

DOUGLAS BUYTENDORP BIZARRO

**CONTROLE BASEADO EM FUNÇÕES DE LYAPUNOV  
POLINOMIAIS E CONTROLE ROBUSTO DE SISTEMAS  
CHAVEADOS AFINS COM APLICAÇÕES EM  
CONVERSORES ELETRÔNICOS DE POTÊNCIA**

DOUGLAS BUYTENDORP BIZARRO

**CONTROLE BASEADO EM FUNÇÕES DE LYAPUNOV POLINOMIAIS E  
CONTROLE ROBUSTO DE SISTEMAS CHAVEADOS AFINS COM APLICAÇÕES  
EM CONVERSORES ELETRÔNICOS DE POTÊNCIA**

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia - Campus de Ilha Solteira - UNESP, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica.

Área de Concentração: Automação.

Prof. Dr. Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira  
Orientador

Ilha Solteira - SP

2021



FICHA CATALOGRÁFICA  
Desenvolvido pelo Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação

B625c Bizarro, Douglas Buytendorp.  
Controle baseado em funções de Lyapunov polinomiais e controle robusto de sistemas chaveados afins com aplicações em conversores eletrônicos de potência / Douglas Buytendorp Bizarro. -- Ilha Solteira: [s.n.], 2021  
108 f. : il.

Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira. Área de conhecimento: Automação, 2021

Orientador: Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira  
Inclui bibliografia

1. Sistemas chaveados A?Ns. 2. Soma de quadrados (SOS). 3. Função de Lyapunov polinomial multivariada. 4. Controle robusto. 5. Limitação das variáveis de estado. 6. Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs).

  
Raiane da Silva Santos

**CERTIFICADO DE APROVAÇÃO**

TÍTULO DA TESE: Controle Baseado em Funções de Lyapunov Polinomiais e Controle Robusto de Sistemas Chaveados Afins com Aplicações em Conversores Eletrônicos de Potência

**AUTOR: DOUGLAS BUYTENDORP BIZARRO**

**ORIENTADOR: MARCELO CARVALHO MINHOTO TEIXEIRA**

Aprovado como parte das exigências para obtenção do Título de Doutor em ENGENHARIA ELÉTRICA, área: Automação pela Comissão Examinadora:



Prof. Dr. MARCELO CARVALHO MINHOTO TEIXEIRA (Participação Virtual)  
Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira - UNESP

Prof. Dr. EDVALDO ASSUNÇÃO (Participação Virtual)  
Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira - UNESP

Prof. Dr. RODRIGO CARDIM (Participação Virtual)  
Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira - UNESP

Prof. Dr. CRISTIANO QUEVEDO ANDREA (Participação Virtual)  
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia / Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - UFMS

Prof. Dr. DIOGO RAMALHO DE OLIVEIRA (Participação Virtual)  
Departamento de Eletroeletrônica / Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Mato Grosso do Sul - IFMS

Ilha Solteira, 11 de junho de 2021

## AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar agradeço a Deus, nosso único Senhor e Salvador, por toda a saúde, todas as oportunidades, conquistas e realizações que me proporcionou em toda a minha vida.

À minha esposa, Gabriele Robete Kavano, por sua paciência, compreensão e companheirismo nos momentos em que os estudos tomam nosso tempo e nossa energia. Por me ajudar no desenvolvimento e escrita deste trabalho, pela confiança e pelo apoio dado em minhas escolhas profissionais.

Agradeço aos meus pais, Jaime Bizarro e Solange de Souza Buytendorp Bizarro, e à minha irmã Daniele Buytendorp Bizarro que sempre me apoiaram incondicionalmente em qualquer escolha que eu fizesse e sempre tiveram orgulho de minhas realizações. Se tive oportunidade de fazer minhas escolhas e de me dedicar aos estudos, foi graças a seu apoio.

Ao Professor Dr. Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira, por sua bondade e confiança em aceitar ser meu orientador. Sou muito grato pela orientação, paciência, humildade e amizade.

Aos Professores Edvaldo Assunção e Rodrigo Cardim pelo acompanhamento, incentivo e sugestões dadas ao longo do doutorado.

Aos amigos do Laboratório de Pesquisa em Controle (LPC) Leonardo Carniato, Bruno Sereni, Marco Beteto, Marco, Hyago, Leidy, Adalberto, Gilberto, Hadamez, Ariel, Lázaro e outros pela ajuda, companheirismo e momentos de descontração. Agradeço, em especial, ao amigo Igor Thiago Minari Ramos, por toda a ajuda, que foi fundamental no desenvolvimento do trabalho.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

## RESUMO

Esta tese aborda a análise e projeto de controle de uma classe de sistemas chaveados afins que não apresentam entrada de controle. Os principais tópicos tratados são a otimização da resposta transitória do ponto de vista da redução de um índice de desempenho quadrático (custo garantido), controle robusto com relação a incertezas paramétricas e limitação do valor máximo aceitável de variáveis de estado. Como não há entrada de controle, a estabilização, bem como a resposta transitória destes sistemas dependem exclusivamente do chaveamento adequado entre os subsistemas, de acordo com uma regra de chaveamento. Assim, inicialmente, este trabalho apresenta uma explicação sobre as características dos sistemas chaveados afins. Em seguida, são propostas regras de chaveamento com o intuito de melhorar o desempenho transitório. Mais especificamente, é proposto o emprego de candidatas à função de Lyapunov polinômiais multivariadas (polinômios em função de mais de uma variável), sendo utilizada a teoria de decomposição em soma de quadrados (do inglês, *sum of squares* - SOS) para a descrição das restrições dos problemas. A utilização deste tipo de função de Lyapunov é proposta a fim de flexibilizar as superfícies de deslizamento criadas pelas regras de chaveamento. As principais contribuições deste tópico são condições que asseguram estabilidade assintótica ou estabilidade exponencial e custo garantido e que são baseados na generalização de condições não polinômiais, assim, podem fornecer melhor factibilidade e otimizar parâmetros de performance. Com relação ao controle robusto, é apresentada uma revisão sobre como as incertezas paramétricas afetam o ponto de equilíbrio desejado e sobre como trabalhos anteriores lidaram com as incertezas. No presente trabalho, foram propostos novos teoremas que asseguram estabilidade assintótica considerando as incertezas paramétricas e até variações na entrada não controlada. Estes teoremas se baseiam na representação padrão de sistemas chaveados afins considerada neste trabalho, em incertezas paramétricas politópicas e em desigualdades matriciais lineares (do inglês, *Linear Matrix Inequalities* - LMIs). Outra contribuição foi o estabelecimento de condições suficientes e de leis de controle para limitar o valor extremo atingido por variáveis de estado. Ao final de cada um dos tópicos citados, foram realizadas simulações de conversores eletrônicos de potência CC-CC com o objetivo de verificar e demonstrar o desempenho das técnicas de controle propostas. Os resultados de simulações computacionais confirmam as proposições teóricas.

**Palavras-chave:** sistemas chaveados afins; soma de quadrados (SOS); função de Lyapunov polinomial multivariada; controle robusto; limitação das variáveis de estado; desigualdades matriciais lineares (LMIs).

## ABSTRACT

This thesis addresses the analysis and control design for a class of switched affine systems which do not present a control input. The main topics covered are the optimization of transient response by reducing a quadratic performance index (guaranteed cost), robust control regarding parameter uncertainties and limitation of extreme acceptable values for state variables. Since there is no control input, the stabilization, as well as the transient response of the systems depend only on proper switching among subsystems following switching rules. Hence, initially, this work presents an explanation of the characteristics of switched affine systems. Later, switching rules are proposed to improve transient performance. Specifically, it is proposed the use of multivariate polynomial (a polynomial in more than one variable) Lyapunov candidate functions by applying the sum of squares (SOS) decomposition theory to describe the problems constraints. The application of this kind of Lyapunov candidate functions is proposed to make the sliding surfaces created by the switching rules more flexible, leading to improved performance. The main contributions on this topic are theorems regarding asymptotic stability or exponential stability and guaranteed cost which are generalizations of non-polynomial ones and, hence, can provide better feasibility and performance parameters. Regarding robust control, it is presented a review on how parametric uncertainties affect the set of equilibrium points and on how previous research dealt with uncertainties. The work leads to new theorems that assure asymptotic robust stability regarding parameter uncertainties and even input variations. These theorems rely on the default representation of switched affine system considered in this thesis, on parametric polytopic uncertainties and on Linear Matrix Inequalities (LMIs) conditions. Another contribution was to establish sufficient conditions and control laws to limit the extreme value reached by state variables. At the end of each of the aforementioned topics, computational simulations of DC-DC power electronics converters were performed to display the performance of the proposed control techniques. The results confirm the theoretical proposals.

**Keywords:** switched affine systems; sum of squares (SOS); multivariate polynomial Lyapunov function; robust control; state variables limitation; Linear Matrix Inequalities (LMIs); .

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Plano de fase de um sistema chaveado afim.	18
Figura 2	Diagrama do circuito elétrico do conversor CC-CC Boost.	43
Figura 3	Resposta transitória da corrente no indutor $i_L(t)$ e tensão no capacitor $v_C(t)$ para os Teoremas 2 e 5.	45
Figura 4	Plano de fase ( $i_L(t) \times v_C(t)$ ) para os Teoremas 2 e 5.	46
Figura 5	Integral (160) para os Teoremas 2 e 5.	47
Figura 6	Resposta transitória da corrente no indutor $i_L(t)$ e tensão no capacitor $v_C(t)$ para os Teoremas 3 e 6.	47
Figura 7	Plano de fase ( $i_L(t) \times v_C(t)$ ) para os Teoremas 3 e 6.	48
Figura 8	Integral (160) para os Teoremas 3 e 6.	49
Figura 9	Resposta transitória da corrente no indutor $i_L(t)$ e tensão no capacitor $v_C(t)$ para os Teoremas 4 e 7.	49
Figura 10	Plano de fase ( $i_L(t) \times v_C(t)$ ) para os Teoremas 4 e 7.	50
Figura 11	Integral (160) para os Teoremas 4 e 7.	50
Figura 12	Corrente e tensão em função do tempo para os Teoremas 2, 3 e 6.	52
Figura 13	Integral (160) para os Teoremas 3 e 6.	53
Figura 14	Resposta transitória da corrente no indutor $i_L(t)$ e tensão no capacitor $v_C(t)$ sob variação do parâmetro incerto para o conversor CC-CC Boost controlado de acordo com o Teorema 8.	68
Figura 15	Diagrama do circuito elétrico do Conversor CC-CC Buck.	70
Figura 16	Resposta transitória da corrente no indutor $i_L(t)$ e tensão no capacitor $v_C(t)$ sob variação do parâmetro incerto para três pontos de equilíbrio desejados para o conversor CC-CC Buck controlado de acordo com Teorema 9.	72
Figura 17	Plano de fase ( $i_L(t) \times v_C(t)$ ) para o conversor CC-CC Buck controlado de acordo com o Teorema 9 sob variação do parâmetro incerto para três pontos de equilíbrio desejados.	73
Figura 18	Valores da corrente no indutor, tensão no capacitor, resistência de carga, tensão de entrada e combinação convexa dos subsistemas ( $\lambda$ ) durante a simulação sob variação do parâmetro incerto e da entrada para o conversor CC-CC Buck e controlado conforme Teorema 9.	74

Figura 19	Valores da variável de estado $x_{(1)}$ , variável de estado $x_{(2)}$ , parâmetro incerto, entrada e combinação convexa dos subsistemas ( $\lambda$ ) durante a simulação sob variação do parâmetro incerto e da entrada.	77
Figura 20	Diagrama do inversor monofásico.	78
Figura 21	Circuito equivalente do inversor monofásico.	78
Figura 22	Valores da corrente no indutor, tensão no capacitor, resistência de carga e tensão de entrada durante a simulação sob variação do parâmetro incerto e da entrada.	80
Figura 23	Ilustração de $\Delta$ , $\Delta_{\bar{\sigma}}$ , $\mathcal{L}_{\gamma}$ e $\Omega_{\bar{\sigma}}$ .	85
Figura 24	Curvas de nível de $V(x)$ e campos vetoriais $f_i(\xi)$ .	90
Figura 25	Plano de fase - trajetórias para simulação sem e com limitação do vetor de estado.	92
Figura 26	Análise das curvas $f_i(\xi) \cdot \xi_{\bar{l}}$ e $\dot{V}_i$ e da região $\Delta_{\bar{\sigma}}$ .	93
Figura 27	Apresentação da região $\Omega_{\bar{\sigma}}$ descrita pelo Lema 6.	94
Figura 28	Plano de fase - trajetórias para simulação sem e com limitação do vetor de estado com condição inicial dentro da região $\Omega_{\bar{\sigma}}$ .	95
Figura 29	Análise das curvas $f_i(\xi) \cdot \xi_{\bar{l}}$ e $\dot{V}_i$ e das regiões $\Delta_{\bar{\sigma}}$ e $\Delta_{\bar{\lambda}}$ .	96
Figura 30	Plano de fase - trajetórias para simulação sem e com limitação do vetor de estado com condição inicial dentro da região $\Omega_{\bar{\omega}}$ expandida pelo Teorema 10.	97
Figura 31	Plano de fase - trajetórias para simulação sem e com limitação do vetor de estado com condição inicial dentro da região $\Omega_{\bar{\omega}}$ expandida pelo Teorema 10 para três diferentes pontos de equilíbrio.	98

## **LISTA DE TABELAS**

Tabela 1	Resultados numéricos das simulações realizadas no Capítulo 3.	53
----------	---	----

## LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais.
$\mathbb{R}^n$	Conjunto dos vetores $n \times 1$ com elementos reais.
$\mathbb{R}^{n \times m}$	Conjunto das matrizes $n \times m$ com elementos reais.
$\mathbb{N}^*$	Conjunto dos números naturais não nulos.
$\mathbb{K}_N$	Conjuntos dos números $\{1, 2, \dots, N\}$ .
$I$	Matriz identidade de ordem apropriada.
$v_{(l)}$	Representa o $l$ -ésimo elemento de um vetor $v$ .
$M_l$	Indica que a matriz $M$ pertence ao $l$ -ésimo subsistema de um sistema chaveado.
$M'$	Transposta da matriz real $M$ .
$M > (\geq) 0$	Matriz $M$ é positiva (semi-)definida.
$M < (\leq) 0$	Matriz $M$ é negativa (semi-)definida.
$\text{Tr}(M)$	Traço de uma matriz $M$ .
$\otimes$	Produto de Kronecker.
$\sigma$	Regra de chaveamento.
$\lambda$	Vetor de coeficientes de uma combinação convexa de subsistemas.
$\alpha$	Vetor de coeficientes de uma combinação convexa de vértices de um politopo.

$\Delta_N$	Simplex unitário.
$\arg \min_{i \in \mathbb{K}_N} (f_i)$	Índice $i \in \mathbb{K}_N$ para o qual a função $f$ assume o menor valor.
$\in$	Pertence a.
$\cup$	União.
$\cap$	Interseção.
$\subset$	Está contido em.
$\forall$	Para todo.
$:=$	Por definição.

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>11</b>
<b>2</b>	<b>SISTEMAS CHAVEADOS AFINS</b>	<b>15</b>
<b>2.1</b>	<b>Análise das Características dos Sistemas Chaveados Afins</b>	<b>16</b>
<b>3</b>	<b>APLICAÇÃO DE FUNÇÕES DE LYAPUNOV POLINOMIAIS EM SISTEMAS CHAVEADOS AFINS</b>	<b>22</b>
<b>3.1</b>	<b>Soma de Quadrados</b>	<b>23</b>
3.1.1	Decomposição em soma de quadrados	23
<b>3.2</b>	<b>Regras de Chaveamento Utilizando Funções de Lyapunov Polinomiais Multi-variadas</b>	<b>26</b>
3.2.1	Estabilidade Exponencial	31
3.2.2	Custo Garantido	34
<b>3.3</b>	<b>Exemplos</b>	<b>42</b>
3.3.1	Conversor CC-CC Boost	43
<b>3.4</b>	<b>Conclusões Parciais</b>	<b>54</b>
<b>4</b>	<b>CONTROLE ROBUSTO DE SISTEMAS CHAVEADOS AFINS COM INCERTEZAS POLITÓPICAS</b>	<b>55</b>
<b>4.1</b>	<b>Incertezas Politópicas em Sistemas Chaveados Afins</b>	<b>55</b>
4.1.1	Parametrização do ponto de equilíbrio	56
<b>4.2</b>	<b>Controle Robusto de Sistemas Chaveados Afins com Incertezas Politópicas</b>	<b>59</b>
<b>4.3</b>	<b>Exemplos</b>	<b>66</b>
4.3.1	Conversor CC-CC Boost	66
4.3.2	Conversor CC-CC Buck	69
4.3.3	Sistema Arbitrário	75
4.3.4	Conversor CC-CA Inversor Monofásico	77
<b>4.4</b>	<b>Conclusões Parciais</b>	<b>80</b>
<b>5</b>	<b>LIMITAÇÃO DA AMPLITUDE DE VARIÁVEIS DE ESTADO</b>	<b>82</b>

<b>5.1</b>	<b>Condições para a Limitação do Vetor de Estado</b>	<b>82</b>
<b>5.2</b>	<b>Caso Particular: Modo de Condução Descontínua em Conversores Eletrônicos de Potência</b>	<b>89</b>
<b>5.3</b>	<b>Exemplos</b>	<b>91</b>
5.3.1	Limitação do vetor de estado	91
5.3.2	Expansão da região de condições iniciais	95
5.3.3	Modo de condução descontínua (MCD)	97
<b>5.4</b>	<b>Conclusões Parciais</b>	<b>99</b>
<b>6</b>	<b>CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS</b>	<b>100</b>
<b>6.1</b>	<b>Conclusões</b>	<b>100</b>
<b>6.2</b>	<b>Perspectivas Futuras</b>	<b>102</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>104</b>

## 1 INTRODUÇÃO

É notório que à medida que o conhecimento matemático e as técnicas algébricas têm evoluído, a representação matemática de fenômenos e sistemas físicos tem se tornado mais precisa, permitindo ao projetista uma maior capacidade de analisar e atuar nestes sistemas. Um exemplo é a representação de sistemas que apresentam mais de um modo de operação, ou seja, dependendo do modo em que um destes sistemas se encontra, seu comportamento será descrito por diferentes conjuntos de equações.

Tais sistemas são descritos como sistemas híbridos em Liberzon (2003), sendo caracterizados por uma interação entre dinâmicas contínuas no tempo e dinâmicas discretas no tempo, havendo, normalmente, inter-relações entre estas dinâmicas. Exemplos de sistemas que podem ser descritos como híbridos são: sistemas de refrigeração baseados em termostatos, crescimento e divisão de células biológicas, operação de servidores em redes de computadores, veículos sujeitos à troca de marchas, dentre outros.

As possibilidades de estudo dos sistemas híbridos são amplas. Pesquisas no campo da ciência da computação costumam concentrar seu estudo na dinâmica discreta, que normalmente é mais complexa nos sistemas tratados neste caso (LIBERZON, 2003). Já em se tratando da área de controle de sistemas, costuma-se dar mais atenção às dinâmicas contínuas no tempo, sendo a dinâmica discreta no tempo tratada como simples eventos de comutação entre as dinâmicas contínuas no tempo. Nestas situações, os sistemas são comumente denominados sistemas chaveados (LIBERZON, 2003; WICKS; PELETIES; DECARLO, 1998; WICKS; PELETIES; DECARLO, 1994), assim como ocorrerá neste trabalho. Neste caso, diz-se que o sistema é composto por diversos subsistemas contínuos no tempo, cada um com sua característica dinâmica, havendo, portanto, o chaveamento entre os subsistemas.

Nas últimas décadas, tem-se notado interesse no estudo de sistemas chaveados, já havendo literatura significativa abordando o estudo da estabilidade e controle de sistemas lineares chaveados (LIBERZON; MORSE, 1999; BOLZERN; SPINELLI, 2004; GEROMEL; COLANERI, 2006; ZHAI et al., 2018; HUANG; ZHAI; LI, 2017; LIN; ANTSAKLIS, 2009; ZHAI; LIN;

ANTSAKLIS, 2003; DEAECTO; GEROMEL; DAAFOUZ, 2011; MAINARDI JÚNIOR et al., 2015). Este estudo permitiu, também, o desenvolvimento de novas técnicas de controle, chamadas de controle chaveado, que têm ganhado notoriedade em se tratando de controle robusto (SOUZA et al., 2013; SOUZA, 2013; SOUZA et al., 2014b; ALVES et al., 2016; CARNIATO et al., 2018).

No controle chaveado, apesar de o sistema tratado não ser necessariamente chaveado, são projetados vários controladores para o mesmo sistema dinâmico contínuo no tempo. Apenas um controlador permanece ativo a cada instante, sendo a comutação entre estes definida por uma regra de chaveamento. Desta forma, o sistema em malha fechada passa a ser um sistema chaveado. Importantes resultados foram obtidos com o uso do controle chaveado, principalmente no que se refere ao controle de sistemas sujeitos a incertezas paramétricas (DEAECTO; GEROMEL; DAAFOUZ, 2011; SOUZA et al., 2013; ALVES et al., 2016). Há também estudos que aplicam o controle chaveado a sistemas que, em malha aberta, já são considerados chaveados (CARNIATO et al., 2018).

Outra abordagem para o controle de sistemas chaveados é baseada simplesmente na criação de uma regra de chaveamento que estabilize o sistema. Esta abordagem é bastante útil em casos em que os sistemas tratados não apresentam entrada de controle (WICKS; PELETIES; DECARLO, 1998; GEROMEL; COLANERI, 2006).

Há também estudos relacionados a sistemas chaveados afins que não apresentam entrada de controle (BOLZERN; SPINELLI, 2004; DEAECTO et al., 2010; YOSHIMURA et al., 2013; MAINARDI JÚNIOR, 2013). Esta classe de sistemas é particularmente útil na descrição de conversores eletrônicos de potência, nos quais o controle e ajuste do ponto de operação é feito exclusivamente por meio do chaveamento adequado entre os subsistemas.

Tradicionalmente, os conversores eletrônicos são modelados pelo modelo de valores médios, fazendo as devidas considerações para a análise de pequenos sinais (ERICKSON; MAK-SIMOVIC, 2007, Cap. 7). Normalmente, a modelagem é feita de forma a considerar a razão cíclica, equivalente aos coeficientes da combinação convexa entre os subsistemas, como variável de entrada e o modelo resultante é de uma única entrada e uma única saída (do inglês, *single input single output* - SISO), ao qual são aplicadas técnicas de controle clássico.

Com o desenvolvimento do controle moderno, a representação de conversores em espaço de estados já é usual, contudo, não padronizada. Alguns trabalhos consideram o modelo médio, tratando a razão cíclica como sendo constante e tendo como entrada a tensão de alimentação do circuito (ERICKSON; MAK-SIMOVIC, 2007). Outros trabalhos, como (GULDEMIR, 2011), consideram o chaveamento entre subsistemas e ainda tratam a razão cíclica como entrada de

controle, contudo, dependendo do conversor modelado, este sistema pode se tornar bilinear (SHARIATMADAR; JAFARIAN, 2017).

Na modelagem como sistema chaveado afim, normalmente não se considera que haja uma entrada de controle, em vez disto, o sistema deve ser controlado apenas pelo chaveamento adequado entre subsistemas. Neste caso, os sistemas chaveados afins passam a se enquadrar na categoria que muitos autores chamam de sistemas de estrutura variável (PANCHADE; CHILE; PATRE, 2013) e permitem a utilização de uma técnica de controle chamada de modos deslizantes. Esta técnica tem como principal vantagem o fato de a resposta do sistema controlado ser independente de determinados parâmetros, o que confere uma robustez intrínseca ao sistema de controle (PANCHADE; CHILE; PATRE, 2013; SHTESSEL et al., 2014), o que tem levado à sua aplicação no acionamento eletrônico de motores (DHANASEKAR; KUMAR; RIVERA, 2016). Por outro lado, devido à ausência de entrada de controle, as características dinâmicas do sistema ficam restritas a combinações das características dos subsistemas, havendo, naturalmente, limitações em sua performance. Dadas estas limitações, o presente trabalho explora três aspectos no controle desta classe de sistemas: flexibilização das condições para o controle de sistemas chaveados afins, permitindo a criação de regras de chaveamento que levem a superfícies de deslizamento otimizadas; controle robusto considerando incertezas paramétricas politópicas; e limitação da amplitude admitida para variáveis de estado.

A seguir, o Capítulo 2 descreve brevemente as principais características dos sistemas chaveados afins e apresenta teoremas já conhecidos na literatura referentes ao controle destes sistemas, enquanto no Capítulo 3, são propostos teoremas que fazem o uso de matrizes polinomiais multivariadas para a formação das funções de Lyapunov a fim de flexibilizar as restrições do problema de controle, flexibilizar as superfícies de deslizamento e permitir a obtenção de melhor desempenho transitório. Simulações são realizadas com um modelo de conversor eletrônico de potência CC-CC, expondo os ganhos de performance obtidos.

O Capítulo 4 aborda o controle robusto de sistemas chaveados afins, tema ainda pouco explorado na literatura. Considerando-se que o sistema apresenta incertezas paramétricas politópicas, é estabelecida uma parametrização do ponto de equilíbrio desejado e são propostos teoremas para o controle robusto com a garantia de um limitante superior para o mesmo índice de desempenho utilizado nos Capítulos 2 e 3. Simulações são realizadas para diferentes sistemas, mostrando a versatilidade dos teoremas propostos.

O Capítulo 5 deste trabalho explora a limitação do valor admitido para variáveis de estado, sendo analisadas condições suficientes para que seja possível restringir o valor extremo de uma variável de estado durante um transitório. São propostas regras de chaveamento e leis de con-

trole para cada uma das condições. Em seguida, propõe-se um teorema com uma lei de controle que generaliza as anteriores e é capaz de maximizar a região de condições iniciais para a qual a limitação é garantida. Neste capítulo, também é analisado um caso particular de limitação, comum nos conversores eletrônicos CC-CC, o modo de condução descontínuo. Novamente, são realizadas simulações com um modelo de conversor CC-CC ilustrando cada uma das análises e métodos propostos.

Finalmente, o Capítulo 6 apresenta as conclusões do trabalho e perspectivas de desenvolvimento de estudos futuros.

Ao longo deste trabalho, serão adotadas as seguintes notações: para matrizes reais, o símbolo  $(\cdot)'$  indica o seu transposto;  $v_{(l)}$  representa o  $l$ -ésimo elemento do vetor  $v$ ; o conjunto composto pelos  $N$  primeiros inteiros positivos, ou seja,  $\{1, 2, \dots, N\}$ , é denotado por  $\mathbb{K}_N$ ;  $\mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathbb{R}^{1 \times n}$  representam os conjuntos das matrizes com  $n \times m$  elementos reais, dos vetores coluna com  $n \times 1$  elementos reais e dos vetores linha com  $1 \times n$  elementos reais, respectivamente; o conjunto de todos os vetores  $\lambda = [\lambda_{(1)}, \lambda_{(2)}, \dots, \lambda_{(N)}]'$  tais que  $\lambda_{(i)} \geq 0, i \in \mathbb{K}_N$  e  $\lambda_{(1)} + \lambda_{(2)} + \dots + \lambda_{(N)} = 1$  é denotado por  $\Lambda_N$  e denominado simplex unitário; a combinação convexa de um conjunto de matrizes  $\{M_1, M_2, \dots, M_N\}$  é denotado por  $M_\lambda = \sum_{i=1}^N \lambda_{(i)} M_i$ , sendo  $\lambda \in \Lambda_N$ ; o traço de uma matriz  $M$  é denotado por  $\text{Tr}(M)$ ;  $M > 0$  ( $M < 0, M \geq 0$  e  $M \leq 0$ ) indica que a matriz  $M$  é positiva definida (negativa definida, positiva semi-definida e negativa semi-definida). O símbolo  $\otimes$  representa o produto de Kronecker entre duas matrizes (de dimensões arbitrárias).

## 2 SISTEMAS CHAVEADOS AFINS

A classe de sistemas analisada neste trabalho é descrita abaixo:

$$\begin{cases} \dot{x} = A_{\sigma(x)}x + B_{\sigma(x)}w, & x(0) = x_0, \\ y = C_{\sigma(x)}x, \end{cases} \quad (1)$$

$$A_{\sigma(x)} \in \{A_1, \dots, A_N\}, \quad (2)$$

$$B_{\sigma(x)} \in \{B_1, \dots, B_N\}, \quad (3)$$

$$C_{\sigma(x)} \in \{C_1, \dots, C_N\}, \quad (4)$$

sendo que  $\sigma(x)$  representa a regra de chaveamento,  $N \in \mathbb{N}^*$  corresponde ao número de subsistemas,  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $y(t) \in \mathbb{R}^p$  e  $w(t) \in \mathbb{R}^q$ . Por simplificação, nas representações futuras, quando a regra de chaveamento  $\sigma(x)$  for utilizada como índice das matrizes do sistema, será representada apenas como " $\sigma$ ".

Considera-se que  $A_i$ ,  $B_i$  e  $C_i$  são invariantes no tempo. Assim, cada subsistema é descrito por:

$$\begin{cases} \dot{x} = A_i x + B_i w, & x(0) = x_0, \\ y = C_i x, \end{cases} \quad (5)$$

sendo

$$i \in \mathbb{K}_N \quad : \quad \mathbb{K}_N = \{1, 2, \dots, N\}. \quad (6)$$

Por serem sistemas afins, caso  $A_i$  seja Hurwitz, cada sistema terá um único ponto de equilíbrio e este será globalmente assintoticamente estável. Contudo, se  $B_i \neq 0$ , este ponto de equilíbrio não será a origem do espaço de estados, de forma que cada subsistema pode ter um ponto de equilíbrio diferente.

O fato de os subsistemas não compartilharem um mesmo ponto de equilíbrio torna possível que, mesmo sem uma entrada de controle (uma vez que as matrizes  $B_i$ ,  $i \in \mathbb{K}_N$ , são consideradas constantes e  $w(t)$  é uma entrada externa não ajustável), o ponto de equilíbrio do sistema chaveado equivalente possa ser escolhido dentre um conjunto de possíveis pontos de equilíbrio. Conjunto este que é conexo com infinitos elementos, que não se restringe aos pontos de equilíbrio de cada subsistema, mas os engloba.

Por outro lado, a ausência da entrada de controle e os distintos pontos de equilíbrio trazem algumas limitações ao desempenho dinâmico, bem como maiores dificuldades de projeto de técnicas de controle, como será discutido ao longo do trabalho. Além disso, para a permanência em qualquer ponto de equilíbrio desejado que seja diferente de qualquer um dos pontos de equilíbrio dos subsistemas, o sistema deve permanecer em constante chaveamento.

## 2.1 Análise das Características dos Sistemas Chaveados Afins

Sabe-se que cada subsistema (5) tem seu ponto de equilíbrio,  $x_{ri}$ , específico, dado por:

$$x_{ri} = -A_i^{-1}B_i w. \quad (7)$$

A partir do chaveamento adequado entre os subsistemas, é possível que o sistema tenha comportamento equivalente ao de um sistema descrito pela combinação convexa dos subsistemas:

$$\begin{cases} \dot{x} = A_\lambda x + B_\lambda w, & x(0) = x_0, \\ y = C_\lambda x, \end{cases} \quad (8)$$

sendo que os coeficientes da combinação convexa são representados pelo vetor  $\lambda$ , pertencente ao simplex unitário

$$\Lambda_N = \left\{ \lambda = [\lambda_{(1)}, \lambda_{(2)}, \dots, \lambda_{(N)}]' \in \mathbb{R}^N \quad : \quad \lambda_{(i)} \geq 0, \quad \sum_{i=1}^N \lambda_{(i)} = 1 \right\}, \quad (9)$$

assim,

$$(A_\lambda, B_\lambda, C_\lambda) = \sum_{i=1}^N \lambda_{(i)} (A_i, B_i, C_i). \quad (10)$$

Portanto, existe um conjunto de pontos de equilíbrio atingíveis do sistema convexo,  $\chi_r \in \mathbb{R}^n$ , dado por:

$$\chi_r = \{x_r \in \mathbb{R}^n \quad : \quad x_r = -A_\lambda^{-1}B_\lambda w, \quad \lambda \in \Lambda_N\}, \quad (11)$$

e é possível atingir qualquer um dos pontos de equilíbrio do conjunto por meio do ajuste adequado dos coeficientes da combinação convexa.

Neste trabalho, será considerado o ponto de equilíbrio desejado

$$x_r = -A_{\lambda_r}^{-1}B_{\lambda_r} w, \quad (12)$$

que é atingível com uma combinação convexa específica  $\lambda_r$ . Assim, tem-se:

$$(A_{\lambda_r}, B_{\lambda_r}, C_{\lambda_r}) = \sum_{i=1}^N \lambda_{r(i)} (A_i, B_i, C_i). \quad (13)$$

Além disso, a não ser que seja especificado o contrário, será considerado que nenhum dos coeficientes da combinação convexa é nulo, ou seja, o ponto de equilíbrio desejado é diferente do ponto de equilíbrio de qualquer um dos subsistemas. Esta consideração será feita para que sempre haja a necessidade do chaveamento.

Para se manter no ponto de equilíbrio desejado, o sistema chaveado em questão deve manter-se em constante chaveamento, uma vez que a derivada do vetor de estado ( $\dot{x}$ ), neste ponto, é diferente de zero para qualquer um dos subsistemas.

Considerando a característica dinâmica dos sistemas, a expressão para o vetor de estado em função do tempo pode ser deduzida aplicando-se a transformada de Laplace à expressão para  $\dot{x}$  em (5) para matrizes  $A_i$  e  $B_i$  constantes:

$$\begin{aligned} sX(s) - x(0) &= A_i X(s) + s^{-1} B_i w, \\ (sI - A_i)X(s) &= s^{-1} B_i w + x(0), \\ X(s) &= (s(sI - A_i))^{-1} B_i w + (sI - A_i)^{-1} x(0). \end{aligned} \quad (14)$$

Aplicando-se a transformada de Laplace inversa, tem-se que:

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^t e^{A_i t} B_i w dt + e^{A_i t} x(0), \\ x(t) &= \left( A_i^{-1} e^{A_i t} B_i w \right) \Big|_0^t + e^{A_i t} x(0), \\ x(t) &= A_i^{-1} e^{A_i t} B_i w - A_i^{-1} B_i w + e^{A_i t} x(0). \end{aligned} \quad (15)$$

Uma condição necessária para que um determinado estado  $x_r$  seja considerado um ponto de equilíbrio do sistema chaveado afim (1) é que nele haja uma combinação convexa das derivadas dos vetores de estado de cada subsistema que seja nula, ou seja, para  $\lambda \in \Lambda_N$  definido em (9):

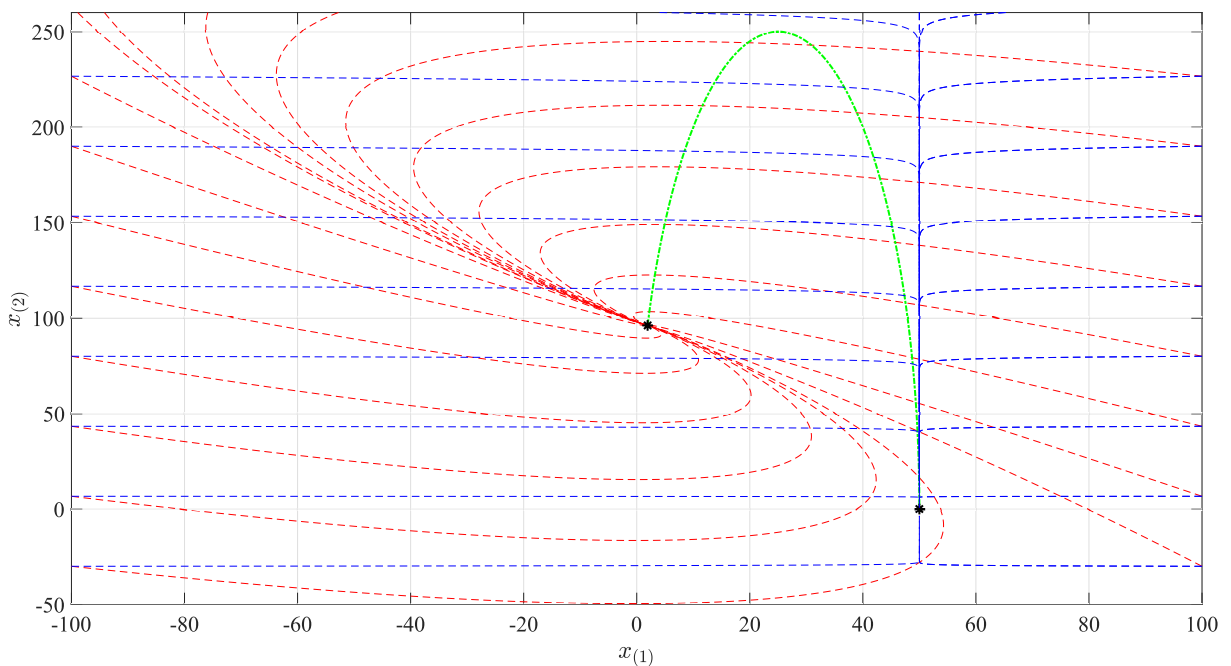
$$\sum_{i=1}^N \lambda_{(i)} \dot{x}_i = 0 = A_{\lambda} x_r + B_{\lambda} w. \quad (16)$$

Além disso, para que este ponto seja estável, é necessário que a matriz  $A_{\lambda}$  seja Hurwitz, isto é, todos os seus autovalores devem ter parte real negativa.

Para ilustrar estes conceitos, na Figura 1 é apresentado o plano de fase de um sistema

chaveado afim com duas variáveis de estado, composto por dois subsistemas, ambos estáveis. Nela, as linhas tracejadas em azul e em vermelho mostram, respectivamente, as trajetórias dos subsistemas 1 e 2. Nota-se que as trajetórias convergem para o ponto de equilíbrio de seu respectivo subsistema ( $x_{ri}$ ), indicado por um asterisco. A linha tracejada em verde representa o conjunto de todos os possíveis pontos de equilíbrio do sistema ( $\chi_r$ ), definido em (11). Nota-se que, apesar de ser possível modelar um sistema equivalente à combinação dos subsistemas (8), o ponto de equilíbrio correspondente ( $x_r$ ) não é necessariamente a combinação convexa dos pontos de equilíbrio dos subsistemas.

Figura 1 - Plano de fase de um sistema chaveado afim.



Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

Com relação à estabilização dos sistemas tratados, Bolzern e Spinelli (2004) apresentaram condições necessárias (para o caso de dois subsistemas) e suficientes para a estabilidade de sistemas chaveados afins contínuos no tempo. Tais condições consideram uma função de Lyapunov da forma

$$V(\xi(t)) = \xi(t)' P \xi(t), \quad (17)$$

sendo

$$\xi = (x - x_r), \quad (18)$$

conforme descrito na definição e teorema que seguem:

**Definição 1.** (BOLZERN; SPINELLI, 2004) O ponto de equilíbrio chaveado  $\xi_r = (x - x_r) = 0$  de um sistema chaveado afim (1) é quadraticamente estável se, e somente se, existirem uma

matriz  $P = P' > 0$  e uma constante  $\varepsilon > 0$  tais que, para a função quadrática  $V(\xi) = \xi' P \xi$  tem-se

$$\dot{V}(\xi) \leq -\varepsilon \xi' \xi \quad (19)$$

ao longo de todas as trajetórias do sistema.

**Teorema 1.** (BOLZERN; SPINELLI, 2004) *O sistema chaveado afim (1) com entrada  $w$  constante é quadraticamente estabilizável para o ponto de equilíbrio desejado  $x_r$  se, e somente se, existir  $\lambda_r \in \Lambda_N$  tal que  $A_{\lambda_r}$  é Hurwitz e  $B_{\lambda_r} = -A_{\lambda_r} x_r$ .*

**Demonstração.** *Veja (BOLZERN; SPINELLI, 2004) para detalhes.*

□

Ainda em Bolzern e Spinelli (2004), é proposta a regra de chaveamento

$$\sigma(\xi) = \arg \min_{i \in \mathbb{K}_N} (\dot{V}_i(\xi)), \quad (20)$$

sendo  $\dot{V}_i$  a derivada, para cada subsistema, da função de Lyapunov da forma  $\xi(t)' P \xi(t)$ . Tal regra, para as condições do Teorema 1, torna o sistema globalmente assintoticamente estável para o ponto de equilíbrio  $x_r$ .

Em Deaecto et al. (2010) e Mainardi Júnior (2013), são propostas regras de chaveamento baseadas em funções de Lyapunov do tipo (17) que garantem a estabilidade assintótica do sistema e consideram a otimização da seguinte função custo:

$$J = \int_0^{\infty} (y - C_{\sigma} x_r)' (y - C_{\sigma} x_r) dt = \int_0^{\infty} (x - x_r)' Q_{\sigma} (x - x_r) dt, \quad (21)$$

sendo  $Q_{\sigma} = C_{\sigma}' C_{\sigma} \geq 0$  para todo  $\sigma \in \mathbb{K}_N$ . São elas:

**Teorema 2.** (DEAECTO et al., 2010) *Considere o sistema chaveado afim (1) com entrada  $w$  constante e a matriz  $Q_{\lambda_r} = C_{\lambda_r}' C_{\lambda_r} \geq 0$  e seja o ponto de equilíbrio  $x_r \in \mathcal{X}_r$  dado. Se existirem  $\lambda_r \in \Lambda_N$  e uma matriz simétrica positiva definida  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tais que*

$$A_{\lambda_r}' P + P A_{\lambda_r} + Q_{\lambda_r} < 0, \quad (22)$$

$$A_{\lambda_r} x_r + B_{\lambda_r} w = 0, \quad (23)$$

então, a estratégia de chaveamento

$$\sigma(x) = \arg \min_{i \in \mathbb{K}_N} \xi' (Q_i \xi + 2P(A_i x + B_i w)), \quad (24)$$

sendo  $\xi = x - x_r$ , torna o ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável e o custo garantido

$$J = \int_0^{\infty} (y - C_{\sigma}x_r)'(y - C_{\sigma}x_r)dt < (x_0 - x_r)'P(x_0 - x_r) \quad (25)$$

mantém-se.

