



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Campus de São José do Rio Preto

Rocío del Pilar Rojas Jara

Condições Suficientes de Otimalidade em Cálculo Variacional

São José do Rio Preto

2013

Rocío del Pilar Rojas Jara

Condições Suficientes de Otimalidade em Cálculo Variacional

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, Área de Concentração – Matemática Aplicada, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de São José do Rio Preto.

Orientador: Prof. Dr. Valeriano Antunes de Oliveira

São José do Rio Preto
2013

Rojas Jara, Rocío del Pilar.
Condições suficientes de otimalidade em cálculo variacional
/ Rocío del Pilar Rojas Jara. -- São José do Rio Preto, 2013
36 f.

Orientador: Valeriano Antunes de Oliveira
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual Paulista “Júlio de
Mesquita Filho”, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Cálculo variacional. 2. Condições de otimalidade. 3. Convexidade
generalizada I. Oliveira, Valeriano Antunes de. II. Universidade
Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho". Instituto de Biociências,
Letras e Ciências Exatas. III. Título.

CDU – 517

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do IBILCE
UNESP - Campus de São José do Rio Preto

Rocío del Pilar Rojas Jara

Condições Suficientes de Otimalidade em Cálculo Variacional

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, Área de Concentração – Matemática Aplicada, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de São José do Rio Preto.

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Valeriano Antunes de Oliveira
UNESP – São José do Rio Preto
Orientador

Prof. Dr. Geraldo Nunes Silva
UNESP – São José do Rio Preto

Prof^a. Dr^a. Lucelina Batista dos Santos
UFPR – Paraná

São José do Rio Preto
20 de dezembro de 2013

Aos meus pais, José e Miguelina,
ao meu esposo, que tem sido muito importante,
à minha filha que está por nascer,
Dedico.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus que me deu a força suficiente para a conclusão deste trabalho.

Ao meu esposo Víctor Daniel pelo apoio constante e por me animar sempre a continuar apesar dos obstáculos. Obrigada por ter me acompanhado nos momentos mais difíceis da minha vida.

Aos meus pais que sempre me apóiam em todas as decisões.

Agradeço ao Prof. Dr. Obidio Rubio Mercedes pelos seus conselhos tanto profissionais quanto pessoais.

Agradeço infinitamente ao Prof. Dr. Valeriano Antunes de Oliveira pela paciência, pela confiança e pela orientação na elaboração desta dissertação.

Ao professor Geraldo Nunes Silva por ter acreditado em minha capacidade e ter me dado a oportunidade de realizar o mestrado nesta instituição.

À CAPES pelo apoio financeiro e a todos que de alguma forma contribuíram para a realização deste trabalho.

*“ Não deixe que a saudade sufoque,
que a rotina acomode, que o medo
impeça de tentar. Desconfie do
destino e acredite em você. Gaste
mais horas realizando que sonhando,
fazendo que planejando, vivendo que
esperando porque, embora quem quase
morre esteja vivo, quem quase vive já
morreu... ”*

Luis Fernando Verissimo

Neste trabalho consideramos dois problemas variacionais com restrições Lagrangeanas do tipo $g(t, x(t), \dot{x}(t)) = 0$. Apresentamos vários resultados sobre condições suficientes de otimalidade Kuhn-Tucker supondo invexidade generalizada das funções envolvidas. Introduzimos duas definições para os problemas variacionais estudados, a primeira chamada de L-KT-pseudo-invexidade, que envolve os multiplicadores Lagrangeanos, e a segunda chamada de KT-pseudo-invexidade, que não envolve os multiplicadores Lagrangeanos. Apresentamos uma caracterização dos problemas variacionais L-KT-pseudo-invexos como sendo aqueles problemas onde todos seus pontos Kuhn-Tucker são soluções ótimas. Finalmente mostramos que, sob algumas condições, L-KT-pseudo-invexidade é equivalente a KT-pseudo-invexidade.

Palavras-chave: Cálculo Variacional, Condições de Otimalidade, Convexidade Generalizada.

ABSTRACT

In this work we consider two variational problems with Lagrangian constraints of type $g(t, x(t), \dot{x}(t)) = 0$. We present several results on sufficient conditions for Kuhn-Tucker optimality assuming generalized invexity of the functions involved. We introduce two definitions for the variational problems, the first called L-KT-pseudo-invexity, which involves the Lagrangian multipliers and the second called KT-pseudo-invexity, which does not involve the Lagrangian multipliers. We present a characterization of L-KT-pseudo-invex variational problems as those problems where all Kuhn-Tucker points are optimal solutions. Finally we show that, under some conditions, L-KT-pseudo-invexity is equivalent to KT-pseudo-invexity.

Keywords: Variational Problems, Optimality Conditions, Generalized Convexity.

SUMÁRIO

Introdução	p.9
1 Notações e Preliminares	p.12
2 Invexidade e Condições Suficientes de Otimalidade	p.17
3 Caracterização de Problemas Variacionais L-KT-Pseudo-invexos	p.24
4 KT-Pseudo-invexidade Sem Multiplicadores	p.28
Conclusões e Trabalhos Futuros	p.33
Referências Bibliográficas	p.35

INTRODUÇÃO

O Cálculo Variacional teve seu desenvolvimento inicial em grande parte devido ao problema da Braquistócrona, que foi formulado por Johann Bernoulli em 1696. Desde então vários resultados foram encontrados por alguns dos matemáticos mais destacados dos últimos 300 anos, como por exemplo: Euler, Lagrange, Legendre, Bolza, Hamilton, Bliss, Weierstrass e Jacobi. Seu estudo não só foi muito importante para a Matemática, mas também para outras áreas, como por exemplo: Física, Engenharia, Biologia e Economia, ver Barbolla et al. [2], Baumeister e Leitão [3], Troutman [27].

Problemas de Cálculo Variacional consistem na minimização (ou maximização) de funcionais definidos em espaços de dimensão infinita, em geral espaços de funções suaves, sujeito a vários tipos de restrições, como condições de contorno, restrições isoperimétricas, restrições Lagrangeanas, entre outras. Existe uma vasta bibliografia sobre as condições suficientes e necessárias de otimalidade obtidas nesta área, ver por exemplo Bliss [6], Troutman [27], Gregory e Lin [15] para resultados clássicos, e para resultados mais modernos, ver Clarke [9], Clarke et al. [10], Clarke [11]. A condição necessária clássica, bastante conhecida, é chamada Condição de Euler. Uma função que satisfaz a condição de Euler é chamada de ponto estacionário ou extremal do problema variacional. A Condição de Euler é apenas necessária à otimalidade, de modo que, nem todo extremal é solução do problema variacional. Para saber se um ponto extremal é realmente uma solução ótima do problema é necessária uma análise mais detalhada das funções que compõem o problema, a saber, condições de otimalidade de ordem superior ou hipóteses de convexidade, ver por exemplo Cesari [8], Mangasarian [19], Valentine [28].

Em Programação Matemática as condições Kuhn-Tucker são suficientes para otimalidade se as funções envolvidas são convexas. Na demonstração deste fato Hanson [16]

percebeu que podia usar certas funções mais gerais que as funções convexas, conseguindo generalizar o conceito de convexidade para funções diferenciáveis e obter resultados de otimalidade e dualidade utilizando esta nova classe de funções, a saber, as funções invexas. Em Ben-Israel e Mond [5], Craven e Glover [12] e Mond e Hanson [24] vários resultados de Programação Matemática obtidos inicialmente para funções convexas se mantêm válidos para as funções invexas. A saber, uma função diferenciável $f : S \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, onde S é um conjunto aberto de \mathbb{R}^n , é invexa, se existe uma função $\eta : S \times S \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que

$$f(x) - f(\bar{x}) \geq \nabla f(\bar{x})^T \eta(x, \bar{x}) \quad \forall x, \bar{x} \in S.$$

Em problemas de Programação Matemática com restrições a invexidade definida por Hanson é uma condição suficiente, mas não necessária para que todo ponto Kuhn-Tucker¹ seja um minimizador global. Procurando condições suficientes e necessárias de otimalidade Martin [20] definiu uma noção de invexidade mais fraca chamada Kuhn-Tucker invexidade ou KT-invexidade e demonstrou que todo problema é KT-invexo se, e somente se, todo ponto Kuhn-Tucker é uma solução ótima global.

O conceito de invexidade foi estendido para problemas variacionais por Mond et al. [23]. Podemos encontrar mais resultados de invexidade generalizada para problemas variacionais em Arana-Jiménez et al. [1] e Mond e Husain [22]. Tem-se também alguns livros publicados recentemente tratando problemas variacionais com invexidade, ver por exemplo Mishra and Giorgi [21] e Slimani and Radjef [26]. No presente trabalho tratamos alguns conceitos de invexidade em problemas variacionais. Esta dissertação está dividida em 4 capítulos.

No primeiro Capítulo apresentamos a notação a ser usada e formulamos os problemas variacionais a serem estudados. O primeiro problema é um caso particular do problema estudado em Arana-Jiménez et al. [1], e o segundo é obtido omitindo uma das restrições de fronteira do primeiro. Consideramos também neste capítulo alguns resultados importantes como as condições necessárias de otimalidade dos problemas variacionais apresentados, e o lema generalizado de du Bois-Reymond que será usado na demonstração de um dos teoremas mais importantes deste trabalho.

No Capítulo 2 apresentamos algumas definições de invexidade e invexidade generalizada tanto para o funcional quanto para a função integrando dos problemas variacionais. Utilizando estas definições apresentamos também alguns teoremas sobre condições

¹Um ponto Kuhn-Tucker de um problema de programação matemática é um ponto factível que satisfaz a condição necessária de otimalidade de primeira ordem (regra de multiplicadores de Lagrange), para mais detalhes ver Bazaraa et al. [4]

suficientes de otimalidade para um ponto estacionário tipo Kuhn-Tucker. Estes resultados estão baseados no trabalho de Mond e Husain [22].

Organizamos o Capítulo 3 apresentando primeiro a definição de L-KT-pseudo-invexidade para os problemas variacionais considerados no primeiro capítulo. Logo apresentamos um resultado que caracteriza estes problemas, a saber, os problemas variacionais são L-KT-pseudo-invexos se, e somente se, todo ponto estacionário (também chamado ponto crítico Kuhn-Tucker) é um minimizador global. Os resultados apresentados neste capítulo estão baseados no trabalho de Arana-Jiménez et al. [1] que trata problemas mais gerais, a saber, problemas com desigualdes nas restrições Lagrangeanas.

