



Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista

TESE DE DOUTORAMENTO

IFT-T.001/02

**Integração em dimensões negativas em calibres covariantes e
não-covariantes**

Alexandre Grezzi de Miranda Schmidt

Orientador

Alfredo Takashi Suzuki

Fevereiro de 2002

Agradecimentos

Ao Prof. Alfredo por tudo que pude aprender durante estes 6 anos, pela liberdade de muitas vezes poder trabalhar em casa junto da minha família.

Aos amigos que fiz no IFT durante estes vários anos: Abel, Andre, Brenno, Luis Carlos, todo o pessoal da "Itapeva-90" (Cabelo, Cristiano, Gadelha, Leonardo, Maurizio), Caçada, Ion, Leandro, Mirez, Talarico e Wagner.

Ao Ricardo e ao Esdras pelas colaborações.

Aos meus pais, Alzira e Flamar, e a minha irmã, Gabriela, sempre vou agradecer por tudo.

À minha esposa Viviane e à minha pequena Julia pelos meus dias mais bonitos.

À FAPESP pelo apoio financeiro.

Ao IFT e à UNESP pela infra-estrutura e pelo bom ambiente de trabalho.

Resumo

Com a técnica da integração em dimensão negativa (NDIM) estudamos integrais de Feynman em calibres covariantes e não-covariantes, o do cone-de-luz e o de Coulomb. No primeiro caso, calculamos várias integrais ao nível de dois "loops" com e sem massa, e com momentos externos tanto na camada de massa quanto fora dela. Em calibres não-covariantes mostramos que podemos descartar a utilização de prescrições no calibre do cone-de-luz e mesmo assim obter resultados fisicamente compatíveis (que preservam a causalidade); no calibre de Coulomb integrais ao nível de um e dois "loops" podem ser facilmente resolvidas integrando em dimensão negativa, mas com dois parâmetros para as regularizar dimensionalmente.

Palavras Chaves: Teoria Quântica de Campos, Integrais de Feynman, Método Perturbativo, Gauges não-covariantes

Áreas do conhecimento: 1.05.03.01-3 : Teoria Geral de Partículas e Campos

Abstract

Using negative dimensional integration method (NDIM) we study several Feynman loop integrals pertaining to covariant and non-covariant gauges. In the first case we solve scalar integrals at two-loop level where internal particles are massive or massless and external ones are even on or off-shell. Non-covariant gauges studied in this work are light-cone and Coulomb ones. We show that prescriptions, as well as any other devices such as partial fractioning and integration over components which are part of them, can be abandoned in the light-cone gauge, since NDIM can give us causality preserving results without invoking any of such prescriptions (Mandelstam-Leibbrandt for instance). In Coulomb gauge we also consider one and two-loop integrals in the context of split dimensional regularization.

Índice

1	Introdução	1
1.1	Motivação	1
1.2	Objetivo	2
1.3	Integração em $D < 0$	2
2	Gauges Covariantes	4
2.1	Introdução	4
2.2	Diagrama não-planar sem massa	5
2.3	Diagrama não-planar com massas	9
2.3.1	Cálculo numérico: série de Laurent	12
2.4	Momento externo fora da camada de massa	14
2.4.1	Caso-I: $p_1^2 \neq 0$	14
2.4.2	Caso-II: $p_2^2 \neq 0$	17
2.5	Generalização para N-loops	17
2.6	Conclusão	21
3	O Gauge do Cone-de-Luz sem Prescrições	22
3.1	Introdução	22
3.2	LCG sem prescrições a 1-loop	23
3.3	LCG sem prescrições a 2-loops	30
3.4	Conclusão.	34
4	O Calibre de Coulomb	36
4.1	Introdução	36
4.2	Integrais no calibre de Coulomb a 1-loop	37
4.3	Integrais no calibre de Coulomb a 2-loops	41
4.4	Conclusão	43
5	Conclusão	44
5.1	Perspectivas futuras: teorias não-comutativas	44

A	Tabela de integrais resolvidas com NDIM	46
A.1	1-loop	46
A.2	2-loops	47
A.3	3-loops	54
B	Estratégia para somar as séries	58
C	Integração por partes	63
D	Publicações	65

Capítulo 1

Introdução

1.1 Motivação

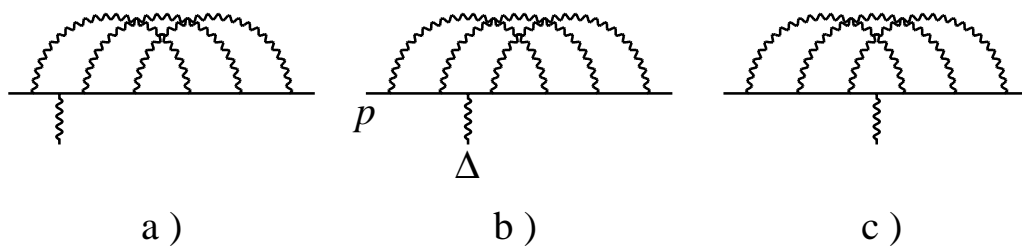
A eletrodinâmica quântica é a melhor teoria física da atualidade. Com ela foi possível aos físicos experimentais medir o momento magnético anômalo do elétron com uma precisão de 7 casas decimais, ou seja, um erro da ordem de 10^{-6} %.

A última medida desta grandeza forneceu o seguinte valor,

$$a_{EXP} = 1159652188.4(4.3) \times 10^{-12}, \quad (1.1)$$

onde o número entre parênteses é a incerteza na medida, $a = (g-2)/2$ e g o momento magnético propriamente dito.

O valor calculado (o digrama de Feynman mostrado abaixo foi o último a ser calculado, chama-se "triple cross" e o incluímos aqui apenas a título de curiosidade), ao nível de **3-loops**



foi calculado por Laporta e Remiddi[1],

$$a_{TEOR} = 1159652201.2(2.1) \times 10^{-12}, \quad (1.2)$$

o erro (na medida ou no cálculo teórico) é calculado facilmente*

*Muitas vezes as pessoas confundem o erro experimental com o número de algarismos significativos de uma medida. Alguns dizem que a relatividade geral é a teoria física mais precisa, o que

$$\varepsilon = \frac{a_{EXP} - a_{TEOR}}{a_{EXP}} \times 100\% = 1,12 \times 10^{-6}\%, \quad (1.3)$$

Kinoshita, o físico japonês que estuda este efeito há muito tempo, escreveu um artigo de revisão recentemente sobre o assunto[2].

Com estes argumentos justificamos a abordagem perturbativa em teoria quântica de campos e motivamos nosso trabalho, cujo objetivo é estudar justamente cálculos provenientes do método perturbativo, em outras palavras, cálculos analíticos de integrais de Feynman em três diferentes calibres.

1.2 Objetivo

Nosso objetivo é mostrar que o método da integração em dimensão negativa é uma das mais poderosas técnicas de cálculo de integrais de Feynman.

Em gauges covariantes podemos calcular com facilidade diagramas com sete propagadores e quatro momentos externos, assim como vários outros gráficos com número menor de momentos externos e/ou "loops". Partículas com massa podem ser incluídas de forma muito simples, seja nos propagadores ou nas pernas externas. Alguns gráficos se tornam tão simples que podemos resolver as integrais para um número arbitrário de "loops".

Gauges não-covariantes que em geral fornecem integrais de Feynman bem mais complicadas são tratados também de forma simples. O que precisamos fazer são pequenas modificações. Seja introduzindo um 4-vetor $n^{*\mu}$ no caso do calibre do cone-de-luz (para preservar a causalidade, uma imposição física) ou fazendo uma separação na medida de integração no calibre de Coulomb para regularizar a integral sobre a componente da energia ("splitting dimensional regularization").

1.3 Integração em $D < 0$

O método da integração em dimensões negativas foi proposto por Halliday e Ricotta[4] em 1987. No mesmo ano Halliday e Dunne[5] mostraram que há uma equivalência entre integração sobre variáveis de Grassmann e integração em dimensão negativa. E esta equivalência é tão simples quanto $D \leftrightarrow -2N$, onde a integração sobre variáveis

não é correto. A medida da taxa de variação do período orbital binário do pulsar de Taylor, PSR 1913+16 que fornece a melhor previsão da teoria de Einstein e que por esta razão deu o prêmio Nobel a Hulse e Taylor em 1993, tem apenas um algarismo significativo apesar de ser uma medida (indireta obviamente) de uma variação temporal da ordem de 10^{-12} , i.e., o período orbital binário decresce a taxa de $10^{-12}s$ a cada segundo. Aplicando a fórmula (1.3) obtemos um erro de 0,35%[3].

grassmannianas é realizada em $2N$ -dimensões e a em dimensões negativas em D -dimensões.

O princípio da continuação analítica é a peça fundamental de todo o nosso método. Partimos de um gerador funcional para as integrais com dimensões negativas e expoentes positivos dos propagadores, por esta razão nossas integrais são polinomiais e finitas. Mas, quando realizamos a continuação para dimensões positivas e expoentes dos propagadores negativos os polos (se houverem) aparecem assim como na regularização dimensional.

O exemplo mais simples é o cálculo de 1-”loop”,

$$\mathcal{G} = \int d^D q \exp[-\alpha q^2 - \beta(q-p)^2] = \left(\frac{\pi}{\alpha + \beta}\right)^{D/2} e^{-\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}p^2} \quad (1.4)$$

$$= \sum_{i,j=0}^{\infty} \frac{(-\alpha)^i (-\beta)^j}{i!j!} \int d^D q (q^2)^i (q-p)^{2j}, \quad (1.5)$$

na primeira das igualdades integramos a gaussiana da forma usual, completando o quadrado; na segunda igualdade expandimos a exponencial em série de Taylor e assim geramos as integrais em dimensões negativas. Impomos a igualdade destas duas expressões (termo a termo para os expoentes de α e β) e resolvemos para a integral, i.e., uma expressão da integral como função da dimensão, dos expoentes i e j e do momento externo p^2 ,

$$\int d^D q (q^2)^i (q-p)^{2j} = \frac{(-\pi)^{D/2} (p^2)^{i+j+D/2} \Gamma(1+i) \Gamma(1+j) \Gamma(1+i+j+D)}{\Gamma(1-i-D/2) \Gamma(1-j-D/2) \Gamma(1-i-j-D/2)}, \quad (1.6)$$

o processo de continuação analítica vai ser detalhado nos próximos capítulos.

A abordagem inicial de Halliday e Ricotta[4] foi um pouco diferente. Em vez de explicitar os propagadores na integral em $D < 0$ eles consideravam integrais da forma,

$$\int d^D q (q^2)^i (2p \cdot q)^j, \quad (1.7)$$

que levavam ao mesmo resultado, mas que para diagramas mais complicados resultavam em somas hipergeométricas difíceis de simplificar.

Capítulo 2

Gauges Covariantes

2.1 Introdução

O cálculo de integrais de Feynman está cada vez mais preciso. Existem resultados analíticos para uma grande quantidade delas, mesmo ao nível de 2-”loops” com propagadores massivos. Um grande passo foi dado quando Chetyrkin e Smirnov[7] introduziram o método da integração por partes. Com esta técnica é possível relacionar um diagrama complicado com dois ou mais diagramas mais simples, ou seja, gráficos que tem um número menor de propagadores (com alguns expoentes diferentes de um) ou mesmo 1 ”loop” a menos, veja uma descrição desta poderosa técnica no apêndice C. Procedendo desta maneira Chetyrkin e Smirnov foram capazes de calcular a função beta para a *QED* ao nível de 4-”loops”. As integrais depois de reescritas como integrais mais simples foram calculadas utilizando-se o método dos polinômios de Gegenbauer.* Anastasiou[9] e colaboradores com o mesmo método resolveram analiticamente integrais para funções de 5-pontos (com cinco gluons externos), mas no contexto da integração por partes.

Mas, tal método não pode ser empregado em integrais chamadas não-planares, porque as derivadas dos momentos externos não se anulam como no caso planar. Por esta razão desenvolveram-se outras técnicas que fossem capazes de realizar tal cálculo. Tausk[10] usando a representação de Mellin-Barnes (MB) para os propagadores – basicamente o que se faz é reescrever os propagadores como integrais paramétricas[11, 12] (de MB),

$$\frac{1}{(k^2 - m^2 + i\epsilon)^\nu} = \frac{1}{2\pi i \Gamma(\nu)} \int_{-i\infty}^{i\infty} ds \frac{\Gamma(-s)(-m^2)^{-s} \Gamma(\nu + s)}{(k^2 + i\epsilon)^{\nu+s}}, \quad (2.1)$$

que podem ser resolvidas utilizando-se o teorema de Cauchy (fechando-se o contorno pela direita ou pela esquerda e calculando-se os resíduos da primeira ou da

*Segundo Kramer e Lampe[8] o método se torna inviável se o diagrama possuir mais de dois momentos externos.

segunda função gama, respectivamente) e dois dos lemas de Barnes – e Gehrmann e Remiddi[13] usando o método das equações diferenciais calcularam algumas destas integrais não-planares. Este último método também reescreve a integral original em integrais mais simples com propagadores elevados a potências diferentes de um.

Nas três técnicas descritas brevemente acima é importante conhecermos os resultados das integrais de Feynman para expoentes dos propagadores elevados a potências diferentes de um, ou seja, precisamos saber não só o resultado de integrais da forma,

$$\int \frac{d^D q}{q^2(q-p)^2}, \quad (2.2)$$

mas ter disponível também resultados para

$$\int \frac{d^D q}{(q^2)^\alpha (q-p)^{2\beta}}, \quad (2.3)$$

que obviamente são generalizações do anterior.

Nosso objetivo neste capítulo é calcular, com o método da integração em dimensão negativa, integrais escalares não-planares com propagadores massivos e momentos externos fora da camada de massa, além de estudar integrais para o espalhamento foton-foton ao nível de 2 "loops".

A grande vantagem do nosso método é que calcular as integrais com expoentes arbitrários dos propagadores é tão fácil quanto calcular um caso particular de expoentes iguais a menos um, ou quaisquer outros valores previamente escolhidos. Em outras palavras, calcular (2.2) é tão fácil quanto calcular (2.3). Evitamos também a utilização de integrais paramétricas, que na maioria das vezes complica o cálculo (a abordagem de MB é uma excessão, as integrais não são tão complicadas, já que é possível utilizar o teorema de Cauchy quase diretamente e os dois lemas de Barnes). Além disso com NDIM sempre obtemos o resultado final em termos de funções hipergeométricas, ou seja, nosso resultado é muito mais compacto do que os que são geralmente apresentados na literatura, em termos de polilogaritmos ($Li_2, Li_3, Li_4, S_{a,b}$ etc). Algumas vezes uma função hipergeométrica que gasta uma linha para ser escrita pode representar uma soma de Li_n com argumentos complicados (e que gasta uma folha inteira para ser escrita), além do que as funções hipergeométricas convergem muito rápido, como iremos mostrar.

2.2 Diagrama não-planar sem massa

Escolhemos este diagrama porque até então ele ainda não foi calculado considerando-se expoentes arbitrários dos propagadores. Apenas um caso particular (expoentes iguais a menos um) foi apresentado por Tausk[10].

Primeiramente iremos calcular a integral para o caso sem massa e na próxima seção para o caso onde quatro das partículas tem massa μ . Em seguida apresentamos a resolução da integral quando uma das pernas externas está fora da camada de massa.

Considere a integral escalar D -dimensional

$$\mathcal{NP}_6 = \int d^D q d^D r (q^2)^i (q - p_3)^{2j} (q + r)^{2k} (q + r + p_2)^{2l} (r^2)^m (r - p_4)^{2n}, \quad (2.4)$$

o diagrama representado por ela está na figura 2.1.

O funcional gerador das integrais em dimensão negativa representado pela integral gaussiana

$$G_{NP_6} = \int d^D q d^D r \exp \left\{ -\alpha q^2 - \beta (q - p_3)^2 - \gamma (q + r)^2 - \theta (q + r + p_2)^2 - \phi r^2 - \omega (r - p_4)^2 \right\} \quad (2.5)$$

$$= \left(\frac{\pi^2}{\zeta} \right)^{D/2} \exp \left[-\frac{1}{\zeta} (\beta \gamma \omega s + \alpha \theta \omega t + \beta \theta \phi u) \right], \quad (2.6)$$

que pode ser facilmente resolvida. Definimos $\lambda = \alpha + \beta + \gamma + \theta$ e $\zeta = \alpha \gamma + \alpha \theta + \beta \gamma + \beta \theta + \lambda(\phi + \omega)$. Expandindo a exponencial acima obtemos três séries, enquanto que a expansão multinomial para ζ nos fornece outras doze. Os propagadores dão origem a seis equações e a expansão multinomial a mais uma.

Temos ao todo 15 somatórias, 7 equações e portanto como resultado séries hipergeométricas com $(15 - 7)$ 8 índices, sendo suas variáveis,

$$\frac{t}{s}, \quad \frac{s}{t}, \quad \frac{t}{u}, \quad \frac{u}{t}, \quad \frac{u}{s}, \quad \frac{s}{u}, \quad (2.7)$$

e 1. As funções hipergeométricas mais simples que representam \mathcal{NP}_6 são séries duplas,

$$\begin{aligned} \mathcal{NP}_6 &= \pi^D s^{\sigma_{NP}} \Gamma_{NP} \sum_{X_2, X_3=0}^{\infty} \left(-\frac{t}{s} \right)^{X_2} \left(\frac{u}{s} \right)^{X_3} \frac{(-i|X_2)(-m|X_3)(-\sigma_{NP}|X_{23})}{X_2! X_3! (1+k-\sigma_{NP}|X_{23})} \\ &\times \frac{(-l|X_{23})}{(1+n-\sigma_{NP}|X_3)(1+j-\sigma_{NP}|X_2)} \end{aligned} \quad (2.8)$$

onde $\sigma_{NP} = i + j + k + l + m + n + D$, é a soma dos expoentes dos propagadores com a dimensão D multiplicada pelo número de "loops". Definimos também

$$\begin{aligned} \Gamma_{NP} &= (\sigma + D/2 | -2\sigma - D/2)(i + j + m + n + D | -i - j - D/2) \\ &\times (i + j + k + l + D | -k - l - D/2)(-j|\sigma)(-k|\sigma)(-n|\sigma) \\ &\times (k + l + m + n + D | -m - n - D/2), \end{aligned} \quad (2.9)$$

o símbolo de Pochhammer,

$$(a|b) \equiv (a)_b = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)},$$

e a notação abreviada

$$X_{abc} = X_a + X_b + X_c, \quad (2.10)$$

para os índices de soma.

A função hipergeométrica acima se reduz a função F_2 de Appel no caso onde $k = -1$,

$$\mathcal{NP}_6 = \pi^D s^{\sigma_{NP}} \Gamma_{NP}(k = -1) F_2 \left[\begin{matrix} -l, -i, -m \\ 1 + j - \sigma_{NP}, 1 + n - \sigma_{NP} \end{matrix} \middle| \frac{-t}{s}, \frac{u}{s} \right]. \quad (2.11)$$

Particularizando para o caso onde todos os expoentes são iguais a menos um ,

$$\begin{aligned} \mathcal{NP}_6 &= \pi^D s^{D-6} \frac{\Gamma(6-D)\Gamma^3(D/2-2)\Gamma^3(D-5)}{\Gamma(3D/2-6)\Gamma^3(D-4)} \sum_{X_2, X_3=0}^{\infty} \left(\frac{-t}{s}\right)^{X_2} \left(\frac{u}{s}\right)^{X_3} \frac{(1|X_2)}{X_2! X_3!} \\ &\quad \times \frac{(1|X_3)(1|X_{23})}{(6-D|X_3)(6-D|X_2)} \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$= \pi^D s^{D-6} \frac{\Gamma(6-D)\Gamma^3(D/2-2)\Gamma^3(D-5)}{\Gamma(3D/2-6)\Gamma^3(D-4)} F_2 \left[\begin{matrix} 1, 1, 1 \\ 6-D, 6-D \end{matrix} \middle| \frac{-t}{s}, \frac{u}{s} \right] \quad (2.13)$$

obtemos a função hipergeométrica de Appel F_2 [14] que converge quando

$$|t/s| < 1, \quad |u/s| < 1, \quad |t/s| + |u/s| < 1.$$

O resultado que obtivemos acima possui um polo duplo, $1/\epsilon^2$, assim como o obtido anteriormente por Tausk[10].

Entre as possíveis 2916 soluções para o sistema 7×15 (que tem um total de 6435 sistemas 7×7 , sendo 3519 deles sem solução), nosso método fornece outros tipos de séries hipergeométricas, além de séries duplas temos séries quádruplas e sétuplas. Todas elas possuem as simetrias do diagrama original entre as variáveis de Mandelstam s, t and u , ou seja,

$$\begin{aligned} p_3 \leftrightarrow p_4, \quad j \leftrightarrow n, \quad i \leftrightarrow m, \quad t \leftrightarrow u, \quad p_2 \leftrightarrow p_3, \quad l \leftrightarrow n, \quad k \leftrightarrow m, \quad t \leftrightarrow s, \\ p_2 \leftrightarrow p_4, \quad j \leftrightarrow l, \quad i \leftrightarrow k, \quad s \leftrightarrow u, \end{aligned} \quad (2.14)$$

em outras palavras, para cada representação em termos de funções hipergeométricas resultante do nosso cálculo existem outras duas, que também são soluções do sistema de equações e que representam a mesma integral, mas em outra região cinemática (canais s, t e u). Então, para cada solução obtida podemos escrever automaticamente mais duas, utilizando (2.14).

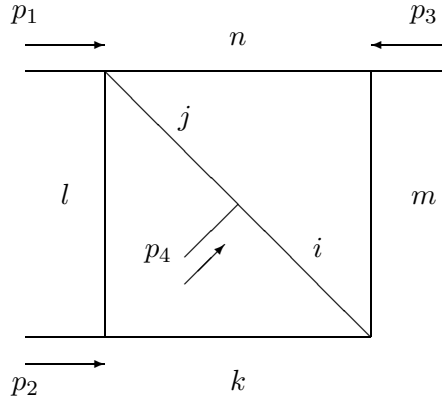


Figura 2.1: Caixa dupla não-planar com seis propagadores sem massa. Os expoentes dos propagadores estão representados na figura, veja (2.4).

