IFT

Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO IFT–D.008/18

Hierarquias integráveis supersimétricas

Gabriel Vieira Lobo

Orientador

Abraham Hirsz Zimerman

Coorientador

José Francisco Gomes

Outubro de 2018

L799h Lobo, Gabriel Vieira
Hierarquias integráveis supersimétricas / Gabriel Vieira Lobo. –
São Paulo, 2018
51 f. : il.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp),
Instituto de Física Teórica (IFT), São Paulo
Orientador: Abraham Hirsz Zimerman
Coorientador: José Francisco Gomes

1. Supersimetria. 2. Física matemática 3. Teoria de campos (Física)
I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do Instituto de Física Teórica (IFT), São Paulo. Dados fornecidos pelo autor(a).

Agradecimentos

À minha família, Francisco Soares Lobo e Maria do Socorro Vieira Lobo, meus pais, a quem devo tudo que sou, pelo amor e carinho, além de todo incentivo. Ao meu irmão, André Vieira Lobo, pela amizade, bom humor e compreensão.

Aos meus amigos desde o tempo de escola, Mateus Marques Silva, Octávio Cremonezi Nazareth, Lucas Maia Rios e Lucas Teixeira, pela amizade e momentos ímpares, sinto falta do nosso convívio.

Aos meus amigos que fiz ao longo de muitos anos como escoteiro, por todas as aventuras, noites de acampamento e o desejo de construir um mundo melhor. Agradeço a Natália Marinho de Freitas, Bárbara Marinho de Freitas, Harelline Belotti, Gabriela Tamires, Vínicius Rubens Pedrinho e Thiago Silva Santos.

À Faculdade de Tecnologia de São Paulo (FATECSP), onde realizei minha graduação, onde fiz bons colegas e tive professores maravilhosos. Obrigado minha amiga Danyela Cardoso Carvalho, pelos bons e maus bocados que passamos juntos na graduação. Aos meus admiráveis professores: Silvia W. Graf, Suzana A. de Oliveira Souza, Katsuyoshi Kurata, Lilian S. Hanamoto, Davinson M. da Silva e Vanessa D. Del Cacho, pelo incentivo e convívio.

Ao prof. Abraham Hirsz Zimerman, meu orientador, pela paciência em discutir a qualquer momento não importando o quão simples fosse o assunto. Seu bom humor e disposição é um exemplo para todos, você é uma dessas pessoas únicas que tive o prazer de conviver, muito obrigado por todas as conversas.

Ao prof. José Francisco Gomes, o Frank, coorientador e um dos melhores professores que tive. Agradeço pela oportunidade de trabalhar contigo, pelo apoio em todos os momentos, pela liberdade para seguir a pesquisa ao meu modo e estar sempre aberto a discussão.

Aos meu novos colegas dessa fase no IFT que fizeram meus dias aqui muito melhores, Dener de Souza Lemos, Silas Poloni Lyra, Victor C. C. Alves, Caroline S. R. Costa, Bárbara Andrade dos Santos, Susane Calegari, Adriana V. Araujo Salcedo, Diego F. L. Restrepo, Felippe Pereira Amorim , Natália Maia e Vinícius Santos Terra.

Além dos bons amigos que tive a sorte de encontrar. Ao Jogean M. C. Ferreira, obrigado pela amizade, pelo seu humor tão característico e sua contribuição foi fundamental para o sucesso desse trabalho, que nossa colaboração renda muitos trabalhos. Agradeço também ao Rafael Lopes Paixão da Silva, pelas inúmeras conversas e pelo convívio enriquecedor, é incrível sua capacidade de debater sobre tudo.

Agradeço especialmente a Regina Maria Ricotta, minha orientadora e professora durante a graduação, foi durante a iniciação científica que percebi que realmente amava ciências e que queria trabalhar como cientista. Sua orientação paciente e cuidadosa, revendo passo a passo tudo que eu produzia e discutindo o significado de cada detalhe, foi decisivo na minha formação. Muito obrigado Regina, pela amizade, apoio e que possamos fazer muita ciências juntos futuramente.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo suporte financeiro que permitiu a realização deste trabalho.

Resumo

Estudamos hierarquias integráveis. Essas hierarquias possuem infinitas equações de movimento que emergem de uma mesma estrutura algébrica. Algumas equações são conhecidas como mKdV e Sinh-Gordon, estas equações possuem extensão supersimétrica. Isso nos conduz a construção de hierarquias supersimétricas e possamos assim obter infinitas equações com supersimetria. Para construir essas hierarquias não fazemos uso de formalismo como supercampos, as relações de supersimetria surgem da própria construção algébrica. Além disso investigamos para dada uma superalgébra como construir sistematicamente hierarquias supersimétricas e ainda explicitamos diversas propostas de hierarquias e discutimos os principais resultados obtidos.

Palavras-chave: hierarquias integráveis. supersimetria. modelos integráveis.

Abstract

We study integrable hierarchies. These hierarchies have infinite equations of motion that emerge from the same algebraic structure. Some equations are known as mKdV and Sinh-Gordon, these equations have supersymmetric extension. This leads us to the construction of supersymmetric hierarchies and we can thus obtain infinite equations with supersymmetry. To construct these hierarchies we do not use formalism as superfields techniques, the relations of supersymmetry emerge from the algebraic construction itself. In addition we investigate for given a super algebra how to systematically construct supersymmetric hierarchies and we also explain several proposals of hierarchies and we discuss the main results obtained.

Keywords: integrable hierarchies. supersymmetry. integrable models.

Sumário

Introdução

Modelos integráveis constituem uma classe especial de equações diferenciais parciais com diversas aplicações em muitos ramos da física, o entendimento por integrável tem um senso que mudou ao longo do tempo, um visão global e aspectos interessantes foram abordados em uma análise feita por Faddeev em (FADDEEV, 2013). Neste trabalho entendemos como integrabilidade um conjunto de equações diferenciais não-lineares representada por uma condição de curvatura nula e que seja construída a partir de uma álgebra de Lie, (ZAKHAROV; SHABAT, 1979). Esse conjunto de equações denominamos de hierarquias integráveis descritos por pares de Lax e é formado por infinitas equações de evolução com relação aos diferentes tempos, tendo em comum a parte espacial do seu par de Lax.

Em geral somente os primeiros termos de evolução temporal possuem significado físico, mas é interessante notar que as infinitas equações obtidas a partir de uma mesma hierarquia possuem uma estrutura comum, por exemplo, a hierarquia mKdV gera equações entre outros como mKdV e Sinh-Gordon, (GOMES et al., 2011). Isso nos permite através do método Dressing obter soluções não-triviais a partir de soluções triviais (ou vácuo) e ainda obtemos soluções para todas as equações da hierarquia.

Equações como Sinh-Gordon possuem extensão supersimétrica e isso motivou a busca pela construção de hierarquias integráveis supersimétricas. Como mencionamos as hierarquias podem ser construídas a partir de uma abordagem algébrica como em (ARATYN; GOMES; ZIMERMAN, 2003) e (ARATYN; GOMES; ZIMERMAN, 2004). O objeto central deste trabalho é discutir a construção sistemática dessas hierarquias com um formalismo algébrico; estamos particularmente interessados pela primeira evolução de tempo negativa que equivale à equação de Leznov-Saveliev, que por sua vez está associada com o Modelo de Toda e Super-Toda. Por outro lado os modelos de Toda e Super-Toda foram amplamente estudados e há na literatura vasta classificação de álgebras associadas a estes modelos, (LEZNOV; SAVELIEV, 2012; OLSHANETSKY, 1983; EVANS; HOLLOWOOD, 1991).

Nosso trabalho está organizado da seguinte forma. No capítulo 2 introduzimos nosso entendimento de integrabilidade e o conceito de hierarquias integráveis. Em seguida no capítulo 3, derivamos a partir de uma loop-algebra afim a construção das hierarquias integráveis como proposto por (ARATYN; GOMES; ZIMERMAN, 2003). Além disso explicitamos dois modelos associados às álgebras $sl(2)$ e $sl(3)$, assim como descrevemos as principais propriedades que devemos ter para uma álgebra $sl(n)$.

No capítulo 4, estendemos a decomposição a partir de uma loop-superalgebra afim, daí derivamos as equações de movimento, relações de supersimetria e explicitamos o modelo para a álgebra sl(2,1)

No capítulo 5, apresentamos a conclusão do nosso trabalho, realçando os principais resultados e um balanço das consequências desses resultados.

No capitulo 6, apresentamos um breve resumo do que é uma loop-superalgebra de Lie, damos as representações adjuntas e mostramos a sistemática para escolha de uma subálgebra relevante das álgebras sl(2), sl(3), sl(2,1), sl(3,1), sl(3,2) e sl(3,3).

1 Hierarquias integráveis

1.1 Conceito

Entendemos por integrabilidade um sistema de equações diferenciais na forma,

$$\begin{aligned} (\partial_x + A_x)\Psi &= 0, \\ (\partial_{t_n} + A_{t_n})\Psi &= 0. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Aqui A_x e A_{t_n} são potenciais de Gauge, também conhecidos como Par de Lax, (ZAKHAROV; SHABAT, 1979). Quando mais adiante, construiremos hierarquias integráveis por uma abordagem algébrica onde esses potenciais são elementos da álgebra. A condição de compatibilidade entre as equações, isto é, $\partial_x \partial_{t_n} \Psi = \partial_x \partial_{t_n} \Psi$, implica que

$$\partial_x A_{t_n} - \partial_{t_n} A_x + [A_x, A_{t_n}] = 0$$

podendo ser reescrita como

$$[\partial_x + A_x, \partial_{t_n} + A_{t_n}] = 0 \tag{1.2}$$

que é conhecida como equação de curvatura nula. Para cada parâmetro temporal n vinculamos uma equação diferencial que satisfaz a equação de curvatura nula, esse conjunto de infinitas equações diferenciais denomina-se hierarquia integrável. Também é importante mencionar que o par de Lax com respeito à coordenada espacial A_x é o mesmo para os diferentes tempos t_n logo distintos A_{t_n}.

Seja A_x e A_{t_n} solução da curvatura nula (1.2) e Ψ solução do sistema (1.1), podemos considerar os seguintes potenciais

$$\begin{aligned} \widetilde{A}_x &= g A_x g^{-1} + g_x g^{-1} \\ \widetilde{A}_{t_n} &= g A_{t_n} g^{-1} + g_{t_n} g^{-1} \end{aligned}$$

onde g é uma matriz diagonalizável e função das coordenadas x e t_n. Teremos então que

$$\left[\partial_x + \widetilde{A}_x, \partial_{t_n} + \widetilde{A}_{t_n}\right] = 0$$

Estes potenciais também satisfazem a equação (1.2), essa transformação de $A_x, A_{t_n} \rightarrow \widetilde{A}_x, \widetilde{A}_{t_n}$ é chamada Transformações de Gauge; e a solução correspondente para o sistema (1.1) é $\widetilde{\Psi} = g\Psi$. O que mostra que a equação de curvatura nula é invariante por transformação de Gauge. Essa é uma propriedade importante, já que podemos encontrar soluções do tipo sóliton e mapear soluções triviais em soluções não-triviais.

1.2 Abordagem algébrica

Em uma abordagem algébrica para construção de modelos integráveis as simetrias da álgebra são identificadas com a centralização de geradores de uma deformação isoespectral. Recordando que o centralizador $\mathcal{K}_E$ de um elemento E pertencente a álgebra $\mathcal{G}$ é o conjunto de todos os elementos que comutam com E. Devido a identidade de Jacobi $\mathcal{K}_E$ é uma subálgebra, isso é fácil de se verificar, se $K_1, K_2 \in \mathcal{K}(E)$ então usemos a identidade de Jacobi:

$$\begin{aligned} [E,[K_1,K_2]] + [K_2,[E,K_1]] + [K_1,[K_2,E]] &= 0 \\ [E,[K_1,K_2]] &= 0 \end{aligned} \tag{1.3}$$

daqui concluímos que $[K_1, K_2] \in \mathcal{K}(E)$.

Iremos construir nosso modelo a partir de uma loop álgebra $\hat{\mathcal{G}}$ definida a partir do operador gradação Q. A gradação induz a decomposição da álgebra em subespaços gradados,

$$\hat{\mathcal{G}} = \bigoplus_{a\in\mathbb{Z}} \hat{\mathcal{G}}_a \tag{1.4}$$

de modo que

$$\left[Q, \hat{\mathcal{G}}_a\right] = a\ \hat{\mathcal{G}}_a \tag{1.5}$$

e

$$[\mathcal{G}_i, \mathcal{G}_j] \subseteq \mathcal{G}_{i+j} \tag{1.6}$$

A estrutura integrável que descreveremos aqui é derivada a partir do problema de fatorização de Riemann-Hilbert como proposto por (ARATYN; GOMES; ZIMERMAN, 2003):

$$\exp\left(-\sum_{n=1}^{\infty} E^{(n)} t_n\right) g \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} E^{(-n)} t_{-n}\right) = \Theta^{-1}(t)\Pi(t) \tag{1.7}$$

onde g é um elemento constante em G, a matriz dressing $\Theta = \Theta(t) = \prod_{i<0} \exp(\theta^{(i)})$ é constituída de elementos de $\mathcal{G}_<$. Assumiremos que podemos decompor $\Pi = \Pi(t) = BM$, sendo que B é um elemento de gradação zero e $M = \prod_{i>0} \exp(m^{(i)})$ é constituído de elementos de $\mathcal{G}_>$.

Tomando a derivada do lado esquerdo de (1.7) com relação a t_m,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t_m}\left[\exp\left(-\sum_{n=1}^{\infty} E^{(n)} t_n\right) g \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} E^{(-n)} t_{-n}\right)\right] &= -\, E^{(n)} \frac{\partial t_n}{\partial t_m}\Theta^{-1}\Pi + \Theta^{-1}\Pi\ E^{(-n)}\frac{\partial t_{-n}}{\partial t_m} \\ &= -\, \delta_{n,m} E^{(n)}\Theta^{-1}\Pi + \delta_{-n,m}\Theta^{-1}\Pi\ E^{(-n)} \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t_m}\left[\Theta^{-1}\Pi\right] &= \frac{\partial \Theta^{-1}}{\partial t_m}\Pi + \Theta^{-1}\frac{\partial \Pi}{\partial t_m} \\ &= -\Theta^{-2}\frac{\partial \Theta}{\partial t_m}\Pi + \Theta^{-1}\frac{\partial \Pi}{\partial t_m} \end{aligned}$$

Igualando as duas expressões temos,

$$-\delta_{n,m}E^{(n)}\Theta^{-1}\Pi + \delta_{-n,m}\Theta^{-1}\Pi\ E^{(-n)} = -\Theta^{-2}\frac{\partial\Theta}{\partial t_m}\Pi + \Theta^{-1}\frac{\partial\Pi}{\partial t_m} \tag{1.8}$$

se $m = n$ recaímos em

$$-E^{(n)}\Theta^{-1}\Pi = -\Theta^{-2}\frac{\partial\Theta}{\partial t_n}\Pi + \Theta^{-1}\frac{\partial\Pi}{\partial t_n}$$

multiplicando pela esquerda por Θ e pela direita por Π^{-1},

$$-\Theta E^{(n)}\Theta^{-1} = -\Theta^{-1}\frac{\partial\Theta}{\partial t_n} + \frac{\partial\Pi}{\partial t_n}\Pi^{-1}$$

o primeiro termo do lado direito da igualdade contribui com gradação estritamente negativa e o último termo com gradação não-negativa, com isso obtemos que,

$$\frac{\partial\Theta}{\partial t_n} = \left(\Theta E^{(n)}\Theta^{-1}\right)_-\Theta, \tag{1.9a}$$

$$\frac{\partial\Pi}{\partial t_n} = -\left(\Theta E^{(n)}\Theta^{-1}\right)_+\Pi, \tag{1.9b}$$

onde $(\ \ )_+$ e $(\ \ )_-$ é a projeção em graus estritamente não-negativos e estritamente negativos, respectivamente.