Finalmente no Capítulo 4 proponemos uma nova definição de invexidade generalizada para os problemas variacionais em estudo, esta vez sem envolver os multiplicadores Lagrangeanos, e chamamos a esta definição de KT-pseudo-invexidade. A definição de L-KT-pseudo-invexidade dada no Capítulo 3 envolve os multiplicadores Lagrangeanos e é por esse motivo que se antepõe a letra L nessa definição. O resultado mais importante deste capítulo é que, sob certas condições, se verifica a equivalência entre estas duas definições.

CAPÍTULO 1

NOTAÇÕES E PRELIMINARES

Neste capítulo apresentamos as notações a serem usadas no percurso desta dissertação. Formulamos os problemas variacionais a serem estudados, assim como algumas definições e resultados que serão utilizados nos próximos capítulos.

Consideremos $f : [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ funções continuamente diferenciáveis, exceto quando se faça menção de outras condições de regularidade. Com a finalidade de simplificar a notação usaremos $f(t, x, \dot{x})$ e $g(t, x, \dot{x})$ em lugar de $f(t, x(t), \dot{x}(t))$ e $g(t, x(t), \dot{x}(t))$ respectivamente, onde $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, com derivada \dot{x} .

Denotemos as derivadas parciais de f com respeito a t, x e \dot{x} , respectivamente, por

$$f_t, \quad f_x = [f_{x_1} \ f_{x_2} \ \dots \ f_{x_n}]^T, \quad f_{\dot{x}} = [f_{\dot{x}_1} \ f_{\dot{x}_2} \ \dots \ f_{\dot{x}_n}]^T.$$

Analogamente, denotamos as derivadas parciais de g com respeito a t, x e \dot{x} , respectivamente, por

$$g_t = \begin{bmatrix} g_t^1 \\ g_t^2 \\ \vdots \\ g_t^m \end{bmatrix}, \quad g_x = \begin{bmatrix} g_{x_1}^1 & g_{x_2}^1 & \dots & g_{x_n}^1 \\ g_{x_1}^2 & g_{x_2}^2 & \dots & g_{x_n}^2 \\ \vdots & & & \vdots \\ g_{x_1}^m & g_{x_2}^m & \dots & g_{x_n}^m \end{bmatrix}, \quad g_{\dot{x}} = \begin{bmatrix} g_{\dot{x}_1}^1 & g_{\dot{x}_2}^1 & \dots & g_{\dot{x}_n}^1 \\ g_{\dot{x}_1}^2 & g_{\dot{x}_2}^2 & \dots & g_{\dot{x}_n}^2 \\ \vdots & & & \vdots \\ g_{\dot{x}_1}^m & g_{\dot{x}_2}^m & \dots & g_{\dot{x}_n}^m \end{bmatrix},$$

onde $g = [g^1 \ g^2 \ \dots \ g^m]^T$.

Definição 1.1. Uma função escalar x é contínua por partes em $[a, b]$ se existe uma partição finita $a = c_0 < c_1 < \dots < c_{l+1} = b$ tal que $x|_{(c_k, c_{k+1})}$ é contínua para todo $k = 0, \dots, l$ e os limites laterais $x(c_k^-)$, $x(c_{k+1}^+)$ são finitos para todo $k = 1, \dots, l$. Se existem pontos interiores c_k , $k = 1, \dots, l$, onde os limites laterais de x são distintos, estes pontos são chamados pontos de descontinuidade de x .

Se x é uma função vetorial, dizemos que x é contínua por partes em $[a, b]$ se cada uma das suas coordenadas é contínua por partes em $[a, b]$. Neste caso, os pontos de descontinuidade de x são os pontos de descontinuidade de cada uma das suas coordenadas.

Observação 1.1.

- Uma função contínua por partes poderia não estar definida nos seus pontos de descontinuidade.
- Se uma função contínua por partes não estiver definida num ponto interior da partição e os limites laterais nesse ponto coincidem, podemos definir a função nesse ponto como sendo o valor dos limites laterais.

Definição 1.2. Uma função contínua $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é suave por partes se existe uma partição finita $a = c_0 < c_1 < \dots < c_{l+1} = b$ tal que $x|_{(c_k, c_{k+1})}$ é de classe C^1 para todo $k = 0, \dots, l$ e os limites laterais $\dot{x}(c_k^-)$, $\dot{x}(c_{k+1}^+)$ são finitos se c_k for um ponto interior da partição. Se neste ponto os limites laterais de \dot{x} são distintos, este é chamado ponto de descontinuidade de \dot{x} .

Se $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, dizemos que x é suave por partes se cada coordenada $x_i : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, é suave por partes. Neste caso, os pontos de descontinuidade de \dot{x} são os pontos de descontinuidade de cada \dot{x}_i .

Observação 1.2. Notemos que a derivada de uma função suave por partes é contínua por partes em $[a, b]$.

Denotamos por Y o espaço das funções vetoriais contínuas por partes em $[a, b]$ dadas por $y(t) = (y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t))$, com a norma $\|\cdot\|_\infty$.

Denotamos por X o espaço das funções suaves por partes $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ com a norma

$$\|x\| = \|x\|_\infty + \|\mathcal{D}x\|_\infty,$$

onde

$$\mathcal{D}x = y \Leftrightarrow x(t) = x(a) + \int_a^t y(s)ds \quad \forall t \in [a, b].$$

Portanto, $\mathcal{D} = \frac{d}{dt}$ exceto nas descontinuidades de \dot{x} .

Com estas notações formulamos os dois problemas variacionais a serem estudados:

$$(P_1) \left\{ \begin{array}{l} \text{Minimizar} \quad F(x) = \int_a^b f(t, x(t), \dot{x}(t))dt \\ \text{sujeito a} \quad x(a) = \alpha, x(b) = \beta \\ \quad \quad \quad g(t, x(t), \dot{x}(t)) = 0, \quad t \in (a, b) \\ \quad \quad \quad x \in X. \end{array} \right.$$

$$(P_2) \left\{ \begin{array}{l} \text{Minimizar} \quad F(x) = \int_a^b f(t, x(t), \dot{x}(t))dt \\ \text{sujeito a} \quad x(a) = \alpha \\ \quad \quad \quad g(t, x(t), \dot{x}(t)) = 0, \quad t \in (a, b) \\ \quad \quad \quad x \in X. \end{array} \right.$$

Aqui $\alpha = [\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n]^T$ e $\beta = [\beta_1 \beta_2 \dots \beta_n]^T$ são vetores em \mathbb{R}^n dados.

Denotamos por \mathcal{F}_1 e \mathcal{F}_2 os conjuntos das soluções factíveis de (P_1) e (P_2) respectivamente, i.e.,

$$\mathcal{F}_1 := \{x \in X : x(a) = \alpha, x(b) = \beta, g(t, x, \dot{x}) = 0, t \in (a, b)\},$$

$$\mathcal{F}_2 := \{x \in X : x(a) = \alpha, g(t, x, \dot{x}) = 0, t \in (a, b)\}.$$

Definição 1.3. $\bar{x} \in \mathcal{F}_i$, $i = 1$ ou $i = 2$, é uma solução ótima global ou mínimo global de (P_i) , se

$$F(\bar{x}) \leq F(x) \quad \forall x \in \mathcal{F}_i.$$

Se a desigualdade é estrita diremos que $\bar{x} \in \mathcal{F}_i$ é uma solução ótima global estrita ou mínimo global estrito de (P_i) .

Por simplicidade de notação, dado $\bar{x} \in X$, denotamos por

$$\bar{f}_x(t) = f_x(t, \bar{x}, \dot{\bar{x}}), \quad \bar{f}_{\dot{x}}(t) = f_{\dot{x}}(t, \bar{x}, \dot{\bar{x}}),$$

$$\bar{g}_x(t) = g_x(t, \bar{x}, \dot{\bar{x}}), \quad \bar{g}_{\dot{x}}(t) = g_{\dot{x}}(t, \bar{x}, \dot{\bar{x}}).$$

Observação 1.3. Notemos que as funções $f(t, x(t), \dot{x}(t))$, $g(t, x(t), \dot{x}(t))$, $f_x(t)$, $f_{\dot{x}}(t)$, $g_x(t)$ e $g_{\dot{x}}(t)$ estão definidas para todo $t \in (a, b)$ exceto, possivelmente, nas descontinui-

dades de \dot{x} . Daqui em diante consideraremos estas funções definidas em (a,b) assumindo que elas não estão definidas, possivelmente, nas descontinuidades de \dot{x} .

Apresentamos a seguir dois teoremas sobre as condições necessárias de otimalidade dos problemas (P_1) e (P_2) . Estes teoremas podem ser encontrados em Cerdá [7], Elsgoltz [13], Gregory e Lin [15], e uma demonstração detalhada em Troutman [27], Clarke [11], ou Hestenes [17].

Teorema 1.1. *Seja \bar{x} uma solução ótima de (P_1) . Suponhamos que f , f_x e $f_{\dot{x}}$ são contínuas, g é uma função de classe C^2 , e que $g_x(t, x, \dot{x})$ possui posto completo $m \leq n$ para todo (t, x, \dot{x}) tal que $g(t, x, \dot{x}) = 0$ em uma vizinhança da trajetória de \bar{x} em \mathbb{R}^{2n+1} . Então existe um escalar λ ($= 0$ ou 1) e uma função $\bar{y} \in Y$ tais que*

$$\lambda \bar{f}_x(t)^T + \bar{y}(t)^T \bar{g}_x(t) = \frac{d}{dt} \left(\lambda \bar{f}_{\dot{x}}(t)^T + \bar{y}(t)^T \bar{g}_{\dot{x}}(t) \right),$$

para todo $t \in (a, b)$ exceto, possivelmente, em descontinuidades de $\dot{\bar{x}}$.

