

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM DOCÊNCIA PARA A EDUCAÇÃO
BÁSICA

UMA INTERFACE ENTRE HISTÓRIA E ENSINO DE MATEMÁTICA:
CONTRIBUIÇÕES NA FORMAÇÃO DE CONCEITOS DE ESTUDANTES NA
CONSTRUÇÃO E UTILIZAÇÃO DE UM INSTRUMENTO DE MEDIDA DO
SÉCULO XVI – O QUADRANTE GEOMÉTRICO

ANA PAULA MINHANO ALEIXO DA SILVA

BAURU

2019

ANA PAULA MINHANO ALEIXO DA SILVA

UMA INTERFACE ENTRE HISTÓRIA E ENSINO DE MATEMÁTICA:
CONTRIBUIÇÕES NA FORMAÇÃO DE CONCEITOS DE ESTUDANTES NA
CONSTRUÇÃO E UTILIZAÇÃO DE UM INSTRUMENTO DE MEDIDA DO
SÉCULO XVI – O QUADRANTE GEOMÉTRICO

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre a Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho – Faculdade de Ciências, Campus de Bauru – Programa de Pós-graduação em Docência para a Educação Básica, sob orientação da Prof. Dr^a. Marisa da Silva Dias.

BAURU

2019

Silva, Ana Paula Minhano da.

Uma interface entre história e ensino de matemática: contribuições na formação de conceitos de estudantes na construção e utilização de um instrumento de medida do século XVI – o quadrante geométrico/ Ana Paula Minhano Aleixo da Silva, 2019

164 f.

Orientadora: Marisa da Silva Dias

Dissertação (Mestrado)–Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia, Bauru, 2019

1. Ensino de matemática. 2. História da matemática. 3. Instrumento de medida. 4. Quadrante Geométrico. 5. Formação de Conceito. I. Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Ciências. II. Título.



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Câmpus de Bauru



ATA DA DEFESA PÚBLICA DA DISSERTAÇÃO DE MESTRADO DE ANA PAULA MINHANO ALEIXO DA SILVA, DISCENTE DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM DOCÊNCIA PARA A EDUCAÇÃO BÁSICA, DA FACULDADE DE CIÊNCIAS - CÂMPUS DE BAURU.

Aos 21 dias do mês de fevereiro do ano de 2019, às 14:00 horas, no(a) Sala - Laboratório 3 do Prédio do Departamento de Educação, reuniu-se a Comissão Examinadora da Defesa Pública, composta pelos seguintes membros: Profa. Dra. MARISA DA SILVA DIAS - Orientador(a) do(a) Departamento de Educação / Faculdade de Ciências - UNESP/Bauru, Prof. Dr. FUMIKAZU SAITO do(a) PUC / São Paulo (SP), Livre Docente MANOEL ORIOSVALDO DE MOURA do(a) Departamento de Metodologia do Ensino / UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO, sob a presidência do primeiro, a fim de proceder a arguição pública da DISSERTAÇÃO DE MESTRADO de ANA PAULA MINHANO ALEIXO DA SILVA, intitulada **"UMA INTERFACE ENTRE HISTÓRIA E ENSINO DE MATEMÁTICA: CONTRIBUIÇÕES NA FORMAÇÃO DE CONCEITOS DE ESTUDANTES NA CONSTRUÇÃO E UTILIZAÇÃO DE UM INSTRUMENTO DE MEDIDA DO SÉCULO XVI - O QUADRANTE GEOMÉTRICO"** E PRODUTO EDUCACIONAL **"AS POTENCIALIDADES PEDAGÓGICAS DO INSTRUMENTO DE MEDIDA - "QUADRANTE GEOMÉTRICO"**. Após a exposição, a discente foi arguida oralmente pelos membros da Comissão Examinadora, tendo recebido o conceito final: APROVADA _____. Nada mais havendo, foi lavrada a presente ata, que após lida e aprovada, foi assinada pelos membros da Comissão Examinadora.

Profa. Dra. MARISA DA SILVA DIAS

Prof. Dr. FUMIKAZU SAITO

Livre Docente MANOEL ORIOSVALDO DE MOURA

Dedico este trabalho ao meu esposo, Fabiano, e a minha filha Nayane, com amor e gratidão pela compreensão, cumplicidade e paciência, e por estarem sempre ao meu lado, em todos os momentos. E aos meus pais, por tudo que sempre fizeram por mim.

Meus agradecimentos...

Primeiramente a Deus, pelo dom da vida e por me conceder esta oportunidade de desenvolver meus conhecimentos, dando-me sabedoria para compreender e vencer os momentos difíceis desta caminhada.

Ao meu esposo amado, Fabiano, que sempre me apoiou e acreditou em mim, incentivando-me a continuar e nunca desistir.

À flor mais bela do meu jardim, Nayane, que em todos os momentos me estendia sua mão parceira, seu sorriso doce, sua ajuda preciosa, sem cobranças e nem queixas.

Aos meus pais, Iracema e Manoel, os quais, além de me trazerem a este mundo, me ofereceram todas as condições para me tornar o ser humano que sou, sempre com muito amor, dedicação e responsabilidade.

À minha sogra, Marlene, que sempre me deu o suporte necessário, especialmente nos momentos mais intensos, durante a realização deste trabalho, sempre gentil e solícita.

À minha orientadora e parceira, Marisa da Silva Dias, que, desde o início, acreditou nas minhas potencialidades, considerando-me merecedora de sua confiança, honrando-me com seus ensinamentos teóricos e contribuindo imensamente para o meu crescimento acadêmico e profissional.

Aos professores Manoel Oriosvaldo de Moura e Fumikazu Saito, por fazerem parte da minha Banca e contribuírem de maneira enriquecedora para a minha pesquisa.

Ao professor Rony, por ter sido tão solícito e pronto, na revisão deste trabalho.

A Cybelle do Amaral, Suzana Maria, Jackeline Medrado, Nathalia Felippi, Ana Lydia Perrone, Michele de Souza Moraes, Edvaldo Alves de Moraes, Nara de Beo e Luciane Maria Fernandes, pela parceria valiosa nesta jornada e por me oferecerem o ombro, nos momentos delicados, sempre com palavras de conforto e incentivo.

Um agradecimento especial aos meus queridos estudantes, que prontamente aceitaram o desafio de participar da atividade didática desta pesquisa, sempre com muito entusiasmo e dedicação, contribuindo de maneira ímpar com a proposta deste trabalho.

RESUMO

O objetivo desta pesquisa é investigar o movimento de conceitos na aprendizagem da matemática, a partir de uma atividade didática elaborada com base no contexto histórico do instrumento de medida Quadrante Geométrico e no tratado *Del modo di misurare*, de Cosimo Bartoli. Os fundamentos teórico-metodológicos pautam-se em um delineamento possível de interface entre a história da matemática e o ensino da matemática, de modo a dar significado aos objetos matemáticos. Para aproximar a história da matemática do ensino, optamos por explorar as potencialidades didáticas do instrumento de medida, o quadrante geométrico e de seu respectivo tratado, a partir da análise do contexto histórico e do movimento do pensamento para a formação dos conceitos matemáticos sintetizados no instrumento, por meio de uma intervenção com estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental. A atividade didática foi organizada sob pressupostos da atividade orientadora de ensino, fundamentada na Teoria da Atividade, sob a perspectiva da Teoria Histórico-Cultural. A coleta dos dados ocorreu por intermédio de gravações audiovisuais e das produções escritas dos estudantes. Os dados foram organizados em episódios e receberam uma análise qualitativa, pautada na perspectiva histórico-cultural com enfoque no pensamento empírico e teórico. Os resultados indicam articulações dos conceitos matemáticos de medida, números racionais, reta oblíqua, razão, proporção e semelhança de triângulos, no decorrer das ações da atividade didática, apontando o movimento desses conceitos no pensamento dos estudantes, de modo a propiciar a mobilização do conceito empírico e do conceito teórico desses objetos matemáticos. O salto desta pesquisa está na produção de uma interface entre a história e o ensino da matemática, por meio de uma organização intencional da atividade didática, que articulou e mobilizou conhecimentos dos estudantes para o desenvolvimento do conceito teórico dos objetos matemáticos sintetizados no processo de construção e uso do instrumento de medida, o quadrante geométrico.

Palavras-chave: Ensino de matemática. História da matemática. Instrumentos de medida. Formação de conceito.

ABSTRACT

The purpose of this research is to investigate the motion of concepts in the learning of mathematics, as from a didactic activity drafted on the historical context of the geometric quadrant measuring instrument and *Del modo di misurare* by Cosimo Bartoli. The theoretical-methodological foundations are grounded in a possible delineation of the interface between history and teaching of mathematics, in order to imply meaning for mathematical objects. To bring mathematics history and teaching closer, we opted to explore the didactic potentialities of a measuring instrument, the geometric quadrant and its respective treatise, by analyzing the historical context and the thought movement for the formation of mathematical concepts synthesized in the instrument, by means of an intervention with students attending the 9th grade of school. Such didactic activity was organized under the assumptions of the orienting teaching activity, reasoned in Theory of Activity, from the perspective of Historical-Cultural Theory. The data collection occurred through audiovisual recordings and productions written by the students. These data were arranged into episodes for review and received a qualitative analysis, based on a historical-cultural perspective, focusing on the empirical and theoretical thinking. Results indicate articulations of the mathematical concepts of measurement, rational numbers, oblique line, ratio, proportion, and similarity of triangles during the didactic activity, showing the movement of these concepts in the students' thinking and providing the mobilization of the empirical and theoretical concept of these mathematical objects. The increase of this research is in elaboration of an interface between history and teaching of mathematics, through an intentional organization of didactic activity that articulated and mobilized students' knowledge about development of the theoretical concept of mathematical objects synthesized in the construction process and use of the measuring instrument, the geometric quadrant.

Keywords: Mathematics teaching. History of Mathematics. Measuring instruments. Concept formation.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 -	Parte do excerto do <i>Del modo di misurare</i> que remete à construção do instrumento	47
Figura 2 -	Imagem do quadrante geométrico com suas partes	48
Figura 3 -	Parte do excerto do <i>Del modo di misurare</i> que remete à utilização do instrumento	51
Figura 4 -	Frontispício de <i>Del modo di misurare</i>	69
Figura 5 -	Ilustração de como usar o quadrante geométrico	73
Figura 6 -	Apresentação dos <i>slides</i> interativos aos estudantes	83
Figura 7 -	Grupo A1 e A2 assistindo ao trecho de um vídeo sobre as grandes navegações.....	86
Figura 8 -	As estudantes Helô e Cata fazendo a discussão do texto, das imagens e do trecho do vídeo, a partir das questões norteadoras.	87
Figura 9 -	Anotações produzidas pelo grupo A2	89
Figura 10 -	Parte do texto opinativo produzido pelo grupo A1	90
Figura 11 -	Integrante Bia, do grupo B, fazendo a discussão do texto e das imagens, a partir das questões norteadoras	92
Figura 12 -	Parte do texto opinativo produzido pelo grupo B	93
Figura 13 -	Integrante Léo, do grupo C, fazendo a discussão do texto e das imagens, a partir das questões norteadoras	94
Figura 14 -	Parte do texto opinativo produzido pelo grupo C	96
Figura 15 -	Roda de conversa para discussões dos textos produzidos pelos grupos.....	98
Figura 16 -	Apresentação do protótipo de madeira do quadrante geométrico para os estudantes	101

Figura 17 -	Integrantes do grupo E realizando a leitura do excerto e destacando as ações para a construção do protótipo	104
Figura 18 -	Estudante indicando o sentido da reta oblíqua na figura do quadrante	106
Figura 19 -	Anotação produzida pelo grupo D	107
Figura 20 -	Sequência de medição de distância, usando o barbante como instrumento de medida	108
Figura 21 -	Registro do grupo C referente à interpretação das ações para a construção do quadrante.....	109
Figura 22 -	Sequência das ações do grupo B, para desenhar a proporção do dobro da largura, sem utilizar instrumento graduado	111
Figura 23 -	Sequência de medição de distância, usando o lápis como recurso de medida	111
Figura 24 -	Imagem do registro da estudante referente à proporção de $\frac{1}{4}$ entre 12 partes do segmento	114
Figura 25 -	Sequência da explanação da estudante Helô referente à mobilização de seu pensamento sobre a razão de $\frac{1}{4}$ da braça	115
Figura 26 -	Grupo realizando as primeiras tentativas para a divisão do segmento em partes iguais, empregando o compasso	118
Figura 27 -	Grupo fazendo uma das inúmeras tentativas para a divisão do segmento em partes iguais, usando o compasso	119
Figura 28 -	Estudantes do grupo B comemorando a conclusão da ação de divisão do segmento em partes iguais, utilizando o compasso	120
Figura 29 -	Divisão do segmento em três partes iguais	120
Figura 30 -	Desenho não concluído do grupo B do protótipo do	

	quadrante geométrico.....	122
Figura 31 -	Entrega do protótipo do quadrante para cada grupo	126
Figura 32 -	Grupo A realizando a leitura do excerto e destacando as ações para a utilização do quadrante	127
Figura 33 -	Grupo A realizando as ações de reflexão sobre o excerto	128
Figura 34 -	Grupo A posicionando o quadrante para realizar as ações de medição referentes à situação-problema	129
Figura 35 -	Anotação produzida pelo grupo A	130
Figura 36 -	Grupo A articulando a formação do triângulo retângulo no espaço da situação-problema	131
Figura 37 -	Grupo C elaborando a situação-problema no espaço da quadra poliesportiva	132
Figura 38 -	Sequência de ações do grupo C para medir a altura da grade do patamar até o chão	133
Figura 39 -	Sequência de ações do grupo C para medir a reta diagonal entre a grade do patamar e o chão	134
Figura 40 -	Ação do grupo C para articular a situação-problema com a utilização do quadrante	134
Figura 41 -	Anotação produzida pelo grupo C	136
Figura 42 -	Anotação produzida pelo grupo C	137
Figura 43 -	Grupo C mobilizando a relação de semelhança entre os triângulos do espaço da situação-problema e do quadrante	138
Figura 44 -	Grupo D mobilizando a situação-problema	140
Figura 45 -	Sequência de ações do grupo D para solucionar a situação-problema	141

Figura 46 -	Registro produzido pelo grupo D	142
Figura 47 -	Integrante do grupo B representando a situação-problema	143
Figura 48 -	Registro produzido pelo grupo B	145
Figura 49 -	Registro produzido pelo grupo B	146
Figura 50 -	Desenho do estudante Rico, integrante do grupo B, quanto à semelhança de triângulos e a proporção	147

LISTA DE QUADROS

QUADRO - 1	Organização da Atividade Didática: 1º Encontro	44
QUADRO - 2	Organização da Atividade Didática: 2º Encontro	48
QUADRO - 3	Organização da Atividade Didática: 3º Encontro	52

Sumário

1	INTRODUÇÃO	16
2	PESQUISAS QUE TRATAM SOBRE INSTRUMENTOS MATEMÁTICOS	22
3	METODOLOGIA.....	33
3.1	Princípios metodológicos da pesquisa	33
3.1.1	Contexto no qual os conceitos matemáticos foram desenvolvidos	35
3.1.2	O movimento do pensamento na formação do conceito	37
3.2	A proposta da atividade didática	39
3.2.1	O tratamento didático do documento	41
3.2.2	Intencionalidade e plano de ação	43
	Fonte: Elaborado pela autora.....	48
4	MOVIMENTO LÓGICO-HISTÓRICO: O HOMEM E O INSTRUMENTO DE MEDIDA – QUADRANTE GEOMÉTRICO.....	56
4.1	O contexto histórico do instrumento: as necessidades humanas como base do processo de construção do conhecimento matemático.....	60
4.2	O tratado <i>Del modo di misurare</i> e o quadrante geométrico	68
5	MOVIMENTO DO PENSAMENTO NA FORMAÇÃO DO CONCEITO: A DIALÉTICA DO PENSAMENTO EMPÍRICO E DO PENSAMENTO TEÓRICO	75
5.1	O pensamento empírico.....	76
5.2	O pensamento teórico	78
6	COLETA DE DADOS E ANÁLISE DOS RESULTADOS.....	82
7	CONSIDERAÇÕES	154

1 INTRODUÇÃO

[...] a utilização e a criação de instrumentos de Trabalho, embora estejam presentes nos animais de forma embrionária, são características específicas do processo de trabalho humano.

Lev Semenovich Vygotsky (1896-1934)

O presente estudo relaciona-se com a experiência profissional da professora Ana Paula, que atua como docente de Matemática para o Ensino Fundamental II – 6º ao 9º ano, no sistema particular de ensino da cidade de Bauru.

Em 2013, ainda frequentando o curso de licenciatura em Matemática, iniciou a carreira de professora de apoio na rede estadual de ensino, por meio de contrato temporário, juntamente com aulas de plantão em uma escola particular. No ano de 2015, assumiu como professora de área de Matemática, regularmente contratada por uma Instituição de ensino particular.

Desde então, algumas inquietações se tornavam recorrentes na rotina do ambiente de ensino e aprendizagem desta professora. Dentre suas inquietações, duas ganhavam destaque: a primeira era a resistência da maior parte dos estudantes em construir e desenvolver os conhecimentos matemáticos, alegando não serem capazes de articular e desenvolver, no pensamento, os conceitos matemáticos.

A segunda inquietação, que está diretamente associada com a primeira, refere-se à forma como o processo de ensino e aprendizagem se desenvolve, no ambiente de sala de aula. Os materiais de apoio pedagógicos utilizados, como livros e apostilas, de modo geral, não colaboram com a organização dos conteúdos a serem abordados durante o ano letivo, de modo a não contribuir na organização do ensino do professor e a atividade de estudo do estudante. Sua estrutura baseia-se em módulos ou capítulos que apresentam a definição do conceito a ser estudado, desenvolvem exemplos de algoritmos aplicados ao conceito, além de elementos e propriedades, fórmulas e teoremas. A quantidade

de exercícios de fixação propostos ao final de cada módulo ou capítulo reforça que esse processo de mediação da aprendizagem se apoia em ações educativas amparadas em uma prática de abordagem do conteúdo que enfatiza a memorização das definições de cada conceito, a partir de sua repetição.

Frente a essas inquietações, as quais, com o passar do tempo, se tornaram desafios, a professora começou um projeto pessoal para iniciar o Mestrado. Tal projeto se transformou em uma necessidade primordial, a fim de que a mesma pudesse aprimorar sua prática docente. Para a professora, aprofundar os estudos sobre as concepções de ensino da matemática seria essencial na superação de seus desafios. Seu primeiro passo foi iniciar a participação no grupo de estudos HEEMa (História e Epistemologia na Educação Matemática), que propõe construir interfaces entre história, ensino e aprendizagem da matemática, com enfoque na exploração didática de instrumentos de medida antigos. As pesquisas do Grupo contemplam análises em documentos históricos que versam sobre a construção e a utilização de instrumentos de medida antigos.

Este trabalho busca contribuir na organização da atividade de ensino do professor, pela construção de um diálogo entre a história e o ensino da matemática. Produzir essa interface entre a história e o ensino da matemática não se trata de uma tarefa fácil, ocorrendo muitas vezes de maneira descontextualizada e sem uma metodologia adequada (SAITO; DIAS, 2013). Os livros didáticos trazem a matemática estruturada de forma linear e como uma verdade absoluta, fruto da mente brilhante de alguns personagens da história. Muitos estudantes realizam indagações (Quem foi que inventou isso? Por que inventaram essa fórmula? Em que momento da minha vida irei utilizar esse teorema?), estimulados pela falta de significado que os conteúdos matemáticos representam para eles.

Por conseguinte, o estudante não compreende a essência do objeto matemático, tão pouco associa que sua elaboração e seu desenvolvimento partiram de uma necessidade humana. O estudante não relaciona que a necessidade enfrentada pelo homem fez com que alguém e depois outro alguém e depois, mais adiante, outro alguém, parassem para pensar, repensar,

desenvolver e sistematizar algum determinado pensamento, a fim de que o mesmo se transformasse em solução para aquela necessidade surgida em algum momento específico da história da humanidade. Ao não apropriar-se dos objetos, o estudante não mobiliza o processo do movimento histórico da humanidade, tão pouco se imagina como sujeito histórico, protagonista e herdeiro do conhecimento construído por seus precedentes.

A professora, estimulada pelos estudos do Grupo de pesquisa, desenvolveu um projeto voltado para o ensino e aprendizagem da matemática apoiado na interface da história da matemática com o ensino da matemática, em função das potencialidades didáticas de instrumentos de medida antigos e, no ano de 2016, ingressou no Programa de Mestrado de Docência para a Educação Básica, dando continuidade ao projeto principiado ainda no Grupo HEEMa.

Os integrantes do grupo HEEMa perceberam a necessidade de contribuir na produção de materiais que orientem, de maneira intencional, a atividade de ensino do professor, por meio da interface entre a história e o ensino da matemática. A construção dessa interface busca estabelecer um diálogo entre pesquisadores, professores e estudantes, de sorte a articular a atividade de ensino do professor e a atividade de aprendizagem do estudante, possibilitando o movimento de seu conhecimento, de modo a construir e desenvolver o pensamento teórico do conceito.

Saito e Dias (2013), em sua proposta de aproximar a história da matemática ao ensino da matemática, apontam os documentos históricos originais que versam sobre a construção e emprego de instrumentos de medida antigos, como um potencial recurso para a produção de um diálogo entre a história e o ensino da matemática, a partir do estudo do contexto histórico no qual os conceitos matemáticos sintetizados na construção e utilização dos instrumentos foram desenvolvidos.

Entre as muitas obras escritas entre os séculos XVI e XVII, as quais versam sobre a construção e o uso de instrumentos matemáticos, alguns membros do Grupo HEEMa, como Saito e Dias (2013, 2011), adotaram, em seus trabalhos, o tratado *Del modo di misurare*, de Cosimo Bartoli (1503-1572), publicado no século XVI, que embasou igualmente esta pesquisa. Saito e Dias

(2013, 2011) extraíram excertos da obra original, os quais foram traduzidos do toscano do século XVI para a língua portuguesa.

O enfoque no processo histórico do movimento do conhecimento matemático, explorado por meio dos instrumentos de medida dos séculos XVI e XVII, bem como de seus tratados, decodifica a articulação entre a teoria e a prática dos saberes matemáticos de uma época. De acordo com Saito (2014), os historiadores da ciência consideram esses instrumentos de medida antigos como artefatos que incorporam um conhecimento, uma concepção de ciência de uma época. Explorar esses instrumentos representa produzir um rearranjo da manipulação de materiais e de ideias (GESSNER, 2010; HARKNESS, 2007; HINDLE, 1981 apud SAITO, 2014, p. 5).

Ademais, explorar o contexto histórico dos instrumentos de medida antigos e seus tratados propicia conhecer materialmente o seu passado, permite ir além daquilo que os instrumentos representaram, enquanto objetos de medida, de sorte a articular a relação do instrumento com as necessidades humanas pelas quais eles foram elaborados, usados e disseminados. Abordar a questão histórica do instrumento implica desvendar a função social do objeto matemático implícita no instrumento, ficando evidente não apenas o que é medir, mas, especificamente, para que medir.

Assim, surge a seguinte questão de investigação: que conhecimentos matemáticos podem ser mobilizados e articulados, com a finalidade de propiciar o movimento de conceitos no pensamento do estudante, por meio de uma atividade didática desenvolvida a partir da construção e utilização de um instrumento de medida do século XVI, o quadrante geométrico e seu respectivo tratado? Com isso, o objetivo desta pesquisa é investigar o movimento de conceitos na aprendizagem da matemática, durante uma atividade didática elaborada com base no contexto histórico do instrumento de medida quadrante geométrico.

Para alcançar o objeto geral citado, realizamos duas ações específicas, sendo a primeira a análise das potencialidades didáticas do instrumento quadrante geométrico, no processo de ensino e aprendizagem. A segunda ação consiste no desenvolvimento de uma atividade didática que proporcione o

movimento de conceitos matemáticos sintetizados na construção e uso do instrumento.

A atividade didática por meio do tratado *Del modo di misurare*, de Cosimo Bartoli, a partir da tradução livre dos excertos de construção e uso do quadrante geométrico. Essa atividade didática, com a finalidade de alcançar os objetivos da pesquisa, foi organizada sob pressupostos da atividade orientadora de ensino (AOE), definida por Moura (2016). A atividade orientadora de ensino – AOE –, fundamentada na Teoria da Atividade (LEONTIEV, 1983 apud MOURA, 2016), sob a perspectiva da Teoria Histórico-Cultural, é capaz de orientar ações pedagógicas, de sorte a organizar o trabalho do professor, que é o ensino. Indissociavelmente ligada à atividade de ensino está a relação entre o conteúdo de ensino, as ações educativas e os sujeitos que fazem parte dessa atividade.

A AOE referencia-se na Teoria Histórico-Cultural (Moura, 2016), com fundamento para o processo de humanização do indivíduo, parte da organização das atividades pedagógicas de maneira intencional, movidas por necessidades dos sujeitos envolvidos no processo de ensino e aprendizagem, o qual propicia a socialização como fonte primária e fundamental do desenvolvimento humano, mobilizando no indivíduo a apropriação de todo o processo do movimento histórico da humanidade.

Os princípios metodológicos que embasam esta pesquisa se fundamentam na produção de uma interface entre a história e o ensino da matemática, sob dois aspectos: o contexto histórico no qual os conceitos matemáticos foram desenvolvidos e o movimento do pensamento na formação desses conceitos matemáticos, com base no contexto histórico (SAITO; DIAS, 2013).

Para tanto, no capítulo 4 é apresentado um levantamento de elementos históricos entre os séculos XVI e XVII, concernente ao contexto histórico do instrumento, a fim de compreender e relacionar as demandas sociais, políticas e econômicas que favoreceram a elaboração e a utilização do quadrante geométrico.

O tópico sobre o tratado *Del modo di misurare* e o Quadrante Geométrico, traz a descrição da construção e do uso do instrumento, assim como as reflexões

sobre as potencialidades didáticas para o ensino que embasam a organização da atividade didática.

A pesquisa tem como aporte teórico os estudos de Kopnin, Davydov, entre outros, os quais versam sobre o movimento lógico-histórico e a Teoria Histórico-Cultural (abordado no capítulo 5). O movimento lógico-histórico como forma de pensamento, fundamentado na lógica materialista dialética, baseia-se no processo de desenvolvimento indivíduo no sentido da apropriação dos conhecimentos, a partir das atividades humanas desenvolvidas ao longo da história da humanidade.

A análise dos dados decorrentes da atividade didática, apresentada no item 6, ocorre mediante o destaque de episódios que buscam evidenciar o movimento de conceitos de um grupo de estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental, na formação dos conceitos matemáticos mobilizados e articulados, durante o desenvolvimento das ações da atividade didática.

Como requisito de um produto educacional para a conclusão do curso no Programa de Pós-Graduação em Docência pra Educação Básica da Faculdade de Ciências da UNESP de Bauru, um Mestrado Profissional, foi elaborado um vídeo paradidático com a proposta de orientar o ensino-aprendizagem de matemática com a intencionalidade de articular história e ensino de matemática.

2 PESQUISAS QUE TRATAM SOBRE INSTRUMENTOS MATEMÁTICOS

Com a finalidade de estudar produções que remetem à pesquisa e selecionar textos relevantes que tratam do tema sobre instrumentos matemáticos como recurso de ensino, fizemos um levantamento com base, no processo adotado por Moraes (2017). Seu trabalho está pautado na interface entre a história e ensino da matemática com enfoque nas potencialidades didáticas de um instrumento de medida, o Setor Trigonal e seu respectivo tratado. Buscamos referências nos bancos de teses e dissertações que a autora consultou, acrescentamos a base de dados da Universidade Estadual do Ceará e selecionamos o período relativo aos anos de 2016 a 2018, tendo em vista que a mesma realizou o levantamento referente ao período anterior ao ano de 2016:

- CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior), acesso em 04/02/2018;
- BDTD (Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações), acesso em 04/02/2018;
- Biblioteca Digital de Teses e Dissertações da USP, acesso em 04/02/2018;
- SBU – Sophia (Repositório da produção científica e intelectual da UNICAMP), acesso em 04/02/2018;
- TEDE (Sistema de Publicação Eletrônica de Teses e Dissertações da PUC), acesso em 08/02/2018;
- C@thetra Biblioteca Digital (Banco de Teses e Dissertações da UNESP), acesso em 08/02/2018;
- Banco de Teses e Dissertações da Universidade Estadual do Ceará, acesso em 08/02/2018.

Acompanhando ainda o caminho percorrido por Moraes (2017), fizemos uma busca também em algumas revistas eletrônicas que a autora consultou, considerando o mesmo requisito para o período que utilizamos para os bancos de dados de teses e dissertações, como: EMD (Ensino da Matemática em

Debate), REVMAT (*Revista Eletrônica de Educação Matemática*), REMATEC (*Revista de Matemática, ensino e cultura*), *Revista de Produção Discente em Educação Matemática*, *Educação Matemática Pesquisa*, *Ciência & Educação*, RBHM (Revista Brasileira de História da Matemática), *Revista Tecnologia e Sociedade*, *Revista História da Ciência e Ensino: construindo interfaces*. O acesso às revistas supracitadas ocorreu em 01/02/2018.

Para que essa busca abrangesse o maior número de referências possíveis, acerca do tema pesquisado, adotamos, no processo de pesquisa dos bancos de dados das instituições e das revistas, tanto nas buscas simples como nas buscas avançadas, com seleções de filtros para a investigação, as seguintes palavras-chave: ensino de matemática, história da matemática, instrumentos de medida e formação de conceito. Utilizamos ainda, como seleção para a pesquisa, além das palavras-chave, o período atinente aos anos de 2016 a 2018.

Confirmamos, nessa primeira etapa de buscas, a constatação de Moraes (2017) de que não há muitos trabalhos no Brasil que abordam o referido tema. Foram encontradas, pela autora, três Dissertações e uma Tese, no banco de teses e dissertações da PUC-SP.

A seguir, faremos uma síntese do levantamento bibliográfico realizado por Moraes (2017), promovendo destaques de cada trabalho, no sentido de trazer as contribuições de cada um para a construção de uma interface entre a história da matemática e o ensino, a partir do estudo das potencialidades didáticas de documentos originais e seus respectivos instrumentos de medida antigos.

O primeiro trabalho referenciado por Moraes (2017) foi uma Dissertação de Mestrado de L. R. Santos, intitulada *Leon Battista Alberti (1404-1472) e a medida do tempo em sua obra Matemática Lúdica*. O objetivo dessa pesquisa é propor uma interface entre história da matemática e a educação matemática, através da exploração de uma das práticas matemáticas descritas numa obra publicada no século XV, *Matemática Lúdica*, de Leon Battista Alberti (1404-1472).

Em seu trabalho, Santos (2014) faz uma discussão sobre o significado de medida, principalmente no que concerne à medida de tempo como mensuração de uma grandeza. O pesquisador enfoca os diferentes procedimentos utilizados

para medir distância e tempo, descritos na *Matemática Lúdica*. Nessa obra, Alberti usa a matemática para resolver diversas situações práticas, como realizar medições e medir o tempo (dividir o dia em dois períodos e cada período em doze partes), adotando procedimentos e instrumentos simples para realizar essas medições. O autor acrescenta, em sua pesquisa, uma abordagem do contexto histórico no qual está inserida a obra de Leon Battista Alberti, a *Matemática Lúdica*, que remete a um período de grandes transformações na ciência e na filosofia, denominado Renascimento.

A pesquisa de Santos (2014) aponta as potencialidades pedagógicas da obra de Leon Battista Alberti como um recurso para a construção de um diálogo entre a história da matemática e a educação. O autor destaca que esse diálogo poderia ser explorado na formação inicial e continuada de professores de matemática, de modo a articular a história e o ensino da matemática, no sentido de compreensão do processo de construção dos conceitos matemáticos de medida.

O segundo trabalho citado por Moraes (2017) foi também uma Dissertação de Mestrado, escrita por W. Monteiro, intitulada *Alguns elementos que reforçam a importância da história da matemática na formação de professores*. Monteiro (2012) apresenta como proposta, em seu trabalho, um diálogo entre a história da matemática e o processo de ensino e de aprendizagem da matemática, na formação de professores. O objetivo da pesquisa é apontar como as potencialidades pedagógicas de uma situação didática desenvolvida com o instrumento de medida, quadrante num quarto de círculo, podem contribuir na construção de elementos que emergem para a construção de uma articulação entre história e ensino da matemática.

O autor menciona alguns trabalhos que abordam a relação entre história e educação matemática, considerando perspectivas teóricas que norteiam algumas propostas de articulação entre essas duas áreas de conhecimento. Para construir essa interface entre a história e o ensino da matemática, Monteiro (2012) propôs a construção do instrumento quadrante num quarto de círculo, a partir da obra original *Del modo di misurare* (1564), de Cosimo Bartoli (1503-1572). Essa situação foi desenvolvida junto a um grupo de professores do Ensino Fundamental, do ciclo II, do Estado de São Paulo. O autor selecionou dois excertos do documento original do tratado *Del modo di misurare* (1564), que

tratam da construção e da utilização do instrumento quadrante num quarto de círculo. Tendo em vista o limitado tempo de que dispunha para a realização da situação didática (quatro horas), optou por desenvolver apenas a construção da réplica do instrumento, não sendo possível o emprego e a validação do instrumento.

O autor descreve que os professores não tiveram facilidade para a realização da construção, tendo em vista que não puderam utilizar instrumentos graduados modernos e ainda pela dificuldade que encontraram no tipo de linguagem do texto do documento original que adotaram como instrução para construir o instrumento. Receberam, para desenvolver a atividade, régua não graduada e compasso. Com isso, os professores foram levados a mobilizar seus conhecimentos sobre construção geométrica, de sorte a conseguir realizar as etapas da construção.

Por meio da construção do protótipo, os participantes foram incentivados a realizar ações que exigiam a mobilização de seus conhecimentos matemáticos, no sentido de refletir e discutir os conceitos matemáticos sintetizados no instrumento. Entre os conhecimentos que foram articulados, o autor cita conceitos geométricos básicos, como segmento de reta, diagonal do quadrado, retas paralelas e perpendiculares, mediatriz, bissetriz, teorema de Tales, quadrado, circunferência e triângulo retângulo.

A terceira Dissertação de Mestrado, citada por Moraes (2017), foi o trabalho de N. D. Beo, intitulado *O estudo do Trattato del Radio Latino*: Possíveis contribuições para articulação entre História da matemática e ensino. Beo (2015), como Monteiro (2012), busca construir um diálogo entre a história da matemática e o ensino e aprendizagem da matemática. O objetivo de seu trabalho é propor reflexões sobre o ensino de matemática, a partir do estudo histórico da construção e uso de um instrumento de medida do século XVI, o *Radio Latino*. A autora traz também, em sua investigação, uma abordagem do contexto histórico no qual o instrumento está inserido, que remete ao período do Renascimento, especificamente a segunda metade do século XVI, período da publicação do documento *Trattato del Radio Latino*.

O enfoque do trabalho de Beo (2017), a fim de construir essa interface entre a história e o ensino da matemática, foi o estudo do documento original que trata da construção e uso do instrumento de medida do século XVI, o *Trattato del Radio Latino*, uma obra escrita por Orsini (1517-1586), artesão e inventor do instrumento, em Roma. A pesquisadora realizou a tradução do *Trattato del Radio Latino* para o português, usando uma versão original escrita em toscano clássico do século XVI. A autora elabora duas situações didáticas que propõem a construção e o emprego do instrumento Radio Latino, propiciando a mobilização de conceitos matemáticos que podem ser explorados, tais como: mediatriz, perpendicularismo, raio da circunferência, teorema de Pitágoras e números irracionais.

Em uma das situações didáticas, a autora sugere a construção do instrumento, utilizando as ferramentas do *software* Geogebra, além de sua construção por desenho geométrico, usando compasso e régua. Segundo Beo (2015), a construção do instrumento no *software* também permite a articulação entre os processos de construção do instrumento propostos pelo documento e os conhecimentos que devem ser mobilizados para tal.

Como parte de sua pesquisa, Beo (2015) fez uma tentativa de reconstrução do instrumento da maneira como foi indicada por Orsini, no *Trattato del Radio Latino*. A tentativa de reconstrução do instrumento foi realizada em material de alumínio, por um torneiro mecânico, o qual recebeu todas as orientações da pesquisadora de como concretizar esse processo, a partir das imagens expostas no documento, bem como um esboço do instrumento com medidas apropriadas em centímetros e milímetros. Entretanto, levando-se em conta elementos como as escalas altimétricas e angulares, divisão da haste, braços e pernas do instrumento, conforme descritos no tratado, e o esboço apresentado pela pesquisadora, com as medidas apropriadas, não foi possível, com esse protótipo, realizar a maior parte das medições indicadas no *Trattato*. A autora conclui que a construção do instrumento não pode ser dissociada de seu uso e que, mesmo reconhecendo “[...] alguns atributos do instrumento, inclusive os conhecimentos matemáticos nele incorporados, isso não foi suficiente para construí-lo e utilizá-lo [...]” (BEO, 2015, p. 53).

Em suas considerações, a autora aponta que, em face da execução das situações didáticas, é possível mobilizar os conhecimentos matemáticos sintetizados no instrumento, permitindo assim uma abordagem histórica da produção dos conceitos matemáticos, em função da produção de uma atividade humana.

Moraes (2017) cita, em seu trabalho, a Tese de Doutorado de A. R. M. Castilho, *Um estudo sobre os conhecimentos matemáticos incorporados e mobilizados na construção e no uso do báculo (cross-staff), em A Boke Named Tectonicon de Leonard Digges*. Castilho (2016) investiga sobre o instrumento de medida báculo (*cross-staff*) cuja descrição e uso se encontram no tratado, *A Boke Named Tectonicon*, publicado em 1556, por Leonard Digges.

Castilho (2016) adota, em sua pesquisa, uma abordagem metodológica com base na articulação de três dimensões de análise, a historiográfica, a contextual e a epistemológica. A pesquisadora faz uma referência ao contexto histórico do instrumento, o qual remete a um período em que houve um aumento na demanda por conhecimentos práticos de geometria, trigonometria e astronomia, para atender as necessidades da classe dominante do período, os nobres, o clero e a burguesia. Existia demandas da classe dominante por conhecimentos geométricos, ligados a necessidade de modernização das artes de artilharia para a devida proteção do território inglês e o avanço na arte de medir terras, a fim de estabelecer os limites de propriedades e a demarcação de fronteiras. De acordo com a autora, essa demanda por conhecimentos geométricos deu origem, nesse mesmo período de construção do báculo, meados do século XVI, a vários outros instrumentos que eram denominados “matemáticos”. Tais instrumentos matemáticos eram utilizados para medir distâncias, ângulos, tempo e peso.

A fabricação e o uso do báculo, diz a pesquisadora, mobilizam vários conhecimentos matemáticos, como a divisão de um segmento em partes iguais, o perpendicularismo, o cálculo da área de triângulo, a semelhança de triângulos e a proporcionalidade. A mobilização de tais conceitos matemáticos sintetizados na fabricação e na utilização do báculo permite a compreensão de como tais instrumentos vão além de uma utilidade meramente instrumental, de simples

ferramentas que eram usadas apenas para confirmar uma medida ou calcular um resultado.

O diálogo entre as necessidades de uma classe dominante, o conhecimento científico dos eruditos que estavam nas universidades e dos artesãos que dominavam as práticas matemáticas e o saber fazer constituíram conhecimentos, propiciando o processo de construção de saberes de uma época.

Moraes (2017) referencia, em seu trabalho, uma das produções de Saito e Dias (2011), sobre a mobilização de entes matemáticos sintetizados na construção e uso de instrumentos de medidas do século XVI. Esse trabalho dos autores foi escrito em função do oferecimento de um minicurso no IX SNHM – Seminário Nacional de História da Matemática, organizado pela Sociedade Brasileira de História da Matemática, em 2011, na Universidade Federal de Sergipe e sediado na cidade de Aracaju.

Saito e Dias (2011) apresentam um panorama geral do contexto histórico em que os instrumentos matemáticos se encontravam, no século XVI, servindo-se de dois excertos do documento original da obra intitulada *Del modo di misurare*, publicada por Cosimo Bartoli (1503-1572), no século XVI. O minicurso foi estruturado por meio de uma atividade didática a partir de um tratamento didático do documento original, com os objetivos específicos de envolver conhecimentos matemáticos, possibilitar o desenvolvimento de conceitos com estudantes da Escola Básica e propiciar a apreensão da produção de conhecimentos, enquanto processo. Os autores propuseram uma discussão sobre os conhecimentos matemáticos envolvidos e explorados, tanto na construção quanto na utilização do instrumento quadrante num quarto de círculo (SAITO; DIAS, 2011).

As pesquisas mencionadas por Moraes (2017) trazem a ideia de articular a História da matemática e o Ensino da matemática, por meio da mobilização de conhecimentos matemáticos sintetizados na construção e uso de instrumentos de medida antigos, estudados nos documentos originais que versam sobre os mesmos.

Compreendendo o período de 2016 a meados de 2018, além de Moraes (2017), encontramos o artigo “Número e grandeza: discutindo sobre a noção de medida por meio de um instrumento matemático do século XVI”, publicado por Fumikazu Saito em 2017, pela revista *Ciência e Educação*. Nesse trabalho, o autor partilha alguns resultados recolhidos de uma atividade elaborada por Dias e Saito (2013), desenvolvida por professores de Matemática em quatro encontros, tendo por base uma proposta de articulação entre história e ensino de matemática, com a exploração do processo de construção e uso de um instrumento matemático do século XVI, o báculo.

Segundo Saito (2017), o báculo é um instrumento de medida bem simples, se comparado a outros instrumentos inventados e utilizados nesse mesmo período, entretanto, é muito rico do ponto de vista do conhecimento. O instrumento incorpora questões de ordem matemática, especialmente ao aproveitar propriedades encontradas em triângulos retângulos. Conforme o autor, a atividade proposta a partir da utilização desse instrumento de medida propiciou aos participantes a desconstrução de concepções prévias e arraigadas sobre medida. Foi necessária a mobilização de conhecimentos matemáticos, ensejando o movimento de conceitos para a construção de um significado próprio à noção de medida, número e grandeza.

