subconjuntos de Ω com as seguintes propriedades:*

- (i) $\emptyset \in \mathcal{F}$;
- (ii) $F \in \mathcal{F} \Rightarrow F^C \in \mathcal{F}$, onde $F^C = \Omega \setminus F$ é o complementar de F no conjunto Ω ;
- (iii) $A_1, A_2, \dots, \in \mathcal{F} \Rightarrow A := \cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

O par (Ω, \mathcal{F}) é chamado de espaço mensurável. Uma medida de probabilidade P em um espaço mensurável (Ω, \mathcal{F}) é uma função $P : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ tal que:

- $P(\emptyset) = 0$, $P(\Omega) = 1$;
- Se $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$ e $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ são disjuntos, isto é, $A_i \cap A_j = \emptyset$ sempre que $i \neq j$, então:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

A tripla (Ω, \mathcal{F}, P) é chamado de espaço de probabilidade. Os subconjuntos F de Ω que pertencem a \mathcal{F} são chamados de espaços \mathcal{F} -mensurável. Em um contexto de probabilidade estes conjuntos são chamados de eventos e usa-se a interpretação

$$P(F) = \text{“a probabilidade de que o evento } F \text{ ocorra”}.$$

Em particular, se $P(F) = 1$ é dito que “ F ocorre com probabilidade 1”.

Em outras palavras, Ω denota o espaço amostral e \mathcal{F} é a classe de eventos aleatórios que, satisfeitas as propriedades da Definição 1, chama-se σ -álgebra.

De forma resumida, tem-se que:

- Ω é o espaço amostral;
- Os elementos da σ -álgebra \mathcal{F} são os eventos;
- A cada evento $F \in \mathcal{F}$ associa-se uma probabilidade $P(F)$.

Dado que a σ -álgebra \mathcal{F} fornece informações sobre quais eventos são possíveis de ocorrer, então \mathcal{F} pode ser considerada como um conjunto de informações do espaço de probabilidade.

Dizemos que a função $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é uma variável aleatória (v.a.) se dados dois números a e $b \in \mathbb{R}$, todas as possibilidades de resultado para as quais X assume valores entre a e b formam um conjunto que é um evento (um elemento da σ -álgebra \mathcal{F}), ou seja:

$$\{\omega \in \Omega; a < X(\omega) < b\} \in \mathcal{F}. \quad (1.1)$$

Neste caso, é dito que X é \mathcal{F} -mensurável.

1.1.1 Distribuição Gaussiana e Esperança

Segundo Calin (2015), considere X uma variável aleatória definida em um espaço de probabilidade (Ω, \mathcal{F}, P) . Chama-se função de distribuição de X a função $F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ definida como:

$$F_X(x) = P(\omega; X(\omega) \leq x). \quad (1.2)$$

A função distribuição é crescente e satisfaz os limites:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1.$$

Se

$$\frac{d}{dx} F_X(x) = p(x),$$

então $p(x)$ é chamada de função densidade de probabilidade. E neste caso:

$$P(a < X < b) = P(\omega; a < X(\omega) < b) = \int_a^b p(x) dx. \quad (1.3)$$

Chamamos de esperança da variável aleatória X o número:

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\Omega} X(\omega) dP(\omega) = \int_{\mathbb{R}} xp(x) dx, \quad (1.4)$$

onde $p(x)$ é a função densidade de probabilidade. É normal na literatura denotar-se a esperança de uma variável aleatória por μ ou chama-lá de “média”.

Proposição 1. *A esperança \mathbb{E} é um operador linear, isto é, para quaisquer variáveis aleatórias integráveis X e Y valem as seguintes propriedades:*

$$(i) \mathbb{E}[cX] = c\mathbb{E}[X], \quad \forall c \in \mathbb{R};$$

$$(ii) \mathbb{E}[X + Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y].$$

A prova desta proposição segue do fato de que a integral é um operador linear.

A variância de X é uma medida de dispersão, denotada por $Var(X)$ e definida como:

$$Var(X) = \int_{\Omega} |X(\omega) - \mathbb{E}[X]|^2 dP(\omega) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]. \quad (1.5)$$

Um resultado útil para a variância é que:

$$Var(X) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2. \quad (1.6)$$

Dentre as principais distribuições de probabilidade existentes na literatura, destaca-se neste trabalho a distribuição Gaussiana (ou também chamada de Normal). Será enunciado mais adiante que o movimento Browniano (processo estocástico contínuo) tem distribuição normal.

Uma variável aleatória X tem distribuição normal se a sua função densidade de probabilidade é dada por:

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}, \quad (1.7)$$

onde μ e $\sigma > 0$ são parâmetros constantes. A média e variância são dadas por:

$$\mathbb{E}[X] = \mu, \quad Var(X) = \sigma^2.$$

Para indicar que uma variável aleatória tem uma certa distribuição de probabilidades, neste caso, a distribuição normal, utiliza-se o símbolo “ \sim ”. Logo, a notação quando X tem distribuição normal com média μ e variância σ^2 é:

$$X \sim N(\mu, \sigma^2),$$

onde N é a distribuição normal de parâmetros μ e σ^2 .

1.1.2 Esperança Condicional

Nessa subseção, será definido o conceito de esperança condicional, bem como algumas de suas propriedades. Esses resultados serão úteis para a demonstração de algumas propriedades do processo estocástico contínuo chamado movimento Browniano, que será enunciado nas próximas seções.

Seja X uma variável aleatória definida em um espaço de probabilidade (Ω, \mathcal{F}, P) , e considere \mathcal{G} uma σ -álgebra contida em \mathcal{F} . A esperança de X , dada a informação \mathcal{F}

deve ser o próprio X . Em notação, escreve-se que $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}] = X$. Agora, a esperança de X dada a informação \mathcal{G} é uma variável aleatória denotada por $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$, e definida através das seguintes propriedades:

(i) $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ é \mathcal{G} -mensurável (ou previsível);

$$(ii) \int_A \mathbb{E}[X|\mathcal{G}] dP = \int_A X dP, \quad \forall A \in \mathcal{G}.$$

$\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ é chamada a esperança condicional de X dado \mathcal{G} . A existência da variável aleatória $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$, sendo \mathcal{G} -mensurável, é garantida pelo teorema de *Radon-Nikodym*¹. Observa-se que a esperança de X é um número real, enquanto a esperança condicional $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ é uma variável aleatória.

Sejam X e Y duas variáveis aleatórias definidas em um espaço de probabilidade (Ω, \mathcal{F}, P) , têm-se as seguintes propriedades:

(i) Linearidade:

$$\mathbb{E}[aX + bY|\mathcal{G}] = a\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] + b\mathbb{E}[Y|\mathcal{G}], \quad \forall a, b \in \mathbb{R};$$

(ii) Fatorando a parte mensurável:

$$\mathbb{E}[XY|\mathcal{G}] = X\mathbb{E}[Y|\mathcal{G}],$$

se X for \mathcal{G} -mensurável. Em particular, $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = X$;

(iii) Propriedade da torre:

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]|\mathcal{H}] = \mathbb{E}[X|\mathcal{H}],$$

desde que $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$;

(iv) Positividade:

$$\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] \geq 0, \quad \text{sempre que } X \geq 0;$$

(v) Esperança condicional de uma constante é a própria constante:

$$\mathbb{E}[c|\mathcal{G}] = c;$$

¹O teorema Radon-Nikodym é enunciado em Calin (2015, p. 15)

(vi) Se X é independente da informação \mathcal{G} :

$$\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = \mathbb{E}[X].$$

1.2 Uma introdução a processos estocásticos

Um processo estocástico em um espaço de probabilidade (Ω, \mathcal{F}, P) é uma família de variáveis aleatórias X_t parametrizadas por $t \in \mathbf{T}$, onde $\mathbf{T} \subset \mathbb{R}$. O objeto de estudo na área de sistemas dinâmicos estocásticos é realizar previsões a respeito do que pode acontecer com determinado processo, modelado por uma variável aleatória, em algum tempo futuro. Para isso, trabalha-se com uma sequência infinita de variáveis aleatórias. Se \mathbf{T} é um intervalo, diz-se que X_t é um processo estocástico em tempo contínuo. Agora, se $\mathbf{T} = 1, 2, 3, \dots$, diz-se que X_t é um processo estocástico em tempo discreto. A evolução no tempo dada pela função $t \mapsto X_t(\omega)$, para um $\omega \in \Omega$ fixo, é chamada de caminho ou realização do processo X_t .

Considera-se que toda a informação acumulada até o instante t está contida na σ -álgebra \mathcal{F}_t . Isso significa que \mathcal{F}_t contém a informação de quais eventos já ocorreram até o tempo t e quais não ocorreram. Como o fluxo de informações é crescente com o tempo, tem-se que:

$$\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}, \quad (1.8)$$

para qualquer $s, t \in \mathbf{T}$, com $s \leq t$. A família de σ -álgebras \mathcal{F}_t é chamada de filtração. Um processo estocástico X_t é dito adaptado à filtração \mathcal{F}_t se X_t for \mathcal{F}_t -mensurável, para qualquer $t \in \mathbf{T}$. Na próxima subseção será definida uma classe importante de processos estocásticos denominada por Martingale.

1.2.1 Martingales e Movimento Browniano

De acordo com Doob (1971), a teoria de martingales foi inspirada em modelos de jogos de azar com o intuito de prever os ganhos futuros do apostador. Em particular, um martingale é uma sequência de variáveis aleatórias, isto é, um processo estocástico que satisfaz certas propriedades. Para Ruffino (2012), a teoria de martingales se estende

enormemente, apresentando várias interseções em problemas geométricos, analíticos e probabilísticos. Uma ideia intuitiva que se pode ter de um martingale é que, dada a informação do processo X no tempo presente s , representado pelo conjunto de informações disponíveis \mathcal{F}_s , se fosse necessário inferir sobre o estado futuro X_t , onde $t \geq s$, em média, os valores do processo permanecem no mesmo estado.

Definição 2. *Um processo estocástico $X_t, t \in \mathbf{T}$, é chamado de martingale com respeito a filtração \mathcal{F}_t se*

- (i) X_t é integrável para cada $t \in \mathbf{T}$;
- (ii) X_t é adaptado a filtração \mathcal{F}_t ;
- (iii) $X_s = \mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_s], \quad \forall s < t$.

A primeira condição da definição acima significa que o valor esperado de X_t é finito, isto é, $\mathbb{E}[|X_t|] = \int_{\Omega} |X_t| dP < \infty$. Já a segunda diz que o valor X_t é conhecido, dado o conjunto de informações \mathcal{F}_t . De forma equivalente, pode-se dizer que X_t é \mathcal{F}_t -mensurável. A terceira condição diz que a melhor previsão para a média de X_t conhecendo-se a informação até o tempo $s < t$ é a variável aleatória no instante s , ou seja, X_s .

Ruffino (2012) afirma que dentre os processos estocásticos, o movimento Browniano (abrevia-se MB) é um dos mais ricos em propriedades geométricas e analíticas. E que a partir dessas propriedades, percebe-se que o cálculo estocástico não serve apenas como mais um modelo de ruído em sistemas dinâmicos, mas é uma ferramenta que traz informações sobre as propriedades geométricas e analíticas do espaço onde se está trabalhando.

De acordo com Calin (2015), tem-se a seguinte definição para o movimento Browniano:

Definição 3. *Um movimento Browniano é um processo estocástico denotado por B_t , $t \geq 0$, que satisfaz as seguintes condições:*

- (i) O processo inicia-se na origem (no caso unidimensional), $B_0 = 0$;
- (ii) B_t tem incrementos independentes;

(iii) O processo B_t é contínuo em t ;

(iv) Os incrementos $B_t - B_s$ são normalmente distribuídos com média zero e variância $|t - s|$, ou seja:

$$B_t - B_s \sim N(0, |t - s|).$$

Embora na definição acima, o movimento Browniano inicia-se na origem, de acordo com Klebaner (2005) pode-se ter um MB iniciado num valor x , ou seja, $B_0 = x$. Não será provado neste trabalho a existência do movimento Browniano, uma construção detalhada pode ser encontrada em Evans (2013, p. 38).

Sobre a condição (ii), de acordo com Klebaner (2005) incrementos independentes significa que $B_t - B_s$, com $t > s$ independe do passado. Ou seja, para $u \leq s$, a ocorrência de $B_t - B_s$ não depende de B_u , ou da σ -álgebra \mathcal{F}_u gerada por B_u . Ou ainda, para todo tempo $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$ fixado, as variáveis aleatórias $B_{t_1} - B_0$, $B_{t_2} - B_{t_1}$, \dots , $B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ são independentes. Logo, a distribuição de $B_t - B_s$ depende apenas do intervalo de tempo $t - s$, isto é,

$$P(B_{t+s} - B_s \leq a) = P(B_t - B_0 \leq a) = P(B_t \leq a).$$

Da condição (iv), para $s = 0$, segue que $B_t \sim N(0, t)$.

Segundo Klebaner (2005) se o processo inicia-se em x , i.e $B_0 = x$, então B_t tem distribuição $N(x, t)$.

Sabendo-se que B_t tem distribuição normal com média zero e variância t , pode-se calcular a probabilidade do movimento Browniano passar em determinados intervalos. Isto é,

$$P(a \leq B_t \leq b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \cdot \int_a^b \exp^{-\frac{x^2}{2t}} dx, \quad \forall t > 0, \quad a \leq b.$$

O exemplo a seguir ilustra os cálculos de algumas probabilidades envolvendo o movimento Browniano. Considere $B_0 = 0$, vamos determinar $P(B_2 \leq 0)$. Sabe-se que

$B_2 \sim N(0, 2)$, então,

$$P(B_2 \leq 0) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \cdot \int_{-\infty}^0 \exp^{-\frac{x^2}{4}} dx = \frac{1}{2}.$$

A fim de ilustrar uma trajetória amostral de um movimento Browniano iniciado na origem, ou seja, $B_0 = 0$, realizaram-se algumas simulações computacionais em linguagem *Python* utilizando a biblioteca *numpy*, cujo código completo pode ser acessado em:

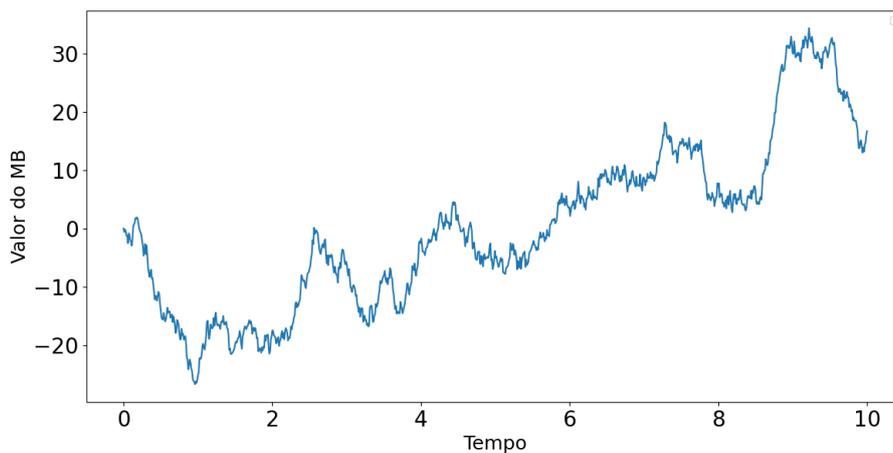
<<https://colab.research.google.com/drive/19DcHmN2ocCeGFswb09zGitntPkWJXEEZ?authuser=0#scrollTo=rxPvCvz9UhQt>>.

No código acima, utilizou-se o comando `np.linspace(0, T, n)`, que cria um vetor com n valores igualmente espaçados no intervalo de 0 a T , onde:

- 0 : Início do intervalo,
- T : Fim do intervalo;
- n : Número total de pontos desejados no vetor.

Nesta simulação, adotou-se arbitrariamente os valores $n = 1000$ e $T = 10$, gerando um incremento de tempo igual a 0,01 que resulta na seguinte ilustração:

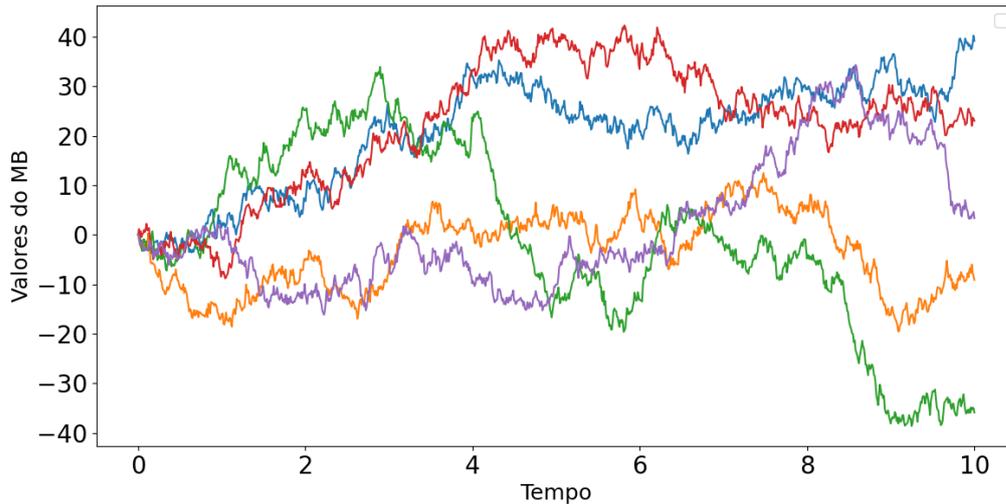
Figura 1.1: Uma trajetória amostral para o movimento Browniano



Fonte: Autoria própria

A seguir, utilizando o mesmo código e os mesmos valores para T e n do Exemplo 2, realizaram-se cinco trajetórias amostrais para o movimento Browniano iniciado na origem. Para isso, basta fazer $d = 5$ no código. Essa alteração gera a seguinte ilustração:

Figura 1.2: Cinco trajetórias amostrais para o movimento Browniano



Fonte: Autoria própria

O movimento Browniano tem as seguintes propriedades:

- (i) $\mathbb{E}[B_t^2] = t$;
- (ii) $\mathbb{E}[B_s B_t] = s$, $0 < s < t$.

De fato, para verificar o item (i), notemos que: $Var(B_t) = \mathbb{E}[B_t^2] - (\mathbb{E}[B_t])^2$. Como $\mathbb{E}[B_t] = 0$ e $Var(B_t) = t$, segue que $\mathbb{E}[B_t^2] = t$.

Para verificar o item (ii), notemos que:

$$B_s B_t = (B_s - B_0)(B_t - B_s) + B_s^2.$$

Pela independência dos incrementos, temos:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[B_s B_t] &= \mathbb{E}[(B_s - B_0)(B_t - B_s) + B_s^2] \\ &= \mathbb{E}[(B_s - B_0)(B_t - B_s)] + \mathbb{E}[B_s^2] \\ &= \mathbb{E}[B_s - B_0]\mathbb{E}[B_t - B_s] + \mathbb{E}[B_s^2]. \end{aligned}$$

Como $\mathbb{E}[B_t - B_s] = 0$ e $\mathbb{E}[B_s^2] = s$, segue que $\mathbb{E}[B_s B_t] = s$.

O item (ii) significa que, embora os incrementos $B_t - B_s$, $s < t$, sejam independentes no tempo, B_t e B_s não são independentes. Caso contrário, teria-se que $\mathbb{E}[B_s B_t] = \mathbb{E}[B_s] \mathbb{E}[B_t] = 0$.

A proposição seguinte segue de acordo com Calin (2015) e refere-se à esperança e variância dos incrementos do movimento Browniano.

Proposição 2. *Seja B_t um movimento Browniano. Se $s < t$, tem-se que:*

$$(i) \quad \mathbb{E}[(B_t - B_s)^2] = t - s.$$

$$(ii) \quad \text{Var}((B_t - B_s)^2) = 2(t - s)^2.$$

Uma outra propriedade importante do movimento Browniano é de ser um martingale. Segundo Calin (2015) para provar essa afirmação, utiliza-se a seguinte proposição:

Proposição 3 (Desigualdade de Jensen). *Seja $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função convexa e X uma variável aleatória integrável no espaço de probabilidade (Ω, \mathcal{F}, P) . Se $\varphi(X)$ é integrável, então*

$$\varphi(\mathbb{E}[X]) \leq \mathbb{E}[\varphi(X)].$$

A demonstração da Proposição (3) pode ser conferida em Calin (2015, p. 32).