Realizando a mesma análise para o caso $m = -n$ em (1.8) obtemos as seguintes relações,

$$\frac{\partial\Theta}{\partial t_{-n}} = -\left(\Pi E^{(-n)}\Pi^{-1}\right)_-\Theta, \tag{1.10a}$$

$$\frac{\partial\Pi}{\partial t_{-n}} = \left(\Pi E^{(n)}\Pi^{-1}\right)_+\Pi. \tag{1.10b}$$

De modo que temos um par de equações de evolução temporal associado a gradação positiva (1.9) e outro par associado a gradação negativa (1.10). Agora seguiremos construindo o operador de Lax a partir do problema de Riemann-Hilbert, de (1.9a) estamos interessado particularmente em $n = 1$, pois se identificarmos $\partial_{t_1} = \partial_x$ podemos propor construir o lado esquerdo da hierarquia integrável (1.2), abreviaremos $E^{(1)} = E$,

$$\begin{aligned}
\partial_x(\Theta) &= (\Theta E\Theta^{-1})_-\Theta \\
&= \left[\Theta E\Theta^{-1} - (\Theta E\Theta^{-1})_+\right]\Theta \\
&= \Theta E - (E + \left[\theta^{-1}, E\right])\Theta \\
&= \Theta E - (E + A_0)\Theta
\end{aligned}$$

e $A_0 = [\theta^{-1}, E]$, onde obviamente $A_0 \in \mathcal{M}(ad(E))$ e tem grau zero. Isto nos leva a,

$$\Theta^{-1}(\partial_x + E + A_0)\Theta = \partial_x + E \tag{1.11}$$

para o operador de Lax, $\mathcal{L} = \partial_x + E + A_0$. Já se analisarmos $n = 1$ em (1.9b),

$$\begin{aligned} \partial_x(\Pi) &= (\Theta E \Theta^{-1})_+ \Pi \\ &= -(E + A_0)\Pi \\ &= -(E + A_0)BM \end{aligned}$$

multiplicando pela direita por $M^{-1}B^{-1}$,

$$\begin{aligned} -E - A_0 &= \partial_x(\Pi)M^{-1}B^{-1} \\ &= (\partial_x B \cdot M + B \cdot \partial_x M)M^{-1}B^{-1} \\ &= \partial_x B \cdot B^{-1} + B \cdot \partial_x M \cdot M^{-1}B^{-1} \end{aligned}$$

Lembrando que B é um elemento constante de grau zero, podemos concluir que,

$$A_0 = -\partial_x B \cdot B^{-1} \tag{1.12}$$

essa identidade será fundamental na solução das hierarquias. Similarmente, podemos construir correntes de ordens maiores e obtemos

$$\Theta^{-1}\left(\partial_{t_N} + E^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} D_n^{(i)}\right)\Theta = \partial_{t_n} + E^{(n)}, \tag{1.13}$$

onde

$$(\Theta E^{(n)} \Theta^{-1})_+ = E^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} D_n^{(i)}. \tag{1.14}$$

Destas relações a partir do método Dressing emerge para condições de curvatura nula

$$\left[\partial_x + E + A_0, \partial_{t_n} + E^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} D_n^{(i)}\right] = \Theta\left[\partial_x + E, \partial_{t_n} + E^{(n)}\right]\Theta^{-1} = 0, \tag{1.15}$$

onde $D_n^{(a)} \in \mathcal{G}_a$. Esse conjunto de equações no leva a,

$$\begin{aligned} \left[E, D_n^{(n-1)}\right] &+ \left[A_0, E^{(n)}\right] = 0, \\ \left[E, D_n^{(n-2)}\right] &+ \left[A_0, D_n^{(n-1)}\right] + \partial_x D_n^{(n-1)} = 0, \\ &\vdots \\ \left[A_0, D_n^{(0)}\right] &- \partial_{t_N} A_0 + \partial_x D_n^{(0)} = 0. \end{aligned} \tag{1.16}$$

Está claro que as soluções locais para $D_n^{(i)}$, $i = 0, \ldots, n$ podem ser obtidas recursivamente iniciando pela equação de grau mais alto em (1.16) até resolvermos a última.

1.2.1 Hierarquia de gradação temporal negativa

A evolução temporal associada a gradação negativa de elementos em $C(\mathcal{K})$ pode ser incorporada dentro da construção geral de hierarquias integráveis seguindo o problema de Riemann-Hilbert e sua conexão com a formulação Dressing. Como em (1.10a) para cada elemento $E^{(-n)} \in \mathcal{K}(ad(E))$ podemos definir a evolução temporal associado por

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t_{-n}} = -\left(BME^{(-n)}M^{-1}B^{-1}\right)_{-}\Theta, \tag{1.17}$$

daqui segue que,

$$\Theta\frac{\partial}{\partial t_{-n}}\Theta^{-1} = \frac{\partial}{\partial_{t_{-n}}} + \left(BME^{(-n)}M^{-1}B^{-1}\right)_{-}. \tag{1.18}$$

Por construção $\left[\partial_{t_{-n}}, \partial_{t_m}\right] = 0$ e portanto

$$\left[\partial_x + E + A_0, \partial_{t_{-n}} + \sum_{i=1}^{n} D^{(-i)}\right] = \Theta\left[\partial_x + E, \partial_{t_{-n}}\right]\Theta^{-1} = 0. \tag{1.19}$$

Decompondo a condição de curvatura nula grau a grau obtemos,

$$\begin{aligned}
\partial_x D_n^{-n} &+ \left[A_0, D_n^{(-n)}\right] = 0,\\
\partial_x D_n^{-n+1} &+ \left[E, D_n^{(-n)}\right] + \left[A_0, D_n^{(-n+1)}\right] = 0,\\
&\vdots\\
\partial_x D_n^{(-1)} &+ \left[E, D_n^{(-2)}\right] + \left[A_0, D_n^{(-1)}\right] = 0,\\
\partial_{t_n} A_0 &- \left[E, D_n^{(-1)}\right] = 0
\end{aligned} \tag{1.20}$$

Esse conjunto de equações pode ser resolvido recursivamente, entretanto em geral, as equações $D^{(-i)}$ são funcionais dos campos A_0. Um caso em particular, para $t = t_{-1}$, em que nos obtemos uma solução local fechada. Seja $n = 1$ na equação (1.19)

$$\left[\partial_x + E + A_0, \partial_{t_{-1}} + \left(BE^{(-1)}B^{-1}\right)\right] = 0, \tag{1.21}$$

esta equação equivale a construção de **Leznov-Saveliev**, (LEZNOV; SAVELIEV, 2012). Se decompusermos (1.21) grau a grau,

$$\partial_x(BE^{(-1)}B^{-1}) + \left[A_0, BE^{(-1)}B^{-1}\right] = 0, \tag{1.22a}$$

$$\partial_{t_{-1}} A_0 - \left[E, BE^{(-1)}B^{-1}\right] = 0. \tag{1.22b}$$

Recordando que $A_0 = -\partial_x B \cdot B^{-1}$, podemos facilmente mostrar que a equação (1.22a) é solucionada,

$$\begin{aligned}
\partial_x(BE^{(-1)}B^{-1}) &= \partial_x B \cdot E^{(-1)}B^{-1} + BE^{(-1)} \cdot \partial_x B^{-1}\\
&= \partial_x B \cdot E^{(-1)}B^{-1} + BE^{(-1)} \cdot \partial_x B^{-1}\\
&= \left(\partial_x B \cdot B^{-1}\right)\left(BE^{(-1)}B^{-1}\right) - \left(BE^{(-1)}B^{-1}\right)\left(\partial_x B \cdot B^{-1}\right)\\
&= -A_0 \cdot BE^{(-1)}B^{-1} + BE^{(-1)}B^{-1} \cdot A_0\\
&= -\left[A_0, BE^{(-1)}B^{-1}\right]
\end{aligned}$$

como podemos verificar a equação (1.22a) é satisfeita pela própria construção do elemento A_0 e com isso fica evidente que dada uma subálgebra $\hat{\mathcal{G}}$ basta definir $E^{(1)}$, $E^{(-1)}$ e A_0 que resolvemos completamente a **equação de Leznov-Saveliev**, (1.21).

1.2.2 Modelos bosônicos

Nesta seção explicitaremos a solução para hierarquia negativa com $n = 1$ para os casos das subálgebras relacionadas a $sl(2)$, $sl(3)$ e quais propriedades podemos esperar para o caso $sl(n)$.

1.2.2.1 sl(2)

Como vimos a equação de Leznov-Saveliev é dada por

$$\left[\partial_x + E + A_0, \partial_{t_{-1}} + \left(BE^{(-1)}B^{-1}\right)\right] = 0. \tag{1.23}$$

Para a álgebra $sl(2)$ detalhada em (3.1.1), definida para a gradação Q,

$$Q = 2d + \frac{1}{2}h_1 \tag{1.24}$$

onde

$$\mathcal{L} = \partial_x + E^{(1)} + A_0, \tag{1.25}$$

com

$$\begin{aligned} E &= E^{(1)} = E^{(0)}_{\alpha_1} + E^{(1)}_{-\alpha_1} \\ A_0 &= -\partial_x B \cdot B^{-1} \\ B &= \phi_1 \cdot M_1^{(0)} \end{aligned}$$

Enquanto que

$$\mathcal{L}_{t_{-1}} = \partial_{t_{-1}} + BE^{(-1)}B^{-1},$$

com

$$\begin{aligned} E^{(-1)} &= E^{(-1)}_{\alpha_1} + E^{(0)}_{-\alpha_1}, \\ BE^{(-1)}B^{-1} &= e^{2\phi_1}E^{(-1)}_{\alpha_1} + e^{-2\phi_1}E^{(0)}_{-\alpha_1} \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned} \left[\mathcal{L}, \mathcal{L}_{t_{-1}}\right] &= 0 \\ \partial_{t_{-1}}\partial_x\phi_1 M_1^{(0)} &= \left[E^{(1)}, BE^{(-1)}B^{-1}\right] \\ \partial_{t_{-1}}\partial_x\phi_1 M_1^{(0)} &= \left[E^{(0)}_{\alpha_1} + E^{(1)}_{-\alpha_1}, e^{2\phi_1}E^{(-1)}_{\alpha_1} + e^{-2\phi_1}E^{(0)}_{-\alpha_1}\right] \\ \partial_{t_{-1}}\partial_x\phi_1 M_1^{(0)} &= (e^{-2\phi_1} - e^{2\phi_1})M_1^{(0)} \\ \partial_{t_{-1}}\partial_x\phi_1 &= (e^{-2\phi_1} - e^{2\phi_1}). \end{aligned}$$

1.2.2.2 sl(3)

Para o caso $sl(3)$ detalhado em (3.1.2), o operador gradação principal é dado por,

$$Q = 3d + (h_1 + h_2) \cdot H. \tag{1.26}$$

Os operadores de Lax são,

$$\mathcal{L} = \partial_x + E^{(1)} + A_0, \tag{1.27}$$

com

$$\begin{aligned} E &= E^{(1)} = E^{(0)}_{\alpha_1} + E^{(0)}_{\alpha_2} + E^{(1)}_{-\alpha_1-\alpha_2} \\ A_0 &= -\partial_x B \cdot B^{-1} \\ B &= \phi_1 \cdot M^{(0)}_1 + \phi_2 \cdot M^{(0)}_4 \end{aligned}$$

e

$$\mathcal{L}_{t_{-1}} = \partial_{t_{-1}} + BE^{(-1)}B^{-1}, \tag{1.28}$$

com

$$\begin{aligned} E^{(-1)} &= E^{(-1)}_{-\alpha_1} + E^{(-1)}_{-\alpha_2} + E^{(0)}_{\alpha_1+\alpha_2}, \\ BE^{(-1)}B^{-1} &= e^{-2\phi_1} E^{(-1)}_{-\alpha_1} + e^{-3\phi_1+\phi_2} E^{(-1)}_{-\alpha_2} + e^{3\phi_1+\phi_2} E^{(0)}_{\alpha_1+\alpha_2}. \end{aligned}$$

Então a equação de movimento é dada por,

$$\begin{aligned} \partial_{t_{-1}}\partial_x\phi_1 M^{(0)}_1 + \partial_{t_{-1}}\partial_x\phi_2 M^{(0)}_4 &= \left[E^{(1)}, BE^{(-1)}B^{-1}\right] \\ \partial_{t_{-1}}\partial_x\phi_1 M^{(0)}_1 + \partial_{t_{-1}}\partial_x\phi_2 M^{(0)}_4 &= -e^{\phi_2} sinh(3\phi_1) M^{(0)}_1 + (e^{-2\phi_2} - e^{\phi_2} sinh(3\phi_1)) M^{(0)}_4 \end{aligned}$$

que nos leva a

$$\begin{aligned} \partial_{t_{-1}}\partial_x\phi_1 &= -e^{\phi_2} sinh(3\phi_1) \\ \partial_{t_{-1}}\partial_x\phi_2 &= (e^{-2\phi_2} - e^{\phi_2} sinh(3\phi_1)) \end{aligned}$$

combinando as duas equações temos

$$\partial_{t_{-1}}\partial_x(\phi_2 - \phi_1) = e^{-2\phi_2}. \tag{1.29}$$

1.2.2.3 sl(n)

Dada uma álgebra $\mathcal{G} = sl(p+1)$, $p \geq 1$, podemos generalizar as propriedades esperadas que satisfaçam a construção de hierarquias integráveis como propormos, o operador gradação é dado por,

$$Q = (p+1)d + (\mu_1 + \cdots + \mu_p) \cdot H \tag{1.30}$$

que induz a decomposição em subespaços

$$\mathcal{G} = \oplus \mathcal{G}_i \tag{1.31}$$

de modo que a álgebra é Z_{p+1}-gradada e respeita

$$[\mathcal{G}_i, \mathcal{G}_j] \subseteq \mathcal{G}_{i+j} \tag{1.32}$$

E o gerador constante E é definido como,

$$E \equiv \sum E_{\alpha_i} + E_{-\psi} \tag{1.33}$$

onde $\psi = \sum_i^p \alpha_i$ e induz a decomposição da álgebra em $\mathcal{G} = \mathcal{K}(E) \oplus \mathcal{M}(E)$.

