



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

# **PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**

ÁREA DE ENSINO E APRENDIZAGEM DA  
MATEMÁTICA E SEUS FUNDAMENTOS FILOSÓFICO-CIENTÍFICOS

## **UM ESTUDO HERMENÊUTICO SOBRE AS DEMONSTRAÇÕES NO MOVIMENTO DA MATEMÁTICA MODERNA**

JOEL GONÇALVES DOS SANTOS

INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS E CIÊNCIAS EXATAS

Rio Claro, SP

2023

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA  
“Júlio de Mesquita Filho”  
Instituto de Geociências e Ciências Exatas - IGCE  
Câmpus de Rio Claro

JOEL GONÇALVES DOS SANTOS

Um Estudo Hermenêutico Sobre as Demonstrações no Movimento da  
Matemática Moderna

Dissertação de Mestrado apresentada ao  
Instituto de Geociências e Ciências Exatas do  
Campus de Rio Claro, da Universidade  
Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”,  
como parte dos requisitos para obtenção do  
título de Mestre em Educação Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Fabiane Mondini

Rio Claro, SP

2023

S237e Santos, Joel Gonçalves dos  
Um estudo hermenêutico sobre as demonstrações no movimento da matemática moderna / Joel Gonçalves dos Santos. -- Rio Claro, 2023  
182 p. : il.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp), Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro  
Orientadora: Fabiane Mondini

1. Demonstração Matemática. 2. História da Matemática. 3. Movimento da Matemática Moderna. 4. Hermenêutica Filosófica. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA  
“Júlio de Mesquita Filho”  
Instituto de Geociências e Ciências Exatas - IGCE  
Câmpus de Rio Claro

JOEL GONÇALVES DOS SANTOS

Um Estudo Hermenêutico Sobre as Demonstrações no Movimento da  
Matemática Moderna

Dissertação de Mestrado apresentada ao  
Instituto de Geociências e Ciências Exatas do  
Campus de Rio Claro, da Universidade  
Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”,  
como parte dos requisitos para obtenção do  
título de Mestre em Educação Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Fabiane Mondini

Comissão Examinadora

Profa. Dra. Fabiane Mondini (Orientadora)  
Universidade Estadual Paulista – Rio Claro/SP

Profa. Dra. Luciane Ferreira Mocrosky  
Universidade Tecnológica Federal do Paraná – Curitiba/PR

Profa. Dra. Elisangela Pavanelo Rodrigues dos Santos  
Universidade Estadual Paulista – Rio Claro/SP

Conceito: Aprovado.

Rio Claro, SP  
18 de abril de 2023.

*Aos meus pais, Agostinho e Neide, porque o  
mandamento é uma lâmpada, a lei, uma luz, e  
as repreensões da correção são o  
caminho da vida.*

*E aos meus irmãos, Josiane e Josimar, pelas  
alegrias e felicidades que excedem  
os limites do necessário.*

## AGRADECIMENTOS

À Deus, por me ajudar a ultrapassar todos os obstáculos ao longo do curso. A minha força está exaltada em ti, por isso, sê engrandecido ó Deus.

Aos meus familiares pelo suporte oferecido em todos os momentos. Obrigado pelo carinho, pelo amor incondicional e pela confiança depositada em mim.

À Profa. Dra. Fabiane Mondini, pelas orientações cuidadosas no desenvolvimento desta pesquisa e por ter me iniciado pelo caminho da Educação Matemática.

À Profa. Dra. Luciane Ferreira Mocrosky, pelas excelentes explanações sobre hermenêutica durante os encontros do Grupo de Estudos e Pesquisa em Formação de Professores (GEForProf).

À profa. Dra. Elisangela Pavanelo Rodrigues dos Santos, pelas fascinantes aulas de História da Matemática. Com você vislumbrei, pela primeira vez, o tema das minhas investigações.

À Luana Vieira Ramalho, por ser a pessoa especial que é para mim. Agradeço-te pelas inúmeras vezes que você me enxergou melhor do que eu sou.

Aos meus amigos, Gisele de Lourdes Monteiro e Rodolfo Masaichi Shintani, pelo apoio e pelos momentos de descontração.

À Lais Cristina Pereira da Silva, pelo companheirismo e amizade. Obrigado pelo incentivo na realização dessa jornada que é a pós-graduação.

Ao Rafael de Moraes Merola e à Cleibiane Susi Peixoto, por serem simplesmente amigos, desses que conseguimos sem pedir. Frente às dificuldades, encontrei esperanças em nossas conversas, a vocês meu muito obrigado.

À Érica Czigel, ao Romário Costa da Rocha Júnior e à Priscila de Oliveira e Silva, pela convivência, pela colaboração e pela amizade.

À Caroline Santos de Azevedo e ao Ronaldo Araújo de Souza, pelo cuidado, gentileza e prontidão que sempre pude contar, vocês são valiosíssimos. Ao Ronaldo um agradecimento especial, pela leitura atenciosa de algumas seções deste trabalho.

Aos professores e alunos do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática (PPGEM) e à Inajara, porque me fizeram experimentar um mundo que eu não conhecia, porque compartilhamos mais do que momentos de aprendizagem: compartilhamos vivências.

Enfim, ao apoio do processo nº 2021/02911-7, Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP).

*Hino de adoração*

*33 Ó profundidade das riquezas, tanto da sabedoria, como da ciência de Deus! Quão insondáveis são os seus juízos, e quão inescrutáveis, os seus caminhos!*

*34 Por que quem compreendeu o intento do Senhor? Ou quem foi seu conselheiro?*

*35 Ou quem lhe deu primeiro a ele, para que lhe seja recompensado?*

*36 Porque dele, e por ele, e para ele são todas as coisas; glória, pois, a ele eternamente. Amém!*

(BÍBLIA, Romanos, 11, 33-36, itálico nosso).

## RESUMO

Esta pesquisa foca significados das demonstrações matemáticas no cerne do Movimento da Matemática Moderna (MMM) ocorrido na década de 1960, o qual está relacionado a um cenário de reformas para o ensino de matemática iniciado nos últimos anos do século XIX. Nesse período, ao se constatar que a matemática utilizada nos setores da indústria e do comércio encontrava-se fora de “sintonia” com aquela ensinada nos colégios, destacaram-se abordagens, dentre outras que, fundamentadas em demonstrações, levaram-me à necessidade de entender como os educadores as aderiram no ensino da época. Assim, na busca de significados para o que é a demonstração matemática naquelas circunstâncias, evidenciou-se a seguinte interrogação: *O que é isto, a demonstração matemática no MMM?* Com o intuito de responder a esta questão, considerei as leituras de Martin Heidegger (1889-1976), Hans-Georg Gadamer (1900-2002) e Paul Ricoeur (1913-2005), no que diz respeito à Hermenêutica desenvolvida por esses filósofos. A isso, conciliei também a perspectiva histórica esboçada nas obras de Husserl (1859-1938), nas quais estão tematizadas história e historicidade, bem como, a descrição do processo retrospectivo para a produção histórica mediante um trabalho fenomenológico. Algumas compreensões acerca dos sentidos das demonstrações neste estudo indicaram que para o trabalho em sala de aula os professores deveriam empregar a abordagem dedutiva, aliada a uma linguagem mais precisa e rigorosa, no ensino de geometria. Além disso, destacou-se que os interessados no MMM estabeleceram uma proposta que se baseava essencialmente nos conceitos de conjuntos, de relações e de estruturas matemáticas.

**Palavras-chave:** Demonstração Matemática. História da Matemática. Movimento da Matemática Moderna. Hermenêutica Filosófica.

## ABSTRACT

This research focuses on the meanings of mathematical demonstrations at the heart of the Modern Mathematics Movement (MMM) that took place in the 1960s, which is related to a scenario of reforms for the teaching of mathematics that began in the last years of the 19th century. During this period, when it was verified that the mathematics used in the sectors of industry and commerce was out of “tune” with that taught in schools, approaches were highlighted, among others that, based on demonstrations, led me to the need to understand how educators adhered to them in the teaching of the time. Thus, in the search for meanings for what the mathematical demonstration is in those circumstances, the following question emerged: *What is this, the mathematical demonstration in MMM?* In order to answer this question, I considered the readings of Martin Heidegger (1889-1976), Hans-Georg Gadamer (1900-2002) and Paul Ricoeur (1913-2005), with regard to the Hermeneutics developed by these philosophers. To this, I also reconciled the historical perspective outlined in the works of Husserl (1859-1938), in which history and historicity are thematized, as well as the description of the retrospective process for historical production through a phenomenological work. Some understandings about the meanings of the demonstrations in this study indicated that, in order to work in the classroom, teachers should employ a deductive approach, combined with a more precise and rigorous language, in teaching geometry. In addition, it was highlighted that those interested in the MMM established a proposal that was essentially based on the concepts of sets, relations and mathematical structures.

**Keywords:** Mathematical Demonstration. History of Mathematics. Modern Mathematics Movement. Philosophical Hermeneutics.

## LISTA DE FIGURAS

|                                                                                                                                                                                           |     |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>Figura 1</b> – Representação dos resultados encontrados por Tales .....                                                                                                                | 38  |
| <b>Figura 2</b> – Demonstrações e Provas .....                                                                                                                                            | 39  |
| <b>Figura 3</b> – Grécia .....                                                                                                                                                            | 41  |
| <b>Figura 4</b> – Quadrado de lado 1 .....                                                                                                                                                | 44  |
| <b>Figura 5</b> – Construção de apoio para a primeira demonstração do livro I .....                                                                                                       | 49  |
| <b>Figura 6</b> – Definições de conceitos .....                                                                                                                                           | 50  |
| <b>Figura 7</b> – Sessões de estudos para o professorado secundário.....                                                                                                                  | 85  |
| <b>Figura 8</b> – Capa do livro premiado.....                                                                                                                                             | 86  |
| <b>Figura 9</b> – Capa do Livro " Introdução à Matemática Moderna na Escola Primaria” .....                                                                                               | 88  |
| <b>Figura 10</b> – “Estudantes secundários voltam novamente às carteiras para revolucionar o ensino de Matemática com 50 anos de atraso entre nós” .....                                  | 103 |
| <b>Figura 11</b> – “Meu caro estudante” .....                                                                                                                                             | 110 |
| <b>Figura 12</b> – Desenvolvimento da noção de conjunto .....                                                                                                                             | 111 |
| <b>Figura 13</b> – Contagem de dias .....                                                                                                                                                 | 112 |
| <b>Figura 14</b> – Correspondência biunívoca.....                                                                                                                                         | 112 |
| <b>Figura 15</b> – Demonstração da congruência entre os ângulos da base de um triângulo isósceles .....                                                                                   | 113 |
| <b>Figura 16</b> – Sessões de estudos .....                                                                                                                                               | 116 |
| <b>Figura 17</b> – Construção de apoio para a demonstração da igualdade dos ângulos da base de um triângulo isósceles juntamente com os ângulos sob a base .....                          | 156 |
| <b>Figura 18</b> – Construção de apoio para a demonstração dos ângulos opostos cortados por duas retas.....                                                                               | 157 |
| <b>Figura 19</b> – Construção de apoio para a demonstração da igualdade entre os lados e ângulos de dois triângulos que tenham dois ângulos iguais e ao menos um lado igual entre si..... | 158 |
| <b>Figura 20</b> – Construção de apoio para a demonstração do teorema de Pitágoras .....                                                                                                  | 160 |
| <b>Figura 21</b> – Números oblongos .....                                                                                                                                                 | 162 |
| <b>Figura 22</b> – Números triangulares .....                                                                                                                                             | 163 |
| <b>Figura 23</b> – Número piramidal de base 3 .....                                                                                                                                       | 164 |
| <b>Figura 24</b> – Folha de Rosto para a tradução dos elementos de Euclides, feita por Sir Henry Billingsley (1570).....                                                                  | 165 |
| <b>Figura 25</b> – Assuntos mínimos para o programa de matemática moderna do ginásio .....                                                                                                | 172 |
| <b>Figura 26</b> – Assuntos mínimos para o programa de matemática moderna do colégio.....                                                                                                 | 173 |

|                                                                                                              |     |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>Figura 27</b> – Fechamento e comutativa .....                                                             | 177 |
| <b>Figura 28</b> – Elemento neutro, associativa e distributiva da multiplicação em relação à adição<br>..... | 178 |
| <b>Figura 29</b> – Existência do elemento inverso.....                                                       | 179 |
| <b>Figura 30</b> – Operações no conjunto dos reais e suas propriedades estruturais.....                      | 180 |
| <b>Figura 31</b> – Propriedades da adição e da multiplicação .....                                           | 181 |
| <b>Figura 32</b> – Estrutura de corpo .....                                                                  | 182 |

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

|                 |                                                                  |
|-----------------|------------------------------------------------------------------|
| a.C.            | antes de Cristo                                                  |
| Bolema          | Boletim de Educação Matemática                                   |
| c.              | <i>circa</i> (por volta de)                                      |
| CADES           | Campanha de Aperfeiçoamento e Difusão do Ensino Secundário       |
| CAPES           | Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior      |
| CATEC           | Centro de Aperfeiçoamento da Técnica do Ensino de ciências       |
| CBL             | Câmara Brasileira do Livro                                       |
| CDI             | Cálculo Diferencial e Integral                                   |
| CIEAEM          | Comissão para o Estudo e Aperfeiçoamento do Ensino de Matemática |
| CIEM            | <i>Commission Internationale de L'Enseignement Mathématique</i>  |
| d.C.            | depois de Cristo                                                 |
| DGP             | Dicionário grego-português                                       |
| ENS             | <i>École Normale Supérieure</i>                                  |
| etc.            | <i>et cetera</i> (e outras coisas)                               |
| EUA             | Estados Unidos da América                                        |
| GEEM            | Grupo de Estudos do Ensino da Matemática                         |
| GEEMPA          | Grupo de Estudos do Ensino da Matemática de Porto Alegre         |
| IBECC           | Instituto Brasileiro de Educação, Ciência e Cultura              |
| IMUK            | <i>Internationale Mathematische Unterrichtskommission</i>        |
| LDB             | Lei de Diretrizes e Bases                                        |
| lit.            | literalmente                                                     |
| MEC             | Ministério da Educação                                           |
| MMM             | Movimento da Matemática Moderna                                  |
| NEDEM           | Núcleo de Estudos e Difusão do Ensino da Matemática              |
| NSF             | <i>National Science Foundation</i>                               |
| OECE            | Organização Europeia de Cooperação Econômica                     |
| PPGEM           | Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática                 |
| Prof(a). Dr(a). | Professor(a) doutor(a)                                           |
| PUC-SP          | Pontifícia Universidade Católica de São Paulo                    |
| SBPC            | Sociedade Brasileira para o Progresso da Ciência                 |
| SMSG            | <i>School Mathematics Study Group</i>                            |
| SMSP            | Sociedade Matemática de São Paulo                                |

|        |                                                                      |
|--------|----------------------------------------------------------------------|
| UC     | Universidade de Campinas                                             |
| UNESCO | Organização das Nações Unidas para a Educação, a Ciência e a Cultura |
| UNESP  | Universidade Estadual Paulista                                       |
| UPM    | Universidade Presbiteriana Mackenzie                                 |
| URSS   | União das Repúblicas Socialistas Soviéticas                          |

## SUMÁRIO

|            |                                                                                 |            |
|------------|---------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>1</b>   | <b>INTRODUÇÃO .....</b>                                                         | <b>16</b>  |
| <b>2</b>   | <b>A ORIENTAÇÃO METODOLÓGICA DA PESQUISA .....</b>                              | <b>21</b>  |
| <b>2.1</b> | <b>Compreensões sobre os métodos investigativos.....</b>                        | <b>22</b>  |
| 2.1.1      | <i>A abordagem fenomenológica na pesquisa qualitativa .....</i>                 | <i>25</i>  |
| <b>2.2</b> | <b>A hermenêutica como uma conduta para a investigação histórica .....</b>      | <b>28</b>  |
| <b>2.3</b> | <b>Ações para o desenvolvimento da pesquisa .....</b>                           | <b>32</b>  |
| <b>3</b>   | <b>O SIGNIFICADO DA VALIDAÇÃO EM MATEMÁTICA.....</b>                            | <b>36</b>  |
| <b>3.1</b> | <b>Origem e organização da primeira ciência hipotético-dedutiva .....</b>       | <b>37</b>  |
| 3.1.1      | <i>Στοιχεῖα: a matemática elementar empreendida por Euclides .....</i>          | <i>45</i>  |
| 3.1.2      | <i>A teoria hipotético-dedutiva para o fazer matemático na atualidade .....</i> | <i>50</i>  |
| <b>3.2</b> | <b>Compreensões sobre a demonstração na história da humanidade.....</b>         | <b>53</b>  |
| 3.2.1      | <i>O sentido orientador da matemática na modernidade .....</i>                  | <i>60</i>  |
| <b>4</b>   | <b>UM MOVIMENTO MODERNIZADOR DA MATEMÁTICA .....</b>                            | <b>66</b>  |
| <b>4.1</b> | <b>A moderna matemática dos anos 1960 .....</b>                                 | <b>68</b>  |
| 4.1.1      | <i>O Movimento da Matemática Moderna no mundo .....</i>                         | <i>71</i>  |
| 4.1.2      | <i>A Introdução do Movimento da Matemática Moderna no Brasil.....</i>           | <i>77</i>  |
| <b>4.2</b> | <b>O moderno ensino de matemática .....</b>                                     | <b>90</b>  |
| 4.2.1      | <i>Traços de demonstração na matemática moderna .....</i>                       | <i>91</i>  |
| 4.2.2      | <i>Os artefatos produzidos em prol da modernização .....</i>                    | <i>100</i> |
| <b>5</b>   | <b>O LEGADO HERDADO NA TRADIÇÃO .....</b>                                       | <b>119</b> |
| <b>5.1</b> | <b>As críticas de Morris Kline, Richard P. Feynman e René Thom .....</b>        | <b>120</b> |
| 5.1.1      | <i>Críticas ao Movimento da Matemática Moderna no Brasil .....</i>              | <i>135</i> |
| <b>6</b>   | <b>CONSIDERAÇÕES FINAIS .....</b>                                               | <b>141</b> |
|            | <b>REFERÊNCIAS .....</b>                                                        | <b>146</b> |

|                                                                                                                                                             |            |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>ANEXOS .....</b>                                                                                                                                         | <b>155</b> |
| <b>ANEXO A – ALGUNS RESULTADOS DE TALES ENCONTRADOS NOS<br/>ELEMENTOS.....</b>                                                                              | <b>156</b> |
| <b>ANEXO B – DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA DE PITÁGORAS .....</b>                                                                                                 | <b>160</b> |
| <b>ANEXO C – NÚMEROS OBLONGOS, TRIANGULARES E PIRAMIDAIS .....</b>                                                                                          | <b>162</b> |
| <b>ANEXO D – EUCLIDES DE MEGARA?.....</b>                                                                                                                   | <b>165</b> |
| <b>ANEXO E – DEFINIÇÕES, POSTULADOS E NOÇÕES COMUNS EUCLIDIANAS<br/>.....</b>                                                                               | <b>166</b> |
| <b>ANEXO F – PROGRAMA DE MATEMÁTICA APROVADO PELO 1º CONGRESSO<br/>DE ENSINO DA MATEMÁTICA, REALIZADO EM SALVADOR DE 4 A 7 DE<br/>SETEMBRO DE 1955.....</b> | <b>169</b> |
| <b>ANEXO G – ASSUNTOS MÍNIMOS PARA UM MODERNO PROGRAMA DE<br/>MATEMÁTICA PARA O GINÁSIO .....</b>                                                           | <b>172</b> |
| <b>ANEXO H – ASSUNTOS MÍNIMOS PARA UM MODERNO PROGRAMA DE<br/>MATEMÁTICA PARA O COLÉGIO .....</b>                                                           | <b>173</b> |
| <b>ANEXO I – ASSUNTOS ABORDADOS NA COLEÇÃO MATEMÁTICA: CURSO<br/>MODERNO.....</b>                                                                           | <b>174</b> |
| <b>ANEXO J – PROPRIEDADES ESTRUTURAIS DA ADIÇÃO E DA<br/>MULTIPLICAÇÃO DE NÚMEROS RACIONAIS .....</b>                                                       | <b>177</b> |
| <b>ANEXO K – PROPRIEDADES ESTRUTURAIS DA ADIÇÃO E DA<br/>MULTIPLICAÇÃO DE NÚMEROS REAIS .....</b>                                                           | <b>180</b> |

## 1 INTRODUÇÃO

*Reter, esquecer e voltar a lembrar pertencem à constituição histórica do homem e fazem parte de sua história e formação. Quem exercita sua memória como uma mera capacidade – e toda técnica da memória é tal exercício – continua sem possuir o que é mais próprio da memória. A memória precisa ser formada, pois a memória não é memória em geral e para tudo. Para algumas coisas temos memória, para outras não; e algumas coisas queremos guardar na memória, outras banir. Estaria na hora de libertar o fenômeno da memória (...) e reconhecê-lo como um traço essencial do ser histórico e limitado do homem.<sup>1</sup>*

A investigação deste trabalho se iniciou quando pela primeira vez me perguntei: *O que é uma demonstração matemática?* Essa indagação ocorreu durante o último ano no curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual Paulista (UNESP) – Câmpus de Guaratinguetá, enquanto iniciava a elaboração do Trabalho de Conclusão de Curso<sup>2</sup>, no ano de 2018. Naquele estudo, objetivei investigar as demonstrações matemáticas nas diferentes épocas da história da humanidade, a começar pela Idade Antiga com os gregos, momento em que começou a existir uma preocupação em sistematizar e validar a produção matemática.

Entende-se que por volta do século VI a.C. o desenvolvimento da matemática, enquanto ciência começou a mudar sua estrutura, pautando, praticamente todas as suas produções no raciocínio lógico-dedutivo, por meio dos sistemas axiomáticos. Em tais sistemas são estabelecidas sequências de teoremas, justificados e validados pelo uso contínuo de demonstrações. De forma resumida, um teorema é uma “sentença matemática condicional ‘Se  $P$ , então  $Q$ ’ ou implicativa ‘ $P \Rightarrow Q$ ’” (MORAIS FILHO, 2012, p. 65), em que  $P$  chama-se *hipótese* e  $Q$  chama-se *tese*. Já a demonstração é o que atesta a veracidade ou autenticidade dos teoremas, ou seja, é “a garantia, o testemunho, o processo de verificação da exatidão de cálculos ou raciocínios, a dedução que mantém a verdade de sua conclusão apoiando-se em premissas admitidas como verdadeiras” (GARNICA, 1995, p. 10). Assim, se alguém quer ter certeza de que uma declaração (teorema) que se faz em matemática é confiável (a luz do sistema/teoria em estudo), deve demonstrar.

Embora, e de acordo com Domingues (2002), muitos povos como é o caso dos árabes e hindus, não priorizassem a demonstração — quando ela começou a ser difundida na Idade Média — demonstrar passou a ser uma atividade recorrente nas produções matemáticas, sendo que o profissional dessa ciência “preocupa-se, formalmente, com duas operações fundamentais:

<sup>1</sup> *Os conceitos básicos do humanismo*, em Gadamer (2014, p. 51-52, itálico nosso).

<sup>2</sup> SANTOS, J. G. **Considerações históricas, filosóficas do processo de validação das verdades matemáticas**. 2018. 78 f. Trabalho de conclusão de curso (Licenciatura em Matemática) - Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, 2018. O trabalho pode ser acessado por meio do endereço eletrônico do Repositório Institucional Unesp – <https://repositorio.unesp.br/>.

DEFINIR seus conceitos e DEMONSTRAR as propriedades desses conceitos” (BICUDO, 2002, p. 80).

Esta é a chamada matemática ocidental, “uma construção abstrata originada nas culturas da bacia do Mediterrâneo e da Mesopotâmia (Irão antigo) e das civilizações do vale do Nilo (...), muitas vezes chamada o estilo euclidiano, é baseada na lógica do “*tertium non datur*” (D’AMBROSIO, 2018, p. 191), termo que pode ser traduzido como “terceiro excluído”. É uma regra/lei que estabelece que qualquer proposição em matemática ou é verdadeira, ou sua negação é verdadeira, não havendo espaço para uma terceira opção. Nessas condições, a matemática é considerada consistente, não apenas em termos estruturais, mas também em termos temporais, possibilitando que “uma fórmula ou um teorema matemático significam a mesma coisa para qualquer um, em qualquer lugar (...) e também significarão a mesma coisa para qualquer um daqui a mil anos” (FRENKEL, 2014, p. 11-12).

Expostas essas compreensões iniciais, outras inquietações foram surgindo, dentre elas, a questão da presença da demonstração nos processos de ensino. A intenção de, em continuidade, investigar esse tema, levou-me a ingressar no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática (PPGEM), no ano de 2021. A escolha do curso se justifica pela sua tradição e por suas contribuições sobre o assunto. Destaco aqui o livro “*Os elementos*” de Euclides (tradução de Irineu Bicudo), publicado em 2009; o seminário temático de 2002 da revista Boletim de Educação Matemática (Bolema), no seu volume 15, número 18, em que se escolheu o tema: Demonstração em diversas áreas; e o livro “Filosofias da Matemática” de Jairo José da Silva, publicado em 2007. Essas obras expressam a relevância do tema das demonstrações para a área de inquérito da Educação Matemática.

Dada a complexidade e amplitude do tema para o desenvolvimento desta pesquisa de mestrado, optei por investigar a demonstração matemática, tal qual estava presente no sistema escolar, no Movimento da Matemática Moderna (MMM). A escolha e consideração do MMM se fundamenta pela intensidade da demonstração nos processos de ensino no período em que o movimento ocorreu. “Os líderes da matemática moderna [desejavam] apresentar um desenvolvimento dedutivo rigoroso” (KLINE, 1976, p. 72).

De acordo com Fiorentini (1995, p. 14), um dos principais propósitos do movimento era “dar mais ênfase aos aspectos estruturais e lógicos da matemática em lugar do caráter pragmático, mecanizado, não-justificativo e regrado, presente, naquele momento, na matemática escolar”. Este evento histórico — internacional e “modernizador” — ocorreu substancialmente na década de 1960. Nesse período, devido ao avanço da ciência e da tecnologia, constatou-se a necessidade de formação adequada, principalmente dos jovens, para

atender às demandas modernas. O que estou chamando de “demandas modernas” é, na verdade, um reflexo da “intensa” revolução social, econômica, cultural e científica iniciada na era moderna com o Renascimento, no século XV, e que se estendeu até a Contemporaneidade. Mocrosky (2010) indica alguns pontos para ilustrar o que essa revolução significou nessas instâncias, como é o caso das conquistas marítimas que proporcionaram o conhecimento de novos territórios; das mudanças ocorridas nas tradições da igreja, reconhecidas como “reformas”; do desenvolvimento da imprensa, o que promoveu as produções literárias em larga escala; da Revolução Industrial no século XVIII; e da alteração no modo de conceber as ciências e a matemática que, nesse período, aliam-se à experiência física.

No que se refere ao último ponto, surge um dos maiores nomes daquele período, o de Galileu Galilei, estudioso do século XVII, considerado por muitos o protagonista deste novo modo de fazer ciência. Ele, “ao aliar experiência ao conhecimento matemático, mostrou o modo de ser da física dos astros e, com isso, inaugurou uma lógica para a busca científica, distinta da racionalidade característica da antiguidade grega e era medieval” (MOCROSKY, 2010, p. 31). A matemática, tomada como uma forma de se estudar a realidade, veio, na verdade, ampliar as possibilidades observacionais. Dessa forma, o desenvolvimento de um determinado conhecimento “se dá pela ordenação das coisas que institui regras, pela funcionalidade dessas regras ordenadas, chegando a padronizações que permitem generalizações, independentes do alcance sensitivo. Nesse sentido, se constituiu a lógica que ainda ilumina a era contemporânea” (MOCROSKY, 2010, p. 32). A possibilidade de quantificar o mundo por meio da matemática em busca da verdade foi a condição que reorientou toda a ciência do mundo ocidental na era moderna. A concretização de modelações da natureza por meio de artifícios matemáticos “é o solo onde se edificaram os demais ramos da ciência: a medicina, ao tratar do corpo; a ética por dar sustentação e equilíbrio à mente; e a mecânica, pela possibilidade de construção do mundo” (MOCROSKY, 2010, p. 33).

Pelo modo como a ciência moderna veio se desenvolvendo tornou-se significativo o destaque para as ciências da natureza e matemáticas. Assim, entende-se que, por volta dos anos 1960, as demandas modernas, agora consolidadas, estavam cada vez mais presentes e interrelacionadas com os mundos científicos e tecnológicos, o que tornou necessário a melhor formação dos jovens estudantes para as atividades profissionais. As universidades, também envolvidas nessa discussão, problematizavam o ensino, e criticavam o baixo conhecimento (matemático, mas não só matemático) dos jovens universitários, acenando a necessidade de uma reforma escolar. O conhecimento advindo da ciência moderna impactou, desdobrou-se e se desenvolveu em meio às aplicações práticas que ela possibilitava, destacando-se um

espécime de sincretismo entre ciência e técnica. “Os aparatos ou ações técnicas, principalmente a partir do século XVII, têm sido permeados pelo ‘pensamento científico’, mesmo sem nos darmos conta disso” (MOCROSKY, 2010, p. 48).

Deste modo, ao colocar o MMM em relevo, trago à tona significados que o fenômeno da demonstração suscitou naquele episódio. Compreendo o MMM como um processo histórico, que se desdobra em uma prática demonstrativa e como uma tendência no ensino de matemática. Tendência entendida como uma forma de trabalho, embasada em teorias ou apresentada sob alguma posição epistemológica, com a preocupação de melhorar a aprendizagem (LOPES; BORBA, 1994, p. 50). Aqui, destaco, como tendência, o ensino de matemática pautado pelo uso de demonstrações.

Como uma forma de estar atento aos objetivos aqui explicitados, exponho que esta pesquisa é norteada pela seguinte interrogação: *O que é isto, a demonstração matemática no MMM?* Para respondê-la considereei estruturar o texto por meio de quatro seções. Na primeira, *A ORIENTAÇÃO METODOLÓGICA DA PESQUISA*, tornei explícito os procedimentos utilizados no decorrer deste trabalho. Iniciei caracterizando o que a literatura acadêmica entende por pesquisa qualitativa e, no seio dela, o significado da abordagem fenomenológica. Tendo firmado a investigação por meio de procedimentos hermenêuticos para a percepção/interpretação histórica, conclui o capítulo esclarecendo como me utilizei dessa conduta — hermenêutica — realçada da práxis histórica.

Na segunda, *O SIGNIFICADO DA VALIDAÇÃO EM MATEMÁTICA*, destaquei, a princípio, como se concebe a organização da matemática (ocidental) em termos do seu funcionamento enquanto ciência. Nessa mesma passagem, apresento compreensões sobre diferentes manifestações das demonstrações matemáticas na história da humanidade — desde a Antiguidade até os dias atuais — motivo pelo qual se pode entender a primeira parte do texto como sendo um estudo panorâmico, no qual pretendi apresentar o assunto das demonstrações em sua vasta significação histórica.

Na terceira, *UM MOVIMENTO MODERNIZADOR DA MATEMÁTICA*, descrevi o MMM por meio dos seus aspectos políticos, culturais e de ensino, o que se projetou via exposição do movimento, tanto por uma dimensão internacional, quanto por uma nacional, levando-se em conta os problemas centrais para o desdobramento de ambas. Posto isso, passei a direcionar a atenção para o ensino de matemática por meio do que classifiquei como artefatos, os quais fundamentaram a matemática escolar pretendida no auge das “modernizações”. Dessa complexidade, manifestei as compreensões que foram surgindo ao longo do presente estudo.

Por ser uma pesquisa atenta aos trâmites e ocorrências da matemática e de seu ensino, propus uma quarta seção, *O LEGADO HERDADO NA TRADIÇÃO*, na qual pretendi desenvolver compreensões sobre as considerações críticas de Morris Kline, Richard P. Feynman e René Thom, isto porque faz-se justo o entendimento quanto aos “efeitos” do MMM após a implementação das ideias desenvolvidas naquele período. Ao perfazer esse caminho tive em vista dois objetivos para este trabalho: I) entender as implicações causadas ao ensino de matemática no pós-MMM; e II) compreender os novos rumos para o ensino de matemática, visto que as concepções de ensino encaradas durante a década de 1960 não eram mais entendidas como ideais para o ensino básico, nem em termos de conteúdo e nem de abordagem.

Por fim, numa quinta e última seção, *CONSIDERAÇÕES FINAIS*, intencionei, como uma forma de apreciação do tema, retomar minha interrogação de pesquisa e revelar em um último ato as asserções conseguidas nesse percurso como pesquisador em Educação Matemática. Tal seção foi pensada como uma possibilidade de expressar compreensões mediante o esforço hermenêutico-fenomenológico empreendido ao longo deste estudo.

## 2 A ORIENTAÇÃO METODOLÓGICA DA PESQUISA

*Admite-se geralmente que toda arte e toda investigação, assim como toda ação e toda escolha, têm em mira um bem qualquer; e por isso foi dito, com muito acerto, que o bem é aquilo a que todas as coisas tendem. Mas observa-se entre os fins uma certa diferença: alguns são atividades, outros são produtos distintos das atividades que os produzem. (...) Se, pois, para as coisas que fazemos existe um fim que desejamos por ele mesmo e tudo o mais é desejado no interesse desse fim; e se é verdade que nem toda coisa desejamos com vistas em outra (porque, então, o processo se repetiria ao infinito, e inútil e vão seria o nosso desejar), evidentemente tal fim será o bem, ou antes, o sumo bem.<sup>3</sup>*

A pesquisa que exponho aqui é efetuada, por um lado, mediante os procedimentos da fenomenologia e, por outro, pelos da hermenêutica filosófica. A primeira busca compreender o modo pelo qual o conhecimento do mundo é constituído, pondero que não é o caso de explicitar o que é o mundo, e sim o conhecimento produzido nele. E nisso, há uma busca pelo que é o real, a realidade e, ainda, o homem. Já no que tange à alçada da hermenêutica filosófica — e não só da filosófica — ela situa-se na problemática imposta pelo fenômeno da compreensão: o de se interpretar corretamente aquilo que é exposto por algo ou alguém. Desse modo, por meio da harmonia travada entre fenomenologia e hermenêutica filosófica, pretendo trazer à tona não somente entendimentos sobre a tradição em que se situam as demonstrações, mas também discernimentos e verdades sobre o estudado.

Referindo-se à hermenêutica filosófica, considero significativo pesquisar aspectos da Educação Matemática segundo esse enfoque, não apenas por ser um modo de conhecimento, mas por possibilitar “um modo de ser” (RICOEUR, 1988, p. 08). Assim, além de explicitar os fundamentos das teorias citadas, farei também uma exposição sobre as ações procedimentais executadas ao longo dos estudos, projetadas como um modo de compreender sentidos da demonstração matemática no MMM.

Toda pesquisa requer atenção à realidade daquilo que se quer investigar. Isso diz de uma abertura para se compreender as condições em que os procedimentos, contingentes à investigação, irão cumprir-se. “É um cuidado prévio, a ser assumido pelo investigador, no momento em que vai em direção à explicitação dos procedimentos de investigação” (BICUDO, 2011, p. 11). Desse modo, imaginei essa seção como uma forma de esclarecer meus entendimentos sobre a realidade metodológica desta pesquisa. Ela não deve ser confundida com a realidade histórica, tratada posteriormente.

---

<sup>3</sup> *Ética a Nicomaco*, em Aristóteles (1991, p. 01-02, itálico nosso).

## 2.1 Compreensões sobre os métodos investigativos

Em Educação Matemática, área de inquérito deste estudo, sobressaem-se dois tipos/modalidades de pesquisa, a quantitativa e a qualitativa. Os estudos quantitativos são efetivados, de um modo geral, por meio de procedimentos estatísticos e têm como princípio fundamental a contagem — o que inclui a mensuração. Nas condições em que a pesquisa quantitativa se insere estão, quase sempre, resguardadas as possibilidades de generalização e transferibilidade de resultados, as quais

são ações sustentadas por um raciocínio de inferência passível de ser efetuado a partir de investigação denominada, grosso modo, de quantitativa (...). Estas seguem a lógica da pesquisa que parte de estudos teóricos sobre o assunto investigado os quais são articulados e postos como um quadro teórico que fundamenta a investigação e respectiva interpretação (BICUDO, 2011, p. 16).

De acordo Bicudo (2011), o pesquisador quantitativo parte analisando dados de uma amostra, um subconjunto de uma dada população e, depois, avança generalizando os resultados para o todo, para a população. É o momento em que ele elenca aquilo que é universal, o que abarca toda a composição dos seus objetos de estudo. Já, quando no contexto da pesquisa, ele se dá conta de que seus métodos foram satisfatórios, segue se valendo da transferibilidade, o que se reduz na possibilidade de se desenvolver as ações de uma “pesquisa específica em outras situações com possibilidade de sucesso similares” (BICUDO, 2011, p. 17).

Contudo, às vezes, o que se quer investigar foge da alçada dos procedimentos estatísticos. Um exemplo são as pesquisas da área de humanas, pois no domínio dessas ciências, os pesquisadores “estão mais preocupados com o processo social; buscam visualizar o contexto e, se possível, ter uma integração empática com o processo objeto de estudo que implique melhor compreensão do fenômeno” (NEVES, 1996, p. 02), o que não é possibilitado pela pesquisa quantitativa, visto que não é passível de mensuração. Em casos assim, faz-se necessário, outra postura, a qualitativa, a qual não está impedida dos atos de generalização e de transferibilidade.

Em regiões de inquérito como a medicina, a pesquisa qualitativa é amplamente usada e os mecanismos de generalização e transferibilidade são mais explícitos. Estuda-se um caso com o intuito de generalizar procedimentos de curas para vários casos. O que muda entre pesquisa quantitativa e a qualitativa, no que concerne à generalização e à transferibilidade, é a concepção de certeza e a de repetição exata, ainda que probabilística, de ocorrências (BICUDO, 2011, p. 17).

De acordo com Chizzotti (2003), o que diferencia a abordagem de pesquisa qualitativa da quantitativa é o fato de que a primeira mantém implicações diretas com as pessoas, com a localidade onde essas se encontram e com as ocorrências que as circundam, enquanto a segunda se preocupa e está orientada pelas quantificações que realiza nessas esferas.

O termo qualitativo implica uma partilha densa com pessoas, fatos e locais que constituem objetos de pesquisa, para extrair desse convívio os significados visíveis e latentes que somente são perceptíveis a uma atenção sensível e, após este tirocínio, o autor interpreta e traduz em um texto, zelosamente escrito, com perspicácia e competência científicas, os significados patentes ou ocultos do seu objeto de pesquisa (CHIZZOTTI, 2003, p. 221).

Uma particularidade dos estudos qualitativos reside na possível admissão de procedimentos determinados pelos aspectos ou natureza da pesquisa. Segundo Chizzotti (2003), os pesquisadores que se valem da pesquisa qualitativa recorrentemente, ao proporem seus projetos investigativos, “diferenciam-se por pressupostos teóricos ou metodológicos, técnicas de investigação ou objetivos da pesquisa” (CHIZZOTTI, 2003, p. 222).

De acordo com Mazzotti (1991), é essa variedade que torna os estudos qualitativos de difíceis definições. Quem quer compreender a complexidade dessa questão deve iniciar percebendo que estudos dessa natureza podem se enredar em um emaranhado de abordagens: naturalista, pós-positivista, antropológica, etnográfica, estudo de caso, humanista, fenomenológica, hermenêutica, ideográfica, ecológica, construtivista, dentre outras. Essa modalidade de pesquisa também compreende algumas características essenciais como destaca Neves: “(1) o ambiente natural como fonte direta de dados e o pesquisador como instrumento fundamental; (2) o caráter descritivo; (3) o significado que as pessoas dão às coisas e à sua vida como preocupação do investigador; (4) enfoque indutivo” (NEVES, 1996, p. 01).

Conforme Bicudo (2011, p. 14), o termo “qualitativo da pesquisa informa que se está buscando trabalhar com qualidades dos dados à espera de análise”. Isso não significa que pesquisas assumidamente qualitativas são orientadas numa mesma concepção. A autora explicita que, em uma pesquisa qualitativa, pode-se trabalhar com os pares: objeto/observado ou fenômeno/percebido. O primeiro par sugere uma postura que se assemelha aos casos de quantificação e

indica uma postura de separação entre sujeito que efetua a observação e o objeto observado. A busca é pela qualidade, tomada como já dada e pertinente ao objeto. É como se a qualidade fosse do objeto e se mostrasse passível de ser observada. Para tanto, seriam tomadas categorizações dessa qualidade e a observação seria dirigida por essa categorização. Assim procedendo, acabaríamos por cair no caso semelhante à mensuração ou contagem de qualidades (BICUDO, 2012, p. 17).

Já o segundo, indica que o sujeito tem a possibilidade de perceber a qualidade exposta, pois toma consciência dela. Não se pressupõe, nesse caso, parâmetros ou definições que direcionam a percepção. O pesquisador fica intencionalmente atento ao que ele percebe. Aliás, este é um discurso contrário aos pressupostos do cartesianismo e do positivismo.

Há uma doação de aspectos passíveis de serem percebidos em modos próprios de aparecer (...). Passado o momento, restam os atos da consciência – psicológicos, cognitivos, de ajuizamento – que articulam o percebido, organizando-o e expressando-o em linguagem. Assim, o que se tem é a expressão do percebido expressado pela linguagem – falada, escrita, artística, mítica etc. É nesse aspecto que a descrição é básica para essa perspectiva de pesquisa. Uma vez expressado e comunicado, o percebido já não é do sujeito, mas está apresentado (dado) à comunidade, solicitando, então, procedimentos de análise e interpretação (...). Esse modo de proceder vem ao encontro de discursos que criticam o cartesianismo e o positivismo, no que têm de determinante, categórico, objetivo e mensurável e é consonante com discursos que promulgam a inseparabilidade entre sujeito e objeto, a impossibilidade de se ter apenas um modo de ver o estudado, bem como com a relevância dos contextos histórico, político e social em que o estudado se situa e com a impossibilidade de aprisionar-se o dito na linguagem em caixas de interpretação. (BICUDO, 2012, p. 18-19).

Nesse contexto, inserem-se as pesquisas de abordagens fenomenológicas. “A Fenomenologia, que é uma escola filosófica, tem como cerne a busca do sentido que as coisas que estão à nossa volta, no horizonte do mundo-vida<sup>4</sup>, fazem para nós” (BICUDO, 2010, p. 26). Essa busca de sentidos é o que distingue o que se denomina de postura positivista (ou naturalista) da fenomenológica, aquela trabalha com fatos e não se pergunta, por exemplo, o que é uma operação matemática, ela é apenas executada. Já na fenomenológica, as operações matemáticas são percebidas e podem ser entendidas nos atos “atualizados do movimento da consciência”, de modo atento, consciente — ou por uma “síntese passiva” — pela pessoa que as efetuam. Desta forma:

O par fenômeno/percebido caracteriza a concepção fenomenológica de realidade e de conhecimento (...) e solicita que a descrição e o que expressa sejam analisadas e interpretadas, atentando-se para a ambiguidade própria da linguagem, dada a densidade de sentidos que ela transporta. Não se tem, a priori, um quadro de categorias de como se deve interpretar o relatado, mas há que se ficar atento ao rigor para não se cair prisioneiro do “achismo”, pontificando-se sobre o que ali está dito a partir de visões

<sup>4</sup> Atualmente, a autora opta por escrever “mundo da vida”, como os autores de língua latina traduzem esse termo. “É entendido como a espacialidade (modo de sermos no espaço) e a temporalidade (modo de ser no tempo) em que vivemos com os outros seres humanos e os demais seres vivos e a natureza, bem como com todas as explicações científicas, religiosas e de outras áreas de atividades e de conhecimento humano” (BICUDO, 2011, p. 30). Para Palmer (1969, p. 182): “contra o mundo dos cientistas, ‘objetivamente válido’ e anônimo, Husserl opôs o horizonte intencional em que cada um vive e se move, um horizonte que não é anônimo, mas pessoal e partilhado com outros seres que também o experimentam; a isto chamou ele o mundo da vida”. É o mundo das coisas experienciadas na vida pré e extracientífica.

particulares, quer sejam do próprio investigador, quer sejam de autores estudados (BICUDO, 2012, p. 18).

O ato de pesquisar, nessa abordagem, inicia-se quando estamos interessados em responder a uma interrogação, que deve ser colocada em destaque para que se busque compreender as circunstâncias em que se insere o fenômeno pesquisado. Nas palavras de Bicudo (2011, p. 23), a interrogação interroga: “O que ela interroga? O mundo. Não o mundo em sua generalidade vazia, mas aspectos específicos do mundo que se mostram em suas fisicalidades pragmáticas, teóricas, tecnológicas. Ela se constitui no Norte que dá orientação aos procedimentos da pesquisa”. Esse movimento nos conduz à busca “de procedimentos investigativos no que concerne à pesquisa do contexto em que o fenômeno está situado e contribui para lançar luz sobre o modo pelo qual vamos deixar que se manifeste” (BICUDO, 2010, p. 42).

### *2.1.1 A abordagem fenomenológica na pesquisa qualitativa*

A fenomenologia foi significativamente difundida a partir do século XX por Edmund Husserl, seu fundador. Desde então, ela continuou a ser desenvolvida por outros filósofos, destacando-se Martin Heidegger, Merleau-Ponty, Hans-Georg Gadamer e Paul Ricoeur. Originariamente, “ela surge como um método destinado a fundamentar tanto a filosofia como as ciências” (BICUDO, 1994, p. 16), nas quais imperavam os procedimentos investigativos positivistas pautados por meio de proposições tomadas como verdadeiras e interconectadas por padrões da lógica em termos de causas/consequências. O método positivista passou a ser difundido por Augusto Comte (1798-1857) quando a incluiu em sua filosofia na primeira metade do século XIX. São três, os princípios fundamentais que regem esse método ao tratar da questão da produção científica:

1ª A ciência é o único conhecimento possível, e o método da ciência é o único válido: portanto, o recurso a causas ou princípios não acessíveis ao método da ciência não dá origem a conhecimentos; a metafísica, que recorre a tal método, não tem nenhum valor. 2ª O método da ciência é puramente descritivo, no sentido de descrever os fatos e mostrar as relações constantes entre os fatos expressos pelas leis, que permitem a previsão dos próprios fatos (Comte); ou no sentido de mostrar a gênese evolutiva dos fatos mais complexos a partir dos mais simples (Spencer). 3ª O método da ciência, por ser o único válido, deve ser estendido a todos os campos de indagação e da atividade humana; toda a vida humana, individual ou social, deve ser guiada por ele (ABBAGNANO, 2007, p. 776).

A fenomenologia faz frente contrária a essa procedência. Isso reside sumariamente no fator procedimental que se adota ao escolher uma ou outra postura, mesmo que ambas as modalidades convirjam para um mesmo propósito, visto que tanto no pensar positivista quanto no fenomenológico “estão presentes a busca do rigor e algumas concepções que dizem da interpretação do mundo, como: fenômeno, realidade, consciência, essência, verdade, experiência, a priori, categoria, intersubjetividade” (BICUDO, 1994, p. 17).

Como uma possibilidade metodológica, o positivismo está firmado em teorias comprovadas como verdadeiras, tomando a ciência como um corpo de conhecimentos estruturado por uma lógica linear, sustentada por fatos que estão sequencialmente dados em termos de antes e depois. Para Bicudo (1994), recorrentemente — seguindo esse padrão linear — a determinação daquilo que se quer investigar é orientada, juntamente com os procedimentos utilizados, por esse corpo de conhecimentos e, toda descoberta concebida é por assim dizer, determinada pelos fatos que a antecedem. Destaca-se que, aqueles que desejam produzir ciência, partindo-se dos fundamentos positivistas, devem apresentar, de antemão, o padrão a ser seguido na investigação, com os objetivos e procedimentos especificados.

Já, na abordagem fenomenológica, a operação investigativa se dá pela percepção. Ocorre, ao invés de uma aplicação lógica, um movimento passional do investigador que se doa, por meio dos sentidos, para perfazer uma exploração dos processos e modos pelos quais a qualidade de um determinado fenômeno se mostra. Disto expõe compreensões e interpretações desencadeadas pelo ato intencional da consciência. Segundo Bicudo (1994), de modo algum, os dados, nesta abordagem, podem ser generalizados nem colocados em outros contextos, pois estão entrelaçados por uma situação singular entre aquele que percebe e o percebido, ou seja, entre *sujeito/fenômeno*.

A palavra “fenômeno” etimologicamente, “vem da palavra grega *fainomenon* — que deriva do verbo *fainestai* — e significa o que se mostra, o que se manifesta, o que aparece. É o que se manifesta para uma consciência” (BICUDO, 1994, p. 17). Daí, entende-se a ideia de estar atento para o que se mostra e emerge da intencionalidade, o que é entendido como o estar consciente.

O que se mostra está ligado ao mundo físico, fenomênico, mas também à subjetividade daquele a quem se mostra. O mundo está aí, é o espaço onde somos, estamos em ação e onde estão as coisas – físicas, conjunto de situações etc. A Fenomenologia aceita a realidade do mundo; não a coloca sob suspeição, isto é, não duvida dessa realidade considerada fenomênica. O fenomênico é o que é visto disso que se mostra. Nós o compreendemos como o encontro entre quem olha com atenção e o que é visto (BICUDO, 2010, p. 29).

Na relação *sujeito/fenômeno*, não se pode conceber que ele seja tomado separadamente dos modos pelos quais ele se engendrou. Ao se efetuar uma investigação fenomenológica os procedimentos empregados na pesquisa são inseparáveis do fenômeno que está sendo estudado e do pesquisador, porquanto “não há uma separação entre o percebido e a percepção de quem percebe, uma vez que é exigida uma correlação de sintonia, entendida como doação, no sentido de exposição, entre ambos” (BICUDO, 2012, p. 18).

Geralmente, não se dá de imediato a percepção daquilo que está à mostra. O sujeito que percebe teve, antecipadamente, anseio em perceber o que viu, há, como pano de fundo uma interrogação que orienta o olhar, o rigor e a insistência com vistas a obter o básico e o essencial do fenômeno. E como a percepção é particular, a realidade já não pode mais ser objetivamente dada, mas se torna aquilo que se compreendeu, que se interpretou e que se comunicou do percebido. “A realidade é o compreendido, o interpretado e o comunicado. É, portanto, *perspectival*, não havendo uma única realidade, mas tantas quantas forem suas interpretações e comunicações” (BICUDO, 1994, p. 18).

Com essa explicação pode parecer que a concepção fenomenológica é pouco rigorosa, já que em seu ideal ela abarca visões subjetivas, relativas e não calcadas em regras lógicas. Entretanto, só é possível perceber uma dada realidade fenomênica estando presente em sua concreção. O pesquisador, em sua inquietação, deve olhar atentamente para ver o que se mostra. Isso não faz com que pesquisas abordadas fenomenologicamente excluam o rigor, antes, porém, contribui para que o sujeito seja livre de seus preconceitos, já que há uma pretensão em captar o que se mostra.

Como uma última consideração estima-se a comunicação das consciências individuais, umas com as outras, é o ato intersubjetivo. O que é visto por um sujeito, mesmo sendo uma singularidade firmada entre *sujeito/fenômeno*, pode ser compartilhado com outros sujeitos, que estão a perceber e compartilhar o vivido entre si, o que é possível graças à linguagem. É por meio do compartilhamento travado na intersubjetividade que chegamos à ideia de verdade concebida pela fenomenologia, que não é subjetiva, objetiva ou relativa, já que os sujeitos estão em consentimento.

Dito isso, deixo às claras que, nesta dissertação, está em foco o fenômeno demonstrações matemáticas no MMM. Ao abordar este tema fenomenologicamente, significa que procuro compreendê-lo a partir do “como” ele se mostra a mim, em minha experiência vivida, em disciplinas ou cursos que tratam do tema, em textos que versam sobre o assunto e em minha prática enquanto pesquisador na Educação Matemática.

## 2.2 A hermenêutica como uma conduta para a investigação histórica

Esclarecida a modalidade de pesquisa, juntamente com a abordagem assumida nesta investigação, passo agora a apresentar os procedimentos efetuados ao longo dos estudos, projetados como um modo de compreender como se dá o processo de demonstração no MMM. Com tal intencionalidade, opto por orientar o estudo seguindo os fundamentos da hermenêutica filosófica. A hermenêutica, quando compreendida ao longo da história da humanidade, pode ser classificada — de acordo com a sua atuação — de duas maneiras distintas: clássica ou filosófica. Aquela vigora desde a Antiguidade e é tida como um conjunto de regras destinada à interpretação/compreensão de textos. É uma forma metodológica/didática em prol de outras disciplinas (jurídicas e teológicas). “Desde os tempos mais antigos, sempre houve uma hermenêutica teológica e outra jurídica, cujo caráter não era tanto teórico-científico, mas correspondia e servia muito mais ao procedimento prático do juiz ou do sacerdote instruídos pela ciência” (GADAMER, 2014, p. 29). Esta não se restringe a ser um meio metodológico como a clássica. Mas a supera, na medida que “deixa de se referir apenas à comunicação simbólica e passa a se referir, de modo mais amplo, a toda vida humana” (BATISTA, 2012, p. 106). Ela surge com os trabalhos de Martin Heidegger e tem seu marco inicial na publicação da obra *Ser e Tempo*, em 1927.

Heidegger transforma o que até então vinha sendo discutido como um método (por Schleiermacher e Dilthey, por exemplo) em uma ontologia – a condição mais fundamental de ser/estar no mundo. E isso influencia diretamente a noção que o autor tem de termos como entendimento, interpretação e afirmação (BATISTA, 2012, p. 106).

Heidegger não concebe o entendimento (ou compreensão) como um método de leitura, nem ao menos como “um procedimento de reflexão crítica, mas um modo de ser, e como tal é uma característica do ser humano. Isso pressupõe um saber pragmático, intuitivo, que vem antes de qualquer consideração teórica, leis ou julgamentos e é o que nos orienta no mundo” (BATISTA, 2012, p. 106).

A interpretação, para este filósofo, dá-se em harmonia com uma consciência reflexiva. Para ele, nós nos colocamos a pensar/interpretar, quando algo, de repente, não faz mais sentido ou não funciona como esperado, há, por assim dizer, uma interrupção do fluxo compreensivo daquilo que estamos fazendo ou dizendo. O entendimento, à vista disso, é anterior à interpretação, é intuitivo e pré-reflexivo. Já a afirmação “surge como uma síntese entre

entendimento e interpretação, quando nos abrimos para o mundo e afirmamos o significado de algo, que acaba se estabelecendo como verdade” (BATISTA, 2012, p. 106).

Com essa mudança de paradigma, portanto, a hermenêutica deixa de lado o problema da filologia (o trato com os textos) e passa a se preocupar com o sentido da vida humana (BATISTA, 2012). “Se aplica imediatamente no plano de uma ontologia do ser finito, para aí encontrar o compreender, já não como um modo de conhecimento, mas como um modo de ser” (RICOEUR, 1988, p. 08). Essa reformulação da hermenêutica ficou caracterizada na literatura como a “virada ontológica”. A hermenêutica clássica é “epistemológica”, o que indica uma postura e entendimento do mundo a partir de um pensamento natural determinado por um sujeito indagativo e um objeto inerte. Na virada, ou seja, na sua exibição filosófica a hermenêutica torna-se “ontológica”. No campo hermenêutico e da interpretação, isso quer dizer que se trata de uma manifestação do ser em relação ao ser. Ao se posicionar frente a uma leitura do mundo cada leitor pode tirar uma conclusão distinta em seu ato interpretativo. É a abertura para um novo pensamento científico.

Gadamer, sucessor de Heidegger, dá prosseguimento aos estudos de seu mestre e, como ele, compreende a hermenêutica como inerente a nós, humanos.

Estamos constantemente interpretando, sejam coisas, outras pessoas ou nós mesmos. Para ele, a interpretação se dá a partir de círculos distintos, sendo que a verdade nada mais é do que a fusão de horizontes (ou de círculos), algo consensual, acordado intersubjetivamente. Entendimento é um processo dialógico entre o passado e o presente no qual eu exponho minhas pressuposições ao outro, sabendo que essas pressuposições são elas mesmas afetadas durante esse encontro, ou seja, estão suscetíveis a revisões futuras (BATISTA, 2012, p. 106-107).

O antigo ideal de um intérprete que “esclarece” o significado das coisas, posicionado e observando de fora, tornou-se um não ideal. A compreensão, “como estrutura básica de nossa experiência no mundo, não pode ser uma atividade isolada, (...) é participativa, dialógica. O significado de uma ação ou texto, portanto, é sempre negociado, consensuado, não pode ser simplesmente “descoberto” pelo pesquisador” (BATISTA, 2012, p. 107).

Do ponto de vista da filosofia gadameriana, não podemos considerar a hermenêutica como uma arte ou técnica de compreensão, pensada como um fundamento metodológico para as ciências humanas. “A hermenêutica não é uma doutrina de métodos das ciências [humanas], mas a tentativa de um acordo sobre o que são na verdade as ciências [humanas], para além da sua autoconsciência metódica, e o que as vincula ao conjunto da experiência do mundo” (GADAMER, 2014, p. 34).

Para Gadamer, a compreensão não pode ser controlada por procedimentos ou regras, posto que é uma condição do ser humano. (...) o que somos e o modo como compreendemos o mundo dependem, fundamentalmente, das nossas tradições. (...) somente quando nos confrontamos com nossas tradições e preconceitos é que podemos chegar à compreensão do que nos é estranho, utilizando o método de pergunta e resposta (BATISTA, 2012, p. 107-108).

A produção desta dissertação segue essas advertências. Ao tomar posição em um procedimento hermenêutico-filosófico significa que ela está fundamentada em uma visão que pretende situar pesquisador e objeto de pesquisa em um único movimento, em uma amálgama entre sujeito e fenômeno. É o reconhecimento, como em Gadamer (2002, p. 507), de que “a hermenêutica filosófica permite ver que o sujeito conhecente está indissolivelmente unido ao que se lhe abre e se mostra como dotado de sentido”.

Nesta investigação, a conexão/união/encontro com o objeto de pesquisa se dá por intermédio da história. É em sua constituição que se travou o movimento interpretação/compreensão para os estudos, não por uma hermenêutica técnica que requer regras para o trabalho com textos, mas por uma filosófica que se orienta pela experiência vivida.

