UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Câmpus de São José do Rio Preto

Lucas Vinicius Limas da Costa

Topologias m-ádicas

São José do Rio Preto
2020

Lucas Vinicius Limas da Costa

Topologias m-ádicas

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Câmpus de São José do Rio Preto.

Financiadora: CAPES

Orientador: Prof. Dr. Parham Salehyan

São José do Rio Preto
2020

C837t

Costa, Lucas Vinicius Limas da

Topologias m-ádicas / Lucas Vinicius Limas da Costa. -- São José do Rio Preto, 2020

61 f.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp), Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas, São José do Rio Preto

Orientador: Parham Salehyan

1. Álgebra. 2. Topologia. 3. Comutativa. 4. Algébrica. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas, São José do Rio Preto. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

Lucas Vinicius Limas da Costa

Topologias m-ádicas

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Câmpus de São José do Rio Preto.

Financiadora: CAPES

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Parham Salehyan
Orientador

Profa. Dra. Michelle Ferreira Zanchetta Morgado
UNESP - Câmpus de São José do Rio Preto

Prof. Dr. Jaime Edmundo Apaza Rodriguez
UNESP - Câmpus de Ilha Solteira

São José do Rio Preto
02 de setembro de 2020

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais por terem me apoiado na minha carreira acadêmica.

Aos meus amigos por me ajudarem nos momentos difíceis. Em especial as minhas amigas Karina e Livea que assim como eu viveram a realidade do mestrado.

Ao meu orientador Prof. Dr. Parham Salehyan por ter me ajudado em todos os momentos.

Ao Ibilce por ter me dado a condição de estudar.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001, à qual agradeço, por ter me ajudado a estudar neste período de mestrado.

RESUMO

Neste trabalho estudaremos as topologias m-ádicas. Para isto, relembraremos alguns conceitos vistos na Álgebra e Topologia que nos ajudarão a avançar nos nossos estudos.

Palavras−chave: Álgebra. Topologia. Comutativa. Algébrica.

ABSTRACT

In this work we will study the m-adic topologies. For this, we will remember some concepts seen in Algebra and topoloy that will help us to advance in our studies.

Keywords: Algebra. Topology. Commutative. Algebraic.

SUMÁRIO

1	**INTRODUÇÃO**	**7**
2	**A TOPOLOGIA M-ÁDICA**	**8**
2.1	**Compatibilidades das estruturas algébricas e topológicas em um conjunto**	**8**
2.2	**A topologia m-ádica**	**11**
3	**COMPLETAMENTO DE GRUPOS FILTRADOS, ANÉIS E MÓDULOS**	**17**
3.1	**Completamento de grupos filtrados**	**17**
3.2	**Completamento de anéis e módulos filtrados**	**22**
4	**ANÉIS DAS SÉRIES FORMAIS E RESTRITAS**	**27**
5	**COMPLETAMENTO DE MÓDULOS FINITAMENTE GERADOS E PROPRIEDADES NOETHERIANAS**	**36**
5.1	**Completamento de módulo finitamente gerados**	**36**
5.2	**Propriedades noetherianas**	**43**
6	**DIMENSÕES DOS COMPLETAMENTOS DE ANÉIS NOETHERIANOS**	**46**
	REFERÊNCIAS	**59**

1 INTRODUÇÃO

Os estudos sobre as topologias $\mathfrak{m}$-ádicas surgiram como consequência dos estudos de espaços topológicos que tinham uma estrutura de grupo, anel ou módulo, conhecidos como grupo, anel ou módulo topológico.

Diante disso, destacamos a importância deste trabalho pela conexão que faz entre a Álgebra e a Topologia.

No primeiro capítulo veremos alguns resultados importantes sobre as topologias $\mathfrak{m}$-ádicas e suas filtrações. Temos que [1] será a principal referência deste capítulo.

Na sequência, de maneira análoga a topologia, estudaremos os completamentos de grupos, anéis e módulos. A princípio veremos o completamento de grupos filtrados para estendermos de maneira natural para anéis e módulos. Usaremos [2] como a principal referência.

No terceiro capítulo estudaremos as séries formais e restritas e, como isso, poderemos ver que existe uma espécie de algoritmo da divisão quando o anel é completo pela topologia $\mathfrak{m}$-ádica. A principal referência será [3].

No quarto capítulo estudaremos mais a fundo os completamentos de módulos finitamente gerados. Temos que [3] e [2] serão as referências mais utilizadas.

Por fim, no quinto capítulo buscaremos uma relação entre a dimensão de um anel noetheriano e a dimensão de seu completamento. Inicialmente veremos para os anéis noetherianos locais. Depois estenderemos para quaisquer anéis noetherianos. Teremos que [2] será a principal referência.

2 A TOPOLOGIA M-ÁDICA

No começo deste capítulo definiremos grupos topológicos e veremos alguns resultados fundamentais. Entre os mais importantes podemos destacar: lema 2.4 e o teorema 2.8.

Na sequência definiremos anéis e módulos topológicos. A partir disso apresentaremos a topologia $\mathfrak{m}$-ádica e provaremos alguns resultados. Dentre os mais relevantes podemos citar: teoremas 2.21 e 2.23, lema 2.22 e a proposição 2.26.

Finalizaremos definindo o que é um anel de Zariski.

2.1 Compatibilidades das estruturas algébricas e topológicas em um conjunto

Todos os anéis serão considerados como comutativo com identidade multiplicativa representada por 1. Se $\phi : A \to B$ é um homomorfismo de anel, assumimos que a imagem da identidade de A através de ϕ é a identidade de B. No caso de A ser um subanel de B então iremos supor que a identidade de A também é a identidade de B.

Definição 2.1. *Seja $(G, +)$ um grupo abeliano que ao mesmo tempo possui uma estrutura de espaço topológico, não necessariamente Hausdorff. Suponhamos que as estruturas algébricas e topológicas acima são compatíveis no seguinte sentido: as aplicações*

$$\begin{cases} f & : & G \times G & \longrightarrow & G \\ & & (x, y) & \longmapsto & x + y \end{cases}$$

$$\begin{cases} g & : & G & \longrightarrow & G \\ & & x & \longmapsto & -x \end{cases}$$

são contínuas. Dessa forma, dizemos que G é um grupo topológico (com respeito as duas estruturas acima).

Observe que a aplicação

$$\begin{cases} f' & : & G \times G & \longrightarrow & G \\ & & (x, y) & \longmapsto & x - y \end{cases}$$

também é contínua pois $f'(x, y) = id_G(x) + g(y)$.

Proposição 2.2. *Sejam G um grupo topológico e $a \in G$. Então a translação T_a definida por $T_a(x) = x + a$ é contínua e a translação T_{-a} é a aplicação inversa.*

Demonstração. Para todo aberto $V \subset G$, com $x + y \in V$, existe um aberto $W \subset G \times G$, pela continuidade de f, tal que $(x, y) \in W$ e $f(W) \subset V$. Fixando $y = a$ temos que $f(x, a) = T_a(x)$ é contínua.

Pelo fato de $T_a \circ T_{-a} = Id_G$ e $T_{-a} \circ T_a = Id_G$ teremos que $T_{-a} = T_a^{-1}$. □

Assim, T_a é um homeomorfismo de G para G e existe uma bijeção do conjunto de todas as vizinhanças do elemento neutro aditivo de G (geralmente representado por 0) para o conjunto de todas as vizinhanças de a ($U \mapsto U+a$). Portanto, a topologia de G é unicamente determinado pelas vizinhanças de 0 em G.

Podemos observar que todo subgrupo aberto H de G é fechado, pois o conjunto complementar de H em G é $\bigcup_{a \notin H} a + H$ e todo $a + H = T_a(H)$ é aberto.

Dessa forma, temos que G/H é um grupo topológico quando tomamos a topologia discreta.

Proposição 2.3. *Sejam G um grupo topológico, $A \subseteq G$ e B um subgrupo de G. Se B é aberto, então $A + B$ também é.*

Demonstração. Segue pelo fato de $A + B = \bigcup_{a \in A} (a + B)$. □

Lema 2.4. *Seja H a interseção de todas as vizinhanças do elemento neutro do grupo topológico G, denotado por 0. Então:*

(i) H é subgrupo de G;

(ii) H é o fecho de $\{0\}$.

Demonstração. (i) Segue pela continuidade das operações de grupo. Temos que $H \neq \emptyset$ pois $0 \in H$. Escreva $N_G(0)$ como o conjunto das vizinhanças de 0. Como $x \mapsto -x$ é um homeomorfismo, para cada vizinhança $U \in N_G(0)$ teremos que $-U \in N_G(0)$. Assim $V = U \cap -U \in N_G(0)$ e $-V = V$. Se $x \in H$ e $U \in N_G(0)$, então podemos encontrar o subconjunto $V \in N_G(0)$ tal que $V = -V$. Então $x \in V = -V$, logo $-x \in V \subseteq U$. Como U é arbitrário, então $-x \in H$.

Como $f : G \times G \to G$ é contínua e $(0, 0) \mapsto 0$ para qualquer $U \in N_G(0)$ existe uma vizinhança W de $(0, 0)$ em $G \times G$ que a aplicação adição leva até U. Pela definição de topologia produto, existem $V_1, V_2 \in N_G(0)$ tal que $V_1 \times V_2 \subseteq W$. Se tomarmos $V = V_1 \cap V_2$ então $V + V \subseteq U$. Suponhamos $x, y \in H$ e $U \in N_G(0)$. Assim, existe $V \in N_G(0)$ tal que $V + V \subseteq U$ e $x, y \in V$ e então $x + y \in U$. Como U é arbitrário então $x + y \in H$.

Para (ii) teremos que:

$$x \in H \Leftrightarrow 0 \in x + U \text{ para toda vizinhança } U \text{ de } 0 \Leftrightarrow x \in \overline{\{0\}}.$$

□

Relembraremos uma definição vista na topologia.

Definição 2.5. *Uma aplicação $f : X \to Y$ entre dois espaços topológicos é dita aberta se, para qualquer aberto U de X, $f(U)$ é aberto em Y.*

Proposição 2.6. *A aplicação natural $\rho : G \to G/H$, onde H é o subgrupo do Lema 1.4, é aberta.*

Demonstração. Seja U um subconjunto aberto de G. Pela proposição 2.3 temos que $\rho(U) = U + H$ é aberto. □

A próxima proposição apresenta uma condição para que um espaço topológico seja Hausdorff.

Proposição 2.7. *Se um espaço topológico X é Hausdorff se, e somente se, a imagem da aplicação*

$$\begin{cases} \Delta & : & X & \longrightarrow & X \times X \\ & & x & \longmapsto & (x, x) \end{cases}$$

é fechada em $X \times X$.

Demonstração. Seja $(x, y) \in X \times X$ tal que $x \neq y$. Pelo fato de X ser Hausdorff temos que existem abertos disjuntos U, V contendo x, y respectivamente. Assim, $(x, y) \in U \times V \subseteq (X \times X) - \Delta(X)$. Logo $(X \times X) - \Delta(X)$ é aberto, isto é, $\Delta(X)$ é fechado.

Reciprocamente, se $W := (X \times X) - \Delta(X)$ é aberto então, para $x, y \in X$ distintos, $(x, y) \in W$ está contido num aberto básico $U \times V \subseteq W$ para os abertos U, V de X. Então U, V são abertos de X contendo x, y respectivamente e eles são disjuntos pois $U \times V$ é subconjunto de W. □

Seja H um subgrupo de um grupo topológico G. O seguinte teorema nos mostra quando G/H é Hausdorff.

Teorema 2.8. *As seguintes afirmações são equivalentes:*

i) G/H é Hausdorff;

ii) H é fechado em G.

Demonstração. Suponha que G/H seja Hausdorff. Assim, conjuntos unitários são fechados em G/H. Em particular, $\overline{0} = H$ é fechado em G/H.

Finalmente, suponhamos que H seja fechado em G. Para mostrar que G/H é Hausdorff vimos anteriormente que basta mostrar que a imagem da aplicação $\Delta : G/H \to G/H \times G/H$ é fechada em $G/H \times G/H$.

Temos que $U := (G/H \times G/H) - \mathrm{im}(\Delta) = \{(\rho(g), \rho(g')) : g' - g \notin H\}$ é o seu complementar. Seja $q = (\rho, \rho) : G \times G \to G/H \times G/H$, que é aberta pois ρ é aberta. Assim, $q^{-1}(U) = \{(g, g') \in G \times G : g' - g \notin H\}$ é aberto pois a aplicação $f' : G \times G \to G$, vista no começo do capítulo, é contínua e $q^{-1}(U) = f'^{-1}(G - H)$. Como q é sobrejetiva então $U = q \circ q^{-1}(U)$ é aberto. □

Corolário 2.9. *O grupo topológico G é Hausdorff se, e somente se, $H = \{0\}$, onde H é a subgrupo formado pela interseção de todas as vizinhanças do elemento neutro de G.*

Demonstração. Se $H = \{0\}$ então G é Hausdorff. A recíproca é trivial. □

2.2 A topologia m-ádica

Definição 2.10. *Se A é um anel e um grupo topológico com respeito a adição, dizemos que A é um anel topológico se a aplicação*

$$\begin{cases} h & : & A \times A & \longrightarrow & A \\ & & (x, y) & \longmapsto & x \cdot y \end{cases}$$

é contínua.

Seja $\mathfrak{m}$ um ideal de A, que usaremos a notação $\mathfrak{m} \trianglelefteq A$, consideramos em A a topologia definida tomando o conjunto de todas as potências $\mathfrak{m}^n$, para $n \geqslant 0$, como um sistema fundamental de vizinhanças de 0. É fácil verificar que com essa topologia A é um anel topológico. Chamamos essa topologia de *topologia* $\mathfrak{m}$*-ádica*, ou simplesmente $\mathfrak{m}$*-topologia* e dizemos que A é um *anel* $\mathfrak{m}$*-ádico* ou $\mathfrak{m}$*-anel*.

Proposição 2.11. *Num anel noetheriano A todo ideal I contém uma potência do seu radical $\sqrt{I}$.*

Demonstração. Sua prova pode ser vista em [2], capítulo 7. □

Assim um $\mathfrak{m}$-anel noetheriano A pode ser um $\mathfrak{m}'$-anel com $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{m}'$. Basta tomarmos $\mathfrak{m}' = \sqrt{\mathfrak{m}}$.

Definição 2.12. *Seja M um A-módulo, onde A é um anel topológico e M um grupo topológico. Dizemos que M é um módulo topológico se a aplicação*

$$\begin{cases} h' & : & A \times M & \longrightarrow & M \\ & & (a, x) & \longmapsto & a \cdot x \end{cases}$$

é contínua.

Seja $\mathfrak{m} \trianglelefteq A$. A $\mathfrak{m}$-topologia em M é definida tomando a $\mathfrak{m}$-topologia em A e a topologia dada por todos os submódulos $\mathfrak{m}^n M$, $n \geqslant 0$, de M.

Se A é um anel topológico tal que o sistema fundamental de vizinhanças de 0 é dada por ideais, dizemos que a topologia em A é uma *topologia linear*. Portanto a $\mathfrak{m}$-topologia é um exemplo de topologia linear.

Definição 2.13. *Seja M um A-módulo. A cadeia*

$$M = M_0 \supset M_1 \supset \cdots \supset M_n \supset \cdots,$$

onde M_n são submódulos de M é chamada uma filtração de M.

Uma filtração é associada de forma natural com uma topologia em M, basta tomarmos $\{M_n\}$ como um sistema fundamental de vizinhanças de 0.

Definição 2.14. *Sejam (M_n) uma filtração de M e $\mathfrak{m} \trianglelefteq A$ tais que a seguinte condição é verificada:*

$$\mathfrak{m}M_n \subset M_{n+1}, \text{ para todo } n \geqslant 0;$$

ou consequentemente,

$$\mathfrak{m}^i M_n \subset M_{n+i}, \text{ para todo } n, i \geqslant 0.$$

Então chamamos (M_n) de uma $\mathfrak{m}$-filtração.

Definição 2.15. *Dizemos que a $\mathfrak{m}$-filtração (M_n) é estável se existe $n_0 \geqslant 0$ tal que as seguintes condições equivalentes são verificadas:*

i) $M_{n+1} = \mathfrak{m}M_n$, *para* $n > n_0$;

ii) $M_n = \mathfrak{m}^{n-n_0} M_{n_0}$, *para* $n > n_0$;

iii) $M_{n+q} = \mathfrak{m}^q M_n$, *para* $n > n_0$, $q. \geqslant 0$

A filtração $(\mathfrak{m}^n M)$, que define a topologia $\mathfrak{m}$-ádica em M, é um exemplo de $\mathfrak{m}$-filtração estável. O próximo lema mostra que qualquer $\mathfrak{m}$-filtração estável de M define a $\mathfrak{m}$-topologia.

Lema 2.16. *Se (M_n), (M'_n) são $\mathfrak{m}$-filtrações estáveis de M então existe n_0 tal que $M_{n+n_0} \subset M'_n$ e $M'_{n+n_0} \subset M_n$, para todo $n \geqslant 0$. Consequentemente, todas as $\mathfrak{m}$-filtrações estáveis determinam a mesma topologia em M.*

Demonstração. É suficiente tomar $M'_n = \mathfrak{m}^n M$. Como $\mathfrak{m}M_n \subseteq M_{n+1}$ para todo n, teremos que $\mathfrak{m}^n M \subseteq M_n$. Além disso, $\mathfrak{m}M_n = M_{n+1}$ para todo $n \geq n_0$, consequentemente $M_{n+n_0} = \mathfrak{m}^n M_{n_0} \subseteq \mathfrak{m}^n M = M'_n$. □

Definição 2.17. *Se A é um anel e $(A_n)_{n\geqslant 0}$ é uma família de subgrupos, com relação a adição, de A, tal que $A = \bigoplus_{n=0}^{\infty} A_n$ e $A_m A_n \subseteq A_{m+n}$, para $m, n \geqslant 0$, então é A é chamado de anel graduado.*

Observação 2.18. Note que A_0 é um subanel de A e cada A_n é um A_0-módulo.

Definição 2.19. *Se A é um anel graduado, um A-módulo graduado é um A-módulo M junto com uma família $(M_n)_{n\geqslant 0}$ de subgrupos de M tal que $M = \bigoplus_{n=0}^{\infty} M_n$ e $A_m M_n \subseteq M_{m+n}$, para todo $m, n \geqslant 0$. Um elemento $x \in M$ é dito homogêneo de grau n se $x \in M_n$.*

Proposição 2.20. *Se A é um anel graduado noetheriano então A_0 é noetheriano e A é finitamente gerado como A_0-álgebra.*

Demonstração. Temos que $A_0 \cong A/\bigoplus_{n>0} A_n$. Logo, A_0 é noetheriano. Facilmente podemos ver que $\bigoplus_{n>0} A_n$ é um ideal de A e com isso é gerado por $\{x_1, \ldots, x_s\}$, onde $x_i \in A_{k(i)}$, para $1 \leqslant i \leqslant s$. Seja A^* a A_0-álgebra gerada por $\{x_1, \ldots, x_s\}$. Por indução sobre n, mostraremos que $A_n \subseteq A^*$ para todo $n \geqslant 0$. Isto é verdade para $n = 0$. Sejam $n > 0$ e $y \in A_n \subset \bigoplus_{n>0} A_n$. Assim, $y = \sum_{i=1}^{s} a_i x_i$, onde $a_i \in A_{n-k(i)}$. Pela hipótese de indução, cada a_i é um polinômio em x_i, para $1 \leqslant i \leqslant s$, com coeficientes em A_0. O mesmo acontece com y. Logo, $A_n \subseteq A^*$ para todo n. Portanto, $A = A^*$. □

Sejam A um anel e $\mathfrak{m} \trianglelefteq A$. Podemos formar o anel graduado $A' = \bigoplus_{n\geq 0} \mathfrak{m}^n$, com a multiplicação definida como para polinômios, que é isomorfo a $\sum_{n\geq 0} \mathfrak{m}^n X^n \subset A[X]$, onde X é uma indeterminada. Com isso, A' é uma A-álgebra gerada por $\mathfrak{m}X$, com $x \notin A'$, e A' é Noetheriano quando A for. Similarmente se M é um A-módulo e (M_n) é uma $\mathfrak{m}$-filtração de M, então $M' = \bigoplus_{n\geq 0} M_n$ é um A'-módulo graduado. Com essa notação teremos o seguinte resultado.

Teorema 2.21. *Sejam A um anel noetheriano, $\mathfrak{m} \trianglelefteq A$, M um A-módulo finitamente gerado e (M_n) uma $\mathfrak{m}$-filtração de M. Então as seguintes condições são equivalentes:*

i) A filtração (M_n) é $\mathfrak{m}$-estável;

ii) M' é um A'-módulo finitamente gerado.

Demonstração. Como cada M_n é finitamente gerado então $Q_n = \bigoplus_{r=0}^{n} M_n$ também é. Considere M'_n definido por:

$$M'_n = M_0 \oplus + \cdots + \oplus M_n \oplus \mathfrak{m}M_n \cdots \oplus \mathfrak{m}^n M_n \oplus \ldots$$

Pelo fato de Q_n ser finitamente gerado como A-módulo teremos que M'_n é finitamente gerado como A'-módulo. Assim, $\{M'_n\}_{n\geqslant 0}$ forma uma cadeia crescente, cuja união é M'. Como A' é noetheriano, então M' é um A'-módulo finitamente gerado se, e somente se, a cadeia é estacionária, ou seja, $M' = M'_{n_0}$, para algum $n_0 \geqslant 0$. □

Pelo Teorema 2.21 chegamos ao seguinte resultado que é uma ferramenta muito útil na teoria.