O autor conclui, em suas considerações sobre a realização da atividade, que, “[...] na relação entre sujeito e objeto, é o *conhecimento matemático mobilizado* pelo observador que permite medir com o instrumento [...]” (SAITO, 2017, p. 934, grifo do autor).

Além de Saito (2017), encontramos o artigo “A matemática incorporada na construção do quadrante descrito na obra *Libros del Saber de Astronomia*”, publicado pela revista REVEMAT, em 2017, pelas autoras Ana Carolina Costa Pereira, Antonia Naiara de Sousa Batista e Isabelle Coelho da Silva.

As autoras abordam um recorte da obra *Libros del saber de Astronomia*, encomendado e supervisionado pelo Rei D. Afonso X de Cartilha, que apresenta a matemática presente na construção do quadrante em um quarto de círculo, ou quadrante náutico, o qual era utilizado na astronomia de posição, para determinar a altura dos astros em alto mar, entre outras funções. Afirmam as

autoras que se trata de uma construção simples, porém, que explora diversos conceitos matemáticos, tais como ângulos, circunferências, retas, arcos e Teorema de Tales.

Concluem, em suas considerações, que os instrumentos matemáticos vislumbram uma possibilidade de atrelar o saber e o fazer de conhecimentos matemáticos incorporados nos instrumentos, de modo a propor a construção de uma interface entre a história da matemática e ensino.

Não encontramos produções de livros que focalizassem o tema sobre instrumentos matemáticos como recurso de ensino, nas etapas de buscas, de modo a concluir que se trata de um ramo de pesquisa ainda recente, no Brasil.

A Dissertação de Mestrado de M. S. Moraes, intitulada *Setor trigonal: contribuições de uma atividade didática na formação de conceitos matemáticos na interface entre história e ensino de matemática*, foi publicada em 2017.

Moraes (2017) estrutura seu trabalho em dois pilares: o movimento do pensamento na formação de conceitos e o contexto no qual tais conceitos foram desenvolvidos, a partir de um estudo sobre as potencialidades didáticas de um tratado e do seu respectivo instrumento de medida, o Setor Trigonal.

A autora desenvolveu uma atividade didática com o uso do tratado e do instrumento setor trigonal, considerando o contexto histórico em que o mesmo foi produzido. Moraes (2017) organizou a atividade didática, com base na atividade orientadora de ensino, fundamentada nos pressupostos da Teoria Histórico-Cultural, proposta por Moura (1996, 2010). Tal atividade visou propiciar nos participantes, a compreensão da necessidade de produção de conhecimento de uma determinada época, baseada na perspectiva do seu movimento lógico-histórico.

Participaram da atividade 24 estudantes do Ensino Médio de uma Escola Estadual de uma cidade do interior do Estado de São Paulo. A atividade foi desenvolvida pela própria autora da pesquisa, que era a professora da disciplina de Matemática dos estudantes participantes.

Em sua investigação, a autora analisa e reflete “[...] sobre as potencialidades didáticas do instrumento setor trigonal, articulando os

conhecimentos matemáticos agregados a ele e ao tratado com o contexto histórico no qual ambos estavam inseridos [...]” (MORAES, 2017, p. 104). Pelas análises dos resultados da atividade didática, a autora aponta qual o movimento do pensamento que se pode propiciar nos estudantes do Ensino Médio, na formação de conceitos inerentes ao uso do instrumento setor trigonal e seu respectivo tratado.

A pesquisa de Moraes (2017) e os demais trabalhos supracitados efetuaram análises e exploraram didaticamente documentos históricos que tratavam de antigos instrumentos matemáticos. Por meio dessas análises, a proposta dos autores foi a de construir uma interface entre a história da matemática e o ensino da matemática. Essa interface foi observada por Saito e Dias (2013) e Saito (2016, p. 6), como “[...] um conjunto de ações e de produções que promova a reflexão sobre o processo histórico da construção do conhecimento matemático com vistas a elaborar outras tantas ações (didáticas e/ou pedagógicas) que busquem articular história e ensino de matemática [...]”.

Nota-se que o Professor Doutor Fumikazu Saito e a Professora Dr.^a Marisa da Silva Dias, líderes do grupo HEEMa (Grupo de Estudos e Pesquisa em História e Epistemologia na Educação Matemática) estão ligados a todos os trabalhos citados.

Os trabalhos mencionados exploraram articulações possíveis entre a história e o ensino da matemática, com enfoque em tratados que abordam instrumentos de medida antigos. Assim, essas pesquisas contribuíram com este trabalho, por seus elementos teóricos e pelas situações de ensino desenvolvidas, na busca de propiciar uma atividade didática diferenciada para o ensino de matemática, a fim de abordar conceitos matemáticos sintetizados no instrumento de medida juntamente com seu processo de significação, possibilitando um salto qualitativo ao processo de aprendizagem. Nesse sentido, observa-se que os trabalhos integram o contexto histórico no qual os conceitos matemáticos foram desenvolvidos e o movimento do pensamento na formação desses conceitos matemáticos. Esta pesquisa busca colaborar com essa integração, bem como conhecer os processos dessa articulação na atividade de ensino.

Tomamos outro instrumento de medida, o quadrante geométrico e o tratado *Del modo di misurare*. Documento este já abordado no trabalho de Monteiro (2012), anteriormente citado.

A elaboração e realização de uma atividade didática com o instrumento busca compreender o movimento de formação de conceitos matemáticos de estudantes em seu processo de construção e utilização.

3 METODOLOGIA

3.1 Princípios metodológicos da pesquisa

O objetivo desta pesquisa é investigar o movimento de conceitos na aprendizagem da matemática, a partir de uma atividade didática elaborada com base no contexto histórico do instrumento de medida Quadrante Geométrico e no tratado *Del modo di misurare*, de Cosimo Bartoli. Para alcançar o objetivo, elaboramos duas ações específicas, sendo ambas estreitamente interligadas. A primeira se refere ao delineamento de aspectos do contexto histórico em que o tratado do quadrante geométrico se insere, enquanto a segunda concerne à análise das potencialidades didáticas do instrumento quadrante geométrico, no processo de ensino e aprendizagem, por intermédio de uma intervenção didática com estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental.

Os procedimentos metodológicos foram elaborados a partir de um delineamento possível de interface entre história da matemática e ensino da matemática, por meio da análise do contexto histórico do instrumento de medida, o quadrante geométrico, e o movimento do pensamento para a formação dos conceitos sintetizados no instrumento, o processo lógico-histórico. Para abarcamos propriamente o ensino a intervenção didática tem como objetivo analisar a formação de conceitos no processo de ensino-aprendizagem.

Saito e Dias (2013), a propósito da interface entre história e ensino de matemática, encaminham dois aspectos: o contexto histórico no qual os conceitos matemáticos foram desenvolvidos e o movimento do pensamento na formação desses conceitos matemáticos, tendo em vista o contexto histórico. Além disso, apresentam uma síntese do desenvolvimento de algumas atividades didáticas realizadas em espaços educativos diversos, em forma de oficinas (DIAS; SAITO, 2010a, 2010b; DIAS; SAITO; CASTILHO, 2011 apud SAITO; DIAS, 2013, p. 101) e minicursos (SAITO; DIAS, 2011 apud SAITO; DIAS, 2013, p. 101) para professores e estudantes e em aulas nos cursos de licenciatura em Matemática e de Especialização em Educação Matemática.

De acordo com os autores, essa interface entre a história e o ensino da matemática deve superar a proposta didática pedagógica que se limita a

biografias ou a conteúdos matemáticos dispostos em um formato linear, os quais trazem a ideia de conhecimentos matemáticos verdadeiros e acabados. A abordagem procura enfatizar o processo histórico do desenvolvimento do conhecimento matemático, juntamente com a formação do conceito. A matemática deve ser compreendida como uma atividade intelectual que permite ao homem humanizar-se, pela apropriação da cultura produzida pela humanidade, ao longo da história.

Assim, propomos um diálogo entre historiadores e educadores da matemática de modo a refletirmos sobre a possibilidade da construção de uma interface que contemple a significação dos objetos matemáticos historicamente constituídos. A história da matemática, dessa maneira, propiciaria a experiência do processo de construção do conceito, promovendo a apropriação da significação dos objetos matemáticos. (SAITO; DIAS, 2013, p. 90).

Defendemos que a abordagem do contexto histórico no qual os conceitos foram desenvolvidos enseja a articulação do pensamento e promove o desenvolvimento do conceito, que vai além do empírico e da imediatez, no processo de ensino e aprendizagem. A ênfase no contexto histórico, por meio do movimento lógico-histórico do conceito possibilita uma compreensão dos objetos matemáticos, superando sua interpretação empírica (DIAS, 2007), que se apoia basicamente na percepção direta e na representação internalista do objeto.

Para tanto, uma das ações metodológicas da pesquisa constou em organizar um movimento lógico-histórico do instrumento, por meio do qual se buscaram pesquisas que abordam instrumentos matemáticos, aspectos históricos, sociais, políticos e econômicos da época do tratado, bem como se procurou compreender a construção e medição com o quadrante geométrico.

As outras ações referem-se ao tratamento didático do documento e a intervenção didática que relaciona o contexto histórico com o documento e os conceitos matemáticos nele inseridos. Na sequência, apresentamos os princípios em que o contexto histórico do instrumento foi abordado, nesta investigação.

3.1.1 Contexto no qual os conceitos matemáticos foram desenvolvidos

Creemos que o enfoque do contexto em que os conceitos matemáticos foram desenvolvidos para formação do pensamento dos estudantes proporciona a compreensão das necessidades humanas como base do processo de construção do conhecimento matemático. Por meio do contexto histórico no qual os conceitos matemáticos estão inseridos, é possível promover uma apropriação de tais conceitos, contribuindo para a formação do pensamento teórico (DAVIDOV, 1978).

Por meio da análise histórica dos conceitos e das problemáticas que conduziram ao surgimento de um conteúdo matemático num determinado momento histórico, é possível compreender como o conhecimento matemático se desenvolveu e se institucionalizou em diferentes épocas. (BROMBERG; SAITO, 2010 apud SAITO; DIAS, 2013, p. 97).

A análise do contexto histórico no qual os conceitos matemáticos foram elaborados permite compreender o conhecimento matemático como produto da história humana, desenvolvido a partir das necessidades humanas, ao longo da história.

Saito e Dias (2013), em sua proposta de aproximar a história da matemática ao ensino da matemática, apontam os documentos históricos originais que versam sobre a construção e a utilização de instrumentos de medida antigos, também designados por “instrumentos matemáticos”, conforme sugere Bennet (1998, 2003 apud SAITO; DIAS, 2013), como um potencial recurso para o estudo do contexto histórico no qual os conceitos matemáticos surgiram. A análise e a reflexão desses documentos originais integrados em uma proposta didática podem ser promissoras para promover um diálogo entre a história da matemática e o ensino da matemática. Pelo estudo do documento original que trata do instrumento de medida, o indivíduo pode fazer uma reflexão, em razão das necessidades e das aptidões humanas que foram necessárias

para a constituição dos conceitos matemáticos, sintetizadas tanto na construção como no emprego do instrumento.

Com a finalidade de promover esse diálogo é que foi elaborado o capítulo 4 referente ao contexto histórico do instrumento quadrante geométrico, em que foi realizado um estudo sobre o período histórico compreendido entre os séculos XVI e XVII. Nesse período, a construção de instrumentos de medidas, igualmente nomeados de instrumentos matemáticos, ocorreu em virtude da demanda por novos métodos matemáticos que pudessem contribuir nas questões de ordem observacional e experimental, na sociedade como um todo, como, por exemplo, fazer medições de terra de maneira mais eficiente (VAN HELDEN, 1983; KUHN, 1989; WARNER, 1994; BENNETT, 1986 apud SAITO; DIAS, 2011). Outros campos de atividades adotavam os instrumentos, como a astronomia, a arquitetura, a agrimensura, a navegação, a cartografia, a artilharia, a cosmografia, a geografia etc. (BENNETT, 1998; CAMEROTA, 1998; CORMACK, 2006; HEILBRON, 2001; MARR, 2009; TURNER, 1998 apud SAITO; DIAS, 2013). Essa demanda pela fabricação e conhecimento dos instrumentos de medida, segundo Saito e Dias (2011), provavelmente se deveu ao reconhecimento da matemática, de modo específico, dos conhecimentos geométricos, desde o século XVI, para cooperar na solução de problemas de ordem prática, assim como investigar os vários aspectos da natureza.

Os documentos originais trazem subsídios para indicar quem detinha os conhecimentos matemáticos, de forma mais aprofundada, uma vez que os instrumentos incorporavam conhecimentos geométricos, além de conhecimentos práticos inerentes à sua construção e ao seu uso, apontando, dessa maneira, a qual público eram destinados esses instrumentos. Os documentos originais, pelo desdobramento de seu contexto histórico, podem revelar as necessidades sociais e culturais que promoveram a elaboração de tais instrumentos e seus respectivos documentos, em uma determinada época.

O estudo dos documentos originais, segundo Saito e Dias (2013), deve ser conduzido de acordo com os propósitos didáticos da interface entre a história e o ensino de matemática, ou seja, sem perder a originalidade do texto, levando o estudante a compreender que as formas textuais e a língua variam, de sorte a

evidenciar aspectos do caráter histórico da produção de conhecimento. A organização das ideias, no que se refere aos conceitos matemáticos, não se apresenta de maneira linear, como propõem muitos materiais didáticos. Tal organização se baseia no contexto histórico, social e cultural do documento, que faculta ao estudante mobilizar seus conhecimentos matemáticos, para que seja possível a exploração das potencialidades didáticas do instrumento, tanto em sua construção como em seu emprego.

Desse modo, além do capítulo que aborda o contexto histórico do documento, foi realizado o tratamento didático do documento, considerando que ele é parte tanto do histórico quanto da atividade didática. O contexto histórico também tem seu papel na organização da atividade didática, no concerne à compreensão histórica pelos estudantes do período compreendido entre o século XVI e XVII, em função do movimento das necessidades humanas, que demandaram conhecimento, por meio da organização do contexto social, político e econômico.

3.1.2 O movimento do pensamento na formação do conceito

A segunda vertente que apontamos, nesta pesquisa, trata-se do movimento do pensamento no contexto da formação de conceitos matemáticos, a partir do processo histórico.

Saito e Dias (2013) apresentam a interface da história da matemática no ensino por meio da perspectiva lógico-histórica (KOPNIN, 1972, 1978), como uma possibilidade de abordagem metodológica. Os autores ressaltam que essa perspectiva aponta a compreensão do objeto desde seu processo de mudança que se entende pelo histórico do conceito, e o lógico, como meio pelo qual o pensamento forma, reconstrói e elabora o processo histórico do objeto. O lógico do histórico refere-se à lógica materialista dialética, mais ampla que a lógica formal, articulando o conteúdo com sua realidade objetiva, no processo de pensamento:

No entanto, embora a teoria do objeto se manifeste ao mesmo tempo como sua história, a reprodução, no pensamento, da essência e do conteúdo de qualquer fenômeno não torna desnecessário o estudo de

sua história; ao contrário, para atingir um degrau mais elevado no conhecimento do objeto, é necessário recorrer justamente à história. (KOPNIN, 1978, p. 185).

Segundo Saito e Dias (2013), os documentos históricos originais que versam sobre a construção e a utilização de instrumentos de medida antigos apresentam-se como um potencial recurso para compor propostas didáticas, a fim de promover um diálogo entre a história da matemática e o ensino da matemática. O estudo desses documentos e seus respectivos instrumentos, a partir do movimento lógico-histórico, possibilita ao indivíduo assimilar as necessidades e as aptidões humanas que foram necessárias para a constituição e o desenvolvimento dos conceitos matemáticos, os quais estão sintetizados no instrumento, tanto na sua construção como em seu uso.

Nesta pesquisa, exploramos potencialidades didáticas do tratado, bem como do instrumento, com base no movimento lógico-histórico, a fim de mobilizar o pensamento, propiciando o desenvolvimento de conceitos matemáticos dos estudantes envolvidos na atividade didática:

Ao privilegiarmos os elementos que propiciam a construção do conceito matemático a ser ensinado, procuramos uma via que nos auxilie a esboçar um método que conduza à apropriação do conceito pelo indivíduo. (SAITO; DIAS, 2013, p. 93).

Saito e Dias (2013) optaram inicialmente pelo estudo de tratados que versam sobre a construção e o uso de instrumentos de medida, também designados como instrumentos matemáticos, para iniciar reflexões sobre a interface já citada. Destacam que tais instrumentos e seus documentos colaboraram na construção da ciência moderna e, sobretudo, na articulação entre experiência/experimento e matemática (SAITO, 2008b, 2009, apud SAITO; DIAS, 2013).

Os documentos originais oferecem diferentes informações sobre “[...] o desenvolvimento do conhecimento matemático, os métodos de resolução de diversos tipos de problemas matemáticos, o uso da matemática em diferentes contextos e áreas de conhecimento, e assim por diante [...]” (SAITO; DIAS, 2013, p. 99).

Segundo os autores, as potencialidades didáticas desses documentos vão além da exploração dos conceitos matemáticos sintetizados na construção e no emprego de seus respectivos instrumentos. Permitem uma articulação interdisciplinar com outras áreas do conhecimento, como, por exemplo, a geografia, no tocante à topografia; a astronomia, em relação à posição dos astros; a física e a química, no que remete à óptica e aos materiais do instrumento, bem como com a própria história, no que concerne ao contexto sociocultural da construção do instrumento.

Conforme Saito e Dias (2013), ao explorarmos a formação do conceito, a partir do movimento lógico-histórico, leva-se o estudante a compreender que os conhecimentos matemáticos não constituem verdades absolutas que surgiram em um determinado período da história, reveladas por um determinado personagem matemático ou filósofo, como sugerem alguns estudos pautados na lógica formal. O movimento lógico-histórico da formação do conceito, baseado na lógica materialista dialética, contribui para a compreensão do estudante, no sentido da construção dos conhecimentos matemáticos, com base nas atividades humanas desenvolvidas ao longo do processo histórico.

3.2 A proposta da atividade didática

Seguindo a proposta da interface entre a história e o ensino da matemática, a partir dos aspectos do contexto histórico no qual o instrumento de medida, quadrante geométrico, foi desenvolvido, e o movimento do pensamento na formação dos conceitos matemáticos sintetizados no instrumento, atinentes ao seu processo histórico, elaboramos uma atividade didática inspirada no tratado *Del modo di misurare*, de Cosimo Bartoli. Partimos dos estudos realizados por Saito e Dias (2013,2011) sobre o documento, atinente aos excertos que tratam do instrumento de medida, o quadrante geométrico. Os autores extraíram excertos da obra, os quais foram traduzidos do toscano do século XVI para a língua portuguesa.

A organização da atividade didática baseou-se na atividade orientadora de ensino desenvolvida por Moura (2016). Essa atividade pauta-se na

constituição do processo de humanização, cuja origem epistemológica está no materialismo histórico-dialético. Na perspectiva dos pressupostos teóricos que fundamentam a atividade orientadora de ensino, o homem só se humaniza, quando se apropria do processo do movimento histórico da humanidade, ou seja, da cultura produzida historicamente.

De acordo com Moura (2016), pensar no processo de humanização do indivíduo, com fundamento na Teoria Histórico-Cultural, implica em organizar as atividades pedagógicas, pela intencionalidade. As necessidades dos sujeitos envolvidos no processo de ensino e aprendizagem, por sua vez, favorecem a socialização como fonte primária e fundamental do desenvolvimento humano, estimulando no indivíduo a apropriação do processo do movimento histórico da humanidade.

A atividade orientadora de ensino, como recurso teórico metodológico, coloca uma situação-problema nomeada situação desencadeadora de aprendizagem, como fundamental para a organização do ensino. Moura (2016) exemplifica que a situação desencadeadora de aprendizagem, a qual aborda os conceitos fundamentais de um determinado conteúdo, pode ser colocada no ambiente de ensino na forma, por exemplo do que denomina por história virtual do conceito, situação emergente do cotidiano ou mesmo por um jogo.

O autor destaca as histórias virtuais como uma narrativa que coloca o estudante diante de uma situação-problema semelhante à vivida pelo homem, proporcionando a necessidade de apropriar-se dos conceitos sintetizados na problematização dessa história, de maneira que suas ações e seu pensamento se mobilizem na busca de possíveis soluções para o problema apresentado.

Moura (2016) define,

O jogo com propósito pedagógico pode ser um importante aliado no ensino, já que preserva o caráter de problema. [...] O que devemos considerar é a possibilidade do jogo colocar a criança diante de uma situação-problema semelhante à vivenciada pelo homem ao lidar com conceitos matemáticos.

[...]

A problematização de situações emergentes do cotidiano possibilita à prática educativa oportunidade de colocar a criança diante da necessidade de vivenciar a solução de problemas significativos para ela. (MOURA; LANNER, 1998 apud MOURA, 2016, p. 121).

A partir da situação desencadeadora de aprendizagem, os cálculos, os registros e o movimento do pensamento tornam-se uma necessidade real para o estudante, de sorte que essa mobilização represente sua atividade de aprendizagem e, conseqüentemente, sua apropriação de conhecimentos.

Neste trabalho consideramos a AOE e definimos utilizar o excerto que versa sobre a construção e o uso do instrumento de medida quadrante geométrico, referente ao tratado *Del modo di misurare*. Organizamos nossa situação desencadeadora de aprendizagem em uma atividade de construção e emprego do instrumento de medida quadrante geométrico, a partir da leitura, interpretação, análise e discussão do tratado, como situação-problema.

A organização das ações da AOE objetivaram oferecer aos estudantes a oportunidade de reconstruir as necessidades e também as aptidões humanas necessárias para a elaboração e uso do instrumento de medida, quadrante geométrico.

De acordo com os pressupostos da Teoria Histórico-Cultural, a AOE permite a organização das atividades de ensino e aprendizagem que propiciam ao indivíduo a transmissão e a assimilação da cultura humana produzida ao longo da história. Para Moura (2016), esse processo de herança da cultura humana torna o homem humano, promovendo-o da condição primária de homem. Na visão do autor, “[..] todo homem nasce candidato a ser humano, mas somente se constituirá humano ao se apropriar da cultura produzida pelos homens.” (MOURA, 2016, p. 30).

Seguindo a proposta de Saito e Dias (2013), organizamos a atividade didática amparada na situação desencadeadora de aprendizagem, em três etapas inter-relacionadas: 1) Tratamento Didático do documento; 2) Intencionalidade e plano de ação; 3) Desenvolvimento da atividade didática. Trataremos de forma mais abrangente desses itens, nos tópicos seguintes.

3.2.1 O tratamento didático do documento

O tratamento didático do documento consiste em uma análise criteriosa do texto do documento, a qual depende principalmente do objetivo e do público-alvo. O objetivo desse tratamento é possibilitar aos estudantes que mobilizem o

pensamento matemático articulado com o presente no documento permitindo, assim, construir uma nova etapa de desenvolvimento dos conceitos matemáticos estudados ou apreender novos.

Esse olhar didático para o documento torna-se essencial dentro dessa proposta didático-pedagógica, tendo em vista que uma simples leitura do documento poderia tornar o objeto matemático, em estudo, simplesmente irreconhecível. A linguagem, as definições, as notações, os métodos de demonstração, bem como os algoritmos que constam nos documentos, são muitas vezes irreconhecíveis no contexto de aprendizagem do estudante. Seria como arrancar o objeto matemático do contexto no qual está inserido, em uma determinada época, para encaixá-lo em um contexto matemático que se aplica ao cenário do estudante (SAITO; DIAS, 2013).

Essa proposta didático-pedagógica que explora as potencialidades didáticas dos documentos históricos, com base no movimento do contexto histórico do conceito, não pretende buscar na matemática do passado uma forma diferenciada de ensinar a matemática dos dias atuais. O objetivo é explorar as contribuições que a história da matemática pode dar ao ensino da matemática, pela construção dos significados dos objetos matemáticos, a partir de seu desenvolvimento no processo histórico. Ou seja, por meio da construção de um diálogo entre história e ensino, disponibilizar ao estudante a construção de significados dos objetos matemáticos em seu processo de apropriação de conhecimento (SAITO; DIAS, 2013).

Partimos dos estudos realizados por Saito e Dias (2013, 2011) sobre o documento, tendo em vista dois excertos extraídos do documento que tratam do quadrante geométrico. Os excertos tiveram uma tradução livre, do toscano do século XVI para a língua portuguesa, concernentes à construção e à utilização do instrumento de medida. Pelo fato de a tradução dos excertos extraídos da obra pelos autores não terem sido publicados, ou seja, por se tratar de um documento não oficial, optamos por identificar neste texto, por “tradução livre”, todos os trechos que remetem aos excertos traduzidos do tratado.

O tratado *Del modo de misurare*, de Cosimo de Bartoli, nos dois excertos adotados nesta pesquisa, trazem termos e expressões relacionadas aos saberes

matemáticos do período em que foi escrito, século XVI. Alguns desses termos e expressões não fazem parte da linguagem cotidiana dos estudantes.

O tratamento didático dado ao documento, seguindo a proposta de Saito e Dias (2013,2011), foi realizado com o mínimo de intervenções, justamente para que o leitor tenha condições de refletir sobre formas de disseminação da matemática de um período histórico, de um lugar, de uma sociedade, as quais demonstram o caráter histórico da produção do conhecimento humano.

Consideramos que o tratamento já feito pelos autores era acessível ao nosso público-alvo, estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental de uma unidade escolar da rede particular de ensino de uma cidade do Estado de São Paulo, além de ser coerente com o tempo disponibilizado para o desenvolvimento da atividade. Usamos os dois excertos referentes à construção e à utilização do instrumento e selecionamos duas imagens, conforme constam na obra original, as quais ilustram tanto o processo de construção do quadrante geométrico como o uso do instrumento em um processo de medição. As imagens contribuem para a compreensão das partes do instrumento e para os procedimentos necessários para seu uso.

Mantivemos as sugestões de Saito e Dias (2011), adotando nota de rodapé com a explicação de termos ou expressões que não são mais comuns, nos dias de hoje, especialmente aqueles concernentes à linguagem matemática (definição de braça), facilitando, assim, a compreensão do documento pelos estudantes.

3.2.2 Intencionalidade e plano de ação

O plano de ação estruturado na atividade didática foi organizado conforme os princípios metodológicos desta pesquisa, isto é, a produção de uma interface entre a história e o ensino da matemática, por meio do contexto histórico do instrumento de medida, o quadrante geométrico, e o movimento do pensamento para a formação dos conceitos sintetizados no instrumento. Foram preparados três encontros, os quais aconteceram em dois dias, sendo realizados nos períodos matutino e vespertino, divididos em momentos. Essa subdivisão deu-se a partir da necessidade de organizar minuciosamente os encontros, de modo

a direcionar a sequência do desenvolvimento das ações. Os primeiros momentos de cada encontro abordaram leituras, reflexões e discussões, enquanto os segundos momentos, a parte das produções escritas, construção e utilização do quadrante.

A proposta do 1º Encontro é mobilizar a compreensão das necessidades humanas de uma época que culminaram na elaboração e uso do instrumento, bem como dos conhecimentos articulados e produzidos para a construção e utilização do quadrante.

Apresentaremos no Quadro 1 o objetivo e a intencionalidade deste Encontro, bem como uma síntese da organização das ações, com amparo nos elementos da AOE.

QUADRO 1 – ORGANIZAÇÃO DA ATIVIDADE DIDÁTICA: 1º ENCONTRO

<i>Mobilização do contexto histórico do instrumento de medida, o quadrante geométrico</i>				
MO MEN TO	OBJETIVO DA PESQUISA	INTENCIONALIDADE E PLANO DE AÇÃO	AÇÃO DIDÁTICA	PRODUÇÃO DE DADOS
1º	Produzir o diálogo em uma interface entre história e ensino de matemática, com base no aspecto do contexto histórico no qual o instrumento de medida, o quadrante geométrico, foi desenvolvido, de modo a analisar o movimento de conceitos.	Propiciar no estudante uma articulação entre as necessidades humanas produzidas a partir do contexto social, econômico e político, entre os séculos XVI e XVII, e a produção de conhecimentos. Apresentar uma sequência de slides contendo imagens, textos e questões reflexivas que remetem ao contexto social, político e econômico do período histórico no qual o instrumento de medida está inserido. Apresentar um trecho sobre um vídeo referente as grandes navegações, com a intencionalidade de implementar os elementos do	Apresentação dos slides interativos para reflexão e discussão sobre o período histórico no qual o instrumento de medida, o quadrante geométrico, foi desenvolvido, entre os séculos XVI e XVII, que envolvem os três temas. Apresentação de um trecho sobre um vídeo referente as grandes navegações, para complementar a discussão sobre o período histórico no qual o instrumento de medida, o quadrante geométrico, foi desenvolvido Organização de grupos para leitura, reflexão e discussão com base nas questões norteadoras	Captação de áudio e imagem de vídeo, de discussões produzidas pelos grupos, e das intervenções da professora acerca da contextualização histórica de cada tema estudado, por meio das questões norteadoras.

		movimento lógico-histórico do instrumento. Os elementos baseados no capítulo 4, referente ao movimento lógico-histórico do instrumento foram trazidos em função de três temas: - As grandes navegações; - A passagem do Feudalismo para o Capitalismo; - As mudanças nas práticas militares. Organização dos estudantes em grupos, para as reflexões, discussões e registros.		
2º			Produção de texto a partir das questões norteadoras sobre os excertos e as imagens que foram analisadas, refletidas e discutidas. Roda de conversa para socializar os textos produzidos pelos grupos.	Captação de áudio e imagem de vídeo das discussões produzidas pelos grupos e da socialização das produções entre os mesmos, bem como dos registros escritos pelos estudantes.

Fonte: Elaborado pela autora.

Os *slides* foram preparados enquanto ação do primeiro momento desse encontro, para propiciar aos estudantes a produção de um diálogo entre o movimento da organização do contexto social, político e econômico de um período, entre os séculos XVI e XVII, em uma determinada região, no caso específico, a Europa, com as demandas de conhecimento que se desenvolveram, a fim de suprir as necessidades que surgiam por meio desse movimento. Chamaremos de slides interativos por que haviam imagens, textos, perguntas reflexivas e uma narração que ocorreu, ao longo da apresentação, de sorte a conectar esses três elementos. Salientamos que essa forma também foi pensada para articular com o produto desta pesquisa.

Foram elaborados três textos com trechos e imagens que remetiam a cada tema, assim como questões norteadoras. Destacamos, como anexo, uma parte dos textos referentes a cada um dos três temas propostos.

As questões norteadoras para o tema das grandes navegações foram as seguintes:

- Por que o homem se aventurou, naquele momento da história (séc. XVI e XVII), no mar, em busca de territórios desconhecidos? Do que precisavam, naquele momento, para se arriscar dessa maneira? Essas necessidades eram importantes? Por quê?
- A sociedade conseguiria continuar vivendo da forma como já estava organizada social e economicamente?
- As estruturas de seus transportes marítimos eram adequadas para tamanha aventura? Será que, em algum momento, precisaram melhorar essas embarcações e as ferramentas que permitiam concluir as grandes viagens além-mar?

Elaboramos uma questão norteadora geral para o tema atinente à passagem do Feudalismo para o Capitalismo:

- Baseado no complexo movimento social, político e econômico que marcou a transição do feudalismo para o capitalismo, faça uma relação com a produção e disseminação do conhecimento matemático quanto à sua utilização e aplicação de ordem prática.

As questões norteadoras formuladas para o tema concernente às mudanças nas práticas militares foram:

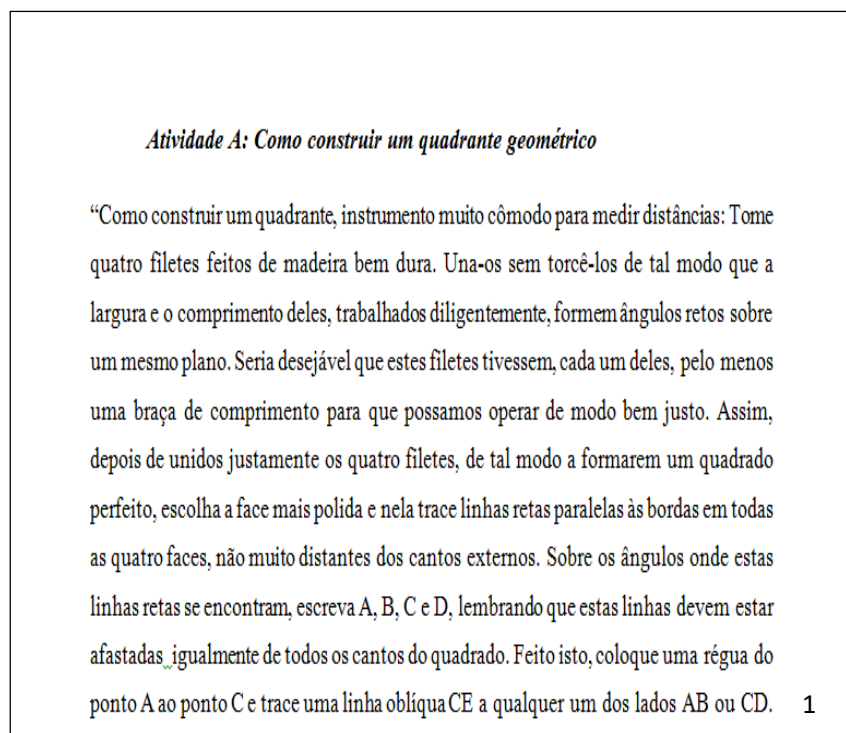
- Quais necessidades levaram às diversas mudanças na organização dos exércitos e nos aparatos de guerra? De que modo esses avanços dos exércitos e de seus equipamentos têm relação com o desenvolvimento e a disseminação do conhecimento matemático, com respeito ao seu uso de ordem prática?
- A necessidade de melhorar o desempenho do canhão, no que tange à relação entre seus ângulos de elevação e o seu alcance, mobilizou

estudos sobre aspectos práticos da matemática, especificamente da geometria?

Os temas retirados do capítulo quatro, referente ao movimento lógico-histórico do instrumento de medida, o quadrante geométrico, juntamente com as questões norteadoras, foram organizados no sentido de indicar, para o movimento do conceito dos estudantes, a compreensão das necessidades humanas que levaram à articulação, desenvolvimento e disseminação de conhecimentos de uma época, que permitiram a elaboração e o uso de instrumentos de medida.

A proposta do 2º Encontro é construir um protótipo do instrumento, o quadrante geométrico, por meio da leitura e de um tratamento didático do documento original, referente ao excerto e à imagem que remetem à construção do quadrante geométrico. Segue abaixo um trecho desse excerto e a imagem do instrumento com suas respectivas partes.

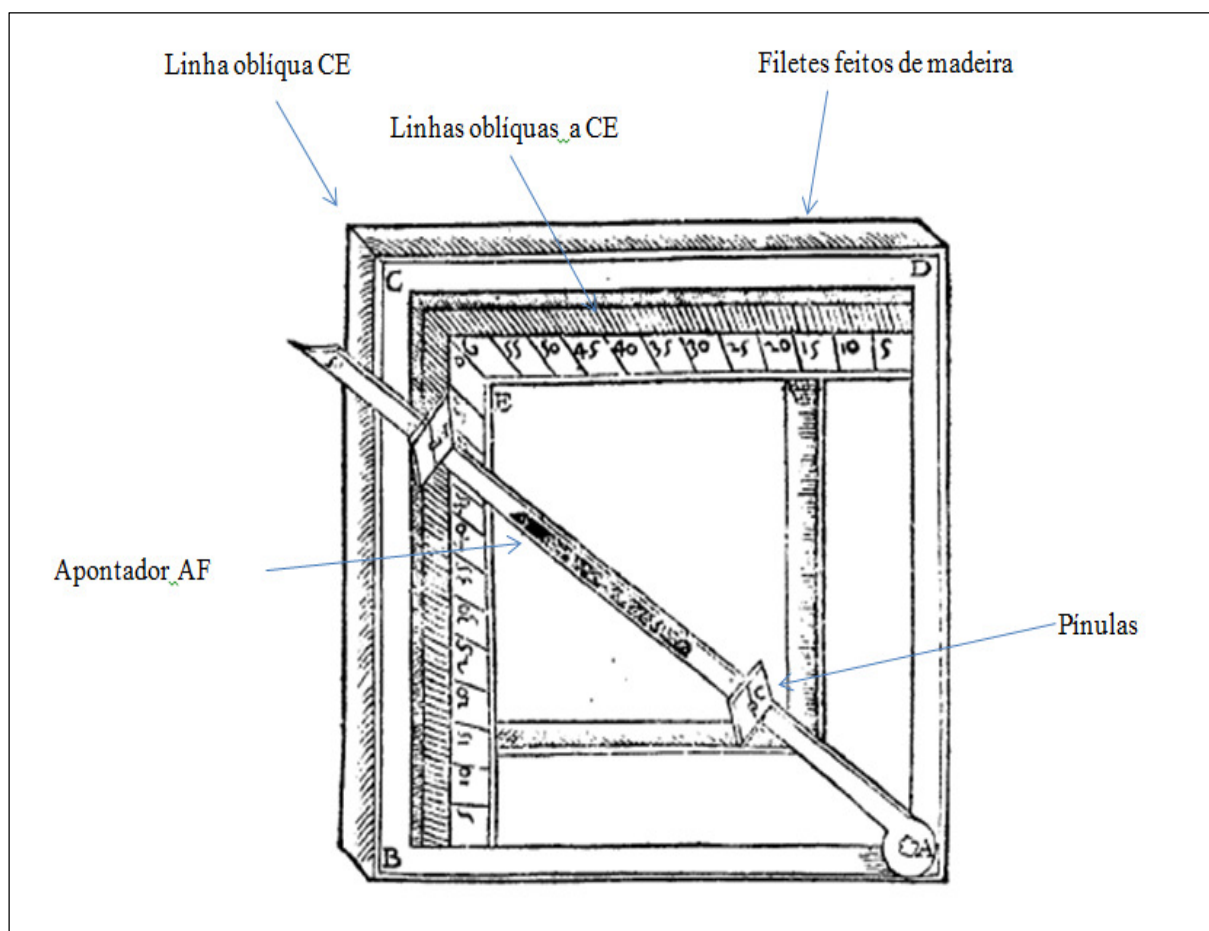
Figura 1 – Parte do excerto do *Del modo di misurare* que remete a construção do instrumento



Fonte: BARTOLI apud SAITO; DIAS, 2011, p. 14,15

¹ Tradução livre de integrantes do grupo HEEMa

Figura 2 – Imagem do Quadrante Geométrico com suas partes



Fonte: Elaborado pela autora

Expomos, no Quadro 2, o objetivo e a intencionalidade deste Encontro, bem como uma síntese da organização das ações, com amparo nos elementos da AOE.

QUADRO 2 – ORGANIZAÇÃO DA ATIVIDADE DIDÁTICA: 2º ENCONTRO

<i>Construção de um protótipo do instrumento de medida, o quadrante geométrico</i>				
MO MEN TO	OBJETIVO DA PESQUISA	INTENCIONALIDADE E PLANO DE AÇÃO	AÇÃO DIDÁTICA	PRODUÇÃO DE DADOS
	Produzir o diálogo em uma interface entre história e ensino de	Promover no estudante uma articulação entre os conhecimentos já	Apresentação dos slides interativos para reflexão e discussão sobre os	Captação de áudio e imagem de vídeo das discussões

1º	matemática, a partir do aspecto do movimento do conceito, de modo a propiciar a articulação e a formação dos conhecimentos matemáticos que estão sintetizados na construção do instrumento de medida, o quadrante geométrico.	desenvolvidos e os conceitos matemáticos sintetizados no processo de construção do protótipo do quadrante, de sorte a possibilitar o desenvolvimento do pensamento teórico. Apresentar uma sequência de slides contendo imagens e textos abordando aspectos da construção do instrumento, por meio do contexto histórico do quadrante geométrico, entre os séculos XVI e XVII. Organização dos estudantes em grupos, para as reflexões, discussões e registros referente ao excerto que trata da construção do instrumento, após um tratamento didático. Discutir em roda de conversa as dificuldades de compreensão do texto.	aspectos da construção do instrumento, por meio do contexto histórico do quadrante geométrico, entre os séculos XVI e XVII. Organização de grupos para leitura, reflexão e discussão do excerto que trata da construção do instrumento e da imagem que remete às partes do quadrante.	produzidas pelos estudantes, e das intervenções da professora acerca da construção do protótipo do quadrante.
2º		Organização dos grupos para realização das ações necessárias para a construção do protótipo do quadrante.	Produzir registro escrito das reflexões do grupo, de como proceder para construir o protótipo do instrumento, com base nas ações destacadas, interpretadas, analisadas e discutidas no excerto. Desenvolvimento das ações para a construção do protótipo do instrumento.	Captação de áudio, imagem de vídeo, bem como dos registros escritos pelos estudantes, referentes às discussões e reflexões, bem como das ações desenvolvidas pelos grupos para a construção do protótipo do instrumento.

Fonte: Elaborado pela autora.

Segundo os princípios metodológicos desta pesquisa, a compreensão do objeto se dá pelo seu processo lógico-histórico, ou seja, no momento em que o indivíduo organiza, em seu pensamento, a reconstrução e a elaboração do processo histórico do conceito.

Para tanto, elaboramos e estruturamos as ações didáticas dos dois momentos desse encontro, de modo a propiciar uma contextualização histórica do documento original, referente ao excerto que trata da construção do instrumento, articulando e mobilizando, em cada ação, os conceitos matemáticos que precisaram ser desenvolvidos para a construção do protótipo do quadrante geométrico.

A proposta do 3º Encontro é utilizar o quadrante geométrico, a partir da leitura e de um tratamento didático do documento original, relativo ao excerto e à imagem que remetem a seu uso. Foi proposta a elaboração de uma situação-problema que previsse uma medição, por meio do uso do instrumento e das indicações do tratado.

Segue abaixo um trecho desse excerto que remete a sua utilização.

