unesp

Programa de Pós-Graduação em Ensino e Processos Formativos
Ilha Solteira/Jaboticabal/São José do Rio Preto

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO MESQUITA FILHO”
FACULDADE DE ENGENHARIA
CÂMPUS DE ILHA SOLTEIRA

SUELLEN MOURA DE PAIVA

A CONCEITUAÇÃO DO PENSAMENTO GEOMÉTRICO: aspectos históricos, filosóficos e as visões presentes em teses e dissertações no Brasil

Ilha Solteira
2021

SUELLEN MOURA DE PAIVA

A CONCEITUAÇÃO DO PENSAMENTO GEOMÉTRICO: aspectos históricos, filosóficos e as visões presentes em teses e dissertações no Brasil

Dissertação apresentada junto à Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira – UNESP e ao Programa de Pós-Graduação em Ensino e Processos Formativos como parte dos requisitos para obtenção do título de mestre.

Linha de Pesquisa: Educação Matemática

Orientador: Prof. Dr. Inocêncio Fernandes Balieiro Filho

Ilha Solteira
2021

FICHA CATALOGRÁFICA
Desenvolvido pelo Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação

P149a

Paiva, Suellen Moura.

Aconceituação do pensamento geométrico: aspectos históricos, filosóficos e as visões presentes em teses e dissertações no brasil / Suellen Moura Paiva. -- Ilha Solteira: [s.n.], 2021

183 f. : il.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira. Área de conhecimento: Ensino e Processos Formativos, 2021

Orientador: Inocêncio Fernandes Balieiro Filho

Inclui bibliografia

1. Pensamento geométrico. 2. Kant. 3. Modelo de conhecimento. 4. Ensino e aprendizagem. 5. Formação de professores.

Raiane da Silva Santos

Raiane da Silva Santos
Supervisora Técnica de Seção
Seção Técnica de Referência, Atendimento ao usuário e Documentação
Diretoria Técnica de Biblioteca e Documentação
CRB/8 - 9999

unesp

Programa de Pós-Graduação em
Ensino e Processos Formativos
Ilha Solteira/Jaboticabal/São José do Rio Preto

CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

A CONCEITUAÇÃO DO PENSAMENTO GEOMÉTRICO: Aspectos históricos, filosóficos e as visões presentes em teses e dissertações no Brasil

Autora: **SUELLEN MOURA DE PAIVA**

Orientador: **INOCÊNCIO FERNANDES BALIEIRO FILHO**

Aprovada como parte das exigências para obtenção do Título de Mestra em ENSINO E PROCESSOS FORMATIVOS, pela Comissão Examinadora:

Prof. Dr. INOCÊNCIO FERNANDES BALIEIRO FILHO (Participação Virtual)
Departamento de Matemática / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira - UNESP

Profa. Dra. RITA DE CASSIA PAVAN LAMAS (Participação Virtual)
Departamento de Matemática / Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas de Rio Preto - UNESP

Prof. Dr. VITOR MORETTO FERNANDES DA SILVA (Participação Virtual)
Universidade Federal do Mato Grosso do Sul - UFMS

Ilha Solteira, 24 de maio de 2021.

À minha família, dedico-lhes essa conquista
pelo amor, carinho, apoio e oração
dedicados até aqui.

AGRADECIMENTOS

A Deus, pelo amor e pela misericórdia derramada sobre a minha vida, bem como por iluminar a minha mente nos momentos difíceis, dando-me força e coragem para continuar.

Agradeço a minha mãe e meu padrasto, Paula e Raul, que, com humildade, honestidade e muito trabalho, fizeram-me melhor. A vocês toda a minha gratidão.

Aos meus irmãos, Bruno e Paola, que sempre me apoiaram e vibraram com as minhas conquistas. A vocês todo meu amor e carinho.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Inocêncio Fernandes Balieiro Filho, que me auxiliou e esteve presente em todo processo, desde a idealização do projeto, contribuindo com o desenvolvimento do trabalho e ajudando-me a acreditar na minha ideia. Um exemplo de profissional, que levarei por toda a vida. A você, toda a minha admiração.

Agradeço também aos meus amigos, com quem divido todas as minhas alegrias e angustias, especialmente as minhas colegas de republica que fizeram os meus dias mais felizes.

Aos meus queridos e amados amigos, Sofia, Alissan, Nayana, Elisa e Paulo Henrique, pelos conselhos, paciência e amizade. Obrigada por sempre acreditarem em mim.

A minha Poderosa (Gabriela), minha irmã do coração. Obrigada por ser minha família, por não me deixar sozinha, por ser minha companheira de moradia, de almoços de domingo, de estudos, de fé e de vida. Obrigada por tudo!

A todos aqueles que acreditaram ser possível e contribuíram para meu crescimento e aprendizado.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

A geometria existe por toda parte. É preciso, porém, olhos para vê-la, inteligência para compreendê-la e alma para admirá-la (Johannes Kepler).

RESUMO

Partindo do pressuposto que o pensamento geométrico é parte das nossas atividades cotidianas e essencial em todos os ramos da Matemática, a presente pesquisa tem por objetivo estabelecer uma análise epistemológica sobre o pensamento geométrico no ensino e aprendizagem de Matemática e seus significados nas teses e dissertações brasileiras que relacionam esse tema a formação de professores de Matemática. Para isso, num primeiro momento, buscando estabelecer uma análise dos aspectos ontológicos e epistemológicos do pensamento geométrico, foi elaborado um panorama histórico e filosófico das discussões sobre o papel das representações visuais e do pensamento geométrico no processo de construção do conhecimento matemático. Em seguida, nosso objetivo foi elaborar um Estado da Arte sobre as conceituações de pensamento geométrico presentes nas teses e dissertações brasileiras que tratam desse tema na formação de professores de Matemática. Mediante a realização de tal mapeamento, constatou-se uma divergência entre as percepções e abordagens dadas ao ensino de Geometria e sua importância na formação inicial ou continuada de professores de Matemática. A pesquisa realizada deixou evidente a fragilidade na exploração do pensamento geométrico na formação dos professores de matemática. Além disso, percebemos também que as potencialidades do pensamento geométrico na formação inicial do professor são pouco exploradas. Por meio dos dados obtidos, podemos afirmar que as representações visuais podem ser exploradas não somente como facilitadoras para a compreensão de um conceito, mas também para a construção do conhecimento relacionado a um dado conteúdo. Diante disso, acreditamos que a presente pesquisa seja relevante para o atual cenário de ensino e aprendizagem da Matemática, em especial, ao ensino de Geometria, para a formação de professores e para os futuros investigadores da área de Educação Matemática. A pesquisa foi desenvolvida por meio de uma abordagem qualitativa, mediante a metodologia de análise documental e Estado da Arte.

Palavras-Chave: pensamento geométrico; Kant; modelo de conhecimento; ensino e aprendizagem; formação de professores.

ABSTRACT

Based on the assumption that geometric thinking is part of our daily activities and essential in all branches of mathematics, this research aims to establish an epistemological analysis of geometric thinking in teaching and learning of Mathematics and its meanings in theses and Brazilian dissertations that relate this topic to the educational training of mathematics teachers. For this, at first, seeking to establish an analysis of the epistemological aspects of geometric thinking, a historical and philosophical panorama of the discussions on the role of visual representations and geometric thinking in the process of building mathematical knowledge was elaborated. Then, our objective is to elaborate a State of the Art on the conceptualizations of geometric thinking presented in Brazilian theses and dissertations that deal with this theme in the educational training of mathematics teachers. Through the realization of the mapping, a divergence was found between the perceptions and approaches given the approaches of Geometry and its importance in the initial or continuing education of Mathematics teachers. The research carried out made evident the fragility in the exploration of geometric thought in the formation of mathematics teachers. In addition, we also realize that the potential of geometric thinking in the initial teacher education is little explored. Through the obtained data, we can affirm that the visual representations can be explored not only as facilitators for the understanding of a concept, but also for the construction of the knowledge related to a given content. In view of this, we believe that the present research is relevant to the current scenario of teaching and learning mathematics, in particular, the teaching of geometry, for the training of teachers and for future researchers in the area of mathematics education. The research was developed through a qualitative approach, using the document analysis and State of the Art methodology.

Keywords: geometric thinking; Kant; knowledge model; teaching and learning; teacher training.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A Matemática Pura, de acordo com a classificação formulada pela Sociedade Americana de Matemática, se divide em sete áreas: Fundamentos, Teorias dos Números, Álgebra, Combinatória, Geometria, Topologia e Análise Matemática. No Brasil, o documento Diretrizes Curriculares para os Cursos de Matemática (BRASIL, 2010) também segue essa divisão. Da mesma forma, os currículos de Matemática da educação básica (Base Nacional Comum Curricular, Currículo de Matemática do Estado de São Paulo, por exemplo) são construídos considerando essas áreas. Essas divisões, ainda que sejam úteis para a classificação do conhecimento matemático, podem levar os alunos (de diferentes níveis de ensino) a enxergarem uma compartimentação do pensamento matemático, dissociando, por exemplo, a Geometria de outras áreas e, em consequência, o pensamento geométrico e as representações visuais do pensamento matemático.

A Geometria é parte de todos os ramos da Matemática, mas, além disso, o pensamento geométrico é parte das nossas atividades cotidianas. Conforme apontam Johnston-Wilder e Mason (2005), mover móveis em uma casa, montar móveis, ler mapas, usar o sistema de posicionamento global, interpretar perspectiva numa obra de arte ou fotografia são alguns exemplos de uso cotidiano da Geometria e, dessa forma, os alunos, em diferentes níveis de ensino, já vivenciaram situações em que usaram o pensamento geométrico. Assim, para aprender Matemática e, em especial, Geometria, os alunos devem ser encorajados a usar o pensamento geométrico.

De acordo com Giaquinto (2007), o pensamento geométrico pode ser trabalhado por meio das representações visuais, da imaginação visual ou percepção visual e essas representações são exploradas nos livros didáticos de ensino básico, nas pesquisas em Educação Matemática, em atividades de alunos da graduação na tentativa de resolver problemas, no trabalho dos professores ao apresentar os conteúdos matemáticos em sala de aula, nos trabalhos de pesquisa de matemáticos na tentativa de fazer descobertas e de construir demonstrações ou definições, e na experiência dos pesquisadores na tentativa de conceber métodos matemáticos e modelos de fenômenos naturais. Assim, a importância do pensamento geométrico em Matemática é evidente. Entretanto, o autor enfatiza que predomina uma visão de que a utilidade do emprego das representações visuais em Matemática é apenas psicológica, e não epistemológica.

> Representações visuais ou diagramas podem ilustrar casos de uma definição, dando-nos uma compreensão mais vívida de suas aplicações, podem nos ajudar a entender a descrição de uma situação matemática ou os passos em algum raciocínio dado, sentença por sentença; podem sugerir uma proposição para investigação ou uma ideia para uma demonstração. Assim, as representações visuais têm um papel facilitador. Mas isso é tudo, na visão predominante. Elas não são consideradas um recurso para descoberta, justificação, demonstração ou qualquer outra maneira de adicionar valor epistêmico ao nosso patrimônio matemático. (GIAQUINTO, 2007, p. 1).

Dessa forma, as representações visuais podem ser exploradas não somente como facilitadoras para a compreensão de um conceito, mas para a construção do conhecimento relacionado a um dado conteúdo.

A Matemática e, especialmente, a Geometria são componentes do currículo escolar porque fornecem um contexto para o desenvolvimento das habilidades de raciocínio dos alunos, com características que podem contribuir para o desenvolvimento intelectual geral dos alunos, bem como para o desenvolvimento do pensamento matemático. Além disso, fornecem habilidades e conhecimentos práticos que têm aplicações úteis em situações cotidianas e em uma ampla variedade de ocupações.

A Geometria tem um apelo intuitivo imediato em níveis elementares. Ainda que muitos problemas geométricos possam ser abordados de várias maneiras, podendo ser um assunto experimental e prático, em que os problemas são resolvidos por medições e cálculos, a geometria é, sobretudo, um assunto dedutivo, podendo usar raciocínio puramente geométrico ou abranger procedimentos algébricos.

A Álgebra não teve lugar na Geometria até o século XVII, quando Descartes estabeleceu a noção de coordenadas como uma maneira de descrever a posição de um ponto no plano ou espaço, levando à ideia de manipular equações no plano, para descrever retas e curvas em duas ou três dimensões. Desde então, a Geometria foi subdividida em duas vertentes: a geometria pura ou sintética que emprega apenas o raciocínio geométrico num estilo que foi formalizado há dois mil anos em *Os elementos* de Euclides (HEATH, 1967), mas que foi posteriormente simplificado e tornado mais acessível, e a Geometria Analítica ou de coordenadas que utiliza o poder da Álgebra para resolver problemas geométricos usando equações para curvas e empregando vetores e matrizes. A Geometria, especialmente, em sua forma pura ou sintética, é rica em problemas e teoremas que possuem um apelo intuitivo e requerem argumentos que podem ser simples, porém não tão rotineiros ou processuais, como é frequentemente o caso com uma abordagem puramente algébrica. Isso não significa subestimar a importância da Álgebra, pois ela tem um papel importante na Geometria e há muito a ganhar com a interação entre diferentes perspectivas sobre um problema. Desse modo, as representações geométricas são ferramentas significativas para lidar com problemas numéricos e algébricos.

Os argumentos para incluir a Geometria no currículo de Matemática estão intimamente ligados às razões pelas quais esse ramo do conhecimento é estudado, mas é interessante notar que a Geometria, na forma de um estudo detalhado em *Os Elementos* de Euclides, tinha um lugar dominante no currículo. É cada vez mais reconhecido que a Matemática deve ter um lugar central na educação de todos os estudantes e que a Geometria, de alguma forma, tem um papel vital no currículo mais amplo da Matemática. Para French (2004), três razões para incluir a Geometria no currículo são:

- Estender a consciência espacial;
- Desenvolver as habilidades de raciocínio;
- Estimular, desafiar e informar.

A Geometria vale a pena ser estudada por si mesma e é particularmente atraente tanto por ter um apelo visual imediato quanto por oferecer uma variedade de desafios em diferentes níveis. Ela é agradável, mas esse prazer é muitas vezes perdido porque o assunto é frequentemente apresentado na escola apenas como fatos a serem lembrados e procedimentos a serem seguidos para resolver problemas padrão, não como algo a ser explorado e analisado, para entender e dar sentido às suas riquezas. Aprender com sucesso a Geometria requer um conhecimento dos fatos, uma capacidade de raciocinar e uma capacidade menos definida de ver as características essenciais de uma configuração que fornecem pistas para resolver um problema ou demonstrar um teorema.

Segundo Oliveira (2009) grande parte do desinteresse dos alunos em relação à Matemática pode estar associado à fragmentação e descontextualização do currículo, metodologias, falta de motivação dos alunos (conteúdos) e conflitos (alunos e professores). A mecanização do ensino é um dos fatores prejudiciais no ensino de Matemática e ensinar por meio de exercícios de memorização não garante o aprendizado do aluno. Ao realizar inúmeros exercícios sucessivos e reproduzindo algoritmos pré-estabelecidos, pode contribuir para que o aluno somente decore o conteúdo que foi ensinado e reproduza somente aquilo que for necessário em uma atividade avaliativa, sem uma compreensão profunda do conteúdo abordado e podendo esquecê-lo algum tempo depois. Assim, esse aprendizado costuma ser temporário, pois o aluno não possui a necessidade de explorar conceitos vistos anteriormente, já que a sua ação é puramente mecânica. “A convicção popular é que de alguma maneira os alunos aprendem pelas listas de exercícios. Na realidade, os exercícios só podem ajudar os estudantes a ficarem mais rápidos no que eles já sabem.” (VAN DE WALLE, 2009, p. 88).

O processo de ensino e aprendizagem de Matemática tem se tornado cada vez mais desafiador para professores e alunos: “encontramos, dentro da Educação Matemática, resultados insatisfatórios obtidos na docência desta disciplina nos diversos níveis de ensino, ou seja, desde a pré-escola até a universidade” (CHAGAS, 2017, p. 240). O sucesso do ensino escolar pode ser definido por inúmeros fatores, e por mais que o professor tenha conhecimento em determinado campo da ciência, isso não é o suficiente para que ele consiga ser o mediador desses conhecimentos no processo de aprendizagem dos alunos. O currículo utilizado por ele e a escolha de metodologias de ensino adequadas são ferramentas essenciais para o sucesso de seu trabalho e é preciso levar em consideração o conhecimento que os alunos já possuem em torno dos assuntos que serão trabalhados e buscar os recursos didáticos mais apropriados para atingir os objetivos propostos em seu plano de aula.

No Brasil, com o intuito de estabelecer discussões que possam contribuir para a aprendizagem dos alunos, muitas pesquisas discutem a importância do desenvolvimento do pensamento geométrico e propõe atividades e abordagens que podem contribuir para isso.

Diante destes fatos, o objetivo da presente pesquisa foi estabelecer uma discussão epistemológica sobre o pensamento geométrico no ensino e aprendizagem de Matemática e seus significados em teses e dissertações brasileiras que relacionam esse tema a formação de professores de Matemática. Assim, apresentamos as seguintes questões de pesquisa: **O que é o pensamento geométrico e qual o papel do pensamento geométrico e das representações visuais na construção do conhecimento matemático? De que forma esse pensamento é definido em teses e dissertações brasileiras que tratam da formação de professores de Matemática?**

Buscando respostas a essas perguntas, a pesquisa proposta está inserida numa abordagem qualitativa. Para a discussão sobre o que é o pensamento geométrico e qual o papel do pensamento geométrico e das representações visuais na construção do conhecimento matemático, foi elaborada uma revisão histórica e filosófica, numa metodologia de análise documental. Já para a discussão sobre forma como o pensamento geométrico é definido nas teses e dissertações brasileiras que tratam da formação de professores de Matemática, foi usada a metodologia de Estado da Arte.

Diante disso, acreditamos que nossa investigação seja relevante para o atual cenário de ensino e aprendizagem da Matemática, em especial, ao ensino de Geometria, para a formação de professores e para os futuros investigadores da área de Educação Matemática.

Com a finalidade de encontrar respostas satisfatórias às questões diretrizes da nossa pesquisa, dividimos a investigação em etapas cujos resultados são apresentados nos próximos capítulos desta dissertação. Para melhor entendimento, este trabalho foi desenvolvido em quatro principais capítulos. Na introdução, apresentada no **Capitulo 1**, apresentamos os objetivos e motivações que norteiam este trabalho, além de um breve levantamento bibliográfico sobre o tema de investigação.

No **Capitulo 2** apresentamos o pensamento geométrico presente em algumas sociedades ou civilizações antigas, permitindo ao leitor ter uma compreensão sobre a origem e utilização dos elementos geométricos em seu cotidiano. Nesse contexto, apresentamos algumas culturas primitivas nas quais as representações de espaço tinham aspectos mais simbólicos em relação aos aspectos geométricos, ficando evidente a utilização de um sistema espacial geométrico euclidiano cuja concepção de geometria estava intimamente ligada à visão do espaço físico ambiental.

Já no **Capítulo 3,** discutimos como o homem concebe esses elementos geométricos a partir dos seus sentidos (sobretudo, considerando as representações visuais) e da sua intuição, para que possa compreendê-los. Trazemos também alguns aspectos da compreensão empírica e esquematismo empírico, além de tratarmos sobre o esquema geométrico e as construções geométricas.

No **Capítulo 4** é apresentado um estado da arte, cujas produções, de maneira geral, tratam do pensamento geométrico na formação de professores de matemática e, assim como defendido por Ferreira (2002), temos o desafio de conhecer o que já foi construído para depois apontarmos o que ainda não foi feito.

No capitulo seguinte, **Capítulo 5**, trazemos uma discussão sobre a importância do pensamento geométrico na formação de professores de matemática, apresentando a definição de Pensamento Geométrico na perspectiva de determinados autores, além de apresentar como ocorre o seu desenvolvimento. Ainda neste capitulo, discutimos a respeito do Pensamento Geométrico na Licenciatura em Matemática e o ensino de Geometria na Educação Básica.

Por fim, o **Capitulo 6** é dedicado às considerações finais da pesquisa.

2 O PENSAMENTO GEOMÉTRICO: ASPECTOS HISTÓRICOS E FILOSÓFICOS

Segundo a Grande Enciclopédia Portuguesa e Brasileira (1936), no sentido mais lato, designamos por *pensamento* como toda atividade psíquica, sendo elas o conjunto de fenômenos cognitivos, excluindo os sentimentos e as volições. Mais especificamente, *pensamento* seria o sinônimo de "intelecto", ou seja, ele permite compreender a matéria do conhecimento, na medida que se realiza um grau de síntese mais elevado que a percepção, a memória e a imaginação. Para Japiassu (1996), o *pensamento* é a atividade intelectual da qual o ser humano é capaz de formular conceitos e juízos, e, além disso,

> Do latim *pensare*, pensar, refletir. É a atividade da mente através da qual esta tematiza objetos ou toma decisões sobre a realização de uma ação. Atividade intelectual através da qual o espírito humano forma conceitos e formula juízos. Diferentemente do conhecimento, que visa apropriar-se dos dados empíricos ou conceituais, o pensamento constitui uma atividade intelectual visando à produção de um saber novo pela mediação da reflexão (JAPIASSU, p. 149, 1996).

Na Critica a Razão Pura, Kant (2001) afirma que "pensar é conhecer através de conceitos", e por meios dessas acepções, acerca das definições de pensamento, apresentamos neste capítulo os aspectos históricos e filosóficos do pensamento geométrico.

2.1 As origens do pensamento geométrico

Na busca de conhecer as origens do pensamento geométrico, os pesquisadores que analisaram estruturas espaciais primitivas observaram a ausência de nosso sistema usual de coordenadas tridimensionais, ou seja, um esquema com três coordenadas que nos possibilita especificar um ponto no espaço mediante essas coordenadas, cuja distância pode ser obtida a partir da origem dessas coordenadas até esse ponto específico e de relações projetivas, isto é, a exposição e a argumentação de métodos de construção de imagens das formas espaciais sobre um plano e os métodos de resolução de problemas de caráter geométrico pelas imagens fornecidas por aquelas formas espaciais. E, nessa perspectiva, segundo Magnani (2001), nossas estruturas espaciais provêm especialmente da Geometria Euclidiana.

> Nossas estruturas espaciais derivam sobretudo da Geometria Euclidiana. De acordo com esse ponto de vista, as representações primitivas do espaço eram provavelmente mais simbólicas que geométricas, portanto, simples e eventualmente mais próximas das representações topológicas intuitivas. (MAGNANI, 2001, p. 1)

Para iniciar e explicitar sua análise sobre o sentido de espaço conceitual, Magnani (2001), utiliza-se de casos obtidos de algumas culturas primitivas. Em seus estudos, conclui que as representações primitivas de espaço tinham um aspecto mais simbólico em relação aos aspectos geométricos; essa ocorrência se estabelece em razão de alguns conceitos de espaço apresentados nas sociedades primitivas.

> Começaremos nossa análise com alguns exemplos extraídos de culturas primitivas que ilustram o significado da expressão *espaço conceitual*. Os conceitos de espaço difundido nas sociedades primitivas foram dentro/fora, alto/baixo, central/periférico, direito/esquerdo, fechado/aberto, simétrico/assimétrico. Em minha opinião, perceber esses elementos como o reflexo intuitivo de uma ordem topológica, oposta à euclidiana e projetiva, não é muito correto. Na realidade, estruturas espaciais estão associadas aos efeitos dos significados apropriados incorporados na linguagem natural, e é por essa razão que dizemos que os espaços são “conceituais”. Estas são estruturas espaciais associadas a aspectos concretos do ambiente natural (por exemplo, céu/terra, vila/floresta). Às vezes, são cristalizadas em objetos externos, estruturas, artefatos e formas de coisas naturais delineadas pelo homem, simulando imagens prototípicas do corpo e das moradias humanas, cada uma em relação aos valores morais religiosos e sociais. (MAGNANI, 2001, p. 1-2)

E para esclarecer bem o leitor sobre as estruturas espaciais associadas aos aspectos do ambiente natural, dos vários exemplos em Magnani (2001), vamos citar alguns. O primeiro exemplo ilustra o modo espacial típico dos habitantes de Dogom no Sudão e a disposição do espaço de sua habitação. Os dogons são um grupo étnico que habita a região do planalto central do Mali, na África Ocidental, ao sul da curva do rio Níger, nas proximidades da cidade de Bandiagara e no Burquina Fasso. A população dos Dogons está estimada entre 400.000 e 800.000 habitantes. Eles falam os idiomas Dogom, os quais são considerados um ramo independente da família de idiomas Níger-Congo. Os Dogons são especialmente conhecidos por suas tradições religiosas, seus bailes com máscaras, suas esculturas em madeira e sua maravilhosa arquitetura. Na Figura 1, apresentamos a disposição do espaço em suas habitações.