Lema 2.22. (*Lema de Artin-Rees*) *Sejam A um anel Noetheriano, $\mathfrak{m} \trianglelefteq A$, M um A-módulo finitamente gerado, (M_n) uma $\mathfrak{m}$-filtração estável de M e N um submódulo de M. Então:*

i) $(M_n \cap N)$ *é uma* $\mathfrak{m}$*-filtração estável de* N*;*

ii) Existe um inteiro n_0 *tal que*

$$(\mathfrak{m}^n M) \cap N = \mathfrak{m}^{n-n_0}((\mathfrak{m}^{n_0} M) \cap N),$$

para todo $n \geq 0$*;*

iii) Existe $n_0 \geqslant 0$ *tal que as filtrações* $(\mathfrak{m}^n N)$ *e* $((\mathfrak{m}^n M) \cap N)$ *satisfazem as condições do Lema 2.16; em particular a* $\mathfrak{m}$*-topologia de* N *coincide com a topologia induzida em* N *pela* $\mathfrak{m}$*-topologia de* M*.*

Demonstração. Como A é noetheriano então N e cada $(M_n \cap N)$ são A-módulos finitamente gerados. Além disso $(M_n \cap N)$ é um $\mathfrak{m}$-filtração pois $\mathfrak{m}(M_n \cap N) \subset (\mathfrak{m}M_n) \cap (\mathfrak{m}N) \subset M_{n+1} \cap (\mathfrak{m})N$ e define um submódulo graduado $N' = \bigoplus_{n\geq 0} M_n \cap N$ do módulo graduado $M' = \bigoplus_{n\geq 0} M_n$. Assim M' é um A'-módulo finitamente gerado e como A' é noetheriano então N' é um A'-módulo finitamente gerado. Logo o primeiro item segue pelo Teorema 2.21. Além disso, se aplicarmos o primeiro item a filtração $(\mathfrak{m}^n M)$ de M chegamos ao segundo item. Por fim teremos que o terceiro item segue pelo segundo e pelo lema 2.16. □

Agora iremos revisar algumas definições básicas: um anel A é $local$ (respec. semi local) se tem somente um ideal maximal (respec. um número finito de ideais maximais). Usamos a notação $(A, \mathfrak{m})$ para indicar que A é um anel local com ideal maximal $\mathfrak{m}$. A interseção de todos os ideais maximais do anel A é o ideal de Jacobson de A e é denotado por $J(A)$.

Teremos $x \in J(A)$ se, e somente se, todo elemento do conjunto $1 - xA$ é inversível. A prova é encontrada em [2], capítulo 1.

Teorema 2.23. (*Teorema da interseção de Krull*) *Sejam A um anel noetheriano, $\mathfrak{m} \trianglelefteq A$, M um A-módulo finitamente gerado e $N = \bigcap_{n=0}^{\infty} \mathfrak{m}^n M$. Então $x \in N$ se, e somente se, existe $m \in \mathfrak{m}$ tal que $(1 - m)x = 0$. Em particular, teremos $N = \{0\}$, se pelo uma das seguintes hipóteses forem verificadas:*

i) $\mathfrak{m} \subset J(A)$*;*

ii) A é um anel local;

iii) A é um domínio de integridade.

Demonstração. Se $x = mx$, com $m \in \mathfrak{m}$, teremos $x = m^n x$ para todo $n \geq 0$, então $x \in N$. Reciprocamente, se $x \in N$, Ax está contida em toda vizinhança de 0 em M, então não há outro conjunto aberto além dele mesmo pela topologia induzida, que é a $\mathfrak{m}$-topologia de Ax; $\mathfrak{m}x$ é aberto nessa topologia, então $\mathfrak{m}x = Ax$ e $mx = x$ para algum $m \in \mathfrak{m}$.

Provaremos agora os três itens. Se $\mathfrak{m} \subset J(A)$ então $1 - m$ é inversível e com isso $x = 0$. De forma análoga provamos o segundo item. Se A for domínio então $1 - m = 0$ ou $x = 0$. Pelo fato de $\mathfrak{m}$ ser um ideal próprio temos que $x = 0$ como queríamos. □

Proposição 2.24. *Se N é um submódulo do módulo M então o fecho de N é dado por $\overline{N} = \bigcap_{n=0}^{\infty}(N + M_n)$, onde (M_n) é uma filtração de M.*

Demonstração. Seja $x \in M$. Assim, $x \notin \overline{N}$ se alguma vizinhança de x é disjunta de N, ou seja, $(x + M_n) \cap N = \emptyset$, para algum $n \geqslant 0$. Se $x \in N + M_n$, para todo $n \geqslant 0$, então $x = y + z$, onde que $y \in N$ e $z \in M_n$. Com isso $y = x - z \in (x + M_n) \cap N$. Reciprocamente, se $y \in (x + M_n) \cap N$, para todo $n \geqslant 0$, então para algum $z \in M_n$ teremos que $y = x - z$. Logo $x = y + z$. □

O seguinte resultado é uma extensão do corolário 2.9 para o caso de módulos topológicos.

Corolário 2.25. *Um módulo topológico M é Hausdorff se, e somente se, $\bigcap_{n=0}^{\infty} M_n = \overline{\{0\}}$, onde (M_n) é uma filtração do módulo M.*

Demonstração. Suponhamos que $\bigcap_{n=0}^{\infty} M_n = \{0\}$. Pela proposição anterior, $\bigcap_{n=0}^{\infty} M_n = \overline{\{0\}}$. Assim, pontos são fechados e com isso a topologia é Hausdorff. □

Por fim, finalizaremos o capítulo com uma importante proposição que nos ajuda a definir um anel de Zariski.

Proposição 2.26. *Sejam A um anel noetheriano e $\mathfrak{m} \trianglelefteq A$. As seguintes condições são equivalentes:*

i) $\mathfrak{m} \subset J(A)$*;*

ii) Todo A-módulo finitamente gerado é Hausdorff para a $\mathfrak{m}$-topologia;

iii) Se M um A-módulo finitamente gerado qualquer, todo submódulo de M é fechado para a $\mathfrak{m}$-topologia de M;

iv) Todo ideal maximal de A é fechado para a $\mathfrak{m}$-topologia.

Demonstração. Mostraremos que $i) \Rightarrow ii)$. Suponhamos que $\mathfrak{m} \subset J(A)$ e M é um A-módulo finitamente gerado. Seja $x \in M$ e $m \in \mathfrak{m}$ tais que $(1 - m)x = 0$. Assim, $x = 0$ pois $(1 - m)$ é inversível em A. Portanto, M é Hausdorff pelo corolário anterior.

Provaremos $ii) \Rightarrow iii)$. Suponhamos que vale $ii)$. Seja M um A-módulo finitamente gerado, N um submódulo de M. Então M/N é Hausdorff pela topologia $\mathfrak{m}$-ádica. Portanto, N é fechado em M.

Está claro que $iii) \Rightarrow iv)$. Demonstraremos que $iv) \Rightarrow i)$. De $iv)$ temos que para todo ideal maximal $\mathfrak{m}'$ de A o A-módulo $A/\mathfrak{m}'$ é Hausdorff pela topologia $\mathfrak{m}$-ádica. Isso implica $\mathfrak{m}(A/\mathfrak{m}') \neq A/\mathfrak{m}'$, caso contrário, a topologia $\mathfrak{m}$-ádica de $A/\mathfrak{m}'$ seria a topologia menos fina e $A/\mathfrak{m}'$ seria reduzido a $\overline{0}$, isso seria um absurdo, pois $A/\mathfrak{m}'$ é corpo. A imagem canônica de $\mathfrak{m}$ em $A/\mathfrak{m}'$ é portanto um ideal distinto de $A/\mathfrak{m}'$, logo será $\overline{0}$. Consequentemente, $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}'$. Como $\mathfrak{m}'$ é arbitrário então $\mathfrak{m} \subset J(A)$. □

Definição 2.27. *Um anel topológico noetheriano é dito um anel de Zariski se é um anel* $\mathfrak{m}$*-ádico para algum* $\mathfrak{m}$ *satisfazendo as condições equivalentes da proposição anterior.*

Exemplo 2.28. Se $(A, \mathfrak{m})$ é um anel noetheriano local teremos que $\mathfrak{m} = J(A)$, então (A, I) é um anel de Zariski para qualquer ideal próprio I de A.

Proposição 2.29. *Sejam A um anel noetheriano, $\mathfrak{m} \trianglelefteq A$ e $S = 1 + \mathfrak{m}$. Assim, $S^{-1}A$ é um anel de Zariski pela $(S^{-1}\mathfrak{m})$-topologia.*

Demonstração. Todo elemento de $1 + S^{-1}\mathfrak{m}$ é da forma

$$1 + (x/(1 + x')) = (1 + x + x')/(1 + x')$$

onde $x, x' \in \mathfrak{m}$. Com isso, $1+(x/(1+x')$ é inversível em $S^{-1}A$. Isso prova que $S^{-1}\mathfrak{m} \subset J(S^{-1}A)$. Como $S^{-1}A$ é noetheriano então é um anel de Zariski. □

Observação 2.30. A definição de anel de Zariski será importante para um resultado que veremos no capítulo 4.

3 COMPLETAMENTO DE GRUPOS FILTRADOS, ANÉIS E MÓDULOS

Este capítulo tem como objetivo principal definir e estudar os completamentos de grupos, anéis e módulos filtrados.

Inicialmente definiremos o que é um completamento para um grupo filtrado e veremos alguns resultados.

Na sequência vamos estender a definição de completamento para anéis e módulos filtrados e apresentaremos os $\mathfrak{m}$-completamentos.

Entre os resultados mais relevantes podemos citar: proposições 3.9, 3.13, 3.15, 3.21, 3.24 e 3.29.

3.1 Completamento de grupos filtrados

Sejam $(G, +)$ um grupo abeliano filtrado, isto é, G é tomado como um $\mathbb{Z}$-módulo e (G_n) uma filtração. Dessa forma temos as seguintes definições.

Definição 3.1. *Sejam $(x_k), (y_k)$ duas sequências em G. Definimos a soma de sequências por $(x_k) + (y_k) = (x_k + y_k)$.*

Observação 3.2. A sequência $(-x_k)$ é o inverso aditivo de (x_k), ou seja $(-x_k) = -(x_k)$. Segue pelo fato de $(x_k) + (-x_k) = (0)$.

Definição 3.3. *Uma sequência de Cauchy em G é definida como a sequência (x_k) em G tal que, para todo G_n, existe um inteiro $s(G_n)$ com a propriedade de que*

$$x_{k_1} - x_{k_2} \in G_n, \forall k_1, k_2 \geqslant s(G_n)$$

Definição 3.4. *Seja (x_k) uma sequência em G. Dizemos que L é o limite da sequência se, e somente se,*

$$\forall\, G_n,\ \exists\, k_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } k > k_0 \text{ implica } (x_k - L) \in G_n.$$

Denotamos o limite de uma sequência (x_k) por $\lim_{k\to\infty} x_k$.

Duas sequências são equivalentes se $(x_k) - (y_k) \to 0$.

Representamos por (x) a sequência constante $(x, x, \dots)$, onde $x \in G$.

Definição 3.5. *Um grupo filtrado G é dito completo se é Hausdorff e toda sequência de Cauchy em G converge para um ponto de G.*

Sejam $\mathcal{G}$ o conjunto de todas as sequências de Cauchy em G e $\mathcal{N}$ o conjunto das sequências cujo limite é 0. Assim, temos os seguintes resultados.

Proposição 3.6. *Se* $(x_k), (y_k) \in \mathcal{G}$ *então:*

i) $(x_k + y_k) \in \mathcal{G}$*;*

ii) $(-x_k) \in \mathcal{G}$.

Demonstração. Provaremos o primeiro item. Sejam G_n, G_m tais que $G_m + G_m \subseteq G_n$. Como $(x_k), (y_k)$ são de Cauchy então existem números $s(G_m)$ e $s'(G_m)$ tais que $x_{k_1} - x_{k_2} \in G_m$, para todos $k_1, k_2 \geqslant s(G_m)$, e $y_{k_1} - y_{k_2} \in G_m$, para todo $k_1, k_2 \geqslant s'(G_m)$. Logo, para todo $k_1, k_2 \geqslant \max\{s(G_m), s'(G_m)\}$, temos que $(x_{k_1} + y_{k_1}) - (x_{k_2} + y_{k_2}) = (x_{k_1} - x_{k_2}) + (y_{k_1} - y_{k_2}) \in G_m + G_m \subseteq G_n$. Como G_n é arbitrário então $(x_k + y_k)$ é de Cauchy.

Pelo fato de (x_k) ser Cauchy então, para um G_n, existe um número $s(G_n) \in \mathbb{N}$ tal que $k_1, k_2 \geqslant s(G_n)$ implica $x_{k_1} - x_{k_2} \in G_n$. Como $(-x_{k_1}) - (-x_{k_2}) = -(x_{k_1} - x_{k_2}) = x_{k_2} - x_{k_1} \in G_n$, para todo $k_1, k_2 \geqslant s(G_n)$, então, por G_n ser arbitrário, $(-x_k)$ é de Cauchy. □

Como consequência da proposição anterior temos que:

Proposição 3.7. *O conjunto* $\mathcal{G}$ *é um grupo abeliano e* $\mathcal{N}$ *é subgrupo de* $\mathcal{G}$.

Demonstração. Se (x_k), (y_k) e $(z_k) \in \mathcal{G}$ então, pelas definições de grupo, podemos verificar que

$$((x_k) + (y_k)) + (z_k) = (x_k) + ((y_k) + (z_k))$$

Tomando (0) como a sequência onde todos elementos são iguais a 0 temos que

$$(x_k) + (0) = (x_k + 0) = (x_k).$$

De acordo com a observação 3.2, a sequência $(-x_k)$ representa o oposto de (x_k) pois

$$(x_k) + (-x_k) = (x_k - x_k) = (0).$$

Por fim, $\mathcal{G}$ é abeliano pelo fato de que $(x_k) + (y_k) = (x_k + y_k) = (y_k + x_k) = (y_k) + (x_k)$.
Sem grandes dificuldades podemos verificar que $\mathcal{N}$ é subgrupo de $\mathcal{G}$. □

Dessa forma, podemos ver que a construção do grupo quociente $\widehat{G} = \mathcal{G}/\mathcal{N}$ é feita de maneira análoga a construção dos números reais atráves dos número racionais.

Definição 3.8. *O grupo* $\widehat{G}$ *é chamado de completamento de* G.

Proposição 3.9. *A aplicação*

$$\begin{cases} f & : & G & \longrightarrow & \widehat{G} \\ & & x & \longmapsto & \widehat{(x)} \end{cases}$$

é um homomorfismo de grupos, onde $\widehat{(x)}$ *representa a classe da sequência constante* (x)*, e* $\ker f = \bigcap_{n=0}^{\infty} G_n$.

Demonstração. Temos que f é um homomorfismo bem definido pois $f(0) = (0)$ e $f(x+y) = (x+y) = (x) + (y) = f(x) + f(y)$.

Se $x \in \ker f$, ou seja, $(x) = (0)$, então $\lim_{k\to\infty}(x) - (0) = 0$. Assim, temos que para cada $G_n \subset G$ existe $s(G_n)$ tal que se $k \geqslant s(G_n)$ então $x \in G_n$. Como x não depende de k então $x \in \bigcap_{n=0}^{\infty} G_n$. A recíproca é trivial. □

Observação 3.10. Note que a aplicação f geralmente não é injetora. Com isso, pelo corolário 2.9, temos que f é injetora se, e somente se, G for Hausdorff. Consequentemente, f é um isomorfismo se, e somente se, G é completo.

Podemos tomar a topologia quociente em $\widehat{G}$. Assim, Para cada G_n definimos $\widehat{G_n} \subseteq \widehat{G}$ como sendo o conjunto

$$\widehat{G_n} \coloneqq \{\widehat{x} \in \widehat{G} : \forall (x_k) \in \widehat{x}, \exists r \in \mathbb{N}, \forall k \geqslant r, x_k \in G_n\}.$$

Claramente $\widehat{G_n}$ é um subgrupo de $\widehat{G}$ e $\widehat{G_{n+1}} \subseteq \widehat{G_n}$. Portanto, $(\widehat{G_n})$ é uma filtração de $\widehat{G}$ e consequentemente teremos o seguinte resultado.

Proposição 3.11. *A aplicação* $f : G \to \widehat{G}$*, vista na proposição 3.9, é contínua.*

Demonstração. Seja $x \in G$ e considere um aberto básico $f(x) + \widehat{G_n}$. Se $u \in G_n$ então existe um G_m tal que $u + G_m \subseteq G_n$. Com isso, se (y_k) é equivalente a (u) então eventualmente teremos que $y_k - u \in G_m$, ou seja, y_k está eventualmente em $u + G_m \subseteq G_n$. Isso mostra que $f(u) \in \widehat{G_n}$. Assim, segue que $f(x + G_n) \subseteq f(x) + \widehat{G_n}$. Portanto, f é contínua. □

Mostraremos que o completamento de um grupo filtrado pode ser obtido através de limites inversos.

Definição 3.12. *Uma família* (A_n, f_n) *de grupos abelianos* A_n *e homomorfismo de grupos* $f_n : A_{n+1} \to A_n$ *é chamada de sistema inverso e tem um limite inverso* $\varprojlim A_n = B$ *definido por*

$$B = \{(a_n) \in \prod A_n : f_n(a_{n+1}) = a_n, \forall n\}$$

Um sistema inverso onde todo f_n *é sobrejetivo é chamado de sistema sobrejetivo. Temos que* B *é claramente um subgrupo de* $\prod A_n$ *e para qualquer n, existe um homomorfismo canônico* $g_n : B \to A_n$ *tal que* $f_n \circ g_{n+1} = g_n$.

Se G é um grupo filtrado e (G_n) é uma filtração, então temos os sistemas inversos $(G/G_n, f_n)$ e, para n fixo, $(G_n/G_{n+i}, f_{n+i})$ onde f_n e f_{n+i} são as aplicações canônicas. Sejam $\widetilde{G} = \varprojlim G/G_n$ e $\widetilde{G_n} = \varprojlim G_n/G_{n+i}$. É fácil ver que $(\widetilde{G_n})$ é uma filtração de $\widetilde{G}$. Note que existe um homomorfismo $g : G \to \widetilde{G}$ definido por $f(x) = (x_0, x_1, \dots)$, onde x_i é a classe de $x \in G$ módulo G_i.

Proposição 3.13. *Existe um isomorfismo de grupos $u : \widehat{G} \to \widetilde{G}$ tal que $u(\widehat{G_n}) = \widetilde{G_n}$ para qualquer $n = 0, 1, \dots$.*

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência de Cauchy em G. Para qualquer r existe um n tal que $x_n \equiv x_{n+1} \equiv x_{n+2} \equiv \dots \mod G_r$. Denote por ξ_r a classe desses x_{n+i}, para $i = 0, 1, \dots$. Assim, temos a sequência $\xi = (\xi_0, \xi_1, \dots)$ que é um elemento de $\widetilde{G}$. Isso nos dá um homomorfismo de grupo $\mathcal{G} \to \widetilde{G}$, cujo kernel é $\mathcal{N}$. Logo, encontramos o homomorfismo injetivo $u : \widehat{G} \to \widetilde{G}$.

Seja $\xi = (\xi_n) \in \widetilde{G}$ e $x_n \in G$ tal que $\xi_n = x_n + G_n$. Podemos ver que (x_n) é uma sequência de Cauchy em G e que ξ é a imagem por u da classe (x_n). Logo u é um isomorfismo. De forma similar provamos a segunda parte da proposição. □

Para demonstrarmos a próxima proposicão precisaremos do seguinte resultado cujo prova se encontra em [2], capítulo 2.

Proposição 3.14. *(Lema da Serpente) Seja*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & M' & \xrightarrow{u} & M & \xrightarrow{v} & M'' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle f'} & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle f''} & & \\ 0 & \longrightarrow & N' & \xrightarrow{u'} & N & \xrightarrow{v'} & N'' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

um diagrama comutativo de A-módulos e homomorfismos. Então existe a sequência exata

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \ker(f') & \xrightarrow{\bar{u}} & \ker(f) & \xrightarrow{\bar{v}} & \ker(f'') & \xrightarrow{\delta} & \\ & & \mathrm{coker}(f') & \xrightarrow{\bar{u'}} & \mathrm{coker}(f) & \xrightarrow{\bar{v'}} & \mathrm{coker}(f'') & \longrightarrow & 0, \end{array}$$

onde $\bar{u}, \bar{v}$ são restrições de u, v, $\bar{u'}, \bar{v'}$ são induzidas por u', v' e δ é o mapa de fronteira.