**Demonstração.** Veja (DEAECTO et al., 2010) para detalhes.

□

Nota-se que, no Teorema 2, o limitante superior do custo é o próprio valor da função de Lyapunov para a condição inicial do sistema. Então, para se reduzir o custo garantido para qualquer condição inicial, deve-se reduzir, de forma geral, o valor da função de Lyapunov. Isto é alcançado ao se reduzir o traço da matriz  $P$  (levando em consideração que esta matriz deve ser positiva definida). Portanto, o Teorema 2 permite a formulação do seguinte problema de otimização (DEAECTO et al., 2010):

$$\inf_{P>0} \{ \text{Tr}(P) : A'_{\lambda}P + PA_{\lambda} + Q_{\lambda} < 0, \quad \lambda \in \Lambda_N \}. \quad (26)$$

Esta mesma forma de otimização pode ser aplicada a todos os teoremas seguintes que estabeleçam a função de Lyapunov na condição inicial como limitante superior para custo.

**Teorema 3.** (DEAECTO et al., 2010) Considere o sistema chaveado afim (1) com entrada  $w$  constante e a matriz  $Q_i = C'_i C_i \geq 0$  e seja o ponto de equilíbrio  $x_r \in \chi_r$  dado. Se existirem  $\lambda_r \in \Lambda_N$  e uma matriz simétrica positiva definida  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tais que

$$A'_i P + P A_i + Q_i < 0, \quad (27)$$

$$A_{\lambda_r} x_r + B_{\lambda_r} w = 0, \quad (28)$$

então, a estratégia de chaveamento

$$\sigma(x) = \arg \min_{i \in \mathbb{K}_N} \xi'(2P(A_i x_r + B_i w)) \quad (29)$$

sendo  $\xi = x - x_r$ , torna o ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável e o custo garantido

$$J = \int_0^{\infty} (y - C_{\sigma}x_r)'(y - C_{\sigma}x_r)dt < (x_0 - x_r)'P(x_0 - x_r) \quad (30)$$

mantém-se.

**Demonstração.** Veja (DEAECTO et al., 2010) para detalhes.

□

O Teorema 3 permite a formulação do seguinte problema de otimização (DEAECTO et al., 2010):

$$\inf_{P>0} \{ \text{Tr}(P) : A_i'P + PA_i + Q_i < 0, \quad i \in K_N \}. \quad (31)$$

**Teorema 4.** (MAINARDI JÚNIOR, 2013) *Considere o sistema chaveado afim (1) com entrada  $w$  constante para todo  $t \geq 0$  e sejam o ponto de equilíbrio  $x_r \in \chi_r$  e  $\gamma > 0$  dados. Se existirem  $\lambda_r \in \Lambda_N$ , matrizes simétricas  $Z_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e uma matriz simétrica positiva definida  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tais que*

$$Z_i - Q_i > 0, \quad (32)$$

$$Z_i - 2\gamma P > 0, \quad (33)$$

$$A_i'P + PA_i + Z_i < 0, \quad (34)$$

$$A_{\lambda_r} x_r + B_{\lambda_r} w = 0, \quad (35)$$

sendo  $Q_i = C_i' C_i \geq 0$  para todo  $i \in \mathbb{K}_N$ , então a regra de chaveamento (29) torna o ponto de equilíbrio  $x_r$  globalmente exponencialmente estável com taxa de decaimento maior ou igual a  $\gamma$  e o custo garantido (25) mantém-se.

**Demonstração.** Veja (MAINARDI JÚNIOR, 2013, Cap. 4) para detalhes.

□

O Teorema 4 permite a formulação do seguinte problema de otimização (MAINARDI JÚNIOR, 2013):

$$\inf_{P>0} \{ \text{Tr}(P) : (32) - (34), \quad i \in K_N \}. \quad (36)$$

O custo (21) representa a integral no tempo da soma dos quadrados dos erros das variáveis de saída com relação aos seus valores no ponto de equilíbrio, o que é comumente chamado de energia do sinal de saída do sistema (TOSCANO, 2013), assim, a minimização custo obtido durante um transitório implica que a saída do sistema deve se assentar mais rapidamente e com menos oscilações (SILVA et al., 2020; DEAECTO et al., 2010). Devido à característica chaveada do sistema, este é um problema de difícil solução (DEAECTO et al., 2010). Contudo, pode-se chegar a soluções sub-ótimas baseadas em condições LMI (PRAJNA; PAPACHRISTODOULOU; WU, 2004), (HUANG, 1999, Cap. 4). Isto é feito estabelecendo-se um limitante superior para o custo, como em (25). Este limitante é conhecido como custo garantido (COUTINHO; TROFINO; FU, 2002).

### 3 APLICAÇÃO DE FUNÇÕES DE LYAPUNOV POLINOMIAIS EM SISTEMAS CHAVEADOS AFINS

Os sistemas tratados neste trabalho não apresentam uma entrada de controle. Portanto, como já discutido, a estabilização do sistema em um determinado ponto de equilíbrio desejado ( $x_r$ ) depende exclusivamente do chaveamento entre os subsistemas. Considerando que um determinado ponto de equilíbrio desejado  $x_r$  não corresponde ao ponto de equilíbrio de nenhum dos subsistemas, há uma única trajetória de cada subsistema que passa por este ponto. Portanto,  $x_r$  pode ser atingido por qualquer uma destas trajetórias (para condições iniciais muito específicas). Caso contrário, a trajetória que levará o sistema ao ponto de equilíbrio desejado deverá surgir a partir da combinação dos campos vetoriais

$$f_i(x) = A_i x + B_i w \quad (37)$$

de cada subsistema e, ao chegar no ponto de equilíbrio, a combinação convexa  $\lambda_r$  deve ser tal que satisfaça a (16). No caso de um sistema chaveado afim (1) controlado por uma regra de chaveamento do tipo (20), esta trajetória será criada pela regra de chaveamento e terá as características de uma superfície de deslizamento  $S_{sm}$  tal que  $x_r \in S_{sm}$ .

Considerando a necessidade da condição de convergência para e da condição de deslizamento de uma superfície de deslizamento ( $S_{sm}$ ) (SHARIATMADAR; JAFARIAN, 2017), o sistema sempre chegará ao ponto de equilíbrio percorrendo a superfície de deslizamento. A única exceção, já citada anteriormente, ocorre quando o estado inicial está sobre a única trajetória de um dos subsistemas que cruza o ponto de equilíbrio  $x_r$ . Portanto, pode-se afirmar que o desempenho transitório dos sistemas tratados está diretamente associado à superfície de deslizamento criada pela lei de chaveamento utilizada. Mais especificamente, o desempenho está associado ao formato da superfície de deslizamento no espaço de estados.

É possível realizar o controle de sistemas chaveados afins por modos deslizantes e, inclusive projetar superfícies de deslizamento ótimas do ponto de vista do tempo de convergência, contudo, mesmo para sistemas relativamente simples a complexidade do equacionamento de tal trajetória é muito grande, podendo inviabilizar o projeto (SHARIATMADAR; JAFARIAN, 2017). Além disso, esta metodologia de controle, no caso dos sistemas chaveados afins, dificulta, ou inviabiliza a adição de restrições, como custos e limites de região de operação, o que não ocorre no caso do projeto de funções de chaveamento por LMIs.

Por este motivo, considerando regras de chaveamento baseadas em funções de Lyapunov, é pertinente buscar candidatas a função de Lyapunov com expressões mais complexas a fim de permitir maior flexibilidade no formato das superfícies de deslizamento criadas. Para tanto, serão utilizadas candidatas a função Lyapunov baseadas em matrizes polinomiais multivariadas  $P(\xi)$ , uma vez que candidatas à função de Lyapunov mais complexas do que as apenas quadráticas podem relaxar as condições de projeto e proporcionar um melhor desempenho do sistema controlado (RAMOS, 2018). Com base nas pesquisas realizadas pelo autor, não foram encontrados outros estudos em que se aplicam funções de Lyapunov polinomiais para o controle de sistemas chaveados afins.

### 3.1 Soma de Quadrados

Um formato conveniente para candidatas a funções de Lyapunov mais complexas do que as apenas quadráticas é o polinomial multivariado, em que cada elemento da matriz  $P$  deixa de ser formado apenas por constantes para ser composto por uma classe de polinômios em  $x \in \mathbb{R}^n$ . Assim, pode-se obter funções bastante complexas, mas que são facilmente diferenciáveis, e existem métodos numéricos recentemente explorados para analisar e garantir a positividade da função. Nesta seção será feita uma introdução à utilização de matrizes  $P$  polinomiais.

#### 3.1.1 Decomposição em soma de quadrados

Uma das condições necessárias para que uma determinada função possa ser considerada uma candidata à função de Lyapunov é que esta seja positiva definida. Quando a candidata à função de Lyapunov é do tipo  $x'Px$ , sua positividade depende apenas da positividade da matriz  $P$ , cuja forma de verificação é relativamente simples. Contudo, em se tratando de candidatas à função de Lyapunov polinomiais, esta análise é um problema bastante complexo.

Uma maneira de se reduzir a complexidade da verificação da positividade global de uma função polinomial multivariada é por meio da decomposição em soma de quadrados (do inglês, *sum of squares* - SOS), uma vez que a programação semidefinida pode lidar facilmente com polinômios deste subconjunto (SOS). Em contrapartida, polinômios descritos pela soma de quadrados são um subconjunto das funções polinomiais positivas semidefinidas (RAMOS, 2018). Mesmo assim, experimentos numéricos indicam que a diferença entre estes conjuntos é pequena (PRAJNA; PAPACHRISTODOULOU; WU, 2004; PARRILO; STURMFELS, 2003). Antes de um maior detalhamento, algumas definições serão apresentadas.

**Definição 2.** (PRAJNA; PAPACHRISTODOULOU; WU, 2004) *Um monômio dependente de*

$x \in \mathbb{R}^n$  é uma função da forma  $x_{(1)}^{\beta_1} x_{(2)}^{\beta_2} \dots x_{(n)}^{\beta_n}$ , sendo  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$  inteiros não negativos.

**Definição 3.** (PARRILO, 2000) Um polinômio multivariado  $\mathcal{F}(x)$  é uma combinação linear finita de monômios:

$$\mathcal{F}(x) = \sum_{\beta} c_{\beta} x^{\beta} = \sum_{\beta} c_{\beta} x_{(1)}^{\beta_1} \dots x_{(n)}^{\beta_n}, \quad c_{\beta} \in \eta \quad (38)$$

sendo que a soma é sobre um número finito de  $n$ -uplas  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{N}$  e  $\eta$  é o conjunto de coeficientes  $c_{\beta}$ .

Das Definições 2 e 3, tem-se que o grau de um monômio ( $d$ ) é definido como:

$$d := \sum_{i=1}^n \beta_i, \quad (39)$$

e o grau de um polinômio, bem como o grau de uma matriz polinomial, é o maior grau dentre os graus de seus monômios (FRIEDLAND; MELMAN, 2020).

Sendo  $\mathcal{F}(x), x \in \mathbb{R}^n$ , um polinômio multivariado positivo semidefinido:

$$\mathcal{F}(x_{(1)}, \dots, x_{(n)}) \geq 0, \quad \forall x_{(1)}, \dots, x_{(n)} \in \mathbb{R}, \quad (40)$$

então uma condição suficiente para que esta função seja não negativa para qualquer valor de  $x \in \mathbb{R}^n$  é dada pela existência da decomposição em soma de quadrados (PARRILO, 2000, Cap. 4):

$$\mathcal{F}(x) = \sum_i f_i^2(x). \quad (41)$$

Uma das maneiras de se realizar a decomposição em soma de quadrados, que também é chamada em alguns trabalhos de método da "matriz de Gram" (PARRILO, 2000), consiste em expressar um polinômio  $\mathcal{F}(x)$  na forma:

$$\mathcal{F}(x) = z(x)' Q z(x), \quad (42)$$

sendo  $z(x)$  um vetor de monômios das variáveis do vetor  $x$  e  $Q$  uma matriz constante. Se nesta representação  $Q$  for positiva semidefinida, então  $\mathcal{F}(x)$  também o será. Portanto, o problema de verificação da positividade de uma função é convertido num problema de análise da positividade da matriz constante  $Q$ , que é mais simples computacionalmente. Devido ao fato de as variáveis  $z_{(i)}$  (monômios em  $x$ ) não serem necessariamente independentes entre si, pode haver diferentes matrizes  $Q$  que satisfaçam (42), inclusive matrizes que não são positivas semidefinidas. Este fato traz conservadorismo à metodologia, por isso, para ampliação das soluções encontradas, ainda devem ser aplicadas técnicas como a decomposição em autovalores para matrizes reais

simétricas (PARRILO, 2000; PRAJNA; PAPACHRISTODOULOU; WU, 2004).

Neste trabalho, serão utilizadas funções polinomiais da forma

$$x'F(x)x, \quad (43)$$

sendo que a própria matriz  $F(x)$  é polinomial. Neste caso, diferentemente da situação apresentada em (42), não é possível analisar diretamente a positividade da matriz  $F(x)$ , já que esta não é uma matriz constante. Portanto, para viabilizar o processo de determinação da positividade de uma função polinomial da forma (43), Prajna, Papachristodoulou e Wu (2004) propuseram uma metodologia baseada em um vetor de monômios  $v$  independente das variáveis do vetor  $x$ .

Esta metodologia utiliza o produto de Kronecker, que é denotado por  $\otimes$  e é um operador entre duas matrizes de dimensões arbitrárias, resultando em um bloco matricial (RAMOS, 2018). A título de exemplo, considere as matrizes  $A \in \mathbb{R}^{(m \times n)}$ , formada pelos elementos  $a_{mn}$ , e  $B \in \mathbb{R}^{(p \times q)}$ , formada pelos elementos  $b_{pq}$ . O produto de Kronecker entre estas duas matrizes,  $C = A \otimes B$ ,  $C \in \mathbb{R}^{(mp \times nq)}$  é dado por:

$$C = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & \cdots & a_{11}b_{1q} & \cdots & \cdots & a_{1n}b_{11} & a_{1n}b_{12} & \cdots & a_{1n}b_{1q} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & \cdots & a_{11}b_{2q} & \cdots & \cdots & a_{1n}b_{21} & a_{1n}b_{22} & \cdots & a_{1n}b_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{11}b_{p1} & a_{11}b_{p2} & \cdots & a_{11}b_{pq} & \cdots & \cdots & a_{1n}b_{p1} & a_{1n}b_{p2} & \cdots & a_{1n}b_{pq} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}b_{11} & a_{m1}b_{12} & \cdots & a_{m1}b_{1q} & \cdots & \cdots & a_{mn}b_{11} & a_{mn}b_{12} & \cdots & a_{mn}b_{1q} \\ a_{m1}b_{21} & a_{m1}b_{22} & \cdots & a_{m1}b_{2q} & \cdots & \cdots & a_{mn}b_{21} & a_{mn}b_{22} & \cdots & a_{mn}b_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}b_{p1} & a_{m1}b_{p2} & \cdots & a_{m1}b_{pq} & \cdots & \cdots & a_{mn}b_{p1} & a_{mn}b_{p2} & \cdots & a_{mn}b_{pq} \end{bmatrix}. \quad (44)$$

**Proposição 1.** (PRAJNA; PAPACHRISTODOULOU; WU, 2004) *Suponha que é dada uma matriz polinomial  $F(x) \in \mathbb{R}^{n_v \times n_v}$  simétrica de grau  $2d$  dependente de  $x \in \mathbb{R}^n$ , ou seja, cada um de seus elementos corresponde a um polinômio  $f_{ij}(x)$  de grau não maior que  $2d$ . Além disso, seja  $z(x) \in \mathbb{R}^{n_z}$  um vetor coluna cujos elementos são todos monômios em  $x$  com grau não maior que  $d$ . Considere as seguintes condições:*

1.  $F(x) \geq 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ ;
2.  $v'F(x)v$  é um SOS, sendo que  $v \in \mathbb{R}^{n_v}$ ;
3. Existe uma matriz positiva semidefinida  $S$  tal que  $v'F(x)v = (v \otimes z(x))'S(v \otimes z(x))$ ,

em que  $\otimes$  denota o produto de Kronecker.

Então,  $1 \Leftarrow 2$  e  $2 \Leftrightarrow 3$ .

**Demonstração.**  $1 \Leftarrow 2$ : sendo  $v^T F(x)v$  uma soma de quadrados, isto implica que  $v^T F(x)v \geq 0$  para todo  $(v, x) \in \mathbb{R}^{n_v+n}$ , que é equivalente a  $F(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$ .

$2 \Leftrightarrow 3$ : esta equivalência segue como um caso especial de (42). O vetor de monômios pode ser escolhido da forma  $(v \otimes z(x))$ , devido ao resultado em Reznick et al. (1978), que caracteriza os monômios que podem aparecer na forma quadrática (42). Os detalhes serão omitidos por estarem fora do escopo do trabalho.

□

De acordo com a condição 3 da Proposição 1, funções polinomiais positivas semidefinidas da forma (43) podem ser reescritas na forma (42), o que torna o problema mais simples, sendo necessária apenas a análise da positividade de uma matriz constante  $S \in \mathbb{R}^{(n_v n_z) \times (n_v n_z)}$ , assim como se faz a análise da positividade da matriz  $Q$  para funções da forma (42).

Portanto, se for possível determinar matrizes polinomiais  $F(x) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $\varepsilon(x) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\varepsilon(x) > 0, \forall x, x \neq 0$ , tais que  $F(x) - \varepsilon(x) \geq 0$  para todo  $x \neq 0$ , então  $F(x) > 0$  para todo  $x \neq 0$ . Uma revisão e explicação mais detalhada da teoria de decomposição em soma de quadrados e sua forma de aplicação em leis de controle via LMI é feita em Ramos (2018).

### 3.2 Regras de Chaveamento Utilizando Funções de Lyapunov Polinomiais Multivariadas

Considerando que neste trabalho as funções de Lyapunov serão expressas em função da variável  $\xi$ , dada a existência de uma matriz polinomial  $P(\xi)$ , então sua derivada no tempo ( $\dot{P}(\xi)$ ) é dada por:

$$\begin{aligned} \dot{P}(\xi) &= \frac{\partial P(\xi)}{\partial \xi} \frac{d\xi}{dt} \\ &= \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial P(\xi)}{\partial \xi^{(k)}} \dot{\xi}^{(k)} \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial P(\xi)}{\partial \xi^{(k)}} \cdot (A_{\sigma} x + B_{\sigma} w)^{(k)} \right), \end{aligned} \quad (45)$$

sendo  $k$  o índice que representa a  $k$ -ésima linha do vetor de estado  $\xi$ .

Para melhor apresentação do equacionamento, as seguintes variáveis são definidas:

$$\mathfrak{P}_i = \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial P(\xi)}{\partial \xi^{(k)}} \cdot (A_i x + B_i w)_{(k)} \right), \quad (46)$$

$$\mathfrak{Q}_i = \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial P(\xi)}{\partial \xi^{(k)}} \cdot (A_i \xi)_{(k)} \right), \quad (47)$$

$$\mathfrak{R}_i = \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial P(\xi)}{\partial \xi^{(k)}} \cdot (A_i x_r + B_i w)_{(k)} \right). \quad (48)$$

Deve-se observar que o índice do subsistema  $(i, \sigma, \lambda_r)$  acompanha as variáveis definidas acima. Além disso, nota-se que  $\mathfrak{P}_i = \mathfrak{Q}_i + \mathfrak{R}_i$ .

A seguir, é proposta a primeira contribuição deste trabalho, o Teorema 5, que aborda o mesmo problema do Teorema 2, porém que utiliza uma função de Lyapunov baseada numa matriz polinomial multivariada a fim de flexibilizar as possibilidades de superfícies de deslizamento, o que pode trazer melhor desempenho transitório aos sistemas chaveados afins.

**Teorema 5.** *Considere o sistema chaveado afim (1) com entrada  $w$  constante, a matriz  $Q_{\lambda_r}(\xi) \geq 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e a variável  $\xi = x - x_r$  e seja o ponto de equilíbrio  $x_r \in \chi_r$  dado. Se existirem  $\lambda_r \in \Lambda_N$  e uma matriz simétrica polinomial multivariada  $P(\xi) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tais que:*

$$v'(P(\xi) - \varepsilon(\xi))v \quad \text{é SOS}, \quad (49)$$

$$-v'(A_{\lambda_r}'P(\xi) + P(\xi)A_{\lambda_r} + \mathfrak{Q}_{\lambda_r} + Q_{\lambda_r}(\xi) + \varepsilon(\xi))v \quad \text{é SOS}, \quad (50)$$

$$A_{\lambda_r}x_r + B_{\lambda_r}w = 0, \quad (51)$$

então a estratégia de chaveamento

$$\sigma(x) = \arg \min_{i \in \mathbb{K}_N} (2\xi'P(\xi)(A_i x + B_i w) + \xi'(\mathfrak{P}_i + Q_i)\xi), \quad (52)$$

torna o ponto de equilíbrio  $x_r$  globalmente assintoticamente estável e o custo garantido

$$J = \int_0^\infty \xi'Q_\sigma(\xi)\xi dt < \xi(0)'P(\xi(0))\xi(0) \quad (53)$$

mantém-se, considerando-se que  $v \in \mathbb{R}^n$  é um vetor de monômios independente do vetor de estado  $\xi$ , e  $\varepsilon(\xi) > 0$  para  $\xi \neq 0$ .

**Demonstração.** Para esta demonstração, lembre-se que  $A_{\lambda_r}, B_{\lambda_r}$  e  $C_{\lambda_r}$  são estabelecidos em (13) e  $\mathfrak{P}_{\lambda_r}, \mathfrak{Q}_{\lambda_r}, \mathfrak{R}_{\lambda_r}$  e  $Q_{\lambda_r}$  são dados por:

$$(\mathfrak{P}_{\lambda_r}, \mathfrak{Q}_{\lambda_r}, \mathfrak{R}_{\lambda_r}, Q_{\lambda_r}) = \sum_{i=1}^N \lambda_{r(i)} (\mathfrak{P}_i, \mathfrak{Q}_i, \mathfrak{R}_i, Q_i). \quad (54)$$

Considerando a candidata à função de Lyapunov  $V(\xi) = \xi'P(\xi)\xi$  e (1), tem-se que

$$\dot{V}(\xi) = 2\xi'P(\xi)\dot{\xi} + \xi'\mathfrak{P}_\sigma\xi, \quad (55)$$

$$\dot{V}(\xi) = 2\xi'P(\xi)(A_\sigma x + B_\sigma w) + \xi'\mathfrak{P}_\sigma\xi, \quad (56)$$

adicionando-se e subtraindo-se  $\xi'Q_\sigma(\xi)\xi$ ,

$$\dot{V}(\xi) = 2\xi'P(\xi)(A_\sigma x + B_\sigma w) + \xi'(\mathfrak{P}_\sigma)\xi + \xi'Q_\sigma(\xi)\xi - \xi'Q_\sigma(\xi)\xi, \quad (57)$$

$$\dot{V}(\xi) = 2\xi'P(\xi)(A_\sigma x + B_\sigma w) + \xi'(\mathfrak{P}_\sigma + Q_\sigma(\xi))\xi - \xi'Q_\sigma(\xi)\xi. \quad (58)$$

Pela regra de chaveamento (52):

$$\dot{V}(\xi) = \min_{i \in \mathbb{K}_N} (2\xi'P(\xi)(A_i x + B_i w) + \xi'(\mathfrak{P}_i + Q_i(\xi))\xi) - \xi'Q_\sigma(\xi)\xi \quad (59)$$

$$\dot{V}(\xi) \leq 2\xi'P(\xi)(A_{\lambda_r} x + B_{\lambda_r} w) + \xi'(\mathfrak{P}_{\lambda_r} + Q_{\lambda_r}(\xi))\xi - \xi'Q_\sigma(\xi)\xi \quad (60)$$

$$\dot{V}(\xi) \leq 2\xi'P(\xi)(A_{\lambda_r}(\xi + x_r) + B_{\lambda_r} w) + \xi'(\mathfrak{Q}_{\lambda_r} + \mathfrak{R}_{\lambda_r} + Q_{\lambda_r}(\xi))\xi - \xi'Q_\sigma(\xi)\xi \quad (61)$$

$$\dot{V}(\xi) \leq 2\xi'P(\xi)(A_{\lambda_r}\xi + A_{\lambda_r}x_r + B_{\lambda_r}w) + \xi'(\mathfrak{Q}_{\lambda_r} + \mathfrak{R}_{\lambda_r} + Q_{\lambda_r}(\xi))\xi - \xi'Q_\sigma(\xi)\xi. \quad (62)$$

Pela condição (51), tem-se de (62) que:

$$\dot{V}(\xi) \leq 2\xi'P(\xi)A_{\lambda_r}\xi + \xi'(\mathfrak{Q}_{\lambda_r} + Q_{\lambda_r}(\xi))\xi - \xi'Q_\sigma(\xi)\xi, \quad (63)$$

$$\dot{V}(\xi) \leq \xi'(A_{\lambda_r}'P(\xi) + P(\xi)A_{\lambda_r})\xi + \xi'(\mathfrak{Q}_{\lambda_r} + Q_{\lambda_r}(\xi))\xi - \xi'Q_\sigma(\xi)\xi, \quad (64)$$

$$\dot{V}(\xi) \leq \xi'(A_{\lambda_r}'P(\xi) + P(\xi)A_{\lambda_r} + \mathfrak{Q}_{\lambda_r} + Q_{\lambda_r}(\xi))\xi - \xi'Q_\sigma(\xi)\xi. \quad (65)$$

Agora, considerando que a restrição (50) é satisfeita, tem-se que

$$\dot{V}(\xi) < -\xi'Q_\sigma(\xi)\xi, \quad \forall \xi \neq 0. \quad (66)$$

Portanto, está garantida a estabilidade assintótica. Finalmente, integrando ambos os lados de (66), tem-se:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \dot{V}(\xi(t)) dt &< - \int_0^\infty \xi'Q_\sigma(\xi)\xi dt, \\ (V(\xi(t))) \Big|_0^\infty &< - \int_0^\infty \xi'Q_\sigma(\xi)\xi dt, \\ (V(\xi(\infty)) - V(\xi(0))) &< - \int_0^\infty \xi'Q_\sigma(\xi)\xi dt. \end{aligned} \quad (67)$$

Considerando que o sistema é assintoticamente estável,  $V(\xi(\infty)) = 0$ , então

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \xi' Q_{\sigma}(\xi) \xi dt &< V(\xi(0)), \\ J = \int_0^{\infty} \xi' Q_{\sigma}(\xi) \xi dt &< \xi(0)' P(\xi(0)) \xi(0). \end{aligned} \quad (68)$$

Portanto, está garantido o custo (53).

□

O Teorema 5 permite a formulação do seguinte problema de otimização:

$$\inf_{P(\xi) > 0} \{ \text{Tr}(P(\xi)) : A'_{\lambda} P(\xi) + P(\xi) A_{\lambda} + Q_{\lambda}(\xi) < 0, \quad \lambda \in \Lambda_N \}. \quad (69)$$

**Corolário 1.** Sempre que o Teorema 2 for factível, então o Teorema 5 também será factível e fornecerá um custo garantido menor ou igual ao fornecido pelo Teorema 2.

**Demonstração.** A candidata a função de Lyapunov quadrática  $\xi' P \xi$  é dada na forma (42), então, sempre que  $P$  for positiva definida, esta função será uma soma de quadrados. Isto significa que a candidata a função de Lyapunov quadrática utilizada no Teorema 2 é um caso particular da candidata a função de Lyapunov polinomial multivariada utilizada no Teorema 5. Assim, a prova está concluída.

□

Dentre as condições do Teorema 5, é necessário que haja uma matriz polinomial multivariada  $P(\xi)$  tal que a função de Lyapunov baseada nesta matriz garanta a estabilidade de um ponto de equilíbrio específico ( $x_r$ ). Esta condição flexibiliza a escolha da matriz e  $P(\xi)$ , e leva a um menor custo garantido e, conseqüentemente, a um desempenho melhor, contudo, a regra de chaveamento proposta (52) só garante a estabilização do sistema para o ponto  $x_r$ . Há sistemas em que é desejável que se possa variar o ponto de referência. Por este motivo, é interessante que se tenha uma regra de chaveamento que possa ser aplicada a qualquer ponto de equilíbrio desejado ( $x_r$ ) sem a necessidade de se calcular uma nova matriz  $P(\xi)$ . Esta regra é proposta no Teorema 6, que pode ser considerado como uma generalização do Teorema 3.

**Teorema 6.** Considere o sistema chaveado afim (1) com entrada  $w$  constante, as matrizes  $Q_i(\xi) \geq 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e a variável  $\xi = x - x_r$  e seja o ponto de equilíbrio  $x_r \in \mathcal{X}_r$  dado. Se existirem  $\lambda_r \in \Lambda_N$  e uma matriz simétrica polinomial multivariada  $P(\xi) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tais que:

$$v'(P(\xi) - \varepsilon(\xi))v \quad \text{é SOS}, \quad (70)$$

$$- \mathbf{v}' (A_i' P(\xi) + P(\xi) A_i + \Omega_i + Q_i(\xi) + \varepsilon(\xi)) \mathbf{v} \quad \text{é SOS,} \quad (71)$$

para todo  $i \in \mathbb{K}_N$ ,

$$A_{\lambda_r} x_r + B_{\lambda_r} w = 0, \quad (72)$$

então a estratégia de chaveamento

$$\sigma(x) = \arg \min_{i \in \mathbb{K}_N} (2\xi' P(\xi) (A_i x_r + B_i w) + \xi' \mathfrak{R}_i \xi) \quad (73)$$

torna o ponto de equilíbrio  $x_r$  globalmente assintoticamente estável e o custo garantido (53) mantém-se, considerando-se que  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$  é um vetor de monômios independente do vetor de estado  $\xi$ , e  $\varepsilon(\xi) > 0$  para  $\xi \neq 0$ .

**Demonstração.** Considerando a candidata a função de Lyapunov  $V(\xi) = \xi' P(\xi) \xi$  e (1), tem-se que

$$\dot{V}(\xi) = 2\xi' P(\xi) (A_\sigma x + B_\sigma w) + \xi' \mathfrak{R}_\sigma \xi, \quad (74)$$

$$\dot{V}(\xi) = 2\xi' P(\xi) (A_\sigma (\xi + x_r) + B_\sigma w) + \xi' (\Omega_\sigma + \mathfrak{R}_\sigma) \xi, \quad (75)$$

$$\dot{V}(\xi) = 2\xi' P(\xi) (A_\sigma \xi + A_\sigma x_r + B_\sigma w) + \xi' (\Omega_\sigma + \mathfrak{R}_\sigma) \xi, \quad (76)$$

$$\dot{V}(\xi) = 2\xi' P(\xi) A_\sigma \xi + 2\xi' P(\xi) (A_\sigma x_r + B_\sigma w) + \xi' (\Omega_\sigma + \mathfrak{R}_\sigma) \xi, \quad (77)$$

$$\dot{V}(\xi) = \xi' (A_\sigma' P(\xi) + P(\xi) A_\sigma) \xi + 2\xi' P(\xi) (A_\sigma x_r + B_\sigma w) + \xi' (\Omega_\sigma + \mathfrak{R}_\sigma) \xi, \quad (78)$$

$$\dot{V}(\xi) = 2\xi' P(\xi) (A_\sigma x_r + B_\sigma w) + \xi' \mathfrak{R}_\sigma \xi + \xi' (A_\sigma' P(\xi) + P(\xi) A_\sigma + \Omega_\sigma) \xi. \quad (79)$$

Pela Regra de chaveamento (73):

$$\dot{V}(\xi) = \min_{i \in \mathbb{K}_N} (2\xi' P(\xi) (A_i x_r + B_i w) + \xi' \mathfrak{R}_i \xi) + \xi' (A_\sigma' P(\xi) + P(\xi) A_\sigma + \Omega_\sigma) \xi, \quad (80)$$

$$\dot{V}(\xi) \leq (2\xi' P(\xi) (A_{\lambda_r} x_r + B_{\lambda_r} w) + \xi' \mathfrak{R}_{\lambda_r} \xi) + \xi' (A_\sigma' P(\xi) + P(\xi) A_\sigma + \Omega_\sigma) \xi. \quad (81)$$

Pela condição (72), tem-se de (81) que:

$$\dot{V}(\xi) \leq \xi' (A_\sigma' P(\xi) + P(\xi) A_\sigma + \Omega_\sigma) \xi. \quad (82)$$

Agora, considerando que a condição restrição (71) se mantém,

$$\dot{V}(\xi) < -\xi' Q_\sigma(\xi) \xi, \quad \forall \xi \neq 0. \quad (83)$$

Portanto, está garantida a estabilidade assintótica. Fazendo a integração de ambos os lados de (83), tem-se:

$$\int_0^\infty \dot{V}(\xi(t)) dt < - \int_0^\infty \xi' Q_\sigma(\xi) \xi dt,$$

$$\begin{aligned} (V(\xi(t))) \Big|_0^\infty &< - \int_0^\infty \xi' Q_\sigma(\xi) \xi dt, \\ (V(\xi(\infty)) - V(\xi(0))) &< - \int_0^\infty \xi' Q_\sigma(\xi) \xi dt, \end{aligned} \quad (84)$$

considerando que o sistema é assintoticamente estável,  $V(\xi(\infty)) = 0$ , então

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \xi' Q_\sigma(\xi) \xi dt &< V(\xi(0)), \\ J = \int_0^\infty \xi' Q_\sigma(\xi) \xi dt &< \xi(0)' P(\xi(0)) \xi(0). \end{aligned} \quad (85)$$

Portanto, está garantido o custo (53).

□

O Teorema 6 permite a formulação do seguinte problema de otimização:

$$\inf_{P(\xi) > 0} \{ \text{Tr}(P(\xi)) : A_i' P(\xi) + P(\xi) A_i + Q_i(\xi) < 0, \quad i \in K_N \}. \quad (86)$$

Note que o Corolário 1 também se aplica ao par de Teoremas 3 e 6.

### 3.2.1 Estabilidade Exponencial

Em se tratando de controle de sistemas, outro importante parâmetro de desempenho é a taxa de decaimento. Este parâmetro é bastante abordado na literatura e, quando se trata de controle via LMI, uma referência importante é (BOYD et al., 1994). Como a função de Lyapunov clássica é quadrática, como  $V = \xi' P \xi$ , a taxa de decaimento do sistema é considerada metade da taxa de decaimento da função de Lyapunov. Então, para um sistema linear

$$\dot{\xi} = A\xi, \quad (87)$$

considera-se que este sistema é exponencialmente estável para todas as trajetórias, com taxa de decaimento maior ou igual a  $\gamma$ , se  $V(x(t)) \leq V(x(0)) e^{-2\gamma t}$ , o que é equivalente à condição LMI (BOYD et al., 1994, Cap. 5):

$$A'P + PA + 2\gamma P \leq 0. \quad (88)$$

Contudo, no caso de uma candidata a função de Lyapunov polinomial, se qualquer um de seus monômios for de grau maior que zero, esta função terá grau maior que 2. Assim, a condição (88) não será adequada para garantir a estabilidade exponencial de um sistema. Portanto, este trabalho propõe um lema para garantir estabilidade exponencial de sistemas considerando as

funções de Lyapunov polinomiais multivariadas. Além disso, propõe-se um teorema para tratar especificamente do caso de sistemas chaveados afins.

**Lema 1.** *Dado um sistema linear (87), com  $\xi \in \mathbb{R}^n$  e  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e considerando a candidata a função de Lyapunov polinomial multivariada  $V(\xi) = \xi' P(\xi) \xi$ , este sistema é globalmente exponencialmente estável com taxa de decaimento maior ou igual a  $\gamma$ ,  $\gamma \in \mathbb{R}$ , se*

$$-v'(A'P(\xi) + P(\xi)A + 2\gamma P(\xi) + \Omega + \Gamma + \varepsilon(\xi))v \text{ é SOS} \quad (89)$$

se mantém, em que

$$\Omega = \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial P(\xi)}{\partial \xi^{(k)}} \cdot (A\xi)_{(k)} \right) \quad (90)$$

e

$$\Gamma = \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial P(\xi)}{\partial \xi^{(k)}} \cdot (\gamma\xi)_{(k)} \right). \quad (91)$$

**Demonstração.** *Para garantir estabilidade exponencial, é necessário garantir um limitante superior para a parte real dos autovalores da matriz do sistema. Isto será feito considerando uma matriz  $A_{EX} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tal que:*

$$A_{EX} = A + \gamma I, \quad (92)$$

e

$$\Omega_{EX} = \Omega + \Gamma, \quad (93)$$

sendo que  $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$  é a matriz identidade. Se a matriz do sistema  $A_{EX}$  for assintoticamente estável, então a parte real de todos os autovalores de  $A$  será menor que  $-\gamma$ . Considerando a derivada da candidata a função de Lyapunov polinomial multivariada para um sistema com matriz  $A_{EX}$ , tem-se, para  $\xi \neq 0$ :

$$\dot{V}_{AS}(\xi) = 2\xi' P(\xi) A_{EX} \xi + \xi' \Omega_{EX} \xi < 0, \quad (94)$$

$$\dot{V}_{AS}(\xi) = 2\xi' P(\xi) (A + \gamma I) \xi + \xi' (\Omega + \Gamma) \xi < 0, \quad (95)$$

$$\dot{V}_{AS}(\xi) = 2\xi' P(\xi) A \xi + \xi' \Omega \xi + 2\gamma \xi' P(\xi) \xi + \xi' \Gamma \xi < 0, \quad (96)$$

$$\dot{V}_{AS}(\xi) = \dot{V}(\xi) + 2\gamma \xi' P(\xi) \xi + \xi' \Gamma \xi < 0. \quad (97)$$

A condição (97) é equivalente a (89), assim, a prova está completa.

□

Baseado no Lema 1, o Teorema 7 é proposto considerando as mesmas condições do Teorema 4 e garantindo estabilidade exponencial para os sistemas chaveados afins abordados.

**Teorema 7.** *Considere o sistema chaveado afim (1) com entrada  $w$  constante, as matrizes  $Q_i(\xi) \geq 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e a variável  $\xi = x - x_r$  e sejam o ponto de equilíbrio  $x_r \in \mathcal{X}_r$  e o escalar  $\gamma > 0 \in \mathbb{R}$  dados. Se existirem  $\lambda_r \in \Lambda_N$  e uma matriz simétrica polinomial multivariada  $P(\xi) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tais que:*

$$v'(P(\xi) - \varepsilon(\xi))v \text{ é SOS,} \quad (98)$$

$$-v'(A_i'P(\xi) + P(\xi)A_i + \Omega_i + Q_i(\xi) + \varepsilon(\xi))v \text{ é SOS} \quad (99)$$

e

$$-v'(A_i'P(\xi) + P(\xi)A_i + 2\gamma P(\xi) + \Omega_i + \Gamma + \varepsilon(\xi)I)v \text{ é SOS,} \quad (100)$$

para todo  $i \in \mathbb{K}_N$ , e

$$A_{\lambda_r}x_r + B_{\lambda_r}w = 0, \quad (101)$$

então, a estratégia de chaveamento (73) torna o ponto de equilíbrio  $x_r$  globalmente exponencialmente estável com taxa de decaimento maior ou igual a  $\gamma$  e o custo garantido (53) se mantém, considerando-se que  $v \in \mathbb{R}^n$  é um vetor de monômios independentes do vetor de estado  $\xi$ , e  $\varepsilon(\xi) > 0$  para  $\xi \neq 0$ .

**Demonstração.** *Seguindo os mesmos passos da prova do Teorema 6 até (81) e considerando (101), tem-se que:*

$$\dot{V}(\xi) \leq \xi'(A_\sigma'P(\xi) + P(\xi)A_\sigma + \Omega_\sigma)\xi. \quad (102)$$

Considerando que a restrição (99) se mantém, tem-se que

$$\dot{V}(\xi) < -\xi'Q_\sigma(\xi)\xi, \quad \forall \xi \neq 0. \quad (103)$$

Assim, a estabilidade assintótica é garantida. Além disso, considerando (103) e seguindo os passos de (67) e (68), o custo (53) é garantido.

Para garantir a estabilidade exponencial, os termos  $2\gamma P(\xi)$  e  $\Gamma$  são adicionados a (102):

$$\dot{V}(\xi) + \xi'(2\gamma P(\xi) + \Gamma)\xi \leq \xi'(A_\sigma'P(\xi) + P(\xi)A_\sigma + \Omega_\sigma + 2\gamma P(\xi) + \Gamma)\xi. \quad (104)$$

Considerando-se que (100) se mantém, tem-se

$$\dot{V}(\xi) + \xi'(2\gamma P(\xi) + \Gamma)\xi < 0, \quad \forall \xi \neq 0. \quad (105)$$

Então, de acordo com o Lema 1, a estabilidade exponencial, com taxa de decaimento maior ou igual a  $\gamma$ , está garantida. A prova está completa.

□

O Teorema 7 permite a formulação do seguinte problema de otimização:

$$\inf_{P(\xi) > 0} \{ \text{Tr}(P(\xi)) : (99) - (100), \quad i \in K_N \}. \quad (106)$$

Note que o Corolário 1 também se aplica ao par de Teoremas 4 e 7.

### 3.2.2 Custo Garantido

A seguir, são propostos dois lemas que irão fundamentar a análise da relação entre funções de Lyapunov polinomiais multivariadas e o custo garantido (53).