> A casa grande [de cada linhagem dentro da aldeia] compreende o *dembere* ou “quarto do ventre”, isto é, a sala central, em torno da qual são colocadas uma cozinha (*obolom*), três armazéns (*kana*), um estábulo para cabras (*ende*) e o *denna* ou sala grande, flanqueada pela entrada (*day*) e outro estábulo (*bel de*). Em ambos os lados da entrada e nos cantos de um dos quartos estão quatro torres cônicas encimadas por cúpulas (*arsobo*). Diz-se que o plano do edifício representa, por um lado, *Nommo* [o filho de Deus] em sua forma humana, as torres os seus membros; por outro lado, diz-se que a cozinha e o estábulo são a placenta celestial e sua contraparte terrestre, representando juntos a cabeça e as pernas de um homem deitado do lado direito [e copulando], cujos outros membros também têm suas contrapartes arquitetônicas: a cozinha representa a cabeça, cujos olhos as pedras da lareira; o tronco é simbolizado pelo *dembere*, o ventre pelo outro quarto, os braços pelas duas linhas irregulares das despensas, os seios por dois jarros de água colocados na entrada da sala central. Finalmente, o órgão sexual é a entrada que conduz por uma passagem estreita para a sala de trabalho, onde são mantidos os jarros de água e as pedras de moer. Nestas espigas frescas de milho novo são esmagadas, produzindo líquido que está associado com o fluido seminal masculino e é escoado para o lado esquerdo da entrada e derramado sobre o santuário dos ancestrais. (MAGNANI, 2001, p. 2)

Figura 1 – Dogom no Sudão e a disposição do espaço de sua habitação

Fonte: Imagem domínio público – autor: Dario Menasce

Neste exemplo, encontramos as estruturas espaciais associadas aos aspectos concretos do ambiente natural que refletem uma construção da representação espacial com referência ao corpo humano e, ainda, um arranjo complexo de correlações que podem ser míticas, rituais, cosmogônicas e cosmológicas, isto é, as relações entre o espaço habitado pelos dogons e o corpo humano feminino e masculino (cabeça e pescoço, membro superior, tórax, abdômen, costas, pelve e períneo, membro inferior) desse povo e entre o corpo humano feminino e masculino dos dogons e os lugares ritualísticos utilizados por essa comunidade. De fato, conforme Magnani (2001):

> fica claro que um efeito conceitual está em jogo e expressa à construção da representação espacial com referência ao corpo e um arranjo complexo de inter-relações que podem ser míticas, rituais, cosmogônicas e cosmológicas. A situação pode ser vista como a reprodução da bem conhecida correspondência microcosmo-macrocosmo, que persistiu no mundo ocidental até o Renascimento e sobreviveu ainda mais em tradições esotéricas como a cabala. Um tipo de cristalização espacial de um artefato externo que segue esse tipo de relação espacial, pode ser visto claramente na cosmologia da Malásia: consequentemente, o mundo foi concebido como um quadrilátero. (MAGNANI, 2001, p. 3)

Em seus estudos, Magnani (2001) aborda alguns aspectos das conexões espaciais estabelecida na cosmologia do povo Malásio e mostra, na construção de suas casas, a existência da correspondência microcosmo-macrocosmo na relação entre representação espacial, cosmológica e ritualística que se estabelece mediante o uso implícito da representação geométrica do quadrilátero da Geometria Euclidiana.

> Quando um local provável para uma casa é encontrado, se limpa algum terreno e um retângulo de paus é colocado no centro desse terreno. O solo é escavado dentro dessa estrutura retangular e os senhores do local são abordados da seguinte forma:
>
> Ho, filhos de Mentri Guru,
> Que habitam nos Quatro Cantos do Mundo,
> Eu desejo essa ação como uma benção.
>
> Se os presságios são bons, os quatro cantos do edifício principal são marcados com cavilhas de paus mortos e essa área demarcada é limpa. Assim, se inicia a cerimônia para erigir o poste central da casa. A construção que forma o edifício malaio é quadrada. O *pawang* [mágico] define o espaço necessário para a execução movendo-se de dentro do recinto “quatro passos em cada direção dos quatro cantos do universo” e pede aos espíritos daquela área que não sejam perturbados. (Magnani, 2001, p. 3-4)

Em sua análise, Magnani (2001) considera que a representação da casa que será construída naquele local, que é escolhido de maneira cerimonial pela vila, estabelece, em relação com o corpo humano, diversas formas de disposição e orientação, que lembram o nível conceitual que se expressa pelos mitos originais, e as partes espaciais internas, os valores cerimoniais, rituais e sagrados. Diante dessas ponderações, o autor, em relação aos precedentes exemplos, afirma que:

> Com relação aos exemplos anteriores, a presença de representações espaciais, que podem mais facilmente parecer geométricas ao espírito moderno, pode ser observada no caso da construção “mental” de um verdadeiro sistema de coordenadas, ativado pela necessidade de projetar rotas e mapas para navegação. (MAGNANI, 2001, p. 5)

Antes do próximo exemplo de Magnani, faremos alguns esclarecimentos sobre os primeiros aborígenes em relação à arte visual encontrada em sítios arqueológicos australianos. De acordo com Morwood (2002), podemos afirmar que uma das características que define os seres humanos modernos é o seu desejo de decorar os vários objetos que lhe são apresentados. A arte pictórica como parte coerente de sistema visual surge aproximadamente por volta 40.000 anos antes da nossa era, cujo início está associado às mudanças evolutivas e tecnológicas humanas que ocorreram na Europa, África e Ásia e com a colonização inicial da América e da Austrália. Assim, a partir daquele período, os australianos aborígines que compreendem muitos povos distintos se desenvolveram na Austrália.

Com essas considerações, podemos expor o outro exemplo proposto por Magnani (2001, p 6), que aborda a construção de rotas elaboradas pelos aborígines australianos. Para sua análise das construções gráficas (representações geométricas espaciais e coordenadas referenciais) das rotas percorridas pelos aborígenes, o autor as compara com as rotas geográficas atuais. Para a construção de suas rotas, os aborígines utilizavam um sistema de referência que recorria à atualização progressiva do mapa espacial local disponível para o indivíduo, pelo uso contínuo de indicações e pontos de referência como ventos, características do solo, etc. De fato, segundo o autor, os aborígenes:

> [...] mantinham as instruções “em suas cabeças”, em vez de confiar no Sol [...] eles podiam se orientar no terreno com muita precisão, embora incapaz de traçar seu caminho (...) o “mapa dentro das cabeças deles” estava claramente sintonizado com as condições reais “no solo”. Nesses casos, portanto, estamos lidando com a construção de rotas por meio de “configurações” elaboradas passo a passo, graças às propriedades “locais” de cada ponto envolvido, encontradas nas características do solo e dos ventos e, às vezes, na posição do Sol. A rota é finalmente encontrada por uma referência à qualificação de suas

> características intrínsecas, que não se referem ao espaço global. (MAGNANI, 2001, p. 6-7)

Primeiramente, faremos alguns comentários sobre as práticas matemáticas dos povos que pertencem à Micronésia. Para Goetzfridt em Selin (2008), os elementos numéricos, espaciais e lineares que estão presentes na Etnomatemática desses habitantes são comuns quando se consideram as fronteiras culturais: oeste da Melanésia[1], Polinésia[2] e Micronésia[3] que variam de acordo com as demandas e as características alimentares presentes em ambientes distintos e das histórias sociais e culturais incorporadas nessas fronteiras. Goetzfridt em Selin (2008) completa que:

> [...] as características matemáticas em cada uma dessas três regiões gigantes da Oceania eram e são expressas com base nos ambientes que as motivaram e sustentaram. É claro, por exemplo, que as grandes áreas oceânicas que separam pequenos atóis e ilhas de nível superior, o interesse acadêmico relativamente recente à exploração e assentamento pré-históricos do Pacífico e a disponibilidade remanescente de técnicas de navegação não instrumentais dos nativos dos atóis de Pulowat [também Polowat, anteriormente Puluwat] e Satawal nas Ilhas Carolinas, em um contexto maior da importância de tais explorações e técnicas para as culturas contemporâneas do Pacífico, todos destacam as associações lineares e a distância na Etnomatemática da Micronésia. Essas distâncias são inerentemente lineares, de uma maneira progressiva. Um tipo universal de fascínio pela capacidade dos navegadores nativos de manter e essencialmente distanciar os movimentos de um ponto a outro é energizado pela erudição e pelo orgulho cultural. O conceito de *etak* como uma técnica para segmentar essas viagens em partes gerenciáveis (bem como pelo menos uma explicação alternativa que descarta essa segmentação (Hutchins, 1983)) e a expressão e explicação da refração e interpretação das ondas nas expressões lineares dos gráficos Marshalês [língua Marshalês, também conhecida como Ebon, é uma língua da Micronésia falada nas Ilhas Marshall] permanecem partes importantes desta literatura sobre ideias e práticas Matemáticas da Micronésia. (GOETZFRIDT em SELIN, 2008, p. 1422)

Diante das ponderações feitas nos parágrafos anteriores, em concordância com Magnani (2001), podemos considerar o caso do sistema de navegação *etak* dos nativos de Pulowat (um atol de corais e um município localizado na região noroeste

---

[1] Sub-região da Oceania que se estende da ilha da Nova Guiné no sudoeste do Oceano Pacífico até o Mar de Arafura e a leste de Tonga.
[2] Sub-região da Oceania, composta por mais de 1.000 ilhas espalhadas no centro e ao sul do Oceano Pacífico.
[3] Sub-região da Oceania, composta por milhares de pequenas ilhas no oeste do Oceano Pacífico.

(Oksoritod) e da região oeste Pattiw do Estado de Chuuk, pertencente aos Estados Federativos da Micronésia) nas Ilhas Caroline. O sistema de navegação *etak* desses nativos consiste no interessante emprego da noção de reta euclidiana, segmento de reta, capacidade dos nativos de interligar dois pontos em suas trajetórias, o uso de ângulos e o uso de um sistema móvel de coordenadas inspirado nas trajetórias das estrelas, na ideia de distância conectada com a velocidade e no tempo que transcorre de uma coordenada para outra coordenada. Dessa maneira, segundo Magnani (2001):

> As posições estelares da ilha de referência, tanto do ponto inicial quanto do ponto final da viagem, são conhecidas, pois em outra ocasião a própria ilha de referência pode se tornar um destino. Entre outras posições da estrela de navegação, sob as quais a ilha de referência passará à medida que "se move" para trás. A sua passagem sob cada uma dessas estrelas marca o fim de uma *etak* e o início de outra. Assim, o número de posições de estrelas que se encontram entre o rumo da ilha de referência visto a partir da ilha de origem, e o seu rumo visto a partir da ilha de destino, determinam o número de *etak*, que aqui pode ser designado por segmentos de reta, nos quais a viagem está conceptualmente dividida. Quando o navegador prevê, na sua mente, que a ilha de referência está a passar sob uma determinada estrela, ele observa que certo número de segmentos de reta foi completado e que, por conseguinte, certa proporção da viagem foi realizada. Evidentemente, não podemos esquecer que, para encontrar o ponto correspondente à ilha etak, o navegador deve utilizar o mapa territorial local que compreende o sistema das várias ilhas e, portanto, também o ponto de partida da estrela. (MAGNANI, 2001, p. 8)

Em relação ao exemplo citado no parágrafo anterior, sobre o sistema de navegação *etak* dos nativos de Pulowat, fica evidente a utilização de um sistema espacial geométrico euclidiano cuja concepção de geometria está intimamente ligada à visão do espaço físico ambiental.

No entanto, como salienta Magnani (2001), não é um sistema de referência global, mas um "fragmento" da estrutura da Geometria Euclidiana. De fato, historicamente e formalmente, a Geometria Euclidiana Espacial consiste em estudar os objetos não definidos, os definidos e as proposições da Geometria Euclidiana Plana em um espaço tridimensional e em adicionar outros objetos geométricos que não estão contidos no plano euclidiano, ou seja, as superfícies planas, as superfícies curvas e os sólidos geométricos.

Para isso, a partir da estruturação axiomática da Geometria Euclidiana Plana, isto é, necessitamos dos conceitos básicos não definidos (ponto, reta e plano), da relação de incidência de pontos, retas e planos e da relação de ordem para pontos na reta, expressa pelos termos “entre”, “comprimento” para segmentos de reta e “medida de ângulo”; e dos seguintes conjuntos de proposições não demonstradas: axiomas de incidência, axiomas de ordem, axiomas para medida de segmentos de reta e medida de ângulo, axioma de existência de triângulo congruente, axioma de existência de um segmento de reta de comprimento específico, axioma das paralelas.

Em continuidade, para organização axiomática da Geometria Euclidiana Espacial, necessitamos do seguinte conjunto de proposições não demonstradas: i) para qualquer plano, existem pontos incidentes com ele e pontos não incidentes com ele, ii) se dois planos distintos têm um ponto em comum, eles se intersectam em uma reta, e iii) se duas retas distintas têm um ponto em comum, existe um, e somente um, plano através delas.

O exemplo apresentado do sistema de navegação *etak* dos nativos de Pulowat é bem diferente em relação aos que apresentam figuras planas euclidianas, ou seja, o quadrilátero da cosmologia e habitações do povo Malásio. Desse modo, segundo Magnani (2001), percebemos que as formas euclidianas utilizadas por esses povos,

> [...] são muito difundidas entre as sociedades primitivas na construção de utensílios, ferramentas sagradas e rituais, ornamentos e objetos artísticos. Em todos esses casos, faltam elementos métricos e projetivos, o uso de figuras euclidianas não tem nada a ver com o uso de um sistema euclidiano completo e global de coordenadas (MAGNANI, 2001, p. 8).

Essas representações geométricas planas e espaciais presentes nos vários povos retratados nos parágrafos anteriores não se reportam a um sistema referencial geométrico completo e objetivo em comparação com o estabelecido pelo sistema euclidiano e projetivo.

> Consequentemente, todas as formas e quadros espaciais que vimos até agora podem ser consideradas locais, ligadas à subjetividade e não integradas entre si na universalidade de um sistema de referência geométrica global e objetivo, como o nosso sistema euclidiano e projetivo. Essa consideração conduz a uma breve digressão sobre as representações primitivas do tempo. A construção de uma noção de temporalidade objetiva, universal e linear anda de mãos dadas com a construção de um tipo global de sistema de referência geométrico. (MAGNANI, 2001, p. 9)

2.2 Sobre modelos espaciais mentais e algumas descrições espaciais

Considerando que as nossas concepções espaciais do mundo são vistas como fundamentadas em nossas interações estendidas com esse mundo, surgem as seguintes perguntas: Como é que percebemos o nosso ambiente? Como é que pensamos? Como funciona a nossa memória? Como é que raciocinamos e resolvemos os variados problemas? Como funciona a nossa capacidade visual, os sentidos e percepção? Como entendemos a linguagem e a produzimos para que os outros a entendam?

Essas são algumas das questões fundamentais que se pesquisam em Psicologia Cognitiva, uma área da Psicologia. Em relação as indagações enunciadas no parágrafo anterior, podemos afirmar que cada uma delas refere-se à natureza de uma capacidade psicológica básica do ser humano, juntamente com outras funções vitais que também são pesquisadas pelos psicólogos cognitivos e contribuem para a nossa compreensão do que significa ser humano.

Evidentemente, nessas pesquisas cientificas sobre a mente, consideram-se as conexões entre a Psicologia Cognitiva com outros ramos da Psicologia e, ainda, as relações entre a Psicologia Cognitiva com outros campos do saber, por exemplo, Neurociência, Neuropsicologia Cognitiva, Neuropsicologia Cognitiva do Desenvolvimento, Neuropsiquiatria Cognitiva, Antropologia, Filosofia, Computação Gráfica, Linguística, etc. Nesse sentido, a Psicologia Cognitiva tem proporcionado alguns resultados empíricos sobre as relações que ocorrem em nosso processo de raciocínio entre linguagem e modelos espaciais, memória, observação e o papel de mapas, ambientes e gráficos. Assim, segundo Magnani (2001),

> Do ponto de vista desta pesquisa cognitiva, o papel do corpo ainda é central: no caso das representações mentais dos objetos localizados imediatamente à volta do corpo (“ambientes locais”), construímos estruturas espaciais mentais relacionadas à nossa estrutura tridimensional na qualidade de seres humanos. Eles são extensões dos três eixos do corpo: o eixo dianteiro/traseiro que é assimétrico e orienta tanto a nossa percepção como o nosso comportamento, o eixo cabeça/pés que é assimétrico e canônico na vertical e o eixo esquerdo/direito que é mais ou menos simétrico. Assim, as representações espaciais são extensões dos três eixos do corpo, associando objetos à estrutura. A acessibilidade dos três eixos está

> relacionada às características do corpo, ao mundo perceptivo e à postura do corpo. Podemos dizer que as propriedades tanto de nós próprios como do mundo restringem a nossa percepção e o nosso comportamento e constituem a base de nossas representações espaciais (MAGNANI, 2001, p. 9 - 10).

Primeiramente, esclareceremos em que sentido a percepção do mundo que nos cerca pode constituir uma estrutura de nossas representações espaciais. Para isso, segundo Braisby e Gellatly (2005), cabe explicitar as acepções da palavra percepção: o termo percepção apresenta-se com diferentes significados, embora um elemento comum que prevalece na maioria dos significados é que a percepção envolve a análise de informações sensoriais. Assim, quando os psicólogos cognitivos utilizam esse termo, eles estão se referindo aos processos cognitivos básicos que examinam informações transmitidas pelos sentidos cujos resultados nos fornecerão uma descrição básica do nosso mundo circundante. Diante dessas explanações, ficam claros os aspectos envolvidos na formação do modelo espacial elaborado pelos nativos mediante a visualização da localização de coordenadas em segmentos de reta de suas rotas em seus ambientes, a utilização da memória para a construção de mapas mentais dessas localizações, rotas e de seus ambientes.

> Quando uma cena é observada, isso acontece necessariamente da perspectiva de alguém. No entanto, a fala e o pensamento – explorando modelos mentais do espaço – são capazes de elaborar perspectivas ainda não vistas. Em inglês, francês, japonês e muitos outros idiomas são dominantes três tipos de termos de referência: uma pessoa (a própria ou outra), um objeto inanimado e um ambiente. No caso de descrições de "grandes ambientes", as formas mais comuns usadas são: descrições de caminhos ou rotas, que exibem uma vista do interior do ambiente e descreve a localização dos pontos de referência em relação a um observador em movimento em termos de posição esquerda, direita, frente e atrás do observador; descrições do olhar, em que o sujeito tem um ponto de vista do exterior do ambiente e descreve a localização dos objetos em relação uns aos outros e o ponto de vista em termos de esquerda, direita, frente e atrás; e, finalmente, descrições de pesquisa, que o sujeito tem um ponto de vista de cima do ambiente e transmite localizações de objetos em relação a outros objetos em termos de norte, sul, leste e oeste. A adoção de uma perspectiva específica depende da tarefa envolvida e das características do ambiente. Por vezes, há uma combinação das várias perspectivas. Nesses casos, podemos simplesmente dizer que objetos de referência são dados na percepção, ao passo que os termos para relações espaciais são construções da mente. (MAGNANI, 2001, p. 10)

Na verdade, usamos a nossa visão de maneiras bastante básicas, como evitar obstáculos, reconhecer objetos, reconhecer cores, ler, reconhecer rostos, etc. Assim, podemos afirmar que há uma predominância do processamento de informações visuais em relação ao processamento de informações de qualquer outro sentido e que os seres humanos têm uma espantosa facilidade em identificar, discernir, confirmar e reproduzir os múltiplos objetos concretos e não concretos que lhes são apresentados em nosso mundo. Para Behrmann e Vida (2018):

> A facilidade com que humanos (e os primatas não humanos) detectam, discriminam e reconhecem objetos é surpreendente. Um processo considerável tem sido feito nos últimos anos para aprofundar a nossa compreensão desse processo e de seus correlatos neurais. O progresso tem vindo de múltiplos métodos convergentes, incluindo a psicofísica, neuroimagem, neuropsicologia e investigações de desenvolvimento. Existem muito mais perguntas do que respostas, e novas técnicas, como análise representativa de dados de imagem, eletrocorticografia invasiva e aprendizagem profunda em redes neurais de convolução, prometem ampliar ainda mais os nossos conhecimentos. (BEHRMANN; VIDA, 2018, p. 516)

2.3 Algumas reflexões sobre as estruturas espaciais primitivas e os modelos espaciais mentais

Em virtude das considerações expostas anteriormente sobre as estruturas espaciais primitivas e os modelos espaciais mentais realizados pelos povos citados nas seções anteriores, exporemos algumas ponderações relacionadas à Geometria Euclidiana. A primeira, segundo Magnani (2001), salienta que as estruturas espaciais daqueles povos podem ser todas consideradas como mapas locais associados ao indivíduo que as ativa, em razão da presença de certos elementos conceituais bem definidos. Para caracterizar essas ideias sobre estruturas espaciais Magnani (2001), valendo-se das concepções de Thom (1983), explicita que estruturas espaciais são mapas somáticos locais, ou seja, mapas que emanam do indivíduo como formas de controle do mundo externo e de identificação de seu próprio corpo. Para especificar essa ideia, o autor cita um trecho de Thom (1983):

> Por exemplo, um feiticeiro pode ser ao mesmo tempo um homem dormindo em uma cabana e um tigre caçando na selva a alguma distância [...] se o tigre for ferido por caçadores na selva, então o homem-feiticeiro em sua cabana, revelará uma ferida no local homólogo de seu corpo. Uma crença desse tipo justifica a afirmação

> de que o homem-feiticeiro e o tigre têm seus “mapas somáticos locais” identificados, e isso apesar do fato de que esses mapas se referirem a seres separados por vários quilômetros. Desse ponto de vista, pode-se dizer que o ato de mágica é caracterizado essencialmente por uma “ação à distância” que pode ser interpretada como uma modificação da topologia usual do espaço-tempo. Em outras palavras, a ligação entre mapas locais que definem o espaço habitual não será fixa, mas poderá ser modificada de acordo com a vontade de certos homens (mágicos ou feiticeiros), e isso graças à utilização de procedimentos específicos (rituais mágicos, sacrifícios, etc.). Além disso, a topologia do espaço deixará de ser a mesma para todos, dado que as próprias experiências perceptivas de um observador podem ser afetadas pela ação mágica (THOM, 1983, p. 132, *apud* MAGNANI, 2001, p. 11-12)

Nesta perspectiva, um mapa somático local configura-se em uma maneira de objetivar um espaço conceitual que se torna um modelo de identificação espacial do corpo do sujeito; assim, em relação à Geometria Euclidiana, os mapas somáticos locais inferem uma geometria implícita. Evidentemente que essa asserção contradiz nossas concepções epistemológicas que caracterizam, em especial, o sistema axiomático da Geometria Euclidiana, que segundo Balieiro (2018, p. 254), são: 1) uma linguagem subjacente ao sistema axiomático, 2) um sistema lógico, 3) um vocabulário de termos não definidos, 4) um conjunto de proposições (axiomas) referente aos termos não definidos, 5) um conjunto de definições derivadas desse conjunto de termos não definidos e do conjunto de axiomas e 6) novas proposições para serem demonstradas utilizando as regras de inferências da Lógica.

Para Pogorelov (1987) e Eves (1990), no sistema axiomático euclidiano, os termos primitivos ou indefinidos[4], não têm significado algum definido, com exceção daqueles explicitamente declarados nos termos definidos, ou seja, outros termos técnicos que recebem definições precisas e inequívocas em razão dos termos primitivos e outros termos definidos anteriormente ou, ainda, nas proposições não demonstradas, isto é, os axiomas geométricos que envolvem termos primitivos e definidos que serão assumidos como verdadeiros sem demonstração.

Desse modo, os termos primitivos podem ser interpretados de qualquer maneira, porém devem ser consistentes com os axiomas desse sistema axiomático. Em seguida, temos as proposições geométricas (teoremas) que envolvem aqueles termos primitivos e definidos que podem ter demonstrações rigorosas fundamentadas

[4] Ponto, reta e plano; relação de incidência de pontos, retas e planos; e relação de ordem para pontos na reta, expressa pelos termos “entre”, “comprimento” para segmentos de reta e “medida de ângulo”.

somente nos axiomas, naquelas definições, nas proposições (lemas) previamente demonstradas e nas regras de inferências da Lógica.

Portanto, uma interpretação de um sistema axiomático é uma maneira específica de estabelecer algum significado aos termos indefinidos daquele sistema axiomático euclidiano; essa interpretação é denominada de modelo para esse sistema axiomático, cuja condição para realizar a interpretação no sistema axiomático geométrico é que os axiomas desse sistema sejam verdadeiros nas declarações dessa interpretação. Como consequência de os teoremas do sistema axiomático geométrico serem todos demonstrados logicamente a partir dos axiomas, conclui-se que esses teoremas serão afirmações corretas e verdadeiras em qualquer modelo. Por fim, conforme Pogorelov (1987), em conexão com a construção axiomática da Geometria Euclidiana exposta anteriormente, surgem naturalmente três questões: 1) o sistema axiomático euclidiano adotado é consistente, ou seja, duas proposições decorrentes de teoremas (corolários) que se excluem mutuamente não podem ser derivadas por argumento lógico?; 2) o conjunto de axiomas do sistema axiomático euclidiano é completo, isto é, não pode ser completado com novos axiomas consistentes e não decorrentes dos já admitidos no sistema axiomático?; e 3) o conjunto de axiomas adotado no sistema axiomático euclidiano é independente, ou seja, alguns axiomas não resultam dos outros axiomas desse sistema axiomático?