Teorema 1.2. *Seja \bar{x} uma solução ótima de (P_2) . Suponhamos que f , f_x e $f_{\dot{x}}$ são contínuas, g é uma função de classe C^2 , e que $g_x(t, x, \dot{x})$ possui posto completo $m \leq n$ para todo (t, x, \dot{x}) tal que $g(t, x, \dot{x}) = 0$ em uma vizinhança da trajetória de \bar{x} em \mathbb{R}^{2n+1} . Então existe um escalar λ ($= 0$ ou 1) e uma função $\bar{y} \in Y$ tais que*

$$\lambda \bar{f}_x(t)^T + \bar{y}(t)^T \bar{g}_x(t) = \frac{d}{dt} \left(\lambda \bar{f}_{\dot{x}}(t)^T + \bar{y}(t)^T \bar{g}_{\dot{x}}(t) \right),$$

para todo $t \in (a, b)$ exceto, possivelmente, em descontinuidades de $\dot{\bar{x}}$, e a condição de contorno abaixo é satisfeita

$$\lambda \bar{f}_{\dot{x}}(b)^T + \bar{y}(b)^T \bar{g}_{\dot{x}}(b) = 0.$$

Observação 1.4.

- A equação diferencial nos Teoremas 1.1 e 1.2 é conhecida como a condição necessária de Euler.
- Em Hestenes [17] é demonstrado que os pontos de descontinuidade de cada componente \bar{y}_i , $i = 1, \dots, m$, da função $\bar{y} \in Y$ nos Teoremas 1.1 e 1.2, coincidem com os pontos de descontinuidade de $\dot{\bar{x}}$. Além disso é mencionado que $(\lambda, \bar{y}(t)^T) \neq 0$, $t \in [a, b]$.
- Em Hestenes [17] e Troutman [27] é demonstrado que a função $\lambda \bar{f}_{\dot{x}}(t)^T + \bar{y}(t)^T \bar{g}_{\dot{x}}(t)$ é contínua. Da condição necessária de Euler nos Teoremas 1.1 e 1.2 tem-se que

$\frac{d}{dt} \left(\lambda \bar{f}_{\dot{x}}(t)^T + \bar{y}(t)^T \bar{g}_{\dot{x}}(t) \right)$ é contínua por partes. Portanto essa função é suave por partes.

- Se $\lambda = 1$ dizemos que o problema variacional é normal, caso contrário dizemos que é anormal. O caso mais simples de um problema normal é considerando o problema (P_1) sem restrições Lagrangeanas ou com restrições do tipo $g(x(t)) = 0$, $t \in [a, b]$, ver Troutman [27].
- Mencionamos que algumas hipóteses adicionais são necessárias para garantir $\lambda = 1$. Desde que todo problema em Cálculo Variacional pode ser escrito como um problema de Controle Ótimo, citamos por exemplo o trabalho de Fontes e Lopes [14], onde encontramos as condições que devem ser satisfeitas para garantir $\lambda = 1$ em alguns problemas de Controle Ótimo. Nesta dissertação consideraremos só problemas normais.

Definição 1.4. $\bar{x} \in \mathcal{F}_1$ é chamado ponto crítico Kuhn–Tucker de (P_1) se existe uma função $\bar{y} \in Y$ tal que

$$\bar{f}_x(t)^T + \bar{y}(t)^T \bar{g}_x(t) = \frac{d}{dt} \left(\bar{f}_{\dot{x}}(t)^T + \bar{y}(t)^T \bar{g}_{\dot{x}}(t) \right), \quad (1.1)$$

para todo $t \in (a, b)$ exceto, possivelmente, em descontinuidades de $\dot{\bar{x}}$.

Definição 1.5. $\bar{x} \in \mathcal{F}_2$ é chamado ponto crítico Kuhn–Tucker de (P_2) se existe uma função $\bar{y} \in Y$ tal que a equação (1.1) é satisfeita e além disso tem-se a seguinte condição de contorno

$$\bar{f}_{\dot{x}}(b)^T + \bar{y}(b)^T \bar{g}_{\dot{x}}(b) = 0. \quad (1.2)$$

Observação 1.5. A função \bar{y} que aparece nas Definições 1.4 e 1.5 é conhecida como a função dos multiplicadores de Lagrange.

O seguinte lema, conhecido como o lema generalizado de du Bois-Reymond ou lema fundamental, será usado para demonstrar o teorema de caracterização dos problemas L-KT-pseudo-invexos no Capítulo 3. A demonstração deste teorema pode ser encontrada em Hestenes [17].

Lema 1. Sejam w_1, w_2 funções vetoriais contínuas por partes em $[a, b]$ tais que

$$\int_a^b \left(w_1(t)^T \psi(t) + w_2(t)^T \dot{\psi}(t) \right) dt = 0$$

para toda função $\psi \in X$ com $\psi(a) = 0 = \psi(b)$. Então w_2 é suave por partes e $\mathcal{D}w_2 = w_1$ em $[a, b]$.

CAPÍTULO 2

 INVEXIDADE E CONDIÇÕES SUFICIENTES DE OTIMALIDADE

Neste capítulo apresentamos inicialmente a definição de invexidade e algumas extensões deste conceito para uma função diferenciável $f : S \rightarrow \mathbb{R}$, onde S é um conjunto aberto e não vazio de \mathbb{R}^n . Logo apresentamos as definições de invexidade e invexidade generalizadas para o funcional $F(x) = \int_a^b f(t, x, \dot{x}) dt$ e para a função $f(t, x, \dot{x})$ dadas nos problemas (P_1) e (P_2) . Apresentamos também alguns teoremas sobre condições suficientes para que todo ponto crítico Kuhn-Tucker seja uma solução ótima. Estes resultados estão baseados no artigo de Mond and Husain [22].

A seguir, apresentamos as definições de invexidade e algumas extensões deste conceito no contexto da Programação Matemática. Estes conceitos foram propostos por Hanson [16].

Definição 2.1. *Uma função diferenciável $f : S \rightarrow \mathbb{R}$, onde S é um conjunto aberto de \mathbb{R}^n , é invexa se existe uma função $\eta : S \times S \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que*

$$f(x) - f(\bar{x}) \geq \nabla f(\bar{x})^T \eta(x, \bar{x}) \quad \forall x, \bar{x} \in S.$$

Definição 2.2. *Uma função diferenciável $f : S \rightarrow \mathbb{R}$, onde S é um conjunto aberto de \mathbb{R}^n , é pseudo-invexa se existe uma função $\eta : S \times S \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que*

$$f(x) < f(\bar{x}) \Rightarrow \nabla f(\bar{x})^T \eta(x, \bar{x}) < 0 \quad \forall x, \bar{x} \in S.$$

Definição 2.3. Uma função diferenciável $f : S \rightarrow \mathbb{R}$, onde S é um conjunto aberto de \mathbb{R}^n , é quase-inversa se existe uma função $\eta : S \times S \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que

$$f(x) \leq f(\bar{x}) \Rightarrow \nabla f(\bar{x})^T \eta(x, \bar{x}) \leq 0 \quad \forall x, \bar{x} \in S.$$

Observação 2.1. As Definições 2.1 a 2.3 são extensões naturais dos conceitos de convexidade, pseudo-convexidade e quase-convexidade para funções diferenciáveis, basta considerar $\eta(x, \bar{x}) = x - \bar{x}$.

Em Mishra e Giorgi [21] podemos encontrar algumas relações entre as classes das funções invexas e suas extensões, por exemplo:

1. A classe das funções invexas coincide com a classe das funções pseudo-invexas.
2. A classe das funções pseudo-invexas está contida estritamente na classe das funções quase-invexas.

Agora apresentamos as definições de inveridade e quase-inveridade para funções contínuas por partes no contexto de Cálculo Variacional. Estas definições foram propostas por Mond, Chandra e Husain [23].

Definição 2.4. A função $f(t, x(t), \dot{x}(t))$ é inversa se para todos $x, \bar{x} \in X$ existe uma função suave por partes $\eta(x, \bar{x}) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ com $\eta(x, x)(t) = 0$, $t \in [a, b]$, tal que

$$f(t, x, \dot{x}) - f(t, \bar{x}, \dot{\bar{x}}) \geq \bar{f}_x(t)^T \eta(x, \bar{x})(t) + \bar{f}_{\dot{x}}(t)^T \frac{d}{dt} \eta(x, \bar{x})(t)$$

para todo $t \in (a, b)$ exceto nas descontinuidades de $\frac{d}{dt} \eta(x, \bar{x})$.

Observação 2.2. Para manter coerência com a notação adotada no Capítulo 1, vamos escrever:

$$\begin{aligned} \eta(x, \bar{x})(t) &= \eta(t, x(t), \bar{x}(t)) = \eta(t, x, \bar{x}), \quad t \in [a, b], \\ \dot{\eta}(t, x, \bar{x}) &= \frac{d}{dt} \eta(x, \bar{x})(t) \end{aligned}$$

para todo $t \in (a, b)$ exceto nas descontinuidades de $\frac{d}{dt} \eta(x, \bar{x})$.

Definição 2.5. A função $f(t, x(t), \dot{x}(t))$ é quase-inversa se para todos $x, \bar{x} \in X$ existe uma função suave por partes $\eta(x, \bar{x}) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ com $\eta(t, x, x) = 0$, $t \in [a, b]$, tal que

$$f(t, x, \dot{x}) \leq f(t, \bar{x}, \dot{\bar{x}}) \Rightarrow \bar{f}_x(t)^T \eta(t, x, \bar{x}) + \bar{f}_{\dot{x}}(t)^T \dot{\eta}(t, x, \bar{x}) \leq 0$$

para todo $t \in (a, b)$ exceto nas descontinuidades de $\dot{\eta}$.

Podemos observar que se a função $f(t, x(t), \dot{x}(t))$ é invexa com respeito a η , então ela é quase-invexa com respeito à mesma função η .

Agora apresentamos as definições de inveridade e algumas extensões deste conceito para o funcional dos problemas variacionais estudados. Estas definições foram propostas por Mond e Husain [22].

