

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Campus de São José do Rio Preto

MAX ROBERT MARINHO

**Uma contribuição ao estudo do ajuste
ótimo de parâmetros para cálculo de
campos eletromagnéticos descontínuos
com o método EFG**

Marinho, Max Robert.

Uma contribuição ao estudo do ajuste ótimo de parâmetros paracálculo de campos eletromagnéticos descontínuos com o método EFG /Max Robert Marinho. - São José do Rio Preto : [s.n.], 2012.

62 f. : 54 il. ; 30 cm.

Orientador: José Márcio Machado

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Campos Eletromagnéticos. 2. Análise Meshfree. 3. Tratamento de Descontinuidades. I. Machado, José Márcio. II. Universidade Estadual Paulista, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. III. Uma contribuição ao estudo do ajuste ótimo de parâmetros paracálculo de campos eletromagnéticos descontínuos com o método EFG.

CDU – 537.8

MAX ROBERT MARINHO

Uma contribuição ao estudo do ajuste ótimo de parâmetros
para cálculo de campos eletromagnéticos descontínuos com o
método EFG

Orientador: Prof. Dr. José Márcio Machado

Dissertação de Mestrado elaborada junto ao
Programa de Pós-Graduação em Ciência da
Computação – Área de Concentração: Computação
Científica, como parte dos requisitos para a
obtenção do título de Mestre em Ciência da
Computação.

UNESP
2012

MAX ROBERT MARINHO

Uma contribuição ao estudo do ajuste ótimo de parâmetros para cálculo de campos eletromagnéticos descontínuos com o método EFG

Dissertação apresentada para obtenção do título de Mestre em Ciência da Computação, área de Matemática Computacional junto ao Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de São José do Rio Preto.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. José Márcio Machado
Professor Assistente Doutor
UNESP – São José do Rio Preto
Orientador

Prof. Dr. Manoel Ferreira Borges
Professor Assistente Doutor
UNESP – São José do Rio Preto

Prof. Dr. Angelo Passaro
Professor Assistente Doutor
IEAv – São José dos Campos

São José do Rio Preto, 03 de Julho de 2012

À minha amada esposa Carolina.
Às minhas amadas filhas Beatriz e Heloísa.
Aos meus pais, Jean e Tânia.
Aos meus irmãos Jean Jr. e Paulo.
Dedico

Agradecimentos

Primeiramente a Deus, acima de tudo, que me fez trilhar por caminhos tortuosos, para que eu pudesse dar valor e tivesse orgulho de tudo o que até hoje fiz.

Ao meu orientador Prof. Dr. José José Márcio Machado que muito de seu tempo e paciência doou para que este trabalho pudesse ter sido desenvolvido.

À minha esposa Carolina e filhas Beatriz e Heloísa pela paciência, incentivo e tempo de suas vidas que foram doados de bom grado para que eu pudesse ascender profissionalmente. Por terem me entendido quando suas atenções, amor e carinho não podiam ser correspondidos.

A meu companheiro, amigo, parceiro de pesquisa e de vinho, Prof. Dr. Gleber Nelson Marques, por muito ter me ajudado, e também, orientado, e ser uma das pessoas que me ensinaram de que *sei que nada sei*.

Aos meus pais, irmãos e cunhadas por terem me incentivado e compreendido quando meus pensamentos eram somente para o cunho científico.

Aos meus amigos Sérgio, Toni, Romir, Aroldo, Shirlene, Ubirajara, por também entenderem a minha necessidade com este trabalho científico e terem tomado para si responsabilidades as quais algumas eu deveria ter tomado.

Aos meus colegas de pós-graduação, principalmente a meu amigo Danilo, por termos estudado juntos e aprendido muito do que não sabíamos.

Sumário

Sumário.....	v
Introdução.....	1
Capítulo 1 - MEF & MEFG	3
1.1. O método dos elementos finitos.....	3
1.1.1 - Malha de elementos finitos.....	3
1.1.2 – Continuidade da aproximação.....	4
1.2. Métodos meshfree/meshless	5
1.2.1. A ausência de uma malha	5
1.2.2. Continuidade da aproximação	6
1.3. Métodos meshfree na atualidade	6
1.3.1. Um pouco de história.....	6
1.4. O método element-free Galerkin (EFG).....	7
1.4.1. Formulação básica para um método <i>meshfree</i>	7
1.4.2. Aspecto local da aproximação EFG	8
1.5. A metodologia padrão e de consistência do MEFG	9
1.5.1. Domínios de Influência Nodal.....	9
1.5.2. As funções peso	10
1.5.3. Formulação Padrão.....	12
1.5.4. Abordagem de Consistência	12
1.6. Função de forma interpolante	14
1.7. Definição das matrizes P e W	15
Capítulo 2 – Tratamento de descontinuidades	17
2.1. Truncamento de domínios.....	18
2.2. Critério de visibilidade.....	19
2.3. Refinamento de malha cell-by-cell	21
2.4. Método da transparência.....	22
Capítulo 3 – Tratamento Auto-Adaptativo de Interfaces para o método EFGI em problemas eletromagnéticos.....	24
3.1. Tratamento de condições de interface.....	25
3.2. Algoritmo auto-adaptativo para tratamento de condições de interface.....	25
3.2.1. Ajuste do Parâmetro DELTA (δ)	28
3.2.2. Ajuste da precisão da interface	28
3.3. Impacto em classes e arquivos.....	30
Capítulo 4 – Testes e Resultados	32
4.1. Campo de Correntes Estacionárias.....	32
4.1.1. Resultados.....	35
4.2. Eletrostática em diferentes meios.....	41
4.2.1. Resultados.....	44
Considerações Finais e Perspectivas Futuras	56
Referências Bibliográficas	58

Lista de Figuras

Figura. 1.1 – Ilustração de uma malha de elementos finitos [29].....	4
Figura 1.2 – Aproximação pelo MEF de ordem 1 e primeira derivada [29]	5
Figura 1.3 – Zona de influência nodal em elementos finitos [21].....	8
Figura 1.4 – Domínio de influência nodal [21]	8
Figura 1.5 – Domínio de influência: Conectividade nodal [29].....	9
Figura 1.6 - Domínio de influência circular [29].....	10
Figura 1.7 - Domínio de influência retangular [29].....	10
Figura 1.8 – Exemplo de Distribuições Patológicas de pontos nodais.....	14
Figura 1.9 – Definição dos domínios.....	15
Figura 2.1 – Ilustração da técnica de truncamento de domínios	18
Figura 2.2 – Domínios de influência para o critério da visibilidade	19
Figura 2.3 – Linhas de contorno das funções peso e de forma para nós próximos a uma linha de descontinuidade [9].....	20
Figura 2.4 – Funções de forma determinadas pelo critério de visibilidade para nós próximos a uma linha de descontinuidade [9].....	21
Figura 2.5 – Refinamento de malha em região que requer alta resolução [42].....	21
Figura 2.6 – Algoritmo para o refinamento <i>cell-by-cell</i> [42]	22
Figura 2.7 – Raio de suporte para o método de transparência.....	23
Figura 2.8 – Gráfico da função de forma para o nó <i>I</i> pelo método de transparência.....	23
Figura 3.1 – Visão esquemática dos elementos do algoritmo auto adaptativo.....	26
Figura 3.2 – Algoritmo auto-adaptativo para tratamento de condições de interface.....	27
Figura 4.1 – Representação do resistor de placas planas em contato parcial	32
Figura 4.2 – Representação das malhas de 430 (a) e 800 (b) nós para o resistor.....	32
Figura 4.3 – Equipotenciais elétricas.....	33
Figura 4.4 – Mapa de cores do campo elétrico e vetores do campo elétrico.....	34
Figura 4.5 – Linha de avaliação.....	34
Figura 4.6 – Potencial elétrico (a) e descontinuidade na derivada da aproximação (b).....	35
Figura 4.7 – Ilustração das medidas do dispositivo.....	35
Figura 4.8 – Erro médio relativo à componente <i>x</i> do campo elétrico para valores decrescentes de δ , com uma malha de 430 nós	36
Figura 4.9 – Erro médio relativo à componente <i>x</i> do campo elétrico para valores decrescentes de δ , com uma malha de 800 nós	37
Figura 4.10 – Erro médio relativo à componente <i>y</i> do campo elétrico para valores decrescentes de δ , com uma malha de 430 nós	38
Figura 4.11 – Erro médio relativo à componente <i>y</i> do campo elétrico para valores decrescentes de δ , com uma malha de 800 nós	38
Figura 4.12 – Derivada contínua de interface.....	39
Figura 4.13 – Derivada descontínua de interface	40
Figura 4.14 – Ilustração do domínio do meio dielétrico tratado	41
Figura 4.15 – Representação das malhas de 430 (a) e 800 (b) nós.....	42
Figura 4.16 – Linhas equipotenciais elétricas	42
Figura 4.17 – Mapa de cores e vetores do campo elétrico	43
Figura 4.18 – Linha de avaliação.....	43
Figura 4.19 – Potencial elétrico (a) e descontinuidade da derivada da aproximação (b).....	44

Figura 4.20 – Ilustração das medidas do dispositivo.....	44
Figura 4.21 – Erro médio, relativo à componente x do campo elétrico para valores decrescentes de δ , numa malha de 430 nós, na combinação Ar-Mica	45
Figura 4.22 - Erro médio, relativo à componente x do campo elétrico para valores decrescentes de δ , numa malha de 800 nós, na combinação Ar-Mica	46
Figura 4.23 - Erro médio, relativo à componente x do campo elétrico para valores decrescentes de δ , numa malha de 430 nós, na combinação Ar-Porcelana	46
Figura 4.24 - Erro médio, relativo à componente x do campo elétrico para valores decrescentes de δ , numa malha de 800 nós, na combinação Ar-Porcelana	47
Figura 4.25 - Erro médio, relativo à componente y do campo elétrico para valores decrescentes de δ , numa malha de 430 nós, na combinação Ar-Mica	47
Figura 4.26 - Erro médio, relativo à componente y do campo elétrico para valores decrescentes de δ , numa malha de 800 nós, na combinação Ar-Mica	48
Figura 4.27 - Erro médio, relativo à componente y do campo elétrico para valores decrescentes de δ , numa malha de 430 nós, na combinação Ar-Porcelana	48
Figura 4.28 - Erro médio, relativo à componente y do campo elétrico para valores decrescentes de δ , numa malha de 800 nós, na combinação Ar-Porcelana	49
Figura 4.29 – Derivada contínua de interface, para $int1$	50
Figura 4.30 – Derivada contínua de interface, para $int3$	51
Figura 4.31 – Derivada contínua de interface, para $int2$	52
Figura 4.32 – Derivada contínua de interface, para $int4$	52
Figura 4.33 – Derivada descontínua de interface, para $int1$	53
Figura 4.34 – Derivada descontínua de interface, para $int3$	53
Figura 4.35 – Derivada descontínua de interface, para $int2$	54
Figura 4.36 – Derivada descontínua de interface, para $int4$	54

RESUMO

O método element-free Galerkin (EFG) com a abordagem interpolante e combinado com a técnica de truncamento de domínio provou ser uma fácil e eficiente técnica para o tratamento de descontinuidades físicas na equação de Poisson. Uma boa acurácia para esta abordagem é alcançada quando a discretização nas linhas das interfaces materiais são apropriadamente refinadas. Este trabalho trata o estudo de parâmetros os quais servem de ajuste para um cálculo mais refinado da descontinuidade em problemas eletromagnéticos, para uma combinação de diferentes materiais com diferentes discretizações.

Palavras-chave: Campos eletromagnéticos, Análise Meshfree, Tratamento de Descontinuidades

ABSTRACT

The element free-Galerkin (EFG) method with the interpolating approach and combined with the domain truncation technique proved to be an easy and efficient method for the treatment of physical discontinuities in Poisson's equation. A good accuracy for this approach is achieved when the discretization on the lines of the material interfaces are properly refined. This work deals with the study of parameters which serve as the setting for a more refined calculation of the discontinuity in electromagnetic problems, with a combination of different materials with different discretizations.

Key-words: Eletromagnetic Fields, Meshfree Analysis, Treatment of Discontinuities

Introdução

Entre os métodos matemáticos mais consagrados encontra-se o método dos elementos finitos, com finalidade de se resolver equações diferenciais parciais (edp's) sendo, então, amplamente utilizado nas mais diversas áreas científicas. Sua formulação depende da construção de uma malha de elementos finitos, o que significa uma decomposição do domínio de estudo em uma união de subdomínios topologicamente regulares e não intersectantes.

Métodos numéricos sem a necessidade da formulação de uma malha para a discretização do domínio surgiram como uma nova abordagem matemática permitindo novas alternativas para o tratamento de problemas de maior complexidade, como problemas com geometria muito irregular e/ou propagação de rachaduras.

Estes métodos que apareceram há cerca de três décadas foram denominados métodos *meshfree* ou *meshless*. Tais métodos apresentam leves diferenças quanto às suas formulações com relação aos métodos dos elementos finitos, mas suas bases teóricas são de grande semelhança.

Neste trabalho faz-se o estudo de um desses métodos, proposto em 1994 por [8], o método “*Element Free Galerkin*” (EFG). O método proposto a ser estudado combina em sua formulação a técnica de aproximação “*Moving Least Squares*” (MLS) com o procedimento Galerkin para a resolução de edp's. Estudos como a abordagem de consistência [11], a interpolante [29] e a interpolante com domínio truncado [21] indicam resultados que puderam prover melhorias significativas ao método.

Mesmo sendo um método com resultados significativos, o EFG possui certas particularidades como quaisquer outros métodos numéricos, podendo se citar, dentre elas, alguns cuidados especiais no tratamento de descontinuidades. Estas descontinuidades podem ocorrer nas condições de contorno, na interface material, nos gradientes. O tratamento destas descontinuidades é necessário pois traz uma melhor qualidade nas aproximações obtidas.

Como objetivo principal deste trabalho está a proposta de um tratamento auto adaptativo de interfaces materiais no método EFGM para problemas eletromagnéticos a fim de se reduzir oscilações indesejadas e se ter uma melhor aproximação.

O trabalho se desenvolve, para o capítulo 1, com uma fundamentação, um histórico dos métodos MEF e o método EFG, juntamente com as metodologias padrão e de consistência do método EFG. No capítulo 2, são explicadas, sucintamente, algumas

técnicas utilizadas para o tratamento de descontinuidades em métodos numéricos. A abordagem interpolante com domínio truncado para o método EFG, e as técnicas correlatas que foram utilizadas para a obtenção dos resultados neste trabalho, são descritas nos capítulos 1 e capítulo 2, onde são tratadas as funções de forma interpolantes e um método de tratamento de descontinuidades, respectivamente. Já no capítulo 3 é mostrada a proposta de um algoritmo para o tratamento auto adaptativo de interfaces materiais, juntamente com as análises dos parâmetros necessários para o algoritmo auto-adaptativo. O capítulo 4 exibe os resultados obtidos para o ajuste do parâmetro δ , nas linhas de interface materiais em dois dispositivos eletromagnéticos. Finalmente, são feitas as considerações finais e referências bibliográficas.

Capítulo 1 - MEF & MEEG

1.1. O método dos elementos finitos

O método dos elementos finitos (MEF) consiste basicamente na construção de uma aproximação contínua por partes, que combinada com a técnica dos resíduos ponderados resulta na obtenção de equações discretas. Mesmo com o MEF tendo surgido há bem mais de sessenta anos, somente há duas décadas que sua exploração veio a ter um aumento significativo devido à evolução dos computadores, desta forma, apresentando resultados importantes e confiáveis em diversas áreas, e em particular no estudo de campos eletromagnéticos.

A aplicação deste método se limitava ao baixo poder computacional, dos computadores digitais da década de 50, como pouca memória e processadores de baixa velocidade; já para os tempos modernos (séc. XXI), na ausência desta limitação em grande parte das aplicações, e com o advento da tecnologia de processamento de alto desempenho, o grau de maturação do MEF tornou-se bastante avançado.

Mesmo sendo um método consagrado, robusto, e aplicável nos mais diversos problemas, como mecânica estrutural, mecânica dos fluídos e eletromagnetismo, o MEF ainda possui certas limitações, como a necessidade de uma malha para a discretização do domínio, e uma baixa ordem de continuidade da aproximação para uma base linear.

1.1.1 - Malha de elementos finitos

Uma malha de elementos finitos é de suma importância, e se mal gerada, de má qualidade, ela afeta diretamente a aproximação de forma negativa. A formulação do MEF utiliza informações geométricas dos elementos da malha para cálculo de matrizes locais, de modo que uma malha contendo elementos muito distorcidos, ângulos muito obtusos, pode vir a causar mal condicionamento e comprometer a aproximação. Para o caso de problemas apresentando contornos muito irregulares, a solução proposta pelo MEF irá fornecer uma aproximação confiável se a malha gerada for de boa qualidade [29]. A Figura.1.1 ilustra, como exemplo, uma malha com elementos triangulares.

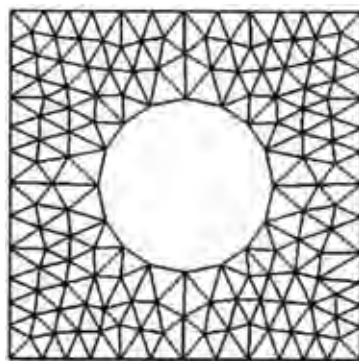


Figura. 1.1 – Ilustração de uma malha de elementos finitos [29]

Problemas com domínios bidimensionais já são amplamente estudados, existindo, portanto, diversos algoritmos robustos capazes de gerar malhas com qualidades bastante aceitáveis em grande parte dos casos (Algoritmo de Delaunay, Propagação Frontal, etc). Para o estudo em domínios tridimensionais, estudos estão ainda sendo realizados [49][50].

Particularidades como a presença de meio heterogêneos, geometrias muito irregulares, e características quanto ao comportamento físico do dispositivo, induzem a descontinuidades, onde, em certos casos, a única forma de tratamento possa ser a geração de uma nova malha [21][29].

1.1.2 – Continuidade da aproximação

Para o MEF é o grau do polinômio que rege a continuidade da aproximação, sendo realizada localmente a solução a cada elemento. Desta forma, para elementos finitos de primeira ordem as aproximações das variáveis de estado, no interior de cada elemento, serão lineares. Ao se traçar uma linha, num domínio bidimensional, atravessando-se uma certa quantidade de elementos, percebe-se que a função possui um comportamento em forma de degrau, sendo muito perceptível a descontinuidade no momento em que se atravessa de um elemento para outro [29][35].

Os gráficos da Figura. 1.2 ilustram a solução da equação $\nabla^2 T(x) = 2$, com condição de contorno $T(0) = 0$ e cuja solução exata é $T(x) = x^2$. A aproximação por elementos finitos de primeira ordem sempre terá a primeira derivada descontínua na interface entre elementos onde os valores da derivada diferem [29].

Um aumento no grau do polinômio de interpolação nos elementos é uma boa forma de se tratar esta descontinuidade da derivada, utilizando-se elementos finitos de segunda ordem ou maior. Este aumento no grau do polinômio implica em um aumento no custo computacional, pois as matrizes envolvidas no método terão maior ordem que antes,

trazendo uma maior carga de processamento computacional de acordo com que se aumenta o grau do polinômio.

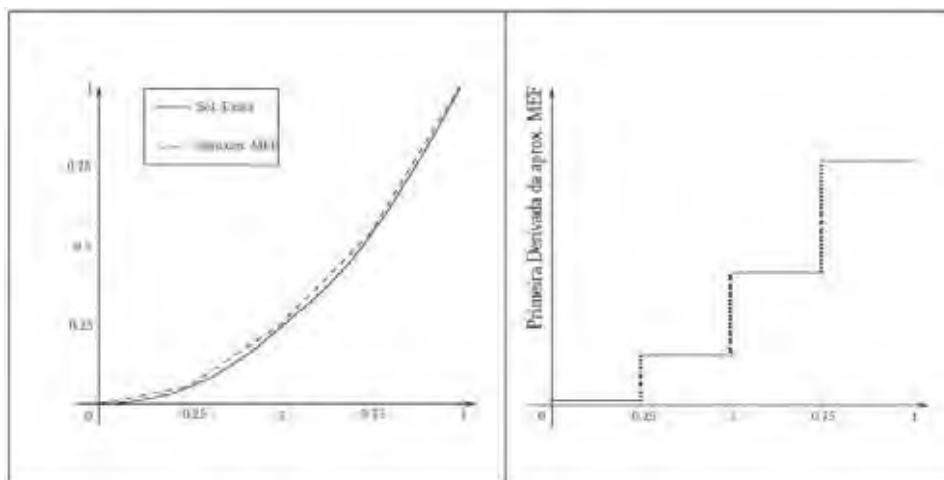


Figura 1.2 – Aproximação pelo MEF de ordem 1 e primeira derivada [29]

1.2. Métodos *meshfree*/meshless

O método *meshfree* baseia-se num conjunto de pontos em um domínio, um conjunto de funções de ponderação (não necessitando de uma malha), e em uma base de funções de expansão. A continuidade da aproximação não depende somente da base local de expansão, mas também das funções peso, podendo ser facilmente obtidas aproximações da classe de continuidade C^∞ mesmo se utilizando base de expansão polinomial linear.

1.2.1. A ausência de uma malha

Uma característica essencial dos métodos *meshfree* é a construção das funções de forma sem a necessidade da geração de uma malha. As formulações destes métodos são baseadas em um conjunto de pontos, chamados nós, e em um conjunto de funções de ponderação respectivamente associadas a cada nó [8] [21]. Na prática gera-se uma nuvem de pontos na etapa de pré-processamento, ao invés da geração de uma malha, por meio de critérios ou condições que devem ser atendidos para esta distribuição, como o não enquadramento em padrões patológicos de distribuição de pontos. O custo computacional para a geração de uma nuvem de pontos é bem inferior, em geral, ao custo da geração de uma malha, principalmente em três dimensões.

1.2.2. Continuidade da aproximação

As aproximações dos métodos *meshfree* produzem soluções na ordem de C^∞ por meio de uma escolha adequada de funções de ponderação. Desta forma, as derivadas de uma aproximação *meshfree* são contínuas em todo o domínio, ao contrário das aproximações obtidas com elementos finitos de primeira ordem.

Problemas com formulações diferenciais possuindo derivadas de altas ordens podem ser resolvidas quando se utiliza uma base de expansão linear, bastando somente ter uma escolha aceitável das funções peso [29].

Outras características, além da não necessidade de uma malha e do aumento da continuidade da aproximação, estão presentes nos métodos *meshfree*, tais como a obtenção de matrizes esparsas devido ao caráter local da aproximação, mas menos esparsas que as obtidas com o MEF, característica esta que é regida pelas funções de ponderação. Mesmo as matrizes dos métodos *meshfree* sendo menos esparsas do que as obtidas com o método MEF, o custo computacional ainda é considerado menor, devido a não estar se trabalhando com elementos e sim com domínios de influência, onde mesmo por meio de uma base polinomial linear alcançam-se continuidades da ordem de C^∞ [21].

1.3. Métodos meshfree na atualidade

1.3.1. Um pouco de história

As origens dos métodos *meshfree* datam de mais de 30 anos, mas resultados realmente significativos ocorrerem nos últimos dez anos [9][11][13]. Um marco de partida foi o método “*Smooth Particle Hydrodynamics*” (SPH) [1], o qual foi usado na modelagem de problemas de Astrofísica sem contornos, como a explosão de estrelas e nuvens de poeira. Na década de oitenta, poucos trabalhos deram continuidade ao método SPH, como [2]. Avanços em técnicas de estabilização, dentre outros aprimoramentos foram publicados em [3] [4] [5].

