



Instituto de Física Teórica  
Universidade Estadual Paulista

---

---

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

IFT-D.007/04

**A Segunda Lei Generalizada da Termodinâmica**

André Ricardo Rocha da Silva

Orientador

*Prof. Dr. George Emanuel Avraam Matsas*

Agosto de 2004

## Agradecimentos

Aos meus pais pelo apoio e pela confiança.

À minha esposa pelo apoio e pela compreensão.

Ao Prof. George pela orientação.

Ao Prof. Salinas pelas valorosas sugestões.

Aos colegas de trabalho pela amizade e solidariedade.

À FAPESP pelo apoio financeiro.

## Resumo

A proposta deste trabalho é investigar a validade da segunda lei generalizada da termodinâmica de buracos negros para um buraco negro de Schwarzschild por meio de experimentos mentais. Primeiramente, faremos uma breve revisão sobre termodinâmica de buracos negros. O conceito da segunda lei generalizada é estabelecido e os principais experimentos mentais são revistos. Em seguida, propomos um novo teste à segunda lei generalizada utilizando a mesma estratégia dos experimentos mentais. Veremos que a segunda lei generalizada é consistente com este novo teste.

**Palavras Chaves:** segunda lei generalizada; termodinâmica de buracos negros; teoria quântica de campos em espaços-tempos curvos; radiação Hawking.

**Áreas do conhecimento:** 1.05.01.02-9; 1.05.03.01-3; 1.05.01.04-5

## Abstract

The proposal of this work is to investigate the validity of the generalized second law of black hole thermodynamics for Schwarzschild black hole by means of *gedankenexperiments*. Firstly, we make a brief review about black hole thermodynamics. The notion of generalized second law is established and the essential *gedankenexperiments* are reviewed. Afterwards, we propose a new test for generalized second law using the same strategy of *gedankenexperiments*. We see that the generalized second law is consistent with this new test as well.

# Índice

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Uma Introdução à Termodinâmica dos Buracos Negros</b>	<b>4</b>
2.1	Um panorama histórico sobre buracos negros . . . . .	4
2.2	Noções elementares sobre a estrutura matemática dos buracos negros	8
2.3	A mecânica de buracos negros . . . . .	13
2.3.1	As quatro leis da mecânica dos buracos negros . . . . .	14
2.3.2	Processos reversíveis e irreversíveis . . . . .	18
2.4	Aspectos quânticos dos buracos negros . . . . .	20
2.5	Termodinâmica dos buracos negros . . . . .	25
<b>3</b>	<b>Sobre a Segunda Lei Generalizada da Termodinâmica</b>	<b>29</b>
3.1	O “Paradoxo” de Geroch . . . . .	29
3.2	A segunda lei generalizada da termodinâmica . . . . .	32
3.3	Sobre a existência de um estado de equilíbrio térmico para buracos negros . . . . .	38
<b>4</b>	<b>O experimento mental de Unruh e Wald</b>	<b>47</b>
4.1	Sobre a radiação térmica . . . . .	47
4.2	A relação de Tolman . . . . .	50
4.3	O experimento mental de UW . . . . .	55

<b>5</b>	<b>Novos elementos para uma nova proposta de experimento mental</b>	<b>68</b>
5.1	A força centrífuga relativística . . . . .	70
5.2	O efeito submarino . . . . .	76
5.2.1	A fase de transição do movimento do submarino . . . . .	80
5.2.2	A fase de movimento uniforme do submarino . . . . .	90
<b>6</b>	<b>Um novo experimento mental para testar a segunda lei generalizada</b>	<b>96</b>
6.1	Uma descrição sobre o novo experimento mental . . . . .	96
6.2	A fase de transição do movimento da caixa . . . . .	98
6.3	Sobre a questão dos espelhos em movimento num fluido térmico . . .	100
6.4	A força resultante durante o movimento azimutal . . . . .	105
6.5	A energia disponível ao buraco negro no ponto de soltura . . . . .	108
6.6	Um método direto para o cálculo da variação de entropia do buraco negro . . . . .	112
6.7	Um roteiro para uma análise numérica . . . . .	114
<b>7</b>	<b>Uma discussão final</b>	<b>118</b>
7.1	Sobre o conceito de entropia em Relatividade Geral . . . . .	118
7.2	A atmosfera térmica . . . . .	120
7.3	O “paradoxo” da informação . . . . .	121
7.4	Um comentário final . . . . .	122
<b>A</b>	<b>A introdução das constantes fundamentais</b>	<b>123</b>
	<b>Referências</b>	<b>125</b>

# Capítulo 1

## Introdução

Nos últimos trinta anos, um dos mais extraordinários desenvolvimentos em física teórica foi a descoberta de uma estreita conexão entre certas leis da física dos buracos negros e as leis da termodinâmica usual. Tal descoberta inaugurou uma nova sub-área da física denominada de Termodinâmica dos Buracos Negros. Nós apresentaremos um breve roteiro à sua formulação no Capítulo 2. Este acontecimento abre caminho para a possibilidade de clarificarmos nosso entendimento sobre a natureza fundamental dos buracos negros numa Teoria Quântica da Gravitação, bem como o nosso entendimento de alguns aspectos da própria natureza da termodinâmica ordinária.

No contexto da gravitação semi-clássica, um dos principais pilares de sustentação daquela conexão é a *segunda lei generalizada da termodinâmica*, proposta inicialmente por J. Bekenstein. Esta lei afirma que a entropia associada a um buraco negro mais aquela devido à matéria externa ao buraco nunca diminui sob qualquer processo físico.

A dificuldade de verificação experimental desta lei da natureza é evidente. No entanto, um método que se mostrou de grande valor nas discussões da física teórica

moderna foi a utilização de *experimentos mentais*. A confiabilidade desse tipo de método reside essencialmente na estrutura lógica e coesa existente nas teorias que julgamos confiáveis; ao menos no que diz respeito à “região” de validade destas teorias. Isto é exatamente o que se espera ocorrer em gravitação semi-clássica.

No entanto, o experimento mental seminal que desencadeou o surgimento desta nova sub-área da física foi o processo Geroch, concebido a partir de elementos da física clássica dos buracos negros. Nós o revisitaremos em detalhes no Capítulo 3.

Decorridos aproximadamente dez anos após o aparecimento do processo Geroch, W. Unruh e R. Wald reformularam este experimento mental à luz da gravitação semi-clássica, em cujo contexto aparece a radiação Hawking, cujas propriedades são semelhantes à radiação térmica ordinária. Neste sentido, eles propuseram uma solução muito elegante para validar a segunda lei generalizada. Isto será visto no Capítulo 4.

Embora o experimento mental proposto por Unruh e Wald tenha trazido uma sensação de segurança quanto à validade da segunda lei generalizada, a Relatividade Geral ainda continha algumas surpresas. Foi exatamente isto que M. Abramowicz e J. Lasota mostraram ao estudarem o comportamento da *força centrífuga relativística*. E isso não era tudo. Em 2003, G. Matsas demonstrou a existência do *efeito submarino*. Nós revisaremos estas descobertas no Capítulo 5.

Estes novos elementos expostos acima motivaram-nos a propor um novo experimento mental que os contivesse. A segunda lei generalizada poderia ser assim violada? À procura de responder a esta questão, devotamos nossos esforços na elaboração do Capítulo 6. Felizmente, a resposta obtida por nós àquela questão é



uma sonora negativa.

Finalmente, no Capítulo 7 apresentamos algumas questões que permanecem em aberto e, por isso, ainda constituem grande fonte de motivação para a continuidade da pesquisa nesta área.

Adotaremos em todo o texto unidades geometrizadas, isto é,  $\hbar = c = G = k =$

1. No Apêndice A restabeleceremos o valor destas constantes fundamentais para algumas quantidades de interesse.

## Capítulo 2

# Uma Introdução à Termodinâmica dos Buracos Negros

*“Os buracos negros da natureza são os objetos macroscópicos mais perfeitos existentes no universo; os únicos elementos em sua construção são os nossos conceitos de espaço e tempo. E desde que a Teoria da Relatividade Geral fornece somente uma única família distinta de soluções para descrevê-los, eles também são os objetos mais simples”*

—S. Chandrasekhar

### 2.1 Um panorama histórico sobre buracos negros

Iniciaremos com uma breve descrição histórica sobre a evolução do conceito de buraco negro e a tentativa de observá-lo. Um relato mais completo pode ser visto nas referências [1], [2], [3].

No século XVIII a teoria corpuscular da luz devida à Newton possuía alguns adeptos impulsionada principalmente pelo sucesso da mecânica newtoniana. Neste espírito, o professor de Cambridge John Mitchell escreveu em 1783 um artigo no qual apontou a possibilidade de uma estrela suficientemente massiva e compacta

possuir um campo gravitacional tão forte de onde a luz não conseguiria escapar. Mitchell levantou a hipótese de que poderiam existir muitas estrelas desse tipo, embora não pudéssemos enxergá-las pois a luz vinda delas não nos alcançaria. Tais objetos podem ser identificados com aquilo que hoje chamamos de buracos negros. Uma sugestão semelhante foi feita alguns anos mais tarde, aparentemente de modo independente, pelo marquês P. Laplace.

A primeira solução de buraco negro foi encontrada em 1916 pelo astrofísico alemão K. Schwarzschild poucos meses após a Relatividade Geral ter sido formulada. Esta foi uma solução estática e esfericamente simétrica das equações de Einstein no vácuo. Naquele mesmo ano, H. Reissner generalizou a solução de Schwarzschild para o caso de um buraco negro carregado, também obtida por G. Nordstrom em 1918 de maneira independente. A comunidade científica foi por muito tempo reticente quanto ao fato que buracos negros eram soluções físicas que poderiam ser realmente realizadas na natureza. Em 1939, A. Einstein, autor da Teoria da Relatividade, afirmara nas conclusões de um artigo que *as singularidades de Schwarzschild não existiam na realidade física*. Isto não foi o que R. Oppenheimer e seu estudante, H. Snyder, concluíram no mesmo ano após analisarem o colapso de estrelas massivas.

Em 1938, Oppenheimer e G. Volkoff encontraram que estrelas de nêutrons tinham um limite para as suas massas além do qual elas deveriam colapsar. No ano seguinte, Oppenheimer e Snyder analisaram o fenômeno do colapso em si e, por razões técnicas, eles consideraram algumas simplificações, tais como: simetria esférica, densidade constante, ausência de rotação e ondas de choque com emissão de matéria ou radiação. Sob estas considerações eles concluíram que o colapso

conduziria de fato a um buraco negro, mas algumas características desse processo permaneciam obscuras. Em contraste à descrição feita por observadores em repouso sobre a superfície da estrela que perceberiam um colapso contínuo em direção à singularidade, observadores assintóticos veriam a superfície da estrela como *congelada* no horizonte de eventos (este conceito será apresentado na próxima seção). Esta aparente descrição contraditória foi reconciliada somente após D. Finkelstein encontrar em 1958 um sistema de coordenadas que era capaz de cobrir suavemente as regiões interna e externa do buraco negro [4].

Este passo conceitual aliado com simulações numéricas mais precisas, que foram possíveis graças a uma melhor compreensão da estrutura nuclear, terminaram por corroborar as conclusões de Oppenheimer e Snyder. Mais de 40 anos após a descoberta da solução de Schwarzschild, os buracos negros eram tratados como, no mínimo, uma possibilidade real.

A chamada era dourada dos buracos negros iniciou-se em 1964. Do ponto de vista teórico, R. Penrose introduziu neste ano métodos topológicos com os quais ele foi capaz de mostrar (sob algumas hipóteses naturais no domínio clássico) que buracos negros devem ter uma singularidade em seu interior. Ainda neste ano, A. Doroshkevich, I. Novikov e Ya. Zel'dovich mostraram que o colapso de estrelas com simetria quase-esférica resultava num buraco negro com simetria perfeitamente esférica. Este foi o prelúdio de uma série de teoremas conhecidos como *teoremas de unicidade* dos buracos negros<sup>1</sup> [4], [5]. Em 1967, W. Israel obteve o que pode ser considerado a primeira parte desta série de teoremas; a saber: *todo buraco negro*

---

<sup>1</sup>Também conhecidos como teoremas de “no-hair”.

*sem rotação deveria ser esfericamente simétrico.* Neste mesmo ano, J. Wheeler introduziu a denominação *buraco negro* ao que era chamado de “estrela colapsada” no oeste e de “estrela congelada” no leste.

Em 1963, R. Kerr descobriu a solução para um buraco negro com rotação. (Mas somente identificada como tal em 1965 por R. Boyer e R. Lindquist, B. Carter e Penrose.) Esse resultado foi devidamente generalizado com a incorporação de carga ao buraco negro por E. Newman *et al.* em 1965. Em 1971, S. Hawking provou que um buraco negro estacionário deve possuir uma simetria adicional: ser estático ou axialmente simétrico. Finalmente em 1975, D. Robinson inspirado num trabalho anterior de Carter, provou que a solução de Kerr era a solução de vácuo das equações de Einstein com simetria axial mais geral. Ele também obteve uma forma levemente mais fraca deste resultado no caso onde os campos eletromagnéticos podem estar presentes. Esse conjunto de resultados permite-nos concluir que a solução de Kerr-Newman descreve completamente todos os buracos negros estacionários das equações de Einstein-Maxwell [5].

Os desenvolvimentos no domínio observacional também progrediram neste período. Em 1966, os russos Novikov e Zel’dovich levantaram a possibilidade de que deveriam existir sistemas binários formados por estrelas ordinárias e buracos negros orbitando mutuamente um ao redor do outro. Neste caso seria natural esperar a emissão combinada de raios-X e luz visível de tais sistemas já que a matéria, uma vez atraída pelo buraco negro, converteria seu potencial gravitacional em energia térmica e finalmente em raios-X. Esta idéia é a mais provável explicação para o espectro associado a Cygnus X-1 obtido em 1971 pelo satélite Uhuru. É pertinente mencionar

que enquanto a predição de que buracos negros com tamanho estelar poderiam ser fontes de raios-X foi confirmada somente 5 anos após sua formulação, a explicação de que rádio-galáxias (observadas desde os anos 30) e quasares (observados desde os anos 60) são energizados pela presença de super buracos negros, teve de esperar mais de 40 anos.

Diferentes evidências favorecendo a existência de buracos negros estão surgindo desde então, esperando-se para breve algum sinal direto do horizonte de eventos de um buraco negro. Isto pode vir na forma de um déficit de ondas eletromagnéticas emitidas a partir de SgrA\*, devido a um buraco negro de muitos milhões de massas solares que se supõe existir no centro da Via Láctea, ou na forma de ondas gravitacionais a serem detetadas na primeira década deste século pelos detetores Ligo e Virgo de ondas gravitacionais situados na Terra, ou na segunda década pelo detetor de ondas gravitacionais espacial Lisa.

## **2.2 Noções elementares sobre a estrutura matemática dos buracos negros**

Nesta seção pretendemos apresentar os resultados mais importantes concernentes a buracos negros, e preparar a nomenclatura que será empregada nos capítulos posteriores. Veja mais detalhes em [4], [5], [6], [7].

Um dos mecanismos de criação de buracos negros, porém não único, reside no colapso gravitacional de uma estrela. Depois de exaurir todo o seu combustível nuclear, uma estrela com mais de duas massas solares, aproximadamente, deverá colapsar num buraco negro devido às altíssimas forças gravitacionais envolvidas não

mais rivalizadas por nenhuma interação, a não ser que ela consiga ejetar massa suficiente quando explodir numa supernova. O buraco negro mais simples é descrito pela geometria do espaço-tempo de Schwarzschild que corresponde ao elemento de linha

$$ds^2 = -\chi^2 dt^2 + \frac{1}{\chi^2} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) , \quad (2.1)$$

onde  $\chi = \sqrt{1 - 2M/r}$  é denominado de fator de deslocamento gravitacional para o vermelho<sup>2</sup> e  $M$  é a massa do buraco negro. Trata-se da solução das equações de Einstein no vácuo  $R_{ab} = 0$ , onde  $R_{ab}$  é o tensor de Ricci, sob condições de estaticidade e simetria esférica que, fisicamente, descreve o estado final de uma estrela colapsada anteriormente sem rotação e eletricamente neutra.

As condições acima mencionadas para obter tal solução merecem alguma atenção. Primeiramente, este espaço-tempo é estacionário, já que é invariante por translações temporais, fato que decorre da existência de um campo vetorial de Killing tipo-tempo  $t^a = (\partial_t)^a$ , de componentes  $(1, 0, 0, 0)$  no particular sistema de coordenadas de Schwarzschild. Em adição a esta característica, inclui-se a invariância por reflexão temporal, isto é,  $g_{tk} = 0$  para  $k = (r, \theta, \phi)$ , o que possibilita adjetivar este espaço-tempo como estático. A simetria esférica está associada à invariância rotacional daquele elemento de linha. Em particular isso implica, pelas coordenadas de Schwarzschild, na existência de um campo vetorial de Killing tipo-espaço  $\phi^a = (\partial_\phi)^a$ , cujo as componentes são  $(0, 0, 0, 1)$ .

O simples fato do espaço-tempo de Schwarzschild possuir tais campos vetoriais permite-nos definir a conservação de energia (vinculada a  $t^a$ ) e de momento angular

---

<sup>2</sup>O jargão empregado na literatura é fator de red-shift.

(vinculada a  $\phi^a$ ) [5].

O elemento de linha acima é singular sobre o denominado raio de Schwarzschild,  $r = 2M$ , pois os dois primeiros termos desta métrica assumem os seguintes valores:  $g_{tt} = 0$  e  $g_{rr} = \infty$ . Esta singularidade não reflete uma patologia intrínseca do espaço-tempo em questão, e sim do sistema de coordenadas (de Schwarzschild) empregado. Tal fato pode ser entendido quando vemos que um observador a uma distância finita do buraco negro, digamos em  $r = r_0$ , movendo-se geodesicamente e radialmente em sua direção a partir do repouso, alcançaria o raio de Schwarzschild num tempo próprio (como medido por um relógio co-móvel) finito

$$\tau = \frac{4M}{3} \left[ \left( \frac{r_0}{2M} \right)^{\frac{3}{2}} - \left( \frac{r}{2M} \right)^{\frac{3}{2}} \right] , \quad (2.2)$$

que é a quantidade fisicamente relevante [4].

O raio de Schwarzschild é de suma importância para a caracterização do buraco negro. Ele define uma superfície bidimensional a qual chamamos de horizonte de eventos, que delimita o buraco negro propriamente dito, pois tudo o que passa além dessa fronteira não pode retornar ao mundo exterior<sup>3</sup>.

O horizonte de eventos possui um papel de destaque em termodinâmica dos buracos negros como será visto na seção 2.3.

A área do horizonte de eventos, que pode ser associada à área do buraco negro, é dada por

$$A_S = \int_{r=2M, t=cte} \sqrt{|g_{\theta\theta}g_{\phi\phi}|} d\theta d\phi , \quad (2.3)$$

---

<sup>3</sup>O raio de Schwarzschild de um buraco negro com uma massa igual a da Terra é de apenas 1 cm, enquanto que um buraco negro de massa igual ao do Sol é de 3 km.



ou seja,

$$A_S = 16\pi M^2, \quad (2.4)$$

onde as variáveis  $\theta$  e  $\phi$  são definidas nos respectivos intervalos:  $0 < \theta < \pi$  e  $0 < \phi < 2\pi$ .

Agora, uma importante propriedade a ser mencionada sobre o espaço-tempo de Schwarzschild é o seu caráter assintoticamente plano, como pode ser observado diretamente da equação (2.1), quando esta se aproxima da métrica do espaço-tempo de Minkowski em coordenadas esférico-polares para uma distância radial suficientemente grande. A própria noção de buracos negros depende da existência do conceito de “região assintótica”, sem o qual afirmações do tipo “nada pode escapar” seriam mal definidas.

O colapso gravitacional de uma estrela realística, isto é, com momento angular (e eventualmente carregada), produz um buraco negro algo diferente daquele tratado até este momento. Este buraco negro emerge como a solução mais geral das equações de Einstein sob condições de estacionariedade, simetria axial e ausência de matéria, sendo completamente caracterizado pela sua massa (energia)  $M$ , momento angular  $J$  e carga elétrica  $Q$ . Somente estes parâmetros possuem significado físico, pois podem ser medidos à distância. Dois buracos negros que possuem o mesmo valor para os parâmetros  $M$ ,  $J$  e  $Q$  são indistinguíveis devido à inacessibilidade de seus interiores, segundo observadores externos. O elemento de linha associado, nas coordenadas de Boyer-Lindquist, é

$$ds^2 = - \left( \frac{\Delta - j^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} \right) dt^2 - \left( \frac{2j \sin^2 \theta (r^2 + j^2 - \Delta)}{\Sigma} \right) dt d\phi$$

$$+ \left( \frac{(r^2 + j^2)^2 - \Delta j^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} \right) \sin^2 \theta d\phi^2 + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2 , \quad (2.5)$$

onde  $\Sigma = r^2 + j^2 \cos^2 \theta$ ,  $\Delta = r^2 + j^2 + Q^2 - 2Mr$  e  $j = J/M$ . A equação (2.5) representa a geometria do espaço-tempo de Kerr-Newman (KN). No limite em que  $Q = J = 0$ , recaímos na solução de Schwarzschild.

Este espaço-tempo também possui a importante propriedade de ser assintoticamente plano. Porém, aparentemente ele contém duas singularidades; a saber:  $\Sigma = 0$  e  $\Delta = 0$ . A primeira delas é a singularidade física deste espaço-tempo (conforme pode ser confirmado pela divergência de alguns escalares de curvatura), enquanto que a segunda é fictícia e de mesma natureza daquela representada por  $r = 2M$  no espaço-tempo de Schwarzschild. As raízes da equação  $\Delta = 0$  são:

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - j^2 - Q^2} , \quad (2.6)$$

sendo que a superfície bidimensional caracterizada por  $r = r_+$  e  $t = cte$ , define o horizonte de eventos do buraco negro de KN. (Observa-se que no limite  $j, Q \rightarrow 0$ , temos  $r_+ \rightarrow 2M$ , como esperado.)

A área deste horizonte é calculada da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} A_{KN} &= \int_{r=r_+, t=cte} \sqrt{|g_{\theta\theta}g_{\phi\phi}|} d\theta d\phi \\ &= 4\pi(r_+^2 + j^2) \\ &= 4\pi \left( 2M^2 - Q^2 + 2M\sqrt{M^2 - j^2 - Q^2} \right) . \end{aligned} \quad (2.7)$$

A existência de um horizonte de eventos no espaço-tempo de KN fica condicionada à satisfação da hipótese adicional  $M^2 \geq j^2 + Q^2$ ; caso contrário, teríamos uma singularidade “nua”, isto é, não “vestida” por um horizonte de eventos. O

fato de singularidades nuas levarem à impredictabilidade dos eventos de seu futuro causal, levou Penrose a conjecturar aquilo que ficou conhecido como *censura cósmica*, que em sua versão física afirma que o completo colapso gravitacional de um corpo sempre resulta num buraco negro em vez de uma singularidade nua [5].

Vale a pena notar que o quadrado da norma do campo de Killing  $t^a$ ,  $t^a t_a = g_{tt}$ , torna-se positivo na região denominada ergosfera,  $r_+ < r < r(\theta)$ , onde

$$r(\theta) = M + \sqrt{M^2 - Q^2 - j^2 \cos^2 \theta} \quad (2.8)$$

define a superfície de limite estacionário. A razão deste nome provém da mudança de orientação de  $t^a$ , de tipo-tempo para tipo-espaço, implicando uma não estacionariedade intrínseca de qualquer observador situado nesta região, que é obrigado a rodar na mesma direção do buraco negro, conforme visto por observadores assintóticos<sup>4</sup>.

Até aqui descrevemos de modo simples os aspectos mais gerais sobre buracos negros. Nas próximas seções faremos uso explícito desses aspectos para obtermos o comportamento dinâmico dos buracos negros, e realçarmos uma possível semelhança entre esses resultados e a termodinâmica usual.

### 2.3 A mecânica de buracos negros

Agora apresentaremos os aspectos dinâmicos da teoria dos buracos negros. Primeiramente, enunciaremos as quatro leis da mecânica dos buracos negros [8] traçando em paralelo a analogia com a termodinâmica usual. Em seguida, descreveremos o que são processos reversíveis e irreversíveis com buracos negros [9]. A motivação

---

<sup>4</sup>Este efeito é uma versão extrema do efeito relativístico conhecido como *arrastamento das referenciais inerciais* [4].

primeira para a termodinâmica de buracos negros decorre essencialmente desses resultados.

### 2.3.1 As quatro leis da mecânica dos buracos negros

A segunda lei da mecânica dos buracos negros está associada ao denominado teorema da área da Relatividade Geral, obtido no contexto clássico<sup>5</sup> e primeiramente demonstrado por Hawking [4], [6]. Esta lei afirma que a área de um buraco negro nunca pode diminuir por nenhum processo físico

$$\delta A \geq 0 . \quad (2.9)$$

Particularmente, se dois buracos negros se fundirem, a área final do horizonte de eventos resultante será maior ou igual à soma das duas áreas iniciais. Observe que este resultado estabelece uma estreita analogia entre a área do horizonte de eventos e o conceito de entropia, a menos de fatores dimensionais. Isto foi primeiramente identificado e sugerido por J. Bekenstein [10], [11].

Já a primeira lei da mecânica de buracos negros é simplesmente uma identidade relacionando as mudanças infinitesimais de massa,  $M$ , momento angular,  $J$ , e área,  $A$ , de um buraco negro estacionário quando levemente perturbado. A partir da equação (2.7), onde  $A_{KN} = A_{KN}(M, J, Q)$ , podemos obter a função  $M = M(A_{KN}, J, Q)$  (ver equações (2.16) e (2.17)), cujas variações em primeira ordem dos parâmetros  $A_{KN}$ ,  $J$  e  $Q$  resultam em

$$\delta M = \left( \frac{\partial M}{\partial A} \right)_{J,Q} \delta A + \left( \frac{\partial M}{\partial J} \right)_{A,Q} \delta J + \left( \frac{\partial M}{\partial Q} \right)_{A,J} \delta Q , \quad (2.10)$$

---

<sup>5</sup>O termo clássico, aqui e em qualquer outra parte deste trabalho, designa aquilo que não traz em seu conteúdo elementos próprios da Mecânica Quântica.

onde omitimos a referência (KN) em  $A$ .

Os coeficientes associados às variações de  $J$  e  $Q$  são definidos da seguinte maneira

$$\Omega = \left( \frac{\partial M}{\partial J} \right)_{A,Q} = \frac{4\pi j}{A} , \quad (2.11)$$

e

$$\Phi = \left( \frac{\partial M}{\partial Q} \right)_{A,J} = \frac{4\pi Q r_+}{A} . \quad (2.12)$$

Realmente, o estudo do movimento de partículas testes carregadas nas proximidades de um buraco negro de KN atesta que  $\Phi$  é o potencial elétrico do horizonte do buraco negro, enquanto que  $\Omega$  é a frequência angular uniforme com a qual partículas “caindo” em direção ao buraco negro são arrastadas pelo horizonte, sendo uma boa definição da frequência rotacional do buraco negro. Agora, o coeficiente associado à variação de  $A$  pode ser escrito como

$$\frac{\kappa}{8\pi} = \left( \frac{\partial M}{\partial A} \right)_{J,Q} = \frac{r_+ - M}{2A} . \quad (2.13)$$

A quantidade  $\kappa$  é denominada de gravidade superficial e possui uma interpretação direta. Para um buraco negro de Schwarzschild,  $\kappa$  é o valor limite da força que deve ser exercida no infinito para manter uma partícula de massa unitária sobre o horizonte de eventos. Nominalmente este valor é  $1/4M$ .

