



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"

Câmpus de São José do Rio Preto

Eduardo Caramori da Silva

Aspectos topológicos da classificação das funções de Morse e
generalizações

São José do Rio Preto
2024

Eduardo Caramori da Silva

Aspectos topológicos da classificação das funções de Morse e
generalizações

Dissertação de Mestrado apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de São José do Rio Preto.

Orientador: Prof. Dr. João Carlos Ferreira Costa

Financiadora: CAPES

São José do Rio Preto
2024

S586a Silva, Eduardo Caramori da
Aspectos topológicos da classificação das funções de Morse e generalizações / Eduardo Caramori da Silva. -- São José do Rio Preto, 2024
109 p. : il.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp), Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas, São José do Rio Preto
Orientador: João Carlos Ferreira Costa

1. Singularidades (Matemática). 2. Topologia diferencial. 3. Teoria de Morse. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas, São José do Rio Preto. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

Eduardo Caramori da Silva

Aspectos topológicos da classificação das funções de Morse e
generalizações

Dissertação de Mestrado apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Câmpus de São José do Rio Preto.

Financiadora: CAPES

Comissão Examinadora

Prof. Dr. João Carlos Ferreira Costa
Orientador

Profa. Dra. Ingrid Sofia Meza Sarmiento
Instituto de Matemática e Computação - Universidade Federal de Itajubá

Profa. Dra. Maria Gorete Carreira Andrade
Departamento de Matemática - UNESP - Câmpus de São José do Rio Preto

São José do Rio Preto
23 de fevereiro de 2024

À minha família e aos meus amigos.

AGRADECIMENTOS

Pretendo, por meio deste singelo texto, deixar meus mais sinceros agradecimentos àqueles que, de uma maneira ou de outra, participaram da confecção deste trabalho.

Início agradecendo à minha família, pelo apoio constante, e por terem me dado, sempre, condições para que eu pudesse trilhar o caminho dos estudos.

Estendo esses agradecimentos aos meus professores, de maneira geral, que forneceram uma base sólida sobre a qual eu pude me apoiar com segurança.

Em particular, agradeço ao meu orientador, Prof. Dr. João Carlos Ferreira Costa, que, com orientação dedicada, amigável e segura, logrou transformar nossas ideias nesta dissertação.

Não posso deixar de agradecer à Prof^a. Dr.^a Maria Gorete Carreira Andrade, pelos ensinamentos e entusiasmo passados durante as aulas de Topologia, das quais me lembro com muito carinho. E, é claro, por ter aceitado ser membro da banca que avalia este feito.

Em sequência, à Prof^a. Dr.^a. Ingrid Sofia Meza Sarmiento, que, além do aceite em participar da banca avaliadora, mostrou interesse em nosso trabalho.

À Dona Mirian, companhia de muitos anos, que tem feito a trilha sonora desta aventura e de muitas outras.

Aos amigos que fiz nesta casa, o Ibilce, que se fizeram companhia quase diária: Aldimir, Gi, Leo, Linara, Lucas e Sérgio. Aos companheiros de pós-graduação, em especial àqueles que estiveram comigo neste último ano: Gabriel, João, Maycon, Murilo e Vitor. Não posso de fazer menção, é claro, à Raquel e ao Paulo, pela amizade e pelo apoio, mesmo que à distância. É com grande satisfação e alegria que tenho todos ao meu lado.

Finalmente, agradeço ao Prof. Dr. Sebastião Antônio Izar, que, sem saber, foi uma grande bússola para que este trabalho encontrasse seu caminho.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Modest doubt is called the beacon of the wise.
William Shakespeare

RESUMO

Este trabalho apresenta um teorema de classificação para funções de Morse definidas em superfícies fechadas orientáveis. Para o desenvolvimento da teoria, são utilizadas ferramentas da topologia algébrica e diferencial. É introduzido o grafo de Reeb associado a uma função de Morse, que resulta ser um invariante das classes de equivalência de tais funções. São apresentadas suas principais propriedades e, além disso, apontadas algumas possíveis generalizações para o problema.

Palavras-chave: Funções de Morse. Grafos de Reeb. Classificação.

ABSTRACT

This work presents a classification theorem for Morse functions defined on orientable closed surfaces. To develop the theory, tools from algebraic and differential topology are used. It is introduced the Reeb graph associated to a Morse function, which results to be an invariant of the equivalence classes of such functions. Its main properties are stated and, in addition, some possible generalizations for the problem are highlighted.

Keywords: Morse functions. Reeb graphs. Classification.

Lista de Figuras

2.1	O toro como espaço quociente.	16
2.2	O disco com dois buracos tem o mesmo tipo de homotopia que a figura “oito”.	17
2.3	Homotopia de laços.	19
2.4	Adjunção do espaço X ao espaço Y ao longo de A pela aplicação f	23
3.1	Mudança de coordenadas.	27
3.2	Ponto interior e ponto de bordo em uma variedade com bordo.	28
3.3	Aplicação diferenciável entre variedades.	29
3.4	O toro pinçado.	34
3.5	Faixa do Möbius.	39
3.6	Ilustração do Teorema 3.86.	44
3.7	Tríada diferenciável.	47
3.8	Colagem de tríadas.	48
3.9	Soma conexa de superfícies.	49
3.10	Difeomorfismo que preserva orientação.	51
4.1	Função altura na esfera	52
4.2	Função altura no toro.	53
4.3	Níveis críticos: à esquerda, o caso em que $ind_f(p) = 0$ ou 2 ; à direita, em que $ind_f(p) = 1$	57
4.4	Cobordismo elementar orientável bidimensional de índice 1	64
4.5	Escolha do ε para a construção do mergulho característico.	64
4.6	Mergulho característico à esquerda para um ponto de índice 1 em dimensão 2	65
4.7	Obtenção do toro \mathbb{T}^2 por meio de uma cirurgia do tipo $(2, 1)$ a partir da esfera \mathbb{S}^2	66
4.8	Obtenção da garrafa de Klein \mathbb{K} também por meio de uma cirurgia do tipo $(2, 1)$ a partir de \mathbb{S}^2	66
4.9	Mergulho sobre a circunferência, cuja imagem é a união disjunta de dois arcos.	67
4.10	A variedade $\mathcal{X}(\mathbb{S}^1, \phi)$ é a união disjunta de duas circunferências.	68
4.11	A variedade $\mathcal{W}(\mathbb{S}^1, \phi)$ terá a forma de um par de calças.	68
4.12	Construção da esfera no Teorema 4.33.	71
4.13	Representação dos objetos do Teorema 4.34.	72
4.14	Um ponto tem o mesmo tipo de homotopia que um disco.	72
4.15	Um disco com um 1-célula anexada tem o mesmo tipo de homotopia que um cilindro.	72

4.16	Um cilindro com uma 1-célula anexada tem o mesmo tipo de homotopia que um toro menos um disco.	73
4.17	Anexando-se uma 2-célula a um toro menos um disco se obtém o toro completo.	73
5.1	Um grafo árvore.	78
5.2	O grafo das Pontes de Königsberg.	78
5.3	Grafos completos.	78
5.4	Representação planar do grafo K_4	79
5.5	Grafos que são homeomorfos, mas não são isomorfos.	79
5.6	O espaço de Reeb não é um grafo.	83
5.7	Grafo de Reeb associado à função altura na esfera S^2	83
5.8	Grafo de Reeb associado à função altura no toro T^2	83
5.9	Grafos de Reeb isomorfos, porém não-equivalentes.	84
5.10	Possíveis configurações para grafos de Reeb em cobordismos elementares orientáveis de dimensão dois: à esquerda em pontos de centro (mínimo ou máximo), à direita em pontos de sela.	85
5.11	Funções não-equivalentes com grafos isomorfos	87
5.12	Decomposição das superfícies em cobordismos.	91
5.13	Funções não-estáveis com grafos isomorfos	93
6.1	O número de componentes conexas de $f^{-1}(c)$ pode ser estritamente menor do que o de $f^{-1}(c + \varepsilon)$	96
6.2	Visualização da construção do grafo de Reeb associado à função altura no toro.	97
7.1	O grafo de Reeb generalizado de uma projeção radial sobre a esfera.	103
7.2	Grafo de Reeb clássico de uma aplicação da esfera a valores na circunferência.	103

Sumário

1	Introdução	13
2	Tópicos da Topologia Algébrica	15
2.1	Espaços quocientes	15
2.2	Homotopia e o grupo fundamental	17
2.3	Homologia singular	19
2.4	Espaços de adjunção	22
2.5	CW-complexos	23
3	Noções de Topologia Diferencial	26
3.1	Variedades e estruturas diferenciáveis	26
3.2	Espaço tangente e aplicações diferenciáveis	28
3.3	Submersões, imersões e subvariedades	32
3.4	Variedades quociente	34
3.5	Os teoremas de Sard e de Whitney	35
3.6	O fibrado tangente e campos de vetores	36
3.7	Orientabilidade	39
3.8	Espaço de jatos e topologias de Whitney	40
3.9	Equivalência de aplicações	41
3.10	Sobre funções a valores reais	43
3.11	Cobordismos	46
3.12	Variedades bidimensionais	48
3.13	Isotopias da circunferência	50
4	Teoria de Morse	52
4.1	Funções de Morse	52
4.2	Existência e estabilidade de funções de Morse	59
4.3	Funções de Morse em cobordismos	61
4.4	Cirurgias e mergulhos característicos	64
4.5	Aplicações à topologia das variedades	70
4.6	Funções de Morse-Bott	74
5	A classificação das funções de Morse	77
5.1	Algumas generalidades sobre grafos	77
5.2	O grafo de Reeb	81
5.3	O grafo de Reeb como invariante	86
5.4	O teorema de classificação	88

6	A topologia dos grafos de Reeb	94
6.1	Condições para que o espaço de Reeb seja um grafo finito	94
6.2	Sobre o número de ciclos	97
6.3	Problemas de realização	100
7	Sobre aplicações a valores na circunferência	101
7.1	Aplicações de Morse circulares	101
7.2	Classificação de aplicações	103
7.3	Problemas de realização	104
8	Considerações finais	105
	Referências	106

1 Introdução

Problemas de classificação aparecem em diversos ramos da Matemática. Alguns exemplos são: a classificação das variedades em Topologia Diferencial; a classificação dos grupos cíclicos em Álgebra; a classificação dos germes finitamente determinados em Teoria das Singularidades, entre outros.

Abordamos neste trabalho um problema de classificação relacionando a Topologia com a Teoria das Singularidades. Nosso foco é investigar o problema da classificação de certas funções diferenciáveis definidas em variedades diferenciáveis a valores reais. Esse tipo de investigação pode ter um caráter local ou global.

Quando nos referimos à classificação local, visamos descrever o comportamento das funções no entorno de um ponto. Há dois casos possíveis: ou esse ponto é regular ou é singular.

No caso em que o ponto é regular, os três grandes teoremas da Análise, a saber, o Teorema da Aplicação Inversa, a Forma Local das Imersões e a Forma Local das Submersões, esgotam a descrição local das aplicações diferenciáveis entre variedades na vizinhança desse ponto.

A Teoria das Singularidades se encarrega, naturalmente, de classificar as aplicações no entorno de um ponto singular. Por intempérie, existem diversas naturezas para um ponto singular. Nos ocuparemos aqui, daqueles de natureza mais simples: os não-degenerados.

Marston Morse desenvolveu uma teoria, hoje chamada de Teoria de Morse, que relaciona funções diferenciáveis com pontos críticos não-degenerados à topologia da variedade onde tais funções estão definidas. Em 1925, demonstrou o célebre Lema de Morse, que pode ser considerado um dos primeiros resultados da Teoria das Singularidades.

O Lema de Morse transforma o problema de classificação de pontos críticos não-degenerados em um problema da Álgebra Linear: a classificação das formas quadráticas não-degeneradas. Este problema é resolvido por um resultado conhecido por Lei da Inércia de Sylvester, que classifica as formas quadráticas pelo seu índice. Em outras palavras, na vizinhança de um ponto crítico não-degenerado, a função diferenciável assume uma forma do tipo $-x_1^2 - \dots - x_\lambda^2 + x_{\lambda+1}^2 + \dots + x_m^2$, onde m é a dimensão da variedade onde a função está definida e λ é o índice da forma quadrática associada.

As funções cujos pontos singulares são todos não-degenerados levam então o nome de *funções de Morse*. O nosso trabalho se preocupa em classificar tais funções, mas agora do ponto de vista global. Essa classificação será feita através de uma equivalência via mudanças de coordenadas na fonte e na meta por difeomorfismos.

Entretanto, ao investigar a classificação global, o problema se torna mais laborioso. A Topologia, em muitos contextos, faz o papel de passar do problema local ao problema global; neste trabalho, não é diferente.

Ao procurar um critério que determine se duas funções de Morse são equivalentes

ou não, um certo invariante combinatorial aparece: o *grafo de Reeb*. Além disso, esse invariante resulta ser completo sob algumas hipóteses. Isto é, para que duas funções sejam equivalentes, é necessário e suficiente que seus respectivos grafos de Reeb sejam equivalentes em um sentido a ser definido.

Os grafos de Reeb desempenham um papel de destaque não só para a classificação topológica das funções de Morse, como também em outras classificações. Por exemplo, para caracterizar a classificação topológica, via conjugação, de funções de Morse-Bott; ou em Sistemas Dinâmicos, para a classificação das funções de Lyapunov.

Tais grafos estão presentes também em outros ramos da matemática, como a Análise Topológica de Dados e a Computação Gráfica.

Muitos questionamentos a respeito do grafo de Reeb podem ser feitos, e trazemos neste trabalho respostas a alguns deles.

Esta dissertação está dividida em seis capítulos, que tentam torná-lo tão autossuficiente quanto seja possível, sem, é claro, perder o foco do trabalho e torná-lo uma leitura demasiadamente desgastante.

Nos Capítulos 2 e 3, desenvolvemos conteúdos preparatórios ao que será apresentado nos capítulos seguintes, relacionados à Topologia Algébrica e Diferencial, respectivamente. Fazemos uma abordagem concisa de temas como homotopia, homologia e, de forma mais ampla, das variedades diferenciáveis.

O Capítulo 4 traz uma descrição sistemática das funções de Morse, apresentando suas principais características e relações com a topologia das variedades. Além disso, uma das possíveis generalizações para as funções de Morse, chamadas de funções de Morse-Bott, é posta de maneira breve.

Já o Capítulo 5, que compõe o objeto principal de nosso estudo, desenvolve a teoria dos grafos de Reeb associados a funções de Morse e provê um teorema de classificação de tais funções definidas em superfícies orientáveis.

Finalmente, os Capítulos 6 e 7 expõem outras direções relacionadas ao uso dos grafos de Reeb para o estudo de funções diferenciáveis.

No Capítulo 6, uma condição necessária e suficiente para que o espaço de Reeb de uma função diferenciáveis seja, de fato, um grafo, é demonstrada. Além disso, mostramos algumas comparações entre o número de ciclos do grafo e o gênero das superfícies. Apontamos ainda alguns problemas de realização para grafos de Reeb.

O Capítulo 7 evidencia temas recentes da pesquisa, agora voltada às aplicações que tomam valores na circunferência. Mostramos um breve paralelo, para este caso, às questões abordadas anteriormente no trabalho, tais como problemas de classificação e de realização de grafos.

2 Tópicos da Topologia Algébrica

Apresentamos neste capítulo tópicos basilares da Topologia Algébrica que se farão presentes no decorrer do trabalho. O material base para este capítulo se encontra em [Dugundji 1966], [Lima 2018], [Massey 1991], [Munkres 2000] e [Vick 1994].

2.1 Espaços quocientes

Definição 2.1 (Relação de equivalência). Dado um conjunto X não-vazio, uma relação de equivalência sobre X é um subconjunto $R \subseteq X \times X$ que satisfaz:

1. $(x, x) \in R$ para todo $x \in X$;
2. $(x, y) \in R$ implica que $(y, x) \in R$, para quaisquer que sejam $x, y \in X$;
3. Se (x, y) e (y, z) pertencem a R , então (x, z) deverá pertencer a R , para todos $x, y, z \in X$.

Quando $(x, y) \in R$, dizemos que x é R -relacionado a y e denotamos tal fato por xRy .

Definição 2.2 (Classe de equivalência e conjunto quociente). Quando se tem uma relação de equivalência R sobre um conjunto X , fica bem definida a *classe de equivalência de um elemento* x como sendo o conjunto $[x] = \{y \in X \mid xRy\}$. É chamado de *conjunto quociente* a coleção de todas as classes de equivalência; isto é, $\frac{X}{R} = \{[x] \mid x \in X\}$.

Fica claro que as classes de equivalência formam uma partição do conjunto X .

Definição 2.3 (Aplicação compatível com relações de equivalência). Sejam X e Y conjuntos não-vazios e R e R' relações de equivalência sobre X e Y , respectivamente. Uma aplicação $f: X \rightarrow Y$ é dita ser *compatível às relações* R e R' se $(x, y) \in R$ implicar que $(f(x), f(y)) \in R'$, para quaisquer que sejam $x, y \in X$.

Exemplo 2.4. Seja X um conjunto não-vazio. A coleção $\Delta = \{(x, x) \in X \times X\}$ é uma relação de equivalência sobre X . Denomina-se *relação identidade*.

É natural o surgimento da aplicação

$$q: X \rightarrow \frac{X}{R} \\ x \mapsto [x]$$

chamada *projeção ao quociente*.

Quando X tem estrutura de espaço topológico, o conjunto quociente $\frac{X}{R}$ herda uma estrutura semelhante:

Proposição 2.5. *Seja (X, τ) um espaço topológico e R uma relação de equivalência sobre X . A coleção*

$$\tau_R = \left\{ V \subset \frac{X}{R} \mid q^{-1}(V) \in \tau \right\}$$

é a topologia mais fina que torna a projeção ao quociente contínua.

Em vista da Proposição 2.5, define-se:

Definição 2.6 (Topologia quociente e espaço quociente). A topologia τ_R sobre $\frac{X}{R}$ é chamada de *topologia quociente*. O espaço topológico $(\frac{X}{R}, \tau_R)$ é chamado de *espaço quociente*.

Proposição 2.7. *Sejam X e Y espaços topológicos e R uma relação de equivalência sobre X . Para que uma aplicação $f: \frac{X}{R} \rightarrow Y$ seja contínua, é necessário e suficiente que $f \circ q: X \rightarrow Y$ seja contínua.*

Exemplo 2.8. Seja $X = [0, 1] \times [0, 1]$ e considere sobre X a relação de equivalência R dada por

$$\begin{aligned} (x, 0)R(x, 1) \\ (0, y)R(1, y) \end{aligned}$$

para quaisquer que sejam $x, y \in [0, 1]$.

O espaço quociente $\frac{X}{R}$ é homeomorfo ao toro $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.

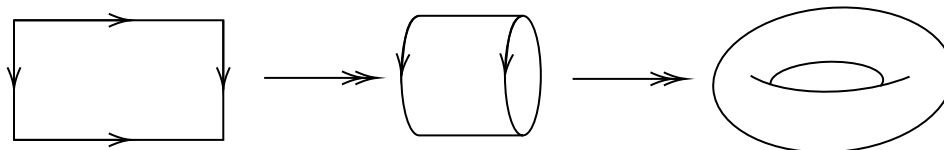


Figura 2.1: O toro como espaço quociente.

A projeção ao quociente, em geral, não é uma aplicação aberta.

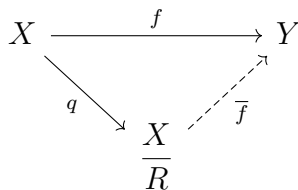
Embora certas propriedades topológicas de X sejam herdadas por $\frac{X}{R}$, tais como a compacidade e a conexidade, outras propriedades não são.

Teorema 2.9. *Sejam X um espaço de Hausdorff compacto e R uma relação de equivalência sobre X . O espaço quociente $\frac{X}{R}$ é de Hausdorff se, e somente se, a projeção ao quociente $q: X \rightarrow \frac{X}{R}$ for uma aplicação fechada.*

Temos ainda o seguinte resultado:

Proposição 2.10. *Seja $f: X \rightarrow Y$ uma aplicação contínua entre espaços topológicos. Tem-se que:*

1. *O conjunto $R_f = \{(x, y) \in X \times X \mid f(x) = f(y)\}$ é uma relação de equivalência sobre X ;*
2. *Existe uma única aplicação contínua $\bar{f}: \frac{X}{R} \rightarrow Y$ tal que $\bar{f} \circ q = f$. Além disso, \bar{f} é bijetiva;*
3. *Se a aplicação f for aberta e sobrejetora, então \bar{f} é um homeomorfismo.*



2.2 Homotopia e o grupo fundamental

Definição 2.11 (Homotopia). Sejam $f, g: X \rightarrow Y$ aplicações contínuas entre espaços topológicos. Dizemos que f é *homotópica* a g se existir uma aplicação contínua

$$H: X \times [0, 1] \rightarrow Y,$$

chamada de *homotopia*, tal que

$$H(x, 0) = f(x)$$

e

$$H(x, 1) = g(x),$$

para qualquer que seja $x \in X$.

Geometricamente, duas aplicações são homotópicas se uma puder ser “deformada continuamente” até outra. A relação de duas aplicações serem homotópicas é uma relação de equivalência no conjunto $C^0(X, Y)$ das aplicações contínuas de X em Y . Denotaremos o fato das aplicações f e g serem homotópicas por $f \cong g$.

Definição 2.12 (Tipo de Homotopia). Dizemos que dois espaços topológicos X e Y têm o mesmo tipo de homotopia se existirem aplicações contínuas $f: X \rightarrow Y$ e $g: Y \rightarrow X$ de forma que:

$$g \circ f \cong Id_X$$

$$f \circ g \cong Id_Y$$

As aplicações f e g são chamadas de *equivalências homotópicas* entre os espaços X e Y . A aplicação g é chamada de *inversa homotópica de f* , e vice-versa.

Note que se dois espaços são homeomorfos, então eles têm necessariamente o mesmo tipo de homotopia. O inverso não é válido.

Exemplo 2.13. Note que o disco com dois buracos e a figura “oito” claramente não são homeomorfos, mas têm o mesmo tipo de homotopia.

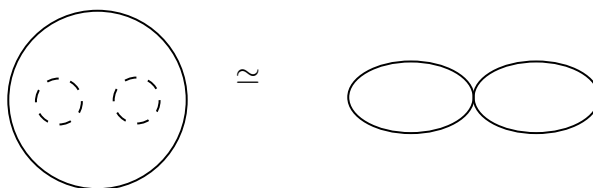


Figura 2.2: O disco com dois buracos tem o mesmo tipo de homotopia que a figura “oito”.

Definição 2.14 (Retração). Seja X um espaço topológico e $A \subset X$ um subespaço. Dizemos que A é um *retrato* de X se existir uma aplicação contínua, chamada *retração*, $r: X \rightarrow A$ tal que $r|_A = Id_A$.

Definição 2.15 (Retrato por deformação). Dado um espaço topológico X , um subespaço A de X é um *retrato por deformação* de X se existir uma retração $r: X \rightarrow A$ que seja homotópica à aplicação identidade Id_X .

Proposição 2.16. *Se A é retrato por deformação de X , então A e X têm o mesmo tipo de homotopia.*

A definição de retrato por deformação abstrai a ideia de “encolher” o espaço X até o subespaço A .

Um espaço que tem o mesmo tipo de homotopia que um ponto é chamado de *espaço contrátil*. As bolas abertas do espaço euclidiano são os exemplos canônicos de espaços contráteis.

Caminhamos agora para a instância onde a Álgebra se relaciona com a Topologia.

Definição 2.17 (Caminho e caminho inverso). Sejam x_0 e x_1 pertencentes a um espaço topológico X . Um *caminho que liga x_0 a x_1* é uma aplicação contínua $\alpha: [0, 1] \rightarrow X$ tal que $\alpha(0) = x_0$ e $\alpha(1) = x_1$. Para um caminho $\alpha(t)$ em X , chamamos de *caminho inverso de α* o caminho $\alpha^{-1}(t)$ dado por $\alpha^{-1}(t) = \alpha(1 - t)$.

A ideia é que α^{-1} percorra o mesmo trajeto que α , porém em sentido contrário. Se α liga x_0 a x_1 , então α^{-1} liga x_1 a x_0 .

Note que, apesar da notação α^{-1} , esta não é a aplicação inversa de α , uma vez que possivelmente esta sequer exista.

Definição 2.18 (Justaposição de caminhos). Sejam $\alpha, \gamma: [0, 1] \rightarrow X$ caminhos em um espaço topológico X tais que $\alpha(1) = \gamma(0)$. Chamaremos de *caminho justaposto de α por γ* o caminho $\alpha * \gamma: [0, 1] \rightarrow X$ dado por

$$(\alpha * \gamma)(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \gamma(2t - 1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

A aplicação $\alpha * \gamma$ está bem definida e é contínua. Além disso, note que o ponto de origem e o ponto de término de $\alpha * \gamma$ são, respectivamente, o ponto de origem de α e o ponto de término de γ . Temos ainda que se α liga x_0 a x_1 , então $\alpha * \alpha^{-1}$ que tem x_0 como ponto de origem e como ponto de término, sendo assim homotópico ao caminho constante em x_0 .

Definição 2.19 (Laço). Dado um espaço topológico X e um ponto $x_0 \in X$, um *laço com base em x_0* é um caminho que liga x_0 ao próprio x_0 . Ou seja, uma aplicação contínua $\alpha: [0, 1] \rightarrow X$ tal que $\alpha(0) = \alpha(1) = x_0$.

Considere agora $\mathcal{L}(X, x_0)$ o conjunto de todos os laços com base em x_0 . Sobre este conjunto, definimos a relação de equivalência R por: $\alpha R \gamma$ se existe uma homotopia $H: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ entre α e γ tal que $H(0, s) = x_0 = H(1, s)$ para todo $s \in [0, 1]$. Observamos que $s \in [0, 1]$ é um parâmetro da homotopia H , e não dos caminhos γ e α . Nestas condições dizemos que α é homotópica a γ *relativamente ao ponto x_0* .

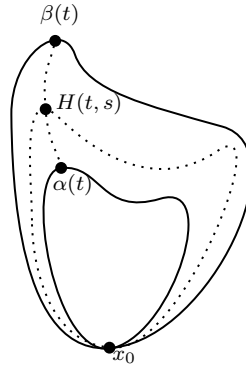


Figura 2.3: Homotopia de laços.

Proposição 2.20. *O sistema formado pelo conjunto quociente $\pi_1(X, x_0) = \frac{\mathcal{L}(X, x_0)}{R}$ dado pela relação de equivalência descrita anteriormente, juntamente com a operação*

$$\begin{aligned} \cdot : \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(X, x_0) &\rightarrow \pi_1(X, x_0) \\ ([\alpha], [\gamma]) &\mapsto [\alpha] \cdot [\gamma] = [\alpha * \gamma] \end{aligned}$$

tem estrutura de grupo, e é chamado de grupo fundamental de X com base em x_0 .

Em geral, o grupo fundamental não é abeliano.

Proposição 2.21. *Seja X um espaço topológico conexo por caminhos. Dados dois pontos x_0, x_1 quaisquer em X , então $\pi_1(X, x_0)$ é isomorfo a $\pi_1(X, x_1)$.*

Em virtude da Proposição 2.21, quando X é conexo por caminhos, faz sentido nos referirmos ao grupo fundamental apenas por $\pi_1(X)$, uma vez que, independentemente do ponto base, todos serão isomorfos.

Proposição 2.22. *Sejam X e Y espaços conexos por caminhos e $f: X \rightarrow Y$ uma aplicação contínua. A aplicação $f_\# : \pi_1(X) \rightarrow \pi_1(Y)$ dada por*

$$f_\#([\alpha]) = [f \circ \alpha]$$

está bem definida e é um homomorfismo de grupos. A aplicação $f_\#$ é chamada de homomorfismo induzido pela aplicação contínua f .

Proposição 2.23. *Sejam X e Y espaços conexos por caminhos e $f: X \rightarrow Y$ aplicação contínua. Se f é uma equivalência homotópica, então $f_\# : \pi_1(X) \rightarrow \pi_1(Y)$ é um isomorfismo de grupos.*

2.3 Homologia singular

Definição 2.24 (Simplexo padrão). Um p -simplexo padrão é o subespaço

$$\Delta_p = \left\{ (t_0, t_1, \dots, t_p) \in \mathbb{R}^{p+1} \mid t_i \geq 0 \forall i \in \{0, \dots, p\} \text{ e } \sum_{i=0}^p t_i = 1 \right\}.$$

Os pontos $x_0 = (1, 0, \dots, 0)$, $x_1 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, \dots , $x_p = (0, \dots, 1)$ são chamados de *vértices* de Δ_p . Ordenando os vértices desta maneira, obtemos um *simplexo ordenado*. Nos referiremos aos simplexos padrões simplesmente por *simplexos*.

O subconjunto de Δ_p dado por

$$\{(t_0, \dots, t_p) \in \Delta_p \mid t_i = 0\}$$

é chamado de *i-ésima face* de Δ_p . Toda face de um p -simplexo é um $(p-1)$ -simplexo.

Definição 2.25 (Simplexo singular). Dado um espaço topológico X , um *p-simplexo singular* em X é uma aplicação contínua $\phi_p: \Delta_p \rightarrow X$.

Exemplo 2.26. Um 0-simplexo singular é a aplicação constante

$$\phi_0: \Delta_0 \rightarrow X,$$

onde $\Delta_0 = \{1\} \subset \mathbb{R}$. Assim, há tantos 0-simplexos singulares em X quanto forem seus pontos.

Exemplo 2.27. Analogamente, um 1-simplexo singular é uma aplicação contínua

$$\phi_1: \Delta_1 \rightarrow X.$$

Uma vez que Δ_1 é um segmento de reta, logo homeomorfo ao intervalo $[0, 1]$, pode-se entender os 1-simplexos singulares como caminhos no espaço X .

Consideremos a aplicação $F_p^i: \Delta_{p-1} \rightarrow \Delta_p$ definida por

$$F_p^i(x_1, \dots, x_{p-1}) = (x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_i, \dots, x_{p-1}).$$

Dado um p -simplexo singular ϕ em um espaço topológico X , a composição

$$\phi \circ F_p^i: \Delta_{p-1} \rightarrow X$$

determina um $(p-1)$ -simplexo singular em X .

Dado um espaço topológico X , denotaremos por $S_n(X)$ o grupo abeliano livre gerado por todos os n -simplexos singulares em X . Isto é, $S_n(X)$ é gerado pela coleção

$$\{\phi_n: \Delta_n \rightarrow X \mid \phi_n \text{ é contínua}\}.$$

Um elemento de $S_n(X)$ é chamado de *n-cadeia singular*. Cada elemento de $S_n(X)$ é uma combinação linear formal de n -simplexos singulares com coeficientes inteiros.

Definição 2.28 (Operador bordo). O homomorfismo $\partial_n: S_n(X) \rightarrow S_{n-1}(X)$ dado por

$$\partial_n(\phi) = \sum_{i=0}^n (-1)^i (\phi \circ F_n^i)$$

definido nos geradores e estendido por linearidade, é chamado de *operador bordo*.

Proposição 2.29. *A sequência*

$$S_{n+1}(X) \xrightarrow{\partial_{n+1}} S_n(X) \xrightarrow{\partial_n} S_{n-1}(X)$$

é *semi-exata* para todo $n \in \mathbb{N}$. Ou seja, $\partial_n \circ \partial_{n-1} = 0$.

Desta forma, temos que $\ker \partial_{n+1} \subseteq \text{Im } \partial_n$. Denotamos por

$$\begin{aligned} Z_n(X) &= \ker \partial_n \\ B_n(X) &= \text{Im } \partial_{n+1}. \end{aligned}$$

Cada elemento de $Z_n(X)$ é chamado de um n -ciclo, assim $Z_n(X)$ é o grupo abeliano dos n -ciclos em X . Analogamente, cada elemento de $B_n(X)$ é chamado de n -bordo e $B_n(X)$ é o grupo abeliano dos n -bordos em X .

Uma vez que $B_n(X) \subseteq Z_n(X)$, faz sentido definirmos:

Definição 2.30 (Grupos de homologia). Dado X um espaço topológico, definimos o n -ésimo grupo de homologia singular de X por

$$H_n(X) = \frac{Z_n(X)}{B_n(X)}.$$

Intuitivamente, os grupos de homologia singular em X detectam os n -ciclos que não são n -bordos. Desta maneira, são medidos, informalmente, os “buracos” n -dimensionais em X .

Proposição 2.31. *Se X é conexo por caminhos, então $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$.*

Proposição 2.32. *Se X é um espaço topológico e $\{X_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ é a coleção das componentes conexas por caminhos de X , então*

$$H_n(X) \cong \bigoplus_{\alpha \in \Lambda} H_n(X_\alpha),$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Corolário 2.33. *Se X é um espaço topológico e $\{X_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ é a coleção das componentes conexas por caminhos de X , então*

$$H_0(X) \cong \bigoplus_{\alpha \in \Lambda} \mathbb{Z}.$$

Sejam X e Y espaços topológicos e $f: X \rightarrow Y$ uma aplicação contínua. Dado um n -simplexo singular em X $\phi: \Delta_n \rightarrow X$, a aplicação $f_\# = f \circ \phi$ é um n -simplexo singular em Y . Isso pode ser estendido de maneira única a um homomorfismo $f_\#: S_n(X) \rightarrow S_n(Y)$, para cada n .

Daí teremos que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} S_n(X) & \xrightarrow{f_\#} & S_n(Y) \\ \partial_n \downarrow & & \downarrow \partial_n \\ S_{n-1}(X) & \xrightarrow{f_\#} & S_{n-1}(Y) \end{array}$$

comuta.

Assim, existe um homomorfismo $f_{\#,n}: H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$, chamado de *homomorfismo induzido em homologia pela aplicação f* .

Teorema 2.34. *Sejam X e Y espaços topológicos. Se $f: X \rightarrow Y$ é uma equivalência homotópica, então o homomorfismo induzido*

$$f_{\#,n}: H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$$

é um isomorfismo de grupos, para qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$.

Corolário 2.35. *Os grupos de homologia são invariantes topológicos.*

Há ainda uma relação entre o grupo fundamental e o primeiro grupo de homologia de um espaço topológico X . Tal relação é evidenciada pelo:

Teorema 2.36 (Teorema de Hurewicz). *Dado um espaço topológico X conexo por caminhos, existe um isomorfismo*

$$\bar{h}: \pi_1(X)_{ab} \rightarrow H_1(X),$$

chamado de isomorfismo de Hurewicz, onde $\pi_1(X)_{ab}$ é a abelinização de $\pi_1(X)$.

Para mais detalhes, consulte [Vick 1994]. Observamos ainda que há outras teorias de homologia, cada qual melhor adaptada a um certo tipo de espaço, como a Homologia Simplicial para espaços trianguláveis ou a Homologia Celular para CW-complexos, que serão definidos posteriormente neste mesmo capítulo. Optamos por apresentar a Homologia Singular, pois é uma teoria mais geral que pode ser utilizada para estudar qualquer tipo de espaço topológico.

Definição 2.37 (Números de Betti). Para espaços X tais que os grupos de homologia $H_n(X)$ sejam finitamente gerados, estão bem definidos os *números de Betti* de X como

$$\beta_i(X) = \text{rank} H_i(X).$$

Em particular, o número de Betti de grau 0, $\beta_0(X)$, é o número de componentes conexas por caminhos de X .

2.4 Espaços de adjunção

Os espaços de adjunção são uma construção em Topologia, que nos permite obter um novo espaço topológico, a partir de outros previamente dados, “colando continuamente” um a outro.

Definição 2.38 (União disjunta). Seja $\{X_i\}_{i \in \Lambda}$ uma família de conjuntos não-vazios. Chama-se *união disjunta da família* $\{X_i\}_{i \in \Lambda}$ o conjunto

$$\bigsqcup_{i \in \Lambda} X_i = \bigcup_{i \in \Lambda} \{i\} \times X_i = \bigcup_{i \in \Lambda} \{(i, x) \mid x \in X_i\}.$$

Dada uma família $\{X_i\}_{i \in \Lambda}$, ficam bem definidas as *injeções canônicas*

$$\begin{aligned} \varphi_i: X_i &\rightarrow \bigsqcup_{i \in \Lambda} X_i \\ &x \mapsto (i, x) \end{aligned}$$

para cada $i \in \Lambda$.

No caso em que se tem uma família $\{(X_i, \tau_i)\}_{i \in \Lambda}$ de espaços topológicos, chama-se *topologia da união disjunta* a topologia co-induzida sobre $\bigsqcup_{i \in \Lambda} X_i$ pela família $\{\varphi_i\}_{i \in \Lambda}$ das injeções canônicas; isto é, a topologia mais fina que torna todas as injeções contínuas.

Se o conjunto de índices $\Lambda = \{1, \dots, n\}$ é finito, denota-se a união disjunta por $X_1 \sqcup X_2 \sqcup \dots \sqcup X_n$.

É comum encontrar na literatura o nome “união disjunta”, ou ainda “soma topológica”, de espaços topológicos X e Y fazendo referência ao conjunto $X \cup Y$ quando $X \cap Y = \emptyset$. Como, neste caso, há um homeomorfismo entre $X \cup Y$ e $(\{0\} \times X) \cup (\{1\} \times Y)$, utilizaremos o mesmo símbolo \sqcup para representar a soma topológica dos espaços X e Y .

Definição 2.39 (Espaço de adjunção). Sejam X e Y espaços topológicos, A um subespaço de X e $f: X \rightarrow Y$ uma aplicação contínua. Sobre $X \sqcup Y$ munido da topologia da união disjunta, considere R a relação de equivalência dada por $(0, x)R(1, f(x))$ para todo $x \in A$. O espaço quociente $\frac{X \sqcup Y}{R}$ é chamado de *espaço de adjunção de X e Y ao longo de A pela aplicação f* e é denotado por $X \cup_f Y$.

Sobre o espaço $X \cup_f Y$, coloca-se a topologia quociente induzida pela relação R .

Geometricamente, esta operação tem o resultado de colar X a Y sobre os pontos de A . Veja a figura a seguir:

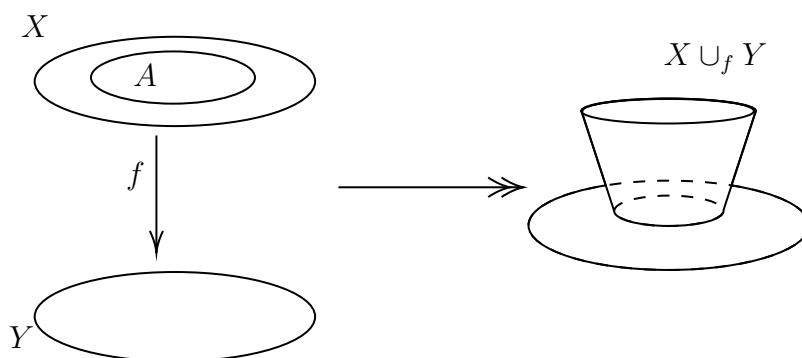


Figura 2.4: Adjunção do espaço X ao espaço Y ao longo de A pela aplicação f .

2.5 CW-complexos

Um caso particular dos espaços de adjunção são os chamados CW-complexos, muito presentes na Topologia Algébrica, especialmente na Teoria da Homotopia.

Denotaremos por

$$D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\}$$

$$\overline{D}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$$

respectivamente, os *discos n -dimensionais aberto e fechado de centro na origem e raio unitário*.

