

Talita Tozetto Esteves Bolandim

**Projeto de controladores robustos chaveados baseado na
decomposição em soma de quadrados para sistemas não lineares
de tempo discreto**

Ilha Solteira
2024



PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

Talita Tozetto Esteves Bolandim

**Projeto de controladores robustos chaveados baseado na
decomposição em soma de quadrados para sistemas não lineares
de tempo discreto**

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia do
Campus de Ilha Solteira - UNESP como parte dos
requisitos para obtenção do título de Doutora em
Engenharia Elétrica.

Especialidade: Automação.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Carvalho Minhoto
Teixeira

Ilha Solteira
2024

FICHA CATALOGRÁFICA
Desenvolvido pelo Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação

B687p Bolandim, Talita Tozetto Esteves.
Projeto de controladores robustos chaveados baseado na decomposição em soma de quadrados para sistemas não lineares de tempo discreto / Talita Tozetto Esteves Bolandim. -- Ilha Solteira: [s.n.], 2024
79 f. : il.

Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira. Área de conhecimento: Automação, 2024

Orientador: Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira
Inclui bibliografia

1. Sistemas não lineares incertos discretos no tempo. 2. Soma de Quadrados (SOS). 3. Controle chaveado. 4. Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs). 5. Funções polinomiais. 6. Modelos Fuzzy Takagi-Sugeno.


Amanda Sertori dos Santos

Bibliotecária - CRB/8-9061
Seção Técnica de Referência, Atendimento ao
Usuário e Documentação
Diretoria Técnica de Biblioteca e Documentação

CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

TÍTULO DA TESE: "Projeto de controladores robustos chaveados baseado na decomposição em soma de quadrados para sistemas não lineares de tempo discreto"

AUTORA: TALITA TOZETTO ESTEVES BOLANDIM

ORIENTADOR: MARCELO CARVALHO MINHOTO TEIXEIRA

Aprovada como parte das exigências para obtenção do Título de Doutora em Engenharia Elétrica, área: Automação pela Comissão Examinadora:



Prof. Dr. MARCELO CARVALHO MINHOTO TEIXEIRA (Participação Presencial)
Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira - UNESP


Prof. Dr. RODRIGO CARDIM (Participação Presencial)
Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira - UNESP

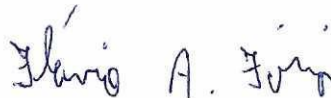
Prof. Dr. FLAVIO ANDRADE FARIA (Participação Presencial)
Departamento de Matemática / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira - UNESP


Prof. Dr. WALLYSONN ALVES DE SOUZA (Participação Virtual)
Coordenação de Ciências Matemáticas e Naturais / Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Tocantins - IFTO

Prof. Dr. DIOGO RAMALHO DE OLIVEIRA (Participação Virtual)
Departamento de Eletroeletrônica / Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Mato Grosso do Sul - IFMS

Ilha Solteira, 03 de maio de 2024

 Documento assinado digitalmente
WALLYSONN ALVES DE SOUZA
Data: 03/05/2024 18:06:05-0300
Verifique em <https://validar.ti.gov.br>



 Documento assinado digitalmente
DIOGO RAMALHO DE OLIVEIRA
Data: 03/05/2024 18:16:54 0300
Verifique em <https://validar.ti.gov.br>



Dedico este trabalho ao meu marido Emerson, aos meus pais Manoel e Marlene, à minha irmã Milena e às minhas tias Hilda, Mary e Marly, por todo suporte, companheirismo e amor.

Em especial eu dedico para minha filha Sarah e meu filho Samuel por me fazer sentir todo amor, esperança e felicidade.

Agradecimentos

Agradeço à Deus, pela sabedoria, saúde e todas as bênçãos alcançadas até aqui.

Ao meu pai Manoel pelo apoio, conselhos e compreensão, minha mãe Marlene por ser meu alicerce e pelo seu amor em todos os momentos principalmente cuidando de minha filha Sarah para eu poder trabalhar. Minha irmã Milena pela paciência, amor e ajuda nos momentos em que mais precisei.

As minhas tias Hilda, Mary e Marly, pelas orações, ensinamentos e não medirem esforços para me dar todo o suporte para poder finalizar este trabalho.

Ao meu marido Emerson pelo amor, paciência, companheirismo e assistência em todos os momentos.

A minha filha Sarah de 5 anos, por entender a ausência da mamãe sempre que preciso trabalhar e me dar todo o amor e esperança para eu querer ser melhor a cada dia. Ao meu filho Samuel por me fazer acreditar ainda mais em milagres, no amor e propósito de Deus em nossas vidas.

A todos os meus familiares e amigos que torceram, oraram ou contribuíram para a realização deste trabalho, em especial minha prima Nathália, meu cunhado Filipe, minha sogra Izabel Cristina e minha cunhada Ellen.

A empresa Tecfuse Indústria Elétrica Ltda. pela compreensão nos momentos em que precisei me ausentar e todo o suporte dado para finalizar essa tese.

Ao Prof. Dr. Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira, pela confiança, paciência, empatia e todos os aprendizados dados desde à minha graduação até hoje. Saiba que o senhor é um exemplo de ser humano e profissional.

Ao Prof. Dr. Edvaldo Assunção, pelos ensinamentos, experiências, pelas palavras sábias e por poder contar em todos os momentos durante esses anos.

Aos professores e funcionários do grupo de pesquisa em controle em especial o Prof. Dr. Rodrigo Cardim pelo apoio, incentivo e ensinamentos.

Aos colegas do Laboratório de Pesquisa em Controle (LPC) que contribuíram em especial o Igor, Ary, Hugo, Diogo e Gilberto.

Ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica (PPGEE) pela oportunidade e estrutura.

A Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pelo suporte financeiro. O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

“Os que se encantam com a prática sem a ciência são como os timoneiros que entram no navio sem timão nem bússola, nunca tendo certeza do seu destino.”
(Leonardo da Vinci)

Resumo

Neste trabalho é apresentado o desenvolvimento de novas teorias de projetos de controle chaveado robusto, para sistemas não lineares discretos no tempo utilizando a decomposição em soma de quadrados (do inglês *Sum of Squares* - SOS). Inicialmente, é apresentada uma pequena revisão dos conceitos existentes na literatura de projeto de controladores baseados em desigualdades matriciais lineares - do inglês *Linear Matrix Inequalities* - LMIs, que são importantes para entender a motivação pelo projeto com SOS, no qual é mostrado suas principais vantagens através de novos teoremas em que se reduz o conservadorismo das condições de projeto de controle, com resultados satisfatórios que melhoraram o desempenho do sistema não se limitando a uma região de operação como quando é utilizado os modelos fuzzy Takagi-Sugeno (T-S). A tese aborda métodos que podem ser descritos por funções polinomiais, não sendo necessário conhecer as funções de pertinência do sistema quando é implementada a lei de controle chaveada utilizando modelos fuzzy Takagi-Sugeno, o que é uma vantagem pois, elas podem depender de parâmetros incertos ou ser complexas, inviabilizando a implementação do projeto. Portanto são considerados sistemas não lineares incertos discretos no tempo e propostos controladores com ganhos chaveados polinomiais. Os resultados obtidos mostraram uma maior flexibilidade e menor conservadorismo em relação as teorias existentes e isso foi demonstrado através de exemplos numéricos e simulações computacionais.

Palavras-chave: sistemas não lineares incertos discretos no tempo; soma de quadrados (SOS); controle chaveado; desigualdades matriciais lineares (LMIs); funções polinomiais; modelos fuzzy Takagi-Sugeno.

Abstract

This work presents the development of new theories for robust switched control design for discrete-time nonlinear systems using Sum of Squares (SOS) decomposition. Initially, a brief review of existing concepts in the literature on controller design based on Linear Matrix Inequalities (LMIs) is provided. These concepts are important for understanding the motivation behind the SOS-based design, which demonstrates its main advantages through new theorems that reduce the conservatism of control design conditions, yielding satisfactory results that improve system performance without being limited to an operating region as in the case of Takagi-Sugeno (T-S) fuzzy models. The thesis addresses methods that can be described by polynomial functions, making it unnecessary to know the membership functions of the system when the switched control law is implemented using Takagi-Sugeno fuzzy models. This is an advantage because these functions can depend on uncertain parameters or be complex, making the design implementation unfeasible. Therefore, uncertain discrete-time nonlinear systems are considered, and controllers with switched polynomial gains are proposed. The obtained results showed greater flexibility and less conservatism compared to existing theories, which was demonstrated through numerical examples and computer simulations.

Keywords: discrete-time uncertain nonlinear systems; sum of squares (SOS); switched control; linear matrix inequalities (LMIs); polynomial functions; Takagi-Sugeno fuzzy models (T-S).

Lista de figuras

Figura 1 – Interpretação geométrica de estabilidade: a , estável; b , assintoticamente estável; c , instável.	25
Figura 2 – Diagrama de blocos do sistema de controle de modelos fuzzy.	35
Figura 3 – Classes de modelos fuzzy.	36
Figura 4 – Trajetória da variável de estado $x_1(k)$ para condições iniciais diferentes, sendo (+) para $x(0) = [1 \ -0,5]$, (x) para $x(0) = [-0,5 \ 0,8]$, (o) para $x(0) = [-0,35 \ -0,7]$, (□) para $x(0) = [1 \ 0,5]$	47
Figura 5 – Trajetórias da variável de estado $x_2(k)$ para condições iniciais diferentes, sendo (+) para $x(0) = [1 \ -0,5]$, (x) para $x(0) = [-0,5 \ 0,8]$, (o) para $x(0) = [-0,35 \ -0,7]$ e (□) para $x(0) = [1 \ 0,5]$	47
Figura 6 – Lei de controle chaveado (50): sinal de controle e $\sigma(k)$, sendo (x): $\sigma(k) = 1$ e (□): $\sigma(k) = 2$ para $x(0) = [1 \ -0,5]$, (x): $\sigma(k) = 1$ e (□): $\sigma(k) = 2$ para $x(0) = [-0,5 \ 0,8]$, (x): $\sigma(k) = 1$ e (□): $\sigma(k) = 2$ para $x(0) = [-0,35 \ -0,7]$ e (x): $\sigma(k) = 1$ e (□): $\sigma(k) = 2$ para $x(0) = [1 \ 0,5]$	48
Figura 7 – Representação da lei de controle chaveado, sendo (x) = $\sigma(k) = 1$ e (□) = $\sigma(k) = 2$	48
Figura 8 – Trajetória da variável de estado $x_1(k)$ para condições iniciais diferentes, sendo (+) para $x(0) = [1 \ -0,5]$, (x) para $x(0) = [-0,5 \ 0,8]$, (o) para $x(0) = [-0,35 \ -0,7]$, (□) para $x(0) = [1 \ 0,5]$	50
Figura 9 – Trajetórias da variável de estado $x_2(k)$ para condições iniciais diferentes, sendo (+) para $x(0) = [1 \ -0,5]$, (x) para $x(0) = [-0,5 \ 0,8]$, (o) para $x(0) = [-0,35 \ -0,7]$ e (□) para $x(0) = [1 \ 0,5]$	51
Figura 10 – Lei de controle chaveado (50): sinal de controle e $\sigma(k)$, sendo (x): $\sigma(k) = 1$ e (□): $\sigma(k) = 2$ para $x(0) = [1 \ -0,5]$, (x): $\sigma(k) = 1$ e (□): $\sigma(k) = 2$ para $x(0) = [-0,5 \ 0,8]$, (x): $\sigma(k) = 1$ e (□): $\sigma(k) = 2$ para $x(0) = [-0,35 \ -0,7]$ e (x): $\sigma(k) = 1$ e (□): $\sigma(k) = 2$ para $x(0) = [1 \ 0,5]$	51
Figura 11 – Representação da lei de controle chaveado para a condição inicial $[1 \ -0,5]$, sendo (x) = $\sigma(k) = 1$ e (□) = $\sigma(k) = 2$	52
Figura 12 – Trajetória da variável de estado $x_1(k)$ para condições iniciais diferentes, sendo (+) para $x(0) = [1 \ -0,5]$, (x) para $x(0) = [-0,5 \ 0,8]$, (o) para $x(0) = [-0,35 \ -0,7]$, (□) para $x(0) = [1 \ 0,5]$	53
Figura 13 – Trajetórias da variável de estado $x_2(k)$ para condições iniciais diferentes, sendo (+) para $x(0) = [1 \ -0,5]$, (x) para $x(0) = [-0,5 \ -0,8]$, (o) para $x(0) = [-0,35 \ -0,7]$ e (□) para $x(0) = [1 \ 0,5]$	54

Figura 14 – Lei de controle chaveado (50): sinal de controle e $\sigma(k)$, sendo (x): $\sigma(k) = 1$ e (□): $\sigma(k) = 2$ para $x(0) = [1 \ -0,5]$, (x): $\sigma(k) = 1$ e (□): $\sigma(k) = 2$ para $x(0) = [-0,5 \ -0,8]$, (x): $\sigma(k) = 1$ e (□): $\sigma(k) = 2$ para $x(0) = [-0,35 \ -0,7]$ e (x): $\sigma(k) = 1$ e (□): $\sigma(k) = 2$ para $x(0) = [1 \ 0,5]$.	54
Figura 15 – Representação da lei de controle chaveado, sendo (x) = $\sigma(k) = 1$ e (□) = $\sigma(k) = 2$.	55
Figura 16 – Trajetória da variável de estado x_1 para condições iniciais diferentes, sendo (+) para $x(0) = [1 \ -0,5]$, (x) para $x(0) = [-0,5 \ 0,8]$, (o) para $x(0) = [-0,35 \ -0,7]$, (□) para $x(0) = [1 \ 0,5]$.	62
Figura 17 – Trajetória da variável de estado x_2 para condições iniciais diferentes, sendo (+) para $x(0) = [1 \ -0,5]$, (x) para $x(0) = [-0,5 \ 0,8]$, (o) para $x(0) = [-0,35 \ -0,7]$, (□) para $x(0) = [1 \ 0,5]$.	62
Figura 18 – Lei de controle chaveado (50): sinal de controle e $\sigma(k)$, sendo $\sigma(k) = 1$ (x) e $\sigma(k) = 2$ (□)	63
Figura 19 – Representação da lei de controle chaveado, sendo (x) = $\sigma(k) = 1$ e (□) = $\sigma(k) = 2$.	63
Figura 20 – Trajetória da variável de estado x_1 para condições iniciais diferentes, sendo (+) para $x(0) = [1 \ -0,5]$, (x) para $x(0) = [-0,5 \ 0,8]$, (o) para $x(0) = [-0,55 \ -0,7]$, (□) para $x(0) = [1 \ 0,5]$.	65
Figura 21 – Trajetória da variável de estado x_2 para condições iniciais diferentes, sendo (+) para $x(0) = [1 \ -0,5]$, (x) para $x(0) = [-0,5 \ 0,8]$, (o) para $x(0) = [-0,55 \ -0,7]$, (□) para $x(0) = [1 \ 0,5]$.	66
Figura 22 – Lei de controle chaveado (50): sinal de controle e $\sigma(k)$, sendo (x): $\sigma(k) = 1$ e (□): $\sigma(k) = 2$ para $x(0) = [1 \ -0,5]$, (x): $\sigma(k) = 1$ e (□): $\sigma(k) = 2$ para $x(0) = [-0,5 \ -0,8]$, (x): $\sigma(k) = 1$ e (□): $\sigma(k) = 2$ para $x(0) = [-0,55 \ -0,7]$ e (x): $\sigma(k) = 1$ e (□): $\sigma(k) = 2$ para $x(0) = [1 \ 0,5]$.	66
Figura 23 – Representação da lei de controle chaveado, sendo (x) = $\sigma(k) = 1$ e (□) = $\sigma(k) = 2$.	67
Figura 24 – Trajetória da variável de estado x_1 para condições iniciais diferentes, sendo (+) para $x(0) = [1 \ -0,5]$, (x) para $x(0) = [-0,5 \ 0,8]$, (o) para $x(0) = [-0,95 \ -0,7]$, (□) para $x(0) = [1 \ 0,5]$.	68
Figura 25 – Trajetórias da variável de estado x_2 para condições iniciais diferentes, sendo (+) para $x(0) = [1 \ -0,5]$, (x) para $x(0) = [-0,5 \ 0,8]$, (o) para $x(0) = [-0,95 \ -0,7]$ e (□) para $x(0) = [1 \ 0,5]$.	69
Figura 26 – Lei de controle chaveado (50): sinal de controle e $\sigma(k)$, sendo (x): $\sigma(k) = 1$ e (□): $\sigma(k) = 2$ para $x(0) = [1 \ -0,5]$, (x): $\sigma(k) = 1$ e (□): $\sigma(k) = 2$ para $x(0) = [-0,5 \ 0,8]$, (x): $\sigma(k) = 1$ e (□): $\sigma(k) = 2$ para $x(0) = [-0,95 \ -0,7]$ e (x): $\sigma(k) = 1$ e (□): $\sigma(k) = 2$ para $x(0) = [1 \ 0,5]$.	69

Figura 27 – Representação da lei de controle chaveado, sendo $(x) = \sigma(k) = 1$ e
 $(\square) = \sigma(k) = 2$ 70

Lista de abreviaturas e siglas

MATLAB	Matrix Laboratory
LMIs	Linear Matrix Inequalities
CDP	Compensação Distribuída Paralela
T-S	Takagi-Sugeno
SOS	Sum of Squares
FLF	Funções de Lyapunov Fuzzy
FLP	Funções de Lyapunov Polinomiais
DA	Domínio de Atração

Lista de símbolos

\mathbb{N}	Conjunto dos números naturais
\mathbb{Q}	Conjunto dos números racionais
\mathbb{R}	Conjunto dos números reais
\mathbb{R}^n	Espaço dos vetores coluna de dimensão n com entradas reais
$\mathbb{R}^{n \times m}$	Espaço das matrizes de dimensão n por m com entradas reais
I	Matriz Identidade com dimensão apropriada
$M \geq (>)0$	Matriz M simétrica e semi-definida (definida) positiva
$M \leq (>)0$	Matriz M simétrica e semi-definida (definida) negativa

Sumário

1	INTRODUÇÃO	16
1.1	OBJETIVOS	20
1.2	ESTRUTURA DO TEXTO	20
2	CONCEITOS PRELIMINARES	21
2.1	DESIGUALDADES MATRICIAIS LINEARES (LMIs)	21
2.1.1	Estabilidade de acordo com o método direto de Lyapunov em sistemas contínuos no tempo	22
2.1.2	Estabilidade de acordo com o método direto de Lyapunov em sistemas discretos no tempo	24
2.2	SOMA DE QUADRADOS (SOS)	27
2.2.1	Não Negatividade Global	28
2.2.2	Decomposição em soma de quadrados	28
2.2.3	Estabilidade	31
2.3	MODELOS FUZZY COM PARTE CONSEQUENTE LINEAR E POLINOMIAL	35
2.3.1	MODELOS FUZZY COM PARTE CONSEQUENTE LINEAR	37
2.3.2	MODELOS FUZZY COM PARTE CONSEQUENTE POLINOMIAL	38
2.4	LEI DE CONTROLE CHAVEADA	40
2.5	FUNÇÃO DE LYAPUNOV NÃO QUADRÁTICA	40
3	CONTROLE ROBUSTO CHAVEADO DISCRETO NO TEMPO DE SISTEMAS NÃO LINEARES VIA SOS	42
3.1	SISTEMAS NÃO LINEARES POLINOMIAIS DISCRETOS NO TEMPO	42
3.1.1	EXEMPLOS NUMÉRICOS	45
3.2	CONCLUSÕES PARCIAIS	55
4	CONTROLE ROBUSTO CHAVEADO DISCRETO NO TEMPO DE SISTEMAS NÃO LINEARES VIA SOS COM TAXA DE DECAIMENTO	57
4.1	ESTABILIDADE COM TAXA DE DECAIMENTO	57
4.1.1	EXEMPLOS NUMÉRICOS	60
4.2	CONCLUSÕES PARCIAIS	70
5	CONCLUSÕES E PESQUISAS FUTURAS	72
5.1	CONCLUSÕES	72
5.2	PESQUISAS FUTURAS	73

REFERÊNCIAS	74
-----------------------	----

1 INTRODUÇÃO

A modelagem matemática de diversos sistemas físicos vem sendo estudada dentro da teoria de controle e há um aumento crescente de pesquisas nesta área, devido sua relevância em aprimorar e acompanhar o desenvolvimento da tecnologia em busca de melhores resultados para a humanidade. O grande desafio é descrever adequadamente esses sistemas, na maioria dos casos modelos não lineares, visando a sua estabilização e o atendimento de índices de desempenho previamente especificados, através do projeto de controladores.

A análise da estabilidade é essencial quando um sistema chaveado é desenvolvido (Geromel; Deaecto, 2009; Deaecto; Geromel; Daafouz, 2011). O chaveamento, elaborado cuidadosamente, pode tornar estável um sistema que possui modos instáveis, porém, por outro lado, é capaz de tornar instável um sistema com todos seus modos estáveis. As desigualdades matriciais lineares - LMIs (do inglês *Linear Matrix Inequalities*) são utilizadas para análise de sistemas dinâmicos, e através delas podem ser escritas as condições de estabilidade de um sistema e iniciou-se há mais de 100 anos (Boyd *et al.*, 1994) quando Lyapunov introduziu a teoria de Lyapunov, sendo uma ferramenta poderosa para os sistemas contínuos e discretos no tempo. Entretanto, foi em meados de 1980 que os problemas de controle puderam ser convertidos em problemas convexos (Bernussou; Peres; Geromel, 1989). Desde então, a estabilidade de sistemas lineares invariantes no tempo realimentados é garantida se uma matriz de Lyapunov P (número de linhas e colunas igual à ordem do sistema) simétrica definida positiva for encontrada para satisfazer uma LMI.

A natureza de todo sistema, no mundo real e não idealizado é não linear (Slotine; Li *et al.*, 1991), mesmo diante deste fato, a análise da estabilidade e o projetos de controladores para esses sistemas ainda são complexos e desafiadores. Para os sistemas não lineares foram introduzidas novas condições que garantissem a estabilidade assintótica local e global, considerando funções de Lyapunov quadráticas, modelos locais lineares e as LMIs para analisar a estabilidade e o projeto dos controladores com restrições, incertezas e índices de desempenho, descritos por modelos fuzzy Takagi-Sugeno (T-S) (Tanaka; Ikeda; Wang, 1998; Taniguchi *et al.*, 2001; Teixeira; Žak, 1999; Teixeira; Assunção; Avelar, 2003; Cardim *et al.*, 2007), pois podem descrever uma classe de sistemas não lineares como a combinação de um certo número de modelos locais normalmente lineares (Takagi; Sugeno, 1985). A combinação é feita através de funções de pertinência fuzzy em uma região de operação específica, e nesta região limitada no espaço de estados pode-se assegurar que a planta é representada exatamente por um modelo fuzzy T-S. Quanto maior o número de não linearidades do sistema, maior a quantidade de modelos locais (regras fuzzy) e como consequência, maior a complexidade numérica dos algoritmos de controle, dificultando as implementações (Lam, 2011a).

Diferentes técnicas de projeto de controle foram propostas nas últimas décadas para o controle de sistemas não lineares representados através de modelos fuzzy T-S baseados na compensação distribuída paralela (CDP) (Wang; Tanaka; Griffin, 1996; Teixeira; Žak, 1999; Taniguchi *et al.*, 2001; Teixeira; Assunção; Avellar, 2003; Guerra; Vermeiren, 2004; Ding; Sun; Yang, 2006; Guerra; Kruszewski; Bernal, 2008; Chen *et al.*, 2012; Santim *et al.*, 2012; Lee; Joo; Tak, 2013; Lee; Joo, 2014; Klug *et al.*, 2015; Klug; Castelan; Coutinho, 2015; Márquez *et al.*, 2017) e nas LMIs. O sistema não linear pode ter parâmetros incertos (como por exemplo representando uma falha na estrutura, perda de potência ou desgastes dos componentes mecânicos), e mesmo assim ter seu respectivo modelo fuzzy T-S representando exatamente o sistema em uma região de operação.

As funções de pertinência fuzzy são utilizadas para combinar os modelos locais, e dependendo a forma como as incertezas são descritas nos modelos fuzzy T-S, elas podem ser indeterminadas, pois podem depender de parâmetros desconhecidos do sistema. Quando isso ocorrer, são necessárias outras metodologias de projeto de controladores que não utilizarão diretamente a CDP.

Neste contexto, as pesquisas em busca de novas técnicas de controle para encontrar soluções que garantem a estabilidade robusta de sistemas que possuem em seus modelos as não linearidades e também os parâmetros incertos vem aumentando e trazendo resultados satisfatórios, relaxando mais as restrições e buscando melhores índices de desempenho. Os trabalhos de Guerra e Vermeiren (2004), Ding, Sun e Yang (2006), Guerra, Kruszewski e Bernal (2008), Chen *et al.* (2012) apresentam resultados para o problema de estabilização de sistemas fuzzy T-S discreto no tempo, em que utilizam uma lei de controle que não tem estrutura CDP e depende das funções de pertinência, mas para obter resultados menos conservadores, Guerra e Vermeiren (2004) propuseram uma nova função de Lyapunov não quadrática, a função de Lyapunov fuzzy (FLF, do inglês *Fuzzy Lyapunov Function*).

Na prática há muitos casos em que os parâmetros dos sistemas não lineares são incertos e as variáveis de estados não estão completamente disponíveis para realimentação, por isso há importância em estudar e avançar com os trabalhos que envolvem métodos que permitem utilizar modelos com essas incertezas.

Em Souza (2013) são propostos novos métodos de projeto de controle chaveado para sistemas não lineares incertos, descritos por modelos fuzzy T-S, baseado na lei de controle chaveada em que há a minimização da derivada temporal da função de Lyapunov, por meio da seleção do ganho do controlador, que pertence a um conjunto de ganhos. Com a lei de controle chaveada proposta em Souza (2013), não é necessário ter acesso às funções de pertinência do modelo não linear na estrutura do controlador, que é uma vantagem pois as funções de pertinência podem ser incertas desconhecidas ou dependentes de parâmetros incertos. Alguns dos resultados foram obtidos utilizando a restrição da norma dos controladores, proposta em (Šiljak; Stipanović, 2000).

Baseado na lei de controle chaveada de Souza (2013) e no teorema proposto em Souza *et al.* (2014), na dissertação de mestrado de Buzetti (2017) é proposto o teorema considerando matrizes simétricas auxiliares e então é definido um novo controlador chaveado. Neste trabalho também é utilizada a minimização da norma dos controladores chaveados com base na metodologia proposta em Assunção *et al.* (2007).

Em Oliveira (2017) são propostas novas técnicas de projetos de controle chaveado considerando a minimização da norma \mathcal{H}_∞ para sistemas não lineares incertos descritos por modelos fuzzy T-S para uma classe de sistemas não lineares, considerando funções de pertinência desconhecidas. É considerada uma lei de controle sujeita à saturação do atuador devido às restrições operacionais dos equipamentos e através da lei de controle chaveado é escolhido um ganho de realimentação que pertence a um conjunto de ganhos conhecidos e minimiza a derivada da função de Lyapunov do tipo quadrática. Sendo assim, não é necessário encontrar as funções de pertinência e o desempenho do controle \mathcal{H}_∞ é garantido. Em Oliveira *et al.* (2018) foi proposta uma lei de controle chaveado em sistemas não lineares discretos no tempo descritos por modelos fuzzy T-S para tratar do problema de estabilização.

Em Santos (2020) foi desenvolvido projetos de controle chaveado e \mathcal{H}_∞ chaveado para o problema de estabilização local de sistema não lineares incertos discretos no tempo descritos por modelos fuzzy T-S, considerando região de operação e funções de pertinência dependentes de parâmetros incertos limitados fazendo um estudo baseado no trabalho realizado em Oliveira *et al.* (2018), em que mostrou que todas as restrições propostas foram satisfeitas e a representação do sistema fuzzy T-S foi assegurada.

Um método alternativo é proposto em Parrilo (2000) que fez a decomposição de funções não lineares polinomiais multivariadas em soma de quadrados (do inglês *sum of squares* - SOS). Até então a análise da estabilidade e o projeto de controladores se restringiam as funções de Lyapunov quadráticas ou compostas (Tanaka *et al.*, 2008; Prajna; Papachristodoulou; Wu, 2004).

Se a dinâmica de um sistema não linear pode ser descrita somente por funções polinomiais dependentes do vetor de estado do sistema (sistemas polinomiais), a análise da estabilidade e projeto de controladores não precisam utilizar os modelos fuzzy T-S (Papachristodoulou; Prajna, 2002; Prajna; Papachristodoulou; Wu, 2004). Quando é utilizado a decomposição em soma de quadrados o projeto dos controladores não se restringe a nenhuma condição inicial, ou seja, o sistema não é limitado a uma região de operação, como ocorre utilizando modelos fuzzy T-S.