As definições acima permite-nos reescrever a equação (2.10) como<sup>6</sup>

$$\delta M = \frac{\kappa}{8\pi} \delta A + \Omega \delta J + \Phi \delta Q . \quad (2.14)$$

O aspecto desta equação é inteiramente similar ao da primeira lei da termodinâmica, a qual afirma que variações infinitesimais na energia,  $E$ , entropia,  $S$ , e outros

---

<sup>6</sup>Veja [8] para uma demonstração mais formal deste resultado que segue.

parâmetros de estado extensivos de um sistema, entre estados de equilíbrio térmico contíguos deste sistema, é dada por

$$\delta E = T\delta S + \sum_{(i)} X_{(i)}\delta x_{(i)} \quad , \quad (2.15)$$

onde  $T$  é a temperatura do sistema e  $\delta x_{(i)}$  representa a variação do  $i$ -ésimo parâmetro de estado extensivo (excluindo  $S$ ), enquanto que  $X_{(i)} \equiv \partial E/\partial x_{(i)}$  é o  $i$ -ésimo parâmetro intensivo (excluindo  $T$ ).

Os termos  $\Omega\delta J$  e  $\Phi\delta Q$ , que aparecem na equação (2.14), caracterizam o trabalho feito sobre o buraco negro por um agente externo cuja ação tem por finalidade aumentar o momento angular e a carga do buraco pelas quantidades  $\delta J$  e  $\delta Q$ , respectivamente. Esses elementos de trabalho já são bem conhecidos de sistemas mecânicos cujo potencial elétrico é  $\Phi$  e a frequência angular é  $\Omega$  [12],[13].

Por fim, a lei zero da mecânica dos buracos negros refere-se a gravidade superficial, que deve permanecer constante sobre todo o horizonte de eventos de um buraco negro estacionário. Este resultado é estritamente análogo à zero-ésima lei da termodinâmica, a qual afirma que a temperatura deve ser uniforme sobre um corpo em equilíbrio térmico.

As leis de mecânica dos buracos negros em Relatividade Geral, como enunciadas acima, são notáveis análogos matemáticos das leis da termodinâmica usual, embora diferenciem-se pela natureza de argumentos normalmente utilizados para validá-las. Contudo, há algumas características gerais em comum entre elas. Por exemplo, a validade das leis da mecânica dos buracos negros não depende da forma detalhada das equações de Einstein, assim como a validade das leis da termodinâmica usual

não depende do entendimento da dinâmica microscópica do particular sistema. Além disso, os teoremas de unicidade dos buracos negros estabelecem que um buraco negro estacionário, isto é, “em equilíbrio”, é caracterizado por um pequeno número de parâmetros  $(M, J, Q)$ , assim como os parâmetros de estado da termodinâmica usual.

Ao compararmos as zero-ésima, primeira e segunda leis da termodinâmica com as correspondentes leis da mecânica dos buracos negros, encontraremos que as quantidades análogas são, respectivamente:  $E \leftrightarrow M$ ,  $T \leftrightarrow \alpha\kappa$ , e  $S \leftrightarrow A/8\pi\alpha$ , onde  $\alpha$  é uma constante indeterminada. Mesmo no contexto da Relatividade Geral, uma indicação de que essa conexão possa ser embuída de um significado físico mais profundo surge do fato de que  $E$  e  $M$  representam a mesma grandeza física: a energia total do respectivo sistema.

Por outro lado, segundo a mesma Relatividade Geral, a temperatura física do buraco negro deveria ser nula. Uma maneira de vermos isto é notando que classicamente um buraco negro não pode estar em equilíbrio com a radiação de corpo negro, para qualquer outra temperatura diferente de zero, pois nenhuma radiação poderia ser emitida a partir do buraco negro. Conseqüentemente, isso também poderia sugerir que a definição da entropia de um buraco negro a partir da área do horizonte de eventos seria algo puramente formal, sendo destituída de conteúdo físico.

Mas este panorama modifica-se radicalmente ao estudarmos a natureza dos buracos negros à luz da Mecânica Quântica. (Ver próxima seção.)

Uma atenção especial é devotada à terceira lei da termodinâmica, também conhecida como teorema de Planck-Nernst, até aqui não mencionada nessa empreitada pela construção de uma termodinâmica dos buracos negros. Esta lei afirma que a

entropia tende a zero,  $S \rightarrow 0$  (ou a uma “constante fundamental”), quando a temperatura vai a zero,  $T \rightarrow 0$ , para qualquer sistema, em princípio [14]. O análogo desta lei falha na mecânica de buracos negros, já que existem buracos negros extremos ( $M^2 = j^2 + Q^2$ ) de área finita que possuem  $\kappa = 0$ . Entretanto, mesmo em termodinâmica usual, a terceira lei não é tida como uma lei fundamental. Apesar de ser verificada empiricamente para uma variedade de sistemas, ainda assim é possível encontrar violações a ela tanto no cenário clássico (gás ideal) quanto no cenário quântico (sistemas cujo estado fundamental é altamente degenerado) [15].

### 2.3.2 Processos reversíveis e irreversíveis

A formulação geral da lei de aumento da entropia em termodinâmica usual afirma que em todos os sistemas fechados a entropia nunca diminui; ela aumenta ou, no extremo, permanece constante. Correspondendo a estas duas possibilidades, é comum dividir todos os processos ocorrentes em corpos macroscópicos em duas classes: irreversíveis ou reversíveis. Pelo primeiro, referimo-nos àqueles processos acompanhados por um aumento na entropia total de um sistema fechado. Processos nos quais a entropia total do sistema fechado permanece constante são denominados reversíveis, ou ainda, isentrópicos.

Um buraco negro exibi uma notável tendência de aumentar sua área quando submetido a qualquer transformação. Isto foi primeiramente reconhecido por R. Floyd e Penrose [16], num exemplo de extração de energia de buracos negros de Kerr, por meio daquilo que veio a ser conhecido como processo Penrose [4]. Independentemente, D. Christodoulou [9] mostrou que nenhum processo, cujo último efeito seja a



captura de uma partícula por um buraco negro de Kerr, pode resultar na diminuição de uma certa quantidade a qual ele nomeou de *massa irreduzível* do buraco negro,  $M_{irr}$ , assim definida:

$$M_{irr} = \sqrt{\frac{A}{16\pi}} \quad , \quad (2.16)$$

que nada mais é do que a massa de um buraco negro de Schwarzschild de área  $A$ . Portanto, diz-se que um buraco negro de Schwarzschild está “morto” no sentido de não podemos extrair dele qualquer porção de sua energia. Isto significa que um buraco negro de Schwarzschild é estável perante pequenas perturbações. Este aspecto é essencial para a identificação do buraco negro como o último “estado fundamental” de um corpo extremamente massivo.

Manipulando as equações (2.7) e (2.16), obtemos

$$M^2 = \left( M_{irr} + \frac{Q^2}{4M_{irr}} \right)^2 + \frac{J^2}{4M_{irr}^2} \quad . \quad (2.17)$$

Desta maneira, podemos considerar a massa total de um buraco negro como composta de uma parte irreduzível (mínima), uma eletromagnética ( $Q^2/4M_{irr}$ ) e outra rotacional ( $J^2/4M_{irr}^2$ ), que se combinam segundo a equação (2.17). São as duas últimas formas de massa que podem ser extraídas de um buraco negro (implicando uma diminuição de sua massa total). Neste sentido, um buraco de KN é dito estar “vivo”.

A proporcionalidade entre a massa irreduzível e a raiz quadrada da área, permite-nos reenunciar a segunda lei da dinâmica de buracos negros da seguinte maneira: *qualquer transformação produzida num buraco negro nunca diminui sua massa irre-*

*duável,*

$$\delta M_{irr} \geq 0 . \quad (2.18)$$

As transformações que aumentam a massa irreduzível do buraco negro são aquelas que modificam os parâmetros  $M, Q$  e  $J$  de modo a proporcionar um aumento em sua área, e por isso são denominadas irreversíveis. Contrariamente, as transformações que mantêm inalterada a massa irreduzível do buraco negro, e por conseguinte a sua área, quando modificados os parâmetros  $M, Q$  e  $J$ , são denominadas reversíveis. Estas constituem um caso limite idealizado em que uma partícula de massa de repouso aproximadamente nula, ou extremamente pequena frente à sua carga ou componente axial do momento angular, é descida suavemente ( $p^r = p^\theta \simeq 0$ ) até muito próximo do horizonte de eventos ( $r \simeq r_+$ ) e, por isso, movendo-se à velocidade da luz.

Evidentemente os processos reversíveis, tanto em termodinâmica usual quanto em mecânica dos buracos negros, representam uma classe muito especial de casos idealizados que podem ocorrer na natureza.

## 2.4 Aspectos quânticos dos buracos negros

Uma imediata consequência dos teoremas de unicidade é a grande quantidade de informação perdida após o total colapso gravitacional. Por exemplo, o formato da estrela e números quânticos tal como o leptônico, o bariônico, etc... Assim, embora um buraco negro seja caracterizado por sua massa, momento angular e carga elétrica, sua origem provém de algum material estelar composto seguramente de um grande número de configurações. Por número de configurações, queremos fazer referência

ao número de microestados de todas as possíveis estruturas no interior do objeto em questão. Evidentemente, se efeitos quânticos fossem desconsiderados, esse número de configurações para um buraco negro seria infinito, já que ele poderia ter sido formado por um número arbitrariamente grande de partículas de energia arbitrariamente baixa. Portanto, parece que o conteúdo de informação, e por conseguinte de entropia, associado ao buraco negro deveria ser incrivelmente alto, ou mesmo ilimitado.

Agora, se considerarmos a natureza quântica da matéria, concluiremos que a entropia associada a um buraco negro deve ser finita, embora ainda sim muito grande [17].

Esta conclusão repousa na relação quântica entre energia e comprimento de onda<sup>7</sup>,  $E = h\nu$ , que restringe o tipo de partícula contido no buraco negro àquela categoria cuja energia é tal que seu comprimento de onda esteja compreendido no interior do buraco negro. Escolhendo o comprimento de onda de uma partícula típica como sendo aproximadamente igual ao raio de Schwarzschild,  $r = 2M$ , podemos estimar que sua energia deve ser da ordem de  $h/M$ . Logo, o número máximo de tais partículas que estará na composição de um buraco negro de massa  $M$ , é algo em torno de  $M^2/h$ . Uma estimativa grosseira para a entropia neste caso, conduz a

$$\tilde{S}_{(bn)} = \zeta \frac{kM^2}{h} , \quad (2.19)$$

onde  $\zeta$  é um parâmetro adimensional a ser determinado por meio de uma teoria quântica efetiva da gravitação, e  $k$  é a constante de Boltzmann. Vale a pena observar a boa propriedade que esta expressão possui no limite clássico; a saber:  $\tilde{S}_{(bn)} \rightarrow \infty$

---

<sup>7</sup>Nesta seção reintroduziremos a constante de Planck  $h$  para evidenciarmos aspectos quânticos dos buracos negros.

quando  $h \rightarrow 0$ .

Um outro aspecto gratificante do resultado obtido em (2.19) é a proporcionalidade entre a entropia associada ao buraco negro e a sua área, exatamente como indicado pela segunda lei da mecânica dos buracos negros. Substituindo o valor da área superficial de um buraco negro de Schwarzschild na equação (2.19), obtemos:

$$\tilde{S}_{(bn)} = \left( \frac{\zeta k}{16\pi h} \right) A . \quad (2.20)$$

Finalmente, a partir da relação termodinâmica  $\partial S/\partial M = 1/T$ , deduzimos que a temperatura de um buraco negro de Schwarzschild seria dada por

$$\tilde{T}_{(bn)} = \left( \frac{h}{2\zeta k} \right) \frac{1}{M} , \quad (2.21)$$

que somente no limite clássico,  $h \rightarrow 0$ , afirma que o buraco negro é completamente negro ( $\tilde{T}_{(bn)} = 0$ ). Utilizando o valor da gravidade superficial de um buraco negro de Schwarzschild,  $\kappa = 1/4M$ , reescrevemos a equação anterior como

$$\tilde{T}_{(bn)} = \left( \frac{2h}{\zeta k} \right) \kappa , \quad (2.22)$$

demonstrando a proporcionalidade entre a temperatura associada ao buraco negro e sua gravidade superficial, conforme já esperávamos segundo nossa correspondência anteriormente levantada.

As equações (2.22) e (2.20) são um vislumbre do que seria a temperatura efetiva de um buraco negro e sua respectiva entropia, segundo alguma Teoria Quântica da Gravitação. Contudo, o verdadeiro significado físico atribuído a esses resultados foi dado por Hawking [18] em 1974, com sua descoberta do efeito térmico de criação de partículas ao redor de um buraco negro.

Tal descoberta se apóia na gravitação semi-clássica, também conhecida como Teoria Quântica de Campos em Espaços-Tempos Curvos, onde os efeitos gravitacionais ainda são descritos por um espaço-tempo clássico, mas os demais campos de matéria e radiação, tais como o escalar e o eletromagnético, são agora tratados como campos quânticos que se propagam neste espaço-tempo de fundo<sup>8</sup>.

Foi mostrado neste contexto que um campo quântico inicialmente em qualquer estado (não singular), livre de interações com outros campos e consigo mesmo, propagando-se no espaço-tempo de um buraco negro de Schwarzschild, emitirá partículas para o infinito com um espectro típico de um corpo aproximadamente negro [37] à temperatura

$$T_{(bh)} = \frac{\kappa}{2\pi} , \quad (2.23)$$

denominada *temperatura Hawking*. Portanto, a temperatura física do buraco negro é realmente diferente de zero. Nas palavras de Hawking “classicamente o buraco é *negro* mas quânticamente ele é *cinza*”.

Esse efeito quântico de criação de partículas (*radiação Hawking*) é aplicável a todos os campos quânticos livres, permitindo ao buraco negro emitir para o infinito todas as espécies de partículas [20].

É importante ressaltarmos que esses resultados repousam somente na análise de campos quânticos na região exterior ao buraco negro, ou seja, a produção de partículas ocorre devido ao distúrbio gravitacional causado pela implosão de uma

---

<sup>8</sup>Presumivelmente tal esquema seria somente uma aproximação para uma teoria mais profunda (ainda a ser encontrada), na qual o espaço-tempo também seria quantizado. Entretanto, espera-se que esse esquema seja uma boa aproximação para muitos propósitos, exceto nas proximidades de singularidades do espaço-tempo.

estrela massiva.

O fato de  $\kappa/2\pi$  realmente representar a temperatura física de um buraco negro, fornece uma evidência decisiva de que as leis da mecânica dos buracos negros não são meramente análogos das leis da termodinâmica usual, mas antes, uma manifestação das leis da termodinâmica ordinária aplicadas a buracos negros. Desta forma é de se esperar que

$$S_{(bn)} = \frac{A}{4} \quad (2.24)$$

deva representar a verdadeira entropia física de um buraco negro. Logo,  $\zeta = 4\pi$  em  $\tilde{S}_{(bn)}$  e  $\tilde{T}_{(bn)}$  (e  $\alpha = 1/2\pi$  na subseção 2.3.1).

Outro aspecto a ser enfatizado no *efeito Hawking* é que a temperatura dada pela equação (2.23), representa a temperatura como medida por um observador próximo do infinito. Para qualquer observador seguindo uma órbita do campo vetorial de Killing tipo-tempo  $t^a$  no espaço-tempo de Schwarzschild, a temperatura localmente medida será

$$T = \frac{T_{(bh)}}{\chi} , \quad (2.25)$$

onde  $\chi = \sqrt{-g_{tt}}$ . Em outras palavras, a temperatura da radiação Hawking localmente medida obedece a relação de Tolman<sup>9</sup> [21].

A equação (2.23) mostra que quando efeitos quânticos são levados em conta, um buraco negro estará envolto por um “atmosfera térmica” gerada pela radiação Hawking. Como veremos no capítulo 4, esta atmosfera térmica produz importantes efeitos físicos sobre corpos quase-estáticos nas proximidades de um buraco negro.

---

<sup>9</sup>A ser demonstrada mais adiante.

## 2.5 Termodinâmica dos buracos negros

As relações termodinâmicas aqui apresentadas estarão restritas apenas àquelas que concernem a um buraco negro de Schwarzschild. A razão desta escolha assenta-se não somente pela simplicidade, mas por se tratar do principal objeto de estudo deste trabalho.

Neste caso particular, a primeira lei, (2.14), assume a seguinte forma

$$\delta M = T_{(bn)} \delta S_{(bn)} \quad , \quad (2.26)$$

onde  $M$  é a massa do buraco negro.

A temperatura do buraco negro é definida como sendo

$$T_{(bn)} = \frac{\kappa}{2\pi} = \frac{1}{8\pi M} \quad , \quad (2.27)$$

que, pela restauração das constantes fundamentais (vide Apêndice A), podemos reescrever como

$$T_{(bn)} \approx 6 \times 10^{-8} \left( \frac{M_\odot}{M} \right) \text{K} \quad , \quad (2.28)$$

onde  $M_\odot = 2 \times 10^{33} \text{g}$  representa uma massa solar. A temperatura do centro do Sol é aproximadamente  $2 \times 10^7 \text{K}$  (enquanto que a temperatura superficial é aproximadamente  $5,7 \times 10^3 \text{K}$ ). Um buraco negro de uma massa solar teria, segundo a equação acima, uma temperatura de aproximadamente  $6 \times 10^{-8} \text{K}$ , algo muito pequena para ser detetável com as tecnologias atuais.

Já a entropia de um buraco negro é dada por

$$S_{(bn)} = \frac{A_S}{4} = 4\pi M^2 \quad , \quad (2.29)$$

onde  $A_S = 16\pi M^2$ . É fácil ver que o buraco negro mais entrópico é o de Schwarzschild.

Novamente, reintroduzindo as constantes fundamentais, esta equação pode ser reescrita como

$$S_{(bn)} \approx 10^{61} \left( \frac{M}{M_{\odot}} \right)^2 \text{ erg K}^{-1} . \quad (2.30)$$

Logo, um buraco negro de uma massa solar teria uma entropia associada de  $10^{61} \text{ erg K}^{-1}$ .

A título de estimativa, podemos dizer que a entropia associada ao Sol é da ordem do número de partículas de que ele é composto. Este número é algo como  $M_{\odot}/m_p$ , onde designamos de  $m_p$  a massa do próton ( $1,67 \times 10^{-24} \text{ g}$ ). Então,  $S_{\odot} \approx 10^{41} \text{ erg K}^{-1}$ .

Uma conclusão que pode ser obtida a partir desses resultados é que a origem da entropia associada aos buracos negros não deve possuir uma natureza térmica. Além disso, não se conhece qualquer processo dissipativo que possa gerar entropia o bastante, durante o colapso, de modo a multiplicar a entropia da matéria por um fator  $10^{20}$  [11], [22]. A origem dessa discrepância poderá ser melhor entendida quando um tratamento quântico adequado dos “graus de liberdade do campo gravitacional” for efetuado [23].

Outra grandeza física associada ao buraco negro de Schwarzschild, que pode ser obtida deste tratamento, é a capacidade térmica

$$C_{(bn)} = T_{(bn)} \left( \frac{\partial S_{(bn)}}{\partial T_{(bn)}} \right)_{j=Q=0} = -8\pi M^2 , \quad (2.31)$$

conforme equações (2.27) e (2.29). O fato de a capacidade térmica do buraco negro de Schwarzschild ser negativa não é de todo surpreendente, já que uma estrela auto-gravitante ordinária também possui uma capacidade térmica negativa, segundo a gravitação newtoniana. Fisicamente, este resultado afirma que a remoção de ener-

---

<sup>10</sup>Este é o mesmo resultado obtido por tratarmos o sol como um corpo negro à temperatura  $2 \times 10^7 \text{ K}$



gia da uma estrela produz uma contração e posterior aquecimento da mesma. Este é exatamente o caso para um buraco negro de Schwarzschild, que devido a emissão de partículas via radiação Hawking perde massa, o que proporciona um aquecimento do mesmo, como pode ser observado pela simples inspeção da equação (1.27) ( $\partial T_{(bn)}/\partial M < 0$ ). Outras relações termodinâmicas podem ser vistas em [24].

A manipulação das equações (2.27) e (2.29) permite-nos obter uma relação termodinâmica entre a quantidades  $M$ ,  $S$  e  $T$  do buraco negro, conhecida como relação de Euler<sup>11</sup>

$$\frac{1}{2}M = T_{(bn)}S_{(bn)} . \quad (2.32)$$

Este resultado difere daquele da termodinâmica usual pelo fato de a massa do buraco negro ser uma função homogênea da entropia de grau  $1/2$ . Em outras palavras, sendo  $S'_{(bn)} \rightarrow \lambda S_{(bn)}$ , então  $M' \rightarrow \lambda^{1/2}M$ , onde  $\lambda$  é um parâmetro de escala.

Curiosamente, para um sistema isolado consistindo de uma caixa de volume  $V$  e paredes perfeitamente refletoras contendo uma energia total  $E$  na forma de um gás de várias partículas (bósons e férmions, massivos ou não), obtemos a seguinte relação

$$\frac{4}{3}E = TS , \quad (2.33)$$

para  $E = aVT^4$ , onde  $a = \frac{\pi^2}{15}(n_b + \frac{7}{8}n_f)$  está relacionado à constante de Stefan-Boltzmann por  $\sigma = ac/4$ , e as variáveis  $n_b$  e  $n_f$  representam, respectivamente, o número de campos massivos e não massivos de bósons e férmions. Portanto, assumindo para este sistema e o buraco negro relações do tipo  $S \propto T^m$  e  $E \propto T^n$ ,

---

<sup>11</sup>Também conhecida como relação de Gibbs-Duhem na forma integral.

teremos

$$\frac{n}{m}E = TS \quad , \quad (2.34)$$

onde  $n$  e  $m$  são números inteiros não nulos. Isto é verificado tanto para um buraco negro quanto para a radiação de corpo negro ordinária.

Por fim, para que o buraco negro seja completamente caracterizado como um sistema termodinâmico, é necessário que, como resultado de uma interação puramente térmica, ele possa trocar energia com um outro sistema de modo que exista a possibilidade de encontrarmos um estado de equilíbrio térmico entre eles.

Esta situação é melhor descrita por considerarmos um buraco negro imerso num banho térmico provido pela radiação de corpo negro numa dada temperatura diferente de zero. A análise completa desta questão aponta para a existência de um estado de equilíbrio estável entre um buraco negro e a radiação, quando satisfeitas certas condições específicas. Todavia, esse resultado será assumido neste momento pois sua obtenção exige o conceito adicional da *segunda lei generalizada da termodinâmica* (SLGT), que apresentaremos no próximo capítulo.

## Capítulo 3

### Sobre a Segunda Lei Generalizada da Termodinâmica

*“A lei que a entropia sempre aumenta - segunda lei da termodinâmica - possui, suponho, a posição suprema entre as leis da natureza. Se alguém apontar que sua teoria favorita do universo está em desacordo com as equações de Maxwell - tanto pior para as equações de Maxwell. Se os seus preceitos são contestados pela observação - bem, estes experimentais cometem erros às vezes. Mas se sua teoria é vista estar contrária à segunda lei da termodinâmica, eu não posso dar esperanças à você; não há outro remédio senão sucumbir na mais profunda humilhação ”*

—A. Eddington

#### 3.1 O “Paradoxo” de Geroch

A origem do princípio heurístico da segunda lei generalizada da termodinâmica seguramente remonta ao instigante “paradoxo” apresentado por R. Geroch, num colóquio proferido em 1971, em Princeton, no qual ele apresentou uma possível maneira de construir um moto-contínuo de segunda espécie por meio dos buracos negros.

Seja uma pequena caixa contendo uma certa quantidade de energia própria  $E_0$ , que simplesmente é sua massa de repouso, e entropia (própria)  $S_0$ . É bom frisarmos desde já que estas quantidades referem-se ao sistema como um todo, isto é, as paredes da caixa mais o conteúdo em seu interior. Esta caixa é perfeitamente isolada, de modo que não haja qualquer tipo de troca de energia com o meio externo, seja por contato térmico, ou seja por algum trabalho realizado sobre suas paredes. Neste caso a entropia será indefinidamente constante.

Nosso objetivo é descer esta caixa quase-estaticamente até o horizonte de eventos de um buraco negro de Schwarzschild. O termo quase-estático tem por significado o fato de as componentes da quadrivelocidade, que não a temporal, serem aproximadamente nulas. Esse procedimento garante que a transição da caixa para diferentes valores do campo gravitacional será suave, não afetando a sua distribuição de matéria; ou seja, trata-se de uma transformação infinitesimalmente isentrópica.

Consideraremos, por simplicidade, que o deslocamento da caixa ocorre radialmente. Para este propósito utilizaremos uma corda de comprimento finito e inextensível para sustentar a caixa. Desde que a caixa seja efetivamente um objeto estático neste espaço-tempo, sua quadrivelocidade é um vetor unitário que aponta na direção do campo de Killing tipo-tempo  $t^a$ . Portanto, cada ponto da caixa terá uma quadrivelocidade

$$u_{(c)}^a = \frac{\chi^a}{\chi} \quad , \quad (3.1)$$

onde  $\chi^a = t^a$  e lembrando que  $\chi = \sqrt{-g_{tt}}$ .

Um observador assintótico, isto é, aquele observador localizado em seu laboratório (idealmente) situado no infinito, cuja quadrivelocidade será simplesmente  $t^a$ ,

atribuirá uma energia à caixa, quando em curso de descida até o buraco negro, que é definida como

$$E_1 = -E_0 t^a u_{(c)a} = \chi E_0 \quad , \quad (3.2)$$

reduzindo-se trivialmente a  $E_0$  no infinito (ou para observadores co-móveis, também dito locais).

No contexto clássico da Relatividade Geral, assim como proposto por Geroch, a radiação Hawking não está presente. Logo, a quantidade de energia que é estocada na forma de trabalho, pelo agente externo localizado no infinito, durante este processo é

$$W = (1 - \chi) E_0 \quad . \quad (3.3)$$

Esta equação reflete, fundamentalmente, a variação da energia potencial da caixa neste procedimento.

A quantidade de energia que será disponível ao buraco negro quando a caixa passar para o seu interior, é aquela resultante da diferença entre o conteúdo energético inicial da caixa e o quanto foi estocado de energia pelo agente externo ao descê-la até o buraco. Isso decorre diretamente da conservação de energia para esse processo. Assim,

$$\epsilon = E_0 - W = \chi E_0 \quad , \quad (3.4)$$

que neste caso é idêntico a  $E_1$ .

É claro que o fator de deslocamento gravitacional para o vermelho  $\chi$  tanto mais diminui quanto mais próximo do horizonte a caixa estiver. Portanto, no limite em que a caixa for descida até o horizonte de eventos e ali for solta, segundo a

expressão (3.4) teremos  $\epsilon = 0$ , e nenhuma energia entra no buraco negro. Logo, sua área permanece inalterada neste procedimento, implicando uma não variação da entropia do buraco negro.

O que temos como produto final desta análise é que uma certa quantidade de entropia do universo, dita  $S_0$  aqui representada pela caixa, diminui e, em contrapartida, não há qualquer compensação dessa perda, que deveria vir do aumento da área do buraco negro.