Proposição 4. *Um movimento Browniano B_t é um martingale em relação ao conjunto de informações gerada pelo próprio B_t , isto é, $\mathcal{F}_t = \sigma(B_s; s \leq t)$.*

Demonstração: Para mostrar que $\mathbb{E}[|B_t|] < \infty$, considera-se a função $\varphi(x) = x^2$. Da desigualdade de Jensen, tem-se que

$$(\mathbb{E}[B_t])^2 \leq \mathbb{E}[B_t^2]$$

Como $\mathbb{E}[B_t^2] = \text{Var}(B_t) = t$, segue que

$$\mathbb{E}[|B_t|]^2 \leq \mathbb{E}[B_t^2] = \text{Var}(B_t) = |t| < \infty,$$

logo, $(\mathbb{E}[B_t])^2 < \infty$ e portanto, o valor esperado de B_t é integrável. Agora, sabe-se que B_t é \mathcal{F}_t -mensurável e que pode-se reescrever $B_t = B_s + (B_t - B_s)$, então, utilizando as propriedades de esperança condicional, tem-se que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[B_t|\mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}[B_s + (B_t - B_s)|\mathcal{F}_s] \\ &= \mathbb{E}[B_s|\mathcal{F}_s] + \mathbb{E}[B_t - B_s|\mathcal{F}_s].\end{aligned}$$

Nota-se que $\mathbb{E}[B_s|\mathcal{F}_s] = B_s$, e como o movimento Browniano tem incrementos independentes, segue que $\mathbb{E}[B_t - B_s|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[B_t - B_s]$. Então,

$$\mathbb{E}[B_s|\mathcal{F}_s] + \mathbb{E}[B_t - B_s|\mathcal{F}_s] = B_s + \mathbb{E}[B_t - B_s].$$

Como os incrementos do MB tem média zero, isto é, $\mathbb{E}[B_t - B_s] = 0$, segue que $\mathbb{E}[B_t|\mathcal{F}_s] = B_s$. ■

Anteriormente, afirmou-se que é possível calcular a probabilidade de B_t passar por um determinado intervalo $[a, b]$ em $t \geq 0$. De acordo com Evans (2013), pode-se calcular a probabilidade do movimento Browniano passar por uma quantidade finita de intervalos. Para ilustrar esse fato, suponha que o intervalo $[a, b]$ seja particionado em uma quantidade finita de subintervalos $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$ com $a_i \leq b_i$, para $i = 1, \dots, n$. Considera-se agora o intervalo $[a_1, b_1]$ e que $B_{t_1} = x_1$, com $a_1 \leq x_1 \leq b_1$. Sabe-se que B_{t_1} tem distribuição normal com média x_1 (pois está centrado em x_1) e variância $t_2 - t_1$. Ou seja,

$$P(a_1 \leq B_{t_1} \leq b_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t_1}} \cdot \int_{a_1}^{b_1} \exp^{-\frac{x_1^2}{2t_1}} dx_1.$$

Assim, a probabilidade de que $a_2 \leq B_{t_2} \leq b_2$, dado que $B_{t_1} = x_1$ deve ser igual a

$$P(a_2 \leq B_{t_2} \leq b_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_2 - t_1)}} \cdot \int_{a_2}^{b_2} \exp^{-\frac{(x_2 - x_1)^2}{2(t_2 - t_1)}} dx_2.$$

Logo, tem-se que

$$P(a_1 \leq B_{t_1} \leq b_1, a_2 \leq B_{t_2} \leq b_2) = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} g(x_1, t_1 | 0)g(x_2, t_2 - t_1 | x_1)dx_2dx_1,$$

onde,

$$g(x, t | y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp^{-\frac{(x-y)^2}{2t}}.$$

Genericamente, tem-se a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} & P(a_1 \leq B_{t_1} \leq b_1, \dots, a_n \leq B_{t_n} \leq b_n) = \\ & = \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_n}^{b_n} g(x_1, t_1 | 0) g(x_2, t_2 | x_1) \cdots g(x_n, t_n | x_{n-1}) dx_n \cdots dx_1. \end{aligned}$$

Maiores detalhes desse resultado pode ser visto em Evans (2013, p. 39).

Uma característica interessante de alguns processos estocásticos é a propriedade de *Markov* ou ser *Markoviano*, a qual afirma que o estado do processo no tempo futuro depende apenas do seu estado atual. Ou seja, as informações em tempos anteriores, não interferem no estado futuro. A distribuição de probabilidade condicional de X_{t+s} , $s \leq t$ depende apenas de X_t , onde X é um processo estocástico. Klebaner (2005) afirma que o movimento Browniano tem a propriedade de Markov que é definida formalmente da seguinte forma:

Definição 4. X_t é um processo de Markov se para todo t e $s > 0$, a probabilidade condicional de X_{t+s} dado a informação \mathcal{F}_t é a mesma que a distribuição condicional de X_{t+s} dado X_t , isto é:

$$P(X_{t+s} \leq y | \mathcal{F}_t) = P(X_{t+s} \leq y | X_t). \quad (1.9)$$

Como pode ser visto em Evans (2013), o movimento Browniano não é diferenciável em nenhum ponto. Esta propriedade pode ser justificada pelo fato do MB ser Markoviano (ou seja, ter a propriedade de Markov). Se $B_s = p$, então o seu comportamento futuro no tempo t depende apenas do estado presente e não de como B_t se aproxima do valor p quando t tende a s , como é feito na teoria do cálculo diferencial. Sendo assim, não é possível determinar uma reta tangente em nenhum ponto da trajetória do movimento Browniano. Uma demonstração mais detalhada desse fato pode ser vista em Klebaner (2005, p. 64).

Adiante, será apresentada uma propriedade importante do movimento Browniano em relação à sua variação quadrática. Ou seja, o MB é convergente em média quadrática.

Definição 5. *É dito que um processo X_t converge para X em média quadrática se*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[(X_t - X)^2] = 0.$$

Neste caso escreve-se $ms\text{-}\lim_{t \rightarrow \infty} X_t = X$.

Observação 1. *Na descrição do limite em média quadrática, é comum empregar a notação "ms" à esquerda do símbolo de limite, representando o termo em inglês **mean square**. Essa notação será adotada neste trabalho sempre que se referir à convergência em média quadrática de um processo estocástico.*

A fim de demonstrar que a variação quadrática do movimento Browniano no intervalo $[0, T]$ é T , apresentamos as Proposições 5 e 6, baseadas em Calin (2015, p. 104) e Calin (2015, p. 109), respectivamente:

Proposição 5. *Seja X_t um processo estocástico tal que $\mathbb{E}[X_t] \rightarrow k$, onde k é uma constante, e $Var(X_t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$. Então,*

$$ms\text{-}\lim_{t \rightarrow \infty} X_t = k.$$

Demonstração: Precisamos mostrar que $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[(X_t - k)^2] = 0$.

Notemos primeiramente que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(X_t - k)^2] &= \mathbb{E}[X_t^2 - 2kX_t + k^2] = \mathbb{E}[X_t^2] - 2k\mathbb{E}[X_t] + k^2 \\ &= \mathbb{E}[X_t^2] - 2k\mathbb{E}[X_t] + k^2 + \mathbb{E}[X_t]^2 - \mathbb{E}[X_t]^2 \\ &= (\mathbb{E}[X_t^2] - \mathbb{E}[X_t]^2) + (\mathbb{E}[X_t]^2 - 2k\mathbb{E}[X_t] + k^2) \\ &= Var(X_t) + (\mathbb{E}[X_t] - k)^2. \end{aligned}$$

Então,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[(X_t - k)^2] = \lim_{t \rightarrow \infty} (Var(X_t) + (\mathbb{E}[X_t] - k)^2).$$

Como por hipótese $Var(X_t) \rightarrow 0$ e $\mathbb{E}[X_t] \rightarrow k$ quando $t \rightarrow \infty$, segue que $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[(X_t - k)^2] = 0$.

■

Proposição 6. *Seja $T > 0$ e uma partição equidistante $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = T$. Então*

$$ms - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 = T.$$

Demonstração: Considera-se uma partição equidistante do intervalo $[0, T]$. Cada subintervalo tem tamanho $|t_n - t_{n-1}|$, isto é $|t_n - t_{n-1}| = \frac{T}{n}$.

Considera-se agora a variável aleatória X_n tal que

$$X_n = \sum_{i=0}^{n-1} (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2.$$

Calculando-se a esperança de X_n , tem-se que

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\sum_{i=0}^{n-1} (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 \right] &= \mathbb{E} \left[(B_{t_1} - B_{t_0})^2 + \dots + (B_{t_n} - B_{t_{n-1}})^2 \right] \\ &= \mathbb{E} \left[(B_{t_1} - B_{t_0})^2 \right] + \dots + \mathbb{E} \left[(B_{t_n} - B_{t_{n-1}})^2 \right] \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E} \left[(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 \right]. \end{aligned}$$

Sabe-se que $Var((B_{t_{i+1}} - B_{t_i})) = \mathbb{E} \left[(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 \right] - \left(\mathbb{E}[(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})] \right)^2$.

Como os incrementos do movimento Browniano tem média zero e variância $|t_{i+1} - t_i|$, segue que

$$Var((B_{t_{i+1}} - B_{t_i})) = \mathbb{E} \left[(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 \right] = |t_{i+1} - t_i|.$$

Logo,

$$\sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E} \left[(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 \right] = \sum_{i=0}^{n-1} |t_{i+1} - t_i|.$$

Então,

$$\mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E} \left[\sum_{i=0}^{n-1} (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 \right] = \sum_{i=0}^{n-1} |t_{i+1} - t_i| = \sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i) = t_n - t_0 = T,$$

e portanto, a esperança de X_n é T . Analisando-se agora a variância de X_n , temos que:

$$\begin{aligned} \text{Var}(X_n) &= \text{Var}\left(\sum_{i=0}^{n-1} (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2\right) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \text{Var}\left((B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2\right) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} 2(t_{i+1} - t_i)^2 \\ &= 2 \cdot n \cdot \left(\frac{T}{n}\right)^2 \\ &= \frac{2T^2}{n}. \end{aligned}$$

Acima usamos o fato de que o intervalo $[0, T]$ foi dividido em n partes equidistantes, Logo, $t_{i+1} = t_i + \frac{T}{n}$.

Calculando o limite, tem-se:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2T^2}{n} = 0.$$

Conclusões:

- i. $\mathbb{E}[X_n] = T, \forall n \geq 1$;
- ii. $\text{Var}(X_n) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$.

Portanto, pela Proposição 5 segue que

$$\text{ms-} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 = T.$$

■

Dos resultados apresentados até agora, podem-se enunciar as seguintes propriedades para as trajetórias do movimento Browniano como funções de t , segundo Klebaner (2005):

- (i) É uma função contínua de t ;
- (ii) Não é monótona em nenhum intervalo;
- (iii) Não é diferenciável em nenhum ponto;

(iv) Tem variação total infinita em qualquer intervalo;

(v) Tem variação quadrática em $[0, T]$ igual a T .

Destaca-se que as propriedades (i) e (iii) afirmam que, embora qualquer trajetória do movimento Browniano seja uma função contínua de t , tem-se que os incrementos ΔB_t ao longo de intervalos de comprimento Δt são muito maiores do que Δt , quando este tende a zero. Para a propriedade (iv), utiliza-se a afirmação de que se uma função contínua é de variação total finita, então a sua variação quadrática é zero. A justificativa dessa afirmação pode ser conferida em Klebaner (2005, p. 8). O autor argumenta que, utilizando este resultado, uma variação quadrática estritamente positiva implica variação total infinita, de modo que a propriedade (iv) segue da propriedade (v). Como uma função monótona tem variação finita, a propriedade (ii) também decorre da propriedade (iv). Sabe-se da análise real que uma função contínua com derivada limitada é de variação finita. Logo, segue da propriedade (iv) que B_t não pode ter derivada limitada em nenhum intervalo. Uma demonstração detalhada para a não-diferenciabilidade do movimento Browniano é feita em Evans (2013, p. 53).

O movimento Browniano também pode ser definido em dimensões superiores, como afirma Evans (2013, p. 49):

Definição 6. *Um processo estocástico $B(\cdot) = (B_1(\cdot), B_2(\cdot), \dots, B_n(\cdot))$ com valores em \mathbb{R}^n é um movimento Browniano n -dimensional com as seguintes características:*

i. Para cada $k = 1, 2, \dots, n$, $B_k(\cdot)$ é um movimento Browniano unidimensional;

ii. As σ -álgebras $\mathcal{F}^k := \mathcal{U}(B_k(t); t \geq 0)$ são independentes, com $k = 1, 2, \dots, n$.

Sendo assim, pode-se construir um espaço de probabilidade com n movimentos Browniano unidimensionais independentes $B_k(\cdot)$, $k = 1, 2, \dots, n$. Logo, $B(\cdot) = (B_1(\cdot), B_2(\cdot), \dots, B_n(\cdot))$ é um movimento Browniano n -dimensional. Para Klebaner (2005), assim como no caso unidimensional, o movimento Browniano em \mathbb{R}^n é um processo Gaussiano que tem a propriedade de Markov e tem densidade de probabilidade dada por

$$p_t(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp^{-|x-y|^2/2t},$$

onde x e y são vetores n -dimensional e $|x|^2$ é a norma de x .

A integral de Itô e equações diferenciais estocásticas

Neste capítulo, o objetivo é introduzir os conceitos principais do cálculo estocástico e das equações diferenciais estocásticas (EDE), que serão úteis posteriormente na teoria de controle ótimo estocástico. Serão apresentadas algumas regras de diferenciação para processos estocásticos, analogamente ao que é feito na teoria do cálculo diferencial e integral. Na sequência, será enunciada a fórmula de Itô e, finalmente, será apresentada uma definição para as EDEs. Essas equações são usadas para descrever a evolução de um sistema e se baseiam na integral de Itô e suas propriedades.

2.1 Uma introdução à Integral de Itô

Segundo Calin (2015), a integral de Itô é um dos tipos de integrais estocásticas mais úteis e foi introduzida no ano de 1944 pelo matemático japonês Kiyoshi Itô. Ela é definida de maneira semelhante à integral de Riemann. A integral de Itô é tomada em relação aos incrementos infinitesimais de um movimento browniano dB_t , que são variáveis aleatórias, enquanto a integral de Riemann considera a integração em relação às mudanças infinitesimais previsíveis dt . A integral de Itô é uma variável aleatória, enquanto a integral de Riemann é apenas um número real. No cálculo estocástico, são utilizadas as relações infinitesimais do movimento Browniano. Nesse capítulo,

os incrementos infinitesimais $B_{t_{i+1}} - B_{t_i}$ no intervalo de tempo dt serão denotados por dB_t . Sendo assim, as propriedades mencionadas no capítulo anterior podem ser reescritas como $\mathbb{E}[dB_t] = 0$ e $\mathbb{E}[(dB_t)^2] = dt$. Na sequência, tem-se algumas propriedades importantes do cálculo estocástico que serão utilizadas no decorrer deste trabalho.

Proposição 7. *Partindo-se dos incrementos infinitesimais, tem-se as seguintes relações fundamentais do cálculo estocástico:*

i. $(dB_t)^2 = dt;$

ii. $dt dB_t = 0;$

iii. $(dt)^2 = 0.$

A interpretação de cada item é a seguinte:

i. Retomando a Proposição 6 do capítulo anterior, foi demonstrado que

$$\text{ms - } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 = T.$$

O lado direito pode ser considerado como uma integral de Riemann

$$\int_0^T dt = T,$$

enquanto o lado esquerdo pode ser considerado como uma integral estocástica em relação a $(dB_t)^2$:

$$\int_0^T (dB_t)^2 = \text{ms - } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2.$$

Logo, tem-se que

$$\int_0^T (dB_t)^2 = \int_0^T dt, \quad \forall T > 0. \quad (2.1)$$

O que justifica escrever na forma diferencial

$$(dB_t)^2 = dt. \quad (2.2)$$

Para o item *ii.* considera-se $T > 0$ e uma partição equidistante $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = T$. Vamos mostrar que

$$\text{ms-} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})(t_{i+1} - t_i) = 0.$$

Ou seja,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\left(\sum_{i=0}^n (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})(t_{i+1} - t_i) - 0 \right)^2 \right] = 0. \quad (2.3)$$

Sejam

- $\Delta B_{t_0} = (B_{t_1} - B_{t_0}), \Delta B_{t_1} = (B_{t_2} - B_{t_1}), \dots, \Delta B_{t_n} = (B_{t_{n+1}} - B_{t_n});$
- $\Delta t_0 = (t_1 - t_0), \Delta t_1 = (t_2 - t_1), \dots, \Delta t_n = (t_{n+1} - t_n).$

Assim, pode-se fazer uma substituição no lado esquerdo da equação (2.3) da seguinte forma:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\left(\sum_{k=0}^n \Delta B_{t_k} \Delta t_k \right)^2 \right]. \quad (2.4)$$

Nota-se que:

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=0}^n \Delta B_{t_k} \Delta t_k \right)^2 &= \sum_{k=0}^n (\Delta B_{t_k} \Delta t_k)^2 + \sum_{k=0}^n \sum_{j=0, j \neq k}^n \Delta B_{t_k} \Delta t_k \Delta B_{t_j} \Delta t_j \\ &= \sum_{k=0}^n (\Delta B_{t_k} \Delta t_k)^2 + 2 \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^{k-1} \Delta B_{t_k} \Delta t_k \Delta B_{t_j} \Delta t_j \end{aligned}$$

Substituindo-se em 2.4:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\sum_{k=0}^n (\Delta B_{t_k} \Delta t_k)^2 + 2 \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^{k-1} \Delta B_{t_k} \Delta t_k \Delta B_{t_j} \Delta t_j \right]. \quad (2.5)$$

Omitindo-se por hora a notação de limite, pode-se utilizar a linearidade da esperança para reescrever a expressão acima como:

$$\mathbb{E} \left[\sum_{k=0}^n (\Delta B_{t_k} \Delta t_k)^2 \right] + 2 \mathbb{E} \left[\sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^{k-1} \Delta B_{t_k} \Delta t_k \Delta B_{t_j} \Delta t_j \right]. \quad (2.6)$$

Da expressão acima nota-se que:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^n(\Delta B_{t_k}\Delta t_k)^2\right] &= \sum_{k=0}^n(\Delta t_k)^2\mathbb{E}[(\Delta B_{t_k})^2] \\ &= \sum_{k=0}^n(\Delta t_k)^3,\end{aligned}$$

pois $\mathbb{E}[(\Delta B_{t_k})^2] = \Delta t_k$.

Tem-se também que:

$$\begin{aligned}2\mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^n\sum_{j=0}^{k-1}\Delta B_{t_k}\Delta t_k\Delta B_{t_j}\Delta t_j\right] &= 2\sum_{k=0}^n\sum_{j=0}^{k-1}E\left[\Delta B_{t_k}\Delta t_k\Delta B_{t_j}\Delta t_j\right] \\ &= 2\sum_{k=0}^n\sum_{j=0}^{k-1}\mathbb{E}\left[\Delta B_{t_k}\Delta B_{t_j}\right]\Delta t_k\Delta t_j \\ &= 0.\end{aligned}$$

pois, o MB tem incrementos independentes, ou seja, $\mathbb{E}[\Delta B_{t_k}\Delta B_{t_j}] = \mathbb{E}[\Delta B_{t_k}]\mathbb{E}[\Delta B_{t_j}] = 0$.

Portanto, a expressão (2.5) fica:

$$\begin{aligned}\lim_{n\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^n(\Delta B_{t_k}\Delta t_k)^2 + 2\sum_{k=0}^n\sum_{j=0}^{k-1}\Delta B_{t_k}\Delta t_k\Delta B_{t_j}\Delta t_j\right] &= \lim_{n\rightarrow\infty}\sum_{k=0}^n(\Delta t_k)^3 \\ &= \lim_{n\rightarrow\infty}\sum_{k=0}^n\left(\frac{T}{n}\right)^3 \\ &= T^3\lim_{n\rightarrow\infty}\sum_{k=0}^n\frac{1}{n^3} \\ &= T^3\lim_{n\rightarrow\infty}\left(n\cdot\frac{1}{n^3}\right) \\ &= T^3\lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{n^2} \\ &= 0.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\text{ms - } \lim_{n\rightarrow\infty}\sum_{i=0}^{n-1}(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})(t_{i+1} - t_i) = 0.$$

Analogamente ao caso *i.* tem-se a forma integral e diferencial da propriedade acima como sendo

$$\int_0^T dB_s ds = 0 \quad \text{e} \quad dB_t dt = 0$$

Para o item *iii.*, considera-se $T > 0$ e uma partição equidistante $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = T$ e que $\Delta_{t_k} = t_{i+1} - t_i$. Vamos verificar que

$$\text{ms - } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n (\Delta_{t_k})^2 = 0. \quad (2.7)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\left(\sum_{k=0}^n (\Delta_{t_k})^2 - 0 \right)^2 \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\left(\sum_{k=0}^n (\Delta_{t_k})^2 \right)^2 \right].$$

Como Δ_{t_k} é um termo determinístico, segue que $\mathbb{E} \left[\sum_{k=0}^n \Delta_{t_k} \right] = \sum_{k=0}^n \Delta_{t_k}$, logo

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n ((\Delta_{t_k})^2)^2 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \left(\left(\frac{T}{n} \right)^2 \right)^2 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \cdot \left(\frac{T}{n} \right)^2 \right)^2 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{T^2}{n} \right)^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Segundo Calin (2015), um processo F_t é chamado de *nonanticipating process*, que em tradução livre significa “processo não antecipado”, se F_t é independente de qualquer incremento futuro do movimento Browniano. Isto é, $B_s - B_t$, para todo t e s com $t < s$. Assim, o processo F_t é independente do comportamento futuro do movimento Browniano, ou seja, não pode antecipar o futuro.