Apesar da forma complicada do diagrama considerado (2-”loops”, seis propagadores, quatro pernas externas) o resultado obtido é muito simples. Apenas uma função hipergeométrica de duas variáveis, que num caso particular de um dos expoentes dos propagadores igual a menos um ($k = -1$) se reduz à função F_2 de Appel.

Tausk calculou um caso ainda mais particular, onde todos os expoentes dos propagadores são iguais a menos um, ou seja, onde $i = j = k = l = m = n = -1$. Seu resultado foi expresso como uma soma de dilogaritmos, trilogaritmos e de funções de Spencer, $S_{a,b}$ que são dadas por integrais.

É possível transformar um resultado no outro, como fez Davydychev para certas integrais que aparecem no espalhamento fóton-fóton ao nível de 1-”loop”. Mas este trabalho é longo e envolve o cálculo de representações integrais das funções hipergeométricas, o que é tão complicado quanto resolver a integral original usando parametrização de Feynman.

O resultado de Tausk é dado por

$$\begin{aligned}
 B_6^{NP} = & (i\pi^{d/2})^2 \frac{\Gamma(1+2\epsilon)\Gamma^3(1-\epsilon)}{\Gamma(1-3\epsilon)(1+4\epsilon)} \frac{3}{\epsilon^2} \left\{ \frac{s^{-2\epsilon}}{s u} \left((T+i\pi)(1-2\epsilon U) \right. \right. \\
 & + 2\epsilon^2 \left(2\text{Li}_3(-t/s) - 4S_{1,2}(-t/s) + 2\zeta(3) - \frac{1}{3}T^3 \right. \\
 & \left. \left. + T \left[-2\text{Li}_2(-t/s) + U^2 - \pi^2 \right] + i\pi \left[2\text{Li}_2(-t/s) + U^2 - \frac{1}{3}\pi^2 \right] \right) \right\}
 \end{aligned}$$

$$+ (u \leftrightarrow t) \} , \quad (2.15)$$

onde $T = \log (t/s)$, $U = \log (u/s)$ e

$$S_{n,p}(z) = \frac{(-1)^{n-1+p}}{(n-1)!p!} \int_0^1 dt \frac{\log^{n-1}(t) \log^p(1-zt)}{t}. \quad (2.16)$$

mas observe que no caso do espalhamento frontal ("forward scattering") não é possível obter um resultado direto pois alguns termos apresentam problemas de indeterminações em $t = 0$ ou em $u = 0$.

Com o nosso método podemos obter o caso particular de espalhamento frontal de forma simples e direta, a partir das funções hipergeométricas.

2.3 Diagrama não-planar com massas

Tendo em mãos o resultado da integral escalar para o diagrama sem massa podemos atacar o problema de resolver,

$$\mathcal{I}_M = \int d^D q d^D r (q^2 - \mu^2)^i [(q-p_3)^2 - \mu^2]^j [(q+r)^2 - \mu^2]^k [(q+r+p_2)^2 - \mu^2]^l (r^2)^m (r-p_4)^{2n}, \quad (2.17)$$

esta integral escalar representa o diagrama da figura 2.2. Note que devido a simetria do diagrama de Feynman a mesma integral também pode descrever os gráficos da figura (2.3). A massa μ das partículas é arbitrária e $p_1^2 = p_2^2 = p_3^2 = p_4^2 = 0$.

Diagramas equivalentes ao anterior. Eles podem ser obtidos apenas realizando-se uma operação de mudança dos expoentes dos propagadores no resultado final.

Definimos as variáveis de Mandelstam da forma usual

$$s = 2p_1 \cdot p_2, \quad t = 2p_1 \cdot p_3, \quad u = 2p_1 \cdot p_4, \quad (2.18)$$

uma vez que $p_i^2 = 0$, ($i = 1, 2, 3, 4$), temos a identidade $s + t + u = 0$.

Para o caso onde quatro das partículas internas possuem massas iguais o gerador das integrais em dimensão negativa será dado por

$$G_M = \exp(\lambda' \mu^2) G_{\mathcal{N}\mathcal{P}\gamma} \quad (2.19)$$

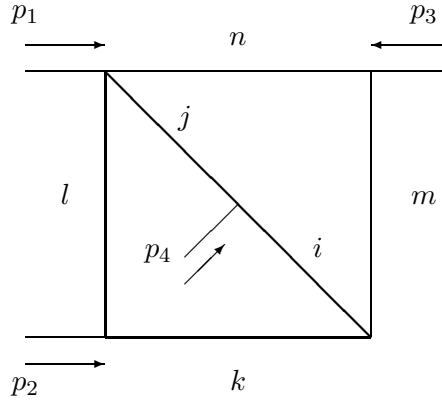


Figura 2.2: Caixa dupla não-planar na qual quatro propagadores possuem massa μ , e são representados por linhas mais grossas. Os expoentes dos propagadores também estão designados na figura, os momentos externos estão todos entrando no gráfico, i.e., $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 0$.

assim teremos o sistema de equações algébricas

$$\left\{ \begin{array}{l} X_2 + Y_{1234} + W_1 = i \\ X_{13} + Y_{5678} + W_2 = j \\ X_1 + Y_{159} + W_3 + Z_1 = k \\ X_{23} + Y_{26} + W_4 + Z_{23} = l \\ X_3 + Y_{379} + Z_2 = m \\ X_{12} + Y_{48} + Z_{13} = n \\ \Sigma X + \Sigma Y + \Sigma Z = -D/2 \end{array} \right. , \quad (2.20)$$

o sistema é semelhante ao anterior, com a diferença que aqui temos W_j índices que vieram do setor com massa. Utilizamos a notação abreviada,

$$X_{abc} = X_a + X_b + X_c,$$

e assim por diante. Na última equação $\Sigma X = X_{123}$, $\Sigma Y = Y_{123456789}$, $\Sigma Z = Z_{123}$.

Verificamos que o resultado será escrito como uma $(19 - 7 = 12)$ série hipergeométrica com doze índices, i.e., uma 12-upla série. A maioria dos sistemas (7×7) , 30.972 não possui solução enquanto que 29.416 nos fornecem funções hipergeométricas. Suas variáveis podem ser,

$$\frac{t}{s}, \quad \frac{t}{4\mu^2}, \quad \frac{u}{t}, \quad \frac{u}{4\mu^2}, \quad \frac{s}{u}, \quad \frac{s}{4\mu^2}, \quad (2.21)$$

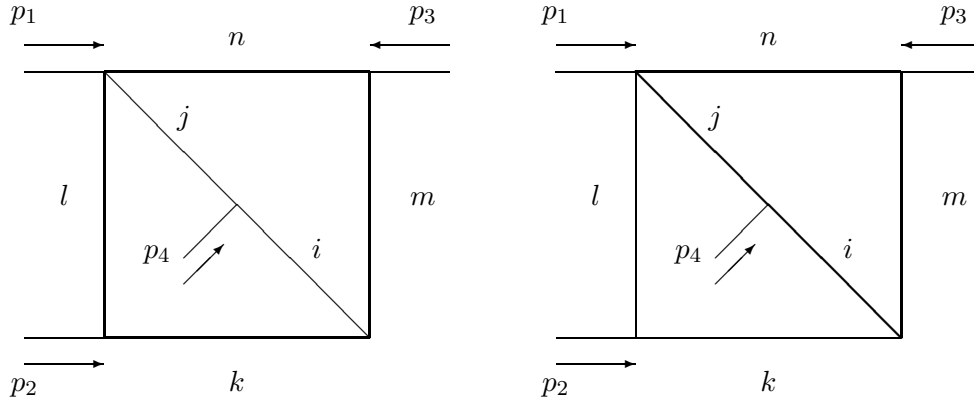


Figura 2.3: Gráficos equivalentes. Por simples operações de troca de expoentes dos propagadores podemos obter os dois diagramas acima a partir de (2.17).

as respectivas inversas e 1.

A série hipergeométrica mais simples que representa o diagrama é uma soma tripla,

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_M = & \pi^D (\mu^2)^\sigma \Gamma \sum_{X_1, X_2, X_3=0}^{\infty} \frac{X^{X_1} Y^{X_2} Z^{X_3} (-\sigma | X_{123}) (-n | X_{12}) (-m | X_3) (-l | X_{23})}{X_1! X_2! X_3! (D/2 | X_{123}) (-i - j | X_{123})} \\ & \times \frac{(-i | X_2) (-j | X_{13}) (-k | X_1) (-k - l - m - n - D/2 | X_{123})}{(1/2 - \sigma/2 - m/2 - n/2 | X_{123}) (-\sigma/2 - m/2 - n/2 | X_{123})}, \end{aligned} \quad (2.22)$$

onde $\sigma = i + j + k + l + m + n + D$ e

$$\Gamma = (-\sigma - m - n | m + n) (D/2 | m + n) (-i - j - m - n - D/2) (-k - l - m - n - D/2), \quad (2.23)$$

onde

$$X = \frac{s}{4\mu^2}, \quad Y = \frac{t}{4\mu^2}, \quad Z = \frac{u}{4\mu^2}.$$

Observe que o resultado final, eq. (2.22), é uma série tripla. Entretanto, a expressão resultante da solução do sistema de equações algébricas (2.20) deveria fornecer uma série múltipla, com 12 somatórias. Onde estão as outras 9 somatórias sobre símbolos de Pochhammer? Foram somadas exatamente usando-se a fórmula de soma de Gauss[14] para funções ${}_2F_1$. Nossa estratégia para buscar entre tantos resultados, o mais simples é a seguinte: escolhemos a série múltipla (com 12 índices) que possua o *menor* número de variáveis, ou seja, uma série na qual "1"

seja a variável que mais aparece. Então reescrevemos a soma como uma função hipergeométrica ${}_2F_1$ e utilizamos a fórmula de Gauss

$${}_2F_1(a, b; c|1) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}, \quad (2.24)$$

repetimos o procedimento até que todas as funções hipergeométricas com argumento 1 sejam somadas, ou seja, reescritas como produtos de funções gama. No apêndice B incluímos um programa de computador (no Mathematica 4.0) que faz a busca dessas séries e soma o maior número possível delas, algebricamente, usando a fórmula acima.

No caso especial onde os expoentes são todos iguais a menos um a série se reduz a

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_M &= \pi^D (\mu^2)^{D-6} \Gamma(\{-1\}) \sum_{X_1, X_2, X_3=0}^{\infty} \frac{X^{X_1} Y^{X_2} Z^{X_3} (6-D|X_{123})(1|X_{12})(1|X_3)(1|X_{23})}{X_1! X_2! X_3! (D/2|X_{123})(2|X_{123})} \\ &\quad \times \frac{(1|X_1)(1|X_{13})(1|X_2)}{(9/2 - D/2|X_{123})}, \end{aligned} \quad (2.25)$$

onde

$$\Gamma(\{-1\}) = \frac{\Gamma(D/2 - 2)\Gamma(D/2)\Gamma(6 - D)\Gamma^2(4 - D/2)}{\Gamma(8 - D)}. \quad (2.26)$$

Agora, no caso com 4 massas iguais, o sistema em questão é 7×19 , ou seja, temos um total de (um simples problema de análise combinatória, neste caso calculamos combinações) $19!/7!/12! = 50.388$ sistemas 7×7 as soluções possíveis são 29.416. Os restantes não tem solução. NDIM nos fornece outros tipos de séries hipergeométricas: quintuplas e sétuplas. Todas elas possuem as simetrias do diagrama (ou da integral) original entre s, t e u ,

$$\begin{aligned} p_3 \leftrightarrow p_4, \quad j \leftrightarrow n, \quad i \leftrightarrow m, \quad t \leftrightarrow u, \quad p_2 \leftrightarrow p_3, \quad l \leftrightarrow n, \quad k \leftrightarrow m, \quad t \leftrightarrow s, \\ p_2 \leftrightarrow p_4, \quad j \leftrightarrow l, \quad i \leftrightarrow k, \quad s \leftrightarrow u, \end{aligned} \quad (2.27)$$

novamente, para cada solução não-nula existe uma função hipergeométrica, e devido às simetrias mostradas acima podemos escrever (sem precisar calcular ou procurar entre tantas soluções) automaticamente outras duas séries hipergeométricas fazendo as substituições acima.

2.3.1 Cálculo numérico: série de Laurent

A expansão em ϵ para a integral (2.17) pode ser calculada numericamente para qualquer ordem, já que nosso resultado (2.25) é exato. As funções hipergeométricas convergem muito rápido, por isso, podemos truncar as séries eq.(2.25) após alguns poucos termos. Consideramos dois exemplos, $s = -1, t = -2, s = -3, 4\mu^2 = 25$ e $s = 2, t = -1, u = -1, \mu = 4$.

Tabela 1: Série de Laurent

Termos	ϵ^{-1}	ϵ^0	ϵ
1	-0.15877787089947	0.1144504436314	-0.4375363472289
2	-0.15905593258958	0.1141346540498	-0.4382967223214
3	-0.15904157598309	0.1141585957166	-0.4382477388046
4	-0.15904248795073	0.1141566914709	-0.4382515309963
5	-0.15904248795073	0.1141568521924	-0.4382512066856
6	-0.15904242717753	0.1141568379462	-0.4382512361932
7	-0.15904242673854	0.1141568392587	-0.4382512333925
8	-0.15904242677727	0.1141568391341	-0.4382512336666
9	-0.15904242677373	0.1141568391462	-0.4382512336391
10	-0.15904242677406	0.1141568391450	-0.4382512336419
20	-0.15904242677403	0.1141568391451	-0.4382512336417

Número de termos de cada série e coeficientes da expansão em ϵ (série de Laurent) para (2.17). Caso-I: $s = -1, t = -2, u = -3, 4\mu^2 = 25$. Estes valores ficam fora da região física, serve apenas como um teste, um exemplo de que a série converge muito rápido. O resultado é da forma $a/\epsilon + b + c\epsilon$, onde a, b, c são dados na tabela. O resultado é exato, poderíamos em princípio obter a expansão em ϵ para qualquer ordem.

Tabela 2

Termos	ϵ^{-1}	ϵ^0	ϵ
1	-0.16666202713362544092	0.11111642984629631817	-0.4557060127212616592
2	-0.16668058021298683828	0.11109516323349484374	-0.4557569968657018264
3	-0.16668072454737026304	0.11109492182787342273	-0.4557574905733665544
4	-0.16668072849754143706	0.11109491356240756367	-0.4557575070366868277
5	-0.16668072856344380806	0.11109491340169955725	-0.4557575073610663256
6	-0.16668072856499855487	0.11109491339744859266	-0.4557575073698739456
7	-0.16668072856503197638	0.11109491339734860742	-0.4557575073700873608
8	-0.16668072856503277706	0.11109491339734602934	-0.4557575073700930307
9	-0.16668072856503279614	0.11109491339734596400	-0.4557575073700931786
10	-0.16668072856503279661	0.11109491339734596228	-0.4557575073700931826
20	-0.16668072856503279662	0.11109491339734596224	-0.4557575073700931827

Caso-II: $s = 2, t = -1, u = -1, \mu = 4$, região física. Observe que a série hipergeométrica converge muito rápido, vinte termos para cada uma das três séries e con-

seguimos umas precisão de 18 casas decimais. O resultado é da forma $a/\epsilon + b + c\epsilon$, onde a, b, c são dados na tabela.

2.4 Momento externo fora da camada de massa

Nosso método também pode ser utilizado para o cálculo de diagramas com partículas externas que tenham massa ou momentos externos fora da camada de massa[15]. Seja o gráfico da figura 2.1 e considere que $p_i^2 \neq 0$, ($i = 1, 2, 3, 4$), ou seja, todos as partículas externas estão fora da camada de massa. O funcional gerador é mais complicado,

$$G_{4-OFF} = G_0 \exp \left(-\beta\theta\omega p_1^2 - a_2 p_2^2 - a_3 p_3^2 - a_4 p_4^2 \right), \quad (2.28)$$

onde

$$a_2 = \alpha\gamma\theta + \alpha\theta\phi + \beta\gamma\theta + \gamma\theta\phi + \gamma\theta\omega, \quad a_3 = \alpha\beta\gamma + \alpha\beta\theta + \alpha\beta\phi + \alpha\beta\omega + \beta\gamma\phi, \quad (2.29)$$

e

$$a_4 = \alpha\gamma\omega + \alpha\phi\omega + \beta\theta\phi + \gamma\phi\omega + \theta\phi\omega. \quad (2.30)$$

Na seção anterior usamos o resultado $s + t + u = 0$, entretanto, para o caso que estamos estudando agora as variáveis de Mandelstam são,

$$s = (p_1+p_2)^2 = (p_3+p_4)^2, \quad t = (p_1+p_3)^2 = (p_2+p_4)^2, \quad u = (p_1+p_4)^2 = (p_2+p_3)^2, \quad (2.31)$$

e $s + t + u = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 \neq 0$.

Nas próximas subseções iremos estudar alguns casos particulares.

Tabela 3

Diagrama	4 Massas iguais	Sem massa(on)	Sem massa (I)	Sem massa(II)
Sistema	7×19	7×15	7×16	7×20
Número Total	50,388	5,040	11,440	77,520
Soluções	29,416	2,916	4,632	34,994
Resultado	Série Tripla	Série Dupla	$F_A^{(3)}$	Série 9-upla

Número de sistemas, de soluções e forma das função hipergeométrica que os representam.

2.4.1 Caso-I: $p_1^2 \neq 0$

Existem dois casos distintos a considerar quando uma das pernas externas do diagrama está fora da camada de massa: $p_1^2 \neq 0$ e $p_j^2 \neq 0$, sendo $j = 2, 3$ ou 4 , uma vez que o gráfico é simétrico sob as permutações

$$p_2 \leftrightarrow p_3, \quad p_2 \leftrightarrow p_4, \quad p_3 \leftrightarrow p_4,$$

note que o vértice onde p_1 está inserido é quártico e todos os outros são triplos e podem ser renomeados arbitrariamente deixando o digrama inalterado.

As variáveis de Mandelstam devem ser reescritas como,

$$s = p_1^2 + 2p_1 \cdot p_2, \quad t = p_1^2 + 2p_1 \cdot p_3, \quad u = p_1^2 + 2p_1 \cdot p_4, \quad (2.32)$$

e agora temos $s + t + u = p_1^2$. O gerador funcional sofre uma pequena alteração,

$$\begin{aligned} G_{1-OFF} &= \left(\frac{\pi^2}{\lambda} \right)^{D/2} \exp \left[-\frac{1}{\lambda} \left(\beta\gamma\omega s + \alpha\theta\omega t + \beta\theta\phi u + \beta\theta\omega p_1^2 \right) \right] \\ &= G_0 \exp \left(-\frac{\beta\theta\omega p_1^2}{\lambda} \right), \end{aligned} \quad (2.33)$$

fazendo uma compação entre (2.33) e (2.6) concluímos que o sistema inicial (diagrama sem massa e pernas na camada de massa) ganhou apenas uma variável, i.e., o primeiro era 7×15 e o segundo (caixa-dupla com uma perna fora da camada de massa) é 7×16 . O número total de sistemas 7×7 é de 11.440 sendo 6.808 deles sem solução, os restantes 4.632 irão nos fornecer resultados para a integral em questão.

Procuramos pela mais simples delas, seguindo a estratégia explicada anteriormente: maior número de séries somáveis (ou em outras palavras: o menor número de variáveis). A série tripla

$$\mathcal{I}_{1-off} = \pi^D f_1 \sum_{X_{1,2,3}=0}^{\infty} \frac{P_1^{X_1} P_2^{X_2} P_3^{X_3} (-\sigma|X_{123})(-k|X_1)(-i|X_2)(-m|X_3)}{X_1! X_2! X_3! (1+l-\sigma|X_1)(1+j-\sigma|X_2)(1+n-\sigma|X_3)}, \quad (2.34)$$

onde $P_1 = s/p_1^2$, $P_2 = t/p_1^2$, $P_3 = u/p_1^2$, é a função hipergeométrica mais simples que representa a integral de Feynman, da 9-upla série que a representava originalmente somamos seis delas com a fórmula de Gauss. A função hipergeométrica acima é conhecida como função de Lauricella de três variáveis [14],

$$\mathcal{I}_{1-off} = \pi^D f_1 F_A^{(3)} \left[\begin{matrix} -\sigma; -k, -i, -m \\ 1+l-\sigma, 1+j-\sigma, 1+n-\sigma \end{matrix} \middle| P_1, P_2, P_3 \right], \quad (2.35)$$

a convergência da série impõe que $|P_1| + |P_2| + |P_3| < 1$. Definimos também,

$$\begin{aligned} f_1 &= (p_1^2)^\sigma (\sigma + D/2 | -2\sigma - D/2) (i + j + m + n + D | -m - n - D/2) \\ &\quad \times (k + l + m + n + D | -k - l - D/2) (i + j + k + l + D | -i - j - D/2), \\ &\quad \times (-j|\sigma)(-l|\sigma)(-n|\sigma). \end{aligned} \quad (2.36)$$

As simetrias do diagrama

$$i \leftrightarrow k, \quad j \leftrightarrow l, \quad s \leftrightarrow t; \quad i \leftrightarrow m, \quad j \leftrightarrow n, \quad s \leftrightarrow u; \quad k \leftrightarrow m, \quad l \leftrightarrow n, \quad t \leftrightarrow u, \quad (2.37)$$

estão expressas de forma manifesta em nosso resultado final. Em outras palavras, a cada resultado que obtemos podemos gerar mais dois sem realizar qualquer cálculo, apenas fazemos as substituições indicadas acima. Obviamente, se calcularmos todos os resultados fornecidos pelo nosso método iremos obter também estas expressões, as simetrias do diagrama original se "propagam" a cada etapa do processo,

Diagrama \rightarrow Integral \rightarrow Sistema – de – eq. \rightarrow F.hipergeometrica.

Caso especial

Seja o caso especial $i = j = k = l = m = n = -1$ teremos,

$$\mathcal{I}_{1-off} = \pi^D f_1(\{-1\}) F_A^{(3)} \left[\begin{matrix} 6-D; 1, 1, 1 \\ 6-D, 6-D, 6-D \end{matrix} \middle| P_1, P_2, P_3 \right], \quad (2.38)$$

com

$$f_1(\{-1\}) = (p_1^2)^{6-D} \frac{\Gamma^3(D-5)\Gamma^3(D/2-2)\Gamma(6-D)}{\Gamma^3(D-4)\Gamma(3D/2-6)}, \quad (2.39)$$

o resultado exibe um polo duplo quando $D = 4 - 2\epsilon$.