Definição 2.6. *O funcional F é invexo se para todos $x, \bar{x} \in X$ existe uma função suave por partes $\eta(x, \bar{x}) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ com $\eta(t, x, x) = 0$, $t \in [a, b]$, tal que*

$$F(x) - F(\bar{x}) \geq \int_a^b \left(\bar{f}_x(t)^T \eta(t, x, \bar{x}) + \bar{f}_{\dot{x}}(t)^T \dot{\eta}(t, x, \bar{x}) \right) dt.$$

Observação 2.3. *Notemos que se a função $f(t, x(t), \dot{x}(t))$ é invexa com respeito a η , então o funcional F é invexo com respeito à mesma função η .*

Definição 2.7. *O funcional F é pseudo-invexo se para todos $x, \bar{x} \in X$ existe uma função suave por partes $\eta(x, \bar{x}) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ com $\eta(t, x, x) = 0$, $t \in [a, b]$, tal que*

$$F(x) < F(\bar{x}) \Rightarrow \int_a^b \left(\bar{f}_x(t)^T \eta(t, x, \bar{x}) + \bar{f}_{\dot{x}}(t)^T \dot{\eta}(t, x, \bar{x}) \right) dt < 0$$

ou equivalentemente

$$\int_a^b \left(\bar{f}_x(t)^T \eta(t, x, \bar{x}) + \bar{f}_{\dot{x}}(t)^T \dot{\eta}(t, x, \bar{x}) \right) dt \geq 0 \Rightarrow F(x) \geq F(\bar{x}).$$

Definição 2.8. *O funcional F é estritamente pseudo-invexo se para todos $x, \bar{x} \in X$ existe uma função suave por partes $\eta(x, \bar{x}) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ com $\eta(t, x, x) = 0$, $t \in [a, b]$, tal que*

$$F(x) \leq F(\bar{x}) \Rightarrow \int_a^b \left(\bar{f}_x(t)^T \eta(t, x, \bar{x}) + \bar{f}_{\dot{x}}(t)^T \dot{\eta}(t, x, \bar{x}) \right) dt < 0$$

ou equivalentemente

$$\int_a^b \left(\bar{f}_x(t)^T \eta(t, x, \bar{x}) + \bar{f}_{\dot{x}}(t)^T \dot{\eta}(t, x, \bar{x}) \right) dt \geq 0 \Rightarrow F(x) > F(\bar{x}).$$

Definição 2.9. *O funcional F é quase-invexo se para todos $x, \bar{x} \in X$ existe uma função suave por partes $\eta(x, \bar{x}) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ com $\eta(t, x, x) = 0$, $t \in [a, b]$, tal que*

$$F(x) \leq F(\bar{x}) \Rightarrow \int_a^b \left(\bar{f}_x(t)^T \eta(t, x, \bar{x}) + \bar{f}_{\dot{x}}(t)^T \dot{\eta}(t, x, \bar{x}) \right) dt \leq 0$$

ou equivalentemente

$$\int_a^b \left(\bar{f}_x(t)^T \eta(t, x, \bar{x}) + \bar{f}_{\dot{x}}(t)^T \dot{\eta}(t, x, \bar{x}) \right) dt > 0 \Rightarrow F(x) > F(\bar{x}).$$

Podemos estabelecer algumas relações entre as definições dadas para o funcional F , por exemplo:

1. Se o funcional F é invexo com respeito a η , então ele é pseudo-invexo com respeito ao mesmo η .
2. Se o funcional F é invexo com respeito a η , então ele é quase-invexo com respeito ao mesmo η .
3. Se o funcional F é estritamente pseudo-invexo com respeito a η , então ele é pseudo-invexo com respeito ao mesmo η .

Nas Definições 2.4 a 2.9 se fixamos \bar{x} e variamos $x \in X$, elas tomam o nome de invexidade, pseudo-invexidade e quase-invexidade pontual, ou seja, o funcional F é invexo, pseudo-invexo ou quase-invexo em $\bar{x} \in X$. Nos seguintes teoremas usa-se justamente este tipo de invexidade.

Teorema 2.1. *Seja \bar{x} um ponto crítico Kuhn-Tucker de (P_1) . Suponhamos que F é pseudo-invexo em \bar{x} com respeito a η , e que $g^i, -g^i$ são quase-invexas em \bar{x} com respeito a η , $i = 1, \dots, m$. Então \bar{x} é uma solução ótima global de (P_1) .*

Demonstração. *Seja $x \in \mathcal{F}_1$, então $g(t, x, \dot{x}) = 0 = g(t, \bar{x}, \dot{\bar{x}})$, $t \in (a, b)$. Dado que g^i é quase-invexo em \bar{x} com respeito a η , $i = 1, \dots, m$, existe uma função $\eta \in X$ com $\eta(t, x, x) = 0$, $t \in [a, b]$, tal que*

$$\bar{g}_x^i(t)^T \eta(t, x, \bar{x}) + \bar{g}_{\dot{x}}^i(t)^T \dot{\eta}(t, x, \bar{x}) \leq 0$$

para todo $t \in (a, b)$ exceto nas descontinuidades de $\dot{\eta}$, $i = 1, \dots, m$. Isto equivale matricialmente a

$$\bar{g}_x(t) \eta(t, x, \bar{x}) + \bar{g}_{\dot{x}}(t) \dot{\eta}(t, x, \bar{x}) \leq 0$$

para todo $t \in (a, b)$ exceto nas descontinuidades de $\dot{\eta}$.

Fazendo o mesmo para $-g^i$, $i = 1, \dots, m$, obtemos

$$\bar{g}_x(t) \eta(t, x, \bar{x}) + \bar{g}_{\dot{x}}(t) \dot{\eta}(t, x, \bar{x}) \geq 0$$

para todo $t \in (a, b)$ exceto nas descontinuidades de $\dot{\eta}$. Então

$$\bar{g}_x(t) \eta(t, x, \bar{x}) + \bar{g}_{\dot{x}}(t) \dot{\eta}(t, x, \bar{x}) = 0 \tag{2.1}$$

para todo $t \in (a, b)$ exceto nas descontinuidades de $\dot{\eta}$. Dado que \bar{x} é um ponto crítico Kuhn-Tucker de (P_1) , existe $\bar{y} \in Y$ que satisfaz a condição de Euler (1.1), assim

$$\int_a^b \left(\bar{f}_x(t)^T + \bar{y}(t)^T \bar{g}_x(t) \right) \eta(t, x, \bar{x}) dt = \int_a^b \left[\frac{d}{dt} \left(\bar{f}_x(t)^T + \bar{y}(t)^T \bar{g}_x(t) \right) \eta(t, x, \bar{x}) \right] dt. \quad (2.2)$$

Fazendo integração por partes no segundo membro da igualdade anterior e notando que $\eta(b, x(b), \bar{x}(b)) = \eta(b, x(b), x(b)) = 0 = \eta(a, x(a), x(a)) = \eta(a, x(a), \bar{x}(a))$, obtemos

$$\int_a^b \left(\bar{f}_x(t)^T + \bar{y}(t)^T \bar{g}_x(t) \right) \eta(t, x, \bar{x}) dt = - \int_a^b \left(\bar{f}_x(t)^T + \bar{y}(t)^T \bar{g}_x(t) \right) \dot{\eta}(t, x, \bar{x}) dt. \quad (2.3)$$

Ordenando termos nesta igualdade, temos que

$$\int_a^b \left(\bar{f}_x(t)^T \eta(t, x, \bar{x}) + \bar{f}_x(t)^T \dot{\eta}(t, x, \bar{x}) \right) dt = - \int_a^b \left(\bar{y}(t)^T \bar{g}_x(t) \eta(t, x, \bar{x}) + \bar{y}(t)^T \bar{g}_x(t) \dot{\eta}(t, x, \bar{x}) \right) dt. \quad (2.4)$$

Portanto da igualdade (2.1), obtemos

$$\int_a^b \left(\bar{f}_x(t)^T \eta(t, x, \bar{x}) + \bar{f}_x(t)^T \dot{\eta}(t, x, \bar{x}) \right) dt = 0.$$

Desde que F é pseudo-inverso em \bar{x} , $F(x) \geq F(\bar{x}) \forall x \in \mathcal{F}_1$. Assim \bar{x} é solução ótima global de (P_1) .

Teorema 2.2. *Seja \bar{x} um ponto crítico Kuhn-Tucker de (P_2) . Suponhamos que F é pseudo-inverso em \bar{x} com respeito a η , e que $g^i, -g^i$ são quase-inveras em \bar{x} com respeito a η , $i = 1, \dots, m$. Então \bar{x} é uma solução ótima global de (P_2) .*

Demonstração. *A prova é análoga à prova do Teorema 2.1, a única diferença é que quando fazemos integração por partes na equação (2.2), obtemos*

$$\begin{aligned} \int_a^b \left(\bar{f}_x(t)^T + \bar{y}(t)^T \bar{g}_x(t) \right) \eta(t, x, \bar{x}) dt &= \left(\bar{f}_x(b)^T + \bar{y}(b)^T \bar{g}_x(b) \right) \eta(b, x(b), \bar{x}(b)) \\ &\quad - \left(\bar{f}_x(a)^T + \bar{y}(a)^T \bar{g}_x(a) \right) \eta(a, x(a), \bar{x}(a)) \\ &\quad - \int_a^b \left(\bar{f}_x(t)^T + \bar{y}(t)^T \bar{g}_x(t) \right) \dot{\eta}(t, x, \bar{x}) dt. \end{aligned}$$

O primeiro termo do segundo membro se anula devido a que \bar{x} é um ponto crítico Kuhn-Tucker de (P_2) , e portanto satisfaz a condição de contorno (1.2), e o segundo termo se anula devido a que $\eta(a, x(a), \bar{x}(a)) = \eta(a, x(a), x(a)) = 0$, desde que $x, \bar{x} \in \mathcal{F}_2$. Note que neste caso, em geral, $\eta(b, x(b), \bar{x}(b)) \neq 0$, pois a condição de fronteira $x(b)$ em (P_2) é livre.

Observação 2.4. *Pela argumentação utilizada nas provas dos Teoremas 2.1 e 2.2, caso o multiplicador de Lagrange seja não-negativo, as conclusões ainda valem se apenas g^i é*

quase-inversa, $i = 1, \dots, m$.

O seguinte teorema mostra que a otimalidade global é mantida, se em lugar da função restrição g , uma nova função definida em termos de g é quase-inversa.

Teorema 2.3. *Seja \bar{x} um ponto crítico Kuhn-Tucker de (P_i) , $i = 1$ ou $i = 2$, com multiplicador de Lagrange \bar{y} . Suponha que F é pseudo-inverso em \bar{x} com respeito a η e que a função $\theta(\cdot, \bar{y}) : X \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:*

$$\theta(x, \bar{y}) = \int_a^b \bar{y}(t)^T g(t, x, \dot{x}) dt$$

é quase-inversa em \bar{x} com respeito a η . Então \bar{x} é uma solução ótima global de (P_i) .