Os processos

- $F_t = B_t$;
- $F_t = e^{B_t}$;

- $F_t = \cos(B_t)$;
- $F_t = B_t^2 - B_t + t$.

são exemplos de processos nos quais conhece-se toda a informação até o tempo t . Como contraexemplo, observam-se os seguintes processos:

- $F_t = B_{t+1}$;
- $F_t = \frac{1}{2}(B_{t+1} - B_t)^2$;
- $F_t = e^{B_{t+1}}$.

Nota-se que os processos acima dependem do tempo futuro $t + 1$, logo, não contemplam a definição de processo não antecipado. Em Kuo (2006, p. 49), é utilizado o termo “adaptado” ao invés de “não antecipado”.

De acordo com Calin (2015), a integral de Itô é definida de maneira similar à integral de Riemann. A integral de Itô é calculada em relação aos incrementos infinitesimais do movimento Browniano, aqui denotados por dB_t , que são variáveis aleatórias, enquanto na integral de Riemann consideram-se às variações infinitesimais determinísticas dt . Apesar dessas diferenças, existem propriedades e relações comuns entre esses dois tipos de integrais. Para definir a integral de Itô, considera-se $0 \leq a < b$ e $F_t = f(B_t, t)$ um processo não antecipado tal que:

$$\mathbb{E} \left[\int_a^b F_t^2 dt \right] < \infty. \quad (2.8)$$

Divide-se o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos, de modo que:

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b.$$

Agora, utilizando-se os pontos da partição, tem-se a seguinte soma parcial:

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} F_{t_i} (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}). \quad (2.9)$$

Como o processo F_t é não antecipativo as variáveis aleatórias F_{t_i} e $B_{t_{i+1}} - B_{t_i}$ são independentes, e essa é uma característica importante na definição da integral de

Itô (CALIN, 2015). A integral de Itô é o limite das somas parciais S_n :

$$\text{ms-} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_a^b F_t dB_t, \quad (2.10)$$

desde que o limite exista. Como a convergência é em relação a média quadrática, pode-se reescrever a expressão (2.10) como:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\left(S_n - \int_a^b F_t dB_t \right)^2 \right] = 0. \quad (2.11)$$

É possível mostrar que a escolha da partição não influencia o valor da integral em (2.10). Logo, podemos assumir que os intervalos são equidistantes, isto é:

$$t_{i+1} - t_i = \frac{b-a}{n}, \quad i = 0, 1, \dots, n-1.$$

A integral estocástica de Itô $\int_a^b F_t dB_t$ existe se o processo $F_t = f(B_t, t)$ satisfaz as seguintes propriedades:

- i. As trajetórias $t \rightarrow F_t(\omega)$ são contínuas em $[a, b]$ para qualquer valor de $\omega \in \Omega$;
- ii. O processo F_t é não antecipativo para $t \in [a, b]$;
- iii. $\mathbb{E} \left[\int_a^b F_t^2 dt \right] < \infty$.

Por exemplo, tem-se as seguintes integrais estocásticas de Itô:

- $\int_0^T B_t^2 dB_t$;
- $\int_0^T \text{sen}(B_t) dB_t$;
- $\int_0^T \frac{\cos(B_t)}{t} dB_t$.

Proposição 8. *Sejam $f(B_t, t)$ e $g(B_t, t)$ processos não antecipativos, a integral de Itô tem as seguintes propriedades:*

i. Média zero:

$$\mathbb{E} \left[\int_a^b f(B_t, t) dB_t \right] = 0;$$

ii. *Isometria:*

$$\mathbb{E} \left[\left(\int_a^b f(B_t, t) dB_t \right)^2 \right] = \mathbb{E} \left[\int_a^b f(B_t, t)^2 dt \right];$$

iii. *Covariância:*

$$\mathbb{E} \left[\left(\int_a^b f(B_t, t) dB_t \right) \left(\int_a^b g(B_t, t) dB_t \right) \right] = \mathbb{E} \left[\int_a^b f(B_t, t) g(B_t, t) dt \right].$$

Proposição 9. *Sejam $f(B_t, t)$ e $g(B_t, t)$ processos não antecipativos e $c \in \mathbb{R}$. Tem-se que:*

(i) *Aditividade:*

$$\int_0^T [f(B_t, t) + g(B_t, t)] dB_t = \int_0^T f(B_t, t) dB_t + \int_0^T g(B_t, t) dB_t.$$

(ii) *Homogeneidade:*

$$\int_0^T cf(B_t, t) dB_t = c \int_0^T f(B_t, t) dB_t.$$

(iii) *Partição:*

$$\int_0^T f(B_t, t) dB_t = \int_0^u f(B_t, t) dB_t + \int_u^T f(B_t, t) dB_t.$$

As demonstrações das Proposições 8 e 9 podem ser verificadas em Calin (2015, p. 100-102). Nota-se que com as propriedades (i) e (ii) da Proposição 8 é possível calcular a variância da integral de Itô. Isto é:

$$\begin{aligned} \text{Var} \left(\int_a^b f(B_t, t) dB_t \right) &= \mathbb{E} \left[\left(\int_a^b f(B_t, t) dB_t \right)^2 \right] - \left(\mathbb{E} \left[\int_a^b f(B_t, t) dB_t \right] \right)^2 \quad (2.12) \\ &= \mathbb{E} \left[\int_a^b f(B_t, t)^2 dt \right]. \end{aligned}$$

Como o movimento Browniano é um martingale, a maneira como a integral de Itô é definida resgata essa propriedade. Ou seja, a integral de Itô também é um martingale. Para demonstrar esse resultado, é necessário utilizar o fato de que a integral de Itô é \mathcal{F}_t -mensurável. Considera-se \mathcal{F}_t como o conjunto de informações gerado pelo movimento Browniano até o tempo t . Isso implica que $F_{t_i} = f(B_{t_i}, t_i)$ e $B_{t_{i+1}} - B_{t_i}$ são conhecidos

no tempo t sempre que $t_{i+1} \leq t$. Logo, a soma parcial $S_n = \sum_{i=0}^{n-1} F_{t_i}(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})$ é \mathcal{F}_t -mensurável.

Proposição 10. *Para todo $s < t$, tem-se que:*

$$\mathbb{E} \left[\int_0^t f(B_u, u) dB_u \mid \mathcal{F}_s \right] = \int_0^s f(B_u, u) dB_u.$$

Demonstração:

Utilizando-se a propriedade (iii) da Proposição 9 e a linearidade da esperança condicional, tem-se que:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\int_0^t f(B_u, u) dB_u \mid \mathcal{F}_s \right] &= \mathbb{E} \left[\int_0^s f(B_u, u) dB_u + \int_s^t f(B_u, u) dB_u \mid \mathcal{F}_s \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\int_0^s f(B_u, u) dB_u \mid \mathcal{F}_s \right] + \mathbb{E} \left[\int_s^t f(B_u, u) dB_u \mid \mathcal{F}_s \right]. \end{aligned}$$

Nota-se que $\mathbb{E} \left[\int_0^s f(B_u, u) dB_u \mid \mathcal{F}_s \right] = \int_0^s f(B_u, u) dB_u$, pois conhece-se a informação até o tempo s . Agora,

$$\mathbb{E} \left[\int_s^t f(B_u, u) dB_u \mid \mathcal{F}_s \right] = \mathbb{E} \left[\int_s^t f(B_u, u) dB_u \right] = 0,$$

pois a integral vai de s até t dada a informação até s , porém os incrementos do movimento Browniano independem do conjunto de informações passadas \mathcal{F}_s . Em seguida utiliza-se a Proposição 8.

Portanto,

$$\mathbb{E} \left[\int_0^t f(B_u, u) dB_u \mid \mathcal{F}_s \right] = \int_0^s f(B_u, u) dB_u, \quad s < t.$$

■

As duas próximas proposições enunciam o fato da integral de Itô ser um processo contínuo e um martingale contínuo. A demonstração pode ser verificada em Calin (2015, p. 104).

Proposição 11. *Considera-se o processo $X_t = \int_0^t f(B_s, s) dB_s$, onde $f(B_s, s)$ é um processo não antecipativo. Então, X_t é um processo contínuo.*

Proposição 12. *Seja $X_t = \int_0^t f(B_s, s)dB_s$, com $\mathbb{E} \left[\int_0^\infty f^2(s, B_s)ds \right] < \infty$. Então X_t é um \mathcal{F}_t -martingale contínuo.*

2.1.1 Diferenciação estocástica

Viu-se anteriormente que o movimento Browniano é um processo estocástico contínuo e não diferenciável. Logo, a razão $\frac{dB_t}{dt}$ não faz sentido no cálculo estocástico, uma vez que não é possível obter retas tangentes em nenhum ponto da trajetória do movimento Browniano. Logo, o que faz sentido são as mudanças infinitesimais de dB_t .

Isto nos motiva, como em Calin (2015, p. 115-117), a mudança no processo X_t entre os instantes t e $t+\Delta_t$ dada por $\Delta X_t = X_{t+\Delta_t} - X_t$. Quando Δ_t é infinitesimalmente pequeno, obtém-se a variação infinitesimal do processo X_t :

$$dX_t = X_{t+dt} - X_t, \quad (2.13)$$

ou equivalentemente $X_{t+dt} = dX_t + X_t$.

Assim como no cálculo diferencial, temos algumas regras básicas para a diferenciação estocástica cujas demonstrações são feitas em Calin (2015, p.139):

i. Regra da constante:

$$d(cX_t) = cd(X_t), \quad (2.14)$$

onde X_t é um processo estocástico e $c \in \mathbb{R}$.

ii. Regra da soma (diferença):

$$d(X_t \pm Y_t) = dX_t \pm dY_t, \quad (2.15)$$

onde X_t e Y_t são processos estocásticos.

iii. Regra do produto:

$$d(X_t Y_t) = X_t dY_t + Y_t dX_t + dX_t dY_t, \quad (2.16)$$

onde X_t e Y_t são processos estocásticos.

Um caso particular é se o processo X_t for uma função determinística $f(t)$. Então, a equação (2.16) pode ser reescrita como

$$d(f(t)Y_t) = f(t)dY_t + Y_tdf(t) + df(t)dY_t. \quad (2.17)$$

iv. Regra do quociente:

$$d\left(\frac{X_t}{Y_t}\right) = \frac{Y_t dX_t - X_t dY_t - dX_t dY_t}{Y_t^2} + \frac{X_t}{Y_t^3} (dY_t)^2; \quad (2.18)$$

onde X_t e Y_t são processos estocásticos.

Existe uma classe de processos estocásticos denominados de difusão de Itô que são da forma

$$dX_t = a(B_t, t)dt + b(B_t, t)dB_t, \quad (2.19)$$

onde a e b são funções.

Para a maioria dos casos práticos, o processo X_t é uma difusão de Itô. No Capítulo 4 que aborda a teoria de controle ótimo estocástico, o processo trabalhado é uma difusão de Itô.

2.1.2 Fórmula de Itô

A fórmula de Itô é análoga à regra da cadeia do cálculo diferencial (determinístico). Antes de introduzi-la, vamos lembrar o seguinte: Considere uma função f contínua e diferenciável até segunda ordem em um ponto fixo x_0 , e sejam $\Delta x = x - x_0$ e $\Delta f(x) = f(x) - f(x_0)$. É possível expressar $\Delta f(x)$ por um polinômio de Taylor de segunda ordem, ou seja:

$$\Delta f(x) = f'(x)\Delta x + \frac{1}{2}f''(x)(\Delta x)^2 + O(\Delta x)^3. \quad (2.20)$$

Quando x está infinitesimalmente próximo de x_0 , pode-se substituir Δx por sua diferencial dx . Logo:

$$df(x) = f'(x)dx + \frac{1}{2}f''(x)(dx)^2 + O(dx)^3. \quad (2.21)$$

Quando os termos de ordem igual ou superior a $(dx)^2$ são desprezados no polinômio de Taylor, tem-se a seguinte expressão:

$$df(x) = f'(x)dx. \quad (2.22)$$

Considerando-se agora x como uma função diferenciável de t , isto é, $x = x(t)$ e substituindo-se em (2.22) tem-se a forma diferencial da regra da cadeia:

$$df(x(t)) = f'(x(t))dx(t) = f'(x(t))x'(t)dt. \quad (2.23)$$

Será apresentada uma fórmula semelhante para o caso estocástico, onde a função determinística $x(t)$ será substituída por um processo estocástico X_t . A composição da função diferenciável f com o processo X_t é um processo denotado por $F_t = f(X_t)$. Desprezando-se os termos de ordem maior ou igual a $(dX_t)^3$ a expressão (2.21) torna-se:

$$dF_t = f'(X_t)dX_t + \frac{1}{2}f''(X_t)(dX_t)^2. \quad (2.24)$$

No cálculo de $(dX_t)^2$ pode-se levar em consideração as relações estocásticas enunciadas nos itens *i*, *ii* e *iii* da Proposição 7. A saber, $(dB_t)^2 = dt$ e $dt dB_t = dt dt = 0$.

A equação (2.19) ilustra um caso especial de incremento dX_t chamado de difusão de Itô. Isto é, um processo X_t que satisfaz a relação:

$$dX_t = a(t, B_t)dt + b(t, B_t)dB_t$$

é chamado de difusão de Itô.

Teorema 1 (Fórmula de Itô). *Se X_t é um processo de difusão de Itô e f é uma função contínua e diferenciável até segunda ordem, então:*

$$dF_t = \left[a(B_t, t)f'(X_t) + \frac{b(B_t, t)^2}{2}f''(X_t) \right] dt + b(B_t, t)f'(X_t)dB_t \quad (2.25)$$

Demonstração: Para provar o teorema acima, novamente serão utilizadas as relações estocásticas da Proposição 7. A saber, $(dB_t)^2 = dt$ e $(dt)^2 = dt dB_t = 0$.

$$\begin{aligned}(dX_t)^2 &= (a(B_t, t)dt + b(B_t, t)dB_t)^2 \\ &= a(B_t, t)^2(dt)^2 + 2a(B_t, t)b(B_t, t)dtdB_t + b(B_t, t)^2(dB_t)^2 \\ &= b(B_t, t)^2dt.\end{aligned}$$

Substituindo-se em (2.24) tem-se que

$$\begin{aligned}dF_t &= f'(X_t)dX_t + \frac{1}{2}f''(X_t)(dX_t)^2 \\ &= f'(X_t)(a(B_t, t)dt + b(B_t, t)dB_t) + \frac{1}{2}f''(X_t)b(B_t, t)^2dt \\ &= \left[a(B_t, t)f'(X_t) + \frac{b(B_t, t)^2}{2}f''(X_t) \right] dt + b(B_t, t)f'(X_t)dB_t.\end{aligned}$$

■

Caso o processo estocástico X_t seja o próprio movimento Browniano B_t , tem-se o seguinte:

Corolário 1. *Considere $F_t = f(B_t)$, então:*

$$dF_t = \frac{1}{2}f''(B_t)dt + f'(B_t)dB_t. \quad (2.26)$$

Demonstração: A demonstração se dá pela substituição direta de $X_t = B_t$ na equação (2.24):

$$\begin{aligned}dF_t &= f'(B_t)dB_t + \frac{1}{2}f''(B_t)(dB_t)^2 \\ &= f'(B_t)dB_t + \frac{1}{2}f''(B_t)dt.\end{aligned}$$

■

É destacado em Calin (2015) que a função f pode também depender do tempo, isto é, $f(t, x)$. Neste caso, a fórmula de Itô fica:

$$df(t, x) = \partial_t f(t, x)dt + \partial_x f(t, x)dx + \frac{1}{2}\partial_x^2 f(t, x)(dx)^2 + O(dx)^3 + O(dt)^2.$$

Fazendo $x = X_t$, tem-se:

$$df(t, X_t) = \partial_t f(t, X_t)dt + \partial_x f(t, X_t)dX_t + \frac{1}{2}\partial_x^2 f(t, X_t)(dX_t)^2.$$

Se X_t é um processo de difusão de Itô, tem-se a seguinte expressão:

$$dF_t = \left[\partial_t f(t, X_t) + a(B_t, t)\partial_x f(t, X_t) + \frac{b(B_t, t)^2}{2}\partial_x^2 f(t, X_t) \right] dt + b(B_t, t)\partial_x f(t, X_t)dB_t. \quad (2.27)$$

No final do Capítulo 1, definimos um movimento Browniano m -dimensional como $B(t) = (B_1(t), B_2(t), \dots, B_m(t))$, onde cada coordenada $B_i(t)$ é um movimento Browniano 1-dimensional independente.

Definimos o processo n -dimensional $X_t = (X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t))$ onde cada $X_i(t)$ é uma difusão de Itô tal que

$$dX_i(t) = b_i(t)dt + \sum_{j=1}^n \sigma_{ij}(t)dB_j(t), \quad i = 1, \dots, n \quad (2.28)$$

onde $\sigma_{ij}(t)$ é uma matriz $n \times m$ de processos estocásticos, $b_i(t)dt$ é um vetor com n processos estocásticos e $dB_j(t)$ são os incrementos do movimento Browniano m -dimensional.

Matricialmente, podemos escrever

$$b(t) = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}, \quad \sigma(t) = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1m} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_{nm} \end{bmatrix}, \quad B(t) = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_m \end{bmatrix}$$

e a equação (2.28) pode ser reescrita na sua forma vetorial

$$dX(t) = b(t)dt + \sigma(t)dB_t.$$

Então, podemos reescrever a equação (2.27) para o caso multidimensional. Considere $f(t, x_1, \dots, x_n)$ uma função contínua em $[0, T] \times \mathbb{R}^n$ ao menos de classe C^2 aplicada em um processo de difusão de Itô $X(t) = (X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t))$. Obtemos assim, um

processo de difusão de Itô $f(t, X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t))$ cuja forma diferencial é dada por

$$df(t, X_1(t), \dots, X_n(t)) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, X_1(t), \dots, X_n(t))dt + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(t, X_1(t), \dots, X_n(t))dX_i(t) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(t, X_1(t), \dots, X_n(t))dX_i(t)dX_j(t) \quad (2.29)$$

onde o produto $dX_i(t)dX_j(t)$ pode ser calculado utilizando uma generalização da Proposição 7 de acordo com a tabela:

Tabela 2.1: Produtos diferenciais

\times	$dB_j(t)$	dt
$dB_i(t)$	$\delta_{ij}dt$	0
dt	0	0

Fonte: (KUO, 2006)

onde

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

2.1.3 Equações diferenciais estocásticas (EDEs)

De acordo com Calin (2015), se pequenas mudanças em um processo estocástico contínuo X_t puderem ser escritas como uma combinação linear de pequenas mudanças em t e pequenos incrementos do movimento Browniano B_t , pode-se escrever que:

$$dX_t = a(t, B_t, X_t)dt + b(t, B_t, X_t)dB_t. \quad (2.30)$$

A expressão acima é chamada de equação diferencial estocástica, ou simplesmente, EDE. As funções $a(t, B_t, X_t)$ e $b(t, B_t, X_t)$ são chamadas de taxa de *drift* e volatilidade, respectivamente.

A equação (2.30) esta na forma diferencial, podendo ter um significado integral:

$$X_t = X_0 + \int_0^t a(s, B_s, X_s)ds + \int_0^t b(s, B_s, X_s)dB_s, \quad (2.31)$$

onde a última integral é uma integral de Itô.

No Capítulo 7 do livro de Calin (2015), é feita uma abordagem por analogia com as equações diferenciais ordinárias (EDOs), apresentando os mesmos métodos de resolução ensinados comumente nos cursos de EDO no Ensino Superior, como o método da variação de parâmetros, equações lineares, exatas, etc., mas aplicados ao caso estocástico. O autor ainda afirma que, para fins mais práticos, a informação mais importante a ser conhecida sobre um processo estocástico é sua média e variância, as quais podem ser encontradas diretamente na EDE, em alguns casos particulares, sem a necessidade de resolver explicitamente a equação.