Reescrever o resultado acima em termos de funções mais complicadas, logaritmos, polilogaritmos e integrais $S_{a,b}$ exige o cálculo explícito de representações integrais $F_A^{(3)}$,

$$F_A^{(3)} \left[\begin{matrix} \alpha; \beta, \beta', \beta'' \\ \gamma, \gamma', \gamma'' \end{matrix} \middle| P_1, P_2, P_3 \right] = \frac{1}{\Gamma_A} \int_0^1 dx_1 dx_2 dx_3 \frac{x_1^{\beta-1} x_2^{\beta'-1} x_3^{\beta''-1} (1-x_1)^{\gamma-\beta-1}}{(1-x_1 P_1 - x_2 P_2 - x_3 P_3)^\alpha} \\ \times (1-x_2)^{\gamma'-\beta'-1} (1-x_3)^{\gamma''-\beta''-1}, \quad (2.40)$$

onde a integração está sujeita à condição $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ e

$$\Gamma_A = \frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\beta')\Gamma(\beta'')\Gamma(\gamma-\beta)\Gamma(\gamma'-\beta')\Gamma(\gamma''-\beta'')}{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma')\Gamma(\gamma'')}.$$

Neste caso,

$$F_A^{(3)} \left[\begin{matrix} 6-D; 1, 1, 1 \\ 6-D, 6-D, 6-D \end{matrix} \middle| P_1, P_2, P_3 \right] = \frac{1}{\Gamma_A} \int_0^1 \frac{dx_1 dx_2 dx_3 (1-x_1)^{4-D}}{(1-x_1 P_1 - x_2 P_2 - x_3 P_3)^{6-D}} \\ \times (1-x_2)^{4-D} (1-x_3)^{4-D}, \quad (2.41)$$

o procedimento é fazer $D = 4 - 2\epsilon$ e expandir em série de Taylor até ordem ϵ^2 , já que temos um polo duplo. Todavia, calcular estas integrais paramétricas das segundas derivadas é uma tarefa complicada e trabalhosa, enquanto que funções hipergeométricas convergem muito rápido e tem uma forma mais compacta.

2.4.2 Caso-II: $p_2^2 \neq 0$

No funcional gerador,

$$G_{1-OFF} = G_0 \exp \left[-\frac{\alpha\gamma\theta + \alpha\theta\phi + \beta\gamma\theta + \gamma\theta\phi + \gamma\theta\omega}{\lambda} p_2^2 \right], \quad (2.42)$$

observamos a existência de quatro somas extras, pela simples comparação entre (2.42) e (2.33), em outras palavras, o primeiro tem quatro argumentos (que expandidos em série de Taylor irão produzir tais séries adicionais) a mais que o último.

O sistema de equações se altera, temos no presente caso

$$\left\{ \begin{array}{l} X_2 + Y_{1234} + U_{12} = i \\ X_{13} + Y_{5678} + U_3 = j \\ X_1 + Y_{159} + Z_1 + U_{1345} = k \\ X_{23} + Y_{26} + Z_{23} + U_{12345} = l \\ X_3 + Y_{379} + Z_2 + U_{24} = m \\ X_{12} + Y_{48} + Z_{13} + U_5 = n \\ \Sigma X + \Sigma Y + \Sigma Z + \Sigma U = -D/2 \end{array} \right. , \quad (2.43)$$

Índices U_j são relativos á expansão de Taylor da exponencial

$$\exp \left[-\frac{\alpha\gamma\theta + \alpha\theta\phi + \beta\gamma\theta + \gamma\theta\phi + \gamma\theta\omega}{\lambda} p_2^2 \right].$$

Tausk[16] tem argumento que seria interessante verificar em um trabalho futuro. Segundo ele o diagrama é simétrico nos momentos externos que estão ligados a vértices triplos (obviamente) *assim como* no quarto momento externo (que está conectado a um vértice quártico). Nossos resultados possuem de fato simetrias entre as três variáveis de Mandelstam, mas como poderíamos provar isso a partir do sistema de equações?

2.5 Generalização para N-loops

Em certos casos é possível obter resultados para diagramas com número arbitrário de "loops". É o que chamamos de "colagem" de gráficos. Em outras palavras, sempre conseguimos generalizações para N -"loops" quando um subdiagrama é uma função de 2-pontos.

No caso que apresentaremos o subdiagrama é do tipo "sunset", i.e., um gráfico com 2-"loops" e três propagadores. Considere o diagrama da figura (2.4),

Ele tem 4-"loops" e é representado por,

$$\mathcal{C}(i, j, k, m, n, s) = \int d^D q d^D r d^D l d^D t (q^2)^i (r^2)^j (p - q - r)^{2k} (l^2)^m (t^2)^n (r - l - t)^{2s}, \quad (2.44)$$

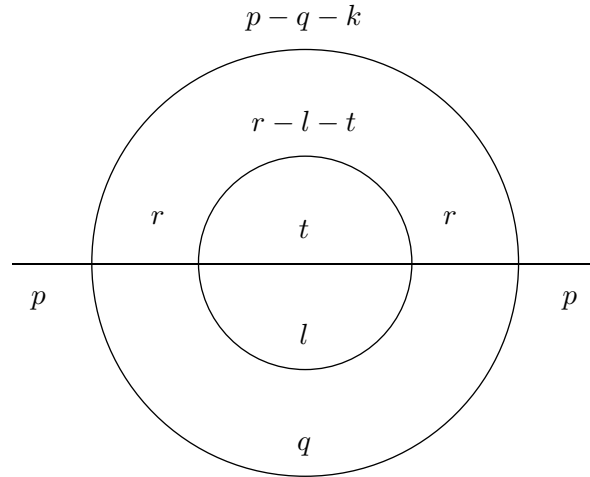


Figura 2.4: Gráfico de Feynman com 4-”loops” sem massa, o ”setting-sun” com 2 inserções.

no caso sem massa. Observe que as integrais em l e t são iguais a,

$$\mathcal{A}(i, j, l) = \int d^D q d^D k (q^2)^i (k^2)^j (p - q - k)^{2l} \quad (2.45)$$

$$= \pi^D (p^2)^\sigma (-i|i + j + D/2)(-j|j + k + D/2)(-k|i + k + D/2) \\ \times (\sigma + D/2| - 2\sigma - D/2), \quad (2.46)$$

que é um resultado conhecido na literatura e que calculamos de maneira simples e direta em [17].

Reescrevendo-as,

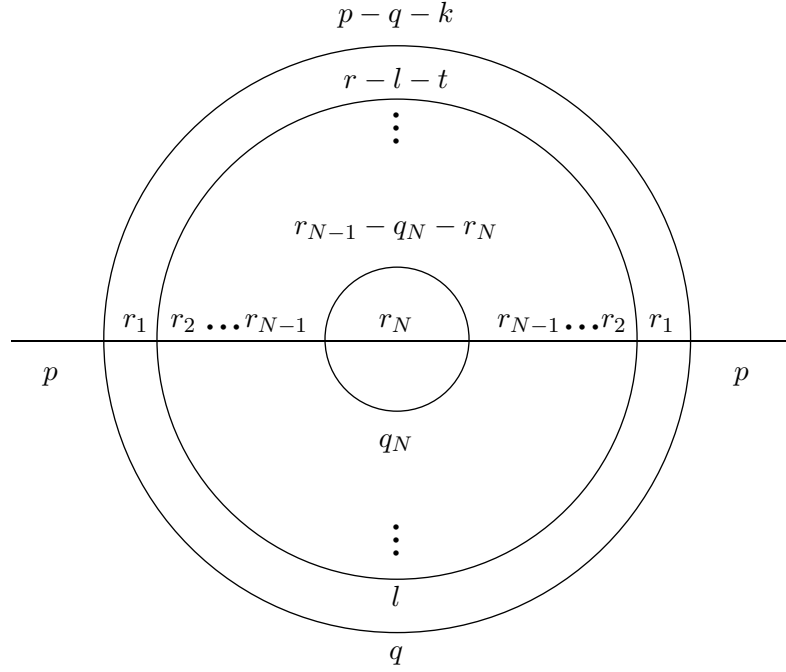
$$\mathcal{C}(i, j, k, m, n, s) = \int d^D q d^D r (q^2)^i (r^2)^j (p - q - r)^{2k} \mathcal{A}(m, n, s; p^2 \rightarrow r^2), \quad (2.47)$$

$$= \pi^D (-m|m + n + D/2)(-n|n + s + D/2)(-s|m + s + D/2) \\ \times (\sigma_1 + D/2| - 2\sigma_1 - D/2) \mathcal{A}(i, j + \sigma_1, k), \quad (2.48)$$

$$= \pi^{2D} (p^2)^{\sigma_1 + \sigma_2} (-i|i + j + \sigma_1 + D/2)(-j - \sigma_1|j + \sigma_1 + k + D/2) \\ \times (\sigma_2 + D/2| - 2\sigma_2 - D/2)(-m|m + n + D/2)(-n|n + s + D/2) \\ \times (-k|i + k + D/2)(-s|m + s + D/2) \\ \times (\sigma_1 + D/2| - 2\sigma_1 - D/2), \quad (2.49)$$

onde $\sigma_1 = m + n + s + D$, $\sigma_2 = i + j + k + D$.

Vamos estudar o diagrama da figura (2.5),


 Figura 2.5: Diagrama "Setting Sun" com $2N$ inserções.

ou seja, um gráfico onde um dos propagadores foi substituído N vezes pelo diagrama da figura abaixo (1-"loop"),

$$\mathcal{C}_N(\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_{3N}) = \int \dots \int \prod_{i=1}^{i=N} d^D q_i d^D r_i (q_i^2)^{\nu_{3i-2}} (r_i^2)^{\nu_{3i-1}} \left[(r_{i-1} - q_i - r_i)^2 \right]^{\nu_{3i}}, \quad (2.50)$$

onde $r_0^\mu = p^\mu$ é o momento externo e N é o número de inserções. Quando $N = 1$ a integral acima se reduz a $\mathcal{A}(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$.

Procedendo da forma como resolvemos o gráfico com 4-"loops" podemos calcular facilmente a integral escalar com N "loops",

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_N^{AC}(\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_{3N}) &= \mathcal{A}^{AC}(\nu_1, \nu_2, \nu_3) \mathcal{A}^{AC}(\nu_4, \nu_5 + \sigma_1, \nu_6) \times \dots \\ &\times \mathcal{A}^{AC}(\nu_{3N-2}, \nu_{3N-1} + \sigma_1 + \dots + \sigma_{N-1}, \nu_{3N}), \end{aligned} \quad (2.51)$$

onde $\sigma_N = \nu_{3N-2} + \nu_{3N-1} + \nu_{3N} + D$.

Diagrama do "Melão". Caso sem massa.

Recentemente o diagrama do "melão"[†] foi estudado no caso com massa, seja analítica ou numericamente[18].

[†]"Water melon diagram"

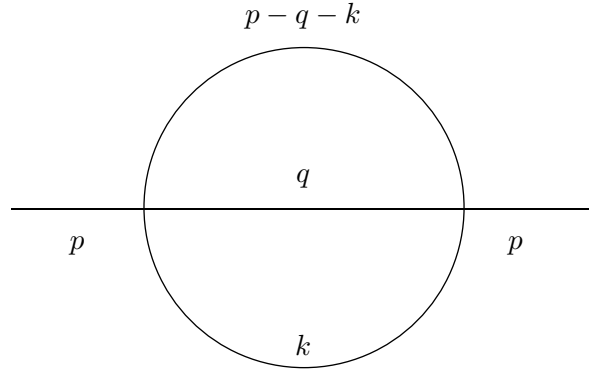


Figura 2.6: O gráfico mais simples em 2-”loops”, o ”sunset”.

Aplicar NDIM a este gráfico com N -”loops” também é muito simples. Consideramos o caso sem massa, veja figura (2.6) Para 2-”loops” temos novamente o diagrama ”setting-sun” figura (2.5) com $N = 1$. Uma ordem acima, 3-”loops”, teremos,

$$\begin{aligned}
 G_{WM} &= \int d^D q d^D r d^D k \exp \left[-\alpha q^2 - \beta r^2 - \gamma k^2 - \theta(p - q - r - k)^2 \right], \quad (2.52) \\
 &= \left(\frac{\pi^3}{\zeta} \right)^{D/2} \exp \left(-\frac{\alpha \beta \gamma \theta}{\zeta} p^2 \right), \quad (2.53)
 \end{aligned}$$

onde $\zeta = \alpha \beta \gamma + \alpha \beta \theta + \alpha \gamma \theta + \beta \gamma \theta$. Depois de um cálculo simples e direto obtemos um sistema 4×4 que depois de resolvido nos fornece,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{W}_3(i, j, l, m) &= \int d^D q d^D r d^D k (q^2)^i (r^2)^j (k^2)^l (p - q - r - k)^{2m}, \quad (2.54) \\
 &= \frac{\pi^{3D/2} i! j! l! m! \Gamma(1 - \rho_3 - D/2) (p^2)^{\rho_3}}{(-1)^{i+j+l+m} \Gamma(1 - i - D/2) \Gamma(1 - j - D/2) \Gamma(1 - l - D/2)} \\
 &\quad \times \frac{1}{\Gamma(1 - m - D/2) \Gamma(1 + \rho_3)}, \quad (2.55)
 \end{aligned}$$

na região de dimensão negativa e espaço euclidiano. Definimos ainda $\rho_3 = i + j + l + m + 3D/2$. Generalizamos o resultado para N -”loops” facilmente seguindo o mesmo procedimento do gráfico anterior,

$$\mathcal{W}_N(\{\nu_n\}) = \int \dots \int \prod_{i=1}^{i=N} d^D q_i (q_i^2)^{\nu_i} (p - q_1 - q_2 - \dots - q_N)^{2\nu_{N+1}}, \quad (2.56)$$

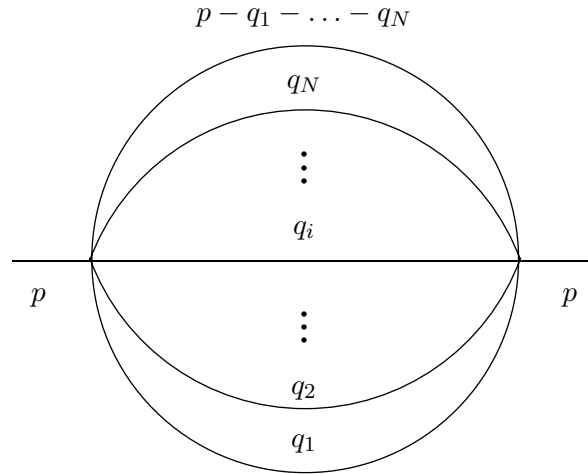


Figura 2.7: Diagrama do "melão" com N -"loops" e sem massa.

$$= \frac{\pi^{ND/2} \nu_1! \dots \nu_{N+1}! \Gamma(1 - \rho_N - D/2) (p^2)^{\rho_N}}{(-1)^{\Sigma \nu} \Gamma(1 - \nu_1 - D/2) \dots \Gamma(1 - \nu_{N+1} - D/2) \Gamma(1 + \rho_N)} \quad (2.57)$$

onde $\Sigma \nu = \nu_1 + \dots + \nu_{N+1}$ e $\rho_N = \Sigma \nu + ND/2$. Finalmente, fazendo a continuação analítica para dimensão positiva temos,

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_N^{AC}(\{\nu_n\}) &= \pi^{ND/2} (p^2)^{\rho_N} (-\nu_1 | 2\nu_1 + D/2) (-\nu_2 | 2\nu_2 + D/2) \dots (-\nu_N | 2\nu_N + D/2) \\ &\times (\rho_N + D/2 | -2\rho_N - D/2), \end{aligned} \quad (2.58)$$

que é o resultado para expoentes dos propagadores arbitrários.

Sempre que pudermos "colar" os gráficos é fácil generalizar o resultado para o caso de número de "loops" arbitrários.

2.6 Conclusão

Estudamos neste capítulo algumas integrais escalares ao nível de 2-"loops". São diagramas não-planares que não podem ser resolvidos utilizando-se o método da integração por partes. Os resultados para estes diagramas não eram conhecidos na literatura até então. Com NDIM calculamo-los facilmente e apresentamos os resultados em termos de funções hipergeométricas, que convergem rapidamente e permitem o estudo de casos particulares importantes (espalhamento a $t = 0$ ou $u = 0$) diretamente. Mostramos também como em certos casos podemos generalizar o cálculo para um número arbitrário de "loops".

Capítulo 3

O Gauge do Cone-de-Luz sem Prescrições

3.1 Introdução

Entre os gauges disponíveis no "mercado" [19] o gauge do cone-de-luz (GCL) talvez seja o que apresenta maior dificuldade para o cálculo perturbativo. Devido a presença de polos chamados espúrios certos resultados - como o cálculo da polarização do vácuo - que deveriam ser invariantes de calibre não apresentavam esta propriedade. Por exemplo: em calibres covariantes a polarização do vácuo deve ter um polo simples, e este resultado deve ser o mesmo independente do calibre escolhido para se realizar o cálculo; mas, no caso do GCL havia um polo duplo, além do polo simples. Algum princípio físico deveria estar sendo violado, porque os resultados não estavam respeitando a invariância de calibre.

Tratar os polos espúrios simplesmente com o valor principal de Cauchy não era uma maneira fisicamente aceitável de se realizar cálculos, ou seja,

$$PV \left(\frac{1}{q \cdot n} \right) \longrightarrow \frac{1}{2} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{q \cdot n + i\epsilon} + \frac{1}{q \cdot n - i\epsilon} \right), \quad (3.1)$$

fornecia resultados que violavam a invariância de calibre.

Mandelstam[20] e Leibbrandt[21], independentemente, propuseram duas prescrições, equivalentes no final, para tratar tecnicamente tais polos. A prescrição, que ficou conhecida como ML,

$$\frac{1}{k \cdot n} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{k \cdot n^*}{(k \cdot n)(k \cdot n^*) + i\epsilon}, \quad (3.2)$$

foi a maneira encontrada, inicialmente, para restaurar a invariância de calibre. Eles introduziram o 4-vetor dual, $n^{*\mu}$, necessário para gerar o espaço 4-dimensional.

Alguns anos depois Pimentel e Suzuki[20, 22] introduziram outra prescrição, conhecida como prescrição de Cauchy causal. Eles verificaram que a prescrição de Cauchy poderia ser utilizada para se realizar cálculos perturbativos, mas com uma

correção de modo a preservar a **causalidade** ,

$$\frac{1}{(q \cdot n)^j} = PV \left(\frac{1}{(q \cdot n)^j} \right) - i\pi \frac{(-1)^{j-1}}{(j-1)!} \delta^{(j-1)}(q \cdot n) \text{sgn}(q^0). \quad (3.3)$$

Entretanto, estas prescrições apesar de tornarem os resultados fisicamente compatíveis, respeitando a invariância de calibre e a causalidade, impõem o uso de frações parciais, e.g.,

$$\frac{1}{(k \cdot n)(p-k) \cdot n} \rightarrow \frac{1}{p \cdot n} \left[\frac{1}{k \cdot n} + \frac{1}{(p-k) \cdot n} \right], \quad p \cdot n \neq 0 \quad (3.4)$$

o que complica bastante o cálculo. Em outras palavras, a equação acima faz parte da prescrição. Veja referência [23] onde os autores mencionam este fato explicitamente.

Por outro lado, mostramos recentemente, que usando o método da integração em dimensão negativa (NDIM), podemos esquecer qualquer tipo de prescrição e ainda assim obter os mesmos resultados obtidos por Leibbrandt e colaboradores. Além de poder dispensar as prescrições, preservando causalidade e invariância de calibre, podemos calcular várias integrais simultaneamente, já que sempre deixamos os expoentes dos propagadores livres, por esta razão evitamos também a utilização da decomposição em frações parciais. Assim como na regularização dimensional nossos resultados são expressos como função de D .

Neste capítulo vamos calcular integrais ao nível de 1 e 2 "loops" no gauge do cone-de-luz. Nossos resultados são idênticos ao de Leibbrandt, apresentamos ainda resultados novos para diversas integrais ao nível de 2-"loops".

Notação.

Vamos usar a notação usual do calibre do cone-de-luz, veja por exemplo os textos de Leibbrandt[19].

$$p^+ = p \cdot n, \quad p^- = p \cdot n^*. \quad (3.5)$$

Os 4-vetores n e n^* são do tipo-luz,

$$n^2 = 0, \quad (n^*)^2 = 0,$$

e além disso n e n^* são necessários para gerar o espaço de Minkowski como foi mostrado por Leibbrandt[24].

3.2 LCG sem prescrições a 1-loop

O princípio da invariância de calibre é um dos mais importantes da teoria quântica de campos. Cálculos das grandezas físicas devem ser iguais, independentemente do

gauge escolhido. Até que Mandelstam e Leibbrandt propusessem suas prescrições - que na verdade são equivalentes - as integrais de "loops" no calibre do cone-de-luz, que é um gauge físico (por que não existem fantasmas), não eram bem entendidas uma vez que não concordavam com cálculos realizados em gauges covariantes. Polos duplos ao nível de 1-"loop" eram os responsáveis por esta discrepância. A prescrição de ML tornou os cálculos fisicamente aceitáveis, já que a prescrição do valor principal de Cauchy violava a causalidade. O 4-vetor dual, $n^{*\mu}$, é o responsável pelo sucesso da prescrição de ML, porque o espaço de Minkowski não pode ser gerado somente por n^μ [24].

Entretanto, cálculos de integrais de Feynman no calibre do cone-de-luz, usando a prescrição de ML são muito mais trabalhosos, apesar de não haver fantasmas, do que os mesmos cálculos (para os mesmos diagramas) realizados em calibres covariantes uma vez que decomposição em frações parciais e integração sobre componentes fazem, de fato, parte da prescrição[23]. Esta pode ser a razão pela qual existem menos trabalhos, comparados aos existentes em calibres covariantes, relacionados a integrais de "loop" em calibres não-covariantes.

Com NDIM podemos evitar a utilização de prescrições e mesmo assim, obter resultados fisicamente aceitáveis, i.e., que preservam a causalidade. O cálculo que apresentaremos foi o primeiro na literatura, ao nível de 2-"loops", sem a prescrição ML. Por esta razão dizemos que com NDIM temos o gauge do cone-de-luz sem prescrições*. Além disso, a integração sobre componentes, a decomposição em frações parciais e a utilização de integrais paramétricas são completamente abandonadas.