Outro aspecto desta questão que contribui para um esclarecimento maior desse resultado “estranhador”, é o cálculo do rendimento do processo em um ciclo, isto é, o ato de descer a caixa e liberar o seu conteúdo retornando-a novamente ao laboratório. Assim,

$$\mathcal{R} = \left( \frac{W}{E_0} \right)_{r=2M} = 1 . \quad (3.5)$$

Conseqüentemente, este experimento mental proposto por Geroch, também conhecido como *processo Geroch*, contraria sistematicamente o enunciado de Kelvin-Planck da segunda lei da termodinâmica, que diz ser impossível construir um mecanismo que, operando em ciclos, extraia energia de um corpo numa dada temperatura e a converta completamente em trabalho útil.

### 3.2 A segunda lei generalizada da termodinâmica

O sentimento de perplexidade gerado pelo experimento mental de Geroch foi o combustível de um acalorado debate científico que perdura até os dias de hoje<sup>1</sup>: *o princípio da segunda lei generalizada da termodinâmica* (SLGT). Primeiramente

---

<sup>1</sup>Para mais detalhes veja [23].

proposto por J. Bekenstein em 1973 [10], este princípio afirma que *a entropia associada ao buraco negro mais aquela devido à matéria ordinária externa a ele nunca diminui*. Matematicamente, expressa-se este enunciado como:

$$\delta S_G \geq 0 \quad , \quad (3.6)$$

onde  $S_G$  é definido por

$$S_G = S + \frac{A}{4} \quad , \quad (3.7)$$

sendo que  $S$  é a entropia da matéria ordinária externa ao buraco negro e  $A/4$  é a entropia do buraco negro, conforme a equação (2.29).

A entropia generalizada, equação (3.7), e a segunda lei generalizada, equação (3.6), possuem um significado claro: presumivelmente, para um sistema contendo um buraco negro,  $S_G$  nada mais é do que a “verdadeira entropia total” do sistema completo, enquanto que a equação (3.6) é simplesmente a “segunda lei ordinária” para este sistema. Neste caso,  $A/4$  representa verdadeiramente a entropia de um buraco negro.

A proposta de Bekenstein da SLGT foi feita no contexto da física clássica dos buracos negros, antes da descoberta de Hawking. Embora ele tenha sugerido acertadamente a proporcionalidade entre a entropia do buraco negro e sua área (pelo comprimento de Planck ao quadrado)<sup>2</sup>, o fator correto de  $1/4$  somente foi definido com o advento da descoberta de Hawking.

Agora, de posse da segunda lei generalizada, Bekenstein foi capaz de eliminar o mal-estar causado pelo processo Geroch, utilizando-se de um vínculo extra devido às

---

<sup>2</sup>Ver Apêndice A.

propriedades quânticas da matéria que é descida até o buraco negro sem, no entanto, considerar propriamente as propriedades quânticas do buraco negro.

Reconsideremos nossa pequena caixa, agora inteiramente preenchida com radiação térmica. Observamos que o termo radiação térmica aqui tem por significado qualquer tipo de emissão de partículas (de massa de repouso nula ou não) que produza um espectro caracterizado pela função distribuição,

$$\left(e^{(\hbar\omega/kT)} \pm 1\right)^{-1} . \quad (3.8)$$

A fim de que as devidas condições de contorno sejam satisfeitas, a menor dimensão da caixa deve ser tal que o maior comprimento de onda significativo da radiação é muito menor do que aquela dimensão [25].

Desta forma, não será possível descer a caixa arbitrariamente próxima do horizonte de eventos por causa de sua extensão finita e não nula.

Pictoricamente, a descida da caixa até o horizonte de eventos deve ser feita de tal modo que a sua face mais próxima do horizonte apenas “toque” esta fronteira. Logo, antes de soltarmos a caixa, o centro de massa  $O$  dela estará a uma distância própria do horizonte de eventos, na direção radial, muito pequena, porém diferente de zero como anteriormente havia sido assumido (implícitamente) por Geroch em sua proposta original.

A quantidade de energia que agora entra no buraco negro é significativamente diferente de zero, ou seja,  $E_1$  é calculado num ponto algo superior a  $2M$ ; mais especificamente,  $2M$  mais a pequena distância própria radial entre o horizonte e o centro de massa  $O$  da caixa. Logo, a variação de área do buraco negro decorrente



deste acréscimo de energia à sua massa será

$$\Delta A = A_f - A_i = 16\pi[(M + E_1)^2 - M^2] \quad (3.9)$$

Supondo que a massa da caixa é muitíssimo menor do que a massa do buraco negro, algo bem razoável, valemo-nos da propriedade de que  $E_0/M \ll 1$  e aproximamos a equação acima até primeira ordem em  $E_1$ , o que resulta em

$$\Delta A = 32\pi M E_1 \quad . \quad (3.10)$$

A variação de entropia ordinária no universo devido ao ingresso da caixa no interior do buraco negro será

$$\Delta S = S_f - S_i = -S_0 \quad , \quad (3.11)$$

onde  $S_0$  é a entropia inicial da caixa.

Empregando explicitamente a segunda lei generalizada a este problema, equações (3.6) e (3.7), encontramos

$$S_0 \leq 8\pi M E_1 \quad , \quad (3.12)$$

ou mais convenientemente

$$\frac{S_0}{E_0} = 8\pi M \chi \quad , \quad (3.13)$$

onde  $E_0$  é a massa inicial da caixa.

É bom notarmos que o cálculo acima é realizado com respeito aos observadores assintóticos.

Agora, o fator  $\chi$  pode ser expresso em função da distância própria radial  $l$  entre o centro de massa  $O$  da caixa e o horizonte de eventos, supondo que esta distância

seja muito pequena. Então

$$l = \int_{2M}^{r_0} \sqrt{g_{rr}} dr \geq 4M\chi \ , \quad (3.14)$$

o que permite reescrevermos a equação (3.13) como

$$\frac{S_0}{E_0} \leq 2\pi l \ . \quad (3.15)$$

Portanto, se abaixarmos a caixa até uma distância própria (a partir de seu centro de massa)  $l$  do buraco negro tal que  $l < S_0/2\pi E_0$ , o aumento na área do buraco negro não será o bastante para compensar a diminuição da entropia ordinária, o que conduz à uma violação da segunda lei generalizada.

Classicamente, esta violação não implicaria um eventual moto contínuo de segunda espécie, já que o buraco negro não é capaz de retornar ao seu estado original.

A equação (3.15), e sua intrigante interpretação, levou Bekenstein a formular a seguinte conjectura [26]: *para quaisquer sistemas que são caracterizados por um raio de circunscrição  $R$  (da menor esfera que possa circunscrevê-lo) e cuja auto-gravidade é (não necessariamente) negligenciável, a razão entre a entropia própria e a energia própria deve satisfazer o limite<sup>3</sup>*

$$\frac{S}{E} \leq 2\pi R \ . \quad (3.16)$$

Curiosamente, um buraco negro de Schwarzschild satura esse limite. A partir da equação (2.29), teremos

$$S = 2\pi M R_S \ , \quad (3.17)$$

---

<sup>3</sup>Recuperando as constantes fundamentais, teremos:  $S/E = 2\pi Rk/\hbar c$ . Observa-se a ausência da constante gravitacional  $G$ .

onde  $R_S = 2M$  é o raio de Schwarzschild. Note que um buraco negro está longe de ser um corpo fracamente auto-gravitante.

No entanto, extensões a esta conjectura têm sido propostas [27] quando consideramos sistemas com momento angular intrínseco  $s$  não nulo e carga elétrica líquida  $q$ . Neste caso, obter-se-ia um limite mais estreito que (3.16),

$$S \leq 2\pi \left( \sqrt{E^2 R^2 - s^2} - \frac{q^2}{2} \right) . \quad (3.18)$$

A proposta desta conjectura naturalmente levanta a seguinte questão: Tal limite é desejável? Para respondermos a esta pergunta, devemos perguntar a nossas “teorias padrões” o que elas têm a dizer sobre isso. Classicamente, a entropia é uma medida do espaço de fase disponível ao sistema em questão. Isso faz com que fiquemos sensibilizados com a real ocorrência de um limite para  $S/E$ . Por exemplo, para um sistema que seja limitado no espaço e cuja energia disponível não ultrapasse uma certa quantidade  $E$ , o espaço de fase será limitado implicando também um limite para a entropia. Certamente esse sistema será sensível ao aumento de  $E$ . No entanto, não é claro qual o comportamento de  $S/E$  sem um conhecimento detalhado do particular sistema. Por isso, até então, não há qualquer menção a um limite do tipo dado pela equação (3.16) em trabalhos de mecânica estatística e termodinâmica.

Existe uma série de trabalhos que visam ratificar a conjectura de Bekenstein para sistemas convencionais (tal como um oscilador harmônico) num espaço-tempo de Minkowski [28] sem, evidentemente, o auxílio de buracos negros. Porém, existem contra-exemplos que indicam violações desta conjectura, mesmo num espaço-tempo plano [29]. Além disso, há uma séria dificuldade no enunciado desta conjectura

referente ao sentido da energia  $E$  de um sistema. Em Relatividade Geral, não existe o conceito de densidade de energia gravitacional local [4]. Mesmo assim, corpos com simetria esférica e auto-gravitantes [30], e as conhecidas soluções de buracos negros, se ajustam nesta conjetura fornecendo uma indicação de que alguma outra versão da equação (3.16) possa ser válida em espaços-tempos curvos [26]. Realmente, será de grande entusiasmo para a comunidade científica que a física dos buracos negros possa nos revelar uma nova característica da natureza, tal como a conjetura de Bekenstein propõe.

### **3.3 Sobre a existência de um estado de equilíbrio térmico para buracos negros**

A solução encontrada por Bekenstein para garantir a validade do princípio da segunda lei generalizada, quando aplicada ao experimento mental de Geroch, apoiava-se na conjetura (3.16). Não obstante, o seu tratamento original não faz qualquer menção à radiação Hawking, haja visto que esta descoberta ocorrera a posteriori. Por conseguinte, um estudo do processo Geroch que traga em seu âmago este novo ingrediente é muito bem vindo. Isto ocorrerá em 1982 com W. Unruh e R. Wald.

O fenômeno da emissão de partículas por parte de um buraco negro traz sérias conseqüências, especialmente no que diz respeito a segunda lei da mecânica de buracos negros.

Por causa do requisito da conservação de energia durante este fenômeno, um buraco negro isolado deve perder massa para compensar a energia radiada para o infinito na forma de radiação Hawking. Desde que a natureza desta emissão é

tipicamente de um corpo negro [31], o fluxo de energia para um campo não massivo com dois graus de liberdade será dado, em boa aproximação (pelo menos na ordem de magnitude), pela lei de Stefan-Boltzmann. Identificando este fluxo de energia com a taxa de massa perdida pelo buraco negro durante o processo, teremos:

$$\frac{dM}{dt} = -\sigma AT^4 \quad , \quad (3.19)$$

onde  $\sigma = \pi^2/60$  é a constante de Stefan-Boltzmann.

Logo, como o buraco negro perde massa, o aumento na temperatura ( $\propto 1/M^4$ ) mais do que compensa a diminuição da área ( $\propto M^2$ ), e a perda de energia devido à criação de partículas ocorre numa taxa mais alta.

Integrando a equação (3.19) obtemos o tempo de vida para a “evaporação” completa do buraco negro<sup>4</sup>

$$\tau = 10^{74} \left( \frac{M}{M_\odot} \right)^3 \text{ s} \quad . \quad (3.20)$$

Assim, um buraco negro de uma massa solar teria um tempo de vida muito maior do que a idade do universo ( $\sim 10^{16}$ s).

É evidente que durante o processo de “evaporação” a área do buraco negro diminui, violando sistematicamente a hipótese do teorema da área.

Ainda que a área diminua, há pelo menos muita entropia ordinária gerada fora do buraco negro pelo processo Hawking. Logo, embora a segunda lei ordinária falhe na presença de buracos negros (processo Geroch) e a segunda lei da mecânica de buracos negros falhe quando efeitos quânticos são considerados, existe uma esperança de que a segunda lei generalizada permaneça válida. Se assim for, será mais uma garantia

---

<sup>4</sup>Ver Apêndice A para os detalhes do cálculo.

para que a equação (2.29) represente verdadeiramente a entropia de um buraco negro (de Schwarzschild). Desta forma, as leis da mecânica dos buracos negros serão uma mera representação das leis da termodinâmica usual quando aplicadas a buracos negros.

Portanto, a questão central em termodinâmica dos buracos negros é a verificação do princípio da segunda lei generalizada para todos os processos realizáveis.

Nesse espírito, o comportamento de um buraco negro quando em interação com a radiação térmica é de grande relevância. Para tanto, consideraremos um sistema fechado consistindo de uma cavidade de volume  $V_C$  contendo um buraco negro de Schwarzschild envolto por radiação térmica. Supõe-se que este arranjo esteja em equilíbrio térmico. As paredes da cavidade são escolhidas de modo a serem rígidas e adiabáticas, isto é, elas não permitem a passagem de qualquer forma de energia, inclusive ondas gravitacionais. Matematicamente essas condições de contorno são representadas por tornar as paredes da cavidade perfeitamente refletoras [32].

Efetivamente, tais condições não podem ser relaxadas, pois uma consequência direta disso seria a não existência de equilíbrio estável para o sistema. Esse fato pode ser esclarecido da seguinte maneira. Seja um buraco negro que, em virtude de pequenas flutuações térmicas ao seu redor, absorve um pouco mais de energia do que emite. Por causa do valor negativo da capacidade térmica do buraco negro, sua temperatura diminuirá nesse processo. Conseqüentemente, sua taxa de emissão será levemente menor do que a sua taxa de absorção. Assim, se a radiação térmica é mantida a uma temperatura constante por algum reservatório de energia, o buraco negro crescerá indefinidamente. Por outro lado, caso o buraco negro emita um pouco

mais do que absorve, sua taxa de emissão continuará a crescer até que ele finalmente desapareça.

Deste modo, um buraco negro não pode estar em equilíbrio térmico com um reservatório de energia arbitrariamente grande. Isso corresponde, na linguagem da mecânica estatística, à necessidade de empregarmos um ensemble microcanônico quando as interações gravitacionais possuem um papel de destaque [33].

O fato do sistema acima descrito ser fechado, impõe a ele o vínculo de que sua energia total, composta das contribuições da energia do buraco negro e da radiação térmica, seja constante

$$E = M + E_{(r)} \quad , \quad (3.21)$$

onde  $E_{(r)} = aV_C T_{(r)}^4$  é assumido ser a energia da radiação e lembramos que  $a = \frac{\pi^2}{15} \left( n_b + \frac{7}{8} n_f \right)$ . Também se supõe que o volume da cavidade  $V_C$  seja muito maior do que o volume do buraco negro, o que nos permite identificar o volume da radiação como sendo o próprio volume da cavidade.

A entropia generalizada deste sistema é composta pela entropia do buraco negro mais aquela devido à radiação térmica, cada uma como função apenas de sua respectiva energia

$$S_G = S_{(bn)}(M) + S_{(r)}(E_{(r)}) \quad , \quad (3.22)$$

onde a entropia da radiação é dada pela fórmula usual

$$S_{(r)} = \frac{4aV_C T_{(r)}^3}{3} \quad . \quad (3.23)$$

O vínculo expresso pela equação (3.21) faz com que a equação (3.22) tenha na verdade somente uma variável independente, dita  $E_{(r)}$ , por exemplo. Logo  $M = E -$

$E_{(r)}$ . Portanto, a necessária condição para a maximização da entropia generalizada pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \frac{dS_G}{dE_{(r)}} &= \frac{dS_{(r)}}{dE_{(r)}} + \frac{dS_{(bn)}}{d(E - E_{(r)})} \frac{d(E - E_{(r)})}{dE_{(r)}} \\ &= \frac{dS_{(r)}}{dE_{(r)}} - \frac{dS_{(bn)}}{dM} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3.24)$$

Daí,

$$\frac{dS_{(r)}}{dE_{(r)}} = \frac{dS_{(bn)}}{dM} . \quad (3.25)$$

Além disso, também devemos ter

$$\frac{d^2 S_{(r)}}{dE_{(r)}^2} + \frac{d^2 S_{(bn)}}{dM^2} < 0 . \quad (3.26)$$

A primeira condição dada pela equação (3.25) simplesmente afirma que no estado de equilíbrio térmico a temperatura do buraco negro será igual a temperatura da radiação térmica,  $T_{(bn)} = T_{(r)}$ . Este fato por si só garante que a radiação e o buraco também se encontram em equilíbrio mecânico, isto é, as respectivas pressões associadas a eles são iguais. O conjunto dessas condições garante o equilíbrio termodinâmico do sistema como um todo.

A segunda equação, propriamente trabalhada, resulta em

$$\frac{d^2 S_{(r)}}{dE_{(r)}^2} = -\frac{1}{4T_{(r)}E_{(r)}} \quad (3.27)$$

$$\frac{d^2 S_{(bn)}}{dM^2} = \frac{1}{T_{(bn)}M} , \quad (3.28)$$

logo,

$$E_{(r)} < \frac{1}{4}M . \quad (3.29)$$



Observa-se que este resultado decorre diretamente do fato da densidade de energia da radiação ser proporcional à quarta potência de sua temperatura. A equação (3.21) sugere que reescrevamos a equação acima da seguinte forma

$$E_{(r)} < \frac{1}{5}E \quad . \quad (3.30)$$

A interpretação desse resultado é simples. Com o auxílio das equações (3.21),(3.25) e (3.27), obtêm-se um limite para o volume da cavidade acima do qual o sistema composto pelo buraco negro e a radiação térmica não pode coexistir num estado de equilíbrio termodinâmico estável. Tal limite é expresso por

$$V_C < \frac{2^{20}\pi^4 E^5}{5^5 a} \quad , \quad (3.31)$$

ou alternativamente

$$V_C < \frac{2^{12}\pi^4 M^5}{a} \quad . \quad (3.32)$$

Portanto, se a condição acima for satisfeita, a estabilidade termodinâmica do sistema garante que ao menor aumento da radiação absorvida pelo buraco negro, a temperatura da radiação diminuirá mais rapidamente que a do buraco, implicando uma maior redução da taxa de absorção frente a taxa de emissão do mesmo.

Isso significa que para um dado volume  $V_C$ , por exemplo, o buraco negro encerrado por ele não deve ser arbitrariamente pequeno, ao contrário, deve ser suficientemente grande para que a condição (3.30) seja obedecida sem, no entanto, violar a nossa premissa de que  $V_C \gg V_S$ , onde  $V_S = 2^5\pi M^3/3$  é o volume do buraco negro de Schwarzschild, pois aí a cavidade colapsaria. Observa-se que, ao negligenciarmos este volume, estamos desprezando um termo da ordem de  $M^3$  no lado direito da equação (3.30), o que estenderia um pouco mais aquele limite.

Por outro lado, no limite oposto,

$$V_C > \frac{2^{20} \pi^4 E^5}{5^5 a} , \quad (3.33)$$

o sistema se encontrará num regime de equilíbrio instável, já descrito anteriormente.

Apenas por completeza do estudo feito até aqui sobre as condições necessárias para que exista um estado de equilíbrio termodinâmico estável entre a radiação térmica e um buraco negro, poderíamos nos questionar sobre a possibilidade de haver mais de um buraco negro neste arranjo. No entanto, desde que a entropia de um buraco negro é proporcional ao quadrado de sua massa, torna-se entropicamente mais favorável a fusão entre dois ou mais buracos negros, em vez daquele estado em que eles permanecem separados. Neste último caso, o estado de equilíbrio será certamente instável. Portanto, nosso resultado é, de direito, o mais geral possível.

Os louros da existência de um estado de equilíbrio termodinâmico estável entre a radiação térmica e buracos negros (de Schwarzschild) tornam patente o caráter termodinâmico desses últimos. Além disso, asseguram à segunda lei generalizada uma forte evidência de sua necessidade para o bom funcionamento (entendimento) da natureza.

Tudo isso nos remete àquela questão sobre a validade da segunda lei generalizada quando o processo de “evaporação” entra em jogo e o teorema da área é violado. Para uma pequena quantidade de energia trocada entre o buraco negro e o banho térmico, a constância da energia total desse sistema implica que

$$\delta M = -\delta E_{(r)} = -4aV_C T_{(r)}^3 \delta T_{(r)} . \quad (3.34)$$

A variação da entropia generalizada neste processo é dada por

$$\delta S_G = 8\pi M \delta M + 4aV_C T_{(r)}^2 \delta T_{(r)} , \quad (3.35)$$

que pode ser reescrita simplesmente como

$$\delta S_G = \left( \frac{1}{T_{(bn)}} - \frac{1}{T_{(r)}} \right) \delta M . \quad (3.36)$$

Para uma transformação reversível, isto é,  $\delta S_G = 0$ , a troca de energia entre os dois sistemas ocorre numa mesma temperatura,  $T_{(r)} = T_{(bn)}$ . Para transformações irreversíveis, isto é,  $\delta S_G > 0$ , existem duas possibilidades. A primeira delas é aquela em que  $T_{(bn)} > T_{(r)}$ , ou seja, a temperatura do buraco negro é maior que a temperatura da radiação; logo,  $\delta M < 0$ , e a taxa de emissão do buraco negro será maior que sua taxa de absorção, implicando um aumento na entropia do ambiente externo maior que a diminuição de sua entropia. A segunda possibilidade é aquela em que  $T_{(bn)} < T_{(r)}$ , ou seja, a temperatura do buraco negro é menor que a temperatura da radiação; logo,  $\delta M > 0$ , e o acréscimo de radiação ao buraco será maior que sua perda por emissão, o que corresponde a um aumento de sua entropia maior que a diminuição da entropia do ambiente térmico ao seu redor. Portanto, a segunda lei generalizada garante a consistência fenomenológica da natureza.

Por fim, a consistência dos resultados apresentados até aqui habilita-nos a reconsiderar o processo Geroch num contexto de termodinâmica dos buracos negros propriamente dita, onde os efeitos da radiação térmica são necessariamente relevantes.

A importância desta tarefa reside especialmente na possibilidade de assegurarmos a validade da segunda lei generalizada a partir de primeiros princípios, ou seja, a

existência da radiação Hawking e a validade da segunda lei ordinária, uma vez que o assunto será completamente abordado sem a necessidade de outras ferramentas tal como a conjectura de Bekenstein. Este será nosso objetivo no próximo capítulo.

## Capítulo 4

### O experimento mental de Unruh e Wald

As próximas páginas serão dedicadas ao célebre trabalho de W. Unruh e R. Wald (UW) [34], cujos resultados emprestam forte apoio para validade da segunda lei generalizada. Em síntese, o processo em que uma caixa contendo uma certa quantidade de energia é descida até o buraco negro e solta não tem êxito em seu objetivo de violar a segunda lei generalizada, justamente em virtude da radiação Hawking que efetivamente interage com a caixa de modo significativo. Os argumentos empregados aqui mostram que a existência da radiação Hawking é vital para a auto-consistência da termodinâmica dos buracos negros.

#### 4.1 Sobre a radiação térmica

Como já mencionamos no capítulo anterior, a radiação Hawking possui um espectro tipicamente térmico<sup>1</sup>. Neste momento precisaremos as propriedades que a radiação Hawking deve possuir, segundo sua identificação como uma radiação puramente térmica.

O ambiente térmico envolto ao buraco negro, provido pela radiação térmica, admite uma descrição termodinâmica local com respeito aos observadores que seguem

---

<sup>1</sup>Embora isto tenha sido provado rigorosamente somente para campos livres [20].

as órbitas do campo vetorial de Killing tipo-tempo  $t^a$ . Desta forma, observadores estáticos assinalariam as seguintes propriedades termodinâmicas associadas ao ambiente térmico:

(i)  $s_{(r)}$  é uma função apenas da densidade de energia  $e_{(r)}$  da radiação térmica;

(ii) a radiação térmica admite a existência de uma equação de estado do tipo  $p_{(r)} = p_{(r)}(e_{(r)})$ ;

(iii) a energia  $E_{(r)}$  associada à radiação térmica é uma grandeza extensiva definida como

$$E_{(r)} = V e_{(r)}(T_{(r)}, N(T_{(r)})) \quad , \quad (4.1)$$

onde  $N$  representa o número de diferentes espécies de partículas existentes na radiação térmica e  $V$  é, ao menos, suficientemente grande para assegurar a aplicabilidade do conceito de extensividade.

As afirmações acima conferem à entropia  $S_{(r)}$  da radiação térmica a mesma característica extensiva que sua energia possui,

$$S_{(r)} = V s_{(r)}(e_{(r)}) \quad . \quad (4.2)$$

A temperatura da radiação é definida pela fórmula usual

$$\frac{ds_{(r)}}{de_{(r)}} = \frac{1}{T_{(r)}} \quad . \quad (4.3)$$

A aplicabilidade da primeira lei ordinária da termodinâmica,

$$d(Ve_{(r)}) = T_{(r)}d(Vs_{(r)}) - p_{(r)}dV \quad , \quad (4.4)$$

permite-nos obter relações termodinâmicas que se mostrarão muito úteis em nossos propósitos. Substituindo a definição da temperatura da radiação térmica nesta equação, teremos

$$e_{(r)} + p_{(r)} - T_{(r)} s_{(r)} = 0 \quad . \quad (4.5)$$

Esta equação é conhecida como relação de Gibbs-Duhem na forma integral (ou relação de Euler). A simples diferenciação desta expressão juntamente com a equação (4.3) resulta em

$$dp_{(r)} = s_{(r)} dT_{(r)} \quad , \quad (4.6)$$

que é denominada de relação de Gibbs-Duhem na forma diferencial [25]. Portanto, para a radiação térmica, os gradientes de pressão e temperatura estão relacionados por um fator de proporcionalidade dado pela densidade de entropia.

Agora discutiremos um pouco sobre o sistema composto pelo buraco negro e o ambiente térmico ao seu redor.

Assumiremos aqui todas as boas condições demonstradas na seção 3.3; ou seja, o ambiente térmico estará em equilíbrio termodinâmico estável com o buraco negro a uma temperatura  $T_{(bn)} = 1/8\pi M$ . Mais precisamente, não é possível aumentar a entropia generalizada total do sistema por qualquer rearranjo que mantenha fixo a massa total do sistema. Naquela ocasião, caracterizamos o sistema buraco negro mais o seu ambiente externo como sendo fechado.

Contudo, mais adiante, agregaremos a este sistema uma pequena caixa de paredes adiabáticas de modo a não alterar o seu estado inicial. Neste momento, definiremos um novo sistema composto: a caixa, o buraco negro e o ambiente térmico

provido pela radiação Hawking; que ao invés de fechado será apenas termicamente isolado, isto é, qualquer mudança ocorrida na energia total desse sistema será inteiramente devido a algum trabalho realizado sobre ele, ou mais especificamente, em algum de seus constituintes.

## 4.2 A relação de Tolman

A condição necessária para que um fluido perfeito esteja em equilíbrio hidrostático em um espaço-tempo estacionário, tal como o de Schwarzschild, é fornecida pela relação de Tolman. Esta relação possui uma estreita conexão com a descoberta de Hawking sobre a temperatura característica dos buracos negros. Exploraremos este fato tratando a radiação térmica como um fluido perfeito.

