

Dissertação de Mestrado

Os Coeficientes de Transportes na Investigação de
Transições de Fase na Matéria Hadrônica

Autor: *Adriano Roman Lopes*

Orientador: *Prof. Dr. Luiz Antônio Barreiro*

Rio Claro - SP.

2021

Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”

Instituto de Geociências e Ciências Exatas

Câmpus Rio Claro

Adriano Roman Lopes

Os Coeficientes de Transportes na Investigação de

Transições de Fase na Matéria Hadrônica

Dissertação de Mestrado apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas do Câmpus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física

Orientador: Luiz Antônio Barreiro

Rio Claro - SP.

2021

R758c Roman-Lopes, Adriano
Os Coeficientes de Transportes na Investigação de
Transições de Fase na Matéria Hadrônica / Adriano
Roman-Lopes. -- Rio Claro, 2021
86 f.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista
(Unesp), Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro
Orientador: Luiz Antônio Barreiro

1. Coeficientes de Transportes. 2. Transições de Fase. 3.
Plasma de Quarks e Glúons. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do
Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

Os Coeficientes de Transportes na Investigação de Transições de Fase na Matéria Hadrônica

Candidato: *Adriano Roman Lopes*

Orientador: *Prof. Dr. Luiz Antônio Barreiro*

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. Luiz Antônio Barreiro

Unesp - Câmpus Rio Claro

Prof. Dr. Diogo Ricardo Costa - Unesp Rio Claro

Unesp - Câmpus Rio Claro

Prof. Dr. Antônio Carlos

Universidade Federal do Paraná - UFPR

Conceito: Aprovado

Instituição: Universidade Estadual Paulista

Instituto de Geociências e Ciências Exatas

Departamento de Física

Rio Claro - SP, 02 de fevereiro de 2021.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente, a minha família: Mamãe, vovó e tata (irmã) por todo suporte, apoio e incentivo durante todos esses anos da minha vida acadêmica e formação (como profissional e ser humano).

Em seguida a minha Cremosa, por todos os conselhos e motivações ao longo dessa minha trajetória. Agradeço imensamente por sempre me ouvir e estar do meu lado me apoiando nos momentos de alegria e de dificuldades.

Não menos importante, aos meus queridos amigos que encontrei nessa trajetória. O caminho acadêmico não foi fácil, mas teria sido muito mais difícil sem a presença de vocês, seja nos momentos de estudos e trabalhos ou nas comemorações e diversões. Agradeço a vocês: Balde (José), Anderson (Mineiro), Treme (Rodrigo), Esmola (Pedro), Folem (Lucas) e Cesinha (César).

Ainda, sou muito grato pelo meu orientador Prof. Dr. Barreiro por todas nossas discussões e conversas que tivemos em reuniões, as quais foram de grande importância para a construção deste trabalho e em meu desenvolvimento como físico. Além disso, por todas as oportunidades e as portas que me foram abertas graças ao senhor. Tenho uma grande gratidão por tudo isso. Agradeço também ao Prof. Dr. Antônio Carlos por ter me recebido e auxiliado em meu estágio no exterior, foi uma das melhores experiências da minha vida, gratidão!

Por fim, mas com muito carinho, aos meus queridos amigos de infância André, Victor e Zina. Sempre me apoiaram e incentivaram desde minha tomada de decisão a prestar o vestibular para o curso de Física até agora, onde como mestre, compartilho e dedico este trabalho a vocês; meus mais *Sinceros*, agradecimentos.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

"A mesma emoção, o mesmo assombro e mistério, surge várias vezes quando examinamos qualquer problema com suficiente profundidade. Com mais conhecimento, vêm mistérios mais profundos e maravilhosos, que nos atraem para penetrar ainda mais profundamente. Sem jamais temer que a resposta seja desapontadora, mas com prazer e confiança, reviramos cada nova pedra para encontrar estranhezas inimagináveis que provocam as perguntas e os mistérios mais maravilhosos; sem dúvida uma grandiosa aventura!"

- Richard Feynman

Resumo

O campo de estudo das transições de fase tem-se mostrado extremamente rico no que diz respeito a quantidade de fenômenos singulares que a matéria pode assumir perante condições específicas de parâmetros físicos, tais como temperatura, pressão, densidade entre outros. No corpo desta dissertação, será investigado uma fase exótica e instável da matéria nuclear, chamada plasma de quarks e glúons (QGP) cujo diagrama de fases proposto pela cromodinâmica quântica ainda não é totalmente conhecido. Para explorar este sistema, faremos uso dos chamados coeficientes de transporte, em especial, o transporte de matéria, cargas elétricas que originam a condutividade elétrica, o transporte de calor, ou seja, a condutividade térmica e finalmente a difusão térmica. Para determinar os coeficientes mencionados, utilizaremos dois formalismos matemáticos distintos: as regras de soma da cromodinâmica quântica, onde é de interesse determinarmos a parte imaginária das funções de correlação e a mecânica estatística, a qual fornece as grandezas observáveis do sistema.

Palavras Chave: Coeficientes de Transportes, Transições de Fase, Plasma de Quarks e Glúons.

Abstract

The study field of the phase transitions has been extremely rich with respect to the quantity of singular phenomena that matter assumes when is submitted to specific external conditions, like temperature, pressure, density and others. In this work, will be investigated an exotic and unstable phase of nuclear matter so called quark gluon plasma (QGP) whose proposed quantum chromodynamics phase diagram is not well established yet. In order to explore the QGP system, an interesting tool will be employed, the so called transport coefficients, especially, the matter transport, electric charges creating the electrical conductivity, the heat transport or the thermal conductivity and finally, the thermal diffusion. Also, theses coefficients mentioned will be determined through two distinct approaches. The first one is the sum rules of quantum chromodynamics, where it is of interest to determine the imaginary part of the correlations functions and the second one is the statistical mechanics which provides the observable quantities of the system.

keywords: Transport Coefficients, Phase Transitions, Quarks Glúons Plasma.

Sumário

1	Introdução	1
2	Transição de Fase na Matéria Nuclear	3
2.1	A Força Nuclear Forte	3
2.2	Quarks e Glúons	4
2.3	Cromodinâmica Quântica	12
2.3.1	Regras de Feynman para a Cromodinâmica Quântica	14
2.3.2	Interações da Cromodinâmica Quântica	15
2.4	O Plasma de Quarks e Glúons	22
3	Regras de Soma da Cromodinâmica Quântica	27
3.1	Temperatura Nula	27
3.1.1	Formalismo da Expansão do Produto de Operadores (OPE): O Lado Teórico	28
3.1.2	A parte perturbativa	29
3.1.3	A Parte Não Perturbativa	30
3.1.4	A Parte Não Fatorável	34
3.1.5	O Lado Fenomenológico	36
3.1.6	A Transformada de Borel	39
3.2	Temperatura Finita	41
4	Mecânica Estatística da Matéria Nuclear	43
5	Coeficientes de Transporte	54
5.1	O Transporte de Matéria e Cargas Elétricas	54
5.2	Coeficiente de Condutividade Térmica e Difusão do Calor	62
6	Resultados	66
6.1	Transporte de Matéria	66
6.2	Condutividade Elétrica	68
6.3	Condutividade Térmica	70
6.4	Coeficiente de Difusão Térmica	72

Sumário	vii
7 Conclusão	74
8 Bibliografia	76
A O Propagador de Dolan-Jackiw	79
B Matrizes de Dirac e Gell-Mann	84

Capítulo 1

Introdução

Diversos sistemas físicos quando submetidos a condições particulares de temperatura, densidade, energia ou campos elétricos e magnéticos podem alterar significativamente o seu comportamento físico, onde essa alteração é denominada transição de fase. Tais alterações podem ocorrer de forma abrupta, as quais catalogamos como transições de fase de primeira ordem, ou ainda de forma gradativa e “suave”, classificadas como transições de segunda ordem. Segundo Ehrenfest, matematicamente, essas mudanças estão relacionadas às descontinuidades nas derivadas da energia livre do sistema, onde transições de primeira e segunda ordem estão associadas à descontinuidade na primeira e na segunda derivada da energia livre, respectivamente. De modo geral, transições de fases são amplamente investigadas pela comunidade científica, a fim de compreender fundamentalmente o comportamento da matéria, como por exemplo, transições magnéticas (paramagnéticas - ferromagnéticas), transições elétricas (ferroelétricas - paraelétricas), transições quânticas (ocorrem perto de $T = 0$) como a condensação de Bose-Einstein entre outras.

No corpo deste trabalho, investigaremos especificamente transições de fases que ocorrem em escalar nucleares onde, como fase primordial, temos um gás composto de hádrons (mésons e bárions). Nesta fase, quarks e glúons estão confinados, pela liberdade assintótica, por uma barreira de potencial que representa o próprio nucleon. A medida que aumentamos a temperatura ou a densidade de partículas do sistema, através do processo de deconfinamento, uma fase exótica da matéria emerge chamada plasma de quarks e glúons (QGP). Neste regime instável e composto por condensados de quarks e glúons, os mesmos propagam-se livremente por determinado volume.

Por ser uma fase exótica e muito instável o estudo deste plasma torna-se complexo e trabalhoso, tanto do ponto de vista teórico como experimental, de modo que o respectivo diagrama de fase proposto pela cromodinâmica quântica ainda não seja totalmente conhecido. Uma abordagem promissora, para investigar este sistema físico, é através dos chamados coeficientes de transportes. Como o nome sugere, os mesmos têm como função descrever o transporte de alguma quantidade física. Segundo a literatura, existe uma grande quantidade de diferentes coeficientes a serem explorados, de modo que abordaremos al-

guns destes: como o transporte de matéria, cargas elétricas originando a condutividade elétrica e o transporte de calor que nos leva a condutividade térmica e consequentemente ao chamado coeficiente de difusão.

Para determinarmos os coeficientes de transportes mencionados, faremos uso de duas abordagens distintas. A primeira delas é denominada regras de soma da cromodinâmica quântica onde será utilizado o formalismo matemático da teoria quântica de campos para determinar a função de correlação do sistema, de modo que a parte imaginária da mesma seja proporcional ao transporte de massa e cargas elétricas. A segunda abordagem será através da mecânica estatística, onde através da energia livre do sistema será possível encontrar as respectivas grandezas observáveis assim como os outros coeficientes de transporte, ou seja, a condutividade térmica e consequentemente a difusão térmica.

Em suma, esta dissertação de mestrado tem como objetivo determinar os coeficientes de transportes através de dois formalismos distintos a fim de explorar e compreender o comportamento da transição de fase nuclear: hádrons - plasma de quarks e glúons.

Capítulo 2

Transição de Fase na Matéria Nuclear

Neste capítulo inicial, estaremos contextualizando a cerca dos primórdios da Física Nuclear. Além disso, discutiremos sobre a composição de prótons e nêutrons por partículas fundamentais chamadas de quarks os quais “conversam”, ou melhor, interagem entre si através da troca de bósons de Gauge, denominados glúons. Finalmente, sabendo da existência bem como da teoria que descreve tais partículas, exploraremos algumas características do sistema de interesse deste trabalho, o chamado plasma de quarks e glúons.

2.1 A Força Nuclear Forte

Por volta de 1930, através dos modelos atômicos da época, como o Modelo de Bohr, o conceito de átomo estava devidamente explicado e bem aceito pela comunidade científica. Basicamente, o átomo é explicado como um núcleo massivo constituído por prótons e nêutrons, como mostrado na Figura 2.1, onde estes eram orbitados por elétrons em níveis de energias discretos e bem estabelecidos [1,2,3,4].

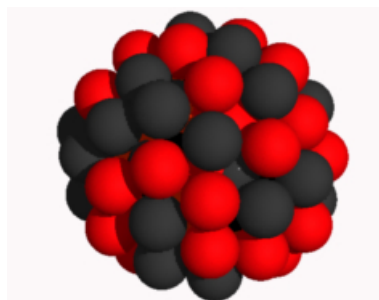


Figura 2.1: Representação esquemática de um núcleo atômico arbitrário. Em vermelho estão representados os prótons enquanto que em preto são destacados os nêutrons. O núcleo em questão mantém-se coeso e estável devido a troca de píons entre os núcleons [5].

Contudo, surgiu o questionamento: “Como é possível um núcleo ser estável, sendo o mesmo composto por partículas de mesmas cargas elétricas (prótons) separadas por uma distância extremamente ínfima?”. A repulsão Coulombiana deveria ser extremamente

intensa de modo que o núcleo não tivesse um comportamento estável. Este problema chamou a atenção dos Físicos da época, de modo que surgiu a necessidade de explicar tal fenômeno [2,3].

Para explicar o problema, no ano de 1935 o físico chamado Hideki Yukawa propôs a existência de uma nova partícula que deveria ser mais leve que o próton e o nêutron porém, mais massiva que o elétron, ou seja, uma partícula de peso intermediário, que sugestivamente foi denominada como méson π ou pión. Segundo Yukawa, este méson seria responsável por intermediar a força entre prótons e nêutrons nos núcleos atômicos de modo que os mesmos permaneceriam coesos e estáveis formando o núcleo atômico. Ainda, para superar a força Coulombiana, foi proposto que para manter a estabilidade nuclear esta nova força deveria ser intensa, criativamente batizada como força nuclear forte ou simplesmente força forte. De modo geral, a força forte seria oriunda da constante e intensa troca de píons entre as partículas constituintes do núcleo, i.e., prótons e nêutrons [1].

Anos mais tarde, físicos da Universidade de Bristol detectaram a partícula proposta por Yukawa. Ainda, nos laboratórios da Universidade de Berkley, um grupo de físicos produziram mésons carregados com cargas positivas, negativas e neutra π^+ , π^- e π^0 respectivamente, onde o último contou com a grande colaboração do físico Cesar Lattes, conhecido como o cientista brasileiro que chegou mais próximo de ganhar o prêmio Nobel.

Desta forma, com a detecção e confirmação da partícula de Yukawa, a força forte juntamente com a força fraca, gravitacional e eletromagnética compõem as quatro forças fundamentais da natureza. A força forte se mostrou muito importante no campo da geração de energia elétrica através dos processos de fusão e fissão nuclear [1,2].

2.2 Quarks e Glúons

Com o passar dos anos, os avanços tecnológicos foram tornando-se mais expressíveis, o que gerou um impacto significativo para a Física experimental, onde os primeiros aceleradores de partículas começaram a produzir resultados promissores para toda a comunidade acadêmica. Um desses resultados foi através do espalhamento de elétrons, onde se mostrou que núcleons (prótons e nêutrons) na verdade não eram partículas fundamentais, mas sim constituídas por outras subpartículas. Por conta disso, foi desencadeada a busca por novas respostas no campo da física de partículas. Em paralelo, haviam sido descobertas uma grande quantidade de partículas de modo que surgira a necessidade de organizar as mesmas, em umas espécies de “tabela periódica” das partículas [2,3].

Para catalogar as mesmas, o físico chamado Murray Gell-Mann em 1960, ganhou grande destaque quando construiu estruturas poligonais, como mostra a Figura 2.2, onde era possível organizar as partículas de acordo com sua carga elétrica e um novo número quântico chamado estranheza. Este por sua vez, foi introduzido para explicar o motivo de algumas partículas possuírem um tempo de vida muito elevado (o que não estaria

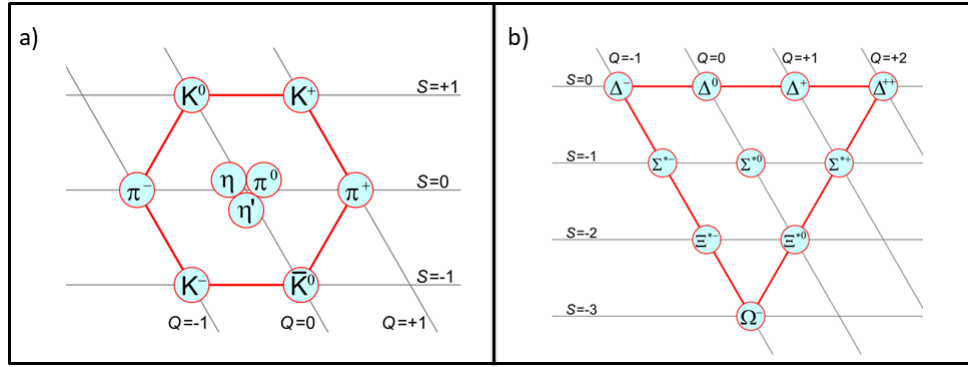


Figura 2.2: Na parte a) temos a representação hexagonal para algumas partículas, formando um noneto. No eixo horizontal e vertical inclinado, nota-se os respectivos números quânticos de estranheza (S) e carga elétrica (Q). Já na parte b), tem-se a estrutura triangular para outras partículas onde ocorre a formação de um decuplete, estruturadas da maneira semelhante ao esquema no item a), ou seja, em função das grandezas carga elétrica e estranheza [6].

de acordo com a teoria nuclear da época), como por exemplo, os káons K^+ , K^- e K^0 . Este foi um feito extremamente importante para o avanço na parte teórica da Física de partículas, pois através dessas estruturas geométricas foi possível prever diversas outras partículas até então desconhecidas. Se já não tivesse feito o bastante, Gell-Mann ainda trabalhou em um dos problemas fundamentais da época, descrito anteriormente, “Do que eram compostos os prótons e nêutrons?” [2,3].

Gell-Mann propôs através de suas estruturas poligonais, que toda a matéria hadrônica, incluindo prótons e nêutrons, seria formada por partículas fundamentais denominadas quarks. De modo geral, toda a matéria poderia ser construída ao agruparmos corretamente esses “blocos fundamentais” [1,4]. Contudo, aparentemente havia um problema com a teoria dos quarks uma vez que os mesmos deveriam apresentar uma carga elétrica fracionária e não poderiam ser encontrados livres, como elétrons em um metal, mas sim em grupos bem específicos. Os mésons, como no caso do pión (π) deveriam ser compostos por um par quark-antiquark, enquanto que os bárions como prótons e nêutrons deveriam ser formados por três quarks [2,3].

Os quarks são partículas de spin semi-inteiro e consequentemente obedecem a estatística de Fermi Dirac bem como o princípio da exclusão de Pauli. Gell-Mann, através de suas teorias mostrou que, *á priori*, deveriam existir pelo menos três tipos de quarks, os sabores, *up* (u), *down* (d) e *strange* (s), onde este último foi utilizado para explicar o problema da estranheza discutido anteriormente. Os outros dois, seriam responsáveis por formar prótons e nêutrons [2,3]. De modo que, ao somarmos as cargas de 2 quarks *up* com a de 1 *down*, recuperamos a carga elétrica do próton, enquanto que ao somarmos as cargas elétricas de 2 quarks *down* e 1 *up* encontramos a carga do nêutron. Basicamente, um simples sistema linear a ser resolvido, ou seja

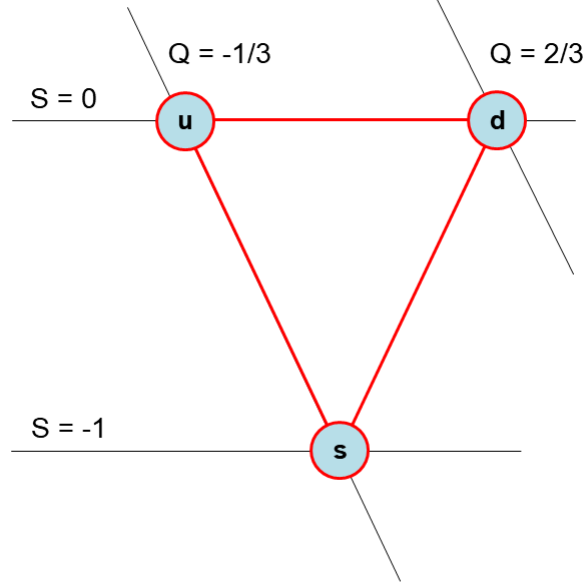


Figura 2.3: Representação triangular de Gell-Mann para descrever os quarks up (u), down (d) e strange (s). No eixo vertical inclinado e horizontal estão representadas respectivamente, a carga elétrica (Q) e estranheza (S).

$$\begin{cases} 2u + d = 1, \\ 2d + u = 0, \end{cases}$$

onde u e d fazem menção aos quarks up e down respectivamente. Após resolver o sistema, encontramos que as cargas dos quarks são respectivamente:

$$Q_{up} = \frac{2}{3}e,$$

$$Q_{down} = -\frac{1}{3}e.$$

A Figura 2.3 mostra a representação geométrica proposta por Gell-Mann para explicar os três sabores de quarks.

De certa forma, a teoria dos quarks parecia funcionar muito bem até a detecção da partícula Δ^{++} a qual deveria ser composta por três quarks d. Por conta disso, surgiu à questão: “Como seria possível encontrar esta configuração de quarks, sendo que os mesmo deveriam obedecer ao princípio da exclusão de Pauli?”. Para responder essa pergunta, no ano de 1964, O. W. Greenberg propôs uma solução revolucionária. O mesmo introduziu um novo número quântico, chamado de cor (sem relação alguma com o espectro das cores) para os quarks. Neste modelo, essas partículas carregariam um conjunto de 3 cores (azul, verde e vermelho). Com isso, para formar bárions do tipo (uuu), (ddd) bastava que cada um deles tivesse um número quântico de cor diferente, já que o princípio de Pauli é aplicado apenas em partículas idênticas [2,3,4]. A representação esquemática desta teoria

pode ser vista na Figura 2.4.

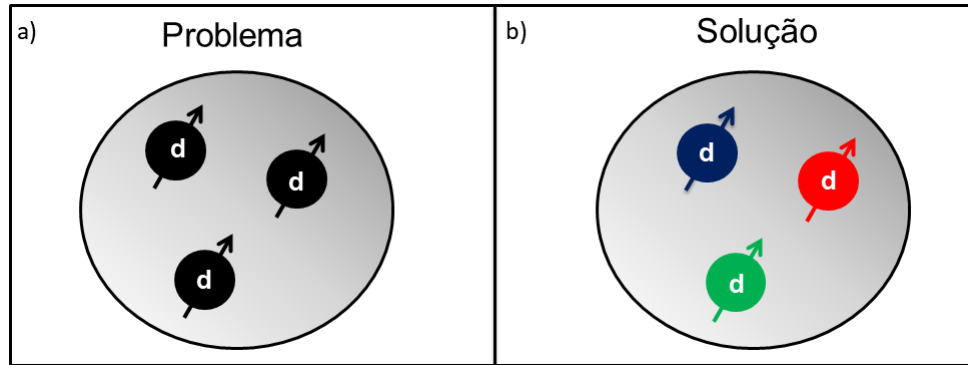


Figura 2.4: Representação esquemática da partícula Δ^{++} , composta por 3 quarks d, representados pelas esferas menores bem como suas orientações de spin. No lado a) temos a situação problema, onde segundo o princípio da exclusão de Pauli, não é possível que férmions idênticos ocupem o mesmo estado. Na parte b), encontra-se a solução para este problema, proposta por O. W. Greenberg o qual introduziu um novo número quântico chamado cor. Desta forma, o princípio de Pauli estaria conservado, uma vez que o mesmo é válido para partículas idênticas.

Com isso, os quarks carregam consigo três propriedades fundamentais, carga elétrica, estranheza e cor. Ainda, vale ressaltar que este mesmo princípio é válido para os anti-quarks, onde estes carregam as suas anticolors, como mostrado na Tabela 2.1.

Cor	Anticor
Vermelho (R)	Ciano/ Antivermelho ($\bar{R}$)
Verde (G)	Magenta/Antiverde ($\bar{G}$)
Azul (B)	Amarelo/Antiazul ($\bar{B}$)

Tabela 2.1: Cores e anticolors dos quarks e antiquarks, respectivamente.

Na natureza estabelecemos que as partículas não devam apresentar cores, logo a conservação deste número quântico é levado em conta. Por isso, combinações do tipo RG, GB e BR são proibidas e sem significado físico [2,3]. Contudo as combinações na Tabela 2.2 apresentam relevância física. Em analogia com a teoria das cores, dizemos que a soma de todas elas resulta na cor branca, garantindo a simetria colorida.

Hadrôns	Composição
Mésons	$RR, \bar{G}\bar{G}$ e $B\bar{B}$
Bárions	RGB
Antibárions	$\bar{R}\bar{G}\bar{B}$

Tabela 2.2: Combinações de quarks e antiquarks possíveis que formam a matéria hadrônica, ou seja, mésons, bárions e antibárions.

Com o passar dos anos, novas partículas foram descobertas e consequentemente propostos novos quarks para explicar as mesmas. Um exemplo é a detecção da partícula J/ψ ,

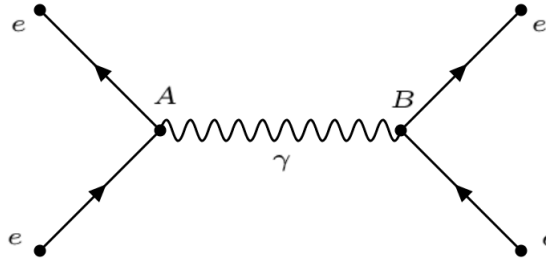


Figura 2.5: Diagrama de Feynman considerando dois elétrons e interagindo por meio da troca de um fóton γ . Os vértices A e B representam, respectivamente, o ponto onde o fóton foi emitido e em seguida absorvido. Após este processo, os elétrons continuam propagando-se pelo espaço.

a qual possuía um tempo de vida 1000 vezes maior que o de outras partículas detectadas até o momento. Para explicar a mesma, foi proposto um novo sabor de quark, denominado charm ou charmoso [2,3]. Com isso, mostraram que J/ψ deveria ser um méson composto por

$$J/\psi = C\bar{C}.$$

A teoria de quarks gerou novos avanços para a física de partículas, onde foi possível descobrir outros dois sabores de quarks, através da detecção de novas partículas que não poderiam ser explicadas com os sabores existentes na época, denominados quark bottom e quark top. Ao todo, foram descobertos um total de seis quarks, os quais foram catalogados em gerações ou famílias como mostrado na Tabela 2.3

Geração	Quarks
1 ^o	Up, Down
2 ^o	Strange, Charm
3 ^o	Bottom, Top

Tabela 2.3: Famílias ou gerações dos sabores de quarks.

Para explorar essas novas características das partículas (cores e anticolors), consideradas exóticas, foi criada a chamada cromodinâmica quântica (QCD), a qual será explicada em mais detalhes em seções futuras.

De acordo com o eletromagnetismo de Maxwell os elétrons podem interagir entre si ou na presença de campos eletromagnéticos. Todavia não tínhamos uma base sólida, do ponto de vista da mecânica quântica, para descrevermos a interação entre estes férmions. Segundo a chamada teoria quântica de campos (TQC), a interação entre elétrons é realizada através da troca de fótons, ou seja, este bóson de Gauge é responsável por gerar a interação eletromagnética [2,7], como mostrado no diagrama da Figura 2.5.

Segundo a Figura 2.5, o elétron emite um fóton no vértice A e continua se propagando pelo espaço, enquanto outro elétron, em B, absorve este fóton emitido e analogamente continua se propagando. O mesmo procedimento ocorre com os quarks, com a diferença de que ao invés destes trocarem fótons temos outra partícula intermediadora, denominada

glúon. Desta forma, o glúon é responsável por intermediar a interação entre quarks e mantê-los coesos no interior de prótons e nêutrons fornecendo a estabilidade dos núcleons [2,7]. Segundo a representação de Feynman, esta interação obedece a uma estrutura muito similar ao que foi descrito para o eletromagnetismo, como pode ser observado na Figura 2.6

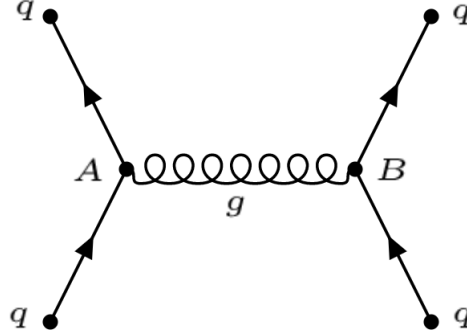


Figura 2.6: Diagrama de Feynman considerando dois quarks q interagindo por meio da troca de um glúon g . Nota-se grande semelhança com o digrama para a interação eletromagnética entre dois elétrons. Os vértices representam, respectivamente, o ponto onde o glúon foi emitido e em seguida absorvido. Após este processo, os quarks continuam propagando-se pelo espaço.