O mais importante[25] é observar que o 4-vetor n_μ^* , do tipo-luz, é necessário para gerar o espaço quadri-dimensional[24, 26]. Esta foi razão pela qual um cálculo que realizamos anteriormente[15] falhou[†], ou seja, resultou em um valor diferente do obtido por Leibbrandt e colaboradores.

O propagador para o campo de Yang-Mills escrito no calibre do cone-de-luz, depois de fazer o parametro de gauge ir a zero é

$$D_{\mu\nu}^{ab}(k) = \frac{-i \delta^{ab}}{k^2 + i\epsilon} \left[g_{\mu\nu} - \frac{n_\mu k_\nu + n_\nu k_\mu}{k \cdot n} \right] \quad (3.6)$$

onde n_μ é um 4-vetor tipo-luz, arbitrário e constante que define o gauge, $n \cdot A^a(x) = 0$; $n^2 = 0$. Este propagador gera integrais de Feynman, em D -dimensões, da forma,

$$I_{lc} = \int \frac{d^D k_i}{A(k_j, p_l)} \frac{f(k_j \cdot n^*, p_l \cdot n^*)}{h(k_j \cdot n, p_l \cdot n)}, \quad (3.7)$$

*"Prescriptionless light-cone gauge".

[†]Obtivemos o mesmo resultado que a prescrição do valor principal de Cauchy.

onde p_l são todos momentos externos, e n_μ^* é um 4-vetor tipo-luz, dual a n_μ . Como exemplo preliminar calcularemos, uma integral onde,

$$A(k_j, p_l) = (k^2)^{-i} [(k-p)^2]^{-j}, \quad h(k_j n, p_l n) = (k \cdot n)^{-l}, \quad f(k_j n^*, p_l n^*) = (k \cdot n^*)^m, \quad (3.8)$$

com i, j, l negativos e m positivo ou nulo.

O primeiro ponto importante a ser salientado é que quando o vetor dual n_μ^* aparece, isto *sempre* se dá no *numerador*. Então como podemos ter resultados dependentes do vetor dual n^* se no propagador (3.7) ele *não aparece*? Por que a forma geral das integrais é dada por (3.7), onde aparece o vetor dual?

Leibbrandt[24], logo após introduzir sua prescrição mostrou que o vetor dual é necessário, sem ele não podemos formar uma base para gerar o espaço de Minskowski.

Os fatores que originam o "problema" do GCL estão no denominador, representados por $h(k_j \cdot n, p_l \cdot n)$, os quais para o caso mais simples, ou seja, funções de 2-pontos ao nível de 1-"loop" são produtos da forma,

$$\frac{1}{h(k_j \cdot n, p_l \cdot n)} \sim \frac{1}{(k \cdot n)(k-p) \cdot n}. \quad (3.9)$$

Na abordagem que se tornou um padrão, a de Leibbrandt, Bassetto e colaboradores, é preciso usar a decomposição em frações parciais[21, 23, 27])

$$\frac{1}{(k \cdot n)(p-k) \cdot n} \rightarrow \frac{1}{p \cdot n} \left[\frac{1}{k \cdot n} + \frac{1}{(p-k) \cdot n} \right], \quad p \cdot n \neq 0 \quad (3.10)$$

Podemos observar que a medida que tivermos potências destes produtos a fórmula de decomposição nos fornecerá mais e mais termos. Os próprios autores[27] afirmam que a aplicação de (3.10) complica consideravelmente o cálculo das integrais. Considere um segundo exemplo,

$$\frac{1}{(k \cdot n)^2 (p-k) \cdot n} \rightarrow \frac{1}{(p \cdot n)^2} \left[\frac{p \cdot n}{(k \cdot n)^2} + \frac{1}{k \cdot n} + \frac{1}{(p-k) \cdot n} \right], \quad p \cdot n \neq 0 \quad (3.11)$$

de fato, na abordagem de Leibbrandt não é possível tratar produtos desta forma sem antes aplicar a fórmula de decomposição. Leibbrandt e Nyeo foram os únicos a afirmar explicitamente que estas fórmulas de decomposição - como (3.10) e (3.11) - fazem parte de fato da prescrição ML[27]. Então, depois de realizada a decomposição é que se aplica a prescrição ML e se resolve(m) a(s) integral(is).

Os primeiros estudos destas integrais utilizavam o valor principal de Cauchy (PV),

$$PV \left(\frac{1}{q \cdot n} \right) \rightarrow \frac{1}{2} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{q \cdot n + i\epsilon} + \frac{1}{q \cdot n - i\epsilon} \right). \quad (3.12)$$

Infelizmente esta prescrição, apesar de preservar a forma das integrais do GCL e ser matematicamente bem-definida não fornece resultados fisicamente aceitáveis no contexto do calibre do cone-de-luz[28, 29].

Mandelstam[20] e Leibbrandt[21], independentemente, propuseram novas prescrições, para substituir a do valor principal, de modo a tratar as singularidades espúrias do calibre do cone-de-luz,

$$\begin{aligned} \frac{1}{q \cdot n} &\longrightarrow \frac{1}{q \cdot n + i\epsilon \operatorname{sgn}(q \cdot n^*)} \\ &= \frac{q \cdot n^*}{(q \cdot n)(q \cdot n^*) + i\epsilon}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

a primeira é a de Mandelstam e a segunda a de Leibbrandt. Bassetto e colaboradores mostraram que as duas são equivalentes, por esta razão passaram a ser conhecidas como prescrição de Mandelstam-Leibbrandt.

Se aplicarmos a prescrição ML em funções de 2-pontos ao nível de 1-”loop” os polos duplos ainda aparecem, mas no final se cancelam e o resultado final concorda com o calculado em calibres covariantes, i.e., apresenta apenas um polo simples mais uma parte finita. Em outras palavras, as singularidades que aparecem apenas devido a uma escolha particular do calibre se cancelam. Alguns especialistas[29] dizem até que adotar a prescrição torna o calibre do cone-de-luz aceitável fisicamente, pelo menos perturbativamente mesmo que alguns poucos cálculos tenham sido realizados além do nível de 1-”loop”[30].

Pimentel e Suzuki observaram que quando o princípio da causalidade é levado em conta *corretamente* – seja verificando a cada passo se ela está sendo preservada, ou implementando-a diretamente no propagador via outros métodos – os polos não-físicos (dependentes de gauge) se cancelam e o resultado final é invariante de gauge[22, 31]. De fato, este procedimento corresponde a retirar os modos de frequência nula da expansão de Fourier para os campos, assegurando assim que os modos de frequência positiva (negativa) se propaguem para o futuro (passado). Matematicamente fazemos a substituição,

$$\frac{1}{(q \cdot n)^j} = PV \left(\frac{1}{(q \cdot n)^j} \right) - i\pi \frac{(-1)^{j-1}}{(j-1)!} \delta^{(j-1)}(q \cdot n) \operatorname{sgn}(q^0), \quad (3.14)$$

PV é o valor principal de Cauchy. O segundo termo da expressão acima é muito importante já que é o responsável por subtrair os modos nulos do espectro.

Esta segunda prescrição continua fazendo uso da fórmula de decomposição.

Mas, com o método da integração em dimensão negativa[4] isto não ocorre. NDIM é um método onde o princípio da continuação analítica tem um papel funda-

mental. Com ele resolvemos uma integral de Feynman fermiônica (polinomial), i.e., integrais no espaço de dimensão negativa com propagadores elevados a potências positivas no numerador. Soluções para estas integrais são combinações lineares de funções hipergeométricas que são escritas através da resolução de sistemas de equações algébricas lineares. Então realizamos a continuação analítica de volta ao "mundo real", ou seja, dimensão positiva e expoentes do propagadores negativos[32]. Este procedimento, que funciona muito bem para integrais em gauges covariantes, deve respeitar a forma geral das integrais no gauge do cone-de-luz (3.7) acima. Temos como $f(k_j \cdot n^*, p_l \cdot n^*) \sim (q \cdot n^*)^a [(q-p) \cdot n^*]^b$ que aparecem no numerador, após a continuação analítica devem *permanecer* no numerador. Em outras palavras, devemos ser capazes de realizar a continuação analítica nos termos desejados apenas[15]. Esquemáticamente a idéia é a seguinte[32]),

$$\int d^D k_i A(k_j, p_l) f(k_j \cdot n^*, p_l \cdot n^*) h(k_j \cdot n, p_l \cdot n) \xrightarrow{CA} \int \frac{d^D k_i}{A(k_j, p_l)} \frac{f(k_j \cdot n^*, p_l \cdot n^*)}{h(k_j \cdot n, p_l \cdot n)} \quad (3.15)$$

o membro esquerdo mostra a integral a ser calculada em dimensão negativa e o membro direito a forma geral (3.7) para as integrais no calibre do cone-de-luz. Note que o fator $f(k_j \cdot n^*, p_l \cdot n^*)$ permanece no numerador em ambos os membros.

Agora podemos perguntar: como é possível obter os resultados conhecidos na literatura a partir de NDIM? O cálculo é bastante simples. Substituímos (3.8) em (3.7), e teremos a integral

$$B(i, j, l, m) = \int d^D q (q^2)^i [(q-p)^2]^j (q \cdot n)^l (q \cdot n^*)^m, \quad (3.16)$$

cujo resultado é conhecido.

Partimos do gerador funcional,

$$\begin{aligned} G &= \int d^D q \exp \left[-\alpha q^2 - \beta (q-p)^2 - \gamma q \cdot n - \theta q \cdot n^* \right] \\ &= \left(\frac{\pi}{\lambda} \right)^{D/2} \exp \left[-\frac{1}{\lambda} \left(\alpha \beta p^2 + \beta \gamma p \cdot n + \beta \theta p \cdot n^* - \frac{1}{2} \gamma \theta n \cdot n^* \right) \right], \end{aligned} \quad (3.17)$$

onde $\lambda = \alpha + \beta$. Usando a expansão em Taylor e resolvendo a equação para a integral em $D < 0$, $B(i, j, l, m)$ obtemos,

$$\begin{aligned} B(i, j, l, m) &= (-\pi)^{D/2} i! j! l! m! (-\sigma - D/2)! \sum_{\{X, Y\}=0}^{\infty} \frac{(p^2)^{X_1} (p^+)^{X_2} (p^-)^{X_3}}{X_1! X_2! X_3! X_4! Y_1! Y_2!} \left(\frac{-n n^*}{2} \right)^{X_4} \\ &\quad \times \delta_{a,i} \delta_{b,j} \delta_{c,l} \delta_{d,m} \delta_{e,\sigma}, \end{aligned} \quad (3.18)$$

onde $\sigma = i + j + l + m + D/2$, $a = X_1 + Y_1$, $b = X_1 + X_2 + X_3 + Y_2$, $c = X_2 + X_4$, $d = X_3 + X_4$, $e = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$. Este sistema de equações algébricas lineares

possui seis possíveis soluções, uma vez que o número de equações é *menor* que o número de variáveis (que são os índices de soma provenientes das séries de Taylor). Em todos os seis casos, após eliminarmos as deltas (resolver o sistema em outras palavras), ficamos com uma série simples, uma função hipergeométrica ${}_3F_2$. Sua variável pode ser

$$z = \left(\frac{p^2 n n^*}{2p^+ p^-} \right), \quad \text{ou} \quad z^{-1} = w = \left(\frac{2p^+ p^-}{p^2 n n^*} \right),$$

e dos nossos trabalhos anteriores sabemos que, [32], o(s) resultado(s) final(is) para a integral será(ão) representado(s) através de combinações lineares de funções hipergeométricas linearmente independentes. Além disso, se tivermos mais de um resultado eles estarão relacionados através de continuação analítica, seja ela direta ou indireta.

A primeira solução para $B(i, j, l, m)$ em termos de z^{-1} ,

$$B(i, j, l, m) = B_1 + B_2, \quad (3.19)$$

onde

$$B_1 = (-\pi)^{D/2} \frac{\Gamma(1+j)\Gamma(1+l)\Gamma(1+m)(p^2)^i (p^+)^{j+l+D/2} (p^-)^{j+m+D/2}}{\Gamma(1+j+l+D/2)\Gamma(1+j+m+D/2)\Gamma(1-j-D/2)} \left(\frac{-n n^*}{2} \right)^{-j-D/2} \times {}_3F_2(a_1, b_1, c_1; e_1, f_1|w), \quad (3.20)$$

e

$$B_2 = (-\pi)^{D/2} \frac{\Gamma(1+i)\Gamma(1+j)\Gamma(1+m)\Gamma(1-\sigma-D/2)(p^2)^{\sigma-m} (p^-)^{-l+m}}{\Gamma(1-j-l-D/2)\Gamma(1-i-m-D/2)\Gamma(1-l+m)\Gamma(1+\sigma-m)} \times \left(\frac{-n n^*}{2} \right)_3^l F_2(a_2, b_2, c_2; e_2, f_2|w), \quad (3.21)$$

onde $a_1 = -i$, $b_1 = D/2 + j$, $c_1 = \sigma + D/2$, $e_1 = 1 + j + l + D/2$, $f_1 = 1 + j + m + D/2$, $a_2 = -l$, $b_2 = -i - j - l - D/2$, $c_2 = i + m + D/2$, $e_2 = 1 - l + m$, $f_2 = 1 - j - l - D/2$. Este é um dos resultados na região de dimensão negativa e i, j, l, m positivos. Agora, de modo a ter significado físico devemos realizar a continuação analítica da função hipergeométrica acima para a região de dimensão positiva e i, j, l negativos, o expoente m deve ficar inalterado.

A continuação analítica segue o procedimento do capítulo anterior, reescrevemos as funções gama como símbolos de Pochhammer e usamos as propriedades,

$$(a|j) \equiv (a)_j = \frac{\Gamma(a+j)}{\Gamma(a)}, \quad (a|-j) = \frac{(-1)^j}{(1-a|j)}, \quad (3.22)$$

obtemos então,

$$\begin{aligned}
 B^{AC}(i, j, l, m) &= (-\pi)^{D/2} (-1)^j \frac{(-j| -l - D/2)(-l|j + l + D/2)}{(1 + m|j + D/2)} (p^2)^i (p^+)^{j+l+D/2} \\
 &\quad \times (p^-)^{j+m+D/2} \left(\frac{-nn^*}{2}\right)^{-j-D/2} {}_3F_2(a_1, b_1, c_1; e_1, f_1|w) \\
 &\quad + \pi^{D/2} (-1)^l \frac{(-j|i + j + m + D/2)(-i|i + j + l + D/2)}{(1 + m|-l)} \\
 &\quad \times (\sigma + D/2| -2\sigma - D/2 + m)(p^2)^{\sigma-m} (p^-)^{-l+m} \left(\frac{-nn^*}{2}\right)^l \\
 &\quad \times {}_3F_2(a_2, b_2, c_2; e_2, f_2|w). \tag{3.23}
 \end{aligned}$$

Mas, como observamos anteriormente o resultado para a integral deve ser uma combinação linear de funções hipergeométricas linearmente independentes, e, da teoria das funções hipergeométricas[14], sabemos que a equação diferencial cuja solução são as séries hipergeométricas ${}_pF_q$ possui p soluções linearmente independentes, então deveríamos ter mais uma função, digamos B_3 . De fato existe um terceiro termo, mas podemos mostrar que ele é linearmente *dependente*

$$\begin{aligned}
 B_3 &= (-\pi)^{D/2} \frac{\Gamma(1+i)\Gamma(1+j)\Gamma(1+l)\Gamma(1-\sigma-D/2)(p^2)^{i+j+m+D/2}}{\Gamma(1+i+j+m+D/2)\Gamma(1+l-m)\Gamma(1-j-m-D/2)} \\
 &\quad \times \frac{(p^+)^{l-m}}{\Gamma(1-i-l-D/2)} \left(\frac{-nn^*}{2}\right)^m {}_3F_2(a_3, b_3, c_3; e_3, f_3|w), \tag{3.24}
 \end{aligned}$$

onde $a_3 = -i - j - m - D/2$, $b_3 = -m$, $c_3 = i + l + D/2$, $e_3 = 1 + l - m$, $f_3 = 1 - j - m - D/2$. Como m é sempre positivo ou zero podemos reescrever B_3 usando eq.(6) da seção 3.2 ref.[14] – se fizermos a escolha $\alpha_1 = c_3$, $\alpha_2 = a_3$, $n = -e_3$, $\rho_1 = f_3$ – como uma combinação linear de B_1 e B_2 .

A integral em questão foi calculada por Lee e Milgram[33] para expoentes arbitrários dos propagadores, uma das poucas vezes onde um resultado tão geral assim foi obtido. Nosso resultado também pode ser reescrito em termos das funções G – ou de Meijer, concordando assim com o deles. Considerando o caso especial onde $i = j = l = -1$ e $m = 0$ temos,

$$\begin{aligned}
 B(-1, -1, -1, 0) &= -(-\pi)^{D/2} \frac{\Gamma(2-D/2)\Gamma(D/2-1)}{\Gamma(D/2)} \frac{(p^+)^{D/2-2}(p^-)^{D/2-1}}{p^2} \left(\frac{-2}{nn^*}\right)^{D/2-1} \\
 &\quad \times {}_2F_1(1, D-3; D/2|w) \\
 &\quad - \pi^{D/2} \frac{\Gamma(D/2-1)\Gamma(D/2-2)\Gamma(3-D/2)}{\Gamma(D-3)} (p^2)^{D/2-3} p^- \left(\frac{-2}{nn^*}\right) \\
 &\quad \times {}_2F_1(1, D/2-1; 2|w), \tag{3.25}
 \end{aligned}$$

veja que quando fazemos $D = 4 - 2\epsilon$ existem polos simples em ambos os termos, mas com sinais opostos,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \Gamma(\epsilon) + \Gamma(-\epsilon) = \mathcal{O}(1),$$

e portanto o resultado final é finito em $D = 4$.

Para extrair a parte finita, assim como os possíveis polos devemos proceder como no capítulo anterior, veja também[32]. O outro resultado para a integral $B(i, j, l, m)$ também coincide com a apresentada em [33]. Na verdade elas estão relacionadas através de continuação analítica (veja ref.[14] para tais fórmulas).

Considere agora uma integral que contém dois fatores da forma $(k \cdot n)$,

$$T_2(i, j, l, m) = \int d^D q (q - p)^{2i} (q \cdot n)^j [(q - p) \cdot n]^l (q \cdot n^*)^m, \quad (3.26)$$

onde o expoente $m \geq 0$ sempre. A abordagem padrão, de Leibbrandt, Basseto e colaboradores, utiliza fórmulas de decomposição (3.10) and (3.11). Por outro lado, com NDIM podemos resolver muitas integrais simultaneamente e sem utilizar estas fórmulas. O resultado depois de continuar analiticamente para dimensão positiva[35],

$$T_2(i, j, l, m) = \pi^{D/2} \left(\frac{2p^+ p^-}{n \cdot n^*} \right)^{D/2+i} \frac{(p^+)^{j+l} (p^-)^m \Gamma(i+l+D/2) \Gamma(1+m)}{\Gamma(-i) \Gamma(-j) \Gamma(1+i+m+D/2)} \times \Gamma(-i-j-l-D/2), \quad (3.27)$$

observe que o símbolo de Pochhammer que contém $(1+m)$ não foi continuado uma vez que m é sempre positivo ou nulo.

3.3 LCG sem prescrições a 2-loops

Testamos até agora, com sucesso, nosso método até o nível de 1-”loop”. Nesta seção aplicaremos a mesma metodologia ao cálculo de uma integral referente a um diagrama para a função de 2-pontos ao nível de 2-”loops”, estudada por Leibbrandt, mas que não forneceu o resultado explícito para tal integral[23].

Seja,

$$C_3 = \int d^D q d^D k \frac{k^2}{q^2 (q-k)^2 (k-p)^2 (k \cdot n) (q \cdot n)}, \quad (3.28)$$

onde no cálculo de Leibbrandt e Nyeo a prescrição ML,

$$\frac{1}{k \cdot n} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{k \cdot n^*}{(k \cdot n)(k \cdot n^*) + i\epsilon}, \quad (3.29)$$

deve ser subentendida. Por outro lado, no contexto da integração em dimensão negativa a chave é introduzir o 4-vetor dual n_μ^* , caso contrário não temos uma base para gerar o espaço de Minkowski[24, 25, 26]. Se não incluirmos este 4-vetor iremos calcular um resultado idêntico ao calculado utilizando-se a prescrição do valor

principal de Cauchy, ou seja, um resultado fisicamente inaceitável porque viola o princípio da causalidade[15].

Como vimos no capítulo anterior, com NDIM podemos considerar várias integrais simultaneamente. Nosso objetivo é calcular,

$$\mathcal{N} = \int d^D q d^D k_1 (k_1^2)^i (q^2)^j (q - k_1)^{2k} (k_1 - p)^{2l} (k_1 \cdot n)^m (q \cdot n)^s (k_1 \cdot n^*)^r, \quad (3.30)$$

iremos calcular a integral acima e então considerar certos casos particulares, incluindo o estudado por Leibbrandt e Nyeo, a integral C_3 , onde $i = -1$, $r = 0$ e os outros expoentes iguais a menos 1. Observe que a integral deve ser considerada como uma função do momento externo, dos expoentes dos propagadores e da dimensão D ,

$$\mathcal{N} = \mathcal{N}(i, j, k, l, m, r, s; P, D), \quad (3.31)$$

onde P representa $(p^2, p^+, p^-, \frac{1}{2}(n \cdot n^*))$. Estamos usando a notação usual do GCL[19].

Nosso ponto de partida é sempre o gerador funcional para as integrais em dimensão negativa,

$$G_N = \int d^D q d^D k \exp \left[-\alpha k^2 - \beta q^2 - \gamma (q - k)^2 - \theta (k - p)^2 - \phi (k \cdot n) - \omega (q \cdot n) - \eta (k \cdot n^*) \right], \quad (3.32)$$

que após um cálculo simples e direto pode ser integrado,

$$G_N = \left(\frac{\pi^2}{\lambda} \right)^{D/2} \exp \left\{ \frac{1}{\lambda} \left[-g_1 p^2 - g_2 (p \cdot n) - g_3 (p \cdot n^*) + g_4 \left(\frac{1}{2} n \cdot n^* \right) \right] \right\} \quad (3.33)$$

onde

$$g_1 = (\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)\theta, \quad g_2 = (\beta\phi + \gamma\omega + \gamma\phi)\theta, \quad g_3 = (\beta + \gamma)\eta\theta, \quad g_4 = \eta \frac{g_2}{\theta},$$

e $\lambda = \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma + \beta\theta + \gamma\theta$.