Antes da proposta dos lemas, serão apresentados exemplos da estrutura de funções quadráticas da forma  $\xi' Q \xi$ , como a função de Lyapunov quadrática, e funções polinomiais da forma  $\xi' \mathcal{Q}(\xi) \xi$ , sendo  $\mathcal{Q}(\xi)$  uma matriz polinomial multivariada, a fim de facilitar a explicação dos lemas. Para estes exemplos, considere o vetor  $\xi \in \mathbb{R}^n$ , qualquer matriz constante (simétrica) positiva definida  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e qualquer matriz polinomial multivariada (simétrica) positiva definida  $\mathcal{Q}(\xi) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , em que cada termo da matriz é composto por um polinômio multivariado de grau  $2m$ ,  $m \in \mathbb{N}^*$ . Especificamente, será considerado que  $n = 2$  e  $m = 1$  ou seja, cada termo da matriz  $\mathcal{Q}(\xi)$  corresponde a um polinômio em  $\xi$  de grau não maior que 2. Assim, tem-se:

$$\xi' Q \xi = \begin{bmatrix} \xi_{(1)} \\ \xi_{(2)} \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{12} & q_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_{(1)} \\ \xi_{(2)} \end{bmatrix} = q_{11} \xi_{(1)}^2 + 2q_{12} \xi_{(1)} \xi_{(2)} + q_{22} \xi_{(2)}^2. \quad (107)$$

Já a função  $\xi' \mathcal{Q}(\xi) \xi$ , de acordo com a Proposição 1, tem a seguinte estrutura:

$$\xi' \mathcal{Q}(\xi) \xi = (\xi \otimes z(\xi))' S(\xi \otimes z(\xi)). \quad (108)$$

Sendo  $m = 1$ , os possíveis monômios de grau não maior que 1 com as variáveis  $\xi_{(1)}$  e  $\xi_{(2)}$  estão presentes no vetor  $z(\xi) \in \mathbb{R}^3$ :

$$z(\xi) = [\xi_{(1)} \quad \xi_{(2)} \quad k]' , \quad (109)$$

e o produto de Kronecker entre os vetores  $z$  e  $\xi$  é dado por:

$$\xi \otimes z(\xi) = \left[ \xi_{(1)}^2 \quad \xi_{(1)} \xi_{(2)} \quad \xi_{(1)} k \quad \xi_{(1)} \xi_{(2)} \quad \xi_{(2)}^2 \quad \xi_{(2)} k \right]' . \quad (110)$$

A partir de (110), nota-se que a função (108) tem a seguinte estrutura:

$$\begin{bmatrix} \xi_{(1)}^2 \\ \xi_{(1)}\xi_{(2)} \\ \xi_{(1)}k \\ \xi_{(1)}\xi_{(2)} \\ \xi_{(2)}^2 \\ \xi_{(2)}k \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} & s_{15} & s_{16} \\ s_{12} & s_{22} & s_{23} & s_{24} & s_{25} & s_{26} \\ s_{13} & s_{23} & s_{33} & s_{34} & s_{35} & s_{36} \\ s_{14} & s_{24} & s_{34} & s_{44} & s_{45} & s_{46} \\ s_{15} & s_{25} & s_{35} & s_{45} & s_{55} & s_{56} \\ s_{16} & s_{26} & s_{36} & s_{46} & s_{56} & s_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_{(1)}^2 \\ \xi_{(1)}\xi_{(2)} \\ \xi_{(1)}k \\ \xi_{(1)}\xi_{(2)} \\ \xi_{(2)}^2 \\ \xi_{(2)}k \end{bmatrix}, \quad (111)$$

sendo que a matriz constante positiva definida  $S$  está representada por todos os seus elementos.

Fazendo a multiplicação, chega-se a:

$$\begin{aligned} \xi' \mathcal{Q}(\xi) \xi = & s_{11} \xi_{(1)}^4 + 2s_{12} \xi_{(1)}^3 \xi_{(2)} + 2ks_{13} \xi_{(1)}^3 + 2s_{14} \xi_{(1)}^3 \xi_{(2)} + 2s_{15} \xi_{(1)}^2 \xi_{(2)}^2 + 2ks_{16} \xi_{(1)}^2 \xi_{(2)} \\ & + s_{22} \xi_{(1)}^2 \xi_{(2)}^2 + 2ks_{23} \xi_{(1)}^2 \xi_{(2)} + 2s_{24} \xi_{(1)}^2 \xi_{(2)}^2 + 2ks_{25} \xi_{(1)} \xi_{(2)}^3 + 2ks_{26} \xi_{(1)} \xi_{(2)}^2 \\ & + 2k^2 s_{33} \xi_{(1)}^2 + 2ks_{34} \xi_{(1)}^2 \xi_{(2)} + 2ks_{35} \xi_{(1)} \xi_{(2)}^2 + 2k^2 s_{36} \xi_{(1)} \xi_{(2)} + s_{44} \xi_{(1)}^2 \xi_{(2)}^2 \\ & + 2s_{45} \xi_{(1)} \xi_{(2)}^3 + 2ks_{46} \xi_{(1)} \xi_{(2)}^2 + s_{55} \xi_{(2)}^4 + 2ks_{56} \xi_{(2)}^3 + k^2 s_{66} \xi_{(2)}^2, \end{aligned} \quad (112)$$

$$\begin{aligned} \xi' \mathcal{Q}(\xi) \xi = & s_{11} \xi_{(1)}^4 + (2s_{12} + 2s_{14}) \xi_{(1)}^3 \xi_{(2)} + (s_{15} + s_{22} + s_{24}) \xi_{(1)}^2 \xi_{(2)}^2 + 2ks_{13} \xi_{(1)}^3 \\ & + (2ks_{16} + 2ks_{23} + 2ks_{34}) \xi_{(1)}^2 \xi_{(2)} + 2k^2 s_{33} \xi_{(1)}^2 + 2k^2 s_{36} \xi_{(1)} \xi_{(2)} + k^2 s_{66} \xi_{(2)}^2 \\ & + (2ks_{26} + 2ks_{35} + 2ks_{46}) \xi_{(1)} \xi_{(2)}^2 + 2ks_{56} \xi_{(2)}^3 + (s_{15} + s_{24} + s_{44}) \xi_{(1)}^2 \xi_{(2)}^2 \\ & + (2ks_{25} + 2s_{45}) \xi_{(1)} \xi_{(2)}^3 + s_{55} \xi_{(2)}^4. \end{aligned} \quad (113)$$

A representação dos coeficientes pode ser simplificada como abaixo:

$$\begin{aligned} \xi' \mathcal{Q}(\xi) \xi = & c_1 \xi_{(1)}^4 + c_2 \xi_{(1)}^3 \xi_{(2)} + c_3 \xi_{(1)}^2 \xi_{(2)}^2 + c_4 \xi_{(1)}^3 + c_5 \xi_{(1)}^2 \xi_{(2)} + c_6 \xi_{(1)}^2 + c_7 \xi_{(1)} \xi_{(2)} \\ & + c_8 \xi_{(2)}^2 + c_9 \xi_{(1)} \xi_{(2)}^2 + c_{10} \xi_{(2)}^3 + c_{11} \xi_{(1)}^2 \xi_{(2)}^2 + c_{12} \xi_{(1)} \xi_{(2)}^3 + c_{13} \xi_{(2)}^4. \end{aligned} \quad (114)$$

A partir deste exemplo, pode-se escrever a representação generalizada destas funções, para quaisquer valores de  $n$  e  $m$ .

A função  $\xi' Q \xi$  pode ser representada como:

$$\xi' Q \xi = \xi' \begin{bmatrix} q_{11} & \cdots & q_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{1n} & \cdots & q_{nn} \end{bmatrix} \xi = q_{11} \xi_{(1)}^2 + 2q_{12} \xi_{(1)} \xi_{(2)} + \cdots + q_{nn} \xi_{(n)}^2, \quad (115)$$

enquanto a função baseada na matriz polinomial  $\mathcal{Q}(\xi)$  pode ser representada como:

$$\xi' \mathcal{Q}(\xi) \xi = s_{11} \xi_{(1)}^{2+2m} + 2s_{12} \xi_{(1)}^{2+2m-1} \xi_{(2)} + \cdots + s_{(nm_z)(nm_z)} \xi_{(n)}^{2+2m}, \quad (116)$$

sendo a matriz  $S$  generalizada dada por:

$$S = \begin{bmatrix} s_{11} & \cdots & s_{1(mz)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{1(mz)} & \cdots & s_{(mz)(mz)} \end{bmatrix}. \quad (117)$$

Observa-se que a função (116) sempre será um polinômio de grau maior que o grau 2, da função (115), já que  $m \in \mathbb{N}^*$ . Estas representações serão utilizadas na demonstração dos próximos teoremas.

**Lema 2.** *Dados o vetor  $\xi \in \mathbb{R}^n$ , qualquer matriz constante positiva definida  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e qualquer matriz polinomial multivariada positiva definida  $\mathcal{Q}(\xi) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  de grau  $2m$ ,  $m \in \mathbb{N}^*$ , então há pontos  $\xi \in \mathbb{R}^n$  tais que*

$$\lim_{\|\xi\| \rightarrow \infty} \left( \frac{\xi' \mathcal{Q}(\xi) \xi}{\xi' Q \xi} \right) = \infty. \quad (118)$$

**Demonstração.** *A função  $\xi' Q \xi$  tem a estrutura (115), o que corresponde a um polinômio em  $\xi$  de ordem 2. Já a função  $\xi' \mathcal{Q}(\xi) \xi$ , de acordo com a Proposição 1, tem a estrutura (116), que, por sua vez, corresponde a um polinômio multivariado em  $\xi$  de grau  $(2 + 2m)$ .*

*O fato de o grau do polinômio no numerador de (118) ser maior que o grau do polinômio em seu denominador já sugere que o limite calculado tenderá a infinito quando o  $\xi$  tender a infinito. Resta provar que isto ocorre para quaisquer matrizes positivas definidas  $Q$  e  $\mathcal{Q}(\xi)$ .*

*Para auxiliar na explicação, será definida uma casca esférica  $\mathcal{E}$  centrada na origem, cujo raio corresponde a  $\|\xi\|$  e uma reta qualquer, que passe pela origem do espaço vetorial. Assim, o limite (118) será calculado em um ponto de intersecção da reta com a casca esférica quando seu raio tender a infinito. Sabe-se que o conjunto  $\mathcal{E}$  é definido como:*

$$\mathcal{E} := \{\xi \in \mathbb{R}^n : \|\xi\| = r\}. \quad (119)$$

*Qualquer ponto desta casca esférica pode ser interceptado por uma reta que passa pela origem. Tal reta pode ser descrita por um conjunto de equações paramétricas (uma para cada dimensão do espaço vetorial). Portanto, qualquer ponto sobre esta reta pode ser descrito por um vetor  $\xi_l$  exemplificado a seguir para  $n = 3$ :*

$$\xi_l = \begin{bmatrix} \xi_{(1)} \\ \xi_{(2)} = a\xi_{(1)} \\ \xi_{(3)} = b\xi_{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_{(1)} \\ a\xi_{(1)} \\ b\xi_{(1)} \end{bmatrix}, \quad (120)$$

*sendo  $a$  e  $b$  coeficientes escalares reais. Isto significa que, para qualquer ponto  $\xi_l$  sobre esta reta, as equações (115) e (116) podem ser representadas em função de uma única variável  $\xi_{(i)}$ .*

Para o cálculo do limite em (118), a fração polinomial pode ser descrita como:

$$\lim_{\|\xi\| \rightarrow \infty} \left( \frac{s_{11} \xi_{(1)}^{2+2m} + 2s_{12} \xi_{(1)}^{2+2m-1} \xi_{(2)} + \cdots + s_{(nn_z)(nn_z)} \xi_{(n)}^{2+2m}}{q_{11} \xi_{(1)}^2 + 2q_{12} \xi_{(1)} \xi_{(2)} + \cdots + q_{nn} \xi_{(n)}^2} \right). \quad (121)$$

Considerando que sobre qualquer reta que passa pela origem sempre haverá pelo menos uma variável  $\xi_{(i)}$  não nula para  $\xi \neq 0$ , qualquer ponto sobre esta reta pode ser descrito em função de  $\xi_{(i)}$ , como no exemplo (120). Desta maneira, os polinômios de (121) podem ser reescritos como:

$$\lim_{\xi_{(i)} \rightarrow \infty} \left( \frac{c_1 \xi_{(i)}^{2+2m} + c_2 \xi_{(i)}^{2+2m-1} + \cdots + c_{2m+1} \xi_{(i)}^2}{k_1 \xi_{(i)}^2} \right), \quad (122)$$

$$\lim_{\xi_{(i)} \rightarrow \infty} \left( \frac{\xi_{(i)}^2}{\xi_{(i)}^2} \cdot \frac{c_1 \xi_{(i)}^{2m} + c_2 \xi_{(i)}^{2m-1} + \cdots + c_{2m+1}}{k_1} \right). \quad (123)$$

Lembrando que a matriz  $\mathcal{Q}(\xi)$  é de grau  $2m$ , então há pelo menos uma reta descrita pelo vetor  $\xi_l$  para a qual o coeficiente  $c_1$  de (123) não é nulo. Além disso, considerando que ambas as funções  $\xi' Q \xi$  e  $\xi' \mathcal{Q}(\xi) \xi$  são positivas definidas, de (123) tem-se:

$$\lim_{\xi_{(i)} \rightarrow \infty} \left( \frac{c_1 \xi_{(i)}^{2m} + c_2 \xi_{(i)}^{2m-1} + \cdots + c_{2m+1}}{k_1} \right) = \infty. \quad (124)$$

Isto significa que sempre que o raio de  $\mathfrak{E}$ , ou  $\|\xi\|$ , tende a infinito, há uma região para a qual o limite (118) também tende a infinito. A prova está completa.

□

**Lema 3.** Dados o vetor  $\xi \in \mathbb{R}^n$ , qualquer matriz constante positiva definida  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e qualquer matriz polinomial multivariada positiva definida  $\mathcal{Q}(\xi) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  de grau  $2m$ ,  $m \in \mathbb{N}^*$ , que não contenha monômios de grau zero, então há pontos  $\xi \in \mathbb{R}^n$  tais que

$$\lim_{\|\xi\| \rightarrow 0} \left( \frac{\xi' Q \xi}{\xi' \mathcal{Q}(\xi) \xi} \right) = \infty. \quad (125)$$

**Demonstração.** A função  $\xi' Q \xi$  tem a estrutura descrita em (115), o que corresponde a um polinômio em  $\xi$  de grau 2. Já a função  $\xi' \mathcal{Q}(\xi) \xi$ , de acordo com a Proposição 1, tem a estrutura descrita em (116), que, por sua vez, corresponde a um polinômio em  $\xi$  de grau  $(2 + 2m)$ . Observa-se que, neste lema, o vetor de monômios  $z(\xi)$  não possui monômios de ordem zero. Portanto, qualquer monômio da função expressa em (116) terá ordem maior que 2.

Desta forma, para o cálculo do limite descrito em (125) e considerando (115) e (116), a

fração polinomial multivariada pode ser reescrita em função de uma única variável  $\xi_{(i)}$  como:

$$\lim_{\|\xi\| \rightarrow 0} \left( \frac{q_{11}\xi_{(1)}^2 + 2q_{12}\xi_{(1)}\xi_{(2)} + \cdots + q_{nn}\xi_{(n)}^2}{s_{11}\xi_{(1)}^{2+2m} + 2s_{12}\xi_{(1)}^{2+2m-1}\xi_{(2)} + \cdots + s_{(nn_z)(nn_z)}\xi_{(n)}^{2+2m}} \right) \quad (126)$$

$$\lim_{\xi_{(i)} \rightarrow 0} \left( \frac{k_1 \xi_{(i)}^2}{c_1 \xi_{(i)}^{2+2m} + c_2 \xi_{(i)}^{2+2m-1} + \cdots + c_{2m-1} \xi_{(i)}^{2+2}} \right) \quad (127)$$

$$\lim_{\xi_{(i)} \rightarrow 0} \left( \frac{\xi_{(i)}^2}{\xi_{(i)}^2} \cdot \frac{k_1}{c_1 \xi_{(i)}^{2m} + c_2 \xi_{(i)}^{2m-1} + \cdots + c_{2m-1} \xi_{(i)}^2} \right) \quad (128)$$

$$\lim_{\xi_{(i)} \rightarrow 0} \left( \frac{k_1}{c_1 \xi_{(i)}^{2m} + c_2 \xi_{(i)}^{2m-1} + \cdots + c_{2m-1} \xi_{(i)}^2} \right) = \infty. \quad (129)$$

Isto significa que sempre que o raio de  $\mathfrak{E}$ , ou  $\|\xi\|$ , tende a zero, há uma região para a qual o limite (125) tende a infinito. A prova está completa.

□

Se no Teorema 5 a matriz  $Q_{\lambda_r}(\xi)$ , associada ao custo (53), for considerada constante para que se possa garantir o custo da forma (25), então  $Q_{\lambda_r}(\xi) = Q_{\lambda_r}$  e a condição (50) implica em

$$v'(Q_{\lambda_r})v < -v' \left( A_{\lambda_r}'P(\xi) + P(\xi)A_{\lambda_r} + \left( \sum_{k=1}^n \frac{\partial P}{\partial \xi^{(k)}} (A_{\lambda_r} \xi)_{(k)} \right) \right) v, \quad \forall \xi \neq 0, \quad (130)$$

sendo que a soma matricial à direita da desigualdade em (130) corresponde a uma matriz polinomial tal qual  $\mathcal{Q}(\xi)$  do Lema 3, com a diferença de ser negativa definida. Portanto, conclui-se que a condição (50) do Teorema 5 implica em

$$\frac{v'(Q_{\lambda_r})v}{-v'(A_{\lambda_r}'P(\xi) + P(\xi)A_{\lambda_r} + \mathcal{Q}_{\lambda_r})v} < 1, \quad \forall \xi \neq 0. \quad (131)$$

Contudo, o Lema 3 mostra que, quando  $\|\xi\| \rightarrow 0$ , a condição (131) não pode ser satisfeita a não ser que os polinômios de  $P(\xi)$  conttenham monômios de ordem zero, ou seja, em  $P(\xi)$  deve haver uma componente correspondente a uma matriz constante  $P$ . Se for este o caso, a matriz  $P(\xi)$  tratada neste capítulo pode ser descrita como uma soma entre uma matriz  $P$  apenas com monômios de ordem zero (constante) e uma matriz polinomial multivariada  $\mathcal{P}(\xi)$  com monômios de ordem maior ou igual a 2 e não maior que  $2m$ .

Analisando a condição (49) do Teorema 5 sob o ponto de vista dos Lemas 2 e 3, observa-se

que:

$$\lim_{\|\xi\| \rightarrow 0} \left( \frac{\xi' P \xi + \xi' \mathcal{P}(\xi) \xi}{\|\xi\|} \right) = \lim_{\|\xi\| \rightarrow 0} \left( \frac{\xi' P \xi}{\|\xi\|} \right) \quad (132)$$

e

$$\lim_{\|\xi\| \rightarrow \infty} \left( \frac{\xi' P \xi + \xi' \mathcal{P}(\xi) \xi}{\|\xi\|} \right) = \lim_{\|\xi\| \rightarrow \infty} \left( \frac{\xi' \mathcal{P}(\xi) \xi}{\|\xi\|} \right). \quad (133)$$

Portanto, lembrando-se que está sendo considerado que  $P(\xi)$  possui monômios de ordem zero, para que a condição (49) seja satisfeita, é necessário que as duas componentes citadas sejam positivas definidas, ou seja:

$$\xi' P \xi > 0, \quad \forall \xi \neq 0 \quad (134)$$

e

$$\xi' \mathcal{P}(\xi) \xi > 0, \quad \forall \xi \neq 0. \quad (135)$$

Da mesma forma, a análise da condição (50) leva à conclusão da necessidade das duas condições abaixo:

$$\xi' (A_{\lambda_r}' P + P A_{\lambda_r} + Q_{\lambda_r}) \xi < 0 \quad (136)$$

e

$$\xi' (A_{\lambda_r}' \mathcal{P}(\xi) + \mathcal{P}(\xi) A_{\lambda_r} + \Omega_{\lambda_r}) \xi < 0. \quad (137)$$

Considerando que as condições (134) e (136) são as mesmas do Teorema 2 e considerando (135), conclui-se que o custo garantido fornecido pelo Teorema 5 pode ser decomposto como:

$$\xi(0)' P(\xi(0)) \xi(0) = \xi(0)' P \xi(0) + \xi(0)' \mathcal{P}(\xi(0)) \xi(0) \quad (138)$$

e será sempre maior ou igual ao custo garantido obtido pelo Teorema 2. Esta mesma conclusão pode ser estendida aos Teoremas 6 e 7.

A imposição do custo garantido (25) relacionado à matriz constante  $Q_\sigma$  leva severas restrições aos Teoremas 5, 6 e 7, uma vez que, simplesmente para que seja possível a factibilidade, tais teoremas ficam limitados a terem custo garantido maior ou igual ao custo obtido pelos Teoremas 2, 3 e 4, respectivamente.

Análises feitas adiante, durante os exemplos, mostram que os Teoremas 5, 6 e 7 permitem, sim, maior flexibilidade nas superfícies de deslizamento criadas, o que se reflete em melhor desempenho transitório. Contudo, conforme análise acima, não se consegue reduzir o limitante superior para o custo nas condições de (25) utilizando funções de Lyapunov polinomiais multivariadas. Para fins de comparação entre teoremas que se utilizam de matrizes  $P$  constantes e teoremas que se utilizam de matrizes polinomiais  $P(\xi)$  quanto a um limitante superior de custo, é proposta uma nova formulação de custo garantido que possa ser atendida, mesmo que apenas

dentro de determinada região de condições iniciais, por ambos os tipos de teoremas.

Enquanto o custo garantido discutido até o momento (25) é baseado no quadrado das variáveis de saída, o custo proposto será baseado na quarta ordem das variáveis de saída. Tal formulação é obtida ao se multiplicar a matriz  $C$  de saída por uma matriz diagonal polinomial multivariada  $\mathcal{K}(\xi)$ , representada abaixo:

$$\mathcal{K}(\xi) = \begin{bmatrix} \xi_{(1)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \xi_{(n)} \end{bmatrix}. \quad (139)$$

Portanto, pode-se definir uma nova matriz  $\mathcal{Q}(\xi)$ :

$$\mathcal{Q}(\xi) := \varphi \mathcal{K}(\xi)' C' C \mathcal{K}(\xi), \quad (140)$$

sendo  $\varphi \in \mathbb{R}_+$  uma constante útil para o ajuste da região de condições iniciais. Então, o novo custo proposto, denominado custo  $\mathcal{J}$ , passa a ser dado por:

$$\begin{aligned} \mathcal{J} &= \int_0^\infty (C \mathcal{K}(\xi)x - C \mathcal{K}(\xi)x_r)' (C \mathcal{K}(\xi)x - C \mathcal{K}(\xi)x_r) dt, \\ \mathcal{J} &= \int_0^\infty (x - x_r)' (C \mathcal{K}(\xi))' (C \mathcal{K}(\xi)) (x - x_r) dt, \\ \mathcal{J} &= \int_0^\infty \xi' \mathcal{K}(\xi)' C' C \mathcal{K}(\xi) \xi dt, \\ \mathcal{J} &= \int_0^\infty \xi' \mathcal{K}(\xi)' \mathcal{Q} \mathcal{K}(\xi) \xi dt, \\ \mathcal{J} &= \varphi^{-1} \int_0^\infty \xi' \mathcal{Q}(\xi) \xi dt. \end{aligned} \quad (141)$$

Observa-se que o custo garantido  $\mathcal{J}$  pode ter um limitante superior determinado pela componente de monômios de ordem 2 da matriz  $P(\xi)$ . Para explorar a vantagem de monômios de maior ordem, podem ser propostos custos baseados em matrizes polinomiais  $\mathcal{K}(\xi)$  de ordem maior.

Como já demonstrado pelo Lema 3, mesmo que seja utilizada uma matriz  $\mathcal{Q}_i(\xi)$  no lugar da matriz  $Q_i$ , os Teoremas 2, 3 e 4 (considerando que os subsistemas sejam estáveis) sempre respeitarão as condições:

$$\xi' \left( A'_{\lambda_r} P + P A_{\lambda_r} + Q_{\lambda_r} \right) \xi < 0, \quad (142)$$

$$\xi' \left( A'_i P + P A_i + Q_i \right) \xi < 0, \quad (143)$$

$$\xi'(A_i'P + PA_i + Z_i)\xi < 0, \quad (144)$$

derivadas das condições (22), (27) e (34), respectivamente, em uma região limitada ( $\Phi$ ) em torno do ponto de equilíbrio desejado ( $\xi = 0$ ). Assim, o custo garantido  $\mathcal{J}$  pode ser aplicado a estes teoremas dentro da região ( $\Phi$ ).

Para a comparação de teoremas que se utilizam de uma matriz  $P$  com teoremas que se utilizam de uma matriz polinomial multivariada  $P(\xi)$ , será determinada uma região de condições iniciais  $\Xi \subset \Phi$  para a qual os Teoremas 2, 3 e 4 atendam ao custo  $\mathcal{J}$ .

**Lema 4.** *Seja uma matriz de saída constante e diagonal  $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ , uma matriz constante positiva definida  $Q = C'C$ , uma matriz polinomial multivariada positiva definida  $\mathcal{Q}(\xi) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , como definida em (140), e o vetor de estado  $\xi \in \mathbb{R}^n$ , então a condição*

$$\xi'Q\xi \geq \xi'\mathcal{Q}(\xi)\xi \quad (145)$$

é satisfeita para qualquer  $\xi \in \Xi$ , sendo  $\Xi$  uma região poliedral retangular definida por:

$$\Xi := \{\xi_{(i)} \in \mathbb{R}^n : |\xi_{(i)}| \leq (\sqrt{\varphi})^{-1}, i \in \mathbb{K}_n\}. \quad (146)$$

**Demonstração.** *Como  $Q$  e  $\mathcal{Q}(\xi)$  são matrizes diagonais, segue que*

$$\begin{aligned} \xi'Q\xi &= q_{11}\xi_{(1)}^2 + q_{22}\xi_{(2)}^2 + \cdots + q_{nn}\xi_{(n)}^2, \\ &= \sum_{i=1}^n q_{ii}\xi_{(i)}^2 \end{aligned} \quad (147)$$

e

$$\begin{aligned} \xi'\mathcal{Q}(\xi)\xi &= \varphi q_{11}\xi_{(1)}^4 + \varphi q_{22}\xi_{(2)}^4 + \cdots + \varphi q_{nn}\xi_{(n)}^4, \\ &= \sum_{i=1}^n \varphi q_{ii}\xi_{(i)}^4. \end{aligned} \quad (148)$$

Pode-se notar que

$$\varphi q_{ii}\xi_{(i)}^4 \leq q_{ii}\xi_{(i)}^2, \quad |\xi_{(i)}| \leq (\sqrt{\varphi})^{-1}, \quad i \in \mathbb{K}_n \quad (149)$$

assim, para qualquer ponto  $\xi \in \Xi$ , qualquer variável de estado tem seu valor menor ou igual a  $(\sqrt{\varphi})^{-1}$ . Isto significa que

$$\xi'Q\xi = \sum_{i=1}^n q_{ii}\xi_{(i)}^2 \geq \sum_{i=1}^n \varphi q_{ii}\xi_{(i)}^4 = \xi'\mathcal{Q}(\xi)\xi, \quad \forall \xi \in \Xi. \quad (150)$$

A prova está concluída.

□

Considerando que a condição (145) se mantém, as condições (142), (143) e (144) também se mantêm dentro da região  $\Xi$ . Isto significa que, dentro da região  $\Xi$  o custo garantido (53) se mantém tanto para os Teoremas 2, 3 e 4 quanto para os Teoremas 5, 6 e 7.

### 3.3 Exemplos

Um dos exemplos mais pertinentes de sistemas chaveados afins são os conversores eletrônicos, nos quais interruptores semicondutores fazem a comutação entre os subsistemas. Na sequência, serão tratados exemplos da aplicação dos teoremas propostos em algumas topologias de conversores eletrônicos de potência.

Nas simulações desenvolvidas, alguns dos parâmetros analisados serão os custos  $J$  (21) e  $\mathcal{J}$  (53). Como nos sistemas chaveados afins tratados neste trabalho não há uma entrada de controle nem um distúrbio, os custos citados não relacionam a energia dos sinais das saídas com a energia do sinal de uma entrada ou de um distúrbio, como no caso do custo  $H_\infty$ , por exemplo. Tais custos dizem respeito apenas à energia dos sinais de saída (TOSCANO, 2013). Portanto, a principal função da matriz  $Q$  é permitir a ponderação entre a otimização da resposta transitória de cada um dos sinais das saídas. Além disso, seu valor pode influenciar na factibilidade dos *solvers* utilizados. Sendo assim, para a melhor análise das possibilidades de estabilização de sistemas chaveados afins por meio de leis de chaveamento baseadas em LMIs, nos exemplos a seguir, a matriz  $Q$  será definida como:

$$Q = \mu \begin{bmatrix} \rho_1^{1/2} & 0 \\ 0 & \rho_2^{1/2} \end{bmatrix} C' C \begin{bmatrix} \rho_1^{1/2} & 0 \\ 0 & \rho_2^{1/2} \end{bmatrix}, \quad (151)$$

sendo que  $\mu \in \mathbb{R}_+$  e a relação entre os escalares  $\rho_1$  e  $\rho_2 \in [0, 1]$  define a ponderação entre as variáveis de saída para a otimização. Os custos  $J$  e  $\mathcal{J}$  são, então, dados por:

$$J = \int_0^\infty \xi' \begin{bmatrix} \rho_1^{1/2} & 0 \\ 0 & \rho_2^{1/2} \end{bmatrix} C' C \begin{bmatrix} \rho_1^{1/2} & 0 \\ 0 & \rho_2^{1/2} \end{bmatrix} \xi dt < \mu^{-1} \xi(0)' P(\xi(0)) \xi(0), \quad (152)$$

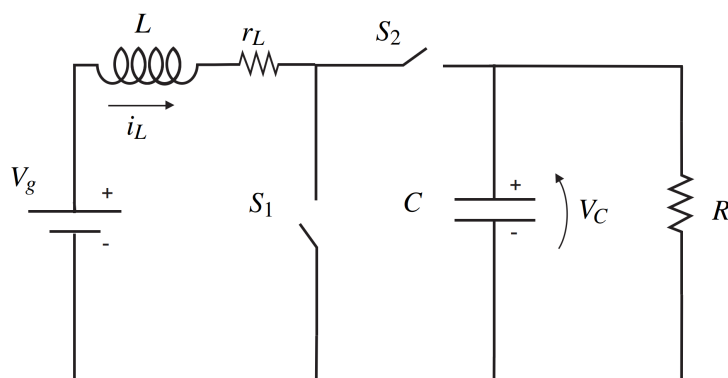
$$\mathcal{J} = \int_0^\infty \xi' \begin{bmatrix} \rho_1^{1/2} & 0 \\ 0 & \rho_2^{1/2} \end{bmatrix} K^{p'} C' C K^p \begin{bmatrix} \rho_1^{1/2} & 0 \\ 0 & \rho_2^{1/2} \end{bmatrix} \xi dt < (\varphi\mu)^{-1} \xi(0)' P(\xi(0)) \xi(0). \quad (153)$$

### 3.3.1 Conversor CC-CC Boost

O conversor Boost é um conversor elevador de tensão, seu modelo em espaço de estados apresenta duas variáveis de estado e dois subsistemas. O diagrama da estrutura deste conversor é apresentado na Figura 2. Seu modelo chaveado afim em espaço de estados, conforme (1), é definido pelas seguintes matrizes (DEAECTO et al., 2010):

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \begin{bmatrix} -r_L/L & 0 \\ 0 & -1/RC \end{bmatrix}, & A_2 &= \begin{bmatrix} -r_L/L & -1/L \\ 1/C & -1/RC \end{bmatrix}, \\
 B_1 &= \begin{bmatrix} 1/L \\ 0 \end{bmatrix}, & B_2 &= \begin{bmatrix} 1/L \\ 0 \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{154}$$

Figura 2 - Diagrama do circuito elétrico do conversor CC-CC Boost.



Fonte: Mainardi Júnior (2013).

Neste sistema as variáveis de estado são a corrente no indutor ( $i_L(t)$ ) e a tensão no capacitor ( $v_C(t)$ ), assim o vetor de variáveis de estado é dado por:

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_{(1)}(t) & x_{(2)}(t) \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} i_L(t) & v_C(t) \end{bmatrix}' \tag{155}$$

Para melhor comparação com os resultados obtidos em Deaecto et al. (2010) e Mainardi Júnior (2013), os parâmetros de projeto utilizados serão os mesmos propostos em (DEAECTO et al., 2010):

$$V_g = w = 100[V], \quad R = 50[\Omega], \quad r_L = 2[\Omega], \quad L = 500[\mu H], \quad C = 470[\mu F]. \tag{156}$$

Observa-se que neste modelo é considerada a resistência parasita do indutor ( $r_L$ ). Para este

sistema, o conjunto de possíveis pontos de equilíbrio, conforme dado em (11), é descrito por (DEAECTO et al., 2010):

$$\chi_r = \left\{ [i_{L_r} \ v_{C_r}]' : v_{C_r}^2 + (r_L R) i_{L_r}^2 - (R V_g) i_{L_r} = 0, \quad \frac{V_g}{(r_L + R)} \leq i_{L_r} \leq \frac{V_g}{r_L} \right\}. \quad (157)$$

Conforme feito em Deaecto et al. (2010) e Mainardi Júnior (2013), a matriz  $Q$  foi escolhida de forma a otimizar a tensão no capacitor (tensão de saída), portanto,  $\rho_1 = 0$ ,  $\rho_2 = 1$  e  $\mu = 1$ . Neste exemplo, adota-se o seguinte valor de tensão de saída desejada  $v_{C_r} = 150[V]$ , cuja corrente correspondente é  $i_{L_r} = 5[A]$ . Portanto, o ponto de equilíbrio desejado é  $x_r = [5 \ 150]'$ . Os coeficientes correspondentes da combinação convexa dos subsistemas são  $\lambda_{(1)} = 0,4$  e  $\lambda_{(2)} = 0,6$ . Considera-se que a condição inicial do conversor é desligado, ou seja, o estado inicial é  $x(0) = [0 \ 0]'$  e  $\xi(0) = [-5 \ -150]'$ . Nestas condições, as matrizes  $Q$  e  $\mathcal{Q}(\xi)$  e os custos  $J$  e  $\mathcal{J}$  são detalhados abaixo:

$$Q = Q_1 = Q_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1/R \end{bmatrix}, \quad (158)$$

$$\mathcal{Q}(\xi) = \mathcal{Q}_1(\xi) = \mathcal{Q}_2(\xi) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \xi_{(2)}^2/R \end{bmatrix}, \quad (159)$$

$$J = (R)^{-1} \int_0^\infty (v_C(t) - v_{C_r})^2 dt, \quad (160)$$

$$\mathcal{J} = (R)^{-1} \int_0^\infty (v_C(t) - v_{C_r})^4 dt. \quad (161)$$

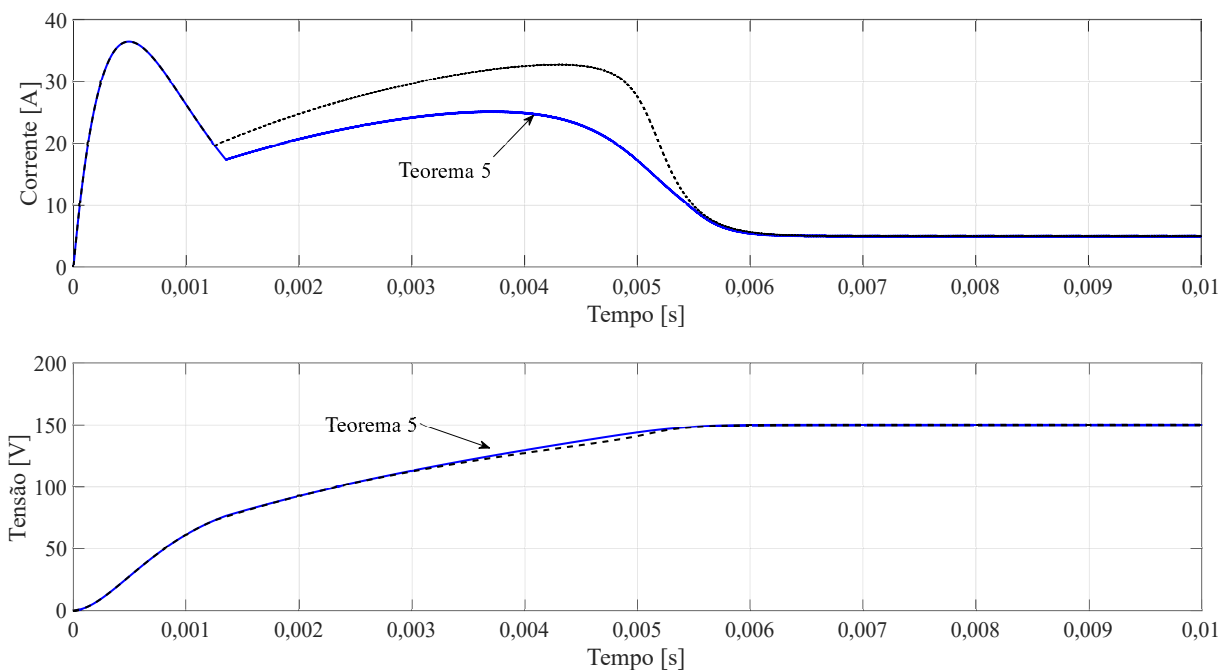
A região  $\Xi$  foi determinada por  $\varphi = 1/(180)^2$  e, nos Teoremas 5, 6 e 7, a matriz  $Q_i(\xi) = \varphi \mathcal{Q}(\xi)$ , isto significa que, para qualquer condição inicial  $|\xi_{(2)}| \leq 180$ , o custo  $\mathcal{J}$  se mantém também para os Teoremas 2, 3 e 4. Nas simulações apresentadas a seguir, a matriz  $P(\xi)$  foi projetada contendo exclusivamente monômios de grau 2.

Inicialmente, foi feita a comparação entre os Teoremas 2 e 5, que apresentam as mesmas condições, exigindo que a função de Lyapunov encontrada garanta a estabilidade do sistema apenas para um ponto de equilíbrio desejado.

A Figura 3 apresenta o desempenho transitório do conversor Boost. As curvas tracejadas, na cor preta, correspondem ao teste com o Teorema 2, enquanto que as curvas contínuas, na cor azul, representam o resultado obtido a partir do Teorema 5. Este padrão de cor e tipo de linha

será adotado para todos os resultados referentes aos teoremas em questão. O primeiro eixo desta figura contém as curvas da corrente do conversor (variável de estado  $x_{(1)}$ ), no segundo eixo, são apresentadas as curvas da tensão (variável de estado  $x_{(2)}$ ). Observa-se significativa diferença na evolução da corrente, o que possibilitou uma leve diferença na forma de onda da tensão. Assim, pode-se notar que, durante parte do transitório, a estratégia de controle obtida a partir do Teorema 5 foi capaz de manter a tensão mais próxima do ponto de equilíbrio do que a estratégia de controle obtida a partir do Teorema 2, fato que reflete em um menor tempo de estabelecimento e menor custo medido. Como será mostrado na Figura 4, esta diferença entre os teoremas durante o transitório começa a ocorrer quando o sistema atinge a superfície de deslizamento, que é criada pela regra de chaveamento de seu respectivo teorema.

Figura 3 - Resposta transitória da corrente no indutor  $i_L(t)$  e tensão no capacitor  $v_C(t)$  para os Teoremas 2 e 5.

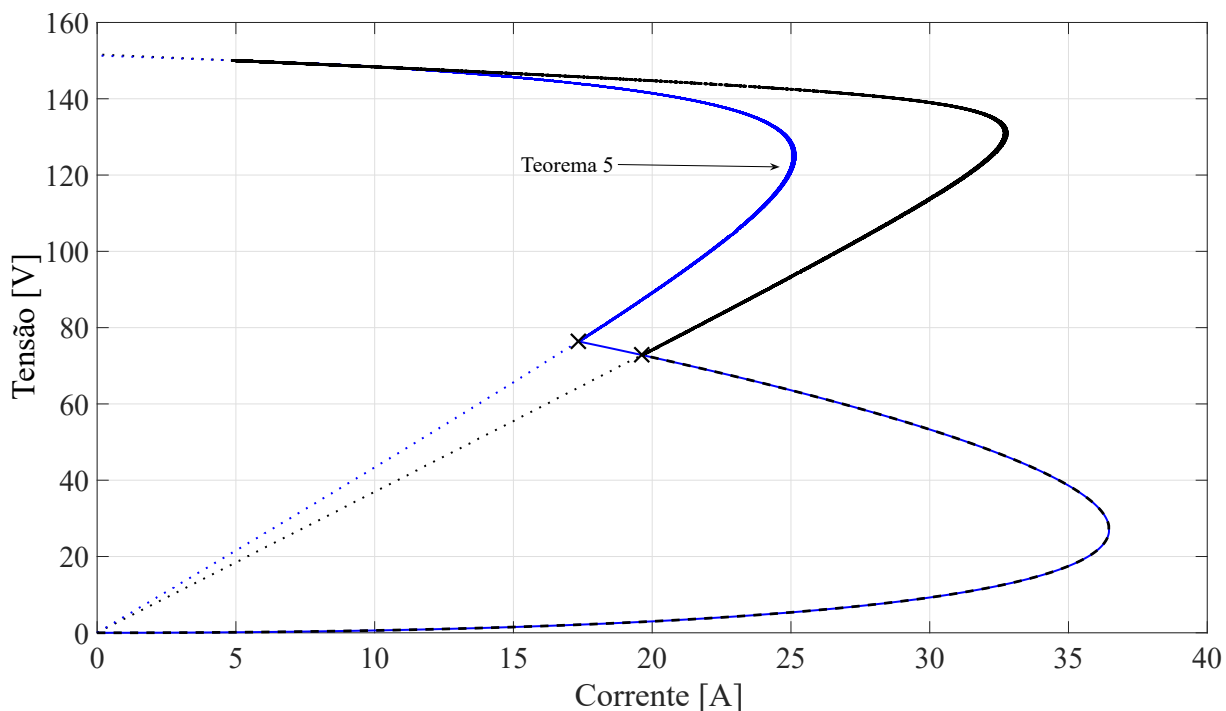


Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

A Figura 4 apresenta as trajetórias percorridas pelo sistema sobre o espaço de estados para os dois teoremas e, em linha pontilhada, apresenta a superfície de deslizamento criada por cada um dos teoremas. É possível verificar que houve significativa alteração na posição das superfícies de deslizamento. Nesta figura, o símbolo “×” indica o local onde cada uma das trajetórias atinge a superfície de deslizamento. Antes deste ponto, para ambas as regras de chaveamento, o sistema permanece em um único subsistema e a performance é idêntica em ambos os casos. Como já analisado no início deste estudo, o posicionamento da superfície de deslizamento no espaço de estados está diretamente relacionado ao desempenho transitório dos sistemas chaveados afins. Isto é facilmente notado ao se comparar as Figuras 3 e 4. Portanto, o

Teorema 5 apresentou melhora no desempenho transitório, com uma leve redução no tempo de estabelecimento.