2 Hierarquias integráveis supersimétricas

2.1 Abordagem algébrica

Nesta seção iremos considerar como construir a estrutura de operadores de Lax quando associamos a termos de gradação semi-inteira que aparecem num contexto de gradação da álgebra na forma, $\hat{\mathcal{G}} = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{G}_{n/2}$, (ARATYN; GOMES; ZIMERMAN, 2004). Como consequência de propormos a matriz Dressing como segue

$$\Theta = \prod_{i<0} \exp(\theta^{(i)}) = \exp(\theta^{(-1/2)} + \theta^{(-1)} + \theta^{(-3/2)} + \cdots) \tag{2.1}$$

e

$$M = \prod_{i>0} \exp(m^{(i)}) = \exp(m^{(1/2)} + m^{(1)} + m^{(3/2)} + \cdots) \tag{2.2}$$

isso consequentemente altera o pares de Lax como mostraremos,

$$\begin{aligned}
\partial_{t_1}(\Theta) &= (\Theta E \Theta^{-1})_{-}\Theta, \\
&= \left[\Theta E \Theta^{-1} - (\Theta E \Theta^{-1})_{+}\right]\Theta, \\
&= \left(\Theta E + \left[\theta^{(-1)}, E\right] + \left[\theta^{(-1/2)}, E\right] + \frac{1}{2}\left[\theta^{(-1/2)}, \left[\theta^{(-1/2)}, E\right]\right]\right)\Theta, \\
&= \Theta E + \left(E + A_0 + A_{1/2} + k_0\right)\Theta.
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Sendo que as quantidades A_0, $A_{1/2}$ e k_0 são definidas como,

$$\begin{aligned}
A_0 &= \left[\theta^{(-1)}, E\right] + \frac{1}{2}\left[\theta^{(-1/2)}, \left[\theta^{(-1/2)}, E\right]\right]\Big|_{\mathcal{M}} \in \mathcal{M}, \\
A_{1/2} &= \left[\theta^{(-1/2)}, E\right] \in \mathcal{M}, \\
k_0 &= \frac{1}{2}\left[\theta^{(-1/2)}, \left[\theta^{(-1/2)}, E\right]\right]\Big|_{\mathcal{K}} \in \mathcal{K},
\end{aligned} \tag{2.4}$$

aqui $|_{\mathcal{K}}$ e $|_{\mathcal{M}}$ denotam a projeção no **Kernel** $\mathcal{K}(E)$ e **Image** $\mathcal{M}(E)$, respectivamente. Isto mostra que para os casos de gradação semi-inteira, a expressão geral para o operador de Lax é

$$A_x = E^{(1)} + A_0 + A_{1/2} + k_0. \tag{2.5}$$

Seguindo os mesmo procedimentos que realizamos para construir a equação de curvatura nula genericamente, temos

$$\left[\partial_x + E + A_{1/2} + A_0 + k_0, \partial_{t_n} + E^{(n)} + \sum_{i=0}^{2n-1} D_n^{(i/2)}\right] = \Theta\left[\partial_x + E +, \partial_{t_n} + E^{(n)}\right]\Theta^{-1} = 0, \tag{2.6}$$

que podem ser resolvidas recursivamente para $D_n^{(i)}$ e $D_n^{(i+1/2)}$, $i = 1, \dots, n-1$. Isto nos leva à equação de movimento (com relação ao tempo) para os campos A_0.

O setor de gradação negativa é estendido também e tem a forma,

$$\left[\partial_x + E + A_{1/2} + A_0 + k_0, \partial_{t_{-n}} + E^{(-n)} + \sum_{i=0}^{2n} D_n^{(-i/2)}\right] = \Theta\left[\partial_x + E, \partial_{t_{-n}}\right]\Theta^{-1} = 0. \quad (2.7)$$

Para o caso em particular que estamos interessados, $n = -1$, obtemos:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\Theta}{\partial_{t_{-1}}} &= -\left(\Pi E^{(-1)}\Pi^{-1}\right)_{-}\Theta \\
&= -B\left(ME^{(-1)}M^{-1}\right)_{-}B^{-1}\Theta \\
&= -B\left(E^{(-1)} + \left[m^{(1/2)}, E^{(-1)}\right]\right)B^{-1}\Theta \\
&= -B\left(E^{(-1)} + j_{-1/2}\right)B^{-1}\Theta
\end{aligned}$$

onde $j_{-1/2} = \left[m^{(1/2)}, E^{(-1)}\right]$, que podemos reescrever como uma transformação de Gauge,

$$\Theta\partial_{t_{-1}}\Theta^{-1} = \partial_{t_{-1}} + BE^{(-1)}B^{-1} + Bj_{-1/2}B^{-1}. \quad (2.8)$$

Ainda interessa analisar as consequências do que seria $n = 1/2$ e quais suas consequências para as relações de evolução temporal (1.9), onde denotaremos o elemento constante $E^{(n)}$ para graus semi-inteiros como sendo $\mathscr{D}^{(n)}$

$$\begin{aligned}
\partial_{1/2}\Theta &= \left(\Theta\mathscr{D}^{(1/2)}\Theta^{-1}\right)_{-}\Theta \\
&= \Theta\mathscr{D}^{(1/2)} - \left(\Theta\mathscr{D}^{(1/2)}\Theta^{-1}\right)_{+}\Theta \\
&= \Theta\mathscr{D}^{(1/2)} - \left(\mathscr{D}^{(1/2)} + \mathscr{D}^{(0)}\right)
\end{aligned}$$

onde $\mathscr{D}^{(0)} = \left[m^{(1/2)}, \mathscr{D}^{(1/2)}\right]$. Podemos reescrever como uma transformação de Gauge,

$$\Theta\left(\partial_{1/2} + \mathscr{D}^{(1/2)}\right)\Theta^{-1} = \partial_{1/2} + \mathscr{D}^{(1/2)} + \mathscr{D}^{(0)}. \quad (2.9)$$

Então se nomearmos os seguintes pares de Lax,

$$\mathcal{L}_x = \partial_x + E^{(1)} + A_{1/2} + A_0 + k_0, \quad (2.10a)$$

$$\mathcal{L}_{-1} = \partial_{t_{-1}} + BE^{(-1)}B^{-1} + Bj_{-1/2}B^{-1}, \quad (2.10b)$$

$$\mathcal{L}_{1/2} = \partial_{1/2} + \mathscr{D}^{(1/2)} + \mathscr{D}^{(0)}, \quad (2.10c)$$

que por construção temos que

$$[\mathcal{L}_x, \mathcal{L}_{-1}] = 0, \quad (2.11a)$$

$$\left[\mathcal{L}_{1/2}, \mathcal{L}_x\right] = 0, \quad (2.11b)$$

$$\left[\mathcal{L}_{1/2}, \mathcal{L}_{-1}\right] = 0, . \quad (2.11c)$$

Analisando a equação (2.11a) e usando a identidade $A_0 + k_0 = -\partial_x B \cdot B^{-1}$, temos grau a grau

$$\partial_x \left(B(E^{(-1)} + j_{-1/2})B^{-1} \right) + \left[-\partial_x B \cdot B^{-1}, B(E^{(-1)} + j_{-1/2})B^{-1} \right] = 0, \tag{2.12a}$$

$$\left[E^{(1)}, BE^{(-1)}B^{-1} \right] + \left[A_{1/2}, Bj_{-1/2}B^{-1} \right] + \partial_{t_{-1}}(\partial_x B \cdot B^{-1}) = 0, \tag{2.12b}$$

a equação (2.12a) já é satisfeita pela identidade $A_0 + k_0 = -\partial_x B \cdot B^{-1}$ e a equação (2.12b) é a equação de Leznov-Saveliev supersimétrica.

Agora analisando a equação (2.11b) grau a grau, temos

$$\left[\mathscr{D}^{(1/2)}, E^{(1)} \right] = 0, \tag{2.13a}$$
$$\left[\mathscr{D}^{(1/2)}, A_{1/2} \right] + \left[\mathscr{D}^{(0)}, E^{(1)} \right] = 0, \tag{2.13b}$$
$$\partial_{1/2} A_{1/2} + \left[\mathscr{D}^{(1/2)}, A_0 + k_0 \right] + \left[\mathscr{D}^{(0)}, A_{1/2} \right] = 0, \tag{2.13c}$$

onde podemos observar da equação (2.13a) que $\mathscr{D}^{(1/2)} \in \mathcal{K}$.

E analisando a equação (2.11c) obtemos,

$$\left[\mathcal{L}_{1/2}, \mathcal{L}_{-1} \right] = \left[\partial_{1/2} + \mathscr{D}^{(1/2)} + \mathscr{D}^{(0)}, \partial_{t_{-1}} + BE^{(-1)}B^{-1} + Bj_{-1/2}B^{-1} \right] = 0 \tag{2.14a}$$

$$\mathscr{D}^{(1/2)}(BE^{(-1)}B^{-1}) - \left[\mathscr{D}^{(0)}, BE^{(-1)}B^{-1} \right] = 0 \tag{2.14b}$$

$$\partial_{1/2}(Bj_{-1/2}B^{-1}) + \left[\mathscr{D}^{(0)}, Bj_{-1/2}B^{-1} \right] = 0 \tag{2.14c}$$

essas equações que obtivemos ao decompormos os operadores de Lax (2.11b) e (2.11c), são vínculos para esse formalismo onde acrescentamos elementos de grau semi-inteiro.

Por fim, os parentes com o operador $\mathcal{L}_{1/2}$, atuam como equações de compatibilidade que definem transformação de supersimetria que preservam as equações de movimento (2.11a) invariantes, isto é,

$$\partial_{1/2} \left[\mathcal{L}_x, \mathcal{L}_{-1} \right] = 0. \tag{2.15}$$

Para mostrar isso, usaremos as equações (2.11b) e (2.11c) e aplicando a identidade de Jacobi,

$$\begin{aligned}
\left[\mathcal{L}_{1/2}, [\mathcal{L}_x, \mathcal{L}_{-1}] \right] + \left[\mathcal{L}_{-1}, \left[\mathcal{L}_{1/2}, \mathcal{L}_x \right] \right] + \left[\mathcal{L}_x, \left[\mathcal{L}_{-1}, \mathcal{L}_{1/2} \right] \right] &= 0 \\
\left[\partial_{1/2} + \mathscr{D}^{(1/2)} + \mathscr{D}^{(0)}, [\mathcal{L}_x, \mathcal{L}_{-1}] \right] &= 0 \\
\partial_{1/2} \left[\mathcal{L}_x, \mathcal{L}_{-1} \right] + \left[\mathscr{D}^{(1/2)} + \mathscr{D}^{(0)}, [\mathcal{L}_x, \mathcal{L}_{-1}] \right] &= 0 \\
\partial_{1/2} \left[\mathcal{L}_x, \mathcal{L}_{-1} \right] &= 0.
\end{aligned}$$

As das relações de supersimetria dadas acima, dependem do elemento $\partial_{1/2}$ que existe apenas se existir o elemento $\mathscr{D}^{(1/2)}$ como mostramos em (2.9). Portanto é condição de supersimetria a existência de elementos no kernel de E que pertençam a parte fermiônica.

2.1.1 Modelos supersimétricos

2.1.1.1 sl(2,1)

A superálgebra $sl(2,1)$ é dada em detalhes em (3.1.3). Descrevemos agora uma hierarquia obtida a partir de uma subálgebra relevante dado por Q,

$$Q = 2d + \frac{1}{2} \cdot H \tag{2.16}$$

e pelo operador constante E,

$$E = -\left(E_{\alpha_1} + E_{-\alpha_1}\right) + \lambda_2 \cdot H \tag{2.17}$$

Onde temos que os pares de Lax,

$$\mathcal{L}_x = \partial_x + E^{(1)} + A_{1/2} - \partial_x B \cdot B^{-1} \tag{2.18}$$

com

$$\begin{aligned} A_{1/2} &= \bar{\psi} G_1^{(1/2)} \\ B &= exp(\phi_1 M_1^{(0)}) \end{aligned}$$

e

$$\mathcal{L}_{-1} = \partial_{t_{-1}} + BE^{(-1)}B^{-1} + Bj_{-1/2}B^{-1} \tag{2.19}$$

com

$$\begin{aligned} E^{(-1)} &= E = -\left(E_{\alpha_1} + E_{-\alpha_1}\right) + \lambda_2 \cdot H \\ j_{-1/2} &= \psi G_2^{(-1/2)} \end{aligned}$$

As equações de movimento são obtidas a partir de

$$[\mathcal{L}_x, \mathcal{L}_{-1}] = 0$$

que componente a componente temos

$$\begin{aligned} \partial_x \phi_1 &= 2sinh(2\phi_1) + 2\bar{\psi}\psi sinh(\phi_1), \\ \partial_{t_{-1}} \bar{\psi} &= 2\psi cosh(\phi_1), \\ \partial_{t_{-1}} \psi &= 2\bar{\psi} cosh(\phi_1). \end{aligned}$$

3 Superálgebra de Lie

3.1 Loop - Superalgebra de Lie

Uma superálgebra de Lie $\mathcal{G}$ é uma espaço linear $\mathbb{Z}_2$-gradado, $\mathcal{G} = L_0 \oplus L_1$. Os elementos de L_0 são denominados bosônicos e os elementos de L_1 são denominados fermiônicos, (KAC, 2013). O comutador em $\mathcal{G}$ satisfaz as seguintes propriedades:

$$[A, B] = A \cdot B - (-1)^{deg(A) \cdot deg(B)} B \cdot A, \tag{3.1}$$

$$[A, [B, C]] + [C, [A, B]] + [B, [C, A]] = 0, \tag{3.2}$$

onde $deg(A) = 0$ se $A \in L_0$ e $deg(A) = 1$ se $A \in L_1$.