Entendo que história

não significa tanto o “passado” no sentido do que passou, mas também a sua *proveniência*. O que “tem história” encontra-se inserido num devir. O seu “desenvolvimento” pode ser ora ascensão, ora queda. O que, desse modo, “tem uma história” pode, ao mesmo tempo, “fazer” história (...). História significa, aqui, um “conjunto de acontecimentos e influências” que atravessa “passado”, “presente” e “futuro” (...). História, significa, ademais, em oposição à natureza, que também se move “no tempo”, os entes passageiros “do tempo”, isto é, as transformações e destinos dos homens, dos grupos humanos e de sua “cultura”. (...) vale ainda como “histórico” o que é legado na tradição, quer seja conhecido historiograficamente ou admitido como evidente ou ainda velado em sua proveniência (HEIDEGGER, 2005, p. 183-184, *italico do autor*).

Em sentido mais vulgar, Abbagnano (2007, p. 1966) explicita o termo tradição como: “Herança cultural, transmissão de crenças ou técnicas de uma geração para outra”. Nesse sentido, Gadamer complementa dizendo que “tradição é essencialmente conservação e como tal sempre está atuante nas mudanças históricas” (GADAMER, 2014, p. 373). Em resumo, história é uma presença que se dá em um acontecer específico através do tempo. “É esse acontecer que vale como história, em sentido forte, tanto o ‘passado’ como também o ‘legado’, que ainda influi na convivência” (HEIDEGGER, 2005, p. 184).

Em meus estudos, considere os direcionamentos apresentados no artigo *sobre história e historicidade em Edmund Husserl* (BICUDO, 2016). No texto, a autora, ao tomar o tema da história e da historicidade, parte fazendo uma descrição de como essas ideias se presentificam

nas obras de Husserl. De acordo com as suas análises, o teórico emprega um processo inquiridor, retrospectivo<sup>5</sup>, utilizando-se do que é dado no presente e orientando-se para as ocorrências do passado.

O que nos é dado (...), está ali, presente em sua imediaticidade posta em termos práticos e teóricos. É como se estivéssemos olhando-a [a história] e nos locomovendo em sua superfície, aquela do momento do “agora” em que olhamos interrogadoramente para isso que nos é dado. Assumindo a postura de inquirir intencionalmente, locomovemo-nos para o mais profundo, ou seja, para um agora que se afasta deste, e vamos desnudando camadas de atos sensoriais, psicológicos e espirituais que vieram constituindo esta ciência, tal como nos é dada no presente (BICUDO, 2016, p. 37).

O “agora” de que trata Husserl é o agora do “mundo da vida” no qual vivemos, é o presente. Nele estão contidos tanto o nosso passado cultural como os nossos projetos<sup>6</sup> para o futuro. Por ser composto assim, o presente (o agora) nos traz essa possibilidade de investigação, tanto do passado quanto do futuro: “Isso significa que nos locomovemos em um horizonte histórico e que, entretanto, podemos, intencionalmente, investigar sua estrutura essencial de modo metódico” (BICUDO, 2016, p. 37-38).

No arcabouço das teorias de Husserl estão expostos dois conceitos importantes para a condução e manutenção da tradição. São os conceitos de “intropatia<sup>7</sup> (*Einfühlung*) e linguagem, nucleares à comunicação entre sujeitos e, desse modo, à constituição da esfera da intersubjetividade” (BICUDO, 2016, p. 39). Como uma forma de conservação da tradição estão presentes para a história e, ao tomá-la como tema, tanto a intropatia quanto a linguagem se constituem em material para a investigação daquilo que compõe os atos originais.

Não podemos proceder à investigação histórica a partir do presente, sem que nos detenhamos nos sentidos e nos significados dos signos, das palavras orais e escritas, da voz (...) e da visão de mundo, usos e costumes que tecem fios, unindo sujeitos em uma comunidade que se mantém e renova em sua historicidade (BICUDO, 2016, p. 39).

<sup>5</sup> “Esse inquérito retrospectivo intenciona as origens dos atos evidentes que sempre têm como correlato os materiais primeiros que estão em um mundo cultural pré-científico” (BICUDO, 2016, p. 38).

<sup>6</sup> Projetar é lançar-se à frente, atualizando-se em ações e programações na temporalidade e na especialidade mundanas. Durante muito tempo teve o sentido “de ‘desenho provisório, preliminar, esboço’ sob a influência do francês *projeter*, ‘projetar, lit. jogar antes’. Hoje, (...) significa ‘esboçar, planejar, fazer um rascunho, desenhar, delinear’. Similarmente, (...) é um ‘rascunho, esboço, desenho, croqui, esquema, projeto’. Heidegger recupera a associação com o lançar. As palavras são assim adequadamente traduzidas por ‘projeto’ e ‘projeção’, do latim *proicere*, ‘lançar para a frente’” (INWOOD, 2002, p. 151).

<sup>7</sup> A intropatia é basicamente conhecimento do outro que se desenvolve nas vivências em que o outro é dado (trazido, exposto) ao eu em sua corporeidade. É uma percepção constituinte da intersubjetividade. Não se trata, assim, de um conceito teórico ou de uma afirmação predicativamente construída. É uma experiência do outro, empiricamente vivida e colocada (...) fenomenologicamente em epoché, de modo que se escavam sentimentos, emoções, intuições, reflexões que são vividos nessa experiência (BICUDO, 2016, p. 39-40).

A linguagem, do ponto de vista de Husserl, alcança um estado imperecível quando está em sua forma escrita e, nessa condição, ela deve se manter enlaçada pelas evidências primeiras que constituem os fatos históricos em seu enredo. É o que nos possibilita enxergar claramente os encadeamentos lógicos numa determinada análise histórica. Partindo-se das “auto-evidências primeiras, a genuinidade original se propaga através da cadeia de inferência lógica, não importa quão longa ela seja. (...) Nisso está a idealização permitida pela lógica e, (...) também pela linguagem” (BICUDO, 2016, p. 41). Esse é o fundamento do procedimento histórico que interroga, retroativamente, pela origem. Ao proceder assim com a pesquisa histórica, não tenho a intenção de ir contrário ao que se faz, tradicionalmente, nessa área do saber. O trabalho de um historiador consiste em “construir” fatos (asserções) sobre o passado.

Desse modo, um fato não é outra coisa que o resultado de uma elaboração, de um raciocínio, a partir das marcas do passado, segundo as regras de uma crítica. Mas, a história que se elabora não consiste tão simplesmente na explicação de fatos. A produção da história, tampouco é o encadeamento deles no tempo, em busca de explicações *a posteriori*. O ofício do historiador não parte dos fatos como um dado *a priori*. Assim, cabe perguntar o que precede o estabelecimento dos fatos? (...) são as questões do historiador, suas hipóteses iniciais. Assim, não haverá fatos sem questões prévias para o seu estabelecimento. Em síntese, não existem fatos históricos sem questões postas pelo historiador (VALENTE, 2007, p. 31, *itálico do autor*).

Em síntese, quando percorremos em retrospectiva a cadeia lógica da linguagem proposicional, “orientados por uma interrogação que, intencionalmente posta, conduz a investigação, desvelando ideias originais, bem como a constituição de idealizações, podemos efetuar uma pesquisa histórica” (BICUDO, 2016, p. 43). Em consonância com Ricoeur (1990, p. 55) “em toda proposição podemos distinguir (...) seu sentido e sua referência. Seu sentido é o objeto real que visa; este sentido é puramente imanente ao discurso. Sua referência é seu valor de verdade, sua pretensão de atingir a realidade”. Ao tomarmos uma proposição (afirmação) chegaremos a uma “comunicação exata quando a informação for correta, quer dizer, quando a proposição é verdadeira” (HEIDEGGER, 1987, p. 44). Mas como me prontifiquei para atender a esses requisitos? Seguirei expondo as ações procedimentais, consideradas por mim como meio de desenvolver e cumprir todas essas cláusulas, na sequência.

### 2.3 Ações para o desenvolvimento da pesquisa

As pesquisas em geral se orientam por dois pontos fundamentais: I) uma interrogação, que exprime os anseios do pesquisador; II) a postura metodológica assumida, ou seja, o modo

de atuação, por parte do investigador, para dar conta do proposto. Já tornei explícita a interrogação orientadora para os estudos deste trabalho — *O que é isto, a demonstração matemática no MMM?* — agora, passarei a revelar como, em termos procedimentais, foi projetada a produção desta dissertação.

Caracteristicamente, esta é uma investigação de cunho histórico orientada pela hermenêutica filosófica, embasada primordialmente em textos escritos, disponíveis em meio eletrônico na internet, que, aliás, foi o espaço de consulta para a execução da pesquisa. Em específico, os materiais usados para o desenvolvimento dos estudos são textos em revistas, dissertações, teses e livros. É importante mencionar que a pesquisa poderia tomar rumos diferentes caso eu escolhesse textos não trabalhados aqui. Existe uma vasta literatura sobre o tema abordado nesta dissertação, todavia, a interrogação posta por mim é constituída no seio da Educação Matemática, o que pressupõe a seleção de autores da área. Aliás, a natureza dos questionamentos esboçados advém daquele campo de estudos.

O estudo de significados das demonstrações matemáticas para uma época histórica, que envolve a caracterização da cultura, da política, da escola e da própria matemática — para além de outras coisas — presentes no período em questão, é um trabalho muito abrangente para o mestrado. Por esse motivo, nesta pesquisa, optei por selecionar textos que diretamente abordam práticas demonstrativas no ensino de matemática no decorrer da década de 1960, as quais, evidentemente, trazem em suas explicitações, possibilidades de compreensão das complexidades da época.

Por ser uma investigação de cunho hermenêutico, os estudos se sustentam em análises de “artefatos” que possibilitam uma interpretação sobre aquele período. Um artefato é um “objeto produzido, no todo ou em parte, pela arte ou por qualquer atividade humana, na medida em que se distingue do objeto natural, produzido pelo acaso (...). Para ser reconhecido como tal, o [artefato] deve manifestar a intenção, preexistente à sua construção, de utilizá-lo com finalidade determinada, ou seja, deve constituir a realização de um projeto” (ABBAGNANO, 2007, p. 82-83). Neste estudo, entendo por artefato os materiais utilizados com vista à realização do MMM.

Em outras palavras, a intenção é estudar o passado com o que dele nos é objetivamente dado. De posse dos textos, iniciei meus estudos de modo a buscar uma “proximidade histórica” com o período. “O próprio trabalho de interpretação revela um desígnio profundo, o de vencer uma distância, um afastamento cultural, de tornar o leitor igual a um texto tornado estranho, e, assim, de incorporar o seu sentido à compreensão presente” (RICOEUR, 1988, p. 06). O efeito

intencionado não é o “livramento” das “amarras” que nos prendem no presente, pelo contrário, compreende-se no agora a ocorrência passada.

O fato de a compreensão posterior possuir uma superioridade de princípio face à produção originária e possa, por isso, ser formulada como um “compreender melhor” não se deve a uma conscientização posterior capaz de equiparar o intérprete com o autor original (como opinava Schleiermacher), mas, ao contrário, descreve uma diferença insuperável ente o intérprete e o autor, diferença que é dada pela distância histórica. Cada época deve compreender a seu modo um texto transmitido, pois o texto forma parte do todo da tradição na qual cada época tem um interesse objetivo e onde também ela procura compreender a si mesma (GADAMER, 2014, p. 392).

Não se trata de conseguir um melhor entendimento sobre os fatos estudados, “na verdade, compreender não é compreender melhor, nem sequer no sentido de possuir um melhor conhecimento sobre a coisa (...). Basta dizer que, *quando se logra compreender*, compreende-se de um modo *diferente*” (GADAMER, 2014, p. 392, *itálico do autor*). Também, ao olhar para o passado, não pretendo estudar os materiais desta pesquisa orientado nas representações próprias dos autores que mencionaram o movimento em questão.

Esta era, antes, a pressuposição ingênua do historicismo, ou seja, que era preciso deslocar-se ao espírito da época, pensar segundo seus conceitos e representações em vez de pensar segundo os próprios, e assim se poderia alcançar a objetividade histórica. Na verdade, trata-se de reconhecer a distância de tempo como uma possibilidade positiva e produtiva do compreender (GADAMER, 2014, p. 393).

Assim, nesta dissertação, procuro compreender o ensino de matemática na envergadura do MMM, reconhecendo que “o conhecimento objetivo só pode ser alcançado a partir de uma certa distância histórica. É verdade que o que está numa coisa, o conteúdo que lhe é próprio, somente se divisa a partir da distância em relação a atualidade, surgida de circunstâncias efêmeras” (GADAMER, 2014, p. 394). Adquirir, portanto, uma possível leitura de um processo histórico, a partir do seu distanciamento frente às opiniões dadas no presente é, até certo ponto, uma condição positiva para uma compreensão histórica.

Como um tipo de regra a ser seguida pelos hermeneutas, tem-se o círculo hermenêutico, o qual se trata de uma regra que procede da antiga retórica incorporada à hermenêutica moderna para a arte da compreensão. O princípio de um círculo hermenêutico segue a seguinte norma:

só podemos compreender uma passagem de texto se conhecermos o texto como um todo; só podemos conhecer o texto como um todo se conhecermos determinadas passagens (...). Precisamos ir e voltar a cada palavra, cada frase, cada texto, necessitamos conhecer a vida e obra do autor, os textos que ele leu, a cultura à qual pertence. Cada nível de interpretação contém uma circularidade (BATISTA, 2012, p. 104).

E isso ocorre também com a compreensão. Não quero, com esta dissertação, utilizar-me da hermenêutica apenas e indiscriminadamente para entender textos. Para mim, o estudo atento com os materiais selecionados pode possibilitar a abertura para se entender outras coisas mais, como a composição do MMM, os seus idealizadores, os povos e as culturas que de alguma forma empreenderam esforços para a realização daquela eventualidade.

Esclarecidas as concepções iniciais, apresento os capítulos que se seguem, destacando que são resultantes de um pensar reflexivo, procedente de uma persistência hermenêutica que realizei. Ao desenvolver este trabalho, não me permiti iniciar por métodos prévios e nem de referenciais teóricos predeterminados, mas iniciei com o “fenômeno das demonstrações matemáticas no MMM”, olhando para o que se diz desses artifícios no período do movimento. A seguir, entendendo que uma pesquisa fenomenológica diz do “sentido que o mundo faz para nós” (BICUDO, 2016, p. 47), exponho sentidos e significados do estudo aqui empreendido.

### 3 O SIGNIFICADO DA VALIDAÇÃO EM MATEMÁTICA

*— Mas isso é que é diabólico na matemática. Tudo dá certo. Está bem, melhor dizermos, quase tudo. Os números primos, você sabe, têm lá seus truques. E, no mais, tem-se também que prestar uma atenção danada, senão a gente se perde fácil, fácil. Mas, de um modo geral, tudo na matemática é realmente muito bem arrumadinho. É isso que tanta gente detesta nela.*<sup>8</sup>

O objetivo desta seção é discorrer sobre diferentes formas de manifestações das demonstrações na história da matemática, desde a sua origem na Grécia antiga até meados do século XX, período em que ocorreu o MMM. Trata-se de reconhecer que a matemática praticada no movimento é um objeto historiográfico conservado no tempo. Ao me voltar para o passado não significa que estou considerando “mundos estranhos que nada têm a ver com o nosso e com os objetivos desta pesquisa; ao contrário, todos eles juntos formam [um] grande horizonte que se move (...) e que abarca a profundidade histórica de nossa autoconsciência para além das fronteiras do presente” (GADAMER, 2014, p. 402).

Nesse viés, abordo em linhas gerais sobre as demonstrações por meio de uma discussão em torno do que dizem os autores que versam sobre o assunto no âmbito da Educação Matemática e, assim, construirei algumas noções de como esses dispositivos e procedimentos de validade em matemática são teorizados e concebidos. As demonstrações matemáticas são os meios pelos quais se aceita uma verdade em matemática, ou seja, são os modos de produção desta ciência. Ao estudar esta temática estou concomitantemente estudando uma forma de organização da matemática. Portanto, partirei de algumas considerações sobre este conceito, objeto de estudo desta investigação. Para isso, seguirei o modo de se encarar a ciência matemática como vem exposta nos textos que versam sobre seus conteúdos e, desta forma, sobre as demonstrações. Caraça (1951), ao discutir a forma de se olhar para as ciências assevera:

Ou se olha para ela tal como vem exposta nos livros de ensino, como coisa criada, e o aspecto é o de um todo harmonioso, onde os capítulos se encadeiam em ordem, sem contradições. Ou se procura acompanhá-la no seu desenvolvimento progressivo, assistir à maneira como foi sendo elaborada, e o aspecto é totalmente diferente — descobrem-se hesitações, dúvidas, contradições, que só um longo trabalho de reflexão e apuramento consegue eliminar, para que logo surjam outras hesitações, outras dúvidas, outras contradições (CARAÇA, 1951, p. XIII).

Deixo explicitado que darei maior atenção à história da matemática a partir do século VI a.C. Isso porque as demonstrações matemáticas só ocorrem — de acordo com os historiadores dessa ciência — próximo a essa época. Entretanto, não considero os processos

---

<sup>8</sup> *O diabo dos números*, Enzensberger (1997, p. 161, itálico nosso).

demonstrativos como surgidos imparcialmente e sem vinculação com alguma matemática anterior. Tais artifícios são partes integrantes de uma matemática que veio se estendendo ao longo dos anos, o que me faz levar em consideração, mesmo que brevemente, os momentos anteriores à data que selecionei. Dito isso, início tratando da situação em que se encontrava a matemática antes da sua reformulação via demonstrações.

### 3.1 Origem e organização da primeira ciência hipotético-dedutiva

O fenômeno da matemática está presente desde os tempos mais antigos da história da humanidade e mesmo que não se possa precisar a sua origem, tem-se por certo que a partir de um dado momento — e em determinadas circunstâncias — o homem passou a pensar matematicamente. Em seu início, a matemática se desenvolvia graças a um embasamento prático que veio a surgir com a evolução das sociedades.

Na pré-história, quando da necessidade imposta pelo meio físico e pelo crescimento populacional, o homem desenvolveu técnicas de plantio, de irrigação, de construções, entre outras que, no seu processo de elaboração e de concepção, estimulavam as relações de contagem e de mensuração, procedimentos próprios da matemática. É interessante notar que tal desenvolvimento matemático aconteceu, na maioria das vezes, por meio de descobertas espontâneas, que na observação e no teste de hipóteses se faziam válidas e, podemos por assim dizer, que tinham caráter prático e, portanto, apreensível pela comunidade (SANTOS; MONDINI, 2021, p. 67).

Desta forma, os primeiros desenvolvimentos da matemática se deram muitas vezes de forma involuntária e inicialmente vinculados à experiência empírica, relacionada aos afazeres com o meio. No bojo do que se entendia por um fazer matemático estava determinada uma espécie de regra experimental. Bicudo (1999, p. 118), ao se referir às duas grandes potências da Antiguidade, ao Egito e à Babilônia, dispõe que “considerados todos os fatos, levadas a efeito todas as interpretações, chegamos indubitavelmente ao resultado: o critério que [regia] o saber matemático, quer egípcio quer babilônico, é a EMPEIRIA, a experiência. [Era] necessário VER para CRER”. Em civilizações como essas, aqueles que se envolviam com a matemática se valiam de instruções para a resolução de seus problemas, ressalta-se que eram passos recomendados, baseados na observação e sem quaisquer registros que justificassem os resultados obtidos.

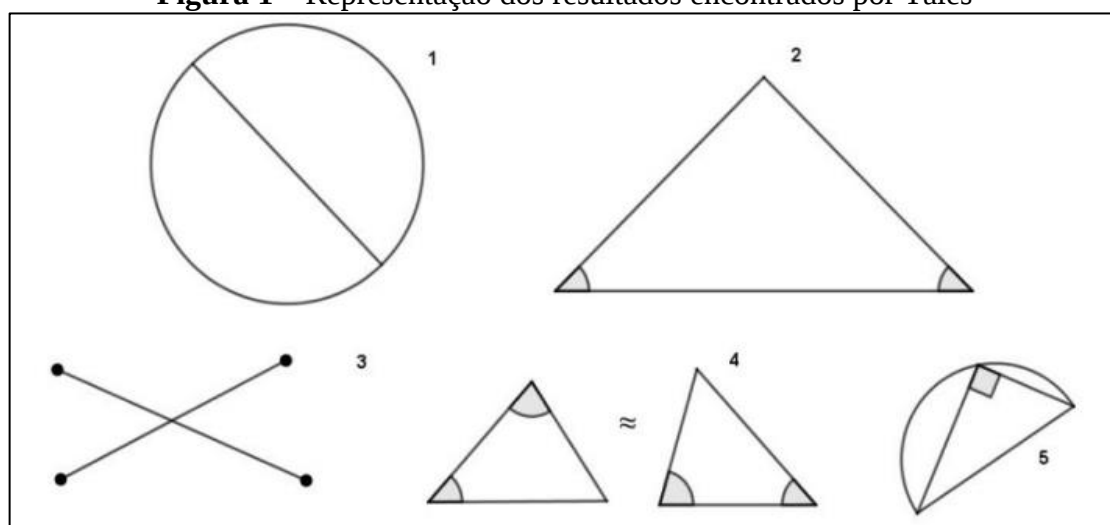
Ao que parece, dessas relações do homem com a matemática surgiram as primeiras ideias para a formação de uma teoria. Sendo assim, a matemática embasada por meio de procedimentos experimentais estava com seus dias contados, “faltava a ela o caráter sistemático,

rigoroso, puro, isto é, não empírico (...) que caracterizam o conhecimento matemático, tal como o entendemos hoje” (SILVA, 2007a, p. 31). Dessa maneira, com o passar do tempo, “uma arte especial [começava] a tomar corpo para o cultivo, aplicação e ensino dessa ciência prática. Nesse contexto, (...) desenvolvem-se tendências no sentido da abstração e, até certo ponto, passou-se então a estudar a ciência por si mesma” (EVES, 2004, p. 57).

De acordo com Eves (2004), à matemática baseada na experiência faltava a teorização de seus procedimentos ou, ao menos, alguma forma de verificação para os seus resultados, o que foi o ponto de desconfiança para os antigos matemáticos e que fez com que eles passassem a questionar a veracidade dos conceitos e pressupostos matemáticos que eram utilizados. Isso, por conseguinte, desencadeou as primeiras verificações, via demonstração, que garantiriam os conhecimentos matemáticos válidos. “Isto se remete aos tempos de Tales de Mileto, um dos míticos sábios da Grécia heróica do século VI a.C.” (SILVA, 2007a, p. 32), a quem a tradição atribui os primeiros atos em torno de uma demonstração matemática. Alguns resultados<sup>9</sup> geométricos expressam as primeiras asserções matemáticas demonstradas por esse estudioso da Antiguidade:

1. Qualquer diâmetro efetua a bissecção do círculo em que é traçado.
2. Os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais.
3. Ângulos opostos pelo vértice são iguais.
4. Se dois triângulos têm dois ângulos e um lado cada um deles respectivamente iguais, então esses triângulos são iguais.
5. Um ângulo inscrito num semicírculo é reto (EVES, 2004, p. 95).

**Figura 1** – Representação dos resultados encontrados por Tales

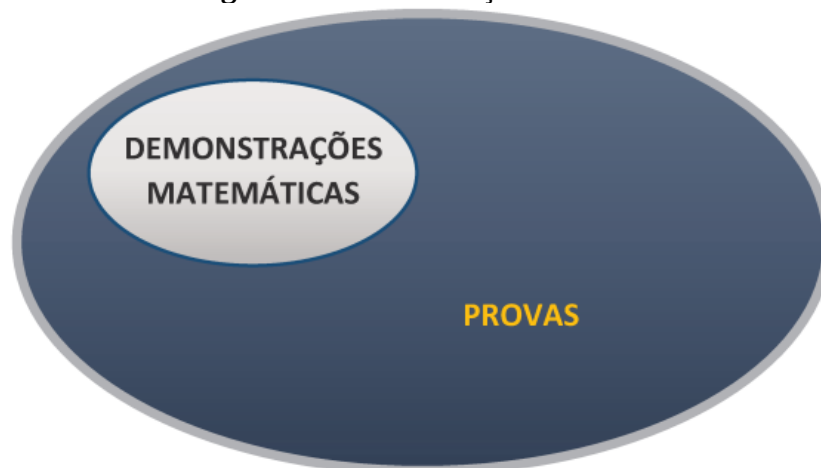


Fonte: Santos e Mondini (2021, p. 75).

<sup>9</sup> Veja o ANEXO A – Alguns resultados de Tales encontrados nos elementos.

A demonstração matemática (ou, como alguns preferem, prova), é uma operação dedutiva que consiste em encadear premissas para delas extrair uma conclusão. Contudo, há uma diferença: “[A dedução] se distingue da demonstração porque a demonstração é uma [dedução] particular (...), mais precisamente a [dedução] que tem ‘premissas verdadeiras, primeiras, imediatas, mais conhecidas do que a conclusão, anteriores a ela e causas dela’” (ABBAGNANO, 2007, p. 232-233). Atualmente, também há distinção entre os termos demonstração e prova. De acordo com Mazzi (2018), as demonstrações matemáticas possuem um caráter menos amplo do que as provas. Para o autor, todos os tipos de artifício usado como meio de se chegar à verdade podem ser classificados como prova, mesmo que esses artifícios sejam de diversas formas, como as testemunhas em cenas de crime ou até mesmo um documento que atesta certa informação. Assim, é logicamente correto estabelecer que todas as demonstrações são provas, mas nem todas as provas são demonstrações.

**Figura 2 – Demonstrações e Provas**



Fonte: Mazzi (2018, p. 68).

Algumas observações são importantes. De acordo com Bicudo (1999), quando nos pautamos por meio de demonstrações, podemos chegar a um estado de certeza frente àquilo que estamos tentando justificar (ou validar), e para a época isso parecia estar faltando. “Havia mister de aprender o estável por trás da mudança, a unidade que se escondia na multiplicidade, o eterno no perecível. Substituir o olho do ver, órgão dos sentidos, pelo olho do compreender, órgão do entendimento, a razão” (BICUDO, 1999, p. 118). Para além da certeza, como se verá mais a frente neste texto, a demonstração também pode promover, em sentido estrito, o que se denomina de consistência. O referido autor justifica esse fato expondo que os gregos avançaram em produzir uma matemática interconectada, fundamentaram sua criação no que o matemático atual chama de sistemas axiomáticos, um conjunto de postulados que articulados logicamente

faz inferir ou concluir em outro postulado o qual devemos chamar teorema. Assim, uma teoria matemática pode consistir, juntamente com todos os seus postulados e teoremas, em um sistema axiomático. A conexão entre tais postulados é o que resguarda a consistência. Nesses sistemas parece ocorrer a procura por uma “economia argumentativa”:

Se um postulado foi usado para demonstrar um teorema (ou para efetuar uma construção), esse teorema (ou essa construção) se torna uma verdade disponível para a demonstração de novos teoremas (ou para a realização de novas construções). Cada resultado constitui a base para o aprendizado de novos resultados. Os primeiros princípios servem, portanto, à demonstração dos primeiros resultados, que, em seguida, efetuarão o papel de premissas para novas demonstrações. O encadeamento dedutivo das proposições pode ser compreendido, assim, como a busca de uma espécie de economia na argumentação (ROQUE, 2012, p. 171).

Destaco como algo notável que essa forma de verificar as asserções em matemática — mediante demonstrações — “é uma invenção grega e caracteriza a matemática produzida por essa civilização” (SILVA, 2007a, p. 31). Mesmo no enorme volume de achados arqueológicos de várias nações como a China, a Índia, o Egito ou a Babilônia, “não conseguimos encontrar, em seus textos matemáticos, nada que lembre, o mais remotamente possível, a ideia de uma demonstração” (BICUDO, 1999, p. 118). A esse respeito Eves (2004, p. 58) relata:

Nenhum exemplo do que hoje chamamos demonstração pode ser encontrado na matemática oriental antiga. Em vez de um argumento encontra-se meramente a descrição de um processo. Instrui-se: “Faça assim e assim”. Além disso, exceto possivelmente em alguns casos, essas instruções não eram dadas na forma de regras gerais, mas simplesmente aplicadas a sequências de casos específicos.

D’Ambrosio (2018), ao comentar essa questão, indica que podemos encontrar muitas formas abstratas para a produção matemática ao estudarmos a história de civilizações antigas, como é o caso da Índia antiga, das civilizações andinas, da África subsaariana e da Polinésia. Todavia, mesmo que essas formas — construções abstratas de povos diferentes — mantenham alguma semelhança, são essencialmente distintas. Para o autor, essas formas podem ter sofrido influências socioculturais e, nesse viés, devem ser compreendidas levando-se em conta “os intelectuais, os artesãos, os profissionais, as pessoas, a sociedade invisível nestas regiões, seus mitos e sistemas de valores, seus sistemas de conhecimento (...). Temos também de considerar a dinâmica dos encontros de civilizações” (D’AMBROSIO, 2018, p. 191).

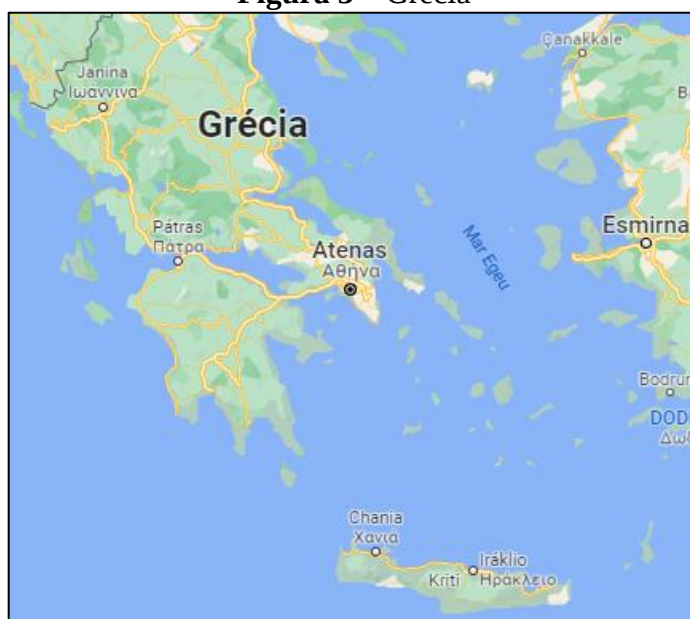
Com isso em mente e tendo firmado como propósito desta dissertação trazer à tona a matemática em um estilo demonstrativo situado nas salas de aula da década de 1960, devo me prestar ao conhecimento dela. Compreendi que é crucial estudar a originalidade da matemática utilizada no MMM, visto que se trata de uma ciência que teve seu início vários séculos antes.

Certo de que a matemática que demonstra sua veracidade tem origem na Grécia, considerarei seu desenvolvimento nessa nação, trazendo alguns entendimentos de como ela pode ter surgido por lá.

Conforme Russell (2015, p. 13-15), “em comparação com outras civilizações do mundo, a grega é recente. As do Egito e da Mesopotâmia são vários milênios mais antigas”. Por apresentar vários núcleos ou cidades disjuntas, o sistema social na Grécia era muito diversificado. Em Esparta, por exemplo, a existência de uma pequena aristocracia era possível graças ao trabalho de servos oprimidos, geralmente de raça diferente. Em outras regiões, mais pobres, a população consistia principalmente de agricultores que cultivavam suas terras com o auxílio de suas próprias famílias. “Nos lugares em que o comércio e a indústria floresciam, os cidadãos livres enriqueciam mediante o emprego de escravos” (RUSSELL, 1957, p. 11). Em termos territoriais, a Grécia é rude, tanto de aspecto como de clima, contudo, em grande parte ela possui

vales férteis, com fácil acesso ao mar, mas as montanhas impedem uma comunicação terrestre fácil entre uns e outros. Nesses vales, cresceram pequenas comunidades isoladas, que viviam da agricultura e se centralizaram ao redor de uma cidade, em geral perto do mar. Em tais circunstâncias era natural que, logo que a população de qualquer localidade se tornasse demasiado grande para os seus recursos internos, os que não podiam viver em terra se entregassem à navegação. As cidades do continente fundaram colônias, muitas vezes em lugares onde era muito mais fácil encontrar-se meios de subsistência do que na terra natal. Assim, no período histórico mais remoto, os gregos da Ásia Menor, da Sicília e da Itália eram muito mais ricos do que os do território grego (RUSSELL, 1957, p. 11).

**Figura 3 – Grécia**



Fonte: Google (2022).

A filosofia e a ciência que desenvolvemos hoje é uma herança deixada por esses povos. Segundo Russell (2015, p. 13), “o advento da civilização grega que produziu tal explosão de atividade intelectual é um dos acontecimentos mais espetaculares da história. Jamais ocorreu algo semelhante, nem antes nem depois”. Contudo, não seria prudente pensar e nem expressar que esses povos fundadores da filosofia e do modo de se fazer ciência, sejam melhores e mais evoluídos do que os de outras regiões. Antes, podemos recorrer ao fato de que os gregos conheciam o saber de outras culturas como a babilônica e a egípcia,

mas o seu modo específico de tratar questões científicas e filosóficas — no espírito da pura especulação desvinculada de interesse práticos imediatos —, seus métodos, fincados no debate racional, e a concepção que mantiveram de uma natureza racionalmente compreensível os apartam de seus predecessores e mestres como legítimos criadores do que se entende até o presente por Filosofia e Ciência. Se os babilônios estavam principalmente interessados em desenvolver métodos úteis de cálculo, os gregos viam na matemática o meio de acesso à própria estrutura íntima do cosmos (SILVA, 2007a, p. 31).

É admissível, neste ponto, que aqueles que queiram entender os primórdios da matemática demonstrativa perguntem: *o que pode ter acontecido no entremeio da comunidade grega, próximo do século VI a. C., que veio a modificar os modos de pensar e fazer matemática? Ou ainda, por que a partir de então o sentido orientador da ciência matemática se fez nas demonstrações e não mais nas aplicações imediatas para solução de problemas?*

Garnica (1995), fundamentado em Arsac (1987)<sup>10</sup>, apresenta duas conjecturas de como pode ter ocorrido o surgimento das demonstrações em matemática, ele as explicita como as teses externalista e internalista. Aquela recebe essa nomenclatura porque se supõe que a matemática dedutiva não se desenvolveu exclusivamente a partir da comunidade matemática. “Tal tese é dada na afirmação de que ‘(...) a transformação da matemática em ciência hipotético-dedutiva será a aplicação de regras do debate argumentativo que governa a vida política na cidade grega’” (GARNICA, 1995, p. 16). Depreende-se que para a sua realização o envolvimento da sociedade grega se fez presente como um todo e que as regras de inferências usadas em debates políticos tenham sido a chave para o estabelecimento de uma matemática dedutiva. Essa ideia também se presentifica nos estudos de Roque (2012):

A partir do momento em que, na vida comum, o debate e a argumentação se tornaram fundamentais, as técnicas de persuasão e a reflexão sobre a argumentação começaram a despertar interesse. Dentre as técnicas de persuasão, as regras da demonstração e o apelo a uma lógica que busca o verdadeiro, própria do saber teórico, passaram a ter

---

<sup>10</sup> ARSAC, G. **L'origine de la démonstration**: essai d'épistémologie didactique. Publications mathématiques et informatique de Rennes, n. 5, p. 01-45, 1987.

especial destaque, e quem soubesse persuadir sempre poderia convencer os outros de que sua tese era verdadeira (ROQUE, 2012, p. 95-96).

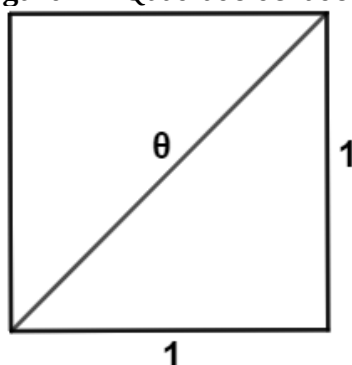
Na outra vertente, a internalista, não se recorre a influências externas, como se deve supor, as mudanças ocorridas advêm do seio da comunidade matemática e para compreendê-la devemos nos inteirar do problema que tornou indispensável a introdução da dedução em matemática. “Partindo de uma tal questão, (...) o surgimento da demonstração é contemporâneo ao problema da irracionalidade” (GARNICA, 1995, p. 18). Esse problema é o mesmo da incomensurabilidade, uma relação entre duas grandezas que diz que uma é incomensurável em relação a outra quando não existe nenhum submúltiplo de uma delas que possa exprimir a outra. A descoberta dessa relação é atribuída aos pitagóricos, os quais

são conhecidos principalmente pela teoria, meio metafísica, meio mágica, que tudo se reduz a números. Além de Galileu, que dizia que o livro do Universo está escrito em caracteres matemáticos, talvez também derive do pitagorismo as crenças mágicas da numerologia, ainda bastante vivas entre os que abrem mão da ciência, mas não do pressuposto de que há uma ordem no Universo, onde *tout se tient* (SILVA, 2007a, p. 32-33, *itálico do autor*).

Com o famoso teorema de Pitágoras<sup>11</sup>, é possível mostrar o porquê da incomensurabilidade ter se tornado uma crise para os primeiros matemáticos. Considerando um quadrado de lado 1 e traçando uma de suas diagonais, obtemos dois triângulos retângulos. Se calcularmos o valor da hipotenusa representada pela diagonal teremos  $1^2 + 1^2 = \theta^2 \rightarrow \theta = \sqrt{2}$ . Todavia,  $\sqrt{2}$  é irracional e os pitagóricos além de não possuírem teorias desenvolvidas sobre as questões numéricas, ainda esboçaram uma noção completamente diferente da que temos hoje em relação aos números. Para eles tudo era feito de números, mas como verificado a diagonal do quadrado não possuía um representante numérico conforme a unidade usada. Em nosso caso e por meio do cálculo feito, entendemos que  $\theta$  só pode ser um número irracional.

---

<sup>11</sup> Veja o ANEXO B – Demonstração do teorema de Pitágoras.

**Figura 4** – Quadrado de lado 1

Fonte: elaborada pelos autores.

Mas essa foi uma conquista amarga, pois levantava dúvidas quanto à correção da tese pitagórica de que os números eram constituintes últimos da realidade (por isso essa descoberta deveria ser mantida em segredo e, segundo a lenda, custou a vida do filósofo pitagórico que a divulgou — Hippiasus) (SILVA, 2007a, p. 33).

Esse acontecimento corrobora a ideia de que os pitagóricos possuíam um jeito peculiar de tratar as questões científicas, contudo, devemos lembrar que eles nos deixaram muitas descobertas, como as relações numéricas na música e a ligação desta com a aritmética, o que até hoje sobrevive nos termos matemáticos de “média harmônica” e “progressão harmônica”. “Ainda hoje falamos dos quadrados e dos cubos dos números, termos esses que devemos a Pitágoras. Também falamos de números oblongos, números triangulares, números piramidais, e assim por diante”<sup>12</sup> (RUSSELL, 1957, p. 41).

A crise dos incomensuráveis foi um bom motivo para que os matemáticos se preocupassem em desenvolver bases sólidas para suas produções. Os próprios números irracionais, pouco entendidos naquele período, ainda não estavam completamente desenvolvidos como atualmente e não faziam sentido algum naquele período em que a escola pitagórica esteve em vigor. Também, não seria mais possível confiar em doutrinas que contrariassem as regras da lógica. Segundo Russell (1957), a ciência e a filosofia nasceram juntas perto do século VI a.C., período em que a matemática demonstrativa surgiu, o que certamente caracteriza os traços místicos conectados ao pensar rigoroso; os pensadores desse período trazem uma concepção no mínimo subjetiva em suas explanações.

Em resumo, temos que a demonstração matemática surgiu na Grécia antiga próximo do ano 600 a.C. e seu uso pode proporcionar certeza, consistência e “economia argumentativa” às teorias axiomáticas. Hipoteticamente, essa forma de desenvolvimento da matemática pode ter

<sup>12</sup> Veja o ANEXO C – Números oblongos, triangulares e piramidais, para uma explicação do que são esses números.

se dado a partir de alguma vinculação com os modos de debate políticos ou a partir de crises no seio da própria matemática, como foi a dos incomensuráveis. A seguir, pretendo olhar diretamente para a matemática desenvolvida naquela época sob o ponto de vista teórico, o que farei mediante um estudo acerca dos *elementos* de Euclides, obra que permaneceu durante os anos e que traz a possibilidade de conhecimento da matemática grega na Antiguidade.

### 3.1.1 *Στοιχεῖα: a matemática elementar empreendida por Euclides*

De acordo com Silva (2007a), o momento de maior desenvolvimento da matemática grega se deu durante o período helenista, após Platão e Aristóteles. Em consonância com o autor, dentre os nomes mais “vistosos”, está o de Euclides, “ligado à ‘universidade’ e à famosa biblioteca de Alexandria, cidade grega no Egito” (SILVA, 2007a, p. 34). A seu respeito, temos poucas informações, ele “foi tão obscuro que nenhum lugar de nascimento é associado a seu nome. Nas palavras de Roque (2012, p. 151, *itálico do autor*):

SABE-SE MUITO POUCO sobre a vida de Euclides; nem mesmo é comprovado que tenha nascido em Alexandria, como se afirma com frequência. Há evidências, contudo, de que seja autor, além dos *Elementos*, de outras obras de matemática, sobre lugares geométricos, cônicas etc. Os *Elementos* de Euclides são um conjunto de treze livros publicados por volta do ano 300 a.E.C., mas não temos registros da obra original, somente versões e traduções tardias. Um dos fragmentos mais antigos de uma dessas versões, encontrado entre diversos papiros gregos em Oxyrhynque, cidade às margens do Nilo, data, provavelmente, dos anos 100 da Era.

Embora edições dos *elementos* frequentemente identificassem o autor como Euclides de Megara<sup>13</sup>, trata-se de um caso de erro de identidade” (BOYER; MERZBACH, 2012, p. 87). Todavia, se esse matemático realmente existiu, deveria ser alguém dotado por uma apreciável capacidade de ensinar, o que provavelmente foi a chave para o sucesso de sua produção. Os *elementos* foi o trabalho mais expressivo entre as suas obras, tanto assim que muitas vezes “Euclides e os *elementos* são frequentemente considerados sinônimos” (BOYER, 1974, p. 74). O texto euclidiano

não era, como se pensa às vezes, um compêndio de todo o conhecimento geométrico; ao contrário, trata-se de um texto introdutório cobrindo toda a matemática *elementar* — isto é, aritmética (no sentido de “teoria dos números”), geometria sintética (de pontos, retas, círculos e esferas), e álgebra (não no sentido simbólico moderno, mas um equivalente em roupagem geométrica). Os *elementos* se limitam austeramente ao

<sup>13</sup> Veja o ANEXO D – **Euclides de Megara?**, onde está disposta a folha de rosto de uma dessas edições. Se trata da primeira versão inglesa dos *elementos* feita por Sir Henry Billingsley (1570).

seu campo — a exposição lógica dos assuntos básicos da matemática elementar (BOYER; MERZBACH, 2012, p. 89).

Euclides, de forma sistemática e segundo um tipo modelar de ciência, conseguiu coletar toda matemática produzida, por exemplo, por Eudoxo e Teeteto, tornando-se em um grande sistematizador do conhecimento acumulado até sua época (c. 300 a.C.). “Coube-lhe também prover demonstrações rigorosas (para a época) em que elas faziam falta e corrigir outras menos perfeitas”. Mas, o que chama atenção e que também demonstra a genialidade desse matemático, foi o modo como ele fez isso.

A partir de um sistema mínimo e supostamente completo de verdades não-demonstradas e indemonstráveis — axiomas e postulados (posteriormente verificou-se que no sistema faltavam pressupostos, substituídos pela intuição espacial) —, Euclides demonstrava racionalmente todos os enunciados de *Os elementos*. Estava assim criado o método axiomático-dedutivo que viria a servir de modelo para toda a matemática a partir de então: a redução racional (preferivelmente lógica) de todas as verdades de uma teoria a uma base mínima e completa de verdades evidentes ou simplesmente pressupostas. Não havia nada de remotamente similar na matemática não grega (SILVA, 2007a, p. 34).

Desde então, como se verá em tópicos posteriores deste texto, as teorias matemáticas passaram a ser firmadas sobre: “conceitos primitivos e conceitos derivados, axiomas e teoremas (...). Os conceitos aceitos sem definição denominam-se CONCEITOS PRIMITIVOS; os outros, CONCEITOS DERIVADOS. As proposições acolhidas sem demonstração chamam-se AXIOMAS” (BICUDO, 1999, p. 118). Essa é a organização estrutural da matemática produzida pelos gregos dos V e VI séculos a.C., e sistematizada por Euclides em sua obra *Os elementos* (*Stoicheia*)<sup>14</sup>.

Segundo Bicudo (2007), o modo de abordagem de uma obra ou até mesmo do seu ensino na Antiguidade e na Idade Média era o comentário. E se tratando dos *elementos*, e em específico do seu livro I, o seu comentário foi escrito por Proclus. Para se ter ideia, esse livro inicia com as definições, postulados e axiomas preliminares necessários. Possui 48 proposições que se subdividem em três grupos. As primeiras 26 tratam de propriedades referentes a triângulos e incluem os três teoremas de congruência. As proposições I 27 a I 32 estabelecem a teoria das paralelas juntamente com a demonstração de que a soma dos ângulos de um triângulo é igual a dois ângulos retos. A partir daí, as proposições seguintes passam a tratar de paralelogramos,

<sup>14</sup> “*Stoicheia*” é a forma transliterada do termo grego *Στοιχεῖα*, título original da obra euclidiana. De acordo com o Dicionário Grego-Português (DGP) o termo pode indicar “4. elemento; princípio constitutivo; ponto de partida 5. rudimentos; noções preliminares de uma ciência 6. pontos principais de uma demonstração” (MALHADAS; CONSOLIN; NEVES, 2010, p. 36). Para Bölting (1953, p. 536), o vocábulo ainda pode significar elemento, fundamento, rudimento, etc.

triângulos, quadrados e, com mais veemência, as relações entre áreas. Os livros que compõem os *elementos* de acordo com seus assuntos são:

- Livro I: primeiros princípios e geometria plana de figuras retilíneas: construção e propriedades de triângulos, paralelismo, equivalência de áreas e teorema “de Pitágoras”.
- Livro II: contém a chamada “álgebra geométrica”, trata de igualdades de áreas de retângulos e quadrados.
- Livros III e IV: propriedades de círculos e adição de figuras, como inscrever e circunscrever polígonos em círculos.
- Livro V: teoria das proporções de Eudoxo, razões entre grandezas de mesma natureza.
- Livro VI: aplicações do livro V à geometria, semelhança de figuras planas, aplicação de áreas.
- Livros VII a IX: estudo dos números inteiros – proporções numéricas, números primos, maior divisor comum e progressões geométricas.
- Livro X: propriedades e classificação das linhas incomensuráveis.
- Livros XI a XIII: geometria sólida em três dimensões, cálculo de volumes e apresentação dos cinco poliedros regulares (ROQUE, 2012, p. 163-164).

É quase certo que os comentários de livros como os de Euclides se tratavam de versões escritas das aulas que os estudantes do V século d.C. tinham acesso. Ademais, entende-se que esses textos deveriam circular entre os filósofos, sendo usados como parâmetros para as aulas de outras pessoas. Desse modo, é possível depreender que Proclus se valeu de fontes escritas por outros autores também. A vantagem ao ler tais comentários deveria ser o “alcance” imediato ao modo como uma época de autores (talvez os primeiros produtores de uma obra) haviam planejado e esquematizado suas obras e aulas, visto que esses trabalhos perfaziam o registro de uma cultura intelectual e educacional. “Desse modo, enriquecia-se o conhecimento, pela confluência de muitos saberes — vários rios, mas uma só água” (BICUDO, 2007, p. 211).

O comentário de Proclus contém um prólogo constituído de duas partes. O autor minuciosamente inicia sua exposição tratando dos princípios fundamentais da obra — definições (*ὅροι*), postulados (*αἰτήματα*) e noções comuns (*κοινὰ ἔννοιαι*).<sup>15</sup> Destaca-se que a união dos postulados com as noções comuns perfazia a totalidade dos axiomas euclidianos. A distinção entre essas duas classes de axiomas não é muito clara, contudo, “as noções comuns parecem ter sido consideradas como afirmações aceitáveis à todas as ciências, enquanto que os postulados seriam afirmações específicas da geometria” (PINA, 2000, p. 101). Feita a exposição, ele aborda as proposições como dispostas no livro I dos *elementos*, deixando explícito que umas são problemas (*προβλήματα*) e outras teoremas (*θεωρήματα*). “Os problemas são aquelas proposições que têm por objetivo produzir, trazer à vista, ou construir o que, em

<sup>15</sup> Veja o ANEXO E – **Definições, postulados e noções comuns euclidianas**, onde está a lista das 23 definições, dos 5 postulados e das 9 noções comuns como expostas em Euclides (2009).

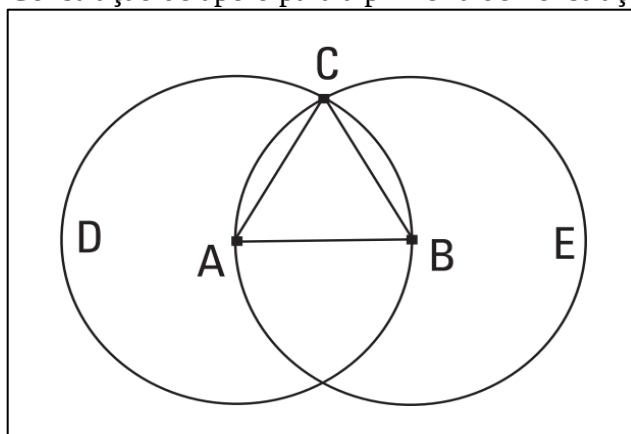
algum sentido, não existe, enquanto que os teoremas são as que visam a ver, identificar e demonstrar a existência ou a não existência de um atributo” (BICUDO, 2007, p. 211). Uma característica dos problemas reside em suas resoluções, que exigem a construção de figuras para colocá-las, aplicá-las, inscrevê-las, circunscrevê-las, ajustá-las ou pô-la em uma outra. Já os teoremas seriam questões que fundamentalmente estariam relacionados — por uma demonstração — aos atributos e propriedades dos objetos que são definidos como a “matéria” da teoria.

Em termos estruturais, a exposição resolutive de cada problema matemático nos *elementos* segue uma norma. Nas palavras de Proclus (1992, p. 159, tradução nossa):

Todo problema e todo teorema que é fornecido com todas as suas partes deve conter os seguintes elementos: um enunciado, uma exposição, uma especificação [distinção], uma construção, uma prova [demonstração] e uma conclusão. E desses, o enunciado afirma o que é dado e o que se busca dele, pois uma enunciação perfeita consiste de ambas as partes. A exposição toma separadamente o que é dado e o prepara com antecedência para uso na investigação. A especificação toma separadamente a coisa que é procurada e deixa claro exatamente o que é. A construção acrescenta o que falta no dado para encontrar o que se busca. A demonstração extrai a inferência proposta raciocinando cientificamente a partir de as proposições que foram admitidas. A conclusão retorna ao enunciado, confirmando o que foi demonstrado.

A respeito das partes componentes em uma demonstração, Bicudo (2007) esclarece que, embora o enunciado, a demonstração e a conclusão sejam enfatizados como essenciais, parece-lhe ser a construção o cerne das proposições. É a partir dela que a demonstração se faz. Como estudioso do tema, ele ainda esclarece que “há na construção um singular uso linguístico. Em todos os livros dos *Elementos*, a única forma verbal que se encontra nessa parte das proposições, desde que o verbo em pauta a admita, é o imperativo perfeito passivo (inexistente em português)” (BICUDO, 2007, p. 212). Segue-se, como exemplo, a demonstração da primeira proposição feita na referida obra; a Figura 4 é uma construção de apoio e parte integrante da argumentação demonstrativa.

**Figura 5** – Construção de apoio para a primeira demonstração do livro I



Fonte: adaptada de Euclides (2009, p. 99).

***Construir um triângulo equilátero sobre a reta limitada dada.***

Seja a reta limitada dada AB. É preciso, então, sobre a reta AB construir um triângulo equilátero. Fique descrito, por um lado, com o centro A, e, por outro lado, com a distância AB, o círculo BCD, e, de novo, fique descrito, por um lado, com o centro B, e, por outro lado, com a distância BA, o círculo ACE, e, a partir do ponto C, no qual os círculos se cortam, até os pontos A, B, fiquem ligadas as retas CA, CB. E, como o ponto A é centro do círculo CDB, a AC é igual à AB; de novo, como o ponto B é centro do círculo CAE, a BC é igual à BA. Mas a CA foi também provada igual à AB; portanto, cada uma das CA, CB é igual à AB. Mas as coisas iguais à mesma coisa são também iguais entre si; portanto, também a CA é igual à CB, portanto, as três CA, AB, BC são iguais entre si. Portanto, o triângulo ABC é equilátero, e foi construído sobre a reta limitada dada AB. [Portanto, sobre a reta limitada dada, foi construído um triângulo equilátero]; o que era preciso fazer (EUCLIDES, 2009, p. 99).

Essa matemática ao estilo euclidiano, como exposto, é “fundada na demonstração, pura em larga medida, sem preocupações imediatas com as aplicações, mas aplicável em princípio” (SILVA, 2007a, p. 36). Para Domingues (2002), até perto do final do século XIX, ela se manteve e se estabeleceu como modelo teórico mediante seu caráter material e relacionado à demonstração matemática. E mesmo que alguém a considere como elementar em sua grande maioria, o modo como ele se apresenta estabeleceu o padrão por mais de dois mil anos. Essa matemática, todavia, necessitava de fundamentos que a isentasse do emprego intuitivo.

A demonstração de uma proposição era uma atividade intelectual que visava a nos convencer e a convencer os outros, racional, mas também psicologicamente, da veracidade dessa proposição. A partir de algum momento, porém, tornou-se necessário submeter a noção de demonstração a uma análise mais profunda, com vistas a reduzir o recurso ao uso da evidência intuitiva (DOMINGUES, 2002, p. 61).

Ciente disto, passo imediatamente, no próximo subitem, a fazer considerações sobre como os matemáticos do século XIX e XX estavam compreendendo a matemática desde então,

e a partir dessa compreensão o que se formulou perante o conceito de demonstração matemática. Assim, vejamos como em tempos mais recentes esse padrão matemático está posto.

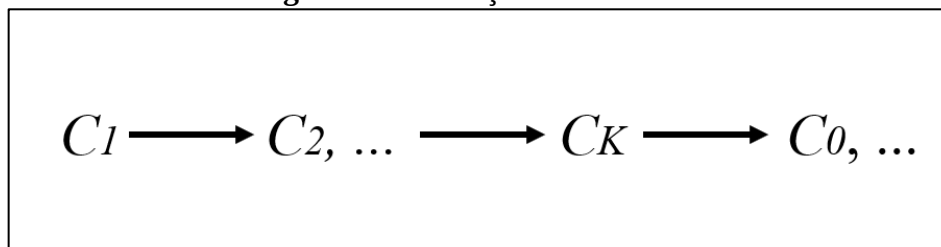
### 3.1.2 *A teoria hipotético-dedutiva para o fazer matemático na atualidade*

Considerarei a matemática depois de Cauchy, Weierstrass, Bolzano, Dedekind, Cantor, Frege, Hilbert, Bourbaki, e outros do século XIX e XX, conforme Euclides (2009). A escolha justifica-se por dois motivos: primeiro, como estou me valendo da abordagem husserliana para “um fazer história”, devo tomar o que é dado no presente e me orientar para as ocorrências do passado, o que entendo como um fazer retrospectivo da história e que pode tornar claro como é que as “coisas” vieram a ser como são agora. E segundo, porque ao compreender como a matemática do século XX se “portava”, estarei no caminho de compreender como ela esteve envolvida no MMM.

De acordo com o que está exposto em Euclides (2009), o trabalho de um matemático concentra-se em definir conceitos e demonstrar as propriedades que os compõem. Para o autor, definir um conceito é, na verdade, explicá-lo a partir de outros que já estão definidos, ao passo que demonstrar as suas propriedades “equivale a argumentar pela sua veracidade, usando as regras de inferência válidas fornecidas pela lógica, com base em proposições anteriormente demonstradas” (EUCLIDES, 2009, p. 82).

Assim, um certo conceito  $C_0$  é definido recorrendo-se aos conceitos  $C_1, C_2, \dots, C_K$ , todos eles já definidos, tendo tais definições dos  $C_1, C_2, \dots, C_K$ , ocorrido em função de outros conceitos, anteriores na estrutura, “e assim por diante”. De modo análogo, para provarmos uma proposição, utilizamo-nos de proposições anteriormente provadas e que foram provadas com o auxílio de outras já provadas que as antecedem na ordenação da teoria, “e assim por diante” (EUCLIDES, 2009, p. 82, *itálico do autor*).

**Figura 6** – Definições de conceitos



Fonte: elaborada pelos autores.

Porém, isso requer uma ressalva, visto que do jeito que está posta a primeira definição (juntamente com as suas propriedades) a sua determinação fica sem uma justificativa. Outrossim, as demonstrações matemáticas, que recorrentemente se encadeiam em propriedades

anteriores para justificar seus fatos, ficariam sem fundamentos. Contudo, há uma solução para esse impasse se escolhermos alguns conceitos sem definição:

Quer na definição de conceitos quer nas demonstrações de propriedades, o problema jaz na frase “e assim por diante”. Como não há, dada a nossa finitude, possibilidade de um retrocesso *ad infinitum*, é preciso dar uma solução ao “e assim por diante”. No caso da definição, os dicionários oferecem a solução do “círculo vicioso”: um termo é definido em função de um outro e este outro, em função daquele. É evidente que o matemático não pode aceitar essa situação. A sua solução (de conveniência, é verdade) consiste em tomar alguns conceitos sem definição. Assim procedendo, o matemático assume o compromisso de, valendo-se desses conceitos não definidos, que devem ser escolhidos no menor número possível, definir todos os demais conceitos de que deva lançar mão. No caso da demonstração de propriedades/proposições, uma conduta similar leva-o a acolher umas tantas proposições, no menor número exequível, sem demonstração e procurar provar todas as outras afirmações que venha a fazer a partir daquelas. Os conceitos não definidos são chamados conceitos ou termos primitivos e todos os outros, conceitos ou termos derivados. As proposições admitidas sem demonstração são ditas axiomas (hoje não se faz qualquer distinção entre postulado e axioma), e as demais, demonstradas, teoremas (EUCLIDES, 2009, p. 82-83, *itálico do autor*).

Dito isto, o que regula a aceitação das propriedades dos conceitos que integram uma teoria matemática são as suas demonstrações, pois elas são utilizadas com o intuito de se obter a validade (como verdadeira ou falsa), a convicção e em casos estritos a consistência das afirmações que se faz sobre os conceitos. Ao partirmos de pressupostos (hipóteses), assumidos de antemão como sendo verdadeiros, empregamos processos demonstrativos com vistas a, e por mecanismos lógicos, justificar a nova declaração (tese) que se formulou. O que determina, por assim dizer, uma interdependência da tese em relação à hipótese, esta é suficiente para aquela.