Figura 4 - Plano de fase ( $i_L(t) \times v_C(t)$ ) para os Teoremas 2 e 5.



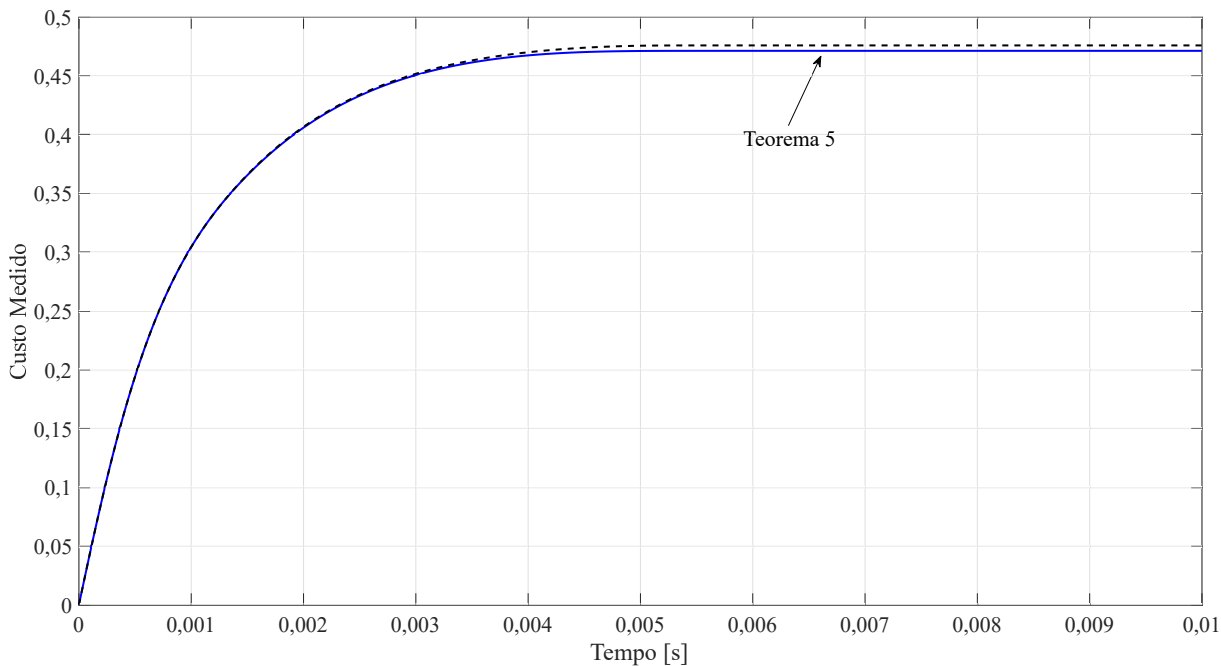
Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

A Figura 5 apresenta a evolução da integral dada em (160), ou seja, o valor medido do custo  $J$ . Conforme pode-se deduzir a partir da observação, na Figura 3, de que o Teorema 5 manteve a variável  $x_{(2)}$  mais próxima de seu valor de referência, o valor final do custo medido é menor para este teorema.

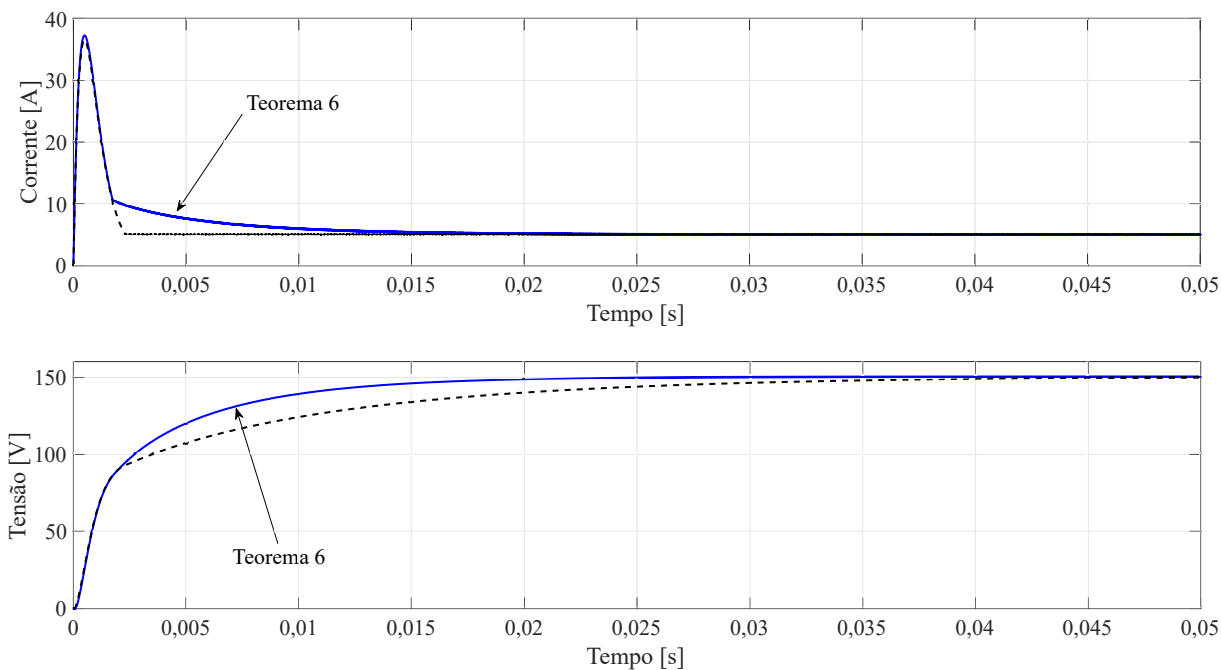
A seguir, serão analisados os resultados obtidos para o Teorema 6 e serão feitas as devidas comparações com os resultados do Teorema 3, os quais têm as mesmas condições. O mesmo padrão de tipos de linha e cores será adotado.

Na Figura 6 é possível notar uma melhoria de desempenho mais significativa para o Teorema 6 com relação ao Teorema 3. Lembrando-se que a tensão é a variável escolhida para a otimização de acordo com a ponderação entre  $\rho_1$  e  $\rho_2$  da  $Q$ , o segundo eixo da Figura 6 mostra que esta variável converge para seu valor de referência mais rapidamente no caso do Teorema 6. Em contrapartida à melhoria no comportamento da tensão, o sistema impõe uma convergência mais lenta da corrente do indutor (como visto o primeiro eixo da Figura 6). Este fato é inevitável devido à natureza do sistema (ausência de entrada de controle) e não deve ser interpretado como desvantagem, considerando que o objetivo da função custo, neste caso, era otimizar apenas a variável  $x_{(2)}$ .

Figura 5 - Integral (160) para os Teoremas 2 e 5.



Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

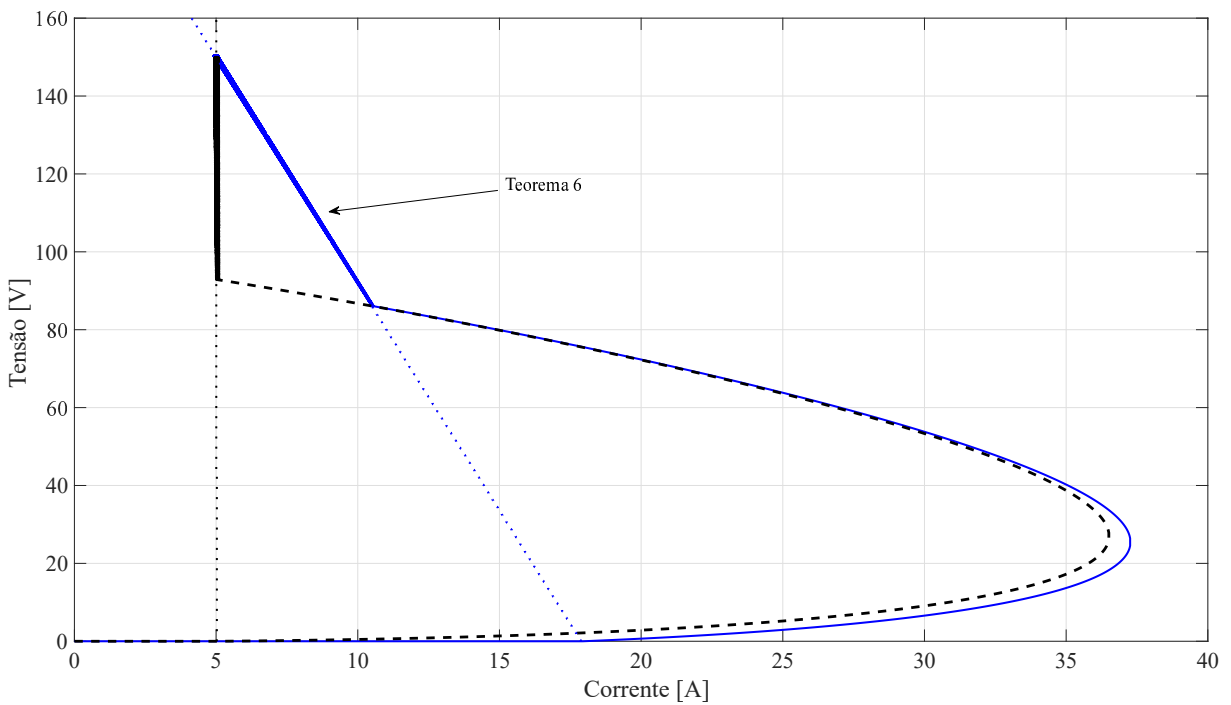
Figura 6 - Resposta transitória da corrente no indutor  $i_L(t)$  e tensão no capacitor  $v_C(t)$  para os Teoremas 3 e 6.

Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

O plano de fase correspondente a esta simulação é apresentado na Figura 7, que também apresenta, em linha pontilhada, as superfícies de deslizamento de ambos os teoremas. Nova-

mente, é possível notar uma significativa diferença no posicionamento das superfícies de deslizamento, o que é a razão para a melhoria do desempenho transitório obtida pelo Teorema 6. Neste caso, o sistema cruza as superfícies de deslizamento próximo à condição inicial. Quando isto ocorre, o subsistema ativo é alterado uma única vez, até que o sistema atinja a superfície de deslizamento novamente e deslize por ela até o ponto de equilíbrio desejado. Como as superfícies de deslizamento são atravessadas em pontos diferentes, é possível notar, na Figura 7, que as trajetórias são levemente diferentes mesmo antes de o sistema atingir e se manter na superfície de deslizamento. Contudo, a análise conjunta das Figuras 6 e 7 mostra que a maior diferença de desempenho ocorre enquanto o sistema está sobre as superfícies de deslizamento.

Figura 7 - Plano de fase ( $i_L(t) \times v_C(t)$ ) para os Teoremas 3 e 6.

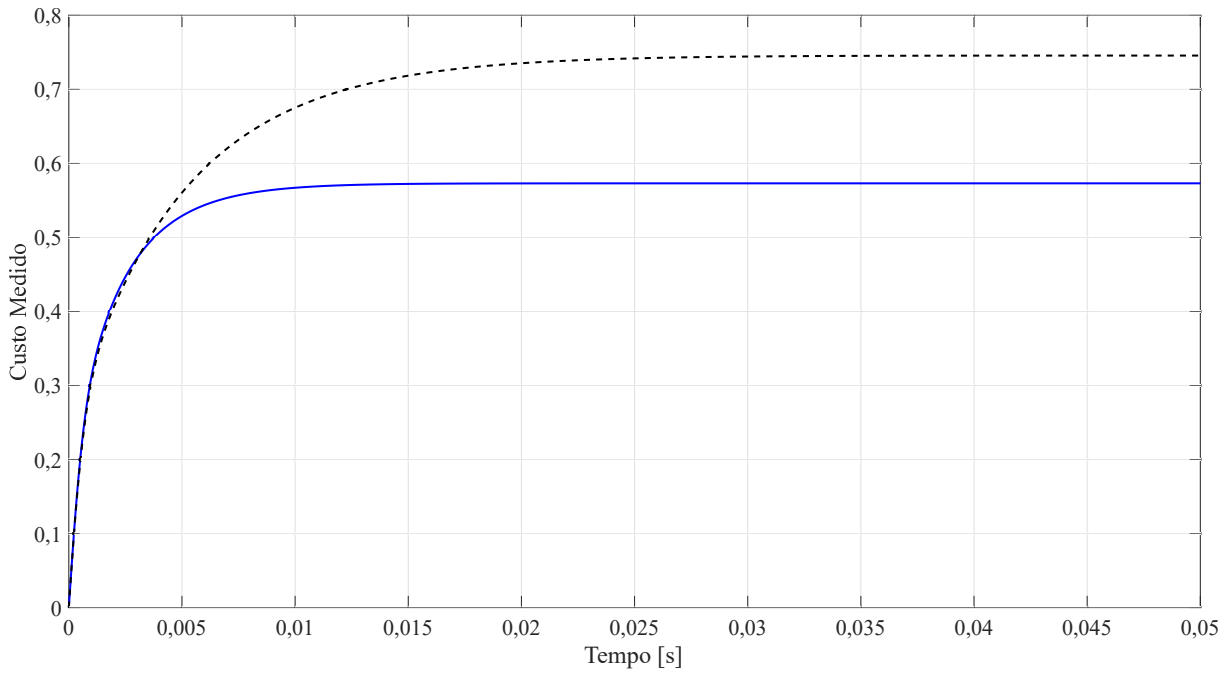


Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

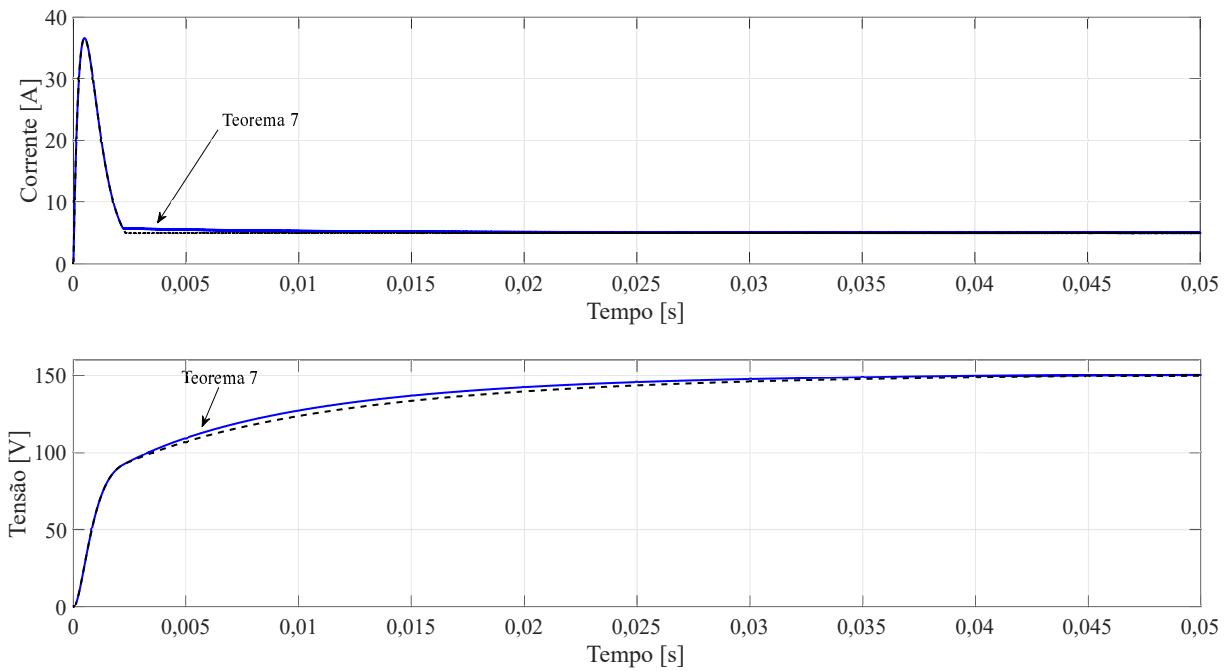
Como esperado, a Figura 8 apresenta a significativa redução do custo medido obtida pelo Teorema 6 com relação ao Teorema 3, uma vez que a tensão atinge seu valor de referência antes.

Durante a comparação entre os Teoremas 4 e 7, adotou-se  $\gamma = 40s^{-1}$  como o valor para a taxa de decaimento garantida. Exatamente as mesmas análises feitas na comparação entre os Teoremas 3 e 6 podem ser feitas para as Figuras 9 a 11, que apresentam os resultados de simulação para os Teoremas 4 e 7.

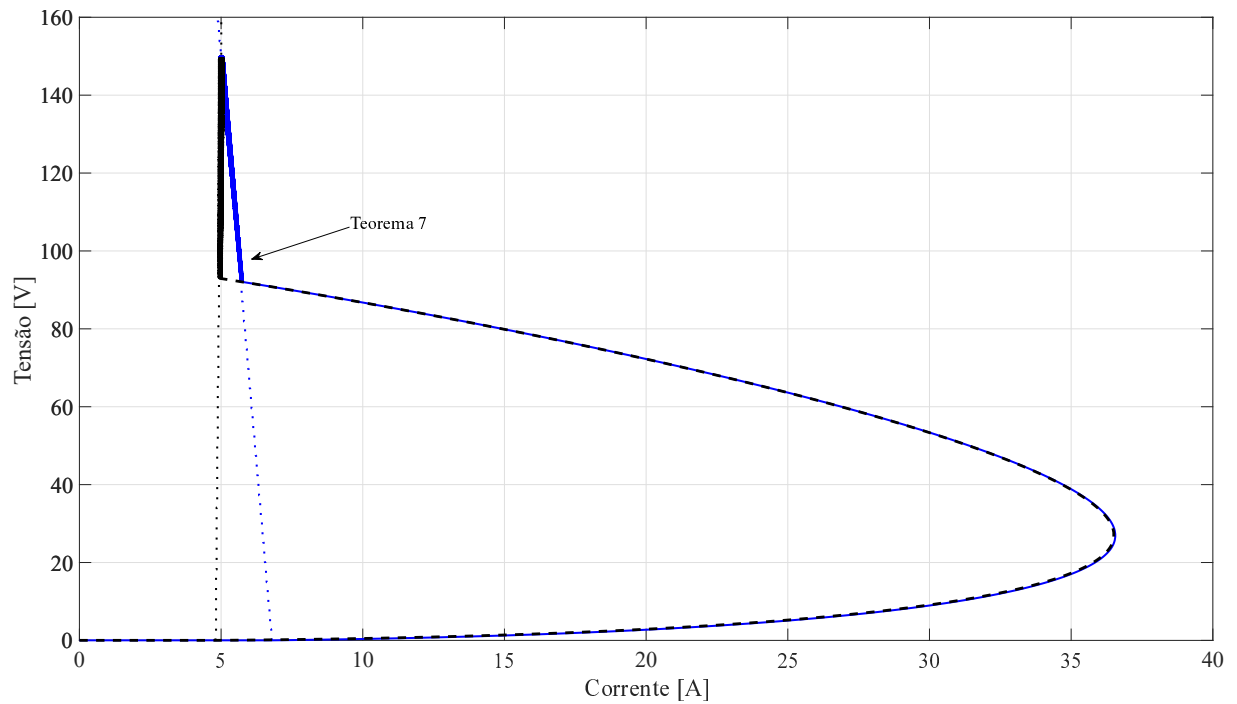
Figura 8 - Integral (160) para os Teoremas 3 e 6.



Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

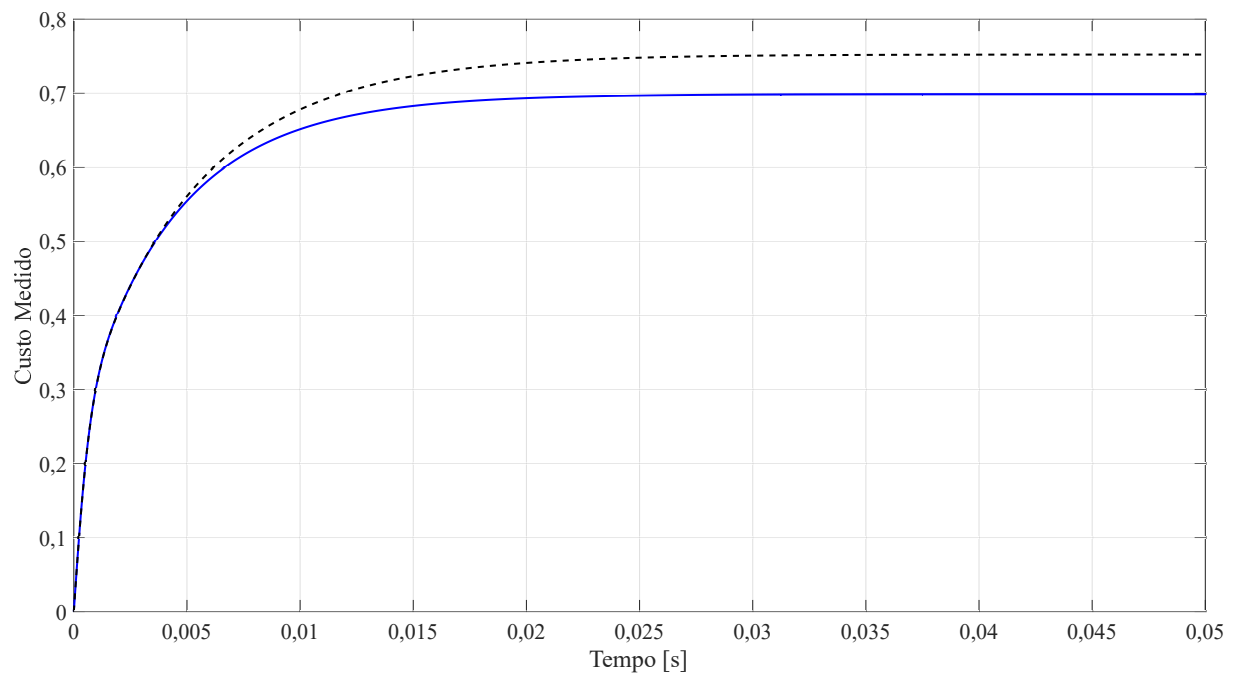
Figura 9 - Resposta transitória da corrente no indutor  $i_L(t)$  e tensão no capacitor  $v_C(t)$  para os Teoremas 4 e 7.

Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

Figura 10 - Plano de fase ( $i_L(t) \times v_C(t)$ ) para os Teoremas 4 e 7.

Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

Figura 11 - Integral (160) para os Teoremas 4 e 7.



Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

A fim de explorar a principal vantagem dos Teoremas 3 e 6 com relação aos Teoremas 2 e 5, foi realizada uma simulação com variações no ponto de equilíbrio desejado. Para cada teorema, uma única matriz  $P$ , ou  $P(\xi)$ , foi utilizada para todos os pontos de equilíbrio desejados.

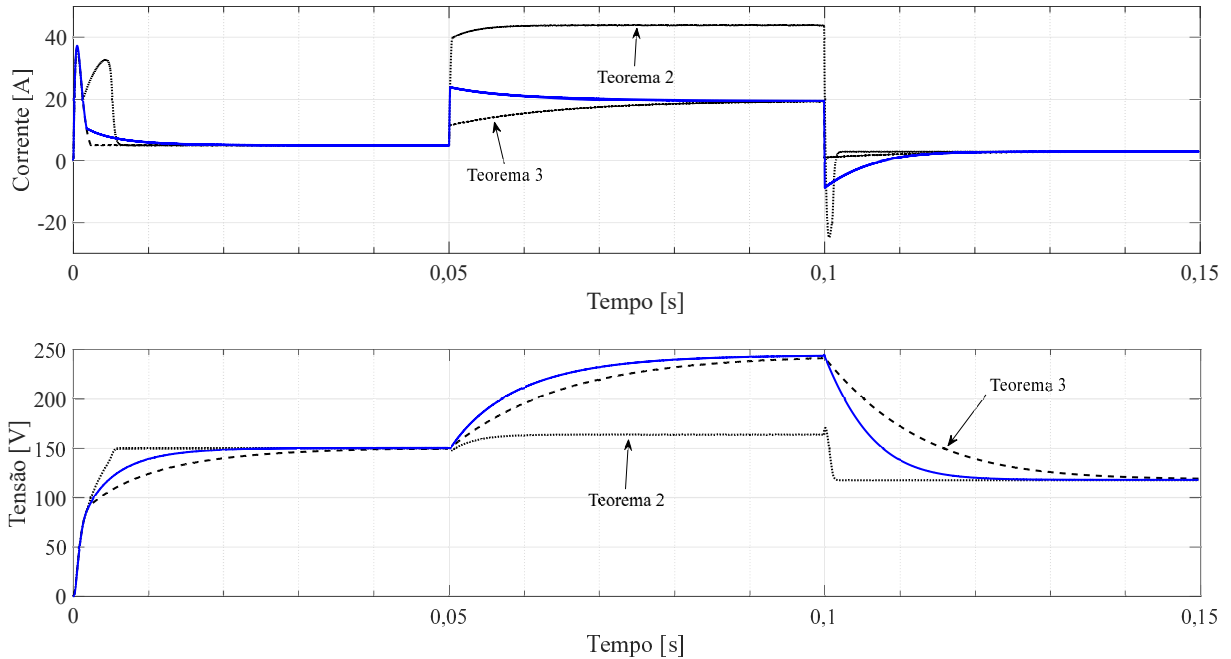
Os pontos de equilíbrio estabelecidos foram  $x_r = [5 \ 150]'$ ,  $x_r = [19,5122 \ 243,9024]'$  e  $x_r = [2,9412 \ 117,6471]'$ , correspondentes às combinações convexas com vetores  $\lambda$  valendo, respectivamente,  $\lambda_r = [0,4 \ 0,6]'$ ,  $\lambda_r = [0,75 \ 0,25]'$  e  $\lambda_r = [0,2 \ 0,8]'$ .

A Figura 12 é análoga à Figura 3, apresentando o comportamento temporal das variáveis de estado por 50 [ms] para cada ponto de equilíbrio desejado. No primeiro eixo, é apresentada a corrente, sendo a curva pontilhada preta referente ao Teorema 2, a curva tracejada preta referente ao Teorema 3 e a curva contínua azul, ao Teorema 6. O mesmo padrão de linhas é adotado para o segundo eixo, que representa a tensão de saída do conversor. Para simplificar a figura, os resultados do Teorema 5 foram omitidos.

Vale lembrar que os Teoremas 2 e 5 consideram uma combinação convexa de subsistemas específica e, conseqüentemente, um ponto de equilíbrio específico. Este ponto de equilíbrio, usado para gerar as matrizes  $P$  e  $P(\xi)$  para esta simulação foi  $x_r = [5 \ 150]'$ , o mesmo considerado nas Figuras 3 a 5. Assim, na Figura 12 é importante observar que, entre 50 [ms] e 100 [ms], a regra de chaveamento (24) (do Teorema 2) não foi capaz de levar o sistema ao ponto de equilíbrio desejado ( $x_r = [19,5122 \ 243,9024]'$ ). Além disso, apesar de a regra de chaveamento ter estabilizado o sistema no terceiro ponto de equilíbrio desejado (entre 100 [ms] e 150 [ms]), que é mais próximo do primeiro ponto de equilíbrio, não há garantia teórica desta estabilidade.

Por outro lado, as regras de chaveamento referentes aos Teoremas 3 e 6 foram capazes de atingir os pontos de equilíbrio desejados nos três intervalos da simulação, devendo-se destacar que, conforme esperado, o desempenho da regra de chaveamento associada ao Teorema 6 foi melhor para todos os pontos de equilíbrio desejados, principalmente durante o segundo e terceiro transitórios. Isto ocorre porque, durante estes transitórios, o sistema permanece sobre a superfície de deslizamento por uma porção maior das trajetórias percorridas.

Figura 12 - Corrente e tensão em função do tempo para os Teoremas 2, 3 e 6.

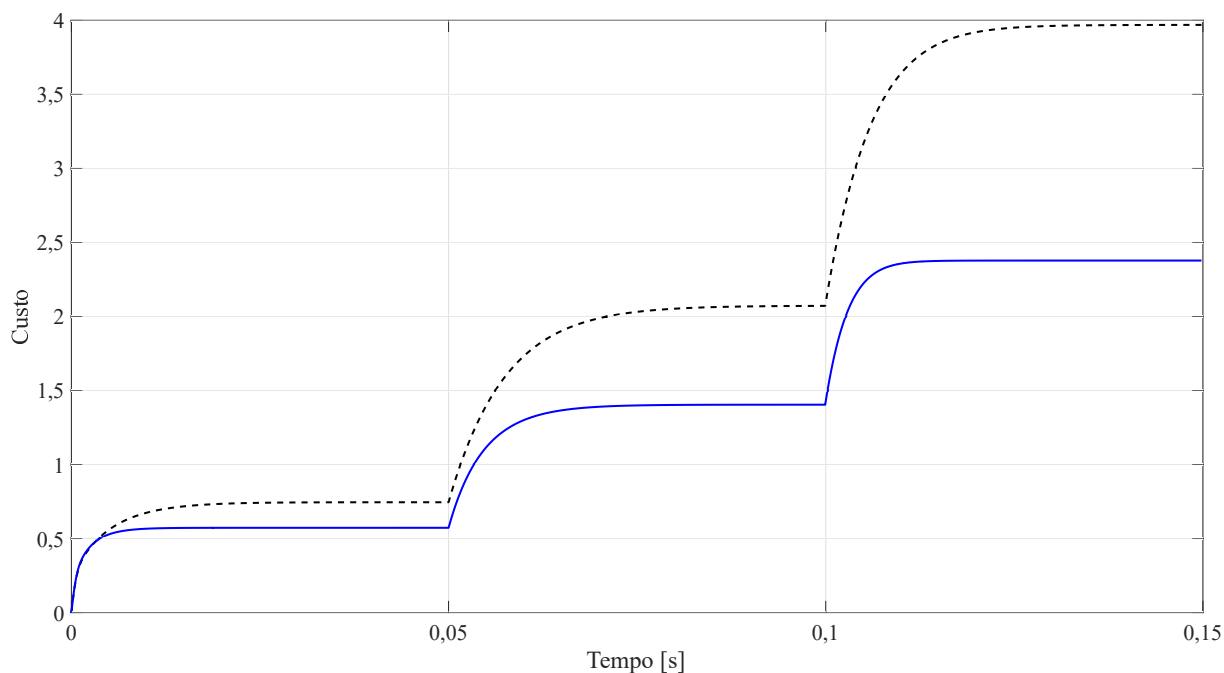


Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

Para comparar o desempenho dos Teoremas 3 e 6 nesta simulação com variação no ponto de equilíbrio desejado, a Figura 13 apresenta o custo medido durante todo o tempo da simulação. Novamente, a curva tracejada na cor preta representa o custo associado ao Teorema 3, enquanto a curva contínua na cor azul, o custo associado ao Teorema 6. A cada variação no ponto de equilíbrio desejado, a diferença entre os custos medidos é aumentada, evidenciando ainda mais a diferença de desempenho. Deve-se notar que o custo associado ao Teorema 2 não foi apresentado nesta figura pois, enquanto o ponto de equilíbrio desejado não for atingível, o custo cresce indefinidamente, não fazendo sentido sua apresentação.

A Tabela 1 sintetiza os principais dados obtidos a partir da comparação dos teoremas realizada nas três primeiras simulações, isto é, nas simulações relacionadas às Figuras 3 a 11. Observa-se significativa melhoria de performance do Teorema 6 em relação ao Teorema 3. Conforme explicado a partir da análise dos Lemas 2 e 3, o custo garantido  $J$  não é factível para teoremas que utilizam candidata a função de Lyapunov polinomial multivariada se esta não possuir monômios de grau zero. Assim, este custo não é apresentado para os Teoremas 5, 6 e 7. Com relação ao custo garantido  $\mathcal{J}$ , pode-se notar que este parâmetro foi reduzido para todos os teoremas com funções de Lyapunov polinomiais multivariadas com relação ao caso dos respectivos teoremas não polinomiais equivalentes.

Figura 13 - Integral (160) para os Teoremas 3 e 6.



Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

Outro parâmetro importante em se tratando de performance transitória, apresentado na tabela, é o tempo de estabelecimento. Neste trabalho, adotou-se o tempo de estabelecimento como sendo quatro vezes a constante de tempo de um sistema de primeira ordem, ou seja, o tempo necessário para que a variável atinja  $1 - e^{-4}$  (aproximadamente 2%) de seu valor de referência. A Tabela 1 mostra que o tempo de estabelecimento da tensão de saída do conversor (variável de estado  $x_{(2)}$ ) foi menor para os Teoremas 5, 6 e 7 do que para os respectivos teoremas não polinomiais.

Tabela 1 - Resultados numéricos das simulações realizadas no Capítulo 3.

Teorema	Grau dos Monômios	Tempo de Estabelecimento [ms]	Custo Garantido $J$	Custo Garantido $\mathcal{J}$
Teorema 2	0	5,362	0,590032	$19,12 \times 10^3$
Teorema 5	2	5,2965	-	$7,707 \times 10^3$
Teorema 3	0	33,182	5,59374	$181,2 \times 10^3$
Teorema 6	2	16,926	-	$102,6 \times 10^3$
Teorema 4	0	33,787	5,57596	$180,66 \times 10^3$
Teorema 7	2	29,025	-	$64,052 \times 10^3$

Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

### 3.4 Conclusões Parciais

Nos resultados apresentados pôde-se constatar que o uso de funções de Lyapunov baseadas em matrizes polinomiais  $P(\xi)$  pode flexibilizar os formatos das superfícies de deslizamento, permitindo que estas se adaptem melhor às características dos subsistemas no espaço de estados. Como consequência, foi possível obter a redução do custo medido (152) para os dois teoremas analisados.

Deve-se lembrar que o desempenho transitório dos sistemas tratados neste trabalho é limitado, uma vez que não existe entrada de controle. Portanto, de acordo com o parâmetro de desempenho de interesse (custo, tempo de estabelecimento de uma das variáveis de estado, etc.) existe um limite possível. Por este motivo, nota-se que a redução do custo medido do Teorema 5 com relação ao Teorema 2 não foi muito grande, uma vez que o Teorema 2 já é otimizado para um ponto de operação específico.

Por outro lado, quanto mais distante do desempenho ótimo, maior a contribuição dos teoremas com matrizes polinomiais. Isto foi observado na comparação do Teorema 6 com o Teorema 3. Este ganho de desempenho é muito importante à medida que se adicionam restrições aos teoremas, como robustez ou limite de região de operação, por exemplo. Os próprios Teoremas 3 e 6, apesar de serem mais restritivos, permitem a variação do ponto de equilíbrio desejado durante a operação, o que é uma importante vantagem com relação aos Teoremas 2 e 5.

Considera-se que as matrizes polinomiais são uma ferramenta importante para a otimização do controle dos sistemas chaveados afins e pretende-se aplicar esta técnica em teoremas com acesso à saída, que podem ser fundamentais para determinadas aplicações.

## 4 CONTROLE ROBUSTO DE SISTEMAS CHAVEADOS AFINS COM INCERTEZAS POLITÓPICAS

Este capítulo tem por objetivos investigar as características de um sistema chaveado afim na condição da existência de incertezas paramétricas politópicas, propor uma metodologia para estabelecimento do ponto de equilíbrio desejado e propor teoremas de controle robusto de sistemas chaveados afins com incertezas politópicas.

### 4.1 Incertezas Politópicas em Sistemas Chaveados Afins

O controle robusto de sistemas lineares e de sistemas lineares chaveados incertos é um tema já bastante abordado na literatura. Contudo, em se tratando de sistemas chaveados afins incertos o controle robusto ainda é menos estabelecido e apresenta maior dificuldade devido ao fato de que o ponto de equilíbrio também passa a ser incerto.

Trabalhos como Spiazzi et al. (1995), Malesani et al. (1996), Spiazzi e Mattavelli (2002) e Tavan et al. (2020) abordam o controle robusto de conversores eletrônicos. Estes são sistemas que podem ser modelados como sistemas chaveados afins, com incertezas na carga, contudo, a modelagem e o controle nestes trabalhos são desenvolvidos com foco específico em um conversor, não sendo possível uma generalização direta para outros sistemas.

Uma abordagem mais genérica de sistemas chaveados afins incertos é proposta em Mainardi Júnior (2013, Cap. 5). Nesse trabalho, as incertezas são paramétricas e politópicas e a estabilidade do sistema controlado é garantida por meio de condições LMI. Além disso, é estabelecido um custo garantido quadrático equivalente a (25). Por outro lado, o sistema chaveado deve ser convertido para a representação em estruturas variáveis e é necessário que todos os parâmetros incertos estejam contidos apenas na matriz  $A_0$  da representação em estruturas variáveis.

Outra contribuição para o controle robusto de sistemas chaveados afins, com aplicação em conversores eletrônicos, é apresentada em Beneux et al. (2017) e Beneux et al. (2019). Nestes trabalhos, o sistema chaveado afim é modelado diretamente pela combinação dos modelos em espaço de estados de cada subsistema, como na representação (1). Por outro lado, a incerteza no sistema não é tratada como uma incerteza paramétrica, e sim uma incerteza no valor de equilíbrio das variáveis de estado, com a adição de um vetor de incertezas à equação do sistema.

Portanto, considera-se que um grupo de variáveis de estado tem o ponto de equilíbrio definido, enquanto não se conhece o valor de equilíbrio de outro grupo de variáveis. Para solucionar este problema, utiliza-se um observador de Luenberger de ordem completa (ZHAI et al., 2018), que estima o ponto de equilíbrio exato do sistema. Este estimador pode exigir grande capacidade de processamento em tempo real para o controle de um sistema. Em Beneux et al. (2019), a Suposição 1 requer que haja uma única função que determina o valor de equilíbrio das variáveis de estado incertas a partir do valor de equilíbrio das variáveis conhecidas e do valor da incerteza adicionada ao sistema. Deve haver outra função, com estas mesmas características, para determinar a combinação convexa (entre os subsistemas) que mantém o sistema neste ponto de equilíbrio desejado. Esta limitação inviabiliza a aplicação desta técnica em conversores como o Boost, Buck-Boost e Flyback caso seja considerada a resistência do indutor destes conversores (resistência parasita), pois eles passam a apresentar mais de uma combinação convexa possível para o mesmo valor de equilíbrio de uma das variáveis de estado.

#### 4.1.1 Parametrização do ponto de equilíbrio

Quando se considera que um sistema chaveado afim como (1) pode apresentar incertezas paramétricas politópicas, então cada um dos subsistemas passa a ser representado por uma combinação convexa dos vértices do politopo de incertezas. Assim, o sistema chaveado afim incerto controlado por uma regra de chaveamento  $\sigma(x)$  é representado por

$$\begin{cases} \dot{x} = A_{\alpha\sigma(x)}x + B_{\alpha\sigma(x)}w, \\ y = C_{\alpha\sigma(x)}x, \end{cases} \quad (162)$$

sendo que o vetor  $\alpha$  representa os coeficientes da combinação convexa dos vértices das matrizes incertas e pertence ao simplex unitário

$$\Lambda_M = \left\{ \alpha = [\alpha_{(1)}, \alpha_{(2)}, \dots, \alpha_{(M)}]' \in \mathbb{R}^M : \alpha_{(j)} \geq 0, \sum_{j=1}^M \alpha_{(j)} = 1 \right\}. \quad (163)$$

Assim,

$$(A_{\alpha\sigma(x)}, B_{\alpha\sigma(x)}, C_{\alpha\sigma(x)}) = \sum_{j=1}^M \alpha_{(j)} (A_{j\sigma(x)}, B_{j\sigma(x)}, C_{j\sigma(x)}). \quad (164)$$

A combinação convexa entre subsistemas e entre vértices de incerteza para compor o sistema médio, análogo a (8), passa a apresentar dois graus de liberdade, o das incertezas e dos subsistemas, de forma que o sistema médio é descrito como

$$\begin{cases} \dot{x} = A_{\alpha\lambda}x + B_{\alpha\lambda}w, \\ y = C_{\alpha\lambda}x, \end{cases} \quad (165)$$

sendo:

$$(A_{\alpha\lambda}, B_{\alpha\lambda}, C_{\alpha\lambda}) = \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N \alpha_{(j)} \lambda_{(i)} (A_{ji}, B_{ji}, C_{ji}). \quad (166)$$

O ponto de equilíbrio desejado do sistema incerto é

$$x_{r\alpha\lambda_{r\alpha}} = -A_{\alpha\lambda_{r\alpha}}^{-1} B_{\alpha\lambda_{r\alpha}} w \quad (167)$$

e o conjunto de todos os possíveis pontos de equilíbrio é dado por

$$\mathcal{X}_{r\alpha\lambda} = \{x_{r\alpha\lambda} \in \mathbb{R}^n : x_{r\alpha\lambda} = -A_{\alpha\lambda}^{-1} B_{\alpha\lambda} w, \lambda \in \Lambda_N, \alpha \in \Lambda_M\}. \quad (168)$$

Sendo assim, cada subsistema é descrito por:

$$\begin{cases} \dot{x} = A_{\alpha i} x + B_{\alpha i} w, \\ y = C_{\alpha i} x, \end{cases} \quad (169)$$

e para o mesmo sistema incerto, o ponto de equilíbrio de cada subsistema é:

$$x_{r\alpha i} = -A_{\alpha i}^{-1} B_{\alpha i} w. \quad (170)$$

Contudo, o vetor  $\alpha$  não é conhecido, por isso o controle tem que se basear nos vértices do politopo de incertezas. Cada subsistema apresenta  $M$  vértices, assim, haverá  $N \times M$  vértices:

$$\begin{cases} \dot{x} = A_{ji} x + B_{ji} w, \\ y = C_{ji} x, \end{cases} \quad (171)$$

cujo ponto de equilíbrio correspondente é

$$x_{rji} = -A_{ji}^{-1} B_{ji} w. \quad (172)$$

Uma característica dos sistemas chaveados afins é que, para eles, há um conjunto de possíveis pontos de equilíbrio, definido em (11), sendo cada um destes pontos atingido por uma combinação convexa  $\lambda$  dos subsistemas. Contudo, havendo incertezas paramétricas no sistema, este conjunto de pontos de equilíbrio (168) também passa a ser incerto. Neste caso, uma possibilidade é simplesmente estabelecer um domínio de atração em torno de um ponto de equilíbrio para um valor específico dos parâmetros incertos e garantir que o sistema convergirá para este domínio de atração, como proposto em Hetel e Fridman (2013) e Egidio e Deaecto (2019). Porém, esta abordagem não é satisfatória em certos casos, já que fornece apenas um domínio de atração, não um ponto de equilíbrio (não se conhece o valor de equilíbrio de nenhuma das

variáveis de estado). Outra possibilidade, a qual será adotada no presente trabalho, é eleger uma das variáveis de estado para que, considerando qualquer valor dos parâmetros incertos, o ponto de equilíbrio atingido pelo sistema apresente o valor de referência da variável em questão. Tal variável será chamada de variável de interesse, ela corresponde ao *int*-ésimo elemento do vetor de estado e será denotada por  $x_{(int)} \in \mathbb{R}$ , sendo seu valor desejado denotado por  $x_{r(int)} \in \mathbb{R}$ . Assim, é criado um conjunto de pontos de equilíbrios desejados:

$$\chi_{r\alpha} = \{x_{r\alpha} \in \mathbb{R}^n : x_{r\alpha} = -A_{\alpha\lambda}^{-1} B_{\alpha\lambda} w, \quad x_{r\alpha(int)} = x_{r(int)}, \quad \lambda \in \Lambda_N, \quad \alpha \in \Lambda_M\}. \quad (173)$$

Com base nesta proposta, é possível estabelecer, para cada vértice do politopo de incertezas, uma combinação convexa  $\lambda_{rj}$  para a qual o ponto de equilíbrio do sistema representado por este vértice do politopo de incertezas tenha o valor  $x_{r(int)}$  para seu *int*-ésimo elemento, atendendo a (173). O ponto de equilíbrio desejado para cada um dos vértices do politopo de incertezas é chamado de  $x_{rj\lambda_{rj}}$  e é descrito por:

$$x_{rj\lambda_{rj}} = -A_{j\lambda_{rj}}^{-1} B_{j\lambda_{rj}} w, \quad x_{rj\lambda_{rj}(int)} = x_{r(int)}. \quad (174)$$

Nestas condições, o valor de referência de pelo menos uma das variáveis de estado passa a ser conhecido, mesmo assim, devido às características já analisadas dos sistemas chaveados afins, os valores das demais variáveis de estado no ponto de equilíbrio continuam sendo incertos. Considerando que as regras de chaveamento propostas até o momento dependem do valor do ponto de equilíbrio desejado, é necessário criar condições para eliminar esta dependência. Uma solução é a criação de um sistema aumentado, o que pode ser feito a partir da simples adição de variáveis de estado que correspondem ao valor filtrado, por um filtro passa-baixas, das variáveis cujo valor de equilíbrio é incerto. O valor de equilíbrio das novas variáveis filtradas será o mesmo de suas variáveis originais. Desta forma, é possível estabelecer regras de chaveamento que utilizem como informação os valores medidos das variáveis filtradas e das variáveis originais, e não os valores de equilíbrio e os valores medidos das variáveis de estado originais. Este artifício foi utilizado em (SPIAZZI; MATTAVELLI, 2002) para permitir o projeto de modos deslizantes em sistemas que não podem ser representados por uma forma canônica. Utilizando o sistema aumentado, também é possível tornar uma regra de chaveamento baseada em LMIs independente dos valores de referência incertos (DEAECTO et al., 2010; MAINARDI JÚNIOR, 2013).