No final do século XX, outra abordagem para a construção de métodos *meshfree* estava sendo investigada: o uso de aproximação “*Moving Least Squares*” (MLS). Inicialmente, foram empregadas em trabalhos de ajustes de curvas e superfícies [6]. Em [7] publicou-se o “Métodos dos Elementos Difusos” (MED), um método *meshfree* que empregava originalmente o uso de aproximantes MLS em um procedimento de Galerkin. Já [8] propôs modificações e refinamentos no MED, como o uso de derivadas completas e

o uso da quadratura de ordens mais elevadas para integração das equações discretas, assim obtendo uma maior acurácia. Tal método foi denominado “*Element-free Galerkin*” (EFG) [8]. Consistência [9] e estabilidade [10] são marcas de métodos construídos pela abordagem das aproximantes MLS. Por outro lado, [8] considera que tais abordagens são caras no que diz respeito ao custo computacional, quando comparadas ao método SPH.

1.4. O método element-free Galerkin (EFG)

O método *element-free Galerkin* é um método *meshfree* recente que utiliza a técnica das aproximantes MLS. A literatura especializada apresenta ótimos resultados para a análise de estruturas [8][9][11][12], na aplicação em campos eletromagnéticos [13][14][15][16], e com avanços significativos em problemas eletrostáticos [17][20], em dispersão de ondas eletromagnéticas [18] e em pesquisas computacionais [19].

Este trabalho tem por objetivo estudar soluções para tratamentos de interfaces pelo método EFG, e apresentar uma possível solução de caráter auto-adaptativo para o tratamento de interfaces com abordagem interpolante e presença de domínio truncado [21].

1.4.1. Formulação básica para um método *meshfree*

O termo *meshless* ou *meshfree* define os métodos numéricos cujas formulações são construídas sem a necessidade de uma malha.

Para o cálculo da aproximação em qualquer ponto \mathbf{x} de um domínio Ω , suponhamos que se necessite aproximar uma função $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ num domínio Ω por \mathbf{u}^h . Geram-se, então, os nós como sendo um conjunto de N pontos $\mathbf{x}_I \in \Omega$, de modo que para cada nó esteja associado um parâmetro de aproximação, ou seja, o parâmetro nodal u_I [29].

Constrói-se, então, uma base de funções de forma $B_\phi = \{\phi_1(\mathbf{x}), \dots, \phi_N(\mathbf{x})\}$ por meio das aproximantes MLS, onde cada função ϕ_I está associada a um nó. Desta forma, ao se determinar os parâmetros nodais é possível calcular a aproximação em qualquer ponto \mathbf{x} de um domínio Ω pela expressão a seguir:

$$u(\mathbf{x}) \approx u^h(\mathbf{x}) = \sum_I^N \phi_I(\mathbf{x}) \cdot u_I.$$

A continuidade da aproximação é diretamente influenciada pelo conjunto de funções de forma ϕ_I , onde caso $\phi_I \in C^p$, ($p \geq 0$), a aproximação também será de classe C^p . Estas funções anulam-se em uma pequena vizinhança dos nós que estão associados, vizinhança esta chamada de domínio de influência.

1.4.2. Aspecto local da aproximação EFG

O suporte nodal, mencionado anteriormente, é a vizinhança de um nó sobre a qual a função de forma não é identicamente nula. Em elementos finitos, por exemplo, a função de forma associada ao nó i tem seu suporte Ω_i definido pelos elementos que têm o nó i como vértice (Figura 1.3) [29]. Isto implica que o nó x_i contribui na aproximação em um ponto x_p se $x_p \in \Omega_i$.

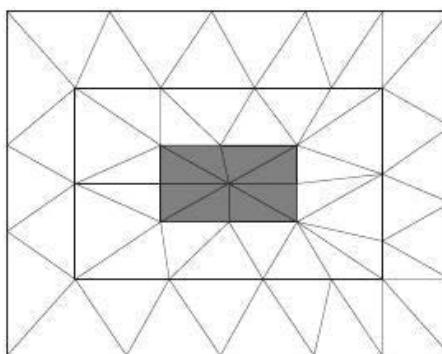


Figura 1.3 – Zona de influência nodal em elementos finitos [21]

Em uma aproximação para o método EFG, um nó x_i contribuirá para a aproximação em um ponto x_p se $x_p \in \Omega_i$. O suporte nodal Ω_i é definido pelo cálculo de uma função de ponderação $w_i(x)$, associada ao nó x_i (Figura 1.4) [29], a qual é chamada de função peso na formulação do método EFG. O suporte nodal de um nó x_i , também chamado domínio de influência, é o subdomínio dos pontos $x \in \Omega_i$ tais que $w_i(x) \neq 0$. A função de ponderação $w_i(x)$ tende a zero na medida com que se afasta de seu nó associado x_i , ou seja, quanto mais longe do nó, a contribuição do nó x_i para a aproximação de um ponto $x_p \in \Omega_i$, diminui.

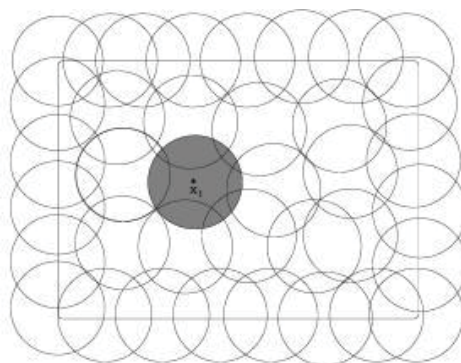


Figura 1.4 – Domínio de influência nodal [21]

1.5. A metodologia padrão e de consistência do MEFG

Para uma aplicação do método EFG necessita-se de um domínio discretizado por meio de nós (pontos nodais), onde para cada nó existe um domínio de influência associado a ele. A conectividade nodal se apresenta por meio da sobreposição desses domínios (Figura 1.5).

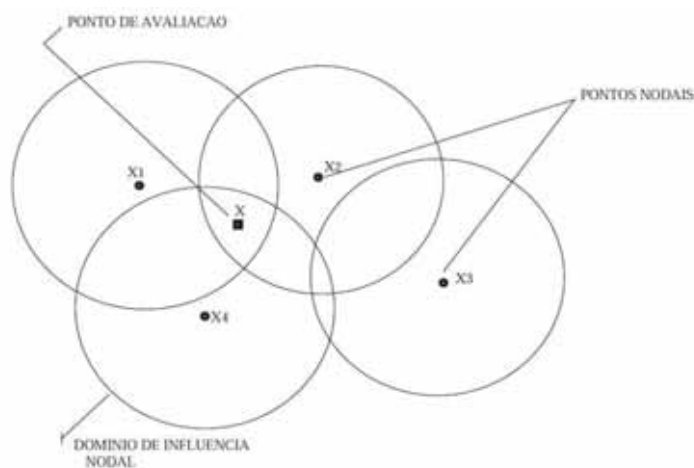


Figura 1.5 – Domínio de influência: Conectividade nodal [29]

1.5.1. Domínios de Influência Nodal

Os domínios de influência podem ser das mais diversas formas, como circulares, retangulares, pentagonais entre outros, se preferindo domínios os quais requerem um menor custo computacional para o tratamento de problemas de inclusão de pontos. A Figura 1.6 ilustra um exemplo de um domínio de influência circular.

Para os domínio circulares, define-se a função peso $w_I(x)$ em função da distância r entre o ponto de avaliação x e o ponto nodal x_I , ou seja, $w_I(x) = w_r$, onde r é o raio normalizado $r = \frac{d_I}{d_{m_I}}$, $d_I = \|x - x_I\|$ e d_{m_I} é o raio de influência nodal.

Já para os domínios retangulares, bidimensionais, as funções peso $w_I(x)$ são definidas como um produto-tensorial das funções peso aplicadas em cada direção por $w_I(x) = w(s_x) \cdot w(s_y)$, onde $s_x = \frac{\|x - x_I\|}{d_{m_{xI}}}$, $s_y = \frac{\|y - y_I\|}{d_{m_{yI}}}$. Os parâmetros $d_{m_{xI}}$, $d_{m_{yI}}$ são a metade do comprimento de cada respectivo lado do retângulo que define o domínio de influência do nó I . Ilustra-se na Figura 1.7 um exemplo de domínio de influência retangular.

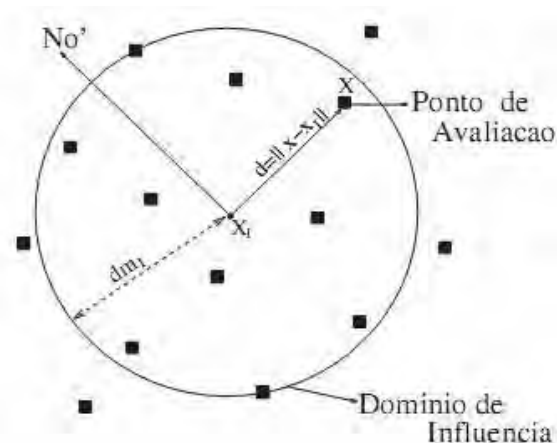


Figura 1.6 - Domínio de influência circular [29]

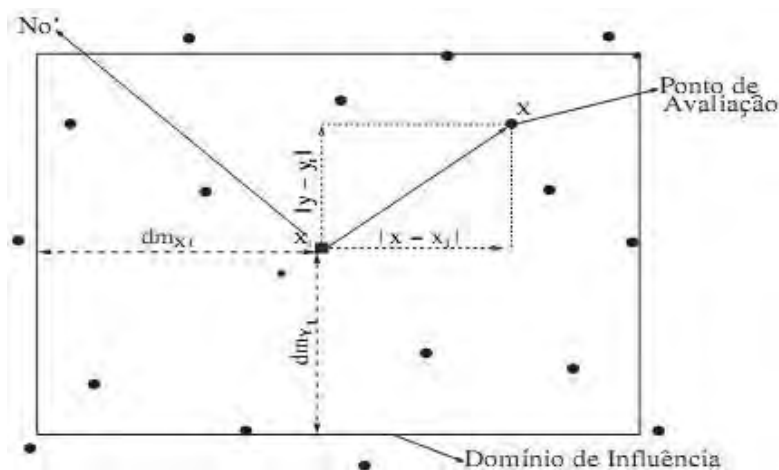


Figura 1.7 - Domínio de influência retangular [29]

1.5.2. As funções peso

Para a aproximação das soluções das equações diferenciais parciais (EDP's) o método EFG emprega funções de forma criando uma base funcional a partir da qual as aproximações serão calculadas. O cálculo da aproximação envolve a avaliação de funções peso $w_I(x)$ associadas a cada nó, a construção de uma base de expansão p_j , geralmente polinomial, e um conjunto de coeficientes nodais determinados pelo método de Galerkin.

A continuidade das aproximações é regida pelo polinômio de maior grau, entre a base polinomial e a função peso, onde mesmo com uma base polinomial p_j linear, a continuidade das aproximações vai ser da ordem da função peso, quando esta possuir grau maior que a base polinomial [21][29].

É necessário que a função peso possua três requisitos [8][9]:

- Possuir suporte compacto e norma igual a um, ou seja, ela deve ser diferente de zero em, apenas uma pequena vizinhança do nó ao qual está associada;
- Ela deve ser positiva;
- Deve decrescer gradualmente na medida em que se distancia de seu nó associado, até anular-se.

Estas três premissas que a função peso deve respeitar indicam que o valor da função peso varia de 0 (zero) a 1 (um) dentro de uma pequena vizinhança do nó associado (domínio de influência), tendo que ser obrigatoriamente positiva, pois não há funções peso com contribuições negativas em métodos *meshfree*, e que o valor da função peso decresça, até anular-se, de acordo com que se distancia de seu nó associado, onde este limite indica que não haverá uma contribuição para a aproximação de algum ponto de avaliação que não esteja dentro dos limites do domínio de influência deste nó.

Existem várias funções que podem atender a estes requisitos, sendo algumas delas as funções peso quadráticas, quárticas, gaussiana truncada, schwarz truncada.

- Função Peso Quadrática

$$w(r) = \begin{cases} (1 - r^2) & \text{se } 0 \leq r \leq 1 \\ 0 & \text{se } r > 1 \end{cases} \quad 1.1$$

- Função Peso Gaussiana Truncada

$$w(r) = \begin{cases} \frac{e^{\beta^2 r^2} - e^{\beta^2}}{1 - e^{\beta^2}} & \text{se } 0 \leq r \leq 1 \\ 0 & \text{se } r > 1 \end{cases} \quad 1.2$$

- Função Peso Schwarz Truncada

$$w(r) = \begin{cases} \frac{r^2}{e^{r^2-1}} & \text{se } 0 \leq r < 1 \\ 0 & \text{se } r \geq 1 \end{cases} \quad 1.3$$

A utilização de quaisquer tipos de funções peso depende da continuidade requerida para a mesma pelo procedimento de resolução, ou pela ordem da equação diferencial parcial (edp).

1.5.3. Formulação Padrão

Definindo então a função peso a se utilizar, passa-se para a montagem da função de forma. A formulação dada por [8] utiliza a técnica MLS (*Moving Least Squares*) para poder descrever uma aproximação local $u_l^h(x, \bar{x})$, para $u(x)$, em um domínio bidimensional Ω , onde $\bar{x} = x^T = [x, y]$, por meio da seguinte equação:

$$u_l^h(x, \bar{x}) = \sum_j^m p_j(x) a_j(\bar{x}) \equiv \mathbf{P}^T(x) \cdot \mathbf{a}(\bar{x}), \quad 1.4$$

onde $\mathbf{P}^T(x)$ é a base polinomial num espaço de coordenadas de cardinalidade m , e os coeficientes $\mathbf{a}(\bar{x})$ podem ser obtidos da norma discreta J , do espaço L_2 , ponderada pelas funções peso, podendo ser escrita como:

$$J = \frac{1}{2} \sum_{I=1}^n w_I(x) (\mathbf{P}^T(x) \cdot \mathbf{a}(\bar{x}) - u_I)^2. \quad 1.5$$

Minimizando-se (1.5) com relação aos coeficientes $\mathbf{a}(\bar{x})$ e substituindo-se em (1.4), se obtém a equação que nos permite calcular a aproximação em qualquer ponto do domínio Ω , que implica o cálculo das contribuições locais dos nós que contém um determinado ponto de avaliação dentro de seus domínios, dada por:

$$u^h(x) = \sum_I^n \sum_j^m p_j(x) (\mathbf{A}^{-1}(x) \mathbf{B}(x))_{jI} u_I. \quad 1.6$$

Detalhes sobre o processo de minimização podem ser encontrados em [29]. De (1.6) pode-se isolar a expressão que representa as funções de forma do método EFG obtendo:

$$\Phi_I(x) = \sum_j^m p_j(x) (\mathbf{A}^{-1}(x) \mathbf{B}(x))_{jI}. \quad 1.7$$

Pode-se reescrever a expressão (1.6) com a definição da função de forma:

$$u^h(x) = \sum_I^n \Phi_I(x) u_I. \quad 1.8$$

Em (1.6) e (1.7), a matriz $\mathbf{A}(x)$ é definida como $\mathbf{A} = \mathbf{P} \mathbf{W} \mathbf{P}^T$ e a matriz $\mathbf{B}(x)$ como $\mathbf{B} = \mathbf{P} \mathbf{W}$, as quais serão discutidas na seção 1.7.

1.5.4. Abordagem de Consistência

A formulação de consistência proposta em [11] permite a simplificação do ponto de vista computacional. Esta formulação consiste em construir as *funções de forma* tendo

seus valores satisfazendo o mínimo de uma *função objetivo* sujeita às seguintes condições de consistência:

$$\sum_{l=1}^n \Phi_l(x) = 1, \quad (1.9)$$

$$\sum_{l=1}^n \Phi_l(x)x_l = x, \quad (1.10)$$

$$\sum_{l=1}^n \Phi_l(x)y_l = y. \quad (1.11)$$

A definição matricial da *função de forma* pode ser vista no sistema de equações (1.12). Para se obter esta definição, escreve-se primeiramente a minimização da função objetivo, onde deve-se impor as condições de consistência e atribuir as condições de optimalidade com relação às *funções de forma* e aos multiplicadores de Lagrange [8][29]. Para a imposição das condições de consistência usam-se os multiplicadores de Lagrange.

$$\begin{bmatrix} W^{-1} & P^T \\ P & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ e_1 \end{bmatrix} \quad (1.12)$$

Com a resolução do sistema (1.12) e substituindo as definições dos multiplicadores de Lagrange podemos encontrar a definição para as *funções de forma*:

$$\Phi^T = e_1^T (PWP^T)^{-1}PW \quad (1.10)$$

Pode-se reconhecer em (1.113) as matrizes A e B usadas na abordagem padrão em (1.6) e (1.7). Podemos reescrever a expressão (1.6) como:

$$\Phi^T = e_1^T A^{-1}B \quad (1.14)$$

Podemos ver em (1.7) e (1.14) a necessidade de inverter a matriz A . Uma das condições para que a matriz garanta sua inversibilidade é a conectividade nodal, bem como a distribuição desses pontos sobre o domínio, que deve ser levada em consideração.

Em [29], para se ter uma boa conectividade nodal, a quantidade de nós vizinhos deve ser no mínimo a cardinalidade m da base de expansão polinomial, ou seja, para uma base linear devemos ter uma conectividade mínima de 3 nós, e para uma base quadrática 6 nós.

Os pontos nodais devem ser distribuídos em todas as direções do domínio, evitando-se padrões patológicos na distribuição dos nós. Padrões patológicos se caracterizam por um numero considerável de pontos nodais alinhados sequencialmente. Assim, quando se utiliza uma base polinomial $p(x)$ linear, os nós não podem ser colineares (tornando A singular), e quando $p(x)$ fosse quadrática, os nós não poderiam encontrar-se

sobre uma circunferência. Podemos ver na Figura 1.8 estes dois exemplos de distribuições patológicas.

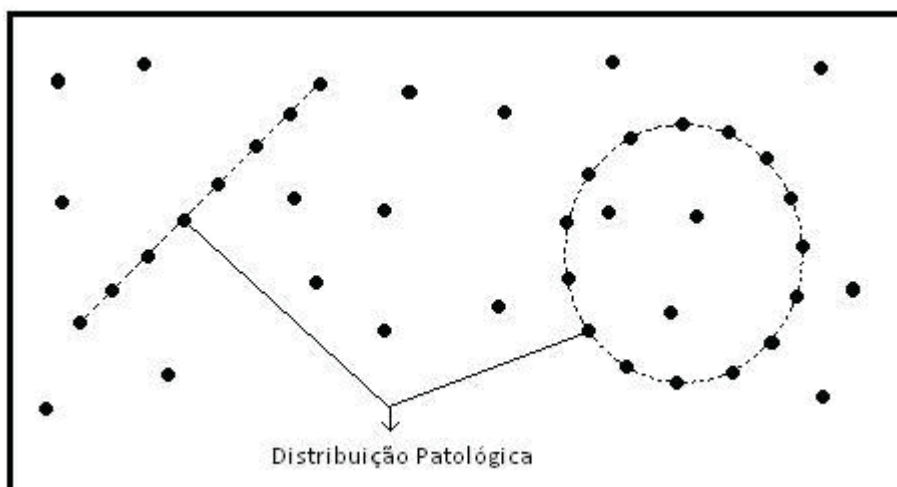


Figura 1.8 – Exemplo de Distribuições Patológicas de pontos nodais

1.6. Função de forma interpolante

As funções de forma apresentadas até agora não satisfazem a propriedade do delta de Kronecker nos pontos nodais, $\Phi_I(x_j) \neq \delta_{ij}$, o que torna as variáveis nodais u_i diferentes dos valores nodais $u(x_I)$, dificultando a imposição das condições de contorno ao sistema de equações lineares, e também, após a resolução desse sistema temos que fazer uso da expressão (1.8) para determinar os valores nodais.

Podemos obter funções de forma que satisfaçam a propriedade do delta de Kronecker, basta-se construir funções peso singulares:

$$\tilde{w}_i(x) = \frac{w_i(x)}{1 - w_i(x) + \varepsilon}, \quad 1.15$$

onde $\tilde{w}_i(x)$ é o valor da função peso singular, $w_i(x)$ são os valores das funções peso relacionadas na seção 1.5.2, algumas como (1.1), (1.2), (1.3), e ε é um parâmetro para definir um limite máximo para o crescimento da função singular, onde este limite é escolhido para poder se garantir uma boa acurácia, sendo recomendado $\varepsilon = 10^{-6}$ [29].

Como, ainda, a condição de interpolação é satisfeita somente pontualmente nos nós, uma maior discretização ao longo das linhas de contorno e das linhas de interfaces materiais pode fornecer uma descrição mais correta do fenômeno tanto no caráter local quanto no global.

Outra forma de se obter funções peso singulares é discutida em [29] que trata a normalização das funções peso singulares.

1.7. Definição das matrizes P e W

Aqui será visto brevemente como se definem as matrizes P e W utilizadas na montagem das matrizes A e B na abordagem de consistência em (1.12), (1.13) e (1.14). Como dito anteriormente, a matriz $A(x)$ é definida como $A = PWP^T$ e a matriz $B(x)$ como sendo $B = PW$.

A matriz W é uma matriz diagonal de funções peso $w_i(x)$. Para um melhor entendimento, a Figura 1.9 ilustra a construção de uma matriz W , para um ponto de avaliação x . A matriz W terá em sua diagonal os valores das funções peso associadas a cada nó, calculadas sobre o ponto de avaliação x como se mostra em (1.16).

$$W(x) = \begin{bmatrix} w_1(x) & 0 & 0 \\ 0 & w_2(x) & 0 \\ 0 & 0 & w_3(x) \end{bmatrix} \quad 1.16$$

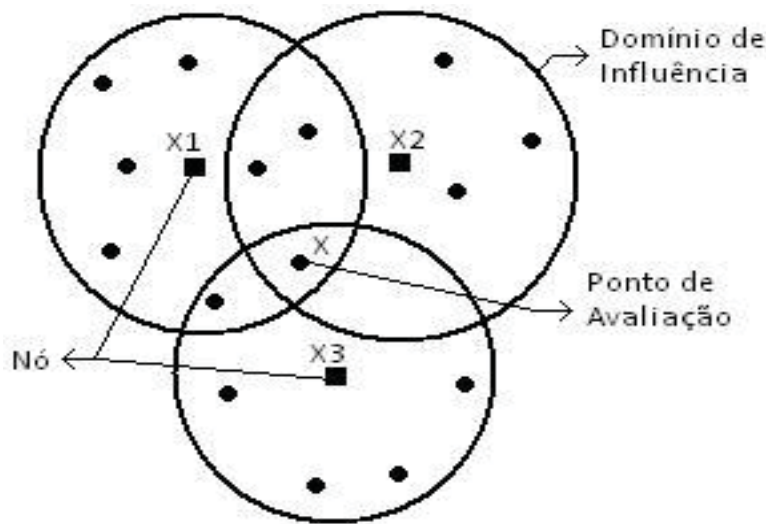


Figura 1.9 – Definição dos domínios

A matriz P define uma base polinomial ligada às coordenadas dos pontos, sendo expressa como:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 - x & x_2 - x & \cdots & x_n - x \\ y_1 - y & y_2 - y & \cdots & y_n - y \end{bmatrix}, \quad 1.17$$

onde x_n e y_n são as coordenadas do ponto nodal, x e y são as coordenadas do ponto de avaliação.