Figura 3 – Parte do excerto do *Del modo di misurare* que remete a utilização do instrumento

Como utilizar o instrumento Quadrante Geométrico – “A medição”

“Como, encontrando-se em um lugar no alto, medir uma linha reta que está numa superfície plana: Se, encontrando-se em cima de alguma torre ou em uma janela de qualquer edificio, que está numa grande praça ou em campo aberto, desejar medir uma linha reta colocada no mesmo plano sobre o qual está a parede do edificio, ou de uma torre que se eleva em ângulo reto com ela, procederemos deste modo: Digamos que a altura da torre seja BE; e a linha estendida EF, ou EH, ou mesmo EK (...) Acomode o lado AB do quadrante geométrico ao longo de seu comprimento de modo que AB e BE fiquem sobre uma única linha, AE, perpendicular a EHK. Em seguida, com olho no ponto A, levante ou abaixe o apontador até que a mirada atinja a extremidade da linha estendida. Feito isto, confira o ponto no qual o apontador cairá. É certo que o apontador cairá, ou no ponto C (...), ou no lado BC, ou no lado CD (...) Quando o apontador cai no ponto C, a linha estendida EF que se quer medir é igual à altura da torre EB. E para saber a altura da torre basta estender de cima para baixo um fio de prumo e, depois, medir o fio (...). Mas se o apontador cair no lado BC, por exemplo, no ponto G, e a linha estendida que se quer medir for EH, é coisa certíssima que esta linha EH estendida é mais curta do que aquela AE obtida com fio de prumo. Também é certo que AE estará

2

Fonte: BARTOLI apud SAITO; DIAS, 2011, p. 17

Trazemos a imagem que remete ao uso do quadrante, conforme a Figura 5.

Apresentamos, no Quadro 3, o objetivo e a intencionalidade deste Encontro, bem como uma síntese da organização das ações, com amparo nos elementos da AOE.

² Tradução livre de integrantes do grupo HEEMa

QUADRO 3 – ORGANIZAÇÃO DA ATIVIDADE DIDÁTICA: 3º ENCONTRO

<i>Utilização do instrumento de medida, o quadrante geométrico, por meio de uma situação-problema de medição</i>				
MO MEN TO	OBJETIVO DA PESQUISA	INTENCIONALIDADE E PLANO DE AÇÃO	AÇÃO DIDÁTICA	PRODUÇÃO DE DADOS
1º	Produzir o diálogo em uma interface entre história e ensino de matemática, a partir do aspecto do movimento do conceito, de modo a propiciar a articulação e a construção dos objetos matemáticos que estão sintetizados na utilização do instrumento de medida, o quadrante geométrico.	Promover no estudante uma articulação entre os conhecimentos já internalizados e os conceitos matemáticos sintetizados no processo de uso do quadrante geométrico, Apresentar uma sequência de slides contendo imagens e textos abordando aspectos da utilização do instrumento, por meio do contexto histórico do quadrante geométrico, entre os séculos XVI e XVII. Organização dos estudantes em grupos, para as reflexões, discussões e registros referente ao excerto que trata da utilização do instrumento, após um tratamento didático.	Apresentação dos slides interativos para reflexão e discussão sobre os aspectos da utilização do instrumento, por meio do contexto histórico do quadrante geométrico, entre os séculos XVI e XVII. Organização de grupos para leitura, reflexão e discussão do excerto, bem como da imagem que remete ao seu uso.	Captação de áudio e imagem de vídeo de discussões produzidas pelos estudantes, e das intervenções da professora acerca da utilização do quadrante.
2º		Organização dos grupos para realização das ações necessárias para medição com uso do quadrante.	Registro das reflexões do grupo, de como deveriam proceder para utilizar o instrumento, a partir das ações destacadas, interpretadas, analisadas e discutidas no excerto. Elaboração de uma situação-problema envolvendo medição. Desenvolvimento das ações necessárias para solucionar a situação-	Captação de áudio, imagem de vídeo, bem como dos registros escritos pelos estudantes, atinentes às discussões e reflexões, bem como das ações desenvolvidas pelos grupos para o emprego do instrumento.

			problema elaborada, usando o quadrante geométrico.	
--	--	--	--	--

Fonte: Elaborado pela autora.

Disponibilizaram-se diferentes materiais, como um protótipo do quadrante geométrico, barbante e giz, incluindo o excerto traduzido do tratado *Del modo di misurare*, o qual remete ao uso do instrumento, e a respectiva imagem que indica sua utilização, necessários para o desenvolvimento das ações didáticas desse encontro.

As ações desse encontro foram organizadas de maneira a promover um diálogo do conhecimento do estudante com o contexto histórico do documento original, e a produção humana nele sintetizada

As ações atinentes aos três encontros foram desenvolvidas em um ambiente de sala de aula, adaptada para um laboratório de Ciências. Essa sala possui estrutura para até vinte e quatro estudantes, é devidamente equipada com bancadas, quatro mesas em formato hexagonal, cada uma com seis cadeiras. É climatizada, bem iluminada e possui equipamentos de projeção. Para a elaboração e a resolução da situação-problema proposta como ação do segundo momento do terceiro encontro, os grupos utilizaram outros espaços da escola além dessa sala de aula, como os pátios e a quadra poliesportiva.

Os sujeitos envolvidos são constituídos pela professora e um grupo de 20 estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental de uma unidade escolar da rede particular de ensino de uma cidade do Estado de São Paulo. Os sujeitos apresentaram o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (Apêndices A e B) assinados por eles e pelos seus responsáveis, autorizando-os a participar da pesquisa.

Adotamos como procedimento de coleta de dados, para esta investigação, produções teóricas e metodológicas que compõem a organização

das atividades da pesquisa. Para registrar os episódios produzidos pelos estudantes, a fim de se ter em mãos o máximo de informações sobre cada etapa de apropriação do conceito, pelos estudantes, recorreremos à gravação dos três encontros por áudio e vídeo. Acumulamos aproximadamente quase 3 horas de gravações de áudio e por volta de 6 horas de registros de vídeo, captando o movimento das atividades executadas pelos estudantes, no espaço da sala de aula, nos pátios, na quadra poliesportiva e também na particularidade dos grupos. Usamos também, como recurso de coleta de dados, os registros manuscritos produzidos pelos grupos, no transcorrer das ações da atividade em forma textual, estratégias de cálculos, algoritmos e desenhos.

A estrutura e a organização da atividade didática serviram de base para a elaboração de episódios que possibilitaram a compreensão dos fenômenos analisados em cada um dos momentos dos encontros.

Construímos os episódios como procedimento para revelar o movimento dos conceitos dos estudantes, com base na realização das ações da atividade didática. Segundo Moura (2016),

Por meio dos episódios, temos não apenas a organização dos dados, mas, sobretudo, um modo de exposição que recompõe o fenômeno na sua totalidade, em uma nova síntese, explicitando o movimento lógico-histórico da pesquisa [...]. (MOURA, 2017, p. 68).

Os episódios evidenciam, por meio da fala, dos gestos e das expressões, como o sujeito está elaborando seu pensamento e como as manifestações escritas podem igualmente desvendar aspectos particulares do processo de compreensão dos conceitos estudados:

Em termos de estrutura, os episódios podem organizar-se por meio de cenas que buscam revelar as múltiplas determinações, as relações essenciais que possibilitam compreender o fenômeno para além da aparência, do imediato. (MOURA, 2017, p. 68).

Os episódios serão organizados a partir dos dados coletados por meio das transcrições dos áudios, vídeos e das produções dos estudantes, como texto opinativo, estratégias de cálculos, rascunhos e desenhos. Os episódios serão analisados no sentido de verificar se houve um diálogo com os princípios metodológicos desta pesquisa, se ocorreu o movimento dos conceitos dos

estudantes, ao articular e mobilizar os conceitos matemáticos que estavam sintetizados no processo de construção e uso do quadrante geométrico.

O momento da apreensão da realidade permitirá ao pesquisador explicitar a tensão entre o que já se tem produzido e as novas determinações sobre o que está sendo investigado. Nessa dialética que se produzirá o conhecimento novo, na relação de superação, por incorporação, entre o conhecimento produzido e o que está sendo elaborado. (MOURA, 2017, p. 65).

Esse processo de análise, em função dos episódios, permite compreender como os estudantes foram mobilizando, articulando e desenvolvendo os conceitos, ao longo das ações da atividade didática, de modo a produzir saltos qualitativos no processo de aprendizagem, demonstrando o movimento para a formação do novo conhecimento.

A estrutura da atividade didática foi pensada de sorte a possibilitar a formatação de um vídeo paradidático, com a proposta de orientar a organização da atividade de ensino do professor, enquanto produto educacional, como requisito do Programa de Pós-Graduação em Docência pra Educação Básica da Faculdade de Ciências da UNESP de Bauru, caracterizando, assim, o Mestrado Profissional. Os três encontros foram registrados por filmagem e áudio para a formatação e a edição do vídeo paradidático.

4 MOVIMENTO LÓGICO-HISTÓRICO: O HOMEM E O INSTRUMENTO DE MEDIDA – QUADRANTE GEOMÉTRICO

Neste capítulo, discorreremos sobre o contexto histórico em que foi publicado o tratado *Del modo di misurare*, de Cosimo Bartoli, que aborda a construção e a utilização do instrumento de medida chamado quadrante geométrico.

A abordagem do contexto histórico do período em que foi publicado o instrumento, século XVI e XVII, remete à organização metodológica desta pesquisa, a partir da produção de uma interface entre a história e o ensino da matemática, sob o aspecto do contexto histórico no qual os conceitos matemáticos foram desenvolvidos. De acordo com Saito e Dias (2013), essa abordagem metodológica de produção de uma interface entre a história e o ensino da matemática, em função da vertente do contexto histórico na formação dos conceitos, é capaz de estimular a compreensão das necessidades humanas que promoveram o processo de desenvolvimento da construção do conhecimento matemático.

Buscamos, neste estudo, elementos históricos referentes ao período entre os séculos XVI e XVII, úteis para contribuir na compreensão das necessidades humanas em vista do contexto social, político e econômico que levou à construção e ao uso do instrumento de medida quadrante geométrico. Tais elementos do contexto histórico do instrumento recuperam o processo histórico das necessidades humanas pelas quais esses conceitos foram se constituindo, ao longo das relações humanas.

Para dissertar a respeito desse contexto do instrumento de medida quadrante geométrico, bem como de seu respectivo tratado, *Del modo di misurare*, de Cosimo Bartoli, utilizamos as contribuições de Brito (2011), Eves (2011), Huberman (1979), Pinto (2010), Saito (2012, 2014) e Saito e Dias (2011, 2013, 2014).

O estudo do movimento do pensamento na formação de conceitos atrelado ao instrumento quadrante geométrico, pautado na abordagem da interface da história e do ensino da matemática, apoiou-se no movimento lógico-

histórico do materialismo histórico e dialético de Kopnin (1972, 1978) e pesquisas e produções científicas amparadas em seus estudos, como as de Saito e Dias (2013) e Sousa (2004).

Os pressupostos do materialismo dialético têm por objetivo o ser, a partir de sua relação com a consciência. O materialismo dialético relaciona de maneira intrínseca a atitude do pensamento do ser com sua matéria, de modo a fazer interagir essas duas categorias, o ser e a sua essência, por uma relação dialética, na construção e desenvolvimento das formas de conhecimento humano. A atitude do pensamento frente ao ser constitui a premissa do materialismo dialético.

Ocorre justamente que a teoria dialético-materialista não se difunde como algo criado antecipadamente para o ser e o conhecimento, mas ela mesma é teoria do ser e do conhecimento, sendo que sua peculiaridade reside justamente que ela cria leis e categorias que são simultaneamente formas tanto do ser como do conhecimento. (KOPNIN, 1972, p.166).

O indivíduo não se relaciona com o objeto por si só, apenas para satisfazer uma necessidade enquanto matéria: ele necessita apropriar-se da essência do objeto, como meio de satisfação de determinadas necessidades sociais, as quais apenas se tornam possíveis em razão de sua atitude de pensamento, devido à sua condição de ser social. Essa relação dialética do ser e suas formas, segundo o autor, constitui a base do materialismo dialético, a partir da atividade transformadora do homem, enquanto desenvolvimento do pensamento para a concretização de suas necessidades sociais (KOPNIN, 1972).

O materialismo dialético, fundamentado na filosofia marxista, algumas vezes se divide em duas partes independentes – o materialismo dialético e o materialismo histórico. No entanto, conforme Kopnin (1972), não há, na realidade, materialismo dialético sem materialismo histórico. É necessário que o indivíduo conheça as leis do desenvolvimento da sociedade, para conseguir construir uma concepção dialética do desenvolvimento. O ser se desenvolve a partir da concepção materialista da história.

A compreensão das leis do desenvolvimento da sociedade, através do movimento histórico-dialético, embasado na perspectiva marxista, é

indispensável para a argumentação e a formação da consciência como propriedade da matéria e produto do desenvolvimento social:

À base da sintetização de toda a experiência do conhecimento e da prática, o materialismo dialético estabelece as leis universais do desenvolvimento, mas neste caso, o conhecimento das leis do desenvolvimento social adquire importância especial, porque a sociedade é a forma mais elevada e madura de desenvolvimento e o conhecimento do superior é momento crucial para a compreensão do inferior. Neste caso, o conhecimento das leis da sociedade é premissa *sine qua non* do descobrimento das leis universais do desenvolvimento, atuantes tanto na natureza quanto na sociedade. (KOPNIN, 1972, p. 172-173, grifo do autor).

O estudo da história do desenvolvimento do objeto possibilita a compreensão de sua essência, de modo que o mesmo possa ser apropriado pelo indivíduo. Essa dialética aponta a inter-relação do lógico e do histórico, indicando que nosso conhecimento se aprofunda na essência do objeto a partir da compreensão de seu desenvolvimento histórico.

O histórico, a partir das premissas do materialismo dialético, compreende o objeto por meio de sua história, em relação as ações humanas que se mobilizaram, de maneira a atender às necessidades humanas específicas que propiciaram o processo de constituição do objeto. Na perspectiva histórica, o objeto deve ser compreendido em seu processo de mudança, para ser refletido no pensamento e constituir o conteúdo do pensamento, ou seja, a sua essência.

O lógico remete ao pensamento – como o objeto é formado, reconstruído e elaborado no processo histórico. O lógico, conforme os pressupostos do materialismo dialético, reflete o conteúdo, a essência do objeto, bem como a história de seu desenvolvimento, no processo de pensamento do indivíduo.

O movimento lógico do histórico refere-se à lógica dialética, a qual está voltada à compreensão do objeto no pensamento e suas formas de expressão:

Por histórico subentende-se o processo de mudança do objeto, as etapas de seu surgimento e desenvolvimento. O histórico atua como objeto do pensamento, o reflexo do histórico, como conteúdo. O pensamento visa à reprodução do processo histórico real em toda a sua objetividade, complexidade e contrariedade. O lógico é o meio através do qual o pensamento realiza essa tarefa, mas é o reflexo do histórico em forma teórica, vale dizer, é a reprodução da essência do objeto e da história do seu desenvolvimento no sistema de abstrações.

O histórico é primário em relação ao lógico, a lógica reflete os principais períodos da história. (KOPNIN, 1978, p. 184).

Esta pesquisa, amparada no movimento lógico-histórico, enfatiza o desenvolvimento de conceitos, por meio de um contexto social que gera necessidades e, por sua vez, produz uma demanda por conhecimentos. De acordo com a historiografia atualizada, esse vetor refere-se aos aspectos externos e internos ao próprio desenvolvimento do conceito. Não abordamos, neste trabalho, o movimento interno ao desenvolvimento do conceito, que, segundo a nova historiografia, vem de dentro do conhecimento e vai para a sociedade.

Campos (2006, p. 41), explicita a partir de um novo olhar dos pesquisadores, sobre os dois tipos de influência culturais, que moldariam o desenvolvimento da matemática:

[...] Wilder descreve os dois tipos de influências culturais, que, segundo ele, moldariam no desenvolvimento da matemática. O primeiro tipo de influência seria dado pelas interações sociais entre os elementos de um grupo, que criariam demandas e construiriam respostas a problemas matemáticos levantados no interior do próprio grupo. O segundo tipo de influência, está ligada à herança cultural transmitida pelos elementos do grupo. Esta herança cultural seria usada na tentativa de solucionar os problemas matemáticos específicos de cada cultura.

Assim, analisamos, neste capítulo, os elementos do contexto histórico de uma sociedade, em um determinado período, os quais demandaram a produção de conhecimentos até chegar à elaboração ou ao aprimoramento de instrumentos de medida. Não enfocamos as demandas por conhecimentos que surgiram a partir dos novos instrumentos e das próprias oficinas que os fabricavam, ou seja, quais conhecimentos foram mobilizados, em razão dessas construções e aprimoramentos, que foram oferecidos à sociedade. Examinamos apenas o movimento do conceito que vai de fora para dentro, sem nos atermos ao movimento que vai de dentro para fora, ou seja, que retorna para a sociedade. Os elementos do movimento lógico-históricos construídos aqui visam propor um diálogo entre história e ensino inseridos em uma atividade didática.

4.1 O contexto histórico do instrumento: as necessidades humanas como base do processo de construção do conhecimento matemático

Buscamos, neste estudo histórico entre os séculos XVI e XVII, elementos do processo de significação capazes de contribuir na compreensão das necessidades humanas que serviram de base para o processo de construção de conceitos matemáticos sintetizados no instrumento quadrante geométrico. Tais elementos, procedentes do contexto histórico do instrumento, remetem às necessidades humanas, pelas quais o homem foi mobilizando seu conhecimento e os conceitos foram se articulando e se constituindo, ao longo das relações humanas.

Para tanto, direcionamos nossa pesquisa aos conhecimentos que versavam sobre a construção e a utilização de instrumentos de medidas, denominados instrumentos matemáticos, por alguns autores.

No período observado entre os séculos XVI e XVII, novos instrumentos passaram a ser concebidos, em virtude de novas demandas, a partir das necessidades da sociedade, nesse período da história. Faremos uma síntese do contexto social, político e econômico em função do qual se movimentaram as demandas por esses novos instrumentos de medida, ou instrumentos matemáticos.

Nesse transcorrer dos acontecimentos voltados aos saberes matemáticos entre os séculos XVI e XVII, de acordo com Brito (2011), a matemática foi assumindo cada vez mais importância, tanto com relação ao seu uso quanto em uma organização linear do raciocínio. A matemática conquista espaço nas aplicações de situações de trabalho e vai se tornando o modelo do conhecimento verdadeiro e rigoroso.

Em finais do século XVI e início do XVII, a meta era organizar o pensamento, de sorte a ir do simples ao complexo, e a matemática passou a ser ordenada em um formato linear, fornecendo o modo de organização do discurso científico e do próprio raciocínio. Brito (2011) destaca, baseado em uma citação do livro *Regras para a Direção do Espírito*, de René Descartes (1596-1650), a

ordenação linear dos saberes matemáticos na busca de um conhecimento verdadeiro. Eis a citação traduzida de Descartes:

[...] claro relacionar com a Matemática tudo aquilo em que apenas se examina a ordem e medida, sem ter em conta se é em números, figuras, sons, ou em qualquer outro objeto que semelhante medida se deve procurar. Isso resulta que deve haver uma ciência geral que explique tudo o que se pode investigar acerca da ordem e da medida, sem as aplicar a uma matéria especial: esta ciência designa-se, não pelo vocábulo suposto, mas pelo vocábulo já antigo e aceito pelo uso de Matemática universal, porque esta contém tudo o que contribui para que as outras ciências se chamem parte da Matemática. (DESCARTES apud BRITO, 2011, p. 345)

Brito (2011) sublinha o uso da matemática não apenas como forma de organização do pensamento científico, mas sua aplicação a partir de situações de ordem prática. Os setores que mais utilizaram os conhecimentos de aplicações práticas da matemática foram a navegação, a mineração, a agrimensura e o comércio:

A matemática voltada para aplicações práticas existe desde a Antiguidade, apesar de os ramos práticos da matemática antiga, como a geodésia e a logística, não serem considerados artes liberais e não constarem como partes da matemática nos tratados da alta Idade Média (BRITO, 1999). Assim, a divisão entre matemática teórica e prática nem fazia sentido naquele contexto. A partir do século XII, houve uma redistribuição discursiva acerca do que seria a matemática e, já na Idade Moderna, a matemática estava dividida em pura – aritmética, geometria e trigonometria –, e mista – ótica, geografia, arquitetura de fortificações, mecânica etc. (BRITO, 2011, p. 347).

No séculos XVII, as buscas por novos territórios além-mar, que permitiriam o acesso a novas fontes de matérias-primas e de novos mercados para os produtos manufaturados, fizeram dos artífices personagens essenciais na produção do capital e na busca incessante pelo aumento da riqueza dos países europeus. De acordo com Brito (2011), esses artífices representavam a burguesia ascendente, a qual valorizava o trabalho e, por conseguinte, a prática, em oposição ao conhecimento contemplativo com que a vida da nobreza primava, até então. Sobre isso, Burke (2003 apud BRITO, 2011, p. 348) ressalta:

O matemático inglês John Wallis, por exemplo, lembra em sua autobiografia que no início do século XVII, seu objeto não era em geral considerado como “acadêmico, mas mecânico”, associado a “mercadores, homens do mar, carpinteiros e construtores”. O pressuposto da superioridade do conhecimento liberal em relação ao útil é um claro exemplo das consequências intelectuais da dominação do Antigo Regime pelo que Veblen chamava de “classe ociosa”. Contudo, essa superioridade foi solapada ao longo do período.

A nobreza europeia também teve sua participação na demanda pela busca de novos territórios, porém, no sentido oposto dos artífices. O consumo de especiarias e tecidos finos asiáticos aumentava de tal forma, que os vizinhos mulçumanos não conseguiram suprir a crescente demanda. Como consequência, esses mercadores europeus partiram à procura de outros fornecedores desses bens de consumo. Entretanto, a partir de apontamentos de Eves (2011), esse comércio de bens de consumo com os mulçumanos e com os gregos bizantinos impulsionou o fascínio dos europeus pelos produtos do oriente e, na mesma intensidade, pelo seu saber e sua cultura:

A aristocracia desses lugares se fascinou não só com os produtos do oriente, mas também, igualmente, com seu saber e sua cultura. Os árabes e os gregos bizantino haviam preservado cuidadosamente grande parte da arte e da ciência dos tempos clássicos da Grécia e de Roma e agora transmitiam seus conhecimentos aos mercadores italianos. (EVES, 2011, p. 288).

As aventuras dos europeus pelo desbravamento de novas terras além-mar, cada vez mais distantes, tiveram um papel fundamental nesse cenário de crescentes demandas no desenvolvimento das práticas de navegação. O problema dos navegadores era como chegar ao local de destino e como retornar ao ponto de partida, situação que levou os cosmógrafos a pensarem em processos que facilitassem a precisão entre a longitude e a latitude de um local:

As observações deviam ser feitas junto ao mastro maior do navio que, por se encontrar no eixo de gravidade, era o local menos afetado pelo balanço. Mas, mesmo assim, em geral, as observações eram pouco precisas, mais pelas condições de instabilidade a bordo do que por defeitos dos instrumentos. (PINTO, 2010, p. 12).

Pinto (2010) salienta que essas dificuldades, aliadas à necessidade de tornar mais precisa a rota das naus, levaram os cosmógrafos e pilotos a readaptarem para o mar alguns instrumentos que já eram conhecidos, desde séculos anteriores, bem como a construir novos instrumentos. Entre esses instrumentos, a autora cita: Anel Náutico, Armila Náutica, Astrolábio, Balestilha, Instrumento de Sombras, Kama ou Tavoletas da Índia, Quadrante Náutico e Semicírculo Graduado.

Alguns desses instrumentos foram modificados e adaptados para diferentes necessidades, enquanto outros novos foram fabricados, de sorte que também esses já são adaptações e modificações de outros. A aplicação desses

instrumentos de medida foi ampla, não se limitando somente ao contexto náutico, mas aplicando-se igualmente a outras áreas, como a astronomia, a arquitetura, a agrimensura, a cartografia, a artilharia e a geografia. Huberman aponta a importância do astrolábio para que os marinheiros não precisassem mais seguir suas longas e desconhecidas rotas pelas proximidades da costa:

Mas podiam tentar atingir as Índias por outra rota não controlada por Veneza. Agora que a bússola, a princípio usada pelos marinheiros italianos, no século XII, fora montada na rosa-dos-ventos; agora que se tornara possível determinar a latitude pelo uso do astrolábio; agora que os marujos italianos haviam começado a traçar cartas baseadas em observações locais, em vez de contar apenas com as feitas de imaginação ou fundamentadas em boatos; agora finalmente não era mais necessário seguir nas proximidades da costa. Talvez se os homens fossem bastante ousados, poder-se-ia encontrar um novo caminho para o Oriente, o guardião do tesouro em especiarias, ouro e pedras preciosas. (HUBERMAN, 1979, p. 97).

A ênfase do conhecimento matemático, por suas aplicações de ordem prática, remete às mudanças sociais progressivas que foram desencadeadas pela longa passagem do sistema feudal para o capitalismo.

Entre essas mudanças, Brito (2011) destaca a Reforma Protestante, a qual, segundo a autora, teve também um papel fundamental para reforçar a ascensão da burguesia e o desenvolvimento do capitalismo, tendo em vista a ética que o trabalho desempenhava, naquele período. O trabalho era uma dívida divina que tinha um papel primordial:

A coisa mais importante é que, acima de tudo, o trabalho veio a ser considerado em si, como a própria finalidade da vida ordenada por Deus. Nas palavras de S. Paulo, “quem não trabalha não deve comer” valem incondicionalmente para todos. A falta de vontade de trabalhar é sintoma da falta de graça. (WEBER apud BRITO, 2011, p. 348).

O papel do trabalho como meio essencial de sobrevivência para o homem, promoveu uma alteração da utilidade do conhecimento, das artes mecânicas, do comércio e da indústria, que segundo Brito (2011), deu ao sistema de educação burguesa a característica de aumentar a transmissão do conhecimento útil voltado às aplicações, opondo-se a forma de conhecimento da classe ociosa, a nobreza. Esse período da história, entre os séculos XVI e XVII, mobilizou o conhecimento matemático de tal modo a propiciar a esse saber, mais espaço no terreno da educação.

O sucesso das aplicações matemáticas nas explicações físicas, da época, nas navegações, nas transações comerciais etc.; o pressuposto que a matemática seria o método de resolução de qualquer problema; a adoção da ideia pitagórica de que o mundo teria sido criado a partir de um princípio geométrico; a adoção do humanismo e, portanto, a leitura de obras clássicas gregas da Antiguidade que ressaltavam a matemática como o verdadeiro conhecimento, trouxeram à baila a importância da matemática e tal campo do saber foi ganhando terreno no solo da educação. (BRITO, 2011, p. 349).

O movimento do contexto social, político e econômico indica novas demandas, as quais propiciaram a mobilização dos conhecimentos matemáticos, a fim de desenvolver meios para atender às necessidades da humanidade, a partir das novas demandas. Considerando um período mais abrangente, entre os séculos XII e XVIII, podemos apontar algumas necessidades, no movimento do contexto social, político e econômico: a construção de fortificações, as questões militares e a organização bélica, em diferentes regiões da Europa; a descoberta e o mapeamento de novas terras na América e na Ásia, assim como o aumento dos valores das terras locais, que precisavam ser precisamente divididas para o cultivo da agricultura, da pecuária e para a organização dos novos centros comerciais, também chamadas de cidades; as transações comerciais e as operações bancárias, que, por sua vez, exigiam um maior controle das finanças, por parte da burguesia ascendente; e, por fim, o desenvolvimento das pequenas indústrias. Na sequência, Huberman sintetiza com propriedade esse movimento do contexto social, político e econômico, movido pelas demandas produzidas pelo homem, as quais marcam a passagem entre dois modos de organização de uma sociedade:

Uma das modificações mais importantes foi a nova posição do camponês. Enquanto a sociedade feudal permanecia estática, com relação entre senhor e servo fixada pela tradição, foi praticamente impossível ao camponês melhorar sua condição. Estava preso a uma camisa-de-força econômica. Mas o crescimento do comércio, a introdução de uma economia monetária, o crescimento das cidades, proporcionaram-lhe os meios de romper os laços que o prendiam tão fortemente. Quando surgem cidades nas quais os habitantes se ocupam total ou principalmente do comércio e da indústria, passam a ter necessidade de obter do campo o suprimento de alimentos. Surge, portanto, uma divisão do trabalho entre cidade e campo. Uma se concentra na produção industrial e no comércio, o outro na produção agrícola para abastecer o crescente mercado representado pelos que deixaram de produzir o alimento que consomem. (HUBERMAN, 1979, p. 51).

Também Saito e Dias (2011) ressaltam elementos do processo histórico, notadamente no século XVI, que levaram ao reconhecimento da matemática na

prática social e destacam o interesse no saber “[...] essencial não só para resolver problemas de ordem prática, mas também para investigar os vários aspectos da natureza.” (SAITO, 2008; BENNETT, 1998, apud SAITO; DIAS, 2011, p. 11).

Os autores evidenciam o aumento pela procura por instruções matemáticas, especificamente pela geometria e pela astronomia, tendo em vista que, nesse período, a matemática pertencia a uma área complexa de conhecimentos que incluíam vários domínios. Essa demanda crescente por instruções matemáticas, de acordo com os autores, refere-se ao desenvolvimento de novas técnicas para a navegação, agrimensura, horografia, cartografia, artilharia e fortificação.

As mudanças nas práticas militares, como, por exemplo, estudos sobre a relação entre os ângulos de elevação de canhões e o seu alcance, também mobilizaram estudos sobre aspectos práticos da geometria, chamando a atenção dos príncipes e governantes naquela época (DEBUS, 1996; TAYLOR, 1954; BENNETT, 1998 apud SAITO; DIAS, 2011).

A demanda por instruções matemáticas, especificamente pela geometria e pela astronomia, deram origem a novos instrumentos, os quais eram usados por marinheiros, astrônomos, filósofos naturais, astrônomos, ópticos e médicos, além de pintores, arquitetos, cartógrafos e agrimensores. Muitos desses profissionais elaboravam seu próprio instrumento, a partir de seus conhecimentos de Geometria e Aritmética prática, demonstrando o domínio que possuíam entre a associação dos segmentos teóricos e operacionais da matemática.

Entre os instrumentos produzidos por esses profissionais, destacamos o astrolábio, a esfera armilar, o quadrante e a réguas de cálculos, todos fabricados com o objetivo de facilitar a resolução de problemas matemáticos, observacionais e experimentais (WARNER, 1994; KUHN, 1989; BENNETT, 1986; VAN HELDEN, 1983; TURNER, 1998; HACKMANN, 1989; DAUMAS, 1972 apud SAITO, 2012).

Desse conjunto, realçam-se aqueles que eram denominados “matemáticos”, desenvolvidos para medir quantidades. De acordo com a concepção de Aristóteles, quantidade abrangia alturas, distâncias e ângulos. A utilidade desses instrumentos matemáticos era diversificada, indo desde

propiciar o mapeamento e a delimitação de terras até ensinar uma maior exatidão na localização no mar:

Assim, cartógrafos, cosmógrafos, geógrafos, agrimensores, navegadores, astrônomos, entre muitos outros artesãos e praticantes de matemáticas, dedicaram-se ao estudo da geometria e a fabricação de novos instrumentos matemáticos. É nesse contexto que vemos florescer muitas oficinas dedicadas à fabricação de instrumentos matemáticos e filosóficos em várias regiões da Europa, notadamente, Louvain, Nuremberg, Florença, Londres entre outras. (CONNER apud SAITO; DIAS, 2011, p. 11).

Conforme Saito e Dias (2013), esses instrumentos matemáticos eram fabricados por praticantes de matemática que se autodenominavam professores, no sentido de que professavam a arte matemática, porém, não possuíam uma formação universitária.

De modo geral, os praticantes de matemática que desenvolviam esses instrumentos de medida pertenciam a alguma corporação de ofício ou trabalhavam em alguma oficina dedicada a fabricar esses instrumentos. Eram, na maioria das vezes, patrocinados por príncipes, comerciantes ou banqueiros, os quais ditavam a atual demanda do contexto social, político e econômico da época.

Esses praticantes de matemática, ao criar seu instrumento de medida, publicavam tratados que versavam sobre a construção e uso do objeto (BENNETT, 1998; BIAGIOLI, 1989; CIOCCI, 2009, TAYLOR, 1954 apud SAITO; DIAS, 2013). A maior parte desses tratados foi compilada a partir de notas de aulas, sendo estruturados de maneira diferente de um manual prático do tipo “faça você mesmo”. Os aspectos teóricos e práticos presentes nesses tratados eram complementares.

Brito (2011) ainda comenta sobre textos matemáticos que eram publicados com o objetivo de promover aplicações de ordem prática, tanto no território da ciência, da educação, quanto em áreas de atividades diversificadas:

No século XVII, segundo Boyer (1991) e Struik (1989), é notável a quantidade de textos matemáticos que visavam a alguma aplicação, por exemplo, Luca Valério (1604) e Paul Guldin (1641) produziram textos acerca do problema de centros de gravidade colocado pelo desenvolvimento da indústria de mineração, Kepler (1615) se voltou a problemas de acondicionamento de materiais e ocupou-se do cálculo de volumes. O livro *Geografia Geral* (1650), de Varenius, expressa essa ideia do ensino voltado às aplicações, já que seu texto começa abordando conceitos geométricos e de astronomia, passa por

maneiras de se construir globos terrestres e mapas e desemboca em conceitos utilizados na navegação. (BRITO, 2011, p. 347).

Esses tratados, textos ou documentos articulam os aspectos do saber e do fazer de seus respectivos instrumentos, indicando que os mesmos eram destinados a um público que tinha o conhecimento da matemática sintetizada no instrumento e da prática de seu uso. Segundo Saito (2012), para compreender e utilizar esses textos, o público precisava dominar alguns conceitos matemáticos que nele estavam implícitos, como, por exemplo, dividir ângulos e segmentos, traçar mediatrizes e bissetrizes, ou mesmo as propriedades de diferentes figuras geométricas que devem ser conhecidas, para se construir e empregar os instrumentos.

Procurando compreender o contexto histórico no qual os conceitos matemáticos foram desenvolvidos e o movimento do pensamento, na formação desses conceitos matemáticos, no processo de significação, entre os séculos XVI e XVII, observamos um movimento das necessidades humanas desse período que serviram de base para o processo de mobilização e desenvolvimento de conhecimentos matemáticos, especificamente geométricos e aritméticos, os quais favoreceram a construção e a utilização desses instrumentos de medida. Não se trata de uma lista de acontecimentos históricos organizados de forma cronológica, que determinaram a elaboração dos instrumentos de medidas e, por sua vez, os conceitos matemáticos neles sintetizados. Entretanto, verificamos, através de nossos estudos, um movimento das necessidades humanas a partir do contexto social, político e econômico que deram origem a esses instrumentos “matemáticos” e à forma de disseminação desse conhecimento.

Este estudo compõe elementos de constituição dos materiais para organização da atividade didática. Os slides apresentados aos estudantes e as questões norteadoras do 1º Encontro foram baseados nesse movimento de acontecimentos históricos. Embasaram também, o conhecimento da professora para mediar a atividade de ensino-aprendizagem.

4.2 O tratado *Del modo di misurare* e o quadrante geométrico

O documento *Del modo di misurare*, de Cosimo Bartoli (1503-1572), publicado no século XVI, foi escolhido para o desenvolvimento desta pesquisa, tendo em vista a abordagem metodológica de produção de uma interface entre a história e o ensino da matemática com base em documentos antigos.

Para conhecer a obra e seus aspectos utilizamos a síntese de Saito e Dias (2011), que apresenta o contexto histórico no qual o instrumento de medida, quadrante geométrico, foi desenvolvido.

A obra foi dividida, por Bartoli (1564), em seis livros, cada um deles dedicado, direta ou indiretamente, aos modos de medir: distâncias (largura, comprimento, altura e profundidade); superfícies; corpos (regulares e irregulares), isto é, volumes. Além disso, fornece instruções de como mapear uma província de 400 ou 500 milhas de comprimento e largura “de tal modo a poder desenhá-la sobre um plano com sua capital, terras, castelo, portos, rios, e outras coisas notáveis.” (BARTOLI apud SAITO; DIAS, 2011, p. 13).

Como indicado na metodologia, considerando o contexto histórico do instrumento quadrante geométrico, abordamos, neste item, dois excertos do tratado que versam sobre sua construção e utilização.

Os responsáveis pela fabricação do instrumento de medida, na maioria das vezes, compilavam um tratado para descrever a construção e o uso do instrumento. Esses tratados eram publicados por praticantes de matemática, estudiosos da natureza e de matemática, estudiosos de astronomia, cartógrafos, cosmógrafos e geógrafos. Entre os vários tratados publicados nesse período, um se destacou e teve ampla repercussão, o do estudioso de matemática Cosimo Bartoli (1503-1572) - *Del modo di misurare le distantie, le superfície, i corpi, le piante, le province, le prospettive & tutte le altre cose terrene, che possono occorrere agli homini, Secondo le vere regole d'Euclide, & de gli altri piu lodati scrittori*. O autor publicou esse tratado na Itália, em 1564.

Figura 4 - Frontispício de *Del modo di misurare*



Fonte: Del modo di misurare le distantie, le superficie, i corpi, le piante, le prouincie, le prospettive, e tutte le altre cose terrene, che possono occorrere a gli uomini, secondo le uere regole d'Euclide, e de gli altri più lodati scrittori/Cosimo Bartoli... - In Venetia: per Francesco Franceschi (Sanese, 1564)

Conforme Saito e Dias (2011), a obra de Bartoli foi dedicada a Cosimo de Médice (1519-1574) e, assim como outros tratados, é notória a articulação entre a construção e a utilização dos instrumentos nele descritos nele. A obra de Bartoli também foi direcionada a um público que detinha o conhecimento da geometria incorporada no instrumento e também de seu emprego. Isso fica evidente no documento, quando, ao indicar as ações para a construção do instrumento, não fornece informação sobre os procedimentos que deveriam ser

adotados. Apenas solicita ao leitor que divida um segmento em partes iguais, trace linhas paralelas e proporcionais, entre outros.

Saito e Dias (2011, p. 13-14) trazem detalhes dessa obra, que foi dividida pelo autor em seis livros, os quais tratam direta ou indiretamente de como medir distâncias (largura, comprimento e profundidade), superfícies e volumes:

O primeiro livro trata, “seguindo a sequência proposta por Orôncio”, da medida da distância, isto é, comprimento, largura e profundidade. O segundo livro trata da medida da superfície e, o terceiro, dos corpos, isto é, do volume. O quarto livro, “seguindo, agora, a ordem dada por Gemma Frisio e outros autores”, Bartoli explica e ensina como mapear uma província sobre um plano.

A esses quatro livros seguem dois outros, um quinto, dedicado às demonstrações geométricas de Euclides e, um sexto, que ensina a obter raízes quadradas e cúbicas. No quinto livro, Bartoli procura fornecer não só as questões, os conceitos e as proposições, apresentadas nos livros anteriores como demonstrações, mas também as proposições das quais derivavam aquelas demonstrações. Aqui Bartoli esclarece que decidiu acrescentar as demonstrações constantes em *Elementos* de Euclides por duas razões. Primeira por sugestão de Francesco de Medici e, segunda, por comodidade, ou seja, para deixar o leitor satisfeito e poupá-lo de se reportar ao livro de Euclides (Bartoli, 1546, p. 1v). Mas cabe observar que os *Elementos* de Euclides não são aqui apresentados na íntegra. Bartoli apenas selecionou aqueles axiomas, postulados, definições e proposições que estariam diretamente ligados à medida da distância, área e volume.

No sexto livro, Bartoli apresenta regras para obter raízes quadradas e cúbicas. O autor observa que lhe pareceu interessante juntar este livro porque, em muitos casos pareceram necessárias encontrar as raízes quadradas e cúbicas, ou ainda obter algumas medidas tratadas nos primeiros três primeiros livros (Bartoli, 1546, p. 2r). Por último, ainda neste sexto livro, Bartoli fornece a regra de três.

Esses tratados eram publicados com o objetivo de articular o saber e o fazer de seus respectivos instrumentos e destinados a um determinado público que detinha conhecimento sobre conceitos que estavam sintetizados nos mesmos. Um dos livros da obra de Bartoli ensina como mapear uma província sobre um plano e um outro livro, dedica às demonstrações geométricas de Euclides. Portanto, o indivíduo para utilizar e compreender esses livros, precisava mobilizar conhecimentos matemáticos já internalizados. Esses textos promoviam a articulação entre o saber e a aplicação de ordem prática dos conhecimentos.

No livro I, capítulo 2 e 3, da obra de Bartoli, *Del modo di misurare*, ele trata respectivamente, da construção e da utilização do quadrante geométrico, sob os

títulos, “*Como fi faccia un quadrante infrumento commodissimo per mifurare le diftanzie*” (Como construir um quadrante, instrumento muito cômodo para medir distâncias) e, “*Come fi mifurino le diftantie a piano di linee diritte com il quadrante geométrico*” (Como, encontrando-se em um lugar alto, medir uma linha reta colocada no plano, com o quadrante geométrico).

O excerto do capítulo 2, referente a construção do quadrante, indica as ações que precisam ser realizadas, para a construção do instrumento, sem explicitar as informações de como executar os procedimentos necessários para concretizar tais ações:

Seria desejável que estes filetes tivessem, cada um deles, pelo menos uma braça de comprimento para que possamos operar de modo bem justo. Assim, depois de unidos justamente os quatro filetes, de tal modo a formarem um quadrado perfeito [...] (BARTOLI apud SAITO; DIAS, 2011, p. 14-15).

O sujeito que constrói o quadrante precisa interpretar, articular, cada uma das ações indicadas pelo texto de modo a mobilizar seus conhecimentos matemáticos, na busca pelo movimento dos conceitos, que estão sintetizados no processo de construção do instrumento.

Agora, trace três linhas paralelas que se encontrarão com a já traçada oblíqua CE e que, juntamente com BC e CD, formam três intervalos de tal maneira proporcionais entre si, que um seja sempre por sua vez o dobro mais largo do que o outro. Depois, divida cada um destes lados de acordo com seu comprimento em doze partes iguais.[...] (BARTOLI apud SAITO; DIAS, 2011, p. 15).

