

UMA ABORDAGEM PARA PROBLEMAS  
DE CONTROLE ÓTIMO VIA MÉTODOS DE  
RUNGE-KUTTA E ANÁLISE DE ERRO

*José Renato Campos*

Dissertação de Mestrado  
Pós-Graduação em Matemática Aplicada  
MAP - 088

# Uma Abordagem para Problemas de Controle Ótimo Via Métodos de Runge-Kutta e Análise de Erro

**José Renato Campos**<sup>1</sup>

Dissertação apresentada ao Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de São José do Rio Preto, São Paulo, para a obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada.

Orientador: Prof. Dr. Geraldo Nunes Silva

São José do Rio Preto  
22 de Fevereiro de 2005

---

<sup>1</sup>contato: jrc\_unesp@yahoo.com.br

À Deus.  
À minha família.  
Aos meus amigos.  
*Dedico*

# Agradecimentos

À Deus, por tudo.

À minha família que sempre me apoiou.

Em especial ao Prof. Dr. Geraldo Nunes Silva, pela orientação desde a graduação, incentivo e paciência na elaboração deste trabalho.

Aos professores de graduação e pós-graduação.

Aos professores tutores e colaboradores do Programa Especial de Treinamento pelo apoio e incentivo no ingresso da pós-graduação.

Aos meus amigos de república e da minha cidade pelos momentos de descontração.

Aos meus amigos do Programa Especial de Treinamento e aos demais amigos dos cursos de graduação.

Aos meus amigos pós-graduandos do DCCE, do Departamento de Matemática do IBILCE e outras universidades do país.

À todas as pessoas e funcionários do IBILCE que, direta ou indiretamente, contribuíram para a elaboração deste trabalho.

# Resumo

Métodos de Runge-Kutta para problemas de controle ótimo contínuo são estudados seguindo os trabalhos de Hager [11], [15] e [17]. O problema de controle ótimo é discretizado transformando-se num problema de programação matemática. Um estudo sobre as condições necessárias de otimalidade para a solução do problema e conexões com o problema adjunto é realizado para obtenção das condições de ordem na discretização.

Estuda-se também a convergência da solução do problema discretizado para a solução ótima do problema contínuo (ver Hager [17]). Nesta análise Hager obtêm uma cota para o erro entre a solução numérica e a solução contínua o qual depende do tamanho do passo. Por fim, o trabalho apresenta alguns exemplos com o intuito de ilustrar a teoria apresentada.

**Palavras-chave:** métodos de Runge-Kutta, controle ótimo contínuo, programação matemática, análise de erro.

# Abstract

Runge-Kutta methods for continuous optimal control problems are studied following the papers of Hager [11], [15] and [17]. The control problem is discretized and transformed into a mathematical programming problem. A study about necessary conditions of optimality for the solution of the problem and connections with an adjoint problem are done to provide order conditions for the method of discretization.

It is also studied the convergence of the optimal solution of the discrete problem for the solution of the continuous time control problem (see Hager [17]). In this convergence analysis Hager obtains an error bound comparing the numerical and the continuous solution. The error bound is dependent of the size of the step of the method. Finally, some examples are presented aiming at illustrating the discussed theory.

**Keywords:** Runge-Kutta methods, continuous optimal control, mathematical programming, analysis of error.

# Sumário

Introdução	1
<b>1 Conceitos Preliminares</b>	<b>4</b>
<b>2 O Problema de Controle Ótimo Contínuo, sua Discretização e Estudo do Problema</b>	<b>13</b>
2.1 O Problema de Controle Ótimo Contínuo . . . . .	13
2.2 A Discretização do Problema . . . . .	16
2.3 Condições Necessárias de Otimalidade . . . . .	19
2.3.1 Obtenção das Condições Necessárias de Otimalidade do Problema (2.6) Usando um Multiplicador de Lagrange .	19
2.3.2 Obtenção das Condições Necessárias de Otimalidade do Problema (2.6) Usando um Multiplicador de Lagrange para a Equação (2.4) e Outro Multiplicador para a Equação (2.5) . . . . .	25
2.4 O Sistema Adjunto Transformado . . . . .	30
2.5 Propriedades de Unicidade e Equivalência de Equações . . . . .	34
2.5.1 Propriedades de Unicidade do Estado, Co-estado e Controle	35
2.5.2 A Equivalência do Sistema Original e Adjunto . . . . .	37
2.6 Métodos de Runge-Kutta para Problemas de Controle Ótimo . . .	44
2.6.1 Condições de Ordem na Discretização para Problemas de Controle Ótimo . . . . .	45

<b>3</b>	<b>Análise de Erro</b>	<b>54</b>
3.1	Resultados Necessários na Análise de Erro . . . . .	54
3.2	O Teorema Principal . . . . .	60
<b>4</b>	<b>Exemplos Numéricos</b>	<b>67</b>
4.1	O Programa Duali . . . . .	67
4.1.1	Alguns Comandos do Programa . . . . .	67
4.2	Exemplos . . . . .	69
<b>A</b>	<b>O Problema de Controle Ótimo</b>	<b>75</b>
<b>B</b>	<b>Programação Dinâmica</b>	<b>79</b>
	<b>Conclusão</b>	<b>83</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>85</b>

# Introdução

O estudo de problemas de controle ótimo começou por volta de 1956 por Pontryagin, Bellman, Boltyanskii entre outros. A solução destes problemas proporcionou grande avanço em diversas áreas, como engenharia, biologia, ciências econômicas (ver [4], [18], [24] e [26] por exemplo).

Problemas de controle ótimo contínuo são encontrados em [12], [21], [22] e [23]. Estes problemas podem ser de difícil solução e neste trabalho mostramos que uma solução aproximada pode ser obtida por meio da discretização do problema. Realizamos a discretização utilizando o método de Runge-Kutta para problemas de controle ótimo. Este método difere do método de Runge-Kutta para equações diferenciais ordinárias, e uma hipótese fundamental para a obtenção das condições de ordem na discretização de Runge-Kutta para problemas de controle ótimo são os coeficientes  $b_i$ ,  $1 \leq i \leq s$ , positivos. Outras duas hipóteses necessárias para a obtenção das condições de ordem na discretização para problemas de controle ótimo são: Suavidade e Coercividade. Estudamos cada uma destas duas hipóteses posteriormente.

Assim, com o problema discretizado temos um novo problema a ser resolvido, isto é, um problema de programação matemática. No Capítulo 3 mostramos o teorema que garante a convergência da solução do problema discretizado para a solução ótima do problema contínuo conforme [17]. Neste capítulo também estabelecemos uma cota para o erro entre a solução discreta e a solução ótima contínua o qual depende do tamanho do passo (ver [17]).

Para facilitar o entendimento deste trabalho fizemos dois apêndices. No

primeiro abordamos problemas de controle ótimo contínuo. Apresentamos o Teorema de Pontryagin (ver [21], [22]) e um exemplo. Para o segundo apêndice, apresentamos o problema de controle ótimo discreto e enunciamos o Teorema de Bellman, a qual pode ser encontrado em [7]. Os capítulos estão organizados da seguinte maneira.

No Capítulo 1 apresentamos várias definições, teoremas e conceitos que são utilizados no decorrer do trabalho. Dentre os conceitos mais importantes, expomos o conceito sobre funções mensuráveis, discretização de equações diferenciais, teoria dos multiplicadores de Lagrange e por fim, o Teorema da Função Implícita, da Função Inversa, e o Teorema do Ponto Fixo. Estes resultados não foram apresentados de forma rigorosa e um estudo mais completo pode ser obtido nas seguintes referências: [3], [5], [12], [19], [20] e [25].

O Capítulo 2 é o mais extenso do trabalho. Neste foi realizada uma abordagem do problema no caso contínuo e discreto para que pudéssemos realizar a análise de erro no Capítulo 3. Primeiramente apresentamos o problema de controle ótimo contínuo e em seguida fizemos a discretização do problema utilizando o método de Runge-Kutta. Então obtemos as condições necessárias de otimalidade para a solução do problema discretizado de duas formas utilizando a teoria dos multiplicadores de Lagrange.

Neste capítulo também estabelecemos as Propriedades de Unicidade do Estado, Controle e Co-estado segundo [17] além de algumas equivalências de equações. Precisamente mostramos a equivalência entre duas equações do sistema original e adjunto (ou co-estado). Para finalizar o capítulo mostramos as condições de ordem na discretização de Runge-Kutta para problemas de controle ótimo. Na obtenção destas condições usamos as duas formas que representam as condições necessárias de otimalidade e o sistema adjunto transformado.

No Capítulo 3 fizemos o estudo da análise de erro. Ele foi dividido em duas seções onde na primeira mostramos alguns resultados a serem utilizados na demonstração do Teorema Principal, teorema este que nos mostra a convergência

da solução do problema discretizado para a solução ótima do problema contínuo. Estes resultados podem ser obtidos em [11] e [15], e para uma abordagem mais completa, devemos estudar [8], [9], [10], [14] e [16]. Na segunda seção, basicamente, demonstramos o Teorema Principal seguindo a idéia de [17].

No último capítulo desta dissertação resolvemos alguns exemplos para enfatizar a teoria apresentada nos capítulos anteriores. Os problemas estudados possuem funcional quadrático e estão sujeitos a um sistema dinâmico linear com uma condição inicial. Problemas com estas características podem ser encontrados por exemplo em [21] e [22]. Para a solução destes problemas, primeiramente vamos discretizá-los usando um método de Runge-Kutta (ver [6]), e em seguida usamos o Programa Duali (ver [1] e [2]).

# Capítulo 1

## Conceitos Preliminares

O trabalho a ser apresentado nos capítulos posteriores exige o conhecimento de alguns conceitos. Estes conceitos serão importantes para o entendimento do trabalho e assim fazemos uma rápida abordagem das definições e resultados utilizados. Apresentamos as definições consideradas essenciais e o enunciado dos teoremas cujas demonstrações podem ser facilmente encontradas na literatura. Alguns dos livros usados neste capítulo são [3], [5], [20] e [25]. A ordem em que as definições e resultados foram inseridos no texto seguem de acordo com a evolução do trabalho. Primeiramente vamos expor o conceito relacionado com funções. Assim, seguem as definições de espaço e funções mensuráveis.

**Definição 1.1.** *Dizemos que uma coleção  $\mathcal{G}$  de subconjuntos de um conjunto  $X$  é uma topologia em  $X$  se  $\mathcal{G}$  possui as seguintes propriedades:*

- i)  $\emptyset \in \mathcal{G}$  e  $X \in \mathcal{G}$ ;*
- ii) Se  $V_i \in \mathcal{G}$  para  $i = 1, 2, \dots, n$ , então  $V_1 \cap V_2 \cap \dots \cap V_n \in \mathcal{G}$ ;*
- iii) Se  $\{V_\alpha\}$  é uma coleção arbitrária de membros de  $\mathcal{G}$  (finita, enumerável ou não-enumerável), então  $\bigcup_\alpha V_\alpha \in \mathcal{G}$ .*

**Definição 1.2.** *Se  $\mathcal{G}$  é uma topologia em  $X$ , então  $X$  é chamado de espaço topológico.*

**Definição 1.3.** Dizemos que uma coleção  $\mathcal{M}$  de subconjuntos de um conjunto  $X$  é uma  $\sigma$ -álgebra em  $X$  se  $\mathcal{M}$  possui as seguintes propriedades:

- i)  $X \in \mathcal{M}$ ;
- ii) Se  $A \in \mathcal{M}$ , então  $A^c \in \mathcal{M}$ , onde  $A^c$  é o complemento de  $A$  relativo a  $X$ ;
- iii) Se  $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ , e se  $A_n \in \mathcal{M}$  para  $n = 1, 2, \dots$ , então  $A \in \mathcal{M}$ .

Um exemplo de  $\sigma$ -álgebra é o conjunto das partes de um conjunto  $A$ .

**Definição 1.4.** Se  $\mathcal{M}$  é uma  $\sigma$ -álgebra em  $X$ , então  $X$  é chamado um espaço mensurável, e os membros de  $\mathcal{M}$  são chamados de conjuntos mensuráveis em  $X$ .

**Definição 1.5.** Se  $X$  é um espaço mensurável,  $Y$  é um espaço topológico, e  $f$  é uma transformação de  $X$  a  $Y$ , então  $f$  é função mensurável se  $f^{-1}(V)$  é um conjunto mensurável em  $X$  para todo conjunto aberto  $V$  em  $Y$ .

**Definição 1.6.** Uma medida  $\mu$  é uma função definida sobre a  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{M}$  e cuja imagem pertence a  $[0, \infty]$  tal que satisfaz as seguintes propriedades:

- i)  $\mu(\emptyset) = 0$ ;
- ii)  $\mu(A) \geq 0$  para todo  $A \in \mathcal{M}$ ;
- iii) Se  $A_1, A_2, \dots$  é uma seqüência disjunta de conjuntos em  $\mathcal{M}$ , então

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

**Definição 1.7.** Dizemos que uma função  $f$  é somável se  $f$  é mensurável, não negativa e se  $\int f d\mu < \infty$ .

**Definição 1.8.** (Espaços  $L^p$ )

Seja  $X$  um espaço de medida com medida positiva  $\mu$  e seja  $1 \leq p < \infty$ .

Definimos  $L^p(X, d\mu)$  como sendo a seguinte classe de funções mensuráveis:

$$L^p(X, d\mu) = \{ f : X \rightarrow \mathbb{C} \text{ tal que } f \text{ é mensurável e } |f|^p \text{ é somável} \}.$$

**Definição 1.9.** (Norma de funções de classe  $L^p$ )

Para cada função  $f \in L^p(X)$  definimos a norma por

$$\|f\|_p = \left( \int_X |f(x)|^p \mu(dx) \right)^{1/p}.$$

**Definição 1.10.** (Espaços  $L^\infty$ )

O conjunto  $L^\infty$  denota o espaço usual de funções mensuráveis a Lebesgue que são essencialmente limitadas, ou seja,

$$L^\infty(X) := \{f : X \rightarrow \mathbb{C} \text{ tal que } f \text{ é mensurável e existe uma constante } k \text{ tal que } |f(x)| \leq k \text{ para quase todo } x \in X\}.$$

**Definição 1.11.** (Norma de funções de classe  $L^\infty$ )

Para cada função  $f \in L^\infty(X)$  definimos a norma por

$$\|f\|_\infty = \inf\{K : |f(x)| \leq K \text{ para quase todo } x \in X\}.$$

Antes de definirmos os espaços  $W^{m,p}$  vamos introduzir alguns conceitos necessários para esta definição. Note que, a partir deste momento,  $X \subseteq \mathbb{R}^n$ .

Uma distribuição  $T$  é um funcional linear contínuo em  $\mathcal{D}(X)^1$ , isto é, para  $T : \mathcal{D}(X) \rightarrow \mathbb{C}$  tal que  $f, f_1, f_2 \in \mathcal{D}(X)$  e  $\beta \in \mathbb{C}$ , temos

$$T(f_1 + f_2) = T(f_1) + T(f_2) \text{ e } T(\beta f) = \beta T(f).$$

Seja  $T$  em  $\mathcal{D}'(X)$ , o espaço dual de  $\mathcal{D}(X)$ , e seja  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  inteiros não negativos. Definimos a distribuição  $(\partial/\partial x_1)^{\alpha_1} \dots (\partial/\partial x_m)^{\alpha_m} T$ , denotada por  $D^\alpha T$ , para cada  $f \in \mathcal{D}(X)$ , como

$$(D^\alpha T)(f) = (-1)^{|\alpha|} T(D^\alpha f),$$

onde

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^m \alpha_i$$

e

---

<sup>1</sup> $\mathcal{D}(X)$  representa o espaço das funções teste, ver [19] p. 128.

$$D^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

**Definição 1.12.** (*Espaços  $W^{m,p}$* )

Definimos o conjunto  $W^{m,p}$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , da seguinte maneira:

$$W^{m,p}(X) = \{f : X \rightarrow \mathcal{C} \text{ tal que } f \text{ e } D^\alpha f \text{ estão em } L^p(X) \\ \text{para } 1 \leq |\alpha| \leq m\}.$$

Assim, o conjunto  $W^{m,p}$  denota o espaço de Sobolev consistindo das funções vetoriais cuja  $\alpha$ -ésima derivada pertence a  $L^p$  para todo  $0 \leq |\alpha| \leq m$ .

Agora apresentamos outros dois conceitos: conjuntos convexos e fechados.

**Definição 1.13.** Dizemos que um conjunto  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  é convexo se possui a seguinte propriedade geométrica. Para qualquer  $x, y \in X$  e  $0 \leq t \leq 1$ , o ponto

$$z_t = (1 - t)x + ty$$

também pertence a  $X$ . Como  $t$  percorre o intervalo  $[0, 1]$ , podemos visualizar  $z_t$  como um segmento de reta que liga  $x$  a  $y$  em  $\mathbb{R}^n$ .

**Definição 1.14.** Dado  $x \in \mathbb{R}^n$  e  $r > 0$ , definimos a bola fechada de centro  $x$  e raio  $r$  por

$$B_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\| \leq r\}.$$

**Definição 1.15.** Um conjunto  $X \subset \mathbb{R}^n$  é aberto se para todo ponto  $p \in X$  existe  $r > 0$  tal que  $B_r(p) \subset X$ .

**Definição 1.16.** Um conjunto  $X \subset \mathbb{R}^n$  é chamado fechado se o seu complementar  $\mathbb{R}^n - X$  for um conjunto aberto.

O  $\mathbb{R}^n$  é fechado e aberto. Para visualizarmos tal afirmação, basta notarmos que o conjunto vazio pode ser tomado como aberto ou fechado.

## Discretização de Equações Diferenciais

Neste momento apresentamos uma noção sobre a discretização de equações diferenciais usando a classe de métodos de Runge-Kutta explícito. Consideramos o vetor  $x_{k-1}$  como uma aproximação para o vetor  $x(t_{k-1})$ , onde  $x$  satisfaz o sistema de equações diferenciais

$$x'(t) = f(x(t)),$$

e a aproximação  $x_k$  de  $x(t_k)$  é obtida calculando, para  $i = 1, 2, \dots, s$ ,

$$F_i = f(y_i), \tag{1.1}$$

onde  $y_1, y_2, \dots, y_s$  são dados por

$$y_i = x_{k-1} + h \sum_{j < i} a_{ij} F_j, \tag{1.2}$$

e assim calculamos

$$x_k = x_{k-1} + h \sum_{j=1}^s b_j F_j.$$

Segue de (1.1) que  $F_1, F_2, \dots, F_s$  são aproximações para  $x'(t)$  em um tempo  $t$ . Os valores  $y_1, y_2, \dots, y_s$  dados por (1.2) representam aproximações para os valores de  $x(t)$  em um determinado tempo  $t$ . O inteiro  $s$  é o número de estágios do método e os números  $a_{21}, a_{31}, a_{32}, \dots, a_{s, s-1}, b_1, \dots, b_s$  são constantes que caracterizam a forma de um método de Runge-Kutta.

Os coeficientes do método de Runge-Kutta podem ser escritos na forma matricial. Nesta forma, os números  $c_1, c_2, \dots, c_s$  são definidos por  $c_i = \sum_{j=1}^s a_{ij}$  para  $i = 1, 2, \dots, s$ . A forma matricial geral para métodos de Runge-Kutta é visualizada como

$$\begin{array}{c|cccc}
 c_1 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1s} \\
 c_2 & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2s} \\
 \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
 c_s & a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{ss} \\
 \hline
 & b_1 & b_2 & \dots & b_s
 \end{array}
 .$$

A título de ilustração de um método de Runge-Kutta na forma matricial, tomamos um método particular de quarta ordem com quatro estágios. Assim, a forma matricial do método é dada por

$$\begin{array}{c|cccc}
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\
 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 \hline
 & 1/6 & 1/3 & 1/3 & 1/6
 \end{array}
 . \tag{1.3}$$

A seguir estabelecemos o seguinte teorema (ver [5], p. 177). Este resultado nos auxilia na demonstração do Teorema 2.1.

**Teorema 1.1.** *Para um método de Runge-Kutta de quarta ordem com quatro estágios, temos  $c_4 = 1$  e*

$$\sum_i b_i a_{ij} = b_j(1 - c_j),$$

para  $j = 2, 3$  e  $4$ .

A definição de norma para espaço discreto é análogo ao espaço contínuo. Em particular, para uma seqüência  $z_0, z_1, \dots, z_N$  cujo  $i$ -ésimo elemento é um vetor  $z_i \in \mathbb{R}^n$ , as normas discretas  $L^p$  e  $L^\infty$  são as seguintes:

$$\| z \|_{L^p} = \left( \sum_{i=0}^N h |z_i|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

e

$$\|z\|_{L^\infty} = \sup_{0 \leq i \leq N} |z_i|.$$

## A Teoria dos Multiplicadores de Lagrange

Apresentamos um dos pontos principais deste capítulo: a teoria dos multiplicadores de Lagrange. Esta teoria nos ajuda tanto na obtenção da solução do problema de controle ótimo contínuo quanto discreto (ver [3] e [17]). Aqui, fazemos uma abordagem resumida desta teoria mostrando o teorema de Lagrange que fornece condições necessárias de otimalidade para um problema de programação não linear.

Consideramos o problema com restrições de igualdade da forma

$$\begin{aligned} & \text{minimizar } f(x) \\ & \text{sujeito a } F_i(x) = 0, \quad i = 1, \dots, m, \end{aligned} \tag{1.4}$$

onde  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, m$ , são funções continuamente diferenciáveis.

A solução ótima do problema (1.4) satisfaz a seguinte condição necessária.

**Teorema 1.2.** *Seja  $x^*$  um mínimo local de (1.4), e suponha que os funcionais  $F_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , são continuamente diferenciáveis em uma vizinhança de  $x^*$ , e  $\nabla F_1(x^*), \dots, \nabla F_m(x^*)$  são linearmente independentes. Então existem números  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ , não todos nulos, tais que*

$$\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla F_i(x^*) = 0.$$

Os números  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  são chamados multiplicadores de Lagrange.

Definimos a função Lagrangiana  $\mathcal{L} : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i F_i(x).$$

Então, considerando as hipóteses do Teorema 1.2 juntamente com a equação  $F(x^*) = 0$ , podemos escrever as condições de otimalidade como

$$\nabla_x \mathcal{L}(x^*, \lambda) = 0, \quad \nabla_\lambda \mathcal{L}(x^*, \lambda) = 0,$$

que representam as condições de Lagrange.

Depois de apresentado uma série de resultados que serão utilizados posteriormente, neste momento vamos abordar especificamente alguns resultados a serem utilizados no Capítulo 3. Começemos com a definição de função Lipschitziana.