Um fluido perfeito é definido como uma distribuição contínua de matéria com tensor energia-tensão  $T_{ab}$  da forma

$$T_{ab} = (e + p) u_a u_b + p g_{ab} \quad , \quad (4.7)$$

onde  $u^a$  é a quadrivelocidade de cada elemento de volume do fluido. As funções  $p$  e  $e$  são, respectivamente, a pressão e a densidade de energia do fluido como medidos localmente (isto é, são as quantidades próprias do fluido).

A equação de movimento de um fluido perfeito sem forças externas é

$$\nabla^a T_{ab} = 0 \quad . \quad (4.8)$$

A componente desta equação paralela à quadrivelocidade do fluido é

$$u^b \nabla^a T_{ab} = 0 \quad . \quad (4.9)$$



Logo,

$$u^a \nabla_a e + (e + p) \nabla_a u^a = 0 . \quad (4.10)$$

A equação de equilíbrio hidrostático é obtida a partir da componente ortogonal à quadrivelocidade do elemento de volume do fluido que satisfaz a equação (4.8).

Fazendo uso do operador de projeção associado a  $u_a$ ,

$$h_a{}^b = g_a{}^b + u_a u^b , \quad (4.11)$$

que simplesmente projeta quadrivetores sobre a superfície ortogonal às curvas geradas pelo quadrivector  $u^a$  de cada elemento de fluido, obtemos

$$h_c{}^b \nabla^a T_{ab} = 0 . \quad (4.12)$$

Daí,

$$\nabla_a p + (e + p) a_a = 0 , \quad (4.13)$$

onde  $a_a = u^b \nabla_b u_a$ .

Agora formalizaremos a identificação entre a radiação térmica e um fluido perfeito. A radiação térmica será definida como uma distribuição contínua de radiação e matéria cujo tensor energia-tensão,  $T_{(r)ab}$ , é exatamente aquele dado pela equação (4.7). Assim, todas as relações acima obtidas para um fluido perfeito também serão válidas para a radiação térmica.

Uma vez que a radiação térmica está em equilíbrio térmico com o buraco negro ela também estará em equilíbrio consigo mesma, ou seja, a quadrivelocidade atribuída por um observador assintótico a cada elemento de volume do fluido térmico é aquela expressa pela equação (3.1),  $u_{(r)}^a = u_{(c)}^a$ . Isso possibilita-nos fornecer uma interpretação para a equação (4.9). Uma direta inspeção ao escalar de expansão volumétrica

associado [35] à radiação térmica,  $\Theta_{(r)} = \nabla_a u_{(r)}^a$ , resulta em

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{\chi} \right) = 0 , \quad (4.14)$$

o que, segundo a equação (4.9), reflete na constância da densidade de energia própria do fluido térmico

$$u_{(r)}^a \nabla_a e_{(r)} = \frac{de_{(r)}}{d\tau} = 0 , \quad (4.15)$$

onde  $\tau$  denota o tempo próprio do elemento de fluido em questão. Observa-se que este resultado já era esperado pois  $T_{(r)ab}$  não possui termos de fonte de calor.

A existência de uma equação de estado do tipo  $p_{(r)} = p_{(r)}(e_{(r)})$  induz, apoiada no resultado acima, a identidade

$$\frac{dp_{(r)}}{d\tau} = 0 , \quad (4.16)$$

que afirma a constância da pressão própria do fluido térmico, já que não há termos provenientes de cisalhamento em  $T_{(r)ab}$ .

Desta forma, resta-nos determinar qual é a quadriaceleração de cada elemento estático de volume do fluido térmico, isto é,  $a_{(r)}^a$ . Pela equação (3.1),

$$\begin{aligned} a_{(r)}^a &= \frac{\chi^b}{\chi} \nabla_b \left( \frac{\chi^a}{\chi} \right) \\ &= \frac{1}{\chi^2} \chi^b \nabla_b \chi^a - \frac{1}{\chi^3} \chi^a \chi^b \nabla_b \chi . \end{aligned} \quad (4.17)$$

Mas

$$\chi^b \nabla_b \chi = \partial_t \chi , \quad (4.18)$$

que evidentemente é zero pois  $\chi = \chi(r)$  devido à estaticidade do espaço-tempo de Schwarzschild. Então,

$$a_{(r)}^a = \frac{1}{\chi^2} \chi^b \nabla_b \chi^a . \quad (4.19)$$

Pela equação de Killing,  $\nabla^{(a}\chi^{b)} = 0$  (onde os parênteses nos índices indica uma simetrização), podemos reescrever  $a_{(r)}^a$  como

$$a_{(r)}^a = -\frac{1}{\chi^2}\chi_b\nabla^a\chi^b . \quad (4.20)$$

Fazendo uso da identidade

$$\nabla^a(\chi^b\chi_b) = 2\chi_b\nabla^a\chi^b , \quad (4.21)$$

a equação (4.18) será

$$a_{(r)}^a = \frac{\nabla^a\chi}{\chi} , \quad (4.22)$$

onde empregamos  $\chi^a\chi_a = -\chi^2$ .

Certamente a quadriaceleração, tal como expressa acima, possui apenas a sua componente radial não nula pois o fator de deslocamento gravitacional para o vermelho é função apenas da coordenada radial. De posse do quadrivetor aceleração, podemos obter o escalar da aceleração, isto é,

$$a_{(r)} = \sqrt{a_{(r)}^b a_{(r)b}} = \frac{d\chi}{dr} , \quad (4.23)$$

ou mais explicitamente

$$a_{(r)} = \frac{M}{r^2\chi} . \quad (4.24)$$

Este resultado é válido para qualquer objeto estático neste espaço-tempo. Observa-se que  $a_{(r)}$  tanto mais aumenta quando a coordenada radial aproxima-se do raio de Schwarzschild.

Como o gradiente da pressão está associado com o quadrivetor aceleração por meio da equação (4.11), a única componente não nula de  $\nabla^a p_{(r)}$  será a radial. Assim,

$$|\nabla_a p_{(r)}| = \chi \frac{dp_{(r)}}{dr} . \quad (4.25)$$

Contudo, os escalares acima obtidos são dependentes do particular sistema de coordenadas adotado (que neste caso é o de Schwarzschild). Torna-se mais vantajoso reescrevermos estas quantidades em termos de alguma grandeza invariante. Nada mais justo do que adotarmos como coordenada a distância própria na direção radial. Com o auxílio do elemento de linha de Schwarzschild para as coordenadas  $t, \theta$  e  $\phi$  fixas, a distância própria ao longo da direção radial será

$$dl = \sqrt{ds^2} = \frac{1}{dr} \chi . \quad (4.26)$$

Logo, pelas equações (4.20), (4.23) e (4.24), a equação de equilíbrio hidrostático para cada elemento de volume do fluido estático pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \frac{dp_{(r)}}{dl} &= - \frac{(e_{(r)} + p_{(r)})}{\chi} \frac{d\chi}{dl} \\ &= - (e_{(r)} + p_{(r)}) a_{(r)}(l) . \end{aligned} \quad (4.27)$$

A identidade acima possuirá um papel de destaque em nossa argüição pela validade da segunda lei generalizada.

Pela relação de Gibbs-Duhem na forma diferencial, temos

$$\frac{dp_{(r)}}{dl} = s_{(r)} \frac{dT_{(r)}}{dl} . \quad (4.28)$$

A identificação desta equação com aquela dada por (4.25), mais a relação de Gibbs-Duhem na forma integral, fornece-nos

$$\frac{d(\chi T_{(r)})}{dl} = 0 . \quad (4.29)$$

Realizando a integração desta equação ao longo de  $dl$  entre dois pontos de referência, ditos  $l_1$  e  $l_0$ , teremos

$$\int_{l_0}^{l_1} d(\chi T_{(r)}) = 0$$

$$T_{1(r)} = \frac{1}{\chi_1} \chi_0 T_{0(r)} . \quad (4.30)$$

Particularmente, localizando o ponto  $l_0$  no infinito teremos  $\chi_0 = 1$  e, portanto,

$$T_{(r)} = \frac{T_{\infty(r)}}{\chi} , \quad (4.31)$$

onde omitimos o índice um. Esta é a temperatura que um observador assintótico atribui ao fluido estático num dado ponto de coordenada própria  $l$  (ou coordenada radial  $r$ , já que  $\chi$  é um escalar). A equação acima é denominada de relação de Tolman.

Neste esquema, a temperatura da radiação térmica no infinito será  $T_{\infty(r)}$ . Mas vale a pena notar que um observador assintótico assinala uma temperatura  $T_{(bn)}$  ao buraco negro que, pela condição de equilíbrio térmico entre o buraco e a radiação, implica a mesma temperatura  $T_{\infty(r)}$  da radiação térmica. Logo,

$$T = \frac{T_{(bn)}}{\chi} . \quad (4.32)$$

A similaridade com o resultado obtido por Hawking é evidente. Portanto, para sabermos qual é a temperatura de um buraco negro basta-nos medir a temperatura da radiação térmica emitida por ele.

### 4.3 O experimento mental de UW

Nesta seção abordaremos o processo Geroch sob a perspectiva do efeito Hawking. A presença da radiação Hawking introduzirá um novo elemento para o cálculo da energia disponível ao buraco negro: a *força de empuxo*. A existência deste fator extra será a condição necessária e suficiente para nos prevenirmos de uma violação da segunda lei generalizada, quando o processo Geroch é realizado.

Seja uma pequena caixa de volume  $V$  perfeitamente isolada, isto é, assumiremos que suas paredes são perfeitamente refletoras com respeito aos campos em seu interior e exterior. Além disso, também assumiremos que ela é suficientemente fina, ou seja, o seu comprimento próprio na direção radial (altura) é muito menor que sua distância própria ao horizonte de eventos. Isso implica que as mudanças em  $\chi$  e  $d\chi/dl$  através da caixa são muito menores que seus valores médios. Esta condição visa simplificar o tratamento matemático, caso contrário teríamos que considerar em detalhe a distribuição de entropia no interior da caixa<sup>2</sup>, o que não modificaria os resultados aqui apresentados.

Em nosso laboratório no infinito associaremos à caixa uma certa quantidade de entropia  $S_0$  e energia  $E_0$ , que inicialmente está em equilíbrio térmico. Todavia, não adotaremos qualquer tipo de vínculo entre  $S_0$  e  $E_0$  tal como aquele conjecturado por Bekenstein.

No entanto, sabemos que para qualquer sistema em equilíbrio térmico, em que o volume e a energia são fixados, a respectiva entropia será máxima. Postularemos que dentre todos os sistemas possíveis em iguais condições de energia e volume fixados, a radiação térmica é aquela que possui a maior entropia. Assim, para uma quantidade de radiação térmica com energia  $E_0$  e contida num volume  $V$ , a seguinte desigualdade é verificada

$$S_0 \leq V s_{(r)}(\rho) \quad , \quad (4.33)$$

onde  $s_{(r)}(\rho)$  é a densidade de entropia da radiação térmica e  $\rho = E_0/V$ .

---

<sup>2</sup>Uma análise para caixas não tão finas é feita em [36]. Verifica-se que as conclusões lá obtidas não diferem daquelas que demonstraremos.

Em outras palavras, a entropia  $S_0$  da caixa será máxima em relação aos demais sistemas possíveis somente quando ela for composta inteiramente de radiação térmica (inclusive as paredes).

Agora consideraremos o processo quase-estático (adiabático) no qual a caixa é lentamente descida até um buraco negro de Schwarzschild por meio de uma corda inextensível, e posteriormente liberada para cair nele. Em tal processo, um agente externo estará realizando trabalho sobre o sistema total definido pela caixa, o buraco negro e o ambiente térmico.

Neste momento são necessárias algumas observações. A primeira delas refere-se ao conteúdo da caixa que em geral se redistribuirá em seu interior devido à mudança do campo gravitacional ao longo da descida. Entretanto, o fato de o processo ser quase-estático garante que esse conteúdo permaneça em equilíbrio termodinâmico durante toda a descida. Assim, observadores no interior da caixa irão testemunhar todo o processo como sendo isentrópico, implicando a constância da entropia da caixa ao longo de toda a descida. A outra observação deve-se à possibilidade de criação de partículas por parte das faces da caixa, desde que elas são simplesmente espelhos em movimento [37]. No entanto, mais uma vez a quase-estaticidade do processo elimina qualquer contribuição decorrente desse fenômeno, além de também eliminar possíveis contribuições devido à força de reação à radiação, já que a aceleração será basicamente uniforme em todo o processo.

Contudo, vale a pena notar que todos os efeitos acima mencionados possuem uma certa quantidade de entropia associada, que ao negligenciarmos estaremos permitindo que a entropia generalizada seja minimizada e, portanto, maximalmente

testada.

A existência do ambiente térmico ao redor do buraco negro fará com que a caixa experimente uma força de empuxo efetiva, contrária à força gravitacional, resultante da alta temperatura e, portanto, alta pressão sobre as suas faces, em diferentes intensidades. Conseqüentemente, menos trabalho será extraído pelo agente externo durante o processo de descida da caixa e, por essa razão, mais energia é entregue ao buraco negro neste processo do que ocorreria classicamente (processo Geroch).

Para obtermos a energia disponível ao buraco negro é necessário que saibamos como transmitir a força  $F_1$  localmente exercida pela ponta da corda junto à caixa, quando esta está próxima do buraco negro, até o infinito, onde o agente externo exerce uma força  $F_0$  no outro extremo da corda para mantê-la estática.

A prescrição necessária para que realizemos esta tarefa é a utilização de cordas ideais. Uma corda ideal é um objeto descrito por um tensor energia-tensão de fluido perfeito cuja densidade de energia é nula. (Por isso a corda é ideal.) Desta forma, a equação necessária para descrever a transmissão da força “sentida” localmente por objetos estáticos até algum outro ponto é simplesmente aquela obtida em (4.25)

$$\frac{1}{p} \frac{dp}{dl} = -\frac{1}{\chi} \frac{d\chi}{dl} , \quad (4.34)$$

onde  $e = 0$ . Depois de uma simples manipulação, podemos reescrevê-las como

$$\frac{d(\chi p)}{dl} = 0 . \quad (4.35)$$

Supondo que a área da secção transversal da corda seja constante ao longo de sua extensão, podemos multiplicá-la à equação acima para obtermos a variação de força entre dois pontos distintos ao longo da corda ideal. Procedendo do mesmo



modo como na obtenção da relação de Tolman, obtemos

$$\int_{l_0}^{l_1} d(\chi Ap) = 0$$

$$F_0 = \frac{\chi_1 F_1}{\chi_0} , \quad (4.36)$$

onde identificamos o produto da área com a pressão como sendo a força. Lembrando que  $F_0$  representa a força exercida pelo agente externo no infinito sobre a respectiva extremidade da corda, então  $\chi_0 = 1$  e como expressão final teremos

$$F_0 = \chi F_1 , \quad (4.37)$$

onde omitimos o índice um do fator de deslocamento gravitacional para o vermelho. Portanto, a força exercida pelo agente externo durante a descida da caixa também sofre o efeito do deslocamento gravitacional para o vermelho, assim como a energia que ele atribui à caixa.

A questão central neste experimento mental é conhecer quais são as forças atuantes sobre a caixa para que o agente externo as exerça de modo a mantê-la estática. Primeiramente denominaremos de força gravitacional local  $F_{loc}^O$ , isto é, que atua diretamente sobre o centro de massa  $O$  da caixa, aquela força resultante do produto entre a energia da caixa e sua aceleração própria em  $O$ ,

$$F_{loc}^O = E_0 a_{(r)} = E_0 \frac{1}{\chi} \frac{d\chi}{dl} , \quad (4.38)$$

onde utilizamos as equações (4.21) e (4.24). Esta é a força localmente necessária a ser exercida pela corda para que se mantenha a caixa estática numa dada posição. Portanto, em essência, ela é oposta à força gravitacional, pois esta é orientada na

direção radial para valores decrescentes da coordenada radial. Logo, a força exercida pelo agente externo será

$$F_g^\infty = \chi F_{loc}^O = E_0 \frac{d\chi}{dl} , \quad (4.39)$$

onde trocamos a notação  $F_0$  por  $F_g^\infty$  para designarmos que esta força provém da contribuição gravitacional.

Entretanto,  $F_g^\infty$  não é a única força atuante sobre a caixa. Desde que as paredes da caixa sejam compostas de algum material refletor, a radiação térmica ao seu redor irá interagir com suas paredes de modo a produzir uma pressão efetiva sobre elas.

Supondo, por simplicidade, que a caixa possui um formato retangular e está alinhada com a corda que se desloca unicamente na direção radial, então suas faces superior, localizada em  $r = r_{sup}$ , e inferior, localizada em  $r = r_{inf}$ , onde  $r_{sup} > r_{inf}$ , experimentaram uma força efetiva resultante do produto entre a pressão  $P$  da radiação térmica e a área  $A$  de cada uma das faces. Mas considerando que a pressão na face inferior é maior que na face superior, conforme a equação (4.35), haverá uma força líquida sobre a caixa dada pelo gradiente desta pressão, apontando na direção oposta àquela seguida pela caixa em seu curso de descida até o buraco negro.

A esta força denominaremos de *força de empuxo*,  $F_e^\infty$ , que deverá ser incluída pelo agente externo no infinito a fim de contrabalancear este efeito produzido pela radiação térmica. Portanto, em vista de nossa hipótese sobre o quão fina é a caixa,  $F_e^\infty$  é explicitamente dada por

$$F_e^\infty = A [\chi(r_{sup}) P(r_{sup}) - \chi(r_{inf}) P(r_{inf})]$$

$$F_e^\infty \simeq V \frac{d(\chi P)}{dl} , \quad (4.40)$$

onde o volume da caixa  $V$  expressa o produto entre a área e a altura própria dela. Este resultado é válido até termos de terceira ordem na altura própria.

Uma importante observação deve ser feita aqui. A força acima calculada é resultado da transmissão da pressão exercida pela radiação térmica sobre as faces da caixa até um ponto comum, dito, por exemplo, o centro de massa  $O$  da caixa. Esta pressão é simplesmente a pressão própria do fluido térmico. Para entendermos isso, consideremos um vetor tipo-espaço unitário  $n^a = \chi(\partial_r)^a$  ( $n^a n_a = 1$ ), de componentes  $(0, \chi, 0, 0)$ , ortogonal à quadrivelocidade da caixa (i.e.,  $u_{(c)}^a n_a = 0$ ). Como as quadrivelocidades da caixa e do fluido são iguais devido à estaticidade dos mesmos, a pressão localmente experimentada pelas faces da caixa resultante da contração do quadri vetor  $n^a$  com o tensor energia-tensão do fluido, será simplesmente a pressão própria do fluido,

$$\begin{aligned} P(r_{inf}/r_{sup}) &= T_{(r)}^{\mu\nu}(r_{inf}/r_{sup}) n_\mu(r_{inf}/r_{sup}) n_\nu(r_{inf}/r_{sup}) \\ &= p_{(r)}(r_{inf}/r_{sup}) . \end{aligned} \quad (4.41)$$

A força total que o agente externo exercerá sobre a caixa por meio da extremidade da corda situada no infinito será

$$\begin{aligned} F_{\bar{U}\bar{W}}^\infty &= F_g^\infty + F_e^\infty \\ &= E_0 \frac{d\chi}{dl} + V \frac{d(\chi P(r))}{dl} , \end{aligned} \quad (4.42)$$

onde fica implícito o fato desta força total estar agindo no centro de massa da caixa.

Notando que a radiação térmica satisfaz a condição de equilíbrio hidrostático,

que neste caso é expressada pela equação (4.25), podemos reescrever a equação acima como

$$F_{\tilde{U}W}^{\infty} = V \left( \rho_{(c)} - e_{(r)} \right) \frac{d\chi}{dl} , \quad (4.43)$$

lembrando que  $\rho_{(c)} = E_0/V$  é a densidade de energia da caixa e  $e_{(r)}$  é a densidade de energia própria da radiação. Assim, verificamos que na presença da radiação térmica o agente externo aplica menos força à caixa para mantê-la estática que no processo Geroch.

O trabalho (extraído) realizado pelo agente externo para descer a caixa do infinito até uma distância própria  $l_1$  do horizonte de eventos devido a  $F_{\tilde{U}W}^{\infty}$  será

$$\begin{aligned} W_{UW} &= - \int_{\infty}^{l_1} (F_{\tilde{U}W}^{\infty})_a dx^a \\ &= - \int_{\infty}^{l_1} F_{\tilde{U}W}^{\infty} dl , \end{aligned} \quad (4.44)$$

onde  $(F_{\tilde{U}W}^{\infty})^a = F_{\tilde{U}W}^{\infty} n^a$  é o quadrivetor força orientado na direção radial positiva (para valores de  $r$  crescentes).

Efetuada a integração contida na expressão de  $W_{UW}$ , teremos

$$\begin{aligned} W_{UW} &= V \left( \rho_{(c)} + p_{(r)} \right) \chi \Big|_{l_1}^{\infty} \\ &= E_0 + V p_{\infty(r)} - V \left( \rho_{(c)} + p_{(r)} \right) \chi \Big|_{l_1} , \end{aligned} \quad (4.45)$$

onde  $\chi_{\infty} = 1$ .

Contudo,  $W_{UW}$  não é todo o trabalho realizado pelo agente externo nesse experimento mental. Para que a caixa seja inserida na cavidade contendo o buraco negro e a radiação térmica, que se encontram num estado de equilíbrio térmico mútuo, é necessário que o agente externo forneça energia à caixa na forma de trabalho

$W_\infty$ . Em boa aproximação esse trabalho é quantificado da seguinte maneira. Pela definição do conceito de trabalho,  $W_\infty$  nada mais é que o produto entre força e deslocamento. A força aqui é dada pelo produto entre a área da face da caixa e a pressão da radiação térmica no infinito,  $p_{\infty(r)}$ , enquanto que o deslocamento será a própria altura da caixa. Logo, a quantidade de energia fornecida à caixa para inserí-la na cavidade será:  $W_\infty = V p_{\infty(r)}$ . Conseqüentemente, para o cômputo do trabalho total realizado pelo agente externo no processo completo, essa quantidade de energia fornecida à caixa deve ser subtraída daquela estocada representada por  $W_{UW}$ . Portanto,

$$W'_{UW} = W_{UW} - W_\infty . \quad (4.46)$$

Desta forma, o trabalho total será simplesmente

$$W'_{UW} = E_0 - V \left( \rho_{(c)} + p_{(r)} \right) \chi |_{l_1} . \quad (4.47)$$

Observa-se que este trabalho difere daquele obtido em nível clássico (equação (3.3)) pelo termo  $-V p_{(r)} \chi |_{l_1}$ , que traduz a existência da radiação Hawking por meio da força de empuxo.

Empregando a conservação de energia para este processo como um todo, a quantidade de energia disponível ao buraco será dada pela diferença entre a energia inicial da caixa e a quantidade de energia estocada pelo agente externo na forma de trabalho devido à descida da caixa, isto é,

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= E_0 - W'_{UW} \\ &= V \left( \rho_{(c)} + p_{(r)} \right) \chi |_{l_1} . \end{aligned} \quad (4.48)$$

Evidentemente, somente faz sentido falarmos de energia disponível ao buraco negro quando  $\epsilon$  é calculado no ponto  $l_1$  de solda da caixa. Um outro aspecto que envolve  $\epsilon$  é o fato do processo ser inteiramente quase-estático. Isso permite que o trabalho extraído pelo agente externo seja máximo o que minimiza a quantidade de energia disponível ao buraco negro. Caso contrário, a quantidade de trabalho extraído não seria máxima e  $\epsilon$  seria algo superior ao anterior, além de que a geração de entropia pelo movimento da caixa através do fluido térmico diminuiria a quantidade de entropia ordinária perdida no processo pelo ingresso da caixa ao interior do buraco negro, o que sem dúvida alguma reduziria nossas chances de testar maximalmente a segunda lei generalizada.

Agora, no intuito de minimizarmos o aumento de entropia do buraco negro, devemos minimizar  $\epsilon$ , ou seja

$$\frac{d\epsilon}{dl} \Big|_{l_1} = 0 \quad . \quad (4.49)$$

Em vista da equação (4.45), a condição acima simplesmente significa que a força  $F_{UW}^\infty$  deve ser nula, o que implica

$$\rho_{(c)} = e_{1(r)} \quad , \quad (4.50)$$

segundo a equação (4.41). A interpretação desse resultado é direta: no ponto de flutuação, isto é, no ponto em que a força gravitacional é igual à força de empuxo em intensidade (ou seja, a tensão na corda é nula), o aumento na massa do buraco negro será mínimo quando a densidade de energia da caixa for igual à densidade de energia da radiação térmica deslocada por ela. Isto pode ser verificado notando que  $d^2\epsilon/dl^2 > 0$  neste ponto. A equação (4.48) reflete o princípio de Arquimedes da

hidrostática em espaços-tempos curvos.

Por conseguinte, substituindo a condição (4.48) na equação (4.45) juntamente com o auxílio da equação de Gibbs-Duhem na forma integral, obtemos

$$\begin{aligned}\epsilon_1^{min} &= (T_{1(r)}\chi_1) V s_{1(r)}(e_{1(r)}) \\ &= T_{(bn)} V s_{1(r)}(E_0/V) ,\end{aligned}\tag{4.51}$$

onde se fez uso da relação de Tolman na última passagem.

Logo, o aumento mínimo da entropia do buraco negro será

$$\begin{aligned}\Delta S_{bn} |_{min} &= \frac{\epsilon_1^{min}}{T_{(bn)}} \\ &= V s_{1(r)}(E_0/V) ,\end{aligned}\tag{4.52}$$

conforme a equação (3.10). Portanto, observadores assintóticos diriam que o aumento na entropia do buraco negro é no mínimo igual à entropia da radiação térmica deslocada no ponto de flutuação.

Assim, a variação da entropia generalizada, conforme assinalada pelos observadores assintóticos, no processo quase-estático de descida da caixa do infinito até o ponto de flutuação será, segundo a equação (3.7),

$$\begin{aligned}\Delta S_G &= \Delta S_{bn} + \Delta S \\ \Delta S_G &= V s_{1(r)}(E_0/V) - S_0 ,\end{aligned}\tag{4.53}$$

onde  $\Delta S$  designa a variação de entropia da matéria ordinária externa ao buraco negro.

No entanto, pela desigualdade (4.31), a equação acima resulta em

$$\Delta S_G \geq 0 .\tag{4.54}$$

Para o caso em que a igualdade toma lugar nesta última expressão<sup>3</sup>,  $\Delta S_G = 0$ , o processo de descida de caixas quase-estaticamente até o horizonte de eventos é isentrópico, ou seja, reversível. Por esse motivo, o trabalho extraído pelo agente externo é máximo (com relação aos diferentes tipos de composição da caixa).

Portanto, a força de empuxo da radiação térmica é a condição necessária e suficiente para que a segunda lei generalizada permaneça válida. Assim, a existência da radiação Hawking é fundamental para a consistência da segunda lei generalizada da termodinâmica.