Nesse trecho do excerto, constatamos cinco ações de construção que para serem desenvolvidas precisam ser interpretadas pelo significado do próprio conceito do objeto matemático. O sujeito precisa mobilizar seus conhecimentos geométricos sobre retas paralelas, reta oblíqua, divisão de segmentos em partes iguais além de dobro, e proporcionalidade. Em nenhuma parte do texto, o autor indica como realizar tais ações, explicitando que seus interlocutores não são leigos, que sabem executar tais ações e conhecem os termos.

Encontramos, no tratado, expressões e termos que não são usuais nos livros didáticos como, uma *braça* (unidade de medida utilizada na época), o *tanto de comprimento* (mesma medida), bem como não são encontrados no cotidiano dos estudantes, como: *apontador* (parte do instrumento sob o qual serão fixadas as pínulas), *pínula* (peça laminar com um furo no meio afixada no apontador, que tem a função de mirada, ou seja, de realizar o alinhamento), *fio de prumo*

(instrumento de medida sem graduação), entre outros. Esses termos adotados no tratado correspondem a uma característica mais prática e usual do conhecimento matemático da época.

No seu comprimento fixe duas pínulas³, G e H, com furos no meio e que correspondem, juntamente com o apontador, à oblíqua AC, como mostra o desenho. Finalmente, este apontador deve estar cravado em A de modo que ele possa mover-se livremente de lado a lado sobre a face do instrumento. Além disso, a linha AF deve coincidir com as pínulas G e H [...] (BARTOLI apud SAITO; DIAS, 2011, p. 16).

Esses aspectos causam estranhamento aos estudantes que estão acostumados com materiais didáticos mais direcionados e detalhados que explicitam palavras-termo, conforme Dias; Saito (2013). Moraes (2017), ao analisar os dados de sua pesquisa, também aponta o estranhamento dos estudantes em relação aos termos e conceitos matemáticos presentes no texto. É a partir desse movimento de articulação e compreensão do texto, que o próprio documento mobiliza o estudante a utilizar seus conhecimentos para se apropriar dos conceitos.

O segundo excerto trata da utilização do instrumento, exemplificando um processo de medição.

Notamos que o público que iria usar esse instrumento precisava ter o conhecimento matemático que está incorporado a ele, como as relações métricas nos triângulos retângulos ABC e AEF (Figura 6), as relações de semelhança desses triângulos, a relação com a aritmética: razão e proporção referentes às medidas.

Além dos conhecimentos incorporados no instrumento, era necessário conhecer seu manuseio, um saber fazer, pois, tendo em vista que as informações de como realizar as ações de medida não eram explicitadas no documento, tornava-se difícil a realização do procedimento de medir. Esse fato é indício de que os interlocutores dominam o ofício do uso do instrumento:

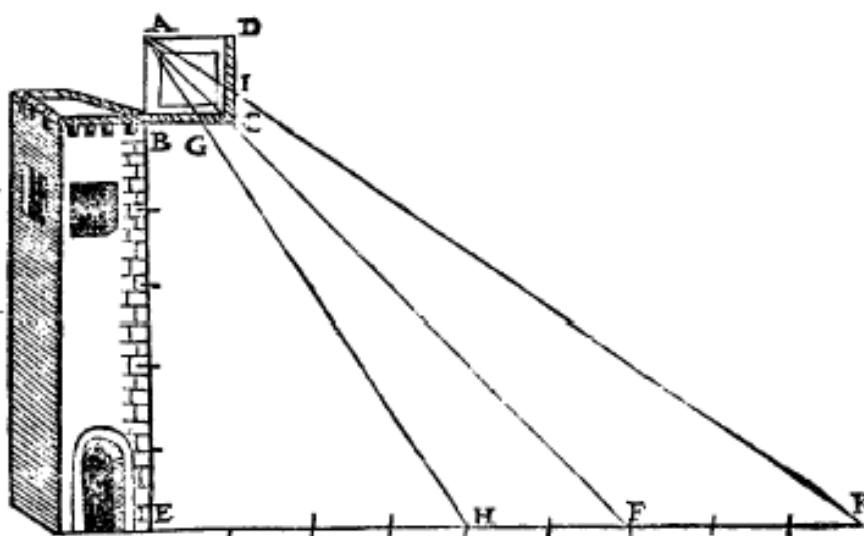
³ Uma pínula é uma peça laminar, com uma fenda ou furo no meio, que serve para fazer alinhamento. O observador deve olhar através de uma pínula de tal modo que a “mirada” pelas duas pínulas coincida. Quando isto ocorrer, o observador terá o correto alinhamento para obter-se a medida (nota do tradutor).

Também é certo que AE estará em proporção com EH que é o lado do quadrante AB na parte interceptada BG. É preciso, portanto, conhecer as divisões dos lados do quadrante que são 60. Vamos dizer que BG seja 40. Sabemos que todo o lado AB é igual a BC que é 60. Verificamos que 60 corresponde a 40 [...]. Em seguida, meça com o fio de prumo a altura da torre AE e calcule a terça parte do comprimento AE, e em seguida calcula-se EH. [...] (BARTOLI apud SAITO; DIAS, 2011, p. 17).

O sujeito que emprega o instrumento precisa traçar em sua mente, em face do espaço real, os triângulos semelhantes ao triângulo retângulo ABC (Figura 6), de acordo com a distância desejada (pontos H, F ou K). Para que essa construção mental fosse possível, era necessário o domínio das relações geométricas inscritas no instrumento.

As questões terminológicas do tratado evidenciam a potencialidade didática do documento, ao mobilizar relações diferenciadas do usual no pensamento do estudante e propiciar o movimento da construção de seu conhecimento matemático. “Essas questões terminológicas podem dar oportunidade ao professor de discutir, e mesmo considerar como esclarecimentos necessários, o movimento da constituição da própria linguagem matemática.” (SAITO; DIAS, 2014, p. 1242).

Figura 5 – Ilustração de como usar o quadrante geométrico



Fonte: Del modo di misurare le distantie, le superficie, i corpi, le piante, le prouincie, le prospettive, e tutte le altre cose terrene, che possono occorrere a gli uomini, secondo le uere regole d'Euclide, e de gli altri più lodati scrittori / Cosimo Bartoli... - In Venetia: per Francesco Franceschi (Sanese, 1564).

Estes dois excertos, bem como as imagens constantes nas figuras 5 e 6, compõe parte dos materiais utilizados na organização da atividade didática, de modo a ampar a proposta metodológica desta pesquisa, explicitando, assim, a opção por mobilizar a articulação dos conhecimentos dos estudantes, a partir da reflexão sobre o significado dos conceitos matemáticos implícitos no instrumento, tanto no processo de sua construção como no processo de sua utilização, por meio de seu tratado.

A atividade didática foi encaminhada para um projeto do instrumento em papel cartão, com a utilização de instrumentos não graduados, como réguas e esquadros para sua construção. Para a proposta de medição estavam disponíveis os espaços da escola, como uma sala de aula, os pátios e a quadra poliesportiva.

5 MOVIMENTO DO PENSAMENTO NA FORMAÇÃO DO CONCEITO: A DIALÉTICA DO PENSAMENTO EMPÍRICO E DO PENSAMENTO TEÓRICO

O estudo do movimento do pensamento na formação do conceito, a partir do contexto histórico do instrumento de medida quadrante geométrico, apoiou-se na perspectiva lógico-histórica fundamentada nos pressupostos do materialismo histórico e dialético. Consideramos a perspectiva lógico-histórica uma contribuição para a apropriação dos conhecimentos matemáticos, nos processos de ensino-aprendizagem..

Embasados nessa perspectiva, buscamos contemplar na atividade didática com o instrumento de medida do século XVI e de seu respectivo tratado, a construção de relações entre as necessidades e as aptidões humanas que foram necessárias para a constituição e o desenvolvimento dos conhecimentos matemáticos, os quais estão sintetizados no instrumento. Abordamos a mobilização dos conceitos articulados, tanto no processo de construção quanto de utilização do quadrante.

De acordo com Kopnin, Lênin, em função das heranças filosóficas de Marx e Engels, concebe “[...] a dialética materialista como ciência ‘das leis gerais do movimento tanto do mundo exterior como do pensamento humano’ [...]” (KOPNIN, 1978, p. 47).

Com base em seus fundamentos, a lógica materialista dialética se apresenta como a lógica do movimento que relaciona sujeito e objeto, à medida que se consubstanciam, no processo histórico. Ser e objeto coexistem, enquanto se articulam, durante o processo de desenvolvimento histórico da humanidade. O sujeito e a realidade exterior não se desmembram, eles interagem dialeticamente, à proporção que o pensamento constitui a própria realidade do ser.

Demais, subentende-se por dialética subjetiva não só o movimento do pensamento mas também a atividade histórica do homem em seu conjunto, incluindo o processo de pensamento. O sujeito é irredutível à simples consciência, logo, sua dialética não se limita à atividade do pensamento humano. (KOPNIN, 1978, p. 51).

A lógica dialética vai além da compreensão do processo do pensamento, assume também as explicações acerca dos complexos movimentos da natureza e da sociedade. Para Kopnin (1972, 1978), no materialismo lógico dialético, o ser promove, a partir de sua atitude do pensamento, um movimento intenso e dialético de mudanças em sua natureza e nas suas condições de relações com a sociedade.

O movimento da natureza concede ao pensamento a compreensão do desconhecido e torna o conhecimento primário em completo e preciso. Assim, amparada nesse pressuposto, a compreensão do objeto pelo pensamento se dá por meio da apreensão do seu desenvolvimento no processo histórico. O sujeito se apropria da coisa, à medida que mobiliza e articula seu processo de construção, quando supera a limitação de sua existência e incorpora seu conhecimento.

Uma atividade didática pautada nesse sentido, busca aproximar o estudante da sua herança sócio-histórica, que, segundo Saito e Dias (2013), possibilita ao indivíduo reconstruir o significado, tendo em vista o contexto sociocultural do instrumento e o desenvolvimento dos conhecimentos matemáticos sintetizados em sua construção e utilização. A articulação entre a necessidade do homem e a construção do instrumento permite ao estudante apreender a essência desses conceitos matemáticos, ensejando um movimento de seu pensamento, de modo a estabelecer um novo significado para eles.

5.1 O pensamento empírico

No que tange a apropriação de conhecimento, baseamo-nos em Davydov (1978), principalmente nos conceitos de pensamento empírico e teórico, no que tange o desenvolvimento mental do sujeito, a partir de seu processo de aprendizagem, por meio da educação.

Segundo o autor, esses dois tipos de pensamento são níveis do movimento do pensamento que diferenciam a concepção que o indivíduo possui do objeto. A forma do pensamento empírico caracteriza-se pelas observações sensoriais do objeto, já a do pensamento teórico relaciona-se com suas leis de

movimento, com sua transformação, com suas conexões internas, com sua essência.

Para Davydov (1978), o processo de abstração e de generalização dos conhecimentos, os quais deverão contribuir na formação do conceito teórico do objeto, inicia-se na fase da primeira infância, a partir da lógica formal, de acordo com a idade da criança e sua capacidade de generalização. A abstração do objeto se dá pela compreensão de sua essência, sem a necessidade de um corpo material concreto, de suas manifestações imediatas. A generalização, por sua vez, consiste em aplicar o conceito, com fundamento em sua abstração, em diversas situações correspondentes a fenômenos equivalentes.

Nessa etapa inicial, a concepção do objeto ocorre pela percepção direta, pela representação mental, pela lembrança que o indivíduo possui do objeto, com base em todos os meios e experiências do cotidiano. As imagens e as percepções do objeto são essenciais para a primeira etapa da generalização do conceito. Essa primeira etapa é responsável pela construção e fortalecimento da base de conhecimento da criança.

Essa continuidade tão natural da generalização, característica da idade pré-escolar e primária, está relacionada com as condições básicas e formativas dessa generalização e de seu conteúdo, que são os mesmos, em princípio [...] (DAVYDOV, 1978, p. 36, tradução nossa).⁴

A lógica do cotidiano permite ao homem conhecer e apropriar-se dos diversos atributos do objeto, como qualidades, ações, estados, bem como de suas diferenças, como espaço, tempo e causa.

Esse processo lógico de comparação e diferenciação do objeto, dentro de uma classe de objetos correspondentes, favorece, segundo as concepções do autor, a formação do pensamento empírico. Com efeito, para o pensamento empírico, o significado do objeto está baseado em seus atributos gerais, basicamente na sensação e percepção, sem a relação com suas particularidades.

⁴Em espanhol, lê-se: *“Esa continuidad tan natural de la generalización, característica de las edades preescolares y escolar primaria, está relacionada con que las condiciones básicas y formativas de dicha generalización y de su contenido son aquí y allí unas y las mismas en principio [...]”* (DAVYDOV, 1978, p. 36).

Davydov (1978, p. 101, tradução nossa) expressa que, “[...] os conceitos empíricos, que por sua forma e conteúdo coincidem com as noções habituais de cada dia no mundo circundante [...]”

Uma das formas de síntese do pensamento empírico, é o que o autor nomeia de palavras-denominações, que classificam as formas gerais de representação que o indivíduo possui do objeto, como por exemplo, “isto é um animal”, “isto é uma casa”.

Orientados pelos pressupostos apresentados por Davydov (1978), entendemos que o pensamento empírico contribui no movimento de construção do pensamento teórico, ou seja, este deverá ser modificado, sem necessariamente ser desconsiderado. O indivíduo deverá ampliar e aprofundar seu conhecimento, de sorte a assimilar a transição do conceito empírico para o conceito teórico.

A concepção empírica deve sofrer uma reestruturação, de maneira a propiciar a construção e o desenvolvimento do conceito teórico do objeto, a partir de suas peculiaridades e especificidades.

O conhecimento do objeto, com base na percepção e observação em função do cotidiano, que se dá antes do período escolar e nos primeiros anos escolares, precisa ser ampliado e aprofundado, por meio da troca, com o outro, de tudo que foi acumulado, sistematizado e descrito anteriormente. Conforme Davydov (1978), essa mediação é papel essencial da escola e, consequentemente, do professor. Mediar o conhecimento humano desenvolvido ao longo da história possibilita o movimento de reelaboração do significado empírico do objeto para sua concepção teórica.

5.2 O pensamento teórico

O pensamento teórico ou a forma teórica do conhecimento, como indica Davydov (1978), é a forma mais aprofundada do conhecimento, que vai além das percepções e representações do objeto, que ultrapassa a experiência imediata do indivíduo em relação ao referido objeto. Essa etapa do pensamento requer meios específicos de abstração e generalização do objeto, de modo a

relacionar seus nexos internos com o todo, representando compreender o objeto na sua essência:

Durante a adolescência e em idade escolar superior, a generalização é feita com base na análise mental e sistêmica das relações e conexões dos objetos. Também se afasta das percepções e representações, mas está vinculada ao destaque e à designação das qualidades internas desses objetos, à orientação para a qual pode ocorrer com um mínimo ou a ausência total de componentes notórios (plano real do conceito). (DAVYDOV, 1978, p. 32, tradução nossa).⁵

O autor designa essa etapa da generalização de conceito teórico, que é mais adequada, no nível do pensamento científico. O objeto, pensado em seu conceito teórico, não necessita de um corpo material concreto, mas da relação de seus nexos internos com o todo, ou seja, de sua essência. Os sujeitos desta pesquisa estão em condições de desenvolver o pensamento teórico e se apropriar de conceitos teoricamente.

Na idade escolar mais avançada, o processo de generalização do objeto continua, entretanto, de maneira diversa da fase inicial, referente à primeira infância. Nessa etapa de generalização, o processo se efetua com base nas relações e conexões do objeto com o todo, indo além de suas percepções e representações imediatas.

A reestruturação do pensamento empírico para o pensamento teórico indica o desenvolvimento do conhecimento, que vai muito além de aumentar o volume de conteúdos, de renovar os exemplos ilustrativos, de definir melhor os conceitos no processo escolar. O desenvolvimento do pensamento teórico deve mobilizar-se, de maneira gradativa e intencional, através de uma metodologia investigativa (DAVYDOV, 1978).

⁵ Em espanhol, lê-se: “Durante la adolescencia y en la edad escolar superior la generalización se efectúa en base al análisis mental y sistémico de las relaciones y conexiones de los objetos. Desgajase también de las percepciones y representaciones, mas está vinculada en el resalte y designación de las cualidades internas de dichos objetos, la orientación a los cuales puede tener lugar con un mínimo o la inexistencia total de notórios componentes (plan real del concepto) [...]”. (DAVYDOV, 1978, p. 32).

O processo de generalização do objeto precisa ir além de seus atributos externos, das sensações e percepções, das definições, das notações e dos métodos de demonstração e algoritmos. A generalização deve estruturar-se com apoio na análise das conexões do objeto com o todo, com o sistema em que se relaciona. O processo de desenvolvimento do objeto deve estar relacionado com suas leis de formulação:

Sabemos que o conhecimento científico não é a simples continuação, aprofundamento e extensão da experiência cotidiana dos homens. Requer a elaboração de meios especiais de abstração, de análise e generalização singulares que permitam fixar os elos internos das coisas, suas essências; requer modos peculiares de "idealização" dos objetos do conhecimento. [...] (DAVYDOV, 1978, p. 105, tradução nossa).⁶

Consideramos que a relação com as necessidades humanas e outros aspectos que estiverem ligados ao contexto histórico do desenvolvimento do objeto deve ser premissa no processo de construção do pensamento teórico.

Para Davydov (1978), a representação empírica do objeto, entrelaçadas aos seus atributos internos, cria as condições indispensáveis para a formação da sua concepção teórica. O autor traz o exemplo da cereja e da carne, ambos podem pertencer a um mesmo grupo de objetos, partindo de suas características aparentes, ambos são vermelhos, suculentos e comestíveis. Entretanto, quando o indivíduo se apropria dos nexos internos de cada um desses objetos e os relacionam com o todo, caminha para a formação do conceito teórico dos mesmos.

A proposta deste estudo não está pautada em pontuar ou delimitar a linha divisória entre o pensamento empírico e o pensamento teórico, nas produções dos estudantes; entretanto, almeja identificar o processo de movimento dos conceitos, na formação de seu pensamento.

⁶Em espanhol, lê-se: *"Sabemos que el conocimiento científico no es la simple continuación, profundización y ampliación de la experiencia cotidiana de los hombres. Requiere que se elaboren medios especiales de abstracción, de singular análisis y generalización que permita fijar los nexos internos de las cosas, sus esencias; requiere vías peculiares de 'idealización' de los objetos del conocimiento". [...]*" (DAVYDOV, 1978, p. 105).

Propomos novas relações no processo de aprendizagem desses objetos de conhecimento, por meio da atividade didática, a fim de contribuir para o desenvolvimento desses indivíduos, a partir de uma perspectiva humanizadora, por um lado. Por outro, buscamos contribuir com a pesquisa em Educação Matemática na construção de uma interface entre história e ensino.

6 COLETA DE DADOS E ANÁLISE DOS RESULTADOS

Este capítulo consiste em apresentar episódios referentes ao desenvolvimento das ações propostas aos estudantes, durante a atividade didática, com base em suas manifestações escritas, gestos, falas e expressões. As análises seguem a organização descrita na metodologia, em três encontros, sendo que cada encontro foi dividido em momentos. Serão descritas as ações que subsidiaram a análise dos episódios.

A análise busca, por meio dos episódios, conhecer o movimento dos conceitos manifestos pelos estudantes, no decorrer da realização das ações da atividade didática, com enfoque nos conhecimentos matemáticos sintetizados no processo de construção e uso do instrumento de medida, o quadrante geométrico.

Os dados serão apresentados de acordo com a organização dos Encontros que foram datados, mesclando narrativas do que ocorreu com imagens, falas, bem como com os registros escritos dos grupos, de modo a destacar os dados que evidenciam saltos qualitativos no processo de aprendizagem dos estudantes.

1º Encontro: 29/08/2018 (período da tarde)

No início do 1º momento deste Encontro a pesquisadora explicitou aos estudantes o que seria proposto e como estavam organizadas as ações ao longo do período.

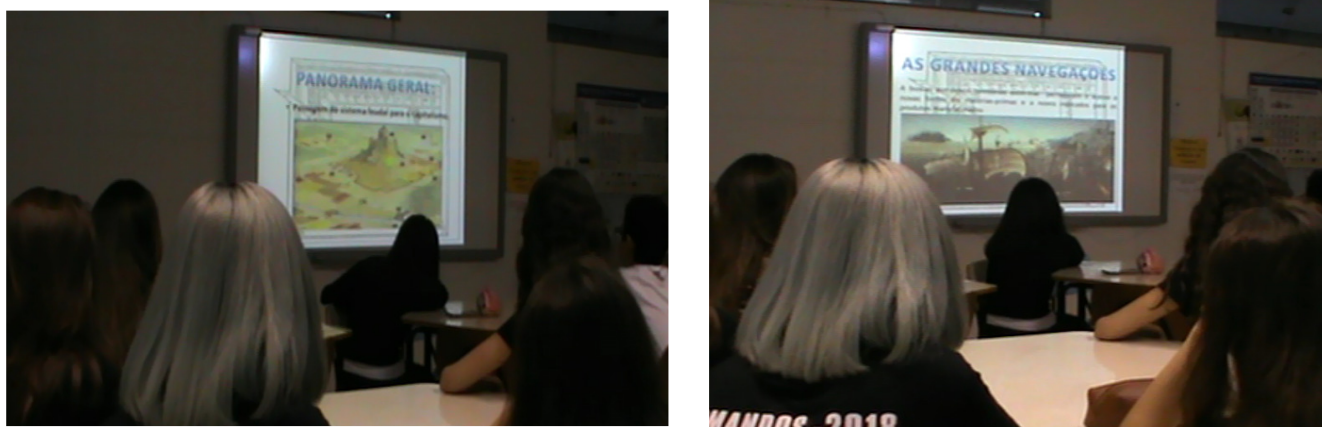
Antes de iniciar a apresentação dos *slides*, a pesquisadora fez algumas intervenções, na forma de questões reflexivas, com a intencionalidade de mobilizar os estudantes a refletirem sobre a relação do contexto histórico do instrumento e a produção de conhecimentos. As questões norteavam os estudantes a articular a relação entre as necessidades humanas produzidas no período histórico do instrumento, tendo em vista o movimento da economia, da política e da sociedade, de modo geral.

Professora (AV_ M2U00087):

- *“O que estava acontecendo naquele momento e naquela região onde o instrumento foi desenvolvido?”*
- *Qual motivo levou algumas pessoas a pensarem na construção de um instrumento de medida?*
- *Quais conhecimentos a construção e a utilização desse instrumento demandaram?*
- *Será que essa organização da sociedade está ligada à necessidade de um instrumento de medida?*
- *Será que o conhecimento vem da necessidade humana, ou a organização da sociedade vem do conhecimento?”?*

Na sequência das questões reflexivas, a pesquisadora inicia a apresentação dos *slides* interativos concernentes ao período que remete ao contexto histórico no qual o instrumento de medida, quadrante geométrico, foi desenvolvido, entre os séculos XVI e XVII, como ilustra a figura 6.

FIGURA 6 – Apresentação dos *slides* interativos aos estudantes



Fonte: Acervo pessoal da pesquisadora

Após a intervenção da pesquisadora, na forma das questões reflexivas, e depois de assistirem aos *slides*, os estudantes foram mobilizados para executar a próxima ação do 1º momento. Foram divididos em quatro grupos, sendo A1 e A2, B e C. Tal organização está de acordo com os temas propostos para a realização das ações do 1º encontro, conforme descrito no Quadro 1 do item 3.2.2, referente à intencionalidade e plano de ação da atividade didática.

O grupo A1 foi composto por quatro estudantes, o grupo A2 por três estudantes – ficando ambos com o tema sobre “As grandes navegações”. O grupo B foi constituído por cinco estudantes e trabalhou o tema sobre a “Passagem do feudalismo para o Capitalismo”. O grupo C foi formado por três estudantes e tratou do tema “As mudanças nas práticas militares”.

Com o objetivo de identificar, de forma organizada, a exposição dos episódios selecionados, usamos as seguintes siglas:

- ✓ CHGA1 – Contexto histórico, grupo A1;
- ✓ CHGA2 – Contexto histórico, grupo A2;
- ✓ CHGB – Contexto histórico, grupo B;
- ✓ CHGC – Contexto histórico, grupo C;
- ✓ CHRC – Roda de Conversa;
- ✓ CHRE – Registro escrito.

Acrescentamos, às siglas de cada grupo, uma outra sigla, AUD, para retratar as falas dos estudantes coletadas por gravações de áudio, e um código alfanumérico gerado pelo próprio arquivo de áudio, por exemplo, AUD_CHGC: WA0046, WA0047 e WA0058 (fala dos integrantes do grupo C, referente às ações sobre o contexto histórico, a partir dos áudios WA0046, WA0047 e WA0058).

Para diferenciar os dados coletados nas gravações audiovisuais, acrescentamos a sigla AV e um código alfanumérico gerado pelo próprio arquivo de audiovisuais, por exemplo, AV_RC:M2U00098 (fala dos estudantes durante a roda de conversa, a partir da gravação audiovisual M2U00098).

Outra identificação atinente à coleta de dados da atividade didática foi relativa aos registros escritos produzidos pelos grupos. Utilizamos a sigla RE, seguida da sigla do grupo, por exemplo, RE_CHGA2 (registro escrito do grupo A2, referente às ações do contexto histórico). Usamos também a sigla RC para as os dados coletados por áudio e vídeo, durante a realização da roda de conversa entre os grupos, seguida da siglas AUD ou AV.

Expressamos a fala de cada estudante empregando as iniciais do primeiro nome; por exemplo, o estudante Leonardo foi identificado como Léo, a aluna Bianca por Bia – e assim por diante.

Os estudantes receberam um material de apoio para o desenvolvimento dessa ação, composto por um texto com trechos e imagens que remetem ao tema proposto a cada grupo, bem como questões norteadoras que deveriam conduzir a leitura, a reflexão e a discussão do grupo, de sorte a produzir um diálogo com a história. Trechos desses excertos constam nos anexos deste trabalho, enquanto as questões norteadoras de cada tema foram expostas no item 3.2.2, referente à intencionalidade e plano de ação da atividade didática, no Capítulo 3.

Os grupos se organizaram, de modo que um integrante leu o texto e as questões norteadoras e todos expressaram suas reflexões e discutiram entre si. Um dos integrantes fez as anotações relativas às reflexões do grupo, em forma de um texto opinativo.

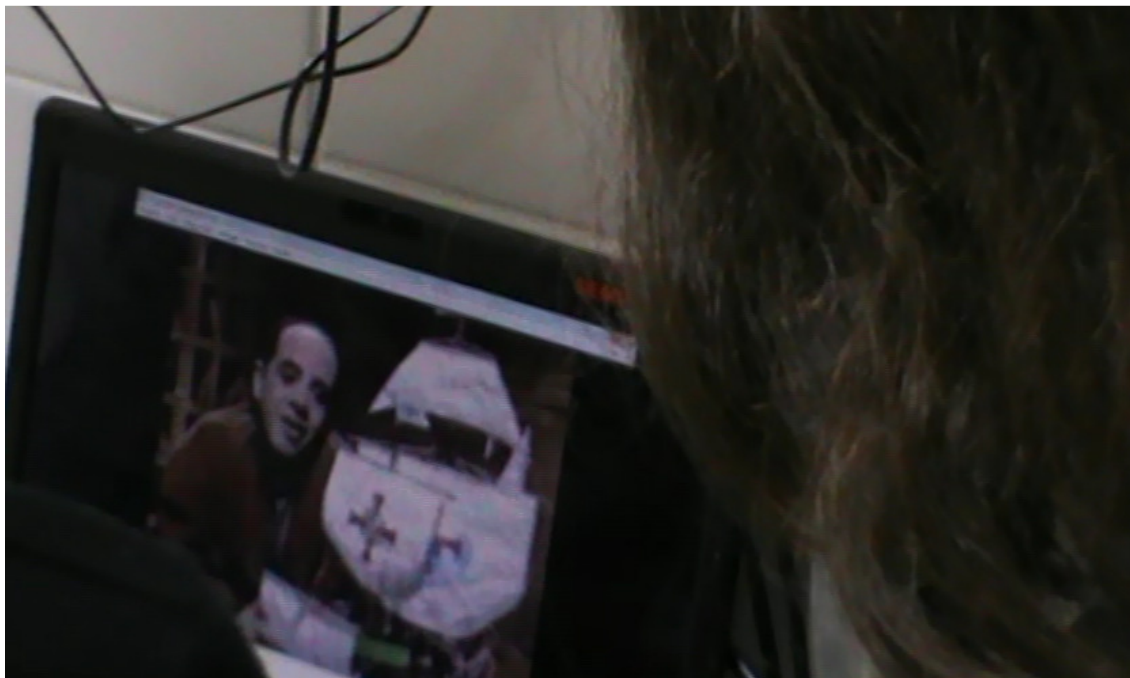
Na sequência apresentaremos quatro episódios que foram organizados a partir dos temas propostos.

Nomeamos o 1º episódio como, “o papel das grandes navegações no desenvolvimento humano”. Os dados desse episódio remetem as discussões e reflexões sobre o papel das grandes navegações na produção do conhecimento humano e qual foi o movimento desse acontecimento no contexto histórico do quadrante geométrico, de modo a construir um diálogo entre a história e o ensino de matemática. Participaram da construção desse episódio os integrantes dos grupos A1 e A2.

1º Episódio – “O papel das grandes navegações no desenvolvimento humano”

Os grupos A1 e A2, além do material de apoio descrito acima, assistiram ao trecho de um vídeo sobre as grandes navegações, a fim de ampliar as possibilidades de análises, discussões e reflexões sobre o tema, conforme ilustra a figura 7.

FIGURA 7 – Grupo A1 e A2 assistindo ao trecho de um vídeo sobre as grandes navegações



Fonte: Acervo pessoal da pesquisadora

Os estudantes dos grupos A1 e A2, nesse momento de análise, reflexão e discussão sobre o texto, sobre as imagens, sobre as questões norteadoras e também sobre o trecho do vídeo a que assistiram, expressam (AUD_CHGA1 e CHGA2: WA0048, WA0074, WA0076, WA0077, WA0102 e WA0114):

Helô: Eles não tinham nem noção do quanto teriam que navegar. Acabaram morrendo nesse processo em alto mar, até eles conseguirem chegar e voltar. Com essas navegações, descobrimentos de novas técnicas, de novos povos, de novos produtos, foram surgindo novas ideias e até mesmo novas profissões. Não tem como falar de uma coisa só, acaba envolvendo vários fatores, se eu falar sobre o estojo, não dá apenas para falar sobre ele, temos que falar sobre a matéria que ele foi feito e quem contribuiu para que fosse feito.

Cata: A questão da navegação também envolveu muita coisa. Nesse período haviam os filósofos, os geógrafos, os cartógrafos, não se tratava apenas da burguesia mercantil que tinha interesse nas navegações. O geógrafo, por exemplo, não ia ajudar a burguesia apenas porque eram amigos, cada um tinha seu interesse próprio.

A estudante Hêlo em sua reflexão destaca o objeto estojo com o todo que se relaciona, com seus nexos internos. Este dado evidencia que a estudante

demonstra o movimento do conceito em seu pensamento, não limitando-se apenas a concepção empírica do estojo, porém vislumbra todo o sistema de produção que o envolve. Completando sua fala, a estudante Cata relaciona as grandes navegações com as necessidades humanas que a impulsionaram. As duas falas se complementam, de modo a articularem as grandes navegações as necessidades humanas e a produção de conhecimento. Esse movimento das estudantes aponta uma organização do pensamento ao relacionar as relações internas e externas do objeto estojo com o contexto das necessidades humanas no cenário das grandes navegações. Tal articulação indica, segundo Davydov (1978), que essa etapa da generalização corresponde ao conceito teórico do objeto.

A figura 8 mostra as estudantes Helô e Cata mobilizando suas reflexões e discussões sobre o texto.

FIGURA 8 – As estudantes Helô e Cata fazendo a discussão do texto, das imagens e do trecho do vídeo, a partir das questões norteadoras



Fonte: Acervo pessoal da pesquisadora

Cata: Se arriscaram no mar por quais motivos? Dinheiro. O principal motivo era o dinheiro. Também para ter compradores para a matéria prima. Eles conseguiriam viver sem as especiarias, especialmente os pobres, porém a nobreza tinha dinheiro para mandar esses barcos e importância suficiente para convencer o rei a apoiar as viagens.

Esse trecho permite identificar que a estudante identificou as necessidades que o homem produz para viver, uma vez que em sua fala expressa que o homem conseguiria viver sem as especiarias, porém cria essa necessidade para satisfazer suas vontades. Em consonância com a Teoria Histórico-Cultural, “[...] o homem cria necessidades que têm por objetivo não apenas garantir sua existência biológica, mas, principalmente, sua existência cultural.” (MOURA, 2016, P. 19)

Pê: Dava muito bem para eles continuarem a viver nessas condições, mas eles eram gananciosos e queriam mais e mais e sempre lucrando.

Enri: “Queria usar a Matemática para saber onde eles iam e também para ir mais rápido. Usavam a Matemática também para calcular o valor das especiarias e também no processo de negociação dos produtos, visando o lucro e a efetivação do comércio.

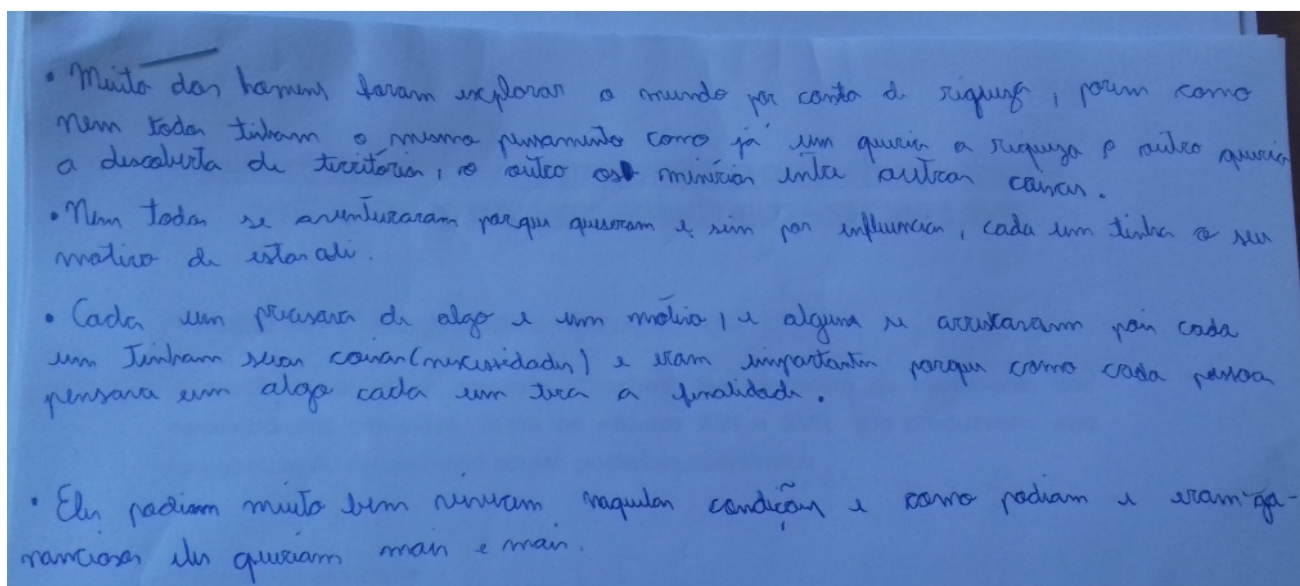
A fala do estudante Enri remete ao movimento lógico-histórico do instrumento, quando Brito (2011), no Capítulo 4, destaca a ênfase do conhecimento matemático a partir de suas aplicações de ordem prática. O estudante aponta a matemática como uma necessidade na organização do contexto de modo geral, como precisão de deslocamento, cálculos no comércio e controle das negociações financeiras.

Levando em conta as reflexões e discussões dos grupos, observa-se, pelas falas dos integrantes de cada grupo, as relações que constroem entre os conhecimentos desenvolvidos para melhorar as condições de navegação e as necessidades que o homem tinha para realizar tais viagens. Os grupos consideraram a aquisição do dinheiro como principal motivo gerador da necessidade do homem de aventurar-se por águas desconhecidas em busca de novos territórios, mercados consumidores e fontes de matéria-prima. As falas dos estudantes indicam que a busca por acúmulo de dinheiro, de forma especial por parte da burguesia mercantil do período, foi preponderante.

Entretanto, segundo as reflexões dos grupos A1 e A2, outros motivos também justificaram as grandes navegações. A partir de mais algumas falas dos estudantes, no decorrer das discussões (AUD_CHGA1 e AUD_CHGA2: WA0048, WA0074, WA0076, WA0077, WA0102 e WA0114) e de registros escritos do grupo A2 e A1 (RE_CHGA2, RE_CHGA1), conforme ilustram as

figura 9 e 10, citamos: “O homem encontra-se constantemente com a necessidade de superar o outro ou até a si mesmo, de forma a demonstrar sua potencialidade.”; “Cada indivíduo possui uma razão pessoal, uma necessidade única para atingir.”; “Muitos dos homens foram explorar o mundo por conta de riqueza, porém, como nem todos tinham o mesmo pensamento, como um já queria a riqueza, o outro queria a descoberta de território, o outro, os minérios, entre outras coisas.”; “[...] se aventurou como forma de busca por melhorias [...]”; “A evolução da sociedade é algo necessário, que não temos como controlar, de uma maneira ou de outra a sociedade da época mudaria, e a expansão das navegações foi apenas um fator contribuinte para a aceleração de tal mudança”.

Figura 9 – Anotações produzidas pelo grupo A2 ⁷



Fonte: Acervo pessoal da pesquisadora

⁷ Muito dos homens foram explorar o mundo por conta da riqueza, porém como nem todos tinham o mesmo pensamento como já um queria a riqueza o outro queria a descoberta de territórios, o outro os minérios entre outras coisas.

Nem todos se aventuraram porque quiseram e sim por influência, cada um tinha o seu motivo de estar ali.

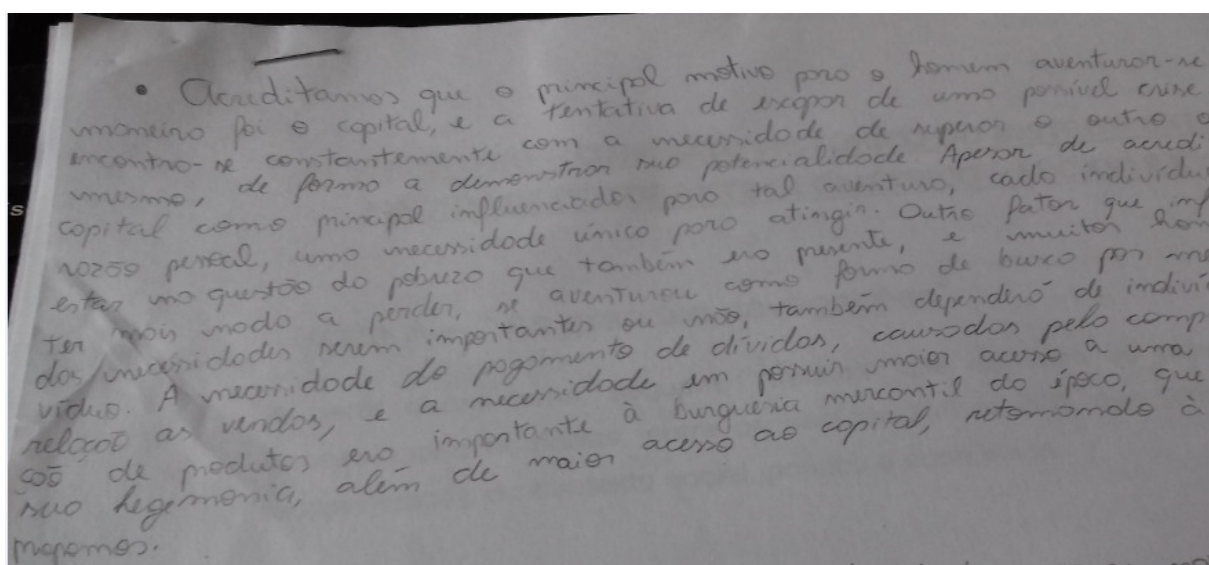
Cada um precisava de algo e um motivo, e se arriscaram pois cada um tinham suas coisas (necessidades) e eram importantes porque como cada pessoa pensava em algo cada um tinha a finalidade.

Eles podiam muito bem viverem naquelas condições e como podiam e eram gananciosos eles queriam mais e mais.

Através dos registros dos estudantes, verificamos que os estudantes expressam sua compreensão do movimento humano que impulsionou as navegações, que não foi uma única necessidade que moveu o homem a desbravar mares desconhecidos.

A sociedade, de acordo com sua estrutura econômica, política e social, produz necessidades diversas e, busca construir e desenvolver meios para suprir tais necessidades. Esses meios precisam que conhecimentos sejam mobilizados e articulados, para sua elaboração e desenvolvimento.

Figura 10 – Parte do texto opinativo produzido pelo grupo A1 ⁸



Fonte: Acervo pessoal da pesquisadora

⁸ Acreditamos que o principal motivo para o homem aventurar-se de tal maneira foi o capital, e a tentativa de escapar de uma possível crise. O Homem encontra-se constantemente com a necessidade de superar o outro ou até a si mesmo, de forma a demonstrar sua potencialidade. Apesar de acreditarmos no capital como principal influenciador para tal aventura, cada indivíduo possuía uma razão pessoal, uma necessidade única para atingir. Outro fator que influenciou pode estar na questão da pobreza que também era presente, e muitos homens, ao não ter mais nada a perder, se aventurou como forma de busca por melhorias. O fato das necessidades serem importantes ou não, também dependerá de indivíduo para indivíduo. A necessidade do pagamento de dívidas, causadas pela compra excessiva em relação as vendas, e a necessidade em possuir maior acesso a uma ampla diversificação de produtos era importante à burguesia mercantil da época, que buscava manter sua hegemonia, além de maior acesso ao capital, retomando a ideia inicial que propomos.