**Definição 1.17.** *Dado  $X \subset \mathbb{R}^m$ , uma aplicação  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$  diz-se Lipschitziana se existir uma constante  $k > 0$  tal que*

$$\| f(x) - f(y) \| \leq k \| x - y \|, \quad \forall x, y \in X.$$

Notemos que toda aplicação Lipschitziana é uma aplicação contínua.

**Definição 1.18.** *Se  $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$  é  $r$  vezes continuamente diferenciável ( $f \in C^r$ ),  $f$  é bijetora e  $f^{-1} \in C^r$ , então dizemos que  $f$  é um  $C^r$ -difeomorfismo.*

**Teorema 1.3 (Função Implícita).** *Seja  $X \subset \mathbb{R}^{n+p}$ ,  $X$  aberto, e  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^p \in C^r$ . Se em um ponto  $(x_0, y_0) \in X$  a matriz*

$$\left( \frac{\partial f_i}{\partial y_j}(x_0, y_0) \right)_{i,j \in \{1,2,\dots,p\}}$$

*for inversível, então existem conjuntos abertos  $V \subset \mathbb{R}^n$  e  $W \subset \mathbb{R}^p$  tais que*

$$V \times W \subset X \quad \text{e} \quad h : V \rightarrow W \in C^r,$$

*satisfazendo  $h(x_0) = y_0$  e*

$$f(x, h(x)) = f(x_0, y_0), \quad \forall x \in V.$$

**Teorema 1.4 (Função Inversa).** *Seja  $X \subset \mathbb{R}^n$  aberto e  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n \in C^r$ ,  $r \geq 1$ . Se  $x_0 \in X$  é tal que a derivada da função  $f$  em  $x_0$  for inversível, então existe  $V \subset X$  aberto tal que  $x_0 \in V$  e*

$$f|_V : V \rightarrow f(V) \quad \text{é um } C^r \text{ difeomorfismo.}$$

**Definição 1.19.** *Um espaço métrico é um conjunto  $X$  no qual a métrica  $d$  é definida satisfazendo as seguintes propriedades:*

- a)  $0 \leq d(x, y) < \infty$  para todo  $x, y \in X$ ;
- b)  $d(x, y) = 0$  se e somente se  $x = y$ ;
- c)  $d(x, y) = d(y, x)$  para todo  $x, y \in X$ ;
- d)  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$  para todo  $x, y, z \in X$ .

**Teorema 1.5 (Ponto Fixo).** *Seja  $(X, d)$  um espaço métrico completo<sup>2</sup> e  $g : X \rightarrow X$  Lipschitziana com  $0 < k < 1$ . Então existe um único ponto fixo para  $g$ , isto é, existe um único ponto  $x \in X$  tal que  $g(x) = x$ .*

**Definição 1.20.** *Seja  $z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $z \in C^j$ . Definimos série de Taylor para a função  $z(t)$  em torno de  $t = t_k$ , com resto na forma integral, como*

$$\begin{aligned}
 z(t_{k+1}) &= z(t_k) + h z'(t_k) + \frac{1}{2} h^2 z''(t_k) + \dots \\
 &+ \frac{1}{j!} h^j z^{(j)}(t_k) + \frac{1}{(j-1)!} \int_{t_k}^{t_{k+1}} (t - t_k)^{j-1} (z^{(j)}(t) - z^{(j)}(t_k)) dt.
 \end{aligned} \tag{1.5}$$

*Nesta definição fizemos a expansão de Taylor de ordem  $j - 1$ , e somamos e subtraímos o termo  $\frac{1}{j!} h^j z^{(j)}(t_k)$ .*

---

<sup>2</sup>Toda seqüência de Cauchy é convergente em  $X$ .

## Capítulo 2

# O Problema de Controle Ótimo Contínuo, sua Discretização e Estudo do Problema

Neste capítulo estudamos relações entre o problema de controle ótimo contínuo e discreto, com uma ênfase maior no estudo do problema discreto. Realizamos também uma abordagem para a obtenção das condições de ordem na discretização usando o método de Runge-Kutta.

### 2.1 O Problema de Controle Ótimo Contínuo

Os problemas de controle ótimo podem ser formulados de diversas maneiras. Uma delas seria o problema com um funcional a ser minimizado com tempo, condições iniciais e finais fixados. Em outra, podemos fornecer somente as condições iniciais e finais, deixando assim o tempo livre. Em alguns problemas, podemos ter como condição final uma função a ser alcançada. Podemos pensar ainda no problema em que temos apenas a condição inicial e tempo fixados. Desta forma, temos as mais variadas situações de problemas de controle ótimo contínuo a ser estudado. Muitos destes problemas podem ser resolvidos usando o Teorema do Princípio do

Máximo de Pontryagin, dado no Apêndice A.

Neste seção, vamos abordar a classe de problemas de controle ótimo contínuo em que temos um funcional a ser minimizado sujeito a uma equação diferencial com condição inicial e tempo fixados. Mais precisamente, temos o seguinte problema a ser analisado:

$$\text{minimizar } C(x(1)) \tag{2.1}$$

$$\text{sujeito a } x'(t) = f(x(t), u(t)),$$

$$x(0) = a, \quad x \in W^{1,\infty}, \quad u \in L^\infty,$$

onde  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $u(t) \in U$  para quase todo  $t \in [0, 1]$ ,  $U = \mathbb{R}^m$  fechado e convexo,  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $C : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Notemos que  $x \in W^{1,\infty}$  e assim,  $f \in L^\infty$ .

A forma do funcional  $C(x(1))$  é a forma dada por Mayer. Esta forma pode ser substituída por

$$\int_0^1 f_0(x(t), u(t)) dt$$

que é a forma dada por Lagrange, ou ainda por

$$\int_0^1 f_0(x(t), u(t)) dt + C(x(1)),$$

a qual representa a forma do funcional dado por Bolza. É interessante notar que todas estas formas são equivalentes no sentido em que elas podem ser transformadas uma nas outras conforme [7], p. 115.

Como citado anteriormente, o problema (2.1) representa uma classe de problemas de controle ótimo contínuo. Uma questão que aparece é que este problema pode ser de difícil resolução ou nem sempre ser resolvido usando, por exemplo, o Teorema de Pontryagin (ver [23], por exemplo). Assim, devemos conseguir uma outra maneira de abordar este tipo de problema de controle ótimo. Uma vez que a solução exata nem sempre pode ser obtida, o mais conveniente seria procurar uma solução aproximada para o problema. Seguimos esta idéia usando os artigos [11], [15] e [17].

Olhando para o Apêndice A, as condições de otimalidade para o problema contínuo podem ser reescritas como

$$\begin{aligned} x'(t) &= f(x(t), u(t)), \quad x(0) = a, \\ \psi'(t) &= -\nabla_x H(x(t), \psi(t), u(t)), \quad \psi(1) = \nabla C(x(1)), \\ \nabla_u H(x(t), u(t), \psi(t)) &= 0, \end{aligned} \tag{2.2}$$

para todo  $t \in [0, 1]$ .

A função Hamiltoniana neste caso é definida por

$$H(x(t), \psi(t), u(t)) = \psi(t) f(x(t), u(t)), \quad \psi(t) \in \mathbb{R}^n. \tag{2.3}$$

Na obtenção deste resultado é usada a hipótese conhecida como Suavidade. Esta hipótese nos fornece a regularidade da função  $f^1$  e da solução do problema no sentido delas serem funções suaves, não possuem descontinuidades; mais precisamente,  $f$  e a solução são funções ‘bem comportadas’. Uma outra característica desta hipótese é que ela nos fornece a existência dos multiplicadores de Lagrange (ver [12], p. 78).

*Suavidade:* Para algum inteiro  $\kappa \geq 2$ , o problema (2.1) tem uma solução local  $(x^*, u^*)$  que pertence a  $W^{\kappa, \infty} \times W^{\kappa-1, \infty}$ . Existe um conjunto aberto  $\Omega \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  e  $\rho > 0$  tal que  $B_\rho(x^*(t), u^*(t)) \subset \Omega$  para todo  $t \in [0, 1]$ , as primeiras  $\kappa$  derivadas de  $f$  são Lipschitzianas em  $\Omega$ , e as  $\kappa$  primeiras derivadas de  $C$  são Lipschitzianas em  $B_\rho(x^*(1))$ .

Uma vez que a solução de (2.1) não é obtida facilmente, devemos procurar uma solução aproximada. Esta solução aproximada é obtida fazendo a discretização do problema (2.1) usando um método numérico.

---

<sup>1</sup>A função  $f$  rege o sistema dinâmico.

## 2.2 A Discretização do Problema

Métodos numéricos surgiram com a necessidade de resolver equações diferenciais ordinárias, uma vez que as integrais podiam ser de difícil solução. Neste trabalho usamos a discretização dada por Runge-Kutta, método de fácil implementação e assim muito conveniente depois do grande avanço dos computadores.

O método de Runge-Kutta foi originalmente proposto por Runge em 1895 e as primeiras contribuições foram feitas por Heun (1900) e Kutta (1901). Este método estende a idéia do método de Euler que representa a aproximação da integral de uma função por um quadrado<sup>2</sup>. No caso do método de Runge-Kutta de segunda ordem com dois estágios, a aproximação da área desta função seria dada por um trapézio e a medida que particionamos o intervalo em que a função está definida, a precisão do cálculo da área também aumenta como pode ser observado em seus respectivos métodos dado em [6]. Sendo assim, percebemos que a medida em que a ordem e estágio do método aumenta, a precisão da aproximação da área da função que está sendo discretizada também aumenta (novamente estamos supondo que este raciocínio é aplicado a cada partição do intervalo e assim, quanto menor o tamanho da partição, melhor a aproximação). Observamos que métodos com ordens e estágios muito altos são complexos de obtê-los e exigem grande esforço computacional segundo [5], p. 129.

A teoria encontrada na literatura para problemas de controle ótimo garante que os resultados valham para até quatro estágios e quarta ordem, apesar de ser possível estendê-los para ordem e estágios maiores conforme [17]. Neste momento é importante notar que a ordem de convergência difere de equações diferenciais para problemas de controle ótimo, fato que será discutido posteriormente na Seção 2.6.

Antes de iniciarmos a discretização do problema de controle ótimo

---

<sup>2</sup>Estamos supondo a partição do intervalo em que a função está definida, e assim a precisão do cálculo da área aumenta.

contínuo, mostramos uma segunda hipótese que é necessária no decorrer do trabalho. Ela também é importante na análise do problema, mais precisamente na análise de erro que representa um dos pontos principais deste trabalho. Esta hipótese é chamada de Coercividade e nos fornece dependência Lipschitziana da solução conforme as referências [8], [9] e [14].

*Coercividade:* Existe uma constante  $\alpha > 0$  tal que

$$\mathcal{B}(x, u) \geq \alpha \|u\|_{L^2}^2 \quad \text{para todo } (x, u) \in \mathcal{M},$$

onde

$$\begin{aligned} \mathcal{M} = \{ & (x, u) : x \in W^{1,2}, u \in L^2, x' = Ax + Bu, x(0) = 0, \\ & u(t) \in U - U \text{ para quase todo } t \in [0, 1]\}. \end{aligned}$$

A forma  $\mathcal{B}$  dada na condição de Coercividade acima é definida por

$$\mathcal{B} = \frac{1}{2} (x^t(1)Vx(1) + \langle x, Qx \rangle + \langle u, Ru \rangle + 2\langle x, Su \rangle),$$

onde  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  denota o produto interno usual em  $L^2$  e as matrizes  $V, Q, R$  e  $S$  são dadas por

$$\begin{aligned} V &= \nabla C(x^*(1)), \quad Q(t) = \nabla_{xx} H(w^*(t)), \\ R(t) &= \nabla_{uu} H(w^*(t)) \quad \text{e} \quad S(t) = \nabla_{xu} H(w^*(t)), \end{aligned}$$

para  $w^* = (x^*, \psi^*, u^*)$ . As matrizes  $A(t)$  e  $B(t)$  são definidas por

$$A(t) = \nabla_x f(x^*(t), u^*(t)), \quad \text{e} \quad B(t) = \nabla_u f(x^*(t), u^*(t)).$$

Apresentado as hipóteses de Suavidade e Coercividade, estamos aptos a discretizar o problema de controle ótimo contínuo e conseqüentemente partir para a busca de condições necessárias de otimalidade. Como exposto anteriormente, a discretização será feita usando um método de Runge-Kutta explícito. Assim, a forma discreta para a equação diferencial dada em (2.1) usando um método de discretização de Runge-Kutta com  $s$  estágios, coeficientes  $a_{ij}$  e  $b_i$ , e com  $h = 1/N$  para  $N \in \mathbb{N}$ , é

$$x'_k = \sum_{i=1}^s b_i f(y_i, u_{ki}), \quad (2.4)$$

onde

$$y_i = x_k + h \sum_{j=1}^s a_{ij} f(y_j, u_{kj}), \quad i = 1, \dots, s. \quad (2.5)$$

No método de discretização de Runge-Kutta apresentado, note que cada  $y_i$  depende de  $k$  para  $0 \leq k \leq N - 1$ . Logo, poderíamos substituir  $y_i$  por  $y_{ki}$  para  $0 \leq k \leq N - 1$ , mas vamos seguir a literatura usual em análise numérica.

Nas equações acima  $y_j$  e  $u_{kj}$  representam as variáveis intermediárias de estado e de controle no intervalo de tempo  $[t_k, t_{k+1}]$ . O valor de  $x_k$  representa a aproximação para  $x(t_k)$ , onde  $t_k = kh$ , e  $x'_k$  representa a diferença dividida dada por

$$x'_k = \frac{x_{k+1} - x_k}{h}.$$

Como as equações (2.4) e (2.5) representam a discretização da equação diferencial do problema de controle ótimo contínuo (2.1), segue que o problema de controle ótimo discreto é

$$\text{minimizar } C(x_N) \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} \text{sujeito a } x'_k &= \sum_{i=1}^s b_i f(y_i, u_{ki}), \quad x_0 = a, \\ y_i &= x_k + h \sum_{j=1}^s a_{ij} f(y_j, u_{kj}), \end{aligned}$$

para  $u_{ki} \in U$ ,  $1 \leq i \leq s$ ,  $0 \leq k \leq N - 1$ .

O funcional do problema discretizado está na forma de Mayer, e assim não foi preciso fazer a discretização. Se o funcional estivesse na forma de Bolza ou Lagrange, poderíamos equivalentemente transformá-lo na forma de

Mayer, ou então discretizarmos o funcional da mesma forma que é feito a discretização para equações diferenciais. No Capítulo 4, onde fazemos algumas ilustrações numéricas, a discretização do funcional nos exemplos apresentados estão de acordo com a discretização de equações diferenciais.

## 2.3 Condições Necessárias de Otimalidade

Nesta seção vamos obter as condições necessárias de otimalidade para o problema (2.6) de duas maneiras. Na primeira, obtemos as condições necessárias usando apenas um multiplicador de Lagrange para o problema. Na segunda, obtemos as condições necessárias de otimalidade usando um multiplicador de Lagrange para a equação (2.4) e outro multiplicador para a equação (2.5).

### 2.3.1 Obtenção das Condições Necessárias de Otimalidade do Problema (2.6) Usando um Multiplicador de Lagrange

O problema (2.6) pode ser resolvido usando a teoria dos multiplicadores de Lagrange. No Capítulo 4, fazemos uma outra abordagem do problema (2.6). Neste, os exemplos ilustrativos são formas particulares do problema (2.6) e serão resolvidos usando programação dinâmica, a qual não é necessário diferenciabilidade da função  $f$  com relação ao estado (ver [7], p. 217).

Voltando nossa atenção para a solução de (2.6), definimos primeiramente a função  $f^h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{sm} \rightarrow \mathbb{R}^n$  por

$$f^h(x, u) = \sum_{i=1}^s b_i f(y_i(x, u), u_i).$$

A forma  $f^h$  pode ser reescrita de uma forma simplificada, isto é,

$$f^h(x, u) = \sum_{i=1}^s b_i f(y_i, u_i),$$

onde  $y_i$  é dada em (2.5) e  $u = (u_1, u_2, \dots, u_s) \in \mathbb{R}^{sm}$ . Visualizamos o valor de controle discreto  $u_j \in \mathbb{R}^m$ , para  $1 \leq j \leq s$  e  $0 \leq k \leq N - 1$ , como uma aproximação do valor de controle contínuo  $u(t_k)$ , para  $t_k = kh$ . A Hamiltoniana discreta correspondente  $H^h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{sm} \rightarrow \mathbb{R}$  é definida por

$$H^h(x, \psi, u) = \psi f^h(x, u).$$

O problema (2.6) pode ser escrito na forma

$$\begin{aligned} & \text{minimizar } C(x_N) \\ & \text{sujeito a } x_{k+1} = x_k + h \sum_{i=1}^s b_i f(x_k + h \sum_{j=1}^s a_{ij} f(y_j, u_{kj}), u_{ki}) \\ & x_0 = a, \end{aligned}$$

para  $u_{ki} \in U$ ,  $1 \leq i \leq s$ ,  $0 \leq k \leq N - 1$ , ou ainda

$$\begin{aligned} & \text{minimizar } C(x_N) \\ & \text{sujeito a } x_0 = a \\ & x_1 = x_0 + h \sum_{i=1}^s b_i f(x_0 + h \sum_{j=1}^s a_{ij} f(y_j, u_{0j}), u_{0i}) \\ & x_2 = x_1 + h \sum_{i=1}^s b_i f(x_1 + h \sum_{j=1}^s a_{ij} f(y_j, u_{1j}), u_{1i}) \\ & \vdots \\ & x_k = x_{k-1} + h \sum_{i=1}^s b_i f(x_{k-1} + h \sum_{j=1}^s a_{ij} f(y_j, u_{k-1,j}), u_{k-1,i}) \\ & \vdots \\ & x_N = x_{N-1} + h \sum_{i=1}^s b_i f(x_{N-1} + h \sum_{j=1}^s a_{ij} f(y_j, u_{N-1,j}), u_{N-1,i}) \end{aligned}$$

para  $u_{ki} \in U$ ,  $1 \leq i \leq s$ .

Introduzimos os multiplicadores de Lagrange  $\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_N$  e a função Lagrangiana

$$\mathcal{L}(u_0, u_1, \dots, u_{N-1}, x_0, x_1, \dots, x_N, \psi_0, \psi_1, \dots, \psi_N).$$

Assim, temos

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L} = & C(x_N) + \psi_0(a - x_0) + \psi_1 \left( x_0 + h \sum_{i=1}^s b_i f(x_0 + h \sum_{j=1}^s a_{ij} f(y_j, u_{0j}), u_{0i}) \right. \\
 & \left. - x_1 \right) + \psi_2 \left( x_1 + h \sum_{i=1}^s b_i f(x_1 + h \sum_{j=1}^s a_{ij} f(y_j, u_{1j}), u_{1i}) - x_2 \right) + \dots \\
 & + \psi_k \left( x_{k-1} + h \sum_{i=1}^s b_i f(x_{k-1} + h \sum_{j=1}^s a_{ij} f(y_j, u_{k-1,j}), u_{k-1,i}) - x_k \right) + \dots \\
 & + \psi_N \left( x_{N-1} + h \sum_{i=1}^s b_i f(x_{N-1} + h \sum_{j=1}^s a_{ij} f(y_j, u_{N-1,j}), u_{N-1,i}) - x_N \right),
 \end{aligned}$$

ou resumidamente

$$\mathcal{L} = C(x_N) + \sum_{k=0}^{N-1} \psi_{k+1} \left( x_k + h \sum_{i=1}^s b_i f(x_k + h \sum_{j=1}^s a_{ij} f(y_j, u_{kj}), u_{ki}) - x_{k+1} \right)$$

com

$$x_0 = a.$$

Agora aplicamos as condições de Lagrange. Antes, notemos que  $x(1) = x_N$ , onde  $x(1)$  corresponde ao tempo final contínuo e  $x_N$  ao discreto.

Abaixo, temos as derivadas de  $\mathcal{L}$  com relação a  $u$ , e assim

$$\begin{aligned}
 0 &= \psi_1 h \sum_{i=1}^s b_i \nabla_{u_{0i}} f(x_0 + h \sum_{j=1}^s a_{ij} f(y_j, u_{0j}), u_{0i}) \\
 0 &= \psi_2 h \sum_{i=1}^s b_i \nabla_{u_{1i}} f(x_1 + h \sum_{j=1}^s a_{ij} f(y_j, u_{1j}), u_{1i}) \\
 &\vdots \\
 0 &= \psi_k h \sum_{i=1}^s b_i \nabla_{u_{k-1,i}} f(x_{k-1} + h \sum_{j=1}^s a_{ij} f(y_j, u_{k-1,j}), u_{k-1,i}) \\
 &\vdots \\
 0 &= \psi_N h \sum_{i=1}^s b_i \nabla_{u_{N-1,i}} f(x_{N-1} + h \sum_{j=1}^s a_{ij} f(y_j, u_{N-1,j}), u_{N-1,i})
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

As derivadas de  $\mathcal{L}$  com relação a  $x$  são dadas por

$$\begin{aligned}
 0 &= \psi'_0 + \psi_1 \sum_{i=1}^s b_i \nabla_{x_0} f(x_0 + h \sum_{j=1}^s a_{ij} f(y_j, u_{0j}), u_{0i}) \\
 &\vdots \\
 0 &= \psi'_{k-1} + \psi_k \sum_{i=1}^s b_i \nabla_{x_{k-1}} f(x_{k-1} + h \sum_{j=1}^s a_{ij} f(y_j, u_{k-1,j}), u_{k-1,i}) \\
 &\vdots \\
 0 &= \psi'_{N-1} + \psi_N \sum_{i=1}^s b_i \nabla_{x_{N-1}} f(x_{N-1} + h \sum_{j=1}^s a_{ij} f(y_j, u_{N-1,j}), u_{N-1,i}) \\
 0 &= \frac{\partial C(x(1))}{\partial x_N} - \psi_N
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

Por fim, as derivadas de  $\mathcal{L}$  com relação a  $\psi$  são dadas por

$$\begin{aligned}
 0 &= a - x_0 \\
 0 &= x_0 + h \sum_{i=1}^s b_i f(x_0 + h \sum_{j=1}^s a_{ij} f(y_j, u_{0j}), u_{0i}) - x_1 \\
 0 &= x_1 + h \sum_{i=1}^s b_i f(x_1 + h \sum_{j=1}^s a_{ij} f(y_j, u_{1j}), u_{1i}) - x_2 \\
 &\vdots \\
 0 &= x_{N-1} + h \sum_{i=1}^s b_i f(x_{N-1} + h \sum_{j=1}^s a_{ij} f(y_j, u_{N-1,j}), u_{N-1,i}) - x_N
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

A expressão dada em (2.7) pode ser reescrita como

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{k-1,i}} = 0 = \psi_k h \sum_{i=1}^s b_i \nabla_{u_{k-1,i}} \underbrace{f(x_{k-1} + h \sum_{j=1}^s a_{ij} f(y_j, u_{k-1,j}), u_{k-1,i})}_{y_i}$$

para  $k = 1, \dots, N$ . Usando a definição de Hamiltoniana discreta  $H^h$ , isto é,

$$H^h(x, \psi, u) = \psi f^h(x, u) = \psi \sum_{i=1}^s b_i f(y_i, u_i),$$

temos

$$\begin{aligned}
 0 &= \psi_k h \sum_{i=1}^s b_i \nabla_{u_{k-1,i}} f(x_{k-1} + h \sum_{j=1}^s a_{ij} f(y_j, u_{k-1,j}), u_{k-1,i}) \\
 &= \nabla_{u_{k-1,i}} \left( \psi_k \sum_{i=1}^s b_i f(x_{k-1} + h \sum_{j=1}^s a_{ij} f(y_j, u_{k-1,j}), u_{k-1,i}) \right) \\
 &= \nabla_{u_{k-1,i}} H^h(x_{k-1}, \psi_k, u_{k-1}), \quad k = 1, \dots, N.
 \end{aligned}$$

Portanto, obtemos

$$\nabla_{u_i} H^h(x_k, \psi_{k+1}, u_k) = 0,$$

para  $k = 0, \dots, N - 1$ .