Mais geralmente, dado $r > 0$, poderemos nos referir ao conjunto

$$B_r^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < r\}$$

como *disco n -dimensional centrado na origem e de raio r* . É fácil ver que B_r^n e D^n são homeomorfos, para qualquer que seja o raio r escolhido.

Note que $\partial \overline{D}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\} = \mathbb{S}^{n-1}$, ou seja, a fronteira de um disco n -dimensional é a esfera $(n - 1)$ -dimensional.

Definição 2.40 (Célula). Uma n -célula aberta em um espaço topológico X é um subespaço $e^n \subset X$ homeomorfo ao disco aberto D^n . De maneira similar, uma n -célula fechada é um subespaço \bar{e}^n homeomorfo ao disco fechado \bar{D}^n .

Anexar uma célula e^n a um espaço X significa colar \bar{D}^n a X ao longo de \mathbb{S}^{n-1} por uma aplicação contínua $f: \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow X$, chamada de *aplicação de colagem*, no sentido dos espaços de adjunção da seção anterior. Denotamos por $X \cup_f e^n$ o espaço obtido.

Definição 2.41 (CW-complexo). Um espaço topológico de Hausdorff X é um *CW-complexo* se existir uma cadeia de inclusões

$$X_0 \subseteq X_1 \subseteq \dots \subseteq X$$

tal que:

1. X_0 é um subespaço discreto;
2. X_n é obtido a partir de X_{n-1} colando-se n -células;
3. $A \subset X$ é fechado quando $A \cap \bar{e}^n$ é fechado para qualquer célula fechada \bar{e}^n .

A condição 3 da definição acima determina a topologia do espaço X , chamada de *topologia fraca* ou *topologia de Whitehead*. Cada X_n da cadeia de inclusões é chamado de n -esqueleto de X . Um CW-complexo X é n -dimensional se X coincide com seu n -esqueleto. Em particular, levam o nome de *grafo* os CW-complexos unidimensionais.

A sequência $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ de n -esqueletos chama-se *decomposição celular* do espaço X . Um CW-complexo é então nada menos que um espaço topológico que admite uma decomposição celular.

Um CW-complexo é *finito* se é constituído de um número finito de células. Neste caso, a condição da topologia fraca é imediatamente satisfeita. Prova-se que para que um CW-complexo seja compacto, é necessário e suficiente que seja finito.

Uma classe especial de CW-complexos são os complexos simpliciais, isto é, os espaços trianguláveis. Um complexo simplicial se decompõe trivialmente em coleções de simplexes, que formam a sua decomposição celular.

Exemplo 2.42. A esfera \mathbb{S}^n pode ser vista como um CW-complexo n -dimensional. Basta considerar $X_0 = \{p\}$ e colar a X_0 uma n -célula pela aplicação constante $f: \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow X_0$. Daí, $\mathbb{S}^n = X_0 \cup_f e^n$.

Proposição 2.43. *Sejam $f, g: \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow X$ aplicações homotópicas. A aplicação identidade de X se estende a uma equivalência homotópica*

$$k: X \cup_f e^n \rightarrow X \cup_g e^n.$$

Proposição 2.44. *Seja $\varphi: \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow X$ uma aplicação de colagem. Toda equivalência homotópica $f: X \rightarrow Y$ se estende a uma equivalência homotópica*

$$F: X \cup_{\varphi} e^n \rightarrow Y \cup_{f \circ \varphi} e^n.$$

Definição 2.45 (Aplicação celular). Sejam X e Y CW-complexos, sendo $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ e $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ suas respectivas decomposições celulares. Uma aplicação contínua $f: X \rightarrow Y$ é uma *aplicação celular* se $f(X_n) \subseteq Y_n$ para todo $n = 0, 1, \dots$

Teorema 2.46 (Teorema da aproximação celular). *Sejam X e Y CW-complexos. Dada uma aplicação contínua $f: X \rightarrow Y$, existe uma aplicação celular $g: X \rightarrow Y$ que é homotópica a f .*

Definição 2.47 (Característica de Euler). Dado um CW-complexo finito m -dimensional X , denotamos por σ_i o número de i -células que compõem X . Definimos por

$$\chi(X) = \sum_{i=0}^m (-1)^i \sigma_i$$

a *característica de Euler* de X .

Na linguagem da homologia, a característica de Euler de um CW-complexo pode ser calculada em função de seus números de Betti.

Teorema 2.48. *Dado X um CW-complexo finito m -dimensional, tem-se que*

$$\chi(X) = \sum_{i=1}^m (-1)^i \beta_i(X),$$

onde $\beta_i(X)$ é o i -ésimo número de Betti de X ; ou seja, $\beta_i = \text{rank} H_i(X)$, onde $H_i(X)$ é o i -ésimo grupo de homologia de X .

Corolário 2.49. *A característica de Euler dos CW-complexos é invariante por homotopia.*

3 Noções de Topologia Diferencial

Bem se sabe que a Topologia é o campo da Matemática que estuda espaços topológicos e aplicações contínuas. As variedades diferenciáveis são, essencialmente, espaços topológicos que se parecem localmente a um espaço euclidiano, onde, com uma estrutura adequada, é possível realizar cálculo diferencial. Por toda a extensão do trabalho, assumiremos que as variedades diferenciáveis e as aplicações diferenciáveis sejam de classe C^∞ . Nos baseamos principalmente em [Hirsch 1976], [Lee 2012] e [Lima 2011], com exceção das seções que façam referência explícita a outros materiais.

3.1 Variedades e estruturas diferenciáveis

Definição 3.1 (Carta e atlas). Uma *carta de dimensão m* sobre um espaço topológico M é uma aplicação contínua $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^m$, onde U é um aberto de M , que é um homeomorfismo sobre a sua imagem $\varphi(U)$. Um *atlas de dimensão m* sobre um espaço topológico M é uma coleção $\mathfrak{A} = \{\varphi_i: U_i \rightarrow \mathbb{R}^m \mid \varphi_i \text{ é carta e } \cup_{i \in \Lambda} U_i = M\}$, onde i pertence a um conjunto de índices Λ .

Definição 3.2 (Variedade topológica). Uma variedade topológica de dimensão m é um par (M, \mathfrak{A}) , onde M é um espaço topológico de Hausdorff com base enumerável, e \mathfrak{A} é um atlas de dimensão m sobre M .

Frequentemente denotamos por M^m o fato de M ser uma variedade munida de um atlas de dimensão m .

Dada uma variedade topológica M^m , sendo $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $\psi: V \rightarrow \mathbb{R}^m$ cartas tais que $U \cap V \neq \emptyset$, fica bem definida a aplicação

$$\xi = \psi \circ \varphi^{-1}: \varphi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V),$$

chamada de *mudança de coordenadas*. É claro que $\xi: \varphi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$ é um homeomorfismo.

Definição 3.3 (Estrutura diferenciável). Seja (M^m, \mathfrak{A}) uma variedade topológica. Dizemos que \mathfrak{A} é uma *estrutura diferenciável sobre M* se:

1. Para quaisquer cartas $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $\psi: V \rightarrow \mathbb{R}^m$ tais que $U \cap V \neq \emptyset$, tem-se que a mudança de coordenadas $\xi: \varphi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$ é uma aplicação diferenciável entre abertos do espaço euclidiano \mathbb{R}^m ;
2. Se $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ é uma carta pertencente à coleção \mathfrak{A} , $\psi: V \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação contínua que é homeomorfismo sobre a imagem, são tais que $U \cap V \neq \emptyset$ e a mudança de coordenadas $\xi: \varphi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$ é diferenciável, então ψ pertence à coleção \mathfrak{A} .

Definição 3.4 (Variedade diferenciável). Uma *variedade diferenciável de dimensão m* é uma variedade topológica (M, \mathfrak{A}) de dimensão m , onde \mathfrak{A} é uma estrutura diferenciável.

Neste caso, as mudanças de coordenadas tornam-se difeomorfismos entre abertos de \mathbb{R}^m . Nos referiremos tacitamente às variedades diferenciáveis apenas por “variedades”. Indicaremos que M é uma variedade de dimensão m , ora por M^m , ora por $\dim(M) = m$.

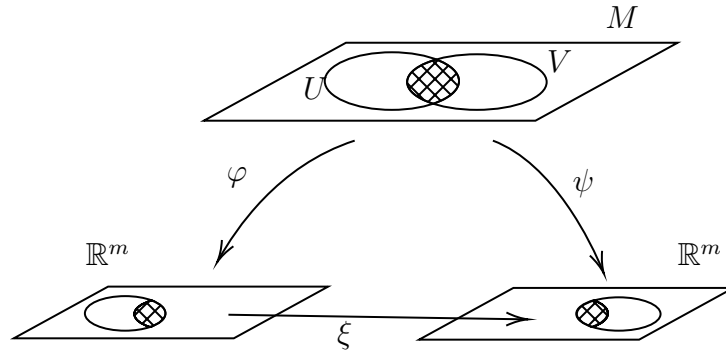


Figura 3.1: Mudança de coordenadas.

Observamos que nem toda variedade topológica admite uma estrutura diferenciável. Sendo assim, existem variedades topológicas que não são variedades diferenciáveis. Veja [Kervaire 1960].

Exemplo 3.5 (Espaços euclidianos). O espaço euclidiano \mathbb{R}^m é uma variedade diferenciável de dimensão m , onde a estrutura diferenciável é dada pelo atlas formado pelas aplicações identidade de seus abertos.

Exemplo 3.6 (Espaços vetoriais de dimensão finita). Se V é um espaço vetorial normado real de dimensão m , então V é uma variedade diferenciável de dimensão m , onde o atlas é formado pelo isomorfismo canônico de V em \mathbb{R}^m .

Exemplo 3.7 (Esferas). A esfera $\mathbb{S}^m = \{(x_1, \dots, x_{m+1}) \in \mathbb{R}^{m+1} \mid \sum_{i=1}^{m+1} x_i^2 = 1\}$ é uma variedade diferenciável de dimensão m , onde o atlas é formado pelas projeções estereográficas.

Exemplo 3.8 (Abertos em variedades). Se M^m é uma variedade diferenciável, então todo aberto U de M é uma variedade diferenciável de dimensão m .

Exemplo 3.9 (Variedades produto). Se (M^m, \mathfrak{A}) e (N^n, \mathfrak{B}) são variedades diferenciáveis, então $M \times N$ é uma variedade diferenciável de dimensão $(m + n)$, onde o atlas é a coleção $\{\varphi \times \psi: U \times V \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \mid \varphi \in \mathfrak{A} \text{ e } \psi \in \mathfrak{B}\}$.

Exemplo 3.10 (Toro). O toro de dimensão m é a variedade produto $\mathbb{T}^m = \mathbb{S}^1 \times \dots \times \mathbb{S}^1$ formada por m parcelas de \mathbb{S}^1 .

Uma extensão muito natural das variedades diferenciáveis é a das *variedades com bordo*, que não se incluem na definição dada há pouco.

Denotemos por $\mathbb{H}^m = \{(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m \mid x_m \geq 0\}$ o semi-espaço superior munido da topologia de subespaço.

Definição 3.11 (Variedade com bordo). Uma *variedade com bordo* de dimensão m , é um par (M, \mathfrak{A}) , onde M é um espaço topológico de Hausdorff com base enumerável e \mathfrak{A} é uma estrutura diferenciável sobre M , onde suas cartas tomam valores em \mathbb{H}^m .

Note que, uma vez que \mathbb{H}^m não é aberto em \mathbb{R}^m , dada uma carta $\varphi: U \subset M \rightarrow \mathbb{H}^m$, há, essencialmente, duas situações possíveis:

1. $\varphi(U)$ é aberto em \mathbb{R}^m ;
2. $\varphi(U)$ é aberto em \mathbb{H}^m , mas não em \mathbb{R}^m .

Na primeira situação, nada mudou. Pontos de M que possuem vizinhanças U tais que $\varphi(U)$ é aberto em \mathbb{R}^m são chamados de *pontos interiores* de M . Denotamos por $\text{Int}(M)$ o conjunto de todos os pontos interiores de M .

Já na segunda situação, os pontos de M que possuem vizinhanças U tais que $\varphi(U)$ não é aberto em \mathbb{R}^m são chamados de *pontos de bordo* de M . Denota-se por ∂M o conjunto de todos os pontos de bordo, e nos referimos a ∂M simplesmente por *bordo de M* .

Uma variedade com bordo M cujo bordo é vazio não é diferente de uma variedade dada como na Definição 3.4.

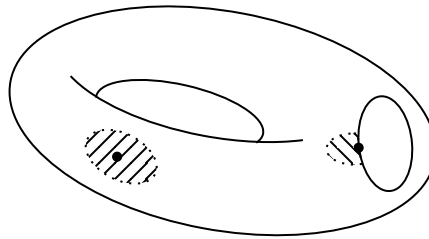


Figura 3.2: Ponto interior e ponto de bordo em uma variedade com bordo.

Exemplo 3.12 (Semi-espaço superior). O semi-espaço superior \mathbb{H}^m é uma variedade com bordo de dimensão m .

Definição 3.13 (Variedade fechada). Uma *variedade fechada* é uma variedade compacta cujo bordo é vazio.

Salvo em menção contrária, as variedades serão consideradas sem bordo.

3.2 Espaço tangente e aplicações diferenciáveis

Definição 3.14 (Aplicação diferenciável). Sejam M^m e N^n variedades e $f: M \rightarrow N$ uma aplicação. Dizemos que f é *diferenciável em um ponto* $p \in M$ se existirem cartas $\varphi: U \subset M \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $\psi: V \subset N \rightarrow \mathbb{R}^n$, com $p \in U$ e $f(p) \in V$, tais que a composta $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}: \varphi(U) \rightarrow \psi(V)$ seja diferenciável em $\varphi(p)$. Dizemos simplesmente que f é *diferenciável* quando for diferenciável em todos os pontos de M .

A definição acima independe da escolha das cartas φ e ψ . Chamamos de *expressão local* de f nas cartas φ e ψ a aplicação $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$.

No caso em uma das variedades M ou N é um espaço euclidiano, não há necessidade de se tomar uma carta para esta variedade, uma vez que as cartas dos espaços euclidianos são as aplicações identidade.

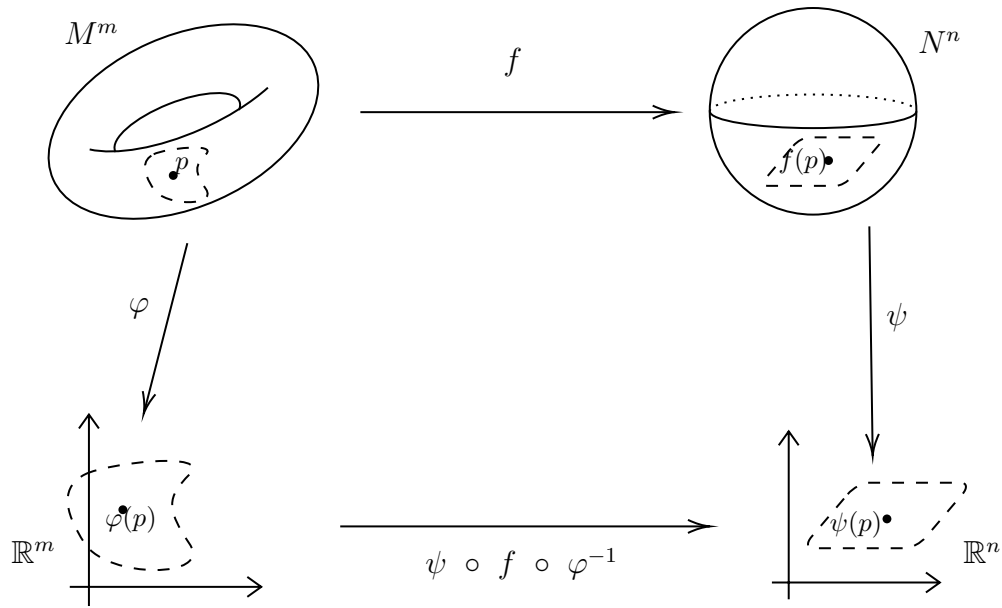


Figura 3.3: Aplicação diferenciável entre variedades.

Dadas duas variedades M e N , denotaremos por $C^\infty(M, N)$ o conjunto de todas as aplicações diferenciáveis de M e N . Em geral, chamaremos de *função* uma aplicação cujo contra-domínio seja \mathbb{R} .

Exemplo 3.15. Se M uma variedade de dimensão m , qualquer carta $\varphi: U \subset M \rightarrow \mathbb{R}^m$ é uma aplicação diferenciável. Além disso, φ é um difeomorfismo sobre a sua imagem $\varphi(U)$.

Proposição 3.16. Se $f: M^m \rightarrow N^n$ é uma aplicação diferenciável entre as variedades M^m e N^n , então f é contínua.

Definição 3.17 (Difeomorfismo). Uma bijeção diferenciável $f: M \rightarrow N$ é um *difeomorfismo* se a sua inversa $f^{-1}: N \rightarrow M$ for também diferenciável. Nesse caso, dizemos que M e N são *difeomorfas*.

Se \mathfrak{A} e \mathfrak{B} são duas estruturas diferenciáveis sobre a mesma variedade topológica M , dizemos que \mathfrak{A} e \mathfrak{B} são *equivalentes* se existir um difeomorfismo $(M, \mathfrak{A}) \rightarrow (M, \mathfrak{B})$. Se \mathfrak{A} é uma estrutura diferenciável sobre a variedade topológica M , e $h: M \rightarrow M$ é um homeomorfismo que não é difeomorfismo, então a coleção $\mathfrak{B} = \{\varphi \circ h \mid \varphi \in \mathfrak{A}\}$ é uma estrutura diferenciável sobre M tal que $h: (M, \mathfrak{B}) \rightarrow (M, \mathfrak{A})$ é um difeomorfismo; isto é, \mathfrak{A} e \mathfrak{B} são equivalentes.

Denotamos por $Diff(M)$ o conjunto de todos os difeomorfismos de M em si própria. Nota-se ainda que $Diff(M)$ tem estrutura de grupo não-abeliano com a operação de composição de aplicações.

O conjunto $C^\infty(M, \mathbb{R})$ das funções diferenciáveis definidas em uma variedade M tem estrutura de uma álgebra real.

Como a definição de variedade diferenciável é abstrata, isto é, não faz menção a um espaço euclidiano onde esteja inserida, se faz necessário que a definição de vetor tangente também seja dada de forma abstrata, uma vez que não dispomos de um espaço ambiente. Assim, definiremos os vetores tangentes a variedades por meio de derivações.

Definição 3.18 (Derivação em um ponto). Sejam M uma variedade e $p \in M$. Uma *derivação em p* é uma transformação linear $v: C^\infty(M, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz

$$v(f \cdot g) = f(p) \cdot v(g) + g(p) \cdot v(f).$$

A condição dada na definição acima é chamada de *regra de Leibniz*.

Definição 3.19 (Espaço tangente). Sejam M uma variedade e $p \in M$. O *espaço tangente a M no ponto p* é a coleção T_pM de todas as derivações em p .

Proposição 3.20. *Seja M^m uma variedade diferenciável e $p \in M$. O espaço tangente T_pM munido das operações*

$$\begin{aligned}(v + w)(f) &= v(f) + w(f); \\ (k \cdot v)(f) &= k \cdot (v(f)).\end{aligned}$$

onde $v, w \in T_pM$ e $k \in \mathbb{R}$, tem estrutura de espaço vetorial real de dimensão m .

Cada derivação $v \in T_pM$ é chamada de *vetor tangente a M no ponto p* .

Exemplo 3.21 (Espaço tangente a um aberto). Sejam M uma variedade e U um aberto de M . O espaço tangente T_pU é isomorfo a T_pM , para qualquer que seja $p \in M$.

Exemplo 3.22 (Espaço tangente a um espaço vetorial). Considere V um espaço vetorial de dimensão finita como uma variedade. Então T_pV e V são isomorfos como espaços vetoriais.

Exemplo 3.23 (Espaço tangente a uma variedade produto). Sejam M e N variedades. Dados $p \in M$ e $q \in N$, então $T_{(p,q)}(M \times N)$ é isomorfo a $T_pM \oplus T_qN$.

Fica claro que o exemplo anterior pode ser estendido a qualquer produto finito de variedades.

O termo “diferenciável” nos remete, por influência da Análise Real, à existência de uma transformação linear que “melhor aproxima” uma dada aplicação diferenciável f . Para aplicações diferenciáveis entre variedades, seguiremos a mesma abordagem, construindo uma transformação linear chamada de *diferencial de f em um ponto p* . Como os vetores tangentes foram definidos como derivações, basta explicitar como a aplicação age sobre uma função real.

Definição 3.24 (Diferencial de uma aplicação). Seja $f: M \rightarrow N$ uma aplicação diferenciável entre variedades diferenciáveis. A *diferencial de f no ponto p* é a transformação $df_p: T_pM \rightarrow T_{f(p)}N$ tal que, dado um vetor $v \in T_pM$

$$df_p(v)(g) = v(f \circ g)$$

para qualquer $g \in C^\infty(N, \mathbb{R})$.

É evidente que df_p definida desta forma é uma transformação linear.

Proposição 3.25 (Regra da cadeia). *Se $f: M \rightarrow N$ e $g: N \rightarrow P$ são aplicações diferenciáveis em $p \in M$ e em $f(p) \in N$, respectivamente, então $d(g \circ f)_p = dg_{f(p)} \circ df_p$.*

Corolário 3.26. *Se $f: M \rightarrow N$ é um difeomorfismo, então $df_p: T_pM \rightarrow T_{f(p)}N$ é um isomorfismo para qualquer que seja $p \in M$.*

A recíproca deste corolário é verdadeira apenas localmente. Veja o Teorema 3.30.

Corolário 3.27. *Se $f: M \rightarrow N$ é um difeomorfismo, então $\dim(M) = \dim(N)$.*

Exemplo 3.28 (Diferencial da aplicação identidade). Seja $Id_M: M \rightarrow M$ a aplicação identidade. Esta aplicação é diferenciável, e a sua diferencial $d(Id_M)_p: T_pM \rightarrow T_pM$ é a aplicação linear identidade do espaço vetorial T_pM .

Dada uma variedade M^m , sabemos que toda carta $\varphi: U \subset M \rightarrow \mathbb{R}^m$ é uma aplicação diferenciável. Faz sentido, portanto, considerarmos a diferencial

$$d\varphi_p: T_pU = T_pM \rightarrow T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^m$$

em um ponto $p \in U$. Uma vez que φ é difeomorfismo sobre a imagem $\varphi(U)$, U é aberto em M e \mathbb{R}^m é espaço vetorial, temos que $d\varphi_p: T_pM \rightarrow \mathbb{R}^m$ é um isomorfismo.

Deste modo, considerando $\{e_1, \dots, e_m\}$ a base canônica de \mathbb{R}^m , os vetores

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_p = (d\varphi_p)^{-1}(e_1), \dots, \frac{\partial}{\partial x_m}\Big|_p = (d\varphi_p)^{-1}(e_m)$$

formam uma base para T_pM . Note que, para cada carta φ considerada em uma vizinhança do ponto p , se tem uma base diferente para T_pM .

Assim, dado um vetor $v \in T_pM$, podemos escrevê-lo em sua representação dada pela base associada a uma carta:

$$v = \sum_{i=1}^m v_i \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p,$$

onde cada v_i é chamado de *coordenada* do vetor v nesta base.

Seja $f: M^m \rightarrow N^n$ uma aplicação diferenciável. Dado $p \in M$, sabemos que a sua diferencial $df_p: T_pM \rightarrow T_{f(p)}N$ é uma transformação linear. Segue da Álgebra Linear que podemos representá-la como uma matriz nas bases de T_pM e $T_{f(p)}N$.

Considere $\varphi: U \subset M \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $\psi: V \subset N \rightarrow \mathbb{R}^n$ cartas locais definidas, respectivamente, em vizinhanças de p e $f(p)$.

Escreveremos por

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m}\Big|_p$$

e

$$\frac{\partial}{\partial y_1}\Big|_{f(p)}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_n}\Big|_{f(p)}$$

as bases em T_pM e $T_{f(p)}N$ referentes às cartas φ e ψ , respectivamente. Então,

$$df_p \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p \right) = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(p) \cdot \frac{\partial}{\partial y_j}\Big|_{f(p)}$$

para $i = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, n$.

Daí, a matriz de df_p em relação às bases referentes às cartas φ e ψ é uma matriz $n \times m$ dada por

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(p) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(p) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(p) \end{bmatrix}$$

e é chamada de *matriz jacobiana* de f em p .

Não é difícil de se imaginar que ao tomarmos outras cartas em vizinhanças de p e $f(p)$, a matriz se mantém, a menos de semelhança. Denotamos, portanto, por $Jac f_p$ a matriz jacobiana de f no ponto p em qualquer representação local de coordenadas.

3.3 Submersões, imersões e subvariedades

Definição 3.29 (Posto de uma aplicação). Dada uma aplicação diferenciável $f: M \rightarrow N$, definimos o seu *posto em um ponto* $p \in M$ sendo justamente o posto da diferencial $df_p: T_pM \rightarrow T_{f(p)}N$. Denotamos por $\text{rank}f(p)$ o posto da aplicação f no ponto p .

Em coordenadas locais, o posto se resume ao maior subdeterminante não-nulo da matriz jacobiana $Jac f_p$.

O Corolário 3.27 nos afirma que se $f: M \rightarrow N$ é um difeomorfismo, então o posto de f é constante e igual a $\dim(M) = \dim(N)$. Como já havíamos dito, a recíproca deste resultado é válida localmente, como se vê no teorema a seguir.

Teorema 3.30 (Teorema da Aplicação Inversa). *Sejam $f: M \rightarrow N$ uma aplicação diferenciável e um ponto $p \in M$. Se $df_p: T_pM \rightarrow T_{f(p)}N$ é um isomorfismo, então existem vizinhanças U de p e V de $f(p)$ tais que $f|_U: U \rightarrow V$ é um difeomorfismo.*

Uma aplicação $f: M \rightarrow N$ nas condições do Teorema da aplicação inversa chama-se *difeomorfismo local*.

Definição 3.31 (Submersão). Uma aplicação diferenciável $f: M \rightarrow N$ é uma *submersão em* $p \in M$ se a diferencial $df_p: T_pM \rightarrow T_{f(p)}N$ for sobrejetiva. A aplicação f é uma *submersão* se é submersão em todos os pontos de M .

Teorema 3.32 (Forma Local das Submersões). *Se $f: M^m \rightarrow N^n$ é uma submersão em p , então existem cartas locais $\varphi: U \subset M \rightarrow \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^{m-n}$ e $\psi: V \subset N \rightarrow \mathbb{R}^n$, com $p \in U$ e $f(p) \in V$, tais que $(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(x, y) = x$, para qualquer que seja $(x, y) \in \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^{m-n}$.*

Definição 3.33 (Imersão). Uma aplicação diferenciável $f: M \rightarrow N$ é uma *imersão em* $p \in M$ se a diferencial $df_p: T_pM \rightarrow T_{f(p)}N$ for injetiva. A aplicação f é uma *imersão* se é imersão em todos os pontos de M .

Pelo Teorema do Núcleo e da Imagem, verifica-se que só é possível existir uma submersão de M em N se $\dim(M) \geq \dim(N)$. Analogamente, só é possível existir uma imersão de M em N se $\dim(M) \leq \dim(N)$.

Teorema 3.34 (Forma Local das Imersões). *Se $f: M^m \rightarrow N^n$ é uma imersão em p , então existem cartas locais $\varphi: U \subset M \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $\psi: V \subset N \rightarrow \mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^{n-m}$, com $p \in U$ e $f(p) \in V$, tais que $(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(x) = (x, 0)$ para todo $x \in \mathbb{R}^m$.*

Em vista de que os três teoremas anteriores fazem uso da hipótese de f ter posto máximo no ponto p , naturalmente define-se:

Definição 3.35 (Ponto regular). Seja $f: M^m \rightarrow N^n$ uma aplicação diferenciável entre variedades. Dizemos que $p \in M$ é *ponto regular* de f se o posto de f em p é máximo, isto é, $\text{rank}f(p) = \min\{m, n\}$.

Os teoremas da Forma Local das Submersões e a Forma Local das Imersões caracterizam o comportamento de uma aplicação diferenciável no entorno de um ponto regular. As submersões se comportam como projeções nas primeiras coordenadas, enquanto as imersões se comportam como inclusões nas primeiras coordenadas.

As submersões e as imersões são conhecidas como *aplicações de posto máximo*, ou ainda *aplicações de posto constante*, uma vez que se uma aplicação $f: M \rightarrow N$ é submersão ou imersão, então o posto da aplicação é o máximo possível em todos os pontos de M . É possível observar, no entanto, que nem todas as aplicações têm posto máximo. Daí, surge o nosso objeto de trabalho: as singularidades.

Definição 3.36 (Ponto singular). Dada uma aplicação diferenciável $f: M^m \rightarrow N^n$, um ponto $p \in M$ é *ponto singular* de f se não é ponto regular. Ou seja, $p \in M$ é ponto singular de f se $\text{rank} f(p) < \min\{m, n\}$.

Denotamos por Σ_f o conjunto de todos os pontos singulares de f . Algumas vezes, em especial quando se trata de funções a valores reais, os pontos singulares são também chamados de *pontos críticos*.

Definição 3.37 (Valor singular). Seja $f: M \rightarrow N$ é uma aplicação diferenciável. Um ponto $q \in N$ é um *valor singular*, ou também *valor crítico*, de f , se $f^{-1}(q) \cap \Sigma_f \neq \emptyset$. Caso contrário, q é *valor regular* de f .

É equivalente dizer que $q \in N$ é valor singular quando existe $p \in \Sigma_f$ tal que $f(p) = q$.

Definição 3.38 (Mergulho). Um *mergulho* é uma imersão $f: M \rightarrow N$ que é um homeomorfismo sobre a imagem $f(M)$.

Definição 3.39 (Subvariedade). Um subconjunto S de uma variedade M é uma *subvariedade* se, com a topologia induzida de M e com uma estrutura diferenciável adequada, a aplicação inclusão $\iota: S \rightarrow M$, dada por $\iota(x) = x$, é um mergulho.

Essencialmente, uma subvariedade é simplesmente uma variedade que está contida em outra. Muitos dos exemplos de variedades que havíamos apresentado anteriormente são, na realidade, subvariedades.

Exemplo 3.40. A esfera S^m é uma subvariedade de \mathbb{R}^{m+1} .

Exemplo 3.41. Os abertos U de M são subvariedades de M .

Exemplo 3.42. Se M^m é uma variedade com bordo, então ∂M é uma subvariedade de M com dimensão $m - 1$.

É claro que uma subvariedade S de M , como variedade, tem a sua própria dimensão. Uma vez que a inclusão $\iota: S \rightarrow M$ é uma imersão, tem-se que $\dim(S) \leq \dim(M)$. O número $\dim(M) - \dim(S)$ é chamado de *codimensão* de S .

A proposição a seguir garante a unicidade da estrutura diferenciável de uma subvariedade.

Proposição 3.43. *Seja $f: N \rightarrow M$ um mergulho. Considerando $S = f(N)$ com a topologia de subespaço, existe uma única estrutura diferenciável sobre S de forma que a inclusão $\iota: S \rightarrow M$ seja um mergulho. Com tal estrutura, a aplicação f será um difeomorfismo sobre a imagem.*

Proposição 3.44. *Seja $f: M \rightarrow N$ uma aplicação diferenciável. Se $q \in N$ é um valor regular, então $f^{-1}(q)$ é subvariedade de M ou é um conjunto vazio.*

É fácil ver que a Proposição 3.44 não é válida para valores singulares.

3.4 Variedades quociente

Não é difícil de se imaginar que, dada uma relação de equivalência R sobre uma variedade sem bordo M , o espaço quociente $\frac{M}{R}$ não necessariamente será uma variedade diferenciável.

Exemplo 3.45. Considere \mathbb{S}^2 e $p = (0, 0, -1)$ e $q = (0, 0, 1)$. Seja R a relação de equivalência dada por $R = \{(p, q), (q, p)\} \cup \Delta$, onde Δ é a relação identidade sobre \mathbb{S}^2 . O espaço quociente $\frac{\mathbb{S}^2}{R}$, chamado de *toro pinçado*, não admite estrutura de variedade diferenciável.

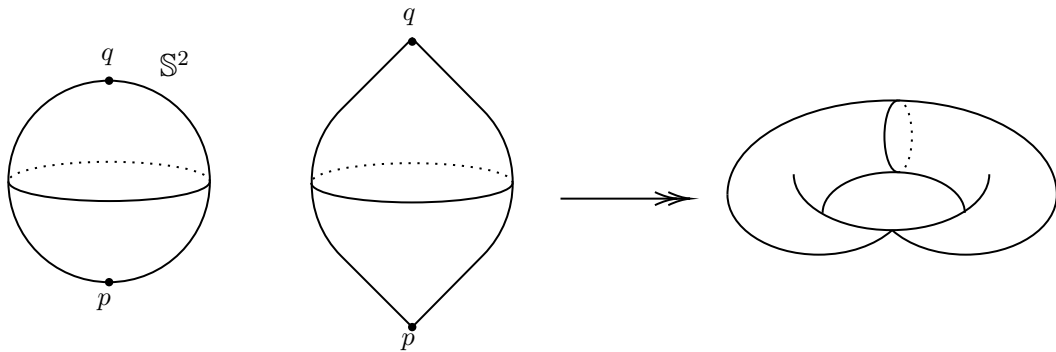


Figura 3.4: O toro pinçado.

O interesse principal desta seção é obter critérios de suficiência para que isso aconteça. As referências para esta particular seção são [Bourbaki 1967] e [Izar 1978].

Definição 3.46 (Relação de equivalência regular). Seja M uma variedade sem bordo. Uma relação de equivalência R sobre M é *regular* se existe uma estrutura diferenciável sobre o quociente $\frac{M}{R}$ de forma que a projeção ao quociente $q: M \rightarrow \frac{M}{R}$ seja uma submersão.

Proposição 3.47. *Sejam M e N variedades, sendo M sem bordo, e R uma relação de equivalência regular sobre M . Para que $g: \frac{M}{R} \rightarrow N$ seja diferenciável, é necessário e suficiente que $g \circ q: M \rightarrow N$ o seja, onde $q: M \rightarrow \frac{M}{R}$ é a projeção ao quociente.*

Proposição 3.48. *Se M é uma variedade sem bordo e R é uma relação de equivalência regular sobre M , existe uma única estrutura diferenciável sobre $\frac{M}{R}$ que faz com que a projeção ao quociente seja submersão.*

Teorema 3.49. *Sejam M um variedade sem bordo. Para que uma relação de equivalência R sobre M seja regular, é necessário e suficiente que:*

1. R seja subvariedade de $M \times M$ com a estrutura de variedade produto;
2. R seja fechado em $M \times M$ com a topologia produto;
3. a projeção na primeira coordenada $pr_1: R \rightarrow M$ seja uma submersão.

Exemplo 3.50 (Espaço projetivo). Considere sobre a esfera \mathbb{S}^m a relação de equivalência $R = \{(x, y) \in \mathbb{S}^m \times \mathbb{S}^m \mid y = x \text{ ou } y = -x\}$. O espaço quociente é denotado por \mathbb{RP}^m , e é chamado de *espaço projetivo real* de dimensão m . A relação introduzida é regular e, portanto, \mathbb{RP}^m tem estrutura de variedade diferenciável de dimensão m .

Teorema 3.51. *Sejam M e N variedades sem bordo, R e R' relações de equivalência regulares sobre M e N respectivamente. Se $f: M \rightarrow N$ é uma aplicação diferenciável compatível com R e R' , então a aplicação*

$$\begin{aligned} \bar{f}: \frac{M}{R} &\rightarrow \frac{N}{R'} \\ [x] &\mapsto [f(x)] \end{aligned}$$

é diferenciável. Além disso, se f é difeomorfismo, então \bar{f} também será.

Na notação do Teorema 3.51, diz-se que \bar{f} é obtida de f por *passagem ao quociente*.

3.5 Os teoremas de Sard e de Whitney

Esta seção se dedica à apresentação de dois teoremas de suma importância: o Teorema de Sard e o Teorema do Mergulho de Whitney. O Teorema de Sard nos diz que o conjunto dos valores singulares de uma aplicação diferenciável tem medida nula. Já o Teorema do Mergulho de Whitney nos revela que toda variedade diferenciável pode ser encarada como uma subvariedade de algum espaço euclidiano.

Para o desenvolvimento do conteúdo, faremos uma rápida exposição a respeito dos conjuntos de medida nula.

Um *m -cubo* é um subconjunto C de \mathbb{R}^m dado por um produto de intervalos fechados da reta; isto é, $C = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_m, b_m]$, onde $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ e $a_i < b_i$ para todo $i = 1, \dots, m$. O *volume* de um m -cubo C é justamente o produto dos comprimentos dos intervalos, ou seja, $vol(C) = \prod_{i=1}^m (b_i - a_i)$.

Um subconjunto A de \mathbb{R}^m tem *medida nula* se para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe uma coleção enumerável de m -cubos C_1, C_2, \dots tal que $A \subset \cup_{i=1}^{\infty} C_i$ e $\sum_{i=1}^{\infty} vol(C_i) < \varepsilon$.

É notório que o conjunto vazio \emptyset tem medida nula.

Definição 3.52 (Conjuntos de medida nula em variedades). Dada uma variedade M de dimensão m , dizemos que um subconjunto S de M tem *medida nula* se para toda carta local $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ tiver-se que $\varphi(S \cap U)$ tem medida nula em \mathbb{R}^m .

Diz-se que uma determinada propriedade é válida *quase sempre* se o conjunto onde a propriedade não é válida tiver medida nula.

Teorema 3.53 (Teorema de Sard). *Seja $f: M \rightarrow N$ uma aplicação diferenciável. O conjunto dos valores singulares de f , isto é, $f(\Sigma_f)$, tem medida nula em N .*

Corolário 3.54. *Se S é subvariedade de M , com $\dim(S) < \dim(M)$, então S tem medida nula em M .*

Teorema 3.55 (Teorema do Mergulho de Whitney). *Para qualquer variedade M^m , existe um mergulho de M em \mathbb{R}^{2m+1} .*

Desta forma, não haverá perda de generalidade quando supusermos que uma dada variedade estiver contida em um espaço euclidiano; ou seja, se for uma subvariedade.

Observamos que existem versões mais sofisticadas do Teorema de Whitney, onde se reduz a dimensão do espaço euclidiano onde a variedade será mergulhada.

3.6 O fibrado tangente e campos de vetores

Definição 3.56 (Fibrado tangente). Denotamos por

$$TM = \bigsqcup_{p \in M} T_p M = \bigcup_{p \in M} \{p\} \times T_p M$$

e o chamamos de *fibrado tangente* de M .

Daí, um elemento de TM é um par (p, v) , onde $p \in M$ e $v \in T_p M$. É comum também denotarmos um elemento de TM por v_p , que representa um vetor tangente a M em p , identificando assim cada $\{p\} \times T_p M$ ao próprio $T_p M$.

A *projeção canônica*

$$\begin{aligned} \pi: TM &\rightarrow M \\ (p, v) &\mapsto p \end{aligned}$$

é diferenciável com relação à estrutura de variedade de TM dada pela proposição a seguir.