Para uma base polinomial de primeiro grau, em um domínio bidimensional, a i -ésima coluna da matriz \mathbf{P} , pode ser escrita como:

$$P_i = \begin{bmatrix} 1 \\ x_i - x \\ y_i - y \end{bmatrix}, \quad 1.18$$

logo, suas derivadas com relação a x e y são dadas por:

$$P_i^x = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e } P_i^y = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad 1.19$$

Capítulo 2 – Tratamento de descontinuidades

De acordo com [34] a descontinuidade em campos ou em seus gradientes ao longo de certas interfaces é frequentemente observada no mundo real. É encontrada em estruturas com a presença de *cracks* e poros. Em fluídos isto ocorre nas interfaces entre dois ou mais diferentes fluídos, da mesma forma que em meios eletromagnéticos. A presença de diferentes meios (interfaces materiais) gera uma descontinuidade material ao longo de suas interfaces por possuírem propriedades físicas distintas. Já na propagação de rachaduras a descontinuidade pode ocorrer no mesmo material [33]. A modelagem matemática e os métodos numéricos para as aproximações destas descontinuidades nas interfaces materiais devem considerar apropriadamente estas interfaces. O não tratamento destas interfaces materiais, quando há a presença de descontinuidades, faz com que a solução apresente oscilações espúrias perto da interface dos materiais [21][29].

Tais descontinuidades podem ser classificadas como fortes e fracas. A primeira envolve descontinuidades na variável dependente do modelo, ou seja, na própria função, já por outro lado a descontinuidade considerada fraca descreve descontinuidades na derivada da função [34]. Para modelos estruturais, exemplos típicos de descontinuidades fortes e fracas são rachaduras e interfaces de diferentes materiais, respectivamente.

Quando se simula alguns problemas especiais como irregularidades na geometria, interfaces materiais móveis, contornos deformados, e superfícies livres, os métodos baseados em malhas de elementos (FDM – *Finite Difference Method*; FVM – *Finite Volume Method*; MEF) encontram muitas dificuldades. Muitos trabalhos foram direcionados para o tratamento numérico para estes tipos de soluções, como os multiplicadores de Lagrange, combinação de métodos, e combinação de sistemas Lagrange-Euleriano [34].

Em aproximações de campos descontínuos um tratamento adequado das interfaces deve ser necessário. No caso do MEF padrão [35] isto pode ser alcançado pela construção de uma malha cujas arestas dos elementos alinham-se com as interfaces. No caso de interfaces móveis, se requer frequentes reconstruções da malha (remalhamento), o que pode vir a causar grande carga computacional, e que dependendo da topologia do problema pode, também, vir a ser impossível.

O método *meshfree* surge como sendo mais uma alternativa para o tratamento de problemas como o eletromagnetismo, dinâmica dos fluídos, simulação de plasma, mecânica dos sólidos em modelagem de rachaduras e de bandas de cisalhamento [36],

entre outros. Pode-se dizer que a característica mais atrativa de um método *meshfree* é que não há a necessidade de uma malha de elementos para se resolver um problema.

Algumas técnicas para o tratamento de interfaces materiais serão brevemente apresentadas.

2.1. Truncamento de domínios

Esta técnica, com base em [32], e com uma pequena modificação em [29], implica que as contribuições dos pontos de avaliação de um material só podem ser realizadas por pontos nodais pertencentes ao mesmo material, sendo as demais contribuições descartadas, (ou seja, as contribuições de pontos nodais pertencentes a outro(s) material(ais)). Assim, trunca-se a parte dos domínios de um nó que “atravessem” a interface material, incluindo apenas os pontos localizados no mesmo material. A Figura 2.1 ilustra um exemplo da técnica de truncamento de domínio.

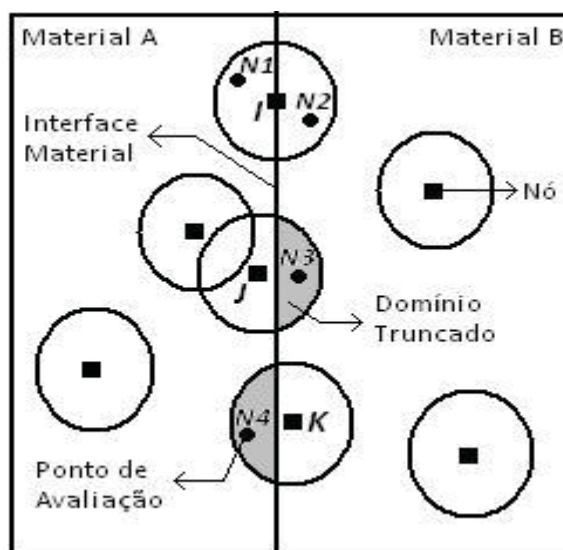


Figura 2.1 – Ilustração da técnica de truncamento de domínios

Os domínios de influência dos nós no material *A* são somente contados para as aproximações dos pontos de avaliação no mesmo material; de outro modo as contribuições são descartadas. O mesmo método é aplicado aos nós do material *B*. As aproximações desconectadas para *A* e *B* são ligadas pelos nós localizados na linha de interface. Estes nós de interface devem ser considerados para todas as aproximações de todos os pontos de avaliação pertencentes a ambos os materiais. Como ilustrado na Figura 2.1 os nós *J* e *K* não participam da aproximação para os pontos de avaliação *N3* e *N4*, respectivamente, por outro lado, o nó *I* participa das aproximações de ambos os pontos de avaliação *N1* e *N2*.

Os nós situados próximos à interface material necessitam de domínios de influência um pouco maiores a fim de se manter uma conectividade nodal mínima para que seja proporcionada a inversibilidade da matriz A , pois parte do domínio de influência é rejeitada [21][29]. Outra opção seria proporcionar uma maior concentração de pontos nodais próximos às interfaces materiais, sem se preocupar com o tamanho dos domínios de influência, que sejam o bastante para que a matriz A possa ser inversível e se mantenha uma conectividade nodal adequada.

2.2. Critério de visibilidade

Nesta abordagem, para o tratamento de descontinuidades, os contornos da geometria e as linhas do interior da descontinuidade são considerados opacos quando se constrói a função peso. Com essa opacidade, imagina-se uma linha imaginária, como sendo um raio de luz, de um ponto a um nó, para o qual é construído uma função que rege seu domínio de influência. Se no caso o raio encontrar a superfície opaca, como as linhas de contorno ou da descontinuidade interior, o ponto não é incluído no domínio de influência [9].

Para uma melhor explicação, tomamos um exemplo. Se considerarmos uma rachadura, com uma linha de descontinuidade deslocada a qual termina na ponta da rachadura, o domínio de influência de um nó genérico I na vizinhança da ponta da rachadura tem sua forma ilustrada na Figura 2.2, quando é utilizado o critério de visibilidade [9]. Os pontos na região escura do domínio de influência original são removidos do domínio de influência devido que seus raios vindos dos pontos do domínio escurecido para x_I atravessam a linha de descontinuidade.

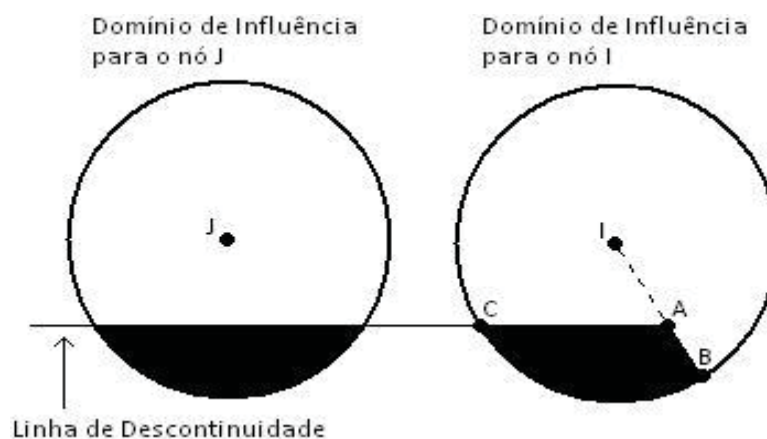


Figura 2.2 – Domínios de influência para o critério da visibilidade

Uma consequência do critério de visibilidade é que a descontinuidade é introduzida na função peso e na função de forma em todo momento em que o domínio de influência é cortado por uma linha de descontinuidade. Uma representação gráfica ilustrativa das funções peso e de forma por ser vista na Figura 2.3. Como pode, também, ser visto nas linhas dos gráficos, a função peso do nó J e sua função de forma são descontínuas ao longo da linha especificada, ilustrando que o critério da visibilidade é eficiente ao se introduzir uma descontinuidade requerida.

Por outro lado, para a função de forma próxima às extremidades de uma linha de descontinuidade, um subproduto do critério de visibilidade é a descontinuidade na aproximação dentro do domínio. Ao longo do raio que raspa a extremidade da descontinuidade, a linha AB da Figura 2.2, a função peso não é nula em todos os pontos exceto em B à direita da linha, mas sumindo à esquerda da mesma. Ou seja, o ponto B já não pertenceria ao domínio de influência do nó I, mas uma pequena vizinhança à sua direita pertenceria, e à sua esquerda, não. Então a função peso é descontínua, podendo ser vista na Figura 2.3 [9].

Foi, ainda, notado que descontinuidades adicionais acabam por ser introduzidas nas funções de forma pelas descontinuidades nas funções peso de outros nós próximos da extremidade da descontinuidade. Como consequência, a aproximação não será contínua dentro do domínio, mas [10] mostrou que esta descontinuidade não prejudica a convergência da solução (Figura 2.3 – (d)). A Figura 2.4 ilustra as funções de forma para os nós I e J .

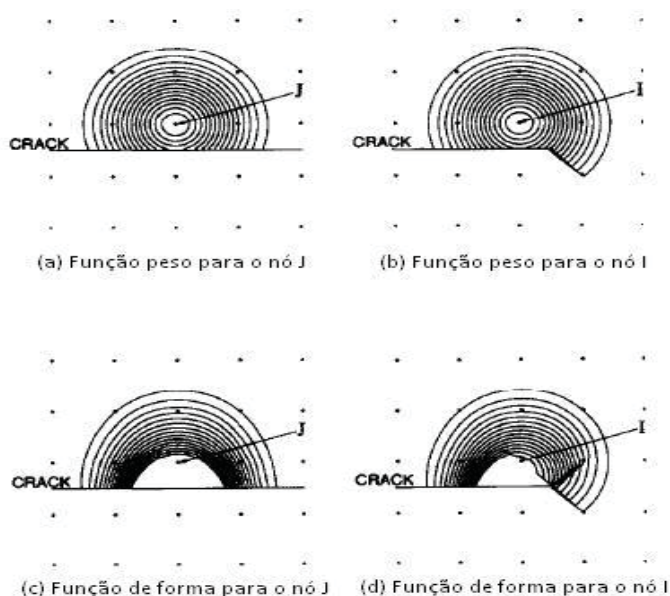


Figura 2.3 – Linhas de contorno das funções peso e de forma para nós próximos a uma linha de descontinuidade [9]

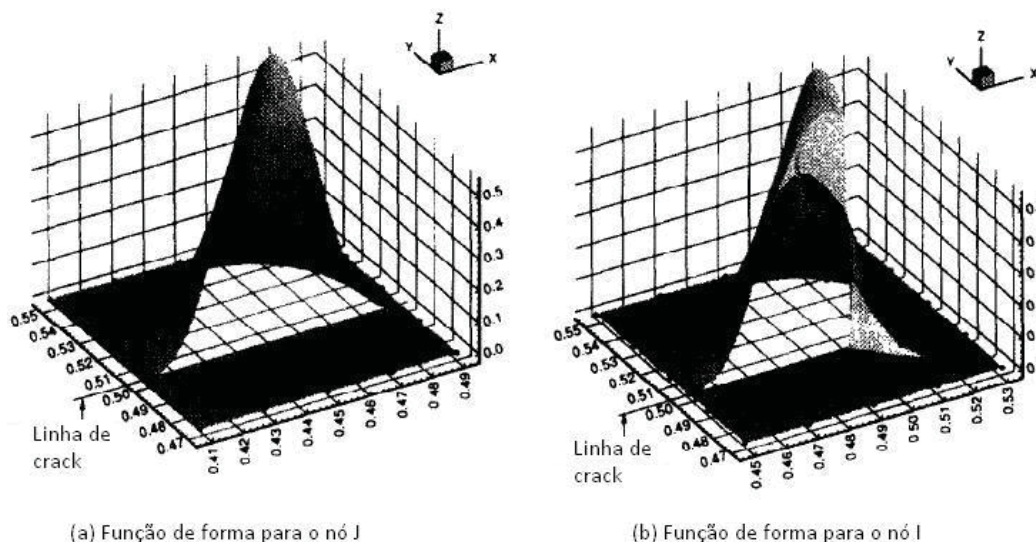


Figura 2.4 – Funções de forma determinadas pelo critério de visibilidade para nós próximos a uma linha de descontinuidade [9]

2.3. Refinamento de malha *cell-by-cell*

Em [42] trata-se o refinamento de malha da forma *cell-by-cell*, o que provou ter uma malha mais eficiente a um custo elevado de integração. Na Figura 2.5 é ilustrado como isto pode ocorrer no caso de duas dimensões para uma pequena região.

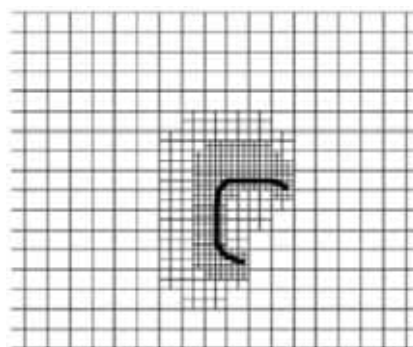


Figura 2.5 – Refinamento de malha em região que requer alta resolução [42]

É utilizada uma hierarquia de *grids* uniformes $G_0 \dots G_L$, assim, se os espaçamentos da grade em G_0 são $(\Delta\psi, \Delta w)$, então em G_n eles são $(\Delta\frac{\psi}{2^n}, \Delta\frac{w}{2^n})$. As grades G_0 e G_1 cobrem todo o domínio computacional, mas as grades mais refinadas somente existem em regiões que requerem maiores resoluções. A hierarquia de grades é utilizada para gerar uma estimativa do erro relativo por meio da comparação de soluções nas grades com diferentes espaçamentos na malha, e a grade sofre um processo de refinamento se este erro excede

uma tolerância E_r e sofre um processo de refinamento inverso (de-refinamento) caso o erro seja menor que E_d . O algoritmo apresentado por [42] é mostrado a seguir:

```

procedure integrate( $n$ ){      Integrate  $G_n$ 
  step( $n$ )                    Advance  $G_n$  by one  $z$ -step  $\Delta z/2^{n-1}$ 
  if ( $n < L$ ) {              Finer grids exist
    while ( $z_n < z_{n-1}$ ){
      integrate( $n+1$ ) Integrate  $G_{n+1}$  to  $G_n$   $z$ 
       $z_n = z_n + \Delta z/2^n$  Increment  $G_n$   $z$  by  $\Delta z/2^n$ 
    }
    regrid( $n$ )                 Compare solutions on  $G_n$  and
                                 $G_{n-1}$   $\rightarrow$  decide  $G_{n+1}$  refinement
    merge( $n$ )                  Project  $G_{n+1}$  solution onto  $G_n$ 
  }
  return
}                                end of if block
                                end of procedure integrate( $n$ )

```

Figura 2.6 – Algoritmo para o refinamento *cell-by-cell* [42]

Na operação *merge*(n), a solução nas células (*cells*) em G_n , que são refinadas, é substituída pela média do volume das soluções nas células (*cells*) G_{n+1} . Isto implica que as soluções em todas as grades sejam consistentes.

Podem-se fazer certas analogias a métodos de computação gráfica, as *quad-trees*, que fazem exatamente a mesma divisão espacial, nesse caso em 2 dimensões, onde cada célula representa um nó na árvore (folhas) e as sub-divisões, para o caso do refinamento da malha, sempre sejam mais quatro células (quatro folhas). Pode-se entender melhor a razão do aumento do custo computacional com as integrações em [42] devido aos refinamentos, para áreas com uma maior necessidade de resolução, por meio das *quad-trees* com suas sub-divisões sendo feitas somente em uma de suas regiões.

2.4. Método da transparência

No método de transparência [37], a função é suavizada ao redor da extremidade da descontinuidade dotando a superfície ou linha de descontinuidade com um grau variante de transparência. Na extremidade, a linha de descontinuidade é considerada completamente transparente, e a transparência diminui a medida com que se distancia da extremidade da descontinuidade. Quando um raio de um ponto de avaliação x para o nó x_l intersecta a linha de descontinuidade, o parâmetro s é modificado por:

$$s(x) = s_0(x) + s_{max} \left(\frac{s_c(x)}{\bar{s}_c} \right)^\lambda, \lambda \geq 2, \quad 2.1$$

onde $s_0(x)$ é definido como $s_0(x) = \|x - x_I\|$, s_{max} é o raio do suporte nodal, e $s_c(x)$ é a distância da extremidade da rachadura ao ponto de intersecção Figura 2.7. O parâmetro \bar{s}_c fixa a distância da intersecção na qual o segmento da rachadura é completamente opaco:

$$\bar{s}_c = kh, \quad 2.2$$

onde o parâmetro k é utilizado para variar a opacidade, e h é a medida do espaçamento nodal. A Figura 2.8 ilustra o gráfico da função peso perto da extremidade da descontinuidade utilizando o método de transparência. Pode ser notado que devido ao segundo termo em (2.1) a função de aproximação $s(x)$ é ao menos quadrática, ou seja, a função de forma e suas derivadas são contínuas na extremidade da rachadura. O domínio de influência é determinado pela condição $w(s) \geq 0$ [9].

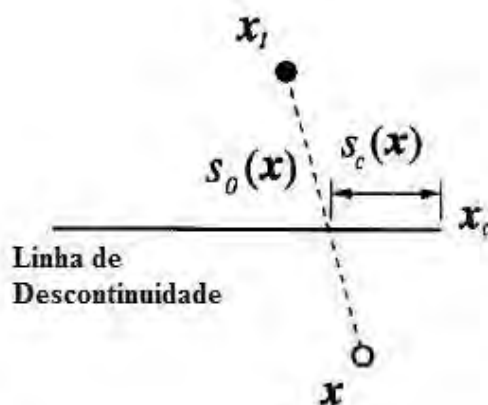


Figura 2.7 – Raio de suporte para o método de transparência

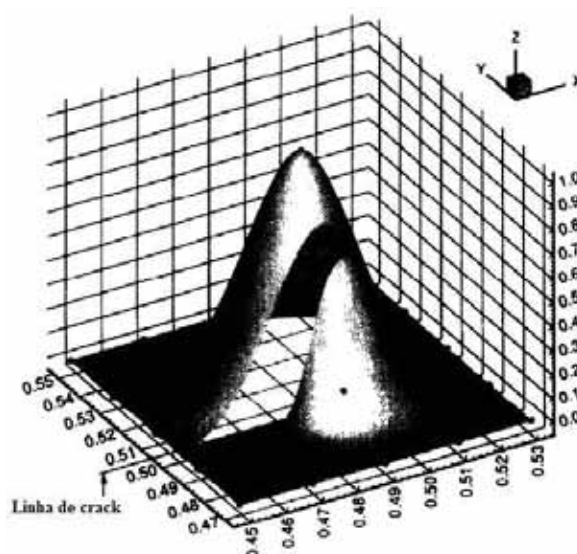


Figura 2.8 – Gráfico da função de forma para o nó I pelo método de transparência

Capítulo 3 – Tratamento Auto-Adaptativo de Interfaces para o método EFGI em problemas eletromagnéticos

O método *Element-Free Galerkin* é um método *meshfree* muito atrativo para solucionar equações diferenciais parciais (edp's) cujas aplicações têm sido relatadas pela Literatura Especializada nos mais diversos campos da Ciência e Engenharia, como, por exemplo, Mecânica Computacional [8] e Eletromagnetismo [18], Magnetohidrodinâmica [30], Física Quântica [45] e recentemente Física de Plasmas [52].

As fundações teóricas do método EFG, como visto nos capítulos anteriores, baseiam-se na idéia da construção de uma base funcional composta pelas chamadas funções de forma. Estas funções de forma são construídas a partir de uma aproximação local *Moving Least Squares* (MLS) realizada nos pontos de discretização, e que provê a base funcional necessária para o já conhecido processo de discretização Galerkin para a solução de edp's. Diferentemente do Método dos Elementos Finitos (MEF), a abordagem padrão do método EFG [8] não proporciona aproximações interpolantes. Neste caso, técnicas adicionais devem ser utilizadas para impor as condições de contorno assim como as condições das interfaces materiais para uma descrição correta da física do fenômeno a fim de se evitar oscilações espúrias [21].

A utilização de tais técnicas pode vir a aumentar o número total de incógnitas causada pela maioria das técnicas como multiplicadores de Lagrange e métodos de penalidade. O método EFG com abordagem interpolante e domínio truncado proposta em [29] evita completamente o uso de tais técnicas pelo tratamento cuidadoso das linhas de contorno de Dirichlet e de interfaces, especialmente as das interfaces materiais. Dependendo da complexidade da geometria, um processo iterativo de inspeção das aproximações perto das interfaces materiais do domínio pode ter que vir a ocorrer e se tornar cansativo e dispendioso.

Este trabalho vem propor um estudo ao ajuste de parâmetros, para o cálculo de campos eletromagnéticos descontínuos, para uma proposta de tratamento auto-adaptativo de condições de interfaces entre interfaces materiais, juntamente por meio do projeto LExVE (Laboratório de Experimentos Virtuais de Engenharia) e com os grupo de pesquisa

LAMSCAD (Laboratório de Modelagem e Simulação Computacional de Alto Desempenho) e o Grupo de Computação Científica.

3.1. Tratamento de condições de interface

Em problemas eletromagnéticos, a presença de interfaces materiais leva a descontinuidades nos campos elétricos e no potencial elétrico, pois diferentes materiais possuem diferentes propriedades físicas, como condutividade elétrica, permeabilidade elétrica e permissividade elétrica. Quando o potencial e o campo são contínuos no domínio, não existem problemas, mas no momento em que uma descontinuidade é identificada, seja para o campo elétrico ou para o potencial elétrico, em algum lugar do domínio, esta descontinuidade deve ser levada em conta no método numérico para que então, por meio de técnicas adicionais, se introduza a descontinuidade física [12][21].

A técnica de tratamento de descontinuidades de forma auto-adaptativa será acoplada à técnica modificada com domínio truncado com a formulação EFG interpolante [21], onde os domínios de influência dos nós localizados em um material específico são truncados ao longo das interfaces materiais. Tais nós localizados em um sub-domínio específico material S_1 irão somente participar na aproximação dos pontos de avaliação pertencentes ao mesmo material. As aproximações descontínuas de cada sub-domínio material são conectadas por meio dos nós distribuídos ao longo das interfaces materiais os quais participam na aproximação dos pontos pertencentes a ambos materiais. Não são necessários multiplicadores de Lagrange devido ao caráter interpolante da aproximação [21][29].

3.2. Algoritmo auto-adaptativo para tratamento de condições de interface

O tratamento de interfaces materiais pela técnica de truncamento de domínios modificada pressupõe o uso da abordagem interpolante do método, que é condição necessária para dispensar o uso de multiplicadores de Lagrange. Como os valores das variáveis de estado nos pontos nodais coincidem com os respectivos parâmetros nodais da formulação do método EFG padrão [8], a continuidade da variável de estado é naturalmente preservada, mas a derivada da variável de estado normal à interface material fica descontínua, para as equações de Laplace e Poisson [32].

O erro entre os campos computados próximos à interface material, é uma função de crescimento da magnitude da descontinuidade física, decrescendo para discretizações mais refinadas [21].

Uma melhor acurácia nas aproximações pode ser alcançada por meio do uso de uma discretização mais refinada nas mesmas como demonstrado em [21] e [32]. Contudo, não é possível, *a priori*, ter-se uma razão predeterminada para refinamento de interfaces, considerando que o nível de erro oscila em função da magnitude da descontinuidade física [21], além do fato de que geometrias com contornos muito irregulares e presença de *corners*, podem requerer níveis de refinamento muito elevados e diferentes de um nível médio padrão em interfaces com contornos mais suaves.