Vale a pena verificar o que acontece na análise acima se a caixa for solta em algum outro ponto que não o ponto de flutuação. Quando  $F_{UW}^\infty > 0$ , a força gravitacional é maior que a força de empuxo, o que implica  $\rho_{(c)} > e_{1(r)}$ , conseqüentemente  $\epsilon > \epsilon_1^{min}$  e, portanto,  $\Delta S_{bn} > \Delta S_{bn} |_{min}$ . Neste caso a caixa é solta antes do ponto de flutuação e a energia estocada na forma de trabalho pelo agente externo é menor, justificando uma maior quantidade de energia disponível ao buraco negro. Para  $F_{UW}^\infty < 0$ , a força gravitacional é menor que a força de empuxo, ou seja,  $\rho_{(c)} < e_{1(r)}$ , o que inadvertidamente conduziria ao resultado  $\epsilon < \epsilon_1^{min}$  e daqui  $\Delta S_{bn} < \Delta S_{bn} |_{min}$ ; o que é uma flagrante violação da segunda lei generalizada. Mas o que não foi esclarecido é que se  $F_{UW}^\infty < 0$ , então  $W_{UW} < 0$ , e ao invés do agente externo estar estocando energia ele estará fornecendo energia à caixa para poder levá-la além do ponto de flutuação. Desta forma, o trabalho total realizado pelo agente externo antes de soltar a caixa é dado por:  $W_{UW} = W_{UW} |_{min} + W_{UW} |_{\rho_{(r)} < e_{1(r)}}$ , onde  $(W_{UW} |_{\rho_{(r)} < e_{1(r)}}) < 0$ ; conseqüentemente, a energia disponível ao buraco é maior por

---

<sup>3</sup>Isto ocorre quando a caixa é inteiramente composta por radiação térmica.



uma quantia  $-W_{UW} |_{\rho_{(e)} < e_{1(r)}}$ , e a segunda lei generalizada não é violada.

Uma questão ainda não abordada é o que acontecerá ao sistema composto pela radiação térmica e o buraco negro quando a caixa for solta e permitida cair no buraco negro. Mostramos na análise anterior que durante a fase em que a caixa é descida até o ponto de flutuação não há diminuição da entropia generalizada total. Embora o processo de “soltura” da caixa não seja um processo quase-estático, a energia total do sistema permanece constante. Então, supondo que no final deste processo o estado final do sistema é aquele de um buraco negro em equilíbrio térmico com sua radiação, a entropia generalizada total é máxima para aquela energia do sistema. Portanto, o estado inicial (quando a caixa está situada no ponto de flutuação) não pode ter mais entropia que o estado final.

Além disso, não computamos o acréscimo de energia ao buraco negro devido à energia da corda. No entanto, esta quantidade quando considerada apenas reduziria a possibilidade de violarmos a segunda lei generalizada por meio deste experimento mental. Por isso não há problemas em ignorá-la.

Em suma, a análise acima não prova a validade da segunda lei generalizada, nem explica como ela pode surgir de leis microscópicas da física. Entretanto, a falha deste experimento para produzir violações na segunda lei generalizada fornece evidências para sua validade, da mesma maneira como nossa crença na segunda lei ordinária da termodinâmica é firmada. Enfatiza-se que os argumentos utilizados para demonstrar a validade da segunda lei generalizada são, tão somente, a validade da segunda lei ordinária da termodinâmica e a existência da radiação Hawking.

## Capítulo 5

### Novos elementos para uma nova proposta de experimento mental

A existência das leis da termodinâmica dos buracos negros abre caminho para a possibilidade de uma profunda conexão entre a gravitação, a teoria quântica e a física estatística. A síntese desses três ramos da física via buracos negros, presta-nos um profundo testemunho de sua unidade em tempos de crescente especialização.

O experimento mental proposto por UW repousa somente numa classe particular de propostas para violar a segunda lei generalizada. Entretanto, por causa da radiação Hawking, em qualquer processo quase-estático a região externa ao buraco negro comporta-se como inteiramente preenchida com radiação térmica em equilíbrio térmico. Conseqüentemente, para qualquer processo quase-estático envolvendo buracos negros, existirá um processo análogo para uma estrela auto-gravitante composta de radiação térmica.

Contudo, há outros fenômenos físicos interessantes envolvendo buracos negros (e estrelas de nêutrons). Uma das mais promissoras possibilidades de detecção indireta de buracos negros surge da acreção de matéria sobre ele, que se aquecerá e emitirá radiação eletromagnética antes de entrar no buraco negro.

Para buracos negros formados pelo colapso estelar, a melhor maneira de ocorrer tal acreção de matéria é considerando um sistema binário formado pelo buraco negro e uma estrela<sup>1</sup>. Esta situação permite que matéria possa fluir da estrela para o buraco negro. Neste caso, esperar-se-ia que a matéria espiralasse lentamente em direção ao buraco negro, formando um *disco de acreção* ao seu redor. Assim, em boa aproximação, cada particular elemento de matéria desse disco pode ser tratado como um fluido térmico que descreve um movimento circular uniforme. Esta é a chave para o aparecimento de dois efeitos genuinamente relativísticos: o comportamento não trivial da *força centrífuga* [38] e o recente *efeito submarino* [39].

A riqueza fenomenológica existente no disco de acreção, ou em outros mecanismos similares de origem estelar, propiciada por aqueles efeitos, é a fonte de inspiração para propormos um novo experimento mental visando testar a validade da segunda lei generalizada.

A razão disso é simples. Quando a caixa for posta em movimento uniforme ao longo da direção azimutal,  $\phi^a = (\partial_\phi)^a$ , uma força extra resultante da combinação entre a força centrífuga e o efeito submarino atuará sobre ela de modo a minimizar o efeito da força de empuxo, isto é, a caixa poderá descer além do ponto de flutuação, o que disponibilizaria menos energia ao buraco negro implicando uma violação da segunda lei generalizada.

No entanto, esse benefício decorrente da ação combinada daqueles efeitos possui um custo energético ao agente externo, desde que há a necessidade de fornecer energia à caixa para que ela se mova. A tensão embutida nesta relação custo/benefício

---

<sup>1</sup>Considerando o buraco negro muito mais massivo que a estrela.

será o nosso alvo de estudo no próximo capítulo.

A compreensão dos mecanismos acima expostos, força centrífuga relativística e efeito submarino, é necessária para formalizarmos um novo experimento mental com a finalidade de testarmos a segunda lei generalizada. Por isso, neste capítulo revisitaremos os célebres trabalhos que expuseram a existência desse novos efeitos.

## 5.1 A força centrífuga relativística

Em física newtoniana é bem conhecido o fato de que a aceleração de um corpo em movimento circular uniforme num dado raio fixo depende de sua velocidade angular, especificamente  $a = r\omega^2$ . O produto da massa de repouso de um objeto arbitário com esta aceleração denomina-se *força centrífuga*.

O panorama acima é algo diferente quando tratamos com campos gravitacionais intensos, isto é, espaços-tempos que possuem grande curvatura, como é o caso do espaço-tempo de Schwarzschild.

Uma órbita circular é descrita pelas condições  $r = cte$  (ou  $dr/dt = 0$ ) e  $\theta = cte$  (ou  $d\theta/dt = 0$ ). Observadores que a percorrem possuem apenas as componentes  $v^t$  e  $v^\phi$  como não nulas. Desta maneira, tais observadores seguiram curvas isométricas associada ao campo de Killing  $\eta^a = t^a + \omega_0\phi^a$ . Então, a correspondente quadrivelocidade de cada observador será

$$v^a = \frac{1}{\eta} (t^a + \omega_0\phi^a) \quad , \quad (5.1)$$

onde  $\omega_0 = v^t/v^\phi = d\phi/dt$  é a velocidade angular, que é constante, e

$$\eta = |t^a + \omega_0\phi^a| = \sqrt{\chi^2 - r^2\omega_0^2} \quad (5.2)$$

é o fator de normalização da quadri-velocidade. Nós lembramos que  $\chi = \sqrt{1 - 2M/r}$ . Na obtenção dos resultados acima considerou-se que  $\theta = \pi/2$  sem qualquer perda de generalidade.

Observando que o quadrado do fator de normalização deve ser sempre positivo, obtemos uma restrição à velocidade angular  $\omega_0$  desses observadores em movimento circular

$$\omega_0^2 < \frac{\chi^2}{r^2} . \quad (5.3)$$

É interessante notarmos que o lado direito dessa equação assume o seu valor máximo quando  $r = 3M$ . Este é o caso para que um fóton descreva uma órbita circular (instável) definida por esta coordenada radial. Por isso, a equação (5.3) traduz um limite físico para a velocidade angular de qualquer observador material.

Agora, interessa-nos obter a quadriaceleração associada à equação (5.1), isto é,  $a^a = v^b \nabla_b v^a$ . Esta é a quadriaceleração necessária a ser imprimida pelos motores de uma espaçonave para que ela se mantenha na órbita circular. Mas antes de efetuarmos o cálculo explícito, argumentaremos da seguinte maneira. Desde que  $\eta^a$  é um campo de Killing, então ele satisfaz a equação de Killing,  $\nabla_{(a} \eta_{b)}$ . Paralelo a isso, o fator de normalização  $\eta$  deve ser uma função apenas das coordenadas  $r$  e  $\theta$ , como é patente pela equação (5.2). Estas características gerais foram os únicos argumentos utilizados na obtenção da equação (4.20) que, por esse motivo, é um resultado geral. Logo, trocando  $\chi$  por  $\eta$ , obtemos

$$a^a = \frac{1}{\eta} \nabla^a \eta . \quad (5.4)$$

Certamente a única componente do quadri-vetor aceleração não nula é a compo-

nente radial, já que  $\omega_0 = cte$ . Por isso, reescrevemos a equação acima como

$$a^r = \frac{1}{\eta} g^{rb} \nabla_b \eta . \quad (5.5)$$

O escalar de aceleração associado a esta equação, isto é, a aceleração própria do observador caracterizado pela quadrivelocidade  $v^a$ , é dado por

$$a = \frac{\chi}{\eta} \frac{d\eta}{dr} , \quad (5.6)$$

que em termos da distância própria ao longo da coordenada radial, (4.24), é reescrito como

$$a = \frac{1}{\eta} \frac{d\eta}{dl} . \quad (5.7)$$

A partir destas equações, explicita-se o escalar de aceleração como função de  $\omega_0$ ,  $r$  e  $M$ . Logo,

$$a = \frac{\chi}{r} \left( \frac{M}{r} - r^2 \omega_0^2 \right) . \quad (5.8)$$

O resultado acima estabelece uma aparente dependência funcional entre o escalar de aceleração e a velocidade angular  $\omega_0$  para qualquer coordenada radial  $r$ . Assim, uma questão interessante de se investigar é a possibilidade de existência de alguma órbita circular em que tal relação funcional não ocorra.

A diferença entre as acelerações de dois observadores movendo-se numa mesma órbita circular com velocidades angulares infinitesimalmente diferentes,  $\omega_0$  e  $\omega_0 + \delta\omega$ , onde  $\delta\omega \ll \omega_0$ , é dada por

$$\delta a = \frac{\partial^2 \ln \eta}{\partial \omega \partial l} \delta \omega , \quad (5.9)$$

onde

$$\frac{\partial^2 \ln \eta}{\partial \omega \partial l} = \frac{2\chi}{\eta^4} (3M - r) \omega_0 . \quad (5.10)$$

A aceleração será a mesma para os dois observadores se, e somente se, o fator  $\partial^2 \ln \eta / \partial \omega \partial l$  for nulo para alguma órbita. Surpreendentemente este é o caso quando  $r = 3M$ , como pode ser verificado por substituir este valor naquele fator. Substituindo  $r = 3M$  na equação (5.8), obtemos

$$a|_{r=3M} = \frac{1}{\sqrt{27}M} , \quad (5.11)$$

que é independente de  $\omega$ , como tinha de ser.

Por outro lado, um observador estático situado na mesma posição  $r = 3M$  estará apenas sob o efeito do “campo gravitacional”. Quando calculado o valor da aceleração própria para tal observador estático, (4.22), o que se obtém é o mesmo valor dado por (5.11). Portanto, um observador que percorre uma órbita circular em  $r = 3M$  estará sob o efeito apenas da força gravitacional independentemente do valor de sua velocidade angular, embora satisfaça a condição (5.3). Então, a contribuição devido à força centrífuga contida na equação (5.8) se anula em  $r = 3M$ .

O fato de um observador em movimento circular uniforme estar sob o efeito apenas da força gravitacional é suficientemente intrigante para que nós olhemos um pouco mais de perto para esse fenômeno. O momento angular desse observador assim como medido no infinito por algum outro observador estático é definido por

$$L = E_0 v^a \phi_a , \quad (5.12)$$

onde  $E_0$  e  $v^a$  são, respectivamente, a massa de repouso e a quadrivelocidade do observador em movimento circular uniforme. Portanto, em nosso caso temos

$$L = \frac{r^2}{\eta} E_0 \omega_0 . \quad (5.13)$$

Agora, desde que o momento angular  $L$  é uma função apenas da coordenada radial para um dado valor da velocidade angular, ele é constante ao longo da órbita circular descrita por aquele observador,

$$v^a \nabla_a L = \frac{dL}{d\tau} = 0 \quad (5.14)$$

Desta forma, torna-se interessante reescrever a aceleração própria (5.7) como uma função do momento angular. Uma simples manipulação da equação (5.13) permite que escrevamos  $\omega_0$  em função do momento angular,

$$\omega_0^2 = \left( \frac{1}{1 + \frac{L^2}{r^2 E_0^2}} \right) \frac{\chi^2 L^2}{r^4 E_0^2} . \quad (5.15)$$

Substituindo este resultado na equação (5.7), teremos

$$\begin{aligned} a &= \frac{\chi}{r} \left( \frac{M}{r} + \eta^2 - \chi^2 \right) \frac{1}{\eta^2} \\ &= \frac{M}{r^2 \chi} - \frac{\chi L^2}{E_0^2 r^3} + \frac{M L^2}{E_0^2 r^4 \chi} \\ &= a_{(r)} - \frac{\chi L^2}{E_0^2 r^3} + \frac{a_{(r)} L^2}{E_0^2 r^2} , \end{aligned} \quad (5.16)$$

onde

$$\eta = \frac{\chi}{\sqrt{1 + \frac{L^2}{r^2 E_0^2}}} . \quad (5.17)$$

A equação (5.16) é muito rica em informação sobre o significado da origem do “paradoxo” da força centrífuga. O primeiro termo daquela equação é simplesmente a aceleração própria de um observador estático, que identificamos como o campo gravitacional, conforme a equação (4.22). Observe que o fator  $1/\chi$  é a correção relativística da expressão usual newtoniana para o campo gravitacional. O segundo termo é idêntico à aceleração centrífuga obtida da mecânica newtoniana, porém



devidamente corrigida pelo fator  $\chi$ . Agora, o terceiro termo é genuinamente relativístico, ou seja, não há qualquer termo paralelo a ele devido à mecânica newtoniana quando aplicada ao problema de órbitas circulares. Além disso, esse termo exprime um acoplamento não trivial entre o campo gravitacional e a aceleração centrífuga por meio do produto  $ML^2$ . É fácil percebermos que sua existência tende a reforçar a intensidade do campo gravitacional, assim como pode ser visto reescrevendo a equação (5.16) como

$$a = \frac{M}{r^2\chi} \left( 1 + \frac{L^2}{E_0^2 r^2} \right) - \frac{\chi L^2}{E_0^2 r^3} . \quad (5.18)$$

Logo, esta contribuição adicional à aceleração gravitacional deve ser a quantidade necessária exata para que o termo centrífugo seja anulado em  $r = 3M$ . Agrupando os dois últimos termos da equação (5.16), obtemos

$$a = \frac{M}{r^2\chi} - \frac{L^2}{E_0^2 r^3} \left( \frac{r - 3M}{r\chi} \right) . \quad (5.19)$$

O resultado acima é o que melhor traduz o comportamento não trivial da aceleração centrífuga relativística. Imediatamente reconhecemos que em  $r = 3M$  o termo devido à correção relativística para campos gravitacionais fortes,  $ML^2/E_0^2 r^4 \chi$ , anula a contribuição devido ao termo centrífugo, justificando desta maneira o fato do observador em movimento circular uniforme nesta posição possuir uma aceleração própria exatamente igual àquela que teria caso permanecesse estático.

No entanto, ainda assim podemos extrair algo mais sobre aquela equação. Para  $r < 3M$  a aceleração centrífuga efetiva é positiva, isto é, o termo proveniente da correção relativística é dominante frente ao termo centrífugo. Por isso, um observador que percorre uma órbita circular definida pela coordenada radial que satisfaça

a condição  $r < 3M$ , experimentará uma força que tende a empurrá-lo na direção da fonte (do campo gravitacional)  $M$ . Por outro lado, quando  $r > 3M$  é o termo centrífugo que é dominante frente à correção relativística, e o nosso observador em movimento circular uniforme naquela posição experimentará uma força que tende a afastá-lo do centro gerador do campo gravitacional.

A mensagem que fica após este estudo sobre o comportamento da força centrífuga relativística é a de que uma caixa caracterizada por sua energia própria  $E_0$  e situada no ponto de flutuação em  $2M < r < 3M$ , ao descrever um movimento circular uniforme ao redor do buraco negro, descera um pouco abaixo desse ponto de flutuação e por isso reduzirá um pouco a quantidade de energia disponível ao buraco negro. Esse fenômeno fornece uma boa motivação para um novo teste à segunda lei generalizada.

No entanto, outro fenômeno correlato denominado de efeito submarino, mostrar-se-á de suma importância para o nosso objetivo de desenvolver um novo teste para a segunda lei generalizada.

## 5.2 O efeito submarino

Consideremos um corpo macroscópico, como um submarino, satisfazendo a condição inicial de que ele esteja em equilíbrio hidrostático quando em repouso imerso num fluido ideal. Isto significa dizer, apoiado no princípio de Arquimedes obtido no capítulo anterior, que a densidade própria do submarino deve ser exatamente igual àquela do fluido deslocado por ele.

A origem do fenômeno denominado de efeito submarino repousa sobre a ins-

tigante questão de como diferentes observadores descrevem o comportamento do submarino quando este possui uma velocidade paralela à direção da superfície do fluido muito alta. Intuitivamente, esta questão aparenta ser discutível no escopo da relatividade especial. Mas é exatamente nesse contexto que um aparente “paradoxo” surge.

Um observador em repouso com o fluido afirmará que o submarino deveria afundar em virtude do efeito de contração que ele estará sujeito, o que por sua vez aumenta a densidade do submarino. Porém, um observador co-móvel ao submarino concluirá que ele deveria subir, pois neste caso é a densidade do fluido que aumentará devido ao efeito de contração dos elementos de volume do fluido na direção de movimento do submarino.

A razão pela qual diferentes observadores não concordam com a descrição do evento reside no uso incorreto da relatividade especial num problema tipicamente de Relatividade Geral, devido à existência de um campo gravitacional. A resolução completa deste problema veio com o trabalho de Matsas (M) [39].

Agora descreveremos o cenário ao qual se desenvolve o problema. Trata-se de um planeta arbitrário de massa total  $M_p$ , cujo raio é superior a  $2M_p$ , completamente envolto por uma camada líquida de espessura finita. O campo gravitacional sobre esta camada líquida, descrito pelo elemento de linha de Schwarzschild, será inteiramente devido à massa do planeta,  $M_p$ . Consideraremos que esta camada líquida seja composta por um fluido perfeito. Isso faz com que todas aquelas propriedades apresentadas na seção 3.2, quando também tratamos a radiação térmica como um fluido perfeito, permaneçam válidas aqui. Logo, a aceleração própria de cada ele-

mento de volume do fluido é dada pela expressão (4.22), que claramente aumenta com a profundidade (orientada para os valores decrescentes da coordenada radial).

Contudo, no intuito de eliminarmos a contribuição devido à aceleração centrífuga, já descrita na seção anterior, para tão somente expormos o efeito submarino, adotaremos o espaço-tempo de Rindler que além de possuir simetria plana, também preserva todas as características relevantes ao estudo de corpos quase-estáticos no espaço-tempo de Schwarzschild.

O elemento de linha correspondente ao espaço-tempo de Rindler é

$$ds^2 = e^{2\alpha Z} \left( -dT^2 + dZ^2 \right) + dX^2 + dY^2 \quad , \quad (5.20)$$

onde  $\alpha$  é uma constante positiva arbitrária.

É fácil verificarmos que  $T^a = (\partial_T)^a$  é um campo de Killing tipo-tempo ( $g(T, T) < 0$ ), que aliado ao fato de  $g(T, X^k) = 0$ , onde  $(X^1, X^2, X^3) = (Z, X, Y)$ , torna evidente o caráter estático desse espaço-tempo. Além disso, há outros dois campos de Killing tipo-espaço, associados às translações. São eles:  $X^a = (\partial X)^a$  e  $Y^a = (\partial Y)^a$ , onde  $g(X, X) > 0$  e  $g(Y, Y) > 0$ .

Logo, o quadri vetor velocidade associado a cada elemento de volume dessa camada líquida composta por um fluido perfeito, assim como qualquer objeto estático nesse espaço-tempo, é

$$U_{(t)}^a = \frac{\chi^a}{\chi} \quad , \quad (5.21)$$

onde  $\chi^a = T^a$  e  $\chi = e^{-\alpha Z}$ . Portanto, a coordenada  $T$  de Rindler pode ser vista como desempenhando um papel análogo ao da coordenada temporal de Schwarzschild para esse espaço-tempo.

O quadrivetor aceleração correspondente é aquele dado pela equação (4.20).

Logo,

$$A_{(l)}^a = \alpha g^{aZ} , \quad (5.22)$$

ou seja, a quadriaceleração própria desse objeto estático é

$$A_{(l)} = \alpha e^{-\alpha Z} . \quad (5.23)$$

Observa-se que quanto mais negativos os valores da coordenada  $Z$  mais este escalar aumenta, assim como a equação (4.22) para valores crescentes da coordenada radial de Schwarzschild. Desta forma, torna-se natural rotular a coordenada  $Z$  de Rindler como algo similar ao papel executado pela coordenada radial de Schwarzschild.

Agora ambientaremos o nosso problema, anteriormente descrito no espaço-tempo de Schwarzschild, para o espaço-tempo de Rindler. A região compreendida pela camada líquida é definida pelo intervalo  $Z_{min} < Z \leq 0$ , onde  $Z_{min}$  representa a coordenada em que a superfície do planeta e a camada líquida se encontram. O comprimento próprio desta camada líquida, segundo um observador estático inicialmente situado em sua superfície ( $Z = 0$ ), será finito e dado por

$$\begin{aligned} \Delta l &= \int_{Z_{min}}^0 \sqrt{ds^2} |_{T=X=Y=cte} \\ &\simeq \frac{1}{\alpha} , \end{aligned} \quad (5.24)$$

onde consideramos por simplicidade  $\alpha Z_{min} \ll 1$ . Este resultado atribui um significado físico ao parâmetro  $\alpha$ .

Consideraremos que o submarino tenha um formato retangular, porém a distância própria entre suas faces ao longo da direção  $Z$  é muito pequena quando comparada

à profundidade da camada líquida. Podemos expressar esta afirmação matematicamente como  $\Delta l_{(s)} \ll 1/\alpha$ . A necessidade dessa característica reside em nossa intenção de minimizar qualquer tipo de efeito indesejado proveniente da movimentação do submarino, tal como turbulência no líquido e tensões de cisalhamento sobre a estrutura do submarino; além de simplificarmos a questão sobre o equilíbrio hidrodinâmico a ser analisado posteriormente, pois não haverá necessidade de considerarmos em detalhe a distribuição de matéria do submarino.

A partir de  $(0, Z_0, X_0, Y_0)$  o submarino inicia o seu movimento ao longo da direção positiva do eixo  $X$ , até que todos os seus pontos adquiram uma velocidade constante  $v_0 = dX/dT$ . No entanto, na fase de transição do repouso para o movimento uniforme, as diferentes partes do submarino estarão submetidas a tensões cuja intensidade pode até mesmo dilacerá-lo. Portanto, devemos estudar quais são as condições necessárias para que esta transição ocorra suavemente, de modo que o submarino permaneça “rígido”.

### 5.2.1 A fase de transição do movimento do submarino

Nesta fase de transição no movimento do submarino, a sua quadrivelocidade dependerá das coordenadas  $X^\mu$ , ou seja,  $v = v(X^\mu)$ . Desta maneira, a quadrivelocidade do submarino será

$$\mathcal{V}_{(s)}^a = \frac{1}{\gamma} [T^a + v(X^\mu)X^a] \quad , \quad (5.25)$$

onde  $\gamma = |T^a + v(X^\mu)X^a|$  é o fator de normalização .

No intuito de evitarmos que o submarino se distenda durante esta fase, devemos determinar qual é a dependência funcional de  $v$  com  $X^\mu$  para que isso não ocorra.

Assim, será imposto que a quadrivelocidade do submarino satisfaça a condição de não expansão volumétrica, isto é, o escalar de expansividade volumétrica associado a ele deve ser nulo,

$$\Theta_{(s)} = \nabla_a \mathcal{V}_{(s)}^a = 0 . \quad (5.26)$$

A partir disso obtemos uma equação diferencial para  $v$ ,

$$e^{2\alpha Z} \frac{\partial v}{\partial X} = -v \frac{\partial v}{\partial T} , \quad (5.27)$$

cuja simples resolução confere a seguinte velocidade:

$$v(X^\mu) = e^{2\alpha Z} \frac{T}{X} , \quad (5.28)$$

onde  $0 \leq T/X \leq v_0 e^{-2\alpha Z}$ . Lembrando que para  $T/X < 0$  a velocidade  $v$  é zero.

Conseqüentemente, cada parte do submarino terá uma trajetória tipo-tempo caracterizada pelas coordenadas  $X^\mu = (T, Z_0, X(T), Y_0)$ , onde  $X(T) > X_0$ . Observa-se que o submarino possui liberdade de movimento apenas na direção do eixo  $X$ . Na prática isso pode ser implementado por ajustar os motores do submarino de modo a cancelar qualquer força resultante que apareça, impelindo-o a afundar ou a emergir.

A forma funcional de  $X(T)$  é determinada pela integração de  $v = dX/dT$ , onde  $v$  é dado pela equação (5.28). Assim, para a região compreendida pela fase de transição, temos

$$\int_{X_0}^X X' dX' = e^{2\alpha Z_0} \int_0^T T' dT' ,$$

logo,

$$X(T) = \sqrt{X_0^2 + e^{2\alpha Z_0} T^2} , \quad (5.29)$$

onde a coordenada  $T$  é definida no intervalo  $0 \leq T \leq T_{unif}$ , sendo que  $T_{unif}$  é o valor desta coordenada quando cada parte do submarino atinge o estado de movimento uniforme, ou seja,  $v = v_0$  para  $0 < v_0 < e^{\alpha Z_0}$ , intervalo este que corresponde à condição de positividade de  $\gamma^2$ . Nominalmente  $T_{unif}$  é dado por

$$T_{unif} = \frac{v_0 X_0 e^{-2\alpha Z_0}}{\sqrt{1 - v_0^2 e^{-2\alpha Z_0}}} , \quad (5.30)$$

conforme verifica-se a partir das equações (5.28) e (5.29) quando  $T = T_{unif}$ .

Contudo, a requisição de não expansividade volumétrica é uma condição necessária mas não suficiente para que o submarino permaneça “rígido” nesta região de transição. A razão disso é simples. O submarino pode ser deformado de tal modo que o seu volume continue constante. Portanto é necessário obtermos qual é a condição de “*corpo rígido*”, isto é, a condição em que a distância própria entre diferentes pontos permanece fixa quando transportada ao longo de uma curva tipo-tempo, para que assim possamos implementá-la ao submarino.