Uma loop-superálgebra $\hat{\mathcal{G}}$ é obtida a partir de uma extensão da estrutura de uma superálgebra $\mathcal{G}$. Dado um conjunto finitos de geradores $\{T_a\} \in \mathcal{G}$, onde a $= 1, \ldots, \dim \mathcal{G}$, acrescentamos um índice extra, $T_a \to T_a^{(n)}$ e acionamos um gerador a álgebra d,

$$T_a^{(n)} = \lambda^n T_a \tag{3.3}$$

onde

$$\left[d, T_a^{(n)}\right] = n\, T_a^{(n)}. \tag{3.4}$$

Mais formalmente podemos descrever uma loop-superálgebra como sendo

$$\hat{\mathcal{G}} = \mathcal{G} \otimes \mathbb{C}\left[\lambda, \lambda^{-1}\right] \oplus d. \tag{3.5}$$

Ainda da identidade de Jacobi podemos derivar duas propriedades importantes,

$$[\mathcal{K}(E), \mathcal{K}(E)] \subset \mathcal{K}(E) \quad \text{e} \quad [\mathcal{K}(E), \mathcal{M}(E)] \subset \mathcal{M}(E).$$

Essas propriedades são fáceis de se verificarem, se $K_1, K_2 \in \mathcal{K}(E)$ então usando a identidade de Jacobi,

$$\begin{aligned} [E, [K_1, K_2]] + [K_2, [E, K_1]] + [K_1, [K_2, E]] = 0 \\ [E, [K_1, K_2]] = 0 \end{aligned} \tag{3.6}$$

daqui concluímos que $[K_1, K_2] \in \mathcal{K}(E)$. E por último, se $M_1 \in \mathcal{M}(E)$, usando a identidade de Jacobi,

$$\begin{aligned} [E, [K_1, M_1]] + [M_1, [E, K_1]] + [K_1, [M_2, E]] &= 0 \\ [E, [K_1, M_1]] + [K_1, [M_2, E]] &= 0 \end{aligned}$$

ora como $[E, M_1] \neq 0$, isso implica que $[K_1, M_1] \in \mathcal{M}(E)$.

3.1.1 $A(1) = sl(2)$

Os geradores da álgebra sl(2) são: E_{α_1}, $E_{-\alpha_1}$ e h_1. A representação fundamental 2x2 desses geradores é dada a seguir:

$$h_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad E_{\alpha_1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{-\alpha_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Definimos o operador principal E como sendo,

$$E = E_{\alpha_1} + E_{-\alpha_1} \tag{3.7}$$

que induz a decomposição da álgebra, $\mathcal{G} = \mathcal{K}(E) \oplus \mathcal{M}(E)$ onde $\mathcal{K} = \{x \in \mathcal{G} |\, [E, x] = 0\}$ e $\mathcal{M}$ é o complementar de $\mathcal{K}$. Seja $\mathcal{B}$, o conjunto dos autogeradores de E,

$$\mathcal{B} = \{B_i \in \mathcal{G} |\, [E, B_i] = b_i B_i \quad i = 1, \ldots, \dim(\mathcal{G}) = 3\},$$

temos então que,

$$\begin{aligned}
B_1 &= E_{\alpha_1} - E_{-\alpha_1} + h_1 & \qquad b_1 &= -2 \\
B_2 &= -E_{\alpha_1} + E_{-\alpha_1} + h_1 & b_2 &= 2 \\
B_3 &= E_{\alpha_1} + E_{-\alpha_1} & b_3 &= 0
\end{aligned}$$

Daqui concluímos que

$$\mathcal{K} = \{B_3\} \text{ e } \mathcal{M} = \{B_1, B_2\}.$$

Definimos também o operador gradação

$$Q = 2d + \frac{1}{2} h_1 \tag{3.8}$$

que induz a decomposição da álgebra em

$$\mathcal{G} = \bigoplus_i \mathcal{G}_i$$

como o operador Q é definido de modo com que $E \in \mathcal{G}_{2n+1}$. Já os elementos que pertencem a $\mathcal{M}$ podemos ver pelos seus autovalores que,

$$b_1^2 = b_2^2$$

de modo que podemos construir geradores que sejam cíclicos em termos de gradação sob ação do operador $E = E^{(1)}$, isso poder ser facilmente evidenciado. Seja uma combinação linear qualquer de elementos da $\mathcal{M}(E)$,

$$L = \sum_{i=1}^{2} a_i B_i,$$

se comutarmos duas vezes - a mesma ordem de potência que o autovalores adquirem valores idênticos, podemos ver que obtemos proporcionalmente o mesmo elemento L,

$$\begin{aligned}
[E,[E,L]] &= [E,[E,a_1B_1+a_2B_2]] \\
&= [E,a_1\ b_1\ B_1+a_2\ b_2\ B_2] \\
&= a_1\ b_1^2\ B_1+a_2\ b_2^2\ B_2 \\
&= b_1^2\ (a_1B_1+a_2B_2) \\
&= b_1^2\ L.
\end{aligned}$$

Desta maneira podemos construir geradores como combinação linear de $B_i \in \mathcal{M}(E)$ de modo a respeitar os subespaços gradados, podemos ainda tomar a liberdade de normalizar esses geradores, como a seguir:

$$M_1 = \frac{1}{2}(B_1+B_2) = h_1 \quad \text{e} \quad M_2 = -\frac{1}{4}(b_1B_1+b_2B_2) = E_{\alpha_1} - E_{-\alpha_1},$$

onde podemos ver que

$$\begin{aligned}
[E,M_1] \propto M_2, \\
[E,M_2] \propto M_1.
\end{aligned}$$

Há um grau de liberdade em que podemos escolher M_1 ou $M_2 \in \mathcal{G}_{2n}$, se $M_1 \in G_{2n}$ trata-se do modelo abeliano e se $M_2 \in G_{2n}$ trata-se do modelo não-abeliano. Estamos interessados neste contexto no modelo abeliano onde os geradores de grau zero sempre são geradores de Cartan.

Então a álgebra é decomposta em $\mathcal{G} = \mathcal{K} \oplus \mathcal{M}$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\mathcal{K} &= \{K_1 = B_3 = E_{\alpha_1} + E_{-\alpha_1}\}, \\
\mathcal{M} &= \{M_1 = h_1, \quad M_2 = E_{\alpha_1} - E_{-\alpha_1}\},
\end{aligned}$$

e em subespaços gradados $\mathcal{G} = \oplus \mathcal{G}_i$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_{2n} &= \{M_1^{(2n)} = h_1^{(n)}\}, \\
\mathcal{G}_{2n+1} &= \{K_1^{(2n+1)} = E_{\alpha_1}^{(n)} + E_{-\alpha_1}^{(n+1)}, \quad M_2^{(2n+1)} = E_{\alpha_1}^{(n)} - E_{-\alpha_1}^{(n+1)}\}.
\end{aligned}$$

3.1.1.1 Relação de comutação da álgebra $sl(2)$

A álgebra é dada pelos comutadores:

$$\begin{aligned}
\left[K_1^{(2n+1)}, K_1^{(2m+1)}\right] &= 0, & \left[M_1^{(2n)}, M_1^{(2m)}\right] &= 0, \\
\left[K_1^{(2n+1)}, M_1^{(2m+1)}\right] &= -2M_2^{(2(n+m)+1)}, & \left[M_1^{(2n)}, M_2^{(2m+1)}\right] &= 2K_1^{(2(n+m)+1)}, \\
\left[K_1^{(2n+1)}, M_2^{(2m+1)}\right] &= -2M_1^{(2(n+m+1))}, & \left[M_2^{(2n+1)}, M_2^{(2m+1)}\right] &= 0.
\end{aligned}$$

Podemos observar que a álgebra $sl(2)$ é simétrica, isto é, $[\mathcal{M},\mathcal{M}] \subset \mathcal{K}$.

3.1.2 $A(2) = sl(3)$

Os geradores da álgebra $sl(3)$ são: $E_{\pm\alpha_1}, E_{\pm\alpha_2}, E_{\pm(\alpha_1+\alpha_2)}, h_1, h_2$. A representação fundamental 3x3 desses geradores é dada abaixo:

$$E_{\alpha_1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{\alpha_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{\alpha_1+\alpha_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_{-\alpha_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{-\alpha_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{-\alpha_1-\alpha_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$h_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad h_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Definimos o operador principal E como sendo,

$$E = E_{\alpha_1} + E_{\alpha_2} + E_{-\alpha_1-\alpha_2}$$

que induz a decomposição da álgebra, $\mathcal{G} = \mathcal{K}(adE) \oplus \mathcal{M}(adE)$ onde $\mathcal{K} = \{x \in \mathcal{G} |\, [E, x] = 0\}$ e $\mathcal{M}$ é o complementar de $\mathcal{K}$. Seja $\mathcal{B}$, o conjunto dos autogeradores de E,

$$\mathcal{B} = \{B_i \in \mathcal{G} |\, [E, B_i] = b_i B_i \quad i = 1, \ldots, \dim(\mathcal{G}) = 8\}$$

temos então que,

$$\begin{aligned}
B_1 &= e^{-\frac{i\pi}{3}} (E_{\alpha_1} + E_{\alpha_1+\alpha_2} + h_1) + e^{\frac{i\pi}{3}} (E_{\alpha_2} + E_{-\alpha_1}) - (E_{-\alpha_2} + E_{-\alpha_1-\alpha_2} - h_2), & b_1 &= \sqrt{3}\, e^{\frac{5\pi i}{6}}, \\
B_2 &= e^{-\frac{i\pi}{3}} (E_{\alpha_2} + E_{-\alpha_1}) + e^{\frac{i\pi}{3}} (E_{\alpha_1} + E_{\alpha_1+\alpha_2} + h_1) - (E_{-\alpha_2} + E_{-\alpha_1-\alpha_2} - h_2), & b_2 &= \sqrt{3}\, e^{-\frac{5\pi i}{6}}, \\
B_3 &= e^{-\frac{i\pi}{3}} (E_{-\alpha_1} + E_{-\alpha_1-\alpha_2} + h_1) + e^{\frac{i\pi}{3}} (E_{\alpha_1} + E_{-\alpha_2}) - (E_{\alpha_2} + E_{\alpha_1+\alpha_2} - h_2), & b_3 &= \sqrt{3}\, e^{\frac{\pi i}{6}}, \\
B_4 &= e^{-\frac{i\pi}{3}} (E_{\alpha_1} + E_{-\alpha_2}) + e^{\frac{i\pi}{3}} (E_{-\alpha_1} + E_{-\alpha_1-\alpha_2} + h_1) - (E_{\alpha_2} + E_{\alpha_1+\alpha_2} - h_2), & b_4 &= \sqrt{3}\, e^{-\frac{\pi i}{6}}, \\
B_5 &= e^{-\frac{i\pi}{3}} (E_{\alpha_1+\alpha_2} + E_{-\alpha_1-\alpha_2}) + e^{\frac{i\pi}{3}} (E_{\alpha_2} + E_{-\alpha_2} + h_1) - (E_{\alpha_1} + E_{-\alpha_1} - h_2), & b_5 &= \sqrt{3}\, e^{\frac{\pi i}{2}}, \\
B_6 &= e^{-\frac{i\pi}{3}} (E_{\alpha_2} + E_{-\alpha_2} + h_1) + e^{\frac{i\pi}{3}} (E_{\alpha_1+\alpha_2} + E_{-\alpha_1-\alpha_2}) - (E_{\alpha_1} + E_{-\alpha_1} - h_2), & b_6 &= \sqrt{3}\, e^{-\frac{\pi i}{2}}, \\
B_7 &= E_{\alpha_1} + E_{\alpha_2} + E_{-\alpha_1-\alpha_2}, & b_7 &= 0, \\
B_8 &= E_{\alpha_1+\alpha_2} + E_{-\alpha_1} + E_{-\alpha_2}, & b_8 &= 0.
\end{aligned}$$

Daqui concluímos que

$$\mathcal{K} = \{B_7, B_8\} \ \text{ e } \ \mathcal{M} = \{B_i,\ \mathrm{i} = 1, \ldots, 6\}.$$

Definimos também o operador gradação

$$Q = 3d + h_1 + h_2 \tag{3.9}$$

que induz a decomposição da álgebra em

$$\mathcal{G} = \bigoplus_i \mathcal{G}_i$$

como o operador Q é definido de modo com que $E \in \mathcal{G}_{3n+1}$. Já os elementos que pertencem a $\mathcal{M}$ podemos ver pelos seus autovalores que,

$$b_1^3 = \cdots = b_6^6$$

e seguindo a mesma análise que realizamos para o caso $sl(2)$, podemos construir geradores que sejam cíclicos ($\mathbb{Z}_6$) sob ação do operador $E = E^{(1)}$, normalizando arbitrariamente esses geradores temos,

$$\begin{aligned}
M_1 &= \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{6} B_i = h_1 + 2h_2, \\
M_2 &= -\frac{1}{9}\sum_{i=1}^{6} b_i B_i = E_{\alpha_2} - E_{-\alpha_1-\alpha_2}, \\
M_3 &= -\frac{1}{9}\sum_{i=1}^{6} b_i^2 B_i = -2E_{-\alpha_1} + E_{-\alpha_2} + E_{\alpha_1+\alpha_2}, \\
M_4 &= \frac{1}{27}\sum_{i=1}^{6} b_i^3 B_i = h_1, \\
M_5 &= \frac{1}{27}\sum_{i=1}^{6} b_i^4 B_i = -2E_{\alpha_1} + E_{\alpha_2} + E_{-\alpha_1-\alpha_2}, \\
M_6 &= -\frac{1}{81}\sum_{i=1}^{6} b_i^5 B_i = E_{-\alpha_2} - E_{\alpha_1+\alpha_2}.
\end{aligned}$$

Como estamos interessados que os geradores de Cartan tenham grau zero, isso implica que, $M_1 \in \mathcal{G}_{3n}$, com isso a álgebra é decomposta em $\mathcal{G} = \mathcal{K} \oplus \mathcal{M}$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\mathcal{K} &= \{K_1 = B_7, \quad K_2 = B_8\}, \\
\mathcal{M} &= \{M_i, \mathrm{i} = 1, \ldots, 6.\},
\end{aligned}$$

e em subespaços gradados $\mathcal{G} = \oplus \mathcal{G}_i$,

$$\begin{aligned}
&\mathcal{G}_{3n} = \{M_1^{(3n)} = h_1^{(n)} + 2h_2^{(n)}, \quad M_4^{(3n)} = h_1^{(n)}\}, \\
&\mathcal{G}_{3n+1} = \{K_1^{(3n+1)} = E_{\alpha_1}^{(n)} + E_{\alpha_2}^{(n)} + E_{-\alpha_1-\alpha_2}^{(n+1)}, \quad M_2^{(3n+1)} = E_{\alpha_2}^{(n)} - E_{-\alpha_1-\alpha_2}^{(n+1)}, \\
&\qquad M_5^{(3n+1)} = -2E_{\alpha_1}^{(n)} + E_{\alpha_2}^{(n)} + E_{-\alpha_1-\alpha_2}^{(n+1)}\}, \\
&\mathcal{G}_{3n+2} = \{K_2^{(3n+2)} = E_{-\alpha_1}^{(n+1)} + E_{-\alpha_2}^{(n+1)} + E_{\alpha_1+\alpha_2}^{(n)}, \quad M_3^{(3n+2)} = -2E_{-\alpha_1}^{(n+1)} + E_{-\alpha_2}^{(n+1)} + E_{\alpha_1+\alpha_2}^{(n)}, \}, \\
&\qquad M_6^{(3n+2)} = E_{-\alpha_2}^{(n+1)} - E_{\alpha_1+\alpha_2}^{(n)}\}.
\end{aligned}$$