Em [2], capítulo 10 temos o seguinte resultado:

Proposição 3.15. *Sejam $\{A_n, f_n\}$, $\{B_n, f'_n\}$ e $\{C_n, f''_n\}$ sistemas inversos. Suponha que o diagrama abaixo seja comutativo com linhas exatas*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A_{n+1} & \xrightarrow{u_{n+1}} & B_{n+1} & \xrightarrow{v_{n+1}} & C_{n+1} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \theta_{n+1}} & & \downarrow{\scriptstyle \theta'_{n+1}} & & \downarrow{\scriptstyle \theta''_{n+1}} & & \\ 0 & \longrightarrow & A_n & \xrightarrow{u_n} & B_n & \xrightarrow{v_n} & C_n & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Então a sequência

$$0 \to \varprojlim A_n \to \varprojlim B_n \to \varprojlim C_n$$

é exata. Além disso, se $\{A_n\}$ *é um sistema sobrejetivo então*

$$0 \to \varprojlim A_n \to \varprojlim B_n \to \varprojlim C_n \to 0$$

é exata.

Demonstração. Seja $A = \prod_{n=1}^{\infty} A_n$ e defina $d^A : A \to A$ por $d^A(a_n) = a_n - f_{n+1}(a_{n+1})$. Logo $\ker d^A \cong \varprojlim A_n$. Similarmente podemos definir B, d^B, C e d^C. Assim, teremos o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle d^A} & & \downarrow{\scriptstyle d^B} & & \downarrow{\scriptstyle d^C} & & \\ 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

e a sequência exata

$$0 \to \ker(d^A) \to \ker(d^B) \to \ker(d^C) \to \operatorname{coker}(d^A) \to \operatorname{coker}(d^B) \to \operatorname{coker}(d^C) \to 0.$$

Para finalizar a demonstração devemos provar que se $\{A_n\}$ é sobrejetivo então d^A também é sobrejetivo. Isto é claro pois para mostrarmos a sobrejetividade de d^A devemos resolver indutivamente as equações

$$x_n - f_{n+1}(x_{n+1}) = a_n$$

onde $x_n \in A_n$. □

Corolário 3.16. *Seja*

$$0 \longrightarrow G' \xrightarrow{u} G \xrightarrow{v} G'' \longrightarrow 0$$

uma sequência exata de grupos.

Considere uma filtração (G_n) *em* G. *Dessa forma,* (G_n) *induz as filtrações* $(G' \bigcap u^{-1}(G_n))$ *e* $(v(G_n))$ *em* G' *e* G'' *respectivamente. Assim,*

$$0 \longrightarrow \varprojlim G'/G' \cap u^{-1}(G_n) \longrightarrow \widehat{G} \longrightarrow \varprojlim G''/v(G_n) \longrightarrow 0$$

é exata.

Demonstração. Temos que

$$0 \longrightarrow G'/G' \cap u^{-1}(G_n) \longrightarrow G/G_n \longrightarrow G''/v(G_n) \longrightarrow 0$$

é exata, para todo n, e $\{G''/v(G_n), f_n''\}$ é um sistema sobrejetivo, onde $f_n'' : G''/v(G_{n+1}) \to G''/v(G_n)$ é a aplicação natural. Logo, basta aplicarmos a proposição anterior. □

Corolário 3.17. *Sejam G um grupo abeliano, (G_n) uma filtração e (G/G_n) os respectivos grupos quociente. Assim, $\widehat{G}/\widehat{G_n} \cong G/G_n$.*

Demonstração. Como G/G_n é discreto então $\widehat{G/G_n} \cong G/G_n$. Com isso, temos que:

$$0 \longrightarrow \widehat{G_n} \longrightarrow \widehat{G} \longrightarrow G/G_n \longrightarrow 0$$

e, consequentemente, $\widehat{G}/\widehat{G_n} \cong G/G_n$. □

Observação 3.18. Aplicando o limite inverso em $\{\widehat{G}/\widehat{G_n}\}$ e $\{G/G_n\}$ obtemos que $\widehat{\widehat{G}} \cong \widehat{G}$. Assim, pela observação 3.10, teremos que $\widehat{G}$ é completo pela topologia dada pela filtração $\widehat{G_n}$.

3.2 Completamento de anéis e módulos filtrados

Os resultados anteriores podem ser estendidos para anéis e módulos filtrados. Listamos alguns resultados.

Se A é um anel $\mathfrak{m}$-ádico, o completamento de A é chamado o $\mathfrak{m}$-completamento de A e é denotado por $\widehat{(A, \mathfrak{m})}$ ou $\widehat{A}$.

Proposição 3.19. *Se $(x_k), (y_k)$ são sequências de Cauchy em A então $(x_k)(y_k) = (x_k y_k)$ também é de Cauchy.*

Demonstração. Como (x_k) é de Cauchy então, para qualquer $\mathfrak{m}^n$, existe um $s(\mathfrak{m}^n)$ tal que $k_1, k_2 \geqslant s(\mathfrak{m}^n)$ implica $x_{k_1} - x_{k_2} \in \mathfrak{m}^n$. Analogamente, temos que existe $s'(\mathfrak{m}^n)$ tal que $k_1, k_2 \geqslant s'(\mathfrak{m}^n)$ implica $y_{k_1} - y_{k_2} \in \mathfrak{m}^n$. Tomando $k' = \max\{s(\mathfrak{m}^n), s'(\mathfrak{m}^n)\}$ temos que $x_{k_1} + \mathfrak{m}^n = x_{k_2} + \mathfrak{m}^n$ e $y_{k_1} + \mathfrak{m}^n = y_{k_2} + \mathfrak{m}^n$, para $k_1, k_2 \geqslant k'$. Logo $x_{k_1} y_{k_1} + \mathfrak{m}^n = x_{k_2} y_{k_2} + \mathfrak{m}^n$. Portanto, $x_{k_1} y_{k_1} - x_{k_2} y_{k_2} \in \mathfrak{m}^n$ como queríamos. □

Dessa forma $\widehat{A}$ é um anel comutativo com unidade (1).

Para cada $\mathfrak{m}^n \trianglelefteq A$ temos $\widehat{\mathfrak{m}^n}$ definido por

$$\widehat{\mathfrak{m}^n} := \{\widehat{x} \in \widehat{A} : \forall (x_k) \in \widehat{x}, \exists r \in \mathbb{N} \text{ tal que } \forall k \geqslant r, x_k \in \mathfrak{m}^n\}$$

Claramente $\widehat{\mathfrak{m}^n} \trianglelefteq \widehat{A}$ e $\widehat{\mathfrak{m}^{n+1}} \subseteq \widehat{\mathfrak{m}^n}$. Portanto, $(\widehat{\mathfrak{m}^n})$ é uma filtração de $\widehat{A}$.

Existem os sistemas inversos $(A/\mathfrak{m}^n, f_n)$ e, para n fixo, $(\mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+i}, f_{n+i})$ onde que f_n e f_{n+i} são as aplicações naturais. Assim, $\widetilde{A} = \varprojlim A/\mathfrak{m}^n$ é um anel e $\widetilde{\mathfrak{m}^n} = \varprojlim \mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+i}$ é um ideal de $\widetilde{A}$. Logo $\widetilde{\mathfrak{m}^n}$ é uma filtração de $\widetilde{A}$.

A seguinte proposiçao é uma extensão da proposição 3.13.

Proposição 3.20. *Existe um isomorfismo de anéis $v : \widehat{A} \to \widetilde{A}$ tal que $v(\widehat{\mathfrak{m}^n}) = \widetilde{\mathfrak{m}^n}$.*

Demonstração. A demonstração é similar a da proposição 3.13. □

Como consequência da proposição anterior temos que:

Proposição 3.21. *A aplicação definida por*

$$\begin{cases} f & : & A & \longrightarrow & \widehat{A} \\ & & a & \longmapsto & \widehat{(a)} \end{cases}$$

é um homomorfismo contínuo de anéis, onde $\widehat{(a)}$ *representa a classe da sequência constante* (a)*, e* $\ker f = \bigcap_{n=0}^{\infty} \mathfrak{m}^n$.

Demonstração. Temos que f é um homomorfismo de grupos. Assim, de acordo com a proposição 3.9, $\ker f = \bigcap_{n=0}^{\infty} \mathfrak{m}^n$. A aplicação é um homomorfismo de anéis, pois $f(xy) = f(x)f(y)$.

Provaremos a continuidade. Para $x \in \mathfrak{m}^n$ temos $f(x)$ representado em $\varprojlim A/\mathfrak{m}^n$ por $(x + \mathfrak{m}^{n+i}) \in \varprojlim \mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+i}$, para $i = 1, 2, \ldots$. Com isso, $f(\mathfrak{m}^n) \subseteq \widehat{\mathfrak{m}^n}$. Logo, para quaisquer $y \in A$ e aberto básico $f(y) + \widehat{\mathfrak{m}^n}$ temos que $f(y + \mathfrak{m}^n) \subseteq f(y) + \widehat{\mathfrak{m}^n}$. □

Se M é um A-módulo então o $\mathfrak{m}$-completamento de M será denotado por $\widehat{(M, \mathfrak{m})}$ ou $\widehat{M}$.

Proposição 3.22. *O completamento* $\widehat{M}$ *do* A*-módulo* M *é um* $\widehat{A}$*-módulo.*

Demonstração. Para $(x_k + \mathfrak{m}^k) \in \widehat{A}$ e $(m_k + \mathfrak{m}^k M) \in \widehat{M}$ definimos o produto como $(x_k + \mathfrak{m}^k)(m_k + \mathfrak{m}^k M) = (x_k m_k + \mathfrak{m}^k M)$. Note que $x_{k+1}m_{k+1} - x_k m_k = x_{k+1}(m_{k+1} - m_k) + (x_{k+1} - x_k)m_k \in x_{k+1}\mathfrak{m}^k M + \mathfrak{m}^k m_k \subseteq \mathfrak{m}^k M$. Dessa forma o produto está em $\widehat{M}$. Se substituirmos x_k por $x'_k \in x_k + \mathfrak{m}^k$ então temos $(x'_k - x_k)m_k \in \mathfrak{m}^k M$. De maneira análoga podemos substuir m_k por $m'_k \in m_k + \mathfrak{m}^k M$. Portanto, a multiplicação está bem definida. □

Considere uma filtração (M_n) de M, onde que $M_n = \mathfrak{m}^n M$, então temos o conjunto $\widehat{M_n}$ definido por

$$\widehat{M_n} \coloneqq \{\widehat{m} \in \widehat{M} : \forall (m_k) \in \widehat{m}, \exists r \in \mathbb{N} \text{ tal que } \forall k \geqslant r, m_k \in M_n\}$$

Claramente $\widehat{M_n}$ são submódulos de $\widehat{M}$ e $\widehat{M_{n+1}} \subseteq \widehat{M_n}$.

Temos que $\widetilde{M} = \varprojlim M/M_n$ é um $\hat{A}$-módulo e $\widetilde{M_n} = \varprojlim M_n/M_{n+i}$ é um submódulo de $\widetilde{M}$. Logo, $(\widetilde{M_n})$ é um filtração de $\widetilde{M}$.

Proposição 3.23. *Existe um isomorfismo de* $\widehat{A}$*-módulos* $u' : \widehat{M} \to \widetilde{M}$ *tal que* $u'(\widehat{M_n}) = \widetilde{M_n}$.

Demonstração. A demonstração é similar a vista na proposição 3.13. □

Proposição 3.24. *A aplicação definida por*

$$\begin{cases} f & : & M & \longrightarrow & \widehat{M} \\ & & m & \longmapsto & \widehat{(m)} \end{cases}$$

é um homomorfismo contínuo de A-módulos, onde $\widehat{(m)}$ *representa a classe da sequência constante* (m)*, e* $\ker f = \bigcap_{n=0}^{\infty} \mathfrak{m}^n M$.

Demonstração. Temos que f é um homomorfismo de grupos. Assim, de acordo com a proposição 3.9, $\ker f = \bigcap_{n=0}^{\infty} \mathfrak{m}^n M$. A aplicação é um homomorfismo de A-módulos, pois $f(ax + y) = af(x) + f(y)$, para $a \in A$ e $x, y \in M$. A continuidade segue de maneira análoga ao que vimos para anéis. □

Proposição 3.25. *Seja A um anel, M um A-módulo,* $\mathfrak{m} \trianglelefteq A$ *e* $\widehat{A}$ *o seu* $\mathfrak{m}$*-completamento. Assim,* $\widehat{A^2} \cong (\widehat{A})^2$.

Demonstração. Considere as aplicações

$$\begin{cases} u & : & M \times \{0\} & \longrightarrow & M^2 \\ & & (m, 0) & \longmapsto & (m, 0) \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} u & : & M^2 & \longrightarrow & \{0\} \times M \\ & & (m_1, m_2) & \longmapsto & (0, m_2) \end{cases}$$

Assim, a seguinte sequência é exata

$$0 \longrightarrow M \times \{0\} \xrightarrow{u} M^2 \xrightarrow{v} \{0\} \times M \longrightarrow 0.$$

Para todo n,

$$0 \longrightarrow (M \times \{0\})/(\mathfrak{m}^n M \times \{0\}) \xrightarrow{u} M^2/(\mathfrak{m}^n M)^2 \xrightarrow{v} (\{0\} \times M)/(\{0\} \times \mathfrak{m}^n M) \longrightarrow 0$$

é exata. Tomando os limites inversos, obtemos:

$$0 \longrightarrow \widehat{A \times \{0\}} \longrightarrow \widehat{A^2} \longrightarrow \widehat{\{0\} \times A} \longrightarrow 0$$

Portanto, $\widehat{A^2} \cong (\widehat{A})^2$ como queríamos. □

Como consequência do resultado anterior, teremos que $\widehat{A^n} \cong (\widehat{A})^n$.

Podemos estender o corolário 3.17 módulos filtrados.

Proposição 3.26. *Sejam A um anel,* $\mathfrak{m} \trianglelefteq A$*, M um A-módulo filtrado e* $(\mathfrak{m}^n M)$ *uma filtração. Assim,* $M/\mathfrak{m}^n M \cong \widehat{M}/\widehat{\mathfrak{m}^n M}$ *para todo n. Em particular,* $\mathfrak{m}^n M/\mathfrak{m}^{n+i} M \cong \widehat{\mathfrak{m}^n M}/\widehat{\mathfrak{m}^{n+i} M}$*, para* $i = 1, 2, \ldots$.

Demonstração. A demonstração é similar a do corolário 3.17. □

Análogo ao que vimos na observação 3.10, podemos concluir que $\widehat{M}$ é completo pela topologia dada pela filtração $\widehat{\mathfrak{m}^n M}$.

Se A é um anel filtrado e $\mathfrak{m} \trianglelefteq A$ então podemos tomar a filtração $(\mathfrak{m}^n)$ e com isso definir o anel graduado $Gr_{\mathfrak{m}}(A) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1}$. Além disso, se M é um A-módulo e $(\mathfrak{m}^n M)$ é uma filtração de M então temos o $Gr_{\mathfrak{m}}(A)$-módulo graduado $Gr_{\mathfrak{m}}(M) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathfrak{m}^n M/\mathfrak{m}^{n+1}M$.

Proposição 3.27. *Sejam A um anel noetheriano e $\mathfrak{m} \trianglelefteq A$. Assim, o anel graduado $Gr_{\mathfrak{m}}(A)$ é noetheriano.*

Demonstração. Temos que $\mathfrak{m} \trianglelefteq A$ é finitamente gerado, pois A é noetheriano. Sejam $x_1, \ldots, x_s$ os geradores de $\mathfrak{m}$ e $\overline{x_i}$ a imagem de x_i em $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$. Assim, pela proposição 2.20, $Gr_{\mathfrak{m}}(A) = (A/\mathfrak{m})[\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_s}]$. Como $A/\mathfrak{m}$ é noetheriano, $Gr_{\mathfrak{m}}(A)$ também é noetheriano pelo teorema da base de Hilbert. □

Proposição 3.28. *Existem isomorfismos naturais dos anéis graduados $Gr_{\mathfrak{m}}(A)$ e $Gr(\widehat{A}) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \widehat{\mathfrak{m}^n}/\widehat{\mathfrak{m}^{n+1}}$ e um isomorfismo natural dos $Gr_{\mathfrak{m}}(A)$-módulos graduados $Gr_{\mathfrak{m}}(M)$ e $Gr(\widehat{M}) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \widehat{\mathfrak{m}^n M}/\widehat{\mathfrak{m}^{n+1}M}$.*

Demonstração. Segue pela proposição 3.26. □

Na próxima proposição veremos que a sobrejetividade de um homomorfismo se conserva quando estendemos para os seus completamentos.

Proposição 3.29. *Sejam A um anel $\mathfrak{m}$-ádico, M,N dois A-módulos e $f : M \to N$ um homomorfismo. Assim, f induz um homomorfismo contínuo $\widehat{f} : \widehat{M} \to \widehat{N}$ de $\widehat{A}$-módulos. Além disso, se f é sobrejetiva então $\widehat{f}$ também será.*

Demonstração. Seja $\widehat{f}(m_k + \mathfrak{m}^k M) = (f(m_k) + \mathfrak{m}^k N)$. Claramente é um elemento de $\widehat{N}$ pois $f(m_{k+1}) - f(m_k) = f(m_{k+1} - m_k) \in f(\mathfrak{m}^k M) = \mathfrak{m}^k N$. Note que se $m'_k - m_k \in \mathfrak{m}^k M$ então $f(m'_k) \in f(m_k) + \mathfrak{m}^k N$. Logo a aplicação está bem definida.

Temos que $\widehat{f}$ é um homomorfismo de $\widehat{A}$-módulos pois para $(m'_k + \mathfrak{m}^k M), (m_k + \mathfrak{m}^k M) \in \widehat{M}$

$$\widehat{f}((m_k + m'_k) + \mathfrak{m}^k M) = \widehat{f}(m_k + \mathfrak{m}^k M) + \widehat{f}(m'_k + \mathfrak{m}^k M)$$

e para $(x_k + \mathfrak{m}^k) \in \widehat{A}$

$$\widehat{f}(x_k m_k + \mathfrak{m}^k M) = (x_k f(m_k) + \mathfrak{m}^k N) = (x_k + \mathfrak{m}^k)\widehat{f}(m_k + \mathfrak{m}^k M)$$

A continuidade de $\widehat{f}$ segue pelo fato de $\widehat{f}(\widehat{\mathfrak{m}^k M}) = \widehat{\mathfrak{m}^k N}$. A sobrejetividade segue pela maneira que $\widehat{f}$ foi definida. □

O próximo teorema nos dá uma condição para que o completamento $\widehat{M}$ de um A-módulo M seja completo pela $\mathfrak{m}$-topologia.

Teorema 3.30. *Sejam A um anel, $\mathfrak{m} \trianglelefteq A$ finitamente gerado e M um A-módulo. Assim,*

i) O $\mathfrak{m}$-completamento $\widehat{M}$ é completo pela $\mathfrak{m}$-topologia;

ii) $\widehat{\mathfrak{m}^n M} = \ker g = \mathfrak{m}^n \widehat{M}$, onde $g : \widehat{M} \to M/\mathfrak{m}^n M$ é aplicação natural, para todo $n \geqslant 1$.

Demonstração. Como $\mathfrak{m}$ é finitamente então $\mathfrak{m}^n$ também é finitamente gerado. Seja $\{x_1, \ldots, x_r\}$ um conjunto gerador de $\mathfrak{m}^n$. Aplicando a proposição 3.29 ao homomorfismo sobrejetivo

$$\begin{cases} f & : & M^r & \longrightarrow & \mathfrak{m}^n M \\ & & (m_1, \ldots, m_r) & \longmapsto & x_1 m_1 + \cdots + x_r m_r. \end{cases}$$

obtemos o homomorfismo sobrejetivo $\widehat{f} : \widehat{M}^r \to \widehat{\mathfrak{m}^n M}$ tal que

$$\operatorname{im}(f) = \widehat{\mathfrak{m}^n M} = \varprojlim_{m \geqslant n} \mathfrak{m}^n M/\mathfrak{m}^m M = \ker g.$$

Por outro lado, a imagem de $\widehat{M}^r \to \widehat{M}$ é $\mathfrak{m}^n \widehat{M}$. Logo, $\widehat{M}/\mathfrak{m}^n \widehat{M} \cong M/\mathfrak{m}^n M$. Tomando os limites inversos obtemos $(\widehat{\widehat{M}}) \cong \widehat{M}$, ou seja, $\widehat{M}$ é completo pela $\mathfrak{m}$-topologia. □

Corolário 3.31. *Sejam A um anel, $\mathfrak{m} \trianglelefteq A$ finitamente gerado e $\widehat{A}$ o seu $\mathfrak{m}$-completamento. Então $\widehat{\mathfrak{m}^n} = (\widehat{\mathfrak{m}})^n = \mathfrak{m}^n \widehat{A}$, para todo inteiro $n > 0$.*

Demonstração. Pelo teorema anterior temos que $\widehat{\mathfrak{m}^n} = \mathfrak{m}^n \widehat{A}$. Em particular, temos que $\widehat{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m}\widehat{A}$. Logo,

$$(\widehat{\mathfrak{m}})^n = \mathfrak{m}^n \widehat{A}.$$

Portanto, $\widehat{\mathfrak{m}^n} = (\widehat{\mathfrak{m}})^n = \mathfrak{m}^n \widehat{A}$. □

4 ANÉIS DAS SÉRIES FORMAIS E RESTRITAS

O objetivo principal deste capítulo é estudar o conjunto das séries formais e restritas definidas sobre um anel. Inicialmente veremos as definições e as propriedades básicas. Dos resultados mais importantes podemos citar: O teorema de base de Hilbert para séries de potências, o teorema de preparação, o lema de Hensel e o algoritmo da divisão para séries formais.