É tomado como referência um problema de computação de um campo elétrico estacionário envolvendo diferentes materiais condutores. Contudo, os procedimentos aqui desenvolvidos podem ser aplicados para a computação de campos estacionários associados à equação de Poisson em meios não homogêneos [51]. Da Física, a descontinuidade física da componente normal do campo elétrico que atravessa a interface material de dois condutores (resistores), os quais se encontram em contato parcial, é dada por:

$$\sigma_1 E_{1n} = \sigma_2 E_{2n}, \quad 3.1$$

onde E_{1n} e E_{2n} representam a componente normal do campo elétrico nos pontos $x_1 \in \Omega_1$ e $x_2 \in \Omega_2$, os quais se situam imediatamente antes e após a interface.

A partir de uma dada solução inicial, gera-se um conjunto de pares de pontos de teste distribuídos ao longo das interfaces materiais. No par, cada ponto deve pertencer a um material diferente do outro e devem estar alinhados perpendicularmente à linha de interface material, em perfeita simetria, à mesma distância δ da interface material. A Figura 3.1 ilustra a situação descrita.

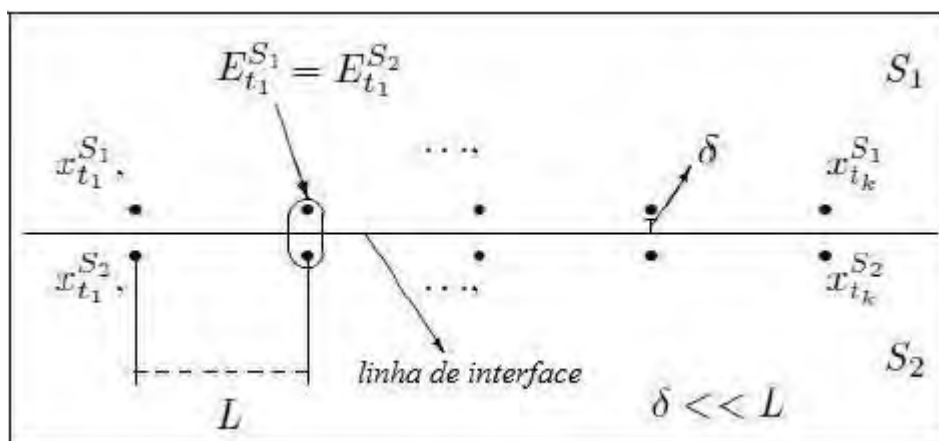


Figura 3.1 – Visão esquemática dos elementos do algoritmo auto adaptativo

Neste caso, em [51] foi proposto um algoritmo inicial para o método EFGI visando o tratamento de condições de interfaces materiais o qual será exposto nesta seção, e melhor expandido, ilustrado na Figura 3.2.

- Após o pós-processamento,*
- 1) *Inicializar a Lista de interfaces materiais L_I a serem tratadas;*
 - 2) *Gerar a lista L_{PPT} dos conjuntos de pares de pontos de teste para cada par de pontos nodais localizados em cada interface material I ;*
 - 3) *Inicializar a lista vazia de pontos de discretização de refinamento L_{Add_P} ;*
 - 4) *Computar o processamento da aproximação;*
 - 5) *Computar a componente normal e tangencial do campo elétrico às linhas de interfaces materiais para todos os pontos de teste gerados;*
 - 6) *Computar as precisões prescritas ε_I estimadas para cada interface I ;*
 - 7) ***Para cada I-ésima*** interface na lista de interfaces L_I ;
 - 8) *Retirar a I-ésima interface da lista de interfaces L_I ;*
 - 9) ***Para cada k-ésimo*** par de pontos de teste em L_{PPT} correspondentes à interface I :
 - 10) *Computar o erro relativo E_{I_k} ;*
 - 11) *Comparar o erro relativo E_{I_k} com a precisão prescrita ε_I para a interface I , e, se ($E_{I_k} \leq \varepsilon_I$):*
 - a) ***Então***, a precisão prescrita foi alcançada para este par de pontos de teste;
 - b) ***Senão***, se ($E_{I_k} > \varepsilon_I$):
 - b1. *Refinar a interface I entre o par de nós associados ao k-ésimo par de pontos de teste;*
 - b2. *Atualizar a lista L_{Add_P} ;*
 - b3. *Adicionar a interface I na nova lista L_I ;*
 - 12) *Considere o próximo $(k+1)$ -ésimo par de pontos de teste e volte ao passo (9); (Fim para k)*
 - 13) *Considere a $(I + 1)$ -ésima próxima interface e volte ao passo (7); (Fim para I)*
 - 14) ***Se*** a lista de interfaces L_I ***não está vazia***, o passo (7.b) foi executado,
 - a) ***Então***:
 - a1. *Calcular a aproximação para a discretização atualizada do modelo (iterativamente), isto é, acrescida dos pontos L_{Add_P} ;*
 - a2. *Gerar e atualizar a nova lista L_{PPT} dos pares de pontos de teste para as interfaces em L_I associadas aos novos pontos de discretização adicionados em L_{Add_P} ;*
 - a3. *Reinicializar L_{Add_P} como uma lista vazia;*
 - a4. *Voltar ao passo (7);*
 - b) ***Senão***, o nível de erro estimado prescrito ε_I em cada interface foi alcançado: *Fim.*

Figura 3.2 – Algoritmo auto-adaptativo para tratamento de condições de interface

Notam-se três parâmetros numéricos principais que necessitam ser determinados para a aplicação do algoritmo:

- i. O ajuste apropriado da distância δ (representa a menor distância dos pontos de teste à interface material – (Fig.3.1))
- ii. Uma forma de aproximar numericamente as condições físicas de continuidade e descontinuidade, estimando o erro E_{I_k} cometido;
- iii. Calcular a prescrição da estimativa de erro ε_I .

3.2.1. Ajuste do Parâmetro DELTA (δ)

Após a realização da geração dos pontos de teste, é necessária uma sequência de testes computacionais analisando-se o erro relativo entre os campos em ambas as componentes, normal e tangencial, para cada par de pontos de teste, e o erro relativo médio, variando-se o δ .

As investigações devem considerar as duas componentes do campo separadamente utilizando relações físicas de continuidade e descontinuidade para o campo elétrico no cálculo da estimativa de erro para os pares de pontos de teste [51]. Definida a medida de erro, os testes realizados pela variação da distância δ para diferentes discretizações e diferentes combinações de materiais possibilitam identificar uma vizinhança da interface em que aproximadamente as condições de continuidade e descontinuidade são mais bem atendidas, e revelam um comportamento assintótico na variação desse parâmetro.

O intervalo indicado para o ajuste do parâmetro δ é aquele em que se percebe um comportamento estacionário dos valores de erro para ambas as componentes do campo elétrico. Em outras palavras, a razão do distanciamento δ dos pontos de teste à linha de interface material é devido aos cálculos dos valores de ambas as componentes do campo elétrico em cada ponto de teste, e então o cálculo dos erros relativos para cada par de pontos de teste. Estes cálculos procuram um comportamento dos valores de ambas as componentes do campo elétrico que seja o mais próximo do comportamento físico esperado (3.1) (3.2).

3.2.2. Ajuste da precisão da interface

O critério da precisão da interface rege, exatamente, o critério de parada do algoritmo auto-adaptativo, visto na (Fig.3.2) no *passo 11*, podendo ser definido de várias formas, conduzindo, possivelmente, a algoritmos que resultem em características auto-adaptativas diferentes. Note-se que, do ponto de vista do modelo numérico, não há garantias de que

uma melhora no atendimento à condição de descontinuidade produza uma melhora também na componente de campo contínua, e vice-versa.

Além disso, não há dados na literatura que permitam uma análise fundamentada dessa situação. Em [21] reporta-se que um maior refinamento na discretização da interface material leva principalmente a uma melhora na aproximação da norma do campo e da componente descontínua, a componente contínua não é analisada com a mesma profundidade.

Por outro lado, mesmo que à primeira vista o interesse principal seja de se manter o foco para a descontinuidade esperada na componente descontínua, nesses estudos iniciais, também, consideramos inspeções da componente contínua de campo em nossas avaliações, visando melhor compreender os comportamentos numéricos das aproximações do método EFGI para ambas as componentes do campo na vizinhança de interfaces materiais, além do efeito do refinamento nas interfaces materiais. O desenvolvimento algébrico para a obtenção de um critério de parada é descrito a seguir.

Considere que $x_{t_1}^{S_1}, \dots, x_{t_k}^{S_1}$ sejam os pontos de teste da interface pertencentes ao material S_1 e, correspondentemente $x_{t_1}^{S_2}, \dots, x_{t_k}^{S_2}$ são os pertencentes ao material S_2 . Assim, considera, ainda que, $\|E_1^{S_1}\|, \dots, \|E_k^{S_1}\|$ e que $\|E_2^{S_2}\|, \dots, \|E_k^{S_2}\|$ sejam as normas dos campos elétricos, calculadas nos pontos de teste, respectivamente pertencentes aos materiais S_1 e S_2 , como ilustrado na (Fig.3.1).

Apresentaremos o desenvolvimento algébrico do critério de parada envolvendo as condições de interface teóricas, relativas tanto à componente descontínua, dada em (3.1), quanto à componente contínua do campo elétrico dada por:

$$E_{1t}^{S_1} = E_{2t}^{S_2}, \quad 3.2$$

para os pontos $x_1 \in \Omega_1$ e $x_2 \in \Omega_2$.

Sejam as normas dos campos para cada k -ésimo par de pontos de teste escritas como:

$$\|E_k^{S_1}\| = \sqrt{(E_{tk}^{S_1})^2 + (E_{nk}^{S_1})^2}, \quad 3.3$$

$$\|E_k^{S_2}\| = \sqrt{(E_{tk}^{S_2})^2 + (E_{nk}^{S_2})^2}, \quad 3.4$$

Se assumirmos que os valores computados para as componentes do campo nos pontos-teste no material 1 são uma boa medida para avaliação do atendimento às condições teóricas de continuidade (3.2) e descontinuidade (3.1) (ou seja, possuir um δ bem ajustado), então, uma norma estimada do campo, no material 2, pode ser construída usando-se os valores de campo tangencial e normal computados no meio material 1.

Substituindo as relações (3.2) e (3.1) em (3.4) podemos escrever uma expressão para estimar a norma do campo no meio material 2 de cada par de pontos de teste escrevendo:

$$\|\hat{E}_k^{S_2}\|_{Est} = \sqrt{(E_{tk}^{S_1})^2 + \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2} E_{nk}^{S_1}\right)^2}. \quad 3.5$$

Assim, pode-se escrever o erro E_{I_k} nos pontos de teste como sendo o erro relativo entre a norma do campo computada no meio material 2 com relação à norma do campo teoricamente esperada a partir dos valores de campo computados por (3.5), resultando em:

$$E_{I_k} = \left| \frac{\|E_k^{S_2}\| - \|\hat{E}_k^{S_2}\|_{Est}}{\|\hat{E}_k^{S_2}\|_{Est}} \right|. \quad 3.6$$

Desse modo, o erro médio ε_I a ser prescrito em cada interface pode ser estimado pela média aritmética dos erros relativos em cada ponto de teste, dado por:

$$\varepsilon_I = \sum_{k=1}^{np} \frac{1}{np} \left| \frac{\|E_k^{S_2}\| - \|\hat{E}_k^{S_2}\|_{Est}}{\|\hat{E}_k^{S_2}\|_{Est}} \right| = \sum_{k=1}^{np} \frac{1}{np} E_{I_k}. \quad 3.7$$

Em outras palavras, nos testes preliminares empregou-se como a precisão da interface (ε_I) o valor médio entre os E_{I_k} para cada par $x_{t_1}^{S_2}, \dots, x_{t_k}^{S_2}$, cujo valor só é calculado na primeira iteração (3.7), nessa primeira proposta da técnica auto-adaptativa, posto que é necessário analisar o ajuste de cada parâmetro do algoritmo por meio de planos de testes específicos.

Assim, como visto no algoritmo proposto, o procedimento auto-adaptativo termina quando a precisão da interface ε_I é alcançada para cada par de pontos de teste de todas as interfaces ($E_{I_k} \leq \varepsilon_I$); no caso do algoritmo proposto, essa condição se expressa no *passo 14*, em que se verifica se existem interfaces para serem refinadas.

Como se mencionou anteriormente, o parâmetro ε_I pode ser implementado de diferentes formas, resultando em critérios de parada diferentes, possivelmente levando, também, a algoritmos com diferentes características numéricas e computacionais. Deu-se início a fase de testes envolvendo o erro médio da norma do campo e está em fase de investigação uma abordagem em que o erro é estimado somente a partir da componente descontínua, tomando outras hipóteses deduzidas pela análise numérica.

3.3. Impacto em classes e arquivos

O algoritmo proposto está sendo implementado dentro de um programa maior, já desenvolvido, para o tratamento de problemas eletromagnéticos por meio do MEF, e, posteriormente, introduzido por [29] o método EFGI.

Foram estudadas duas formas de implementação, ambas com impactos em certas classes do programa já existentes, sendo que a utilizada para este trabalho não causa impacto nos arquivos de comunicação utilizados.

Os arquivos de comunicação são gerados pelo software LEVSoft [48] onde se é modelado o problema e é gerada a malha triangular, que é utilizada como suporte para definir os pontos nodais, representados pelos vértices dos elementos triangulares. Os arquivos de comunicação contém informações como lista de pontos nodais, juntamente com suas coordenadas, lista dos triângulos e de seus devidos vértices, lista das arestas, códigos de materiais associados a cada elemento, entre outros.

O algoritmo proposto não altera a geometria do problema, ele simplesmente adiciona novos nós às interfaces materiais, quando faz-se necessário o refinamento auto-adaptativo, e como novos nós, estes possuem certas informações como coordenadas, indicações de que fazem parte de uma interface material, entre outros. Inicialmente as classes que definem os materiais, os nós, os pontos, a matriz esparsa serão as mais utilizadas.

A forma de implementação em que se modificam os arquivos de comunicação é aquela onde todas as informações referentes aos nós são inseridas nos arquivos de comunicação quando se há a necessidade da adição de novos nós, devido à necessidade de uma maior discretização (refinamento), nas linhas de interface. Esta inserção das informações dos novos nós é feita carregando-se, em tempo de execução, os arquivos de comunicação, e então escrevendo as novas informações nos mesmos, o que pode vir a gerar certos atrasos na execução do programa, pois esta tarefa é executada a cada iteração do laço auto-adaptativo.

No caso da não necessidade de se modificar os arquivos de comunicação, os novos nós inseridos, devido à necessidade de um maior refinamento, são tratados de uma forma “virtual”: eles somente irão existir durante o processo do refinamento, para poderem melhorar as aproximações dos nós vindos da ferramenta modeladora [48], ou seja, dos vértices da malha triangular, não havendo a necessidade de adicionar os novos nós nos arquivos de comunicação. As únicas informações que serão inseridas nos arquivos de comunicação serão os novos valores das aproximações dos nós já existentes.

Capítulo 4 – Testes e Resultados

Neste capítulo se abordará as avaliações numéricas de certos experimentos, com suas soluções obtidas por meio da abordagem interpolante com domínio truncado do método EFG para o tratamento de meios heterogêneos. Se mostrará, também, a covalidação dos resultados com experimentos já publicados [21][29] a fim de se admitir que o programa, com distribuição irregular de nós, possui resultados concordantes.

4.1. Campo de Correntes Estacionárias

O problema aqui tratado consiste em dois condutores, de condutividades elétricas diferentes, em contato parcial. Aplica-se uma diferença de potencial elétrico nas extremidades fazendo com que se estabeleçam correntes nesses meios.

Foram realizados testes com duas combinações de materiais, Alumínio-Prata e Alumínio-Cobre, onde para cada combinação foram geradas duas malhas com concentrações diferentes de nós com na média 430 nós e 800 nós, ambas as malhas criadas por meio de uma distribuição irregular de nós. A Figura 4.1 ilustra o problema tratado.

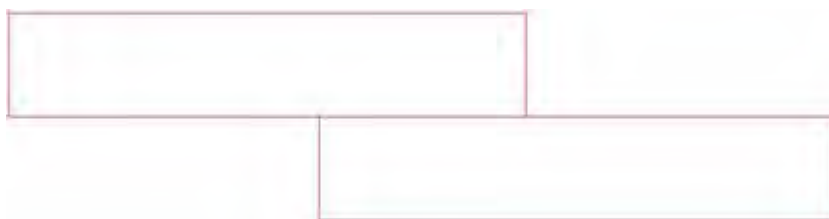


Figura 4.1 – Representação do resistor de placas planas em contato parcial

Para as combinações de materiais supracitados, o material Alumínio, nas duas combinações, se localiza na placa resistiva superior, enquanto que os materiais Cobre e Prata se encontram na placa resistiva inferior. A Figura 4.2 ilustra as distribuições irregulares de nós para as malhas contendo por volta de 430 e 800 nós, para um mesmo tamanho de domínio.

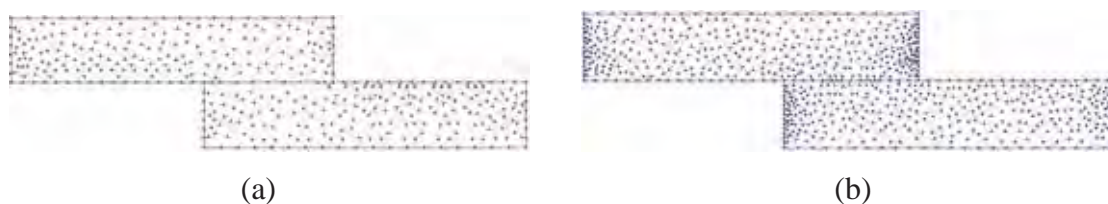


Figura 4.2 – Representação das malhas de 430 (a) e 800 (b) nós para o resistor

As linhas equipotenciais elétricas para os resultados obtidos pelo método EFGI para o problema em discussão podem ser vistas na (Fig.4.3). Pode-se ver que a técnica de truncamento não afetou a aproximação na interface [21].

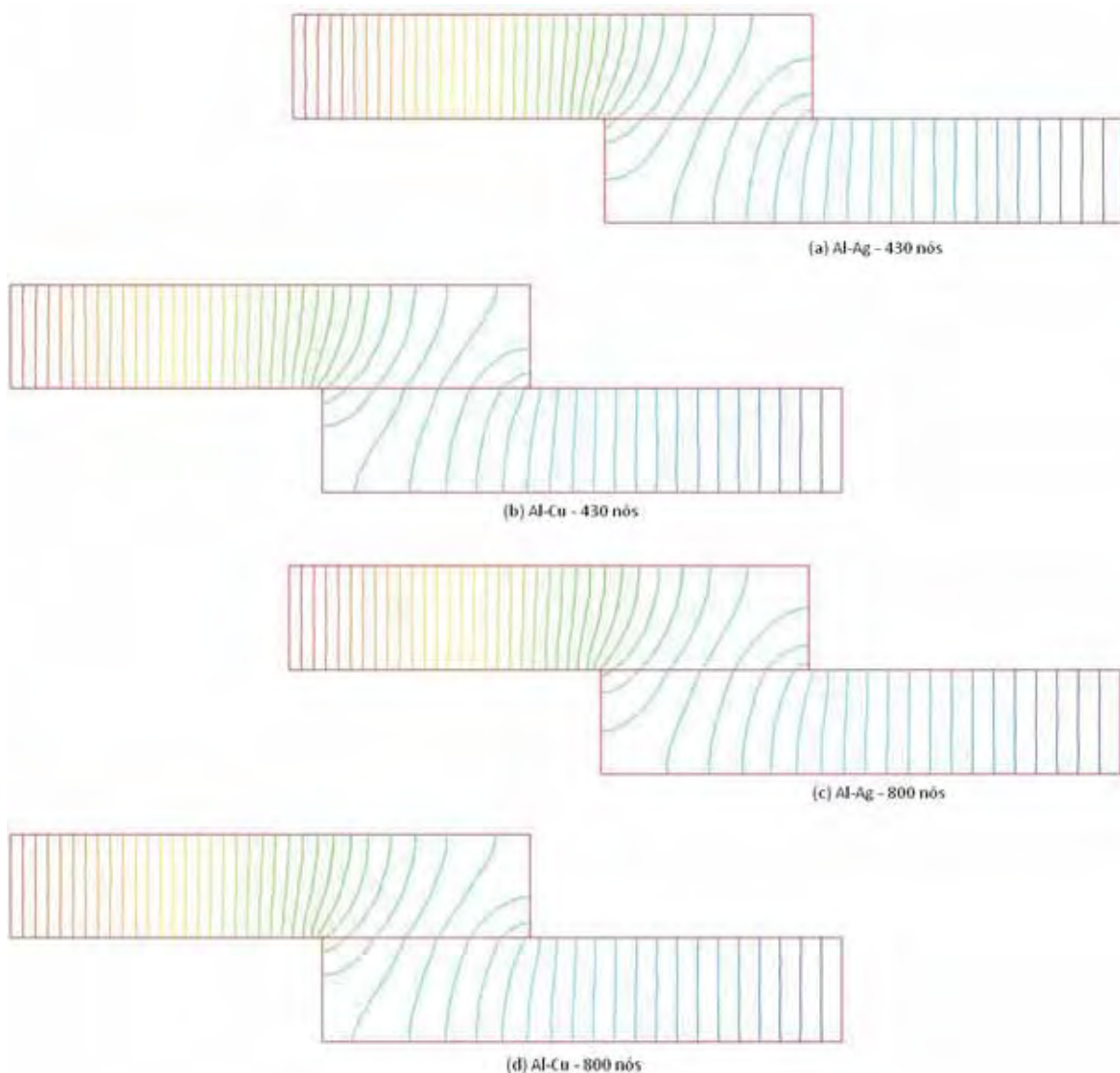


Figura 4.3 – Equipotenciais elétricas

As figuras (Fig.4.4) ilustram os mapas de cores do campo elétrico e a visualização do mesmo em alguns pontos do domínio, com a representação em vetores de campo elétrico, respectivamente. Observam-se características qualitativas do fenômeno físico simulado sendo devidamente reproduzidas pela aproximação.

Para uma, melhor, covalidação do código, fazemos uma inspeção da descontinuidade, por uma linha de avaliação escolhida arbitrariamente (Fig.4.5) para cada malha, em cada combinação de material, sendo ilustrada aqui somente uma representação

da descontinuidade e do potencial (Fig.4.6), sobre a linha de avaliação, para a combinação Alumínio-Prata, para a malha de 430 nós. A presença da descontinuidade foi observada para todas as combinações, em todas as malhas.