Ao contrário do fóton, que não carrega carga elétrica coulombiana, os glúons que possuem spin 1 e massa nula, carregam as cargas de cor e outra de anticor podendo ser iguais ou não [2,7]. Os glúons que carregam cores diferentes são responsáveis pela troca de cor entre os quarks interagentes, como notado na Figura 2.7. Por conta disso, podem interagir entre si através de diagramas de três e quatro vértices como na Figura 2.8. No total, há oito estados distintos para os glúons os quais são determinados pela superposição de cores e anticolors [4], matematicamente

$$\begin{aligned}
 |g_1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|R\bar{B}\rangle + |B\bar{R}\rangle), & |g_2\rangle &= \frac{-i}{\sqrt{2}} (|R\bar{B}\rangle - |B\bar{R}\rangle), \\
 |g_3\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|R\bar{R}\rangle - |B\bar{B}\rangle), & |g_4\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|R\bar{G}\rangle + |G\bar{R}\rangle), \\
 |g_5\rangle &= \frac{-i}{\sqrt{2}} (|R\bar{G}\rangle - |G\bar{R}\rangle), & |g_6\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|B\bar{G}\rangle + |G\bar{B}\rangle), \\
 |g_7\rangle &= \frac{-i}{\sqrt{2}} (|B\bar{G}\rangle - |G\bar{B}\rangle) \quad \text{e} & |g_8\rangle &= \frac{1}{\sqrt{6}} (|R\bar{R}\rangle + |B\bar{B}\rangle - 2|G\bar{G}\rangle).
 \end{aligned}$$

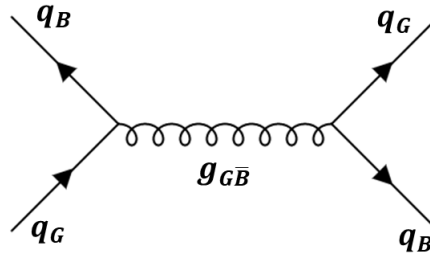


Figura 2.7: Diagrama da força nuclear forte. O glúon carregando cores diferentes é responsável pela troca de cor entre os quarks interagentes.

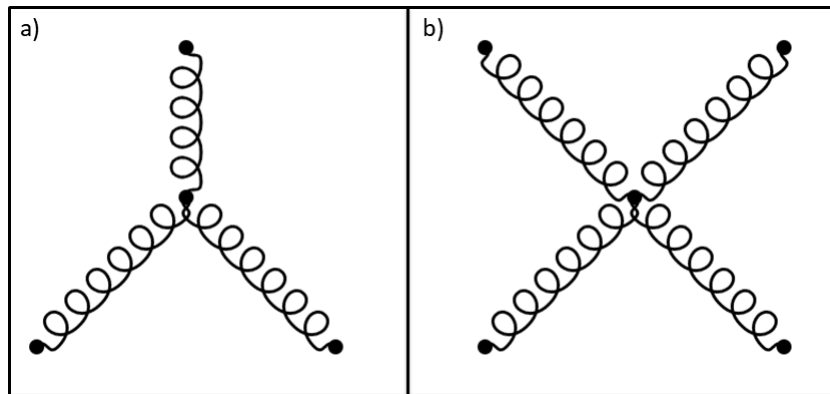


Figura 2.8: Diagramas de Feynman para representar algumas auto interações dos glúons. Na parte a) e b) temos, respectivamente, os chamados diagramas de três e quatro vértices.

De forma matemática, os glúons são oriundos das transformações de Gauge não abelianas, as quais se permitem termos cruzados entre seus respectivos campos interpretados fisicamente como auto interações. Esta discussão será mais detalhada nas próximas seções deste capítulo.

Pelo formalismo da TQC um elétron pode emitir ou absorver fótons, os quais podem criar pares de elétrons-pósitrons e^-e^+ . Por conta disso, não temos acesso diretamente à carga “real” do elétron, mas sim a carga do mesmo envolto por fótons e de pares e^-e^+ , criando uma nuvem de cargas ao redor e consequentemente uma polarização causada pelo próprio vácuo da eletrodinâmica quântica [2,7]. A essa polarização que protege a carga fundamental, denominamos *shielding*. A representação esquemática dessas nuvens que permeiam um elétron é mostrada na Figura 2.9

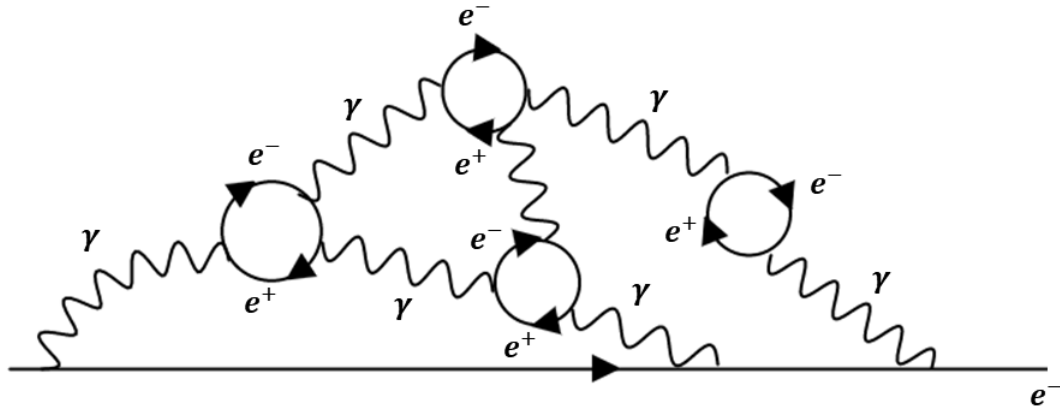


Figura 2.9: Representação em Diagrama de Feynman de alguns fenômenos que podem ocorrer no vácuo de acordo com a eletrodinâmica quântica. Um elétron se propagando pode emitir fótons γ e estes por suas vezes, criam pares elétrons-pósitrons (e^-e^+) [2,7].

O mesmo fenômeno ocorre com os quarks e glúons. O quark é envolto por uma nuvem de pares $q\bar{q}$ e glúons interagindo com os próprios pares bem como suas auto interações, como mostrado na Figura 2.10.

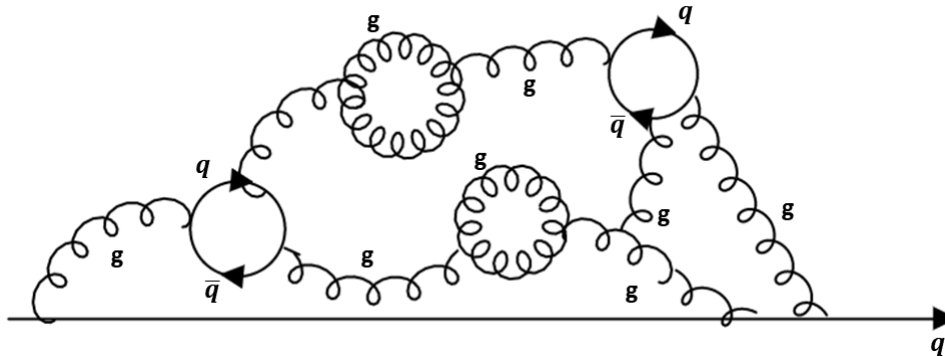


Figura 2.10: Representação em diagrama de Feynman de alguns fenômenos que podem ocorrer no vácuo de acordo com a cromodinâmica quântica. Um quark se propagando pode emitir glúons (g) e estes por suas vezes criam pares quark-antiquarks ou ainda, segundo a QCD é possível ocorrer interações e auto interações entre os glúons [2,7].

Através de tais interações, ocorre uma competição entre a polarização de quarks e glúons no vácuo da cromodinâmica quântica bem como no interior dos hádrons [2]. Matematicamente temos

$$a = 2f - 11n = -21,$$

onde f, n e a descrevem, respectivamente, os sabores (6), cores (3) e a constante de acoplamento. Esta última pode ser dividida em dois casos: o primeiro deles, $a > 0$, é esperado uma interação elevada entre as partículas a curtas distâncias. Contudo, para o segundo caso, $a < 0$, temos exatamente o oposto, ou seja, em pequenas distâncias a constante de acoplamento torna-se pequena e desprezível, ao passo que para distâncias maiores a mesma torna-se muito expressiva. Este fenômeno é denominado liberdade assintótica.

Assim, dois quarks interagindo a curtas distâncias ($r \ll 1 \text{fermi}$), podem ser tratados como livres, porém à medida que se aproximam da barreira de potencial (o próprio nucleon) surge uma interação forte entre os mesmos que os mantém confinados nesta região de potencial. Desta maneira, o confinamento dos quarks é uma consequência direta da liberdade assintótica. Tratando-se de questões experimentais, nunca foi possível observar quarks livres e isolados, devido aos processos de liberdade assintótica e confinamento. De fato, na tentativa de separarmos dois quarks a constante de acoplamento torna-se extremamente intensa de modo que para mantê-los afastados uma grande quantidade de trabalho é necessário [2,3]. Assim, com o aumento da energia atingimos um determinado nível energético equivalente a própria massa de um novo quark e com isso, ao invés de separarmos os dois quarks acaba-se criando um novo par $q\bar{q}$, como esquematizado na Figura 2.11

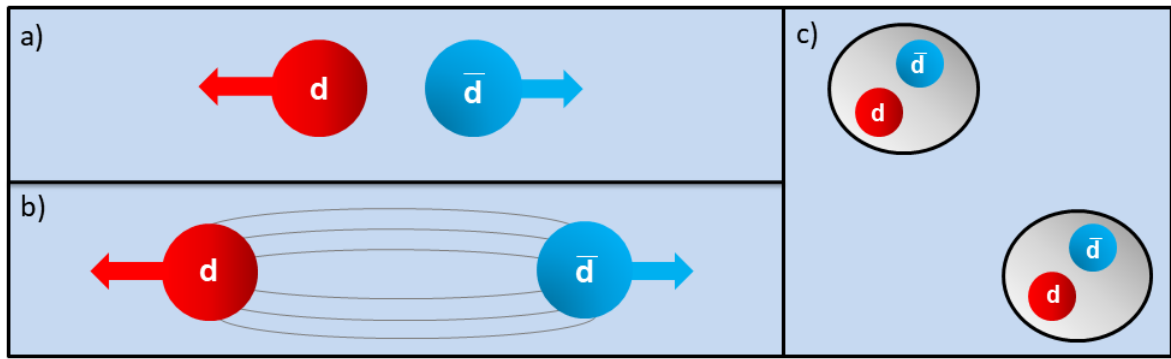


Figura 2.11: Ilustração do processo da tentativa de separação de dois quarks, o que resulta na produção de novas partículas. Na parte a) o par quark d (vermelho) – antiquark $\bar{d}$ (ciano), de início, permanece próximo de modo que a constante de acoplamento seja fraca e ambos podem ser tratados como partículas livres. Já em b) ao aumentarmos a energia do sistema, os mesmos, começam a serem separados e pela liberdade assintótica a constante de acoplamento entre as partículas torna-se expressiva. Em c) na tentativa de separar as partículas a energia necessária para que isso ocorra é intensa a ponto de criarmos um novo par quark-antiquark, produzindo uma nova partícula.

2.3 Cromodinâmica Quântica

Na seção anterior, mostramos e discutimos que a composição da matéria é dada por um conjunto de partículas chamadas quarks as quais interagem pela troca de glúons. Ainda, vimos que aqueles obedecem a estatística de Fermi-Dirac e possuem características únicas como a carga elétrica fracionária e um número quântico chamado cor.

Para descrever os fenômenos da força forte criou-se a teoria chamada cromodinâmica quântica, onde o “cromo” está relacionado com a carga de cor [8]. A fim de descrever matematicamente quarks e glúons é recomendado trabalharmos com a densidade lagrangeana

dessas partículas de modo que

$$\mathcal{L}_{QCD} = \mathcal{L}_{glúons} + \mathcal{L}_{q\bar{q}},$$

sendo a contribuição dos glúons, dada por

$$\mathcal{L}_{glúons} = -\frac{1}{4}G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu},$$

onde

$$G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a(x) - \partial_\nu A_\mu^a(x) + gf_{abc}A_\mu^b(x)A_\nu^c(x), \quad (2.1)$$

de modo que $G_{\mu\nu}^a$ descreve o tensor de força do glúon. Ainda

$$\partial^\mu = (\partial^0, \partial^1, \partial^2, \partial^3) = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right),$$

$$A_\nu^a(x) = (A_0^a, A_1^a, A_2^a, A_3^a) = (\phi^a, A_x^a, A_y^a, A_z^a) = (\phi^a, \vec{A}^a),$$

identificamos ϕ^a e $\vec{A}^a$ como sendo, respectivamente, o campo escalar e vetorial de cor [8,9]. Ademais, a Equação 2.1 descreve o campo do glúon de cor a , $a = 1, 2, 3$. Ainda, o último termo da Equação 2.1 representa a auto interação dos mesmos mencionadas anteriormente. A constante g quantifica o acoplamento entre o campo dos glúons A_μ^a com o campo do quark ψ e antiquarks $\bar{\psi}$. Já o termo f_{abc} é um coeficiente antissimétrico, oriundo da álgebra do grupo SU(3) que está diretamente ligado as matrizes de Gell-Mann, discutidas em mais detalhes no Apêndice B. No caso da contribuição dos quarks e antiquarks para a $\mathcal{L}_{QCD}$, temos a própria densidade lagrangeana de Dirac [8,9]

$$\mathcal{L}_{q\bar{q}} = \bar{\psi}(i\gamma_\mu D^\mu - m)\psi,$$

onde

$$D^\mu = \partial^\mu - igA^{a\mu},$$

é chamada derivada covariante, introduzida para garantir que a densidade lagrangeana seja invariante perante simetrias locais, a qual identificamos os seguintes termos

$$\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma^0,$$

onde γ^μ com $\mu = 0, 1, 2, 3$ representam as matrizes de Dirac, descritas no Apêndice B, carregam a dependência do spin de férmions já que são dadas em função das matrizes de

Pauli. Não menos importante, ψ representa o spinor, dado por

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix},$$

enquanto que $\psi^\dagger$ é o termo complexo conjugado de ψ . Finalmente, m representa a massa das partículas, no caso quarks e antiquarks. A partir da densidade lagrangeana é possível determinar as Equações do movimento bem como a Hamiltoniana deste sistema [8,9].

2.3.1 Regras de Feynman para a Cromodinâmica Quântica

Neste trabalho, para entendermos os fenômenos que ocorrem no plasma de quarks e glúons torna-se relevante descrever como são dadas as interações do tipo $q\bar{q}$, qq e a chamada produção de pares. Para isso, faremos o uso das chamadas regras de Feynman para a QCD [7,9]. A idéia das mesmas é transformar expressões matemáticas em representações diagramáticas e vice versa. Conhecendo tais representações, é possível encontrar as amplitudes de espalhamento das interações mencionadas logo acima. As regras para a cromodinâmica quântica podem ser encontradas na Figura 2.12 e matematicamente temos

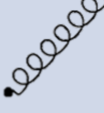
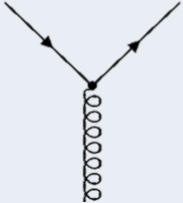
Regras de Feynman para a Cromodinâmica Quântica			
	Quark chegando		Quark saindo
	Antiquark chegando		Antiquark saindo
	Glúon chegando		Glúon saindo
	Vértice	Propagadores	
			Quark- Antiquark
			Glúon

Figura 2.12: Representação diagramática de Feynman para a cromodinâmica quântica, bem como o significado físico de cada uma das ilustrações.

- Linhas Externas

Quark chegando: $u^s(p)c$ Quark saindo: $\bar{u}^s(p)c^\dagger$ Antiquark chegando: $\bar{v}^s(p)c^\dagger$ Antiquark saindo: $v^s(p)c$ Glúon chegando: $\varepsilon_\mu(p)a^\alpha$ Glúon saindo: $\varepsilon_\mu^*(p)a^{*\alpha}$

• Propagadores e Vértice

Quark-Antiquark: $\frac{i(\not{q}+m)}{q^2-m^2}$ Glúon: $-\left(\frac{ig_{\mu\nu}}{q^2}\right)\delta^{ab}$ Vértice quark-glúon $-\left(\frac{ig_s}{2}\right)\lambda^\alpha\gamma^\mu$

2.3.2 Interações da Cromodinâmica Quântica

Em posse das Regras de Feynman, podemos descrever, através da amplitude de espalhamento, alguns fenômenos de interação que ocorrem na QCD [2,7]. De início, abordaremos interações do tipo quark-antiquark, $u + \bar{d} \rightarrow u + \bar{d}$, como mostrado na Figura 2.13.

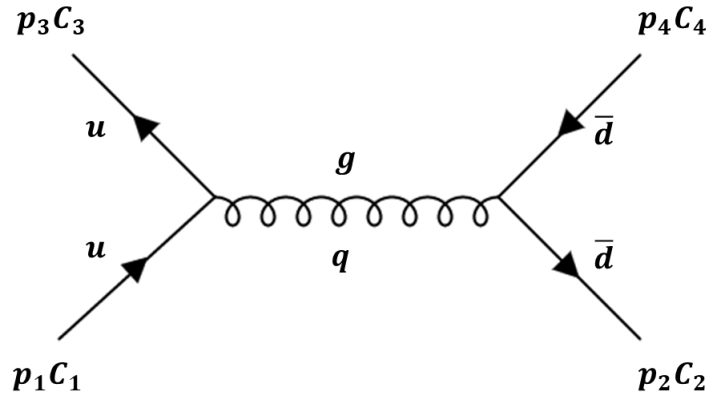


Figura 2.13: Diagrama de Feynman para representar a interação quark-antiquark. Onde p_i e C_i com $i=1, 2, 3$ e 4 , representam respectivamente, o momentum e a carga de cor de cada partícula da interação bem como o glúon de momentum q .

Seguindo o formalismo de Feynman, a amplitude de espalhamento M para a interações quark-antiquark é dada por

$$M = i \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \bar{u}(3)C_3^\dagger \left(-\frac{ig_s}{2} \lambda^\alpha \gamma^\mu \right) u(1)C_1 \left(-\frac{ig_{\mu\nu}}{q^2} \delta^{\alpha\beta} \right) \bar{v}(2)C_2^\dagger \left(-\frac{ig_s}{2} \lambda^\beta \gamma^\nu \right) v(4)C_4,$$

$$[(2\pi)^4 \delta(p_1 - p_3 - q)] [(2\pi)^4 \delta(p_2 - p_4 + q)],$$

e após a integração encontramos

$$M = -\frac{(2\pi)^4 ig^2}{4} \bar{u}(3)C_3^\dagger (\lambda^\alpha \gamma^\mu) u(1)C_1 \left(-\frac{ig_{\mu\nu}}{q^2} \delta^{\alpha\beta} \right) \bar{v}(2)C_2^\dagger (\lambda^\beta \gamma^\nu) v(4)C_4 [\delta(p_1 + p_2 - p_4 - p_3)].$$

Como a expressão acima só é não nula quando $\mu = \nu$ e $\alpha = \beta$ teremos

$$M = -\frac{g^2}{q^2} \bar{u}(3) \gamma^\mu u(1) \bar{v}(2) \gamma^\mu v(4) \left[\frac{1}{4} C_3^\dagger \lambda^\alpha C_1 \right] \left[C_2^\dagger \lambda^\alpha C_4 \right], \quad (2.2)$$

onde de acordo com as Regras de Feynman, para cada vértice é atribuído a conservação do quadrimomentum de modo que possamos emitir a delta de Dirac. O primeiro termo da Equação 2.2 é muito similar ao espalhamento de um elétron interagindo com o múon, com uma força de interação g . Já os termos entre colchetes, são conhecidos como fator colorido, definimos por

$$f \equiv \left[\frac{1}{4} C_3^\dagger \lambda^\alpha C_1 \right] \left[C_2^\dagger \lambda^\alpha C_4 \right]. \quad (2.3)$$

A Equação 2.3, depende explicitamente dos estados de cor dos quarks interagentes, em outras palavras, este número quântico pode alterar a forma com que essas duas partículas se inter relacionam. Ainda, a partir do fator de cor, define-se o potencial entre $q\bar{q}$, dado por

$$V_{q\bar{q}} = -\frac{f\alpha}{r}, \quad (2.4)$$

em que α e r representam a constante de acoplamento da força forte entre os quarks e a distância entre eles, respectivamente. Para um sistema, formado por quarks-antiquarks é possível construir dois tipos de estados: estado octeto e estado de singlete [2,7]. Como segunda etapa, será analisado o fator f para cada uma dessas configurações de estado. Começando com a configuração de octetos.

Em termos de matrizes, as cargas de cores são definidas como

$$R = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Para nosso estudo, seguiremos o diagrama da Figura 2.13, para as cores R e B . Sendo assim,

$$C_1 = C_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$C_2 = C_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Levando essas informações na Equação 2.3, não esquecendo dos termos conjugados,

encontra-se

$$f = \frac{1}{4} \left[\left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \lambda^\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \left[\left(\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \lambda^\alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right],$$

de modo que λ^α descrevem as matrizes de Gell-Mann e $\alpha = 1, \dots, 8$. Ao todo, teríamos 8 termos de matrizes multiplicativas, porém, apenas as matrizes λ^3 e λ^8 fornecem valores diferentes de zero, assim

$$f = \frac{1}{4} \left\{ \left[\left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \lambda^3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left(\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \lambda^3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] + \right. \\ \left. + \left[\left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \lambda^8 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left(\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \lambda^8 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \right\},$$

$$f = \frac{1}{4} \left\{ \left[\left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left(\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] + \right. \\ \left. + \left[\left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left(\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \right\},$$

deste modo teremos

$$f = \frac{1}{4} \left(-1 + \frac{1}{3} \right) = -\frac{1}{6}.$$

Com isso, o potencial entre as partículas do sistema, Equação 2.4, é dada por

$$V_{q\bar{q}} = \frac{1}{6} \left(\frac{\alpha}{r} \right). \quad (2.5)$$

De forma análoga, faremos o mesmo para o estado de singlete $|g_8\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} (|R\bar{R}\rangle + |B\bar{B}\rangle + |G\bar{G}\rangle)$. Assim, a Equação 2.3 torna-se

$$f = \frac{1}{4} \left\{ \left[C_3^\dagger \lambda^\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \lambda^\alpha C_4 \right] + \left[C_3^\dagger \lambda^\alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \left(\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \lambda^\alpha C_4 \right] + \right.$$

$$+ \left[C_3^\dagger \lambda^\alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \lambda^\alpha C_4 \right] \Bigg\},$$

substituindo o estado de singleto em cada termo de C_3 e C_4 bem como seus respectivos conjugados, encontramos um total de 9 termos. Assim

$$\begin{aligned} f = \frac{1}{4\sqrt{3}} & \left\{ \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \lambda^\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \lambda^\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] + \right. \\ & + \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \lambda^\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \lambda^\alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] + \\ & + \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \lambda^\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \lambda^\alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] + \\ & + \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \lambda^\alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \lambda^\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] + \\ & + \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \lambda^\alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \lambda^\alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] + \\ & + \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \lambda^\alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \lambda^\alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] + \\ & + \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \lambda^\alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \lambda^\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] + \\ & + \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \lambda^\alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \lambda^\alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] + \\ & \left. + \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \lambda^\alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \lambda^\alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Analogamente, ao que foi feito para o estado octeto, os únicos elementos das matrizes λ^α , que fornecem resultados não nulos são $\lambda_{11}^\alpha \lambda_{11}^\alpha$, $\lambda_{21}^\alpha \lambda_{12}^\alpha$ e $\lambda_{31}^\alpha \lambda_{13}^\alpha$. Sendo assim, escrevemos

$$f = \frac{1}{12} \sum_{\alpha=1}^8 \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \lambda_{ij}^{\alpha} \lambda_{ji}^{\alpha} = \frac{1}{12} \text{Tr}(\lambda^{\alpha} \lambda^{\alpha}) = \frac{16}{12} = \frac{4}{3}.$$

Com isso, a energia potencial para o par quark-antiquark associada ao estado de singlete é dada por

$$V_{q\bar{q}} = -\frac{4}{3} \left(\frac{\alpha}{r} \right). \quad (2.6)$$

Ao compararmos ambos os potencial entre os dois estados (octeto e singlete), (Equação 2.5 e Equação 2.6), nota-se que em termos de energia a configuração de singlete é mais estável comparada ao octeto. Assim, a fim de minimizar a energia, as partículas mesônicas são formadas puramente por estados de singletos [2,7]. Através dessa discussão, encerramos as interações do tipo quarks e antiquarks.

Em seguida, trataremos das configurações possíveis envolvendo interações quarks-quarks, como mostrado no diagrama na Figura 2.14.

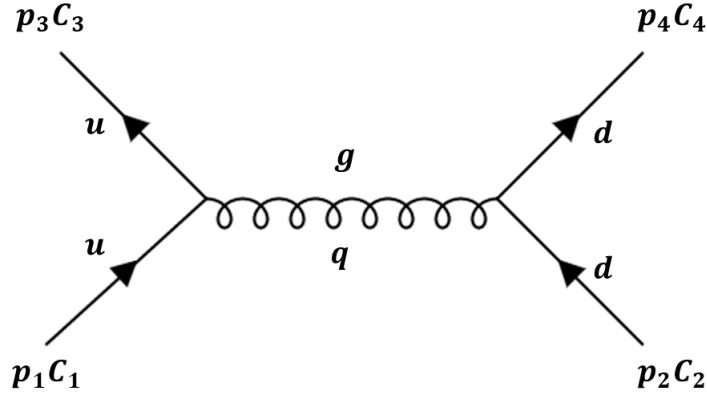


Figura 2.14: Diagrama de Feynman para representar a interação quark-quark. Onde p_i e C_i com $i = 1, 2, 3, 4$, representam respectivamente, o momentum e a carga de cor de cada partícula da interação bem como o glúon de momentum q .

Assim como feito na interação quark-antiquark, dividiremos o problema em dois casos: Sexteto e Singlete [2,7]. Começaremos, apenas por conveniência, pelo estado sexteto, podendo ser do tipo

$$\left\{ \begin{array}{l} RR, BB, GG, \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(RB + BR), \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(RG + GR), \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(GB + BG). \end{array} \right.$$

Apenas por questão de escolha, assumiremos o estado R , porém qualquer outro estado de cor deve reproduzir o mesmo resultado final. Sendo assim

$$C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ou seja, os quarks não alteram sua cor durante esta interação. Ainda, no caso dos quarks,

o fator colorido é dado por

$$f = \left[\frac{1}{4} C_3^\dagger \lambda^\alpha C_1 \right] \left[C_4^\dagger \lambda^\alpha C_2 \right]. \quad (2.7)$$

Levando em conta os respectivos estados, bem como seus complexos conjugados na Equação 2.7, encontra-se

$$f = \frac{1}{4} \left\{ \left[\left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \lambda^\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \lambda^\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \right\},$$

onde as únicas matrizes de Gell-Mann que fornecem $f \neq 0$, serão $\alpha = 3, 8$, logo:

$$f = \frac{1}{4} [\lambda^3 \lambda^3 + \lambda^8 \lambda^8] = \frac{1}{4} \left[(1)(1) + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right] = \frac{1}{3}.$$

Com isso, a energia potencial da referida configuração quark-quark é dada por

$$V_{qq} = \frac{1}{3} \left(\frac{\alpha}{r} \right). \quad (2.8)$$

Para a outra configuração (triplete), temos as possíveis combinações [2,7].