O SOS, assim como as LMIs transformam diversos problemas de controle em restrições que são resolvidas por algoritmos computacionais. Com o surgimento da teoria SOS, novas propostas de projeto e estudos na área de controle também foram surgindo, em Xu,

Xie e Wang (2009), Jennawasin, Narikiyo e Kawanishi (2010) são propostos projetos de controladores robustos para sistemas polinomiais com incertezas politópicas. No trabalho de Nguang, Saat e Krug (2011) no projeto do controlador são consideradas incertezas limitadas em norma para realimentação estática da saída de sistemas polinomiais. Também foram propostos controladores com garantia da norma \mathcal{H}_∞ para sistemas polinomiais incertos (HUANG; Hong-Fei; Jian-Ping, 2013) e em Lam *et al.* (2013) foram estudadas condições de estabilidade em sistemas baseados em modelos fuzzy polinomiais utilizando funções de Lyapunov fuzzy chaveadas.

Foram estudados para analisar a estabilidade, sistemas utilizando modelos fuzzy polinomiais (Tanaka *et al.*, 2007b) e também projetos de controladores via compensação paralela distribuída polinomial (Tanaka *et al.*, 2007a; Cao *et al.*, 2014). Na pesquisa de resultados de trabalhos usando decomposição em SOS dos sistemas não lineares utilizando modelos fuzzy polinomiais e funções de Lyapunov polinomiais (FLP) o conservadorismo do sistema é reduzido comparado as LMIs (Tanaka *et al.*, 2008).

O progresso das pesquisas referente à análise da estabilidade e do projeto dos controladores de sistemas não lineares via SOS fez com que aumentasse a complexidade e tornaram os projetos dos controladores mais próximos da realidade, incluindo análise da estabilidade com garantia de taxa de decaimento (Yum; Wang, 2013) , utilização de múltiplas funções de Lyapunov (Guelton *et al.*, 2013), controle com custo garantido de modelos fuzzy polinomiais (Tanaka; Ohtake; Wang, 2008), controle de sistemas não lineares através de modelos fuzzy polinomiais considerando atraso no vetor de estado do sistema e sujeito a saturação (Gassara; Hajjaji; Chaabane, 2016), projeto de controladores robustos considerando a redução da norma \mathcal{H}_∞ para modelos fuzzy polinomiais (Yu; Huang; Cheng, 2016) e controle robusto com custo garantido de modelos fuzzy polinomiais considerando atraso no vetor de estados do sistema (Li; Wang, 2012b; Li; Wang, 2012a). O trabalho de Chen *et al.* (2014) apresenta uma abordagem de SOS para controle estável e controle com custo garantido descritos por sistemas fuzzy polinomiais mostrando que esses sistemas possuem uma abordagem mais geral e eficaz comparado aos modelos fuzzy T-S discretos no tempo.

Seguindo com alguns dos avanços na área, buscando diminuir o conservadorismo dos sistemas por meios de aprimorações das técnicas existentes e buscando novas metodologias para melhores resultados, em Ramos (2018), são propostos controladores com ganhos polinomiais chaveados para sistemas não lineares incertos utilizando SOS. Com SOS é possível obter a estabilidade global dos sistemas não lineares incertos ao invés da estabilidade local que os modelos fuzzy T-S oferecem. Em (Xiao *et al.*, 2020) foi investigada a estabilidade e desempenho do intervalo tipo 2 (IT2) baseado em um modelo fuzzy polinomial sendo que os conjuntos fuzzy IT2 são utilizados para capturar as incertezas da planta não linear e com a implementação digital apenas as saídas do sistemas estão

disponíveis, foi considerado índice de desempenho H_∞ e a estabilidade foi analisada em termos da soma de quadrados e teoria de Lyapunov. Já em (Li; Mehran; Bao, 2022), foi explorada a estabilização η exponencial e positividade de um controlador considerando um modelo fuzzy polinomial discreto no tempo utilizando soma de quadrados.

Todos os projetos e simulações apresentados neste trabalho foram realizados no software Matlab/Simulink®. Os problemas com restrições LMIs foram implementados através da interface YALMIP (Lofberg, 2004), com o solver SeDuMi (Sturm, 1999). Os problemas com restrições SOS foram implementados através da interface SOSTOOLS (Papachristodoulou *et al.*, 2013) com o solver SDPT3 e SeDuMi.

1.1 OBJETIVOS

O objetivo deste trabalho é contribuir para o avanço do controle chaveado com metodologias que propõem novas leis de controle considerando uma classe de sistemas não lineares incertos discretos no tempo utilizando SOS, baseado principalmente nos trabalhos de Ramos (2018), Oliveira *et al.* (2018), Santos (2020).

Serão propostos novos teoremas, pretendendo diminuir o conservadorismo dos sistemas incertos discretos no tempo utilizando funções polinomiais dependentes do vetor de estados do sistema e também modelos fuzzy polinomiais, aumentando a flexibilidade do sistema com os métodos propostos neste estudo.

1.2 ESTRUTURA DO TEXTO

- Capítulo 1: Apresenta uma introdução do tema que foi abordado na tese, os objetivos do trabalho e também a organização do texto.
- Capítulo 2: Neste capítulo, são mostrados os conceitos preliminares que serão obtidos como base e referência em todo o trabalho.
- Capítulo 3: São propostos novos teoremas para projetar controladores chaveados robustos utilizando matrizes polinomiais para sistemas não lineares discretos no tempo. Os resultados foram satisfatórios e são comprovados através de dois exemplos.
- Capítulo 4: É introduzido um índice de desempenho nos teoremas do Capítulo 3 que é a taxa de decaimento. Foram ilustrados os resultados em dois exemplos.
- Capítulo 5: Apresenta as conclusões e perspectivas futuras.

2 CONCEITOS PRELIMINARES

Este capítulo aborda conceitos fundamentais existentes na literatura relacionados ao tema abordado desta tese que são bases para os capítulos subsequentes. O trabalho é sobre sistemas não lineares discretos no tempo, porém estamos abordando neste capítulo a teoria de sistemas não lineares contínuos no tempo pois foi o início deste estudo sobre soma de quadrados.

Serão consideradas as seguintes notações em todo o trabalho:

$$\begin{aligned} \mathbb{K}_r &= \{1, 2, \dots, r\}, \quad r \in \mathbb{N}; \quad x(t) = x; \quad V(x(t)) = V; \quad \|x\|_2 = \sqrt{x^T x}; \\ (A, B, C, K)(\alpha) &= \sum_{i=1}^r \alpha_i (A_i, B_i, C_i, K_i), \quad \alpha_i \geq 0 \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^r \alpha_i = 1, \quad \alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r]^T, \end{aligned} \quad (1)$$

com $r = 2^s$ e s para o sistema não linear incerto é o número de parâmetros incertos distintos e/ou não linearidades. Para sistemas não lineares utilizando modelos fuzzy T-S, $\alpha_i = \alpha_i(x(t))$ são funções que dependem das variáveis de estado (Souza, 2013).

2.1 DESIGUALDADES MATRICIAIS LINEARES (LMIs)

As desigualdades matriciais lineares surgiram há mais de cem anos mas naquela época não existiam muitos algoritmos capazes de encontrar soluções numéricas eficazes das LMIs. Foram nos últimos 30 anos que caminhos foram abertos com algoritmos aprimorados para que os problemas de controle pudessem ser convertidos em problemas convexos descrito por LMIs (Boyd *et al.*, 1994).

O uso das LMIs tem muitas vantagens, entre elas a sua utilização para resolver problemas que envolvem muitas variáveis matriciais podendo possuir diversas restrições quando se trata de problemas relacionados à engenharia de controle, sendo um método flexível e direto para transformar diversos problemas de controle em problemas LMIs (Boyd *et al.*, 1994).

Para entender o conceito de LMIs, é importante saber a definição de matrizes positivas definidas. Uma matriz quadrada e real P é definida positiva ($P > 0$) se:

$$x^T P x > 0, \quad \forall x \neq 0, \quad P \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (2)$$

Quando P é simétrica, então $P > 0$ se e somente se todos os autovalores da matriz P forem maiores que 0. Se $P \geq 0$ diz que é uma matriz semidefinida positiva (no caso P deve agora satisfazer (2) trocando-se o sinal $>$ em (2) pelo sinal \geq).

De acordo com Boyd *et al.* (1994) uma LMI é uma desigualdade da forma

$$S(x) = S_0 + \sum_{i=1}^n x_i S_i \geq 0. \quad (3)$$

Na equação (3), $x \in \mathbb{R}^n$ é uma variável vetorial (suas componentes são $x_i, i = 1, \dots, n$) e as matrizes simétricas $S_i = S_i^T \in \mathbb{R}^{m \times m}, i = 0, 1, \dots, n$ são conhecidas. A LMI (3) é uma restrição convexa em x , ou seja, o conjunto $\{x : S(x) > 0\}$ é convexo. A desigualdade (3) pode representar uma ampla variedade de restrições convexas em x como as utilizadas em teoria de controle entre outras, de acordo com uma candidata a função de Lyapunov quadrática.

No entanto as LMIs geralmente são escritas de forma que as variáveis sejam matrizes:

$$R + M_1^T P_1 N_1 + N_1^T P_1 M_1 + \dots + M_n^T P_n N_n + N_n^T P_n M_n < 0. \quad (4)$$

sendo M_i, N_i e $R, i = 1, 2, \dots, n$, são matrizes com elementos constantes e $P_i, i = 1, 2, \dots, n$ são variáveis matriciais simétricas sendo que cada elemento da matriz é uma variável com os valores obtidos a partir da solução da restrição (4).

Um exemplo de LMI com variável matricial é a desigualdade de Lyapunov (Boyd *et al.*, 1994):

$$P > 0, \quad (5)$$

$$A^T P + P A < 0, \quad (6)$$

em que $A \in \mathbb{R}^n$ é uma matriz conhecida e $P = P^T$ é a variável. Em Boyd *et al.* (1994) pode ser verificado que a LMI (4) pode ser colocada na forma de (3).

2.1.1 Estabilidade de acordo com o método direto de Lyapunov em sistemas contínuos no tempo

A teoria de controle para sistemas contínuos no tempo já vem sendo estudada nas últimas décadas com avanços tecnológicos suficientes para buscas sucessivas em pesquisas para obter melhores resultados para a humanidade. A função de Lyapunov está relacionada com a "energia" do sistema (Lyapunov inicialmente estudou a estabilidade de sistemas mecânicos analisando a sua energia total mas posteriormente generalizou esta ideia para sistemas não necessariamente físicos). Se esta função "energia" decai de forma assintótica, pode-se dizer que o sistema é estável.

Para sistemas contínuo no tempo a função de Lyapunov $V(x(t))$ deve satisfazer os três critérios a seguir:

1. $V(x(t)) > 0$, para $x(t) \neq 0$,
2. $\dot{V}(x(t)) < 0$, para $x(t) \neq 0$,
3. $V(0) = 0$, para garantir que o sistema seja localmente assintoticamente estável.

Uma candidata a função de Lyapunov que é muito utilizada na literatura é a função de Lyapunov quadrática, definida como $V(x(t)) = x(t)^T P x(t)$.

Considere o sistema linear contínuo e invariante no tempo

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad (7)$$

sendo $x(t) \in \mathbb{R}^n$ o vetor de estado, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ a entrada de controle, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ as matrizes de estado e de entrada do sistema, respectivamente.

Como todas as variáveis de estado foram consideradas disponíveis para a realimentação, foi utilizada a lei de controle (Boyd *et al.*, 1994):

$$u(t) = -Kx(t), \quad K \in \mathbb{R}^{m \times n}. \quad (8)$$

Teorema 1. (Boyd *et al.*, 1994) Considere o sistema descrito por (7) e a lei de controle dada em (8). Caso existam uma matriz $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e uma matriz simétrica definida positiva $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tais que

$$XA^T - M^T B^T + AX - BM < 0, \quad (9)$$

então a lei de controle (8), sendo $K = MX^{-1}$, torna o sistema realimentado (7) e (8) globalmente assintoticamente estável.

Demonstração. A condição de X ser uma matriz simétrica definida positiva ($X > 0$) garante a função de Lyapunov $V(x(t)) = x(t)^T P x(t)$ positiva para $x(t) \neq 0$ e nula em $x(t) = 0$, sendo $X = P^{-1}$.

Para a LMI (9) substituindo a lei de controle (8) na equação (7), obtém-se o sistema realimentado

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) - BKx(t), \\ \dot{x}(t) &= (A - BK)x(t). \end{aligned}$$

Desejamos que para $x(t) \neq 0$ então $\dot{V}(x(t)) < 0$, considerando a função de Lyapunov quadrática $V(t, x(t)) = x(t)^T P x(t)$, tem-se que:

$$\dot{V}(x(t)) = \dot{x}(t)^T P x(t) + x(t)^T P \dot{x}(t) < 0, \quad (10)$$

substituindo $\dot{x}(t)$ da equação (7) em (10):

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) &= [(A - BK)x(t)]^T P x(t) + x(t)^T P (A - BK)x(t) < 0, \\ &= x(t)^T (A - BK)^T P x(t) + x(t)^T P (A - BK)x(t) < 0, \end{aligned}$$

colocando $x(t)^T$ e $x(t)$ em evidência da equação anterior tem-se que

$$\dot{V}(x(t)) = x(t)^T [(A - BK)^T P + P(A - BK)]x(t) < 0,$$

desmembrando o termo $(A - BK)^T P + P(A - BK)$:

$$\dot{V}(x(t)) = x(t)^T [(A^T - K^T B^T)P + P(A - BK)]x(t) < 0. \quad (11)$$

Para todo $x(t)$ não nulo, note que (11) é equivalente à condição abaixo, na qual mutipli-
camos o termo dentro dos colchetes em (11) à esquerda e a direita por P^{-1} :

$$\begin{aligned} x(t)^T [P^{-1}(A^T - K^T B^T) + (A - BK)P^{-1}]x(t) < 0, \\ x(t)^T [P^{-1}A^T - P^{-1}K^T B^T) + AP^{-1} - BKP^{-1}]x(t) < 0, \end{aligned}$$

considerando $P^{-1} = X$ e $KX = M$, note que a LMI (9) comprova a condição que para $x(t) \neq 0$:

$$x(t)^T (XA^T - M^T B^T + AX - BM)x(t) < 0.$$

Isto equivale a derivada da função de Lyapunov considerada, para todo $x(t)$ não nulo,

$$\dot{V}(x(t)) < 0.$$

□

2.1.2 Estabilidade de acordo com o método direto de Lyapunov em sistemas discretos no tempo

Assim como os sistemas contínuos no tempo, a análise da estabilidade de sistemas discretos no tempo segundo o método de Lyapunov, está relacionado ao conceito de “energia” do sistema. O comportamento das trajetórias é estudado nas vizinhanças de um ponto de equilíbrio, chamado domínio de atração (DA). O DA é a região a partir da qual a variável do sistema converge para o ponto de equilíbrio, ou seja, qualquer trajetória iniciada nessa região, permanece nela por todo o tempo seguinte e se aproxima do ponto de equilíbrio à medida em que $k \rightarrow \infty$; essa região é conhecida como positivamente invariante e assintoticamente estável (Rocha, 1994). Quando todas as trajetórias do sistema, a partir de um ponto inicial do domínio de atração convergem assintoticamente para o ponto de equilíbrio, o sistema é considerado estável.

Em um sistema dinâmico contínuo, se um sinal variante no tempo puder ser amostrado com um intervalo de tempo “ T ”, será formada uma sequência de valores discretos.

Considere o sistema discreto no tempo descrito por:

$$x(k+1) = \varphi(x(k)), \quad (12)$$

sendo $\varphi : D \subseteq \mathbb{R}^{n_x} \rightarrow \mathbb{R}^{n_x}$ uma função não linear e $x(k) \in D$ o vetor de estado.

Alguns conceitos de estabilidade serão apresentados pois são necessários para análise da estabilidade.

No sistema (12) o ponto de equilíbrio pode ser considerado a origem, sendo sempre possível fazer a mudança de variáveis $\bar{x}(k) = x(k) - x_e$, sendo x_e o ponto de equilíbrio do sistema. Então pode-se considerar que $\varphi(x(k))$, satisfaz $\varphi(0) = 0$.

Definição 1. (Santos, 2020) O ponto de equilíbrio $x = 0$, do sistema (12) é:

- *Estável, se*

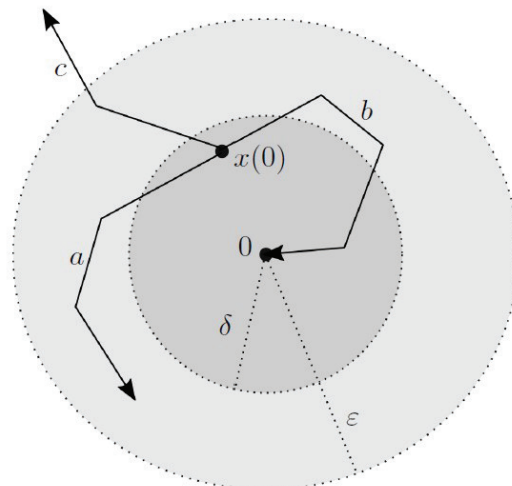
$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ tal que } \|x(0)\| < \delta \implies \|x(k)\| < \varepsilon, \forall k \geq 0;$$

- *Instável, se não é estável;*
- *Assintoticamente estável, se é estável e adicionalmente δ pode ser escolhido de forma que*

$$\|x(0)\| < \delta \implies \lim_{k \rightarrow \infty} x(k) = 0;$$

A Figura 1 mostra a interpretação geométrica de sistemas estável, instável e assintoticamente estável a partir de uma posição inicial.

Figura 1 – Interpretação geométrica de estabilidade: *a*, estável; *b*, assintoticamente estável; *c*, instável.



Fonte: Santos (2020)

Para o sistema dinâmico discreto no tempo dado em (12) a estabilidade no sentido de Lyapunov do ponto de equilíbrio $x = 0$ é assegurada pelo Teorema 2.

Teorema 2. (Kalman; Bertram, 1959) Considere $x = 0$ o ponto de equilíbrio do sistema (12). Seja $V : U \implies \mathbb{R}$, uma função contínua definida em uma vizinhança $U \subset \mathbb{R}^n$ de $x = 0$. Se:

$$(i) \ V(0) = 0 \text{ e } V(x(k)) > 0, \forall x(k) \neq 0,$$

$$(ii) \ \Delta V(x(k)) = V(x(k+1)) - V(x(k)) \leq 0, \forall x(k) \in U \setminus \{0\},$$

então, o ponto de equilíbrio $x = 0$ é localmente estável.

Se além disso:

(iii) $\Delta V(x(k)) = V(x(k+1)) - V(x(k)) < 0, \forall x(k) \in U \setminus \{0\}$, então, o ponto de equilíbrio $x = 0$ é localmente assintoticamente estável.

Se existir uma função escalar que satisfaça as condições (i) e (ii) ou (i) e (iii), $U \subset \mathbb{R}^n$ é chamado domínio de estabilidade (assintótica) do sistema (12) do Teorema 2, essa função é denominada função de Lyapunov. Se $U = \mathbb{R}^n$ e $V(x(k)) \implies \infty$ quando $\|x(k)\| \implies \infty$, então o ponto de equilíbrio $x = 0$ é globalmente (assintoticamente) estável.

A função $V(x(k))$ que satisfaz a condição (i) é dita definida positiva. Se $V(0) = 0$ e $V(x(k)) \geq 0, \forall x(k) \neq 0$, então $V(x(k))$ é dita semi-definida positiva.

Se em algum caso de análise da estabilidade o sistema falhe com uma dada função de Lyapunov, nada se pode concluir sobre instabilidade, pois o Teorema 2 apresenta uma condição suficiente de estabilidade e uma outra função $V(x(k))$ pode existir.

Sendo o sistema linear invariante no tempo descrito por

$$x(k+1) = Ax(k), \tag{13}$$

com $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, segue o teorema a seguir.

Teorema 3. Considere o sistema descrito por (13) tal que

$$\begin{aligned} P &> 0, \\ A^T P A - P &< 0, \end{aligned} \tag{14}$$

se e somente existir uma matriz $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simétrica, então o sistema (13) é assintoticamente estável.

Demonstração. A condição de $P > 0$ garante que a função de Lyapunov $V(x(k)) = x(k)^T P x(k)$ seja definida positiva.

Para a segunda restrição de (14), da condição (ii) do Teorema 2:

$$\Delta V(x(k)) = V(x(k+1)) - V(x(k)) < 0,$$

$$= x(k+1)^T P x(k+1) - x(k)^T P x(k) < 0, \quad (15)$$

substituindo a equação (13) na equação (15):

$$\begin{aligned} \Delta V(x(k)) &= (Ax(k))^T P Ax(k) - x(k)^T P x(k) < 0 \\ &= x(k)^T A^T P Ax(k) - x(k)^T P x(k) < 0, \\ &= x(k)^T (A^T P A - P) x(k) < 0, \end{aligned}$$

fato confirmado pela segunda LMI em (14), o que equivale a dizer que para todo $x(k) \neq 0$:

$$\Delta V(x(k)) = V(x(k+1)) - V(x(k)) < 0.$$

□

2.2 SOMA DE QUADRADOS (SOS)

Muitos problemas importantes de otimização envolvem polinômios e é muito difícil encontrar uma solução exata, sendo necessário desenvolver cada vez mais métodos aprimorados para aproximar os resultados desejados. A ferramenta que possibilita desenvolver esses métodos é a teoria dos polinômios não negativos, que para quaisquer que sejam os valores (reais) das variáveis são escolhidos os valores não negativos.

A teoria dos polinômios não negativos é muito complicada de ser verificada, analisando por exemplo $p(x, y) = (x^2 + x^4 + y^2 - x^2 y^2 - 2y^3 + y^4)$ apesar de parecer não negativo, não há como garantir essa afirmação. Já o polinômio $p(x, y) = (x^2 - y^2 + y)^2 + (xy - x)^2$, para qualquer valor de x e y a expressão é sempre não negativa, o que conclui-se dizer que para obter com garantia um polinômio não negativo é necessário apresentar uma decomposição de p como a soma de quadrados de outros polinômios.

Em Papachristodoulou *et al.* (2013) e Seiler (2013) foram apresentados métodos computacionais baseados na decomposição em soma de quadrados e programação semidefinida, para analisar ou criar uma função multivariada semidefinida positiva, sendo possível utilizá-la na construção de funções de Lyapunov polinomiais para análise da estabilidade, desempenho e projeto de controladores (Parrilo, 2000; Prajna; Papachristodoulou; Wu, 2004; Tanaka *et al.*, 2008).

As funções de Lyapunov polinomiais apresentaram resultados promissores e inovadores em relação as estruturas baseadas em LMIs. Com o avanço computacional podem ser desenvolvido algoritmos capazes de oferecer soluções mais relaxadas a problemas complexos utilizando FLP no lugar de funções de Lyapunov quadráticas. Estes algoritmos determinam os coeficientes dos monômios que formam um polinômio e o tornam semidefinido positivo, fornecendo uma condição suficiente e não necessária que é restringir esse polinômio para ser uma soma de quadrados.

Com essas novas técnicas, para escolher a candidata a função de Lyapunov para o estudo da estabilidade e o projeto de controlador serão necessários entender os conceitos de não negatividade global e decomposição em soma de quadrados que serão abordados nas subseções a seguir.

2.2.1 Não Negatividade Global

Para certificar a não negatividade ou positividade de um polinômio multivariado (várias variáveis) sob um conjunto do \mathbb{R} , é necessário garantir a validade da desigualdade:

$$F(x_1, \dots, x_n) \geq 0, \quad \forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}. \quad (16)$$

Considerando o problema a partir de uma abordagem algorítmica, deve-se fornecer restrições para a classe de funções $F(x)$, uma vez que a questão geral pode não ter solução (Parrilo, 2000).

As definições a seguir serão utilizadas para dar andamento a este trabalho.

Definição 2. (Prajna; Papachristodoulou; Wu, 2004) Um monômio dependente de $x \in \mathbb{R}^n$ é uma função da forma $x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \dots x_n^{\beta_n}$, sendo $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ inteiros não negativos.

Definição 3. (Parrilo, 2000) Um polinômio multivariado $f(x)$ é uma combinação linear finita de monômios:

$$f(x) = \sum_{\beta} c_{\beta} x^{\beta} = \sum_{\beta} c_{\beta} x_1^{\beta_1} \dots x_n^{\beta_n}, \quad c_{\beta} \in \eta, \quad (17)$$

sendo que a ordem deste polinômio é a maior soma $\beta_1 + \dots + \beta_n$ entre todos os monômios, que somados formam $f(x)$ em (17).

2.2.2 Decomposição em soma de quadrados

Se um polinômio $F(x)$ satisfaz (16), então uma condição necessária é que o grau do polinômio seja par e a condição suficiente para uma função $F(x)$ ser não negativa é dado pela existência de uma decomposição de soma de quadrados:

$$F(x) = \sum_i f_i^2(x), \quad i = 1, \dots, n. \quad (18)$$

Portanto, se uma função $F(x)$ pode ser escrita como (18) para n polinômios $f_i(x)$, então ela é não negativa para todos os valores de x . Uma forma de certificar a não negatividade de um polinômio é apresentando uma decomposição SOS mas nem todo polinômio não negativo é SOS, o exemplo mais famoso é o polinômio de Motzkin: $M(x_1, x_2) = x_1^4 x_2^2 + x_1^2 x_2^4 - 3x_1^2 x_2^2 + 1$.

Exemplo 1. (Parrilo, 2004) O polinômio $p(x_1, x_2) = x_1^2 - x_1x_2^2 + x_2^4 + 1$ é SOS. Uma das infinitas decomposições é:

$$\begin{aligned} p(x_1, x_2) &= \frac{3}{4}(x_1 - x_2^2)^2 + \frac{1}{4}(x_1 + x_2^2)^2 + 1 \\ &= \frac{1}{9}(3 - x_2^2)^2 + \frac{2}{3}x_2^2 + \frac{1}{288}(9x_1 - 16x_2^2)^2 + \frac{23}{32}x_1^2. \end{aligned}$$

A soma de quadrados é uma condição suficiente para analisar a não negatividade dos polinômios e apesar de muitos estudos deste tema, foi nas últimas duas décadas que surgiram novos resultados computacionais decorrentes de otimização convexa empregando programação semidefinida. As técnicas de programação semidefinida são muito eficientes em diversas aplicações, inclusive na teoria de controle e possibilitam lidar com problemas de otimização sujeitos as restrições matriciais semidefinidas.

A decomposição em soma de quadrados pode ser representada através da matriz de Gram. Em Parrilo (2000) é apresentado um método em que o polinômio é dado como uma forma quadrática em algumas novas variáveis z_1 que são as variáveis originais x_i , mas com todos os monômios de grau menor ou igual a $m/2$ dados pelos diferentes produtos das variáveis x_i . Portanto $F(x)$ pode ser representado por:

$$F(x) = z^T Q z, \quad (19)$$

com Q uma matriz constante. Se na representação da equação (19) Q é semidefinida positiva, $F(x)$ também será semidefinida positiva. Essa idéia em (Bose; Li, 1968), no geral, pode ser conservadora pois as variáveis z_i não são dependentes e a representação (19) pode não ser única e Q pode ser semidefinida para algumas representações mas para outras não. Utilizando restrições identicamente satisfeitas que relacionam as variáveis z_i entre si (da forma $z_i z_j = z_k z_l$ ou $z_i^2 = z_k z_l$), pode-se demonstrar que existe um subespaço linear de matrizes Q que satisfaz (19). Se a intersecção deste subespaço com o cone da matriz positiva semidefinida não for vazia, então é garantida que a função original $F(x)$ é SOS (e portanto semidefinida positiva). Isso decorre de uma decomposição de autovalor de $Q = Y^T D Y$, sendo D uma matriz diagonal com elementos na diagonal principal iguais a $d_i \geq 0$, que implica a soma de quadrados $F(x) = \sum_i d_i (Y z)_i^2$, sendo que $(Y z)_i$ corresponde ao elemento da linha i do vetor $(Y z)$, conforme a Observação 1. Por outro lado, se $F(x)$ pode de fato ser escrita como uma soma de quadrados de polinômios, então a expansão em monômios irá fornecer a representação (Parrilo, 2000).

Observação 1. (Ramos, 2018) A matriz Q é uma matriz simétrica, sendo a função $F(x)$ em (19) uma soma de quadrados. Os autovalores da matriz Q serão iguais ou maiores que zero, pois $F(x) \geq 0$. Desta forma, pode-se utilizar a decomposição espectral para matrizes simétricas, obtendo-se a seguinte representação $Q = Y^T D Y$, sendo Y uma matriz ortogonal formada pelos autovetores da matriz Q e a matriz diagonal D , cujos

elementos da diagonal são os autovalores da matriz Q , representados por d_i . Deve-se observar que $Q \geq 0$, portanto $d_i \geq 0$. Desta forma, tem-se:

$$\begin{aligned} F(x) &= z^T Q z = z^T Y^T D Y z = (Y z)^T D (Y z) \\ &= \sum_i (Y z)_i d_i (Y z)_i = \sum_i d_i (Y z)_i^2 \quad \forall i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Deve-se observar que $(Y z)$ é um vetor com apenas uma coluna, portanto $(Y z)_i$ corresponde ao elemento i da linha do vetor.