Podemos reescrever (2.8) como

$$\begin{aligned}
 \psi'_0 &= -\psi_1 \sum_{i=1}^s b_i \nabla_{x_0} f(x_0 + h \sum_{j=1}^s a_{ij} f(y_j, u_{0j}), u_{0i}) \\
 &\vdots \\
 \psi'_{N-1} &= -\psi_N \sum_{i=1}^s b_i \nabla_{x_{N-1}} f(x_{N-1} + h \sum_{j=1}^s a_{ij} f(y_j, u_{N-1,j}), u_{N-1,i}) \\
 \psi_N &= \frac{\partial C(x(1))}{\partial x_N}
 \end{aligned}$$

ou ainda

$$\psi'_k = -\psi_{k+1} \sum_{i=1}^s b_i \nabla_{x_k} f(x_k + h \sum_{j=1}^s a_{ij} f(y_j, u_{k,j}), u_{ki})$$

para  $k = 0, \dots, N - 1$ , e

$$\psi_N = \frac{\partial C(x(1))}{\partial x_N}.$$

Rearranjando as expressões acima obtemos

$$\psi'_k = -\nabla_{x_k} H^h(x_k, \psi_{k+1}, u_k)$$

para  $k = 0, \dots, N - 1$ , e

$$\psi_N = \frac{\partial C(x(1))}{\partial x_N}.$$

Reescrevendo (2.9) obtemos

$$\begin{aligned} x_0 &= a \\ x'_0 &= \sum_{i=1}^s b_i f(x_0 + h \sum_{j=1}^s a_{ij} f(y_j, u_{0j}), u_{0i}) \\ &\vdots \\ x'_{N-1} &= \sum_{i=1}^s b_i f(x_{N-1} + h \sum_{j=1}^s a_{ij} f(y_j, u_{N-1,j}), u_{N-1,i}) \end{aligned}$$

ou

$$x'_k = \sum_{i=1}^s b_i f(x_k + h \sum_{j=1}^s a_{ij} f(y_j, u_{kj}), u_{ki})$$

para  $k = 0, \dots, N - 1$ , com  $x_0 = a$ . Logo, a expressão acima pode ser reescrita como

$$x'_k = f^h(x_k, u_k),$$

para  $k = 0, \dots, N - 1$  e  $x_0 = a$ .

Portanto, depois de realizado todos os cálculos anteriores obtemos as condições de otimalidade de primeira ordem para problemas de controle ótimo discreto. Resumidamente, as condições de otimalidade são dadas por

$$x'_k = f^h(x_k, u_k), \quad x_0 = a, \tag{2.10}$$

$$\begin{aligned} \psi'_k &= -\nabla_x H^h(x_k, \psi_{k+1}, u_k), \quad \text{e} \\ \psi_N &= \frac{\partial C(x(1))}{\partial x_N}, \end{aligned} \tag{2.11}$$

$$\nabla_{u_i} H^h(x_k, \psi_{k+1}, u_k) = 0, \tag{2.12}$$

para  $k = 0, \dots, N - 1$  e  $\psi_k \in \mathbb{R}^n$ .

### 2.3.2 Obtenção das Condições Necessárias de Otimalidade do Problema (2.6) Usando um Multiplicador de Lagrange para a Equação (2.4) e Outro Multiplicador para a Equação (2.5)

Visando o estudo do problema para a análise de erro, vamos reescrever de uma outra maneira as condições de otimalidade (2.10), (2.11) e (2.12). Para isso vamos supor que um multiplicador  $\lambda_i$  é introduzido para a  $i$ -ésima equação intermediária (2.5) além do multiplicador  $\psi_{k+1}$  para a equação (2.4). Precisamente, o problema (2.6) possui a seguinte forma

$$\text{minimizar } C(x(1))$$

$$\text{sujeito a } x_0 = a$$

$$x_1 = x_0 + h \sum_{i=1}^s b_i f(y_i, u_{0i})$$

$$\vdots$$

$$x_N = x_{N-1} + h \sum_{i=1}^s b_i f(y_i, u_{N-1,i})$$

$$y_1 = x_k + h \sum_{j=1}^s a_{1j} f(y_j, u_{kj})$$

$$\vdots$$

$$y_s = x_k + h \sum_{j=1}^s a_{sj} f(y_j, u_{kj})$$

para  $u_{ki} \in U$ ,  $0 \leq k \leq N-1$ .

Introduzindo os multiplicadores de Lagrange  $\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_N$  e  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ , a função Lagrangiana é dada por

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L} &= C(x(1)) + \psi_0(a - x_0) + \psi_1 \left( x_0 + h \sum_{i=1}^s b_i f(y_i, u_{0i}) - x_1 \right) + \dots \\
 &+ \psi_k \left( x_{k-1} + h \sum_{i=1}^s b_i f(y_i, u_{k-1,i}) - x_k \right) + \dots \\
 &+ \psi_N \left( x_{N-1} + h \sum_{i=1}^s b_i f(y_i, u_{N-1,i}) - x_N \right) \\
 &+ \lambda_1 \left( x_k + h \sum_{j=1}^s a_{1j} f(y_j, u_{kj}) - y_1 \right) + \dots \\
 &+ \lambda_s \left( x_k + h \sum_{j=1}^s a_{sj} f(y_j, u_{kj}) - y_s \right),
 \end{aligned}$$

para  $0 \leq k \leq N - 1$ .

Aplicamos as condições de Lagrange para  $x$ ,  $y$  e  $u$ . A aplicação da condição de Lagrange com relação aos multiplicadores nos fornece a equação diferencial do sistema (2.1) discretizada. A derivada da Lagrangiana  $\mathcal{L}$  com relação a  $x$  fornece

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_0} &= 0 = -\psi_0 + \psi_1 + \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_s \\
 &\vdots \\
 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_{N-1}} &= 0 = -\psi_{N-1} + \psi_N + \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_s, \\
 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_N} &= 0 = \frac{\partial C(x(1))}{\partial x_N} - \psi_N
 \end{aligned}$$

ou reescrevendo de uma forma mais compacta,

$$\sum_{i=1}^s \lambda_i = \psi_k - \psi_{k+1},$$

para  $k = 0, \dots, N - 1$ , e

$$\psi_N = \frac{\partial C(x(1))}{\partial x_N}.$$

As derivadas da Lagrangiana com relação a  $y$  são dadas por

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_1} &= 0 = \psi_{k+1} h b_1 \nabla_{y_1} f(y_1, u_{k1}) - \lambda_1 + \lambda_1 h a_{11} \nabla_{y_1} f(y_1, u_{k1}) \\ &\quad + \lambda_2 h a_{21} \nabla_{y_1} f(y_1, u_{k1}) + \dots + \lambda_s h a_{s1} \nabla_{y_1} f(y_1, u_{k1}) \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_2} &= 0 = \psi_{k+1} h b_2 \nabla_{y_2} f(y_2, u_{k2}) - \lambda_2 + \lambda_1 h a_{12} \nabla_{y_2} f(y_2, u_{k2}) \\ &\quad + \lambda_2 h a_{22} \nabla_{y_2} f(y_2, u_{k2}) + \dots + \lambda_s h a_{s2} \nabla_{y_2} f(y_2, u_{k2}) \\ &\quad \vdots \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_s} &= 0 = \psi_{k+1} h b_s \nabla_{y_s} f(y_s, u_{ks}) - \lambda_s + \lambda_1 h a_{1s} \nabla_{y_s} f(y_s, u_{ks}) \\ &\quad + \lambda_2 h a_{2s} \nabla_{y_s} f(y_s, u_{ks}) + \dots + \lambda_s h a_{ss} \nabla_{y_s} f(y_s, u_{ks}) \end{aligned}$$

notando que  $k$  varia de 0 até  $N - 1$ . Podemos reescrever  $\partial \mathcal{L} / \partial y_1$  como

$$0 = h b_1 \psi_{k+1} \nabla_{y_1} f(y_1, u_{k1}) - \lambda_1 + h \sum_{i=1}^s a_{i1} \lambda_i \nabla_{y_1} f(y_1, u_{k1}),$$

ou ainda

$$h \left( b_1 \psi_{k+1} + \sum_{i=1}^s a_{i1} \lambda_i \right) \nabla_{y_1} f(y_1, u_{k1}) = \lambda_1,$$

para  $0 \leq k \leq N - 1$ . De modo análogo, podemos escrever  $\partial \mathcal{L} / \partial y_2, \dots, \partial \mathcal{L} / \partial y_s$  obtendo

$$\begin{aligned} h \left( b_2 \psi_{k+1} + \sum_{i=1}^s a_{i2} \lambda_i \right) \nabla_{y_2} f(y_2, u_{k2}) &= \lambda_2 \\ &\quad \vdots \\ h \left( b_s \psi_{k+1} + \sum_{i=1}^s a_{is} \lambda_i \right) \nabla_{y_s} f(y_s, u_{ks}) &= \lambda_s, \end{aligned}$$

para  $0 \leq k \leq N - 1$ . De modo geral, temos

$$h \left( b_j \psi_{k+1} + \sum_{i=1}^s a_{ij} \lambda_i \right) \nabla_{y_j} f(y_j, u_{kj}) = \lambda_j$$

para  $1 \leq j \leq s$ , e  $0 \leq k \leq N - 1$ .

A derivada da Lagrangiana  $\mathcal{L}$  com relação a  $u$  será feito passo a passo. Assim, primeiramente tomamos a derivada da Lagrangiana para  $k = 0$  e  $i = j = 1$ , ou seja,  $u_{01}$ . Em seguida, tomamos  $u_{02}$ , que corresponde a  $k = 0$  e  $i = j = 2$  na função Lagrangiana. Seguimos esta idéia para  $k = 0$  e  $i, j$  variando de 1 a  $s$ . Conseqüentemente, devemos tomar  $k = 1$  e novamente percorrer  $i, j$  de 1 a  $s$ . Continuamos este procedimento para valores de  $k$  variando de 0 a  $N - 1$ , observando as variações de  $i, j$ . Portanto,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{01}} &= 0 = \psi_1 h b_1 \nabla_{u_{01}} f(y_1, u_{01}) + \lambda_1 h a_{11} \nabla_{u_{01}} f(y_1, u_{01}) \\
 &+ \lambda_2 h a_{21} \nabla_{u_{01}} f(y_1, u_{01}) + \dots + \lambda_s h a_{s1} \nabla_{u_{01}} f(y_1, u_{01}) \\
 \\
 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{02}} &= 0 = \psi_1 h b_2 \nabla_{u_{02}} f(y_2, u_{02}) + \lambda_1 h a_{12} \nabla_{u_{02}} f(y_2, u_{02}) \\
 &+ \lambda_2 h a_{22} \nabla_{u_{02}} f(y_2, u_{02}) + \dots + \lambda_s h a_{s2} \nabla_{u_{02}} f(y_2, u_{02}) \\
 &\vdots \\
 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{0s}} &= 0 = \psi_1 h b_s \nabla_{u_{0s}} f(y_s, u_{0s}) + \lambda_1 h a_{1s} \nabla_{u_{0s}} f(y_s, u_{0s}) \\
 &+ \lambda_2 h a_{2s} \nabla_{u_{0s}} f(y_s, u_{0s}) + \dots + \lambda_s h a_{ss} \nabla_{u_{0s}} f(y_s, u_{0s})
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

Derivamos agora a Lagrangiana com respeito a  $u_{1i} = u_{1j}$ ,  $i, j = 1, \dots, s$  (notemos que  $i$  e  $j$  possuem a mesma variação). Logo,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{11}} &= 0 = \psi_2 h b_1 \nabla_{u_{11}} f(y_1, u_{11}) + \lambda_1 h a_{11} \nabla_{u_{11}} f(y_1, u_{11}) \\
 &+ \lambda_2 h a_{21} \nabla_{u_{11}} f(y_1, u_{11}) + \dots + \lambda_s h a_{s1} \nabla_{u_{11}} f(y_1, u_{11}) \\
 &\vdots \\
 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{1s}} &= 0 = \psi_2 h b_s \nabla_{u_{1s}} f(y_s, u_{1s}) + \lambda_1 h a_{1s} \nabla_{u_{1s}} f(y_s, u_{1s}) \\
 &+ \lambda_2 h a_{2s} \nabla_{u_{1s}} f(y_s, u_{1s}) + \dots + \lambda_s h a_{ss} \nabla_{u_{1s}} f(y_s, u_{1s})
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

Como exposto anteriormente, devemos seguir o raciocínio aplicado acima até  $u_{N-1,i}$  para  $1 \leq i, j \leq s$ . Para tal valor da Lagrangiana, ou seja, para  $\partial \mathcal{L} / \partial u_{N-1,i}$ , temos

$$\begin{aligned}
 0 &= \psi_N h b_1 \nabla_{u_{N-1,1}} f(y_1, u_{N-1,1}) + \lambda_1 h a_{11} \nabla_{u_{N-1,1}} f(y_1, u_{N-1,1}) \\
 &+ \dots + \lambda_s h a_{s1} \nabla_{u_{N-1,1}} f(y_1, u_{N-1,1}) \\
 &\vdots \\
 0 &= \psi_N h b_s \nabla_{u_{N-1,s}} f(y_s, u_{N-1,s}) + \lambda_1 h a_{1s} \nabla_{u_{N-1,s}} f(y_s, u_{N-1,s}) \\
 &+ \dots + \lambda_s h a_{ss} \nabla_{u_{N-1,s}} f(y_s, u_{N-1,s})
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

Reescrevendo (2.13) obtemos

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{01}} = 0 &= h \left( \psi_1 b_1 + \sum_{i=1}^s a_{i1} \lambda_i \right) \nabla_{u_{01}} f(y_1, u_{01}) \\
 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{02}} = 0 &= h \left( \psi_1 b_2 + \sum_{i=1}^s a_{i2} \lambda_i \right) \nabla_{u_{02}} f(y_2, u_{02}) \\
 &\vdots \\
 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{0s}} = 0 &= h \left( \psi_1 b_s + \sum_{i=1}^s a_{is} \lambda_i \right) \nabla_{u_{0s}} f(y_s, u_{0s})
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

De (2.14), temos

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{11}} = 0 &= h \left( \psi_2 b_1 + \sum_{i=1}^s a_{i1} \lambda_i \right) \nabla_{u_{11}} f(y_1, u_{11}) \\
 &\vdots \\
 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{1s}} = 0 &= h \left( \psi_2 b_s + \sum_{i=1}^s a_{is} \lambda_i \right) \nabla_{u_{1s}} f(y_s, u_{1s})
 \end{aligned} \tag{2.17}$$

Por último, (2.15) nos fornece

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{N-1,1}} = 0 &= h \left( \psi_N b_1 + \sum_{i=1}^s a_{i1} \lambda_i \right) \nabla_{u_{N-1,1}} f(y_1, u_{N-1,1}) \\
 &\vdots \\
 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{N-1,s}} = 0 &= h \left( \psi_N b_s + \sum_{i=1}^s a_{is} \lambda_i \right) \nabla_{u_{N-1,s}} f(y_s, u_{N-1,s})
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

A equação (2.16) pode ser visualizada como

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{0j}} = 0 = h \left( \psi_1 b_j + \sum_{i=1}^s a_{ij} \lambda_i \right) \nabla_{u_{0j}} f(y_j, u_{0j}),$$

para  $1 \leq j \leq s$ . De modo análogo, (2.17) e (2.18) assim como as equações intermediárias podem ser visualizadas na forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{1j}} = 0 &= h \left( \psi_2 b_j + \sum_{i=1}^s a_{ij} \lambda_i \right) \nabla_{u_{1j}} f(y_j, u_{1j}) \\ &\vdots \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{N-1,j}} = 0 &= h \left( \psi_N b_j + \sum_{i=1}^s a_{ij} \lambda_i \right) \nabla_{u_{N-1,j}} f(y_j, u_{N-1,j}) \end{aligned}, \quad (2.19)$$

para  $1 \leq j \leq s$ . Podemos então reescrever estas equações em uma única forma como

$$0 = h \left( \psi_{k+1} b_j + \sum_{i=1}^s a_{ij} \lambda_i \right) \nabla_{u_{kj}} f(y_j, u_{kj}),$$

para  $0 \leq k \leq N - 1$  e  $1 \leq j \leq s$ .

Portanto, as condições de otimalidade usando a teoria de Lagrange para o problema (2.6) é dada da seguinte maneira:

$$\psi_k - \psi_{k+1} = \sum_{i=1}^s \lambda_i, \quad \psi_N = \frac{\partial C(x(1))}{\partial x_N}, \quad (2.20)$$

$$h \left( b_j \psi_{k+1} + \sum_{i=1}^s a_{ij} \lambda_i \right) \nabla_y f(y_j, u_{kj}) = \lambda_j, \quad (2.21)$$

$$\left( b_j \psi_{k+1} + \sum_{i=1}^s a_{ij} \lambda_i \right) \nabla_u f(y_j, u_{kj}) = 0, \quad (2.22)$$

onde  $1 \leq j \leq s$ , e  $0 \leq k \leq N - 1$ .

## 2.4 O Sistema Adjunto Transformado

Nesta seção vamos obter o sistema adjunto transformado. Suponhamos que os valores dos  $b_j$  são todos positivos e assim definimos as variáveis  $\chi_j$  como

$$\chi_j = \psi_{k+1} + \sum_{i=1}^s \frac{a_{ij}}{b_j} \lambda_i, \quad 1 \leq j \leq s. \quad (2.23)$$

Usando a definição de  $\chi_j$  na equação (2.21), obtemos

$$h b_j \chi_j \nabla_y f(y_j, u_{kj}) = \lambda_j. \quad (2.24)$$

Logo, usando as equações (2.20), (2.21) e (2.22), temos que o sistema adjunto transformado é dado da seguinte maneira:

$$\psi_k = \psi_{k+1} + h \sum_{i=1}^s b_i \chi_i \nabla_y f(y_i, u_{ki}), \quad \psi_N = \nabla C(x_N), \quad (2.25)$$

$$\chi_i = \psi_{k+1} + h \sum_{j=1}^s \frac{b_j a_{ji}}{b_i} \chi_j \nabla_y f(y_j, u_{kj}), \quad (2.26)$$

$$u_{ki} \in U, \quad \chi_i \nabla_u f(y_i, u_{ki}) = 0, \quad (2.27)$$

onde  $1 \leq i \leq s$  e  $0 \leq k \leq N - 1$ .

Abaixo, mostramos uma proposição que nos fornece a relação das equações (2.20)-(2.22) com as equações (2.25)-(2.27).

**Proposição 2.1.** *Se  $b_j > 0$  para cada  $j$ , então o sistema de primeira ordem (2.20)-(2.22) e o sistema transformado de primeira ordem (2.25)-(2.27) são equivalentes, isto é, se  $\lambda_1, \dots, \lambda_s$  satisfazem (2.20)-(2.22), então (2.25)-(2.27) valem para  $\chi_j$  definida em (2.23). Reciprocamente, se  $\chi_1, \dots, \chi_s$  satisfaz (2.25)-(2.27), então (2.20)-(2.22) valem para  $\lambda_j$  definida em (2.24).*

*Demonstração.* ( $\Rightarrow$ ) Por hipótese temos que  $b_j > 0$  e assim, pela definição de  $\chi_j$ , temos (2.24).

Estamos interessados em obter (2.25). Fazendo o somatório de 1 a  $s$  para  $j$  em (2.24), e utilizando (2.20) obtemos

$$h \sum_{j=1}^s b_j \chi_j \nabla_y f(y_j, u_{kj}) = \sum_{j=1}^s \lambda_j = \psi_k - \psi_{k+1},$$

onde implica

$$\psi_k = \psi_{k+1} + h \sum_{j=1}^s b_j \chi_j \nabla_y f(y_j, u_{kj}).$$

Para obtermos (2.26), primeiramente multiplicamos a equação (2.24) por  $a_{ji}/b_j$  e assim

$$h a_{ji} \chi_j \nabla_y f(y_j, u_{kj}) = \frac{a_{ji}}{b_j} \lambda_j.$$

Somando a equação acima de 1 a  $s$  para  $j$ , e utilizando (2.23), temos

$$h \sum_{j=1}^s a_{ji} \chi_j \nabla_y f(y_j, u_{kj}) = \sum_{j=1}^s \frac{a_{ji}}{b_j} \lambda_j = \chi_j - \psi_{k+1},$$

que pode ser facilmente escrita na forma (2.26).

Colocando  $b_j$  em evidência em (2.22), temos

$$b_j \left( \psi_{k+1} + \sum_{i=1}^s \frac{a_{ij}}{b_j} \lambda_i \right) \nabla_u f(y_j, u_{kj}) = 0.$$

Usando a definição de  $\chi_j$  segue que

$$b_j \chi_j \nabla_u f(y_j, u_{kj}) = 0,$$

e pelo fato de  $b_j$  ser positivo, obtemos (2.27).

( $\Leftarrow$ ) Para obtermos (2.20), basta fazermos a soma de 1 a  $s$  sobre  $j$  em (2.24) e substituímos em (2.25). Conseqüentemente temos (2.20).

Para verificarmos (2.21), substituímos  $\chi_j$  definido em (2.23) na equação (2.24).