Tomando-se a esperança em (2.31) tem-se que:

$$\mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E}[X_0] + \mathbb{E} \left[\int_0^t a(s, B_s, X_s) ds \right] + \mathbb{E} \left[\overbrace{\int_0^t b(s, B_s, X_s) dB_s}^{(*)} \right]$$

Nota-se que X_0 é um valor fixo e $(*)$ é uma integral de Itô e portanto, tem média igual a zero. Então, utilizando a definição de esperança, como em Calin (2015, p. 140), tem-se que:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_t] &= X_0 + \mathbb{E} \left[\int_0^t a(s, B_s, X_s) ds \right] \\ &= X_0 + \int_{\mathbb{R}} \int_0^t a(s, B_s, X_s) ds dP \\ &= X_0 + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} a(s, B_s, X_s) dP ds \\ &= X_0 + \int_0^t \mathbb{E}[a(s, B_s, X_s)] ds \end{aligned}$$

Portanto,

$$\mathbb{E}[X_t] = X_0 + \int_0^t \mathbb{E}[a(s, B_s, X_s)] ds. \quad (2.32)$$

Como a esperança na integral é determinística, pode-se aplicar o Teorema Fundamental do Cálculo resultando em:

$$\frac{d}{dt} \mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E}[a(t, B_t, X_t)]. \quad (2.33)$$

Vale destacar que, embora o processo X_t seja não diferenciável, a sua esperança é. No caso da variância, usa-se a relação

$$V(X_t) = \mathbb{E}[X_t^2] - (\mathbb{E}[X_t])^2.$$

Finaliza-se essa subseção com o teorema de existência e unicidade para as soluções das equações diferenciais estocásticas de acordo com o livro de Klebaner (2005).

Considera-se X_t um processo estocástico que satisfaz a seguinte EDE:

$$dX_t = a(X_t, t)dt + b(X_t, t)dB_t. \quad (2.34)$$

Teorema 2. *Se as seguintes condições forem satisfeitas:*

(i) *Os coeficientes são localmente Lipschitz na variável x e uniformemente na variável t , ou seja, para cada T e N , existe uma constante K que depende somente de T e N de modo que, para todo $|x|, |y| \leq N$ e todo $0 \leq t \leq T$*

$$|a(x, t) - a(y, t)| + |b(x, t) - b(y, t)| < K|x - y|; \quad (2.35)$$

(ii) *Os coeficientes satisfazem a condição de crescimento linear*

$$|a(x, t)| + |b(x, t)| \leq K(1 + |x|); \quad (2.36)$$

(iii) *X_0 é independente de $(B_t, 0 \leq t \leq T)$, e $\mathbb{E}[X_0^2] < \infty$,*

então, existe uma única solução forte X_t da EDE (2.34). Tem-se também que X_t possui caminhos contínuos e que

$$\mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} X_t^2 \right] < C \left(1 + \mathbb{E}[X_0^2] \right), \quad (2.37)$$

onde a constante C depende apenas de K e T .

A demonstração da existência é realizada por aproximações sucessivas, semelhante ao que é feito para equações diferenciais ordinárias. Já a unicidade segue utilizando-se

o lema de Gronwall verificando-se que a condição de Lipschitz implica unicidade. Uma demonstração completa deste teorema pode ser encontrada em Oksendal (2003, p. 66).

Uma introdução à teoria de controle ótimo determinístico

A teoria do controle ótimo lida com a otimização de sistemas dinâmicos, demandando uma definição precisa das restrições impostas ao sistema e da função objetivo a ser maximizada ou minimizada. Este capítulo apresenta a formulação de um problema de controle ótimo para sistemas dinâmicos determinísticos, com base nas obras Sethi (2019) e Sun (2006). O objetivo central é introduzir os conceitos fundamentais dessa teoria e expor a equação de Hamilton-Jacobi-Bellman, uma ferramenta indispensável para a análise de controle ótimo em sistemas estocásticos, tema que será explorado em capítulos posteriores.

3.1 Definições preliminares

Esta seção tem como propósito introduzir ao leitor alguns conceitos técnicos pertinentes à pesquisa operacional, como decisão ótima, política ótima e o princípio da otimalidade, os quais são fundamentais na teoria de controle ótimo. Os autores Arenales et al. (2007) ressaltam que a programação dinâmica é uma técnica aplicável à resolução de uma ampla gama de problemas de otimização, sejam eles lineares ou não-lineares, contínuos ou discretos, e envolvendo funções diferenciáveis ou não. Dentre suas aplicações, destacam-se problemas de planejamento da produção, gestão de

estoques, determinação de tamanhos de lotes, problemas de corte e empacotamento, entre outros. Essa abordagem se caracteriza pela decomposição do problema original em uma sequência de problemas menores e mais simples de resolver. De acordo com Arenales et al. (2007) as principais características da programação dinâmica são:

- Estágios: Decomposição do problema em estágios que são resolvidos sequencialmente, um estágio por vez. A solução do problema em cada estágio define valores de parâmetros relevantes para o problema do estágio seguinte na sequência. O decisor toma suas decisões em cada estágio. Assim, pode-se entender como estágio cada ponto em que as decisões são tomadas.
- Estados: Cada estágio tem um número associado de estados. O estado do sistema é a informação necessária para a tomada de decisão. O número de estados possíveis depende das características do problema. O conjunto de estados possíveis forma o espaço de estados.
- Decisões: As decisões que podem ser tomadas dependem do estado observado do sistema. Uma decisão leva um estado do sistema, no qual ele se encontra no presente estágio, para um novo estado no próximo estágio, incorrendo-se um custo.

A sequência de decisões coerentes, isto é, que respeitam as restrições do problema, em cada estágio do mesmo, dado uma condição inicial, dá-se o nome de *política*. Uma *política ótima* é a que otimiza o objetivo desejado.

O matemático estadunidense Richard Bellman é considerado o pai da programação dinâmica tendo publicado o primeiro livro sobre essa teoria nos anos 50, além de uma coleção de artigos sobre o assunto. Um princípio base da programação dinâmica proposto por Richard Bellman e conhecido como *princípio da otimalidade de Bellman* é utilizado para decompor o problema. Este princípio diz que:

“Em um conjunto de decisões ótimas, tem-se a propriedade de que, qualquer que seja a primeira decisão e o estado inicial, as decisões subsequentes têm que ser ótimas com respeito ao estado resultante dessa primeira decisão” (ARENALES et al., 2007, p. 387).

Para Arenales et al. (2007) este princípio é simples e intuitivo, uma vez que, se alguma das decisões subsequentes não fosse ótima com respeito ao estado resultante da primeira decisão, então haveria uma decisão melhor a ser tomada, o que contrariaria o fato de que se trata de um conjunto de decisões ótimas.

No contexto dos problemas de controle, é fundamental considerar a elaboração da modelagem do sistema dinâmico. Isso implica que a descrição matemática do problema deve ser tanto simples quanto realista o suficiente para prever a resposta do sistema, ou seja, o estado do sistema, ao longo do tempo para qualquer estado inicial dado. O modelo inicialmente abordado restringe-se a sistemas que podem ser caracterizados por um conjunto de equações diferenciais ordinárias (EDOs). Define-se a variável real $x(t)$ denominada de *variável de estado* do sistema, no tempo $t \in [0, T]$, onde $T > 0$ representa um horizonte de tempo especificado para o sistema em questão. Segundo Sethi (2019), a variável de estado pode representar o nível de estoque, a quantidade de riqueza, os recursos naturais não consumidos, entre outros. Já a variável de controle $u(t)$ pode representar a taxa de produção em uma indústria, a quantidade de inseticida utilizado na produção agrícola, a dosagem de quimioterapia no tratamento contra o câncer, entre outros.

Dados os valores de $x(t)$, $u(t)$, ambos no tempo $t \in [0, T]$, bem como a condição inicial $x(0) = x_0$ do sistema (isto é, o estado do sistema o tempo inicial $t = 0$) a sua evolução pode ser descrita pela equação diferencial de primeira ordem:

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), u(t), t), \quad x(0) = x_0. \quad (3.1)$$

Essa EDO também pode ser chamada de *equação de estado*, onde $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $t \in [0, T]$ é assumido como um vetor coluna chamado de *trajetória de estado*, o vetor $u(t) \in \mathbb{R}^m$, $t \in [0, T]$ é chamado de *trajetória de controle* e f é um vetor coluna de funções. Vale destacar que $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma função continuamente diferenciável. O autor salienta que conhecendo-se o valor inicial x_0 e a trajetória de controle, isto é, os valores de $u(t)$ durante o intervalo $0 \leq t \leq T$, então, pode-se integrar (3.1) para obter a trajetória de estado $x(t)$. Além disso, é definido como *controle*

admissível uma trajetória de controle $u(t)$ contínua por partes que satisfaz,

$$u(t) \in \mathcal{A}(t) \subset \mathbb{R}^m, \quad t \in [0, T], \quad (3.2)$$

onde $\mathcal{A}(t)$ é o conjunto de valores factíveis (ou viáveis) para a variável de controle no tempo t . Normalmente $\mathcal{A}(t)$ é determinado por restrições físicas ou de natureza econômica sobre os valores de $u(t)$. Para cada controle admissível $u(t) \in \mathcal{A}(t)$ o sistema possui uma única solução $x(t)$ chamada de resposta do sistema ao controle $u(t)$.

3.1.1 A Função Objetivo e o Problema de Controle Ótimo

É destacado em Sethi (2019) que pode-se interpretar uma função objetivo como uma medida quantitativa do desempenho do sistema dinâmico ao longo do tempo. Um controle ótimo é definido como um controle admissível que maximize ou minimize a função objetivo. O propósito é escolher uma trajetória de controle que, juntamente com a trajetória de estado, maximize (ou minimize) a função objetivo.

$$J_{x_0}[u(\cdot)] = S(x(T), T) + \int_0^T F(x(t), u(t), t) dt. \quad (3.3)$$

Ou seja, dado a condição inicial $x_0 \in \mathbb{R}^n$ em (3.1) e $0 \leq t \leq T$, gostaríamos de encontrar, se possível, um controle $u^*(\cdot)$ que maximize (ou minimize) o funcional de custo (3.3) entre todos os outros controles admissíveis. Este é um problema de controle ótimo de horizonte finito. Em problemas empresariais ou econômicos, uma função objetivo fornece uma medida apropriada de quantidades como lucro ou vendas. Se o objetivo é minimizar custos, então a função objetivo a ser maximizada é o negativo do custo.

De forma prática, o autor destaca que em problemas empresariais ou econômicos, uma função objetivo fornece uma medida apropriada de quantidades como lucro ou vendas. Se o objetivo é minimizar custos, então a função objetivo a ser maximizada é o negativo do custo.

As funções $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $S : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ são assumidas como continuamente diferenciáveis. Em uma aplicação de negócios a função $F(x, u, t)$ poderia ser a taxa de lucro instantânea e $S(x, T)$ o valor residual de ter x como estado do

sistema no tempo final T . Note que $x(t) = x$ denota o estado do sistema no tempo t , $u(t) = u$ denota o controle no tempo t e T é o tempo final.

Alguns exemplos para a função custo são descritos abaixo:

- $J = \int_{t_0}^T \sum_{i=1}^m |u_i(\tau)| d\tau$ (Combustível mínimo);
- $J = \frac{1}{2} x^T(T) S(T) x(T) + \int_{t_0}^T \frac{1}{2} [x(\tau)^T Q x(\tau) + u(\tau)^T R u(\tau)] d\tau$ (Energia mínima).

onde $S(T)$ e Q são semi-definidas positivas e R é estritamente positivo.

O objetivo do problema de controle ótimo é determinar um controle admissível $u^* \in \mathcal{A}$ que guie o estado x^* de modo a maximizar (ou minimizar) a função objetivo. Em termos matemáticos, o problema pode ser expresso por:

Encontrar $u^* \in \mathcal{A}$ tal que

$$\begin{cases} \max_{u(t) \in \mathcal{A}(t)} \left\{ S(x(T), T) + \int_0^T F(x, u, t) dt \right\} \\ \frac{dx(t)}{dt} = f(x, u, t), \quad x(0) = x_0 \end{cases} \quad (3.4)$$

O controle u^* é chamado de controle ótimo e x^* , que é solução da equação diferencial (3.1) fazendo $u = u^*$, é chamado de trajetória ótima ou caminho ótimo.

3.1.2 A Equação de Hamilton-Jacobi-Bellman

A equação de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) desempenha um papel fundamental na teoria de controle ótimo, tanto para problemas determinísticos quanto estocásticos, sendo utilizada para determinar a solução do problema (3.4). Sua formulação é baseada no método da programação dinâmica. Conforme destacado por Sethi (2019), para enunciar a equação de HJB, considera-se $V : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função que representa o valor máximo da função objetivo associada ao problema de controle ótimo (3.4), dado o estado x no instante inicial t . Isto é

$$V(x, t) = \max_{u(s) \in \mathcal{A}(s)} \left[S(x(T), T) + \int_t^T F(x(s), u(s), s) ds \right], \quad s \geq t, \quad (3.5)$$

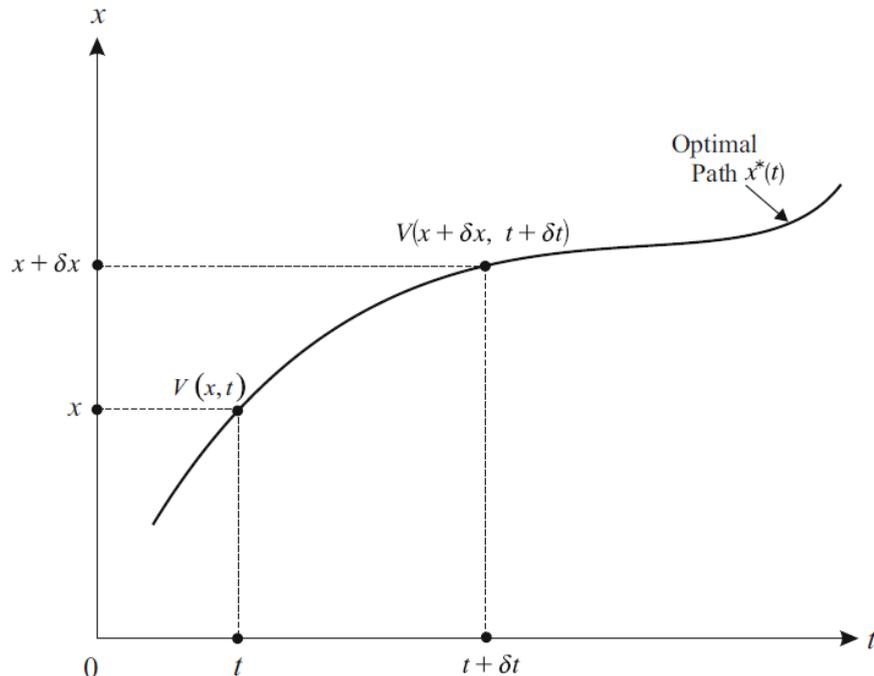
sujeito a

$$\frac{dx(s)}{ds} = f(x(s), u(s), s), \quad x(t) = x.$$

A função $V(x, t)$, conhecida como função valor, é definida assumindo-se inicialmente que $V(x, t)$ existe para todos os valores de x e t no intervalo $[0, T]$. O plano é o seguinte: ao definir $V(x, t)$ como o maior custo dado que começamos na posição x no instante t , queremos estudar V como uma função de x e t . Estamos, portanto, inserindo nosso problema de controle em uma “classe maior de problemas”, conforme x e t variam. E vamos mostrar que V resolve uma certa equação diferencial parcial (EDP) do tipo Hamilton-Jacobi-Bellman e, inversamente, que uma solução dessa EDP nos ajuda a sintetizar um controle de realimentação ótimo.

Para isto, considere agora a Figura 3.1 que ilustra uma trajetória ótima $x^*(t)$ e dois pontos próximos (x, t) e $(x + \delta x, t + \delta t)$, onde δt é um incremento de tempo no eixo t e δx é o incremento correspondente no eixo $x(t)$. Nota-se que $x(t + \delta t) = x + \delta x$ e a função V depende apenas do tempo inicial e o estado da variável no tempo inicial.

Figura 3.1: Caminho Ótimo



Fonte: Sethi (2019)

Se $x^*(t)$ é uma trajetória ótima de t até T , pelo princípio da otimalidade de Bellman, qualquer parte dessa trajetória também é uma trajetória ótima. Assim, a função valor

esta definida para qualquer ponto dessa curva de t até T . Logo, pode-se reescrever a integral de (3.5) como:

$$\int_t^T F(x(s), u(s), s) ds = \int_t^{t+\delta_t} F(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau + \int_{t+\delta_t}^T F(x(\xi), u(\xi), \xi) d\xi, \quad (3.6)$$

onde $\tau \in [t, t + \delta_t]$ e $\xi \in [t + \delta_t, T]$.

E então, tem-se a condição de otimalidade

$$V(x, t) = \max \left[V(x + \delta_x, t + \delta_t) + \int_t^{t+\delta_t} F(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau \right], \quad (3.7)$$

onde $u(\tau) \in \mathcal{A}(\tau)$ e $\tau \in [t, t + \delta_t]$. Uma prova formal desta condição pode ser vista, por exemplo, em Evans (2010, p. 592).

Nosso objetivo agora é escrever, como uma EDP, uma “versão infinitesimal” para a condição de otimalidade em (3.7). Para isto, utilizaremos algumas ideias de aproximação seguindo Sethi (2019). Uma abordagem mais formal, mas que foge dos objetivos deste trabalho, pode ser visto em Evans (2010, p. 596).

Como F é uma função contínua com boas propriedades e δ_t um infinitésimo de tempo, do cálculo integral e diferencial, a integral definida de (3.7) é aproximadamente $F(x, u, t)\delta_t$. Logo, a função valor no ponto (x, t) pode ser reescrita como:

$$V(x, t) = \max_{u(t) \in \mathcal{A}(t)} [F(x, u, t)\delta_t + V(x + \delta_x, t + \delta_t)]. \quad (3.8)$$

Agora, vamos assumir que a função valor V é continuamente diferenciável, no mínimo até segunda ordem com o intuito de utilizar a série de Taylor em relação a δ_t . Assim, tem-se que:

$$V(x + \delta_x, t + \delta_t) = V(x, t) + \frac{\partial V}{\partial x}(x, t) \cdot \frac{dx(t)}{dt} \delta_t + \frac{\partial V}{\partial t}(x, t) \delta_t + o(\delta_t), \quad (3.9)$$

onde $o(\delta_t)$ denota uma coleção de termos de ordem superior (ou também chamado de função “erro” do polinômio de Taylor), e lembrando que $x + \delta_x = x(t + \delta_t)$.

Como $\frac{dx(t)}{dt} = f(x, u, t)$, substituindo-se em (3.9) e colocando δ_t em evidência, tem-se a seguinte expressão:

$$V(x + \delta_x, t + \delta_t) = V(x, t) + \left[\frac{\partial V}{\partial x}(x, t) \cdot f(x, u, t) + \frac{\partial V}{\partial t}(x, t) \right] \delta_t + o(\delta_t).$$

Agora, substituindo-se a expressão acima em (3.8), obtém-se:

$$V(x, t) = \max_{u \in \mathcal{A}(t)} \left[F(x, u, t) \delta_t + V(x, t) + \frac{\partial V}{\partial x}(x, t) f(x, u, t) \delta_t + \frac{\partial V}{\partial t}(x, t) \delta_t \right] + o(\delta_t).$$

Cancelando-se $V(x, t)$ em ambos os lados da igualdade e dividindo-se por δ_t , tem-se que:

$$0 = \max_{u \in \mathcal{A}(t)} \left[F(x, u, t) + \frac{\partial V}{\partial x}(x, t) f(x, u, t) + \frac{\partial V}{\partial t}(x, t) \right] + \frac{o(\delta_t)}{\delta_t}.$$

Fazendo $\delta_t \rightarrow 0$, tem-se que $\lim_{\delta_t \rightarrow 0} \frac{o(\delta_t)}{\delta_t} = 0$ e portanto obtém-se a chamada equação de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) a ser satisfeita ao longo do caminho ótimo:

$$0 = \max_{u \in \mathcal{A}(t)} \left[F(x, u, t) + \frac{\partial V}{\partial x}(x, t) f(x, u, t) \right] + \frac{\partial V}{\partial t}(x, t). \quad (3.10)$$

Nota-se que fazendo $t = T$ em (3.5) tem-se que $V(x, T) = S(x, T)$ que é justamente a condição de contorno da HJB. Ou seja, usando a notação V_x e V_t para as derivadas parciais da função valor V a HJB é a equação diferencial parcial dada na forma:

$$\begin{cases} V_t + \max_{u \in \mathcal{A}} \{ f(x, u, t) \cdot V_x + F(x, u, t) \} = 0, & \text{em } \mathbb{R}^n \times (0, T), \\ V = S, & \text{em } \mathbb{R}^n \times \{t = T\}. \end{cases}$$

Como essa EDP pode nos ajudar a resolver o problema de projetar um controle ótimo? De forma informal, o método é o seguinte. Dado um tempo inicial $0 < t \leq T$ e um estado inicial $x \in \mathbb{R}^n$, consideramos a EDO ótima:

$$\begin{cases} \dot{x}^*(s) = f(x^*(s), u^*(s), s), & t < s < T, \\ x^*(t) = x, \end{cases} \quad (3.11)$$

onde, para cada instante s , $u^*(s) \in \mathcal{A}$ é selecionado de forma que:

$$f(x^*(s), u^*(s), s) \cdot V_x(x^*(s), s) + F(x^*(s), u^*(s), s) \quad (3.12)$$

$$= \max_{u(s) \in \mathcal{A}(s)} \{f(x^*(s), u(s), s) \cdot V_x(x^*(s), s) + F(x^*(s), u(s), s)\}$$

Em outras palavras, dado que o sistema está no ponto $x^*(s)$ no instante s , ajustamos o valor de controle ótimo $u^*(s)$ de forma a atingir o máximo na última expressão acima. Chamamos o controle $u^*(\cdot)$, assim definido, de um *controle de realimentação*.