Exemplo 2. (Parrilo, 2000) Considere o polinômio $F(x_1, x_2) = 2x_1^4 + 2x_1^3x_2 - x_1^2x_2^2 + 5x_2^4$ e definindo o vetor de monômios z composto pelos seguintes elementos $z_1 = x_1^2$, $z_2 = x_2^2$, $z_3 = x_1x_2$, portanto, o polinômio pode ser escrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2) &= 2x_1^4 + 2x_1^3x_2 - x_1^2x_2^2 + 5x_2^4 = z^T Q z \\ &= \begin{bmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \\ x_1x_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \\ x_1x_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \\ x_1x_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 2 & -\lambda & 1 \\ -\lambda & 5 & 0 \\ 1 & 0 & -1 + 2\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \\ x_1x_2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Note que a matriz simétrica Q não é necessariamente única e o polinômio $F(x_1, x_2)$ pode ser representado na forma quadrática para qualquer valor real de λ .

Considere $\lambda = 3$, a matriz Q pode ser decomposta da seguinte forma:

$$Q = L^T L, \quad L = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Deve-se observar que a decomposição $Q = L^T L$ é uma condição para que a matriz simétrica Q seja semidefinida positiva (Chen, 1984). Deste modo, o polinômio $F(x_1, x_2)$ pode ser decomposto em uma soma de quadrados:

$$F(x_1, x_2) = \frac{1}{2} [(2x_1^2 - 3x_2^2 + x_1x_2)^2 + (x_2^2 + 3x_1x_2)^2].$$

As propriedades mais importantes que distinguem a condição da programação semidefinida de outras abordagens para o problema da não negatividade polinomial é o fato que pode ser facilmente estendido para o caso incerto (ou seja, quando procuramos um polinômio semidefinido positivo $F(x)$ sujeito a condições adicionais) (Parrilo, 2000),

muito utilizado na teoria de controle. A proposição a seguir foi formulada baseada nessa teoria.

Proposição 4. (Prajna; Papachristodoulou; Wu, 2004) Seja $F(x)$ um polinômio multivariado dependente de $x \in \mathbb{R}^n$ de grau $2d$. Além disso, considere que $\hat{x}(x)$ é um vetor coluna com todos os seus elementos sendo monômios em x com grau não maior que d . Então, $F(x)$ é um SOS se, e somente se, existe uma matriz semidefinida positiva P tal que

$$F(x) = \hat{x}^T(x)P\hat{x}(x). \quad (20)$$

Um polinômio multivariado $p(x_1, \dots, x_n)$ é uma soma de quadrados se existirem polinômios $f_1(x), \dots, f_m(x)$ tais que

$$p(x) = \sum_{i=1}^m f_i^2(x).$$

Portanto, $p(x)$ é um SOS, ou seja, $p(x) \geq 0$. Se $p(x) - \epsilon(x)$ é um SOS sendo que $\epsilon(x) > 0$ para $x \neq 0$, então $p(x) > 0$ para $x \neq 0$.

Portanto toda soma de quadrados é um polinômio, mas nem todo polinômio semidefinido positivo é uma soma de quadrados. Assim, a soma de quadrados é um subconjunto das funções polinomiais semidefinidas positivas.

2.2.3 Estabilidade

Considere o sistema $\dot{x} = f(x)$, sendo $f(0) = 0$. Deve-se encontrar uma função polinomial $V(x)$ tal que as duas expressões a seguir:

$$\begin{aligned} &V(x) - \epsilon(x); \\ &-\frac{\partial V}{\partial x}(f(x)), \end{aligned} \quad (21)$$

são soma de quadrados e $\epsilon(x)$ é um polinômio definido positivo, ou seja, $\epsilon(x) > 0$ para $x \neq 0$. A condição da soma de quadrados garante que as expressões (21) são não negativas e portanto $V(x)$ é uma função de Lyapunov que prova que o ponto de equilíbrio 0 é estável (considerando que $V(0) = 0$). O conjunto $V(x)$ que satisfaz as condições (21) é convexo e a busca pelos coeficientes do polinômio de $V(x)$ para satisfazer as condições podem ser realizadas resolvendo o problema de programação semidefinida. Assim a abordagem acima é computacionalmente tratável.

Quando o objetivo é encontrar um controlador, o problema mencionado anteriormente não é nada trivial. Considerando o sistema $\dot{x} = f(x) + g(x)u$ com $f(x)$ e $g(x)$ funções polinomiais, para obter um controlador, que pode ser equivalente a obter uma

lei de realimentação de estado polinomial $u = K(x)\hat{x}(x)$, e uma função de Lyapunov polinomial (não necessariamente quadrática) $V(x)$ tais que

$$\begin{aligned} V(x) - \epsilon(x) & \text{ é SOS,} \\ -\frac{\partial V}{\partial x}(f(x) + g(x)K(x)\hat{x}(x)) & \text{ é SOS,} \end{aligned} \tag{22}$$

sendo $\epsilon(x) > 0$ para $x \neq 0$ e $K(x)$ uma matriz polinomial de dimensões apropriadas.

O conjunto solução de $V(x)$ e $K(x)$ não é convexo, portanto, uma busca simultânea por $V(x)$ e $K(x)$ é complexa, equivalente a resolver algumas desigualdades matriciais bilineares (BMIs) (Prajna; Papachristodoulou; Wu, 2004).

Será utilizado para relaxar as condições polinomiais o produto direto ou produto de Kronecker, denotado por \otimes . O produto de Kronecker é um operador em que duas matrizes de dimensões arbitrárias resulta em um bloco matricial (Graham, 2018). O produto de Kronecker não deve ser confundido com a multiplicação de matriz usual.

Dadas as matrizes $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ formada pelos elementos a_{ij} e $B \in \mathbb{R}^{p \times q}$ formada pelos elementos b_{kl} , define-se o produto de Kronecker de A por B como a matriz $C \in \mathbb{R}^{mp \times nq}$ dada por:

$$C = A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & \cdots & a_{11}b_{1q} & \cdots & \cdots & a_{1n}b_{11} & a_{1n}b_{12} & \cdots & a_{1n}b_{1q} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & \cdots & a_{11}b_{2q} & \cdots & \cdots & a_{1n}b_{21} & a_{1n}b_{22} & \cdots & a_{1n}b_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{11}b_{p1} & a_{11}b_{p2} & \cdots & a_{11}b_{pq} & \cdots & \cdots & a_{1n}b_{p1} & a_{1n}b_{p2} & \cdots & a_{1n}b_{pq} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}b_{11} & a_{m1}b_{12} & \cdots & a_{m1}b_{1q} & \cdots & \cdots & a_{mn}b_{11} & a_{mn}b_{12} & \cdots & a_{mn}b_{1q} \\ a_{m1}b_{21} & a_{m1}b_{22} & \cdots & a_{m1}b_{2q} & \cdots & \cdots & a_{mn}b_{21} & a_{mn}b_{22} & \cdots & a_{mn}b_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}b_{p1} & a_{m1}b_{p2} & \cdots & a_{m1}b_{pq} & \cdots & \cdots & a_{mn}b_{p1} & a_{mn}b_{p2} & \cdots & a_{mn}b_{pq} \end{bmatrix}.$$

É muito difícil, computacionalmente resolver um problema de otimização de LMIs quando a resolução implica em um conjunto infinito de LMIs. No entanto, quando $F(x)$ são matrizes polinomiais simétricas em x , a soma de decomposição de quadrados fornece uma condição relaxada, como mostra na proposição a seguir.

Proposição 5. (Prajna; Papachristodoulou; Wu, 2004) Suponha que é dada $F(x) \in \mathbb{R}^{N \times N}$ uma matriz polinomial simétrica de grau $2d$ dependente de $x \in \mathbb{R}^n$. Além disso, seja $\hat{x}(x)$ um vetor coluna cujos elementos são todos monômios em x com grau não maior que d . Considere as seguintes condições:

1. $F(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$;
2. $v^T F(x) v$ é um SOS, sendo que $v \in \mathbb{R}^N$;
3. Existe uma matriz positiva semidefinida Q tal que $v^T F(x) v = (v \otimes \hat{x}(x))^T Q (v \otimes \hat{x}(x))$, em que \otimes denota o produto de Kronecker.

Então, $1 \Leftarrow 2$ e $2 \Leftrightarrow 3$.

Demonstração. $1 \Leftarrow 2$: sendo $v^T F(x) v$ uma soma de quadrados implica que a desigualdade $v^T F(x) v \geq 0$ para todo $(v, x) \in \mathbb{R}^{N+n}$, que é uma consequência equivalente a $F(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

$2 \Leftrightarrow 3$: Esta equivalência segue como um caso especial da 1. O vetor de monômios pode ser escolhido da forma $v \otimes \hat{x}(x)$, devido ao resultado em Reznick (1978), que caracteriza os monômios que podem aparecer na forma quadrática (20). Os detalhes serão omitidos por estarem fora do escopo do trabalho. \square

A equivalência inversa $1 \Rightarrow 2$ geralmente não é válida. Um caso especial quando esta implicação é válida é para $n = 1$, como apresentado em Gatermann e Parrilo (2004), sendo uma matriz polinomial simétrica $F(x)$ tal que $v^T F(x) v$ é uma soma de quadrados é denominada de matriz soma de quadrados (Prajna; Papachristodoulou; Wu, 2004).

O Lema apresentado a seguir será útil na formulação das restrições utilizando SOS.

Lema 1. (Prajna; Papachristodoulou; Wu, 2004) Para uma matriz polinomial simétrica $P(x)$ que é não singular para todo x , tem-se que

$$\frac{\partial P(x)}{\partial x_i} = -P(x) \left(\frac{\partial P^{-1}(x)}{\partial x_i} \right) P(x). \quad (23)$$

Demonstração. Desde que $P(x)$ é não singular, tem-se que $P(x)P^{-1}(x) = I$. Diferenciando ambos os lados com respeito a x_i obtém-se

$$\left(\frac{\partial P(x)}{\partial x_i} \right) P^{-1}(x) + P(x) \left(\frac{\partial P^{-1}(x)}{\partial x_i} \right) = 0.$$

Multiplicando a equação pela direita por $P(x)$, tem-se que:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial P(x)}{\partial x_i} \right) + P(x) \left(\frac{\partial P^{-1}(x)}{\partial x_i} \right) P(x) &= 0, \\ \frac{\partial P(x)}{\partial x_i} &= -P(x) \left(\frac{\partial P^{-1}(x)}{\partial x_i} \right) P(x). \end{aligned}$$

Que resulta em (23) e a prova está concluída. \square

Considere agora o sistema $\dot{x} = f(x) + g(x)u$ na forma de espaço de estados

$$\dot{x} = A(x)\hat{x}(x) + B(x)u, \quad (24)$$

com $A(x)$ e $B(x)$ matrizes polinomiais, ou seja, cada elemento das matrizes pode conter um polinômio em função do vetor de estado do sistema, $\hat{x}(x) \in \mathbb{R}^N$ é um vetor coluna de monômios dependentes também do vetor de estado do sistema satisfazendo a seguinte suposição:

Suposição 1. (Ramos, 2018) $\hat{x}(x) = 0$ se, e somente se, $x = 0$.

Portanto, a ordem dos monômios que compõem o vetor coluna $\hat{x}(x)$ possui ordem maior ou igual a 1.

Uma matriz $T(x) \in \mathbb{R}^{N \times n}$ é definida como uma matriz polinomial cujos elementos (i, j) são dados por

$$T^{ij}(x) = \frac{\partial \hat{x}_i(x)}{\partial x_j}, \quad (25)$$

para $i = 1, \dots, N$, $j = 1, \dots, n$. Considera-se que $A^k(x)$ denota a linha k de $A(x)$, $\kappa = \{k_1, k_2, \dots, k_m\}$ é o conjunto dos índices das linhas de $B(x)$ correspondentes às linhas iguais a zero e define-se $\tilde{x} = (x_{k_1}, x_{k_2}, \dots, x_{k_m})$.

Considere a lei de controle por realimentação de estado

$$u(t) = K(x)\hat{x}(x), \quad (26)$$

que será projetada com o objetivo de tornar o ponto de equilíbrio $x = 0$ assintoticamente estável.

Logo, de (12) e (26) o sistema em malha fechada pode ser representado por

$$\dot{x} = (A(x) + B(x)K(x))\hat{x}(x). \quad (27)$$

Teorema 6. (Prajna; Papachristodoulou; Wu, 2004) Para o sistema (24), suponha que existam uma matriz simétrica polinomial $P(\tilde{x}) \in \mathbb{R}^{N \times N}$, uma matriz polinomial $M(x) \in \mathbb{R}^{m \times N}$, sendo $\epsilon_1 > 0$ e $\epsilon_2(x) \geq 0$, tais que

$$v^T (P(\tilde{x}) - \epsilon_1 I) v \quad \text{é SOS}, \quad (28)$$

$$\begin{aligned}
& -v^T \left(P(\tilde{x})A^T(x)T^T(x) + T(x)A(x)P(\tilde{x}) \right. \\
& \quad + M^T(x)B^T(x)T^T(x) + T(x)B(x)M(x) \\
& \quad \left. - \sum_{k \in \kappa} \frac{\partial P(\tilde{x})}{\partial x_k} \left(A^k(x)\hat{x}(x) \right) + \epsilon_2(x)I \right) v \quad \text{é SOS,}
\end{aligned} \tag{29}$$

sejam factíveis, sendo $v \in \mathbb{R}^N$ um vetor que independe de x . A matriz $T(x) \in \mathbb{R}^{N \times n}$ definida conforme a equação (25).

Além disso, se (29) é factível com $\epsilon_2(x) > 0$ para todo $x \neq 0$, então o ponto de equilíbrio em $x = 0$ é assintoticamente estável. Se $P(\tilde{x})$ é uma matriz constante, então é garantida a estabilidade global do sistema. O ganho de realimentação $K(x)$ pode ser obtido por

$$K(x) = M(x)P^{-1}(\tilde{x}). \tag{30}$$

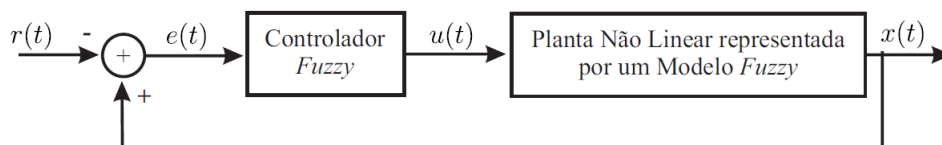
Demonstração. A prova será omitida e pode ser obtida em (Prajna; Papachristodoulou; Wu, 2004).

A decomposição em soma de quadrados é uma extensão das desigualdades matriciais lineares, capaz de fornecer condições mais relaxadas para o projeto de controladores. Diante do que foi visto neste capítulo, pode-se notar que quando $A(x)$ e $B(x)$ são matrizes constantes e $\hat{x}(x) = x$ o sistema será linear, como o sistema representado em (7). Se a candidata à função de Lyapunov $\hat{x}^T(x)X(\tilde{x})\hat{x}$ dada no Teorema 6 possuir $X(\tilde{x})$ como uma matriz também constante, a candidata à função de Lyapunov será quadrática, e desta forma, tem-se o que foi abordado no Teorema 1 apenas para sistemas lineares e funções de Lyapunov quadráticas.

2.3 MODELOS FUZZY COM PARTE CONSEQUENTE LINEAR E POLINOMIAL

A Figura 2 caracteriza o diagrama de blocos de um sistema de controle com modelos fuzzy, que consiste em uma planta não linear representada por modelos fuzzy e um controlador fuzzy em um sistema de malha fechada.

Figura 2 – Diagrama de blocos do sistema de controle de modelos fuzzy.



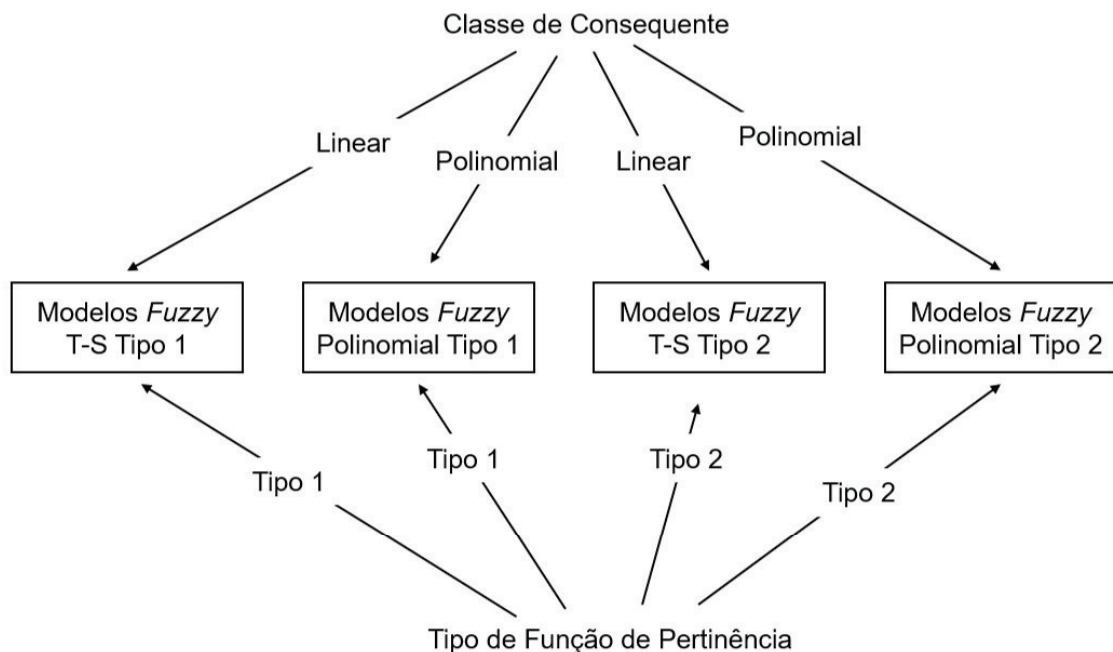
Fonte: Adaptado de Lam (2011b).

O vetor de estado do sistema $x(t)$ ou quando o sistema tem realimentação da saída (vetor $y(t)$), combinado com o vetor de entrada $r(t)$, são processados pelo controlador fuzzy para gerar o sinal de controle $u(t)$ que após isso, é inserido na planta não linear a fim do sistema controlado apresentar um resultado satisfatório.

A lógica fuzzy é baseada na teoria dos conjuntos fuzzy e é uma das metodologias atuais mais bem sucedidas para o desenvolvimento de sistemas para controlar processos sofisticados (Castro, 1995; Driankov; Hellendoorn; Reinfrank, 1993; Dutta, 1993; Lee, 1990; Mendel, 1995) pela capacidade de processar informação de natureza incerta (Campello, 2002; Kosko, 1997), e a adequação aos diferentes tipos de aplicações devido às várias arquiteturas existentes, indo de modelos linguísticos na modelagem de um determinado sistema aos modelos fuzzy Takagi-Sugeno (TS), com estruturas adequadas para aplicações em controle.

Os modelos fuzzy são classificados em tipo 1 e 2 (Mendel; John; Liu, 2006), sendo a diferença entre eles as funções de pertinência e modelos fuzzy com subsistemas lineares ou polinomiais. A Figura 3 mostra 4 classes de modelos fuzzy.

Figura 3 – Classes de modelos fuzzy.



Fonte: Adaptado de Lam (2011b).

As funções de pertinência do modelo fuzzy tipo 1 não representam bem as incertezas, limitando sua capacidade de modelagem, já as do tipo 2 podem ser consideradas

como uma combinação de um número infinito de modelos fuzzy tipo 1.

Os modelos fuzzy T-S são denominados modelos fuzzy com parte consequente linear. Neste trabalho será usado modelo fuzzy com parte consequente polinomial.

2.3.1 MODELOS FUZZY COM PARTE CONSEQUENTE LINEAR

O sistema fuzzy Takagi-Sugeno (Takagi; Sugeno, 1985; Taniguchi *et al.*, 2001) consiste em representar um modelo de uma planta não linear através de combinações de um certo número de modelos locais lineares e invariantes no tempo, que representam o comportamento de forma aproximada ou exata desse sistema em diferentes pontos do seu espaço de estados. Na maioria dos casos, o modelo é descrito de forma aproximada e o erro de aproximação em relação ao sistema real depende do número de modelos locais utilizados, determinado pelo projetista, que analisa as necessidades dependendo do custo-benefício, ou seja, uma grande quantidade de modelos locais podem exigir um grande custo computacional no projeto ou dificultar a implementação. Um modelo fuzzy é um método de modelagem simples, sua principal característica é a descrição das dinâmicas locais de cada regra fuzzy por um modelo de sistema linear. Mais especificamente, é um conjunto de regras SE-ENTÃO que representam localmente relações lineares entre a entrada e a saída de um sistema.

Considere o sistema não linear incerto discreto no tempo descrito por

$$x(k+1) = f(z(k))x(k) + g(z(k))u(k), \quad (31)$$

sendo $f(\cdot) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ e $g(\cdot) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_u}$ funções não lineares, $x(k) = [x_1(k) \dots x_{n_x}(k)]^T \in \mathbb{R}^{n_x}$ o vetor de estado, $u(k) = [u_1(k) \dots u_{n_u}(k)]^T \in \mathbb{R}^{n_u}$ o vetor de entrada, $z(k) = [z_1(k) \dots z_{n_z}(k)]^T \in \mathbb{R}^{n_z}$, um vetor composto pelo vetor de estado $x(k)$ e um vetor $\nu = [\nu_1 \dots \nu_2]^T \in \mathbb{R}^{n_\nu}$, cujos elementos ν_ζ , $\zeta \in \mathbb{K}_{n_\nu}$ são parâmetros incertos limitados invariantes no tempo (31) (Santos, 2020).

O sistema acima (31) é então fundido com as regras Se-Então disponíveis, sendo que a i -ésima regra pode ter a forma:

$$\begin{aligned} \text{Regra } i : & \text{ Se } z_1(k) \text{ e } M_1^i \text{ e } \dots \text{ E } z_p(k) \text{ é } M_{n_z}^i, \\ & \text{Então } \left\{ \begin{aligned} x(k+1) &= A_i x(k) + B_i u(k), \end{aligned} \right. \end{aligned} \quad (32)$$

sendo $i \in \mathbb{K}_r$, M_m^i , o conjunto fuzzy m da regra i , $m \in \mathbb{K}_{n_z}$, $A_i \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $B_i \in \mathbb{R}^{n_x \times n_u}$ matrizes do sistema, $z_1(k), \dots, z_{n_z}(k)$ variáveis premissas e r o número de regras fuzzy.

Seja $M_m \hat{1}(z_m(k)) \in [0, 1]$ o grau de pertinência da variável $z_m(k)$ ao conjunto M_m^i . O grau de pertinência da i -ésima regra é dado por

$$w_i(z(k)) = \prod_{m=1}^{n_z} M_m^i(z(m)(k)), \quad (33)$$

sendo que $w_i(z(k)) \in [0, 1]$. O modelo matemático final do sistema fuzzy, que é uma representação da dinâmica da planta, é deduzido como a soma ponderada dos r modelos locais, usando como ponderação o grau de pertinência (função de pertinência) de cada regra. Portanto, para cada modelo local (A_i, B_i) , este grau de pertinência é dado por:

$$\alpha_i(z(k)) = \frac{\omega_i(z(k))}{\sum_{i=1}^r \omega_i(z(k))}. \quad (34)$$

A partir de (Tanaka; Ikeda; Wang, 1998), utilizando as definições dadas em (1), o sistema (31) pode ser reescrito por:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \sum_{i=1}^r \alpha_i(z(k))(A_i x(k) + B_i u(k)) \\ &= A_{z(k)} x(k) + B_{z(k)} u(k) \end{aligned} \quad (35)$$

sendo os elementos $\alpha_i(z(k))$, $i \in \mathbb{K}_r$, do vetor $\alpha(z(k)) = [\alpha_1(z(k)) \quad \alpha_2(z(k)) \quad \dots \quad \alpha_r(z(k))]^T$ tais que

$$\sum_{i=1}^r \alpha_i(z(k)) = 1, \quad \text{e} \quad \alpha_i(z(k)) \geq 0, \quad i \in \mathbb{K}_r. \quad (36)$$

2.3.2 MODELOS FUZZY COM PARTE CONSEQUENTE POLINOMIAL

Os modelos fuzzy T-S representam sistemas não lineares, podendo ser utilizadas LMIs para analisar sua estabilidade, obtendo o desempenho e o projeto dos controladores baseados nas funções de Lyapunov quadráticas. Utilizando modelos fuzzy polinomiais, a análise da estabilidade é obtida através do projeto de controladores baseados em funções de Lyapunov polinomiais, utilizando a decomposição em soma de quadrados (Tanaka *et al.*, 2008).

Considere o sistema não linear incerto discreto no tempo descrito por

$$x(k+1) = f(z(k))x(k) + g(z(k))u(k), \quad (37)$$

sendo (37) uma função não linear, $x(k) = [x_1(k) \quad x_2(k) \quad \dots \quad x_n(k)]^T$ o vetor de estado e $u(k) = [u_1(k) \quad u_2(k) \quad \dots \quad u_m(k)]^T$ o vetor de entrada. Será utilizado um modelo fuzzy polinomial no sistema (37) para fazer sua representação de forma exata. O modelo fuzzy polinomial apresenta como parte consequente um modelo não linear diferente do modelo fuzzy de (32) que é linear.

$$\begin{aligned} \text{Regra } i : \text{ Se } z_1(k) \text{ é } M_1^i \text{ e } \dots \text{ e } z_p(k) \text{ é } M_p^i, \\ \text{Então } \left\{ \begin{aligned} x(k+1) &= A_i(x(k))\hat{x}(k) + B_i(x(k))u(k), \end{aligned} \right. \end{aligned} \quad (38)$$

sendo $i \in \mathbb{K}_r$, M_m^i , o conjunto fuzzy m da regra i , $m \in \mathbb{K}_{n_z}$, $A_i(x(k))$, $B_i(x(k))$ matrizes polinomiais do sistema em $x(k)$. O termo $\hat{x}(x(k)) \in \mathbb{R}^N$ é um vetor cujos elementos são todos monômios em $x(k)$. Portanto $A_i(x(k))\hat{x}(x(k)) + B_i(x(k))u(k)$ é um vetor polinomial. O modelo fuzzy (38) pode conter não linearidades (termos polinomiais) em cada parte consequente.

O processo de defuzzificação do modelo (38) pode ser representado como

$$x(k+1) = \frac{\sum_{i=1}^r \omega_i(z(k)) (A_i(x(k))\hat{x}(x(k)) + B_i(x(k))u(k))}{\sum_{i=1}^r \omega_i(z(k))}, \quad (39)$$

sendo

$$z(k) = [z_1(k) \quad z_2(k) \quad \dots \quad z_p(k)], \quad \alpha_i(z(k)) = \prod_{j=1}^p M_j^i(z_j(k)), \quad \sum_{i=1}^r \alpha_i(z(k)) = 1, \quad \alpha_i(z(k)) \geq 0, \quad (40)$$

para todo $i \in \mathbb{K}_r$, $M_j^i(z_j(k))$ é o “peso” do conjunto fuzzy M_j^i associado à variável premissa $z_j(k)$.

Então, a equação (39) pode ser escrita da seguinte forma

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \sum_{i=1}^r \alpha_i(z(k)) [A_i(x(k))\hat{x}(x(k)) + B_i(x(k))u(k)] \\ &= A(\alpha(z(k)), x(k)) \hat{x}(x(k)) + B(\alpha(z(k)), x(k)) u(k). \end{aligned} \quad (41)$$

O número de regras fuzzy para os sistemas não lineares representados a partir dos modelos fuzzy é no mínimo igual a 2^ρ , sendo ρ as não linearidades polinomiais e parâmetros incertos do sistema. Os modelos locais não lineares e as funções de pertinência serão formados de acordo com os valores de máximo e mínimo das funções não polinomiais do sistema, obtendo da mesma maneira que os modelos locais lineares, uma representação exata do sistema não linear.