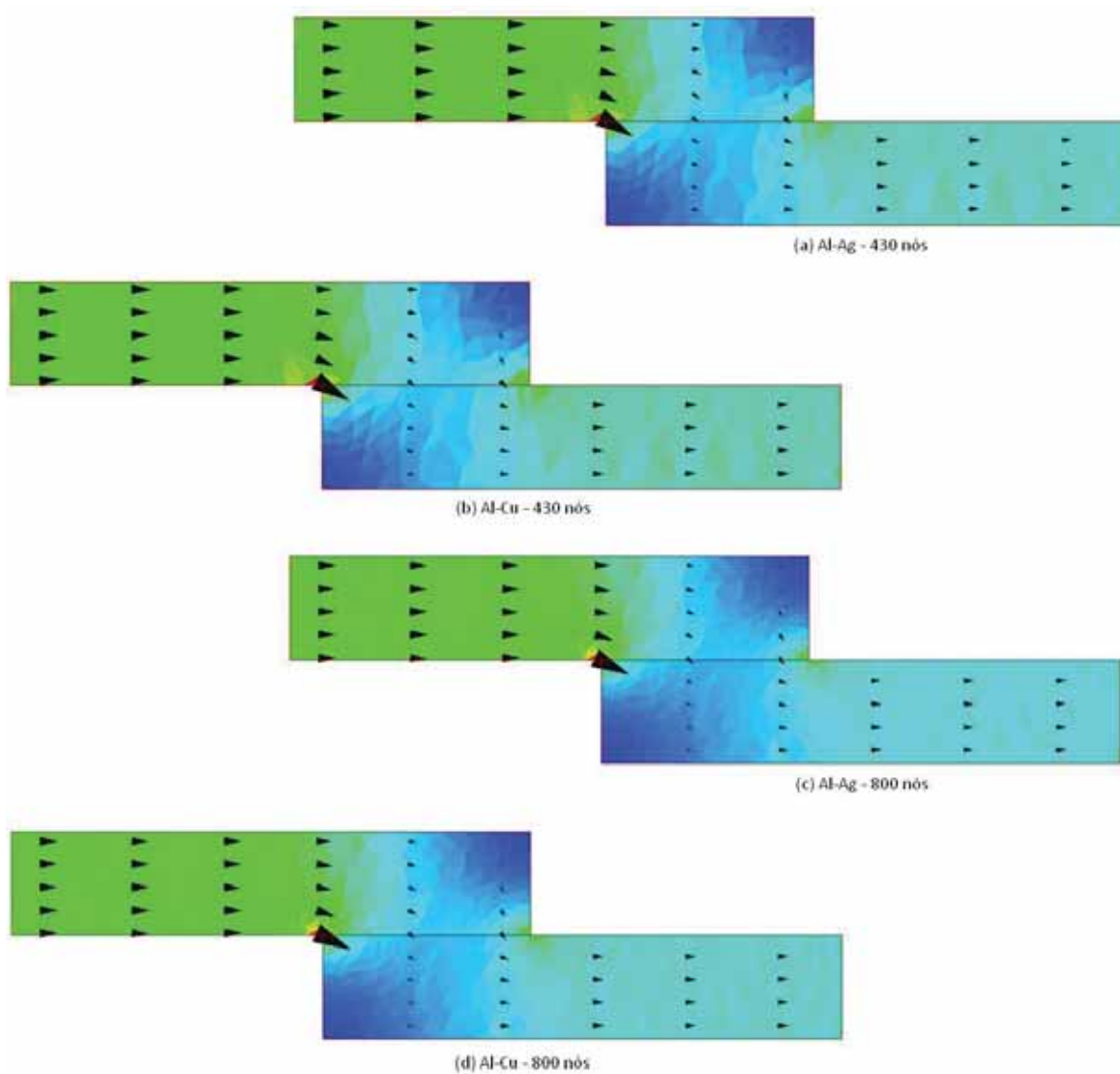


Figura 4.4 – Mapa de cores do campo elétrico e vetores do campo elétrico

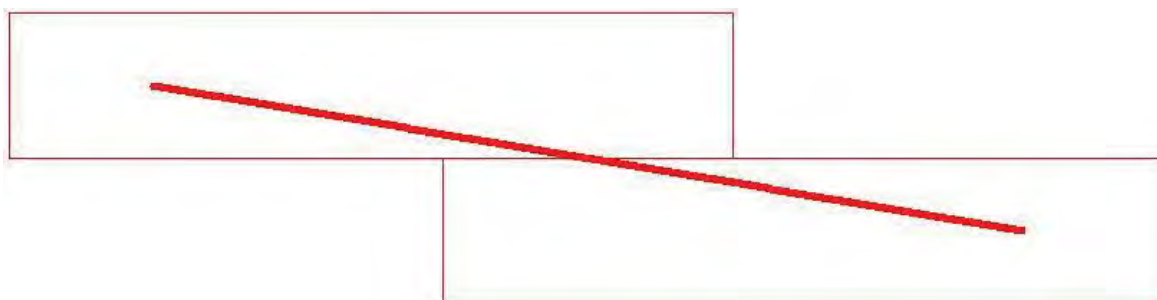


Figura 4.5 – Linha de avaliação

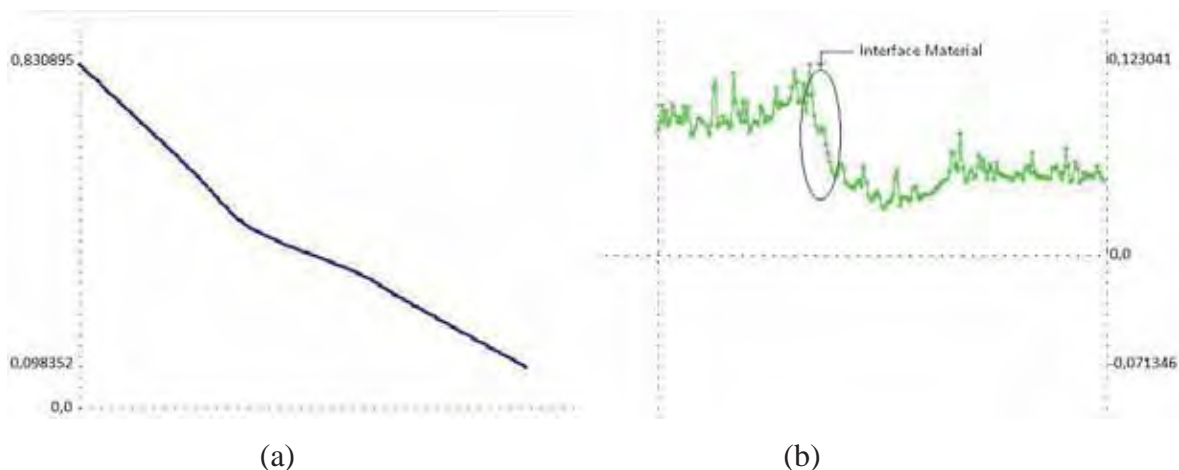


Figura 4.6 – Potencial elétrico (a) e descontinuidade na derivada da aproximação (b)

Foi percebido em (Fig.4.6 (b)) a presença da descontinuidade quando se atravessa a interface material por uma súbita queda da norma do campo elétrico. Esta queda súbita, descontinuidade física, é mais bem representada pela técnica do domínio truncado, onde os nós de um lado da interface não contribuem para as aproximações de pontos de avaliação do outro lado da interface material.

4.1.1. Resultados

Como dito anteriormente neste trabalho, os testes foram realizados para uma distribuição irregular de nós no domínio, tendo-se certa distribuição nodal uniforme somente nas linhas de geometria do dispositivo tratado. A Figura 4.7 ilustra a forma de medida adotada para o problema, onde a indicação *u.c.l.* indica *unidade de comprimento linear*, que para este problema foi utilizada a unidade de medida: *metro(m)*. Esta forma de tratamento das medidas indica que este tipo de problema pode ser tratado de forma proporcional para quaisquer outras unidades de medida.

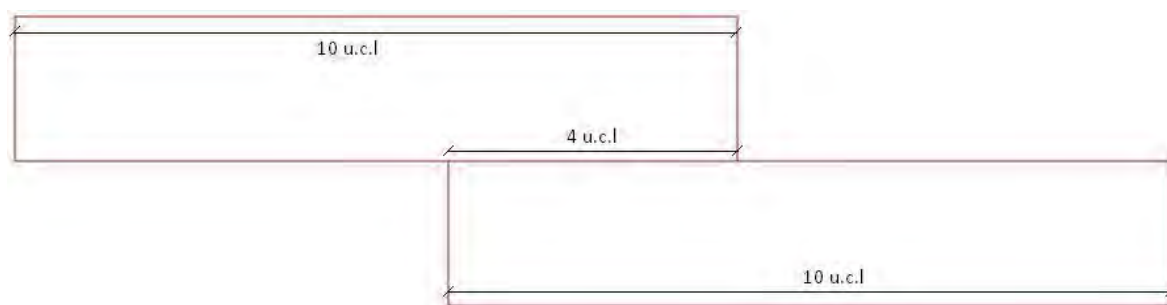


Figura 4.7 – Ilustração das medidas do dispositivo

A linha de interface material, medindo 4 *u.c.l.* foi discretizada a uma distância linear nodal média por volta de $5,0 \cdot 10^{-1}$ *u.c.l.* para a malha de 430 nós, e por volta de $2,35 \cdot 10^{-1}$ *u.c.l.* para a malha de 800 nós.

Para cada caso (combinação material com suas diferentes concentrações de nós), criou-se inicialmente um conjunto de pares de pontos teste, cada um distando inicialmente $\delta = \delta_{max}$ da interface material. Para cada par de pontos de teste foi calculado o erro e obtida sua média para um valor de δ . Foi definido um decremento $\Delta\delta$ suficientemente pequeno para identificar o limite a partir do qual se pode dizer que δ está adequadamente ajustado, $\delta = \delta_{min}$. Vale destacar que, para as situações investigadas o δ variou de 10^{-1} a 10^{-10} , onde a partir de um $\delta = 10^{-5}$ o nível de magnitude dos erros relativos médios, para os campos elétricos em ambas as componentes, dos pares de pontos de teste converge para um valor praticamente estacionário, para todos os testes feitos com a mesma geometria variando-se as discretizações e a combinação de materiais como pode ser visto nas Figuras 4.8 a 4.11.

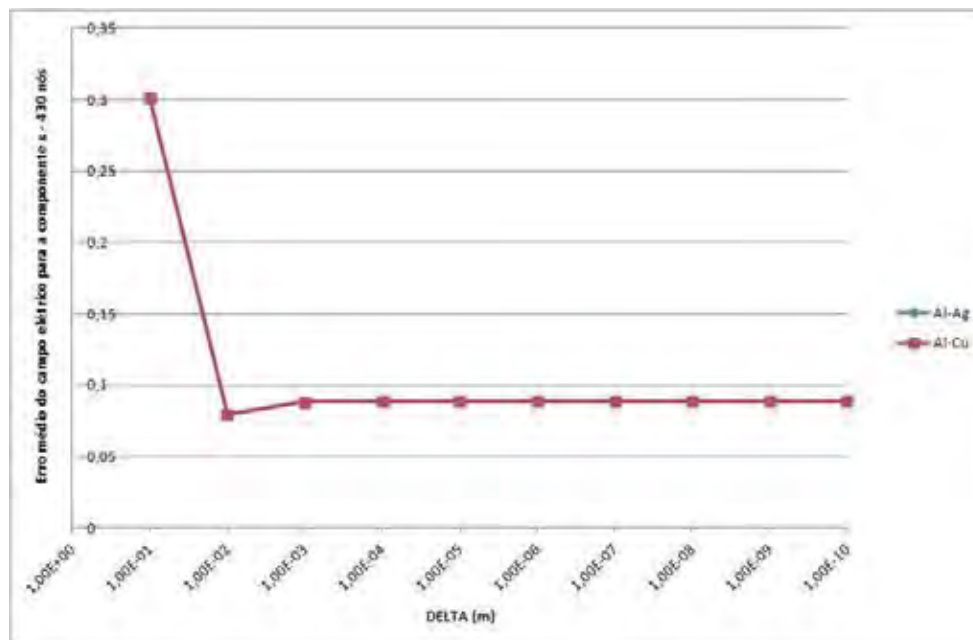


Figura 4.8 – Erro médio relativo à componente x do campo elétrico para valores decrescentes de δ , com uma malha de 430 nós

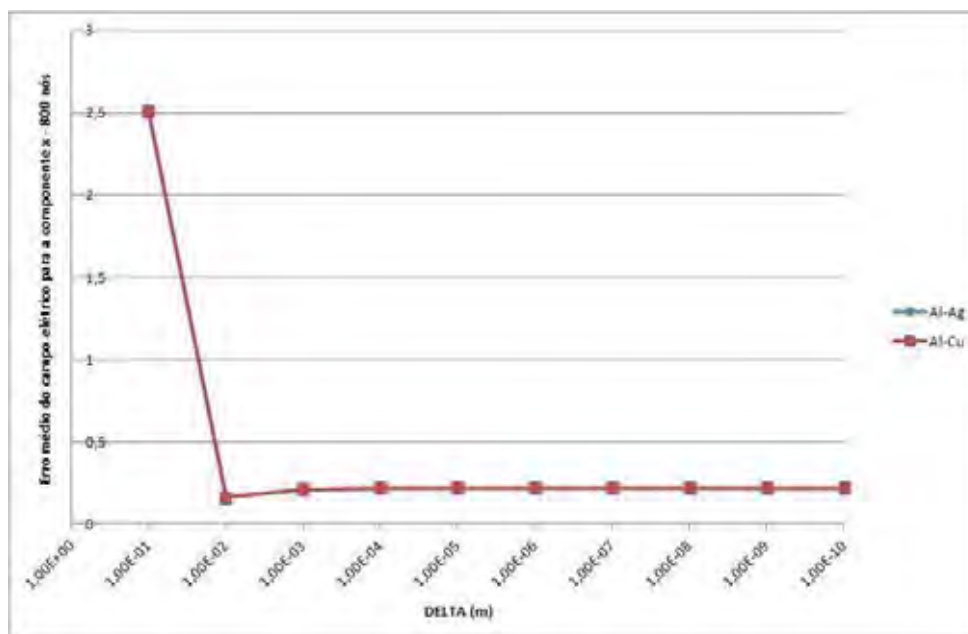


Figura 4.9 – Erro médio relativo à componente x do campo elétrico para valores decrescentes de δ , com uma malha de 800 nós

Nas Figura 4.8 e Figura 4.9 é notado que para a componente tangencial do campo elétrico, havendo um aumento da discretização, existe um pequeno acréscimo do valor do erro médio, mesmo para quando ocorre o comportamento estacionário deste erro, a partir de $\delta = 10^{-3}$.

Este acréscimo do valor do erro médio para a componente tangencial do campo em uma maior discretização pode ser devido à técnica utilizada para o tratamento da descontinuidade, o truncamento de domínios. Esta técnica, por si só, é descontínua, pois trunca os domínios dos nós que se situam próximos às interfaces materiais. Em outras palavras, para se inserir na formulação do problema a descontinuidade física do dispositivo tratado, é utilizada uma técnica numérica descontínua. Esta forma de tratamento da representação da descontinuidade física do problema ainda não possui estudos sobre o(s) impacto(s) que podem ocorrer nas derivadas para a componente contínua do campo elétrico.

Para as Figura 4.10 e Figura 4.11 o aumento da discretização permitiu uma redução do valor do erro médio para a componente normal do campo elétrico, onde o comportamento estacionário do erro foi obtido, também, para um valor de $\delta = 10^{-4}$.

A análise dos dados preliminares permitiu observar que os resultados das componentes de campo (tangencial e normal à interface material) em separado sugerem que a componente normal e tangencial do campo elétrico apresentam comportamentos diferentes à medida do refinamento da interface.

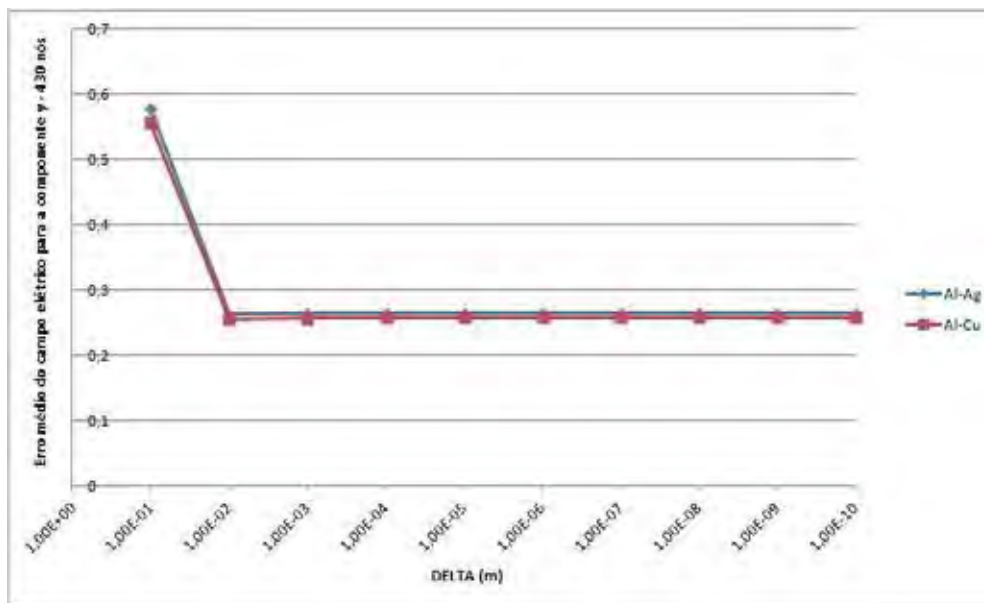


Figura 4.10 – Erro médio relativo à componente y do campo elétrico para valores decrescentes de δ , com uma malha de 430 nós

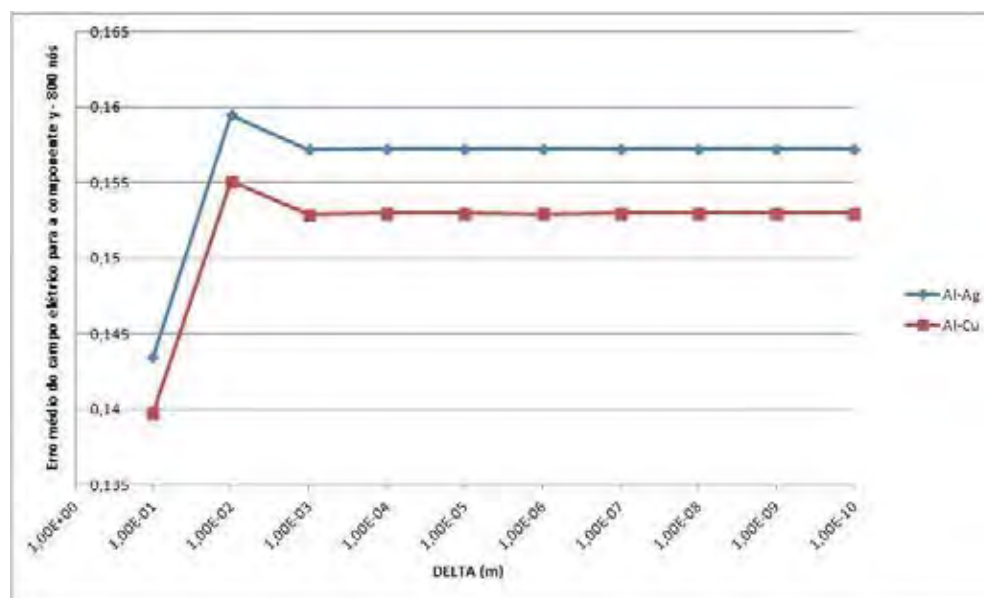


Figura 4.11 – Erro médio relativo à componente y do campo elétrico para valores decrescentes de δ , com uma malha de 800 nós

Para a componente descontínua do campo um incremento na discretização da interface leva a uma diminuição substancial do erro médio (comparando as Figura 4.10 e 4.11), o comportamento inverso se observa para a componente contínua (comparando as Figura 4.8 e 4.9).

Nota-se em particular que o nível de erro obtido com a discretização menos refinada para a componente descontínua é sutilmente superior ao nível de erro médio para a componente contínua com a discretização mais refinada. Esse comportamento estará

sendo investigado considerando-se a norma do campo e um conjunto de testes para níveis diferentes de discretizações, bem como as componentes normal e tangencial do campo para o mesmo conjunto de testes.

Foram realizados testes calculando-se os erros relativos entre os campos elétricos para cada par de pontos de teste para as componentes normal e tangencial, além da norma desses erros. Os valores de δ selecionados nas Figura 4.12 e 4.13 evidenciam os indicativos anteriores, e reforçam que o parâmetro δ pode ser ajustado a partir de 10^{-4} u.c.l. para o problema em foco, para uma combinação material Alumínio-Prata. O eixo das abscissas representa a media em x da linha de interface, e as indicações nas linhas dos gráficos representam cada par de ponto de teste para a discretização associada.

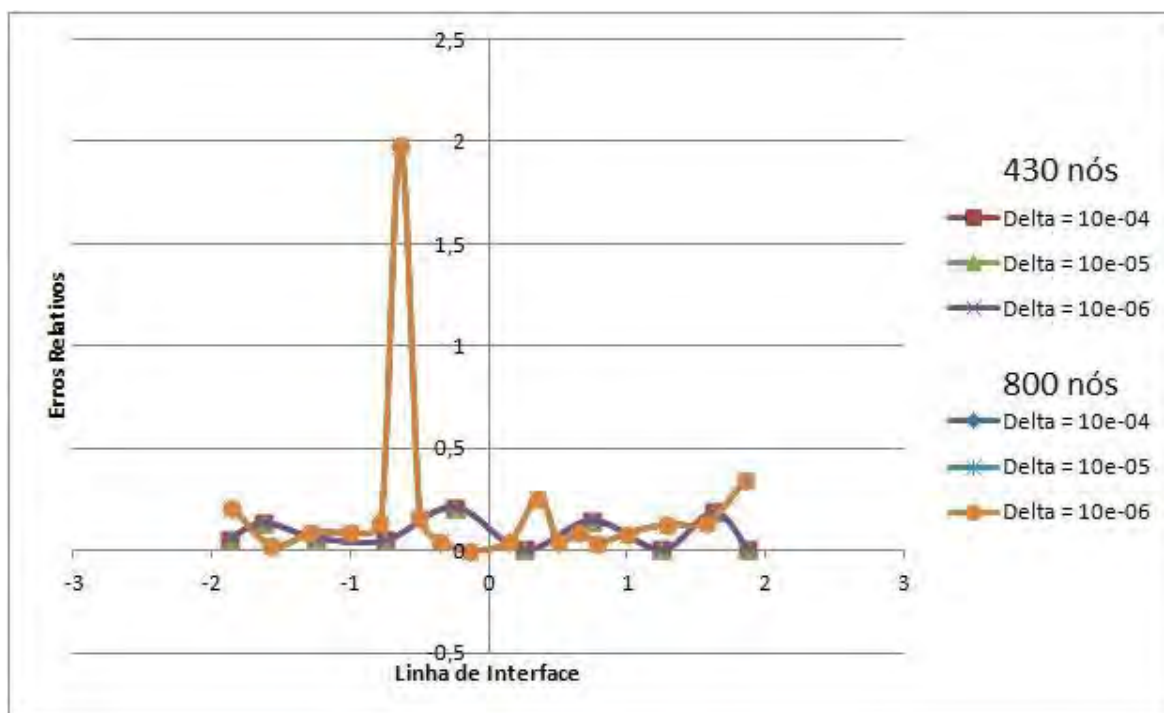


Figura 4.12 – Derivada contínua de interface

Na Figura 4.12 pode ser notado um alto valor do erro relativo para o sexto par de pontos de teste, em uma discretização de 800 nós. Este alto valor provém da distribuição irregular de nós pelo domínio, onde foi percebido que os domínios de influência dos nós próximos àquele(s) ponto(s) de teste são muito pequenos, provocando uma diferença considerável na quantidade de nós contribuintes para a aproximação. Enquanto este(s) ponto(s) de teste continha uma contribuição de 8 nós, o restante dos pontos de teste continham uma contribuição de 13 a 17 nós.

Vale ressaltar que a proposta auto adaptativa busca um melhor refinamento destas interfaces materiais por meio da inclusão de nós nas interfaces materiais reduzindo estes erros relativos entre os campos, nos pontos de teste, buscando uma proximidade destes valores para que se respeite, aproximadamente, a relação entre as componentes contínuas do campo elétrico na física teórica. Esta inclusão de novos pontos nodais na linha de interface tende a trazer uma melhor conformidade na quantidade de nós contribuintes para os pontos de teste analisados.

Ainda, na Figura 4.12 é observado que o refinamento da interface material não provoca um acréscimo ou decréscimo significativos para os níveis do erro, para a derivada contínua, diferentemente do que ocorre na Figura 4.13 para a derivada descontínua, que mostra uma queda expressiva do valor do erro médio quando se ocorre uma maior discretização da linha de interface material.