Esta tarefa exige algum cuidado no que diz respeito à sua formulação. Primeiramente, consideraremos uma base tridimensional ortogonal constituída de vetores tipo-espaço, aos quais rotularemos como  $\xi_{(k)}^a$ , onde  $k = 1, 2, 3$ . O produto interno de tais vetores,  $g(\xi_{(k)}, \xi_{(k)})$ , é bem definido. Inicialmente, no instante  $T = 0$ , cada um dos vetores  $\xi_{(k)}^a$  é ortogonal ao quadri vetor tipo-tempo  $U^a$ , ou seja,  $\xi_{(k)}^a U_a = 0$ . Para valores de  $T > 0$ , exigiremos que as características acima mencionadas permaneçam válidas ao longo da curva gerada por  $U^a$ ; mais especificamente (i) a ortogonalidade entre o vetores  $\xi_{(k)}^a$  e a quadri vetor  $U^a$  é conservada ao longo da curva gerada por



$U^a$ , isto é,

$$U^b \nabla_b (\xi_{(k)}^a U_a) = 0 \quad , \quad (5.31)$$

e (ii) o  $|\xi_{(k)}^a|$  também deve ser preservado para todos os pontos dessa curva,

$$U^b \nabla_b (\xi_{(k)}^a \xi_{(k)a}) = 0 \quad . \quad (5.32)$$

Observa-se que este é o palco ao qual o submarino se apresenta, embora também estejamos interessados no caráter geral da demonstração que se segue.

Por fim, devemos adicionar a exigência de que não ocorram “torções” nos vetores  $\xi_{(k)}^a$  quando transportados ao longo de  $U^a$ . Esta condição é implementada por assumirmos que a derivada de Lie do vetor  $\xi_{(k)}^a$  com respeito a  $U^a$  é proporcional a este último, ou seja,

$$\mathcal{L}_U \xi_{(k)}^a = \psi (X^\mu) U^a \quad . \quad (5.33)$$

Assim,

$$[U, \xi_{(k)}]^a = \psi (X^\mu) U^a \quad , \quad (5.34)$$

onde  $\psi(X^\mu)$  é uma função das coordenadas que pode ser determinada a partir da condição (i) e do fato de a quadrivelocidade de cada parte do submarino ser parametrizada pelo tempo próprio, isto é,  $U^a U_a = -1$ . Efetuando o produto interno entre a equação acima e  $U_a$ , temos

$$U_a [U, \xi_{(k)}]^a = -\psi (X^\mu) \quad . \quad (5.35)$$

Desenvolvendo o lado esquerdo desta equação, obtemos

$$U^a U^b \nabla_b \xi_{(k)a} - U_a \xi_{(k)}^b \nabla_b U^a \quad .$$

Mas

$$U_a \xi_{(k)}^b \nabla_b U^a = \frac{1}{2} \xi_{(k)}^b \nabla_b (U^a U_a) \quad ,$$

que evidentemente é nulo, e

$$U^a U^b \nabla_b \xi_{(k)a} = -\xi_{(k)}^b A_b \quad ,$$

conforme a equação (5.31), observando que  $A_a = U^b \nabla_b U_a$ . Logo, a equação (5.35) resulta em

$$\psi (X^\mu) = \xi_{(k)}^b A_b \quad , \quad (5.36)$$

e a condição (5.34) é reescrita como

$$[U, \xi_{(k)}]^a = \xi_{(k)}^b A_b U^a \quad . \quad (5.37)$$

Agora, realizando o produto interno entre esta equação e  $\xi_{(k)a}$ , com o auxílio de (5.32), obtemos

$$\xi_{(k)}^a \xi_{(k)}^b (\nabla_a U_b + U_a A_b) = 0 \quad . \quad (5.38)$$

Desde que os vetores  $\xi_{(k)}^a$  são arbitrários e esta equação é simétrica com respeito aos índices  $a$  e  $b$ , podemos reescrevê-la como

$$\nabla_{(a} U_{b)} + U_{(a} A_{b)} = 0 \quad . \quad (5.39)$$

Esta equação define a condição de “corpo rígido”, a qual deve ser satisfeita pelo submarino. Ainda podemos reescrevê-la em termos do tensor tensão  $\sigma_{ab}$ , definido por

$$\sigma_{ab} = h_a^c h_b^d \nabla_{(c} \mathcal{V}_{(s)d)} - \frac{1}{3} \Theta h_{ab} \quad ,$$

e do escalar da expansão volumétrica  $\Theta$  como

$$\sigma_{ab} + \frac{\Theta}{3} h_{ab} = 0 \quad , \quad (5.40)$$

que pode ser verificada por imediata inspeção. Observa-se que  $h_{ab}$  é o operador projetor já definido pela equação (4.10).

A condição  $\Theta_{(s)} = 0$  empregada anteriormente exige que o tensor tensão associado ao submarino deva ser obrigatoriamente nulo, a fim de que a condição de “corpo rígido” seja satisfeita por ele. Entretanto, aquela condição custou-nos um alto preço. Agora, as diferentes partes do submarino não mais seguirão curvas isométricas, isto é,  $T^a + v(X^\mu)X^a$  não é um campo vetorial de Killing pois não satisfaz a equação de Killing. Além disso, embora tenhamos assumido que o submarino seja bem fino (mas não infinitamente fino), ele ainda assim possui uma pequena extensão finita. Isso se reflete na dependência da velocidade  $v$  com  $Z_0$  para cada infinitésimo de camada (ortogonal ao eixo  $Z$ ) do submarino.

Pela equação (5.39), o tensor tensão  $\sigma_{(s)b}^a$  do submarino pode ser escrito como

$$\sigma_{(s)b}^a = \frac{1}{2} \left( \nabla_b \mathcal{V}_{(s)}^a + g^{ac} g_{bd} \nabla_c \mathcal{V}_{(s)}^d + \mathcal{V}_{(s)b} \mathcal{V}_{(s)}^c \nabla_c \mathcal{V}_{(s)}^a + g_{bd} \mathcal{V}_{(s)}^a \mathcal{V}_{(s)}^c \nabla_c \mathcal{V}_{(s)}^d \right) \quad . \quad (5.41)$$

Assim, a representação matricial desse tensor é

$$\sigma_{(s)\nu}^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_{(s)Z}^T & 0 & 0 \\ \sigma_{(s)T}^Z & 0 & \sigma_{(s)X}^Z & 0 \\ 0 & \sigma_{(s)Z}^X & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad (5.42)$$

onde

$$\sigma_{(s)Z}^T = \frac{1}{2} \nabla_Z \mathcal{V}_{(s)}^T = \frac{\alpha v^2}{\gamma^3} \quad ,$$

$$\sigma_{(s)Z}^T = \alpha e^{-\alpha Z} (X^2 - X_0^2) \frac{X}{X_0^3} , \quad (5.43)$$

$$\sigma_{(s)T}^Z = -\sigma_{(s)Z}^T , \quad (5.44)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{(s)Z}^X &= \frac{1}{2} \nabla_Z \mathcal{V}_{(s)}^X = \frac{\alpha v e^{2\alpha Z}}{\gamma^3} \\ &= \alpha \sqrt{X^2 - X_0^2} \frac{X^2}{X_0^3} , \end{aligned} \quad (5.45)$$

$$\sigma_{(s)X}^Z = e^{-2\alpha Z} \sigma_{(s)Z}^X . \quad (5.46)$$

Outra quantidade útil associada à matriz  $\sigma_{(s)\nu}^\mu$  é o escalar  $\sigma_{(s)}^2$ ,

$$\begin{aligned} \sigma_{(s)}^2 &= \frac{1}{2} \sigma_{(s)}^{\mu\nu} \sigma_{(s)\mu\nu} = \sigma_{(s)T}^Z \sigma_{(s)Z}^T + \sigma_{(s)Z}^X \sigma_{(s)X}^Z \\ &= \frac{\alpha^2 v^2}{\gamma^4} , \end{aligned} \quad (5.47)$$

ou seja,

$$\sigma_{(s)} = \pm A_{(l)} \sqrt{X^2 - X_0^2} \frac{X}{X_0^2} . \quad (5.48)$$

Portanto, devido ao fato de  $\nabla_Z v \neq 0$ , os elementos de matriz  $(\sigma_{(s)\nu}^\mu)^\delta_\beta$  associados a este fator são não nulos. Desta forma, resta-nos determinar as condições necessárias para minimizarmos os termos resultantes da tensão de cisalhamento presentes em  $\sigma_{(s)\nu}^\mu$ . Para isso, devemos calcular os autovalores  $\lambda_{(m)}$ , onde  $m = (1, 2, 3)$ , e os respectivos autovetores tipo-espaço  $w_{(m)}^a$  associados à equação de autovalores

$$\left( \sigma_{(s)\nu}^\mu - \lambda_{(m)} \delta^\mu_\nu \right) w_{(m)\nu}^\nu = 0 . \quad (5.49)$$

Uma inspeção direta em (5.42) já fornece um autovalor e o seu respectivo autovetor tipo-espaço. São eles, respectivamente,

$$\lambda_{(1)} = 0 ; \quad w_{(1)}^\mu = (0, 0, 0, 1) . \quad (5.50)$$

A equação secular resultante de (5.42) fornece os demais autovalores e o seus respectivos autovetores,

$$\lambda_{(2)} = \sqrt{\sigma_{(s)}^2} \ ; \ w_{(2)}^\mu = (\sigma_{(s)Z}^T, \sqrt{\sigma_{(s)}^2}, \sigma_{(s)Z}^X, 0) \ , \quad (5.51)$$

$$\lambda_{(3)} = -\sqrt{\sigma_{(s)}^2} \ ; \ w_{(3)}^\mu = (\sigma_{(s)Z}^T, -\sqrt{\sigma_{(s)}^2}, \sigma_{(s)Z}^X, 0) \ . \quad (5.52)$$

Verifica-se facilmente que  $g(w_{(m)}, w_{(m)}) > 0$ . Então,

$$w_{(1)}^a w_{(1)a} = 1 \ , \quad (5.53)$$

$$w_{(2)}^a w_{(2)a} = w_{(3)}^a w_{(3)a} = 2\sigma_{(s)}^2 e^{2\alpha Z} > 0 \ . \quad (5.54)$$

Além disso, esses autovetores também satisfazem a relação de ortogonalidade com a quadrivelocidade do submarino,  $w_{(m)}^a \mathcal{V}_{(s)a} = 0$ .

Uma maior compreensão do significado dos autovalores  $\lambda_{(m)}$  e dos autovetores  $w_{(m)}^a$  pode ser obtida da seguinte maneira. Seja localmente uma base vetorial tridimensional  $\{e_{(m)}^a\}$  cuja orientação de seus eixos é a mesma dos autovetores acima calculados, isto é,  $e_{(m)}^a = w_{(m)}^a$ . A contração da matriz  $\sigma_{(s)\nu}^\mu$  por  $e_{(m)\mu}$ , ao lado direito, e  $e_{(m)}^\nu$ , ao lado esquerdo, resulta em

$$e_{(m)\mu} \sigma_{(s)\nu}^\mu e_{(m)}^\nu = e_{(m)\nu} e_{(m)}^\mu \nabla_\mu e_{(m)}^\nu \ , \quad (5.55)$$

lembrando que  $e_{(m)\mu} \mathcal{V}_{(s)}^\mu = 0$ . Empregando esse mesmo procedimento à equação de autovalores, temos

$$e_{(m)\mu} \sigma_{(s)nu}^\mu e_{(m)}^\nu = \lambda_{(m)} e_{(m)\mu} e_{(m)}^\mu \ . \quad (5.56)$$

Identificando estas duas últimas equações encontramos a relação

$$e_{(m)\mu} e_{(m)}^\nu \nabla_\nu e_{(m)}^\mu = \lambda_{(m)} e_{(m)\mu} e_{(m)}^\mu \ . \quad (5.57)$$

Agora consideraremos que os eixos  $e_{(m)}^a$  são ortogonalmente transportados ao longo da curva gerada por  $\mathcal{V}_{(s)}^a$ , isto é,

$$[\mathcal{V}_{(s)}, e_{(m)}]^a = \mathcal{A}_{(s)b} \mathcal{V}_{(s)}^b e_{(m)}^a \quad , \quad (5.58)$$

onde  $\mathcal{A}_{(s)}^a = \mathcal{V}_{(s)}^b \nabla_b \mathcal{V}_{(s)}^a$ . A contração desta expressão com  $e_{(m)a}$  fornece-nos a relação

$$e_{(m)\mu} e_{(m)}^\nu \nabla_\nu \mathcal{V}_{(s)}^\mu = e_{(m)\mu} \mathcal{V}_{(s)}^\nu \nabla_\nu \mathcal{V}_{(s)}^\mu \quad . \quad (5.59)$$

Identificando as equações (5.57) e (5.59), temos

$$e_{(m)\mu} \mathcal{V}_{(s)}^\nu \nabla_\nu \mathcal{V}_{(s)}^\mu = \lambda_{(m)} e_{(m)\mu} e_{(m)}^\mu \quad , \quad (5.60)$$

onde utilizamos novamente o fato de que  $\mathcal{V}_{(s)}^a e_{(m)a} = 0$ .

Mas, valendo-nos das identidades

$$e_{(m)\mu} \nabla_\nu e_{(m)}^\mu = \frac{1}{2} \nabla_\nu \left( e_{(m)\mu} e_{(m)}^\mu \right) \quad , \quad (5.61)$$

e

$$e_{(m)\mu} e_{(m)}^\mu = |e_{(m)}^\mu|^2 \quad , \quad (5.62)$$

a equação (5.60) é reescrita como

$$\mathcal{V}_{(s)}^\nu \nabla_\nu |e_{(m)}^\mu| = \lambda_{(m)} |e_{(m)}^\mu| \quad . \quad (5.63)$$

Portanto, a taxa de deformação das faces do submarino ao longo dos eixos principais  $e_{(m)}^a$ , com respeito a  $\mathcal{V}_{(s)}^a$ , é dada pelos correspondentes autovalores  $\lambda_{(m)}$ . Sobre os eixos principais o tensor tensão  $\sigma_{(s)b}^a$ , que continha apenas componentes de tensão de cisalhamento, possuirá somente componentes de tensão normal, ou seja, as deformações ao longo de tais eixos são simples translações das faces do submarino.

Assim, em virtude de  $\lambda_{(1)}$  ser nulo e o correspondente autovetor  $w_{(1)}^a$  ter a mesma direção de  $Y^a$ , concluímos que não há qualquer deformação na face do submarino cuja normal é representada por  $w_{(1)}^a$ .

Os autovalores  $\lambda_{(2)}$  e  $\lambda_{(3)}$  fornecem a prescrição necessária para que possamos minimizar as tensões sobre o submarino devido à existência do tensor  $\sigma_{(s)b}^a$ . Quanto menor o valor absoluto deles, menor será a taxa de deformação e, conseqüentemente, menor é a deformação. Desde que  $v \leq v_0$  nesta região de transição do movimento do submarino, teremos

$$|\lambda_{(2)}| = |\lambda_{(3)}| \leq \frac{v_0 A_{(l)} e^{-\alpha Z}}{1 - v_0^2 e^{-2\alpha Z}} . \quad (5.64)$$

Evidentemente,  $|\lambda_{(2)}|$  e  $|\lambda_{(3)}|$  são tanto maiores quanto mais profundo estiver o nosso submarino. Logo, os efeitos de deformação serão mais agudos na face inferior do submarino caracterizada pelo plano ortogonal a  $Z = Z_{inf}$ , onde  $Z_{inf} < Z_{sup} < 0$ , o que nos permite restringir nossa análise para este setor do submarino.

Existem três condições em que a equação (5.64) pode ser satisfatoriamente minimizada. A primeira consiste em assumirmos que a velocidade do submarino quando em movimento uniforme é suficientemente baixa, isto é,  $v_0 \ll e^{\alpha Z}$ . A segunda possibilidade é posicionarmos o submarino numa região de pequena aceleração própria estática quando comparada à distância própria ao longo do eixo  $Z$ , isto é,  $A_{(l)} \ll 1/\Delta l_{(s)}$ . Por fim, a terceira e última possibilidade é afirmarmos que o submarino seja suficientemente fino, ou seja,  $\Delta l_{(s)} \ll 1/\alpha$ , como inicialmente havíamos suposto.

Nesta etapa no estudo do efeito submarino obtivemos as condições necessárias

para garantir a estabilidade do submarino ao percorrer a região de transição. Estabelecido isso, o próximo passo será estudarmos qual o comportamento dinâmico do movimento do submarino. Em outras palavras, que tipo de forças atuam no submarino e qual é o valor da resultante desta ação.

### 5.2.2 A fase de movimento uniforme do submarino

Após a fase de transição ( $T > T_{unif}$ ), todas as partes do submarino seguirão curvas isométricas associadas ao campo de Killing  $\eta^a = T^a + v_0 X^a$ . Portanto, cada parte do submarino possui uma quadrivelocity dada por

$$V_{(s)}^a = \frac{1}{\eta} (T^a + v_0 X^a) . \quad (5.65)$$

Observa-se que nesta fase do movimento a condição de “corpo rígido”, (5.40), é inteiramente verificada.

A trajetória tipo-tempo descrita por cada parte do submarino ao longo do eixo  $X$  é obtida pela integração de  $v_0 = dX/dT$

$$\int_{X_{unif}}^X dX' = v_0 \int_{T_{unif}}^T dT' ,$$

logo,

$$X(T) = X_0 \sqrt{1 - v_0^2 e^{-2\alpha Z_0}} + v_0 T , \quad (5.66)$$

onde  $v(X^\mu) = v_0$ .

O quadrivetor aceleração decorrente da quadrivelocity (5.65) é simplesmente dado por

$$A_{(s)}^b = \frac{\nabla^b \eta}{\eta} = \frac{\alpha e^{2\alpha Z}}{\eta^2} g^{bZ} , \quad (5.67)$$



onde  $\eta = e^{\alpha Z} \sqrt{1 - v_0^2 e^{-2\alpha Z}}$ . O módulo desta quadriaceleração é

$$A_{(s)} = \frac{\alpha e^{\alpha Z}}{\eta^2} , \quad (5.68)$$

que se reduz a  $A_{(l)}$  quando  $v_0 \rightarrow 0$ . Esta é a aceleração própria do submarino quando em movimento uniforme ao longo do eixo  $X$ .

No entanto, a aceleração própria acima obtida é independente do particular corpo em questão. Isto significa que qualquer corpo seguindo a curva isométrica dada por  $\eta^a$  terá a aceleração própria (5.68). Portanto, é interessante sabermos se a intensidade da aceleração própria que um corpo experimenta quando em movimento (ao longo do eixo  $X$ ) é maior ou menor que aquela quando tal corpo permanece estático. Para averiguarmos esta questão utilizaremos a definição do momento linear associado a este movimento.

O escalar momento linear é definido como

$$\mathcal{P} = mU^a X_a , \quad (5.69)$$

onde  $m$  é a massa do corpo. Observando que a quadrivelocidade  $U^a$  desse corpo é idêntica àquela do submarino (5.65), temos

$$\mathcal{P} = \frac{mv_0}{\eta} . \quad (5.70)$$

Esta quantidade é uma constante ao longo da trajetória tipo-tempo  $X(T)$  para um dado valor da coordenada  $Z$ . ( $V_{(s)}^a \nabla_a \mathcal{P} = 0$ .)

Podemos reescrever a equação acima para a velocidade  $v_0$ . Assim,

$$v_0^2 = \left( \frac{1}{1 + \frac{\mathcal{P}^2}{m^2}} \right) \frac{e^{2\alpha Z} \mathcal{P}^2}{m^2} . \quad (5.71)$$

Substituindo este resultado na equação para a aceleração própria  $A_{(s)}$ , teremos

$$\begin{aligned} A_{(s)} &= \alpha e^{-\alpha Z} \left( 1 + \frac{\mathcal{P}^2}{m^2} \right) \\ &= A_{(l)} \left( 1 + \frac{\mathcal{P}^2}{m^2} \right) , \end{aligned} \quad (5.72)$$

onde empregamos a equação (5.23).

A informação contida nesse resultado é a seguinte: um observador em movimento uniforme ao longo do eixo  $X$ , para um dado valor da coordenada  $Z = Z_0$ , experimentará uma força sobre ele maior do que aquela que teria se permanecesse estático naquela coordenada  $Z_0$ . Observe que ao contrário do espaço-tempo de Schwarzschild, em que tínhamos um termo associado ao momento (angular) cuja contribuição era oposta ao termo devido à aceleração estática, aqui há apenas o termo referente ao acoplamento não trivial entre a aceleração estática e o momento ( $A_{(l)}\mathcal{P}^2/m^2$ ), cuja existência é genuinamente relativística. A ausência de um termo exclusivamente devido ao momento está de acordo com o fato do espaço-tempo de Rindler possuir simetria plana, justificando a sua utilização aqui.

Agora, examinaremos o comportamento dinâmico do submarino ao locomover-se na camada líquida segundo a trajetória  $X(T)$ . Inicialmente,  $v_0 = 0$ , o submarino se encontra num estado de equilíbrio hidrostático com a camada líquida numa dada posição caracterizada pela coordenada  $Z = Z_0$ . Isso significa dizer que a força devido à ação do campo gravitacional é exatamente cancelada pela força de empuxo induzida pela presença do líquido. Em outras palavras, a densidade de massa do submarino  $\rho_{(s)}$  é igual à densidade do líquido  $e_{(l)}$  deslocado por ele,  $\rho_{(s)} = e_{(l)}$ . Desta forma, a presença da camada líquida tem por papel eliminar a contribuição

gravitacional no balanço de forças.

A força necessária a ser empregada pelos motores do submarino para que ele se mantenha na trajetória  $X(T)$ , segundo o seu centro de massa  $O$ , será

$$F_{(mov)}^O = m_{(s)} A_{(s)} \quad , \quad (5.73)$$

onde  $m_{(s)}$  é a massa do submarino. Aqui, nós consideramos que as variações de  $\eta$  e  $d\eta/dl$  são muito menores do que seus valores médios.

Contudo, o empuxo sobre o submarino devido à diferença de pressão exercida pelo líquido sobre suas faces implicará uma força extra, que como resultado representará uma economia (ou gasto) de energia empregada pelos motores do submarino a fim de mantê-lo em sua trajetória.

A pressão localmente exercida pelo líquido sobre cada face do submarino é dada por

$$\begin{aligned} P(Z_{inf}/Z_{sup}) &= T_{(l)}^{\mu\nu}(Z_{inf}/Z_{sup}) N_{\mu}(Z_{inf}/Z_{sup}) N_{\nu}(Z_{inf}/Z_{sup}) \\ &= p_{(l)}(Z_{inf}/Z_{sup}) \quad , \end{aligned} \quad (5.74)$$

onde  $T_{(l)}^{ab}$  é o tensor energia-tensão do líquido que devido ao seu caráter de fluido perfeito é simplesmente aquele dado pela equação (4.7), e  $N^a = e^{-\alpha Z} (\partial_Z)^a$  é um quadri vetor tipo-espaço unitário ortogonal à quadrivelocidade do submarino. Portanto, tal pressão é simplesmente a pressão própria do líquido.

A força de empuxo é obtida pela transmissão, através da estrutura do submarino, da pressão acima calculada até o seu centro de massa  $O$  (ou algum ponto arbitrário no interior do submarino). A prescrição necessária para isto é aquela expressa por

(4.35). Assim,

$$\begin{aligned} F_e^O &= \frac{A}{\eta} \left[ \eta (Z_{sup}) p_{(l)} (Z_{sup}) - \eta (Z_{inf}) p_{(l)} (Z_{inf}) \right] \\ &\simeq \frac{V_{(s)}}{\eta} \frac{d(\eta p_{(l)})}{dl} , \end{aligned} \quad (5.75)$$

onde  $V_{(s)}$  é o volume do submarino e  $dl$  é a diferencial da distância própria ao longo da direção do eixo  $Z$ . Além disso, nossa hipótese de um submarino fino garante que a expressão acima seja válida até termos de terceira ordem na altura própria do submarino.

Logo, a força total que age no centro de massa do submarino será

$$\begin{aligned} F_M^O &= F_{mov}^O + F_e^O \\ &= \frac{m_{(s)}}{\eta} \frac{d\eta}{dl} + \frac{V_{(s)}}{\eta} \frac{d(\eta p_{(l)})}{dl} . \end{aligned} \quad (5.76)$$

Pela condição de equilíbrio hidrostático, (4.25), podemos reescrever esta equação como

$$F_M^O = V \left[ (\rho_{(s)} + p_{(l)}) A_{(s)} - (e_{(l)} + p_{(l)}) A_{(l)} \right] . \quad (5.77)$$

Mas  $\rho_{(s)} = e_{(l)}$ , e esta equação se reduz a

$$F_M^O = V (e_{(l)} + p_{(l)}) [A_{(s)} - A_{(l)}] . \quad (5.78)$$

Entretanto, sabemos como a aceleração  $A_{(s)}$  está relacionada com a aceleração  $A_{(l)}$  por meio da equação (5.72). Assim,

$$F_M^O = V (e_{(l)} + p_{(l)}) \frac{A_{(l)} \mathcal{P}^2}{m_{(s)}^2} , \quad (5.79)$$

que pela equação (4.70) resulta em

$$F_M^O = V (e_{(l)} + p_{(l)}) A_{(l)} \frac{v_0^2 e^{-2\alpha Z}}{1 - v_0^2 e^{-2\alpha Z}} . \quad (5.80)$$

Portanto, para que o submarino descreva sua trajetória ao longo de  $X(T)$ , é necessário que seus motores imprimam uma força igual a  $F_M^O$ , que é contrária à tendência natural da força extra que surge em virtude de seu movimento ao longo do eixo  $X$ .

A força  $F_M^O$  apresenta duas propriedades importantes. A primeira propriedade diz respeito ao princípio de Arquimedes. Quando tomamos o limite  $v_0 \rightarrow 0$  a equação (5.80) torna-se nula, o que simplesmente confirma a condição inicial que atribuímos ao submarino. A outra propriedade refere-se à independência da necessidade de uma camada líquida, cuja informação de sua existência esta embutida na presença da pressão  $p_{(l)}$ . Então, anulando  $p_{(l)}$  e sustentando o submarino com cabos a partir da superfície ( $Z = 0$ ), a força  $F_M^O$  resultante será aquela devida apenas à contribuição do termo genuinamente relativístico expresso em (5.72).

O estudo detalhado apresentado neste capítulo sobre a força centrífuga relativística e o efeito submarino servirá de introdução ao próximo capítulo, em que formalizaremos uma nova proposta de experimento mental baseada nestes resultados para testar a segunda lei generalizada.

## Capítulo 6

### Um novo experimento mental para testar a segunda lei generalizada

O capítulo precedente apresentou alguns fenômenos cujo os fundamentos estão enraizados na Teoria da Relatividade Geral.

A existência de tais fenômenos nos motiva a iniciarmos um estudo sobre a validade da segunda lei generalizada, na mesma linha dos experimentos mentais, quando uma pequena caixa contendo algum tipo de matéria ou radiação orbita um buraco negro de Schwarzschild.

Este capítulo será inteiramente dedicado à proposta de um novo experimento mental que, no espírito do trabalho de Unruh e Wald, incorpore esses fenômenos.

#### 6.1 Uma descrição sobre o novo experimento mental

A nossa proposta de experimento mental explora o comportamento não trivial da força centrífuga relativística no contexto do efeito submarino.

Inicialmente assumiremos a mesma estratégia do trabalho de Unruh e Wald, ou seja, um agente externo descerá uma pequena caixa até o ponto de flutuação, onde a densidade de energia da caixa (paredes+conteúdo),  $E_0/V$ , é igual à densidade de

energia da radiação térmica deslocada pela presença da caixa. Neste ponto, a força líquida (4.41) que atua sobre a caixa é nula.