O conceito de compensação distribuída paralela também será utilizado para o projeto dos controladores fuzzy polinomiais para projetar reguladores para estabilizar os sistemas não lineares descritos pelos modelos fuzzy polinomiais. O regulador fuzzy projetado irá compartilhar os mesmos conjuntos de regras com o modelo fuzzy e possuem a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \text{Regra } i : \text{ Se } z_1(k) \text{ é } M_1^i \text{ e } \dots \text{ e } z_p(k) \text{ é } M_p^i, \\ \text{Então } u(k) = -K_i(x(k)) \hat{x}(x(k)), \quad i = 1, 2, \dots, r. \end{aligned} \quad (42)$$

O controlador fuzzy global pode ser calculado como

$$u(t) = - \sum_{i=1}^r \alpha_i(z(k)) K_i(x(k)) \hat{x}(x(k)). \quad (43)$$

De (39) e (43) o sistema em malha fechada pode ser representada da seguinte forma

$$x(k+1) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(z(k)) \alpha_j(z(k)) \{A_i(x(k)) - B_i(x(k)) K_j(x(k))\} \hat{x}(x(k)). \quad (44)$$

2.4 LEI DE CONTROLE CHAVEADA

Utilizando a lei de controle chaveada não é necessário ter acesso às funções de pertinência do modelo não linear da estrutura do controlador, que é uma vantagem, pois as funções de pertinência podem ser incertas desconhecidas ou dependentes de parâmetros incertos. Portanto elas não podem compor a lei de controle. Então é utilizada a lei de controle chaveada dada por:

$$\begin{aligned} u(k) &= u(\sigma) = -F_{\sigma(k)} G^{-1} x(k), \\ \sigma(k) &= \arg^* \min_{l \in \mathbb{K}_r} \left\{ x^T(k) G^{-T} Q_l(x) G^{-1} x(k) \right\} \end{aligned} \quad (45)$$

sendo que o $\arg^* \min_{l \in \mathbb{K}_r} \left\{ x^T(k) G^{-T} Q_l(x) G^{-1} x(k) \right\}$ indica o menor índice $\sigma \in \mathbb{K}_r$ tal que $x^T(x) G^{-T} Q_{\sigma}(x) G^{-1} x(x) = \min_{j \in \mathbb{K}_r} \left\{ x^T(k) G^{-T} Q_l G^{-1} x(k) \right\}$. Utilizando a lei de controle chaveada não é necessário usar as expressões das funções de pertinência.

O ganho do controlador de realimentação do vetor de estado $K_{\sigma(k)}(x) = F_{\sigma(k)}(x) G^{-1}$, pertence ao conjunto de ganhos $F_l(x) G^{-1} \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$, $l \in \mathbb{K}_r$ e é a lei de controle chaveada σ (45) é que seleciona esse ganho utilizando matrizes simétricas auxiliares $Q_l(x)$, $l \in \mathbb{K}_r$, calculadas utilizando o critério LMI.

2.5 FUNÇÃO DE LYAPUNOV NÃO QUADRÁTICA

Em (Guerra; Vermeiren, 2004), foi proposta uma função de Lyapunov fuzzy (FLF) e, baseado nela, na tese de doutorado de (Santos, 2020) foi considerada a função de Lyapunov candidata como:

$$\begin{aligned} V(x(k)) &= x^T(k) G^{-T} \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i(z(k)) P_i \right) G^{-1} x(k) \\ &= x^T(k) G^{-T} P_{z(k)} G^{-1} x(k), \end{aligned} \quad (46)$$

sendo $G \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, uma matriz não singular e $P_i \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $i \in \mathbb{K}_r$, matrizes simétricas positivas definidas.

O teorema a seguir será utilizado como referência nos novos teoremas do próximo capítulo.

Teorema 7. (Oliveira et al., 2018) *Assuma que existam matrizes simétricas definidas positivas $P_i \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, matrizes simétricas $Z_i, Q_i \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, matrizes $F_l \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$ e $G \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, para todo $i, j, l \in \mathbb{K}_r$, tais que as LMIs a seguir são factíveis:*

$$\begin{bmatrix} Z_i + Q_l & (A_i G - B_i F_l)^T \\ A_i G - B_i F_l & G + G^T - P_j \end{bmatrix} > 0, \quad (47)$$

$$Z_i + Q_i - P_i < 0. \quad (48)$$

Então, a lei de controle chaveada (45) com o ganho do controlador $F_l G^{-1}$, $l \in \mathbb{K}_r$, torna assintoticamente estável no ponto de equilíbrio $x(k) = 0$ o sistema não linear (35) em que $h_i(z(k))$ são desconhecidos e (A_i, B_i) são conhecidas, para $i \in \mathbb{K}_r$.

Demonstração. A prova será omitida e está apresentada em Oliveira et al. (2018). \square

3 CONTROLE ROBUSTO CHAVEADO DISCRETO NO TEMPO DE SISTEMAS NÃO LINEARES VIA SOS

Com base nos conceitos abordados no Capítulo 2 e com as teorias que serão apresentados nesse capítulo, serão propostas novas condições de projeto, utilizando controladores chaveados, considerando incertezas politópicas para uma classe de sistemas não lineares discretos no tempo cuja dinâmica pode ser representada apenas por funções polinomiais.

3.1 SISTEMAS NÃO LINEARES POLINOMIAIS DISCRETOS NO TEMPO

Seja o sistema não linear incerto discreto no tempo, estudado detalhadamente nesta tese em (37) - (41), dado por

$$x(k+1) = A(\alpha, x(k))\hat{x}(k) + B(\alpha, x(k))u(k), \quad (49)$$

em que $i \in \mathbb{K}_r$, $x \in \mathbb{R}^{n_x}$ é o vetor de estado, $\hat{x}(x) \in \mathbb{R}^{n_{\hat{x}}}$ é um vetor cujas entradas são monômios do vetor de estado x , $u \in \mathbb{R}^{n_u}$ é o vetor de entrada, $A(\alpha, x) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_{\hat{x}}}$, $B(\alpha, x) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_u}$ e $r = 2^s$ sendo s representando o número de não linearidades distintas.

Em estudos anteriores, relacionados ao controle de sistemas não lineares polinomiais contínuos no tempo, como em Ramos (2018), n_x e $n_{\hat{x}}$ podem ser diferentes. Nesta tese é tratado o caso do controle de sistemas não lineares polinomiais discretos no tempo em que $x = \hat{x}$ e assim, $n_x = n_{\hat{x}}$

As funções de pertinência normalizadas dependem de parâmetros incertos, portanto α_i , $i \in \mathbb{K}_r$, não podem compor a lei de controle. Então, a lei de controle chaveada para sistemas polinomiais considerada é:

$$\begin{aligned} u(k) &= u(\sigma) = -F_\sigma(x)G^{-1}\hat{x}(x), \\ \sigma &= \sigma(k) = \arg^* \min_{l \in \mathbb{K}_r} \left\{ \hat{x}^T(x)G^{-T}Q_l(x)G^{-1}\hat{x}(x) \right\} \end{aligned} \quad (50)$$

sendo que o $\arg^* \min_{l \in \mathbb{K}_r} \left\{ \hat{x}^T(x)G^{-T}Q_l(x)G^{-1}\hat{x}(x) \right\}$ indica o menor índice $\sigma \in \mathbb{K}_r$ tal que $\hat{x}^T(x)G^{-T}Q_\sigma(x)G^{-1}\hat{x}(x) = \min_{j \in \mathbb{K}_r} \left\{ \hat{x}^T(x)G^{-T}Q_j(x)G^{-1}\hat{x}(x) \right\}$. Utilizando a lei de controle chaveada não é necessário usar as expressões das funções de pertinência.

O ganho do controlador de realimentação do vetor de estado $K_{\sigma(k)}(x) = F_{\sigma(k)}(x)G^{-1}$, pertence ao conjunto de ganhos $F_l(x)G^{-1} \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$, $l \in \mathbb{K}_r$ e a lei de controle chaveada σ (50) seleciona esse ganho utilizando matrizes simétricas auxiliares $Q_l(x)$, $l \in \mathbb{K}_r$, calculadas utilizando as restrições SOS que serão apresentados nos teoremas a seguir.

Desse modo, o sistema (49) com a lei de controle (50) em malha fechada pode ser representado por:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \sum_{i=1}^r \alpha_i (A_i(x) - B_i(x)F_\sigma(x)G^{-1})\hat{x}(x), \\ &= (A(\alpha, x) - B(\alpha, x)F_\sigma(x)G^{-1})\hat{x}(x). \end{aligned} \quad (51)$$

Os projetos de controle chaveado propostos neste trabalho baseiam-se nos trabalhos de (Ramos, 2018; Oliveira *et al.*, 2018; Santos, 2020).

Teorema 8. *Suponha que $\hat{x}(x) = x$ e que existam matrizes simétricas definidas positivas $P_i \in \mathbb{R}^{n_{\hat{x}} \times n_{\hat{x}}}$, matrizes simétricas polinomiais $Z_i(x), Q_i(x) \in \mathbb{R}^{n_{\hat{x}} \times n_{\hat{x}}}$, matrizes polinomiais $F_l(x) \in \mathbb{R}^{n_u \times n_{\hat{x}}}$ e $G \in \mathbb{R}^{n_{\hat{x}} \times n_{\hat{x}}}$, para todo $i, j, l \in \mathbb{K}_r$, tais que as condições a seguir são factíveis:*

$$v_1^T (P_i - \epsilon_1(x)I) v_1 \quad \text{é SOS} \quad (52)$$

$$v_2^T \begin{bmatrix} Z_i(x) + Q_l(x) - \epsilon_2(x)I & (A_i(x)G - B_i(x)F_l(x))^T \\ A_i(x)G - B_i(x)F_l(x) & G + G^T - P_j \end{bmatrix} v_2 \quad \text{é SOS} \quad (53)$$

$$v_3^T (-Z_i(x) - Q_i(x) + P_i - \epsilon_3(x)I) v_3 \quad \text{é SOS} \quad (54)$$

sendo $v_1, v_3 \in \mathbb{R}^{n_{\hat{x}}}$ e $v_2 \in \mathbb{R}^{2n_{\hat{x}}}$ são vetores independentes de x , $\epsilon_1(x)$, $\epsilon_2(x)$ e $\epsilon_3(x)$ são polinômios não negativos para $x \neq 0$. Portanto a lei de controle (50) com os ganhos do controlador $F_l(x)G^{-1}$, $l \in \mathbb{K}_r$, fazem o ponto de equilíbrio $x = 0$ do sistema (49) assintoticamente estável.

Demonstração. Suponha que existam matrizes simétricas positivas definidas $P_i \in \mathbb{R}^{n_{\hat{x}} \times n_{\hat{x}}}$, matrizes polinomiais $Z_i(x), Q_i(x) \in \mathbb{R}^{n_{\hat{x}} \times n_{\hat{x}}}$, $F_l(x) \in \mathbb{R}^{n_u \times n_{\hat{x}}}$ e $G \in \mathbb{R}^{n_{\hat{x}} \times n_{\hat{x}}}$, tais que (52), (53) e (54) são satisfeitas para todo $i, j, l \in \mathbb{K}_r$.

Lembrando que $\alpha_i \geq 0$ e $\sum_{i=1}^r \alpha_i = 1$, multiplicando (54) por α_i e somando de 1 até r , obtém-se:

$$-Z(\alpha, x) - Q(\alpha, x) + P(\alpha) - \epsilon_3(x)I > 0. \quad (55)$$

De (53), pode-se ver que $G + G^T - P_j > 0$ para todo $j \in \mathbb{K}_r$. Como $P_j > 0$, conseqüentemente $G + G^T > 0$ e a existência de G^{-1} é assegurada. Multiplicando (55) a esquerda por G^{-T} e a direita por G^{-1} , para todo $\hat{x}(x) \neq 0$, tem-se:

$$\hat{x}^T(x) \left\{ -G^{-T}Z(\alpha, x)G^{-1} - G^{-T}Q(\alpha, x)G^{-1} + G^{-T}P(\alpha)G^{-1} - G^{-T}\epsilon_3(x)G^{-1} \right\} \hat{x}(x) > 0. \quad (56)$$

Considerando a lei de controle chaveada dada em (50) e multiplicando (53) por $\alpha_i(k)$ e $\alpha_j(k+1)$, somando i de 1 até r , j de 1 até r e substituindo l por σ , tem-se:

$$\begin{bmatrix} Z(\alpha, x) + Q_\sigma(x) - \epsilon_2(x)I & (A(\alpha, x)G - B(\alpha, x)F_\sigma(x))^T \\ A(\alpha, x)G - B(\alpha, x)F_\sigma(x) & G + G^T - P(\alpha(k+1)) \end{bmatrix} \geq 0. \quad (57)$$

Pré multiplicando (57) por $\left[I - (G^{-1}(A(\alpha, x)G - B(\alpha, x)F_\sigma(x)))^T \right]$ e pós multiplicando pela sua transposta, obtém-se:

$$\begin{aligned} & Z(\alpha, x) + Q_\sigma(x) - \epsilon_2(x)I - (A(\alpha, x)G - B(\alpha, x)F_\sigma(x))^T G^{-T} (A(\alpha, x)G - B(\alpha, x)F_\sigma(x)) \\ & - (A(\alpha, x)G - B(\alpha, x)F_\sigma(x))^T G^{-1} (A(\alpha, x)G - B(\alpha, x)F_\sigma(x)) + (A(\alpha, x)G - B(\alpha, x)F_\sigma(x))^T \\ & G^{-T} (A(\alpha, x)G - B(\alpha, x)F_\sigma(x)) + (A(\alpha, x)G - B(\alpha, x)F_\sigma(x))^T G^{-1} (A(\alpha, x)G - B(\alpha, x)F_\sigma(x)) \\ & - (A(\alpha, x)G - B(\alpha, x)F_\sigma(x))^T G^{-T} P(\alpha(k+1))G^{-1} (A(\alpha, x)G - B(\alpha, x)F_\sigma(x)) > 0. \end{aligned}$$

Então:

$$\begin{aligned} & (A(\alpha, x)G - B(\alpha, x)F_\sigma(x))^T \left(G^{-T} P(\alpha(k+1))G^{-1} \right) (A(\alpha, x)G - B(\alpha, x)F_\sigma(x)) \\ & - Z(\alpha, x) - Q_\sigma(x) + \epsilon_2(x)I < 0. \end{aligned} \quad (58)$$

Multiplicando (58) a esquerda por G^{-T} e a direita por G^{-1} :

$$\begin{aligned} & \left(A(\alpha, x) - B(\alpha, x)F_\sigma(x)G^{-1} \right)^T \left(G^{-T} P(\alpha(k+1))G^{-1} \right) \left(A(\alpha, x) - B(\alpha, x)F_\sigma(x)G^{-1} \right) \\ & < G^{-T} Z(\alpha, x)G^{-1} + G^{-T} Q_\sigma(x)G^{-1} - G^{-T} \epsilon_2(x)G^{-1}. \end{aligned} \quad (59)$$

Portanto, para $\hat{x} \neq 0$

$$\begin{aligned} & \hat{x}^T(x) \left\{ \left(A(\alpha, x) - B(\alpha, x)F_\sigma(x)G^{-1} \right)^T \left(G^{-T} P(\alpha(k+1))G^{-1} \right) \right. \\ & \left. \left(A(\alpha, x) - B(\alpha, x)F_\sigma(x)G^{-1} \right) \right\} \hat{x}(x) < \hat{x}^T(x) \left\{ G^{-T} \right. \\ & \left. Z(\alpha, x)G^{-1} + G^{-T} Q_\sigma(x)G^{-1} - G^{-T} \epsilon_2(x)G^{-1} \right\} \hat{x}(x). \end{aligned} \quad (60)$$

De (50), lembrando que o mínimo de um conjunto de números reais é menor ou igual à qualquer combinação convexa desses números, segue que

$$\begin{aligned} & \hat{x}^T(x)G^{-T}Q_\sigma(x)G^{-1}\hat{x}(x) = \min_{i \in \mathbb{K}_r} \left\{ \hat{x}^T(x)G^{-T}Q_i(x)G^{-1}\hat{x}(x) \right\} \\ & \leq \sum_{i=1}^r \alpha_i \left\{ \hat{x}^T(x)G^{-T}Q_i(x)G^{-1}\hat{x}(x) \right\} = \hat{x}^T(x)G^{-T}Q(\alpha, x)G^{-1}\hat{x}(x). \end{aligned} \quad (61)$$

Logo, de (60) e (61):

$$\begin{aligned} & \hat{x}^T(x) \left\{ \left(A(\alpha, x) - B(\alpha, x)F_\sigma(x)G^{-1} \right)^T \left(G^{-T} P(\alpha(k+1))G^{-1} \right) \right. \\ & \left. \left(A(\alpha, x) - B(\alpha, x)F_\sigma(x)G^{-1} \right) \right\} \hat{x}(x) \\ & < \hat{x}^T(x) \left\{ G^{-T} Z(\alpha, x)G^{-1} + G^{-T} Q_\sigma(x)G^{-1} - G^{-T} \epsilon_2(x)G^{-1} \right\} \hat{x}(x) \\ & \leq \hat{x}^T(x) \left\{ G^{-T} Z(\alpha, x)G^{-1} + G^{-T} Q(\alpha, x)G^{-1} - G^{-T} \epsilon_2(x)G^{-1} \right\} \hat{x}(x). \end{aligned} \quad (62)$$

Para $\hat{x} \neq 0$, de (56) e (62) segue que

$$\begin{aligned} & \hat{x}^T(x) \left\{ \left(A(\alpha, x) - B(\alpha, x)F_\sigma(x)G^{-1} \right)^T \left(G^{-T} P(\alpha(k+1))G^{-1} \right) \left(A(\alpha, x) - \right. \right. \\ & \left. \left. B(\alpha, x)F_\sigma(x)G^{-1} \right) \right\} \hat{x}(x) \leq \hat{x}^T(x) \left\{ G^{-T} Z(\alpha, x)G^{-1} + G^{-T} Q(\alpha, x)G^{-1} \right\} \hat{x}(x) \\ & < \hat{x}^T(x) \left\{ G^{-T} P(\alpha)G^{-1} \right\} \hat{x}(x). \end{aligned} \quad (63)$$

Assim, para $\hat{x} \neq 0$,

$$\hat{x}^T(x) \left\{ \begin{aligned} & \left(A(\alpha, x) - B(\alpha, x)F_\sigma(x)G^{-1} \right)^T \left(G^{-T}P(\alpha(k+1))G^{-1} \right) \\ & \left(A(\alpha, x) - B(\alpha, x)F_\sigma(x)G^{-1} \right) - G^{-T}P(\alpha)G^{-1} \end{aligned} \right\} \hat{x}(x) < 0. \quad (64)$$

Considerando a candidata a função de Lyapunov:

$$V(x) = \hat{x}^T(x)G^{-T} \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i P_i \right) G^{-1} \hat{x}(x), \quad (65)$$

com o sistema dado em (51) e a lei de controle chaveada (50), tem-se que para $\hat{x}(k) \neq 0$

$$\begin{aligned} \Delta V(x(k)) &= V(x(k+1)) - V(x(k)) \\ &= \hat{x}^T(x) \left\{ \begin{aligned} & \left(A(\alpha, x) - B(\alpha, x)F_\sigma(x)G^{-1} \right)^T \left(G^{-T}P(\alpha(k+1))G^{-1} \right) \\ & \times \left(A(\alpha, x) - B(\alpha, x)F_\sigma(x)G^{-1} \right) - G^{-T}P(\alpha)G^{-1} \end{aligned} \right\} \hat{x}(x) < 0. \end{aligned} \quad (66)$$

Observe que a equação (66) é equivalente ao lado esquerdo da restrição SOS (64), de modo que a lei de controle chaveada (50) faz com que o ponto de equilíbrio $x(k) = 0$ do sistema polinomial não linear incerto seja assintoticamente estável. \square

3.1.1 EXEMPLOS NUMÉRICOS

Exemplo 3. *Considere o modelo não linear a seguir apresentado em (Guerra; Vermeiren, 2004; Chen et al., 2012):*

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= x_1(k) - x_1(k)x_2(k) + (5 + x_1(k))u(k) \\ x_2(k+1) &= -x_1(k) - 0,5x_2(k) + 2x_1(k)u(k). \end{aligned} \quad (67)$$

Define-se o grau de pertinência $x_1(k)$ em M_1^1 por $M_1^1(x_1(k)) = (\beta + x_1(k))/(2\beta)$ e o grau de pertinência $x_2(k)$ em M_1^2 por $M_1^2(x_1(k)) = (\beta - x_1(k))/(2\beta)$ com $\beta > 0$. Para $x_1(k) \in [-\beta, \beta]$, $x_1(k) = \beta M_1^1(x_1(k)) - \beta M_1^2(x_1(k))$ e o modelo não linear pode ser representado pelas duas regras do modelo fuzzy T-S discreto no tempo:

Regra 1: Se $x_1(t)$ é M_1^1 , então:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & -\beta \\ -1 & -0,5 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 5 + \beta \\ 2\beta \end{bmatrix} u(k). \quad (68)$$

Regra 2: Se $x_1(t)$ é M_1^2 , então:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & \beta \\ -1 & -0,5 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 5 - \beta \\ -2\beta \end{bmatrix} u(k). \quad (69)$$

Neste exemplo, o objetivo é obter o máximo valor de β , porque o modelo fuzzy considerado é válido para $x_1(k) \in [-\beta, \beta]$.

Foram realizadas as simulações deste exemplo no Matlab® e encontradas as respostas no tempo do sistema, sendo o maior valor de β obtido $\beta = 1,0161$ utilizando o Teorema 8, que foi o mesmo valor encontrado em Oliveira *et al.* (2018), considerando os modelos fuzzy T-S descritos pelas equações (68) e (69).

O resultado encontrado para factibilidade das restrições SOS (52), (53) e (54), constituída pelo conjunto de ganhos do controlador $F_l(x)G^{-1}$, $l \in \mathbb{K}_2$, matrizes auxiliares simétricas $G^{-T}Q_lG^{-1}$, $l \in \mathbb{K}_2$, matrizes simétricas positivas definidas P_i , $i \in \mathbb{K}_2$, são dadas por:

$$F_1G^{-1} = \begin{bmatrix} 1,5442 \times 10^{-19}x_1 - 4,6222 \times 10^{-19}x_2 + 0,062763, & 2,2707 \times 10^{-19}x_1 - \\ & 7,142 \times 10^{-19}x_2 - 0,10082 \end{bmatrix},$$

$$F_2G^{-1} = \begin{bmatrix} 5,3185 \times 10^{-19}x_1 - 1,0061 \times 10^{-18} + 0,081561, & 3,7071 \times 10^{-19}x_1 - \\ & 8,3873 \times 10^{-19}x_2 - 0,077466 \end{bmatrix}, \quad (70)$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} 61,8279 & -41,1774 \\ -41,1774 & 51,6312 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 43,3139 & -32,2751 \\ -32,2751 & 59,0337 \end{bmatrix},$$

$$G^{-T}Q_1G^{-1} = \begin{bmatrix} 3,4534 \times 10^{-12}x_1 - 6,1865 \times 10^{-12}x_2 + 0,010538 & 2,7886 \times 10^{-12}x_1 - 4,2481 \times 10^{-12}x_2 + 0,0087155 \\ 2,7886 \times 10^{-12}x_1 - 4,2481 \times 10^{-12}x_2 + 0,0087155 & 2,4226 \times 10^{-12}x_1 - 3,1206 \times 10^{-12}x_2 + 0,015944 \end{bmatrix}$$

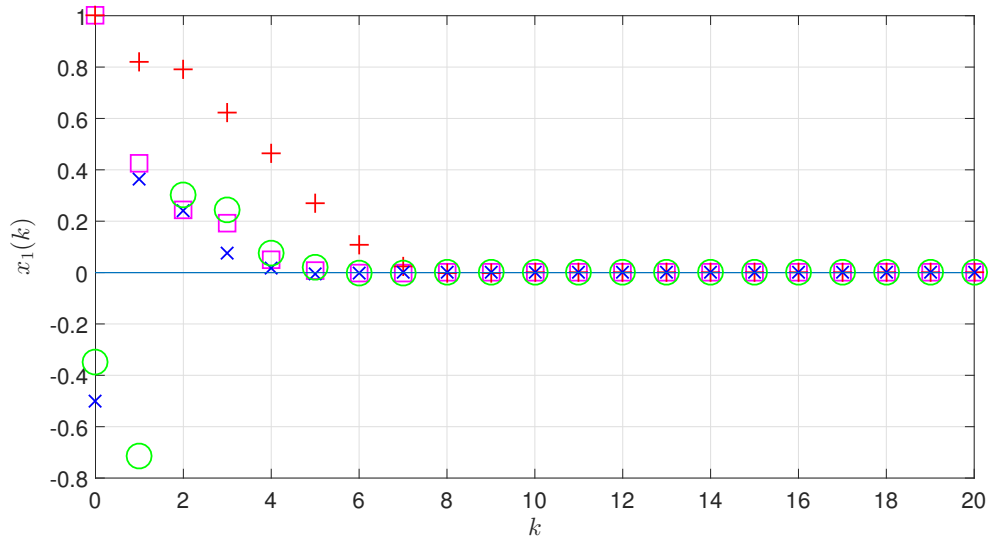
$$G^{-T}Q_2G^{-1} = \begin{bmatrix} 3,4534 \times 10^{-12}x_1 - 6,1865 \times 10^{-12}x_2 + 0,014247 & 2,7886 \times 10^{-12}x_1 - 4,2481 \times 10^{-12}x_2 + 0,0092554 \\ 2,7886 \times 10^{-12}x_1 - 4,2481 \times 10^{-12}x_2 + 0,0092554 & 2,4226 \times 10^{-12}x_1 - 3,1206 \times 10^{-12}x_2 + 0,013592 \end{bmatrix} \quad (71)$$

A Figura 4 mostra a trajetória da variável $x_1(k)$ para condições iniciais diferentes. A Figura 5 mostra a trajetória da variável $x_2(k)$ para condições iniciais diferentes.

A Figura 6 mostra o sinal de controle com a seleção de ganhos do controlador F_lG^{-1} , $l \in \mathbb{K}_2$ para condições iniciais diferentes.

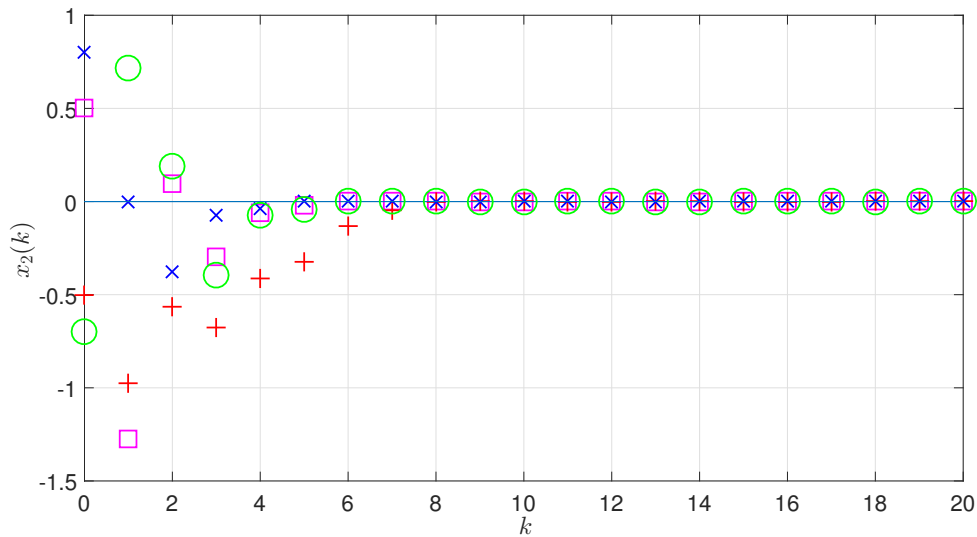
A representação da lei de controle chaveado é apresentada na Figura 7 em que os símbolos (x) e (\square) representam quando os controladores F_1G^{-1} ou F_2G^{-1} estão ativos para x_1 e x_2 , respectivamente.

Figura 4 – Trajetória da variável de estado $x_1(k)$ para condições iniciais diferentes, sendo (+) para $x(0) = [1 \ -0,5]$, (x) para $x(0) = [-0,5 \ 0,8]$, (o) para $x(0) = [-0,35 \ -0,7]$, (\square) para $x(0) = [1 \ 0,5]$.



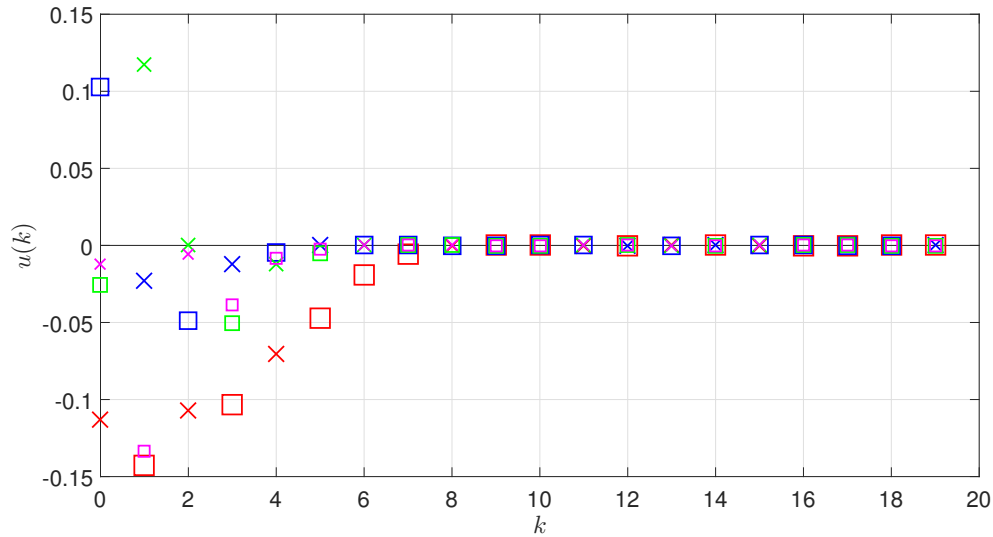
Fonte: Próprio autor

Figura 5 – Trajetórias da variável de estado $x_2(k)$ para condições iniciais diferentes, sendo (+) para $x(0) = [1 \ -0,5]$, (x) para $x(0) = [-0,5 \ 0,8]$, (o) para $x(0) = [-0,35 \ -0,7]$ e (\square) para $x(0) = [1 \ 0,5]$.