3.1.2.1 Relação de comutação da álgebra sl(3)

$$\left[K_1^{(3n+1)}, K_1^{(3m+1)}\right] = 0,$$
$$\left[K_1^{(3n+1)}, K_2^{(3m+2)}\right] = 0,$$
$$\left[K_1^{(3n+1)}, M_1^{(3m)}\right] = -3M_2^{(3(n+m)+1)},$$
$$\left[K_1^{(3n+1)}, M_2^{(3m+1)}\right] = M_3^{(3(n+m)+2)},$$
$$\left[K_1^{(3n+1)}, M_3^{(3m+2)}\right] = -3M_4^{(3(n+m+1))},$$
$$\left[K_1^{(3n+1)}, M_4^{(3m)}\right] = M_5^{(3(n+m)+1)},$$
$$\left[K_1^{(3n+1)}, M_5^{(3m+1)}\right] = -3M_6^{(3(n+m)+2)},$$
$$\left[K_1^{(3n+1)}, M_6^{(3m+2)}\right] = M_1^{(3(n+m+1))},$$

$$\left[K_2^{(3n+2)}, K_2^{(3m+2)}\right] = 0,$$
$$\left[K_2^{(3n+2)}, M_1^{(3m)}\right] = M_6^{(3(n+m)+2)},$$
$$\left[K_2^{(3n+2)}, M_2^{(3m+1)}\right] = -M_1^{(3(n+m+1))},$$
$$\left[K_2^{(3n+2)}, M_3^{(3m+2)}\right] = 3M_2^{(3(n+m+1)+1)},$$
$$\left[K_2^{(3n+2)}, M_4^{(3m)}\right] = -M_3^{(3(n+m)+2)},$$
$$\left[K_2^{(3n+2)}, M_5^{(3m+1)}\right] = 3M_4^{(3(n+m+1))},$$
$$\left[K_2^{(3n+2)}, M_6^{(3m+2)}\right] = -M_5^{(3(n+m+1)+1)},$$

$$\left[M_1^{(3n)}, M_1^{(3m)}\right] = 0,$$
$$\left[M_1^{(3n)}, M_2^{(3m+1)}\right] = 2K_1^{(3(n+m)+1)} + M_5^{(3(n+m)+1)},$$
$$\left[M_1^{(3n)}, M_3^{(3m+2)}\right] = -3M_6^{(3(n+m)+2)},$$
$$\left[M_1^{(3n)}, M_4^{(3m)}\right] = 0,$$
$$\left[M_1^{(3n)}, M_5^{(3m+1)}\right] = 3M_2^{(3(n+m)+1)},$$
$$\left[M_1^{(3n)}, M_6^{(3m+2)}\right] = -2K_2^{(3(n+m)+2)} - M_3^{(3(n+m)+2)},$$

$$\left[M_2^{(3n+1)}, M_2^{(3m+1)}\right] = 0,$$
$$\left[M_2^{(3n+1)}, M_3^{(3m+2)}\right] = M_1^{(3(n+m+1))},$$
$$\left[M_2^{(3n+1)}, M_4^{(3m)}\right] = M_2^{(3(n+m)+1)},$$
$$\left[M_2^{(3n+1)}, M_5^{(3m+1)}\right] = 2K_2^{(3(n+m)+2)},$$
$$\left[M_2^{(3n+1)}, M_6^{(3m+2)}\right] = -M_4^{(3(n+m+1))},$$

$$\left[M_3^{(3n+2)}, M_3^{(3m+2)}\right] = 0,$$
$$\left[M_3^{(3n+2)}, M_4^{(3m)}\right] = -2K_2 + M_3^{(3(n+m)+2)},$$
$$\left[M_3^{(3n+2)}, M_5^{(3m+1)}\right] = -3M_4^{(3(n+m+1))},$$
$$\left[M_3^{(3n+2)}, M_6^{(3m+2)}\right] = 2K_1^{(3(n+m+1)+1)},$$

$$\left[M_4^{(3n)}, M_4^{(3m)}\right] = 0,$$
$$\left[M_4^{(3n)}, M_5^{(3m+1)}\right] = -2K_1 + M_5^{(3(n+m)+1)},$$
$$\left[M_4^{(3n)}, M_6^{(3m+2)}\right] = M_6^{(3(n+m)+2)},$$

$$\left[M_5^{(3n+1)}, M_5^{(3m+1)}\right] = 0,$$
$$\left[M_5^{(3n+1)}, M_6^{(3m+2)}\right] = M_1^{(3(n+m+1))},$$

$$\left[M_6^{(3n)}, M_6^{(3m+2)}\right] = 0,$$

3.1.3 $A(1,0) = sl(2,1)$

Os geradores da superálgebra $sl(2,1)$ são L_0 o conjunto dos geradores bosônicos e L_1 o conjunto dos geradores fermiônicos:

$$L_0 = \{E_{\pm\alpha_1}, h_1, \lambda_2 \cdot H\} = sl(2) \oplus U(1) \quad \text{e} \quad L_1 = \{E_{\pm\alpha_2}, E_{\pm(\alpha_1+\alpha_2)}\}. \tag{3.10}$$

A representação fundamental 3x3 desses geradores é dada a seguir:

$$E_{\alpha_1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{\alpha_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{\alpha_1+\alpha_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_{-\alpha_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{-\alpha_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{-\alpha_1-\alpha_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$h_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad h_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 \cdot H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

3.1.3.1 Autogeradores e autovalores de E

Definimos o operador principal E como sendo o mesmo operador de $sl(2)$, para recuperarmos as equações de movimento associadas a álgebra $sl(2)$ no limite bosônico,

$$E = E_{\alpha_1} + E_{-\alpha_1} \tag{3.11}$$

que induz a decomposição da álgebra, $\mathcal{G} = \mathcal{K}(E) \oplus \mathcal{M}(E) = \mathcal{K}(E)_B \oplus \mathcal{M}(E)_B \oplus \mathcal{K}(E)_F \oplus \mathcal{M}(E)_F$, onde $\mathcal{K}_B = \{x \in L_0 |\, [E, x] = 0\}$ e $\mathcal{M}$ é o complementar de $\mathcal{K}_B$ e $\mathcal{K}_F = \{x \in L_1 |\, [E, x] = 0\}$ e $\mathcal{M}_F$ é o complementar de $\mathcal{K}_F$.

Então se $\mathcal{B}$ é o conjunto dos autogeradores bosônico de E,

$$\mathcal{B} = \{B_i \in \mathcal{G} |\, [E, B_i] = b_i B_i \quad i = 1, \ldots, \dim(L_0) = 4\},$$

temos então que,

$$\begin{aligned} B_1 &= E_{\alpha_1} - E_{-\alpha_1} + h_1 & \qquad b_1 &= -2 \\ B_2 &= -E_{\alpha_1} + E_{-\alpha_1} + h_1 & b_2 &= 2 \\ B_3 &= E_{\alpha_1} + E_{-\alpha_1} & b_3 &= 0 \\ B_4 &= \lambda_2 \cdot H & b_4 &= 0 \end{aligned}$$

Podemos ver que conservamos os mesmo autogeradores de $sl(2)$ e daqui concluímos que

$$\mathcal{K}_B = \{B_3 \quad B_4\} \quad \text{e} \quad \mathcal{M}_B = \{B_1, B_2\}.$$

E seja $\mathcal{T}$ o conjunto dos autogeradores fermiônicos de E,

$$\mathcal{T} = \{T_i \in \mathcal{G}| \, [E, T_i] = b_i T_i \quad i = 1, \ldots, \dim(L_1) = 4\},$$

temos então que,

$$\begin{aligned}
T_1 &= -E_{\alpha_2} + E_{\alpha_1+\alpha_2} & t_1 &= -1 \\
T_2 &= E_{\alpha_2} + E_{\alpha_1+\alpha_2} & t_2 &= 1 \\
T_3 &= E_{-\alpha_2} + E_{-\alpha_1-\alpha_2} & t_3 &= -1 \\
T_4 &= -E_{-\alpha_2} + E_{-\alpha_1-\alpha_2} & t_4 &= 1
\end{aligned}$$

portanto,

$$\mathcal{K}_F = \{\emptyset\} \quad \text{e} \quad \mathcal{M}_F = \{T_i, \mathrm{i} = 1, \ldots, 4.\}.$$

O fato de termos $\mathcal{K}_F = \{\emptyset\}$ é um resultado que não nos interessa, já que como expomos em (2.13), é condição para existência de supersimetria a existência de $\mathcal{K}_F \neq \{\emptyset\}$. Por essa razão temos que construir um elemento constante E que preserve os autogeradores de $sl(2)$ - isso implica em conservarmos a contribuição da álgebra bosônica para equação de movimento. Levando em conta esses argumentos, propomos:

$$E = \eta_1 \left(E_{\alpha_1} + E_{-\alpha_1}\right) + \eta_2 \lambda_2 \cdot H \tag{3.12}$$

pois $\lambda_2 \cdot H$ é ortogonal aos demais geradores bosônicos, portanto o conjunto $\mathcal{B}$ permanece inalterado. Já o conjunto $\mathcal{T}$ tem autovalores distintos como podemos ver,

$$\begin{aligned}
T_1 &= -E_{\alpha_2} + E_{\alpha_1+\alpha_2} & t_1 &= -(\eta_1 + \eta_2) \\
T_2 &= E_{\alpha_2} + E_{\alpha_1+\alpha_2} & t_2 &= \eta_1 - \eta_2 \\
T_3 &= E_{-\alpha_2} + E_{-\alpha_1-\alpha_2} & t_3 &= -(\eta_1 - \eta_2) \\
T_4 &= -E_{-\alpha_2} + E_{-\alpha_1-\alpha_2} & t_4 &= \eta_1 + \eta_2
\end{aligned}$$

A existência de $\mathcal{K}_F \neq \{\emptyset\}$ está condicionada a: $\eta_1 + \eta_2 = 0$ ou $\eta_1 - \eta_2 = 0$. Para $\eta_1 + \eta_2 = 0$ teremos que $\mathcal{K}_F = \{T_1, T_4\}$ e $\mathcal{M}_F = \{T_2, T_3\}$. E para $\eta_1 - \eta_2 = 0$ teremos que: $\mathcal{K}_F = \{T_2, T_3\}$ e $\mathcal{M}_F = \{T_1, T_4\}$. Logo temos uma grau de liberdade na escolha de qual par pertencerá a $\mathcal{K}_F$.

Independentemente da escolha de parâmetros temos que os autovalores de T_i, indicam ciclicidade $\mathbb{Z}_2$ sob ação do gerador E, pois:

$$t_1^2 = t_4^2 \quad \text{e} \quad t_2^2 = t_3^2$$

E como fizemos para as álgebras anteriores podemos construir geradores cíclicos como combinação desses autogeradores, normalizados arbitrariamente,

$$F_1 = T_1 + T_4 = -E_{\alpha_2} + E_{\alpha_1+\alpha_2} - E_{-\alpha_2} + E_{-\alpha_1-\alpha_2},$$

$$F_2 = t_1 T_1 + t_4 T_4 = E_{\alpha_2} - E_{\alpha_1+\alpha_2} - E_{-\alpha_2} + E_{-\alpha_1-\alpha_2},$$

$$G_1 = T_1 + T_4 = E_{\alpha_2} + E_{\alpha_1+\alpha_2} + E_{-\alpha_2} + E_{-\alpha_1-\alpha_2},$$

$$G_2 = T_1 + T_4 = -E_{\alpha_2} - E_{\alpha_1+\alpha_2} + E_{-\alpha_2} + E_{-\alpha_1-\alpha_2}.$$

Se escolhermos os parâmetros $\eta_1 = -1$ e $\eta_2 = 1$ obtemos a mesma álgebra que encontrada por Gomes et. al em (GOMES; YMAI; ZIMERMAN, 2006) - onde os autores mostraram a escolha de uma subálgebra de $sl(2,1)$ e como construir hierarquia supersimétrica, além de derivarem soluções do tipo sóliton via método Dressing.

3.1.3.2 Subálgebra relevante

A álgebra é decomposta em $\mathcal{G} = \mathcal{K} \oplus \mathcal{M}$ da seguinte forma:

$$\mathcal{K}_B = \{K_1 = B_3 = E_{\alpha_1} + E_{-\alpha_1}, \quad K_2 = B_4 = \lambda_2 \cdot H\},$$

$$\mathcal{M}_B = \{M_1 = h_1, \quad M_2 = E_{\alpha_1} - E_{-\alpha_1}\},$$

e

$$\mathcal{K}_F = \{F_1 = -E_{\alpha_2} + E_{\alpha_1+\alpha_2} - E_{-\alpha_2} + E_{-\alpha_1-\alpha_2},$$

$$F_2 = E_{\alpha_2} - E_{\alpha_1+\alpha_2} - E_{-\alpha_2} + E_{-\alpha_1-\alpha_2}\}.$$

$$\mathcal{M}_F = \{G_1 = E_{\alpha_2} + E_{\alpha_1+\alpha_2} + E_{-\alpha_2} + E_{-\alpha_1-\alpha_2},$$

$$G_2 = -E_{\alpha_2} - E_{\alpha_1+\alpha_2} + E_{-\alpha_2} + E_{-\alpha_1-\alpha_2}\}.$$

e em subespaços gradados $\mathcal{G} = \oplus \mathcal{G}_i$,

$$\mathcal{G}_{2n} = \{M_1^{(2n)} = h_1^{(n)}\},$$

$$\mathcal{G}_{2n+1} = \{K_1^{(2n+1)} = E_{\alpha_1}^{(n)} + E_{-\alpha_1}^{(n+1)}, \quad K_2^{(2n+1)} = \lambda_2 \cdot H^{(n+\frac{1}{2})}, \quad M_2^{(2n+1)} = E_{\alpha_1}^{(n)} - E_{-\alpha_1}^{(n+1)}\}$$

$$\mathcal{G}_{2n+1/2} = \{G_1^{(2n+\frac{1}{2})} = E_{\alpha_2}^{(n+\frac{1}{2})} + E_{\alpha_1+\alpha_2}^{(n)} + E_{-\alpha_2}^{(n)} + E_{-\alpha_1-\alpha_2}^{(n+\frac{1}{2})},$$

$$F_2^{(2n+\frac{1}{2})} = E_{\alpha_2}^{(n+\frac{1}{2})} - E_{\alpha_1+\alpha_2}^{(n)} - E_{-\alpha_2}^{(n)} + E_{-\alpha_1-\alpha_2}^{(n+\frac{1}{2})}\}.$$

$$\mathcal{G}_{2n+3/2} = \{F_1^{(2n+\frac{3}{2})} = -E_{\alpha_2}^{(n+1)} + E_{\alpha_1+\alpha_2}^{(n+\frac{1}{2})} - E_{-\alpha_2}^{(n+\frac{1}{2})} + E_{-\alpha_1-\alpha_2}^{(n+1)},$$

$$G_2^{(2n+\frac{3}{2})} = -E_{\alpha_2}^{(n+1)} - E_{\alpha_1+\alpha_2}^{(n+\frac{1}{2})} + E_{-\alpha_2}^{(n+\frac{1}{2})} + E_{-\alpha_1-\alpha_2}^{(n+1)}\}.$$