De acordo com Pogorelov (1978), a solução para esses problemas está estreitamente relacionada à construção de um modelo coerente para o sistema axiomático euclidiano apresentado no parágrafo anterior. Como exposto acima, um modelo consiste na indicação dos termos primitivos, (“pontos”, “retas” e “planos”) e das relações que se estabelecem com os termos primitivos “incidente”, “entre” e “medida”, para os quais as proposições não demostradas são cumpridas em razão do seu caráter concreto. Para demonstrar a consistência do sistema axiomático euclidiano é necessário asseverar que existe pelo menos um de seus modelos. Dessa forma, demonstrar que um determinado axioma do sistema axiomático euclidiano é independente significa indicar um modelo em que todos os outros axiomas desse sistema, exceto o axioma em questão, são válidos. Finalmente, a demonstração de que algum ou outro sistema axiomático é completo pode ser realizada mostrando o isomorfismo de todos os modelos, ou seja, estabelecendo uma correspondência biunívoca entre seus pontos, retas e planos em que os elementos correspondentes estão em relações de semelhanças.

Neste sentido, acrescenta Magnani (2001) alguns aspectos epistemológicos e ontológicos que caracterizam a Geometria Euclidiana em relação à sua forma matemática abstrata são sua representação escrita e diagramática, os modelos axiomáticos e formais presentes nessa Geometria, modelo físico da experiência e sua formação histórica.

> A nossa imagem habitual implica que as características da Geometria são a independência e a fixação do espaço que objetiva, um espaço que está acima dos objetos que ela contém. Além disso, a Geometria é sempre identificada como tal mediante a forma matemática abstrata da representação escrita e diagramática: dessa forma, o espaço coincide diretamente com o nível geométrico euclidiano. Consequentemente, o espaço geométrico é, por assim dizer, “sem sentido”: não tem significado, senão o que lhe é atribuído pelo nível técnico das dimensões verbais e diagramáticas escritas, o que ratifica sua autonomia absoluta. Além disso, é possível obter um maior grau de abstração simbólica (eliminando a componente diagramática), graças aos modelos axiomático e formal. A ciência moderna estabiliza definitivamente o horizonte geométrico euclidiano por meio da nova física; o espaço-tempo torna-se o receptáculo universal de cada experiência. Do ponto de vista histórico canônico ocidental, tudo isso significa que “a geometria grega e a ‘revolução epistemológica’ galileana marcaram passos decisivos” (THOM, 1983, p. 136 *apud* MAGNANI, 2001, p. 12)

Concordamos com Magnani (2001) que os mapas somáticos locais elaborados pelos povos antigos discutidos nos parágrafos anteriores pressupõem uma geometria implícita, mesmo diante de nossas concepções epistemológicas atuais em relação à axiomatização contemporânea da Geometria Euclidiana.

> Em certo sentido, podemos afirmar que a ativação contínua de mapas somáticos locais e a modificação das suas relações já constituem uma operação geométrica informal. Os mapas somáticos locais pressupõem uma geometria implícita mesmo que, à primeira vista, pareçam estar tão distantes da nossa imagem epistemológica habitual do que só pode ser considerado como geométrico. (MAGNANI, 2001, p. 11-12)

Os mapas somáticos locais dessas sociedades primitivas possibilitaram a criação de um espaço geométrico pela ativação de características conceituais que identificavam os seus domínios territoriais conectando-os aos elementos rituais, sagrados e cosmológicos de suas crenças. Assim, ao criarem esses mapas somáticos locais, esses povos primitivos conseguiram elaborar variadas formas geométricas, rotas representadas por segmentos de retas, curvas e figuras concretas presentes em suas construções habitacionais. Em um sentido histórico e filosófico, vislumbramos essa tradição geométrica com base em um nível corporal, intuitivo, empírico, religioso e psicológico até um nível simbólico, diagramático, técnico e axiomático.

> Ao aplicar uma metáfora bastante óbvia, mas esclarecedora, podemos dizer que os mapas somáticos locais são a ativação e a realização de uma geometria latente inconsciente, no sentido em que não está explicitamente presente, uma vez que ocorre, de acordo com o nosso ponto de vista, o que identifica a Geometria com o nível simbólico e técnico escrito e diagramático. É necessário recordar que também no caso da tradição geométrica ocidental, filósofos e geômetras sempre tiveram consciência de como a Geometria está vinculada, não apenas com o nível escrito e simbólico, mas também com o nível intuitivo, empírico, psicológico e corporal. (MAGNANI, 2001, p. 13)

De acordo com Magnani (2001), entendemos que aquelas formas geométricas planas, as figuras geométricas sólidas e os percursos e rotas curvas concebidas por aquelas sociedades primitivas expostas nas seções anteriores, “são frutos de uma série de formas locais de conceitualidade expressas pela linguagem e modelos mentais e, por vezes, objetivadas em ferramentas externas, artefatos e formas de coisas naturais delineadas pelo homem” (MAGNANI, 2001, p.13). Assim, essa geometria intuitiva e prática nos fornece um quadro perceptivo que se distingue do quadro perceptivo e representativo da Geometria Euclidiana, sem considerar outras geometrias, com o qual estamos habituados a considerar em nosso mundo contemporâneo em virtude de vários aspectos presentes em nossa formação mental.

Os elementos geométricos presentes nas formas geométricas planas e espaciais encontrados em várias sociedades primitivas preconizam diversos aspectos relacionados ao microcosmo e ao macrocósmico presentes na vida dos povos citados, sobretudo, no ambiente físico e espiritual desses homens, quando concebem suas “teorias matemáticas intuitivas” e as fundamentam numa “estrutura cognitiva” com o intuito de as utilizarem em suas comunidades ou sociedades. Esses elementos geométricos deixaram indícios quase imperceptíveis na Geometria Euclidiana e em outras geometrias que se constituíram a partir da primeira.

2.4 Alguns aspectos das representações visuais presentes nas civilizações antigas

Em suas reflexões sobre a origem e o desenvolvimento histórico da Geometria, Scriba e Schreiber (2015) enfatizam que não é uma tarefa fácil para o historiador definir de maneira resumida o conteúdo e a natureza da Matemática. Para os autores, atualmente, as explicações categóricas em virtude do conhecimento formalizado da noção geral de estrutura e das noções lógicas, negligenciam não apenas o desenvolvimento histórico da Matemática, mas também o instinto e a experiência do matemático profissional que é capaz de perceber, em sua área de pesquisa, quais os tópicos que são ou não são “substanciais” e “interessantes” para ampliar o(s) campo(s) de estudo(s) da Matemática.

Além disso, ao considerarmos a compreensão estabelecida à Matemática em relação ao conteúdo e a natureza, é ainda mais complicado explicitar o que é a Geometria e quais elementos fazem parte da sua história. Diante desse impasse, ao rever a história e os diversos aspectos filosóficos que permeiam a Geometria, percebemos que as concepções dominantes, bem como a sua posição e significado no interior da Matemática, mudaram repetidamente ao longo de sua história, em razão dessa área da Matemática tornar-se cada vez mais elaborada. Como consequência desse refinamento estrutural, os matemáticos adotaram posições opostas ao tentarem encontrar respostas para seu lugar e significado no interior da Matemática.

Em relação à Matemática Egípcia, podemos afirmar que ela foi aplicada de modo prático e desenvolvida nos seguintes contextos: econômico, comercial, da construção e das observações do céu. Já a utilização da Geometria nessa civilização era de caráter prático, cuja concepção estava relacionada às diversas formas de medição (comprimento, superfície, volume, peso e tempo) e às necessidades burocráticas impostas pelo estado faraônico. Esses problemas que envolvem a utilização da Geometria aparecem numa pequena coleção de problemas em papiros que sobreviveram ao tempo que datam aproximadamente 1850 anos antes da nossa era, essa quantidade limitada de problemas proporcionou aos historiadores da Matemática Egípcia estabelecer uma perspectiva limitada da estrutura da Geometria dessa civilização. Por outro lado, no conteúdo desses papiros sobreviventes, encontramos algumas fórmulas corretas para determinar as áreas e os volumes de uma variedade de figuras planas e sólidas.

> Os dois mais importantes são o Papiro Matemático Rhind e o Papiro Matemático de Moscou. Eles constituem coletâneas de problemas com abordagens relevantes para a sua resolução. Eles parecem ser textos que foram escritos por professores (escritores) nas escolas para que os funcionários os utilizassem como manuais de ensino. [...] O papiro de Moscou contém 25 problemas, o papiro de Rhind contém 84 problemas ordenados de acordo com aspectos factuais, que por vezes apresentam desenhos de visualização. Assim, os sólidos geométricos são representados por suas vistas superior ou lateral, uma vez que o desenho em perspectiva era inédito no Egito daquela época. Por vezes, o mesmo desenho demonstra até mesmo o aspecto mais importante em uma vista superior e partes individuais nas vistas frontais, por exemplo, a representação de um lago retangular com árvores na margem, as árvores são dobradas para o lado esquerdo. (SCRIBA; SCHREIBER, 2015, p. 13-14)

No papiro de Rhind (Figura 2), podemos observar a utilização das representações visuais na resolução dos problemas geométricos.

Figura 2 – Papiro Matemático de Rhind

Fonte: Imagem domínio público - Papiro Matemático de Rhind. Museu Britânico – Departamento do Egito Antigo e Sudão. A imagem é a parte esquerda da primeira seção desse papiro com o número EA10057. A primeira seção tem as seguintes dimensões: comprimento 295,5 cm e largura 32 cm. E a segunda seção desse papiro com o número EA 10058, também pertencente ao Museu Britânico. A segunda seção tem as seguintes dimensões: comprimento 199,5 cm e mesma largura. E os fragmentos de uma pequena seção intermediária (18 cm de comprimento) são mantidos no Museu do Brooklyn. O papiro foi adquirido pelo advogado escocês Alexander Henry Rhind (1833 – 1863) durante sua estada em Tebas na década de 1850.

As fontes escritas da Matemática Mesopotâmica são muito mais ricas do que as da Matemática Egípcias, uma vez que as tábuas de argila da Mesopotâmia eram usadas para escrever. Os arqueólogos, segundo Scriba e Schreiber (2015), encontraram numerosas tábuas de argila que remontam à época do antigo reino babilônico (1900 – 1600 a.C.), que se seguiu à época das cidades sumérias (aproximadamente 3000 – 2700 a.C.) e ao reinado acadiano (aproximadamente 2700 – 2100 a.C.).

Em relação ao início da Matemática Mesopotâmica, de forma análoga a utilização da Geometria na civilização egípcia, na civilização mesopotâmica também era de caráter prático cuja concepção estava relacionada às diversas formas de medição e às necessidades também impostas pelo estado. Assim, conforme Swetz (2008):

> De forma semelhante, a Geometria Babilônica era também de natureza computacional e dedicada à resolução de problemas práticos. No nosso contexto, o termo “babilónico” designa a civilização que ocupou a região do Tigre-Eufrates no período 3500 - 539 a.C. e

> inclui o sumério, acádio, caldeu e povos assírios. O conhecimento da Geometria Babilônica foi obtido a partir de um exame limitado de textos cuneiformes e tabelas matemáticas. Este exame revela que os seus autores possuíam procedimentos computacionais para a obtenção das áreas de retângulos, triângulos retângulos, triângulos isósceles e trapézios com um lado perpendicular aos lados paralelos. Eles conheciam várias propriedades numéricas de um círculo e aproximou a área de um determinado círculo de raio r por $A = 3r^2$. Uma tábua de argila do antigo Período Babilônico (1900 - 1650 a.C.) fornece um valor de π como $3{,}125$. (SWETZ, 2008 *apud* SELIN, 2008, p. 1000)

Assim, em algumas tábulas de argila de conteúdo matemático podemos observar a utilização das representações visuais na resolução de problemas geométricos.

Em relação ao início da Matemática Indiana, podemos considerar que ela foi aplicada de forma prática e desenvolvida no contexto do planejamento urbano de construções de casas, mercados, templos e altares e sua concepção estava relacionada às diversas formas de medição (comprimento, superfície, volume). Assim, essas construções envolveram um extenso planejamento urbano com o uso da Geometria.

> Um exame da mais antiga Geometria conhecida na Índia, a geometria védica, envolve um estudo do S*ulbasutras*, datado de forma prudente e registado entre 800 e 500 a.C., embora contenham conhecimentos de épocas anteriores. Antes do que é convencionalmente conhecido como o período Védico (1500 – 500 a.C.), existia a civilização Harappiana datada do início do terceiro milénio a.C. Mesmo um estudo superficial das cidades Harappiana mostra os seus construtores como urbanistas e engenheiros extremamente capazes, exigindo conhecimentos bastante sofisticados de geometria prática. Uma conjectura interessante foi sugerida por um desenho num selo encontrado em Harappa (2500 a.C.): houve então o conhecimento de que a área de um polígono inscrito num círculo se aproxima da área do círculo à medida que o número de lados do polígono continua a aumentar? Esta é a ideia básica subjacente às técnicas que foram desenvolvidas para a mensuração do círculo numa série de tradições matemáticas, incluindo a indiana (JOSEPH, 2008 *apud* SELIN, 2008, p. 1011).

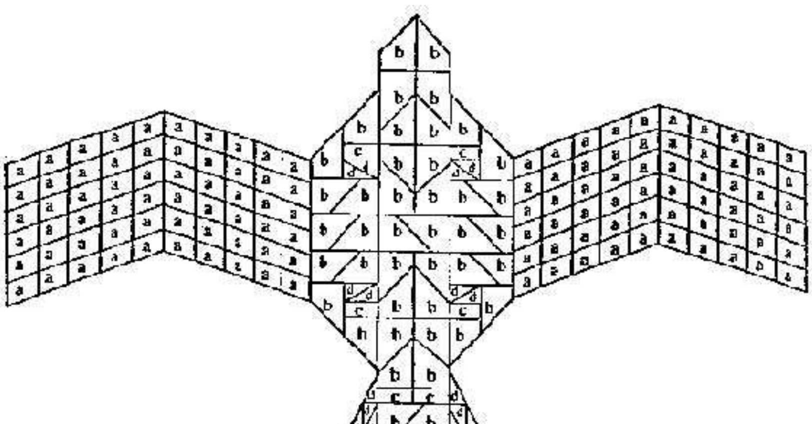
Já a utilização da Geometria nessa civilização era de caráter prático e sua concepção estava relacionada às diversas formas geométricas necessárias à urbanização e a construção de altares religiosos.

> Os S*ulbasutras* são instruções para a construção de altares de sacrifícios (*vedi*) e a localização de fogos sagrados (*agni*) que tinham

> de obedecer a instruções claramente estabelecidas sobre as suas formas e áreas para serem instrumentos eficazes de sacrifício. Havia dois tipos principais de rituais, um para adoração em casa e outro para adoração em comunidade. Os altares quadrados e circulares eram suficientes para os rituais domésticos, ao passo que altares mais elaborados cujas formas eram combinações de retângulos, triângulos e trapézios eram necessários para culto público. Um dos altares públicos mais elaborados tinha o formato de um falcão gigante prestes a voar (*Vakrapraksa-śyena*). Acreditava-se que oferecer um sacrifício num tal altar permitiria que a alma do suplicante fosse transportada por um falcão diretamente para o céu. (JOSEPH, 2008 *apud* SELIN, 2008, p. 1011-1012)

Desse modo, em alguns altares de sacrifícios dessa civilização podemos contemplar a utilização das representações visuais em sua construção. Conforme Joseph (2008), para a construção do altar com formato de falcão (figura 3), os construtores estabeleceram certas regras, a saber: para a primeira camada do altar *Vakrapraksa-śyena*, as asas do falcão são construídas com 60 tijolos (tipo “a”) e o corpo, cabeça e cauda com 50 tijolos (tipo “b”), 6 tijolos (tipo “c”) e 24 tijolos (tipo “d”). Como mostra a Figura 3, para a construção de cada camada subsequente eram estabelecidos diferentes padrões de tijolos.

Figura 3 - Construção do altar com formato de falcão



Fonte: Domínio Público

Em relação ao início da Geometria Chinesa, podemos considerar que ela foi reproduzida em objetos materiais cujas pinturas apresentavam padrões geométricos.

> As primeiras evidências de uma organização sistemática de formas regulares reproduzidas em objetos materiais encontrados na China datam do terceiro milênio a.C. ou mesmo antes. Foram encontrados

> motivos pintados com padrões geométricos, tais como arranjos simétricos de triângulos, losangos ou círculos, em peças de cerâmicas descobertas em Banpo [Banpo (Pan-p'o), um dos locais de habitação neolítica mais importante do seu género, localizado nas proximidades de Xi'an, ao sul Shenxi, ao norte da atual aldeia de Banpo, numa colina.] e em outros sítios arqueológicos. Esses desenhos demonstram um interesse precoce pela ordenação espacial e talvez estejam na origem de desenvolvimentos subsequentes, embora não possamos agora estabelecer qualquer continuidade entre a Matemática pré-histórica e a Matemática histórica chinesa. No entanto, vários mitos e lendas chinesas atestam que a linha de prumo, a bússola, o esquadro de carpinteiro e o gnômon (um poste de altura padrão) eram comumente usados na dinastia Zhou (1121–256 a.C.). (MARTZLOFF, 2008 *apud* SELIN, 2008, p. 1005)

Assim, essas pinturas em peças de cerâmicas com padrões geométricos cujos arranjos simétricos envolvem triângulos, losangos e círculos representam a utilização das representações visuais num contexto cultural e social.

Em geral, os sítios arqueológicos de outros povos nativos americanos comprovam a utilização de elementos geométricos no planejamento urbano e nas construções de suas cidades, palácios, templos, casas e outros lugares necessários para a organização urbana dessas cidades. Entretanto, não existem registros escritos dessas civilizações que possam fornecer informações para que os estudiosos teçam considerações precisas sobre os conhecimentos geométricos realizados pelos povos nativos americanos. Em conformidade com Swetz (2008):

> Embora não existam registros escritos para documentar o conhecimento geométrico das primeiras civilizações nativas americanas, os sítios arqueológicos testemunham seu uso e entendimento da Geometria. Em especial, as técnicas de planejamento e construção das cidades empregadas pelos povos olmecas, maias, teotihuacanos, toltecas e astecas da América do Sul e Central e os anasazi do Sudoeste norte-americano indicam que esses povos utilizavam as propriedades de círculos, quadrados e retângulos e empregou a teoria do triângulo retângulo. (SWETZ, 2008 *apud* SELIN, 2008, p. 1003)

O historiador da Matemática Mesopotâmica, Otto Eduard Neugebauer (1899 – 1990), defendeu que o que é denominado pitagórico na tradição geométrica grega seria mais apropriado que se denominasse babilónico. Na verdade, segundo Katz (2009), o teorema de Pitágoras, por exemplo, já era conhecido muito antes no nascimento desse filósofo.

> Um dos problemas babilônicos sobre raiz quadrada está ligado à relação entre o lado de um quadrado e sua diagonal. Essa relação é um caso especial do resultado conhecido como o teorema de Pitágoras: em qualquer triângulo retângulo, a soma das medidas dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da medida da hipotenusa. O nome desse teorema é em homenagem ao filósofo e matemático grego do século VI a.C., é indiscutivelmente o teorema elementar mais importante em Matemática, uma vez que as suas consequências e generalizações têm ampla aplicação. No entanto, é um dos primeiros teoremas conhecidos das civilizações antigas; de fato, há evidências de que ele era conhecido pelo menos 1000 anos antes de Pitágoras. (KATZ, 2009, p. 19)

Além disso, conforme Magnani (2001), outros historiadores da Matemática antiga assinalaram que os livros sagrados, por exemplo, os S*ulbasutras*, descrevem antigas obras indianas em construções de altar que continham números pitagóricos. E, ainda, seguindo Seidenberg (1975), a Geometria não teve uma origem grega, porém surge por meio da construção de templos ritualísticos que remontam a sociedades organizadas antigas. De fato, segundo Magnani (2001):

> A hipótese não é ultrajante, há algumas evidências para corroborá-la. Por exemplo, em *Sulbasutras*, é dominante a construção de vários altares correspondentes a várias formas geométricas (quadrada, circular, em forma de falcão – o falcão foi considerado o melhor voador entre as aves). A forma dependia do propósito do sacrifício, e algumas vezes a escolha da forma era controversa: esses altares eram considerados lugar de sacrifício e constituindo o próprio deus védico. Os problemas geométricos mais interessantes surgem da tarefa de construir um altar em forma de falcão maior do que um determinado altar, envolvendo a subtarefa de encontrar um quadrado igual em área a dois quadrados dados. A construção (envolvendo também o problema de converter um retângulo em um quadrado) é realizada com a ajuda do teorema de Pitágoras. Em razão do fato de que as combinações de deuses em um único deus eram comuns nas religiões antigas, se um deus é incorporado em um quadrado, como já foi dito, isso conduz ao problema de encontrar um quadrado igual em área à soma de dois quadrados. O deus da hipotenusa é produzido pela união dos deuses dos lados: a geometria tem uma pertinência teológica imediata. (...) A necessidade de resolver o problema de escolher um altar quadrado ou circular para certo sacrifício (dado que a área era considerada constante) parece ter levado aos problemas de quadratura do círculo e de transformar o quadrado num círculo. O problema da quadratura do círculo foi um dos três famosos problemas de “construção” da Geometria Grega antiga, juntamente com a duplicação do cubo e a trissecção de um ângulo. Eratóstenes e Hipócrates de Quios também trabalharam sobre o problema da duplicação de um cubo quando enfrentaram a tarefa de dobrar um altar. Parece que também na Índia havia uma prática védica de dobrar o altar básico para combater as pragas. (MAGNANI, 2001, p. 23)

A filosofia pitagórica fundamentava-se na afirmação de que o número era a causa das distintas qualidades dos elementos presentes no universo, ou seja, “o número era a substância de todas as coisas”. Os filósofos pitagóricos estudaram as propriedades dos números e suas relações com a Geometria, a Música e a Astronomia.

> Para os pitagóricos, não apenas todas as coisas têm um número, elas são números. Os pitagóricos tratam Geometria e a Aritmética como níveis “inseparáveis”: isso dá origem a um estudo sistemático de números e pontos. A essência dos números pitagóricos é assim, contemporaneamente, configurações geométricas e representação em forma de pontos: O número é imediatamente apresentado como uma soma de pontos que aparecem no espaço, e as figuras – retas, superfícies ou volumes – que são traçadas com os próprios pontos, são imediatamente dados como números. Conceitos como o de número quadrangular, de número pentagonal e de número triangular expressam os trabalhos sobre os números do ponto de vista de sua formação, ou seja, do ponto de vista das operações das quais são constituídos. Essa comparação entre o aspecto aritmético e o geométrico leva gradualmente à elaboração de análises (que hoje podemos considerar algébricas) de números escolhidos autonomamente. A nova forma de pensamento matemático constitui uma mudança cultural muito importante. (MAGNANI, 2001, p. 20).