Expandindo as exponenciais em série de Taylor teremos,

$$\begin{aligned} \mathcal{N} = & (-\pi)^D i!j!k!l!m!r!s! \Gamma(1 - \sigma_n - D/2) \sum_{\text{all}=0}^{\infty} \frac{\delta \cdot (p^2)^{X_{123}} (p^+)^{X_{456}} (p^-)^{X_{78}}}{X_1! \dots X_8! Y_1! Y_2! Y_3! Z_1! \dots Z_5!} \\ & \times \left(-\frac{n \cdot n^*}{2} \right)^{Y_{123}}, \end{aligned} \quad (3.34)$$

onde $\sigma_n = i + j + k + l + m + r + s + D$ e δ representa o sistema (8×16) de vínculos entre os índices de soma. Temos ao todo 12.870 soluções possíveis para tal sistema. A maioria deles (dos sistemas 8×8), 9.142, não possuem solução enquanto que os restantes 3.728 tem solução que quando plugadas na soução geral (3.34) nos

fornecerão funções hipergeométricas. Obviamente várias delas nos dão o mesmo resultado, estas soluções chamamos de degeneradas.

O resultado mais simples para a integral em questão é escrito em termos de funções hipergeométricas de duas variáveis,

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_2^A &= \pi^D f_2^A P_2^A \sum_{Z_j=0}^{\infty} \frac{(\sigma_n + D/2|Z_{45})(i + j + k + m + s + D|Z_{45})(D/2 + k|Z_4)}{Z_4!Z_5!(1 + i + j + k + \sigma_n + D|Z_{45})(j + k + s + D|Z_{45})} \\ &\times \frac{(j + s + D/2|Z_5)(i + j + k + r + D|Z_{45})}{(1 + i + j + k + m + r + s + D|Z_{45})} \left(\frac{p^2 n \cdot n^*}{2p^+ p^-} \right)^{Z_{45}}, \end{aligned} \quad (3.35)$$

onde

$$\begin{aligned} f_2^A &= (-m| - s)(-i - j - k - D/2| - \sigma_n - D/2)(j + k + s + D|i - s + r) \\ &\times \frac{(-l|k + l + D/2)(-k| - j - D/2)}{(1 + r| - i - j - k - m - r - s - D)} (-m|j + m + s + D/2) \\ &\times (-j| - i - k - m - r - s - D), \end{aligned} \quad (3.36)$$

e

$$P_2^A = (p^2)^{\sigma_n + i + j + k + D} (p^+)^{l + m + s - \sigma_n} (p^-)^{l + r - \sigma_n} \left(\frac{n \cdot n^*}{2} \right)^{\sigma_n - l}, \quad (3.37)$$

observe que na série acima devemos ter $|z| < 1$ para que ela seja convergente, onde $z = p^2 n \cdot n^* / 2p^+ p^-$. Agora podemos considerar o caso especial onde $(i = 1, j = k = l = m = s = -1, r = 0)$, estudado por Leibbrandt e Nyeo em [23],

$$\begin{aligned} C_3 &= \pi^D \frac{\Gamma(5 - 2D)\Gamma(D - 1)\Gamma(D/2 - 1)\Gamma(2 - D/2)\Gamma(D/2 - 2)}{\Gamma(1 - D/2)\Gamma(D - 3)} \\ &\times (p^2)^{2D-5} (p^+)^{1-D} (p^-)^{3-D} \left(\frac{n \cdot n^*}{2} \right)^{D-3} \\ &\times \sum_{Z_4, Z_5=0}^{\infty} \frac{(3D/2 - 4|Z_{45})}{Z_4!Z_5!(2D - 4|Z_{45})} \frac{(D/2 - 1|Z_4)(D/2 - 2|Z_5)(D - 1|Z_{45})}{(D - 2|Z_{45})} \\ &\times \left(\frac{p^2 n \cdot n^*}{2p^+ p^-} \right)^{Z_{45}}, \end{aligned} \quad (3.38)$$

observe que existe o polo duplo, mencionado por eles[23].

Fora da região $|z| < 1$, existem soluções que podem ser obtidas, em princípio pela continuação analítica, *se a fórmula for conhecida*. NDIM nos fornece ambos: funções hipergeométricas para integrais de Feynman e tais fórmulas de continuação analítica. Escrevemos apenas o resultado final válido para $|z| > 1$,

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_2^B &= \pi^D f_2^B P_2^B \sum_{X_i=0}^{\infty} \frac{(D/2 + k|X_7)(D/2 + j + s|X_8)(-r|X_{78})}{X_7!X_8!(1 + m - r + s|X_{78})(1 - l - r - D/2|X_{78})} \\ &\times \frac{(i + j + k + m + s + D|X_{78})}{(D + j + k + s|X_{78})} \left(\frac{2p^+ p^-}{p^2 n \cdot n^*} \right)^{X_{78}}, \end{aligned} \quad (3.39)$$

onde

$$\begin{aligned}
 f_2^B &= (-m-s|r)(\sigma+D/2|-l-r-D/2)(-i-j-k-D/2|-l-r-D/2) \\
 &\quad \times (j+k+s+D|-j-s-D/2)(-j|-k-D/2) \\
 &\quad \times (-l|j+l+s+D/2)(-k|k+l+r+D/2),
 \end{aligned} \tag{3.40}$$

$$e P_2^B = (p^2)^{i+j+k+l+r+D}(p^+)^{m-r+s}.$$

Existem também resultados que são expressos como funções hipergeométricas dadas por séries triplas,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{N}_3^A &= \pi^D P_1 \Gamma_1 \sum_{Y_i=0}^{\infty} \frac{(D/2+l|Y_{123})(-r|Y_{123})(-m|Y_{12})(D/2+k|Y_1)(-s|Y_3)}{Y_1!Y_2!Y_3!(1-\sigma+l|Y_{123})(D+j+k+s|Y_{12})} \\
 &\quad \times \frac{(D/2+j+s|Y_2)}{(1+i+j+k+l+D|Y_{123})} \left(\frac{p^2 n \cdot n^*}{2p^+ p^-} \right)^{Y_{123}} \\
 &\quad + \pi^D P_2 \Gamma_2 \sum_{X_i=0}^{\infty} \frac{(D/2+k|X_1)(-i|X_{12})(-\sigma+r|X_{123})}{X_1!X_2!X_3!(1-i-j-k-l-D|X_{123})} \\
 &\quad \times \frac{(-i-j-k-l-r-D|X_{123})(-j-k-D/2|X_3)(j+s+D/2|X_2)}{(1-\sigma-i-j-k-D|X_{123})(j+k+s+D|X_{12})} \\
 &\quad \times \left(\frac{p^2 n \cdot n^*}{2p^+ p^-} \right)^{X_{123}},
 \end{aligned} \tag{3.41}$$

os fatores estão definidos na tabela e os símbolos de Pochhammer são,

$$\begin{aligned}
 \Gamma_1 &= (-l|\sigma)(-i-j-k-D/2|i)(j+k+s+D|-k-D/2)(-j|-i-k-l-D) \\
 &\quad \times (\sigma+D/2|-\sigma+k)(-k|k+l+D/2),
 \end{aligned} \tag{3.42}$$

e

$$\begin{aligned}
 \Gamma_2 &= (\sigma+D/2|i+j+k+D/2)(j+k+s+D|-k-D/2)(-m-s|\sigma-2r) \\
 &\quad \times \frac{(-j|-k-D/2)(-k|-i-j-l-r-D)(-l|k+l+D/2)}{(1+r|\sigma-2r)} (-1)^{2r},
 \end{aligned} \tag{3.43}$$

	Fatores
P_1	$(p^2)^{\sigma-m-r-s}(p^+)^{m+s}(p^-)^r$
P_2	$\left(\frac{n \cdot n^*}{2}\right)^{-\sigma+m+r+s} (p^+)^{\sigma-r} (p^-)^{\sigma-m-s}$
P_3	$(p^2)^{D/2+i+j+k} (p^+)^{D/2+l+m+s} (p^-)^{D/2+l+r} \left(\frac{n \cdot n^*}{2}\right)^{-l-D/2}$
P_4	$\left(\frac{n \cdot n^*}{2}\right)^{m+s} (p^+)^{\sigma-r} (p^-)^{-m+r-s}$

Fatores para séries hipergeométricas que representam a integral C_3 , eq.(3.41) e eq.(3.44).

$$\begin{aligned}
 \mathcal{N}_3^B &= \pi^D P_3 \Gamma_3 \sum_{Z_i=0}^{\infty} \frac{(-\sigma|Z_{123})(-i|Z_{12})(j+s+D/2|Z_2)(-j-k-D/2|Z_3)}{Z_1!Z_2!Z_3!(l+m+s+D/2|Z_{123})(l+r+D/2|Z_{123})} \\
 &\quad \times \frac{(D/2+k|Z_1)(D/2+l|Z_{123})}{(j+k+s+D|Z_{12})} \left(\frac{2p^+p^-}{p^2n \cdot n^*} \right)^{Z_{123}} \\
 &\quad + \pi^D P_4 \Gamma_4 \sum_{X_i=0}^{\infty} \frac{(D/2+k|X_4)(-s|X_5)(i+j+k+r+D|X_{456})(-m|X_{46})}{X_4!X_5!X_6!(1-l-m-s-D/2|X_{456})} \\
 &\quad \times \frac{(D/2+j+s|X_6)(-\sigma+r|X_{456})}{(D+j+k+s|X_{46})(1-m+r-s|X_{456})} \left(\frac{2p^+p^-}{p^2n \cdot n^*} \right)^{X_{456}}, \quad (3.44)
 \end{aligned}$$

fatores na tabela e Pochhammer dados por,

$$\begin{aligned}
 \Gamma_3 &= (-m-s|-l-D/2)(j+k+s+D|-k-D/2)(-k|k+l+D/2) \\
 &\quad \times \frac{(-j|-k-D/2)(-l|k+l+D/2)}{(1+r|l+D/2)} (-1)^{-l-D/2}, \quad (3.45)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Gamma_4 &= (-j-k-D/2|-i)(j+k+s+D|-k-D/2)(\sigma+D/2|-2\sigma-D/2+r) \\
 &\quad \times \frac{(-k|k+l+m+s+D/2)(-l|\sigma-m-s)(-j|j+k+D/2)}{(1+r|-m-s)(-1)^{2i+m+s}}. \quad (3.46)
 \end{aligned}$$

Calculamos nesta seção uma integral de Feynman no gauge do cone-de-luz ao nível de 2-”loops”. NDIM é uma técnica que evita completamente a utilização de prescrições, ML e causal de Cauchy, decomposição em frações parciais e integração sobre componentes. Além disso, várias integrais podem ser calculadas simultaneamente já que os expoentes podem ser deixados livres durante todo o cálculo.

3.4 Conclusão.

Concluimos que a integração em dimensão negativa é uma das mais poderosas - se não for a mais poderosa - técnicas para se atacar o problema de resolver integrais de ”loop” no calibre do cone-de-luz.

Podemos resumir as suas características assim:

- Não precisamos recorrer a fórmulas de decomposição (3.10) que transformam, dependendo da integral original, uma integral em várias
- Preserva a forma geral das integral no calibre do cone-de-luz.

- As prescrições para tratar os polos espúrios $(q \cdot n)^{-\alpha} = 0$, ou dependentes de gauge, podem ser totalmente abandonadas.
- Integrais paramétricas não são necessárias, assim como integração sobre cada uma das componentes[23].
- Obtemos resultados para expoentes arbitrários dos propagadores, dimensão D e polos dependentes de gauge, os quais concordam com cálculos realizados anteriormente com outros métodos que utilizam a prescrição ML [21, 28, 15, 35].
- Estamos sempre no contexto da regularização dimensional

Capítulo 4

O Calibre de Coulomb

4.1 Introdução

O método perturbativo em teoria quântica de campos foi responsável pelo surgimento de uma ferramenta muito importante, a regularização dimensional, i.e., a continuação analítica da dimensão do espaço-tempo para valores complexos[36]. As integrais de Feynman ganharam com isso uma fundamentação teórica sólida e o processo de renormalização se tornou mais simples do que era com outros métodos (como a introdução de "cut-offs" por exemplo). Para calibres covariantes o avanço foi muito grande.

Por outro lado, em calibres não-covariantes[19], apesar da regularização dimensional ser capaz de controlar as divergências, no calibre no cone-de-luz, como vimos no capítulo anterior, existem dificuldades extras. Preservar princípios físicos como a invariância de calibre e a causalidade. Além das integrais de Feynman exibirem polos dependentes de gauge, os loops de Wilson, objetos invariantes de calibre, por construção não possuíam o comportamento correto[37]. Como discutimos no capítulo anterior Mandelstam e Leibbrandt foram os responsáveis pela "cura" do gauge do cone-de-luz[20]. Mostramos também que com nosso método podemos dispensar prescrições (veja capítulo anterior).

Entre os calibres não-covariantes temos também o de Coulomb, ou calibre de radiação, onde o confinamento[38] e estados ligados[39] são comumente estudados. Neste calibre em particular, o propagador dos fantasmas não possui polos e a unitariedade é manifesta. Apesar disso a regularização dimensional sozinha aqui não nos deu "insight" algum, temos divergência(s) mesmo utilizando-a. A forma do propagador para o bóson de gauge é a seguinte,

$$G_{\mu\nu}^{ab}(q) = -\frac{i\delta^{ab}}{q^2} \left[\eta_{\mu\nu} + \frac{n^2}{\mathbf{q}^2} q_\mu q_\nu - \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}}{\mathbf{q}^2} (q_\mu n_\nu + n_\mu q_\nu) \right], \quad \text{com } n_\mu = (1, 0, 0, 0), \quad (4.1)$$

o qual gera integrais da forma,

$$\int \frac{d^D q}{q^2(\mathbf{q} - \mathbf{p})^2}. \quad (4.2)$$

Observe que a integração sobre a quarta componente (no espaço euclidiano) ou sobre a componente zero, chamada de "energy-integral", não é definida mesmo no contexto da regularização dimensional. Doust e Taylor [40] discutiram este problema e apresentaram uma solução em termos de gauges interpolantes, entre calibres de Feynman e de Coulomb, veja também[41]. Em outras palavras, define-se um propagador que contém um parâmetro extra. Dado um certo valor do parâmetro o propagador se reduz a um calibre, e dado um segundo valor obtém-se o outro calibre. Então calculam-se as grandezas, com o parâmetro livre e toma-se o caso particular no fim. É como se fosse uma regularização analítica, mas com o parâmetro regulador dentro do propagador, e não como seu expoente.

Leibbrandt[42] e Williams, também apresentaram uma possível para estas integrais mal-definidas, um procedimento que eles chamaram de "*split dimensional regularization*". Ambas as partes, 3-momentum e energia, precisam ser regularizadas dimensionalmente de forma separada, ou seja, um parâmetro apenas D não é o suficiente para tornar as integrais bem-comportadas. Eles propuseram que ao invés de se fazer $D = 4 - \epsilon$ considerássemos $D = \omega + \rho$, então as divergências geradas pelas integrais sobre a componente da energia seriam escritas como polos para $\rho = 1$. A medida de integração deve ser reescrita como,

$$d^D q = d^\omega \mathbf{q} d^\rho q_4.$$

Em vários trabalhos[43], Leibbrandt e colaboradores estudaram integrais no gauge de Coulomb ao nível de 1 e 2 "loops" e apresentaram resultados explícitos para suas partes divergentes. Nosso objetivo em [44] foi mostrar nossa técnica de integrar em dimensão negativa é versátil o bastante para se calcular também "loops" no calibre de Coulomb; e apresentar resultados completos, para as partes divergente e finita das integrais - para expoentes arbitrários dos propagadores, um resultado que falta nos cálculos de Leibbrandt *et al.*

4.2 Integrais no calibre de Coulomb a 1-loop

Para exemplificar o cálculo das integrais no calibre de Coulomb vamos considerar nesta seção integrais ao nível de 1-loop, no contexto da regularização dimensional a dois parâmetros ("split dimensional regularization"). Assim como em gauges co-variantes e no calibre do cone-de-luz, deixar os expoentes do propagadores livres, ou

seja, arbitrários, não representa uma dificuldade extra. O cálculo para expoentes numéricos ou para expoentes quaisquer segue o mesmo procedimento no calibre de Coulomb. É importante notar também que para certos diagramas, como por exemplo integrais do tipo caixa[45, 46], existem divergências que não estão relacionadas a dimensionalidade do espaço, D , mas são representadas como polos para valores particulares dos expoentes dos propagadores, e.g., polo da forma $\Gamma(i - j)$, onde i e j são expoentes dos propagadores, veja também[47]. Portanto, com NDIM usamos também a regularização analítica, para uma discussão mais aprofundada (a regularização não viola a invariância de calibre) veja [33].

Considere as integrais escalares ao nível de 1-loop

$$g_1(i, j, k) = \int d^D q (q^2)^i (q + p)^{2j} (\mathbf{q}^2)^k, \quad (4.3)$$

$$g_2(i, j, k) = \int d^D q (q^2)^i (\mathbf{q} + \mathbf{p})^{2j} (\mathbf{q}^2)^k, \quad (4.4)$$

cujos funcionais geradores são,

$$G_1 = \int d^D q \exp \left[-\alpha q^2 - \beta (q + p)^2 - \gamma \mathbf{q}^2 \right], \quad (4.5)$$

$$G_2 = \int d^D q \exp \left[-\alpha q^2 - \beta (\mathbf{q} + \mathbf{p})^2 - \gamma \mathbf{q}^2 \right], \quad (4.6)$$

onde $D = \omega + \rho = 4 - \epsilon$ e $d^D q = d^\omega \mathbf{q} d^\rho q_4$, no espaço euclidiano, seguindo o procedimento de Leibbrandt. Completando o quadrado integramos facilmente as duas gaussianas,

$$G_1 = \left(\frac{\pi}{\alpha + \beta} \right)^{\rho/2} \left(\frac{\pi}{\lambda_1} \right)^{\omega/2} \exp \left[-\frac{(\alpha + \gamma)\beta \mathbf{p}^2}{\lambda_1} \right] \exp \left(-\frac{\alpha \beta p_4^2}{\alpha + \beta} \right), \quad (4.7)$$

$$G_2 = \left(\frac{\pi}{\alpha} \right)^{\rho/2} \left(\frac{\pi}{\lambda_1} \right)^{\omega/2} \exp \left[-\frac{(\alpha + \gamma)\beta \mathbf{p}^2}{\lambda_1} \right], \quad (4.8)$$

onde $\lambda_1 = \alpha + \beta + \gamma$.

O sistema de equações algébricas para a primeira integral é dado por uma matriz retangular 5×8 . Obviamente devemos resolver uma quantidade de sistemas quadrados 5×5 . Do total de 56 possíveis matrizes quadradas, i.e., (5×5) , pouco mais da metade, 36, possuem soluções não-nulas enquanto que as outras 20 são descartadas. Todas estas 36 soluções para o sistema irão gerar funções hipergeométricas duplas ou triplas. Além do mais, como *todas elas* são resultado do cálculo da mesma integral, ou seja, representam a *mesma função* devem estar relacionadas através de continuação analítica, direta ou indiretamente. A função mais simples é função hipergeométrica dada por uma uma série tripla,

$$\begin{aligned}
 g_1^A(i, j, k) &= f_1^{A, AC} \sum_{n_1, n_2, n_3=0}^{\infty} \left(\frac{\mathbf{p}^2}{p_4^2} \right)^{n_{123}} \frac{(-1)^{n_2} (-i|n_{123})(k + \omega/2|n_{12})(D/2 + j|n_{23})}{n_1! n_2! n_3! (1 + j + k + D/2|n_{23})} \\
 &\quad \times \frac{(1 - i - \rho/2|n_{123})}{(1 - i - \rho/2|n_{12})(\sigma + \omega/2 - i|n_{123})}, \tag{4.9}
 \end{aligned}$$

onde mais uma vez usamos a notação abreviada $n_{AB} = n_A + n_B$, $(x|y) \equiv (x)_y = \Gamma(x)/\Gamma(y)$ é o simbolo de Pochhammer e

$$\begin{aligned}
 f_1^{A, AC} &= \pi^{D/2} (-p_4^2)^i (\mathbf{p}^2)^{j+k+D/2} (-j|j+k+\omega/2)(-k|j+k+D/2) \\
 &\quad \times (-i+\sigma+\omega/2|i-\sigma-\omega/2-D/2-j-k), \tag{4.10}
 \end{aligned}$$

onde $\sigma = i + j + k + D/2$. Entre as 36 séries possíveis esta é a única que possui a forma Σx^{a+b+c} .

Temos também séries duplas,

$$\begin{aligned}
 g_1^B(i, j, k) &= f_1^{B, AC} \sum_{n_1, n_2=0}^{\infty} \left(\frac{\mathbf{p}^2}{p_4^2} \right)^{n_{12}} \frac{(-\sigma|n_{12})(-k|n_2)(\omega/2+k|n_1)}{n_1! n_2! (\omega/2|n_{12})(1-j-k-D/2|n_2)} \\
 &\quad \times (1-k-\sigma-D/2|n_2), \tag{4.11}
 \end{aligned}$$

onde

$$f_1^{B, AC} = \pi^{D/2} (p_4^2)^\sigma (-i|\sigma)(-j|\sigma)(\omega/2|k)(k+\sigma+D/2|2\sigma-k-D/2). \tag{4.12}$$

Esta representação em termos de uma série hipergeométrica para a integral em questão é quatro vezes degenerada, ou seja, quatro soluções do sistema de equações geram a *mesma* série, eq.(4.11). De fato, na região de dimensão negativa temos uma soma de dois termos, mas quando realizamos a continuação analítica para dimensão positiva um deles , que também é quatro vezes degenerado, se cancela[48],

$$\frac{\Gamma(1)}{\Gamma(1-\rho/2)} \xrightarrow{AC} (0|\rho/2) = \frac{\Gamma(\rho/2)}{\Gamma(0)} = 0,$$

e obviamante existem outras séries hipergeométricas que representam a integral em outras regiões cinemáticas, e.g., outra série dupla da forma,

$$\sum_{a, b=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\dots)}{a! b!} \left(\frac{p_4^2}{\mathbf{p}^2} \right)^a,$$

em outras palavras, uma das séries possui argumento igual a um e pode ser reescrita como ${}_3F_2(\dots|1)$.