Definição 4.1. *Chamamos por anel das séries de potências formais sobre o anel A na indeterminada X o conjunto* $A[\![X]\!]$ *formado pelas séries* $f = \sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i$, *onde* $a_i \in A$. *Definimos adição e multiplicação de* $f = \sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i, g = \sum_{i=0}^{\infty} b_i X^i \in A[\![X]\!]$ *por:*

i) $f + g = \sum_{i=0}^{\infty} (a_i + b_i) X^i$;

ii) $f \cdot g = \sum_{k=0}^{\infty} c_k X^k$, *onde* $c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j$.

Facilmente podemos verificar que $A[\![X]\!]$ é um anel comutativo com unidade 1.

Seja $f = \sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i$ uma série de potências não nula. O menor inteiro i tal que a_i é não nulo é chamado de *ordem* de f e é denotado por $o(f)$. Assumimos que a ordem do elemento 0 será $+\infty$.

Definição 4.2. *Sejam A um anel e* $A[X_1, \cdots, X_n]$ *o anel dos polinômios em n indeterminadas sobre A. Uma série de potências formal em n indeterminadas sobre A é uma sequência infinita* $f = (f_0, f_1, \ldots, f_q, \ldots)$ *de polinômios homogêneos* $f_q \in A[X_1, \cdots, X_n]$, *cada polinômio* f_q *ou é nulo ou é de grau q. Definimos adição e multiplicação de duas séries de potências* $f = (f_0, f_1, \ldots, f_q, \ldots)$ *e* $g = (g_0, g_1, \ldots, g_q, \ldots)$ *da seguinte maneira:*

i) $f + g = (f_0 + g_0, f_1 + g_1, \ldots, f_q + g_q, \ldots)$;

ii) $f \cdot g = (h_0, h_1, \ldots, h_q, \ldots)$, *onde* $h_q = \sum_{i+j=q} f_i \cdot g_j$.

Dessa forma, a definição 4.2 é uma generalização da definição 4.1. É fácil ver que com essas definições de adição e multiplicação o conjunto de todas as séries de potências formais em n indeterminadas sobre A é um anel comutativo com unidade. Esse anel, será chamado de *anel das séries de potências formais em n indeterminadas sobre A*. Denotaremos por $A[\![X_1, \ldots, X_n]\!]$.

Note que, se $h \in A[\![X_1, \ldots, X_n]\!]$ então h pode ser visto como uma série de potências formais na indeterminada X_n com coeficientes no anel $A[\![X_1, \ldots, X_{n-1}]\!]$, isto é, $A[\![X_1, \ldots, X_n]\!] = A[\![X_1, \ldots, X_{n-1}]\!][\![X_n]\!]$.

O elemento nulo de $A[\![X_1, \ldots, X_n]\!]$ será a sequência $(0, 0, \ldots, 0)$ e $(1, 0, \ldots, 0)$ é a identidade multiplicativa.

De maneira análoga ao que vimos para $A[\![X]\!]$, podemos definir ordem de $f = (f_0, f_1, \ldots, f_q, \ldots) \in A[\![X_1, \ldots, X_n]\!]$ como sendo o menor inteiro q tal que f_q é não nulo. Denotamos a ordem de f por $o(f)$.

Proposição 4.3. *Se f e g são séries de potências em $A[\![X_1, \ldots, X_n]\!]$ então:*

i) $o(f+g) \geqslant \min\{o(f), o(g)\}$;

ii) $o(f \cdot g) \geqslant o(f) + o(g)$.

Além disso, se A é um domínio de integridade então $A[\![X_1, \ldots, X_n]\!]$ também é um domínio de integridade e $o(f \cdot g) = o(f) + o(g)$.

Seja $(X_1, \ldots, X_n) \trianglelefteq A[\![X_1, \ldots, X_n]\!]$. Afirmamos que o anel das séries de potências em n indeterminadas munido com a $(X_1, \ldots, X_n)$-topologia é completo. De fato, se (g_n) é uma sequência de Cauchy em $A[\![X_1, \ldots, X_n]\!]$, a série

$$g_0 + (g_1 - g_0) + \cdots + (g_{n+1} - g_n) + \cdots \in A[\![X_1, \ldots, X_n]\!]$$

é o limite de (g_n).

Para qualquer $q \in \mathbb{N}$, o ideal $(X_1, \ldots, X_n)^q$ é formado pelas séries de potências que tem ordem maior ou igual a q. Assim, $\bigcap_{q=1}^{\infty} (X_1, \ldots, X_n)^q = 0$. Logo, $A[\![X_1, \ldots, X_n]\!]$ é Hausdorff e completo.

Com isso podemos enunciar a seguinte proposição.

Proposição 4.4. *O anel $A[\![X_1, \ldots, X_n]\!]$ é completo quando tomamos a $(X_1, \ldots, X_n)$-topologia.*

Observação 4.5. Sejam $A' = A[X_1, \ldots, X_n]$, $I = (X_1, \ldots, X_n)$, $M_n = A'/I^n$, $p \in A[X_1, \ldots, X_n]$ e $f_n(p + I^n) = p + I^{n-1}$, para $n = 1, 2, \ldots$. Um elemento de M_n é representado por um polinômio p de grau até $n-1$. A imagem de p em I^{n-1} é representada pelo mesmo polinômio excluindo os termos de grau $n-1$. Dessa forma $\widehat{A'}$ pode ser identificado como o anel $A[\![X_1, \ldots, X_n]\!]$.

O próximo teorema corresponde ao teorema da base de Hilbert para o caso de séries de potências.

Teorema 4.6. *Se A é noetheriano, então $A[\![X]\!]$ também é noetheriano.*

Demonstração. Seja $\mathfrak{I} \trianglelefteq A[\![X]\!]$. Para qualquer inteiro $q \geqslant 0$ denote por $L_q(\mathfrak{I})$ o conjunto de elementos de A formado por 0 e os coeficientes de X^q em todos os elementos de $\mathfrak{I}$ que têm ordem q. Assim, $L_q(\mathfrak{I})$ é um ideal em A e os ideais $L_q(\mathfrak{I})$ formam uma cadeia crescente

$$L_0(\mathfrak{I}) \subseteq L_1(\mathfrak{I}) \subseteq \cdots \subseteq L_q(\mathfrak{I}) \subseteq \cdots.$$

Com isso $L(\mathfrak{I}) = \bigcup_{q=0}^{\infty} L_q(\mathfrak{I})$. Como A é noetheriano, $L(\mathfrak{I})$ é finitamente gerado por $\{a_1, \ldots, a_r\}$. Tomamos em $\mathfrak{I}$ uma série $F_i(X)$ onde o termo inicial tem a_i como coeficiente, para $1 \leqslant i \leqslant r$. Denote por d o maior inteiro entre as ordens das séries $F_i(X)$.

Para todo $j < d$, seja $\{b_{j1}, \ldots, b_{jn(j)}\}$ um conjunto em A que gera o ideal $L_j(\mathfrak{I})$ e $G_{jk_j}(X)$ uma série de potência em $\mathfrak{I}$ cujo termo inicial é $b_{jk_j}X^j$, para $1 \leqslant k_j \leqslant n(j)$. Provaremos que o ideal $\mathfrak{I}$ é gerado pelas séries $F_i(X), G_{jk_j}(X)$, para $1 \leqslant i \leqslant r$ e $1 \leqslant k_j \leqslant n(j)$. Para isso precisamos de dois passos:

i) Seja $\mathfrak{I}'$ o ideal gerado pelos elementos $G_{jk_j}(X)$. Temos que $\mathfrak{I}' \subset \mathfrak{I}$. Afirmamos que todo elemento $P(X)$ de $\mathfrak{I}$ que têm ordem $j < d$ é congruente módulo $\mathfrak{I}'$ com um elemento de $\mathfrak{I}$ que tem ordem maior ou igual a $j+1$. De fato, o coeficiente c do termo inicial cX^j de $P(X)$ pode ser escrito da forma $c = \sum_{k_j=1}^{n(j)} c_{k_j} b_{jk_j}$, $c_{k_j} \in A$. Logo, $P(X) - \sum_{k_j=1}^{n(j)} c_{k_j} G_{jk_j}(X)$ é de ordem maior ou igual a $j+1$. Segue por sucessivas aplicações deste resultado que todo elemento de ordem $j < d$ de $\mathfrak{I}$ é congruente módulo $\mathfrak{I}'$ a um elemento de $\mathfrak{I}$ de ordem maior ou igual a d.

Resta mostrarmos que qualquer elemento de ordem maior ou igual a d em $\mathfrak{I}$ é gerado pelas séries $F_i(X), G_{jk_j}(X)$, para $1 \leqslant i \leqslant r$ e $1 \leqslant k_j \leqslant n(j)$. Provaremos que este elemento está no ideal $(F_1(X), \ldots, F_r(X))$

.

ii) Seja $P(X)$ um elemento de $\mathfrak{I}$ tal que $o(P) = s \geqslant d$ e cX^s seu termo inicial. Assim $c = \sum_{i=1}^{r} c_i a_i$, para $c_i \in A$. Logo $P(X) - \sum_{i=1}^{r} c_i X^{s-o(F_i)} F_i(X)$ é um elemento de $\mathfrak{I}$ de ordem maior ou igual a $s+1$. Por sucessivas aplicações deste resultado, encontramos as sequências (c_{in}), com $i = 1, 2, \ldots, r$, $n = s, s+1, \ldots$ e $c_{is} = c_i$, de elemento de A tal que, para todo n, a série de potências

$$P(X) - \sum_{i=1}^{r} \Big(\Big(\sum_{j=s}^{j=n} c_{ij} X^{j-o(F_i)}\Big)\Big) F_i(X)$$

de ordem maior do que n. Como o expoente $j - o(F_i)$ tende ao infinito se $j \to \infty$, cada soma infinita $\sum_{j=s}^{\infty} c_{ij} X^{j-o(F_i)}$ representa um elemento $s_i(X)$ de $A[\![X]\!]$. Como a ordem da série de potências $P(X) - \sum_{i=1}^{r} s_i(X) F_i(X)$ é maior do que n para todo n então essa série será igual ao 0 de $A[\![X]\!]$. Portanto, $P(X) = \sum_{i=1}^{q} s_i(X) F_i(X)$. □

Corolário 4.7. *O anel das séries de potências em n indeterminadas $A[\![X_1, \ldots, X_n]\!]$ sobre um anel noetheriano A é noetheriano.*

Demonstração. A prova segue pelo teorema anterior fazendo a indução sobre n, pois $A[\![X_1, \ldots, X_n]\!]$ $= A[\![X_1, \ldots, X_{n-1}]\!][\![X_n]\!]$. □

O anel das séries de potências formais é muito importante para estudarmos completamentos. Na próxima proposição veremos uma importante propriedade. Daremos uma ideia da demonstração. Para maiores detalhes veja [4], capítulo 17.

Proposição 4.8. *Seja A um anel $\mathfrak{m}$-ádico e $\mathfrak{m} = (a_1, \dots, a_n)$. Assim, se $\widehat{A}$ é o $\mathfrak{m}$-completamento de A então $\widehat{A} \cong A[\![X_1, \dots, X_n]\!]/\mathfrak{n}^*$, onde $\mathfrak{n}^*$ é o $(X_1, \dots, X_n)$-fecho em $A[\![X_1, \dots, X_n]\!]$ do ideal $\mathfrak{n} = (X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n)$.*

Demonstração. Considere a aplicação

$$\begin{cases} \phi & : & A[\![X_1, \dots, X_n]\!] & \longrightarrow & \widehat{A} \\ & & X_i & \longmapsto & a_i \end{cases}$$

onde $1 \leqslant i \leqslant n$. Assim, temos que ϕ é um homomorfismo e $\ker\phi \supset (X_i - a_i)$. Logo, $\mathfrak{n} \subset \ker\phi$. Temos que se $f = (f_0, f_1, \dots) \in \ker\phi$ se, e somente se, $f(a_1, \dots, a_n) = (f_0(a_1, \dots, a_n), f_1(a_1, \dots, a_n), \dots) = 0$. Suponhamos que f seja de ordem r. Assim, $f(a_1, \dots, a_n) = 0$ implica que $f_r(a_1, \dots, a_n) \in \mathfrak{m}^{r+1}$, ou seja, seus coeficientes estão em $\mathfrak{m}$. □

Se A é noetheriano então $A[\![X_1, \dots, X_n]\!]$ é um anel de Zariski, pois todo $A[\![X_1, \dots, X_n]\!]$-módulo finitamente é Hausdorff para a $(X_1, \dots, X_n)$-topologia, consequência do teorema 4.6 e da proposição 2.26. Assim, todo ideal é fechado em $A[\![X_1, \dots, X_n]\!]$. Portanto, temos o seguinte resultado.

Proposição 4.9. *Se A é um anel noetheriano e $\mathfrak{m} = (a_1, \dots, a_n)$ é um ideal finitamente gerado de A tal que A é Hausdorff para a $\mathfrak{m}$-topologia então $\widehat{A} \cong A[\![X_1, \dots, X_n]\!]/(X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n)$.*

Seja $(A, \mathfrak{m})$ um anel local. Dizemos que a série $f = \sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i \in A[\![X]\!]$ é *regular* se algum coeficiente a_i é inversível. Caso f seja regular e s é o menor inteiro tal que a_s é inversível, dizemos que f é regular de ordem s. Se $p = a_0 + a_1 X + \cdots + a_{k-1} X^{k-1} + X^k$ é o polinômio mônico de grau k e $a_i \in \mathfrak{m}$, para $0 \leqslant i \leqslant k-1$, dizemos que p é um *polinômio distinto de grau k.*

Proposição 4.10. *Se $f = (f_0, f_1, \dots, f_q, \dots)$ é uma série de potência então f é inversível em $A[\![X_1, \dots, X_n]\!]$ se, e somente se, o elemento f_0 de A for inversível em A.*

Demonstração. Se $fg = 1$, com $g = (g_0, g_1, \dots, g_q, \dots) \in A[\![X_1, \dots, X_n]\!]$, então $f_0 g_0 = 1$ e f_0 é inversível em A. Reciprocamente, se f_0 é inversível em A então podemos encontrar $g_0, g_1, \dots, g_q, \dots$, onde g_q é igual a 0 ou é de grau q, tal que $g_0 f_0 = 1$, $g_1 f_0 + g_0 f_1 = 0$, $\cdots$, $g_q f_0 + g_{q-1} f_1 + \cdots + g_0 f_q = 0$, $\cdots$. De fato, temos que $g_0 = f_0^{-1}$ assim $g_q = -f_0^{-1}(g_{q-1} f_1 + \cdots + g_0 f_q)$. Se considerarmos $g = (g_0, g_1, \dots, g_q, \dots)$ então, pela definição 4.2, $fg = 1$. Isso completa a prova. □

Dessa forma os elementos inversíveis de $A[\![X]\!]$ são os regulares de ordem 0.

A próxima proposição será necessária para demonstrarmos o Teorema de Preparação.

Proposição 4.11. *Sejam* $(A, \mathfrak{m})$ *um anel local completo e* $f \in A[\![X]\!]$ *regular de ordem s. Considere M o A-módulo gerado por* $\{1, X, \ldots, X^{s-1}\}$. *Então* $A[\![X]\!] = M \bigoplus A[\![X]\!]f$.

Demonstração. Dividimos esta demonstração em duas partes.

i) Mostraremos que $M \bigcap A[\![X]\!]f = \{0\}$. Considere a igualdede

$$(\sum_{i=0}^{\infty} b_i X^i)f = r_0 + r_1 X + \cdots + r_{s-1}X^{s-1}.$$

Mostraremos que b_i, e consequentemente r_i, é igual a zero para todo i, o que vai provar também que f não é um divisor de zero. Como A é Hausdorff, é suficiente mostrar que $b_i \in \mathfrak{m}^n$ para todos $i \geqslant 0$ e $n \geqslant 0$. É óbvio para $n = 0$. Provaremos por uma dupla indução: Assumimos que $b_i \in \mathfrak{m}^{n-1}$ para todo i e $b_i \in \mathfrak{m}^n$ para $i < k$ e mostra que isso implica que $b_k \in \mathfrak{m}^n$. Para isso, considere $f = \sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i$ e compare os coeficientes X^{s+k} da igualdade. Assim, teremos

$$(b_0 a_{s+k} + \cdots + b_{k-1}a_{s+1}) + b_k a_s + (b_{k+1}a_{s-1} + \cdots + b_{k+s}a_0) = 0$$

Os termos do primeiro parêntese pertencem a $\mathfrak{m}^n$ pois $b_i \in \mathfrak{m}^n$ para $i < k$. No segundo parêntese temos que os termos $b_i \in \mathfrak{m}^{n-1}$ e $a_i \in \mathfrak{m}$, para $i \leqslant s-1$. Portanto, $b_k a_s \in \mathfrak{m}^n$ e como a_s é invertível em A então $b_k \in \mathfrak{m}^n$.

ii) Mostraremos que $A[\![X]\!]f + M = A[\![X]\!]$. Temos que

$$g = a_s + a_{s+1}X + a_{s+2}X^2 + \cdots$$

é um elemento inversível de $A[\![X]\!]$. Assim, $f - X^s g = a_0 + a_1 X + \cdots + a_{s-1}X^{s-1}$. Logo, $fg^{-1} - X^s = (f - X^s g)g^{-1} = -h$, onde que os coeficientes de h pertencem a $\mathfrak{m}$. Seja r um elemento de $A[\![X]\!]$. Por indução sobre n definiremos uma sequência $(q^{(n)})$ de elementos de $A[\![X]\!]$: Tomamos $q^{(0)}$ como a única série que satisfaz

$$r \equiv X^s q^{(0)} (mod\ M) \tag{4.1}$$

Escrevemos $h = \sum_{i=0}^{\infty} h_i X^i$ e $q^{(n)} = \sum_{i=0}^{\infty} q_i^{(n)} X^i$, temos que $q_i^{(n)}$ será definido por:

$$q_i^{(n)} = \sum_{j=0}^{i+s} h_j q_{i+s-j}^{(n-1)} \tag{4.2}$$

Segue da equação (3.2) que

$$X^s q^{(n)} \equiv h q^{(n-1)} (mod\ M) \tag{4.3}$$

Fazendo a indução sobre n da equação (3.2) temos que $q_i^{(n)} \in \mathfrak{m}^n$ para todos i e n. Como A é completo segue que a série

$$q^{(0)} + q^{(1)} + \cdots + q^{(n)} + \cdots.$$

converge para um elemento q de $A[\![X]\!]$. Pelas equações (3.1) e (3.3)

$$X^s(q^{(0)} + q^{(1)} + \cdots + q^{(n)}) \equiv r + h(q^{(0)} + q^{(1)} + \cdots + q^{(n-1)})(Mod\ M) \tag{4.4}$$

Como M é fechado podemos aplica o limite para n tendendo ao infinito para a igualdade (3.4). Com isso, $r = (X^s - h)q\ (Mod\ M)$. Portanto, podemos concluir que $r \in fg^{-1}q + M \subset A[\![X]\!]f + M$. □

Teorema 4.12. (*Teorema de Preparação*) *Sejam* $(A, \mathfrak{m})$ *um anel local completo e* $f \in A[\![X]\!]$ *regular de ordem s. Então existem únicos* $u \in A[\![X]\!]$ *inversível e* $F \in A[X]$ *distinto de grau s tais que* $f = uF$.

Demonstração. Queremos encontrar um polinômio distinto da forma $F = X^s + G$, onde $G = g_0 + \cdots + g_{s-1}X^{s-1}$, tal que $f = uF$ com $u \in A[\![X]\!]$ inversível. Assim $F = u^{-1}f$. Logo, $X^s = u^{-1}f - G$. De acordo com a proposição anterior temos a unicidade de G e u^{-1}. Portanto, F e u serão únicos. □

Definição 4.13. *Sejam A um anel e* $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2, \ldots, \mathfrak{m}_n, \ldots$ *uma família de seus ideais. Considere a topologia* τ *dada pela filtração*

$$\mathfrak{m}_1,\ \mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{m}_2,\ \mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{m}_2 \cap \mathfrak{m}_3, \ldots.$$

Dizemos que uma serie de potência formal $f = \sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i \in A[\![X]\!]$ *é restrita, com respeito a* τ, *se* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. *Essa definição pode ser estendida para o caso de n indeterminadas: uma série* $f = \sum a_{i_1,\ldots,i_n} X_1^{i_1} \cdots X_n^{i_n}$ *é chamada de restrita se* $\lim a_{i_1,\ldots,i_n} = 0$ *para* $\min(i_1, \ldots, i_n) \to \infty$. *É fácil ver que o conjunto das séries de potências restritas é um subanel de* $A[\![X_1, \ldots, X_n]\!]$. *Denotamos este anel por* $A\{X_1, \ldots, X_n\}$.

Chamamos por $M_i, i \in \mathbb{N}$, o ideal das séries restritas de $A\{X_1, \ldots, X_n\}$, onde os coeficientes estão em $\mathfrak{m}_i$.