Proposição 3.57. *Se M é uma variedade de dimensão m , então TM admite estrutura de variedade de dimensão $2m$.*

Nesse caso, seja \mathfrak{A} a estrutura diferenciável de M . Para cada carta local $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^m$, definimos as cartas de TM por

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}: \pi^{-1}(U) &\rightarrow \mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^m \cong \mathbb{R}^{2m} \\ (p, v) &\mapsto (\varphi(p), v_1, \dots, v_m) \end{aligned}$$

onde $p \in U$ e $v = \sum_{i=1}^m v_i \frac{\partial}{\partial x_i} \in T_p M$. A coleção $\tilde{\mathfrak{A}} = \{\tilde{\varphi} \mid \varphi \in \mathfrak{A}\}$ é uma estrutura diferenciável sobre TM .

Nota-se ainda que, dado $p \in M$, $\pi^{-1}(p) = \{p\} \times T_p M$, que tem estrutura de espaço vetorial. Desta forma, (TM, π, M) admite estrutura de fibrado vetorial sobre M , o que justifica o fato de TM levar o nome de *fibrado tangente*.

Dada uma aplicação diferenciável $f: M \rightarrow N$, a aplicação definida por

$$\begin{aligned} df: TM &\rightarrow TN \\ (p, v) &\mapsto df_p(v) \end{aligned}$$

é chamada de *diferencial de f* .

Resulta-se que df é uma aplicação diferenciável que torna o diagrama

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{df} & TN \\ \pi_M \downarrow & & \downarrow \pi_N \\ M & \xrightarrow{f} & N \end{array}$$

comutativo.

Exemplo 3.58 (Fibrado tangente de um espaço euclidiano). Se considerarmos a variedade $M = \mathbb{R}^m$, teremos:

$$TM = T\mathbb{R}^m = \bigsqcup_{x \in \mathbb{R}^m} T_x \mathbb{R}^m \cong \bigsqcup_{x \in \mathbb{R}^m} \mathbb{R}^m = \bigcup_{x \in \mathbb{R}^m} \{x\} \times \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{2m}.$$

Dado que (TM, π, M) é um fibrado vetorial, podemos então considerarmos seções deste fibrado.

Definição 3.59 (Campo de vetores). Um *campo de vetores* sobre M é uma seção de $\pi: TM \rightarrow M$; isto é, uma aplicação $X: M \rightarrow TM$ tal que $\pi \circ X = Id_M$.

Denotaremos a imagem de um ponto $p \in M$ por um campo de vetores X por X_p . Estaremos especialmente interessados por campos de vetores diferenciáveis. Denota-se ainda por $\mathfrak{X}(M)$ o conjunto de todos os campos de vetores sobre M , que não só é um espaço vetorial real, como é um módulo sobre o anel $C^\infty(M, \mathbb{R})$.

Uma vez que, para cada $p \in M^m$, temos a base $\{\frac{\partial}{\partial x_1}|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m}|_p\}$ para T_pM associada a uma determinada carta local, se X é um campo de vetores sobre M , podemos escrever

$$X_p = \sum_{i=1}^m X_i(p) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}|_p,$$

onde as funções $X_i: M \rightarrow \mathbb{R}$ são chamadas *funções coordenadas* do campo X . Tem-se ainda que X é um *campo de vetores diferenciável* se, e somente se, cada uma de suas funções coordenadas forem diferenciáveis.

Como definimos vetores tangentes como derivações em um ponto, podemos encarar também os campos de vetores como derivações. Dado um campo de vetores X sobre M , para cada função real $f: M \rightarrow \mathbb{R}$, definimos $Xf: M \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$(Xf)(p) = X_p(f)$$

Dado um vetor $v \in T_pM$, um campo de vetores $V: M \rightarrow TM$ é uma *extensão de v* se $V_p = v$. É sempre possível estender um vetor dado a um campo de vetores definido em toda a variedade.

Definição 3.60 (Métrica riemanniana). Dada uma variedade M de dimensão m , uma *métrica riemanniana* sobre M é uma coleção \mathfrak{g} de produtos internos

$$\{\langle \cdot, \cdot \rangle_p: T_pM \times T_pM \rightarrow \mathbb{R} \mid p \in M\}$$

tal que a aplicação dada por

$$\mathfrak{g}_p(u, v) = \langle u, v \rangle_p$$

para $p \in M$ e $u, v \in T_pM$ seja diferenciável.

Um par (M, \mathfrak{g}) em que M é uma variedade e \mathfrak{g} é uma métrica riemanniana sobre M é então chamado de *variedade riemanniana*.

Teorema 3.61. *Toda variedade diferenciável admite uma métrica riemanniana.*

Definição 3.62 (Espaço normal). Seja (M, \mathfrak{g}) uma variedade riemanniana. Dada uma subvariedade S de M , denotamos por N_pS o complemento ortogonal de T_pS em T_pM , ou seja,

$$N_pS = \{u \in T_pM \mid \langle u, v \rangle_p = 0 \forall v \in T_pM\}.$$

O espaço N_pS é chamado de *espaço normal a S no ponto p* .

Definição 3.63 (Campo gradiente). Considere (M, \mathfrak{g}) uma variedade riemanniana e $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável. O *campo gradiente de f* , denotado por *grad f* , é o único campo de vetores que satisfaz

$$\langle \text{grad } f(p), X_p \rangle_p = X_p(f)$$

para qualquer que seja o campo de vetores X sobre M .

Em coordenadas locais, o campo $\text{grad } f$ se escreve como

$$\text{grad } f(p) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p$$

Percebe-se então que $\text{grad } f(p) = 0$ se, e somente se, p é ponto crítico da função f .

Definição 3.64 (Grupo de difeomorfismos a um parâmetro). Um grupo de difeomorfismos a um parâmetro sobre uma variedade M é uma aplicação diferenciável

$$\begin{aligned} \Phi: \mathbb{R} \times M &\rightarrow M \\ (t, p) &\mapsto \Phi(t, p) = \Phi_t(p) \end{aligned}$$

tal que:

1. para cada $t \in \mathbb{R}$ fixo, a aplicação $\Phi_t: M \rightarrow M$ é um difeomorfismo;
2. para quaisquer que sejam $t, s \in \mathbb{R}$, $\Phi_{t+s} = \Phi_t \circ \Phi_s$.

Facilmente se verifica que $\Phi_0 = Id_M$ e que $\Phi_{-t} = (\Phi_t)^{-1}$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Percebe-se ainda que a aplicação

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\rightarrow \text{Diff}(M) \\ t &\mapsto \Phi_t \end{aligned}$$

é um homomorfismo de grupos.

Dado um grupo de difeomorfismos a um parâmetro Φ , podemos definir um campo de vetores X sobre M de forma que para toda função real $f: M \rightarrow \mathbb{R}$, se faça

$$X_q(f) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\Phi_h(q)) - f(q)}{h} = \frac{d(f \circ \Phi_t)}{dt}(0).$$

Dizemos então que o grupo de difeomorfismos a um parâmetro Φ induz ao campo de vetores X . Ou então, se diz que o campo de vetores X gera o grupo de difeomorfismos a um parâmetro Φ , que, neste caso, será chamado de *fluxo global* do campo X .

Se Φ é fluxo global do campo X e p é um ponto M , a curva

$$\begin{aligned} \gamma_p: \mathbb{R} &\rightarrow M \\ t &\mapsto \Phi(t, p) \end{aligned}$$

é chamada de *curva integral* do campo X que começa em p , uma vez que $\gamma_p(0) = p$.

Proposição 3.65. *Sejam X um campo de vetores sobre M e $K \subset M$ um compacto tais que $X_q = 0$ para todo $q \in K$. Então existe um único grupo de difeomorfismos a um parâmetro gerado por X .*

Nas condições da Proposição 3.65, dizemos que o campo de X tem *suporte compacto*.

3.7 Orientabilidade

Antes de introduzirmos a noção de orientabilidade de variedades, façamos uma breve digressão sobre orientação de espaços vetoriais.

Consideremos V um espaço vetorial de dimensão finita e sejam \mathcal{B}_1 e \mathcal{B}_2 bases para V . Diz-se que \mathcal{B}_1 e \mathcal{B}_2 *definem a mesma orientação em V* se a matriz de mudança de bases $[T]_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2}$ tiver determinante positivo.

É claro que a relação de “definir a mesma orientação” determina uma relação de equivalência no conjunto das bases de V , a qual demarca duas possíveis classes de equivalência:

1. A classe das bases que definem a mesma orientação;
2. A classe das bases que não definem a mesma orientação.

Desta forma, uma *orientação de V* é a escolha de uma dessas classes. A escolha de uma orientação torna V um *espaço vetorial orientado*, e a outra orientação chama-se *orientação oposta*.

Escolher uma orientação para uma variedade M é, naturalmente, escolher uma orientação para cada espaço tangente $T_p M$, mas de forma “coerente”, como vamos definir a seguir:

Definição 3.66 (Atlas coerente). Seja (M^m, \mathfrak{A}) uma variedade diferenciável. Dizemos que \mathfrak{A} é um *atlas coerente* se para cada par de cartas $\varphi: U \subset M \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $\psi: V \subset M \rightarrow \mathbb{R}^m$, com $U \cap V \neq \emptyset$, tiver-se que $Jac\xi_{\varphi(p)}$ tem determinante positivo, para qualquer que seja $p \in U \cap V$, onde $\xi: \varphi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$ é a aplicação de mudança de coordenadas.

Assim, um atlas é coerente se as bases

$$\mathcal{B}_\varphi = \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_p, \frac{\partial}{\partial x_2} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m} \Big|_p \right\}$$

e

$$\mathcal{B}_\psi = \left\{ \frac{\partial}{\partial y_1} \Big|_p, \frac{\partial}{\partial y_2} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial y_m} \Big|_p \right\}$$

determinadas pelas cartas φ e ψ , respectivamente, definirem a mesma orientação.

Definição 3.67 (Variedade orientável). Uma variedade M é *orientável* se admitir um atlas coerente. Se M não admite um atlas coerente, M diz-se *variedade não-orientável*. A escolha de um atlas coerente para M a torna uma *variedade orientada*.

Exemplo 3.68. O espaço euclidiano \mathbb{R}^m é orientável.

Exemplo 3.69. A esfera \mathbb{S}^m é orientável.

Exemplo 3.70. O exemplo mais canônico de variedade não-orientável é a *faixa de Möbius*, obtida a partir da identificação de um dos lados de um retângulo invertendo o sentido:

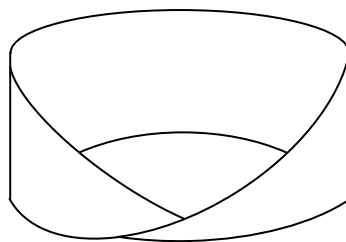


Figura 3.5: Faixa do Möbius.

Exemplo 3.71. O espaço projetivo $\mathbb{R}P^m$ é não-orientável.

Um fato importante sobre a orientabilidade é que uma variedade mergulhada em um espaço euclidiano é orientável se, e somente se, existir um campo de vetores normais contínuo definido sobre a variedade.

3.8 Espaço de jatos e topologias de Whitney

Nesta seção, procuramos entender o que significa a proximidade de aplicações, o que nos levará a entender o conceito de estabilidade, apresentado na próxima seção. O material aqui apresentado se encontra em [Golubitsky e Guillemin 1973].

Seja $f: M^m \rightarrow N^n$ uma aplicação diferenciável. Dado $p \in M$, considere $\varphi: U \subset M \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $\psi: V \subset N \rightarrow \mathbb{R}^n$ cartas locais definidas em vizinhanças de p e $f(p)$ respectivamente. Denotamos por $\partial^r f(p)$ a derivada mista

$$\frac{\partial^{|t|}(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_1^{t_1} \partial x_2^{t_2} \dots \partial x_m^{t_m}}(\varphi(p))$$

onde $t = (t_1, \dots, t_m)$ é uma lista de números inteiros não-negativos e $|t| = t_1 + \dots + t_m = r$.

Prova-se que a definição de derivada mista não depende da escolhas das cartas φ e ψ e nem da escolha de t , dependendo apenas da aplicação f , do ponto $p \in M$ e do número r .

Definição 3.72 (Jato). Dizemos que duas aplicações diferenciáveis $f, g: M \rightarrow N$ definem o mesmo r -jato em p se $f(p) = g(p)$ e $\partial^k f(p) = \partial^k g(p)$ para todo inteiro $k \leq r$.

É notório que a relação de definir o mesmo r -jato em um ponto p gera uma relação de equivalência no espaço das aplicações diferenciáveis baseadas

$$C^\infty(M, N)_{p,q} = \{f \in C^\infty(M, N) \mid f(p) = q\}.$$

A classe de uma aplicação f é chamada de r -jato de f no ponto p e é denotada por $j^r f(p)$. Desta forma, está bem definido o espaço quociente $J^r(M, N)_{p,q}$.

Chama-se de *espaço dos r -jatos* a reunião disjunta

$$J^r(M, N) = \bigsqcup_{(p,q) \in M \times N} J^r(M, N)_{p,q}.$$

Fica bem definida a aplicação

$$\begin{aligned} C^\infty(M, N) \times M &\rightarrow J^r(M, N) \\ (f, p) &\mapsto j^r f(p). \end{aligned}$$

Assim, fixada uma aplicação $f: M \rightarrow N$, consideremos a aplicação

$$\begin{aligned} j^r f: M &\rightarrow J^r(M, N) \\ p &\mapsto j^r f(p). \end{aligned}$$

Teorema 3.73. Se M e N são variedades, o espaço $J^r(M, N)$ dos r -jatos tem estrutura de variedade diferenciável.

Logo, podemos induzir uma topologia sobre $C^\infty(M, N)$ da seguinte forma:
Dado um aberto U de $J^r(M, N)$, considere

$$M(U) = \{f \in C^\infty(M, N) \mid j^r f(M) \subset U\}.$$

A coleção $\{M(U) \mid U \text{ é aberto em } J^r(M, N)\}$ forma uma base para uma topologia em $C^\infty(M, N)$.

Definição 3.74 (Topologia C^r de Whitney). A topologia C^r de Whitney sobre $C^\infty(M, N)$, denotada por W_r , é a topologia gerada pela base $\{M(U)\}$ descrita anteriormente.

Definição 3.75 (Topologia de Whitney). A topologia C^∞ de Whitney sobre $C^\infty(M, N)$ é aquela gerada pela união de todas as topologias W_r .

Ao longo do texto, nos referiremos à topologia C^∞ de Whitney apenas por *topologia de Whitney*.

Uma vez que o espaço dos jatos tem estrutura de variedade diferenciável, concluímos que $J^r(M, N)$ é metrizável. Podemos assim descrever a topologia de Whitney por meio de bolas abertas.

Definição 3.76 (C^k -aproximação). Sejam $f: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação diferenciável e $\varepsilon > 0$. Uma aplicação $g: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma $C^k - \varepsilon$ -aproximação de f se $\|f(p) - g(p)\| < \varepsilon$ e $d(j^r f(p) - j^r g(p)) < \varepsilon$ para todo inteiro $r \leq k$ e para todo $p \in M$, onde d é uma métrica em $J^k(M, \mathbb{R}^n)$.

Dada uma aplicação f , podemos expressar uma C^k -aproximação de f como sendo uma aplicação g tal que

$$\|g(p) - f(p)\| < \varepsilon$$

e

$$\|\partial^r(g - f)(p)\| < \varepsilon$$

para todo inteiro $r \leq k$.

De particular importância para o nosso estudo serão as C^2 -aproximações. Dado $\varepsilon > 0$ e $f: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação diferenciável, uma aplicação diferenciável $g: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma $C^2 - \varepsilon$ -aproximação de f se satisfaz o sistema

$$\begin{cases} \|g(p) - f(p)\| < \varepsilon \\ \|\partial g(p) - \partial f(p)\| < \varepsilon \\ \|\partial^2 g(p) - \partial^2 f(p)\| < \varepsilon \end{cases}$$

para qualquer que seja $p \in M$, onde ∂ e ∂^2 representam, respectivamente, qualquer operador diferencial de ordem 1 e 2.

3.9 Equivalência de aplicações

Nesta seção, apresentamos uma relação de equivalência sobre o conjunto das aplicações diferenciáveis entre duas variedades. O conteúdo aqui sintetizado, tal como o da seção anterior, é melhor apresentado em [Golubitsky e Guillemin 1973].

Definição 3.77 (Ação de grupos). Seja (G, \cdot) um grupo. Dado um conjunto não-vazio X qualquer, uma *ação à esquerda* do grupo G sobre o conjunto X é uma aplicação

$$\begin{aligned} G \times X &\rightarrow X \\ (g, x) &\mapsto g \cdot x \end{aligned}$$

que satisfaz:

1. $1_G \cdot x = x$, para todo $x \in X$, onde 1_G denota a identidade do grupo G ;
2. $g_1 \cdot (g_2 \cdot x) = (g_1 g_2) x$, para todo $x \in X$ e todos $g_1, g_2 \in G$.

De maneira análoga, se define uma *ação à direita* do grupo G sobre o conjunto X .

Alertamos que não deve haver confusão entre a operação do grupo e a ação de G sobre X , apesar de serem denotadas pelo mesmo símbolo.

Diremos que G *age* sobre X quando estiver claro que há uma ação de G sobre X .

Dado um elemento $x \in X$, definimos a *órbita de x com relação à ação* sendo o conjunto $\mathcal{O}(x) = \{g \cdot x \mid g \in G\}$. Fica claro que o conjunto de todas as órbitas dos elementos de X cria uma partição de X em subconjuntos disjuntos. Assim, uma relação de equivalência natural é aquela em que dois elementos estão relacionados quando pertencerem à mesma órbita.

Definição 3.78 (Equivalência de aplicações). Diremos que duas aplicações diferenciáveis $f, g: M \rightarrow N$ são *equivalentes* se existirem difeomorfismos $h: M \rightarrow M$ e $k: N \rightarrow N$ tais que $g = k \circ f \circ h^{-1}$. Em outras palavras, o diagrama a seguir comuta.

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ h \downarrow & & \downarrow k \\ M & \xrightarrow{g} & N \end{array}$$

Denotamos por $f \sim g$ quando f e g forem equivalentes.

Nota-se facilmente que a aplicação

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \times C^\infty(M, N) &\rightarrow C^\infty(M, N) \\ ((h, k), f) &\mapsto k \circ f \circ h^{-1} \end{aligned}$$

é uma ação do grupo $\mathcal{A} = \text{Diff}(M) \times \text{Diff}(N)$ sobre o conjunto $C^\infty(M, N)$.

Desta forma, duas aplicações $f, g: M \rightarrow N$ serão equivalentes no sentido definido anteriormente se pertencerem à mesma órbita da ação do grupo \mathcal{A} descrito acima.

Exemplo 3.79. Se $f, g: M \rightarrow N$ são aplicações diferenciáveis e $h: M \rightarrow M$ e $k: N \rightarrow N$ são difeomorfismos, então trivialmente $k \circ f \sim f$ e $g \circ h \sim g$, uma vez que ambos os diagramas

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N & & M & \xrightarrow{g \circ h} & N \\ Id_M \downarrow & & \downarrow k & \text{e} & h \downarrow & & \downarrow Id_N \\ M & \xrightarrow{k \circ f} & N & & M & \xrightarrow{g} & N \end{array}$$

comutam.

Definição 3.80 (Aplicação estável). Uma aplicação diferenciável $f: M \rightarrow N$ é *estável* se existir uma vizinhança U de f em $C^\infty(M, N)$, na topologia de Whitney, de forma que $f \sim g$, para qualquer que seja $g \in U$.

Exemplo 3.81. As submersões são aplicações estáveis.

Proposição 3.82. Para que uma aplicação $f: M \rightarrow N$ seja estável, é necessário e suficiente que a sua órbita $\mathcal{O}(f)$ pela ação do grupo \mathcal{A} seja aberta em $C^\infty(M, N)$.

3.10 Sobre funções a valores reais

Faremos agora um breve estudo para funções diferenciáveis definidas em variedades.

Se $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua, o *suporte* de f é o conjunto

$$\text{supp}(f) = \overline{\{p \in M \mid f(p) \neq 0\}} = \overline{f^{-1}(\mathbb{R} - \{0\})}.$$

Nota-se que o complementar do suporte de f é o maior aberto de M no qual f se anula.

Definição 3.83 (Partição da unidade). Dada uma variedade M e $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in \Lambda}$ uma cobertura aberta de M , uma *partição da unidade em M subordinada à cobertura \mathcal{U}* é uma coleção de funções diferenciáveis $\{\lambda_i: M \rightarrow [0, 1]\}_{i \in \Lambda}$ tal que:

1. $\text{supp}(\lambda_i) \subset U_i$ para qualquer que seja $i \in \Lambda$;
2. a família $\{\text{supp}(\lambda_i)\}_{i \in \Lambda}$ é localmente finita;
3. $\sum_{i \in \Lambda} \lambda_i(p) = 1$ para todo $p \in M$.

Teorema 3.84. Para qualquer variedade M e toda cobertura aberta \mathcal{U} de M , existe uma partição da unidade em M subordinada à cobertura \mathcal{U} .

Dada uma função $f: M \rightarrow \mathbb{R}$, definimos:

$$M_a = f^{-1}(] - \infty, a]) = \{p \in M \mid f(p) \leq a\}$$

$$M_{[a,b]} = f^{-1}([a, b]) = \{p \in M \mid a \leq f(p) \leq b\}$$

Proposição 3.85. Seja $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Dados $a, b \in \mathbb{R}$ valores regulares de f , com $a < b$, o subespaço $W = f^{-1}([a, b])$ é uma subvariedade com bordo de M , sendo $\partial W = f^{-1}(a) \cup f^{-1}(b)$.

Dada uma função real $f: M \rightarrow \mathbb{R}$, pelo que foi visto anteriormente, um ponto $p \in M$ é ponto crítico de f se a diferencial $df_p: T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ não for uma transformação linear sobrejetiva. A única forma de isso acontecer é o caso em que df_p é identicamente nula. Assim, deve existir uma carta local $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ de forma que

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(p) = \dots = \frac{\partial f}{\partial x_m}(p) = 0.$$

Ao contrário dos demais resultados apresentados neste capítulo, o próximo teorema está acompanhado de sua demonstração, uma vez que não está nas demais referências citadas.

Teorema 3.86 (Teorema de contração de Morse). *Seja $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Suponha que a e b são números reais tais que $M_{[a,b]}$ seja compacto e não contenha pontos críticos de f . Então M_a e M_b são difeomorfos e, além disso, M_a é um retrato por deformação de M_b .*

Demonstração. Seja g uma métrica riemanniana sobre M . Considere um campo de vetores dado por

$$X_p = \begin{cases} \frac{\text{grad } f(p)}{\|\text{grad } f(p)\|}, & \text{se } p \in M_{[a,b]} \\ 0, & \text{se } p \notin M_{[a,b]} \end{cases}$$

Por hipótese, $M_{[a,b]}$ é compacto e não possui pontos críticos. Desta forma, X está bem definido e se anula fora do compacto $M_{[a,b]}$. Assim, pela Proposição 3.65, existe um único grupo de difeomorfismos Φ que induz ao campo X .

Para $q \in M$ fixo, considere a curva $t \mapsto f(\Phi_t(q))$. Se $\Phi_t(q) \in M_{[a,b]}$, então

$$\frac{df(\Phi_t(q))}{dt} = \left\langle \frac{d\Phi_t(q)}{dt}, \text{grad } f(q) \right\rangle = \langle X_q, \text{grad } f(q) \rangle = 1.$$

Daí a curva $t \mapsto f(\Phi_t(q))$ é uma aplicação linear com derivada constante igual a 1 desde que $f(\Phi_t(q)) \in M_{[a,b]}$.

Afirmamos furtivamente que Φ_{b-a} aplica M_a difeomorficamente a M_b .

Defina agora a aplicação $r: [0, 1] \times M_b \rightarrow M_a$ por

$$r(t, q) = \begin{cases} q & \text{se } q \in M_a \\ \Phi_{t(a-f(q))}(q) & \text{se } q \in M_{[a,b]} \end{cases}$$

Note que $r(0, q) = Id_{M_b}$ e $r(1, q)$ é uma retração de M_b a M_a .

Intuitivamente, o que se faz é retrair M_b até M_a ao longo das curvas integrais do campo gradiente.

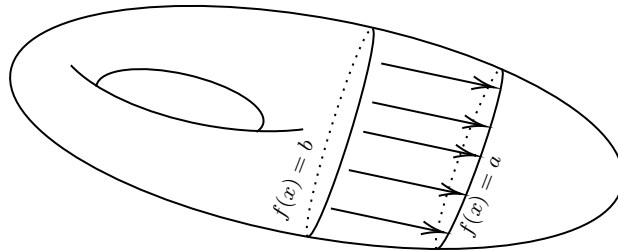


Figura 3.6: Ilustração do Teorema 3.86.

□

Definição 3.87 (Forma Hessiana). Se $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável e p é um ponto crítico de f , definimos a *forma Hessiana* de f em p sendo a forma bilinear simétrica $Hess_p f: T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$Hess_p f(v, w) = V(W(f))(p)$$

onde V e W são, respectivamente, extensões de v e w a campos de vetores diferenciáveis em uma vizinhança de p .

Escolhendo uma carta $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ para M em uma vizinhança de p , fazemos a representação local de V e W como $V = \sum_{i=1}^m V_i \frac{\partial}{\partial x_i}|_p$ e $W = \sum_{i=1}^m W_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, e denotamos $V_i(p) = v_i$ e $W_i(p) = w_i$.

Aplicando à forma Hessiana, obtemos

$$\begin{aligned} Hess_p f(v, w) &= V(W(f))(p) \\ &= V\left(\sum_{j=1}^m W_j \frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(p) \\ &= \sum_{i=1}^m \left[V_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^m W_j \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) \right](p) \\ &= \sum_{i=1}^m \left[V_i \left(\sum_{j=1}^m \frac{\partial}{\partial x_i} \left(W_j \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) \right) \right](p) \\ &= \sum_{i=1}^m \left[V_i \left(\sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial W_j}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} + W_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right) \right) \right](p) \\ &= \sum_{i,j=1}^m \left[V_i(p) \frac{\partial W_j}{\partial x_i}(p) \frac{\partial f}{\partial x_j}(p) + V_i(p) W_j(p) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p) \right] \\ &= \sum_{i,j=1}^m v_i w_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p) \end{aligned}$$

Assim, vemos que a forma $Hess_p f$ está bem definida, pois não depende da escolha das extensões V e W , mas apenas dos vetores v e w . Além disso, a forma Hessiana está intimamente relacionada com a diferencial de segunda ordem da função f . Em adição, o Teorema de Schwarz nos garante que as derivadas parciais mistas de segunda ordem sejam iguais, o que faz com que a forma Hessiana seja, de fato, simétrica.

A matriz

$$\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p) \right]_{m \times m}$$

naturalmente se chama *matriz Hessiana de f no ponto p* , e é a matriz relacionada à forma Hessiana em coordenadas locais.

É claro que, tal como para todas as formas bilineares, podemos associar à forma Hessiana uma forma quadrática dada por $Hess_p f(v, v)$. Em particular, chamaremos esta forma quadrática de *forma quadrática hessiana*, e utilizaremos a mesma notação, escrevendo $Hess_p f(v)$ em lugar de $Hess_p f(v, v)$.

Chamamos de *núcleo da forma Hessiana* ao conjunto

$$\ker Hess_p f = \{v \in T_p M \mid Hess_p f(v, w) = 0, \text{ para todo } w \in T_p M\}.$$

Definição 3.88 (Ponto crítico não-degenerado). Um ponto crítico p de uma função $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ é *não-degenerado* se a forma Hessiana $Hess_p f$ for uma forma bilinear não-degenerada; isto é, se $\ker Hess_p f = \{0\}$. Caso contrário, o ponto p é dito *degenerado*.

A definição anterior não é dada em vão, pois os pontos críticos degenerados realmente existem, e são, de certa maneira, singularidades mais complicadas do que as não-degeneradas. Isso justifica o que foi dito na Introdução do trabalho a respeito de que as singularidades das aplicações diferenciáveis podem ter diversas naturezas.

Em coordenadas locais, conclui-se um ponto crítico é não-degenerado se a matriz Hessiana for não-singular; ou seja, se

$$\det \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} (p) \right] \neq 0.$$

Definição 3.89 (Índice de um ponto crítico não-degenerado). O *índice de um ponto crítico não-degenerado* é a dimensão máxima de um subespaço vetorial de $T_p M$ tal que a restrição da forma quadrática Hessiana seja definida negativa. Ou seja,

$$\text{ind}_f(p) = \max\{\dim(V) \mid V \subseteq T_p M \text{ e } \text{Hess}_p f(v) < 0 \text{ para todo } v \in V\}.$$

Em coordenadas locais, o índice de um ponto crítico não-degenerado se traduz como o número de autovalores negativos da matriz Hessiana.

Os pontos críticos não-degenerados são, de certa forma, os mais simples. O índice de um ponto crítico não-degenerado de uma função é suficiente para determinar o comportamento local da função em uma vizinhança do ponto. Além disso, possuem grande influência na topologia da variedade onde a função está definida, como veremos no próximo capítulo.

Proposição 3.90. *Sejam $f, g: M \rightarrow \mathbb{R}$ funções reais diferenciáveis equivalentes, sendo $h: M \rightarrow M$ e $k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ são os difeomorfismos que realizam a equivalência. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. p é ponto crítico de f ;
2. p é ponto crítico de $k \circ f$;
3. $h(p)$ é ponto crítico de g .

Demonstração. Como f e g são equivalentes, temos que $k \circ f = g \circ h$.

Pela Regra da Cadeia, $d(k \circ f)_p = d(g \circ h)_{h(p)}$. Como h e k são difeomorfismos, $dk_{f(p)}$ e dh_p são isomorfismos.

Assim, se p é ponto crítico de f , temos que $df_p \equiv 0$, portanto $d(k \circ f)_p = dk_{f(p)} \circ df_p \equiv 0$ e, portanto, p é ponto crítico de $k \circ f$.

Por outro lado, dado que $dk_{f(p)} \circ df_p = dg_{h(p)} \circ dh_p$, junto ao fato de $dk_{f(p)}$ e dh_p serem isomorfismos, temos que um ponto $p \in M$ será ponto crítico de f se, e somente se, $h(p)$ for ponto crítico de g . \square

3.11 Cobordismos

Esta seção se baseia integralmente em [Milnor 1965].

Definição 3.91 (Tríada diferenciável). Uma *tríada diferenciável* é um sistema $(W; V_0, V_1)$ onde W é uma variedade com bordo de dimensão m , sendo V_0 e V_1 subvariedades fechadas de dimensão $m - 1$ tais que ∂W é formado pela reunião disjunta de V_0 e V_1 .

Note que toda variedade fechada M pode ser encarada como uma tríada $(M; \emptyset, \emptyset)$.

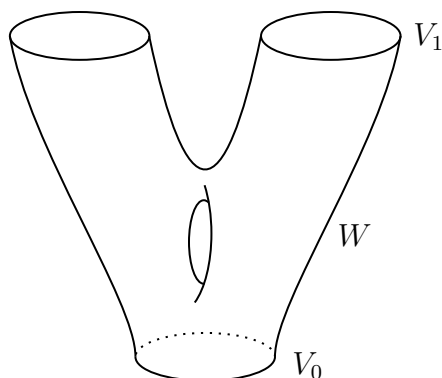


Figura 3.7: Triáda diferenciável.

Definição 3.92 (Cobordismo). Dadas duas variedades fechadas M_0 e M_1 , um *cobordismo* entre M_0 e M_1 é um sistema $(W; V_0, V_1; h_0, h_1)$, onde $(W; V_0, V_1)$ é uma triáda diferenciável e $h_i: V_i \rightarrow M_i$, $i = 0, 1$, são difeomorfismos. Neste caso, as variedades M_0 e M_1 são ditas *cobordantes*.

Essencialmente, toda triáda $(W; V_0, V_1)$ pode ser vista como um cobordismo da forma $(W; V_0, V_1; Id_{V_0}, Id_{V_1})$.

Definição 3.93 (Equivalência de cobordismos). Dadas duas variedades fechadas M_0 e M_1 , dois cobordismos $(W; V_0, V_1; h_0, h_1)$ e $(W'; V'_0, V'_1; h'_0, h'_1)$ entre M_0 e M_1 são *equivalentes* se existir um difeomorfismo $h: W \rightarrow W'$, tal que $h(V_0) = V'_0$, $h(V_1) = V'_1$, de forma que

$$\begin{array}{ccc} V_i & \xrightarrow{h|_{V_i}} & V'_i \\ & \searrow h_i & \swarrow h'_i \\ & & M_i \end{array}$$

seja comutativo, para $i = 0, 1$.

A relação de “ser cobordante” é uma relação de equivalência na categoria das variedades diferenciáveis.

Observamos ainda que as noções de “triáda diferenciável” e “cobordismo” frequentemente se confundem e, na maior parte da literatura, como em [Hirsch 1976], não há distinção entre os dois conceitos, sendo chamados apenas por “cobordismo”.

Definição 3.94 (Cobordismo produto). Uma triáda $(W; V_0, V_1)$ é um *cobordismo produto* se for equivalente à triáda $(V_0 \times [0, 1]; V_0 \times \{0\}, V_1 \times \{1\})$.

Dadas duas triádas $(W; V_0, V_1)$ e $(W'; V'_0, V'_1)$ e um difeomorfismo $h: V_1 \rightarrow V'_0$, é possível formar uma nova triáda $(W \cup_h W'; V_0, V'_1)$, colando cada componente conexa de V_1 a uma componente conexa de V'_0 .

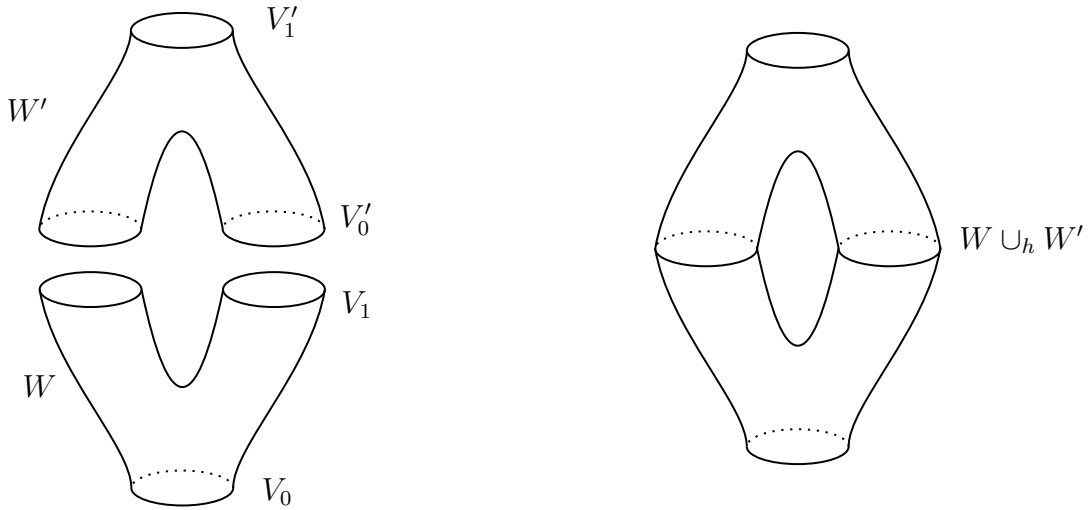


Figura 3.8: Colagem de tríadas.

Teorema 3.95. *Sejam $(W; V_0, V_1)$ e $(W'; V'_0, V'_1)$ tríadas diferenciáveis e $h: V_1 \rightarrow V'_0$ um difeomorfismo. Existe uma única estrutura diferenciável, a menos de difeomorfismo, em $W \cup_h W'$ compatível com as estruturas de W e W' tal que $V_0, h(V_1) = V'_0$ e V'_1 sejam mantidos fixos.*

3.12 Variedades bidimensionais

Estudaremos agora algumas propriedades intrínsecas das variedades bidimensionais, às quais nos referiremos por “superfícies”. As referências para esta seção são [Massey 1991] e [Gramain 1971].

O teorema a seguir dá a classificação das variedades unidimensionais sem bordo.

Teorema 3.96. *Uma variedade unidimensional é difeomorfa à circunferência \mathbb{S}^1 se for compacta, ou difeomorfa à reta real \mathbb{R} caso contrário.*

Corolário 3.97. *Dada M uma superfície com bordo compacta, cada componente conexa de ∂M é difeomorfa à circunferência \mathbb{S}^1 .*

A partir de duas superfícies fechadas, é possível se construir uma terceira, da seguinte forma:

Dadas M_1 e M_2 superfícies fechadas, considere $B_1 \subset M_1$ e $B_2 \subset M_2$ abertos homeomorfos ao disco D^2 .

Uma vez que, pelo Teorema 3.96, ∂B_i é difeomorfo a \mathbb{S}^1 para $i = 1, 2$, denotando $W_1 = M_1 - B_1$ e $W_2 = M_2 - B_2$, construímos cobordismos $(W_1; \mathbb{S}^1, \emptyset)$ e $(W_2; \mathbb{S}^1, \emptyset)$. Tome $h: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ um difeomorfismo e faça $W = W_1 \cup_h W_2$, obtendo assim uma nova superfície compacta e sem bordo.

Definição 3.98 (Soma conexa de superfícies). Dadas duas superfícies fechadas M_1 e M_2 , a superfície W obtida como descrito anteriormente é denominada *soma conexa de M_1 e M_2* e é denotada por $M_1 \# M_2$.

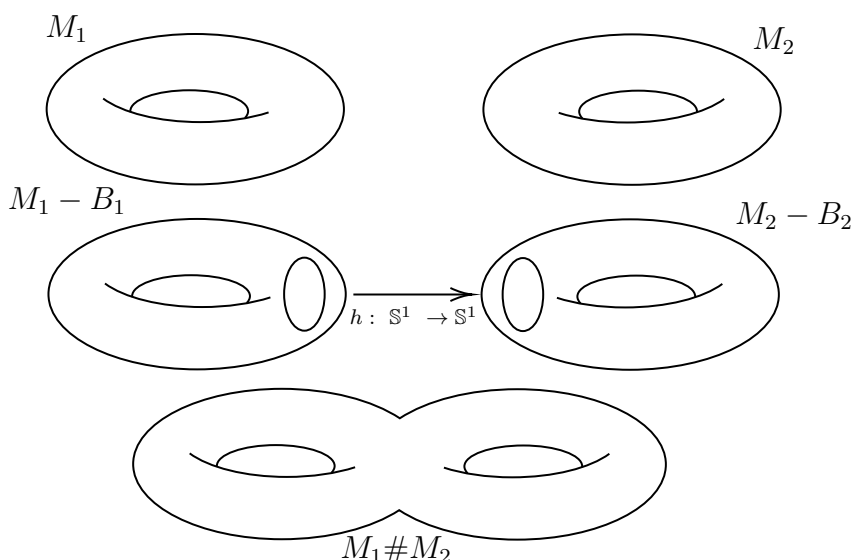


Figura 3.9: Soma conexa de superfícies.

Na figura anterior, se representa a soma conexa de dois toros, dando origem à superfície chamada “bitoro”.

As superfícies fechadas estão completamente determinadas a menos de homeomorfismos pelo seguinte teorema:

Teorema 3.99 (Teorema de classificação topológica das superfícies fechadas). *Qualquer superfície fechada M é homeomorfa a uma, e apenas uma, das seguintes:*

1. à esfera \mathbb{S}^2 ;
2. ao toro \mathbb{T}^2 ;
3. a uma soma conexa de toros $\mathbb{T}^2 \# \dots \# \mathbb{T}^2$;
no caso em que M é orientável; ou
4. ao plano projetivo \mathbb{RP}^2 ;
5. a uma soma conexa de planos projetivos $\mathbb{RP}^2 \# \dots \# \mathbb{RP}^2$;
no caso em que M é não-orientável.