A segunda integral é muito mais simples que a primeira, seu resultado é degenerado quatro vezes. O sistema é 4×5 , então temos inicialmente cinco sistemas 4×4 ,

mas um deles não possui solução. Os outros quatro nos fornecem a mesma série hipergeométrica como resposta para a integral de Feynman,

$$g_2 = (-\pi)^{D/2} (\mathbf{p}^2)^\sigma \frac{\Gamma(1+i)\Gamma(1+j)\Gamma(1-\sigma-\omega/2)\Gamma(1+i+k+\rho/2)}{\Gamma(1+\sigma)\Gamma(1+i+\rho/2)\Gamma(1-i-k-D/2)\Gamma(1-j-\omega/2)}, \quad (4.13)$$

cuja continuação analítica para D positivo,

$$g_2^{AC}(i, j, k) = \pi^{D/2} (\mathbf{p}^2)^\sigma (\sigma + \omega/2 | -2\sigma - \omega/2) (-i | -\rho/2) (-j | \sigma) (-i - k - \rho/2 | \sigma). \quad (4.14)$$

Vamos considerar agora integrais ainda a 1-loop no calibre de Coulomb mas com estrutura tensorial no numerador. Assim como fizemos no caso covariante em [49] iremos mostrar que NDIM também resolve uma classe de integrais tensoriais simultaneamente. Sejam,

$$g_3(i, j, k) = \int d^D q (q^2)^i (\mathbf{q} + \mathbf{p})^{2j} (2\mathbf{q} \cdot \mathbf{p})^k, \quad (4.15)$$

e

$$g_4(i, j, k, m) = \int d^D q (q^2)^i (\mathbf{q} + \mathbf{p})^{2j} (\mathbf{q}^2)^k (2\mathbf{q} \cdot \mathbf{p})^m, \quad (4.16)$$

tal que após o procedimento padrão chega-se aos resultados,

$$g_3^{AC}(i, j, k) = \pi^{D/2} (-2)^k (\mathbf{p}^2)^\sigma (-i | -j - D/2) (\sigma + \omega/2 | j - \sigma) (-j | \sigma) {}_3F_2(\{3\} | 1), \quad (4.17)$$

onde os conjuntos de parâmetros são dados na tabela 4.1. Também neste caso teremos várias séries hipergeométricas para a mesma integral. Mas no caso onde há tensores no numerador uma das séries é a **melhor**, por ser truncada [49]. Esta série contém **todos** os casos de interesse: escalar, vetorial e tensorial de ordem arbitrária.

Uma função hipergeométrica com parâmetro do numerador inteiro negativo, $-k$, é sempre truncada depois de k termos. Este k no nosso caso representa a ordem do tensor que está no numerador do integrando. Consultando a primeira coluna da tabela 4.1 vemos que tanto para k par ou para k ímpar a série será truncada. Mais ainda, k pode assumir apenas valores positivos e inteiros, já que tensores de ordem fracionária não aparecem em teoria de campos usual.

Finalmente o resultado para a integral tensorial com três propagadores,

$$g_4^{AC}(i, j, k, m) = \pi^{D/2} (-2)^m (\mathbf{p}^2)^{\sigma'} (-i | -\rho/2) (\sigma' + \omega/2 | j - \sigma') (-j | \sigma') \times (-i - k - \rho/2 | -j - \omega/2) {}_3F_2(\{4\} | 1), \quad (4.18)$$

onde

$$\sigma' = \sigma + m = i + j + k + m + D/2.$$

Os cinco parâmetros constam na segunda coluna da tabela, a função hipergeométrica também é truncada quando m assume os valores fisicamente aceitáveis, i.e., inteiros positivos.

Tabela 4.1: parâmetros para as funções ${}_3F_2$

Parâmetros	${}_3F_2(\{3\} 1)$	${}_3F_2(\{4\} 1)$
a	$-k/2$	$-m/2$
b	$1/2 - k/2$	$1/2 - m/2$
c	$j + \omega/2$	$j + \omega/2$
e	$1 + i + j + D/2$	$1 + i + j + k + D/2$
f	$1 - i - k - D/2$	$1 - i - k - m - D/2$

Observe que $g_4(i, j, 0, m)$ se reduz a $g_3(i, j, m)$ quando o terceiro expoente do propagador de g_4 for nulo.

4.3 Integrais no calibre de Coulomb a 2-loops

Estudos mais elaborados [39] necessitam do cálculo de integrais ao nível de 2-loops. Podemos empregar o mesmo procedimento da seção anterior e atacar este problema.

Considere, por exemplo,

$$I_1(i, j, k, m) = \int d^D q d^D r (q^2)^i (r^2)^j (p - r - q)^{2k} (\mathbf{r}^2)^m, \quad (4.19)$$

$$I_2(i, j, k, m) = \int d^D q d^D r (q^2)^i (q - r)^{2j} (\mathbf{r}^2)^k (\mathbf{p} - \mathbf{q})^{2m}, \quad (4.20)$$

as quais são geradas por,

$$\mathcal{I}_1 = \int d^D q d^D r \exp \left[-\alpha q^2 - \beta r^2 - \gamma (p - r - q)^2 - \theta \mathbf{r}^2 \right], \quad (4.21)$$

$$\mathcal{I}_2 = \int d^D q d^D r \exp \left[-\alpha q^2 - \beta (q - r)^2 - \gamma \mathbf{r}^2 - \theta (\mathbf{p} - \mathbf{q})^2 \right]. \quad (4.22)$$

É desnecessário repetir os passos da seção anterior. Mencionamos apenas que o sistema para a primeira integral é 6×11 , o qual possui um total de 462 (6×6) possíveis soluções. Destas, 216 possuem solução, sendo as demais desconsideradas. As variáveis das funções hipergeométricas podem ser

$$z = p_4^2 / \mathbf{p}^2, \quad z^{-1}, \quad \text{ou}, \quad 1.$$

Entre as séries de potências, as mais simples são séries duplas. Antes de examiná-las devemos observar que existem ainda séries da forma

$$\sum_{a,b,c,e=0}^{\infty} \frac{z^{a+b} (z^{-1})^{c+e} \Gamma(\dots)}{a!b! c!e! \Gamma(\dots)}, \quad \sum_{a,b,c,e=0}^{\infty} \frac{z^a (z^{-1})^{b+c+e} \Gamma(\dots)}{a! b!c!e! \Gamma(\dots)}, \quad (4.23)$$

que convergem apenas se $z = z^{-1} = 1$. Estas séries também serão desconsideradas por não serem de interesse físico.

Em termos de séries duplas temos,

$$\begin{aligned} I_1^A(i, j, k, m) &= \pi^D (p_4^2)^{\sigma''} P_A^{AC} \sum_{n_1, n_2=0}^{\infty} \frac{(-\sigma''|n_{12})(-m|n_2)(m + \omega/2|n_1)}{n_1!n_2!(1 - i - k - m - D/2|n_2)} \\ &\times \frac{(1 - m - \sigma'' - D/2|n_2)}{(\omega/2|n_{12})} \left(\frac{\mathbf{p}^2}{p_4^2} \right)^{n_{12}}, \end{aligned} \quad (4.24)$$

onde P_A^{AC} é o produto de Pochhammers,

$$\begin{aligned} P_A^{AC} &= (-i|i + k + D/2)(-k|i + k + D/2)(\omega/2|m)(i + k + D|m)(-j|j - \sigma'') \\ &\times (\sigma'' + m + D/2|j - \sigma''), \end{aligned} \quad (4.25)$$

onde definimos

$$\sigma'' = \sigma' + D/2 = i + j + k + m + D.$$

Existe outra série dupla, mas convergente em outra região do plano complexo - outra região cinemática - onde $|p_4^2/\mathbf{p}^2| < 1$,

$$\begin{aligned} I_1^B(i, j, k, m) &= \pi^D (\mathbf{p}^2)^{\sigma''} P_B^{AC} \sum_{n_1, n_2=0}^{\infty} \frac{(-\sigma''|n_2)(-j - m - \omega/2|n_2 - n_1)(m + \omega/2|n_1)}{n_1!n_2!(1 - \sigma'' - \omega/2|n_2 - n_1)} \\ &\times \frac{(j + m + D/2|n_1)}{(\omega/2|n_1)} \left(\frac{p_4^2}{\mathbf{p}^2} \right)^{n_{12}}, \end{aligned} \quad (4.26)$$

com,

$$\begin{aligned} P_B^{AC} &= (-i|i - \sigma'')(-j| - m - \omega/2)(-k|j + k + m + D/2)(\omega/2|m) \\ &\times (i + k + D| - k - D/2)(\rho/2|k + \omega/2). \end{aligned} \quad (4.27)$$

A segunda integral é mais simples que a primeira. Para o presente caso, **todas** as funções hipergeométricas de argumento igual a um são somáveis - seguimos o mesmo procedimento do capítulo 2. A tarefa de somar estas séries é realizada pelo computador, que nos fornece um resultado algébrico, em termos de funções Γ , veja apêndice B.

$$\begin{aligned}
I_2^{AC}(i, j, k, m) &= \pi^D(\mathbf{p}^2)^{\sigma''} (-i - \rho/2)(\sigma'' + \omega/2 - 2\sigma'' - \omega/2)(-k|2k + \omega/2) \\
&\quad \times (-m|2m + \omega/2)(-j|i + 2j + k + D) \\
&\quad \times (-i - j - k - D/2 - \rho/2|i + \rho/2)(j + k + D - \rho/2 - k - \omega/2),
\end{aligned} \tag{4.28}$$

este resultado é 36 vezes degenerado, i.e., de todos os 56 sistemas (5×5), apenas 36 deles possuem solução que geram 36 funções hipergeométricas. Estas funções tem argumento igual a um e podem ser somadas utilizando-se a fórmula de Gauss. O resultado desta soma é o mesmo, (4.28), nos 36 casos, em dimensão positiva e em dimensão negativa. Veja por exemplo [32].

4.4 Conclusão

Com a técnica da regularização dimensional com dois parâmetros - um para o setor de 3-momento e outro para o de energia - Leibbrandt e colaboradores foram capazes de "curar" o problema das integrais de Feynman do calibre de Coulomb. Cálculos perturbativos podem ser realizados sem a necessidade da introdução de "cut-offs", seja para 1 ou 2 loops. Apesar disso, eles não apresentaram resultados explícitos em seus trabalhos, apenas as partes divergentes foram apresentadas. Usando NDIM conseguimos realizar as mesmas integrais com facilidade e mostrar resultados tanto para a parte do(s) polo(s) quanto para a parte finita das integrais. Como sempre fazemos na abordagem de dimensão negativa, deixamos os expoentes dos propagadores arbitrários e com isso calculamos várias integrais simultaneamente, sejam elas escalares ou tensoriais.

Capítulo 5

Conclusão

A integração em dimensão negativa é uma técnica poderosa. Podemos atacar problemas em qualquer tipo de calibre, assim como qualquer tipo de diagrama: com ou sem massa; com momentos externos fora ou na camada de massa; expoentes arbitrários dos propagadores e dimensão do espaço-tempo.

Mostramos como realizar estes cálculos com exemplos não-triviais: caixas duplas não-planares em vários casos que poderiam parecer complicados como a presença de quatro propagadores com massa ou momentos externos fora da camada de massa. Nossos resultados são escritos como funções hipergeométricas, ou seja, temos expressões finais compactas e que convergem rapidamente, se for necessário o cálculo numérico.

Para calibres não-covariantes obtivemos além de resultados novos e mais gerais para integrais de "loop" no caso do cone-de-luz fizemos um estudo importante no que se refere às prescrições (Mandelstam-Leibbrandt por exemplo). Com o nosso método, NDIM, mostramos que tais prescrições podem ser completamente abandonadas. Precisamos lembrar apenas que para gerar o espaço-tempo é necessário uma base, e o 4-vetor $n^{*\mu}$ faz parte desta base. Caso contrário obtemos a resposta como calculada usando-se o valor principal de Cauchy, que viola a causalidade.

Como um terceiro tópico estudamos integrais no calibre de Coulomb, que resistiam ao cálculo mesmo no contexto da regularização dimensional. Utilizamos a técnica de Leibbrandt e introduzimos dois parâmetros para regularizar as divergências: um no setor temporal ("energy integrals") e outro para a parte espacial (3-momento).

5.1 Perspectivas futuras: teorias não-comutativas

O conceito de não-comutatividade é muito antigo em Física seja na mecânica clássica ou na teoria quântica. Na primeira temos um exemplo bem conhecido: rotações fini-

tas são operações que não-comutam; na segunda temos o exemplo da não-comutatividade de operadores como posição e momento, expressa no princípio da incerteza de Heisenberg.

Recentemente esta idéia foi levada para a teoria quântica de campos, em outras palavras, considera-se que as coordenadas são grandezas que não comutam,

$$[x^i, x^j] = i\Theta^{ij}, \quad (5.1)$$

onde Θ é um tensor anti-simétrico constante. A partir de (5.1) reconstrói-se toda a teoria de campos e uma das razões para o estudo de teorias não-comutativas é que as propriedades de renormalizabilidade podem ser muitas vezes melhoradas (por exemplo, divergências quadráticas passam a logarítmicas em certos modelos[51] como o de Wess-Zumino) ou até mesmo que a versão não-comutativa do modelo se torne finita.

A motivação também vem da gravitação, principalmente do que se espera de seu comportamento quântico, i.e., que em condições de campo forte as propriedades do espaço-tempo mudem drasticamente na escala de Planck. As teorias não-comutativas são então candidatas a modelar este tipo de efeito.

Podemos aplicar nosso método a elas, já que a única mudança nas integrais de Feynman parece ser um fator $\cos(kx)$ nos vértices, onde o produto escalar é dado por

$$k \cdot x = k^\mu x^\nu \Theta_{\mu\nu}, \quad (5.2)$$

e este Θ deve satisfazer certas condições. Em geral o que se exige é $\Theta^{0i} = 0$ e as outras componentes são números de Grassmann.

Nosso método é equivalente a integração sobre variáveis de Grassmann, acreditamos justamente por esta razão que seja possível calcular este tipo de integrais de "loop" com ele.

Podemos propôr um gerador para as integrais da forma,

$$\mathcal{G} = \int d^D q \cos(kq) \exp(-\alpha q^2), \quad (5.3)$$

que pode ser integrado em D -dimensões,

$$\mathcal{G} = \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{D/2} \exp\left(-\frac{k^2}{4\alpha^2}\right), \quad (5.4)$$

fazendo uma analogia com o caso de teorias de campo usuais (comutativas), observamos que a introdução do co-seno no vértice é como se introduzíssemos uma massa ou considerássemos que o momento externo está fora da camada de massa* .

*Isto olhando apenas para o gerador funcional das integrais em dimensão negativa.

Apêndice A

Tabela de integrais resolvidas com NDIM

Nas próximas 3 seções há uma lista das integrais que resolvemos com NDIM e que não constam nos capítulos anteriores.

Observações sobre a notação utilizada neste apêndice: cada integral tem seu próprio σ que é **sempre** dado pela soma dos expoentes dos propagadores com a dimensão D . Os expoentes dos propagadores são sempre negativos. Caso o leitor queira é possível obter facilmente o resultado para expoentes positivos, mas é preciso retroceder um passo nos cálculos ou seja, ao invés de símbolos de Pochhammer escreva as funções Γ e volte ao resultado em dimensão negativa. Então continue analiticamente apenas os expoentes que forem *negativos* e deixe inalterados os fatores que contiverem o expoente que for positivo. Veja apêndice de [44]. *

A.1 1-loop

Auto-energia

$$\mathcal{A}(i, j) = \int d^D q (q^2)^i (q-p)^{2j}, \quad (\text{A.1})$$

$$\mathcal{A}^{AC}(i, j) = \pi^D (p^2)^\sigma (-i|i+j+D/2)(-j|i+j+D/2)(\sigma+D/2|-2\sigma-D/2), \quad (\text{A.2})$$

com estrutura tensorial,

$$J = \int d^{2D} q (q^2)^i [(q-p)^2]^j (2q \cdot p)^l, \quad l \geq 0 \quad (\text{A.3})$$

$$\begin{aligned} J &= \mathcal{J}_z^{AC} \\ &= \pi^D (p^2)^{\sigma'} 2^l \frac{(-i|2i+l+D)(-j|2j+D)}{(-i-j-D|2i+2j+l+3D)} \\ &\times {}_3F_2 \left(j+D, -\frac{1}{2}l, -\frac{1}{2}l+\frac{1}{2}; 1-i-l-D, 1+i+j+D \mid 1 \right). \quad (\text{A.4}) \end{aligned}$$

*Dúvidas serão prontamente respondidas: grezzi@terra.com.br .

A.2 2-loops

Diagrama "sunset"

$$\mathcal{A}(i, j, l) = \int d^D q d^D k (q^2)^i (k^2)^j (p - q - k)^{2l}, \quad (\text{A.5})$$

$$\mathcal{A}^{AC}(i, j, l) = \pi^D (p^2)^\sigma (-i|i+j+D/2)(-j|j+k+D/2)(-k|i+k+D/2)(\sigma+D/2|-2\sigma-D/2), \quad (\text{A.6})$$

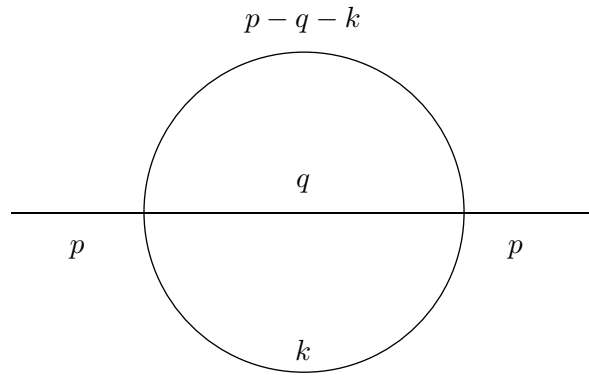


Figura A.1: O gráfico mais simples em 2-"loops", o "sunset".

"Sunset" com estrutura tensorial,

$$\mathcal{B}(i, j, l, m) = \int d^D q d^D k (q^2)^i (k^2)^j (p - q - k)^{2l} (2q \cdot p)^m. \quad (\text{A.7})$$

$$\mathcal{B}^{AC}(i, j, l, m) = g_B^{AC} \sum_{n_3, n_4=0}^{\infty} \frac{(-m/2|n_{34})(1/2 - m/2|n_{34})(D/2 + j|n_4)(D/2 + l|n_3)}{(1 + \sigma' - m|n_{34})(1 - i - m - D/2|n_{34})n_3!n_4!}, \quad (\text{A.8})$$

onde

$$g_B^{AC} = \pi^D (p^2)^{\sigma'} 2^m (-i|-j-l-D)(-j|j+l+D/2)(-l|j+l+D/2)(\sigma'+D/2|i+m-\sigma'), \quad (\text{A.9})$$

"Sunset" com massas diferentes,

$$\mathcal{M}(i, j, k) = \int d^D q d^D r (q^2 - m_1^2)^i (r^2 - m_2^2)^j [(p - q - r)^2 - m_3^2]^k, \quad (\text{A.10})$$

Primeira solução

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M}_1(i, j, k, \{z\}) &= \left[f_1 \mathcal{F}_C^{(3)}(-k, 1 - k - D/2; 1 + i + D/2, 1 + j + D/2, 1 - k - D/2) \right. \\
 &\quad \left. + (j \leftrightarrow k) + (i \leftrightarrow k) \right] \\
 &\quad + \left[f_2 \mathcal{F}_C^{(3)}(-j - k - D/2, 1 - j - k - D; 1 + i + D/2, 1 - j - D/2, \right. \\
 &\quad \left. 1 - k - D/2) + (i \leftrightarrow j) + (k \leftrightarrow i) \right] \tag{A.11} \\
 &\quad + f_3 \mathcal{F}_C^{(3)}(-\sigma, 1 - \sigma - D/2; 1 - i - D/2, 1 - j - D/2, 1 - k - D/2),
 \end{aligned}$$

onde

$$f_1 = (-\pi)^D (m_1^2)^{i+D/2} (m_2^2)^{j+D/2} (p^2)^k (-i| - D/2) (-j| - D/2),$$

$$\begin{aligned}
 f_2 &= (-\pi)^D (m_1^2)^{i+D/2} (-p^2)^{j+k+D/2} (-i| - D/2) (-j| - k - D/2) \\
 &\quad \times (j + k + D| - k - D/2) (-k| 2k + D/2), \tag{A.12}
 \end{aligned}$$

$$f_3 = (-\pi)^D (p^2)^\sigma (-i| 2i + D/2) (-j| 2j + D/2) (-k| 2k + D/2) (D/2| - \sigma - D/2).$$

Segunda solução

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M}_2(i, j, k, \{w\}) &= g_1 \mathcal{F}_C^{(3)}(-k, D/2; 1 + i + D/2, 1 + j + D/2, D/2) \tag{A.13} \\
 &\quad + g_2 \mathcal{F}_C^{(3)}(-j - k - D/2, -j; 1 - j - D/2, D/2, 1 + i + D/2) \\
 &\quad + g_3 \mathcal{F}_C^{(3)}(-i, -i - k - D/2; 1 - i - D/2, 1 + j + D/2, D/2) \\
 &\quad + g_4 \mathcal{F}_C^{(3)}(-\sigma, -i - j - D/2; 1 - i - D/2, 1 - j - D/2, D/2),
 \end{aligned}$$

onde a função hipergeométrica que aparece no resultado acima é

$$\mathcal{F}_C^{(3)}(\alpha, \beta; \gamma, \theta, \phi, \{x\}) = \sum_{n_1, n_2, n_3=0}^{\infty} \frac{(\alpha|n_{123})(\beta|n_{123})x_1^{n_1}x_2^{n_2}x_3^{n_3}}{n_1!n_2!n_3!(\gamma|n_1)(\theta|n_2)(\phi|n_3)}, \tag{A.14}$$