Em síntese, as produções escritas dos grupos CHREGA1 e CHREGA2 refletiram o movimento do pensamento dos estudantes em relação à produção das necessidades humanas articuladas a produção de conhecimentos, a partir do movimento social, político e econômico, ocasionado pelo desenrolar das grandes navegações. Os estudantes relacionam a partir de suas reflexões sobre os textos e também sobre os slides que, melhorar a capacidade das embarcações utilizadas nas longas viagens, assim como facilitar uma melhor localização no mar, encontrar o território desejado e retornar ao ponto de partida de forma segura, estavam diretamente relacionadas as necessidades diferentes que foram produzidas pelo homem nesse contexto.

Considerando a mobilização do pensamento a partir do movimento lógico-histórico, analisamos que o indivíduo ao assimilar as necessidades e aptidões humanas que foram necessárias para a constituição e o desenvolvimento de conhecimento, compreendem o objeto a partir de seu processo de mudança (SAITO; DIAS, 2013). A apreensão do processo de desenvolvimento do objeto propicia a apropriação de sua essência, o que caracteriza o desenvolvimento do pensamento teórico do sujeito.

Observamos um salto qualitativo no processo de aprendizagem dos estudantes, por meio de um movimento que propiciou a abordagem do pensamento teórico, no sentido de articularem que o conhecimento não surge ao acaso, porém, ele se mobiliza por causa de uma demanda produzida pelo homem, na busca por suprir as necessidades que desenvolve, ao longo de sua existência.

Afirmam Saito; Dias (2013, p. 94) que,

“[...] Isso possibilita ao indivíduo compreender a inexistência de verdades absolutas, concepções frequentes de estudantes em relação à matemática, geradas ou pelo método de ensino fundamentado somente na lógica formal, ou por uma concepção historiográfica de vertente positivista”.

Nomeamos o 2º episódio como, “a passagem do sistema feudal para o capitalismo (séculos XVI e XVII)”, no desenvolvimento humano”. Os dados desse episódio remetem as discussões e reflexões sobre o papel desse período de transição entre esses dois sistemas de organização da sociedade, na produção

do conhecimento humano. Analisamos nesse episódio, qual foi o movimento desse período no contexto histórico do quadrante geométrico, de modo a construir um diálogo entre a história e o ensino de matemática. Participaram da construção desse episódio os integrantes dos grupos B.

2º Episódio - “A passagem do sistema feudal para o capitalismo (séculos XVI e XVII)”, no desenvolvimento humano”

Durante o momento de leitura e reflexões do grupo B como ilustra a figura 11, a estudante Bia comenta com os colegas (AUD_CHGB: WA0046, WA0050):

Bia: O comércio criou a burguesia, a burguesia influenciava o comércio e o comércio influenciava a burguesia. O que eles faziam só para eles, para se sustentarem, agora eles faziam para exportação e para vender. E a relação de tudo isso com matemática foi porque sempre tinha a pessoa que iria vender as coisas e a que iria produzir e seria paga para produzir, o que gerou a troca de moeda que está relacionado diretamente com a matemática.

FIGURA 11 – Integrante Bia do grupo B fazendo a discussão do texto e das imagens, a partir das questões norteadoras

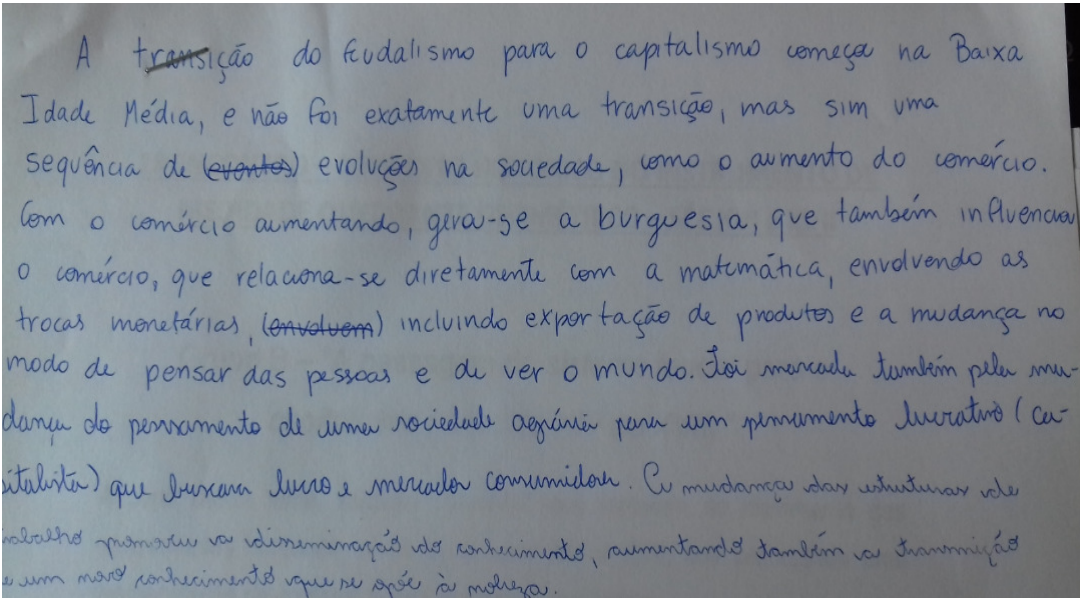


Fonte: Acervo pessoal da pesquisadora

Ao analisar a fala da integrante Bia, percebemos que a mesma articulou o papel da matemática na forma de comercialização, para organizar e estruturar a troca de moedas, provenientes do crescimento do comércio burguês. A fala da estudante vem ao encontro com a afirmação de Brito (2011) que, entre os séculos XVI e XVII, a matemática conquista cada vez mais uma importância nas aplicações de situações de trabalho e vai tomando forma de um modelo de conhecimento verdadeiro e rigoroso. Essa articulação da relação lógico-histórica da matemática com as relações práticas de situações de trabalho, evidencia um movimento do pensamento teórico da estudante, ao avançar de uma concepção empírica da matemática sobre fazer cálculos e, vislumbrar o contexto desse objeto com a produção de conhecimento para a organização de uma sociedade.

Após as análises e reflexões, o grupo produziu uma síntese de suas discussões, por intermédio de texto opinativo, de maneira a registrar o pensamento dos integrantes que foram articulados e mobilizados, conforme ilustra a figura 12:

Figura 12 – Parte do texto opinativo produzido pelo grupo B ⁹



A ~~transição~~ do feudalismo para o capitalismo começa na Baixa Idade Média, e não foi exatamente uma transição, mas sim uma sequência de (~~eventos~~) evoluções na sociedade, como o aumento do comércio. Com o comércio aumentando, gera-se a burguesia, que também influencia o comércio, que relaciona-se diretamente com a matemática, envolvendo as trocas monetárias, (~~envolvem~~) incluindo exportação de produtos e a mudança no modo de pensar das pessoas e de ver o mundo. Foi marcada também pela mudança do pensamento de uma sociedade agrária para um pensamento lucrativo (capitalista) que busca lucro e mercado consumidor. A mudança das estruturas de trabalho promoveu a disseminação do conhecimento, aumentando também a transmissão de um novo conhecimento que se opõe à nobreza.

Fonte: Acervo pessoal da pesquisadora

O texto opinativo produzido pelo grupo refletiu o movimento do pensamento dos estudantes, ao articularem à transição do sistema feudal para o capitalista. Os estudantes expressam que nessa fase de transição entre esses dois modos de organização da sociedade, o modo de pensar foi afetado (*“pensamento de uma sociedade agrária para um pensamento lucrativo...”*), devido a nova forma de trabalho. Com isso, o homem precisou reorganizar seus conhecimentos e construir e desenvolver outros, de sorte a atender às novas exigências econômicas, políticas e sociais.

⁹ A transição do feudalismo para o capitalismo começa na Baixa Idade Média, e não foi exatamente uma transição, mas sim uma sequência de evoluções na sociedade, como o aumento do comércio. Com o comércio aumentando, gerou-se a burguesia, que também influenciou o comércio, que relacionava-se diretamente com a matemática, envolvendo as trocas monetárias, incluindo exportação de produtos e a mudança no modo de pensar das pessoas e de ver o mundo. Foi marcada também pela mudança do pensamento de uma sociedade agrária para um pensamento lucrativo (capitalista) que buscava lucro e mercado consumidor. A mudança das estruturas de trabalho promoveu a disseminação do conhecimento, aumentando também a transmissão de um novo conhecimento que se opõe à nobreza.

Nos elementos históricos elencados no Capítulo 4, Brito (2011) aponta esse movimento. No século XVII, os artífices conquistaram o papel de personagens essenciais na produção do capital e na busca pelo aumento da riqueza dos países europeus. Tais personagens representavam a burguesia ascendente do período que valorizava o trabalho e, portanto, o conhecimento prático, substituindo o modo contemplativo de conhecimento da nobreza.

Nomeamos o 3º episódio como, “as mudanças das práticas militares no desenvolvimento humano”. Os dados desse episódio remetem as discussões e reflexões sobre o papel dos avanços nas práticas militares na produção do conhecimento humano. Analisamos nesse episódio, qual foi o movimento dessas transformações dos aparatos de guerras, na organização dos exércitos, nas práticas de guerra no contexto histórico do quadrante geométrico, de modo a construir um diálogo entre a história e o ensino de matemática. Participaram da construção desse episódio os integrantes dos grupos C.

3º Episódio - “As mudanças das práticas militares no desenvolvimento humano”

Nesse momento de análise, reflexão e discussão sobre o texto, sobre as imagens e sobre as questões norteadoras, Léo (na figura 13) do grupo C provoca os colegas com as questões (AUD_CHGC: WA0046, WA0047 e WA0058):

Léo: *“De forma direta, por que eles fizeram esses avanços na tecnologia? Qual o objetivo?”*

FIGURA 13 – Integrante Léio do Grupo C fazendo a discussão do texto e das imagens, a partir das questões norteadoras



Fonte: Acervo pessoal da pesquisadora

A seguir apresentamos as falas de três estudantes que buscam argumentar a questão levantada pelo colega. Fany busca responder as questões de Lé e o enfoque de Iza é sobre o modo de vida dos pobres, de como se importavam com a aquisição de alimento.

Fany: Para defender e atacar o inimigo. Melhorar a defesa e o ataque durante as batalhas. Pensando um pouco, eles também fizeram isso basicamente para melhorar o nível de vida da população, porque onde tem mais território, podem melhorar a agricultura e produzir mais comida para a população.

Léo: Eles queriam ter uma vantagem sobre o inimigo nas batalhas, para fazer um combate melhor. Os recursos tecnológicos vão gerar uma vantagem, com certeza durante as batalhas. Quem tinha mais força militar, conseguiria conquistar mais território e ter melhores vantagens. Todo mundo estava procurando novos territórios para plantação, melhores solos para a agricultura e minério. Com o tempo eles perceberam a vantagem desse desenvolvimento e colocaram mais foco nisso, cada vez desenvolvendo uma estratégia, até começarem a desenvolver e melhorar armas.

Iza: Nem todas as pessoas que estavam nesse reino queriam a mesma coisa. Os mais pobres que eram a maioria, a população camponesa, queriam outras coisas, como alimentos. Nessa época não importa qual era o império, sempre havia uma população morrendo de fome, portanto o alimento sempre foi alguma coisa grande. Para a burguesia quanto mais dinheiro você tinha, mais importante você era, era uma questão de poder.

Pelas reflexões e discussões do grupo, observa-se a articulação entre as necessidades produzidas pelo homem e a demanda por conhecimento. Segundo os pressupostos de Davydov (1988), essa relação do conhecimento do contexto histórico das necessidades humanas e a produção e disseminação de conhecimento, aponta a apropriação do estudante com sua própria história, indicando uma abordagem do pensamento teórico. Esse grupo salienta que a demanda por conhecimentos, para aprimorar os aparatos de guerra, ocorre em função de necessidades diversas, tais como a conquista de novas terras como fonte de alimentos, para uns, meio de exploração econômica e manutenção de poder, para outros.

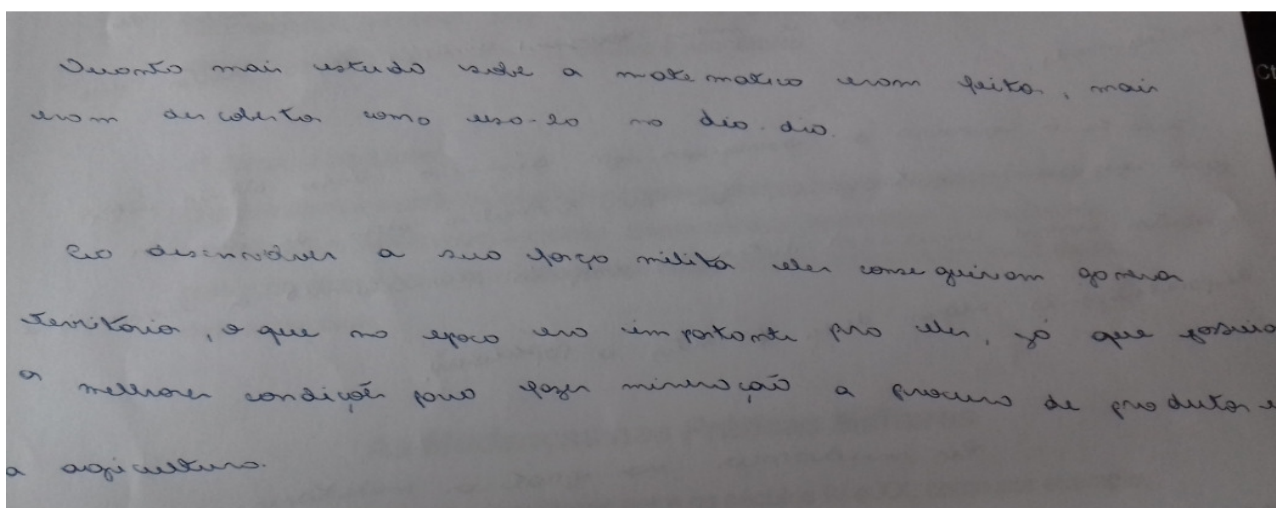
Os conceitos historicamente formados na sociedade existem objetivamente nas formas de atividade do homem e em seus resultados, ou seja, nos objetivos criados de forma racional. (DAVYDOV, 1988, p. 128, tradução nossa).¹⁰

Pinto (2010), no Capítulo 4, aponta essa necessidade de novos aparatos. As dificuldades aliadas às necessidades do contexto histórico entre os séculos XVI e XVII, levaram alguns instrumentos a serem adaptados, modificados e outros novos desenvolvidos. A aplicação desses instrumentos não se limitou apenas a área náutica, mas também a astronomia, arquitetura, agrimensura, cartografia, artilharia e geografia.

¹⁰Em espanhol, lê-se: *“Los conceptos, historicamente formados en la sociedad, existen objetivamente en las formas de la actividad del hombre y en sus resultados, o sea, en los objetos creados de manera racional”. [...]*. (DAVYDOV, 1988, p. 128).

Os registros escritos do grupo C, com base no texto opinativo, sistematizam as falas de seus integrantes, conforme ilustra a figura 14 (RE_CHGC): “Ao desenvolver a sua força militar eles conseguiriam ganhar território, o que na época era importante para eles, já que possuíam a melhor condição para fazer mineração, procura de produtos e a agricultura”; “E nem todos desse ‘reino’ queriam isso, ou seja, a burguesia era rica e não precisava de comida, eles queriam território e a maioria que era a população camponesa, eles queriam mais comida do que território, porque para eles era mais importante”; “Quanto mais eles melhorassem o estudo sobre a geometria, mais fácil era para melhorar seus equipamentos para a guerra”.

Figura 14 – Parte do texto opinativo produzido pelo grupo C ¹¹



Fonte: Acervo pessoal da pesquisadora

¹¹ Quanto mais estudo sobre a matemática eram feitos, mais eram descobertos como usa-la no dia-dia.

Ao desenvolver sua força militar eles conseguiram ganhar territórios, o que na época era importante para eles, já que possuíam as melhores condições para fazer mineração a procura de produtos e a agricultura.

Em síntese, analisamos no 3º Episódio, a partir das falas e do texto produzido pelo grupo, que os estudantes movimentaram seu pensamento ao articularem as demandas de conhecimento com as necessidades produzidas pelo homem, a partir do contexto das mudanças nos aparatos de guerra. Os estudantes relacionaram a partir das ações desenvolvidas, que o aprimoramento dos aparatos e táticas de guerra, ao longo do período entre os séculos IV e XX, aconteceu em função da demanda experimentada pelo homem, no sentido de conquistar territórios para ampliar seu poder, para acumular riquezas e para aumentar a produção de alimentos. Ao articularem por meio dos fatos históricos e das relações sociais as mudanças que ocorreram nas práticas militares, para atender as necessidades produzida pelo homem, mobilizaram o conhecimento matemático a partir de suas aplicações de ordem prática. Movimentaram o conhecimento, de modo a mobilizarem o pensamento teórico sobre a produção de conhecimento e a organização de uma sociedade, a partir de suas necessidades.

Nomeamos o 4º episódio como, “socialização sobre o contexto histórico do quadrante geométrico”. Os dados desse episódio remetem as discussões e reflexões dos três grupos coletivamente, a partir de seus temas e a produção do conhecimento humano, de modo a construir um diálogo entre a história e o ensino de matemática. Participaram da construção desse episódio os integrantes dos grupos A1 e A2, B e C.

4º Episódio – “Socialização sobre o contexto histórico do quadrante geométrico”

Os grupos foram mobilizados para uma grande roda de conversa, onde cada qual apresentou e refletiu com os demais o texto opinativo escrito. Durante esse 2º momento do encontro, a pesquisadora fez intervenções, a partir das seguintes questões norteadoras que foram colocadas para cada grupo, de acordo com os temas propostos, a fim de mediar as discussões do grande grupo.

- *“O que levou o homem a partir em busca de novos territórios, a se aventurar em mares desconhecidos?”*

- *“Por que será que as tropas de guerra evoluíram dos arcos para as metralhadoras?”*
- *“Por que eles queriam conquistar novos territórios?”*

À medida que os integrantes foram expondo, na roda de conversa (Figura 15), as reflexões do grupo, cada estudante teve a oportunidade de refletir sobre as necessidades humanas geradas em razão dos contextos analisados pelos outros grupos e as relacionar com a produção e a disseminação do conhecimento.

Destacamos inicialmente a fala das estudantes Cata e Helô que explicitam as diferentes necessidades produzidas pelo homem que movimentaram o contexto das grandes navegações.

FIGURA 15 – Roda de conversa para discussões dos textos produzidos pelos grupos



Fonte: Acervo pessoal da pesquisadora

Cata (AV_CHRC: M2U00098): *O básico seria a busca por capital, porque a Europa estava em uma crise e precisavam arrumar outros fornecedores além do Oriente Médio. Havia outras necessidades ‘menores’, pessoas que não estavam procurando por dinheiro.*

Helô (AUD_CHRC: 005_sd.m4a): *A gente englobou o capital como fator principal, mas cada pessoa tem um motivo próprio para realizar essas buscas.*

Inferimos, que as estudantes sintetizam em suas falas a “procura por dinheiro” como objetivação das necessidades de novos mercados para a burguesia, entretanto, apontam também que o homem cria necessidades e outras novas necessidades que ultrapassam o limite do que é essencial a sua sobrevivência. Moura em consonância a essas considerações explana que, “Sendo assim, o conceito de necessidade, originalmente biológico, transforma-se para o homem em necessidade histórico-cultural.” (MOURA, 2016, p. 19)

Enri (AV_CHRC: M2U00098 e AUD_CHRC: 005_sd.m4a): *“Muitos estavam em uma busca financeira, por capital, e já outros tinham suas necessidades próprias, tipo, descobrir o mundo e saber mais sobre as coisas.”*

Enri parece concordar com a fala de Cata e Helô, e acrescenta outras necessidades. Isso indica que, embora a busca de novos mercados para a burguesia tinha uma finalidade, para outras pessoas tinham outras, como as ligadas ao saber.

Quanto as necessidades humanas e a produção de conhecimento destacamos ainda as falas de Léo e Bianca:

Léo (AV_CHRC: M2U00098 e AUD_CHRC: 005_sd.m4a): *Quando começaram a analisar estratégias, perceberam que usando os números de maneira mais efetiva conseguiriam exércitos mais eficientes, organizando a quantidade de soldados do ataque, da defesa, utilizando assim os números para ganhar as batalhas. A organização mais eficiente das batalhas levariam as vitórias e consequentemente a conquista de novos territórios e por sua vez, novos recursos, trazendo dessa forma um maior benefício para aquela nação.*

Bianca (AV_CHRC: M2U00098 e AUD_CHRC: 005_sd.m4a): *“O ser humano sempre tem a necessidade de entender tudo e ele sempre quer mais, busca sempre mais conhecimento, facilidades e também riqueza.”*

Léo faz relações com o um objeto matemático, os números, de modo a relacionar sua aplicação de ordem prática ao desenvolvimento da organização dos exércitos, abrangendo suas táticas e aparatos de guerra.

Bianca aponta o desenvolvimento dos conhecimentos para atender a demanda do homem de superar seus saberes já internalizados.

A estudante Fani expressa (AV_RC: M2U00098): *“Com avanço da geometria eles conseguiam melhorar suas táticas de guerra e os equipamentos, principalmente para o alvo de acerto dos canhões e melhorar a mira de outras ferramentas”*

E o estudante Nilo afirma na sequência (AV_RC: M2U00098): *“Acho que a necessidade humana vem primeiro. Primeiro eu tenho uma necessidade, depois preciso pensar para resolver essa necessidade.”*

Inferimos a partir das falas que os estudantes articularam as mudanças que ocorreram nos aparatos de guerra, bem como nas práticas militares, como imprescindíveis para atender as necessidades produzidas pelo homem. Esse movimento do conhecimento dos elementos da história, aponta uma abordagem do pensamento teórico dos estudantes sobre a produção de conhecimento e a organização da sociedade, a partir de suas necessidades.

Não foi objetivo da atividade didática buscar saber detalhes de como os estudantes estavam pensando sobre os elementos da matemática, como números e geometria, bem como da Física, no lançamento de projétil, e sim integrá-los na sua herança histórica, por meio dessa contextualização, a fim de trabalhar com o documento e o instrumento nesse contexto.

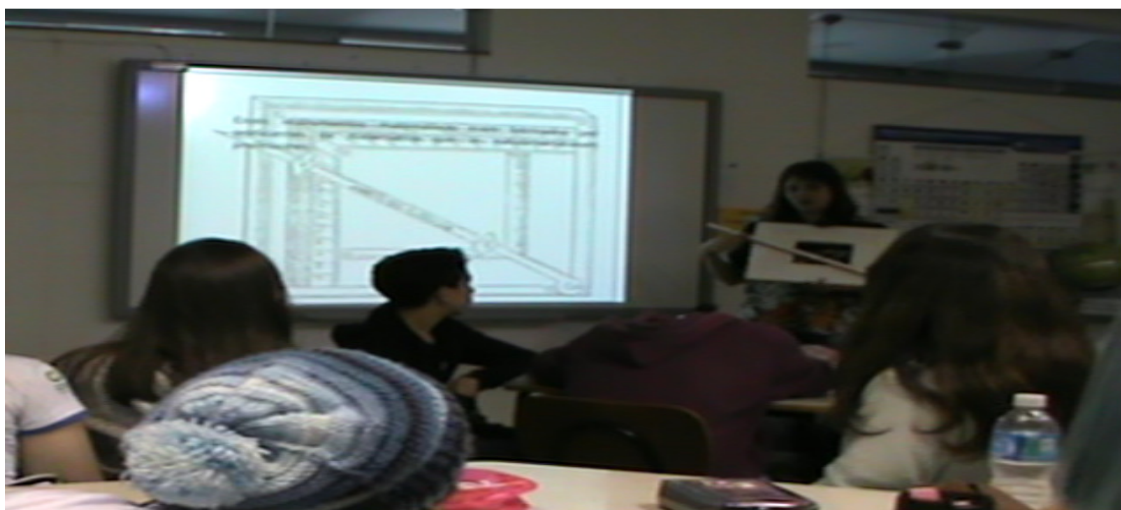
Nesse 1º Encontro, a partir dos quatro episódios apresentados, analisamos que os estudantes ao explorarem elementos históricos do período do instrumento, entre os séculos XVI e XVII, perceberam a relação entre o movimento social e a produção de conhecimento, construindo um diálogo com o contexto histórico do quadrante geométrico. Os estudantes constatarem as relações humanas presentes no instrumento, possibilitando ir além do olhar empírico para o mesmo, da simples compreensão de suas partes e de seu uso. Perceberam uma nova relação no processo de aprendizagem, ao enfatizarem

que o conhecimento precisou ser mobilizado, que ele não surgiu do acaso. Eles relacionaram que o homem precisou pensar e reelaborar conhecimentos prévios, construir e desenvolver novos, para produzir meios que suprissem suas necessidades. Esse delineamento de uma interface entre a história e o ensino permite ao estudante apropriar-se do conhecimento a partir das atividades humanas desenvolvidas ao longo do desenvolvimento do processo histórico, vislumbrando uma abordagem do pensamento teórico.

2º Encontro: 30/08/2018 (período da manhã)

A professora inicia o 2º Encontro, expondo aos estudantes a proposta de construção de um protótipo do instrumento de medida, o quadrante geométrico. Faz uma mobilização do contexto dos slides que serão apresentados e mostra um protótipo do instrumento o quadrante geométrico¹² (Figura 16).

Figura 16: Apresentação do protótipo de madeira do quadrante geométrico para os estudantes



Fonte: Acervo pessoal da pesquisadora

¹² Construído em madeira, na proporção de $\frac{1}{4}$ da medida oficial do documento, por estudantes do Curso de Licenciatura de Matemática da PUC e doado a Professora Dr^a Marisa da Silva Dias.

Antes da apresentação dos slides, a professora lança algumas questões reflexivas, comparando as profissões que já existiam naquela época e que ainda existem hoje, para apontar os recursos necessários para o desempenho das atividades. Ela usa o exemplo dos topógrafos e dos navegadores:

AV_M2U00100:

- *“Será que o topógrafo daquela época já possuía o teodolito, o nível de luneta e a trena, para realizar as medições dos terrenos? Será que utilizavam algum instrumento de medida, no século XVI, para realizarem as medições de terra?”*
- *E os navios dos séculos XVI e XVII já possuíam GPS? Como será que os marinheiros se localizavam no mar, a fim de atingir o destino desejado e retornar ao ponto de partida?*
- *Será que essas necessidades de medir e se localizar, de modo preciso, levaram o homem a mobilizar e construir conhecimentos, para criar algum instrumento de medida?”*

Os slides trazem instrumentos de medida, como o quadrante num quarto de círculo, o astrolábio e o báculo, além do quadrante geométrico, que foram reelaborados ou construídos nesse período, entre os séculos XVI e XVII, em função dos conhecimentos que foram articulados e desenvolvidos, para suprir a necessidade de várias áreas de conhecimento, de diversas profissões.

Juntamos, nos anexos, alguns *slides* referentes a essa apresentação, os quais remetem ao contexto histórico do instrumento. A apresentação aborda também o documento traduzido que trata da construção e uso do quadrante geométrico, que constam no item 3.2.2, e ao contexto dos praticantes de

matemática que construíam os instrumentos de medida em suas oficinas e como e para quem divulgavam seus instrumentos.

Para encerrar a exposição dos *slides*, a pesquisadora faz uma referência às ações que serão propostas, mostrando um vídeo breve de uma oficina de construção do quadrante, com estudantes do terceiro ano de Licenciatura de Matemática da UNESP. O vídeo é apresentado sem som, e a mesma esclarece aos estudantes (AV_M2U00100): *“O vídeo está sem som, pois não se trata de um manual de instrução, orientando exatamente o que vocês deverão desenvolver, mas apenas para terem uma breve noção de como deverá ser construído este 2º encontro.”*

Por se tratar de objetivos distintos, não houve a necessidade de manter os mesmos integrantes nos grupos, durante os três encontros. Por conseguinte, na sequência da atividade, os estudantes foram novamente divididos em grupos, de modo a facilitar as leituras, interpretações, discussões e a efetivação das ações. O segundo encontro aconteceu durante o período matutino, ou seja, no decorrer do período de aula dos estudantes, portanto, foi o encontro que contou com o maior número de participantes, um total de 20. Os estudantes foram separados em cinco grupos de quatro integrantes cada, sendo a divisão feita por sorteio. Os grupos foram identificados com A, B, C, D e E.

Com o objetivo de identificar de forma organizada a exposição dos episódios selecionados, usamos as seguintes siglas:

- ✓ CIGA – Construção Instrumento Grupo A;
- ✓ CIGB – Construção Instrumento Grupo B;
- ✓ CIGC – Construção Instrumento Grupo C;
- ✓ CIGD – Construção Instrumento Grupo D
- ✓ CIGE – Construção Instrumento Grupo E;
- ✓ CIRE – Construção Instrumento Registro Escrito;
- ✓ CIRC – Construção Instrumento Roda Conversa.

Da mesma forma que no primeiro encontro utilizamos as siglas: AUD, AV e RE, por exemplo, AUD_CIGA: WA0065, WA0067 e WA0072, que significa - fala dos integrantes do grupo A, referente às ações sobre a construção do instrumento, com base nos áudios WA0065, WA0067 e WA0072. Usamos

também a sigla RC, para as os dados coletados por áudio e vídeo, durante a realização da roda de conversa entre os grupos, antecedida pelas siglas AUD_CI ou AV_CI e seguida pelo código alfanumérico emitido pelo arquivo de áudio ou vídeo: AV_CIRC M2U00110 (gravação de vídeo durante a roda de conversa, a partir do arquivo M2U00110).

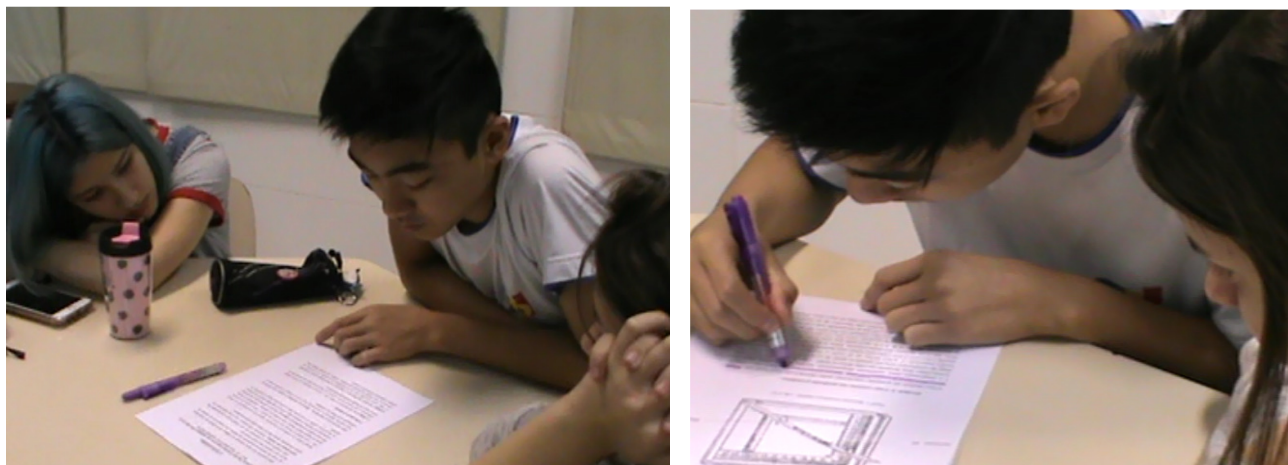
Expressamos a fala de cada estudante, empregando algumas letras de seu nome; por exemplo, o estudante Henrique foi identificado como Rique, a aluna Letícia por Le, e assim por diante.

Os estudantes receberam um material de apoio para o desenvolvimento das ações referentes ao 1º e 2º momento do encontro, composto por régua e esquadros não graduados, barbante, lápis, borracha, folhas de sulfite e folhas de papel cartão, canudos de plástico e percevejos latonados, incluindo o tratado *Del modo di misurare*, após o tratamento didático, o qual remete à construção do instrumento e a respectiva imagem que indica as partes do quadrante.

Cada grupo leu atentamente e refletiu sobre a tradução do excerto concernente à construção do instrumento de medida quadrante geométrico.

Em uma segunda leitura, os integrantes se organizaram, de modo a destacar no texto (grifo), o que interpretaram como essencial, ou seja, quais as ações necessárias para a construção do instrumento de medida quadrante geométrico, mesmo que essas ações não estivessem totalmente claras para o grupo. Cada grupo elencou as ações necessárias para a construção, de maneira a realizarem os registros com suas próprias palavras acerca do que compreenderam sobre a leitura, ou seja, interpretando, a partir da mobilização de seus conhecimentos, o que cada ação indicava no processo de construção. Alguns integrantes faziam a leitura das ações, todos juntos articulavam sua interpretação e outros integrantes registravam as reflexões (Figura 17).

Figura 17: Integrantes do grupo E realizando a leitura do excerto e destacando s ações para a construção do protótipo



Fonte: Acervo pessoal da pesquisadora

Apresentaremos quatro episódios que foram construídos a partir das ações propostas para a construção do quadrante geométrico.

Nomeamos o 1º episódio como, “conceitos de semelhança, proporção e linha oblíqua na construção do quadrante”. Os dados desse episódio remetem a articulação entre os conhecimentos já desenvolvidos pelos estudantes e os conceitos matemáticos sintetizados no processo de construção do protótipo do instrumento, de modo a construir um diálogo entre a história e o ensino de matemática.

Na sequência das ações, a professora implementou uma ação coletiva entre os grupos, a fim de refletir e discutir sobre as ações que, de alguma maneira, não ficaram claras no processo de leitura e interpretação do texto.

Seguem algumas falas desse momento de socialização (AV_CIRCM2U00109):

Fani: *“Formam três intervalos, de tal maneira que sejam proporcionais entre si e que o próximo seja sempre o dobro mais largo que o outro.”* (Aluna se pronuncia com essa dúvida)

Pesquisadora: *“O que vocês entendem por proporcionais?”* (Articulação da pesquisadora para socializar reflexões dos outros grupos)

Mati: *“Iguais, mesma distância.”*

Vini: *“Quando uma coisa em relação a outra é igual a outra coisa em relação a outra coisa.”*

Pesquisadora: *“Vamos pensar no caso do triângulo. Quando afirmamos que dois triângulos são semelhantes, o que isso quer dizer?”*

Rico: *“Iguais.”*

Pesquisadora: *“Não! O que é igual?”*

Rique: *“Idêntico.”*

Maju: *“Parecido.”*

Pesquisadora: *“Parecido?! Igual é parecido?”*

Mati e outros estudantes responderam ao mesmo tempo: *“Não!”*

Mati: *“Semelhante é parecido.”*

Pesquisadora: *“Semelhante é parecido em quê?”*

Vini: *“Ângulos. ‘Tipo’... são congruentes. Os lados que correspondem dos triângulos têm ângulos congruentes.”*

Pesquisadora: *“Muito bem, o Vini pensou nas propriedades dos triângulos. Haveria outra maneira de pensarmos em duas figuras semelhantes, sem ser pelos ângulos? Por exemplo, a tela de uma TV e um retângulo qualquer?”*

A pesquisadora, não obtendo mais nenhuma mobilização consistente, deixa a questão para continuar sendo refletida durante as próximas ações do 2º momento.

Pê: *“Pro, tivemos dúvida sobre o que era reta oblíqua. Mas já pesquisei na internet.”* Nesse momento da fala de Pe, outros grupos também se manifestam, apontando a mesma dúvida.

Pesquisadora: *“Então compartilha com a gente Pe, o que você entendeu sobre o que é uma reta oblíqua”.*

Pê: *“Ah pro, eu entendi que não é perpendicular e também não é paralelo, então eu acho que deve ser diagonal.”*

O conceito de semelhança apresentado pelos estudantes, inicialmente estão no nível do cotidiano para os estudantes Rico, Rique, Maju e Mati, o estudante Vini por sua vez, traz conceitos novos à discussão: ângulos e congruência, após a professora ter sugerido que pensassem em triângulos. No ensino é comum a associação do estudo de triângulos com congruência e semelhança. Porém, a abordagem de retângulos semelhantes parece não ser muito comum, e isso pode ter levado ao silêncio dos estudantes após a questão da professora.

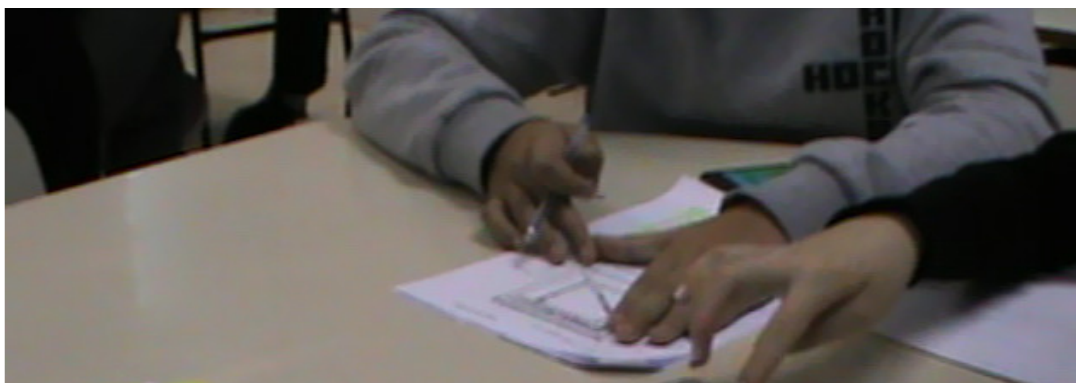
A concepção de reta oblíqua discutida pelos estudantes indica que a dúvida estava em como deveria ser a inclinação dessa linha, já que era a característica do conceito que permitiria compreender a construção do desenho do instrumento. Traz o documento: “[...]Feito isto, coloque uma régua do ponto A ao ponto C e trace um linha oblíqua CE a qualquer um dos lados AB ou CD [...]” (BARTOLI apud SAITO e DIAS, 2011, p. 15).

Analisando isoladamente a fala do Pe, do grupo C e um registro escrito do grupo (Figura 19), constatamos um movimento no significado de reta oblíqua

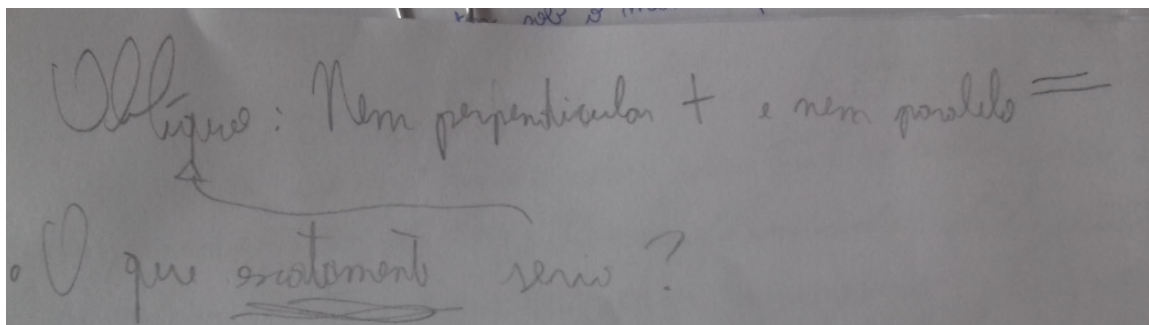
AV_ CIGDM2U00104:

Pe: “*Então, tem que fazer uma reta oblíqua. Oblíqua é na diagonal? Então seria aqui, ó!*” O estudante Pe aponta no desenho qual seria o sentido da reta oblíqua, conforme ilustra a Figura 18.

Figura 18: Estudante indicando o sentido da reta oblíqua na figura do quadrante



Fonte: Acervo pessoal da pesquisadora

Figura 19: Anotação produzida pelo grupo D ¹³

Fonte: Acervo pessoal da pesquisadora

Foi o estudante Pe que havia pesquisado e compartilhado na roda de conversa sobre o que entendeu em relação a reta oblíqua. Analisamos que o estudante articulou seu pensamento ao dar significado ao conceito de reta oblíqua, pela definição de retas perpendiculares e paralelas. Mobilizou conhecimentos já internalizados para a construção de um novo. Inferimos que houve um movimento na relação de aprendizagem do estudante em função das concepções empíricas desse objeto matemático, tendo em vista a articulação do conceito pelas suas diferenciações. Segundo os pressupostos de Davydov (1978), o conceito empírico do objeto se dá a partir de suas características externas, pelas suas semelhanças e diferenças dentro de um mesmo grupo de objetos.

Após essa socialização, os grupos iniciaram o 2º momento do encontro, com a construção do protótipo do instrumento, a partir dos materiais que foram entregues para a realização da atividade. Não foi permitido aos grupos, durante o desenvolvimento da atividade, a utilização de réguas, esquadros e transferidores graduados, tendo em vista a necessidade da contextualização histórica do documento e de seu respectivo instrumento.

¹³ Oblíquo: Nem perpendicular + e nem paralelo =

O que exatamente seria?

Alguns integrantes do grupo organizaram as ações que foram escritas no momento anterior e orientaram a outra parte do grupo, que desenvolveu as ações de construção.

Nomeamos o 2º episódio como, “objetos matemáticos no processo de construção do quadrante: medição”. Os dados desse episódio remetem a articulação entre os conhecimentos já internalizados pelos estudantes e os conceitos matemáticos mobilizados no processo de construção do protótipo do instrumento relacionados a medição.

Nesse momento do desenvolvimento das ações de construção do protótipo do instrumento, os estudantes expressam as relações que produzem com base no que fora lido, interpretado, analisado e refletido pelo grupo.