Como já mencionado, o objetivo deste capítulo foi apresentar a versão determinística da equação HJB, para no capítulo seguinte apresentar a versão estocástica. Neste mostraremos como aplicar de fato a equação HJB para obter um controle ótimo.

Uma introdução à teoria de controle ótimo estocástico

Este capítulo apresenta a formulação de um problema de controle ótimo para sistemas estocásticos caracterizados por equações diferenciais estocásticas de Itô. Será introduzida uma variável de controle U_t , que depende do tempo, na equação diferencial estocástica (2.30), o que produzirá a formulação de um problema de controle ótimo estocástico. O objetivo é apresentar uma versão estocástica para a equação de Hamilton-Jacobi-Bellman seguindo Sun (2006) como feito no Capítulo 3, e posteriormente aplicá-la em um problema de controle de estoque elaborado por Sethi (2019).

4.1 A equação de Hamilton-Jacobi-Bellman: versão estocástica

Considere agora um sistema dinâmico governado pela equação diferencial de Itô:

$$d\mathbf{X}(t) = \mathbf{m}(\mathbf{X}, \mathbf{U}, t) dt + \sigma(\mathbf{X}, t) d\mathbf{B}(t), \quad \mathbf{X}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad (4.1)$$

onde \mathbf{X} é um processo estocástico vetorial de dimensão n , \mathbf{x}_0 é um estado inicial fixo em t_0 , $\mathbf{m}(\cdot) \in \mathbb{R}^n$ e $\sigma(\mathbf{X}, t) \in \mathbb{R}^{n \times q}$ são funções conhecidas de seus argumentos, $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^m$

é o vetor de controle, $d\mathbf{B}(t)$ é um vetor q -dimensional de movimentos Brownianos independentes, tal que:

$$\mathbb{E}[d\mathbf{B}(t)] = 0, \quad \mathbb{E}[d\mathbf{B}(t)d\mathbf{B}^\top(s)] = \begin{cases} \mathbf{I}_q dt, & t = s, \\ 0, & t \neq s, \end{cases} \quad (4.2)$$

onde \mathbf{I}_q é a matriz identidade de dimensão q . Considere um índice de desempenho definido como:

$$J = \mathbb{E}[J_d] = \mathbb{E} \left[\phi(\mathbf{X}(T), T) + \int_{t_0}^T \mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{U}, \tau) d\tau \right], \quad (4.3)$$

onde:

- T é o tempo terminal,
- $\phi(\mathbf{X}(T), T) \geq 0$ é o custo terminal,
- $\mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{U}, t) \geq 0$ é chamada de função de Lagrange.

J_d tem a mesma forma que o índice de desempenho do sistema determinístico.

Considere a função valor em termos da solução ótima como:

$$V(\mathbf{X}^*(t), t) = \mathbb{E} \left[\phi(\mathbf{X}^*(T), T) + \int_t^T \mathcal{L}(\mathbf{X}^*(\tau), \mathbf{U}^*(\tau), \tau) d\tau \right], \quad (4.4)$$

onde $t_0 \leq t \leq T$, e a função V_d dada por:

$$V_d(\mathbf{X}^*(t), t) = \phi(\mathbf{X}^*(T), T) + \int_t^T \mathcal{L}(\mathbf{X}^*(\tau), \mathbf{U}^*(\tau), \tau) d\tau. \quad (4.5)$$

Portanto, $V(\mathbf{X}^*(t), t)$ pode ser interpretada como a esperança da função $V_d(\mathbf{X}^*(t), t)$ quando o sistema está sujeito a perturbações estocásticas. A derivada temporal de $V(\mathbf{X}^*(t), t)$, com base na definição acima, é dada por:

$$\frac{dV(\mathbf{X}^*(t), t)}{dt} = -\mathbb{E}[\mathcal{L}(\mathbf{X}^*(t), \mathbf{U}^*(t), t)]. \quad (4.6)$$

Vamos fazer uma suposição importante de que, no instante t , tanto $\mathbf{X}^*(t)$ quanto $\mathbf{U}^*(t)$ estão completamente determinados, de forma que:

$$\mathbb{E}[\mathcal{L}(\mathbf{X}^*(t), \mathbf{U}^*(t), t)] = \mathcal{L}(\mathbf{X}^*(t), \mathbf{U}^*(t), t). \quad (4.7)$$

Portanto, a derivada temporal de $V(\mathbf{X}^*(t), t)$ pode ser reescrita como:

$$\frac{dV(\mathbf{X}^*(t), t)}{dt} = -\mathcal{L}(\mathbf{X}^*(t), \mathbf{U}^*(t), t). \quad (4.8)$$

Ao tratar $V_d(\mathbf{X}^*(t), t)$ como uma função de várias variáveis do estado e do tempo, podemos obter outra expressão para a derivada temporal. Aplicando a Fórmula de Itô (2.29) a V_d , temos:

$$\begin{aligned} dV_d(\mathbf{X}^*(t), t) &= \frac{\partial V_d(\mathbf{X}^*(t), t)}{\partial t} dt \\ &+ \frac{\partial V_d(\mathbf{X}^*(t), t)}{\partial \mathbf{X}} d\mathbf{X}^*(t) \\ &+ \frac{1}{2} d\mathbf{X}^*(t)^\top \frac{\partial^2 V_d(\mathbf{X}^*(t), t)}{\partial \mathbf{X}^2} d\mathbf{X}^*(t) \\ &+ \mathcal{O}(dt^{1.5}). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Na forma de componentes, temos:

$$\begin{aligned} dV_d &= \left(\frac{\partial V_d}{\partial t} + \sum_{j=1}^n m_j \frac{\partial V_d}{\partial X_j} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n b_{jk} \frac{\partial^2 V_d}{\partial X_j \partial X_k} \right) dt \\ &+ \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^q \sigma_{jk} \frac{\partial V_d}{\partial X_j} dB_k(t), \end{aligned} \quad (4.10)$$

onde:

$$b_{jk} = \sum_{l=1}^q \sigma_{jl} \sigma_{kl}. \quad (4.11)$$

Tomando a esperança na equação acima escrita na forma integral e depois derivando com relação a t , temos que

$$\frac{d\mathbb{E}[V_d]}{dt} = \frac{\partial \mathbb{E}[V_d]}{\partial t} + \sum_{j=1}^n m_j \frac{\partial \mathbb{E}[V_d]}{\partial X_j} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n b_{jk} \frac{\partial^2 \mathbb{E}[V_d]}{\partial X_j \partial X_k}. \quad (4.12)$$

Ou, na notação vetorial e em termos de $V(\mathbf{X}^*(t), t)$:

$$\begin{aligned} \frac{dV(\mathbf{X}^*(t), t)}{dt} &= \frac{\partial V(\mathbf{X}^*(t), t)}{\partial t} + \frac{\partial V(\mathbf{X}^*(t), t)}{\partial \mathbf{X}}^\top \mathbf{m}(\mathbf{X}^*(t), \mathbf{U}^*(t), t) \\ &+ \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\frac{\partial^2 V(\mathbf{X}^*(t), t)}{\partial \mathbf{X}^2} \sigma(\mathbf{X}^*(t), t) \sigma^\top(\mathbf{X}^*(t), t) \right]. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Combinando as duas derivadas temporais, temos:

$$-\frac{\partial V(\mathbf{X}^*(t), t)}{\partial t} = \mathcal{L}(\mathbf{X}^*(t), \mathbf{U}^*(t), t) + \frac{\partial V(\mathbf{X}^*(t), t)}{\partial \mathbf{X}}^\top \mathbf{m}(\mathbf{X}^*(t), \mathbf{U}^*(t), t) \quad (4.14)$$

$$+ \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\frac{\partial^2 V(\mathbf{X}^*(t), t)}{\partial \mathbf{X}^2} \sigma(\mathbf{X}^*(t), t) \sigma^\top(\mathbf{X}^*(t), t) \right].$$

$$= \min_{\mathbf{U}} \left\{ \mathcal{L}(\mathbf{X}^*(t), \mathbf{U}(t), t) + \frac{\partial V(\mathbf{X}^*(t), t)}{\partial \mathbf{X}}^\top \mathbf{m}(\mathbf{X}^*(t), \mathbf{U}(t), t) \quad (4.15)$$

$$+ \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\frac{\partial^2 V(\mathbf{X}^*(t), t)}{\partial \mathbf{X}^2} \sigma(\mathbf{X}^*(t), t) \sigma^\top(\mathbf{X}^*(t), t) \right] \right\}.$$

Esta é a equação de HJB (Hamilton-Jacobi-Bellman) para o problema de controle ótimo estocástico. O último termo, que envolve o traço da multiplicação de matrizes, deve-se ao comportamento do movimento Browniano. Ou seja, este termo adicional não existe na versão determinística da HJB. Uma condição necessária e suficiente para que a solução da HJB seja o controle ótimo pode ser visto nos Teoremas 11.2.1 e 11.2.2 em Oksendal (2003, p. 228-232).

4.2 Um problema estocástico de estoque de produção

Nesta subseção será exemplificado um modelo estocástico de estoque de produção com base no livro de Sethi (2019).

Inicialmente, definem-se as seguintes grandezas:

- I_t : Nível de estoque no tempo t (variável de estado);
- P_t : Taxa de produção no tempo t (variável de controle);
- S : Taxa constante de demanda no tempo t ; $S > 0$;
- T : Duração do período do planejamento;
- I_0 : Nível de estoque inicial;
- B : Valor residual (ou valor restante) de estoque por unidade no tempo T ;

- B_t : Movimento Browniano;
- σ : Coeficiente constante de difusão .

O nível de estoque varia de acordo com a equação estoque-fluxo que se expressa como uma EDE de Itô:

$$dI_t = (P_t - S)dt + \sigma dB_t, \quad (4.16)$$

dado o valor de I_0 . Nota-se que neste modelo, utilizamos uma constante de difusão σ ao invés da função G descrita anteriormente. A constante σ pode ser interpretada como “devolução de vendas,” “perda de estoque,” entre outros, que são de natureza aleatória.

Considera-se a seguinte função objetivo:

$$\max \mathbb{E} \left[BI_T - \int_0^T (P_t^2 + I_t^2) dt \right], \quad (4.17)$$

que pode ser interpretado como a maximização do valor residual subtraído do custo de produção e estoque, ambos elevados ao quadrado.

Vale observar que nesse modelo será permitido uma taxa de produção negativa, isto é, $P_t < 0$. A taxa de produção negativa significa que será permitido o descarte de estoque. Nota-se ainda que o nível de estoque também pode ser negativo, ou seja, permite-se o acúmulo de demanda.

A solução deste modelo será apresentada a seguir e foi proposto por Sethi e Thompson (1981) através do desenvolvimento da equação de Hamilton-Jacobi-Bellman que tem como solução a função de valor $V(x, t)$. Uma versão determinística deste modelo pode ser encontrada em Sethi (2019, p. 192).

Considere a função valor da função objetivo (4.17) quando uma política ótima é seguida de t a T :

$$V(I_t^*, t) = \mathbb{E} \left[BI_T^* - \int_t^T (P_t^{*2} + I_t^{*2}) dt \right]. \quad (4.18)$$

Supondo que $I_t^* = x$, para simplificar, temos então a seguinte equação HJB:

$$0 = V_t(x, t) + \max_P \left[-(P^2 + x^2) + (P - S)V_x(x, t) + \frac{\sigma^2}{2} V_{xx}(x, t) \right], \quad (4.19)$$

com a condição de contorno

$$V(x, T) = Bx. \quad (4.20)$$

Analisando a expressão no colchete (4.19) como uma função na variável P , derivando esta expressão e igualando a zero encontra-se o seu ponto crítico. O que é fácil ver que se trata de um ponto de máximo. Como a solução da HJB é a função valor que assume valores na trajetória ótima o ponto crítico encontrado é um ponto que maximiza a função valor. Sendo assim, o controle ótimo é dado por

$$P^* = \frac{1}{2}V_x(x, t) = \frac{1}{2}V_x(I_t^*, t). \quad (4.21)$$

Isto nos diz que o controle ótimo P^* depende de I_t^* .

Substituindo-se (4.21) em (4.19) e omitindo-se o ponto (x, t) tem-se que:

$$\begin{aligned} 0 &= -\left(\left(\frac{V_x}{2}\right)^2 + x^2\right) + V_t + V_x\left(\frac{V_x}{2} - S\right) + \frac{1}{2}\sigma^2 V_{xx} \\ &= -\frac{V_x^2}{4} - x^2 + V_t + \frac{V_x^2}{2} - V_x S + \frac{1}{2}\sigma^2 V_{xx} \\ &= \frac{V_x^2}{4} - x^2 + V_t - S V_x + \frac{1}{2}\sigma^2 V_{xx}. \end{aligned}$$

Portanto, após a operação máxima ter sido realizada tem-se a chamada equação de Hamilton-Jacobi: ¹

$$0 = \frac{V_x^2}{4} - x^2 + V_t - S V_x + \frac{1}{2}\sigma^2 V_{xx}, \quad (4.22)$$

que é uma equação diferencial parcial que tem como solução a função de valor $V(x, t)$ com a condição de contorno (4.20). É importante frisar que se a taxa de produção fosse restrita a ser não negativa, teríamos que

$$P^* = \max\left[0, \frac{V_x(x, t)}{2}\right]. \quad (4.23)$$

Substituir (4.23) em (4.20) resultaria em uma equação diferencial parcial que precisaria ser resolvida numericamente. Neste trabalho, não abordaremos esse caso; na próxima subseção, será apresentada uma solução para (4.22).

¹A equação HJB é uma equação de Hamilton-Jacobi satisfeita pela função valor. Em outras palavras, a HJB é uma extensão da equação de Hamilton-Jacobi para problemas de controle ótimo. Para uma construção mais detalhada consultar Lopes e Filho (1997).

4.2.1 Solução para o problema estocástico de estoque de produção: taxa de demanda constante

Para se solucionar a equação diferencial parcial (4.22) com a condição de contorno $V(x, T) = Bx$, podemos considerar

$$V(x, t) = Q(t)x^2 + R(t)x + M(t), \quad (4.24)$$

onde $Q(t)$, $R(t)$ e $M(t)$ são funções que queremos determinar.

Então, calculando-se as derivadas parciais da função de valor V em relação a x e t , tem-se que

- $\frac{\partial V}{\partial t}(x, t) = x^2 \cdot \frac{dQ(t)}{dt} + x \cdot \frac{dR(t)}{dt} + \frac{dM(t)}{dt}$,
- $\frac{\partial V}{\partial x}(x, t) = 2x \cdot Q(t) + R(t)$,
- $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(x, t) = 2Q(t)$.

Para simplificar a escrita e facilitar a compreensão dos cálculos que serão apresentados, vamos utilizar a notação \dot{R} para $\frac{dR(t)}{dt}$, \dot{Q} para $\frac{dQ(t)}{dt}$ e \dot{M} para $\frac{dM(t)}{dt}$. Sendo assim, as expressões acima podem ser reescritas como:

$$V_t(x, t) = \dot{Q}x^2 + \dot{R}x + \dot{M}; \quad (4.25)$$

$$V_x(x, t) = 2xQ(t) + R(t); \quad (4.26)$$

$$V_{xx}(x, t) = 2Q(t). \quad (4.27)$$

Substituindo-se (4.25) - (4.27) na equação (4.22), tem-se que

$$0 = \frac{\overbrace{(2xQ + R)^2}^{(*)}}{4} - x^2 + \dot{Q}x^2 + \dot{R}x + \dot{M} - \overbrace{S(2xQ + R)}^{(**)} + \frac{1}{2}\sigma^2 2Q. \quad (4.28)$$

Para (*):

$$\begin{aligned} (2xQ + R)^2 &= Q^2 4x^2 + 2 \cdot 2QxR + R^2 \\ &= 4Q^2 x^2 + 4QxR + R^2. \end{aligned}$$

Para (**):

$$-S(2xQ + R) = -S2xQ - SR.$$

Então, substituindo-se (*) e (**) em (4.28) tem-se que

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{4Q^2x^2 + 4QxR + R^2}{4} - x^2 + \dot{Q}x^2 + \dot{R}x + \dot{M} - SQ2x - SR + \sigma^2Q \\ &= Q^2x^2 + QxR + \frac{R^2}{4} - x^2 + \dot{Q}x^2 + \dot{R}x + \dot{M} - SQ2x - SR + \sigma^2Q \\ &= x^2(Q^2 + \dot{Q} - 1) + x(QR + \dot{R} - 2SQ) + \dot{M} + \frac{R^2}{4} - RS + \sigma^2Q. \end{aligned}$$

Portanto,

$$0 = x^2(Q^2 + \dot{Q} - 1) + x(QR + \dot{R} - 2SQ) + \dot{M} + \frac{R^2}{4} - RS + \sigma^2Q. \quad (4.29)$$

Como (4.29) deve valer para qualquer valor de x , tem-se que:

$$Q^2 + \dot{Q} - 1 = 0 \Leftrightarrow \dot{Q} = 1 - Q^2, \quad Q(T) = 0, \quad (4.30)$$

$$QR + \dot{R} - 2SQ = 0 \Leftrightarrow \dot{R} = 2SQ - QR, \quad R(T) = B, \quad (4.31)$$

$$\dot{M} + \frac{R^2}{4} - RS + \sigma^2Q = 0 \Leftrightarrow \dot{M} = RS - \frac{R^2}{4} - \sigma^2Q, \quad M(T) = 0. \quad (4.32)$$

Então, obtém-se um sistema de equações diferenciais simultâneas. Nota-se que as condições de contorno estabelecidas são obtidas comparando-se a função de valor $V(x, t) = Q(t)x^2 + R(t)x + M(t)$ com a condição de contorno (4.20) da equação de HJB. Na sequência, serão utilizadas as técnicas conhecidas do cálculo integral para se determinar as funções $Q(t)$, $R(t)$ e $M(t)$ que satisfazem as equações diferenciais (4.30) - (4.32) com as respectivas condições de contorno.

- Resolvendo-se (4.30):

$$\dot{Q} = 1 - Q^2 \Leftrightarrow \frac{\dot{Q}}{1 - Q^2} = 1.$$

Reescrevendo-se a expressão acima utilizando frações parciais, tem-se que:

$$\frac{\dot{Q}}{1 - Q^2} = \frac{\dot{Q}}{(1 - Q)(1 + Q)} = \frac{\dot{Q}}{2} \left[\frac{1}{1 - Q} + \frac{1}{1 + Q} \right] = 1.$$

Neste momento, para efetuar os cálculos necessários, será utilizada a notação $\frac{dQ}{dt}$ para \dot{Q} . Então,

$$\frac{1}{2} \frac{dQ}{dt} \left[\frac{1}{1-Q} + \frac{1}{1+Q} \right] = 1 \Leftrightarrow dQ \left[\frac{1}{1-Q} + \frac{1}{1+Q} \right] = 2dt.$$

Integrando ambos os lados da expressão acima:

$$\int \left[\frac{1}{1-Q} + \frac{1}{1+Q} \right] dQ = \int 2dt.$$

Utilizando-se a integração por substituição, fazendo $u = 1 - Q$, segue que $dQ = -du$. Logo:

$$\int \frac{1}{1-Q} dQ = \int -\frac{du}{u} = -\ln |1-Q| + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Analogamente, $\int \frac{1}{1+Q} = \ln |1+Q| + c$.