é uma função de Lauricella[18] que possui a seguinte região de convergência,

$$|x_i| < 1, \quad \text{e} \quad \sqrt{|x_1|} + \sqrt{|x_2|} + \sqrt{|x_3|} < 1, \tag{A.15}$$

definimos também,

$$g_1 = \frac{(-\pi)^D}{(-1)^{i+j+k}} (m_1^2)^{i+D/2} (m_2^2)^{j+D/2} (m_3^2)^k (-i| - D/2) (-j| - D/2),$$

$$g_2 = \frac{(-\pi)^D}{(-1)^{i+j+k}} (m_1^2)^{i+D/2} (m_3^2)^{j+k+D/2} (D/2|j)(-i| - D/2)(-k| - j - D/2),$$

$$g_3 = \frac{(-\pi)^D}{(-1)^{i+j+k}} (m_2^2)^{j+D/2} (m_3^2)^{i+k+D/2} (-j| - D/2)(-k| - i - D/2)(D/2|i),$$

$$g_4 = \pi^D (-m_3^2)^\sigma (-i|i + j + D/2)(-j|i + j + D/2)(D/2| - i - j - D)(-k| - i - j - D).$$

As variáveis \mathcal{M}_1 e \mathcal{M}_2 são respectivamente $\{x\} = \{z\}$ e $\{x\} = \{w\}$, onde

$$z_1 = m_1^2/p^2, \quad z_2 = m_2^2/p^2, \quad z_3 = m_3^2/p^2,$$

$$w_1 = m_1^2/m_3^2, \quad w_2 = m_2^2/m_3^2, \quad w_3 = p^2/m_3^2.$$

Diagrama "flying saucer",

$$\mathcal{J}(i, j, l, m; D) = \int d^D k d^D q (q^2)^i (k^2)^j [(p - k)^2]^l [(k - q)^2]^m, \quad (\text{A.16})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_A^{AC} &= \pi^D (p^2)^\sigma (-i|i + m + \frac{1}{2}D)(-m|i + m + \frac{1}{2}D)(\sigma + \frac{1}{2}D| - 2\sigma - \frac{1}{2}D) \\ &\times (-l|\sigma)(-i - j - m - \frac{1}{2}D|j)(i + m + D| - i + l - m - \frac{1}{2}D), \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Gráficos com três momentos externos[52]. Boas referências são [8, 53, 54, 55, 56]

$$\mathcal{S}_{NDIM}^1 = \int d^D q d^D r (q^2)^i (r^2)^j (q - r)^{2l} (q + p)^{2m} (q - k)^{2n} (q - r - k)^{2s}. \quad (\text{A.18})$$

$$\mathcal{S}_{NDIM}^1 = \pi^D (p^2)^\sigma \{ \mathbf{A} {}_3F_2(a_1, b_1, c_1; e_1, f_1|1) + \mathbf{B} {}_3F_2(a'_1, b'_1, c'_1; e'_1, f'_1|1) \} \quad (\text{A.19})$$

onde

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &\equiv (-m|\sigma)(\sigma + D/2| - 2\sigma - D/2)(-j|j + l + s + D/2)(-l|j + l + s + D/2) \\ &\times (-i - j - l - s - D/2|i)(j + l + s + D| - j - l - s - D/2 + m + n) \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

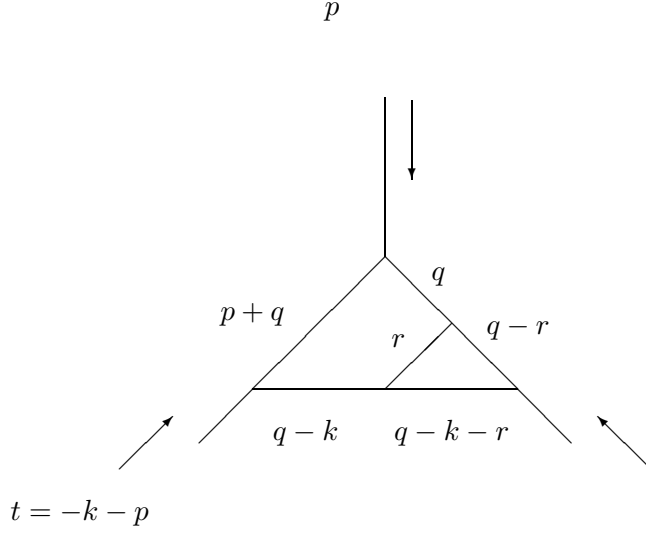


Figura A.2: Diagrama para a integral $S1$.

e

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &\equiv (-i|\sigma)(-m|\sigma)(\sigma + D/2| - 2\sigma - D/2) & (\text{A.21}) \\ &\times (-j| - l - s - D/2)(j + l + s + D| - j - D/2)(-l - s|j + l + s + D/2), \end{aligned}$$

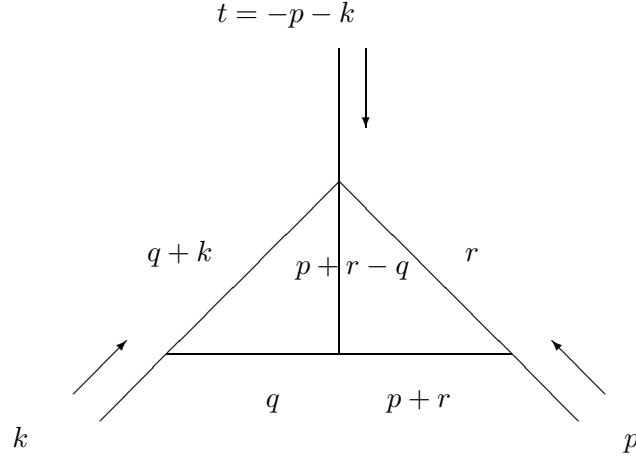
o conjunto de parâmetros é definido por $(a_1, b_1, c_1; e_1, f_1) = (-s, m+n+D/2, -j-l-s-D/2; -i-j-l-s-D/2, 1-j-s-D/2)$, e $(a'_1, b'_1, c'_1; e'_1, f'_1) = (-\sigma, -l, -j-l-s-D/2; -l-s, 1+i-\sigma)$.

Observe que $(e_1 - f_1)$ é um inteiro e o teorema de Norlund se aplica[57]. No caso particular de expoentes iguais a menos um a função hipergeométrica ${}_3F_2$ reduz a uma ${}_2F_1$, que pode ser somada novamente usando-se a fórmula de Gauss, então o resultado pode ser expresso como um produto de funções gama.

É importante notar que nosso resultado final concorda com o de Davydychev e Osland[55], em outras palavras, uma das principais referências para gráficos de 2-loops com três pernas externas[8] contém um erro na equação (27). A diferença é o fator $9\zeta(4)$ em [8] que deve ser corrigido por $9\zeta(2)$. Assim temos o resultado correto para $i = j = l = m = n = s = -1$ e $D = 4 - 2\epsilon$.

$$\mathcal{S}_{NDIM}^2 = \int d^D q d^D r (r^2)^i (q^2)^j (p+r)^{2l} (q+k)^{2m} (p+r-q)^{2n}, \quad (\text{A.22})$$

$$\mathcal{S}_{NDIM}^2 = \pi^D (k^2)^\rho \{ \mathbf{C} {}_3F_2(a_2, b_2, c_2; e_2, f_2|1) + \mathbf{D} {}_3F_2(a'_2, b'_2, c'_2; e'_2, f'_2|1) \}, \quad (\text{A.23})$$


 Figura A.3: Triângulo cortado no meio, integral S_2 .

onde

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &\equiv (-i|\rho)(\rho + D/2| - 2\rho - D/2)(i + D/2 - \rho|\rho)(\rho - i - l| - j - D/2) \\ &\times (-j| - m - n - D/2)(-n|j + m + n + D/2) \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

e

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &\equiv (-i|\rho)(-l|\rho)(\rho + D/2| - 2\rho - D/2)(j + m + n + D| - j - m - D/2) \\ &\times (-j - m| - n - D/2)(-n|j + m + n + D/2), \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

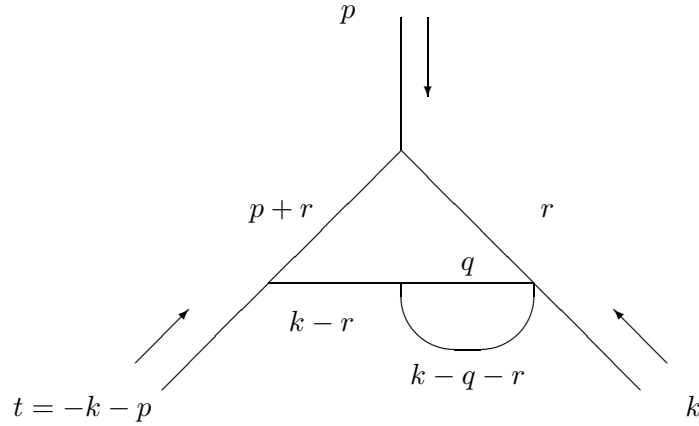
com o conjunto de parâmetros definido por $(a_2, b_2, c_2; e_2, f_2) = (-m, i + D/2, -j - m - n - D/2; i + D/2 - \rho, 1 - m - n - D/2)$ e $(a'_2, b'_2, c'_2; e'_2, f'_2) = (-j, -\rho, -j - m - n - D/2; 1 + l - \rho, -j - m)$ and $\rho = \sigma - s$. Aqui o teorema de Nørlund também se aplica já que $e_2 - f_2$ é um inteiro.

$$\mathcal{S}_{NDIM}^3 = \int d^D q d^D r (r^2)^i (q^2)^j (k - q - r)^{2l} (k - r)^{2m} (r + p)^{2n}, \quad (\text{A.26})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{NDIM}^3 &= \pi^D (k^2)^\rho (-l|\rho)(\rho + D/2| - 2\rho - D/2)(i + l + D/2 - \rho|\rho)(-j|j + n + D/2) \\ &\times (-n|j + n + D/2)(j + n + D| - 2j - 2n - 3D/2), \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

Integral para diagrama de 2-loops com três momentos externos fora da camada de massa,

$$\mathcal{T} = \int \int d^D q d^D r (q^2)^i [(q - p)^2]^j (r^2)^l [(r - q + k)^2]^m. \quad (\text{A.28})$$


 Figura A.4: A integral $S3$ representa este diagrama.

Mostramos algumas das soluções que apresentamos em [15],

$$\begin{aligned}
 T_1^{AC} &= \pi^D (p^2)^\sigma P_1^{AC} \\
 &\times F_4 \left(-\sigma, -l - m - \frac{1}{2}D; 1 + j - \sigma, 1 + i - \sigma \mid x^{-1}, z^{-1} \right), \quad (\text{A.29})
 \end{aligned}$$

onde o fator é dado por

$$\begin{aligned}
 P_1^{AC} &= (-i|\sigma)(-j|\sigma)(-l - m - \frac{1}{2}D)(-m|l + m + \frac{1}{2}D) \\
 &\times (l + m + D| - l - \frac{1}{2}D)(\sigma + \frac{1}{2}D| - 2\sigma - \frac{1}{2}D), \quad (\text{A.30})
 \end{aligned}$$

temos também resultados em função de série tripla,

$$\begin{aligned}
 S_2^{AC} &= P_2^{AC} \sum_{n_1, n_2, n_3=0}^{\infty} \frac{(z)^{n_1+n_2} (y^{-1})^{n_3}}{n_1! n_2! n_3!} \frac{(m + \frac{1}{2}D|n_1)}{(1 - i - j - \frac{1}{2}D|n_1 + n_2)} \\
 &\times \frac{(l + \frac{1}{2}D|n_2)(-i|n_1 + n_2 + n_3)(-\sigma|n_1 + n_2 + n_3)}{(l + m + D|n_1 + n_2)(1 - i - l - m - D|n_3)}, \quad (\text{A.31})
 \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
 P_2^{AC} &= \pi^D (t^2)^\sigma (-j|\sigma)(-l|l + m + \frac{1}{2}D)(-m|l + m + \frac{1}{2}D) \\
 &\times (l + m + D|i + j - l - m - \frac{1}{2}D)(\sigma + \frac{1}{2}D| - 2\sigma - \frac{1}{2}D),
 \end{aligned}$$

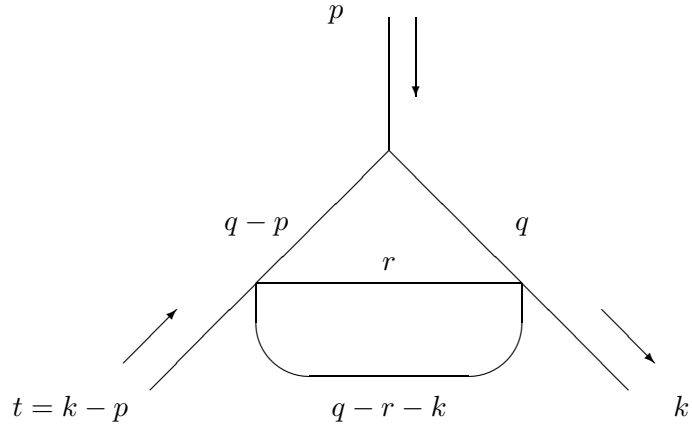


Figura A.5: Diagrama onde os três momentos externos estão fora da camada de massa.

e

$$\sigma = i + j + k + m + D,$$

cada diagrama possui seu σ , como observamos no início do apêndice.

Integrais para diagramas do tipo caixa mais simples,

$$\mathcal{BOX} = \int d^D q d^D r \ (q^2)^i (q-p)^{2j} (q-p-p')^{2k} (q-r-p_1)^{2l} (r^2)^m (q-r)^{2n}, \quad (\text{A.32})$$

cujas soluções são

$$\mathcal{BOX}^{AC}(i, j, k, l, m, n) = f_1(i, j, k, l, m, n) {}_3F_2(\{1\}|z), \quad (\text{A.33})$$

e os parâmetros da função hipergeométrica são dados na tabela, $\sigma_b = i + j + k + l + m + n + D$ e

$$\begin{aligned} f_1(i, j, k, l, m, n) &= \pi^D (t^2)^{\sigma_b} (-j|_{\sigma_b}) (-l|_{\sigma_b}) (\sigma_b + D/2 | -2\sigma_b - D/2) \\ &\times (-m|_{l+m+n+D/2}) (i+j+k+m+D | -m-D/2) \\ &\times (l+m+n+D | -l-n-D/2), \end{aligned} \quad (\text{A.34})$$

$$\mathcal{BOX}^{AC}(0, j, k, l, m, n) = f(0, j, k, l, m, n) {}_3F_2(\{2\}|z), \quad (\text{A.35})$$

Tabela A.1: Parâmetros das funções hipergeométricas ${}_3F_2$ que representam as integrais do tipo caixa

Parâmetros	${}_3F_2(\{1\} z)$	${}_3F_2(\{2\} z)$
a	$-k$	$-k$
b	$-n$	$-n$
c	$-\sigma_b$	$-\sigma'_b$
e	$1 + j - \sigma_b$	$1 + j - \sigma'_b$
f	$1 + l - \sigma_b$	$1 + l - \sigma'_b$

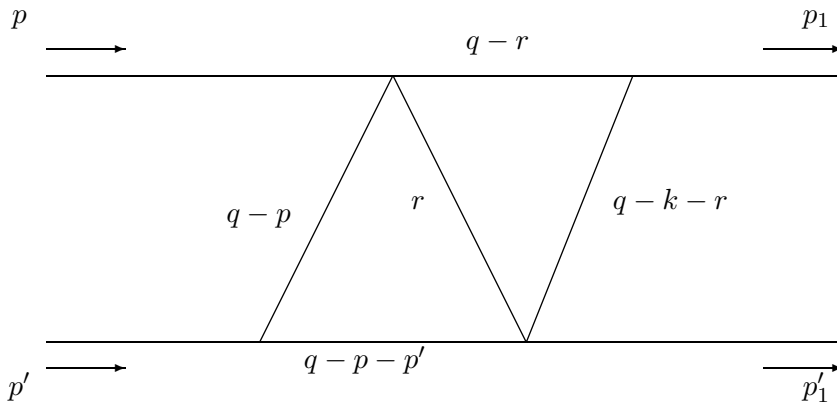


Figura A.6: Caixa com dois-loops e cinco propagadores.

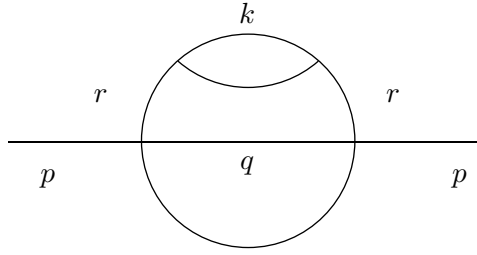
onde os parâmetros estão listados na tabela e $\sigma'_b = j + k + l + m + n + D$ and

$$\begin{aligned}
 f(0, j, k, l, m, n) &= \pi^D (t^2)^{\sigma'_b} (-j|\sigma'_b)(-l|\sigma'_b)(\sigma'_b + D/2| - 2\sigma'_b - D/2) \\
 &\quad \times (-m|l + m + n + D/2)(j + k + m + D| - m - D/2) \\
 &\quad \times (l + m + n + D| - l - n - D/2), \tag{A.36}
 \end{aligned}$$

além destas duas soluções existem outras para estas duas últimas integrais.

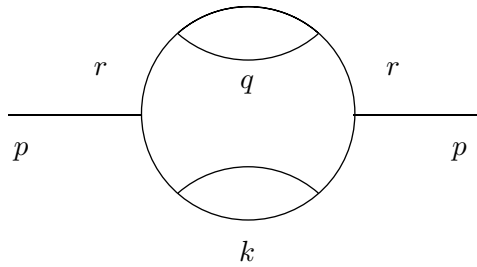
A.3 3-loops

$$\mathcal{S}_{NDIM}^4 = \int d^D q d^D r d^D k (r^2)^i (k^2)^j (q^2)^l (p - q - r)^{2m} (r - k)^{2n}, \tag{A.37}$$


 Figura A.7: Diagrama para a integral $S4$.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{S}_{NDIM}^4 &= \pi^{3D/2} (p^2)^{\rho'} (-j|j+n+D/2)(-n|j+n+D/2)(-l|l+m+D/2) \\
 &\quad \times (-m|l+m+D/2)(\rho'+D/2|-2\rho'-D/2)(j+n+D|i) \\
 &\quad \times (-j-n-D/2|-i), \tag{A.38}
 \end{aligned}$$

onde $\rho' = \rho + D/2$.


 Figura A.8: Diagrama para a integral $S5$.

$$\mathcal{S}_{NDIM}^5 = \int d^D q d^D r d^D k (q^2)^i (k^2)^j (r^2)^l (p-r)^{2m} (r-q)^{2n} (p-r-k)^{2s}, \tag{A.39}$$

$$\mathcal{S}_{NDIM}^5 = \pi^{3D/2} (p^2)^{\sigma'} (-i|i+n+D/2)(-n|i+n+D/2)(-j|j+s+D/2)$$

$$\begin{aligned} & \times (-s|j+s+D/2)(-i-l-n-D/2|l)(-j-m-s-D/2|m) \\ & \times (\sigma'+D/2|-2\sigma'-D/2)(i+n+D|l)(j+s+D|m), \end{aligned} \quad (\text{A.40})$$

onde $\sigma' = \sigma + D/2$

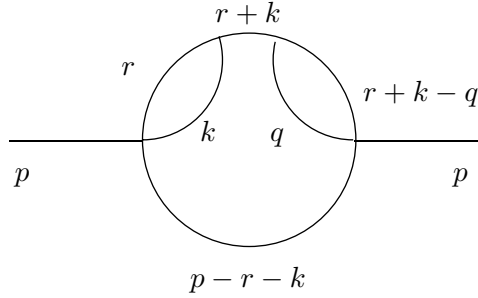


Figura A.9: Integral S_6 representa o diagrama acima.

$$\mathcal{S}_{NDIM}^6 = \int d^D q d^D r d^D k (r^2)^i (k^2)^j (q^2)^l (r+k)^{2m} (p-k-r)^{2n} (r+k-q)^{2s}, \quad (\text{A.41})$$

and

$$\mathcal{S}_{NDIM}^7 = \int d^D k d^D q d^D r (q^2)^i (k^2)^j (p-k-r)^{2l} (k-q)^{2m} (p-k)^{2n} (r^2)^s. \quad (\text{A.42})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{NDIM}^6 &= \pi^{3D/2} (p^2)^{\sigma'} (-i|i+j+D/2)(-j|i+j+D/2)(-l|l+s+D/2)(-s|l+s+D/2) \\ & \times (\sigma'+D/2|-2\sigma'-D/2)(-i-j-l-m-s-D|l+m+s+D/2) \\ & \times (i+j+D|l+m+s+D/2)(-n|-l-s-D/2+n) \\ & \times (l+s+D|-l-s-D/2+n). \end{aligned} \quad (\text{A.43})$$

$$\mathcal{S}_{NDIM}^7 = \int d^D k d^D q d^D r (q^2)^i (k^2)^j (p-k-r)^{2l} (k-q)^{2m} (p-k)^{2n} (r^2)^s. \quad (\text{A.44})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{NDIM}^7 &= \pi^{3D/2} (p^2)^{\sigma'} (-i|i+m+D/2)(-m|i+m+D/2)(-l|l+s+D/2) \\ & \times (\sigma'+D/2|-2\sigma'-D/2)(-i-j-m-D/2|j)(l+s+D|-2l-2s-3D/2) \\ & \times (-l-n-s-D/2|\sigma')(i+m+D|-i+l-m+n+s)(-s|l+s+D/2). \end{aligned} \quad (\text{A.45})$$

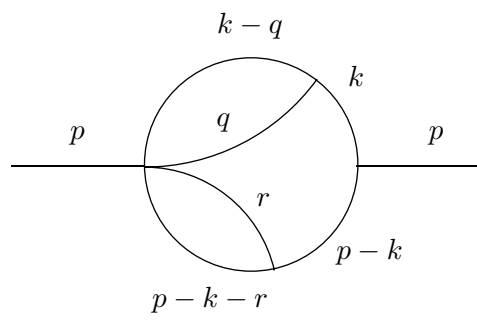


Figura A.10: Diagrama para a integral $S7$.

Apêndice B

Estratégia para somar as séries

Somando as séries hipergeométricas com argumento 1.

Com o método da integração em dimensão negativa temos um número muito grande resultados para as integrais de Feynman. Este número é gerado por um sistema de equações algébricas, dado por uma matriz retangular. Por esta razão temos várias maneiras de resolvê-lo, e cada solução que obtemos gera uma função hipergeométrica que é resposta para a integral em questão.