Observação 4.14. O produto de uma série restrita por uma série formal não é necessariamente restrita. De fato, considere $A = \mathbb{Q}$, $f = \sum_{i=1}^{\infty}(1/i)X^i \in \mathbb{Q}\{X\}$ e $g = \sum_{j=0}^{\infty} jX^j \in \mathbb{Q}[\![X]\!]$. Pela definição de produto temos que $fg = \sum_{k=0}^{\infty} c_k X^k$ onde $c_k = \sum_{i+j=k}(1/i)(j) \geqslant 0$, com $i \neq 0$. Portanto, $\sum_{k=0}^{\infty} c_k X^k$ não é restrita.

Seja σ a topologia linear de $A\{X_1, \ldots, X_n\}$ dada por ideais $M_i(X_1, \ldots, X_n)^m$, $m \in \mathbb{N}$. Assim temos a seguinte proposição:

Proposição 4.15. *O anel $A\{X_1, \ldots, X_n\}$ é completo com respeito a σ-topologia.*

Demonstração. O anel das séries restritas é Hausdorff, pela σ-topologia, pois temos que:

$$\bigcap_{i,n\in\mathbb{N}} M_i(X_1, \ldots, X_n)^m = 0$$

Seja (f_n), $f_n \in A\{X_1, \ldots, X_n\}$ para todo $n \geqslant 0$, uma sequência de Cauchy. Considere a série

$$f = f_1 + (f_2 - f_1) + \cdots + (f_{n+1} - f_n) + \ldots$$

ela é restrita pois $\lim_{n\to\infty} f - f_n = 0$. Assim, a série (f_n) converge para f. Isso mostra que $A\{X_1, \ldots, X_n\}$ é completo. □

Definição 4.16. *Seja A um anel topológico. Dizemos que $a \in A$ é nilpotente topologicamente se $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$.*

Teorema 4.17. *(Hensel) Sejam A um anel completo com respeito a uma topologia linear, $\mathfrak{m} \trianglelefteq A$ fechado cujos elementos são nilpotente topologicamente, $B = A/\mathfrak{m}$ o anel quociente topológico e $\psi : A\{X\} \to B\{X\}$ a aplicação natural. Tomando $f \in A\{X\}$, $\bar{p} \in B[X]$ e $\bar{q} \in B\{X\}$ tais que: $\psi(f) = \bar{p}\bar{q}$, $\bar{p}$ é mônico e $\bar{p}, \bar{q}$ são coprimos em $B[X]$. Então existem $p \in A[X]$, $q \in A\{X\}$ tais que $f = pq$, p é mônico, $\psi(p) = \bar{p}$ e $\psi(p) = \bar{q}$. Além disso, p e q são unicamente determinados e coprimos em $A\{X\}$. Se f é um polinômio então q também será.*

Demonstração. A prova é dividida em quatro etapas, cada uma com afirmações mais gerais. Nas três primeiras, assumimos que A é discreto. Para mais detalhes veja [3], capítulo 3, seção 4.

No primeiro caso consideramos que $\mathfrak{m}^2 = \{0\}$. Na sequência veremos o caso mais geral, isto é, existe algum $n \geqslant 2$ tal que $\mathfrak{m}^n = \{0\}$. Isso é provado por indução sobre n. No terceiro caso assumimos que A é discreto pela $\mathfrak{m}$-topologia. Por fim, veremos o caso geral. □

O próximo resultado é uma versão do Teorema de Preparação para séries de potências restritas cuja prova essencialmente usa o teorema anterior.

Teorema 4.18. *Sejam A, $\mathfrak{m}$ e B como na hipótese do teorema anterior e $f \in A\{X\}$ tal que $\psi(f)$ é mônico de grau n. Assim, existe um único par (p, u) formado por um polinômio mônico $p \in A\{X\}$ e $u \in A\{X\}$ inversível tal que*

$$f = pu$$

onde p é de grau n.

Demonstração. Em $B\{X\}$,

$$\bar{f} = \bar{f} \cdot \bar{1}$$

De acordo com o Teorema 4.17, existe um único par (p, u) formado por um polinômio unitário p e uma série restrita u tal que $f = pu$, $\bar{p} = \bar{f}$ e $\bar{u} = \bar{1}$.

Como $\bar{u} = \bar{1}$ então o termo constante de u pertence a $1 + \mathfrak{m}$. Assim, u será inversível em $A\{X\}$.

Além disso p é um polinômio unitário de mesmo grau do que $\bar{p} = \bar{f}$. Assim, garantimos a existência de u e p.

Suponhamos $f = qv$ onde que q é um polinômio mônico em $A\{X\}$ e v é uma série restrita inversível. Da igualdade $\bar{f} = \bar{q} \cdot \bar{v}$ temos que $\bar{v} = \bar{1}$ pois v é inversível em $A\{X\}$. Assim, $\bar{f} = \bar{q}$ com isso podemos concluir que $p = q$ e $u = v$, de acordo com a unicidade do par (p, u). □

Corolário 4.19. *Sejam A um anel que satisfaça as hipóteses do Teorema 4.17 e $f \in A\{X_1, \ldots, X_n\}$ tal que $\psi(f) = \bar{p}$ é mônico de grau n em $B\{X_1, \ldots, X_{n-1}\}[X_n]$. Assim existe um único par (p, u) formado por um polinômio p mônico de grau n em $A\{X_1, \ldots, X_{n-1}\}[X_n]$ e $u \in A\{X_1, \ldots, X_n\}$ inversível tal que $f = p \cdot u$.*

Demonstração. A demonstração pode ser vista em [5]. □

Na sequência demonstraremos uma versão do algoritmo da divisão para séries restritas. Para isso precisaremos do seguinte resultado encontrado em [6], capítulo 1, seção 17.

Teorema 4.20. *Sejam A um anel com identidade, $A[X]$ o anel dos polinômios sobre A na indeterminada X e $f(X), g(X) \in A[X]$ com graus m, n respectivamente. Considere $k = \max\{m - n + 1, 0\}$ e a o coeficiente do termo de maior grau de g. Assim, existem os polinômios $q(X)$ e $r(X)$ tais que*

$$a^k f(X) = q(X)g(X) + r(X)$$

onde $\deg r(X) < n$ *ou r é o polinômio nulo. Além disso, se a não é divisor de zero em A então $q(X)$ e $r(X)$ são unicamente determinados.*

Demonstração. Se $m < n$ então $k = 0$ e com isso podemos tomar $q(x) = 0$ e $r(x) = f(x)$. Para $m \geqslant n - 1$ temos $k = m - n - 1$. Provaremos a primeira parte por indução sobre m. Observe que é válido quando $m = n - 1$. Logo $m \geqslant n$. Assim $af(x) - bx^{m-n}g(x)$ tem grau menor ou igual a $m - 1$, onde que b é o coeficiente líder de f. Pela hipótese de indução temos que existem polinômios $q_1(x)$ e $r_1(x)$ tais que

$$a^{(m-1)-n+1}(af(x) - bx^{m-n}g(x)) = q_1(X)g(X) + r_1(X)$$

onde $\deg r_1(X) < n$ ou r_1 é o polinômio nulo.

Com isso temos que $q(x) = ba^{m-n}x^{m-n} + q_1(X)$ e $r(X) = r_1(X)$.

Suponhamos que a não seja um divisor de zero e que $a^k f = q'g + r'$, onde $\deg r < n$. Assim, $(q - q')g = r' - r$. Se $q - q' \neq 0$ então $\deg(q - q')g \geqslant 0$. Logo chegaríamos a um absurdo pois $\deg(r' - r) < n$. Portanto, $q = q'$ e $r' = r$. □

Assim temos ferramentas necessárias para demontrar o seguinte teorema.

Teorema 4.21. *Sejam A um anel completo com respeito a topologia linear e $p \in A[X]$ mônico de grau n. Para todo $f \in A\{X\}$ existe um único par (q, r) formado por $q \in A\{X\}$ e $r \in A[X]$, onde* $\deg r < n$*, tal que $f = qp + r$.*

Demonstração. Sejam $\{\mathfrak{m}_i\}, i \in I$, um sistema fundamental de vizinhanças de 0 para a topologia de A e M_i o sistema de ideais das séries restritas à coeficientes de $\mathfrak{m}_i$ que definem em $A\{X\}$ a σ-topologia. Considere os homomorfismos

$$\begin{cases} \psi_i & : & A\{X\} & \longrightarrow & (A/\mathfrak{m}_i)[X] \\ & & a_i X^i & \longmapsto & \bar{a}_i X^i \end{cases}$$

para $i = 1, 2, \ldots$, onde $\bar{a}_i$ é a classe de a_i módulo $\mathfrak{m}_i$. Denotamos por f_i a imagem pela aplicação ψ_i da série $f \in A\{X\}$. Assim, a imagem p_i do polinômio p é um polinômio unitário de grau n em $(A/\mathfrak{m}_i)[X]$.

De acordo com Teorema anterior, existem polinômios $q^{(i)}$ e $r^{(i)}$, onde $\deg r^{(i)} < n$, tal que

$$f_i = p_i q^{(i)} + r^{(i)}$$

Seja $\alpha, \beta \in I$, $\alpha \leqslant \beta$. Considere o homomorfismo $\psi_{\alpha\beta} : (A/\mathfrak{m}_\beta)[X] \to (A/\mathfrak{m}_\alpha)[X]$ tal que $\psi_{\alpha\beta}(q^{(\beta)}) = q^{(\alpha)}$ e $\psi_{\alpha\beta}(r^{(\beta)}) = r^{(\alpha)}$.

Como $A\{X\} = \varprojlim (A/\mathfrak{m}_i)[X]$ então existe uma série q e um polinômio r de grau até $n-1$ tais que $q = \varprojlim q^{(i)}$ e $r = \varprojlim r^{(i)}$. Pela unicidade de $q^{(i)}$ e $r^{(i)}$ temos que f é escrito de maneira única como $f = pq + r$. □

Corolário 4.22. *Seja A um anel que satisfaça as hipóteses do Teorema 4.17 e $g \in A\{X\}$ tal que $\psi(g)$ é um polinômio mônico de grau n. Para todo $f \in A\{X\}$ existe um único par (q, r) formado por $q \in A\{X\}$ e $r \in A[X]$, onde* $\deg r < n$*, tal que $f = qg + r$.*

Demonstração. Pelo Teorema 4.18 temos que existe um polinômio mônico p de grau n e uma série restrita inversível u tal que $g = pu$. Seja u' o inverso de u. Se q e r são a série restrita e o polinômio de grau menor ou igual a $n-1$ que satisfazem a igualdade $f = qp + r$ então $f = (qu')g + r$ e esta decomposição é única. □

O corolário pode ser estendido para n indeterminadas.

Corolário 4.23. *Sejam A um anel que satisfaça as hipóteses do Teorema 4.17 e g uma série restrita tal que a sua imagem $\bar{g} \in B\{X_1, \ldots, X_{n-1}\}[X_n]$, pela aplicação natural, é um polinômio mônico em X_n de grau n. Assim, para toda série $f \in A\{X_1, \ldots, X_n\}$ existe um único par (q, r) formado por uma série $q \in A\{X_1, \ldots, X_{n-1}\}$ e um polinômio $r \in A\{X_1, \ldots, X_{n-1}\}[X_n]$, onde* $\deg r < n$*, tal que $f = gq + r$.*

5 COMPLETAMENTO DE MÓDULOS FINITAMENTE GERADOS E PROPRIEDADES NOETHERIANAS

Na primeira seção veremos o caso dos completamentos de módulos finitamente gerados. No Teorema 5.1 podemos encontrar uma forma de interpretar o completamento de um módulo finitamente gerado. Veremos que se existe uma sequência exata de A-módulos finitamente gerados, onde que A é noetheriano, então os seus $\mathfrak{m}$-completamentos formam uma sequência exata. No teorema 5.11 veremos que o $\mathfrak{m}$-completamento de um anel é um anel de Zariski. Definiremos módulos planos e veremos uma proposição que vai nos ajudar a caracterizar esse tipo de módulo. Na sequência definiremos módulos fielmente planos. Por fim, veremos o Teorema de planitude, que é o resultado mais relevante deste capítulo.

Na segunda seção mostraremos que as propriedades noetherianas são preservadas pelos $\mathfrak{m}$-completamentos. Entre os principais resultados vale destacar: teorema 5.25 e 5.27.

5.1 Completamento de módulo finitamente gerados

Teorema 5.1. *Sejam A um anel, $\mathfrak{m} \trianglelefteq A$, M um A-módulo finitamente gerado e (M_n) uma filtração de M dada por $M_n = \mathfrak{m}^n M$. Se $f : M \to \widehat{M}$ é a aplicação natural, então, para todo $n \in \mathbb{Z}$,*

$$\widehat{M_n} = \widehat{\mathfrak{m}^n}\widehat{M} = \widehat{\mathfrak{m}^n} f(M)$$

em particular $\widehat{M}$ é um $\widehat{A}$-módulo finitamente gerado.

Demonstração. Claramente $\widehat{\mathfrak{m}^n} f(M) \subset \widehat{\mathfrak{m}^n}\widehat{M} \subset \widehat{M_n}$. De acordo com a hipótese temos que existe um homomorfismo sobrejetivo $u : L \to M$, onde $L = (A)^j$ e j é finito. Dessa forma podemos tomar uma filtração (L_n) dada pelo produto cartesiano $L_n = (\mathfrak{m}^n)^j$.

Considere a aplicação natural $v : L \to \widehat{L}$ e $(e_i)_{1\leq i\leq j}$ a base canônica de L. Para cada elemento $\sum_{1\leq i\leq j} a_i v(e_i)$ pertencer a $\widehat{L_n}$ é necessário e suficiente que $a_i \in \widehat{\mathfrak{m}^n}$, para todo i. Logo, $\widehat{L_n} = \widehat{\mathfrak{m}^n} v(L)$. Temos que u é um homomorfismo contínuo pois $u(L_n) = M_n$. De acordo com a proposição 3.29 temos que $\widehat{u} : \widehat{L} \to \widehat{M}$ é um homomorfismo sobrejetivo e contínuo. Como $\widehat{L_n}$ é um aberto de $\widehat{L}$ então $\widehat{u}(\widehat{L_n})$ é um aberto de $\widehat{M}$ mas $\widehat{u}(\widehat{L_n}) = \widehat{\mathfrak{m}^n}\widehat{u}(v(L)) = \widehat{\mathfrak{m}^n} f(M)$. Logo, $\widehat{\mathfrak{m}^n} f(M) = \widehat{M_n}$. Portanto, $\widehat{M_n} = \widehat{\mathfrak{m}^n}\widehat{M} = \widehat{\mathfrak{m}^n} f(M)$. □

Corolário 5.2. *Sobre as condições do teorema anterior, se A é completo então M também é completo.*

Demonstração. Como a aplicação natural $i : A \to \widehat{A}$ é sobrejetora então $\widehat{M} = f(M)$. □

Sejam A um anel, $\mathfrak{m} \trianglelefteq A$, M um A-módulo, $\widehat{A}$,$\widehat{M}$ os $\mathfrak{m}$-completamentos de A e M respectivamente e $f : M \to \widehat{M}$ a aplicação natural. Dessa forma a aplicação A-bilinear

$$\begin{cases} \alpha & : & \widehat{A} \times M & \longrightarrow & \widehat{M} \\ & & (a, x) & \longmapsto & af(x) \end{cases}$$

se estende a aplicação

$$\begin{cases} \alpha_M & : & \widehat{A} \otimes M & \longrightarrow & \widehat{M} \\ & & a \otimes x & \longmapsto & af(x) \end{cases}$$

Com isso temos o seguinte resultado.

Proposição 5.3. *Se M é um A-módulo finitamente gerado, então a aplicação $\alpha_M : \widehat{A} \otimes M \to \widehat{M}$ é sobrejetora.*

Demonstração. Facilmente podemos ver que $\mathrm{im}(\alpha_M) = \widehat{A} f(M)$. Pelo teorema 5.1 temos que $\widehat{M} = \widehat{A} f(M)$. Portanto, α_M é sobrejetora. □

Teorema 5.4. *Seja $\mathfrak{m}$ um ideal de um anel noetheriano A. Se*

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

é uma sequência exata de A-módulos finitamente gerados, então a sequência de seus $\mathfrak{m}$-completamentos

$$0 \longrightarrow \widehat{M'} \xrightarrow{\widehat{f}} \widehat{M} \xrightarrow{\widehat{g}} \widehat{M''} \longrightarrow 0$$

também é exata.

Demonstração. A $\mathfrak{m}$-topologia de M induz a $\mathfrak{m}$-topologia de M' pelo lema 2.22. A afirmação é consequência do corolário 3.16 e da proposição 3.29. □

Definição 5.5. *Um A-módulo M é dito livre se possui uma base.*

Observação 5.6. Seja M um A-módulo finitamente gerado. Assim, podemos considerar o conjunto $\{x_1, \ldots, x_n\}$ como gerador de M. Com isso podemos definir a seguinte aplicação sobrejetora

$$\begin{cases} \alpha & : & A^n & \longrightarrow & M \\ & & (a_1, \ldots, a_n) & \longmapsto & a_1x_1 + \cdots + a_nx_n \end{cases}$$

e com isso $(A^n/\ker \alpha) \cong M$. Logo, temos o seguinte resultado.

Proposição 5.7. *Seja M um A-módulo finitamente gerado sobre o anel noetheriano A. Assim, existem os A-módulos L e N, onde L é livre, tais que a sequência*

$$0 \to N \to L \to M \to 0$$

é exata.

Para provar uma das proposições precisamos do seguinte resultado cuja prova se encontra em [2], capítulo 2.

Proposição 5.8. *Sejam*

$$M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

uma sequência exata de A-módulos e E um A-módulo qualquer. Então a sequência

$$E \otimes M' \xrightarrow{1_E \otimes f} E \otimes M \xrightarrow{1_E \otimes g} E \otimes M'' \longrightarrow 0$$

onde que 1_E *representa a aplicação identidade em E, é exata.*

Teorema 5.9. *Se M é um módulo finitamente gerado sobre o anel noetheriano A,* $\mathfrak{m} \trianglelefteq A$*,* $\widehat{A}$ *e* $\widehat{M}$ *os* $\mathfrak{m}$*-completamentos de A e M respectivamente, então a aplicação natural* $\alpha_M : \widehat{A} \otimes_A M \to \widehat{M}$ *é um isomorfismo.*

Demonstração. Como M é finitamente gerado então temos a seguinte sequência exata

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{u} L \xrightarrow{v} M \longrightarrow 0,$$

onde L é um A-módulo livre e N um A-módulo finitamente gerado pois A é noetheriano. O seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} \widehat{A} \otimes_A N & \xrightarrow{1\otimes u} & \widehat{A} \otimes_A L & \xrightarrow{1\otimes v} & \widehat{A} \otimes_A M & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow{\scriptstyle \alpha_N} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_L} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_M} & & \\ \widehat{N} & \xrightarrow{\widehat{u}} & \widehat{L} & \xrightarrow{\widehat{v}} & \widehat{M} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

é comutativo. Pelo corolário 5.3 temos que α_N e α_M são sobrejetoras. Como $L \cong A^n$ então $\widehat{A} \otimes L \cong \widehat{L}$ (veja a proposição 3.25). De acordo com o Lema da serpente, temos a sequência exata

$$\ker(\alpha_L) \longrightarrow \ker(\alpha_M) \longrightarrow \operatorname{coker}(\alpha_N).$$

Como α_L é injetora e α_N é sobrejetora então $\ker \alpha_M = 0$. Portanto, α_M é uma bijeção. □

Proposição 5.10. *Sejam A um anel noetheriano,* $\mathfrak{m} \trianglelefteq A$*, M um A-módulo finitamente gerado e N,N′ submódulos de M. Considere a aplicação natural* $f : M \to \widehat{M}$*. Assim, temos que*

i) $\widehat{N + N'} = \widehat{N} + \widehat{N'}$*;*

ii) Se $\mathfrak{a}$ *e* $\mathfrak{b}$ *são ideais de A e* $\mathfrak{c} = \mathfrak{ab}$*, então* $\widehat{\mathfrak{c}} = \widehat{\mathfrak{a}}\widehat{\mathfrak{b}}$*.*

Demonstração. Pelo teorema 5.9, temos que $\widehat{A} \otimes N \cong \widehat{N}$ e $\widehat{A} \otimes N' \cong \widehat{N'}$. Logo, a primeira igualdade está provada pois $\widehat{N+N'} \cong \widehat{A} \otimes (N+N') = \widehat{A} \otimes N + \widehat{A} \otimes N' \cong \widehat{N} + \widehat{N'}$. Por fim, como $\widehat{\mathfrak{a}} = \widehat{A}f(\mathfrak{a})$, $\widehat{\mathfrak{b}} = \widehat{A}f(\mathfrak{b})$ e $\widehat{\mathfrak{c}} = \widehat{A}f(\mathfrak{c})$ então

$$\widehat{\mathfrak{c}} = \widehat{A}f(\mathfrak{ab}) = \widehat{A}f(\mathfrak{a})f(\mathfrak{b}) = \widehat{\mathfrak{a}}\widehat{\mathfrak{b}}.$$

Portanto, a proposição está provada. □

Teorema 5.11. *Sejam A um anel noetheriano, $\mathfrak{m} \trianglelefteq A$, $\widehat{A}$ o seu $\mathfrak{m}$-completamento e $f : A \to \widehat{A}$ a aplicação natural. Então:*

i) Para todo $x \in \widehat{\mathfrak{m}}$, $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$;

ii) $\widehat{A}$ é um anel de Zariski;

iii) A aplicação $\psi : \{\mathfrak{n} \in \Omega(A) : \mathfrak{m} \subset \mathfrak{n}\} \to \Omega(\widehat{A})$ dada por $\mathfrak{n} \mapsto \widehat{A}f(\mathfrak{n}) = \widehat{\mathfrak{n}}$ é uma bijeção e $\mathfrak{m}' \mapsto f^{-1}(\mathfrak{m}')$ é a inversa.