A demonstração deste teorema se encontra em [Massey 1967]. A prova se baseia em construir um polígono fundamental para cada superfície.

Uma vez que a estrutura diferenciável de uma soma conexa está unicamente determinada, a classificação das superfícies a menos de difeomorfismos é automática.

É importante salientar que a soma conexa é uma operação entre classes de homeomorfismo de superfícies, que goza das propriedades associativa e comutativa, tendo ainda a esfera \mathbb{S}^2 como elemento neutro. Por outro lado, não faz da coleção das superfícies um grupo, uma vez que não há elementos inversos para esta operação.

Sabe-se que toda variedade diferenciável compacta é homeomorfa a um complexo simplicial finito; ou seja, é triangulável. Assim, está bem definida a *característica de Euler* de uma variedade. A tabela a seguir apresenta a característica de Euler das superfícies que aparecem no teorema de classificação apresentado anteriormente:

M^2	$\chi(M^2)$
\mathbb{S}^2	2
\mathbb{T}^2	0
\mathbb{RP}^2	1
$\mathbb{T}^2 \# \dots \# \mathbb{T}^2$	$2 - 2n$
$\mathbb{RP}^2 \# \dots \# \mathbb{RP}^2$	$2 - n$

Na tabela acima, o número n se entende pelo número de parcelas envolvidas na soma conexa.

Proposição 3.100. *Se M e N são superfícies homeomorfas, então suas características de Euler $\chi(M)$ e $\chi(N)$ são iguais.*

A recíproca não é verdadeira, uma vez que $\chi(\mathbb{T}^2) = \chi(\mathbb{K}) = 0$, mas o toro \mathbb{T}^2 não é homeomorfo à garrafa de Klein \mathbb{K} , pois a primeira superfície é orientável, enquanto a última não.

Definição 3.101 (Gênero de uma superfície). Dizemos que uma superfície tem *gênero g* se for homeomorfa à soma conexa de g toros ou de g planos projetivos.

Fica então estabelecida a relação entre o gênero de uma superfície e a sua característica de Euler:

$$g(M) = \begin{cases} \frac{1}{2}(2 - \chi(M)) & \text{se } M \text{ é orientável} \\ 2 - \chi(M) & \text{se } M \text{ é não-orientável} \end{cases}$$

Chama-se *número de corte* de uma variedade M o número máximo de subvariedades disjuntas de codimensão 1 que podem ser mergulhadas em M sem que a desconecte.

No caso das superfícies, as subvariedades de codimensão 1 são homeomorfas à circunferência. Desta forma, o número de corte se vê geometricamente como o número máximo de “cortes fechados” que se pode fazer sobre a superfície sem que ela se separe.

Denotando o número de corte de uma variedade por $c(M)$, em [Jaco 1972] é mostrado que $c(M) = \text{corank}(\pi_1(M))$. Para as superfícies de gênero g , é válido que $c(M) = g$ se M é orientável, enquanto para as não-orientáveis, $c(M) = \lfloor \frac{g}{2} \rfloor$.

Lembramos que, dado um grupo finitamente gerado G , define-se

$$\text{corank}(G) = \max\{\text{rank}F \mid F \text{ é grupo livre tal que existe um epimorfismo } f: G \rightarrow F\},$$

ou seja, o *corank*, ou ainda co-posto, de um grupo é o máximo dos postos de suas imagens livres.

Como as variedades aqui consideradas são superfícies fechadas, seus grupos fundamentais são finitamente gerados, o que torna seu *corank* computável.

3.13 Isotopias da circunferência

Definição 3.102 (Isotopia). Sejam $h_0, h_1: M \rightarrow M'$ difeomorfismos. Dizemos que h_0 e h_1 são *isotópicos* se existir uma aplicação diferenciável

$$\begin{aligned} H: M \times [0, 1] &\rightarrow M' \\ (x, t) &\mapsto H(x, t) = H_t(x) \end{aligned}$$

chamada de *isotopia* entre h_0 e h_1 , de forma que:

1. Para cada $t \in [0, 1]$, $H_t: M \rightarrow M'$ é um difeomorfismo;
2. $H_0 = h_0$ e $H_1 = h_1$.

Observe que a isotopia é uma homotopia diferenciável entre difeomorfismos. Perceba-se que “ser isotópico” é uma relação de equivalência no conjunto dos difeomorfismos de M em M' .

Considere a aplicação $p: [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^1$ dada por $p(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$. Sabemos que aplicação p é uma aplicação de recobrimento sobrejetora. Então dado $y \in \mathbb{S}^1$, existe $t \in [0, 1]$ tal que $p(t) = y$.

Definição 3.103 (Difeomorfismo que preserva orientação). Dado $k: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ um difeomorfismo, seja $\theta: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ um difeomorfismo tal que $k(p(t)) = p(\theta(t))$. Dizemos que k preserva orientação se θ for crescente. Caso contrário, dizemos que k inverte orientação.

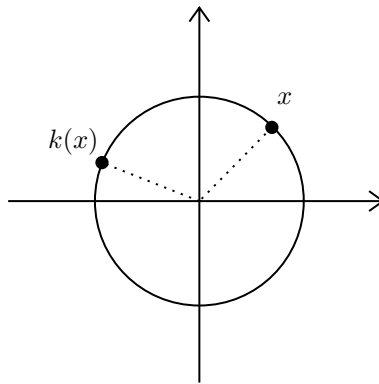


Figura 3.10: Difeomorfismo que preserva orientação.

Intuitivamente, um difeomorfismo $\mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ preserva orientação se gira a circunferência no sentido anti-horário, e inverte orientação caso contrário.

Teorema 3.104. Se $k: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ é um difeomorfismo que preserva orientação, então k é isotópico à identidade $Id_{\mathbb{S}^1}$.

Demonstração. Suponhamos primeiramente que o ponto $(1, 0) \in \mathbb{S}^1$ seja ponto fixo de k ; isto é, $k(1, 0) = (1, 0)$. Assim, $k(p(t)) = p(\theta(t))$ para $t \in [0, 1]$, sendo $\theta(0) = 0$. Definimos

$$H: \mathbb{S}^1 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^1$$

$$(p(t), s) \mapsto p(s\theta(t) + (1-s)t).$$

Verifica-se, neste caso, que H é uma isotopia entre o difeomorfismo k e a aplicação identidade $Id_{\mathbb{S}^1}$.

Por outro lado, suponhamos que $(1, 0)$ não seja ponto fixo de k . Tomemos α o ângulo polar de $k(1, 0)$ e seja $R_\alpha: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ a rotação de ângulo α .

Daí, teremos que $k \circ R_\alpha(1, 0) = (1, 0)$. Pelo argumento anterior, $k \circ R_\alpha$ é isotópico à identidade. Uma vez que R_α é também isotópico à identidade, segue-se que k o será. \square

4 Teoria de Morse

A Teoria de Morse permite estudar a topologia das variedades diferenciáveis por meio da evolução dos conjuntos de nível de funções muito oportunas, chamadas funções de Morse. Neste capítulo, procuramos entender as principais características de tais funções. As variedades serão doravante consideradas fechadas, salvo menção contrária. As principais referências para este capítulo são [Milnor 1963], [Milnor 1965], [Golubitsky e Guillemin 1973], [Figueirêdo 2018] e [Izar 1978]. Para as funções de Morse-Bott, veja [Meza-Sarmiento 2011].

4.1 Funções de Morse

Definição 4.1 (Função de Morse). Uma *função de Morse* em uma variedade fechada M é uma função diferenciável $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ cujos pontos críticos são todos não-degenerados.

Exemplo 4.2 (Função altura na esfera). A função $f: \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y, z) = z$ é uma função de Morse cujos pontos críticos são $p = (0, 0, -1)$ e $q = (0, 0, 1)$.

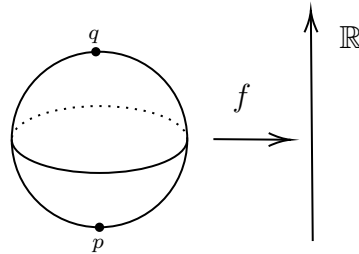


Figura 4.1: Função altura na esfera

De fato, considere $\pi: \mathbb{S}^2 \setminus \{q\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ a projeção estereográfica dada por

$$\begin{aligned} \pi: \mathbb{S}^2 \setminus \{q\} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\mapsto \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z} \right). \end{aligned}$$

Sua inversa é dada por $\pi^{-1}(x, y) = \left(\frac{2x}{1+x^2+y^2}, \frac{2y}{1+x^2+y^2}, \frac{-1+x^2+y^2}{1+x^2+y^2} \right)$. Assim, a expressão local de f pela carta π será

$$f(x, y) = (f \circ \pi^{-1})(x, y) = \frac{-1+x^2+y^2}{1+x^2+y^2}.$$

Suas derivadas parciais são

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{4x}{(1 + x^2 + y^2)^2};$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{4y}{(1 + x^2 + y^2)^2}.$$

Para encontrar os pontos críticos de f , encontraremos aqueles que anulam simultaneamente ambas as derivadas parciais. Nos deparamos então com

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = 0;$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = 0.$$

Logo, seu ponto crítico será $\pi^{-1}(0, 0) = (0, 0, -1) = p$. Vejamos agora que este ponto crítico é não-degenerado.

A matriz hessiana de f em p na representação local por π se dá por

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Assim,

$$\det \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = 16 \neq 0$$

e, portanto, p é não-degenerado. Note que a matriz já está em sua forma diagonal e que não há autovalores negativos. Logo, $ind_f(p) = 0$.

De forma análoga, utilizando outra carta, mostra-se que q é ponto crítico não-degenerado de f com $ind_f(q) = 2$.

Finalmente, f é uma função de Morse.

Observamos que a função $(x, y, z) \mapsto z$ definida em todo o \mathbb{R}^3 não apresenta pontos críticos. No entanto, como visto no Exemplo 4.2, sua restrição à esfera apresenta dois pontos críticos, que são não-degenerados.

Exemplo 4.3 (Função altura no toro). Considere \mathbb{T}^2 o toro bidimensional mergulhado “em pé” em \mathbb{R}^3 e seja $f: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ a função altura dada por $f(x, y, z) = z$.

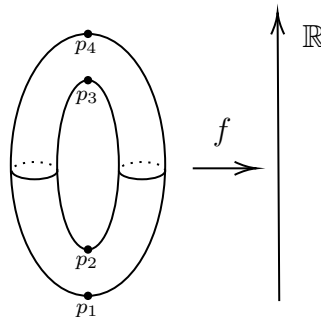


Figura 4.2: Função altura no toro.

Seja \mathbb{T}^2 a imagem da aplicação $\varphi: [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$\varphi(u, v) = (\text{sen}(u), (2 + \cos(u)) \cos(v), (2 + \cos(u)) \text{sen}(v)).$$

A expressão local de f em φ é $f(u, v) = (f \circ \varphi)(u, v) = (2 + \cos(u)) \sen(v)$.
Suas derivadas parciais são

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial u}(u, v) &= -\sen(u) \sen(v); \\ \frac{\partial f}{\partial v}(u, v) &= (2 + \cos(u)) \cos(v).\end{aligned}$$

Daí, os pontos críticos de f serão $\varphi(u, v)$, onde (u, v) satisfaz:

$$\begin{cases} -\sen(u) \sen(v) = 0; \\ (2 + \cos(u)) \cos(v) = 0. \end{cases}$$

Da segunda equação, obtemos que $v = \frac{\pi}{2}$ ou $v = -\frac{\pi}{2}$. Combinando com a primeira equação, obteremos que $u = 0$ ou $u = \pi$.

Logo, os pontos críticos de f serão

$$\begin{aligned}p_1 &= \varphi\left(0, -\frac{\pi}{2}\right) = (0, 0, -3); \\ p_2 &= \varphi\left(\pi, -\frac{\pi}{2}\right) = (0, 0, -1); \\ p_3 &= \varphi\left(\pi, \frac{\pi}{2}\right) = (0, 0, 1); \\ p_4 &= \varphi\left(0, \frac{\pi}{2}\right) = (0, 0, 3).\end{aligned}$$

Para verificar que os pontos críticos são não-degenerados, basta analisar a matriz hessiana de f em cada um deles.

De maneira geral, a matriz hessiana em um ponto $\varphi(u, v)$ terá a seguinte representação:

$$Hess_{\varphi(u,v)}f = \begin{bmatrix} -\cos(u) \sen(v) & -\sen(u) \cos(v) \\ -\sen(u) \cos(v) & -(2 + \cos(u)) \sen(v) \end{bmatrix}.$$

Assim, obtemos

$$Hess_{p_1}f = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Esta matriz é não-singular, portanto p_1 é não-degenerado. Além disso, $ind_f(p_1) = 0$.
Para p_2 , segue que

$$Hess_{p_2}f = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

é não-singular, portanto p_2 é não-degenerado com $ind_f(p_2) = 1$.

Similarmente,

$$Hess_{p_3}f = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

também é não-singular, portanto p_3 é não-degenerado com $ind_f(p_3) = 1$.

E, finalmente, com p_4 ocorre o mesmo, uma vez que

$$Hess_{p_4}f = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

é não-singular, portanto p_4 é não-degenerado e $ind_f(p_4) = 2$.

Finalmente, conclui-se que f é uma função de Morse.

A mesma observação feita ao Exemplo 4.2 também se enquadra a este último exemplo. Trata-se de uma aplicação que não possui pontos críticos quando definida em todo o \mathbb{R}^3 , mas que, após uma restrição, passa a possuir.

Denotaremos por $\mathcal{M}(M)$ o conjunto de todas as funções de Morse definidas sobre a variedade M .

O Lema de Morse nos permitirá descrever o comportamento local de uma função no entorno de um ponto crítico não-degenerado. Para demonstrá-lo, necessitaremos do seguinte resultado:

Lema 4.4 (Lema de Hadamard). *Seja $g: V \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável definida em uma vizinhança convexa V da origem em \mathbb{R}^m tal que $g(0) = 0$. Existem funções $g_1, \dots, g_m: V \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $g_i(0) = \frac{\partial g}{\partial x_i}(0)$ para todo $i = 1, \dots, m$ e $g(x) = \sum_{i=1}^m x_i g_i(x)$ para todo $x \in V$.*

Demonstração. Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, podemos escrever:

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_m) &= \int_0^1 \frac{df}{dt}(tx) dt \\ &= \int_0^1 \sum_{i=1}^m x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx) dt \\ &= \sum_{i=1}^m x_i \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx) dt. \end{aligned}$$

Defina $g_i(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx) dt$.

Teremos então que $g_i(0) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(0) dt = \frac{\partial f}{\partial x_i}(0)$.

A hipótese de que V seja convexo se faz necessária para que a imagem da curva $t \mapsto tx$ esteja contida em V e a integral seja computável. \square

Corolário 4.5. *Se, nas condições do Lema de Hadamard, tiver-se ainda que $0 \in V$ for ponto crítico de g , então existem funções $h_{ij}: V \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $h_{ij}(0) = \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}(0)$ para todos $i, j = 1, \dots, m$ e $g(x) = \sum_{i,j=1}^m x_i x_j H_{ij}(x)$, onde $H_{ij} = \frac{1}{2}(h_{ij}(x) + h_{ji}(x))$.*

Demonstração. Aplicando o Lema de Hadamard, tem-se imediatamente a existência de $h_i: V \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $g(x) = \sum_{i=1}^m x_i h_i(x)$ e $h_i(0) = \frac{\partial g}{\partial x_i}(0)$ para todo $i = 1, \dots, m$.

Como a origem é ponto crítico de g , segue que $h_i(0) = 0$. Aplica-se então o Lema de Hadamard novamente, desta vez a cada uma das funções h_i , obtendo então novas funções $(h_i)_j = h_{ij}: V \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $h_i(x) = \sum_{j=1}^m x_j h_{ij}(x)$ e $h_{ij}(0) = \frac{\partial h_i}{\partial x_j}(0) = \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}(0)$.

Assim, temos que

$$g(x) = \sum_{i=1}^m x_i h_i(x) = \sum_{i=1}^m x_i \left(\sum_{j=1}^m x_j h_{ij}(x) \right) = \sum_{i,j=1}^m x_i x_j h_{ij}(x).$$

E ainda

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{2}g(x) + \frac{1}{2}g(x) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{i,j=1}^m x_i x_j h_{ij}(x) \right) + \frac{1}{2} \left(\sum_{i,j=1}^m x_i x_j h_{ji}(x) \right) \\ &= \sum_{i,j=1}^m x_i x_j \frac{h_{ij}(x) + h_{ji}(x)}{2}. \end{aligned}$$

Chamando $H_{ij}(x) = \frac{1}{2}(h_{ij}(x) + h_{ji}(x))$, obtemos que $g(x) = \sum_{i,j=1}^m x_i x_j H_{ij}(x)$. \square

Teorema 4.6 (Lema de Morse). *Seja $f: M^m \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Se p é um ponto crítico não-degenerado de f , então existe uma carta $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ em uma vizinhança U de p em M tal que $f(x_1, \dots, x_m) = f(p) - (x_1^2 + \dots + x_\lambda^2) + x_{\lambda+1}^2 + \dots + x_m^2$, onde $\lambda = \text{ind}_f(p)$.*

Demonstração. Sejam $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável e p um ponto crítico não-degenerado de f . Considere uma carta arbitrária $\psi: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ definida em uma vizinhança U de p em M . Suponhamos, sem perda de generalidade, que $V = \psi(U) \subset \mathbb{R}^m$ seja uma vizinhança convexa da origem em \mathbb{R}^m , de forma que $\psi(p) = 0$.

Defina $g: V \rightarrow \mathbb{R}$ por $g(u) = f(\psi^{-1}(u)) - f(p)$. Desta forma, a origem $0 \in V$ é ponto crítico não-degenerado de g .

Podemos, portanto, aplicar o Corolário 4.5 e escrever $g(u) = \sum_{i,j=1}^m u_i u_j H_{ij}(u)$. Sendo $[H_{ij}(0)] = \left[\frac{\partial^2 g}{\partial u_i \partial u_j}(0) \right]$ a matriz hessiana de g em $u = 0$ que, por sua vez, é ponto crítico não-degenerado, temos que $[H_{ij}(0)]$ é não-singular, isto é, tem determinante diferente de zero.

Podemos supor então que $H_{11}(0) \neq 0$, pois, caso contrário, uma vez que $[H_{ij}(0)] = \left[\frac{\partial^2 g}{\partial u_i \partial u_j}(0) \right]$ é não-singular, poder-se-ia fazer uma permutação das linhas da matriz hessiana de modo que a condição seja satisfeita. Por continuidade, temos que $H_{11}(u)$ é não-nulo em alguma vizinhança da origem, possivelmente menor que V .

Façamos a seguinte mudança de coordenadas:

$$x_1 = \sqrt{|H_{11}(u)|} \left(u_1 + \frac{\sum_{j=2}^m u_j H_{1j}(u)}{H_{11}(u)} \right)$$

$$x_k = u_k \text{ para } k = 2, \dots, m.$$

Após esta mudança, g se escreverá como:

$$g(x) = \begin{cases} x_1^2 + \sum_{i,j=2}^m x_i x_j H_{ij}(x) - \frac{\left(\sum_{i=2}^m x_i H_{1i}(x) \right)^2}{H_{11}(x)}, & \text{se } H_{11}(0) > 0 \\ -x_1^2 + \sum_{i,j=2}^m x_i x_j H_{ij}(x) - \frac{\left(\sum_{i=2}^m x_i H_{1i}(x) \right)^2}{H_{11}(x)}, & \text{se } H_{11}(0) < 0 \end{cases}$$

Podemos perceber que a primeira coordenada está na forma que o teorema propõe. Por um argumento de indução finita, concluímos que após fazermos uma mudança de coordenadas similar a esta para cada $k = 1, \dots, m$, teremos que, ao fim do processo, g será escrita na forma

$$g(x) = -(x_1^2 + \dots + x_\lambda^2) + x_{\lambda+1}^2 + \dots + x_m^2.$$

A Lei da Inércia de Sylvester (veja em [Lima 2008]) nos garante que λ é, de fato, o índice de g na origem 0 de \mathbb{R}^m e, portanto, é o índice de f em p . Note também que estão presentes todas as m coordenadas na forma em que g está expressa. Isso se dá porque a matriz hessiana de g é não-singular, ou seja, tem posto máximo igual a m .

Chame de φ a carta local ψ composta com todas estas mudanças de coordenadas feitas indutivamente. Assim, $g(x) = f(\varphi^{-1}(x)) - f(p)$. Obtemos então, finalmente, que

$$f(x) = g(x) + f(p) = f(p) - (x_1^2 + \dots + x_\lambda^2) + x_{\lambda+1}^2 + \dots + x_m^2.$$

□

O Lema de Morse e a Forma Local das Submersões caracterizam completamente a descrição local dos pontos de uma função de Morse f . De fato, se $p \in M$ é ponto regular de f , então f se comporta localmente como uma projeção em uma vizinhança de p . Por outro lado, se $p \in M$ é ponto crítico de f , logo não-degenerado, f se comporta localmente como uma forma quadrática.

Ilustramos abaixo os possíveis tipos topológicos das curvas de nível de uma função no entorno de um ponto crítico não-degenerado no caso bidimensional.

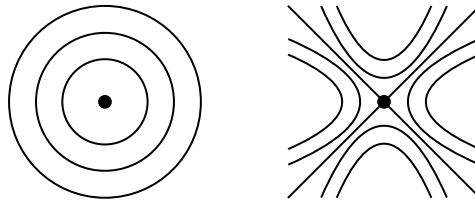


Figura 4.3: Níveis críticos: à esquerda, o caso em que $ind_f(p) = 0$ ou 2 ; à direita, em que $ind_f(p) = 1$.

Corolário 4.7. *Todo ponto crítico não-degenerado é isolado.*

Demonstração. Seja $f: M^m \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável e $p \in M$ um ponto crítico não-degenerado de f .

Considere $\varphi: U \subset M \rightarrow \mathbb{R}^m$ a carta dada pelo Lema de Morse. Assim, $\varphi(p) = 0$ e $f(x_1, \dots, x_m) = f(p) - x_1^2 - \dots - x_\lambda^2 + x_{\lambda+1}^2 + \dots + x_m^2$, onde $\lambda = ind_f(p)$.

Os pontos críticos de f são aqueles que anulam suas derivadas parciais de primeira ordem.

Verificamos então que

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_m) &= -2x_1; \\ &\vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_\lambda}(x_1, \dots, x_m) &= -2x_\lambda; \\ \frac{\partial f}{\partial x_{\lambda+1}}(x_1, \dots, x_m) &= 2x_{\lambda+1}; \\ &\vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_m}(x_1, \dots, x_m) &= 2x_m, \end{aligned}$$

o que torna claro que a origem de \mathbb{R}^m é a única solução que anula todas as derivadas parciais simultaneamente. Sendo assim, $\varphi^{-1}(0) = p$ é o único ponto crítico em U . Logo, p é um ponto crítico isolado. \square

Corolário 4.8. *Se $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de Morse, então Σ_f é discreto. Em particular, se M é compacta, então Σ_f é finito.*

Demonstração. De fato, sabemos que cada ponto de Σ_f é isolado; desta forma, Σ_f é um conjunto discreto. No caso em que M é uma variedade compacta, temos que Σ_f , por ser discreto, deve ser finito. \square

Definição 4.9 (Função de Morse simples). Uma função de Morse $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ é *simples* se sua restrição ao seu conjunto crítico $f|_{\Sigma_f}$ for uma função injetiva; isto é, f assume valores distintos em pontos críticos distintos.

Proposição 4.10. *Sejam $f, g: M \rightarrow \mathbb{R}$ funções de Morse equivalentes, sendo $h: M \rightarrow M$ e $k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ os difeomorfismos que realizam tal equivalência. Se $p \in M$ é ponto crítico não-degenerado de f , então*

1. $ind_{k \circ f}(p) = ind_g(h(p))$;
2. (a) $ind_{k \circ f}(p) = ind_f(p)$, se $\frac{dk}{dt}(t) > 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$;
- (b) $ind_{k \circ f}(p) = m - ind_f(p)$, se $\frac{dk}{dt}(t) < 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$, onde $m = \dim(M)$.

Demonstração. 1. É fácil perceber que p é também ponto crítico não-degenerado de $k \circ f$. Seja $\lambda = ind_{k \circ f}(p)$ e considere $\varphi: U \subset M \rightarrow \mathbb{R}^m$ a carta dada pelo Lema de Morse.

Temos então que

$$(k \circ f)(\varphi^{-1}(x)) = -(x_1^2 + \dots + x_\lambda^2) + x_{\lambda+1}^2 + \dots + x_m^2.$$

Agora, consideremos a carta $\psi = \varphi \circ h^{-1}: h(U) \rightarrow \mathbb{R}^m$. Teremos então que:

$$g(\psi^{-1}(x)) = (g \circ h)(\varphi^{-1}(x)) = (k \circ f)(\varphi^{-1}(x)) = -(x_1^2 + \dots + x_\lambda^2) + x_{\lambda+1}^2 + \dots + x_m^2.$$

Logo, $ind_{k \circ f}(p) = ind_g(h(p))$.

2. Como p é ponto crítico de f , teremos, pela Regra da Cadeia, que

$$\text{Hess}_p(k \circ f) = \frac{dk}{dt}(f(p)) \cdot \text{Hess}_p f.$$

Daí, é fácil ver que se k tem derivada positiva, $\text{ind}_{k \circ f}(p) = \text{ind}_f(p)$ e, caso contrário, $\text{ind}_{k \circ f}(p) = m - \text{ind}_f(p)$, uma vez que, no primeiro caso, k mantém a orientação de \mathbb{R} , e, no segundo caso, inverte a orientação. \square

Observe que a Proposição 4.10 é uma versão da Proposição 3.90 específica para pontos críticos não-degenerados.

4.2 Existência e estabilidade de funções de Morse

Proposição 4.11. *Dada uma função diferenciável $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ qualquer, a função*

$$\begin{aligned} f_a: U &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) - \langle a, x \rangle \end{aligned}$$

é uma função de Morse para quase todo $a \in \mathbb{R}^n$.

Demonstração. Seja $F: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por

$$F(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \end{bmatrix} - a.$$

Note que se p é ponto crítico de f_a , tem-se que $F(p) = 0$. Logo, $\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = a_i$, onde $a = (a_1, \dots, a_n)$.

A fim de que p seja um ponto crítico não-degenerado de f_a , é necessário e suficiente que a matriz jacobiana de F , que por sua vez é a matriz hessiana de f_a , seja não-singular. Portanto, a deve ser um valor regular de F . Pelo Teorema de Sard, o conjunto dos valores críticos de F é um subconjunto de medida nula de \mathbb{R}^n , o que faz com que f_a seja uma função de Morse para quase todo a , uma vez que a é valor regular de F . \square

Na notação da Proposição 4.11, diz-se que f_a é uma *perturbação linear* de f , pois é obtida somando-se uma função linear. Em [Lerario 2011], se vê que é possível também obter funções de Morse através de perturbações quadráticas de uma dada função diferenciável.

Teorema 4.12. *Seja $g: M^m \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável definida em uma variedade fechada M . Existe uma função de Morse $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ que é uma $C^2 - \varepsilon$ -aproximação de g para todo $\varepsilon > 0$.*

Demonstração. Seja U_1, \dots, U_k uma cobertura aberta finita de M formada por domínios de cartas locais. Considere $\{K_1, \dots, K_k\}$ uma coleção de compactos tais que $K_l \subset U_l$, para cada $l = 1, \dots, k$, que cobre M .

Para cada $l = 1, \dots, k$, denotaremos por $C_l = \bigcup_{n=1}^l K_n$.

A ideia central da demonstração é construir indutivamente uma função de Morse $f_l: C_l \rightarrow \mathbb{R}$, até que se faça $f_k: C_k = M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de Morse definida em toda a variedade.

Tome $f_0 = g$ a aplicação dada no enunciado. Suponha que já tenham sido construídas f_1, \dots, f_{l-1} . Constrói-se f_l da seguinte maneira:

Seja $\varphi_l: U_l \rightarrow \mathbb{R}$ a carta definida em U_l . Pela Proposição 4.11, existe $a \in \mathbb{R}^m$ tal que a função dada por $f_{l-1}(p) - \langle a, \varphi_l(p) \rangle$ é uma função de Morse definida em $\varphi_l(U_l)$.

Seja $h_l: U_l \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que:

1. $h_l(p) \in [0, 1]$ para todo $p \in U_l$;
2. $h_l(p) = 1$ em algum aberto V_l que contém K_l ;
3. $h_l(p) = 0$ em algum compacto L_l em U_l contendo V_l .

Para a existência de tal função veja, por exemplo, [Lima 2011].

Definamos f_l por:

$$f_l(p) = f_{l-1}(p) - \langle a, \varphi_l(p) \rangle h_l(p).$$

Desta forma, temos que

$$\begin{aligned} p \in V_l &\Rightarrow h_l(p) = 1 \Rightarrow f_l(p) = f_{l-1}(p) - \langle a, \varphi_l(p) \rangle; \\ p \in U_l - L_l &\Rightarrow h_l(p) = 0 \Rightarrow f_l(p) = f_{l-1}(p) \end{aligned}$$

e, além disso, f_l não tem pontos críticos degenerados. Portanto, f_l é uma função de Morse em C_l .

Indutivamente, tomemos $f = f_k$. Ou seja, $f: C_k = M \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de Morse. Mostremos que f é uma $C^2 - \varepsilon$ -aproximação da função diferenciável g considerada inicialmente, para algum $\varepsilon > 0$.

Para tanto, mostraremos que f_l pode ser tomada como uma C^2 -aproximação de f_{l-1} e, desta forma, obteremos o desejado.

Com efeito, temos que:

$$\begin{aligned} |f_l(p) - f_{l-1}(p)| &= |\langle \varphi_l(p), a \rangle| h_l(p); \\ \left| \frac{\partial f_l}{\partial x_i}(p) - \frac{\partial f_{l-1}}{\partial x_i}(p) \right| &= \left| a_i h_l(p) + \langle a, \varphi_l(p) \rangle \frac{\partial h_l}{\partial x_i}(p) \right|; \\ \left| \frac{\partial^2 f_l}{\partial x_i \partial x_j}(p) - \frac{\partial^2 f_{l-1}}{\partial x_i \partial x_j}(p) \right| &= \left| a_i \frac{\partial h_l}{\partial x_j}(p) + a_j \frac{\partial h_l}{\partial x_i}(p) + \langle a, \varphi_l(p) \rangle \frac{\partial^2 h_l}{\partial x_i \partial x_j}(p) \right|, \end{aligned}$$

onde $i, j \in \{1, \dots, m\}$.

Como h_l é limitada e infinitamente derivável, podemos tomar $a \in \mathbb{R}^m$ pequeno o suficiente para que f_l seja C^2 -aproximação de f_{l-1} em K_l para algum $\varepsilon > 0$.

Desta forma, teremos que $f = f_k$ será $C^2 - \varepsilon$ -aproximação de f_{k-1} em $K_k = M$ e, recursivamente, de g , diminuindo ε a cada etapa, se necessário.

Para mais detalhes, veja [Matsumoto 2002] ou [Meza-Sarmiento 2011]. \square

Corolário 4.13. *Para toda variedade fechada M , existe uma função de Morse $f: M \rightarrow \mathbb{R}$.*

Demonstração. Bastaria tomar uma função diferenciável $g: M \rightarrow \mathbb{R}$ qualquer, que poderia ser, por exemplo, uma função constante. Pelo Teorema 4.12, é possível encontrar uma função de Morse $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ arbitrariamente próxima a g . \square

Teorema 4.14. *O conjunto $\mathcal{M}(M)$ das funções de Morse definidas em uma variedade fechada M^m é um aberto denso em $C^\infty(M, \mathbb{R})$.*

Demonstração. O fato de $\mathcal{M}(M)$ ser denso é resultado imediato do Teorema 4.12. Mostremos agora que é aberto.

Sejam $\varphi: U_i \subset M \rightarrow \mathbb{R}^m, i = 1, \dots, k$, cartas locais de M tais que a coleção U_1, \dots, U_k forme uma cobertura aberta. Para cada aberto U_i , seja $C_i \subset U_i$ um compacto, de forma que a coleção C_1, \dots, C_k também cubra a variedade M .

Dada uma função de Morse $f: M \rightarrow \mathbb{R}$, podemos assumir a existência de uma vizinhança N_i de f em $C^\infty(M, \mathbb{R})$ tal que todas as funções pertencentes à vizinhança N_i tenham apenas pontos críticos não-degenerados em C_i . Assim, na vizinhança $N = \bigcap_{i=1}^k N_i$ de f , toda função terá apenas pontos críticos não-degenerados em todos os compactos C_i . Como $M = \bigcup_{i=1}^k C_i$, o resultado segue. \square

Teorema 4.15. *Para que uma função diferenciável $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ definida em uma variedade fechada M seja estável, é necessário e suficiente que f seja uma função de Morse simples.*

Demonstração. Suponhamos $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ estável. Então existe uma vizinhança W de f em $C^\infty(M, \mathbb{R})$ tal que toda função em W é equivalente a f .

Sabe-se que funções de Morse simples são também densas em $C^\infty(M, \mathbb{R})$. Assim, haverá uma tal função $g \in W$, que é, portanto, equivalente a f . Logo, f é uma função de Morse simples.

Reciprocamente, prova-se que se f é uma função de Morse simples, então f é estável. Para tal feito, faz-se uso do conceito de *estabilidade infinitesimal*, introduzido por John Mather, que provou que os conceitos de estabilidade e estabilidade infinitesimal são equivalentes. Mostra-se então que se f é uma função de Morse simples, f é infinitesimalmente estável e, portanto, estável. Para detalhes, consulte [Golubitsky e Guillemin 1973]. \square

O Teorema 4.15 afirma que as funções de Morse simples são as únicas funções a valores reais definidas em uma variedade fechada que são estáveis. Classificar funções estáveis é sempre o primeiro passo em qualquer espécie de classificação de singularidades de funções ou aplicações.

4.3 Funções de Morse em cobordismos

Definição 4.16 (Função de Morse sobre uma tríada diferenciável). Dada uma tríada $(W; V_0, V_1)$, uma *função de Morse sobre a tríada* é uma função diferenciável $f: W \rightarrow [a, b]$ tal que:

1. Todos os pontos críticos são não-degenerados e interiores; ou seja, estão em $W - \partial W$;
2. $f^{-1}(a) = V_0$ e $f^{-1}(b) = V_1$.

Observe que, sobre uma tríada, pode ocorrer que uma função de Morse $f: W \rightarrow [a, b]$ não tenha pontos críticos. É claro que, em variedade fechadas, isso não ocorre, uma vez que toda função de Morse terá, necessariamente, no mínimo dois pontos críticos. Na literatura, encontramos também a definição de *número de Morse* de uma tríada como

sendo o número mínimo de pontos críticos sobre todas as funções de Morse definidas sobre a tríada.

No contexto das tríadas diferenciáveis, pode-se obter alguns resultados análogos àqueles anteriormente feitos para variedades fechadas, como, por exemplo:

Teorema 4.17. *Toda tríada diferenciável admite uma função de Morse.*

A demonstração deste fato será omitida, e pode ser encontrada com detalhes em [Milnor 1965].

Definição 4.18 (Campo de vetores pseudo-gradiente). Sejam $(W^m; V_0, V_1)$ uma tríada diferenciável e $f: W \rightarrow [a, b]$ uma função de Morse. Um campo de vetores $\xi: W \rightarrow TW$ é *pseudo-gradiente* para f se:

1. ξf for estritamente positiva em $W - \Sigma_f$;
2. Considerando $\varphi: W \rightarrow \mathbb{R}^m$ a carta dada pelo Lema de Morse, definida no entorno de um ponto crítico p de índice λ , a representação local de ξ por esta carta se dá como $\xi(\varphi^{-1}(x_1, \dots, x_\lambda, x_{\lambda+1}, \dots, x_m)) = (-x_1, \dots, -x_\lambda, x_{\lambda+1}, \dots, x_m)$.

Proposição 4.19. *Toda função de Morse sobre uma tríada diferenciável admite um campo de vetores pseudo-gradiente.*

Demonstração. Sejam $(W^m; V_0, V_1)$ uma tríada diferenciável e $f: W^m \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de Morse. Vamos assumir, sem perda de generalidade, que f possui apenas um ponto crítico p , uma vez que pontos críticos não-degenerados são isolados.

Seja então $\varphi: U \subset W \rightarrow \mathbb{R}^m$ a carta local dada pelo Lema de Morse. Seja então U_0 uma vizinhança de p tal que $\overline{U_0} \subset U$.

Todo ponto $q \in W - U_0$ é ponto regular de f , o que faz com que f seja submersão em q . Pela Forma Local das Submersões, existe uma carta local $\psi: U' \rightarrow \mathbb{R}^m$ definida em uma vizinhança U' de q tal que $f(\psi(x'_1, \dots, x'_m)) = f(q) + x'_1$, para todo $(x'_1, \dots, x'_m) \in \psi(U')$.

Dado que U é aberto, então $W - U$ é fechado e, portanto, compacto. Logo, existe uma cobertura finita U_1, \dots, U_k de $W - U$. Podemos ainda impor que $U \cap U_i = \emptyset$ para $i = 1, \dots, k$.

Sobre cada aberto U_i , a Forma Local das Submersões nos dá coordenadas x_1^i, \dots, x_m^i tais que $f(x_1^i, \dots, x_m^i) = c + x_i$, onde c é uma constante.

Considere sobre U_0 o campo de vetores ξ_0 , cujas coordenadas locais são

$$(-x_1, \dots, -x_\lambda, x_{\lambda+1}, \dots, x_m)$$

onde $\lambda = \text{ind}_f(p)$. Sobre cada U_i , considere o campo de vetores $\xi_i = \frac{\partial}{\partial x_1^i}$, que terá a i -ésima coordenada igual a 1 e as restantes iguais a 0. Ou seja, $\xi_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $\xi_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$ e assim sucessivamente.

Seja $\alpha_i: W \rightarrow [0, 1]$ uma partição da unidade subordinada à cobertura U_0, U_1, \dots, U_k .

Definimos o campo $\xi: W \rightarrow TW$ dado por

$$\xi(x) = \sum_{j=1}^r \alpha_{i_j}(x) \xi_{i_j}(x)$$

para $x \in U_{i_1} \cap \dots \cap U_{i_r}$. Este campo de vetores é, por construção, um campo pseudo-gradiente para f . □

Pode-se ainda demonstrar que todo campo pseudo-gradiente de uma função de Morse é o campo gradiente de f em relação a alguma métrica riemanniana \mathfrak{g} sobre a variedade. Daí o nome “pseudo-gradiente”.

O teorema a seguir mostra que se uma tríada tem número de Morse nulo, então é um cobordismo produto.

Teorema 4.20. *Se $(W; V_0, V_1)$ admite uma função de Morse sem pontos críticos, então $(W; V_0, V_1)$ é um cobordismo produto.*

Demonstração. Seja $f: W \rightarrow [0, 1]$ uma função de Morse sobre a tríada $(W; V_0, V_1)$.

Consideremos $\xi: W \rightarrow TW$ um campo pseudo-gradiente para f .