Indo além, quando se emprega sistematicamente as demonstrações matemáticas para desenvolver uma teoria, consegue-se mais do que apenas justificar ou verificar se um determinado fato é verdadeiro ou falso. Nesse sentido, Silva (2002) comenta que as demonstrações possuem aspectos relevantes em sua estrutura como o lógico-epistemológico, o retórico e o heurístico.

Chamarei de lógico-epistemológico esse aspecto das demonstrações que as mostra como objetos lógicos ideais, árvores ou sequências ordenadas no espaço lógico, segundo relações de dependência, ou consequência, lógica. E de retórico o aspecto das demonstrações, segundo o qual, elas aparecem como portadoras de força coercitiva de aquiescência às teses demonstradas. Há ainda um aspecto a ser considerado. Demonstrações podem ter também uma função heurística. Isto é, elas podem ser indutoras de descoberta matemática (SILVA, 2002, p. 69).

Ainda, de acordo com o autor, isso é o que faz com que uma demonstração seja perfeita, ou seja, ela é “logicamente correta, compreensível a um agente racional com limitações

cognitivas humanas e, ainda assim, heurísticamente estimulante” (SILVA, 2002, p. 71). Contudo, só com essas palavras não fica esclarecido, em detalhes, como esses artifícios são expressos e nem como se presentifica a sua estrutura por trás dessas considerações. Bicudo (2002) trabalha a explicitação das demonstrações expondo o que os matemáticos chamam de SISTEMA FORMAL,

que é, grosseiramente falando, a parte sintática de um sistema axiomático, como descrito no início destas considerações. De modo preciso, a primeira parte de um sistema formal é sua LINGUAGEM. Para especificá-la, devemos, antes de mais nada, mencionar-lhe seus SÍMBOLOS. Toda sequência finita de símbolos da linguagem é uma EXPRESSÃO da linguagem. Do conjunto das expressões, destaca-se um subconjunto, cujos membros são as FÓRMULAS da linguagem. Uma linguagem é considerada completamente especificada quando estiverem especificados seus símbolos e suas fórmulas. A parte seguinte de um sistema formal consiste nos seus AXIOMAS. A única exigência feita é que cada axioma seja uma fórmula da linguagem do sistema formal. Necessitamos, ainda, de uma terceira parte para um sistema formal, que nos capacite a concluir teoremas a partir dos axiomas. Isso é fornecido pelas REGRAS DE INFERÊNCIA. Cada uma delas afirma que, sob certas condições, uma fórmula, chamada a CONCLUSÃO da regra, pode ser INFERIDA de certas outras, chamadas as HIPÓTESES da regra. Uma regra em um sistema formal  $F$  é FINITA se tiver um número finito de hipóteses. Seja, agora,  $F$  um sistema formal em que todas as regras sejam finitas. Então, uma DEMONSTRAÇÃO em  $F$  é uma sequência finita de fórmulas, em que cada uma seja ou um axioma ou seja conclusão de uma regra cujas hipóteses precedam essa fórmula na sequência dada. Se  $A$  for a última fórmula em uma demonstração  $P$ , diremos que  $P$  é uma DEMONSTRAÇÃO de  $A$ . Uma fórmula  $A$  de  $F$  será um teorema de  $F$  se existir uma demonstração de  $A$  (BICUDO, 2002, p. 81).

Portanto, só se pode afirmar que as demonstrações proporcionam validade, convicção e consistência às teorias matemáticas, se considerarmos todas as partes de um sistema formal. Assim, as demonstrações são, em consonância com Santos e Mondini (2021), o que imprime a natureza consistente em uma teoria, é o “modo com o qual, no entrelaçamento lógico, atinge-se a verdade incontestável” (SANTOS; MONDINI, 2021, p. 73). A título de interpretação, isso quer dizer que uma proposição (que exprime uma propriedade de um conceito) se vincula a outras proposições, perfazendo assim a correlação das partes integrantes da teoria. Ao formular uma teoria o profissional da matemática parte das definições dos conceitos que ele quer utilizar em sua proposta teórica. Disto, e por meio da argumentação lógica, ele procura demonstrar as propriedades dos conceitos que definiu, o que em linhas gerais se faz mediante fórmulas da linguagem, ou seja, por afirmações/proposições.

A título de comparação entre o modelo matemático euclidiano que foi apresentado no subitem anterior e a matemática tratada na atualidade, autores como Domingues (2002) afirmam: àquele faltava estruturação mais sólida e abrangente, isto é, faltava-lhe rigor. Na atualidade, assim como em tempos remotos, os sistemas matemáticos mantiveram seu padrão

modelar, segundo o qual se deve partir de afirmações primeiras (axiomas) e por meio de regras da lógica demonstrar as demais afirmações (teoremas). Além disso, parece ter sido a geometria euclidiana uma das únicas a manter-se nessa sistemática, até por volta do século XIX, as demais teorias se desenvolviam, muitas vezes, segundo a intuição.

A verdade é que os fundamentos da matemática, de um modo geral, careciam ainda de uma estruturação mais sólida e abrangente e isso não seria alcançado senão na segunda metade do século XIX, após um arrastado processo de maturação. Mas, diga-se de passagem, esse desenvolvimento “ilógico” teve o seu lado positivo. Graças à intuição e ao trabalho ingente dos grandes matemáticos, a matemática evoluiu muito nesse período, senão com consciência plena pelo menos a passos confiantes que, no grosso, levaram ao caminho certo. Assim, ao se iniciar o século XIX, a geometria de Euclides, com seu alto grau de organização lógica, realmente se diferenciava do resto da matemática ainda tateante a procura de seus alicerces (DOMINGUES, 2002, p. 60-61).

A seguir, pretendo mostrar como os procedimentos matemáticos pautados em demonstrações — originados na Grécia — chegaram a atravessar os séculos, tornando-se um modelo para os trabalhos em matemática, mesmo que durante muito tempo as teorias tenham se desenvolvido sem acatar a justificação dedutiva para as suas principais ideias. Faz parte da proposta desta dissertação compreender como a demonstração transcorrida ao longo do seu percurso histórico se presentificou no MMM. Como pode uma teoria da matemática tão antiga atravessar todos os períodos e se impor como uma regra na atualidade?

### 3.2 Compreensões sobre a demonstração na história da humanidade

Considerarei, nesta seção, a matemática desenvolvida a partir dos *elementos* de Euclides, isto por dois motivos importantes para os propósitos desta seção. Primeiro porque foi essa produção, em termos dedutivos, que permaneceu frente as de outros teóricos, como Hipócrates de Chios. Não resta traço de outras obras, “nem outros rivais potenciais de tempos antigos” (BOYER; MERZBACH, 2012, p. 89). E segundo, porque sua obra é tomada como o modelo para o desenvolvimento matemático nos quase dois mil anos que se seguiram. É consenso entre os estudiosos que a matemática dedutiva se fez conhecida, praticamente, por meio dos *elementos*. Mas como de fato ocorreu a difusão dos trabalhos de Euclides, entre outros pensadores da época? O texto euclidiano esteve a ponto de se perder para sempre, o que quase aconteceu por motivos geopolíticos e de conquistas territoriais na esteira dos países do oriente médio. Mas se por um lado a guerra quase destruiu a obra grega, por outro foi justamente o que a fez florescer com mais facilidade em outras localidades.

Na Antiguidade, o centro de atividades intelectuais era em Alexandria, a qual foi

fundada em 331 a. E. C. por Alexandre, o Grande, permaneceu como capital do Egito durante mil anos, até a conquista muçulmana. Temos notícia de que o Museu de Alexandria, construído pelo rei Ptolomeu I por volta do ano 290 a. E. C., incluía uma grande biblioteca que reunia todo o saber da época. Inicialmente, seus pensadores mais conhecidos teriam sido Euclides e Arquimedes. Como, em seguida, a civilização grega se disseminou por uma vasta área, que ia do mar Mediterrâneo oriental até a Ásia Central, passou a incluir Alexandria. O período que chamamos de “helenístico” se caracterizou pelo ideal de Alexandre de difundir a cultura grega aos territórios conquistados e se estendeu, de sua morte, em 323 a. E. C., até a anexação da Grécia por Roma, em 146 a. E. C. (ROQUE, 2012, p. 219).

Por ter sido um local de destaque, Alexandria era muito visada pelos exércitos inimigos que queriam tomar o poder da cidade, o que durante anos chegou a afetar a biblioteca local. Investidas contra esses lugares passaram a ocorrer desde o ano 47 a.C. até a primeira metade da Idade Média (476 d.C. – 1453 d.C.), momento em que se sucedem uma série de mudanças geopolíticas no oriente médio e nos países a oeste do mar mediterrâneo. Segundo Singh (2014, p. 63-64),

o primeiro grande ataque aconteceu no ano 47 a.C. quando Júlio Cesar tentou derrubar Cleópatra incendiando sua frota. A biblioteca, localizada perto do porto, também pegou fogo e centenas de milhares de livros foram destruídos. Felizmente, para os matemáticos, Cleópatra apreciava a importância do conhecimento e ficou determinada em restaurar a glória da Biblioteca. (...) Durante os próximos quatro séculos, a biblioteca continuou a acumular livros, até que no ano 389 ela recebeu o primeiro de dois golpes fatais, ambos como resultado de intrigas religiosas. O imperador cristão Teodósio ordenou que Teófilo, bispo de Alexandria, destruísse todos os monumentos pagãos. Infelizmente, quando Cleópatra reconstruiu e reequipou a biblioteca, ela decidiu alojá-la no Templo de Serápis. E assim a biblioteca foi jogada no meio da fúria para a destruição de ícones e altares. Os estudiosos “pagãos” tentaram salvar seis séculos de conhecimento, mas antes que pudessem fazer qualquer coisa foram linchados pela horda de cristão. O mergulho em direção à Idade das Trevas tinha começado. Algumas cópias preciosas dos livros mais importantes sobreviveram ao ataque dos cristãos, e os estudiosos continuaram a visitar Alexandria em busca de conhecimento. Então, no ano 642, o ataque dos mulçumanos terminou aquilo que os cristãos tinham começado. Quando lhe perguntaram o que devia ser feito com a biblioteca, o califa Omar, vitorioso, declarou que os livros que fossem contrários ao Corão deveriam ser destruídos. E os livros que apoiassem o Corão seriam supérfluos e, portanto, também deviam ser destruídos. Os manuscritos foram usados como combustível para fornalhas que aqueciam os banhos públicos. A matemática grega virou fumaça.

Como se pode presumir, a matemática ocidental ficou reduzida ao básico. “Somente alguns luminares na Índia e na Arábia mantinham essa ciência viva. Eles copiaram fórmulas dos manuscritos gregos que tinham restado e começaram a reinventar a maioria dos teoremas perdidos” (SINGH, 2014, p. 64) e, assim, muitos estudiosos puderam reorganizar o conhecimento que até então tinham em mãos. No ato de recriação, os povos árabes e hindus

inseriram novos elementos na matemática, sendo o zero o seu triunfo máximo. Com o seu uso, por exemplo, é possível distinguir 22 de 202 em um sistema numérico posicional, além de demarcar a posição vazia, mas não apenas isso:

Os hindus reconheceram que o zero tinha uma existência independente, além do mero papel de marcar espaços entre números. O zero era um número como os outros, ele representava a quantificação do nada. E pela primeira vez o conceito abstrato do nada recebia uma representação simbólica (SINGH, 2014, p. 65).

Essa é uma das características do fazer matemática na Idade Média — a restauração das obras antigas, mesmo que reconfiguradas sob novos procedimentos. Para Contador (2006),

nos cerca de 1.500 anos que se seguiram após o período clássico, poucos foram os trabalhos de Matemática que surgiram, e se somarmos todos os trabalhos de todas as civilizações nesse período, veremos que em nenhum sentido poder-se-á compará-lo com as realizações da Grécia antiga. Talvez o maior feito desse período tenha ficado por conta da criação do zero (CONTADOR, 2006, p. 463).

Mais à frente, na Idade Moderna (c. 1453-1789 d.C.), novos domínios passam a ser desenvolvidos. Teorias como a da álgebra, que até então não haviam sido formuladas, começaram a surgir neste período. De acordo com Silva (2007a), grande parte da matemática começou a se modificar, tanto em termos de conteúdos como de métodos.

O que mais chama a atenção nessa época são a crescente autonomia do simbolismo matemático e as novas concepções de número germinadas nos domínios da álgebra, além de uma inusitada disposição dos matemáticos para se envolverem com o infinito sob diversas formas. A partir de Diofanto, no fim da Antiguidade, e dos algebristas árabes, na Idade Média, a notação algébrica (no princípio apenas uma forma abreviada da linguagem discursiva usual) irá se constituir num sistema simbólico bastante flexível, capaz de expressar em sinais os termos numéricos (incógnitas e parâmetros) e as operações às quais as quantidades denotadas por esses termos estão submetidas (SILVA, 2007a, p. 77).

Com o desenvolvimento simbólico dos termos matemáticos, muitos problemas passaram a receber um tratamento mais normatizado e em termos de representação, entende-se que a própria simbologia acabaria por — ela mesma — produzir novas conceituações na matemática. “Desse modo, o procedimento de resolução de equações torna-se pouco a pouco um processo mecânico de manipulação de símbolos (...) o simbolismo algébrico [adquire] uma espécie de vida própria, gerando os seus próprios conceitos” (SILVA, 2007a, p. 78).

Devido ao desenvolvimento da álgebra e concomitantemente dessa sua explicitação simbólica, novas questões, como a do problema da raiz quadrada para valores negativos, juntamente com a concepção de números imaginários originários dos trabalhos de Bombelli e

Cardano (século XVI), passaram a ganhar destaque nos trabalhos dos matemáticos modernos. Este é, segundo Silva (2007a), um dos momentos mais importantes da história da matemática, não apenas porque o conceito numérico estava se estendendo, mas, por ser esta a marca e constituição da concepção moderna de matemática.

Nesse ato aparentemente banal em que o simbolismo matemático clama pela sua autonomia são criados números que não mais correspondem a uma particularização do conceito de quantidade, mas respondem apenas à razão formal. Se um termo numérico se comportava como se denotasse um número, mesmo que isso fosse impossível segundo a concepção de número em voga, então ele efetivamente denotava um número. Desde então números não são mais entidades independentes apenas denotadas pelos símbolos, mas entidades geradas pelo próprio simbolismo que se caracterizam exclusivamente pelas suas relações operatórias com outros números (SILVA, 2007a, p. 78-79).

Essas ideias concernentes à questão numérica trouxeram a possibilidade de extensão dos domínios matemáticos, acrescentando a eles novos objetos, como os já citados números imaginários. Ao se estudar o comportamento destes acabou-se por entender que a matemática pode ser pensada como sendo “estruturas ou invólucros formais de possíveis domínios de objetos, definidos por relações puramente formais no interior de um sistema simbólico” (SILVA, 2007a, p. 80). Isso refletira na álgebra moderna surgida no século XIX e em concepções filosóficas como o “estruturalismo”, do grupo Bourbaki, mediante a qual a matemática se confunde com o estudo de estruturas formais axiomaticamente definidas e suas relações recíprocas.

Convém salientar que o século XVII foi um dos momentos em que mais ocorreram revoluções na matemática. Cito, a princípio a *Geométrie* de René Descartes, publicada em 1637 em forma de um apêndice para o seu *Discours de la Méthode* (Discurso do Método). Nessa obra, o autor foi inovador ao criar um método que não se restringia aos termos geométricos como os gregos faziam. Destaco que desde a Grécia antiga os números “estavam sempre associados a segmentos, e operações aritméticas, como somas e produtos, a construções geométricas” (SILVA, 2007a, p. 85).

Outro importante trabalho produzido na modernidade foi o desenvolvimento do cálculo por Leibniz e Newton, o que ocorreu de forma simultânea e independente. Leibniz publicou seus resultados em um texto de seis páginas em 1684 sob o título: *Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus* (Um novo método para máximos e mínimos, assim como para tangentes, que não é obstruído por quantidades irracionais e fracionárias, e um cálculo notável para eles). Já Newton só teve seus trabalhos publicados (seu método de cálculo infinitesimal)

entre 1704 e 1736, mas provavelmente os escreveu entre 1655 e 1666. Segundo Baron e Bos (1985b, p. 12), os trabalhos de “Newton sobre o cálculo ficaram abandonados por quase meio século de ineditismo. Isso se deveu às reservas do próprio Newton quanto a fazer comunicações e às dificuldades práticas de se publicar complexos trabalhos matemáticos naquela época”.

Entretanto, mesmo com obras tão elevadas, nos

deparamos com o seguinte quadro: de um lado a geometria euclidiana realmente sendo resgatada no Ocidente, com o respeito e a admiração dos estudiosos, graças sobretudo à sua organização lógica, não obstante algumas falhas já detectadas em seu desenvolvimento; de outro, a matemática passando por um surto de desenvolvimento muito grande, em vários campos, só comparável ao do período áureo da matemática grega, mas um desenvolvimento, segundo o historiador M. Kline (...), “ilógico”. De fato, novas áreas da matemática, como a geometria analítica e o cálculo, por exemplo, muito possivelmente não chegaram a satisfazer, sob o ponto de vista do rigor, nem mesmo aos seus criadores. Haja vista que R. Descartes (1596-1650), um cientista que valorizava sobretudo o método axiomático-dedutivo, em particular o método matemático, ao escrever sua única obra matemática, *A geometria*, não utilizou nem postulados e nem demonstrações, marginalizando assim sua própria epistemologia. Quanto ao cálculo, basta citar que um de seus criadores, I. Newton (1643-1727), fez três tentativas para passar a limpo suas ideias, nenhuma delas convincente, rigorosamente falando (DOMINGUES, 2002, p. 60).

Os trabalhos desses teóricos só obtiveram sua fundamentação no método axiomático-dedutivo no século XIX. “Precisou-se antes criar uma teoria adequada dos números reais e resolver alguns problemas — por exemplo, a natureza dos irracionais — que se arrastavam, a bem da verdade, desde a descoberta das grandezas incomensuráveis no século V a.C.” (SILVA, 2007a, p. 82). Assim, mesmo que as teorias do cálculo e da *Geométrie* tenham sido de sucesso em seu início, elas deixavam a desejar do ponto de vista lógico.

Os estudos referentes a esse período concluem que ocorre uma considerável quantidade de produções em matemática que se caracteriza por importantes descobertas de resultados matemáticos. Contudo, como se observa no cálculo de Newton e Leibniz, muitas dessas produções não eram rigorosamente comprovadas com o uso de demonstrações. Também, os trabalhos de Descartes expressavam novas interpretações para os antigos conceitos da matemática. Mas, se elas não foram comprovadas na época de seus idealizadores, como isso veio a acontecer em momentos futuros? E se eram novos conhecimentos que, em aspectos, diferiam da abordagem grega, como a demonstração de seus resultados deveria ser feita? Essas são perguntas próprias do século XIX.

Passado o momento de grandes descobertas matemáticas, no ínterim da Idade Moderna, os matemáticos posteriores começaram a se preocupar em como o conhecimento produzido

seria demonstrado. Essa é uma ocorrência que tem seu início a partir do fim do século XIX, e a grande questão era o estudo das bases fundamentadoras da matemática.

Desde os antigos gregos a matemática vem acumulando mais teoremas e verdades, e embora a maioria deles tenha sido rigorosamente provada, os matemáticos temiam que alguns casos, como a lei da tricotomia, tivessem sido aceitos sem o exame adequado. Algumas ideias tinham se tornado parte da tradição e ninguém tinha certeza de como foram originalmente demonstradas, se de fato algum dia tinham sido (SINGH, 2014, p. 129).

Nessa empreitada para a reconstrução das teorias matemáticas acabaram surgindo três vertentes filosóficas, a *logicista*, a *intuicionista* e a *formalista*, as quais apresentavam orientações distintas para o que se deveria entender por matemática. Isso estava atrelado de modo direto com os procedimentos de verificação dela.

A doutrina *logicista* “tinha por objetivo mostrar a matemática como uma ciência consistente e completa e expô-la como uma linguagem simbólica para simplificar suas formas de apresentação” (MONDINI, 2008, p. 03-04). Seus principais defensores eram Gottlob Frege (1848-1925), Giuseppe Peano (1858-1932), Bertrand Russell (1872-1970) e Alfred North Whitehead (1861-1947). De acordo com Batistela, Bicudo e Lazari (2017, p. 199), essa escola filosófica estava fundamentada na obra *Principia Mathematica*, cujos autores, Russell e Whitehead, buscavam “mostrar que toda matemática clássica poderia ser deduzida da teoria dos conjuntos e, ao final, mostrar que a matemática clássica poderia ser escrita com as peças da lógica”. De um modo distinto, os *intuicionistas* procuraram se fundamentar pela intuição, pois

consideravam o ser humano dotado de uma intuição primeira sobre os números naturais. Por isso defendiam uma reelaboração da Matemática desde seus fundamentos. Partindo sempre da intuição, os axiomas, os teoremas, enfim, toda a Matemática deveria ser reconstruída. O que fundamentava o movimento intuicionista era a consideração de que as entidades abstratas existiam somente quando eram construídas pela mente humana (MONDINI, 2008, p. 05).

A indicação dada pelos intuicionistas se baseava no ato reflexivo do homem. Se ao realizar a operação de contagem partimos sempre de um feito do pensamento, por conseguinte, isso que vale para os números, deve valer para as demonstrações, para os teoremas, para as definições, etc. Porém, como explicitado por Batistela, Bicudo e Lazari (2017), os teoremas e resultados, quando trabalhados apenas pelo intelecto, acabavam ficando muito longos, o que os tornava menos elegantes, sem engenhosidade e demorados. De acordo com os autores, “as consequências mais importantes da definição intuicionista de matemática são: a matemática é

construtiva e ela não pode ser reduzida a nenhuma outra ciência” (BATISTELA; BICUDO; LAZARI, 2017, p. 201).

Ao se comparar essas duas vertentes teóricas, elas mantinham posições um tanto que excludentes, pois devido à definição intuicionista “e na clareza de que para os lógicos as leis eram entendidas como combinações de palavras e não como construções mentais, o que era matemática para um grupo poderia não ser para o outro e vice-versa (SANTOS; MONDINI, 2021, p. 85).

Mas essas não seriam as únicas ideias concernentes às produções matemáticas, há ainda um terceiro grupo — os formalistas. O ideólogo dessa vertente era David Hilbert (1862-1943), um adepto do discurso de que tudo na matemática pode e deve ser provado a partir dos axiomas básicos. A finalidade desse grupo era provar que “as ideias matemáticas são isentas de contradições. Caso os formalistas alcançassem seu objetivo, a matemática se tornaria livre de paradoxos e (...) se estabeleceria como verdade” (MONDINI, 2008, p. 06). Os formalistas entendiam que as teorias formalmente demonstradas estariam livres de inconsistências, “pois sendo uma afirmação verdadeira a partir de um método, não poderíamos concluir que ela seja falsa a partir de outro” (SANTOS; MONDINI, 2021, p. 86).

Nos anos 1920, Hilbert e sua escola criaram a teoria da demonstração, um método que objetivava estabelecer a consistência de qualquer sistema formal. Buscando evitar possíveis objeções, adotou uma lógica que se aproximava dos princípios intuicionistas. Assim é que excluía, por exemplo, demonstrações de existência por contradição, demonstrações por indução transfinita e o axioma da escolha (DOMINGUES, 2002, p. 63).

Contudo, a partir de alguns resultados apresentados por Gödel (1906-1978) em 1931, seria impossível criar um sistema que fosse completo e consistente. Tais resultados são conhecidos como os dois teoremas da incompletude. O primeiro dispõe que “se o conjunto axiomático de uma teoria é consistente, então existem teoremas que não podem ser nem provados nem negados” (SINGH, 2014, p. 132). Isso quer dizer que independente dos axiomas escolhidos para fundamentar uma teoria, sempre haverá problemas para os quais não se consegue uma validação em verdadeiro ou falso, o que em conformidade com Singh (2014) vai na contramão dos objetivos formalistas em se alcançar a completude.

Fora isso, o segundo teorema afirma que “não existe procedimento construtivo que prove ser consistente a teoria axiomática” (SINGH, 2014, p. 132). Significa que independente do sistema em que se esteja trabalhando, “haverá sempre a incerteza na escolha de axiomas, podendo acontecer de a teoria apresentar contradições” (SANTOS; MONDINI, 2021, p. 86).

Entretanto, das três vertentes filosóficas abordadas, a *formalista* prevaleceu soberanamente no século XX. “Além do mais, em virtude da generalização e da abstração que foram cultivadas em grande escala, a matemática se desenvolveu vertiginosamente no século passado” (DOMINGUES, 2002, p. 64).

Adiante, e frente ao que já foi exposto aqui, trarei reflexões acerca da “ciência moderna” desenvolvida a partir do século XV. Como explicitado na história e, principalmente, na Idade Moderna, muitos dos matemáticos não se pautaram pelas técnicas demonstrativas em seus trabalhos, a causa para isso é, muitas vezes, legitimada na literatura pela falta de “teorias adequadas”, como era o caso dos números reais. Por um estudo sobre a “ciência moderna”, há outras razões, das quais falarei a seguir e que, não contradizendo àquela nos favorecerá, tanto para compreender a escassez de demonstrações nas produções matemáticas, quanto no entendimento dos processos históricos do século XX relacionados ao MMM.

### 3.2.1 *O sentido orientador da matemática na modernidade*

Explicitado o significado da demonstração matemática ao longo da história, conforme apresentado anteriormente, compreendi que precisava esclarecer o papel da matemática frente às ciências, buscando possíveis articulações com a sua forma de produção baseada nos moldes euclidianos, os quais passaram ao segundo plano. Para atender a essa exigência, voltei-me à literatura que trata desse tema. As investigações realizadas indicaram a relevância de buscar na era moderna a compreensão da ciência que progride e se estende à era contemporânea. Também, entendi que os sentidos de matemática no MMM poderiam se fazer à medida em que se esclarecem as relações desta para com as ciências modernas. Assim, direcionei-me à era moderna que, conforme Mocrosky (2010), teve início no século XV, no auge do Renascimento, em uma época marcada por diversas revoluções nas áreas social, econômica, cultural e científica.

Tal cenário de mudanças, preconizado pelo mundo moderno, acabou por afetar não só o estilo de vida global, as crenças, a imprensa, o comércio e as artes, mas também a conduta científica, trazendo em seu cerne um novo sentido orientador para “os modos de pensar a ciência, (...) e a construção do mundo por caminhos em que o conhecimento é fundamentado na capacidade que as coisas têm de ser mensuráveis como propriedade intrínseca de sua natureza” (MOCROSKY, 2010, p. 30). Essa possibilidade de fazer ciência, torna-se marcante a partir do século XVII, quando um ideal baseado na prática experimental começa a ser esboçado nos trabalhos de Galileu Galilei (1564-1642). Segundo Mocrosky (2010), foi na

observação vinculada às percepções sensoriais e na matematização da natureza que a ciência moderna atingiu a sua concretização.

É nesse contexto que a matemática conquistou lugar de destaque entre as demais ciências. Não foi pela herança dos gregos, mas pela quebra de barreiras do palpável e do observável, no sentido de ganhar dimensões infinitas, para um horizonte universal de aplicabilidade e desenvolvimento científico. É o rompimento das barreiras com as aparências projetando o olhar para além do perceptível (MOCROSKY, 2010, p. 32).

Bicudo (2022), ao estudar assuntos referentes à matematização das ciências da natureza, faz uma reflexão mediante o projetar de um mundo pré-categorial e lança a pista de que, em uma época distante, as produções científicas ocorriam por meio da “certeza”, fundamentada nas experiências (pré-catóricas), ou seja, “nos modos de compreender o percebido da fisicalidade das coisas, das possíveis explicações a respeito do modo de estarem dispostas entre si no espaço e no tempo e no fato de essas relações se manterem válidas na empiricidade das experiências cotidianas” (BICUDO, 2022, p. 13). O conhecimento, nessas condições, tende a se manifestar nas expressões dos sujeitos, de um modo espontâneo e imediato. É uma forma de conhecimento constituída nas vivências, que se realiza nas esferas subjetivas e intersubjetivas na medida em que o mundo é percebido e significado para um sujeito que pode comunicar-se com outro. Conhecer não seria fruto de uma esquematização do pensamento, tratar-se-ia, de um “a priori”, uma aceitação pré-categorial e estaria condicionado a um estilo indutivo,

porém esse estilo é tomado como um a priori, que decorre do curso total da experiência, o qual traz consigo a certeza e que nasce da força da indução de que a próxima experiência, em circunstâncias mais ou menos semelhantes, será assim. O significado da indução é passível de ser compreendido na análise da percepção, a qual conduz ao processo de retenção e de protensão de conteúdos vivenciados (BICUDO, 2022, p. 15).

Para Bicudo (2022) e de uma forma natural — nós seres humanos — somos capazes de nos guiarmos por meio de percepções que a todo instante nos chegam advindas do mundo. Isso ocorre de tal modo que o “espaço físico” é a todo momento revelado a nós como real. Simultaneamente, também o “espaço temporal” se revela e possibilita a consciência das ocorrências próximas e longínquas, o que por vezes de repetição nos leva a “induzir” as que podem ou não ocorrer.

Nesse mundo natural, pré-categorial, o intuitivo tem seu estilo típico e que se mostra na empiricidade como um geral invariante, permitindo que seja estabelecida uma regulação universal causal. O mundo é uma unicidade, um todo e é evidente a priori. Essa crença permite o estabelecimento de hipóteses, com base na indução e na previsão, sempre aproximadas. A percepção das formas das figuras dos objetos físicos

dispostos no espaço é aproximada, como aproximadas são suas medições (BICUDO, 2022, p. 16).

Retrocedendo aos tempos antigos, podemos entender que a matemática até o século III a.C. era trabalhada apenas nessas condições: pré-catóricas, intuíveis e baseadas na empiricidade. É nessas circunstâncias que Euclides esboça a matemática como exposta nos *elementos* se valendo, dentre outros aspectos, da “silogística aristotélica”, o que possibilitou as interconexões lógicas nos raciocínios. Em suas demonstrações, são encontradas formas de encadeamentos próprios dessa aquisição. Além desse aspecto em sua elaboração, Euclides trata as figuras elegendo-as como precisas no espaço-temporal do mundo circundante. Vale ressaltar que as figuras presentes na matemática euclidiana “não são apenas ilustrações dispensáveis, meras auxiliares na compreensão de demonstrações logicamente impecáveis, mas partes integrantes essenciais dessas demonstrações. Na verdade, elas cobrem lacunas lógicas” (SILVA, 2007a, p. 107). Nesse ponto, nas palavras de Bicudo (2022, p. 17), “se dá uma modificação crucial que se mantém na base estrutural da ciência do mundo ocidental: essas figuras são concebidas e trabalhadas como ideais”. Quando Galileu se depara com esse modo já estabelecido de proceder a matemática, a

toma como dados, ou seja, como estando aí no mundo para ser posto em funcionamento e expandido, a Geometria Euclidiana e o seu método. Essa é a grande modificação que ocorre na Física, como pensada e encaminhada por esse autor. Há, desse modo, uma ruptura com o modo de fazer Física, basicamente, pautado na empiricidade das experiências, passando agora para um trabalho metódico. O passo dado de um paradigma para outro é intensificado e ampliado em sua força com a operacionalização da exatidão, sustentada pela mensuração (BICUDO, 2022, p. 19).

Com isso, ocorre uma modificação qualitativa teórica da matemática euclidiana, ao ser assumida nos estudos de “física moderna”. Assim, temos de um lado a matemática fundamentada por meio de regras da lógica e de idealidades, ao passo que é desvinculada de seu caráter empírico, e de outro, ela sendo empregada com uma linguagem para outras áreas científicas. Nas palavras de Bicudo (2022, p. 20), “a Galileu interessava a aplicação prática daquela teoria; ele não se importava com o modo pelo qual ela se originou”. Husserl argumenta que Galileu “estava muito longe de pensar que, para a geometria, enquanto ramo de um conhecimento universal do ente (de uma filosofia), pudesse ser relevante e até, de importância fundamental, tomar como problema a evidência geométrica, o “como” da sua origem” (HUSSERL, 2012, p. 21).

Galileu, a partir de sua prática científica, possibilitou uma *matematização indireta do mundo intuitivo*, por meio de “aplicações de fórmulas (...) gerais que, uma vez encontradas,

podem servir na sua aplicação, para levar a cabo a objetificação fáctica nos casos particulares substituíveis” (BICUDO, 2022, p. 24). Tais fórmulas “exprimem manifestamente conexões causais gerais, ‘leis da natureza’, leis de dependências reais sob a forma de dependências ‘funcionais’ de valores numéricos” (HUSSERL, 2012, p. 32).

O sentido próprio subjacente a essa matematização e que fica *escondido* ao fazer técnico do cientista e do professor de ciência, não são as conexões de valores numéricos, mas a ideia galilaica de uma física universal. Entende-se, assim, que o interesse apaixonado do pesquisador da natureza, e que se torna também o do matemático, é pelas *fórmulas*. O primeiro visa ao método científico natural, entendido como o método do conhecimento verdadeiro. O segundo, visa trabalhar com fórmulas exatas (BICUDO, 2022, p. 24, *itálico do autor*).

Husserl nos diz que há uma certa postergação do “pensar originário”, mesmo que este se direcione à verdade formal. Ocorre um direcionamento para os resultados baseados em operações, visando os resultados corretos. “Assim se esvazia também o pensar puramente geométrico, bem como, na aplicação deste à natureza fáctica, o pensar científico-natural. Uma tecnicização apodera-se, além disto, de todos os métodos restantes próprios às ciências da natureza” (HUSSERL, 2012, p. 38). Há, por assim dizer, uma ciência guiada “com” e “para” a técnica que, embora tenha se presentificado em todos os períodos da história, ganha destaque na era moderna, orientando os modos de ser do homem por uma racionalidade que atrelou os processos práticos e a busca das certezas à concretude e à realização do real implicadas no modelo da ciência.

Da força propulsora da tradição e das características da modernidade da civilização ocidental, da qual somos herdeiros imediatos, inquietações a respeito da existência humana e do destino do mundo se tornam proeminentes. As alterações nos conceitos que permeiam os negócios, a produção e, em consequência, a organização social, mostram uma revolução do mundo, ocorrida no âmbito da filosofia moderna (MOCROSKY, 2010, p. 34).

A técnica, ao nortear as atividades humanas, põe em xeque a pretensa possibilidade de conhecimento de como são as coisas. Ao se disponibilizar como meio de exploração da realidade ela estabelece uma lógica utilitarista na qual as propriedades intrínsecas aos objetos físicos são colocadas como produtos para o consumo, ignorando os aspectos histórico-culturais e contribuindo para o esquecimento do ser. Nesse sentido, e conforme Heidegger (2012), a técnica pode ser entendida como sendo um meio para um fim:

Questionar a técnica significa, portanto, perguntar o que ela é. Todo mundo conhece ambas as respostas que respondem esta pergunta. Uma diz: técnica é meio para um fim. A outra diz: técnica é uma atividade do homem. Ambas as determinações da

técnica pertencem reciprocamente uma à outra. Pois estabelecer fins, procurar e usar meios para alcançá-los é uma atividade humana. Pertence à técnica a produção e o uso de ferramentas, aparelhos e máquinas, como a ela pertencem estes produtos e utensílios em si mesmos e as necessidades a que eles servem. O conjunto de tudo isto é a técnica. A própria técnica é também um instrumento, em latim *instrumentum* (HEIDEGGER, 2012, p. 11-12).

Em vista disso, “as questões centrais estão no fato de que as coisas são produzidas para funcionar, para operar e, quando não se dão a contento, precisam ser modificadas” (MOCROSKY, 2010, p. 35). Caracteristicamente, o que chamamos de modernidade é deflagrado pela mudança paradigmática da lógica que organiza os modos de viver do homem, que singularmente se relaciona com as coisas a sua volta. Marcada por uma ressignificação das ciências, a modernidade se qualifica como uma era norteadora para a conduta do ser humano. Essa conduta advinda da instauração da nova racionalidade, que funda a era da técnica, “caminhou a passos largos à época em que vivemos inaugurando um momento que, permeado pela técnica moderna, instaura a supremacia da ciência” (MOCROSKY, 2010, p. 47). Na incessante busca pelo sentido das coisas e pelo que delas se pode aproveitar há um esvaziamento para com os compromissos da vida, para com a reflexão. Isso, de acordo com a autora, se dá pela viabilização das produções científicas aplicadas às várias áreas técnicas que participam da vida das pessoas com frequência e intensidade elevadas.

A ciência no cotidiano das pessoas tem se dado de um modo cada vez mais intenso e amplamente difundido pelos meios de comunicação. Isso tem influenciado no entendimento que se tem sobre a própria ciência. Esse fato incide sobre a face técnica e utilitária que acabou por se mostrar mais visível por ser tomada como o que aí está no cotidiano comum, como utensílio, sem destaque. Ou seja, comparece incorporada nas ocupações corriqueiras. A presença maciça dos meios de comunicação na sociedade favorece a disseminação da realização técnico-científica, mas, por outro lado, massifica o ocorrido muitas vezes pelo entendimento do senso comum, já que, pela vasta extensão de seu alcance, abrange uma variedade de público que, por nem sempre estar preparado para pensar o noticiado, reflete sobre a importância do que se fala, muitas vezes vulgarizando as descobertas (MOCROSKY, 2010, p. 47-48).

Nessa empreitada, marcada pelo desenvolvimento da ciência moderna, nenhuma outra área se sobressaiu mais do que as ciências da natureza e da matemática, as quais por estarem relacionadas ao estudo das características físicas da natureza, sobrelevaram-se por suas possibilidades de inferências científicas sobre as relações no mundo físico. “Nesse cenário, essas áreas se mostraram mais promissoras, consolidando a pesquisa como campo profissional, com investimentos tanto da iniciativa pública como privada, constituindo um corpo de pesquisadores” (MOCROSKY, 2010, p. 48). O conhecimento oriundo da ciência,

que se desdobra e se desenvolve em meio às aplicações práticas, impactada pelo cotidiano de um modo assintomático. Mediada pela técnica, a ciência nos dias atuais é uma atividade que tem entrelaçado ciência e técnica, expondo o caráter “aplicado” da ciência contemporânea. Os aparatos ou ações técnicas, principalmente a partir do século XVII, têm sido permeados pelo “pensamento científico”, mesmo sem nos darmos conta disso (MOCROSKY, 2010, p. 48).

A consequência do entrelaçamento “técnico-científicos” ao avançar até a Contemporaneidade acabou por desenvolver as condições que, à medida em que a ciência moderna e a tecnologia se presentificavam (na geração, difusão de máquinas e equipamentos para os diversos trabalhos na sociedade), tornaram inevitável a necessidade de formação de uma classe de trabalhadores que pudessem tanto operar equipamentos tecnológicos quanto desenvolver conhecimentos técnicos.

Por um lado, era necessário preparar o operário para o uso adequado das novas máquinas, e isso só seria possível através da introdução do ensino de alguns elementos básicos de escrita e matemática. Por outro lado, seria também preciso formar técnicos especializados, que, através do conhecimento dos últimos avanços da ciência, pudessem melhorar ainda mais as técnicas de produção (MIORIM, 1998, p. 51).

Essas questões foram alvo de discussões e fundamentaram os objetivos de movimentos voltados para o ensino de ciências e de matemática em praticamente todo o século XX, tendo sido postas fortemente a partir do final do século XIX. Outrossim, tais questões impactaram o ensino de matemática em todo o mundo, culminando em movimentos reformistas que ora viam na técnica, os princípios para ensinar matemática, e ora viam nas teorias formalizadas.

Nessas condições, uma nova ideia de ciência vai sendo firmada, a qual gradualmente passa a substituir e ressignificar a acepção de ciência herdada da Antiguidade. Assim, ao passo que ocorre uma ressignificação das ciências ocorre também uma ressignificação da matemática entendida até então como um saber teórico de cunho abstrato, a qual passa a ser tomada em prol da técnica e das possibilidades de aplicações. Essa racionalidade moderna, que se funda na era da técnica, passou à nossa época juntamente com a matemática demonstrativa e inaugurou um momento que, compenetrado pela técnica, instaura a supremacia da ciência matemática.

#### 4 UM MOVIMENTO MODERNIZADOR DA MATEMÁTICA

*As “antiguidades” conservadas no museu, os utensílios domésticos, por exemplo, pertencem a um “tempo passado” e se encontram também simplesmente dadas no “presente”. Se esse instrumento ainda não passou, em que medida ele é histórico? Será apenas porque ele se tornou um objeto de interesse historiográfico no cultivo das coisas antigas e regionais? Este instrumento, no entanto, só pode ser um objeto historiográfico porque, em si mesmo, já é, de algum modo, histórico. A questão se repete: Com que direito chamamos esse ente de histórico se ele ainda não passou? Ou será que estas “coisas” possuem “em si” “algo passado”, não obstante serem ainda hoje simplesmente dadas? Será que estas coisas simplesmente dadas são ainda o que foram? Manifestadamente, as “coisas” se modificaram. “Com o correr do tempo”, o utensílio tornou-se frágil e deteriorado.<sup>16</sup>*

A matemática ocidental, como detalhada na seção anterior, em vista da sua organização estrutural e histórica, “venceu” o tempo. Ela se presentifica em todas as épocas da humanidade, tendo sido posta como modelo para a produção matemática. Contudo, mesmo resguardada à sua função verificadora das assertivas teóricas — dada a sua possibilidade demonstrativa — ela nem sempre foi abordada assim. Matemáticos famosos como René Descartes (1596-1650) e Isaac Newton (1643-1727), mesmo que tenham se preocupado com o rigor e apresentação de seus estudos, não se utilizaram nem de postulados e nem de demonstrações.

Essa seria uma das características dessa matemática — dita ocidental — que em alguns momentos parte justificando todas as suas verdades, e que em outros apenas avança colocando questões (ou conjecturas) em aberto, as quais por necessidade “reclamam” por uma verificação demonstrativa. Até próximo do ano 600 a.C., a matemática, mesmo guiada pela orientação empírica, chegou a diversos resultados que mais tarde seriam organizados e demonstrados nos *elementos* de Euclides, c. 300 a.C. Além disso, as ideias matemáticas dos povos hindus e árabes (na Idade Média), juntamente com as teorias cartesianas e newtonianas, receberam um tratamento formal no século XIX. Por vezes de ocorrência, isto tornou-se um acontecimento naturalizado na história e em especial um aspecto da matemática, o que se vê em todas as épocas desde os gregos.

Sendo essa, uma pista histórica do que faz o matemático profissional, que após definir seus conceitos, demonstra as propriedades que deles surgem, passarei a abordar, neste capítulo, a complexidade dessa questão sob os processos de ensino situados na década de 1960. A intenção ao fazer isso é entender o *porquê* e o *como* a matemática que demonstra suas verdades veio a se situar como modelo para o ensino. No *porquê* está requerida a explicitação de uma necessidade — a de entender os motivos que encaminharam o MMM a assumir o ensino de

<sup>16</sup> *Ser e Tempo*, Heidegger (2005, p. 185, itálico nosso).

matemática pautado por deduções. E no *como* o requerimento hermenêutico de interpretação/compreensão — o “trabalho de pensamento que consiste em decifrar o sentido escondido no sentido aparente, em desdobrar os níveis de significação implicados na significação literal (RICOEUR, 1988, p. 14). Se a demonstração teve um significado inicial e que “durou” durante os séculos, esse significado permanece no MMM? Ou, como perguntei inicialmente: *o que é isto, a demonstração matemática no MMM?*

Compreendo que para responder a interrogação é preciso buscar esclarecimentos sobre o que foi o MMM. Assim, partirei do que está exposto na literatura sobre o tema, considerando o movimento em duas frentes, uma a nível internacional e outra a nível nacional. Posteriormente, abordarei a matemática apregoada pelo movimento, seguindo nesse instante, o que os textos e artefatos referentes à época “manifestam” em suas composições.

Destaco — como uma informação importante — para o que vem a seguir com o desenvolvimento deste trabalho, que inicialmente procurei abordar o tema do MMM através de uma literatura crítica<sup>17</sup> do assunto, isso, porque intencionei aprender/informar-me/inteirar-me sobre o acontecido. Com tal objetivo, realizei buscas no *Catálogo de Teses e Dissertações* da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES). Posteriormente, a partir dos textos encontrados e olhando para cada organização literária que eles continham, tomei conhecimento de outros textos mais, de sorte que tive acesso e possibilidade de conhecer os vários autores citados das mais diversas formas, cuidando apenas para que fossem textos legítimos e de reconhecimento acadêmico.

Outro ponto a ser destacado se refere à importância dos autores e dos artefatos que realmente se mantiveram ao longo dos estudos. Ressalto, em um primeiro momento, que a literatura sobre o tema é vasta demais e que por isso escolhi textos no campo de estudos da Educação Matemática. Depois, pareceu-me mais coerente dar respostas à minha pergunta inicial por meio de autores que versam sobre a matemática escolar no período do MMM. De toda forma, a composição dos textos dessa seção, em quase toda a sua inteireza, foram textos escolhidos em meio à minha empreitada hermenêutica em busca de compreensão. Assim, por meio de um princípio interpretativo, primeiro eu reconheci (descobri) a literatura sobre o tema, para, então, investir em seu entendimento por intermédio do que dizem os autores e o arranjo de artefatos.

---

<sup>17</sup> Destaco como produções importantes ao objetivo almejado as seguintes: Búrigo (1989), Imenes (1989), Fiorentini (1995), Miorim (1998), Soares (2001), Pavanello (2002), Pires (2006), Lima (2006), Silva (2006), França (2007), Silva (2007b), Duarte (2007), Nakashima (2007), Macedo (2008), Silva (2008), Oliveira e Pietropaolo (2008), Lavorente (2008), Valente (2008), Araujo (2009), Dobrowolski (2011), Oliveira, Silva e Valente (2011), Silva (2013), Búrigo (2014).

#### 4.1 A moderna matemática dos anos 1960

O MMM, da década de 1960, está relacionado a um cenário de reformas para o ensino de matemática, que teve início desde os últimos anos do século XIX. Os esforços para tais mudanças no ensino dessa ciência começaram a se fortalecer próximo do ano de 1900, quando se passou a constatar que a matemática utilizada nos setores da indústria e do comércio encontrava-se fora de “sintonia” com aquela ensinada nos colégios. Para discutir essa questão, países de várias partes do mundo começaram a se reunir com vistas à “reforma” do ensino.

Os primeiros anos do século XX marcaram o início de iniciativas de reforma que buscavam conciliar o ensino das escolas secundárias com as necessidades técnicas mais recentes. Estas reformas isoladas passaram a ser mais organizadas quando foi instituído, em 1908, um comitê internacional com a função de estudar questões relativas à Educação Matemática (SOARES, 2001, p. 25-26).

Esse comitê, citado pela autora, foi criado no “IV Congresso Internacional de Matemática” realizado em Roma, sendo nomeado por *Commission Internationale de L’Enseignement Mathématique* (CIEM), também conhecido por *Internationale Mathematische Unterrichtskommission* (IMUK). Inicialmente, esse órgão seria responsável por desenvolver relatórios sobre a situação do ensino de matemática em países desenvolvidos, mesmo não se limitando a essa tarefa. Suas atividades se concentraram entre os anos de 1908 e 1912, período em que foram realizados vários encontros na Colônia, Karlsruhe, Basle, Bruxelas e Milão.

As questões propostas pelo IMUK eram amplas e revelavam preocupação com a integração da Matemática com outras disciplinas: quais tópicos de Matemática deveriam ser ensinados ou não; e ainda com o futuro dos estudantes. Em Milão, as discussões estavam concentradas em três questões fundamentais: *Que Matemática deve ser ensinada aos estudantes de física e ciências naturais? Qual é o lugar do rigor no ensino de Matemática? Como pode o ensino dos diferentes ramos da Matemática ser mais bem integrado?* (SOARES, 2001, p. 26).

Assim, com essa problemática começava a esboçar o primeiro “movimento modernizador” da matemática, cunhado na literatura como “reformador”. A partir de seus ideais, é possível compreender como ele veio a influenciar outros movimentos, inclusive o MMM. O movimento “reformador”

para a Modernização do Ensino de Matemática, ocorrido nos primeiros anos de nosso século, tinha como um de seus objetivos a diminuição do descompasso existente entre os estudos científicos e tecnológicos e o ensino de Matemática desenvolvido nas escolas de nível médio; particularmente naquelas do tipo secundário, as únicas que

davam acesso à universidade (...) Ele consistiu numa tentativa de romper com o ensino de Matemática “tradicional”, “antigo”, “velho”, que era ensinado na escola secundária (MIORIM, 1998, p. 104).

A intenção dos reformadores era propor uma “nova” matemática, considerada “moderna” e que seria a superação dos limites estabelecidos pela “antiga” matemática grega. De acordo com Miorim (1998), a grega, apesar das suas grandes contribuições, como a valorização do raciocínio lógico, o surgimento da demonstração dedutiva e a crença de que o mundo físico poderia ser descrito em termos matemáticos, impôs uma série de restrições para os estudos matemáticos. Em Caraça (1951) está exposta uma lista destas limitações:

- a) a incapacidade de conceber o conceito de variável e, portanto, o de função;
- b) o abandono do estudo quantitativo dos fenômenos naturais e o refúgio nas concepções qualitativas; paralelamente;
- c) primado da figura sobre o número e consequente degradação deste;
- d) separação da Geometria e da Aritmética.
- e) a exclusão, do seio da Geometria, de tudo quanto lembrasse o movimento, o mecânico e o manual;
- f) um conceito estreito de curva, limitado à reta, circunferência e cônicas;
- g) tendência de fugir a tudo que viesse ligado às concepções quantitativas e dinâmicas: em particular do conceito de infinito, não porque se banisse da Filosofia tal conceito, mas porque se renunciou a abordar um estudo quantitativo dele e se passou a eliminá-lo sistematicamente dos raciocínios matemáticos; da Matemática grega veio-nos um método de raciocínio o método de exaustão que não tem outro objetivo (CARAÇA, 1951, p. 197).

Tentando se eximir desses entraves, os proponentes da “nova” matemática, ancoraram-se na “moderna matemática”, tomada no contexto da ciência moderna. Como característica, essa matemática possibilita a explicação dos fenômenos naturais, fundamenta, comprova e generaliza os resultados de uma observação dada pela experiência. Ela seria uma contraposição à abordagem euclidiana, que, frente aos avanços científicos e tecnológicos deveria abrir espaço para a nova abordagem.

Essa nova Matemática, que se iniciou com Newton (1643-1727) e Leibniz (1646-1716), forneceu os elementos básicos para os futuros desenvolvimentos tanto da Matemática pura quanto da aplicada, tinha como centro o conceito de lei quantitativa, ou de função, valorizou o aspecto quantitativo, as ligações entre geometria, aritmética e álgebra, o conceito de movimento, as aplicações práticas, etc. Nesse sentido, podemos dizer que foi a partir desse Primeiro Movimento que começaria a ser dado o alerta “Abaixo Euclides” (MIORIM, 1998, p. 105).

Essa expressão, “Abaixo Euclides!”, de que fala Miorim (1998), foi uma frase proferida por Jean Dieudonné durante a Conferência de Royaumont realizada em 1959 na França. Sua crítica foi direcionada ao ensino de geometria da época, que até aquele momento — em muitos lugares como a Inglaterra — pautava-se pelo tratado de Euclides.

Pode-se dispor que as novas propostas modernizadoras, pautadas na “moderna matemática”, eram consideradas tímidas, quando comparadas com as revoluções da matemática daquele período (séculos XVII e XVIII) em que viveram Newton e Leibniz. Nesse momento, a “moderna matemática”, em muitos aspectos, já se encontrava profundamente modificada, segundo sua fundamentação baseada nos resultados obtidos pelas experimentações. Conforme Miorim (1998), os representantes do movimento tinham plena consciência desse fato, mas, mesmo assim, “percebiam que o descompasso existente era muito grande e que os elementos básicos daquela ‘nova matemática’ eram fundamentais para iniciar o processo de adequação da escola secundária aos últimos avanços científicos e tecnológicos” (MIORIM, 1998, p. 106), o que em especial dizia respeito, também, ao ensino nos cursos superiores.

A questão não era a de introduzir as últimas descobertas e avanços da matemática no ensino escolar, mas sim, considerar alguns elementos mais atuais, o que ao mesmo tempo abriria espaço para que os cursos de nível superior desenvolvessem estudos mais avançados. Dentre esses, o conceito de função, elemento unificador dos vários ramos da matemática, já “representava uma tentativa de adequação aos estudos mais recentes que tinham como uma de suas características fundamentais o rompimento da barreira existente entre os campos matemáticos” (MIORIM, 1998, p. 106). Retomando, esse primeiro movimento internacional

para a Modernização representou a primeira tentativa, organizada e envolvendo vários países, de reformular um ensino de Matemática existente havia séculos. Mesmo não existindo uma intenção inicial nesse sentido e, também, uma proposta única, algumas diretrizes que foram por ele estabelecidas influenciaram as futuras discussões sobre a Educação Matemática em diferentes países. Apesar disso, as mudanças ocorridas durante as primeiras décadas de nosso século não chegaram a produzir os efeitos esperados (MIORIM, 1998, p. 107).

Segundo Araujo (2009), essa primeira proposta de reforma, teve as seguintes orientações gerais:

- I) procurou na intuição e nas aplicações da matemática às outras áreas do conhecimento os elementos fundamentais para a elaboração de sua proposta;
- II) elegeu o conceito de função como elemento unificador;
- III) diferenciou o ensino da matemática na Universidade do ensino no curso médio. O curso universitário se ligava diretamente aos últimos avanços da matemática, enquanto o curso médio se mantinha baseado quase que exclusivamente na matemática grega;
- IV) teve como pressuposto básico o slogan defendido por Jean Dieudonné: “Abaixo Euclides!” (ARAÚJO, 2009, p. 49-50).

Para o autor, não foi possível com o movimento “reformador” alcançar os objetivos propostos naquele momento, deixando questões que seriam revistas em um novo projeto

revolucionário para a matemática, no MMM — “considerado como continuidade do movimento reformador” (ARAUJO, 2009, p. 50). De acordo com Soares (2001), a grande causa da interrupção desse primeiro movimento foram as duas Grandes Guerras (a primeira entre 1914/1918 e a segunda entre 1939/1945). Contudo, a falta de “sincronia” entre os últimos avanços científicos e tecnológicos e a matemática ensinada nas escolas se intensificaria e “este seria novamente um dos mais fortes argumentos utilizados pelos defensores do Movimento da Matemática Moderna para justificar a necessidade de ‘modernização’ dos conteúdos matemáticos desenvolvidos naquele nível de ensino” (MIORIM, 1998, p. 107).

Após o movimento “reformador”, ocorreram alguns eventos impulsionadores para o desenvolvimento do MMM, como é o caso das questões políticas envolvidas na guerra fria, da Conferência Internacional de Royaumont e das produções do grupo Bourbaki. Passarei a abordar esses temas na sequência.

#### 4.1.1 *O Movimento da Matemática Moderna no mundo*

Por questão de análise, retomemos o grande problema da reforma: a questão da “moderna matemática”, a qual: encontrava-se, há tempos, relacionada com as aplicações práticas na ciência e na técnica; já havia, também, conquistado seu espaço nos estudos universitários; e “estava ‘há séculos de distância’ daquela ensinada no nível médio” (MIORIM, 1998, p. 108).

Sendo esse um dos problemas da modernização do ensino de matemática ligados aos campos científico-tecnológico, chama atenção o fato de que ele não foi abordado mediante um debate situado nessas esferas, mesmo estando vinculado a elas. Nos Estados Unidos da América (EUA), por exemplo, a defasagem no ensino de matemática ganhou destaque durante a Segunda Guerra Mundial, uma vez que “os soldados americanos apresentavam tão alto grau de deficiência com relação à Matemática, que o governo foi obrigado a fornecer cursos especiais, como forma de amenizar a situação” (MIORIM, 1998, p. 108). Anos mais tarde, na década de 1950, começaram a ser desenvolvidos diversos projetos com vistas à melhoria do ensino secundário, porém foi outro evento inusitado e não relacionado à situação escolar dos EUA que acabou acelerando as propostas pedagógicas americanas e irrompendo num movimento internacional de modernização, o lançamento, em 1957, do primeiro foguete soviético, o *Sputnik*.

Para compreender o que estava acontecendo naquele momento, devemos olhar para o contexto político da época. Era o contexto da Guerra Fria, um período de disputas travadas entre

os Estados Unidos da América – EUA e a União das Repúblicas Socialistas Soviéticas – URSS. Os dois blocos disputavam a supremacia nos mais variados segmentos da sociedade (nos esportes, na ciência, na vertente econômica etc.), mas quando os soviéticos lançaram seu *Sputnik*, os EUA se viram atrasados no campo científico-tecnológico. Isso desencadeou, nesse último país, empreendimentos assombrosos de recursos financeiros em projetos que visavam a inovação e a modernização dos currículos escolares.

Fiorentini (1995), ao comentar esses acontecimentos e relacioná-los ao MMM, postula que o movimento

surgiu como resposta à constatação, após a Segunda Guerra Mundial, de uma considerável defasagem entre o progresso científico-tecnológico da nova sociedade industrial e o currículo escolar vigente, sobretudo nas áreas de ciências e matemática. O lançamento do “Sputnik” pelos soviéticos, em 1957, foi decisivo para que esse movimento adquirisse força política, tanto que o governo norte-americano passou a injetar vultosos recursos financeiros em projetos de inovação/modernização dos currículos escolares (FIORENTINI, 1995, p. 13).

Para França (2007), foram justamente esses investimentos norte-americanos no ensino de matemática que acabaram divulgando o MMM ao redor do mundo, visto que promoveram o desenvolvimento e a formação de uma série de congressos e grupos de estudos. Dentre os vários grupos, tem-se o *School Mathematics Study Group* (SMSG), fundado a partir de deliberações em uma conferência da *National Science Foundation* (NSF), no qual se discutia que a baixa qualidade do ensino secundário se dava pela escassez de pesquisadores em matemática.

Outra importante iniciativa foi a da “Organização Europeia de Cooperação Econômica” (OECE) que, em respostas “às polêmicas surgidas em relação ao ensino e da constatação da necessidade de modificações, (...) criou um setor responsável pela modificação do ensino de ciências e matemática” (FRANÇA, 2007, p. 37), a Conferência Internacional de Royaumont, na França em 1959. Essa foi uma promoção da OECE como forma de estímulo para se debater as questões de ensino.