Demonstração. Temos que $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^n \cong \widehat{\mathfrak{m}}/\widehat{\mathfrak{m}^n}$ para qualquer n. Logo, $x + \widehat{\mathfrak{m}^n}$ é nilpotente. Assim, pela proposição 3.21, $\lim_{n\to\infty} x^n \in \widehat{\bigcap \mathfrak{m}^n} = \widehat{A}f(\bigcap \mathfrak{m}^n) = 0$.

Dessa forma,

$$\lim_{n\to\infty} (1-x)(1+x+\cdots+x^n) = \lim_{n\to\infty} (1-x^{n+1}) = 1.$$

Logo, $(1-x)$ é inversível em $\widehat{A}$ e $\widehat{\mathfrak{m}} \subset J(\widehat{A})$. Com isso, pela proposição 2.26, $\widehat{A}$ é um anel de Zariski.

A terceira afirmação segue pelo fato que o homomorfismo $f_1 : A/\mathfrak{m} \to \widehat{A}/\widehat{\mathfrak{m}}$ é uma bijeção e $\widehat{\mathfrak{m}} \subset J(\widehat{A})$. □

Corolário 5.12. *Seja $(A, \mathfrak{m})$ um anel local noetheriano. Assim, o $\mathfrak{m}$-completamento de A é um anel local com ideal maximal $\widehat{\mathfrak{m}}$.*

Demonstração. Temos que $\widehat{A}/\widehat{\mathfrak{m}} \cong A/\mathfrak{m}$ é corpo. Logo, $\widehat{\mathfrak{m}}$ é um ideal maximal de $\widehat{A}$. Como $\widehat{\mathfrak{m}} \subseteq J(\widehat{A})$ então $\widehat{\mathfrak{m}}$ é o único ideal maximal. □

Relembraremos algumas definições fundamentais para darmos seguimento a este capítulo.

Definição 5.13. *Um A-módulo E é dito plano se para qualquer sequência exata*

$$M' \to M \to M''$$

de A-módulos, a correspondente sequência

$$E \otimes M' \to E \otimes M \to E \otimes M''$$

é exata.

A próxima proposição é importante para caracterizarmos módulos planos.

Proposição 5.14. *Sejam A um anel e E um A-módulo. Então as seguintes condições são equivalentes:*

i) E *é plano;*

ii) Para qualquer sequência exata $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ *teremos que a sequência* $0 \to E \otimes M' \to E \otimes M \to E \otimes M'' \to 0$ *também será exata;*

iii) Para qualquer homomorfismo injetivo $f : M' \to M$*, de* A*-módulo finitamente gerados, o homomorfismo* $1 \otimes f : E \otimes M' \to E \otimes M$ *é injetivo.*

Demonstração. $i) \Leftrightarrow ii)$ Basta dividirmos a sequência exata longa em sequências exatas curtas.
$ii) \Leftrightarrow iii)$ Segue pela proposição 5.8. □

Definição 5.15. *Sejam* A, B *anéis, onde que* B *é um* A*-módulo. Se a estrutura de* B *como* A*-módulo for compatível com a estrutura de* B *como anel, dizemos que* B *é uma* A*-álgebra, isto é,*

i) $1_A b = b$*, onde que* 1_A *é a unidade multiplicativa de* A *e* $b \in B$*;*

ii) $\alpha(xy) = (\alpha x)y$*, para* $\alpha \in A$ *e* $x, y \in B$*.*

Exemplo 5.16. Seja $f : A \to B$ um homomorfismo de anéis. Se $a \in A$ e $b \in B$ então definimos o produto

$$ab \coloneqq f(a)b.$$

Essa definição dá uma estrutura de A-módulo para B. Sem grandes dificuldades, podemos ver que B é uma A-álgebra.

Exemplo 5.17. Podemos dar uma estrutura de A-álgebra para $\widehat{A}$. Basta tomarmos a aplicação natural $f : A \to \widehat{A}$ e definirmos a multiplicação

$$a\widehat{x} \coloneqq f(a)\widehat{x}$$

para $a \in A$ e $\widehat{x} \in \widehat{A}$.

Proposição 5.18. *Seja* B *uma* A*-álgebra plana e* $f : A \to B$ *a aplicação que torna* B *uma* A*-álgebra. As seguintes condições são equivalentes:*

i) $f^{-1}(f(\mathfrak{a})B) = \mathfrak{a}$*, para todo* $\mathfrak{a} \trianglelefteq A$*;*

ii) $\operatorname{spec}(B) \to \operatorname{spec}(A)$ *é sobrejetiva;*

iii) Para todo $\mathfrak{m} \in \Omega(A)$ *teremos que* $f(\mathfrak{m})B \neq B$*;*

iv) Se M *é um* A*-módulo não nulo, então* $B \otimes_A M \neq 0$*;*

v) Para todo A*-modulo* M *a aplicação* $x \mapsto 1 \otimes x$ *definida de* M *para* $B \otimes_A M$ *é injetiva.*

Demonstração. $i) \Rightarrow ii)$: Temos que $f^* : \operatorname{Spec}(B) \to \operatorname{Spec}(A)$ é dada por $\mathfrak{p} \mapsto f^{-1}(\mathfrak{p})$. Com isso, $f^*(f(\mathfrak{p})B) = \mathfrak{p}$, para todo $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$. Logo, f^* é sobrejetora.

$ii) \Rightarrow iii)$: Seja $\mathfrak{m} \in \Omega(A)$. Se $f^*(\mathfrak{n}) = \mathfrak{m}$ então $f(\mathfrak{m}) \subseteq \mathfrak{n}$. Assim, $f(\mathfrak{m})B \subseteq \mathfrak{n}$. No caso de $f(\mathfrak{m})B = B$, temos que $f^*(\mathfrak{n}) = f^*(B) = 1 \neq \mathfrak{m}$. Assim, $f(\mathfrak{m})B \neq B$.

$iii) \Rightarrow iv)$: Suponhamos que $iv)$ é falsa. Seja M um A-módulo não nulo tal que $B \otimes_A M = 0$. Como B é plano, a inclusão $M' \to M$ induz a aplicação injetora $B \otimes_A M' \to B \otimes_A M$. Assim, $B \otimes_A M' = 0$ para todo submódulo M' de M. Em particular isto vale para o submódulo (x), onde $x \in M$. Temos que $(x) \cong A/\mathfrak{a}$. Como $0 = B \otimes_A (x) \cong B \otimes_A (A/\mathfrak{a}) \cong B/\mathfrak{a}B = B/f(\mathfrak{a})B$. Dessa forma $f(\mathfrak{a})B = B$. Se $\mathfrak{m} \supseteq \mathfrak{a}$ é um ideal maximal de A então $B = f(\mathfrak{m})B$. Logo, $iii)$ não vale.

$iv) \Rightarrow v)$: Suponhamos que $v)$ é falsa. Seja M um A-módulo tal que a aplicação natural $M \to B \otimes_A M$ não é injetiva. Assim, existe um elemento não nulo $x \in M$ tal que $1 \otimes x = 0$ em $B \otimes_A M$. Por B ser plano, a inclusão $(x) \to M$ induz uma aplicação injetiva $B \otimes_A (x) \to B \otimes_A M$ mas a imagem dessa aplicação é $B \otimes_A (x) = 0$. Logo, $B \otimes_A (x) = 0$ e iv também é falsa.

$v) \Rightarrow i)$: Sempre temos $\mathfrak{a} \subseteq f^{-1}(f(\mathfrak{a})B)$. Suponha que exista $\mathfrak{a} \trianglelefteq A$ tal que $\mathfrak{a} \subsetneq f^{-1}(f(\mathfrak{a})B)$. Assim, o submódulo $f^{-1}(f(\mathfrak{a})B)/\mathfrak{a}$ de $A/\mathfrak{a}$ é não nulo. Como $B \otimes_A (A/\mathfrak{a}) \cong B/\mathfrak{a}B = B/f(\mathfrak{a})B$ então a aplicação natural $A/\mathfrak{a} \to B \otimes_A A/\mathfrak{a}$ é igual a aplicação $A/\mathfrak{a} \to Bf(\mathfrak{a})/B$, induzida por f, cujo kernel é $f^{-1}(f(\mathfrak{a})B)/\mathfrak{a}$. □

Definição 5.19. *O anel* B *que satisfaz uma das condições equivalentes da proposição 5.18 é dito fielmente plano.*

Agora veremos o Teorema de planitude.

Teorema 5.20. *Sejam* A *um anel* $\mathfrak{m}$*-ádico noetheriano e* $\widehat{A}$ *o seu completamento. Então:*

i) $\widehat{A}$ *é um* A*-módulo plano;*

ii) $\widehat{A}$ *é fielmente plano se, e somente se,* A *é um anel de Zariski.*

Demonstração. Para provar $i)$ usaremos a terceira condição da proposição 5.14. Seja $f : M' \to M$ um homomorfismo injetivo de A-módulos finitamente gerados. Dessa forma, pelo teorema 5.4, o homomorfismo $\widehat{f} : \widehat{M'} \to \widehat{M}$ é injetivo. O diagrama

$$\begin{array}{ccc} \widehat{A} \otimes_A M' & \xrightarrow{1\otimes f} & \widehat{A} \otimes_A M \\ \downarrow{\scriptstyle \alpha_{M'}} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_M} \\ \widehat{M'} & \xrightarrow{\widehat{f}} & \widehat{M} \end{array}$$

é comutativo. Como $\alpha_{M'}$ e α_M são isomorfismos então $1 \otimes f$ é injetivo. Logo, $\widehat{A}$ é plano.

Seja $\widehat{A}$ fielmente plano. Assim, para qualquer A-módulo M finitamente gerado, a aplicação natural $f : M \to \widehat{M}$ é injetiva. Em particular, isso é verdade para $M = A/\mathfrak{m}'$, onde que $\mathfrak{m}' \trianglelefteq A$ é maximal. Logo,

$$\ker(f) = \bigcap_{n \geqslant 0} \mathfrak{m}^n (A/\mathfrak{m}') = 0.$$

Se $\mathfrak{m} \not\subseteq \mathfrak{m}'$ então $\mathfrak{m} + \mathfrak{m}' = A$. Com isso, existem $x \in \mathfrak{m}$ e $y \in \mathfrak{m}'$ tais que $x + y = 1$. Dessa forma $x + \mathfrak{m}'$ é inversível. Assim, $\mathfrak{m}^n(A/\mathfrak{m}') = A/\mathfrak{m}'$, para todo n, o que implica $\ker f = A/\mathfrak{m}'$. Com isso, chegaríamos a um absurdo. Dessa forma, teremos $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}'$. Como $\mathfrak{m}'$ é arbitrário então o anel é de Zariski.

Reciprocamente, seja A é de Zariski, com a topologia dada por $\mathfrak{a} \subset J(A)$ e $\mathfrak{m}$ um ideal maximal. Como $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{m}$ então a igualdade vista acima é verdadeira e a aplicação natural $f : A/\mathfrak{m} \to \widehat{A}/\widehat{\mathfrak{m}}$ é injetora. Consequentemente, $\widehat{\mathfrak{m}} \neq \widehat{A}$. Portanto, pela proposição 5.18, $\widehat{A}$ é fielmente plano. □

Para demonstrar o próximo teorema precisaremos do resultado encontrado em [2], capítulo 2.

Proposição 5.21. *Sejam M um A-módulo finitamente gerado, $\mathfrak{m} \trianglelefteq A$ tal que $\mathfrak{m}M = M$. Assim, existe $x = 1 + y$, onde $y \in \mathfrak{m}$, tal que $xM = 0$.*

Assim, temos o seguinte teorema.

Teorema 5.22. *Sejam A um anel noetheriano, $\mathfrak{m} \trianglelefteq A$, M um A-módulo finitamente gerado e $\widehat{M}$ o seu $\mathfrak{m}$-completamento. Assim, o núcleo $E = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{m}^n M$ da aplicação natural $f : M \to \widehat{M}$ é formado pelos elementos $x \in M$ que são anulados por algum elemento do conjunto $1 + \mathfrak{m}$.*

Demonstração. Como E é a interseção de todas as vizinhanças de 0 em M então a topologia induzida em E é a trivial, ou seja, E é a única vizinhança de 0. Pelo lema 2.22, a topologia induzida em E coincide com a $\mathfrak{m}$-topologia. Com isso $\mathfrak{m}E = E$. Pelo fato de M ser finitamente gerado e A ser noetheriano temos que E é finitamente gerado. De acordo com a proposição 5.21 temos que $(1 - y)E = 0$ para algum $y \in \mathfrak{m}$. A recíproca é óbvia, pois se $(1 - y)x = 0$ então

$$x = yx = yx^2 = \cdots \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{m}^n M.$$

□

Corolário 5.23. *Sejam A um domínio noetheriano e $\mathfrak{m}$ um ideal próprio de A. Assim, $\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{m}^n = 0$.*

Demonstração. O conjunto $1 + \mathfrak{m}$ não possui divisores de zero. □

Corolário 5.24. *Sejam A um anel noetheriano, $\mathfrak{m} \trianglelefteq A$ contido em $J(A)$ e M um A-módulo finitamente gerado. Assim, a $\mathfrak{m}$-topologia de M é Hausdorff, ou seja, $\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{m}^n M = 0$.*

Demonstração. Vimos anteriormente que todo elemento de $1 + \mathfrak{m}$ é inversível em A. □

5.2 Propriedades noetherianas

Teorema 5.25. *Se A é um anel noetheriano e $\mathfrak{m} \trianglelefteq A$ então o $\mathfrak{m}$-completamento $\widehat{A}$ de A também é noetheriano.*

Demonstração. Seja $\mathfrak{m}$ gerado pelos elementos $a_1, \ldots, a_n \in A$. De acordo com a proposição 4.9 temos que $\widehat{A} \cong A[\![X_1, \ldots, X_n]\!]/(X_1 - a_1, \ldots, X_n - a_n)$. Como o anel $A[\![X_1, \ldots, X_n]\!]$ é noetheriano, pelo corolário 4.6, então o teorema está provado. □

Sejam G um grupo e (G_n) uma filtração de G. Definimos

$$Gr_n(G) = G_n/G_{n+1}, \text{ para } n \in \mathbb{Z},$$

e a partir disso

$$Gr(G) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} Gr_n(G).$$

O grupo comutativo $Gr(G)$ é chamado de *grupo graduado associado* com o grupo filtrado G.

Lema 5.26. *Sejam G, G' grupos filtrados, $\phi : G \to G'$ um homomorfismo tal que $\phi(G_n) \subset G'_n$, $Gr(\phi) : Gr(G) \to Gr(G')$ e $\widehat{\phi} : \widehat{G} \to \widehat{G'}$ as aplicações naturais induzidas por ϕ. Então:*

i) Se $Gr(\phi)$ é injetora, então $\widehat{\phi}$ é injetora;

ii) Se $Gr(\phi)$ é sobrejetora, então $\widehat{\phi}$ é sobrejetora.

Demonstração. Considere o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & G_n/G_{n+1} & \longrightarrow & G/G_{n+1} & \xrightarrow{f_n} & G/G_n & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle Gr_n(\phi)} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_{n+1}} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_n} & & \\
0 & \longrightarrow & G'_n/G'_{n+1} & \longrightarrow & G'/G'_{n+1} & \xrightarrow{f'_n} & G'/G'_n & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

pelo Lema da Serpente temos que

$$0 \longrightarrow \ker(Gr_n(\phi)) \longrightarrow \ker(\alpha_{n+1}) \longrightarrow \ker(\alpha_n) \longrightarrow \operatorname{coker}(Gr_n(\phi)) \longrightarrow \operatorname{coker}(\alpha_{n+1}) \longrightarrow \operatorname{coker}(\alpha_n) \longrightarrow 0$$

Por indução sobre n, $\ker(\alpha_n) = 0$, quando $Gr(\phi)$ é injetora, e $\operatorname{coker}(\alpha_n) = 0$, quando $Gr(\phi)$ é sobrejetora. Além disso, se $Gr(\phi)$ é sobrejetora então $\ker(\alpha_{n+1}) \to \ker(\alpha_n)$ é sobrejetora. Tomando os limites inversos dos sistemas inversos $(G/G_n, f_n)$ e $(G'/G'_n, f'_n)$ e aplicando a proposição 3.15 concluímos a prova do Lema. □

Teorema 5.27. *Sejam A um anel, $\mathfrak{m} \trianglelefteq A$ tal que A é completo pela $\mathfrak{m}$-topologia, M um A-módulo, (M_n) uma $\mathfrak{m}$-filtração de M que induz sobre M uma topologia Hausdorff. Se $Gr(M)$ é finitamente gerado, então M é finitamente gerado.*

Demonstração. Escolha um conjunto finito que gera $Gr(M)$ e divida-os em suas componentes homogêneas ξ_i de grau $n(i)$, ou seja, $\xi_i = x_i + M_{n(i)+1} \neq 0$, onde que $x_i \in M_{n(i)}$, para $1 \leqslant i \leqslant r$. Seja F^i o A-módulo com a $\mathfrak{m}$-filtração estável dada por $F^i_k = \mathfrak{m}^{k+n(i)}$. Tome $F = \bigoplus_{i=1}^{r} F_i$ e $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant r}$ a base canônica de F. Assim, podemos definir a aplicação

$$\begin{cases} \phi & : & F & \longrightarrow & M \\ & & e_i & \longmapsto & x_i \end{cases}$$

e com isso teremos o homomorfismo de $Gr(A)$-módulos $Gr(\phi) : Gr(F) \to Gr(M)$. Por construção este homomorfismo é sobrejetor. Logo, pelo lema 5.26, $\widehat{\phi}$ é sobrejetor. Considere o diagrama

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{\phi} & M \\ \downarrow{\scriptstyle \alpha} & & \downarrow{\scriptstyle \beta} \\ \widehat{F} & \xrightarrow{\hat{\phi}} & \widehat{M} \end{array}$$

Pelo fato de F ser livre e $A = \widehat{A}$ temos que α é um isomorfismo. Como M é Hausdorff então, pela proposição 3.24, β é injetiva. A sobrejetividade de $\widehat{\phi}$ implica que ϕ é sobrejetivo. Portanto, $x_1, \ldots, x_r$ gera M como um A-módulo. □

Corolário 5.28. *Com as hipóteses do teorema 5.27, se $Gr(M)$ é um $Gr(A)$-módulo noetheriano então:*

i) M é noetheriano como A-módulo;

ii) $\widehat{M}$ é noetheriano como $\widehat{A}$-módulo.

Demonstração. Provaremos o primeiro item. Mostraremos que todo submódulo M' de M é finitamente gerado. Seja $M'_n = M' \cap M_n$ uma $\mathfrak{m}$-filtração de M'. Da inclusão $M'_n \to M_n$ podemos definir o homomorfismo injetivo $M'_n/M'_{n+1} \to M_n/M_{n+1}$. Logo, temos que $Gr(M')$ é submódulo de $Gr(M)$. Pelo fato de $Gr(M)$ ser noetheriano então $Gr(M')$ é finitamente gerado. Temos que M' é Hausdorff pois $\bigcap M'_n \subseteq M_n = 0$. Portanto, pelo teorema 5.27, M' é finitamente gerado. □

Pelo item anterior, temos que M é noetheriano, ou seja todos os seus submódulos são finitamente gerados. Com isso, pelo teorema 5.1, temos que todos os submódulos de $\widehat{M}$ são finitamente gerados. Portanto, $\widehat{M}$ é noetheriano.

A seguinte proposição nos dá as condições para que a recíproca do teorema 5.27 seja válida.

Proposição 5.29. *Se M é um A-módulo finitamente gerado e (M_n) é uma $\mathfrak{m}$-filtração estável de M, então $Gr(M)$ é finitamente gerado sobre $Gr(A)$.*

Demonstração. Existe um inteiro n_0 tal que $M_{n_0+r} = \mathfrak{m}^r M_{n_0}$ para todo $r \geqslant 0$, logo $Gr(M)$ é gerado por $\bigoplus_{n \leqslant n_0} Gr_n(M)$. Cada $Gr_n(M) = M_n/M_{n+1}$ é noetheriano e com isso é um $(A/\mathfrak{m})$-módulo finitamente gerado. Assim, $\bigoplus_{n \leqslant n_0} Gr_n(M)$, como $A/\mathfrak{m}$-módulo, é gerado por um número finito de elementos. Portanto, $Gr(M)$ é finitamente gerado como um $Gr(A)$-módulo. □

6 DIMENSÕES DOS COMPLETAMENTOS DE ANÉIS NOETHERIANOS

O objetivo principal deste capítulo é determinar a dimensão do $\mathfrak{m}$-completamento de um anel noetheriano A. Para isso, definiremos e estudaremos as séries de Poincaré. Como consequência disso teremos o teorema de dimensão cujo resultado é importante para calcularmos a dimensão do completamento de um anel noetheriano local. Na sequência veremos uma propriedade sobre a dimensão do completamento de um anel noetheriano. Por fim, finalizaremos definindo o que é um anel regular local. Entre os outros resultados relevantes podemos destacar: Os teoremas 6.11 e 6.43, as proposições 6.27, 6.45 e 6.46 e o corolário 6.39.