Sem perda de generalidade, vamos assumir que $\xi f \equiv 1$. Com efeito, caso fosse ζ um outro campo pseudo-gradiente para f , bastaria tomar $\xi = \frac{1}{\zeta f} \zeta$. Desta forma, ξ é um campo pseudo-gradiente para f com $\xi f \equiv 1$.

Seja $\Phi: \mathbb{R} \times W \rightarrow W$ um grupo de difeomorfismos a um parâmetro gerado pelo campo ξ .

Temos então que

$$\frac{d\Phi_t(q)}{dt}(f) = \xi_{\Phi_t(q)}(f) = 1.$$

Daí, a aplicação $t \mapsto f(\Phi_t(q))$ é uma transformação linear de derivada constante igual a 1 para todo $q \in W$.

Lembrando que $f^{-1}(0) = V_0$, a aplicação

$$\begin{aligned} \psi: V_0 \times [0, 1] &\rightarrow W \\ (x, y) &\mapsto \Phi_t(x) \end{aligned}$$

é então um difeomorfismo, cujo inverso é

$$\begin{aligned} \psi^{-1}: W &\rightarrow V_0 \times [0, 1] \\ y &\mapsto (\phi_{-f(y)}(y), f(y)). \end{aligned}$$

□

Corolário 4.21. *Sejam $(W; V_0, V_1)$ e $(W'; V'_0, V'_1)$ tríadas diferenciáveis tais que V_0 é difeomorfo a V_1 . Se $f: W \rightarrow [0, 1]$ e $g: W' \rightarrow [0, 1]$ são funções de Morse sem pontos críticos, então existe um difeomorfismo $h: W \rightarrow W'$ tal que $f = g \circ h$.*

Demonstração. Aplicando o Teorema 4.20, temos que existem difeomorfismos

$$\begin{aligned} h_1: V_0 \times [0, 1] &\rightarrow W \\ h_2: V'_0 \times [0, 1] &\rightarrow W' \end{aligned}$$

tais que

$$\begin{aligned} f(h_1(x, t)) &= t \\ g(h_2(x, t)) &= t. \end{aligned}$$

Seja $k: V_0 \rightarrow V_1$ o difeomorfismo previsto no enunciado. Temos o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccccc} V_0 \times [0, 1] & \xrightarrow{h_1} & W & \xrightarrow{f} & [0, 1] \\ k \times Id_{[0,1]} \downarrow & & & \nearrow g & \\ V_1 \times [0, 1] & \xrightarrow{h_2} & W' & & \end{array}$$

Definimos $h: W \rightarrow W'$ por $h = h_2 \circ (k \times Id_{[0,1]}) \circ h_1^{-1}$. Temos então que $f = g \circ h$. □

O Corolário 4.21 mostra que funções de Morse sem pontos críticos em cobordismos produto são equivalentes.

Definição 4.22 (Cobordismo elementar). Uma tríada $(W; V_0, V_1)$ é um *cobordismo elementar de índice λ* se admite uma função de Morse com exatamente um ponto crítico, sendo o ponto de índice λ .

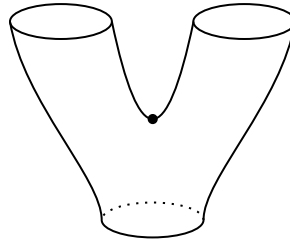


Figura 4.4: Cobordismo elementar orientável bidimensional de índice 1.

Usando funções de Morse, podemos decompor qualquer cobordismo mais complicado como uma composição de cobordismos mais simples, como no seguinte teorema:

Teorema 4.23. *Todo cobordismo pode ser expresso como uma colagem de um número finito de cobordismos elementares.*

4.4 Cirurgias e mergulhos característicos

A referência clássica para esta seção é [Milnor 1965]. Mais detalhes sobre cirurgias e funções de Morse se encontram em [Daccach 1972] e [Izar 1978]. O objetivo desta seção é garantir a equivalência de funções de Morse definidas em cobordismos elementares bidimensionais.

Sejam $(W^m; V, V')$ uma tríada diferenciável, $f: W \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de Morse e ξ um campo pseudo-gradiente para f .

Dado um ponto crítico p de f com índice λ , seja $c = f(p)$. Tomemos a, b números reais de tal forma que $a < c < b$ e que c seja o único valor crítico de f no intervalo $[a, b]$. Faça $V_0 = f^{-1}(a)$ e $V_1 = f^{-1}(b)$.

Escolha $\varphi: U \rightarrow B_{2\varepsilon}^m$ a carta dada pelo Lema de Morse, sendo U uma vizinhança de p , para algum $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno. Defina $V_{-\varepsilon} = f^{-1}(c - \varepsilon^2)$ e $V_\varepsilon = f^{-1}(c + \varepsilon^2)$ de modo que $4\varepsilon^2 < \min\{|c - a|, |c - b|\}$ para que $V_{-\varepsilon}$ esteja entre V_0 e $f^{-1}(c)$ e V_ε esteja entre $f^{-1}(c)$ e V_1 .

Esta situação está representada esquematicamente na figura a seguir:

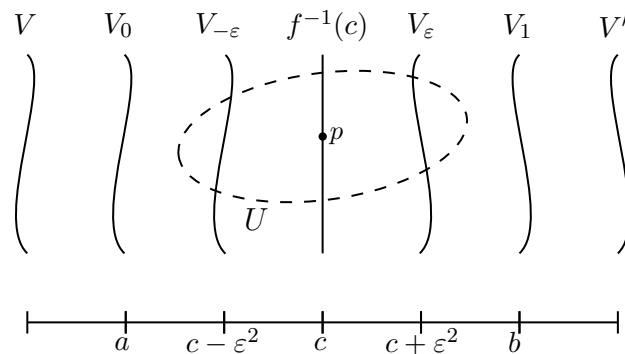


Figura 4.5: Escolha do ε para a construção do mergulho característico.

Definição 4.24 (Mergulho característico). O *mergulho característico à esquerda*

$$\phi_E: \mathbb{S}^{\lambda-1} \times D^{m-\lambda} \rightarrow V_0$$

é obtido definindo-se o mergulho

$$\begin{aligned} \phi_1: \mathbb{S}^{\lambda-1} \times D^{m-\lambda} &\rightarrow V_{-\varepsilon} \\ (u, \theta v) &\mapsto \varphi^{-1}(\varepsilon u \cosh \theta, \varepsilon v \sinh \theta) \end{aligned}$$

onde $u \in \mathbb{S}^{\lambda-1}$, $v \in \mathbb{S}^{m-\lambda-1}$ e $\theta \in [0, 1[$, e pela curva integral de ξ que começa no ponto $\phi_1(u, \theta v)$ em $V_{-\varepsilon}$ do seguinte modo: chame de $\phi_E(u, \theta v)$ o primeiro ponto de interseção desta curva integral com V_0 .

Analogamente, considerando-se o mergulho

$$\begin{aligned} \phi_2: D^\lambda \times \mathbb{S}^{m-\lambda-1} &\rightarrow V_\varepsilon \\ (\theta u, v) &\mapsto \varphi^{-1}(\varepsilon u \sinh \theta, \varepsilon v \cosh \theta) \end{aligned}$$

onde $u \in \mathbb{S}^{\lambda-1}$, $v \in \mathbb{S}^{m-\lambda-1}$ e $\theta \in [0, 1[$, define-se o *mergulho característico à direita* como

$$\phi_D: D^\lambda \times \mathbb{S}^{m-\lambda-1} \rightarrow V_1$$

onde $\phi_D(\theta u, v)$ é o primeiro ponto da curva integral de ξ que passa por $\phi_2(\theta u, v)$ e intersecta V_1 .

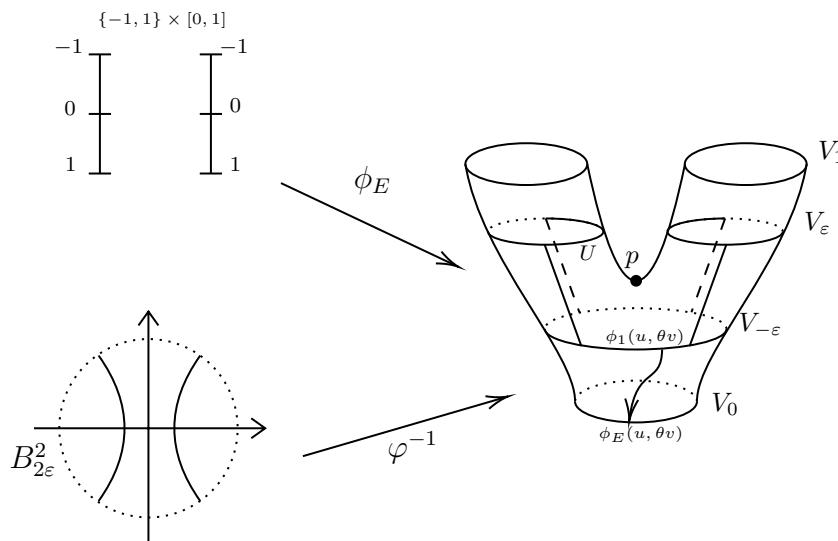


Figura 4.6: Mergulho característico à esquerda para um ponto de índice 1 em dimensão 2.

Na definição a seguir, introduzimos o conceito de *cirurgia*. Uma cirurgia consiste em um método geométrico da Topologia Diferencial que nos permite obter uma nova variedade a partir de outra previamente dada.

Definição 4.25 (Cirurgia). Seja V uma variedade de dimensão $m - 1$ e considere um mergulho $\phi: \mathbb{S}^{\lambda-1} \times D^{m-\lambda} \rightarrow V$. Denotamos por $\mathcal{X}(V, \phi)$ a variedade obtida pelo quociente de

$$(V - \phi(\mathbb{S}^{\lambda-1} \times \{0\})) \sqcup (D^\lambda \times \mathbb{S}^{m-\lambda-1})$$

identificando-se $\phi(u, \theta v)$ com $(\theta u, v)$, onde $u \in \mathbb{S}^{\lambda-1}$, $v \in \mathbb{S}^{m-\lambda-1}$ e $\theta \in]0, 1[$.

Dizemos que qualquer variedade difeomorfa a $\mathcal{X}(V, \phi)$ é obtida a partir de V por meio de uma *cirurgia*, que, neste caso, chamaremos de *cirurgia de tipo* $(\lambda, m - \lambda)$.

Desta forma, uma cirurgia sobre uma variedade de dimensão $m - 1$ em o efeito de remover uma esfera mergulhada de dimensão $\lambda - 1$ e substituí-la por uma esfera mergulhada de dimensão $m - \lambda - 1$.

Exemplo 4.26.

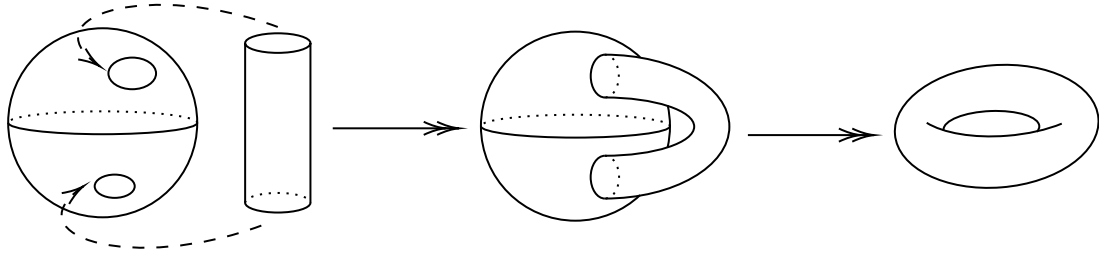


Figura 4.7: Obtenção do toro \mathbb{T}^2 por meio de uma cirurgia do tipo $(2, 1)$ a partir da esfera \mathbb{S}^2 .

Exemplo 4.27.

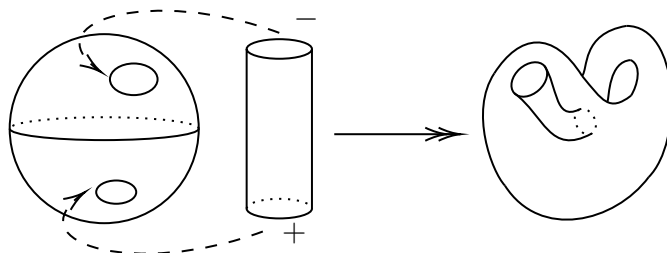


Figura 4.8: Obtenção da garrafa de Klein \mathbb{K} também por meio de uma cirurgia do tipo $(2, 1)$ a partir de \mathbb{S}^2 .

Basta tomar um difeomorfismo que preserve a orientação de uma das componentes do bordo do cilindro, que está indicado pelo símbolo “+”, e inverta a orientação da outra, indicado pelo símbolo “-”.

Dada uma tríada $(W^m; V_0, V_1)$ e um mergulho $\phi: \mathbb{S}^{\lambda-1} \times D^{m-\lambda} \rightarrow V_0$, construiremos agora uma variedade que realiza um cobordismo entre V_0 e $\mathcal{X}(V_0, \phi)$.

Considere a variedade L_λ dos pontos $((x_1, \dots, x_\lambda), (x_{\lambda+1}, \dots, x_m)) \in \mathbb{R}^\lambda \times \mathbb{R}^{m-\lambda}$ que satisfazem as condições

$$-1 \leq -|(x_1, \dots, x_\lambda)|^2 + |(x_{\lambda+1}, \dots, x_m)|^2 \leq 1$$

e

$$|(x_1, \dots, x_\lambda)| |(x_{\lambda+1}, \dots, x_m)| < \sinh(1) \cosh(1).$$

O bordo da variedade L_λ é reunião de duas subvariedades: à esquerda, correspondente a

$$-|(x_1, \dots, x_\lambda)|^2 + |(x_{\lambda+1}, \dots, x_m)|^2 = -1,$$

difeomorfa a $\mathbb{S}^{\lambda-1} \times D^{m-\lambda}$; e à direita, correspondente a

$$-|(x_1, \dots, x_\lambda)|^2 + |(x_{\lambda+1}, \dots, x_m)|^2 = 1,$$

difeomorfa a $D^\lambda \times \mathbb{S}^{m-\lambda-1}$.

Consideremos as trajetórias ortogonais das superfícies

$$-|(x_1, \dots, x_\lambda)|^2 + |(x_{\lambda+1}, \dots, x_m)|^2 = \text{constante}.$$

A trajetória que passa pelo ponto $(x_1, \dots, x_\lambda, x_{\lambda+1}, \dots, x_m)$ pode ser parametrizada por

$$t \mapsto \left(tx_1, \dots, tx_\lambda, \frac{1}{t}x_{\lambda+1}, \dots, \frac{1}{t}x_m \right).$$

Se $(x_1, \dots, x_\lambda) = 0$ ou se $(x_{\lambda+1}, \dots, x_m) = 0$, esta trajetória é um segmento de reta tendendo à origem, e se forem diferentes de zero, é uma hipérbole que leva algum ponto $(u \cosh \theta, v \sinh \theta)$ do bordo à esquerda de L_λ ao ponto correspondente $(u \sinh \theta, v \cosh \theta)$ no bordo à direita de L_λ .

Considere agora a reunião disjunta $(V_0 - \phi(\mathbb{S}^{\lambda-1} \times \{0\})) \times \overline{D^1} \sqcup L_\lambda$. Para cada $u \in \mathbb{S}^{\lambda-1}$, $v \in \mathbb{S}^{m-\lambda-1}$, $\theta \in]0, 1[$ e $c \in \overline{D^1}$, identifique o ponto $(\phi(u, \theta v), c)$ ao ponto $(x_1, \dots, x_\lambda, x_{\lambda+1}, \dots, x_m) \in L_\lambda$, unicamente determinado, tal que

1. $-(x_1^2 + \dots + x_\lambda^2) + x_{\lambda+1}^2 + \dots + x_m^2 = c$;
2. $(x_1, \dots, x_\lambda, x_{\lambda+1}, \dots, x_m)$ está na trajetória ortogonal que passa pelo ponto $(u \cosh \theta, v \sinh \theta)$.

Essa correspondência define um difeomorfismo entre $\phi(\mathbb{S}^{\lambda-1} \times (D^{m-\lambda} - \{0\})) \times \overline{D^1}$ e $L_\lambda \cap (\mathbb{R}^\lambda - \{0\}) \times (\mathbb{R}^{m-\lambda} \times \{0\})$.

O conjunto $\mathcal{W}(V_0, \phi)$, obtido através desta identificação, está bem definido como variedade diferenciável, cujo bordo é reunião de duas componentes que são correspondentes aos valores de $c = -1$ ou $c = 1$.

A fronteira à esquerda, para $c = -1$, é identificada com V_0 , tomando-se $z \in V_0$ correspondendo a $(z, -1) \in (V_0 - \phi(\mathbb{S}^{\lambda-1} \times \{0\})) \times \overline{D^1}$ e $(u \cosh \theta, v \sinh \theta) \in L_\lambda$ para $z = \phi(u, \theta v)$.

Já a fronteira à direita, para $c = 1$, é identificada com $\mathcal{X}(V_0, \phi)$, fazendo o ponto $z \in V_0 - \phi(\mathbb{S}^{\lambda-1} \times \{0\})$ corresponder a $(z, 1)$ e $(\theta u, v) \in D^\lambda \times \mathbb{S}^{m-\lambda-1}$ corresponder a $(u \sinh \theta, v \cosh \theta)$.

Desta forma, $\mathcal{W}(V_0, \phi)$ realiza o cobordismo esperado entre V_0 e $\mathcal{X}(V_0, \phi)$.

Exemplo 4.28. Considere $\phi: \{-1, 1\} \times [-1, 1] \rightarrow \mathbb{S}^1$ o mergulho como na figura a seguir:

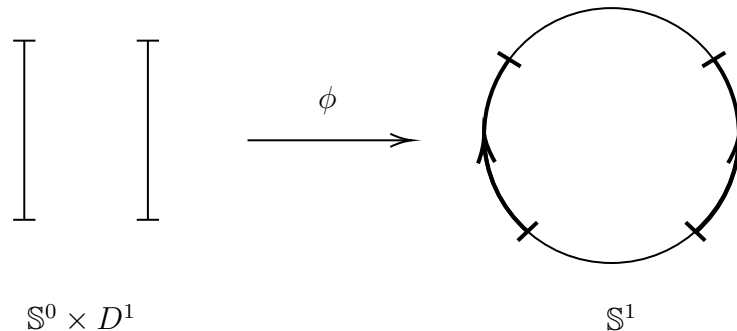
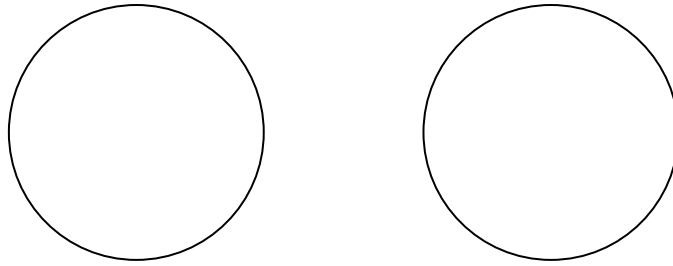


Figura 4.9: Mergulho sobre a circunferência, cuja imagem é a união disjunta de dois arcos.

Sabemos que a variedade $\mathcal{X}(\mathbb{S}^1, \phi)$, obtida por uma cirurgia do tipo $(1, 1)$, será a união disjunta de duas circunferências.



$$\mathcal{X}(\mathbb{S}^1, \phi) \cong \mathbb{S}^1 \sqcup \mathbb{S}^1$$

Figura 4.10: A variedade $\mathcal{X}(\mathbb{S}^1, \phi)$ é a união disjunta de duas circunferências.

Teremos então que a variedade $\mathcal{W}(\mathbb{S}^1, \phi)$, que realiza um cobordismo entre \mathbb{S}^1 e $\mathcal{X}(\mathbb{S}^1, \phi)$ terá a seguinte forma:

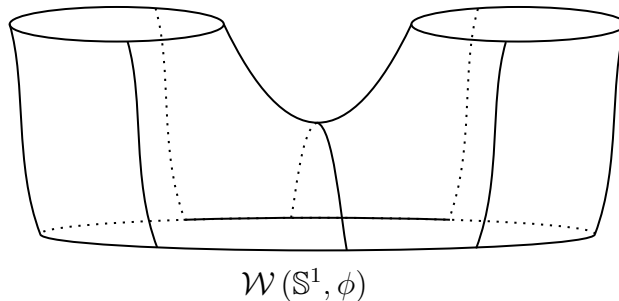


Figura 4.11: A variedade $\mathcal{W}(\mathbb{S}^1, \phi)$ terá a forma de um par de calças.

Teorema 4.29. *Se uma variedade V' pode ser obtida a partir de V por meio de uma cirurgia de tipo $(\lambda, m - \lambda)$, então existe um cobordismo elementar $(W; V, V')$ de índice λ e uma função de Morse $f: W \rightarrow \mathbb{R}$ com exatamente um ponto crítico de índice λ .*

Demonstração. Como V' pode ser obtida por meio de uma cirurgia do tipo $(\lambda, m - \lambda)$, existe um mergulho $\phi: \mathbb{S}^{\lambda-1} \times D^{m-\lambda} \rightarrow V$ tal que V' é difeomorfa a $\mathcal{X}(V, \phi)$.

Considere $W = \mathcal{W}(V, \phi)$ como previamente construído. Então existe o cobordismo $(W; V, V') = (\mathcal{W}(V, \phi); V, \mathcal{X}(V, \phi))$.

A função $f: W \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$(x_1, \dots, x_m) \in L_\lambda \mapsto f(x_1, \dots, x_m) = -(x_1^2 + \dots + x_\lambda^2) + x_{\lambda+1}^2 + \dots + x_m^2$$

$$(z, c) \in (V - \phi(\mathbb{S}^{\lambda-1} \times \{0\})) \times D^1 \mapsto f(z, c) = c$$

é uma função de Morse bem definida com um único ponto crítico de índice λ . □

Teorema 4.30. *Sejam $(W; V_0, V_1)$ um cobordismo elementar de índice λ , considerando $f: W \rightarrow [a, b]$ uma função de Morse, e $\phi_E: \mathbb{S}^{\lambda-1} \times D^{n-\lambda} \rightarrow V_0$ o mergulho característico. Então $(W; V_0, V_1)$ é difeomorfa à tríada $(\mathcal{W}(V_0, \phi_E); V_0, \mathcal{X}(V_0, \phi_E))$.*

Demonstração. Seja $p \in W$ o ponto crítico de f , sendo $c = f(p)$. Tome $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, como na definição de mergulho característico. Consideremos ainda $W_\varepsilon = f^{-1}([c - \varepsilon^2, c + \varepsilon^2])$, $V_{-\varepsilon} = f^{-1}(c - \varepsilon^2)$ e $V_\varepsilon = f^{-1}(c + \varepsilon^2)$.

Tome $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ a carta dada pelo Lema de Morse e seja $\xi: W \rightarrow TW$ um campo pseudo-gradiente para f .

Temos que $(W; V_0, V_1)$ é difeomorfa a $(W_\varepsilon; V_{-\varepsilon}, V_\varepsilon)$, pois, pelo Teorema 4.20, $(f^{-1}([a, c - \varepsilon^2]); V_0, V_{-\varepsilon})$ e $(f^{-1}([c + \varepsilon^2, b]); V_\varepsilon, V_1)$ são cobordismos produto.

Por outro lado, temos que a tríada $(\mathcal{W}(V_0, \phi_E); V_0, \mathcal{X}(V_0, \phi_E))$ é claramente difeomorfa a $(\mathcal{W}(V_{-\varepsilon}, \phi_1); V_{-\varepsilon}, \mathcal{X}(V_{-\varepsilon}, \phi_1))$, é suficiente provar que $(W_\varepsilon; V_{-\varepsilon}, V_\varepsilon)$ é difeomorfa a $(\mathcal{W}(V_{-\varepsilon}, \phi_1); V_{-\varepsilon}, \mathcal{X}(V_{-\varepsilon}, \phi_1))$.

Defina $k': \mathcal{W}(V_{-\varepsilon}, \phi_1) \rightarrow W_\varepsilon$ a aplicação dada por: para cada ponto $(z, t) \in (V_{-\varepsilon} - \phi(\mathbb{S}^{\lambda-1} \times \{0\})) \times \overline{D^1}$, faça $k'(z, t)$ o único ponto de W_ε que esteja sobre a curva integral de ξ que passa por z e tal que $f(k'(z, t)) = \varepsilon^2 t + c$, e para cada $(x_1, \dots, x_\lambda, x_{\lambda+1}, \dots, x_m) \in L_\lambda$, faça $k'(x_1, \dots, x_\lambda, x_{\lambda+1}, \dots, x_m) = \varphi^{-1}(\varepsilon x_1, \dots, \varepsilon x_\lambda, \varepsilon x_{\lambda+1}, \dots, \varepsilon x_m)$.

Segue das definições de ϕ_1 e de $\mathcal{W}(V_{-\varepsilon}, \phi_1)$ e do fato de que φ^{-1} leva trajetórias ortogonais em L_λ em curvas integrais em W_ε , que k' é um difeomorfismo bem definido entre $\mathcal{W}(V_{-\varepsilon}, \phi_1)$ e W_ε . \square

Proposição 4.31. *Dado $(W; V_0, V_1)$ um cobordismo elementar de índice λ associado a uma função de Morse $f: W \rightarrow [a, b]$, considere $\phi_E: \mathbb{S}^{\lambda-1} \times D^{n-\lambda} \rightarrow V_0$ o mergulho característico.*

Se $g: \mathcal{W}(V_0, \phi_E) \rightarrow [a, b]$ e $k: \mathcal{W}(V_0, \phi_E) \rightarrow W$ são, respectivamente, a função de Morse e o difeomorfismo dados nos dois teoremas anteriores então $g = f \circ k$.

Demonstração. Seja $p \in W$ o ponto crítico de índice λ de f , e denotemos por $c = f(p)$.

Seja que $k': \mathcal{W}(V_{-\varepsilon}, \phi_1) \rightarrow W_\varepsilon$ o difeomorfismo construído na demonstração do Teorema 4.30 e $g: \mathcal{W}(V_{-\varepsilon}, \phi_1) \rightarrow [-1, 1]$ a função de Morse construída como no Teorema 4.29.

Considere

$$\begin{aligned} \theta: [-1, 1] &\rightarrow [c - \varepsilon^2, c + \varepsilon^2] \\ t &\mapsto \varepsilon^2 t + c \end{aligned}$$

que resulta ser um difeomorfismo crescente. Escreveremos, por simplicidade, apenas g no lugar de $\theta \circ g$.

Pela construção das aplicações, o diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{W}(V_{-\varepsilon}, \phi_1) & \xrightarrow{k'} & W_\varepsilon \\ & \searrow g & \downarrow f|_{W_\varepsilon} \\ & & [c - \varepsilon^2, c + \varepsilon^2] \end{array}$$

é comutativo. E, por outro lado, como $f: W \rightarrow [a, b]$ é a função de Morse do cobordismo elementar $(W; V_0, V_1)$ dada no enunciado, consideremos $\bar{\theta}: [c - \varepsilon^2, c + \varepsilon^2] \rightarrow [a, b]$ o difeomorfismo crescente tal que $\bar{\theta}(c) = c$. Assim, existirá um difeomorfismo $k'': W_\varepsilon \rightarrow W$ tal que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} W_\varepsilon & \xrightarrow{k''} & W \\ f|_{W_\varepsilon} \downarrow & & \downarrow f \\ [c - \varepsilon^2, c + \varepsilon^2] & \xrightarrow{\bar{\theta}} & [a, b] \end{array}$$

comuta.

Com efeito, se $z \in W_\varepsilon$, $k''(z)$ é o único ponto de W tal que $f(k''(z)) = \bar{\theta}(f|_{W_\varepsilon}(z))$ e está sobre a curva integral de ξ em W que passa por z .

Considerando o difeomorfismo $k = k'' \circ k'$, teremos que $g = f \circ k$ e está provada a proposição. \square

O teorema a seguir caracteriza a equivalência das funções de Morse definidas em cobordismos elementares de dimensão dois. Esta é a chave central da demonstração do Teorema 5.32.

Teorema 4.32. *Sejam $(W; V_0, V_1)$ e $(W'; V'_0, V'_1)$ cobordismos elementares de mesmo índice λ , com $\dim(W) = \dim(W') = 2$. Sejam $f: W \rightarrow [a, b]$ e $g: W' \rightarrow [a, b]$ funções de Morse. Suponha que $c \in [a, b]$ é o único valor crítico de f e g , e que este valor corresponde a um único ponto crítico $p \in f^{-1}(c)$ e $q \in g^{-1}(c)$ e que $\text{ind}_f(p) = \text{ind}_g(q)$. Se, além disso, V_0 é difeomorfo a V'_0 e V_1 a V'_1 , então existe um difeomorfismo $h: W \rightarrow W'$ tal que $f = g \circ h$.*

Demonstração. Suponhamos, sem perda de generalidade, que W e W' sejam conexas, uma vez que, sendo as partes regulares cobordismos produto de índices iguais, as funções são trivialmente equivalentes.

Sejam $\xi: W \rightarrow TW$ um campo pseudo-gradiente para f e $\varphi: U \rightarrow B_{2\varepsilon}^2$ a carta local dada pelo Lema de Morse. Considerando os espaços $V_{-\varepsilon} = f^{-1}(c - \varepsilon^2)$, $V_\varepsilon = f^{-1}(c + \varepsilon^2)$, $W_\varepsilon = f^{-1}([c - \varepsilon^2, c + \varepsilon^2])$ e o mergulho $\phi_1: \mathbb{S}^{\lambda-1} \times D^{2-\lambda} \rightarrow V_{-\varepsilon}$, já vimos que, pelo Teorema 4.30, a tríada $(W_\varepsilon; V_{-\varepsilon}, V_\varepsilon)$ é difeomorfa à tríada $(\mathcal{W}(V_{-\varepsilon}, \phi_1); V_{-\varepsilon}, \mathcal{X}(V_{-\varepsilon}, \phi_1))$.

De forma análoga, para a tríada $(W'; V'_0, V'_1)$ e para a função de Morse $g: W' \rightarrow \mathbb{R}$, tomando o mesmo ε utilizado anteriormente, e sendo o mergulho $\phi'_1: \mathbb{S}^{\lambda-1} \times D^{2-\lambda} \rightarrow V'_{-\varepsilon}$, obtemos também que as tríadas $(W'_\varepsilon; V'_{-\varepsilon}, V'_\varepsilon)$ e $(\mathcal{W}(V'_{-\varepsilon}, \phi'_1); V'_{-\varepsilon}, \mathcal{X}(V'_{-\varepsilon}, \phi'_1))$ são difeomorfas.

Seja $k: V_{-\varepsilon} \rightarrow V'_{-\varepsilon}$ um difeomorfismo que preserva orientação de \mathbb{S}^1 tal que $k \circ \phi_1 = \phi'_1$. Daí, disso, segue que $(W'_\varepsilon; V'_{-\varepsilon}, V'_\varepsilon)$ e $(\mathcal{W}(V_{-\varepsilon}, \phi_1); V_{-\varepsilon}, \mathcal{X}(V_\varepsilon, \phi_1))$ são difeomorfas.

Com efeito, o difeomorfismo

$$H: (V_{-\varepsilon} - \phi_1(\mathbb{S}^{\lambda-1} \times \{0\}) \times \overline{D^1}) \sqcup L_\lambda \rightarrow (V'_{-\varepsilon} - \phi'_1(\mathbb{S}^{\lambda-1} \times \{0\}) \times \overline{D^1}) \sqcup L_\lambda$$

dado por $H = (k \times Id_{\overline{D^1}}) + Id_{L_\lambda}$ é compatível com a relação de equivalência dada por $(\phi_1(u, \theta v), c)R(x_1, \dots, x_\lambda, x_{\lambda+1}, \dots, x_m)$ se $-x_1^2 - \dots - x_\lambda^2 + x_{\lambda+1}^2 + \dots + x_m^2 = c$ e (x_1, \dots, x_m) está na trajetória ortogonal que passa por $(u \cosh \theta, v \sinh \theta)$, donde $(k \times Id_{\overline{D^1}})(\phi_1(u, \theta v), c)$ é igual a $(k(\phi_1(u, \theta v)), c) = (\phi'_1(u, \theta v), c)$ é equivalente a $(x_1, \dots, x_\lambda, x_{\lambda+1}, \dots, x_m)$.

Assim, as variedades $\mathcal{W}(V_{-\varepsilon}, \phi_1)$ e $\mathcal{W}(V'_{-\varepsilon}, \phi'_1)$ são difeomorfas. Considere os difeomorfismos ℓ e ℓ' como construídos na demonstração do Teorema 4.30. Tem-se então diagrama

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{W}(V_{-\varepsilon}, \phi_1) & \xrightarrow{\ell} & W_\varepsilon & \xrightarrow{f} & [a, b] \\ \overline{H} \downarrow & & \downarrow h_1 & \nearrow g & \\ \mathcal{W}(V'_{-\varepsilon}, \phi'_1) & \xrightarrow{\ell'} & W'_\varepsilon & & \end{array}$$

onde o difeomorfismo quociente \overline{H} conjuga $f \circ \ell$ e $g \circ \ell'$, pois H é a identidade sobre L_λ e preserva o nível em $(V_{-\varepsilon} - \phi_1(\mathbb{S}^{\lambda-1} \times \{0\})) \times D^1$.

Assim, tem-se então um difeomorfismo $h_1: W_\varepsilon \rightarrow W'_\varepsilon$ conjugando f e g .

Pela Proposição 4.31, h_1 se estende a $h: W \rightarrow W'$ extensão de h_1 tal que $f = g \circ h$. \square

4.5 Aplicações à topologia das variedades

Estudaremos agora a interferência que os pontos críticos de uma dada função têm na topologia da variedade onde está definida. Os resultados aqui apresentados relacionam

pontos críticos não-degenerados ao tipo de homotopia da variedade e de certas subvariedades. As demonstrações aqui apresentadas são fielmente baseadas naquelas presentes em [Milnor 1963]. O leitor interessado pode encontrar em [Figueirêdo 2018] versões mais pormenorizadas.

Teorema 4.33 (Teorema da Esfera de Reeb). *Seja $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável definida em uma variedade fechada m -dimensional. Se f tem exatamente dois pontos críticos, ambos não-degenerados, então M é homeomorfa à esfera \mathbb{S}^m .*

Demonstração. Como M é compacta, os pontos críticos devem ser pontos de mínimo e máximo de f . Suponhamos, por simplicidade, que $f(p) = 0$ e $f(q) = 1$.

Pelo Lema de Morse, tomemos $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que M_ε e $M_{[1-\varepsilon,1]}$ sejam m -células fechadas. Pelo Teorema 3.86, M_ε é homeomorfo a $M_{[1-\varepsilon,1]}$. Além disso, $M_{[\varepsilon,1-\varepsilon]}$ não tem nenhum ponto crítico, sendo, portanto, um cobordismo produto. Colando-os ao longo de suas fronteiras, como sugere a Figura 4.12, resulta-se na esfera \mathbb{S}^m . \square

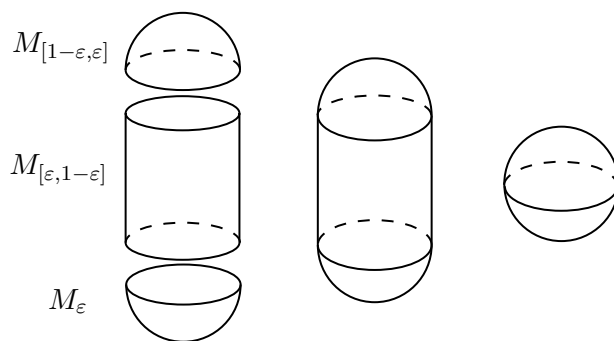


Figura 4.12: Construção da esfera no Teorema 4.33.

Observamos que, nas hipóteses do Teorema da Esfera de Reeb, não há garantia da existência de difeomorfismo. Em [Milnor 1956], Milnor mostrou diversas estruturas diferenciais na esfera \mathbb{S}^7 não equivalentes. Tal feito lhe rendeu a Medalha Fields em 1962.

Além disso, destacamos que o teorema continua válido se os pontos críticos forem degenerados. A demonstração, porém, é outra.

Teorema 4.34. *Sejam $f: M^m \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável e p um ponto crítico não-degenerado com $\text{ind}_f(p) = \lambda$. Suponha que exista $\varepsilon_0 > 0$ tal que $M_{[f(p)-\varepsilon_0, f(p)+\varepsilon_0]}$ seja compacto, de forma que p seja o único ponto crítico. Então, para todo $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ suficientemente pequeno, $M_{f(p)+\varepsilon}$ tem o mesmo tipo de homotopia que $M_{f(p)-\varepsilon}$ com uma λ -célula anexada.*

Demonstração. Como p é não-degenerado, pelo Lema de Morse, existe uma carta local $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^m$, com $p \in U$ e $\varphi(p) = 0$, tal que $f(x) = f(p) - x_1^2 - \dots - x_\lambda^2 + x_{\lambda+1}^2 + \dots + x_m^2$ para todo $x \in \varphi(U)$.

Tome $\varepsilon_0 > 0$ suficientemente pequeno para que $M_{[f(p)-\varepsilon_0, f(p)+\varepsilon_0]}$ seja compacto e que a bola fechada $\{\varphi(x) \mid \|\varphi(x)\| \leq 2\varepsilon_0\}$ esteja contida em $\varphi(U)$.

Seja ainda $e^\lambda = \{x \in U \mid u_1(x)^2 + \dots + u_\lambda(x)^2 \leq \varepsilon \text{ e } u_{\lambda+1}(x) = \dots = u_m(x) = 0\}$ uma λ -célula fechada.

Os objetos anteriormente apresentados são representados na figura a seguir:

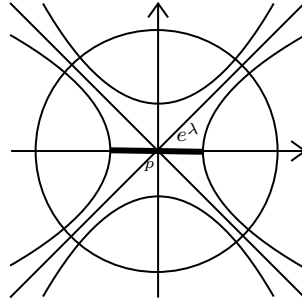


Figura 4.13: Representação dos objetos do Teorema 4.34.

Note que $e^\lambda \cap M_{f(p)-\varepsilon} = \partial e^\lambda$, portanto e^λ está anexado a $M_{f(p)-\varepsilon}$.

Mostrando que $M_{f(p)-\varepsilon} \cup e^\lambda$ é um retrato por deformação de $M_{f(p)+\varepsilon}$, conclui-se que estes espaços têm o mesmo tipo de homotopia. \square

É possível, com algumas mudanças na demonstração, generalizar o teorema para o caso em que há k pontos críticos p_1, \dots, p_k em $f^{-1}(c)$, onde c é valor crítico de f . Prova-se, neste caso, que $M_{c+\varepsilon}$ tem o mesmo tipo de homotopia que $M_{c-\varepsilon} \cup e^{\lambda_1} \cup \dots \cup e^{\lambda_k}$, onde $ind_f(p_i) = \lambda_i$, para $i = 1, \dots, k$.

Exemplo 4.35. Considere \mathbb{T}^2 o toro bidimensional mergulhado “em pé” em \mathbb{R}^3 e seja $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ a função altura dada por $f(x, y, z) = z$. Já vimos que f tem quatro pontos críticos: p_1, p_2, p_3 e p_4 , de forma que $ind_f(p_1) = 0$, $ind_f(p_2) = ind_f(p_3) = 1$ e $ind_f(p_4) = 2$. Do Teorema 4.34, reconstruímos o toro \mathbb{T}^2 da seguinte forma:

Como $ind_f(p_1) = 0$, temos que para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, $M_{f(p_1)+\varepsilon} = M_\varepsilon$, que é homeomorfo ao disco D^2 , tem o mesmo tipo de homotopia que $M_{f(p_1)-\varepsilon} = \emptyset$ com uma 0-célula anexada. De fato, uma vez que M_ε é homeomorfo ao disco, é contrátil; ou seja, tem o mesmo tipo de homotopia que um ponto.