É importante observarmos que esta pequena caixa satisfaz todas aquelas hipóteses mencionadas no início da seção 4.3. Além disso, será acrescentadas mais algumas condições necessárias para garantirmos a estabilidade estrutural da caixa em decorrência de seu movimento, assim como foi estabelecido para o submarino na subseção 5.2.1.

No ponto de flutuação, o agente externo localizado no infinito fornecerá à caixa uma certa quantidade de energia a fim de colocá-la em movimento uniforme ao longo da direção azimutal ( $\phi$ ). De um modo geral, esta quantidade de energia ganha pela caixa na forma cinética não pode ser arbitrária, pois o escalar do tensor tensão associado a ela pode se tornar significativo, o que provocaria deformações intensas na caixa.

Um outro aspecto relevante do movimento desta caixa é a sua identificação como um espelho em movimento imerso num banho térmico. Novamente, para uma velocidade moderada da caixa durante a fase de aceleração, qualquer efeito de criação de partículas poderá ser desprezado. Mesmo assim, independentemente do estado de movimento da caixa, tal movimentação pode transferir energia à radiação térmica gerando um aumento de entropia ordinária externa ao buraco negro. Em vista de testarmos ao máximo a segunda lei generalizada da termodinâmica, proporemos um estratagema simples para eliminarmos este inconveniente.

O movimento uniforme azimutal da caixa induzirá uma força extra sobre ela que, quando o ponto de flutuação estiver localizado abaixo da coordenada radial  $r = 3M$ ,

permitirá à caixa descer além desse ponto, atingindo um novo ponto de flutuação. Nesse caso, mais energia será estocada no infinito pelo agente externo na forma de trabalho às custas do efeito centrífugo relativístico.

Será exatamente a relação custo/benefício entre a energia cedida à caixa para movimentá-la e a energia extraída dela por meio da ação da força centrífuga relativística, ambas associadas ao agente externo, que este poderá afirmar se o novo experimento mental viola ou não a segunda lei generalizada da termodinâmica.

## 6.2 A fase de transição do movimento da caixa

A fase de transição do movimento azimutal da caixa corresponde ao período que compreende o estado em que a caixa permanece estática e o seu estado de movimento uniforme.

Durante esta fase, a velocidade da caixa na direção azimutal será uma função das coordenadas,  $\omega = d\phi/dt = \omega(x^\alpha)$ .

Pela condição de não expansividade volumétrica da caixa,

$$\Theta_{(c)} = \nabla_a v_{(c)}^a \ , \quad (6.1)$$

obtemos uma equação diferencial para  $\omega$ ,

$$\frac{\partial \omega}{\partial \phi} = -\frac{r^2}{\chi^2} \omega \frac{\partial \omega}{\partial t} \ , \quad (6.2)$$

cujas soluções são

$$\omega = \frac{\chi^2 t}{r^2 \phi} \ . \quad (6.3)$$

O fato de cada uma das partes da caixa não seguir curvas isométricas implica a existência de um tensor tensão associado a ela, cuja representação matricial, segundo



a equação (5.41), é dada por

$$\sigma_{(c)\nu}^{\mu} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_{(c)r}^t & 0 & 0 \\ \sigma_{(c)t}^r & 0 & 0 & \sigma_{(c)\phi}^r \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{(c)r}^{\phi} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (6.4)$$

onde

$$\sigma_{(c)r}^t = \frac{\omega^2}{\eta^3 \chi^2} (3M - r), \quad (6.5)$$

$$\sigma_{(c)t}^r = -\chi^4 \sigma_{(c)r}^t, \quad (6.6)$$

$$\sigma_{(c)r}^{\phi} = \frac{\omega}{\eta^3 r^2} (3M - r), \quad (6.7)$$

$$\sigma_{(c)\phi}^r = r^2 \chi^2 \sigma_{(c)r}^{\phi}. \quad (6.8)$$

O escalar  $\sigma_{(c)}$  associado a esta matriz será

$$\begin{aligned} \sigma_{(c)}^2 &= \sigma_{(c)t}^r \sigma_{(c)r}^t + \sigma_{(c)r}^{\phi} \sigma_{(c)\phi}^r \\ &= \frac{(3M - r)^2 \omega^2}{r^2 \eta^4}. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Portanto, o módulo deste escalar é

$$|\sigma_{(c)}| = a_{(r)} \sqrt{\left(3 - \frac{r}{M}\right)^2 \frac{\omega r / \chi}{1 - (\omega r / \chi)}}, \quad (6.10)$$

onde fizemos uso da equação (4.22) para escrevermos  $a_{(r)}$ .

Assim como no caso do submarino, a quantidade acima caracteriza o módulo de dois autovalores associados à matriz do tensor tensão da caixa. Tais autovalores definem a taxa de deformação ocorrida na caixa durante esta fase de seu movimento.

Logo, para que tais efeitos de deformação sejam minimizados, devemos avaliar quais são as condições em que a equação (6.10) assume valores próximos de zero.

Há pelo menos três maneiras diferentes para execurtarmos esta tarefa, mas somente uma despertará o nosso interesse.

Quando a órbita do movimento circular da caixa for caracterizada pelo raio  $r = 3M$ , a equação (6.10) será identicamente nula. No entanto, neste caso não será possível usufruirmos da força centrífuga relativística, o que concordaria com o fato de o escalar do tensor tensão ser nulo, já que apenas a força gravitacional estaria presente.

Uma outra possibilidade seria aquela em que o ponto de flutuação estivesse muito distante do horizonte de eventos. Isso implicaria um campo gravitacional mais fraco, que por sua vez reduziria o valor de (6.10). Entretanto, é razoável supormos que a relação custo/benefício seja mais dramática quando a caixa estiver mais próxima do horizonte.

A única alternativa interessante será assumirmos que a velocidade final da caixa seja suficientemente moderada, isto é,  $\omega_0 \ll \chi/r$ , onde  $\omega < \omega_0$ . Evidentemente, a aproximação de uma caixa muito fina está implícita em toda discussão acima.

### **6.3 Sobre a questão dos espelhos em movimento num fluido térmico**

Para que possamos confinar a radiação térmica no interior da caixa, é necessário que as paredes da caixa sejam compostas de algum material refletor, isto é, espelhos. Isto quer dizer que haverá uma interação natural entre as paredes da caixa e a radiação Hawking que provém do buraco negro.

Há pelo menos dois aspectos desta interação que devemos analisar. Quando em

movimento, a caixa transferirá momento linear à radiação, implicando um aumento de entropia da mesma. Esta entropia não é facilmente computável, mas seguramente diminui nossa expectativa de testarmos a segunda lei generalizada ao limite. Assim, torna-se necessário determinarmos de que maneira esse processo de transferência ocorre, segundo as faces da caixa paralela e ortogonal ao seu movimento, e como podemos minimizá-lo.

Para estudarmos a interação entre a radiação térmica e uma das faces da caixa paralela ao seu movimento, adotaremos a aproximação da ótica geométrica, que é perfeitamente aplicável a este problema. A justificativa para essa abordagem repousa no fato de a temperatura da radiação Hawking, experimentada pelas faces da caixa, ser muito alta nas proximidades do horizonte de eventos, pois o fator de deslocamento gravitacional para o vermelho nesta região é muito pequeno. Desta forma, o comprimento de onda associado à radiação térmica será menor que a menor dimensão linear da caixa.

A região do espaço-tempo onde ocorre essa interação pode ser vista localmente como um espaço-tempo plano. Desta forma, podemos tratar esta questão no âmbito do espaço-tempo de Minkowski.

Definiremos um sistema de coordenadas cartesiano de maneira que a face da caixa esteja inteiramente contida no plano ortogonal ao eixo  $z$ , ou seja, o vetor normal à face da caixa coincidirá com o vetor unitário na direção  $z$ . Além disso, permitiremos que esta face se desloque apenas na direção do eixo  $y$ . Logo, um observador em repouso neste referencial atribuirá uma quadrivelocidade  $u_{(f)}^b$  para a

face da caixa, que será nominalmente

$$u_{(f)}^b = \gamma \left( (\partial_t)^b + \beta (\partial_y)^b \right) , \quad (6.11)$$

onde  $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$  é o fator de normalização desta quadrivelocidade.

O quadrivetor de onda associado à onda plana, que representa algum campo livre não-massivo, incidente na face da caixa (paralela ao seu movimento) será, em coordenadas esférico-polares,

$$(k_i)^\mu = 2\pi\nu_i (1, \cos\phi_i \sin\theta_i, \sin\phi_i \sin\theta_i, -\cos\theta_i) , \quad (6.12)$$

onde  $\theta_i$  é o ângulo entre  $(k_i)^\mu$  e o eixo  $z$ , e  $\phi_i$  é o ângulo entre a projeção de  $(k_i)^\mu$  no plano  $xy$  e o eixo  $x$ . Observamos que o índice  $i$  rotula as quantidades que caracterizam a onda plana incidente

Similarmente, quando esta onda plana é refletida o vetor de onda correspondente será

$$(k_r)^\mu = 2\pi\nu_r (1, \cos\phi_r \sin\theta_r, \sin\phi_r \sin\theta_r, \cos\theta_r) , \quad (6.13)$$

onde  $\theta_r$  é o ângulo entre  $(k_r)^\mu$  e o eixo  $z$ , e  $\phi_r$  é o ângulo entre a projeção de  $(k_r)^\mu$  no plano  $xy$  e o eixo  $x$ . Observamos que o índice  $r$  rotula as quantidades que caracterizam a onda plana refletida.

Sejam três quadrivetores unitários tipo-espaço ortogonais à quadrivelocidade da face da caixa,

$$(x_1)^a = (\partial_x)^a , \quad (6.14)$$

$$(x_2)^a = \gamma \left( \beta (\partial_t)^b + (\partial_y)^b \right) , \quad (6.15)$$

$$(x_3)^a = (\partial_z)^a . \quad (6.16)$$

Então, a conservação do momento linear para esta colisão exige que as seguintes equações sejam verificadas:

$$(k_i)^\mu(x_1)_\mu = (k_r)^\mu(x_1)_\mu$$

$$\nu_i \cos \phi_i \sin \theta_i = \nu_r \cos \phi_r \sin \theta_r \quad , \quad (6.17)$$

$$(k_i)^\mu(x_2)_\mu = (k_r)^\mu(x_2)_\mu$$

$$\nu_i (\beta - \sin \phi_i \sin \theta_i) = \nu_u (\beta - \sin \phi_r \sin \theta_r) \quad , \quad (6.18)$$

$$(k_i)^\mu(x_3)_\mu = -(k_r)^\mu(x_3)_\mu$$

$$\nu_i \cos \theta_i = \nu_r \cos \theta_r \quad . \quad (6.19)$$

As equações acima expressam a conservação do momento linear para cada uma daquelas direções. Além delas, há uma quarta equação associada à conservação de energia,

$$(k_i)^\mu u_{(f)\mu} = (k_r)^\mu u_{(f)\mu}$$

$$\nu_i (1 - \beta \sin \phi_i \sin \theta_i) = \nu_u (1 - \beta \sin \phi_r \sin \theta_r) \quad . \quad (6.20)$$

No entanto, temos quatro equações para apenas três variáveis  $(\nu_r, \phi_r, \theta_r)$ . Isto é mais que o suficiente para escrevermos aqueles parâmetros em função de seus respectivos valores de incidência.

Multiplicando a equação (6.18) pelo fator  $\beta$  e subtraindo deste resultado a equação (6.20), obtemos

$$\nu_i (1 - \beta^2) = \nu_r (1 - \beta^2) \quad ,$$

ou seja,

$$\nu_i = \nu_r \quad . \quad (6.21)$$

Logo, pela equação (6.19), temos

$$\theta_i = \theta_r \quad . \quad (6.22)$$

Por fim, levando estes dois últimos resultados à equação (6.17), temos

$$\phi_i = \phi_r \quad . \quad (6.23)$$

Conseqüentemente,

$$(k_i)^\mu = (k_r)^\mu \quad . \quad (6.24)$$

Portanto, as (quatro) faces da caixa que são paralelas à direção de seu movimento não perturbam o ambiente térmico ao seu redor, em virtude deste movimento. Assim, tais faces não contribuirão para uma possível geração de entropia externa ao buraco negro.

Contudo, certamente este não será o caso para as duas faces da caixa que são perpendiculares ao seu movimento. Para o simples caso em que a incidência ocorre normalmente ( $\phi_i = 0$  e  $\theta_i = 0$ ) à face dianteira da caixa, cujo movimento se desenvolve na direção oposta à onda plana incidente, a frequência da onda plana refletida será

$$\nu_r = \left( \frac{1 + \beta}{1 - \beta} \right) \nu_i \quad , \quad (6.25)$$

ou seja,  $\nu_r > \nu_i$ . Já com respeito à face traseira, que se movimenta na mesma direção da onda plana incidente, a frequência da onda plana refletida será

$$\nu_r = \left( \frac{1 - \beta}{1 + \beta} \right) \nu_i \quad , \quad (6.26)$$

ou seja,  $\nu_r < \nu_i$ .

Estes últimos resultados consolidam nossa preocupação com relação à produção de entropia devido à movimentação da caixa. Mas proporemos um esquema que elimina este problema.

Ao invés de descermos uma única caixa, desceremos uma coleção destas caixas justapondo-as de maneira a constituir um “anel”. A este “anel de caixas” será imprimida velocidade azimutal. O arranjo acima exposto permite que eliminemos a interação entre o banho térmico e as faces dianteira e traseira da caixa, responsáveis pela geração de entropia<sup>1</sup>.

Apesar de implicitamente invocarmos este arranjo, o nosso estudo se desenvolverá sem a sua menção explícita, ou seja, o nosso enfoque estará dirigido para apenas uma caixa, pois toda a análise que se segue é facilmente generalizada para a coleção de caixas.

## 6.4 A força resultante durante o movimento azimutal

O movimento azimutal da caixa induz sobre ela uma nova força além daquela de origem gravitacional, como vimos na seção 5.1.

Portanto, quando o agente externo concede à caixa uma certa quantidade de energia cinética, a força localmente exercida por ele sobre a caixa, segundo o centro de massa  $O$ , será

$$F_{loc}^O = \frac{E_0}{\eta} \frac{d\eta}{dl} , \quad (6.27)$$

---

<sup>1</sup>Como será visto na próxima seção, a medida que este arranjo aproxima-se do buraco, fortes tensões surgem sobre a caixa ( e paredes) de modo a aumentar sua massa de repouso. No entanto, esse efeito, quando considerado, apenas reduz nossa tentativa de testarmos a SLGT em seu extremo, pois dificultaria a obtenção do limite (4.31).

onde  $\eta = \sqrt{\chi^2 - \omega_0^2 r^2}$ , conforme a equação (5.7).

A contribuição devida à radiação térmica, sob a forma de uma força de empuxo, para a força resultante sobre a caixa será

$$F_e^O = \frac{V E_0}{\eta} \frac{d(\eta p(r))}{dl}, \quad (6.28)$$

o que está de acordo com a equação (5.75). Devemos lembrar que a pressão que aparece na equação acima é aquela localmente medida por um observador estático naquela posição, isto é, a pressão própria do fluido.

É importante observarmos que tanto  $F_{loc}^O$  quanto  $F_e^O$  são quantidades que dependem apenas da coordenada radial de Schwarzschild. Portanto, a combinação destas forças aponta na direção radial. Assim,

$$\begin{aligned} F_T^O &= F_{loc}^O + F_e^O \\ &= \frac{E_0}{\eta} \frac{d\eta}{dl} + \frac{V E_0}{\eta} \frac{d(\eta p(r))}{dl}, \end{aligned} \quad (6.29)$$

onde  $(F_T^O)^a = F_T^O n^a$ , para  $n^a = \chi(\partial_r)^a$ .

Notavelmente, dois observadores distintos, um co-móvel à caixa em movimento circular uniforme e o outro estático situado na coordenada radial que define aquela órbita, concordam quanto à intensidade da força  $F_T^O$  que deve ser aplicada à caixa para mantê-la em movimento numa dada órbita fixa. Isto se deve ao fato de ambos possuírem em comum o quadri vetor  $n^a$  ortogonal às suas respectivas quadri velocidades<sup>2</sup>.

---

<sup>2</sup>Da mesma maneira que a pressão localmente medida da radiação térmica, numa dada coordenada  $r$ , será a mesma tanto para um observador estático quanto para um outro em movimento azimutal uniforme, ambos situados na mesma coordenada  $r$ .



A prescrição necessária para que a força  $F_T^O$  seja comunicada ao agente externo posicionado no infinito, será aquela expressa pela equação (4.35). Então, a força exercida pelo agente externo para sustentar a caixa em movimento, numa dada coordenada  $r$ , será

$$\begin{aligned} F_T^\infty &= \chi F_T^O \\ &= V \left[ \rho_{(c)} \frac{\chi}{\eta} \frac{d\eta}{dl} + \frac{\chi}{\eta} \frac{d(\eta p_{(r)})}{dl} \right] , \end{aligned} \quad (6.30)$$

onde o fator  $\chi/\eta$  satisfaz a seguinte propriedade:

$$\frac{\chi}{\eta} \geq 1 . \quad (6.31)$$

Podemos rescrever esta equação da seguinte maneira. Pela equação (5.7), teremos

$$F_T^\infty = V \left[ (\rho_{(c)} + p_{(r)}) \chi a + \chi \frac{dp_{(r)}}{dl} \right] , \quad (6.32)$$

que pela condição de equilíbrio hidrostático, (4.25), torna-se

$$F_T^\infty = V \left[ (\rho_{(c)} + p_{(r)}) \chi a - (e_{(r)} + p_{(r)}) \chi a_{(r)} \right] . \quad (6.33)$$

Finalmente, empregando a identidade obtida em (5.16), obtemos

$$\begin{aligned} F_T^\infty &= V \left[ (\rho_{(c)} - e_{(r)}) \chi a_{(r)} + (\rho_{(c)} + p_{(r)}) \frac{L^2}{E_0 r^4} (3M - r) \right] \\ &= F_{UW}^\infty + V (\rho_{(c)} + p_{(r)}) \frac{L^2}{E_0 r^4} (3M - r) . \end{aligned} \quad (6.34)$$

A expressão acima possui a boa propriedade de reduzir-se ao resultado de UW quando se faz o limite  $\omega_0 \rightarrow 0$ , pois isto implica  $L \rightarrow 0$  e o termo proporcional ao (quadrado) momento angular é anulado.

No ponto de flutuação  $l_1$  (ou  $r_1$ ), onde se desenvolve o movimento da caixa, a densidade própria da caixa é igual à densidade de radiação térmica deslocada. Por isso, a força aplicada pelo agente externo será

$$(F_T^\infty)_{r_1} = V \left( e_{1(r)} + p_{1(r)} \right) \frac{L^2}{E_0^2 r_1^4} (3M - r_1) . \quad (6.35)$$

Evidentemente, para  $r < 3M$ , esta força será positiva, o que significa dizer que a força empregada pelo agente externo visa impedir que a caixa afunde. Para  $r > 3M$ , a equação acima seria negativa, e a ação do agente externo seria de impedir que a caixa subisse.

O conhecimento do comportamento da força  $F_T^\infty$  é essencial para o cálculo do balanço energético do experimento mental por nós proposto, pois determinará a quantidade de energia da caixa disponível ao buraco negro no ponto de soldura.

## 6.5 A energia disponível ao buraco negro no ponto de soldura

Primeiramente, conforme o experimento mental de UW, o agente externo descerá a caixa até o ponto de flutuação  $l_1$ . Nesta etapa, ele estoca energia na forma de trabalho, que por esse motivo é positiva. Logo, o trabalho por ele realizado é simplesmente

$$W_1 = W'_{UW} > 0 , \quad (6.36)$$

onde  $W'_{UW}$  é definido pela equação (4.45)

Para que a caixa descreva uma órbita circular uniforme de raio  $l_1$  e velocidade azimutal  $\omega_0$  em torno do buraco negro de Schwarzschild, é necessário que o agente externo aplique um torque sobre ela de modo a transferir-lhe energia. Este torque

é caracterizado pela variação do momento angular da caixa, que era nulo quando ela permanecia estática em  $l_1$  e passa a ser diferente de zero ( $L$ ) quando ela adquire uma velocidade azimutal  $\omega_0$ , também em  $l_1$ .

O trabalho realizado por este torque pode ser calculado a partir da energia cinética ganha pela caixa em  $l_1$ . Esta energia cinética é definida como sendo a diferença entre as energias  $E_0\chi^2/\eta$  e  $E_0\chi$  no ponto  $l_1$ . Logo,

$$W_2 = -E_0\chi_1 \left( \frac{\chi_1}{\eta_1} - 1 \right) , \quad (6.37)$$

onde o sinal negativo garante que o trabalho  $W_2$  foi cedido à caixa (pelo agente externo).

Podemos ganhar alguma intuição desta definição de energia cinética apelando para o limite newtoniano. Neste limite, onde  $\chi \sim 1$ , a relação (5.17) é aproximada como

$$\frac{\chi}{\eta} \simeq 1 - \frac{1}{2} \frac{L^2}{E_0^2 r^2} ,$$

e o trabalho  $W_2$  assume a forma

$$(W_2)_{r \rightarrow \infty} \simeq \frac{L^2}{2E_0 r^2} . \quad (6.38)$$

Esta expressão é idêntica àquela obtida a partir da mecânica newtoniana. Além disso,  $L_{r \rightarrow \infty} \sim E_0 r^2 \omega_0$ , como se verifica a partir de (5.13).

Após a caixa estabelecer uma velocidade  $\omega_0$  uniforme, o agente externo permitirá que ela desça para além do ponto de flutuação  $l_1$ , até atingir um novo ponto de flutuação  $l_2$ , onde  $l_2 < l_1$  (ou  $r_2 < r_1$ ). Este novo ponto de flutuação é obtido a

partir da condição  $(F_T^\infty)_{l_2} = 0$ . Pela equação (6.33), obtemos

$$\rho_{(c)} = \left[ \frac{a(r)}{a} e_{(r)} - \left( 1 - \frac{a(r)}{a} \right) p_{(r)} \right]_{l_2} . \quad (6.39)$$

Observa-se que podemos estabelecer uma conexão entre os dois pontos de flutuação,  $l_1$  e  $l_2$ , a partir desta equação e da relação (4.48).

O trabalho realizado pelo agente externo nesta etapa será

$$\begin{aligned} W_3 &= - \int_{l_1}^{l_2} F_T^\infty dl \\ &= - \int_{l_1}^{l_2} F_{UW}^\infty dl - V \int_{l_1}^{l_2} \frac{L^2}{E_0} \left( \rho_{(c)} + p_{(r)} \right) \frac{3M - r}{\chi r^4} dr . \end{aligned} \quad (6.40)$$

O cálculo explícito de  $W_3$  não é possível, mas podemos retirar alguma informação da expressão acima. Desde que o deslocamento radial da caixa é negativo ( $l_2 - l_1 < 0$ ) e a força  $F_T^\infty$  aplicada pelo agente externo é positiva, concluí-se que este trabalho é positivo. Conseqüentemente, o agente armazena energia nesta fase.

Não obstante, todo o processo de descida será realizado mantendo o momento angular constante. Isto implica considerarmos que a velocidade azimutal é uma função da coordenada radial (além de  $\omega_0$ ). Explicitamente,

$$\omega^2(r_2) = \frac{r_1^4 \chi_2^2}{r_2^4 \chi_1^2} \left( \frac{\omega_0^2}{1 + \left[ \frac{r_1^2}{r_2^2} - 1 \right] \frac{\omega_0^2 r_1^2}{\chi_1^2}} \right) , \quad (6.41)$$

segundo as equações (5.13) e (5.15).

Portanto, o trabalho total realizado pelo agente externo neste processo será

$$W_T = W'_{UW} - |W_2| + W_3 . \quad (6.42)$$

A energia disponível ao buraco negro, antes da caixa ser solta para cair em seu interior, é dada pela lei de conservação de energia,

$$\epsilon_2^{min} = E_0 - W_T = \epsilon_1^{min} + |W_2| - W_3 , \quad (6.43)$$

onde fica implícito que  $W_3$  é uma função de  $l_2$ .

Contudo, vale a pena notar que o buraco negro terá um acréscimo de momento angular ( $L$ ), além do aumento de sua massa, em decorrência da absorção da caixa. A partir da equação (2.7) (com  $Q = 0$ ), a variação de entropia do buraco negro será

$$\Delta S_{bn} = \frac{\Delta M}{T_{(bn)}} + \frac{\Delta M^2}{2T_{(bn)}M} - \frac{\Delta J^2}{8T_{(bn)}M^3} + \mathcal{O}(\Delta M^3, \Delta J^3) . \quad (6.44)$$

Identificamos as variações de massa e momento angular do buraco negro como, respectivamente,

$$\Delta M = \epsilon_2^{min} ; \quad \Delta J = L . \quad (6.45)$$

Assim, como  $E_0 \ll M$ , os termos em segunda ordem na equação (6.44) podem ser desprezados.

Pelas equações (6.43) e (6.44), a variação de entropia do buraco negro neste processo é

$$\Delta S_{bn} = \frac{\epsilon_2^{min}}{T_{(bn)}} = \frac{\epsilon_1^{min}}{T_{(bn)}} + \left( \frac{|W_2| - W_3}{T_{(bn)}} \right) . \quad (6.46)$$

A variação da entropia generalizada neste processo será

$$\begin{aligned} \Delta S_G &= \Delta S_{bn} - S_0 \\ &= \left( V_{s_1(r)} - S_0 \right) + \left( \frac{|W_2| - W_3}{T_{(bn)}} \right) . \end{aligned} \quad (6.47)$$

Conseqüentemente, a relação entre a quantidade de energia  $W_2$  fornecida à caixa, na forma cinética pelo agente externo, e a quantidade de energia  $W_3$  estocada pelo agente às custas da força centrífuga relativística, quando a caixa é descida até o novo ponto de flutuação, gera uma forte tensão quanto à validade da segunda lei generalizada.

A esta relação custo/benefício será dedicada uma atenção especial na próxima seção.

## 6.6 Um método direto para o cálculo da variação de entropia do buraco negro

A integral definida por  $W_3$  não é factível sem o prévio conhecimento da função  $p_{(r)}(r)$ . Desta forma, o cálculo da diferença entre  $|W_2|$  e  $W_3$  fica em grande parte dificultado e, por sua vez, também fica dificultado o cálculo da variação da entropia do buraco negro neste experimento mental.

Embora não possamos determinar exatamente  $W_3$ , a diferença  $|W_2| - W_3$  pode ser obtida a partir de argumentos simples.

Ao invés de a caixa ser solta no segundo ponto de flutuação  $l_2$ , o agente externo a trará novamente para o seu laboratório no infinito. Esta tarefa exigirá dele pelo menos mais três trabalhos a serem realizados.

O primeiro desses trabalhos concerne ao ato do agente externo frear a caixa em  $l_2$ . Para este fim, o agente aplicará um novo torque à caixa, cujo efeito reduzirá  $\omega_0$  a 0. O modo pelo qual computaremos este trabalho será considerando a variação de energia cinética da caixa em  $l_2$ . Assim,

$$W_4 = E_0 \chi_2 \left( \frac{\chi_2}{\eta_2} - 1 \right) . \quad (6.48)$$

Evidentemente, este trabalho é positivo pois se trata de uma quantidade de energia que é extraída da caixa, em benefício do agente externo.