Demonstração. *Seja $x \in \mathcal{F}_i$, $i = 1$ ou $i = 2$, então*

$$\int_a^b \bar{y}(t)^T g(t, x, \dot{x}) dt = 0 = \int_a^b \bar{y}(t)^T g(t, \bar{x}, \dot{\bar{x}}) dt.$$

Da quase-inverxidade de $\theta(\cdot, \bar{y})$, tem-se

$$\int_a^b \left(\bar{y}(t)^T \bar{g}_x(t) \eta(t, x, \bar{x}) + \bar{y}(t)^T \bar{g}_x(t) \dot{\eta}(t, x, \bar{x}) \right) dt \leq 0.$$

Do fato que \bar{x} é um ponto crítico Kuhn-Tucker de (P_i) e proseguindo de forma similar à demonstração do Teorema 2.1 se $i = 1$ ou Teorema 2.2 se $i = 2$, obtemos a igualdade (2.4). Por tanto

$$\int_a^b \left(\bar{f}_x(t) \eta(t, x, \bar{x}) + \bar{f}_x(t) \dot{\eta}(t, x, \bar{x}) \right) dt \geq 0.$$

Finalmente da pseudo-inverxidade de F em \bar{x} , temos que, $F(x) \geq F(\bar{x}) \forall x \in \mathcal{F}_i$.

O seguinte teorema dá condições suficientes para otimalidade global estrita de um ponto crítico Kuhn-Tucker.

Teorema 2.4. *Seja \bar{x} um ponto crítico Kuhn-Tucker de (P_i) , $i = 1$ ou $i = 2$, com multiplicador de Lagrange \bar{y} . Suponha que F é quase-inverso em \bar{x} com respeito a η e que a função $\theta(\cdot, \bar{y})$ é estritamente pseudo-inversa em \bar{x} com respeito a η . Então \bar{x} é solução ótima global estrita de (P_i) .*

Demonstração. *Seja $x \in \mathcal{F}_i$, $i = 1$ ou $i = 2$, então*

$$\int_a^b \bar{y}(t)^T g(t, x, \dot{x}) dt = 0 = \int_a^b \bar{y}(t)^T g(t, \bar{x}, \dot{\bar{x}}) dt.$$

Dado que $\theta(\cdot, \bar{y})$ é estritamente pseudo-inversa em \bar{x} , tem-se

$$\int_a^b \left(\bar{y}(t)^T \bar{g}_x(t) \eta(t, x, \bar{x}) dt + \bar{y}(t)^T \bar{g}_{\dot{x}}(t) \dot{\eta}(t, x, \bar{x}) \right) dt < 0.$$

Desde que \bar{x} um ponto crítico Kuhn-Tucker de (P_i) e de acordo com a demonstração do Teorema 2.1 se $i = 1$ ou Teorema 2.2 se $i = 2$, isto implica que

$$\int_a^b \left(\bar{f}_x(t)^T \eta(t, x, \bar{x}) + \bar{f}_{\dot{x}}(t)^T \dot{\eta}(t, x, \bar{x}) \right) dt > 0.$$

Portanto da quase-inveridade de F em \bar{x} obtemos que $F(x) > F(\bar{x}) \forall x \in \mathcal{F}_i$.

O seguinte teorema mostra que é suficiente ter a pseudo-inveridade da função Lagrangeana para obter otimalidade global de um ponto crítico Kuhn-Tucker.

Teorema 2.5. *Seja \bar{x} um ponto crítico Kuhn-Tucker de (P_i) , $i = 1$ ou $i = 2$, com multiplicador de Lagrange \bar{y} . Se a função Lagrangeana $\psi(\cdot, \bar{y}) : X \rightarrow \mathbb{R}$ definida por*

$$\psi(x, \bar{y}) = \int_a^b \left(f(t, x, \dot{x}) + \bar{y}(t)^T g(t, x, \dot{x}) \right) dt$$

é pseudo-inversa em \bar{x} com respeito a η , então \bar{x} é solução ótima global de (P_i) .

Demonstração. *Seja $x \in \mathcal{F}_i$, $i = 1$ ou $i = 2$. Do fato que \bar{x} é um ponto crítico Kuhn-Tucker de (P_i) e de acordo com as demonstrações dos Teoremas 2.1 se $i = 1$ ou Teorema 2.2 se $i = 2$, obtemos a equação (2.3), ou seja*

$$\int_a^b \left[\left(\bar{f}_x(t)^T + \bar{y}(t)^T \bar{g}_x(t) \right) \eta(t, x, \bar{x}) dt + \left(\bar{f}_{\dot{x}}(t)^T + \bar{y}(t)^T \bar{g}_{\dot{x}}(t) \right) \dot{\eta}(t, x, \bar{x}) \right] dt = 0.$$

Da pseudo-inveridade de $\psi(\cdot, \bar{y})$, tem-se

$$\psi(x, \bar{y}) \geq \psi(\bar{x}, \bar{y}) \quad \forall x \in \mathcal{F}_i,$$

i.e.,

$$\int_a^b \left(f(t, x, \dot{x}) + \bar{y}(t)^T g(t, x, \dot{x}) \right) dt \geq \int_a^b \left(f(t, \bar{x}, \dot{\bar{x}}) + \bar{y}(t)^T g(t, \bar{x}, \dot{\bar{x}}) \right) dt \quad \forall x \in \mathcal{F}_i.$$

Dado que $x, \bar{x} \in \mathcal{F}_i$, $g(t, x, \dot{x}) = 0 = g(t, \bar{x}, \dot{\bar{x}})$, $t \in (a, b)$, assim da última desigualdade obtemos que

$$F(x) \geq F(\bar{x}) \quad \forall x \in \mathcal{F}_i.$$

CAPÍTULO 3

CARACTERIZAÇÃO DE PROBLEMAS VARIACIONAIS L-KT-PSEUDO-INVEXOS

Neste capítulo apresentamos a definição de problemas variacionais L-KT-pseudo-invexos para os problemas (P_1) e (P_2) . Apresentamos também uma proposição sobre as condições suficientes para L-KT-pseudo-invexidade pontual e provamos a suficiência e necessidade para que todo ponto crítico Kuhn-Tucker seja uma solução ótima. Os resultados apresentados neste capítulo se baseiam no trabalho de Arana et al. [1].

Definição 3.1. Dizemos que o problema variacional (P_1) é L-KT-pseudo-invexo se para todos $x, \bar{x} \in \mathcal{F}_1$ com $F(x) < F(\bar{x})$ e para cada $\bar{y} \in Y$ com os mesmos pontos de descontinuidade que \bar{x} , existe uma função suave por partes $\eta(x, \bar{x}, \bar{y}) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ com $\eta(x, \bar{x}, \bar{y})(a) = 0 = \eta(x, \bar{x}, \bar{y})(b)$ tal que

$$\int_a^b \left[(\bar{f}_x(t)^T + \bar{y}(t)^T \bar{g}_x(t)) \eta(x, \bar{x}, \bar{y})(t) + (\bar{f}_{\dot{x}}(t)^T + \bar{y}(t)^T \bar{g}_{\dot{x}}(t)) \frac{d}{dt} \eta(x, \bar{x}, \bar{y})(t) \right] dt < 0. \quad (3.1)$$

Observação 3.1. Para manter coerência com a notação adotada no Capítulo 1, vamos escrever

$$\begin{aligned} \eta(x, \bar{x}, \bar{y})(t) &= \eta(t, x(t), \bar{x}(t), \bar{y}(t)) = \eta(t, x, \bar{x}, \bar{y}), \quad t \in [a, b], \\ \dot{\eta}(t, x, \bar{x}, \bar{y}) &= \frac{d}{dt} \eta(x, \bar{x}, \bar{y})(t) \end{aligned}$$

para todo $t \in (a, b)$ exceto nas descontinuidades de $\frac{d}{dt} \eta(x, \bar{x}, \bar{y})$.

Definição 3.2. Dizemos que o problema variacional (P_2) é L-KT-pseudo-invexo se para todos $x, \bar{x} \in \mathcal{F}_2$ com $F(x) < F(\bar{x})$ e para cada função $\bar{y} \in Y$ com os mesmos pontos de descontinuidade que $\dot{\bar{x}}$, tais que a condição de contorno $\bar{f}_{\dot{x}}(b)^T + \bar{y}(b)^T \bar{g}_{\dot{x}}(b) = 0$ é satisfeita, existe uma função suave por partes $\eta(x, \bar{x}, \bar{y}) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ com $\eta(a, x, \bar{x}, \bar{y}) = 0$ tal que

$$\int_a^b \left[(\bar{f}_x(t))^T + \bar{y}(t)^T \bar{g}_x(t) \right] \eta(t, x, \bar{x}, \bar{y}) + (\bar{f}_{\dot{x}}(t))^T + \bar{y}(t)^T \bar{g}_{\dot{x}}(t) \dot{\eta}(t, x, \bar{x}, \bar{y}) dt < 0.$$

Nas definições anteriores se fixamos \bar{x} e variamos $x \in \mathcal{F}_1$ e $\bar{y} \in Y$, elas tomam o nome de L-KT-pseudo-invexidade pontual.

Observação 3.2. Daqui em diante assumiremos que a função $\bar{y} \in Y$ que aparece nas Definições 3.1 e 3.2 tem os mesmos pontos de descontinuidade que $\dot{\bar{x}}$.

Os seguintes teoremas dão condições suficientes para que os problemas (P_1) e (P_2) sejam L-KT-pseudo-invexos pontualmente.

Teorema 3.1. Seja $\bar{x} \in \mathcal{F}_1$. Se para cada função $\bar{y} \in Y$ a função Lagrangeana $\psi(\cdot, \bar{y}) : X \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\psi(x, \bar{y}) = \int_a^b \left(f(t, x, \dot{x}) + \bar{y}(t)^T g(t, x, \dot{x}) \right) dt$$

é pseudo-invexo em \bar{x} , então (P_1) é L-KT-pseudo-invexo em \bar{x} .