Para estabelecermos (2.22) devemos substituir (2.23) em (2.27). Logo

$$\left( \psi_{k+1} + \sum_{i=1}^s \frac{a_{ij}}{b_j} \lambda_i \right) \nabla_u f(y_j, u_{kj}) = 0.$$

Multiplicando a equação acima por  $b_j$ , temos

$$\left( b_j \psi_{k+1} + \sum_{i=1}^s a_{ij} \lambda_i \right) \nabla_u f(y_j, u_{kj}) = 0,$$

concluindo a demonstração.  $\square$

Uma hipótese fundamental nesta proposição é o fato de tomarmos os valores dos  $b_j$  todos positivos. Caso tivéssemos algum valor de  $b_j$  igual a zero, teríamos que estudar a convergência do método de Runge-Kutta de acordo com

o artigo [11]. Neste trabalho, Dontchev e Hager mostram que é possível obter convergência de segunda ordem para problemas de controle ótimo por meio de uma redução adequada da dimensão do espaço de controle. Se esta redução da dimensão do espaço de controle não é feita, não há convergência conforme o exemplo abaixo (ver [11], p. 203).

**Exemplo 2.1.** *Considere o sistema*

$$\begin{cases} x'(t) = \frac{1}{2}x(t) + u(t) \\ x(0) = 1 \end{cases}.$$

*Minimize o funcional dado por*

$$J = \frac{1}{2} \int_0^1 u(t)^2 + 2x(t)^2 dt.$$

*A discretização de Runge-Kutta com dois estágios no ponto médio para este problema é dada por*

$$\begin{aligned} \min \frac{h}{2} \sum_{k=0}^{N-1} u_{k+\frac{1}{2}}^2 + 2x_{k+\frac{1}{2}}^2 \\ \text{sujeito a } x_{k+\frac{1}{2}} = x_k + \frac{h}{2} \left( \frac{1}{2}x_k + u_k \right) \\ x_{k+1} = x_k + h \left( \frac{1}{2}x_{k+\frac{1}{2}} + u_{k+\frac{1}{2}} \right), \quad x_0 = 1. \end{aligned}$$

*Usando programação dinâmica para resolver o problema discretizado de acordo com o Apêndice B, temos no tempo final*

$$J_N^*\{x_N\} = 0.$$

*Para o período  $N-1$ , usando a equação de Bellman dada no Apêndice B, obtemos*

$$J_{N-1}^*\{x_{N-1}\} = \max\left\{\frac{h}{2} u_{N-\frac{1}{2}}^2 + h x_{N-\frac{1}{2}}^2 + 0\right\}.$$

*Devemos reescrever  $x_{N-\frac{1}{2}}^2$ . Usando as equações dadas pelo sistema, temos*

$$\begin{aligned} x_{N-\frac{1}{2}}^2 &= \left[ x_{N-1} + \frac{h}{2} \left( \frac{1}{2}x_{N-1} + u_{N-1} \right) \right]^2 \\ &= \left( 1 + \frac{h}{2} + \frac{h^2}{16} \right) x_{N-1}^2 + \left( h + \frac{h^2}{4} \right) x_{N-1} u_{N-1} + \left( \frac{h^2}{4} \right) u_{N-1}^2. \end{aligned}$$

Portanto, temos que minimizar a seguinte função:

$$\begin{aligned} \min_u \varphi(u) &= \frac{h}{2} u_{N-\frac{1}{2}}^2 + \left( h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{16} \right) x_{N-1}^2 \\ &\quad + \left( h^2 + \frac{h^3}{4} \right) x_{N-1} u_{N-1} + \left( \frac{h^3}{4} \right) u_{N-1}^2. \end{aligned}$$

Tomando a derivada de  $\varphi(u)$  com relação a  $u_{N-1}$ , temos

$$\frac{h^3}{4} x_{N-1} + \frac{h^3}{2} u_{N-1} + h^2 x_{N-1} = 0.$$

Melhorando a expressão acima obtemos

$$\frac{h}{2} u_{N-1} = - \left( \frac{4+h}{4} \right) x_{N-1} \Rightarrow u_{N-1} = - \left( \frac{4+h}{2h} \right) x_{N-1}.$$

Tomando a derivada de  $\varphi(u)$  com relação a  $u_{N-\frac{1}{2}}$ , obtemos

$$h u_{N-\frac{1}{2}} = 0 \Rightarrow u_{N-\frac{1}{2}} = 0.$$

O mesmo raciocínio se aplica para todos os outros períodos, e sempre vamos obter os mesmos valores para os controles, ou seja, o controle em cada período será igual aos controles  $u_{N-1}$  e  $u_{N-\frac{1}{2}}$ . Logo, substituindo os valores do controle na equação estado, segue que  $x_{k+\frac{1}{2}} = 0$  e  $x_{k+1} = x_k$  para todo  $k$  variando de 0 a  $N-1$ . Usando a condição inicial  $x_0 = 1$ , temos que  $x_k$  é constante e igual a 1. Portanto, usando os valores para estado e controle encontrados acima em cada período  $k$ , temos que zero é um ponto de mínimo para a função custo. Como  $h \ll 0$ , segue que os controles vão oscilar entre 0 e  $-h/2$ . Conseqüentemente, a solução obtida não converge para a solução do problema que é dada por

$$x^*(t) = \frac{2e^{3t} + e^3}{e^{3t/2}(2 + e^3)} \quad e \quad u^*(t) = 2 \frac{e^{3t} - e^3}{e^{3t/2}(2 + e^3)}.$$

## 2.5 Propriedades de Unicidade e Equivalência de Equações

Antes de introduzirmos as Propriedades de Unicidade de Estado, Co-estado e Controle, além de uma abordagem da equivalência de equações, fazemos algumas

observações.

De (2.25) segue que

$$\psi_{k+1} = \psi_k - h \sum_{j=1}^s b_j \chi_j \nabla_y f(y_j, u_{kj}). \quad (2.28)$$

Substituindo a equação acima em (2.26) obtemos

$$\chi_i = \psi_k - h \sum_{j=1}^s \left[ b_j - \frac{b_j a_{ji}}{b_i} \right] \chi_j \nabla_y f(y_j, u_{kj}),$$

que pode ser escrita como

$$\chi_i = \psi_k - h \sum_{j=1}^s \bar{a}_{ij} \chi_j \nabla_y f(y_j, u_{kj}), \quad (2.29)$$

onde

$$\bar{a}_{ij} = b_j - \frac{b_j a_{ji}}{b_i}. \quad (2.30)$$

### 2.5.1 Propriedades de Unicidade do Estado, Co-estado e Controle

Nesta sub-seção mostramos três propriedades que garantem a Unicidade do Estado, Co-estado e Controle. As demonstrações das Propriedades de Unicidade do Estado e Co-estado podem ser obtidas usando a hipótese de Suavidade e [5], p. 160. Já a demonstração da Propriedade de Unicidade do Controle pode ser obtida usando a hipótese de Suavidade e [13]. A primeira propriedade a ser apresentada é a Propriedade de Unicidade do Estado.

**Propriedade 2.1 (Unicidade do Estado).** *Existe constantes positivas  $\gamma, \beta \leq \rho$  tais que se  $h \leq \gamma$  e  $(x, u_j) \in B_\beta(x^*(t), u^*(t))$  para algum  $t \in [0, 1]$ ,  $j = 1, \dots, s$ , o sistema de equações*

$$y_i = x + h \sum_{j=1}^s a_{ij} f(y_j, u_j), \quad 1 \leq i \leq s, \quad (2.31)$$

tem uma única solução  $y_i \in B_\rho(x^*(t), u^*(t))$ ,  $1 \leq i \leq s$ . Se  $y(x, u)$  denota a solução de (2.31) associada com  $(x, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{sm}$ , então  $y(x, u)$  é  $\kappa$  vezes continuamente diferenciável em  $x$  e  $u$ .

A Propriedade de Unicidade do Estado será usada na proposição apresentada na próxima sub-seção. A Propriedade de Unicidade do Controle apresentada abaixo nos auxiliará no Capítulo 3, onde abordamos a análise de erro para problemas de controle ótimo. Esta propriedade nos diz que se tivermos  $(x, \psi)$  suficientemente próximo de  $(x^*(t_k), \psi^*(t_k))$ , então existe um ponto de mínimo local  $u = u(x, \psi)$  da Hamiltoniana.

**Propriedade 2.2 (Unicidade do Controle).** *Existe constantes positivas  $\beta$  e  $\sigma$ , ambas menores que  $\rho$ , tais que se  $(x, \psi) \in B_\beta(x^*(t), \psi^*(t))$  para algum  $t \in [0, 1]$ , o problema*

$$\min_{u \in B_\sigma(u^*(t))} H(x, \psi, u) \quad (2.32)$$

tem uma única solução denotada por  $u(x, \psi)$  que depende continuamente de  $x$  e  $\psi$  e é Lipschitziana em  $x$  e  $\psi$ . Além disso, como  $U = \mathbb{R}^m$  segue do Teorema da Função Implícita que  $u(x, \psi)$  é  $\kappa - 1$  vezes continuamente diferenciável em  $x$  e  $u$ .

Se  $u_{ki}^*$  é uma solução para (2.32) associada com  $x = y_i^*$  e  $\psi = \chi_i^*$ , para  $u_{ki} \in U$ , temos

$$\nabla_u H(y_i, \chi_i, u_{ki}) = 0. \quad (2.33)$$

Definimos a função  $\phi$  da seguinte maneira:

$$\phi(y, \chi) = -\nabla_y H(y, \chi, u)|_{u(y, \chi)} \in \mathbb{R}^n.$$

Para finalizar as Propriedades de Unicidade, apresentamos a Propriedade de Co-estado (ou adjunta). Esta é análoga à Propriedade de Unicidade do Estado.

**Propriedade 2.3 (Unicidade do Co-estado).** *Existe constantes positivas  $\gamma$ ,  $\beta \leq \rho$  tais que se  $h \leq \gamma$  e  $(x, \psi) \in B_\beta(x^*(t), u^*(t))$  para algum  $t \in [0, 1]$ , o sistema de equações*

$$y_i = x + h \sum_{j=1}^s a_{ij} f(y_j, \chi_j), \quad (2.34)$$

$$\chi_i = \psi + h \sum_{j=1}^s \bar{a}_{ij} \phi(y_j, \chi_j), \quad (2.35)$$

tem uma única solução  $(y_i, \chi_i) \in B_\rho(x^*(t), \psi^*(t))$ ,  $1 \leq i \leq s$ . As funções  $f$  e  $\phi$  são Lipschitzianas na  $B_\beta(x^*(t), \psi^*(t))$  para cada  $t \in [0, 1]$ . Além disso, como  $U = \mathbb{R}^m$  segue do Teorema da Função Implícita que  $f$  e  $\phi$  são  $\kappa - 1$  vezes continuamente diferenciável em  $B_\beta(x^*(t), \psi^*(t))$ .

## 2.5.2 A Equivalência do Sistema Original e Adjunto

Começemos com uma proposição.

**Proposição 2.2.** *Suponhamos que*

$$(x_k, u_{kj}) \in B_\beta(x^*(t_k), u^*(t_k)), \quad 1 \leq j \leq s,$$

e para  $y = y(x_k, u_k)$ , seja  $M$  a matriz  $s \times s$  cujo bloco  $(i, j)$  é a matriz  $a_{ij} \nabla_y f(y_j, u_{kj})$  com dimensão  $n \times n$ . Se  $h$  é suficientemente pequeno de modo que  $I - hM$  é inversível, então existe uma solução  $\chi_1, \dots, \chi_s$  para (2.29), e temos

$$\nabla_x H^h(x_k, \psi_{k+1}, u_k) = \sum_{i=1}^s b_i \chi_i \nabla_y f(y_i, u_{ki}) = \sum_{i=1}^s b_i \nabla_y H(y_i, \chi_i, u_{ki}), \quad (2.36)$$

e

$$\nabla_{u_j} H^h(x_k, \psi_{k+1}, u_k) = b_j \chi_j \nabla_u f(y_i, u_{kj}) = b_j \nabla_u H(y_j, \chi_j, u_{kj}). \quad (2.37)$$

*Demonstração.* Primeiramente vamos estabelecer a seguinte identidade:

$$h \psi_{k+1} C (I - h M)^{-1} = \lambda, \quad (2.38)$$

onde  $C$  e  $\lambda$ , matrizes  $1 \times s$ , serão especificadas posteriormente.

A equação (2.21), variando  $i$ , pode ser escrita como

$$h b_j \psi_{k+1} \nabla_y f(y_j, u_{kj}) + (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s) \begin{pmatrix} h a_{1j} \nabla_y f(y_j, u_{kj}) \\ h a_{2j} \nabla_y f(y_j, u_{kj}) \\ \vdots \\ h a_{sj} \nabla_y f(y_j, u_{kj}) \end{pmatrix} = \lambda_j.$$

Observando a equação acima, podemos escrevê-la em notação matricial para  $j$  variando de 1 a  $s$ . Logo, obtemos

$$\begin{aligned} & h \psi_{k+1} (b_1 \nabla_y f(y_1, u_{k1}), b_2 \nabla_y f(y_2, u_{k2}), \dots, b_s \nabla_y f(y_s, u_{ks}))_{1 \times s} \\ & + (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s)_{1 \times s} \begin{pmatrix} h a_{11} \nabla_y f(y_1, u_{k1}) & \dots & h a_{1s} \nabla_y f(y_s, u_{ks}) \\ h a_{21} \nabla_y f(y_1, u_{k1}) & \dots & h a_{2s} \nabla_y f(y_s, u_{ks}) \\ \vdots & & \vdots \\ h a_{s1} \nabla_y f(y_1, u_{k1}) & \dots & h a_{ss} \nabla_y f(y_s, u_{ks}) \end{pmatrix}_{s \times s} \\ & = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s)_{1 \times s}, \end{aligned}$$

com cada  $\lambda_i$  sendo uma matriz  $1 \times n$ . A expressão acima pode ser escrita na forma

$$h \psi_{k+1} C + h \lambda M = \lambda, \quad (2.39)$$

onde  $C$  é a matriz  $1 \times s$  representada por

$$(b_1 \nabla_y f(y_1, u_{k1}), b_2 \nabla_y f(y_2, u_{k2}), \dots, b_s \nabla_y f(y_s, u_{ks})),$$

a matriz  $M$  é representada por

$$\begin{pmatrix} a_{11} \nabla_y f(y_1, u_{k1}) & a_{12} \nabla_y f(y_2, u_{k2}) & \dots & a_{1s} \nabla_y f(y_s, u_{ks}) \\ a_{21} \nabla_y f(y_1, u_{k1}) & a_{22} \nabla_y f(y_2, u_{k2}) & \dots & a_{2s} \nabla_y f(y_s, u_{ks}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} \nabla_y f(y_1, u_{k1}) & a_{s2} \nabla_y f(y_2, u_{k2}) & \dots & a_{ss} \nabla_y f(y_s, u_{ks}) \end{pmatrix},$$

e o vetor  $\lambda$  é

$$(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s).$$

Podemos representar (2.39) como

$$h \psi_{k+1} C = \lambda(I - h M),$$

onde  $I$  é a matriz identidade  $n \times n$ . Usando a hipótese de  $I - h M$  ser inversível, obtemos a identidade desejada.

A equação (2.31), onde  $y(x, u)$ , pode ser escrita como

$$\begin{aligned} y_1 &= x + h a_{11} f(y_1, u_1) + h a_{12} f(y_2, u_2) + \dots + h a_{1s} f(y_s, u_s) \\ y_2 &= x + h a_{21} f(y_1, u_1) + h a_{22} f(y_2, u_2) + \dots + h a_{2s} f(y_s, u_s) \\ &\vdots \\ y_s &= x + h a_{s1} f(y_1, u_1) + h a_{s2} f(y_2, u_2) + \dots + h a_{ss} f(y_s, u_s) \end{aligned} \quad (2.40)$$

Agora fazemos a derivada de (2.40) com relação a  $x$  e  $u$ , notando mais uma vez que  $y$  depende destas variáveis. Assim, para  $y = (y_1, y_2, \dots, y_s)$ , o Jacobiano com relação a  $x$  é estabelecido da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \nabla_x y &= \begin{pmatrix} I \\ I \\ \vdots \\ I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h a_{11} \nabla_y f(y_1, u_{k1}) \nabla_x y_1 & \dots & h a_{1s} \nabla_y f(y_s, u_{ks}) \nabla_x y_s \\ h a_{21} \nabla_y f(y_1, u_{k1}) \nabla_x y_1 & \dots & h a_{2s} \nabla_y f(y_s, u_{ks}) \nabla_x y_s \\ \vdots & & \vdots \\ h a_{s1} \nabla_y f(y_1, u_{k1}) \nabla_x y_1 & \dots & h a_{ss} \nabla_y f(y_s, u_{ks}) \nabla_x y_s \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} I \\ I \\ \vdots \\ I \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} a_{11} \nabla_y f(y_1, u_{k1}) & \dots & a_{1s} \nabla_y f(y_s, u_{ks}) \\ a_{21} \nabla_y f(y_1, u_{k1}) & \dots & a_{2s} \nabla_y f(y_s, u_{ks}) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{s1} \nabla_y f(y_1, u_{k1}) & \dots & a_{ss} \nabla_y f(y_s, u_{ks}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla_x y_1 \\ \nabla_x y_2 \\ \vdots \\ \nabla_x y_s \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Esta expressão pode ser escrita na forma compacta

$$\nabla_x y = D + h M \nabla_x y,$$

onde

$$D := (I, I, \dots, I)^t$$

e

$$\nabla_x y := (\nabla_x y_1, \nabla_x y_2, \dots, \nabla_x y_s)^t.$$

Aqui  $D^t$  representa a transposta da matriz  $D$ , e cada componente  $I$  de  $D$  tem dimensão  $n \times n$ . Manipulando algebricamente a expressão acima obtemos

$$\nabla_x y = (I - h M)^{-1} D. \quad (2.41)$$

Denotamos  $f(y_1, u_{k1})$  por  $f_1$ ,  $f(y_2, u_{k2})$  por  $f_2$  e assim conseqüentemente até  $f(y_s, u_{ks})$ . Fazendo o Jacobiano de (2.40) com relação a  $u$ , para  $u = (u_1, u_2, \dots, u_s)$ , obtemos

$$\begin{aligned} \nabla_u y &= h \begin{pmatrix} a_{11} (\nabla_{u_1} f_1 + \nabla_y f_1 \nabla_{u_1} y_1) & \dots & a_{1s} (\nabla_{u_s} f_s + \nabla_y f_s \nabla_{u_s} y_s) \\ a_{21} (\nabla_{u_1} f_1 + \nabla_y f_1 \nabla_{u_1} y_1) & \dots & a_{2s} (\nabla_{u_s} f_s + \nabla_y f_s \nabla_{u_s} y_s) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{s1} (\nabla_{u_1} f_1 + \nabla_y f_1 \nabla_{u_1} y_1) & \dots & a_{ss} (\nabla_{u_s} f_s + \nabla_y f_s \nabla_{u_s} y_s) \end{pmatrix} \\ &= h \begin{pmatrix} a_{11} \nabla_{u_1} f(y_1, u_{k1}) & \dots & a_{1s} \nabla_{u_s} f(y_s, u_{ks}) \\ a_{21} \nabla_{u_1} f(y_1, u_{k1}) & \dots & a_{2s} \nabla_{u_s} f(y_s, u_{ks}) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{s1} \nabla_{u_1} f(y_1, u_{k1}) & \dots & a_{ss} \nabla_{u_s} f(y_s, u_{ks}) \end{pmatrix} \\ &+ h \begin{pmatrix} a_{11} \nabla_y f(y_1, u_{k1}) & \dots & a_{1s} \nabla_y f(y_s, u_{ks}) \\ a_{21} \nabla_y f(y_1, u_{k1}) & \dots & a_{2s} \nabla_y f(y_s, u_{ks}) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{s1} \nabla_y f(y_1, u_{k1}) & \dots & a_{ss} \nabla_y f(y_s, u_{ks}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla_{u_1} y_1 \\ \nabla_{u_2} y_2 \\ \vdots \\ \nabla_{u_s} y_s \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Representando  $\nabla_u y$  por

$$(\nabla_{u_1} y_1, \nabla_{u_2} y_2, \dots, \nabla_{u_s} y_s)^t$$

e observando que

$$\begin{pmatrix} a_{11} \nabla_{u_1} f_1 & \dots & a_{1s} \nabla_{u_s} f_s \\ a_{21} \nabla_{u_1} f_1 & \dots & a_{2s} \nabla_{u_s} f_s \\ \vdots & & \vdots \\ a_{s1} \nabla_{u_1} f_1 & \dots & a_{ss} \nabla_{u_s} f_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1s} \\ a_{21} & \dots & a_{2s} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & \dots & a_{ss} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla_{u_1} f_1 \\ \nabla_{u_2} f_2 \\ \vdots \\ \nabla_{u_s} f_s \end{pmatrix},$$

podemos representar (2.42) na forma

$$\nabla_u y = h A \nabla_u f + h M \nabla_u y,$$

ou ainda

$$(I - h M) \nabla_u y = h A \nabla_u f,$$

onde  $A$  e  $\nabla_u f$  são dados por

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1s} \\ a_{21} & \dots & a_{2s} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & \dots & a_{ss} \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} \nabla_{u_1} f_1 \\ \nabla_{u_2} f_2 \\ \vdots \\ \nabla_{u_s} f_s \end{pmatrix},$$

respectivamente. Da última equação segue que

$$\nabla_u y = h (I - h M)^{-1} A \nabla_u f. \quad (2.43)$$

Agora estamos aptos a continuar a demonstração, isto é, verificar (2.36) e (2.37).

Usando a equação (2.11), (2.41) e (2.38) temos

$$\begin{aligned} \nabla_x H^h(x_k, \psi_{k+1}, u_k) &= \psi_{k+1} \sum_{i=1}^s b_i \nabla_y f(y_i, u_{ki}) \nabla_x y_i \\ &= \psi_{k+1} C \nabla_x y = \psi_{k+1} C (I - h M)^{-1} D \quad (2.44) \\ &= \frac{\lambda}{h} D = \frac{1}{h} \sum_{i=1}^s \lambda_i. \end{aligned}$$

Pela Proposição 2.1, segue que se (2.21) tem uma única solução, então (2.26) também possui uma única solução. A solução para (2.21) é dada por

$$h b_i \chi_i \nabla_y f(y_i, u_{ki}) = \lambda_i,$$

e assim basta substituírmos a equação acima em (2.44) e temos (2.36), concluindo a primeira parte da demonstração.