Quando estas funções hipergeométricas múltiplas tem argumento igual a um, podemos reescrevê-la em termos um produto de funções Γ . Ou seja, é possível somar a série hipergeométrica. Temos assim um resultado muito mais simples, já que uma série infinita é substituída por um produto de quatro funções Γ .

Entretanto este procedimento é trabalhoso. É possível somar as séries no papel, mas o computador pode facilitar muito este processo.

Nossa estratégia na busca de uma solução em particular (em uma certa região cinemática) ou da solução mais simples (a que tem o menor número de somas hipergeométricas) é a seguinte*:

- Resolvemos todos os sistemas, analiticamente.
- Cada resultado é dado em termos dos expoentes dos propagadores, da dimensão e de um conjunto de índices de soma que vem da integral gaussiana.
- Contamos quantos índices de soma existem em cada função hipergeométrica múltipla. Por exemplo, se a série for tripla: podemos ter duas que podem ser reescritas como ${}_2F_1$ (os índices então aparecem 3 vezes para cada uma delas) e outra que pode ser reescrita como ${}_3F_2$ (5 índices nesse caso). O resultado da contagem é: $3+3+5=11$. Quanto menor for este número mais simples será a série que representa a integral de Feynman.

*Usamos o Mathematica 4.0 que resolve os sistemas analiticamente

- Identificada(s) a(s) séries que tem o menor número de índices de soma passamos ao programa que somas propriamente as séries.
- As funções hipergeométricas que podem ser somadas são as ${}_2F_1$. O programa busca entre os índices de soma aqueles que aparecem 3 vezes, ou seja, varre o resultado em busca de funções ${}_2F_1$. No exemplo acima ele encontraria duas.
- A ordem com que somamos estas séries ${}_2F_1$ é importante.[†] Então o programa "somador de séries" varre todas as possibilidades, no exemplo acima: 2! possibilidades.
- Soma-se a série e o programa faz uma nova busca de funções ${}_2F_1$, se existirem repete-se o procedimento, caso contrário apresenta o resultado em termos de funções Γ .

Programa que roda no Mathematica para somar analiticamente as séries

```

Clear[i,j,k,l,m,n,s,d,somas,X2,X3,X4,X5,X6,X7,X8,Y1,Y3,Y7,indices,a,
a2,a3,a4,poch,fat,gauss,w,gama,ncima,npoch,somei,perm,nsom,gn,gd,sigma,menos]
indices={X8,Y1,Y5,Y6,Y7,Y8,Y9,Z1,Z2,Z3}
indices2={X1,X2,X3,X8,Y1,Y5,Y6,Y7,Y8,Y9,Z1,Z2,Z3}
perm=Permutations[{Y9,Y1,Z2,Y5,Y6,Y7,Y8,X8,Z3,Z1}];menor=0;menos=0;
nsom=8;npoch=7;gn=npoch+1;gd=npoch+1;
sigma=i+j+k+l+m+n+d;achei=0;
For[n0=1,n0<=5000,n0++,
gaman={1+i,1+j,1+k,1+l,1+m,1+n,1-sigma-d/2,0,0,0,0,0,0,
0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0};
gamad={1+d/2 + i + k, 1+d + i + j + l + m + n, 1+j, 1-d/2 - i - j, 1-d - i - j
- k - m - n,
1-d/2 - l - n, 1+n,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0};
indices[[1]]=perm[[n0,1]];indices[[2]]=perm[[n0,2]];
indices[[3]]=perm[[n0,3]];indices[[4]]=perm[[n0,4]];
indices[[5]]=perm[[n0,5]];indices[[6]]=perm[[n0,6]];
indices[[7]]=perm[[n0,7]];indices[[8]]=perm[[n0,8]];
indices[[9]]=perm[[n0,9]];indices[[10]]=perm[[n0,10]];

```

[†]O resultado envolve os demais índices de soma, então é possível haver um cancelamento destes índices como também fazer com que a série fique mais complicada. Existem inúmeras relações envolvendo funções hipergeométricas ${}_pF_q$, então em princípio poderíamos usar alguma(s) delas e conseguir simplificar o resultado, mas achamos que a varredura de todas as combinações de somas acaba com a necessidade de usar estas fórmulas que são bem mais complicadas.

```

somei=0;ncima=1;npoch=7;gn=npoch+1;gd=npoch+1;
cima={0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0};
fat={1+d/2 + i + k + X3 - Y1 + Y6 + Y7 + Y8 + Z2 + Z3,
1+d + i + j + l + m + n - X2 - X3 + Y1 + Y5 + Y9 + Z1,
1+j - X1 - X3 - Y5 - Y6 - Y7 - Y8, 1-d/2 - i - j - X8 - Y9 - Z1 -
Z2 - Z3, 1-d - i - j - k - m - n + X1 - Y6 - Z2 -
Z3, 1-d/2 - l - n + X2 + X8 - Y1 - Y5 - Y7 - Y9 + Z3,
1+n - X1 - X2 - X8 - Y8 - Z1 - Z3,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0};
gauss={0,0};w=0;num=0;
For[ind=1,ind<=10,ind++,
num=0;
For[a=1,a<=npoch,a++,
num=num+Count[fat[[a]],indices[[ind]]]+Count[fat[[a]],-indices[[ind]]]+
Count[cima[[a]],indices[[ind]]]+Count[cima[[a]],-indices[[ind]]]
+2*Count[fat[[a]],2*indices[[ind]]]+2*Count[fat[[a]],-2*indices[[ind]]]
+2*Count[cima[[a]],2*indices[[ind]]]+2*Count[cima[[a]],-2*indices[[ind]]]
+3*Count[fat[[a]],3*indices[[ind]]]+3*Count[fat[[a]],-3*indices[[ind]]]
+3*Count[cima[[a]],3*indices[[ind]]]+3*Count[cima[[a]],-3*indices[[ind]]];
If[num==3,w=0;somei++;
For[a2=1,a2<=npoch,a2++,
If[Count[fat[[a2]],indices[[ind]]]==1,
gama=fat[[a2]]-indices[[ind]];gaman[[gn]]=fat[[a2]];
For[a3=1,a3<=nsom,a3++,
tira=-Count[fat[[a2]],indices2[[a3]]]+Count[fat[[a2]],-indices2[[a3]]]
-2*Count[fat[[a2]],2*indices2[[a3]]]+2*Count[fat[[a2]],-2*indices2[[a3]]]
-3*Count[fat[[a2]],3*indices2[[a3]]]+3*Count[fat[[a2]],-3*indices2[[a3]]];
gaman[[gn]]=gaman[[gn]]+tira*indices2[[a3]];
];gn++;
fat[[a2]]=0;
If[Count[fat[[a2]],-indices[[ind]]]==1,w++;
gauss[[w]]=1-fat[[a2]]-indices[[ind]];
cima[[ncima]]=gauss[[w]];ncima++;menos=menos+fat[[a2]];
fat[[a2]]=0 ];
If[Count[cima[[a2]],indices[[ind]]]==1,w++;
cima[[a2]]=cima[[a2]]-indices[[ind]];
gauss[[w]]=cima[[a2]];
If[Count[cima[[a2]],-indices[[ind]]]==1,gama=1-cima[[a2]]-indices[[ind]];
gaman[[gn]]=gama;menos=menos+cima[[a2]];

```

```

For[a3=1,a3<=nsom,a3++,
tira=-Count[gama,indices2[[a3]]+Count[gama,-indices2[[a3]]]
-2*Count[gama,2*indices2[[a3]]+2*Count[gama,-2*indices2[[a3]]]
-3*Count[gama,3*indices2[[a3]]+3*Count[gama,-3*indices2[[a3]]];
gaman[[gn]]=gaman[[gn]]+tira*indices2[[a3]];
];gn++;
cima[[a2]]=0];
];
cima[[ncima]]=gama-gauss[[1]]-gauss[[2]];
gaman[[gn]]=cima[[ncima]];For[a3=1,a3<=nsom,a3++,
tira=-Count[cima[[ncima]],indices2[[a3]]+Count[cima[[ncima]],-indices2[[a3]]]
-2*Count[cima[[ncima]],2*indices2[[a3]]+2*Count[cima[[ncima]],-2*indices2[[a3]]]
-3*Count[cima[[ncima]],3*indices2[[a3]]+3*Count[cima[[ncima]],-3*indices2[[a3]]];
gaman[[gn]]=gaman[[gn]]+tira*indices2[[a3]];
];gn++;
ncima++;npoch++;
fat[[npoch]]=gama-gauss[[1]];gamad[[gd]]=fat[[npoch]];
For[a3=1,a3<=nsom,a3++,
tira=-Count[fat[[npoch]],indices2[[a3]]+Count[fat[[npoch]],-indices2[[a3]]]
-2*Count[fat[[npoch]],2*indices2[[a3]]+2*Count[fat[[npoch]],-2*indices2[[a3]]]
-3*Count[fat[[npoch]],3*indices2[[a3]]+3*Count[fat[[npoch]],-3*indices2[[a3]]];
gamad[[gd]]=gamad[[gd]]+tira*indices2[[a3]];
];gd++;npoch++;
fat[[npoch]]=gama-gauss[[2]];gamad[[gd]]=fat[[npoch]];
For[a3=1,a3<=nsom,a3++,
tira=-Count[fat[[npoch]],indices2[[a3]]+Count[fat[[npoch]],-indices2[[a3]]]
-2*Count[fat[[npoch]],2*indices2[[a3]]+2*Count[fat[[npoch]],-2*indices2[[a3]]]
-3*Count[fat[[npoch]],3*indices2[[a3]]+3*Count[fat[[npoch]],-3*indices2[[a3]]];
gamad[[gd]]=gamad[[gd]]+tira*indices2[[a3]];
];gd++;
For[a2=1,a2<=gn,a2++,
For[a3=1,a3<=gd,a3++,
If[fat[[a3]]==cima[[a2]] && fat[[a3]]!=0, fat[[a3]]=0;
cima[[a2]]=0];
If[gamad[[a3]]==gaman[[a2]] && gamad[[a3]]!=0, gamad[[a3]]=0;
gaman[[a2]]=0]
]
];

```

```
Print["Somei",indices[[ind]]];  
];  
Print["Total de somas=",somei];If[somei>=7,Print["Achei!"];achei++];  
If[menor<somei,menor=somei;mm=indices];  
Print[""]  
];  
Print["Numerador=",cima];  
Print["Denominador=",fat];  
Print[""];  
Print["Gaman=",gaman];  
Print[""];  
Print["Gamad=",gamad];  
Print["Maior numero=",menor];  
Print["Menos Um=",menos];  
TimeUsed[];
```

Apêndice C

Integração por partes

Como exemplo de aplicação desta técnica escolhemos o diagrama conhecido como "two-loop master", veja figura C1.

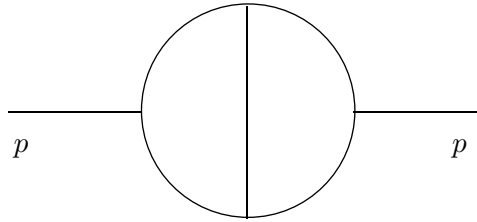


Figura C1: Diagrama "two-loop master".

A integral escalar que o representa é dada por,

$$M = \int \frac{d^D q d^D k}{q^2 k^2 (q-k)^2 (k-p)^2 (q-p)^2}. \quad (\text{C.1})$$

Derivando em relação ao momento externo, temos uma identidade

$$\frac{\partial}{\partial p^\mu} [M(p^\mu - q^\mu)] = 0, \quad (\text{C.2})$$

a identidade pode ser demonstrada de forma muito simples no espaço de coordenadas usando-se a transformada de Fourier,

$$\frac{1}{q^{2\alpha}} = \frac{\Gamma(D/2 - \alpha)}{(2\pi)^{D/2} \Gamma(\alpha)} \int d^D x \frac{\exp(iqx)}{(x^2)^{D/2 - \alpha}}, \quad (\text{C.3})$$

calculando as derivadas notamos que alguns dos propagadores se cancelam, ou seja, temos uma relação entre a integral original, M , e integrais mais simples,

$$\epsilon \cdot M = \int d^D q d^D k \left[\frac{1}{q^2(k-q)^2 k^2(k-p)^4} - \frac{1}{k^2(k-p)^4 q^2(q-p)^2} \right] \quad (\text{C.4})$$

mas com expoentes dos propagadores alterados. A primeira integral é do tipo "flying saucer" (ver apêndice A) com um dos propagadores elevados a dois; a segunda integral é mais simples ainda: um produto de duas integrais de auto-energia com um dos propagadores elevado ao quadrado.

Apêndice D

Publicações

Lista de publicações que fizemos durante o doutorado. Esta tese é uma colagem de algumas delas,

- A.T.Suzuki, A.G.M.Schmidt, R.Bentín, Nucl.Phys.**B537** 549 (1999).
- A.T.Suzuki, A.G.M.Schmidt, Eur.Phys.J. C10 (1999) 357.
- A.T.Suzuki,A.G.M.Schmidt, J.Pyhs.**A33** (2000) 3713.
- A.T.Suzuki, A.G.M.Schmidt, Prog.Theor.Phys.**103** (2000)1011.
- A.T.Suzuki, A.G.M.Schmidt, Eur.Phys.J.**C12** (2000) 361.
- A.T.Suzuki, A.G.M.Schmidt, Can.J.Phys.**78** (2000) 769.
- A.T.Suzuki, A.G.M.Schmidt, Phys.Lett.**B494** (2000) 332.
- A.T.Suzuki, A.G.M.Schmidt, Eur.Phys.J. **C19** (2001) 391.
- A.T.Suzuki, A.G.M.Schmidt, J.Comp.Phys.168 (2001) 207.

Referências

- [1] S.Laporta, E.Remiddi, Phys.Lett.**B356** (1995) 390; Phys.Lett.**B379** (1996) 283. S.Laporta, E.Remiddi, Acta Phys.Pol. **B28** (1997) 959.
- [2] V.W.Hughes, T.Kinoshita, Rev.Mod.Phys. **71** (1999) S133. T.Kinoshita, M.Nio, Phys.Rev.**D60** (1999) 053008.
- [3] J.H.Taylor, Class.Quantum Grav. **10** (1993) S167.
- [4] I.G.Halliday, R.M.Ricotta, Phys.Lett. **B193** (1987) 241.
- [5] G.V.Dunne, I.G.Halliday, Phys.Lett.**B193** (1987) 247.
- [6] D.J.Broadhurst, Phys.Lett. **B197** (1987) 179.
- [7] K.G.Chetyrkin, A.L.Kataev, F.V.Tkachov, Nucl.Phys. **B174**(1980)345. K.G.Chetyrkin, F.V.Tkachov, Nucl.Phys. **B192**(1981)159.
- [8] G.Kramer, B.Lampe, J.Math.Phys. **28** (1987) 945.
- [9] Y.Yasui, hep-ph/9911475.
- [10] J.B.Tausk, Phys.Lett.**B469** (1999) 225.
- [11] E.E.Boos, A.I.Davydychev, Theor.Math.Phys. **52** (1991) 1052.
- [12] A.I.Davydychev, J.Math.Phys. **33** (1992) 358; J.Math.Phys. **32**(1991) 1052.
- [13] T.Gehrmann, E.Remiddi, hep-ph/0008287.
- [14] Y.L.Luke, *The Special Functions and their Approximations*, Vol.I, (Academic Press, 1969). L.J.Slater, *Generalized Hypergeometric Functions*, (Cambridge Univ.Press, 1966).
- [15] A.T.Suzuki, A.G.M.Schmidt, R.Bentín, Nucl.Phys.**B537** (1999) 549.
- [16] J.B.Tausk, comunicação por e-mail (2001).

- [17] A.T.Suzuki,A.G.M.Schmidt, J.Pyhs.**A33** (2000) 3713.
- [18] F.A.Berends, M.Böhm, M.Buza, R.Scharf, Z.Phys.**C63**(1994) 227. See also P.Post, J.B.Tausk, Mod.Phys.Lett.**A11** (1996) 2115 and S.Groote, J.G.Körner, A.A.Pivovarov, Nucl.Phys.**B542** (1999) 515.
- [19] G.Leibbrandt, Rev.Mod.Phys. **59** (1987) 1067. G.Leibbrandt, *Non-covariant gauges: Quantization of Yang-Mills and Chern-Simons theory in axial type gauges*, World Scientific (1994). A.Bassetto, G.Nardelli, R.Soldati, *Yang-Mills theories in algebraic non-covariant gauges*, World Scientific (1991). S.Leupold, H.Weigert, Phys.Rev.**D54** (1996) 7695.
- [20] S.Mandelstam, Nucl.Phys.**B213** (1983) 149.
- [21] G.Leibbrandt, Phys.Rev.**D 29** (1984) 1699.
- [22] B.M.Pimentel, A.T.Suzuki, Phys.Rev.**D42** (1990) 2125; Mod.Phys.Lett.**A6** (1991) 2649.
- [23] G.Leibbrandt, S-L. Nyeo, J.Math.Phys. **27** (1986) 627; Z.Phys. **C30** (1986) 501.
- [24] G.Leibbrandt, Phys.Rev. **D30** (1984) 2167. E.T.Newman, R.Penrose, J.Math.Phys. **3** (1962) 566.
- [25] A.T.Suzuki, A.G.M.Schmidt, Prog.Theor.Phys.**103** (2000)1011. A.T.Suzuki, A.G.M.Schmidt, Phys.Lett.**B494** (2000) 332.
- [26] G.Leibbrandt, Can.J.Phys. **64** (1986) 606.
- [27] G.Leibbrandt, S-L.Nyeo, Z.Phys.**C30** (1986) 501.
- [28] A.Bassetto, G.Nardelli, R.Soldati, *Yang-Mills theories in algebraic non-covariant gauges*, World Scientific (1991)
- [29] A.Bassetto, in *Lecture notes in Physics*, 61, P.Gaigg, W.Kummer, M.Schweda (Eds.), Springer-Verlag (1989).
- [30] D.M.Capper, D.R.T.Jones, and A.T.Suzuki, Z.Phys.C **29** (1985) 585. G.Heinrich, and Z.Kunszt, Nucl.Phys. B **519** (1998) 405. A.Bassetto, G.Heinrich, Z.Kunszt, and W.Vogelsang, Phys.Rev. D **58** (1998) 094020.
- [31] A.T.Suzuki, Mod.Phys.Lett. **A8** (1993) 2365.

- [32] A.T.Suzuki, A.G.M.Schmidt, Eur.Phys.J.**C5** (1998) 175.
- [33] H.C.Lee, M.S.Milgram, J.Comp.Phys.**71** (1987) 316.
- [34] H.C.Lee, M.S.Milgram, Phys.Lett.**B133** (1983) 320.
- [35] A.T.Suzuki, A.G.M.Schmidt, Eur.Phys.J.**C12** (2000) 361.
- [36] C.G.Bollini, J.J.Giambiagi, Nuovo Cim.**B12** (1972) 20. G. 't Hooft, M.Veltman, Nucl.Phys. **B44** (1972) 189.
- [37] S.Caracciolo, G.Curci, P.Menotti, Phys.Lett.**B113** (1982) 311.
- [38] L.Baulieu, D.Zwanziger, Nucl.Phys. **B548** (1999) 527. D.Zwanziger, Nucl.Phys.**B518** (1998) 237; Prog. Theor. Phys.Suppl. **131** (1998) 233.
- [39] W.Kummer, W.Mödritsch, A.Vairo, Z.Phys.**C72** (1996) 653; Z.Phys.**C66** (1995) 225. G.S.Adkins, P.M.Mitrikov, R.N.Fell, Phys.Rev.Lett.**78** (1997) 9. E.Gubankova, C-R.Ji, S.R.Cotanch, hep-ph/0003289. F.Lenz, E.J.Moniz, M.Thies, Ann.Phys. (N.Y.) **242** (1995) 429.
- [40] P.Doust, Ann.Phys. (N.Y.) **177** (1987) 169. P.J.Doust, J.C.Taylor, Phys.Lett.**B197** (1987) 232. J.C.Taylor, in *Lecture notes in Physics*, 137, P.Gaigg, W.Kummer, M.Schweda (Eds.), Springer-Verlag (1989).
- [41] H.S.Chan, M.B.Halpern, Phys.Rev.**D33** (1985) 540.
- [42] G.Leibbrandt, J.Williams, Nucl.Phys. **B475** (1996) 469. G.Leibbrandt, Nucl.Phys. **B521** (1998) 383; Nucl.Phys. Proc.Suppl. **64** (1998) 101. G.Heinrich, G.Leibbrandt, Nucl.Phys. **B575** (2000) 359.
- [43] G.Leibbrandt, Nucl.Phys.**B521**(1998)383; Nucl.Phys.Proc.Suppl.**64** (1998)101. G.Heinrich, G.Leibbrandt, hep-th/9911211.
- [44] A.T.Suzuki, A.G.M.Schmidt, Eur.Phys.J. **C19** (2001) 391.
- [45] A.T.Suzuki, A.G.M.Schmidt, J.Phys.**A31** (1998) 8023.
- [46] A.I.Davydychev, *Proc. International Conference "Quarks-92"* (1992) 260. hep-ph/9307323.
- [47] N.I.Ussyukina, A.I.Davydychev, Phys.Lett.**B332** (1994) 159.
- [48] C.Anastasiou, E.W.N.Glover, C.Oleari, Nucl.Phys.**B565** (2000)445.

-
- [49] A.T.Suzuki, A.G.M.Schmidt, Eur.Phys.J.**C10** (1999) 357.
- [50] M.R.Douglas, N.A.Nekrasov, hep-th/0106048.
- [51] H.O. Girotti, M. Gomes, V.O. Rivelles, A.J. da Silva, Nucl.Phys.**B587** (2000) 299.
- [52] A.T.Suzuki, A.G.M.Schmidt, Can.J.Phys.**78** (2000) 769.
- [53] R.J.Gonsalves, Phys.Rev. **D 28** (1983) 1542.
- [54] W.L. van Neerven, Nucl.Phys. **B 268** (1986) 453.
- [55] A.I.Davydychev, P.Osland, Phys.Rev.**D59** (1999) 014006.
- [56] N.I.Ussyukina, A.I.Davydychev, Phys.Lett.**B305** (1993) 136; **B298** (1993) 363.
- [57] N.E.Nørlund, Acta Math. **94** (1955) 289 .
- [58] D.S.Kershaw, Phys.Rev.**D8** (1973) 2708.