Figura 4.14: Um ponto tem o mesmo tipo de homotopia que um disco.

Para o próximo ponto crítico, sabemos que $ind_f(p_2) = 1$. Daí, para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, $M_{f(p_2)+\varepsilon}$, que é homeomorfo a um cilindro, tem o mesmo tipo de homotopia que $M_{f(p_2)-\varepsilon}$, que é homeomorfo a um disco, com uma 1-célula anexada.

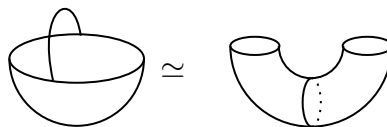


Figura 4.15: Um disco com um 1-célula anexada tem o mesmo tipo de homotopia que um cilindro.

De forma análoga, como $ind_f(p_3) = 1$, para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, $M_{f(p_3)+\varepsilon}$, que é homeomorfo ao toro menos um disco, tem o mesmo tipo de homotopia que $M_{f(p_3)-\varepsilon}$, que é homeomorfo a um cilindro, com uma 1-célula anexada.

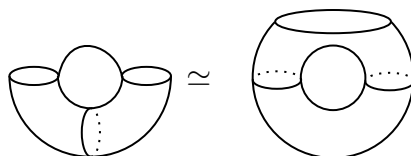


Figura 4.16: Um cilindro com uma 1-célula anexada tem o mesmo tipo de homotopia que um toro menos um disco.

Finalmente, $ind_f(p_4) = 2$, temos que para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, $M_{f(p_4)+\varepsilon}$, que é o toro completo, tem o mesmo tipo de homotopia que $M_{f(p_4)-\varepsilon}$, que é homeomorfo a um toro menos um disco, com uma 2-célula anexada, que nada mais é que o disco faltante.

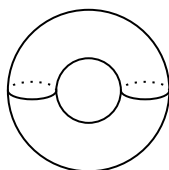


Figura 4.17: Anexando-se uma 2-célula a um toro menos um disco se obtém o toro completo.

Teorema 4.36. *Se $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de Morse definida em uma variedade fechada M , então M tem o mesmo tipo de homotopia que um CW-complexo composto de uma λ -célula para cada ponto crítico de índice λ .*

Demonstração. Sabemos que Σ_f é finito. Enumerando os valores críticos em ordem crescente, obtemos $c_1 < c_2 < \dots < c_n$.

É claro que, como M é compacta, f atinge mínimo e máximo em valores críticos. Logo, $n \geq 2$. Portanto, se $a < c_1$, tem-se que $M_a = \emptyset$.

Considere $\varepsilon > 0$ pequeno o suficiente para que c_1 seja o único valor crítico no intervalo $[c_1 - \varepsilon, c_1 + \varepsilon]$. Suponha que $p_1, \dots, p_{j(c_1)}$ sejam pontos críticos em $f^{-1}(c_1)$ tais que $ind_f(p_i) = \lambda_i$, para cada $i = 1, \dots, j(c_1)$.

Pela generalização do Teorema 4.34, temos que $M_{c_1+\varepsilon}$ tem o mesmo tipo de homotopia que $K = e^{\lambda_1} \cup \dots \cup e^{\lambda_{j(c_1)}}$, onde as colagens são feitas pela borda de cada célula, uma vez que $M_{c_1-\varepsilon} = \emptyset$. Seja então $h_1: M_{c_1+\varepsilon} \rightarrow K$ a equivalência de homotopia.

Por argumento similar, temos que $M_{c_2+\varepsilon}$ tem o mesmo tipo de homotopia que $M_{c_2-\varepsilon} \cup_{\varphi_1} \overline{e^{\lambda_1}} \cup_{\varphi_2} \overline{e^{\lambda_2}} \cup_{\varphi_3} \dots \cup_{\varphi_{j(c_2)}} \overline{e^{\lambda_{-j(c_2)}}$, onde $\varphi_1, \dots, \varphi_{j(c_2)}$ são aplicações de colagem. Novamente pelo Teorema 4.34, existe uma equivalência de homotopia $h_2: M_{c_2-\varepsilon} \rightarrow M_{c_1+\varepsilon}$. Portanto, $h_1 \circ h_2: M_{c_2-\varepsilon} \rightarrow K$ é uma equivalência de homotopia.

Repetindo o argumento indutivamente para cada um dos valores críticos, tem-se que $M_{c_n+\varepsilon} = M$ tem o mesmo tipo de homotopia que um CW-complexo, formado por uma célula e^λ para cada ponto crítico de índice λ . □

Corolário 4.37. *Toda variedade fechada tem o mesmo tipo de homotopia que um CW-complexo finito.*

Demonstração. Sabemos, pelo Corolário 4.13, que toda variedade fechada admite uma função de Morse. Aplicado o Teorema 4.36, o resultado segue. □

Observamos que o Teorema 4.36 e o Corolário 4.13 são válidos também para variedades não-compactas. Então, o Corolário 4.37 pode ser estendido uma variedade qualquer (veja [Milnor 1963]). Conclui-se então que toda variedade tem o mesmo tipo de homotopia que um CW-complexo. Optamos porém por provar apenas para o caso compacto.

Teorema 4.38. *Se M é uma variedade fechada de dimensão m e $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de Morse, então*

$$\chi(M) = \sum_{i=0}^m (-1)^i \mu_i(f),$$

onde $\mu_i(f)$ denota o número de pontos críticos de índice i de f .

Demonstração. Pelo Teorema 4.36, M tem o mesmo tipo de homotopia que um CW-complexo formado por uma λ -célula para cada ponto crítico de índice λ . Uma vez que a característica de Euler é invariante por homotopia, pode ser calculada a partir de qualquer decomposição celular de M , em particular esta dada pela células, cujas quantidades estão relacionadas às quantidades de pontos críticos de f . Logo,

$$\chi(M) = \sum_{i=0}^m (-1)^i \mu_i(f).$$

□

4.6 Funções de Morse-Bott

Nesta seção, tratamos de uma generalização das funções de Morse proposta por Raul Bott. Tais funções passaram a ser chamadas de “funções de Morse-Bott”. Para caracterizar tais funções, precisaremos da seguinte definição:

Definição 4.39 (Subvariedade crítica). Seja $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Dizemos que $S \subset M$ é uma *subvariedade crítica* para f se S é conexa, tem estrutura de subvariedade de M e está contida em Σ_f . Além disso, dizemos que uma subvariedade crítica S é *não-degenerada* se $T_x S = \ker \text{Hess}_x f$ para todo $x \in S$.

Definição 4.40. Uma *função de Morse-Bott* em uma variedade M é uma função diferenciável $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ tal que seu conjunto crítico Σ_f seja uma união disjunta de subvariedades críticas não-degeneradas.

Denotamos por $\mathcal{MB}(M)$ o conjunto de todas as funções de Morse-Bott definidas na variedade M .

Exemplo 4.41. A função $f: \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y, z) = -z^2$ é uma função de Morse-Bott. Seu conjunto crítico é formado pelos dois polos da esfera, $p = (0, 0, -1)$ e $q = (0, 0, 1)$, e o equador $E = \{(x, y, 0) \in \mathbb{S}^2\}$.

Considere novamente a projeção estereográfica

$$\begin{aligned} \pi: \mathbb{S}^2 \setminus \{q\} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\mapsto \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z} \right) \end{aligned}$$

com inversa dada por $\pi^{-1}(x, y) = \left(\frac{2x}{1+x^2+y^2}, \frac{2y}{1+x^2+y^2}, \frac{-1+x^2+y^2}{1+x^2+y^2} \right)$.

A expressão local de f pela carta π é $f(x, y) = (f \circ \pi^{-1})(x, y) = -\left(\frac{1 - x^2 + y^2}{1 + x^2 + y^2}\right)^2$.

Suas derivadas parciais são:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= -\frac{8x(-1 + x^2 + y^2)}{(1 + x^2 + y^2)^3}; \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= -\frac{8y(-1 + x^2 + y^2)}{(1 + x^2 + y^2)^3}.\end{aligned}$$

Encontremos os pontos que anulam as derivadas simultaneamente, a fim de encontrar os pontos críticos de f . Temos que:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x^2 + y^2 = 1; \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 &\Leftrightarrow y = 0 \text{ ou } x^2 + y^2 = 1.\end{aligned}$$

Obtemos então as possibilidades:

1. $x = 0 = y \Rightarrow \pi^{-1}(0, 0) = (0, 0, -1) = p$;
2. $x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow \pi^{-1}(x, y) = \{(x, y, 0) \mid x^2 + y^2 = 1\} = E$.

A matriz hessiana de f em p é

$$\begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$$

o que mostra que p é não-degenerado com $\text{ind}_f(p) = 0$.

Mostra-se facilmente, utilizando outra carta, que q é também ponto crítico não-degenerado de f com $\text{ind}_f(q) = 2$.

O conjunto E não é discreto; isto é, seus pontos não são isolados. Portanto seus pontos são degenerados. No entanto, formam uma subvariedade crítica não-degenerada: para qualquer ponto $p = (x, y, 0) \in E$, tem-se que $N_p E$ é o eixo z de \mathbb{R}^3 .

Exemplo 4.42. Considere \mathbb{T}^2 o toro bidimensional mergulhado “deitado” em \mathbb{R}^3 e a função altura $f: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y, z) = z$. A função f é uma função de Morse-Bott cujo conjunto crítico é formado por dois círculos disjuntos paralelos ao plano xy .

Mais especificamente, seja \mathbb{T}^2 o toro bidimensional mergulhado em \mathbb{R}^3 dado pela imagem da aplicação $\varphi: [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$\varphi(u, v) = ((2 + \cos(u)) \cos(v), (2 + \cos(u)) \sin(v), \sin(u)).$$

Consideremos a função altura relativa a este mergulho; isto é, $f: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é tal que

$$(f \circ \varphi)(u, v) = \sin(u).$$

Vamos encontrar os pontos críticos de f . Com efeito:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial u}(u, v) &= \cos(u); \\ \frac{\partial f}{\partial v}(u, v) &= 0.\end{aligned}$$

Assim, $\varphi(u, v)$ será ponto crítico de f se, e somente se, $\cos(u) = 0$, o que implica que

$$\Sigma_f = \left\{ \varphi(u, v) \mid u \in \left\{ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\} \text{ e } v \in [0, 2\pi] \right\},$$

que é formado por duas componentes,

$$\begin{aligned} S_1 &= \left\{ \varphi\left(-\frac{\pi}{2}, v\right) \mid v \in [0, 2\pi] \right\}; \\ S_2 &= \left\{ \varphi\left(\frac{\pi}{2}, v\right) \mid v \in [0, 2\pi] \right\} \end{aligned}$$

ambas homeomorfas à circunferência \mathbb{S}^1 .

O Exemplo 4.42 também traz luz a um tipo específico de função de Morse-Bott: as *funções ciclo* (ou, em inglês, *round functions*). São aquelas cujo conjunto crítico é formado por uma união disjunta de subvariedades homeomorfas à circunferência \mathbb{S}^1 .

Fica claro que toda função de Morse é também uma função de Morse-Bott, uma vez que os pontos críticos não-degeneradas são subvariedades de dimensão 0. Daí, se p é ponto crítico não-degenerado de f , então $T_p\{0\} = \{0\} = \ker Hess_p f$.

Tem-se então, de imediato, que $\mathcal{MB}(M)$ é um subconjunto denso de $C^\infty(M, \mathbb{R})$, pois o conjunto das funções de Morse, que, por sua vez, é denso, está contido no conjunto das funções de Morse-Bott.

Dada S uma subvariedade crítica não-degenerada para $f: M \rightarrow \mathbb{R}$, para cada ponto $p \in S$ considere a decomposição $T_p M = T_p S \oplus N_p S$. Faz sentido então considerar a restrição de $Hess_p f$ ao espaço normal $N_p S$. Esta restrição será uma forma quadrática não-degenerada. Dizemos então que $Hess_p f$ é *não-degenerada na direção normal a S em p* .

Assim como para as funções de Morse, temos também o Lema de Morse-Bott, que caracteriza o comportamento de uma função em uma vizinhança de uma subvariedade crítica não-degenerada:

Teorema 4.43 (Lema de Morse-Bott). *Sejam $f: M^m \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável, S uma subvariedade crítica não-degenerada de dimensão n para f e $p \in S$. Existe uma carta $\varphi: U \subset M \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$ tal que*

1. $\varphi(p) = 0$;
2. $\varphi(U \cap S) = \mathbb{R}^n \times \{0\} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-1}$;
3. $f \circ \varphi^{-1}(x_1, \dots, x_m) = f(C) - (x_1^2 + \dots + x_k^2) + x_{k+1}^2 + \dots + x_{m-n}^2$, onde $k = \text{ind}(Hess_p f|_{N_p S})$.

Omitiremos a demonstração deste teorema, que pode ser encontrada na referência [Banyaga e Hurtubise 2004].

Corolário 4.44. *Se $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de Morse-Bott, então $\text{ind}(Hess_p f|_{N_p S})$ é constante em cada subvariedade crítica S para f .*

Recentemente, as funções de Morse-Bott têm se mostrado úteis na Teoria das Folheações, bem como na Teoria das Singularidades, e muitos aspectos de tais funções, que generalizam aos das funções de Morse, têm sido investigados. Veja, por exemplo, [Meza-Sarmiento 2015] e [Batista, Costa e Meza-Sarmiento 2022].

5 A classificação das funções de Morse

O *espaço de Reeb* associado a uma aplicação contínua entre espaços topológicos nos permite estudar algumas propriedades, ora do espaço em que a aplicação está definida, ora da própria aplicação. Quando se trata de uma função de Morse definida sobre uma variedade fechada, o espaço de Reeb associado a tal função assume uma forma que já nos é familiar: um grafo. O referido grafo, chamado então de *grafo de Reeb*, resulta ser um invariante completo, quando considerada uma certa ordenação em seus vértices, em relação à equivalência das funções, o que nos permite apresentar um teorema de classificação das funções de Morse. Reforçamos, mais uma vez, que, neste capítulo, as variedades serão sempre consideradas fechadas e conexas, salvo menção contrária. O objetivo deste capítulo é apresentar os teoremas de classificação presentes em [Izar 1978].

5.1 Algumas generalidades sobre grafos

Já havíamos antecipado que um CW-complexo unidimensional é chamado de *grafo*. Damos aqui uma definição para esse caso particular.

Definição 5.1 (Grafo). Um *grafo* é um par $\Gamma = (G, V)$, onde G é um espaço de Hausdorff e V é um subespaço discreto de G tal que:

1. $G - V$ é uma reunião disjunta de subconjuntos e_i homeomorfos ao intervalo $]0, 1[$ da reta real;
2. G tem a topologia fraca; ou seja, $A \subset G$ é fechado quando $A \cap \bar{e}_i$ é fechado em \bar{e}_i para todo e_i .

Os elementos de V , que são 0-células, são chamados de *vértices*. Os subconjuntos abertos e_i de $G - V$, que são 1-células, são chamados de *arestas*. Um grafo é *finito* quando é composto por uma quantidade finita de vértices e de arestas. Neste caso, como já havíamos comentado no Capítulo 2, a condição que se refere à topologia fraca é supérflua, pois é automaticamente satisfeita. Este será o caso de maior interesse neste trabalho.

Dois vértices v_1 e v_2 são *adjacentes* se existir uma aresta e_i tal que $\partial e_i = \{v_1, v_2\}$. No caso em que ∂e_i for um conjunto unitário, dizemos que a aresta e_i é um *laço*. Uma aresta e *incide* em um vértice v se $v \in \partial e$. O *grau* de um vértice v é precisamente o número de arestas que incidem em v ; denotamos o grau de v por $\deg(v)$.

Um *ciclo* é uma coleção finita de arestas $\{e_1, \dots, e_k\}$ tal que e_i e e_{i+1} tenham sempre um vértice em comum, para $i = 1, \dots, k - 1$, bem como e_1 e e_k . Um grafo é uma *árvore* se não possuir ciclos ou laços.

Proposição 5.2. *Seja $\Gamma = (G, V)$ um grafo finito. Representado por σ_0 o número de vértices e σ_1 o número de arestas, tem-se que*

$$\sigma_1 = \frac{1}{2} \sum_{v \in V} \text{deg}(v).$$

Todo grafo pode ser representado como um diagrama geométrico. Um grafo é *planar* se admitir uma representação plana.

Exemplo 5.3. O par $\Gamma = (\mathbb{R}, \mathbb{Z})$ é um grafo infinito.

Exemplo 5.4. Seja $V = \{x_1, \dots, x_k \mid x_i \in \mathbb{S}^1\}$ um conjunto finito de pontos da circunferência. O par $\Gamma = (\mathbb{S}^1, V)$ é um grafo finito.

Exemplo 5.5.

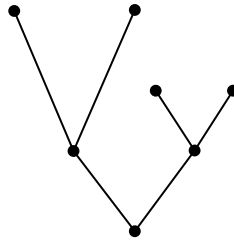


Figura 5.1: Um grafo árvore.

Exemplo 5.6.

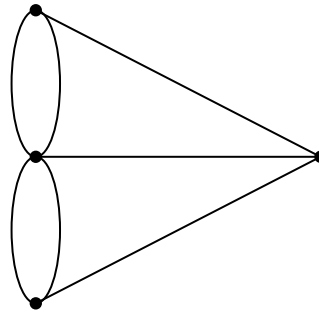


Figura 5.2: O grafo das Pontes de Königsberg.

Exemplo 5.7 (Grafos completos). Uma família particular de grafos são os *grafos completos*. O grafo completo K_n é aquele formado por n vértices e uma aresta ligando cada par de vértices distintos.

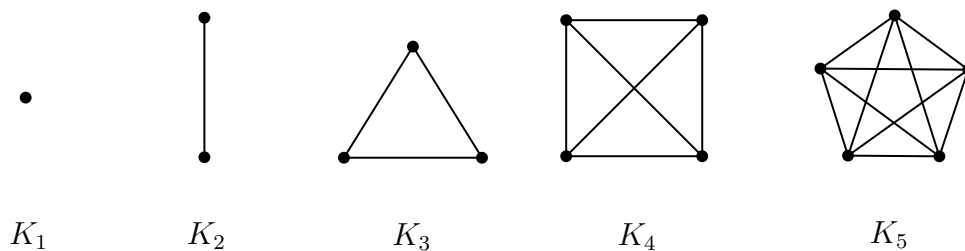


Figura 5.3: Grafos completos.

Vale observar que o grafo K_5 não é planar, pois, apesar da representação geométrica utilizada, as arestas não podem se interseccionar. Note ainda que, apesar da representação geométrica dada acima, o grafo K_4 , diferente do K_5 , é planar, pois pode ser representado como mostra a figura a seguir:

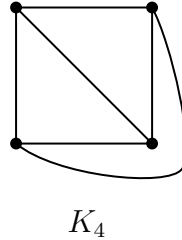


Figura 5.4: Representação planar do grafo K_4 .

Definição 5.8. Dois grafos $\Gamma_1 = (G_1, V_1)$ e $\Gamma_2 = (G_2, V_2)$ são *isomorfos*, o que denotamos por $\Gamma_1 \cong \Gamma_2$, se existir um homeomorfismo $\iota: G_1 \rightarrow G_2$, chamado de *isomorfismo*, que leva vértice em vértice e aresta em aresta.

Observe que todo isomorfismo é uma aplicação celular. Se dois grafos são isomorfos, então eles têm a mesma representação gráfica a menos de homeomorfismo. Note ainda que é possível que dois grafos sejam homeomorfos sem que sejam isomorfos.

Exemplo 5.9.



Figura 5.5: Grafos que são homeomorfos, mas não são isomorfos.

Observe que os grafos Γ_1 e Γ_2 são homeomorfos, pois ambos são homeomorfos a um segmento de reta. Por outro lado, uma vez que Γ_1 tem dois vértices, enquanto Γ_2 tem três, estes grafos não podem ser isomorfos.

Proposição 5.10. *Sejam $\Gamma = (G, V)$ e $\Gamma' = (G', V')$ dois grafos. Dado um homeomorfismo $h: G \rightarrow G'$, as asserções seguintes são equivalentes:*

1. h é um isomorfismo de grafos;
2. $h(V) = V'$;
3. h leva arestas em arestas.

Demonstração. Se h é um isomorfismo de grafos, $h(V) = V'$ trivialmente, pois leva vértice em vértice.

Supondo agora que $h(V) = V'$, o fato de h ser um homeomorfismo nos leva a

$$h(G - V) = h(G) - h(V) = G' - V'.$$

Daí, uma componente conexa de $G - V$, isto é, uma aresta de (G, V) , será levada em uma componente conexa de $G' - V'$, uma aresta de (G', V') .

Finalmente, se h leva aresta em aresta, temos:

$$h(V) = h(G - (G - V)) = h(G) - h(G - V) = G' - (G' - V') = V'.$$

Logo, h leva vértice em vértice e, portanto, é um isomorfismo de grafos. \square

Definição 5.11 (Subgrafo). Dado um grafo $\Gamma = (G, V)$, um *subgrafo* de Γ é um grafo $\Gamma' = (G', V')$, onde $G' \subset G$ e $V' = G' \cap V$.

Definição 5.12 (Característica de Euler de um grafo finito). Seja $\Gamma = (G, V)$ um grafo finito. Denote por σ_0 o número de vértices e por σ_1 o número de arestas de Γ . O número

$$\chi(\Gamma) = \sigma_0 - \sigma_1$$

é chamado de *característica de Euler* de Γ .

Fica claro que se dois grafos são isomorfos, então eles têm a mesma característica de Euler.

Definição 5.13 (Números de Betti de um grafo). Seja $\Gamma = (G, V)$ um grafo finito. Definimos

$$\begin{aligned}\beta_0(\Gamma) &= \text{número de componentes conexas de } \Gamma; \\ \beta_1(\Gamma) &= \text{número de ciclos de } \Gamma.\end{aligned}$$

sendo $\beta_0(\Gamma)$ e $\beta_1(\Gamma)$, respectivamente, chamados de número de Betti de índices 0 e 1 do grafo Γ .

A definição dos números de Betti pode ser estendida a outros espaços, como visto no Capítulo 2. Neste caso, os números de Betti de índices superiores a 1 de um grafo são todos nulos.

Proposição 5.14. *Para todo grafo finito Γ , tem-se que*

$$\chi(\Gamma) = \beta_0(\Gamma) - \beta_1(\Gamma).$$

Definição 5.15 (Rotulagem dos vértices de um grafo). Dado um grafo $\Gamma = (G, V)$, uma *rotulagem dos vértices* de Γ é uma aplicação $\sigma: V \rightarrow \mathbb{N}$, que associa a cada vértice de Γ um número natural. Chama-se *rótulo* do vértice v a sua imagem $\sigma(v)$.

Em Teoria dos Grafos, a noção de *coloração dos vértices* é muito comum. Uma *coloração* é uma rotulagem tal que vértices adjacentes tenham necessariamente rótulos distintos. Chama-se *número cromático* de um grafo o número mínimo de rótulos distintos para que se faça uma coloração.

5.2 O grafo de Reeb

Esta seção se dedica à construção de um grafo associado a uma função de Morse, que resulta ser um importante invariante no estudo da equivalência de tais funções.

Faremos primeiramente uma abordagem puramente topológica e nos restringiremos ao caso pretendido posteriormente.

Seja $f: X \rightarrow Y$ uma função contínua entre os espaços topológicos X e Y . Considere $\mathcal{R}_f \subset X \times X$ o conjunto

$$\mathcal{R}_f = \{(x, y) \in X \times X \mid \text{existe } t \in Y \text{ de forma que } x \text{ e } y \text{ estejam na mesma componente conexa de } f^{-1}(t)\}.$$

Proposição 5.16. \mathcal{R}_f definido acima é uma relação de equivalência sobre X .

Demonstração. As condições de reflexividade e simetria são óbvias. Provemos então a transitividade.

Suponha que (x, y) e (y, z) pertençam a \mathcal{R}_f .

Como $(x, y) \in \mathcal{R}_f$, então $f(x) = f(y)$. Analogamente, se $(y, z) \in \mathcal{R}_f$, $f(y) = f(z)$. Pela transitividade da igualdade, $f(x) = f(z)$. Portanto, x, y e z estão na mesma curva de nível. Por outro lado, x e y estão na mesma componente conexa de tal curva, bem como y e z . Logo, x e z também estão. Portanto, $(x, z) \in \mathcal{R}_f$. \square

Definição 5.17 (Espaço de Reeb). O espaço quociente $\frac{X}{\mathcal{R}_f}$ é chamado de *espaço de Reeb* associado a f . Tal espaço será denotado por \mathfrak{R}_f .

Denote por $q_f: X \rightarrow \mathfrak{R}_f$ a projeção ao quociente. Existe uma única aplicação contínua $\bar{f}: \mathfrak{R}_f \rightarrow Y$, dada por $\bar{f}([x]) = f(x)$, tal que $f = \bar{f} \circ q_f$. A aplicação \bar{f} é chamada de *aplicação de Reeb* e a representação de f por $\bar{f} \circ q_f$ é chamada de *fatorização de Stein* de f .

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \searrow q_f & \nearrow \bar{f} \\ & \mathfrak{R}_f & \end{array}$$

Em um estudo tão generalizado, não se tem muitas informações relevantes a respeito do espaço de Reeb associado a uma aplicação contínua, tampouco que conexões tal espaço tem com outros objetos.

Quando se trabalha com estruturas adicionais, seja nos espaços topológicos, seja na aplicação contínua, o espaço de Reeb associado à aplicação toma uma forma mais conhecida.

O caso mais estudado é quando se considera X e Y como variedades diferenciáveis, em particular, sendo Y uma variedade unidimensional, e f uma aplicação diferenciável. Neste capítulo, estudamos o caso em que $Y = \mathbb{R}$ e f uma função de Morse.

Teorema 5.18. Se M é uma variedade fechada e conexa e $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de Morse, então o espaço de Reeb \mathfrak{R}_f tem estrutura de um grafo finito.

Demonstração. Primeiramente, para mostrar que \mathfrak{R}_f é um espaço de Hausdorff, basta verificar que a projeção ao quociente é uma aplicação fechada.

Com efeito, seja $F \subset M$ um fechado. Denotemos por \hat{F} o saturado de F pela aplicação q_f ; isto é, $\hat{F} = q_f^{-1}(q_f(F))$. Para mostrarmos que q_f é uma aplicação fechada, basta mostrar que \hat{F} é fechado em M .

Temos que $\hat{F} = pr_2(F \times M \cap \mathcal{R}_f)$. Como $F \times M \cap \mathcal{R}_f$ é compacto e a projeção na segunda coordenada pr_2 é contínua, temos que \hat{F} é compacto. Como M é Hausdorff, \hat{F} é fechado e, daí, a projeção ao quociente q_f é uma aplicação fechada. Logo, em virtude do Teorema 2.9, \mathfrak{R}_f é um espaço de Hausdorff.

Consideremos então o conjunto

$$V_f = \{[x] \in \mathfrak{R}_f \mid x \in \Sigma_f\}.$$

Uma vez que f é uma função de Morse sobre uma variedade fechada, Σ_f é finito, portanto V_f é um subconjunto discreto de \mathfrak{R}_f , cujos elementos serão os vértices.

Para garantir que o par (\mathfrak{R}_f, V_f) seja um grafo finito, basta mostrar então que a diferença $\widetilde{\mathfrak{R}}_f = \mathfrak{R}_f - V_f$ é uma reunião disjunta de um número finito de subconjuntos, cada um homeomorfo a um intervalo aberto da reta real, que serão as arestas. Para tal feito, basta mostrar que $\bar{f}|_{\widetilde{\mathfrak{R}}_f} : \widetilde{\mathfrak{R}}_f \rightarrow \mathbb{R}$ é um homeomorfismo local.

Seja $\widetilde{M} = M - q_f^{-1}(V_f)$. Note que, uma vez que V_f é fechado e q_f é contínua, ambos $\widetilde{\mathfrak{R}}_f$ e \widetilde{M} são abertos.

Para mostrarmos que $\bar{f}|_{\widetilde{\mathfrak{R}}_f} : \widetilde{\mathfrak{R}}_f \rightarrow \mathbb{R}$ é um homeomorfismo local, basta verificarmos que a aplicação é aberta e localmente injetiva.

Sabemos que $f|_{\widetilde{M}} : \widetilde{M} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma aplicação aberta, pois é submersão.

Tome $U \subset \widetilde{\mathfrak{R}}_f$ um aberto, que será também aberto em \mathfrak{R}_f . Por \mathfrak{R}_f ter a topologia quociente, $q_f^{-1}(U)$ é aberto em M e também em \widetilde{M} . Portanto $f(q_f^{-1}(U))$ é aberto em \mathbb{R} .

Por outro lado, temos que $\bar{f} \circ q_f = f$. Logo, $f(q_f^{-1}(U)) = \bar{f}(q_f(q_f^{-1}(U))) = \bar{f}(U)$. Logo, $\bar{f}|_{\widetilde{\mathfrak{R}}_f}$ é aberta.

Seja agora Y uma componente conexa de $\widetilde{\mathfrak{R}}_f$. Se $[x]$ e $[y]$ estão em Y e são distintos, então x e y estão em $q_f^{-1}(Y)$ e não estão na mesma curva de nível de f ; isto é, $f(x) \neq f(y)$. Assim, $\bar{f}([x]) = f(x) \neq f(y) = \bar{f}([y])$. Logo \bar{f} é injetiva em cada componente conexa de $\widetilde{\mathfrak{R}}_f$. Finalmente $\bar{f}|_{\widetilde{\mathfrak{R}}_f}$ é homeomorfismo local.

Desta forma, está claro que o par (\mathfrak{R}_f, V_f) forma um grafo. Sua finitude é imediata do fato de \mathfrak{R}_f ser compacto e $V_f \subset \mathfrak{R}_f$ ser discreto. \square

Percebe-se ainda que, na verdade, $\bar{f}|_{\widetilde{\mathfrak{R}}_f} : \widetilde{\mathfrak{R}}_f \rightarrow \mathbb{R}$ não só é um homeomorfismo local, como também é uma aplicação de recobrimento. Note que a conexidade de M não é essencial. Caso M não fosse conexa, (\mathfrak{R}_f, V_f) seria ainda um grafo, porém desconexo.

O Teorema 5.18 foi proposto pelo francês Georges Reeb em 1946 (veja [Reeb 1946]), e é tal trabalho que inspira o uso da Teoria dos Grafos no estudo das aplicações diferenciáveis.

No capítulos seguintes, apresentaremos outras situações em que o espaço de Reeb associado a uma aplicação tem estrutura de um grafo finito.

Ao contrário do que foi dito sobre a conexidade da variedade M , a hipótese acerca da compacidade não é dispensável, como se vê no exemplo a seguir:

Exemplo 5.19. Considere $M = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ e $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = y$.

Note que M é uma variedade não-compacta. O espaço de Reeb \mathfrak{R}_f forma o que é conhecido como *reta com duas origens*. Trata-se de um espaço não-Hausdorff, logo não é um grafo.

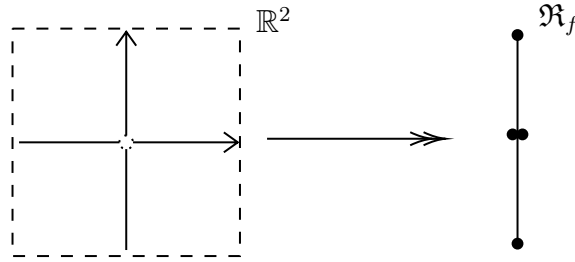


Figura 5.6: O espaço de Reeb não é um grafo.

Neste trabalho, motivados pelo problema de classificação em que estamos interessados e, com a notação do Teorema 5.18, definimos a noção de *grafo de Reeb*.

Definição 5.20 (Grafo de Reeb). Seja $f: M^m \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de Morse. A terna $\Gamma_f = (\mathfrak{R}_f, V_f, \bar{f})$ é chamada de *grafo de Reeb associado à função f* .

É comum encontrarmos na literatura, como em [Gelbukh 2023], sendo denominado de *grafo de Reeb* da função f apenas o par (\mathfrak{R}_f, V_f) , o qual denotaremos por \mathfrak{G}_f . Desta forma, o grafo de Reeb associado à função f pode ser visto como o par $\Gamma_f = (\mathfrak{G}_f, \bar{f})$. Veja os exemplos a seguir:

Exemplo 5.21.

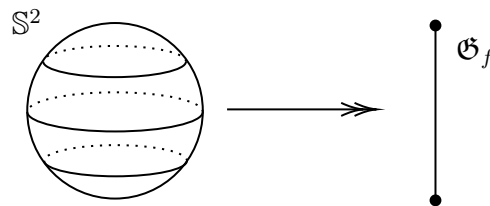


Figura 5.7: Grafo de Reeb associado à função altura na esfera \mathbb{S}^2 .

Exemplo 5.22.

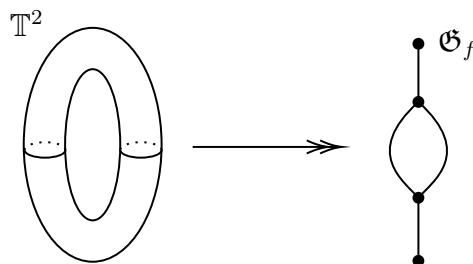


Figura 5.8: Grafo de Reeb associado à função altura no toro \mathbb{T}^2 .

Isso é útil, em algumas situações, pois permite definir o grafo de Reeb para um conjunto maior de funções, como, por exemplo, as funções de Morse não-estáveis.

Dada uma função de Morse $f: M \rightarrow \mathbb{R}$, denote por

$$C_f = \{t \in \mathbb{R} \mid t \text{ é valor crítico de } f\}$$

e considere sobre C_f a ordem induzida da reta real.

No caso das funções de Morse estáveis, a aplicação de Reeb $\bar{f}: \mathfrak{R}_f \rightarrow \mathbb{R}$ define uma ordenação dos vértices do grafo relacionada à ordem dos valores críticos de f , o que será útil, posteriormente, nos teoremas de classificação.

Inspirados por esta situação, introduzidos a noção de *grafos de Reeb equivalentes*, que é uma restrição do conceito de isomorfismo de grafos, levando agora em consideração a ordenação dos vértices. Essencialmente, o grafo de Reeb Γ_f é o grafo \mathfrak{G}_f munido de uma ordenação de seus vértices.

Definição 5.23 (Equivalência de Grafos de Reeb). Sejam $f, g: M \rightarrow \mathbb{R}$ duas funções de Morse, sendo $\Gamma_f = (\mathfrak{R}_f, V_f, \bar{f})$ e $\Gamma_g = (\mathfrak{R}_g, V_g, \bar{g})$ seus respectivos grafos de Reeb. Dizemos que Γ_f e Γ_g são *equivalentes*, denotando por $\Gamma_f \equiv \Gamma_g$, se \mathfrak{G}_f e \mathfrak{G}_g forem isomorfos e, além disso, existir uma bijeção monotônica $k': C_f \rightarrow C_g$ tal que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} V_f & \xrightarrow{\bar{f}|_{V_f}} & C_f \\ \downarrow \iota|_{V_f} & & \downarrow k' \\ V_g & \xrightarrow{\bar{g}|_{V_g}} & C_g \end{array}$$

comute, onde $\iota: \mathfrak{R}_f \rightarrow \mathfrak{R}_g$ é o isomorfismo previsto.

Não é difícil perceber que a relação acima é uma relação de equivalência para grafos de Reeb. É, portanto, reflexiva, simétrica e transitiva.

Observe que a equivalência de grafos de Reeb implica no isomorfismo, pela própria definição. A recíproca, entretanto, não é válida. Veja o Exemplo 5.24.

Exemplo 5.24. A figura a seguir mostra dois exemplos de funções de Morse estáveis $f, g: \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, tais que \mathfrak{G}_f e \mathfrak{G}_g são isomorfos como na definição de isomorfismo de grafos, mas que, ao considerarmos a ordenação dos valores críticos, Γ_f e Γ_g não são equivalentes.

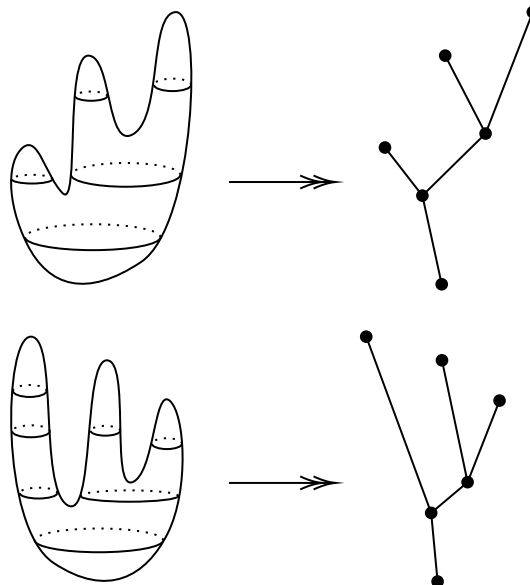


Figura 5.9: Grafos de Reeb isomorfos, porém não-equivalentes.

Proposição 5.25. Considere $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de Morse simples e Γ_f o seu grafo de Reeb. Se v é um vértice de Γ_f , então há, no máximo, três arestas incidentes em v .

Demonstração. Seja p um ponto crítico de f com $\text{ind}_f(p) = \lambda$. Considere $\varepsilon > 0$ tal que $f(p)$ seja o único valor crítico em $[f(p) - \varepsilon, f(p) + \varepsilon]$. Por conseguinte, p será o único ponto crítico em $W = f^{-1}([f(p) - \varepsilon, f(p) + \varepsilon])$, uma vez que f é simples. Chame ainda por $V = f^{-1}(f(p) - \varepsilon)$ e $V' = f^{-1}(f(p) + \varepsilon)$.

Pelo Teorema 4.30, a componente conexa de W que contém p é difeomorfa a $\mathcal{W}(V_1, \phi)$, onde $\phi: \mathbb{S}^{\lambda-1} \times D^{n-\lambda} \rightarrow V_1$ é um mergulho, e V_1 é a reunião disjunta das componentes conexas de V que intersectam a imagem de ϕ .

Assim, temos que $V' = \mathcal{X}(V_1, \phi) \sqcup (V - V_1)$. Denotando por α o número de componentes conexas de V e por β o número de componentes conexas de V' , podemos concluir que ou $|\alpha - \beta| = 0$ ou $|\alpha - \beta| = 1$.

Logo, se $v = [p]$ é vértice de Γ_f , há no máximo três arestas incidentes em v . □

É possível mostrar que para grafos de Reeb associados a funções de Morse, nos vértices associados a pontos de máximo ou mínimo há apenas uma aresta incidente, enquanto em pontos de sela, no caso das superfícies orientáveis, há exatamente três arestas incidentes. Veja [Michalak 2018].