Tem-se então que:

$$-\ln |1+Q| - \ln |1-Q| = 2t + c \Leftrightarrow \ln \left| \frac{1+Q}{1-Q} \right| = 2t + c.$$

Aplicando-se a exponencial de base e em ambos os lados da expressão acima chega-se no seguinte resultado:

$$\frac{1+Q}{1-Q} = e^{2t} C, \quad C \in \mathbb{R}. \quad (4.33)$$

Multiplicando-se a equação (4.33) por $1 - Q$ e colocando Q em evidência, tem-se a seguinte expressão analítica para a função $Q(t)$:

$$Q(t) = \frac{C e^{2t} - 1}{C e^{2t} + 1}. \quad (4.34)$$

Como a condição de contorno de (4.30) é igual a zero, segue que:

$$Q(T) = \frac{C e^{2T} - 1}{C e^{2T} + 1} = 0 \Leftrightarrow C = \frac{1}{e^{2T}}.$$

Logo,

$$Q(t) = \frac{\frac{1}{e^{2T}} \cdot e^{2t} - 1}{\frac{1}{e^{2T}} \cdot e^{2t} + 1} = \frac{e^{2(t-T)} - 1}{e^{2(t-T)} + 1}$$

Portanto,

$$Q(t) = \frac{e^{2(t-T)} - 1}{e^{2(t-T)} + 1}. \quad (4.35)$$

Podemos apresentar uma versão alternativa simplificada dessa função fazendo $y = e^{2(t-T)}$, assim:

$$Q(t) = \frac{y - 1}{y + 1}. \quad (4.36)$$

- Resolvendo-se (4.31):

Reescrevendo a equação utilizando a notação dR/dt tem-se a expressão:

$$\begin{cases} \frac{dR}{dt} + Q(t)R(t) = 2SQ(t) \\ R(T) = B \end{cases}$$

que é uma EDO linear de primeira ordem com fator integrante $\mu(t) = e^{\int Q(t)dt}$. Para resolvê-la, vamos utilizar o método do fator integrante. Multiplicando ambos os lados da EDO por $\mu(t)$ chega-se na expressão:

$$\frac{d}{dt}[\mu(t)R(t)] = 2SQ(t)\mu(t),$$

que após integrar ambos os lados produz:

$$R(t) = \frac{2}{\mu(t)} \int SQ(t)\mu(t)dt.$$

Como neste caso a taxa de demanda S é constante no tempo, tem-se que

$$R(t) = \frac{2S}{\mu(t)} \int Q(t)\mu(t)dt.$$

Para determinar $\mu(t)$ precisa-se da primitiva da função $Q(t)$, ou seja:

$$\int Q(t)dt = \int \frac{e^{2(t-T)} - 1}{e^{2(t-T)} + 1} dt.$$

Aplicando a substituição $u = e^{2(t-T)}$ e $\frac{du}{2u} = dt$ chega-se em:

$$\frac{1}{2} \int \frac{u - 1}{u(u + 1)} du.$$

Aplicando o método das frações parciais consegue-se expressar a primitiva da função $Q(t)$ como:

$$\int Q(t)dt = \ln(e^{2(t-T)} + 1) - \frac{\ln(e^{2(t-T)})}{2} + C.$$

O fator integrante é determinado por:

$$\begin{aligned} \mu(t) &= e^{\int Q(t)dt} = e^{\ln(e^{2(t-T)} + 1) - \frac{\ln(e^{2(t-T)})}{2} + C} \\ &= e^{\ln(e^{2(t-T)} + 1)} \cdot e^{-\frac{\ln(e^{2(t-T)})}{2}} \cdot e^C \\ &= e^{T-t} \cdot (e^{2(t-T)} + 1) \cdot e^C \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} R(t) &= \frac{2S}{\mu(t)} \int Q(t)\mu(t)dt \\ &= \frac{2S}{e^{T-t}(e^{2(t-T)} + 1)e^C} \int \frac{(e^{2(t-T)} - 1)}{(e^{2(t-T)} + 1)} e^{T-t}(e^{2(t-T)} + 1)e^C dt \\ &= \frac{2S}{e^{T-t}(e^{2(t-T)} + 1)} \int e^{T-t}(e^{2(t-T)} - 1)dt. \end{aligned}$$

Para explicitar a primitiva da função que está sendo integrada, basta aplicar a substituição $u = t - T$ e $du = dt$ que a expressão geral para $R(t)$, com S constante é:

$$R(t) = \frac{2S}{e^{T-t}(e^{2(t-T)} + 1)} \cdot (e^{t-T} + e^{T-t} + C).$$

Aplicando-se a condição de contorno $R(T) = B$ encontra-se a constante $C = \frac{B-2S}{S}$ que substituída na expressão geral de $R(t)$ fornece a solução particular da equação diferencial (4.31):

$$R(t) = \frac{2S}{e^{T-t}(e^{2(t-T)} + 1)} \cdot \left(e^{t-T} + e^{T-t} + \frac{B-2S}{S} \right),$$

que pode ser simplificada para:

$$R(t) = 2S + \frac{2(B-2S)e^{t-T}}{e^{2(t-T)} + 1}. \quad (4.37)$$

- Resolvendo-se (4.32):

Finalmente, tendo encontrado Q e R pode-se expressar (4.32).

Como $\dot{M} = RS - \frac{R^2}{4} - \sigma^2 Q$, segue que:

$$M(t) = \int_t^T \left[R(\tau)S - \frac{R^2(\tau)}{4} - \sigma^2 Q(\tau) \right] d\tau. \quad (4.38)$$

Utilizando-se as funções encontradas $Q(t)$, $R(t)$ e o controle ótimo em (4.21), a saber, $V_x(x, t)/2$, tem-se o seguinte resultado:

$$\begin{aligned} \frac{V_x}{2} &= \frac{2Qx + R}{2} \\ &= Qx + \frac{R}{2} \\ &= \frac{x(y-1)}{y+1} + \frac{1}{2} \left(2S + \frac{2(B-2S)\sqrt{y}}{y+1} \right) \\ &= \frac{x(y-1)}{y+1} + S + \frac{(B-2S)\sqrt{y}}{y+1} \\ &= S + \frac{x(y-1) + (B-2S)\sqrt{y}}{y+1}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$P^* = S + \frac{x(y-1) + (B-2S)\sqrt{y}}{y+1}, \quad (4.39)$$

onde $y = e^{2(t-T)}$.

Isso significa que a taxa de produção ótima para $t \in [0, T]$ é:

$$P^* = P^*(I_t^*, t) = S + \frac{I_t^*(e^{2(t-T)} - 1) + (B - 2S)e^{(t-T)}}{e^{2(t-T)} + 1}, \quad (4.40)$$

onde I_t^* é o nível de estoque observado no tempo t quando se utiliza a taxa ótima de produção P^* conforme equação (4.40).

Nota-se que a taxa ótima de produção (4.40) é igual a taxa de demanda S mais um termo de correção que depende do nível de estoque e da distância em relação ao tempo limite, isto é, $(t - T)$. Vale destacar que se $t < T$, então $e^{2(t-T)} - 1 < 0$, logo, para valores baixos de x a taxa de produção ótima provavelmente será positiva. Agora, se x for um valor muito alto, o negativo do termo de correção ficará maior que a taxa de demanda e o controle ótimo será negativo. Nesta situação, como o nível de estoque está alto, é necessário reduzir a produção para se ajustar a demanda. Em Sethi (2019, p. 374) observa-se que a fábrica pode economizar dinheiro descartando uma parte do estoque, resultando em custos de manutenção mais baixos.

Nota-se que substituindo-se $P^* = P^*(I_t^*, t)$ na equação de estado (4.16) tem-se que:

$$\begin{aligned} dI_t^* &= (P^*(I_t^*, t) - S)dt + \sigma dB_t \\ &= \left(S + \frac{I_t^*(y - 1) + (B - 2S)\sqrt{y}}{y + 1} - S \right) dt + \sigma dB_t \\ &= \left(\frac{I_t^*(y - 1) + (B - 2S)\sqrt{y}}{y + 1} \right) dt + \sigma dB_t. \end{aligned}$$

Como $y = e^{2(t-T)}$, então:

$$dI_t^* = \left(\frac{I_t^*(e^{2(t-T)} - 1) + (B - 2S)e^{(t-T)}}{e^{2(t-T)} + 1} \right) dt + \sigma dB_t, \quad I_0^* = x_0. \quad (4.41)$$

Analogamente ao que foi feito no tópico de equações diferenciais estocásticas no Capítulo 2, irá se calcular a esperança do processo I_t^* .

Tem-se que a forma integral da EDE (4.41) é dada por:

$$I_t^* = I_0^* + \int_0^t \left(\frac{I_s^*(e^{2(s-T)} - 1) + (B - 2S)e^{(s-T)}}{e^{2(s-T)} + 1} \right) ds + \int_0^t \sigma dB_s. \quad (4.42)$$

Então, utilizando-se a propriedade da integral de Itô que tem média zero e o Teorema de Fubini, temos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[I_t^*] &= \mathbb{E}[I_0^*] + \mathbb{E} \left[\int_0^t \left(\frac{I_t^*(e^{2(s-T)} - 1) + (B - 2S)e^{(s-T)}}{e^{2(s-T)} + 1} \right) ds \right] + \mathbb{E} \left[\int_0^t \sigma dB_s \right] \\
&= I_0^* + \int_{\mathbb{R}} \int_0^t \left(\frac{I_t^*(e^{2(s-T)} - 1) + (B - 2S)e^{(s-T)}}{e^{2(s-T)} + 1} \right) ds dP \\
&= I_0 + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{I_t^*(e^{2(s-T)} - 1) + (B - 2S)e^{(s-T)}}{e^{2(s-T)} + 1} \right) dP ds \\
&= I_0 + \int_0^t \mathbb{E} \left[\left(\frac{I_t^*(e^{2(s-T)} - 1) + (B - 2S)e^{(s-T)}}{e^{2(s-T)} + 1} \right) ds \right].
\end{aligned}$$

Como $I_0^* = x_0$ o valor esperado para o nível de estoque ótimo é dado por

$$\mathbb{E}[I_t^*] = x_0 + \int_0^t \mathbb{E} \left[\left(\frac{I_t^*(e^{2(s-T)} - 1) + (B - 2S)e^{(s-T)}}{e^{2(s-T)} + 1} \right) ds \right]. \quad (4.43)$$

Aplicando-se o Teorema Fundamental do Cálculo tem-se uma equação diferencial ordinária para a média de I_t^* , a saber,

$$\frac{d}{dt} \mathbb{E}[I_t^*] = \mathbb{E} \left[\frac{I_t^*(e^{2(t-T)} - 1) + (B - 2S)e^{(t-T)}}{e^{2(t-T)} + 1} \right]. \quad (4.44)$$

Como a esperança é um operador linear, tem-se ainda que:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left[\frac{I_t^*(e^{2(t-T)} - 1) + (B - 2S)e^{(t-T)}}{e^{2(t-T)} + 1} \right] &= \mathbb{E} \left[\frac{I_t^*(e^{2(t-T)} - 1)}{e^{2(t-T)} + 1} \right] + \mathbb{E} \left[\frac{(B - 2S)e^{(t-T)}}{e^{2(t-T)} + 1} \right] \\
&= \frac{(e^{2(t-T)} - 1)}{e^{2(t-T)} + 1} \mathbb{E}[I_t^*] + \frac{(B - 2S)e^{(t-T)}}{e^{2(t-T)} + 1}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{d}{dt} \mathbb{E}[I_t^*] = \frac{(e^{2(t-T)} - 1)}{e^{2(t-T)} + 1} \mathbb{E}[I_t^*] + \frac{(B - 2S)e^{(t-T)}}{e^{2(t-T)} + 1}. \quad (4.45)$$

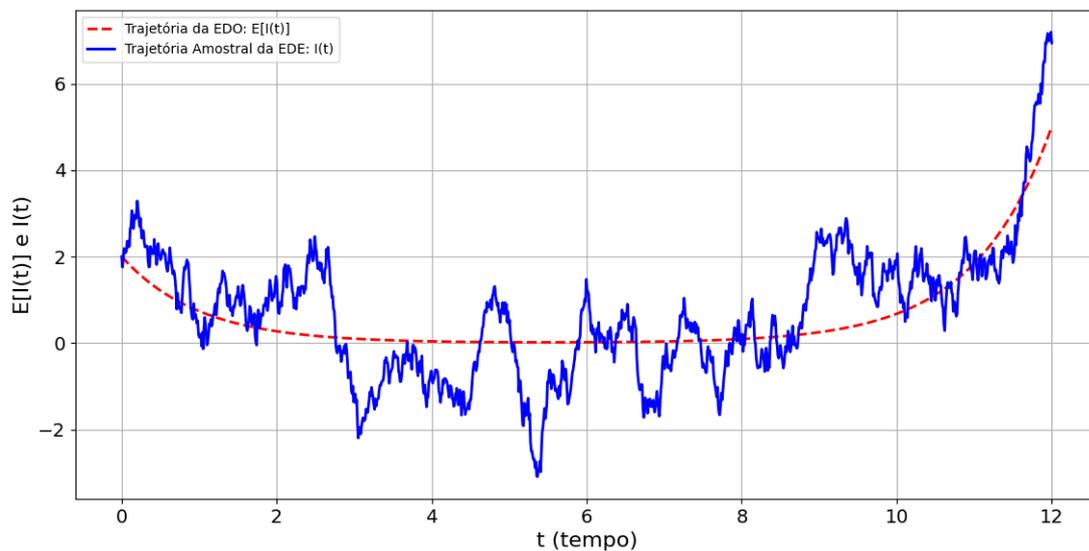
Em síntese, expressa-se uma EDE (equação de estado) para o nível ótimo de estoque I_t^* e uma EDO para a média do nível ótimo de estoque:

$$dI_t^* = \left(\frac{I_t^*(e^{2(t-T)} - 1) + (B - 2S)e^{(t-T)}}{e^{2(t-T)} + 1} \right) dt + \sigma dB_t, \quad I_0^* = x_0, \quad (4.46)$$

$$\frac{d}{dt}\mathbb{E}[I_t^*] = \frac{(e^{2(t-T)} - 1)}{e^{2(t-T)} + 1}\mathbb{E}[I_t^*] + \frac{(B - 2S)e^{(t-T)}}{e^{2(t-T)} + 1}. \quad (4.47)$$

A seguir apresentam-se algumas simulações computacionais realizadas em linguagem de programação *python* ilustrando esse contexto. Para estas simulações atribuiu-se alguns valores para as constantes B , S , σ e T , além da condição inicial I_0^* para a EDE e $\mathbb{E}[I_0^*]$ para a EDO. A trajetória em azul é gerada pela equação diferencial estocástica e indica o nível de estoque ótimo ao longo do tempo. Já a trajetória em vermelho é gerada pela equação diferencial ordinária e indica a média para o nível de estoque ótimo ao longo do tempo.

Figura 4.1: Trajetória amostral para I_t^*



Fonte: Autoria própria

Como o nível de estoque é um processo estocástico, podemos apenas realizar algumas possibilidades para a trajetória, como na Figura 4.1. Para essa primeira simulação utilizou-se os parâmetros: $B = 20$, $S = 5$, $\sigma = 2$, $T = 12$ e $I_0^* = 2$. Nota-se que o controle ótimo traz o nível de estoque para o nível objetivo $\bar{x} = 0$ permanecendo neste nível até que o tempo t esteja próximo do final do horizonte de planejamento T . Durante a fase final o controle ótimo tentará aumentar o nível de estoque em resposta ao parâmetro B (valor residual de estoque/unid. de tempo) inserido ser positivo e maior que o valor da demanda. A definição de valor residual surge diante dos chamados *efeitos de final de horizonte*, que podem ocorrer nos últimos períodos de um modelo de planejamento da produção. Em alguns modelos de dimensionamento de lotes, pressupõe-

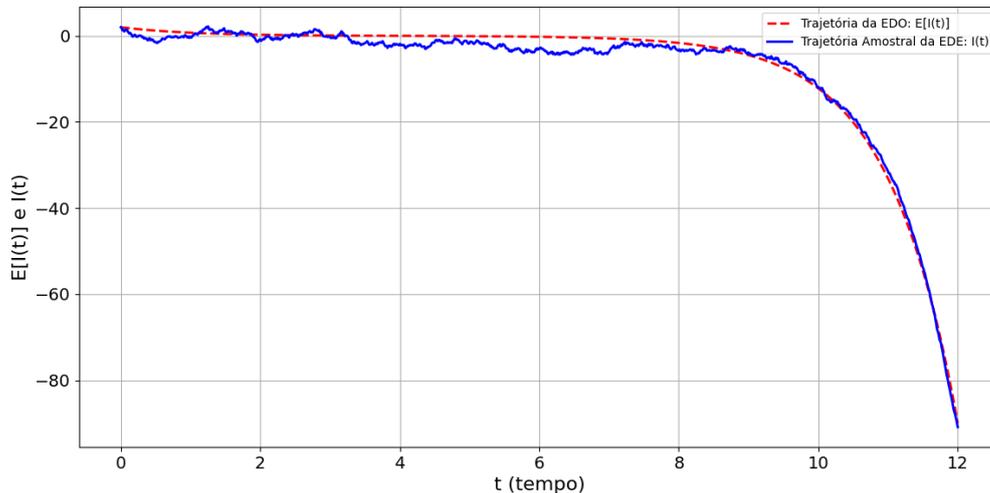
se que os estoques finais não têm utilidade, o que significa que as soluções ótimas tendem a não produzir unidades de estoque nos períodos finais do planejamento. Com efeito, o nível de estoque é esvaziado à medida que o horizonte de planejamento se aproxima do fim, gerando planos de produção inviáveis do ponto de vista prático. Para resolver esse problema, desenvolveu-se o conceito de valores residuais de estoque, também chamados de metas para o estoque final, onde se recompensa a produção de lotes no período final com um bônus, como, por exemplo, a redução dos custos de *setup* para esses lotes (STADTLER, 2000 apud LANG, 2009).

Nota-se na EDO (4.47) que $(e^{2(t-T)} - 1)$ é menor do que zero, pois $t < T$. Logo, o termo da EDO:

$$\frac{(e^{2(t-T)} - 1)}{e^{2(t-T)} + 1} < 0.$$

Já o segundo termo, depende dos valores atribuídos a B e S . Sempre que $B < S$, tem-se que $B - 2S < 0$ e como $e^{t-T} < 1$, para $t < T$, tem-se que o nível de estoque ótimo terá valores negativos, em média, como pode ser observado na Figura 4.2.

Figura 4.2: Trajetória amostral para I_t^*



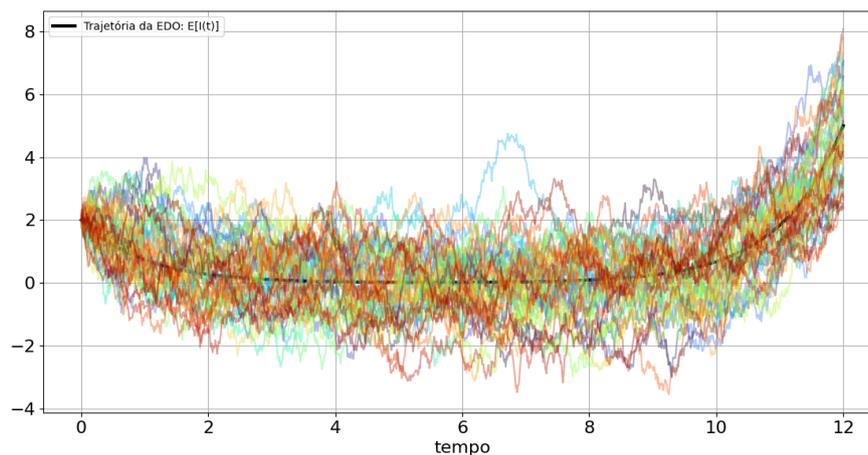
Fonte: Autoria própria

Na Figura (4.2) a simulação foi realizada com parâmetros $B = 20$ e $S = 100$. Conforme o tempo se aproxima do final do horizonte de planejamento, mesmo que o valor residual seja positivo, o controle ótimo levará o nível de estoque a valores negativos, em média, representando uma falta de atendimento à demanda total projetada, isto

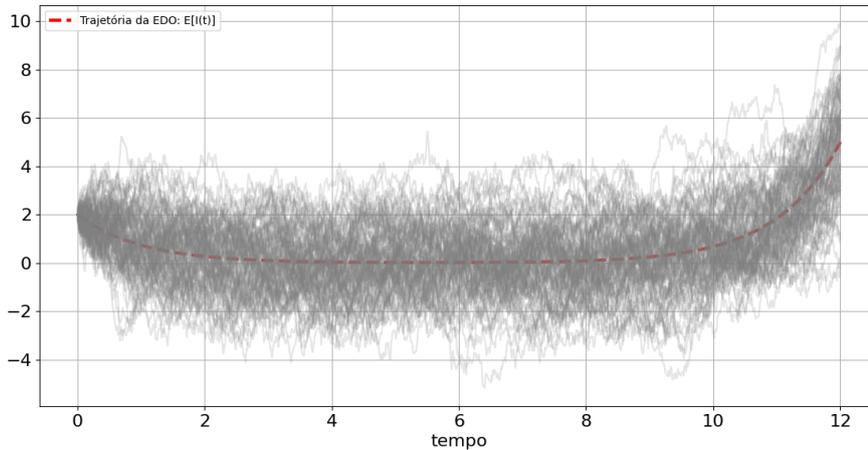
é, um déficit. De acordo com Sethi (2019) um nível de estoque negativo indica um *backlogging* de demanda que significa “acumulo de demanda” ou “pedidos em atraso”. Isto é, a indústria recebeu pedidos que não podem ser atendidos imediatamente devido a falta de estoque. Em relação a demanda dos modelos de planejamento da produção, Lang (2009) afirma que a suposição ideal é que toda a demanda dever ser atendida imediatamente em cada instante de tempo, sem qualquer atraso. Entretanto, caso isso não seja possível devido as capacidades de produção disponíveis, essa suposição pode ser flexibilizada ao permitir pedidos em atraso, ou seja, o *backlogging*. Ainda segundo o autor, *backlogging* significa que a demanda pode ser atendida pela produção após a data de vencimento, com um custo de penalidade específico que aumenta quanto maior for o atraso. As vendas perdidas indicam que a demanda que não pode ser atendida na data de vencimento é totalmente perdida, ou seja, não pode ser atendida posteriormente, e um certo custo de penalidade é aplicado.