3.1.3.3 Relação de comutação da álgebra $sl(2,1)$

A álgebra é dada pelos comutadores:

$$\begin{aligned}
\left[K_1^{(2n+1)}, K_1^{(2m+1)}\right] &= 0, & \left[K_2^{(2n+1)}, K_2^{(2m+1)}\right] &= 0,\\
\left[K_1^{(2n+1)}, K_2^{(2m+1)}\right] &= 0, & \left[K_2^{(2n+1)}, M_1^{(2m)}\right] &= 0,\\
\left[K_1^{(2n+1)}, M_1^{(2m+1)}\right] &= -2M_2^{(2(n+m)+1)}, & \left[K_2^{(2n+1)}, M_2^{(2m+1)}\right] &= 0,\\
\left[K_1^{(2n+1)}, M_2^{(2m+1)}\right] &= -2M_1^{(2(n+m+1))}, & &
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left[M_1^{(2n)}, M_1^{(2m)}\right] &= 0, & \left[M_2^{(2n+1)}, M_2^{(2m+1)}\right] &= 0,\\
\left[M_1^{(2n)}, M_2^{(2m+1)}\right] &= 2K_1^{(2(n+m)+1)}. & &
\end{aligned}$$

$$\left[K_1^{(2n+1)}, F_1^{(2m+\frac{3}{2})}\right] = F_2^{(2(n+m+1)+\frac{1}{2})}, \qquad \left[K_2^{(2n+1)}, F_1^{(2m+\frac{3}{2})}\right] = F_2^{(2(n+m+1)+\frac{1}{2})}),$$
$$\left[K_1^{(2n+1)}, F_2^{(2m+\frac{1}{2})}\right] = F_1^{(2(n+m)+\frac{3}{2})}, \qquad \left[K_2^{(2n+1)}, F_2^{(2m+\frac{1}{2})}\right] = F_1^{(2(n+m)+\frac{3}{2})},$$
$$\left[K_1^{(2n+1)}, G_1^{(2m+\frac{1}{2})}\right] = -G_2^{(2(n+m)+\frac{3}{2})}, \qquad \left[K_2^{(2n+1)}, G_1^{(2m+\frac{1}{2})}\right] = G_2^{(2(n+m)+\frac{3}{2})},$$
$$\left[K_1^{(2n+1)}, G_2^{(2m+\frac{3}{2})}\right] = -G_1^{(2(n+m+1)+\frac{1}{2})}, \qquad \left[K_2^{(2n+1)}, G_2^{(2m+\frac{3}{2})}\right] = G_1^{(2(n+m+1)+\frac{1}{2})},$$

$$\left[M_1^{(2n+1)}, F_1^{(2m+\frac{3}{2})}\right] = -G_2^{(2(n+m)+\frac{3}{2})}, \qquad \left[M_2^{(2n+1)}, F_1^{(2m+\frac{3}{2})}\right] = -G_1^{(2(n+m)+\frac{1}{2})},$$
$$\left[M_1^{(2n+1)}, F_2^{(2m+\frac{1}{2})}\right] = -G_1^{(2(n+m)+\frac{1}{2})}, \qquad \left[M_2^{(2n+1)}, F_2^{(2m+\frac{1}{2})}\right] = -G_2^{(2(n+m)+\frac{3}{2})},$$
$$\left[M_1^{(2n+1)}, G_1^{(2m+\frac{1}{2})}\right] = -F_2^{(2(n+m)+\frac{1}{2})}, \qquad \left[M_2^{(2n+1)}, G_1^{(2m+\frac{1}{2})}\right] = F_1^{(2(n+m)+\frac{3}{2})},$$
$$\left[M_1^{(2n+1)}, G_2^{(2m+\frac{3}{2})}\right] = -F_1^{(2(n+m)+\frac{3}{2})}, \qquad \left[M_2^{(2n+1)}, G_2^{(2m+\frac{3}{2})}\right] = F_2^{(2(n+m+1)+\frac{1}{2})},$$

$$\left[F_1^{(2n+\frac{3}{2})}, F_1^{(2m+\frac{3}{2})}\right] = -2(K_1 - K_2^{(2(n+m+1)+1)}), \qquad \left[F_2^{(2n+\frac{1}{2})}, F_2^{(2m+\frac{1}{2})}\right] = 2(K_1 - K_2^{(2(n+m+1)+1)}),$$
$$\left[F_1^{(2n+\frac{3}{2})}, F_2^{(2m+\frac{1}{2})}\right] = 0, \qquad \left[F_2^{(2n+\frac{1}{2})}, G_1^{(2m+\frac{1}{2})}\right] = -2M_2^{(2(n+m)+1)},$$
$$\left[F_1^{(2n+\frac{3}{2})}, G_1^{(2m+\frac{1}{2})}\right] = 2M_1^{(2(n+m+1))}, \qquad \left[F_2^{(2n+\frac{1}{2})}, G_2^{(2m+\frac{3}{2})}\right] = -2M_1^{(2(n+m+1))},$$
$$\left[F_1^{(2n+\frac{3}{2})}, G_2^{(2m+\frac{3}{2})}\right] = 2M_2^{(2(n+m+1)+1)},$$

$$\left[G_1^{(2n+\frac{1}{2})}, G_1^{(2m+\frac{1}{2})}\right] = 2(K_1 + K_2^{(2(n+m)+1)}), \qquad \left[G_2^{(2n+\frac{3}{2})}, G_2^{(2m+\frac{3}{2})}\right] = -2(K_1 + K_2^{(2(n+m+1)+1)}),$$
$$\left[G_1^{(2n+\frac{1}{2})}, G_2^{(2m+\frac{3}{2})}\right] = 0.$$

Podemos observar que a álgebra $sl(2,1)$ é simétrica, isto é, $[\mathcal{M}, \mathcal{M}] \subset \mathcal{K}$.

3.1.4 $A(2,0) = sl(3,1)$

Os geradores da superálgebra $sl(3,1)$ são L_0 o conjunto dos geradores bosônicos e L_1 o conjunto dos geradores fermiônicos:

$$L_0 = \{E_{\pm\alpha_1}, E_{\pm\alpha_2}, E_{\pm\alpha_1\pm\alpha_2}, h_1, h_2, \lambda_3 \cdot H\} = sl(3) \oplus U(1),$$

$$L_1 = \{E_{\pm\alpha_3}, E_{\pm(\alpha_2+\alpha_3)}, E_{\pm(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)}\}.$$

A representação fundamental 4x4 desses geradores é dada a seguir:

$$E_{\alpha_1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{\alpha_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{\alpha_1+\alpha_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_{-\alpha_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{-\alpha_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{-\alpha_1-\alpha_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$h_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad h_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_3 \cdot H = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

$$E_{\alpha_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{\alpha_2+\alpha_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_{-\alpha_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{-\alpha_2-\alpha_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3.1.4.1 Autogeradores e autovalores de E

Definimos o operador principal E como sendo o mesmo operador de $sl(3)$, para recuperarmos as equações de movimento associadas a álgebra $sl(3)$ no limite bosônico,

$$E = E_{\alpha_1} + E_{\alpha_2} + E_{-\alpha_1-\alpha_2} \tag{3.13}$$

que possui o mesmo conjunto (3.9) de autogeradores de $sl(3)$ acrescido um elemento que pertence a $U(1)$,

$$B_9 = \lambda_3 \cdot H \quad \text{com autovalor} \quad b_9 = 0. \tag{3.14}$$

Portanto temos que,

$$\mathcal{K}_B = \{B_7, B_8, B_9\} \quad \text{e} \quad \mathcal{M}_B = \{B_i, \mathrm{i} = 1, \ldots, 6\}.$$

E seja $\mathcal{T}$ o conjunto dos autogeradores fermiônicos de E,

$$\mathcal{T} = \{T_i \in \mathcal{G} |\, [E, T_i] = b_i T_i \quad i = 1, \ldots, \dim(L_1) = 6\},$$

temos então que,

$$\begin{aligned}
T_1 &= E_{-\alpha_3} + E_{-\alpha_2-\alpha_3} + E_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3}, & t_1 &= -1,\\
T_2 &= E_{\alpha_3} + E_{\alpha_2+\alpha_3} + E_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}, & t_2 &= 1,\\
T_3 &= e^{\frac{2\pi i}{3}} E_{\alpha_3} + e^{-\frac{2\pi i}{3}} E_{\alpha_2+\alpha_3} + E_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}, & t_3 &= e^{-\frac{2\pi i}{3}},\\
T_4 &= e^{-\frac{2\pi i}{3}} E_{\alpha_3} + e^{\frac{2\pi i}{3}} E_{\alpha_2+\alpha_3} + E_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}, & t_4 &= e^{\frac{\pi i}{3}},\\
T_5 &= e^{\frac{2\pi i}{3}} E_{-\alpha_3} + e^{-\frac{2\pi i}{3}} E_{-\alpha_2-\alpha_3} + E_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3}, & t_5 &= e^{\frac{2\pi i}{3}},\\
T_6 &= e^{-\frac{2\pi i}{3}} E_{-\alpha_3} + e^{\frac{2\pi i}{3}} E_{-\alpha_2-\alpha_3} + E_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3}, & t_6 &= e^{-\frac{\pi i}{3}}.
\end{aligned}$$

portanto,

$$\mathcal{K}_F = \{\emptyset\} \quad \text{e} \quad \mathcal{M}_F = \{T_i, \mathrm{i} = 1, \ldots, 6.\}.$$

O fato de termos $\mathcal{K}_F = \{\emptyset\}$ é um resultado que não nos interessa, já que como expomos em (2.13), é condição para existência de supersimetria a existência de $\mathcal{K}_F \neq \{\emptyset\}$. Por essa razão temos que construir um elemento constante E que preserve os autogeradores de $sl(2)$ - isso implica em conservarmos a contribuição a álgebra bosônica para equação de movimento. Levando em conta esses argumentos, propomos:

$$E = \eta_1 \left(E_{\alpha_1} + E_{\alpha_2} + E_{-\alpha_1-\alpha_2}\right) + \eta_2 \lambda_3 \cdot H \tag{3.15}$$

pois $\lambda_3 \cdot H$ é ortogonal aos demais geradores bosônicos, portanto o conjunto $\mathcal{B}$ permanece inalterado. Já o conjunto $\mathcal{T}$ tem autovalores distintos como podemos ver,

$$
\begin{aligned}
T_1 &= E_{-\alpha_3} + E_{-\alpha_2-\alpha_3} + E_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3}, & t_1 &= -\left(\eta_1 + \eta_2\right), \\
T_2 &= E_{\alpha_3} + E_{\alpha_2+\alpha_3} + E_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}, & t_2 &= \eta_1 + \eta_2, \\
T_3 &= e^{\frac{2\pi i}{3}} E_{\alpha_3} + e^{-\frac{2\pi i}{3}} E_{\alpha_2+\alpha_3} + E_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}, & t_3 &= e^{\frac{2\pi i}{3}} \eta_1 + \eta_2, \\
T_4 &= e^{-\frac{2\pi i}{3}} E_{\alpha_3} + e^{\frac{2\pi i}{3}} E_{\alpha_2+\alpha_3} + E_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}, & t_4 &= e^{-\frac{2\pi i}{3}} \eta_1 + \eta_2, \\
T_5 &= e^{\frac{2\pi i}{3}} E_{-\alpha_3} + e^{-\frac{2\pi i}{3}} E_{-\alpha_2-\alpha_3} + E_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3}, & t_5 &= e^{\frac{\pi i}{3}} \eta_1 - \eta_2, \\
T_6 &= e^{-\frac{2\pi i}{3}} E_{-\alpha_3} + e^{\frac{2\pi i}{3}} E_{-\alpha_2-\alpha_3} + E_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3}, & t_6 &= e^{-\frac{\pi i}{3}} \eta_1 - \eta_2.
\end{aligned}
$$

Pelos autovalores t_i podemos escolher os parâmetros η_1, η_2 de forma que $\mathcal{K}_F \neq \{\emptyset\}$. Porém independentemente da escolha de parâmetros temos que os autovalores de T_i, indicam ciclicidade $\mathbb{Z}_2$ sob ação do gerador E, pois:

$$t_1^2 = t_2^2, \quad t_3^2 = t_4^2, \quad t_5^2 = t_6^2.$$

Disso podemos concluir que não é possível para álgebra $sl(3,1)$ construir uma subálgebra que contenha uma decomposição de ciclicidade $\mathbb{Z}_3$ e $\mathcal{K}_F \neq \{\emptyset\}$ condições para construção da hierarquia supersimétrica.

3.1.5 $A(2,1) = sl(3,2)$

Os geradores da superálgebra $sl(3,2)$ são L_0 o conjunto dos geradores bosônicos e L_1 o conjunto dos geradores fermiônicos:

$$L_0 = \{E_{\pm\alpha_1}, E_{\pm\alpha_2}, E_{\pm\alpha_1\pm\alpha_2}, h_1, h_2, E_{\pm\alpha_4}, h_4, \lambda_3 \cdot H\} = sl(3) \oplus sl(2) \oplus U(1),$$

$$L_1 = \{E_{\pm\alpha_3}, E_{\pm(\alpha_2+\alpha_3)}, E_{\pm(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)}, E_{\pm(\alpha_3+\alpha_4)}, E_{\pm(\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)}, E_{\pm(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)}\}.$$

A representação fundamental 5x5 desses geradores é dada a seguir:

$$E_{\alpha_1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{\alpha_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{\alpha_1+\alpha_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_{-\alpha_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{-\alpha_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{-\alpha_1-\alpha_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_{\alpha_4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{-\alpha_4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad h_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$h_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad h_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_3 \cdot H = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$E_{\alpha_3} = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0 \end{pmatrix}, \quad E_{\alpha_2+\alpha_3} = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0 \end{pmatrix}, \quad E_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3} = \begin{pmatrix} 0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0 \end{pmatrix},$$

$$E_{-\alpha_3} = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0 \end{pmatrix}, \quad E_{-\alpha_2-\alpha_3} = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0 \end{pmatrix}, \quad E_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3} = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0 \end{pmatrix}.$$

$$E_{\alpha_3+\alpha_4} = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0 \end{pmatrix}, \quad E_{\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4} = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0 \end{pmatrix},$$

$$E_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4} = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0 \end{pmatrix}, \quad E_{-\alpha_3-\alpha_4} = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0 \end{pmatrix},$$

$$E_{-\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4} = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0 \end{pmatrix}, \quad E_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4} = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0 \end{pmatrix}.$$

3.1.5.1 Autogeradores e autovalores de E

Definimos o operador principal E como sendo o mesmo operador de $sl(3)$, para recuperarmos as equações de movimento associadas a álgebra $sl(3)$ no limite bosônico,

$$E = E_{\alpha_1} + E_{\alpha_2} + E_{-\alpha_1-\alpha_2} \tag{3.16}$$

que possui o mesmo conjunto (3.9) de autogeradores de $sl(3)$ acrescido dos elementos pertencentes a $sl(2)$ e $U(1)$,

$$
\begin{aligned}
B_9 &= E_{\alpha_4} & b_9 &= 0, \\
B_{10} &= E_{-\alpha_4} & b_{10} &= 0, \\
B_{11} &= h_4 & b_{11} &= 0, \\
B_{12} &= \lambda_3 \cdot H & b_{12} &= 0.
\end{aligned}
$$