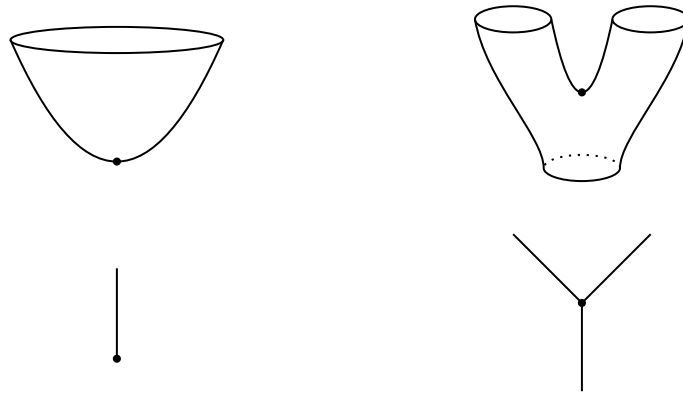


Figura 5.10: Possíveis configurações para grafos de Reeb em cobordismos elementares orientáveis de dimensão dois: à esquerda em pontos de centro (mínimo ou máximo), à direita em pontos de sela.

Proposição 5.26. *Sejam $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ um função de Morse simples e Γ_f seu grafo de Reeb. Se $q_f: M \rightarrow \mathfrak{R}_f$ é a projeção ao quociente, o homomorfismo induzido*

$$(q_f)_\#: \pi_1(M) \rightarrow \pi_1(\mathfrak{R}_f)$$

é um epimorfismo de grupos.

Demonstração. Mostraremos que dado um laço $\alpha: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathfrak{R}_f$, existe $\beta: \mathbb{S}^1 \rightarrow M$ tal que $q_f \circ \beta = \alpha$.

Sejam v_1, \dots, v_k vértices de Γ_f que estejam em $\alpha(\mathbb{S}^1)$. Como f é simples, podemos supor que $\bar{f}(v_1) < \bar{f}(v_2) < \dots < \bar{f}(v_k)$.

Temos que $\alpha(\mathbb{S}^1) - \{v_1, \dots, v_k\}$ é uma reunião disjunta de segmentos contidos em arestas de Γ .

Seja $\xi: M \rightarrow TM$ um campo de vetores pseudo-gradiente para f . Para cada um dos segmentos descritos acima, considere um caminho em M sendo uma curva integral de M que se projeta sobre o segmento através de q_f .

Para cada componente conexa de $f^{-1}(p_i)$ que contém p_i , onde p_i é o ponto crítico referente ao vértice v_i , considere um caminho que liga as curvas integrais de ξ . Obteremos assim um caminho fechado β que passa sobre os pontos p_1, \dots, p_k , tal que $q_f \circ \beta = \alpha$. □

Esta última proposição foi apresentada em [Reeb 1946] também sem demonstração, tal como todos os outros resultados do artigo. A prova aqui presente foi retirada de [Izar 1988]. Em verdade, a hipótese de que a função f seja uma função de Morse não é essencial, como se pode ver no capítulo seguinte.

5.3 O grafo de Reeb como invariante

Nesta seção, mostramos que o grafo de Reeb é um invariante das classes de equivalência das funções de Morse definidas em variedades fechadas; isto é, se duas funções de Morse são equivalentes, seus respectivos grafos de Reeb são equivalentes.

Lema 5.27. *Seja $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de Morse e $k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ um difeomorfismo. É verdade que:*

1. $\mathfrak{R}_f = \mathfrak{R}_{k \circ f}$;
2. $V_f = V_{k \circ f}$;
3. $\overline{k \circ f} = k \circ \overline{f}$;
4. $t \in C_f$ se, e somente se, $k(t) \in C_{k \circ f}$.

Demonstração. De fato,

$$\begin{aligned} (x, y) \in \mathcal{R}_f &\Leftrightarrow x \text{ e } y \text{ estão na mesma componente conexa de } f^{-1}(t) \\ &\Leftrightarrow x \text{ e } y \text{ estão na mesma componente conexa de } f^{-1}(k^{-1}(s)) \\ &\Leftrightarrow x \text{ e } y \text{ estão na mesma componente conexa de } (k \circ f)^{-1}(s) \\ &\Leftrightarrow (x, y) \in \mathcal{R}_{k \circ f} \end{aligned}$$

onde $k(t) = s$. Portanto $\mathfrak{R}_f = \mathfrak{R}_{k \circ f}$.

Pela Proposição 3.90, $p \in \Sigma_f$ se, e somente se $p \in \Sigma_{k \circ f}$. Assim, $V_f = V_{k \circ f}$.

Além disso, se $t \in C_f$, então existe $p \in \Sigma_f$ tal que $f(p) = t$. Mas, pelo mesmo argumento usado anteriormente, $p \in \Sigma_{k \circ f}$. Logo, $(k \circ f)(p) = k(f(p)) = k(t) \in C_{k \circ f}$. A recíproca se procede de maneira análoga.

Finalmente, $\overline{k \circ f}([x]) = (k \circ f)(x) = k(f(x)) = k(\overline{f}([x])) = (k \circ \overline{f})([x])$. \square

Corolário 5.28. *Se $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de Morse e $k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é um difeomorfismo, então $\Gamma_f \equiv \Gamma_{k \circ f}$.*

O grafo de Reeb resulta ser um invariante para as classes de equivalência das funções de Morse.

Teorema 5.29. *Se $f, g: M^m \rightarrow \mathbb{R}$ são funções de Morse equivalentes, então Γ_f é equivalente a Γ_g .*

Demonstração. Sejam $h: M \rightarrow M$ e $k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ os difeomorfismos previstos pela equivalência das funções f e g de tal forma que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ h \downarrow & & \downarrow k \\ M & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} \end{array}$$

seja comutativo.

Pelo Corolário 5.28, temos que $\Gamma_f \equiv \Gamma_{k \circ f}$. Basta então mostrar que $\Gamma_{g \circ h} \equiv \Gamma_g$ e teremos o desejado.

O difeomorfismo $h: M \rightarrow M$ induz um isomorfismo de grafos $\bar{h}: \mathfrak{R}_{g \circ h} \rightarrow \mathfrak{R}_g$. De fato, similarmente ao lema anterior, tem-se que $x \mathfrak{R}_{g \circ h} y$ se, e somente se, $h(x) \mathfrak{R}_g h(y)$. Faça então $\bar{h}([x]) = \bar{g}(h(x))$.

O diagrama a seguir comuta:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{R}_{g \circ h} & \xrightarrow{\bar{g \circ h}} & \mathbb{R} \\ \bar{h} \downarrow & \nearrow \bar{g} & \\ \mathfrak{R}_g & & \end{array}$$

Portanto, $\Gamma_{g \circ h} \equiv \Gamma_g$. Como f e g são equivalentes, $g \circ h = k \circ f$. Por transitividade, temos que $\Gamma_f \equiv \Gamma_{k \circ f} = \Gamma_{g \circ h} \equiv \Gamma_g$, como queríamos. \square

Nota-se, em particular, que se duas funções de Morse são equivalentes, então seus grafos de Reeb são isomorfos.

Por outro lado, o mero isomorfismo de grafos não torna a recíproca do Teorema 5.29 verdadeira.

Exemplo 5.30. As funções dadas no Exemplo 5.24 não são equivalentes, pois os tipos topológicos das curvas de nível referentes a um dos pontos de sela são diferentes.

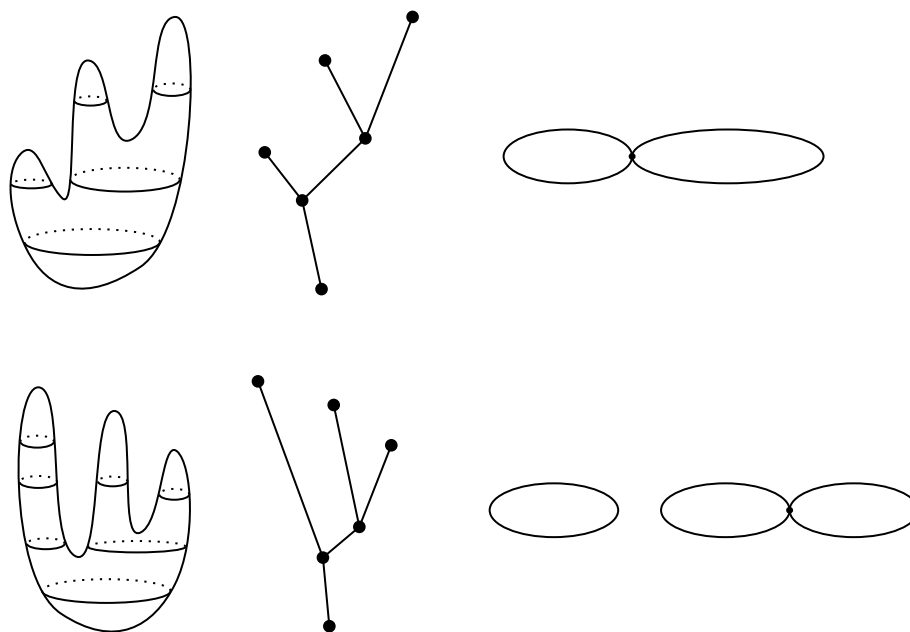


Figura 5.11: Funções não-equivalentes com grafos isomorfos

Na seção a seguir, em que construiremos a recíproca para o caso das variedades bidimensionais, fica clara a importância da exigência da equivalência entre os grafos de Reeb, e não apenas o isomorfismo.

5.4 O teorema de classificação

O propósito central desta seção é construir uma recíproca para o Teorema 5.29 para funções estáveis definidas em variedades bidimensionais, tornando assim o grafo de Reeb um *invariante completo*.

Lema 5.31. *Sejam $f: M^m \rightarrow [a, b]$ e $g: M \rightarrow [c, d]$ funções de Morse com grafos de Reeb equivalentes, sendo $k': C_f \rightarrow C_g$ a bijeção monotônica prevista pela equivalência. Dado $k: [a, b] \rightarrow [c, d]$ um difeomorfismo que estende k' (isto é, $k' = k|_{C_f}$), existe um homeomorfismo $h: \mathfrak{R}_{k \circ f} \rightarrow \mathfrak{R}_g$ tal que $\bar{g} \circ h = k \circ \bar{f}$.*

Demonstração. Como f e g tem grafos de Reeb equivalentes, temos que existe um isomorfismo de grafos $\iota: \mathfrak{R}_f \rightarrow \mathfrak{R}_g$ e o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} V_f & \xrightarrow{\bar{f}|_{V_f}} & C_f \\ \iota|_{V_f} \downarrow & & \downarrow k' \\ V_g & \xrightarrow{\bar{g}|_{V_g}} & C_g \end{array}$$

Seja $k: [a, b] \rightarrow [c, d]$ um difeomorfismo que estende k' ; isto é, $k|_{C_f} = k'$. Pelo Lema 5.27, temos que $\mathfrak{R}_f = \mathfrak{R}_{k \circ f}$. Assim, podemos considerar

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{R}_{k \circ f} & \xrightarrow{k \circ \bar{f}} & [c, d] \\ & \nearrow \bar{g} & \\ \mathfrak{R}_g & & \end{array}$$

Sejam então e uma aresta de $\mathfrak{R}_{k \circ f}$ e d a aresta de \mathfrak{R}_g tal que $\iota(e) = d$. Tomando $[p]$ e $[q]$ os vértices de e e supondo que $k(\bar{f}([p])) < k(\bar{f}([q]))$, temos que $k \circ \bar{f}$ aplica \bar{e} homeomorficamente sobre $[k(\bar{f}([p])), k(\bar{f}([q]))]$.

Daí, como $k' = k|_{C_f}$, temos que \bar{g} leva \bar{d} sobre $[\bar{g}([p]), \bar{g}([q])]$ e também é um homeomorfismo.

Desta forma, $\bar{g}|_{\bar{d}}^{-1} \circ (k \circ \bar{f}|_{\bar{e}})$ é um homeomorfismo de \bar{e} sobre \bar{d} . Estendendo esta aplicação ao grafo $\mathfrak{R}_{k \circ f}$ todo, obtemos, finalmente, um homeomorfismo $h: \mathfrak{R}_{k \circ f} \rightarrow \mathfrak{R}_g$ tal que $\bar{g} \circ h = k \circ \bar{f}$. \square

O teorema a seguir é a recíproca do Teorema 5.29, mostrando que o grafo de Reeb é um invariante completo para funções de Morse definidas em superfícies fechadas orientáveis.

Teorema 5.32. *Sejam $f: M^2 \rightarrow [a, b]$ e $g: M^2 \rightarrow [c, d]$ funções de Morse simples definidas sobre uma superfície orientável M . Se Γ_f é equivalente a Γ_g , então f é equivalente a g .*

Demonstração. A ideia central da demonstração deste teorema é decompor a superfície em cobordismos elementares, onde as funções são equivalentes, e, de alguma forma, reconstruir a superfície colando os cobordismos de forma que as funções continuem equivalentes.

Sejam $\iota: \mathfrak{R}_f \rightarrow \mathfrak{R}_g$ o isomorfismo de grafos e $k': C_f \rightarrow C_g$ a bijeção monotônica que realizam a equivalência dos grafos de Reeb.

$$\begin{array}{ccc} V_f & \xrightarrow{\bar{f}|_{V_f}} & C_f \\ \downarrow \iota|_{V_f} & & \downarrow k' \\ V_g & \xrightarrow{\bar{g}|_{V_g}} & C_g \end{array}$$

Seja $k: [a, b] \rightarrow [c, d]$ um difeomorfismo que estende a aplicação k' ; isto é, $k|_{C_f} = k'$.

Pelo Corolário 5.28, temos que $\Gamma_f \equiv \Gamma_{k \circ f}$. Uma vez que f é trivialmente equivalente a $k \circ f$, bastará mostrar que $k \circ f$ é equivalente a g .

Seja $h': \mathfrak{R}_{k \circ f} \rightarrow \mathfrak{R}_g$ o homeomorfismo de grafos dado pelo Lema 5.31, onde $k \circ \bar{f} = \bar{g} \circ h'$.

Posto que basta mostrar que $k \circ f$ é equivalente a g , iremos simplificar a notação e chamar $k \circ f$ apenas por f , reduzindo a situação ao caso de termos funções de Morse $f, g: M \rightarrow [a, b]$ tais que o diagrama a seguir é comutativo.

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{R}_f & \xrightarrow{\bar{f}} &]a, b[\\ \downarrow h' & \nearrow \bar{g} & \\ \mathfrak{R}_g & & \end{array}$$

Visto que as funções são simples por hipótese, podemos enumerar os valores críticos em ordem crescente. Sejam então $a = c_0 < c_1 < \dots < c_{n-1} < c_n = b$ os valores críticos de f e de g .

Para cada um dos valores críticos c_0, c_1, \dots, c_n , escolha $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ como na definição de Mergulho Característico.

Fazendo $a_i = c_i - 3\varepsilon_i^2$ e $b_i = c_i + 3\varepsilon_i^2$, teremos que $W_i = f^{-1}([a_i, b_i])$ e $W'_i = g^{-1}([a_i, b_i])$ são cobordismos elementares. Daí, pelo Teorema 4.32, existem difeomorfismos

$$h_i: W_i \rightarrow W'_i$$

tais que $f|_{W_i} = g|_{W'_i} \circ h_i$.

Dado que as subvariedades

$$\begin{aligned} B_{i,i+1} &= f^{-1}([c_i + \varepsilon_i^2, c_{i+1} - \varepsilon_{i+1}^2]) \\ B'_{i,i+1} &= g^{-1}([c_i + \varepsilon_i^2, c_{i+1} - \varepsilon_{i+1}^2]) \end{aligned}$$

não têm pontos críticos de f e g , o Teorema 4.20 afirma que são cobordismos produto. Daí, existem difeomorfismos

$$\begin{aligned} \phi_{i,i+1}: B_{i,i+1} &\rightarrow f^{-1}(c_i + \varepsilon_i^2) \times [c_i + \varepsilon_i^2, c_{i+1} - \varepsilon_{i+1}^2] \\ \psi_{i,i+1}: B'_{i,i+1} &\rightarrow g^{-1}(c_i + \varepsilon_i^2) \times [c_i + \varepsilon_i^2, c_{i+1} - \varepsilon_{i+1}^2] \end{aligned}$$

tais que os diagramas seguintes são comutativos:

$$\begin{array}{ccc} B_{i,i+1} & \xrightarrow{\phi_{i,i+1}} & f^{-1}(c_i + \varepsilon_i^2) \times [c_i + \varepsilon_i^2, c_{i+1} - \varepsilon_{i+1}^2] \\ & \searrow f|_{B_{i,i+1}} & \swarrow f_1 \\ & & [c_i + \varepsilon_i^2, c_{i+1} - \varepsilon_{i+1}^2] \end{array}$$

e

$$\begin{array}{ccc}
 B'_{i,i+1} & \xrightarrow{\psi_{i,i+1}} & g^{-1}(c_i + \varepsilon_i^2) \times [c_i + \varepsilon_i^2, c_{i+1} - \varepsilon_{i+1}^2] \\
 & \searrow^{g|_{B'_{i,i+1}}} & \swarrow_{g_1} \\
 & & [c_i + \varepsilon_i^2, c_{i+1} - \varepsilon_{i+1}^2]
 \end{array}$$

onde f_1 e g_1 são as projeções na segunda coordenada.

Como os grafos são isomorfos, segue-se que $f^{-1}(c_i + \varepsilon_i^2)$ é difeomorfo a $g^{-1}(c_i + \varepsilon_i^2)$ e assim, pelo Corolário 4.21, existe um difeomorfismo $B_{i,i+1} \rightarrow B'_{i,i+1}$ que torna as funções equivalentes quando restritas a esses cobordismos.

Consideremos agora

$$\begin{aligned}
 A_i &= f^{-1}([c_i - 2\varepsilon_i^2, c_i + 2\varepsilon_i^2]) \\
 A'_i &= g^{-1}([c_i - 2\varepsilon_i^2, c_i + 2\varepsilon_i^2])
 \end{aligned}$$

e façamos os difeomorfismos h_i escolhidos no decorrer da demonstração, dados pelo Teorema 4.32, restritos a A_i , supondo ainda que preservem a orientação de \mathbb{S}^1 .

Dado que a isotopia de difeomorfismos é uma relação de equivalência e que $h_i|_{f^{-1}(c_i+2\varepsilon_i^2)}$ e $h_{i+1}|_{f^{-1}(c_{i+1}-2\varepsilon_{i+1}^2)}$ são ambos isotópicos à identidade pelo Teorema 3.104, segue-se que são isotópicos entre si.

Seja então

$$F: f^{-1}(c_i + 2\varepsilon_i^2) \times [c_i + 2\varepsilon_i^2, c_{i+1} - 2\varepsilon_{i+1}^2] \rightarrow g^{-1}(c_i + 2\varepsilon_i^2) \times [c_i + 2\varepsilon_i^2, c_{i+1} - 2\varepsilon_{i+1}^2]$$

a isotopia entre $h_i|_{f^{-1}(c_i+2\varepsilon_i^2)}$ e $h_{i+1}|_{f^{-1}(c_{i+1}-2\varepsilon_{i+1}^2)}$ dada por

$$F(x, t) = \begin{cases} (h_i(x), t) & \text{se } t \in [c_i + 2\varepsilon_i^2, c_i + 3\varepsilon_i^2] \\ (h_{i+1}(x), t) & \text{se } t \in [c_{i+1} - 3\varepsilon_{i+1}^2, c_{i+1} - 2\varepsilon_{i+1}^2] \end{cases}$$

Definimos o difeomorfismo

$$\alpha: f^{-1}(c_i + 2\varepsilon_i^2) \times [c_i + \varepsilon_i^2, c_{i+1} - \varepsilon_{i+1}^2] \rightarrow g^{-1}(c_i + 2\varepsilon_i^2) \times [c_i + \varepsilon_i^2, c_{i+1} - \varepsilon_{i+1}^2]$$

por

$$\alpha(x, t) = \begin{cases} (h_i(x), t) & \text{se } t \in [c_i + \varepsilon_i^2, c_i + 3\varepsilon_i^2] \\ F(x, t) & \text{se } t \in [c_i + 3\varepsilon_i^2, c_{i+1} - 3\varepsilon_{i+1}^2] \\ (h_{i+1}(x), t) & \text{se } t \in [c_{i+1} - 3\varepsilon_{i+1}^2, c_{i+1} - \varepsilon_{i+1}^2] \end{cases}$$

e seja $\alpha_{i,i+1}: \text{Int}B_{i,i+1} \rightarrow \text{Int}B'_{i,i+1}$ a aplicação dada por $\alpha_{i,i+1} = \psi_{i,i+1}^{-1} \circ \alpha \circ \phi_{i,i+1}$.

Temos então que $\alpha_{i,i+1}$ é um difeomorfismo, pois é composta de difeomorfismos, que realiza a equivalência de f e g quando restritas a $\text{Int}B_{i,i+1}$ e a $\text{Int}B'_{i,i+1}$, respectivamente.

Ou seja,

$$g \circ \alpha_{i,i+1} = g \circ \psi_{i,i+1}^{-1} \circ \alpha \circ \phi_{i,i+1} = g_1 \circ \alpha \circ \phi_{i,i+1} = f_1 \circ \phi = f.$$

A figura a seguir retrata a situação:

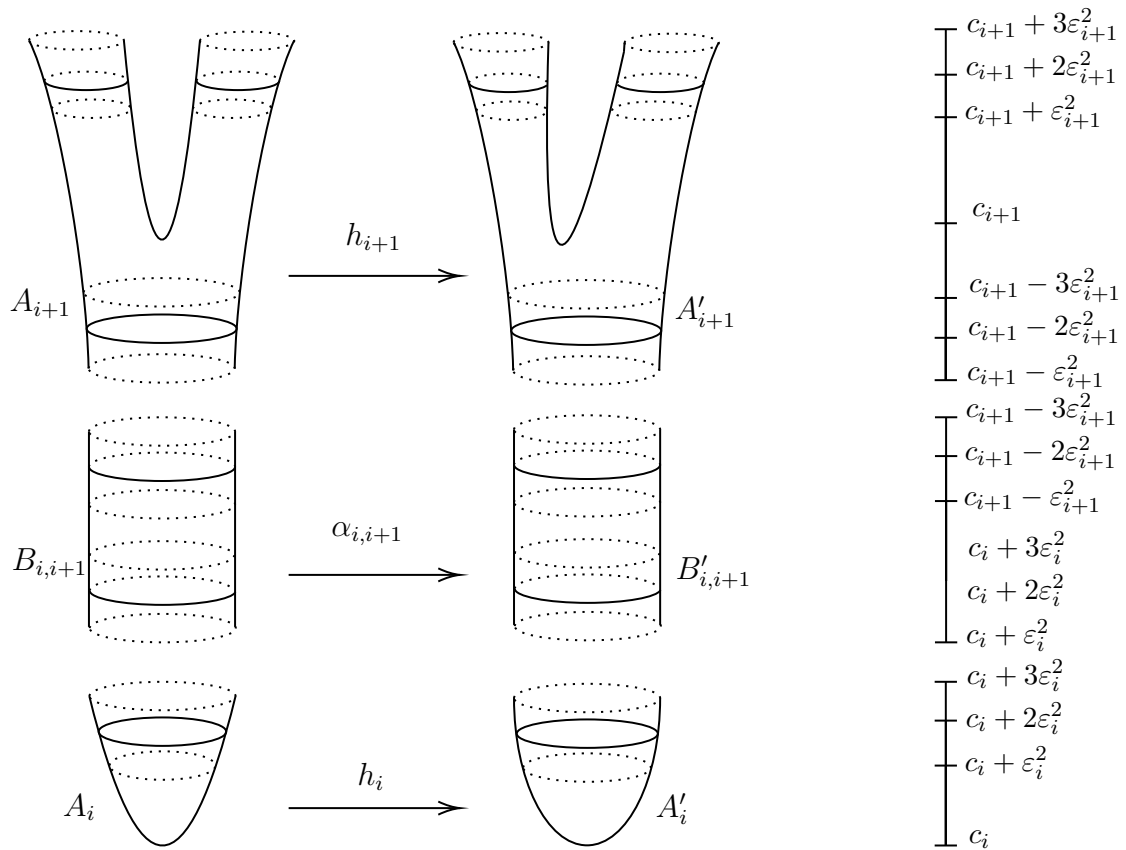


Figura 5.12: Decomposição das superfícies em cobordismos.

O próximo passo é colar cada um dos cobordismos diferenciavelmente de forma que, após as colagens, as aplicações, que antes eram equivalentes nos interiores, passem a ser equivalentes no todo.

Para tanto, consideremos as seguintes reuniões disjuntas

$$A = \text{Int}A_0 \sqcup \text{Int}B_{0,1} \sqcup A_1 \sqcup \dots \sqcup \text{Int}B_{n-1,n} \sqcup \text{Int}A_n$$

$$A' = \text{Int}A'_0 \sqcup \text{Int}B'_{0,1} \sqcup A'_1 \sqcup \dots \sqcup \text{Int}B'_{n-1,n} \sqcup \text{Int}A'_n$$

Sobre A e A' , definimos R e R' da seguinte forma: R é a relação identidade sobre $\text{Int}A_i \cap \text{Int}B_{i,i+1}$ e $\text{Int}B_{i,i+1} \cap \text{Int}A_{i+1}$, e R' é a relação identidade sobre $\text{Int}A'_i \cap \text{Int}B'_{i,i+1}$ e $\text{Int}B'_{i,i+1} \cap \text{Int}A'_{i+1}$. Note que R e R' são relações de equivalência regulares.

Seja então

$$H = \sum_{i=1}^{n-1} (h_i + \alpha_{i,i+1} + h_{i+1}): A \rightarrow A'.$$

Esta aplicação $H: A \rightarrow A'$ é um difeomorfismo compatível com R e R' . Portanto, pelo Teorema 3.51, a passagem de H ao quociente $\bar{H}: \frac{A}{R} \rightarrow \frac{A'}{R'}$ é um difeomorfismo.

A partir das funções f e g , definimos $F: A \rightarrow [a, b]$ e $G: A' \rightarrow [a, b]$ de forma que F e G coincidam com f e g sobre cada parcela das uniões disjuntas A e A' , respectivamente.

Desta forma, teremos que:

$$\begin{aligned} (x, y) \in R &\Rightarrow F(x) = F(y) \\ (x, y) \in R' &\Rightarrow G(x) = G(y) \end{aligned}$$

e o diagrama a seguir comuta:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{F} & [a, b] \\ H \downarrow & \nearrow G & \\ A' & & \end{array}$$

uma vez que

$$F'(H(x)) = \begin{cases} F'(h_i(x)) = g(h_i(x)) & \text{se } x \in A_i \\ F'(\alpha_{i,i+1}(x)) = g(\alpha_{i,i+1}(x)) & \text{se } x \in B_{i,i+1} \end{cases} = f(x) = F(x).$$

Por conseguinte, passando o diagrama anterior ao quociente, temos que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} \frac{A}{R} & \xrightarrow{\bar{F}} & [a, b] \\ \bar{H} \downarrow & \nearrow \bar{G} & \\ \frac{A'}{R'} & & \end{array}$$

é comutativo.

Paralelamente, sendo

$$\pi: A \rightarrow M \text{ e } \pi': A' \rightarrow M$$

respectivamente as inclusões de cada parcela de A e de A' em M , são submersões compatíveis com R e R' . Desta forma, por passagem ao quociente, obtemos difeomorfismos

$$\bar{\pi}: \frac{A}{R} \rightarrow M \text{ e } \bar{\pi}': \frac{A'}{R'} \rightarrow M$$

tais que $f \circ \bar{\pi} = \bar{F}$ e $g \circ \bar{\pi}' = \bar{G}$.

Assim, o diagrama

$$\begin{array}{ccccc} M & \xleftarrow{\bar{\pi}} & \frac{A}{R} & \xrightarrow{\bar{H}} & \frac{A'}{R'} & \xrightarrow{\bar{\pi}'} & M \\ & \searrow f & \downarrow \bar{F} & & \downarrow \bar{G} & \swarrow g & \\ & & & & & & [a, b] \end{array}$$

comuta. Seja $h = \bar{\pi}' \circ \bar{H} \circ \bar{\pi}^{-1}: M \rightarrow M$. Pelo diagrama anterior, $g \circ h = f$. Finalmente, f é equivalente a g . \square

Para o caso das superfícies não-orientáveis, o grafo de Reeb não se mostra suficiente para classificar as funções de Morse. É possível, porém, agregar certas propriedades ao gráfico de modo que o Teorema 5.32 se torne válido também neste caso. Veja em [Izar 1989] a caracterização dos grafos de Reeb para funções de Morse em superfícies não-orientáveis.

Desta forma, os Teoremas 5.29 e 5.32 poderiam ser concatenados em apenas um:

Teorema 5.33 (Teorema de classificação para funções de Morse em superfícies orientáveis). *Duas funções de Morse simples $f, g: M^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definidas em uma superfície orientável M são equivalentes se, e somente se, seus grafos de Reeb Γ_f e Γ_g forem equivalentes.*

O exemplo a seguir mostra que a hipótese das funções serem simples não pode ser retirada, o que faz com que o grafo de Reeb seja um invariante completo apenas para as funções estáveis.

Exemplo 5.34. As funções altura sobre a esfera S^2 representadas a seguir não são estáveis. Embora os grafos de ambas sejam isomorfos, as funções não são equivalentes, pois as curvas de nível dos pontos de sela não têm o mesmo tipo topológico.

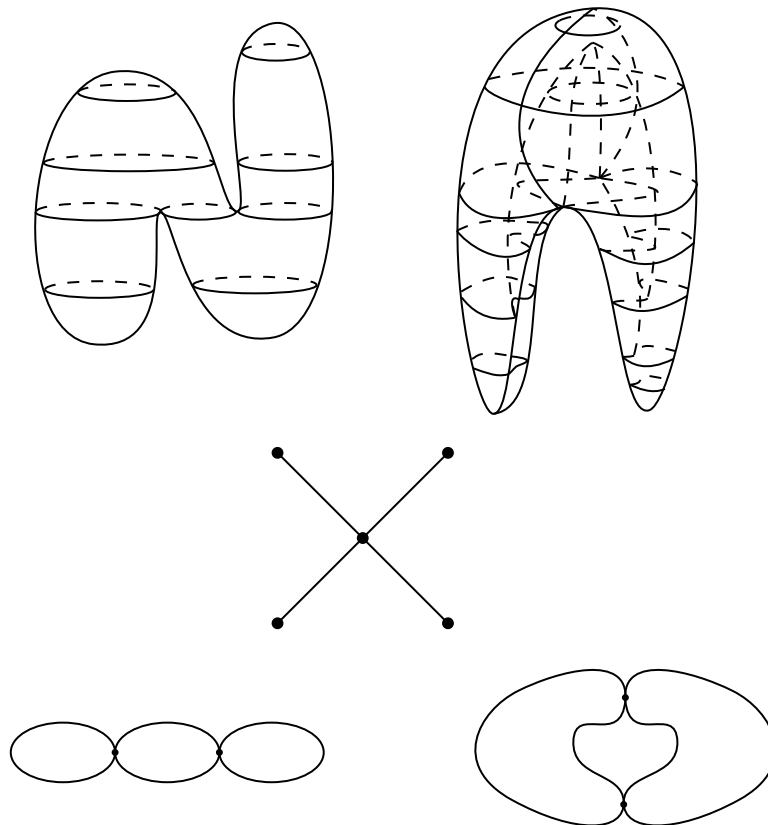


Figura 5.13: Funções não-estáveis com grafos isomorfos

6 A topologia dos grafos de Reeb

O objetivo deste capítulo é exibir outras direções de estudo relacionadas aos grafos de Reeb. No capítulo anterior, mostramos que o espaço de Reeb associado a funções de Morse definidas em variedades fechadas assumem a forma de um grafo finito e, para superfícies orientáveis, é suficiente para classificar tais funções. Nosso objetivo agora é aumentar o alcance dos teoremas de classificação, mostrando sob quais condições o espaço de Reeb associado a uma função arbitrária assume também a forma de um grafo finito. Além disso, fazemos algumas comparações homológicas, interpretadas como números de ciclos do grafo, entre as variedades e os espaços de Reeb associados a funções nela definidas. Finalmente, damos algumas respostas ao conhecido *problema da realização de grafos de Reeb*.

6.1 Condições para que o espaço de Reeb seja um grafo finito

Em [Gelbukh 2023], é mostrado que se $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável não constante sobre uma variedade fechada e conexa, então o espaço de Reeb \mathfrak{R}_f tem o mesmo tipo de homotopia que um grafo finito. Isso, entretanto, não garante que o espaço admite estrutura de grafo finito.

Apresentaremos nesta seção um critério de necessidade e suficiência para que isso seja válido.

Lema 6.1. *Seja $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável sobre uma variedade fechada M . Se $c \in \mathbb{R}$ é um valor crítico de f tal que, para alguma $\varepsilon > 0$, c seja o único valor crítico de f no intervalo semi-aberto $[c, c + 2\varepsilon[$, então o número de componentes conexas de $f^{-1}(]c, c + \varepsilon]) - f^{-1}(]c, c + \varepsilon])$ é menor do que ou igual ao de $f^{-1}(c + \varepsilon)$.*

Demonstração. Para $f^{-1}(c + \varepsilon) = \emptyset$, o resultado é trivial. Suponhamos então, por este motivo, que $f^{-1}(c + \varepsilon) \neq \emptyset$. Há duas possibilidades: ou $f^{-1}(c + \varepsilon)$ é conexo, ou é desconexo.

Se $f^{-1}(c + \varepsilon)$ é conexo, temos que, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$f^{-1}\left(\left]c, c + \frac{\varepsilon}{n}\right]\right) \cong f^{-1}(c + \varepsilon) \times \left]c, c + \frac{\varepsilon}{n}\right].$$

Além disso, denotando por $X_n = \overline{f^{-1}\left(\left]c, c + \frac{\varepsilon}{n}\right]\right)}$, cada X_n é conexo e temos a cadeia de inclusões $X_1 \supset X_2 \supset X_3 \supset \dots$

Desta forma,

$$X = \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n = \overline{f^{-1}\left(\left]c, c + \varepsilon\right]\right)} - f^{-1}\left(\left]c, c + \varepsilon\right]\right)$$

é compacto.

Caso X fosse desconexo, existiriam fechados A e B tais que $X = A \cup B$. Como A e B são fechados e, portanto, compactos, existem abertos disjuntos U e V tais que $A \subset U$ e $B \subset V$. Assim, $X \subset U \cup V$.

Suponhamos que $X_n \subsetneq U \cup V$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Seja $\widetilde{X} = X_1 - (U \cup V)$, obtemos um compacto.

Fazendo $F_n = X_n - U \cup V$, temos uma família de fechados de \widetilde{X} , que portanto satisfaz a propriedade da interseção finita, uma vez que \widetilde{X} é compacto. Como $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$, temos que $X \subset U \cup V$. Logo existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $X_{n_0} \subset U \cup V$.

Assim, $X_{n_0} \cap U \supset A \neq \emptyset$ e $X_{n_0} \cap V \subset B \neq \emptyset$. Logo X_{n_0} , bem como X , são conexos.

Vejam agora o caso em que $f^{-1}(c + \varepsilon)$ é desconexo. Teremos então que $f^{-1}(]c, c + \varepsilon])$ tem finitas componentes conexas C_1, C_2, \dots, C_k . Assim, $\overline{C_i} - C_i$ é conexo para todo $i = 1, \dots, k$. Assim, como

$$\overline{f^{-1}(]c, c + \varepsilon])} - f^{-1}(]c, c + \varepsilon]) = \bigcup_{i=1}^k \overline{C_i} - C_i$$

temos que o número de componentes conexas de $\overline{f^{-1}(]c, c + \varepsilon])} - f^{-1}(]c, c + \varepsilon])$ é, no máximo, igual a k . \square

Fazendo uso dos mesmos argumentos, é possível mostrar que se $c \in \mathbb{R}$ é um valor crítico de $f: M \rightarrow \mathbb{R}$, então para algum $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que c seja o único valor crítico de f em $]c - \varepsilon, c]$, então o número de componentes conexas de $\overline{f^{-1}(]c, c + \varepsilon])} - f^{-1}(]c, c + \varepsilon])$ é menor do que ou igual ao de $f^{-1}(c - \varepsilon)$.

Lema 6.2. *Se $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável sobre uma variedade fechada e $c \in \mathbb{R}$ é um valor crítico de f , então $f^{-1}(c)$ tem um número finito de componentes conexas.*

Demonstração. Dado um valor crítico $c \in C_f$, seja $\{C_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ a coleção de componentes conexas de $f^{-1}(c)$. Naturalmente, cada C_λ é fechado em M .

Em virtude do Lema 6.1 e do comentário feito em seguida,

$$C_\lambda \cap (\overline{f^{-1}([c - \varepsilon, c])} \cup \overline{f^{-1}(]c, c + \varepsilon])}) \neq \emptyset$$

apenas para uma quantidade finita de índices $\lambda \in \Lambda$.

Seja então $\lambda \in \Lambda$ tal que C_λ não intersekte $\overline{f^{-1}([c - \varepsilon, c])} \cup \overline{f^{-1}(]c, c + \varepsilon])}$. Temos então que $C_\lambda \subset f^{-1}(c) - (\overline{f^{-1}([c - \varepsilon, c])} \cup \overline{f^{-1}(]c, c + \varepsilon])})$.

Para cada $x \in C_\lambda$, existe uma vizinhança U_x de x em M tal que

$$U_x \cap (f^{-1}([c - \varepsilon, c]) \cup f^{-1}(]c, c + \varepsilon])) = \emptyset.$$

Então, $U_x \subsetneq f^{-1}(c)$ e, portanto, $U_x \subset C_\lambda$. Daí, $C_\lambda = \bigcup_{x \in C_\lambda} U_x$ é uma união de abertos de M , por conseguinte, é também um aberto de M .

Assim, C_λ é conexo, aberto e fechado de M simultaneamente. Portanto, é uma componente conexa de M . Uma vez que M é uma variedade fechada, tem apenas uma quantidade finita de componentes conexas. Logo, $\{C_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ é uma coleção finita. \square

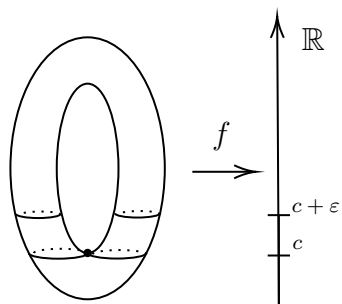


Figura 6.1: O número de componentes conexas de $f^{-1}(c)$ pode ser estritamente menor do que o de $f^{-1}(c + \varepsilon)$.

Teorema 6.3 (Saeki). *Seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável sobre uma variedade fechada. O espaço de Reeb \mathfrak{R}_f associado a f admite estrutura de grafo finito se f tem um número finito de valores críticos.*

Demonstração. A demonstração consiste em construir um grafo (G_f, V_f) que seja homeomorfo ao espaço de Reeb \mathfrak{R}_f associado à função f .

Considere C_f o conjunto dos valores críticos de f , que, por hipótese, é finito. Denote por L_f a reunião das componentes conexas de $f^{-1}(C_f)$ que contém um ponto crítico. Pelo Lema 6.2, L_f é um conjunto finito.

Construimos o grafo (G_f, V_f) de forma que:

1. Cada vértice $v \in V_f$ esteja biunivocamente associado a uma componente conexa da reunião L_f . Logo, V_f é finito.
2. Cada aresta e de G_f esteja biunivocamente associada a uma componente conexa de $M - L_f$.

Note que cada componente conexa de $M - L_f$ é um cobordismo produto, portanto é difeomorfo ao produto cartesiano de uma variedade $(m - 1)$ -dimensional e um intervalo aberto.