Os temas da Conferência de Royaumont relacionavam-se com o ensino secundário, e todos os países participantes propunham mudanças no currículo e uma abordagem mais utilitarista para a matemática. As evidências apontadas nos registros dos objetivos da Conferência demonstram as semelhanças e a gênese nos ideais dos movimentos para reformulação do ensino que decorreram desta, e que mais tarde foi denominado de MMM. De cada país participante da Conferência surgiu um nome, que ficou encarregado de veicular as ideias do MMM, em seu país (FRANÇA, 2007, p. 38).

Nas palavras de Soares (2001, p. 27), “os países participantes defendiam a proposta de dar aos alunos uma melhor preparação para os estudos universitários e fornecer a Matemática como um instrumento para o uso na vida diária”. Temas como a demanda por cientistas e engenheiros, o trabalho matemático na indústria e nas diversas áreas da economia, eram discutidos como formas de justificativas para a necessidade de reavaliação dos conteúdos e métodos utilizados para o ensino de matemática escolar. Alguns objetivos da Conferência de Royaumont foram:

- a) Esclarecer e resumir os principais pensamentos em Matemática e o currículo de Matemática na escola elementar e no ensino secundário, recrutar e treinar professores de Matemática para as necessidades de pesquisa em educação Matemática.
- b) Especificar (i) os propósitos da educação matemática; (ii) quais as mudanças desejáveis a serem feitas quanto ao conteúdo a ser ensinado; (iii) novos objetivos, novos materiais e novos métodos de ensino e (iv) dar treinamento adicional adequado aos professores de Matemática em vista das novas mudanças.
- c) Indicar procedimentos e métodos específicos que devem ser levados em consideração em qualquer país visando obter uma reserva – tanto em número quanto em qualidade – de matemáticos para o ensino e pesquisa e pessoas matematicamente competentes na ciência, na indústria e no governo.
- d) Sugerir uma ação de acompanhamento das atividades propostas tanto a nível nacional quanto internacional (MOON, 1986, *apud* SOARES, 2001, p. 27-28).

A conferência, como se pode supor ao olhar para o item b), foi o momento em que diversas ideias para o trabalho em sala de aula acabaram surgindo, tanto em termos de conteúdo, como de métodos. O exemplo de um conceito matemático central na reforma e que recebeu notoriedade pelo MMM foi o de conjunto. Segundo Soares (2001), havia a pretensão de que a teoria dos conjuntos fizesse parte do currículo de todos os níveis escolares, sendo ensinada desde o ensino primário até o ensino superior. A justificativa por trás dessa ambição, reside no fato da teoria dos conjuntos ser “um conceito básico da Matemática, além de uma poderosa ferramenta para a unificação da disciplina, que no século XIX era considerada como “as Matemáticas” (SOARES, 2001, p. 48), Geometria, Álgebra e Aritmética. Outros tópicos postos em destaques são os de “sistemas de números”, de “congruências” e de “desigualdades”. Para o trabalho em sala de aula, foi indicado que os professores deveriam empregar a abordagem dedutiva, aliada a uma linguagem mais precisa.

Deseja-se com isso não cometer os mesmos “erros” de Euclides, que empregou em seus *Elementos* axiomas e teoremas que, por serem intuitivamente óbvios, não foram explicitados ou demonstrados anteriormente por ele, mas eram usados em suas demonstrações. A solução seria acrescentar esses novos axiomas e prová-los de maneira dedutiva (SOARES, 2001, p. 49, *itálico do autor*).

De acordo com a autora, essas questões envolvendo os conteúdos e aspectos pelos quais a matemática deveria ser apresentada estavam pautadas nos trabalhos do grupo N. Bourbaki (Nicholas Bourbaki)<sup>18</sup>. Esse grupo era formado por diversos matemáticos famosos — em sua maioria franceses — que defendiam uma revolução (ou evolução) interna da matemática que, segundo eles, deveria começar com o desenvolvimento da noção de *estrutura*.

Bourbaki identificou três estruturas na Matemática, as quais chamou de *estruturas-mãe*: as estruturas algébricas, as estruturas de ordem e as estruturas topológicas. Essas três estruturas seriam capazes de gerar todas as outras. Para Bourbaki, as estruturas são ‘ferramentas’ para o matemático e seu estudo proporciona uma ‘considerável economia de pensamento’. Os trabalhos publicados pelo grupo Bourbaki datam das décadas de 30 e 40 e tiveram grande influência no Movimento da Matemática Moderna. A intenção e ambição do grupo Bourbaki era a de reescrever toda a Matemática usando o *método axiomático*. Até a década de 70 o grupo já havia publicado mais de 30 livros (SOARES, 2001, p. 47, itálico do autor).

A influência referida por Soares (2001) precisa ser esclarecida. Em consonância com Pires (2006), a história de Bourbaki tem início em 1920 na Escola Normal Superior (*École Normale Supérieure*) – ENS de Paris. Criada em 1794, a ENS tinha como objetivo formar professores para atuar no ensino secundário, contudo, perto do século XX, os objetivos da instituição acabam se modificando e abrindo a possibilidade para a formação de pesquisadores e profissionais para lecionar no ensino superior.

A ENS forneceu boa parte da elite do mundo da pesquisa em concorrência com a Escola Politécnica. No início do séc. XIX a maioria dos matemáticos franceses tinham formação politécnica, tendência que se modifica no final do mesmo século, passando a predominância para a escola normal. A ENS englobava estudos literários e científicos, e dela saíram grandes nomes da intelectualidade e da política, tais como: Raymon Aron, Jean-Paul Sartre, Georges Pompidou, etc. (PIRES, 2006, p. 15).

Entretanto, mesmo tendo sido uma instituição de renome, em relação à matemática, ela deixava a desejar. Com base em Pires (2006), o grupo<sup>19</sup> Bourbaki foi fundado por causa de uma insatisfação com o ensino de matemática nas faculdades de ciências francesas nos anos 1930. Na ENS, a principal causa de descontentamento com o curso era o certificado de Cálculo

<sup>18</sup> Nicolas Bourbaki é um nome fictício assumido pelo grupo. Conta-se, segundo Pires (2006), que “Bourbaki” “havia sido adotado em Besse em julho de 1935, o mesmo não se passou com Nicolas (...) Os Bourbaki já apresentavam a inicial N diante do nome, mas André Weil conta no seu *Souvenir d'apprentissage*, que era necessário dar um prenome a Bourbaki (...). Embora Nicolas já figura no grupo, os volumes do tratado *Éléments de Mathématique* foram por muito tempo assinados por N. Bourbaki” (PIRES, 2006, p. 33-34, itálico do autor).

<sup>19</sup> Alguns matemáticos que fizeram parte do grupo foram: André Weil, Henri Cartan, Jean-Pierre Serre, Michel Demazure, Pierre Cartier, Jean Louis Verdier, Jean Dieudonné, Jacques Dixmier, Laurent Schwartz, J. Delsarte, Armand Borel, Alexandre Grothendieck, Arnaud Beauville, Claude Chabauty, Alain Connes, Adrien Douady, Roger Godement, Jean-Louis Koszul, Charles Pisot, Pierre Samuel, Bernard Teissier, Samuel Eilenberg, Armand Borel, Serge Lang, entre outros.

Diferencial e Integral (CDI) e as matérias separadas. “O curso atribuía aos estudantes, um certificado de física geral que embora extenso era superficial e um certificado de mecânica racional (...) muito acanhado” (PIRES, 2006, p. 17). Assim, da não conformação do grupo com a formação matemática na época, surge um dos seus maiores projetos, que tinha como objetivo redigir um tratado de análise matemática de 1000 a 1200 páginas em menos de um ano, que pudesse substituir os textos existentes. Todavia, o projeto se amplia na pretensão de se fornecer uma coleção ampla, destinada a uma comunidade não só de matemáticos.

Se o objetivo inicial do grupo era o de redigir um novo tratado moderno de análise em menos de um ano, ligado ao CDI, a tarefa vai sendo ampliada e se torna uma obra faraônica (...). Weil já anunciava que era necessário fazer um tratado útil a todos: aos pesquisadores, aos candidatos, aos funcionários do ensino público, aos físicos e a todos os técnicos. Sente necessidade de fornecer aos leitores em potencial uma coleção de ferramentas matemáticas fortes e universais tanto quanto possíveis (PIRES, 2006, p. 21).

O grupo fez sua primeira publicação no ano de 1939, uma exposição resumida de resultados da teoria dos conjuntos (*Fascicule de résultats de théorie des ensembles*) e a sua última, em 1998. A princípio, o volume final seria sobre teoria espectral (*Théories spectrales*) de 1983, mas, em 1998, foi editado mais um fascículo de Álgebra comutativa. No total, são 7000 páginas, dez livros e mais de 60 capítulos: I) Teoria dos conjuntos (*Théorie des ensembles*); II) Álgebra (*Algèbre*); III) Topologia (*Topologie générale*); IV) Funções de uma variável real (*Fonctions d'une variable réelle*); V) Espaços vectoriais topológicos (*Espaces vectoriels topologiques*); VI) Integração (*Intégration*); VII) Álgebra comutativa (*Algèbre commutative*); VIII) Grupos de Lie (*Groupes et algèbres de Lie*); IX) de teoria espectral (*Théories spectrales*) e mais o fascículo referente à Álgebra Comutativa. O trabalho do grupo segue uma normativa.

Primeiramente, Bourbaki é desprovido de hierarquia (...) as decisões são de unanimidade. Não há voto, mas qualquer um de seus integrantes pode apresentar seu veto. A versão definitiva deve ter aceitação de todos. Como consequência o procedimento de redação é complexo e lento. Confia-se a um ou dois membros do grupo a redação de uma primeira versão de determinado tópico ou tema. Estando esta tarefa realizada, esta versão é lida em voz alta em congresso, impiedosamente criticada pelos outros membros para que faça uma nova versão, que será em novo congresso lida e criticada e que passará para outro elemento do grupo, para a redação de uma nova versão, etc. (...) O processo de redação do grupo é muito particular, demorado e se apoia na convergência de ideias de todos os elementos do grupo. Só assim, a versão cuja aceitação é unânime pelo grupo está pronta para publicação. (...) Bourbaki é secreto. Nenhuma pessoa externa ao grupo conhece a composição do mesmo, nem as atividades, datas ou lugares. A não divulgação de seus membros reforça a autoridade de seu tratado, expressão de um consenso e que não deixa aparecer possíveis divergências, reforçando a identidade e coerência do grupo. Bourbaki é formado por nove membros, embora se saiba que em algumas épocas esse

número foi ultrapassado. Bourbaki aposenta seus membros aos 50 anos de idade. Bourbaki é sempre jovem. (PIRES, 2006, p. 23-25).

Assim, quando se diz que Bourbaki influenciou o MMM devemos ter em mente que se tratou de uma influência indireta, visto que a preocupação do grupo se relacionava mais com materiais para o ensino superior. Contudo, “os adeptos do Movimento da Matemática Moderna encontraram nos trabalhos de Bourbaki um guia para a Matemática” (SOARES, 2001, p. 49). A obra desses matemáticos também apareceu em um momento favorável como o do século passado.

Duas das características principais da matemática do século XX, a ênfase na abstração e a preocupação crescente com a análise das estruturas e modelos subjacentes, chamaram a atenção, em meados do século, dos interessados em ensino da matemática. Vários destes entenderam que seria oportuno adaptar tais características ao ensino e, não demorou, formaram-se grupos competentes e entusiastas empenhados em reformular e “modernizar” a matemática escolar. Nascia a *matemática moderna* (EVES, 2004, p. 690, *itálico do autor*).

Em síntese, e frente ao que foi exposto até aqui, mediante a literatura adotada, o novo movimento de reforma da década de 1960 é considerado uma continuidade do movimento anterior (reformador). Em ambos, o objetivo foi o de “diminuir o descompasso existente entre o ensino de Matemática do curso médio e o do curso universitário; este se ligava diretamente aos últimos avanços da Matemática, enquanto aquele se mantinha baseado, quase exclusivamente, na Matemática grega” (MIORIM, 1998, p. 111). Para a autora, cada movimento encontrou formas de operacionalizar o ensino, até mesmo opostas. O “reformador” amparou-se na intuição; elegeu a função como o elemento unificador da matemática; e buscou nas aplicações da matemática a outras disciplinas os elementos fundamentais para a reforma. O MMM, por outras vias, estabeleceu uma proposta baseada na “moderna matemática” em sua forma axiomática desenvolvida pelo grupo Bourbaki. Seus elementos essenciais eram os conceitos de conjuntos, as relações e as estruturas.

Realizadas essas considerações acerca dos movimentos de “reformas” do ensino de matemática no contexto internacional, seguirei adiante atentando para a sua significação a nível nacional no Brasil. Refletirei sobre como a comunidade brasileira (pais, educadores, lideranças políticas, intelectuais, dentre outros segmentos sociais) se mobilizou para aderir às mudanças naquele momento.

#### 4.1.2 *A Introdução do Movimento da Matemática Moderna no Brasil*

A introdução do MMM no Brasil foi uma “resposta” às iniciativas políticas, culturais e da comunidade escolar do período, posta como uma forma de solucionar os problemas relacionados às demandas da indústria, do comércio e relativas à formação — tanto de mão de obra qualificada para o trabalho nas empresas, quanto de formação acadêmica. Assim, tentarei seguir uma postura descritiva, orientada por essas três frentes, como forma de analisar o momento histórico próximo da década de 1960. Essa é uma maneira didática e expositiva, assumida como uma possibilidade de se conseguir clareza nas discussões; os acontecimentos históricos ocorrem integralmente e de forma simultânea, não havendo separação espaço-temporal para ocorrer ações políticas, culturais e educativas em desconexo.

Como vimos na seção anterior, a força “propulsora” e desenvolvimentista do MMM foi o avanço científico-tecnológico nos pós Segunda Guerra Mundial. Silva (2013), fundamentada em Paes (1997)<sup>20</sup> e Hobsbawm (1998)<sup>21</sup>, sugere que o progresso científico estava tão acentuado e relacionado à vida das pessoas que se tornavam cada vez mais manifestos os “benefícios proporcionados à população, como a energia barata e o acesso a inovações (principalmente as eletrônicas e eletroeletrônicas)” (SILVA, 2013, p. 89). No Brasil, as evidências dos avanços podem ser notadas quando se contrasta as ações políticas desenvolvidas desde o período colonial.

Durante o tempo em que foi colônia de Portugal, o país teve como principal atividade econômica a agricultura, e o processo de industrialização começou a ser incentivado e desenvolvido no país principalmente a partir da política de governo de Getúlio Vargas (1930-1934 e 1951-1954) e Juscelino Kubistchek (1956-1961). Durante o governo de Café Filho (1954-1955), a política cambial passou a favorecer a importação de equipamentos por investidores estrangeiros, sendo o capital adquirido com essas importações a principal fonte para a implantação do setor de produção de bens duráveis, como a siderurgia, que avançou consideravelmente já no governo seguinte, o de Juscelino (SILVA, 2013, p. 90).

Com o expressivo avanço tecnológico — consolidado juntamente com o desenvolvimento industrial — as questões concernentes à educação e ao que ensinar começaram ser colocadas em discussão, “posto que com a introdução e desenvolvimento de novas tecnologias era preciso que os cidadãos tivessem maior conhecimento em ciências e matemática, além de um maior domínio técnico, o que provocou, em consequência, mudanças

<sup>20</sup> PAES, M. H. S. **A década de 60: Rebeldia, Contestação e Repressão Política**. 4. ed. São Paulo: Editora Ática, 1997.

<sup>21</sup> HOBSBAWM, E. **Era dos Extremos: o breve século XX (1914-1991)**. São Paulo: Companhia das Letras, 2003.

no ensino” (SILVA, 2013, p. 90). Todavia, o Brasil da década de 1960 se encontrava com a sua “economia em crescimento desacelerado, uma instabilidade política que apontava os limites do sistema institucional vigente e suas contradições com o projeto desenvolvimentista, e um processo de crescente polarização dos setores sociais” (BÚRIGO, 1989, p. 91). Quando se diz que o país vinha se desenvolvendo, entende-se que se tratava do desenvolvimento da indústria de base. Segundo Búrigo, durante o governo de Juscelino Kubitschek (1956/1961), o país havia passado por um crescimento nos setores de transporte, produção de energia e na indústria de bens de consumo, com destaque para a indústria automobilística.

O crescimento industrial, no entanto, havia se dado às custas da penetração maciça do capital estrangeiro e de sua dominância em vários setores de ponta da produção, do endividamento, do aumento das disparidades regionais e dos bolsões de miséria, da perda do poder aquisitivo dos salários pela inflação agravada a partir de 1959 (BÚRIGO, 1989, p. 91).

Sucedida-se assim um grande crescimento de movimentos populares interessados na manutenção “da ‘ordem’ através de um Estado forte e repressivo. Esse campo reunia tanto setores mais tradicionais, ligados à burguesia agrária e à exportação e importação, como as novas camadas de administradores e técnicos surgidas na expansão comercial dos anos 50” (BÚRIGO, 1989, p. 93-94). O chamado “imperialismo” norte-americano, ou seja, a influência militar, cultural, política e principalmente econômica dos EUA chegou a intervir sob diferentes formas na comunidade brasileira, a começar pela pressão sobre o *Fundo Monetário Internacional* (FMI) para a adoção de propostas políticas para estabilidade econômica.

A política intervencionista norte-americana, desenvolvida a partir da Segunda Guerra Mundial e intensificada nos anos 50, tinha o sentido de esforço de manutenção de alinhamento diplomático e hegemonia militar da América Latina, mais necessário no quadro da Guerra Fria e particularmente após a vitória de revolução cubana, e da necessidade de um controle mais direto da vida econômica e das condições necessárias à reprodução de capitais investidos, incluindo-se aí um quadro institucional compatível com a realização dos interesses do capital monopolista. No início dos anos 60, esses interesses eram ameaçados pelas oscilações da política de Jango, expressas na aprovação da Lei de Remessa de Lucros (que limitava a remessa) e nas concessões ao movimento sindical, como o décimo terceiro salário e os reajustes do salário mínimo, e pela atuação mais ofensiva de setores como o liderado por Brizola, que expropriara, no Rio Grande do Sul, companhias subsidiárias da *Bond and Share* e *International Telephone and Telegraph* (ITT) (BÚRIGO, 1989, p. 95, *itálico do autor*).

Como características desse período, estão as várias manifestações organizadas por jovens que atuavam em defesa de uma vida simples e igualitária para todos; “o movimento hippie, com o lema ‘paz e amor’, ganhou reconhecimento e arregimentou vários seguidores. O

rock, por sua vez, era fonte de inspiração do comportamento da juventude, sendo, além de música, um modo de viver, uma ‘atitude’” (SILVA, 2013, p. 91). No auge desses movimentos, destacam-se os protestos de 1968 inspirados pelos jovens franceses, que na ocasião reclamavam por melhorias no ensino, considerado ultrapassado e não condizente com as necessidades em voga. Tais movimentos acabaram por disseminar e influenciar os jovens de várias partes do mundo, sendo apoiado por diversos intelectuais da época. Através do slogan “É Proibido Proibir”, foi estabelecida uma posição contrária ao regime instaurado e a afirmação em favor da liberdade sexual.

No Brasil ocorreu a Passeata dos Cem Mil, no Rio de Janeiro, em 1968, considerado um dos movimentos mais importantes contra o regime militar: mostrava-se publicamente o descontentamento com o gerenciamento do Estado e, particularmente, cobrava-se uma atitude do governo com relação aos problemas estudantis. (...) Os manifestos organizados pelos estudantes reivindicavam mais verbas, vagas e melhores condições de ensino nas universidades públicas. Além das melhorias na educação, os jovens também lutavam pela liberdade democrática e se opunham ao governo. Devido às ações que liderava, o movimento estudantil desse período teve grande importância na mobilização social da época (SILVA, 2013, p. 91).

O tema do ensino não era recente, contudo, os empreendimentos em prol de uma melhora nos setores da educação ocorriam muito timidamente. Na educação básica, que durante as décadas de 1940 e 1950 teve “um aumento considerável no número de estudantes do ensino secundário, acarretando o crescimento da rede pública de ensino e provocando debates sobre a criação de redes particulares de ensino” (SILVA, 2013, p. 92), podemos citar a criação da Lei de Diretrizes e Bases (LDB/4024) de 1961, sancionada pelo então presidente da república João Goulart. A nova lei regulamentou o ensino público no país, garantindo, dentre outras coisas, a criação de escolas particulares e a descentralização do sistema educacional do país, que tinham no Colégio Pedro II o padrão para os demais estabelecimentos de ensino. “A estrutura do ensino, por sua vez, não sofreu alterações, (...) foram mantidos — com pouquíssimas alterações além da nomenclatura — os quatro níveis de escolaridade: pré-primário, primário, ensino médio (dividido entre ginásio e colégio) e superior” (SILVA, 2013, p. 92-93). Segundo a autora:

O pré-primário era destinado aos alunos menores de sete anos. O primário tinha duração de quatro anos e, ao finalizá-lo, os alunos deveriam ter no mínimo onze anos para prestar o Exame de Admissão para, caso aprovados, ingressar no ginásio, que durava quatro anos. Na sequência do ginásio havia os três anos de colégio, última etapa antes do Ensino Superior. O ginásio e o colégio compunham o ensino médio, que se articulava em “modalidades” (o secundário, o técnico e a formação de professores primários) concomitantes ao ensino regular, sendo o primeiro ano desse ciclo comum a todos e os restantes, posteriores, específicos, de acordo com o curso escolhido pelo aluno (SILVA, 2013, p. 93).

Foi apenas com a LDB/5692, de 1971, que o primário, o ginásio e o colégio foram extintos, dando lugar ao que se denominou de primeiro e segundo grau, respectivamente Ensino Fundamental e Médio. Como regra, foi determinada pela lei a obrigatoriedade e conclusão do primeiro grau completo — antes, determinava-se apenas a conclusão do ensino primário.

Para Búrigo (1989), fundamentada em Ribeiro (1982)<sup>22</sup>, as modificações ocorridas no campo educacional da década de 1960 expressavam as mudanças da estrutura da sociedade brasileira nos últimos dez anos.

Em especial a urbanização e a diversificação das possibilidades de emprego nas cidades, acompanhada de pressão dos setores médios e populares pelo acesso ao ensino. Entre 1950 e 1960, o percentual da população urbana e suburbana havia sido elevado de 36% para 45%. No mesmo período, o índice de analfabetismo da população com 15 anos e mais havia sido reduzido de 50,5% para 39%. A rede escolar crescera mais rapidamente que em períodos anteriores (BÚRIGO, 1989, p. 95).

Assim, com a crescente modificação sociocultural brasileira começaram a surgir debates sobre as questões educacionais em diversos segmentos institucionais. A LDB, por exemplo, foi uma lei que suscitou diversas discussões em torno do papel do ensino público. Para alguns educadores, os chamados “escolanovistas”, a educação pública seria o acesso direto para a realização democrática no país, eles “empunham a bandeira da educação como construtora de uma sociedade democrática moderna” (BÚRIGO, 1989, p. 96). Na outra ponta, e contrário a esse modo de pensar a educação — garantida pelo poder público — estava o grupo de educadores católicos, desfavoráveis à intervenção do Estado na educação e ao modelo de ensino laico. As discussões envolvendo a LDB também se estenderam para a problemática em torno do currículo.

A descentralização resultante da Lei, aprovada em 1961, com a criação dos Sistemas Estaduais de Ensino também suscitou o desenvolvimento de novos debates, incluindo-se aí o dos currículos e programas no ensino médio, não mais fixados por organismo federal (exceto pelo estabelecimento de um Núcleo Comum de matérias) (BÚRIGO, 1989, p. 96).

Dessa forma, surgem diversas propostas para a renovação pedagógica vigente, as quais foram praticadas tanto em escolas públicas quanto em particulares.

O veio mais renovador, no entanto, no campo de debates pedagógico, era aberto com o surgimento dos inúmeros movimentos de educação e de cultura popular, onde se destacavam o Movimento de Cultura Popular de Recife, a Campanha de Pé do Chão Também Se Aprende A Ler de Natal, o Movimento de Educação de Base, ligado à

---

<sup>22</sup> RIBEIRO, M. L. S. **História da Educação Brasileira**: a organização escolar. 4. ed. São Paulo: Moraes, 1982.

Igreja Católica e o Centro Popular de Cultura criado pela UNE. No I Encontro Nacional de Analfabetismo e Cultura Popular, realizado em Recife, em 1963, estavam presentes 77 grupos, dos quais 44 desenvolviam atividades de alfabetização de adultos (...). Um dado importante sobre esses movimentos é que, além do seu compromisso com os setores populares, para quem propunham uma participação ativa na vida política do país, eles eram parte de um esforço 'de superação do colonialismo que havia sempre caracterizado a constituição de referenciais no campo educacional, no Brasil (BÚRIGO, 1989, p. 97).

Na esfera política, temos um dos maiores acontecimentos do século XX, a intervenção militar ocorrida no país, em 1964. Ao estudar essa temática, envolvendo a questão da reforma do ensino de matemática, considere o exposto em Búrigo (2014), sobretudo no que diz respeito aos aspectos políticos envolvendo a ditadura militar brasileira e a matemática escolar. Em suma, o regime teve início no dia 1 de abril de 1964, após um golpe militar que destituiu o governo de João Goulart (democraticamente eleito), estendendo-se até 15 de março de 1985. Em ordem cronológica, temos os seguintes líderes presidenciais: Ranieri Mazzilli (1964), Humberto Castelo Branco (1964-1967), Artur da Costa e Silva (1967-1969), Pedro Aleixo (1969) — impedido de tomar posse da presidência da República pela junta militar — a Junta Governativa Provisória (1969) — composta por três ministros militares: o Almirante Augusto Rademaker, o General Aurélio de Lira Tavares e o Brigadeiro Márcio de Sousa Melo — Emílio Garrastazu Médici (1969-1974), Ernesto Geisel (1974-1979) e João Figueiredo (1979-1985).

No entanto, quando a ditadura no Brasil entra em vigor, as ideias envolvendo a matemática moderna — tema desta dissertação — bem como a sua implementação, já estavam há muito tempo sendo discutidas pelos educadores brasileiros. No que diz respeito à orientação educacional, há o apoio governamental ao movimento, que já vinha acontecendo. É importante destacar que o MMM não é uma imposição da ditadura. Aliás, o sentimento que se tem é de um envolvimento voluntário por parte dos profissionais engajados com as mudanças para o ensino de matemática.

A esse caráter participativo, agrega-se o sentido “militante” atribuído por Irineu Bicudo e Osvaldo Sangiorgi às atividades do GEEM (...). A mesma ideia de engajamento aparece no depoimento de Clara B. Leite e Lima e Passos (...) e em declarações da professora Manhucia Liberman aos membros do GHEMAT – Grupo de Pesquisa de História da Educação Matemática no Brasil. Os depoimentos enfatizam o caráter voluntário e não remunerado da participação nas atividades do GEEM, que promovia reuniões de planejamento e discussões de experiências nos sábados à tarde. Tratava-se de um engajamento em um projeto de renovação do ensino de matemática (...) A Matemática Moderna irrompeu, então, no Brasil, como expressão combinada da afirmação de uma profissionalidade docente e de uma movimentação autônoma de professores que acreditavam numa mudança do ensino de matemática no secundário e no primário, numa dinâmica antiburocrática e que tirava partido da lógica descentralizadora instaurada pela Lei de Diretrizes e Bases (Lei nº 4.024) de 1962 (BÚRIGO, 2014, p. 27).

Também, por outro lado, a difusão da matemática moderna, “desencadeada a partir de 1961, pelo (GEEM)<sup>23</sup>, em São Paulo, prosseguiu após a instauração do regime militar” (BÚRIGO, 2014, p. 27). O que, de acordo com Búrigo (2014), pode ter ocorrido graças ao caráter supostamente “neutro” da matemática combinado à ideia de desenvolvimento do país — num período de grande repressão e censura. Assim, parece haver uma totalidade que concordava que o ensino de matemática deveria passar por reformas. Soares (2001, p. 67) chama a atenção para o fato de que “o ensino tradicional recebia muitas críticas, mas podiam ser notadas em alguns estados brasileiras iniciativas isoladas que tentavam se não mudar pelo menos amenizar a situação do ensino e da formação de professores”. Desta forma, impulsionados por um desejo de mudanças, a comunidade de educadores de matemática iniciou um período em que seriam discutidas as problemáticas envolvendo o ensino desta ciência. Inserem-se nesse quadro os primeiros *Congressos Brasileiros de Ensino da Matemática*.

Neles começaram a ser discutidas novas direções para o ensino de Matemática no que diz respeito à metodologia, treinamento e formação de professores, currículos, material didático, etc. Além disso, os professores tiveram espaço para divulgar suas experiências e para propor novas atividades que pudessem ajudar o aluno a entender melhor a Matemática, o que contribuiria também para o trabalho do professor (SOARES, 2001, p. 67).

Conforme a autora, o *I Congresso Brasileiro de Ensino da Matemática no Curso Secundário* ocorreu em setembro do ano de 1955, em Salvador – BA, com o intuito de discutir os programas<sup>24</sup> de ensino de matemática, o livro didático, as novas tendências para o ensino e o aperfeiçoamento dos professores de matemática. “O congresso concluiu pela aprovação do aumento da carga horária semanal de matemática no curso secundário – para quatro horas no curso ginásial, e para cinco horas no curso colegial” (SOARES, 2001, p. 68-69). Além disso, foi sugerido que os professores deveriam se abster do ensino baseado em excessivas abstrações,

---

<sup>23</sup> O Grupo de Estudos do Ensino da Matemática (GEEM) foi fundado em outubro de 1961, em parceria com a Secretária da Educação de São Paulo. O objetivo do grupo era coordenar e divulgar a introdução da Matemática Moderna na Escola Secundária. Ele era composto por professores universitários, secundários, pedagogos, representantes da Secretaria do Estado de São Paulo, da Sociedade de Matemática de São Paulo (SMSP), da Sociedade Brasileira para o Progresso da Ciência (SBPC), do Instituto Brasileiro de Educação, Ciência e Cultura (IBCEC) – UNESCO, da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da Universidade Presbiteriana Mackenzie (UPM), da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP), da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Campinas (UC) e da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Rio Claro (SP).

<sup>24</sup> Veja o ANEXO F – Programa de Matemática Aprovado pelo 1º Congresso de Ensino da Matemática, Realizado em Salvador de 4 a 7 de setembro de 1955.

o que foi ressaltado pelas palavras do Dr. Irmão Otão no *II congresso Brasileiro de Ensino da Matemática*, realizado em Porto Alegre – RS, em 1957:

Há, por exemplo, absoluta necessidade de uma atualização dos conceitos. As crianças e, os jovens também, têm enorme dificuldade em adquirir os conceitos matemáticos em virtude do seu caráter abstrato. Faz-se mister, por outro lado que haja clara compreensão das definições e conceitos, pois, de outro modo, o valor formativo da Matemática se desperdiça completamente. Tratando-se de conceitos abstratos, é preciso que a atenção, segundo Balmés o mais importante dos atos intelectuais, seja praticada gradativa e progressivamente, visando criar o hábito do trabalho puramente abstrato (ANAIS..., 1959a, p. 19-20).

Diferente do primeiro congresso, o segundo não ficou restrito ao ensino secundário, levando em consideração as questões envolvendo a formação de professores e o ensino primário. Segundo Soares (2001, p. 71), “ficaram as preocupações relativas à adequação do ensino de Matemática aos recentes avanços da ciência e da Pedagogia”. O Dr. Irmão Otão ao dar uma visão geral dos problemas considerados naquele evento faz menção ao aspecto psicopedagógico que deu impulso ao desenvolvimento do Movimento Reformador no início do século.

São particularmente as descobertas da psico-pedagogia que deram o impulso definitivo ao movimento renovador, convencendo os matemáticos da necessidade de modificar o sistema clássico de ensino, interessante sob certos aspectos, mas desligado das teorias psicológicas de aprendizagem. Não podemos deixar de reconhecer que o movimento renovador ao qual nos referimos foi em grande parte motivado pelo extraordinário progresso verificado na indústria e no comércio, progresso que determinou a limitação dos estudos teóricos ao que fosse indispensável para dar sentido e compreensão às aplicações práticas. Vem, por consequência impregnado de um fundo utilitarista, superável, todavia, desde que utilizados em toda amplitude os métodos psico-pedagógicos no seu ensino (ANAIS..., 1959a, p. 18-19).

Em 1959, realizou-se o *III Congresso Brasileiro de Ensino da Matemática*, desta vez na cidade do Rio de Janeiro – RJ. Desta vez o objetivo seria “estudar os problemas relativos ao ensino secundário e também do ensino primário, comercial, industrial e normal, além de problemas de ordem geral relativos ao ensino de matemática” (SOARES, 2001, p. 74). Ficou notável o fato de que algumas teses apresentadas no congresso traziam à tona os problemas referentes à formação e ao aperfeiçoamento de professores, muitos acreditavam que a estrutura das faculdades não

não correspondia às necessidades brasileiras e que não estavam adaptadas à realidade social do país. Isto se justifica pelo fato de que as faculdades existentes haviam sido construídas seguindo os moldes da Faculdade de Filosofia da Universidade de São Paulo, fundada em 1934, quando as condições sociais e econômicas do país eram bem diferentes (SOARES, 2001, p. 74).

Surgiram, neste encontro, importantes propostas por parte dos congressistas, como a não permissão de registro de professor de matemática para aqueles que não fossem licenciados na área. Ademais, indicaram a proposta de criação de uma revista de matemática voltada para o ensino médio. No que se refere ao aperfeiçoamento dos professores em exercício no ensino médio, foi sugerida “a criação de cursos de preparação à Matemática Moderna, tais como Teoria dos Números, Lógica Matemática, Teoria dos Conjuntos e Álgebra Moderna” (SOARES, 2001, p. 75). A respeito da “Matemática Moderna”, ela não foi alvo de discussões em nenhum dos três primeiros congressos e a sua introdução só foi tratada significativamente a partir do *IV congresso Brasileiro de Ensino da Matemática*, sediado em Belém – PA, o que ocorreu em cooperação com o *Grupo de Estudos do Ensino da Matemática* (GEEM).

O GEEM apresentou sua sugestão de **Assuntos Mínimos para um Moderno Programa de Matemática para o ginásio e para o colégio** que já havia sido aprovado no V Encontro de Mestre, realizado em São Paulo em junho de 1962, sob o patrocínio CADES, e na XIV Reunião Anual da Sociedade Brasileira para o Progresso da Ciência, realizada em Curitiba, no mesmo ano. O programa para os quatro anos de ginásio e os três anos do colegial consistia em 24 e 18 itens respectivamente. A diferença deste programa não estava tanto nos temas abordados, mas sim nas sugestões para sua execução, onde as estruturas, o conceito de conjunto e a linguagem conjuntista têm papel de destaque (SOARES, 2001, p. 76).

O *V Congresso Brasileiro de Ensino da Matemática*, realizado em São José dos Campos – SP, coordenado pelo GEEM, em 1966, contou com a participação dos matemáticos estrangeiros, como Marshall Stone, estadunidense, e George Papy, belga. Também

procurou-se, com a finalidade de colher melhores resultados, introduzir-se uma nova mecânica na realização do Congresso, principalmente oferecendo aos participantes algumas Sessões de Estudos, reputadas de importância para o professorado secundário interessado no atual tratamento da Matemática (ANAIS..., 1968, p. 08).

**Figura 7** – Sessões de estudos para o professorado secundário

| 8h                                                                             | 9h 10m                                                         | 10h 20m                                                           |
|--------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------|
| Teoria dos Conjuntos<br>Prof. B. Castrucci<br>(auditório)                      | Lógica Matemática<br>Prof. O. Sangiorgi<br>(auditório)         | Matemática Aplicada<br>Prof. Ruy M. Barbosa<br>(auditório)        |
| Tratamento Moderno da Geometria Analítica<br>Prof. A. Rodrigues<br>(sala 2201) | Introdução à Álgebra Moderna<br>Prof. I. Bicudo<br>(sala 2201) | Geometria - Tratamento Moderno<br>Prof. O. Catunda<br>(sala 2201) |
| Introdução à Análise<br>Prof. L. Mauro Rocha<br>(sala 2126)                    | Técnicas Dedutivas<br>Prof. L. Hegenberg<br>(sala 2126)        | Conferências<br>(sala 2126)                                       |

Fonte: Anais (1968, p. 09).

No que se refere ao GEEM, Silva (2007b, p. 51) expõe que sua criação constituiu “o primeiro passo para a reorientação dos professores de matemática” referente à Matemática Moderna. De acordo com a autora, o grupo atuou principalmente na produção de livros para o ensino de matemática, no “treinamento” de professores (o mesmo que “formação continuada de professores”) e na adaptação de projetos estrangeiros, “podendo criar novos quando necessário, fazer suas próprias análises em relação aos problemas e condições de retrainar seus professores dando-lhes novas diretrizes” (SILVA, 2007b, p. 51-52). Naquela época, muitos dos professores que ministravam as aulas de matemática não eram formados na área. Assim, o grupo levou em consideração que a atualização dos professores deveria abranger aqueles funcionários que não eram diplomados em matemática.

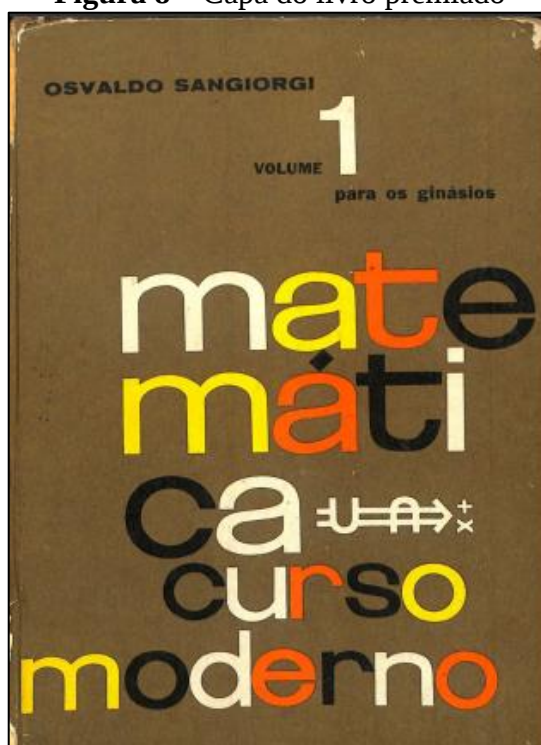
Nas décadas de 1960 e 1970, muitos professores encontravam-se formados em diversas áreas, como engenharia, biologia, entre outras, e lecionavam a disciplina Matemática, uma vez que número de docentes que possuíam graduação em Matemática era insuficiente para suprir tal função. Diante disso, o Grupo de Estudos do Ensino da Matemática-GEEM, além de atualizar os conhecimentos dos professores graduados em Matemática, também buscava ensinar Matemática aos demais professores e, nesse sentido, realizou cursos para os docentes dos Ensinos Secundário, Normal e Clássico (LIMA, 2006, p. 17).

O GEEM estava firmado no objetivo de incentivar, divulgar e atualizar os cursos de ensino de matemática do primário, secundário e normal. Com vistas a essas finalidades, o grupo

se comprometeria a realizar periodicamente, cursos de Atualização e Especialização em Matemática Moderna para professores dos ensinos primário, secundário e normal do Estado de São Paulo; Manter um Departamento de publicações, a fim de publicar um boletim informativo de todos os acontecimentos referentes ao ensino de Matemática e dos resultados alcançados pelo GEEM, além de cursos e livros destinados a mestres e alunos; E participar, oficialmente, de Congressos Nacionais e Estrangeiros cuja pauta fosse o ensino da Matemática (SILVA, 2007b, p. 53).

No desenvolvimento de livros didáticos, a atenção recai sobre a iminente figura de Osvaldo Sangiorgi, um dos mais notáveis autores de livros de matemática e um dos principais responsáveis pela implementação da Matemática Moderna no Brasil. Em suas produções, publicadas pela Companhia Editora Nacional — editora que tinha como meta a renovação dos livros didáticos distribuídos nas escolas — os livros vinham acompanhados de manuais que deveriam ser utilizados pelo professor. Como uma honraria, Sangiorgi foi agraciado com o Prêmio Jabuti, em 1964, pela publicação do seu primeiro volume da coleção *Matemática: curso moderno*. A condecoração foi criada em 1959 pela Câmara Brasileira do Livro (CBL) para homenagear “autores(as), ilustradores(as), livreiros(as), editoras e gráficas que se destacassem a cada ano” (CÂMARA..., 2022, on-line).

**Figura 8 – Capa do livro premiado**



Fonte: Sangiorgi (1965).

Para Silva (2007b), as novas produções em prol da modernização do ensino de matemática constituíam uma nova orientação para o ensino, aliás, as ideias de uma matemática moderna já estavam a tempos no seio da cultura escolar. Fundamentada em Chervel (1990)<sup>25</sup>, a autora reconhece a existência de “um período transitório, no qual compartilham ao mesmo tempo o antigo e o novo sistema, antes da estabilidade da nova vulgata” (SILVA, 2007b, p. 56). Assim, com a publicação de livros didáticos, Osvaldo Sangiorgi, juntamente com o GEEM, estabeleceu o novo padrão e, além de sustentar a matemática pretendida, também normatizou as obras que surgiriam daquele momento em diante. O texto de Osvaldo Sangiorgi

não apresentou-se apenas como um manual inovador, se fixando gradualmente, mas que pelas influências (...) desde o começo teve um alto índice de aceitação por parte da comunidade escolar, e deu início a um novo padrão para os livros didáticos (...) vemos que isso torna-se mais evidente quando acompanhamos o número de tiragens de suas obras nos anos subsequentes. De acordo com o Mapa de Edições da Companhia Editora Nacional, em 1965 foi publicada a obra “Matemática Curso Moderno – volume 2”. Com a 1ª edição no mês de março houve uma tiragem de 101.046 exemplares, seguida da 2ª edição em maio de 1965 com tiragem de 121.362 exemplares (SILVA, 2007b, p. 57).

Sendo atuante no estado de São Paulo, o GEEM não se limitou a esse território, o grupo, a partir de 1964, teve participação em outros estados brasileiros ministrando palestras nos seguintes estados Rio Grande do Sul, Pernambuco, Paraíba e Bahia. O ano em questão também marca o início das “suas atividades com o ensino primário, sendo que o primeiro curso, frequentado por quase 300 pessoas, tinha à frente as Professoras Manhucia Liberman e Anna Franchi” (SILVA, 2007b, 57). No ano seguinte, em 1965, por parte das mesmas professoras, ocorre a publicação do texto *Introdução à Matemática Moderna na Escola Primária*, tendo como apoio os trabalhos de Anna Franchi no Grupo Escolar Experimental Dr. Edmundo de Carvalho (Lapa), que no período estava voltado para questões de renovação metodológica para a “compreensão” e “desenvolvimento” de conceitos matemáticos. No prefácio da obra — redigido pelo GEEM — está exposto o projeto para o ensino primário.

O Grupo de Estudos do Ensino da Matemática G.E.E.M. de São Paulo, que, desde 1961, vem realizando, ininterruptamente, um longo trabalho de renovação do ensino de Matemática no Curso Secundário, em bases científicas modernas, abre no presente ano as suas atividades oficiais no Setor do Ensino Primário. Tal setor, como o do Ensino Secundário, realizará suas sessões de Estudos e Curso de Aperfeiçoamento, destinados a professores primários, em convênio com a Secretaria da Educação e o Magistério de Educação e Cultura. Não é demais salientar a necessidade imperiosa

<sup>25</sup> CHERVEL, A. História das disciplinas escolares: reflexões sobre um campo de pesquisa. In: **Teoria & Educação**, n. 2, Porto Alegre: Pannonica, 1990, p.117-229.

que o ensino primário tem de atualizar a linguagem matemática que vem sendo recebida pelas crianças na maioria dos estabelecimentos de ensino brasileiro. A par dessa modernização, o G.E.E.M. cuidará também de que sejam atualizados os conhecimentos matemáticos dos professores primários em exercício, complementando assim medidas já em andamento para uma sólida formação Matemática dos futuros professores, atuais alunos das Escolas Normais e Institutos de Educação. Os primeiros Cursos de Aperfeiçoamento, destinados a professores primários, que o G.E.E.M. realizou em caráter experimental com a colaboração dos professores Osvaldo Sangiorgi, Manhucia P. Liberman e Anna Franchi revelam – a par da ansiedade dos professores em renovarem seus conhecimentos matemáticos – uma justa preocupação de estarem habilitados, o mais depressa possível na moderna linguagem que os grandes centros de Estudos de outros países já vem propiciando aos responsáveis pela educação de crianças que participam de um mundo de muita ciência, como o de hoje. Uma tentativa de responder a esta preocupação: os trabalhos experimentais realizados no Grupo Escolar Experimental Dr. Edmundo de Carvalho (Lapa) a partir de 1962 pela professora Anna Franchi, e no Curso Primário do Ginásio Experimental I. L. Peretz pela professora Manhicia Perelberg Liberman a partir de 1964 (FRANCHI; LIBERMAN, 1966, n.p., grifo do autor).

**Figura 9** – Capa do Livro " Introdução à Matemática Moderna na Escola Primaria”



Fonte: Franchi e Liberman (1966).

De acordo com Soares (2001, p. 86), “o período de 1966 até 1970 pode ser visto (...) como o início de uma nova fase para o GEEM”. Até o desfecho do período, o grupo propagava, por meio de seus cursos, apenas exposições formais de conteúdos da Matemática Moderna, o que viria a ser modificado com os trabalhos de Dienes que enfatizavam a metodologia.

Um dos trabalhos mais consistentes desenvolvidos sob a influência de Piaget foi a de Zoltan Dienes, que tinha como um de seus enfoques principais a construção de múltiplas situações envolvendo o mesmo conceito, incluindo-se aí a manipulação de materiais concretos pelas crianças (...). De um modo geral, é possível dizer que a

influência nos de Piaget contribuiu para uma preocupação mais com a metodologia, num movimento que de início estava centrado nos programas (BÚRIGO, 1989, p. 86).

Durante a última fase de atuação do grupo, de 1971 a 1976, os trabalhos de Dienes continuaram a ser divulgados. Em 1971, ele esteve em São Paulo participando de cursos para professores do primário e secundário a convite do GEEM. “É possível notar que os trabalhos desenvolvidos por Dienes foram pelo menos de alguma forma e durante muito tempo vistos com uma alternativa contra os ‘exageros’ cometidos em nome da Matemática Moderna” (SOARES, 2001, p. 87). Contudo, a publicação de seus trabalhos pode ter se tornado um dos motivos para a extinção do grupo.

Assim havia uma parte do grupo que apoiava as ideias de Dienes e outro que apesar de não rejeitar o trabalho desenvolvido por ele, não via possibilidade, do ponto de vista prático, de introduzir sua metodologia nas escolas públicas brasileiras. O sucesso de Dienes era atribuído também à sua própria capacidade, habilidade e entusiasmo, coisas que talvez os professores brasileiros não fossem capazes de reproduzir. O compromisso de Dienes estava mais ligado ao “como” se aprende Matemática, enquanto “o que” se aprende era deixado em um plano secundário. Sua proposta procurava mudar a forma de se encarar a Matemática desde as séries elementares e não propunha nenhuma mudança radical de conteúdo, mas sim na forma como esse conteúdo era apresentado aos alunos (SOARES, 2001, p. 88).

De acordo com a autora, ainda que o GEEM, atuando prioritariamente no Estado de São Paulo, tenha sido pioneiro na divulgação dos ideais da Matemática Moderna, outros estados também se envolveram na formação de grupos e em atividades para a promoção da matemática moderna, como é o caso do Rio Grande do Sul e do Paraná, estudados por ela.

No Rio Grande do Sul, sob influência e alcance conseguidos pelo GEEM, temos a criação, em 1970, do Grupo de Estudos sobre o Ensino da Matemática de Porto Alegre – GEEMPA. Coordenado pela professora Esther Grossi, o intuito do grupo baseava-se na pesquisa do aperfeiçoamento de métodos, técnicas e conteúdo de matemática, formação e treinamento de professores e produção de materiais didáticos. “Antes da criação do GEEMPA, o estado do Rio Grande do Sul, através do GEEM de São Paulo já organizava algumas atividades como cursos de Matemática Moderna para professores secundários” (SOARES, 2001, p. 108).

No Paraná, é criado o Núcleo de Estudos e Difusão do Ensino da Matemática – NEDEM, sob a coordenação do professor Osny Antônio Dacol, em 1962. Em 1964, o grupo passou a realizar experiências em classes do ginásio no Colégio Estadual do Paraná fundamentando-se em obras de autores como Jean Piaget (1896-1980), psicólogo e epistemólogo suíço, considerado um dos mais influentes pensadores do século XX. Em termos dos assuntos tratados

no NEDEM, tem-se a ênfase dada à teoria dos conjuntos e ao trabalho com as funções, tópicos preconizados pela matemática moderna.

Na implementação da Matemática Moderna, o NEDEM, grupo responsável pela difusão do movimento, no Estado do Paraná, desenvolveu um projeto pioneiro desse movimento no Colégio Estadual do Paraná, considerado o maior colégio do país, pois segundo Sangiorgi (1969), já no início dos anos de 1960, abrigava cerca de 5.000 alunos. Inicialmente, o NEDEM se propunha a difundir as ideias do movimento aos alunos do curso ginásial daquele colégio, que a partir de 1964, experienciavam a proposta paranaense de Matemática Moderna (DOBROWOLSKI, 2011, p. 36).

Porém, mesmo que muitos dos estados brasileiros tenham se preocupado com as reformas do ensino de matemática, podemos citar estados que não obtiveram êxito nesse sentido, como é o caso do Rio de Janeiro. Lá, o MMM além de não contar com a participação assídua dos professores, não recebeu amparo oficial por parte do Estado. Em conformidade com Soares (2001), foi só a partir de 1966 que o movimento teve início nas escolas cariocas, o que ocorreu por meio das classes do Curso Normal do Instituto de Educação. A primeira Escola Normal brasileira foi criada em Niterói/RJ, no ano de 1835, a qual ofertava o Curso Normal, criado também nesse ano. Tal curso tinha o objetivo de formar professores para atuarem no magistério de ensino primário e era oferecido em cursos públicos de nível secundário.

Dessa forma, ao considerar a introdução do MMM no Brasil, compreendo que ela se dá por meio de uma complexidade que envolve toda a comunidade, as iniciativas políticas, culturais e escolares. Assim, como forma de retomar o exposto aqui, cito como pontos significativos para o desenvolvimento do movimento no país a necessidade de mão de obra qualificada para atuar na indústria de base (setores de transportes, produção de energia e indústria automobilística); as manifestações populares voltadas para a melhoria do ensino, que na ocasião era encarado como ultrapassado; as mudanças estruturais na sociedade, com destaque para o êxodo rural brasileiro e as atividades empreendidas pela comunidade de educadores do país, por meio da realização de eventos — como foi o caso dos *Congressos Brasileiros de Ensino da Matemática* — e da formação de grupos de estudos, os quais foram importantes para a divulgação e implementação da matemática moderna no decorrer dos anos de 1960.

## 4.2 O moderno ensino de matemática

Até o presente momento dessa investigação, tenho me pautado pelos aspectos históricos do desenvolvimento do MMM. Agora, para o que se segue, pretendo focalizar a matemática

empreendida nos programas de ensino do Brasil. Na impossibilidade de compreender toda a dinâmica do ensino de matemática em um território demasiadamente amplo, em termos de geografia, de cultura, de educação, dentre outros aspectos, como é o caso da nação brasileira, tomei por base textos (artigos, dissertações, teses, além de outras fontes) que versam sobre a produção matemática no período. A isso, conciliei o trabalho com os artefatos produzidos pelos envolvidos na “modernização” da matemática.

Um artefato, como mencionado na subseção “2.3 Ações para o desenvolvimento da pesquisa”, é entendido como um objeto (ou produto) produzido pela ação humana. Nesse processo, deixa transparecer a sua diferença frente às coisas naturais — aquelas produzidas pelo acaso. Há aí uma questão teleológica de fundo, ou seja, o envolvimento desses artefatos com vistas aos projetos humanos. “A natureza e a complexidade dos artefatos são formadas como base para distinguir os tipos de cultura a que pertencem” (ABBAGNANO, 2007, p. 82). Assim, podemos considerar como artefatos os jornais, os materiais didáticos, os anais de congressos e todos os demais meios utilizados no desenvolvimento do MMM.

#### 4.2.1 *Traços de demonstração na matemática moderna*

De acordo com Oliveira, Silva e Valente (2011), a expressão “Movimento da Matemática Moderna” está atrelada a um caráter demasiadamente abstrato da matemática. Para os autores, “MMM, em geral, está associado às estruturas algébricas, teoria dos conjuntos, geometria das transformações e um apelo forte às sistematizações, à abstração matemática” (OLIVEIRA; SILVA; VALENTE, 2011, p. 139). Desses conteúdos, entende-se que as noções de “estruturas” e de conjuntos eram tidos como temas centrais, pois havia a pretensão de que elas proporcionassem — dentre outras coisas — uma interconexão entre as áreas da matemática, bem como uma forma de linguagem para essa ciência em todos os níveis escolares.

Neste sentido, Mondini (2013) expõe que o MMM organizava o ensino de forma que aos estudantes caberia conhecer os conceitos de estruturas matemáticas. Essas juntamente com a linguagem conjuntista seriam essenciais para o desenvolvimento dessa ciência enquanto uma edificação, além de proporcionar uma apresentação dos assuntos com maior rigor e formalismo. De acordo com a autora, os líderes do movimento entendiam que dessa maneira “seria possível para o estudante visualizar as conexões existentes entre ramos distintos dessa Ciência. Por esse motivo, encontramos a Teoria dos Conjuntos permeando a maioria das séries do Secundário” (MONDINI, 2013, p. 400). A intenção no uso desses conceitos resume-se na *unificação* da

matemática, visto que até 1929, “o ensino de aritmética, o de álgebra e o de geometria eram feitos separadamente” (ROXO; THIRÉ; SOUZA, 1940, p. 73).

Nas palavras de Soares (2001, p. 48, *itálico da autora*):

Talvez o conceito matemático central da reforma – pelo menos aquele a que foi dada maior ênfase e ao qual o Movimento da Matemática Moderna tenha ficado mais associado – foi a noção de conjunto. Pretendia-se que a teoria dos conjuntos fosse ensinada aos alunos de todos os níveis de escolaridade, desde o ensino primário até a universidade. A ênfase nos conjuntos era fundamentada no fato de ser um conceito básico da Matemática, além de uma poderosa ferramenta para a *unificação* da disciplina que no século XIX era considerada como “as Matemáticas”.

Antes, até o final da década de 1950, a matemática ensinada nos colégios caracterizava-se pela ênfase dada ao modelo euclidiano, havia uma preocupação pela sistematização lógica dos conceitos matemáticos partindo-se dos chamados elementos primitivos (definições, axiomas, postulados). Silva (2006) expõe que a concepção platônica que permeava a abordagem matemática nesse período a tipificava como sendo estática de modo que o seu desenvolvimento enquanto ciência configurava-se como sendo autossuficiente, ou dito de outro modo, independente dos seres humanos. “Nessa abordagem, o ensino era predominantemente expositivo e centrado no professor, o detentor do conhecimento matemático, que deveria ser repassado aos alunos” (SILVA, 2006, p. 26). Tais pressupostos didáticos, estão inseridos na denominada *Tendência Formalista Clássica* e são compatíveis com a concepção platônica,

pois se os conhecimentos preexistem e não são construídos ou inventados/produzidos pelo homem, então bastaria ao professor “passar” ou “dar” aos alunos os conteúdos prontos e acabados, que já foram descobertos, e se apresentam sistematizados nos livros didáticos. Sob essa concepção simplista de didática, é suficiente que o professor apenas conheça a matéria que irá ensinar. O papel do aluno, nesse contexto, seria o de “copiar”, “repetir”, “reter” e “devolver” nas provas do mesmo modo que “recebeu” (FIORENTINI, 1995, p. 06).

No MMM, em que se sobressai a *Tendência Formalista Moderna*, muitos desses ideais se mantiveram de forma similar. Em termos epistemológicos, o movimento está situado numa tradição que retoma o formalismo matemático situado na tendência clássica, além de enfatizar o uso preciso da linguagem matemática, o rigor e os aspectos estruturais e lógicos dela. Entretanto, há uma diferença, pois enquanto a clássica enfatizava e valorizava a sistematização e o encadeamento lógico do raciocínio matemático, prezando sobretudo as formas ideais e absolutas das ideias matemáticas, “a tendência moderna procurava os desdobramentos lógico-estruturais das ideias matemáticas, tomando por base não a construção histórica e cultural desse

conteúdo, mas sua unidade e estruturação algébrica mais atuais” (FIORENTINI, 1995, p. 15). Em termos didáticos e metodológicos são identificadas poucas alterações:

Quanto à relação *professor-aluno* e ao processo ensino-aprendizagem, não há grandes mudanças. O ensino, de um modo geral, continua sendo acentuadamente autoritário e centrado no professor que expõe/demonstra rigorosamente tudo no quadro-negro. O aluno, salvo algumas poucas experiências alternativas, continua sendo considerado passivo, tendo de reproduzir a linguagem e os raciocínios lógico-estruturais ditados pelo professor (FIORENTINI, 1995, p. 14, *itálico do autor*).

A introdução de elementos unificadores como a teoria dos conjuntos e as estruturas matemáticas, bem como os demais temas nos programas do ensino básico no auge do MMM, apoiou-se “nos trabalhos do grupo dos Bourbaki para desenvolver uma ‘modernização curricular’” (MACEDO, 2008, p. 37). O grupo, como já dito em seções anteriores, era adepto ao método axiomático para o desenvolvimento da matemática, além da linguagem extremamente formal e rigorosa; também desenvolveram suas produções baseando-as nos três tipos de estruturas da matemática que descobriram: estruturas algébricas, estruturas de ordem e estruturas topológicas. No entanto, só pelos trabalhos desenvolvidos por Bourbaki não ficam esclarecidos os motivos que levaram a inserção de tais conteúdos ao ensino básico, visto não ser esse o enfoque do grupo. Nesse quesito, autores como Búrigo (1989), Soares (2001) e Pavanello (2002) consideram a vinculação estabelecida entre as produções de Piaget com as do grupo Bourbaki.