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(RB - BR), \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(GR - RG), \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(BG - GB).$$

Em nosso estudo, usaremos o primeiro termo, i.e. $\frac{1}{\sqrt{2}}(RB - BR)$, vale ressaltar que qualquer um dos estados gera o mesmo valor final. Como mencionado, o fator de cor é dado por

$$f = \left[\frac{1}{4} C_3^\dagger \lambda^\alpha C_1 \right] \left[C_4^\dagger \lambda^\alpha C_2 \right]. \quad (2.9)$$

Usaremos uma notação mais compacta

$$\langle C_3 C_4 | C_1 C_2 \rangle \equiv \left[C_3^\dagger \lambda^\alpha C_1 \right] \left[C_4^\dagger \lambda^\alpha C_2 \right], \quad (2.10)$$

de modo que

$$f = \frac{1}{4} \langle C_3 C_4 | C_1 C_2 \rangle,$$

onde $||$ representam $\lambda^\alpha \lambda^\alpha$. Ainda $\langle C_3 C_4 |$ carrega as informações com respeito ao que ocorre após a interação dos quarks, enquanto que $|C_1 C_2\rangle$ descreve a informação dos mesmo antes de interagirem. A cada uma destas configurações, associamos um estado de triplete, ou seja, de forma que f torna-se

$$f = \frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} [\langle R_3 B_4 - B_3 R_4 | R_1 B_2 - B_1 R_2 \rangle],$$

que pode ser reescrito como

$$f = \frac{1}{8} [\langle R_3 B_4 | R_1 B_2 \rangle - \langle R_3 B_4 | B_1 R_2 \rangle - \langle B_3 R_4 | R_1 B_2 \rangle + \langle B_3 R_4 | B_1 R_2 \rangle],$$

usando a definição da Equação 2.10 em cada termo

$$f = \frac{1}{8} \left\{ \left(R_3^\dagger \lambda^\alpha R_1 \right) \left(B_4^\dagger \lambda^\alpha B_2 \right) - \left(R_3^\dagger \lambda^\alpha B_1 \right) \left(B_4^\dagger \lambda^\alpha R_2 \right) - \left(B_3^\dagger \lambda^\alpha R_1 \right) \left(R_4^\dagger \lambda^\alpha B_2 \right) + \right. \\ \left. + \left(B_3^\dagger \lambda^\alpha B_1 \right) \left(R_4^\dagger \lambda^\alpha R_2 \right) \right\}.$$

Nota-se que os índices 1, 2, 3 e 4 podem ser omitidos sem comprometer a formulação matemática do problema. De fato, os índices apenas trazem uma visualização mais clara acerca das interações possíveis. Em notação matricial

$$f = \frac{1}{8} \left\{ \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \lambda^\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \lambda^\alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \right. \\ \left. - \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \lambda^\alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \lambda^\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \right. \\ \left. - \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \lambda^\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \lambda^\alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] + \right. \\ \left. + \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \lambda^\alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \lambda^\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \right\},$$

sendo que os únicos termos não nulos de f ocorrem

$$f = \frac{1}{8} (\lambda_{11}^\alpha \lambda_{22}^\alpha + \lambda_{22}^\alpha \lambda_{11}^\alpha - \lambda_{21}^\alpha \lambda_{12}^\alpha - \lambda_{12}^\alpha \lambda_{21}^\alpha) = \frac{1}{4} (\lambda_{11}^\alpha \lambda_{22}^\alpha - \lambda_{12}^\alpha \lambda_{21}^\alpha),$$

onde o primeiro termo só é não nulo quando $\alpha = 3, 8$, enquanto que o segundo termo é relevante para $\alpha = 1, 2$. Sendo assim, o fator colorido se torna

$$f = \frac{1}{4} (\lambda_{11}^3 \lambda_{22}^3 + \lambda_{11}^8 \lambda_{22}^8 - \lambda_{12}^1 \lambda_{21}^1 - \lambda_{12}^2 \lambda_{21}^2) = \frac{1}{4} \left(-1 + \frac{1}{3} - 1 - 1 \right) = -\frac{2}{3}.$$

Assim, o potencial entre quarks, para a configuração tripleto, é dado por

$$V_{qq} = -\frac{2}{3} \left(\frac{\alpha}{r} \right). \quad (2.11)$$

Percebe-se que o potencial na configuração sexteto (Equação 2.8) é repulsivo, enquanto que para o estado tripleto (2.11) é atrativo [2,7]. Nesta seção, discutimos alguns processos de interações, dentre elas qq e $\bar{q}q$, como alguns dos muitos fenômenos que podem ocorrer segundo a QCD. Contudo, outras situações são permitidas, *e.g.* a aniquilação de pares, onde através da interação de um quark com um antiquark é gerada a produção dois glúons [2,7], como mostrado na Figura 2.15.

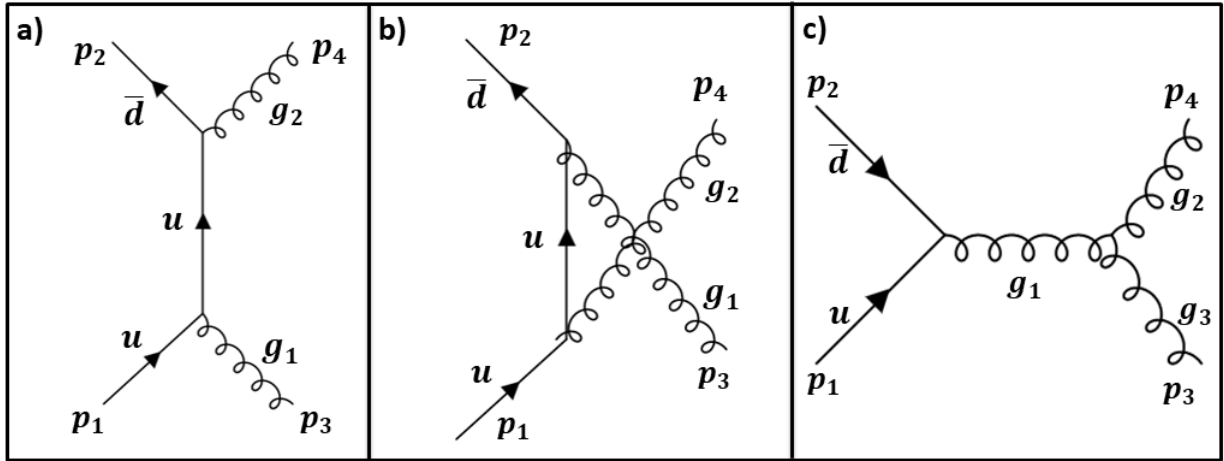


Figura 2.15: Alguns fenômenos da produção de pares que podem ocorrer segundo a cromodinâmica quântica.

Todos os cenários de interações discutidas anteriormente ocorrem simultaneamente na QCD, onde mesmos podem acontecer em situações de energias ($T > 170 \text{ MeV} \sim 4 \cdot 10^{12} \text{ K}$) ou densidades ($\rho \sim 3 \cdot 10^{15} \text{ g/cm}^3$) extremamente altas. Na próxima seção abordaremos um sistema físico, onde o mesmo é gerado em condições extremas como estas listadas, o plasma de quarks e glúons [10,11], sendo este o tópico de interesse de investigação deste trabalho.

2.4 O Plasma de Quarks e Glúons

De acordo com a teoria do Big Bang, nos primeiros instantes do universo primordial, $t \sim 10^{-6} \text{ s}$, haviam condições extremas de temperaturas, $T \sim 10^{15} \text{ K}$, e densidades (em um centímetro cúbico teríamos um peso de 40 bilhões de toneladas) as quais originaram um dos primeiros estados da matéria, uma fase instável com curto tempo de vida mas que compunha toda a matéria hadrônica que conhecemos, o chamado plasma de quarks e glúons [10,11]. Desta forma, ao explorar este exótico sistema estaríamos mais próximos de compreender fundamentalmente toda a matéria.

A fim de explorarmos essa fase, foram propostos como ferramenta, experimentos usando colisões de íons pesados. Assim, criou-se o maior laboratório de física de partículas do mundo, CERN, um dos maiores e mais caros experimentos construídos pela humanidade, um conjunto de diversos aceleradores de partículas que cortam a França e a Suíça, com um diâmetro de 27 km, mostrado na Figura 2.16. Estipula-se que para proje-

tos futuros o CERN pretende construir um acelerador ainda maior, com um diâmetro de 100 km, com o objetivo de aprimorar e aumentar as escalas de energias a serem atingidas.

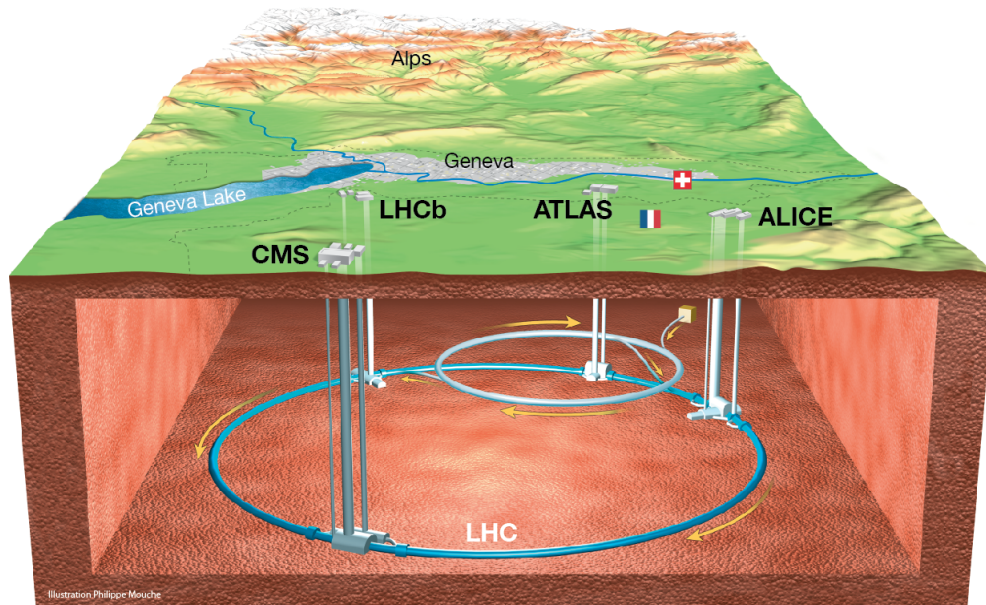


Figura 2.16: Representação esquemática da visão geral do grande colisor de hádrons. Nota-se que o mesmo “corta” dois países, França e Suíça. Ainda, este conta com um conjunto de quatro grandes detectores LHCb, ATLAS, CMS e ALICE, que são responsáveis por coletar e analisar os dados das colisões que ocorrem nos acelerador LHC, localizado quilômetros abaixo da terra [12].

Em alguns pontos, estão os detectores das colisões, onde cada um deles tem objetivos distintos, desde a investigação do plasma de quarks e glúons até matéria e energia escura e supersimetria. Basicamente, os experimentos são constituídos pela colisão de íons pesados. De início, átomos pesados como o chumbo, são ionizados e injetados em direções opostas em aceleradores menores e suas trajetórias são controladas através de um campo magnético externo. Ao atingir as velocidades máximas ou desejadas em cada acelerador, os feixes são enviados para um acelerador maior e novamente acelerados até determinada velocidade. Quando os feixes já injetados no grande colisor de hádrons (LHC) atingem velocidades próximas a da luz (99,9%) ao alterarem o campo magnético os feixes colidem uns com os outros, gerando bilhões de colisões por segundo, onde estas serão processadas e analisadas [12]. O procedimento citado, é uma forma de tentar reproduzir o plasma de quarks e glúons e conseqüentemente o universo primordial. Uma representação esquemática envolvendo a colisão de átomos pesados e a possível formação do plasma é encontrada na Figura 2.17.

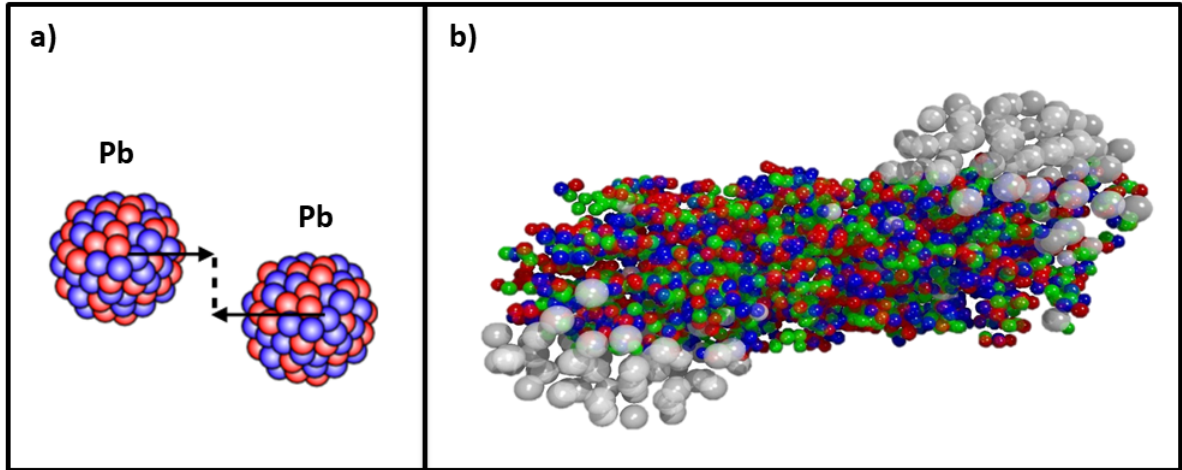


Figura 2.17: Representação esquemática de colisões de átomos pesados (Pb-Pb). No item a) vemos dois átomos de chumbo ionizados instantes antes da colisão entre os mesmos. Nota-se um pequeno deslocamento (*shift*) com relação aos centros de massa dos átomos, essa distância é denominada parâmetro de impacto. Já em b) ocorre a formação da fase de plasma de quarks e glúons, em coloridos, enquanto que as esferas em branco representam os nucleons que não participaram da colisão, já que o parâmetro de impacto é não nulo [13].

Em suma, até a atualidade a única maneira que encontramos para estudar este tipo de sistema foi através da colisão de íons pesados, e este centro de pesquisa é o único capaz de atingir as condições necessárias para criar o plasma.

Nesta seção discutiremos sobre nosso sistema de interesse, o plasma de quarks e glúons. O mesmo faz parte do diagrama de fases, ainda não conhecido completamente, proposto pelas teorias da cromodinâmica quântica [14,15,16], ilustrado na Figura 2.18.

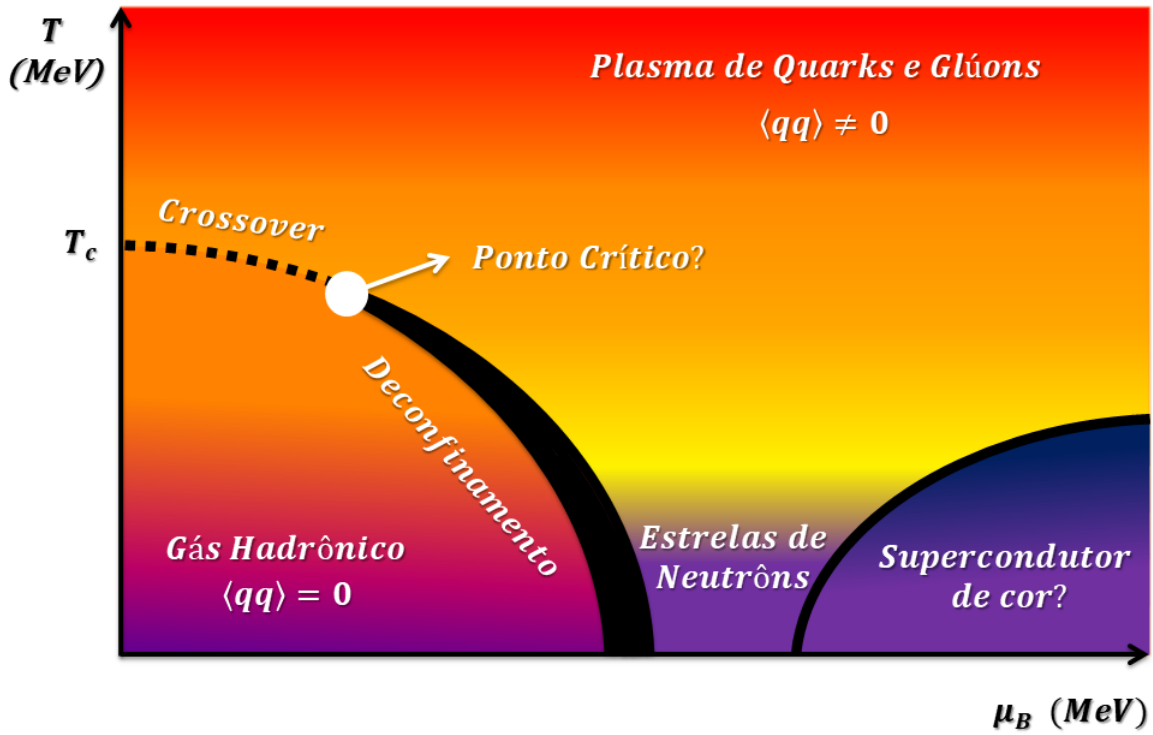


Figura 2.18: Diagrama de fases da cromodinâmica quântica. No regime de baixas temperaturas e densidade bariônica encontramos a fase hadrônica com os quarks confinados formando a matéria bariônica e mesônica. Em altas temperaturas, após o crossover temos os quarks e glúons livres originando a fase de plasma de quarks e glúons. Por fim, em baixas temperaturas e altas densidades encontramos uma possível supercondutividade devida à carga de cor dos quarks e glúons.

Nota-se que, em regime de baixas temperaturas, $T < T_c \sim (150 - 170) \text{ MeV}$, e baixas densidades bariônicas (μ_b) está o chamado gás de hádrons. Neste regime, são encontrados gás de bárions e mésons, onde quarks e glúons permanecem confinados no interior da matéria. Ao aumentar a temperatura do sistema, porém permanecendo em baixas densidades bariônica, a energia cinética das partículas é mais expressiva comparada à interação entre as mesmas de forma que, em aproximação, um comportamento de gás ideal pode ser assumido [14,15,16].

Atingindo a região de crossover e o ponto crítico, onde estes ainda não são bem estabelecidos pela literatura, surgem os primórdios da fase de plasma e os primeiros quarks e glúons livres são gerados. Desta forma, esta região é caracterizada por uma fase mista onde são encontrados, como mencionado, os primeiros quarks e glúons assim como alguns hádrons que não adquiriram energia térmica suficiente para mudar seu estado físico. Ainda, é notável que com o aumento da temperatura do sistema $T > T_c$ a fase de plasma emerge e torna-se predominante, onde agora o sistema é composto por quarks e glúons propagando-se livremente [14,15].

Ambas as fases mencionadas até agora, são separadas por uma linha de transição de primeira ordem (em preto), onde a largura da mesma representa a incerteza do processo.

Aqui, ocorrem alguns fenômenos de interesse os quais merecem destaque: o deconfinamento e a restauração da simetria quiral. Ao atingir-se condições críticas de temperatura e densidades, os hádrons “derretem-se”, desencadeando o processo de deconfinamento onde agora as partículas que compõem os nucleons não permanecem mais confinadas em seu interior, mas sim podem se propagar pelo espaço livremente. Atingindo a fase de plasma, as partículas que compõem o mesmo formam os chamados condensados de quarks e glúons ($\langle qq \rangle \neq 0$). Fisicamente, os condensados são interpretados como o parâmetro de ordem do sistema segundo a teoria de Landau para transições de fase, já que na região $T < T_c$, devido ao confinamento, não ocorre a formação de condensados ($\langle qq \rangle = 0$). Como mencionado, o outro fenômeno que merece destaque é a restauração da simetria quiral. De acordo com a literatura, durante a fase hadrônica temos a ausência da simetria quiral, ou seja, o gás é contido somente por partículas destrás (spin alinhado na mesma direção do momentum) ou canhotas (spin alinhado na direção oposta ao momentum). Já na fase de plasma, é predizido encontrar-se ambas as quiralidades, destra e canhota, de modo que ocorra uma restauração gradual e contínua da simetria quiral [14,16]. Vale ressaltar, que a transição hádron-plasma é o alvo de interesse deste trabalho, de modo que as outras fases do diagrama serão vista como futuras perspectivas de exploração.

Seguindo nossas discussões, voltemos à atenção para região de baixíssimas temperaturas e densidades bariônica consideráveis. Nestas condições, é teorizada a formação ou composição de estrelas de nêutrons, de modo que no seu interior devido a alta densidade um possível sistema de plasma de quarks e glúons possa ser encontrado. Por tais motivos, os diagramas da cromodinâmica quântica juntamente com a fase de quarks e glúons livres são amplamente explorados no campo da astrofísica e cosmologia [14,16].

Por fim, ainda em condições extremas de densidades e baixíssimas temperaturas uma nova fase é predita no diagrama, a chamada supercondutividade de cor. Neste regime, devido ao grande número de partículas é possível que ocorra uma grande interação entre os quarks já que a energia cinética é extremamente pequena. Desta forma, os quarks podem acoplar-se através de glúons formando pares chamados diquarks, análogo aos pares de Cooper (elétron-fônon), fazendo com que o sistema assuma um caráter supercondutor, ou como quarks e glúons carregam a carga de cor, um supercondutor colorido [14].

De modo geral, o diagrama da cromodinâmica quântica para estudar fases extremas e exóticas da matéria ainda é um problema em aberto. Como mencionado, não sabemos ao certo a região onde possa ocorrer o crossover e o ponto crítico entre a fase hadrôn-plasma assim como a incerteza de onde estaria a faixa de transição entre as fases. Ainda, em aspectos experimentais não foi encontrada uma assinatura clara acerca da formação da fase de plasma, mas possíveis indícios que a mesma de fato ocorra [14,15,16].

Capítulo 3

Regras de Soma da Cromodinâmica Quântica

3.1 Temperatura Nula

As propriedades físicas dos hádrons e partículas elementares são tópicos de alto interesse da comunidade acadêmica, com o objetivo de compreender fundamentalmente a matéria. Para isso, são necessários diversos tratamentos matemáticos, analíticos e/ou numéricos, os quais foram desenvolvidos ao longo de décadas. Neste capítulo, estaremos interessados em discutir as chamadas Regras de Soma. Estas representam um conjunto de técnicas analíticas que descrevem a parte não perturbativa da QCD [8].

De início, é necessário descrevermos como as partículas de interesse se propagam no vácuo da QCD. Para isso, utilizamos a chamada Função de Correlação ou Correlator, que representa o propagador de uma densidade de partículas, ao qual associamos uma densidade de corrente. O método das Regras de Somas (RS) é composto por duas abordagens físicas distintas no que diz respeito às densidades de corrente. A primeira delas, conhecida como Expansão do Produto de Operadores (OPE), descreve as densidades de correntes em termos de quarks e antiquarks propagando-se no vácuo perturbativo da cromodinâmica [8]. A outra abordagem, conhecida como Lado Fenomenológico é responsável por tratar, matematicamente, as densidades de correntes como hádrons e não por seus constituintes fundamentais (quarks e antiquarks).

O método das RS implica em encontrarmos a correspondência entre tais formalismos a fim de compararmos os resultados obtidos e determinar aspectos físicos acerca do sistema de interesse. Para determinar a equivalência das abordagens é necessário fazermos uso do chamado Princípio da Dualidade Quark-Hádron, este por sua vez é um dos pilares por trás das Regas de Soma. O princípio em questão nos diz que ambas as abordagens descritas são equivalentes, de modo que a igualdade entre os formalismos possa ser considerada. Fisicamente, é possível descrever a matéria hadrônica em termos de seus componentes fundamentais assim como em seu próprio estado hadrônico. Esta seção, apresenta um

formalismo matemático equivalente ou similar ao descrito em [17,18].

3.1.1 Formalismo da Expansão do Produto de Operadores (OPE): O Lado Teórico

Como primeira abordagem, utilizaremos o formalismo da OPE para descrever diagramas de Feynman similares ao mostrado na Figura 3.1.

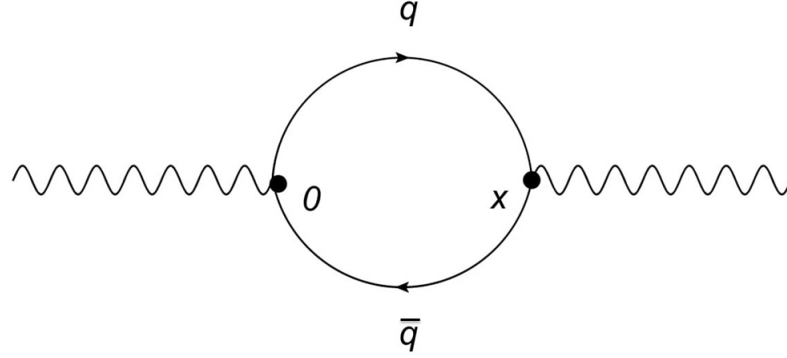


Figura 3.1: Representação esquemática de uma função de correlação de dois pontos. Do lado esquerdo para o direito: Um fóton se propagando produz, no ponto 0, um par quark (seta para direita) antiquark (seta para esquerda) de modo que os dois se aniquilam no vértice x gerando um novo fóton.

A função correlação (propagador) para este tipo de diagrama é dado por:

$$\Pi(q) = i \int d^4x e^{ipx} \langle 0 | T \{ j(x) j^*(0) \} | 0 \rangle, \quad (3.1)$$

onde o operador T é chamado de ordenamento temporal. Considerando um conjunto de mésons, as densidades de correntes são dadas por

$$j(x) = \bar{q}_a(x) q_a(x), \quad (3.2)$$

$$j^*(0) = q_b(0) \bar{q}_b(0), \quad (3.3)$$

onde os índices a e b representam as possíveis cargas de cores destes quarks. Desta forma ficamos com

$$\Pi(q) = i \int d^4x e^{ipx} \langle 0 | T \{ \bar{q}_a(x) q_a(x) q_b(0) \bar{q}_b(0) \} | 0 \rangle,$$

pela definição de ordenamento temporal

$$\langle 0 | T \{ \bar{q}_a(x) q_a(x) q_b(0) \bar{q}_b(0) \} | 0 \rangle = \langle 0 | T \{ q_a(x) \bar{q}_b(0) \} | 0 \rangle \langle 0 | T \{ \bar{q}_a(x) q_b(0) \} | 0 \rangle +$$

$$+ \langle 0 | T \{ q_a(x) q_b(0) \} | 0 \rangle \langle 0 | T \{ \bar{q}_a(x) \bar{q}_b(0) \} | 0 \rangle + \dots$$

Podemos descrever o propagador de um quark livre se propagando no espaço-tempo da seguinte maneira

$$S_{ab}(x) = S_{ab}^P(x) + \langle 0 | : q_a(x) \bar{q}_b(0) : | 0 \rangle, \quad (3.4)$$

onde o primeiro termo representa a parte perturbativa do propagador enquanto que o segundo descreve a parcela não perturbativa. A notação “:” descreve o chamado ordenamento normal, onde os operadores destruição são agrupados todos ao lado direito enquanto que os operadores criação estão agrupados ao lado esquerdo. Desta forma, o problema em questão baseia-se em determinar as partes perturbativas e não perturbativas deste propagador.

3.1.2 A parte perturbativa

Para descrevermos esta parcela do propagador faremos uso da Equação de Gellman-Low onde a mesma descreve a interação entre os quarks do sistema, sendo assim:

$$S_{ab}^P(x) = \langle 0 | q_a(x) \bar{q}_b(0) e^{i \int d^4 z \mathcal{L}_{QCD}(z)} | 0 \rangle,$$

onde,

$$\mathcal{L} = g_s \bar{q}_a(z) \gamma^\mu A_\mu^n \tau_{ab}^n q_b(z),$$

e γ^μ são as matrizes de Dirac, g_s é a constante de acoplamento quark-glúon, A_μ^n é o campo do glúon onde n varia de 1 até 8 e τ_{ab}^n é o gerador do grupo SU(3). Expandindo em Taylor, encontramos:

$$S_{ab}^P(x) = \langle 0 | T \{ q_a(x) \bar{q}_b(0) \} | 0 \rangle + i \langle 0 | T \{ q_a(x) \bar{q}_b(0) \mathcal{L} \} | 0 \rangle + \dots$$

$$S_{ab}^P(x) = S_{ab}^0(x) + S_{ab}^1(x) + \dots,$$

onde o termo de ordem zero representa o propagador do quark livre, enquanto que o segundo termo descreve a interação quark-glúon, ambos já bem conhecidos pela literatura. Esses propagadores são dados respectivamente por:

$$S_{ab}^0(x) = i \delta_{ab} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \left(\frac{\gamma^\mu p + m_q}{p^2 - m_q^2 + i\varepsilon} \right) e^{-ipx},$$

$$S_{ab}^1(x) = -\frac{ig_s}{4} G_{\mu\nu}^n(0) \tau_{ab}^n \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \left(\frac{\sigma^{\mu\nu} \gamma^\mu p + \gamma^\mu p \sigma^{\mu\nu} + 2m_q \sigma^{\mu\nu}}{(p^2 - m_q^2 + i\varepsilon)^2} \right) e^{-ipx},$$

de modo que m_q representa a massa do quark e $\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} \{ \gamma^\mu, \gamma^\nu \}$,

$$G_{\mu\nu}^n(0) = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + g_s h_{jk}^n A_\mu^j A_\nu^k.$$

Para determinar os valores de $S_{ab}^0(x)$ e $S_{ab}^1(x)$, vamos assumir que estamos tratando de quarks leves, onde é válida a aproximação $m_q^2 \rightarrow 0$. De início, analisando-se as integrais dos termos de ordem zero encontramos

$$\int d^4p \left(\frac{\gamma^\mu p}{p^2 + i\varepsilon} \right) e^{-ipx} = 8\pi^2 \frac{\gamma^\mu x}{x^4},$$

$$\int d^4p \left(\frac{m_q}{p^2 + i\varepsilon} \right) e^{-ipx} = 4\pi^2 i \frac{m_q}{x^2}.$$

Logo, o mesmo será dado por

$$S_{ab}^0(x) = \delta_{ab} \left(\frac{i\gamma^\mu x}{2\pi^2 x^4} - \frac{m_q}{4\pi^2 x^2} \right).$$

Analisando o termo de primeira ordem (interação), obtem-se

$$S_{ab}^1(x) = -\frac{i}{4} g_s G_{\mu\nu}^n(0) \tau_{ab}^n \left\{ \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \left(\frac{\sigma^{\mu\nu} \gamma^\mu p}{(p^2 + i\varepsilon)^2} \right) e^{-ipx} + \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \left(\frac{\gamma^\mu p \sigma^{\mu\nu}}{(p^2 + i\varepsilon)^2} \right) e^{-ipx} + \right. \\ \left. + \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \left(\frac{2m_q \sigma^{\mu\nu}}{(p^2 + i\varepsilon)^2} \right) e^{-ipx} \right\}, \quad (3.5)$$

onde:

$$\int d^4p \left(\frac{\sigma^{\mu\nu} \gamma^\mu p}{(p^2 + i\varepsilon)^2} \right) e^{-ipx} = 2\pi^2 \frac{\sigma^{\mu\nu} \gamma^\mu x}{x^2}, \quad (3.6)$$

$$\int d^4p \left(\frac{\gamma^\mu p \sigma^{\mu\nu}}{(p^2 + i\varepsilon)^2} \right) e^{-ipx} = 2\pi^2 \frac{\gamma^\mu x \sigma^{\mu\nu}}{x^2}, \quad (3.7)$$

$$\int d^4p \left(\frac{2m_q \sigma^{\mu\nu}}{(p^2 + i\varepsilon)^2} \right) e^{-ipx} = -2m_q \sigma^{\mu\nu} i\pi^2 \ln(-x^2). \quad (3.8)$$

Em posse dos resultados das Equações (3.6,3.7,3.8), a interação quark-glúon será:

$$S_{ab}^1(x) = \frac{-ig_s G_{\mu\nu}^n(0) \tau_{ab}^n}{2^5 \pi^2} \left(\frac{\sigma^{\mu\nu} \gamma^\mu x + \gamma^\mu x \sigma^{\mu\nu}}{x^2} - im_q \sigma^{\mu\nu} \ln(-x^2) \right).$$

Desta forma, o propagador da parte perturbativa será dado por:

$$S_{ab}^P(x) = \delta_{ab} \left(\frac{i\gamma^\mu x}{2\pi^2 x^4} - \frac{m_q}{4\pi^2 x^2} \right) - \frac{ig_s G_{\mu\nu}^n(0) \tau_{ab}^n}{2^5 \pi^2} \left(\frac{\sigma^{\mu\nu} \gamma^\mu x + \gamma^\mu x \sigma^{\mu\nu}}{x^2} - im_q \sigma^{\mu\nu} \ln(-x^2) \right).$$

Agora que descrevemos a parte perturbativa do propagador do quark livre, vamos encontrar outra componente, a parte não perturbativa do mesmo.