Para verificarmos (2.37), devemos usar (2.12), (2.43) e (2.38). Logo,

$$\begin{aligned}
 \nabla_{u_j} H^h(x_k, \psi_{k+1}, u_k) &= \psi_{k+1} \left( b_j \nabla_u f(y_j, u_{kj}) + \sum_{j=1}^s b_j \nabla_y f(y_j, u_{kj}) \nabla_u y_j \right) \\
 &= \psi_{k+1} (b_j \nabla_u f(y_j, u_{kj}) + C \nabla_u y) \\
 &= \psi_{k+1} (b_j I + h C (I - h M)^{-1} A) \nabla_u f(y_j, u_{kj}) \\
 &= \psi_{k+1} b_j \nabla_u f(y_j, u_{kj}) + \lambda A \nabla_u f(y_j, u_{kj}) \\
 &= \left( \psi_{k+1} b_j + \sum_{i=1}^s \lambda_i a_{ij} \right) \nabla_u f(y_j, u_{kj}) \\
 &= b_j \chi_j \nabla_u f(y_j, u_{kj}) \\
 &= b_j \nabla_u H(y_j, \chi_j, u_{kj}),
 \end{aligned}$$

obtendo a equação (2.37).

Desta forma, concluímos a demonstração.  $\square$

Agora analisamos a equivalência de duas equações. Primeiramente mostramos que (2.25) implica em (2.11), e em seguida que (2.27) implica em (2.12). Logo, dada a equação (2.25) e usando a Proposição 2.2, segue que

$$\begin{aligned}
 \psi_k &= \psi_{k+1} + h \sum_{i=1}^s b_i \chi_i \nabla_y f(y_i, u_{ki}) \\
 &= \psi_{k+1} + h \sum_{i=1}^s b_i \nabla_y H(y_i, \chi_i, u_{ki}) \\
 &= \psi_{k+1} + h \nabla_x H^h(x_k, \psi_{k+1}, u_k),
 \end{aligned}$$

e assim obtemos

$$\psi'_k = -\nabla_x H^h(x_k, \psi_{k+1}, u_k).$$

Para mostrarmos que (2.27) implica em (2.12), vamos usar a equação (2.37) da Proposição 2.2. Assim, como  $b_i > 0$ , de (2.27) obtemos

$$\begin{aligned}
 0 &= b_i \chi_i \nabla_u f(y_i, u_{ki}) \\
 &= b_i \nabla_u H(y_i, \chi_i, u_{ki}) \\
 &= \nabla_{u_i} H^h(x_k, \psi_{k+1}, u_k),
 \end{aligned}$$

ou seja, (2.27) implica em (2.12).

Quando o controle está em função de  $y_j$  e  $\chi_j$ , isto é,  $u_{kj} = u(y_j, \chi_j)$ , podemos expressar a discretização (2.4) e (2.5) juntamente com as equações do sistema adjunto transformado, que corresponde a (2.28) e (2.29). Sendo assim, estas equações dependem das mesmas incógnitas e temos

$$x_{k+1} = x_k + h \sum_{i=1}^s b_i f(y_i, \chi_i), \quad x(0) = a, \quad (2.45)$$

$$\psi_{k+1} = \psi_k + h \sum_{i=1}^s b_i \phi(y_i, \chi_i), \quad \psi_N = \nabla C(x_N), \quad (2.46)$$

$$y_i = x_k + h \sum_{j=1}^s a_{ij} f(y_j, \chi_j), \quad (2.47)$$

$$\chi_i = \psi_k + h \sum_{j=1}^s \bar{a}_{ij} \phi(y_j, \chi_j), \quad (2.48)$$

onde  $\bar{a}_{ij}$  está definido em (2.30). A função  $\phi$  nas equações acima está em função de  $y$  e  $\chi$ , e conseqüentemente a Hamiltoniana depende destas variáveis.

Como citado anteriormente,  $y = y(x, u)$ . Temos também que  $u = u(x, \psi)$  e assim podemos denotar  $f(x, u(x, \psi))$  por  $f(x, \psi)$ . Assim, para  $u = u(x, \psi)$ , o método (2.45)-(2.48) pode ser visualizado como um problema de valor inicial e final. Logo, estas equações representam a discretização do problema

$$x'(t) = f(x(t), \psi(t)), \quad x(0) = a, \quad (2.49)$$

$$\psi'(t) = \phi(x(t), \psi(t)), \quad \psi(1) = \nabla C(x(1)). \quad (2.50)$$

As equações (2.49) e (2.50) podem ser obtidas observando a equação (2.2), onde é extraído o valor de  $u$  na última equação em termos de  $x$  e  $\psi$ , e substituído nas outras duas equações.

## 2.6 Métodos de Runge-Kutta para Problemas de Controle Ótimo

Nesta seção abordamos as discretizações de Runge-Kutta tanto para equações diferenciais quanto para problemas de controle ótimo. Estas discretizações se restringirão até quarta ordem.

Tabela 2.1: Ordem do método de discretização para equações diferenciais.

Ordem	Condições $\left( c_i = \sum_{j=1}^s a_{ij}, d_j = \sum_{i=1}^s b_i a_{ij} \right)$
1	$\sum_{i=1}^s b_i = 1$
2	$\sum_{i=1}^s d_i = 1/2$
3	$\sum_{i=1}^s c_i d_i = 1/6, \sum_{i=1}^s b_i c_i^2 = 1/3$
4	$\sum_{i=1}^s b_i c_i^3 = 1/4, \sum_{i,j=1}^s b_i c_i a_{ij} c_j = 1/8, \sum_{i=1}^s d_i c_i^2 = 1/12,$ $\sum_{i,j=1}^s d_i a_{ij} c_j = 1/24$

A Tabela 2.1 mostra a ordem de precisão de um método de Runge-Kutta para equações diferenciais. Nesta tabela, para obtermos a discretização de ordem 1 para equações diferenciais, temos que a condição  $\sum_{i=1}^s b_i = 1$  deve ser satisfeita. Para obtermos ordem 2 na discretização, as condições  $\sum_{i=1}^s b_i = 1$  e  $\sum_{i=1}^s d_i = 1/2$  devem ser satisfeitas, onde  $d_i$  está definido na tabela; assim segue o raciocínio até ordem 4.

Estamos interessados em obter uma tabela análoga a Tabela 2.1, porém para problemas de controle ótimo. Esta necessidade surge pelo fato dos coeficientes  $a_{ij}$  e  $\bar{a}_{ij}$  serem diferentes, isto observando as equações (2.34) e (2.35). Como conseqüência não é possível usar a teoria desenvolvida por Butcher para o problema (2.45)-(2.48) diretamente. Assim, fazemos uma abordagem análoga para problemas de controle ótimo seguindo Hager [17].

A discretização das equações diferenciais (2.49) e (2.50) pode ser dada pelas equações (2.45)-(2.48). Para obtermos uma tabela que represente as condições de ordem na discretização para problemas de controle ótimo, expandimos em série de Taylor as equações (2.49) e (2.50) de duas maneiras seguindo [5] p. 158, e [5] p. 162. Em seguida, igualamos os termos destas expansões para as respectivas potências de  $h$ .

### 2.6.1 Condições de Ordem na Discretização para Problemas de Controle Ótimo

Seja  $z$  e  $g$  dados por

$$z = \begin{pmatrix} x \\ \psi \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad g = \begin{pmatrix} f \\ \phi \end{pmatrix}.$$

Com esta notação, podemos representar as equações (2.49) e (2.50) da seguinte forma:  $z' = g$ . Seguindo a primeira expansão, a série de Taylor até quarta ordem é dada por

$$z(t_{k+1}) = z(t_k) + h g + \frac{1}{2} h^2 g' g + \frac{1}{6} h^3 (g'' g^2 + g' g' g) + \frac{1}{24} h^4 (g''' g^3 + 3 g'' g g' g + g' g'' g^2 + (g')^3 g)_{|(x(t_k), \psi(t_k))} + O(h^5) \quad (2.51)$$

Como pode ser observado,  $g$  e todas as suas derivadas são calculadas em  $(x(t_k), \psi(t_k))$ . Observemos também que  $g$  é uma função vetorial e assim sua derivada corresponde a matriz Jacobiana. Logo,  $g' g$  é a matriz Jacobiana

aplicada a um vetor que nos fornece um vetor. Esta mesma análise segue para todos os outros operadores.

Agora fazemos a segunda expansão da série de Taylor. Note que para determinados valores de  $x_k$  e  $\psi_k$ , as equações (2.47) e (2.48) estão em função de  $h$ , e assim podemos denotar as soluções  $y_i$  e  $\chi_i$  como funções de  $h$ , ou seja,  $y_i(h)$  e  $\chi_i(h)$ . Substituindo os valores  $y_i(h)$  e  $\chi_i(h)$  em (2.45) e (2.46), os valores  $x_{k+1}$  e  $\psi_{k+1}$  serão denotados por  $x_{k+1}(h)$  e  $\psi_{k+1}(h)$ .

Definimos o vetor  $\zeta(h)$  com  $2n(s+1)$  componentes (cada componente  $\zeta_i(h)$ , para  $1 \leq i \leq s+1$ , possui dimensão  $2n$ ) como

$$\zeta_i(h) = \begin{pmatrix} y_i(h) \\ \chi_i(h) \end{pmatrix}, \quad 1 \leq i \leq s, \quad \text{e} \quad \zeta_{s+1}(h) = \begin{pmatrix} x_{k+1}(h) \\ \psi_{k+1}(h) \end{pmatrix}.$$

Definimos também  $G_i$  como

$$G_i(\zeta) = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^s a_{ij} f(\zeta_j) \\ \sum_{j=1}^s \bar{a}_{ij} \phi(\zeta_j) \end{pmatrix}, \quad 1 \leq i \leq s+1,$$

e fixamos

$$a_{s+1,j} = \bar{a}_{s+1,j} = b_j, \quad 1 \leq j \leq s. \quad (2.52)$$

Com estas definições, podemos representar as equações (2.45)-(2.48) como

$$\zeta(h) = \zeta(0) + h G(\zeta(h)), \quad (2.53)$$

onde

$$\zeta_i(0) = \begin{pmatrix} x_k \\ \psi_k \end{pmatrix} = z_k, \quad 1 \leq i \leq s+1.$$

Finalmente, expandindo  $\zeta(h)$  em série de Taylor em torno de  $h = 0$  obtemos

$$\begin{aligned} \zeta(h) = & \zeta(0) + h G + \frac{1}{2} h^2 (2 G' G) + \frac{1}{6} h^3 (3 G'' G^2 + 6 G' G' G) + \frac{1}{24} h^4 \\ & (4 G''' G^3 + 24 G'' G G' G + 12 G' G''' G^2 + 24 (G')^3 G)_{|\zeta(0)} + O(h^5). \end{aligned} \quad (2.54)$$

Definimos

$$\bar{c}_i = \sum_{j=1}^s \bar{a}_{ij}, \quad 1 \leq i \leq s+1,$$

e de (2.52), segue que

$$\bar{c}_{s+1} = c_{s+1} = \sum_{j=1}^s b_j.$$

Na Tabela 2.1 temos  $c_i = \sum_{j=1}^s a_{ij}$ , e da forma que definimos  $\bar{c}_i$ , podemos escrever  $G_i$  como

$$G_i = \begin{pmatrix} c_i f \\ \bar{c}_i \phi \end{pmatrix} = c_i f_0 + \bar{c}_i \phi_0, \quad (2.55)$$

onde

$$f_0 = \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix} \text{ e } \phi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \phi \end{pmatrix}.$$

A seguir, vamos igualar os termos das potências de  $h$  nas expansões de Taylor (2.51) e (2.54).

Por convenção, temos  $z_k = \zeta(0)$ . Obtemos a condição de primeira ordem se tivermos os termos das equações (2.51) e (2.54) iguais para  $h$ . Para  $i = s+1$ , de (2.55) segue que

$$G_{s+1} = \sum_{i=1}^s b_i (f_0 + \phi_0) = \sum_{i=1}^s b_i g.$$

Por outro lado,  $g = z'$ . Assim, a condição de primeira ordem é dada por

$$\sum_{i=1}^s b_i = 1. \quad (2.56)$$

Para obtermos esta condição olhamos somente para o termo  $i = s+1$ , pois para  $0 \leq i \leq s$  ocorre um absurdo na obtenção das condições de ordem na discretização.

Para a obtenção da condição de ordem 2 novamente olhamos para o termo  $i = s+1$ . A derivada de  $G_{s+1}$  é dada por  $(G_{s+1})'_i = b_i g'$ . Desejamos que os termos de (2.51) e (2.54) sejam iguais, para  $h^2$ . Logo,

$$\begin{aligned} G'_{s+1} G &= \sum_{i=1}^s (G'_{s+1})_i G_i \\ &= \sum_{i=1}^s b_i g' (c_i f_0 + \bar{c}_i \phi_0). \end{aligned}$$

Por outro lado, para o termo em função de  $h^2$ , segue de (2.51) que

$$\frac{1}{2} g' g = \frac{1}{2} g' (f_0 + \phi_0).$$

Neste momento surge a condição de ordem 2, dada por

$$\sum_{i=1}^s b_i c_i = \frac{1}{2} = \sum_{i=1}^s b_i \bar{c}_i.$$

A condição

$$\sum_{i=1}^s b_i c_i = \frac{1}{2} \tag{2.57}$$

pode ser facilmente visualizada como

$$\sum_{i=1}^s d_i = \frac{1}{2}, \tag{2.58}$$

onde  $d_i$  foi definido na Tabela 2.1. Usando as condições (2.56) e (2.58), obtemos

$$\sum_{i=1}^s b_i \bar{c}_i = \frac{1}{2}.$$

Para verificarmos tal afirmação basta notarmos que

$$\bar{c}_i = \sum_{j=1}^s \frac{b_j b_j - b_j a_{ji}}{b_i} = 1 - \sum_{j=1}^s \frac{b_j a_{ji}}{b_i} = 1 - \frac{d_i}{b_i}, \tag{2.59}$$

e assim que

$$\sum_{i=1}^s b_i \bar{c}_i = \sum_{i=1}^s (b_i - d_i) = \frac{1}{2}.$$

Portanto, as condições de segunda ordem podem ser resumidas em (2.58).

Consideramos a obtenção das condições de terceira ordem. Pela equação (2.55) segue que

$$\frac{\partial G_i}{\partial \zeta_j \partial \zeta_k} = 0, \text{ para todo } j \neq k.$$

Este resultado segue apenas observando as estruturas de  $\zeta_j$  e  $\zeta_k$  em  $G_i$ . A primeira derivada de  $G$  pode ser vista como

$$(G'_i)_j = a_{ij} f'_0 + \bar{a}_{ij} \phi'_0.$$

Logo, temos

$$G'_{s+1} G' G = \sum_{i,j=1}^s b_i g' (a_{ij} f'_0 + \bar{a}_{ij} \phi'_0) (c_j f_0 + \bar{c}_j \phi_0).$$

Para  $i = s + 1$ , a segunda derivada de  $G_{s+1}$  pode ser vista como

$$G''_{s+1} = \sum_{i=1}^s b_i g''.$$

Aplicando a derivada acima em  $G^2$  obtemos

$$\begin{aligned} G''_{s+1} G^2 &= G^t G''_{s+1} G = \sum_{i=1}^s b_i g'' (c_i f_0 + \bar{c}_i \phi_0)^2 \\ &= \sum_{i=1}^s b_i g'' (c_i^2 f_0^2 + 2 c_i \bar{c}_i f_0 \phi_0 + \bar{c}_i^2 \phi_0^2). \end{aligned}$$

Podemos escrever  $g'g'g$  da seguinte maneira:

$$g'g'g = g' (f'_0 + \phi'_0) (f_0 + \phi_0).$$

De modo análogo,  $g''g^2$  pode ser visto como

$$g''g^2 = g'' (f_0 + \phi_0)^2 = g'' (f_0^2 + 2 f_0 \phi_0 + \phi_0^2).$$

Agora estamos aptos a encontrar as condições de terceira ordem. Observando as expressões acima e o primeiro termo em (2.51) e (2.54) para  $h^3$ , obtemos

$$\frac{1}{3} = \sum_{i=1}^s b_i c_i^2 = \sum_{i=1}^s b_i c_i \bar{c}_i = \sum_{i=1}^s b_i \bar{c}_i^2, \quad (2.60)$$

a qual representam condições de terceira ordem. Para o segundo termo de (2.51) e (2.54) em função de  $h^3$ , depois de obtida a igualdade dos mesmos, as condições que surgem são

$$\frac{1}{6} = \sum_{i,j=1}^s b_i a_{ij} c_j = \sum_{i,j=1}^s b_i a_{ij} \bar{c}_j = \sum_{i,j=1}^s b_i \bar{a}_{ij} c_j = \sum_{i,j=1}^s b_i \bar{a}_{ij} \bar{c}_j. \quad (2.61)$$

Nosso objetivo neste instante é simplificar as condições apresentadas em (2.60) e (2.61). Pela equação (2.60), segue a primeira condição:

$$\frac{1}{3} = \sum_{i=1}^s b_i c_i^2. \quad (2.62)$$

Segue da segunda igualdade em (2.60) e (2.59) que

$$\frac{1}{3} = \sum_{i=1}^s b_i c_i \bar{c}_i = \sum_{i=1}^s b_i c_i \left(1 - \frac{d_i}{b_i}\right) = \sum_{i=1}^s b_i c_i - \sum_{i=1}^s c_i d_i.$$

Usando a equação (2.57) obtemos

$$\sum_{i=1}^s c_i d_i = \frac{1}{6}, \quad (2.63)$$

a qual representa a segunda condição para obtermos convergência de terceira ordem para problemas de controle ótimo. Segue da última igualdade em (2.60) e de (2.59) que

$$\frac{1}{3} = \sum_{i=1}^s b_i \bar{c}_i^2 = \sum_{i=1}^s b_i \left(1 - \frac{d_i}{b_i}\right)^2 = \sum_{i=1}^s b_i - \sum_{i=1}^s 2 d_i + \sum_{i=1}^s \frac{d_i^2}{b_i},$$

o que implica

$$\sum_{i=1}^s \frac{d_i^2}{b_i} = \frac{1}{3}. \quad (2.64)$$

A equação (2.60) nos forneceu três condições para obtermos convergência de terceira ordem. Mostramos que as condições apresentadas em (2.61) são obtidas usando as condições (2.62)-(2.64) encontradas anteriormente, e assim temos somente três condições a serem satisfeitas para obtermos convergência de terceira ordem usando o método de Runge-Kutta.

A primeira igualdade de (2.61) pode ser escrita como

$$\sum_{i,j=1}^s b_i a_{ij} c_j = \sum_{j=1}^s d_j c_j,$$

e usando a condição (2.63), encontramos

$$\sum_{i,j=1}^s b_i a_{ij} c_j = \frac{1}{6}.$$

Para a segunda igualdade em (2.61), usando (2.59) e (2.64), temos

$$\sum_{i,j=1}^s b_i a_{ij} \bar{c}_j = \sum_{j=1}^s d_j \left(1 - \frac{d_j}{b_j}\right) = \sum_{j=1}^s d_j - \sum_{j=1}^s \frac{d_j^2}{b_j} = \frac{1}{6}.$$

A terceira igualdade de (2.61) pode ser escrita, usando (2.30), (2.57) e (2.62), como

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^s b_i \bar{a}_{ij} c_j &= \sum_{i,j=1}^s b_i \left(b_j - \frac{b_j a_{ji}}{b_i}\right) c_j = \sum_{i,j=1}^s (b_i b_j c_j - b_j a_{ji} c_j) \\ &= \sum_{j=1}^s b_j c_j - \sum_{j=1}^s b_j c_j^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Para a última igualdade de (2.61), temos

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^s b_i \bar{a}_{ij} \bar{c}_j &= \sum_{i,j=1}^s b_i \left(b_j - \frac{b_j a_{ji}}{b_i}\right) \left(1 - \frac{d_j}{b_j}\right) = \sum_{j=1}^s (1 - c_j) (b_j - d_j) \\ &= \sum_{j=1}^s b_j - \sum_{j=1}^s d_j - \sum_{j=1}^s b_j c_j + \sum_{j=1}^s c_j d_j = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Portanto, até este momento analisamos as condições de terceira ordem para problemas de controle ótimo usando o método de Runge-Kutta.

Para encontrarmos as condições de quarta ordem, devemos seguir o mesmo raciocínio utilizado anteriormente. Existem 8 condições a serem satisfeitas para obtermos convergência de quarta ordem. Estas condições são obtidas igualando os coeficientes de quarta ordem em  $h$  de (2.51) e (2.54). A verificação destas condições pode ser encontrada em [17]. Assim, na Tabela 2.2 temos as condições de ordem de discretização para problemas de controle ótimo.

Para finalizarmos o Capítulo 2, vamos mostrar um teorema que relaciona as Tabelas 2.1 e 2.2.

**Teorema 2.1.** *Todo método de Runge-Kutta explícito com quatro estágios e  $b_i > 0$  para todo  $i$  que satisfaz as condições da Tabela 2.1, também satisfaz todas as condições da Tabela 2.2.*

Tabela 2.2: Ordem do método de discretização para controle ótimo.

Ordem	Condições $\left( c_i = \sum_{j=1}^s a_{ij}, d_j = \sum_{i=1}^s b_i a_{ij} \right)$
1	$\sum_{i=1}^s b_i = 1$
2	$\sum_{i=1}^s d_i = 1/2$
3	$\sum_{i=1}^s b_i c_i^2 = 1/3, \sum_{i=1}^s c_i d_i = 1/6, \sum_{i=1}^s d_i^2/b_i = 1/3$
4	$\sum_{i=1}^s b_i c_i^3 = 1/4, \sum_{i=1}^s d_i^3/b_i^2 = 1/4, \sum_{i,j=1}^s b_i c_i a_{ij} d_j/b_j = 5/24,$ $\sum_{i=1}^s c_i d_i^2/b_i = 1/12, \sum_{i,j=1}^s d_i a_{ij} c_j = 1/24, \sum_{i,j=1}^s b_i c_i a_{ij} c_j = 1/8,$ $\sum_{i=1}^s d_i c_i^2 = 1/12, \sum_{i,j=1}^s d_i a_{ij} d_j/b_j = 1/8$

*Demonstração.* O Teorema 1.1 nos diz que

$$\sum_i b_i a_{ij} = b_j(1 - c_j)$$

para  $j = 2, 3$  e  $4$ , e assim

$$d_j = b_j(1 - c_j) \text{ para cada } j. \quad (2.65)$$

Logo,

$$\frac{1}{2} = \sum_{j=1}^s d_j = \sum_{j=1}^s b_j(1 - c_j),$$

o que implica

$$\sum_{j=1}^s b_j c_j = \frac{1}{2}. \quad (2.66)$$

Usando (2.65) e (2.66) além das condições da Tabela 2.1, segue facilmente que

$$\sum_{j=1}^s \frac{d_j^2}{b_j} = \frac{1}{3},$$

a qual é uma condição de terceira ordem da Tabela 2.2.