Por meio dos trabalhos [21][29] e pelos resultados aqui analisados pode-se propor que não há a necessidade de um maior refinamento do domínio para o tratamento de discontinuidades em linhas de interfaces materiais, basta somente refinar-se as linhas de interfaces materiais, o que corrobora com a proposta do tratamento auto adaptativo para o tratamento destas interfaces.

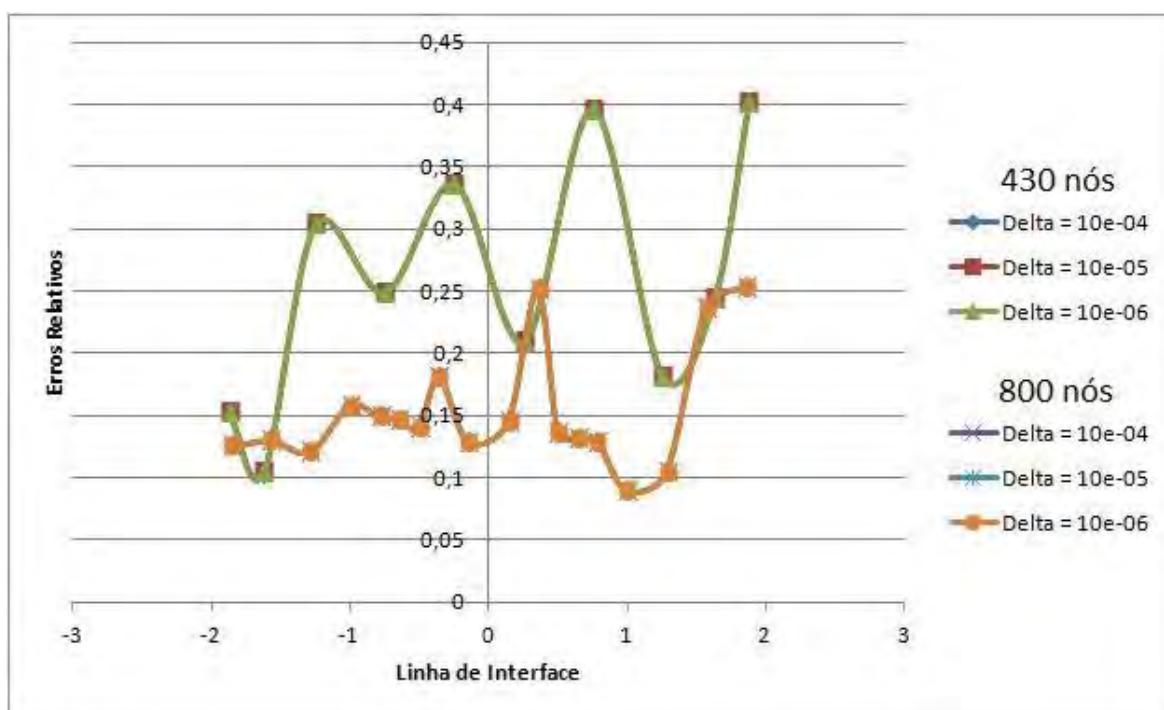


Figura 4.13 – Derivada descontínua de interface

4.2. Eletrostática em diferentes meios

Nesta seção são apresentados os testes realizados para um dispositivo eletrostático em meios não homogêneos. O problema tratado foi baseado em [14] no qual foram comparados resultados numéricos obtidos com o método EFG com os obtidos por elementos finitos. A formulação deste problema é análoga ao anterior, sendo a única diferença a presença de meios com permissividades diferentes.

Os testes foram realizados para duas combinações de materiais diferentes, Ar-Mica e Ar-Porcelana, sendo que para cada combinação foram geradas duas malhas com distribuições diferentes de nós com na média 430 nós e 800 nós, ambas criadas por meio de uma distribuição irregular de nós. A Figura 4.14 ilustra a geometria do problema tratado.

Para ambas as combinações de materiais, o material Ar se localiza no *material 1* (Figura 4.14), enquanto a Mica e a Porcelana se encontram no *material 2* (Fig.4.14). Em Figura 4.15 encontram-se as ilustrações das malhas geradas, de 430 nós, e de 800 nós para este problema.

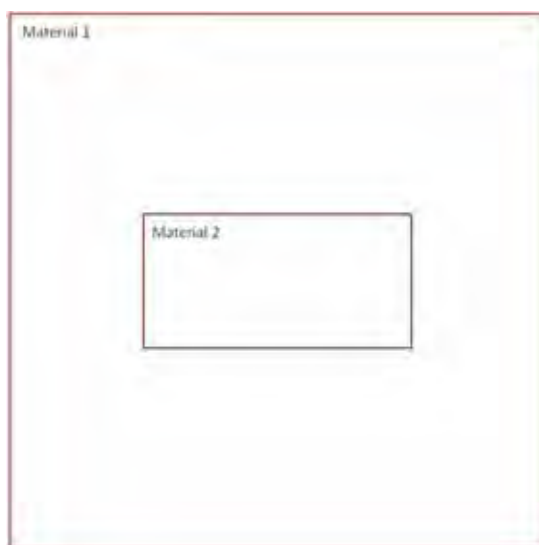


Figura 4.14 – Ilustração do domínio do meio dielétrico tratado

As linhas equipotenciais elétricas, para este problema, obtidas por meio do método EFGI, podem ser visualizadas na Figura 4.16. Já em Figura 4.17 são ilustrados os mapas de cores do campo elétrico e a visualização do mesmo em alguns pontos do domínio. Tanto para a Figura 4.16 quanto para a Figura 4.17 são bem reproduzidas as características do fenômeno físico simulado.

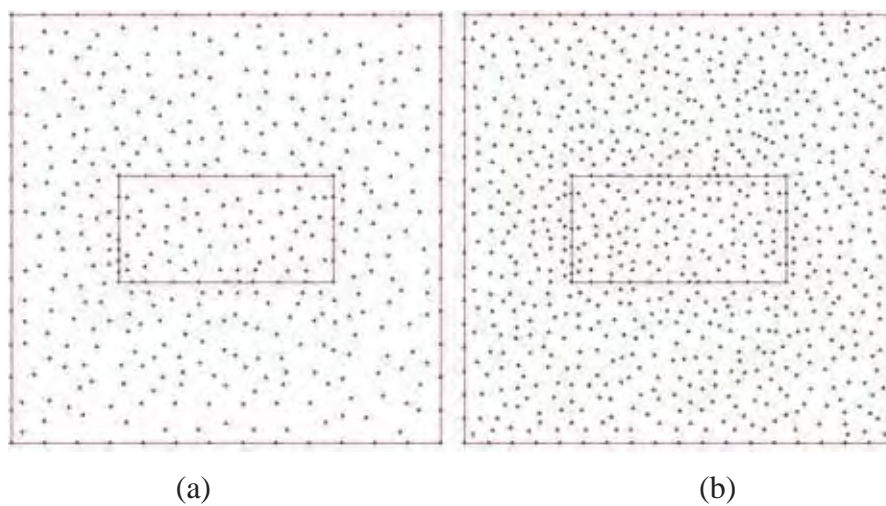


Figura 4.15 – Representação das malhas de 430 (a) e 800 (b) nós

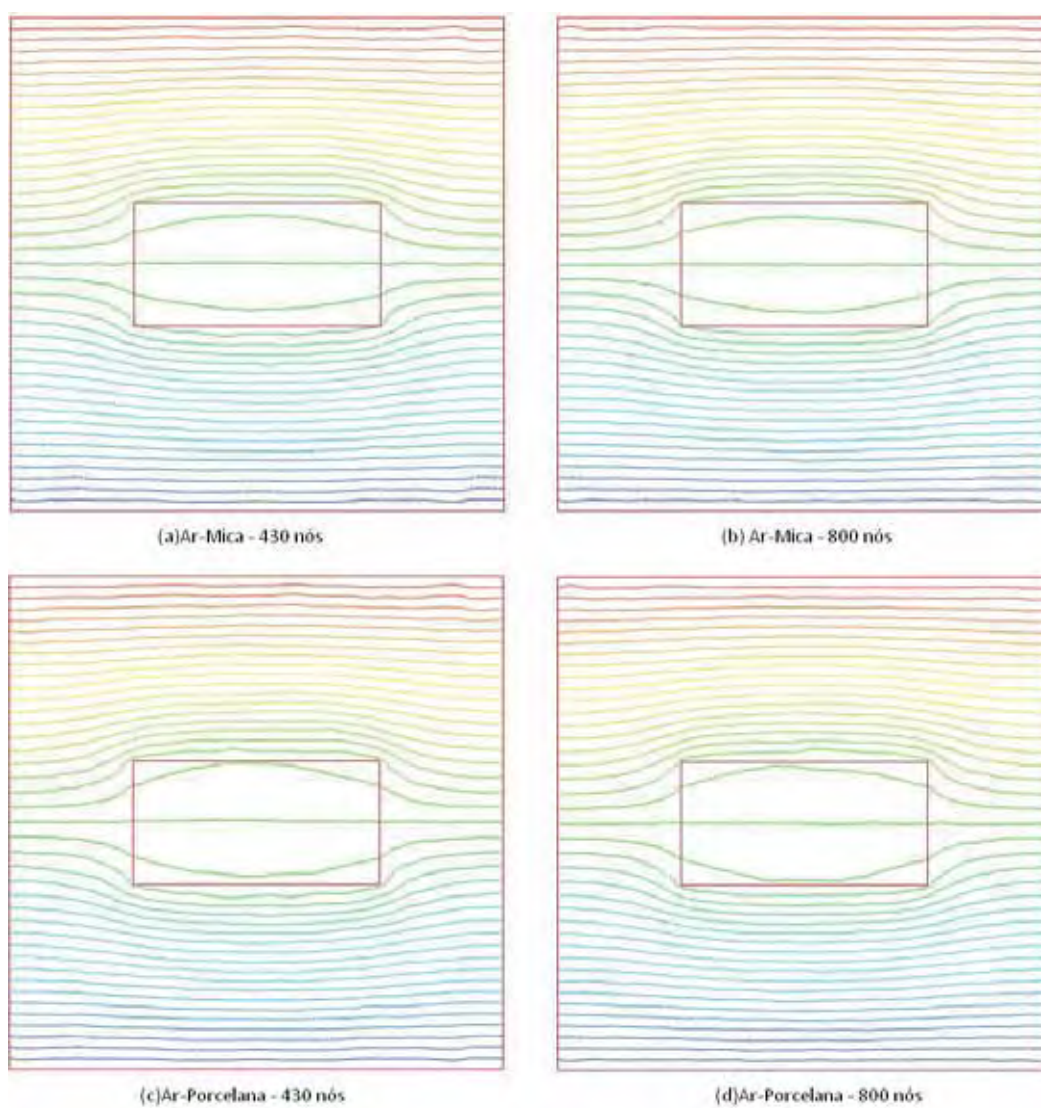


Figura 4.16 – Linhas equipotenciais elétricas

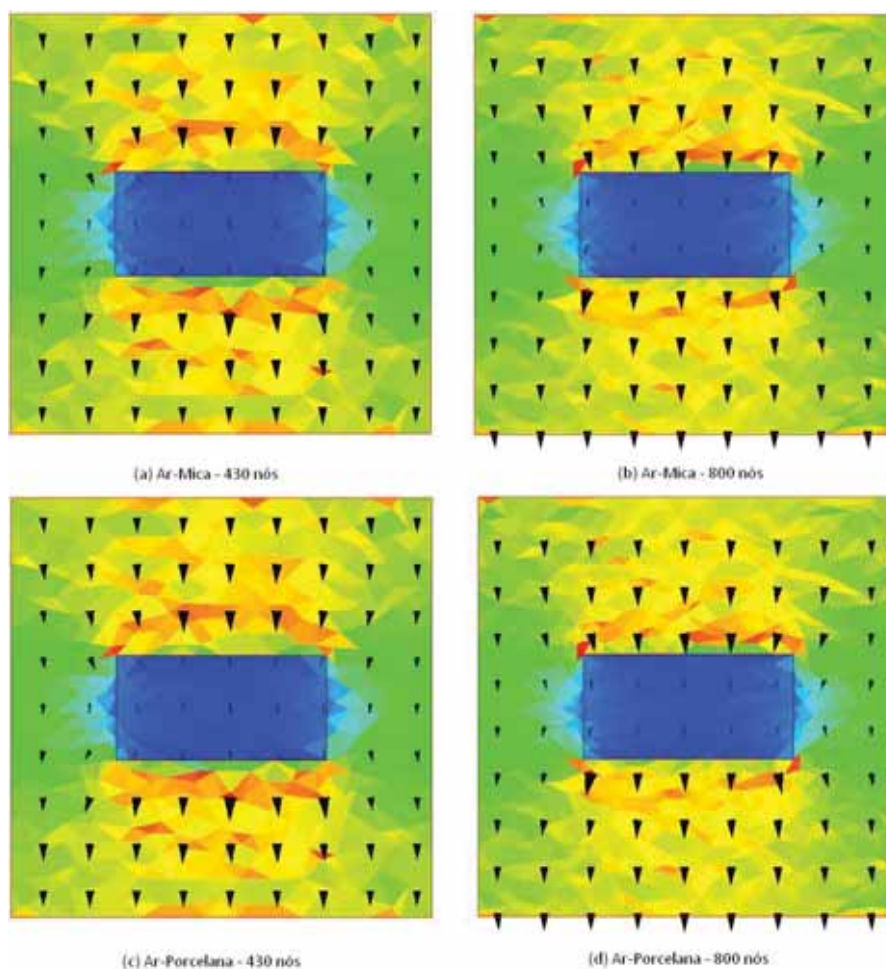


Figura 4.17 – Mapa de cores e vetores do campo elétrico

Uma inspeção é realizada, por uma linha de avaliação arbitrária escolhida (Figura 4.18) para cada malha, em cada combinação de material, sendo ilustrada aqui somente uma representação da descontinuidade e do potencial, sobre a linha de avaliação, para a combinação Ar-Mica, para a malha de 430 nós. Vale dizer que a presença da descontinuidade foi obtida, e observada, para todas as combinações de materiais, em todas as malhas.

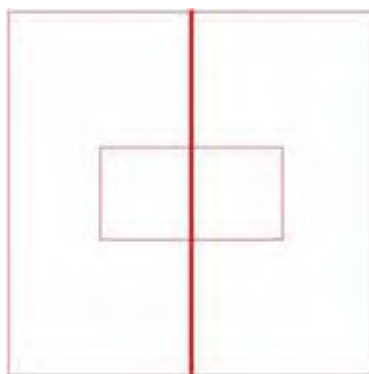


Figura 4.18 – Linha de avaliação

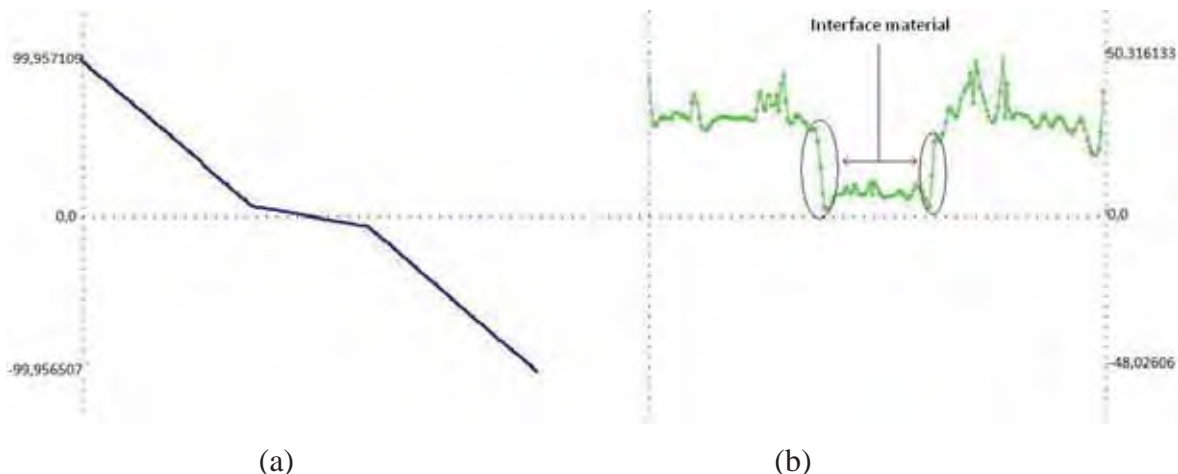


Figura 4.19 – Potencial elétrico (a) e descontinuidade da derivada da aproximação (b)

Foi ilustrada na Figura 4.19 (b) a presença da descontinuidade quando se atravessa a interface material para o material 2 por uma súbita queda e elevação, de acordo com o material em que os pontos da linha de avaliação se encontram, da norma do campo elétrico. A técnica do domínio truncado permite a visualização da descontinuidade nas interfaces materiais, sendo percebida pelas súbitas queda e elevação do valor da norma.

4.2.1. Resultados

Os testes foram aplicados com uma distribuição de pontos de teste uniformemente espaçados nas direções x e y por cada linha de interface do material 2 (Fig.4.14). São ilustradas em Figura 4.20 as formas de medidas utilizadas para o problema, da mesma forma que o problema tratado anteriormente, com a utilização da unidade de medida: metro(m).

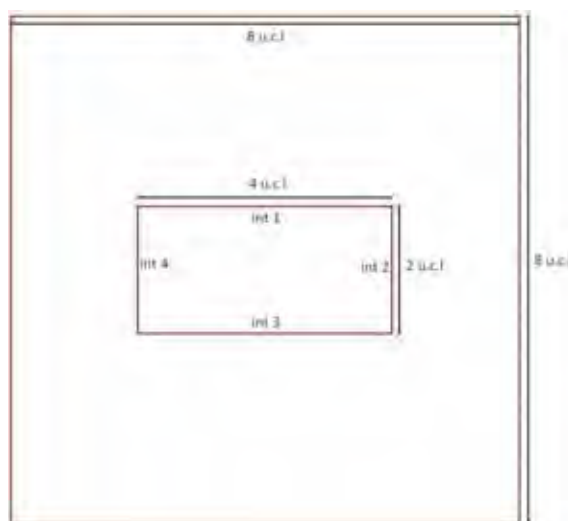


Figura 4.20 – Ilustração das medidas do dispositivo

Diferentemente do caso do resistor tratado anteriormente, neste trabalho, este dispositivo dielétrico não possui somente uma interface material, mas quatro, como designadas na Figura 4.20, identificadas como *int1*, *int2*, *int3*, e *int4*, onde cada linha de interface deverá ser tratada separadamente, como será explicado mais adiante.

As linhas de interface material medindo 4 *u.c.l.* e 2 *u.c.l.* (Figura 4.20) foram discretizadas a uma distância nodal linear média por volta de $4,45 \cdot 10^{-1}$ *u.c.l.* e $3,34 \cdot 10^{-1}$ *u.c.l.*, respectivamente, para a malha de 430 nós, e por volta de $3,08 \cdot 10^{-1}$ *u.c.l.* e $2,86 \cdot 10^{-1}$ *u.c.l.*, respectivamente, para a malha de 800 nós.

Para cada malha e combinação de materiais, fora gerado inicialmente um conjunto de pares de pontos de teste, distando $\delta = \delta_{max}$ das linhas de interface materiais, onde para cada par de pontos de teste foram calculados os erros relativos do campo elétrico em ambas as componentes, e obtidas suas médias para um dado valor δ . Assim como no problema anterior, um decremento foi definido, $\Delta\delta$, suficientemente pequeno para identificar a partir do qual pode se dizer que δ está adequadamente ajustado, $\delta = \delta_{min}$. O intervalo investigado da variação do δ foi o mesmo que no dispositivo anterior, de 10^{-1} a 10^{-10} . Os testes foram realizados para o mesmo domínio, variando-se as discretizações e a combinação dos materiais, como pode ser visto nas figuras Figura 4.21 a 4.28.

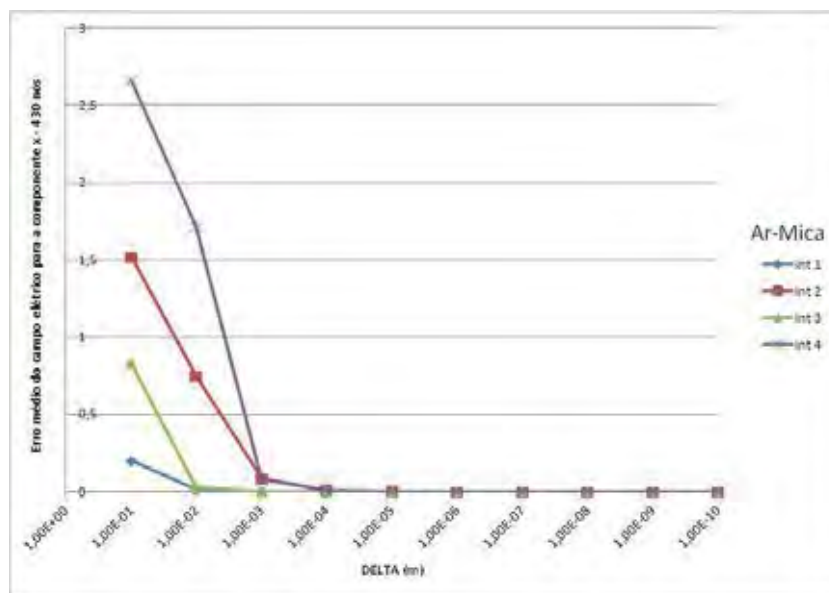


Figura 4.21 – Erro médio, relativo à componente *x* do campo elétrico para valores decrescentes de δ , numa malha de 430 nós, na combinação Ar-Mica

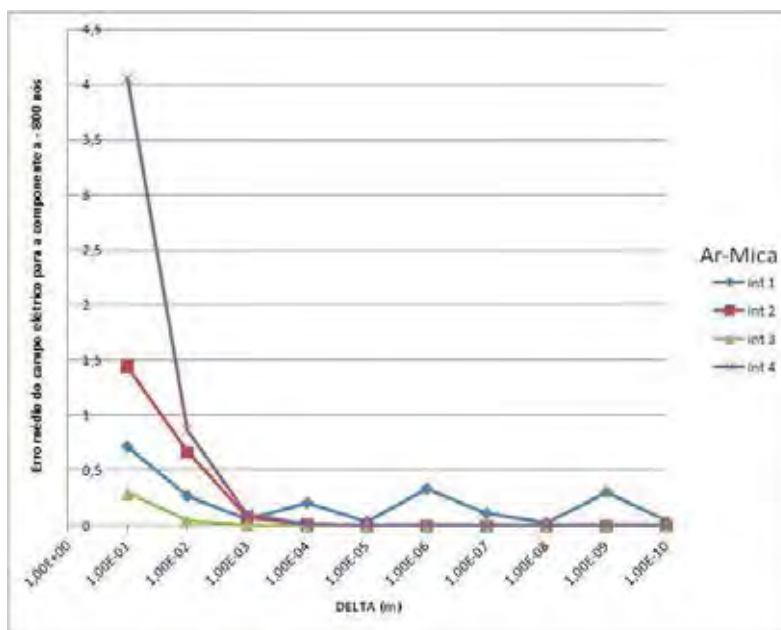


Figura 4.22 - Erro médio, relativo à componente x do campo elétrico para valores decrescentes de δ , numa malha de 800 nós, na combinação Ar-Mica

Em Figura 4.21 e Figura 4.22 percebe-se que ocorrem variações nos valores dos erros médios para componente contínua do campo elétrico quando se aumenta o refinamento da malha, para a combinação Ar-Mica. Nota-se que algumas interfaces obtêm um valor inicial ($\delta = 10^{-1}$) de erro médio mais baixo na malha de 800 nós do que o obtido na malha de 430 nós, mas o comportamento estacionário destes erros acontece por volta de $\delta = 10^{-4}$.