Relembraremos a definição de dimensão para um anel comutativo A.

Definição 6.1. *Seja A um anel comutativo. Dados $\mathfrak{p}_0, \mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n \in \operatorname{Spec}(A)$ tais que $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_n$, o número de inclusões é chamada de comprimento da cadeia e a dimensão de A será definida como*

$$\dim(A) := \sup\{n : \exists\, \mathfrak{p}_0, \mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n \in \operatorname{Spec}(A), \text{ tais que } \mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_n\}.$$

Exemplo 6.2. Se K é um corpo, o único ideal primo é $\{0\}$. Logo $\dim(K) = 0$.

Exemplo 6.3. Em $\mathbb{Z}$ só temos $(0) \subsetneq (p)$, onde $p \in \mathbb{Z}$ é primo. Dessa forma, $\dim(\mathbb{Z}) = 1$.

Exemplo 6.4. Temos que os ideais de $\mathbb{Z}[X]$ são da forma (n, f), onde $f \in \mathbb{Z}[X]$ e $n \in \mathbb{Z}$. Assim, $(0) \subset (p) \subset (p, f)$, para p primo, é a cadeia de maior comprimento. Logo, $\dim(\mathbb{Z}) = 2$.

Exemplo 6.5. Se A é domínio, então $\dim(A[X_1, \ldots, X_n, \ldots]) = \infty$, pois $(X_1) \subseteq (X_1, X_2) \subseteq \ldots$.

Definição 6.6. *A altura de $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}A$, denotada por $h(\mathfrak{p})$, é definida como*

$$h(\mathfrak{p}) := \sup\{n : \exists\, \mathfrak{p}_0, \mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_{n-1} \in \operatorname{Spec}(A), \text{ tais que } \mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_{n-1} \subsetneq \mathfrak{p}\},$$

onde n representa o comprimento da cadeia. Se $\mathfrak{a}$ é um ideal qualquer de A, então podemos definir a altura como $h(\mathfrak{a}) = \min h(\mathfrak{p})$, onde $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$.

Como consequência da definição anterior temos que $\dim(A) = \sup h(\mathfrak{m})$, para $\mathfrak{m} \in \Omega(A)$.

Uma cadeia de submódulos de um A-módulo M é a sequência (M_i), $1 \leqslant i \leqslant n$, de submódulos de M tais que

$$M = M_0 \supsetneq M_1 \supsetneq \cdots \supsetneq M_n = \{0\}.$$

O comprimento desta cadeia é definida como o número de inclusões. Uma *série de composição* de M é uma cadeia maximal, isto é, não possível inserir um outro submódulo à cadeia de modo que ela continue estritamente decrescente. Equivalentemente podemos dizer que cada quociente M_{i-1}/M_i é simples, ou seja, não possui submódulos além dos triviais.

Proposição 6.7. *Suponha que M tenha uma série de composição de comprimento n. Então toda série de composição de M tem comprimento n e toda cadeia em M pode ser estendida para ter comprimento n.*

Demonstração. Seja $l(M)$ o menor comprimento de uma série de composição do módulo M.

i) Provaremos que se $N \subset M$ então $l(N) < l(M)$. Considere (M_i) uma série de composição de M de comprimento mínimo e $N_i = N \cap M_i$ submódulos de N. Como $N_{i-1}/N_i \subseteq M_{i-1}/M_i$ e M_{i-1}/M_i é simples então $N_{i-1}/N_i = M_{i-1}/M_i$ ou $N_{i-1} = N_i$. Assim, removendo os termos repetidos, temos uma série de composição de N tal que $l(N) \leqslant l(M)$. Se $l(N) = l(M) = n$ então $N_{i-1}/N_i = M_{i-1}/M_i$, para $i = 1, 2, \ldots, n$. Com isso $M_{i-1} = N_{i-1}$, para $i = 1, 2, \ldots, n$, ou seja, $M = N$.

ii) Afirmamos que toda cadeia em M tem comprimento menor ou igual a $l(M)$. De fato, considere a cadeia $M = M_0 \supset M_1 \supset \cdots \supset M_k = \{0\}$ cujo comprimento é k. Pela primeiro item, temos que $l(M) > l(M_1) > \cdots > l(M_k) = 0$. Logo, $l(M) \geqslant k$.

iii) Tome uma série de composição de M. Se ela tem comprimento k então, pelo segundo item, $k \leqslant l(M)$. Logo, pela forma como $l(M)$ foi definido, $k = l(M)$. Assim, todas as séries de composição tem o mesmo comprimento. Por último, considere uma cadeia qualquer de M. Se o seu comprimento é $l(M)$ então ela é uma série de composição, caso contrário, a cadeia não é maximal, ou seja, podemos inserir novos termos tais que o seu novo comprimento seja $l(M)$. □

Logo, toda série de composição de M tem o mesmo comprimento $l(M)$, chamado de *comprimento de M*.

Definição 6.8. *Sejam C o conjunto de todos os A-módulos e $\lambda : C \to \mathbb{Z}$ uma função. Dizemos que λ é aditiva se, para todo sequência exata curta*

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0,$$

onde que todos os termos pertencem a C, a igualdade

$$\lambda(M) = \lambda(M') + \lambda(M'')$$

for verificada.

Proposição 6.9. *O comprimento $l(M)$ é uma função aditiva na classe de todos os A-módulos de comprimento finito.*

Demonstração. Mostraremos que se

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} M'' \longrightarrow 0$$

é uma sequência exata, então $l(M) = l(M') + l(M'')$.

Tome a imagem sobre u de uma série de composição de M' e a imagem inversa sobre v de uma série de composição de M''. Dessa forma, se juntarmos essas cadeias temos uma série de composição em M. Logo, chegamos ao resultado. □

Mais geralmente temos que:

Proposição 6.10. *Seja*

$$0 \to M_1 \to M_2 \to \cdots \to M_n \to 0$$

uma sequência exata de A-módulos com comprimento finito. Assim,

$$l(M_1) - l(M_2) + \cdots + (-1)^{n-1} l(M_n) = 0.$$

Demonstração. Tomaremos $n = 4$. Para demonstrar de maneira geral o raciocínio é análogo.

Seja

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \xrightarrow{h} M_4 \longrightarrow 0$$

uma sequência exata.

Podemos encontrar as sequências exatas curtas,

$$0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow \operatorname{coker}(f) \longrightarrow 0$$

onde $\operatorname{coker}(f) = M_2/\operatorname{im}(f) = M_2/\ker(g) \cong \operatorname{im}(g)$, e

$$0 \longrightarrow \operatorname{im}(g) \longrightarrow M_3 \longrightarrow M_4 \longrightarrow 0$$

Aplicando a proposição anterior teremos que

$$l(M_1) - l(M_2) + l(\operatorname{coker}(f)) - l(\operatorname{im}(g)) + l(M_3) - l(M_4) = 0$$

Consequentemente

$$l(M_1) - l(M_2) + l(M_3) - l(M_4) = 0$$

como queríamos. □

Considere o anel graduado $A = \bigoplus_{n=0}^{\infty} A_n$ tal que A é noetheriano e A_0 é artiniano. Pela proposição 2.20, A_0 é noetheriano e A é gerado, como A_0-álgebra, pelos elementos homogêneos $x_1, \ldots, x_s$ de graus $k_1, \ldots, k_s$ respectivamente. Suponha que $M = \bigoplus_{n=0}^{\infty} M_n$ é um A-módulo graduado finitamente gerado. Assim, cada M_n é um A_0-módulo finitamente gerado. Pelo fato de A_0 ser artiniano, teremos que $l(M_n)$ é finito e com isso podemos definir a série

$$P_l(M, t) = \sum_{n=0}^{\infty} l(M_n) t^n.$$

Está série é conhecida como *série de Poincaré* de M.

Teorema 6.11. *A série de Poincaré de M é uma função racional da forma*

$$P_l(M,t) = f(t)/\prod_{i=1}^{s}(1-t^{k_i})$$

onde $f(t) \in \mathbb{Z}[t]$ e s é o número de geradores homogêneos do ideal $\bigoplus_{n>0} A_n$.

Demonstração. Provaremos por indução sobre s. Se $s = 0$ então $A = A_0$ e cada M_n é um A-submódulo de M. Como M é finitamente gerado então $M_n = \{0\}$ para $n \geqslant n'$. Assim, $P_l(M,t) = \sum_{n=0}^{\infty} l(M_n)t^n \in \mathbb{Z}[t]$.

Suponhamos que $s \geqslant 1$ e o teorema é verdadeiro para $s-1$. A aplicação $M \to M$ dada pela multiplicação por $x_s \in A$ é um homomorfismo de A-módulos. Sejam $K = \bigoplus_{n=0}^{\infty} K_n$ e $L = \bigoplus_{n=0}^{\infty} L_n$ o kernel e o cokernel dessa aplicação. Dessa forma, K e L são A-módulos finitamente gerados, pois K é submódulo de M e L é um módulo quociente de M. Logo, para cada $n \geqslant 0$, temos a sequência exata

$$0 \to K_{n-k_s} \to M_{n-k_s} \to M_n \to L_n \to 0$$

onde $K_{n-k_s} = M_{n-k_s} = \{0\}$ para $n < k_s$. Consequentemente, temos

$$l(K_{n-k_s}) - l(M_{n-k_s}) + l(M_n) - l(L_n) = 0.$$

Multiplicando por t^n obtemos

$$l(K_{n-k_s})t^n - l(M_{n-k_s})t^n + l(M_n)t^n - l(L_n)t^n = 0.$$

Somando para todo os n

$$P_l(K,t)t^{k_s} - P_l(M,t)t^{k_s} + P_l(M,t) - P_l(L,t) = 0. \tag{6.1}$$

Logo,

$$P_l(M,t) = \frac{P_l(L,t) - P_l(K,t)t^{k_s}}{(1-t^{k_s})}.$$

Facilmente podemos ver que x_s anula os elementos de K e L. Com isso, K e L são módulos graduado sobre o anel graduado $\overline{A} = A/(x_s)$ cujo ideal $\bigoplus_{n>0} A_n/(x_s)$ é gerado por $\overline{x_1}, \ldots \overline{x_{s-1}}$. Portanto, $P_l(L,t)$ e $P_l(K,t)$ são funções racionais com denominador $\prod_{i=1}^{s}(1-t^{k_i})$. □

Proposição 6.12. *Seja $d(M)$ a ordem do polo de $P_l(M,t)$ em $t = 1$. Assim,*

$$d(M) \leqslant s,$$

onde que s é o número de geradores homogêneos do ideal $\bigoplus_{n>0} A_n$.

Demonstração. Temos que

$$\lim_{t\to 1} \frac{1-t}{1-t^k} = \lim_{t\to 1} \frac{1}{1+t+\cdots+t^{k-1}} = \frac{1}{k}.$$

Logo, $\lim_{t\to 1}(1-t)^s P_l(M,t) < \infty$. □

Para provarmos o próximo teorema precisaremos provar a seguinte proposição.

Proposição 6.13. *A igualdade*

$$\frac{1}{(1-t)^d} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+d-1}{d-1} t^n$$

é válida.

Demonstração. Sabemos que $(1-t)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n$. Derivando $d-1$ vezes obtemos

$$(d-1)!(1-t)^{-d} = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)\dots(n-d+2)t^{n-d+1}.$$

Portanto

$$(1-t)^{-d} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{d-1} t^{n-d+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+d-1}{d-1} t^n$$

como queríamos. □

Teorema 6.14. *Suponha que $k_i = 1$, para $i = 1, 2, \dots, s$. Assim, $l(M_n)$ é um polinômio de grau $d(M) - 1$ para n suficientemente grande.*

Demonstração. Pelo teorema 6.11

$$\sum_{n=0}^{\infty} l(M_n)t^n = \frac{f(t)}{(1-t)^s},$$

onde $f(t) \in \mathbb{Z}[t]$. Pela definição de $d(M)$ temos que $f(t) = (1-t)^{s-d(M)}g(t)$ e $g(1) \neq 0$. Com isso,

$$\sum_{n=0}^{\infty} l(M_n)t^n = \frac{g(t)}{(1-t)^{d(M)}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+d(M)-1}{d(M)-1} g(t)t^n$$

Suponha que $g(t) = \sum_{k=0}^{m} a_k t^k$. Assim,

$$\sum_{n=0}^{\infty} l(M_n)t^n = \sum_{k=0}^{m}\sum_{n=0}^{\infty} a_k \binom{n+d(M)-1}{d(M)-1} t^{n+k}$$

Quando $n \geqslant m$ temos

$$l(M_n) = \sum_{k=0}^{m} a_k \binom{n+d(M)-1}{d(M)-1}.$$

No caso $n < m$ tomamos a soma sobre $0 \leqslant k \leqslant n$. Portanto, $l(M_n)$ é um polinômio em n de grau $d(M)-1$ com coeficiente líder

$$\frac{1}{(d(M)-1)!}\sum_{k=0}^{m} a_k = \frac{g(1)}{(d(M)-1)!} \neq 0.$$

□

Se trocarmos $x_s \in A$, visto no teorema 6.11, por um $x \in A_k$ que não é divisor de zero em M, ou seja, $xm \neq 0$ para todo $m \in M$, então a aplicação

$$\begin{cases} \beta & : & M & \longrightarrow & M \\ & & m & \longmapsto & mx \end{cases}$$

é um homomorfismo tal que $\ker\beta = \{0\}$. De acordo com a equação 6.1, vista no teorema 6.11, podemos concluir que

$$d(L) = d(M) - 1.$$

Dessa forma, podemos concluir que:

Proposição 6.15. *Se $x \in A_k$ não é um divisor de zero em M, então $d(M/xM) = d(M) - 1$.*

Exemplo 6.16. Seja $B = A_0[x_1, \ldots, x_s]$ tal que A_0 é um anel artiniano. Tome A_n como o A_0-módulo livre gerado pelos monômios $x_1^{m_1} \cdots x_s^{m_s}$, onde $\sum_{i=1}^{s} m_i = n$. Com isso, existem $\binom{s+n-1}{s-1}$ monômios. Considere o anel graduado $A = \bigoplus_{n=0}^{\infty} A_n$. Logo, $P_l(A,t) = \sum_{n=0}^{\infty} l(A_n)t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{s+n-1}{s-1}t^n$. Portanto, pela proposição 6.13, $P_l(A,t) = \dfrac{1}{(1-t)^s}$.

Definição 6.17. *A função de Hilbert de M é a função polinomial*

$$h_M(n) = l(M_n)$$

para n suficientemente grande.

Lema 6.18. *Para cada n considere a soma finita $g(n) = l(M_0) + \cdots + l(M_{n-1})$. Assim, $g(n)$ é um polinômio de grau $d(M)$ para n suficientemente grande.*

Demonstração. Para $m > m_0$ temos que

$$l(M_m) = h_M(m) = c_0 + c_1 m + \cdots + c_{d(M)-1} m^{d(M)-1}$$

Logo

$$g(n) = \sum_{m=0}^{n-1} h_M(m) + k$$

para $n > m_0$ e k constante. Em [8], podemos ver a Faulhaber's formula que nos ajuda a concluir que $\sum_{m=0}^{n-1} m^{d(M)-1}$ é um polinômio em n de grau $d(M)$. Portanto, o lema está provado. □

Definição 6.19. *O ideal próprio $\mathfrak{q}$ de A é dito primário se vale a seguinte condição:*

$$xy \in \mathfrak{q} \text{ implica que } x \in \mathfrak{q} \text{ ou } y^n \in \mathfrak{q}, \text{ para algum } n > 0.$$

Em outras palavras, $\mathfrak{q}$ é primário se, e somente se, todo divisor de zero em $A/\mathfrak{q}$ é nilpotente. Sem grandes dificuldades, podemos verificar que $\sqrt{q}$ é primo. Se $\mathfrak{p} = \sqrt{\mathfrak{q}}$ então $\mathfrak{q}$ é dito $\mathfrak{p}$-primário.

Exemplo 6.20. Em $\mathbb{Z}$, (0), (p^n), onde p é primo, são ideais primários.

Proposição 6.21. *Sejam A um anel noetheriano, $\mathfrak{m} \trianglelefteq A$ maximal e $\mathfrak{q} \trianglelefteq A$ qualquer. Assim, $\mathfrak{q}$ é $\mathfrak{m}$-primário se, e somente se, $\mathfrak{m}^n \subseteq \mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{m}$ para algum $n > 0$.*

Demonstração. Pela proposição 2.11 segue que $\mathfrak{m}^n \subseteq \mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{m}$ para algum $n > 0$. Reciprocamente, se tomarmos os radicais teremos que $\mathfrak{m} = \sqrt{\mathfrak{m}^n} \subseteq \sqrt{\mathfrak{q}} \subseteq \sqrt{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m}$. □

Proposição 6.22. *Sejam $(A, \mathfrak{m})$ um anel noetheriano local e $\mathfrak{q} \trianglelefteq A$. Assim, $\mathfrak{q}$ é $\mathfrak{m}$-primário se, e somente se, todo $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$ tal que $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}$ é maximal.*

Demonstração. Suponhamos que $\mathfrak{q}$ seja $\mathfrak{m}$-primário. Temos que $\mathfrak{m}^n \subseteq \mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}$. Pelo fato de $\mathfrak{p}$ ser primo temos que $\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{p}$. Portanto, $\mathfrak{p}$ é maximal.

Reciprocamente, como $\sqrt{\mathfrak{q}}$ é primo então, por hipótese, $\sqrt{\mathfrak{q}} = \mathfrak{m}$, ou seja, $\mathfrak{q}$ é $\mathfrak{m}$-primário. □

Em [2], capítulo 8 temos o seguinte resultado.

Teorema 6.23. *Um anel A é artiniano se, e somente se, A é noetheriano e $\dim(A) = 0$.*

Proposição 6.24. *Seja A um anel noetheriano. Assim, A é artiniano se, e somente se, todo ideal primo de A é maximal.*

Demonstração. Suponhamos que A seja artiniano. Dado $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$ temos que $A/\mathfrak{p}$ é domínio. Se $0 \neq x \in A/\mathfrak{p}$ então existe a cadeia decrescente

$$(x) \supset (x^2) \supset (x^3) \supset \dots.$$

Como $A/\mathfrak{p}$ também é artiniano, então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$(x^n) = (x^{n+1}) = \dots.$$

Logo, $x^n = bx^{n+1}$, para $b \in A/\mathfrak{p}$. Com isso, $bx = 1$, ou seja, x possui inverso em $A/\mathfrak{p}$. Assim, $\mathfrak{p}$ é maximal pois $A/\mathfrak{p}$ é corpo.

Reciprocamente, como todo ideal primo de A é maximal então não existe uma inclusão $\mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{q}$, tais que $\mathfrak{p}, \mathfrak{q} \in \operatorname{Spec}(A)$. Portanto, $\dim(A) = 0$ e A é artiniano, pelo teorema 6.23. □

Dessa forma, podemos concluir que:

Proposição 6.25. *Sejam* $(A, \mathfrak{m})$ *um anel noetheriano local e* $\mathfrak{q}$ *um ideal* $\mathfrak{m}$*-primário. Assim,* $A/\mathfrak{q}$ *é artiniano.*

Demonstração. Pela proposição 6.22, temos que todo ideal primo de $A/\mathfrak{q}$ é maximal. Assim, pela proposição 6.24, $A/\mathfrak{q}$ é artiniano. □

Relembraremos uma definição vista na Álgebra Comutativa.

Definição 6.26. *Sejam A um anel e M um A-módulo. O conjunto*

$$\operatorname{ann}(M) \coloneqq \{a \in A : am = 0, \forall m \in M\}.$$

é chamado de anulador do módulo M.

Proposição 6.27. *Sejam* $(A, \mathfrak{m})$ *um anel noetheriano local,* $\mathfrak{q}$ *um ideal* $\mathfrak{m}$*-primário, M um A-módulo finitamente gerado e* (M_n) *uma filtração* $\mathfrak{q}$*-estável de M. Então cada* M/M_n *tem comprimento finito e para n suficientemente grande o seu comprimento é um polinômio em n de grau* $d(M)$.

Demonstração. Sejam $Gr(A) = \oplus \mathfrak{q}^n/\mathfrak{q}^{n+1}$, $Gr(M) = \oplus M_n/M_{n+1}$ e $G_0(A) = A/\mathfrak{q}$ artiniano local. Assim, $G(A)$ é noetheriano e $G(M)$ é um $G(A)$-módulo graduado finitamente gerado. Cada $G_n(M) = M_n/M_{n+1}$ é um A-módulo noetheriano tal que $\mathfrak{q} \subseteq \operatorname{ann}(G_n(M))$, logo é um $A/\mathfrak{q}$-módulo noetheriano, e com isso tem um comprimento finito, pois $A/\mathfrak{q}$ é artiniano.