O novo sistema aumentado, apesar de ter mais variáveis de estado, apresenta as mesmas características dos sistemas chaveados afins incertos discutidos neste capítulo. Por isso, ele também será descrito na forma (162). Isto quer dizer que o número de variáveis de estado

do sistema aumentado continuará sendo representado por  $n$ , já o número de variáveis de estado do sistema não aumentado será descrito por  $n_o$ . Para cada variável de estado do sistema não aumentado, com exceção da variável de interesse, poderá ser criada uma variável filtrada. Dependendo das características do sistema não aumentado tratado, pode ser que, mesmo na presença de incertezas paramétricas, algumas das variáveis de estado tenham seus valores sempre proporcionais ao valor da variável de interesse. Neste caso, as variáveis em questão não precisam ser filtradas, e podem ser utilizadas diretamente na regra de chaveamento. Portanto as quantidades de variáveis no sistema original e no sistema aumentado obedecem à relação

$$n \leq 2n_o - 1, \quad (175)$$

sendo que esta relação passa a ser uma igualdade se o valor de referência de nenhuma das demais variáveis for diretamente proporcional ao valor de referência da variável de interesse dada a existência de incertezas.

Para simplificação da representação, e sem perda de generalidade, neste capítulo será considerado que apenas a variável de interesse não será filtrada para a composição do sistema aumentado. Nestas condições, o vetor de estado do sistema não aumentado é representado por

$$x_o(t) = \left[ x_{(1)}(t) \quad \dots \quad x_{(k)}(t) \quad \dots \quad x_{(n_o)}(t) \right]', \quad (176)$$

enquanto o vetor de estado do sistema aumentado é dado por

$$x(t) = \left[ x_{(1)}(t) \quad \dots \quad x_{(k)}(t) \quad \dots \quad x_{(n_o)}(t) \quad x_{(n_o+1)}(t) \quad \dots \quad x_{(n_o+k)}(t) \quad \dots \quad x_{(n)}(t) \right]', \quad (177)$$

sendo  $k \in \mathbb{K}_{n_o}$ ,  $k \neq \text{int}$ . Assim,  $x_{(n_o+k)}$  representa o valor obtido a partir da filtragem da variável  $x_{(k)}$  para  $k < \text{int}$  e  $x_{(n_o+k-1)}$  representa o valor obtido a partir da filtragem da variável  $x_{(k)}$  para  $k > \text{int}$  e não é feita a filtragem da variável de interesse ( $x_{(\text{int})}$ ).

## 4.2 Controle Robusto de Sistemas Chaveados Afins com Incertezas Politópicas

A fim de estabelecer as condições para a estabilidade dos sistemas incertos apresentadas nos teoremas propostos nesta seção, são definidos vetores  $J$ , utilizados com a mesma finalidade apresentada em Deaecto et al. (2010) e Mainardi Júnior (2013). Vetores  $J_k \in \mathbb{R}^n$  são vetores linha, com a mesma dimensão do vetor de estado do sistema aumentado e seus elementos  $k$ ,  $k \in \mathbb{K}_{n_o}$ ,  $k \neq \text{int}$  e elementos  $n_o + k$ , para  $k < \text{int}$ , ou  $n_o + k - 1$ , para  $k > \text{int}$ , valem 1. Todos os

outros elementos valem 0. Por exemplo, supondo  $n_0 = 3$ ,  $n = 5$  e  $int = 2$ , tem-se:

$$J_1 = [1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0], \quad J_3 = [0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1], \quad \nexists J_2. \quad (178)$$

Também é definido o vetor coluna  $e_{int} \in \mathbb{R}^n$  tal que seu  $int$ -ésimo elemento é 1 e todos os demais são 0. A partir de  $e_{int}$ , cria-se a matriz  $E_{int} = e_{int}e'_{int}$ ,  $E_{int} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Finalmente, define-se o vetor  $\zeta \in \mathbb{R}^n$ :

$$\zeta = x - E_{int}x_{r\alpha\lambda_{r\alpha}}. \quad (179)$$

Este vetor difere-se do vetor de estado (do sistema aumentado) apenas em seu  $int$ -ésimo elemento, que corresponde à diferença entre o valor atual da variável de interesse e seu valor de referência (o único valor de referência necessariamente conhecido). Deve-se lembrar que, apesar de  $x_{r\alpha\lambda_{r\alpha}}$  ser incerto, o valor de seu  $int$ -ésimo elemento é conhecido, sendo assim,  $\zeta$  é independente da incerteza do sistema. Devido às suas características, o vetor  $\zeta$  pode ser utilizado em uma regra de chaveamento para o controle robusto de um sistema chaveado afim incerto, uma vez que ele carrega a informação apenas do valor de equilíbrio da variável de interesse e não depende do valor incerto de equilíbrio das demais variáveis de estado.

Na sequência, são propostos dois teoremas para o controle robusto da classe de sistemas chaveados afins com incertezas paramétricas politópicas descrita em (180) - (183):

$$\begin{cases} \dot{x} = A_{\alpha\sigma(x)}x + B_{\alpha\sigma(x)}w, \\ y = C_{\alpha\sigma(x)}x, \end{cases} \quad (180)$$

$$A_{\alpha i} = A_i + \sum_{j=1}^M \alpha_{(j)}A_j, \quad (181)$$

$$B_{\alpha i} = B_i + \sum_{j=1}^M \alpha_{(j)}B_j, \quad (182)$$

$$C_{\alpha i} = C_i + \sum_{j=1}^M \alpha_{(j)}C_j. \quad (183)$$

**Teorema 8.** *Considere o sistema chaveado afim incerto aumentado (180) - (183) com entrada  $w$ , as matrizes  $Q_{j\lambda_{rj}} = C'_{j\lambda_{rj}}C_{j\lambda_{rj}}$ , a variável incerta  $\xi_\alpha = x - x_{r\alpha\lambda_{r\alpha}}$  e o ponto de equilíbrio incerto  $x_{r\alpha\lambda_{r\alpha}} \in \mathcal{X}_{r\alpha}$  sendo  $x_{r(int)}$  dado. Se existirem  $\lambda_{r\alpha} \in \Lambda_N$ ,  $\lambda_{rj} \in \Lambda_N$ , vetores  $Z_{kj} \in \mathbb{R}^{1 \times n+q}$  e uma matriz simétrica positiva definida  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tais que*

$$A_{\alpha\lambda_{r\alpha}}x_{r\alpha\lambda_{r\alpha}} + B_{\alpha\lambda_{r\alpha}}w = 0, \quad (184)$$

$$A_{j\lambda_{rj}}x_{rj\lambda_{rj}} + B_{j\lambda_{rj}}w = 0, \quad x_{rj\lambda_{rj}(int)} = x_{r\alpha\lambda_{r\alpha}(int)}, \quad j \in \mathbb{K}_M \quad (185)$$

$$A'_{j\lambda_{rj}}P + PA_{j\lambda_{rj}} + Q_{j\lambda_{rj}} < 0, \quad (186)$$

$$J_{kj}P[A_{ji}B_{ji}] = Z_{kj}, \quad k \in \mathbb{K}_{n_o}, k \neq \text{int}, \quad j \in \mathbb{K}_M \quad (187)$$

então, a estratégia de chaveamento

$$\sigma(x) = \arg \min_{i \in \mathbb{K}_N} \zeta' P(A_{\alpha_i}x + B_{\alpha_i}w), \quad (188)$$

em que  $\alpha_a$  é qualquer valor arbitrário de  $\alpha \in \Lambda_M$ , torna o ponto de equilíbrio incerto globalmente assintoticamente estável e o custo garantido

$$J = \int_0^\infty (y - C_{\alpha\lambda_{r\alpha}}x_{r\alpha\lambda_{r\alpha}})'(y - C_{\alpha\lambda_{r\alpha}}x_{r\alpha\lambda_{r\alpha}})dt < (x_0 - x_{r\alpha\lambda_{r\alpha}})'P(x_0 - x_{r\alpha\lambda_{r\alpha}}) \quad (189)$$

mantém-se.

**Demonstração.** Considerando a candidata a função de Lyapunov (17) e o sistema (180) - (183), tem-se que

$$\dot{V}(\xi_\alpha) = \dot{\xi}'_\alpha P \xi_\alpha + \xi'_\alpha P \dot{\xi}_\alpha, \quad (190)$$

$$\dot{V}(\xi_\alpha) = 2\xi'_\alpha P \dot{\xi}_\alpha, \quad (191)$$

$$\dot{V}(\xi_\alpha) = 2\xi'_\alpha P (A_{\alpha\sigma}x + B_{\alpha\sigma}w). \quad (192)$$

Considerando uma regra de chaveamento

$$\sigma(x) = \arg \min_{i \in \mathbb{K}_N} \xi'_\alpha P (A_{\alpha_i}x + B_{\alpha_i}w), \quad (193)$$

a derivada da função de Lyapunov passa a ser:

$$\dot{V}(\xi_\alpha) = \min_{i \in \mathbb{K}_N} (2\xi'_\alpha P (A_{\alpha_i}x + B_{\alpha_i}w)), \quad (194)$$

$$\dot{V}(\xi_\alpha) \leq 2\xi'_\alpha P (A_{\alpha\lambda_{r\alpha}}x + B_{\alpha\lambda_{r\alpha}}w), \quad (195)$$

$$\dot{V}(\xi_\alpha) \leq 2\xi'_\alpha P (A_{\alpha\lambda_{r\alpha}}(\xi_\alpha + x_{r\alpha\lambda_{r\alpha}}) + B_{\alpha\lambda_{r\alpha}}w), \quad (196)$$

$$\dot{V}(\xi_\alpha) \leq 2\xi'_\alpha (PA_{\alpha\lambda_{r\alpha}}) \xi_\alpha + 2\xi'_\alpha P (A_{\alpha\lambda_{r\alpha}}x_{r\alpha\lambda_{r\alpha}} + B_{\alpha\lambda_{r\alpha}}w). \quad (197)$$

Pela condição (184), de (197) tem-se que:

$$\dot{V}(\xi_\alpha) \leq 2\xi'_\alpha (PA_{\alpha\lambda_{r\alpha}}) \xi_\alpha, \quad (198)$$

$$\dot{V}(\xi_\alpha) \leq \xi'_\alpha (A'_{\alpha\lambda_{r\alpha}}P + PA_{\alpha\lambda_{r\alpha}}) \xi_\alpha. \quad (199)$$

A restrição (186) implica em

$$A'_{\alpha\lambda_{r\alpha}}P + PA_{\alpha\lambda_{r\alpha}} + Q_{\alpha\lambda_{r\alpha}} < 0. \quad (200)$$

Portanto, de (199) e (200), tem-se que:

$$\dot{V}(\xi_\alpha) < -\xi'_\alpha Q_{\alpha\lambda_{r\alpha}} \xi_\alpha < 0, \quad \forall \xi \neq 0, \quad (201)$$

assim, está garantida a estabilidade global assintótica do sistema. Fazendo a integral de ambos os lados de (201), obtém-se:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \dot{V}(\xi_\alpha(t)) dt &< - \int_0^\infty \xi'_\alpha Q_{\alpha\lambda_{r\alpha}} \xi_\alpha dt, \\ (V(\xi_\alpha(t))) \Big|_0^\infty &< - \int_0^\infty \xi'_\alpha Q_{\alpha\lambda_{r\alpha}} \xi_\alpha dt, \\ (V(\xi_\alpha(\infty)) - V(\xi_\alpha(0))) &< - \int_0^\infty \xi'_\alpha Q_{\alpha\lambda_{r\alpha}} \xi_\alpha dt. \end{aligned} \quad (202)$$

Considerando que o sistema é assintoticamente estável,  $V(\xi(\infty)) = 0$ , então

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \xi'_\alpha Q_{\alpha\lambda_{r\alpha}} \xi_\alpha dt &< V(\xi_\alpha(0)), \\ J = \int_0^\infty \xi'_\alpha Q_{\alpha\lambda_{r\alpha}} \xi_\alpha dt &< \xi_\alpha(0)' P \xi_\alpha(0). \end{aligned} \quad (203)$$

Portanto, está garantido o custo (189). As demonstrações acima consideram a regra de chaveamento (193), contudo, esta regra não pode ser utilizada em uma aplicação prática, uma vez que  $\alpha$  é incerto. Então, resta demonstrar que o mesmo resultado pode ser obtido com a regra (188). O primeiro passo é notar que a regra (193) pode ser reescrita como

$$\sigma(x) = \arg \min_{i \in \mathbb{K}_N} \xi'_\alpha P \left( \left( A_i + \sum_{j=1}^M \alpha_{(j)} A_j \right) x + \left( B_i + \sum_{j=1}^M \alpha_{(j)} B_j \right) w \right), \quad (204)$$

$$\sigma(x) = \arg \min_{i \in \mathbb{K}_N} \xi'_\alpha P \left( A_i x + B_i w + \sum_{j=1}^M (\alpha_{(j)} A_j x + \alpha_{(j)} B_j w) \right). \quad (205)$$

Como o termo

$$\sum_{j=1}^M (\alpha_{(j)} A_j x + \alpha_{(j)} B_j w) \quad (206)$$

assume o mesmo valor para todos os subsistemas  $i$ , a regra de chaveamento em questão assume o mesmo valor para qualquer possível combinação convexa  $\alpha$  dos vértices de incerteza. Por isso, é possível utilizar qualquer valor arbitrário da variável incerta, inclusive qualquer um

dos vértices  $j$ , o que resulta a regra de chaveamento:

$$\sigma(x) = \arg \min_{i \in \mathbb{K}_N} \xi'_\alpha P(A_{\alpha_i}x + B_{\alpha_i}w). \quad (207)$$

A aplicação da regra (207) também resulta na equação (195). Entretanto, o vetor  $\xi_\alpha$  é dependente da incerteza do sistema, o que ainda impossibilita a aplicação de (207). Para prosseguir a demonstração, observa-se que o produto

$$P[A_{ji} \ B_{ji}] \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix} \quad (208)$$

gera um vetor coluna de dimensão  $n$ , sendo que cada um de seus elementos corresponde a uma função das variáveis  $x$  e  $w$ . Assim, seu primeiro elemento é a função  $f_{ji(1)}(x, w)$ . Portanto, tem-se que:

$$\begin{aligned} Z_{kj} \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix} &= J_{kj} P[A_{ji} \ B_{ji}] \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix} \\ &= J_{kj} P(A_{ji}x + B_{ji}w) \\ &= J_{kj} [f_{ji(1)}(x, w) \cdots f_{ji(int)}(x, w) \cdots \\ &\quad \cdots f_{ji(n_o)}(x, w) \ f_{ji(n_o+1)}(x, w) \cdots f_{ji(n)}(x, w)]'. \end{aligned} \quad (209)$$

A partir de (209), observa-se que a derivada da função de Lyapunov (192), dividida por 2, para cada um dos vértices "ji" pode ser escrita como (lembre-se que o valor no ponto de equilíbrio de uma variável filtrada é o mesmo da variável não filtrada, assim,  $x_{r(n_o+1)} = x_{r(1)}$ , por exemplo):

$$\begin{aligned} \frac{\dot{V}_{ji}}{2} &= \xi'_\alpha P(A_{ji}x + B_{ji}w) \\ &= \xi'_\alpha [f_{ji(1)}(x, w) \cdots f_{ji(int)}(x, w) \cdots f_{ji(n_o)}(x, w) \ f_{ji(n_o+1)}(x, w) \cdots f_{ji(n)}(x, w)]' \\ &= ((x_{(1)} - x_{r(1)}) f_{ji(1)}(x, w) + \cdots \\ &\quad + (x_{(int)} - x_{r(int)}) f_{ji(int)}(x, w) + \cdots + (x_{(n_o)} - x_{r(n_o)}) f_{ji(n_o)}(x, w) \\ &\quad + (x_{(n_o+1)} - x_{r(1)}) f_{ji(n_o+1)}(x, w) + \cdots + (x_{(n)} - x_{r(n_o)}) f_{ji(n)}(x, w)) \\ &= (x_{(1)} f_{ji(1)}(x, w) + \cdots + (x_{(int)} - x_{r(int)}) f_{ji(int)}(x, w) + \cdots \\ &\quad + x_{(n_o)} f_{ji(n_o)}(x, w) + x_{(n_o+1)} f_{ji(n_o+1)}(x, w) + \cdots + x_{(n)} f_{ji(n)}(x, w) \\ &\quad - x_{r(1)} (f_{ji(1)}(x, w) + f_{ji(n_o+1)}(x, w)) - \cdots - x_{r(n_o)} (f_{ji(n_o)}(x, w) + f_{ji(n)}(x, w))). \end{aligned} \quad (210)$$

A condição (187) implica em

$$(f_{ji(k)}(x, w) + f_{ji(n_o+k)}(x, w)) = z_{kj}, \quad k < \text{int}, \quad \forall ji \quad (211)$$

ou

$$(f_{ji(k)}(x, w) + f_{ji(n_o+k-1)}(x, w)) = z_{kj}, \quad k > \text{int}, \quad \forall ji, \quad (212)$$

ou seja, este valor é o mesmo para todos os subsistemas  $i$  para cada um dos vértices  $j$  do politopo de incertezas. Isto quer dizer que estas componentes não têm nenhuma influência na regra de chaveamento. Por este motivo, a regra (207) pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} \sigma(x) = \arg \min_{i \in \mathbb{K}_N} & (x_{(1)} f_{\alpha_{ai}(1)}(x, w) + \dots + (x_{(\text{int})} - x_{r(\text{int})}) f_{\alpha_{ai}(\text{int})}(x, w) + \dots \\ & + x_{(n_o)} f_{\alpha_{ai}(n_o)}(x, w) + x_{(n_o+1)} f_{\alpha_{ai}(n_o+1)}(x, w) + \dots + x_{(n)} f_{\alpha_{ai}(n)}(x, w)). \end{aligned} \quad (213)$$

Observa-se que (213) é independente do valor de referência de qualquer uma das variáveis de estado diferentes da variável de interesse, tendo exatamente a mesma expressão da regra (188). Portanto, a prova está concluída. □

**Comentário 1.** A prova do Teorema 8 demonstra que a regra de chaveamento (188) pode utilizar qualquer valor arbitrário de  $\alpha_a$ , eliminando a necessidade de se realizar as operações referentes ao termo (206) durante o cálculo do sistema a ser ativado. Assim, a implementação desta regra de chaveamento é tão simples quanto a das regras apresentadas no Capítulo 2 (para sistemas sem incertezas).

Observa-se que o Teorema 8 garante a estabilidade robusta do sistema chaveado afim incerto para um único valor de referência da variável de interesse,  $x_{r(\text{int})}$ , associado aos vetores de combinação convexa dos subsistemas,  $\lambda_{r,j}$ . Para permitir a variação do ponto de operação desejado de um sistema, possibilidade muito importante em algumas aplicações práticas, propõem-se o Teorema 9.

**Teorema 9.** Considere o sistema chaveado afim incerto aumentado (180) - (183) com entrada  $w$ , as matrizes  $Q_{ji} = C'_{ji}C_{ji}$ , a variável incerta  $\xi_\alpha = x - x_{r\alpha\lambda_{r\alpha}}$  e o ponto de equilíbrio incerto  $x_{r\alpha\lambda_{r\alpha}} \in \mathcal{X}_{r\alpha}$  sendo  $x_{r(\text{int})}$  dado. Se existirem  $\lambda_{r\alpha} \in \Lambda_N$ , vetores  $Z_{kj} \in \mathbb{R}^{1 \times n+q}$  e uma matriz simétrica positiva definida  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tais que

$$A'_{ji}P + PA_{ji} + Q_{ji} < 0, \quad (214)$$

$$A_{\alpha\lambda_{r\alpha}}x_{r\alpha\lambda_{r\alpha}} + B_{\alpha\lambda_{r\alpha}}w = 0, \quad (215)$$

$$J_k P[A_{ji}B_{ji}] = Z_{kj}, \quad k \in \mathbb{K}_{n_o}, k \neq \text{int}, \quad j \in \mathbb{K}_M \quad (216)$$

então, a estratégia de chaveamento

$$\sigma(x) = \arg \min_{i \in \mathbb{K}_N} \zeta' P(A_{\alpha_i}x + B_{\alpha_i}w) \quad (217)$$

torna o ponto de equilíbrio incerto globalmente assintoticamente estável e o custo garantido

$$J = \int_0^{\infty} (y - C_{\alpha\lambda_{r\alpha}}x_{r\alpha\lambda_{r\alpha}})'(y - C_{\alpha\lambda_{r\alpha}}x_{r\alpha\lambda_{r\alpha}})dt < (x_0 - x_{r\alpha\lambda_{r\alpha}})'P(x_0 - x_{r\alpha\lambda_{r\alpha}}) \quad (218)$$

mantém-se.

**Demonstração.** Esta prova segue os mesmos passos da prova do Teorema 8 até a equação (199). Neste ponto, nota-se que a restrição (214) é ainda mais abrangente que a restrição (186), conseqüentemente, ela também implica em (200).

A partir de (200), a prova deste teorema volta a seguir a demonstração do Teorema 8 até o final. Esta prova está concluída. □

**Comentário 2.** Apesar de os Teoremas 8 e 9 compartilharem a mesma regra de chaveamento, o primeiro teorema citado garante a estabilidade apenas para um valor de referência da variável de interesse previamente especificado, relacionado às combinações convexas de subsistemas  $\lambda_{rj}$ , o que flexibiliza a busca por uma matriz  $P$ . Por outro lado, ao encontrar uma matriz  $P$  que certifique a estabilidade para todos os vértices  $j_i$  do politopo de incertezas e subsistemas, o Teorema 9 permite a variação do ponto de equilíbrio desejado durante a operação do sistema.

**Comentário 3.** Em todos os teoremas de controle não robusto apresentados até o momento nesta tese, a entrada  $w$  (termo afim) interfere no conjunto de possíveis pontos de equilíbrio. Então, apesar de a entrada  $w$  não interferir na factibilidade das LMIs destes teoremas, ela está diretamente relacionada ao valor do ponto de equilíbrio desejado ( $x_r$ ). Ao se variar a entrada  $w$ , o conjunto de pontos de equilíbrio atingíveis ( $\chi_r$ ) é alterado e o ponto de equilíbrio prévio pode deixar de pertencer a este conjunto. Como o ponto de equilíbrio é usado na regra de chaveamento, seja diretamente, ou utilizado para determinar  $\xi$ , estes teoremas não permitem variação de  $w$ . Este problema não ocorre no caso dos teoremas de controle robusto, pois já pressupõe-se que o ponto de equilíbrio desejado é incerto. Assim, o valor de referência de apenas uma das variáveis de estado é utilizado para o chaveamento. Desta forma, mesmo com a variação da entrada (dentro de um limite de operação do sistema), ainda haverá um

ponto de equilíbrio com o valor de referência para a variável de interesse dentro do novo conjunto incerto de possíveis pontos de equilíbrio. Contudo, deve-se lembrar que as condições do teorema devem ser válidas para qualquer combinação convexa de subsistemas, como é o caso das condições do Teorema 9.

### 4.3 Exemplos

Nesta seção, serão apresentados exemplos de aplicação dos teoremas para controle robusto em diferentes sistemas chaveados afins com incertezas paramétricas. A maioria dos sistemas simulados foi referente ao modelo de conversores eletrônicos de potência, e o parâmetro incerto foi a resistência de saída, que representa a carga do conversor. Nestes sistemas, foi considerada a matriz  $Q$  apresentada em (158) para a formulação do custo garantido. Foi simulado, ainda, um sistema arbitrário para permitir uma melhor exemplificação da observação feita no Comentário 3.

#### 4.3.1 Conversor CC-CC Boost

Neste primeiro exemplo, o Teorema 8 será aplicado no controle de um conversor Boost, que é um conversor CC-CC elevador de tensão, ele apresenta dois subsistemas e duas variáveis de estado, sendo elas a corrente no indutor ( $i_L(t)$ ) e a tensão no capacitor ( $v_C(t)$ ). O diagrama da estrutura deste conversor já foi apresentado na Figura 2. Seu modelo chaveado afim em espaço de estados, conforme (1), é definido pelas matrizes já apresentadas em (154). O vetor de variáveis de estado e o conjunto de possíveis pontos de equilíbrio foram apresentados, respectivamente, em (155) e (157).

O parâmetro incerto será a resistência de carga ( $R$ ), que pode assumir qualquer valor entre  $R_{min}$  e  $R_{max}$ . Os demais parâmetros de projeto utilizados serão os mesmos propostos em (DEAECTO et al., 2010), sendo assim, os valores são dados por:

$$\begin{aligned} V_g = w = 100[V], \quad R_{min} = 25[\Omega], \quad R_{max} = 150[\Omega], \quad r_L = 2[\Omega], \\ L = 500[\mu H], \quad C = 470[\mu F]. \end{aligned} \quad (219)$$

Portanto, os limites do conjunto incerto de todos os possíveis pontos de equilíbrio (168) do sistema não aumentado são obtidos ao se aplicar os valores extremos do parâmetro incerto ao conjunto (157).

Seguindo a linha de raciocínio de se considerar a tensão de saída dos conversores como sendo a variável mais importante a se controlar, esta será a variável de interesse ( $x_{(int)}$ ), por-

tanto, ocorrendo variações no parâmetro incerto, a tensão de saída de referência deverá permanecer constante, enquanto outras variáveis de estado podem sofrer alterações em seus valores de equilíbrio. Assim, a variável a ser filtrada para compor o sistema aumentado é a corrente no indutor. Para isso, será introduzido um filtro passa-baixas com a função de transferência

$$H(s) = \frac{1}{(\tau s + 1)}, \quad (220)$$

sendo  $\tau = 1/(R_m C)$  e  $R_m = (R_{min} + R_{max})/2$ . Assim, as matrizes que constituem os vértices do sistema incerto na forma (162) são descritas abaixo:

$$\begin{aligned} A_{11} &= \begin{bmatrix} -r_L/L & 0 & 0 \\ 0 & -1/R_{min}C & 0 \\ 1/\tau & 0 & -1/\tau \end{bmatrix}, & A_{21} &= \begin{bmatrix} -r_L/L & 0 & 0 \\ 0 & -1/R_{max}C & 0 \\ 1/\tau & 0 & -1/\tau \end{bmatrix}, \\ A_{12} &= \begin{bmatrix} -r_L/L & -1/L & 0 \\ 1/C & -1/R_{min}C & 0 \\ 1/\tau & 0 & -1/\tau \end{bmatrix}, & A_{22} &= \begin{bmatrix} -r_L/L & -1/L & 0 \\ 1/C & -1/R_{max}C & 0 \\ 1/\tau & 0 & -1/\tau \end{bmatrix}, \\ B_{11} = B_{12} = B_{21} = B_{22} &= \begin{bmatrix} 1/L \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (221)$$

Para determinar o conjunto de possíveis pontos de equilíbrio do sistema aumentado, basta considerar que o valor de equilíbrio da terceira variável de estado  $\hat{x}_{(1)}$  (corrente no indutor filtrada) é o mesmo da primeira variável de estado  $x_{(1)}$  (corrente no indutor). Por haver apenas uma variável filtrada, será necessário apenas um vetor  $J$ , dado por:

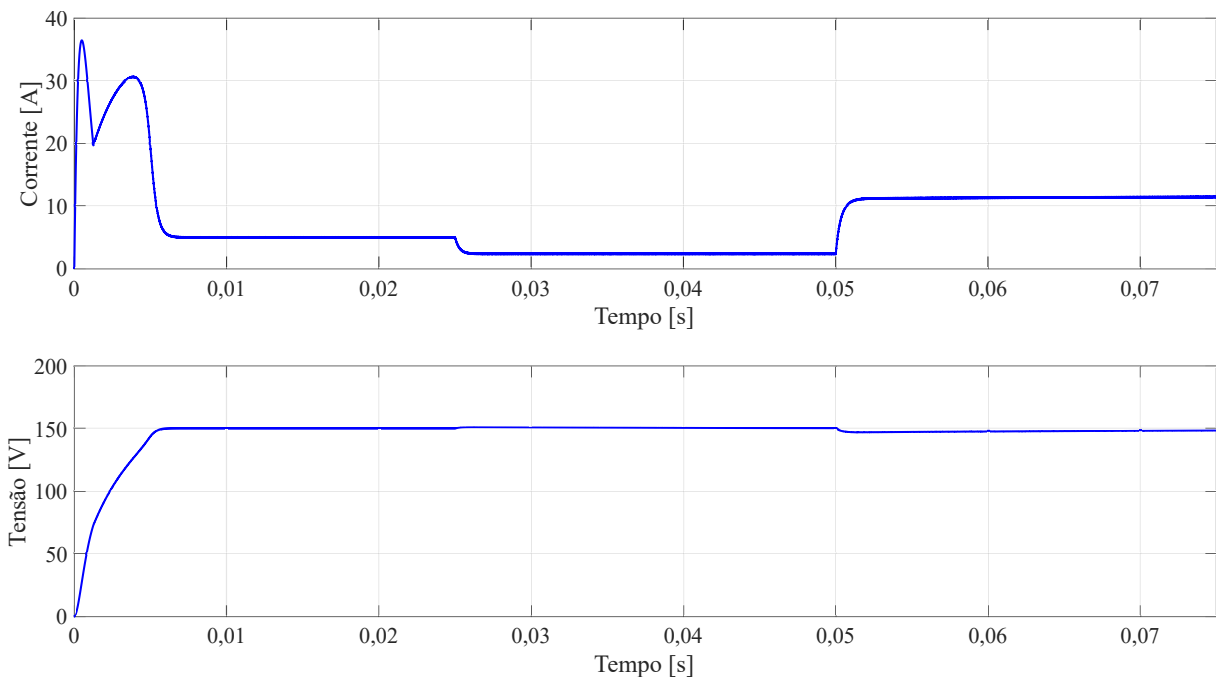
$$J = [1 \ 0 \ 1]. \quad (222)$$

A simulação foi dividida em três intervalos de tempo, sendo utilizado um valor diferente da resistência de carga para cada um deles, o que implica em três diferentes pontos de equilíbrio, mas todos com o mesmo valor de tensão. Considerou-se como condição inicial valores nulos de tensão e corrente, ou seja,  $x(0) = [0 \ 0 \ 0]'$ . Para possibilitar algumas comparações com o Teorema 2, o primeiro transitório teve exatamente as mesmas condições do teste realizado no Capítulo 3, ou seja, mesma condição inicial e mesmo ponto de equilíbrio. Para tanto, a tensão de referência foi estabelecida em 150 [V], o primeiro valor da resistência de carga foi 50 [ $\Omega$ ] e a matriz  $Q$  utilizada foi a mesma descrita no Capítulo 3. Aos 25 [ms], a resistência de carga foi alterada para 100 [ $\Omega$ ] e, aos 50 [ms], este parâmetro foi alterado para 25 [ $\Omega$ ].

A Figura 14 apresenta o comportamento transitório das duas variáveis de estado do conver-

controlado pelo Teorema 8. O primeiro eixo mostra o valor, ao longo do tempo, da corrente do indutor e o segundo, da tensão de saída. Como esperado, o primeiro transitório foi o que apresentou maiores variações de tensão e de corrente devido à maior diferença entre a condição inicial e o ponto de equilíbrio ( $x_r = [5 \ 150 \ 5]'$ ). Aos 25 [ms] a resistência de carga muda de 50 [ $\Omega$ ] para 100 [ $\Omega$ ], o que representa uma redução de 50% da carga. Nota-se que rapidamente a corrente é reduzida, estabilizando-se em seu novo valor de equilíbrio, correspondente a 2,3615 [A]. Apesar de o valor da tensão de equilíbrio não ser alterado, o degrau no parâmetro incerto causa um pequeno aumento transitório nesta variável de estado, que logo inicia a convergência de volta para o valor de equilíbrio. Aos 50 [ms] ocorre nova variação do parâmetro incerto, desta vez de 100 [ $\Omega$ ] para 25 [ $\Omega$ ], quadruplicando a carga do conversor e alterando o valor de equilíbrio da corrente no indutor para 11,771 [A]. Os efeitos observados neste transitório são análogos aos do anterior, apenas com intensidade maior. É válido lembrar que a corrente apresentada na Figura 14 é a corrente no indutor, não no resistor de carga, por isso sua variação não é diretamente proporcional à da carga.

Figura 14 - Resposta transitória da corrente no indutor  $i_L(t)$  e tensão no capacitor  $v_C(t)$  sob variação do parâmetro incerto para o conversor CC-CC Boost controlado de acordo com o Teorema 8.



Fonte: Elaborada pelo próprio autor

No primeiro intervalo da simulação, o valor do parâmetro incerto e a condição inicial foram os mesmos utilizados para o teste do Teorema 2. Este e o Teorema 8 apresentam propostas diferentes, já que o Teorema 2 não considera incertezas do sistema. Por isso, não faz sentido o uso

dos parâmetros de desempenho para comparar estes teoremas. Mesmo assim, estes valores serão apresentados aqui apenas para situar os resultados obtidos para o Teorema 8, que apresentou custo garantido (189) igual a 1,0003, custo medido igual a 0,4765 e tempo de estabelecimento de 5,292[ms]. O Teorema 2 apresentou, respectivamente, os valores 0,59003 e 0,4759 para os custos garantido e medido. Já o tempo de estabelecimento foi de 5,362[ms]. Observa-se que, como esperado, o teorema de controle robusto apresentou um maior custo garantido, o que ocorre pois a robustez demanda mais restrições à matriz  $P$ . Mesmo assim, o desempenho transitório foi muito parecido, tanto nos valores de custo medido e tempo de estabelecimento quanto na trajetória percorrida (definida pela superfície de deslizamento criada pelo teorema). Vale destacar que, como os teoremas se aplicam a sistemas diferentes, sendo o Teorema 8 aplicado ao sistema aumentado, esta comparação só é possível pois o custo, estabelecido para o conversor Boost no Capítulo 3 e também utilizado no presente capítulo, leva em consideração apenas uma das variáveis de estado, a tensão no capacitor, que é a variável de interesse. Mesmo assim, como já observado, estes valores não devem ser tomados como uma medida direta para a comparação entre os teoremas, pois estes apresentam propostas diferentes, sendo o Teorema 8 aplicável a sistemas com incertezas.

Observou-se que a proposta do controle robusto foi atendida, uma vez que sem o conhecimento da resistência de saída  $e$ , inclusive com sua variação, o sistema permaneceu estável e a variável de interesse permaneceu em seu valor de referência.

#### 4.3.2 Conversor CC-CC Buck

Nas simulações desta subseção, o Teorema 9 será empregado para controlar o conversor eletrônico de potência Buck, que é um conversor CC-CC rebaixador de tensão e apresenta duas variáveis de estado e dois subsistemas. O diagrama da estrutura deste conversor é apresentado na Figura 15, observando-se que, neste modelo, é considerada a resistência parasita do indutor ( $r_L$ ). As matrizes de seu modelo chaveado afim em espaço de estados, conforme (1), são apresentadas em (223):

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} -r_L/L & -1/L \\ 1/C & -1/RC \end{bmatrix}, & A_2 &= \begin{bmatrix} -r_L/L & -1/L \\ 1/C & -1/RC \end{bmatrix}, \\ B_1 &= \begin{bmatrix} 1/L \\ 0 \end{bmatrix}, & B_2 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (223)$$

Neste sistema, as variáveis de estado são a corrente no indutor ( $i_L(t)$ ) e a tensão no capacitor

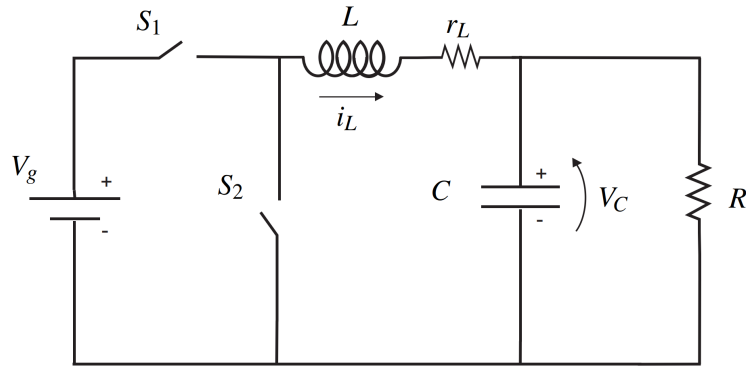
( $v_C(t)$ ), assim, o vetor de variáveis de estado é dado por:

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_{(1)}(t) & x_{(2)}(t) \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} i_L(t) & v_C(t) \end{bmatrix}' . \quad (224)$$

O conjunto de possíveis pontos de equilíbrio (11), descrito em (DEAECTO et al., 2010), é dado por:

$$\chi_r = \left\{ [i_{Lr} \quad v_{Cr}]' : v_{Cr} = Ri_{Lr}, \quad 0 \leq i_{Lr} \leq \frac{V_g}{(r_L + R)} \right\} . \quad (225)$$

Figura 15 - Diagrama do circuito elétrico do Conversor CC-CC Buck.



Fonte: Mainardi Júnior (2013)

Assim como no caso do conversor Boost simulado na subseção anterior, o parâmetro incerto será a resistência de carga ( $R$ ), que pode assumir qualquer valor entre  $R_{min}$  e  $R_{max}$ . Os parâmetros de projeto utilizados serão os mesmos propostos em Mainardi Júnior (2013, Cap. 5), dados por:

$$\begin{aligned} V_g = w = 100[V], \quad R_{min} = 20[\Omega], \quad R_{max} = 150[\Omega], \quad r_L = 1[\mu\Omega], \quad (226) \\ L = 4,2[mH], \quad C = 83,3[\eta F]. \end{aligned}$$

Portanto, os limites do conjunto incerto de todos os possíveis pontos de equilíbrio do sistema (168) são obtidos ao se aplicar os valores extremos do parâmetro incerto ao conjunto (225).

A variável de interesse ( $x_{int}$ ) do controle é a tensão de saída, portanto, a variável a ser filtrada para compor o sistema aumentado é a corrente no indutor. O filtro utilizado é o mesmo cuja função de transferência foi apresentada em (220). Assim, as matrizes que constituem os vértices do sistema incerto na forma (162) são descritas abaixo:

$$A_{11} = A_{12} = \begin{bmatrix} -r_L/L & -1/L & 0 \\ 1/C & -1/R_{min}C & 0 \\ 1/\tau & 0 & -1/\tau \end{bmatrix}, \quad A_{21} = A_{22} = \begin{bmatrix} -r_L/L & -1/L & 0 \\ 1/C & -1/R_{max}C & 0 \\ 1/\tau & 0 & -1/\tau \end{bmatrix},$$

$$B_{11} = \begin{bmatrix} 1/L \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_{21} = \begin{bmatrix} 1/L \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_{22} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (227)$$

sendo  $\tau = 1/(R_m C)$  e  $R_m = (R_{min} + R_{max})/2$ . No caso do sistema expandido, o valor de equilíbrio da variável filtrada  $\hat{x}_{(1)}$  é o mesmo valor de equilíbrio da corrente do indutor (variável  $x_{(1)}$ ), calculado em (225). Pelas características do sistema, o vetor  $J$  será o mesmo descrito por (222).