Portanto temos que,

$$\mathcal{K}_B = \{B_i, \mathrm{i} = 7, \ldots, 12\} \quad \text{e} \quad \mathcal{M}_B = \{B_i, \mathrm{i} = 1, \ldots, 6\}.$$

Agora passemos a analisar o conjunto dos autogeradores fermiônicos $\mathcal{T}$,

$$\mathcal{T} = \{T_i \in \mathcal{G} |\, [E, T_i] = b_i T_i \quad i = 1, \ldots, \dim(L_1) = 12\},$$

os autogeradores são

$$
\begin{aligned}
T_1 &= E_{-\alpha_3} + E_{-\alpha_2-\alpha_3} + E_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3}, & t_1 &= -1, \\
T_2 &= E_{\alpha_3} + E_{\alpha_2+\alpha_3} + E_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}, & t_2 &= 1, \\
T_3 &= e^{\frac{2\pi i}{3}} E_{\alpha_3} + e^{-\frac{2\pi i}{3}} E_{\alpha_2+\alpha_3} + E_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}, & t_3 &= e^{-\frac{2\pi i}{3}}, \\
T_4 &= e^{-\frac{2\pi i}{3}} E_{\alpha_3} + e^{\frac{2\pi i}{3}} E_{\alpha_2+\alpha_3} + E_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}, & t_4 &= e^{\frac{\pi i}{3}}, \\
T_5 &= e^{\frac{2\pi i}{3}} E_{-\alpha_3} + e^{-\frac{2\pi i}{3}} E_{-\alpha_2-\alpha_3} + E_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3}, & t_5 &= e^{\frac{2\pi i}{3}}, \\
T_6 &= e^{-\frac{2\pi i}{3}} E_{-\alpha_3} + e^{\frac{2\pi i}{3}} E_{-\alpha_2-\alpha_3} + E_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3}, & t_6 &= e^{-\frac{\pi i}{3}}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
T_7 &= E_{-\alpha_3-\alpha_4} + E_{-\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4} + E_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4}, & t_7 &= -1, \\
T_8 &= E_{\alpha_3+\alpha_4} + E_{\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4} + E_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4}, & t_8 &= 1, \\
T_9 &= e^{\frac{2\pi i}{3}} E_{\alpha_3+\alpha_4} + e^{-\frac{2\pi i}{3}} E_{\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4} + E_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4}, & t_9 &= e^{-\frac{2\pi i}{3}}, \\
T_{10} &= e^{-\frac{2\pi i}{3}} E_{\alpha_3+\alpha_4} + e^{\frac{2\pi i}{3}} E_{\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4} + E_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4}, & t_{10} &= e^{\frac{\pi i}{3}}, \\
T_{11} &= e^{\frac{2\pi i}{3}} E_{-\alpha_3-\alpha_4} + e^{-\frac{2\pi i}{3}} E_{-\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4} + E_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4}, & t_{11} &= e^{\frac{2\pi i}{3}}, \\
T_{12} &= e^{-\frac{2\pi i}{3}} E_{-\alpha_3-\alpha_4} + e^{\frac{2\pi i}{3}} E_{-\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4} + E_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4}, & t_{12} &= e^{-\frac{\pi i}{3}}.
\end{aligned}
$$

portanto,

$$\mathcal{K}_F = \{\emptyset\} \quad \text{e} \quad \mathcal{M}_F = \{T_i, \mathrm{i} = 1, \ldots, 12.\}.$$

Como já argumentamos antes, não interessa uma decomposição que tenha $\mathcal{K}_F = \{\emptyset\}$. Então propomos:

$$E = \eta_1 \left(E_{\alpha_1} + E_{\alpha_2} + E_{-\alpha_1-\alpha_2}\right) + \eta_2 \lambda_3 \cdot H \tag{3.17}$$

pois $\lambda_3 \cdot H$ é ortogonal aos demais geradores bosônicos, portanto o conjunto $\mathcal{B}$ permanece inalterado. Já o conjunto $\mathcal{T}$ tem autovalores distintos como podemos ver,

$$
\begin{aligned}
T_1 &= E_{-\alpha_3} + E_{-\alpha_2-\alpha_3} + E_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3}, & t_1 &= -\left(\eta_1 + \eta_2\right), \\
T_2 &= E_{\alpha_3} + E_{\alpha_2+\alpha_3} + E_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}, & t_2 &= \eta_1 + \eta_2, \\
T_3 &= e^{\frac{2\pi i}{3}} E_{\alpha_3} + e^{-\frac{2\pi i}{3}} E_{\alpha_2+\alpha_3} + E_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}, & t_3 &= e^{\frac{2\pi i}{3}} \eta_1 + \eta_2, \\
T_4 &= e^{-\frac{2\pi i}{3}} E_{\alpha_3} + e^{\frac{2\pi i}{3}} E_{\alpha_2+\alpha_3} + E_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}, & t_4 &= e^{-\frac{2\pi i}{3}} \eta_1 + \eta_2, \\
T_5 &= e^{\frac{2\pi i}{3}} E_{-\alpha_3} + e^{-\frac{2\pi i}{3}} E_{-\alpha_2-\alpha_3} + E_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3}, & t_5 &= e^{\frac{\pi i}{3}} \eta_1 - \eta_2, \\
T_6 &= e^{-\frac{2\pi i}{3}} E_{-\alpha_3} + e^{\frac{2\pi i}{3}} E_{-\alpha_2-\alpha_3} + E_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3}, & t_6 &= e^{-\frac{\pi i}{3}} \eta_1 - \eta_2,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
T_7 &= E_{-\alpha_3-\alpha_4} + E_{-\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4} + E_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4}, & t_7 &= -\left(\eta_1 + \eta_2\right), \\
T_8 &= E_{\alpha_3+\alpha_4} + E_{\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4} + E_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4}, & t_8 &= \eta_1 + \eta_2, \\
T_9 &= e^{\frac{2\pi i}{3}} E_{\alpha_3+\alpha_4} + e^{-\frac{2\pi i}{3}} E_{\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4} + E_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4}, & t_9 &= e^{\frac{2\pi i}{3}} \eta_1 + \eta_2, \\
T_{10} &= e^{-\frac{2\pi i}{3}} E_{\alpha_3+\alpha_4} + e^{\frac{2\pi i}{3}} E_{\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4} + E_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4}, & t_{10} &= e^{-\frac{2\pi i}{3}} \eta_1 + \eta_2, \\
T_{11} &= e^{\frac{2\pi i}{3}} E_{-\alpha_3-\alpha_4} + e^{-\frac{2\pi i}{3}} E_{-\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4} + E_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4}, & t_{11} &= e^{\frac{\pi i}{3}} \eta_1 - \eta_2, \\
T_{12} &= e^{-\frac{2\pi i}{3}} E_{-\alpha_3-\alpha_4} + e^{\frac{2\pi i}{3}} E_{-\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4} + E_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4}, & t_{12} &= e^{-\frac{\pi i}{3}} \eta_1 - \eta_2.
\end{aligned}
$$

Pelos autovalores t_i podemos escolher os parâmetros η_1, η_2 de forma que $\mathcal{K}_F \neq \{\emptyset\}$. Porém independentemente da escolha de parâmetros temos que os autovalores de T_i, indicam ciclicidade $\mathbb{Z}_2$ sob ação do gerador E, pois:

$$
\left(\frac{t_1}{t_2}\right)^2 = \left(\frac{t_3}{t_4}\right)^2 = \left(\frac{t_5}{t_6}\right)^2 = \left(\frac{t_7}{t_8}\right)^2 = \left(\frac{t_8}{t_{10}}\right)^2 = \left(\frac{t_{11}}{t_{12}}\right)^2.
$$

Daqui podemos concluir que não é possível para álgebra $sl(3,2)$ construir uma subálgebra que contenha uma decomposição de ciclicidade $\mathbb{Z}_3$ e $\mathcal{K}_F \neq \{\emptyset\}$ condições para construção da hierarquia supersimétrica.

3.1.6 $A(2,2) = sl(3,3)$

Os geradores da superálgebra $sl(3,3)$ são L_0 o conjunto dos geradores bosônicos e L_1 o conjunto dos geradores fermiônicos:

$$L_0 = \{E_{\pm\alpha_1}, E_{\pm\alpha_2}, E_{\pm\alpha_1\pm\alpha_2}, h_1, h_2, E_{\pm\alpha_4}, E_{\pm\alpha_5}, E_{\pm\alpha_4\pm\alpha_5}, h_4, h_5, \lambda_3 \cdot H\} = sl(3) \oplus sl(3) \oplus U(1),$$

$$L_1 = \{E_{\pm\alpha_3}, E_{\pm(\alpha_2+\alpha_3)}, E_{\pm(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)}, E_{\pm(\alpha_3+\alpha_4)}, E_{\pm(\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)}, E_{\pm(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)}, E_{\pm(\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5)}, E_{\pm(\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5)}, E_{\pm(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5)}\}.$$

A representação fundamental 6x6 desses geradores é dada a seguir:

$$E_{\alpha_1} = \begin{pmatrix} 0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}, \quad E_{\alpha_2} = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix},$$

$$E_{\alpha_1+\alpha_2} = \begin{pmatrix} 0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}, \quad E_{-\alpha_1} = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix},$$

$$E_{-\alpha_2} = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}, \quad E_{-\alpha_1-\alpha_2} = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix},$$

$$E_{\alpha_4} = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}, \quad E_{\alpha_5} = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}, \quad E_{\alpha_4+\alpha_5} = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix},$$

$$E_{-\alpha_4} = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}, \quad E_{-\alpha_5} = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0 \end{pmatrix}, \quad E_{-\alpha_4-\alpha_5} = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0 \end{pmatrix},$$

$$h_1 = \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0\\ 0&-1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}, \quad h_2 = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0\\ 0&0&-1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}, \quad h_3 = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix},$$

$$h_4 = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&-1&0&0\\ 0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}, \quad h_5 = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&-1&0\\ 0&0&0&0&0&1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_3 \cdot H = \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&1 \end{pmatrix}.$$

$$E_{\alpha_3} = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}, \quad E_{\alpha_2+\alpha_3} = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix},$$

$$E_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3} = \begin{pmatrix} 0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}, \quad E_{-\alpha_3} = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix},$$

$$E_{-\alpha_2-\alpha_3} = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}, \quad E_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3} = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix},$$

$$E_{\alpha_3+\alpha_4} = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}, \quad E_{\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4} = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix},$$

$$E_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4} = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}, \quad E_{-\alpha_3-\alpha_4} = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix},$$

$$E_{-\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4} = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}, \quad E_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4} = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix},$$

$$E_{\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5} = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}, \quad E_{\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5} = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix},$$

$$E_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5} = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}, \quad E_{-\alpha_3-\alpha_4-\alpha_5} = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0 \end{pmatrix},$$

$$E_{-\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4-\alpha_5} = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0 \end{pmatrix}, \quad E_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4-\alpha_5} = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0 \end{pmatrix},$$

3.1.6.1 Autogeradores e autovalores de E

Definimos o operador principal E como sendo o mesmo operador de $sl(3)$, para recuperarmos as equações de movimento associadas a álgebra $sl(3)$ no limite bosônico,

$$E = E_{\alpha_1} + E_{\alpha_2} + E_{-\alpha_1-\alpha_2} \tag{3.18}$$

que possui o seguinte conjunto dos autogeradores fermiônicos $\mathcal{T}$,

$$\mathcal{T} = \{T_i \in \mathcal{G} |\, [E, T_i] = b_i T_i \quad i = 1, \ldots, \dim(L_1) = 18\},$$

os autogeradores são

$$
\begin{aligned}
T_1 &= E_{-\alpha_3} + E_{-\alpha_2-\alpha_3} + E_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3}, & t_1 &= -1,\\
T_2 &= E_{\alpha_3} + E_{\alpha_2+\alpha_3} + E_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}, & t_2 &= 1,\\
T_3 &= e^{\frac{2\pi i}{3}} E_{\alpha_3} + e^{-\frac{2\pi i}{3}} E_{\alpha_2+\alpha_3} + E_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}, & t_3 &= e^{-\frac{2\pi i}{3}},\\
T_4 &= e^{-\frac{2\pi i}{3}} E_{\alpha_3} + e^{\frac{2\pi i}{3}} E_{\alpha_2+\alpha_3} + E_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}, & t_4 &= e^{\frac{\pi i}{3}},\\
T_5 &= e^{\frac{2\pi i}{3}} E_{-\alpha_3} + e^{-\frac{2\pi i}{3}} E_{-\alpha_2-\alpha_3} + E_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3}, & t_5 &= e^{\frac{2\pi i}{3}},\\
T_6 &= e^{-\frac{2\pi i}{3}} E_{-\alpha_3} + e^{\frac{2\pi i}{3}} E_{-\alpha_2-\alpha_3} + E_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3}, & t_6 &= e^{-\frac{\pi i}{3}}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
T_7 &= E_{-\alpha_3-\alpha_4} + E_{-\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4} + E_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4}, & t_7 &= -1,\\
T_8 &= E_{\alpha_3+\alpha_4} + E_{\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4} + E_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4}, & t_8 &= 1,\\
T_9 &= e^{\frac{2\pi i}{3}} E_{\alpha_3+\alpha_4} + e^{-\frac{2\pi i}{3}} E_{\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4} + E_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4}, & t_9 &= e^{-\frac{2\pi i}{3}},\\
T_{10} &= e^{-\frac{2\pi i}{3}} E_{\alpha_3+\alpha_4} + e^{\frac{2\pi i}{3}} E_{\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4} + E_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4}, & t_{10} &= e^{\frac{\pi i}{3}},\\
T_{11} &= e^{\frac{2\pi i}{3}} E_{-\alpha_3-\alpha_4} + e^{-\frac{2\pi i}{3}} E_{-\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4} + E_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4}, & t_{11} &= e^{\frac{2\pi i}{3}},\\
T_{12} &= e^{-\frac{2\pi i}{3}} E_{-\alpha_3-\alpha_4} + e^{\frac{2\pi i}{3}} E_{-\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4} + E_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4}, & t_{12} &= e^{-\frac{\pi i}{3}},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
T_{13} &= E_{-\alpha_3-\alpha_4-\alpha_5} + E_{-\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4-\alpha_5} + E_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4-\alpha_5}, & t_{13} &= -1,\\
T_{14} &= E_{\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5} + E_{\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5} + E_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5}, & t_{14} &= 1,\\
T_{15} &= e^{\frac{2\pi i}{3}} E_{\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5} + e^{-\frac{2\pi i}{3}} E_{\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5} + E_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5}, & t_{15} &= e^{-\frac{2\pi i}{3}},\\
T_{16} &= e^{-\frac{2\pi i}{3}} E_{\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5} + e^{\frac{2\pi i}{3}} E_{\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5} + E_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5}, & t_{16} &= e^{\frac{\pi i}{3}},\\
T_{17} &= e^{\frac{2\pi i}{3}} E_{-\alpha_3-\alpha_4-\alpha_5} + e^{-\frac{2\pi i}{3}} E_{-\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4-\alpha_5} + E_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4-\alpha_5}, & t_{17} &= e^{\frac{2\pi i}{3}},\\
T_{18} &= e^{-\frac{2\pi i}{3}} E_{-\alpha_3-\alpha_4-\alpha_5} + e^{\frac{2\pi i}{3}} E_{-\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4-\alpha_5} + E_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4-\alpha_5}, & t_{18} &= e^{-\frac{\pi i}{3}}
\end{aligned}
$$

portanto,

$$\mathcal{K}_F = \{\emptyset\} \quad \text{e} \quad \mathcal{M}_F = \{T_i, \mathrm{i} = 1, \ldots, 18.\}.$$