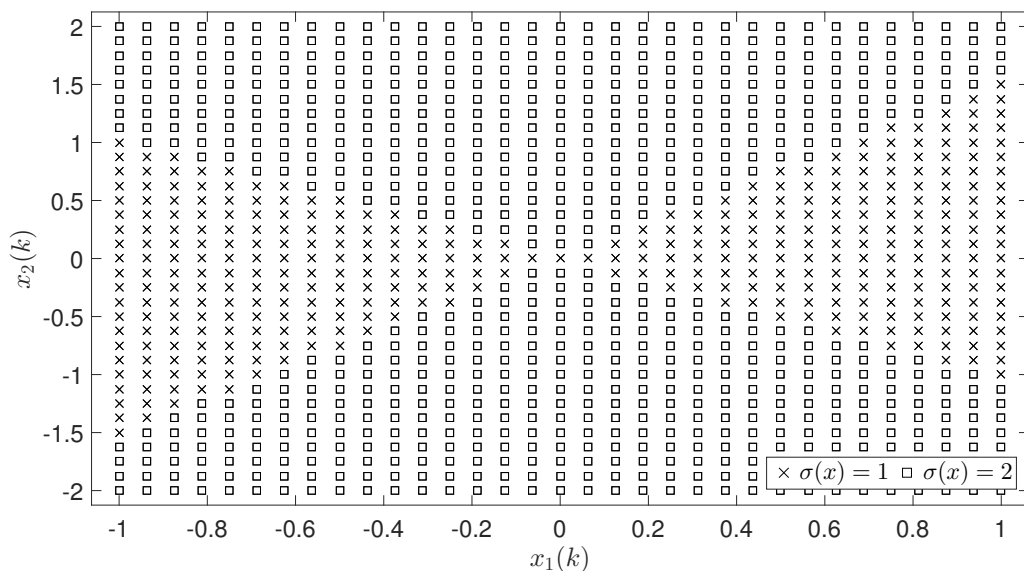
Fonte: Próprio autor

Figura 6 – Lei de controle chaveado (50): sinal de controle e $\sigma(k)$, sendo (x): $\sigma(k) = 1$ e (□): $\sigma(k) = 2$ para $x(0) = [1 \ -0,5]$, (x): $\sigma(k) = 1$ e (□): $\sigma(k) = 2$ para $x(0) = [-0,5 \ 0,8]$, (x): $\sigma(k) = 1$ e (□): $\sigma(k) = 2$ para $x(0) = [-0,35 \ -0,7]$ e (x): $\sigma(k) = 1$ e (□): $\sigma(k) = 2$ para $x(0) = [1 \ 0,5]$.



Fonte: Próprio autor

Figura 7 – Representação da lei de controle chaveado, sendo (x) = $\sigma(k) = 1$ e (□) = $\sigma(k) = 2$.



Fonte: Próprio autor

No Exemplo 4 é inserida uma não linearidade $x_2(k)$ no sistema para analisar o comportamento da planta.

Exemplo 4. Considere o modelo polinomial não linear discreto no tempo a seguir:

$$\begin{aligned}x_1(k+1) &= \hat{x}_1(k) - x_1(k)\hat{x}_2(k) + (5 + x_1(k))u(k) \\x_2(k+1) &= -x_2(k)\hat{x}_1(k) - 0,5\hat{x}_2(k) + 2x_1(k)u(k)\end{aligned}\quad (72)$$

sendo $x(k) \in \mathbb{R}^{n_x}$ um vetor de estado, $\hat{x}(x(k)) \in \mathbb{R}^{n_{\hat{x}}}$ é um vetor coluna cujas entradas são monômios em $x(k)$ com $\hat{x}_1(k) = x_1(k)$ e $\hat{x}_2(k) = x_2(k)$, $u(t)$ o vetor de entrada.

Para este exemplo iremos considerar $x_1(k) \in [-\beta \ \beta]$, de acordo com o modelo fuzzy T-S do Exemplo 3 com o intuito de analisar os resultados encontrados quando foi inserido $x_2(k)$ tornando a planta (72) um modelo polinomial. Define-se o grau de pertinência $x_1(k)$ em M_1^1 por $M_1^1(x_1(k)) = (\beta + x_1(k))/(2\beta)$ e o grau de pertinência $x_2(k)$ em M_1^2 por $M_1^2(x_1(k)) = (\beta - x_1(k))/(2\beta)$ com $\beta > 0$. Para $x_1(k) \in [-\beta, \ \beta]$, $x_1(k) = \beta M_1^1(x_1(k)) - \beta M_1^2(x_1(k))$ e então haverá duas regras do modelo fuzzy T-S discreto no tempo:

Regra 1: Se $x_1(t)$ é M_1^1 , então:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & -\beta \\ -x_2 & -0,5 \end{bmatrix} \hat{x}(k) + \begin{bmatrix} 5 + \beta \\ 2\beta \end{bmatrix} u(k).\quad (73)$$

Regra 2: Se $x_1(t)$ é M_1^2 , então:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & \beta \\ -x_2 & -0,5 \end{bmatrix} \hat{x}(k) + \begin{bmatrix} 5 - \beta \\ -2\beta \end{bmatrix} u(k).\quad (74)$$

Utilizando o Teorema 8, com as restrições SOS (52), (53) e (54), o maior valor de β factível encontrado foi de 1,6, constituída pelo conjunto de ganhos do controlador $F_l(x)G^{-1}$, $l \in \mathbb{K}_2$. As matrizes auxiliares simétricas $G^{-T}Q_lG^{-1}$, $l \in \mathbb{K}_2$, matrizes simétricas positivas definidas P_i , $i \in \mathbb{K}_2$, são dadas por:

$$\begin{aligned}F_1G^{-1} &= [-3,7767 \times 10^{-10}x_1^4 + 4,0703 \times 10^{-10}x_1^2x_2^2 + 1,1324 \times 10^{-09}x_2^4 + \\ &1,1362 \times 10^{-09}x_1^2x_2 + 1,4194 \times 10^{-09}x_2^3 + 2,4249 \times 10^{-09}x_1^2 - 5,1428 \times 10^{-09}x_2^2 + \\ &0,024176x_2 + 0,098106 \quad - 6,6837 \times 10^{-10}x_1^4 - 1,2866 \times 10^{-09}x_1^2x_2^2 - 7,1884 \times 10^{-10}x_2^4 - \\ &1,1689 \times 10^{-09}x_1^2x_2 - 3,8194 \times 10^{-10}x_2^3 + 3,9275 \times 10^{-09}x_1^2 + 5,1112 \times 10^{-09}x_2^2 - \\ &0,00027593x_2 + 0,052275],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F_2G^{-1} &= [-5,7152 \times 10^{-10}x_1^4 + 4,9746 \times 10^{-10}x_1^2x_2^2 + 1,4151 \times 10^{-09}x_2^4 - \\ &9,7443 \times 10^{-14}x_1^3 - 4,2895 \times 10^{-10}x_1^2x_2 - 1,0438 \times 10^{-09}x_2^3 + 4,462 \times 10^{-09}x_1^2 - \\ &8,2295 \times 10^{-09}x_2^2 + 0,025626x_2 + 0,098058 \quad - 6,4378 \times 10^{-10}x_1^4 - 8,2049 \times 10^{-10}x_1^2x_2^2 - \\ &3,7996 \times 10^{-10}x_2^4 - 1,2008 \times 10^{-12}x_1^3 - 1,8934 \times 10^{-09}x_1^2x_2 - 3,2613 \times 10^{-10}x_2^3 + \\ &2,9378 \times 10^{-09}x_1^2 + 2,9663 \times 10^{-10}x_2^2 + 0,00012648x_2 + 0,051565],\end{aligned}$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} 9,2676 \times 10^{-07} & -3,9606 \times 10^{-08} \\ -3,9606 \times 10^{-08} & 8,9311 \times 10^{-07} \end{bmatrix},$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} 9,2659 \times 10^{-07} & -3,9604 \times 10^{-08} \\ -3,9604 \times 10^{-08} & 8,9279 \times 10^{-07} \end{bmatrix},$$

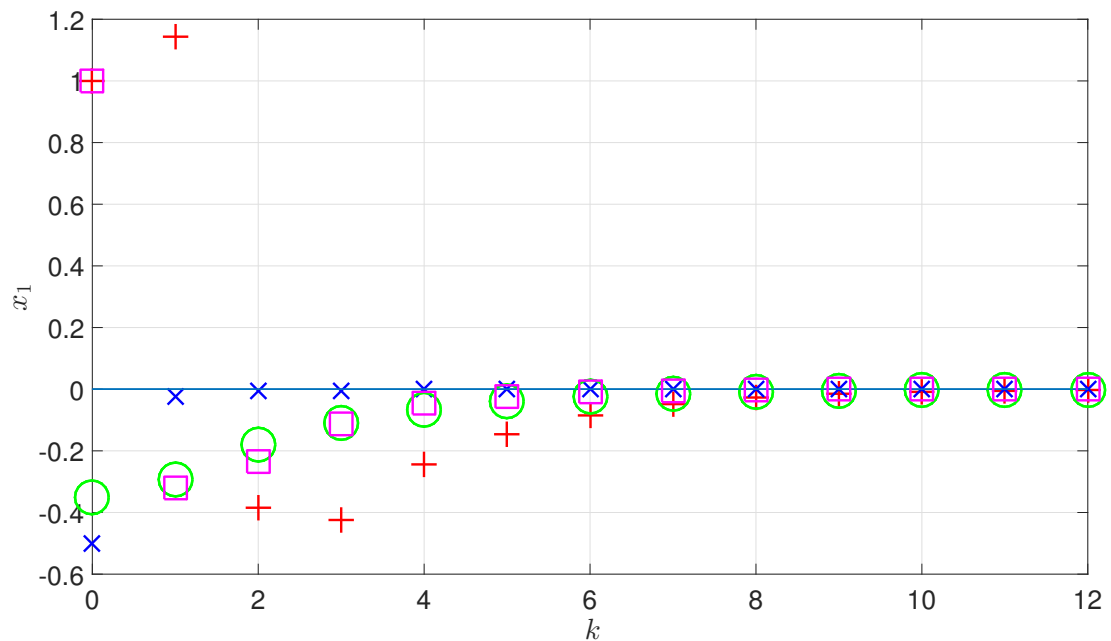
$$G^{-T}Q_1G^{-1} = \begin{bmatrix} -12,04 \times 10^{03}x_1 - 15,743 \times 10^{03}x_2 + 41,429 \times 10^{10} & 21,76310^{03}x_1 + 50,164 \times 10^{03}x_2 - 6,768 \times 10^{10} \\ 21,763 \times 10^{03}x_1 + 50,164 \times 10^{03}x_2 - 6,768 \times 10^{10} & -15,532 \times 10^{03}x_1 + 31,085 \times 10^{03}x_2 + 31,422 \times 10^{11} \end{bmatrix},$$

$$G^{-T}Q_2G^{-1} = \begin{bmatrix} -12,04 \times 10^{03}x_1 - 15,741 \times 10^{03}x_2 + 41,429 \times 10^{10} & 21,763 \times 10^{03}x_1 + 50,164 \times 10^{03}x_2 - 6,768 \times 10^{10} \\ 21,763 \times 10^{03}x_1 + 50,164 \times 10^{03}x_2 - 6,768 \times 10^{10} & -15,532 \times 10^{03}x_1 + 31,085 \times 10^{03}x_2 + 31,422 \times 10^{11} \end{bmatrix}, \quad (75)$$

As Figuras 8 e 9 mostram as trajetórias das variáveis $x_1(k)$ e $x_2(k)$ respectivamente, para condições iniciais diferentes.

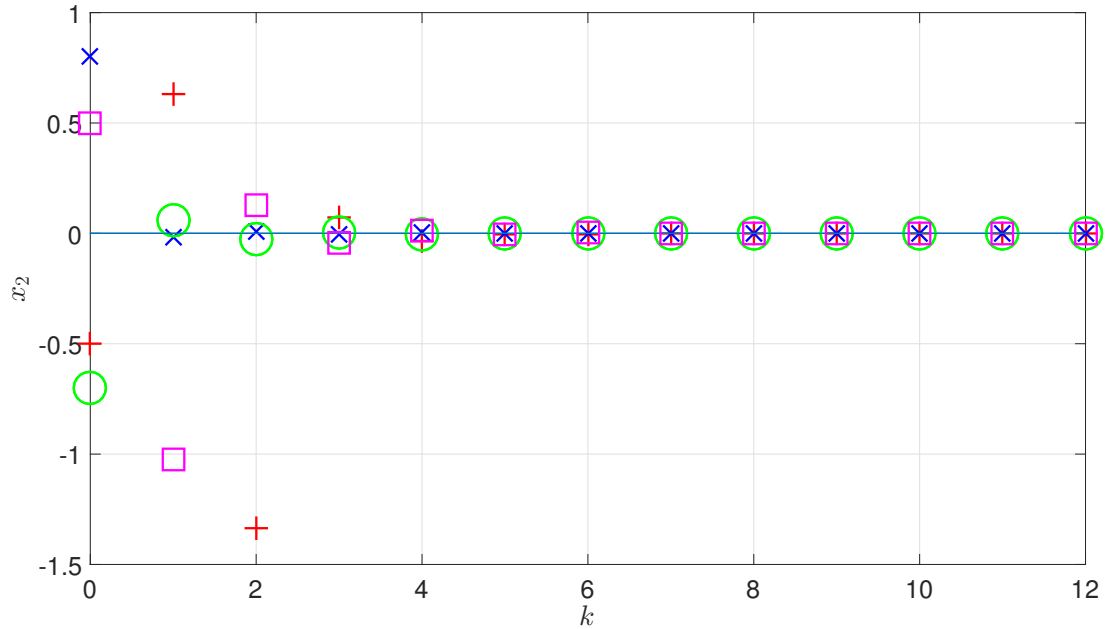
Na Figura 10 é mostrada a lei de controle chaveado e na Figura 11 é representado a lei de controle chaveado.

Figura 8 – Trajetória da variável de estado $x_1(k)$ para condições iniciais diferentes, sendo (+) para $x(0) = [1 \ -0,5]$, (x) para $x(0) = [-0,5 \ 0,8]$, (o) para $x(0) = [-0,35 \ -0,7]$, (□) para $x(0) = [1 \ 0,5]$.



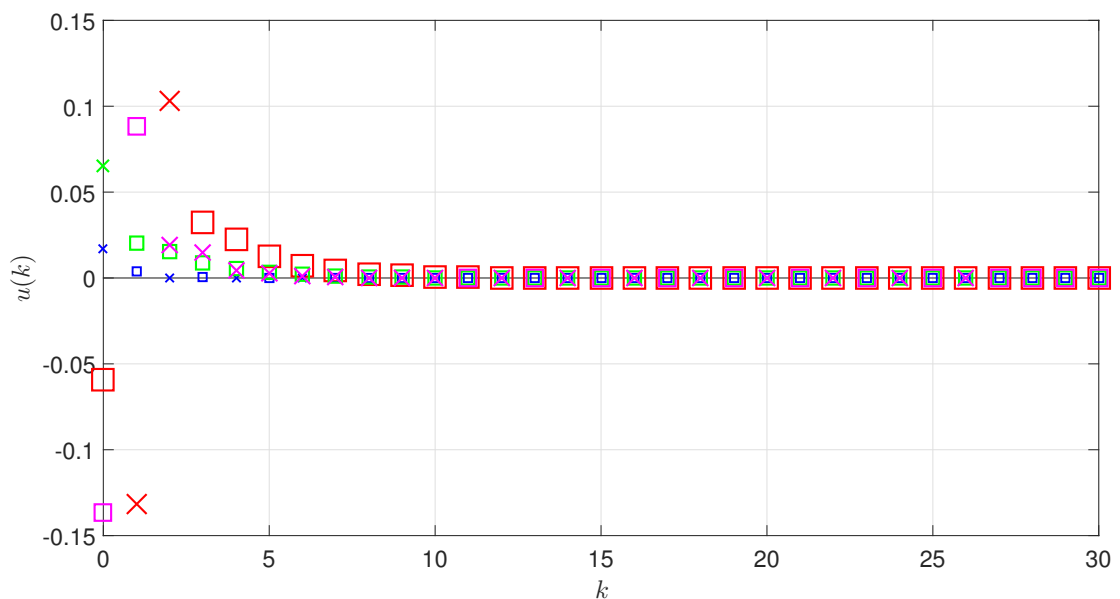
Fonte: Próprio autor

Figura 9 – Trajetórias da variável de estado $x_2(k)$ para condições iniciais diferentes, sendo (+) para $x(0) = [1 \ -0,5]$, (x) para $x(0) = [-0,5 \ 0,8]$, (o) para $x(0) = [-0,35 \ -0,7]$ e (□) para $x(0) = [1 \ 0,5]$.



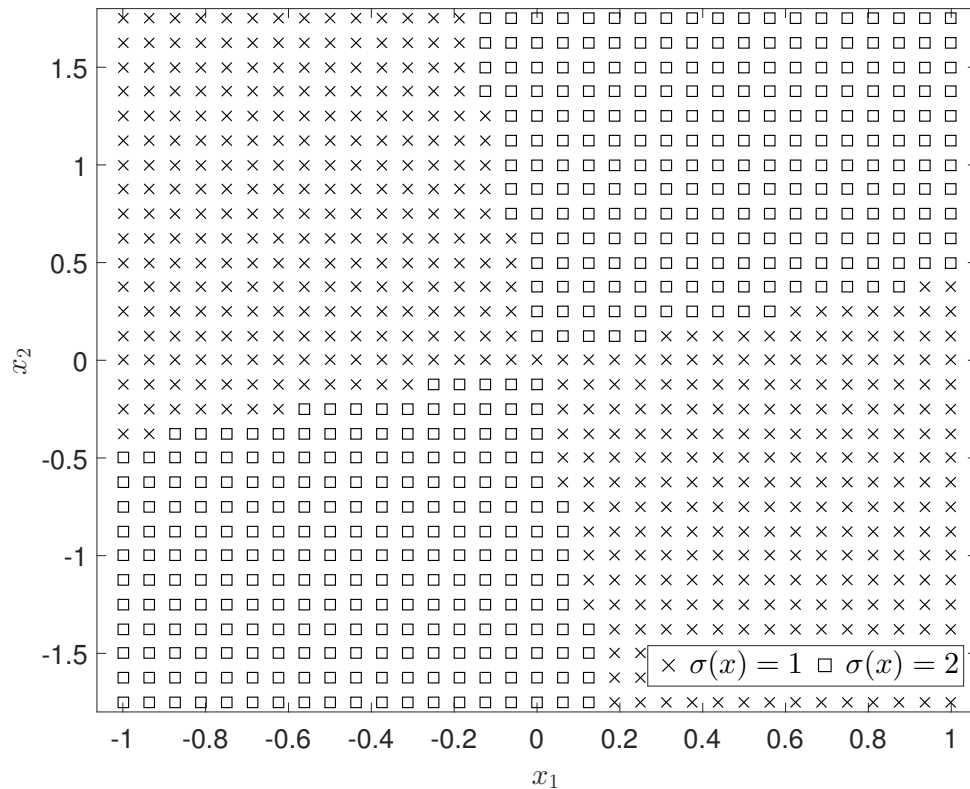
Fonte: Próprio autor

Figura 10 – Lei de controle chaveado (50): sinal de controle e $\sigma(k)$, sendo (x): $\sigma(k) = 1$ e (□): $\sigma(k) = 2$ para $x(0) = [1 \ -0,5]$, (x): $\sigma(k) = 1$ e (□): $\sigma(k) = 2$ para $x(0) = [-0,5 \ 0,8]$, (x): $\sigma(k) = 1$ e (□): $\sigma(k) = 2$ para $x(0) = [-0,35 \ -0,7]$ e (x): $\sigma(k) = 1$ e (□): $\sigma(k) = 2$ para $x(0) = [1 \ 0,5]$.



Fonte: Próprio autor

Figura 11 – Representação da lei de controle chaveado para a condição inicial $[1 \quad -0,5]$, sendo $(x) = \sigma(k) = 1$ e $(\square) = \sigma(k) = 2$.



Fonte: Próprio autor

O Exemplo 5 é considerado um modelo polinomial não linear discreto no tempo, que é obtido substituindo o β da matriz A do Exemplo 3 pelo $x_1(k)$.

Exemplo 5. Considere o modelo polinomial não linear discreto no tempo a seguir:

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= \hat{x}_1(k) - x_1(k)\hat{x}_2(k) + (5 + x_1(k))u(k) \\ x_2(k+1) &= -\hat{x}_1(k) - 0,5\hat{x}_2(k) + 2x_1(k)u(k) \end{aligned} \quad (76)$$

sendo $x(k) \in \mathbb{R}^{n_x}$ um vetor de estado, $\hat{x}(x(k)) \in \mathbb{R}^{n_{\hat{x}}}$ é um vetor coluna cujas entradas são monômios em $x(k)$, com $\hat{x}_1(k) = x_1(k)$ e $\hat{x}_2(k) = x_2(k)$, $u(k)$ o vetor de entrada, A_1 e A_2 matrizes polinomiais em $x(k)$.

Neste caso há apenas um modelo polinomial não linear discreto no tempo, sendo:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & -x_1(k) \\ -1 & -0,5 \end{bmatrix} \hat{x}(k) + \begin{bmatrix} 5 + x_1(k) \\ 2x_1(k) \end{bmatrix} u(k). \quad (77)$$

Utilizando o Teorema 8, foi encontrado um projeto de controlador que tornou o sistema estável sem que houvesse uma região de operação como o ocorreu no projeto apresentado no Exemplo 3, que abordou a mesma planta dada em (76). Isto mostra a vantagem de utilizar SOS com matrizes polinomiais (Teorema 8) do que os modelos fuzzy T-S, ou seja, houve factibilidade para $x_1(k) \in [-\infty, \infty]$. Considerando as restrições SOS (52), (53) e (54), constituída pelo conjunto de ganhos do controlador $F_l(x)G^{-1}$, $l \in \mathbb{K}_2$. As matrizes auxiliares simétricas $G^{-T}Q_lG^{-1}$, $l \in \mathbb{K}_2$, matrizes simétricas positivas definidas P_i , $i \in \mathbb{K}_2$, são dadas por:

$$F_1G^{-1} = [0, 0018276x_1 + 0, 12985, -0, 057769x_1 + 0, 0036101],$$

$$F_2G^{-1} = [0, 0018231x_1 + 0, 12987, -0, 05778x_1 + 0, 0036149],$$

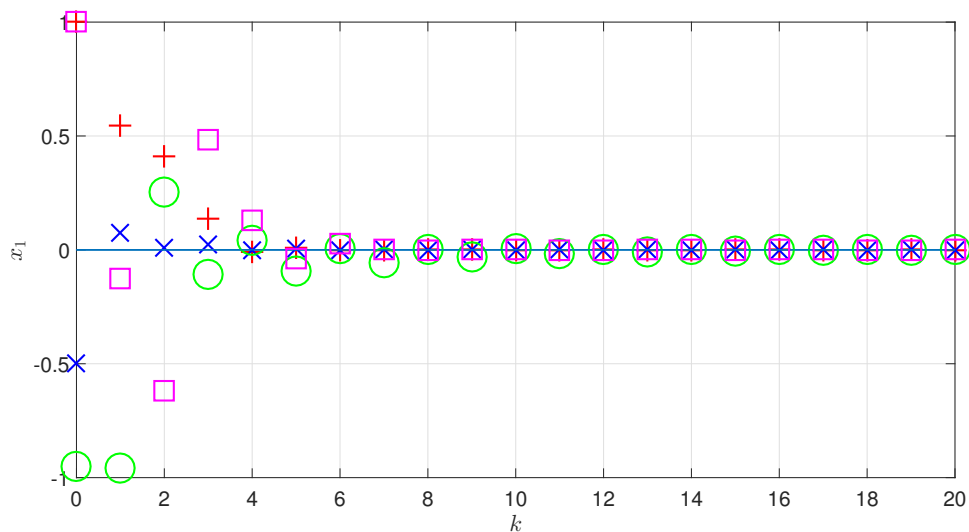
$$P_1 = \begin{bmatrix} 6,7516 \times 10^{-07} & -2,6871 \times 10^{-07} \\ -2,6871 \times 10^{-07} & 9,3789 \times 10^{-07} \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 6,7516 \times 10^{-07} & -2,687 \times 10^{-07} \\ -2,687 \times 10^{-08} & 9,3793 \times 10^{-07} \end{bmatrix},$$

$$G^{-T}Q_1G^{-1} = \begin{bmatrix} 85,954 \times 10^{03}x_1 + 11,4651 \times 10^{04}x_2 + 2,3415 \times 10^7 & 56,937 \times 10^{03}x_1 + 87,217 \times 10^{03}x_2 + 11,777 \times 10^{06} \\ 56,937 \times 10^{03}x_1 + 87,217 \times 10^{03}x_2 + 11,777 \times 10^{06} & 4,767 \times 10^{04}x_1 + 54,386 \times 10^{03}x_2 + 7,794 \times 10^{06} \end{bmatrix},$$

$$G^{-T}Q_2G^{-1} = \begin{bmatrix} 85,954 \times 10^{03}x_1 + 11,4651 \times 10^{04}x_2 + 2,3415 \times 10^7 & 56,937 \times 10^{03}x_1 + 87,217 \times 10^{03}x_2 + 11,777 \times 10^{06} \\ 56,937 \times 10^{03}x_1 + 87,217 \times 10^{03}x_2 + 11,777 \times 10^{06} & 4,767 \times 10^{04}x_1 + 54,386 \times 10^{03}x_2 + 7,794 \times 10^{06} \end{bmatrix},$$

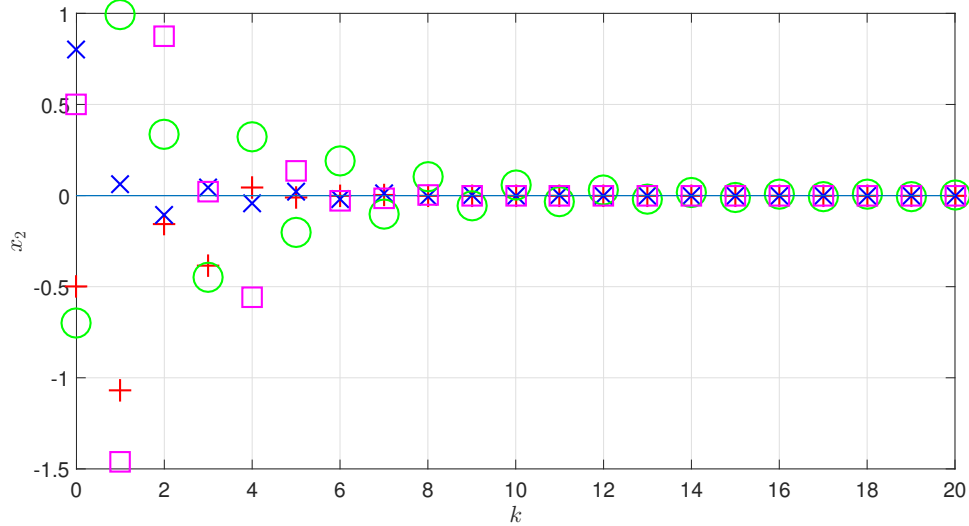
As Figuras 12 e 13 mostram as trajetórias das variáveis $x_1(k)$ e $x_2(k)$ respectivamente, para condições iniciais diferentes.

Figura 12 – Trajetória da variável de estado $x_1(k)$ para condições iniciais diferentes, sendo (+) para $x(0) = [1 \ -0,5]$, (x) para $x(0) = [-0,5 \ 0,8]$, (o) para $x(0) = [-0,35 \ -0,7]$, (□) para $x(0) = [1 \ 0,5]$.