3.1.3 A Parte Não Perturbativa

A parte não perturbativa do propagador, como mencionada anteriormente é dada pelo segundo termo da Equação 3.4. Sendo este representado por

$$\langle 0 | : q_a(x) \bar{q}_b(0) : | 0 \rangle . \quad (3.9)$$

Expandindo o estado do quark em série de Taylor, encontra-se

$$q_a(x) = q_a(0) + x_\mu \partial_\mu q_a(0) + x_\mu x_\nu \partial_\mu \partial_\nu q_a(0) + \dots, \quad (3.10)$$

e para mantermos a invariância de Gauge, as derivadas comuns são repassadas para derivadas covariantes:

$$D_\mu = \partial_\mu - i g_s A_\mu, \quad (3.11)$$

onde g_s é a constante de acoplamento entre o campo de gauge A_μ e o estado do quark $q_a(x)$. Substituindo as Equações (3.11) e (3.10) na Equação (3.9) temos que:

$$\begin{aligned} \langle 0 | : q_a(x) \bar{q}_b(0) : | 0 \rangle &= \langle 0 | : q_a(0) \bar{q}_b(0) : | 0 \rangle + x_\mu \langle 0 | : D_\mu q_a(0) \bar{q}_b(0) : | 0 \rangle + \\ &+ x_\mu x_\nu \langle 0 | : D_\mu D_\nu q_a(0) \bar{q}_b(0) : | 0 \rangle + \dots \end{aligned} \quad (3.12)$$

Agora vamos analisar os termos resultantes da expansão. Sendo assim, o primeiro deles

$$\langle 0 | : q_a^\alpha(0) \bar{q}_b^\beta(0) : | 0 \rangle = N \delta_{ab} \delta_{\alpha\beta},$$

onde os índices a, b representam os índices de cores e α, β índices spinoriais. Multiplicando ambos os lados por $\delta_{ba} \delta_{\beta\alpha}$ e utilizando o fato que

$$\delta_{ab} \delta_{ba} = 3, \quad \text{e} \quad \delta_{\alpha\beta} \delta_{\beta\alpha} = 4,$$

pois temos 3 possíveis cores e 4 componentes spinoriais, encontra-se

$$\delta_{ba} \delta_{\beta\alpha} \langle 0 | : q_a^\alpha(0) \bar{q}_b^\beta(0) : | 0 \rangle = 12N.$$

Utilizando o ordenamento temporal pode-se definir

$$\delta_{ba} \langle 0 | : q_a^\alpha(0) \bar{q}_b^\beta(0) : | 0 \rangle \equiv - \langle 0 | : \bar{q}^\beta(0) q^\alpha(0) : | 0 \rangle .$$

portanto,

$$\delta_{\beta\alpha} \langle 0 | : \bar{q}^\beta(0) q^\alpha(0) : | 0 \rangle = -12N,$$

e introduzindo a notação mais compacta

$$\delta_{\beta\alpha} \langle 0 | : \bar{q}^\beta(0) q^\alpha(0) : | 0 \rangle \equiv \langle \bar{q} q \rangle , \quad (3.13)$$

obtem-se

$$N = -\frac{1}{12} \langle \bar{q}q \rangle.$$

Desta forma teremos

$$\langle 0 | : q_a^\alpha(0) \bar{q}_b^\beta(0) : | 0 \rangle = -\frac{1}{12} \langle \bar{q}q \rangle \delta_{ab} \delta_{\alpha\beta}.$$

O termo definido na Equação (3.13) é chamado condensado de quarks. Nota-se que o condensado só é não nulo quando o mesmo possui quarks de cores e índices spinoriais semelhantes. Analisando o segundo termo da Equação 3.12

$$\langle 0 | : D_\mu q_a^\alpha(0) \bar{q}_b^\beta(0) : | 0 \rangle = N \delta_{ab} \gamma_{\alpha\beta}^\mu. \quad (3.14)$$

Analogamente ao que fora feito anteriormente, primeiro multiplica-se ambos os lados da Equação 3.14, pelo fator $\delta_{ba} \gamma_{\mu\beta\alpha}$. Deve-se levar em conta que

$$\delta_{ba} \delta_{ab} = 3, \quad \text{e} \quad \gamma_{\mu\alpha\beta} \gamma_{\alpha\beta}^\mu = 16,$$

onde temos o fator 16 devido a contribuição spinorial (4) e a contribuição das matrizes de Dirac (4). Definindo então

$$\gamma_{\mu\alpha\beta} \delta_{ba} \langle 0 | : D_\mu q_a^\alpha(0) \bar{q}_b^\beta(0) : | 0 \rangle = 48N,$$

teremos

$$\delta_{ba} \langle 0 | : D_\mu q_a^\alpha(0) \bar{q}_b^\beta(0) : | 0 \rangle \equiv - \langle 0 | : \bar{q}^\beta(0) \gamma_\mu D_\mu q^\alpha(0) : | 0 \rangle.$$

Ainda por conta dos índices espinoriais temos a definição dos condensados de quarks (como feito anteriormente), de modo que

$$-\gamma_{\mu\alpha\beta} \langle 0 | : \bar{q}^\beta(0) D_\mu q^\alpha(0) : | 0 \rangle = - \langle \bar{q} \not{D} q \rangle,$$

através da Equação de Dirac

$$\not{D} q(0) = -im_q q(0),$$

sendo assim

$$im_q \langle \bar{q}q \rangle = 48N,$$

com isso, a constante de normalização N é dada por

$$N = \frac{1}{48} im_q \langle \bar{q}q \rangle.$$

Desta forma, encontra-se

$$\langle 0 | : D_\mu q_a^\alpha(0) \bar{q}_b^\beta(0) : | 0 \rangle = \frac{1}{48} i m_q \langle \bar{q} q \rangle \delta_{ab} \gamma_{\alpha\beta}^\mu.$$

O termo acima obtido é conhecido como o termo de massa (m_q) para o condensado de quarks. Nota-se que o termo massivo é originado apenas quando levamos em conta o termo de segunda ordem na expansão do propagador. Ainda este é não nulo apenas quando temos quarks com índices de cores iguais.

Vamos agora para o último termo da Equação 3.12.

$$\langle 0 | : D_\mu D_\nu q_a^\alpha(0) \bar{q}_b^\beta(0) : | 0 \rangle = N g^{\mu\nu} \delta_{ab} \delta_{\alpha\beta}.$$

Para encontrar o fator de normalização devemos multiplicar a Equação acima por $g_{\mu\nu} \delta_{ba} \delta_{\beta\alpha}$. Ainda, temos que

$$\delta_{ab} \delta_{ba} = 3, \quad \delta_{\alpha\beta} \delta_{\beta\alpha} = 4, \quad \text{e} \quad g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = 4.$$

Assim

$$g_{\mu\nu} \delta_{ba} \delta_{\beta\alpha} \langle 0 | : D_\mu D_\nu q_a^\alpha(0) \bar{q}_b^\beta(0) : | 0 \rangle = \delta_{ba} \delta_{\beta\alpha} \langle 0 | : D^2 q_a^\alpha(0) \bar{q}_b^\beta(0) : | 0 \rangle = 48N.$$

Definindo

$$\delta_{ba} \langle 0 | : D^2 q_a^\alpha(0) \bar{q}_b^\beta(0) : | 0 \rangle \equiv - \langle 0 | : \bar{q}^\beta(0) D^2 q^\alpha(0) : | 0 \rangle,$$

encontraremos

$$-\delta_{\beta\alpha} \langle 0 | : \bar{q}^\beta(0) D^2 q^\alpha(0) : | 0 \rangle \equiv - \langle \bar{q} D^2 q \rangle.$$

Porém

$$D^2 q = \left(\frac{1}{2} g_s \sigma G \right) q,$$

logo o fator de normalização será dado por:

$$N = -\frac{1}{92} \left\langle \bar{q} \frac{1}{2} g_s \sigma G q \right\rangle.$$

Com isso, temos

$$\langle 0 | : D_\mu D_\nu q_a^\alpha(0) \bar{q}_b^\beta(0) : | 0 \rangle = -\frac{1}{92} \left\langle \bar{q} \frac{1}{2} g_s \sigma G q \right\rangle g^{\mu\nu} \delta_{ab} \delta_{\alpha\beta}.$$

O termo acima é denominado condensado misto, uma vez que possui termos representando os campos dos antiquarks e glúons dados por, respectivamente, $\bar{q}$ e G . Analogamente,

mente aos casos anteriores, a existência do condensado é garantida quando as componentes de cores e spinoriais são iguais. Ainda, podemos notar a constante g_s representando a intensidade do acoplamento entre as respectivas partículas.

3.1.4 A Parte Não Fatorável

Até agora, discutimos os chamados termos fatoráveis onde era possível separarmos (fatorarmos) as partes perturbativas e não perturbativas dos propagadores. Contudo, nesta etapa a parte não fatorável é descrita como um produto entre as componentes perturbativas e não perturbativas, de modo que não se torna possível separar (fatorar) as componentes mencionadas.

Matematicamente temos

$$\langle 0 | : q_a^\alpha(x) g_s G_{\mu\nu}^n \bar{q}_b^\beta(0) : | 0 \rangle . \quad (3.15)$$

Analogamente ao procedimento realizado na seção anterior, expandiremos o estado do quark até segunda ordem, seguindo a Equação 3.10. O primeiro termo da expansão em combinação com a Equação 3.15, fica definido como

$$\langle 0 | : q_a^\alpha(0) g_s G_{\mu\nu}^n \bar{q}_b^\beta(0) : | 0 \rangle = N \sigma_{\alpha\beta}^{\mu\nu} \Gamma_{ab}^{\alpha\beta} .$$

onde as grandezas indiciais $\sigma_{\alpha\beta}^{\mu\nu}$ e $\Gamma_{ab}^{\alpha\beta}$ representam, respectivamente, o comutador das matrizes de Dirac e o gerador do grupo SU(3). As expressões destes operadores podem ser encontradas no Apêndice B. Multiplicando ambos os lados por $\sigma_{\mu\nu\alpha\beta} \Gamma_{ba}^{\beta\alpha}$, de modo que:

$$\sigma_{\alpha\beta}^{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu\beta\alpha} = 12 \quad \text{e} \quad \Gamma_{ab}^{\alpha\beta} \Gamma_{ba}^{\beta\alpha} = 2^4 .$$

Assim

$$\sigma_{\mu\nu\beta\alpha} \Gamma_{ba}^{\alpha\beta} \langle 0 | : q_a^\alpha(0) g_s G_{\mu\nu}^n \bar{q}_b^\beta(0) : | 0 \rangle = 3 \cdot 2^6 N .$$

Definindo

$$\Gamma_{ba}^{\alpha\beta} \langle 0 | : q_a^\alpha(0) g_s G_{\mu\nu}^n \bar{q}_b^\beta(0) : | 0 \rangle \equiv - \langle 0 | : \bar{q}^\beta(0) g_s G_{\mu\nu}^n q^\alpha(0) : | 0 \rangle ,$$

$$- \sigma_{\mu\nu\beta\alpha} \langle 0 | : \bar{q}^\beta(0) g_s G_{\mu\nu}^n q^\alpha(0) : | 0 \rangle = - \langle 0 | : \bar{q}(0) g_s \sigma_{\mu\nu} G_{\mu\nu}^n q(0) : | 0 \rangle = 3 \cdot 2^6 N$$

e

$$\langle 0 | : \bar{q}(0) g_s \sigma_{\mu\nu} G_{\mu\nu}^n q(0) : | 0 \rangle \equiv \langle \bar{q} g \sigma G q \rangle ,$$

obtem-se

$$-\langle \bar{q}g\sigma Gq \rangle = 3 \cdot 2^6 N,$$

onde a constante de normalização torna-se

$$N = -\frac{1}{3 \cdot 2^6} \langle \bar{q}g\sigma Gq \rangle.$$

Com isso, o termo de primeira ordem será descrito por

$$\langle 0 | : q_a^\alpha(0) g_s G_{\mu\nu}^n \bar{q}_b^\beta(0) : | 0 \rangle = \frac{-1}{3 \cdot 2^6} \sigma_{\alpha\beta}^{\mu\nu} \Gamma_{ab}^{\alpha\beta} \langle \bar{q}g\sigma Gq \rangle. \quad (3.16)$$

O termo encontrado representa, fisicamente o condensado misto onde a interação entre os quarks e glúons são quantificadas pela constante de acoplamento g . Analisando o termo de segunda ordem da expansão, observa-se que:

$$\langle 0 | : D_\rho q_a^\alpha(0) g_s G_{\mu\nu}^n \bar{q}_b^\beta(0) : | 0 \rangle = N (\gamma_\rho \sigma_{\mu\nu} + \sigma_{\mu\nu} \gamma_\rho)_{\alpha\beta} \Gamma^{nab},$$

multiplicando ambos os lados por $(\gamma_\rho \sigma_{\mu\nu} + \sigma_{\mu\nu} \gamma_\rho)_{\beta\alpha} \Gamma^{nba}$ e sabendo que

$$(\gamma_\rho \sigma_{\mu\nu} + \sigma_{\mu\nu} \gamma_\rho)_{\alpha\beta} \Gamma^{nab} (\gamma_\rho \sigma_{\mu\nu} + \sigma_{\mu\nu} \gamma_\rho)_{\beta\alpha} \Gamma^{nba} = 3 \cdot 2^9,$$

obtem-se

$$(\gamma_\rho \sigma_{\mu\nu} + \sigma_{\mu\nu} \gamma_\rho)_{\beta\alpha} \Gamma^{nba} \langle 0 | : D_\rho q_a^\alpha(0) g_s G_{\mu\nu}^n \bar{q}_b^\beta(0) : | 0 \rangle = 3 \cdot 2^9 N.$$

Analisando o primeiro termo da soma, já considerando os índices spinoriais

$$\gamma_\rho \sigma_{\mu\nu} \Gamma^{nba} \langle 0 | : D_\rho q_a(0) g_s G_{\mu\nu}^n \bar{q}_b(0) : | 0 \rangle = \Gamma^{nba} \langle 0 | : \gamma_\rho D_\rho q_a(0) g_s \sigma_{\mu\nu} G_{\mu\nu}^n \bar{q}_b(0) : | 0 \rangle,$$

se for usado o operador de Dirac,

$$\gamma_\rho D_\rho q_a(0) = \not{D}_\rho q_a(0) = -im_q q_a(0),$$

onde $\not{D}_\rho \equiv \gamma_\rho D_\rho$. Ainda

$$-im_q \Gamma^{nba} \langle 0 | : q_a(0) g_s \sigma_{\mu\nu} G_{\mu\nu}^n \bar{q}_b(0) : | 0 \rangle \equiv (-im_q) (-\langle 0 | : \bar{q}(0) g_s \sigma G q(0) : | 0 \rangle) = im_q \langle \bar{q}g\sigma Gq \rangle.$$

Desta forma

$$\gamma_\rho \sigma_{\mu\nu} \Gamma^{nba} \langle 0 | : D_\rho q_a(0) g_s G_{\mu\nu}^n \bar{q}_b(0) : | 0 \rangle = im_q \langle \bar{q}g\sigma Gq \rangle.$$

Para o segundo termo da soma o procedimento é análogo, de modo que

$$2im_q \langle \bar{q}g\sigma Gq \rangle = 3 \cdot 2^9 N,$$

a constante de normalização torna-se

$$N = \frac{im_q}{3 \cdot 2^8} \langle \bar{q} g \sigma G q \rangle .$$

Finalmente o termo da expansão será dado por:

$$\langle 0 | : D_\rho q_a^\alpha(0) g_s G_{\mu\nu}^n \bar{q}_b^\beta(0) : | 0 \rangle = \frac{im_q}{3 \cdot 2^8} \langle \bar{q} g \sigma G q \rangle (\gamma_\rho \sigma_{\mu\nu} + \sigma_{\mu\nu} \gamma_\rho)_{\alpha\beta} \Gamma^{nab} . \quad (3.17)$$

onde a expressão acima, analogamente ao caso fatorável, é o termo massivo do condensado misto. Desta maneira, temos o propagador completo considerando a parte não fatorável, de modo que somando as Equações 3.16 e 3.17:

$$S_{ab}^{\mu\nu}(x) = \left(\frac{-1}{3 \cdot 2^6} \sigma^{\mu\nu} \Gamma_{ab}^{\alpha\beta} + \frac{im_q}{3 \cdot 2^8} (\gamma_\rho x \sigma_{\mu\nu} + \sigma_{\mu\nu} \gamma_\rho x)_{\alpha\beta} \Gamma^{nab} \right) \langle \bar{q} g \sigma G q \rangle ,$$

onde a variável x é oriundo ao termo de primeira ordem da expansão de Taylor.

3.1.5 O Lado Fenomenológico

Neste formalismo, as correntes na função de correlação são tratadas agora como operadores de criação e destruição, diferentemente do lado da OPE onde as correntes eram descritas através de quarks e antiquarks. Desta forma, o correlator é dado por

$$\Pi(q) = i \int d^4x e^{iqx} \langle 0 | T \{ j(x) j^\dagger(0) \} | 0 \rangle , \quad (3.18)$$

onde

$$T \{ j(x) j^\dagger(0) \} = \Theta(x_0) j(x) j^\dagger(0) + \Theta(-x_0) j^\dagger(0) j(x), \quad (3.19)$$

de modo que o operador evolução temporal organiza os fenômenos ou operadores pela ordem decrescente do tempo, ou seja, analisando o primeiro termo no sentindo de x_0 , vemos que a corrente $j(x)$ ocorre depois de $j^*(0)$. Quando olhamos no sentindo contrário, $-x_0$, vemos o acontecimento inverso das correntes. Levando a Equação 3.19 na Equação 3.18

$$\Pi(q) = i \int d^4x e^{iqx} (\Theta(x_0) \langle 0 | j(x) j^\dagger(0) | 0 \rangle + \Theta(-x_0) \langle 0 | j^\dagger(0) j(x) | 0 \rangle) ,$$

pela relação de completude ou completeza

$$\hat{1} = \sum_k |k\rangle \langle k| ,$$

assim,

$$\Pi(q) = i \int d^4x e^{iqx} \sum_k \left(\Theta(x_0) \langle 0 | j(x) | k \rangle \langle k | j^\dagger(0) | 0 \rangle + \Theta(-x_0) \langle 0 | j^\dagger(0) | k \rangle \langle k | j(x) | 0 \rangle \right). \quad (3.20)$$

Usando as seguintes relações matemáticas, com $\hat{U}(a)$ sendo o operador translação,

$$\hat{U}(a) |k\rangle = e^{ip_k a} |k\rangle, \quad \hat{U}\hat{U}^{-1} = \hat{U}\hat{U}^\dagger = 1 \quad \text{e} \quad \hat{U}(a)j(x)\hat{U}^\dagger(a) = j(x+a),$$

o primeiro termo da Equação 3.20, fica escrito como

$$\langle 0 | j(x) | k \rangle = \langle 0 | \hat{U}^\dagger(-x) \hat{U}(-x) j(x) \hat{U}^\dagger(-x) \hat{U}(-x) | k \rangle = \langle 0 | \hat{U}^\dagger(-x) j(0) \hat{U}(-x) | k \rangle,$$

uma vez que

$$\hat{U}(-x) |k\rangle = e^{-ip_k x} |k\rangle \quad \text{e} \quad \langle 0 | \hat{U}^\dagger(-x) = \langle 0 |,$$

onde $\langle 0 | p_0 = 0$, pelo fato de não encontrarmos estados de energia (p_0) no vácuo, quando consideramos apenas prótons e nêutrons (fenomenologia). Desta forma, temos

$$\langle 0 | j(x) | k \rangle = \langle 0 | j(0) | k \rangle e^{-ip_k x}. \quad (3.21)$$

Se assumirmos que $j(0)$ e $j(x)$ sejam hermitianos, então

$$\langle k | j(x) | 0 \rangle = \langle k | j^\dagger(0) | 0 \rangle e^{ip_k x}. \quad (3.22)$$

Levando as Equações 3.21 e 3.22 na Equação 3.20, ficamos com

$$\begin{aligned} \Pi(q) = i \int d^4x e^{iqx} \sum_k & \left(\Theta(x_0) \langle 0 | j(0) | k \rangle e^{-ip_k x} \langle k | j^\dagger(0) | 0 \rangle + \right. \\ & \left. + \Theta(-x_0) \langle k | j^\dagger(0) | 0 \rangle \langle 0 | j(0) | k \rangle e^{ip_k x} \right). \end{aligned}$$

Utilizando a seguinte identidade matemática

$$\int_0^\infty \int d^4p \Theta(p_0) \delta(p^2 - s) \delta^4(p - p_k) = 1,$$

obtem-se

$$\begin{aligned} \Pi(q) = i \int d^4x e^{iqx} & \left(\Theta(x_0) e^{-ip_k x} + \Theta(-x_0) e^{ip_k x} \right) \int_0^\infty \int d^4p \Theta(p_0) \delta(p^2 - s) \\ & \sum_k \delta^4(p - p_k) \left(\langle 0 | j(0) | k \rangle \langle k | j^\dagger(0) | 0 \rangle \right). \end{aligned}$$

O termo do somatório é dado por:

$$\sum_k \delta^4(p - p_k) (\langle 0 | j(0) | k \rangle \langle k | j^\dagger(0) | 0 \rangle) = \frac{\rho(p^2)}{(2\pi)^3},$$

desta forma,

$$\Pi(q) = i \int d^4x e^{iqx} (\Theta(x_0) e^{-ip_k x} + \Theta(-x_0) e^{ip_k x}) \int_0^\infty \int d^4p \Theta(p_0) \delta(p^2 - s) \frac{\rho(p^2)}{(2\pi)^3}.$$

Como só teremos valores não nulos quando $p^2 = s$, é válido que $\rho(p^2) \rightarrow \rho(s)$, sendo assim

$$\Pi(q) = \frac{i}{(2\pi)^3} \int d^4x e^{iqx} (\Theta(x_0) e^{-ip_k x} + \Theta(-x_0) e^{ip_k x}) \int_0^\infty ds \rho(s) \int d^4p \Theta(p_0) \delta(p^2 - s),$$

a partir da expressão acima podemos definir o chamado propagador de Feynman, dado por:

$$\Delta_F \equiv \frac{i}{(2\pi)^3} \int d^4p (\Theta(x_0) e^{-ip_k x} + \Theta(-x_0) e^{ip_k x}) \Theta(p_0) \delta(p^2 - s),$$

ou convenientemente pode ser escrito,

$$\Delta_F = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p \frac{e^{-ipx}}{s - p^2 - i\varepsilon}.$$

Assim, a função de correlação será redefinida como

$$\Pi(q) = i \int d^4x e^{iqx} \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p \frac{e^{-ipx}}{s - p^2 - i\varepsilon} \int_0^\infty ds \rho(s).$$

No limite quando $\varepsilon \rightarrow 0$ as integrais na posição e momentum resultam em:

$$\Pi(q) = \int_0^\infty \frac{ds \rho(s)}{s - q^2}.$$

A função $\rho(s)$ é denominada de função espectral. Através de resultados obtidos experimentalmente foi possível ajustar a respectiva função da seguinte maneira:

$$\rho(s) = \alpha^2 \delta(s - m^2) + \rho^{cte}(s).$$

O primeiro termo representa a partícula em seu estado fundamental de energia. Já o segundo termo representa o espectro de partículas que podem ser acessíveis através da

variação da energia. Sendo assim, após a integração a função de correlação torna-se

$$\Pi(q) = \frac{\alpha^2}{m - q^2} + \int_0^\infty \frac{\rho^{cont}(s)}{s - q^2} ds, \quad (3.23)$$

ou ainda,

$$\rho^{cont}(s) = \Theta(s - s_0) \rho^{OPE}(s),$$

onde o termo s e s_0 são parâmetros com dimensão de energia que estabelecem que para $s > s_0$ teremos apenas as contribuições energéticas das partículas excitadas para a função de correlação. O parâmetro s_0 recebe o nome de limiar do contínuo ou “threshold”, uma vez que representa a energia crítica a qual separa as partículas em seu estado fundamental daquelas que podem ser obtidas nos estados excitados.

A fim de utilizar o princípio da dualidade Quark-Hádrón, discutido no início do capítulo, torna-se conveniente escrevermos a função de correlação obtida pelo formalismo da OPE de maneira similar ao correlator obtido pelo formalismo fenomenológico, de modo que o seja feita a comparação entre as duas abordagens físicas. Por conta disso, é apropriado reescrever o propagador como uma relação de dispersão, dada por

$$\Pi^{OPE}(q) = \int_{s_{min}}^\infty \frac{\rho^{OPE}(s)}{s - q^2} ds,$$

onde

$$\rho^{OPE}(s) = \frac{1}{\pi} \text{Im} \Pi(s),$$

sendo assim, a função de correlação para o formalismo da OPE torna-se

$$\Pi^{OPE}(q) = \frac{1}{\pi} \int_{s_{min}}^\infty \frac{\text{Im} \Pi(s)}{s - q^2} ds. \quad (3.24)$$

Com isso, torna-se mais simples a comparação entre as funções de correlação obtidas pelo lado fenomenológico (Equação 3.23) e a que acabamos de encontrar pelo lado da OPE (Equação 3.24) afim de aplicarmos o princípio da dualidade Quark-Hádrón. Contudo, algumas aproximações foram feitas para obter tais expressões. Por conta disso, ao igualarmos as expressões diretamente não estaríamos descrevendo apropriadamente o sistema físico de interesse. Para contornar este problema, é necessário fazermos uso da chamada Transformada de Borel que será discutida na próxima seção.

3.1.6 A Transformada de Borel

Como dito anteriormente, mesmo após obtermos as expressões da função de correlação para ambos os formalismo, ao aplicarmos diretamente o princípio da dualidade Quark-

Hádrôn não é possível obter resultados apropriados. Este problema surge naturalmente quando estamos determinando as expressões dos correlatores. De fato, pelo lado da OPE realizamos o truncamento da série até segunda ordem e desprezamos ordens superiores, de modo que podemos perder a precisão de alguns resultados. Já no lado fenomenológico assumimos que há um espectro contínuo de energia gerando diversas partículas. Contudo, de forma rigorosa, temos diversas “linhas” de energia discretas muito próximas de modo que, em aproximação, consideramos uma região contínua de energia.