Demonstração. Seja $\bar{y} \in Y$ tal que $\psi(x, \bar{y})$ é pseudo-invexo em \bar{x} . Tomemos $x \in \mathcal{F}_1$ com $F(x) < F(\bar{x})$, i.e.,

$$\int_a^b f(t, x, \dot{x}) dt < \int_a^b f(t, \bar{x}, \dot{\bar{x}}) dt.$$

Desde que $x, \bar{x} \in \mathcal{F}_1$, $\bar{y}(t)^T g(t, x, \dot{x}) = 0 = \bar{y}(t)^T g(t, \bar{x}, \dot{\bar{x}})$, $t \in (a, b)$. Portanto

$$\int_a^b \left(f(t, x, \dot{x}) + \bar{y}(t)^T g(t, x, \dot{x}) \right) dt < \int_a^b \left(f(t, \bar{x}, \dot{\bar{x}}) + \bar{y}(t)^T g(t, \bar{x}, \dot{\bar{x}}) \right) dt.$$

Da pseudo-invexidade pontual de $\psi(x, \bar{y})$ existe $\eta \in X$ com $\eta(t, x, \bar{x}) = 0$, $t \in [a, b]$, tal que

$$\int_a^b \left[(\bar{f}_x(t))^T + \bar{y}(t)^T \bar{g}_x(t) \right] \eta(t, x, \bar{x}) + (\bar{f}_{\dot{x}}(t))^T + \bar{y}(t)^T \bar{g}_{\dot{x}}(t) \dot{\eta}(t, x, \bar{x}) dt < 0,$$

obtendo assim que (P_1) é L-KT-pseudo-invexo com $\eta(t, x, \bar{x}, \bar{y}) = \eta(t, x, \bar{x})$.

Teorema 3.2. Seja $\bar{x} \in \mathcal{F}_2$. Se para cada função $\bar{y} \in Y$ tal que (\bar{x}, \bar{y}) satisfaz a condição de contorno (1.2) a função Lagrangeana $\psi(\cdot, \bar{y}) : X \rightarrow \mathbb{R}$ é pseudo-invexo em \bar{x} , então o problema (P_2) é L-KT-pseudo-invexo em \bar{x} .

Demonstração. A prova deste teorema é similar à prova do Teorema 3.1, basta observar que a função η encontrada satisfaz a condição de contorno da Definição 3.2, pois $\eta(a, x(a), \bar{x}(a), \bar{y}(a)) = \eta(a, x(a), \bar{x}(a)) = \eta(a, x(a), x(a)) = 0$.

O seguinte teorema caracteriza os problemas variacionais L-KT-pseudo-invexos.

Teorema 3.3. O problema (P_i) , $i = 1$ ou $i = 2$, é L-KT-pseudo-invexo se, e somente se, todos seus pontos críticos Kuhn-Tucker são soluções ótimas globais.

Demonstração. Apresentamos a prova para (P_1) , a prova para (P_2) pode ser feita de forma similar.

\Rightarrow] Seja \bar{x} um ponto crítico Kuhn-Tucker de (P_1) . Então existe $\bar{y} \in Y$ tal que (\bar{x}, \bar{y}) satisfaz a condição de Euler (1.1). Seja $x \in \mathcal{F}_1$. Desde que (P_1) é L-KT-pseudo-invexo existe $\eta \in X$ com $\eta(a, x, \bar{x}, \bar{y}) = 0 = \eta(b, x, \bar{x}, \bar{y})$ tal que se $F(x) < F(\bar{x})$ a desigualdade (3.1) é satisfeita, ou equivalentemente,

$$\int_a^b \left[(\bar{f}_x(t)^T + \bar{y}(t)^T \bar{g}_x(t)) \eta(t, x, \bar{x}, \bar{y}) + (\bar{f}_{\dot{x}}(t)^T + \bar{y}(t)^T \bar{g}_{\dot{x}}(t)) \dot{\eta}(t, x, \bar{x}, \bar{y}) \right] dt \geq 0 \quad (3.2)$$

implica em $F(x) \geq F(\bar{x})$. Aplicando integração por partes obtemos

$$\begin{aligned} & \int_a^b \left[(\bar{f}_x(t)^T + \bar{y}(t)^T \bar{g}_x(t)) \eta(t, x, \bar{x}, \bar{y}) + (\bar{f}_{\dot{x}}(t)^T + \bar{y}(t)^T \bar{g}_{\dot{x}}(t)) \dot{\eta}(t, x, \bar{x}, \bar{y}) \right] dt = \\ & \int_a^b \left[(\bar{f}_x(t)^T + \bar{y}(t)^T \bar{g}_x(t)) - \frac{d}{dt} (\bar{f}_{\dot{x}}(t)^T + \bar{y}(t)^T \bar{g}_{\dot{x}}(t)) \right] \eta(t, x, \bar{x}, \bar{y}) dt + \\ & (\bar{f}_{\dot{x}}(t)^T + \bar{y}(t)^T \bar{g}_{\dot{x}}(t)) \eta(t, x, \bar{x}, \bar{y}) \Big|_a^b = 0. \end{aligned}$$

Logo da L-KT-pseudo-invexidade de (P_1) temos que $F(x) \geq F(\bar{x}) \forall x \in \mathcal{F}_1$.

\Leftarrow] Suponhamos agora que todos os pontos críticos Kuhn-Tucker de (P_1) são soluções ótimas. Sejam $x, \bar{x} \in \mathcal{F}_1$ tais que $F(x) < F(\bar{x})$, e seja $\bar{y} \in Y$. Temos que encontrar uma função $\eta \in X$ com $\eta(a, x, \bar{x}, \bar{y}) = 0 = \eta(b, x, \bar{x}, \bar{y})$ tal que

$$\mathcal{L}(\eta) := \int_a^b \left[(\bar{f}_x(t)^T + \bar{y}(t)^T \bar{g}_x(t)) \eta(t, x, \bar{x}, \bar{y}) + (\bar{f}_{\dot{x}}(t)^T + \bar{y}(t)^T \bar{g}_{\dot{x}}(t)) \dot{\eta}(t, x, \bar{x}, \bar{y}) \right] dt < 0.$$

Suponhamos que não existe uma função $\eta \in X$ com $\eta(a) = 0 = \eta(b)$ tal que $\mathcal{L}(\eta) < 0$. Então $\mathcal{L}(\eta) > 0$ também não possui solução, pois se possuir uma solução η , $-\eta$ seria solução de $\mathcal{L}(\eta) < 0$. Portanto

$$\mathcal{L}(\eta) = \int_a^b \left[(\bar{f}_x(t)^T + \bar{y}(t)^T \bar{g}_x(t)) \eta(t, x, \bar{x}, \bar{y}) + (\bar{f}_{\dot{x}}(t)^T + \bar{y}(t)^T \bar{g}_{\dot{x}}(t)) \dot{\eta}(t, x, \bar{x}, \bar{y}) \right] dt = 0,$$

para todo $\eta \in X$ com $\eta(a, x, \bar{x}, \bar{y}) = 0 = \eta(b, x, \bar{x}, \bar{y})$. Do Lema generalizado de du Bois-Reymond, apresentado no Capítulo 1, temos que $\bar{f}_x(t)^T + \bar{y}(t)^T \bar{g}_x(t)$ é suave por partes e

$$\bar{f}_x(t)^T + \bar{y}(t)^T \bar{g}_x(t) = \frac{d}{dt} \left(\bar{f}_x(t)^T + \bar{y}(t)^T \bar{g}_x(t) \right),$$

para todo $t \in (a, b)$ exceto nas descontinuidades de $\dot{\bar{x}}$, ou seja, \bar{x} é um ponto crítico Kuhn-Tucker de (P_1) . Pela hipótese do teorema temos que todo ponto crítico Kuhn-Tucker é solução ótima, i.e., $F(\bar{x}) \leq F(x) \forall x \in \mathcal{F}_1$, o que contradiz o fato de que existe $x \in \mathcal{F}_1$ com $F(x) < F(\bar{x})$. Portanto, existe $\eta \in X$ com $\eta(a, x, \bar{x}, \bar{y}) = 0 = \eta(b, x, \bar{x}, \bar{y})$ tal que $\mathcal{L}(\eta) < 0$. Assim temos provado que o problema (P_1) é L-TK-pseudo-inverso.

Notemos que para o problema (P_2) temos que provar que existe $\eta \in X$ com $\eta(a, x, \bar{x}, \bar{y}) = 0$ tal que $\mathcal{L}(\eta) < 0$. Fazendo as mesmas suposições que para o caso anterior, obtemos $\mathcal{L}(\eta) = 0$ para todo $\eta \in X$ com $\eta(a, x, \bar{x}, \bar{y}) = 0$. Tomando em particular os η 's tais que $\eta(b, x, \bar{x}, \bar{y}) = 0$ e aplicando o Lema generalizado de du Bois-Reymond, obtemos que o problema (P_2) é L-KT-pseudo-inverso.

CAPÍTULO 4

KT-PSEUDO-INVEXIDADE SEM MULTIPLICADORES

Neste capítulo introduzimos a definição de KT-pseudo-invexidade para os problemas variacionais (P_1) e (P_2) . Esta nova definição não envolve os multiplicadores Lagrangeanos como as definições apresentadas no Capítulo 3. Mostramos que, supondo algumas condições, as definições com e sem multiplicadores são equivalentes. Portanto um resultado similar ao Teorema 3.3 é válido usando esta nova definição. Os resultados deste capítulo foram obtidos como adaptações, para casos particulares, de resultados similares para problemas de controle ótimo encontrados em de Oliveira et al. [25].

Definição 4.1. Dizemos que o problema (P_1) é KT-pseudo-invexo se para todos $x, \bar{x} \in \mathcal{F}_1$ com $F(x) < F(\bar{x})$ existe uma função suave por partes $\eta(x, \bar{x}) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ com $\eta(x, \bar{x})(a) = 0 = \eta(x, \bar{x})(b)$ tal que

$$\int_a^b \left(\bar{f}_x(t)^T \eta(x, \bar{x})(t) + \bar{f}_{\dot{x}}(t)^T \frac{d}{dt} \eta(x, \bar{x})(t) \right) dt < 0 \quad (4.1)$$

e

$$\bar{g}_x(t) \eta(x, \bar{x})(t) + \bar{g}_{\dot{x}}(t) \frac{d}{dt} \eta(x, \bar{x})(t) = 0, \quad t \in (a, b). \quad (4.2)$$

Para manter coerência com a notação adotada usaremos as notações dadas na Observação 2.1:

$$\eta(x, \bar{x}, \bar{y})(t) = \eta(t, x(t), \bar{x}(t), \bar{y}(t)) = \eta(t, x, \bar{x}, \bar{y}), \quad t \in [a, b],$$

$$\dot{\eta}(t, x, \bar{x}, \bar{y}) = \frac{d}{dt} \eta(x, \bar{x}, \bar{y})(t)$$

para todo $t \in (a, b)$ exceto nas descontinuidades de $\frac{d}{dt} \eta(x, \bar{x}, \bar{y})$.