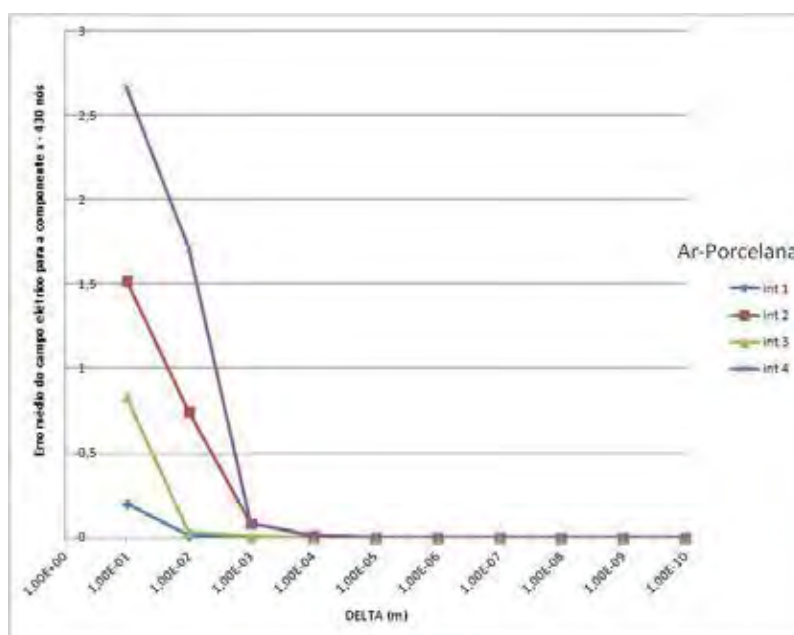


Figura 4.23 - Erro médio, relativo à componente x do campo elétrico para valores decrescentes de δ , numa malha de 430 nós, na combinação Ar-Porcelana

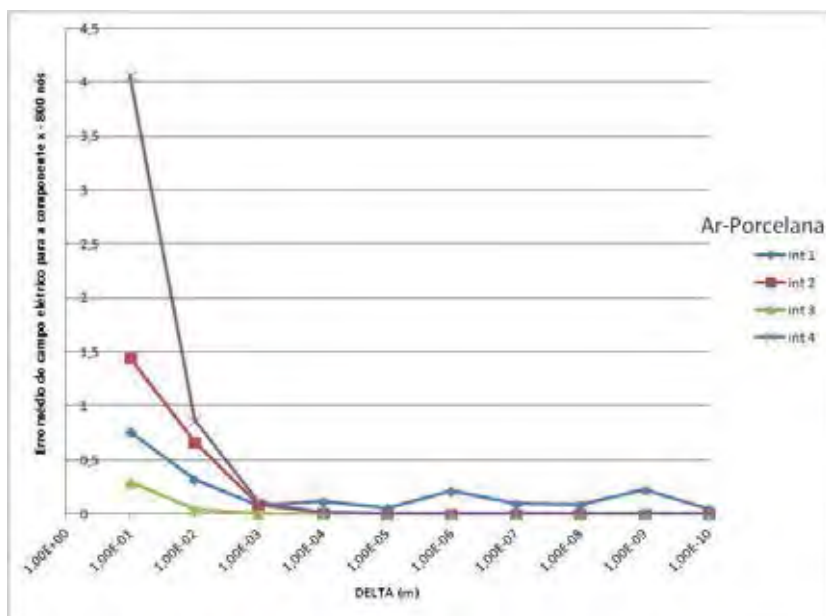


Figura 4.24 - Erro médio, relativo à componente x do campo elétrico para valores decrescentes de δ , numa malha de 800 nós, na combinação Ar-Porcelana

O mesmo comportamento da componente contínua do campo elétrico para a combinação Ar-Mica (Figura 4.21 e 4.22) foi percebido para a combinação Ar-Porcelana (Figura 4.23 e 4.24). O comportamento estacionário do erro médio ocorreu na mesma faixa de $\delta = 10^{-4}$, e foram percebidas algumas variâncias para os erros médios das interfaces quando foi realizado um aumento no refinamento da malha.

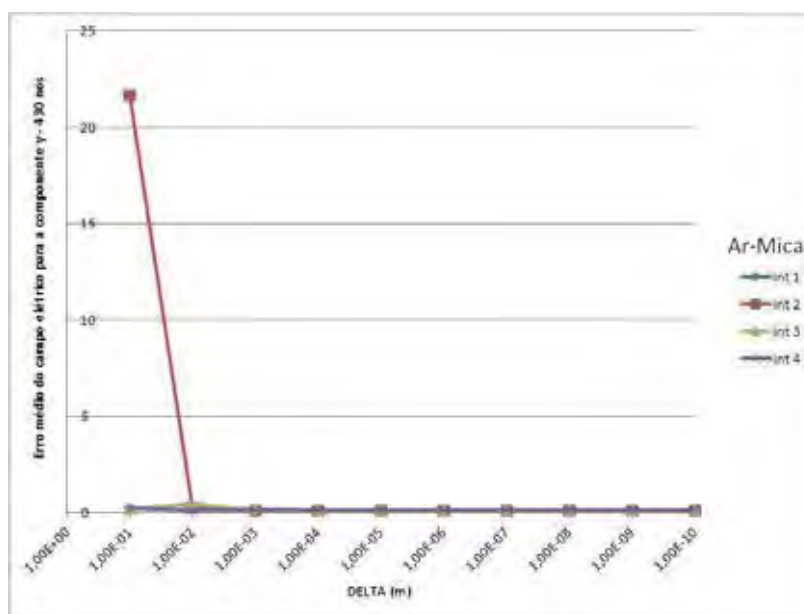


Figura 4.25 - Erro médio, relativo à componente y do campo elétrico para valores decrescentes de δ , numa malha de 430 nós, na combinação Ar-Mica

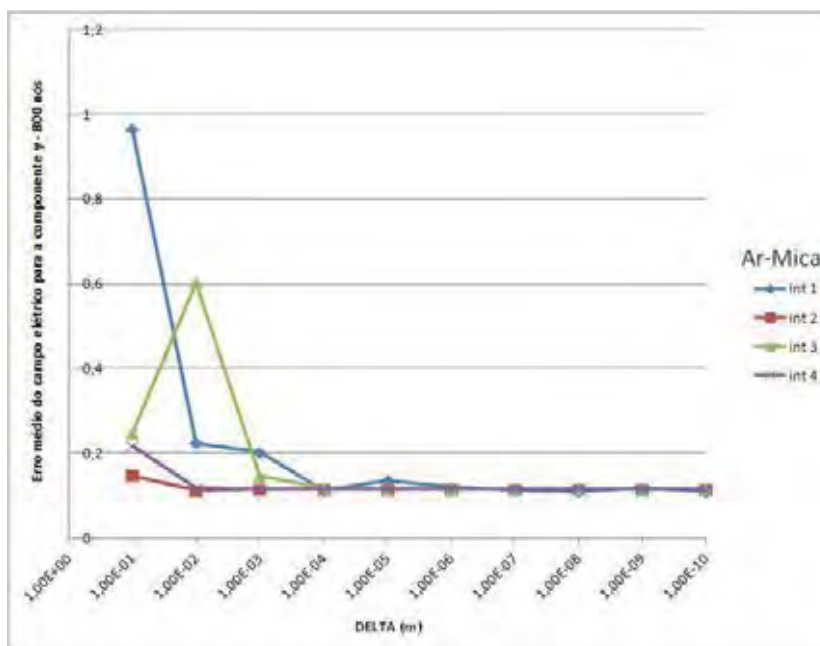


Figura 4.26 - Erro médio, relativo à componente y do campo elétrico para valores decrescentes de δ , numa malha de 800 nós, na combinação Ar-Mica

Para o erro médio da componente tangencial do campo elétrico a redução do erro médio é bem notada (Fig.4.25) e (Fig.4.26) para a combinação Ar-Mica quando ocorre um aumento do refinamento da malha. Um maior refinamento mostrou uma grande queda do erro médio para uma das interfaces (*int1*), e um leve aumento para as demais, mas todas acabaram por obterem um valor estacionário, menor do que o obtido na malha de 430 nós, ocorrendo por volta de $\delta = 10^{-5}$.

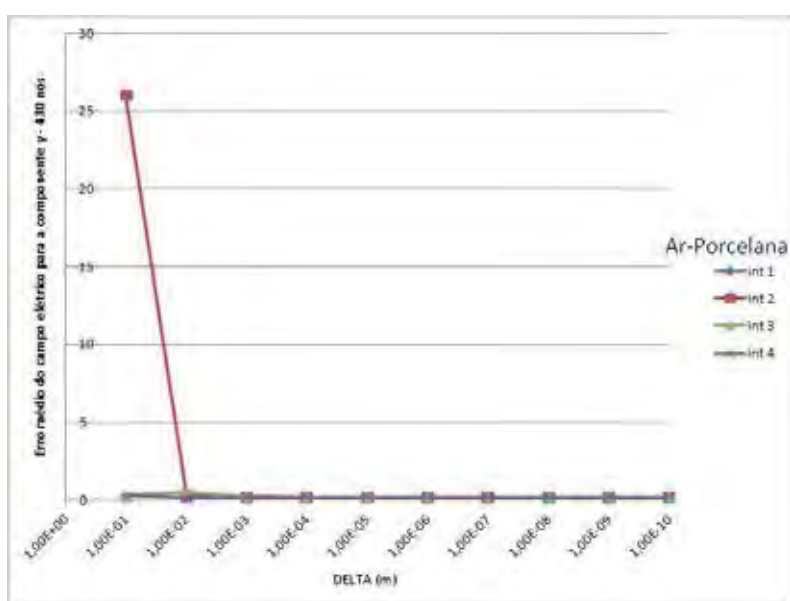


Figura 4.27 - Erro médio, relativo à componente y do campo elétrico para valores decrescentes de δ , numa malha de 430 nós, na combinação Ar-Porcelana

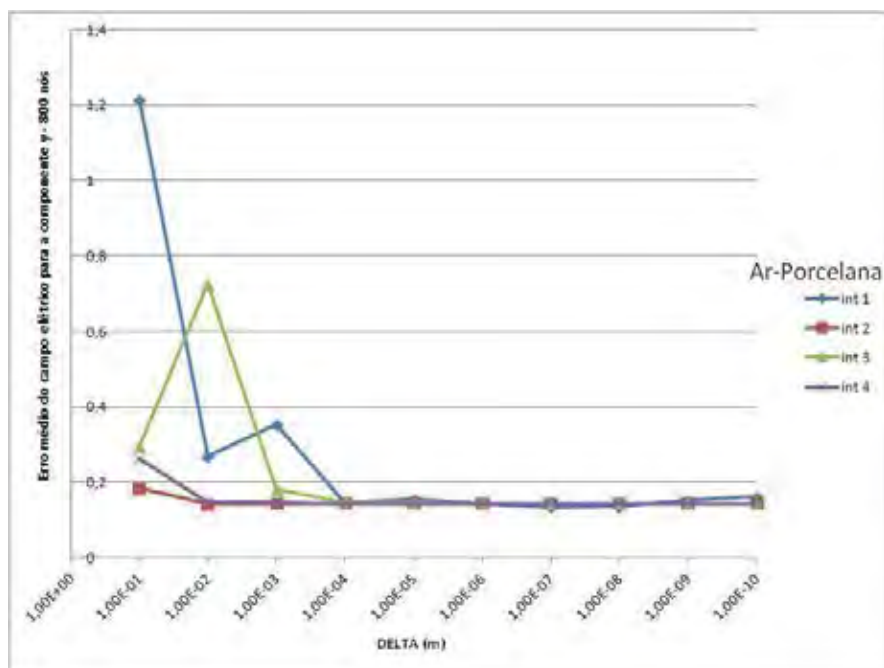


Figura 4.28 - Erro médio, relativo à componente y do campo elétrico para valores decrescentes de δ , numa malha de 800 nós, na combinação Ar-Porcelana

Em Figura 4.27 e 4.28 foram notados comportamentos similares da componente descontínua do campo elétrico, para a combinação Ar-Porcelana, assim como, também, em Figura 4.25 e 4.26 para a combinação Ar-Mica. A interface (*int1*) sofreu uma redução de seu erro médio, ao passo que as demais sofreram um acréscimo, isto para valores altos de δ . A medida que ocorre o decréscimo do valor do δ , pequenas variações são percebidas para a malha mais refinada, finalmente chegando a um valor estacionário $\delta = 10^{-4}$ para a malha de 800 nós e $\delta = 10^{-3}$.

Assim como no resistor tratado anteriormente, a análise realizada com o dispositivo eletrostático permitiu observar comportamentos distintas para a componente normal e tangencial do campo elétrico de acordo com que se modifica o refinamento da interface.

Avaliando-se os gráficos das figuras Figura 4.21 a 4.28 se percebe que em todos os gráficos o comportamento estacionário dos erros relativos médios dos pontos de teste para ambas as combinações de materiais, em ambas as discretizações tratadas, converge a partir de $\delta = 10^{-4}$, onde somente em alguns casos (Figura 4.25 e 4.27) ele começa a convergir em $\delta = 10^{-3}$. Por meio disso indica-se o ajuste do parâmetro δ para o valor de $\delta = 10^{-5}$ onde os valores dos erros relativos médios dos pontos de teste já se encontram em um comportamento estacionário.

Um aumento na discretização mostrou que a componente descontínua sofreu uma diminuição de seu erro médio (comparando a Figura 4.25 com a Figura 4.26, e a Figura

4.27 com a Figura 4.28). Por outro lado a componente contínua observou um comportamento inverso, até que um pouco estacionário, não havendo grandes variações com um aumento do refinamento.

Este mesmo tipo de comportamento onde a componente descontínua para uma discretização menos refinada, possui um erro médio superior ao nível de erro médio, também foi observado para o problema do resistor, e será investigado em estudos futuros considerando-se outras características do problema como a norma do campo e um conjunto de testes para níveis diferentes de discretizações.

Foram, também, analisados os erros relativos entre os campos elétricos para cada par de pontos de teste, para as componentes normal e tangencial do campo elétrico, ao longo de cada linha de interface material com o parâmetro δ variando de 10^{-4} u.c.l. a 10^{-6} u.c.l., reforçando a proposta indicada anteriormente para o ajuste do parâmetro δ . As imagens ilustram estas análises numéricas para a combinação de material Ar-Mica. Resultados concordantes foram, também, obtidos para a combinação Ar-Porcelana.

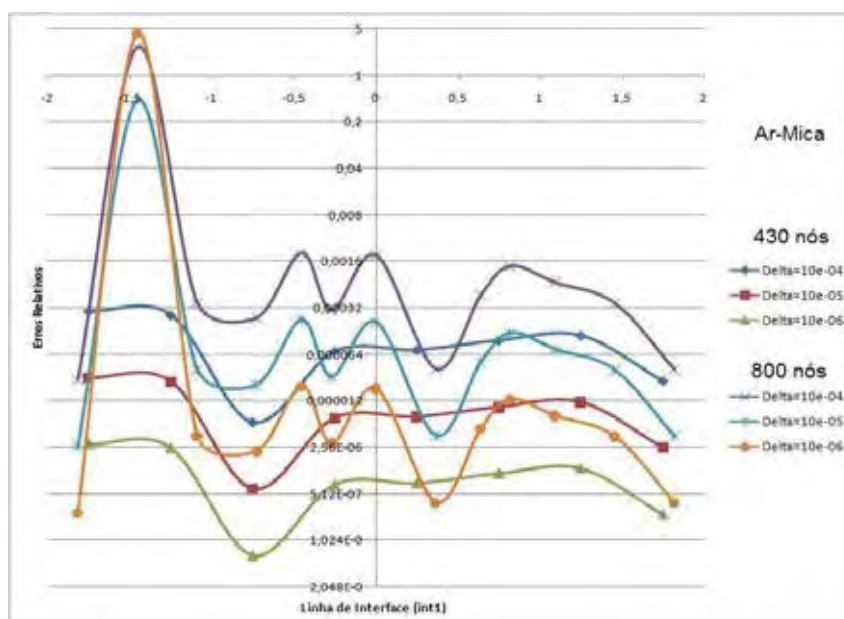


Figura 4.29 – Derivada contínua de interface, para *int1*

A Figura 4.29 possui um comportamento similar ao comportamento da Figura 4.12 no que diz respeito ao alto valor de erro relativo para o segundo par de pontos de teste para a malha de maior discretização. Para este par de pontos de teste ocorreu uma mesma diferença sutil na quantidade de nós que participam da aproximação, em comparação com a concentração de nós participantes nas aproximações dos pontos de teste restantes. A concentração de nós que participam das aproximações para os pontos de teste deste

dispositivo foram de 14 a 18, enquanto que no segundo par de ponto de teste caiu para 7 nós.

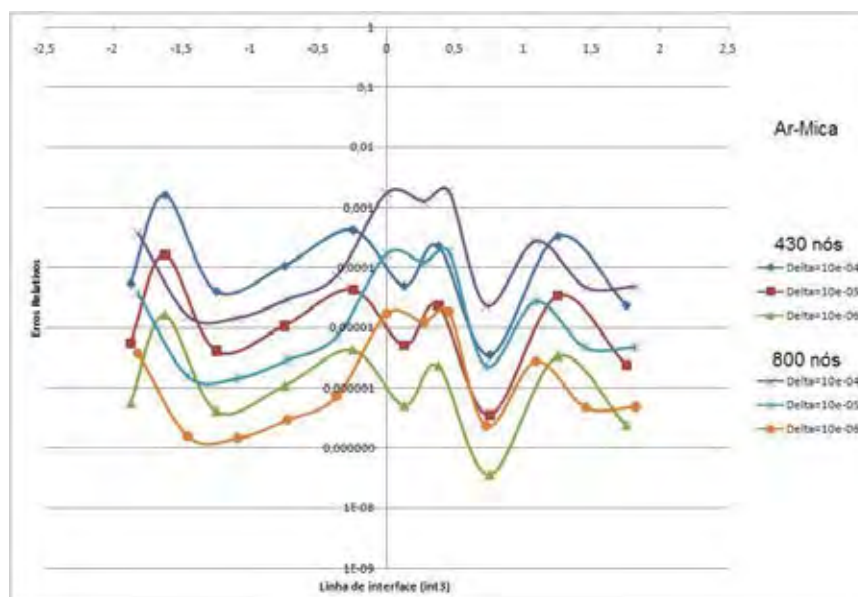


Figura 4.30 – Derivada contínua de interface, para *int3*

Para os gráficos das Figura 4.29 e 4.30, os quais representam as interfaces *int1* e *int3*, respectivamente, observaram-se variações dos valores dos erros relativos para a componente contínua do campo ao longo da interface material, valendo dizer que estas interfaces encontram-se paralelas ao eixo das abscissas no modelo geométrico do dispositivo. Para a *int1* (Figura 4.29) um aumento no refinamento da malha gerou um pequeno acréscimo nos valores dos erros relativos para os mesmos valores de δ , sendo o comportamento contrário encontrado na *int3* (Figura 4.30) onde foram percebidas, ainda, variações, mas com certas diminuições nos valores dos erros relativos para os mesmos valores de δ .

Este leve acréscimo no valor do erro relativo para a componente contínua para uma malha mais refinada é explicado da mesma forma como foi explicado no problema do resistor, tratado anteriormente. Para se inserir na formulação do problema a descontinuidade física real do problema, é inserida uma descontinuidade numérica, a técnica de domínio truncado.

Como dito anteriormente, não existem, ainda, estudos, a priori, que indiquem como a técnica de truncamento de domínios pode afetar a componente contínua do campo elétrico.

Para as Figuras 4.31 e 4.32 há uma grande variação nos valores dos erros relativos para a componente descontínua do campo, ao longo da interface, para um $\delta = 10^{-4}$,

ocorrendo uma grande queda destes erros relativos a partir de $\delta = 10^{-5}$, em ambas as malhas, em ambas as interfaces (*int2* e *int4*). Percebe-se que em *int2* e *int4*, paralelas ao eixo das ordenadas no modelo geométrico do dispositivo, possuem uma mesma faixa de erro relativo, ao longo da interface, para um valor estacionário de δ . Isto reforça o valor indicado de δ anteriormente, neste trabalho, para este problema.

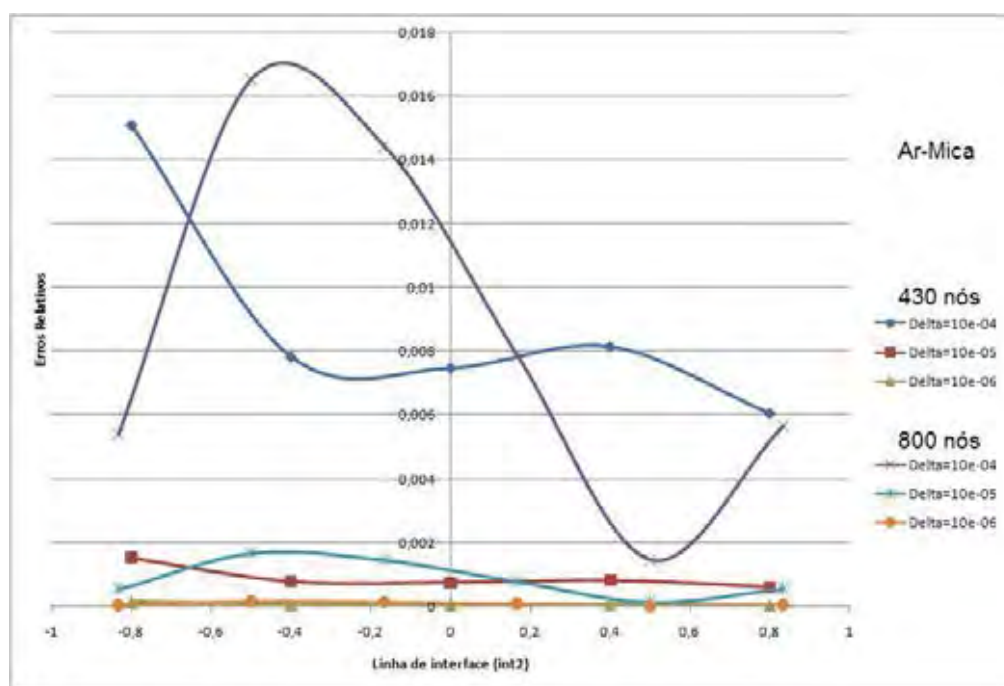


Figura 4.31 – Derivada contínua de interface, para *int2*

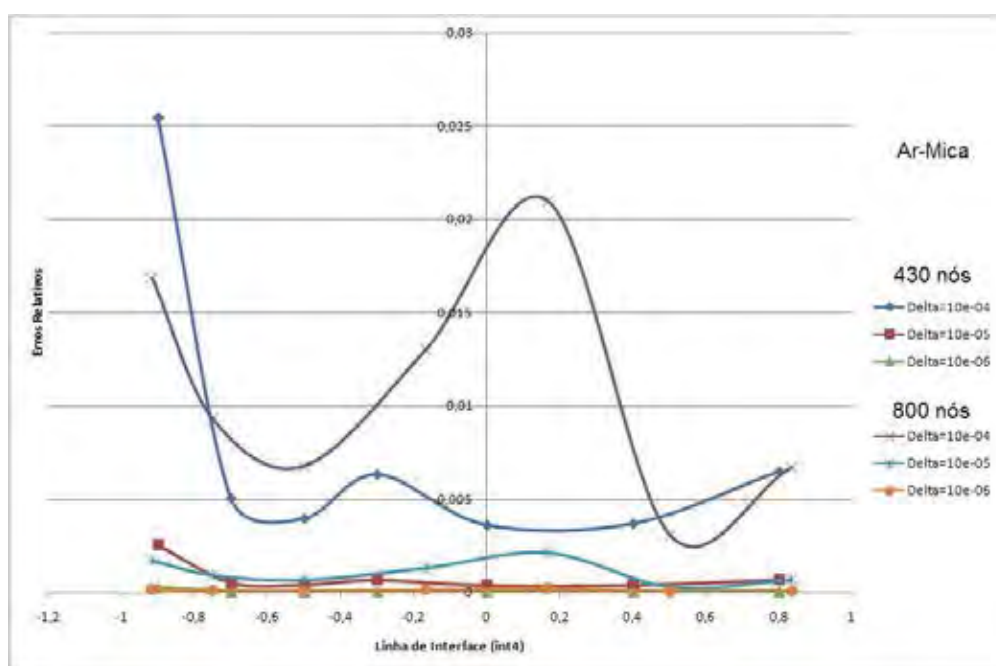


Figura 4.32 – Derivada contínua de interface, para *int4*

Como visto no problema do resistor, tratado anteriormente, este problema eletrostático ilustra nos gráficos das Figura 4.33 e 4.34 uma queda expressiva para os valores dos erros relativos da componente descontínua do campo elétrico, ao longo da interface, nos pontos de teste, a medida que se aumenta o refinamento da malha. Pequenas oscilações são notadas em ambas as malhas, provenientes da concentração irregular dos nós ao longo do domínio do problema, provocando quantidades diferentes de nós participantes nas aproximações dos pontos de teste, mas o comportamento estacionário é percebido a partir de $\delta = 10^{-4}$ onde estas oscilações são mínimas.