Para sanar tais problemas é necessário utilizar uma técnica matemática no momentum das partículas, conhecida como transformada de Borel. Esta por sua vez é definida como segue:

$$\beta[f(Q^2)] = \lim_{Q^2, n \rightarrow \infty} \frac{(Q^2)^{n+1}}{n!} \left(-\frac{\partial}{\partial Q^2}\right)^n f(Q^2), \quad (3.25)$$

onde $Q = -q^2$ representa o momento da partícula no espaço Euclidiano. Como podemos perceber as grandezas Q e n tendem a infinito, porém a sua razão é sempre mantida fixa por um valor M , denominada Massa de Borel. Vale ressaltar que tal parâmetro não corresponde a grandeza física massa, mas serve apenas como um artifício matemático para evitar eventuais divergências na transformada.

Aplicando a Equação 3.25 na Equação 3.23, encontra-se

$$\beta\left(\prod(q^2)\right) = \beta\left(\frac{\alpha^2}{m + Q^2}\right) + \int_0^\infty \rho^{cont}(s) \beta\left(\frac{1}{s + Q^2}\right) ds.$$

e sabendo que

$$\beta\left(\frac{1}{s + Q^2}\right) = e^{-\frac{s}{M^2}},$$

obtem-se

$$\beta\left(\prod(q^2)\right) = \alpha e^{-\frac{s}{M^2}} + \int_0^\infty \rho^{cont}(s) e^{-\frac{s}{M^2}} ds. \quad (3.26)$$

Assim, a medida que s cresce o segundo termo se aproxima de zero excluindo as contribuições e aproximações a respeito do espectro contínuo de energia, suprimindo os estados excitados. Ainda, para garantir a confiança dos dados encontrados é necessário encontrarmos um intervalo para a massa de borel, a qual os termos de ordem mais alta no formalismo da OPE sejam suprimidos ao mesmo tempo em que seja possível suprimir os estados excitados pelo formalismo fenomenológico. Este intervalo de confiabilidade para M é denominado Janela de Borel.

Para determinarmos a Janela de Borel é necessário encontrar o valor máximo e mínimo de M a fim de construir $M_{min} < M < M_{máx}$. Sendo assim, vamos fazer uma discussão qualitativa sobre os valores máximos e mínimos da massa de Borel.

As regras de soma têm como objetivo inferir as propriedades físicas dos hádrons em seu estado fundamental. Desta forma, é desejável que os estados excitados do lado feno-

menológico sejam nulos. Analisando a Equação 3.26 é notável que à medida que a massa de Borel cresce o termo do estado fundamental diminui ao passo que o termo do contínuo aumenta, até um instante em que ambos são iguais. Neste momento encontramos o valor máximo da massa de Borel. Já o valor mínimo, pode ser obtido pelo lado da OPE onde nos deparamos com uma série e consequentemente precisamos garantir a convergência da mesma. Para isso, com valores de $M \gg 1$ garantimos a convergência da mesma. Porém, no caso onde $M \ll 1$ teremos a divergência da série, o que fisicamente não é apropriado. Desta forma, é necessário encontrar um valor crítico para a massa de Borel a fim de garantir a convergência da série. Caso, $M_{min}^2 < M_{max}^2$ então de fato determinamos a chamada Janela de Borel garantindo a confiabilidade dos resultados.

3.2 Temperatura Finita

Neste capítulo, será mostrada a influência da temperatura bem como suas consequências para o formalismo das Regras de Soma. Na sequência, estudaremos, através das funções de correlação, o coeficiente de transporte com o intuito de inferir algumas propriedades físicas sobre a transição de fase plasma-hadron.

Já é bem conhecido pela literatura, que o propagador de Dolan Jackiw (DJ) é apropriado para descrever como os quarks e glúons se deslocam através do espaço-tempo quando estes estão sob a influência de um banho térmico [19]. Matematicamente temos

$$S_F(k, T) = \frac{1}{\not{k} - m} - \frac{2\pi}{e^{k_0 T} + 1} (\not{k} - m) \delta(k^2 - m^2), \quad (3.27)$$

onde $\not{k} = \gamma^\mu k$. O primeiro termo da Equação 3.27 representa o propagador do quark livre enquanto o segundo termo carrega a influência da temperatura sobre o movimento desses quarks. As grandezas k e m se referem ao momento e a massa dos quarks, respectivamente. A função correlação associada ao propagador (DJ) é dada por [20,21]

$$\Pi_{\mu\nu} = -i^3 N_c \int d^4 x e^{iqx} \text{Tr}[\gamma_\mu S_F(x) \gamma_\nu S_F(-x)], \quad (3.28)$$

sendo

$$S_F(\pm x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 k e^{\pm iqx} S_F(k, T),$$

de modo que na Equação 3.28 a constante N_c representa o grau de liberdade dos quarks, neste caso considerando apenas as cargas de cores $N_c = 3$. Ao analisar a função de correlação, em especial, sua parte imaginária, encontra-se dois termos oriundos da influência da temperatura.

O primeiro deles é conhecido como termo de aniquilação ($\omega^2 - q^2 \geq 0$) no qual descreve a criação e destruição de pares quarks e antiquarks na fase de plasma [20,21]. Já o outro termo ($\omega^2 - q^2 \leq 0$), denominado de espalhamento leva-se em conta a interação entre os quarks e antiquarks. Graficamente, podemos representar esses regimes no plano complexo

como pode ser visto na Figura 3.2 abaixo

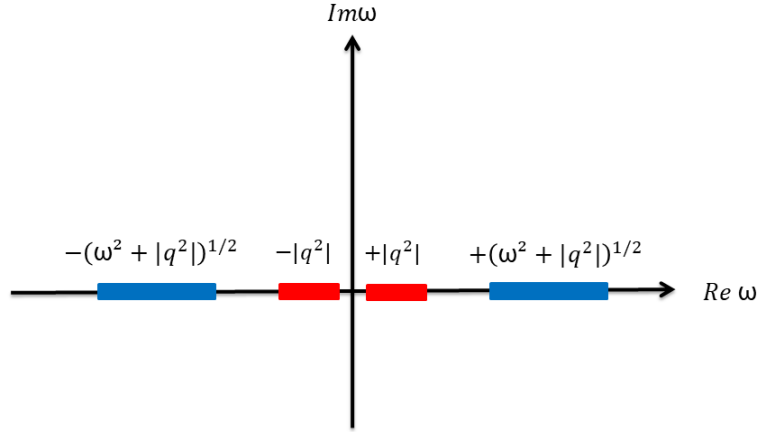


Figura 3.2: Representação esquemática do plano complexo de energia ω . Em vermelho estão representadas as contribuições energéticas para o termo de espalhamento, enquanto que as energias para a componente de aniquilação estão destacadas em azul.

Matematicamente, também já retratado pela literatura, as funções de correlação para os termos de aniquilação e espalhamento são dados respectivamente por [20,21]

$$Im\Pi^a(q^2, T) = \frac{3}{16\pi} \int_{-v}^v dx (1 - x^2) \left[1 - n_f\left(\frac{qx + \omega}{2T}\right) - n_f\left(\frac{qx - \omega}{2T}\right) \right], \quad (3.29)$$

$$Im\Pi^s(q^2, T) = \frac{3}{8\pi} \int_v^\infty dx (1 - x^2) \left[n_f\left(\frac{qx + \omega}{2T}\right) - n_f\left(\frac{qx - \omega}{2T}\right) \right], \quad (3.30)$$

sendo

$$v = \sqrt{1 - \frac{4m_q^2}{q^2}}, \quad n_f(y) = \frac{1}{e^y + 1}.$$

de modo que $n_f(y)$ representa a distribuição de Fermi-Dirac e v é um parâmetro dependente da massa m_q e momentum q dos quarks. Ainda, vale ressaltar que na ausência de temperatura o termo de espalhamento torna-se nulo e apenas a componente de aniquilação é relevante. A medida que a temperatura torna-se não nula as partículas do plasma começam a se deslocar com velocidade alta e consequentemente o processo de espalhamento é desencadeado. Por fim, nota-se que a aniquilação para quarks e antiquarks no plasma é sempre relevante, independentemente da presença do banho térmico [20,21].

Através das Equações 3.30 e 3.29 será possível determinar o chamado coeficiente de transporte, a fim de compreender algumas propriedades sobre as fases hadrônicas e do plasma, bem como a influência de temperatura, frequência e outras grandezas físicas relevantes.

Capítulo 4

Mecânica Estatística da Matéria Nuclear

Neste capítulo, estamos interessados em investigar, através da mecânica estatística o comportamento das duas fases de interesse neste trabalho, a hadrônica e a fase de plasma. Sendo assim, de início, construiremos a função de partição para bósons e férmions bem como as respectivas antipartículas deste último. É de se esperar uma variação no número de partículas devido ao mecanismo da produção de pares que ocorre, principalmente na fase de plasma. Por conta disso, devemos levar em conta o potencial químico do sistema e conseqüentemente fazemos uso da abordagem Grand Canônica [22]. Desta forma, a mesma, já bem conhecida pela literatura, é dada por [10,22,23].

$$Z_{FB} = (1 \pm e^{-(E-\mu)T})^{\mp 1},$$

onde μ descreve o potencial químico do sistema com energia E imerso em um banho térmico com temperatura T . Além disso, os sinais $\mp$ se referem, respectivamente, as partículas bosônicas e fermiônicas. No caso de antipartículas definimos, uma difusão “negativa” de partículas, matematicamente $\bar{\mu} = -\mu$. De modo geral, escrevemos

$$Ln(Z) = \sum_i Ln(Z_i(E, T, \mu)) + Ln(Z_i(E, T, -\mu)), \quad (4.1)$$

sendo o primeiro termo referente a função de partição das partículas enquanto o segundo descreve a antipartícula associada. Para uma grande quantidade de matéria e antimatéria

$$\sum_i \rightarrow gV \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}, \quad (4.2)$$

onde d^3k é o elemento infinitesimal de uma esfera de raio k no espaço de Fourier e g representa a degenerescência.

$$d^3k = 4\pi k^2 dk. \quad (4.3)$$

A energia relativística do sistema para partículas de massa pequena ou desprezível é dada por

$$E = \sqrt{p^2 + m^2} = \sqrt{k^2 + m^2} = |k|. \quad (4.4)$$

Levando a Equação 4.4 na Equação 4.3 e o resultado substituímos na Equação 4.2, encontramos

$$\sum_i \rightarrow gV \int \frac{dE}{(2\pi)^2} Ek. \quad (4.5)$$

Substituindo a Equação 4.5 na Equação 4.1 a função de partição pode ser reescrita como

$$Ln(Z) = \frac{gV}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dE K E (Ln(Z(E, T, \mu)) + Ln(Z(E, T, -\mu))).$$

Através da substituição $k = E$ e uma integração por partes, o primeiro termo da integral pode ser reescrito como

$$Ln(Z) = \frac{gV}{2\pi^2 T} \int_0^\infty \frac{dk}{3E} k^4 \left(\frac{1}{e^{(E-\mu)/T} \mp 1} \right),$$

onde o mesmo procedimento pode ser feito para o segundo termo. Sendo assim a função de partição pode ser redefinida como

$$Ln(Z) = \frac{gV}{2\pi^2 T} \int_0^\infty \frac{dk}{3E} k^4 \left(\frac{1}{e^{(E-\mu)/T} \mp 1} + \frac{1}{e^{(E+\mu)/T} \mp 1} \right),$$

ou ainda

$$TLn(Z) = \frac{gV}{6\pi^2} \int_0^\infty dk k^3 \left(\frac{1}{e^{(k-\mu)/T} \mp 1} + \frac{1}{e^{(k+\mu)/T} \mp 1} \right). \quad (4.6)$$

Nesta etapa estudaremos separadamente o caso de férmions e bósons. Primeiramente para o caso dos bósons, onde não temos antipartículas associadas, o segundo termo da Equação 4.6 é nulo. Ainda, considerando que não ocorre a criação e aniquilação de bósons $\mu = 0$. Desta forma,

$$TLn(Z) = \frac{gV}{6\pi^2} \int_0^\infty dk k^3 \left(\frac{1}{e^{k/T} - 1} \right).$$

Através da substituição $k = yT$, a integral acima pode ser reescrita como

$$TLn(Z) = \frac{gVT^4}{6\pi^2} \int_0^\infty dy \left(\frac{y^3}{e^y - 1} \right),$$

contudo

$$\frac{1}{e^y - 1} = e^{-y} (1 + e^{-y} + e^{-2y}) = e^{-y} \sum_n e^{-ny},$$

assim

$$TLn(Z) = \frac{gVT^4}{6\pi^2} \int_0^\infty dy y^3 \sum_n e^{-(n+1)y}.$$

Fazendo uso da substituição $u = y^3$ e $dv = e^{-(n+1)y}$, após 4 integrações por partes

encontra-se

$$TLn(Z) = \frac{gVT^4}{6\pi^2} \sum_n \frac{3!}{(n+1)^4}. \quad (4.7)$$

Podemos reescrever a Equação 4.7 através das seguintes funções especiais

$$\Gamma(n+1) = n!, \quad (4.8)$$

$$\xi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^x}, \quad (4.9)$$

onde a Equação 4.8 e Equação 4.9 são, respectivamente, a função Gama e função Zeta de Reimann. Sendo assim

$$TLn(Z) = \frac{gVT^4}{6\pi^2} \Gamma(4)\xi(4) = \frac{gVT^4}{6\pi^2} \Gamma(4) \left(\frac{\pi^4}{90}\right),$$

que nos leva a seguinte equação

$$TLn(Z) = \left(\frac{gV\pi^2}{90}\right) T^4. \quad (4.10)$$

A Equação 4.10 representa a energia livre para bósons não massivos, como por exemplo fótons e glúons. A diferença entre os mesmos aparece no grau de liberdade g , onde para o fóton temos $g = 2$ devido a sua polarização transversal e longitudinal. Já para o caso dos glúons, temos $g = 16$ devido aos 2 valores possíveis de spins bem como as 8 cores que os diferem, representadas matematicamente pelas matrizes de Gell-Mann [10]. Considerando um gás de píons, onde $g = 3$, já que π^0, π^-, π^+ é possível obter algumas observáveis, como por exemplo a pressão, dada por

$$P_\pi = \frac{T}{V} Ln(Z) = \frac{\pi^2}{30} T^4, \quad (4.11)$$

encontra-se diretamente a energia do sistema, através da seguinte relação

$$E_\pi = 3P_\pi = \frac{\pi^2}{10} T^4, \quad (4.12)$$

a entropia do sistema,

$$S_\pi = \frac{\partial}{\partial T} (TLn(Z_\pi)) = \frac{2\pi^2}{15} T^3. \quad (4.13)$$

A partir da entropia obtemos a expressão do calor específico, via

$$C_V = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_V,$$

onde encontramos

$$C_V = \frac{2\pi^2}{5} VT^3. \quad (4.14)$$

Uma vez encontrada algumas grandezas para o gás de píons, analisaremos o grupo dos férmions. Neste caso, não deve ser desconsiderado o termo de antipartículas, já que, devido à produção de pares o potencial químico precisa ser levado em conta. Com isso, a energia livre será dada por

$$T \ln(Z) = \frac{gV}{6\pi^2} \int_0^\infty dk k^3 \left(\frac{1}{e^{(k-\mu)/T} + 1} + \frac{1}{e^{(k+\mu)/T} + 1} \right).$$

Apenas por questões didáticas,

$$A \equiv \int_0^\infty dk k^3 \frac{1}{e^{(k-\mu)/T} + 1},$$

através da substituição $k = \mu + yT$ e pelos novos limites de integração obtemos

$$A = T \left\{ \int_0^\infty \frac{dy(\mu + yT)^3}{e^y + 1} - \int_0^{-\frac{\mu}{T}} \frac{dy(\mu + yT)^3}{e^y + 1} \right\}. \quad (4.15)$$

O mesmo procedimento pode ser feito para o segundo termo, através da substituição $k = yT - \mu$, que nos leva a equação

$$B \equiv \int_0^\infty dk k^3 \frac{1}{e^{(k+\mu)/T} + 1},$$

de modo que encontra-se

$$B = T \left\{ \int_0^\infty \frac{dy(yT - \mu)^3}{e^y + 1} - \int_0^{-\frac{\mu}{T}} \frac{dy(yT - \mu)^3}{e^y + 1} \right\}. \quad (4.16)$$

Resolvendo o termo B, onde reescrevemos os denominadores como

$$\frac{1}{e^y + 1} = 1 - \frac{1}{1 + e^{-y}}, \quad (4.17)$$

e levando a Equação 4.17 no segundo termo da Equação 4.16 encontramos

$$B = T \left\{ \int_0^\infty \frac{dy(yT - \mu)^3}{e^y + 1} - \left\{ \int_0^{\frac{\mu}{T}} dy(yT - \mu)^3 - \int_0^{\frac{\mu}{T}} \frac{dy(yT - \mu)^3}{e^{-y} + 1} \right\} \right\}.$$

Com as substituições $y \rightarrow -y$, $dy \rightarrow -dy$ e $(yT - \mu)^3 \rightarrow -(yT + \mu)^3$ temos

$$B = T \left\{ \int_0^\infty \frac{dy(yT - \mu)^3}{e^y + 1} - \int_{-\frac{\mu}{T}}^0 dy \frac{(yT + \mu)^3}{e^y + 1} + \int_{-\frac{\mu}{T}}^0 dy (yT + \mu)^3 \right\}. \quad (4.18)$$

Para obtermos a energia livre basta somarmos a Equação 4.15 com a Equação 4.18, de modo que o segundo termo de ambas as equações são cancelados. Desta forma, encontra-se

$$TLn(Z) = \frac{gVT}{6\pi^2} \left\{ \int_0^\infty \frac{dy [(yT - \mu)^3 + (yT + \mu)^3]}{e^y + 1} + \int_{-\frac{\mu}{T}}^0 dy (yT + \mu)^3 \right\},$$

que pode ser reescrita como

$$TLn(Z) = \frac{gVT}{6\pi^2} \left\{ \frac{\mu^4}{4T} + 2 \int_0^\infty dy \frac{(T^3 y^3 + 3\mu^3 T y)}{e^y + 1} \right\}, \quad (4.19)$$

onde

$$\frac{1}{e^y + 1} = \sum_n (-1)^n e^{-(n+1)y}.$$

Teremos que o segundo termo da Equação 4.19 se torna

$$TLn(Z) = \frac{gVT}{6\pi^2} \left\{ \frac{\mu^4}{4T} + 2T \sum_n (-1)^n \int_0^\infty dy (T^3 y^3 + 3\mu^3 T y) e^{-(n+1)y} \right\}. \quad (4.20)$$

A integral já fora calculada para o caso de partículas bosônicas. Utilizando as Equações 4.8 e 4.9 na Equação 4.20 ficamos com

$$TLn(Z) = \frac{gV}{6\pi^2} \left\{ \frac{\mu^4}{4} + 2T^4 \Gamma(4) \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{(n+1)^4} + 6\mu^2 T^2 \Gamma(2) \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{(n+1)^2} \right\},$$

que nos leva a

$$TLn(Z) = \frac{gV}{6\pi^2} \left\{ \frac{\mu^4}{4} + 2T^4 \Gamma(4) \left(1 - \frac{1}{2^3}\right) \xi(4) + 6\mu^2 T^2 \Gamma(2) \left(1 - \frac{1}{2}\right) \xi(2) \right\}.$$

Para o caso do plasma de quarks e glúons, onde a maioria dos quarks produzidos são leves como, por exemplo, o *quark up* e *quark down* o grau de liberdade é dado por $g = 2(\text{sabores}) \cdot 2(\text{spin}) \cdot 3(\text{cores}) = 12$ [10]. A energia livre deste sistema pode ser escrita como

$$TLn(Z) = V \left(\frac{7\pi^2}{30} T^4 + \mu^2 T^2 + \frac{\mu^4}{2\pi^2} \right). \quad (4.21)$$

Notamos na expressão da energia livre dos férmions uma grande dependência com a temperatura do sistema. Para termos acesso a energia livre do plasma de quarks e glúons precisamos levar em conta o termo da energia livre dos bósons, descrito pela Equação 4.10. Sendo assim, a energia livre do nosso sistema de interesse será dada por

$$TLn(Z_{QGP}) = V \left(\frac{37\pi^2}{90} T^4 + \mu^2 T^2 + \frac{\mu^4}{2\pi^2} \right).$$

Em posse da energia livre podemos determinar algumas grandezas de nosso interesse, como por exemplo a densidade de energia do sistema [10,23] através de

$$E_{QGP} = \frac{T^2}{V} \frac{\partial}{\partial T} [Ln(Z_{QGP})] + \mu n,$$

onde n representa o número de quarks, que contribuem para a energia, dado por

$$n = \frac{T}{V} \frac{\partial}{\partial \mu} Ln(Z_{QGP}) = 2\mu \left(T^2 + \frac{\mu^2}{\pi^2} \right),$$

sendo assim

$$E_{QGP} = \frac{37}{30} \pi^2 T^4 + 3T^2 \mu^2 + \frac{3}{2} \frac{\mu^4}{\pi^2}. \quad (4.22)$$

Vale ressaltar que o número de quarks contribui de forma mais significativa para a densidade de energia, em relação aos glúons e antiquarks, onde esses dois últimos são tratados como flutuações na energia [10,23]. Ainda a pressão do plasma por volume é determinada através de

$$P = \frac{T}{V} Ln(Z_{QGP}) = \frac{37\pi^2}{90} T^4 + \mu^2 T^2 + \frac{\mu^4}{2\pi^2}. \quad (4.23)$$

Comparando a Equação 4.22 com a Equação 4.23 notamos

$$P_{QGP} = \frac{1}{3} E_{QGP}.$$

É possível determinar a entropia do plasma uma vez que

$$S_{QGP} = \frac{\partial}{\partial T} (T Ln(Z_{QGP})) = \frac{74\pi^2}{45} T^3 + 2\mu^2 T. \quad (4.24)$$

Por fim, obtem-se o calor específico

$$C_V = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_V,$$

que é igual a expressão

$$C_V = \frac{74\pi^2}{15} T^3 + 2\mu^2 T. \quad (4.25)$$

Como completeza, podemos encontrar o número de partículas, quarks, antiquarks e glúons por volume. Sendo assim, de modo genérico escrevemos a energia livre no caso bosônico

$$T Ln Z = \frac{gT}{2\pi^2} \int dk k^2 Ln \left[\frac{1}{e^{(k-\mu)/T} - 1} \right].$$

A densidade de glúons será dado por

$$n_g = \frac{T}{V} \frac{\partial Ln Z}{\partial \mu},$$

para glúons temos que $\mu = 0$, deste modo obtendo

$$n_g = \frac{gT}{2\pi^2} \int dk k^2 \frac{1}{e^{k/T} - 1}.$$

Em etapas anteriores este tipo de integral já foi discutida em detalhes, sendo assim

$$n_g = \frac{16\zeta(3)}{\pi^2} T^3. \quad (4.26)$$

A contribuição da densidade de quarks e antiquarks é semelhante a contribuição dos glúons, contudo devemos fazer uso da estatística de Fermi-Dirac e ainda acrescentarmos o termo relacionado as antipartículas, com isso

$$n_q = \frac{g_f}{2\pi^2} \int_0^\infty dk k^2 \left(\frac{1}{e^{(k-\mu)/T} + 1} + \frac{1}{e^{(k+\mu)/T} + 1} \right),$$

onde o segundo termo, descreve a contribuição das antipartículas. Fazendo a substituição $y = (k \mp \mu)/T$, para quarks e antiquarks respectivamente, em cada um dos termos e de forma similar ao que foi feito anteriormente, as transformações resultam em

$$n_q = \frac{g_f T}{2\pi^2} \left\{ \int_{-\frac{\mu}{T}}^0 dy (yT + \mu)^2 + \int_0^\infty \frac{dy (yT + \mu)^2 + (yT - \mu)^2}{e^y + 1} \right\}.$$

As integrações nos fornecem

$$n_q = \frac{g_f}{\pi^2} \left(\frac{3\zeta(3)}{2} T^3 + \frac{\mu^3}{6} \right), \quad (4.27)$$

onde $g_f = 12$, (2 sabores).(3 cores).(2 graus de liberdade de spin). Para adquirirmos o número total de partículas do plasma basta somarmos as Equações 4.26 e 4.27, que encontramos

$$n_{QGP} = \frac{34\zeta(3)}{\pi^2} T^3 + \frac{2\mu^3}{\pi^2}. \quad (4.28)$$

Podemos notar que, de acordo com a Equação 4.28, o número de partículas depende da temperatura do sistema bem como o potencial químico dos quarks, uma vez que para os glúons o mesmo é nulo [10,23].

Segundo o formalismo das transições de fase de Gibbs, as pressões de cada um dos sistemas envolvidos devem ser iguais. Contudo, ao compararmos a Equação 4.11 com a Equação 4.23, nota-se uma diferença entre as mesmas o que não corrobora com a teoria de transições de fase já bem conhecidas. Surge a necessidade de corrigirmos este problema, introduzindo um fator ou termo que forneça uma equivalência entre as pressões de cada sistema. Diferentemente da eletrodinâmica quântica, onde a característica acerca do vácuo é que o mesmo seja vazio e não possamos encontrar nenhuma partícula neste estado, a

cromodinâmica quântica nos mostra que o estado de vácuo, para este nível de energia, é preenchido com diversas partículas que podem interagir com a matéria imersa neste estado quântico. Para levar em conta, essa interação com o vácuo, introduziu-se um parâmetro B que descreve uma “pressão do vácuo”, para considerar a interação entre matéria-vácuo. Esta correção foi proposta no chamado “MIT Bag Model” [10,23]. Vale ressaltar que este parâmetro deve ser introduzido apenas nas grandezas do plasma, já que na fase hadrônica, não temos energia suficiente para acessar o vácuo da cromodinâmica quântica, composto basicamente pelas mesmas partículas do plasma. Para isso, descrevemos a energia livre do “Bag Model” como sendo

$$T \ln(Z_{Bag}) = -BV,$$

sendo assim, a pressão e a densidade de energia serão dadas respectivamente por

$$P_{Bag} = \frac{T \ln(Z_{Bag})}{V} = -B,$$

$$E_{Bag} = \frac{T^2}{V} \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{-BV}{T} \right) = B.$$

Nota-se que por definição de entropia, o modelo em questão não contribui com termos adicionais, fisicamente, o vácuo da cromodinâmica não afeta a entropia do plasma, matematicamente

$$\frac{\partial}{\partial T} T \ln(Z_{Bag}) = 0.$$

Desta forma, as grandezas termodinâmicas do plasma, levando em conta a correção do vácuo, são dadas por

$$P_{QGP}^T = P_{QGP} + P_{vácuo},$$

onde

$$P_{QGP}^T = \frac{37\pi^2}{90} T^4 + \mu^2 T^2 + \frac{\mu^4}{2\pi^2} - B. \quad (4.29)$$

A energia

$$E_{QGP}^T = E_{QGP} + E_{Bag},$$

pode ser escrita na seguinte forma

$$E_{QGP}^T = \frac{37}{30} \pi^2 T^4 + 3T^2 \mu^2 + \frac{3}{2} \frac{\mu^4}{\pi^2} + B. \quad (4.30)$$

A entropia permanece intalterada e consequentemente o calor específico do sistema, que são escritos como

$$S_{QGP}^T = S_{QGP} + S_{Bag} = \frac{74\pi^2}{45} T^3 + 2\mu^2 T, \quad (4.31)$$

e

$$C_{QGP}^T = C_{QGP} + C_{Bag} = \frac{74\pi^2}{15}T^3 + 2\mu^2T. \quad (4.32)$$

Após a correção do “Bag Model”, podemos analisar as pressões dos sistemas de modo que as mesmas satisfaçam a teoria de Gibbs e determinar, por exemplo, a temperatura de transição. Igualando a Equação 4.11 com a Equação 4.29 e considerando que não ocorra alteração no número de partículas, de modo que o potencial químico seja nulo, na temperatura crítica

$$T_c = \left(\frac{90}{34\pi^2} \right)^{1/4} B^{1/4}, \quad (4.33)$$

segundo cálculos de cromodinâmica quântica na rede e outros métodos teóricos/computacionais [23]

$$B = 0.236 \text{ GeV}.$$

Desta forma a temperatura crítica que separa as fases de interesse é dada por

$$T_c = 170 \text{ MeV}.$$

É possível construir um gráfico, como pode ser notado na Figura 4.1, com as grandezas pressão em função da temperatura de ambos os sistemas, usando as Equações 4.29 e 4.11, na ausência do potencial químico [23].