Segundo Búrigo (1989), o desenvolvimento da matemática no decorrer do movimento inicia-se com preocupações relativas aos conteúdos, ou seja, ao que ensinar. Entretanto, ao se manifestarem os vários projetos curriculares sobressaem-se questões mais relacionadas aos métodos de ensino. De acordo com a autora, a participação ativa dos alunos na construção do conhecimento era uma das questões centrais nos projetos. Nestes, “a ideia de que aprender matemática é aprender a ‘fazer matemática’ (o que muitas vezes significava – aprender a aplicar o método dedutivo), o estímulo à descoberta e à capacidade de resolução de problemas eram apresentados como objetivos explícitos” (BÚRIGO, 1989, p. 84). Nesse sentido, há uma certa controvérsia quando as ideias de Piaget começam a influenciar o movimento, que no início centrava-se nos programas.

Os estudos de Piaget sobre a construção do conhecimento lógico-matemático pela criança traziam novos reforços à defesa dos métodos ativos. Um dos trabalhos mais consistentes desenvolvidos sob a influência de Piaget foi a de Zoltan Dienes, que tinha como um de seus enfoques principais a construção de múltiplas situações envolvendo o mesmo conceito, incluindo-se aí a manipulação de materiais concretos pelas crianças. Mas o próprio PIAGET (1982) advertia para a confusão entre os processos

ativos e os métodos intuitivos, largamente disseminados e de um nível pedagógico muito inferior, sendo um exemplo típico a demonstração do uso de material concreto pelo professor, com a assistência dos alunos, ou, ainda, o recurso às figuras nos livros. De um modo geral, é possível dizer que a influência de Piaget contribuiu para uma preocupação maior com a metodologia, num movimento que de início estava centrado nos programas (BÚRIGO, 1989, p. 85).

Para Búrigo (1989), a suposta influência de Piaget no que concerne à ênfase formalista nas estruturas matemáticas, sob o ponto de vista bourbakista, é um tanto inusitada. Ocorre que ao analisar a correspondência entre as estruturas de Bourbaki e as estruturas da inteligência, Piaget, na *Comissão para o Estudo e Aperfeiçoamento do Ensino de Matemática (CIEAEM)*<sup>26</sup> de 1952, afirma: “é necessário basear a didática matemática na organização progressiva dessas estruturas operatórias” (PIAGET, 1955 apud BÚRIGO, 1989, p. 86), entretanto, ele alertava para o fato de que seria um risco a inserção do formalismo precoce no ensino básico:

Nada prova que colocando o formalismo a princípio o encontraremos no final em suas formas autênticas, e os estragos de um pseudo-formalismo ou um formalismo puramente verbal demasiado precoce mostram, pelo contrário, os perigos de um método que ignora as leis do desenvolvimento mental (PIAGET, 1955 apud BÚRIGO, 1989, p. 87).

Assim, considerar que Piaget fomentou a inserção das estruturas matemáticas, bem como a abordagem formalista no MMM seria injusto, o que se pode apontar

é uma identidade entre o discurso de Piaget sobre o ensino de matemática e o discurso dominante no movimento no que se refere à ausência de considerações sobre o conhecimento matemático como produzido socialmente, no âmbito mais amplo do processo de produção cultural, e no privilégio das estruturas em detrimento dos fatos matemáticos como conhecimento produzido na busca de soluções para problemas concretos (BÚRIGO, 1989, p. 87-88).

Tais compreensões expostas por Búrigo (1989) são corroboradas em Soares (2001), que expõe: “Às ideias de Bourbaki os modernistas incorporaram a Psicologia de Piaget que deu ao Movimento validação e caráter científico a partir da provável existência de uma correspondência entre as estruturas mentais de pensamento e as estruturas matemáticas” (SOARES, 2001, p. 11). Para a autora, houve uma falta de estudos mais profundos sobre a Educação Matemática presente nos textos de Piaget, o que segundo ela favoreceu a interpretações errôneas acerca de suas ideias.

---

<sup>26</sup> A *Comissão para o Estudo e Aperfeiçoamento do Ensino da Matemática (CIEAEM)* surge da pretensão de se investigar as condições reais e as possibilidades de desenvolvimento da Educação Matemática para melhorar a qualidade do ensino da matemática. As conferências anuais, que são o meio essencial para a concretização deste objetivo, caracterizam-se pelo intercâmbio e discussão do trabalho de investigação e sua realização na prática e pelo diálogo entre investigadores e educadores.

Fundamentada em Flavell (1986)<sup>27</sup>, ela compreende que:

O interesse de Piaget em estudar as estruturas lógico-matemáticas pode ser entendido pelo fato de Piaget acreditar que estas estruturas são modelos muito bons de organização do processo de cognição e dão uma imagem útil de como o sujeito do conhecimento se organiza (...) A experiência lógico-matemática baseia-se nas ações que a pessoa exerce sobre os objetos e não nos próprios objetos, como acontece na experiência física. Para Piaget a inteligência se desenvolve segundo uma sequência de etapas ou estágios de evolução mental (SOARES, 2001, p. 50).

De acordo com a teoria piagetiana, o pensamento abstrato de um indivíduo começa a se desenvolver por meio da manipulação de objetos concretos, levando-se em consideração a formulação de conjecturas e a visualização de padrões para as primeiras articulações de esquemas lógicos e formais. Chamado de Estágio Pré-operatório, esta fase do desenvolvimento do pensamento transcorre dos dois aos sete anos de idade. Posteriormente, em um estágio que se estende dos sete aos doze anos, inicia-se os estudos das ciências formais da lógica e da matemática, por exemplo. “Nesse período, a criança já é capaz de realizar operações com o pensamento, mas precisam partir de algo concreto, já conhecido” (MONDINI, 2013, p. 400). É só a partir dos seus doze anos de idade que o adolescente se torna capaz de operar em um campo puramente abstrato — sem a necessidade de um amparo concreto. Assim, é dessa faixa etária em diante que se pode reconhecer o desenvolvimento do pensamento puramente formal. Conforme explicita a autora,

o projeto da Matemática Moderna está organizado de modo a partir do intuitivo, do concreto e do conhecido pela criança para as duas primeiras séries do 1º ciclo do secundário e, a partir das duas últimas séries, já inicia o estudo de uma Matemática Abstrata, pautada na Álgebra. Tal parte da Matemática é expandida pelas demais séries do Secundário. No currículo proposto para o Ensino Secundário está o estudo das estruturas matemáticas e das relações existentes entre elas. Ao ensinar Matemática desse modo, não há a preocupação em formar um cidadão crítico, ou apresentar uma Matemática que auxilie na compreensão do mundo, mas tem como objetivo ensinar a operar matematicamente, seguindo o rigor e a linguagem exigidos por uma Matemática Formal (MONDINI, 2013, p. 401).

De acordo com Pavanello (2002), o interesse dos educadores matemáticos pelos trabalhos de Piaget começou a se intensificar após a discussão envolvendo a introdução da lógica no currículo das escolas brasileiras na década de 1950, principalmente no primeiro grau. A autora faz menção ao convite feito à professora Circe Navarro para ministrar no *Congresso Nacional de Professores de Matemática* em 1959, a qual, naquela época, era uma das maiores

---

<sup>27</sup> FLAVELL, J. H. **A psicologia de Jean Piaget**. Tradução de Maria Helena Souza Patto. 2. ed. São Paulo: Pioneira, 1986.

difusoras das ideias piagetianas no Brasil. Muito encantada com ideia de que “agrupamentos de classes e de relações”, “cálculo funcional” e “lógica proposicional” se relacionavam com o desenvolvimento da criança e do adolescente, ela propõe a inclusão dos estudos de Piaget no ensino de matemática.

Assim é que, nos anos 60, o forte interesse demonstrado em várias oportunidades por Piaget pela teoria bourbakiana das estruturas matemáticas como paradigma explicativo das estruturas operacionais da inteligência em desenvolvimento, acabou sendo utilizado pelos matemáticos para dar sustentação psicológica a um movimento que ficou conhecido como “matemática moderna”. Cumpre observar que esse movimento foi iniciado no âmbito da matemática e visava a introduzir no ensino os resultados mais recentes da pesquisa nessa área do conhecimento, a conexão com a teoria genética sendo feita posteriormente (PAVANELLO, 2002, p. 50).

Organizações influentes para o ensino de matemática, como era o caso do GEEM, também passaram a incluir nos seus discursos a teoria piagetiana, contudo, “não há indicações de que, no âmbito do GEEM como grupo, tenham se realizado estudos ou debates mais profundos acerca da obra de Piaget (BÚRIGO, 1989, p. 124). A impressão que se tem, conforme Macedo (2008) e Soares (2001), é a de que o uso das ideias de Piaget servia basicamente como forma de justificação para os estudos das estruturas matemáticas, configurando-se dessa maneira mais como propaganda do que como fundamentação teórica.

Retomando, temos que a ideia de renovação de ensino presente no ideário do MMM pode ser identificada, ou fundamentada, nos trabalhos de Bourbaki. Embora, esse grupo tenha manifestado preocupações de outra ordem — voltadas para a produção da matemática enquanto ciência — é inegável que os temas abordados por eles tenham sido postos para o ensino básico. Como parte essencial do aprendizado temos o estudo das estruturas e da teoria dos conjuntos, elementos *unificadores* da matemática que para o período vinha sendo entendida como um “edifício”. Essas ideias foram conciliadas à da psicologia piagetiana, o que conferiu validação científica aos programas de ensino que procuravam corresponder às estruturas álgebras às estruturas mentais.

Essa forma fundamentalista de se olhar para a matemática, segundo Miguel, Fiorentini e Miorim (1992), veio a alterar o equilíbrio curricular estabelecido até então entre as áreas de álgebra, aritmética e geometria. A álgebra de acordo com os autores ocupou um lugar de destaque, tanto em sua concepção tradicional quanto na moderna. “Isto porque, os grandes avanços da Matemática, nos dois últimos séculos, deram-se graças ao processo de algebrização da Matemática Clássica, tornando-a mais rigorosa, precisa e abstrata e, portanto, assim pensava-se, mais aplicável” (MIGUEL; FIORENTINI; MIORIM, 1992, p. 46). A aritmética passou a

ser entendida como o estudo dos domínios numéricos, sendo que a exposição destes deveria seguir a ordem crescente de complexidade estrutural deles.

Diferentemente do período anterior em que a criança iniciava o estudo da Aritmética pelas técnicas operatórias, agora trata-se de fazer com que ela domine, antes de mais nada, o próprio conceito abstrato de “operação”, o que é uma “função”, o que é uma “relação”, o que é um subconjunto do produto cartesiano e, após esse longo e abstrato trajeto, fundamentar os cálculos aritméticos através das propriedades estruturais do conjunto numérico em estudo (MIGUEL; FIORENTINI; MIORIM, 1992, p. 46).

Com acentuada coerência com a nova concepção de álgebra e de aritmética, a álgebra elementar, trabalhada nos colégios, não deveria mais ser pautada por uma abordagem expositiva de regras aritméticas, nem com a teoria dos grupos, anéis e corpos. De acordo com os autores, tanto o cálculo algébrico, quanto o das equações não poderiam mais ser expressos sem a devida referência a um domínio numérico e às suas propriedades estruturais.

Como se vê, a pragmática presente no ensino antigo, que fazia com que o conceito de equação viesse imediatamente associado à necessidade de resolver problemas, está ausente na segunda definição e, em seu lugar, coloca-se ênfase na precisão matemática do conceito e na linguagem “adequada” para expressá-lo. Isto traz como consequência a necessidade de se percorrer um trajeto prévio, ao longo do qual todos os termos presentes na nova definição devem ser rigorosamente definidos. Nesse sentido, antes de se chegar à definição de equação o estudante é obrigado a digerir termos e expressões tais como “frase”, “sentença aberta”, “sentença numérica”, todas necessárias, segundo os modernistas, para uma verdadeira compreensão de equação (MIGUEL; FIORENTINI; MIORIM, 1992, p. 46).

Para o ensino da geometria, que até aquele período era abordado pelo método euclidiano, começava a surgir a ideia de que ela deveria ser substituída por outras mais rigorosas e atualizadas. Muitos autores e teóricos como Dieudonné, por exemplo, explicam que a questão não deveria ser a de uma eliminação da geometria euclidiana, mas sim dos modos ultrapassados de ensiná-la. Em sua visão, a geometria deveria ser apresentada em conjunto com a álgebra, todavia, “o que acabou acontecendo foi a introdução da linguagem dos conjuntos na Geometria, de conceitos topológicos elementares tais como: interior, exterior e fronteira, e de alguns tópicos das transformações” (MIGUEL; FIORENTINI; MIORIM, 1992, p. 48).

Em um estudo realizado por Oliveira e Pietropaolo (2008), em que os autores se prontificaram a analisar as propostas modernizadoras para o ensino de matemática, através da Revista Escola Secundária<sup>28</sup>, mediante as edições publicadas no período de 1957 a 1963,

---

<sup>28</sup> A Revista Escola Secundária foi promovida pela Campanha de Aperfeiçoamento e Difusão do Ensino Secundário (CADES) do Ministério da Educação (MEC), trata-se de uma das estratégias da CADES que tinha como objetivo não só a expansão do ensino secundário, mas o seu redirecionamento com base nos preceitos da Didática Moderna. A revista seguiu em produção durante o período de 1957 a 1963.

entende-se que uma das orientações indicadas aos educadores, além da ênfase dada à unidade da matemática e à introdução de novos tópicos considerados modernos (estruturas algébricas, teoria dos conjuntos e etc.) era ter como meta trabalhar segundo o método axiomático. Nesse quesito, a geometria, conforme resultado do estudo, deveria partir de uma perspectiva intuitiva em direção à uma dedutiva.

Sobre a geometria, que figura entre os conteúdos que constituem maiores dificuldades em relação ao ensino e à aprendizagem, desde o início do século XX, alguns artigos discutem a necessidade de se trabalhar nas séries iniciais do secundário numa perspectiva intuitiva como etapa necessária para o desenvolvimento da geometria dedutiva nas séries finais. A passagem da intuição para a dedução é uma das propostas veiculadas no ideário do MMM com relação aos métodos de ensino (OLIVEIRA; PIETROPAOLO, 2008, p. 721).

Os autores concluíram que em determinados textos da revista houve certa diminuição de importância dada ao ensino de geometria dedutiva. Começava-se a discussão de que qualquer que seja o conceito estudado em sala de aula ele não deveria ser apresentado com excessivo rigor, mesmo que para isso se mantivesse algum nível de formalidade. Até mesmo ao conceito de demonstração matemática, caro ao método axiomático, deveria ter menos ênfase, ou ser usado “localmente”:

o processo de ensino e aprendizagem da Geometria deveria permitir que se realizasse o que mais tarde alguns documentos de implementação da Matemática Moderna denominariam de pequenas “demonstrações locais” a fim de destacar: as condições admitidas como válidas; o que deve ser demonstrado, chamando a atenção para o que pode ser deduzido das condições admitidas; os raciocínios efetuados para chegar a esses resultados, a partir dos dados e dos conhecimentos já incorporados. Desse modo, dar-se-ia uma ideia do método axiomático, pois as condições admitidas seriam os axiomas da teoria, os resultados seriam os teoremas e as “demonstrações locais” forneceriam o exemplo de aplicação do método dedutivo. Levar em conta esse princípio era sem dúvida introduzir uma inovação no currículo de matemática (OLIVEIRA; PIETROPAOLO, 2008, p. 722).

Quanto ao ensino com demonstrações, as recomendações dadas implicavam uma certa relativização nas escolas secundárias, ou seja, evidenciavam apenas a ideia do método axiomático. Desta forma, o professor deveria “organizar e selecionar os teoremas admitidos como verdadeiros que constituiriam, assim, os axiomas da teoria, e, portanto, os resultados seriam os teoremas e as ‘demonstrações locais’ forneceriam exemplos de aplicação do método dedutivo” (OLIVEIRA; PIETROPAOLO, 2008, p. 725).

Em outro trabalho, realizado por Silva (2008) é possível obter certa noção de como as demonstrações matemáticas estavam sendo propostas nos livros didáticos. A autora, ao realizar um estudo que visa compreender o MMM e as diferentes propostas curriculares para o ensino

de geometria no Brasil e em Portugal, seleciona para análise dois livros didáticos produzidos pelo professor Benedito Castrucci, o *Lições de Geometria Elementar* e *Geometria Curso Moderno*. Este último se configurou como uma substituição para o *Lições de Geometria Elementar*. O educador destaca-se por ter sido um dos membros do GEEM, ministrador de cursos para a formação docente e produtor de materiais didáticos. Além disso, “é possível dizer que foi o responsável pelo ensino de geometria no Grupo” (SILVA, 2008, p. 691). Como um resultado da comparação dos dois livros, tem-se a inclusão de novos temas na coleção *Geometria Curso Moderno* que até então não eram abordados pelos livros anteriores, como as Noções de Lógica e Elementos da teoria dos Conjuntos. Foi possível notar, também, a ênfase na nova linguagem calcada no simbolismo conjuntista. Nas palavras da autora:

Ao compararmos os dois livros de Castrucci, percebe-se a inclusão, na abordagem moderna, de dois capítulos iniciais: o primeiro, Noções de lógica e o segundo Elementos de teoria dos conjuntos, antes do estudo da Geometria. É bastante evidente, também, a nova linguagem empregada pelo autor. Os teoremas, antes enunciados e demonstrados em linguagem natural, na versão moderna da Geometria, incorpora a simbologia utilizada na teoria dos Conjuntos. Em outras palavras, pode-se dizer que a nova obra é a anterior revestida de uma nova linguagem, sem, entretanto, uma mudança de abordagem de proposta pedagógica (SILVA, 2008, 691-692).

Apesar de essas mudanças terem sido significativas na ordenação e explicitação dos assuntos ministrados nas aulas de geometria, Castrucci se manteve cauteloso quanto a sua abordagem. Tal cuidado por parte do autor torna-se visível quando se analisa as propostas de ensino de geometria no período, e em respeito a isso, Silva (2008) faz menção à Primeira Conferência Interamericana sobre Educação Matemática realizada em Bogotá, Colômbia, em 1961. No encontro, um professor estadunidense, Howard F. Fehr, realizou um discurso sob o título de *Reforma do Ensino da Geometria*. Fehr começa sua fala a partir do desenvolvimento da geometria enquanto campo matemático, para em seguida discutir seu ensino, que ele faz apontando duas tendências para o ensino de geometria:

A primeira, elaborada por G. D. Birkhoff, propunha uma modificação significativa dos axiomas de Euclides, seguindo a forma geral imposta por Hilbert, porém conseguindo uma grande economia ao fazer uso das propriedades do conjunto dos números reais: a de ordem e a de completividade. Com o patrocínio da *National Science Foundation* (NSF), os axiomas de Birkhoff, modificados por sua vez por Edwin C. Moise, foram usados na preparação de textos experimentais que eram utilizados em muitos colégios dos Estados Unidos. Ele ainda conclui que os atuais tratamentos reformulados da Geometria naquele país eram dirigidos essencialmente para a conservação da Geometria de Euclides, corrigidos seus defeitos por meio da introdução dos números reais. A segunda tendência discutida por Fehr é o estudo da geometria na escola secundária, iniciado na Alemanha, onde se aplicavam, de forma bastante generalizada, alguns aspectos do Programa de Erlangen, de Klein, que propõe o desenvolvimento da Geometria por meio das transformações geométricas. O grupo

de transformações (rotações, reflexões e translações) é utilizado para caracterizar a Geometria euclidiana, porém precedida de um sistema de axiomas que conservam a congruência de triângulos da Geometria de Euclides como fundamentais para o desenvolvimento posterior do estudo da Geometria (SILVA, 2008, p. 693).

A geometria exposta no *Geometria Curso Moderno* não segue nenhuma das duas orientações apontadas por Fehr. “Os postulados permanecem os mesmos, ou seja, a medida não é acrescentada ao grupo de axiomas, como propõe Birkhoff. Ademais, não são desenvolvidas as transformações geométricas, baseada em Klein” (SILVA, 2008, p. 693). Muito cauteloso, o produtor de livros didáticos assumiu em seus trabalhos poucas alterações e acreditava ser “ousada” a realização prematura das propostas recomendadas pelo MMM.

De toda a descrição realizada até aqui, podemos inferir que as demonstrações matemáticas se inserem também no quadro de renovação do ensino de matemática e são por ele renovadas juntamente. A moderna matemática pretendida no MMM tomou parte na tradição bourbakista, iniciada na década de 1930, que se situa em uma vertente excessivamente formalista e rigorosa para a produção matemática. Desde então e por meio das interpretações feitas a partir dos trabalhos de Piaget, os conceitos de estrutura e de conjuntos passaram a ser veementemente abordados no ensino de matemática que agora tratava-se de uma “edificação”. Neste sentido, tem-se estabelecido que as demonstrações devem ocorrer no “entremeio” das estruturas e via linguagem dos conjuntos. Além do mais, presentifica-se como meio de compreensão das aplicações do método dedutivo, ocorrendo de maneira ocasional e mediante a escolha do professor.

#### 4.2.2 *Os artefatos produzidos em prol da modernização*

Como essa é uma investigação de cunho hermenêutico, em que se almeja a compreensão das demonstrações no MMM, os estudos também se sustentaram por meio da análise do que denominei “artefatos” — os jornais, os livros didáticos, os anais de congressos, dentre outros. Assim, com o objetivo de alcançar “proximidade” com a história transcorrida, passei a direcionar minha atenção para o ensino de matemática por intermédio de materiais que fundamentaram a matemática escolar no auge das “modernizações”. A intenção é estudar o MMM com o que dele nos é objetivamente dado no presente, ou seja, compreender no agora a ocorrência passada.

Dentre os vários tipos de artefatos que se pode selecionar estão os noticiários, que são textos seculares utilizados em favor da divulgação de informações. Para mim, eles se fizeram importantes por constituírem um dos primeiros meios de explicitação da matemática moderna

no Brasil. Assim, se alguém quer ter ideia de como o movimento foi implementado no país, isso tem vinculação não apenas com os educadores preocupados com o ensino de matemática, mas também com uma massa midiática, que em muitos momentos difundiu informações a esse respeito.

Estudando o trabalho de Nakashima (2007), foi possível reconhecer a dimensão e o alcance que esse tipo de artefato pode abranger. Para se ter ideia, encontram-se noticiários jornalísticos que versam sobre a matemática moderna até mesmo antes da criação do GEEM. Isso pode ser justificado olhando para textos como o da *Folha de S. Paulo*, que no dia 11 de outubro de 1960 expôs, em uma de suas manchetes, o seguinte título: “*Professores de São Paulo visam à reforma dos programas e métodos de ensino da Matemática*”. A matéria corrobora a existência de um grupo ligado às questões de reforma dos programas e dos métodos de ensino de matemática. Frente ao exposto, é perceptível a preocupação crescente com o avanço da matemática.

Desenvolve-se em São Paulo amplo movimento destinado a reformar os programas e o métodos do ensino de Matemática, tornando-o, o mais possível, objetivo, sem perder de vista que “todo esforço nesse sentido deve conduzir-se do concreto para o abstrato, respeitando-se assim a natureza essencialmente abstrata daquela ciência”. Consideram os propulsores desse movimento que a metodologia de ensino atualmente em voga entre nós e grande parte das próprias formulações didáticas da matéria se encontram ultrapassadas pelo grande avanço verificado nos estudos matemáticos ultimamente, sobretudo a partir de 1950 (PROFESSORES..., 1960, p. 06).

Além disso, o noticiário informou sobre a criação de núcleos de estudos para as reformas, o que pode ser observado no seguinte excerto:

Em São Paulo, as preocupações em torno do assunto resultaram na organização de pelo menos três núcleos de estudos sobre a reforma no ensino de Matemática. Um deles funciona no Centro de Aperfeiçoamento da Técnica do Ensino de ciências (CATEC), mantido no Instituto Brasileiro de Educação, Ciência e Cultura — IBCEC (UNESCO) — Seção de São Paulo, com a colaboração da Campanha de Aperfeiçoamento e Difusão do Ensino Secundário (CADES), do Ministério da Educação (...). A secretaria da Educação, por sua vez, dentro do plano geral de sua reestruturação, criou um grupo de trabalho para estudo sobre o ensino de Matemática que, coordenado pelo prof. Osvaldo Sangiorgi, possui como membros o prof. Luís Magalhães Araújo, Manhucia Liberman, Scipione Di Pierro Netto e Afonso Celso do Amaral (...). Um terceiro núcleo de estudos sobre a matéria desenvolve suas atividades na Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da Universidade de São Paulo e no Colégio de Aplicação desse instituto de ensino superior (PROFESSORES..., 1960, p. 06).

Em outro noticiário, no *O Estado de S. Paulo*, de 30 de junho de 1962, é possível encontrar a divulgação do *IV Congresso Brasileiro de Ensino da Matemática*, já mencionado em seções anteriores desta pesquisa, esse evento ocorreu no período de 22 a 28 de julho de

1962, em Belém-PA. É nessa edição do congresso que se fala, pela primeira vez, sobre as questões concernentes à matemática moderna. Assim, mesmo em seu início, o movimento parece obter uma expressiva divulgação dos seus desdobramentos.

Em outra divulgação jornalística, da *Folha de S. Paulo* de junho de 1963, encontra-se uma informação acerca do IBECC, instituição designada à melhoria do ensino. Na ocasião, mencionou-se que o GEEM era um grupo instituído por aquela organização, tendo como objetivo implementar melhorias ao ensino de matemática por meio de novos métodos. Em relação a isso, é afirmado ser indiscutível que todos sentiam a tendência em prol da reestruturação da matemática para os ginásios. No texto, é exposta também, uma mensagem sobre os esforços do IBECC em prol de outros setores da ciência. As melhorias, portanto, não eram restritas apenas ao ensino de matemática.

Há algum tempo instituiu o IBECC de São Paulo, um grupo de estudos (GEEM) destinado a estimular a introdução de novos e melhores métodos no Ensino da Matemática. Esforço semelhante ao que a mesma organização vem desenvolvendo em outros setores da ciência. A palavra de ordem é remodelar e atualizar, na era da ciência, o ensino da ciência. Em relação, particularmente, às matemáticas, é indiscutível, segundo salienta o prof. Osvaldo Sangiorgi, do citado grupo, que todos os interessados sentem a tendência de hoje bem acentuada de reestruturar a matemática destinada aos ginásios. A própria linguagem da matemática tem de ser alterada para que os alunos possam receber a matemática que efetivamente sirva às necessidades do mundo atual e de maneira especial às necessidades dos matemáticos criadores e dos que usam a matemática como instrumento de trabalho científico (NOVOS RUMOS..., 1963, p. 09).

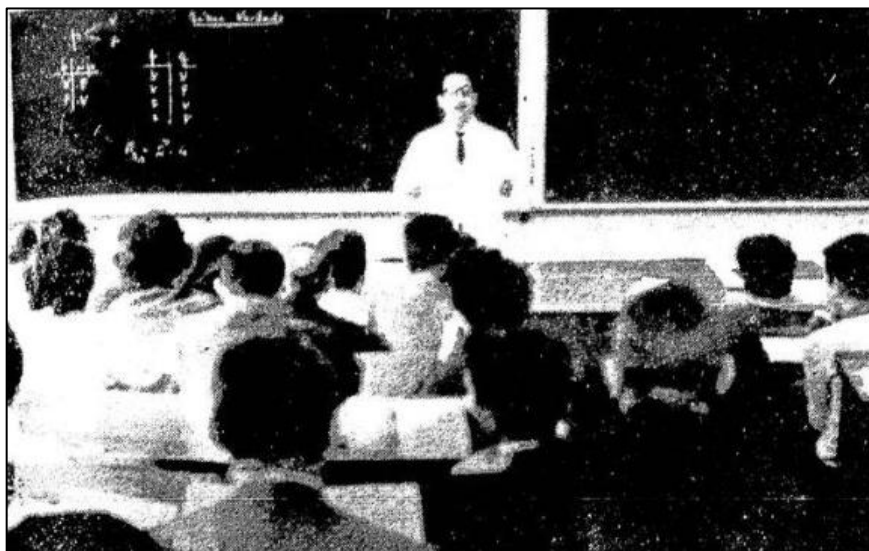
No mês seguinte, a mesma empresa jornalística divulgou a seguinte manchete: *Verdadeira revolução vai sofrer o ensino de matemática*. O colunista, José Geraldo Nogueira Moutinho, deixou explicitado que o principal responsável pelas revoluções seria o GEEM. O grupo foi comparado a outros de âmbito internacional, considerados adiantados em seus objetivos de tornar a escola funcional e adaptada à realidade presente.

O grande responsável pela revolução é o GEEM (Grupo de Estudos do Ensino de Matemática) que com apenas dois anos de existência está na vanguarda didática de São Paulo. Fundado para congregar professores de Matemática dos cursos secundário e superior, a fim de reformular o ensino da matéria, em novas bases, o GEEM está exercendo entre nós a mesma função que os grupos de investigação científica, europeus e norte-americanos, desempenham nos centros culturais mais adiantados do mundo: tornar a escola cada vez mais funcional e adaptada à realidade do tempo presente (MOUTINHO, 1963, p. 19).

Nesta mesma edição, o diretor do GEEM dispõe sobre o ensino de matemática:

“Um estudo sério sobre o que deve ser ensinado de Matemática aos moços necessariamente levará em conta não só a psicologia do jovem, as observações modernas de ordem pedagógica, mas também, e cuidadosamente, a própria natureza da ciência a se ensinar. Assim, portanto, na agitação constante do mundo moderno, não basta a criança adquirir rudimentos de cálculo ou de leitura ou de escrita, mas é essencial que, por intermédio desse aprendizado, possa compreender o mundo em que está vivendo” (O QUE É..., 1963, p. 19).

**Figura 10** – “Estudantes secundários voltam novamente às carteiras para revolucionar o ensino de Matemática com 50 anos de atraso entre nós”



Fonte: Moutinho (1963, p. 19).

As realizações do GEEM em 1963 foram tão expressivas, que muitos noticiários, como *O Estado de S. Paulo*, chegaram a evidenciar alguns dos trabalhos do grupo. Dentre eles, sobressaíram-se os cursos de aperfeiçoamento para professores do secundário e o lançamento do livro *Matemática Moderna para Ensino Secundário* em parceria com o IBECC. Na notícia, é destacado o objetivo principal do grupo em modernizar o ensino da matemática, para isso sua estruturação conta com professores universitários e especialistas em educação. Ainda, na descrição feita, alguns conceitos trabalhados na nova matemática chegaram a ser declarados: a trigonometria, as estruturas matemáticas e as estruturas operatórias da inteligência.

O Grupo de Estudos do Ensino da Matemática promoverá sábado, na Faculdade de Filosofia da Universidade Mackenzie, duas seções de estudos para professores secundários, às 14 e 16 horas, sobre “Trigonometria sob o ponto de vista moderno” e “As estruturas matemáticas e as estruturas operatórias da inteligência (...)”. Em atividade há quase dois anos, o GEEM, em convênios com o Ministério da Educação e com a secretaria de Educação do Estado, vem realizando cursos de férias para professores secundários em exercícios — o último, realizado em julho, reuniu cerca de 200 professores, em dois estágios. Semanalmente fazem-se sessões de estudo. Outra realização do GEEM, desta vez em convênio com o IBECC, foi o lançamento, em língua portuguesa, do livro “Matemática moderna para o ensino secundário”, que estabelece o conceito de Matemática moderna, o que se tem feito neste campo e

apresenta o desenvolvimento dos programas tradicionais, tratados com linguagem moderna (NOVOS MÉTODOS..., 1963, p. 13).

Ainda é mencionado que, por ser o ensino de matemática considerado ultrapassado, os professores adotavam, com interesse inusitado, os novos métodos preconizados pelo GEEM. Na concepção matemática divulgada pelo grupo, eliminavam-se as “divisões tradicionais”, “aritmética”, “álgebra”, “geometria”, “trigonometria”, etc., que eram elementos que pareciam dar ao aluno falsas impressões de serem ciências autônomas, sem interligação. Com a modernização da matemática, o aprendiz passaria a compreendê-la como uma unidade. Além disso, a nova matemática se apresentaria sobre uma nova base teórica, estabelecida a partir da noção de conjuntos.

No entanto, com a modernização da linguagem matemática, o aluno passa a entendê-la como um todo unitário, desde o momento em que começa a se utilizar da faculdade de raciocinar. A noção de “Conjunto” é a base de toda a revolução da Matemática a ser ensinada na escola primária (NOVOS MÉTODOS..., 1963, p. 13).

O professor, ao ensinar a partir da nova matemática — segundo os promotores dos novos métodos — conseguiria, além de entusiasmar o aluno, ressaltar o caráter estrutural da disciplina. Isso eliminaria da mente das crianças o terror que a maioria delas sentiam ao adentrar nas escolas primárias e no ginásio. Essa forma de ensinar só seria possível por meio da linguagem dos conjuntos, a única em que se pode ensinar matemática atual e na qual são destacadas as estruturas fundamentais.

A simplificação da linguagem matemática vai oferecer aos estudantes brasileiros as mesmas oportunidades que são oferecidas aos que estudam em países adiantados em educação. Os professores integrantes do GEEM acreditam que, a partir de 1964, um grande número de professores de nossos ginásios e colégios iniciarão a operação “Matemática Moderna”, atualizando o conteúdo do que ensinam na matéria (NOVOS MÉTODOS..., 1963, p. 13).

Naquele mesmo ano, *O Estado de S. Paulo* publicou a seguinte manchete: *O GEEM dispõe-se em 1964 a modernizar o ensino da Matemática*. Era um anúncio de que o grupo ofereceria alguns cursos para o ensino primário e secundário. No texto, havia a informação de que o GEEM, desde o *IV Congresso Brasileiro do Ensino de Matemática*, exerceria a atualização de professores, o que seria realizado em 1964. Com isso, almejava-se tornar explícita uma matemática mais simplificada e atraente aos estudantes que iniciariam seus estudos com a nova vertente da disciplina.

Nos dias 23 e 30 do corrente, realizar-se-ão sessões de estudos promovidos pelo Grupo de Estudo do Ensino da Matemática (GEEM) sobre a modernização do ensino da Matemática nas escolas primárias e secundárias. “ $4 + 3 = 8$ ” é uma sentença verdadeira ou falsa? Normalmente, a criança sabe que o resultado da operação é 7 e, portanto, concluirá pela falsidade da sentença:  $4 + ( ) = 8$ . Desta feita, a criança é “convidada” a usar suas estruturas mentais, de acordo com a pergunta que lhe for feita, tornando a sentença verdadeira ou falsa, informou o prof. Osvaldo Sangiorgi, atual presidente do GEEM, grupo que há dois anos ininterruptos divulga a reformulação do ensino da Matemática em bases modernas, a exemplo “do que vêm realizando países altamente credenciados em educação”. Já no próximo ano, a Matemática será ensinada de forma diferente, nos ginásios paulistas (O GEEM..., 1963, p. 20).

Na divulgação, destaca-se o grupo Bourbaki como o responsável por toda a renovação introduzida no ensino de matemática.

Nicolas Bourbaki, grego, é um matemático que nunca existiu e que, indiretamente, é o responsável por toda a renovação que se pretende introduzir no ensino da Matemática, transformando-a de um velho terror dos estudantes em algo no alcance de todos. E o prof. Sangiorgi que também explica que sob o pseudônimo “Nicolas Bourbaki” agruparam-se, em 1944, matemáticos franceses dos mais renomados (Dieudonné, Wolf, Chouquet, Delsarte etc.) com o fito de apresentar os assuntos da Matemática com uma unidade até então não cogitada. No entanto, escudaram-se sob o nome Bourbaki porque suas ideias reformistas poderiam encontrar um clima não propício na época (O GEEM..., 1963, p. 20).

Bourbaki é citado, também, pelo jornal *A Tribuna*, em 1964, numa publicação jornalística chamada de *Introdução à Matemática Moderna*. Conforme relato dos editores, o grupo vinha, há anos, trabalhando na “renovação da linguagem matemática”, “na generalização dos seus conceitos” e “na introdução dos processos de aprendizagem aliada às leis da psicológicas” e, a esses trabalhos, somaram-se os de Jean Piaget. Na sequência, o texto informa que a constituição do GEEM representava uma forma de participação do Brasil como meio de introdução dos novos métodos no ensino da matemática, tanto na educação básica quanto na superior.

Ninguém desconhece, mesmo as pessoas mais distantes dos problemas ligados à educação, o generalizado terror dos alunos de todo o mundo pela aprendizagem da Matemática. Um grupo de eminentes matemáticos franceses reunido sob o pseudônimo de Nicholas Bourbaki iniciou há anos passados, em Paris, profundos estudos tendo por objeto a renovação da linguagem matemática, a generalização dos conceitos e, especialmente, a introdução de processos de aprendizagem mais conformes com as leis psicológicas do pensamento infantil e juvenil. Aos esforços do extraordinário grupo Bourbaki juntou-se o trabalho do notabilíssimo psicólogo suíço Jean Piaget. Estes esforços dos sábios europeus em prol da renovação do ensino da Matemática encontraram ressonância em todo o mundo, mormente nos Estudos Unidos, onde mais de dez grupos, amparados por enorme largueza de meios, empreendem vastos estudos na mesma linha iniciada pelos pioneiros da Europa. Em São Paulo constituiu-se, há quatro anos, o Grupo de Estudos do Ensino da Matemática a fim de que também o Brasil viesse participar do movimento universal, tendo em

vista a introdução dos novos métodos no ensino da Matemática tanto na escola primária como nas escolas de grau médio e superior (INTRODUÇÃO..., 1964, p. 02).

A *Tribuna* ainda esclareceu, em associação com movimento de reformas, que o seu Departamento Cultural promoveria o *Curso de Introdução à Matemática Moderna* coordenado pelo Prof. Osvaldo Sangiorgi. O curso teve início no dia 13 de maio, sendo realizado, a partir disso, até junho daquele ano. As sessões do curso, dado seu caráter intensivo, tinha duração de três horas, sendo que seu desenvolvimento se dava por meio de seminários de estudos, intercalados entre os professores e alunos, e de demonstrações práticas. Ao término dos encontros, era aplicado um exame aos professores que, ao realizá-lo, tinham direito ao certificado de aproveitamento. O temário geral do Curso foi o seguinte:

- a) Teoria dos Conjuntos, a Cargo do prof. B. Castrucci;
- b) Lógica Matemática, ministrada pelo prof. Osvaldo Sangiorgi,
- c) Práticas de Ensino (1º ciclo ginasial) a cargo de professores do GEEM e para as quais foram convidados os matemáticos L. A. Jacy Monteiro, Irineu Bicudo, Lucilia Bechara, Elza Baba e Scipione Pierro Neto (INTRODUÇÃO..., 1964, p. 02).

No que diz respeito à vinculação da psicologia com os trabalhos de Bourbaki, principalmente aqueles ligados às estruturas da matemática, tem-se mais um relato jornalístico que compreendo pertinente explicitar. Trata-se de uma divulgação do *Estado de S. Paulo* em 1964, na qual o jornal estampou a seguinte manchete: *Matemática Moderna no Ensino: feliz encontro entre a lógica, a psicologia e a pedagogia*. A notícia compara os últimos trabalhos desenvolvidos em matemática em conjunto com os da psicologia — destaque para as estruturas matemáticas e mentais — aos grandes acontecimentos históricos, como a mudança do regimento geocêntrico para o heliocêntrico, quando retirou-se a ideia de que a terra era o centro do universo.

Fundamentando cientificamente os resultados obtidos pelo feliz encontro da Psicologia, Lógica-Matemática e Pedagogia, o Grupo logrou buscar informações preciosíssimas provindas das Estruturas Mentais e das Estruturas Matemáticas que causaram uma verdadeira revolução no ensino da Matemática de todo o mundo civilizado, principalmente nos cursos primários e secundários, onde os jovens estudantes receberam, via de regra, com certa prevenção “hereditária”, tudo aquilo que em nome da Matemática lhes era oferecido (...). A palavra estrutura — que vem sendo há dez anos a mais empregada em todas aquelas ciências — revelou, como essência, a existência de um “fundo comum” a todas as disciplinas que, professores e estudiosos em geral não podem mais ignorar, sob pena de não “falarem” e, o que é pior, jamais “entenderem” a linguagem empregada pelas crianças que, normalmente, se valem dessas estruturas para se exprimirem nas atividades que participam (MATEMÁTICA..., 1964, p. 21).

Com essa amostra desenvolvida até aqui, é possível imaginar o alcance jornalístico que o MMM conseguiu durante os anos de seu desenvolvimento, chegando a milhares de pessoas por meio da imprensa. Os noticiários têm como característica a manifestação de “informatividade”, ou seja, um conjunto de informações veiculado através de textos escritos ou visuais, como anúncios, artes plásticas, artigos, dentre outros. Dessa forma, muitos acontecimentos, como os congressos sobre o ensino de matemática, puderam ser de conhecimento da sociedade. Assim, a modernização apregoada se tornou ou, teve, a possibilidade de reconhecimento nacional. Embora eu tenha me restringido ao Estado de São Paulo no que se refere à menção de noticiários, há casos jornalísticos que prestaram informações em outras localidades, como no Paraná, pelo jornal *Diário do Paraná*, Rio Grande do Sul, pelo jornal Zero Hora (ZH) ou no Espírito Santos, pelo jornal *A Gazeta*.

Dando prosseguimento, como um segundo tipo de artefato, destacarei os livros didáticos, que se tratam de materiais que também foram utilizados em favor do novo ensino de matemática, todavia, diferentemente dos textos jornalísticos, o seu lugar de “atuação” é a sala de aula e seu público-alvo são os estudantes. Farei menção a uma coleção específica e denominada de *Matemática: curso moderno*, por ter sido uma obra que, além de servir de modelo para outros trabalhos, teve uma expressiva publicação através da quantidade de seus exemplares produzidos. De acordo com Duarte (2007) e Valente (2008), foi com amplo apoio da imprensa, que a Companhia Editora Nacional lançou aquela coleção em 1963, pela autoria do Prof. Osvaldo Sangiorgi. A intenção era empregá-la nos ginásios, a partir de 1964.

O lançamento da matemática moderna, através dos livros didáticos para o ginásio, teve na imprensa, mesmo que indiretamente, um enorme apoio. No dia 12 de julho de 1963, o jornal “Folha de S. Paulo”, deu como manchetes principais a Matemática Moderna. A primeira intitulada “O que é a Matemática Moderna na opinião do diretor do G.E.E.M.”, apresentando uma longa entrevista com Sangiorgi, que não mencionou os seus livros, mas enunciou todas as vantagens e conveniências do ensino de matemática moderna, ancorada nos últimos avanços científicos; a segunda, “Verdadeira revolução vai sofrer o ensino da Matemática”, foi desenvolvida como um texto que, logo à primeira frase menciona: “1964 vai ficar na história da cultura brasileira como Ano 1 da Matemática Moderna”. Efetivamente, 1964 foi o ano 1, do volume 1, dos novos livros didáticos de matemática para o ginásio, livros de matemática moderna, de modo pioneiro, por Osvaldo Sangiorgi (VALENTE, 2008, p. 28).

A obra em cena é composta de assuntos<sup>29</sup> que

---

<sup>29</sup> Veja os anexos G, H e I para os assuntos tratados nos novos programas de matemática e na coleção *Matemática: curso moderno*.

fazem parte dos *vinte e quatro* itens que compõem os *Assuntos Mínimos para um Moderno Programa de Matemática para os Ginásios*, com as respectivas sugestões para seu desenvolvimento, apresentadas pelo Grupo de Estudos do Ensino da Matemática (GEEM), de São Paulo, em trabalho aprovado unanimemente pelo IV Congresso Brasileiro do Ensino da Matemática (Belém, Pará, julho de 1962), e readaptados no Curso de Treinamento Básico para Professores Secundários (Diretoria do Ensino Secundário do Ministério da Educação e Cultura), realizado em Brasília, de 25 a 30 de novembro de 1963 (SANGIORGI, 1965, p. ix).

A coleção, ao longo dos anos 1960, foi bem aceita e difundida pelas escolas brasileiras. O sucesso, “foi confirmado pelas novas edições do primeiro volume: em 1965, mais de 250 mil novos livros são editados e assim, anualmente, o livro teve tiragens na casa dos 250 mil exemplares, até 1967, alcançando a sua 10ª edição” (VALENTE, 2008, p. 31). Para Duarte (2007), um dos fatores que pode justificar a aceitação do texto de Sangiorgi reside no seu grande “prestígio”, entendido desde os anos de 1950 como conceituado autor de livros didáticos.

Sangiorgi era renomado professor em escolas de referência, reconhecido pela sua eficiência como professor particular na preparação de alunos às provas e exames, ativo participante em congressos nacionais para discussão dos programas de ensino de matemática e em cursos para professores, com amplo acesso à imprensa e de reconhecida autoridade matemática devido à sua formação acadêmica na FFCLUSP. Dotado dessas qualidades, gozava junto à Cia. Editora Nacional, à classe professoral e perante as autoridades educacionais responsáveis pela elaboração oficial dos programas, de tal posição de destaque, que lhe possibilitou, inclusive, a elaboração de um livro didático contendo novas diretrizes para o ensino de matemática, as quais ainda não dispunham de legislação oficial que lhe dessem respaldo (DUARTE, 2007, p. 286-287).

Para Valente (2008), a nova coleção de matemática moderna alterou a organização do ensino de matemática nos ginásios. Seus livros, “apresentaram-se como produtores de significados e posições, que foram posteriormente apropriados não apenas para a produção de outros livros didáticos como também de programas curriculares” (DUARTE, 2007, p. 287). O texto de Sangiorgi passou a representar uma nova “vulgata”, constituindo-se em uma fonte para a elaboração de obras posteriores.

Para se ter ideia do alcance conseguido com os novos livros, Valente (2008) cita que:

Os arquivos de Cia. Editora Nacional contêm cartas de diversos pontos do país, que pediam a biografia de seu autor. São cartas de professores de matemática, de normalistas e, também, de alunos. Isso indica que a coleção de Sangiorgi ganhou novos mercados, substituindo autores já conhecidos por professores e alunos. As cartas solicitavam uma proximidade maior do autor das obras que estavam sendo utilizadas no dia-a-dia escolar. A Editora, sempre atenta, respondia aos pedidos enviando uma biografia sumária de Sangiorgi (VALENTE, 2008, p. 31).

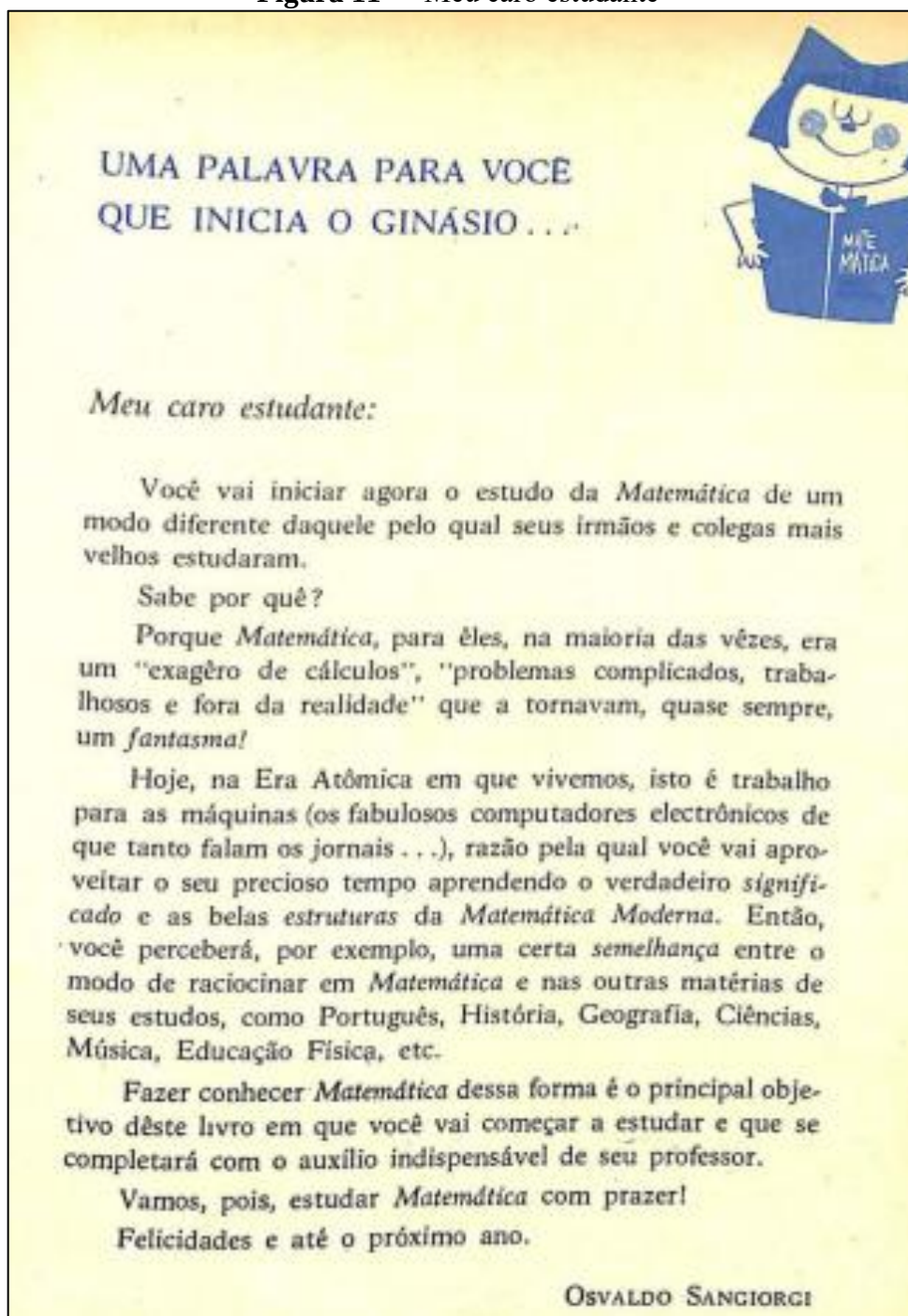
É válido notar que a nova vertente matemática instaurada nos livros didáticos não recebeu nenhuma rejeição por romper com práticas didático-pedagógicas consolidadas até aquele momento. Os textos de Sangiorgi, por exemplo, mesmo com a “marca da modernidade” estampada em suas capas, instauraram-se, na verdade, como precursores, servindo de base e sendo apropriados por outros autores que, a cada divulgação da coleção, procuravam fazer releituras deles. Essa façanha, realizada por Sangiorgi, pode ter uma explicação,

Osvaldo Sangiorgi agiu com exímio articulador entre todas as instâncias que influenciaram o processo educacional e o que se poderia chamar de “circuito do livro didático” daquele tempo. Como já se mostrou, Sangiorgi tinha trânsito fácil na esfera pública; era reconhecido pelas elites como excelente professor e tinha reconhecimento acadêmico por sua formação na Universidade de São Paulo; tinha, por circunstâncias do contexto político-econômico dos anos 1960 e, também, por relações pessoais com editores de jornais, franco acesso à mídia impressa; usou a mídia televisiva para, de modo inédito, promover cursos pela TV; constituiu-se em autor didático em tempos em que as editoras brasileiras e, em particular, a Cia. Editora Nacional, transformar-se-iam em grandes empresas, a partir de São Paulo. A articulação dessas diferentes instâncias (...) preparou devidamente o cotidiano escolar para a aceitação da grande novidade didática do início dos anos 1960: a matemática moderna (VALENTE, 2008, p. 39-40).

À vista disso, pontuarei aspectos da coleção *Matemática: curso moderno*, procurando identificar alguns assuntos da matemática moderna que são abordados nos livros da obra. Ao todo, são 4 volumes que acabaram sendo publicados entre 1963 (com o volume 1) e 1967 (com o volume 4), totalizando 4 anos de contínuo e intenso trabalho em auxílio da reformulação do ensino de matemática para o ginásio brasileiro.

De acordo com Imenes (1989), podemos observar no material produzido por Sangiorgi a preocupação com as estruturas matemáticas. Já no volume 1, em um texto direcionado aos alunos da 1ª série ginasial, faz-se menção a esse conceito, e pontua-se que a partir deles o estudo da matemática seria completamente diferente daquele visto por estudantes mais velhos já escolarizados (colegas, familiares e demais pessoas). A diferença reside no fato de que o ensino de matemática ministrado em épocas passadas era, na maioria das vezes, um “exagero de cálculos”, “problemas complicados, trabalhosos e fora da realidade”. Todavia, na era “Atômica”, esses processos haviam se tornado um trabalho para as máquinas. Assim, seria razoável aproveitar o tempo estudando o significado das *estruturas da matemática moderna*. É possível observar um diálogo direto com o aluno, algo inovador para os livros da época:

Figura 11 – “Meu caro estudante”

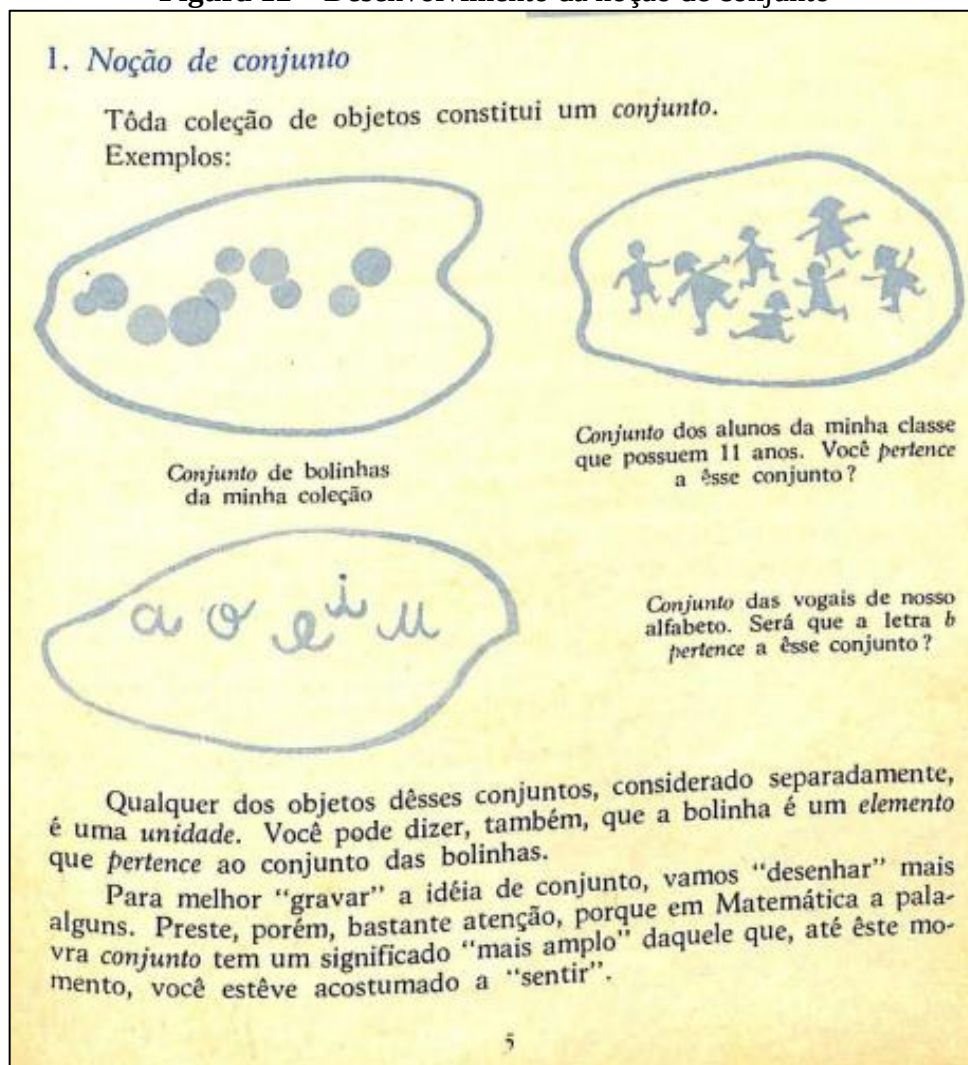


Fonte: Sangiorgi (1965, p. xiii).

Em coerência com o conceito de conjuntos, preconizado como um dos mais importantes tópicos da matemática moderna, o autor inicia o capítulo 1 através de noções da teoria. Nas palavras de Lavorente (2008, p. 128), cabe, aqui, “evidenciar a importância da linguagem dos conjuntos, proposta pela Matemática Moderna, que possui sua convenção bem estruturada e que requer habilidade para ser interpretada, principalmente diante de sua simbologia”. Isso significa que, se por “convenção”, adotou-se uma nova linguagem para o trabalho com a

matemática, isso deveria exigir dos professores e alunos competências para codificar e decodificar as informações.

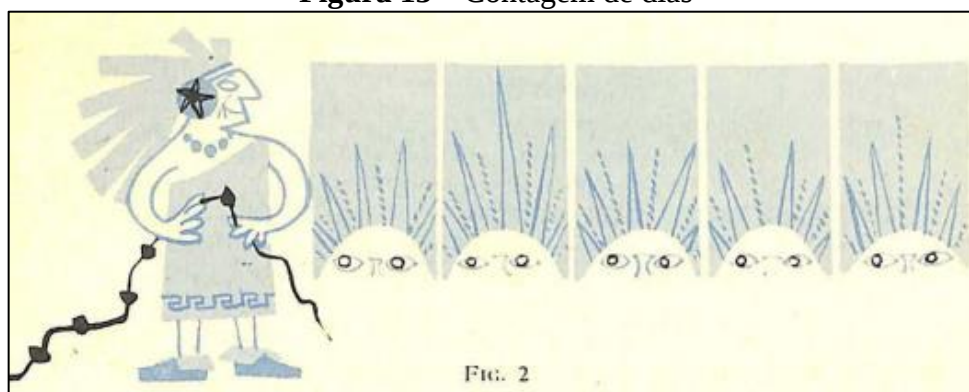
**Figura 12** – Desenvolvimento da noção de conjunto



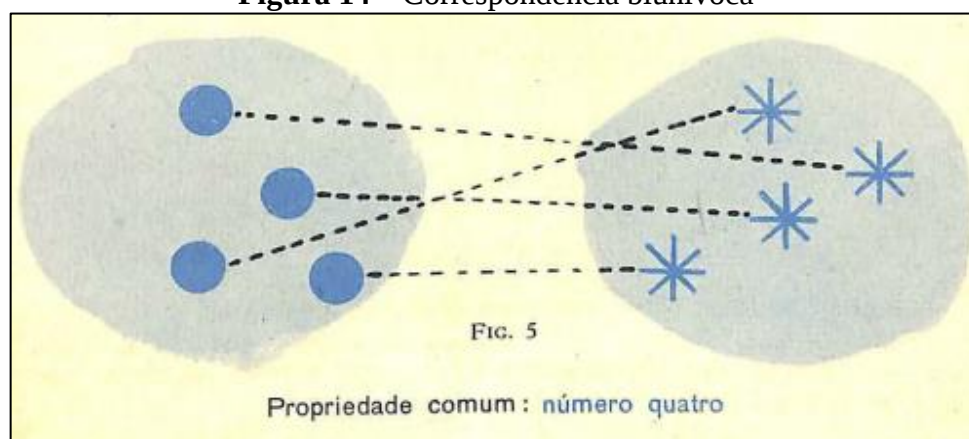
Fonte: Sangiorgi (1965, p. 06).