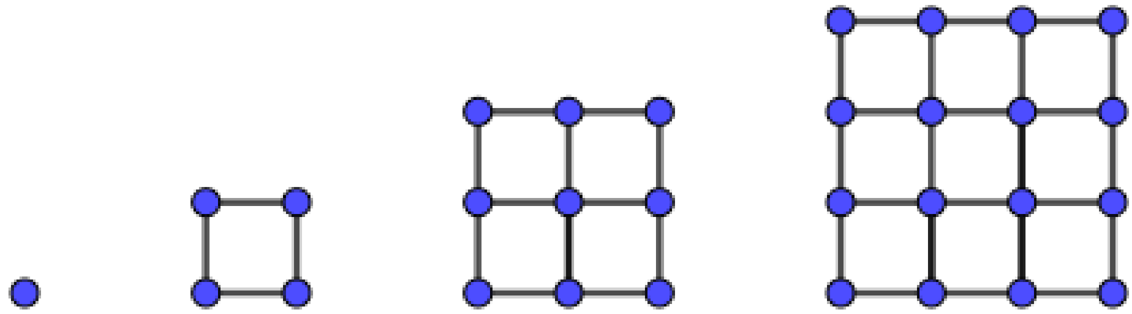
Os números figurados, concebidos como os números de pontos em certas configurações geométricas, constituem uma relação direta entre a Geometria e a Aritmética nesse período da Matemática Grega. Assim, surge uma nomenclatura geométrica desses números (triangulares, quadrangulares, pentagonais, hexagonais, etc.) e várias propriedades interessantes desses números figurados que podem ser demonstradas utilizando diagramas de pontos. E, ainda segundo Katz (2009):

> Uma doutrina matemática importante era que “o número era a substância de todas as coisas”, que os números, isto é, números inteiros positivos, formavam o princípio básico da organização do universo. O que os pitagóricos quiseram dizer com isso era não apenas que todos os objetos conhecidos têm um número, ou podem ser ordenados e contados, mas também que os números estão na base de todos os fenômenos físicos. Por exemplo, uma constelação nos céus pode ser caracterizada pelo número de estrelas que a compõem e pela sua forma geométrica, que ela própria poderia ser considerada como representada por um número. Os movimentos dos planetas poderiam ser expressos em termos de razões de números. As harmonias musicais dependem das razões numéricas: duas cordas esticadas com razão de comprimento 2:1 dão uma oitava, com razão de comprimento 3:2 dão uma quinta e com razão de comprimento 4:3 dão uma quarta. Desses intervalos pode ser criada uma escala

> musical inteira. Finalmente, o fato de os triângulos cujos lados estão na razão de 3:4:5 serem retângulos estabeleceu uma ligação entre o número e o ângulo. Dado o interesse dos pitagóricos no número como um princípio fundamental do cosmos, é natural que eles tenham estudado as propriedades dos números inteiros positivos, aquilo que chamaríamos de elementos da teoria dos números. O ponto de partida dessa teoria foi a dicotomia entre o ímpar e o par. Os pitagóricos provavelmente representavam os números por pontos ou, mais concretamente, por seixos [fragmentos de rocha]. Logo, um número par seria representado por uma fileira de seixos que poderia ser dividida em duas partes iguais. Um número ímpar não poderia ser dividido, pois sempre haveria um único seixo restante. Foi suficientemente fácil utilizar seixos para verificar alguns teoremas simples. Por exemplo, a soma de qualquer coleção de números pares é par, ao passo que a soma de uma coleção par de números ímpares é par e a soma de uma coleção ímpar de números é ímpar. (KATZ, 2009, p. 37)

Assim, conforme Katz (2009), os quadrados poderiam ser representados por meio de seixos (pontos), o que nos fornece um exemplo de números figurados; se representarmos um quadrado dessa forma, ou seja, o quadrado com 4 seixos, podemos verificar que o quadrado superior seguinte pode ser formado adicionando uma fila de seixos (pontos) em torno de dois lados desse quadrado original. Logo, existe $2 \cdot 4 + 1 = 9$ desses seixos (pontos) adicionais. Desse modo, os pitagóricos generalizaram essa observação para mostrar que é possível formar quadrados adicionando os sucessivos números ímpares a partir do número 1. Por exemplo, $1 + 3 = 4$, $1 + 3 + 5 = 9$, $1 + 3 + 5 + 7 = 16$ e o próximo arranjo seria $1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$, com composições ilimitadas. Assim, para aquelas séries numéricas, teríamos as seguintes representações dos números quadrangulares (Figura 4):

Figura 4 – Representação dos números quadrados



Fonte: Elaborada pela autora.

Na perspectiva de considerar que “o número era a substância de todas as coisas” a concepção pitagórica constituiu uma mudança cultural importante no pensamento humano e nos conceitos dos elementos que fazem da Matemática antiga.

No presente capítulo apresentamos alguns exemplos do pensamento geométrico presente em algumas sociedades ou civilizações que nos permitiram uma compreensão sobre a origem e utilização dos elementos geométricos em seu cotidiano, abrangendo a construção de casas, rituais religiosos, elaboração de rotas e trajetos, entre outros. No próximo capítulo iremos discutir como o homem concebe esses elementos geométricos a partir dos seus sentidos (sobretudo, considerando as representações visuais) e da sua intuição, para que possa compreendê-los.

3 A GEOMETRIA COMO MODELO DE CONHECIMENTO

Ao considerar que a Geometria é uma fonte importante de modelos para a construção de teorias do conhecimento e do conhecimento científico, iremos considerar o pensamento kantiano quando esse elabora algumas reflexões sobre a construção geométrica e cria um novo modelo filosófico para analisar a apreensão e o entendimento dos objetos geométricos. Nesta perspectiva, discutiremos qual é o papel da Geometria Euclidiana na *Crítica da Razão Pura*, descrevendo a dinâmica existente nos três pilares do conhecimento: sensibilidade, imaginação e entendimento.

Na obra *Crítica da Razão Pura* fica evidente que Kant (2001) faz uma separação entre sensibilidade e conhecimento do objeto (aquilo em cujo conceito está reunido o diverso de uma intuição dada), a saber:

> [...] a representação de um *corpo* na intuição nada contém que possa pertencer a um objeto em si; é somente o fenômeno de alguma coisa e a maneira segundo a qual somos por ela afetados; e essa receptividade da nossa capacidade de conhecimento denomina-se sensibilidade e será sempre totalmente distinta do conhecimento do objeto em si mesmo, mesmo que se pudesse penetrar até ao fundo do próprio fenômeno. (KANT, 2001, p. A44 – B62)

Além disso, Kant (2001) conceitua a intuição como a representação que pode ser previamente estabelecida de qualquer pensamento.

> *O eu penso* deve *poder* acompanhar todas as minhas representações; se assim não fosse, algo se representaria em mim, que não poderia, de modo algum, ser pensado, que o mesmo é dizer, que a representação ou seria impossível ou pelo menos nada seria para mim. A representação que pode ser dada antes de qualquer pensamento se chama *intuição.* Portanto, todo o diverso da intuição possui uma relação necessária ao *eu penso*, no mesmo sujeito em que esse diverso se encontra. Esta representação, porém, é um ato da *espontaneidade*, isto é, não pode considerar-se pertencente à sensibilidade. (KANT, 2001, p. B132 – B133)

A sensibilidade é a faculdade das intuições que se distingue do entendimento (conceitos e princípios) e da razão (ideias); assim, ao conceber essas distinções, fica explícito que cada uma dessas faculdades (entendimento e razão) tem suas próprias regras e formas, e a capacidade cognitiva é capaz de identificar o funcionamento delas mediante esse processo cognitivo. Para corroborar essa concepção, Kant (2001) enfatiza que julgamentos não analíticos (sintéticos) fundamentam-se na intuição; ou seja, se uma proposição puder ser conhecida pelo homem apenas mediante seus conceitos, essa asserção deve ser analítica, porém se não puder ser conhecida pelo homem por meio desse procedimento, conclui-se apenas que o humano precisa de “alguma coisa”, que não seja aqueles conceitos, para conhecer aquela proposição.

Em sua concepção, Kant (2001) presumiu que essa “alguma coisa” teria de ser a intuição presente no homem (noção reservada às representações que podem ter alguma relação com seu objeto que se pretende conhecer). Além disso, Kant (2001) estabelece a distinção segundo a qual uma declaração afirmativa de sujeito-predicado (proposição, julgamento) é denominada *analítica* quando o conceito de predicado estiver contido no conceito de sujeito e quando o conceito de predicado não estiver contido no conceito de sujeito é denominada *sintética*. Por exemplo, a seguinte declaração: “Todas as rosas vermelhas são vermelhas” é analítica, pois o conceito “vermelho” está contido no conceito “rosas vermelhas”. Por outro lado, a seguinte declaração: “Todas as rosas são vermelhas” é sintética, pois o conceito “vermelho” não está contido no conceito “rosas”.

O filósofo Kant (2001) definiu a sensibilidade como a capacidade receptiva de adquirir representações da maneira como somos afetados pelos objetos. Assim, a sensibilidade caracteriza-se pela faculdade receptiva (passiva), diferenciando-se do entendimento (faculdade dos conhecimentos ou faculdade cognoscitiva de avaliar os objetos) que se caracteriza pela espontaneidade (atividade).

Desse modo, é mediante a sensibilidade que os objetos são apresentados aos seres cognitivos e é mediante o entendimento que tais objetos são pensados por esses seres cognitivos. Entretanto, existe uma combinação dessas duas faculdades (sensibilidade e entendimento), ou seja, a determinação de um objeto somente pode ocorrer por meio da combinação dessas faculdades. Em Kant (2001), na sua exposição transcendental do conceito de espaço, essa mediação entre aquelas duas faculdades é desempenhada pelas concepções transcendentais do conceito de espaço e do conceito de tempo. Assim, para Kant (2001, p. A27 – B43), “a forma constante dessa receptividade, a que chamamos sensibilidade, é uma condição necessária de todas as relações nas quais os objetos são intuídos como exteriores a nós e, quando abstraímos desses objetos, é uma intuição pura que leva o nome de espaço”. E, além disso, em Kant (2001, p. A35 – B52), “o tempo é, pois, simplesmente, uma condição subjetiva da nossa (humana) intuição (porque é sempre sensível, isto é, na medida em que somos afetados pelos objetos) e não é nada em si, fora do sujeito”. Portanto, para Kant (2001), as duas formas necessárias ou “formas puras de intuição” são o *espaço* que alicerça todas as representações exteriores que são apresentadas ao ser pensante, e o *tempo* que alicerça todas as representações interiores presentes no ser pensante. Neste sentido, considera Magnani (2001):

> [...] Kant classifica a sensibilidade como o local de receptividade (e passividade) das impressões da diversidade sensível. Na “Estética Transcendental”, é claro que existem dois níveis fundamentais: a diversidade sensível e a diversidade temporal-espacial pura, na qual o espaço e o tempo constituem duas formas puras de intuição. O que quer que venha mediante esses dois níveis de sensibilidade, sem a intervenção e atividade de outras faculdades, carece de qualquer conteúdo cognitivo. Do ponto de vista filosófico, fica claro que os dois níveis devem ser considerados como duas abstrações. Espaço e tempo, como formas puras de intuição, ou forma de fenômeno, são fornecidos a priori pela sensibilidade; neles “não há nada que pertença à sensação” (Kant, 1929 [1781-1787], A20 – B34, p. 66); de fato, essa pura intuição “deve ser encontrada na mente a priori” (KANT, 1929, A21 – B35, p. 66 *apud* MAGNANI, 2001, p. 27)

A concepção de Kant (2001) sobre a imaginação expõe uma característica intermediária entre a sensibilidade e o entendimento. Por um lado, temos a sensibilidade que possibilita a intuição do espaço e, por outro lado, temos o entendimento que possibilita o conceito sobre esse espaço. De fato, conforme Kant (2001, p. B151): “a *imaginação* é a faculdade de representar um objeto, mesmo *sem a presença deste* na intuição. Mas, visto que toda a nossa intuição é sensível, a imaginação pertence à *sensibilidade*, porque a condição subjetiva é a única pela qual pode ser dada aos conceitos do entendimento uma intuição correspondente”. Desse modo, segundo Magnani (2001):

> A imaginação desempenha um papel importante nas intuições puras e sensíveis e, na atualidade, está ligada à atividade do entendimento. Consequentemente, esta última pode ser, por sua

> vez, conectada de maneira produtiva (e, portanto, indiretamente, exatamente graças à imaginação) com o que é fornecido pela sensibilidade. Assim, a síntese da imaginação é uma síntese da diversidade espaço-temporal (pura e empírica) e também uma síntese esquemática. Nesta última, a imaginação facilita a aplicação das categorias e dos conceitos puros do entendimento dos fenômenos, “determinando-os” em relação às condições de sensibilidade: “Desta forma, as categorias, em si mesmas simples formas de pensamento, obtêm a realidade objetiva, isto é, a aplicação a objetos que nos podem ser dada pela intuição. Esses objetos, no entanto, são apenas aparências” (KANT, 1929, B150 / 151, p. 164 *apud* MAGNANI, 2001, p. 29).

Sobre as faculdades que são importantes para o entendimento do objeto pesquisado, Audi (1999) sugere, em virtude da necessidade fundamental de conceitos e julgamentos, que a constituição cognitiva humana pode exigir não apenas formas intuitivas, mas também formas conceituais. Sobre esse sentido, já no prefácio da primeira edição de sua obra *Crítica da Razão Pura*, Kant (2001) destaca a faculdade de entendimento, e as regras e os limites da utilidade dessa faculdade.

> Não conheço investigações mais importantes para estabelecer os fundamentos da faculdade que designamos por entendimento e, ao mesmo tempo, para a determinação das regras e limites do seu uso, do que aquelas que apresentei no segundo capítulo da Analítica transcendental, intitulado Dedução dos conceitos puros do entendimento; também foram as que me custaram mais esforço, mas espero que não tenha sido o trabalho perdido. Esse estudo, elaborado com alguma profundidade, consta de duas partes. Uma reporta-se aos objetos do entendimento puro e deve expor e tornar compreensível o valor objetivo desses conceitos *a priori* e, por isso mesmo, entra essencialmente no meu desígnio. A outra diz respeito ao entendimento puro, em si mesmo, do ponto de vista da sua possibilidade e das faculdades cognitivas em que assenta: estuda-o, portanto, no aspecto subjetivo. Esta discussão, embora de grande importância para o meu fim principal, não lhe pertence essencialmente, pois a questão fundamental reside sempre em saber o que podem e até onde podem o entendimento e a razão conhecer, independentemente da experiência e não como é possível a própria *faculdade de pensar.* (KANT, 2001, p. A XVI – A XVII)

Além do que, em relação à compreensão do significado de experiência, Kant (2001) estabelece que haja “três fontes primitivas que encerram as condições de possibilidade de toda a experiência e que, por sua vez, não podem ser derivadas de qualquer outra faculdade do espírito; são os sentidos, a imaginação e a apercepção” (KANT, 2001, p. A94 - A95).

Antes de expor as ideias de Kant (2001), entendemos que são indispensáveis alguns esclarecimentos de Audi (1999), que enfatiza que as intuições puras são o espaço e o tempo, as intuições externas na nossa faculdade de representação e o pensar objetos mediante as categorias (as diferentes ideias sobre um objeto com as quais o entendimento realiza a síntese das várias informações propostas pela intuição para formar esse objeto):

> Essas intuições foram consideradas necessárias para a nossa experiência, porque, como estruturas de nossa sensibilidade, nada poderia ser imaginado que fosse dado a nós sem elas. No entanto, como observa Kant, pode parecer que uma vez dadas as representações dessa maneira, ainda podemos imaginar que elas não precisam ser combinadas em termos de conceitos puros como o de causalidade. Por outro lado, Kant propôs que uma lista de categorias putativas pudesse ser derivada de uma lista das formas necessárias da tabela lógica de julgamentos, e uma vez que essas formas seriam necessárias para qualquer entendimento finito, qualquer que seja o seu modo de sensibilidade, pode parecer que a validade dos conceitos puros é ainda mais inevitável do que a das intuições puras. (AUDI, 1999, p. 464)

A tabela das categorias ou julgamentos propostos por Kant (2001, B106 – A81), é uma coleção *a priori* de todas as formas possíveis de categorias que podem ser organizadas segundo os quatro títulos e com três subtítulos em cada um desses títulos:

- Primeiro – *da quantidade:* unidade, pluralidade e totalidade;
- Segundo – *da qualidade:* realidade, negação, limitação;
- Terceiro – *da relação:* inerência e subsistência, casualidade e dependência (causa e efeito) e comunidade (ação reciproca entre o agente e o paciente);
- Quarto – *da modalidade:* possibilidade – impossibilidade, existência – não existência e necessidade – contingência.

De acordo com Kant (2001):

> Esta é, pois, a lista de todos os conceitos, originariamente puros, da síntese que o entendimento *a priori* contém em si, e apenas graças aos quais é um entendimento puro; só mediante eles pode

> compreender algo no diverso da intuição, isto é, pode pensar um objeto dela. Esta divisão é sistematicamente extraída de um princípio comum, a saber, da faculdade de julgar (que é o mesmo que a faculdade de pensar) e não proveniente, de maneira rapsódia, de uma procura de conceitos puros, empreendida ao acaso e cuja enumeração, sendo concluída por indução, nunca se pode saber ao certo se é completa, sem pensar que desse modo nunca se compreenderia porque são esses e não outros os conceitos inerentes ao entendimento puro. A procura destes conceitos fundamentais foi empresa digna de um espírito tão perspicaz como Aristóteles. Como, porém, não estava de posse de um princípio, respigou-os à medida que se lhe deparavam e reuniu assim primeiramente dez, a que deu o nome de *categorias* (predicamentos). Subsequentemente, julgou ainda encontrar mais cinco, que acrescentou com a designação de pós-predicamentos. Todavia, a sua tábua ficou ainda deficiente. Além disso, encontram-se nela ainda alguns *modos* da sensibilidade pura (*quando*, *ubi*, *situs*, bem como *primus* e *simul*) e um empírico (motus), que não pertencem a este registro genealógico do entendimento; também se encontram alguns derivados (*actio*, *passio*) a par dos primitivos, faltando totalmente alguns destes. (KANT, 2001, p. B106 – B107)

A unidade (que consiste em ordenar diversas representações sob uma representação comum) da apercepção em relação à síntese da imaginação proporciona o entendimento e, essa unidade em relação à síntese transcendental da imaginação proporciona o entendimento puro no que diz respeito aos fenômenos (tudo que é representado pelas experiências externas e internas) possíveis das experiências do ser pensante permitindo-o relacionar esses fenômenos, julgá-los e fundamentá-los mediante as categorias em uma unidade conceitual que possibilite o entendimento.

> *A unidade da apercepção relativamente à síntese da imaginação é o entendimento* e esta mesma unidade, agora relativamente à *síntese transcendental* da *imaginação*, é o *entendimento puro*. Portanto, no entendimento há conhecimentos puros *a priori*, que encerram a unidade necessária da síntese pura da imaginação, relativamente a todos os fenômenos possíveis. São as *categorias*, isto é, os conceitos puros do entendimento. Por conseguinte, a faculdade empírica de conhecer, que o homem possui, contém necessariamente um entendimento, que se reporta a todos os objetos dos sentidos, embora apenas mediante a intuição e a síntese que nela opera a imaginação; a esta intuição e à sua síntese estão sujeitos todos os fenômenos, como dados de uma experiência possível. Como esta relação dos fenômenos a uma experiência possível é igualmente necessária (pois sem essa relação nunca nos era dado conhecimento algum por meio dos fenômenos e, por conseguinte, não seriam absolutamente nada para nós), segue-se que o entendimento puro é, por intermédio das

> categorias, um princípio formal e sintético de todas as experiências e os fenômenos têm *uma relação necessária ao entendimento*. (KANT, 2001, p. A119 – A120)

Portanto, Magnani (2001) observa que há uma relação bilateral entre as capacidades (sensibilidade, imaginação e entendimento) da extensão das operações sensíveis, da possibilidade de evocar ou produzir imagens e da faculdade cognoscitiva de avaliar os objetos que se apresentam os seres pensantes, ou seja, há dependência recíproca entre a primeira e a segunda faculdade que produzem conhecimento e há dependência recíproca entre a segunda e a terceira faculdade, que pode produzir conhecimento público.

> O dinamismo da tríade sensibilidade-imaginação-entendimento pode ser lido da esquerda para a direita e da direita para a esquerda, porque, de um lado, há uma dependência recíproca entre imaginação e sensibilidade e, por outro lado, entre imaginação e entendimento. O curso da esquerda para a direita é epistemológico e, quando é concretamente realizado, demonstra a conquista do conhecimento. O curso da direita para a esquerda é filosófico (transcendental), e demonstra a “condição de possibilidade” de uma síntese real e objetiva, ou seja, a possibilidade de ter um conhecimento público e intersubjetivo (MAGNANI, 2001, p. 31).

Em continuidade, exporemos as concepções de Kant (2001) sobre os aspectos da construção geométrica. Ele afirma que o espaço é uma intuição pura que se apresenta ao ser pensante e o fundamento dos conceitos desse espaço é uma intuição não empírica. Essa intuição *a priori* realiza-se por meio da lógica que se apresenta nas demonstrações de proposições geométricas.

> O espaço não é um conceito discursivo ou, como se diz também, um conceito universal das relações das coisas em geral, mas uma intuição pura. Porque, em primeiro lugar, só podemos ter a representação de um espaço único e, quando falamos de vários espaços, referimo-nos a partes de um só e mesmo espaço. Estas partes não podem anteceder esse espaço único, que tudo abrange, como se fossem seus elementos constituintes (que permitissem a sua composição); pelo contrário, só podem ser pensados *nele*. É essencialmente uno; a diversidade que nele se encontra e, por conseguinte, também o conceito universal de espaço em geral, assenta, em última análise, em limitações. De onde se conclui que, em relação ao espaço, o fundamento de todos os seus conceitos é uma intuição *a priori* (que não é empírica). Assim, as proposições geométricas, como, por exemplo, em um triângulo a soma de dois lados são maiores do que as terceiro, não derivam nunca de

> conceitos gerais de linha e de triângulo, mas da intuição, e de uma intuição *a priori*, com uma certeza apodítica. (KANT, 2001, p. A25 – B40)

Kant (2001) reitera que, sobretudo na Geometria, os conceitos e a representação do objeto sejam formados integralmente *a priori* na mente dos seres pensantes. Esses conceitos e essa representação não teriam um significado para esses seres cognitivos caso os conceitos e a representação do objeto não pudessem ter uma interação e, assim, mostrar o seu significado e serem construídos para os seres pensantes. Nesse sentido, a construção do objeto o conjuga *a priori* e o concreto o realiza mediante a apresentação de seus conceitos pela intuição.

> Os conceitos da matemática e mesmo, primeiramente, nas suas intuições puras: o espaço tem três dimensões, entre dois pontos só pode haver uma linha reta, etc. Embora todos estes princípios e a representação do objeto, de que esta ciência se ocupa, sejam produzidos totalmente *a priori* no espírito, nada significariam, se não pudéssemos sempre mostrar o seu significado nos fenômenos (nos objetos empíricos). Para tal se requer que se *torne sensível* um conceito abstrato, isto é, que se mostre na intuição um objeto que lhe corresponda, porque, não sendo assim, o conceito ficaria (como se diz) privado de *sentido*, isto é, sem significação. A matemática cumpre esta exigência pela construção da figura, que é um fenômeno presente aos sentidos (embora produzido *a priori*). (KANT, 2001, p. B299 – B300)

No prefácio da segunda edição de sua obra *Crítica da Razão Pura*, Kant (2001) descreveu sobre seu entendimento em relação à natureza da construção geométrica como a “revolução do pensamento científico” que deu origem à Geometria grega formulada com base em novos paradigmas racionais, isto é, o geômetra grego percebeu a necessidade de construir a figura geométrica em conformidade com o que pensava e o que representava *a priori* por conceitos e esse geômetra, para conhecê-la, teria apenas de atribuir elementos em concordância com o conceito.

> Desde os tempos mais remotos que a história da razão pode alcançar, no admirável povo grego, a matemática entrou na via segura de uma ciência. Simplesmente, não se deve pensar que lhe foi tão fácil como à lógica, em que a razão apenas se ocupa de si própria, acertar com essa estrada real, ou melhor, abri-la por seu

> esforço. Creio antes que por muito tempo (sobretudo entre os egípcios), se manteve tateante, e essa transformação definitiva foi devida a uma *revolução* operada pela inspiração feliz de um só homem, num ensaio segundo o qual não podia haver engano quanto ao caminho a seguir, abrindo e traçando para sempre e a infinita distância a via segura da ciência A história desta revolução do modo de pensar, mais importante do que a descoberta do caminho que dobrou o famoso promontório e a história do homem afortunado que a levou a cabo, não nos foi conservada. Todavia, a tradição que Diógenes Laércio nos transmitiu, nomeando o suposto descobridor dos elementos mais simples das demonstrações geométricas e que, segundo a opinião comum, nem sequer carecem de ser demonstrados, indica que a recordação da mudança operada pelo primeiro passo dado nesse novo caminho deve ter parecido extremamente importante aos matemáticos, tornando-se, por conseguinte, inolvidável. Aquele que primeiro demonstrou o *triângulo isósceles* (fosse ele Tales ou como quer que se chamasse) teve uma iluminação; descobriu que não tinha que seguir passo a passo o que via na figura, nem o simples conceito que dela possuía, para conhecer, de certa maneira, as suas propriedades; que antes deveria produzi-la, ou construí-la, mediante o que pensava e o que representava *a priori* por conceitos e que para conhecer, com certeza, uma coisa *a priori* nada devia atribuir-lhe senão o que fosse consequência necessária do que nela tinha posto, de acordo com o conceito. (KANT, 2001, p. Bxi –Bxii)

Na citação a seguir, Kant (2001) deixa evidente que o conhecimento matemático se realiza mediante a construção de conceitos. Assim, segundo Carson (2006), a combinação arbitrária de conceitos em Matemática admite *a priori* a construção que nos assegura a possibilidade de existência dos objetos. Em vista disso, a intuição pura restringe as possíveis arbitrariedades das definições e atribui conteúdo aos conceitos primitivos e ao conjunto de axiomas que se apresentam à Geometria Euclidiana. Consequentemente, as proposições fundamentais dessa Geometria afirmam as “condições universais de construção” das figuras geométricas. Portanto, a construção em intuição pura é a construção geométrica mediante a utilização dos axiomas euclidianos.