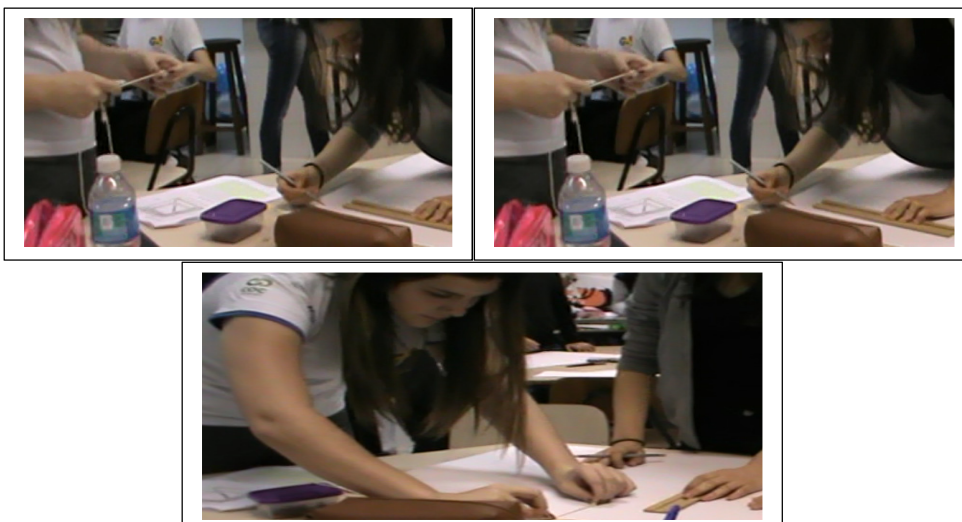
O diálogo a seguir entre os estudantes, bem como a Figura 20, apontam as estratégias de medição que estão mobilizando, tendo em vista a ausência de instrumentos de medida graduados.

AV_ CIGB M2U00110:

Tavo: *“O que você está fazendo?”*

Rafa: *“Medindo.” A estudante responde, ao conferir se a reta construída por Helô, estava paralela à borda da folha. Com um pedaço de barbante, ela o coloca sobre alguns pontos da reta, para verificar se estão à mesma distância da margem da folha.*

Figura 20: Sequência de medição de distância, utilizando o barbante como instrumento de medida



Fonte: Acervo pessoal da pesquisadora

Esse movimento indica que o grupo empregou o barbante para transferir medida, ao verificar se a representação da reta desenhada estava na mesma distância da borda do papel. Esse procedimento evidencia que a estudante associou o barbante como uma possibilidade de instrumento de medição, desconstruindo a relação de medida somente com instrumentos graduados, ou seja, que a ação de medir acontece apenas quando se utilizam instrumentos de medida graduados. Inferimos que houve um movimento em relação ao conceito de medida, por meio de uma articulação que propiciou a abordagem do pensamento teórico desse objeto matemático. Segundo Davydov (1978), o movimento do pensamento teórico do estudante se dá a partir da compreensão da essência do conceito.

Na sequência, reproduzimos a fala de integrantes do grupo C, bem como o registro escrito, conforme ilustra a figura 21, atinente às ações de medição.

AUD_ CIGCWA0072:

Professora: *“Como vocês fizeram para traçar as retas A, B, C, D e E? Como vocês definiram o tamanho dessas retas?”*

Bia e Lê: *“Ah, sei lá. Nós só traçamos.”*

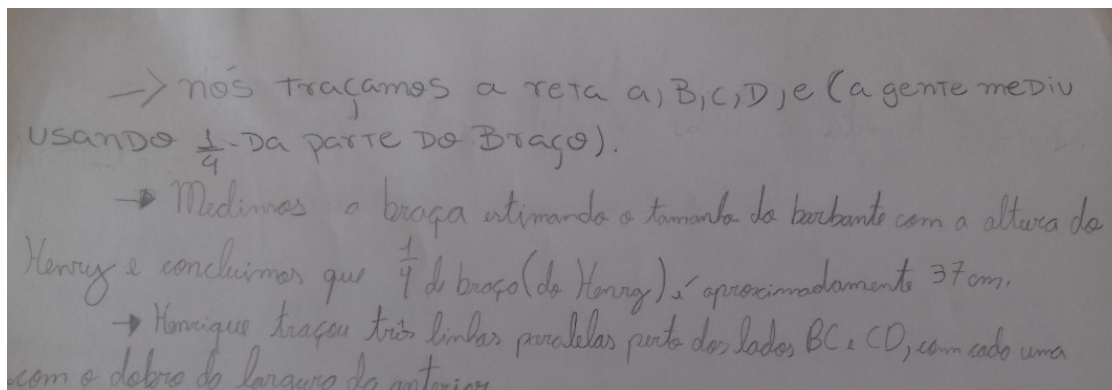
Professora: *“Vocês não utilizaram a braça como referência?”*

Bia: *“Ah, sim, usamos.”*

Professora: *“Como vocês fizeram para encontrar um quarto da braça?”*

Bia: *“A gente dividiu.”*

Figura 21: Registro do grupo C referente à interpretação das ações para a construção do quadrante ¹⁴



Fonte: Acervo pessoal da pesquisadora

Ao examinarmos os registros do grupo relativos às ações de construção, observamos que, ao invés de usarem a medida de uma braça recomendada no excerto, consideraram como padrão de medida o braço do integrante Henry e, na sequência, ainda fizeram a medida correspondente de $\frac{1}{4}$ do braço em centímetros.

Os estudantes do grupo CIGC evidenciam, a partir de suas falas e registros, que não se apropriaram da definição de braça como um conceito de medida. Associaram, talvez, pela semelhança da palavra com braço, um membro do corpo humano. Procederam com o desenho, empregando o braço como padrão de medida.

Monteiro (2012), aponta a dificuldade que os docentes que participaram da atividade de construção de uma réplica do instrumento de medida, quadrante num quarto de círculo, em sua pesquisa, encontraram, ao realizar as ações, por não poderem utilizar instrumentos de medida graduados. Observa que tiveram que “[...] lançar mão de suas habilidades e conhecimentos sobre construção geométrica para cada uma das tarefas solicitadas” (MONTEIRO, 2012, p. 89).

¹⁴ - Nós traçamos a reta a, B, C, D, e (a gente mediu usando $\frac{1}{4}$ da parte do Braço).

- Medimos a braça estimando o tamanho do barbante com a altura do Henry e concluímos que $\frac{1}{4}$ de braça (do Henry) é aproximadamente 37 cm.

- Henrique traçou três linhas paralelas perto dos lados BC e CD, com cada uma com o dobro da largura da anterior.

Sintetizamos ao analisar o 2º Episódio que apenas o grupo B, movimentou o conceito de medição na direção do desenvolvimento do pensamento teórico, empregando o barbante como estratégia de medida, na ausência de instrumentos graduados, apreendendo a essência desse objeto matemático ao comparar grandezas. O grupo C não se apropriou do significado de braça, não articularam ao conceito de medição, não utilizaram esse objeto como unidade de medida. Inferimos que a dificuldade na apropriação da concepção de braça pode estar relacionada ao fato de que, apenas alguns materiais didáticos, trazem a concepção de braça e na maioria das vezes, descontextualizada em um pequeno texto, que explana fatos históricos sobre personagens matemáticos.

Nomeamos o 3º episódio como, “objetos matemáticos no processo de construção do quadrante: razão e proporção”. Os dados desse episódio remetem a articulação entre os conhecimentos já internalizados pelos estudantes e os conceitos matemáticos mobilizados no processo de construção do protótipo do instrumento relacionados a razão e proporção.

As falas e imagens que seguem (Figuras 22 e 23), explicitam a mobilização do pensamento das estudantes para articular a concepção geométrica de proporção, ao terem que estabelecer o dobro da distância entre um segmento e outro, conforme indica o tratado,

“[...]Agora, trace três linhas paralelas que se encontrarão com a já traçada oblíqua CE e que, juntamente com BC e CD, formam três intervalos de tal maneira proporcionais ente si, que um seja sempre por seu dobro mais lago do que o outro. [...]” (BARTOLI apud SAITO e DIAS, 2011, p. 15).

AV_ CIGB M2U00110

Helô: *“Agora, a gente precisa arrumar um jeito de fazer isso daqui: um ser o dobro do outro.”*

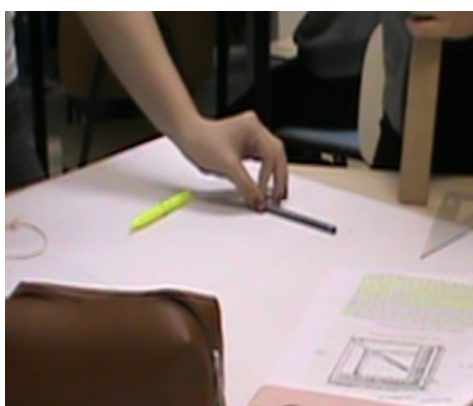
Figura 22: Sequência das ações do grupo B, para desenhar a proporção do dobro da largura, sem utilizar instrumento graduado



Fonte: Acervo pessoal da pesquisadora

Rafa: *“Faz do tamanho de um lápis e depois faz o dobro do lápis. Ai, meu Deus, isso foi muito inteligente!”*

Figura 23: Sequência de medição de distância, usando o lápis como recurso de medida



Fonte: Acervo pessoal da pesquisadora

Após traçar duas linhas paralelas, utilizando a largura de um lápis, a estudante Rafa faz a conferência para verificar se, de fato, as linhas estão paralelas, empregando novamente o barbante como instrumento de medida. Ao concluir a verificação, Rafa comemora com Helô (AV_CIGBM2U00110): *“Certíssimo!”*

A estudante faz essa solicitação a Vani, que está fazendo a anotação de como o grupo está realizando as ações para a construção. Rafa (AV_CIGBM2U00110): “*Anota aí a marca dos lápis que usamos.*” Rafa, ao fazer esse comentário, indica que, ao usar dois lápis da mesma marca, de fato, estará sendo precisa ao traçar o dobro da largura.

Ao efetuarem essa articulação, os estudantes mobilizam o conceito de proporção, quando compreendem que a distância entre os segmentos tinha que ser o dobro do anterior, usando a largura de um, de dois e de quatro lápis, para construírem essa razão. Ao utilizarem o lápis como instrumento geométrico, novamente os estudantes indicam flexibilidade com esse objeto matemático, ao recorrer a um outro objeto não graduado para realizar essa ação. Eles reelaboraram a forma de desenhar o instrumento, utilizando uma estratégia alternativa para determinar o dobro da distância entre as linhas paralelas, o lápis. Esse movimento de flexibilização em relação ao objeto matemático, caracteriza o desenvolvimento em direção a abordagem do conceito teórico, indicando a apropriação de seus nexos internos, de sua essência.

Em relação a essa análise, Davydov (1972) expressa que, “[...] a relação teórica com o objeto acontece quando suas fontes estão nas próprias coisas e refletem seu processo de desenvolvimento e suas conexões com o todo[...]

(DAVYDOV, 1972, P. 105, tradução nossa).

Analizamos também nesse 3º episódio, a mobilização que os estudantes realizam sobre o conceito de razão, ao articularem a proporção de $\frac{1}{4}$ para a quantidade de divisão do segmento.

A professora faz uma intervenção com todos os grupos, em relação à proporção de $\frac{1}{4}$ para as dimensões do quadrante e para suas divisões. Sugere aos grupos, conforme o plano de ação, que usassem a proporção de $\frac{1}{4}$ para as dimensões do instrumento, em relação ao tamanho original. O documento indica a medida de uma braça¹ de comprimento, o que tornaria o desenho do quadrante superior às dimensões da folha de papel cartão que os grupos receberam para desenvolver essa ação.

Professora (AV_M2U00110): “*Não esqueçam de utilizar a razão de $\frac{1}{4}$, no momento que chegarem na ação de dividir o segmento em partes iguais. Se usaram essa razão nas dimensões em relação à medida de uma braça¹⁵, devem seguir essa proporção na divisão dos segmentos do instrumento.*”

O diálogo dos estudantes assim como as Figuras 24 e 25, indicam a mobilização dos conhecimentos internalizados sobre razão e proporção.

AV_ CIGB M2U00110:

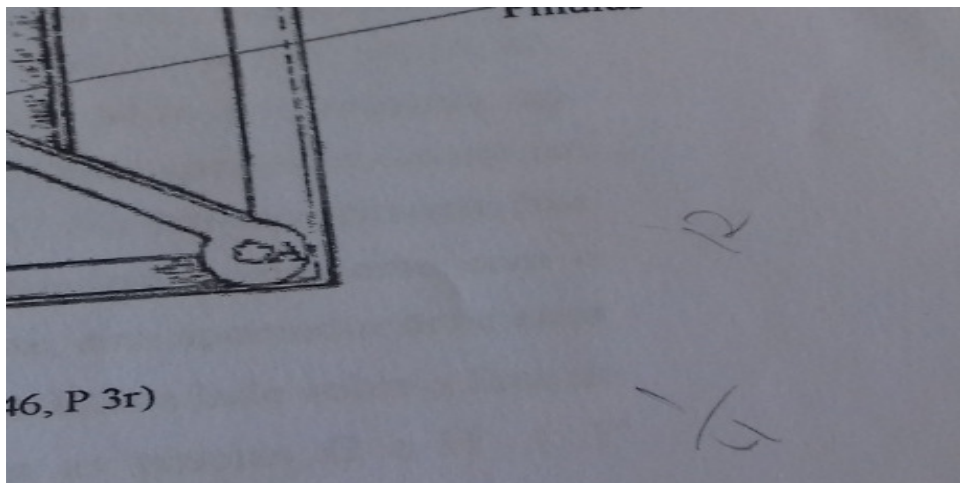
Mati: “*Proporcional?*”

Tavo: “*É, tem que ser equivalente.*”

Helô: “*Então faz assim ó: uma braçada, doze negócio...*” A estudante articula em seu pensamento uma proporção entre a medida original com as partes correspondentes do quadrante.

Na sequência, observamos o registro dessa relação, feito por Helô.

Figura 24: Imagem do registro da estudante referente à proporção de $\frac{1}{4}$ entre 12 partes do segmento



Fonte: Acervo pessoal da pesquisadora

¹⁵ Braça: medida de comprimento utilizada nos séculos XVI e XII. Corresponde atualmente a 2,2 metros, segundo o sistema métrico decimal.

Rafa: *“E agora, quanto dá isso?”*

Helô: *“Temos que fazer $\frac{1}{4}$ de doze.”*

Helô: *“Gente, se dividirmos a braça em doze partes (a estudante abre os braços, nesse momento), só vai dar três partes aqui (e aponta para o desenho).”*

Figura 25: Sequência da explanação da estudante Helô referente à mobilização de seu pensamento sobre a razão de $\frac{1}{4}$ da braça



Fonte: Acervo pessoal da pesquisadora

Ao articularem a razão de $\frac{1}{4}$ em relação à medida oficial do quadrante, mobilizaram novamente o conceito de proporção. Os estudantes relacionaram que iriam fazer o mesmo desenho, entretanto, com uma proporção diferente. As dimensões do quadrante seriam diferentes, porém, suas características originais seriam preservadas: continuaria sendo um quadrado, as divisões seriam em menores quantidades, todavia, não haveria qualquer alteração no formato do instrumento.

Rafa (AV_CIGBM2U00110): *“Será que o nosso desenho está ficando diferente?”*

Helô (AV_CIGBM2U00110): *“É que a nossa braçada é pequeninha, ué!”*

A introdução na atividade didática do uso de réguas não graduadas, além da intencionalidade de que se conscientizassem que os sistemas de medida não existiram desde sempre, de ser condizente com o tratado, tinha outra intencionalidade, de mobilizar o conceito de medição.

Na sequência, reproduzimos a fala da integrante do grupo C, atinente a concepção de razão.

AUD_ CIGCWA0072:

Professora: Lembrem-se da proporção de $\frac{1}{4}$ para todo o desenho. Se aí no documento tinham doze partes e uma braça, o de vocês deverá ser dividido em quantas partes?

Lê: “Ah, então o nosso só terá três partes.”

Pela fala do estudante, entendemos que a mesma mobilizou seu conhecimento sobre proporção, construindo a razão de $\frac{1}{4}$ para 12 partes do quadrante. Essa articulação da estudante indica uma nova relação no processo de aprendizagem em relação ao significado de razão. A estudante indica que, a partir da proporção menor do comprimento do segmento, as partes do segmento também deverão ser menores, entretanto, na mesma razão de $\frac{1}{4}$.

Analisamos ainda no 3º Episódio, pelas falas dos estudantes e suas expressões, que houve um movimento em relação ao processo de aprendizagem sobre o conceito de razão. Os estudantes foram além do seu conhecimento empírico, eles articularam e desenvolveram, a partir do processo de construção do quadrante, a essência do significado de razão, vislumbrando a abordagem do conceito teórico desse objeto matemático.

Nomeamos o 4º episódio como, “objetos matemáticos no processo de construção do quadrante: divisão de segmentos em partes iguais”. Os dados desse episódio remetem a articulação entre os conhecimentos já internalizados pelos estudantes e os conceitos matemáticos mobilizados no processo de

construção do protótipo do instrumento relacionados a divisão de segmentos em partes iguais.

Examinamos, na sequência, falas de estudantes do grupo B, referente à mobilização e articulação de conhecimentos geométricos para dividir um segmento em partes iguais, sem o emprego de instrumentos graduados, conforme ilustra a Figura 26.

AV_ CIGB M2U00110; M2U00111:

Professora: *“E, agora, para dividir o segmento em partes iguais?”*

Rafa: *“A gente vai usar o barbante, como fez da outra vez.”*

Helô: *“Ou a gente usa o lápis.”*

Professora: *“Pensem que agora vocês não vão mais trabalhar com largura, como fizeram com o lápis, agora precisam dividir um segmento em partes iguais”.*

Rafa: *“Ih! Agora “boio”.”*

O grupo refletiu e discutiu alguns minutos sobre a forma de dividir o segmento, foi até o grupo vizinho, na tentativa de socializar a estratégia, entretanto, nenhum dos demais grupos havia chegado ainda a essa ação. Decidiram então, após a sugestão da estudante Rafa, utilizar o compasso como recurso de medida.

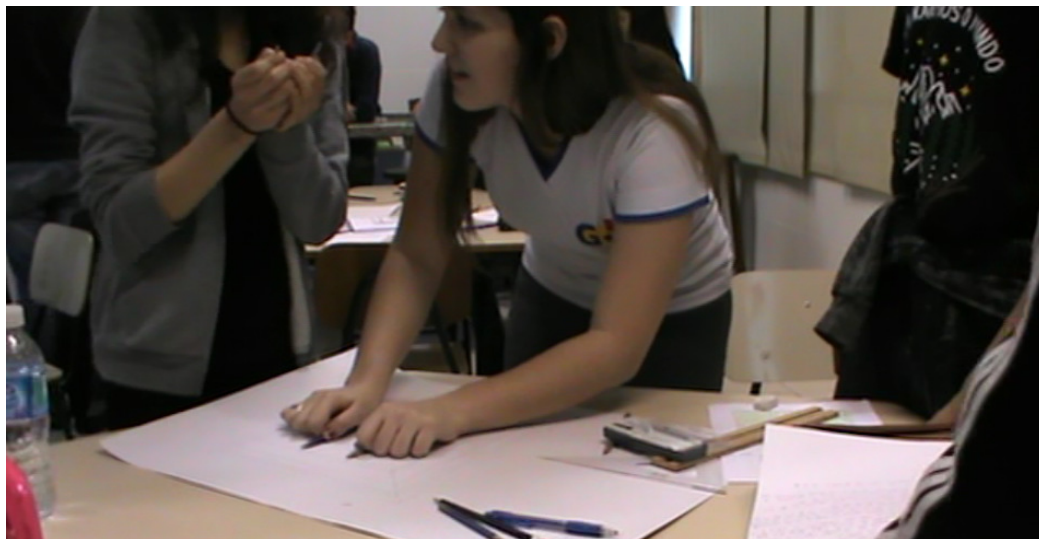
Rafa: *“Pega o compasso e vê se dá.”*

Helô: *“Isso, o compasso!”*

Rafa: *“Por que a gente está “moscando” sem o compasso?”*

Helô: *“Não sei.”*

Figura 26: Grupo realizando as primeiras tentativas para a divisão do segmento em partes iguais, empregando o compasso



Fonte: Acervo pessoal da pesquisadora

Todos os integrantes do grupo trabalharam ativamente nessa ação (Figura 27); os estudantes Mati e Tavo levantaram-se de suas cadeiras, deixaram a função de secretários do grupo e participaram, na prática, dessa ação, na tentativa de conseguir dividir o pedaço de barbante, o qual correspondia ao lado do quadrante, em três partes iguais. Eles utilizaram a estratégia de tentativa e erro, ao aumentar a abertura do compasso por várias vezes, até conseguirem a distância exata entre uma abertura e outra, que fosse equivalente a três partes iguais do barbante.

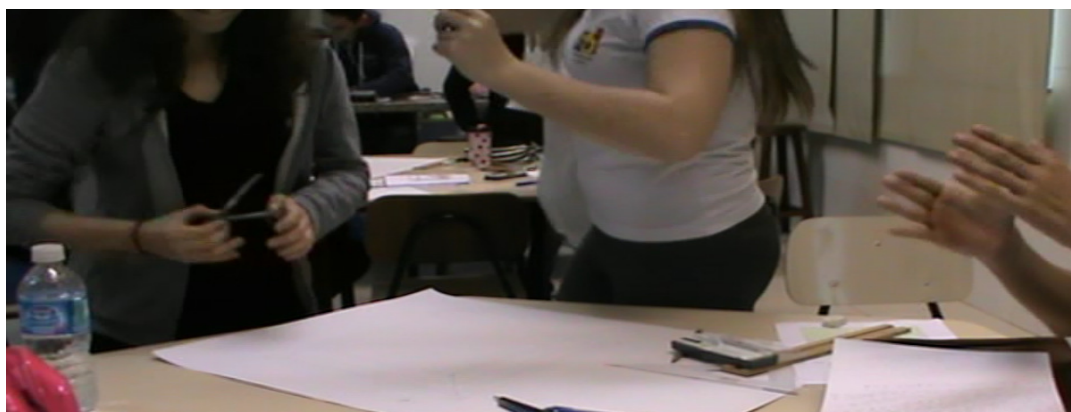
Figura 27: Grupo realizando uma das inúmeras tentativas para a divisão do segmento em partes iguais, usando o compasso



Fonte: Acervo pessoal da pesquisadora

Ao verificarem a abertura exata do compasso que dividia o barbante em três partes iguais, as estudantes Helô e Rafa comemoraram com uma espécie de “dancinha”. Observamos, com esse gesto das estudantes, a satisfação em concluir a ação corretamente (Figura 28). A estudante Rafa expressa (AV_ CIGB M2U00110): *“Parabéns, acabou!”*

Figura 28: Estudantes do grupo B comemorando a conclusão da ação de divisão do segmento em partes iguais, utilizando o compasso



Fonte: Acervo pessoal da pesquisadora

Sintetizando o 4º Episódio concluímos que, a partir da estratégia de tentativa e erro, adotada pelo grupo, os estudantes movimentaram o significado de dividir um segmento em partes iguais, desconstruindo a concepção de medir no sentido de utilizar apenas instrumentos graduados. Observamos também que em nenhum momento o grupo recorre ao algoritmo da divisão para realizar essa ação. Serviram-se de um instrumento não graduado, o compasso, que até então, para os mesmos, era utilizado apenas para desenhar circunferência, e o utilizaram para transferir medidas. Ao encontrarem a abertura exata, transferiram a mesma, mais duas vezes para o restante do barbante, completando, assim, a divisão necessária, conforme ilustra a figura 29. Inferimos que houve um movimento do conceito, em função das concepções empíricas sobre divisão de segmentos em partes iguais, tendo em vista a articulação do conceito pela estratégia de tentativa e erro.

Figura 29: Divisão do segmento em três partes iguais



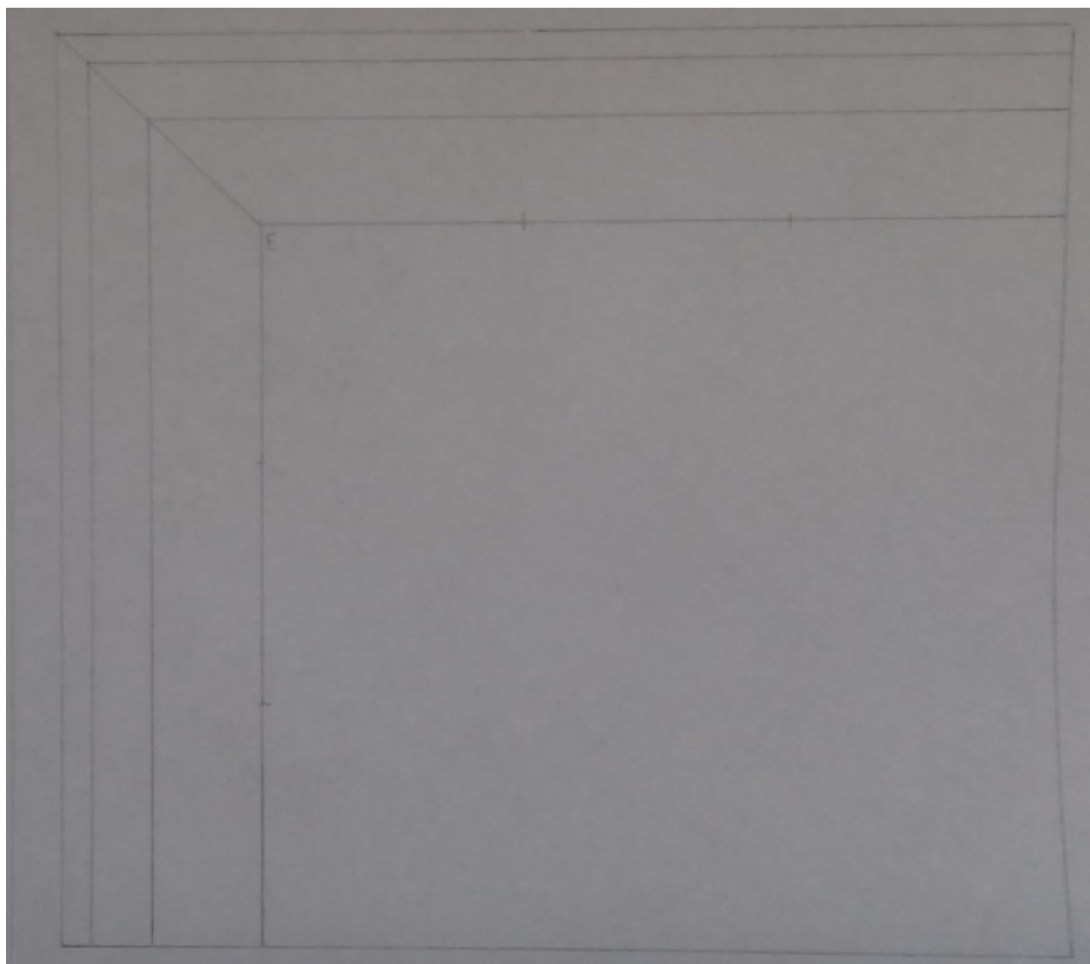
Fonte: Acervo pessoal da pesquisadora

Pautados em Saito e Dias (2013), confirmamos na análise dos Episódios a potencialidade didática do documento, no sentido de permitirem aos estudantes a exploração dos objetos matemáticos que estão sintetizados em cada ação realizada para a construção e utilização do instrumento. Os estudantes precisaram mobilizar o pensamento matemático que está implícito no tratado e articular com seus conhecimentos internalizados, de modo a propiciar a construção de uma nova etapa do desenvolvimento dos conceitos matemáticos estudados, ou até mesmo, apreender novos.

Nenhum dos cinco grupos conseguiu concluir a construção do protótipo do quadrante geométrico, no tempo que lhes foi dado. Entretanto, devido à organização geral da aplicação da atividade didática, não foi possível disponibilizar mais um período para a conclusão das ações de construção.

Apresentamos o desenho do grupo B, aquele que mais avançou no desenvolvimento das ações, durante o tempo disponibilizado, conforme ilustra a figura 30.

Figura 30: Desenho não concluído do grupo B do protótipo do quadrante geométrico



Fonte: Acervo pessoal da pesquisadora

Percebemos a construção de uma nova relação no processo de aprendizagem quanto aos conceitos matemáticos sintetizados no processo de construção de modo mais significativo, no grupo B. Notamos, a partir das falas, das expressões e dos registros escritos explicitadas nos quatro Episódios que, os integrantes desse grupo se preocuparam com a mobilização dos conceitos matemáticos implícitos em cada ação de construção do instrumento que executaram, inclusive fazendo a verificação de tais ações para confirmar se mobilizaram e articularam seus conhecimentos de maneira correta.

Os demais grupos mobilizaram e articularam seus conhecimentos matemáticos em algumas ações particulares que realizaram. Não observamos, pelos dados coletados e analisados por meio dos Episódios, o mesmo empenho dos demais grupos em articular os objetos matemáticos mobilizados nas ações de construção do quadrante.

Observamos uma desconstrução nas concepções empíricas sobre medida. Mostraram que medir não implica apenas na utilização de instrumentos graduados, como régua, trena, transferidor. Determinaram medidas por meio de outros recursos, o que propiciou um movimento na construção de um novo significado sobre esse objeto matemático, apontando uma abordagem do pensamento teórico desse conceito.

Mobilizaram e articularam seus conhecimentos sobre proporção, ao apresentarem que a distância entre os segmentos tinha que ser o dobro da anterior. Utilizaram a largura de um lápis para desenhar a primeira distância entre a representação de um segmento e o seguinte, e, depois, dois lápis e, depois, quatro lápis. Construíram a razão de dobro geometricamente, usando um objeto, o qual, até esse momento, era empregado apenas para escrever. Observamos um avanço para o conceito teórico de proporção, na construção do significado geométrico de dobro e $\frac{1}{4}$, por exemplo.

Ao aplicarem a proporção de $\frac{1}{4}$ em relação à medida apresentada no tratado, durante a ação de construção, mobilizaram e articularam o significado de razão. Inferimos que a relação feita, levaram os estudantes a concepção geométrica de uma razão. Entenderam que o desenho do quadrante foi o mesmo do indicado pelo excerto, entretanto, quatro vezes menor. As dimensões

diferentes do desenho não alteraram as suas características originais. As divisões do instrumento também foram quatro vezes menores que as apontadas pelo documento, sem causar qualquer alteração no formato do quadrante.

Consideramos que houve também uma mobilização na concepção de reta oblíqua. Articularam o conceito pela definição do que não é reta oblíqua, ou seja, em função da mobilização das definições de retas perpendiculares e retas paralelas. Movimentaram o conceito, de sorte a construírem um novo significado desse objeto matemático. Segundo Davydov (1978), esse modo de conceber o conceito está ligado a sua concepção empírica, tendo em vista que os estudantes articularam o novo significado de reta oblíqua, por ser diferente de paralela e perpendicular. O nível de abstração desse conceito ainda está no modo de comparação de um grupo de objetos que apresentam ou não as mesmas características externas.

3º Encontro: 30/08/2018 (período da tarde)

A professora inicia o 3º Encontro, expondo aos estudantes a proposta de utilização de um protótipo do instrumento de medida, o quadrante geométrico. Faz uma mobilização sobre a apresentação dos *slides* que mesclam texto e imagens que remetem ao contexto histórico do instrumento, abordando as necessidades humanas da época, as quais levaram ao uso do quadrante. Alguns desses *slides* constam nos anexos.

A partir dos *slides*, os estudantes tiveram acesso a imagens de situações reais da época do quadrante, que indicavam situações de medição, incluindo a figura do documento original que trata do uso do quadrante geométrico, que consta no item 3.2.2 desta pesquisa. Juntamos nos anexos, alguns dos slides referentes a essa apresentação.

Na sequência dos *slides*, é apresentado um trecho do filme *1492 – A conquista do paraíso*, que aborda a viagem de Colombo por mares desconhecidos, na busca por ouro e glória. A cena do filme exibida aos estudantes mostra o personagem Colombo explicando ao responsável de sua

embarcação, Mendez, como se orientava no mar pelas estrelas. Ele utiliza o instrumento de medida quadrante, num quarto de círculo. Uma das falas de Colombo, durante a cena, ao ensinar Mendez a usar o quadrante, que a professora retoma no momento de socialização dos *slides*, é: “Não se mexa! O erro de 1º (grau), corresponde a uma diferença de 600 léguas de distância.”

Ao promover uma reflexão com os estudantes sobre o que foi exposto, a pesquisadora retoma o movimento do 1º encontro, ao relacionar o papel do uso dos instrumentos de medida com as produções das necessidades humanas e a demanda por conhecimento.

Nesse encontro contamos com 17 estudantes, os quais foram organizados em quatro grupos, sendo o grupo A com cinco integrantes e os demais, B, C e D, com quatro. A divisão foi realizada por sorteio.

Com o objetivo de identificar, de forma organizada, a exposição dos episódios selecionados, usamos as seguintes siglas:

- ✓ UIGA – Utilização Instrumento Grupo A;
- ✓ UIGB – Utilização Instrumento Grupo B;
- ✓ UIGC – Utilização Instrumento Grupo C;
- ✓ UIGD – Utilização Instrumento Grupo D
- ✓ UIRE – Utilização Instrumento Registro Escrito;
- ✓ UIRC – Utilização Instrumento Roda Conversa.

Da mesma forma que nos Encontros anteriores, utilizamos as siglas: AUD, AV e RE, por exemplo, AUD_UIGA: WA0075, que significa -fala dos integrantes do grupo A, relativa às ações sobre a utilização do instrumento, a partir do áudio WA0075. Utilizamos também a sigla RC para os dados coletados por áudio e vídeo, durante a realização da roda de conversa entre os grupos, antecedida pelas siglas AUD_UI ou AV_UI e seguida pelo código alfanumérico emitido pelo arquivo de áudio ou vídeo: AV_UIRC M2U00112 (gravação de vídeo durante a roda de conversa, a partir do arquivo M2U00112).

Identificamos a fala de cada estudante, assim como nos demais Encontros, com algumas letras de seu nome

Conforme descrito no item 3.2.2 do capítulo da Metodologia, os estudantes receberam um material de apoio para o desenvolvimento das ações correspondentes ao 1º e 2º momento do encontro, composto pelo excerto traduzido do tratado *Del modo di misurare*, o qual remete à utilização do instrumento, que consta no item 3.2.2, e a respectiva imagem que indica seu uso, que aparece no item 4.2. Os grupos receberam também um protótipo do quadrante geométrico construído pela professora, em papel cartão, conforme ilustra a figura 31. Foram entregues aos grupos também, réguas e esquadros não graduados, barbante, canetas e folhas de sulfite.

Figura 31: Entrega do protótipo do quadrante para cada grupo

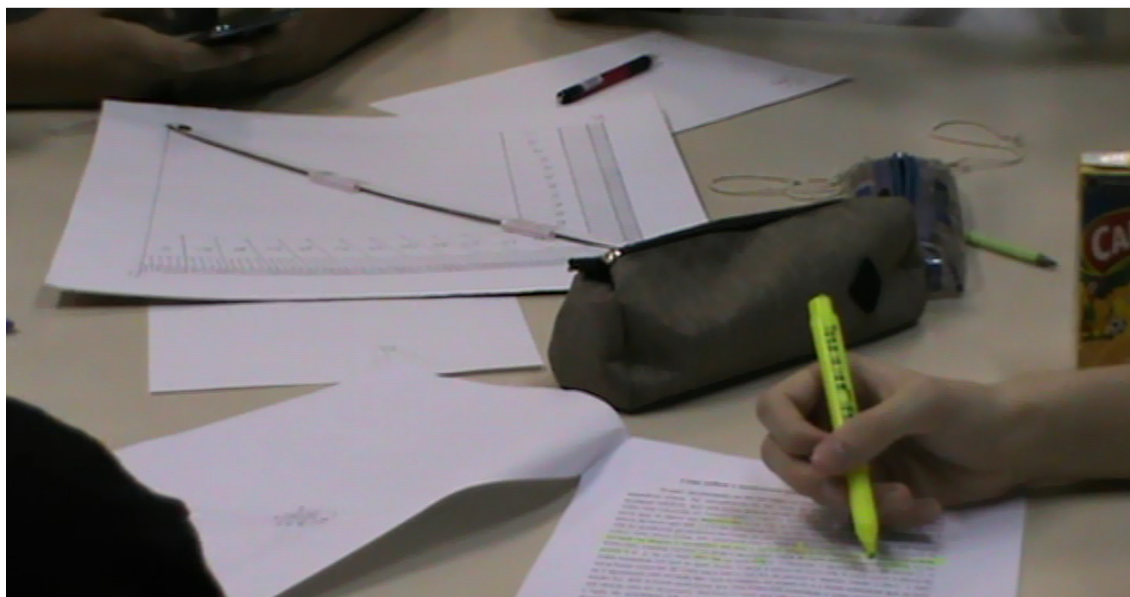


Fonte: Acervo pessoal da pesquisadora

Cada grupo leu a tradução do excerto referente ao emprego do instrumento de medida quadrante geométrico.

Em uma segunda leitura, os integrantes se organizaram, de maneira a destacar no texto (grifo) o que interpretaram como essencial, ou seja, quais as ações necessárias para utilizar o instrumento, mesmo que essas ações não estivessem totalmente claras para o grupo (Figura 32). Cada grupo elencou as ações necessárias para o uso do quadrante, de sorte a realizarem os registros com suas próprias palavras do que compreenderam sobre a leitura, isto é, interpretando a partir da mobilização de seus conhecimentos o que cada ação indicava no processo de utilização. Alguns integrantes faziam a leitura das ações, todos juntos articulavam a interpretação das mesmas e outros integrantes registravam as reflexões.

Figura 32: Grupo A realizando a leitura do excerto e destacando s ações para a utilização do quadrante



Fonte: Acervo pessoal da pesquisadora

Ao iniciar as ações do 2º momento do encontro, cada grupo, em razão das reflexões efetivadas sobre as ações grifadas no excerto e da figura que remete ao uso do instrumento, deveriam elaborar uma situação-problema envolvendo medição e que pudesse ser solucionada com o emprego do quadrante geométrico.

Os grupos se dividiram no espaço físico da escola, tendo em vista que apenas a sala de aula, para a execução dessas ações, seria inviável. Portanto, dois grupos, A e B, realizaram as ações no espaço da sala de aula, o grupo D usou o espaço do pátio da escola e o grupo C, o espaço da quadra poliesportiva.

Apresentaremos quatro episódios que foram construídos a partir das ações propostas para a utilização do quadrante geométrico.

Nomeamos o 1º episódio como, “conhecimentos matemáticos articulados e desenvolvidos, durante as ações de utilização do quadrante geométrico – grupo A”. Os dados desse episódio remetem a mobilização entre os conhecimentos já desenvolvidos pelos estudantes do grupo A e os conceitos

matemáticos sintetizados no processo de utilização do protótipo do instrumento, de modo a construir um diálogo entre a história e o ensino de matemática.

Apresentamos, a seguir, a fala de estudantes do grupo A, bem como de seus registros escritos:

AV_ UIGA M2U00113; M2U00117; M2U00124:

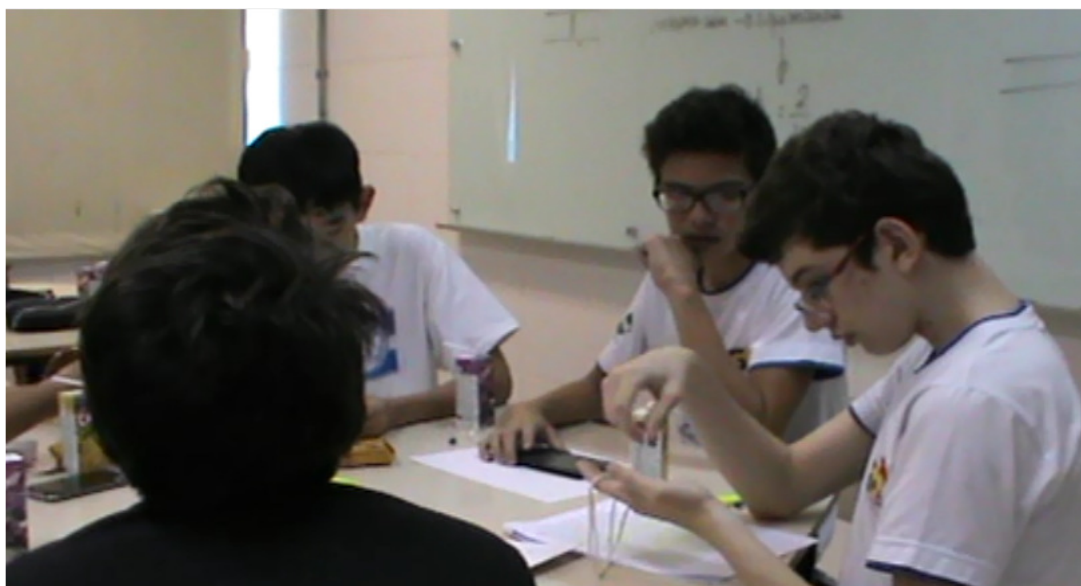
Léo: *“Como eles sabem quais são essas proporções?”* (O estudante se refere às razões entre as distâncias (EH e EF) e o lado que o apontador marca, no quadrante).

Professora: *“Ele deu alguns exemplos no documento.”* (A pesquisadora, apontando para o excerto e mostrando, no desenho, as possibilidades de o apontador cair no lado BC ou DC do quadrante).

Tavo: *“Léo, onde vamos colocar isso?”* (O estudante se referia ao pedaço de barbante)

O estudante Léo não responde. Apenas observa o pedaço de barbante, como ilustra a Figura 33.

Figura 33: Grupo A realizando as ações de reflexão sobre o excerto



Fonte: Acervo pessoal da pesquisadora

Analisando essas falas do grupo, observamos o processo de reflexão dos estudantes com respeito às ações que determinam o uso do quadrante. Notamos, pela expressão de Tavo e Léo (Figura 33), que, nesse momento, a relação entre os materiais disponibilizados e o instrumento ainda não era compreensível.