É possível notar que muitas ideias, como a de número, passaram a ser abordadas utilizando-se a ideia de conjuntos.

Foi comparando conjuntos que, desde a época mais remota até hoje, os homens “sentiram” a presença do número. Tal comparação, como era de se esperar, tem sido feita com os recursos de cada época. Assim, por exemplo, os primitivos pastores guardavam o “número” de suas ovelhas (sem saberem “contar” ainda!), fazendo *corresponder* a cada uma delas uma pedrinha (...). Estavam, pois, *comparando* dois conjuntos: o das ovelhas e o das pedrinhas. Se, na hora de recolher as ovelhas, à última delas correspondesse a última pedrinha, os dois conjuntos conservaram, naturalmente, *o mesmo número* de elementos, ou seja, *a mesma quantidade*. Caso faltasse ou sobrasse, alguma pedrinha, então os dois conjuntos *não apresentariam o mesmo número* (SANGIORGI, 1965, p. 07-08).

**Figura 13 – Contagem de dias**

Fonte: Sangiorgi (1965, p. 08).

**Figura 14 – Correspondência biunívoca**

Fonte: Sangiorgi (1965, p. 09).

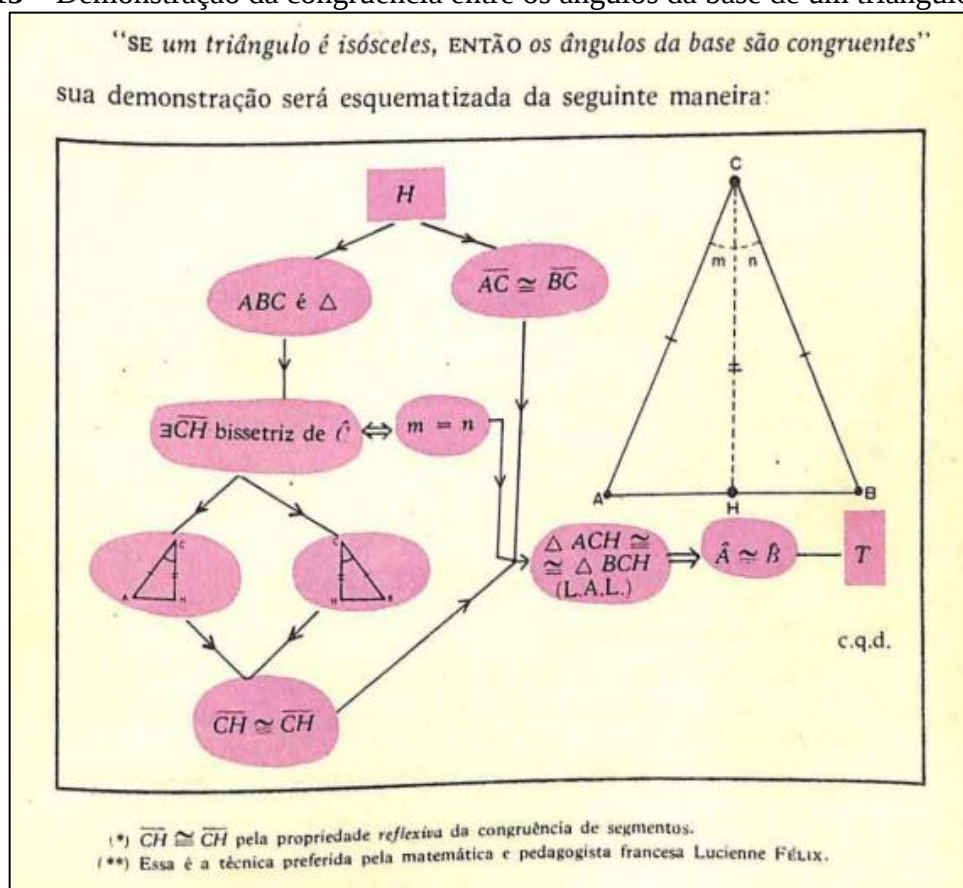
No capítulo 1 do volume 2, vê-se, novamente, a atenção dedicada às estruturas matemáticas. O autor, mais uma vez, reporta-se ao estudante: “Um novo mundo está à sua espera. Você, que já teve contato com a *Matemática Moderna* da 1ª Série, irá saborear mais intensamente, agora, os frutos, mediante as belas *estruturas* que serão estudadas” (SANGIORGI, 1967a, p. xiii, *itálico do autor*). Posteriormente, no desenvolvimento teórico do livro, são expostas as propriedades estruturais da adição e da multiplicação de números racionais, o que ocorre também no volume 3 para o caso de números reais<sup>30</sup>. No volume 4, ao exaltar o conceito, Sangiorgi chega ao ponto de colocar o estudante como um privilegiado por estudar aquele assunto. De acordo com a fala do autor: “não se esqueça: você estará incluído no primeiro grupo de jovens brasileiros que completa o seu curso ginásial conhecendo as belas estruturas da Matemática Moderna, a exemplo do que já vem ocorrendo nos grandes países civilizados de nossa época” (SANGIORGI, 1968, p. xiii). A recorrência, da justificação para o estudo das estruturas matemáticas, torna esse assunto um dos mais importantes da obra.

<sup>30</sup> Veja os anexos J e K, sobre as propriedades estruturais da adição e da multiplicação de números racionais e reais.

Sobre as demonstrações matemáticas, tema central nesta pesquisa, elas também são trabalhadas na coleção e surgem a partir do capítulo 4, do volume 3, numa seção denominada de *construção lógica da Geometria*. Inicialmente, aborda-se a necessidade de se demonstrar propriedades matemáticas, ocorrendo simultaneamente a exposição de alguns exemplos de teoremas. Também há um “exemplo-modelo” de demonstração utilizando o seguinte teorema: “Se um triângulo é isósceles, então os ângulos da base são congruentes”. No decorrer desse processo, é explicitado um esquema como o da Figura 15, que serviria de base para efetuar a demonstração de outros teoremas.

Suponhamos que você tenha verificado experimentalmente que *os ângulos da base de um triângulo isósceles são congruentes*. Mesmo que essa propriedade seja verdadeira para “mil triângulos isósceles”, você jamais poderia concluir que ela continuaria verdadeira para “um milhão de triângulos isósceles” sem que a verificasse para um triângulo de cada vez! Daí a necessidade de se ter um processo dedutivo — denominado *demonstração* — que possa justificar plenamente ser verdadeira a citada propriedade para **qualquer** triângulo isósceles, independente do *tamanho* da figura ou da *precisão* com que foi desenhada. Este é o poder da *generalização* de uma demonstração em Matemática, que permite construir logicamente a Geometria (SANGIORGE, 1967b, p. 232-233, *itálico e negrito do autor*).

**Figura 15** – Demonstração da congruência entre os ângulos da base de um triângulo isósceles



Fonte: Sangiorgi (1967b, p. 241).

Um fato observado na coletânea de Sangiorgi é que o trabalho com as demonstrações matemáticas ficou restrito ao estudo referente à geometria plana. Mesmo após a introdução da abordagem dedutiva e axiomática no volume 3, o emprego desses artifícios não aparece, por exemplo, em seções do volume 4, exceto quando o texto trata do conceito de “semelhança” abordado em geometria, é claro. Nas palavras de Sangiorgi, é a semelhança, que “comanda o estudo da Geometria, iniciado axiomáticamente na 3ª série” (SANGIORGI, 1968, p. xiii).

De toda forma, em resumo ao que se refere à matemática moderna nos livros de Sangiorgi, tem-se que a linguagem de conjuntos e os conceitos referentes às estruturas matemáticas foram veementemente abordados e tratados ao longo de toda a coleção. A teoria dos conjuntos, aliás, “foi efetivamente incorporada de acordo com um programa de matemática que não necessitou de aprovação oficial da legislação educacional” (LAVORENTE, 2008, p. 239). Já as ideias de estruturas foram tratadas no livro como sendo uma das coisas mais importantes que os alunos iriam aprender. Além disso, as demonstrações matemáticas, que procurei saber como se presentificaram ao longo da coleção, foram, de certa forma, enfatizadas ao longo do texto e explicitadas como sendo de grande importância para justificar a validade de propriedades matemáticas, contudo, restritas ao ensino de geometria.

Diante do exposto e da possibilidade de estudar a coleção de livros mencionada, consegui verificar que o trabalho de Sangiorgi chegou a influenciar muitas das outras coleções surgidas no período, o que torna admissível as afirmações que asseguram que os novos tópicos de matemática chegaram às salas de aula da década de 1960. Ademais, é presumível que esse tipo de material proporciona, por meio das tradições que instaurou na literatura, o entendimento de como a disciplina deveria ser empregada/abordada nas escolas. Esse é um dos maiores resultados para a investigação realizada nesta dissertação: confirmar o fato ocorrido.

De natureza muito diferente da dos livros didáticos há um terceiro tipo de artefato, os anais de congresso, os quais são utilizados com o objetivo de disseminar as novas descobertas feitas por pesquisadores, além de ser um eficiente instrumento para divulgar o nome da ciência. Trata-se de uma publicação oficial que permite aos eventos ganharem reconhecimento técnico, visibilidade e até investimentos. A vantagem da produção desse material é que ele registra os conteúdos elaborados durante os encontros, criando assim a preservação de uma memória que ficaria disponível a todos os interessados em informações sobre o ocorrido. Por meio deles — pensando o presente contexto dessa pesquisa — é conveniente entender como ocorreram as mudanças concernentes ao ensino de matemática na iminência do movimento, visto que durante as reuniões são feitos os registros de fatos, ideias, decisões e informações transcorridas nas plenárias.

Vejamos o caso de alguns anais dos *Congressos Brasileiros do Ensino da Matemática*. O III Congresso, por exemplo, tinha por objetivo estudar os problemas concernentes ao ensino de matemática nos cursos secundários, comercial, industrial, normal e primário. Olhando para o caso do ensino secundário, é possível, por meio de um temário apresentado por uma comissão dessa modalidade escolar, verificar os assuntos tratados pelos participantes daquele encontro.

- 1) OS OBJETIVOS ESPECÍFICOS DA MATEMÁTICA NA ESCOLA SECUNDÁRIA:
  - a) no primeiro ciclo;
  - b) no segundo ciclo.
- 2) ARITMÉTICA NO CURSO SECUNDÁRIO:
  - a) localização;
  - b) extensão;
  - c) metodologia;
  - d) material didático.
- 3) A ÁLGEBRA NO CURSO SECUNDÁRIO:
  - a) localização;
  - b) extensão;
  - c) metodologia;
  - d) material didático.
- 4) A GEOMETRIA E A TRIGONOMETRIA NO CURSO SECUNDÁRIO:
  - a) localização;
  - b) extensão;
  - c) metodologia;
  - d) material didático.
- 5) A GEOMETRIA ANALÍTICA E OS COMPLEMENTOS DE ÁLGEBRA NO CURSO SECUNDÁRIO.
- 6) ARTICULAÇÃO DO ENSINO MÉDIO COM O ENSINO SUPERIOR.
- 7) OS PROGRAMAS DE MATEMÁTICA NO CURSO SECUNDÁRIO (ANAIS..., 1959b, p. 23).

Uma inferência que se pode realizar — olhando apenas para essa lista de temas e outras de edições posteriores desse mesmo congresso — refere-se aos assuntos da matemática moderna, que começaram a entrar e em discussão. Aliás, percebe-se que o termo “matemática moderna” quase não aparece no texto redigido para os anais do III Congresso. Nesse ponto, há uma diferença em relação ao temário do IV Congresso, no qual, imediatamente na pauta do encontro, propõe-se a discussão sobre a introdução da nova matemática.

O temário já organizado, do IV Congresso Brasileiro do Ensino da Matemática, é o seguinte: 1) — A formação dos professores de matemática e as faculdades de filosofia; 2) — O aperfeiçoamento do professor de matemática; 3) — Correlação entre o ensino na escola e o currículo das faculdades de filosofia; 4) — Introdução da matemática moderna na escola secundária; 5) — Experiências realizadas em cursos regulares ou experimentais; 6) — Restruturação do ensino da matemática ante a lei de diretrizes e bases; 7) — Didática da matemática na escola secundária; 8) — Verificação da aprendizagem; 9) — Liberdade de ensino (CONGRESSO..., 1962, p. 05).

Um outro tipo de informação que se pode encontrar em anais de congressos diz respeito às sessões de estudos, dadas por meio de cursos para a divulgação de algum tema. As “aulas-demonstrações”, como costumavam denominar tais cursos, eram reputadas de muita “importância” para o professorado interessado no atual tratamento da matemática. Com base na Figura 16, de um documento do IV Congresso, é possível observar temas referentes às “Noções de conjuntos e de estruturas”, “Introdução da Geometria Dedutiva”, dentre outras, que seriam ministradas aos participantes do evento.

**Figura 16 – Sessões de estudos**

| Atividades programadas para <u>três sessões</u> : |                                                                                                                                                                                  |
|---------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1ª Sessão (1º dia):                               |                                                                                                                                                                                  |
| - <u>Palestra</u> :                               | "Resumo das atividades dos principais Grupos de Estudos atualmente dedicados à introdução do espírito da Matemática Moderna no ensino secundário", pelo Prof. Oswaldo Sangiorgi. |
| - <u>Aula-demonstração</u> :                      | "Introdução do conceito do número e do numeral de um número" pela Profª Elza Sabá                                                                                                |
| - <u>Aula-demonstração</u> :                      | "Introdução de Matrizes e Aplicações", pelo Prof. Ruy Madson Barbosa.                                                                                                            |
| 2ª Sessão (2º dia):                               |                                                                                                                                                                                  |
| - <u>Palestra</u> :                               | "Noções de conjuntos e de estruturas, aplicações no ensino secundário", pelo prof. Omar Catunda.                                                                                 |
| - <u>Aula-demonstração</u> :                      | "Introdução à Geometria Dedutiva usando a linguagem dos conjuntos", pela Profª. Manhucia Perelberg.                                                                              |
| - <u>Aula-demonstração</u> :                      | "Sistemas Matemáticos e Estruturas", pelo Prof. Oswaldo Sangiorgi.                                                                                                               |
| 3ª Sessão (3º dia):                               |                                                                                                                                                                                  |
| - <u>Palestra</u> :                               | "Cursos realizados para o aperfeiçoamento do Prof. secundário no Estado de S. Paulo", pelo Prof. L.H. Jacy Monteiro.                                                             |
| - <u>Aula-demonstração</u> :<br>(2ª. série gin.)  | "Introdução ao estudo das equações usando a linguagem de sentenças", pelo Prof. Alcides Boscolo.                                                                                 |
| - <u>Aula-demonstração</u> :<br>(2ª. série Col.)  | "Introdução à Análise Combinatória, unificando os conceitos de arranjos, permutações e combinações, simples e com repetição", pela Profª Renata Watanabe.                        |

Fonte: Documentos (1962).

Também, nos anais do V Congresso, encontrei, dentre alguns cursos destinados ao professorado do secundário, um que se voltava para o ensino da demonstração matemática. O curso tinha por título *Técnicas Dedutivas* e foi ministrado pelo prof. Leônidas Hegenberg. A

ementa consistia em: “1. Introdução. Dedutibilidade. Argumentos válidos. Regras de inferência. Introdução de premissas e tautologias. Teorema fundamental. 2. Demonstração condicional. Demonstração por absurdo. Exemplos” (ANAIS..., 1968, p. 34). Isso corrobora a ideia de que as demonstrações eram trabalhadas junto aos assuntos principais do MMM.

Outra forma de saber quais foram os temas discutidos nesse tipo de encontro é olhar para as comunicações científicas redigidas pelos participantes. Elas são desenvolvidas com o objetivo de propagar resultados de investigações entre pesquisadores e cientistas, convertendo-se, assim, em um veículo de divulgação para a ciência. Nos anais do V Congresso, é possível estudar algumas comunicações que foram inclusas pelos organizadores do documento:

1. Construção de Classes Experimentais e de Controle – Profs. Antônio Ribeiro, Joana Bender, Zilá G. Paim – Rio Grande do Sul.
2. Introdução no Ensino Secundário Brasileiro do Conceito de Número Primário – Prof. Joana Bender – Rio Grande do Sul.
3. Método Dedutivo – Prof. Ceres Marques Moraes – Rio de Janeiro.
4. a) Um Método para se obter a Regra de Cramer; b) Planejamento de um Curso de Geometria com Base em Noções Vetoriais – Prof. Antônio Rodrigues – Rio Grande do Sul.
5. Programa Experimental para as duas Primeiras Séries Ginasiais – Prof. Osny Dacól – Paraná.
6. Determinantes com base numa Definição Recorrente – Prof. Antônio Espada Filho – São Paulo
7. Uma Experiência de Geometria no Ginásio – Prof. Lucília Bechara – São Paulo.
8. Verificação de Aprendizagem – Prof. Genésio C. Freitas – Paraná.
9. Curso de Atualização de Professores – Prof. Osny Dacól – Paraná.
10. Indução e Intuição – Prof. Luiz Oswaldo T. da Silva Rio de Janeiro.
11. Limites – Prof. Aristides Camargos Barreto – Minas Gerais.
12. Teoria das Rotações – Antônio Marmo – S. Paulo.
13. Uma Experiência na 1ª Série Ginasial – Prof. Martha S. Dantas – Bahia.
14. Um Método Numérico de Extração da Raiz Quadrada Prof. Luiz Barco – São Paulo.
15. Interpretação dos Textos do S.M.S.G. – Prof. Lafayette de Moraes – São Paulo (ANAIS..., 1968, p. 12-13).

É válido notar que na terceira comunicação listada aparece o tema do método dedutivo. No texto, o professor Ceres Marques Moraes trabalha sob uma perspectiva histórica do conceito, apresentando justificativas de como o mecanismo pode ter surgido na antiguidade pelos gregos. Esse é um forte indício de que a matemática investigada por esses professores congressistas era pensada como originária da matemática grega, embora com outra “roupagem” e abordagens. É também um dos resultados que investiguei durante a produção desta dissertação.

Finalmente, podemos imaginar esse e outros artefatos como sendo materiais utilizados para a propagação da matemática moderna, haja vista que se compõem de fontes primárias, aliás, produzidas no e em prol daquele movimento modernizador da década de 1960. Como um dado importante, eles são produzidos por sujeitos distintos, todavia, não isolados, como visto

aqui. Produtores de livros didáticos como Sangiorgi tinham tanto acesso ao campo jornalístico, quanto aos congressos e eventos. Aí está embutido um dos significados que a palavra “movimento” pode carregar: *um conjunto de ações de um grupo de pessoas mobilizadas por um mesmo fim.*

Por conseguinte, o MMM é uma coletiva de ações a favor da propagação da matemática moderna. A impressão que se tem é que não parecia existir oposição a tudo o que vinha acontecendo no seio escolar. *Mas será que todos estavam realmente conformados com aquela situação?* Na próxima seção, pensada como uma forma de entender os desdobramentos finais do MMM, abordarei essa pergunta imaginando que ela pode nos dar pistas de como finalizou-se o grande projeto de reformas educacionais da matemática moderna. Farei menção a alguns nomes importantes que se opuseram àquela nova matemática praticada nas escolas. É uma forma de entender o que aconteceu após o movimento. *Que tipo de críticas devemos esperar para um empreendimento como o da matemática moderna?*

## 5 O LEGADO HERDADO NA TRADIÇÃO

- 1 *Palavras do pregador, filho de Davi, rei em Jerusalém:*
- 2 *Vaidades de vaidades! — diz o pregador, vaidade de vaidades! É tudo vaidade.*
- 3 *Que vantagem tem o homem de todo o seu trabalho, que ele faz debaixo do sol?*
- 4 *Uma geração vai, e outra vem; mas a terra para sempre permanece.*
- 5 *E nasce o sol, e põe-se o sol, e volta ao seu lugar, de onde nasceu.*
- 6 *O vento vai para o sul e faz seu giro para o norte; continuamente vai girando o vento e volta fazendo seus circuitos.*
- 7 *Todos os ribeiros vão para o mar, e, contudo, o mar não se enche; para o lugar para onde os ribeiros vão, para aí tornam eles a ir.*
- 8 *Todas essas coisas se cansam tanto, que ninguém o pode declarar; os olhos não se fartam de ver, nem os ouvidos de ouvir.*
- 9 *O que foi, isso é o que há de ser; e o que se fez, isso se tornará a fazer; de modo que nada há de novo debaixo do sol.*
- 10 *Há alguma coisa de que se possa dizer: Vê, isto é novo? Já foi nos séculos passados, que foram antes de nós.*
- 11 *Já não há lembrança das coisas que precederam; e das coisas que hão de ser também delas não haverá lembrança, nos que hão de vir depois.*<sup>31</sup>

Não é possível estabelecer uma data que determine o fim do MMM e das reformas anunciadas por seus adeptos. O que temos de maior certeza é o fato de que ele começou a perder força no início da década de 1970, mesmo período em que ocorreram diversas críticas contra todo aquele empreendimento educacional. Também, os vários grupos engajados em estabelecer os ideais para a matemática moderna, como é o caso do GEEM, acabaram se dispersando e dando passagem para novas formas de pensar o ensino de matemática, entendida àquela altura como malsucedida. “O Movimento durou mais de uma década, teve muitas de suas ideias iniciais deformadas ou não cumpridas, e depois de algum tempo se deparou com a seguinte realidade: o ensino da Matemática não melhorou” (SOARES, 2001, p. 111).

Pensando nessa problemática, coloco a seguinte questão em curso: *se o MMM chegou ao seu fim sem trazer os benefícios esperados, “criando” mais problemas que soluções, como tal adversidade se presentifica na fala de alguns autores?* Compreendi que essa indagação poderia ser abordada olhando para alguns críticos do movimento, como Morris Kline, Richard P. Feynman e René Thom. Isso, porque tais autores versam diretamente sobre as consequências causadas ao ensino após a inserção das ideias do MMM, bem como, sobre os novos desafios para o ensino de matemática, visto que as concepções de ensino trabalhadas durante toda a década de 1960 já não eram mais entendidas como fundamentais para o ensino básico. Assim, considere os textos *O Fracasso da Matemática Moderna*<sup>32</sup>, *New textbooks for the “new” mathematics* e *Modern mathematics: does it exist?*, nos quais os autores tratam da reforma no

<sup>31</sup> *A vaidade de todas as coisas terrestres*, em Bíblia (Eclesiastes, 1, 1-11, itálico nosso).

<sup>32</sup> Utilizei a versão portuguesa da obra: KLINE, M. **O fracasso da matemática moderna**. Tradução de Leonidas Gontijo de Carvalho. São Paulo: IBRASA, 1976.

currículo de matemática, dos livros didáticos, da questão do rigor matemático, da linguagem da matemática, das diretrizes para a reforma, da abordagem dedutiva da matemática, dentre outros aspectos. Como essa dissertação se firma no estudo sobre as demonstrações matemáticas, darei maior ênfase a esse tema na sequência.

### 5.1 As críticas de Morris Kline, Richard P. Feynman e René Thom<sup>33</sup>

O MMM, como era de se esperar, foi alvo de muitas críticas ao longo de seu desenvolvimento, não só por parte dos educadores preocupados com o ensino de matemática, mas também por parte dos próprios matemáticos. De acordo com Búrigo (1989), foi nos Estados Unidos da América que os intensos debates começaram a acontecer. Nesse cenário, as discussões giravam em torno dos métodos de ensino, os quais, sendo tradicionais, estavam presentes nos novos programas. Ademais, entraram em avaliação os conteúdos e elementos da matemática escolar, como foi o caso do formalismo, dos conceitos unificadores, do rigor dedutivo e da intuição.

Um aspecto dos novos programas largamente criticado, especialmente nos Estados Unidos, era o do formalismo predominante na linguagem e no tratamento do conteúdo (...). Em 1962, um manifesto assinado por mais de 60 matemáticos canadenses e norte-americanos apontava como equívocos pedagógicos a introdução prematura de conceitos unificadores, a preocupação excessiva com o rigor dedutivo e o desprezo da intuição (...). A contestação dessa tendência formalista tinha, no primeiro momento, o sentido mais geral de uma crítica à introdução de padrões característicos da matemática praticada nas universidades no ensino elementar e secundário, com o desprezo às preocupações de natureza mais estritamente pedagógica. No decorrer dos anos 60, com a evolução do debate no campo dos fundamentos e da filosofia da matemática, essa contestação desenvolveu-se mais no sentido da crítica ao formalismo como um modo de ver a matemática, transposto para o secundário através do movimento (BÚRIGO, 1989, p. 88-89).

Conforme França (2007), as maiores críticas se referiam aos “exageros” cometidos na implementação das ideias do MMM. Os críticos argumentavam sobre a ênfase dada à abordagem dedutiva, à teoria dos conjuntos, à grande quantidade de terminologia e simbolismo. Também, posicionavam-se contra a “inadequação de alguns conteúdos propostos, o ensino de abstrações prematuramente, o isolamento da realidade e o despreparo dos professores em relação aos novos conteúdos” (FRANÇA, 2007, p. xlix). Para a autora, dentre os maiores

---

<sup>33</sup> Ressalto que as críticas apontadas pelos autores não necessariamente refletem meu posicionamento sobre o MMM. Aqui, realizei um movimento dialético e expositivo para a compreensão dos “porquês” o movimento perdeu força no pós década de 1960. Apresentarei meu modo de pensar essa questão mais a frente, quando finalizar a explicação desses críticos.

opositores da matemática moderna tem-se Morris Kline<sup>34</sup>, que em 1973 publicou o livro *Why Johnny Can't Add: The Failure of the New Math*; o texto aborda de forma incisiva o ensino de matemática em razão das mudanças nos currículos e metodologias durante o MMM. O autor inicia seu trabalho identificando falhas do currículo tradicional que ocasionaram o desenvolvimento de um novo currículo.

Embora o currículo tradicional tenha sido algo afetado nos últimos anos pelo espírito de reforma, suas características básicas são facilmente descritas. Os primeiros seis graus da escola elementar são dedicados à aritmética. No sétimo e oitavo graus os alunos aprendem um pouco de álgebra e os fatos simples de geometria, tais como fórmulas para a área e o volume de figuras comuns. O primeiro ano de escola secundária preocupa-se com álgebra elementar, o segundo com geometria dedutiva e o terceiro com mais álgebra (geralmente denominada álgebra intermediária) e com trigonometria. O quarto ano de escola secundária geralmente abrange geometria sólida e álgebra adiantada (...). Houve frequentemente várias críticas sérias sobre este currículo. A primeira crítica importante, que se aplica particularmente à álgebra, é que ela apresenta processos mecânicos e força, portanto, o estudante a confiar mais na memorização do que na compreensão (KLINE, 1976, p. 19).

De acordo com Kline (1976), o currículo tradicional não prezava pela compreensão, pois, em sua vertente, tem-se demasiada confiança em exercícios para fazer com que os alunos consigam, facilmente, entender o processo resolutivo. Isso, por conseguinte, fez com que a aprendizagem se resumisse quase sempre à memorização. Ainda, havia grande insistência na resolução de exercícios, o que segundo a visão tradicionalista faria com que o aluno realizasse cálculos cada vez mais rapidamente e com maior facilidade. Seriam “como páginas arrancadas de cem livros diferentes, nenhuma das quais transmite a vida, o sentido e o espírito da matemática. Esta apresentação da álgebra começa nenhures e termina também em nenhures” (KLINE, 1976, p. 21). Não bastasse isso, no currículo tradicional, passava-se repentinamente da abordagem expositiva em álgebra para uma dedutiva em geometria.

Após um ano desse estudo de álgebra o currículo tradicional passa para a geometria euclidiana. Nela a matemática torna-se subitamente dedutiva, isto é, o texto começa com definições das figuras geométricas e com axiomas ou asserções que presumivelmente são “obviamente verdadeiros” acerca das figuras. Eles provam depois teoremas aplicando o raciocínio dedutivo aos axiomas. Os teoremas seguem um e outro numa sequência lógica; quer dizer, as demonstrações dos teoremas posteriores dependem das conclusões já estabelecidas nos anteriores. Esta mudança repentina de álgebra mecânica para geometria dedutiva certamente transtorna a maioria dos alunos. Até então, em seu estudo de matemática, não aprenderam o que a “demonstração” é e tem que estar senhor deste conceito além da aprendizagem da própria matéria (KLINE, 1976, p. 21).

---

<sup>34</sup> O professor Kline graduou-se em matemática na New York University (NYU), onde também recebeu seu diploma de doutorado, iniciando sua carreira em 1930.

Existiam também muitos tópicos no currículo tradicional que passaram a ser questionados. Muitos deles, apenas permaneciam no rol de assuntos abordados por terem sido ensinados durante várias gerações. A exemplo, Kline (1976) cita a *solução de triângulos* em trigonometria. “Nisso, dadas algumas partes lados e ângulos de triângulo, a teoria mostra como calcular outras partes e mesmo como empregar logaritmos nos cálculos” (KLINE, 1976, p. 22). Tal conteúdo teria sido importante quando primariamente se ensinava trigonometria para os futuros agrimensores, sendo que a muito tempo já deveria ser “desenfaticado”. Outro exemplo, seria o cálculo de raízes irracionais de polinômios, o que era ensinado a partir de métodos que exigiriam semanas de aulas.

Assim, de acordo com esse autor é possível listar diversos problemas e dificuldades relativas ao ensino tradicional. Contudo, ainda citarei mais um, por ter sido classificado por Kline (1976) como o defeito mais grave em qualquer currículo: a falta de motivação. Em seu julgamento, os estudantes não viam muitas razões para estudar álgebra, geometria ou trigonometria e mesmo que alguém defenda esses capítulos da matemática, após a formação básica o recém-formado não acharia muitas ocasiões para empregar tais conhecimentos; a menos que tenha se tornado um cientista. Outrossim, mesmo que suponhamos que mais tarde, em algum momento, esses estudantes iriam utilizar alguma matemática, essa utilização não pode ser motivação. Desse modo,

o currículo tradicional sofre do defeito mais grave que se pode lançar sobre qualquer currículo: falta de motivação. A própria matemática — para empregarmos as palavras do famoso matemático do século vinte, Hermann Weyl, — tem a qualidade não humana da luz estelar, brilhante e nítida, porém fria. É também abstrata. Trata de conceitos mentais embora alguns, como os geométricos, possam ser visualizados. Dadas ambas as considerações, de sua qualidade fria e caráter abstrato, muito poucos são os estudantes que se sentem atraídos por esta matéria de ensino (KLINE, 1976, p. 23).

Kline (1976), como uma forma de resumo do currículo tradicional assevera:

Evidentemente são inúmeros os defeitos do currículo tradicional. O confiar na memorização de processos e provas, os tratamentos díspares de álgebra e geometria, pequenos defeitos de lógica, a retenção de alguns tópicos antiquados e a ausência de qualquer motivação ou atração explicam a razão por que os jovens não apreciam a matéria e, portanto, por que não se saem bem nela. Intensifica-se-lhes a aversão e as dificuldades se fazem sentir em sua compreensão ao pedir-se-lhes que leiam compêndios enfadonhos, mal escritos e visando fins comerciais (KLINE, 1976, p. 30-31).

Certamente, para a época, o ensino de matemática carecia de reformas, o que ficou ainda mais evidente após a Segunda Guerra Mundial, quando os militares norte-americanos

apresentaram déficits em matemática. Daí em diante, engajados por uma melhoria no ensino da disciplina, os “reformistas” começaram a aparecer sugerindo que as mudanças deveriam partir do currículo. Assim, vários grupos e autores passaram a desenvolver o novo currículo de matemática. “O interessante é que tais grupos dirigiam-se mais ou menos para a mesma direção, identificados pelo termo de “matemáticos modernos” (SILVA, 2007b, p. 67).

Na visão de Kline (1976), para avaliar a nova matemática,

é necessário considerar em que base se deve julgá-la. Poder-se-ia usar como critério: é a matemática correta? A resposta é afirmativa, mas o critério é inútil. A qualidade de ser correta não garante que os estudantes se apeguem à matéria, possam absorvê-la ou que esta matemática particular é a que deve ser ensinada (KLINE, 1976, p. 39).

Sob outra perspectiva, mesmo se o novo currículo fosse ideal para o aperfeiçoamento de matemáticos, ainda assim não seria satisfatório para o ensino básico. A nova matemática se destinaria ao ensino de “estudantes de escolas elementar e secundária que afinal [ingressariam] em uma variedade de profissões (...). Das crianças de escola elementar nenhuma em mil será um matemático; e dos estudantes da secundária nenhum em cem o será também” (KLINE, 1976, p. 39). Em sua visão, os conteúdos de matemática deveriam se adequar ao ensino elementar e secundário, tendo como foco atingir os objetivos desses níveis escolares.

Em corroboração às perspectivas de Kline (1976), Silva (2007b) afirma:

Não se podia deixar de considerar que a situação exigia uma reforma, mas por que o componente a ser atacado primeiro foi o currículo? Kline julga serem os professores tão importantes quanto o currículo, logo todo o esforço e investimento dedicados à reforma deste poderiam ter sido direcionados à melhoria da formação do professorado. Mesmo tendo sido, a partir de 1958, inaugurados e mantidos vários institutos para a educação de professores, estes não se dedicaram a formar nesses educadores um juízo mais independente sobre o que é importante na Matemática, mas sim a ensinar esses professores como ensinar Matemática (SILVA, 2007b, p. 68).

Em defesa da reforma, muitos educadores argumentavam que a partir dos novos métodos, calcados na abordagem dedutiva, o estudante seria capaz de entender os raciocínios por trás dos problemas propostos e, assim, deixaria de decorar os processos resolutivos. No novo currículo, tanto a aritmética como a álgebra e a trigonometria seriam ministradas por uma abordagem dedutiva, como no ensino de geometria da escola secundária. A aritmética, por exemplo, passou a ser introduzida a partir das propriedades numéricas, como a comutativa, a associativa e a distributiva. Partindo-se dessas propriedades, esperava-se, a título de exemplo, que os alunos reconhecessem e aceitassem a existência de números negativos.

Alegam os defensores da matemática moderna que, quando a matéria é ensinada logicamente, quando se revela o raciocínio por trás do método, os estudantes não mais têm que apoiar-se na aprendizagem de cor. Eles *compreenderão* a matemática. A abordagem lógica é, em outras palavras, a abordagem pedagógica também e a panacéia para as dificuldades que eles terão tido na aprendizagem da matemática (KLINE, 1976, p. 42, *itálico do autor*).

Mas, se em teoria, o método dedutivo parecia ser a solução para muitos problemas do ensino elementar, em seu próprio escopo, ele apresentaria novas dificuldades. Ao tentar provar, por exemplo, as propriedades dos números irracionais o trabalho nesse nível escolar seria demasiado difícil e inconveniente, conseqüentemente essas propriedades deveriam ser dadas como postulados (sem provas). Também, surgem impasses para a introdução dos números complexos, isto é, números da forma  $a + b\sqrt{-1}$ .

O novo currículo neste caso como o tradicional, geralmente inventa  $\sqrt{-1}$  como a solução de  $x^2 = -1$ , formando depois os números complexos como pares ordenados de números reais. Define assim as operações aritméticas com números complexos e prova que as propriedades associativas, comutativas e distributivas se aplicam a essas operações (KLINE, 1976, p. 50).

Do ponto de vista histórico, parece claro que a maioria dos conceitos matemáticos acabaram aceitos apenas pela intuição, uns mais do que outros. Os números (naturais e inteiros) e os conceitos geométricos foram admitidos primeiro. Já os números irracionais, complexos e o uso de letras para representar coeficientes, vieram muito tempo depois. “Além disso, quando foram aceitos, não foi a lógica que induziu os matemáticos a adotá-los (...) foi a evidência intuitiva” (KLINE, 1976, p. 58). Em suma, os resultados matemáticos alcançados durante milênios, surgiram sem qualquer vinculação com o método dedutivo, somente depois que os matemáticos procuram demonstrá-los.

Que contribuiu a lógica para a criação de conceitos? Que processo dedutivo nos manda considerar triângulos similares ou considerar as alturas ou as linhas de um triângulo? A lógica sozinha é tão incapaz de conduzir a novas ideias como também a gramática sozinha é incapaz de conduzir à poesia, e a teoria da harmonia à música. Descreveu-se, às vezes, a criação como o seguinte processo: O matemático diz *A*, escreve *B*, quer dizer *C*, mas *D* é o que deve ser. E *D* é de fato uma esplêndida ideia que emerge ao eliminar-se a confusão (KLINE, 1976, p. 68, *itálico do autor*).

Para os defensores da nova matemática (matemática moderna), as estruturas lógicas se constituíam como um meio para os estudantes pensarem dedutivamente, o que seria um grande feito e até mesmo correto. Contudo, durante a vida cotidiana não é esta a “espécie” de pensamento mais útil ou utilizada. Os grandes problemas e até os pequenos enfrentados pelos seres humanos não são, geralmente, resolvidos dedutivamente. Não é que devemos rejeitar o

emprego da abordagem dedutiva da matemática, para Kline (1976, p. 71) “ela tem um lugar (...), mas o fato mais importante sobre prova dedutiva é mantê-la em seu lugar”.

Sob outra perspectiva, se a visão tradicionalista se fiava na memorização, a moderna tentava contornar essa problemática com a dedução. Em consequência, há utilização de uma excessiva quantidade de terminologias e símbolos, o que possivelmente tornava a leitura e a compreensão difíceis para os estudantes. “É de suspeitar que assim fazem para dar um ar de profundidade a material simples e sóbrio. Encontram-se até sentenças verbais “elucidadas por expressões simbólicas” como se símbolos esclarecessem palavras” (KLINE, 1976, p. 95). Mas quais seriam os motivos, segundo a obra de Kline (1976), que promoveram o programa da matemática moderna?

Uma razão é que os professores e mestres que formularam os novos currículos não conhecem ciência. Os professores eram simples matemáticos e os cursos seguidos pelos mestres foram oferecidos em grande parte por esses professores, de modo que os mestres desconhecem muito o que a matemática pode realizar. Ambos os grupos, portanto, até preferem um tratamento puramente matemático porque evita apresentar e explicar uns poucos conceitos físicos e como formular problemas físicos matematicamente (KLINE, 1976, p. 101).

Ademais, a nova matemática não difere da tradicional, muda-se a abordagem.

Na verdade, a maior parte do material no currículo da matemática moderna é material tradicional. A velha aritmética, álgebra, geometria, trigonometria, geometria analítica e cálculos estão todos nela e são, de fato, a parte central do novo currículo (...). A acusação de ser o currículo tradicional antiquado é desmentida pela própria admissão dos modernistas de que eles oferecem primariamente uma nova abordagem do antigo currículo (KLINE, 1976, p. 115-116).

Seguramente, o novo programa de ensino de matemática, sob a bandeira de uma matemática moderna, teve uma propagação exitosa. E mesmo que não se possa responder sobre a capacidade dos administradores — promotores dessa nova matemática — de avaliar se o novo programa seria ou não eficaz, tem-se a certeza de que essa matemática chegou aos colégios. “Muitos diretores e superintendentes de escolas aconselharam aos professores os currículos modernos para mostrar aos pais e juntas escolares que eles estavam alerta e ativos” (KLINE, 1976, p. 168). Nesse sentido, as expressões “tradicional” e “moderna” estão inseridas numa estratégia de divulgação. Tradicional, de acordo com o autor em cena, pode nos remeter a algo antigo, inadequado e até mesmo improdutivo, já o termo moderno, por outro lado, indica-nos aquilo que é atualizado, relevante e vital.

Outro fator importante e que contribuiu para a inserção da nova matemática reside na própria abordagem dedutiva. Os professores de matemática poderiam se sentir mais

confortáveis em suas aulas. Muitos autores justificavam que esse modo de ensinar matemática constitui a essência da matemática, além de ser de mais fácil apresentação. “O corpo todo do material é traçado numa sequência clara e nítida e tudo o que o professor tem a fazer é repeti-la” (KLINE, 1976, p. 172). E depois, muitos professores preferiam trabalhar com essa abordagem por favorecer seus interesses profissionais. Em seu último capítulo, o referido autor se posiciona em favor de novas diretrizes.

Mostramos que o currículo tradicional é falho em certos aspectos, e que o novo currículo de matemática certamente não remedia dos defeitos do currículo tradicional. Além disso, ela introduz novos defeitos. Quais as diretrizes, pois, que uma reforma efetiva deve tomar? Apresentadas de maneira aproximada, no momento, as diretrizes devem ser diametralmente opostas às que foram tomadas pela nova matemática (KLINE, 1976, p. 175).

Outro importante crítico das reformas instauradas no MMM foi Richard P. Feynman, que através de seu artigo *New textbooks for the “new” mathematics*, publicado em março de 1965, discute os equívocos estabelecidos no ensino de matemática sob o ponto de vista dos livros didáticos. Em seu relato, ele diz ter sido um dos membros da *Comissão de Currículo do Estado da Califórnia*, o que lhe rendia horas em busca de uma seleção de livros didáticos que pudesse ser utilizada nos cursos de aritmética das escolas primárias da Califórnia.

Eu li atentamente todos os livros enviados por seus editores para possível adoção na Califórnia (...). Gostaria de descrever e criticar estes livros de uma forma geral, particularmente no que diz respeito ao conteúdo matemático — o que é que estamos a tentar ensinar. Omitirei questões importantes, como se os livros são escritos de modo que seja fácil para o professor ensinar bem a partir deles, ou para o aluno lê-los (FEYNMAN, 1965, p. 09, tradução nossa).

Feynman começa sua crítica fazendo a seguinte pergunta: *Por que queremos modificar o ensino de matemática nas escolas?* Essa interrogação é importante porque se a entendermos claramente, seremos capazes de julgar se um livro supre ou não as necessidades impostas pelas modificações. Dessa maneira, voltando o olhar para alguns segmentos da sociedade, é possível assinalar que a grande maioria das pessoas usa uma grande quantidade de aritmética básica em sua vida diária. Existem outros profissionais, como engenheiros, cientistas, estatísticos, economistas, dentre outros, que se utilizam de uma matemática mais “elaborada”. Também, “há aqueles que vão diretamente para a matemática aplicada. E, finalmente, há os relativamente poucos matemáticos puros” (FEYNMAN, 1965, p. 09, tradução nossa). Sabendo disso, ao se planejar a formação inicial, deve-se levar em conta não apenas as necessidades gerais de todos os grupos usuários da matemática. Deve-se atentar-se, ainda, aos usuários de matemática mais

avançada e, além disso, a formação inicial deve ser capaz de desenvolver um pensamento que as pessoas achem útil no futuro.

Muitos dos livros entram em detalhes consideráveis sobre assuntos que só são de interesse para matemáticos puros. Além disso, a atitude em relação a muitos assuntos é a de um matemático puro. Mas não devemos apenas preparar matemáticos puros. Em primeiro lugar, há muitos poucos matemáticos puros e, em segundo lugar, matemáticos puros têm um ponto de vista sobre o assunto que é bastante diferente do dos usuários de matemática. Um matemático puro é muito impraticável; ele não está interessado - na verdade, ele é propositadamente desinteressado - no significado dos símbolos matemáticos, letras e ideias; ele só está interessado na interconexão lógica dos axiomas, enquanto o usuário da matemática tem que entender as conexões da matemática para o mundo real. Portanto, devemos prestar mais atenção à conexão entre a matemática e as coisas às quais elas se aplicam do que um matemático puro provavelmente faria (FEYNMAN, 1965, p. 09-10, tradução nossa).

Outro ponto considerado por Feynman (1965) refere-se à “nova matemática”. Talvez, a única coisa de novo em tudo isso seja apenas os programas propagados na época. A matemática que é usada nas engenharias e na ciência é antiga e desenvolvida em grande parte antes do século XX. Também, tem que se pensar em que sentido a matemática pode ser tomada como nova, pois “uma boa parte da matemática que é usada no trabalho mais avançado da física teórica, por exemplo, não foi desenvolvida apenas por matemáticos, mas em grande parte pelos próprios físicos teóricos” (FEYNMAN, 1965, p. 10, tradução nossa). Semelhantemente, as pessoas de várias outras áreas, que usam a matemática, desenvolvem novas maneiras de usá-la e novas formas dessa matemática. Considerando essas possibilidades, o autor se posiciona frente aos livros didáticos:

Eu consideraria nossos esforços para encontrar novos livros e modificar o ensino da aritmética como uma tentativa de tentar tornar mais interessante e mais fácil para os alunos aprenderem essas atitudes mentais e esse espírito de análise que é necessário para a compreensão eficiente e uso da matemática em engenharia, ciência e outros campos. A principal mudança que é necessária é remover a rigidez do pensamento encontrada nos livros de aritmética mais antigos. Devemos deixar liberdade para a mente vagar na tentativa de resolver problemas. Não é realmente vantajoso introduzir novos assuntos a serem ensinados da maneira antiga. Para usar o sucesso da matemática — é preciso ter uma certa atitude mental — para saber que existem muitas maneiras de olhar para qualquer problema e para qualquer assunto (FEYNMAN, 1965, p. 10, tradução nossa).

Sendo assim, *qual é o melhor método para obter a solução para um problema?* Pergunta novamente o autor, que em seguida responde: “de qualquer maneira que funcione” (FEYNMAN, 1965, p. 10, tradução nossa). Os livros didáticos não deveriam ensinar um modo ou método particular para resolver cada problema, deveriam focar uma maior liberdade para a obtenção de respostas dos alunos. O autor em questão afirma que é de muito tempo que

ensinamos uma única forma de resolver problemas aritméticos, por exemplo. Seria necessário ensinar uma “flexibilidade mental”, ou seja, as várias formas de escrever, pensar e resolver um problema.

Essa atitude mental de um usuário de matemática é, ao que parece, também, realmente a atitude mental de um matemático puro verdadeiramente criativo. Não aparece em suas provas finais, que são simplesmente demonstrações ou argumentos lógicos completos que provam que uma certa conclusão está correta. Estas são as coisas que ele publica, mas elas de forma alguma refletem a maneira como ele trabalha, a fim de obter um palpite sobre o que é que ele vai provar antes de prová-lo. Para fazer isso, ele requer o mesmo tipo de mente flexível que um usuário de matemática precisa (FEYNMAN, 1965, p. 10, tradução nossa).

Assim, é possível notar que o modo de trabalho de um matemático puro ou aplicado está fundamentado em um pensamento que é livre e intuitivo, o que na visão de Feynman deveríamos manter para a introdução da aritmética ensinada às crianças em um primeiro momento. Isso não só capacitaria as pessoas que de fato vão utilizar a matemática, poderia torná-la interessante para outras pessoas além de facilitar sua aprendizagem. Em livros mais antigos, a adição, por exemplo, é abordada sem qualquer variedade de métodos ou técnicas.

O problema é que há tão poucos métodos permitidos que apenas um conhecimento rígido e formal da aritmética pode resultar. Por exemplo, um problema como o dos  $29 + 3$  não é um problema legítimo durante dois anos, pois não é dado na primeira e segunda séries, e a criança é presumivelmente incapaz de fazer esse problema porque, é claro, para ele você deve mostrá-lo. Por outro lado, se você realmente entendeu o que era adição, você poderia obter o resultado de  $29 + 3$  não muito tempo depois de ter aprendido a contar. Muito cedo — em outras palavras, na primeira série — você poderia fazê-lo simplesmente pensando 30, 31, 32 (FEYNMAN, 1965, p. 12, tradução nossa).

A objeção feita ao texto padrão é que geralmente esses textos apresentam um único método quando trata da solução de exercícios. Para realizar adição, por exemplo, muitas vezes o aluno parte memorizando o resultado para números pequenos. Quando os números utilizados são maiores pede-se que os adicione formalmente, isto é, por meio de algum método apresentado. Mas, se a criança não aprendeu o método, ou ainda não foi capaz de aprendê-lo, deve ser permitido a ela obter o resultado contando, fazendo o eixo numérico ou via outros métodos técnicos. Isso, para o autor, configuraria o desenvolvimento de uma certa liberdade no aprendizado de matemática.

A chave, então, é dar uma grande variedade de experiência matemática e não ter tudo em uma forma fixa limitada e rigorosa. Este não é um argumento sobre métodos de ensino. A questão não é que será mais fácil ensinar a aritmética regular (embora, pelo que sei, possa ser assim). A questão é que ele estará ensinando um novo assunto em

certo sentido — uma atitude da mente em relação aos números e em relação às questões matemáticas, que é precisamente a atitude da mente que é tão bem-sucedida mais tarde em aplicações técnicas da matemática (FEYNMAN, 1965, p. 13, tradução nossa).

Feynman (1965) também faz considerações sobre as *palavras e definições* utilizadas em textos didáticos. Segundo ele, devemos ter cuidado ao ensinar termos técnicos, visto ser possível favorecer uma ilusão de conhecimento — mediante palavras “incomuns que soam aos ouvidos comuns” — sem que se tenha ao menos favorecido alguma ideia ou fato em torno dessas palavras. Em seus estudos, foi possível notar que muitos livros na década de 1960 continham termos especiais, usados, em sua grande maioria, apenas por matemáticos puros. Porém, tais termos utilizados deveriam ser o mais próximo possível da língua usada rotineiramente.

Considere o assunto da geometria. É necessário em geometria aprender muitas palavras novas relacionadas à matemática. Por exemplo, é preciso aprender o que é um triângulo, um quadrado, um círculo, uma linha reta, um ângulo e uma linha curva. Mas não se deve contentar apenas em aprender as palavras. Pelo menos em algum lugar, deve-se aprender fatos sobre os objetos aos quais as palavras se referem, como a área das várias figuras; as relações de uma figura com outra; como medir ângulos; possivelmente o fato de que a soma dos ângulos de um triângulo é  $180^\circ$ ; possivelmente o teorema de Pitágoras; ou talvez algumas das regras que tornam os triângulos congruentes; ou outros fatos geométricos. Quais fatos podem ser decididos por aqueles que têm mais experiência com currículo, pois não pretendo aqui fazer sugestões específicas do que deve ser incluído e do que não. Quero apenas dizer que o assunto da geometria, se é que é ensinado, deve incluir um conhecimento razoável das figuras geométricas além do que são os nomes convencionais (FEYNMAN, 1965, p. 13-14, tradução nossa).

Concernente a essa problemática, envolvendo os termos técnicos, está a questão da *linguagem precisa*. O que diz respeito, em muitos casos, à possibilidade de distinção dos conceitos matemáticos definidos; por exemplo entre “número” e “numeral”. E nisso se resguardam também os símbolos, empregados para determinar diversos conceitos que vão sendo estabelecidos. Mas isso não configura um problema de fala, visto existir o desejo de clareza comunicativa entre os interlocutores de uma conversa. Podemos imaginar que evocamos a precisão linguística quando surgem dúvidas ao significado de uma frase, no entanto, é impossível realizar uma afirmação em absoluta precisão, principalmente as do mundo físico.

A matemática pura é exatamente uma abstração do mundo real, e a matemática pura tem uma linguagem precisa especial para lidar com seus próprios assuntos especiais e técnicos. Mas essa linguagem precisa não é precisa em nenhum sentido se você lida com os objetos reais do mundo, e é excessivamente pedante e bastante confuso usá-la, a menos que haja algumas sutilezas especiais que devem ser cuidadosamente

distinguidas (...). Ao colocar a linguagem especial nos livros, a pessoa parece estar aprendendo um assunto diferente e o pai (incluindo engenheiros altamente treinados) é incapaz de ajudar a criança a entender do que se trata a coisa. No entanto, tal falta de compreensão é completamente desnecessária e nenhum ganho pode ser reivindicado por usar palavras incomuns quando as palavras usuais estão disponíveis, geralmente compreendidas e igualmente claras (geralmente, de fato, muito mais claras) (FEYNMAN, 1965, p. 14-15, tradução nossa).

Em parágrafos posteriores do texto, o autor diz que a razão, utilidade e relevância dos assuntos são pontos a serem esclarecidos:

Tomaria, como exemplo, o tema dos conjuntos. Em quase todos os livros didáticos que discutem conjuntos, o material sobre conjuntos nunca é usado — nem é dada qualquer explicação sobre porque o conceito é de qualquer interesse ou utilidade particular. A única coisa que se diz é que “o conceito de conjuntos é muito familiar”. Isso é, de fato, verdade. A ideia de conjuntos é tão familiar que eu não entendo a necessidade de a discussão paciente do assunto repetidamente por vários dos livros didáticos, se eles não têm nenhum uso para os conjuntos no final (FEYNMAN, 1965, p. 15, tradução nossa).

Muitas pessoas ficariam surpresas ao descobrirem que os símbolos de união “ $\cup$ ”, intersecção “ $\cap$ ” ou de colchetes “ $\{\}$ ”, e assim por diante, raramente aparecem nos escritos de física teórica, de engenharia, de negócios, de design de computadores ou em outros lugares em que se usa alguma matemática. Desse modo, não há razões para que tudo isso seja ensinado na escola, não é uma maneira útil, convincente e nem simples de se expressar. “Afirma-se que é preciso, mas preciso para que finalidade?” (FEYNMAN, 1965, p. 15, tradução nossa).

Em seu último parágrafo Feynman (1965) se posiciona frente a “nova” matemática:

Na “nova” matemática, então, primeiro *deve haver liberdade de pensamento*; segundo, *não queremos ensinar apenas palavras*; e terceiro, *os assuntos não devem ser introduzidos sem explicar o propósito ou a razão, ou sem dar qualquer maneira pela qual o material possa ser realmente usado para descobrir algo interessante*. Eu não acho que valha a pena ensinar esse material (FEYNMAN, 1965, p. 15, tradução nossa, *itálico do autor*).

Há, como anunciei na introdução desta seção, um terceiro crítico, não menos importante que seus antecessores. Trata-se de René Thom<sup>35</sup> que, em 1973, publicou um artigo intitulado *Modern mathematics: does it exist?*, no qual estão expostas muitas de suas preocupações em torno da “matemática moderna” e das práticas pedagógicas presentes no movimento. Em seu texto, o referido autor almeja contribuir com os debates existentes em sua época:

<sup>35</sup> René Frédéric Thom (1923-2002) foi um matemático francês formado na *École Normale Supérieure*. No ano de 1951 ele obteve seu PhD pela Universidade de Paris. Sua tese, intitulada *Espaces fibrés en sphères et carrés de Steenrod* (Feixes de esferas e quadrados de Steenrod), foi escrita sob a direção de Henri Cartan.

Este movimento agora parece ter atingido seu zênite, e os primeiros sinais de declínio, uma reação justificadamente saudável, estão começando a se tornar aparentes. Gostaria, talvez um pouco prematuramente, de expor, à maneira de um balanço, as coisas associadas a este movimento que devem ser mantidas, colocadas no seu devido lugar, ou pura e simplesmente eliminadas. É inútil, em tal questão, esconder a existência de preconceitos pessoais que não podem deixar de influenciar o julgamento de alguém. Trata-se de uma questão, não de conhecimento nem de técnica pedagógica, mas de um campo onde os sentimentos pessoais do matemático não podem deixar de desempenhar um papel essencial. Somente espíritos dogmáticos (e não lhes faltam entre os “modernistas”) podem acreditar que há nessas questões uma verdade capaz de ser logicamente estabelecida e diante da qual é preciso curvar-se. Consequentemente, vejo este artigo como um “discurso para a defesa”, de modo a contribuir com o debate e não uma prova que se sabe muito bem ser inexistente (THOM, 1973, p. 194, tradução nossa).

Na fala sintética do crítico, a matemática moderna surgiu de uma composição complexa na qual se buscava introduzir dois objetivos fundamentais; I) “A renovação pedagógica do ensino de matemática” e II) “A modernização dos programas de estudos”. No primeiro caso ocorre a disposição para a substituição do “didatismo do ensino tradicional” por um ensino “menos direcionado”, “mais livre”, “construtivo” e, sobretudo, implementado por meio de uma abordagem heurística. Já no segundo, argumenta-se em prol de uma modernização do currículo de matemática, no qual deveriam ser introduzidas as grandes estruturas da matemática.

Thom (1973) assim argumenta frente a essas intenções:

Observar-se-á que nenhum destes dois objetivos é, para ser preciso, “moderno” nem sequer recente. A ansiedade em ensinar matemática de forma heurística ou criativa não data de ontem (como mostra a contribuição do professor Pólya para o pensamento do congresso). É descendente direto da pedagogia de Rousseau e pode-se dizer sem exagero que os educadores modernos ainda poderiam ser inspirados pela pedagogia heurística exibida na lição que Sócrates deu ao pequeno escravo de Menon. Quanto ao avanço da matemática, que exigiria uma reorganização dos currículos, basta apontar para o constrangimento e a incerteza dos teóricos modernos em datar a suposta revolução que eles tão levemente invocam: Evariste Galois, fundador da teoria dos grupos, Weierstrass, pai do rigor na análise, Cantor, criador da teoria dos conjuntos, Hilbert, provedor de uma base axiomática para a geometria, Bourbaki, apresentador sistemático da matemática contemporânea, tantos nomes são invocados aleatoriamente, e sem grande precisão teórica, para justificar a reforma curricular (THOM, 1973, p. 195, tradução nossa).

Na exposição do autor, é difícil negar certa validade àqueles dois objetivos, entretanto, alcançá-los também seria custoso. De toda forma, ele se propõe a discuti-los em seu artigo, colocando uma ressalva: “Não discutirei longamente o objetivo [I] (renovação pedagógica): tenho consciência de não ter competência em pedagogia — na qual encontro dificuldade em ver algo mais do que uma arte” (THOM, 1973, p. 195, tradução nossa). Sua visão, nesse ponto, se apoia em argumentos do bom senso:

A fim de se certificar de que seu aluno está participando plenamente da investigação em questão, o professor deve manter um controle contínuo sobre as reações do aluno, para que ele possa orientar seus próprios passos e os de sua ala. Isso dificilmente é possível (...) um professor tem que lidar com vários alunos simultaneamente, ele não pode manter o controle das reações muitas vezes divergentes de todos os seus alunos, assim ele é forçado a negligenciar alguns deles. Além disso, os esforços direcionados para uma pedagogia mais livre são necessariamente caros: eles exigem mais professores e professores mais bem treinados com originalidade. A sociedade só poderá permitir tais esforços dentro dos limites fixados pelo orçamento financeiro. Em outra conexão, fazer uma teoria da criatividade matemática é quase uma contradição em termos, pois nada pode ser menos facilmente descrito em termos de técnicas ou receitas do que a originalidade criativa. Assim que se usa um livro didático, estabelece-se um didatismo, um academicismo, mesmo que o livro seja escrito de modo a promover a pesquisa individual. O que se deve concluir senão que os esforços para melhorar a pedagogia estarão sempre inacabados? (THOM, 1973, p. 195-196, tradução nossa).