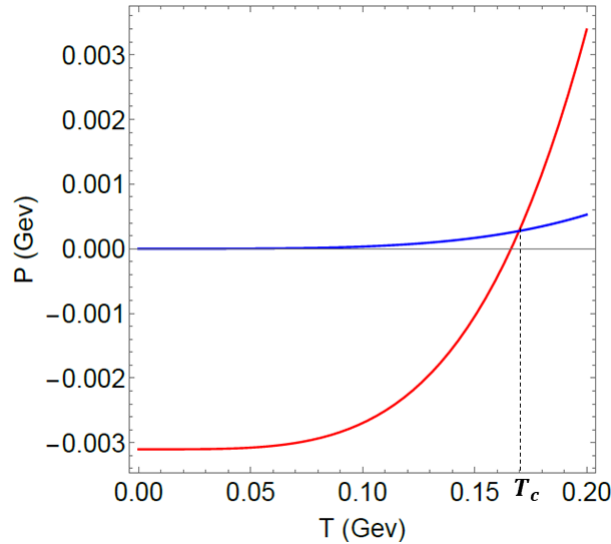


Figura 4.1: Comportamento da pressão em função da temperatura do sistema hadrônico, representado em azul, juntamente com o sistema de plasma, destacado em vermelho. Segundo a teoria de Gibbs, a temperatura onde ocorre a igualdade das pressões é denominada como temperatura crítica, onde em nosso caso encontra-se em aproximadamente 0.17 GeV ou 170 MeV .

Nota-se que em regimes onde $T < T_c$ a pressão do gás hadrônico é superior, enquanto que para o sistema de plasma, a pressão do mesmo é puramente do vácuo da QCD. Contudo, com o aumento da temperatura, passando por $T = T_c$ onde as pressões são

iguais corroborando com a teoria de Gibbs, atingimos a regimes de $T > T_c$ de forma que a pressão no plasma demonstra-se muito maior quando comparada a pressão do sistema na fase hadrônica.

Por questão de completeza, como a transição QGP-Hádron é de primeira ordem torna-se possível determinarmos o calor latente do sistema, uma vez que

$$L = T(s_1 - s_2),$$

onde $s_i \equiv \frac{S_i}{N_i}$, representa a entropia por partícula. De acordo com as Leis Termodinâmicas

$$T\Delta S = \Delta E,$$

assim

$$L = \Delta E = E_{QGP}^T - E_{Had}^T,$$

que pode ser escrito como

$$L = \frac{37}{30}\pi^2 T_c^4 + 3T_c^2 \mu^2 + \frac{3}{2}\frac{\mu^4}{\pi^2} + B - \frac{\pi^2}{10}T_c^4. \quad (4.34)$$

Levando a Equação 4.33 na Equação 4.34, encontra-se

$$L = 4B.$$

Com isso, o calor latente só é levado em conta quando a correção do “Bag Model” é considerada, uma das grandes contribuições deste modelo, para explicar o sistema em questão. Através da Figura 4.2, no canto esquerdo, podemos visualizar o comportamento da energia na região de $T < T_c$ onde temos a fase hadrônica, enquanto que $T > T_c$ o processo de deconfinamento já tenha ocorrido atingindo a fase de plasma [23]. O comportamento abrupto da energia na temperatura crítica, evidenciando a transição de fase, é exatamente a energia na forma de calor latente liberada durante o processo [10,11]. O gráfico no canto direito, representa uma ampliação no comportamento da energia para o caso do gás hadrônico.

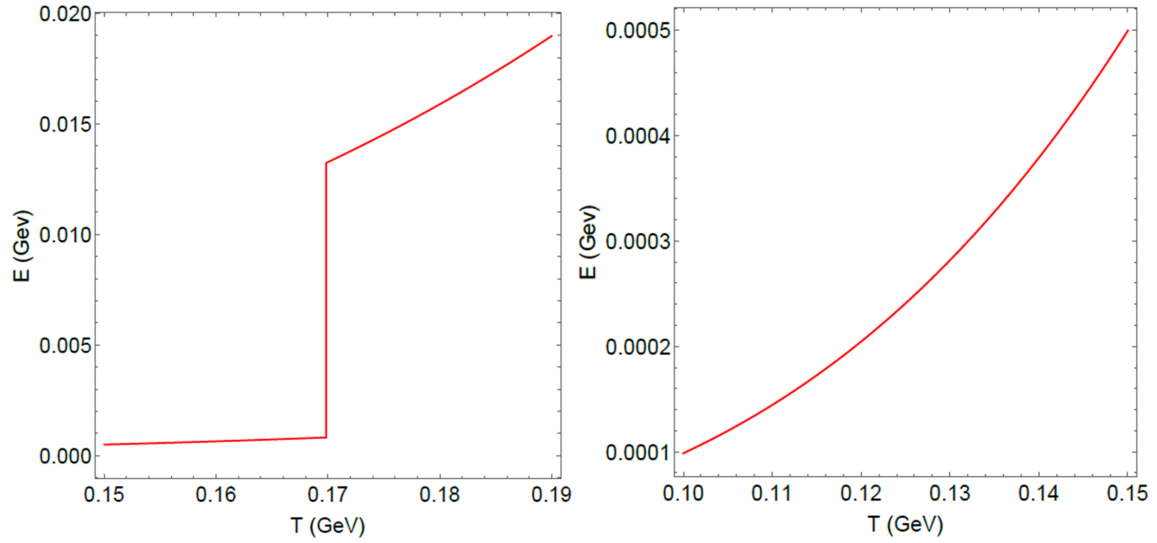


Figura 4.2: Curvas que descrevem o comportamento da energia em função da temperatura para ambas as fases, i.e. hádrons e plasma. No gráfico da direita, notamos a região de menor energia onde $T < T_c$. O comportamento abrupto da curva, ou seja, a presença do calor latente indica uma transição de fase de primeira ordem, de modo que para $T > T_c$ atingimos o regime de plasma de quarks e glúons.

Através do formalismo Grand Canônico e segundo as correções do modelo “MIT Bag Model” foi possível encontrarmos algumas grandezas físicas relevantes do nosso sistema. As observáveis aqui obtidas serão utilizadas como ferramentas fundamentais para determinarmos alguns coeficientes de transporte de interesse para este trabalho, como a condutividade térmica e difusão térmica.

Capítulo 5

Coeficientes de Transporte

Neste capítulo abordaremos o conceito de coeficiente de transporte bem como o respectivo formalismo matemático que os envolve. Tais coeficientes estarão organizados em duas seções. Na primeira delas, utilizando o formalismo das Regras de Soma em temperatura finita tratado em capítulos anteriores, descreveremos o transporte de matéria χ bem como o transporte de cargas elétricas, onde este nos fornece a condutividade elétrica σ . Já na segunda seção, por meio do formalismo da mecânica estatística e suas observáveis, encontraremos os coeficientes de transporte que descrevem o fluxo de energia, denominados como condutividade térmica κ e difusão térmica α .

5.1 O Transporte de Matéria e Cargas Elétricas

Consideremos uma partícula, como por exemplo, um quark, que se propaga de forma arbitrária de um ponto até o outro no espaço-tempo, como mostrado na Figura 5.1, de forma análoga, o mesmo encontra-se em seu estado inicial (x, t^x) e depois de um certo instante evolui para um estado final (y, t^y) .

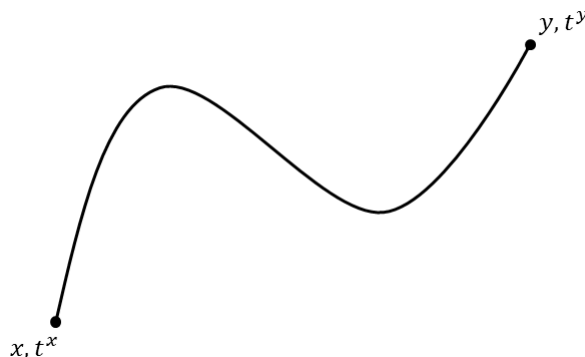


Figura 5.1: Representação esquemática de uma trajetória arbitrária no espaço de Minkowski. Os pontos (x, t^x) e (y, t^y) representam, respectivamente, as coordenadas iniciais e finais no espaço-tempo.

Para descrever este sistema, podemos fazer uso das chamadas integrais de caminho

de Feynman, já que as mesmas por definição representam os n caminhos que uma partícula pode percorrer entre dois pontos quaisquer em uma determinada região [24,25]. Matematicamente temos

$$\langle \phi(x, t^x) \rangle = \int Dx \phi(x, t^x) e^{\int d^4x \mathcal{L}}, \quad (5.1)$$

se levarmos em conta que os quarks não são partículas isoladas mas que ao seu redor o mesmo está envolto por uma densidade de glúons, assim como os elétrons são rodeados por nuvens de fótons, a interação quark-glúon ou glúon-glúon deve ser levada em conta o que gera um termo extra, denominado fonte [24,25]. Sendo assim a Equação 5.1 torna-se

$$\langle \phi(x, t^x) \rangle = \int Dx O(x) e^{\int d^4y (O(y)\phi(y, t^y) + \mathcal{L})}$$

onde $O(x)$ e $O(y)$ representam operadores arbitrários, como por exemplo, campos escalares de determinada partícula nas coordenadas iniciais e finais do espaço-tempo. Já o operador $\phi(y, t^y)$ representa uma fonte ou a presença de um campo, que por sua vez está associado a uma partícula enquanto $\mathcal{L}$ descreve a lagrangeana do sistema [26].

Realizando uma expansão de primeira ordem no argumento da função exponencial encontramos

$$e^{\int d^4y O(y)\phi(y, t^y)} = 1 + \int d^4y O(y)\phi(y, t^y).$$

Com isso, a função $\langle \phi(x, t^x) \rangle$ se torna

$$\langle \phi(x, t^x) \rangle = \int Dx O(x) e^{S(x)} \left(1 + \int d^4y O(y)\phi(y, t^y) \right),$$

ou ainda

$$\langle \phi(x, t^x) \rangle = \int Dx O(x) e^{S(x)} + \int \int d^4y Dx O(x) e^{S(x)} O(y) \phi(y, t^y),$$

onde é conveniente fazermos as seguintes definições

$$\int Dx O(x) e^{S(x)} O(y) = \langle O(x) O(y) \rangle \equiv G(x, t^x; y, t^y),$$

$$\int Dx O(x) e^{S(x)} \equiv \langle O(x) \rangle_0,$$

de modo que $\langle O(x) \rangle_0$ descreve a integral de caminho na ausência de fonte, ou seja, a Equação 5.1. Desta forma, obtêm-se

$$\langle \phi(x, t^x) \rangle = \langle O(x) \rangle_0 + \int d^4y G(x, t^x; y, t^y) \phi(y, t^y).$$

Apenas por conveniência, podemos adotar que o estado inicial do sistema em $t^x = 0$

encontra-se na origem e consequentemente $\langle O(x) \rangle_0 = 0$. Através das seguintes hipóteses, escrevemos

$$\langle \phi(x, t^x) \rangle = \int d^4y G^+(x, t^x; y, t^y) \phi(y, t^y), \quad (5.2)$$

onde

$$G^+(x, t^x; y, t^y) = \begin{cases} t^x & \text{se } t^x > t^y \\ 0 & \text{se } t^x < t^y \end{cases}.$$

Analisando o integrando da Equação 5.2 e definindo

$$\psi(x, t^x; y, t^y) \equiv G^+(x, t^x; y, t^y) \phi(y, t^y). \quad (5.3)$$

Após uma transformada de Fourier

$$\psi(k, \omega) = \int \frac{d^4x}{(2\pi)^4} \psi(x, t^x; y, t^y) e^{-ikx}, \quad (5.4)$$

usando a definição da Equação 5.3 na Equação 5.4 encontramos

$$G^+(k, \omega) \phi(k, \omega) = \int \frac{d^4x}{(2\pi)^4} G^+(x, t^x; y, t^y) \phi(y, t^y) e^{-ikx},$$

podemos reescrever a Equação 5.3 no espaço dos momentus de modo que

$$\psi(k, \omega) \equiv G^+(k, \omega) \phi(k, \omega). \quad (5.5)$$

Analisando a dinâmica do campo escalar $\phi(k, \omega)$ de modo que, sem perdas de generalização, podemos denotar o mesmo como uma onda plana se propagando no espaço tempo como segue

$$\phi(k, \omega) \sim e^{i(kx - \omega t)},$$

onde

$$\partial_0 \phi(k, \omega) = -i\omega \phi(k, \omega). \quad (5.6)$$

Levando a Equação 5.6 na Equação 5.5 encontramos

$$\psi(k, \omega) = -\frac{1}{i\omega} G^+(k, \omega) \partial_0 \phi(k, \omega) = -\frac{1}{\omega} \text{Im}(G^+(k, \omega)) \partial_0 \phi(k, \omega).$$

Podemos definir o coeficiente de transporte de massa como sendo [26]

$$\chi \equiv -\frac{1}{\omega} \text{Im}(G^+(k, \omega)). \quad (5.7)$$

A Equação 5.7 é chamada de Relação Green-Kubo [26,27]. A mesma ainda pode ser

reescrita da forma

$$\chi = \text{Lim}_{k,\omega \rightarrow 0} - \frac{1}{\omega} \text{Im}(G^+(k, \omega)).$$

Como as funções de correlação coincidem com a função de Green escrevemos o coeficiente de transporte de matéria

$$\chi = \text{Lim}_{k,\omega \rightarrow 0} - \frac{1}{\omega} \text{Im}\Pi(\omega). \quad (5.8)$$

Fisicamente o coeficiente de transporte χ representa o fluxo ou, como nome já sugere, o transporte de determinada quantidade física, *e.g.* massa, calor, cargas elétricas, viscosidade entre outras [26]. Através do conceito de fluxo é conveniente pensarmos em uma densidade de corrente de uma grandeza associada a este fluxo, de modo que a mesma satisfaça a equação da continuidade [24]. Para o transporte de massa, a variação da corrente de matéria no espaço ou o fluxo de matéria implica diretamente na variação de densidade de partículas em certo instante de tempo elegantemente escrita como

$$\partial_\mu J^\mu = 0,$$

ou de forma análoga

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot \vec{J}.$$

De acordo com as funções de correlação que descrevem as regras de soma à temperatura finita, levando em conta a aniquilação e espalhamento de partículas, tínhamos que

$$\text{Im}\Pi^s(q^2, T) = \frac{3}{8\pi} \int_v^\infty dx(1-x^2) \left[n_f\left(\frac{qx+\omega}{2T}\right) - n_f\left(\frac{qx-\omega}{2T}\right) \right],$$

e

$$\text{Im}\Pi^a(q^2, T) = \frac{3}{16\pi} \int_{-v}^v dx(1-x^2) \left[1 - n_f\left(\frac{qx+\omega}{2T}\right) - n_f\left(\frac{qx-\omega}{2T}\right) \right].$$

A fim de obter o coeficiente de transporte, Equação 5.8, basta realizarmos as integrações acima. Começando pela parte do espalhamento. Ao realizarmos uma integração direta, surge o problema da convergência da respectiva integral, uma vez que devido as chamadas funções polilogarítmicas (para valores expressivos) a mesma diverge. Para contornar este problema, estabelecemos um valor que julgamos apropriado para descrever o sistema físico de maneira correta e sem perdas de generalidade (*Cut off*) [24]. Para isso, o limite superior será reescrito até um valor finito, dado por

$$\text{Im}\Pi^s = \frac{3}{8\pi} \int_v^{500} dx(1-x^2) \left[n_f\left(\frac{qx+\omega}{2T}\right) - n_f\left(\frac{qx-\omega}{2T}\right) \right],$$

e após a correção de sua convergência, foi possível realizar a integração, onde seu resultado

é dado por

$$Im\Pi^s = \frac{6T}{8\pi q^3 |q|^3} \left[q^2 |q| (q^2 - 4m^2) A + 4Bq^3 T \sqrt{q^2 - 4m^2} + |q|^3 \{C + D + E + F + G\} \right], \quad (5.9)$$

onde, por conveniência definimos

$$A = Ln \left[1 + e^{\frac{q\sqrt{-4m^2+q^2}-\omega|q|}{2T|q|}} \right] - Ln \left[1 + e^{\frac{q\sqrt{-4m^2+q^2}+\omega|q|}{2T|q|}} \right],$$

$$B = PolyLog \left[2, e^{\frac{q\sqrt{-4m^2+q^2}-\omega|q|}{2T|q|}} \right] - PolyLog \left[2, 2, e^{\frac{q\sqrt{-4m^2+q^2}+\omega|q|}{2T|q|}} \right],$$

$$C = 249.999q^2 \left(Ln \left[1 + e^{\frac{500q+\omega}{2T}} \right] - Ln \left[1 + e^{\frac{500q-\omega}{2T}} \right] \right),$$

$$D = q^2 \left(Ln \left[1 + e^{\frac{q\sqrt{-4m^2+q^2}+\omega|q|}{2T|q|}} \right] - Ln \left[1 + e^{\frac{q\sqrt{-4m^2+q^2}-\omega|q|}{2T|q|}} \right] \right),$$

$$E = 2000qT \left(PolyLog \left[2, -e^{\frac{500q+\omega}{2T}} \right] - PolyLog \left[2, -e^{\frac{500q-\omega}{2T}} \right] \right),$$

$$F = 8T^2 \left(PolyLog \left[3, -e^{\frac{500q-\omega}{2T}} \right] - PolyLog \left[3, -e^{\frac{500q+\omega}{2T}} \right] \right),$$

e

$$G = 8T^2 \left(PolyLog \left[3, -e^{\frac{q\sqrt{-4m^2+q^2}+\omega|q|}{2T|q|}} \right] - PolyLog \left[3, -e^{\frac{q\sqrt{-4m^2+q^2}-\omega|q|}{2T|q|}} \right] \right).$$

Sendo assim, o transporte de massa, para o termo de espalhamento, é descrito por

$$\chi^S = -\frac{6T}{8\pi\omega q^3 |q|^3} \left[q^2 |q| (q^2 - 4m^2) A + 4Bq^3 T \sqrt{q^2 - 4m^2} + |q|^3 \{C + D + E + F + G\} \right]. \quad (5.10)$$

Analisando o termo de aniquilação, novamente surge o problema da integração direta. Ao realizarmos tal operação notamos que a parte imaginária da função de correlação torna-se nula, o que não nos fornece nenhum resultado físico relevante. Para isso, vamos nos restringir nos casos onde o momentum das partículas não é relevante quando comparado com a escala de energia necessária para formarmos o plasma de quarks e glúons de modo que escrevemos

$$\begin{aligned} Im\Pi^a(q^2, T) &= \frac{3}{16\pi} \int_{-v}^v dx (1-x^2) \left[1 - n_f\left(\frac{qx+\omega}{2T}\right) - n_f\left(\frac{qx-\omega}{2T}\right) \right], \\ &= \frac{3}{16\pi} \int_{-v}^v dx (1-x^2) \left[1 - 2n_f\left(\frac{\omega}{2T}\right) \right], \end{aligned}$$

que é semelhante a

$$Im\Pi^a(q^2, T) = \frac{3}{16\pi} \int_{-v}^v dx(1-x^2) \tanh\left(\frac{\omega}{4T}\right) = \frac{3}{16\pi} \tanh\left(\frac{\omega}{4T}\right) \int_{-v}^v dx(1-x^2).$$

Por fim temos

$$Im\Pi^a = \frac{1}{8\pi} \tanh\left(\frac{\omega}{4T}\right) v(3-v^2).$$

Para encontrarmos o coeficiente de transporte de massa, em baixas frequências, realizamos uma expansão em Taylor em primeira ordem, de modo que ficamos com

$$Im\Pi^a = \frac{\omega}{32\pi T} v(3-v^2), \quad (5.11)$$

sendo assim, o coeficiente de transporte para o termo de aniquilação é dado por

$$\chi^A = \frac{1}{32\pi T} v(v^2-3), \quad (5.12)$$

lembrando que

$$v = \sqrt{1 - \frac{4m^2}{q^2}}.$$

Durante a formação da fase do plasma, os processos de criação e aniquilação ocorrem simultaneamente e ambos contribuem para o fluxo de matéria. Sendo assim, o coeficiente de transporte resultante, por assim dizer, é dado pelas somas dessas duas parcelas, ou seja

$$\chi^T = \chi^S + \chi^A,$$

e

$$\begin{aligned} \chi^T = & -\frac{6T}{8\pi\omega q^3 |q|^3} \left[q^2 |q| (q^2 - 4m^2) A + 4Bq^3 T \sqrt{q^2 - 4m^2} + \right. \\ & \left. + |q|^3 \{C + D + E + F + G\} \right] + \frac{1}{32\pi T} v(v^2 - 3). \end{aligned} \quad (5.13)$$

Para construirmos nossos resultados acerca do coeficiente de transporte de matéria e explorarmos nosso sistema de interesse, faremos uso da Equação 5.13 onde construiremos gráficos para analisar as relações entre as grandezas físicas envolvidas na mesma.

Abordaremos agora o transporte de cargas elétricas. Antecipamos, no início do capítulo, que o mesmo coincide com a condutividade elétrica. Esta por sua vez, pode ser descrita ou interpretada segundo a teoria da resposta linear [27]. Consideremos que em ambas as fases podemos encontrar, em cada uma delas, densidades de partículas distintas em determinadas regiões do espaço, ou seja, uma distribuição não homogênea de cargas. Ainda, devido ao movimento de partículas carregadas, como quarks e antiquarks na fase de plasma e o conjunto de méson e bárions na fase hadrônica, correntes ou densidades de correntes elétricas serão geradas em ambas as fases.

Levando em conta que temos densidades de correntes distintas, podemos associar uma diferença de potencial devido aos gradientes de cargas em cada uma das fases. Consequentemente, através da diferença de potencial um campo elétrico interno emerge nos sistemas. Sendo assim, o campo elétrico surge devido a não homogeneidade de partículas portadoras de cargas elétricas em cada uma das fases de interesse e consequentemente uma condutividade elétrica [27].

A equação, segundo o formalismo da teoria quântica de campos a temperaturas finitas, que descreve a condutividade elétrica é dada por

$$\sigma = \frac{Q}{m^2 V^2 \pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{\omega^2} \text{Im}\Pi, \quad (5.14)$$

onde Q , m e V descreve, respectivamente, a carga elétrica e massa das partículas bem como o volume ocupado pelas mesmas. Ainda ω representa a frequência ou, analogamente, a energia das mesmas. Vale mencionar, que o formalismo matemático para descrevermos 5.14 envolve tópicos relacionados a termodinâmica fora do equilíbrio e processos estocásticos, os quais não compõem o tópico deste trabalho. Sendo assim, não foram demonstradas as passagens matemáticas necessárias para encontrar σ . Contudo, o formalismo matemático para determinar a condutividade elétrica pode ser encontrado na referência [28].

De acordo com a Equação 5.14, em analogia com o transporte de matéria, devemos ter posse da parte imaginária de nossa função de correlação, ou seja Equação 5.9 e Equação 5.11. Primeiramente, a condutividade elétrica devido ao espalhamento é escrita como

$$\sigma^S = \frac{Q^2}{m^2 V^2 \pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{\omega^2} \text{Im}\Pi^S,$$

onde teremos

$$\begin{aligned} \sigma^S = & \left(\frac{Q^2}{m^2 V^2 \pi} \frac{6T}{8\pi q^3 |q|^3} \right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{\omega^2} \left[q^2 |q| (q^2 - 4m^2) A + 4Bq^3 T \sqrt{q^2 - 4m^2} + \right. \\ & \left. + |q|^3 \{C + D + E + F + G\} \right]. \end{aligned}$$

A realização direta da integral acima fornece uma condutividade elétrica divergente, de modo que não tenhamos nenhuma relevância física. Para isso, realizamos uma expansão em Taylor até segunda ordem na variável de integração ω . Ainda, foi efetuada uma integral indefinida, onde analisamos nossa nova função nas regiões de interesse (Cut off) [24]. Após esse procedimento, realizamos a integração obtendo

$$\sigma^S = \left(\frac{Q^2}{m^2 V^2 \pi} \right) \left(\frac{3T\omega^2}{8\pi q^3 |q|^3} \right) \left[\alpha + |q|^3 (\beta + \delta) + \frac{3T \ln(\omega)}{4\pi q^3 |q|^3} \left\{ \zeta + |q|^3 \left\{ \eta - 2000q \text{Ln} \left[1 + e^{\frac{250q}{T}} \right] - \right. \right. \right.$$

$$-8TPolyLog \left[2, -e^{\frac{250q}{T}} \right] + 8TPolyLog \left[2, -e^{\frac{q\sqrt{q^2-4m^2}}{2T|q|}} \right] \left. \right\} \left. \right\} , \quad (5.15)$$

onde definimos

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{q^2 e^{\frac{q\sqrt{q^2-4m^2}}{2T|q|}}}{6T^2 \left(e^{\frac{q\sqrt{q^2-4m^2}}{2T|q|}} + 1 \right)^2} \left[q\sqrt{q^2-4m^2} + \frac{\left(e^{\frac{q\sqrt{q^2-4m^2}}{2T|q|}} - 1 \right) |q| (q^2 - 4m^2)}{4T \left(e^{\frac{q\sqrt{q^2-4m^2}}{2T|q|}} + 1 \right)} \right], \\ \beta &= \frac{e^{\frac{250q}{T}}}{T \left(e^{\frac{250q}{T}} + 1 \right)} \left(\frac{1}{3} - 83.333q^2 \frac{\left(e^{\frac{250q}{T}} - 1 \right)}{8T^2 \left(e^{\frac{250q}{T}} + 1 \right)^2} - \frac{250q}{3T \left(e^{\frac{250q}{T}} + 1 \right)} \right), \\ \delta &= -\frac{e^{\frac{q\sqrt{q^2-4m^2}}{2T|q|}}}{3T \left(e^{\frac{q\sqrt{q^2-4m^2}}{2T|q|}} + 1 \right)} \left[\frac{\left(e^{\frac{q\sqrt{q^2-4m^2}}{2T|q|}} - 1 \right) q^2}{8T^2 \left(e^{\frac{q\sqrt{q^2-4m^2}}{2T|q|}} + 1 \right)^2} + 1 \right], \\ \zeta &= -(q^2 - 4m^2) q^2 |q| \frac{e^{\frac{q\sqrt{q^2-4m^2}}{2T|q|}}}{T \left(e^{\frac{q\sqrt{q^2-4m^2}}{2T|q|}} + 1 \right)} + 4q^3 \sqrt{q^2 - 4m^2} \text{Ln} \left[e^{\frac{q\sqrt{q^2-4m^2}}{2T|q|}} + 1 \right], \end{aligned}$$

e

$$\eta = 249.999q^2 \frac{e^{\frac{250q}{T}}}{T \left(e^{\frac{250q}{T}} + 1 \right)} + q^2 \frac{e^{\frac{q\sqrt{q^2-4m^2}}{2T|q|}}}{T \left(e^{\frac{q\sqrt{q^2-4m^2}}{2T|q|}} + 1 \right)}.$$

Consideremos agora a condutividade elétrica para o termo de aniquilação escrita como

$$\sigma^A = \frac{Q^2}{m^2 V^2 \pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{\omega^2} \text{Im} \Pi^A,$$

e conforme já mencionado anteriormente é dada por

$$\sigma^A = \frac{Q^2 v (3 - v^2)}{8m^2 V^2 \pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{\omega^2} \text{Tanh} \left(\frac{\omega}{4T} \right).$$

Para mantermos a coerência com o procedimento adotado para encontrar σ^A , devemos expandir o integrando em Taylor até segunda ordem e depois realizarmos uma integral indefinida de modo que a condutividade será dada por

$$\sigma^A = \left(\frac{Q^2}{m^2 V^2 \pi} \right) v (q^2 - 4m^2) \left(\frac{48T^2 \text{Ln}(\omega) - \frac{\omega^2}{2}}{768\pi q^2 T^3} \right). \quad (5.16)$$

Analogamente ao que foi realizado para o transporte de massa, a condutividade resultante será a soma das contribuições de aniquilação e espalhamento, descritas pelas Equações 5.15 e 5.16, com isso

$$\sigma^T = \sigma^S + \sigma^A,$$

onde

$$\begin{aligned} \sigma^T = & \left(\frac{Q^2}{m^2 V^2 \pi} \right) \left(\frac{3T\omega^2}{8\pi q^3 |q|^3} \right) \left[\alpha + |q|^3 (\beta + \delta) + \frac{3T \ln(\omega)}{4\pi q^3 |q|^3} \left\{ \zeta + |q|^3 \left\{ \eta - 2000q \ln \left[1 + e^{\frac{250q}{T}} \right] - \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. - 8T \text{PolyLog} \left[2, -e^{\frac{250q}{T}} \right] + 8T \text{PolyLog} \left[2, -e^{\frac{q\sqrt{q^2-4m^2}}{2T|q|}} \right] \right\} \right\} \right] + \\ & + \left(\frac{Q^2}{m^2 V^2 \pi} \right) v(q^2 - 4m^2) \left(\frac{48T^2 \ln(\omega) - \frac{w^2}{2}}{768\pi q^2 T^3} \right). \end{aligned} \quad (5.17)$$

Através da Equação 5.17 será possível obter resultados que mostram a relação entre grandezas físicas de interesse, *e.g.*, temperatura, massa, frequência. Além disso, características do comportamento do transporte de cargas elétricas para ambas as fases aqui estudadas.