A primeira simulação foi realizada três vezes, sendo que em cada uma das vezes foi utilizado um valor de referência diferente para a variável de interesse, a tensão de saída. Estes valores foram 25 [V], 50 [V] e 75 [V]. Nota-se que todas estas simulações foram realizadas utilizando-se a mesma matriz  $P$  encontrada pelo Teorema 9, em conformidade com o Comentário 2.

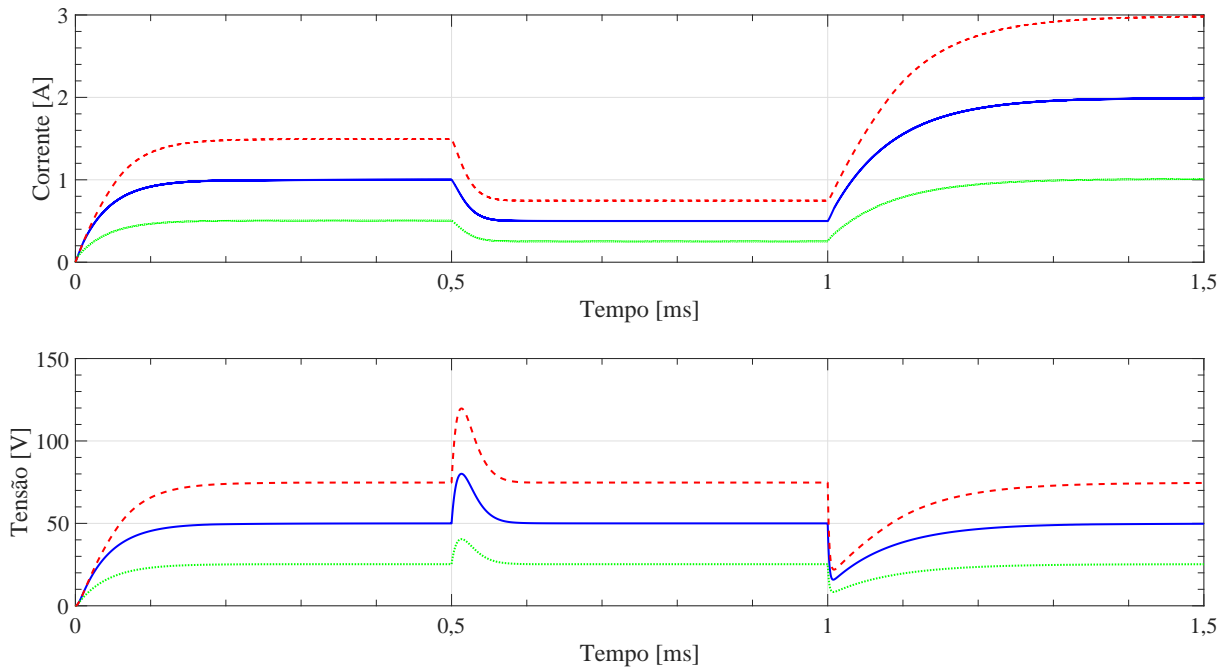
O comportamento das duas variáveis de estado do conversor em função do tempo é apresentado na Figura 16. Para cada simulação há um padrão específico de representação das curvas: tracejado vermelho, contínuo azul e pontilhado verde, para as tensões de referência 75 [V], 50 [V] e 25 [V], respectivamente. O valor da tensão de referência correspondente a cada padrão é visualizado no segundo eixo da figura.

Assim como na subseção anterior, a simulação foi dividida em três intervalos de tempo, com um valor diferente da resistência de carga para cada intervalo. No primeiro intervalo, de 0 [ms] a 0,5 [ms], a resistência de carga foi de 50 [ $\Omega$ ], nos dois intervalos seguintes, de mesma duração, a resistência de carga foi alterada, sucessivamente, para 100 [ $\Omega$ ] e 25 [ $\Omega$ ]. A condição inicial foi  $x(0) = [0 \ 0 \ 0]'$ .

É interessante observar que, neste exemplo, a proporção diferente entre os valores de indutância e capacitância se comparados aos utilizados no conversor Boost do exemplo anterior faz com que a oscilação da corrente no indutor no primeiro transitório seja menor, além disso, as oscilações na tensão de saída são maiores durante as variações da resistência de carga. Isto permite uma melhor visualização do fato de que a variação do parâmetro incerto interfere instantaneamente na tensão de saída do conversor e o controle precisa atuar para ajustar esta variável sempre no mesmo valor de referência enquanto a corrente no indutor converge para seu novo valor de equilíbrio. Neste caso, a corrente média do indutor, em regime permanente, é igual à corrente de saída, por isso a corrente de referência do indutor, para cada intervalo, foi diretamente proporcional à carga naquele intervalo (e inversamente proporcional ao valor da resistência).

A Figura 17 apresenta o plano de fase considerando as duas variáveis de estado do conver-

Figura 16 - Resposta transitória da corrente no indutor  $i_L(t)$  e tensão no capacitor  $v_C(t)$  sob variação do parâmetro incerto para três pontos de equilíbrio desejados para o conversor CC-CC Buck controlado de acordo com Teorema 9.



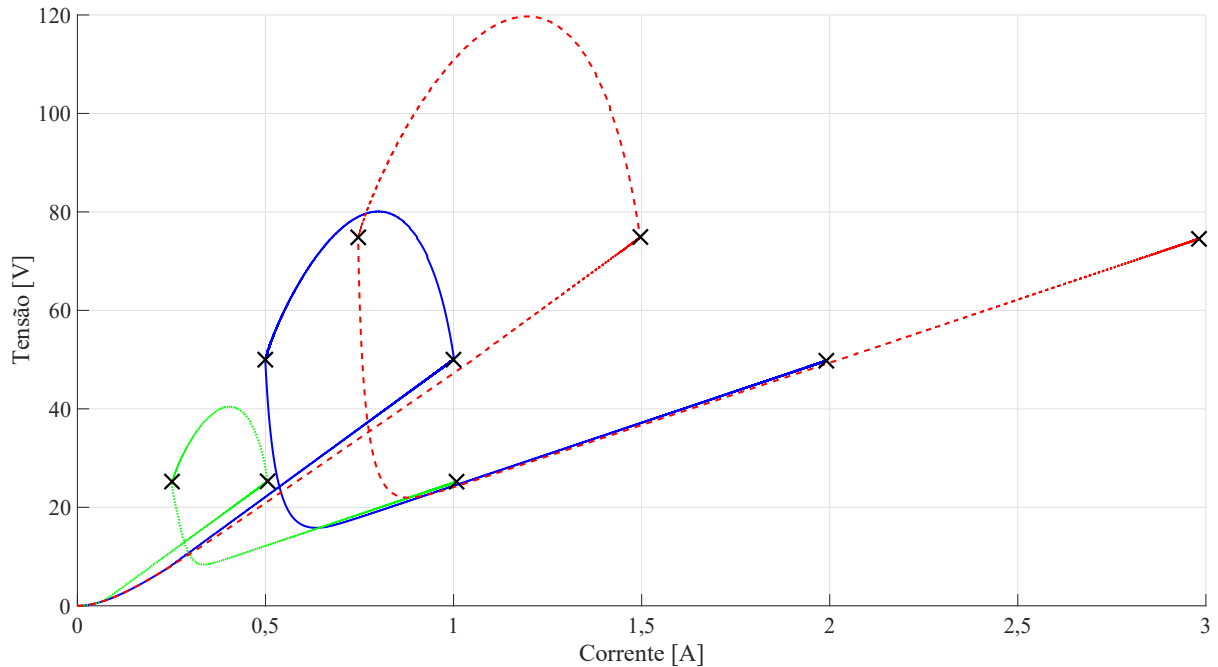
Fonte: Elaborada pelo próprio autor

sor. Os padrões das linhas estabelecidos na Figura 16 são repetidos aqui. O símbolo  $\times$  indica os pontos de equilíbrio do conversor, havendo três pontos de equilíbrio para cada uma das três tensões de referência. Como esperado, todos os três pontos de equilíbrio para uma mesma tensão de referência apresentam o mesmo valor de tensão, com variação no valor da corrente de acordo com o valor da resistência de carga (parâmetro incerto). Considerando que o Teorema 9 utiliza o sistema aumentado, com três variáveis de estado, não é possível plotar a superfície de deslizamento sobre este plano de fase.

Conforme citado no Comentário 3, o Teorema 9 não depende do conhecimento prévio da entrada externa  $w$  que compõe o termo afim, isto quer dizer que, mesmo havendo variações na entrada  $w$ , este teorema é capaz de manter o sistema estável e manter a variável de interesse em seu valor de referência. Na prática, isto significa que, mesmo que a tensão de alimentação do conversor (variável  $V_g$  na Figura 15) sofra alterações, a regra de chaveamento criada sob as condições do Teorema 9 é capaz de manter a tensão de saída do conversor constante.

Para observar mais esta forma de robustez do Teorema 9, uma nova simulação do conversor Buck foi realizada, mantendo como referência para a tensão de saída o valor de 50 [V] e tendo a origem do espaço de estados ( $x(0) = [0 \ 0 \ 0]'$ ) como condição inicial. A nova simulação teve duração total de 4,5 [ms], apresentando duas alterações na resistência de carga e duas alterações na tensão de alimentação. O valor inicial da resistência de carga foi de 50 [ $\Omega$ ] e o da tensão

Figura 17 - Plano de fase ( $i_L(t) \times v_C(t)$ ) para o conversor CC-CC Buck controlado de acordo com o Teorema 9 sob variação do parâmetro incerto para três pontos de equilíbrio desejados.

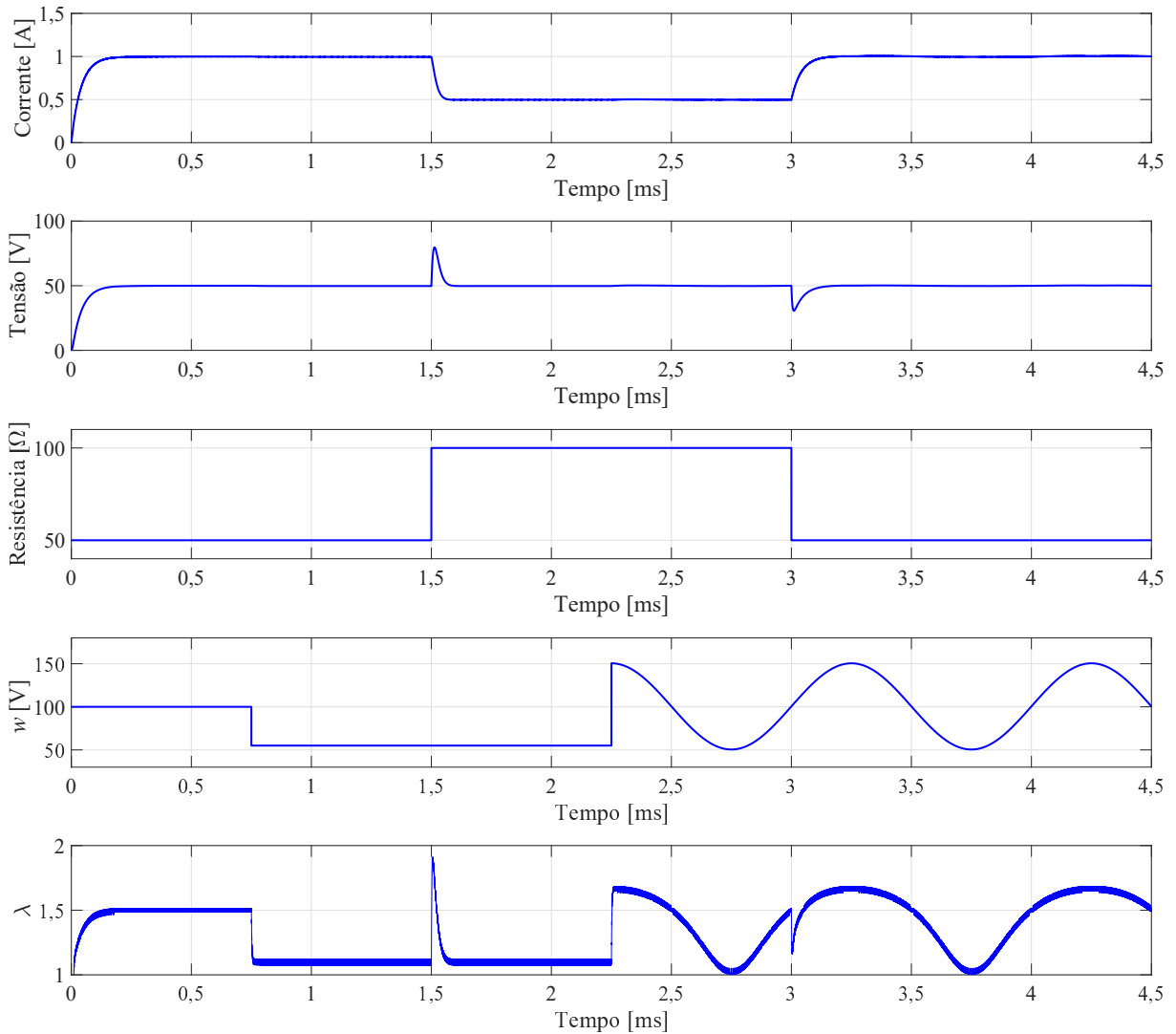


Fonte: Elaborada pelo próprio autor

de alimentação foi de  $100 [V]$ . Aos  $0,75 [ms]$  a tensão de alimentação foi reduzida para  $55 [V]$ , aos  $1,5 [ms]$  a resistência de carga foi aumentada para  $100 [\Omega]$ , no tempo  $2,25 [ms]$  a tensão de alimentação foi novamente alterada, mas desta vez ela passou a ser regida pela equação  $w = 50 (\sin(2\pi 1000t) + 2,01) [V]$ , que corresponde a uma senoide que oscila a uma frequência de  $1 [kHz]$  entre  $50,5 [V]$  e  $150,5 [V]$ . Finalmente, aos  $3 [ms]$  a resistência de carga volta ao valor de  $50 [\Omega]$ .

A Figura 18 apresenta nos dois primeiros eixos, em função do tempo, a corrente no indutor e a tensão no capacitor (tensão de saída). O terceiro eixo é dedicado a apresentar o valor instantâneo da tensão de alimentação do circuito. Já o quarto eixo da figura apresenta a saída de um filtro de média cuja entrada é o índice do subsistema selecionado pela regra de chaveamento ( $\sigma$ ). Considerando que sobre a superfície de deslizamento (o que inclui o ponto de equilíbrio) o sistema está constantemente em chaveamento, não é viável a apresentação gráfica do valor instantâneo da saída da regra de chaveamento. Em vez disso, é interessante a apresentação do valor médio deste sinal, de forma que seja possível visualizar a ponderação entre os subsistemas na composição da combinação convexa  $\lambda$ . Este parâmetro é análogo à razão cíclica utilizada no acionamento de conversores via modulação PWM (do inglês, *Pulse-Width Modulation*).

Figura 18 - Valores da corrente no indutor, tensão no capacitor, resistência de carga, tensão de entrada e combinação convexa dos subsistemas ( $\lambda$ ) durante a simulação sob variação do parâmetro incerto e da entrada para o conversor CC-CC Buck e controlado conforme Teorema 9.



Fonte: Elaborada pelo próprio autor

Aos  $0,75 [ms]$  de simulação, nota-se que mesmo a variação em degrau da tensão de alimentação praticamente não causa efeitos nas variáveis de estado, isto porque a combinação convexa equivalente entre os subsistemas é instantaneamente ajustada pela regra de chaveamento. Esta variação da combinação convexa é um reflexo da mudança do conjunto de possíveis pontos de equilíbrio ( $\chi_r$ ). Aos  $1,5 [ms]$ , quando ocorre o aumento da resistência de saída, o efeito nas variáveis de estado é o mesmo observado na Figura 16, mas aqui pode-se observar, também, a rápida oscilação da combinação convexa equivalente durante o transitório. A partir dos  $2,25 [ms]$  a tensão sofre uma variação em degrau de  $55 [V]$  para  $150 [V]$  e passa a ser oscilante. Deste ponto em diante, nota-se que a combinação convexa equivalente entre os subsistemas

também oscila, compensando a variação da tensão. Finalmente, aos 3 [ms] ocorre outra variação na resistência de carga, voltando dos 100 [ $\Omega$ ] para os 50 [ $\Omega$ ], assim, a corrente volta ao valor do primeiro intervalo de tempo. Durante toda a simulação, o sistema permaneceu estável e a tensão no capacitor, que é a variável de interesse, manteve-se com o mesmo valor de equilíbrio.

Uma particularidade deste sistema é que a razão entre os valores de equilíbrio das variáveis de estado é afetada pelos parâmetros do sistema, mas não pela entrada externa. Isto quer dizer que, se não houver variação de nenhum parâmetro do sistema, quando houver uma mudança no valor da entrada, o conjunto de possíveis pontos de equilíbrio ( $\chi_r$ ) será alterado, contudo, se no novo conjunto ainda houver um ponto de equilíbrio onde a variável de interesse tem o mesmo valor anterior à mudança, então as demais variáveis também manterão seus valores neste ponto de equilíbrio. Esta é a razão pela qual a corrente no indutor também não sofreu alteração com a variação da tensão de entrada. Mesmo assim, o quarto eixo da Figura 18 indica que o controlador precisa adaptar o chaveamento entre subsistemas para manter o sistema estável (e no ponto de equilíbrio desejado).

### 4.3.3 Sistema Arbitrário

A fim de expor melhor a interferência da variação da entrada  $w$  e a robustez do Teorema 9 a esta variação, foi realizada uma simulação com um sistema arbitrário, no qual tanto a variação do parâmetro incerto quanto a variação da entrada externa causam mudanças na razão entre o valor da variável de interesse e os valores das demais variáveis no ponto de equilíbrio desejado. Este sistema, já aumentado, é descrito pelas matrizes abaixo:

$$\begin{aligned}
 A_{11} &= 10^2 \cdot \begin{bmatrix} -2,38095 & -2,38095 & 0 \\ 72028,8 & -6669,33 & 0 \\ 0 & 1936,25 & -1936,25 \end{bmatrix}, \\
 A_{21} &= 10^2 \cdot \begin{bmatrix} -2,38095 & -2,38095 & 0 \\ 72028,8 & -4001,60 & 0 \\ 0 & 1936,25 & -1936,25 \end{bmatrix}, \\
 A_{12} &= 10^2 \cdot \begin{bmatrix} -2,38095 & -2,38095 & 0 \\ 120048 & -6669,33 & 0 \\ 0 & 1936,25 & -1936,25 \end{bmatrix},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_{22} &= 10^2 \cdot \begin{bmatrix} -2,38095 & -2,38095 & 0 \\ 120048 & -4001,60 & 0 \\ 0 & 1936,25 & -1936,25 \end{bmatrix}, \\
 B_{11} = B_{21} &= 10^2 \cdot \begin{bmatrix} 2,38095 \\ 2,38095 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_{12} = B_{22} = 10^2 \cdot \begin{bmatrix} 2,28571 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},
 \end{aligned} \tag{228}$$

sendo que a incerteza está na variável da segunda linha e segunda coluna.

Por se tratar de um sistema arbitrário, não há grandezas físicas associadas às suas variáveis, por isso elas não apresentam unidades de medida. Para este sistema, considerou-se como variável de interesse a primeira variável de estado, portanto, o vetor  $J$  associado ao projeto de controle é dado por:

$$J = [0 \ 1 \ 1]. \tag{229}$$

Pelo mesmo motivo, a matriz  $Q$  utilizada visa a otimizar o desempenho transitório da primeira variável de estado. Esta matriz, já aumentada, é dada por:

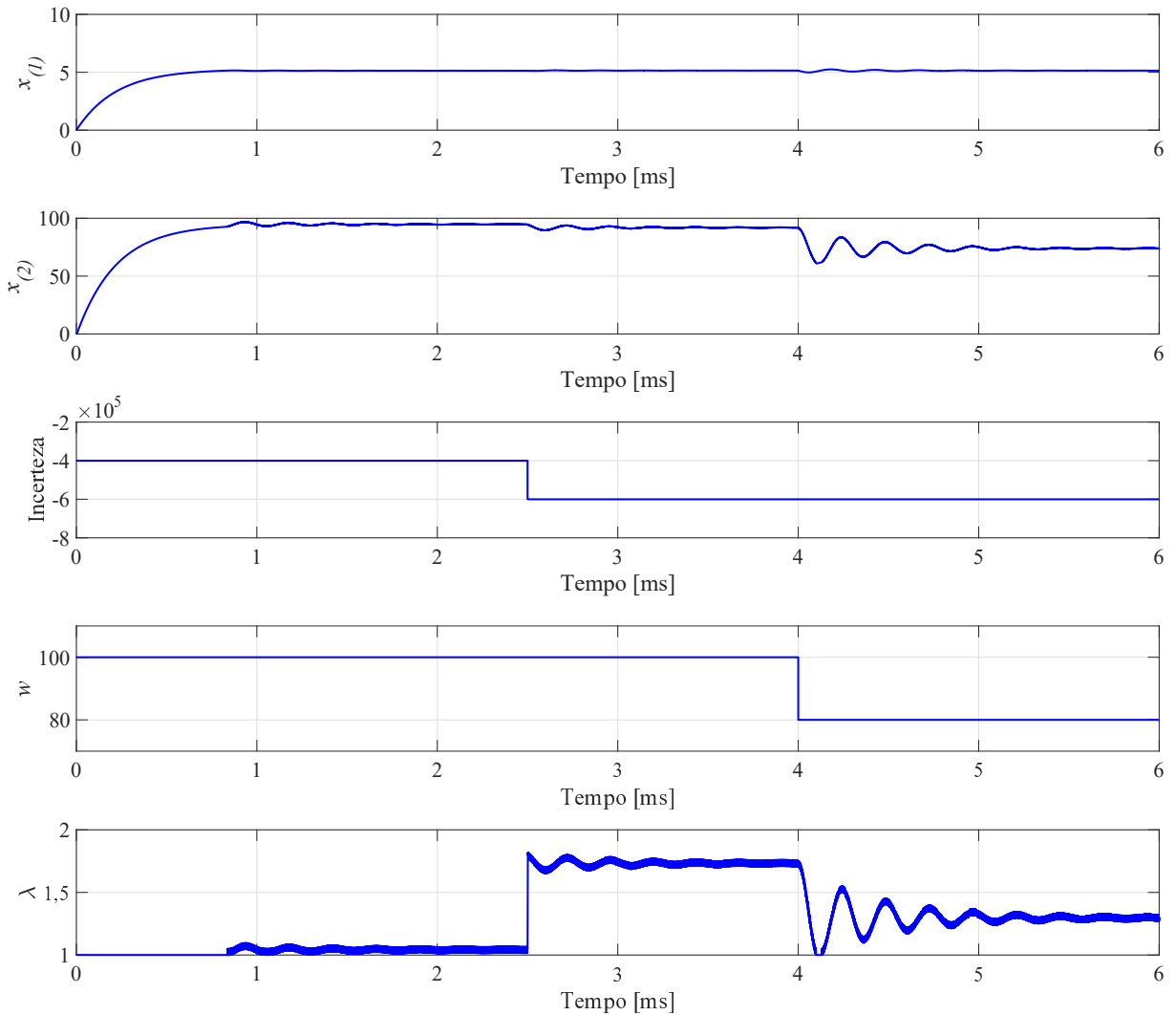
$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{230}$$

A simulação realizada teve duração de 6 [ms], tendo como condição inicial a origem do espaço de estados, o valor inicial da variável incerta foi  $-400160$  e o da entrada  $w$  foi 100. A Figura 19 é similar à Figura 18, apresentando nos dois primeiros eixos, em função do tempo, as variáveis de estado  $x_{(1)}(t)$  e  $x_{(2)}(t)$ . O terceiro eixo apresenta o valor instantâneo da entrada  $w$  e o quarto eixo da figura mostra o valor filtrado da saída da regra de chaveamento ( $\sigma$ ).

Aos 2,5 [ms] de simulação, o parâmetro incerto é alterado para  $-600240$ . Imediatamente, nota-se que a combinação convexa equivalente entre os subsistemas sofre significativa alteração, a segunda variável de estado passa por oscilação e se estabiliza num valor inferior ao valor de equilíbrio anterior, já a variável de interesse ( $x_{(1)}$ ), como esperado, permanece com seu valor de equilíbrio constante. Aos 4 [ms], a entrada  $w$  tem seu valor alterado para 80 e desta vez, diferentemente do que ocorre no caso do conversor Buck, a segunda variável de estado tem seu valor de equilíbrio alterado, o que indica que o novo conjunto de possíveis pontos de equilíbrio não mantém a mesma proporção entre as variáveis de estado na ocorrência de variação da entrada. Mesmo assim, conforme indicado pelo Comentário 3, a regra de chaveamento projetada por meio do Teorema 9 manteve a variável de interesse em seu valor desejado e o sistema permaneceu estável (convergiu para o novo valor de equilíbrio da segunda variável de

estado).

Figura 19 - Valores da variável de estado  $x_{(1)}$ , variável de estado  $x_{(2)}$ , parâmetro incerto, entrada e combinação convexa dos subsistemas ( $\lambda$ ) durante a simulação sob variação do parâmetro incerto e da entrada.



Fonte: Elaborada pelo próprio autor

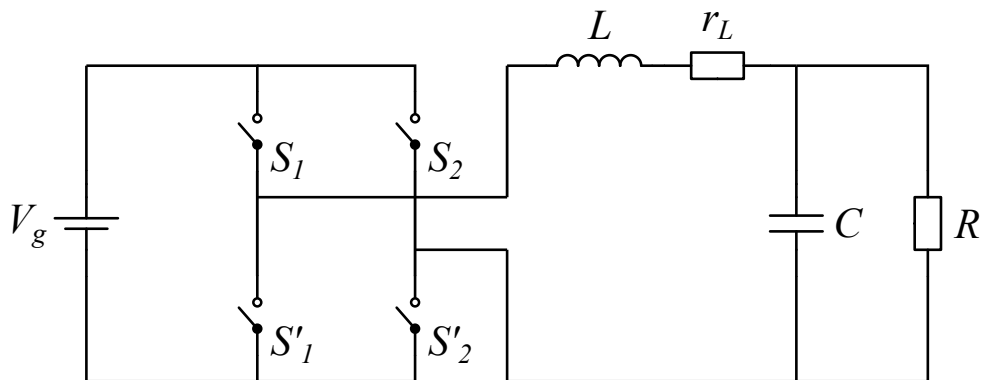
#### 4.3.4 Conversor CC-CA Inversor Monofásico

Como observado no Comentário 2, o Teorema 9 permite a variação do ponto de equilíbrio desejado durante a operação do sistema. Esta característica dá a oportunidade da aplicação deste teorema no controle de, entre outros, conversores CC-CA, chamados de inversores. Para tal aplicação, o ponto de equilíbrio desejado é constantemente variado para gerar uma tensão alternada na saída do conversor. Devido às vantagens já citadas, um controle baseado em superfícies de deslizamento é propício para este tipo de aplicação (MALESANI et al., 1996) e, como já descrito neste trabalho, o Teorema 9 é adequado para aplicações com ponto de equilíbrio

variável, além de apresentar robustez a incertezas paramétricas do sistema controlado.

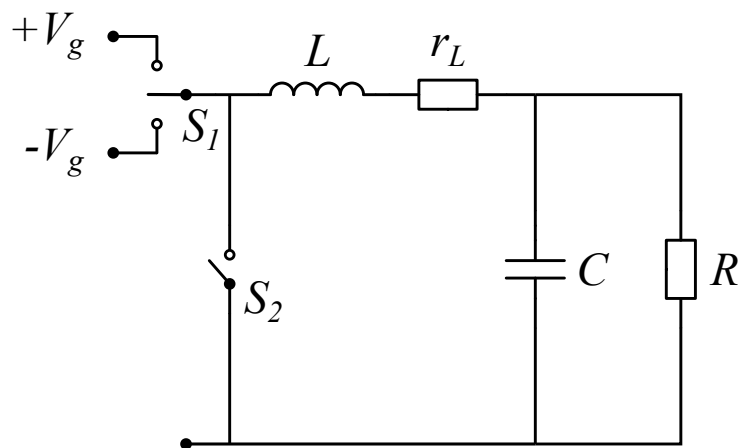
Para observar a variação do ponto de equilíbrio desejado, foi realizada a simulação de um inversor monofásico em ponte, conforme Figura 20. Este inversor, por apresentar a mesma configuração dos elementos passivos (indutor e capacitor), tem características similares às do conversor Buck, apresentando as mesmas duas variáveis de estado, descritas em (224), porém, seu modelo é composto por três subsistemas. Adotando-se a forma de representação utilizada em (MALESANI et al., 1996), para fins de modelagem, o mesmo conversor pode ser descrito pela Figura 21.

Figura 20 - Diagrama do inversor monofásico.



Fonte: adaptado de Malesani et al. (1996)

Figura 21 - Circuito equivalente do inversor monofásico.



Fonte: adaptado de Malesani et al. (1996)

Considerando a resistência de carga ( $R$ ) como parâmetro incerto, os valores dos parâmetros do sistema são os mesmos utilizados na simulação do conversor Buck, apresentados em (226). A variável de interesse ( $x_{int}$ ) do controle é a tensão de saída, assim, a variável filtrada para compor

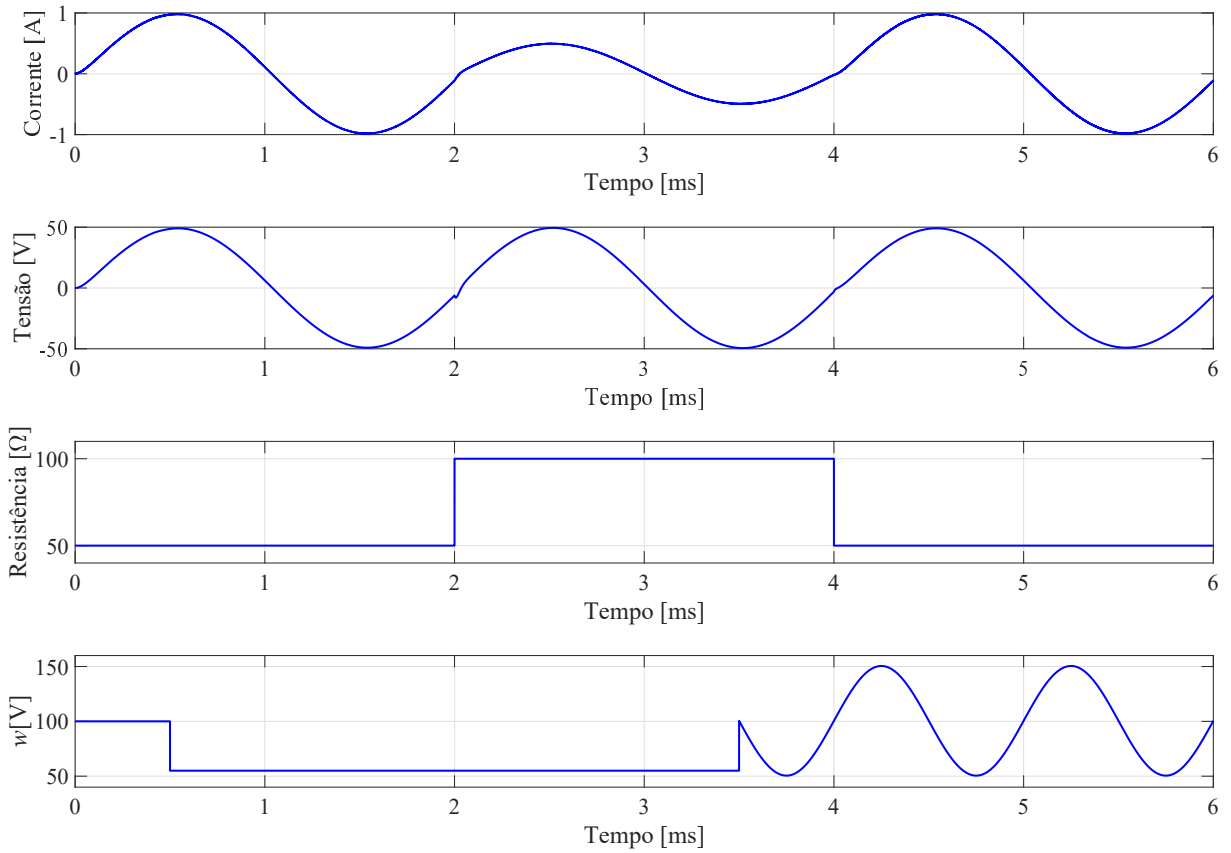
o sistema aumentado é a corrente no indutor. O filtro utilizado tem a função de transferência (220), sendo  $\tau = 1/(R_m C)$  e  $R_m = (R_{min} + R_{max})/2$  e o vetor  $J$  é dado por (222). As matrizes que compõem os vértices do sistema incerto aumentado, são descritas abaixo:

$$\begin{aligned}
 A_{11} = A_{12} = A_{13} &= \begin{bmatrix} -r_L/L & -1/L & 0 \\ 1/C & -1/R_{min}C & 0 \\ 1/\tau & 0 & -1/\tau \end{bmatrix}, \\
 A_{21} = A_{22} = A_{23} &= \begin{bmatrix} -r_L/L & -1/L & 0 \\ 1/C & -1/R_{max}C & 0 \\ 1/\tau & 0 & -1/\tau \end{bmatrix}, \\
 B_{11} &= \begin{bmatrix} 1/L \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_{13} = \begin{bmatrix} -1/L \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \\
 B_{21} &= \begin{bmatrix} 1/L \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_{22} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_{23} = \begin{bmatrix} -1/L \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{231}$$

A Figura 22 apresenta os resultados da simulação deste sistema controlado pela regra de chaveamento proposta no Teorema 9. No primeiro e segundo eixos da figura, são apresentados, respectivamente, a tensão de saída e a corrente no indutor do inversor. O terceiro eixo apresenta o valor da resistência de saída (parâmetro incerto), enquanto o quarto eixo apresenta a tensão de entrada. Nesta simulação, foi estabelecido que a tensão de saída (variável de interesse) seja senoidal, com frequência de  $500 [Hz]$  e amplitude de  $50 [V]$ . A simulação realizada teve duração de  $6 [ms]$ , sujeita a variações no parâmetro incerto (resistência de carga) e na tensão de alimentação do circuito ( $V_g$ ), os valores iniciais da resistência de carga e da tensão de alimentação foram, respectivamente,  $50 [\Omega]$  e  $100 [V]$  e o estado inicial foi  $x(0) = [0 \ 0 \ 0]'$ . No tempo  $0,5 [ms]$ ,  $V_g$  foi reduzida para  $50 [V]$ , aos  $2 [ms]$ , a resistência de carga foi alterada para  $100 [\Omega]$ , aos  $3,5 [ms]$  a tensão de alimentação sofre um aumento em degrau para  $102 [V]$  e passa a oscilar senoidalmente entre  $52 [V]$  e  $152 [V]$  e com frequência de  $1 [kHz]$ . Finalmente, aos  $4 [ms]$ , a resistência de carga volta ao valor de  $50 [\Omega]$ .

Ao analisar a Figura 22, percebe-se que entre  $2 [ms]$  e  $4 [ms]$ , intervalo em que a resistência de carga foi maior, a corrente no indutor, que não é a variável de interesse, teve a amplitude reduzida, mantendo, contudo, a forma de onda senoidal. Durante toda a simulação, percebe-se que a tensão de saída mantém seu formato desejado mesmo com as variações da tensão

Figura 22 - Valores da corrente no indutor, tensão no capacitor, resistência de carga e tensão de entrada durante a simulação sob variação do parâmetro incerto e da entrada.



Fonte: Elaborada pelo próprio autor

de entrada e da resistência de carga, apresentando apenas uma pequena e esperada distorção no momento da variação da resistência de carga. Isto indica que a combinação convexa entre os subsistemas está constantemente sendo ajustada pela regra de chaveamento para manter o sistema estável e rastrear o valor de referência da variável de interesse.

#### 4.4 Conclusões Parciais

Este capítulo propôs dois teoremas para o controle robusto de sistemas chaveados afins com incertezas paramétricas. O Teorema 8 assegura a estabilidade assintótica de um sistema incerto com o custo garantido (189) para um valor predeterminado da variável de interesse. O Teorema 9 assegura a estabilidade assintótica de um sistema incerto com o custo garantido (189) para qualquer possível valor de equilíbrio da variável de interesse.

Como já tratado neste trabalho, as regras de chaveamento dos teoremas criam superfícies de deslizamento, o que agrega aos teoremas propostos até aqui as vantagens do controle por

modos deslizantes, garantindo, ao mesmo tempo, a vantagem e conveniência de se fazer o projeto do controlador via LMIs, visto que o projeto tradicional de superfícies de deslizamento exige grande conhecimento específico do sistema a ser controlado (SIRA-RAMIREZ; SILVA-ORTIGOZA, 2006, Cap. 3). Assim, a principal contribuição deste capítulo foi a proposta de teoremas para o controle de sistemas chaveados afins que toleram incertezas paramétricas do sistema e variações na entrada externa (entrada não controlada). Estes atributos são muito importantes e desejáveis no controle de conversores de potência, principalmente quando aplicados na geração a partir de fontes alternativas de energia e na mobilidade elétrica (TAVAN et al., 2020), pois, nestes casos, tanto as características das fontes, quanto das cargas, ligadas à entrada e à saída do conversor, respectivamente, podem sofrer variações constantemente. Outra importante vantagem dos teoremas propostos é que, apesar da aplicação de filtros passa-baixas para a criação dos sistemas aumentados, estes filtros podem ser implementados via *hardware*, reduzindo a necessidade de esforço computacional em tempo real ocorrida no caso da utilização de observadores.

Ainda há bastante a se explorar nos teoremas já propostos e também há espaço para aprimoramentos. Uma das primeiras opções a se analisar é o efeito do valor das variáveis  $\mu$ , de (151) e  $\tau$ , de (220), na factibilidade e otimização do desempenho nos teoremas propostos. Então, uma opção de continuidade do trabalho é a aplicação de técnicas meta-heurísticas para a escolha mais adequada destes parâmetros, assim como foi feito com a aplicação da Evolução Diferencial em (BOCCA et al., 2020). Outra opção de continuidade do trabalho é tentar empregar outras funções de Lyapunov para flexibilizar as condições dos teoremas, como funções de Lyapunov-Metzler, ou funções de Lyapunov dependentes de parâmetros.

Finalmente, as contribuições deste capítulo podem ser exploradas para o controle de topologias menos convencionais e que representam um maior desafio às técnicas de controle clássico, como a topologia proposta em (BIZARRO et al., 2015).

## 5 LIMITAÇÃO DA AMPLITUDE DE VARIÁVEIS DE ESTADO

Este capítulo tem por objetivo analisar a restrição da região de operação dos sistemas da classe (1). Mais especificamente, será estudada a restrição na forma de um hiperplano  $\Delta \in \mathbb{R}^{n-1}$  que limita o valor admissível de uma das variáveis de estado. Tal limitação é útil como medida de segurança para que valores máximos de operação não sejam ultrapassados em plantas físicas e, em alguns casos, também pode ser útil para representar uma limitação natural de certos sistemas, como ocorre quando um conversor eletrônico passa a operar no modo de condução descontínua (ERICKSON; MAKSIMOVIC, 2007). Portanto, neste capítulo serão apresentadas condições necessárias para a garantia da limitação e para a garantia da estabilidade dos sistemas perante esta limitação de uma das variáveis de estado.

### 5.1 Condições para a Limitação do Vetor de Estado

Como já citado, nas condições de restrição da região de operação abordadas neste capítulo, o estado do sistema não poderá ultrapassar o hiperplano  $\Delta$  que será descrito pelo valor extremo admissível  $\bar{\ell}$  para a  $q$ -ésima variável de estado ( $\xi_{(q)}$ ), de forma que:

$$\Delta := \{\xi \in \mathbb{R}^n : \xi_{(q)} = \bar{\ell}, q \in \mathbb{K}_n\}. \quad (232)$$

Deve-se observar que, neste contexto, "ultrapassar" refere-se a atravessar  $\Delta$  no sentido de se afastar da origem do espaço de estados. O hiperplano  $\Delta$  e a região  $\Delta_{\sigma}$ , que será apresentada no Lema 5 estão representados na Figura 23.

Para a análise de tal limitação, será verificada a relação entre os campos vetoriais dos subsistemas:

$$f_i(\xi) = A_i(\xi + x_r) + B_i w = A_i x + B_i w, \quad i \in \mathbb{K}_N, \quad (233)$$

e o vetor  $\xi_{\bar{\ell}}$  ortogonal ao hiperplano  $\Delta$ , sendo que  $\xi_{\bar{\ell}}$  denota um vetor  $n \times 1$  com " $\bar{\ell}$ " no  $q$ -ésimo componente e "0" nos demais. Ou seja, é o vetor que vai da origem do espaço de estados até o hiperplano  $\Delta$ .