Para obtermos a expressão dada por  $\sum_{i=1}^s d_i^3/b_i^2 = 1/4$  na Tabela 2.2, devemos notar que  $d_i = b_i(1 - c_i)$  e assim

$$d_i^3 = b_i^3(1 - 3c_i + 3c_i^2 - c_i^3).$$

Logo,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^s d_i^3/b_i^2 &= \sum_{i=1}^s b_i - 3 \sum_{i=1}^s b_i c_i + 3 \sum_{i=1}^s b_i c_i^2 \\ &\quad - \sum_{i=1}^s b_i c_i^3 = 1 - \frac{3}{2} + 1 - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

As outras condições de quarta ordem da Tabela 2.2 são facilmente obtidas fazendo uso das equações (2.65) e (2.66), além das condições da Tabela 2.1.  $\square$

# Capítulo 3

## Análise de Erro

O Capítulo 3 apresenta a análise de erro, considerada um dos pontos principais do trabalho. Dividimos este capítulo em duas partes. Na primeira vamos expor os resultados que são necessários para a demonstração do Teorema Principal. Na segunda, enunciamos o Teorema Principal e fazemos a sua demonstração.

### 3.1 Resultados Necessários na Análise de Erro

Começamos esta seção introduzindo alguns conceitos. Assim, definimos o módulo da média de suavidade  $\tau$  de  $v$  no intervalo  $[0, 1]$  como

$$\tau(v; h) = \int_0^1 \omega(v, [0, 1]; t, h) dt,$$

onde  $v : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $\omega(v, [0, 1]; t, h)$  é dado por

$$\omega(v, [0, 1]; t, h) = \sup\{|v(s_1) - v(s_2)| : s_1, s_2 \in [t - \frac{h}{2}, t + \frac{h}{2}] \cap [0, 1]\}. \quad (3.1)$$

Definimos  $w = (x, \psi, u)$ , onde

$$x = (a, x_1, x_2, \dots, x_N), \quad x_k \in \mathbb{R}^n,$$

$$\psi = (\psi_0, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_N), \quad \psi_k \in \mathbb{R}^n,$$

$$u = (u_0, u_1, \dots, u_{N-1}), \quad u_k \in U.$$

A seguir fazemos um importante teorema que nos auxiliará no Teorema Principal. O espaço  $\mathcal{X}$  é o espaço discreto  $L^\infty$  com as normas definidas de acordo com o Capítulo 1.

**Teorema 3.1.** *Seja  $\mathcal{X}$  um espaço de Banach,  $\mathcal{Y}$  um espaço vetorial normado com norma  $\|\cdot\|$ . Seja  $\mathcal{F} : \mathcal{X} \rightarrow 2^{\mathcal{Y}}$ ,  $\mathcal{L} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  operadores lineares limitados, e seja  $\mathcal{T} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  com  $\mathcal{T}$  continuamente diferenciável a Frechét em  $B_r(w^*)$  para algum dado  $w^* \in \mathcal{X}$  e  $r > 0$ , onde  $B_r(w^*)$  é a bola com centro em  $w^*$  e raio  $r$ . Suponha que as seguintes condições são válidas para algum  $\delta \in \mathcal{Y}$  e escalares  $\epsilon$ ,  $\lambda$  e  $\sigma > 0$ :*

(P1)  $\mathcal{T}(w^*) + \delta \in \mathcal{F}(w^*)$ ;

(P2)  $\|\nabla \mathcal{T}(w) - \mathcal{L}\| \leq \epsilon$  para todo  $w \in B_r(w^*)$ ;

(P3) A transformação  $(\mathcal{F} - \mathcal{L})^{-1}$  possui como imagens conjuntos unitários (função usual) e é Lipschitziana em  $B_\sigma(\pi^*)$ , com  $\pi^* = (\mathcal{T} - \mathcal{L})(w^*)$  e constante de Lipschitz  $\lambda$ .

Se  $\epsilon\lambda < 1$  e  $r\epsilon \leq \sigma$ ,  $\|\delta\| \leq \sigma$ , e

$$\|\delta\| \leq (1 - \lambda\epsilon)r/\lambda,$$

então existe um único  $w \in B_r(w^*)$  tal que  $\mathcal{T}(w) \in \mathcal{F}(w)$ . Além do mais, temos a estimativa

$$\|w - w^*\| \leq \frac{\lambda}{1 - \lambda\epsilon} \|\delta\|. \quad (3.2)$$

*Demonstração.* Fazendo a expansão de Taylor de primeira ordem de  $\mathcal{T} - \mathcal{L}$  em torno de  $w^*$ , com resto na forma integral, obtemos

$$\mathcal{T}(w) - \mathcal{L}(w) = \mathcal{T}(w^*) - \mathcal{L}(w^*) + \int_0^1 (\nabla \mathcal{T}(s w + (1-s)w^*) - \mathcal{L}) ds (w - w^*).$$

Assim, usando (P2) temos

$$\begin{aligned} \|\mathcal{T}(w) - \mathcal{L}(w) - \pi^*\| &\leq \left\| \int_0^1 (\nabla \mathcal{T}(s w + (1-s)w^*) - \mathcal{L}) ds \right\| \|w - w^*\| \\ &\leq \int_0^1 \epsilon ds \quad r = \epsilon r, \end{aligned} \quad (3.3)$$

para todo  $w_1, w_2 \in B_r(w^*)$ .

Definimos  $\Phi(w) = (\mathcal{F} - \mathcal{L})^{-1}(\mathcal{T}(w) - \mathcal{L}(w))$ . Pela hipótese (P3) e por (3.3), para todo  $w_1, w_2 \in B_r(w^*)$ , obtemos

$$\begin{aligned} \|\Phi(w_1) - \Phi(w_2)\| &= \|(\mathcal{F} - \mathcal{L})^{-1}(\mathcal{T} - \mathcal{L})(w_1) - (\mathcal{F} - \mathcal{L})^{-1}(\mathcal{T} - \mathcal{L})(w_2)\| \\ &\leq \lambda \|(\mathcal{T} - \mathcal{L})(w_1) - (\mathcal{T} - \mathcal{L})(w_2)\| \\ &\leq \lambda \epsilon \|w_1 - w_2\|. \end{aligned}$$

Como  $\lambda \epsilon < 1$ ,  $\Phi$  é uma contração na  $B_r(w^*)$ .

Como  $\|\delta\| \leq \sigma$ , concluímos que

$$(\mathcal{T} - \mathcal{L})(w^*) + \delta \in B_\sigma(\pi^*).$$

De (P1) segue que

$$\mathcal{T}(w^*) + \delta \in \mathcal{F}(w^*),$$

o que implica

$$\mathcal{T}(w^*) - \mathcal{L}(w^*) + \delta \in \mathcal{F}(w^*) - \mathcal{L}(w^*).$$

Segue de (P3) que

$$w^* = (\mathcal{F} - \mathcal{L})^{-1}[(\mathcal{T} - \mathcal{L})(w^*) + \delta]. \quad (3.4)$$

Agora, de (P3) e (3.3) temos

$$\begin{aligned} \|\Phi(w) - w^*\| &= \|(\mathcal{F} - \mathcal{L})^{-1}[(\mathcal{T} - \mathcal{L})(w)] - (\mathcal{F} - \mathcal{L})^{-1}[(\mathcal{T} - \mathcal{L})(w^*) + \delta]\| \\ &\leq \lambda \|(\mathcal{T} - \mathcal{L})(w) - (\mathcal{T} - \mathcal{L})(w^*) + \delta\| \\ &\leq \lambda (\|(\mathcal{T} - \mathcal{L})(w) - (\mathcal{T} - \mathcal{L})(w^*)\| + \|\delta\|) \\ &\leq \lambda (\epsilon \|w - w^*\| + \|\delta\|) \\ &\leq \lambda (\epsilon r + \|\delta\|), \end{aligned}$$

para todo  $w \in B_r(w^*)$ . Podemos ver facilmente que a condição  $\lambda \|\delta\|/(1-\epsilon \lambda) \leq r$  é equivalente a  $\lambda (\epsilon r + \|\delta\|) \leq r$ , e assim

$$\|\Phi(w) - w^*\| \leq r.$$

Como  $\Phi : B_r(w^*) \rightarrow B_r(w^*)$  e  $\Phi$  é uma contração em  $B_r(w^*)$ , segue pelo Princípio da Contração que existe um único ponto fixo  $w \in B_r(w^*)$ . Assim,

$$\|\Phi(w) - w^*\| = \|w - w^*\|$$

para este ponto fixo, e temos o resultado desejado escolhendo  $r = \frac{\lambda}{1 - \epsilon \lambda} \|\delta\|$ .  $\square$

**Observação 3.1.** No Teorema 3.1, como  $\Phi(w) = w$ , segue que

$$w = \Phi(w) = (\mathcal{F} - \mathcal{L})^{-1}(\mathcal{T}(w) - \mathcal{L}(w)).$$

Isto implica em

$$(\mathcal{F} - \mathcal{L})(w) = \mathcal{T}(w) - \mathcal{L}(w),$$

e assim

$$\mathcal{T}(w) = \mathcal{F}(w).$$

Definimos a transformação  $\mathcal{T}$  como

$$\mathcal{T}(x, \psi, u) = \begin{pmatrix} x'_k - f^h(x_k, u_k) \\ \psi'_k + \nabla_x H^h(x_k, \psi_{k+1}, u_k) \\ \nabla_{u_i} H^h(x_k, \psi_{k+1}, u_k), \quad 1 \leq i \leq s \\ \psi_N - \nabla C(x_N) \end{pmatrix}, \quad (3.5)$$

para  $0 \leq k \leq N - 1$ , e a transformação  $\mathcal{F}$  é escrita como

$$\mathcal{F}(x, \psi, u) = (0, 0, 0, 0)^t. \quad (3.6)$$

O espaço  $\mathcal{Y}$ , associado com as quatro componentes de  $\mathcal{T}$ , é o espaço  $L^1 \times L^1 \times L^\infty \times \mathbb{R}^n$ . O ponto  $w^*$  é a seqüência com elementos

$$w_k^* = (x_k^*, \psi_k^*, u_k^*),$$

onde  $x_k^* = x^*(t_k)$ ,  $\psi_k^* = \psi^*(t_k)$ , e  $u_k^* = u(y_i^*, \chi_i^*)$ . Observemos que para  $k = N$ , a componente  $u_k$  de  $w_k$  deverá ser removida, e que  $y_i^*$  e  $\chi_i^*$  são as soluções das equações (2.34) e (2.35) correspondendo a  $x = x^*(t_k)$  e  $\psi = \psi^*(t_k)$ .

O operador  $\mathcal{T}$  em (3.5) pode ser visualizado como

$$\mathcal{T}(x, \psi, u) = \begin{pmatrix} x'_k - \sum_{i=1}^s b_i f(y_i, u_{ki}) \\ \psi'_k + \psi_{k+1} \sum_{i=1}^s b_i \nabla_y f(y_i, u_{ki}) \\ \psi_{k+1} \sum_{i=1}^s b_i \nabla_u f(y_i, u_{ki}) \\ \psi_N - \nabla C(x_N) \end{pmatrix}, \quad (3.7)$$

para  $0 \leq k \leq N - 1$ .

Vamos linearizar o operador  $\mathcal{T}$  em torno de  $w^*$ , calcular todas as variáveis em cada intervalo, e desprezar os termos que tendem a zero quando  $h = 0$ . Logo, a linearização da primeira componente de (3.7) é dada por

$$\begin{aligned} x'_k - \sum_{i=1}^s b_i f(y_i, u_{ki}) &= x'_k - \sum_{i=1}^s b_i \nabla_y f(y_i^*, u_{ki}^*) \nabla_x y_i^* y_i \\ &\quad - \sum_{i=1}^s b_i \nabla_u f(y_i^*, u_{ki}^*) u_{ki}, \end{aligned}$$

para  $f(y_i^*, u_{ki}^*) = 0$ . Notemos que  $\nabla_x y_i^* = I + O(h)$  por (2.31). A linearização da segunda componente de (3.7) é dada por

$$\begin{aligned} \psi'_k + \psi_{k+1} \sum_{i=1}^s b_i \nabla_y f(y_i, u_{ki}) &= \psi'_k + \psi_{k+1} \sum_{i=1}^s b_i \nabla_y f(y_i^*, u_{ki}^*) \\ &\quad + \psi_{k+1} \sum_{i=1}^s b_i (\nabla_{yy} f(y_i^*, u_{ki}^*) \nabla_x y_i^* y_i + \nabla_{yu} f(y_i^*, u_{ki}^*) u_{ki}). \end{aligned}$$

Para a terceira componente de (3.7), temos

$$\begin{aligned} \psi_{k+1} \sum_{i=1}^s b_i \nabla_u f(y_i, u_{ki}) &= \psi_{k+1} \sum_{i=1}^s b_i \nabla_u f(y_i^*, u_{ki}^*) \\ &\quad + \psi_{k+1} \sum_{i=1}^s b_i (\nabla_{uy} f(y_i^*, u_{ki}^*) \nabla_x y_i^* y_i + \nabla_{uu} f(y_i^*, u_{ki}^*) u_{ki}). \end{aligned}$$

A última componente de (3.7) é dada por

$$\psi_N - \nabla C(x_N) = \underbrace{\psi_N^* - \nabla C(x_N^*)}_{=0} - \nabla^2 C(x_N^*) x_N.$$

Definimos as matrizes  $A_k = \nabla_y f(y_i^*, u_{ki}^*)$ ,  $B_k = \nabla_u f(y_i^*, u_{ki}^*)$ ,  $Q_k = \nabla_{yy} H(y_i^*, \psi_{k+1}^*, u_{ki}^*)$ ,  $S_k = \nabla_{yu} H(y_i^*, \psi_{k+1}^*, u_{ki}^*)$  e  $R_k = \nabla_{uu} H(y_i^*, \psi_{k+1}^*, u_{ki}^*)$ . Assim, podemos escrever a matriz linearizada  $\mathcal{L}$  em uma forma mais compacta como

$$\mathcal{L}(x^*, \psi^*, u^*) = \begin{pmatrix} x_k^{*'} - \sum_{i=1}^s b_i [A_k y_i + B_k u_{ki}] \\ \psi_k^{*'} + \sum_{i=1}^s b_i [\psi_{k+1}^* A_k + Q_k y_i + S_k u_{ki}] \\ \sum_{i=1}^s b_i [\psi_{k+1}^* B_k + S_k y_i + R_k u_{ki}] \\ -\nabla^2 C(x_N^*) x_N \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

para  $0 \leq k \leq N - 1$ .

Definimos a condição de Coercividade Discreta da seguinte maneira: existe uma constante  $\bar{\alpha} > 0$  independente de  $h$  tal que

$$\mathcal{B}^h(x, u) \geq \bar{\alpha} \|u\|_{L^2}^2 \quad \text{para todo } (x, u) \in \mathcal{M}^h, \quad (3.9)$$

onde

$$\mathcal{B}^h(x, u) = \frac{1}{2} \left( x_N^t V x_N + h \sum_{k=0}^{N-1} \left( x_k^t Q_k x_k + 2 x_k^t S_k u_k b + \sum_{i=1}^s b_i u_{ki}^t R_k u_{ki} \right) \right),$$

e

$$\mathcal{M}^h = \{(x, u) : x_k' = (A_k y + B_k u_k) b, x(0) = 0, u_k \in U - U\}.$$

As formas  $A_k$ ,  $B_k$ ,  $Q_k$ ,  $S_k$  e  $R_k$  foram definidas anteriormente e  $V = \nabla C(x_N^*)$ . Uma abordagem mais completa sobre este assunto pode ser encontrada em [9] e [11], inclusive o Teorema 3.2 abaixo com a devida demonstração.

**Teorema 3.2.** *Suponhamos que as condições de Suavidade e Coercividade do Capítulo 2 são válidas, e além disso que*

$$\sum_{i=1}^s b_i = 1.$$

Então para todo  $\bar{h}$  suficientemente pequeno existe uma constante  $\bar{\alpha} > 0$  satisfazendo (3.9) para todo  $h \leq \bar{h}$ . Temos também que a transformação  $(\mathcal{F} - \mathcal{L})^{-1}$  com  $\mathcal{F}$  e  $\mathcal{L}$  definidos em (3.6) e (3.8) é Lipschitziana com uma constante de Lipschitz  $\lambda$  independente de  $h$  para  $h \leq \bar{h}$ .

O Teorema 3.3 também será usado na demonstração do Teorema Principal na próxima seção, e sua demonstração pode ser encontrada em [11].

**Teorema 3.3.** *Se as hipóteses do Teorema 3.2 são válidas, então existe  $\bar{h}$  e  $r > 0$  com a propriedade que qualquer  $w^h$  satisfazendo  $\mathcal{T}(w^h) \in \mathcal{F}(w^h)$ , com  $\mathcal{F}$  e  $\mathcal{L}$  definidos em (3.6) e (3.8), é um ponto de mínimo local estrito<sup>1</sup> de (2.6) quando*

$$\|w^h - w^*\|_{L^\infty} \leq r \quad \text{e} \quad h \leq \bar{h}.$$

## 3.2 O Teorema Principal

Agora apresentamos o Teorema Principal. Este teorema nos mostra que a solução do problema de controle ótimo contínuo está próxima da solução do problema de controle ótimo discreto. Em outras palavras, a solução do problema discretizado converge para a solução ótima do problema contínuo.

**Teorema 3.4 (Principal).** *Suponhamos que as condições de Suavidade e Coercividade do Capítulo 2 são válidas,  $b_i > 0$  para cada  $i$ , o método de Runge-Kutta é de ordem  $\kappa$  para o problema de controle ótimo,  $U = \mathbb{R}^m$ . Então para todo  $h$  suficientemente pequeno, existe um ponto de mínimo local  $(x^h, u^h)$  para o problema de controle ótimo discreto (2.6) e uma variável adjunta associada  $\psi^h$  satisfazendo (2.11) e (2.12) tal que*

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq k \leq N} |x_k^h - x^*(t_k)| + |\psi_k^h - \psi^*(t_k)| + |u(x_k^h, \psi_k^h) - u^*(t_k)| \\ \leq c h^{\kappa-1} \left[ \tau(u^{*(\kappa-1)}; 2h) + O(h) \right], \end{aligned} \tag{3.10}$$

---

<sup>1</sup>Entendemos por ponto de mínimo local estrito um ponto que minimiza localmente o problema e não existe um outro ponto de mínimo na vizinhança.

onde  $u(x_k^h, \psi_k^h)$  minimiza a Hamiltoniana (2.3) com  $x = x_k$  e  $\psi = \psi_k$ , e  $c > 0$  é uma constante.

*Demonstração.* A demonstração utilizará o Teorema 3.1, e então devemos analisar as hipóteses (P1), (P2) e (P3).

*Análise de (P1).*

Para o estudo da primeira hipótese do Teorema 3.1 devemos estimar a distância entre  $\mathcal{T}(w^*)$  e  $\mathcal{F}(w^*)$ , onde  $\mathcal{F}(w^*)$  está definido em (3.6). Logo, estimar esta diferença corresponde a estimar somente  $\|\mathcal{T}(w^*)\|$ .

Agora estimamos a distância das duas primeiras componentes de (3.5) a zero. De acordo com a Seção 2.6, definimos

$$z^* = \begin{pmatrix} x^* \\ \psi^* \end{pmatrix}, \quad z_k^* = \begin{pmatrix} x^*(t_k) \\ \psi^*(t_k) \end{pmatrix},$$

e a última componente do vetor  $\zeta$  como

$$\zeta_{s+1}^*(h) = z_k^* + h \sum_{i=1}^s b_i g(y_i^*(h), \chi_i^*(h)), \quad (3.11)$$

onde  $y_i^*(h)$  e  $\chi_i^*(h)$  são definidos como em (2.47) e (2.48).