Fonte: Próprio autor

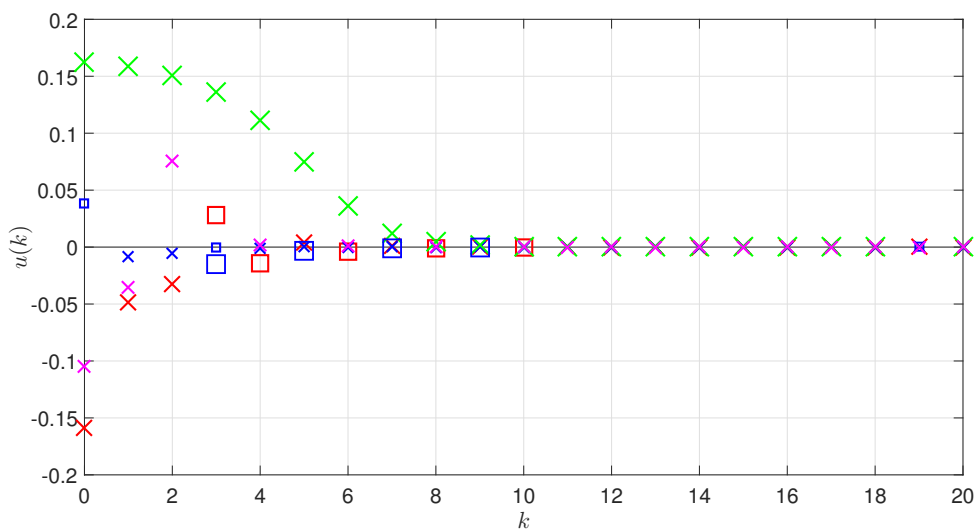
Figura 13 – Trajetórias da variável de estado $x_2(k)$ para condições iniciais diferentes, sendo (+) para $x(0) = [1 \ -0,5]$, (x) para $x(0) = [-0,5 \ -0,8]$, (o) para $x(0) = [-0,35 \ -0,7]$ e (□) para $x(0) = [1 \ 0,5]$.



Fonte: Próprio autor

O sinal de controle com a seleção de ganhos do controlador é mostrado na Figura 14, também para condições iniciais diferentes.

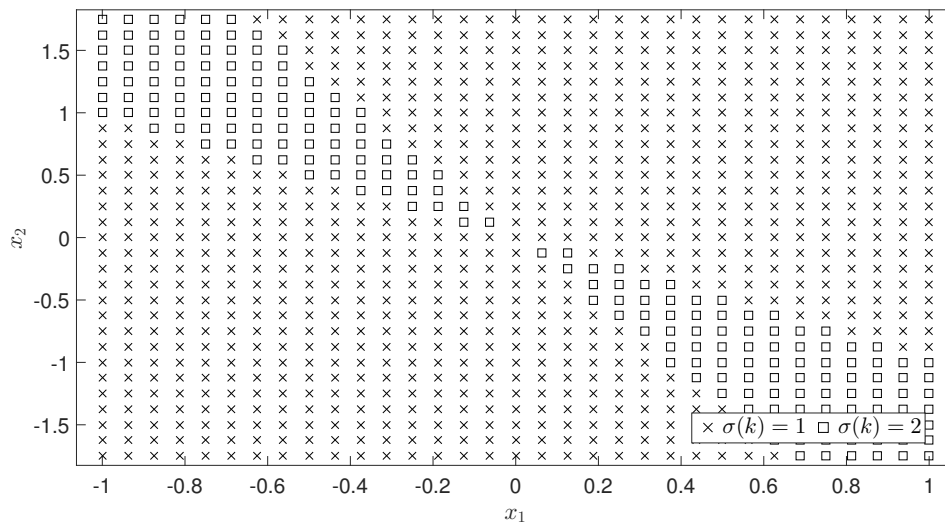
Figura 14 – Lei de controle chaveado (50): sinal de controle e $\sigma(k)$, sendo (x): $\sigma(k) = 1$ e (□): $\sigma(k) = 2$ para $x(0) = [1 \ -0,5]$, (x): $\sigma(k) = 1$ e (□): $\sigma(k) = 2$ para $x(0) = [-0,5 \ -0,8]$, (x): $\sigma(k) = 1$ e (□): $\sigma(k) = 2$ para $x(0) = [-0,35 \ -0,7]$ e (x): $\sigma(k) = 1$ e (□): $\sigma(k) = 2$ para $x(0) = [1 \ 0,5]$.



Fonte: Próprio autor

A Figura 15 apresenta a representação da lei de controle chaveado.

Figura 15 – Representação da lei de controle chaveado, sendo $(x) = \sigma(k) = 1$ e $(\square) = \sigma(k) = 2$.



Fonte: Próprio autor

A Tabela 1 apresenta uma comparação dos valores de β com o Teorema 8 proposto para os Exemplos 3, 4 e 5.

Tabela 1 – Factibilidade para β utilizando o Teorema 8 e Exemplos 3, 4 e 5

Teorema	Exemplo	Factibilidade β
8	3	$\beta \leq 1,0161$
8	4	$\beta \leq 1,6$
8	5	$x_1(k) \in [-\infty, \infty]$

Fonte: Próprio autor

3.2 CONCLUSÕES PARCIAIS

Neste capítulo foi introduzido um novo teorema utilizando lei de controle chaveada para sistemas não lineares incertos discretos no tempo e foram obtidos projetos de novos controladores utilizando matrizes polinomiais via SOS.

No teorema proposto (Teorema 8) foram consideradas as matrizes Z_i , F_i e Q_i polinomiais e P_i simétricas definidas positivas e, com as restrições SOS propostas neste teorema pode-se projetar controladores que tornaram o ponto de equilíbrio $x = 0$ do sistema controlado assintoticamente estável e foram comprovados através de exemplos.

No Exemplo 3 foi encontrada factibilidade para valores menores ou iguais à $\beta = 1,0161$, o mesmo valor encontrado em (Oliveira *et al.*, 2018), considerando a planta um

modelo fuzzy T-S não linear discreto no tempo, mas a sua análise e estudo da factibilidade foi realizada através do Teorema 8 utilizando funções polinomiais.

O Exemplo 4 apresentou um modelo não linear discreto no tempo polinomial, ou seja, foi adicionado $x_2(k)$ na planta do Exemplo 3 e foi encontrada a factibilidade para valores menores ou iguais a $\beta = 1,6$ e para $x_2(k) \in [-\infty, \infty]$.

Para ilustrar a eficiência do método proposto, no Exemplo 5 foi considerado um modelo não linear discreto no tempo polinomial, não limitando mais uma região de operação conforme foi feito no Exemplo 3 utilizando modelos fuzzy T-S. Foi considerado $x_1(k)$ no lugar de β e novos projetos de controladores foram encontrados demonstrando sua vantagem em relação aos resultados encontrados em (Oliveira *et al.*, 2018), cujo $|x_1(k)|$ foi limitado por $\beta = 1,0161$ e no Exemplo 5 foi projetado um controlador que tornou o ponto de equilíbrio $x = 0$ do sistema controlado assintoticamente estável, para $x_1(k) \in [-\infty, \infty]$.

4 CONTROLE ROBUSTO CHAVEADO DISCRETO NO TEMPO DE SISTEMAS NÃO LINEARES VIA SOS COM TAXA DE DECAIMENTO

Com o objetivo de melhorar o desempenho dinâmico do sistema em um projeto de controle, outros requisitos podem ser analisados como seu tempo de acomodação, que é um índice de desempenho que está diretamente relacionado com a taxa de decaimento, responsável pela rapidez de resposta do sistema. Neste capítulo será introduzido no Teorema 8 a taxa de decaimento para analisar o comportamento do sistema.

4.1 ESTABILIDADE COM TAXA DE DECAIMENTO

Considere uma candidata a função de Lyapunov arbitrária $V(x(k))$, com $\Delta V(x(k)) < 0$, para $x \neq 0$. Se a condição

$$\Delta V(x(k)) = (\lambda^2 - 1)V(x(k)),$$

for satisfeita para toda a trajetória $x(k)$, a taxa de decaimento $0 < \lambda < 1$ é obtida (Tanaka; Ikeda; Wang, 1998). As trajetórias irão convergir para a origem, sendo assim, assintoticamente estável, e λ (taxa de decaimento) irá estabelecer um limitante para a taxa de decaimento dos estados (Elia; Mitter, 2001).

$$\|x(k)\| \leq \lambda^k \|x(0)\|, \quad \forall k \geq 0.$$

Considerando a candidata a função de Lyapunov não quadrática dada em (46), com a lei de chaveamento (45), o teorema a seguir garantirá uma taxa de decaimento $0 < \lambda < 1$, que estabilize o sistema, com $\Delta V(x(k)) \leq (\lambda^2 - 1)V(x(k)) < 0$, para $x(k) \neq 0$.

Teorema 9. *Suponha que $\hat{x}(x) = x$ e que existam matrizes simétricas definidas positivas $P_i \in \mathbb{R}^{n_{\hat{x}} \times n_{\hat{x}}}$, matrizes simétricas polinomiais $Z_i(x)$, $Q_i(x) \in \mathbb{R}^{n_{\hat{x}} \times n_{\hat{x}}}$, matrizes polinomiais $F_l(x) \in \mathbb{R}^{n_u \times n_{\hat{x}}}$ e $G \in \mathbb{R}^{n_{\hat{x}} \times n_{\hat{x}}}$, para todo $i, j, l \in \mathbb{K}_r$, tais que as condições a seguir são factíveis:*

$$v_1^T (P_i - \epsilon_1(x)I) v_1 \quad \text{é SOS} \quad (78)$$

$$v_2^T \begin{bmatrix} Z_i(x) + Q_l(x) - \epsilon_2(x)I & (A_i(x)G - B_i(x)F_l(x))^T \\ A_i(x)G - B_i(x)F_l(x) & G + G^T - P_j \end{bmatrix} v_2 \quad \text{é SOS} \quad (79)$$

$$v_3^T (-Z_i(x) - Q_i(x) + \lambda^2 P_i - \epsilon_3(x)I) v_3 \quad \text{é SOS} \quad (80)$$

sendo $v_1, v_3 \in \mathbb{R}^{n_{\hat{x}}}$ e $v_2 \in \mathbb{R}^{2n_{\hat{x}}}$ são vetores independentes de x , $\epsilon_1(x)$, $\epsilon_2(x)$ e $\epsilon_3(x)$ são polinômios não negativos para $x \neq 0$. Portanto a lei de controle (50) com os ganhos do controlador $F_l(x)G^{-1}$, $l \in \mathbb{K}_r$, fazem o ponto de equilíbrio $x(k) = 0$ do sistema (49) assintoticamente estável com taxa de decaimento limitada por λ .

Demonstração. Suponha que existam matrizes simétricas positivas definidas $P_i \in \mathbb{R}^{n_{\hat{x}} \times n_{\hat{x}}}$, matrizes polinomiais $Z_i(x), Q_i(x) \in \mathbb{R}^{n_{\hat{x}} \times n_{\hat{x}}}$, $F_l(x) \in \mathbb{R}^{n_u \times n_{\hat{x}}}$ e $G \in \mathbb{R}^{n_{\hat{x}} \times n_{\hat{x}}}$, tais que (78), (79) e (80) são satisfeitas para todo $i, j, l \in \mathbb{K}_r$. Lembrando que $\alpha_i \geq 0$ e $\sum_{i=1}^r \alpha_i = 1$, multiplicando (80) por α_i e somando de 1 até r , obtém-se:

$$-Z(\alpha, x) - Q(\alpha, x) + \lambda^2 P(\alpha) - \epsilon_3(x)I > 0. \quad (81)$$

De (79), pode-se ver que $G + G^T - P_j > 0$ para todo $j \in \mathbb{K}_r$. Como $P_j > 0$, consequentemente $G + G^T > 0$ e a existência de G^{-1} é assegurada. Multiplicando (81) a esquerda por G^{-T} e a direita por G^{-1} , para todo $\hat{x}(x) \neq 0$, tem-se:

$$\hat{x}^T(x) \left\{ -G^{-T}Z(\alpha, x)G^{-1} - G^{-T}Q(\alpha, x)G^{-1} + \lambda^2 G^{-T}P(\alpha)G^{-1} - G^{-T}\epsilon_3(x)G^{-1} \right\} \hat{x}(x) > 0. \quad (82)$$

Considerando a lei de controle chaveada dada em (50) e multiplicando (79) por $\alpha_i(k)$ e $\alpha_j(k+1)$, somando i de 1 até r , j de 1 até r e substituindo l por σ , tem-se:

$$\begin{bmatrix} Z(\alpha, x) + Q_\sigma(x) - \epsilon_2(x)I & (A(\alpha, x)G - B(\alpha, x)F_\sigma(x))^T \\ A(\alpha, x)G - B(\alpha, x)F_\sigma(x) & G + G^T - P(\alpha(k+1)) \end{bmatrix} \geq 0. \quad (83)$$

Pré multiplicando (83) por $\begin{bmatrix} I & -(G^{-1}(A(\alpha, x)G - B(\alpha, x)F_\sigma(x)))^T \end{bmatrix}$ e pós multiplicando pela sua transposta, obtém-se:

$$\begin{aligned} & Z(\alpha, x) + Q_\sigma(x) - \epsilon_2(x)I - (A(\alpha, x)G - B(\alpha, x)F_\sigma(x))^T G^{-T} (A(\alpha, x)G - B(\alpha, x)F_\sigma(x)) \\ & - (A(\alpha, x)G - B(\alpha, x)F_\sigma(x))^T G^{-1} (A(\alpha, x)G - B(\alpha, x)F_\sigma(x)) + (A(\alpha, x)G - B(\alpha, x)F_\sigma(x))^T \\ & G^{-T} (A(\alpha, x)G - B(\alpha, x)F_\sigma(x)) + (A(\alpha, x)G - B(\alpha, x)F_\sigma(x))^T G^{-1} (A(\alpha, x)G - B(\alpha, x)F_\sigma(x)) \\ & - (A(\alpha, x)G - B(\alpha, x)F_\sigma(x))^T G^{-T} P(\alpha(k+1)) G^{-1} (A(\alpha, x)G - B(\alpha, x)F_\sigma(x)) > 0. \end{aligned}$$

Então:

$$\begin{aligned} & (A(\alpha, x)G - B(\alpha, x)F_\sigma(x))^T \left(G^{-T} P(\alpha(k+1)) G^{-1} \right) (A(\alpha, x)G - B(\alpha, x)F_\sigma(x)) \\ & - Z(\alpha, x) - Q_\sigma(x) + \epsilon_2(x)I < 0. \end{aligned} \quad (84)$$

Multiplicando (84) a esquerda por G^{-T} e a direita por G^{-1} :

$$\begin{aligned} & \left(A(\alpha, x) - B(\alpha, x)F_\sigma(x)G^{-1} \right)^T \left(G^{-T} P(\alpha(k+1)) G^{-1} \right) \left(A(\alpha, x) - B(\alpha, x)F_\sigma(x)G^{-1} \right) \\ & < G^{-T} Z(\alpha, x) G^{-1} + G^{-T} Q_\sigma(x) G^{-1} - G^{-T} \epsilon_2(x) G^{-1}. \end{aligned} \quad (85)$$

Portanto, para $\hat{x} \neq 0$

$$\begin{aligned} & \hat{x}^T(x) \left\{ \left(A(\alpha, x) - B(\alpha, x)F_\sigma(x)G^{-1} \right)^T \left(G^{-T} P(\alpha(k+1)) G^{-1} \right) \right. \\ & \quad \left. \left(A(\alpha, x) - B(\alpha, x)F_\sigma(x)G^{-1} \right) \right\} \hat{x}(x) < \hat{x}^T(x) \left\{ G^{-T} \right. \\ & \quad \left. Z(\alpha, x) G^{-1} + G^{-T} Q_\sigma(x) G^{-1} - G^{-T} \epsilon_2(x) G^{-1} \right\} \hat{x}(x). \end{aligned} \quad (86)$$

De (50), lembrando que o mínimo de um conjunto de números reais é menor ou igual à qualquer combinação convexa desses números, segue que

$$\begin{aligned} \hat{x}^T(x)G^{-T}Q_\sigma(x)G^{-1}\hat{x}(x) &= \arg^* \min_{l \in \mathbb{K}_r} \left\{ \hat{x}^T(x)G^{-T}Q_l(x)G^{-1}\hat{x}(x) \right\} \\ &\leq \sum_{i=1}^r \alpha_i \left\{ \hat{x}^T(x)G^{-T}Q_i(x)G^{-1}\hat{x}(x) \right\} = \hat{x}^T(x)G^{-T}Q(\alpha, x)G^{-1}\hat{x}(x). \end{aligned} \quad (87)$$

Logo, de (86) e (87):

$$\begin{aligned} &\hat{x}^T(x) \left\{ \left(A(\alpha, x) - B(\alpha, x)F_\sigma(x)G^{-1} \right)^T \left(G^{-T}P(\alpha(k+1))G^{-1} \right) \right. \\ &\quad \left. \left(A(\alpha, x) - B(\alpha, x)F_\sigma(x)G^{-1} \right) \right\} \hat{x}(x) \\ &< \hat{x}^T(x) \left\{ G^{-T}Z(\alpha, x)G^{-1} + G^{-T}Q_\sigma(x)G^{-1} - G^{-T}\epsilon_2(x)G^{-1} \right\} \hat{x}(x) \\ &\leq \hat{x}^T(x) \left\{ G^{-T}Z(\alpha, x)G^{-1} + G^{-T}Q(\alpha, x)G^{-1} - G^{-T}\epsilon_2(x)G^{-1} \right\} \hat{x}(x). \end{aligned} \quad (88)$$

Para $\hat{x} \neq 0$, de (82) e (87) segue que

$$\begin{aligned} &\hat{x}^T(x) \left\{ \left(A(\alpha, x) - B(\alpha, x)F_\sigma(x)G^{-1} \right)^T \left(G^{-T}P(\alpha(k+1))G^{-1} \right) \left(A(\alpha, x) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. B(\alpha, x)F_\sigma(x)G^{-1} \right) \right\} \hat{x}(x) \leq \hat{x}^T(x) \left\{ G^{-T}Z(\alpha, x)G^{-1} + G^{-T}Q(\alpha, x)G^{-1} \right\} \hat{x}(x) \\ &\quad < \hat{x}^T(x) \left\{ \lambda^2 G^{-T}P(\alpha)G^{-1} \right\} \hat{x}(x). \end{aligned} \quad (89)$$

Assim,

$$\begin{aligned} &\hat{x}^T(x) \left\{ \left(A(\alpha, x) - B(\alpha, x)F_\sigma(x)G^{-1} \right)^T \left(G^{-T}P(\alpha(k+1))G^{-1} \right) \right. \\ &\quad \left. \left(A(\alpha, x) - B(\alpha, x)F_\sigma(x)G^{-1} \right) - \lambda^2 G^{-T}P(\alpha)G^{-1} \right\} \hat{x}(x). \end{aligned} \quad (90)$$

Considerando a candidata a função de Lyapunov:

$$V(x) = \hat{x}^T(x)G^{-T} \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i P_i \right) G^{-1}\hat{x}(x), \quad (91)$$

com o sistema dado em (51) e a lei de controle chaveada (50), tem-se que para $\hat{x}(k) \neq 0$

$$\begin{aligned} \Delta V(x(k)) &= V(x(k+1)) - V(x(k)) + V(x(k)) - \lambda^2 V(x(k)) \\ &= \hat{x}^T(x) \left\{ \left(A(\alpha, x) - B(\alpha, x)F_\sigma(x)G^{-1} \right)^T \left(G^{-T}P(\alpha(k+1))G^{-1} \right) \right. \\ &\quad \left. \times \left(A(\alpha, x) - B(\alpha, x)F_\sigma(x)G^{-1} \right) - \lambda^2 G^{-T}P(\alpha)G^{-1} \right\} \hat{x}(x) < 0. \end{aligned} \quad (92)$$

com $\Delta V(x(k)) = V(x(k+1)) - V(x(k)) < (\lambda^2 - 1)V(x(k))$, para todo $x(k) \neq 0$. Observe que a equação (92) é equivalente a equação (90), porém com a lei de controle chaveada (50) fazendo com que o ponto de equilíbrio $x(k) = 0$ do sistema polinomial não linear incerto seja assintoticamente estável. \square

O teorema a seguir será utilizado para analisar os resultados e comparação de metodologias com o Teorema 9. Este teorema é o Teorema que utilizamos de (Oliveira *et al.*, 2018) acrescentado a taxa de decaimento.

Teorema 10. (Santos, 2020) *Considere que existam matrizes simétricas definidas positivas $P_i \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, matrizes simétricas $Z_i, Q_i \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, matrizes $F_l \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$ e $G \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ e um escalar $0 < \lambda < 1$, para todo $i, j, l \in \mathbb{K}_r$, tais que:*

$$\begin{bmatrix} Z_i + Q_l & (A_i G - B_i F_l)^T \\ A_i G - B_i F_l & G + G^T - P_j \end{bmatrix} > 0, \quad (93)$$

$$Z_i + Q_i - \lambda^2 P_i < 0. \quad (94)$$

Então, a lei de controle chaveada (45) com o ganho do controlador $F_l G^{-1}$, $l \in \mathbb{K}_r$, torna o ponto de equilíbrio $x(k) = 0$ do sistema não linear (35), localmente assintoticamente estável com taxa de decaimento limitada por λ .

Demonstração. A prova será omitida e está apresentada em Santos (2020). □

4.1.1 EXEMPLOS NUMÉRICOS

Exemplo 6. *O Exemplo 3 será resolvido novamente com os Teoremas 9 e 10.*

Regra 1: Se $x_1(t)$ é M_1^1 , então:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & -\beta \\ -1 & -0,5 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 5 + \beta \\ 2\beta \end{bmatrix} u(k). \quad (95)$$

Regra 2: Se $x_1(t)$ é M_1^2 , então:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & \beta \\ -1 & -0,5 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 5 - \beta \\ -2\beta \end{bmatrix} u(k). \quad (96)$$

Assim como o Exemplo 3, o objetivo é obter o máximo valor de β , porque o modelo fuzzy considerado é válido para $x_1(k) \in [-\beta, \beta]$.

As programações foram realizadas no Matlab®, utilizando agora a taxa de decaimento λ como mostra o Teorema 9. Para a taxa de decaimento $\lambda = 0,9$ e $\beta = 1,3$, as matrizes auxiliares simétricas $G^{-T} Q_l G^{-1}$, $l \in \mathbb{K}_2$, matrizes simétricas positivas definidas P_i , $i \in \mathbb{K}_2$, são dadas por:

$$F_1G^{-1} = [-4,4602 \times 10^{-12}x_1x_2^2 + 5,8127 \times 10^{-12}x_2^3 + 1,3525 \times 10^{-12}x_1x_2 + 1,3525 \times 10^{-12}x_2^2 + 1,3525 \times 10^{-12}x_2 + 0,16524, \quad 3,701 \times 10^{-12}x_1x_2^2 + 1,4028 \times 10^{-12}x_2^3 + 5,1038 \times 10^{-12}x_1x_2 + 5,1038 \times 10^{-12}x_2^2 + 5,1038 \times 10^{-12}x_2 + 0,063114],$$

$$F_2G^{-1} = [-4,4602 \times 10^{-12}x_1^2x_2 - 5,8127 \times 10^{-12}x_1x_2^2 + 5,8127 \times 10^{-12}x_2^3 + 1,3525 \times 10^{-12}x_2^2 + 5,8127 \times 10^{-12}x_2 + 0,16535, \quad 3,701 \times 10^{-12}x_1^2x_2 - 1,4028 \times 10^{-12}x_1x_2^2 + 1,4028 \times 10^{-12}x_2^3 + 5,1038 \times 10^{-12}x_2^2 + 1,4028 \times 10^{-12}x_2 + 0,06316],$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} 8,7905 \times 10^{-07} & -7,6826 \times 10^{-08} \\ -7,6826 \times 10^{-08} & 9,1053 \times 10^{-07} \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 8,8423 \times 10^{-07} & -7,3561 \times 10^{-08} \\ -7,3561 \times 10^{-08} & 9,0796 \times 10^{-07} \end{bmatrix},$$

$$G^{-T}Q_1G^{-1} = \begin{bmatrix} -3,74 \times 10^{03}x_1 + 34,444 \times 10^{03}x_2 + 79,192 \times 10^{11} & -19,347 \times 10^{03}x_1 - 45,89 \times 10^{03}x_2 + 64,531 \times 10^{10} \\ -19,347 \times 10^{03}x_1 - 45,896 \times 10^{03}x_2 + 64,531 \times 10^{10} & -30,222 \times 10^{03}x_1 - 29,830 \times 10^{03}x_2 + 19,399 \times 10^{10} \end{bmatrix},$$

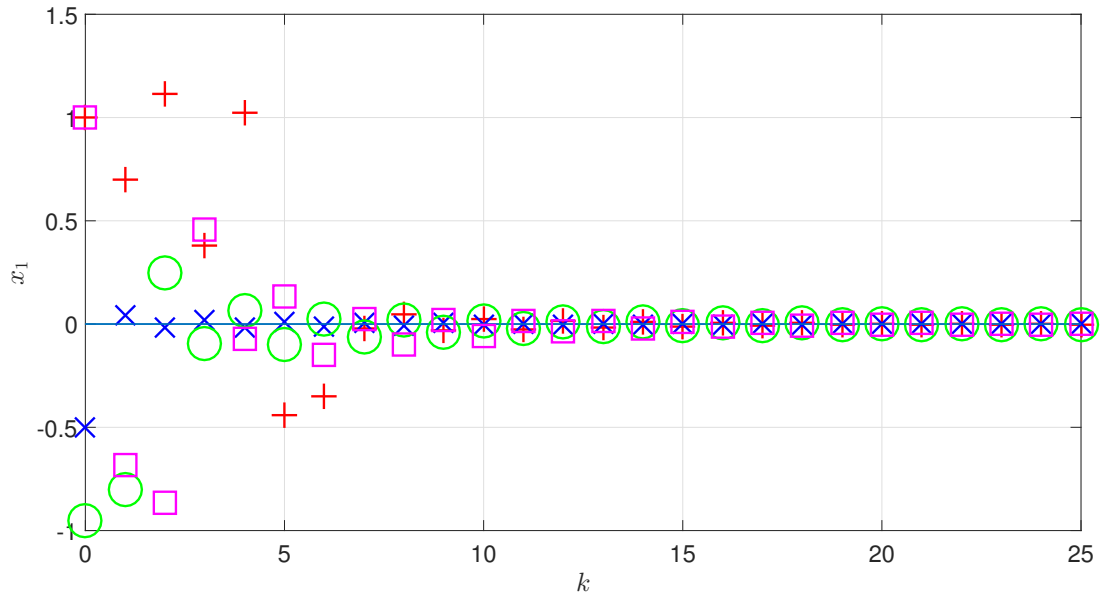
$$G^{-T}Q_2G^{-1} = \begin{bmatrix} -3,74 \times 10^{03}x_1 + 34,444 \times 10^{03}x_2 + 79,192 \times 10^{11} & -19,347 \times 10^{03}x_1 - 45,89 \times 10^{03}x_2 + 64,531 \times 10^{10} \\ -19,347 \times 10^{03}x_1 - 45,896 \times 10^{03}x_2 + 64,531 \times 10^{10} & -30,222 \times 10^{03}x_1 - 29,830 \times 10^{03}x_2 + 19,399 \times 10^{10} \end{bmatrix}$$

A Figura 16 mostra a trajetória da variável $x_1(k)$ e a Figura 17 mostra a trajetória da variável $x_2(k)$, para diferentes condições iniciais.

A Figura 18 mostra o sinal de controle com a seleção de ganhos do controlador F_lG^{-1} , $l \in \mathbb{K}_2$.

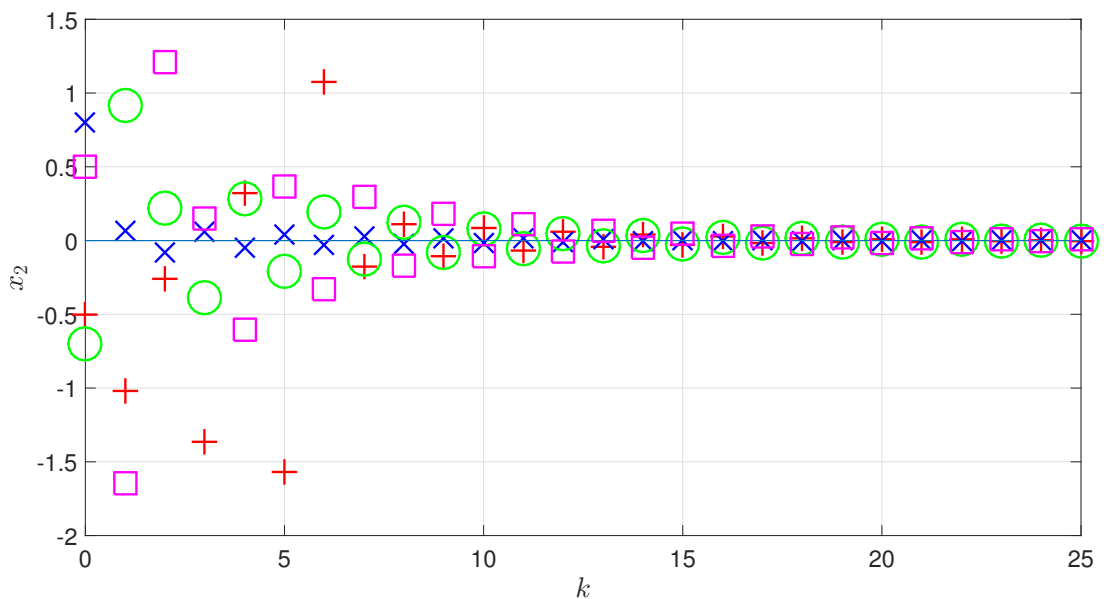
A representação da lei de controle chaveado é apresentada na Figura 19 em que os símbolos (x) e (\square) representam quando os controladores F_1G^{-1} ou F_2G^{-1} estão ativos para x_1 e x_2 , respectivamente.