Definição 4.2. Dizemos que o problema (P_2) é *KT-pseudo-invexo* se para todos $x, \bar{x} \in \mathcal{F}_2$ com $F(x) < F(\bar{x})$ existe uma função suave por partes $\eta(x, \bar{x}) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ com $\eta(a, x, \bar{x}) = 0$ tal que as condições (4.1) e (4.2) são satisfeitas.

Os seguintes teoremas mostram, supondo algumas condições, a equivalência entre as definições de L-KT-pseudo-invexidade e KT-pseudo-invexidade.

Teorema 4.1. Suponhamos que $f_x(t)$, $f_{\bar{x}}(t)$ são contínuas para todo $x \in \mathcal{F}_1$, $t \in [a, b]$, que $g_x(t)$, $g_{\bar{x}}(t)$ são de classe C^2 para todo $x \in \mathcal{F}_1$, $t \in [a, b]$, e que $g_{\bar{x}}(t)$ tem posto completo $m \leq n \forall x \in \mathcal{F}_1$, $t \in [a, b]$. Então o problema (P_1) é *KT-pseudo-invexo* se, e somente se, é *L-KT-pseudo-invexo*.

Demonstração. \Rightarrow] Sejam $x, \bar{x} \in \mathcal{F}_1$ tais que $F(x) < F(\bar{x})$, e seja $\bar{y} \in Y$. Da *KT-pseudo-invexidade* de (P_1) existe $\eta \in X$ com $\eta(a, x, \bar{x}) = 0 = \eta(b, x, \bar{x})$ satisfazendo (4.1) e (4.2). Então

$$\begin{aligned} 0 &> \int_a^b \left(\bar{f}_x(t)^T \eta(t, x, \bar{x}) + \bar{f}_{\bar{x}}(t)^T \dot{\eta}(t, x, \bar{x}) \right) dt + \int_a^b \bar{y}(t)^T \left(\bar{g}_x(t) \eta(t, x, \bar{x}) + \bar{g}_{\bar{x}}(t) \dot{\eta}(t, x, \bar{x}) \right) dt \\ &= \int_a^b \left[(\bar{f}_x(t)^T + \bar{y}(t)^T \bar{g}_x(t)) \eta(t, x, \bar{x}) + (\bar{f}_{\bar{x}}(t)^T + \bar{y}(t)^T \bar{g}_{\bar{x}}(t)) \dot{\eta}(t, x, \bar{x}) \right] dt. \end{aligned}$$

Portanto (P_1) é *L-KT-pseudo-invexo* com $\eta(t, x, \bar{x}, \bar{y}) = \eta(t, x, \bar{x})$.

\Leftarrow] Suponhamos que (P_1) não é *KT-pseudo-invexo*, então existem $x, \bar{x} \in \mathcal{F}_1$ com $F(x) < F(\bar{x})$ tal que para todo $\eta \in X$ com $\eta(a) = 0 = \eta(b)$ as condições (4.1) e (4.2) não são verificadas simultaneamente.

Defina

$$\psi(t, \eta, \dot{\eta}) := \bar{f}_x(t)^T \eta + \bar{f}_{\bar{x}}(t)^T \dot{\eta}, \quad t \in [a, b],$$

$$\varphi(t, \eta, \dot{\eta}) := \bar{g}_x(t) \eta + \bar{g}_{\bar{x}}(t) \dot{\eta}, \quad t \in [a, b].$$

Consideremos o seguinte problema variacional:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Minimizar} \quad \phi(\eta) = \int_a^b \psi(t, \eta(t), \dot{\eta}(t)) dt \\ \text{sujeito a} \quad \eta(a) = 0 = \eta(b) \\ \quad \quad \quad \varphi(t, \eta(t), \dot{\eta}(t)) = 0, \quad t \in (a, b) \\ \quad \quad \quad \eta \in X. \end{array} \right.$$

Notemos que $\bar{\eta} = 0$ é uma solução ótima deste problema variacional. Da hipótese as funções $\psi(t, \eta, \dot{\eta})$, $\psi_\eta(t, \eta, \dot{\eta}) = \bar{f}_x(t)$, $\psi_{\dot{\eta}}(t, \eta, \dot{\eta}) = \bar{f}_{\bar{x}}(t)$ são contínuas e $\varphi(t, \eta, \dot{\eta})$ é de classe C^2 . Dado que $\varphi_{\dot{\eta}}(t, \eta, \dot{\eta}) = \bar{g}_{\bar{x}}(t)$, onde por hipótese $\bar{g}_{\bar{x}}(t)$ tem posto completo

$m \leq n$, temos pelo Teorema 1.1 que existe uma função $\bar{y} \in Y$ tal que

$$\bar{\psi}_\eta(t)^T + \bar{y}(t)^T \bar{\varphi}_\eta(t) = \frac{d}{dt} \left(\bar{\psi}_{\dot{\eta}}(t)^T + \bar{y}(t)^T \bar{\varphi}_{\dot{\eta}}(t) \right), \quad t \in (a, b).$$

Calculando as derivadas parciais da equação anterior e avaliando em $\bar{\eta} = 0$, obtemos

$$\bar{f}_x(t)^T + \bar{y}(t)^T \bar{g}_x(t) = \frac{d}{dt} \left(\bar{f}_{\dot{x}}(t)^T + \bar{y}(t)^T \bar{g}_{\dot{x}}(t) \right), \quad t \in (a, b),$$

de modo que \bar{x} é um ponto crítico Kuhn-Tucker de (P_1) . Da hipótese (P_1) é L-KT-pseudo-inverso e pelo Teorema 3.3 \bar{x} é solução ótima de (P_1) , o que contradiz o fato que existe $x \in \mathcal{F}_1$ com $F(x) < F(\bar{x})$. Portanto (P_1) é KT-pseudo-inverso.

Teorema 4.2. Suponhamos que $f_x(t)$, $f_{\dot{x}}(t)$ são contínuas para todo $x \in \mathcal{F}_2$, $t \in (a, b)$, que $g_x(t)$, $g_{\dot{x}}(t)$ são de classe C^2 para todo $x \in \mathcal{F}_2$, $t \in (a, b)$, e que $g_{\dot{x}}(t)$ tem posto completo $m \leq n \quad \forall x \in \mathcal{F}_2$, $t \in (a, b)$. O problema (P_2) é KT-pseudo-inverso se, e somente se, é L-KT-pseudo-inverso.

Demonstração. \Rightarrow] Similar à demonstração do Teorema 4.1, com a única diferença que a função η encontrada satisfaz a condição de contorno $\eta(a, x, \bar{x}, \bar{y}) = \eta(a, x, \bar{x}) = 0$.

\Leftarrow] Procedemos também de forma análoga que o teorema anterior, só basta notar que, neste caso, o problema variacional a ser considerado é

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Minimizar } \phi(\eta) = \int_a^b \psi(t, \eta(t), \dot{\eta})(t) dt \\ \text{sujeito a } \eta(a) = 0 \\ \varphi(t, \eta(t), \dot{\eta}(t)) = 0, \quad t \in (a, b) \\ \eta \in X \end{array} \right.$$

onde $\bar{\eta} = 0$ é uma solução ótima deste o problema variacional. Pelo Teorema 1.2 temos que existe uma função $\bar{y} \in Y$ tal que

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_\eta(t)^T + \bar{y}(t)^T \bar{\varphi}_\eta(t) &= \frac{d}{dt} \left(\bar{\psi}_{\dot{\eta}}(t)^T + \bar{y}(t)^T \bar{\varphi}_{\dot{\eta}}(t) \right), \quad t \in (a, b) \\ \bar{\psi}_{\dot{\eta}}(b)^T + \bar{y}(b)^T \bar{\varphi}_{\dot{\eta}}(b) &= 0. \end{aligned}$$

Calculando as derivadas parciais das equações anteriores e avaliando em $\bar{\eta} = 0$, obtemos o seguinte sistema

$$\begin{aligned} \bar{f}_x(t)^T + \bar{y}(t)^T \bar{g}_x(t) &= \frac{d}{dt} \left(\bar{f}_{\dot{x}}(t)^T + \bar{y}(t)^T \bar{g}_{\dot{x}}(t) \right), \quad t \in (a, b) \\ \bar{f}_{\dot{x}}(b)^T + \bar{y}(b)^T \bar{g}_{\dot{x}}(b) &= 0, \end{aligned}$$

por tanto \bar{x} é um ponto crítico Kuhn-Tucker de (P_2) . Assim (P_2) é KT-pseudo-inverso.