No final da seção 4.3 vimos que para o agente externo descer a caixa um pouco abaixo do ponto de flutuação é necessário que ele gaste parte de sua energia na forma

de trabalho. Portanto, após a caixa atingir o seu estado estático em  $l_2$ , o agente externo deverá recuperar aquela energia gasta ao retornar a caixa para o primeiro ponto de flutuação  $l_1$ . Logo,

$$\begin{aligned} W_5 &= - \int_{l_2}^{l_1} F_{UW}^{\infty} dl \\ &= V \left[ (\rho_{(c)} + p_{2(r)}) \chi_2 - (\rho_{(c)} + p_{1(r)}) \chi_1 \right] . \end{aligned} \quad (6.49)$$

Neste caso, a força aplicada pelo agente externo é negativa,  $F_{UW}^{\infty} < 0$ , enquanto o deslocamento da caixa ao longo da direção radial é positivo ( $l_2 - l_1 > 0$ ), o que implica uma quantidade de trabalho realizado positiva, ratificando a análise feita acima.

Por fim, resta-nos computar o trabalho realizado pelo agente externo em retornar a caixa para o infinito, a partir do ponto de flutuação  $l_1$ . Certamente esta quantidade de trabalho é negativa, e nominalmente dada por

$$W_6 = - \int_{l_1}^{\infty} F_{UW}^{\infty} dl + W_{\infty} = -W'_{UW} . \quad (6.50)$$

Este resultado é inteiramente compatível com o fato de que o trabalho líquido realizado pelo agente externo, em descer a caixa até o ponto de flutuação  $l_1$  e retorná-la ao seu laboratório, ser nulo em vista da adiabaticidade do processo.

O trabalho total executado em descer a caixa até o ponto de flutuação  $l_2$ , e depois retorná-la ao infinito é dado por

$$\begin{aligned} W_T &= W_1 - |W_2| + W_3 + W_4 + W_5 + W_6 \\ &= - |W_2| + W_3 + W_4 + W_5 . \end{aligned} \quad (6.51)$$

Contudo, a elaboração de nosso arranjo experimental (o “anel de caixas”) não

permite que a caixa transfira parte de sua energia à atmosfera térmica, em virtude de seu movimento. Essa característica deve incidir diretamente no trabalho total  $W_T$  pois, pelo motivo do processo total ser conservativo, a seguinte igualdade deve ser válida

$$W_T = 0 \ .$$

Assim,

$$|W_2| - W_3 = W_4 + W_5 \ . \quad (6.52)$$

Substituindo esta identidade na equação (6.46), a variação da entropia do buraco negro, após “engolir” a caixa solta pelo agente externo no ponto de flutuação  $l_2$ , será

$$\Delta S_{bn} = \frac{1}{T_{(bn)}} (\epsilon_1^{min} + W_4 + W_5) \ . \quad (6.53)$$

Conseqüentemente, a variação da entropia generalizada neste novo experimento mental, segundo algum observador assintótico, será dada por

$$\begin{aligned} \Delta S_G &= \Delta S_{bn} - S_0 \\ &= (V_{S_1(r)} - S_0) + \left( \frac{W_4 + W_5}{T_{(bn)}} \right) > 0 \ . \end{aligned} \quad (6.54)$$

Portanto, a nossa proposta de experimento mental está em acordo com a segunda lei generalizada; pelo menos por uma quantidade equivalente a  $(W_4 + W_5) / T_{(bn)}$  em relação ao experimento mental de UW.

## 6.7 Um roteiro para uma análise numérica

Esta seção tem por objetivo ratificar as conclusões feitas acima por meio de um estudo numérico deste problema.



A função pressão própria ( $p_{(r)}(r)$ ) da radiação (Hawking) térmica satisfaz a equação

$$p_{(r)} = \frac{1}{3} \frac{\pi^2}{15} \left( n_b + \frac{7}{8} n_f \right) \frac{T_{(bn)}^4}{\chi^4} . \quad (6.55)$$

Vamos supor que a caixa seja composta inteiramente de radiação eletromagnética, isto é,

$$E_0 = \frac{\pi^2}{15} V T_{(c)}^4 . \quad (6.56)$$

Apesar desta hipótese ser restrigente, sua utilização não afetará nossa conclusão.

Agora, devido ao fato de a massa  $M$  do buraco negro ser constante durante toda a fase de descida da caixa, podemos definir o parâmetro adimensional  $\lambda = r/M$  e reescrever a equação (6.30) como

$$F_T^\infty = \frac{E_0 \chi^2}{M \eta} \left[ \frac{d\eta}{d\lambda} + \frac{1}{3} \left( n_b + \frac{7}{8} n_f \right) \left( \frac{T_{(bn)}}{T_{(c)}} \right)^4 \frac{d}{d\lambda} \left( \frac{\eta}{\chi^4} \right) \right] . \quad (6.57)$$

O ponto de flutuação  $\lambda_1$  definido pela equação (4.48) será

$$\lambda_1 = 2 \left[ 1 - \sqrt{n_b + \frac{7}{8} n_f \left( \frac{T_{(bn)}}{T_{(c)}} \right)^2} \right]^{-1} . \quad (6.58)$$

A partir da condição  $F_T^\infty = 0$ , podemos determinar numericamente o novo ponto de equilíbrio  $\lambda_2$ , e verificar que  $\lambda_2 < \lambda_1$ .

O trabalho  $W_3$  será dado por

$$W_3 = - \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{F_T^\infty}{\chi} d\lambda . \quad (6.59)$$

Evidentemente, este cálculo é feito fixando o momento angular da caixa, que por sua vez é definido segundo o seu valor em  $\lambda_1$ ,

$$\frac{L}{E_0 M} = \frac{\lambda_1^2 \varpi_0}{\sqrt{\chi^2 - \lambda_1^2 \varpi_0^2}} , \quad (6.60)$$

onde  $\varpi_0 = M\omega_0$  é uma grandeza adimensional.

O trabalho  $W_2$  é simplesmente aquele dado em (6.37). Assim, segundo a equação (6.47), a variação de entropia generalizada será

$$\frac{\Delta S_G}{S_0} = \frac{3}{4} \left( \frac{|W_2| - W_3}{E_0} \right) \frac{T_{(c)}}{T_{(bn)}} + \left( n_b + \frac{7}{8}n_f - 1 \right) . \quad (6.61)$$

Neste tratamento, os parâmetros livres são  $n_b$ ,  $n_f$ ,  $\varpi_0$  e  $T_{(bn)}/T_{(c)}$ . Entretanto, este último parâmetro é escolhido de modo que o ponto de flutuação  $\lambda_1$  satisfaça a condição  $\lambda < 3$ .

Apresentamos abaixo o gráfico da variável variação de entropia generalizada neste processo por entropia inicial da caixa (ordenada) em função do momento angular  $L$  da caixa por unidade de energia inicial da caixa ( $E_0$ ) e do buraco ( $M$ ) (abscissa). Neste caso, consideramos que a radiação Hawking é composta apenas por um campo bosônico, isto é, radiação tipo corpo negro.

Portanto, podemos concluir a partir deste gráfico que o número de espécies de partículas presente na radiação Hawking não deve possuir papel relevante na questão da validade da segunda lei generalizada, pois, segundo a equação (6.61), a radiação Hawking deve ser constituída necessariamente por pelo menos um campo bosônico. Ao incluirmos outros campos nesta constituição, a variação da entropia generalizada por entropia da caixa será necessariamente positiva já para o caso em que a caixa não orbita o buraco negro (UW).

Um resultado idêntico a este (inclusive numericamente) é obtido por considerarmos a caixa inteiramente composta de radiação térmica, pois isto faz com que a dependência com o número de espécies de partículas nas expressões acima desa-

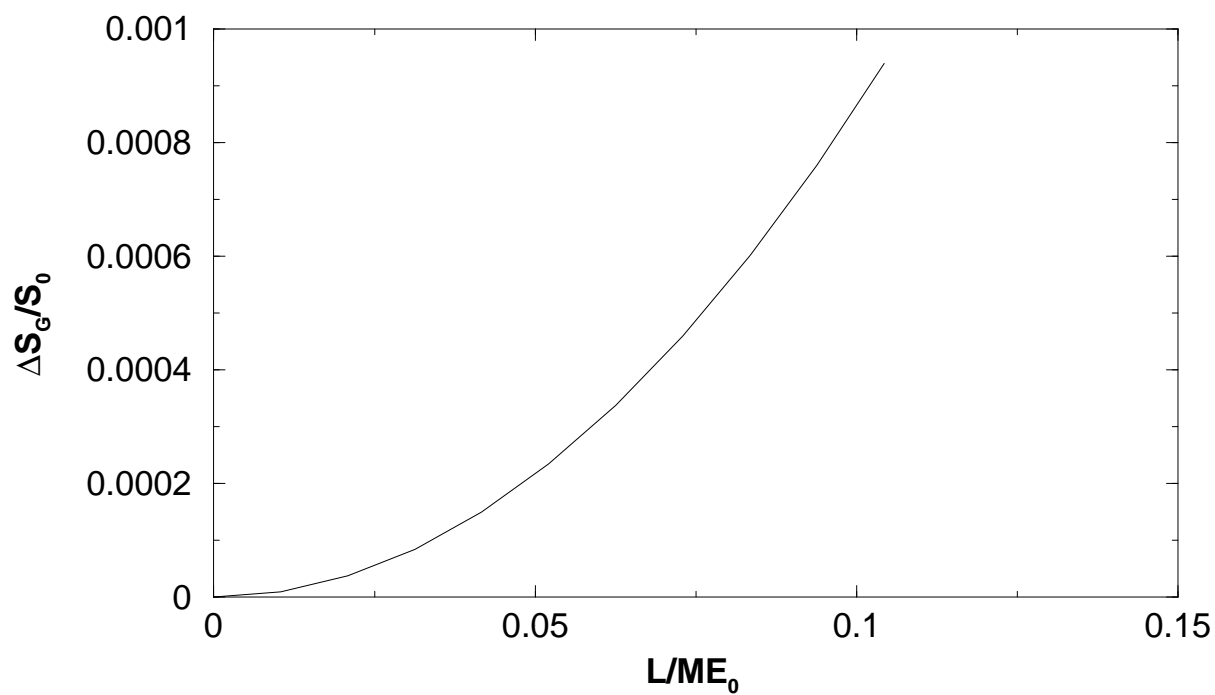


Figura 6.1: Gráfico da variável variação de entropia generalizada por entropia da caixa pela variável momento angular da caixa por energia da caixa e do buraco negro. Isto confirma a validade da segunda lei generalizada.

pareça.

## Capítulo 7

### Uma discussão final

Neste capítulo final apresentaremos algumas questões em aberto no que diz respeito à termodinâmica dos buracos negros. Para mais detalhes veja [22], [23].

Ao final, esperamos ter transmitido o sentimento que traduz à necessidade e a importância para a inteligência desse problema que, na visão desse autor, está distante de ser completamente esclarecido e, por isso, deve ser ainda um terreno de muito trabalho.

#### 7.1 Sobre o conceito de entropia em Relatividade Geral

As leis da termodinâmica ordinária não são leis fundamentais propriamente ditas, pois refletem a passagem para a descrição macroscópica de uma dinâmica microscópica mais fundamental, cujo sistema representativo é suficientemente complicado. A força e a utilidade dessas leis estão baseadas principalmente no fato de não dependerem explicitamente do entendimento da dinâmica microscópica do particular sistema e, por isso, tais leis possuem um caráter “universal”; ao menos para uma larga classe de sistemas.

O entendimento da origem das leis da termodinâmica usual baseia-se em sis-

temas, clássicos ou quânticos, que são compostos de muitos graus de liberdade, e cuja evolução temporal é governada pela dinâmica Hamiltoniana. É importante enfatizarmos a necessidade de uma noção bem definida de “translações temporais”, e que a Hamiltoniana  $H$  (e conseqüentemente a dinâmica) seja invariante sob estas “translações temporais”. Disto segue que a energia  $E$  do sistema é conservada [12].

Agora, em Relatividade Geral, uma noção apropriada de “translação temporal” está presente quando consideramos a dinâmica do sistema inserida num espaço-tempo de fundo cuja métrica possui um adequado grupo uniparamétrico de isometrias, e quando a Hamiltoniana deste sistema é invariante sob essas isometrias. Entretanto, tal estrutura é ausente em Relatividade Geral, pois a métrica não é um elemento próprio do espaço-tempo em si [6].

A ausência de qualquer rígida estrutura de translação temporal pode ser vista como responsável por tornar noções como “densidade de energia do campo gravitacional” mal definidas em Relatividade Geral. Provavelmente, a noção de uma “densidade de entropia do campo gravitacional” pode não ter sorte melhor. No entanto, ainda assim podemos empregar estruturas como translações temporais assintóticas para definir a noção de entropia total de um (assintoticamente plano) sistema isolado, do mesmo modo como se faz para a energia de tais sistemas.

Contudo, mesmo no contexto da teoria quântica de campos sobre um espaço-tempo de fundo que admita a simetria de translação temporal, tal que a “rígida” estrutura necessária para definir a noção de entropia esteja presente, existem fortes indícios da termodinâmica dos buracos negros, que mesmo o nosso presente conhecimento do significado da “entropia ordinária” da matéria é inadequado. Esta questão

será discutida na próxima seção.

## 7.2 A atmosfera térmica

A existência da “atmosfera térmica” em torno do buraco negro é crucial aos argumentos utilizados para validar a segunda lei generalizada [40].

Nas proximidades do buraco negro, assumimos que todos os campos estão em equilíbrio térmico com respeito à noção de translação temporal definida pelo campo vetorial de Killing  $t^a$ . Assim, para um observador seguindo uma órbita de  $t^a$  fora do buraco negro, a temperatura localmente medida (de todas as espécies de partículas) será aquela dada por (4.30).

Observa-se que esta proximidade do horizonte de eventos faz com que a temperatura possua um aspecto familiar. Desde que nesta região podemos fazer uso dos limites  $\chi \rightarrow l/4\pi$  e  $r \rightarrow 2M$ , pelo uso da equação (4.22) obtemos:  $T \rightarrow a_{(r)}/2\pi$ . Logo, neste limite, a equação (4.30) corresponde ao mesmo resultado obtido pelo efeito Unruh [43] em espaço-tempo plano.

Contudo, como  $T \rightarrow \infty$  quando  $r \rightarrow 2M$ , esta atmosfera térmica possuirá uma enorme densidade de entropia. Efetivamente, caso nenhum tipo de “remoção” seja introduzido, a densidade de entropia da atmosfera térmica será divergente. Isso conduziria a uma nova “catástrofe do ultravioleta”, em alegoria à antiga catástrofe que alavancou a teoria quântica<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup>Desde que um campo possui muitos graus de liberdade, parece natural que ele faça uma contribuição infinita à entropia. A antiga catástrofe do ultravioleta foi resolvida pela teoria quântica, que basicamente introduziu uma “remoção” na contribuição dos modos com energia maior do que  $kT$  à entropia, tal que para qualquer  $T$  somente um número muito grande, mas finito, de graus de liberdade são relevantes. A nova catástrofe do ultravioleta surge devido à quantidade arbitrariamente grande de deslocamentos gravitacionais para o vermelho, implicando um

Portanto, não é inteiramente claro o que a quantidade “ $S$ ” aparecendo na equação (3.7) deva representar para a matéria próxima, mas fora, do buraco negro. Questões que remetem ao fato de  $S$  incluir contribuições devido à atmosfera térmica ainda não foram compreendidas [23].

Contudo, apesar de  $S$  ser divergente a menos de uma “remoção”, as mudanças em  $S$  podem ser bem definidas [41], e isto é tudo o que é necessário para a formulação da segunda lei generalizada da termodinâmica.

### 7.3 O “paradoxo” da informação

A radiação Hawking introduziu um profundo problema sobre os nossos conceitos de Relatividade Geral e Mecânica Quântica.

A matéria colapsada que constitui um buraco negro pode ser imaginada sendo composta de algum estado quântico puro. Como mencionamos na seção 3.3, um buraco negro “evaporará” espontaneamente via processo Hawking num intervalo de tempo finito. Esta radiação é térmica, ou seja, é simplesmente um estado quântico misturado.

Logo, se as correlações entre o interior e o exterior do buraco negro não são restauradas durante o processo de evaporação, então pelo período que o buraco negro evapora completamente, um estado puro inicial evoluirá para um estado misturado, isto é, informação terá sido perdida.

Neste processo, o buraco negro tem funcionado como um catalizador de estados 

---

 número infinito de modos com energia menor do que  $kT$ . A resolução desta questão envolve a necessidade de uma “remoção” adicional para modos de comprimento de onda pequenos. Isto é esperado ocorrer à luz de uma teoria efetiva da gravitação quântica.

puros para estados misturados. Portanto, a presença de fortes campos gravitacionais violaria o princípio da unitariedade da teoria quântica.

Uma questão importante e em aberto em termodinâmica dos buracos negros é se esta conclusão permanecerá válida numa teoria completa da gravitação quântica[22], [23].

## 7.4 Um comentário final

A análise feita por UW considera apenas uma classe particular de experimentos mentais para testar a segunda lei generalizada, que envolvem a descida quase-estática de caixas até o horizonte de eventos.

A nossa proposta de experimento mental teve por objetivo estender esta fronteira, incluindo aqueles casos em que a caixa se movimenta nas proximidades do horizonte de eventos com uma componente espacial da quadrivelocidade pequena, mas não nula.

Evidentemente, desde que não temos uma prova geral para a segunda lei ordinária da termodinâmica<sup>2</sup>, não seria razoável almejarmos obter uma prova completamente geral para a segunda lei generalizada.

No entanto, argumentos gerais no escopo da aproximação semi-clássica [42] têm sido formulados para validar a SLGT em processos quase-estáticos arbitrários, e todos eles contam com a presença da atmosfera térmica em torno do buraco negro.

Em suma, nosso trabalho mostrou que existe uma base suficientemente forte para que possamos confiar na validade da segunda lei generalizada da termodinâmica.

---

<sup>2</sup>Para sistemas finitos, deveria existir sempre uma probabilidade não nula de violar a segunda lei ordinária.



## Apêndice A

### A introdução das constantes fundamentais

Neste apêndice reintroduziremos as constantes da natureza às grandezas físicas mais relevantes apresentadas no trabalho.

A prescrição geral para que possamos executar esta tarefa é apresentada abaixo:

$$M \longrightarrow \frac{GM}{c^2} ; \quad (\text{A.1})$$

$$Q \longrightarrow \frac{\sqrt{G}Q}{c^2} ; \quad (\text{A.2})$$

$$j \longrightarrow \frac{j}{c} , \quad (\text{A.3})$$

onde  $c$  é a constante da velocidade da luz no vácuo e  $G$  é a constante gravitacional de Newton.

Desta maneira, o raio de Schwarzschild é expresso explicitamente como

$$R_S = \frac{2GM}{c^2} \simeq 3 \times 10^5 \frac{M}{M_\odot} \text{cm} . \quad (\text{A.4})$$

Similarmente, a área do buraco negro de Schwarzschild, (2.4), será

$$A_S = 16\pi \left( \frac{GM}{c^2} \right)^2 \simeq 1,1 \times 10^{12} \left( \frac{M}{M_\odot} \right)^2 \text{cm}^2 . \quad (\text{A.5})$$

Outras grandezas importantes concernentes aos buracos negros de Schwarzschild são a temperatura e a entropia associadas, dadas, respectivamente, por

$$T_{(bn)} = \frac{\hbar c^3}{8\pi kGM} \simeq 6 \times 10^{-8} \text{K} , \quad (\text{A.6})$$

$$S_{bn} = \frac{1}{4} \frac{A_S}{L_p^2} \simeq 1,4 \times 10^{-61} \left( \frac{M}{M_\odot} \right)^2 \text{ erg K}^{-1} \quad (\text{A.7})$$

onde  $L_p$  é a distância de Planck ( $1,62 \times 10^{-33} \text{cm}$ ).

A constante de Stefan-Boltzmann é definida por

$$\sigma = \frac{\pi^2 k^4}{60 \hbar^3 c^3} \simeq 5,67 \times 10^{-5} \text{ erg cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ K}^{-4} \quad , \quad (\text{A.8})$$

onde

$$a = \frac{4\sigma}{c} \simeq 7,56 \times 10^{-15} \text{ erg cm}^{-3} \text{ K}^{-4} \quad . \quad (\text{A.9})$$

A taxa de evaporação é explicitamente definida por

$$\frac{dM}{dt} = -\frac{\sigma A T_{(bn)}^4}{c^2} \simeq -6,23 \times 10^{-42} \frac{M}{M_\odot} \text{ s} \quad , \quad (\text{A.10})$$

onde  $A = 4\pi R^2$  e  $R = 3^{3/2} R_S/2$  é o parâmetro de impacto aparente de um raio de luz [5].

A integração deste resultado resulta em

$$\int_M^0 dM = -6,23 \times 10^{-42} M_\odot \int_0^\tau dt$$

$$\tau \simeq 10^{74} \left( \frac{M}{M_\odot} \right)^3 \text{ s} \quad . \quad (\text{A.11})$$

Os valores utilizados para as constantes fundamentais são:

constante	valor
$c$	$3 \times 10^{10} \text{ cm s}^{-1}$
$G$	$6,67 \times 10^{-5} \text{ cm}^3 \text{ g}^{-1} \text{ s}^{-1}$
$\hbar$	$1,05 \times 10^{-27} \text{ cm}^2 \text{ g s}^{-1}$
$k$	$1,4 \times 10^{-16} \text{ erg K}^{-1}$

## Referências

- [1] G. E. A. Matsas, *Braz. J. Phys.* **34**, 170 (2004).
- [2] K. S. Thorne, *Black Holes and Time Warps*, (W. W. Norton Company, 1994).
- [3] R. M. Wald, *Space, Time and Gravity*, (University of Chicago Press, 1997); G. T. Horowitz e S. A. Teukolsky, *Rev. Mod. Phys.* **71**, 180 (1999); J. P. Luminet, astro-ph/9801252; S. W. Hawking, *Uma Breve História do Tempo Ilustrada*, (Albert Einstein Ltda, 1996).
- [4] C. W. Misner, K. S. Thorne e J. A. Wheeler, *Gravitation*, (W. H. Freeman and Company, 1973).
- [5] R. M. Wald, *General Relativity*, (University Chicago Press, 1984).
- [6] S. W. Hawking e G. F. R. Ellis, *The Large Scale Structure os Space-Time*, (Cambridge University Press, 1973).
- [7] G. E. A. Matsas, *Preliminaries to Quantum Fields Theory in Curved Space-times*, (I. F. T., 2002).
- [8] J. M. Bardeen, B. Carter e S. W. Hawking, *Commun. Math. Phys.* **31**, 161 (1973).

- [9] D. Christodolou, Phys. Rev. Lett. **25**, 1596 (1970); D. Christodolou e R. Ruffini, Phys. Rev. D **4**, 3552 (1971).
- [10] J. D. Bekenstein, Phys. Rev. D **7**, 2333 (1973).
- [11] J. D. Bekenstein, Phys. Today **january**, 24 (1980).
- [12] L. D. Landau e E. M. Lifshitz, *Course of Theoretical Physics* **5**, (Pergamon Press, 1958).
- [13] L. D. Landau e E. M. Lifshitz, *Course of Theoretical Physics* **8**, (Pergamon Press, 1960).
- [14] K. Huang, *Statistical Mechanics*, (John Wiley & Sons Inc., 1963).
- [15] R. M. Wald, Phys. Rev. D **56**, 6467 (1997).
- [16] R. Penrose e R. M. Floyd, Nature **229**, 177 (1971).
- [17] P. C. W. Davies, Rep. Prog. Phys. **41**, 1313 (1978).
- [18] S. W. Hawking, Nature **248**, 30 (1974); S. W. Hawking, Commun. Math. Phys. **43**, 199 (1975).
- [19] N. D. Birrel e P. C. W. Davies, *Quantum Fields in Curved Space*, (Cambridge University Press, 1982).
- [20] R. M. Wald, *Quantum Fields Theory in Curved Spacetimes and Black Holes Thermodynamics*, (University Chicago Press, 1994).

- [21] R. C. Tolman, *Relativity, Thermodynamics and Cosmology*, (Dover Publications Inc., 1987).
- [22] J. D. Bekenstein, quant-ph/0311049.
- [23] R. M. Wald, gr-qc/9912119.
- [24] B. R. Parker e R. J. MacLeod, Am. J. Phys. **48**, 1066 (1980).
- [25] F. Reif, *Fundamentals of Statistical and Thermal Physics*, (McGraw-Hill, 1985).
- [26] R. Bousso, Rev. Mod. Phys. **74**, 825 (2002).
- [27] J. D. Bekenstein e A. E. Mayo, Phys. Rev. D **61**, 024022 (1999); W. Quiu, B. Wang e E. Abdalla, Phys. Rev. D **64**, 027503 (2001); S. Hod, Phys. Rev. D **61**, 024018 (1999).
- [28] J. D. Bekenstein, Phys. Rev. D **30**, 1669 (1984); J. D. Bekenstein, Phys. Rev. D **23**, 287 (1981); M. Schiffer e J. D. Bekenstein, Phys. Rev. D **39**, 1109 (1989); J. D. Bekenstein, Phys. Rev. D **49**, 1912 (1994); J. D. Bekenstein, gr-qc/9409015; J. D. Bekenstein, gr-qc/0006003.
- [29] D. N. Page, gr-qc/0005111; D. N. Page, hep-th/0007237; D. N. Page, hep-th/0007238.
- [30] R. D. Sorkin, R. M. Wald e Z. J. Zhang, Gen. Rel. Grav. **13**, 1127 (1981).
- [31] P. Panangaden e R. M. Wald, Phys. Rev. D **16**, 929 (1977).

- [32] G. W. Gibbons e M. J. Perry, Proc. R. Soc. Lond. A **358**, 467 (1978).
- [33] S. W. Hawking, Phys. Rev. D **13**, 191 (1976).
- [34] W. G. Unruh e R. M. Wald, Phys. Rev. D **25**, 942 (1982); M. J. Radzikowski e W. G. Unruh, Phys. Rev. D **37**, 3059 (1987).
- [35] A. K. Raychaudhuri, S. Banerji e A. Banerjee, *General Relativity, Astrophysics, and Cosmology*, (Springer-Verlag, 1992).
- [36] W. G. Unruh e R. M. Wald, Phys. Rev. D **27**, 2271 (1983); M. A. Pelath e R. M. Wald, Phys. Rev. D **60**, 104009 (1999).
- [37] P. C. W. Davies e S. A. Fulling, Proc. R. Soc. Lond. A **356**, 237 (1977); S. A. Fulling e P. C. W. Davies, Proc. R. Soc. Lond. A **348**, 348 e 393 (1976); P. C. W. Davies, S. A. Fulling e W. G. Unruh, Phys. Rev. D **13**, 2720 (1976).
- [38] M. A. Abramowicz e J. P. Lasota, Acta Phys. Pol. B **5**, 327 (1974).
- [39] G. E. A. Matsas, Phys. Rev. D **68**, 027701 (2003).
- [40] R. M. Wald, gr-qc/9901033; R. M. Wald, gr-qc/ 9702022.
- [41] S. Gao e R. M. Wald, Phys. Rev. D **64**, 084020 (2001).
- [42] W. H. Zurek and K. S. Thorne, Phys. Rev. Lett. **54**, 2171 (1985).
- [43] W. G. Unruh, Phys. Rev. D **14**, 870 (1976).