Com as definições expostas anteriormente, usando as definições de  $g$  e  $\phi$  nas Seções 2.5 e 2.6, e a equação (2.36) da Proposição 2.2, temos a seguinte igualdade:

$$\begin{pmatrix} x_k^{*'} - f^h(x_k^*, u_k^*) \\ \psi_k^{*'} + \nabla_x H^h(x_k^*, \psi_{k+1}^*, u_k^*) \end{pmatrix} = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} z_{k+1}^* - \zeta_{s+1}^*(h) \end{pmatrix}.$$

Voltando nossa atenção para as expansões de Taylor (2.51) e (2.54) realizadas na Seção 2.6, considerando o resto destas expansões na forma integral como em (1.5) e além disso que todas as condições da Tabela 2.2 são satisfeitas, segue que

$$\begin{aligned} \|z_{k+1}^* - \zeta_{s+1}^*(h)\| &\leq ch^{\kappa-1} \left( \left\| \int_{t_k}^{t_{k+1}} z^{*(\kappa)}(t) - z^{*(\kappa)}(t_k) dt \right\| \right. \\ &\quad \left. + \left\| \int_0^h \zeta_{s+1}^{*(\kappa)}(t) - \zeta_{s+1}^{*(\kappa)}(0) dt \right\| \right). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Pretendemos majorar cada um dos termos da integral da equação (3.12). No primeiro termo da integral suponhamos que  $z^{*(\kappa)} \in L^\infty$ . Pela regra da cadeia, Suavidade e Propriedade de Unicidade de Co-estado, a  $\kappa$ -ésima derivada de  $z^*$  pode ser vista como

$$z^{*(\kappa)}(t) = F(t) u^{*(\kappa-1)}(t) + H(t),$$

onde  $F$  e  $H$  são Lipschitzianas. Como  $F$  é Lipschitziana, segue que  $F$  é limitada localmente; temos também que  $u^{*(\kappa-1)}$  possui variação limitada. Assim, usando (3.1), para cada  $t \in [t_k, t_{k+1}]$ , temos

$$\begin{aligned} |z^{*(\kappa)}(t) - z^{*(\kappa)}(t_k)| &= |F(t) u^{*(\kappa-1)}(t) + H(t) - F(t_k) u^{*(\kappa-1)}(t_k) - H(t_k)| \\ &+ |F(t_k) u^{*(\kappa-1)}(t) - F(t_k) u^{*(\kappa-1)}(t_k)| \\ &\leq |[F(t) - F(t_k)] u^{*(\kappa-1)}(t)| \\ &+ |F(t_k) [u^{*(\kappa-1)}(t) - u^{*(\kappa-1)}(t_k)]| + |H(t) - H(t_k)| \\ &\leq c(h + \omega(u^{*(\kappa-1)}, [t_k, t_{k+1}]; t, 2h)). \end{aligned} \tag{3.13}$$

No Capítulo 1 apresentamos a definição de norma discreta  $L^1$ . Aplicando esta norma para o primeiro termo de (3.12) e usando a equação (3.13), obtemos

$$\begin{aligned} \left\| \int_{t_k}^{t_{k+1}} (z^{*(\kappa)}(t) - z^{*(\kappa)}(t_k)) dt \right\|_{L^1} &= \sum_{k=0}^{N-1} h \left\| \int_{t_k}^{t_{k+1}} z^{*(\kappa)}(t) - z^{*(\kappa)}(t_k) dt \right\| \\ &\leq \sum_{k=0}^{N-1} h \int_{t_k}^{t_{k+1}} |z^{*(\kappa)}(t) - z^{*(\kappa)}(t_k)| dt \\ &\leq \sum_{k=0}^{N-1} h \int_{t_k}^{t_{k+1}} c(h + \omega(u^{*(\kappa-1)}, [t_k, t_{k+1}]; t, 2h)) dt \\ &\leq ch \left( \underbrace{h(t_N - t_0)}_{=1} + \sum_{k=0}^{N-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \omega(u^{*(\kappa-1)}, [t_k, t_{k+1}]; t, 2h) dt \right) \\ &\leq ch(h + \tau(u^{*(\kappa-1)}; 2h)). \end{aligned}$$

Vamos majorar o segundo termo da equação (3.12). A  $\kappa$ -ésima derivada de  $\zeta_{s+1}^*$  com relação a  $h$ , obtida derivando (3.11), pode ser expressada como

$$\zeta_{s+1}^{*(\kappa)}(h) = \kappa G_{s+1}^{(\kappa-1)}(\zeta^*(h)) + h G_{s+1}^{(\kappa)}(\zeta^*(h)).$$

Usando o fato de  $G_{s+1}$  ser Lipschitziana até  $\kappa - 1$ , obtemos

$$\begin{aligned} |\zeta_{s+1}^{*(\kappa)}(h) - \zeta_{s+1}^{*(\kappa)}(0)| &= |\kappa G_{s+1}^{(\kappa-1)}(\zeta^*(h)) + h G_{s+1}^{(\kappa)}(\zeta^*(h)) - \kappa G_{s+1}^{(\kappa-1)}(\zeta^*(0))| \\ &\leq \kappa |G_{s+1}^{(\kappa-1)}(\zeta^*(h)) - G_{s+1}^{(\kappa-1)}(\zeta^*(0))| + h |G_{s+1}^{(\kappa)}(\zeta^*(h))| \\ &\leq \kappa c |\zeta^*(h) - \zeta^*(0)| + O(h). \end{aligned}$$

Segue da equação (2.53) que

$$|\zeta^*(h) - \zeta^*(0)| = O(h),$$

e assim

$$|\zeta_{s+1}^{*(\kappa)}(h) - \zeta_{s+1}^{*(\kappa)}(0)| \leq O(h).$$

Logo, usando a definição de norma  $\|\cdot\|_1$  em  $L^1([0, 1])$  para o segundo termo de (3.12), segue que

$$\left\| \int_0^h \zeta_{s+1}^{*(\kappa)}(t) - \zeta_{s+1}^{*(\kappa)}(0) dt \right\|_1 \leq \int_0^h |\zeta_{s+1}^{*(\kappa)}(t) - \zeta_{s+1}^{*(\kappa)}(0)| dt \leq O(h^2).$$

Portanto, temos que

$$\|z_{k+1}^* - \zeta_{s+1}^*(h)\| \leq c h^{\kappa-1} (c h (h + \tau(u^{*(\kappa-1)}; 2h)) + O(h^2)).$$

Assim, estimando a norma dos dois primeiros termos de  $\|\mathcal{T}(w^*)\|$ , obtemos

$$\begin{aligned} \left\| \begin{pmatrix} x_k^{*'} - f^h(x_k^*, u_k^*) \\ \psi_k^{*'} + \nabla_x H^h(x_k^*, \psi_{k+1}^*, u_k^*) \end{pmatrix} \right\| &= \frac{1}{h} \|z_{k+1}^* - \zeta_{s+1}^*(h)\| \\ &\leq c h^{\kappa-1} [c (h + \tau(u^{*(\kappa-1)}; 2h)) + O(h)] \\ &\leq c h^{\kappa-1} [\tau(u^{*(\kappa-1)}; 2h) + O(h)]. \end{aligned}$$

A penúltima componente de (3.5) tende a zero por (2.37) e (2.33). Observando a equação dada em (2.2), a última componente de (3.5) também tende a zero.

Conseqüentemente, obtemos

$$\|\mathcal{T}(w^*)\| \leq c h^{\kappa-1} [\tau(u^{*(\kappa-1)}; 2h) + O(h)]. \quad (3.14)$$

*Análise de (P2).*

Agora devemos estimar a distância  $\|\nabla \mathcal{T}(w) - \mathcal{L}\|$  para todo  $w \in B_r(w^*)$ . Antes, porém, vamos obter  $\nabla \mathcal{T}(w)$ . A primeira componente de  $\nabla \mathcal{T}$  é dada por

$$-\sum_{i=1}^s b_i \nabla_y f(y_i, u_{ki}) \nabla_x y_i - \sum_{i=1}^s b_i \nabla_u f(y_i, u_{ki}),$$

onde  $\nabla_x y_i = I + O(h)$  por (2.31). A segunda componente de  $\nabla \mathcal{T}$  pode ser visualizada como

$$\psi_{k+1} \sum_{i=1}^s b_i (\nabla_{yy} f(y_i, u_{ki}) \nabla_x y_i + \nabla_{yu} f(y_i, u_{ki})).$$

A análise da terceira componente segue o mesmo raciocínio. Para a quarta componente temos  $-\nabla^2 C(x_N) x_N$ .

Agora estamos aptos a estimar (P2). Estimar a distância da primeira componente de  $\nabla \mathcal{T}$  e  $\mathcal{L}$  é equivalente a estimar os termos

$$|\nabla_y f(y_i, u_{ki}) - \nabla_y f(y_i^*, u_{ki}^*)| \quad \text{e} \quad |\nabla_u f(y_i, u_{ki}) - \nabla_u f(y_i^*, u_{ki}^*)|.$$

Logo, como a  $\kappa$ -ésima derivada de  $f$  é Lipschitziana e usando a equação (2.31), obtemos

$$\begin{aligned} |\nabla_y f(y_i, u_{ki}) - \nabla_y f(y_i^*, u_{ki}^*)| &\leq c [(y_i - y_i^*) + (u_{ki} - u_{ki}^*)] \\ &\leq c [(x_k - x_k^*) + (u_{ki} - u_{ki}^*) + O(h)] \\ &\leq c [\|w - w^*\| + O(h)]. \end{aligned}$$

De modo análogo analisa-se  $|\nabla_u f(y_i, u_{ki}) - \nabla_u f(y_i^*, u_{ki}^*)|$ .

Para estimar a diferença entre as segundas componentes de  $\nabla \mathcal{T}$  e  $\mathcal{L}$ , basta estimar

$$|\nabla_{yy} f(y_i, u_{ki}) - \nabla_{yy} f(y_i^*, u_{ki}^*)| \text{ e } |\nabla_{yu} f(y_i, u_{ki}) - \nabla_{yu} f(y_i^*, u_{ki}^*)|,$$

pois  $\mathcal{T}(w^*)$  é limitada conforme Análise de (P1). Logo, obtemos

$$\begin{aligned} |\nabla_{yy} f(y_i, u_{ki}) - \nabla_{yy} f(y_i^*, u_{ki}^*)| &\leq c [(y_i - y_i^*) + (u_{ki} - u_{ki}^*)] \\ &\leq c [\|w - w^*\| + O(h)]. \end{aligned}$$

De maneira análoga estima-se  $|\nabla_{yu} f(y_i, u_{ki}) - \nabla_{yu} f(y_i^*, u_{ki}^*)|$ .

A terceira componente de  $\nabla \mathcal{T}$  e  $\mathcal{L}$  também segue a mesma análise.

Para a quarta componente, temos

$$\|\nabla^2 C(x_N) - \nabla^2 C(x_N^*)\| \leq c \|x_N - x_N^*\| \leq c \|w - w^*\|.$$

Com estes cálculos obtemos uma estimativa para  $\|\nabla \mathcal{T}(w) - \mathcal{L}\|$ . Precisamente, obtemos

$$\|\nabla \mathcal{T}(w) - \mathcal{L}\| \leq c (\|w - w^*\| + O(h)).$$

*Análise de (P3).*

Pelo Teorema 3.2 temos que a transformação  $(\mathcal{F} - \mathcal{L})^{-1}$  é Lipschitziana com a constante de Lipschitz  $\lambda$  independente de  $h$  para  $h$  suficientemente pequeno.

Agora vamos verificar as três hipóteses do Teorema 3.1, e assim concluir a demonstração. Para verificar (P1), tomamos  $\lambda \|\delta\| / (1 - \epsilon \lambda) \leq r$ ,  $\bar{h}$  menor se necessário e por [11] p. 211, o residual em (3.14) é limitado por

$$c \bar{h}^{\kappa-1} [\tau(u^{*(\kappa-1)}; 2\bar{h}) + O(\bar{h})] \leq \|\delta\| \leq (1 - \epsilon \lambda) r / \lambda,$$

para  $h \leq \bar{h}$ . Note que, se necessário, de [10] p. 180, podemos tomar

$$\|\delta\| = c h^{\kappa-1} [\tau(u^{*(\kappa-1)}; 2h) + O(h)],$$

e assim  $h = \bar{h}$ .

Para a hipótese (P2), escolha  $\epsilon$  suficientemente pequeno tal que  $\epsilon\lambda < 1$ . Tome um  $r$  pequeno e  $\bar{h}$  menor se necessário e assim

$$c(r + O(\bar{h})) \leq \epsilon,$$

onde  $c$  é a constante aparecendo na análise de (P2).

Para a hipótese (P3), seja  $\lambda$  suficientemente grande e  $\bar{h}$  suficientemente pequeno de modo que a constante de Lipschitz de  $\mathcal{L}^{-1}$  é menor que  $\lambda$  para todo  $h \leq \bar{h}$ .

Como as hipóteses do Teorema 3.1 são satisfeitas, concluímos que para cada  $h \leq \bar{h}$ , existe  $w^h = (x^h, \psi^h, u^h) \in B_r(w^*)$  tal que  $\mathcal{T}(w^h) = 0$  e a estimativa (3.2) vale, a qual estabelece os limitantes para as variáveis de estado, co-estado e controle em (3.10).

Finalmente, pelo Teorema 3.3,  $(x^h, u^h)$  é um ponto de mínimo local estrito em (2.6) para  $h$  suficientemente pequeno, ou seja, podemos obter

$$\|w^h - w^*\| \leq \frac{\lambda}{1 - \lambda\epsilon} \|\delta\| = ch^{\kappa-1} [\tau(u^{*(\kappa-1)}; 2h) + O(h)],$$

concluindo a demonstração. □

# Capítulo 4

## Exemplos Numéricos

Neste capítulo fazemos alguns exemplos onde ilustramos a teoria apresentada nos capítulos anteriores. Na realidade, resolvemos problemas de controle ótimo discreto utilizando o Programa Duali que pode ser obtido gratuitamente na página de internet <http://www.eco.utexas.edu/faculty/Kendrick> , acesso em 23 jul. 2004.

### 4.1 O Programa Duali

Nesta seção introduzimos alguns comentários sobre o Programa Duali (ver [1] e [2], por exemplo). Precisamente, vamos salientar os comandos usados para resolver problemas de controle ótimo discreto com funcional quadrático e restrito a um sistema dinâmico linear com uma condição inicial.

#### 4.1.1 Alguns Comandos do Programa

O Programa Duali pode ser usado para resolver problemas como o apresentado no Apêndice B. O funcionamento deste programa para os problemas que estamos interessados é simples e fazemos uma rápida abordagem com o objetivo de esclarecer algumas etapas para a criação de um modelo. No programa, caso não seja feito comentários em algumas janelas ou parte delas nas etapas apresentadas

abaixo sobre a criação de um modelo, subintende-se que as formas especificadas intrinsecamente pelo programa é auto-suficiente para a solução do problema.

Abrindo o Programa Duali devemos ir no menu *arquivo*, e selecionarmos a opção *novo arquivo*. Neste momento abrirá uma janela onde devemos atribuir um nome para o modelo que está sendo introduzido. Confirmando a primeira janela, abrirá uma outra a qual devemos selecionar *modelo determinístico*, e na próxima janela devemos introduzir a quantidade de variáveis de estado e de controle, além da quantidade de períodos. Na nossa abordagem o ideal é que a quantidade de períodos seja suficientemente grande devido ao tamanho do passo  $h$ . Na última janela devemos selecionar somente *forma quadrática*.

Podemos descrever o problema que estamos introduzindo selecionando o menu *especificação* e em seguida, o ícone *descrição*. No menu *dados* devemos introduzir as matrizes  $A$  e  $B$  que representam as matrizes obtidas pela discretização da equação diferencial dada pelo problema, além de fornecer a condição inicial. Também neste menu devemos introduzir a matriz  $W$  referente a discretização do funcional.

Preenchida todas estas etapas estamos aptos a resolver o problema. Devemos então selecionar o menu *resolução* e em seguida, o ícone *QLP*. Os gráficos que representam a solução do problema tanto com relação ao estado quanto ao controle podem ser obtidos selecionando o menu *resultados*.

Agora apresentamos algumas observações sobre o Programa Duali.

**Observação 4.1.** *No Programa Duali, como estamos trabalhando com o modelo determinístico, não é necessário introduzirmos os valores de estado e de controle desejados.*

**Observação 4.2.** *O Programa Duali utiliza programação dinâmica em tempo discreto, uma técnica muito conveniente para implementação computacional devido sua estrutura recursiva.*

**Observação 4.3.** *Pode-se atribuir nomes as variáveis de estado e de controle,*

além de nomear cada período. Para isto, basta selecionar o menu dados e em seguida o ícone abreviações.

**Observação 4.4.** A matriz  $W$  que representa o funcional discretizado geralmente fica proposto na forma constante, assim como as matrizes  $A$  e  $B$  representando a discretização da equação diferencial.

**Observação 4.5.** Antes de resolvermos o problema, o programa deve ser salvo. Um outro fator importante a ser considerado é a quantidade de casas decimais na solução do problema. Para a introdução de casas decimais, devemos selecionar o menu preferências e depois, o ícone resultados.

## 4.2 Exemplos

Apresentamos a seguir alguns exemplos. Os exemplos serão resolvidos discretizando o problema contínuo pelo método de Runge-Kutta para problemas de controle ótimo, e posteriormente devemos usar o Programa Duali da maneira que foi exposto anteriormente para obtermos a solução do problema.

Os exemplos foram discretizados usando o método dado em (1.3), método que satisfaz as condições do Teorema 2.1 e portanto é um método com quatro estágios e quarta ordem para problemas de controle ótimo. Nestes exemplos, em cada intervalo da partição tomamos somente um valor de controle, ou seja,  $u_k$  representa a aproximação do controle contínuo  $u(t_k)$  para  $t_k = kh$ ; supomos isto independente do método ser de quarta ordem com quatro estágios. Na discretização tomamos  $N = 140$  o que implica  $h = 0,0071$ . Note que o tamanho do passo  $h$  desempenha um papel importante em relação a convergência, assim como a regularidade da função e ordem do método usado na discretização.

**Exemplo 4.1.** Considere o sistema

$$\begin{cases} x_1' = x_2 + u \\ x_2' = -x_1 + 2x_2 \end{cases},$$

com condições iniciais  $x_1(0) = 2$  e  $x_2(0) = 1$ . O funcional a ser minimizado é dado por

$$J = \frac{1}{2} \int_0^1 x_2^2 + u^2 dt.$$

**Solução 4.1.** Usando a abordagem descrita nos capítulos anteriores, primeiramente discretizamos o exemplo pelo método de Runge-Kutta (1.3). Logo, o problema discretizado é dado por

$$\min J = \frac{h}{2} \sum_{k=1}^N x_{k,2}^2 + u_k^2 \tag{4.1}$$

$$\text{sujeito a } x_{k+1} = A x_k + B u_k,$$

onde

$$x_k = \begin{pmatrix} x_{k,1} \\ x_{k,2} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0,0071 \\ -0,0071 & 1,0143 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 0,0071 \\ 0 \end{pmatrix},$$

e as condições iniciais são dadas por  $x_{11}(0) = 2$  e  $x_{12}(0) = 1$ .

De acordo com o Apêndice B e utilizando o Programa Duali, obtemos a seguinte solução gráfica para o problema:

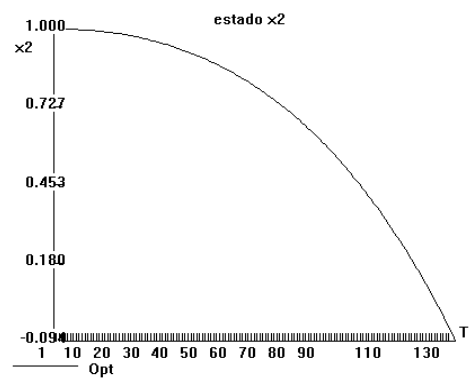
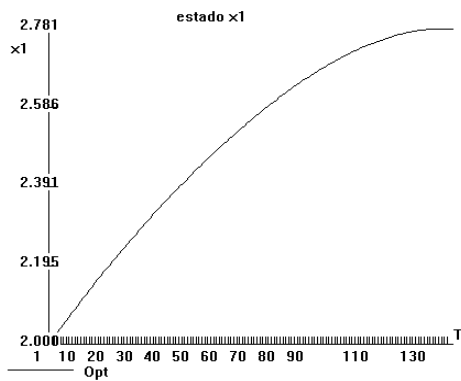


Figura 4.1: O gráfico representa o estado  $x_1$  para o Exemplo 4.1.

Figura 4.2: O gráfico representa o estado  $x_2$  para o Exemplo 4.1.

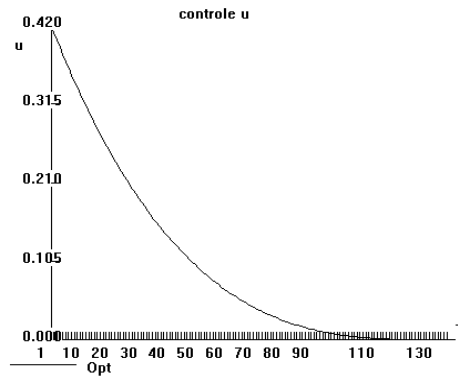


Figura 4.3: O gráfico representa o controle  $u$  para o Exemplo 4.1.

Além dos gráficos que correspondem a solução do problema, o Programa Duali também nos fornece os valores que a solução assume em cada ponto de malha, ou seja, em cada ponto da partição. O valor aproximado do funcional que minimiza o problema é 0,2952.

**Exemplo 4.2.** *Minimize o funcional*

$$J = \frac{1}{2} \int_0^1 2x_1^2 + \frac{1}{2}u^2 dt$$

sujeito ao sistema

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -x_1 + u \end{cases},$$

com condições iniciais  $x_1(0) = 2$  e  $x_2(0) = 0$ .

**Solução 4.2.** *A solução deste exemplo segue as mesmas diretrizes do exemplo anterior. O problema discretizado possui a forma*

$$\min J = \frac{h}{2} \sum_{k=1}^N 2x_{k,1}^2 + \frac{1}{2}u_k^2 \tag{4.2}$$

sujeito a  $x_{k+1} = Ax_k + Bu_k$ ,

onde

$$x_k = \begin{pmatrix} x_{k,1} \\ x_{k,2} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0,0071 \\ -0,0071 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,0071 \end{pmatrix},$$

e as condições iniciais são  $x_{11}(0) = 2$  e  $x_{12}(0) = 0$ . Usamos o Programa Duali para obter a solução gráfica que é dada a seguir:

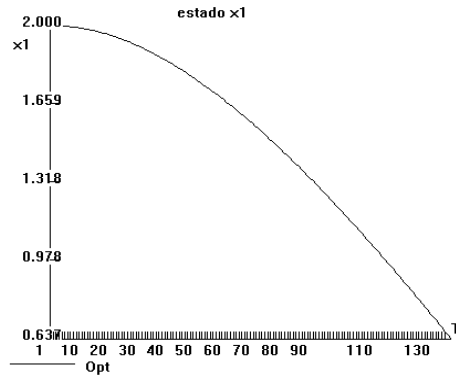


Figura 4.4: O gráfico representa o estado  $x_1$  do Exemplo 4.2.

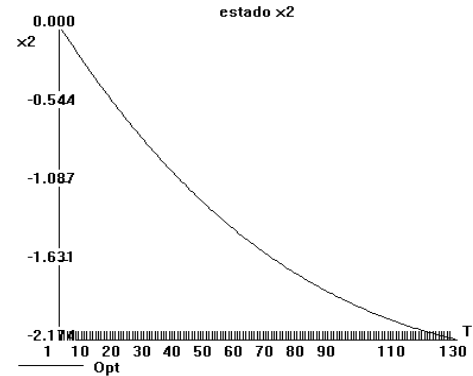


Figura 4.5: O gráfico representa o estado  $x_2$  do Exemplo 4.2.

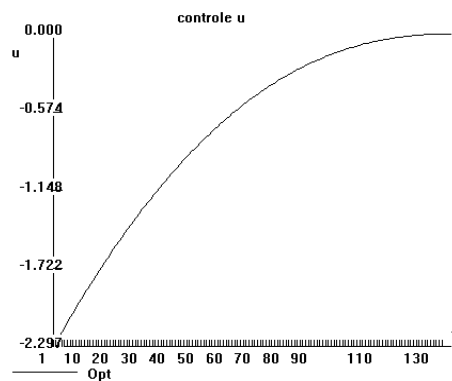


Figura 4.6: O gráfico representa o controle  $u$  para o Exemplo 4.2.

Portanto, obtemos a solução do problema de controle ótimo contínuo através da discretização do problema utilizando o método de Runge-Kutta (1.3), e usando o Programa Duali. O valor aproximado que minimiza o funcional do problema é 2,6243.

No Capítulo 2 analisamos o Exemplo 2.1 e a solução discreta não convergia para a solução contínua (ótima). Neste capítulo fazemos a discretização de Runge-Kutta de quarta ordem para o Exemplo 2.1, e uma solução aproximada será encontrada.

Usando a discretização de Runge-Kutta de quarta ordem, o Exemplo 2.1 discretizado pode ser visto como

$$\min J = \frac{h}{2} \sum_{k=1}^N 2x_k^2 + u_k^2 \quad (4.3)$$

$$\text{sujeito a } x_{k+1} = 1,0035x_k + 0,0071u_k,$$

com a condição inicial dada por  $x_1(0) = 1$ .