Para o Lema a seguir, considere que  $\dot{V}_i(\xi)$  é a função de Lyapunov para o subsistema " $i$ ", isto é:

$$\dot{V}_i(\xi) = 2\xi' P (A_i x + B_i w). \quad (234)$$

**Lema 5.** *Dado um sistema da classe (1), com função de Lyapunov  $V(\xi) = \xi' P \xi$  e controlado por uma regra de chaveamento*

$$\sigma(x) = \arg \min_{i \in \mathbb{K}_N} (\mathcal{F}_i(\xi)), \quad (235)$$

*que torna o ponto de equilíbrio  $\xi = 0$  assintoticamente estável. Uma condição suficiente para que este sistema não ultrapasse o hiperplano  $\Delta$  em certa região do espaço de estados e mantenha-se assintoticamente estável é que, pelo menos na iminência de chegar ao hiperplano ( $\xi \rightarrow \Delta$ ), o sistema seja controlado por uma regra de chaveamento do tipo:*

$$\sigma_\ell(x) = \arg \min_{l \in L} (\mathcal{F}_l(\xi)), \quad l \in L(\xi) \neq \emptyset, \quad (236)$$

*sendo o conjunto  $L(\xi)$  definido como:*

$$L(\xi) = \{i \in \mathbb{K}_N : f'_i(\xi) \xi_{\bar{\ell}} \leq 0 \text{ e } \dot{V}_i(\xi) < 0, \quad \xi \in \Delta\}. \quad (237)$$

*A região de  $\Delta$  para a qual o conjunto  $L(\xi) \neq \emptyset$  passa a ser chamada de  $\Delta_{\bar{\sigma}}$ , sendo definida como:*

$$\Delta_{\bar{\sigma}} := \{\xi \in \mathbb{R}^n : \xi_{(q)} = \bar{\ell}, \quad L(\xi) \neq \emptyset\}. \quad (238)$$

**Demonstração.** *Considerando que todos os índices contidos no conjunto  $L(\xi)$  representam subsistemas cuja derivada da função de Lyapunov é negativa, então, para qualquer possível valor de  $\sigma_\ell(x)$ , o sistema será estável.*

*De maneira análoga, o fato de o produto escalar  $f'_i(\xi) \xi_{\bar{\ell}}$  não ser positivo, indica que o campo vetorial  $f_i(\xi)$  não possui componente que tenda a atravessar o hiperplano  $\Delta$  fazendo o sistema extrapolar o limite imposto ao seu vetor de estado. Assim, conclui-se que, nas condições do Lema 5, o sistema é assintoticamente estável e não ultrapassa  $\Delta$  em qualquer região na qual  $L(\xi) \neq \emptyset$ , região denominada  $\Delta_{\bar{\sigma}}$ .*

□

Como já discutido, considerando que os sistemas da classe (1) não apresentam entrada de controle, seu comportamento pode apenas ser determinado pela escolha de qual é o subsistema ativo a cada momento. Sendo assim, é possível que, para determinada região do espaço de estados, seja impossível evitar que o estado ultrapasse determinado hiperplano  $\Delta$ . Por isso, é de suma importância determinar uma região de condições iniciais no espaço de estados para a qual haja a garantia de que, quando o estado do sistema estiver dentro dessa região, ele será estável e  $\xi_{(q)}$  nunca ultrapassará o valor  $\bar{\ell}$ , ou seja, a limitação descrita no Lema 5 será efetiva.

Define-se como  $\mathcal{L}_\gamma$  uma curva de nível da função de Lyapunov com valor arbitrário  $\varphi$  e como  $\Omega$  a região elipsoidal que engloba  $\mathcal{L}_\gamma$  e seu interior, tal que:

$$\Omega := \{\xi(t) \in \mathbb{R}^n : \xi' P \xi \leq \varphi\}. \quad (239)$$

Conseqüentemente, definindo  $\varphi_o$  como sendo o menor valor da função de Lyapunov sobre o hiperplano  $\Delta$ , tem-se que a região  $\Omega_o$ , dada por

$$\Omega_o := \{\xi(t) \in \mathbb{R}^n : \xi' P \xi \leq \varphi_o\}, \quad (240)$$

tangencia  $\Delta$  e a intersecção destas duas regiões corresponde a um único ponto.

**Lema 6.** *Seja  $\Omega_{\bar{\sigma}}$  a maior região elipsoidal para a qual a condição*

$$(\Omega \cap \Delta) \subset \Delta_{\bar{\sigma}} \quad (241)$$

*é satisfeita para uma região conexa  $\Delta_{\bar{\sigma}}$ , então, para qualquer condição inicial descrita por*

$$\begin{cases} \xi(0) \in \Omega_{\bar{\sigma}} & e & \xi_{(q)}(0) \leq \bar{l}, & \text{Se } \bar{l} > 0, \\ \xi(0) \in \Omega_{\bar{\sigma}} & e & \xi_{(q)}(0) \geq \bar{l}, & \text{Se } \bar{l} < 0, \end{cases} \quad (242)$$

*o sistema, se assintoticamente estável e regido por uma regra de chaveamento do tipo (236), respeitará a limitação do vetor de estado.*

**Demonstração.** *Considera-se que o sistema é assintoticamente estável, portanto, para qualquer condição inicial dentro da região  $\Omega_{\bar{\sigma}}$ , o estado do sistema nunca deixará esta região elíptica. Além disso, devido à convexidade de  $\mathcal{L}_\gamma$ , há uma única região  $\Delta_{\bar{\sigma}}$  para a qual se pode encontrar  $\Omega_{\bar{\sigma}}$ . Ainda, de acordo com a relação:*

$$\forall \xi \in \Omega_{\bar{\sigma}} : \xi_{(q)} = \bar{l} \implies \xi \in \Delta_{\bar{\sigma}}, \quad (243)$$

*tem-se que todo vetor de estado de  $\Omega_{\bar{\sigma}}$  contido no hiperplano  $\Delta$ , está também contido em  $\Delta_{\bar{\sigma}}$ . Assim, conforme o Lema 5, a limitação do estado será efetiva.*

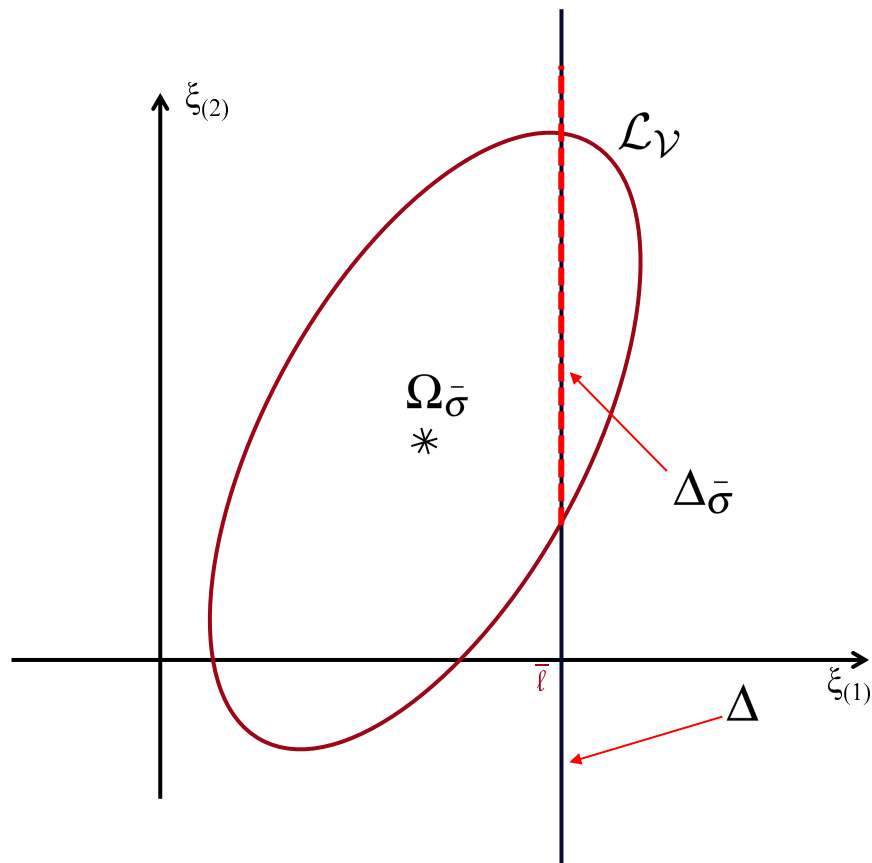
□

Nas condições do Lema 6, existe uma parte da região elipsoidal  $\Omega_{\bar{\sigma}}$  que ultrapassa o hiperplano  $\Delta$ . Mesmo assim, devido à regra de chaveamento, o estado ficará restrito à condição  $\xi_{(q)} \leq \bar{l}$ .

**Comentário 4.** *É interessante notar que a condição (241) só ocorre nas vizinhanças de um ponto de tangência entre  $\Delta$  e uma curva  $\mathcal{L}_\gamma$  (ponto  $\varphi_o$ ). Devido à convexidade das curvas de nível da função de Lyapunov, este ponto é único, assim como a região  $\Omega_{\bar{\sigma}}$ .*

As definições tratadas até o momento neste capítulo, são ilustradas na Figura 23 para o caso de um sistema com duas variáveis de estado. Nesta figura é apresentado, sobre o espaço de estados, o ponto de equilíbrio desejado do sistema, marcado por um asterisco. A elipse centrada no ponto de equilíbrio delimita a região  $\Omega_{\bar{\sigma}}$ , a linha contínua vertical representa o hiperplano  $\Delta$  e a linha tracejada indica a região  $\Delta_{\bar{\sigma}}$ , que é um subconjunto de  $\Delta$ .

Figura 23 - Ilustração de  $\Delta$ ,  $\Delta_{\bar{\sigma}}$ ,  $\mathcal{L}_{\gamma}$  e  $\Omega_{\bar{\sigma}}$ .



Fonte: Elaborada pelo próprio autor

Utilizando os Lemas 5 e 6, é possível estabelecer uma regra de chaveamento e uma região de condições iniciais ( $\Omega_{\bar{\sigma}}$ ) de forma que o sistema chaveado afim seja assintoticamente estável e seu estado respeite a limitação do valor extremo de uma das variáveis de estado. Contudo, a região  $\Delta_{\bar{\sigma}}$  não é o único subconjunto de  $\Delta$  onde é possível limitar o valor de  $\xi_{(q)}$ . Por este motivo, na sequência serão propostas condições para definir uma região  $\Delta_{\bar{\lambda}}$ , análoga a  $\Delta_{\bar{\sigma}}$ , e, conseqüentemente, expandir a região de condições iniciais para a qual a limitação de  $\xi_{(q)}$  é garantida.

Sabe-se que quando um sistema chaveado sofre a comutação entre seus subsistemas com uma frequência suficientemente elevada, ele pode passar a se comportar como um sistema

modelado pela combinação convexa entres os subsistemas (WICKS; PELETIES; DECARLO, 1994; BENGEEA; DECARLO, 2005; BENEUX et al., 2019), como na representação (8). Este sistema é comumente chamado de sistema médio, ou sistema convexificado (BENEUX et al., 2017). Assim, é possível projetar leis de controle para este sistema médio e aplicá-las no sistema chaveado (BENGEEA; DECARLO, 2005; BENEUX et al., 2019).

A lei de controle consiste em determinar o valor do vetor  $\lambda \in \Lambda_N$  que torne o sistema estável. Para se adequar à limitação do vetor de estado, propõe-se que, quando o estado estiver sobre o hiperplano  $\Delta$  e tendendo a ultrapassá-lo, esta lei de controle estabeleça um campo vetorial  $f_\lambda(\xi)$  paralelo ao hiperplano  $\Delta$  e que a derivada da função de Lyapunov associada a este campo vetorial seja negativa.

**Lema 7.** *Dado um sistema da classe (8), com função de Lyapunov  $V(\xi) = \xi' P \xi$  e controlado por uma lei de controle  $\lambda(\xi)$  que torna o ponto de equilíbrio  $\xi = 0$  assintoticamente estável. Uma condição suficiente para que este sistema não ultrapasse o hiperplano  $\Delta$  em certa região do espaço de estados e mantenha-se assintoticamente estável é que, quando o sistema atingir o hiperplano ( $\xi \in \Delta$ ), o sistema seja controlado por uma lei de controle  $\lambda_{\bar{\lambda}}(\xi)$  tal que:*

$$\lambda_{\bar{\lambda}}(\xi) := \{\lambda \in \Lambda_N : f_{\lambda_{\bar{\lambda}}}(\xi) \subset \Delta, \quad \dot{V}_{\lambda_{\bar{\lambda}}} < 0, \quad \xi \in \Delta\}. \quad (244)$$

A região de  $\Delta$  para a qual  $\lambda_{\bar{\lambda}}(\xi)$  existe, é denominada  $\Delta_{\bar{\lambda}}$ .

**Demonstração.** *Considerando que a derivada da função de Lyapunov do sistema (8) sujeito à lei de controle  $\lambda_{\bar{\lambda}}$  sempre será negativa, então o sistema permanece assintoticamente estável.*

A condição de que o campo vetorial  $f_{\lambda_{\bar{\lambda}}}(\xi)$  deve estar contido no hiperplano  $\Delta$ , implica no fato de que, quando regido pela lei de controle  $\lambda_{\bar{\lambda}}(\xi)$ , o estado do sistema percorrerá  $\Delta$ , mas não o atravessará, garantindo a limitação. Assim, conclui-se que, nas condições do Lema 7, o sistema é assintoticamente estável e não ultrapassa  $\Delta$  em qualquer região  $\Delta_{\bar{\lambda}}$ .

□

**Lema 8.** *Seja  $\Omega_{\bar{\lambda}}$  a maior região elipsoidal para a qual a condição*

$$(\Omega \cap \Delta) \subset \Delta_{\bar{\lambda}} \quad (245)$$

*é satisfeita para uma região conexa  $\Delta_{\bar{\lambda}}$ , então, para qualquer condição inicial descrita por*

$$\begin{cases} \xi(0) \in \Omega_{\bar{\lambda}} & e \quad \xi_{(q)}(0) \leq \bar{\ell}, & \text{Se } \bar{\ell} > 0, \\ \xi(0) \in \Omega_{\bar{\lambda}} & e \quad \xi_{(q)}(0) \geq \bar{\ell}, & \text{Se } \bar{\ell} < 0, \end{cases} \quad (246)$$

o sistema, se assintoticamente estável e regido por uma lei de controle do tipo (244), respeitará a limitação do vetor de estado.

**Demonstração.** Considera-se que o sistema é assintoticamente estável, portanto, para qualquer condição inicial dentro da região  $\Omega_{\bar{\lambda}}$ , o estado do sistema nunca deixará esta região elíptica. Além disso, devido à convexidade de  $\mathcal{L}_\gamma$ , há uma única região  $\Delta_{\bar{\lambda}}$  para a qual se pode encontrar  $\Omega_{\bar{\lambda}}$ . Ainda, de acordo com a relação:

$$\forall \xi \in \Omega_{\bar{\lambda}} : \xi_{(q)} = \bar{\ell} \implies \xi \in \Delta_{\bar{\lambda}}, \quad (247)$$

tem-se que todo vetor de estado de  $\Omega_{\bar{\lambda}}$  contido no hiperplano  $\Delta$ , está também contido em  $\Delta_{\bar{\lambda}}$ . Assim, conforme o Lema 7, a limitação do estado será efetiva. □

Utilizando os Lemas 7 e 8, é possível estabelecer uma lei de controle e uma região de condições iniciais ( $\Omega_{\bar{\lambda}}$ ) de forma que o sistema chaveado afim seja assintoticamente estável e seu estado respeite a limitação do valor extremo de uma das variáveis de estado. O Comentário 4 também se aplica à região  $\Omega_{\bar{\lambda}}$ . Na sequência, é proposto o Teorema 10, que tem por objetivo expandir a região de condições iniciais que garante a limitação do vetor de estado, e permitir que, quando não estiver na iminência do hiperplano limite ( $\Delta$ ) o sistema atenda a alguma otimização desejada.

**Teorema 10.** Seja dado um sistema da classe (1) com entrada  $w$  constante, com função de Lyapunov  $V(\xi) = \xi' P \xi$ , representado em sua forma convexa (8). Seja  $\lambda_{\bar{\ell}}(\xi) \in \Lambda_N$  o vetor de coeficientes da combinação convexa dos subsistemas conforme (244). Seja  $\sigma(\xi) \in \mathbb{K}_N$  uma regra de chaveamento de acordo com (235) e seja  $\sigma_\ell(\xi) \in L$  uma regra de chaveamento conforme (236). Então a lei de controle  $\lambda(\xi)$ :

$$\lambda(\xi) = \begin{cases} \left. \begin{array}{l} \lambda_{(i)}(\xi) = 1, i = \sigma(\xi) \\ \lambda_{(i)}(\xi) = 0, i \neq \sigma(\xi) \end{array} \right\}, & \text{Se } \begin{cases} \xi_{(q)} < \bar{\ell}, & \bar{\ell} > 0, \\ \xi_{(q)} > \bar{\ell}, & \bar{\ell} < 0, \end{cases} \\ \left. \begin{array}{l} \lambda_{(l)}(\xi) = 1, l = \sigma_\ell(\xi) \\ \lambda_{(l)}(\xi) = 0, l \neq \sigma_\ell(\xi) \end{array} \right\}, & \text{Se } \begin{cases} \xi_{(q)} \geq \bar{\ell}, & \bar{\ell} > 0, L \neq \emptyset \\ \xi_{(q)} \leq \bar{\ell}, & \bar{\ell} < 0, L \neq \emptyset \end{cases} \\ \lambda_{\bar{\ell}}(\xi), & \text{Se } \begin{cases} \xi_{(q)} \geq \bar{\ell}, & \bar{\ell} > 0, L = \emptyset, \\ \xi_{(q)} \leq \bar{\ell}, & \bar{\ell} < 0, L = \emptyset, \end{cases} \end{cases}, \quad (248)$$

torna o sistema globalmente assintoticamente estável e limita o vetor de estado para qualquer

condição inicial descrita por

$$\begin{cases} \xi(0) \in \Omega_{\bar{\sigma}} & e \quad \xi_{(q)}(0) \leq \bar{\ell}, & \text{Se } \bar{\ell} > 0, \\ \xi(0) \in \Omega_{\bar{\sigma}} & e \quad \xi_{(q)}(0) \geq \bar{\ell}, & \text{Se } \bar{\ell} < 0, \end{cases} \quad (249)$$

sendo  $\Omega_{\bar{\sigma}}$  a maior região elipsoidal para a qual a condição

$$(\Omega \cap \Delta) \subset ((\Delta_{\bar{\sigma}} \cup \Delta_{\bar{\lambda}})) \quad (250)$$

é satisfeita.

**Demonstração.** A prova da estabilidade do sistema deve ser feita observando-se as três condições de decisão da lei de controle. A primeira condição ocorre quando  $\xi_{(q)} < \bar{\ell}$ , para  $\bar{\ell} > 0$ , ou  $\xi_{(q)} > \bar{\ell}$ , para  $\bar{\ell} < 0$ . Nesta situação, a limitação do vetor de estado não tem nenhuma interferência no comportamento do sistema, assim, de acordo com (248) o vetor  $\lambda(\xi)$  terá um único elemento com valor 1 e todos os demais com valor 0, o que é equivalente à aplicação direta da regra de chaveamento (235). Assim, o comportamento do sistema e a prova da estabilidade dependem apenas do teorema de criação da regra de chaveamento.

A segunda condição ocorre quando o sistema está sobre o hiperplano de limitação ( $\Delta$ ) e considera-se que o conjunto  $L$  não é vazio, ou seja, há pelo menos um subsistema simultaneamente com  $\dot{V}_i < 0$  e  $f_i \cdot \xi_{\bar{\ell}} \leq 0$ . Neste caso, a lei de controle vai se comportar exatamente da mesma forma que a regra (236). Este é o comportamento já descrito no Lema 5. Nesta condição, o sistema é estável e respeita a limitação do vetor de estado em toda a região  $\Delta_{\bar{\sigma}}$ .

Na terceira condição, quando o sistema está sobre o hiperplano de limitação e o subsistema com menor derivada da função de Lyapunov ( $\dot{V}(\xi)$ ) tem uma componente de seu campo vetorial com sentido para fora da região da limitação ( $f_{\sigma}(\xi) \cdot \xi_{\bar{\ell}} > 0$ ), a regra de chaveamento (235) não pode ser utilizada, pois o sistema extrapolaria o hiperplano  $\Delta$ . Além disto, se não houver nenhum subsistema que atenda, simultaneamente,  $f_{\sigma_{\ell}}(\xi) \cdot \xi_{\bar{\ell}} \leq 0$  e  $\dot{V}_{\sigma_{\ell}}(\xi) < 0$ , ou seja  $L = \emptyset$ , a regra de chaveamento (236) também não pode ser utilizada, pelo mesmo motivo. Mesmo assim, dada a existência de uma combinação convexa  $\lambda_{\bar{\ell}}$  que gera o campo vetorial  $f_{\lambda_{\bar{\ell}}}(\xi) \subset \Delta$  e dada a característica de estabilidade do sistema representado por esta combinação convexa ( $\dot{V}_{\lambda_{\bar{\ell}}}(\xi) < 0$ ), conforme o Lema 7, pode-se afirmar que, quando regido pela lei de controle  $\lambda(\xi) = \lambda_{\bar{\ell}}(\xi)$ , o sistema é estável e restringe o vetor de estado em toda a região  $\Delta_{\bar{\lambda}}$ . Portanto, está provado que o sistema será assintoticamente estável e não extrapolará o valor extremo de  $\xi_{(q)}$  na região  $\Delta_{\bar{\sigma}} \cup \Delta_{\bar{\lambda}}$ .

Considerando-se que o sistema é assintoticamente estável, para qualquer condição inicial dentro da região  $\Omega_{\bar{\sigma}}$ , o estado do sistema nunca deixará esta região elíptica. Além disso,

devido à convexidade de  $\mathcal{L}_V$ , há uma única região  $(\Delta_{\bar{\sigma}} \cup \Delta_{\bar{\lambda}})$  para a qual se pode encontrar  $\Omega_{\bar{\omega}}$ . Ainda, de acordo com a relação:

$$\forall \xi \in \Omega_{\bar{\omega}} : \xi_{(q)} = \bar{l} \implies \xi \in \Delta_{\bar{\sigma}} \cup \Delta_{\bar{\lambda}}, \quad (251)$$

tem-se que todo ponto de  $\Omega_{\bar{\omega}}$  contido no hiperplano  $\Delta$ , está também contido em  $(\Delta_{\bar{\sigma}} \cup \Delta_{\bar{\lambda}})$ . Assim, a limitação do estado será efetiva.

□

O Teorema 10 não pode assegurar que o custo garantido será mantido no caso de haver a limitação do vetor de estado. Contudo, o fato de a lei de controle ser alterada apenas quando a variável de estado  $\xi_{(q)}$  atinge seu valor extremo tolerado permite que a trajetória do sistema permaneça o mais fiel possível à trajetória determinada pela regra de chaveamento do tipo (235), para a qual o custo era garantido. Assim, a otimização do desempenho, proporcionada pela consideração do custo garantido nas condições de projeto da lei de controle (235), está presente no Teorema 10.

O Teorema 10 faz uma análise de condições suficientes para que seja possível estabelecer a limitação do vetor de estado e garantir a estabilidade global assintótica do sistema. A limitação é imposta na forma de um hiperplano no espaço de estados. É interessante observar que limitações podem ser sobrepostas, criando mais de um hiperplano de limitação no espaço de estados.

A próxima seção apresenta um caso particular de limitação do vetor de estado que ocorre naturalmente devido às características do sistema. Esta limitação pode ser analisada de acordo com as análises do Teorema 10 para que seja possível garantir a estabilidade assintótica do sistema, mesmo quando o sistema real tem um comportamento mais complexo do que o do sistema modelado.

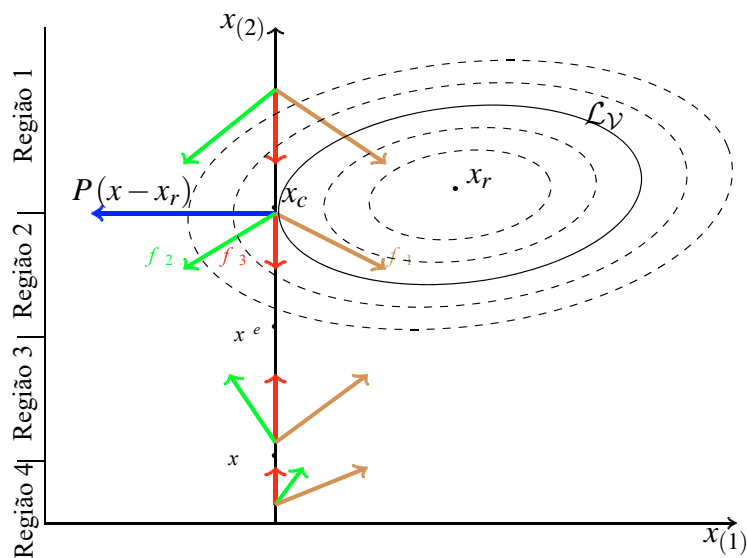
## 5.2 Caso Particular: Modo de Condução Descontínua em Conversores Eletrônicos de Potência

Uma situação característica de limitação do vetor de estado muito comum em conversores eletrônicos CC-CC é o chamado modo de condução descontínua (MCD). Isto ocorre, no caso dos conversores tradicionais Buck, Boost e Buck-Boost, quando a corrente que passa pelo indutor da topologia tende a ficar negativa. Neste momento, o diodo em série com o indutor comuta, passando a bloquear a passagem de corrente. Ou seja, nestas topologias a corrente no indutor (que é uma das variáveis de estado) nunca será negativa.

Quando o MCD ocorre, o conversor passa a operar de uma maneira diferente da já modelada nos demais subsistemas. Assim, no caso dos conversores citados, é necessário modelar um terceiro subsistema. Diferentemente dos subsistemas anteriores, não é possível controlar o momento da ativação deste subsistema. Por este motivo, o terceiro subsistema não é considerado na lei de chaveamento, contudo, é importante que ele seja considerado na análise da estabilidade.

Uma análise da estabilidade de um conversor Flyback, cujos subsistemas são idênticos aos do conversor Buck-Boost, foi feita em Beneux et al. (2017). Neste trabalho, foi comprovado que, mesmo com a ocorrência do MCD, o conversor permanece estável. Sabe-se que no modo de condução descontínua, a corrente dos conversores permanece nula, enquanto a tensão de saída é reduzida à medida que a energia no capacitor é dissipada. Portanto, a trajetória percorrida durante o MCD está contida no hiperplano  $\Delta$  para o qual a variável de estado correspondente à corrente é nula. Assim, fazendo a análise da trajetória do sistema enquanto este terceiro subsistema está ativo com base nas curvas de nível da função de Lyapunov  $\mathcal{L}_V$ , nos campos vetoriais  $f_i(\xi)$  e na Figura 24, Beneux et al. (2017) provou que nas regiões onde ocorre o MCD e sua trajetória é instável, a regra de chaveamento tradicional escolhe um subsistema estável e força o conversor a deixar o modo de condução descontínua, garantindo, assim, a estabilidade do sistema mesmo perante a ocorrência do MCD. Para mais detalhes, consulte (BENEUX et al., 2017).

Figura 24 - Curvas de nível de  $V(x)$  e campos vetoriais  $f_i(\xi)$ .



Fonte: adaptada de (BENEUX et al., 2017)

### 5.3 Exemplos

Nesta seção, serão apresentados exemplos com a finalidade de ilustrar os lemas propostos e verificar a capacidade do Teorema 10 de expandir a região de condições iniciais para a qual a limitação do vetor de estado é garantida.

Para estes exemplos, será considerado o modelo de um conversor eletrônico de potência CC-CC Buck, que apresenta duas variáveis de estado e dois subsistemas. Este conversor já foi apresentado no Capítulo 4, tendo o diagrama da sua estrutura apresentado na Figura 15. Seu modelo chaveado afim em espaço de estados, conforme (1), é definido em (223).

Neste sistema, as variáveis de estado são a corrente no indutor ( $i_L(t)$ ) e a tensão no capacitor ( $v_C(t)$ ), assim o vetor de variáveis de estado é dado por (224). Os parâmetros de projeto utilizados serão os mesmos propostos em (DEAECTO et al., 2010):

$$V_g = w = 100[V], \quad R = 50[\Omega], \quad r_L = 2[\Omega], \quad L = 500[\mu H], \quad C = 470[\mu F]. \quad (252)$$

Observa-se que neste modelo é considerada a resistência parasita do indutor ( $r_L$ ). Para este sistema, o conjunto de possíveis pontos de equilíbrio (11) é dado pela equação (225).

#### 5.3.1 Limitação do vetor de estado

Este primeiro exemplo tratará os Lemas 5 e 6. Para tanto, será utilizado o modelo matemático apresentado em (223) com os valores de (252). Com a finalidade de melhor apresentar as análises e ganhos trazidos nesta seção, este exemplo considera apenas o modelo matemático, não levando em consideração as limitações físicas referentes à operação em um único quadrante (tensão e corrente positivas), característica típica dos conversores CC-CC unidirecionais.

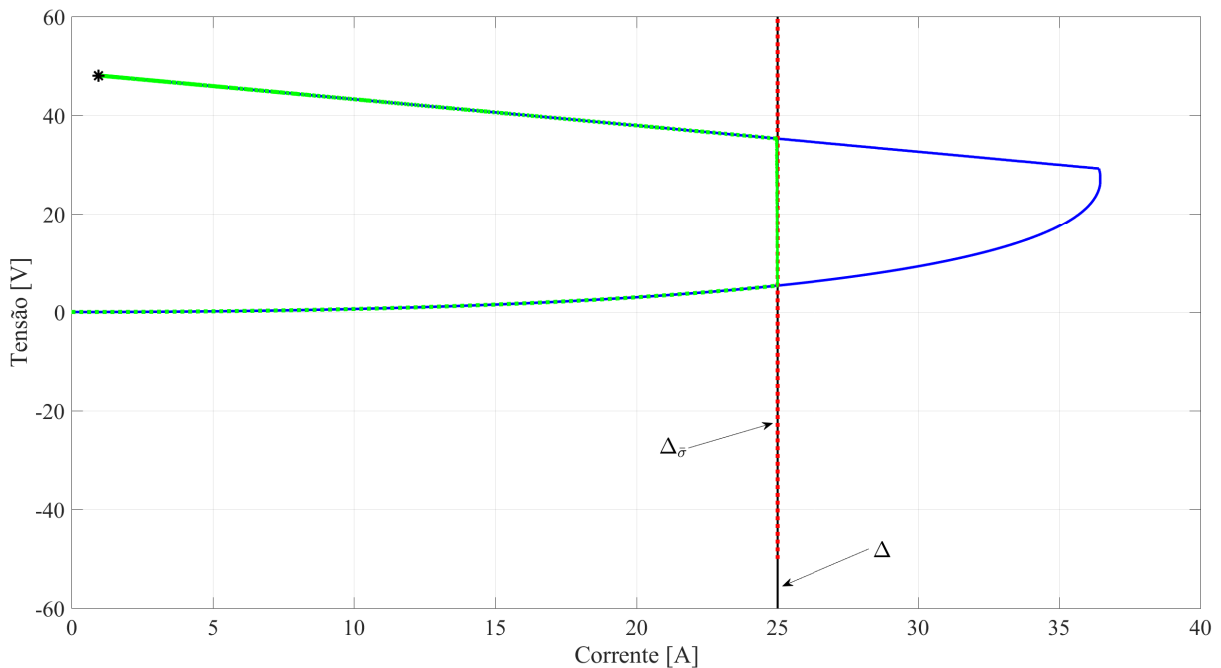
Neste exemplo, adota-se o seguinte valor de tensão de saída desejada  $v_C = 48,0769[V]$ , cuja corrente correspondente é  $i_L = 0,9615[A]$ . Portanto, o ponto de equilíbrio desejado é  $x_r = [0,9615 \quad 48,0769]'$ . Os coeficientes da combinação convexa correspondentes são  $\lambda_{(1)} = 0,5$  e  $\lambda_{(2)} = 0,5$ . A lei de chaveamento do tipo (235) utilizada enquanto o estado não estiver na iminência de extrapolar o limite  $\xi_{(q)} = \bar{\ell}$  será fornecida pelo Teorema 3.

Para exemplificar a análise apresentada pelo Lema 5, o sistema (223) foi simulado para a condição inicial  $x(0) = [0 \quad 0]'$  e foi imposta a limitação à primeira variável de estado (corrente). Foi estabelecido que corrente não deveria ultrapassar o valor de  $25[A]$ , portanto,  $x_{(1)} \leq \bar{\ell} = 25$  e  $\xi_{(1)} \leq 24,0385$ .

A Figura 25 apresenta o plano de fase obtido a partir da simulação. No eixo horizontal está

representada a primeira variável de estado (corrente) e no vertical, a segunda variável de estado (tensão). Portanto, a representação é feita em função do vetor de estado  $x$ , não em função de  $\xi$ , sendo o ponto de equilíbrio desejado representado por um asterisco na cor preta. A linha vertical na cor preta representa o hiperplano  $\Delta$  (232). A linha tracejada na cor vermelha representa a região  $\Delta_{\bar{\sigma}}$ , que, neste caso, constitui-se de uma semirreta com início no ponto  $[25 \quad -50]'$ . A trajetória em azul foi obtida para o Teorema 3 sem a imposição de nenhuma limitação ao vetor de estado. Já a trajetória em linha pontilhada, na cor verde, foi obtida para a condição estabelecida no Lema 5, restringindo o valor máximo da corrente. Mais especificamente, foi utilizada a mesma regra de chaveamento do Teorema 3, restringindo o conjunto de possíveis subsistemas a serem ativados ao se chegar no valor limite para  $x_{(1)}$ , como estabelecido em (236). É possível observar que, de fato, na região  $\Delta_{\bar{\sigma}}$  a regra (236) limita o valor máximo admissível para a corrente. Observa-se, também que, quando o sistema não está na iminência de atingir o hiperplano  $\Delta$ , a trajetória percorrida é exatamente a mesma percorrida para o caso onde não há nenhuma limitação, por isso, neste caso, o sistema continua percorrendo a trajetória otimizada.

Figura 25 - Plano de fase - trajetórias para simulação sem e com limitação do vetor de estado.

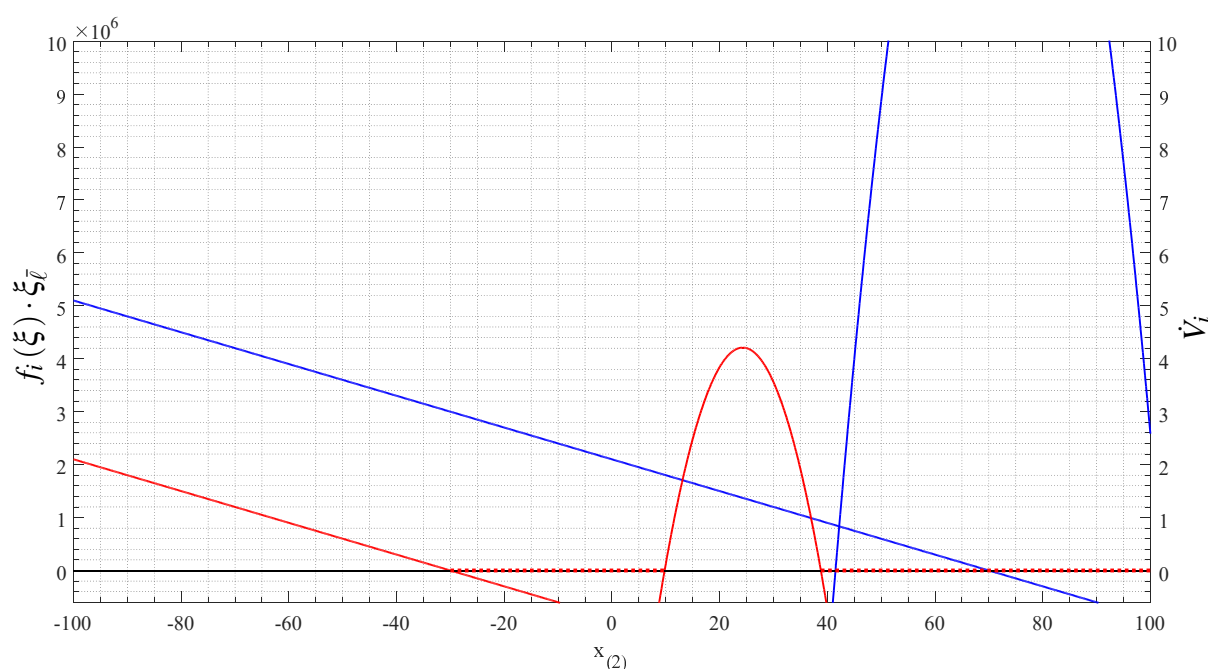


Fonte: Elaborada pelo próprio autor

Depois de estabelecidas as condições suficientes para a limitação do vetor de estado, o Lema 6 define uma região de condições iniciais para as quais a limitação do vetor de estado será garantida. Para a análise deste lema, uma nova simulação foi realizada, tendo como única

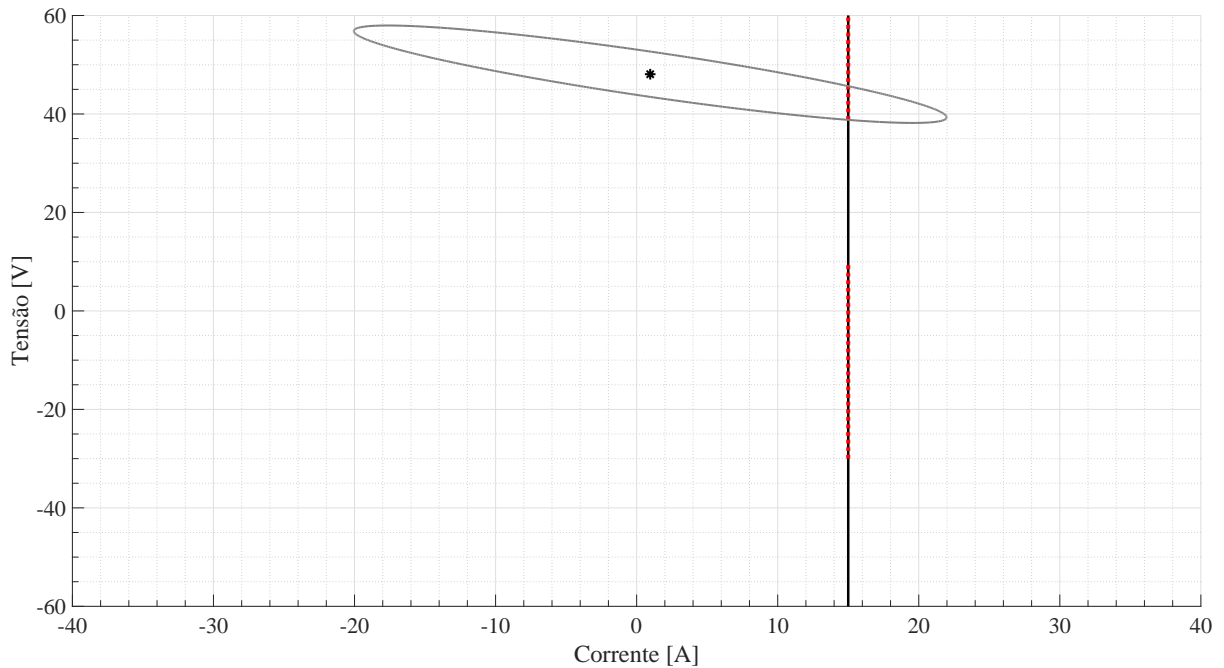
diferença com relação à simulação anterior o valor do limite para a corrente, que passou a ser de 15A. A título de análise, a Figura 26 apresenta as curvas de  $f_i(\xi) \cdot \xi_{\bar{l}}$ , que, para este sistema, são retas, e as curvas de  $\dot{V}_i$ , que são parábolas. Deve-se destacar que estas curvas foram calculadas em função de  $x_{(2)}$ , mantendo-se  $x_{(1)}$  no valor 15, condição correspondente ao hiperplano  $\Delta$ . As curvas em azul referem-se ao subsistema 1 e as curvas em vermelho, ao subsistema 2. Lembrando-se que a região  $\Delta_{\bar{\sigma}}$  existe quando, para um mesmo subsistema,  $f_i(\xi) \cdot \xi_{\bar{l}}$  e  $\dot{V}_i$  são simultaneamente negativas. É possível identificar na figura esta região, representada por linha tracejada na cor vermelha.

Figura 26 - Análise das curvas  $f_i(\xi) \cdot \xi_{\bar{l}}$  e  $\dot{V}_i$  e da região  $\Delta_{\bar{\sigma}}$ .



Fonte: Elaborada pelo próprio autor

Com base em (241), é possível determinar  $\Omega_{\bar{\sigma}}$  e, conseqüentemente, a região para a qual a limitação do vetor de estado é garantida segundo o Lema 6, conforme apresentação da Figura 27. Esta figura expõe o espaço de estados, apresentando, no mesmo padrão de linha preta contínua a linha vermelha tracejada, o hiperplano  $\Delta$  e a região  $\Delta_{\bar{\sigma}}$ , respectivamente. Adicionalmente, a figura apresenta a região  $\Omega_{\bar{\sigma}}$ , com formato elipsoidal na cor cinza e o ponto de equilíbrio desejado, marcado por um asterisco, que é o centro de todas as curvas de nível  $\mathcal{L}_{\mathcal{V}}$ .

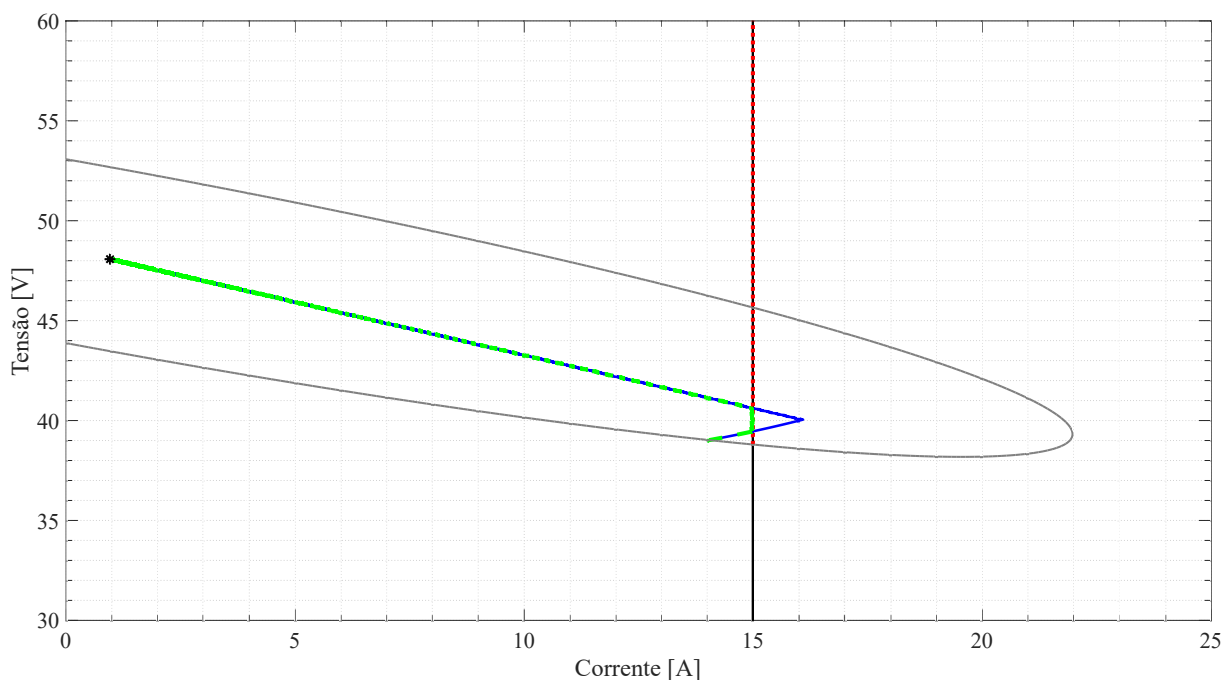
Figura 27 - Apresentação da região  $\Omega_{\bar{\sigma}}$  descrita pelo Lema 6.