Na sequência, realizou-se duas simulações: uma com 50 trajetórias amostrais para a EDE e outra com 100 trajetórias, ambas utilizando os mesmos valores para os parâmetros da simulação da Figura (4.1). Na Figura (4.4) utilizou-se um “efeito fumaça” para as trajetórias da EDE para melhorar a visualização da trajetória da média:

Figura 4.3: 50 trajetórias amostrais para I_t^*



Fonte: Autoria própria

Figura 4.4: 100 trajetórias amostrais para I_t^* 

Fonte: Autoria própria

As bibliotecas utilizadas no desenvolvimento do algoritmo que gera o gráfico das figuras foram: *numpy* que fornece suporte para funções matemáticas e matrizes multidimensionais, *scipy* com módulo *integrate* que permite resolver integrais e equações diferenciais numericamente e *matplotlib* para plotar os gráficos. Para a EDO utilizou-se a função *solve-ivp* que permite resolver sistemas de EDOs ao especificar a função, o intervalo de tempo e a condição inicial. Já para a EDE utilizou-se o método de Euler-Maruyama que aproxima a solução de uma EDE discretizando os passos de tempo em pequenos intervalos de tamanho δ . Segundo Kloeden e Platen (1995) o método de Euler-Maruyama é uma generalização estocástica da aproximação de Euler para EDOs. Considera-se uma discretização $(\tau)_\delta$ de um intervalo de tempo $[0, T]$ em partições equidistantes de tamanho $\delta = \frac{T}{N}$, ou seja

$$0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_n < \dots < \tau_N = T.$$

Dada uma equação diferencial estocástica como (2.30) tem-se que:

$$Y_{n+1} = Y_n + a(Y_n)\Delta_n + b(Y_n)\Delta B_n, \quad n = 0, 1, \dots, N-1, \quad (4.48)$$

com valor inicial $Y_0 = x_0$, onde $\Delta_n = \tau_{n+1} - \tau_n = \delta$ e $\Delta B_n = B_{\tau_{n+1}} - B_{\tau_n}$.

As variáveis aleatórias ΔB_n em (4.48) são os incrementos independentes do Movimento Browniano que são normalmente distribuídos com média zero e variância Δ_n , ou seja:

$$\mathbb{E}[\Delta B_n] = 0 \quad \text{e} \quad \mathbb{E}[(\Delta B_n)^2] = \Delta_n,$$

para $n = 0, 1, \dots, N - 1$. Em simulações, é possível gerar valores para ΔB_n a partir de variáveis aleatórias independentes com distribuição normal padrão. Esses valores são fornecidos computacionalmente por um gerador de números aleatórios. Nas simulações computacionais para a EDE realizadas em *python* neste trabalho as variáveis aleatórias independentes foram fornecidas pela função: `np.random.normal(0, 1)` que gera um número aleatório de uma distribuição normal padrão. Uma abordagem completa do método de Euler-Maruyama pode ser conferida no Capítulo 9 de Kloeden e Platen (1995).

O código completo que gera a imagem (4.1) pode ser acessado e executado livremente pela plataforma Google Colab através do link: <https://colab.research.google.com/drive/1GSKtbtKQ2ripQZOAY03Zg8BwYSWdbNWP?authuser=1>. Já os códigos que geram as imagens (4.3) e (4.4) estão disponíveis em: <https://colab.research.google.com/drive/1K-tliEALyxk6cDXsGy6SXMJFYgYhytxf?authuser=1> e <https://colab.research.google.com/drive/1J3ylbnW0s2hPSsUjx8kzGF3SgFBLcm7p?authuser=1> respectivamente.

4.2.2 Solução para o problema estocástico de estoque de produção: taxa de demanda variando no tempo

Na subseção anterior foram encontradas as funções $Q(t)$, $R(t)$, e $M(t)$ que satisfazem o sistema de equações diferenciais:

$$\begin{cases} \dot{Q} = 1 - Q^2, & Q(T) = 0, \\ \dot{R} = 2SQ - QR, & R(T) = B, \\ \dot{M} = RS - \frac{R^2}{4} - \sigma^2 Q, & M(T) = 0, \end{cases}$$

onde a taxa de demanda S era constante no tempo. Nessa subseção será determinada uma função $R(t)$ que satisfaça o sistema de equações diferenciais acima para uma taxa de demanda que dependa do tempo, isto é, $S(t)$. Analogamente ao que foi feito na subseção anterior, nota-se que:

$$\begin{cases} \frac{dR}{dt} + Q(t)R(t) = 2S_t Q(t), \\ R(T) = B, \end{cases}$$

é uma EDO linear de primeira ordem com fator integrante $\mu(t) = e^{\int Q(t)dt}$. Multiplicando ambos os lados da EDO por $\mu(t)$ chega-se na expressão:

$$\frac{d}{dt}[\mu(t)R(t)] = 2S(t)Q(t)\mu(t),$$

que após integrar ambos os lados produz:

$$R(t) = \frac{2}{\mu(t)} \int S_t Q(t) \mu(t) dt. \quad (4.49)$$

Tem-se então que:

$$R(t) = \frac{2}{e^{T-t}(e^{2(t-T)} + 1)} \int e^{t-T}(e^{2(t-T)} - 1) S_t dt, \quad (4.50)$$

com a condição de contorno $R(T) = B$. As funções R e Q são importantes, pois determinam o controle ótimo $P^*(x, t)$. No caso em que S era constante, foi possível expressar R de forma simplificada e, com efeito, também o controle ótimo. Agora, considerando-se S uma função diferenciável, que depende de t , expressar R analiticamente pode não ser uma tarefa simples. Diante dessa dificuldade, serão utilizados mais adiante métodos numéricos com recursos computacionais para determinar a função R e o controle ótimo, respeitando a condição de contorno.

Substituindo a expressão (4.50) no controle ótimo em (4.21), tem-se que:

$$P^*(x, t) = \frac{x(e^{2(t-T)} - 1)}{e^{2(t-T)} + 1} + \frac{1}{2} \left[\frac{2}{e^{T-t}(e^{2(t-T)} + 1)} \int e^{T-t}(e^{2(t-T)} - 1) S_t dt \right]. \quad (4.51)$$

Isso significa que a taxa de produção ótima para $t \in [0, T]$ é:

$$P^*(I_t^*, t) = \frac{I_t^*(e^{2(t-T)} - 1)}{e^{2(t-T)} + 1} + \frac{1}{2} \left[\frac{2}{e^{T-t}(e^{2(t-T)} + 1)} \int e^{T-t}(e^{2(t-T)} - 1) S_t dt \right], \quad (4.52)$$

onde I_t^* é o nível de estoque observado no tempo t quando se utiliza a taxa ótima de produção.

Substituindo-se $P^* = P^*(I_t^*, t)$ na equação de estado (4.16) tem-se que:

$$dI_t^* = \left[\frac{I_t^*(e^{2(t-T)} - 1)}{e^{2(t-T)} + 1} + \frac{1}{2} \left(\frac{2}{e^{T-t}(e^{2(t-T)} + 1)} \int e^{T-t}(e^{2(t-T)} - 1) S(t) dt \right) - S_t \right] dt + \sigma dB_t,$$

ou simplesmente:

$$dI_t^* = \left[\frac{I_t^*(e^{2(t-T)} - 1)}{e^{2(t-T)} + 1} + \frac{R(t)}{2} - S_t \right] dt + \sigma dB_t. \quad (4.53)$$

A forma integral da equação (4.16) é:

$$I_t^* = I_0^* + \int_0^t (P^* - S_s) ds + \int_0^t \sigma dB_s,$$

logo, a esperança fica:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[I_t^*] &= \mathbb{E}[I_0^*] + \mathbb{E} \left[\int_0^t (P^* - S_s) ds \right] + \mathbb{E} \left[\int_0^t \sigma dB_s \right] \\ &= I_0^* + \int_0^t \mathbb{E} [(P_s^* - S_s) ds]. \end{aligned}$$

Como $I_0^* = x_0$, tem-se

$$\mathbb{E}[I_t^*] = x_0 + \int_0^t \mathbb{E} [(P_s^* - S_s) ds],$$

e portanto

$$\frac{d}{dt} \mathbb{E}[I_t^*] = \mathbb{E} [P_t^* - S_t].$$

Substituindo a expressão de $P^*(I_t^*, t)$ na equação acima tem-se que:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbb{E}[I_t^*] &= \mathbb{E} \left[\frac{I_t^*(e^{2(t-T)} - 1)}{e^{2(t-T)} + 1} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{e^{T-t}(e^{2(t-T)} + 1)} \cdot \int e^{T-t}(e^{2(t-T)} - 1) \cdot S_t dt \right) - S_t \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\frac{I_t^*(e^{2(t-T)} - 1)}{e^{2(t-T)} + 1} \right] + \mathbb{E} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{2}{e^{T-t}(e^{2(t-T)} + 1)} \int e^{T-t}(e^{2(t-T)} - 1) S_t dt \right) \right] - \mathbb{E}[S_t] \\ &= \frac{e^{2(t-T)} - 1}{e^{2(t-T)} + 1} \mathbb{E}[I_t^*] + \frac{1}{2} \left(\frac{2}{e^{T-t}(e^{2(t-T)} + 1)} \int e^{T-t}(e^{2(t-T)} - 1) S_t dt \right) - S_t. \end{aligned}$$

Portanto, expressa-se uma EDE para o nível ótimo de estoque I_t^* e uma EDO para a média do nível ótimo de estoque. Em resumo, temos que

$$\begin{aligned} dI_t^* &= \left[\frac{I_t^*(e^{2(tT)} - 1)}{e^{2(tT)} + 1} + \frac{1}{2} \left(\frac{2}{e^{Tt}(e^{2(tT)} + 1)} \int e^{Tt}(e^{2(tT)} - 1) S_t dt \right) \right. \\ &\quad \left. - S_t \right] dt + \sigma dB_t, \end{aligned} \quad (4.54)$$

Então,

$$\frac{d}{dt} \mathbb{E}[I_t^*] = \frac{e^{2(t-T)} - 1}{e^{2(t-T)} + 1} \mathbb{E}[I_t^*] + \frac{1}{2} \left(\frac{2}{e^{T-t}(e^{2(t-T)} + 1)} \int e^{T-t}(e^{2(t-T)} - 1) S_t dt \right) - S_t. \quad (4.55)$$

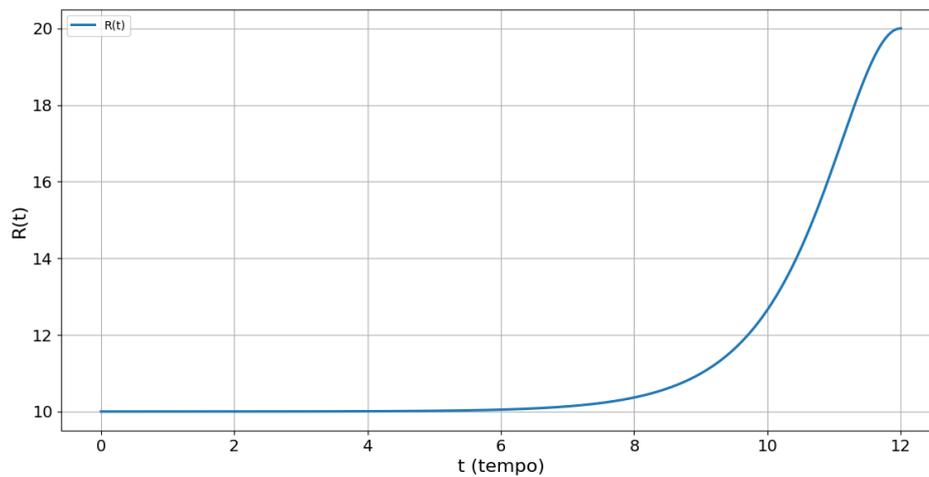
ou de forma simplificada:

$$dI_t^* = \left[\frac{I_t^*(e^{2(t-T)} - 1)}{e^{2(t-T)} + 1} + \frac{R(t)}{2} - S_t \right] dt + \sigma dB_t, \quad (4.56)$$

$$\frac{d}{dt} \mathbb{E}[I_t^*] = \frac{e^{2(t-T)} - 1}{e^{2(t-T)} + 1} E[I_t^*] + \frac{R(t)}{2} - S_t. \quad (4.57)$$

Para ajudar no entendimento desta nova situação, utilizou-se a linguagem de programação *Python* para simular as trajetórias das duas equações conhecendo-se a função S_t , os parâmetros I_0^* e T . Como a função R depende da resolução de uma integral indefinida com a aplicação da condição de contorno $R(T) = B$ para gerar uma solução particular, implementou-se um algoritmo que utiliza o método numérico da Quadratura de Gauss para calcular os valores da função R e projetar um gráfico bidimensional. Nas primeira simulação abaixo utilizou-se os valores $S_t = 5$, isto é, uma função constante, $T = 12$ e $B = 20$.

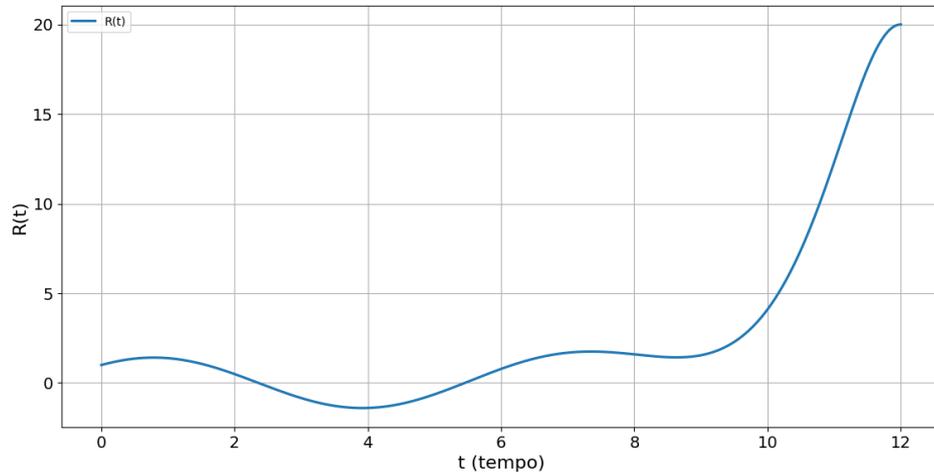
Figura 4.5: Gráfico da função $R(t)$



Fonte: Autoria própria

Já para a segunda simulação utilizou-se a função $S_t = \text{sen}(t)$, $T = 12$ e $B = 20$.

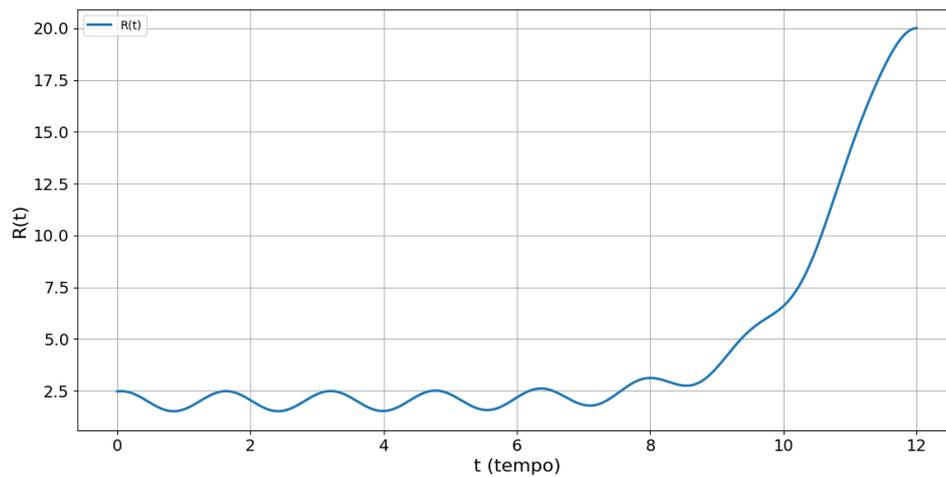
Figura 4.6: Função $S_t = \text{sen}(t)$



Fonte: Autoria própria

Para a terceira simulação, utilizou-se os mesmos valores para T e B com a função $S_t = 1 + \text{sen}(4t)$.

Figura 4.7: Função $S_t = 1 + \text{sen}(4t)$



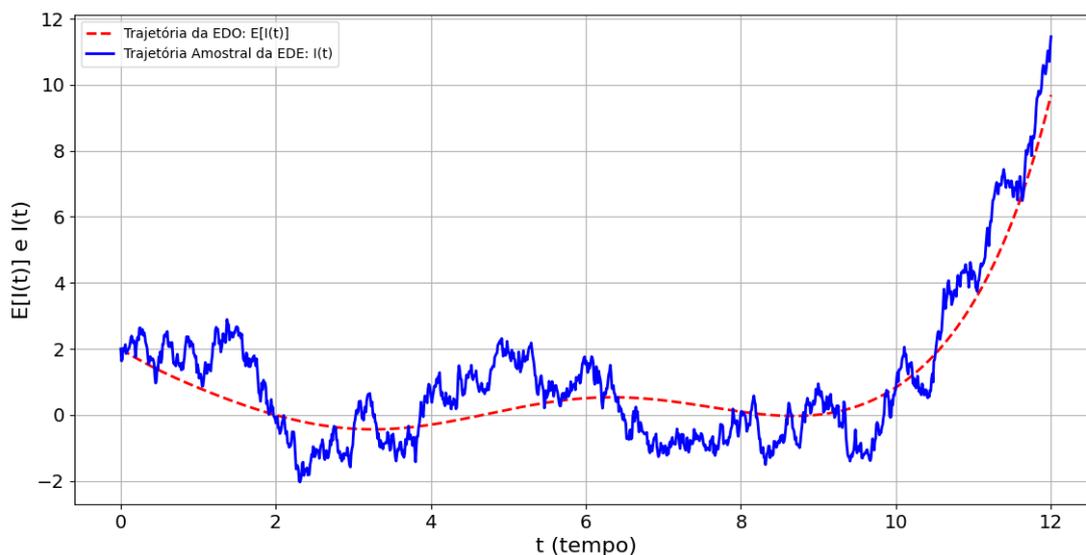
Fonte: Autoria própria

Nota-se que, o comportamento ondulatória da função do tipo seno influencia os valores de $R(t)$. As bibliotecas utilizadas no desenvolvimento do algoritmo que geram os gráficos

apresentados foram: *numpy*, *matplotlib.pyplot* e *scipy.integrate*. O código completo pode ser acessado e executado livremente pela plataforma Google Colab, através do link: <https://colab.research.google.com/drive/1RzI0Upbnys-OeunsWmVewjEgruxcsUD?usp=sharing>.