Figura 16 – Trajetória da variável de estado x_1 para condições iniciais diferentes, sendo (+) para $x(0) = [1 \ -0,5]$, (x) para $x(0) = [-0,5 \ 0,8]$, (o) para $x(0) = [-0,35 \ -0,7]$, (□) para $x(0) = [1 \ 0,5]$.



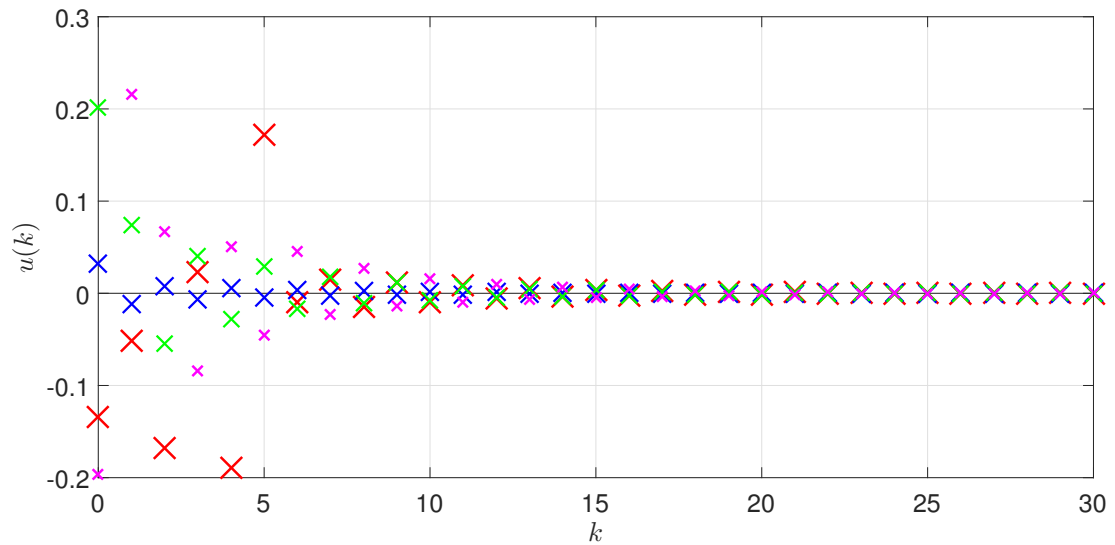
Fonte: Próprio autor

Figura 17 – Trajetória da variável de estado x_2 para condições iniciais diferentes, sendo (+) para $x(0) = [1 \ -0,5]$, (x) para $x(0) = [-0,5 \ 0,8]$, (o) para $x(0) = [-0,35 \ -0,7]$, (□) para $x(0) = [1 \ 0,5]$.



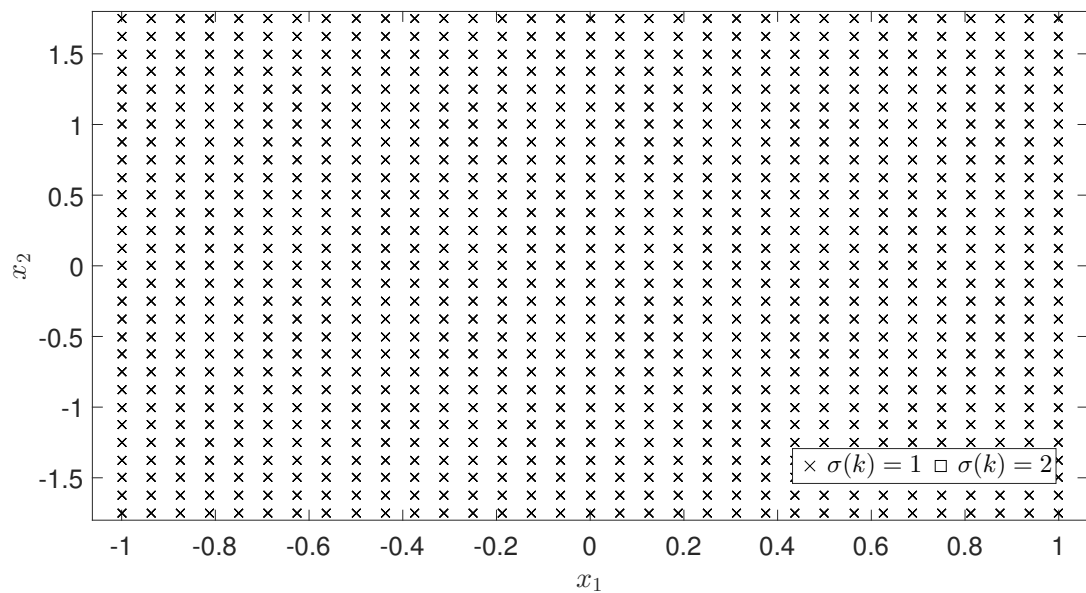
Fonte: Próprio autor

Figura 18 – Lei de controle chaveado (50): sinal de controle e $\sigma(k)$, sendo $\sigma(k) = 1$ (x) e $\sigma(k) = 2$ (\square)



Fonte: Próprio autor

Figura 19 – Representação da lei de controle chaveado, sendo (x) = $\sigma(k) = 1$ e (\square) = $\sigma(k) = 2$.



Fonte: Próprio autor

A Tabela 2 apresenta os valores de factibilidade β para as taxas de decaimento λ variando de 0,9 a 0,1 do Teorema 9 e Teorema 10.

Tabela 2 – Factibilidade para β do Exemplo 6 utilizando o Teorema 9 e Teorema 10 com taxa de decaimento λ .

Teorema 9		Teorema 10	
Taxa de decaimento (λ)	Factibilidade β	Taxa de decaimento (λ)	Factibilidade β
0,9	$\beta \leq 1,3$	0,9	$\beta \leq 0,84$
0,8	$\beta \leq 1,3$	0,8	$\beta \leq 0,68$
0,7	$\beta \leq 1,15$	0,7	$\beta \leq 0,53$
0,6	$\beta \leq 0,96$	0,6	$\beta \leq 0,4$
0,5	$\beta \leq 0,51$	0,5	$\beta \leq 0,29$
0,4	$\beta \leq 0,44$	0,4	$\beta \leq 0,19$
0,3	$\beta \leq 0,32$	0,3	$\beta \leq 0,10$
0,2	$\beta \leq 0,23$	0,2	$\beta \leq 0,04$
0,1	$\beta \leq 0,32$	0,1	$\beta \leq 0,01$

Fonte: Próprio autor

No Exemplo 7 é inserida uma não linearidade $x_2(k)$ no sistema para analisar o comportamento da planta.

Exemplo 7. O Exemplo 4 será resolvido com o Teorema 9.

Regra 1: Se $x_1(t)$ é M_1^1 , então:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & -\beta \\ -x_2 & -0,5 \end{bmatrix} \hat{x}(k) + \begin{bmatrix} 5 + \beta \\ 2\beta \end{bmatrix} u(k). \quad (97)$$

Regra 2: Se $x_1(t)$ é M_1^2 , então:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & \beta \\ -x_2 & -0,5 \end{bmatrix} \hat{x}(k) + \begin{bmatrix} 5 - \beta \\ -2\beta \end{bmatrix} u(k). \quad (98)$$

Assim como o Exemplo 6, o objetivo é obter o máximo valor de β , porque o modelo fuzzy considerado é válido para $x_1(k) \in [-\beta, \beta]$.

Para as figuras foi considerado o valor de $\beta = 1,02$ e $\lambda = 0,9$. As matrizes auxiliares simétricas $G^{-T}Q_lG^{-1}$, $l \in \mathbb{K}_2$, matrizes simétricas positivas definidas P_i , $i \in \mathbb{K}_2$, são dadas por:

$$F_1G^{-1} = [6,6805 \times 10^{-08}x_1^4 + 5,1071 \times 10^{-07}x_1^2x_2^2 + 8,017 \times 10^{-07}x_2^4 + 1,5437 \times 10^{-06}x_1^2x_2 + 1,5649 \times 10^{-06}x_2^3 + 5,8968 \times 10^{-07}x_1^2 - 7,6576 \times 10^{-06}x_2^2 + 0,068415x_2 + 0,11124, -4,7185 \times 10^{-08}x_1^4 - 4,1459 \times 10^{-09}x_1^2x_2^2 + 3,5841 \times 10^{-08}x_2^4 - 4,0867 \times 10^{-07}x_1^2x_2 + 6,4181 \times 10^{-08}x_2^3 - 2,82 \times 10^{-06}x_1^2 - 1,9066 \times 10^{-06}x_2^2 + 7,4265 \times 10^{-05}x_2 + 0,069502],$$

$$F_2G^{-1} = [-6,1891 \times 10^{-08}x_1^4 + 6,3631 \times 10^{-07}x_1^2x_2^2 + 7,7559 \times 10^{-07}x_2^4 + 1,0857 \times 10^{-06}x_1^2x_2 + 1,6866 \times 10^{-06}x_2^3 + 1,5411 \times 10^{-06}x_1^2 - 9,9629 \times 10^{-06}x_2^2 + 0,068432x_2 + 0,11118, \quad -1,5271 \times 10^{-07}x_1^4 + 5,3554 \times 10^{-08}x_1^2x_2^2 + 2,5125 \times 10^{-07}x_2^4 - 1,1021 \times 10^{-06}x_1^2x_2 - 1,8103 \times 10^{-07}x_2^3 - 2,5624 \times 10^{-06}x_1^2 - 3,8314 \times 10^{-06}x_2^2 + 7,2766 \times 10^{-05}x_2 + 0,069495],$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} 8,7661 \times 10^{-09} & -3,0139 \times 10^{-10} \\ -3,0139 \times 10^{-10} & 8,798 \times 10^{-09} \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} 8,7535 \times 10^{-09} & -3,0184 \times 10^{-10} \\ -3,0184 \times 10^{-10} & 8,7878 \times 10^{-09} \end{bmatrix},$$

$$G^{-T}Q_1G^{-1} = \begin{bmatrix} -2,38 \times 10^{08}x_1 + 1,36 \times 10^{08}x_2 - 2,68 \times 10^{15} & 3,54 \times 10^{08}x_1 + 13,81 \times 10^{08}x_2 + 9,75 \times 10^{15} \\ 3,54 \times 10^{08}x_1 + 13,81 \times 10^{08}x_2 + 9,75 \times 10^{15} & -2,09 \times 10^{08}x_1 + 4,36 \times 10^{08}x_2 + 7,28 \times 10^{16} \end{bmatrix},$$

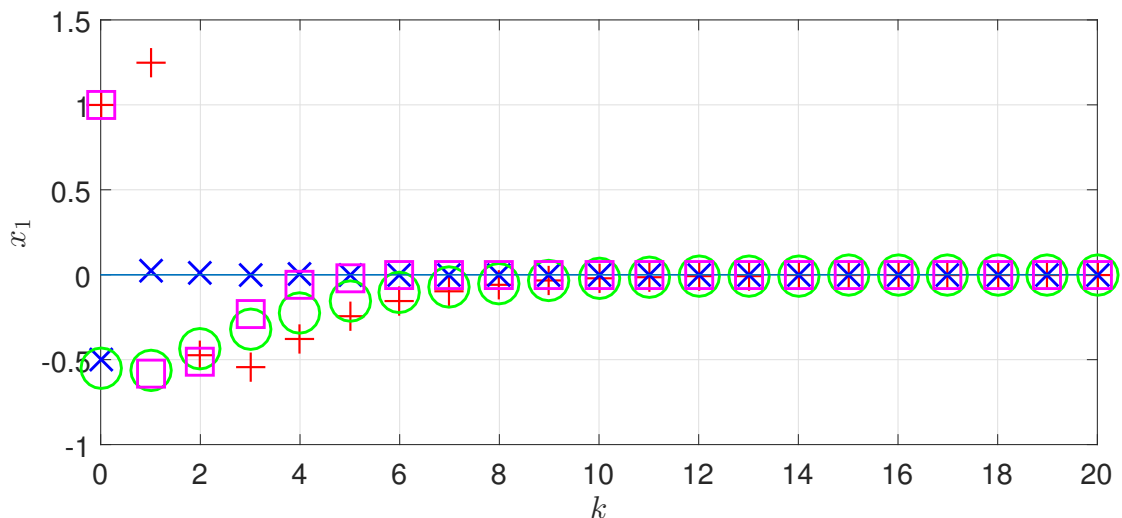
$$G^{-T}Q_2G^{-1} = \begin{bmatrix} -2,38 \times 10^{08}x_1 + 1,36 \times 10^{08}x_2 - 2,68 \times 10^{15} & 3,54 \times 10^{08}x_1 + 13,81 \times 10^{08}x_2 + 9,75 \times 10^{15} \\ 3,54 \times 10^{08}x_1 + 13,81 \times 10^{08}x_2 + 9,75 \times 10^{15} & -2,09 \times 10^{08}x_1 + 4,36 \times 10^{08}x_2 + 7,28 \times 10^{16} \end{bmatrix}$$

As Figuras 20 e 21 mostram as trajetórias das variáveis $x_1(k)$ e $x_2(k)$ respectivamente para condições iniciais diferentes.

A Figura 22 mostra o sinal de controle com a seleção de ganhos do controlador F_lG^{-1} , $l \in \mathbb{K}_2$.

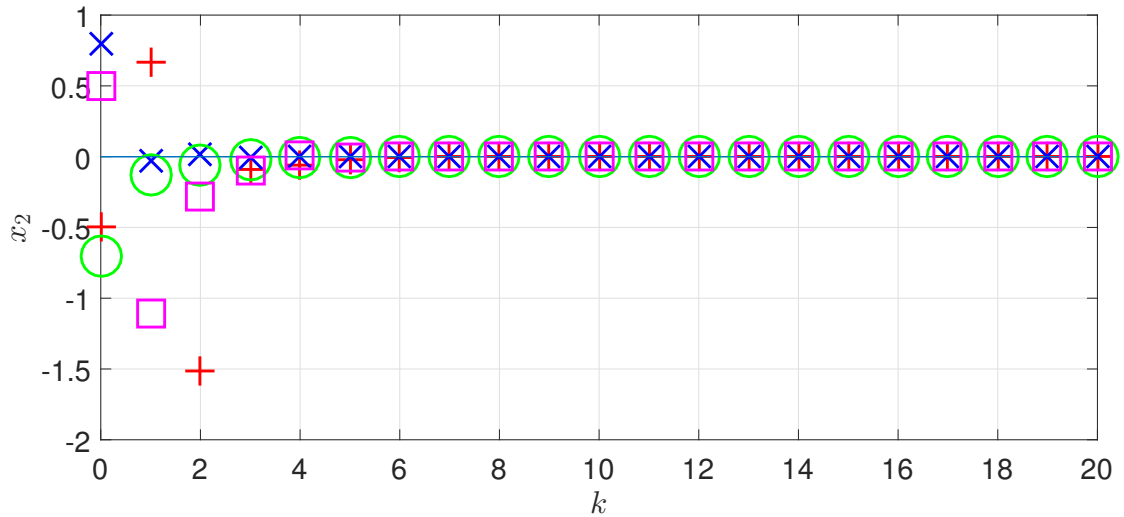
A representação da lei de controle chaveado é apresentada na Figura 23 em que os símbolos (x) e (\square) representam quando os controladores F_lG^{-1} ou F_2G^{-1} estão ativos para x_1 e x_2 , respectivamente.

Figura 20 – Trajetória da variável de estado x_1 para condições iniciais diferentes, sendo (+) para $x(0) = [1 \quad -0,5]$, (x) para $x(0) = [-0,5 \quad 0,8]$, (o) para $x(0) = [-0,55 \quad -0,7]$, (\square) para $x(0) = [1 \quad 0,5]$.



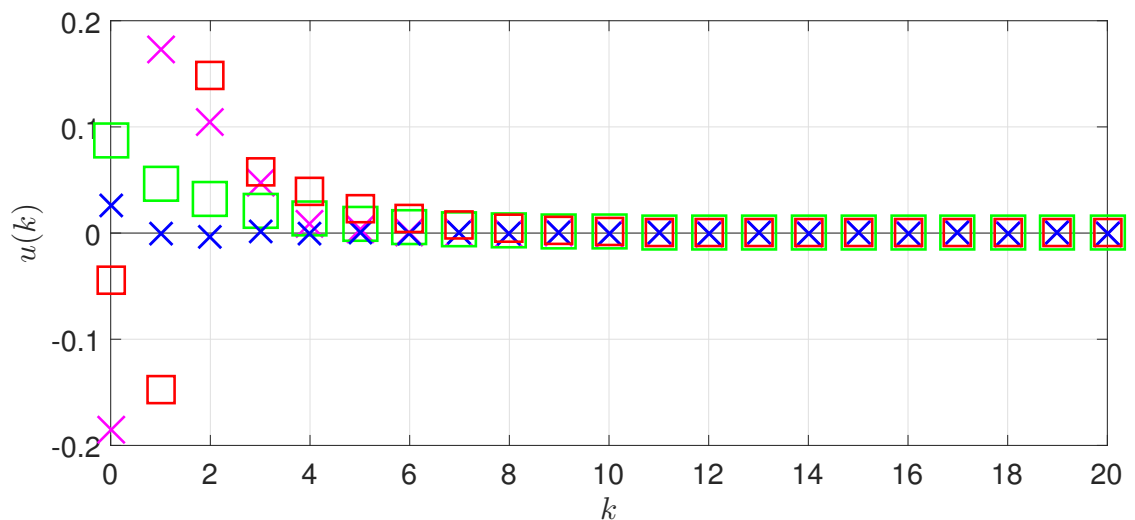
Fonte: Próprio autor

Figura 21 – Trajetória da variável de estado x_2 para condições iniciais diferentes, sendo (+) para $x(0) = [1 \ -0,5]$, (x) para $x(0) = [-0,5 \ 0,8]$, (o) para $x(0) = [-0,55 \ -0,7]$, (□) para $x(0) = [1 \ 0,5]$.



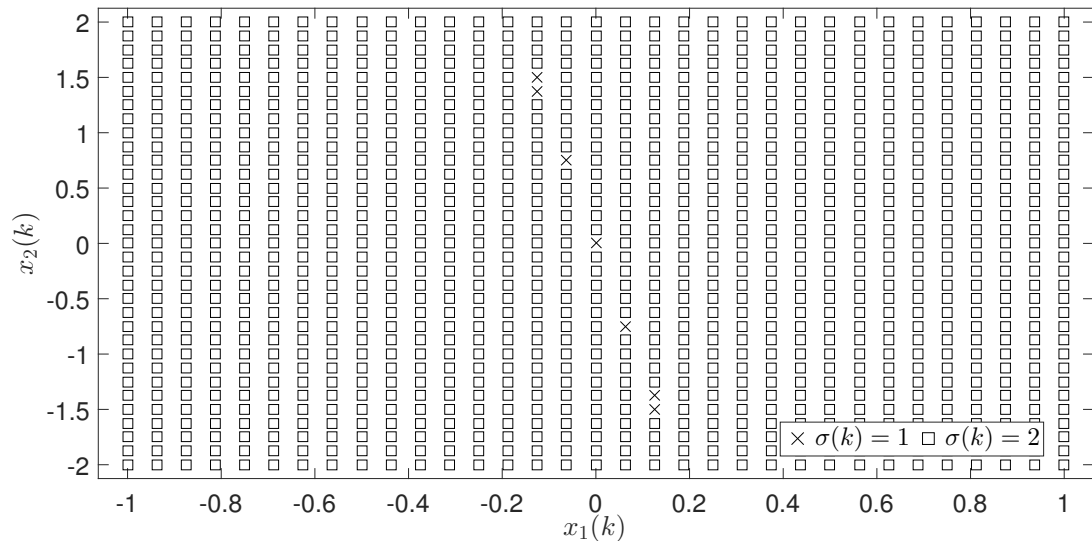
Fonte: Próprio autor

Figura 22 – Lei de controle chaveado (50): sinal de controle e $\sigma(k)$, sendo (x): $\sigma(k) = 1$ e (□): $\sigma(k) = 2$ para $x(0) = [1 \ -0,5]$, (x): $\sigma(k) = 1$ e (□): $\sigma(k) = 2$ para $x(0) = [-0,5 \ -0,8]$, (x): $\sigma(k) = 1$ e (□): $\sigma(k) = 2$ para $x(0) = [-0,55 \ -0,7]$ e (x): $\sigma(k) = 1$ e (□): $\sigma(k) = 2$ para $x(0) = [1 \ 0,5]$.



Fonte: Próprio autor

Figura 23 – Representação da lei de controle chaveado, sendo $(x) = \sigma(k) = 1$ e $(\square) = \sigma(k) = 2$.



Fonte: Próprio autor

No Exemplo 8 é considerado um modelo polinomial não linear discreto no tempo, que é obtido substituindo o β da matriz A do Exemplo 6 pelo $x_1(k)$.

Exemplo 8. *O Exemplo 5 será solucionado agora com o Teorema 9.*

O modelo polinomial não linear discreto no tempo:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & -x_1(k) \\ -1 & -0,5 \end{bmatrix} \hat{x}(k) + \begin{bmatrix} 5 + x_1(k) \\ 2x_1(k) \end{bmatrix} u(k). \quad (99)$$

Utilizando o Teorema 9 com a taxa de decaimento no valor de $\lambda = 0,9$, foi encontrado um projeto de controlador que tornou o sistema estável sem que houvesse uma região de operação conforme mostrou no Exemplo 6 e Exemplo 7. Isto mostra a vantagem de utilizar SOS com matrizes polinomiais (Teorema 9) do que os modelos fuzzy T-S, ou seja, houve factibilidade para $x_1(k) \in [-\infty, \infty]$. Considerando as restrições SOS (78), (79) e (80), constituída pelo conjunto de ganhos do controlador $F_l(x)G^{-1}$, $l \in \mathbb{K}_2$. As matrizes auxiliares simétricas $G^{-T}Q_lG^{-1}$, $l \in \mathbb{K}_2$, matrizes simétricas positivas definidas P_i , $i \in \mathbb{K}_2$, são dadas por:

$$F_1G^{-1} = [0, 0018469x_1 + 0, 13037, \quad -0, 057798x_1 + 0, 0038548],$$

$$F_2G^{-1} = [0, 0018736x_1 + 0, 13035, \quad -0, 05778x_1 + 0, 0038406],$$

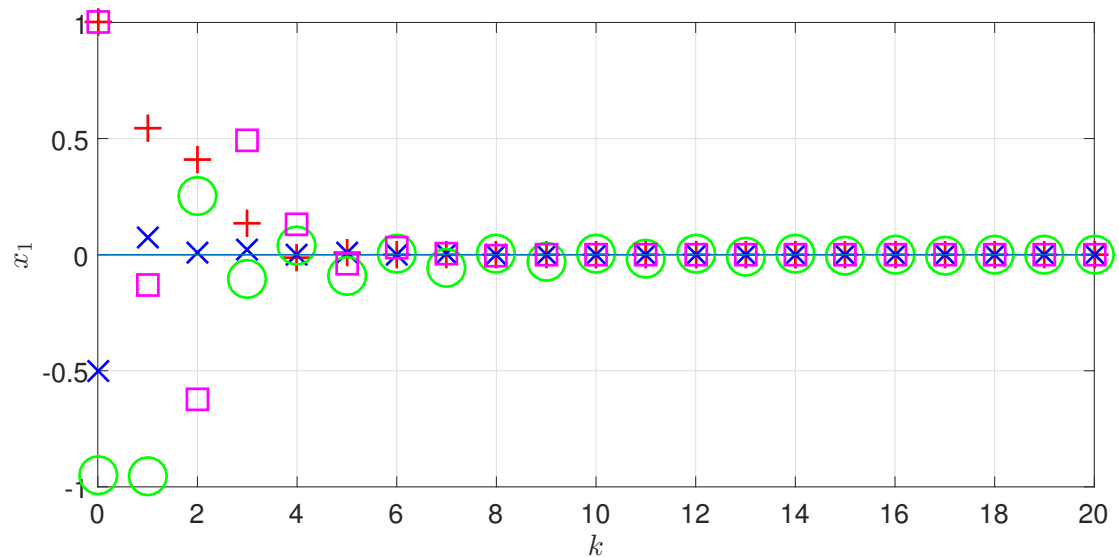
$$P_1 = \begin{bmatrix} 1,3412 \times 10^{-05} & -7,4942 \times 10^{-06} \\ -7,4942 \times 10^{-06} & 1,9763 \times 10^{-05} \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} [1,3412 \times 10^{-05} & -7,4942 \times 10^{-06} \\ -7,4942 \times 10^{-06} & 1,9763 \times 10^{-05}] \end{bmatrix},$$

$$G^{-T}Q_1G^{-1} = \begin{bmatrix} 4,67 \times 10^{02}x_1 + 4,54 \times 10^{02}x_2 + 8,34 \times 10^{05} & 2,32 \times 10^{02}x_1 + 3,04 \times 10^{02}x_2 + 4,35 \times 10^{05} \\ 2,32 \times 10^{02}x_1 + 3,04 \times 10^{02}x_2 + 4,35 \times 10^{05} & 1,46 \times 10^{02}x_1 + 1,83 \times 10^{02}x_2 + 2,71 \times 10^{05} \end{bmatrix},$$

$$G^{-T}Q_2G^{-1} = \begin{bmatrix} 4,67 \times 10^{02}x_1 + 4,54 \times 10^{02}x_2 + 8,34 \times 10^{05} & 2,32 \times 10^{02}x_1 + 3,04 \times 10^{02}x_2 + 4,35 \times 10^{05} \\ 2,32 \times 10^{02}x_1 + 3,04 \times 10^{02}x_2 + 4,35 \times 10^{05} & 1,46 \times 10^{02}x_1 + 1,83 \times 10^{02}x_2 + 2,71 \times 10^{05} \end{bmatrix},$$

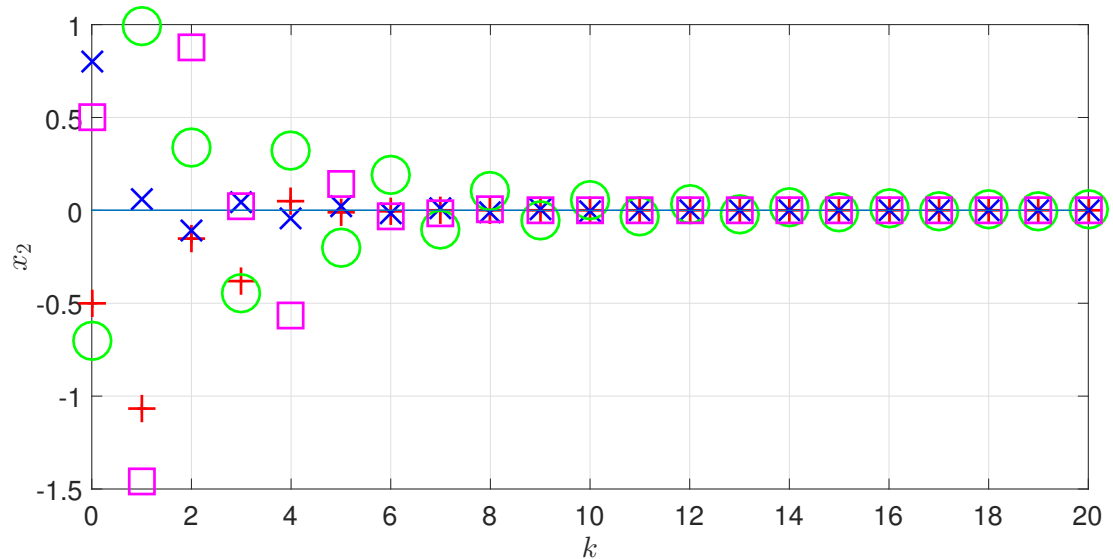
As trajetórias de $x_1(k)$ e $x_2(k)$ são mostradas nas Figuras 24 e 25 respectivamente, para condições iniciais diferentes.

Figura 24 – Trajetória da variável de estado x_1 para condições iniciais diferentes, sendo (+) para $x(0) = [1 \ -0,5]$, (x) para $x(0) = [-0,5 \ 0,8]$, (o) para $x(0) = [-0,95 \ -0,7]$, (□) para $x(0) = [1 \ 0,5]$.