Resolvendo o problema (4.3) utilizando o Programa Dual e comparando a solução do problema discretizado com a solução do problema contínuo para o estado  $x$ , obtemos o seguinte gráfico:

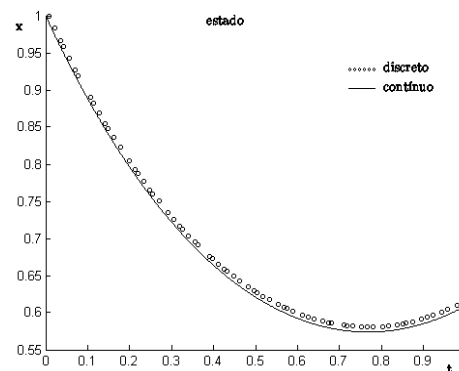


Figura 4.7: O gráfico representa o estado  $x$  para o Exemplo 2.1.

Abaixo temos o gráfico correspondendo ao controle discreto e contínuo. Note que a solução contínua para o problema é apresentada no Capítulo 2.

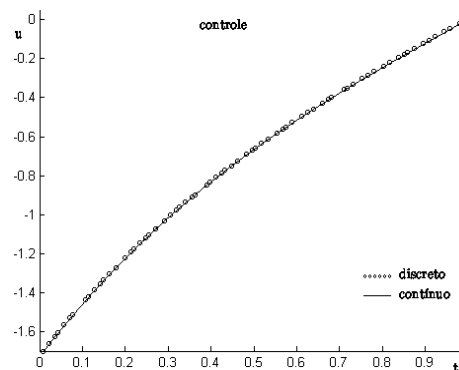


Figura 4.8: O gráfico representa o controle  $u$  para o Exemplo 2.1.

Tabela 4.1: Análise de erro com relação ao controle  $u$  para o Exemplo 2.1.

Tempo	$u^*(t)$	$u_k$	Erro
0,2	-1,2252	-1,2234	0,0018
0,4	-0,8332	-0,8334	0,0002
0,6	-0,5168	-0,5175	0,0007
0,8	-0,2472	-0,2477	0,0005
0,9928	-0,0088	-0,0087	0,0001

Portanto, podemos inferir que a solução do problema discretizado converge para a solução ótima do problema contínuo. A Tabela 4.1 ilustra tais fatos. Nesta tabela, o tempo contínuo  $t = 0,2$  corresponde ao tempo discreto  $t_{28}$ , o tempo contínuo  $t = 0,4$  corresponde ao tempo discreto  $t_{56}$ , e assim conseqüentemente até o tempo  $t = 0,9928$  que corresponde a  $t_{139}$ . O valor aproximado do funcional que minimiza o problema é 0,8611, e o valor do funcional com relação a solução ótima contínua é 0,8642.

# Apêndice A

## O Problema de Controle Ótimo

Em problemas de controle ótimo contínuo estamos interessados em minimizar ou maximizar um funcional regido pela seguinte equação diferencial

$$x' = f(x, u), \tag{A.1}$$

onde  $x(t)$  denota o estado e  $u(t)$  o controle em um tempo  $t$ . O vetor estado  $x \in \mathbb{R}^n$  e  $u \in U$ , onde tomamos  $U \subseteq \mathbb{R}^m$  e as equações dadas em (A.1) são chamadas de equações estado do sistema. A função  $f$  é definida continuamente diferenciável em relação a cada variável para todo  $x$  e  $u$ . Estas suposições são necessárias para garantir a unicidade da solução contínua das equações de estado satisfazendo  $x(t_0) = a$ .

Assim, em nosso problema temos que minimizar uma função custo que pode ser escrita na forma

$$J = \int_{t_0}^{t_1} f_0(x, u) dt,$$

de modo a satisfazer a condição inicial  $x(t_0) = a$  e a condição final  $x(t_1) = b$ , juntamente com o sistema (A.1). Naturalmente existem controles  $u$ , e dentre estes estamos procurando o que minimiza  $J$ . Tal controle é chamado controle ótimo e o denotamos por  $u^*$ .

Precisamos de uma condição necessária para podermos distinguir este

controle dos demais. Antes de obtermos tal condição, vamos fazer algumas considerações. Primeiramente, definimos controle admissível como sendo o controle que é limitado e contínuo por partes<sup>1</sup>. A seguir, vamos restringir nossa equação diferencial ao caso em que ela é dada somente por

$$x'_0 = f_0(x_1, x_2, u), \quad x'_1 = f_1(x_1, x_2, u) \quad \text{e} \quad x'_2 = f_2(x_1, x_2, u).$$

Uma outra consideração sobre o Teorema do Princípio do Máximo de Pontryagin a qual apresentamos abaixo, é que ele pode ser aplicado para problemas formulados de maneira diferente da apresentada acima. Feito estas considerações, vamos apresentar o teorema provado por L. A. Pontryagin (ver [22], por exemplo).

**Teorema A.1 (Pontryagin).** *Seja  $u^*(t)$  um controle admissível com a correspondente trajetória  $x^*(t)$  que transfere o sistema de  $x(t_0)$  no tempo  $t = t_0$  a  $x(t_1)$  em algum tempo  $t_1$ , não especificado. Então para que  $u^*$  e  $x^*$  sejam ótimos é necessário que exista uma função escalar*

$$H(x, \psi, u) = \psi_0 f_0(x, u) + \psi_1 f_1(x, u) + \psi_2 f_2(x, u)$$

e um vetor não trivial  $\psi = (\psi_0, \psi_1, \psi_2)^t$  satisfazendo

$$\psi'_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad i = 0, 1, 2, \tag{A.2}$$

tais que

(i) para todo  $t$  em  $t_0 \leq t \leq t_1$ ,  $H$  é maximizada em relação a  $u$  em  $u = u^*(t)$ .

(ii)  $H(x^*, \psi^*, u^*) = 0$  e  $\psi_0 \leq 0$  em  $t = t_1$ , onde  $\psi^*(t)$  é a solução de (A.2) para  $u = u^*(t)$ .

Além disso, temos  $H(x^*(t), \psi^*(t), u^*(t)) = \text{constante}$  e assim  $H = 0$  e  $\psi_0 \leq 0$  em cada ponto da trajetória ótima.

---

<sup>1</sup>A descontinuidade neste caso é de primeiro tipo, ou seja, um salto.

No exemplo apresentado abaixo, é importante notarmos o uso da função Hamiltoniana e das equações de co-estado, que juntas desempenham papel fundamental na obtenção da solução.

**Exemplo A.1.** *Consideramos o sistema linear*

$$x' = Ax + Bu, \quad (\text{A.3})$$

onde

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix} \quad e \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Suponhamos que o sistema (A.3) é controlável de um dado ponto inicial  $x(t_0) = x^0$  a um ponto final  $x(t_1) = x^1$  por um controle admissível com  $|u| \leq 1$ . O objetivo é encontrar um controle ótimo  $u^*(t)$  de modo que o funcional

$$J = \int_{t_0}^{t_1} 1 \, dt$$

seja minimizado.

**Solução A.1.** *Aplicamos o Teorema de Pontryagin. Segue que  $\psi_0 \leq 0$  e conseqüentemente tomamos  $\psi_0 = -1$ . O sistema (A.3) pode ser escrito na forma*

$$\begin{cases} x'_1 = ax_1 + bx_2 + lu \\ x'_2 = cx_1 + dx_2 + mu \end{cases},$$

para  $f_1(x, u) = ax_1 + bx_2 + lu$  e  $f_2(x, u) = cx_1 + dx_2 + mu$ . Logo,

$$\begin{aligned} H &= -1 + \psi_1(ax_1 + bx_2 + lu) + \psi_2(cx_1 + dx_2 + mu) \\ &= -1 + \psi_1(ax_1 + bx_2) + \psi_2(cx_1 + dx_2) + (l\psi_1 + m\psi_2)u. \end{aligned}$$

Pelas equações de co-estado temos

$$\psi'_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = -a\psi_1 - c\psi_2, \quad \psi'_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -b\psi_1 - d\psi_2.$$

Estamos interessados em maximizar  $H$  com relação a  $u$ . Notando que  $H$  é uma função linear com relação a  $u$  e usando o fato de  $|u| \leq 1$ , para

maximizarmos  $H$  precisamos tomar  $u = 1$  ou  $u = -1$ , dependendo do sinal do coeficiente  $l\psi_1 + m\psi_2$ . Desta maneira os únicos controles que transferem o sistema do estado inicial ao estado final minimizando o funcional são da forma

$$u^* = \text{sinal}(l\psi_1 + m\psi_2),$$

que são constantes por partes com descontinuidades nos zeros de

$$S = l\psi_1(t) + m\psi_2(t).$$

Na verdade, estes controles ficam alternando de 1 para  $-1$  ou vice-versa quando  $S = 0$ . Nos intervalos de tempo entre dois zeros de  $S$  o controle é constante. Então as equações de estado (A.3) podem ser escritas como

$$x' = Ax + Bu^*, \quad \text{onde } u^* = 1 \text{ ou } u^* = -1,$$

com uma singularidade isolada quando  $u^* = 1$  em

$$\begin{cases} ax_1 + bx_2 + l = 0 \\ cx_1 + dx_2 + m = 0 \end{cases}, \quad (\text{A.4})$$

e outra singularidade isolada quando  $u^* = -1$  em

$$\begin{cases} ax_1 + bx_2 - l = 0 \\ cx_1 + dx_2 - m = 0 \end{cases}. \quad (\text{A.5})$$

Acima, consideramos o fato do determinante do sistema ser diferente de zero, ou seja,  $ad - bc \neq 0$ .

Para concluirmos o exemplo basta analisarmos estes sistemas no plano. Esta análise nos dias atuais é bem conhecida e nos fornece o comportamento do sistema. Na verdade, devemos olhar para os autovalores do sistema que temos suas trajetórias. O comportamento do sistema (A.4) é análogo ao comportamento do sistema  $x' = Ax$ , que possui uma singularidade na origem. A diferença é que em (A.4) e (A.5) por exemplo, temos o retrato de fases transladado para  $-1$  e  $1$ , respectivamente.

# Apêndice B

## Programação Dinâmica

Problemas de controle ótimo discreto representam uma importante classe de problemas de controle. Tais problemas podem ser resolvidos usando programação dinâmica, método proposto por Bellman em 1957. Deste então, existem problemas formulados na forma discreta em diversas áreas e conseqüentemente pode-se usar programação dinâmica para resolvê-los. Neste apêndice fazemos um breve estudo desta teoria com o intuito de fornecer ao leitor uma idéia sobre a abordagem destes problemas, e na dissertação os problemas discretos são aproximações dos problemas contínuos.

No problema de controle ótimo discreto abaixo, notemos que não será exigido nenhuma condição de diferenciabilidade com relação ao estado  $x$ . Este problema pode ser encontrado em [7].

**Problema B.1.** *Dado um sistema dinâmico discreto na forma*

$$x(k+1) = f(x(k), u(k), k)$$

*com condição inicial  $x_0$ , temos que encontrar para cada  $k$  um controle admissível  $u(k)$  de modo que o funcional seja maximizado. Precisamente, temos o seguinte problema:*

$$\max_{u(k)_{k=0}^{N-1}} J = \sum_{k=0}^{N-1} F(x(k), u(k), k) + C(x(1)) \quad (\text{B.1})$$

$$\begin{aligned} \text{sujeito a } x(k+1) &= f(x(k), u(k), k) \\ x(0) &= a, \quad u \in U, \end{aligned}$$

para  $k = 0, \dots, N-1$ .

A seqüência de controles  $u^*(k)$  será chamada de controle ótimo assim como a seqüência de estados  $x^*(k)$  será chamada de trajetória ótima para o problema.

No problema acima, a função  $f$  é definida por

$$f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \{0, \dots, N-1\} \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

onde  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in U$  para  $U \subseteq \mathbb{R}^m$ . O domínio e contra-domínio das funções  $F$  e  $C$  do funcional são

$$F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \{0, \dots, N-1\} \rightarrow \mathbb{R},$$

e

$$C : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}.$$

Agora que especificamos o problema de controle ótimo discreto, apresentamos o método de programação dinâmica dado por Bellman e que pode ser encontrado em [7].

**Teorema B.1 (Bellman).** *Seja  $J^*(x_0)$  o valor ótimo do funcional objetivo do problema (B.1). Então*

$$J^*(x_0) = J_0^*(x_0),$$

onde a função  $J_0^*$  é dada pelo último passo do seguinte algoritmo, que começa no final do tempo (discretizado) e vai até o início do tempo. Temos

$$J_N^*\{x(N)\} = C(x(N)),$$

e para cada  $k \in \{N-1, N-2, \dots, 1, 0\}$ ,

$$J_k^*\{x(k)\} = \max_{u(k) \in U} \{F(x(k), u(k), k) + J_{k+1}^*\{f(x(k), u(k), k)\}\},$$

que são as equações de Bellman para o problema (B.1). Além do mais, se  $u^*(k)$  maximiza a expressão situada a direita da equação de Bellman em função de  $x(k)$  para cada  $k \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ , então a seqüência de controles  $u^*(k)$  é o controle ótimo para o problema.

**Exemplo B.1.** Considere as equações do sistema dinâmico discreto para  $x$  representando a variável de estado e  $u$  a variável de controle:

$$\begin{cases} x(0) = 1 \\ x(1) = 3x(0) + u(0) \\ x(2) = x(1) + 2u(1) \end{cases} .$$

Encontre o mínimo do funcional dado por

$$\min_{u(0), u(1)} J = (u(0) - 2)^2 + (u(1) - 4)^2 + x(2). \quad (\text{B.2})$$

**Solução B.1.** A solução deste exemplo basea-se no Teorema de Bellman apresentado acima. Note que temos apenas três períodos, e começamos nossa análise no tempo final voltando para o tempo inicial. Assim, no tempo final temos  $x(2)$  dado e conseqüentemente

$$J_2^*\{x(2)\} = C(x(2)) = x(2). \quad (\text{B.3})$$

No período 2 temos  $x(1)$  dado. Logo, usando a equação de Bellman para este período vamos obter

$$J_1^*\{x(1)\} = \min_{u(1)} \{(u(1) - 4)^2 + J_2^*\{x(1) + 2u(1)\}\},$$

e usando a equação (B.3) obtemos

$$J_1^*\{x(1)\} = \min_{u(1)} \{(u(1) - 4)^2 + x(1) + 2u(1)\}. \quad (\text{B.4})$$

Portanto, temos que resolver o seguinte problema de programação matemática:

$$\min_u \varphi(u) = (u - 4)^2 + x + 2u.$$

Impondo as condições de otimalidade, ou seja, derivando a função  $\varphi$ , obtemos

$$\varphi'(u) = 0 \implies 2(u - 4) + 2 = 0 \implies u = 3,$$

e

$$\varphi'' = 2 > 0,$$

onde esta última condição nos fornece condição de mínimo. Então obtemos  $u^*(1) = 3$  e substituindo em (B.4),

$$J_1^*\{x(1)\} = x(1) + 7. \quad (\text{B.5})$$

Na análise do período 1, temos  $x(0) = 1$  dado, e a equação de Bellman para este período é

$$J_0^*\{x(0)\} = \min_{u(0)}\{(u(0) - 2)^2 + J_1^*\{3 + u(0)\}\},$$

e usando a equação (B.5) obtemos

$$J_0^*\{x(0)\} = \min_{u(0)}\{(u(0) - 2)^2 + 3 + u(0) + 7\}. \quad (\text{B.6})$$

Resolvendo o problema de programação matemática

$$\min_u \phi(u) = (u - 2)^2 + u + 10$$

de maneira análoga ao período 2, obtemos  $u^*(0) = 3/2$  e pela equação (B.6) obtemos

$$J_0^*\{x(0)\} = 47/4. \quad (\text{B.7})$$

Depois de realizarmos todos estes cálculos, temos a solução ótima para o problema de controle ótimo discreto utilizando programação dinâmica, cujos valores são

$$x^*(0) = 1, \quad u^*(0) = 3/2, \quad x^*(1) = 9/2, \quad u^*(1) = 3 \quad \text{e} \quad x^*(2) = 21/2.$$

# Conclusão

Os problemas de controle ótimo contínuo nem sempre podem ser resolvidos diretamente utilizando a teoria de condições necessárias a otimalidade, por exemplo, do tipo Princípio do Máximo de Pontryagin. Daí, recorreremos ao uso de algoritmos numéricos para encontrarmos uma solução aproximada. Para procurar uma solução aproximada, a idéia é transformar o problema de controle ótimo em um problema de dimensão finita, conhecido como problema de programação matemática. Isto foi realizado via discretização de Runge-Kutta, baseando-se nos trabalhos de Hager [11], [15] e [17].

A construção dos métodos de Runge-Kutta para problemas de controle ótimo segue a sistemática de obtenção destes para equações diferenciais ordinárias. Entretanto, as condições de ordem na discretização, como observamos na Seção 2.6, são diferentes para os problemas de controle. Neste caso existem mais condições a serem satisfeitas para obtermos convergência de ordem 3 ou 4.

A convergência da solução discreta para a solução ótima contínua depende das hipóteses de Suavidade e Coercividade. Também é necessário que os coeficientes  $b_i$ ,  $1 \leq i \leq s$ , do método de Runge-Kutta sejam positivos. Na demonstração obtêm-se uma cota superior para o erro dependente do passo  $h$ .

Os resultados apresentados neste trabalho com relação a discretização de Runge-Kutta para problemas de controle ótimo deteve-se até ordem 4, como pode ser observado na Tabela 2.2. Para estudos futuros, poderíamos pensar na obtenção de condições de ordem de discretização maiores utilizando o método de

Runge-Kutta. Um outro estudo interessante seria o enfraquecimento da hipótese de Suavidade do Teorema Principal.

A elaboração desta dissertação proporcionou, além do estudo em teoria de controle, um estudo em análise numérica, programação não linear e programação dinâmica. Durante a elaboração do texto, todas estas teorias se inter-relacionaram fornecendo um grande amadurecimento matemático e uma visão geral de como as teorias de diversas áreas podem ser usadas para a solução de um único problema.

# Referências Bibliográficas

- [1] AMMAN H. M.; KENDRICK D. A.; MERCADO P. R. *Computational Economics Modeling*. Center for Applied Research in Economics, The University of Texas, 2004. Disponível em: <<http://www.eco.utexas.edu/compeco/bookdl.htm>>. Acesso em: 21 jul. 2004.
- [2] AMMAN H. M.; KENDRICK D. A. *The Duali/Dualpc Software for Optimal Control Models: User's Guide*. Center for Applied Research in Economics, The University of Texas, 1992. Disponível em: <<http://www.eco.utexas.edu/faculty/Kendrick/guide/guide.htm>>. Acesso em: 2 ago. 2004.
- [3] BERTESEKAS D. P. *Nonlinear Programming*. Belmont, MA, Athena Scientific, 1995.
- [4] BRYSON A. E.; HO JR. Y. C. *Applied Optimal Control*. Waltham, MA, Blaisdell, 1969.
- [5] BUTCHER J. C. *The Numerical Analysis of Ordinary Differential Equations*. New York, JohnWiley, 1987.
- [6] CASULLI V.; GREENSPAN D. *Numerical Analysis for Applied Mathematics, Science and Engineering*. New York, Addison-Wesley Publishing Company, 1988.

- [7] CERDÁ E. *Optimización Dinámica*. Madrid, Prentice Hall, 2001.
- [8] DONTCHEV A. L.; HAGER W. W. Lipschitzian stability for state constrained nonlinear optimal control. *SIAM J. Control Optim.*, v. 36, p. 698–718, 1998.
- [9] DONTCHEV A. L.; HAGER W. W. Lipschitzian stability in nonlinear control and optimization. *SIAM J. Control Optim.*, v. 31, p. 569–603, 1993.
- [10] DONTCHEV A. L.; HAGER W. W. The Euler approximation in state constrained optimal control. *Mathematics of Computation*, v. 70, p. 173–203, 2000.
- [11] DONTCHEV A. L.; HAGER W. W.; VELIOV V.M. Second order Runge-Kutta aproximations in control constrained optimal control. *SIAM J. Numer. Anal.*, v. 38, p. 202–226, 2000.
- [12] GIRSANOV I. V. *Lectures on Mathematical theory of Extremum Problems*. Heidelberg, Springer-Verlag Berlin, 1972.
- [13] HAGER W. W. *Inequalities and approximation in Constructive Approaches to Mathematical Models*. New York, Academic Press, 1979.
- [14] HAGER W. W. Lipschitz continuity for constrained process. *SIAM J. Control and Optimization*, v. 17, p. 321–338, 1979.
- [15] HAGER W. W. Numerical analysis in optimal control. *Internat. Ser. Numer. Math.*, v. 139, p. 83–93, 2000.
- [16] HAGER W. W. Runge-Kutta discretizations of optimal control problems. *Kluwer Internat. Ser. Engrg. Comput. Sci.*, v. 518, p. 233–244, 1999.
- [17] HAGER W. W. Runge-Kutta methods in optimal control and the transformed adjoint system. *Numerische Mathematik*, v. 87, p. 247–282, 2000.

- [18] KENDRICK D. A. *Stochastic control for economic models*. Department of Economics, The University of Texas, 2002. Disponível em: <<http://www.eco.utexas.edu/faculty/Kendrick/papers/kendbook.pdf>>. Acesso em: 19 jul. 2004.
- [19] LIEB, E. H. *Analysis*. Princeton, American Mathematical Society, 1997.
- [20] LIMA, E. L. *Curso de Análise*. Rio de Janeiro, Impa, 1976.
- [21] PARS, L. A. *An introduction to the calculus of variations*. London, Heinemann, 1962.
- [22] PINCH, E. R. *Optimal control and the calculus of variations*. New York, Oxford University Press, 1997.
- [23] PONTRYAGIN, L. S.; BOLTYANSKII, V. G.; GAMKRELIDZE R. V.; MISHCHENKO, E. F. *The mathematical theory of optimal processes*. New York, John Wiley, 1965.
- [24] RAFIKOV M.; MALEICO E. R. Controle ótimo de pragas com base no modelo generalizado de presa - predador. *TEMA: Tendências em Matemática Aplicada e Computacional*, v. 1, p. 215–222, 2000.
- [25] RUDIN, W. *Real and Complex Analysis*. Singapore, McGraw-Hill Book Company, 1987.
- [26] TUSSET A. M.; RAFIKOV M. Controle ótimo de pragas com base nos modelos linearizados, minimizando o funcional quadrático. *Anais do II Congresso Temático de Dinâmica, Controle e Aplicações*, v. 2, p. 1196–1205, 2003.