Considere a sequência exata

$$0 \longrightarrow M_{n-1}/M_n \longrightarrow M/M_n \longrightarrow M/M_{n-1} \longrightarrow 0.$$

Assim, $l(M_{n-1}/M_n) = l(M/M_n) - l(M/M_{n-1})$. Logo, $l(M/M_n) = \sum_{j=0}^{n-1} l(M_j/M_{j+1}) = g(n)$. □

Para n suficientemente grande, o polinômio $g(n)$ correspondente a filtração $(\mathfrak{q}^n M)$ é denotado por $\chi_{\mathfrak{q}}^M(n)$.

Proposição 6.28. *Dados quaisquer ideal* $\mathfrak{m}$*-primário* $\mathfrak{q}$ *e filtração* $\mathfrak{q}$*-estável* (M_n)*, os polinômios* $g(n) = l(M/M_n)$ *e* $\chi_{\mathfrak{q}}^M(n) = l(M/\mathfrak{q}^n M)$ *têm o mesmo grau e coeficiente líder.*

Demonstração. Pelo fato de (M_n) ser $\mathfrak{q}$-estável teremos que existe n_0 tal que

$$\mathfrak{q}^{n+n_0} M \subseteq M_{n+n_0} = \mathfrak{q}^n M_{n_0} \subseteq \mathfrak{q}^n M.$$

Isso implica que

$$\chi_{\mathfrak{q}}^M(n+n_0) \geqslant g(n+n_0) \geqslant \chi_{\mathfrak{q}}^M(n).$$

Mas $\chi_{\mathfrak{q}}^M(n+n_0)$ e $\chi_{\mathfrak{q}}^M(n)$ são polinômios em n com mesmo grau e coeficiente líder. Logo, $g(n+n_0)$ e, consequentemente, $g(n)$ também tem o mesmo grau e coeficiente líder. □

Seja $(A, \mathfrak{m})$ um anel noetheriano local e $\mathfrak{q}$ um ideal $\mathfrak{m}$-primário. A série de Poincaré do anel graduado associado $Gr(A) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathfrak{q}^n/\mathfrak{q}^{n+1}$ é dada por

$$P_l(Gr(A), t) = \sum_{n=0}^{\infty} l(\mathfrak{q}^n/\mathfrak{q}^{n+1})t^n.$$

Se $x_1, \ldots, x_s$ geram $\mathfrak{q}$ então $x_i + \mathfrak{q}^2$ tem grau 1, para $1 \leqslant i \leqslant s$, e geram $Gr(A)$ como $A/\mathfrak{q}$-álgebra. Pelo teorema 6.11 temos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} l(\mathfrak{q}^n/\mathfrak{q}^{n+1})t^n = \frac{f(t)}{(1-t)^s},$$

onde que $f(t) \in \mathbb{Z}[t]$. De acordo com teorema 6.14, $l(\mathfrak{q}^n/\mathfrak{q}^{n+1})$ é um polinômio em n de grau $d(A) - 1$, para n suficientemente grande.

Seja $\delta(A)$ o menor número dos geradores de um ideal $\mathfrak{m}$-primário de A. Nosso objetivo é provar que

$$\delta(A) = d(A) = \dim A.$$

Para isso, provaremos que $\delta(A) \leqslant \dim A \leqslant d(A) \leqslant \delta(A)$.

Tomando $s = \delta(A)$ temos que:

Proposição 6.29. $d(A) \leqslant \delta(A)$.

Para provarmos que $\dim A \leqslant d(A)$ precisaremos de alguns resultados.

Proposição 6.30. *Sejam $(A, \mathfrak{m})$ um anel noetheriano local, $\mathfrak{q}$ um ideal $\mathfrak{m}$-primário, M um A-módulo finitamente gerado, $x \in A$ tal que $xm \neq 0$, para todo $m \in M$, e $M' = M/xM$. Assim, se $\deg \chi_{\mathfrak{q}}^M > 0$, então*

$$\deg \chi_{\mathfrak{q}}^{M'} \leqslant \deg \chi_{\mathfrak{q}}^M - 1.$$

Demonstração. Seja $N = xM$. Assim, $N \cong M$ como A-módulos. Tome a filtração $N_n = N \cap \mathfrak{q}^n M$. Com isso, teremos as sequências exatas

$$0 \longrightarrow N/N_n \longrightarrow M/\mathfrak{q}^n M \longrightarrow M'/\mathfrak{q}^n M' \longrightarrow 0.$$

Logo, se $g(n) = l(N/N_n)$, temos que

$$g(n) - \chi_{\mathfrak{q}}^M(n) + \chi_{\mathfrak{q}}^{M'}(n) = 0,$$

para n suficientemente grande. Pelo lema 2.22, (N_n) é uma $\mathfrak{q}$-filtração estável de N. Como $N \cong M$ então, de acordo com a proposição 6.28, $g(n)$ e $\chi_{\mathfrak{q}}^M(n)$ tem o mesmo coeficiente líder. Portanto, a proposição está provada. □

Corolário 6.31. *Se A é um anel noetheriano local e $x \in A$ não é um divisor de zero em A então $d(A/(x)) \leqslant d(A) - 1$.*

Demonstração. Basta tomarmos $M = A$ e aplicarmos a proposição anterior. □

Relembraremos o Lema de Nakayama.

Lema 6.32. (*Lema de Nakayama*) *Sejam M um A-módulo finitamente gerado e $\mathfrak{a} \trianglelefteq A$ contido em $J(A)$. Então $\mathfrak{a}M = M$ implica $M = 0$.*

Demonstração. A prova pode ser encontrada em [2], capítulo 2. □

Corolário 6.33. *Sejam M um A-módulo finitamente gerado, N um submódulo de M e $\mathfrak{a} \subset J(A)$ um ideal. Se $M = \mathfrak{a}M + N$ então $M = N$.*

Demonstração. Aplique o lema 6.32 em M/N. Observe que $\mathfrak{a}(M/N) = (\mathfrak{a}M + N)/N$. □

Dessa forma podemos demonstrar que:

Proposição 6.34. $\dim A \leqslant d(A)$.

Demonstração. Provaremos por indução sobre $d(A)$. Se $d(A) = 0$ então $l(A/\mathfrak{m}^n)$ é constante para n suficientemente grande. Assim, $\mathfrak{m}^n = \mathfrak{m}^{n+1}$ e com isso, pelo lema 6.32, $\mathfrak{m}^n = 0$. Logo, A é artiniano e $\dim A = 0$.

Suponha que $d(A) > 0$ e considere a cadeia de ideais primos em A

$$\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{p}_r.$$

Sejam $x \in \mathfrak{p}_1$ tal que $x \notin \mathfrak{p}_0$, $A' = A/\mathfrak{p}_0$ e x' a imagem de x em A'. Com isso, $x \neq 0$ e A' é um domínio de integridade. Logo, pelo corolário anterior, temos que

$$d(A'/(x')) \leqslant d(A') - 1.$$

Se $\mathfrak{m}'$ é o ideal maximal de A', $A'/\mathfrak{m}'^n$ é a imagem de $\phi : A/\mathfrak{m}^n \to A'/\mathfrak{m}'^n$. Dessa forma, $l(A/\mathfrak{m}^n) \geqslant l(A'/\mathfrak{m}'^n)$ e $d(A) \geqslant d(A')$. Consequentemente

$$d(A'/(x')) \leqslant d(A) - 1.$$

Assim, pela hipótese de indução, o comprimento de qualquer cadeia de ideais primos em $A'/(x')$ é menor do que ou igual a $d - 1$. A imagem de $\mathfrak{p}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{p}_r$ em $A'/(x')$ forma uma cadeia de comprimento $r - 1$. Logo, $r - 1 \leqslant d(A) - 1$ e consequentemente $r \leqslant d(A)$. Portanto, $\dim A \leqslant d(A)$. □

Proposição 6.35. *Sejam A um anel, $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$ ideais primos de A e $\mathfrak{a} = \bigcup_{i=1}^{n} \mathfrak{p}_i$. Assim, $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_i$ para algum i.*

Demonstração. Provaremos por indução sobre n da seguinte forma: Se $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{p}_i$, para $1 \leqslant i \leqslant n$, então $\mathfrak{a} \neq \bigcup_{i=1}^{n} \mathfrak{p}_i$.

Claramente é verdade para $n = 1$. Se $n > 1$ e é válido para $n - 1$ então para cada i existe $x_i \in \mathfrak{a}$ tal que $x_i \notin \mathfrak{p}_j$ quando $i \neq j$. Se para algum i tivermos $x_i \notin \mathfrak{p}_i$ então a prova está completa. Caso contrário, teremos $x_i \in \mathfrak{p}_i$ para todo i. Considere o elemento

$$y = \sum_{i=1}^{n} x_1 x_2 \cdots x_{i-1} x_{i+1} \cdots x_n.$$

Assim, $y \in \mathfrak{a}$ e $y \notin \mathfrak{p}_i$. Portanto, $\mathfrak{a} \neq \bigcup_{i=1}^{n} \mathfrak{p}_i$. □

Definição 6.36. *Sejam A um anel, $\mathfrak{I} \trianglelefteq A$ e $\mathfrak{p} \trianglelefteq A$ primo. O ideal $\mathfrak{p}$ é dito minimal primo de $\mathfrak{I}$ se não existe $\mathfrak{p}_1 \trianglelefteq A$ primo tal que $\mathfrak{I} \subseteq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \mathfrak{p}$.*

Proposição 6.37. *Seja $(A, \mathfrak{m})$ um anel noetheriano local com dimensão d. Assim, existe um ideal $\mathfrak{m}$-primário em A gerado por d elementos $x_1, \ldots, x_d$ e, consequentemente, $\delta(A) \leqslant \dim A$.*

Demonstração. Encontraremos $x_1, \ldots, x_d$ indutivamente de modo que todo ideal primo contendo $(x_1, \ldots, x_i)$ tem comprimento maior do que ou igual a i, para cada i. Suponha $i > 0$ e $x_1, \ldots, x_{i-1}$ satisfazendo essa condição. Sejam $\mathfrak{p}_j$, $1 \leqslant j \leqslant s$, os ideais minimais primos de $(x_1, \ldots, x_{i-1})$ tal que $h(\mathfrak{p}_j) = i - 1$. Como $i - 1 < d = \dim A = h(\mathfrak{m})$ então $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{p}_j$ para todo j. De acordo com, , $\mathfrak{m} \neq \bigcup_{j=1}^{s} \mathfrak{p}_j$. Sejam $x_i \in \mathfrak{m}$, tal que $x_i \notin \bigcup_{j=1}^{s} \mathfrak{p}_j$ e $\mathfrak{q} \trianglelefteq A$ primo que contém $(x_1, \ldots, x_i)$. Assim, $\mathfrak{q}$ contém algum ideal minimal primo $\mathfrak{p}$ de $(x_1, \ldots, x_{i-1})$. Se $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_j$, para algum j, então teremos que $x_i \in \mathfrak{q}$ e $x_i \notin \mathfrak{p}$. Logo, $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}$ e $h(\mathfrak{q}) \geqslant i$. Se $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}_j$, para todo j, então $h(\mathfrak{p}) \geqslant i$ e com isso $h(\mathfrak{q}) \geqslant i$. Dessa forma, todo ideal primo contendo $(x_1, \ldots, x_i)$ tem altura maior do que ou igual a i.

Considere então $(x_1, \ldots, x_d)$. Se $\mathfrak{p} \trianglelefteq A$ é primo e contém $(x_1, \ldots, x_d)$ então $h(\mathfrak{p}) \geqslant d$. Logo, $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}$ e com isso o ideal $(x_1, \ldots, x_d)$ é $\mathfrak{m}$-primário, pois $\sqrt{(x_1, \ldots, x_d)} = \mathfrak{m}$. □

Dessa forma podemos concluir que:

Teorema 6.38. *(Teorema de Dimensão) Para qualquer anel noetheriano local $(A, \mathfrak{m})$ temos que $\dim(A) = d(A) = \delta(A)$.*

Demonstração. Segue pelas proposições 6.29, 6.34 e 6.37. □

Corolário 6.39. *Se $(A, \mathfrak{m})$ é um anel noetheriano local e $\widehat{A}$ é o seu $\mathfrak{m}$-completamento então $\dim A = \dim \widehat{A}$.*

Demonstração. Pelo corolário 3.31 podemos concluir que $A/\mathfrak{m}^n \cong \widehat{A}/\widehat{\mathfrak{m}}^n$. Logo, $\chi^A_{\mathfrak{m}}(n) = \chi^{\widehat{A}}_{\widehat{\mathfrak{m}}}(n)$. □

Definição 6.40. *Seja A um anel noetheriano local. Se $x_1, x_2, \ldots, x_d$ geram um ideal $\mathfrak{m}$-primário e $\dim(A) = d$, então $\{x_1, x_2, \ldots, x_d\}$ é chamado de um sistema de parâmetros de A.*

Os próximos resultados são úteis para encontrarmos algumas propriedades de dimensão para $\mathfrak{m}$-completamentos de um anel A noetheriano.

Lema 6.41. *Se $S \subset A$ é multiplicativamente fechado então $\dim(S^{-1}A) \leqslant \dim(A)$. Além disso, se $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$, então $\dim(A_\mathfrak{p}) = h(\mathfrak{p}) \leqslant \dim(A)$.*

Demonstração. Segue imediatamente pela correspondência bijetiva entre os ideais primos de $S^{-1}A$ e o ideais primos de A tais que a interseção com S é vazia. □

Proposição 6.42. *Sejam A um anel noetheriano, $\mathfrak{m} \trianglelefteq A$, $\widehat{A}$ o seu $\mathfrak{m}$-completamento, $\mathfrak{n} \trianglelefteq \widehat{A}$ maximal e $\mathfrak{r} = f^{-1}(\mathfrak{n}) \trianglelefteq A$ maximal (veja o teorema 5.11). Assim, o $\mathfrak{m}'$-completamento de $\widehat{A}_\mathfrak{n}$ e o $\mathfrak{m}''$-completamento de $A_\mathfrak{r}$ são isomorfos, onde que $\mathfrak{m}' \trianglelefteq \widehat{A}_\mathfrak{n}$ e $\mathfrak{m}'' \trianglelefteq A_\mathfrak{r}$ são maximais.*

Demonstração. Veja em [1], capítulo 6. □

Seja $\widehat{A}$ o $\mathfrak{m}$-completamento de A. Suponhamos que $\mathfrak{m} \subset J(A)$. Assim, existe uma bijeção entre o conjunto dos $\mathfrak{n} \trianglelefteq \widehat{A}$ maximais e o conjunto dos $\mathfrak{r} \trianglelefteq A$ maximais (veja teorema 5.11). Com isso, pelo lema 6.41, $h(\mathfrak{n}) = \dim(\widehat{A}_\mathfrak{n})$ e $h(\mathfrak{r}) = \dim(A_\mathfrak{r})$. Pela proposição anterior, os completamentos dos anéis locais $A_\mathfrak{r}$ e $\widehat{A}_\mathfrak{n}$ são isomorfos. De acordo com o corolário 6.39, temos que eles tem a mesma dimensão. Dessa forma, segue que $h(\mathfrak{n}) = h(\mathfrak{r})$ e consequentemente $\dim(A) = \dim(\widehat{A})$.

Se $\mathfrak{m}$ não está contido em $J(A)$ então a afirmação anterior não é necessariamente verdadeira. Neste caso temos a bijeção entre os ideais maximais de $\widehat{A}$ e os ideais maximais de A que contém $\mathfrak{m}$. Assim, segue que $\dim(\widehat{A}) = \sup h(\mathfrak{n})$, onde que $\mathfrak{n} \trianglelefteq A$ é maximal e contém $\mathfrak{m}$. Logo, temos que $\dim(\hat{A}) \leqslant \dim(A)$.

Dessa forma podemos enunciar o seguinte teorema.

Teorema 6.43. *Sejam A um anel noetheriano, $\mathfrak{m} \trianglelefteq A$ e $\widehat{A}$ o $\mathfrak{m}$-completamento. Assim, $\dim(\widehat{A}) \leqslant \dim(A)$ e a igualdade é verdadeira quando $\mathfrak{m} \subset J(A)$.*

Definição 6.44. *Seja $(A, \mathfrak{m})$ um anel noetheriano local. Um sistema de parâmetros de A é dito regular se gera o ideal maximal $\mathfrak{m}$. Se A tem um sistema de parâmetros regular então A é um anel regular local.*

Proposição 6.45. *Suponha que A é um anel noetheriano local e $\dim A = d$. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

i) $Gr_\mathfrak{m}(A) \cong (A/\mathfrak{m})[t_1, \ldots, t_d]$;

ii) $\dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = d$*;*

iii) $\mathfrak{m}$ *é gerado por d elementos;*

iv) A é um anel regular local.

Demonstração. Claramente $(i) \Rightarrow (ii)$ e $(iii) \Leftrightarrow (iv)$ segue pela definição de anel regular local.

Provaremos que $(ii) \Rightarrow (iii)$. Sejam $x_i \in \mathfrak{m}$, $1 \leqslant i \leqslant d$, cuja imagem em $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ forma uma base. Considere $\mathfrak{a}$ o ideal gerado por x_i. Assim, teremos a aplicação natural $f : \mathfrak{a} \to \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$. Como $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = \mathfrak{a}/\mathfrak{m}^2 = (\mathfrak{a}+\mathfrak{m})/\mathfrak{m}^2$ então $\mathfrak{a}+\mathfrak{m}^2 = \mathfrak{m}$. Logo, pelo corolario 6.33, $\mathfrak{a} = \mathfrak{m}$.

Mostraremos que $(iii) \Rightarrow (i)$. Suponha que $x_1, \ldots, x_d$ geram $\mathfrak{m}$, ou seja, formam um sistema de parâmetros. Dessa forma, teremos o epimorfismo

$$\begin{cases} \phi & : & (A/\mathfrak{m})[t_1, \ldots, t_d] & \longrightarrow & Gr_{\mathfrak{m}}(A) \\ & & t_i & \longmapsto & \overline{x_i} \end{cases}$$

Se ϕ não é um isomorfismo então existe um elemento não nulo $g \in \ker \phi$. Assim,

$$d(Gr_{\mathfrak{m}}(A)) \leqslant d((A/\mathfrak{m})[t_1, \ldots, t_d]/(g))$$

pois $Gr_{\mathfrak{m}}(A) \cong (A/\mathfrak{m})[t_1, \ldots, t_d]/\ker \phi$. Como $(A/\mathfrak{m})[t_1, \ldots, t_d]$ é um domínio então, pela proposição 6.15,

$$d((A/\mathfrak{m})[t_1, \ldots, t_d]/(g)) = d((A/\mathfrak{m})[t_1, \ldots, t_d]) - 1$$

Pelo exemplo 6.16 temos que $d((A/\mathfrak{m})[t_1, \ldots, t_d]) = d$. De acordo com teorema 6.38, $d(Gr_{\mathfrak{m}}(A)) = d$. Assim,

$$d = d(Gr_{\mathfrak{m}}(A)) \leqslant d((A/\mathfrak{m})[t_1, \ldots, t_d]/(g)) = d - 1.$$

Com isso chegaríamos a uma contradição. Portanto, ϕ é um isomorfismo. □

Proposição 6.46. *Seja A um anel noetheriano local. Assim, A é regular se, e somente se,* $\widehat{A}$ *é regular.*

Demonstração. De acordo com o corolário 5.12 e os teoremas 5.25 e 6.43 teremos que $(\widehat{A}, \widehat{\mathfrak{m}})$ é um anel noetheriano local com a mesma dimensão de A. Pela proposição 3.28 e corolário 3.31 podemos concluir que $Gr_{\mathfrak{m}}(A) \cong Gr_{\widehat{\mathfrak{m}}}(\widehat{A})$ e o resultado está provado. □

REFERÊNCIAS

[1] GRECO, S.; SALMON, P. *Topics in m-adic Topologies*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2012. v. 58.

[2] ATIYAH, M.; MACDONALD, I. Introduction to commutative algebra, addisonwesley. *Reading, MA*, 1969.

[3] BOURBAKI, N. *Commutative algebra*. [S.l.]: Hermann, 1972. v. 8.

[4] NAGATA, M. Local rings. *Interscience Tracts in Pure and Appl. Math.*, Wiley, 1962.

[5] SALMON, P. Sur les séries formelles restreintes. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, v. 92, p. 385–410, 1964.

[6] ZARISKI, O.; SAMUEL, P. Commutative algebra volume 1, band 28 aus. *Graduate texts in mathematics*, 1958.

[7] ZARISKI, O.; SAMUEL, P. Commutative algebra volume 2. *Graduate texts in mathematics*, 1960.

[8] CONWAY, J. H.; GUY, R. K. Faulhaber's formula. *The Book of Numbers*, Springer-Verlag, p. 116, 1996.

[9] IGUSA, K. Commutative algebra, lect. notes.

[10] Stacks project authors, T. *Completion*. 2020. `https://stacks.math.columbia.edu/tag/00M9`.

[11] Stacks project authors, T. *Completion for Noetherian rings*. 2020. `https://stacks.math.columbia.edu/tag/0BNH`.