> O conhecimento *filosófico é o conhecimento* racional por *conceitos*, o conhecimento matemático, por construção de conceitos. Porém, *construir* um conceito significa apresentar *a priori* a intuição que lhe corresponde. Para a construção de um conceito exige-se, portanto, uma intuição *não empírica* que, consequentemente, como intuição é um objeto *singular*, mas como construção de um conceito (de uma representação geral), nem por isso deve deixar de exprimir qualquer coisa que valha universalmente na representação, para todas as intuições possíveis que pertencem ao mesmo conceito. Assim, construo um triângulo, apresentando o objeto correspondente a um conceito, seja pela simples imaginação na

> intuição pura, seja, de acordo com esta, sobre o papel, na intuição empírica, mas em ambos os casos completamente *a priori*, sem ter pedido o modelo a qualquer experiência. A figura individual desenhada é empírica e, contudo serve para exprimir o conceito, sem prejuízo da generalidade deste, pois nesta intuição empírica considera-se apenas o ato de construção do conceito, ao qual muitas determinações, como as da grandeza, dos lados e dos ângulos, são completamente indiferentes e, portanto, abstraem-se estas diferenças, que não alteram o conceito de triângulo. (KANT, 2001, p. A713 – A714)

Kant (2001) também afirma que para conhecer qualquer objeto no espaço é necessário desenhá-lo.

> A simples forma da intuição sensível externa, o espaço, não é ainda conhecimento; oferece apenas o diverso da intuição a priori para um conhecimento possível. Mas, para conhecer qualquer coisa no espaço, por exemplo, uma linha, é preciso traçá-la e, deste modo, obter sinteticamente uma ligação determinada do diverso dado; de tal modo que a unidade deste ato é, simultaneamente, a unidade da consciência (no conceito de uma linha), só assim se conhecendo primeiramente um objeto (um espaço determinado). (KANT, 2001, p. B137 – B138)

A concepção de Kant (2001) sobre a construção geométrica é: “não posso ter a representação de uma linha, por pequena que seja, se não a traçar em pensamento, ou seja, sem produzir as suas partes, sucessivamente, a partir de um ponto e desse modo retraçar esta intuição” (KANT, 2001, p. B203 – B204). Assim, conforme Magnani (2001), para Kant (2001), esse procedimento de descrever o objeto “que trabalha na imaginação geométrica refere-se à noção de construção, que não deve ser interpretada como um simples desenho concreto e empírico, porém como a “condição de possibilidade” do próprio desenho” (MAGNANI, 2001, p. 33). Além disso, ainda segundo Magnani (2001, p. 33), uma vez que esse procedimento concreto e empírico de descrever o objeto geométrico ocorreu, pode-se concluir que “a imaginação gerou um esquema que garante o procedimento construtivo”. De fato, em conformidade com Kant (2001),

> [...] construo um triângulo, apresentando o objeto correspondente a um conceito, seja pela simples imaginação na intuição pura, seja, de acordo com esta, sobre o papel, na intuição empírica, mas em ambos os casos completamente *a priori*, sem ter pedido o modelo a qualquer experiência. A figura individual desenhada é empírica e,

> contudo, serve para exprimir o conceito, sem prejuízo da generalidade deste, pois nesta intuição empírica considera-se apenas o ato de construção do conceito, ao qual muitas determinações, como as da grandeza, dos lados e dos ângulos, são completamente indiferentes e, portanto, abstraem-se estas diferenças, que não alteram o conceito de triângulo. (KANT, 2001, p. A713 – B741)

Portanto, o esquema do triângulo, proposto por Kant (2001), é um critério para todos os triângulos concretos, empíricos e construtivos.

Na construção concreta, de acordo com Kant (2001), quando desenhamos, a figura única é empírica e expressa o conceito, sem prejudicá-lo em sua universalidade, pois, para Kant (2001, p. B34), essa "intuição que se relaciona com o objeto, por meio de sensação, chama-se *empírica*".

> A figura individual desenhada é empírica e, contudo, serve para exprimir o conceito, sem prejuízo da generalidade deste, pois nesta intuição empírica considera-se apenas o ato de construção do conceito, ao qual muitas determinações, como as da grandeza, dos lados e dos ângulos, são completamente indiferentes e, portanto, abstraem-se estas diferenças, que não alteram o conceito de triângulo. (Kant, 2001, p. A714 – B742)

Assim, de acordo com Magnani (2001):

> O esquema geométrico de Kant, motor de construção, é ativado pela imaginação produtiva, que é universalmente válida para todas as intuições possíveis. Portanto, esse esquema não é fruto de uma abstração dos dados (por exemplo, indutivo), mas é a norma (ou a regra, o modelo, o método, como vimos) para "obter" esses dados particulares. Assim, o esquema, no entanto, tem uma natureza empírica, no sentido de que se refere às coisas tal como elas aparecem. Assim, é possível ter determinações de intuições puras somente quando há um "critério" que é a condição de possibilidade delas. (MAGNANI, 2001, p. 35).

Para evidenciar a construção geométrica desse esquema, Magnani (2001, p. 37) considera o seguinte exemplo: imagine que uma criança deva "demonstrar" uma proposição da Geometria elementar – a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo. Obviamente, a criança não precisa demonstrar esse teorema no sentido como foi demonstrado historicamente ou como ele é abordado nos textos de Geometria Euclidiana. No entanto, ela pode conseguir essa demonstração utilizando uma série de construções geométricas elementares, inspirada no uso apropriado dos conceitos geométricos básicos que já são conhecidos por ela.

Assim, por meio desse exemplo, Kant (2001) diria que a criança foi levada a essa resolução e demonstração por sua imaginação, o que ajudou essa criança a realizar construções *a priori*. E, ainda, podemos declarar que essa criança usou um procedimento heurístico para estabelecer a demonstração daquela preposição. Assim, nos dois casos citados e considerando que essas "demonstrações" foram realizadas utilizando formas múltiplas de representação, podemos perceber que os tipos de raciocínio são inspirados em modelos, que incluem dispositivos não verbais, ou seja, diagramas geométricos e construções geométricas kantianas. Portanto, segundo Magnani (2001),

> os exemplos que descrevemos podem dar a ideia (obviamente numa descrição muito vaga e metafórica) do que Kant tinha em mente quando falou de esquema geométrico como regra, método ou modelo. Além disso, no caso da Geometria, devemos recordar que os esquemas fornecem construções *a priori* e objetivas. (Magnani, 2001, p. 38)

Para as ideias de esquemas de construções precisamos entender os seguintes pontos: que ao conceito (processo que torna possível a descrição e a classificação) de uma figura geométrica nenhum desenho poderia ser satisfatório para representá-la e que o esquema geométrico kantiano é produto da imaginação (intermediário entre os planos do sensível e do entendimento) que se caracteriza como um método de construir uma imagem em consonância com um conceito. Em relação a esse assunto, Kant (2001) pronuncia-se da seguinte forma:

> Ao conceito de um triângulo em geral nenhuma imagem seria jamais adequada. Com efeito, não atingiria a universalidade do conceito pela qual este é válido para todos os triângulos, retângulos, de ângulos oblíquos, etc., ficando sempre apenas limitada a uma parte dessa esfera. O esquema do triângulo só pode existir no pensamento e significa uma regra da síntese da imaginação com vista a figuras puras no espaço. (KANT, 2001, p. A141 – B181).

E, em outra passagem, para complementar, Kant (2001) afirma que a representação de uma imagem é o produto da capacidade empírica da imaginação produtiva (na medida em que a imaginação é espontaneidade), e se expressa do seguinte modo:

> Só poderemos dizer que *a imagem* é um produto da faculdade empírica da imaginação produtiva, e que o *esquema* de conceitos sensíveis (como das figuras no espaço) é um produto e, de certo modo, uma monograma da imaginação pura *a priori*, pelo qual e segundo o qual são possíveis as imagens; estas, porém, têm de estar sempre ligadas aos conceitos, unicamente por intermédio do esquema que elas designam e ao qual não são em si mesmas inteiramente adequadas. (KANT, 2001, p. B181 – A142)

Por fim, Magnani (2001) expõem algumas das características do conceito de esquema geométrico kantiano e explicita a condição de possibilidade para a realização de construções geométricas.

> O esquema geométrico é, no contexto da *Crítica da Razão Pura*, o índice das *condições da construção*, portanto a norma de todas as intuições possíveis e, consequentemente, o critério de sua identificação. Uma vez confrontado com uma determinada intuição empírica, o esquema geométrico que seleciona o conceito adequado (por exemplo, um triângulo), também é capaz de reconhecer e identificar a forma específica da intuição empírica (porque com ela esse conceito é compatível). Assim, é possível *conhecer* um triângulo puro, isto é, imaginá-lo como um objeto, mas também é possível *reconhecer* um objeto empírico como triangular. E ao passo que o esquema geométrico fornece a condição de possibilidade de cada construção geométrica “empírica”, entretanto, é evidentemente o esquema de um dos conceitos geométricos puros (por exemplo, aqueles inseridos no sistema axiomático e dedutivo de Euclides). (MAGNANI, 2001, p. 39)

Num sistema axiomático euclidiano, os elementos geométricos primitivos não têm significado algum definido nesse sistema, exceto aqueles que são explicitados e apresentados no conjunto de axiomas desse sistema axiomático euclidiano. Assim, os elementos geométricos primitivos podem ser interpretados (reconhecidos) de qualquer maneira que seja consistente com esse conjunto de axiomas presentes no sistema axiomático euclidiano.

Portanto, uma interpretação de um sistema axiomático euclidiano é uma maneira singular de estabelecer significado aos elementos primitivos nesse sistema, ou seja, uma interpretação é denominada de modelo para o sistema axiomático euclidiano quando aqueles axiomas caracterizaram afirmações verdadeiras nessa interpretação.

Por fim, uma vez que as proposições, nesse sistema axiomático euclidiano, foram todas deduzidas mediante aquele conjunto de axiomas presentes no sistema em conjunto com as regras de inferência da Lógica, podemos afirmar que todas as proposições serão declarações verdadeiras em qualquer modelo estabelecido para o sistema axiomático euclidiano.

Ao assumir um conjunto de axiomas para a Geometria Euclidiana devemos considerar a consistência deles no sistema axiomático euclidiano. Em outras palavras, esse conjunto de axiomas em um sistema axiomático é considerado consistente quando não há contradição lógica entre eles. Assim, novamente, é uma propriedade que pode ser verificada por meio de modelo, ou seja, se há um modelo para esse sistema axiomático, então esse conjunto de axiomas é consistente.

3.1 Alguns aspectos da compreensão empírica e esquematismo empírico

Para expor os aspectos da compreensão empírica, inicialmente, Magnani (2001, p. 39) considera duas perspectivas: 1. a atividade empírica da imaginação que orienta a compreensão empírica, que é estudada em conjunto com a síntese da reprodução (representação do objeto) e do reconhecimento do objeto; 2. a compreensão empírica refere-se explicitamente à imaginação. Assim, nesses dois casos, estamos tratando com a formação da imagem de um fenômeno (objeto indeterminado da intuição). Na verdade, esse processo é necessário à percepção do objeto e é o primeiro passo para a constituição do objeto. Para Kant (2001), a síntese da compreensão fornece a imagem ou "percepção", como consciência empírica do objeto e, por sua vez, é associada à síntese transcendental da imaginação (entendimento puro).

> Como, pois, toda a percepção possível depende da síntese da apreensão e esta mesma, a síntese empírica, depende da síntese transcendental e, consequentemente, das categorias, todas as percepções possíveis e, portanto, também tudo o que porventura possa atingir a consciência empírica, isto é, todos os fenômenos da natureza, quanto à sua ligação, estão sob a alçada das categorias, as quais dependem da natureza (considerada simplesmente como natureza em geral) porque constituem o fundamento originário da

> sua necessária conformidade à lei (como *natura formaliter spectata*). (Kant, 2001, p. B164 – B165)

Além disso, para Magnani (2001), a apreensão empírica é a combinação ou a conexão do diverso da intuição empírica e que torna possível a imagem de um objeto. Nesse sentido, a conceituação de Kant (2001) que o espaço é uma representação singular *a priori* de experiências externas e, pela síntese figurativa, que o ser pensante constrói em sua imaginação um triângulo, essa síntese figurativa é análoga com aquela que utilizamos em nossa apreensão quando representamos esse triângulo para convertê-lo num conceito de nossa experiência; por essa razão, podemos relacionar esse conceito de triângulo com a representação de um objeto triangular.

> Parece, com efeito, que se poderia conhecer a possibilidade de um triângulo a partir do seu conceito tomado em si mesmo (que é certamente independente da experiência), pois podemos, de fato, dar-lhe um objeto totalmente *a priori*, isto é, construí-lo. Como esta construção, porém, seria apenas a forma de um objeto, o triângulo seria sempre um produto da imaginação e a possibilidade do objeto desse produto seria duvidosa, porquanto exigiria ainda outra coisa, a saber, que tal figura fosse pensada apenas nas condições em que assentam todos os objetos da experiência. Ora, só porque o espaço é uma condição formal *a priori* de experiências externas e porque a síntese figurativa pela qual construímos na imaginação um triângulo é totalmente idêntica à que usamos na apreensão de um fenômeno para o converter num conceito da experiência, só por isso se pode ligar a este conceito de triângulo a representação da possibilidade de uma coisa semelhante. (KANT, 2001, p. A224 – B272)

Em virtude disso, Magnani (2001) acrescenta ainda que:

> Já foi dito que a apreensão empírica, ao mesmo tempo em que possibilita a imagem de um objeto, é o primeiro passo em sua criação. Esse procedimento facilita a organização inicial da própria percepção, como a consciência da unidade de um objeto específico: portanto, a percepção já revela um processo produtivo e não simplesmente um processo receptivo. (MAGNANI, 2001, p. 40).

Dessa forma, a apreensão empírica refere-se à atividade produtiva da imaginação; porém, a atividade reprodutiva e associativa (psicológica e mnemônica) está estritamente relacionada àquela atividade produtiva. Na prática, a atividade reprodutiva e associativa auxilia no processo de memorização e ajuda a recordar simultaneamente os diversos aspectos da variedade espaço-temporal sensível que a imaginação do ser pensante combina para compor a representação integral da imagem do objeto. Por consequência, a representação integral da imagem do objeto precisa do entendimento unificador. De fato, conforme Kant (2001):

> A experiência é um conhecimento empírico, isto é, um conhecimento que determina um objeto mediante percepções. É, pois, uma síntese das percepções, que não está contida na percepção, antes contém, numa consciência, a unidade sintética do seu diverso, unidade que constitui o essencial de um conhecimento dos *objetos* dos sentidos, isto é, da experiência (não simplesmente da intuição ou da sensação dos sentidos). Ora, é certo que, na experiência, as percepções se reportam umas às outras, de uma maneira apenas acidental, de modo que das próprias percepções não resulta nem pode resultar evidentemente a necessidade da sua ligação, porque a apreensão é apenas a reunião do diverso da intuição empírica e nela não se encontra nenhuma representação de uma ligação necessária na existência dos fenômenos que ela junta no espaço e no tempo. (KANT, 2001, p. B219)

Para exemplificar essa síntese das percepções em Kant (1998), Magnani (2001) cita algumas reflexões sobre esse assunto elaboradas por Broad.

> Uma pessoa, que já passou da infância e está familiarizada com os dispositivos a que denominamos “sinos”, agora assume certos ruídos, certas sensações visuais e certas sensações tácticas, como tantas aparências diferentes de certo objeto físico persistente, por exemplo, certo sino. Mas tais sensações não são, no mínimo, semelhantes em qualidade. Os ruídos ocorreram juntamente com muitos outros sons simultâneos num campo auditivo, a sensação visual juntamente com muitas outras expansões de cor simultâneas num campo visual e a sensação tática com muitas outras sensações tácticas simultâneas. Gradualmente, certas sensações foram discriminadas do resto do campo auditivo e foram associadas a certas sensações que foram discriminadas do resto do campo visual e a certas sensações que foram discriminadas do resto do campo táctico. Quando alguém está ciente de uma sensação de um desses tipos (por exemplo, certa sensação auditiva característica), ele evoca imagens das sensações associada dos outros tipos. E assim por diante. Este é um processo de síntese. [...] O produto aqui é algo que pode ser denominado de percepção de certa coisa, por exemplo certo sino (BROAD, 1978, p. 80 *apud* MAGNANI, 2001, p. 41)

Assim, o momento esquemático realizado pelo ser pensante também pode ser encontrado na atividade empírica da imaginação, e essa atividade é isomórfica com a pura apreensão. Nesse sentido, a apreensão empírica proporciona à formação da imagem do objeto e essa imagem formada do objeto é sempre singular e atribuída a uma intuição do objeto. Para Kant (2001), essa intuição singular refere-se a um objeto específico. No entanto, várias imagens podem ser obtidas para representar um único objeto. Assim, para indicar essa capacidade de síntese da apreensão do objeto, Kant (2001) utilizou a metáfora da "regra" para identificar um objeto.

Entendemos que essas regras (categorias ou princípios do entendimento) de construção dos objetos, que são universais, asseguram à Matemática e, em especial, à Geometria, sua universalidade. De fato, em Kant (2001) fica evidente que o entendimento é a capacidade de formular regras para conhecer o objeto percebido e que a síntese das percepções do objeto realizada pelo entendimento ocorre mediante as regras que constituem as condições para a universalização dos conceitos presentes no objeto apreendido pela síntese intuitiva e síntese sensitiva. Por certo, em Kant (2001), podemos verificar as relações e funcionalidades dessas regras.

> A lógica, por sua vez, pode ser considerada numa dupla perspectiva: quer como lógica do uso geral, quer do uso particular do entendimento. A primeira contém as regras absolutamente necessárias do pensamento, sem as quais não pode haver nenhum uso do entendimento, e ocupa-se, portanto, deste, independentemente da diversidade dos objetos a que possa dirigir-se. A lógica do uso particular do entendimento contém as regras para pensar retamente sobre determinada espécie de objetos. (KANT, 2001, p. A52 – B77)

Kant (2001, B145) identifica as categorias como "as regras para um entendimento". Assim, consideramos que essas regras não fazem parte da atividade intuitiva ou da sensibilidade do ser pensante em relação aos objetos, mas são formadas pelo entendimento produzido sobre esses objetos.

> É, na verdade, uma lei simplesmente empírica, aquela, segundo a qual, representações que frequentemente se têm sucedido ou acompanhado, acabam, finalmente, por se associar entre si, estabelecendo assim uma ligação tal que, mesmo sem a presença

> do objeto, uma dessas representações faz passar o espírito à outra representação, segundo uma regra constante. Esta lei da reprodução pressupõe, contudo, que os próprios fenômenos estejam realmente submetidos a uma tal regra e que no diverso das suas representações tenha lugar acompanhamento ou sucessão, segundo certas regras; a não ser assim, a nossa imaginação empírica não teria nunca nada a fazer que fosse conforme à sua faculdade, permanecendo oculta no íntimo do espírito como uma faculdade morta e desconhecida para nós próprios. Se o cinábrio fosse ora vermelho, ora preto, ora leve, ora pesado, se o homem se transformasse ora nesta ora naquela forma animal, se em um longo dia a terra estivesse coberta ora de frutos, ora de gelo e neve, a minha imaginação empírica nunca teria ocasião de receber no pensamento, com a representação da cor vermelha, o cinábrio pesado; ou se uma certa palavra fosse atribuída ora a esta, ora àquela coisa, ou se precisamente a mesma coisa fosse designada ora de uma maneira, ora de outra, sem que nisso houvesse uma certa regra, a que os fenômenos estivessem por si mesmos submetidos, não podia ter lugar nenhuma síntese empírica da reprodução. (KANT, 2001, p. B101)

Magnani (2001, p. 42) ainda reforça que “a existência da regra de identificação (reprodução) do objeto por meio de suas características distintivas é também a condição de intersubjetividade do conhecimento empírico e, portanto, de *comunicabilidade universal*”.

Kant (2001, A105) propõe o seguinte exemplo geométrico para explicar sua conceituação de regra: “Assim, pensamos um triângulo como um objeto, quando temos consciência da combinação de três linhas retas de acordo com uma regra, segundo a qual, uma tal intuição pode ser sempre representada”.

Neste capítulo discutimos as ideias sobre as representações visuais e o pensamento geométrico a partir da perspectiva kantiana.

3.2 Sobre o esquema geométrico e as construções geométricas

De acordo com as discussões anteriores fica notório que, para Kant (2001), o conhecimento matemático é sintético *a priori*, uma vez que a compreensão do conhecimento matemático se fundamenta na construção de conceitos por meio da intuição. Nesse sentido, entendemos que o conceito matemático construído pelo indivíduo, em especial os conceitos geométricos, é exibido *a priori* como uma “intuição pura”. Porém, esses conceitos geométricos podem ser melhor apreendidos pelo indivíduo quando se exibe empiricamente uma representação visual desses conceitos geométricos. De fato, conforme Kant (2001):

> O conhecimento *filosófico é o conhecimento* racional por *conceitos*, o conhecimento matemático, por construção de conceitos. Porém, *construir* um conceito significa apresentar *a priori* a intuição que lhe corresponde. Para a construção de um conceito exige-se, portanto, uma intuição *não empírica* que, consequentemente, como intuição é um objeto *singular*, mas como construção de um conceito (de uma representação geral), nem por isso deve deixar de exprimir qualquer coisa que valha universalmente na representação, para todas as intuições possíveis que pertencem ao mesmo conceito. Assim, construo um triângulo, apresentando o objeto correspondente a um conceito, seja pela simples imaginação na intuição pura, seja, de acordo com esta, sobre o papel, na intuição empírica, mas em ambos os casos completamente *a priori*, sem ter pedido o modelo a qualquer experiência. A figura individual desenhada é empírica e, contudo, serve para exprimir o conceito, sem prejuízo da generalidade deste, pois nesta intuição empírica considera-se apenas o ato de construção do conceito, ao qual muitas determinações, como as da grandeza, dos lados e dos ângulos, são completamente indiferentes e, portanto, abstraem-se estas diferenças, que não alteram o conceito de triângulo. (KANT, 2001, A713 – A714)

Assim, o conceito geométrico, quando construído pelo ser pensante por meio da intuição pura, configura um objeto geométrico singular (apreensão pura) que funciona como um representante de todas as intuições (apreensões empíricas) possíveis realizadas que se enquadra naquele conceito geométrico. Esse objeto geométrico singular concede a universalidade do conceito geométrico na Geometria. Nessa perspectiva em relação à Geometria e à apreensão pura dos seus elementos geométricos, considerando a conexão da apreensão pura com a apreensão empírica desses elementos geométricos e as condições de construções desses objetos geométricos, Magnani (2001) salienta que:

> [...] em Geometria é necessária à determinação do conceito "em conformidade com" as condições da intuição. Essas "determinações" são possibilitadas pela atividade do *esquematismo da imaginação* (para ser entendidas não apenas como reprodutivas e associativas, que são propriedades meramente psicológicas, mas também "produtivas"). Isso explica como a Geometria (e em geral a Matemática) é considerada por Kant como produtora de conhecimento sintético *a priori*. Por exemplo, o conceito geométrico de uma reta está relacionado às condições espaciais, que por sua vez são expressas por aqueles axiomas ou postulados que

> descrevem as propriedades do espaço em que certas construções são apropriadas. (MAGNANI, 2001, p. 47).

Para entendermos as considerações de Magnani sobre a atividade do esquematismo da imaginação e as construções geométricas realizadas mediante esse esquematismo, analisaremos de maneira sucinta a proposição 32, do livro I, de *Os elementos* de Euclides (2009). Essa proposição aparece na *Crítica da Razão Pura* e Kant a utiliza para explicitar suas ideias sobre esquematismo e construções geométricas.

> Dê-se a um filósofo o conceito de um triângulo e o encargo de investigar, à sua maneira, como pode ser a relação da soma dos ângulos desse triângulo com o ângulo reto. Nada possui a não ser o conceito de uma figura que está limitada por três linhas retas e nessa figura o conceito de igual número de ângulos. Pode então refletir tanto quanto quiser sobre esse e tornar claro o conceito de linha reta ou de ângulo ou do número três, mas não chegará a outras propriedades que não estejam contidas nestes conceitos. Mas que o geômetra tome esta questão. Começa imediatamente a construir um triângulo. Porque sabe que dois ângulos retos valem juntamente tanto como todos os ângulos adjacentes que podem traçar-se de um ponto tomado numa linha reta, prolonga um lado do seu triângulo e obtém dois ângulos adjacentes que, conjuntamente, são iguais a dois retos. Divide em seguida o ângulo externo, traçando uma linha paralela ao lado oposto do triângulo e vê que daí resulta um ângulo adjacente que é igual a um ângulo interno, etc. Consegue desta maneira, graças a uma cadeia de raciocínios, guiado sempre pela intuição, a solução perfeitamente clara e ao mesmo tempo universal do problema. (Kant, 2001, A716 – B745)

Nesse sentido, considere a proposição 32 – *Tendo sido prolongado um dos lados de todo triângulo, o ângulo exterior é igual aos dois interiores e opostos, e os três ângulos interiores do triângulo são iguais a dois retos*. No enunciado dessa proposição euclidiana observamos que há duas partes: a primeira declara que – o ângulo exterior do triângulo ao prolongar um dos lados é igual aos dois ângulos interiores opostos ao ângulo exterior desse triângulo. Assim, mediante a demonstração euclidiana da primeira declaração, fica confirmada a segunda parte do enunciado da proposição 32 que declara: que a soma dos três ângulos internos do triângulo é igual a dois ângulos retos.