A principal dificuldade dessa nova situação foi calcular os valores da função $R(t)$ dada uma taxa de demanda que varia no tempo. De posse do algoritmo que calcula numericamente os valores de $R(t)$ foi possível elaborar outro algoritmo em linguagem *python* para simular computacionalmente as trajetórias das equações (4.56) e (4.57). Agora o algoritmo armazena os valores calculados de $R(t)$ em um vetor e os utiliza para determinar os trajetórias da EDE e EDO. Abaixo tem-se uma primeira simulação utilizando $T = 12$, $B = 20$, $\sigma = 2$, $E_0 = 2$, $I_0^* = 2$, $dt = 0,01$ e $S_t = 1 + \sin(t)$:

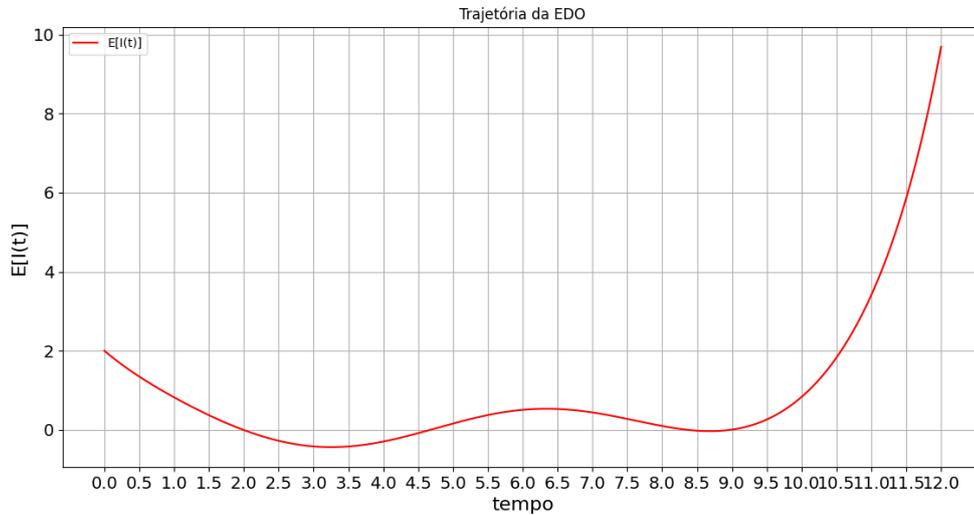
Figura 4.8: Soluções para a EDO e EDE



Fonte: Autoria própria

Nota-se agora que a trajetória da média do nível de estoque ótimo assume valores negativos no intervalo de tempo 2 até valores um pouco maiores do que 4,5 conforme a Figura (4.9):

Figura 4.9: Soluções para a EDO e EDE

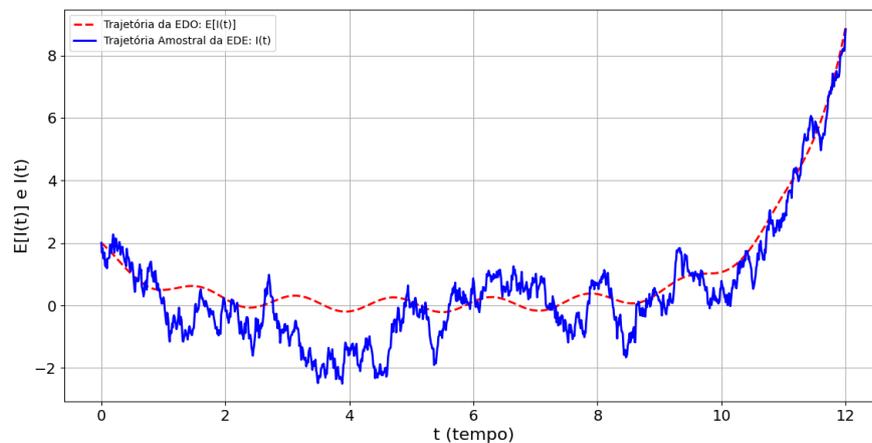


Fonte: Autoria própria

No contexto de planejamento da produção, um nível de estoque negativo indica que a demanda supera a taxa de produção, e esse nível representa uma flexibilização na demanda que não é atendida imediatamente - mas estão contabilizados para futura produção - permitindo que o nível de estoque fique abaixo de zero para indicar os pedidos em atraso. Conforme o tempo se aproxima do final do horizonte de planejamento, o controle ótimo eleva o nível de estoque em resposta ao valor residual ser positivo.

Numa segunda simulação, mudou-se apenas a função da taxa de demanda para $S_t = 1 + \sin(4t)$, Figura (4.10).

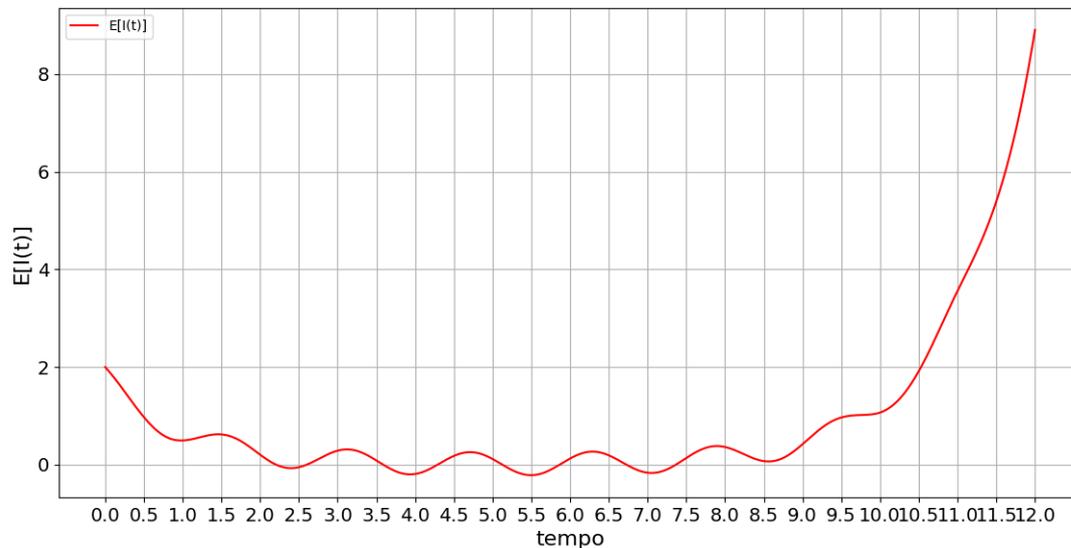
Figura 4.10: Soluções para a EDO e EDE



Fonte: Autoria própria

Percebe-se agora que a média do nível de estoque ótimo apresenta variações entre valores positivos e negativos em mais de um intervalo de tempo. Isso se deve a mudança feita no argumento da função S_t para $\sin(4t)$ que aumenta a frequência ondulatória e diminui o período fazendo com que as oscilações sejam mais frequentes e a função da taxa de demanda varie mais rapidamente, conforme a Figura (4.11):

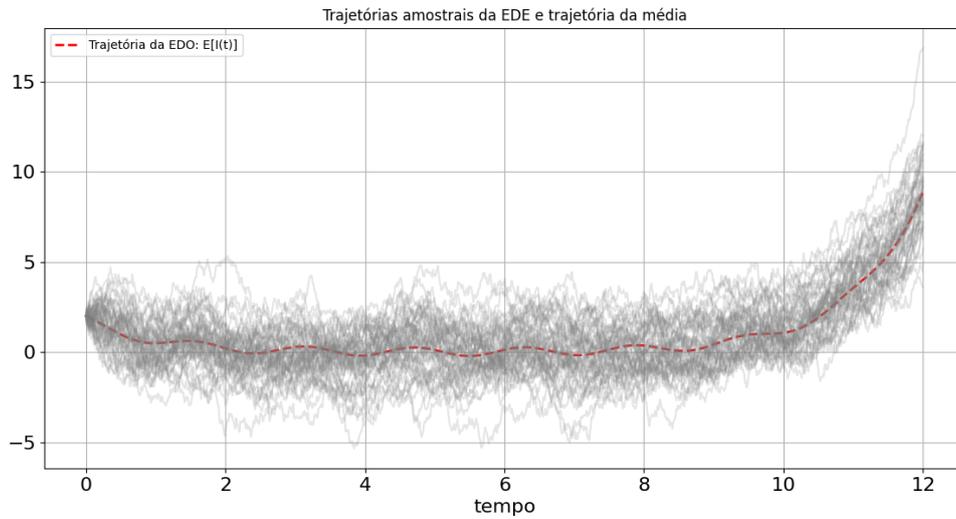
Figura 4.11: Trajetória da EDO



Fonte: Autoria própria

A Figura (4.12) abaixo realiza 50 trajetórias amostrais para a equação diferencial estocástica junto com a trajetória da média, considerando a mesma função para a taxa de demanda S_t e os mesmos parâmetros da simulação (4.10)

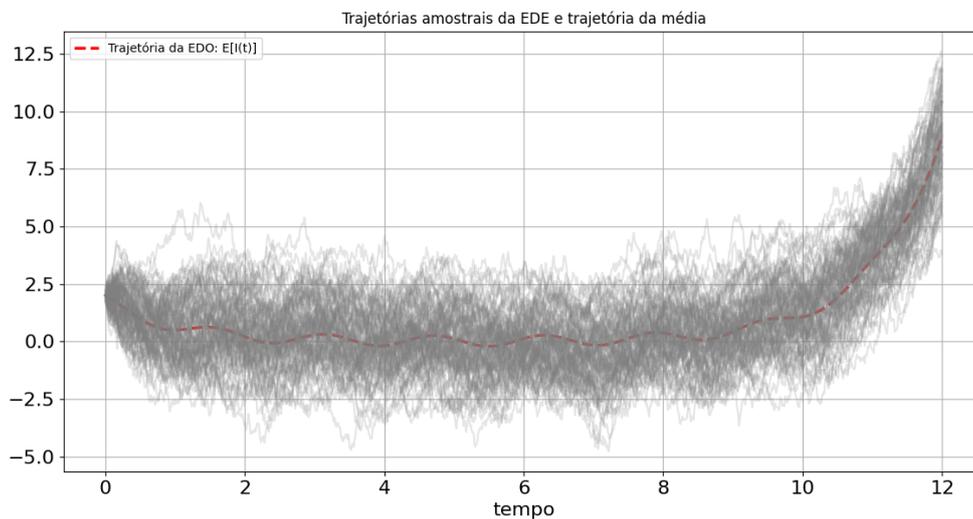
Figura 4.12: 50 trajetórias amostrais



Fonte: Autoria própria

Na sequência, realizou-se uma simulação com 100 trajetórias amostrais da EDE, utilizando os mesmos parâmetros e taxa de demanda da simulação anterior

Figura 4.13: 100 trajetórias amostrais

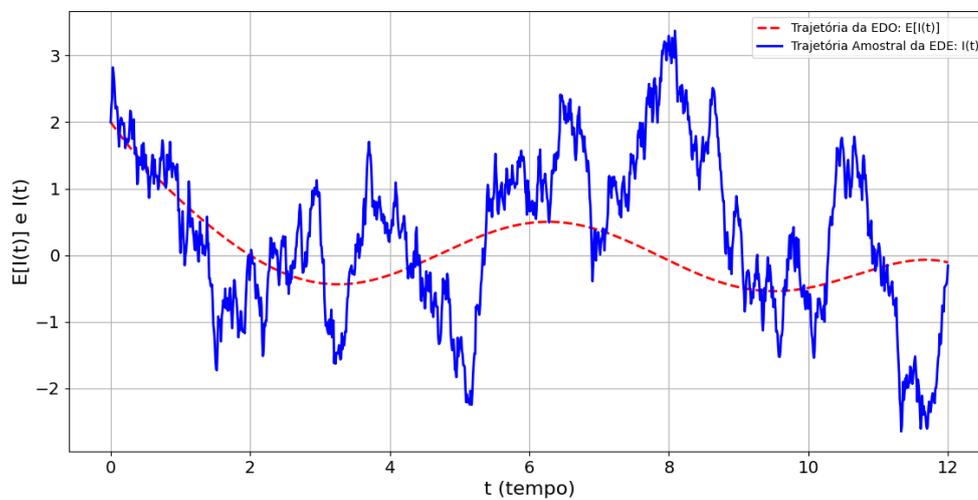


Fonte: Autoria própria

Nota-se agora que, as trajetórias amostrais da equação diferencial estocástica ofuscam a trajetória da média, logo, se fez necessário utilizar um “efeito fumaça” ao invés de cores para melhor visualizar as trajetórias das EDEs e da EDO.

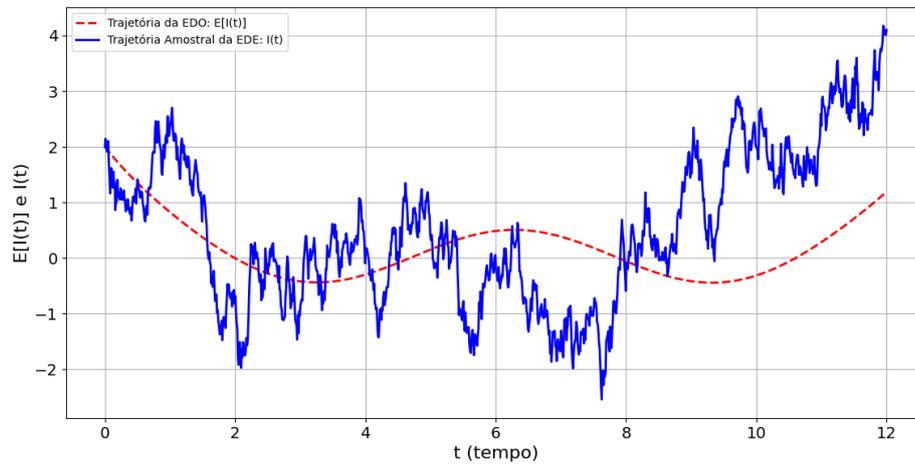
Como mencionado na página 79 da subseção anterior, os valores do nível de estoque dependem também dos valores atribuídos a B e a S , porém agora, S não é um valor constante. Contudo, quando a demanda S é um valor maior do que B , o nível de estoque pode ficar negativo, em média, quando t se aproxima do final do horizonte de planejamento. Na simulação da figura (4.14), utilizou-se a mesma função $S_t = 1 + \text{sen}(t)$ para a demanda, mas agora, o valor de B é 0,4

Figura 4.14: Trajetória amostral com $S_t = 1 + \text{sen}(t)$



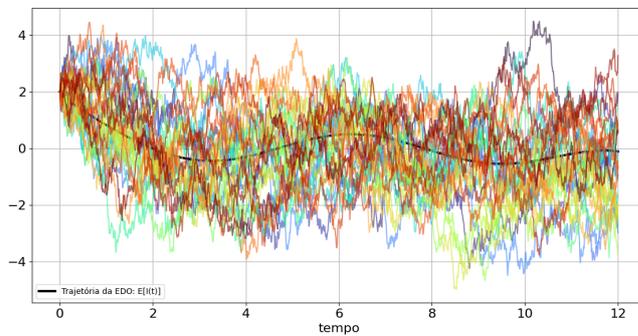
Fonte: Autoria própria

Nota-se que quando $t = T = 12$, o valor da demanda calculada pela função S será: $S_{12} = 1 + \text{sen}(12) = 0,4634$, que é maior do que o valor residual B . Aumentando-se o valor de B para 3, percebe-se que o nível de estoque terminará positivo, em média, ao final do tempo $T = 12$, conforme a Figura 4.15.

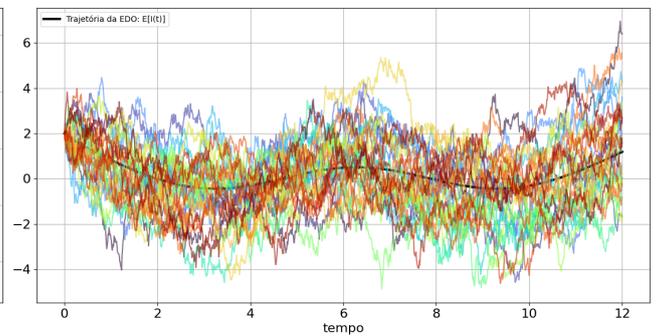
Figura 4.15: $B = 3$ 

Fonte: Autoria própria

Na sequência apresentam-se 30 simulações para $B = 0,4$ e $B = 3$, respectivamente, considerando a função de demanda como $S_t = 1 + \text{sen}(t)$

Figura 4.16: $B = 0,4$ 

Fonte: Autoria própria

Figura 4.17: $B=3$ 

Fonte: Autoria própria

O objetivo desta subseção foi realizar novas simulações computacionais para aprofundar a compreensão do comportamento das trajetórias da equação diferencial estocástica que descreve o nível de estoque ótimo ao longo do tempo, considerando que a taxa de demanda é uma função diferenciável e variável ao longo do tempo. Escolheu-se uma função do tipo seno para a taxa de demanda pelo seu comportamento oscilatório e percebeu-se sua influência na trajetória da solução da EDE, em que o nível de estoque atinge valores negativos em certos intervalos de tempo.

Considerações finais

Neste trabalho, introduziu-se a teoria de controle ótimo estocástico por meio de um modelo aplicado à gestão de estoques de produção. Para isso, foi necessário resolver a versão estocástica da equação de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB), a fim de determinar a taxa ótima de produção P^* , que regula o nível de estoque para maximizar a média da função objetivo. Após a determinação da variável de controle, foi obtida uma equação diferencial parcial, conhecida como equação de Hamilton-Jacobi, que permite, caso seja possível resolvê-la, encontrar uma função explícita para o controle ótimo.

Com o apoio do cálculo diferencial estocástico, analisou-se dois cenários para o problema de estoque de produção: o primeiro com taxa de demanda constante e o segundo com taxa de demanda variável e diferenciável no tempo. No primeiro cenário, conseguiu-se expressar analiticamente a função $R(t)$ que compõe a solução da HJB. A simulação computacional mostrou que o controle ótimo leva o nível de estoque a zero e o mantém nesse valor até o final do horizonte de planejamento, quando o nível de estoque se eleva em função de um valor residual positivo. No segundo cenário, utilizou-se uma função senoidal para simular uma demanda oscilante ao longo do tempo. Observou-se que o comportamento oscilatório dessa função influencia a trajetória média do nível de estoque, que atinge valores negativos em determinados intervalos. Também constatou-se que o nível de estoque é influenciado pelos valores atribuídos à função de demanda S e ao valor residual B . Em ambos os cenários, quando o valor da demanda supera o valor residual, o controle ótimo resulta em níveis de estoque negativos, representando um acúmulo de demanda.

É importante destacar que há, na literatura acadêmica, diversos livros e artigos, como Kuo (2006), Fleming e Rishel (1975), Oksendal (2003), Sun (2006) e Lopes e Filho (1997) que exploram mais detalhadamente a teoria de controle ótimo estocástico

utilizando a função Hamiltoniana em contextos variados, como finanças, biologia e publicidade. Esses recursos podem ser consultados nas referências bibliográficas deste trabalho.

Bibliografia

- ALLEN, L. J. **An introduction to stochastic processes with applications to biology**. [S.l.]: CRC press, 2010.
- ARENALES, M. N. et al. **Pesquisa operacional**. [S.l.]: Elsevier Editora Ltda, 2007.
- CALIN, O. **An informal introduction to stochastic calculus with applications**. [S.l.]: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2015.
- DOOB, J. L. What is a martingale? **The American Mathematical Monthly**, Taylor & Francis, v. 78, n. 5, p. 451–463, 1971.
- EVANS, L. **Partial differential equations**. 2. ed. [S.l.]: Berkeley: Department of Mathematics, University of California, 2010.
- EVANS, L. **An introduction to stochastic differential equations**. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 2013.
- FLEMING, W. H.; RISHEL, R. W. **Deterministic and stochastic optimal control**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 1975. v. 1.
- KLEBANER, F. C. **Introduction to stochastic calculus with applications**. 2. ed. [S.l.]: Imperial College Press, London., 2005.
- KLOEDEN, P.; PLATEN, E. **Numerical Solution of Stochastic Differential Equations**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 1995. v. 37.
- KUO, H.-H. **Stochastic differential equations**. [S.l.]: Springer, 2006.
- KURTZ, T. G. Lectures on stochastic analysis. **Department of Mathematics and Statistics, University of Wisconsin, Madison, WI**, p. 53706–1388, 2001.
- LANG, J. C. **Production and inventory management with substitutions**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2009.
- LOPES, H. J. N.; FILHO, M. C. L. **Uma introdução a soluções de viscosidade para equações de Hamilton-Jacobi**. [S.l.]: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1997.
- MAIA, M. M. F. **Equações diferenciais estocásticas e dinâmica de populações**. [S.l.]: Universidade do Porto (Portugal), 2003.
- MAO, X. **Stochastic differential equations and applications**. [S.l.]: Elsevier, 2007.

OKSENDAL, B. **Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications**. 5. ed. New York: Springer Science & Business Media, 2003. ISBN 3-540-04758-1.

RUFFINO, P. R. C. Uma iniciação aos sistemas dinâmicos estocásticos. 2012.

SETHI, S. P. **What is optimal control theory?** [S.l.]: Springer, 2019.

SETHI, S. P.; THOMPSON, G. L. **Simple models in stochastic production planning**. [S.l.]: Faculty of Management Studies, University of Toronto, 1981.

STADTLER, H. Improved rolling schedules for the dynamic single-level lot-sizing problem. **Management Science**, INFORMS, v. 46, n. 2, p. 318–326, 2000.

STEELE, J. M. **Stochastic calculus and financial applications**. [S.l.]: Springer, 2001. v. 1.

SUN, J.-Q. **Stochastic dynamics and control**. [S.l.]: Elsevier, 2006.