Com isso, encerramos a primeira etapa deste capítulo, onde determinarmos o fluxo de matéria bem como transporte de cargas elétricas resultantes para os fenômenos de aniquilação e espalhamento utilizando o formalismo de funções espectrais oriundas das regras de soma da cromodinâmica quântica considerando a influência de temperatura.

5.2 Coeficiente de Condutividade Térmica e Difusão do Calor

Uma vez discutido os coeficientes de transporte obtidos via teoria quântica de campos na etapa anterior, iniciaremos nesta seção a discussão a cerca dos últimos dois coeficientes faltantes, os quais serão encontrados através do formalismo da mecânica estatística.

De início, trataremos da condutividade térmica para ambas as fases aqui estudadas. Para isso, faremos uso do formalismo do capítulo da mecânica estatística da matéria nuclear onde obtivemos grandezas como entropia e energia e até mesmo algumas observáveis termodinâmicas como pressão, número de partículas e calor específico.

Como ponto de partida vamos considerar a Lei de Fourier que descreve como o calor se propaga em uma região [29], dada por

$$Q = -\kappa \nabla T,$$

onde Q é a energia do sistema na forma de calor, κ representa a condutividade térmica e por fim ∇T nos informa como a temperatura varia ao longo do material. Contudo, surge a necessidade de reescrevermos esta última parcela em termos de parâmetros termodinâ-

micos. Para isso, o “ansatz” é

$$\nabla T = \left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_S,$$

já que ambos os lados descrevem como a temperatura pode variar em uma determinada região. Desta forma a Lei de Fourier torna-se

$$Q = -\kappa \left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_S. \quad (5.18)$$

Através das transformações de Maxwell da Termodinâmica [29]

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_S = - \left(\frac{\partial P}{\partial S} \right)_V,$$

ou ainda

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_S = - \left(\frac{\partial S}{\partial P} \right)_V,$$

como ambas as grandezas pressão P e entropia S são funções da temperatura, escrevemos

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_S = - \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right) \left(\frac{\partial T}{\partial P} \right). \quad (5.19)$$

Levando a Equação 5.19 na Equação 5.18 e isolando κ obtêm-se

$$\kappa = E \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right) \left(\frac{\partial T}{\partial P} \right). \quad (5.20)$$

Desta forma, para determinarmos a condutividade térmica basta conhecermos a entropia do sistema bem como a pressão em função da temperatura. Como discutido no capítulo acerca da mecânica estatística as grandezas necessárias, levando em conta as correções do Bag Model, para encontrar κ são dadas por

$$E_{QGP} = \frac{37}{30} \pi^2 T^4 + 3T^2 \mu^2 + \frac{3}{2} \frac{\mu^4}{\pi^2} + B,$$

$$P_{QGP} = \frac{37\pi^2}{90} T^4 + \mu^2 T^2 + \frac{\mu^4}{2\pi^2} + B,$$

e

$$S_{QGP} = \frac{74}{45} \pi^2 T^3 + 2\mu T.$$

Através das respectivas derivadas com respeito às grandezas acima e levando-as na Equação 5.20, encontramos a condutividade térmica do plasma de quarks e glúons.

$$\kappa_{QGP} = \left(\frac{37}{30} \pi^2 T^4 + 3T^2 \mu^2 + \frac{3}{2} \frac{\mu^4}{\pi^2} + B \right) \left(\frac{74}{15} \pi^2 T^2 + 2\mu \right) \left(\frac{90}{148\pi^2 T^3 + 180\mu^2 T} \right). \quad (5.21)$$

Segundo a Equação 5.21 nota-se uma dependência com a temperatura bem como o

potencial químico do sistema. Para o caso do gás hadrônico, as grandezas energia, pressão e entropia são, respectivamente

$$E_{HAD} = \frac{\pi}{10} T^4,$$

$$P_{HAD} = \frac{\pi^2}{30} T^4,$$

e

$$S_{HAD} = \frac{2\pi^2}{15} T^3.$$

Com isso, a condutividade térmica, Equação 5.20, para o gás de hádrons é dada por

$$\kappa_{HAD} = \left(\frac{\pi}{30} T^4 \right) \left(\frac{2\pi}{15} T^2 \right) \left(\frac{45}{2\pi T^3} \right),$$

que implica em

$$\kappa_{HAD} = \frac{3\pi}{10} T^3. \quad (5.22)$$

Nota-se que, diferentemente da Equação 5.21, a Equação 5.22 não apresenta potencial químico, mas apenas uma dependência cúbica com a temperatura.

Como última tarefa, nos resta determinar o coeficiente de difusão. O mesmo pode ser encontrado através da condutividade térmica obtida anteriormente [29], já que o mesmo é descrito por

$$\alpha = \frac{\kappa}{\rho c_p},$$

onde ρ e c_p representam, respectivamente, a densidade de partículas e o calor específico. Através das observáveis determinadas no decorrer do texto, torna-se simples a obtenção do coeficiente de difusão para cada uma das fases. De início, começaremos pelo plasma de quarks e glúons, onde segundo a Equação 4.32, o calor específico corrigido pelo Bag Model é dado por

$$C_{QGP} = \frac{74\pi^2}{15} T^3 + 2\mu T,$$

o número de partículas por volume, Equação 4.28, coincide com a densidade ρ , onde

$$\rho_{QGP} = \frac{34\zeta(3)}{\pi^2} T^3 + \frac{2\mu^3}{\pi^2},$$

e através da condutividade térmica, descrita pela Equação 5.20, o coeficiente de difusão para o plasma será dado por

$$\alpha_{QGP} = \frac{\left(\frac{37}{30} \pi^2 T^4 + 3T^2 \mu^2 + \frac{3}{2} \frac{\mu^4}{\pi^2} + B \right) \left(\frac{74}{15} \pi^2 T^2 + 2\mu \right) \left(\frac{90}{148\pi^2 T^3 + 180\mu^2 T} \right)}{\left(\frac{74\pi^2}{15} T^3 + 2\mu T \right) \left(\frac{34\zeta(3)}{\pi^2} T^3 + \frac{2\mu^3}{\pi^2} \right)},$$

que reescrevemos como

$$\alpha_{QGP} = \frac{\left(\frac{37}{30}\pi^2 T^4 + 3T^2\mu^2 + \frac{3}{2}\frac{\mu^4}{\pi^2} + B\right) \left(\frac{90}{148\pi^2 T^3 + 180\mu^2 T}\right)}{\left(\frac{34\zeta(3)}{\pi^2} T^4 + \frac{2\mu^3 T}{\pi^2}\right)}, \quad (5.23)$$

onde nota-se uma dependência com a temperatura e potencial químico do sistema. Para o caso hadrônico, temos que o calor específico e condutividade são dados, respectivamente, pelas Equações 4.14 e 5.22 escritas como

$$C_V = \frac{2\pi^2}{5} T^3,$$

e

$$\kappa_{HAD} = \frac{3\pi}{10} T^3.$$

Já a densidade de partículas, por tratar de bósons, é similar a densidade de glúons, dada pela Equação 4.26, distinguindo-se apenas pelo grau de liberdade

$$n_{HAD} = \frac{g\zeta(3)}{\pi^2} T^3.$$

Para um gás de píons, por exemplo onde $g = 3$ encontramos

$$n_{HAD} = \frac{3\zeta(3)}{\pi^2} T^3. \quad (5.24)$$

Com isso, o coeficiente de difusão será dado por

$$\alpha_{HAD} = \frac{\frac{3\pi}{10} T^3}{\left(\frac{2\pi^2}{5} T^3\right) \left(\frac{3\zeta(3)}{\pi^2} T^3\right)},$$

que simplificando pode ser escrito como

$$\alpha_{HAD} = \frac{\pi}{4\zeta(3)T^3}. \quad (5.25)$$

Notamos que a difusão hadrônica decresce à medida que a temperatura do sistema aumenta, ou seja, quando nos aproximamos da fase de plasma a difusão do calor é atenuada. Com todos os coeficientes de transporte determinados, utilizando o formalismo das regras de soma da cromodinâmica quântica e a mecânica estatística, foram obtidos resultados, discutidos no próximo capítulo, que possibilitam interpretações físicas acerca das fases exploradas neste trabalho.

Capítulo 6

Resultados

Neste capítulo mostraremos os resultados obtidos envolvendo os coeficientes de transporte, como a condutividade elétrica e térmica e por fim a difusão térmica para as fases hadrônica e plasma. Além disso, através dos gráficos construídos é possível inferir algumas propriedades físicas de interesse do nosso sistema. Ainda, vale ressaltar que todas as grandezas expostas nos gráficos estão na escala de MeV .

6.1 Transporte de Matéria

Inicialmente serão mostrados os resultados para o coeficiente de transporte de partículas, descritos pela Equação 5.13. De acordo com a Figura 6.1, nota-se que com o crescimento da temperatura (em módulo), ou seja, quando nos aproximamos da fase de plasma, ocorre um aumento no transporte de massa. Na região próxima da temperatura de transição, em especial na fase mista, ocorre o processo chamado de deconfinamento onde os hádrons começam a “derreter” de modo que surgem os primeiros indícios de quarks e glúons livres, consequentemente o transporte de partículas tornar-se relevante.

Para a massa, nota-se que a mesma não interfere significativamente para o transporte, o que não é esperado. Contudo, as massas dos quarks que compõem o plasma, em sua maioria *up* e *down*, possuem massas de no máximo $4MeV$ que quando comparada a escala de energia necessária para formarmos o plasma é praticamente desprezível, desta forma a mesma não deve alterar significativamente χ .

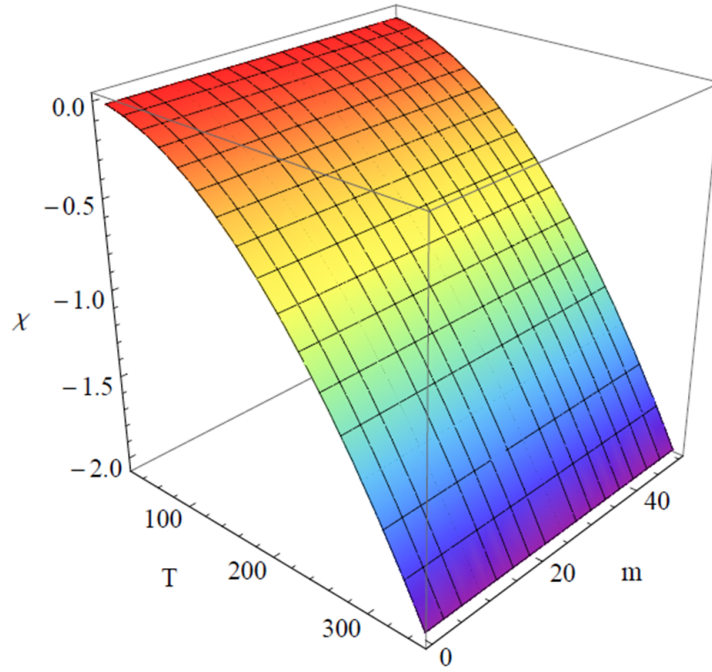


Figura 6.1: Coeficiente de transporte em função da temperatura e massa dos quarks.

Ainda, notamos o que $\chi < 0$, o que pode trazer certa “estranheza”, porém ao analisarmos a Equação da continuidade

$$\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t},$$

podemos interpretar nossos resultado como o lado direito da expressão, ou seja, o negativo da densidade de quarks em certo intervalo de tempo corresponde ao fluxo de uma corrente de partículas em determinado volume (lado esquerdo), desta forma o transporte de partículas está diretamente associado a este fluxo de matéria, garantindo um embasamento físico para nossos resultados de um transporte de partículas negativo.

O próximo resultado obtido envolvendo o transporte de matéria pode ser visto na Figura 6.2, onde o mesmo é relacionado com a frequência de oscilação dos quarks e o intervalo de temperatura englobando ambas as fases. Em analogia com o resultado anterior, vemos que o comportamento de χ é o mesmo com respeito a temperatura, ou seja, grandezas diretamente proporcionais. Para a frequência, a medida que a mesma aumenta o transporte de partículas tende a diminuir. Neste momento, quando $\chi \rightarrow 0$ temos o confinamento dos quarks formando os hádrons, processo conhecido como hadronização. A frequência é elevada pois associamos aos quarks uma onda estacionária que está confinada em um poço de potencial, em nosso caso o próprio hádron cuja largura é extremamente pequena ($\sim 1 \text{ fermi}$). No caso onde a frequência diminui devido ao aumento do transporte temos a fase de plasma. Neste regime, a nova fase atingida pode ser interpretada como um grande poço de potencial, de modo que a frequência de oscilação associada a um conjunto de ondas planas seja menor. Matematicamente temos que

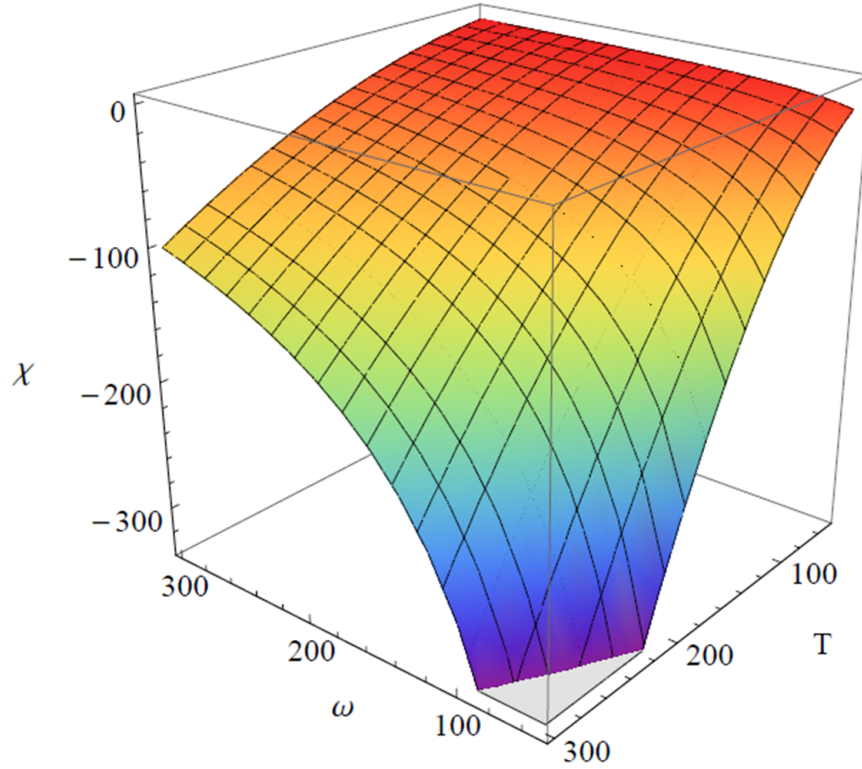


Figura 6.2: Transporte de matéria em função da temperatura e frequência de oscilação dos quarks.

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{v}{\frac{\omega}{2\pi}} = \frac{2\pi v}{\omega}$$

e

$$p = k = \frac{1}{\lambda} = \frac{\omega}{2\pi v},$$

consequentemente

$$p \propto \omega.$$

Ainda podemos fazer uma outra abordagem física, em termos de princípio de incerteza. Quanto menor o poço, menor a incerteza na posição dos quarks (Δx) consequentemente uma frequência muito elevada ($\Delta \omega$). Por outro lado, quando temos um poço de tamanho grande (fase de plasma), aumentando (Δx), teremos então um valor pequeno para o momentum e assim uma frequência de oscilação pequena.

6.2 Condutividade Elétrica

Inicialmente, vale ressaltar que os resultados do transporte de cargas elétricas foi obtido a partir da Equação 5.17. Segundo a Figura 6.3, notamos que a condutividade elétrica, no regime de baixas temperaturas, $T < T_c \sim 150 MeV$, temos a fase hadrônica onde os quarks estão confinados. Devido ao confinamento, os quarks acabam não contribuindo

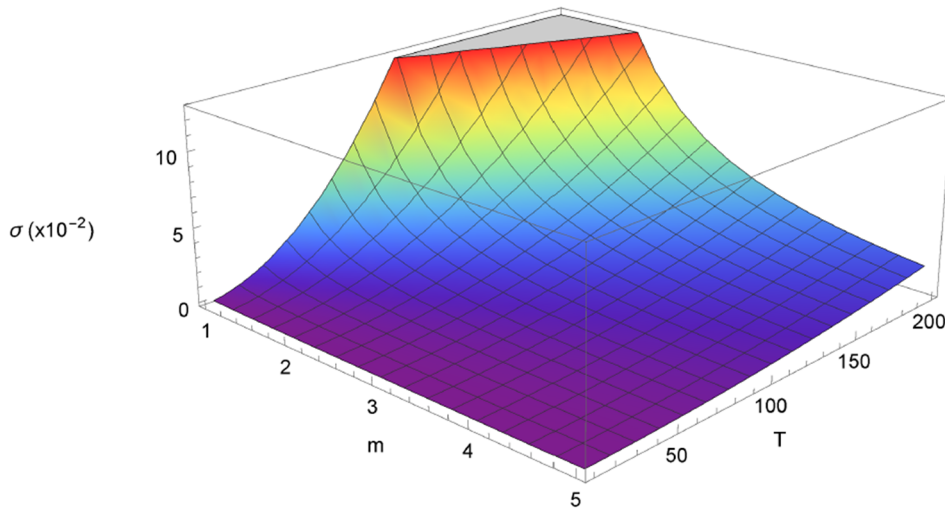


Figura 6.3: Condutividade elétrica em função da temperatura e massa dos quarks.

para a condutividade elétrica, já que não estão livres. Ainda, notamos que para valores altos de massa, também chamados quarks pesados como o *quark Top*, σ é praticamente nulo já que devido a sua inércia o transporte de carga elétrica na fase hadrônica é insignificante.

Na região próxima da temperatura crítica, atinge-se a fase mista, de modo que nota-se o crescimento da condutividade elétrica onde o processo de hadrônização é iniciado e começam a surgir os primeiros quarks e glúons livres, contribuindo para o transporte elétrico.

A condutividade elétrica torna-se expressiva quando atingimos a fase do plasma, $T > T_c \sim 150 \text{ MeV}$, onde o processo de confinamento está finalizado e assim temos quarks e antiquarks livres. Ainda em regimes de altas temperaturas, através da Figura 6.3, notamos que para valores pequenos de massa $(1,0 - 3,0) \text{ MeV}$, a condutividade é expressiva enquanto que para quarks mais pesados, $(3,5 - 5,0) \text{ MeV}$, a condutividade é praticamente nula, mesmo na fase de plasma. De fato, devido a inercia dos quarks pesados como o *quark strange* ou *quark top* a velocidade com que podem se locomover no plasma é menor quando comparada com a velocidade de um quark leve que se move na região do plasma. Desta forma, o transporte de carga elétrica deve ser mais significativo para partículas leves consequentemente espera-se um valor mais expressivo na condutividade elétrica.

Na Figura 6.4 notamos a condutividade elétrica em função da temperatura e frequência dos quarks. Na região de baixas temperaturas, ou seja $T < T_c$, onde os quarks estão confinados notamos uma condutividade elétrica e praticamente nula, já que os quarks não estão livres. Ainda, nota-se que a frequência de oscilação dos mesmo quando dentro do hádron não contribui para uma mudança no comportamento de σ .

Ao aumentarmos a temperatura do sistema, até a fase mista onde $T \sim 130 \text{ MeV}$, notamos um valor não nulo na condutividade já que os primeiros quarks livres começam a surgir. Após a transição de fase, $T > T_c$ temos quarks e glúons livres no sistema de

modo que atingimos valores relevantes para a condutividade elétrica. Ainda no regime de plasma, é perceptível que com o aumento de ω a condutividade também torna-se maior. Este fenômeno pode ser explicado da seguinte maneira: Discutimos anteriormente que a própria fase de plasma pode ser considerada como um poço de potencial com tamanho finito. Ao aumentarmos a frequência de oscilação dos quarks, consequentemente estamos aumentando a velocidade com que o mesmo se propaga nesta região de potencial. Por conta disso, o movimento de partículas carregadas será mais intenso e consequentemente uma condutividade elétrica mais expressiva.

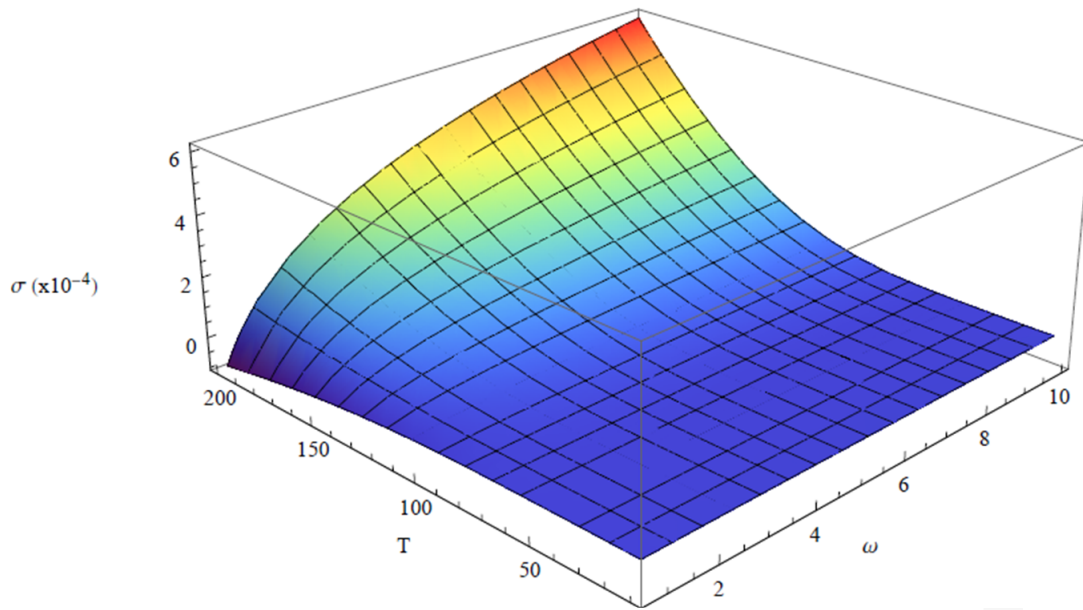


Figura 6.4: Coeficiente de transporte em função da temperatura e frequência de oscilação dos quarks.

6.3 Condutividade Térmica

Nesta seção, foram construídos os resultados através da mecânica estatística para a matéria nuclear. Por conta disso, os resultados foram divididos entre as fases hadrônica e plasma. De início trataremos a fase hadrônica, descrita pela Equação 5.22, onde o comportamento da condutividade térmica (κ) em função da temperatura pode ser visto na Figura 6.5. Nota-se que a medida que aumentamos a temperatura temos um aumento rápido na condução do calor. De fato, a medida que é fornecida energia térmica para o sistema hadrônica o mesmo responde de tal forma que as partículas constituintes deste gás transportem mais calor em uma determinada região. Nota-se que a medida que nos aproximamos da fase mista, consequentemente da temperatura crítica, onde o confinamento é iniciado a condutividade começa a se tornar expressiva.

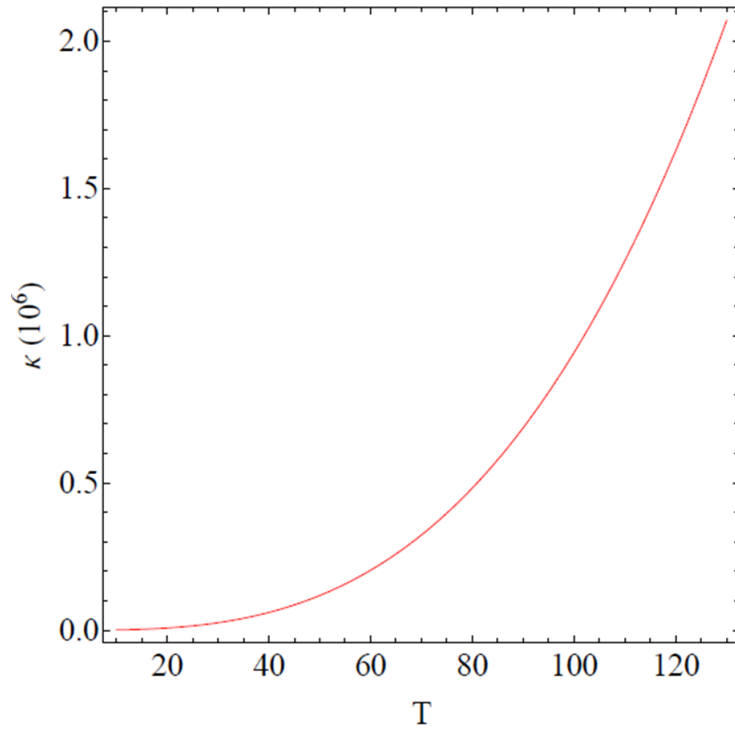


Figura 6.5: Condutividade térmica em função da temperatura para a fase hadrônica.

Em seguida, analisaremos a condução de calor para a fase do plasma matematicamente descrita pela Equação 5.21e representada na Figura 6.6. Após a transição de fase a condutividade térmica cresce rapidamente, cerca de duas ordens de grandezas quando comparada com a fase hadrônica. Esse fenômeno ocorre devido a elevada energia térmica oriunda do aumento da temperatura, ocasionando um aumento significativo na propagação do calor na respectiva fase.

Para o potencial químico, provido da aniquilação e produção de pares de quarks e antiquarks, a medida que o número de partículas aumenta é perceptível que a condutividade térmica torna-se mais expressiva. De fato, uma vez que tendo um aumento no número de partículas, $n_{QGP} = 3n_{HAD}$, ou seja, o número de partículas na fase de plasma triplica em comparação a fase hadrônica. Sendo assim, teremos um número mais significativo de matéria portadora de energia térmica, o que gera um aumento na condutividade térmica do sistema.

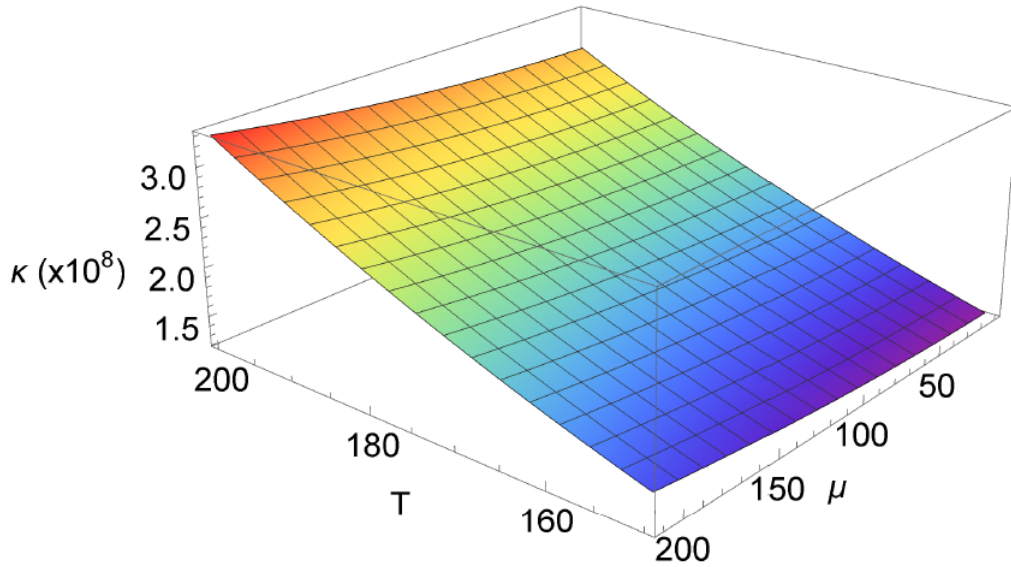


Figura 6.6: Condutividade térmica em função da temperatura e potencial químico dos quarks para a fase de plasma

6.4 Coeficiente de Difusão Térmica

Ainda seguindo o formalismo da mecânica estatística, discutiremos os resultados para a difusão térmica do sistemas hadrônico e plasma, separadamente.