Para demonstrar a proposição 32, Euclides (2009, p. 121) começa com as seguintes condições essenciais para compô-la: seja um triângulo qualquer e prolongue um dos lados desse triângulo. Para tal fim, Euclides constrói um triângulo qualquer e considera um dos lados desse triângulo construído para estender um segmento de reta; o processo de construção desses elementos geométricos depende das definições euclidianas (conceitos) de: fronteira (definição 13 – *fronteira é aquilo que é extremidade de alguma coisa*), figura (definição 14 – *figura é o que é contido por alguma ou algumas fronteiras*), figura retilínea (definição 19 – *figuras retilíneas são as contidas por retas, por um lado, triláteras, as por três*), traçar uma reta (postulado 1 – *fique postulado traçar uma reta a partir de todo ponto até todo ponto*) e prolongar uma reta (postulado 2 – *também prolongar uma reta limitada, continuamente, sobre uma reta*). Além disso, para demonstrar a proposição 32, Euclides utiliza as seguintes proposições e noções comuns (axiomas) do livro I: 1. Proposição 31 – *Pelo ponto dado, traçar uma linha reta paralela à reta dada*; 2. Proposição 29 – *A reta, caindo sobre as retas paralelas, faz tanto os ângulos alternos iguais entre si quanto o exterior igual ao interior e oposto e os interiores e no mesmo lado iguais a dois retos*; 3. Noção comum 2 – *E, caso sejam adicionadas coisas iguais a coisas iguais, os todos são iguais*; 4. Proposição 13 – *Caso uma reta, tendo sido alteada sobre uma reta, faça ângulos, fará ou dois retos ou iguais a dois retos*; e 5. Noção comum 1 – *As coisas iguais à mesma coisa são também iguais entre si*.

Assim, segundo Kant (2001), entendemos que o ser pensante tem intuições puras desses objetos geométricos (por exemplo, os elementos geométricos que foram elaborados e que surgiram durante a demonstração da proposição 32 exposta acima), construídos conforme aparecem no esquematismo geométrico euclidiano quando aquele ser pensante conhece aqueles objetos geométricos expostos anteriormente na demonstração da proposição 32. Desse modo, entendemos que a intuição pura de objetos geométricos construídos conforme o esquematismo euclidiano permite ao ser pensante visualizar os elementos geométricos euclidianos básicos (presentes nas definições, noções comuns e postulados euclidianos) e as propriedades inerentes dos diversos objetos geométricos cujas informações fornecidas por esses elementos básicos possibilitam as construções desses diversos objetos geométricos e, em seguida, a possibilidade de demonstrar que certas relações geométricas sempre se mantêm nesses diversos objetos geométricos euclidianos. Por exemplo, na antiga axiomática euclidiana, em *Os elementos*, Livro I, proposição 1: *Construir um* *triângulo equilátero sobre a reta limitada dada.* Para realizar a construção desse objeto geométrico, Euclides utiliza as seguintes proposições nesta ordem: postulado 3, postulado 1, definição 15, noção comum 1 e definição 20.

Neste sentido, não considerando as lacunas lógicas que aparecem nas suposições euclidianas feitas sem justificativas, Euclides em suas demonstrações ou nas construções de proposições geométrica, segundo Balieiro (2017, p. 75-76), nesta ordem, começa, em primeiro lugar, com os seguintes passos: 1) a exposição do enunciado, 2) o que é dado no enunciado, 3) o que se pede no enunciado, 4) a construção geométrica, 5) a demonstração e 6) conclusão da proposição. Em segundo lugar, Euclides, em suas demonstrações e construções, tem uma preocupação em explicar quais definições, postulados e noções comuns justificam cada uma das suas etapas nessas demonstrações e construções que aparecem em *Os elementos*. Assim, os diagramas geométricos que aparecem nas demonstrações das proposições dessa obra constituem uma ferramenta necessária e útil para auxiliar o leitor a visualizar as várias etapas de construções geométricas que possibilitam uma compreensão das demonstrações presentes nas proposições.

O diagrama geométrico, para auxiliar a demonstração da proposição 32, construído por Euclides e analisado por Kant, como exposto em linhas anteriores, caracteriza-se por ser uma representação visual necessária e suficiente para que o ser pensante determine em sua construção as posições relativas dos elementos geométricos, as relações que existem entre esses elementos geométricos e organize os encadeamentos lógicos para a demonstração da proposição. Assim, sobre esse esquema geométrico e sobre a construção geométrica euclidiana, Kant enfatiza que:

> Com efeito, não devo considerar aquilo que realmente penso no meu conceito de triângulo (este não é mais do que a mera definição); pelo contrário, devo sair dele para alcançar propriedades que não residem nesse conceito, mas, contudo, lhe pertencem. Ora isso não é possível a não ser que determine o meu objeto segundo as condições, seja da intuição empírica, seja da intuição pura. No primeiro caso (medindo os ângulos do triângulo) terei apenas uma proposição empírica, que não encerra nenhuma generalidade e muito menos universalidade, e da qual não é aqui o caso. O segundo procedimento é a construção matemática, e precisamente aqui a construção geométrica, mediante a qual acrescento numa intuição pura, tanto como numa intuição empírica, o diverso que

> pertence ao esquema de um triângulo em geral, por consequência ao seu conceito; neste modo de proceder devem absolutamente ser construídas proposições sintéticas universais. (Kant, 2001, A718 – A719)

No trecho citado acima podemos inferir que Kant sugere, mediante procedimentos da intuição empírica podemos visualizar, reconhecer, identificar, classificar, definir, relacionar os elementos geométricos e mediante a intuição pura definir de modo geral esses elementos geométricos, estabelecer axiomas que relacionem esses elementos básicos, estabelecer construções coerentes de alguma propriedade geométrica que possibilite a realização de demonstração por meio da utilização de definições, axiomas e lemas – não necessariamente nessa ordem – utilizando procedimentos lógicos com o intuito de conseguir uma proposição universal.

Assim, os esquemas geométricos para resolver um problema ou demonstrar uma proposição, devem ser entendidos como "regras" que também permitem, por exemplo, identificar os elementos geométricos, estabelecer relações entre esses elementos e organizá-los de forma coerente na solução do problema ou na demonstração da proposição por meio de construções geométricas e demonstrações de proposições.

3.3 Algumas reflexões sobre a descoberta geométrica por meio da visualização

Neste item faremos algumas reflexões sobre a visualização como um meio de descoberta geométrica e que partir de conhecimentos prévios (por exemplo, ponto, reta, plano, segmento de reta e três pontos sobre um plano) de alguns elementos geométricos é possível obter novos conhecimentos geométricos (por exemplo, construir um triângulo com aqueles conhecimentos anteriores e, em especial, descobrir outros conhecimentos relacionados com essa figura geométrica triangular, ou seja, descobrir outras propriedades geométricas dessa figura plana euclidiana).

Assim, ao mencionar a expressão “descoberta”, me refiro à conceituação estabelecida por Giaquinto (2007) em seu livro:

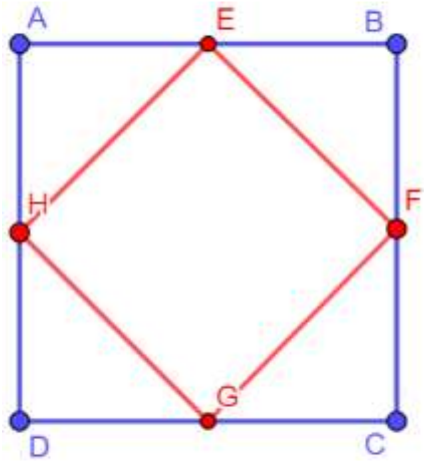
> [...] a descobrir uma verdade tem três componentes. Em primeiro lugar, há o requisito de independência, que consiste apenas em que a pessoa passe a acreditar na proposição em virtude de suas próprias faculdades mentais, sem ler ou ouvir. Em segundo lugar, há a exigência de que se passe a acreditar nisso de maneira confiável. Finalmente, há a exigência de que alguém passe a acreditar que não envolve violação da racionalidade epistêmica (dado o estado epistêmico pré-existente). Em suma, descobrir uma verdade é acreditar nela de maneira independente, confiável e racional. (GIAQUINTO, 2007, p. 50).

Giaquinto (2007), com o intuito de exemplificar sua concepção de descoberta, considera o seguinte exemplo para ilustrar sua ideia:

> Imagine um quadrado. Cada um de seus quatro lados tem um ponto médio. Agora visualize o quadrado cujos vértices coincidem com esses quatro pontos médios. Se você visualizar o quadrado original com uma base horizontal, o novo quadrado deve parecer inclinado, ficando em pé em um de seus lados, “como um diamante”, como dizem algumas pessoas. Claramente, o quadrado original é maior do que o quadrado inclinado contido nele. Quanto maior? Por meio da imaginação visual, mais algum raciocínio simples, pode-se encontrar a resposta muito rapidamente.
> Ao visualizar essa figura, deve ficar evidente que o quadrado original é composto precisamente pelo quadrado inclinado mais quatro triângulos retângulos, cada lado do quadrado inclinado é a hipotenusa de um triângulo retângulo. Agora é possível visualizar os triângulos retângulos dobrando-se, com vincos ao longo dos lados do quadrado inclinado. Muitas pessoas concluem que os

> triângulos retângulos podem ser dispostos para cobrir exatamente o quadrado interno inclinado, sem nenhuma lacuna ou sobreposição. Se você estiver em dúvida, imagine o quadrado original com segmentos de reta unindo os pontos médios dos lados opostos, dividindo o quadrado original em quatro quadrados, seus quadrantes. Os lados do quadrado interno inclinado são as diagonais dos quadrantes [quatro quadrados].
> Supondo que isso o leve à crença de que os triângulos retângulos podem ser dispostos para cobrir exatamente o quadrado interno, você inferirá que a área do quadrado original é duas vezes a área do quadrado interno inclinado. Você pode raciocinar, por exemplo, da seguinte maneira. Os triângulos retângulos podem ser dispostos para cobrir exatamente o quadrado interno; portanto, a área total dos quatro triângulos retângulos é igual à área do quadrado interno; a área do quadrado original é igual à área do quadrado interno mais a área total dos quatro triângulos retângulos; assim, a área do quadrado original é igual a duas vezes a área do quadrado interno. (GIAQUINTO, 2007, p. 51-52).

Figura 5 – Representação do quadrado maior e menor



Fonte: Elaborada pela autora.

De maneira empírica chegamos à conclusão de que a área do quadrado maior é duas vezes a área do quadrado menor inscrito nesse quadrado maior (Figura 5). Esse exemplo, proposto por Giaquinto (2007), mostra um procedimento plausível que pode orientar o ser pensante em acreditar que se pode conseguir demonstrar, em especial num espaço euclidiano, uma proposição geométrica geral, isto é, que a área de *qualquer* quadrado $ABCD$ é duas vezes a área do quadrado $EFGH$, cujos vértices são os pontos médios dos lados do quadrado $ABCD$.

Conforme Giaquinto (2007), podemos adquirir essa crença[5] por ter seguido uma sequência de inferências que aparecem na demonstração de alguma proposição geométrica tomando-se por base outras crenças (convicção, certeza, confiança, segurança, etc.), ou por termos sido informados sobre os procedimentos de demonstração de alguma proposição geométrica ou, ainda, de alguma outra maneira conhecemos sobre essa demonstração. Além disso, podemos declarar que uma pessoa ou algumas pessoas poderiam adquirir essa crença visualizando aquela comprovação geométrica sugerida acima. No caso do exemplo dos quadrados (quadrado menor inserido no quadrado maior), o percurso para a crença, descrito por Giaquinto (2007), caracteriza-se por ser misto, ou seja, em parte apresenta um raciocínio verbal válido e por outra parte o ato de visualizar os elementos geométricos que se apresentam no diagrama geométrico.

Para Giaquinto (2207), essas premissas são:

> Esta premissa é a seguinte crença verdadeira, que eu chamo de "B":
> Se c_i ("o quadrado interno") é o quadrado cujos vértices são os pontos médios dos lados do quadrado c ("o quadrado original"), então as partes de c além de c_i ("os triângulos retângulos") podem ser organizados para caber exatamente em c_i, sem sobreposição ou lacuna, sem alteração de tamanho ou forma. (Giaquinto, 2007, p. 52)

Para entendermos o processo cognitivo envolvido na obtenção dessa crença, devemos considerar duas maneiras possíveis (raciocínio verbal válido e o ato de visualizar os elementos geométricos), em que a visualização descrita pode ser usada para chegar à crença. Em ambos os casos, segundo Giaquinto (2007), o papel da visualização é fornecer evidências experienciais. Em síntese, Giaquinto (2007), após ampla argumentação, conclui:

> Para resumir: pode-se chegar à crença B visualizando da maneira sugerida, quando (a) se sente que um futuro contraexemplo não é uma possibilidade epistêmica, (b) a suposta evidência da experiência sensorial é, na melhor das hipóteses, escassa e (c) acredita-se que a suposta evidência é de um tipo que não poderia justificar a crença na proposição B; mas se alguém chega à crença B visualizando da maneira sugerida nas circunstâncias (a), (b) e (c), é extremamente improvável, se não impossível, que o processo

[5] Acreditar refere-se a atitude do ser pensante em aceitar as demonstrações geométricas que podem ser justificadas ou não pela validade dos elementos geométricos que as compõem.

> seja uma forma de inferir B da experiência dos sentidos. Portanto, podemos razoavelmente concluir que chegar à B visualizando da maneira sugerida não tem de envolver uma inferência a partir da experiência sensorial. (Giaquinto, 2007, p. 55-56)

Por fim, Giaquinto (2007) afirma que a experiência sensorial agrupa duas funções distintas na formação de uma crença geométrica mediante a visualização de objetos geométricos. Em primeiro lugar, em algumas situações, precisamos da experiência sensorial juntamente com algumas predisposições mentais inatas com intuito construir conceitos geométricos básicos. Em segundo lugar, as memórias de experiências visuais de objetos geométricos podem fornecer os elementos iniciais que atuarão na mente do ser pensante com o propósito de elaborar experiências de imaginação visual.

4 ESTADO DA ARTE DAS PESQUISAS SOBRE O PENSAMENTO GEOMÉTRICO NA FORMAÇÃO DE PROFESSORES E MATEMÁTICA

Temos por objetivo nesse capítulo, selecionar, analisar e discutir alguns dos trabalhos produzidos em nível de Pós-Graduação no Brasil, apresentando um panorama constituído por pesquisas, das quais propostas didáticas estejam vinculadas ao pensamento geométrico na formação de professores, mediante ao ensino e aprendizagem de conteúdos de Matemática.

4.1 As pesquisas do tipo estado da arte: metodologia e suas contribuições

A metodologia de análise dos trabalhos selecionados foi fundamentada em Ferreira (2002). Para o autor, as pesquisas sobre o Estado da Arte têm sido comumente definidas como de caráter bibliográfico e apresentam, de maneira geral, o desafio de mapear e discutir certa produção acadêmica em diferentes campos do conhecimento, com o objetivo de responder quais aspectos e dimensões vêm sendo destacados em diferentes épocas, lugares, bem como de que forma e em que condições essas produções têm sido produzidas. Sendo assim, a metodologia adotada refere-se a uma análise qualitativa realizada com base em um levantamento bibliográfico. Para Richardson “Este método difere, em princípio, do quantitativo, à medida que não emprega um instrumental estatístico como base na análise de um problema, não pretendendo medir ou numerar categorias” (RICHARDSON, 1989, p.79).

Fiorentini (1994) e Ferreira (2002) entendem o Estado da Arte, ou também conhecido como Estado do Conhecimento, como tipo de investigação que realiza inventários, sistematização e discussão da produção científica de uma determinada área do conhecimento, permite além de meras discussões a respeito dos aspectos propostos nos trabalhos coletados, afastando a ideia de uma simples revisão bibliográfica de estudos publicados, subsidiando futuras investigações. Com isso, a metodologia se resume “ao desafio de conhecer o já construído para depois buscar o que ainda não foi feito, [...] de dar conta de determinado saber que se evolua cada vez mais rapidamente e de divulga-la para a sociedade” (FERREIRA, 2002, p. 259).

Com isso, definimos alguns passos norteadores da análise desse material, sendo eles:

1. Mapeamento das pesquisas acadêmicas brasileiras, teses e dissertações, que apresentam propostas didáticas vinculadas ao pensamento geométrico na formação de professores, mediante ao ensino e aprendizagem de Matemática;
2. Organização dos dados obtidos, alicerçados na realização deste mapeamento de pesquisas de cunho acadêmico;
3. Análise e discussão das propostas didáticas encontradas nos trabalhos selecionados.

4.2 Sobre a coleta de dados

Neste item apresentamos os trabalhos obtidos por meio da análise das teses e dissertações produzidas em Programas de Pós-Graduação do Brasil e que tratam, em alguma dimensão, do pensamento geométrico na formação de professores. Assim, a primeira etapa foi o levantamento, análise e seleção de trabalhos (teses e dissertações) que estavam relacionados ao nosso foco de interesse FERREIRA (2002). Para a seleção das teses e dissertações aqui analisadas, consultamos a Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações do Instituto Brasileiro de Informação em Ciência e Tecnologia e o Catálogo de Teses e Dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES).

Como destacamos no item anterior, as pesquisas documentais denominadas como Estado da Arte ou Estado do Conhecimento têm como objetivo principal descrever e discutir a produção acadêmica de uma determinada área do conhecimento, num dado período e lugar, com o propósito de apontar o que tem sido ou não enfatizado nessa produção. Em geral, as pesquisas denominadas Estado da Arte utilizam como fonte de dados os catálogos de universidades, de órgãos de fomento, de eventos científicos, de publicações periódicas, entre outros.

Neste trabalho, optamos por usar como fonte de dados o catálogo da Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações e o Catálogo de Teses e Dissertações da CAPES, já que esses bancos de dados nos possibilitam o acesso ao trabalho completo. Vale ressaltar que, conforme aponta Ferreira (2002), pesquisas denominadas Estado da Arte costumam lançar mão de análise de resumos de trabalhos para elaborar um mapeamento, o que gera limitações. Entretanto, em nosso trabalho, optamos por uma leitura e análise dos trabalhos (teses e dissertações) completos e não apenas dos resumos, o que nos levou a eleger a Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações e o Catálogo de Teses e Dissertações da Capes como fontes de dados.

4.2.1 Mapeamento - Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações

Para o levantamento das teses e dissertações que abordaram o pensamento geométrico na formação de professores, foi acessado, inicialmente, o sítio eletrônico da Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações e, no campo de busca (incluindo todos os campos: título, autor e assunto), digitamos o termo "pensamento geométrico". Para essa busca, foram obtidos 226 trabalhos. Entretanto, muitos desses trabalhos estavam além do nosso foco de interesse, incluindo trabalhos que discutiam o pensamento geométrico na educação infantil ou no ensino fundamental, por exemplo. Assim, para refinar os resultados, selecionamos o campo de busca avançada e no primeiro campo de busca colocamos o termo "pensamento geométrico"; na sequência, adicionamos um segundo campo de busca com o termo "formação de professores" e um terceiro campo de busca com o termo "Matemática"; consideramos os três termos para todos os campos de busca, ou seja: título, autor e assunto, além da correspondência da busca por todos os termos (Figura 6). Essa busca avançada nos retornou 33 trabalhos, e o link para os trabalhos obtidos é: https://bdtd.ibict.br/vufind/Search/Results?sort=relevance&join=AND&lookfor0%5B%5D=pensamento+geom%C3%A9trico&type0%5B%5D=AllFields&lookfor0%5B%5D=matem%C3%A1tica&type0%5B%5D=AllFields&lookfor0%5B%5D=forma%C3%A7%C3%A3o+de+professores&type0%5B%5D=AllFields&bool0%5B%5D=AND&illustration=1&daterange%5B%5D=publishDate&publishDatefrom=&publishDateto=

Figura 6 – Termos de busca no primeiro banco de dados

Fonte: Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações

Assim, os 33 trabalhos encontrados passaram por uma pré-análise, tomando como base a leitura dos títulos e das palavras-chave, que segundo Bardin (2016) oportunizam o conhecimento dos textos. Com essa leitura inicial, identificamos que 7 trabalhos poderiam fazer parte da nossa investigação, e para confirmar nossa suspeita, realizamos a leitura do resumo desses trabalhos com a intenção de verificarmos se de fato compreendiam ao nosso objeto de estudo. O intuito dessa pré-análise seria o de facilitar a seleção dos trabalhos que mais se enquadravam no escopo da nossa pesquisa, e com isso, foram delimitados 3 trabalhos com o foco procurado.

4.2.2 Mapeamento - Portal de Teses e Dissertações da CAPES

A partir dos mesmos critérios utilizados no mapeamento anterior, no Catálogo de Teses e Dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), utilizando os termos “pensamento geométrico” foram listados 254 trabalhos. Com a finalidade de refinar nosso mapeamento, novamente na guia de busca, utilizamos os termos “pensamento geométrico AND formação de professores AND matemática” e incluímos todos os campos disponíveis para a busca, resultando-nos em 78 trabalhos encontrados, como mostra a Figura 7.

Figura 7 – Termos de busca no segundo banco de dados

Fonte: Catálogo de Teses e Dissertações da CAPES

Assim como feito no mapeamento anterior, esses 78 trabalhos passaram por uma pré-análise, e após a leitura de todos os títulos e palavras-chave identificamos que 13 teses ou dissertações poderiam vir a compor os dados da pesquisa atual. Como na investigação realizada no primeiro mapeamento, esses 13 trabalhos inicialmente selecionados passaram pela leitura de seus resumos, e com isso, identificamos que 4 de fato compreendiam ao nosso foco de estudo e investigação. Observamos também que houve três sobreposições de trabalhos, em que a mesma pesquisa foi apresentada em ambas as plataformas e, com isso, não contabilizaram essas teses ou dissertações no grupo de trabalhos selecionados, nesta plataforma, para a leitura completa.

4.2.3 Critérios para a seleção das Teses e Dissertações

Com a leitura dos resumos e das informações disponíveis nos 20 trabalhos inicialmente pré-selecionados, em ambas as plataformas, foi possível notar que os objetivos gerais de alguns trabalhos compreendiam o ensino da Geometria no contexto escolar como aprimoramento da prática de ensino ou direcionados as tecnologias, além do uso de recursos e materiais didáticos, deixando de lado a exploração do pensamento geométrico na formação do aluno e, especialmente, do professor. Outros foram um pouco além, entretanto, por mais que tenham citado no resumo o potencial do desenvolvimento do pensamento geométrico, o relacionaram com a aprendizagem do aluno, não considerando seu potencial na formação do professor.

As informações encontradas na leitura dos títulos, palavras-chave e resumos das 20 teses e dissertações foram classificadas e organizadas de forma sistemática, com o propósito de facilitar a seleção dos trabalhos que mais se enquadravam no escopo da nossa pesquisa. A seguir, apresentamos os resultados iniciais obtidos.

Na Tabela 1, apontamos os 20 trabalhos identificados por meio da leitura dos títulos e palavras-chave como possíveis objetos de estudo e análise aprofundada.

Tabela 1 - Trabalhos pré-analisados

TRABALHO 1	
Título	Aspectos do desenvolvimento do pensamento geométrico em algumas civilizações e povos e a formação de professores
Palavras-chave	Educação Matemática; Ensino; Formação de Professores; Geometria; História da Matemática.
Questões Levantadas	1- Por que a incorporação da história da matemática em cursos de geometria na formação de professores? 2- Como utilizar a história da matemática para discutir conhecimentos geométricos e abordagens pedagógicas para o ensino-aprendizagem da geometria?
Objetivo	Fazer uma compilação e análise desse conhecimento e então propor uma forma de trabalhar o conhecimento geométrico na formação de professores do ensino fundamental e médio tomando como referencial a dimensão histórica.
TRABALHO 2	
Título	Um estudo de fractais geométricos na formação de professores de Matemática.
Palavras-chave	Formação de Professores de Matemática; Geometria Fractal; Softwares Educacionais; Conhecimento pedagógico do conteúdo. Educação Matemática;

Questões Levantadas	1- Como os participantes das oficinas percebem os fractais como tema gerador de outros tópicos de Matemática; 2- A relação dos participantes da oficina com a tecnologia informática utilizada; 3- As dificuldades existentes ou não com os temas matemáticos relacionados ao estudo dos fractais; 4- As possíveis dificuldades para ensinar esse tópico que os participantes da oficina conseguem antecipar.
Objetivo	Compreender as possibilidades para o ensino de Geometria Fractal perspectivadas por professores de Matemática e alunos do curso de licenciatura em Matemática.
TRABALHO 3	
Título	A formação continuada de professores que ensinam Matemática centrada na resolução de problemas e em processos do pensamento matemático.
Palavras-chave	Formação continuada; Professores que ensinam matemática; Resolução de Problemas; Pensamento matemático; engenharia didática.
Questões Levantadas	Não foi mencionada no resumo a problemática investigada.
Objetivo	Investigar as possíveis mudanças nas ações docentes de professores que ensinavam matemática, durante e após a vivencia de um curso de formação continuada com foco: na resolução de problemas e nos processos do pensamento matemático.
TRABALHO 4	
Título	O desenvolvimento do pensamento geométrico: uma proposta de recurso didático por meio da HQ.
Palavras-chave	Pensamento geométrico; Educação Matemática; Anos Iniciais Ensino Fundamental; História em quadrinhos.
Questões Levantadas	1- Alunos do 5º ano do EF da rede pública possuem conhecimentos adequados sobre os conteúdos de geometria?