Observação 4.1. *As hipóteses de regularidade das funções $f_x(t)$, $f_{\dot{x}}(t)$, $g_x(t)$ e $g_{\dot{x}}(t)$ e do posto completo de $g_{\dot{x}}$ nos Teoremas 4.1 e 4.2 são usadas apenas para demonstrar a volta destes teoremas, ou seja, que L-KT-pseudo-inveridade implica KT-pseudo-inveridade.*

Mostrada a equivalência entre KT-pseudo-inveridade e L-KT-pseudo-inveridade temos os seguintes resultados:

Corolário 1. *Seja $i = 1$ ou $i = 2$. Se o problema (P_i) é KT-pseudo-inverso, então todos seus pontos críticos Kuhn-Tucker são soluções ótimas.*

Demonstração. *Se o problema (P_i) é KT-pseudo-inverso temos pelo Teorema 4.1, se $i=1$, ou Teorema 4.2, se $i=2$, que o problema (P_i) é L-KT-pseudo-inverso. Logo pelo Teorema 3.3 todos seus pontos Kuhn-Tucker são soluções ótimas.*

Corolário 2. *Seja $i = 1$ ou $i = 2$. Suponhamos que $f_x(t)$, $f_{\dot{x}}(t)$ são contínuas para todo $x \in \mathcal{F}_i$, $t \in [a, b]$, que $g_x(t)$, $g_{\dot{x}}(t)$ são de classe C^2 para todo $x \in \mathcal{F}_i$, $t \in [a, b]$, e que $g_{\dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t))$ tem posto completo $m \leq n \forall x \in \mathcal{F}_i$, $t \in [a, b]$. Então, se todos os pontos críticos Kuhn-Tucker de (P_i) são soluções ótimas, o problema (P_i) é KT-pseudo-inverso.*

Demonstração. *Se todos os pontos críticos Kuhn-Tucker de (P_i) são soluções ótimas temos pelo Teorema 3.3 que (P_i) é L-KT-pseudo-inverso. Logo do Teorema 4.1, se $i=1$, ou Teorema 4.2, se $i=2$, e da observação 4.1, o problema (P_i) é KT-pseudo-inverso.*

Tendo em conta o uso das hipóteses de regularidade e do posto completo, podemos escrever os dois corolários anteriores em um só resultado como:

Corolário 3. *Seja $i = 1$ ou $i = 2$. Suponhamos que $f_x(t)$, $f_{\dot{x}}(t)$ são contínuas para todo $x \in \mathcal{F}_i$, $t \in [a, b]$, que $g_x(t)$, $g_{\dot{x}}(t)$ são de classe C^2 para todo $x \in \mathcal{F}_i$, $t \in [a, b]$, e que $g_{\dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t))$ tem posto completo $m \leq n \forall x \in \mathcal{F}_i$, $t \in [a, b]$. Então o problema (P_i) é KT-pseudo-inverso se, e somente se, todos seus pontos críticos Kuhn-Tucker são soluções ótimas.*

Demonstração. *O resultado segue da equivalência dos seguintes fatos:*

(i) *KT-pseudo-inveridade,*

(ii) *L-KT-pseudo-inveridade,*

(iii) *Todos os pontos críticos Kuhn-Tucker são soluções ótimas.*

Observação 4.2. *Notemos que o resultado de caracterização para problemas KT -pseudo-inversos (que não envolvem os multiplicadores de Lagrange em sua definição), dado no Corolário 3, exige o cumprimento das hipóteses de regularidade e posto completo para ser válido. No entanto, o resultado de caracterização para problemas L - KT -pseudo-inversos (que envolvem os multiplicadores de Lagrange em sua definição), dado no Teorema 3.3 não requer hipóteses adicionais para garantir a sua validade.*

CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

Estudamos os resultados obtidos em Mond and Husain [22] e Arana-Jiménez et al. [1] para problemas variacionais com restrições Lagrangeanas do tipo $g(t, x(t), \dot{x}(t)) \leq 0$. Em Mond and Husain [22] estudamos as condições suficientes de otimalidade tipo Kuhn-Tucker usando invexidade e invexidade generalizada das funções que compõem o problema. Neste trabalho adaptamos estes resultados para os problemas variacionais (P_1) e (P_2) com restrições Lagrangeanas $g(t, x(t), \dot{x}(t)) = 0$. Em Arana-Jiménez et al. [1] estudamos problemas variacionais L-KT-pseudo-invexos e é apresentado um teorema de caracterização para essa classe de problemas, a saber, o problema variacional é L-KT-pseudo-invexo se, e somente se, todos seus pontos críticos Kuhn-Tucker são soluções ótimas. Nesta dissertação redefinimos L-KT-pseudo-invexidade para os problemas (P_1) e (P_2) e provamos o teorema de caracterização antes mencionado usando estas definições. Finalmente com a introdução de uma nova definição de invexidade generalizada, chamada de KT-pseudo-invexidade, que não envolve os multiplicadores Lagrangeanos, provamos que KT-pseudo-invexidade implica L-KT-pseudo-invexidade. Considerando hipóteses de regularidade das funções $f_x(t)$, $f_{\dot{x}}(t)$, $g_x(t)$ e $g_{\dot{x}}(t)$, e verificando o posto completo de $g_{\dot{x}}$, provamos que L-KT-pseudo-invexidade implica KT-pseudo-invexidade. Portanto concluímos que, supondo essas hipóteses, os problemas KT-pseudo-invexos são aqueles onde todos seus pontos Kuhn-Tucker são soluções ótimas.

Como trabalhos futuros, seria interessante investigar a generalização destes resultados para o contexto não-suave. Além disso, poderíamos considerar outras variantes do problema de Cálculo Variacional, como aqueles em que as condições sobre os estados inicial e final vêm dadas na forma funcional ou ainda na forma abstrata. Não podemos deixar de mencionar também os famosos problemas isoperimétricos e os problemas variacionais

multiobjetivos, que possuem grande importância em aplicações.

Outra questão instigante é a relação das condições suficientes apresentadas aqui com outras conhecidas na literatura, tais como a condição de Weierstrass (baseada em campos de extremais e na integral invariante de Hilbert), a condição de Jacobi, condições de segunda ordem, entre outras.

Recentemente surgiu na literatura a noção de KT-invexidade de segunda ordem para problemas de programação matemática, veja Ivanov [18]. Então outra possibilidade de trabalho futuro é a generalização desta nova noção de invexidade generalizada para o contexto de Cálculo Variacional, baseando-se nas conhecidas condições (de segunda ordem) de Legendre.

Finalmente outro trabalho futuro seria investigar resultados de dualidade utilizando os conceitos de L-KT-pseudo-invexidade e KT-pseudo-invexidade propostos neste trabalho.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Arana-Jimenez, M., Osuna - Gómez, R., Ruiz - Garzón, G., Rojas - Medar, M.: On variational problems: Characterization of solution and duality, *J. Math. Anal. Appl.* 311(1), 1-12 (2005).
- [2] Barbolla, R., Cerdá, E., Sanz, P.: *Optimización. Cuestiones, ejercicios y aplicaciones a la economía*, Prentice Hall, Madrid, 2000.
- [3] Baumeister, J. and Leitão, A.: *Introdução à teoria de controle e programação dinâmica*, Projeto Euclides - IMPA, Rio de Janeiro, 2008.
- [4] Bazaraa, M.S., Sherali, H.D., Shetty, C.M.: *Nonlinear Programming: Theory and Algorithms*, Wiley, 20013.
- [5] Ben-Israel, A. and Mond, B.: What is invexity?, *J. Austral. Math. Soc. Ser. B*28, 1-9 (1986).
- [6] Bliss, G. A.: *Lectures on the Calculus of Variations*, Univ. of Chicago Press, Chicago, 1946.
- [7] Cerdá, E.: *Optimización dinámica*, Prentice Hall, Madrid, 2001.
- [8] Cesari, L.: *Optimization, Theory and Applications*, Springer - Verlag, New York, 1983.
- [9] Clarke, F. H.: *Optimization and Nonsmooth Analysis*, Wiley, New York, 1983.
- [10] Clarke, F. H., Ledyaev, Y. S., Stern, R. J., Wolenski, P.R.: *Nonsmooth Analysis and Control Theory*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 178. Springer, New York, 1998.
- [11] Clarke, F. H.: *Functional Analysis, Calculus of variations and Optimal Control*, Springer-Verlag, London, 2013.
- [12] Craven, B. D. and Glover, B. B.: Invex Funtions and Duality, *J. Austral. Math. Soc. Ser. A*39, 1 - 20 (1985).

-
- [13] Elsgoltz, L.: Ecuaciones Diferenciales y Cálculo Variacional, Editorial Mir, Moscu, 1969.
- [14] Fontes, F. and Lopes, S.: Normal forms of necessary conditions for dynamic optimization problems with pathwise inequality constraints, *J. Math. Anal. Appl.* 399, 27 - 37 (2013).
- [15] Gregory, J. and Lin, C.: *Constrained Optimization in the calculus of variations and Optimal Control theory*, Chapman and Hall, London, 1996.
- [16] Hanson, M. A.: On sufficiency of the Kuhn-Tucker conditions, *J. Math. Anal. Appl.* 80, 545 - 550 (1981).
- [17] Hestenes, M. R.: *Calculus of Variations and Optimal Control Theory*, John Wiley, New York, 1966.
- [18] Ivanov, V.: Second-order Kuhn-Tucker invex constrained problems. *J. Glob. Optim* 50, 519-529 (2011).
- [19] Mangasarian, O. L.: Sufficient conditions for the optimal control of nonlinear systems, *SIAM J. Control* 4, 139 - 152 (1966).
- [20] Martin, D. H.: The essence of invexity, *J. Optim-Theory Appl.* 47, 65 - 76 (1985).
- [21] Mishra, S. K. and Giorgi, G.: *Invexity and Optimization, Non convex Optimization and Its Applications*, vol. 88, Springer, New York (2008).
- [22] Mond, B. and Husain, I.: Sufficient Optimality Criteria and Duality for Variational Problems with Generalised Invexity, *J. Austral. Math. Soc. Ser. B*31, 108 - 121 (1989).
- [23] Mond, B. Chandra, S., Husain, I.: Duality for variational problems with invexity, *J. Math. Anal. Appl.* 134, 322 - 328 (1988).
- [24] Mond, B. and Hanson, M. A.: On Duality with Generalized Convexity, *Math. Operations-forsh. Statist. Ser. Optim.* 15, 313 - 317 (1984).
- [25] de Oliveira, V. A., Silva, G.N., Rojas-Medar, M. A.: KT-invexity in optimal control problems. *Nonlinear Anal. Theory Methods Appl.* 71, 4790-4797 (2009).
- [26] Slimani, H., Radjet, M.: *Multiobjective Programming Under Generalized Invexity*. Lap Lambert Academic Publishing, Saarbrücken, 2010.
- [27] Troutman, J. L.: *Variational Calculus and Optimal Control: Optimization with Elementary Convexity*, Springer - Verlag, New York, 1996.
- [28] Valentine, F. A.: The problem of Lagrange with differential inequalities as added side conditions, in: *Contribution to the Calculus of Variational, 1993 - 1937*, Univ. of Chicago Press, Chicago, 1937, pp. 407 - 448.

Autorizo a reprodução xerográfica para fins de pesquisa.

São José do Rio Preto, ____/____/____

Assinatura