Já suas considerações acerca do objetivo II (a modernização dos programas de estudos), que aparentemente é visto como bem justificado, volta-se para a evolução do crescimento das teorias matemáticas. A observação crucial que se faz nesse ponto é a de que, apesar dos progressos técnicos terem evoluído, o mesmo não ocorre com o desenvolvimento da criança (física ou intelectual). Há para todas elas uma limitação genética, segundo a qual, entende-se ocorrer estágios de aprendizagem para as diversas ações humanas (andar, falar, ler, escrever, dentre outras ações). Embora a psicologia, mencionada no artigo, não parece que foi obtido sucesso ou realizada qualquer modificação no “calendário normal” que rege a aquisição desse tipo de conhecimento.

É por isso que se pode legitimamente perguntar se o mesmo tipo de restrições não está operando na aprendizagem da matemática. Se este for o caso, então a esperança de chegar, por meio de uma reorganização geral dos currículos ou métodos, a uma consciência acelerada das grandes teorias da matemática contemporânea, poderia muito bem revelar-se ilusória. Agora, é indiscutível que vários educadores “modernistas” expressaram essa esperança e apoiaram essas ilusões (THOM, 1973, p. 196, tradução nossa).

O mais estranho (não menos discutível) é a forma como os modernistas acreditavam que esses objetivos podiam ser sintetizados. São usados dois argumentos em defesa disso; o primeiro, de natureza “tática”, alegava que para a reforma pedagógica ser bem-sucedida ela deveria superar a inércia e a rotina dos professores; deveria ocorrer uma mudança nos programas de estudos e assim, ao alterar o conteúdo seria mais fácil alterar os métodos. Esse ponto de vista, todavia, só seria válido se definitivamente induzisse ao encorajamento de uma abordagem construtiva e heurística. O que se viu foi apenas uma substituição da geometria euclidiana por generalidades dos conjuntos e da lógica, elementos não ideais para o

desenvolvimento da intuição. O segundo argumento é mais grave e é decorrente da crença psicopedagógica que relacionava as estruturas matemáticas com a progressão do pensamento matemático da criança: a ideia seria apresentar matemática formal aos jovens estudantes.

Este argumento merece uma discussão de busca; sob sua aparência convincente é cometido um erro psicológico básico que invalida completamente o esforço modernista. Deve-se primeiro perceber que a maioria dessas grandes estruturas abstratas — teoria dos conjuntos, álgebra booleana, estruturas topológicas — estão presentes, aqui e agora, na psique infantil de forma implícita, quando se as propõe explicitamente no ensino. (No caso das estruturas algébricas, há motivos para fazer distinções: algumas, como o grupo, existem implicitamente, as do anel e do corpo são muito mais artificiais.) Todo o argumento modernista repousa essencialmente na suposição. *Ao tornar os mecanismos implícitos, ou técnicas, do pensamento conscientes e explícitos, torna-se essas técnicas mais fáceis* (THOM, 1973, p. 197, tradução nossa, itálico do autor).

Para o autor, o “movimento do implícito para o explícito” é, muitas vezes, inútil, visto que, esporadicamente, o aluno não consegue estabelecer conexões entre suas atividades mentais e a descrição abstrata e simbólica que lhe é apresentada. Pode ser, ainda, por outro lado, suspeita de uma possível conexão sem, contudo, compreendê-la claramente.

Finalmente, não se deve necessariamente pensar que, conhecendo as estruturas padrão da matemática, se conhece a matemática; pelo contrário, essas representam apenas os seus aspectos mais superficiais. Assim, nossa análise dos processos do pensamento exhibe apenas as “articulações” mais cruas do raciocínio - enquanto negligenciamos as interações finas devido aos sentidos, que são difíceis de explicar ou formalizar. Essas articulações brutas pertencem ao domínio da lógica, do cálculo proposicional. Isso corresponde às estruturas “superficiais” da linguística que, na fala comum, são constantemente perturbadas, dobradas, pelas demandas das estruturas “profundas” de significado (THOM, 1973, p. 198-199, tradução nossa).

Em seções posteriores do artigo do autor em cena, é feita uma menção a três elementos da matemática moderna: a axiomática, ao rigor e à formalização. Aos dois primeiros, o autor adjetiva como uma aberração, tanto pedagógica quanto matemática.

Não se extraiu, creio eu, da axiomática de Hilbert a verdadeira lição que ali se encontra; é o seguinte: só se adere ao rigor absoluto eliminando o sentido; o rigor absoluto só é possível em e por essa destituição de significado. Mas se alguém tiver que escolher entre rigor e significado, eu escolherei sem hesitação o último. É essa escolha que sempre se fez na matemática, onde se trabalha quase sempre em uma situação semi-formalizada, com uma metalinguagem que é a fala comum, não formalizada. E toda a profissão está feliz com essa situação bastarda e não pede nada melhor (THOM, 1973, p. 202-203, tradução nossa).

Com relação à formalização, Thom (1973) esclarece que, se queira ou não, as pedagogias matemáticas sempre se fundamentam por alguma filosofia dessa ciência, o que por

exemplo, no caso da tendência modernista, concretizou-se na concepção formalista. Para o autor, o contrário ocorre quando se insiste em basear a matemática na realidade. Isso se assemelha ao platonismo, “mas há, sem dúvida, matizes de diferença. Com Platão, o mundo das Ideias constituía a realidade suprema, e o mundo concreto de nossas percepções era apenas uma espécie de imagem degradada deste mundo Ideal” (THOM, 1973, p. 204-205, tradução nossa). De toda forma, o homem sempre apresentou certa inclinação ilusória, para ter algum acesso à realidade última, o que teria sido impulsionado pelo formal e pelo inteligível. Isso tornaria as teorias reutilizáveis em diversos modelos:

tendo assimilado uma fórmula que funciona, a mente tem uma tendência a extrapolar as condições de aplicação dessa fórmula e a repetir seu uso (...). Daí vem a tendência de isolar os processos repetíveis, que podem então ser combinados entre si quantas vezes se desejar. Essa é a fonte da matemática: é a ciência da simulação de automatismos. Para este fim, de ser capaz de repetir e combinar uma configuração de objetos, a mente é levada a simplificar, a purificar a realidade. Há, em princípio, a mesma relação entre o formal e o inteligível, como entre uma função derivada e sua primitiva (THOM, 1973, p. 205, tradução nossa).

Em suas últimas palavras, Thom expressa um possível lado positivo do MMM:

Se eu tenho sido duro com os modernistas, isso não significa, de forma alguma, que tudo o que foi contribuído por este movimento deva ser posto de lado; um retorno ao status quo é, sem dúvida, impossível. Há, em particular, um ponto positivo que se deve manter em qualquer caso. Antigamente, existia entre o ensino secundário e o superior em matemática uma espécie de abismo que os jovens estudantes que tinham acabado de sair do ensino secundário tinham muita dificuldade em colmatar. Pela introdução da notação de conjunto (apresentada sem qualquer teoria, como abreviaturas simples) e os rudimentos da álgebra linear, pode-se ajudar a fazer com que essa lacuna desapareça (THOM, 1973, p. 208, tradução nossa).

Em conclusão, pensando a fala desses três críticos, parece haver unanimidade que a proposta de ensino apregoada no movimento deveria ser abandonada. Mas, após isso, o que foi ou deveria ser posto no lugar? A bem da verdade, retornar para o ensino tradicional seria um contrassenso, visto que ele era tido como inadequado para os preceitos da época. Para Kline (1976), que já havia tomado posição frente a essa questão, o mais plausível seria tomar “diretrizes educacionais opostas” àquela observada na nova matemática. Seria isso o abandono total de todo o trabalho de uma década? E se a isso combinássemos as ideias de Feynman (1965), estariam incluídas a “liberdade de pensamento”, o apelo aos “significados” e as “razões pelo aprender assuntos da matemática” como ele propôs? Ou será que deveríamos nos posicionar como Thom (1973), e enxergar pontos positivos sobre a revolução matemática que vinha ocorrendo?

Para mim, que tenho a vantagem (ou desvantagem) de “ver” o MMM ao longe, compreendo razoável considerar as falas desses autores para organizar meu próprio ponto de vista. Por conseguinte, afirmo que o ensino de matemática moderna teve sua maior falha ao perseguir como compromisso uma universalização de sua proposta, o que se deu mundialmente. Ora, cada lugar tem suas especificidades e necessidade, no caso brasileiro, por exemplo, que era praticamente rural na década de 1960, muito daquele ensino poderia fazer sentido nenhum, se é que fez. E depois, não me pareceu, ao longo dos estudos, que foram respeitados os vários assuntos que deveriam ser ensinados no colégio, nem se deveria ser empregado mais de uma abordagem durante as aulas. Se muitos assuntos de matemática tratados na época eram de caráter universitário, então eles não deveriam ser totalmente ensinados na escola; a menos que fossem importantes para os estudantes que pretendiam adentrar ao nível superior. Assim, é possível indiciar ter ocorrido a falta de reflexão sobre o que ensinar e para quem ensinar — o que levaria em consideração as circunstâncias dos alunos.

A seguir, pretendo retratar o caso brasileiro, destacando críticas que se evidenciaram em seu contexto. Entendo que muito do que já foi comentado por meio deste texto se enquadra nas condições em que se apresentava o país naquele momento. Não é o caso de querer fazer uma transposição das críticas dadas aos EUA, por exemplo, em nossa nação. A questão é que se inseriu o mesmo ensino de matemática aqui, com todos os defeitos a ele atrelado. Isto posto, faço a seguinte pergunta antes de começar: por que os educadores brasileiros, com todos os seus apoiadores, apostaram em um ensino de matemática ineficiente? Teriam eles alguma forma de examinar se isso daria certo? Vejamos.

#### 5.1.1 *Críticas ao Movimento da Matemática Moderna no Brasil*

De acordo com Soares (2001), o MMM no Brasil teve uma execução muito demorada frente a de outros países. Enquanto o movimento era alvo de muitas discussões em diversos lugares, até mesmo contrárias à sua implementação, no território brasileiro, começava-se a ocorrer os primeiros congressos para a sua divulgação. Numa mesma lógica, as muitas críticas, seguidas do desfecho do movimento, também sofreram um retardamento. A publicação do livro *O fracasso da Matemática Moderna* de Kline (1976), por exemplo, só ocorreu 3 anos após sua divulgação nos EUA. É possível destacar que, nos anos de matemática moderna no Brasil, muitas de suas ideias foram modificadas ou não cumpridas, o que culminou em diversas discussões e depreciações das reformas. Também, os adeptos do movimento, reconhecendo as

falhas implementadas, passaram a repensar o ensino. Assim, as ideias defendidas pelos “modernistas”, acabaram sendo contestadas.

Um certo desgaste no Movimento, entretanto já vinha sendo notado bem antes disso. Os próprios professores sentiam, a partir de sua experiência em sala de aula, que os alunos estavam confusos com a linguagem dos conjuntos, o rendimento dos estudantes não havia melhorado, e os pais estavam igualmente insatisfeitos. A imprensa já não dava tanta atenção ao Movimento e nos artigos divulgados podiam ser encontradas críticas a respeito dos exageros da Matemática Moderna (SOARES, 2001, p. 116).

Para Alves e Silveira (2016), tais críticas foram um dos fatores que mais contribuíram para o encerramento do movimento no país. Dentre elas, as de Kline (1976) se sobressaem, as quais na visão dos autores retrataram muitos traços daquele período entre professores, pais e alunos que experienciaram o MMM. Em relação a isso, Colaço (2010) declara que a obra do americano foi de grande repercussão no meio acadêmico brasileiro, apresentando pontos de vistas contundentes à matemática moderna. Em suas considerações, apesar das críticas de Kline (1976) se reportarem ao caso estadunidense, elas também acabaram recebendo sentido no contexto brasileiro, visto que — em muitos aspectos — o movimento era tido como hegemônico no contexto internacional.

Segundo Búrigo (1989), as discussões ganharam força por volta de 1973, quando ocorreu o 9º Colóquio Brasileiro de Matemática. Na ocasião, professores como Elon Lages Lima apontavam que os programas de ensino brasileiros estavam inseridos em um modelo estrangeiro que era falho em seus próprios países de origem. Havia um “exagerado desligamento da realidade” e um excessivo apelo ao moderno. No mesmo período, no Seminário de Ciências e Matemática, realizado pelo Programa de Expansão e Melhoria do Ensino (PREMEN), o professor Manfredo Perdigão do Carmo endereçava suas considerações à ênfase dada às estruturas matemáticas, a axiomatização e ao aspecto formalista, argumentando que as “distorções” das ideias modernistas haviam feito de sua aplicação um “caos”.

Pais de alunos e também a imprensa denunciavam as superficialidades da simbologia da matemática moderna e o tempo “perdido” com o ensino da Teoria dos Conjuntos. Admitindo a confusão que a linguagem dos conjuntos provocava nos alunos e o baixo rendimento por eles demonstrado, os professores mostravam sua insatisfação com a proposta (COLAÇO, 2010, p. 22).

Após muitos debates notou-se, por exemplo, que nos cursos cedidos pelo GEEM

pela primeira vez foram incluídos tópicos como Cálculo e Construção dos Números. Não foram incluídos cursos de Teoria dos Conjuntos, Álgebra ou Topologia. A marca

da matemática moderna estava presente ainda em tópicos como Espaços Vetoriais e Transformações (BÚRIGO, 1989, p. 216).

Mas, se as discussões e críticas estavam começando a despontar, seus efeitos não foram sentidos imediatamente, nem tomados como grandes preocupações. De acordo com França (2007), um aspecto que chama atenção no Brasil são as “publicações oficiais” destinadas ao ensino básico que, contrariando a tendência insatisfatória das críticas, no que compete ao ideário da matemática moderna, continuavam a divulgar produções que reafirmavam seus princípios. Citarei algumas dessas produções identificadas pela autora:

- GEEM oferece curso de férias sobre os blocos lógicos. O curso era apresentado por Anna Franchi, Elza Babá e Lucília Bechara (...).
- Publicação de “Documentos Básicos para a implantação da Reforma do ensino de 1º e 2º graus”, pela Secretaria de Educação do Estado de São Paulo.
- Extinção da coleção Curso Moderno de Matemática na 9ª edição, quando foi reformulada e lançada como GRUEMA (Grupo de Ensino de Matemática Atualizada), em 1974, com 8 volumes, para as oito séries do 1º Grau.
- Dienes volta a São Paulo para cursos e conferências (...) em 1974 e 1975.
- O colégio Vera Cruz, amplia o número de classes experimentais. São acrescentadas atividades envolvendo os sistemas de numeração em diferentes bases, e nas segundas séries, começam a ser introduzidas atividades de geometria.
- O colégio Vera Cruz oferece para 30 professores, um curso sobre os diferentes sistemas de numeração baseado no estudo do livro de Dienes: *As seis etapas do processo de aprendizagem em matemática*.
- Publicação dos Guias Curriculares do Estado de São Paulo com enorme influência de todo ideário do MMM.
- Lucília Bechara ministra o curso de especialização *Operações e Estruturas Algébricas e As seis etapas do processo de aprendizagem em matemática*, organizado pela PUC-SP, para professores primários.
- Publicação, pela SEE: Matemática. *Especificações de bibliografia, Instalações e equipamentos* (...).
- Projeto de Implementação do Currículo, pela Secretaria Municipal de Educação de São Paulo (...).
- Publicação da tradução brasileira do livro de Dienes: “As seis etapas do processo de aprendizagem em matemática” (FRANÇA, 2007, p. xlix-li, *italico do autor*).

De toda forma, acontecendo mudanças ou não, no quadro teórico a ser ensinado ou mesmo na legislação escolar, devemos considerar que as críticas se inseriram no arcabouço de uma educação insatisfatória, visível sobretudo por meio de seus índices de reprovação. Evidencia-se que, no período de 1960 a 1970, a expansão acelerada na educação era mal planejada, realizando-se sobretudo às custas de uma precária formação de professores e da falta de comprometimento, cada vez maior, das condições de ensino.

O exame de admissão, unificado em 1967, foi abolido com a vigência da Lei 5692/71, que integrou o primário e o primeiro ciclo do ensino médio no curso de primeiro grau. O discurso da política educacional governamental era o da garantia plena da escolaridade entre os sete e os quatorze anos. Em São Paulo, o crescimento da rede

pública, que já havia sido acelerado nos anos 60, foi intensificado a partir de 1968. Assim, se entre 1964 e 1968 o crescimento das matrículas do ensino secundário de primeiro ciclo foi de 74%, entre 1968 e 1972 esse crescimento foi de 105%. Na Grande São Paulo, esse crescimento foi maior ainda, em torno dos 165%. No segundo ciclo do secundário, que havia tido um crescimento de 96% entre 1964 e 1968, a expansão foi de cerca de 215%, considerando-se as matrículas iniciais (BÚRIGO, 1989, p. 216-217).

Um fator importante a ser considerado, é que durante o MMM no Brasil não havia estudos que examinassem as consequências das novas propostas de ensino difundidas nas escolas, nem para se pensar nas ações dos professores e nem para se examinar a influência dos textos didáticos. As justificativas para isso residem no fato de que tais investigações já haviam sido elaboradas em outros países. Dessa forma, como esses elementos eram tomados sob a mesma proposta — da matemática moderna — bastava olhar para o caso estrangeiro. Assim, havia uma incidência e conformidade com a produção de livros didáticos e programas, mediante os quais se fazia a “reciclagem” dos professores. Na ausência de verificações do impacto da matemática moderna no ensino, a tendência era superdimensioná-lo de acordo com a intensidade de sua divulgação. Resumidamente:

O critério geral para a avaliação da matemática moderna como proposta era, como em geral havia sido no GEEM, o do bom senso e do da avaliação das intenções mais do que dos pressupostos. Os aspectos considerados negativos eram tratados sempre como “aceleração exagerada”, “abusos”, “interpretações mais do que exageradas”. Não era feita uma avaliação sobre que visões de matemática, de aprendizagem e de escola, quais os valores que davam sustentação à proposta da matemática moderna como havia sido elaborada em outros países e como havia sido divulgada pelo GEEM. As relações entre a matemática moderna e a matemática bourbakista e a psicologia piagetiana, por exemplo, não eram discutidas (BÚRIGO, 1989, p. 224).

As dificuldades com o desenvolvimento de uma avaliação do MMM estiveram ligadas às divisões no interior dos próprios grupos de avaliadores e concomitantemente às diferentes elaborações iniciadas por seus participantes. Estavam vinculadas também, ao modo como se divulgavam as propostas de ensino. Fato é que as reformas modernistas haviam sido disseminadas internacionalmente e, uma vez que muitas das ideias reformistas já haviam sido modificadas, adaptadas e inseridas em uma realidade específica pelos educadores brasileiros, as críticas feitas sob comparação e ótica de outras nações não podiam ser consideradas no Brasil. Como as adaptações e combinações das reformas nunca foram bem determinadas, dificilmente haveria concordância entre os avaliadores do movimento.

A matemática moderna era marcada pela contradição de uma proposta elaborada em outros países e experimentada amplamente no país, sofrendo adaptações que nunca foram precisadas. É possível que esse processo se houvesse revertido se o período em

que as críticas surgiram não fosse marcado pela repressão intensa e pelo abafamento do debate educacional no país (BÚRIGO, 1989, p. 225).

Nesse contexto, surge uma das mais expressivas representações do MMM no Brasil, como uma “importação”. Isso ocorre porque sua implementação no país se deu — em muitos casos — da participação dos educadores brasileiros em congressos internacionais. Desse modo, professores engajados com a possibilidade de reforma traziam as questões discutidas nas conferências internacionais para os congressos nacionais de matemática, por exemplo. Contudo, vários estudos têm mostrado que ao ser posto em desenvolvimento, o MMM brasileiro ocorreu de forma diferente e em momentos distintos.

Dessa forma, abandona-se a representação de “importação” de um modelo imposto. Na verdade, a adesão ao MMM no Brasil se deu pelo convencimento da maioria dos professores de que havia necessidade de uma reforma e de que a proposta da Matemática Moderna, com base na aproximação dos estudos de Bourbaki aos estudos da psicologia, poderia ser um meio de superação dos problemas enfrentados no ensino dessa disciplina (ALVES; SILEIRA, 2016, p. 20).

Oliveira, Silva e Valente (2011, p. 133) destacam outras duas formas de representação mais “vigorosas”. Uma delas está voltada ao fracasso da matemática moderna, a outra, ao abandono da geometria em virtude das propostas modernistas. No primeiro caso, os autores entendem que tomar o “sucesso”, ou o “fracasso”, como categorias de análises, seria um inconveniente para investigações que se prestam às transformações culturais,

no caso, transformações na cultura escolar do ensino de matemática. Longe está a análise que ponderava que o sucesso pudesse representar a execução, por professores e alunos, de um plano educacional traçado alhures, sem qualquer interferência desses atores escolares. Assim, o plano constituiria algo intocável. Ao invés disso, o Movimento foi reinventado em diferentes locais por onde circulou (OLIVEIRA; SILVA; VALENTE, 2011, p. 133).

No que diz respeito ao abandono da geometria, isso resultou em sua superação. Na visão dos autores, longe de ser abandonada e mediante vários estudos levantados por eles, a geometria passou a ser apresentada sob novas propostas. São duas as tendências mais marcantes. Uma, fundamentada pelo trabalho com as transformações geométricas, defendida, aliás, por Felix Klein desde o início do século XX, e a outra, de natureza euclidiana, diferenciada em termos de sua abordagem, seja em vista dos axiomas ou da inclusão de uma geometria experimental.

Substituir as representações do *fracasso* e do *abandono da geometria* — deve-se frisar — não é coisa menor. Traz à mesa de discussões, sobre como conduzir a educação matemática em dias atuais, toda complexidade e dinâmica de uma reforma

educacional. Evidencia a existência da criatividade do meio escolar face àquilo que chega às instituições de ensino vindo de fora delas. Revela o caráter de produção do saber escolar matemático como síntese de discussões de uma época aliada às heranças de práticas pedagógicas de outros tempos. E, nesse sentido, uma revolução escolar ocorre quando essa síntese ampara novas práticas a terem lugar no cotidiano das escolas (OLIVEIRA; SILVA; VALENTE, 2011, p. 133, *italico do autor*).

Em síntese, o MMM é um acontecimento que suscitou diversas discussões a respeito do ensino de matemática. Delas podemos tirar proveito para os dias atuais. “Se é verdade que se aprende com os erros, muito já mudou na Educação Matemática desde a época da Matemática Moderna” (SOARES, 2001, p. 145). Certamente, o movimento perdeu seus defensores, contudo, há que se considerar que ele se desenvolveu e é lembrado como sendo de grande importância, introduzido, sobretudo, por meio da preocupação da sociedade e de acadêmicos engajados com o ensino. Assim, mesmo tendo terminado, ainda é possível “perceber a presença de suas ideias não apenas nas discussões teóricas sobre o assunto, mas também na prática da Educação Matemática” (MIORIM, 1998, p. 115).

Em consenso com muitos autores abordados nesta dissertação, afirmo que é necessária a renovação dos currículos e do ensinar matemática. Não de uma maneira estanque e da imposição de uma época ou país. Diferentemente disso, ela deve ocorrer de forma gradual, levando-se em consideração a realidade dos alunos, suas localidades e as condições em que vivem. Na outra ponta, deve-se também considerar a formação adequada dos professores, além da possibilidade de formação continuada para os novos docentes. Esses são pressupostos iniciais para que se intercorra uma análise crítica com mais seriedade, sem os equívocos que acompanham qualquer reforma precipitada como no caso da matemática moderna no Brasil.

## 6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

*(...) A gente vai contra a corrente  
Até não poder resistir  
Na volta do barco é que sente  
O quanto deixou de cumprir  
Faz tempo que a gente cultiva  
A mais linda roseira que há  
Mas eis que chega a roda-viva  
E carrega a roseira pra lá*

*Roda mundo, roda-gigante  
Rodamoinho, roda pião  
O tempo rodou num instante  
Nas voltas do meu coração(...).*<sup>36</sup>

Início as considerações finais desta pesquisa registrando que elas jamais serão as minhas últimas reflexões, ponderações, meditações, pensamentos ou opiniões sobre os temas visitados, que desde os tempos de graduação vêm me inquietando. De finais, elas só têm mesmo o título, que de praxe serve para indicar as últimas páginas de trabalhos acadêmicos. Nada obstante, com o sentimento de que estou dando meu último “suspiro” em prol da escrita deste texto, pretendo retomar a interrogação estabelecida no princípio dos estudos e pôr a vista alguns questionamentos recorrendo a uma releitura do pesquisado por mim, enquanto estudante e pesquisador em Educação Matemática. É na possibilidade de poder apreciar o tema desta dissertação — mediante o esforço hermenêutico-fenomenológico que busquei efetuar — que destaco esse derradeiro objetivo.

Sendo assim, retomo a interrogação declarada para a realização dessa investigação: *O que é isto, a demonstração matemática no MMM?* É uma questão, como se deve supor, de caráter histórico e com um referencial espaço-temporal já determinado em sua formulação. Com isto, quero dizer que ela indica para onde olhar e se dirigir: para o momento de ocorrência daquele vultoso empreendimento mundial que pretendia reformar a matemática escolar na década de 1960. Mais ainda, no “*O que é isto*” está resguardada uma reclamação pela natureza do investigado, bem como pelos modos de proceder frente a ele.

Tive por escolha me enveredar pelo caminho da hermenêutica filosófica. Dentre os motivos que me levaram a considerar essa teoria da interpretação/compreensão está a sua eficácia no processo de compreensão de significado profundo impregnado nos diversos tipos de construções humanas (textos, artefatos, dentre outros materiais.). Ela é importante porque tem como princípio estabelecer o sentido original, além de permitir que a informação seja

---

<sup>36</sup> Canção *Roda Viva*, em Roda (1997).

transmitida de uma geração para outra. Mas isso tem que ser melhor esclarecido, visto que, de acordo com Ricoeur (1988, p. 28), “não se interpreta de nenhuma parte, mas para explicitar, prolongar e assim manter viva a própria tradição na qual nos mantemos”. Desse modo, a tradição referida no contexto desta pesquisa diz respeito à discussão levantada e ao resgate de um tema histórico que achei por bem questionar. Contudo, não se tratou de reanimar ou sugerir a volta dos ideais da matemática moderna, como queria a comunidade política, acadêmica e escolar do século XX.

Dentre os desafios impostos e correlacionados à minha interrogação esteve presente o de estudar e considerar o tipo de matemática em que surgem as demonstrações. Ora, a matemática é um produto da humanidade que se desenvolve mediante as necessidades de cada época. “Ela muda com o tempo, em função das culturas em que viceja e dos problemas práticos e teóricos que [as] culturas enfrentam (SILVA, 2007a, p. 21-21). Isso pode ser confirmado estudando os diferentes momentos da história. Com os antigos egípcios e babilônios, por exemplo, as questões da matemática eram de caráter prático em que se sobressaíam os problemas cotidianos da região em que viviam. Já a matemática grega, herdada aliás daqueles povos, reorientou-se por uma postura de espírito teórico-especulativo que se deveu, em grande parte, ao emprego das demonstrações de suas assertivas. Assim, ao estabelecer uma investigação para estudo desses artifícios em uma determinada época — como fiz ao eleger o MMM da década de 1960 — tive também que estabelecer a matemática a se examinar, aquela originada pelos gregos.

Aqui, apresenta-se um problema importante: *seriam as necessidades matemáticas do século passado iguais aquelas dos antigos gregos?* Como já discutido, os motivos que desencadearam os usos de demonstrações na antiguidade são apenas especulações teóricas que remontam a história da época. Eles são quase sempre esboçados por meio de alguma crise ou revolução que teria impulsionado o desenvolvimento matemático. Já ao focar as demandas do século XX, tem-se que elas ocorrem de maneira singular e relacionadas aos contextos do período. A matemática nessa fase da história — denominada de moderna — é uma área de estudo fundamental que tem impactado significativamente a tecnologia e a sociedade contemporânea. Sua interação com outras disciplinas permitiu o desenvolvimento de novos métodos e teorias para resolver problemas complexos, sendo suas aplicações amplas e variadas. Diferentemente do que ocorria na Grécia antiga, essa matemática surge praticamente aliada com a técnica e com as tecnologias.

Outra questão imbricada na indagação desta pesquisa foi: *o que queriam os modernistas com uma matemática demonstrativa? Queriam formar matemáticos desde o ensino elementar?*

De acordo com as críticas de Kline (1976), Feynman (1965) e Thom (1973), é possível entender que muito do que se ensinava nas escolas da década de 1960 eram tópicos mal arranjados e que provavelmente só fariam sentido para os matemáticos. Ao pensar no ensino pretendido pelos reformistas desde o final do século XIX, compreendo que ele buscava o comprometimento de tornar a matemática escolar capaz de resolver problemas relacionados ao mercado de trabalho e ao ingresso no ensino superior.

A matemática escolar antes das reformas seria, portanto, imprópria para esses objetivos, todavia, após a implementação de várias reformas e, também, do movimento modernizador de 1960, esses problemas não foram resolvidos e continuaram a existir. Então, seria o caso de que ao reformular o ensino de matemática a nova formação estabeleceu-se inadequadamente? Ou será que ela se deu de modo correto, mas para fins diferentes daqueles em torno do desenvolvimento das indústrias ou do ingresso em universidades? Uma coisa é certa, para aqueles autores críticos do movimento, assuntos como o das demonstrações matemáticas, das estruturas, dos conjuntos e outros conteúdos não deram bons frutos a depender do que eram as intenções do movimento.

Não estou afirmando ou querendo dizer que o movimento, juntamente com suas reformas, foi totalmente insatisfatório, ele teve um lado positivo na história do ensino. As reformas na década de 1960, estudadas aqui, tentaram uma série de mudanças no âmbito educacional e na abordagem da matemática, haja vista que visavam tornar o ensino mais relevante e aplicável ao mundo real, além de favorecer a compreensão dos alunos. Uma das principais iniciativas foi a inclusão de problemas mais próximos da vida cotidiana e a utilização de situações concretas para ensinar conceitos matemáticos. Ademais, promoveram uma abordagem mais centrada no aluno, com um maior enfoque na resolução de problemas e na aprendizagem ativa. Isso refletiu a importância crescente da matemática para a tecnologia e para a ciência. Em geral, as reformulações da matemática na década de 1960 foram uma tentativa de tornar o ensino da matemática mais interessante e relevante para os alunos, e de aprimorar sua compreensão e aplicação no mundo real.

Além disso, se pensarmos no ensino ministrado anteriormente veremos que ele era geralmente centrado na memorização de fórmulas e regras. As reformas incentivaram os professores a se concentrarem mais na exploração de conceitos e na resolução de problemas. Isso foi estabelecido como uma forma de se desenvolver as habilidades críticas e o pensamento dos alunos, bem como sua confiança em resolver problemas matemáticos. E embora se possa contestar muitas dessas inovações para ensino, elas auxiliaram a repensar a forma como a matemática era ensinada e aprendida. Sendo assim, reconheço que as reformas da matemática

tiveram um impacto significativo no ensino e na compreensão da matemática. E mesmo que elas tenham trazido uma série de complicações, haja vista a de não preparar adequadamente os alunos para os objetivos apregoados, ela ao menos fez a comunidade escolar rever todo o seu trabalho.

No caso do Brasil, chamo a atenção para a participação do país no MMM. *Quais seriam os motivos para o envolvimento brasileiro no processo de reformas da matemática?* Ao estudarmos a modernização em escala mundial, muitos autores concordam que ela foi, em parte, impulsionada por questões relativas à Guerra Fria e às políticas envolvendo os EUA e a URSS. Mas, esse seria um motivo externo ao caso brasileiro, mesmo que o Brasil tenha ideologicamente se alinhado aos Estados Unidos, ele não dava sinais de envolvimento no embate daqueles dois países. Mais proveitoso seria imaginar que, na década de 1960, o país estava desenvolvendo a sua indústria de base e contava com a ajuda dos norte-americanos. Contudo, reside aí um grande problema: o de não julgar as vantagens e as desvantagens frente à remodelação educacional que estava prestes a ocorrer. Como mencionado, não havia no Brasil estudos que examinassem as consequências das novas propostas de ensino.

Mas a falta de atenção e reflexão não tomou parte apenas dos dirigentes da nação, tomou parte também nos agentes educacionais. Mesmo no GEEM, grupo que tanto expressou os objetivos da matemática moderna no Brasil, não se fazia uma crítica ou avaliação de tudo o que era proposto nas modernizações. Será que um grupo naquelas proporções não teria condições para apreciar os erros e acertos que estavam cometendo? Ele era a principal associação para estudo de ensino da matemática, apoiados pelas várias instâncias do governo estadual e federal (IBECC, MEC, SEESP etc.). Possuíam até mesmo o carisma e o suporte da mídia, por meio da qual difundiram os ideários do movimento com o objetivo de informar à população sobre a reforma necessária para melhoria do ensino.

*E o que dizer das demonstrações matemáticas no MMM?* Dadas em um quadro de mudanças, elas devem ser olhadas por meio e na totalidade dessas circunstâncias que, ao alterar o ensino de matemática, impôs a abordagem fundamentada em demonstrações. Por considerar que as orientações piagetianas combinadas com as produções bourbakista eram o jeito correto e até natural para o aprendizado das crianças, foram instituídas algumas ideias e conceitos que associados à matemática moderna não poderiam ficar de fora — o rigor, a formalização, as estruturas da matemática, a linguagem de conjuntos, dentre outros aspectos. Essa composição dava o tom de “edifício” para a matemática moderna sendo, além de uma formulação para a produção da mesma, o lócus onde as demonstrações deveriam ocorrer. Mas há uma diferença para a sala de aula. O ensino desses artifícios poderia ser relativizado pelo professor, que

organizava e escolhia os teoremas para exemplos da aplicação do método dedutivo. Ademais, o seu uso esteve quase sempre relacionado ao estudo de geometria, ficando de fora a demonstração de assertivas de outras áreas da matemática escolar.

Por fim, de tudo o que foi possível verificar nessa dissertação, dada a relevância da década de 1960 para o ensino e a aprendizagem da matemática, entendo que esse período é importante para se compreender muito do que ocorreu com a educação desta ciência no século passado. Em decorrência das modernizações, das reestruturações, dos debates e da reformulação do currículo escolar, que veio sendo discutido desde eventos anteriores e que ali desaguará é possível mensurar o alcance atingido pelos modernistas. Suas influências tiveram diversas repercussões sobre o *que* e o *como* abordar os conteúdos matemáticos, o que refletiu na ação de ensinar do professor e na ação de aprender do aluno. Expresso que o MMM foi um grande repensar sobre a matemática, uma vez que emergiram diversas críticas ao mesmo, o qual fortemente passou a ser debatido.

Por fim, deixo registrado aqui, como arremate da execução desse trabalho, que existem muitas formas de se realizar pesquisas científicas em nosso tempo, contudo, venho me pautando por procedimentos da hermenêutica filosófica na esfera fenomenológica, como exposto no decorrer desse trabalho. Essa foi a configuração que encontrei para fundamentar minhas investigações em um único movimento e, também, o que me possibilitou estar situado junto ao meu fenômeno de pesquisa — as demonstrações matemáticas no MMM. Pretendi que essa pesquisa estivesse “instalada” na região de inquérito da Educação Matemática, não sendo uma investigação nem em matemática, e nem em educação, mas no imbricado jogo de sintonia em que participam essas áreas do saber. De acordo com Bicudo (1993, p. 19-20), as preocupações da Educação Matemática “são preocupações com o compreender a Matemática, com o fazer Matemática, com as interpretações elaboradas sobre os significados sociais, culturais e históricos da Matemática” e, também, com as ações político-pedagógicas. Ciente disso, busquei por novos sentidos, por interpretações e por entendimentos que diziam sobre a produção de conhecimentos dessa ciência, bem como seu ensino, mediante as interpretações/compreensões que realizei segundo minhas vivências. É por esta via que a hermenêutica filosófica se presentificou como uma possibilidade rigorosa para o desenvolvimento da pesquisa, mediante uma abordagem filosófica que se orienta pela experiência vivida.

## REFERÊNCIAS

ABBAGNANO, N. **Dicionário de Filosofia**. Tradução de Alfredo Bosi. 5. ed. São Paulo: Martins Fontes, 2007.

ALVES, A. M. M.; SILVEIRA, D. N. Uma leitura sobre as origens do Movimento da Matemática Moderna (MMM) no Brasil. **Revista Tópicos Educacionais**, v. 22, n. 2, p. 6-22, 2016.

ANAIS do II congresso brasileiro de ensino da matemática, 2., 1957, Porto Alegre, RS. **Anais...** Porto Alegre, RS: Faculdade de Filosofia da Universidade do Rio Grande do Sul, 1959a.

ANAIS do III congresso brasileiro de ensino da matemática, 3., 1959, Rio de Janeiro, RJ. **Anais...** Rio de Janeiro, RJ: CADES-MEC, 1959b.

ANAIS do V congresso brasileiro de ensino da matemática, 5., 1966, São José dos Campos, SP. **Anais...** São José dos Campos, SP: Centro Técnico Aeroespacial – CTA, 1968.

ARAUJO, R. S. **Movimento da Matemática Moderna: o reconhecimento de seus resquícios na educação atual**. 2009. 113f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2009.

ARISTÓTELES. **Ética a Nicômaco**. Tradução de Leonel Vallandro e Gerd Bornheim da versão inglesa de W. D. Ross. 4. ed. São Paulo: Nova Cultural, 1991.

ARSAC, G. **L'origine de la démonstration: essai d'épistémologie didactique**. Publications mathématiques et informatique de Rennes, n. 5, p. 1-45, 1987.

BARON, M. E.; BOS, J. M. **Curso de História da Matemática: origens e desenvolvimento do Cálculo**. Tradução de José Raimundo Braga Coelho, Rudolf Maier e Maria José M. M. Mendes. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 1985a. 1 v.

BARON, M. E.; BOS, J. M. **Curso de História da Matemática: origens e desenvolvimento do Cálculo**. Tradução de José Raimundo Braga Coelho, Rudolf Maier e Maria José M. M. Mendes. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 1985b. 3 v.

BATISTA, M. Hermenêutica filosófica e o debate Gadamer-Habermas. **Crítica e sociedade**, v. 2, n. 1, p. 101-118, 2012.

BATISTELA, R. F.; BICUDO, M. A. V.; LAZARI, H. Cenário do Surgimento e o Impacto do Teorema da Incompletude de Gödel na Matemática. **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática**, v. 10, n. 3, p. 198-207, 2017.

BÍBLIA. A. T. Eclesiastes. Português. **Bíblia Sagrada**. Tradução de João Ferreira de Almeida. Barueri – SP: Sociedade Bíblica do Brasil, 2013. p. 464-470.

BÍBLIA. N. T. Romanos. Português. **Bíblia Sagrada**. Tradução de João Ferreira de Almeida. Barueri – SP: Sociedade Bíblica do Brasil, 2013. p. 763-774.

BICUDO, I. História da Matemática: o pensamento da filosofia grega antiga e seus reflexos na educação matemática do mundo ocidental. **Pesquisa em educação matemática: concepções e perspectivas**. São Paulo: Editora da UNESP, 1999.

BICUDO, I. Demonstração em matemática. **Bolema - Boletim de Educação Matemática**, v. 15, n. 18, p. 79-90, 2002.

BICUDO, I. As figuras nos Elementos de Euclides. **Revista Brasileira de História da Matemática - RBHM**, Especial n. 1, p. 211-213, 2007.

BICUDO, M. A. V. Pesquisa em Educação Matemática. **Pro-Posições**, v. 4, n. 1, p. 18-23, 1993.

BICUDO, M. A. V. Sobre a fenomenologia. In: BICUDO, M. A. V.; ESPÓSITO, V. H. C. (Orgs). **Pesquisa qualitativa em educação**. Piracicaba: UNIMEP, 1994. p. 15-22.

BICUDO, M. A. V. Filosofia da Educação Matemática segundo uma perspectiva fenomenológica. In: BICUDO, M. A. V. (Org.). **Filosofia da Educação Matemática: fenomenologia, concepções, possibilidades didático-pedagógicas**. São Paulo: Editora Unesp, 2010. p. 23-47.

BICUDO, M. A. V. A pesquisa qualitativa olhada para além dos seus procedimentos. In: BICUDO, M. A. V (Org.). **Pesquisa qualitativa: segundo a visão fenomenológica**. 1. ed. São Paulo: Cortez, 2011. p.11-28.

BICUDO, M. A. V. Aspectos da pesquisa qualitativa efetuada em uma abordagem fenomenológica. In: BICUDO, M. A. V (Org.). **Pesquisa qualitativa: segundo a visão fenomenológica**. 1. ed. São Paulo: Cortez, 2011. p. 29-40.

BICUDO, M. A. V. A pesquisa em educação matemática: a prevalência da abordagem qualitativa. **Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia**, v. 5, n. 2, p. 15-26, 2012.

BICUDO, M. A. V. Sobre história e historicidade em Edmund Husserl. **Cadernos da EMARF**, Rio de Janeiro, v. 9, n. 1, p. 21-48, 2016.

BICUDO, M. A. V. A matematização da física e demais ciências da natureza. **Philosophos - Revista de Filosofia**, Goiânia, v. 26, n. 2, p. 1-32, 2022.

BÖLTING, R. **Dicionário grego-português: fac-si-mile da edição de 1941**. Rio de Janeiro: Instituto Nacional do Livro, 1953.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. Tradução de Elza Furtado Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, Ed. da Universidade de São Paulo, 1974. 488p.

BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. **História da matemática**. Tradução de Helena de Castro. São Paulo: Edgard Blücher, 2012.

BÚRIGO, E. Z. **Movimento da Matemática Moderna no Brasil: Estudo da Ação e do Pensamento de Educadores Matemáticos nos Anos 60**. 1989. 293f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 1989.

BÚRIGO, E. Z. A Matemática Escolar nos Tempos da Ditadura Militar: modernização imposta ou consentida?. **Anais do ENAPHEM - Encontro Nacional de Pesquisa em História da Educação Matemática**, n. 2, p. 23-31, 2014.

CÂMARA brasileira do livro. **Jabuti**. Disponível em: <<https://www.premiojabuti.com.br/>>. Acesso em: 14 de out. de 2022.

CARAÇA, B. J. **Conceitos fundamentais da matemática**. Lisboa: Tipografia Matemática, 1951.

CHERVEL, A. História das disciplinas escolares: reflexões sobre um campo de pesquisa. *In: Teoria & Educação*, n. 2, Porto Alegre: Pannonica, 1990, p.117-229.

CHIZZOTTI, A. A pesquisa qualitativa em ciências humanas e sociais: evolução e desafios. **Revista Portuguesa de Educação**, Braga, v. 16, n. 2, p. 221-236, 2003.

COLAÇO, W. S. **Movimento da Matemática Moderna aos Tempos Atuais**: uma análise de livros didáticos sobre explicitação e exploração das propriedades de operações. 2010. 74f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática) – Centro de Ciências e Tecnologias, Universidade Estadual da Paraíba, 2010.

CONGRESSO de matemáticos em Belém do Pará. **O Estado de S. Paulo**, São Paulo, 30 de jun. de 1962. p. 05.

CONTADOR, P. R. M. **Matemática**: uma breve história. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2006. 516p.

D'AMBROSIO, U. Etnomatemática, justiça social e sustentabilidade. **Estudos Avançados**, São Paulo, v. 32, n. 94, p. 189-204, 2018.

DOBROWOLSKI, E. N. **Implantação da matemática moderna na década de 1960 e 1970 no município de Pato Branco - PR**. 2011. 124f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Pontifícia Universidade Católica do Paraná, Curitiba, 2011.

DOCUMENTOS do IV Congresso (arquivo pessoal Lucília Bechara Sanchez), nº 006, (Centro de documentação do GHEMAT-SP), julho de 1962.

DOMINGUES, H. H. A demonstração ao longo dos séculos. **Bolema - Boletim de Educação Matemática**, v. 15, n. 18, p. 55-67, 2002.

DUARTE, A. R. S. **Matemática e educação matemática: a dinâmica de suas relações ao tempo do movimento da matemática moderna no Brasil**. 2007. 440f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

ENZENSBERGER, H. M. **O diabo dos números**. São Paulo: Companhia das Letras, 1997.

EUCLIDES. **Os elementos**: Euclides. Tradução e introdução de Irineu Bicudo. São Paulo: UNESP, 2009.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. 2.ed. Campinas: Editora Unicamp, 2004.

FEYNMAN, R. P. New Textbooks for the “New” Mathematics. **Engineering and Science**, v. 28, n. 6, 1965.

FIORENTINI, D. Alguns modos de ver e conceber o ensino da matemática no Brasil. **Zetetiké**, v. 3, n. 1, p. 01-39, 1995.

FLAVELL, J. H. **A psicologia de Jean Piaget**. Tradução de Maria Helena Souza Patto. 2. ed. São Paulo: Pioneira, 1986.

FRANÇA, D. M. A. **A produção oficial do Movimento da Matemática Moderna para o ensino primário do estado de São Paulo (1960-1980)**. 2007. 272f. Dissertação (mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

FRANCHI, A.; LIBERMAN, M. P. **Introdução da Matemática Moderna na Escola Primária**, 2. ed., n. 1, São Paulo: Grupo de Estudos do Ensino da Matemática – GEEM, 1966

FRENKEL, E. **Amor e matemática: o coração da realidade escondida**. 1.ed. Rio de Janeiro: Leya, 2014.

GADAMER, H. G. **Verdade e método I: traços fundamentais de uma hermenêutica filosófica**. 14. ed. Petrópolis: Vozes, 2014.

GADAMER, H. G. **Verdade e método II: complementos e índice**. 2. ed. Petrópolis: Vozes, 2002.

GARNICA, A. V. M. **Fascínio da técnica, declínio da crítica: um estudo sobre a prova rigorosa na formação do professor de matemática**. 258f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”. Rio Claro, 1995.

GOOGLE. **Google Maps**. Disponível em: <<https://www.google.com.br/maps/@37.4157152,24.0690558,7z>>. Acesso em: 09 de fev. de 2022.

HEIDEGGER, M. **Que é uma coisa?: doutrina de Kant dos princípios transcendentais**. Tradução de Carlos Morujão. Lisboa: Edições 70, 1987.

HEIDEGGER, M. **Ser e Tempo II**. Tradução de Marcia Sá Cavalcante Schuback. 13. ed. Petrópolis: Vozes, 2005.

HEIDEGGER, M. **Ensaio e conferências**. Tradução de Emmanuel Carneiro Leão, Gilvan Foge, Marcia Sá Cavalcante Schuback. 8. ed. Petrópolis: Vozes; Bragança Paulista: Editora Universitária São Francisco, 2012.

HOBBSAWM, E. **Era dos Extremos: o breve século XX (1914-1991)**. São Paulo: Companhia das Letras, 2003.

HUSSERL, E. **A crise das ciências europeias e a fenomenologia transcendental: uma introdução à filosofia fenomenológica**. Tradução de Diogo Falcão Ferrer. 1. ed. Rio de Janeiro: Forense Universitária, 2012.

IMENES, L. M. **Um estudo sobre o fracasso do ensino e da aprendizagem da matemática**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”. Rio Claro, 1989.

INTRODUÇÃO à Matemática Moderna. **A Tribuna**, São Paulo, 04 de mar. de 1964. p. 02.

INWOOD, M. **Dicionário Heidegger**. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2002.

IV CONGRESSO (outros acervos), nº 027, (Centro de documentação do GHEMAT-SP), julho de 1962.

KLINE, M. **O fracasso da matemática moderna**. Tradução de Leonidas Gontijo de Carvalho. São Paulo: IBRASA, 1976.

LAVORENTE, C. R. **A Matemática moderna nos livros de Osvaldo Sangiorgi**. 2008. 254f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2008.

LIMA, F. R. **GEEM – Grupo de Estudos do Ensino da Matemática e a Formação de Professores Durante o Movimento da Matemática Moderna no Brasil**. 2006. 170 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2006.

LOPES, A. R. L. V.; BORBA, M. C. Tendências em Educação Matemática. **Revista da UNOESC**, Santa Catarina, v. 16, n. 32, p. 46-61, 1994.

MACEDO, R. S. **Um estudo da teoria dos conjuntos no Movimento da Matemática Moderna**. 2008. 115f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2008.

MALHADAS, D.; CONSOLIN, M. C. D.; NEVES, M. H.M. **Dicionário Grego-Português (DGP)**. Cotia: Ateliê Editorial, 2010.

MATEMÁTICA moderna no Ensino: feliz encontro entre a lógica, a psicologia e a pedagogia. **O Estado de S. Paulo**, São Paulo, 17 de mai. de 1964. Atualidade Científica p. 21.

MAZZI, L. C. **As demonstrações matemáticas presentificadas nos livros didáticos do ensino médio: um foco nos capítulos de Geometria**. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática) - Instituto de Física Gleb Wataghin, Universidade Estadual de Campinas. Campinas, 2018.

MAZZOTTI, A. J. A. O planejamento de pesquisas qualitativas em educação. **Cadernos de pesquisa**, n. 77, p. 53-61, 1991.

MIGUEL, A.; FIORENTINI, D.; MIORIM, M. Â. Álgebra ou geometria: para onde pende o pêndulo?. **Pro-Posições**, v. 3, n. 1, p. 39-54, 1992.

MIORIM, M. Â. **Introdução à história da educação matemática**. São Paulo: Atual, 1998.

MOCROSKY, L. F. **A Presença da Ciência, da Técnica, da Tecnologia e da Produção no Curso Superior de Tecnologia em Fabricação Mecânica**. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”. Rio Claro, 2010.

MONDINI, F. O logicismo, o formalismo e o intuicionismo e seus diferentes modos de pensar a matemática. **EBRAPEM**, v. 12, p. 01-10, 2008.

MONDINI, F. **A presença da álgebra na legislação escolar brasileira**. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”. Rio Claro, 2013.

MORAIS FILHO, D. C. **Um convite à Matemática**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2012.

MOUTINHO, J. G. N. Verdadeira revolução vai sofrer o ensino da Matemática. **Folha de S. Paulo**, São Paulo, 12 de jul. de 1963. p. 19.

NAKASHIMA, M. N. **O papel da imprensa no Movimento da Matemática Moderna**. 2007. 164f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2007.

NEVES, J. L. Pesquisa qualitativa: características, usos e possibilidades. **Caderno de Pesquisas em Administração**, São Paulo, v. 1, n. 3, p. 01-05, 1996.

NOVOS MÉTODOS para ensino da matemática. **O Estado de S. Paulo**, São Paulo, 29 de ago. de 1963. p. 13.

NOVOS RUMOS no ensino da matemática. **Folha de S. Paulo**, São Paulo, 22 de jun. de 1963. Educação, p. 09.

O GEEM dispõe-se em 1964 a modernizar o ensino da Matemática. **O Estado de S. Paulo**, São Paulo, 21 de nov. de 1963. p. 20.

OLIVEIRA, M. C. A; PIETROPAOLO, R. C. Traços de “Modernidade” nos Artigos de Matemática da Revista Escola Secundária. **Revista Diálogo Educacional**, v. 8, n. 25, p. 715-726, 2008.

OLIVEIRA, M. C. A; SILVA, M. C. L.; VALENTE, W. R. **O Movimento da Matemática Moderna: história de uma revolução curricular**. Juiz de Fora: Editora UFJF, 2011.

O QUE É a matemática moderna, na opinião do diretor do GEEM. **Folha de S. Paulo**, São Paulo, 12 de jul. de 1963. p. 19.

PAES, M. H. S. **A década de 60: Rebeldia, Contestação e Repressão Política**. 4. ed. São Paulo: Editora Ática, 1997.

PALMER, R. E. **Hermenêutica**. Tradução de Maria Luísa Ribeiro Ferreira. Lisboa: Edições 70, 1969.

PAVANELLO, R. M. Piaget e a educação matemática. **Educação Matemática Pesquisa**, v. 4, n. 1, p. 41-61, 2002.

PINA, R. S. O V postulado de Euclides. **Revista da Olimpíada**, n. 1, p. 101-108, 2000.

PIRES, R. C. **A Presença de Nicolas Bourbaki na Universidade de São Paulo**. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2006.

PROCLUS. **A commentary on the first book of Euclid's Elements**. Tradução, introdução e notas de Glenn R. Morrow. New Jersey: Princeton University Press, 1992.

PROFESSORES de São Paulo Visam à reforma dos programas e métodos de ensino de matemática. **Folha de S. Paulo**, São Paulo, 11 de out. de 1960. Educação, p. 06.

RIBEIRO, M. L. S. **História da Educação Brasileira**: a organização escolar. 4. ed. São Paulo: Moraes, 1982.

RICOEUR, P. **O Conflito das Interpretações**. Tradução de M. F. Sá Correia. Porto-Portugal: Rés-editora, 1988.

RICOUER, P. **Interpretação e Ideologias**. Organização, tradução e apresentação de Hilton Japiassu. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1990.

RODA viva. Compositor e intérprete: Chico Buarque. *In*: CHICO Buarque de Hollanda-volume 3. Compositores: BUARQUE, C.; JOBIM, T.; NETO, M. C. J. intérprete: Chico Buarque. [S. l.]: RGE Discos, 1997. 1 CD, faixa 6.

ROQUE, T. **História da matemática**: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

ROXO, E.; THIRÉ, C.; SOUZA, J. C. M. **Curso de matemática**. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1940.

RUSSELL, B. **História da filosofia ocidental**: Livro 1 – a filosofia antiga. Companhia Editorial Nacional, 1957. 345p.

RUSSELL, B. **História do Pensamento ocidental**. Tradução de Laura Alves e Aurélio Rebello. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 2015. 416p.

SANGIORGI, O. **Matemática Curso Moderno**: para cursos ginasiais. Vol. 1. 5. ed. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1965.

SANGIORGI, O. **Matemática Curso Moderno**: para cursos ginasiais. Vol. 2. 5. ed. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1967a.

SANGIORGI, O. **Matemática Curso Moderno**: para cursos ginasiais. Vol. 3. 3. ed. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1967b.

SANGIORGI, O. **Matemática Curso Moderno**: para cursos ginasiais. Vol. 4. 1. ed. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1968.

SANTOS, J. G. **Considerações históricas, filosóficas do processo de validade das verdades matemáticas**. 2018. 78 f. Trabalho de conclusão de curso (Licenciatura em Matemática) - Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, 2018.

SANTOS, J. G.; MONDINI, F. O processo de validação de verdades matemáticas em sua historicidade. **Tangram**, v. 4, n. 4, p. 65-91, 2021.

SILVA, C. M. S. **Concepções e práticas avaliativas no movimento da matemática moderna**. 2006. 102f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Escola de Educação e Humanidades, Pontifícia Universidade Católica do Paraná, Curitiba, 2006.

SILVA, J. J. Demonstração Matemática da Perspectiva da Lógica Matemática. **Bolema - Boletim de educação matemática**, v. 15, n. 18, p. 68-78, 2002.

SILVA, J. J. **Filosofia da matemática**. São Paulo: Unesp, 2007a.

SILVA, M. C. L. Que geometria moderna para as escolas do Brasil e de Portugal?. **Revista Diálogo Educacional**, v. 8, n. 25, p. 689-699, 2008.

SILVA, T. T. P. **Os Movimentos Matemática Moderna**: Compreensões e Perspectivas a Partir da Análise da Obra “Matemática – Curso Ginásial” do SMSG. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”. Rio Claro, 2013.

SILVA, V. **Osvaldo Sangiorgi e “O fracasso da matemática moderna” no Brasil**. 2007. 161f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007b.

SINGH, S. **O último teorema de Fermat**. Rio de Janeiro: BestBolso, 2014.

SOARES, F. **Movimento da matemática moderna no Brasil**: avanço ou retrocesso?. 2001. 192 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2001.

THOM, R. Matemática moderna: ela existe?. In: HOWSON, A. (Org.). **Developments in Mathematical Education**: Proceedings of the Second International Congress on Mathematical Education. Cambridge: Cambridge University, 1973.

VALENTE, W. R. História da Educação Matemática: interrogações metodológicas. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, v. 2, n. 1, p. 28-49, 2007.

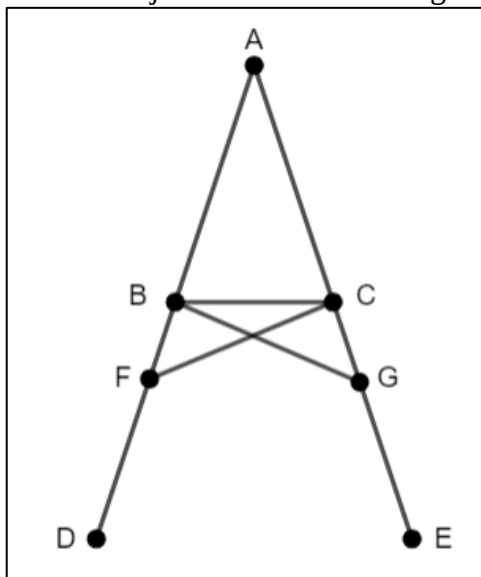
VALENTE, W. R. Osvaldo Sangiorgi, um best-seller. *In*: VALENTE, W. R. (Org.). **Osvaldo Sangiorgi**: um professor moderno. São Paulo: Annablume; Brasília: CNPq; Osasco: GHEMAT, 2008. p. 13-41.

**ANEXOS**

## ANEXO A – ALGUNS RESULTADOS DE TALES ENCONTRADOS NOS ELEMENTOS

*Os ângulos junto à base dos triângulos isósceles são iguais entre si, e, tendo sido prolongadas ainda mais as retas iguais, os ângulos sob a base serão iguais entre si.*<sup>37</sup>

**Figura 17** – Construção de apoio para a demonstração da igualdade dos ângulos da base de um triângulo isósceles juntamente com os ângulos sob a base



Fonte: adaptada de Euclides (2009, p. 102).