	2- O recurso didático de uma HQ poderá possibilitar o desenvolvimento do pensamento geométrico de alunos dos AIEF?
Objetivo	Compreender a situação atual do ensino da Geometria nos anos iniciais do Ensino Fundamental, refletindo sobre o desenvolvimento do pensamento geométrico e apresentando uma nova proposta de recurso didático.
TRABALHO 5	
Título	Construção dos conceitos geométricos num contexto de formação inicial de professores dos anos iniciais do ensino fundamental.
Palavras-chave	Educação Matemática; Aprendizagem de Geometria; Formação de Professores que Ensinam Matemática.
Questões Levantadas	Não foi mencionada no resumo a problemática investigada.
Objetivo	Identificar os obstáculos que se fizeram presentes na construção e apreensão dos conceitos geométricos, e as condições necessárias para a superação desses obstáculos.
TRABALHO 6	
Título	Ensino de geometria para alunos com deficiência visual: análise de uma proposta de ensino envolvendo o uso de materiais manipulativos e a expressão oral e escrita.
Palavras-chave	Educação Matemática; Ensino de Geometria; Alunos cegos e/ou com baixa acuidade visual; Material Manipulativo.
Questões Levantadas	Não foi mencionada no resumo a problemática investigada.
Objetivo	Construir, desenvolver e analisar uma proposta de ensino de Geometria para alunos cegos com baixa acuidade visual.
TRABALHO 7	
Título	Aprendizagem de conceitos de geometria espacial por estudantes do ensino médio: entendimentos produzidos a partir da teoria dos registros de representação semiótica.

Palavras-chave	Atividade de Tratamento e Conversão; Software GeoGebra; Significação Conceitual. Sequência de Ensino; Processo Cognitivo: visualização, construção e raciocínio.
Questões Levantadas	Que elementos conceituais relacionados à determinação de área e volume de figuras geométricas podem ser identificados, a partir da proposição e da vivência de uma sequência de ensino que considera o uso do software GeoGebra e atividades de tratamento e de conversão de registros de representação semiótica, como estruturadores da aprendizagem dos estudantes?
Objetivo	Identificar aprendizagens no que tange aos conceitos específicos área e de volume em sólidos geométricos por meio do desenvolvimento de uma sequência de ensino que faz uso do software Geogebra, considerando atividades de tratamento e conversão dos registros de representações semiótica.
TRABALHO 8	
Título	O pensamento geométrico em movimento: um estudo com professores que lecionam matemática nos anos iniciais do ensino fundamental de uma escola pública de ouro preto (MG).
Palavras-chave	Educação Matemática; Pensamento Geométrico; Desenvolvimento; Profissional. Professores dos anos iniciais.
Questões Levantadas	Não foi mencionada no resumo a problemática investigada.
Objetivo	Investigar a mobilização de saberes de três professoras que lecionam matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental de uma escola pública de Ouro Preto (MG), ao participarem de um grupo de estudos voltado para o desenvolvimento do pensamento geométrico.
TRABALHO 9	
Título	(Re)construção do pensamento geométrico de professores sobre transformações geométricas.
Palavras-chave	Transformações Geométricas; Formação de Professores; Geometria; Pensamento Geométrico; Materiais Manipulativos.

Questões Levantadas	Não foi mencionada no resumo a problemática investigada.
Objetivo	Analisar indícios de (re)construção do pensamento geométrico e de práticas docentes de professores que participaram de formação sobre transformações geométricas.
TRABALHO 10	
Título	Investigação do desenvolvimento do pensamento geométrico por meio do uso de um videojogo por estudantes cegos.
Palavras-chave	Pensamento Geométrico; Estudantes Cegos; Videojogo “AudioGeometria**”;** Ensino de Matemática; Inclusão**.**
Questões Levantadas	Não foi mencionada no resumo a problemática investigada.
Objetivo	Analisar as contribuições e o impacto do videojogo “AudioGeometria”, como recurso metodológico, no desenvolvimento do pensamento geométrico.
TRABALHO 11	
Título	Estudo do desenvolvimento do pensamento geométrico por alunos surdos por meio do multiplano no ensino fundamental.
Palavras-chave	Matemática para Surdos; Multiplano®; Pensamento Geométrico; Sinais Matemáticos; Educação de surdos; Ensino fundamental; Educação Matemática.
Questões Levantadas	Não foi mencionada no resumo a problemática investigada.
Objetivo	Analisar de que forma o Multiplano pode contribuir para a aprendizagem de geometria e para o desenvolvimento do pensamento geométrico destes alunos.
TRABALHO 12	
Título	Relação espaço-plano: uma intervenção pedagógica para o desenvolvimento do pensamento geométrico.
Palavras-chave	Ensino e aprendizagem de Geometria; Situações de aprendizagem; Sequência didática; Situação didática.

Questões Levantadas	Não foi mencionada no resumo a problemática investigada.
Objetivo	Investigar as vantagens e limites de uma proposta didática baseada em uma sequência múltipla de situações de aprendizagem e como ela pode favorecer a aprendizagem significativa de conceitos geométricos envolvidos na relação espaço-plano.
TRABALHO 13	
Título	(Des)construção do pensamento geométrico: uma experiência compartilhada entre professores e uma aluna surda.
Palavras-chave	Pensamento Geométrico; Ensino de Matemática para surdos; Teoria da Formação das Ações Mentais por Etapas; Educação matemática e inclusão; Piotr Galperin.
Questões Levantadas	Não foi mencionada no resumo a problemática investigada.
Objetivo	Analisar a (des)construção do pensamento geométrico de uma aluna surda com o uso de materiais pedagógicos.
TRABALHO 14	
Título	O modelo van Hiele no desenvolvimento do pensamento geométrico: uma análise de obras do programa nacional do livro didático para o ensino médio.
Palavras-chave	Livro Didático; Programa Nacional do Livro Didático para o Ensino Médio; Modelo de van Hiele; Pensamento geométrico.
Questões Levantadas	Qual a contribuição da abordagem da geometria plana presente nos livros distribuídos pelo PNLD 2009 para o desenvolvimento do pensamento geométrico dos alunos?
Objetivo	Analisar a abordagem da geometria plana presente nos livros de Matemática aprovados e distribuídos pelo Programa Nacional do Livro para o Ensino Médio (PNLD) em 2009.
TRABALHO 15	

Título	Grupo de estudos de professores e a apropriação de tecnologia digital no ensino de geometria: caminhos para o conhecimento profissional
Palavras-chave	Grupo de estudos; Apropriação de tecnologia digital; Ensino de Geometria; Professores dos anos iniciais; Conhecimento profissional docente.
Questões Levantadas	Não foi mencionada no resumo a problemática investigada.
Objetivo	Analisar, em um grupo de estudos constituído na escola, o processo de apropriação de tecnologia digital no ensino de Geometria e o conhecimento profissional docente.
TRABALHO 16	
Título	Formação continuada de professores de Matemática: mudanças de concepções sobre o processo de ensino e aprendizagem de Geometria
Palavras-chave	Educação Matemática; Formação Continuada de Professores de Matemática; Observatório da Educação; Inovações Curriculares; Ensino de Geometria.
Questões Levantadas	Não foi mencionada no resumo a problemática investigada.
Objetivo	Identificar mudanças nas concepções de um grupo de professores de Matemática a respeito do processo de ensino e aprendizagem da Geometria em um contexto de formação continuada, cujo enfoque foi o estudo das inovações curriculares que ora são implementadas nas escolas públicas estaduais de São Paulo.
TRABALHO 17	
Título	Uma análise no processo de ensino-aprendizagem de geometria no ensino fundamental II, das escolas municipais de Porto Feliz.
Palavras-chave	Geometria; Construções Geométricas; Desenho Geométrico; Ensino-Aprendizagem.
Questões Levantadas	Não foi mencionada no resumo a problemática investigada.

Objetivo	Analisar o processo de ensino-aprendizagem de geometria nas aulas de matemática do Ensino Fundamental II nas escolas municipais de Porto Feliz/SP, investigando a metodologia de ensino dos professores de Matemática, se faz uso de instrumentos como réguas, compassos e transferidores em suas práticas pedagógicas.
TRABALHO 18	
Título	Uma (re)construção praxeológica no estudo de conteúdos da Geometria com alunos da Licenciatura em Matemática.
Palavras-chave	Estudo de geometria; (Re)construção praxeológica; Formação de professores de Matemática.
Questões Levantadas	Quais as contribuições e restrições do estudo de atividades de Geometria na construção do conhecimento geométrico que integre conteúdos da geometria plana, geometria analítica plana e geometria analítica vetorial na formação dos alunos da Licenciatura em Matemática?
Objetivo	Estudo de atividades de Geometria com alunos da Licenciatura em Matemática na construção do conhecimento geométrico no âmbito da geometria plana, geometria analítica plana e da geometria analítica vetorial.
TRABALHO 19	
Título	As geometrias do curso superior e os conteúdos geométricos do ensino médio: um estudo das relações existentes no entendimento de egressos da licenciatura em Matemática do IFAL.
Palavras-chave	Formação matemática; Formação inicial; Ensino de Geometria; Ensino médio. Saberes docentes.
Questões Levantadas	Não foi mencionada no resumo a problemática investigada.
Objetivo	Investigar as relações existentes no entendimento de egressos da licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Alagoas – IFAL, entre as disciplinas de Geometria, abordadas na formação do professor; e os conteúdos geométricos do ensino médio.

TRABALHO 20	
Título	Percepções docentes sobre o ensino e aprendizagem de Geometria nos anos iniciais do Ensino Fundamental: reflexos e reflexões de uma experiência formativa.
Palavras-chave	Ensino de Geometria; Anos Iniciais; Formação continuada em contexto de trabalho; Tecnologias Digitais. Origami.
Questões Levantadas	Não foi mencionada no resumo a problemática investigada.
Objetivo	Compreender os aspectos formativos em um curso de formação continuada, mediado por Origami e Tecnologias Digitais, que contribuem para outras/novas percepções docentes sobre o ensino de Geometria nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental.

Fonte: elaborada pela autora

Na tabela a seguir, apresentamos o nível acadêmico dos 20 trabalhos pré-selecionados.

Tabela 2 – Nível acadêmico

TRABALHOS PRÉ-SELECIONADOS	
Mestrado Profissional	1
Mestrado Acadêmico	14
Doutorado	5

Fonte: elaborada pela autora

A próxima tabela diz respeito a área de ensino de cada um dos trabalhos:

Tabela 3 – Área de ensino

TRABALHOS PRÉ-SELECIONADOS	
Pedagogia	7
Licenciatura em Matemática	13

Fonte: elaborada pela autora

Na Tabela 4, apresentamos os eixos temáticos dos 20 trabalhos:

Tabela 4 – Eixos temáticos

TRABALHOS PRÉ-ANALISADOS	
Recursos didáticos para educação	1
Tecnologias digitais para o ensino	1
Educação inclusiva	4
Materiais didáticos e práticas escolares	3
Formação de professores	11

Fonte: elaborada pelo autora

Após a pré-análise realizada nos 20 trabalhos encontrados nos dois bancos de dados e com o intuito de elucidar a escolha das pesquisas que seriam estudadas na íntegra, cujo foco central se assemelha ao nosso objetivo em questão, buscamos selecionar para a leitura completa os trabalhos que discutiam, em alguma dimensão, o pensamento geométrico na formação de professores de Matemática. Optamos por excluir as pesquisas relacionadas à Pedagogia e outras áreas de ensino, focando naquelas associadas à Licenciatura em Matemática. Além disso, descartamos também pesquisas que não abordavam o conteúdo matemático central da nossa pesquisa, como por exemplo, Teoria dos Números e Aritmética Modular, além do estudo de Média aritmética ponderada.

Ainda que refinando a busca nos bancos de dados, dos 20 trabalhos encontrados e disponíveis para a pré-análise, 1 deles estava relacionado aos recursos didáticos para a educação, com experiências que abordaram o uso de diferentes recursos didáticos na organização e no desenvolvimento do trabalho pedagógico, tais como jogos, recursos lúdicos, materiais impressos, materiais manipuláveis, materiais produzidos para atividades em laboratórios e demais recursos utilizados no processo de ensino e de aprendizagem da Matemática por professores e estudantes dos diferentes níveis e modalidades de ensino. Quanto aos materiais didáticos e práticas escolares, foram encontradas 3 pesquisas que tinham como objetivo promover discussões acerca de trabalhos que faziam uso de materiais didáticos como objetos de análise, quer seja na perspectiva de elaboração desses materiais para a formação de professores, quer seja na perspectiva de utilização desses materiais como elementos que auxiliem os professores em suas práticas escolares, propondo-se assim a promover discussões que abordem aspectos como sua materialidade, sua produção, seu uso e sua circulação. Com relação as tecnologias digitais e educação inclusiva, 5 trabalhos tinham como objetivo discutir uma dessas questões. Por fim, dos 11 trabalhos referentes a formação de professores (Tabela 4), 4 deles eram relacionados a Pedagogia. Com isso, identificamos apenas 7 trabalhos que abordavam o pensamento geométrico na formação do professor de Matemática, direta ou indiretamente, como mostra a Figura 8.

Figura 8 – Resumo da definição dos trabalhos

Fonte: Elaborado pela autora

4.3 Os dados obtidos

Feita a seleção dos 7 trabalhos que atendiam aos nossos critérios, foi iniciada uma leitura mais aprofundada dessas produções científicas. Com o intuito de subsidiar nossas análises, organizamos a Tabela 5 com informações retiradas de nossas leituras.

Tabela 5 - Trabalhos selecionados

AUTOR	TÍTULO	ANO	NÍVEL
Maria Terezinha Jesus Gaspar	Aspectos do desenvolvimento do pensamento geométrico em algumas civilizações e povos e a formação de professores	2003	Tese
Nilson Jorge Baldovinotti	Matemática	2011	Dissertação
Rogério Osvaldo Chaparin	A formação continuada de professores que ensinam matemática, centrada na resolução de problemas e em processos do pensamento matemático	2019	Tese
Sabrine Costa Oliveira	(Re)construção do pensamento geométrico de professores sobre transformações geométricas	2016	Dissertação
Rosana Jorge Monteiro Magni	Formação continuada de professores de Matemática: mudanças de concepções sobre o processo de ensino e aprendizagem de Geometria	2011	Dissertação
Gladiston dos Anjos Almeida	Uma (re)construção praxeológica no estudo de conteúdos da Geometria com alunos da Licenciatura em Matemática	2018	Tese
José Erisvaldo Lessa Vieira	As geometrias do curso superior e os conteúdos geométricos do ensino médio: um estudo das relações existentes no entendimento de egressos da Licenciatura em Matemática do IFAL	2017	Dissertação

Fonte: elaborado pelo autora

A exploração do material levantado nos permitiu selecionar e agrupar os trabalhos em categorias, a partir dos sujeitos de pesquisa, da abordagem dos conteúdos geométricos, das metodologias e procedimentos de análise, explicitamente indicados pelos autores, tanto no resumo, quanto no corpo dos trabalhos selecionados (Tabela 6).

Tabela 6 – Categorias de análise

CATEGORIA	DESCRIÇÃO
Natureza do estudo	A natureza do estudo pode ser classificada em teórica, quando apresenta reflexões teóricas fundamentadas, e de apresentação e discussão de referenciais teóricos ou empírica, quando consiste de técnicas e métodos aplicados.
Abordagem de pesquisa	A abordagem de pesquisa pode ser Qualitativa, Quantitativa ou Quali-quantitativa.
Instrumentos de constituição de dados	Constitui o leque de possibilidades de instrumentos para constituir os dados da pesquisa.
Metodologias de análise dos dados	Consiste no procedimento de análise dos dados.
Abordagem geométrica	A Geometria é subdividida em duas vertentes, sendo: Pura ou sintética → emprega apenas o raciocínio geométrico, formalizada nos Elementos de Euclides; Geometria Analítica ou de coordenadas → utiliza o poder da Álgebra para resolver problemas geométricos.
Formação de professores	A pesquisa pode estar relacionada a Formação Inicial ou a Formação Continuada.

Fonte: elaborado pelo autora

Por fim, o tratamento dos dados nos possibilitou interpretar as abordagens de pesquisa, os instrumentos de constituição de dados e as metodologias utilizadas pelos autores para análise dos dados. As categorias de análise foram tabuladas e, em seguida, foram computadas suas percentagens. Uma vez que cada pesquisa poderia apresentar mais de um instrumento de constituição de dados e metodologia de análise dos dados, levamos em consideração tal questão no cálculo das percentagens.

Além das categorias descritas na Tabela 6, procuramos evidenciar as principais considerações e perspectivas dos autores quanto ao ensino de geometria e, mais especificamente, ao pensamento geométrico na formação de professores. Com a leitura completa dos textos selecionados, foi possível identificar como foram, e se foram, abordadas noções a respeito do pensamento geométrico, suas contribuições e potencialidades, na visão dos pesquisadores. Além disso, também investigamos quais os autores (e suas e suas principais obras) que foram utilizados pelos pesquisadores para dar suporte as suas considerações. Para fins de contextualização, apresentamos o fichamento elaborado para cada trabalho selecionado e analisado.

4.3.1 Trabalho 1

ASPECTOS DO DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO GEOMÉTRICO EM ALGUMAS CIVILIZAÇÕES E POVOS E A FORMAÇÃO DE PROFESSORES

- Autora: Maria Terezinha Jesus Gaspar
- Orientador: Sérgio Roberto Nobre
- Instituição: UNESP – Rio Claro
- Programa: Educação Matemática
- Ano da defesa: 2003
- Tese de Doutorado

Descrição: O trabalho foi norteado pelas seguintes questões: 1. Por que a incorporação da História da Matemática em cursos de Geometria na formação de professores? 2. Como utilizar a História da Matemática para discutir conhecimentos geométricos e abordagens pedagógicas para o ensino-aprendizagem da Geometria? Dessa forma, o trabalho teve como objetivo apresentar uma proposta para o trabalho do conhecimento geométrico em cursos de formação de professores de Matemática por meio do uso da História da Matemática. Para isso, foi efetuado um levantamento bibliográfico em livros de História da Matemática e em trabalhos sobre as tradições geométricas das seguintes civilizações: China, Índia, Egito, Babilônia, Indígenas Brasileiros e alguns Povos Africanos. Com base no levantamento desse material, organização e análise, foi apresentada uma proposta de trabalho.

Sobre o Pensamento Geométrico: A autora coloca a seguinte questão: Por que estudar Geometria em um curso de formação de professores? Tomando por base essa questão, é estabelecida uma discussão sobre as razões para o estudo de Geometria nos diversos níveis de escolaridade:

a) Ela faz parte de um patrimônio cultural que é determinante na organização de nossa sociedade;
b) A Geometria faz parte da vida cotidiana do aluno desde o seu nascimento e possui muitas aplicações no mundo real;
c) É um tópico para encorajar a resolução de problemas e desenvolver algumas habilidades e competências;
d) Esse conhecimento é importante para o desenvolvimento cognitivo do aluno e do raciocínio lógico-dedutivo;
e) É uma forma de representação de outros conceitos e ideias matemáticas e é um saber que estabelece conexões entre os diversos tipos de pensamento matemático;
f) O trabalho realizado com a Geometria pode: favorecer a análise de fatos e de relações; estabelecer ligações entre eles, e, a partir daí, deduzir novos fatos e novas relações. Isto pode proporcionar o desenvolvimento de um pensamento crítico e autônomo.

Geometria na Formação de Professores: Em especial, para o estudo da Geometria na formação do professor aluno, a autora elenca os seguintes motivos:

a) O professor-aluno irá ensinar ou ensina Geometria aos alunos do Ensino Fundamental e Médio e, portanto, é preciso que tenha domínio e entendimento de seus conceitos básicos, de suas técnicas fundamentais e dos diversos modos de trabalhar com a ela no Ensino Fundamental e Médio;
b) É importante que o professor-aluno tenha consciência do papel fundamental da Geometria na formação de seus alunos e sua relevância para o desenvolvimento de outras ciências do mundo técnico e social;
c) O futuro professor de Matemática deve ter em sua formação um espaço em que ele possa discutir os conteúdos geométricos trabalhados no Ensino Fundamental e Médio e questões pedagógicas relativas ao ensino-aprendizagem de tais conteúdos.

d) É importante que o professor-aluno entenda o porquê da Geometria a ser ensinada aos alunos do Ensino Fundamental e Médio; reflita sobre o modelo atual de ensino da Geometria e sobre a possibilidade de buscar algo que tenha como reflexo em sua estrutura o fato de que essa Geometria foi construída e adaptada a distintas aspirações, dentro de estruturas sociais diferentes. É importante, também, que ele adquira flexibilidade suficiente para adaptar-se às diferentes propostas que venham surgir deste entendimento e das reflexões.

Portanto, para a autora, a formação do professor deve, entre outras, coisas "formar um profissional reflexivo-crítico, investigador na sala de aula, e demais dependências da escola, participativo na organização pedagógica e membro de uma comunidade social e educativa". (GASPAR, 2003, p. 32)

Suporte teórico utilizado: Para essas discussões, a autora faz uso das obras:

BASTOS, R. Geometria no Currículo e Pensamento Matemático. Disponível em: http://www.apm.pt/apm/revista/educ52/educ52_2.htm. Acesso em: 12 abr. 2018. Acesso em: 11 jun. 2019.

FAINGUELERNT, E. K. A Prática de Ensino e a Formação do Professor de Matemática Boletim GEPEM. ANO XIX, Rio de Janeiro, n. 33, p. 60-72, 1995.

PAVANELLO, R. M. O abandono do ensino da Geometria no Brasil: causa e consequências. Zetetiké. Ano 1. No. 1, São Paulo, p. 7-17, março 1991.

PEREZ, G. Formação de Professores de Matemática sob a perspectiva do Desenvolvimento Profissional. In: BICUDO, M. A. V. Pesquisa em Educação Matemática. 1a. ed. São Paulo: UNESP, 1999. p. 263-282.

TRIGO, L. M. S. La naturaleza de las matemáticas y sus implicaciones didácticas Mathesis, v. 9, p. 419-432, 1993.

Em síntese, a autora apresenta o uso da História da Matemática como um recurso para o desenvolvimento de um trabalho significativo no ensino de Geometria para os alunos dos Cursos de Licenciatura em Matemática, por meio de sete propostas de trabalhos que abordam aspectos históricos, sociais e culturais das civilizações (China, Índia, Egito, Babilônia, Indígenas Brasileiros e alguns Povos Africanos). As propostas são: O Círculo e o Quadrado; O Trapézio Isósceles, a Pirâmide e o Tronco de Pirâmide; Esferas Cones e Cilindros; Simetrias; O Teorema de Pitágoras.

4.3.2 Trabalho 2

UM ESTUDO DE FRACTAIS GEOMÉTRICOS NA FORMAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA

- Autor: Nilson Jorge Baldovinotti
- Orientadora: Miriam Godoy Penteado
- Instituição: UNESP – Rio Claro
- Programa: Educação Matemática
- Ano da defesa: 2011
- Dissertação de Mestrado

Descrição: Com a finalidade de compreender as possibilidades para o ensino de Geometria Fractal perspectivadas por professores de Matemática e alunos do curso de licenciatura em Matemática, o presente trabalho foi norteado pelas seguintes questões: 1. Como os participantes das oficinas percebem os fractais como tema gerador de outros tópicos de Matemática? 2. Qual a relação dos participantes da oficina com a tecnologia informática utilizada? 3. Quais as dificuldades existentes ou não com os temas matemáticos relacionados ao estudo dos fractais? Quais as possíveis dificuldades para ensinar esse tópico que os participantes da oficina conseguem antecipar? Para responder essas questões, foram realizadas duas oficinas com cinco professores de Matemática os quais atuam no Ensino Fundamental ou Médio e de vinte estudantes do curso de licenciatura em Matemática e de um questionário preenchido por esses alunos. Essas oficinas foram organizadas de forma a introduzir a ideia de Geometria Fractal a partir do emprego de recursos tecnológicos e materiais manipuláveis.