Examinando os dados coletados desse grupo, as imagens, falas e registros escritos, constatamos que não solucionaram a situação-problema de medição que elaboraram, empregando adequadamente o instrumento, conforme indica a figura de como usar o quadrante geométrico. O grupo definiu a mesa como sendo a torre e marcou um ponto no chão, próximo à parede, delimitando a distância a ser medida. Nenhum dos integrantes posicionou o quadrante na extremidade da mesa, como sendo a ponta da torre, para visualizar o ponto pela pínula e calcular a distância entre a mesa e o ponto (Figura 34).

Figura 34: Grupo A posicionando o quadrante para realizar as ações de medição referentes à situação-problema

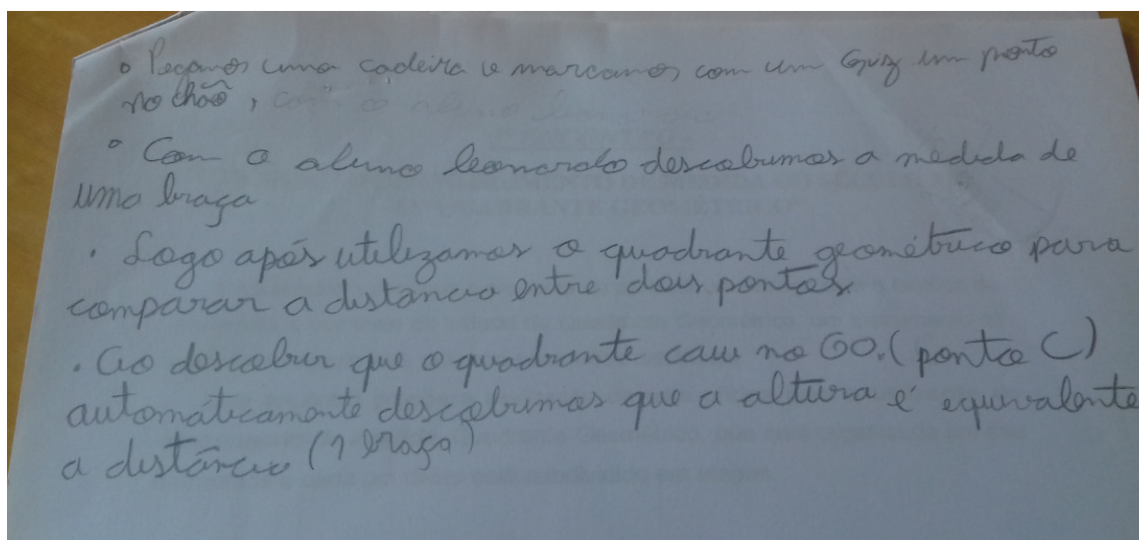


Fonte: Acervo pessoal da pesquisadora

De acordo com o registro escrito do grupo, conforme ilustra a figura 35, concluímos que o cálculo da distância não está correto, entretanto, podemos observar que os estudantes mostraram a relação de proporção existente no instrumento de medida, a partir do excerto, por meio da anotação (RE_UIGA):

“O quadrante caiu no ponto C, automaticamente, descobrimos que a altura é equivalente à distância (1 braça).” Mesmo não posicionando o quadrante no local correto, ao visualizar o ponto pela pínula, o marcador apontou o ponto C do instrumento. Voltando às reflexões do excerto, construíram as razões de semelhança entre os triângulos formados pelo quadrante e pelo espaço da situação-problema. O documento indica essa razão, “[...] Quando o apontador cai no ponto C, a linha estendida EF que se quer medir é igual à altura da torre EB. E para saber a altura da torre basta estender de cima para baixo um fio de prumo e, depois, medir o fio [...]” (BARTOLI apud SAITO e DIAS, 2011, p. 17).

Figura 35: Anotação produzida pelo grupo A ¹⁶



Fonte: Acervo pessoal da pesquisadora

Compreendemos, portanto, que o grupo A não se apropriou do processo completo de utilização do quadrante, tendo em vista que não posicionou o quadrante no local indicado para realizar a medição, fato confirmado pela

¹⁶ - Pegamos uma cadeira e marcamos com um giz um ponto no chão,

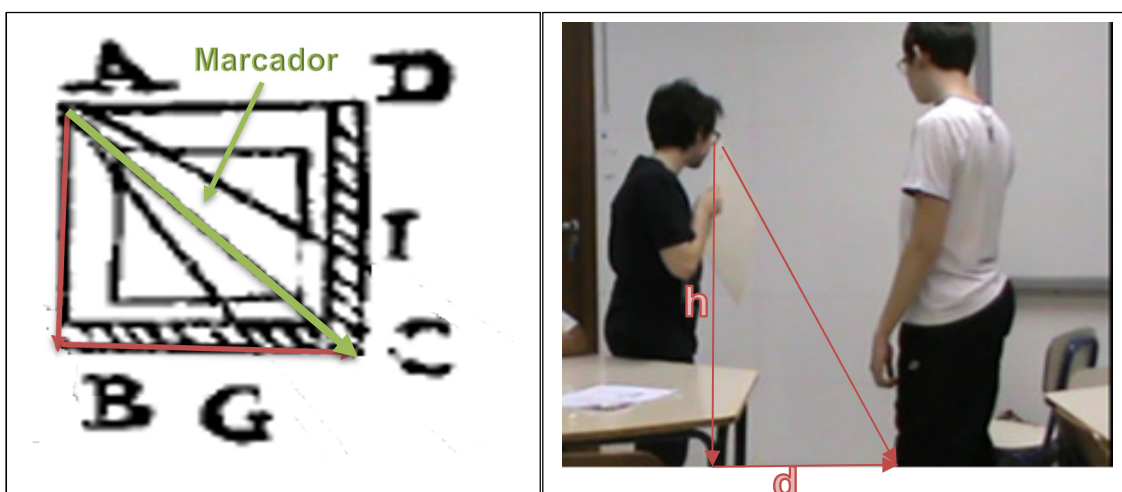
- Com o aluno Leonardo descobrimos a medida de uma braça

- Logo após utilizamos o quadrante geométrico para comparar a distância entre dois pontos

- Ao descobrir que o quadrante caiu no 60. (ponto C) automaticamente descobrimos que a altura é equivalente a distância (1 braça)

ausência de articulação nas anotações com o resultado da distância equivalente a uma braça. Todavia, verificamos a mobilização dos conhecimentos dos estudantes, ao articularem o conceito de semelhança entre triângulos sintetizado no processo de medição (Figura 36). Inferimos, portanto que houve um movimento em relação ao pensamento teórico do objeto matemático, uma vez que mobilizaram as propriedades internas desse conceito. Eles precisaram visualizar um triângulo retângulo no espaço (no ar, por meio da mirada) indicado para a medição, para então comparar com o triângulo do quadrante.

Figura 36: Grupo A articulando a formação do triângulo retângulo no espaço da situação-problema



Fonte: Acervo pessoal da pesquisadora

Com base nas análises do grupo A, podemos sintetizar a mobilização sobre o conceito de semelhanças entre triângulos, com a resolução da situação-problema, a partir da seguinte relação matemática:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{h}{d}$$

Nomeamos o 2º episódio como, “conhecimentos matemáticos articulados e desenvolvidos, durante as ações de utilização do quadrante geométrico –

grupo C". Os dados desse episódio remetem a mobilização entre os conhecimentos já desenvolvidos pelos estudantes do grupo C e os conceitos matemáticos sintetizados no processo de utilização do protótipo do instrumento, de modo a construir um diálogo entre a história e o ensino de matemática.

Analizamos nesse Episódio, os dados do grupo C que, como descrito anteriormente, executou as ações desse momento, no espaço físico da quadra poliesportiva da escola. Empregou a arquibancada para elaborar a situação-problema. Portanto, a representação da torre definida pelo grupo foi a altura entre o chão e a grade do patamar, no alto da arquibancada (Figura 37). Os estudantes marcaram com giz um ponto no chão no lado oposto ao patamar da arquibancada, como sendo a distância a ser medida pelo quadrante. Definiram a braçada do integrante Vini como padrão de medida.

Figura 37: Grupo C elaborando a situação-problema no espaço da quadra poliesportiva



Fonte: Acervo pessoal da pesquisadora

As falas que seguem, assim como a Figura 38, explicitam o diálogo dos integrantes do grupo ao mobilizarem os conceitos matemáticos que estavam sintetizados nas ações para resolver a situação-problema utilizando o quadrante.

AV_ UIGC M2U00119; M2U00120; M2U00121; M2U00123:

Dois integrantes subiram ao patamar da arquibancada e posicionaram o quadrante na grade de apoio. Olharam o ponto marcado no chão pela pínula e confirmaram o apontador, na parte 35 do lado BC.

Fani mede com barbante a distância entre o ponto marcado no chão até o ponto também no chão, próximo ao patamar da arquibancada, que o grupo estabeleceu como a distância a ser calculada. Compara com a braçada de Vini, e expressa o resultado para os demais integrantes: *“Duas braçadas e setenta e cinco (2,75 braçadas).”*

Vani: *“Como assim, Fani? Não tem isso, 2,75 braçadas.”*

Fani: *“Tem sim. É justamente isso que a gente está falando. 2,75 braçadas no chão”.*

Vani não acompanha a estratégia de Fani e Vini, ao concluir que a distância entre os dois pontos marcados corresponde a 2 braçadas inteiras e mais 0,75 de uma braçada de Vini.

Fani: *“Agora a altura.”*

E o grupo inicia a medição da altura da torre, utilizando novamente o barbante.

Fani: *“Quase três. 2,9 braçadas.”*

Figura 38: Sequência de ações do grupo C para medir a altura da grade do patamar até o chão



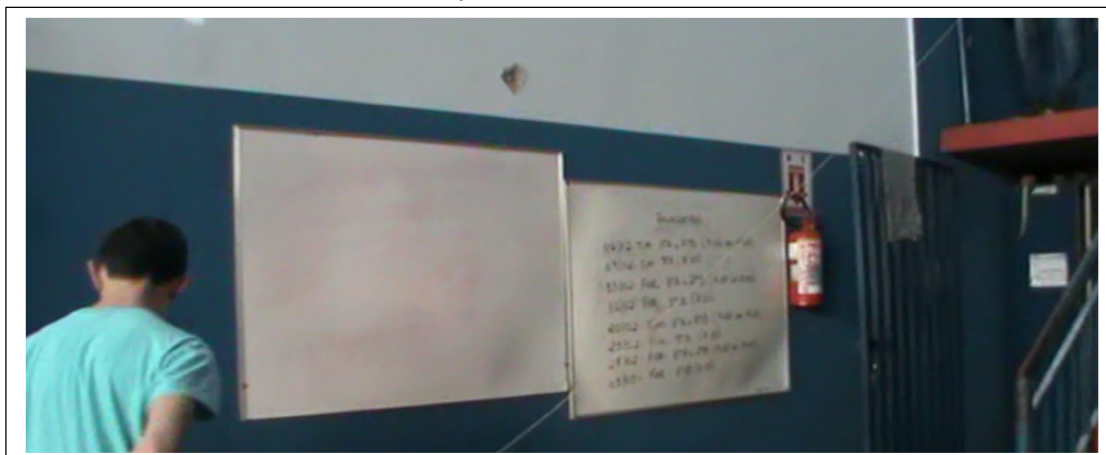
Fonte: Acervo pessoal da pesquisadora

O grupo mediu a distância na posição diagonal entre o topo da grade do patamar da arquibancada e o ponto marcado no chão e compara com a braçada de Vini.

Henry: *“3,25 braçadas.”*

As medidas indicadas acima nas falas dos estudantes, foram calculadas por aproximação, a partir do padrão da braça do estudante Vini. O grupo até esse momento, não utiliza o recurso de calculadora ou algoritmos para calcular esses resultados.

Figura 39: Sequência de ações do grupo C para medir a reta diagonal entre a grade do patamar e o chão



Fonte: Acervo pessoal da pesquisadora

O grupo volta ao excerto e tenta relacionar as medições da situação-problema criada com a imagem de como usar o quadrante.

Figura 40: Ação do grupo C para articular a situação-problema com a utilização do quadrante



Fonte: Acervo pessoal da pesquisadora

Seguem as falas de estudantes do grupo C que evidenciam os movimentos de mobilização dos conhecimentos matemáticos para resolução da situação-problema, conforme apontamento nas figuras 39 e 40.

AV_ UIGC M2U00119; M2U00120; M2U00121; M2U00123:

Henry: *“Então tem que medir dali, até aqui então, porque o E está aqui e o F ali.”* (O estudante aponta o ponto no chão na direção perpendicular ao patamar da arquibancada como sendo o ponto E, e o outro ponto também no chão, oposto ao patamar, como sendo o ponto F).

Vini: *“É esse o objetivo. É para medir distância.”*

Fani: *“Então, a distância de lá até lá, é de 2,65 braças.”* (Indicando a distância entre o ponto no chão, na direção perpendicular ao patamar da arquibancada, e o outro ponto também no chão, oposto ao patamar). *“O problema é descobrir esse negócio, 35.”* (Indicando as partes do quadrante do lado BC). *“Então, esse 35 (indicando o apontador) vai corresponder a 3,25 braças.”* A estudante se refere a medida da linha diagonal entre o topo da grade do patamar da arquibancada e o ponto marcado no chão, que o estudante Henry, identifica como sendo 3,25 braçadas.

A partir da fala de Fani, fica evidente que a estudante associa a relação entre o quadrante e o espaço delimitado pelo grupo, como sendo dois triângulos retângulos, associando o apontador do instrumento e a diagonal do espaço como sendo as hipotenusas dos triângulos.

Analisamos que, até esse momento, nem todos do grupo haviam se apropriado de todo o processo de uso do quadrante, elaborando uma situação envolvendo medição, sem determinarem qual seria o problema a solucionar. Apenas os integrantes Henry e Vini, por meio de suas falas, indicam que perceberam que o problema a resolver na situação seria encontrar a distância entre o ponto no chão na direção perpendicular ao patamar da arquibancada e o outro ponto também no chão, oposto ao patamar, marcado com giz.

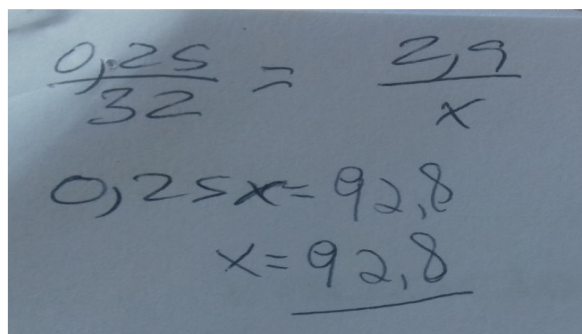
Os integrantes continuam em suas anotações, discutindo entre si para estabelecerem qual seria o problema daquela situação, até que Vini associa o lado AB do quadrante com a altura entre a grade do patamar da arquibancada e o chão. Declara (AV_UIGCM2U00120): “*Isso é mais ou menos $\frac{1}{4}$ de braça* (apontando para o lado AB do quadrante).”

As falas explicitadas na sequência, explanam a continuidade das mobilizações dos estudantes, na tentativa de articular seus conhecimentos matemáticos internalizados com objetos matemáticos sintetizados nas ações de medição que estavam realizando, na tentativa de solucionar corretamente a situação-problema, com o uso do quadrante.

AV_ UIGC M2U00121; M2U00123:

Vini: “*Preciso de um papel.*” O integrante registra a relação que construiu (Figura 41).

Figura 41: Anotação produzida pelo grupo C



$$\frac{0,25}{32} = \frac{2,9}{x}$$

$$0,25x = 92,8$$

$$x = \underline{92,8}$$

Fonte: Acervo pessoal da pesquisadora

Vini: “*O que significaria esse resultado (referindo-se ao 92,8)?*”

Fani: “*Também não sei.*”

A integrante recomenda que é melhor solicitar a orientação da pesquisadora.

Ao retornarem para a sala, Fani e Vini refletem juntamente com a pesquisadora, ao passo que Vini afirma: “*35 não está correto, pois não corresponde a 35 braças. Então, temos que considerar 60 (apontando para o lado AB do quadrante) e 2,9 da altura da torre para calcular a distância no chão.*”

Na sequência das reflexões, Vini registra seu pensamento, conforme ilustra a Figura 42.

Figura 42: Anotação produzida pelo grupo C

$$\frac{60}{35} = 2,9+ \quad \times$$

$$\frac{60}{35} = 3,15 \quad \times$$

$$60x = 110,25$$

$$x =$$

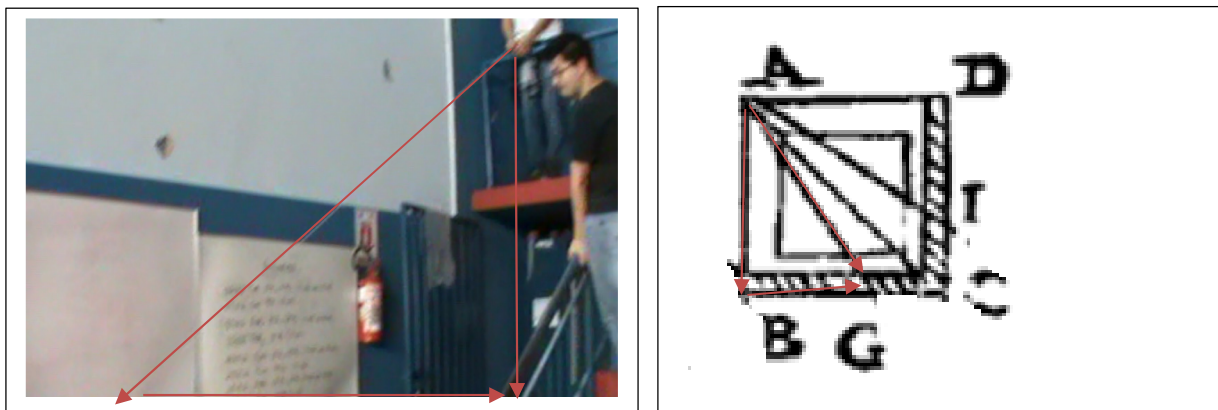
$$\text{chao} = 1,83$$

A pesquisadora questiona o grupo, após verificar as anotações: *“Vocês conferiram o resultado? Tiraram a prova real no local?”*

Fani: *“Não.”*

A partir das falas e dos registros do grupo, notamos que os estudantes, após muitas reflexões e discussões, compreenderam que o objetivo era medir a distância entre os pontos marcados no chão e que isso era possível, a partir da construção de uma relação entre semelhanças de triângulos. As primeiras razões entre os triângulos não estavam adequadas, mas as tentativas seguintes, após mobilização e articulação de conhecimentos já desenvolvidos, organizaram as razões de maneira correta, relacionando a semelhança entre os dois triângulos retângulos, conforme ilustra a Figura 43.

Figura 43: Grupo C mobilizando a relação de semelhança entre os triângulos do espaço da situação-problema e do quadrante



Fonte: Acervo pessoal da pesquisadora

Não é possível confirmar a exatidão do resultado calculado pelo grupo, tendo em vista que não foi feita a conferência da distância no local.

Sintetizando esse Episódio, constatamos que os estudantes do grupo C mobilizaram seus conhecimentos matemáticos sobre medição, semelhança entre triângulos e números racionais. Esse movimento dos conceitos matemáticos propiciaram ao grupo, se apropriarem do processo de uso do quadrante, bem como movimentaram seu conhecimento para desenvolver uma solução para a situação-problema elaborada pelo grupo.

Os estudantes relacionaram a braça com unidade de medida e a utilizaram para comparar grandezas (as distâncias entre os pontos e a braçada de Vini). Essa articulação aponta que houve um movimento do conceito de medida no pensamento dos estudantes, de forma a mobilizarem a essência desse objeto matemático, constituintes do conceito teórico de medida.

O grupo mobilizou e articulou os conhecimentos de números racionais, tanto na representação fracionária quanto na decimal. Observamos, pelas falas e pelos registros, que as comparações de medida feitas em fração logo eram transformadas para a forma decimal e os cálculos também acompanhavam essa representação.

Ressaltamos que a representação decimal não aparece no tratado e nem no instrumento, uma vez que nesse período histórico, o conceito de número

decimal ainda não havia sido disseminado, porém os estudantes já possuíam esse conhecimento internalizado e o articularam.

A representação do número na forma decimal, acontece apenas no séculos XVIII para XIX, quando o homem vai precisar dar conta de cifras muito grandes, para administrar a moeda proveniente da ascensão do comércio.

A representação fracionária que aparece no tratado e nas articulações para a utilização do instrumento, segundo Dias (2007), refere-se a um fracionamento da unidade e pertence a gênese do número racional, que é utilizada em situações que precisam representar a parte de um todo.

Na Grécia a palavra número era usada só para inteiros. Uma fração não era considerada como um ente único mas como uma razão ou relação de inteiros. (BOYER, 1993 apud DIAS, 2007, p. 112).

Esse movimento aponta que houve uma articulação no que se refere as formas de registros fracionário para decimal do número racional, de modo a operarem com os números de modo mais simples, inclusive, utilizando a calculadora. Salientamos que a flexibilização entre fração, representação fracionária, representação decimal, razão, proporção e número racional foi realizada de modo diferenciado ao que consta nos livros didáticos que utiliza-se na escola. Isso possibilita a compreensão de como esses conceitos se articulavam na atividade dos praticantes de matemática, diferentemente da matemática formalizada. Ao realizarem esse movimento dos conceitos, a partir das ações de medição indicadas no documento, os estudantes constroem um novo significado para esses objetos. Não recorrem as suas definições, ou seja, as suas características externas. Eles se apropriam das relações internas desses objetos, conseguem relacioná-los com seus nexos externos, o que aponta para o desenvolvimento do pensamento teórico desses estudantes em relação a esses conceitos matemáticos (DAVYDOV, 1978).

Quanto ao conceito de semelhança de triângulos, mobilizado pelo grupo, não identificamos em nenhuma fala ou registro dos integrantes essa definição. Os estudantes articularam seus conhecimentos sobre proporção, razão e semelhança de triângulos, ao construírem passo a passo, por meio das ações

indicadas pelo excerto, a solução da situação-problema elabora pelo grupo. Eles precisaram visualizar um triângulo retângulo, no espaço indicado para a medição, para então comparar com o triângulo do quadrante. Foi preciso movimentar esses conceitos, a fim de se apropriarem do instrumento e realizarem a medição usando o quadrante. Quem retomou com o grupo a definição de semelhança de triângulos foi a professora, no momento em que estavam refletindo e discutindo sobre os resultados da situação-problema.

Por essa análise, concorda-se com Kopnin (1978), quando o autor afirma que um novo conhecimento sempre é adquirido a partir do ressignificado de um conhecimento prévio:

Por conseguinte, para formar uma dedução e através desta adquirir novo conhecimento, é necessário partir dos juízos e conceitos já existentes. Os novos conceitos e juízos obtidos como resultado da dedução se constituem no ponto de partida para a formação de novas deduções, que levam a um novo conhecimento. (KOPNIN, 1978, p. 191).

Nomeamos o 3º episódio como, “conhecimentos matemáticos articulados e desenvolvidos, durante as ações de utilização do quadrante geométrico – grupo D”. Os dados desse episódio remetem a mobilização entre os conhecimentos já desenvolvidos pelos estudantes do grupo D e os conceitos matemáticos sintetizados no processo de utilização do protótipo do instrumento, de modo a construir um diálogo entre a história e o ensino de matemática.

Analisamos nesse Episódio, os dados do grupo D que, como descrito anteriormente, executou as ações desse momento, no espaço do pátio da escola. Os estudantes utilizaram a mesa para representar a torre do desenho e marcaram um ponto no chão com giz, de sorte que pudessem calcular a distância entre o ponto e a mesa, conforme ilustra a Figura 44.

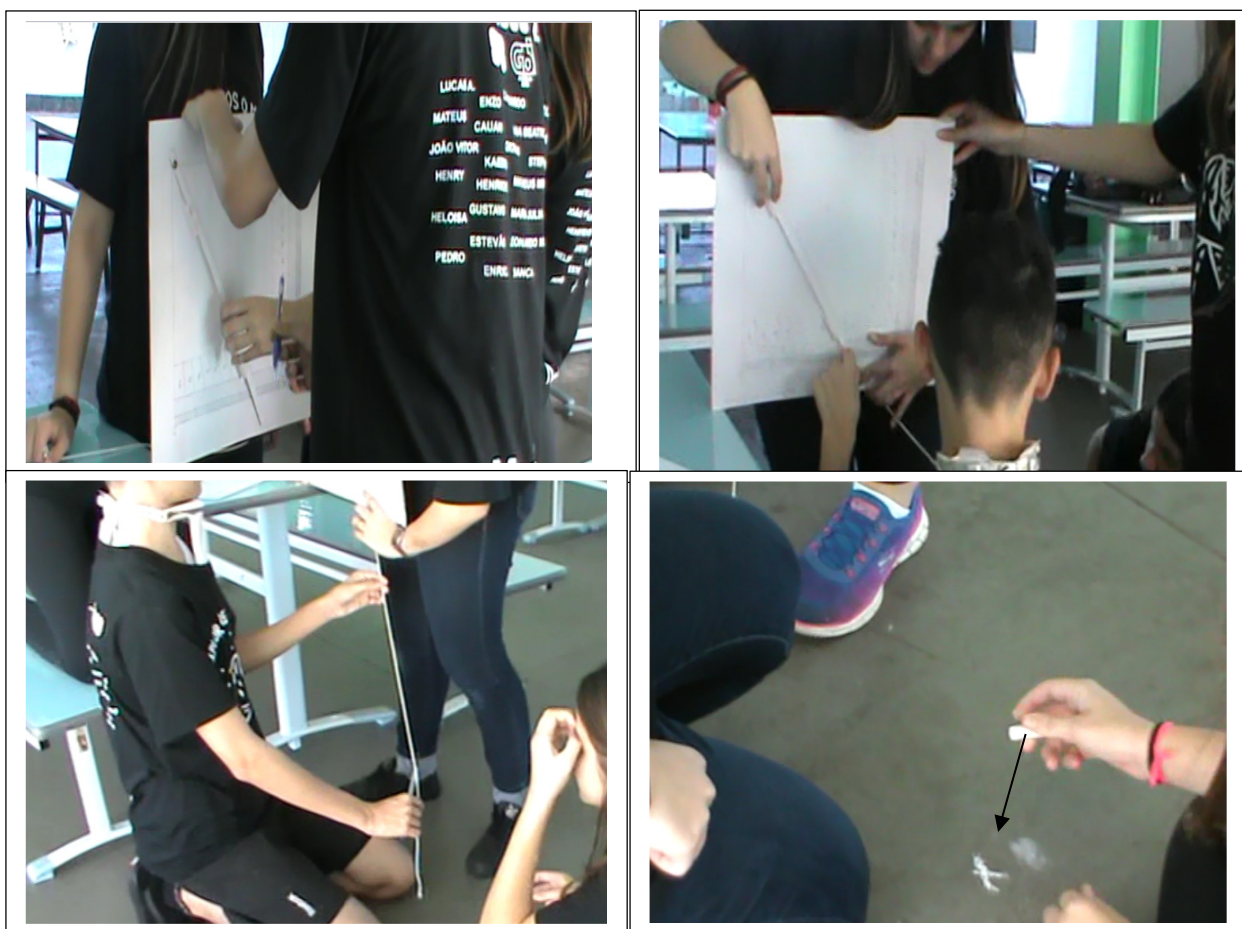
Figura 44: Grupo D mobilizando a situação-problema



Fonte: Acervo pessoal da pesquisadora

O grupo inicia o processo de medição pelas partes do quadrante (lado BC do quadrante), conforme ilustra a Figura 45, sem fazer qualquer relação entre o ponto marcado no chão e o apontador. Determina aleatoriamente uma parte do lado BE, coloca uma das pontas do barbante na extremidade do apontador e estica até o ponto marcado no chão. Na sequência, constata que o pedaço de barbante não alcança o ponto assinalado no chão, marcando um novo ponto, no local onde o barbante alcançava.

Figura 45: Sequência de ações do grupo D para solucionar a situação-problema

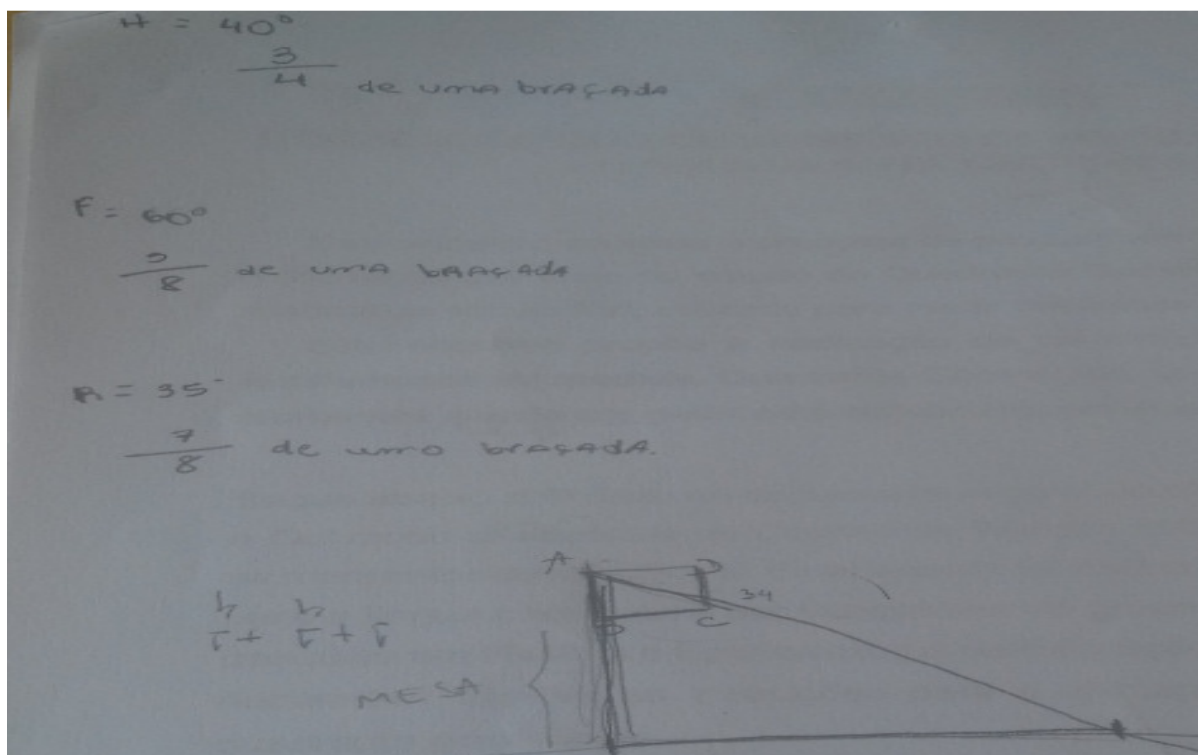


Fonte: Acervo pessoal da pesquisadora

Nos registros escritos do grupo (Figura 46), não encontramos qualquer relação que demonstrasse o cálculo da distância entre o primeiro ou o segundo ponto e a mesa.

Baseados nos dados organizados nesse Episódio, entendemos que não houve uma compreensão na sequência de ações necessárias de como usar o quadrante, tão pouco seus integrantes fizeram a relação da situação-problema que elaboraram com a imagem que ilustra como usar o instrumento.

Figura 46: Registro produzido pelo grupo D



Fonte: Acervo pessoal da pesquisadora

De volta a sala de aula, após executar as ações, o grupo reflete e discute com a professora as tentativas de resolução da situação-problema que havia elaborado. A integrante Iza afirma (AUD_UIGDWA0075): *“Eu vi que tinha um negócio aqui, só que eu não pensei que esse negócio era para olhar”* (a estudante se refere à pínula do quadrante).

Mati (AUD_UIGDWA0075): *“A gente olhou o grau assim e marcou o x no chão.”* Observamos pela sua fala, que Mati interpreta equivocadamente as divisões do quadrante como sendo os graus, assim como em uma circunferência.

Analisamos que não houve uma mobilização dos conhecimentos matemáticos, por parte dos integrantes desse grupo, tendo em vista que não se apropriaram do instrumento de medida. Não articularam, em seu pensamento, a relação de triângulos semelhantes no quadrante e no espaço da situação-

problema, ou qualquer outra relação matemática, como ocorrera em outros grupos, como, por exemplo, razão e proporção, números racionais ou medida.

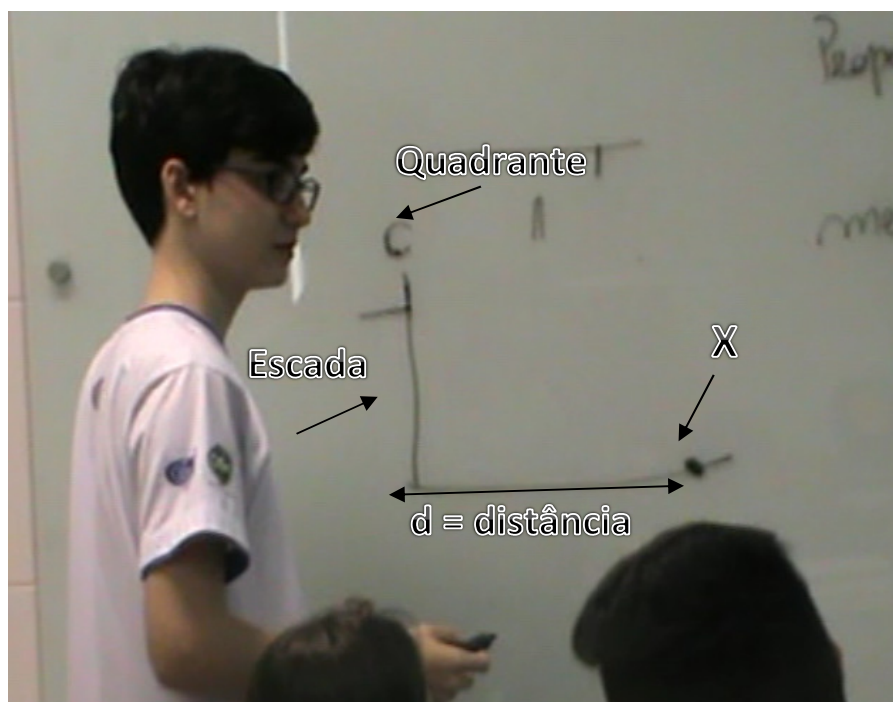
A pesquisadora socializou com cada grupo os movimentos e os resultados de suas situações-problema, à medida que concluía as ações. O grupo B foi o último a terminar e a retornar para sala, sendo convidado pela pesquisadora a realizar a socialização, de modo que todos os grupos ouvissem. Os integrantes timidamente concordaram, e esse momento acabou transformando-se em uma grande roda de conversa.

Nomeamos o 4º episódio como, “conhecimentos matemáticos articulados e desenvolvidos, durante as ações de utilização do quadrante geométrico – grupo B”. Os dados desse episódio remetem a mobilização entre os conhecimentos já desenvolvidos pelos estudantes do grupo B e os conceitos matemáticos sintetizados no processo de utilização do protótipo do instrumento, de modo a construir um diálogo entre a história e o ensino de matemática.

Analizamos na sequência os dados desse Episódio.

O integrante Rico foi convidado a ir até a lousa, para representar e expressar para os demais estudantes como seu grupo solucionou a situação-problema, conforme ilustra a Figura 47.

Figura 47: Integrante do grupo B representando a situação-problema



Fonte: Acervo pessoal da pesquisadora

A conversa que segue, assim como as Figuras 48 e 49 evidencia o movimento dos conceitos realizados pelo grupo B, ao articularem seus conhecimentos matemáticos internalizados com os objetos matemáticos mobilizados nas ações de medição, durante o processo de utilização do instrumento.

AV_ UIGB M2U00125; M2U00126:

Rico: *“Usamos o barbante para medir a altura do quadrante até o chão, mas o pedaço não chegou até o chão.”*

Pesquisadora: *“E aí? O que vocês fizeram?”*

Rico: *“Nós pegamos o pedaço e dividimos em partes iguais, para poder saber o pedaço que estava faltando até encostar no chão.”*

O pedaço de barbante usado pelo grupo B media aproximadamente uma braça.

Pesquisadora: *“Depois que dividiram o barbante em partes iguais, a que conclusão chegaram em relação à altura? Qual a medida encontrada?”*

Rico: *“Uma braça inteira e mais $\frac{1}{4}$.”*

Pesquisadora: *“O pedaço que estava faltando correspondia a uma parte de quatro, em que foi dividido o pedaço de barbante.”*

Rico: *“Lembramos depois que não tínhamos considerado a medida do quadrante para acrescentar na altura da escada.”*

Pesquisadora: *Como chegaram na medida do quadrante para somar a altura da escada?*

Rico: *“Do mesmo jeito. Dividimos o barbante em partes iguais e deu também mais ou menos um quarto do barbante inteiro.”*

Pesquisadora: *“Então qual a medida da altura?”*

Rico: *“Deu uma braça inteira, mais $\frac{2}{4}$ de braça.”* (O grupo resolve a fração e transforma o resultado em número decimal, chegando ao resultado da altura correspondente a 1,5 braças).

Figura 48: Registro produzido pelo grupo B

$$1 + \frac{2}{4} = \frac{4 + 2}{4} = \frac{6}{4} = \left(\frac{3}{2}\right) = 1,5$$

Fonte: Acervo pessoal da pesquisadora

Pesquisadora: “E a parte do quadrante? Quando vocês miraram o ponto x pela pínula, a qual parte do quadrante correspondeu?”

Rico: “Na parte 55 do lado BC.”

Pesquisadora: “Muito bem! Com todas essas medidas, como vocês pensaram para calcular a distância da escada até o ponto x ? Relacionaram alguma estratégia matemática?”

Rico retoma os registros do grupo, porém não se sente à vontade para expressar a relação matemática elaborada pelo grupo para calcular a distância.

Figura 49: Registro produzido pelo grupo B

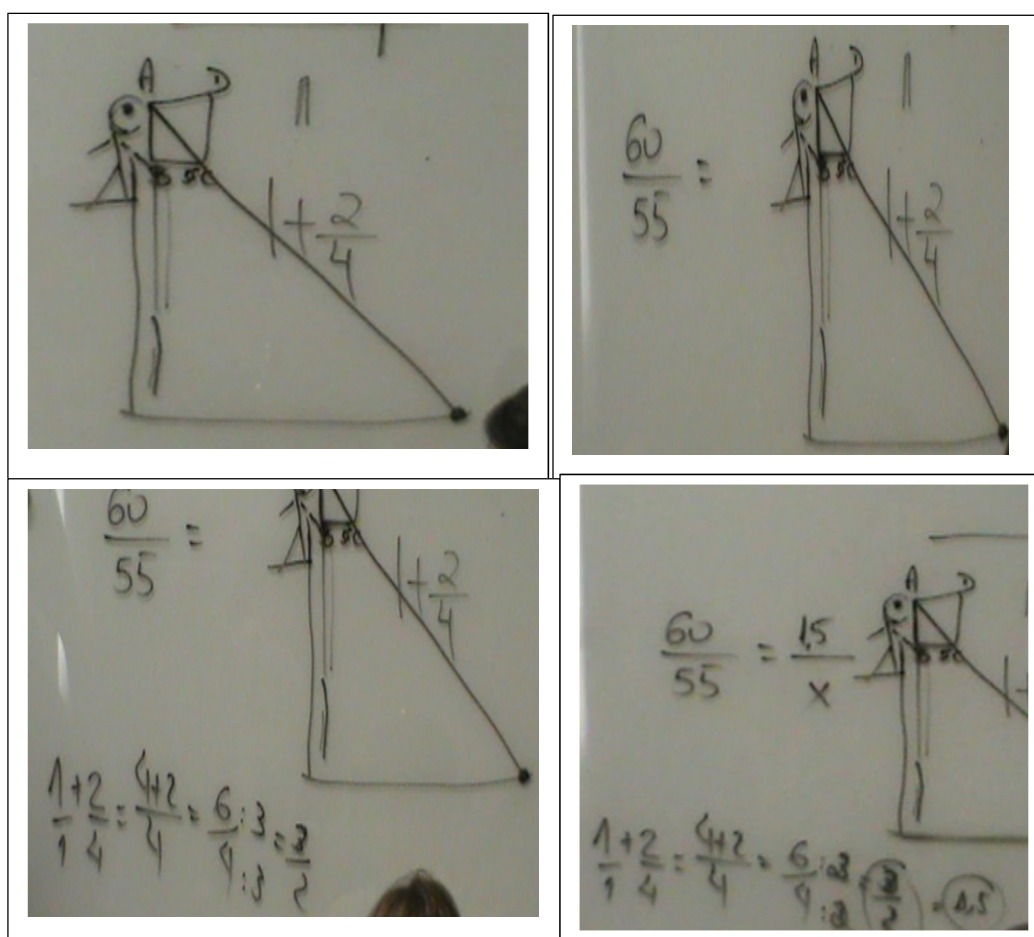
$$\frac{60}{55} = \frac{1,5}{x}$$

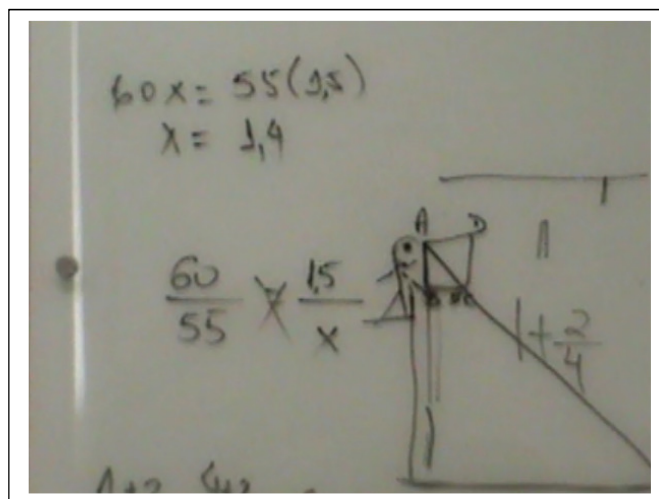
$$x \approx 1,4$$

Fonte: Acervo pessoal da pesquisadora

A professora, a partir das anotações escritas pelo grupo de Rico, dá continuidade ao movimento de socialização referente à solução da situação-problema. Mobiliza com todos os grupos a mesma estratégia matemática articulada pelo grupo B, de maneira a propiciar a apreensão dos conceitos matemáticos que estavam sintetizados naquela relação. Continua as representações matemáticas na lousa, com base no desenho de Rico quanto a semelhança de triângulos e a proporção (Figura 50).