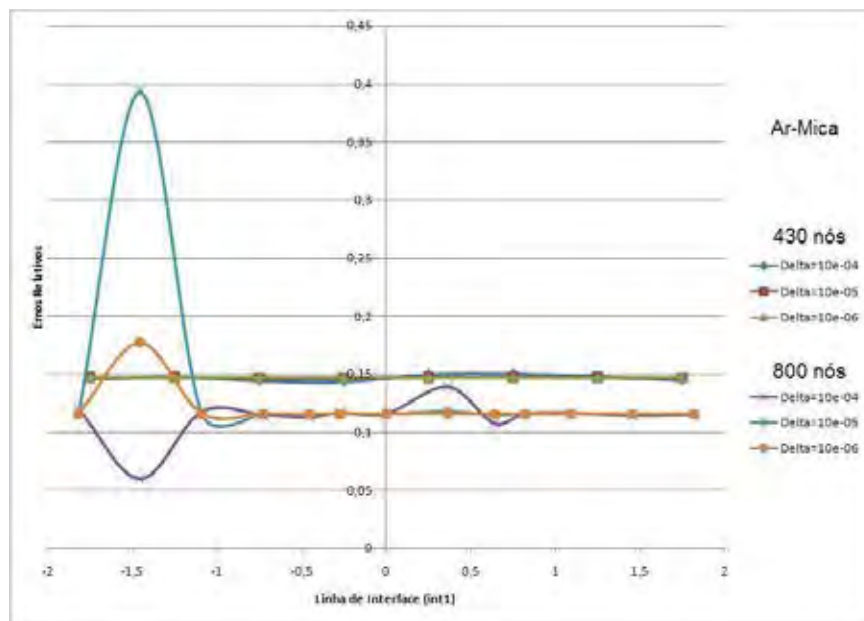


Figura 4.33 – Derivada descontínua de interface, para *int1*

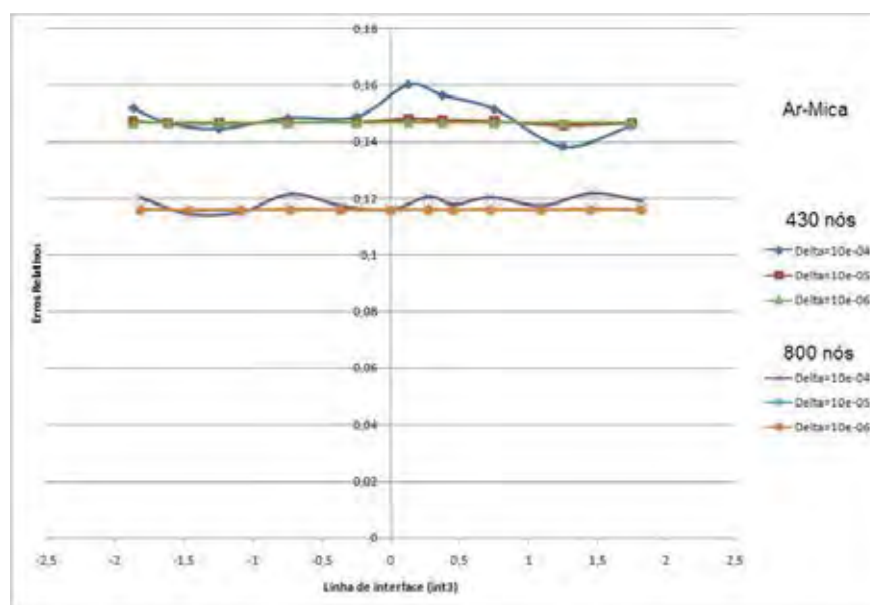


Figura 4.34 – Derivada descontínua de interface, para *int3*

Para as Figuras 4.35 e 4.36 foram notados os mesmos comportamentos para os erros relativos na componente descontínua quando comparados com as Figura 4.33 e 4.34. A queda do erro relativo foi, também, expressiva, mas não contendo oscilações com as das *int1* e *int3*. A razão disto é que as interfaces *int2* e *int4* estão paralelas ao eixo das ordenadas. O comportamento estacionário é visualizado a partir de $\delta = 10^{-4}$ para ambas as malhas.

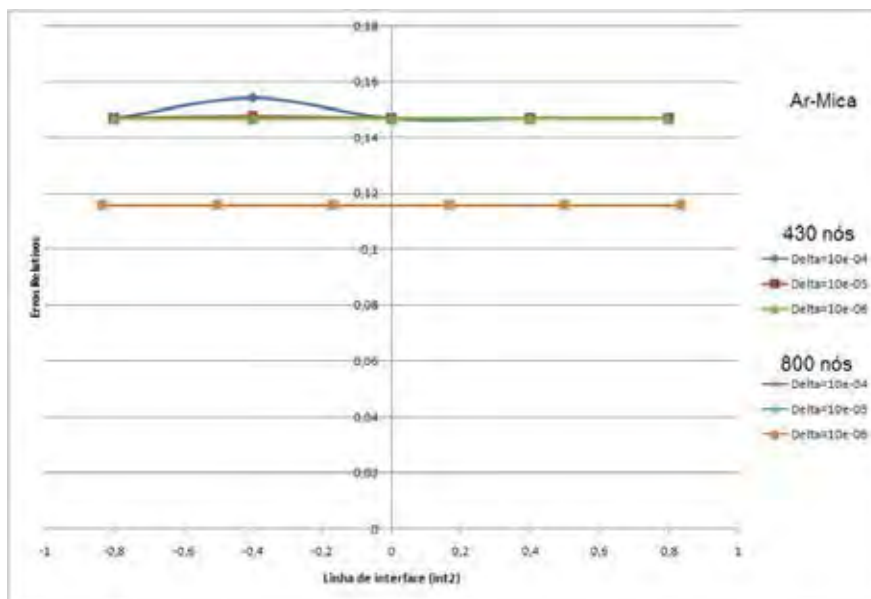


Figura 4.35 – Derivada descontínua de interface, para *int2*

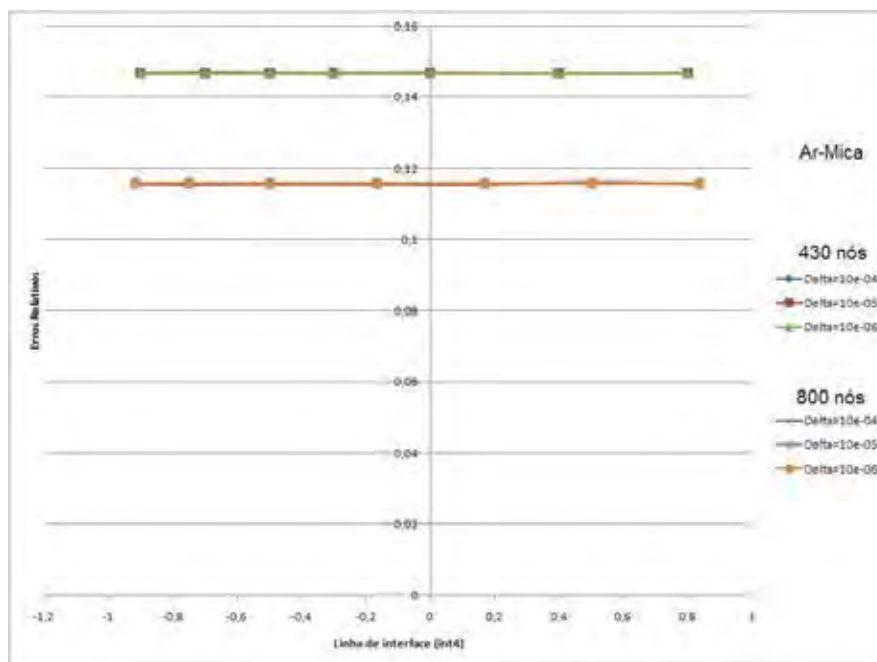


Figura 4.36 – Derivada descontínua de interface, para *int4*

Como ilustrado nas imagens (Fig.4.29) a (Fig.4.36) se evidencia o valor proposto do parâmetro δ para este problema eletrostático, e, também, se observa uma queda expressiva no nível do erro, principalmente para a componente descontínua (Fig.4.33 a Fig.4.35).

Considerações Finais e Perspectivas Futuras

Como visto nos capítulos anteriores, o método EFG com abordagem interpolante e domínio truncado apresenta-se com resultados promissores para problemas eletromagnéticos. Vale lembrar que persistem dificuldades nos mais diversos métodos numéricos quando o assunto é o tratamento de descontinuidades.

Como percebido neste trabalho, o ajuste do parâmetro δ para ambos os problemas resolvidos foi igualmente indicado, mas isso não implica que este valor seja um ajuste adequado para qualquer tipo de problema eletromagnético. Este ajuste depende de uma série de fatores que envolvem, por exemplo, a combinação de materiais, discretização do domínio e geometria do domínio. Devido a isso, para cada problema em particular, o valor de ajuste do parâmetro δ deve ser investigado para que então a proposta auto-adaptativa de tratamento de interfaces possa ocorrer. Esta investigação do parâmetro δ não necessita de ser realizada em problemas eletromagnéticos similares onde o valor δ já tenha sido estipulado.

Outro fator importante é a não necessidade de um melhor refinamento do domínio para o tratamento de interfaces materiais, bastando somente executar o refinamento nas interfaces materiais, reduzindo o custo computacional, pois com uma baixa concentração de nós, uma boa avaliação nas interfaces materiais pode ser realizada quando estas forem apropriadamente refinadas. Vale dizer que uma concentração muito alta de nós não carece de um estudo auto-adaptativo, pois o domínio já pode se encontrar muito refinado, e portanto não há razão de um melhor tratamento, mas claro, isto depende do tipo do problema e de seu domínio.

Esta proposta de tratamento auto-adaptativo em interfaces materiais tem como intuito reduzir oscilações espúrias que ocorrem nas aproximações dos nós avaliados perto das interfaces, a fim de se obter aproximações de melhor qualidade. O custo computacional pode vir a ser um pouco mais elevado devido aos refinamentos da discretização, que podem vir a produzir mais pontos; mesmo assim, os pontos produzidos serão somente nas linhas de interface e não em todo o domínio (remalhamento, por exemplo).

Formas de tratamento mais refinadas e apuradas levando em consideração as linhas de interface tem como objetivo aproximar os resultados obtidos do comportamento real físico do dispositivo tratado.

Estudos mais precisos precisam ser realizados quanto à influência da técnica do domínio truncado para a componente contínua do campo elétrico, pois a descontinuidade numérica que a técnica impõe para que a descontinuidade física esperada seja abordada na modelagem numérica do dispositivo, pode estar gerando pequenas descontinuidades na componente contínua do campo elétrico.

Análises mais detalhadas estão sendo realizadas quanto ao estudo das componentes contínua e descontínua do campo elétrico, juntamente com a norma do campo, para mais combinações de materiais e concentrações diferentes de nós.

Estudos estão sendo realizados a fim de se implementar a auto-adaptatividade, não somente com o critério de parada proposto aqui, mas com outros critérios, como por exemplo utilizando-se somente a componente descontínua do campo elétrico. A implementação se dará para a plataforma LExVE, por meio da utilização da linguagem Java, ligado ao projeto de Pesquisa LExVE (Laboratório para Experimentos Virtuais de Engenharia) que está ligado ao grupo de pesquisa LAMSCAD, localizado na UNEMAT – Universidade do Estado de Mato Grosso – na cidade de Alto Araguaia.

Em suma, os resultados aqui propostos visam uma análise numérica bem refinada nas linhas de interfaces materiais a fim de se obter um melhor comportamento da descontinuidade em problemas eletromagnéticos. Considerando o recente estágio de desenvolvimento deste trabalho, melhorias já estão sendo propostas, mas espera-se, que mesmo assim, este trabalho possa beneficiar aqueles que estudam técnicas numéricas adequadas para problemas envolvendo Eletromagnetismo.

Referências Bibliográficas

- [1] LUCY, L. B., A numerical approach to testing of the fission hypothesis, *The Astron. J.*, v.8(12), p.1013-24, 1977.
- [2] MONAGHAN, J. J., An introduction to SPH, *Comput. Phys. Comm.*, v.48, p.89-96, 1988.
- [3] SWEGLE, J. M., HICKS, D. L. e ATTAWAY, S. W., Smoothed particle hydrodynamics stability analysis, *J. Comput. Phys.*, v.116, p.123-34, 1995.
- [4] JOHSON, G. R. e BEISSEL, S. R., Normalized smoothing functions for SPH impact computations. *Int. J. Numer. Meth. Engng*, 1996.
- [5] LIU, W. K., JUN, S. e ZHANG, Y. F., Reproducing kernel particle methods, *Int. J. Numer. Meth. Engng*. V.20, p.1081-106, 1995.
- [6] LANCASTER, P. e SALKAUSKAS, K., Surfaces generated by moving least-squares methods, *Math. Comput.*, v.37, p.141-58, 1981.
- [7] NAYROLES, B., TOUZOT, G. e VILLON, P., Generalizing the finite element method: diffuse approximations and diffuse elements, *Comput. Mechanics*. V.10, p.307-18, 1992.
- [8] BELYTSCHKO, T., LU, Y. Y. e GU, L., Element-free Galerkin Method, *Int. Journal Numer. Methods in Engng.*, v.37, p.229-56, 1994.
- [9] BELYSTCHKO, T., KRONGAUZ, Y., ORGAN, D., FLEMING, M. e KRYSL, P., Meshless methods: An Overview and recent developments, *Computer Methods in Appl. Mech. Engng*. v.139, p.3-47, 1996.
- [10] KRYSL, P. e BELYTSCHKO, T., Element-free Galerkin method: Convergence of the continuous and discontinuous shape functions, *Comput. Methods Appl. Mech. Engng*. v.148, p.257-77, 1997.
- [11] BREITKOPF, P., TOUZOT, G. e VILLON, P., Consistency approach and diffuse derivation in element-free methods based on moving least-squares approximation, *Comp. Assisted Mech. and Engng Sciences*, v.5, p.479-501, 1998.
- [12] KRONGAUZ, Y. e BELYTSCHKO, T., EFG approximation with discontinuous derivatives, *Int. J. Numer. Meth. Engng*. v.41, p.1215-33, 1998.
- [13] MARÉCHAL, Y., Some meshless methods for electromagnetic field computations, *IEEE Transactions on Magnetics*, v.34(5), p.3351-54, 1998.
- [14] VIANA, S. A. e MESQUITA, R. C., Método de Galerkin sem malha aplicado ao cálculo de campos eletromagnéticos, *III Congresso Brasileiro de Eletromagnetismo*, São Paulo, 25 a 28 de outubro, p.214-217, 1998.
- [15] CINGOSKI, V., MIYAMOTO, N. e YAMASHITA, H., Element-free Galerkin Method for electromagnetic Field computation, *IEEE Transactions on Magnetics*, v.37, p.3236-39, 1998.

- [16] HO, S. L., YANG, S., MACHADO, J. M. e WONG, H. C., Application of a meshless method in eletromagnetics, *IEEE Transactions on Magnetics*, v.37, p.3198-202, 2001.
- [17] KUO, S., TIDOR, B. e WHITE, J., A meshless, Spectrally Accurate, Integral Equation Solver for Molecular Surface Eletrostatics, *ACM J. on Emerging Tech. in Comp. Systems.*, v.42, n.2, article 6, 2008.
- [18] MANZIN, A. e BOTTAUSCIO, O., Element-free Galerkin method for the analysis of eletromagnetic-wave sattering, *IEEE Transactions on Magnetics*, v.44, p.1366-70, 2008.
- [19] LIU, J., ZHOU, M. e CHEN, Y., Research on Computational Approaches Using Element-free Galerkin Methods, *Int. Conf. on Automation and Logistics*, p.924-28, 2008.
- [20] Yu, J., e JIA, J., Element-free Galerkin method for static electromagnetic field computation in 2D and 3D inhomogeneous medium, 2009.
- [21] MARQUES, G. N., MACHADO, J. M., VERARDI, S. L. L., STEPHANY, S. e PRETO, A. J., Interpolating EFGM for computing continuous and discontinuous eletromagnetic fields, *COMPEL*, v.26, n.5, p.1411-38, 2007.
- [22] LISZKA, T. e ORKISZ, J., Finite difference method at arbitrary irregular grids and its application in applied mechanics, *Comput. Struct.*, v.11, p.83-95, 1996.
- [23] BREITKOPF, P., RASSINEUX, A., TOUZOT, G. e VILLON, P., Explicit form and efficient computation of MLS shape functions and their derivates, *Int. Journal Num. Methods Engng.*, v.48, p.451-66, 2000.
- [24] LISZKA, T., An interpolation method for an irregular set of nodes, *Int. Journal, for Num. Meth. Engng.*, v.20, p.1599-612, 1984.
- [25] HAUSSLER-COMBE, U. e KORN, C., An adaptive approach with the element-free Galerkin method, *Compt. Methods in Applied Mech. and Engng.*, v.126, p.203-22, 1998.
- [26] BELYTSCHKO, T. e DOLBOW, J., An introduction to programming the meshless element-free Galerkin method, *Arch. Comput. Mech.*, v.5(3), p.207-41, 1998.
- [27] LOHNER, R. e ONATE, E., Na advancing front point generation technique, *Communications in Num. Meth. in Engng.*, v.14, p.1097-108, 1998.
- [28] BELYTSCHKO, T. e KRYSL, P., ESFLIB: A library to compute the element free Galerkin shape functions, *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.* v.190, p.2181-205, 2001.
- [29] MARQUES, G. N., O método element-free Galerkin: uma abordagem interpolante aplicada ao estudos de campos eletromagnéticos. São José do Rio Preto – SP, 2002, 110p. (Dissertação de mestrado, UNESP, Campus de São José do Rio Preto).
- [30] VERARDI, L. L., MACHADO, J. M. e SHIYOU, Y., The application of interpolating MLS approximations to the analysis of MHD flows, *Finite Elements in Analysis and Design*, v.39, n.12, p.1173-1187, 2003.
- [31] HERAULT, C. e MARECHAL, Y., Boundary and interface conditions in meshless methods, *IEEE Transactions on Magnetics.*, v.35, n.3, p.1450-53, 1999.

- [32] CORDES, L. W. e MORAN, B., Treatment of material discontinuity in the element-free Galerkin method, *Comp. Meth. in Applied Mech. and Engng.*, v.139, p.75-89, 1996.
- [33] LIU, G. R., Meshfree methods, moving beyond the finite element method, CRC Press, Boca Raton, FL, 2002.
- [34] FRIES, T. e Belytschko, T., New Shape Functions for Arbitrary Discontinuities without additional unknowns, Meshfree Methods for Partial Differential Equations III, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, p.87-103, 2007.
- [35] ZIENKIEWICZ, O. C. e TAYLOR, R. L., The finite element method vol 1-3, Butterworth-Heinemann, Oxford, 2000.
- [36] HUERTA, A., VIDAL, Y. e VILLON, P., Pseudo-divergence-free element-free Galerkin method for incompressible fluid flow, *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.*, 2004.
- [37] ORGAN, D., FLEMING, M. TERRY, T. e BELYTSCSKO, T., Continuous meshless approximations for nonconvex bodies by diffraction and transparency, *Comput. Mech.*, v.18(3), p.225-235, 1996.
- [38] MOE, N., DOLBOW, J., e BELYTSCSKO, T., A finite element method for crack growth without remeshing, *Int. J. Numer. Methods Engng.*, v.46(1), p.131-150, 1999.
- [39] BELYTSCSKO, T. e BLACK, T., Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing, *Int. J. Numer. Methods Engng.*, v.45(5), p.601-620, 1999.
- [40] DOLBOW, J., MOES, N, e BELYTSCSKO, T., Discontinuous enrichment in finite elements with a partition of unity method, *Finite Elem. Anal. And Des.*, v.36(3-4), p.235-260, 2000.
- [41] VENTURA, G., XU, J. e BELYTSCSKO, T., A vector level set method and new discontinuity approximations for crack growth by EFG, *Int. J. Numer. Methods Engng.*, v.54(6), p.923-944, 2002.
- [42] OLIVIERI, D. A., FAIRWEATHER, M. e FALLE, S. A. E. G., Adaptive mesh refinement applied to the scalar transported PDF equation in a turbulent jet, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, v.84, p.434-447, 2010.
- [43] BELYTSCSKO, T., KRONGAUZ, Y., FLEMING, M., ORGAN, D. e LIU, W. K., Smoothing and accelerated computations in the element-free Galerkin method, *J. Comput. Appl. Math.*
- [44] SIMKIN, J. e TROWBRIDGE, C. W., On the use of the total scalar potential in numerical solution of field problems in eletromagnetics, *Int. J. Numer. Meth. In Engng.*, v.14, p.423-40, 1979.
- [45] SUGAWARA, M., Adaptive basis set for quantum-machanical calculation based on element free galerkin method, *Chem. Phys. Lett.*, vol 314, pp 522-528, 1999.
- [46] ELSGOLC, L. D., Calculus of Variations, Dover Publications, Mineola-Nova Iorque, 2007.

- [47] SHEPARD, D., A two dimensional interpolation function for irregularly spaced points, *ACM National Conference*, p.517-524, 1968.
- [48] Abe, N.M., Passaro, A. and Franco, M.A.R. et al., “Um Sistema de Software para Análise de Dispositivos e Componentes de Óptica Integrada, Fibras Ópticas e Microondas”, V CBMAG – Congresso Brasileiro de Eletromagnetismo, 2002.
- [49] Li, X., Teng, S., “Generating well-shaped Delaunay mesh in 3D”, *Proceeding of SODA’01 Symposium on Discrete Algorithms*, pp. 28-37, 2001.
- [50] Miller, G. L., Pav, S. E., Walkington, N. J., “Fully incremental 3D Delaunay Refinement Mesh Generation”, *Proceeding of the 11th International Meshing Roundtable*, pp75-86, Sandia National Laboratory, 2002.
- [51] Marinho, M. R., Marques, G. N., Machado, J. M., “Auto Adaptive Interface Treatment for the EFGM in electromagnetic problems”, *Anais do MOMAG*, PP. 1075-1076, 2010.
- [52] Marques, G. N., Perez, R. B., “Contribuições Teóricas para Incorporação do Método Element Free Galerkin em Software Baseado no Método dos Elementos Finitos”, *CILAMCE, IX MECOM*, vol. XXIX, pp. 4721-4732, 2010.

Autorizo a reprodução xerográfica para fins de pesquisa.

São José do Rio Preto, 03/Julho/2012

Assinatura