De acordo com a Equação 5.23 nota-se a relação entre o coeficiente de difusão térmica (α) com a temperatura e o potencial químico para a fase de plasma. Inicialmente, Na Figura 6.7, observamos que a medida que reduzimos a temperatura o coeficiente α sofre um aumento, aparentemente um resultado não esperado. Contudo, ao diminuir a temperatura do sistema nos aproximamos da fase mista, onde agora o processo de confinamento é iniciado. Durante esse processo, quarks e glúons, tem suas respectivas energias cinéticas reduzidas enquanto que o potencial de interação entre eles torna-se relevante. Desta forma, quando a interação entre os mesmo é grande o suficiente as partículas se “fundem” ocorrendo a hadronização, gerando uma liberação de calor neste processo.

Analisando o potencial químico do sistema, observamos que devido a diminuição na variação do número de partículas ocorre um aumento da difusão térmica. Devido a alta quantidade de partículas na fase de plasma, consequentemente altas densidades, as mesmas absorvem rapidamente a energia térmica do meio de modo que a difusão do calor seja reduzida. Contudo, para um número menor de partículas, leia-se baixo potencial químico, teremos uma redução na absorção do calor logo o mesmo é difundido de forma mais efetiva o que gera um aumento do coeficiente α .

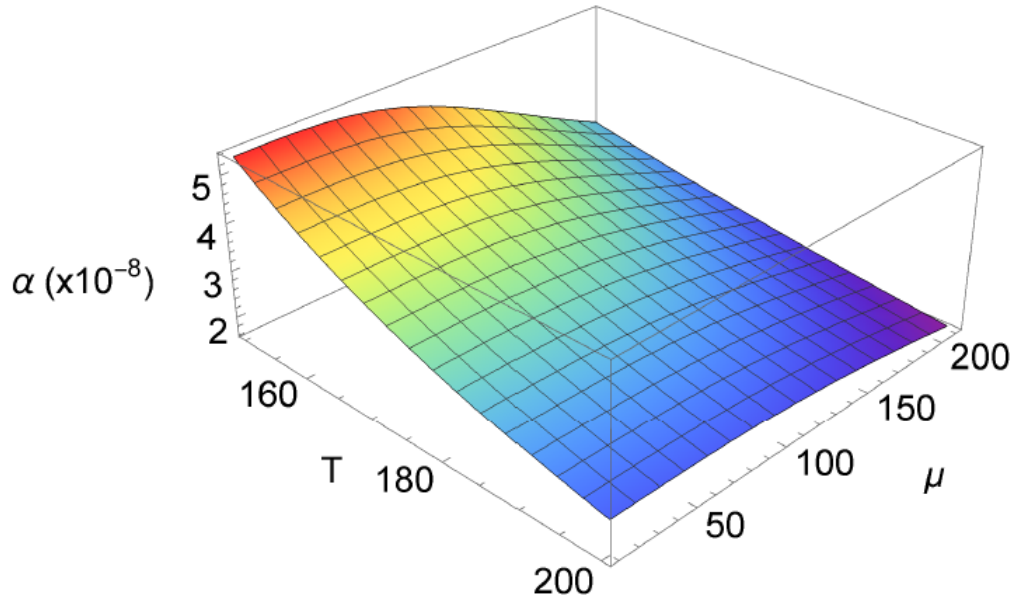


Figura 6.7: Coeficiente de difusão térmica em função da temperatura e potencial químico dos quarks para a fase de plasma.

Por fim, analisando a difusão térmica em função da temperatura para a fase hadrônica, Equação 5.25, como mostrado na Figura 6.8 notamos uma relação de proporções inversas. O resultado em questão corrobora com o que fora discutido para fase de plasma. Já que, como foi dito, durante o processo de hadronização é difundido o calor através das novas partículas formadas. Podemos notar que, o coeficiente de difusão térmica hadrônico é duas ordens de grandeza superior quando comparado com a difusão no plasma. Por conta disso, acreditamos que essa diferença entre tais coeficientes seja resultado de uma energia residual, ou ainda assinatura, do processo de confinamento dos quarks e glúons.

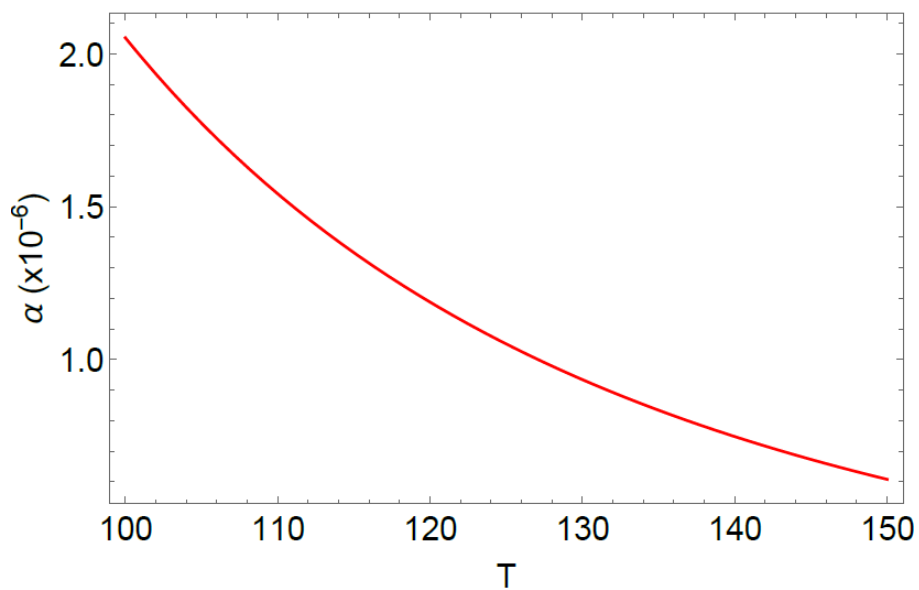


Figura 6.8: Coeficiente de difusão térmica em função da temperatura para a fase hadrônica.

Capítulo 7

Conclusão

De modo geral, existe uma diversidade de comportamentos exóticos e singulares que emergem da matéria nuclear quando esta é submetida a condições extremas de temperaturas e densidades de partículas. Nesta dissertação focamos nossos estudos na fase de plasma de quarks e glúons, onde discutiu-se características únicas das mesmas como a presença de quarks livres, após o processo de deconfinamento, dando origem aos condensados e o fenômeno da restauração quiral. Ainda, devido a complexibilidade teórica e experimental de estudar este sistema, o seu respectivo diagrama de fases, proposto por modelos da cromodinâmica quântica, ainda permanece como um problema em aberto já que algumas questões ainda não são bem estabelecidas como a região de crossover e os pontos críticos do sistema.

Uma abordagem utilizada para explorar o plasma foi através dos coeficientes de transporte, com formalismo da teoria quântica de campos em temperaturas finitas onde determinou-se o transporte de massa e de cargas elétricas do sistema, onde este último foi interpretado como a condutividade elétrica do plasma. A outra abordagem foi sustentada pelos pilares da mecânica estatística, em especial, a descrição matemática Grand Canônica fornecendo os outros dois coeficientes de transporte, a condutividade térmica e a difusão térmica.

Para o transporte de matéria, nas proximidades da temperatura crítica é desencadeado o processo de deconfinamento dos quarks e os mesmo se propagam livremente de modo que o coeficiente de transporte sofra um aumento gradativo. Pelo fato da quantidade de energia necessária para produzir o plasma ser mais significativa do que a massa dos quarks que compõem o sistema, a mesma não altera de forma significativa o transporte de matéria. Com relação a frequência de oscilação, a mesma é mais intensa quando as partículas permanecem confinadas nos nucleons. Porém, em $T > T_c$ a mesma diminui já que a região de confinamento, agora o próprio plasma, é maior preservando o princípio de incerteza.

Com relação ao transporte de cargas elétricas, vemos um aumento do mesmo quando o sistema atinge $T > T_c$, já que neste regime os quarks estão livres e contribuem de fato para

a condutividade elétrica no plasma. Ainda nota-se que a mesma é mais significativa na região de frequências mais elevadas, já que aumentando a oscilação dos quarks aumenta-se a velocidade de propagação dos mesmos, refletindo diretamente no transporte elétrico.

No quesito transporte de calor, a fase de plasma mostra-se muito mais susceptível quando comparado a fase hadônica, cerca de duas ordens de grandeza maior. De fato, devido a fase de plasma emergir em altas temperaturas, espera-se que a mesma tenha uma condutividade térmica mais significativa. Ademais, para $T > T_c$, temos uma proporção de partículas do tipo $n_{qgp} = 3n_{had}$ o que gera um aumento no potencial químico do sistema e ocasionalmente uma quantidade mais elevada de partículas com energia térmica, consequentemente o crescimento da condutividade térmica.

Por fim, temos a difusão térmica dos sistemas de interesse. Neste caso, durante o processo de hadrônização do plasma ocorre a liberação do calor onde este é difundido durante a formação de bárions e méson de forma mais expressiva, cerca de duas ordens de grandeza, quando comparado ao calor difundido na fase de plasma. Ainda, quando analisamos o potencial químico do sistema, o mesmo decresce ao nos aproximarmos da região de confinamento, ou seja o processo de hadrônização é iniciado.

Capítulo 8

Bibliografia

- 1 - Moreira M, Revista Brasileira de Ensino de Física, 2007 **29** (2): 161-173.
- 2 - D. Griffiths, 2008, *Introduction to Elementary Particles*, WILEY-VCH, *Second Revised Edition*.
- 3 - F. Halzen and A. D. Martin, 1984, *Quarks & Leptons: An Introductory Course in Modern Particle Physics*, John Wiley & Sons, Inc.
- 4 - S. S. Mizrahi e D. Galetti, 2016 Física Nuclear e de Partículas, Livraria da Física.
- 5 - *Alternative Physics, Atomic Nuclei*, 2019 Disponível em: <http://www.alternativephysics.org/book/AtomicNuclei.htm>. Acesso em: 04/04/2019
- 6 - *Quark Model*, 2019: Disponível em: https://www.wikiwand.com/en/Quark_model. Acesso em: 10/04/2019
- 7 - P. Christakoglou, 2015 *Lectures on Quantum Chromodynamics*.
- 8 - W. Greiner, S. Schramm, E. Stein, D.A. Bromle, 2007, *Quantum Chromodynamics*, Springer.
- 9 - M. B. Nikhef, 2013, *Lectures Notes Particle Physics 2 - Qunatum ChromoDynamics - Coulour factors*, Scince Park, Amsterdam.
- 10 - R. Vogt, 2007, *Ultrarelativistic heavy ion collisions*, Elsevier.
- 11 - C. Y. Wong, 1994, *Introduction to High-Energy Heavy-Ion Collisions*, World Scientific Pub Co Inc, *Second Edition*.

12 - *Science and Technology Facilities Council, Particle Physics & Particle Astrophysics - CERN*, 2019: Disponível em:

<https://stfc.ukri.org/research/particle-physics-and-particle-astrophysics/cern/>.

Acesso: 08/07/2019

13 - *European Laboratory of Particle Physics, Alice Matters: A Large Ion Collider Experiment*, 2015:

Disponível em: http://alicematters.web.cern.ch/?q=ALICE_latest_results_15.

Acesso em: 08/07/2019.

14 - G. Baym, *Nuclear Physics*, **A 956**, 1-10 (2016).

15 - B. Mohanty, *Proceedings of Science*, *arXiv:1308.3328 [nucl-ex]*, 2013.

16 - G. H. Corral, *CERN Yellow Report CERN*, 2010-001, pp. 393-416.

17 - J.M. Dias, 2011, Dissertação de mestrado da Universidade de São Paulo.

18 - R. D. Matheus, 2006, Tese de doutorado da Universidade de São Paulo.

19 - L. Dolan and R. Jackiw, *Physical Review D*, **9**, 12 (1974).

20 - A. Ayala, C. A. Dominguez and M. Loewe, *Advances in High Energy Physics*, **2017**, 24 (2017).

21 - A.I. Bohkarev and M.E. Shaposhnikov, *Nuclear Physics B*, **268** 220-252, (1986).

22 - P. K. Pathria, 1996, *Statistical Mechanics*, *Butterworth-Heinemann*, *Second Edition*.

23 - J. Letessier, J. Rafelsk, 2002, *Hadrons and quark gluon plasm*, -Cambridge University Press.

24 - T. Lancaster, S. J. Blundell, 2014, *Quantum Field Theory for the Gifted Amateur*, Oxford University Press.

25 - D. McMahon, 2008, *Quantum Field Theory Demystified*, Mc Graw Hill.

-
- 26 - A. V. Ramallo, High Energy Physics Theory, arXiv:1310.4319 [hep-th], 2013.
- 27 - R. Kubo, Journal of the Physical Society of Japan, **12**(6), 570-586, 1957.
- 28 - G. Ropke, Theoretical and Mathematical Physics, **194**(1), 74-104 (2018).]
- 29 - H. B. Callen, 1985, *Thermodynamics and an Introduction to Thermostatistics*, John Wiley & Sons, Second Edition.
- 30 - M. D. Schwartz, 2014, *Quantum Field Theory and the Standard Model*, Cambridge University Press.
- 31 - W. B. Rolnick, 1994, The Fundamental Particle and Their Interactions, Addison-Wesley Publishing Company.

Apêndice A

O Propagador de Dolan-Jackiw

Neste apêndice, faremos a dedução do propagador de Dolan-Jackiw que fora utilizado para encontrarmos as funções de correlação à temperaturas finitas, seguindo [19]. A função de correlação de dois pontos sob um banho térmico é descrita matematicamente por

$$S_F(x - y) = \langle T\psi(x)\psi(y) \rangle ,$$

lembrando que T representa o operador evolução temporal. Desta forma

$$S_F(x - y) = \Theta(x_0 - y_0)\psi(x)\psi(y) + \Theta(y_0 - x_0)\psi(y)\psi(x), \quad (\text{A.1})$$

que nos leva a

$$S_F(x - y) = \Theta(x_0 - y_0)S_F^>(x - y) + \Theta(y_0 - x_0)S_F^<(x - y), \quad (\text{A.2})$$

onde $\Theta(x_0 - y_0)$ é chamada de função Heaviside, onde uma das suas representações integrais é dada por

$$\Theta(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\gamma - i\epsilon} e^{ix\gamma} d\gamma. \quad (\text{A.3})$$

Definindo a transformada de Fourier dos termos do lado esquerdo da Equação A.1 como sendo

$$\widetilde{S}_F(k) \equiv \int d^4x e^{ikx} S_F^{\geq}(x). \quad (\text{A.4})$$

Utilizando a Equação A.4 na Equação A.2, ou seja, fazendo a transformada de Fourier da Equação A.2

$$\widetilde{S}_F(k) = \int d^4x e^{ikx} \left[\Theta(x_0 - y_0)S_F^>(x - y) + \Theta(y_0 - x_0)S_F^<(x - y) \right],$$

sem perda de generalidade, escrevemos

$$\widetilde{S}_F(k) = \int d^4x e^{ikx} \left[\Theta(x_0)S_F^>(x) + \Theta(-x_0)S_F^<(x) \right]. \quad (\text{A.5})$$

Através da Equação A.3, a Equação A.5 pode ser reescrita como

$$\widetilde{S}_F(k) = \int d^4x e^{ikx} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_F^>(x)}{k'_0 - i\epsilon} e^{ix_0 k'_0} dk'_0 + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_F^<(x)}{k'_0 - i\epsilon} e^{-ix_0 k'_0} dk'_0 \right]. \quad (\text{A.6})$$

Vamos analisar o primeiro termo da integração.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_F^>(x)}{k'_0 - i\epsilon} e^{ikx} e^{ix_0 k'_0} dk'_0 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_F^>(x)}{k'_0 - i\epsilon} e^{i(k_0 x_0 - \vec{k} \cdot \vec{x})} e^{ix_0 k'_0} dk'_0 \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_F^>(x)}{k'_0 - i\epsilon} e^{i(k_0 + k'_0)x_0} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} dk'_0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_F^>(x)}{k''_0 - k_0 - i\epsilon} e^{ik''_0 x_0 - i\vec{k} \cdot \vec{x}} dk''_0, \end{aligned}$$

definimos $k''_0 = k'_0 + k_0$ de modo que $k'_0 = k''_0 - k_0$ consequentemente $dk'_0 = dk''_0$. Com essas substituições de variáveis a Equação acima torna-se

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_F^>(x)}{k'_0 - i\epsilon} e^{ikx} e^{ix_0 k'_0} dk'_0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_F^>(x)}{k''_0 - k_0 - i\epsilon} e^{ikx} dk''_0,$$

assim,

$$\int d^4x \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_F^>(x)}{k'_0 - i\epsilon} e^{ikx} e^{ix_0 k'_0} dk'_0 \right] = \frac{1}{2\pi i} \int d^4x \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_F^>(x)}{k''_0 - k_0 - i\epsilon} e^{ikx} dk''_0.$$

De acordo com a Equação A.4, encontramos

$$\begin{aligned} \widetilde{S}_F(k) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk''_0 \widetilde{S}_F^>(k)}{k''_0 - k_0 - i\epsilon} \\ \int d^4x \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_F^>(x)}{k'_0 - i\epsilon} e^{ikx} e^{ix_0 k'_0} dk'_0 \right] &= \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk''_0 \widetilde{S}_F^>(k)}{k_0 - k''_0 + i\epsilon} e^{ikx}. \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Vamos agora analisar o segundo termo do integrando, da Equação A.6 de modo que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_F^<(x)}{k'_0 - i\epsilon} e^{ikx} e^{-ix_0 k'_0} dk'_0 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_F^<(x)}{k'_0 - i\epsilon} e^{i(k_0 x_0 - \vec{k} \cdot \vec{x})} e^{-ix_0 k'_0} dk'_0 \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_F^<(x)}{k'_0 - i\epsilon} e^{i(k_0 - k'_0)x_0} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} dk'_0. \end{aligned}$$

Define-se $-k''_0 = k_0 - k'_0$ e $k'_0 = k_0 + k''_0$ consequentemente $dk'_0 = dk''_0$. Após as substituições encontramos

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_F^<(x)}{k'_0 - i\epsilon} e^{ikx} e^{-ix_0 k'_0} dk'_0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_F^<(x)}{k_0 - k''_0 - i\epsilon} e^{ikx} dk''_0,$$

logo

$$\int d^4x \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_F^<(x)}{k'_0 - i\epsilon} e^{ikx} e^{-ix_0 k'_0} dk'_0 \right] = \frac{1}{2\pi i} \int d^4x \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_F^<(x)}{k_0 - k''_0 - i\epsilon} e^{ikx} dk''_0,$$

de acordo com a Equação A.4, encontramos

$$\widetilde{S}_F(k) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk''_0 \widetilde{S}_F^<(k)}{k_0 - k''_0 - i\epsilon} e^{ikx}$$

logo

$$\int d^4x \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_F^<(x)}{k'_0 - i\epsilon} e^{ikx} e^{-ix_0 k'_0} dk'_0 \right] = -\frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk''_0 \widetilde{S}_F^<(k)}{k_0 - k''_0 - i\epsilon} e^{ikx}. \quad (\text{A.8})$$

Somando as Equações A.7 e A.8, temos

$$\begin{aligned} \int d^4x e^{ikx} \left[\Theta(x_0 - y_0) S_F^>(x - y) + \Theta(y_0 - x_0) S_F^<(x - y) \right] = \\ = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk''_0 \widetilde{S}_F^>(k)}{k_0 - k''_0 + i\epsilon} e^{ikx} - \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk''_0 \widetilde{S}_F^<(k)}{k_0 - k''_0 - i\epsilon} e^{ikx} \end{aligned}$$

por

$$\widetilde{S}_F(k) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk''_0 \left[\frac{\widetilde{S}_F^>(k)}{k_0 - k''_0 + i\epsilon} e^{ikx} - \frac{\widetilde{S}_F^<(k)}{k_0 - k''_0 - i\epsilon} \right]. \quad (\text{A.9})$$

Ainda, é possível reescrever as funções $\widetilde{S}_F^>(k)$ e $\widetilde{S}_F^<(k)$ em termos da função espectral de modo que

$$\begin{aligned} \widetilde{S}_F^>(k) &= (1 + f(k_0))\rho(k), \\ \widetilde{S}_F^<(k) &= f(k_0)\rho(k), \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

onde $f(k_0)$ representa a distribuição de Fermi-Dirac, com energia k_0 . Levando as Equações A.10 na Equação A.9, obtem-se

$$\widetilde{S}_F(k) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk''_0 \rho(k''_0, \vec{k}) \left\{ \frac{1}{k_0 - k''_0 + i\epsilon} + f(k''_0) \left[\frac{1}{k_0 - k''_0 + i\epsilon} - \frac{1}{k_0 - k''_0 - i\epsilon} \right] \right\}.$$

Ao integrarmos o segundo e terceiro termo teremos uma função do tipo $f(k_0)\rho(k''_0, \vec{k})$ ou $f(k_0)\rho(k)$, já que $k = k_0 - \vec{k}$. Sendo assim,

$$\widetilde{S}_F(k) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk''_0 \frac{\rho(k''_0, \vec{k})}{k_0 - k''_0 + i\epsilon} + f(k_0)\rho(k). \quad (\text{A.11})$$

Até então, construímos o propagador térmico de nosso sistema, em função da função espectral. Para determinarmos nossa função de Green, basta conhecermos a expressão

$\rho(k)$. De início, é sabido que o propagador em questão descreve como férmions se movem no espaço-tempo quando sujeitos a influências térmicas. Desta forma, é válido tomar como ponto de partida encontrar a função de Green $\widetilde{S}_F(k)$ para a Equação de Dirac, uma vez que a mesma descreve a dinâmica dos férmions bem como suas antipartículas. Sendo assim, a mesma é dada por

$$(\not{\partial} - m)\psi(x) = 0, \quad (\text{A.12})$$

lembrando que $\not{\partial} = \gamma\partial$, onde γ são as matrizes de Dirac. Após uma transformada de Fourier na Equação A.12, encontramos

$$\widetilde{S}_F(k) = \frac{1}{\not{k} - m},$$

ou de forma mais conveniente

$$\widetilde{S}_F(k) = i \frac{(\not{k} + m)}{k^2 - m^2 \pm i\varepsilon}. \quad (\text{A.13})$$

Ainda, como é de interesse determinarmos a função espectral, é intuitivo escrever $\widetilde{S}_F(k)$ em notação espectral, de modo que

$$\widetilde{S}_F(\omega_n) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk_0 \frac{\rho(k)}{\omega_n - k_0},$$

onde ω_n são as frequências ou energia associada a uma partícula, em nosso caso férmions. Se analisarmos a mesma no limite do contínuo, ou seja, onde praticamente temos partículas com energias muito próximas escvremos

$$\widetilde{S}_F(k'_0 \pm i\varepsilon) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk'_0 \frac{\rho(k)}{k'_0 - k_0 \pm i\varepsilon}. \quad (\text{A.14})$$

Para determinarmos a função espectral desejada, vamos integrar e igualar as Equações A.13 e A.14, de modo que

$$\int dk_0 \left[i \frac{(\not{k} + m)}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} - i \frac{(\not{k} + m)}{k^2 - m^2 - i\varepsilon} \right]. \quad (\text{A.15})$$

Pela relação de valor principal da integral, escreve-se

$$\frac{1}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} = -i\pi\delta(k^2 - m^2),$$

e

$$\frac{1}{k^2 - m^2 - i\varepsilon} = i\pi\delta(k^2 - m^2).$$

Sendo assim, a Equação A.15 torna-se

$$\int dk_0 [2\pi\delta(k^2 - m^2)(\not{k} + m)].$$

Para o outro lado da igualdade, utilizando a definição de valor principal da integral teremos

$$\frac{i}{2\pi} \int dk_0 \int_{-\infty}^{\infty} dk'_0 \frac{\rho(k'_0, \vec{k})}{k'_0 - k_0 \pm i\varepsilon} = \int dk_0 \rho(k'_0, \vec{k}). \quad (\text{A.16})$$

Igualando a Equação A.15 com a Equação A.16 obtemos

$$\int dk_0 [2\pi\delta(k^2 - m^2)(\not{k} + m)] = \int dk_0 \rho(k'_0, \vec{k}).$$

Por comparação vemos que a função espectral para férmions é dada por

$$\rho(k'_0, \vec{k}) = 2\pi\delta(k^2 - m^2)(\not{k} + m). \quad (\text{A.17})$$

Em posse da função espectral do sistema, basta substituírmos a Equação A.17 na Equação A.11, de modo que

$$\widetilde{S}_F(k) = i \int_{-\infty}^{\infty} dk''_0 \frac{\delta(k^2 - m^2)(\not{k} + m)}{k_0 - k''_0 + i\varepsilon} + f(k_0)2\pi\delta(k^2 - m^2)(\not{k} + m),$$

e finalmente encontramos

$$\widetilde{S}_F(k) = \frac{i}{\not{k} - m + i\varepsilon} - \frac{2\pi\delta(k^2 - m^2)(\not{k} + m)}{e^{\beta k_0} + 1}.$$

Sendo $\widetilde{S}_F(k)$ chamado de propagador de Dolan-Jackiw, como queríamos demonstrar.

Apêndice B

Matrizes de Dirac e Gell-Mann

Neste apêndice, serão mostradas algumas relações e propriedades sobre as matrizes de Dirac e das matrizes de Gell-Mann as quais foram importantes para obtermos os resultados do capítulo sobre as regras de soma.

Matrizes de Dirac

As matrizes de Dirac se mostraram extremamente importantes e surgiram para compor a famosa Equação de Dirac [30,31]. Onde esta, por sua vez, é responsável por descrever fenômenos quânticos-relativísticos, como o spin e de suma importância para realizar a previsão teórica no que diz respeito as antipartículas. As mesmas, podem ser escritas em função das matrizes de Pauli, da seguinte maneira

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ -\sigma^\mu & 0 \end{pmatrix},$$

onde σ^μ representam as matrizes de Pauli de modo que $\mu = 0, 1, 2, 3$. Vale ressaltar que para $\mu = 0$ determina-se a matriz identidade como segue

$$\begin{aligned} \gamma^0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, & \gamma^1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \gamma^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \gamma^3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Podemos fazer o uso de algumas propriedades algébricas das matrizes γ^μ de modo que [30,31]

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g_{\mu\nu},$$

$$\gamma^\mu \gamma_\mu = 4,$$

$$Tr\{\gamma_\mu \gamma_\nu\} = 4g_{\mu\nu},$$

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{1}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu],$$

$$Tr\{\sigma^{\mu\nu}\} = 0,$$

$$\sigma^{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu} = 12,$$

e

$$\sigma^{\mu\nu} \gamma^\rho \sigma_{\mu\nu} = 0.$$

Matrizes de Gell-Mann

As matrizes de Gell-Mann desempenham um papel fundamental na teoria quântica de campos. As mesmas são conhecidas por serem as geradoras do grupo SU(3) onde fisicamente, são responsáveis por descrever a força nuclear forte que por sua vez é explicada pela teoria da cromodinâmica quântica [30,31]. Sem tais matrizes, não seria possível termos uma compreensão fundamental a cerca da interação entre os constituintes da matéria hadronica. Desta forma, as mesmas são dadas por

$$\Gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Gamma_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Gamma_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Por completeza segue algumas propriedades a respeito destas matrizes.

$$[\Gamma_i, \Gamma_j] = 2i \sum_k f^{ijk} \Gamma_k,$$

onde

$$f^{ijk} = -\frac{i}{4} \text{Tr}\{\Gamma_i[\Gamma_j, \Gamma_k]\},$$

de modo que f^{ijk} é uma constante totalmente antissimétrica. Os respectivos valores numéricos são dados por

$$f^{123} = 1, \\ f^{147} = f^{165} = f^{246} = f^{257} = f^{345} = f^{376} = \frac{1}{2},$$

e

$$f^{678} = f^{458} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Já o anticomutador é dado por

$$\{\Gamma_i, \Gamma_j\} = \frac{4}{3} \delta_{ij} I + 2 \sum_k d^{ijk} \Gamma_k,$$

onde I é a matriz Identidade e δ_{ij} representa o Delta de Kronecker. Ainda,

$$d^{ijk} = \frac{1}{4} \text{Tr}\{\Gamma_i\{\Gamma_j, \Gamma_k\}\}.$$

Além disso, o produto entre duas matrizes de Gell-Mann é representado por

$$\Gamma_i \Gamma_j = \frac{1}{2} ([\Gamma_i \Gamma_j] + \{\Gamma_i \Gamma_j\}).$$

Diversas outras propriedades acerca dessas matrizes podem ser encontradas [30,31]. Para as finalidades deste trabalho apenas as listadas acima são de maior relevância.