Como já argumentamos antes, não interessa uma decomposição que tenha $\mathcal{K}_F = \{\emptyset\}$. Então propomos:

$$E = \eta_1 \left(E_{\alpha_1} + E_{\alpha_2} + E_{-\alpha_1-\alpha_2}\right) + \eta_2 \lambda_3 \cdot H \tag{3.19}$$

pois $\lambda_3 \cdot H$ é ortogonal aos demais geradores bosônicos e também é ortogonal aos geradores fermiônicos de forma que apesar de mantermos o conjunto de autogeradores bosônicos $\mathcal{B}$

permanece inalterado. Já o conjunto $\mathcal{T}$ tem autovalores distintos como podemos ver,

$$
\begin{aligned}
T_1 &= E_{-\alpha_3} + E_{-\alpha_2-\alpha_3} + E_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3}, && t_1 = -\eta_1,\\
T_2 &= E_{\alpha_3} + E_{\alpha_2+\alpha_3} + E_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}, && t_2 = \eta_1,\\
T_3 &= e^{\frac{2\pi i}{3}} E_{\alpha_3} + e^{-\frac{2\pi i}{3}} E_{\alpha_2+\alpha_3} + E_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}, && t_3 = e^{-\frac{2\pi i}{3}}\eta_1,\\
T_4 &= e^{-\frac{2\pi i}{3}} E_{\alpha_3} + e^{\frac{2\pi i}{3}} E_{\alpha_2+\alpha_3} + E_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}, && t_4 = e^{\frac{\pi i}{3}}\eta_1,\\
T_5 &= e^{\frac{2\pi i}{3}} E_{-\alpha_3} + e^{-\frac{2\pi i}{3}} E_{-\alpha_2-\alpha_3} + E_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3}, && t_5 = e^{\frac{2\pi i}{3}}\eta_1,\\
T_6 &= e^{-\frac{2\pi i}{3}} E_{-\alpha_3} + e^{\frac{2\pi i}{3}} E_{-\alpha_2-\alpha_3} + E_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3}, && t_6 = e^{-\frac{\pi i}{3}}\eta_1,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
T_7 &= E_{-\alpha_3-\alpha_4} + E_{-\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4} + E_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4}, && t_7 = -\eta_1,\\
T_8 &= E_{\alpha_3+\alpha_4} + E_{\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4} + E_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4}, && t_8 = \eta_1,\\
T_9 &= e^{\frac{2\pi i}{3}} E_{\alpha_3+\alpha_4} + e^{-\frac{2\pi i}{3}} E_{\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4} + E_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4}, && t_9 = e^{-\frac{2\pi i}{3}}\eta_1,\\
T_{10} &= e^{-\frac{2\pi i}{3}} E_{\alpha_3+\alpha_4} + e^{\frac{2\pi i}{3}} E_{\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4} + E_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4}, && t_{10} = e^{\frac{\pi i}{3}}\eta_1,\\
T_{11} &= e^{\frac{2\pi i}{3}} E_{-\alpha_3-\alpha_4} + e^{-\frac{2\pi i}{3}} E_{-\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4} + E_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4}, && t_{11} = e^{\frac{2\pi i}{3}}\eta_1,\\
T_{12} &= e^{-\frac{2\pi i}{3}} E_{-\alpha_3-\alpha_4} + e^{\frac{2\pi i}{3}} E_{-\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4} + E_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4}, && t_{12} = e^{-\frac{\pi i}{3}}\eta_1,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
T_{13} &= E_{-\alpha_3-\alpha_4-\alpha_5} + E_{-\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4-\alpha_5} + E_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4-\alpha_5}, && t_{13} = -\eta_1,\\
T_{14} &= E_{\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5} + E_{\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5} + E_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5}, && t_{14} = \eta_1,\\
T_{15} &= e^{\frac{2\pi i}{3}} E_{\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5} + e^{-\frac{2\pi i}{3}} E_{\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5} + E_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5}, && t_{15} = e^{-\frac{2\pi i}{3}}\eta_1,\\
T_{16} &= e^{-\frac{2\pi i}{3}} E_{\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5} + e^{\frac{2\pi i}{3}} E_{\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5} + E_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5}, && t_{16} = e^{\frac{\pi i}{3}}\eta_1,\\
T_{17} &= e^{\frac{2\pi i}{3}} E_{-\alpha_3-\alpha_4-\alpha_5} + e^{-\frac{2\pi i}{3}} E_{-\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4-\alpha_5} + E_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4-\alpha_5}, && t_{17} = e^{\frac{2\pi i}{3}}\eta_1,\\
T_{18} &= e^{-\frac{2\pi i}{3}} E_{-\alpha_3-\alpha_4-\alpha_5} + e^{\frac{2\pi i}{3}} E_{-\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4-\alpha_5} + E_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4-\alpha_5}, && t_{18} = e^{-\frac{\pi i}{3}}\eta_1.
\end{aligned}
$$

Podemos verificar que o operador $\lambda_3 \cdot H$ comuta com todos os geradores da álgebra e portanto não modifica o conjunto de autogeradores fermiônicos e recaímos no caso anterior, onde não temos kernel fermiônico

Por último ainda propomos,

$$E = \eta_1 \left(E_{\alpha_1} + E_{\alpha_2} + E_{-\alpha_1-\alpha_2}\right) + \eta_2 \left(E_{\alpha_4} + E_{\alpha_5} + E_{-\alpha_4-\alpha_5}\right) \tag{3.20}$$

já que desta forma ainda teremos o conjunto de autogeradores de $sl(3)$ associado as raízes α_1 e α_2 inalterada bem como o conjunto de autogeradores de $sl(3)$ associado as raízes a_4, a_5. Dessa forma obtemos um conjunto de autogeradores fermiônicos com os seguintes autovalores,

$$
\begin{aligned}
t_1 &= e^{-\frac{2\pi i}{3}}\eta_1 - \eta_2, & t_{10} =& e^{\frac{\pi i}{3}}\eta_1 + \eta_2,\\
t_2 &= e^{\frac{2\pi i}{3}}\eta_1 - \eta_2, & t_{11} =& -\eta_1 + e^{-\frac{2\pi i}{3}}\eta_2,\\
t_3 &= \eta_1 - \eta_2, & t_{12} =& \eta_1 + e^{-\frac{\pi i}{3}}\eta_2,\\
t_4 &= \frac{1}{2}\left(\eta_1 - \sqrt{3}\sqrt{-(\eta_1-\eta_2)^2} - \eta_2\right), & t_{13} =& -\eta_1 + e^{\frac{2\pi i}{3}}\eta_2,\\
t_5 &= \frac{1}{2}\left(\eta_1 + \sqrt{3}\sqrt{-(\eta_1-\eta_2)^2} - \eta_2\right), & t_{14} =& \eta_1 + e^{\frac{\pi i}{3}}\eta_2,\\
t_6 &= -\eta_1 + \eta_2, & t_{15} =& \frac{1}{2}\left(\eta_1 - \sqrt{3}\sqrt{-(\eta_1+\eta_2)^2} - \eta_2\right),\\
t_7 &= \frac{1}{2}\left(\eta_1 - \sqrt{3}\sqrt{-(\eta_1-\eta_2)^2} - \eta_2\right), & t_{16} =& \frac{1}{2}\left(-\eta_1 - \sqrt{3}\sqrt{-(\eta_1+\eta_2)^2} + \eta_2\right),\\
t_8 &= \frac{1}{2}\left(\eta_1 + \sqrt{3}\sqrt{-(\eta_1-\eta_2)^2} - \eta_2\right), & t_{17} =& \frac{1}{2}\left(\eta_1 + \sqrt{3}\sqrt{-(\eta_1+\eta_2)^2} - \eta_2\right),\\
t_9 &= e^{\frac{\pi i}{3}}\eta_1 + \eta_2, & t_{18} =& \frac{1}{2}\left(-\eta_1 + \sqrt{3}\sqrt{-(\eta_1+\eta_2)^2} - \eta_2\right).
\end{aligned}
$$

4 Considerações finais

Neste trabalho construímos hierarquias integráveis a partir da decomposição de uma álgebra. Dividimos essa decomposição em duas partes, a primeira associada a gradação inteira e a segunda em gradação semi-inteira. Associamos uma loop-álgebra de Lie a primeira decomposição e denominamos de modelos bosônicos. Já a decomposição em graus semi-inteiros associamos a uma loop-superálgebra onde os elementos de graus semi-inteiro denominamos de fermiônicos.

Na construção das hierarquias dois elementos fundamentais são os operadores:constante E e o gradação Q, que decompõem a álgebra $\mathcal{G}$ da seguinte maneira, $\mathcal{G} = \mathcal{K} \oplus \mathcal{M} = \bigoplus_n \mathcal{G}_n$, de forma que a escolha judiciosa de uma subálgebra relevante é a chave para nossa construção.

Mostramos que é possível sistematizar a escolha da subálgebra relevante ao estudarmos todos os autogeradores do elemento constante E, onde seus respectivos autovalores indicam quais elementos pertencem ao kernel ($\mathcal{K}$) e a image ($\mathcal{M}$). Descobrimos ainda que tanto para uma loop-álgebra quanto para uma loop-superálgebra é possível obter ciclidade em torno do elemento E tanto para o conjunto de elementos bosônicos quanto fermiônicos, independentemente da base utilizada. Esse resultado generaliza o entendimento de ciclidade encontrado na literatura em que apenas superálgebras as quais as raízes simples são fermiônicas possuem ciclidade em torno do E.

Da decomposição algébrica em subespaços semi-inteiros, propusemos relações que associamos a transformações de supersimetria. Uma vantagem dessa construção é não utilizar o formalismo de supercampos geralmente encontrado nas propostas para obtenção de modelos supersimétricos. Evidenciamos que as relações de supersimetria do ponto de vista algébrico requer a existência de kernel (do operador E) fermiônico não nulo.

Das infinitas equações obtidas, estamos particularmente interessados na equação associada a primeira evolução temporal de gradação negativa, que equivale a equação de Leznov-Saveliev. Explicitamos as equações de movimento associadas às álgebra $sl(2)$ e $sl(3)$, apesar de serem modelos conhecidos a proposta era mostrar que a análise a partir de autogeradores e autovetores de E.

Explicitamos as equações associadas a álgebra $sl(2,1)$, onde percebemos que o operador E como proposto inicialmente não satisfazia a condição de existência de kernel fermiônico não-nulo. Propusemos então adicionar ao operador E um elemento da álgebra que fosse ortogonal a parte $sl(2)$ a fim de conservar as equações num limite bosônico. Com esta alteração conseguimos obter um modelo supersimétrico, embora seja um resultado conhecido, não havia sido demonstrado sistematicamente.

Isso nos possibilitou investigar álgebras maiores, consideramos três casos: $sl(3,1)$, $sl(3,2)$, $sl(3,3)$ que no limite bosônico esperamos obter equações de movimento associadas a $sl(3)$. Contudo não conseguimos obter uma subálgebra relevante, Z-gradada e com elementos no kernel fermiônicos condições necessárias para existência de relações de supersimetria.

Referências

ARATYN, H.; GOMES, J.; ZIMERMAN, A. Integrable hierarchy for multidimensional toda equations and topological–anti-topological fusion. *Journal of Geometry and Physics*, v. 46, n. 1, p. 21 – 47, 2003. ISSN 0393-0440. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0393044002001262>. Citado 2 vezes nas páginas 9 e 12.

ARATYN, H.; GOMES, J.; ZIMERMAN, A. Supersymmetry and the kdv equations for integrable hierarchies with a half-integer gradation. *Nuclear Physics B*, v. 676, n. 3, p. 537 – 571, 2004. ISSN 0550-3213. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0550321303009052>. Citado 2 vezes nas páginas 9 e 19.

EVANS, J.; HOLLOWOOD, T. Supersymmetric toda field theories. *Nuclear Physics B*, v. 352, n. 3, p. 723 – 768, 1991. ISSN 0550-3213. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0550321391901057>. Citado na página 9.

FADDEEV, L. D. The new life of complete integrability. *Physics-Uspekhi*, v. 56, n. 5, p. 465, 2013. Disponível em: <http://stacks.iop.org/1063-7869/56/i=5/a=465>. Citado na página 9.

GOMES, J.; YMAI, L.; ZIMERMAN, A. Soliton solutions for the super mkdv and sinh-gordon hierarchy. *Physics Letters A*, v. 359, n. 6, p. 630 – 637, 2006. ISSN 0375-9601. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0375960106011157>. Citado na página 31.

GOMES, J. F. et al. Negative even grade mkdv hierarchy and its soliton solutions. *Journal of Physics: Conference Series*, v. 284, n. 1, p. 012030, 2011. Disponível em: <http://stacks.iop.org/1742-6596/284/i=1/a=012030>. Citado na página 9.

KAC, V. *Infinite Dimensional Lie Algebras: An Introduction*. Birkhäuser Boston, 2013. (Progress in Mathematics). ISBN 9781475713824. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=ifHiBwAAQBAJ>. Citado na página 23.

LEZNOV, A.; SAVELIEV, M. *Group-Theoretical Methods for Integration of Nonlinear Dynamical Systems*. [S.l.]: Birkhäuser Basel, 2012. (Progress in Mathematical Physics). ISBN 9783034886383. Citado 2 vezes nas páginas 9 e 15.

OLSHANETSKY, M. A. Supersymmetric two-dimensional toda lattice. *Comm. Math. Phys.*, Springer, v. 88, n. 1, p. 63–76, 1983. Disponível em: <https://projecteuclid.org:443/euclid.cmp/1103922214>. Citado na página 9.

ZAKHAROV, V. E.; SHABAT, A. B. Integration of nonlinear equations of mathematical physics by the method of inverse scattering. ii. *Functional Analysis and Its Applications*, v. 13, n. 3, p. 166–174, Jul 1979. ISSN 1573-8485. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/BF01077483>. Citado 2 vezes nas páginas 9 e 11.