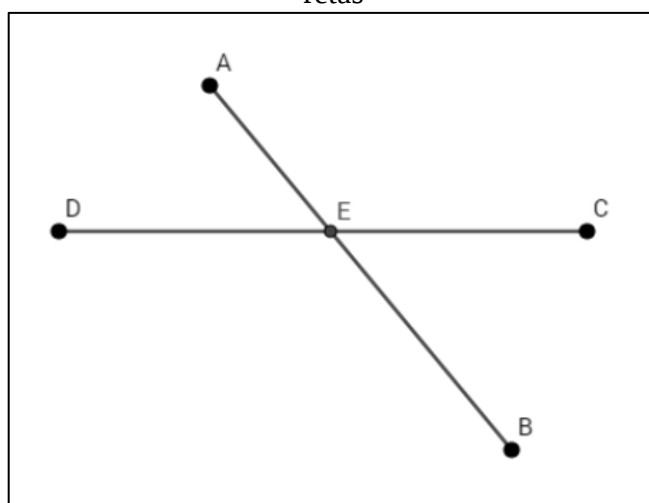
Seja o triângulo isósceles ABC, tendo o lado AB igual ao lado AC, e fiquem prolongadas ainda mais as retas BD, CE sobre uma reta com as AB, AC; digo que, por um lado, o ângulo sob ABC é igual ao sob ACB, e, por outro lado, o sob CBD, ao sob BCE. Fique, pois, tomado sobre a BD o ponto F, encontrado ao acaso, e fique subtraída da maior AE a AG igual à menor AF, e fiquem ligadas as retas FC, GB. Como, de fato, por um lado, a AF é igual à AG, e, por outro lado, a AB, à AC, então, as duas FA, AC são iguais às duas GA, AB, cada uma a cada uma; e contêm o ângulo sob FAG comum; portanto, a base FC é igual à base GB, e o triângulo AFC será igual ao triângulo AGB, e os ângulos restantes serão iguais aos ângulos restantes, cada um a cada um, sob os quais se estendem os lados iguais, por um lado, o sob ACF ao sob ABG, e, por outro lado, o sob AFC ao sob AGB. E, como a AF toda é igual à AG toda, das quais a AB é igual à AC, portanto, a restante BF é igual à restante CG. Mas também a FC foi provada igual à GB; então, as duas BF, FC são iguais às duas CG, GB, cada uma a cada uma; também o ângulo sob BFC é igual ao ângulo sob CGB, e a base BC deles é comum; portanto, também o triângulo

<sup>37</sup> Em Euclides (2009, p. 102-103).

BFC será igual ao triângulo CGB, e os ângulos restantes serão iguais aos ângulos restantes, cada um a cada um, sob os quais se estendem os lados iguais; portanto, por um lado, o sob FBC é igual ao sob GCB, e, por outro lado, o sob BCF ao sob CBG. Como, de fato, o ângulo sob ABG todo foi provado igual ao ângulo sob ACF todo, dos quais o sob CBG é igual ao sob BCF, portanto, o sob ABC restante é igual ao sob ACB restante; e estão junto à base do triângulo ABC. Mas foi provado também o sob FBC igual ao sob GCB; e estão sob a base. Portanto, os ângulos junto à base dos triângulos isósceles são iguais entre si, e, tendo sido prolongadas ainda mais as retas iguais, os ângulos sob a base serão iguais entre si; o que era preciso provar.

***Caso duas retas se cortem, fazem os ângulos no vértice iguais entre si.***<sup>38</sup>

**Figura 18** – Construção de apoio para a demonstração dos ângulos opostos cortados por duas retas



Fonte: adaptada de Euclides (2009, p. 109).

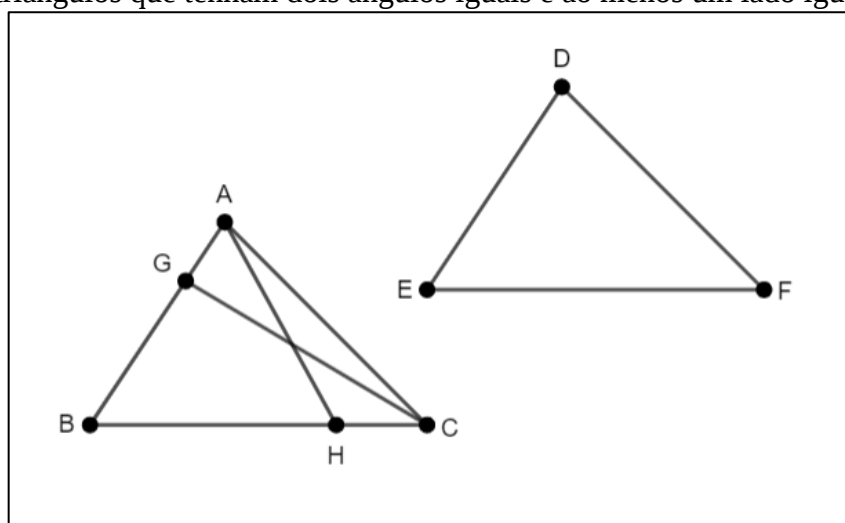
Cortem-se, pois, as retas AB, CD no ponto E; digo que, por um lado, o ângulo sob AEC é igual ao sob DEB, e, por outro lado, o sob CEB, ao sob AED. Pois, como a reta AE foi alteada sobre a reta CD, fazendo os ângulos sob CEA, AED, portanto, os ângulos sob CEA, AED são iguais a dois retos. De novo, como a reta DE foi alteada sobre a reta AB, fazendo os ângulos sob AED, DEB, portanto, os ângulos sob AED, DEB são iguais a dois retos. Mas foram provados também os sob CEA, AED iguais a dois retos; portanto, os sob CEA, AED são iguais aos sob AED, DEB. Fique subtraído o sob AED comum; portanto, o sob CEA restante é igual ao sob DEB restante; do mesmo modo, então, será provado que também os sob CEB, DEA são iguais. Portanto, caso duas retas se cortem, fazem os ângulos no vértice iguais entre si; o que era preciso

<sup>38</sup> Em Euclides (2009, p. 109-110).

provar. [COROLÁRIO Disso, então, é evidente que, caso duas retas se cortem, farão os ângulos junto à seção iguais a quatro retos.]

***Caso dois triângulos tenham os dois ângulos iguais aos dois ângulos, cada um a cada um, e um lado igual a um lado, ou o junto aos ângulos iguais ou o que se estende sob um dos ângulos iguais, também terão os lados restantes iguais aos lados restantes, [cada um a cada um,] e o ângulo restante ao ângulo restante.<sup>39</sup>***

**Figura 19** – Construção de apoio para a demonstração da igualdade entre os lados e ângulos de dois triângulos que tenham dois ângulos iguais e ao menos um lado igual entre si



Fonte: adaptada de Euclides (2009, p. 117).

Sejam os dois triângulos ABC, DEF, tendo os dois ângulos sob ABC, BCA iguais aos dois sob DEF, EFD, cada um a cada um, por um lado, o sob ABC, ao sob DEF, e, por outro lado, o sob BCA, ao sob EFD; e tenham também um lado igual a um lado, primeiramente o junto aos ângulos iguais, a BC, à EF; digo que também terão os lados restantes iguais aos lados restantes, cada um a cada um, por um lado, a AB, à DE, e, por outro lado, a AC, à DF, e o ângulo restante, ao ângulo restante, o sob BAC, ao sob EDF. Pois, se a AB é desigual à DE, uma delas é maior. Seja maior a AB, e fique posta a BG igual à DE, e fique ligada a GC. Como, de fato, por um lado, a BG é igual à DE, e, por outro lado, a BC, à EF, então, as duas BG, BC são iguais às duas DE, EF, cada uma a cada uma; e o ângulo sob GBC é igual ao ângulo sob DEF; portanto, a base GC é igual à base DF, e o triângulo GBC é igual ao triângulo DEF, e os ângulos restantes serão iguais aos ângulos restantes, sob os quais se estendem os lados iguais; portanto, o ângulo sob GCB é igual ao sob DFE. Mas o sob DFE foi suposto igual ao sob BCA; portanto, também o

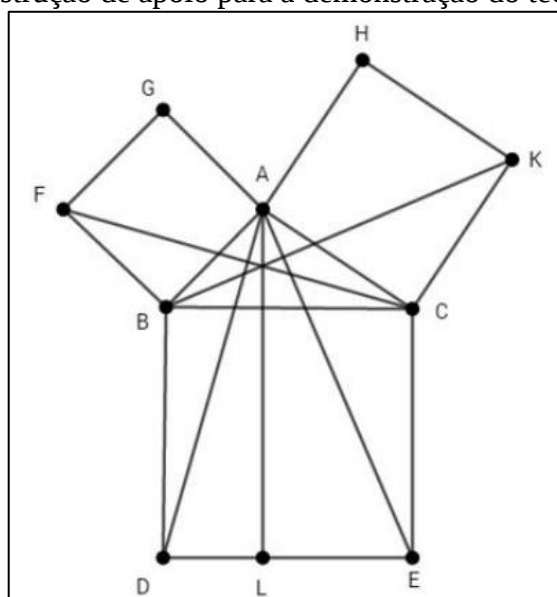
<sup>39</sup> Em Euclides (2009, p. 117-118).

sob BCG é igual ao sob BCA, o menor, ao maior; o que é impossível. Portanto, a AB não é desigual à DE. Portanto, é igual. Mas também a BC é igual à EF; então, as duas AB, BC são iguais às duas DE, EF, cada uma a cada uma; e o ângulo sob ABC é igual ao ângulo sob DEF; portanto, a base AC é igual à base DF, e o ângulo sob BAC restante é igual ao ângulo sob EDF restante. Mas, então, de novo, sejam iguais os lados que se estendem sob os ângulos iguais, como a AB, à DE; digo, de novo, que também os lados restantes serão iguais aos lados restantes, a AC, à DF, enquanto a BC, à EF, e ainda o ângulo sob BAC restante é igual ao ângulo sob EDF restante. Pois, se a BC é desigual à EF, uma delas é maior. Seja maior, se possível, a BC, e fique posta a BH igual à EF, e fique ligada AH. E, como, por um lado, a BH é igual à EF, e, por outro lado, a AB à DE, então, as duas AB, BH são iguais às duas DE, EF, cada uma a cada uma; e contêm ângulos iguais; portanto, a base AH é igual à base DF, e o triângulo ABH é igual ao triângulo DEF, e os ângulos restantes serão iguais aos ângulos restantes, sob os quais se estendem os lados iguais; portanto, o ângulo sob BHA é igual ao sob EFD. Mas o sob EFD é igual ao sob BCA; então, o ângulo exterior, o sob BHA, do triângulo AHC é igual ao sob BCA, interior e oposto; o que é impossível. Portanto, a BC não é desigual à EF; portanto, é igual. Mas também a AB é igual à DE. Então, as duas AB, BC são iguais às duas DE, EF, cada uma a cada uma; e contêm ângulos iguais; portanto, a base AC é igual à base DF, e o triângulo ABC é igual ao triângulo DEF, e o ângulo sob BAC restante é igual ao ângulo sob EDF restante. Portanto, caso dois triângulos tenham os dois ângulos iguais aos dois ângulos, cada um a cada um, e um lado igual a um lado, ou o junto aos ângulos iguais ou o que se estende sob um dos ângulos iguais, terão também os lados restantes iguais aos lados restantes e o ângulo restante ao ângulo restante; o que era preciso provar.

## ANEXO B – DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA DE PITÁGORAS

*Nos triângulos retângulos, o quadrado sobre o lado que se estende sob o ângulo reto é igual aos quadrados sobre os lados que contêm o ângulo reto.<sup>40</sup>*

**Figura 20** – Construção de apoio para a demonstração do teorema de Pitágoras



Fonte: adaptada de Euclides (2009, p. 133).

Seja o triângulo retângulo ABC, tendo o ângulo sob BAC reto; digo que o quadrado sobre a BC é igual aos quadrados sobre as BA, AC. Fiquem, pois, descritos, por um lado, o quadrado BDEC sobre a BC, e, por outro lado, os GB, HC sobre as BA, AC, e, pelo A, fique traçada a AL paralela a qualquer uma das BD, CE; e fiquem ligadas as AD, FC. E, como cada um dos ângulos sob BAC, BAG é reto, então, as duas retas AC, AG, não postas no mesmo lado, fazem relativamente a alguma reta, a BA, e no ponto A sobre ela, os ângulos adjacentes iguais a dois retos; portanto, a CA está sobre uma reta com a AG. Pelas mesmas coisas, então, também a BA está sobre uma reta com a AH. E, como o ângulo sob DBC é igual ao sob FBA; pois, cada um é reto; fique adicionado o sob ABC comum; portanto, o sob DBA todo é igual ao sob FBC todo. E como, por um lado, a DB é igual à BC, e, por outro lado, a FB, à BA, então, as duas DB, BA são iguais às duas FB, BC, cada uma a cada uma; e o ângulo sob DBA é igual ao ângulo sob FBC; portanto, a base AD [é] igual à base FC, e o triângulo ABD é igual ao triângulo FBC; e, por um lado, o paralelogramo BL [é] o dobro do triângulo ABD; pois, tanto têm a mesma base BD quanto estão nas mesmas paralelas BD, AL; e, por outro lado, o quadrado GB é o dobro do

<sup>40</sup> Em Euclides (2009, p. 132-133).

triângulo FBC; pois, de novo, tanto têm a mesma base FB quanto estão nas mesmas paralelas FB, GC. [Mas os dobros das coisas iguais são iguais entre si;] portanto, também o paralelogramo BL é igual ao quadrado GB. Do mesmo modo, então, sendo ligadas as AE, BK, será provado também o paralelogramo CL igual ao quadrado HC; portanto, o quadrado BDEC todo é igual aos quadrados GB, HC. E, por um lado, o quadrado BDEC foi descrito sobre a BC, e, por outro lado, os GB, HC, sobre as BA, AC. Portanto, o quadrado sobre o lado BC é igual aos quadrados sobre os lados BA, AC. Portanto, nos triângulos retângulos, o quadrado sobre o lado que se estende sob o ângulo reto é igual aos quadrados sobre os lados que contêm o [ângulo] reto; o que era preciso provar.

## ANEXO C – NÚMEROS OBLONGOS, TRIANGULARES E PIRAMIDAIS<sup>41</sup>

### Número oblongo

Um número oblongo (prônico ou heteromécico) é dado pelo produto de dois números consecutivos,  $N(N + 1) = N^2 + N$ . Uma das características desses números é que eles sempre são pares. Vejamos alguns desses números realizando o cálculo para alguns valores:

$$0 \times 1 = 0$$

$$1 \times 2 = 2$$

$$2 \times 3 = 6$$

$$3 \times 4 = 12$$

$$4 \times 5 = 20$$

$$5 \times 6 = 30$$

$$6 \times 7 = 42$$

$$7 \times 8 = 56$$

$$8 \times 9 = 72$$

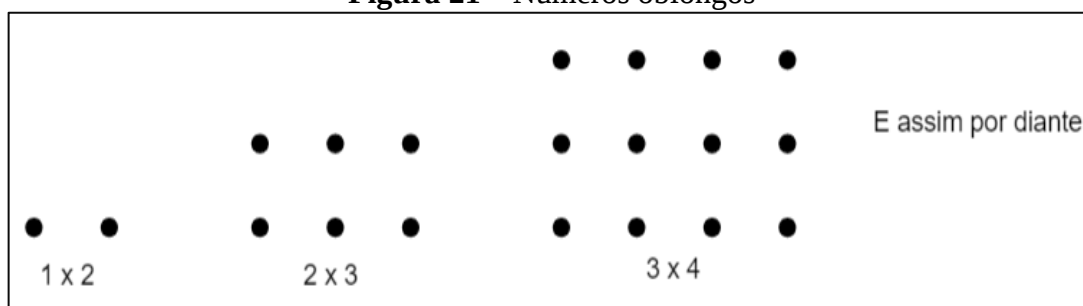
$$9 \times 10 = 90$$

...

$$N(N + 1) = N^2 + N$$

Também podemos representá-los segundo uma representação geométrica:

**Figura 21 – Números oblongos**



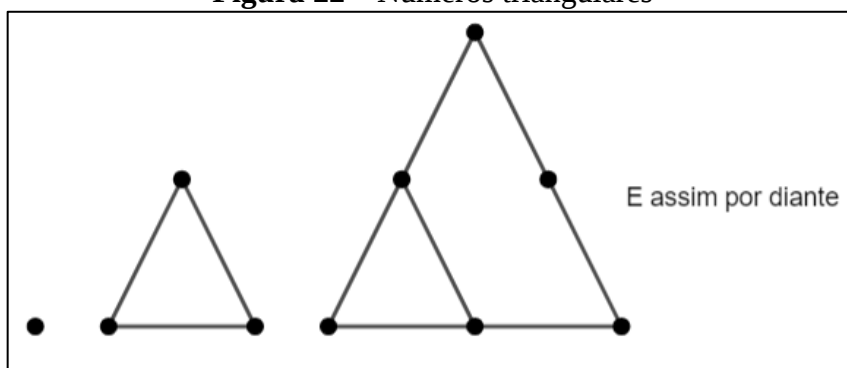
Fonte: elaborada pelos autores.

<sup>41</sup> Veja o volume 1 de Baron e Bos (1985a, p. 15-19).

### Número triangular

A figura 9 pode dar uma noção geométrica do que se quer dizer com número triangular.

**Figura 22 – Números triangulares**



Fonte: adaptada de Eves (2004, p. 100)

Tais números podem ser obtidos pela fórmula  $T_N = (N + N^2)/2$ , onde  $N$  é um número não nulo.

$$N = 1 \quad (1 + 1^2)/2 = 1$$

$$N = 2 \quad (2 + 2^2)/2 = 3$$

$$N = 3 \quad (3 + 3^2)/2 = 6$$

$$N = 4 \quad (4 + 4^2)/2 = 10$$

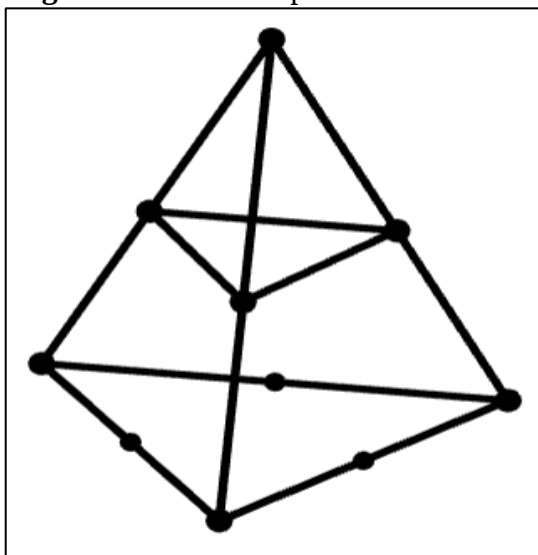
### Número piramidal

Chamamos de número piramidal a um número figurado que representa uma pirâmide com a base tendo qualquer número de lados. São exemplos: número piramidal triangular (base com três lados), número piramidal quadrado (quatro lados), número piramidal pentagonal (cinco lados), etc. A fórmula para se encontrar números piramidais é dada pela seguinte expressão:

$$P(R, N) = N(N + 1)[(R - 2)N + (5 - R)]/6.$$

Como exemplo vamos considerar o caso em que  $R = 3$ . Assim, a nossa pirâmide deve ter como propriedade o número de lados da base igual a 3, conforme ilustrado na figura 10.

**Figura 23** – Número piramidal de base 3



Fonte: elaborada pelo autor.

A fórmula fica,  $P(3, N) = N(N + 1)(N + 2)/6$ .

$$N = 1 \quad 1(2)(3)/6 = 1$$

$$N = 2 \quad 2(3)(4)/6 = 3$$

$$N = 3 \quad 3(4)(5)/6 = 10$$

## ANEXO D – EUCLIDES DE MEGARA?

Figura 24 – Folha de Rosto para a tradução dos elementos de Euclides, feita por Sir Henry Billingsley (1570)



Fonte: adaptada de Eves (2004).

**ANEXO E – DEFINIÇÕES, POSTULADOS E NOÇÕES COMUNS EUCLIDIANAS<sup>42</sup>****Definições**

1. Ponto é aquilo de que nada é parte.
2. E linha é comprimento sem largura.
3. E extremidades de uma linha são pontos.
4. E linha reta é a que está posta por igual com os pontos sobre si mesma.
5. E superfície é aquilo que tem somente comprimento e largura.
6. E extremidades de uma superfície são retas.
7. Superfície plana é a que está posta por igual com as retas sobre si mesma.
8. E ângulo plano é a inclinação, entre elas, de duas linhas no plano, que se tocam e não estão postas sobre uma reta.
9. E quando as linhas que contêm o ângulo sejam retas, o ângulo é chamado retilíneo.
10. E quando uma reta, tendo sido alteada sobre uma reta, faça os ângulos adjacentes iguais, cada um dos ângulos é reto, e a reta que se alteou é chamada uma perpendicular àquele sobre a qual se alteou.
11. Ângulo obtuso é o maior do que um reto.
12. E agudo, o menor do que um reto.
13. E fronteira é aquilo que é extremidade de alguma coisa.
14. Figura é o que é contido por alguma ou algumas fronteiras.
15. Círculo é uma figura plana contida por uma linha [que é chamada circunferência], em relação à qual todas as retas que a encontram [até a circunferência do círculo], a partir de um ponto dos postos no interior da figura, são iguais entre si.
16. E o ponto é chamado centro do círculo.
17. E diâmetro do círculo é alguma reta traçada através do centro, e terminando, em cada um dos lados, pela circunferência do círculo, e que corta o círculo em dois.
18. E semicírculo é a figura contida tanto pelo diâmetro quanto pela circunferência cortada por ele. E centro do semicírculo é o mesmo do círculo.
19. Figuras retilíneas são as contidas por retas, por um lado, triláteras, as por três, e, por outro lado, quadriláteras, as por quatro, enquanto multilaterais, as contidas por mais do que quatro retas.

---

<sup>42</sup> Em Euclides (2009, p. 97-99).

20. E, das figuras triláteras, por um lado, triângulo equilátero é o que tem os três lados iguais, e, por outro lado, isósceles, o que tem só dois lados iguais, enquanto escaleno, o que tem os três lados desiguais.

21. E, ainda das figuras triláteras, por um lado, triângulo retângulo é o que tem um ângulo reto, e, por outro lado, obtusângulo, o que tem um ângulo obtuso, enquanto acutângulo, o que tem os três ângulos agudos.

22. E das figuras quadriláteras, por um lado, quadrado é aquela que é tanto equilátera quanto retangular, e, por outro lado, oblongo, a que, por um lado, é retangular, e, por outro lado, não é equilátera, enquanto losango, a que, por um lado, é equilátera, e, por outro lado, não é retangular, e romboide, a que tem tanto os lados opostos quanto os ângulos opostos iguais entre si, a qual não é equilátera nem retangular; e as quadriláteras, além dessas, sejam chamadas trapézios.

23. Paralelas são retas que, estando no mesmo plano, e sendo prolongadas ilimitadamente em cada um dos lados, em nenhum se encontram.

### **Postulados**

1. Fique postulado traçar uma reta a partir de todo ponto até todo ponto.
2. Também prolongar uma reta limitada, continuamente, sobre uma reta.
3. E, com todo centro e distância, descrever um círculo.
4. E serem iguais entre si todos os ângulos retos.
5. E, caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores do que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontrarem-se no lado no qual estão os menores do que dois retos.

### **Noções comuns**

1. As coisas iguais à mesma coisa são também iguais entre si.
2. E, caso sejam adicionadas coisas iguais a coisas iguais, os todos são iguais.
3. E, caso de iguais sejam subtraídas iguais, as restantes são iguais.
- [4. E, caso iguais sejam adicionadas a desiguais, os todos são desiguais. 5. E os dobros da mesma coisa são iguais entre si. 6. E as metades da mesma coisa são iguais entre si.]
7. E as coisas que se ajustam uma à outra são iguais entre si.
8. E o todo [é] maior do que a parte.

9. E duas retas não contêm uma área.

**ANEXO F – PROGRAMA DE MATEMÁTICA APROVADO PELO 1º CONGRESSO  
DE ENSINO DA MATEMÁTICA, REALIZADO EM SALVADOR DE 4 A 7 DE  
SETEMBRO DE 1955<sup>43</sup>**

CURSO GINASIAL (Com 4 aulas semanais)

1ª SÉRIE

*Aritmética:*

- 1 – Programa atual, com exceção de Números Relativos e das Unidades de Velocidade Angular, radiano e densidade.
- 2 – Potências e Raízes Quadradas numéricas.

2ª SÉRIE

*Aritmética:*

Razões e Proporções e Regras que dela dependem. (Regra de Três, Juros...)

*Álgebra:* (início)

Números Relativos – Cálculo Literal – Monômios e Polinômios. Casos simples de fatoração (fatoração simples por agrupamento, trinômio quadrado e binômio diferença de dois quadrados). Frações algébricas – Cálculo dos Radicais.

3ª SÉRIE

*Álgebra:*

Equações do primeiro grau com uma incógnita. Sistemas do 1º grau – Problemas do 1º grau. Desigualdades – Inequações do 1º grau com uma e duas incógnitas.

*Geometria:*

(Início) – Estudo das figuras geométricas planas: linhas, ângulos, triângulos, quadriláteros, polígonos em geral, circunferência. Construções geométricas.

4ª SÉRIE

*Álgebra:*

---

<sup>43</sup> Em Anais (1959b, p. 100-102).

Equações do 2º grau com uma incógnita – Equações biquadradas – Equações irracionais. Sistemas simples do 2º grau. – Problemas do 2º grau. – Estudo particular da divisão áurea, do problema das luzes e do poço.

#### *Geometria:*

Linhas proporcionais – Semelhança de figuras planas – Noção de seno, co-seno e tangente de um ângulo agudo. Relações métricas nos triângulos, nos quadriláteros e no círculo – Polígonos regulares – Áreas das figuras planas.

CURSO DE COLÉGIO (Com 5 aulas semanais para o Curso Científico).

#### 1ª SÉRIE

Progressões.  
Números irracionais.  
Potências com expoentes fracionários.  
Logaritmos (como operação).  
Equações exponenciais.  
Trigonometria.

#### 2ª SÉRIE

Análise Combinatória.  
Binômio de Newton.  
Determinantes.  
Sistemas lineares.  
Geometria no espaço.

#### 3ª SÉRIE

*Análise Matemática* (início) – Conceitos elementares de variável e de função. Limite: – primeiras noções sobre derivadas e aplicações ao estudo da variação de uma função. Estudo do trinômio do 2º grau. Noções sobre números complexos. Polinômios e equações algébricas em geral (pequena introdução).

*Geometria Analítica* (início) – Estudo no plano até cônicas.

O critério de flexibilidade dos programas recomendados em estudos anteriores foi ratificado no Congresso de Salvador.

Julgou, entretanto, o plenário que, à guisa de contribuição, fosse organizado um programa analítico, moldado nas diversas tendências manifestadas e que mais se aproximassem do *atual*

*programa em vigor*, em virtude das graves dificuldades que se originam no ensino quando se efetuam transformações radicais. Outrossim, a exemplo de outros países, foi votado que houvesse maior ajuste entre os programas a serem cumpridos e o número de horas necessário para tal realização. Ficou estabelecido: Ginásio – 4 aulas semanais; Colégio – 5 aulas semanais (Curso Científico).

## ANEXO G – ASSUNTOS MÍNIMOS PARA UM MODERNO PROGRAMA DE MATEMÁTICA PARA O GINÁSIO

**Figura 25 – Assuntos mínimos para o programa de matemática moderna do ginásio**

| GRUPO DE ESTUDOS DO ENSINO DA MATEMÁTICA<br>(GEEM) — São Paulo                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | ASSUNTOS MÍNIMOS                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | SUGESTÕES                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>O Grupo de Estudos do Ensino da Matemática — GEEM. — é uma nôvel entidade criada em São Paulo, e cuja finalidade precípua vem sendo a de ordenar e divulgar o ensino da Matemática Moderna nas escolas secundárias de São Paulo.</p> <p>"Notícias do IBECC" recebeu e divulgou, com prazer, as notícias das atividades desenvolvidas pelo GEEM.</p> <p><b>ASSUNTOS MÍNIMOS PARA UM MODERNO PROGRAMA DE MATEMÁTICA PARA O GINÁSIO</b></p> <p>Orientação e Sugestões para o seu Desenvolvimento</p> <p><b>Introdução</b></p> <p>Dentro do processo da modernização dos nossos currículos e do uso das mais avançadas técnicas da pedagogia contemporânea, oferecemos, agora, ótima oportunidade para atualizar o ensino da Matemática em nossas escolas secundárias.</p> <p>Quando se fala na introdução da Matemática Moderna no ensino secundário, não se deve pensar que se pretende ensinar um programa completamente diferente dos programas já conhecidos. O que se deseja essencialmente com Modernos Programas de Matemática (e esta seria a expressão aconselhada) é estudar os mesmos assuntos da Matemática, conhecidos como essenciais na formação do jovem ginasiense, usando, porém, uma linguagem moderna que seja mais atrativa às novas gerações. Essa linguagem moderna envolve substancialmente o conceito de conjunto, e deve atender a formação das estruturas matemáticas, que permitam, com menos esforço, melhor aproveitamento das estruturas mentais já existentes no aluno, e não ênfase ao caráter da Matemática atual.</p> <p>A unidade da Matemática será desta forma posta em evidência, a cada passo, permitindo ao aluno que compreenda com facilidade a identidade dos métodos e procedimentos empregados com números, polinômios, pontos etc.</p> <p>É evidente que sendo a Matemática uma ciência sempre em evolução, não se poderia pensar nunca em um programa definitivo. Porém, poder-se-ia sempre num esquema de assuntos mínimos fundamentais, dispostos com continuidade, de forma que garantindo a unidade da Matemática, resalte o caráter estrutural da Matemática Moderna.</p> <p>A seguir, vem o esquema de 24 itens sobre assuntos mínimos (incluindo pequenas sugestões para um moderno desenvolvimento) de um Programa de Matemática para os 4 anos de ginásio, apresentado pelo GEEM ao IV Congresso Brasileiro do Ensino da Matemática, cuja contribuição para discussão do tema, "Reestruturação do ensino da Matemática na Escola Secundária face à Lei de Diretrizes e Bases da Educação".</p> <p>Atendendo à flexibilidade de currículo e à continuidade que deve existir no ensino dos diversos assuntos, o professor poderá programar o número de itens que achar conveniente (ou outros se achar mais interessante, que atendam, porém, as razões já expostas) por série de ginásio. Apenas com caráter de sugestão, poder-se-ia desenvolver em classes normais, 6 itens por série (naturalmente na ordem em que aparecem). É lógico, que a reação da classe, na qual se ensina, e sua maior ou menor rapidez de entendimento, constituirão para o professor os fatores decisivos que o aconselharão a estender-se além desse limite ou reduzir o número de itens.</p> <p>Convém assinalar que o programa ora apresentado pelo GEEM, mereceu aprovação unânime do plenário, relativo à Comissão de Matemática, do V Encontro de Mestres, realizado na capital de São Paulo, de 27 a 28 de junho últimos, sob o patrocínio da CADES e jurisdição da Inspeção Seccional de São Paulo.</p> <p>O GEEM de São Paulo, apresentando à XIV Reunião Anual da Sociedade Brasileira para o Progresso da Ciência — S.B.P.C. — Seção K, Educação, — esta promovida pelo Instituto Brasileiro de Educação, Ciência e Cultura — I.B.E.C.C. — Unesco — Seção de São Paulo, a contribuição de sua equipe acerca do atual problema da modernização do ensino da Matemática no ensino médio, almeja ir ao encontro do que é possibilitado pela Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, com a certeza de que dessa Assembleia máxima dos professores de Matemática do Brasil, reunida em plena Paranaíba, surgirão reais diretrizes, em verdadeiro norte do ensino da Matemática nas escolas secundárias do país.</p> | <ol style="list-style-type: none"> <li>Números inteiros; operações fundamentais; propriedades. Sistemas de numeração.</li> <li>Divisibilidade; múltiplos e divisores; números primos.</li> <li>Potenciação e radiciação; raiz quadrada.</li> <li>Números fracionários; operações fundamentais; propriedades; potenciação e radiciação.</li> <li>Números relativos; operações fundamentais; propriedades.</li> <li>Medida de figuras geométricas simples.</li> <li>Razões e proporções; aplicações.</li> <li>Números racionais; operações fundamentais; propriedades.</li> <li>Cálculo literal; polinômios com coeficientes racionais; operações fundamentais; propriedades.</li> <li>Equações do 1.º grau com uma incógnita; inequações do 1.º grau com uma incógnita; inequações simultâneas.</li> <li>Frações algébricas; operações fundamentais; propriedades.</li> <li>Função; representação gráfica cartesiana de uma função.</li> <li>Sistemas de equações do 1.º grau com duas incógnitas; interpretação gráfica. Sistemas de equações do 1.º grau com 3 incógnitas.</li> <li>Sistemas de inequações do 1.º grau com duas incógnitas; interpretação gráfica.</li> <li>Elementos fundamentais da geometria plana: ponto, reta, semi-reta, segmento, plano, semi-plano; ângulos, bissetrizes.</li> <li>Polígonos: generalidades; estudo do triângulo.</li> <li>Perpendicularismo e paralelismo no plano; estudo dos quadriláteros.</li> <li>Circunferência: propriedades; posições relativas de reta e circunferência e de circunferências.</li> <li>Número irracional e número real; operações fundamentais; cálculo de radicais.</li> <li>Equações do 2.º grau com uma incógnita; função trinômio do 2.º grau; equações redutíveis ao 2.º grau; sistemas redutíveis ao 2.º grau.</li> <li>Segmentos proporcionais; semelhança de polígonos; seno, cosseno e tangente de um ângulo agudo.</li> <li>Relações métricas nos triângulos. Lei dos senos e cossenos.</li> <li>Relações métricas no círculo; polígonos regulares.</li> <li>Áreas dos polígonos; medida da circunferência e área do círculo.</li> </ol> | <ol style="list-style-type: none"> <li>A ideia de conjunto deveria ser a dominante; as propriedades das operações com os números inteiros devem ser ressaltadas como início das estruturas matemáticas. Lembrar a importância de certos sistemas de numeração, além do decimal.</li> <li>O uso da linguagem de conjuntos e operações entre conjuntos, poderá trazer novos centros de interesse na exploração da matéria.</li> <li>Estudá-las como operações inversas; verificação da validade ou não das propriedades já introduzidas; justificar, tanto quanto possível, a extração da raiz quadrada.</li> <li>Resaltar com os números fracionários a permanência das propriedades já introduzidas com os números inteiros (a estrutura continua); fazer alusão à aproximação na extração da raiz quadrada.</li> <li>Resaltar com os números relativos a permanência das propriedades já introduzidas (a ideia da estrutura comparece novamente); representar graficamente os números relativos.</li> <li>Fazer a revisão do estudo intuitivo das principais figuras geométricas: planas e espaciais; cálculo de comprimentos, áreas e volumes. Usar nos problemas de aplicação as noções já conhecidas de: massa, peso, capacidade e tempo.</li> <li>Discriminar as aplicações principais; dividir a proporcional; regra de três; percentagem; juros e câmbio.</li> <li>Resaltar o aspecto comum das propriedades dos números racionais, englobando os números inteiros, números fracionários inclusive os relativos.</li> <li>Estudar, nesse cálculo, os casos simples de fatoração; ressaltar as propriedades comuns às operações entre os números introduzidos e os polinômios (ideia de estrutura algébrica).</li> <li>É aconselhável: estudar somente as equações do primeiro grau com coeficientes racionais; abordar, para as inequações simultâneas, as operações entre conjuntos; fazer problemas de aplicação.</li> <li>Lembrar a ausência de significado da anulação do denominador das frações algébricas; discutir as equações e inequações literais do primeiro grau com uma incógnita.</li> <li>Dar a noção fundamental de função como dependência; introduzir sistema de coordenadas cartesianas no plano; estudar a função linear: <math>y = ax + b</math>.</li> <li>Acentuar o princípio da eliminação que pode ser estendido a sistemas com um número qualquer de equações. Discutir completamente o caso do sistema de duas equações do primeiro grau com duas incógnitas. Lembrar as equações e os sistemas redutíveis ao primeiro grau e fazer problemas de aplicação.</li> <li>Ressaltar a interpretação gráfica.</li> <li>Introduzir intuitivamente as propriedades fundamentais e suas propriedades sempre que possível, a linguagem de conjuntos e suas operações. Mostrar como algumas propriedades são consequências de outras mais elementares, introduzindo, assim, o processo dedutivo na Geometria.</li> <li>Ressaltar a convexidade e não-convexidade; apresentar os polígonos regulares; estudar congruência de triângulos, propriedades e aplicações.</li> <li>Na teoria das paralelas, ressaltar o Postulado de Euclides e suas consequências.</li> <li>Continuar aplicando a linguagem dos conjuntos e suas operações.</li> <li>Resaltar a permanência das propriedades já introduzidas com os números racionais; resolver equações e sistemas do 1.º grau com coeficientes reais. Representação gráfica do número real na reta.</li> <li>Estudar as primeiras noções sobre a trinômio do 2.º grau; representação gráfica e aplicação simples. Entre as equações redutíveis ao 2.º grau, estudar as equações biquadradas e as irracionais simples.</li> <li>Relacionar com o estudo das razões e proporções.</li> <li>Lembrar a representação geométrica do número real; construção geométrica dos irracionais quaternários.</li> <li>Resaltar as construções geométricas dos polígonos regulares.</li> <li>Noção do número <math>\pi</math>.</li> </ol> |

Fonte: IV Congresso (1962).

## ANEXO H – ASSUNTOS MÍNIMOS PARA UM MODERNO PROGRAMA DE MATEMÁTICA PARA O COLÉGIO

**Figura 26 – Assuntos mínimos para o programa de matemática moderna do colégio**

| ASSUNTOS MÍNIMOS PARA UM MODERNO PROGRAMA DE MATEMÁTICA PARA O COLÉGIO                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | ASSUNTOS MÍNIMOS                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | SUGESTÕES                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>Orientação e Sugestões para o seu Desenvolvimento</p> <p><b>Introdução</b></p> <p>Seguindo a mesma orientação sugerida para o desenvolvimento dos 24 itens sobre assuntos mínimos de um programa de Ginásio, são agora apresentados mais 18 itens destinados ao curso Colégio em 3 anos. Atendendo novamente à flexibilidade do currículo e à continuidade que deve prevalecer no ensino dos diversos assuntos, o professor poderá programar o número de itens que achar mais conveniente por série de Colégio.</p> <p>Como caráter de sugestão e atendendo-se às razões já expostas (programa do Ginásio), poder-se-ia desenvolver, em classes normais, 6 itens por série.</p> <p>Não é preciso ressaltar que, nas sugestões que acompanham os itens, de acordo com o que já foi iniciado no programa do primeiro ciclo, continuarão presentes — e agora com mais intensidade — aqueles conceitos que têm caracterizado a modernização da linguagem Matemática dentro do espírito de <i>unificação</i> de seus diversos assuntos, tais como o de <i>conjuntos</i> e <i>operações</i>, <i>estruturas</i> (de ordem, algébricas, topológicas), amparadas por uma notação mais ampla de símbolos lógicos.</p> <p style="text-align: center;"><b>IV CONGRESSO BRASILEIRO DO ENSINO DA MATEMÁTICA</b></p> <p>Realizar-se-á, de 22 a 28 de julho próximo, em Belém do Pará, o IV Congresso Brasileiro do Ensino da Matemática, máxima assembleia que reúne professores secundários e universitários de Matemática de todo o território nacional.</p> <p>Com o advento neste ano da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional ganha o conclave em apreço maior interesse junto a todos os educadores, em virtude da reestruturação, em linhas modernas, que se prepara para a atualização do ensino da Matemática na Escola Secundária.</p> <p>O tema consta dos seguintes itens fundamentais:</p> <p>I) — 1.1 — A formação dos professores de Matemática e as Faculdades de Filosofia.</p> <p>1.2 — O aperfeiçoamento do professor de Matemática.</p> <p>1.3 — Correlação entre o ensino na Escola Secundária e o currículo das Faculdades de Filosofia.</p> <p>II) — 2.1 — Introdução da Matemática Moderna na Escola Secundária.</p> <p>2.2 — Experiências realizadas em cursos regulares ou experimentais.</p> <p>III) — 3.1 — Reestruturação do ensino da Matemática face à Lei de Diretrizes e Bases.</p> <p>3.2 — Didática da Matemática na Escola Secundária.</p> <p>3.3 — Verificação da aprendizagem.</p> <p>3.4 — Liberdade de ensino.</p> <p>A direção dos trabalhos das sessões relativas ao item II, estará a cargo do GRUPO DE ESTUDOS DO ENSINO DA MATEMÁTICA (G.E.E.M.). Nesse sentido, o G.E.E.M. levará ao Norte do País uma equipe recheada de professores que fará demonstrações dos trabalhos que vem realizando, com êxito, em estabelecimentos de ensino secundário de São Paulo, bem como apresentará um anteprojeto de assuntos mínimos de um moderno programa de Matemática (com orientação e sugestões para o seu desenvolvimento) destinado ao curso secundário.</p> | <ol style="list-style-type: none"> <li>Função do 2.º grau. Estudo completo do trinômio do 2.º grau e aplicações.</li> <li>Coordenadas de um ponto da circunferência com centro na origem. Aplicações das relações trigonométricas nos triângulos.</li> <li>Identidades, equações e inequações trigonométricas simples.</li> <li>Introdução à Geometria Espacial; espaço e semi-espaço. Paralelismo e perpendicularismo de retas e planos.</li> <li>Diedros, triedros e ângulos polédricos.</li> <li>Poliedros: prismas, pirâmides e troncos. Propriedades geométricas.</li> <li>Corpos redondos.</li> <li>Transformações pontuais: translação, rotação, simetria e homotetia.</li> <li>Noção de sequência de números reais. Progressões.</li> <li>Noção de potência no campo real. Operações inversas. Logaritmos.</li> <li>Análise Combinatória e aplicações.</li> <li>Elementos de Geometria Analítica Plana. Equação da reta e equação da circunferência. Equações reduzidas das cônicas.</li> <li>Medidas dos sólidos geométricos.</li> <li>Sistema de equações lineares. Noção de matrizes: aplicações.</li> <li>Números complexos: operações fundamentais, propriedades.</li> <li>Estudo dos polinômios.</li> <li>Equações algébricas.</li> <li>Noção de limite, continuidade e derivadas. Elementos de cálculo integral: aplicações ao cálculo de áreas e volumes.</li> </ol> | <ol style="list-style-type: none"> <li>No estudo do trinômio, ressaltar o aspecto gráfico e nas aplicações, as inequações do 2.º grau.</li> <li>Ressaltar a significação da medida de arco e de ângulo em radianos. No estudo das funções, destacar as relações entre elas e as propriedades de simetria e periodicidade. Introduzir a noção de vetor no estudo do teorema das projeções. Examinar os casos simples de resolução de triângulos.</li> <li>Discussão das soluções, levando em conta a periodicidade e simetria.</li> <li>5, 6, 7. Desenvolver o assunto em encadeamento lógico, ressaltando as propriedades fundamentais intuitivas e as demonstráveis, procurando destacar os diversos métodos de demonstração. Aproveitar as idéias operacionais de conjuntos. No estudo da esfera, introduzir os triângulos esféricos, com vistas a um exemplo de Geometria não Euclidiana.</li> <li>Ressaltar as estruturas definidas através desses tipos de transformação.</li> <li>A noção de sequência deve proceder a de progressões, que constituem um caso particular. Após o conceito e noções, seguem-se as operações com seqüências, onde devem ser examinadas as estruturas algébricas (grupo aditivo e espaço vetorial). A idéia de convergência, preferivelmente, será dada no caso das progressões geométricas.</li> <li>Partir das propriedades de radicais para representá-los, agora, como potências de expoente irracional. Resumir a estrutura algébrica do campo real. No estudo das operações inversas aparecerá a logaritmização. Ressaltar a aplicação dos logaritmos à resolução de equações exponenciais.</li> <li>Estudar os vários tipos de agrupamentos que, eventualmente, podem ser tratados através de noções de probabilidade. Aplicações às potências de binômios (Seron) e polinômios (Leibnitz).</li> <li>Recordar, sistematizando, os elementos de Geometria Analítica, já introduzidos. Exame das equações como definindo subconjuntos de pontos do plano. Poder-se-á iniciar, inclusive, um tratamento de Geometria Analítica com Álgebra Vetorial.</li> <li>Introdução do postulado de Cavalieri para o estudo das medidas dos sólidos.</li> <li>O estudo pode ser feito através da teoria dos determinantes ou, preferivelmente, pelas matrizes. Ressaltar as estruturas algébricas das operações com matrizes (anel e espaço vetorial).</li> <li>Ressaltar a estrutura algébrica (corpo).</li> <li>Exame da estrutura algébrica (anel). Destacar a operação de divisão de polinômios e princípio de identidade. Derivada de um polinômio definida pela fórmula de Taylor.</li> <li>Admitir o teorema fundamental da Álgebra: dedução das consequências. Pesquisa de raízes inteiras e racionais. Estudadas, eventualmente, as equações do 3.º e 4.º graus, recíprocas e binômias.</li> <li>Dar noções intuitivas, que permitam deduzir as principais propriedades, que serão utilizadas nas aplicações a outras ciências.</li> </ol> |

Fonte: IV Congresso (1962).

## ANEXO I – ASSUNTOS ABORDADOS NA COLEÇÃO MATEMÁTICA: CURSO MODERNO<sup>44</sup>

### **Matemática: curso moderno, volume 1;**

Para a 1ª Série dos Cursos Ginasiais:

1. número e numeral – sistemas de numeração – bases;
2. operações (operações inversas) com os números inteiros propriedades – estruturais;
3. divisibilidade – múltiplos e divisores; números primos; fatoração completa;
4. números fracionários – operações (operações inversas); propriedades estruturais;
5. estudo intuitivo das principais figuras geométricas planas e espaciais;
6. sistemas de medidas; sistema decimal e sistemas não-decimais.

### **Matemática: curso moderno, volume 2**

Para a 2ª Série dos Cursos Ginasiais:

1. razões – número racional absoluto – razões especiais (velocidade, densidades, ...);
2. proporções – propriedades – por cento porcentagem – números proporcionais – regras de três – juros – câmbio;
3. números racionais relativos – conjunto dos números inteiros relativos ( $\mathbb{I}$ ) – operações (operações inversas) – propriedades estruturais – conjunto dos números racionais relativos ( $\mathbb{Q}$ ) – operações (operações inversas) – propriedades estruturais;
4. equações e inequações do primeiro grau – resolução de equações e inequações do primeiro grau com uma variável, através da linguagem de sentenças matemáticas no conjunto dos números racionais relativos ( $\mathbb{Q}$ );
5. sistemas de inequações simultâneas com duas variáveis – variável sujeita a duas condições – resolução de sistemas de equações simultâneas do primeiro grau com uma variável, através da linguagem de sentenças matemáticas;
6. sistemas de duas equações simultâneas com duas variáveis – relações binárias – resolução de sistemas de duas equações simultâneas do primeiro grau, através da

---

<sup>44</sup> Veja a coleção “Matemática Curso Moderno: para cursos ginasiais” de autoria do professor Osvaldo Sangiorgi publicada pela Editora Nacional.

linguagem de sentenças matemáticas.

### ***Matemática: curso moderno, volume 3***

Para a 3ª Série dos Cursos Ginasiais:

1. Números reais – números racionais e números irracionais – operações no conjunto  $\mathbb{R}$  – propriedades estruturais;
2. Cálculo Algébrico – cálculo literal em  $\mathbb{R}$  – expressões equivalentes; reduções – técnicas de fatoração – complementação do estudo das equações, inequações e sistemas de equações simultâneas do primeiro grau;
3. Polinômios numa variável – tratamento elementar moderno – operações – propriedades estruturais;
4. Introdução à geometria dedutiva – elementos fundamentais: ponto, reta, plano, semi-reta, segmento, semi-plano, ângulo – congruência – estudo dos polígonos em geral e dos triângulos e quadriláteros em particular;
5. Estudo da circunferência – disco – círculo – arcos e cordas, propriedades – medida de arcos e ângulos;
6. Construções geométricas e transformações – transformações geométricas elementares: translação, rotação e simetria.

### ***Matemática: curso moderno, volume 4***

Para a 4ª Série dos Cursos Ginasiais:

1. Números reais – prática com números irracionais – radicais, potências com expoente racional relativo – operações e propriedades;
2. Equações do segundo grau – generalidades – resolução – relações entre os coeficientes e as raízes; equações biquadradas equações irracionais; sistemas simples do segundo grau – problemas;
3. Funções – domínio e conjunto-imagem; função linear e sua representação gráfica cartesiana – resolução gráfica de sistemas de equações; função trinômio do segundo grau e sua representação gráfica cartesiana; inequações do segundo grau.
4. Semelhança – razão e proporcionalidade de segmentos – Teorema de Tales –

semelhança de triângulos –semelhança de polígonos, razões trigonométricas.

5. Relações métricas – num triângulo retângulo – Teorema de Pitágoras, num triângulo qualquer – lei dos senos e lei dos co-senos; relações métricas num círculo.
6. Polígonos regulares e medida da circunferência – polígonos regulares inscritíveis e circunscritíveis numa circunferência; construção e relações métricas entre os elementos do quadrado, do triângulo equilátero, do hexágono e decágono regulares; noções sobre medida da circunferência – cálculo de  $r$ .

*Apêndice:* Números complexos; Áreas de regiões planas; Mapas topológicos.

## ANEXO J – PROPRIEDADES ESTRUTURAIS DA ADIÇÃO E DA MULTIPLICAÇÃO DE NÚMEROS RACIONAIS

Figura 27 – Fechamento e comutativa



Propriedades Estruturais.

### 3. Operações com números racionais. Propriedades estruturais

No conjunto  $Q$ , com restrições para as operações subtração e radiciação, as demais são sempre possíveis.

Analisemos as *propriedades estruturais* da adição e da multiplicação de números racionais no conjunto  $Q$ :

1.ª) **FECHAMENTO:**

*A soma de dois números racionais quaisquer é um número racional.*

Ex.:  $\frac{3}{4} + 2 = \frac{11}{4} \rightarrow \text{n.º racional}$  (Abreviatura: p. f. a.)

$\swarrow$                        $\searrow$   
 n.º racional          n.º racional

Em linguagem simbólica:

se  $\frac{a}{b} \in Q$  e  $\frac{c}{d} \in Q$  então  $\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) \in Q$

*O produto de dois números racionais quaisquer é um número racional.*

Ex.:  $\frac{3}{4} \times 2 = \frac{6}{4} \rightarrow \text{n.º racional}$  (Abreviatura: p. f. m.)

$\swarrow$                        $\searrow$   
 n.º racional          n.º racional

Em linguagem simbólica:

se  $\frac{a}{b} \in Q$  e  $\frac{c}{d} \in Q$  então  $\left(\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}\right) \in Q$

2.ª) **COMUTATIVA:**

*A ordem das parcelas não altera a soma. Abreviatura: p.c.a.*

Ex.:  $\frac{3}{4} + 2 = 2 + \frac{3}{4}$

Em linguagem simbólica:  $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{c}{d} + \frac{a}{b}$

22

**Figura 28** – Elemento neutro, associativa e distributiva da multiplicação em relação à adição

A ordem dos fatores não altera o produto. Abreviatura: **p.c.m.**

Ex.:  $\frac{3}{4} \times 2 = 2 \times \frac{3}{4}$

Em linguagem simbólica:  $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \times \frac{a}{b}$

3.<sup>a</sup>) ELEMENTO NEUTRO:

0 para a adição.....:  $\frac{2}{3} + 0 = \frac{2}{3}$  ou  $\frac{a}{b} + 0 = 0 + \frac{a}{b} = \frac{a}{b}$   
abreviatura: **e. n. a.**

1 para a multiplicação:  $\frac{2}{3} \times 1 = \frac{2}{3}$  ou  $\frac{a}{b} \times 1 = 1 \times \frac{a}{b} = \frac{a}{b}$   
abreviatura: **e. n. m.**

4.<sup>a</sup>) ASSOCIATIVA:

$$\left(\frac{4}{1} + \frac{2}{5}\right) + \frac{12}{11} = \frac{4}{1} + \left(\frac{2}{5} + \frac{12}{11}\right)$$

$$\left(\frac{4}{1} \times \frac{2}{5}\right) \times \frac{12}{11} = \frac{4}{1} \times \left(\frac{2}{5} \times \frac{12}{11}\right)$$

Em linguagem simbólica:

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) + \frac{e}{f} = \frac{a}{b} + \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right)$$

abreviatura: **p.a.a.**

$$\left(\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}\right) \times \frac{e}{f} = \frac{a}{b} \times \left(\frac{c}{d} \times \frac{e}{f}\right)$$

abreviatura: **p.a.m.**

5.<sup>a</sup>) DISTRIBUTIVA DA MULTIPLICAÇÃO em relação à adição. Abreviatura: **p.d.m.(a.)**:

$$\frac{3}{4} \times \left(\frac{8}{2} + 5\right) = \frac{3}{4} \times \frac{8}{2} + \frac{3}{4} \times 5$$

Em linguagem simbólica:

$$\frac{a}{b} \times \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right) = \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} + \frac{a}{b} \times \frac{e}{f}$$

Figura 29 – Existência do elemento inverso

Considerando o conjunto  $Q^*$  (é o conjunto  $Q$  menos o 0), você vai encontrar uma "nova" propriedade, muito importante para os estudos que virão. Trata-se da propriedade denominada EXISTÊNCIA DO ELEMENTO INVERSO. (Abreviatura: e. i. m.)

Para qualquer número racional  $\frac{a}{b}$  do conjunto  $Q^*$  existe um único número racional  $\frac{b}{a}$ , denominado *inverso multiplicativo*, tal que o produto deles é igual ao *elemento neutro* da multiplicação, isto é:

$$\frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = 1$$

Assim, por exemplo, considerando o número racional  $\frac{2}{3} \in Q^*$ , existe o número racional  $\frac{3}{2} \in Q^*$ , tal que:  $\frac{2}{3} \times \frac{3}{2} = 1$ .

Outro exemplo:

Para  $2 \in Q^*$ , existe o número racional  $\frac{1}{2} \in Q^*$ , tal que  $2 \times \frac{1}{2} = 1$ .

Fonte: Sangiorgi (1967a, p. 24).

## ANEXO K – PROPRIEDADES ESTRUTURAIS DA ADIÇÃO E DA MULTIPLICAÇÃO DE NÚMEROS REAIS

Figura 30 – Operações no conjunto dos reais e suas propriedades estruturais



2.ª Parte: - operações com números reais  
propriedades estruturais do conjunto  $\mathbb{R}$

**6. Operações no conjunto  $\mathbb{R}$**

**Operações fundamentais.** No conjunto  $\mathbb{R}$  são sempre possíveis as operações:

*adição, subtração, multiplicação, divisão (com o divisor  $\neq 0$ )*

Portanto,  $\mathbb{R}$  é *fechado* para essas operações, cujas técnicas de cálculo para os números racionais você já conhece. Algumas técnicas para operar com os números irracionais serão conhecidas por meio de exemplos.

**7. NOVIDADE: *Corpo dos números reais***

As propriedades estruturais das quatro operações conhecidas em  $\mathbb{R}$  permitem “reduzi-las” a duas fundamentais:

*adição e multiplicação*

De fato, quaisquer que sejam os números reais(\*)  $a$  e  $b$ , existe sempre

$$\begin{cases} \text{uma única SOMA: } a + b \\ \text{um único PRODUTO: } a \cdot b \end{cases}$$

com as seguintes *propriedades*:

ADIÇÃO

(A) ASSOCIATIVA: para quaisquer números reais  $a, b$  e  $c$ :

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

(\*) Subentendem-se sempre números reais *relativos*.

**21**

Figura 31 – Propriedades da adição e da multiplicação

(N) ELEMENTO NEUTRO: existe o número real 0, tal que:

$$a + 0 = a \text{ para qualquer número real } a$$

(I) ELEMENTO INVERSO (aditivo): para qualquer número real  $a$ , existe um único número real  $(-a)$ , denominado *oposto* de  $a$ , tal que:

$$a + (-a) = 0$$

(C) COMUTATIVA: para quaisquer números reais  $a$  e  $b$ :

$$a + b = b + a$$

NOTA: Estas propriedades (ANIC) dão ao conjunto  $\mathbb{R}$ , com relação à operação *adição*, uma **estrutura de Grupo Comutativo**.

### MULTIPLICAÇÃO

(A) ASSOCIATIVA: para quaisquer números reais  $a$ ,  $b$  e  $c$ :

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

(N) ELEMENTO NEUTRO: existe o número real 1, tal que:

$$a \cdot 1 = a \text{ para qualquer número real } a$$

(I) ELEMENTO INVERSO (multiplicativo): para qualquer número real  $a$ , se  $a \neq 0$ , existe um único número real  $\frac{1}{a}$ , denominado *inverso* de  $a$ , tal que:

$$a \cdot \frac{1}{a} = 1$$

(C) COMUTATIVA: para quaisquer números reais  $a$  e  $b$ :

$$a \cdot b = b \cdot a$$

NOTA: Estas propriedades (ANIC) dão ao conjunto  $\mathbb{R}^*$  (que é o conjunto  $\mathbb{R}$  privado do 0), com relação à operação *multiplicação*, uma **estrutura de Grupo Comutativo**.

Relacionando a *multiplicação* com a *adição*, em  $\mathbb{R}$ , vale ainda a seguinte propriedade:

(D) DISTRIBUTIVA: para quaisquer números reais  $a$ ,  $b$  e  $c$ :

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Figura 32 – Estrutura de corpo

Estas nove propriedades (ANIC para a adição; ANIC para a multiplicação e D da multiplicação em relação à adição) dão ao conjunto  $\mathbb{R}$ , com relação às operações *adição* e *multiplicação*, uma **estrutura de "corpo"**, que é das mais importantes em Matemática.

É fácil, agora, concluir que no *corpo* dos números reais  $\mathbb{R}$ :

- 1.º) a *subtração* de  $a$  e  $b$  é entendida como a *adição* de  $a$  com o *oposto* de  $b$  (que sempre existe!), ou seja:

$$a - b = a + (-b)$$

- 2.º) a *divisão* de  $a$  por  $b \neq 0$  é entendida como a *multiplicação* de  $a$  pelo *inverso* de  $b$  (que, por ser  $\neq 0$ , sempre existe!), isto é:

$$a : b = a \cdot \frac{1}{b}$$

Além disso, no *corpo* dos números reais vale a *propriedade de anulamento do produto*, isto é:

$$\text{se } a \cdot b = 0 \text{ então } a = 0 \text{ ou } b = 0$$

A *ordem* em  $\mathbb{R}$  é definida da seguinte maneira:

$a$  é *maior* do que  $b$  se, e somente se, existir um número real positivo  $c$ , tal que:  $a = b + c$ .

$$\text{Logo: } a > b \iff a = b + c \quad (c > 0)$$

$$\text{Se } a > b, \text{ diz-se então que } b < a.$$