Figura 50: Desenho do estudante Rico, integrante do grupo B, quanto a semelhança de triângulos e a proporção





Fonte: Acervo pessoal da pesquisadora

Em síntese, analisamos nesse Episódio que o movimento realizado por esse grupo foi bem próximo ao do grupo C. Seus integrantes articularam os conhecimentos das representações fracionárias e decimal. Utilizaram a representação fracionária em seus cálculos e transformaram o resultado para a representação decimal, demonstrando ao contrário do grupo C, uma afinidade maior com a operação das frações.

Usaram a braça como unidade de medida, porém, não encontramos, nos dados coletados, qual dos integrantes foi a referência para medir a braça empregada pelo grupo, mas fica evidente que também a utilizaram para comparar grandezas, assim como fez o grupo C.

Não localizamos, nas falas ou registros escritos do grupo B, qualquer referência à definição de semelhança de triângulos, todavia, analisamos que os estudantes mobilizaram seus conhecimentos sobre esse objeto matemático, ao desenvolverem as ações indicadas no excerto, em função da situação-problema elaborada pelo grupo.

Observamos, por meio da análise dos quatro Episódios, uma ressignificação no processo de aprendizagem desses estudantes, com relação aos conceitos matemáticos sintetizados no processo de aplicação do quadrante, no movimento de significação, nos grupos B e C. O movimento dos conceitos

sintetizados nesse processo foi possível, tendo em vista que os integrantes compreenderam o instrumento e seu uso.

Verificamos que houve um movimento do pensamento dos estudantes em relação aos conhecimentos matemáticos articulados durante o desenvolvimento das ações de medição, tais como, medição, números racionais, razão, proporção, semelhança de triângulos e representações numéricas. Ao realizarem o passo a passo de cada ação de medição indicada pelo excerto, os estudantes se apropriaram de suas essências, atribuindo um novo significado a esses conceitos matemáticos, vislumbrando o movimento do pensamento teórico desses objetos.

7 CONSIDERAÇÕES

Esta investigação foi iniciada com uma questão central: que conhecimentos matemáticos podem ser mobilizados e articulados, de modo a propiciar o movimento do conceito, por meio de uma atividade didática desenvolvida a partir da construção e utilização de um instrumento de medida do século XVI, o quadrante geométrico e seu respectivo tratado?

Essa questão resultou no seguinte objetivo geral: investigar o movimento do conceito na aprendizagem da matemática, a partir de uma atividade didática elaborada com base no contexto histórico do instrumento de medida quadrante geométrico.

Fundamentados na Teoria Histórico-Cultural e no movimento lógico-histórico, que, por sua vez, está alicerçado na lógica materialista dialética, analisamos e refletimos, nesta Dissertação, sobre as potencialidades didáticas do instrumento de medida quadrante geométrico e de seu respectivo documento em determinada atividade didática. Buscou-se mobilizar o movimento dos conceitos matemáticos, por meio de uma atividade didática desenvolvida junto a 20 estudantes de uma unidade escolar da rede particular de ensino, de uma cidade do Estado de São Paulo.

Uma síntese do movimento lógico-histórico do quadrante geométrico, foi realizado a partir de pesquisa sobre elementos históricos referentes ao período entre os séculos XVI e XVII, de modo a relacionar as necessidades humanas em função do contexto social, político e econômico que envolvem à construção e ao uso do instrumento de medida.

Como se trata de uma pesquisa inserida em um Programa de Mestrado Profissional em Docência para Educação Básica, o seu propósito é contribuir para o processo de ensino e aprendizagem do estudante, a partir de uma atividade de ensino, organizada de modo intencional, a propósito dos conceitos matemáticos sintetizados no processo de construção e utilização do instrumento de medida, o quadrante geométrico. Assim, a organização da Atividade Didática

contribuiu com a construção do produto educacional no formato de um vídeo paradidático.

Esse produto não consiste em um vídeo-aula, na forma de um manual prático, orientando como o instrumento deve ser construído e usado. Entretanto, seu conteúdo busca colaborar com o processo de ensino e aprendizagem com novas formas de abordagem dos conteúdos escolares. Defendemos o estudo da Dissertação para que novas atividades didáticas sejam elaboradas a partir desse vídeo paradidático.

A pesquisa guiou-se por princípios do materialismo histórico dialético, especialmente quanto às relações das necessidades humanas com a demanda pela produção de conhecimento e o movimento dos conceitos no pensamento do estudante. Amparados nos pressupostos teóricos de Davydov (1972, 1978), procuramos analisar o movimento dos conceitos dos estudantes, durante o processo de desenvolvimento das ações da atividade, as quais foram examinadas a partir da organização dos episódios. Observamos as relações no processo de aprendizagem dos objetos matemáticos sintetizados na construção e uso do instrumento de medida.

A apresentação e análise dos dados, realizada por meio de episódios, seguiram a organização das ações dos três encontros. O 1º Encontro propôs aos estudantes, a partir das ações da atividade, analisar, refletir e discutir sobre a relação do contexto histórico do instrumento de medida quadrante geométrico com as necessidades humanas, com base nos temas sobre as grandes navegações, as mudanças nas práticas militares e a passagem do feudalismo para o capitalismo, que mobilizaram sua construção e utilização.

Explicitamos, nos episódios, que os estudantes mobilizaram seus conhecimentos, de modo a articularem a relação entre as necessidades produzidas pelo homem, dentro de cada contexto, e o movimento de produção de conhecimento sobre as grandes navegações, a passagem do feudalismo para o capitalismo e as mudanças nas práticas militares.

Os grupos de estudantes que articularam o contexto das grandes navegações consideraram motivos diferentes, os quais geraram a necessidade do homem de aventurar-se por águas desconhecidas, como a procura por novos

territórios, por mercados consumidores e por fontes de matéria-prima, além da busca por ampliar e acumular capital, que era sinônimo de *status* e poder. Outros ainda apontaram a necessidade que o homem tem de dominar o desconhecido, superando-se a si próprio e ao outro.

O grupo que mobilizou o contexto da passagem do feudalismo para o capitalismo ressalta, como fonte de demanda por conhecimento, a necessidade de o homem acumular capital e elaborar meios de controle eficientes para organizar e estruturar a troca de moedas, em decorrência do crescimento do comércio burguês.

Por seu turno, o grupo que desenvolveu o contexto acerca das mudanças nas práticas militares enfatiza a necessidade do homem para a produção de conhecimento, aprimorar os aparatos de guerra, a fim de fortalecer os exércitos e conquistar o território do inimigo, na busca por riqueza e poder, ou mesmo para ampliar sua fonte de alimento.

Por meio das análises, inferimos que os estudantes articularam que não foi uma única necessidade que moveu o homem a buscar conhecimento. A humanidade produz necessidades diversas e de modo planejado, busca construir e desenvolver meios para suprir tais necessidades. Os estudantes mostraram por meio das falas e dos registros escritos que o homem produziu necessidades e, para supri-las, precisou pensar e reelaborar conhecimentos prévios, construir e desenvolver novos, concluindo, assim, que o conhecimento não surgiu do acaso.

Essa articulação da relação lógico-histórica entre a matemática e o contexto histórico do instrumento de medida, o quadrante geométrico, propicia a construção de um diálogo entre a história da matemática e o ensino da matemática. Os estudantes avançam no movimento da construção de uma nova relação de aprendizagem, abordando a concepção teórica da produção do conhecimento matemático a partir das necessidades produzidas pelo homem.

Percebemos, pelas ações do 2º Encontro, que os estudantes, por meio de seus grupos de trabalho, mobilizaram conhecimentos matemáticos sintetizados no processo de construção do quadrante. Podemos elencar o uso de objetos não graduados que foram empregados como padrões de medida, como o barbante,

o lápis, o compasso, além a braça, unidade de medida utilizada como referência para a construção do instrumento. Essa articulação evidencia um movimento nas relações de aprendizagem do conceito de medição. Podemos apontar uma desconstrução da concepção empírica de medida, a qual estava diretamente relacionada ao uso de instrumentos graduados, para a introdução de uma nova concepção na de comparação de grandezas, o que aponta a abordagem teórica desse objeto matemático.

A ausência de graduação dos instrumentos de medida usados na proposta de construção do quadrante propiciou aos estudantes a necessidade de incorporar novos elementos, a fim de desenvolver as ações da atividade didática, como, por exemplo, um pedaço de barbante para medir a distância entre dois pontos. Essas “novas” estratégias de medição, para muitos, até então, tratava-se apenas de informações descontextualizadas referentes a um determinado período da história da humanidade, retratadas por algum livro didático, ao introduzir a definição de medição.

Observamos ainda, nesse 2º Encontro, o movimento da relação de aprendizagem dos estudantes com o conhecimento de razão e proporção. Os estudantes articularam a proporção do dobro e de $\frac{1}{4}$, sem recorrer à estratégia da tabuada ou ao algoritmo da divisão. Desenvolveram, juntamente com a construção do quadrante, o significado desse objeto matemático, a sua essência, através da representação geométrica.

Houve também uma mobilização do conhecimento dos estudantes referente ao conceito de reta oblíqua, por meio da definição de retas perpendiculares e paralelas. Notamos, nesse movimento, a articulação com um conhecimento prévio.

Consideramos que a relação dos conhecimentos matemáticos sintetizados no processo de construção do quadrante, a partir do movimento lógico-histórico do instrumento, ou seja, da compreensão do desenvolvimento histórico desses objetos, possibilita a apropriação da essência desses conceitos matemáticos, propiciando um movimento do pensamento teórico dos estudantes.

No 3º Encontro, verificamos o movimento de alguns conhecimentos matemáticos, durante a execução das ações de medição. Elencamos os conceitos referentes a unidade de medida, números racionais, razão, proporção e semelhança de triângulos. Os estudantes deram um novo significado a esses objetos matemáticos, ao realizarem o passo a passo de cada ação de medição indicada pelo excerto.

Não notamos, nas análises dos episódios, o registro da definição de qualquer um desses conceitos, porém, é evidente a articulação de seus conhecimentos prévios, para tornar possível a solução da situação-problema de medição. Quanto aos conceitos sobre unidade de medida, razão e proporção, observamos um movimento semelhante ao citado anteriormente, durante as ações do 2º Encontro.

Os conhecimentos sobre números racionais foram articulados, quando os estudantes operaram suas estratégias de cálculo na representação fracionária e decimal. Os registros feitos em fração eram transformados em números decimais e vice-versa, revelando um movimento na compreensão da concepção de números racionais, no sentido de que a fração e o número decimal representam a mesma parte de um todo, concretizando-o apenas de forma diferente.

Ao analisarmos as articulações dos estudantes sobre os conhecimentos sobre proporção, razão e semelhança de triângulos, percebemos um movimento que foi sendo construído passo a passo, por meio das ações indicadas pelo excerto, na solução da situação-problema elaborada pelo grupo. Eles precisaram mobilizar, no pensamento, a forma da representação de um triângulo retângulo no espaço indicado para a medição, para comparar com a representação do triângulo formado com elementos do quadrante e, assim, aplicar esses conceitos. Foi necessário um movimento na relação de aprendizagem desses objetos matemáticos, para que pudessem se apropriar do instrumento e realizar a medição, usando o quadrante.

Consideramos, a partir da análise dos resultados, que a proposta desta pesquisa – de produção de uma interface entre a história e o ensino da matemática, por meio de uma organização intencional da atividade didática – articula e mobiliza conhecimentos do estudante para o movimento do conceito

dos objetos matemáticos sintetizados no processo de construção e uso do instrumento de medida, o quadrante geométrico.

Defendemos que o estudo do quadrante geométrico, com base em seu tratado, *Del modo di misurare*, pautado no movimento lógico-histórico, propicia aos estudantes um interesse histórico pelos conhecimentos e pelas práticas da época do instrumento, criando uma relação com seus antepassados. Em função desse interesse, eles construiriam uma articulação entre os seus conhecimentos matemáticos já elaborados e os conhecimentos matemáticos necessários para executar as ações propostas em cada etapa da atividade didática, o que se configurou como uma potencialidade didática com esse instrumento de medida, no processo de ensino e aprendizagem. As ações dos estudantes propiciaram um salto qualitativo na relação de aprendizagem desses conceitos matemáticos, apontando uma abordagem do pensamento teórico.

Nesse sentido, espera-se que o presente trabalho possa se tornar um instrumento a fim de que outros professores sejam incentivados a organizar suas atividades de ensino, de modo a propiciar em seus estudantes a apropriação do conhecimento, por meio de uma perspectiva humanizadora.

REFERÊNCIAS

BARTOLI, C. **Cosimo Bartoli Gentil'huomo, et accademico Fiorentino, Del modo di misurare le distantie, le superficie, i corpi, le piante, le province, le prospettive, & tutte le altre cose terrene, che possono occorrere agli homini, Secondo le vere regole d'Euclide, & de gli altri piu lodati scrittori.** Venetia: Francesco Franceschi Sanese, 1564.

BRITO, A. de J. Tempo, História e Educação Matemática. **BOLEMA: Boletim de Educação Matemática** (Online), v. 30, p. 390-401, 2016.

_____. A Matemática e seu ensino no século XVII: reflexões para os dias atuais. **Revista de Educação Pública**. Cuiabá, v. 20, n. 43, p. 343-355, 2011.

CAMPOS, D. F. **Debates na historiografia da matemática e a história do surgimento do cálculo infinitesimal segundo Carl Boyer.** 2006. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Minas Gerais, Faculdade de Filosofia e Ciências Humanas, Belo Horizonte, 2006.

CASTILLO, A. R. M. **Um estudo sobre os conhecimentos matemáticos incorporados e mobilizados na construção e no uso do báculo (*cross-staff*) em *A Boke Named Tectonicon* de Leonard Digges.** 2016. 121 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC-SP, São Paulo, 2016.

CRESWELL, J. W. **Projeto de pesquisa:** método qualitativo, quantitativo e misto. 2. ed. São Paulo: Artmed, 2007.

DAVYDOV, V. V. **Tipos de generalización em la enseñanza.** La Habana: Pueblo y Educación, 1978.

_____. **La enseñanza escolar y el desarrollo psíquico.** Moscu: Editorial Progreso, 1988.

DIAS, M. da S. **Formação da imagem conceitual da reta real** – um estudo do desenvolvimento do conceito na perspectiva lógico-histórica. 2007. Tese (Doutorado) – Universidade de São Paulo, Faculdade de Educação, São Paulo, 2007.

_____; SAITO, F. Algumas potencialidades didáticas do “setor trigonal” na interface entre história e ensino de Matemática. **Educação Matemática Pesquisa**, p. 1227-1253, 2014.

DI BEO, N. **O estudo do *Trattato del Radio Latino*:** Possíveis contribuições para a articulação entre História da Matemática e ensino. 2015. Dissertação (Mestrado) – Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2015.

EVES, H. **Introdução à história da matemática.** Tradução de Hygino H. Domingues. 5. ed. Campinas: Editora da UNICAMP, 2011.

HUBERMAN, L. **História da Riqueza do homem**. Tradução de Waltensir Dutra. 15. ed. Rio de Janeiro: Zahar, 1979.

KOPNIN, P. V. **Fundamentos lógicos da ciência**. Rio de Janeiro: Civilização Brasileira, 1972.

_____. **A dialética como lógica e teoria do conhecimento**. Rio de Janeiro: Civilização Brasileira, 1978.

MONTEIRO, W. **Alguns elementos que reforçam a importância da história da matemática na formação de professores**. 2012. 116 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC-SP, São Paulo, 2012.

MORAES, M. S. **Setor trigonal**: contribuições de uma atividade didática na formação de conceitos matemáticos na interface entre história e ensino de matemática. 2017. 113 f. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Docência para a Educação Básica, Faculdade de Ciências, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Bauru, 2017.

MOURA, M. O. (Org.). **A atividade pedagógica na teoria histórico-cultural**. Campinas, SP: Autores Associados, 2016.

MOURA, M. O. de. (Org.). **Educação escolar e pesquisa na Teoria Histórico-Cultural**. São Paulo: Loyola, 2017.

PEREIRA, A. C. C.; BATISTA, A. N. de S.; SILVA, I. C. da. A matemática incorporada na construção do quadrante descrito na obra *Libros del Saber de Astronomia*. **REVEMAT**, Florianópolis, p. 173-191, 2017.

PINTO, M.M. **Os instrumentos náuticos de navegação e o ensino da geometria**. 1. ed. Lisboa: Sociedade Portuguesa de Matemática, 2010.

SAITO, F. Possíveis fontes para a História da Matemática: Explorando os tratados que versam sobre construção e uso de instrumentos matemáticos do século XVI. In: SEMINÁRIO NACIONAL DE HISTÓRIA DA CIÊNCIA E TECNOLOGIA, 13., São Paulo: EACH/USP. **Anais...**, v. 1, p. 1099-1110, 2012.

_____. Instrumentos e o “saber-fazer” matemático no século XVI. **Revista Tecnologia e Sociedade**, Curitiba, v. 18, n. especial, p. 101-112, 2013.

_____. Instrumentos matemáticos dos séculos XVI e XVII na articulação entre história, ensino e aprendizagem de matemática. **REMATEC. Revista de Matemática, Ensino e Cultura** (UFRN), v. 9, p. 25-47, 2014.

_____. Número e grandeza: discutindo sobre a noção de medida por meio de um instrumento matemático do século XVI. **Ciência e Educação**, São Paulo, v. 23, n. 4, p. 917-940, 2017.

_____; DIAS, M. S. **Articulação de entes matemáticos na construção na construção e utilização de instrumento de medida do século XVI**. Natal: Sociedade Brasileira de História da Matemática, 2011.

_____; DIAS, M. S. Interface entre história da matemática e ensino: uma atividade desenvolvida com base num documento do século XVI. **Ciência e Educação**, São Paulo, v. 19, n. 1, p. 89-111, 2013.

SANTOS, L. R. **Leon Battista Alberti (1404-1472) e a medida do tempo em sua obra Matemática Lúdica**. 2014. 72 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC-SP, São Paulo, 2014.

SOUSA, M. do C. de. **O ensino de álgebra numa perspectiva Lógico-Histórica**: um estudo das elaborações correlatas de professores do ensino fundamental. 2004. 286f. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2004.

APÊNDICES

APÊNDICE A – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO DOS PAIS OU RESPONSÁVEIS

IDENTIFICAÇÃO DA PESQUISA	
<i>Pesquisa:</i> O Quadrante Geométrico: conceitos matemáticos na utilização de um instrumento de medida do século XVI.	
<i>Orientador:</i> Profª Drª Marisa da Silva Dias	<i>Instituição / Departamento:</i> UNESP/Bauru – Departamento de Educação
<i>Telefone:</i> (14) 3103 6081	<i>Endereço Eletrônico:</i> marisadias@fc.unesp.br
<i>Aluno responsável:</i> Ana Paula Minhano Aleixo da Silva	<i>Instituição / Departamento:</i> UNESP/Bauru – Programa de Pós Graduação em Docência para a Educação Básica - Mestrado Profissional
<i>Telefone:</i> (14) 99788-2650	<i>Endereço Eletrônico:</i> anapaula.mas@hotmail.com

Prezados pais ou responsáveis,

Eu, professora **Ana Paula Minhano Aleixo da Silva**, convido seu filho a participar de uma pesquisa em educação matemática. Para tanto, solicito sua autorização de forma a tornar possível a participação de seu filho como sujeito dessa pesquisa em ensino que estarei iniciando com os alunos da sala de aula de seu filho. Garantimos a plena liberdade ao seu filho, de recusar-se a participar ou retirar seu consentimento, em qualquer fase da pesquisa, sem penalização alguma. A pesquisa tem por objetivo analisar o ensino e a aprendizagem da matemática, baseado em atividades práticas no Ensino Fundamental na Educação Básica Brasileira, utilizando instrumentos matemáticos de medida do século XVI, em particular o Quadrante Geométrico, para a mobilização e construção de conceitos matemáticos. Utilizaremos como instrumentos de coleta de dados: observações, conversas, gravações em áudio e vídeo, entrevistas e atividades matemáticas em sala de aula. Os dados coletados a partir desses instrumentos, incluindo as imagens de vídeo e os áudios, serão utilizados para a edição de um vídeo-aula referente ao processo mobilizado pelos alunos na construção e utilização do instrumento de medida Quadrante Geométrico. Esse vídeo-aula trata-se do produto final dessa pesquisa, cuja elaboração é pré-requisito para conclusão do Programa de Mestrado de Docência para Educação Básica. Contamos com sua colaboração e comprometemo-nos em enviar uma via desse Termo de Consentimento Livre Esclarecido, bem como garantir o retorno das conclusões obtidas a partir dos estudos desta pesquisa.

Caso tenha dúvidas com relação ao estudo ou direitos do participante, você deve contatar a Investigadora do estudo, **Ana Paula Minhano Aleixo da Silva** ou membro de sua equipe. Estamos à disposição para esclarecimentos que se fizerem necessários pelos seguintes contatos **(14) 99788-2650** ou pelo e-mail: **anapaula.mas@hotmail.com**.

Desde já agradecemos pela atenção e colaboração.

Atenciosamente.

Ana Paula Minhano Aleixo da Silva

Bauru, 08 de Agosto de 2018.

IDENTIFICAÇÃO DO VOLUNTÁRIO

Nome do participante:

DECLARAÇÃO DE CONSENTIMENTO

Eu li e discuti com o investigador responsável pelo presente estudo os detalhes descritos neste documento.

Declaro ter sido informado(a) de maneira clara e detalhada sobre as justificativas, os objetivos e a metodologia da pesquisa intitulada “**O Quadrante Geométrico: conceitos matemáticos na utilização de um instrumento de medida do século XVI**”, bem como as atividades envolvidas.

Estou ciente de que os dados coletados a partir dos instrumentos de coleta de dados, incluindo as imagens de vídeo e os áudios de meu filho, serão utilizados para a edição de um vídeo-aula referente ao processo mobilizado pelos alunos na construção e utilização do instrumento de medida Quadrante Geométrico.

Estou ciente de que a participação de meu filho (a) na pesquisa é voluntária; que posso recusar a participação de meu filho, retirar meu consentimento ou interromper sua participação a qualquer momento, sem precisar justificar e que essa recusa não irá acarretar qualquer penalidade.

Estou ciente de que a imagem do meu filho será identificado(a), a partir da edição, elaboração e divulgação do vídeo-aula referente ao processo mobilizado pelos alunos na construção e utilização do instrumento de medida Quadrante Geométrico. Concordo que os dados coletados para o estudo sejam usados para o propósito acima descrito.

Entendo a informação apresentada neste TERMO DE CONSENTIMENTO. Eu tive a oportunidade para fazer perguntas e todas as minhas perguntas foram respondidas.

Declaro que concordo com a participação de meu filho, como voluntário(a), da pesquisa descrita.

Recebi uma cópia deste Termo de Consentimento Livre e Esclarecido e me foi dada a oportunidade de ler e esclarecer as minhas dúvidas.

Bauru, 08/08/2018.

NOME DO RESPONSÁVEL

ASSINATURA

DATA

INVESTIGADOR

ASSINATURA

DATA

Localização / Contato do CEP:

End: Av. Luiz Edmundo Carrijo Coube, nº 14-01; cep: 17.033-360

Fone: (14)3103-9400; e-mail: cepesquisa@fc.unesp.br

APÊNDICE B – TERMO DE ASSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO DOS ALUNOS

IDENTIFICAÇÃO DA PESQUISA	
Pesquisa: O Quadrante Geométrico: conceitos matemáticos na utilização de um instrumento de medida do século XVI	
Orientador: Profª Drª Marisa da Silva Dias	Instituição / Departamento: UNESP/Bauru – Departamento de Educação
Telefone: (14) 3103 6081	Endereço Eletrônico: marisadias@fc.unesp.br
Aluno responsável: Ana Paula Minhano Aleixo da Silva	Instituição / Departamento: UNESP/Bauru – Programa de Pós Graduação em Docência para a Educação Básica - Mestrado Profissional
Telefone: (14) 99788-2650	Endereço Eletrônico: anapaula.mas@hotmail.com

Caro aluno,

Eu, professora **Ana Paula Minhano Aleixo da Silva**, convido você a participar de uma pesquisa em educação matemática. A pesquisa tem por objetivo analisar o ensino e a aprendizagem da matemática, baseado em atividades práticas no Ensino Fundamental na Educação Básica Brasileira, utilizando instrumentos matemáticos de medida do século XVI, em particular o Quadrante Geométrico, para a mobilização e construção de conceitos matemáticos. Caso você aceite participar, deverá assinar um Termo de Assentimento. O assentimento significa que você concorda em fazer parte de um grupo de adolescentes, da sua faixa de idade, para participar de uma pesquisa. Serão respeitados seus direitos e você receberá todas as informações por mais simples que possam parecer. Pode ser que este documento denominado TERMO DE ASSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO contenha palavras que você não entenda. Por favor, nesse caso, peça ao responsável pela pesquisa ou à equipe do estudo para explicar qualquer palavra ou informação que você não entenda claramente. A pesquisa que desenvolveremos em sua sala de aula envolverá coletas de informações. Utilizaremos como instrumentos de coleta de dados: observações, conversas, gravações em áudio e vídeo, entrevistas e atividades matemáticas em sala de aula. Os dados coletados a partir desses instrumentos, incluindo as imagens de vídeo e os áudios, serão utilizados para a edição de um vídeo-aula referente ao processo mobilizado pelo grupo que você faz parte, na construção e utilização do instrumento de medida Quadrante Geométrico. Esse vídeo-aula trata-se do produto final dessa pesquisa, cuja elaboração é pré-requisito para conclusão do Programa de Mestrado de Docência para Educação Básica. Estaremos juntos por aproximadamente duas semanas, pois irei apresentar e desenvolver com vocês várias ações pedagógicas que ajudarão na compreensão e construção de conceitos matemáticos. Esclarecemos que as informações compartilhadas e analisadas somente serão usadas com a finalidade da realização da pesquisa. Contamos com sua colaboração e comprometemo-nos em garantir o retorno das conclusões obtidas a partir dos estudos desta pesquisa. Aproveito para informar que sua participação é voluntária e que caso você opte por não participar, não terá nenhum prejuízo ou represálias. Para tanto, solicito seu assentimento a fim de tornar possível sua participação como sujeito dessa pesquisa em ensino, que estaremos desenvolvendo com os alunos da sua sala de aula.

Se você ou seus responsáveis tiver(em) dúvidas com relação ao estudo, direitos do participante, você deve contatar a Investigadora do estudo, **Ana Paula Minhano Aleixo da Silva** ou membro de sua equipe. Estamos à disposição para esclarecimentos que se fizerem necessários pelos seguintes contatos (14) 997882650 ou pelo e-mail: anapaula.mas@hotmail.com

Desde já agradecemos a sua colaboração.

Atenciosamente.

Ana Paula Minhano Aleixo da Silva

Bauru, 08 de Agosto de 2018.

IDENTIFICAÇÃO DO VOLUNTÁRIO

Nome do participante:

Nome do responsável:

DECLARAÇÃO DE ASSENTIMENTO DO SUJEITO DA PESQUISA

Declaro ter sido informado(a) de maneira clara e detalhada sobre as justificativas, os objetivos e a metodologia da pesquisa **O Quadrante Geométrico: conceitos matemáticos na utilização de um instrumento de medida do século XVI**, bem como as atividades envolvidas.

Eu li e discuti com o investigador responsável pelo presente estudo os detalhes descritos neste documento. Entendo que eu sou livre para aceitar ou recusar, e que posso interromper a minha participação a qualquer momento sem dar uma razão. Eu concordo que os dados coletados para o estudo sejam usados para o propósito acima descrito.

Eu entendi a informação apresentada neste TERMO DE ASSENTIMENTO. Eu tive a oportunidade para fazer perguntas e todas as minhas perguntas foram respondidas.

Eu receberei uma cópia assinada e datada deste DOCUMENTO DE ASSENTIMENTO INFORMADO.

NOME DO ALUNO	ASSINATURA	DATA
---------------	------------	------

NOME DO INVESTIGADOR	ASSINATURA	DATA
----------------------	------------	------

Bauru, 08/08/2018.

Localização / Contato do CEP:

End: Av. Luiz Edmundo Carrijo Coube, nº 14-01; cep: 17.033-360

Fone: (14)3103-9400

e-mail: cepesquisa@fc.unesp.br

ANEXOS

ANEXO A – Parte do excerto referente ao tema – “As grandes navegações”, entregue ao grupo A1 e A2.

- A Europa nos séculos XVI e XVII atravessava um momento de crise, pois comprava mais que vendia. No continente europeu, a oferta era de madeira, pedras, cobre, ferro, estanho, chumbo, lã, linho, frutas, trigo, peixe, carne. Os países do Oriente, por sua vez, dispunham de açúcar, ouro, cânfora, sândalo, porcelanas, pedras preciosas, cravo, canela, pimenta, noz-moscada, gengibre, unguentos, óleos aromáticos, drogas medicinais e perfumes.
- Cabia aos árabes o transporte dos produtos até a Europa em caravanas realizadas por rotas terrestres. O destino eram as cidades italianas de Gênova e Veneza que serviam como intermediárias para a venda das mercadorias ao restante do continente.
- VIDEO (As grandes navegações - assistir...)

Fatores que levaram os europeus a realizarem as primeiras Grandes Navegações:

- A procura de mercados produtores agrícolas na África e na Ásia para suprir as necessidades da crescente população europeia.
- A procura de novos mercados consumidores de produtos manufaturados na Europa.
- Falta de metais preciosos na Europa para a cunhagem de moedas.
- O aprimoramento das técnicas de navegação.
- A necessidade de se descobrir um novo caminho marítimo para as Índias.

A burguesia mercantil buscava novos caminhos para a Índia, para quebrar o monopólio que as cidades italianas, principalmente Veneza e Gênova, exerciam sobre o comércio de especiarias vindas daquela região, e para evitar o confronto armado com essas cidades no Mediterrâneo.

Fonte: Acervo pessoal da pesquisadora

ANEXO B – Parte do excerto referente ao tema – “A passagem do feudalismo para o capitalismo, entregue ao grupo B”.

A passagem do Sistema Feudal para o Capitalismo

- A matemática também ganhou vulto com relação ao seu uso, devido a suas aplicações de ordem práticas. A ênfase do conhecimento matemático a partir de suas aplicações de ordem prática remetem às mudanças sociais progressivas que foram desencadeadas pela passagem do sistema feudal para o capitalismo.

A chamada **transição do feudalismo para o capitalismo** (ou do sistema econômico feudal para o sistema econômico capitalista) começou no período da **Baixa Idade Média**, especificamente a partir do século XIV. Entretanto, a expressão “transição” supõe um processo de continuidade progressiva, como se não houvesse, nesse período, processos complexos de avanço e retrocesso econômico tanto no campo quanto na cidade medieval.

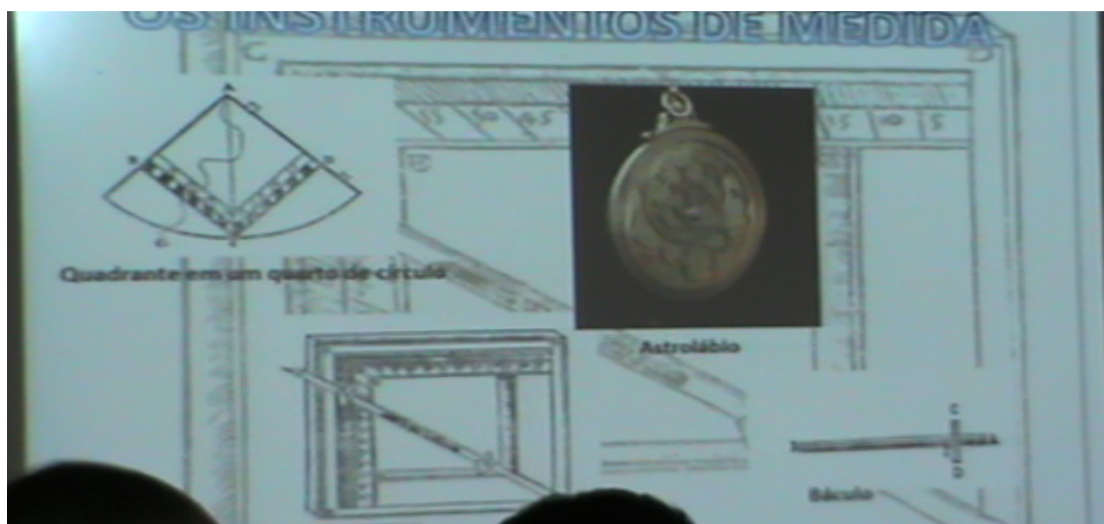
Fonte: Acervo pessoal da pesquisadora

ANEXO C – Parte do excerto referente ao tema – “As mudanças nas práticas militares, entregue ao grupo C”.

Na Europa, entretanto, os disparos sucessivos de uma linha de atiradores bem posicionados eram suficientes para acabar com qualquer exército. “A guerra nos séculos XVI e XVII era, sobretudo, um estudo de movimento, em que se buscava atingir posição de vantagem para uso do fogo” (afirma José Bittencourt, do Museu Histórico Nacional). A linha de atiradores chegava a 6 quilômetros de comprimento e era auxiliada pela cavalaria, que buscava desestabilizar a formação adversária e atacar onde houvesse brecha, e pela artilharia, os canhões que impediam que o inimigo se posicionasse. Ataques pelo lado, onde a linha não se defendia com eficiência, eram fatais. A curta distância, uma única salva de tiros podia atingir 50% a 70% do exército adversário e alguns comandantes retardavam ao máximo os disparos para se aproximarem do oponente.

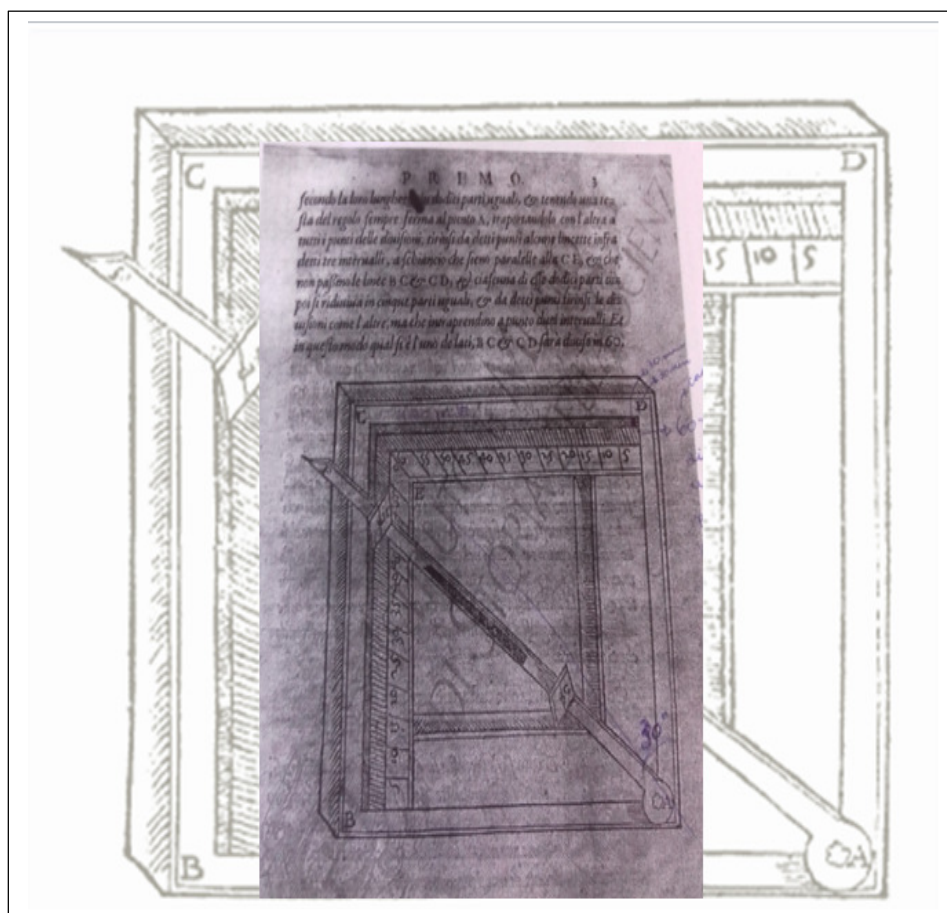
Fonte: Acervo pessoal da pesquisadora

ANEXO D – 11º slide da apresentação do 1º Encontro



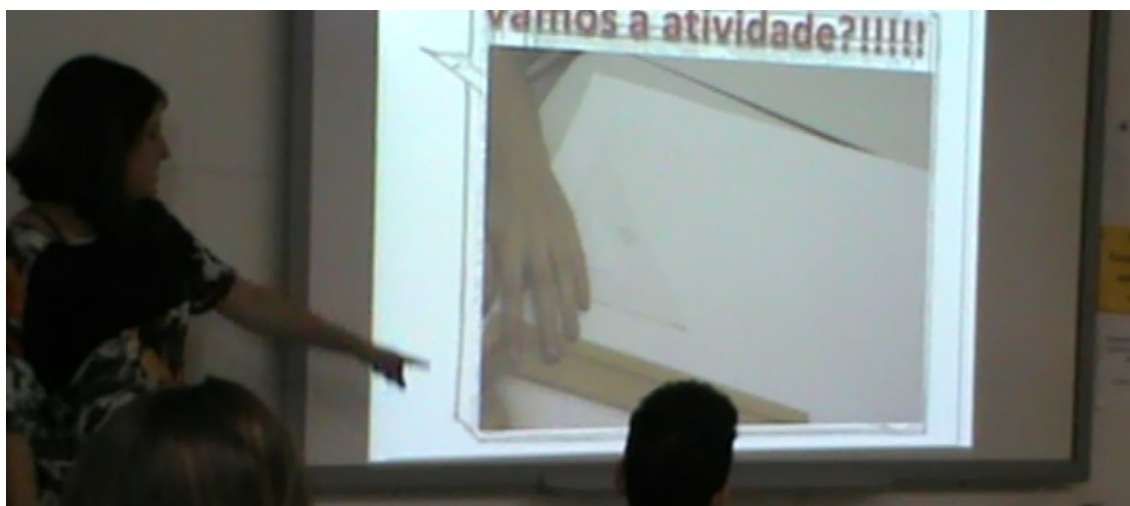
Fonte: Elaborado pela pesquisadora

ANEXO F – 9º slide da apresentação referente ao 2º Encontro



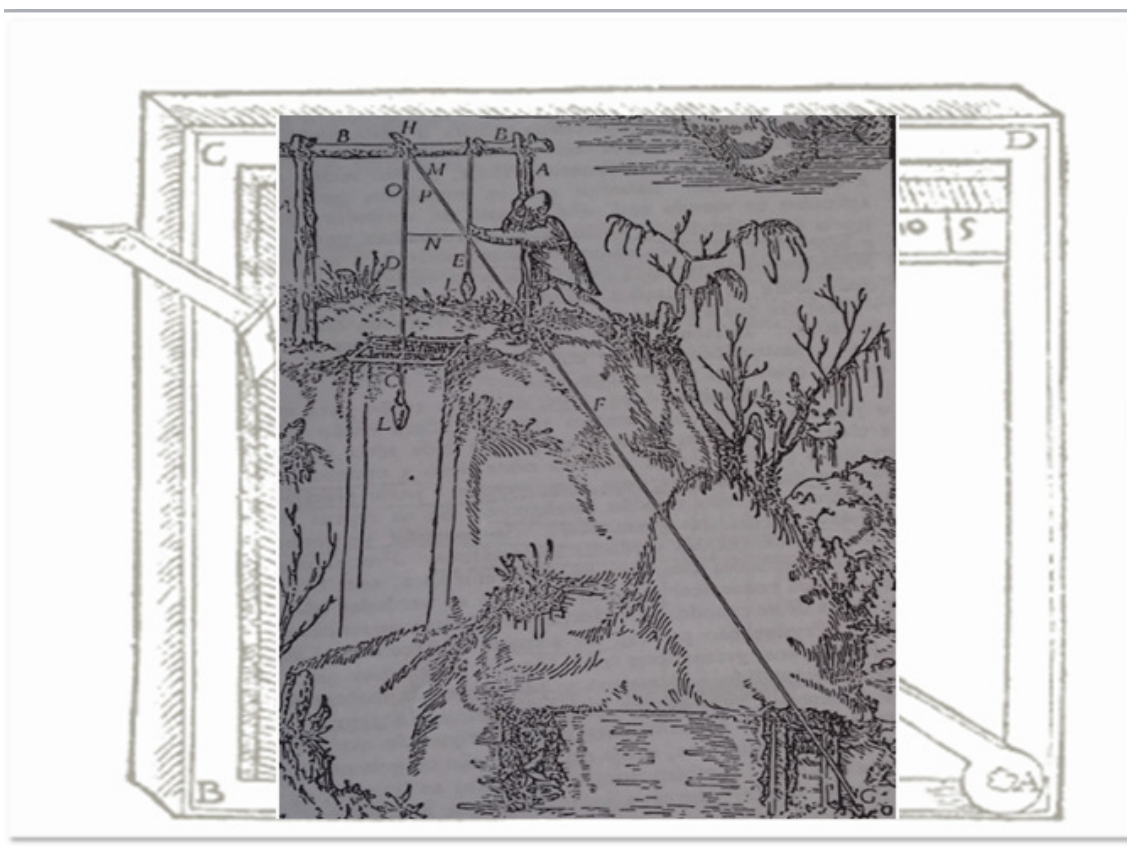
Fonte: Elaborado pela pesquisadora

ANEXO G - 12º *slide* da apresentação do 2º Encontro: vídeo de uma oficina sobre o quadrante geométrico com estudantes do terceiro ano do Curso de Licenciatura de Matemática da UNESP



Fonte: Elaborado pela pesquisadora

ANEXO H - 3º Slide da apresentação do 3º Encontro



Fonte: Elaborado pela pesquisadora

ANEXO I - 5º Slide da apresentação do 3º Encontro



Fonte: Elaborado pela pesquisadora