Para cada vértice $v \in V_f$, seja V_v a componente conexa de L_f correspondente. Similarmente, para cada aresta e de G_f , denote por E_e a componente conexa de $M - L_f$ correspondente.

Desta forma, fica claro que v é incidente em e se, e somente se, $\overline{E_e} \cap V_v \neq \emptyset$. Pelo Lema 6.1, (G_f, V_f) é um grafo finito.

Construiremos agora um homeomorfismo $\mathfrak{R}_f \rightarrow G_f$.

Para cada aresta e , temos que $f(E_e) =]a_e, b_e[$ é um intervalo aberto da reta real. Seja então $h_e : e \rightarrow]a_e, b_e[$ um mergulho que preserva orientação. Podemos estender todos os mergulhos h_e a uma aplicação contínua $h : G_f \rightarrow \mathbb{R}$ de tal forma que $h|_e = h_e$ e $h(v) = f(V_v)$.

Seja $p_e : E_e \rightarrow e$ a composição $h_e^{-1} \circ f|_{E_e} : E_e \rightarrow e$. Estendemos todas as aplicações p_e a uma aplicação $Q_f : M \rightarrow G$ de maneira que $Q_f(V_v) = v$ para todo vértice $v \in V_f$. Resulta-se que Q_f é uma aplicação contínua.

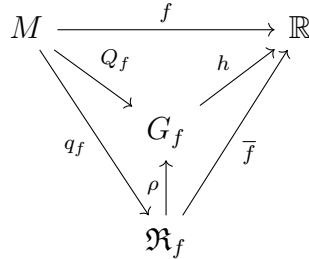
Note que para cada $y \in \mathfrak{R}_f$, $q_f^{-1}(y)$ está contido em um único E_e ou em um único V_v .

Finalmente, definimos $\rho : \mathfrak{R}_f \rightarrow G_f$ da seguinte forma:

$$\rho(y) = \begin{cases} p_e(q_f^{-1}(y)) & \text{se } q_f^{-1}(y) \subset E_e \\ v & \text{se } q_f^{-1}(y) \subset V_v \end{cases}$$

Nota-se ainda que $Q_f = \rho \circ q_f$, segue-se que ρ é contínua. Além disso, é bijetiva. Portanto, uma vez que \mathfrak{R}_f é compacto e G_f é um espaço de Hausdorff, ρ é um homeomorfismo. Assim, \mathfrak{R}_f admite a estrutura de grafo finito. E, como $\bar{f} = h \circ \rho: \mathfrak{R}_f \rightarrow \mathbb{R}$ e h é um mergulho em cada aresta, conclui-se que \bar{f} é também um mergulho em cada aresta.

O diagrama a seguir é comutativo:



Por abuso de linguagem, dizemos que o grafo (G_f, V_f) é o grafo de Reeb associado à função f . □

Observe que este teorema não só generaliza o Teorema 5.18, como também nos permite estudar outros tipos de funções, como as funções de Morse-Bott, utilizando da Teoria dos Grafos.

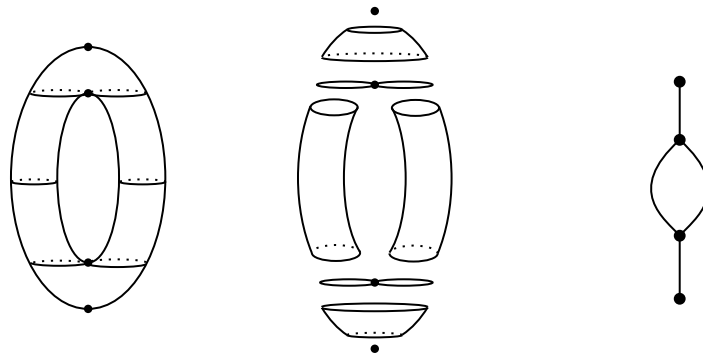


Figura 6.2: Visualização da construção do grafo de Reeb associado à função altura no toro.

Se $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função com um número finito de valores críticos sobre uma variedade conexa M , seu espaço de Reeb \mathfrak{R}_f admite estrutura de grafo e, por conseguinte, é semi-localmente simplesmente conexo. Por um teorema que pode ser encontrado em [Calcut, Gompf e McCarthy 2012], a projeção ao quociente $q_f: M \rightarrow \mathfrak{R}_f$ induz um epimorfismo de grupos $(q_f)_\#: \pi_1(M) \rightarrow \pi_1(\mathfrak{R}_f)$.

6.2 Sobre o número de ciclos

No capítulo anterior, definimos os *números de Betti* de um grafo finito $\Gamma = (G, V)$ sendo

$$\begin{aligned}
 \beta_0(\Gamma) &= \text{número de componentes conexas de } G; \\
 \beta_1(\Gamma) &= \text{número de ciclos de } \Gamma,
 \end{aligned}$$

onde se entende por *ciclo* uma coleção finita de arestas de forma que qualquer par de arestas consecutivas, e o par formado pela primeira e pela última arestas, tenham um vértice em comum.

Na linguagem da Homologia, os números de Betti de um grafo (ou mais geralmente, de um espaço topológico) aparecem como

$$\begin{aligned}\beta_0(\Gamma) &= \text{rank}H_0(G); \\ \beta_1(\Gamma) &= \text{rank}H_1(G).\end{aligned}$$

Um dos objetos principais desta dissertação é o espaço de Reeb associado a uma aplicação contínua. Vimos que para alguns tipos particulares de aplicações, como as funções reais que têm apenas um número finito de valores críticos, o espaço de Reeb admite estrutura de grafo finito. Por simplicidade, denotaremos por

$$\mathcal{F}(M, \mathbb{R}) = \{f \in C^\infty(M, \mathbb{R}) \mid C_f \text{ é finito}\},$$

uma vez que estaremos interessados principalmente em tais funções.

Concluimos então que o conjunto das funções diferenciáveis $M \rightarrow \mathbb{R}$, onde M é uma variedade fechada, cujo espaço de Reeb admite estrutura de grafo finito forma um subespaço denso de $C^\infty(M, \mathbb{R})$. Isso nos possibilita estudar quantidade abundante de funções diferenciáveis à luz da Teoria dos Grafos.

Nesta seção, expomos alguns fatos sobre a influência da topologia de M sobre as características do grafo de Reeb associado a uma função diferenciável, particularmente sobre o seu número de ciclos. Obtemos principalmente limitantes superiores.

O primeiro limitante que aparece na literatura nos afirma que

$$\beta_1(\mathfrak{R}_f) \leq \beta_1(M).$$

Embora válido para funções diferenciáveis definidas em uma variedade M , é comum se encontrar, erroneamente, que a desigualdade é válida para funções contínuas definidas em um espaço topológico X arbitrário. Veja [Gelbukh 2019].

Teorema 6.4. *Seja $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável definida na variedade M com finitos valores críticos. Então*

$$\beta_1(\mathfrak{R}_f) \leq \text{corank}(\pi_1(M)).$$

Demonstração. Como f tem finitos valores críticos, o homomorfismo induzido pela projeção ao quociente $(q_f)_\# : \pi_1(M) \rightarrow \pi_1(\mathfrak{R}_f)$ é um epimorfismo. Pelo Teorema de Hurewicz, temos que

$$\text{corank}(\pi_1(M)) \geq \text{rank}(\pi_1(\mathfrak{R}_f)) \geq \text{rank}(H_1(\mathfrak{R}_f)) = \beta_1(\mathfrak{R}_f).$$

□

Corolário 6.5. *Se $f \in \mathcal{F}(M, \mathbb{R})$, então*

$$\beta_1(\mathfrak{R}_f) \leq \beta_1(M).$$

Corolário 6.6. *Seja M uma superfície de gênero g . Se $f \in \mathcal{F}(M, \mathbb{R})$, então*

$$\begin{aligned}\beta_1(\mathfrak{R}_f) &\leq g \text{ se } M \text{ é orientável} \\ \beta_1(\mathfrak{R}_f) &\leq \frac{g}{2} \text{ se } M \text{ é não-orientável.}\end{aligned}$$

Em [Cole-McLaughlin et al. 2004], surgem os primeiros estudos sobre o número de ciclos do grafo de Reeb associado a uma função de Morse simples. Eles provam que, neste caso, no corolário anterior, a igualdade é válida para as superfícies orientáveis.

Proposição 6.7. *Se $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de Morse simples definida sobre a superfície orientável M de gênero g , e $\Gamma_f = (\mathfrak{R}_f, V_f, \bar{f})$ é o seu grafo de Reeb, então $\beta_1(\mathfrak{R}_f) = g$.*

Demonstração. Como G_f é conexo, temos que $\beta_0(\mathfrak{R}_f) = 1$. Além disso, como M é orientável de gênero g e f é função de Morse, temos que

$$\chi(M) = 2 - 2g = \mu_0(f) - \mu_1(f) + \mu_2(f).$$

Ademais, os vértices relacionados a pontos crítico de índice 0 ou 2 têm grau 1 e os vértices relacionados às selas de índice 1 têm grau 3. Logo, obtemos

$$\begin{aligned} \beta_1(G_f) &= 1 - \chi(\Gamma_f) \\ &= 1 - \sigma_0(\Gamma_f) + \sigma_1(\Gamma_f) \\ &= 1 - (\mu_0(f) + \mu_1(f) + \mu_2(f)) + \sigma_1(\Gamma_f) \\ &= 1 - (\mu_0(f) + \mu_1(f) + \mu_2(f)) + \frac{1}{2} \sum_{v \in V_f} \deg(v) \\ &= 1 - (\mu_0(f) + \mu_1(f) + \mu_2(f)) + \frac{1}{2}(\mu_0(f) + 3\mu_1(f) + \mu_2(f)) \\ &= 1 - \frac{1}{2}(\mu_0(f) - \mu_1(f) + \mu_2(f)) \\ &= 1 - \frac{1}{2}\chi(M) \\ &= 1 - \frac{1}{2}(2 - 2g) \\ &= g \end{aligned}$$

□

Inspirado por isso, em [Michalak 2018] é definido o *número de Reeb* de uma variedade sendo

$$\mathcal{R}(M) = \max\{\beta_1(\mathfrak{R}_f) \mid f \in \mathcal{F}(M, \mathbb{R})\}.$$

Mostra-se então que as funções de Morse simples maximizam o número de ciclos; ou seja:

Teorema 6.8. *Se $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de Morse simples, então $\beta_1(\mathfrak{R}_f) = \mathcal{R}(M)$.*

Este teorema e os corolários a seguir se encontram no artigo de Michalak supracitado.

Corolário 6.9. $\mathcal{R}(M) = \max\{\beta_1(\mathfrak{R}_f) \mid f \text{ é função de Morse simples}\}.$

Corolário 6.10. *Se M é superfície de gênero g , então*

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(M) &\leq g \text{ se } M \text{ é orientável} \\ \mathcal{R}(M) &\leq \frac{g}{2} \text{ se } M \text{ é não-orientável.} \end{aligned}$$

O teorema a seguir, bem como outros resultados que relacionam o grupo fundamental de M com os grafos de Reeb de funções definidas sobre M podem ser encontrados em [Kaluba, Marzantowicz e Silva 2015].

Teorema 6.11. *Se M é simplesmente conexa e $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável, então o grafo de Reeb Γ_f é uma árvore.*

Exemplo 6.12. Se $f: \mathbb{S}^m \rightarrow \mathbb{R}$ tem finitos valores críticos e $m \geq 2$, então Γ_f é uma árvore.

6.3 Problemas de realização

Como vimos nas seções anteriores, existe uma infinidade de funções cujo espaço de Reeb admite estrutura de um grafo finito. Uma continuação natural deste estudo é verificar se um dado grafo G pode ser visto como espaço de Reeb de alguma função. Este problema é chamado de *problema da realização de grafos de Reeb*. Nesta seção, ilustraremos algumas respostas a este problema. Veja [Masumoto e Saeki 2011] e [Saeki 2022].

Definição 6.13 (Grafo realizável). Um grafo $\Gamma = (G, V)$ é dito *realizável* se existe uma função diferenciável $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ definida em uma variedade M de forma que o espaço de Reeb \mathfrak{R}_f seja homeomorfo a G .

Proposição 6.14. *Se $f: M^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável tal que seu grafo de Reeb Γ_f é isomorfo ao grafo completo K_2 , então M é difeomorfa à esfera \mathbb{S}^2 .*

Observamos que, em dimensões maiores, a proposição anterior é válida se considerarmos homeomorfismos de M^m em \mathbb{S}^m em vez de difeomorfismos, em virtude do Teorema da Esfera de Reeb.

Teorema 6.15. *Dado um grafo finito $\Gamma = (G, V)$ sem laços, existe uma função diferenciável $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ definida em uma superfície fechada, com número finito de valores críticos, tal que seu grafo de Reeb Γ_f é isomorfo a Γ .*

Em [Sharko 2006], junto aos grafos finitos, é considerado o conceito de *boa orientação*. Um grafo $\Gamma = (G, V)$ tem boa orientação se existe uma função contínua $g: G \rightarrow \mathbb{R}$ que é estritamente monotônica em cada uma das arestas e assume valores extremantes em seus vértices. Sharko determina em seu trabalho quando um grafo finito admite boa orientação e mostra que tais grafos podem ser realizados como grafos de Reeb de funções diferenciáveis definidas sobre variedades fechadas.

Em continuação ao estudo de Sharko, Michalak mostra que grafos com boa orientação podem ser realizados como grafos de Reeb de funções de Morse definidas em variedades fechadas. Veja [Michalak 2018].

Teorema 6.16. *Dada uma variedade fechada M com $\dim(M) \geq 2$, $\Gamma = (G, V)$ um grafo conexo sem laços e $Q: M \rightarrow G$ uma aplicação contínua tal que o homomorfismo induzido $Q_\#: \pi_1(M) \rightarrow \pi_1(G)$ seja um epimorfismo. Existe uma função diferenciável $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ com número finito de valores críticos tal que:*

1. O grafo $\mathfrak{G}_f = (\mathfrak{R}_f, V_f)$ é isomorfo ao grafo $\Gamma = (G, V)$;
2. A projeção ao quociente $q_f: M \rightarrow \mathfrak{R}_f \cong G$ é homotópica à aplicação Q .

Corolário 6.17. *Dada uma variedade fechada e conexa M , com $\dim(M) \geq 2$, um grafo sem laços $\Gamma = (G, V)$ pode ser realizado como grafo de Reeb de alguma função com número finito de valores críticos definida sobre M se, e somente se, $\beta_1(\Gamma) \leq \text{corank}(\pi_1(M))$.*

São também encontrados na literatura alguns resultados que procuram realizar grafos como grafos de Reeb associados a funções altura de superfícies mergulhadas no espaço euclidiano. Como em [Masumoto e Saeki 2011] e [Gelbukh 2023]. Note que todos os exemplos de funções de Morse dados ao longo do trabalho se encaixam nesta categoria.

7 Sobre aplicações a valores na circunferência

Neste capítulo, faremos uma breve exposição de algumas generalizações do que foi feito nos capítulos anteriores, considerando-se aplicações de Morse, ou, mais geralmente, de Morse-Bott, agora tomando valores na circunferência \mathbb{S}^1 .

Trata-se de um estudo muito natural, uma vez que há apenas duas classes de variedades unidimensionais: a reta real \mathbb{R} ou a circunferência \mathbb{S}^1 . Esta é uma das direções de pesquisa atual no que se refere ao uso dos grafos de Reeb no estudo de aplicações diferenciáveis.

Pretendemos apenas apontar tais desenvolvimentos, sem nos predermos em detalhes. Deixaremos as referências para o leitor interessado. Uma síntese mais detalhada e outras referências podem ser encontradas em [Gelbukh 2023].

7.1 Aplicações de Morse circulares

Consideremos $f: M \rightarrow \mathbb{S}^1$ uma aplicação diferenciável definida em uma variedade M . Um ponto $p \in M$ é *ponto singular* se a diferencial $df_p: T_pM \rightarrow T_{f(p)}\mathbb{S}^1$ não tem posto máximo. Como $T_{f(p)}\mathbb{S}^1$ é isomorfo à reta real \mathbb{R} , escrevemos, abusando da notação, $df_p: T_pM \rightarrow \mathbb{R}$, e p será ponto singular se a diferencial, agora a valores reais, for identicamente nula.

Definição 7.1 (Ponto singular não-degenerado). Sejam $f: M \rightarrow \mathbb{S}^1$ uma aplicação diferenciável e p um ponto singular de f . Dizemos que p é *ponto singular não-degenerado* se existir uma carta local $\psi: V \subset \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}$ definida em uma vizinhança de $f(p)$, de tal forma que p seja ponto crítico não-degenerado de $\psi \circ f: M \rightarrow \mathbb{R}$

Naturalmente, a definição não depende da carta ψ escolhida. Assim esta definição generaliza aquela dada anteriormente para pontos críticos não-degenerados de funções reais. Desta forma, o *índice de um ponto singular não-degenerado* está bem definido e o Lema de Morse é aplicável.

Definição 7.2 (Aplicação de Morse). Um aplicação diferenciável $f: M \rightarrow \mathbb{S}^1$ é uma *aplicação de Morse* se todos os seus pontos singulares são não-degenerados.

De forma análoga, pode-se definir uma *aplicação de Morse-Bott*, agora a valores na circunferência. Uma teoria paralela à teoria de Morse pode ser desenvolvida fazendo uso das aplicações de Morse. Tal teoria foi chamada de *teoria de Morse circular*.

Resultados similares àqueles apresentados no Capítulo 4 são ainda válidos aqui, como, por exemplo: pontos singulares não-degenerados são isolados; o conjunto singular de

aplicações de Morse definidas em variedades compactas é finito; aplicações de Morse simples são estáveis.

O teorema a seguir mostra a estrutura de \mathfrak{R}_f para aplicações de Morse a valores na circunferência.

Teorema 7.3. *Se $f: M \rightarrow \mathbb{S}^1$ é uma aplicação de Morse definida em uma variedade compacta M , então seu espaço de Reeb \mathfrak{R}_f admite estrutura de grafo finito.*

Demonstração. Seja \mathfrak{R}_f o espaço de Reeb associado à aplicação f e considere $V_f = q_f(\Sigma_f)$, onde $q_f: M \rightarrow \mathfrak{R}_f$ é a projeção ao quociente e Σ_f é o conjunto singular de f . Tal como feito na demonstração do Teorema 5.18, fazendo $\widetilde{\mathfrak{R}}_f = \mathfrak{R}_f - V_f$, nota-se que a aplicação de Reeb $\widetilde{f}|_{\widetilde{\mathfrak{R}}_f}: \widetilde{\mathfrak{R}}_f \rightarrow \mathbb{S}^1$ é uma aplicação de recobrimento e, portanto, um homeomorfismo local, o que faz com que \mathfrak{R}_f tenha estrutura de grafo finito, sendo V_f o conjunto de vértices. \square

Isso nos permite usar da teoria dos grafos para estudar também aplicações de Morse circulares. Um teorema paralelo ao Teorema 6.3 pode ser enunciado para aplicações a valores na circunferência:

Teorema 7.4. *Se $f: M \rightarrow \mathbb{S}^1$ é uma aplicação diferenciável com número finito de valores críticos definida em uma variedade fechada M , então o espaço de Reeb \mathfrak{R}_f admite estrutura de grafo finito.*

Este teorema, cuja demonstração muito se assemelha à do Teorema 6.3, pode ser encontrado em [Gelbukh 2023].

Desta forma, não só as aplicações de Morse, mas também as de Morse-Bott, ou outras mais gerais, podem ser estudadas a partir de propriedades de grafos.

O grafo de Reeb original, garantido pelo Teorema 7.3, considera o conjunto de vértices V_f sendo apenas as classes de equivalência dos pontos singulares, assim como feito no Teorema 5.18 para funções reais; isto é, cada vértice está em correspondência a uma componente conexa de uma curva de nível que contém o referido ponto singular.

Outros objetos combinatoriais, inspirados pelo grafo de Reeb, têm aparecido na literatura recente, como ferramenta no estudo classificatório de aplicações diferenciáveis. Por exemplo, o *grafo de Reeb generalizado* foi formulado em [Batista 2015], em que cada componente conexa de um nível singular dá origem a um vértice do grafo. Desta forma, temos também a noção de *vértice regular*.

Observe que o grafo de Reeb original e o grafo de Reeb generalizado são homeomorfos como espaços topológicos, mas não são isomorfos como grafos, uma vez que o segundo possivelmente tem mais vértices do que o primeiro.

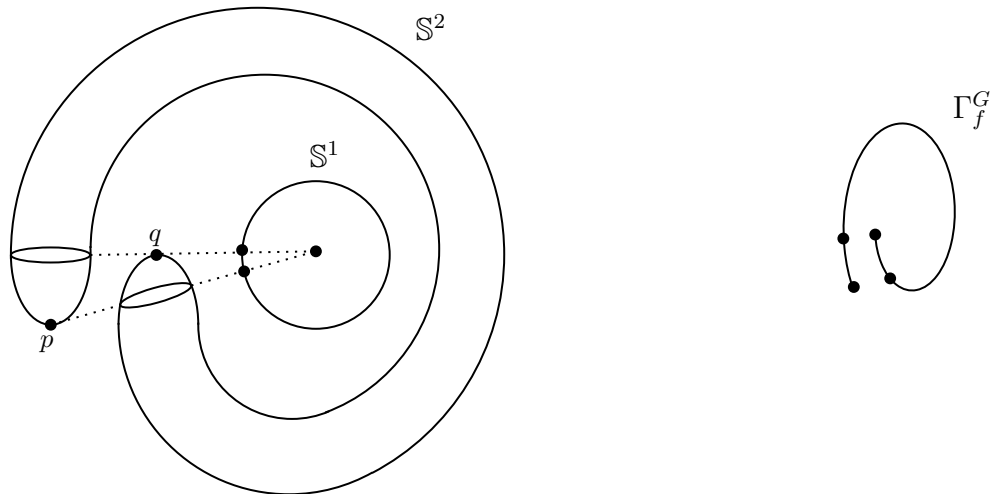
Exemplo 7.5.

Figura 7.1: O grafo de Reeb generalizado de uma projeção radial sobre a esfera.

Note que, ao considerar o grafo de Reeb generalizado, cada componente conexa de uma curva de nível crítica dá origem um vértice no grafo. Caso estivessemos considerando o grafo de Reeb clássico, somente a componente que contém o ponto singular daria origem a um vértice; como são apenas dois pontos singulares, o grafo seria o grafo completo K_2 , ou seja, um grafo com dois vértices e uma aresta.

Em vista deste exemplo, é fácil perceber que o grafo de Reeb original não classifica aplicações a valores na circunferência, uma vez que o grafo de Reeb original da projeção radial dada no Exemplo 7.5 não difere do grafo da aplicação dada no exemplo a seguir:

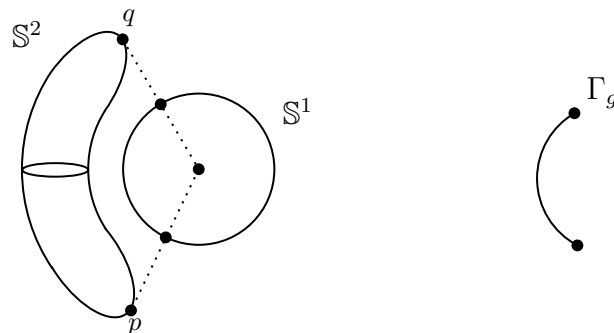
Exemplo 7.6.

Figura 7.2: Grafo de Reeb clássico de uma aplicação da esfera a valores na circunferência.

De fato, os grafos de Reeb clássicos das projeções radiais dadas nos Exemplos 7.5 e 7.6 são isomorfos ao grafo completo K_2 . Por outro lado, tais projeções não são equivalentes como aplicações, uma vez que a primeira é sobrejetiva, enquanto a segunda não é.

7.2 Classificação de aplicações

Em vista da dificuldade em lidar com a equivalência dada pela Definição 3.78, muitas vezes se busca enfraquecer certas condições para que a teoria possa ser desenvolvida. Em vista disso, algumas classificações são feitas através da *equivalência topológica*.

Definição 7.7 (Equivalência topológica de aplicações). Sejam M e N variedades diferenciáveis e $f, g: M \rightarrow N$ aplicações diferenciáveis. Dizemos que f e g são *topologicamente equivalentes* se existirem homeomorfismos $h: M \rightarrow M$ e $k: N \rightarrow N$ tal que $k \circ f = g \circ h$.

Note que o que difere a Definição 3.78 da Definição 7.7 é que na primeira, exige-se que h e k sejam difeomorfismos, enquanto na segunda definição, a condição é enfraquecida para que sejam homeomorfismos.

É fácil então perceber que se duas funções são equivalentes, então são topologicamente equivalentes. Desta forma, a teoria desenvolvida no Capítulo 5, classifica as funções de Morse a valores reais definidas em superfícies orientáveis também no sentido topológico.

Em [Batista 2015], é feita a classificação topológica das aplicações de Morse estáveis de \mathbb{S}^2 em \mathbb{S}^1 e, através desta classificação, consegue-se classificar topologicamente os germes finitamente determinados de aplicações de \mathbb{R}^3 em \mathbb{R}^2 . Para tal feito, o invariante considerado é o grafo de Reeb generalizado.

Mais recentemente, alguns trabalhos foram feitos, atacando agora o problema de classificar topologicamente as funções e aplicações de Morse-Bott. Para as funções de Morse-Bott a valores reais, vide [Martínez-Alfaro, Meza-Sarmiento e Oliveira 2016]. Já para as aplicações de Morse-Bott a valores na circunferência, pode-se encontrar uma classificação em [Batista, Costa e Meza-Sarmiento 2018] no caso em que as aplicações estão definidas na esfera, e em [Batista, Costa e Meza-Sarmiento 2022] para aplicações definidas em superfícies orientáveis de modo geral.

7.3 Problemas de realização

Similarmente ao estudo dos grafos de Reeb associados a funções reais, foram considerados problemas de realização também para aplicações a valores na circunferência. Por ser um estudo recente, poucos resultados foram obtidos.

Diferente do caso das funções a valores reais, cujos resultados visam diferentes classes de funções, para o caso das aplicações a valores na circunferência, ataca-se o problema de realização visando principalmente as aplicações de Morse e de Morse-Bott, pois nestas há um maior controle sobre os tipos de singularidades que tais aplicações possuem.

Veja [Gelbukh 2023] para os seguintes teoremas:

Teorema 7.8. *Todo grafo finito $\Gamma \neq K_1$ pode ser realizado como grafo de Reeb de uma aplicação de Morse a valores na circunferência definido em uma variedade compacta.*

Apresentaremos o seguinte teorema para a realização de grafos de Reeb de aplicações de Morse simples:

Teorema 7.9. *Seja M uma superfície fechada orientável de gênero g . Um grafo (G, V) pode ser realizado como grafo de Reeb de uma aplicação de Morse simples $f: M \rightarrow \mathbb{S}^1$ se, e somente se, as seguintes condições são satisfeitas:*

- Para cada $v \in V$, tem-se que $\deg(v) \leq 3$;
- Para todo $v \in V$, $\deg(v) \neq 2$;
- $\beta_1(\Gamma) = g$.

8 Considerações finais

O objetivo deste trabalho era buscar uma classificação das funções de Morse definidas em variedades compactas via conjugação por difeomorfismos no domínio e no contradomínio.

Através do estudo realizado, mostramos que o grafo de Reeb associado a uma função de Morse, munido da ordenação de seus vértices herdada da ordem dos valores críticos da função, revela-se suficiente para realizar tal classificação, no caso em que o domínio é uma superfície compacta orientável, sendo então um invariante completo das classes de equivalência de tais funções, como pode ser visto em detalhes no Capítulo 5.

Embora não tenhamos explorado o caso das funções de Morse definidas em superfícies não-orientáveis, o grafo de Reeb se mostra importante para a classificação das funções também neste caso, apesar de ser necessária mais uma estrutura, além da ordenação dos vértices que já havíamos utilizado.

Além disso, o grafo de Reeb é uma ferramenta que proporciona uma representação visual clara das características topológicas das funções e dos espaços onde elas estão definidas. Algumas dessas características são abordadas no Capítulo 6, como, por exemplo, o número de ciclos do grafo de Reeb como limitante inferior do gênero da superfície onde a função está definida.

Observamos ainda o crescente interesse em aplicar estes métodos para estudar a classificação de outras aplicações, como as aplicações de Morse circulares, as funções de Morse-Bott e, mais recentemente, as aplicações de Morse-Bott circulares. Apresentamos no Capítulo 7, de maneira sucinta, direções de pesquisa atuais relacionadas ao papel do grafo de Reeb na classificação de aplicações diferenciáveis.

Em [Izar 1984], pode-se ver que para funções de Morse definidas em variedades tridimensionais, os grafos de Reeb, embora não sejam suficientes, ainda têm grande responsabilidade na classificação de tais funções.

Referências

- [Arnold 2007]ARNOLD, V. I. Topological classification of Morse functions and generalizations of Hilbert’s 16-th problem. *Mathematical Physics, Analysis and Geometry*, 2007.
- [Banyaga e Hurtubise 2004]BANYAGA, A.; HURTUBISE, D. E. A Proof of the Morse-Bott Lemma. *Expositiones Mathematicae*, Elsevier, v. 22, n. 4, p. 365–373, 2004.
- [Batista 2015]BATISTA, E. B. *Sobre a Classificação Topológica de Germes Finitamente Determinados de \mathbb{R}^3 em \mathbb{R}^2* . Tese (Doutorado) — Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, São José do Rio Preto, 2015.
- [Batista, Costa e Meza-Sarmiento 2018]BATISTA, E. B.; COSTA, J. C. F.; MEZA-SARMIENTO, I. S. Topological classification of circle-valued simple Morse-Bott functions. *Journal of Singularities*, 2018.
- [Batista, Costa e Meza-Sarmiento 2022]BATISTA, E. B.; COSTA, J. C. F.; MEZA-SARMIENTO, I. S. Topological classification of circle-valued simple Morse-Bott functions on closed orientable surfaces. *Journal of Singularities*, 2022.
- [Batista, Costa e Nuño-Ballesteros 2020]BATISTA, E. B.; COSTA, J. C. F.; NUÑO-BALLESTEROS, J. J. Loops in generalized Reeb graphs associated to stable circle-valued functions. *Journal of Singularities*, 2020.
- [Bonatto 2017]BONATTO, L. B. *Bott’s Periodicity Theorem from the Algebraic Topology Viewpoint*. Dissertação (Mestrado) — Universidade de São Paulo, São Paulo, 2017.
- [Bott 1960]BOTT, R. *Morse Theory and Its Applications to Homotopy Theory*. Bonn: Mathematisches Institut der Universität Bonn, 1960.
- [Bourbaki 1967]BOURBAKI, N. *Variétés différentielles et analytiques*. Paris: Springer, 1967.
- [Bredon 1993]BREDON, G. E. *Topology and Geometry*. New York: Springer-Verlag, 1993.
- [Calcut, Gompf e McCarthy 2012]CALCUT, J. S.; GOMPF, R. E.; MCCARTHY, J. D. On fundamental groups of quotient spaces. *Topology and its Applications*, v. 159, p. 322–330, 2012.
- [Carmo 2014]CARMO, M. P. do. *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*. 6. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2014.
- [Carmo 2015]CARMO, M. P. do. *Geometria Riemanniana*. 5. ed. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2015.

- [Cole-McLaughlin et al. 2004]COLE-MCLAUGHLIN, K. et al. Loops in Reeb Graphs on 2-Manifolds. *Discrete & Computational Geometry*, v. 32, p. 231–244, 2004.
- [Cornea 1989]CORNEA, O. The genus and the fundamental group of high dimensional manifolds. *Studii și Cercetări de Matematică*, 1989.
- [Daccach 1972]DACCACH, J. A. *Cirurgia e suas Aplicações*. Dissertação (Mestrado) — Universidade de São Paulo, 1972.
- [Dugundji 1966]DUGUNDJI, J. *Topology*. Boston: Allyn and Bacon, 1966.
- [Figueirêdo 2018]FIGUEIRÊDO, D. N. *Teoria de Morse*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal da Bahia, Salvador, 2018.
- [Gelbukh 2015]GELBUKH, I. Co-rank and betti number of a group. *Czechoslovak Mathematical Journal*, p. 565–567, 2015.
- [Gelbukh 2017]GELBUKH, I. The co-rank of the fundamental group: the direct product, the first betti number, and the topology of foliations. *Mathematica Slovaca*, v. 67, p. 645–656, 2017.
- [Gelbukh 2018]GELBUKH, I. Loops in Reeb Graphs on n -manifolds. *Discrete & Computational Geometry*, n. 59, p. 843–863, 2018.
- [Gelbukh 2019]GELBUKH, I. Approximation of metric spaces by reeb graphs: Cycle rank of a reeb graph, the co-rank of the fundamental group and large components of level sets on riemannian manifolds. *Filomat*, v. 33, p. 2031–2049, 2019.
- [Gelbukh 2023]GELBUKH, I. On the Topology of the Reeb Graph. *Publicationes Mathematicae Debrecen*, 2023.
- [Gelbukh 2023]GELBUKH, I. Realization of a graph as the Reeb graph of a height function on an embedded surface. *Topological methods in nonlinear analysis*, 2023.
- [Gelbukh 2023]GELBUKH, I. Reeb graphs of circle-valued functions: a survey and basic facts. *Topological Methods in nonlinear Analysis*, p. 59–81, 2023.
- [Golubitsky e Guillemin 1973]GOLUBITSKY, M.; GUILLEMIN, V. *Stable Mappings and Their Singularities*. New York: Springer-Verlag, 1973.
- [Gonçalves 1972]GONÇALVES, D. L. *Subvariedades Críticas Não Degeneradas*. Dissertação (Mestrado) — Universidade de São Paulo, São Paulo, 1972.
- [Gramain 1971]GRAMAIN, A. *Topologie des Surfaces*. Paris: Presses Universitaires de France, 1971.
- [Guillemin e Pollack 1974]GUILLEMIN, V.; POLLACK, A. *Differential Topology*. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 1974.
- [Hirsch 1976]HIRSCH, M. W. *Differential Topology*. New York: Springer-Verlag, 1976.
- [Izar 1978]IZAR, S. A. *Funções de Morse: Um Teorema de Classificação em Dimensão 2*. Dissertação (Mestrado) — Universidade de São Paulo, São Paulo, 1978.

- [Izar 1984]IZAR, S. A. *Funções de Morse: Uma Teoria Combinatória em Dimensão Três*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, São Paulo, 1984.
- [Izar 1988]IZAR, S. A. Funções de Morse e Topologia das Superfícies I: O Grafo de Reeb de $f: M \rightarrow \mathbb{R}$. *Métrica: Estudos e Pesquisas em Matemática*, 1988.
- [Izar 1989]IZAR, S. A. Funções de Morse e Topologia das Superfícies II: Classificação das Funções de Morse Estáveis sobre Superfícies. *Métrica: Estudos e Pesquisas em Matemática*, 1989.
- [Jaco 1972]JACO, W. Geometric realizations for free quotients. *Journal of the Australian Mathematical Society*, 1972.
- [Kaluba, Marzantowicz e Silva 2015]KALUBA, M.; MARZANTOWICZ, W.; SILVA, N. On representation of the Reeb graph as a sub-complex of a manifold. *Topological Methods in Nonlinear Analysis*, p. 287–307, 2015.
- [Kervaire 1960]KERVAIRE, M. A manifold which does not admit any differentiable structure. *Commentarii Mathematici Helvetici*, 1960.
- [Lee 2012]LEE, J. M. *Introduction to Smooth Manifolds*. 2. ed. New York: Springer-Verlag, 2012.
- [Lerario 2011]LERARIO, A. Plenty of Morse functions by perturbing with sums of squares. *Proceedings of Gökova 20th Geometry-Topology Conference*, p. 147–151, 2011.
- [Lima 1959]LIMA, E. L. Introdução à Teoria de Morse. *Atas do Segundo Colóquio Brasileiro de Matemática*, Poços de Caldas, p. 99–124, 1959.
- [Lima 2008]LIMA, E. L. *Álgebra Linear*. 7. ed. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2008.
- [Lima 2011]LIMA, E. L. *Variiedades Diferenciáveis*. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2011.
- [Lima 2018]LIMA, E. L. *Grupo Fundamental e Espaços de Recobrimento*. 5. ed. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2018.
- [Lima 2020]LIMA, E. L. *Curso de Análise*. 12. ed. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2020. v. 2.
- [Loibel 1967]LOIBEL, G. F. *Singularidades de Aplicações Diferenciáveis*. Poços de Caldas: Sexto Colóquio Brasileiro de Matemática, 1967.
- [Martínez-Alfaro, Meza-Sarmiento e Oliveira 2016]MARTÍNEZ-ALFARO, J.; MEZA-SARMIENTO, I. S.; OLIVEIRA, R. Topological classification of simple Morse-Bott functions on surfaces. *Contemporary Mathematics*, 2016.
- [Massey 1967]MASSEY, W. S. *Algebraic Topology: An Introduction*. New York: Springer-Verlag, 1967.
- [Massey 1991]MASSEY, W. S. *A Basic Course in Algebraic Topology*. New York: Springer-Verlag, 1991.

- [Masumoto e Saeki 2011]MASUMOTO, Y.; SAEKI, O. A smooth function on a manifold with given Reeb graph. *Kyushu Journal of Mathematics*, 2011.
- [Matsumoto 2002]MATSUMOTO, Y. *An Introduction to Morse Theory*. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 2002.
- [Meza-Sarmiento 2011]MEZA-SARMIENTO, I. S. *Um invariante para sistemas com integral primeira Morse-Bott*. Dissertação (Mestrado) — Universidade de São Paulo, São Carlos, 2011.
- [Meza-Sarmiento 2015]MEZA-SARMIENTO, I. S. *A topologia de folhações e sistemas integráveis Morse-Bott em superfícies*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, São Carlos, 2015.
- [Michalak 2018]MICHALAK, L. P. Realization of a graph as the Reeb graph of a Morse function on a manifolds. *Topological Methods in Nonlinear Analysis*, v. 52, p. 749–762, 2018.
- [Milnor 1956]MILNOR, J. W. On Manifolds Homeomorphic to the 7-sphere. *Annals of Mathematics*, v. 64, n. 2, p. 399–405, 1956.
- [Milnor 1963]MILNOR, J. W. *Morse Theory*. Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1963.
- [Milnor 1965]MILNOR, J. W. *Lectures on the h-Cobordism Theorem*. Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1965.
- [Morse 1925]MORSE, H. C. M. Relations between the critical points of a real function of n independent variables. *Transactions of the American Mathematical Society*, v. 27, p. 345–396, 1925.
- [Munkres 2000]MUNKRES, J. R. *Topology*. 2. ed. Upper Saddle River, New Jersey: Prentice-Hall, 2000.
- [Reeb 1946]REEB, G. Sur les points singuliers d’une forme de Pfaff complètement intégrable ou d’une fonction numérique. *Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l’Académie des Sciences*, p. 847–849, 1946.
- [Saeki 2022]SAEKI, O. Reeb spaces of smooth functions on manifolds. *International Mathematics Research Notices*, v. 2022, n. 11, p. 8740–8768, 2022.
- [Sharko 2006]SHARKO, V. About Kronrod-Reeb graph of a function on a manifold. *Methods of Functional Analysis and Topology*, 2006.
- [Sikora 2005]SIKORA, A. S. Cut numbers of 3-manifolds. *Transactions of the American Mathematical Society*, 2005.
- [Vick 1994]VICK, J. W. *Homology Theory: An Introduction to Algebraic Topology*. New York: Springer-Verlag, 1994.