Fonte: Elaborada pelo próprio autor

Pode-se observar que, neste caso, a região  $\Delta_{\bar{\sigma}}$  não é conexa, mesmo assim, como já analisado, existe uma única região  $\Omega_{\bar{\sigma}}$ . Partindo de uma condição inicial fora de  $\Omega_{\bar{\sigma}}$ , pode ser que a limitação do vetor de estado seja respeitada (inclusive, é possível notar que a região  $\Delta_{\bar{\sigma}}$  é muito maior que sua intersecção com  $\Omega_{\bar{\sigma}}$ ), contudo, isto não é garantido pelo Lema 6.

Finalizando esta análise, a Figura 28 apresenta as mesmas informações da Figura 27, com a adição de duas trajetórias iniciadas próximas à borda de  $\Omega_{\bar{\sigma}}$ . A primeira delas, em azul, foi obtida para o Teorema 3, enquanto a segunda, em linha tracejada verde foi obtida para a condição estabelecida no Lema 5, situação em que se verifica a limitação da corrente.

Figura 28 - Plano de fase - trajetórias para simulação sem e com limitação do vetor de estado com condição inicial dentro da região  $\Omega_{\bar{\sigma}}$ .



Fonte: Elaborada pelo próprio autor

### 5.3.2 Expansão da região de condições iniciais

Utilizando a regra de chaveamento (236) é possível, de acordo com o Lema 6, estabelecer a região de condições iniciais  $\Omega_{\bar{\sigma}}$ . De acordo com o Lema 8, utilizando a lei de controle (244), é possível estabelecer a região  $\Omega_{\bar{\lambda}}$ . Então, utilizando o Teorema 10 é possível combinar as duas leis de controle e maximizar a região de condições iniciais onde se garante a limitação do vetor de estado, chegando à região  $\Omega_{\bar{\omega}}$ , que é maior ou igual à união das duas regiões mencionadas anteriormente.

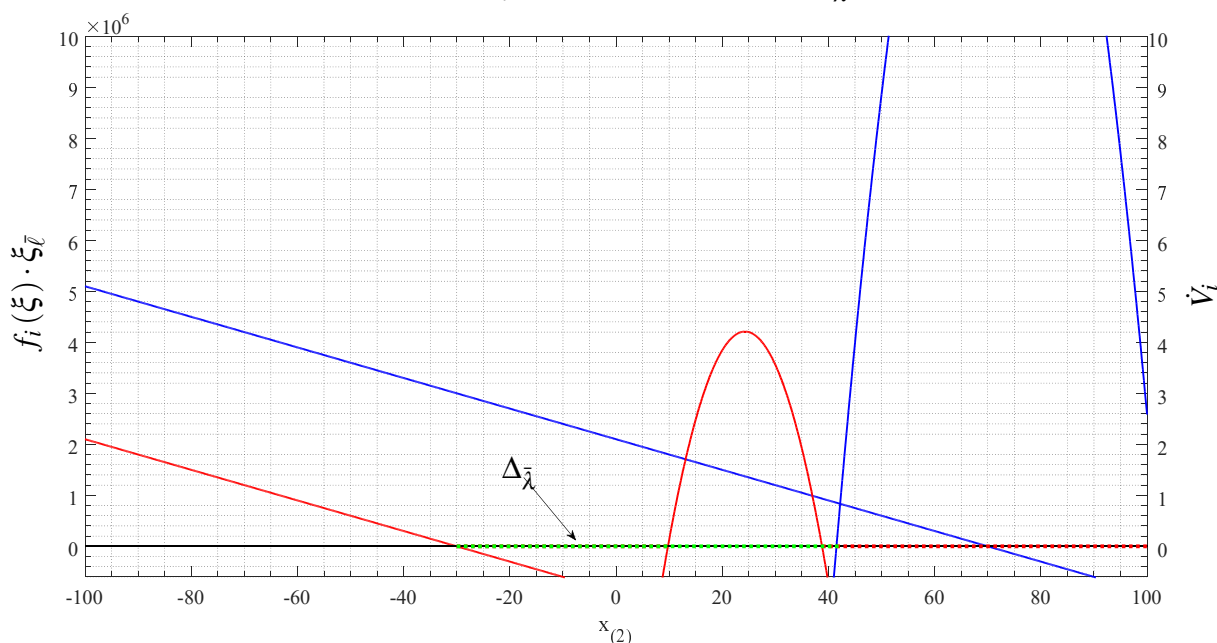
Para exemplificar a capacidade de expansão da região de condições iniciais proposta pelo Teorema 10, são apresentadas as Figuras 29 e 30 para a mesma limitação  $x_{(1)} \leq 15$ , já explorada no exemplo anterior. A Figura 29 é análoga à Figura 26. O importante a se observar aqui é o surgimento da região  $\Delta_{\bar{\lambda}}$ , representada por linha tracejada verde, que ocorre onde há um campo vetorial  $f_{\lambda_l}(\xi) \subset \Delta$  e  $\dot{V}_{\lambda_l}(\xi) < 0$ . Ou seja, região onde é possível encontrar uma combinação convexa dos subsistemas que gera uma trajetória estável e contida no hiperplano da limitação ( $\Delta$ ).

O cálculo da região  $\Delta_{\bar{\lambda}}$  é feito a partir da seguinte equação:

$$\lambda (A_1x + B_1u) + (1 - \lambda) (A_2x + B_2u) = \begin{bmatrix} 0 \\ x_{(2)} \end{bmatrix}, \quad x_{(1)} = \bar{\ell}. \quad (253)$$

Em seguida, basta resolver a equação referente ao primeiro termo dos vetores (relacionada à primeira variável de estado) e determinar os limites de  $x_{(2)}$  para que  $\lambda$  esteja entre 0 e 1. Neste caso, estes limites foram:  $x_{(2)} = -30$  e  $x_{(2)} = 70$ . Contudo, ainda se deve determinar em que parte deste intervalo tem-se  $\dot{V}_{\lambda_{\bar{\ell}}}(\xi) < 0$ . Isto foi feito a partir da análise do sentido do campo vetorial  $f_{\lambda_{\bar{\ell}}}(\xi)$  com relação ao ponto  $\varphi_o$ . Em todo o intervalo em que foi definido, o campo vetorial  $f_{\lambda_{\bar{\ell}}}(\xi)$  apontava para o sentido de crescimento da variável de estado  $x_{(2)}$  e, em análise numérica, verificou-se que o ponto  $\varphi_o$  ocorre em  $x = [15 \ 42]'$ . Portanto,  $\Delta_{\bar{\lambda}}$  existe no hiperplano  $\Delta$  entre -30 e 42, conforme ilustrado na Figura 29.

Figura 29 - Análise das curvas  $f_i(\xi) \cdot \xi_{\bar{\ell}}$  e  $\dot{V}_i$  e das regiões  $\Delta_{\bar{\sigma}}$  e  $\Delta_{\bar{\lambda}}$ .



Fonte: Elaborada pelo próprio autor

O vetor  $f_{\lambda_{\bar{\ell}}}(\xi) \subset \Delta$  existe para o intervalo de  $x_{(2)}$  de -30 a 70, contudo, ele sempre aponta para o sentido de crescimento da segunda variável de estado. Sendo assim, este vetor é convergente ( $\dot{V}_{\lambda_{\bar{\ell}}}(\xi) < 0$ ) apenas no intervalo de -30 a 42, sendo este o ponto de intersecção da região elipsoidal  $\Omega_o$  com o hiperplano  $\Delta$ . Na Figura 29 pode-se observar que a união das regiões  $\Delta_{\bar{\sigma}}$  e  $\Delta_{\bar{\lambda}}$  existe para todo  $x_{(2)} \geq -30$ .

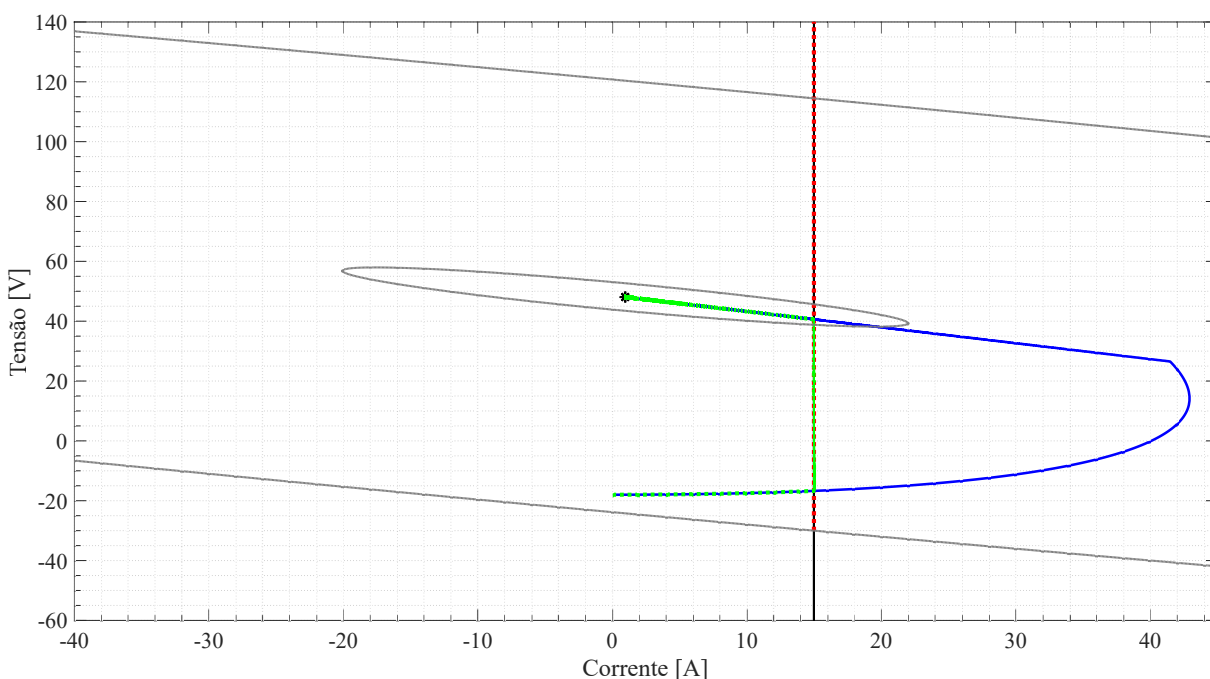
Utilizando-se a união das regiões  $\Delta_{\bar{\sigma}}$  e  $\Delta_{\bar{\lambda}}$  a nova região de condições iniciais  $\Omega_{\bar{w}}$  é determinada de acordo com o Teorema 10 e apresentada na Figura 30, análoga à Figura 28. Na nova

figura, a linha preta e a linha tracejada vermelha representam, respectivamente,  $\Delta$  e  $\Delta_{\bar{\sigma}} \cup \Delta_{\bar{\lambda}}$ . A elipse menor, com centro no ponto de equilíbrio desejado, é a mesma da Figura 27, que representa  $\Omega_{\bar{\sigma}}$  encontrada considerando-se apenas  $\Delta_{\bar{\sigma}}$ . Já a elipse maior, também centrada no ponto de equilíbrio desejado, representa a região  $\Omega_{\bar{\omega}}$ . É nítido o grande aumento, proporcionado pela lei de controle do Teorema 10, na região de condições iniciais para a qual se garante a limitação do vetor de estado.

A fim de exemplificar a limitação do vetor de estado, a Figura 30 apresenta, ainda, a trajetória em azul, obtida para o Teorema 3 e a trajetória em verde pontilhada, obtida para o Teorema 10, ambas as trajetórias com condição inicial  $[0, -18]'$ , sendo possível, novamente, verificar que a limitação do vetor de estado foi efetiva.

É válido notar que, para este exemplo, apesar de a região  $\Delta_{\bar{\lambda}}$  existir, a maior intersecção de uma região  $\Omega$  com o hiperplano  $\Delta$  contida em  $\Delta_{\bar{\lambda}}$  corresponde a apenas um ponto, o ponto  $\varphi_o$ , o que faz com que a região  $\Omega_{\bar{\lambda}}$  seja igual a  $\Omega_o$  e contida em  $\Omega_{\bar{\sigma}}$ .

Figura 30 - Plano de fase - trajetórias para simulação sem e com limitação do vetor de estado com condição inicial dentro da região  $\Omega_{\bar{\omega}}$  expandida pelo Teorema 10.



Fonte: Elaborada pelo próprio autor

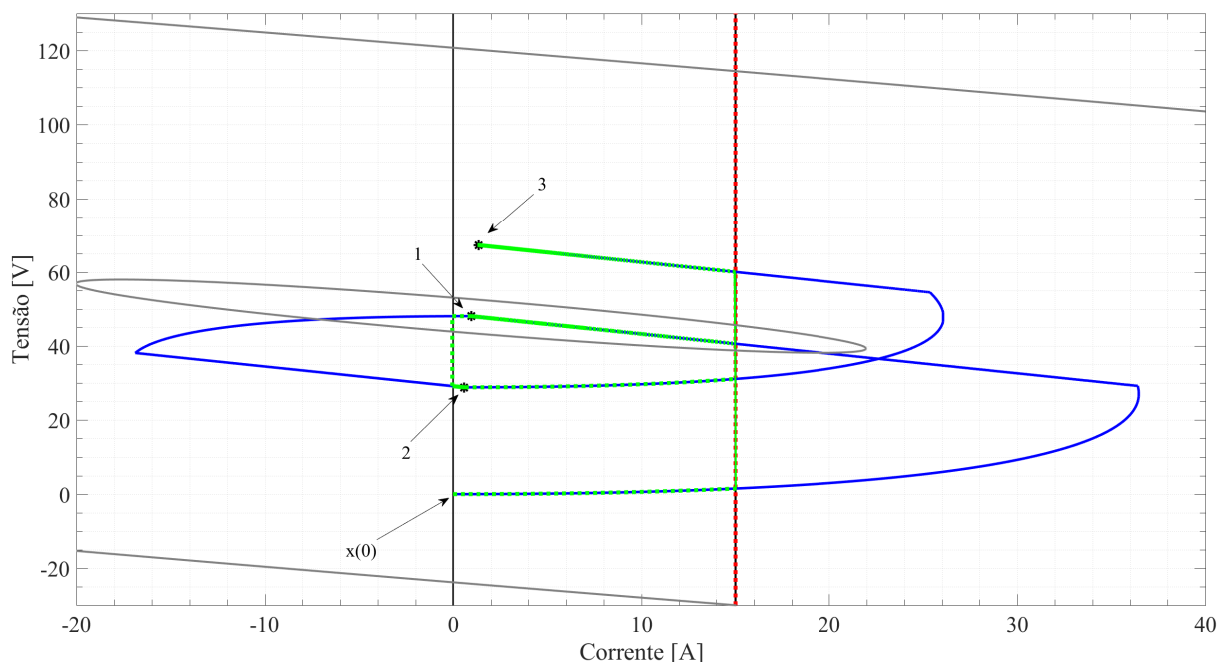
### 5.3.3 Modo de condução descontínua (MCD)

Para exemplificar, também, a análise da estabilidade quando o conversor está sujeito ao MCD, proposta em (BENEUX et al., 2017), foi realizada uma última simulação para as mes-

mas condições da simulação anterior. Contudo, foram realizadas duas mudanças no ponto de equilíbrio desejado e considerou-se que a corrente no indutor do conversor nunca será negativa, o que ocasiona o MCD.

A Figura 31, de maneira análoga à Figura 30, apresenta, na cor azul, as trajetórias do sistema durante os transitórios sob a lei de controle do Teorema 3 (sem a limitação do vetor de estado no hiperplano  $\Delta$  e sem a limitação relacionada ao MCD), enquanto as trajetórias em linha verde pontilhada representam o comportamento do sistema com as limitações relacionadas ao Teorema 10 e ao MCD. As setas acompanhadas pelos números 1, 2 e 3 indicam, sequencialmente, os três pontos de equilíbrio que foram estabelecidos:  $x_r = [0,9615 \ 48,0769]'$ ,  $x_r = [0,5769 \ 28,8462]'$  e  $x_r = [1,3462 \ 67,3077]'$ , correspondentes às combinações convexas com vetores  $\lambda$  valendo, respectivamente,  $\lambda_r = [0,5 \ 0,5]'$ ,  $\lambda_r = [0,3 \ 0,7]'$  e  $\lambda_r = [0,7 \ 0,3]'$ . Nesta figura é possível observar que, quando se aplica a limitação do vetor de estado e o modelo respeita o MCD, a primeira variável de estado (corrente no indutor) fica confinada entre os valores 0A e 15A, para qualquer um dos transitórios entre os pontos de equilíbrio desejados.

Figura 31 - Plano de fase - trajetórias para simulação sem e com limitação do vetor de estado com condição inicial dentro da região  $\Omega_{\overline{\sigma}}$  expandida pelo Teorema 10 para três diferentes pontos de equilíbrio.



Fonte: Elaborada pelo próprio autor

## 5.4 Conclusões Parciais

Este capítulo dedicou-se a explorar a limitação do vetor de estado. Inicialmente, foi apresentado o Lema 5 que estabelece condições suficientes para que seja possível a limitação de uma das variáveis de estado. Esta limitação é unilateral e corresponde a um valor determinado pelo projetista. Complementando este lema, foi proposto o Lema 6, que determina uma região de condições iniciais ( $\Omega_{\bar{\sigma}}$ ) para a qual esta limitação do vetor de estado é garantida.

Um segundo par de lemas, os Lemas 7 e 8, estabelece outra lei de controle capaz de impor a limitação do estado e outra região de condições iniciais ( $\Omega_{\bar{\lambda}}$ ) que garante esta limitação. Na sequência, o Teorema 10 estabeleceu uma lei de controle baseada nas duas apresentadas nos lemas e consegue estabelecer uma região maior ou igual à união das regiões ( $\Omega_{\bar{\sigma}}$ ) e ( $\Omega_{\bar{\lambda}}$ ).

A lei de controle proposta no Teorema 10 é baseada em uma função de Lyapunov e regra de chaveamento preestabelecidas, preservando suas características enquanto não ocorre a limitação do valor de uma variável de estado. Então, por mais que não seja possível assegurar um custo garantido proveniente da regra de chaveamento prévia, sempre que o estado não estiver no valor extremo desejado para uma variável de estado, o comportamento do sistema ainda será otimizado.

Neste capítulo, foi apresentado, também, um caso particular de limitação do vetor de estado, que ocorre devido às próprias características do sistema, quando conversores eletrônicos de potência CC-CC entram em operação no modo de condução descontínua. Por último, foram realizadas simulações para ilustrar cada um dos pontos analisados.

Este capítulo tem bastante apelo prático, pois proporciona uma forma bastante precisa de limitar o valor extremo de variáveis de estado. Isto é bastante desejável em conversores eletrônicos para evitar valores muito elevados de corrente durante a partida do conversor, ou durante transitórios. As condições apresentadas podem ser sobrepostas, criando mais de um hiperplano de limitação, da mesma variável, ou de variáveis diferentes. Cabe, ainda, explorar formatos diferentes de limitação das variáveis de estado, como um valor limite para a soma ou produto de duas variáveis.

## 6 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS

Este capítulo é dedicado a apresentar as conclusões, destacar as principais contribuições e discutir as perspectivas de trabalho futuros.

### 6.1 Conclusões

Este trabalho explorou o problema de controle de sistemas chaveados afins. Como citado, os sistemas chaveados vêm sendo bastante explorados recentemente, contudo, o caso em que os subsistemas não compartilham um mesmo ponto de equilíbrio é menos abordado e a adaptação, para sistemas chaveados afins, de teoremas desenvolvidos para sistemas chaveados lineares nem sempre é direta ou viável.

Escolheu-se investigar esta classe de sistemas por sua ótima adequação à modelagem de conversores eletrônicos de potência, o que possibilita a modelagem direta dos conversores e já considera as principais restrições práticas deste tipo de planta. Tradicionalmente, os conversores eletrônicos são modelados pelo modelo de valores médios, fazendo as devidas considerações para a análise de pequenos sinais (ERICKSON; MAKSIMOVIC, 2007, Cap. 7). Nesta modelagem, usualmente a razão cíclica, equivalente à combinação convexa de subsistemas  $\lambda$ , é utilizada como variável de controle e o chaveamento é feito por modulação PWM (do inglês, *pulse width modulation*). Normalmente todas as considerações feitas durante a modelagem restringem muito as condições para as quais o modelo é válido. Por todos estes motivos, considera-se que a investigação e evolução de teorias de controle dos sistemas chaveados afins tem muito a contribuir neste campo.

No Capítulo 2, foram apresentadas as principais características dos sistemas chaveados afins e as primeiras regras de chaveamento propostas na literatura para seu controle. Este foi o ponto de partida para o desenvolvimento dos avanços no controle destes sistemas propostos neste trabalho.

No Capítulo 3 aplicou-se a teoria de decomposição em soma de quadrados (SOS) para criação de regras de chaveamento que consideram funções de Lyapunov baseadas em matrizes  $P(\xi)$  polinomiais multivariadas, sendo possível observar melhoria no desempenho transitório do sistema simulado e a certificação de menor custo garantido  $\mathcal{J}$ . Esta estratégia tem como

principais vantagens, além do ganho de performance, a fácil diferenciabilidade das funções polinomiais e a possibilidade de verificação da positividade destas funções utilizando programação semidefinida, graças à teoria de SOS (PRAJNA; PAPACHRISTODOULOU; WU, 2004; PARRILO, 2000, Cap. 4).

Com relação ao controle robusto, tratado no Capítulo 4, foram apresentados teoremas que asseguram a estabilidade assintótica e custo garantido para sistemas chaveados afins com incertezas paramétricas politópicas, inclusive perante a variação do ponto de equilíbrio desejado durante a operação. Estes teoremas, toleram, além das incertezas paramétricas, variações na entrada externa (entrada não controlada), o que os torna extremamente propícios para aplicações onde as características dos circuitos conectados à entrada e à saída do conversor controlado são variáveis. Outra vantagem dos teoremas propostos neste capítulo, é o fato de não necessitarem de um observador de estados, em vez disso, utilizam filtros de primeira ordem para criar um sistema aumentado. Estes filtros podem ser implementados via *hardware*, reduzindo o esforço computacional necessário para o controle.

O trabalho ainda propôs, no Capítulo 5, uma metodologia para a limitação do valor extremo de variáveis de estado. A metodologia é baseada no estabelecimento de um hiperplano limite para cada variável de estado que se deseja limitar, e estabelece uma região de condições iniciais para a qual a limitação é assegurada. Esta proposta tem bastante apelo prático para o caso de conversores eletrônicos, pois garante, via controle, a limitação de variáveis de estado que, nos casos necessários, é comumente feita pela adição temporária de resistências em série com o circuito do conversor ou outros métodos de partida, evitando sobrevalores em detrimento do desempenho do sistema.

Um assunto a ser discutido quando se trata de controle chaveado é o *chattering*, que consiste no chaveamento infinitamente rápido, que é indesejável em muitos sistemas físicos (DEAECTO; SOUZA; GEROMEL, 2014). Este fenômeno é característico de superfícies de deslizamento e já há vários trabalhos com propostas para evitá-lo (HETEL; FRIDMAN, 2012; DEAECTO; SOUZA; GEROMEL, 2014; WANG; ADELI, 2012; ALVES et al., 2016). Contudo, quando o sistema em questão é um conversor chaveado, o chaveamento em alta frequência (da ordem de dezenas ou centenas de kHz) faz parte de sua forma regular de operação. Como numa aplicação prática a avaliação da regra de chaveamento é discreta, calculada em intervalos de tempo, isto já impede que a frequência de chaveamento seja infinita, mantendo-a em valores adequados. Em casos mais críticos, onde é necessário limitar a frequência de chaveamento, pode-se estabelecer um tempo mínimo de atualização do valor da regra de chaveamento ou, ainda, adaptar as regras de chaveamento propostas neste trabalho para funcionarem como leis de

controle adaptativas (JEONG; KIM; SON, 2009; BENEUX et al., 2019; MAINARDI JÚNIOR, 2013, Cap. 6), assim, o controle pode ser feito via PWM. Em ambos os casos, a estabilidade *ultimate bounded*, definida quando o sistema converge para uma região fechada e limitada em torno do ponto de equilíbrio (MAINARDI JÚNIOR, 2013; LEITMANN, 1978; CORLESS; LEITMANN, 1981), pode ser garantida (MAINARDI JÚNIOR, 2013, Cap. 4).

O tema abordado e os teoremas propostos neste trabalho são de grande importância no cenário onde se busca revolucionar a geração e utilização de energia. O desenvolvimento e aprimoramento de controladores para conversores chaveados é um campo de pesquisa importante no desenvolvimento de aplicações com energias alternativas e renováveis, redes elétricas inteligentes, geração distribuída, veículos híbridos e elétricos e veículos aéreos (TAVAN et al., 2020; CAVALLO; CANCEILLO; RUSSO, 2020). Além disso, os sistemas chaveados afins podem ser utilizados para descrever classes mais abrangentes de sistemas híbridos (FERRARI-TRECATE et al., 2002; ZHAI et al., 2018). Todas estas possibilidades relevantes foram o que motivaram esta tese e ainda motivam a continuidade do desenvolvimento deste trabalho.

## **6.2 Perspectivas Futuras**

Ainda há muito a se explorar com relação ao controle de sistemas chaveados afins. A seguir, são apresentados alguns temas a serem desenvolvidos como continuação desta tese.

Continuando a aplicação de matrizes polinomiais para a flexibilização das superfícies de deslizamento criadas pelas regras de chaveamento, pretende-se aplicar esta técnica para o desenvolvimento de regras de chaveamento com acesso à saída.

Para atender a mais necessidades de algumas aplicações, deseja-se explorar leis de controle capazes de limitar o vetor de estado em uma superfície mais complexa do que o hiperplano (tratado no Capítulo 5), para que seja possível limitar, também, o produto de duas variáveis de estado.

Além disso, pretende-se explorar a aplicação de outros métodos para flexibilização das superfícies de deslizamento, principalmente para teoremas que permitam a variação do ponto de equilíbrio desejado. Algumas possibilidades são o uso de funções de Lyapunov quadráticas por partes, de forma similar ao que foi feito para sistemas lineares chaveados (GEROMEL; COLANERI, 2006; CARDIM et al., 2009) e em sistemas chaveados afins considerando uma região de convergência (EGIDIO; DEAECTO, 2019; SERIEYE et al., 2020) ou o uso de funções de Lyapunov polinomiais homogêneas dependentes de parâmetros (OLIVEIRA; PERES, 2007). No caso do controle robusto, além da melhoria de desempenho, estas técnicas podem ser

comparadas do ponto de vista da área onde se consegue factibilidade no espaço das incertezas.

Como já citado, esta adaptação de técnicas aplicadas a sistemas chaveados lineares não é trivial para o caso dos sistemas chaveados afins devido ao fato de haver pontos de equilíbrio distintos para cada um dos subsistemas. Este desafio é ainda maior quando se consideram incertezas nos sistemas. Mesmo assim, podem trazer muitas vantagens para o controle de conversores eletrônicos, por isso estão entre as prioridades da continuidade do trabalho.

## REFERÊNCIAS

- ALVES, U. N. L. T.; TEIXEIRA, M. C. M.; OLIVEIRA, D. R.; CARDIM, R.; ASSUNÇÃO, E.; SOUZA, W. A. Smoothing switched control laws for uncertain nonlinear systems subject to actuator saturation. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, West Sussex, v. 30, n. 8-10, p. 1408–1433, 2016.
- BENEUX, G.; RIEDINGER, P.; DAAFOUZ, J.; GRIMAUD, L. Stabilisation of power converters with uncertain equilibrium: an adaptive switched approach with guarantee of stability in continuous and discontinuous conduction modes. *IFAC-PapersOnLine*, v. 50, n. 1, p. 10401 – 10406, 2017. 20th IFAC World Congress.
- BENEUX, G.; RIEDINGER, P.; DAAFOUZ, J.; GRIMAUD, L. Adaptive stabilization of switched affine systems with unknown equilibrium points: Application to power converters. *Automatica*, Elmsford, v. 99, p. 82 – 91, 2019.
- BENGEA, S. C.; DECARLO, R. A. Optimal control of switching systems. *Automatica*, Elmsford, v. 41, n. 1, p. 11–27, 2005.
- BIZARRO, D. B.; GODOY, R. B.; JUNIOR, L. G.; PINTO, J. O. P. A new microinverter topology for PV application with inductive power decoupling capability. In: *2015 IEEE 24th International Symposium on Industrial Electronics (ISIE)*. [S.l.: s.n.], 2015. p. 178–183.
- BOCCA, L. F.; RAMOS, I. T. M.; ALVES, U. N. L. T.; BIZARRO, D. B.; PERES, J. C.; TEIXEIRA, M. C. M. Projeto de controladores Ótimos robustos com realimentação estática de saída. In: *SBA. Sociedade Brasileira de Automática (vol. 2 no 1)*. [S.l.], 2020.
- BOLZERN, P.; SPINELLI, W. Quadratic stabilization of a switched affine system about a nonequilibrium point. In: *Proceedings of the 2004 American Control Conference*. [S.l.: s.n.], 2004. v. 5, p. 3890–3895 vol.5.
- BOYD, S.; GHAOUI, L. E.; FERON, E.; BALAKRISHNAN, V. *Linear matrix inequalities in system and control theory*. Philadelphia: SIAM, 1994.
- CARDIM, R.; TEIXEIRA, M. C. M.; ASSUNÇÃO, E.; COVACIC, M. R. Variable-structure control design of switched systems with an application to a dc–dc power converter. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, New York, v. 56, n. 9, p. 3505–3513, 2009.
- CARNIATO, L. A.; CARNIATO, A. A.; TEIXEIRA, M. C. M.; CARDIM, R.; JUNIOR, E. I. M.; ASSUNÇÃO, E. Output control of continuous-time uncertain switched linear systems via switched static output feedback. *International Journal of Control*, London, v. 91, n. 5, p. 1127–1146, 2018.
- CAVALLO, A.; CANCEILLO, G.; RUSSO, A. Integrated supervised adaptive control for the more electric aircraft. *Automatica*, Elmsford, v. 117, p. 108956, 2020.

- CORLESS, M.; LEITMANN, G. Continuous state feedback guaranteeing uniform ultimate boundedness for uncertain dynamic systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, New York, v. 26, n. 5, p. 1139–1144, 1981.
- COUTINHO, D.; TROFINO, A.; FU, M. Guaranteed cost control of uncertain nonlinear systems via polynomial lyapunov functions. *IEEE Transactions on Automatic control*, New York, v. 47, n. 9, p. 1575–1580, 2002.
- DEAECTO, G. S.; GEROMEL, J. C.; DAAFOUZ, J. Switched state-feedback control for continuous time-varying polytopic systems. *International Journal of Control*, London, v. 84, n. 9, p. 1500–1508, 2011.
- DEAECTO, G. S.; GEROMEL, J. C.; GARCIA, F. S.; POMILIO, J. A. Switched affine systems control design with application to dc-dc converters. *IET Control Theory Applications*, Stevenage, v. 4, n. 7, p. 1201–1210, 2010.
- DEAECTO, G. S.; SOUZA, M.; GEROMEL, J. C. Chattering free control of continuous-time switched linear systems. *Control Theory Applications, IET*, Stevenage, v. 8, n. 5, p. 348–354, 2014.
- DHANASEKAR, R.; KUMAR, S. G.; RIVERA, M. Sliding mode control of electric drives/review. In: IEEE. *2016 IEEE International Conference on Automatica (ICA-ACCA)*. [S.l.], 2016. p. 1–7.
- EGIDIO, L. N.; DEAECTO, G. S. Novel practical stability conditions for discrete-time switched affine systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, New York, v. 64, n. 11, p. 4705–4710, 2019.
- ERICKSON, R. W.; MAKSIMOVIC, D. *Fundamentals of power electronics*. 2. ed. New York: Springer Science & Business Media, 2007.
- FERRARI-TRECATE, G.; CUZZOLA, F. A.; MIGNONE, D.; MORARI, M. Analysis of discrete-time piecewise affine and hybrid systems. *Automatica*, Elmsford, v. 38, n. 12, p. 2139–2146, 2002.
- FRIEDLAND, S.; MELMAN, A. A note on hermitian positive semidefinite matrix polynomials. *Linear Algebra and its Applications*, Amsterdam, v. 598, p. 105–109, 2020.
- GEROMEL, J. C.; COLANERI, P. Stability and Stabilization of Continuous-Time Switched Linear Systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, Philadelphia, v. 45, n. 5, p. 1915–1930, 2006.
- GULDEMIR, H. Study of sliding mode control of dc-dc buck converter. *Energy and power Engineering*, Scientific Research Publishing, Irvine, v. 3, n. 04, p. 401, 2011.
- HETEL, L.; FRIDMAN, E. Sampled – data control of switched affine systems: a continuous-time approach. *IFAC Proceedings Volumes*, v. 45, n. 13, p. 582–587, 2012. 7th IFAC Symposium on Robust Control Design.
- HETEL, L.; FRIDMAN, E. Robust sampled-data control of switched affine systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, New York, v. 58, n. 11, p. 2922–2928, Nov 2013.

- HUANG, C.; ZHAI, G.; LI, W. Quadratic stabilization and  $\mathcal{L}_2$  gain analysis of switched affine systems. In: *Proceedings of the 29th Chinese Control and Decision Conference, CCDC 2017*. [S.l.]: Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc., 2017. p. 2018–2023.
- HUANG, Y. *Nonlinear optimal control: an enhanced quasi-LPV approach*. Tese (Doutorado) — California Institute of Technology, 1999.
- JEONG, G.-J.; KIM, I.-H.; SON, Y.-I. Application of simple adaptive control to a dc/dc boost converter with load variation. In: *2009 ICCAS-SICE*. [S.l.: s.n.], 2009. p. 1747–1751.
- LEITMANN, G. Guaranteed ultimate boundedness for a class of uncertain linear dynamical systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, New York, v. 23, n. 6, p. 1109–1110, 1978.
- LIBERZON, D. *Switching in Systems and Control*. Boston: Birkhäuser, Boston, MA, 2003.
- LIBERZON, D.; MORSE, A. S. Basic problems in stability and design of switched systems. *IEEE Control Systems Magazine*, New York, v. 19, n. 5, p. 59–70, 1999.
- LIN, H.; ANTSAKLIS, P. J. Stability and stabilizability of switched linear systems: A survey of recent results. *IEEE Transactions on Automatic Control*, New York, v. 54, n. 2, p. 308–322, 2009.
- MAINARDI JÚNIOR, E. I. *Projeto de controladores para sistemas chaveados com aplicações em conversores cc-cc*. Tese (Doutorado) — Universidade Estadual Paulista (UNESP), 2013.
- MAINARDI JÚNIOR, E. I.; TEIXEIRA, M. C. M.; CARDIM, R.; ASSUNÇÃO, E.; MOREIRA, M. R.; OLIVEIRA, D. R. de; CARNIATO, A. A. Robust control of switched linear systems with output switching strategy. *Journal of Control, Automation and Electrical Systems*, Heidelberg, v. 26, n. 5, p. 455–465, Oct 2015.
- MALESANI, L.; ROSSETTO, L.; SPIAZZI, G.; ZUCCATO, A. An AC power supply with sliding-mode control. *IEEE Industry Applications Magazine*, IEEE, New York, v. 2, n. 5, p. 32–38, 1996.
- OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. Parameter-dependent LMIs in robust analysis: Characterization of homogeneous polynomially parameter-dependent solutions via LMI relaxations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, New York, v. 52, n. 7, p. 1334–1340, 2007.
- PANCHADE, V.; CHILE, R.; PATRE, B. A survey on sliding mode control strategies for induction motors. *Annual Reviews in Control*, Elsevier, Oxford, v. 37, n. 2, p. 289–307, 2013.
- PARRILO, P. A. *Structured semidefinite programs and semialgebraic geometry methods in robustness and optimization*. Tese (Doutorado) — California Institute of Technology, 2000.
- PARRILO, P. A.; STURMFELS, B. Minimizing polynomial functions. *Algorithmic and quantitative real algebraic geometry, DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science*, Providence, v. 60, p. 83–99, 2003.
- PRAJNA, S.; PAPACHRISTODOULOU, A.; WU, F. Nonlinear control synthesis by sum of squares optimization: a lyapunov-based approach. In: *2004 5th Asian Control Conference*

(*IEEE Cat. No.04EX904*). [S.l.: s.n.], 2004. v. 1, p. 157–165 Vol.1.

RAMOS, I. T. M. *Projetos de controladores robustos chaveados para sistemas não lineares baseados na decomposição em soma de quadrados*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual Paulista (UNESP), 2018.

REZNICK, B. et al. Extremal psd forms with few terms. *Duke mathematical journal*, Duke University Press, Durham, v. 45, n. 2, p. 363–374, 1978.

SERIEYE, M.; ALBEA-SANCHEZ, C.; SEURET, A.; JUNGERS, M. Stabilization of switched affine systems via multiple shifted lyapunov functions. *IFAC-PapersOnLine*, v. 53, n. 2, p. 6133–6138, 2020. 21th IFAC World Congress.

SHARIATMADAR, S.; JAFARIAN, S. M. J. Application of minimum-time optimal control system in buck-boost bi-linear converters. *Engineering, Technology & Applied Science Research*, v. 7, n. 4, p. 1753–1758, 2017.

SHTESSEL, Y.; EDWARDS, C.; FRIDMAN, L.; LEVANT, A. Introduction: Intuitive theory of sliding mode control. In: *Sliding Mode Control and Observation*. New York: Springer, 2014. p. 1–42.

SILVA, H. R. M.; RAMOS, I. T. M.; ALVES, U. N. L. T.; CARDIM, R.; TEIXEIRA, M. C. M.; ASSUNÇÃO, E. Switched control design with guaranteed cost for uncertain nonlinear systems subject to actuator saturation. In: ELSEVIER. *21st IFAC World Congress Virtual (IFAC-V 2020)*. [S.l.], 2020. p. 8123–8128.

SIRA-RAMIREZ, H. J.; SILVA-ORTIGOZA, R. *Control design techniques in power electronics devices*. London: Springer Science & Business Media, 2006.

SOUZA, W. A.; TEIXEIRA, M. C. M.; SANTIM, M. P. A.; CARDIM, R.; ASSUNÇÃO, E. Robust switched control design for nonlinear systems using fuzzy models. *Mathematical Problems in Engineering*, Nova Iorque, v. 2014, p. 1–11, 2014b.

SOUZA, W. A. d. *Projeto de controladores robustos chaveados para sistemas não lineares descritos por modelos fuzzy Takagi Sugeno*. 92 p. Tese (Doutorado) — Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, 2013.

SOUZA, W. A. de; TEIXEIRA, M. C. M.; SANTIN, M. P. A.; CARDIM, R.; ASSUNÇÃO, E. On switched control design of linear time-invariant systems with polytopic uncertainties. *Mathematical Problems in Engineer*, London, v. 2013, p. 1–10, 2013.

SPIAZZI, G.; MATTAVELLI, P. Sliding-mode control of switched-mode power supplies. *The Power Electronics Handbook*, CRC, New York, 2002.

SPIAZZI, G.; MATTAVELLI, P.; ROSSETTO, L.; MALESANI, L. Application of sliding mode control to switch-mode power supplies. *Journal of Circuits, Systems, and Computers*, World Scientific, v. 5, n. 03, p. 337–354, 1995.

TAVAN, M.; SABAHI, K.; HAJIZADEH, A.; SOLTANI, M. N.; JESSEN, K. Overcoming the detectability obstacle in adaptive output feedback control of DC-DC boost converter with unknown load. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, New York, p. 1–9, 2020.

- TOSCANO, R. Signal and system norms. In: *Structured Controllers for Uncertain Systems*. London: Springer, 2013. p. 25–44.
- WANG, N.; ADELI, H. Algorithms for chattering reduction in system control. *Journal of the Franklin Institute*, Elmsford, v. 349, n. 8, p. 2687–2703, 2012.
- WICKS, M.; PELETIES, P.; DECARLO, R. Switched controller synthesis for the quadratic stabilisation of a pair of unstable linear systems. *European Journal of Control*, Surrey, v. 4, n. 2, p. 140 – 147, 1998.
- WICKS, M. A.; PELETIES, P.; DECARLO, R. A. Construction of piecewise Lyapunov functions for stabilizing switched systems. In: *Proceedings of 1994 33rd IEEE Conference on Decision and Control*. [S.l.: s.n.], 1994. v. 4, p. 3492–3497 vol.4.
- YOSHIMURA, V. L.; ASSUNÇÃO, E.; TEIXEIRA, M. C. M.; MAINARDI, E. I. Performance enhancement of switched affine systems by switched quadratic Lyapunov functions: Applications in dc-dc converters. In: *2013 Brazilian Power Electronics Conference*. [S.l.: s.n.], 2013. p. 311–318.
- ZHAI, G.; LI, W.; HUANG, C.; XIAO, M. Quadratic stabilization of uncertain switched affine systems: An observer-based approach. In: *2018 57th Annual Conference of the Society of Instrument and Control Engineers of Japan (SICE)*. [S.l.: s.n.], 2018. p. 362–367.
- ZHAI, G.; LIN, H.; ANTSAKLIS, P. Quadratic stabilizability of switched linear systems with polytopic uncertainties. *International Journal of Control*, London, v. 76, p. 747–753, 5 2003.