Fonte: Próprio autor

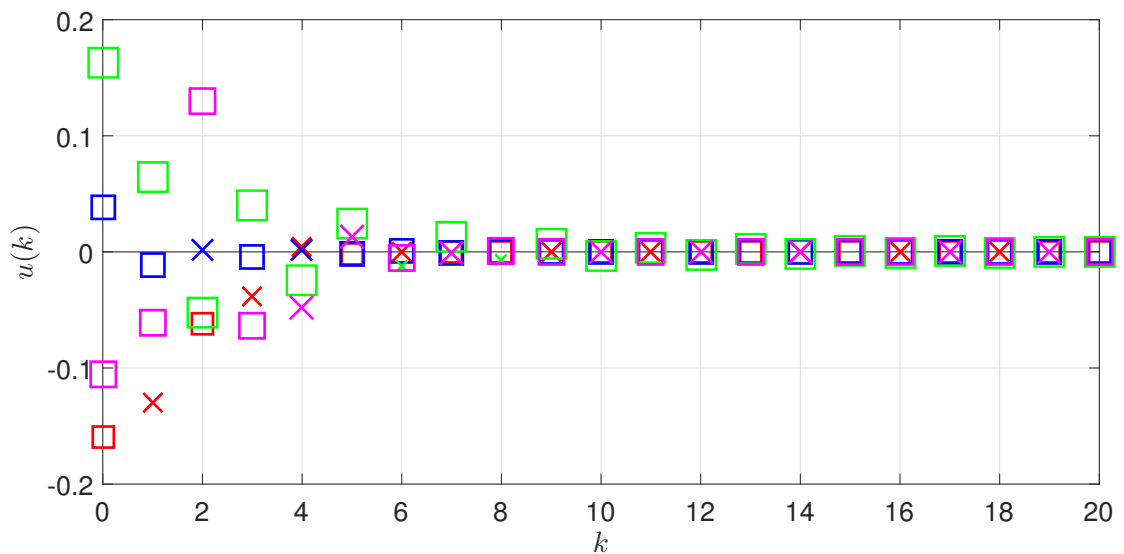
Figura 25 – Trajetórias da variável de estado x_2 para condições iniciais diferentes, sendo (+) para $x(0) = [1 \ -0,5]$, (x) para $x(0) = [-0,5 \ 0,8]$, (o) para $x(0) = [-0,95 \ -0,7]$ e (□) para $x(0) = [1 \ 0,5]$.



Fonte: Próprio autor

O sinal de controle com a seleção de ganhos do controlador é mostrado na Figura 26, também para condições iniciais diferentes.

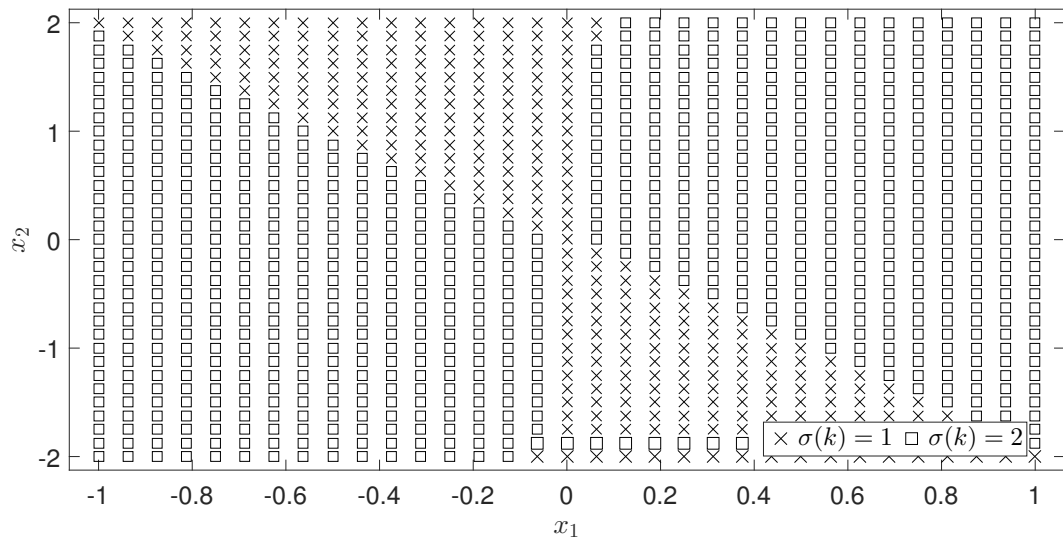
Figura 26 – Lei de controle chaveado (50): sinal de controle e $\sigma(k)$, sendo (x): $\sigma(k) = 1$ e (□): $\sigma(k) = 2$ para $x(0) = [1 \ -0,5]$, (x): $\sigma(k) = 1$ e (□): $\sigma(k) = 2$ para $x(0) = [-0,5 \ 0,8]$, (x): $\sigma(k) = 1$ e (□): $\sigma(k) = 2$ para $x(0) = [-0,95 \ -0,7]$ e (x): $\sigma(k) = 1$ e (□): $\sigma(k) = 2$ para $x(0) = [1 \ 0,5]$.



Fonte: Próprio autor

A Figura 27 apresenta a representação da lei de controle chaveado.

Figura 27 – Representação da lei de controle chaveado, sendo $(x) = \sigma(k) = 1$ e $(\square) = \sigma(k) = 2$.



Fonte: Próprio autor

A Tabela 3 apresenta uma comparação dos valores de β com o Teorema 9 proposto para os Exemplos 6, 7 e 8.

Tabela 3 – Factibilidade para β utilizando o Teorema 9 e Exemplos 6, 7 e 8.

Teorema	Exemplo	Factibilidade β
8	6	$\beta \leq 1,3$
8	7	$\beta \leq 1,02$
8	8	$x_1(k) \in [-\infty, \infty]$

4.2 CONCLUSÕES PARCIAIS

Considerando condições mais restritivas de desempenho no sistema, foi proposto neste capítulo o Teorema 9 que inclui a taxa de decaimento no Teorema 8. Foram apresentados os mesmos exemplos do Capítulo 3 e pode-se observar que mesmo com a taxa de decaimento foram obtidos controladores que tornaram o sistema estável utilizando as restrições SOS do Teorema 9 com as funções polinomiais.

Foram realizadas simulações em três exemplos. No Exemplo 6 foi considerada uma planta não linear discreta no tempo modelada através de modelos fuzzy T-S, portanto, foi definida uma região de operação para x_1 e foram realizadas as simulações com o Teorema

9. Os resultados obtidos foram satisfatórios e mais vantajosos do que os apresentados em (Oliveira *et al.*, 2018) para taxa de decaimento de 0,9 até 0,1, ou seja, todos os valores de β do Teorema 9 foram maiores que o Teorema 10.

No Exemplo 7, foi mantida a planta com uma região limitada por β porém, foi acrescentado $x_2(k)$ no sistema não linear invariante no tempo tornando a planta polinomial. Os resultados encontrados foram satisfatórios e comprovados através de figuras.

A grande vantagem em utilizar SOS, é a não necessidade de limitar a região de operação como é feito utilizando modelagens de sistemas fuzzy T-S, ou seja, quando um projeto de controladores é encontrado tornando um sistema factível, é para a região $x_1(k) \in [-\infty, \infty]$ e $x_2(k) \in [-\infty, \infty]$. No Exemplo 8, o valor de β do Exemplo 6 foi trocado por $x_1(k)$, e foi encontrado novos controladores utilizando a lei de controle chaveada, as restrições SOS do Teorema 9 e a planta discreta no tempo não linear e polinomial.

5 CONCLUSÕES E PESQUISAS FUTURAS

5.1 CONCLUSÕES

Uma teoria moderna de controle para sistemas contínuos no tempo já vem se estabelecendo há décadas, porém a busca por novos métodos que se aproximem mais do sistema real com projetos de sistemas de controle que alcancem o desempenho ideal de sistemas dinâmicos está cada vez maior.

Os modelos fuzzy T-S vem sendo estendidos para os modelos fuzzy polinomiais e, com isso, uma gama mais ampla de plantas não lineares podem ser representadas. Um controlador fuzzy polinomial foi proposto para controlar uma planta não linear baseado no modelo fuzzy polinomial. A dificuldade é a existência dos termos não lineares nos sistemas dos controladores, sendo que a abordagem baseada em LMIs é substituída pela abordagem em decomposição em soma de quadrados (SOS) para analisar a estabilidade do sistema polinomial que são mais complexos.

Neste trabalho, foi realizado um estudo sobre as teorias existentes na literatura para análise e projeto de controle de sistemas não lineares incertos discretos no tempo com objetivo de propor novos teoremas que apresentassem melhores desempenhos para encontrar controladores que estabilizem o sistema do que os existentes na literatura.

No Capítulo 3, foi proposto o Teorema 8 em que foi projetado um controlador utilizando sistemas polinomiais discretos no tempo e matrizes simétricas definidas positivas P_i , utilizando a lei de controle chaveada e uma função candidata de Lyapunov não quadrática. Foram realizadas simulações considerando três exemplos. O primeiro exemplo é comumente encontrado na literatura e o objetivo é encontrar o maior valor de β que estabilize o sistema. Foi utilizado esse exemplo com o intuito de comparar os novos teoremas com restrições SOS e analisar o seu desempenho. Os resultados obtidos foram satisfatórios, pois, apesar de ser encontrado o mesmo valor de β existente na literatura ($\beta = 1,0161$) por estar utilizando funções polinomiais já é uma vantagem inclusive nos ganhos das matrizes. No Exemplo 4 foi acrescentado $x_2(k)$ na planta do Exemplo 3 e foram obtidos novos controladores para o valor de $\beta \leq 1,6$ e $x_2(k) \in [-\infty, \infty]$. No Exemplo 5 foi utilizada a planta do Exemplo 3, substituindo β por $x_1(k)$, tornando a planta polinomial e foi encontrada factibilidade para $x_1(k) \in [-\infty, \infty]$, ou seja, não foi necessário restringir a região de operação do sistema como acontece nos modelos fuzzy T-S, deixando os resultados muito satisfatórios e menos conservadores.

No Capítulo 4, foi adicionado a taxa de decaimento no Teorema 8, sendo apresentado o Teorema 9. Assim como no capítulo anterior, foram comprovados os resultados pelos Exemplos 6, 7 e 8 com figuras que comprovaram seus desempenhos satisfatórios.

As programações foram feitas com taxas de decaimento de 0,1 até 0,9 e foram encontrados controladores que estabilizassem o sistema discreto no tempo utilizando as restrições SOS do Teorema 9. Considerando o Exemplo 6 todos os valores de β encontrados foram melhores do que os apresentados utilizando o Teorema 10 (Santos, 2020), os resultados comparativos podem ser observados na Tabela 2.

No Exemplo 7 foi incluído $x_2(k)$ na planta não linear discreta no tempo do Exemplo 6, tornando a planta do Exemplo 7 polinomial, porém, como ainda foi mantido β , ele foi modelado a partir do modelo fuzzy T-S do Exemplo 6. Foi encontrada factibilidade para as taxas de decaimento de $\lambda = 0,9$ até $\lambda = 0,1$ e os resultados foram ilustrados através das figuras. No Exemplo 8 foi considerada a planta polinomial com $x_1(k)$ e realizada as programações através do Teorema 9. Mesmo com a restrição de desempenho que foi considerada (taxa de decaimento λ) os resultados obtidos foram satisfatórios utilizando a planta não linear discreta no tempo polinomial com as restrições SOS do Teorema 9 e encontrados novos controladores que tornaram o ponto de equilíbrio $x = 0$ do sistema controlado assintoticamente estável para todos os valores de λ e não limitando a região de operação, sendo factível para $x_1(k) \in [-\infty, \infty]$

A utilização do SOS nos teoremas de controle mostraram resultados vantajosos e menos conservadores do que os existentes na literatura utilizando modelos fuzzy T-S. Isto porque quando se utiliza as restrições SOS com funções polinomiais a factibilidade do sistema é encontrada para $x_1(k) \in [-\infty, \infty]$ e $x_2(k) \in [-\infty, \infty]$. Também pode-se observar que dependendo do valor da taxa de decaimento houve mais chaveamento quando projetado o controlador e também uma melhor resposta do sistema como pode-se analisar nas figuras dos Capítulos 3 e 4. Portanto deve-se verificar qual o objetivo ao projetar o novo controlador e analisar todas as circunstâncias afim de encontrar o melhor projeto do controlador que estabilize a planta de acordo com o interesse do projetista.

5.2 PESQUISAS FUTURAS

Como continuidade do trabalho pode-se listar os seguintes tópicos para sistemas discretos no tempo com restrições SOS:

- Incrementar os teoremas obtidos considerando custo garantido.
- Considerar nos teoremas redução da norma H_∞ e também saturação no atuador comprovando os resultados através de exemplos.
- Utilizar outros exemplos existentes na literatura para estudo e comparação dos resultados.

Referências

- ASSUNÇÃO, E. *et al.* Robust state-derivative feedback LMI based designs for multivariable linear systems. **International Journal of Control**, Taylor & Francis, v. 80, n. 8, p. 1260–1270, 2007.
- BERNUSSOU, J.; PERES, P. L. D.; GEROMEL, J. C. A linear programming oriented procedure for quadratic stabilization of uncertain systems. **Systems Control Letters**, Amsterdam, v. 13, n. 1, p. 65–72, jul. 1989.
- BOSE, N.; LI, C. A quadratic form representation of polynomials of several variables and its applications. **IEEE Transactions on Automatic Control**, IEEE, v. 13, n. 4, p. 447–448, 1968.
- BOYD, S. *et al.* **Linear matrix inequalities in system and control theory**. 2. ed. Philadelphia: SIAM Society for Industrial and Applied Mathematics, 1994. v. 15. (SIAM Studies in Applied Mathematics, v. 15).
- BUZETTI, A. S. **Projeto de Controle Robusto Chaveado com Falhas nos Sensores**. 2017. 88 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) — Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2017.
- CAMPELLO, R. J. G. B. Arquiteturas e metodologias para modelagem e controle de sistemas complexos utilizando ferramentas clássicas e modernas. Campinas: Biblioteca Digital da Unicamp, 2002.
- CAO, K. *et al.* Analysis of stability and robust stability of polynomial fuzzy model-based control systems using a sum-of-squares approach. **Soft Computing**, Springer, v. 18, n. 3, p. 433–442, 2014.
- CARDIM, R. *et al.* Controle de um levitador magnético utilizando modelos fuzzy e derivada de estado da planta. *In*: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE AUTOMAÇÃO INTELIGENTE - SBAI, 8., 2007, Florianópolis. **Anais ...** Florianópolis: Sociedade Brasileira de Automática - SBA, 2007.
- CASTRO, J. Fuzzy logic controllers are universal approximators. **IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics**, New York, v. 25, n. 4, p. 629–635, abr. 1995.
- CHEN, C.-T. **Linear system theory and design**. [*S.l.*: *s.n.*]: Saunders college publishing, 1984.
- CHEN, Y.-J. *et al.* Relaxed stabilisation criterion for discrete T-S fuzzy systems by minimum-type piecewise non-quadratic Lyapunov function. **IET Control Theory & Applications**, IET, v. 6, n. 12, p. 1918–1925, 2012.
- CHEN, Y.-J. *et al.* Discrete polynomial fuzzy systems control. **IET Control Theory & Applications**, Wiley Online Library, v. 8, n. 4, p. 288–296, 2014.
- DEAECTO, G. S.; GEROMEL, J. C.; DAAFOUZ, J. Switched state-feedback control for continuous time-varying polytopic systems. **International Journal of Control**, Taylor & Francis, v. 84, n. 9, p. 1500–1508, 2011.

- DING, B.; SUN, H.; YANG, P. Further studies on lmi-based relaxed stabilization conditions for nonlinear systems in Takagi-Sugeno's form. **Automatica**, Elsevier, v. 42, n. 3, p. 503–508, 2006.
- DRIANKOV, D.; HELLENDORF, H.; REINFRANK, M. **An introduction to fuzzy control**. New York: Springer-Verlag, 1993.
- DUTTA, S. Fuzzy logic applications: Technological and strategic issues. **IEEE Transactions on Engineering Management**, New York, v. 40, n. 3, p. 237–254, ago. 1993.
- ELIA, N.; MITTER, S. Stabilization of linear systems with limited information. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 46, n. 9, p. 1384–1400, 2001.
- GASSARA, H.; HAJJAJI, A. E.; CHAABANE, M. Control of time delay polynomial fuzzy model subject to actuator saturation. **International Journal of Fuzzy Systems**, Springer, v. 18, n. 5, p. 763–772, 2016.
- GATERMANN, K.; PARRILO, P. A. Symmetry groups, semidefinite programs, and sums of squares. **Journal of Pure and Applied Algebra**, Elsevier, v. 192, n. 1-3, p. 95–128, 2004.
- GEROMEL, J. C.; DEAECTO, G. S. Switched state feedback control for continuous-time uncertain systems. **Automatica**, Elsevier, v. 45, n. 2, p. 593–597, 2009.
- GRAHAM, A. **Kronecker products and matrix calculus with applications**. [S.l.: s.n.]: Courier Dover Publications, 2018.
- GUELTON, K. *et al.* Sum-of-squares stability analysis of Takagi-Sugeno systems based on multiple polynomial lyapunov functions. **International Journal of Fuzzy Systems**, v. 15, n. 1, 2013.
- GUERRA, T. M.; KRUSZEWSKI, A.; BERNAL, M. Control law proposition for the stabilization of discrete Takagi-Sugeno models. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, IEEE, v. 17, n. 3, p. 724–731, 2008.
- GUERRA, T. M.; VERMEIREN, L. LMI based relaxed nonquadratic stabilization conditions for nonlinear systems in the Takagi-Sugeno's form. **Automatica**, v. 40, n. 5, p. 823–829, 2004. ISSN 0005-1098. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0005109803003972>.
- HUANG, W.-C.; HONG-FEI, S.; JIAN-PING, Z. Robust control synthesis of polynomial nonlinear systems using sum of squares technique. **Acta Automatica Sinica**, Elsevier, v. 39, n. 6, p. 799–805, 2013.
- JENNAWASIN, T.; NARIKIYO, T.; KAWANISHI, M. An improved SOS based stabilization condition for uncertain polynomial systems. *In*: **Proceedings of SICE Annual Conference 2010**. [S.l.: s.n.], 2010. p. 3030–3034.
- KALMAN, R.; BERTRAM, J. Control system analysis and design via the second method of Lyapunov:(i) continuous-time systems (ii) discrete time systems. **IRE Transactions on Automatic Control**, IEEE, v. 4, n. 3, p. 112–112, 1959.

-
- KLUG, M.; CASTELAN, E. B.; COUTINHO, D. A T–S fuzzy approach to the local stabilization of nonlinear discrete-time systems subject to energy-bounded disturbances. **Journal of Control, Automation and Electrical Systems**, v. 26, p. 191–200, 2015.
- KLUG, M. *et al.* Fuzzy dynamic output feedback control through nonlinear Takagi-Sugeno models. **Fuzzy Sets and Systems**, Elsevier, v. 263, p. 92–111, 2015.
- KOSKO, B. **Fuzzy engineering**. Upper Saddle River: Prentice-Hall, 1997.
- LAM, H. K. Lmi-based stability analysis for fuzzy-model-based control systems using artificial T–S fuzzy model. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, v. 19, n. 3, p. 505–513, 2011.
- LAM, H.-K. Polynomial fuzzy model based control systems: Stability analysis via piecewise-linear membership functions. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, IEEE, v. 19, n. 3, p. 588–593, 2011.
- LAM, H. K. *et al.* Stability analysis of polynomial-fuzzy-model-based control systems using switching polynomial lyapunov function. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, v. 21, n. 5, p. 800–813, 2013.
- LEE, C. Fuzzy logic in control systems: fuzzy logic controller. I. **IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics**, New York, v. 20, n. 2, p. 404–418, 1990.
- LEE, D. H.; JOO, Y. H. On the generalized local stability and local stabilization conditions for discrete-time Takagi-Sugeno fuzzy systems. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, IEEE, v. 22, n. 6, p. 1654–1668, 2014.
- LEE, D. H.; JOO, Y. H.; TAK, M. H. Linear matrix inequality approach to local stability analysis of discrete-time Takagi-Sugeno fuzzy systems. **IET Control Theory & Applications**, Wiley Online Library, v. 7, n. 9, p. 1309–1318, 2013.
- LFBERG, J. A toolbox for modeling and optimization in MATLAB. *In: Proceedings of the Conference on Computer-Aided Control System Design (CACSD)* p. [S.l.: s.n.], 2004. v. 284289.
- LI, W.; WANG, W. Guaranteed cost control for polynomial discrete fuzzy time delay systems by sum-of-squares approach. *In: 2012 Fifth International Conference on Information and Computing Science*. [S.l.: s.n.], 2012. p. 178–181.
- LI, W.; WANG, W. Guaranteed cost control for polynomial fuzzy time delay systems by sum-of-squares approach. *In: IEEE. Proceedings of the 10th World congress on intelligent control and automation*. [S.l.: s.n.], 2012. p. 1806–1811.
- LI, X.; MEHRAN, K.; BAO, Z. Membership function, time delay-dependent η -exponential stabilization of the positive discrete-time polynomial fuzzy model control system. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, v. 30, n. 7, p. 2197–2209, 2022.
- MÁRQUEZ, R. *et al.* Asymptotically necessary and sufficient conditions for Takagi-Sugeno models using generalized non-quadratic parameter-dependent controller design. **Fuzzy Sets and Systems**, Elsevier, v. 306, p. 48–62, 2017.
- MENDEL, J. Fuzzy logic systems for engineering: A tutorial. New York, v. 83, n. 3, p. 345–377, 1995.

- MENDEL, J. M.; JOHN, R. I.; LIU, F. Interval type-2 fuzzy logic systems made simple. **IEEE transactions on fuzzy systems**, IEEE, v. 14, n. 6, p. 808–821, 2006.
- NGUANG, S. K.; SAAT, S.; KRUG, M. Static output feedback controller design for uncertain polynomial systems: an iterative sums of squares approach. **Control Theory Applications, IET**, IET, Stevenage, v. 5, n. 9, p. 1079–1084, June 2011.
- OLIVEIRA, D. R. de. **Controle \mathcal{H}_∞ Chaveado para Sistemas Não Lineares Incertos Descritos por Modelos Fuzzy T-S Considerando Região de Operação e Saturação do Sinal de Controle**. 2017. 2017. 108 p. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) — Faculdade de Engenharia, Unversidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2017.
- OLIVEIRA, D. R. de *et al.* On switched control of discrete-time Takagi-Sugeno fuzzy systems with unknown membership functions. *In: IEEE. 2018 IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE)*. [*S.l.: s.n.*], 2018. p. 1–8.
- PAPACHRISTODOULOU, A. *et al.* Sum of squares optimization toolbox for MATLAB user’s guide. **arXiv preprint arXiv:1310.4716**, 2013.
- PAPACHRISTODOULOU, A.; PRAJNA, S. On the construction of lyapunov functions using the sum of squares decomposition. *In: IEEE. Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control, 2002*. [*S.l.: s.n.*], 2002. v. 3, p. 3482–3487.
- PARRILO, P. A. **Structured semidefinite programs and semialgebraic geometry methods in robustness and optimization**. 2000. 209 f. 2000. Tese (Doutorado) — California Institute of Technology, 2000.
- PARRILO, P. A. Sum of squares programs and polynomial inequalities. *In: SIAG/OPT Views-and-News: A Forum for the SIAM Activity Group on Optimization*. [*S.l.: s.n.*], 2004. v. 15, n. 2, p. 7–15.
- PRAJNA, S.; PAPACHRISTODOULOU, A.; WU, F. Nonlinear control synthesis by sum of squares optimization: A Lyapunov-based approach. *In: ASIAN CONTROL CONFERENCE, 5., 2004, Melbourne. Proceedings...* Melbourne: IEEE, 2004. v. 1, p. 157–165.
- RAMOS, I. T. M. **Projeto de Controladores Robustos Chaveados para Sistemas Não Lineares Baseados na Decomposição em Soma de Quadrados**. 2018. 2018. 103 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) — Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2018.
- REZNICK, B. Extremal psd forms with few terms. **Duke mathematical journal**, Duke University Press, v. 45, n. 2, p. 363–374, 1978.
- ROCHA, T. C. T. **Domínios positivamente invariantes de sistemas lineares com restrições nas variáveis de controle**. 1994. 1994. 117 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) — Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 1994.
- SANTIM, M. P. A. *et al.* Design of a Takagi-Sugeno fuzzy regulator for a set of operation points. **Mathematical Problems in Engineering**, New York, v. 2012, p. 17, apr. 2012.

SANTOS, G. R. dos. **Controle Chaveado e \mathcal{H}_∞ Chaveado De Sistemas Não Lineares Incertos Discretos No Tempo Descritos Por Modelos Fuzzy T-S Considerando Região De Operação e Saturação Dos Atuadores**. 2020. Tese (Doutorado) — Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, 2020.

SEILER, P. SOSOPT: a toolbox for polynomial optimization. [S. l.: s. n.], 2013.

ŠILJAK, D. D.; STIPANOVIĆ, D. M. Robust stabilization of nonlinear systems: the LMI approach. **Mathematical Problems in Engineering**, New York, v. 6, n. 5, p. 461–493, jun. 2000.

SLOTINE, J. J. E.; LI, W. *et al.* **Applied nonlinear control**. [S.l.: s.n.]: prentice-Hall, 1991. v. 199. 461 p.

SOUZA, W. A. d. *et al.* On switched regulator design of uncertain nonlinear systems using Takagi-Sugeno fuzzy models. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, New York, v. 22, n. 6, p. 1720–1727, 2014.

SOUZA, W. A. de. **Projeto de controladores robustos chaveados para sistemas não lineares descritos por modelos fuzzy Takagi-Sugeno**. 2013. 2013. 93 f. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) — Faculdade de Engenharia, Unversidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2013.

STURM, J. F. Using SEDUMI 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones. **Optimization Methods and Software**, Taylor Francis, v. 11, n. 1-4, p. 625–653, 1999. Disponível em: <https://doi.org/10.1080/10556789908805766>.

TAKAGI, T.; SUGENO, M. Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control. **IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics**, New York, v. 15, n. 1, p. 116–132, feb. 1985.

TANAKA, K.; IKEDA, T.; WANG, H. O. Fuzzy regulators and fuzzy observers: Relaxed stability conditions and LMI-based designs. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, New York, v. 6, n. 2, p. 250–265, may 1998.

TANAKA, K.; OHTAKE, H.; WANG, H. O. Guaranteed cost control of polynomial fuzzy systems via a sum of squares approach. **IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics)**, IEEE, v. 39, n. 2, p. 561–567, 2008.

TANAKA, K. *et al.* Stabilization of polynomial fuzzy systems via a sum of squares approach. *In: IEEE. 2007 IEEE 22nd International Symposium on Intelligent Control*. [S.l.: s.n.], 2007a. p. 160–165.

TANAKA, K. *et al.* A sum of squares approach to stability analysis of polynomial fuzzy systems. *In: 2007 American Control Conference*. [S.l.: s.n.], 2007b. p. 4071–4076.

TANAKA, K. *et al.* A sum-of-squares approach to modeling and control of nonlinear dynamical systems with polynomial fuzzy systems. **IEEE Transactions on Fuzzy systems**, IEEE, v. 17, n. 4, p. 911–922, 2008.

TANIGUCHI, T. *et al.* Model construction, rule reduction, and robust compensation for generalized form of Takagi-Sugeno fuzzy systems. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, New York, v. 9, n. 4, p. 525–537, aug. 2001.

TEIXEIRA, M. C. M.; ASSUNÇÃO, E.; AVELLAR, R. G. On relaxed LMI-based designs for fuzzy regulators and fuzzy observers. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, New York, v. 11, n. 5, p. 613–623, out. 2003.

TEIXEIRA, M. C. M.; ŽAK, S. H. Stabilizing controller design for uncertain nonlinear systems using fuzzy models. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, New York, v. 7, n. 2, p. 133–142, abr. 1999.

WANG, H. O.; TANAKA, K.; GRIFFIN, M. F. An approach to fuzzy control of nonlinear systems: stability and design issues. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, v. 4, n. 1, p. 14–23, Feb 1996. ISSN 1063-6706.

XIAO, B. *et al.* Sampled-data output-feedback tracking control for interval type-2 polynomial fuzzy systems. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, v. 28, n. 3, p. 424–433, 2020.

XU, J.; XIE, L.; WANG, Y. Simultaneous stabilization and robust control of polynomial nonlinear systems using SOS techniques. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 54, n. 8, p. 1892–1897, 2009.

YU, G.-R.; HUANG, Y.-C.; CHENG, C.-Y. Robust h controller design for polynomial fuzzy control systems by sum-of-squares approach. **IET Control Theory & Applications**, Wiley Online Library, v. 10, n. 14, p. 1684–1695, 2016.

YUM, G.-R.; WANG, W.-Y. SOS based fuzzy control of a wheeled mobile robot with decay rate. *In: 2013 IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics*. [*S.l.: s.n.*], 2013. p. 4700–4705.