Sobre o Pensamento Geométrico: No capitulo 1, intitulado “Geometria Fractal”, o autor apresenta uma pequena introdução histórica dos primeiros objetos matemáticos, hoje considerados fractais, surgidos no século XVII por meio de

Newton e Leibniz, cujos estudos contribuíram para as descobertas de Weierstrass, Cantor, Peano e Poincaré. Mais adiante, enfatiza as contribuições da Geometria Fractal na sociedade e suas aplicações em diversas áreas, apresentando exemplos importantes dentro da Biologia, Física, Medicina, Engenharias, Arte, Economia e na própria Matemática. O autor ainda menciona o estudo de fractais na área educacional, presente nas propostas curriculares de escolas de Ensino Fundamental e Médio, citando alguns conceitos básicos da Matemática que fazem uso da Geometria fractal.

Na sequência, expõe a seguinte pergunta em forma de tópico “O que é a Geometria Fractal?”. Após levantar a questão, o autor aponta diversas definições e exemplos do que seria essa Geometria e quais os tipos e classificações encontradas, de maneira analítica. Em seguida, retrata alguns personagens que influenciaram o desenvolvimento da Geometria Fractal e suas contribuições matemáticas. Por fim, o autor termina o capítulo evidenciando o uso da Geometria na educação, mais especificamente, o uso de fractais. Neste tópico, aponta de maneira expositiva as situações de aprendizagem encontradas em livros didáticos indicados, juntamente com a série relacionada a cada conteúdo. Além disso, explicita os ganhos que esse estudo teria para o cumprimento dos Parâmetros Curriculares Nacionais, tanto para o Ensino Fundamental quanto para o Ensino Médio, sendo um deles a interdisciplinaridade.

Geometria na Formação de Professores: Quanto ao estudo da Geometria, e sua importância na formação de professores de Matemática, ainda no capítulo 1, o autor salienta que por mais que outros autores recomendem exploração dos fractais geométricos em sala de aula, isso quase não ocorre, pois são poucos os professores que tiveram a oportunidade de estudar o tema no seu curso de Licenciatura em Matemática, ou até mesmo nos cursos de formação continuada.

Com base nessa questão, o autor ainda declara que:

a) Esta situação ocasiona um desconforto ao docente em lecionar tais conteúdos;
b) A insegurança em relação ao assunto inibe seu ensino na escola;
c) O atual cenário só poderá ser modificado se os centros formadores de professores de Matemática passarem a abordar tais temas;

d) Para isso ocorrer é preciso mais pesquisas sobre como isso pode ser feito;
e) É nesse sentido que o autor considera as contribuições da pesquisa apresentada.

O autor dedica um de seus capítulos a Formação de Professores de Matemática, evidenciando os aspectos relevantes para a formação de professores, os cursos de Licenciatura em Matemática e o professor como investigador da sua própria prática. Apresenta as concepções teóricas referentes à formação de professores de Matemática, estabelecendo uma discussão sobre o assunto, onde destacam-se que:

a) Para formar um professor de Matemática é necessário considerar o seu processo de aprendizagem;
b) Aluno do curso de licenciatura como um ativo construtor de seu conhecimento, assimilando e organizando suas ideias por intermédio da maneira de como interpretar suas experiências durante a sua formação;
c) Para ser professor é necessário ter os seguintes conhecimentos: do conteúdo específico, do pedagógico geral, do currículo, materiais e dos programas, do pedagógico do conteúdo, dos alunos e das suas características, do contexto educativo e dos fins, propósitos e metas educacionais;
d) O conhecimento pedagógico do conteúdo tem merecido um destaque nas pesquisas sobre a formação do professor.
e) A Universidade e a Escola são agências formadoras da atividade docente. Porém, acredita-se ser fundamental a integração de ambas para a formação do aluno do curso de licenciatura em Matemática.

Suporte teórico utilizado: Para essas discussões, o autor faz uso das obras:

BAIER, T. *O nexo “Geometria Fractal – produção da ciência contemporânea” tomado como núcleo do currículo de Matemática do ensino básico.* 2005. 147 f. Tese (doutorado em Educação Matemática) UNESP, Rio Claro.

BALDOVINOTTI, N. J. O Estudo de Fractais para Futuros Professores de Matemática. In: ENCONTRO BRASILEIRO DE ESTUDANTES DE PÓS-

GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 12., 2008, Rio Claro. *Anais*..., Rio Claro: UNESP, 2008a, v.1., p.1 – 14.

BARBOSA, R. B. *Descobrindo a Geometria Fractal para a sala de aula.* Belo Horizonte: Autêntica, 2002. 144 p. (Tendências em Educação Matemática, 6)

SHULMAN, L. S. *Those who understand: knowledge growth in teaching*. Education Research, Washington, v. 15, n. 2, p. 04-14, 1986.

Em síntese, as oficinas criadas foram organizadas de forma a introduzir a ideia de Geometria Fractal a partir do emprego de recursos tecnológicos e materiais manipuláveis. Os programas computacionais utilizados foram o *SuperLogo* e o *Geometricks*. Usou-se também materiais manipuláveis como o compasso, a régua, a tesoura e papel cartão. A pesquisa empregou os pressupostos teóricos de Shulman (1986) para o estudo da produção de saber na prática docente; os pensamentos de Mizukami e Reali (2004) sobre os aspectos da formação de professores; o uso e o emprego de maneira significativa da Tecnologia na Educação por Papert e Valente; e as concepções de Penteado sobre a formação de professores para o uso de tecnologia informática.

4.3.3 Trabalho 3

A FORMAÇÃO CONTINUADA DE PROFESSORES QUE ENSINAM MATEMÁTICA, CENTRADA NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS E EM PROCESSOS DO PENSAMENTO MATEMÁTICO

- Autor: Rogério Osvaldo Chaparin
- Orientadora: Barbara Lutaif Bianchini
- Instituição: PUC - SP
- Programa: Educação Algébrica
- Ano da defesa: 2019
- Tese de Doutorado

Descrição: O trabalho foi norteado pelas seguintes questões: 1. Quais são os aspectos positivos em resolver problemas em grupo? 2. Quais aspectos são relevantes na experiência do professor em resolver problemas de diferentes tipos? Houve alguma alteração no repertório das estratégias de resolução? 3. Qual o efeito na prática docente dos professores? Caso afirmativo, que aspectos sofreram algum tipo de alteração? 4. Como o professor que aplica alguma atividade das propostas no curso (seja ela uma adaptação ou não) em suas salas de aula avalia essa experiência? 5. Qual efeito da dinâmica do curso, baseada na socialização e compartilhamento de ideias e estratégias de resolução dos problemas além da institucionalização? Quais os aspectos mais expressivos? 6. Um curso de formação continuada que trata do tema de resolução de problemas propicia a mudança da prática do professor que ensina matemática? 7. O curso de formação propiciou aos sujeitos da pesquisa uma mudança na visão sobre a importância da adoção da resolução de problemas para o desenvolvimento do pensamento matemático? Dessa forma, o trabalho teve como objetivo investigar as possíveis mudanças nas ações docentes de professores que ensinavam Matemática, durante e após a vivência de um curso de formação continuada com foco na resolução de problemas e nos processos do pensamento matemático. Os sujeitos da pesquisa foram professores da rede estadual de São Paulo que participavam de um curso de atualização de 30h em oito sessões abordando os seguintes temas: desafios e problemas abertos; estratégias de resolução de problema; atividades investigativas; resolução de problemas e pensamento matemático; pensamento algébrico e pensamento geométrico. O objetivo geral do trabalho foi propor tarefas que visavam o desenvolvimento dos processos de pensamento matemático. O autor conclui que o curso propiciou mudança nas práticas de sala de aula desses professores.

Sobre o Pensamento Geométrico: No capítulo 2, intitulado “Ideias teóricas e metodológicas” o autor apresenta o referencial teórico que fundamentou o seu trabalho, como formação continuada de professores, resolução de problemas e bons problemas além de estratégias para resolução. Por mais que o autor tenha mencionado no resumo que um dos temas abordados nas oito sessões seria o do pensamento geométrico, além do algébrico, o autor optou por somente apresentar neste capítulo, explicitamente, noções a respeito do pensamento algébrico, visto que abordou o assunto como um subtópico do tópico destinado ao pensamento algébrico. Ao explorar o assunto em seu referencial teórico, Chaparin (2019) expõe ideias relacionadas ensino e aprendizagem de Geometria, incluindo o modelo de Van Hiele (1986) de pensamento geométrico que teria como foco a visualização.

No capítulo 3, “A pesquisa em campo”, destinado aos encontros correspondentes as oito sessões, o autor destina o encontro 7 ao pensamento geométrico, apresentando detalhes quanto a sua execução. Neste tópico, expõe a análise *a priori* das atividades, descrição do encontro, análise *posteriori* e sua validação. Desse modo, optou por não apresentar no capítulo especificamente os fundamentos teóricos a respeito do pensamento geométrico e somente o detalhamento do encontro utilizado para essa abordagem na resolução de problemas.

Quanto aos objetivos do encontro, o autor destaca os seguintes pontos:

a) Propor problemas para provocar a discussão do pensamento geométrico, em especial, o processo de visualização;
b) Discutir ideias do pensamento geométrico por meio de problemas selecionados pelo pesquisador;
c) Mostrar atividades com a intenção de desenvolver o pensamento geométrico em sala de aula, discutindo sugestões para viabilizar esse pensamento em diversos contextos escolares;
d) Propor, no máximo, quatro atividades com o foco no pensamento geométrico, para resolver de dois ou três professores.

Geometria na Formação de Professores: Quanto ao estudo da Geometria, e sua importância na formação de professores de Matemática, ainda no capítulo 2, o autor apresenta o tópico “Formação continuada de professores”. Neste tópico ele considera a problemática e justificativas da importância dos cursos de formação continuada para professores de Matemática, e de uma maneira geral, fundamentadas nas ideias de outros autores, destaca que:

a) Algumas formações partem do pressuposto que a formação continuada tem como objetivo sanar lacunas deixadas pela formação inicial. Tal visão considera as reais necessidades dos professores;
b) Uma formação pensada na prática docente pode provocar mudanças significativas na qualidade de ensino;

c) Por meio de outras pesquisas, foi possível identificar temas relativos à prática, ou seja, discussão dos conteúdos e estratégias didáticas para o ensino de aula sugeridos por outros professores, isso embasou a escolha dos temas da pesquisa;
d) Importância da formação continuada como mecanismo importante para obter novas práticas, para repensar suas ações educativas em sala de aula buscando outras estratégias para melhorar o ensino e aprendizagem de Matemática.

Suporte teórico utilizado: Para essas discussões, o autor faz uso das obras:

DAVIS et al (2011) – Não foi citado nas referências.

KALEFF, A. M. et al. Desenvolvimento do Pensamento Geométrico: modelo de van Hiele. Bolema, Rio Claro, n. 10, p. 21-30, 1994.

NÓVOA, A. Para uma formaciòn de professores construída dentro de la profesión. Revista de Educación, v. 350, p. 203-218. 2009.

VAN-HIELE, P. M. Structure and Insight: A theory of mathematics education. Orlando, FL: Academic Press, 1986.

Em síntese, este trabalho se insere da esfera da Formação de Professores, especificamente na formação continuada de professores que ensinam Matemática. Foi desenvolvido e oferecido a professoras da rede estadual de São Paulo por meio de aplicação de oficinas, em que foi proposto tarefas que proporcionavam a discussão e desenvolvimento do pensamento matemático. Os dados analisados pelo autor correspondem a: questionários, produção escrita tanto nos encontros pessoais quanto na aplicação de resolução de problemas em suas salas de aula. Concluiu-se que o curso proporcionou mudanças na prática de ensino desses professore, sujeitos da pesquisa.

4.3.4 Trabalho 4

(RE)CONSTRUÇÃO DO PENSAMENTO GEOMÉTRICO DE PROFESSORES SOBRE TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS

- Autora: Sabrine Costa Oliveira
- Orientadora: Sandra Aparecida Fraga da Silva

- Instituição: Instituto Federal do Espírito Santo Campus Vitória
- Programa: Educação em Ciências e Matemática.
- Ano da defesa: 2016
- Dissertação de Mestrado

Descrição: Tendo como objetivo analisar os indícios de (re)construção do pensamento geométrico e das práticas docentes de professores que participaram de um curso de formação continuada, sobre transformações geométricas, foi elaborado curso de extensão sobre o tema, em uma abordagem investigativa com o uso de materiais manipulativos, em que a autora identifica e propõe ações para solucionar tal problema, com o objetivo de transformar a prática docente. O curso semipresencial envolveu dez professores atuantes no Ensino Fundamental, oportunizando ampliarem seus conhecimentos sobre transformações geométricas, em um grupo com práticas colaborativas e metodologia que privilegia o diálogo e reflexões sobre o conteúdo abordado.

Sobre o Pensamento Geométrico: No capítulo 3, Oliveira (2016) dedica-se ao estudo do processo de construção do pensamento geométrico e das transformações geométricas. No primeiro tópico do capítulo, a autora discute como se desenvolve o processo de construção do pensamento geométrico, fundamentada nos estudos dos autores Van Hiele (1984a, 1984b), Pais (1996, 2013) e Parzysz (2006). No segundo tópico, aponta os aspectos relevantes sobre o ensino de Geometria, em especial, o ensino de transformações geométricas no plano euclidiano. Por fim, no último tópico do capitulo, a autora apresenta sua proposta para análise dos indícios de (re)construção do pensamento geométrico e transformações geométricas.

Quanto ao processo do pensamento geométrico, a autora destaca os seguintes pontos:

a) Tem sido estudado especialmente à luz de teorias que investigam dificuldades no processo dedutivo da Geometria;
b) Os alunos se desenvolvem bem em outras áreas da Matemática, porém apresentam dificuldades em dominar os elementos do pensamento geométrico (NASSER, 1990).

c) Na tentativa de compreender o processo de construção do pensamento geométrico, analisamos diferentes pesquisas que tratam do desenvolvimento desse pensamento;
d) O Modelo de Pensamento Geométrico de Van Hiele, organizado em duas partes: a primeira descreve a estrutura cognitiva, composta por níveis a serem percorridos pelo aluno para a compreensão de um conceito geométrico; a segunda apresenta orientações de ensino ao professor de como auxiliar os alunos no desenvolvimento de conceitos geométricos, composta por fases de aprendizado.
e) O modelo é composto por cinco níveis de compreensão do pensamento geométrico, denominados: *visualização*, *análise*, *ordem*, *dedução* e *rigor* (HERSHKOWITZ, 1994);
f) De acordo com Van Hiele, o processo de construção do pensamento geométrico ocorre mediante a atividades exploratórias, em que os alunos descobrem os conceitos geométricos por meio de experimentação, observação e manipulação de materiais, em uma postura investigativa, preparando o caminho para uma prova formal posterior.

A respeito das justificativas para a não assimilação dos conceitos geométricos, Oliveira (2016) ressalta que:

a) As definições apresentadas no livro didático são apresentadas aos alunos de forma pronta, simplesmente para serem assimiladas e utilizadas como verdades sem demonstrações;
b) Professores e alunos pertencem a níveis diferentes de pensamento geométrico, ou seja, os alunos não entendem o que professor explica, pois pertencem a um nível inferior de pensamento geométrico e o currículo desenvolvido pertence a um nível superior ao dos alunos;
c) A ordem fixa hierarquizada de progressão dos níveis de compreensão do modelo de Van Hiele cria ‘rótulos’ para classificar o pensamento geométrico como se esse fosse construído de forma fragmentada, desconsiderando todo o processo de aprendizagem dos conteúdos;
d) classificar os alunos em níveis fechados e hierárquicos não condiz com a realidade do pensamento geométrico como um todo.

A autora também apresenta e discute o estudo relacionado ao pensamento geométrico de Pais (2013), que defende três aspectos fundamentais que influenciam a construção desse pensamento: o *intuitivo*; o *experimental;* o *teórico*. Nesta obra, Pais (2013) analisa quatro elementos fundamentais que influenciam o processo de ensino e aprendizagem da Geometria euclidiana plana e espacial: objeto; desenho; imagem mental; conceito.

Sobre o processo de abstração e generalização dos conceitos geométricos, Oliveira (2016) ressalta que uma representação de um conceito somente tem significado se o aluno for capaz de formalizar o conceito representado em seu plano cognitivo. E quanto a isso, a autora ainda expõe o esquema apresentado por Pais (1996) em que relaciona os quatro elementos fundamentais do ensino de Geometria e os aspectos do conhecimento geométrico. Entretanto, destaca também que os elementos discutidos por esse autor são relevantes para compreender o processo de construção do pensamento geométrico, mas é preciso aprofundar os estudos sobre o conhecimento geométrico, visto que na perspectiva apontada o processo é lento, gradual e complexo.

Geometria na Formação de Professores: A autora apresenta suas considerações a respeito do tema em dois tópicos do segundo capítulo. O primeiro deles é dedicado a algumas pesquisas que foram realizadas na linha de ensino e aprendizagem da Geometria e do conceito de transformações geométricas e/ou em formações de professores, considerando também trabalhos desenvolvidos em diferentes níveis de ensino, incluindo professores e alunos, com intuito de identificar aspectos que dialogam com sua pesquisa. No segundo tópico, apresenta o referencial teórico relacionado à formação de professores, reportando a Ponte (1992, 1998, 2014) e outros autores que abordam esse tema.

Em seu referencial teórico, Oliveira (2016) menciona outras obras relacionadas à temática de sua pesquisa e quais foram os principais resultados obtidos por meio delas, como por exemplo:

a) O trabalho desenvolvido por Rodrigues (2012) deixa evidente, por parte das professoras, "dificuldades com a nomenclatura e com realização dos movimentos e exploração espacial, ao passo que os alunos de 6º ano apresentaram uma forte concepção técnica da Matemática" (OLIVEIRA, 2016, p. 27), que segundo a autora, estavam relacionadas a procedimentos algoritmos.

b) Por meio dos estudos de Magni (2011), em que o autor analisou as mudanças de concepções de professores a respeito do processo de ensino e aprendizagem da Geometria, a autora menciona as considerações finais desse autor, relatando que “os professores são resistentes a mudanças, pois suas concepções e crenças, construídas ao longo de suas vidas escolares funcionam como obstáculos no processo de reflexão sobre novas ideias” (OLIVEIRA, 2016, p. 27-28).
c) Assim como mencionado nas duas obras citadas acima, a autora também evidencia a importância de discutir conceitos geométricos em cursos de formação continuada com professores, considerando que ambas as pesquisas obtiveram resultados satisfatórios.

Quanto à Formação de Professores e a Prática Docente, evidenciada no segundo tópico, a pesquisadora faz uso de Curi e Pires (2008) para sustentar sua concepção de que “educadores do mundo todo se preocuparam muito pouco com a formação de professores” (OLIVEIRA, 2016, p. 29), tendo como explicação para isso, a desvalorização do professor. Assim, pensar nos desafios e potencialidades da formação docente tornou-se fundamental e importante. A pesquisa ainda traz algumas das considerações de Ponte (2014), na qual salienta que o “processo de formação deve contribuir para o desenvolvimento da identidade profissional” (OLIVEIRA, 2016, p. 30).

No decorrer do trabalho, a autora tenta responder as seguintes questões levantadas a respeito da formação de professores: 1. Que modelo de formação alcança todos esses aspectos? 2. Se existe, é bem sucedido? 3. Quais são as implicações desse modelo para a prática profissional do professor?

Com relação à construção conhecimento no processo formativo docente, a autora faz uso das considerações apresentadas por Shulman (1986), em que o professor deve produzir conhecimento de conteúdo e conhecimento pedagógico de conteúdo. No primeiro caso, cabe ao professor “dominar os conceitos e as ideias de uma área de conhecimento, considerando as formas de construção de conhecimento dentro de uma determinada área” (OLIVEIRA, 2016, p. 34). O segundo caso seria o mais importante, pois se caracteriza como um elo entre a pedagogia e o conteúdo.

No capítulo 3, mais especificamente no segundo tópico do capitulo, a pesquisadora expõe justificativas para o ensino de Geometria. Em um dos trechos menciona a dificuldade da atual geração de professores de Matemática no ensino de Geometria. Conforme a autora, estão relacionadas ao ensino de Geometria:

a) A Geometria foi desaparecendo da sala de aula da educação básica;
b) A geração atual de alunos, hoje professores, tiveram pouco ou nenhum contato com a Geometria elementar;
c) Esses professores se sentem inseguros para trabalhar a Geometria em aulas de Matemática;
d) Associam a Geometria a um nível de ensino mais rigoroso ou considerando-a de pouca importância no desenvolvimento de competências matemáticas.

Diante do exposto nos parágrafos anteriores, entendemos que a autora reconhece a importância e as potencialidades do ensino de Geometria em diferentes níveis de ensino e alerta para as consequências de uma formação inicial que não considere tais aspectos, como o impacto na prática docente de tais professores.

Suporte teórico utilizado: Para essas discussões, a autora faz uso das obras:

CURI, Edda; PIRES, Célia Maria Carolino. Pesquisas sobre a formação do professor que ensina matemática por grupos de pesquisa de instituições paulistanas. Educação Matemática Pesquisa, São Paulo, v. 10, n. 1, p. 151-189, 2008.

GARCIA, Carlos Marcelo. Formação de professores: para uma mudança educativa. Porto: Porto Editora, 1999.

MAGNI, Rosana Jorge Monteiro. Formação continuada de professores de Matemática: mudanças de concepções sobre o processo de ensino e aprendizagem de Geometria. 181 f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática) – Universidade Bandeirante de São Paulo, São Paulo, 2011.

NÓVOA, Antônio. Formação de professores e o trabalho pedagógico. Lisboa: Educa, 2002.

PAIS, Ensinar e aprender Matemática**.** 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2013.

PAIS, Luiz Carlos. Intuição, Experiência e Teoria Geométrica. Zetetiké: Campinas, v. 4, n. 6, p.65-74, 1996.

PONTE, Formação do professor de Matemática: Perspectivas atuais. In: PONTE, João Pedro da. Práticas Profissionais dos Professores de Matemática. Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, p.343-360, 2014.

PONTE, Da formação ao desenvolvimento profissional. In: Actas do ProfMat 98. Lisboa: APM, p.27-44, 1998.

PONTE, João Pedro da. Concepções dos professores de Matemática e processos de formação. In: Educação Matemática: Temas de Investigação. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional, 1992, p.185-239.

RODRIGUES, Camila Roberta Ferrão. Potencialidades e possibilidades do ensino de transformações geométricas no ensino fundamental. 156 f. Dissertação (Pós-Graduação em Ensino de Matemática) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2012

SHULMAN, Lee S. Those who understand: Knowledge growth in teaching. Educational Researcher, v.15, n.2, p.4-14, 1986.

Em síntese, os professores (re)construíram seus conhecimentos em momentos de reflexão por meio de atividades investigativas sobre transformações geométricas e em práticas docentes incentivadas pelo curso. Além disso, as atividades aplicadas e discutidas neste estudo subsidiaram a construção do caderno de atividades sobre transformações geométricas em uma abordagem investigativa e com o uso de materiais manipulativos, produto educacional desta pesquisa.

4.3.5 Trabalho 5

FORMAÇÃO CONTINUADA DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA: MUDANÇAS DE CONCEPÇÕES SOBRE O PROCESSO DE ENSINO E APRENDIZAGEM DE GEOMETRIA

- Autora: Rosana Jorge Monteiro Magni
- Orientador: Ruy César Pietropaolo.
- Instituição: Universidade Bandeirante de São Paulo
- Programa: Educação Matemática
- Ano da defesa: 2011
- Dissertação de Mestrado

Descrição: Com a finalidade de identificar mudanças nas concepções de um grupo de professores de Matemática a respeito do processo de ensino e aprendizagem da Geometria, em um contexto de formação continuada, foi desenvolvido uma investigação no âmbito do Projeto Observatório da Educação da CAPES/Uniban, cujo enfoque foi o estudo das inovações curriculares que ora são implementadas nas escolas públicas estaduais de São Paulo. Para identificar tais mudanças recorreu-se a diversas fontes, como: entrevistas e depoimentos, participações nos fóruns e a participação nas atividades presenciais do Observatório. A análise desses dados está fundamentalmente referenciada em Shulman (1986 e 1992) e Tardif (2000, 2003).

Sobre o Pensamento Geométrico: A autora faz menção ao pensamento geométrico no segundo e quarto tópico do Capítulo 3, intitulado "Proposta Curricular de São Paulo - 2008: Histórico, pressupostos e implementação", em que trata dos princípios gerais da proposta Curricular e seus conteúdos e ideias fundamentais. Além disso, apresenta as indicações da proposta quanto a Geometria no Ensino Fundamental.

Uma das etapas de sua pesquisa foi a implementação de um ambiente virtual, retratado no Capítulo 4, em que a participação se deu com a interação entre todos os envolvidos no processo de formação (grupo de pesquisa e grupo dos professores de Matemática) por meio de fóruns de discussões. As questões propostas pelo grupo de pesquisa estavam relacionadas ao estudo da Geometria na Educação Básica e entre os temas discutidos nos referidos fóruns estavam as seguintes questões:

a) Insegurança de ensinar Geometria.
b) A formação do professor é deficiente?
c) Por que ensinar Geometria na Educação Básica?
d) Licenciaturas de Matemática: deficiências no ensino de Geometria?
e) Geometria é fácil?

A pesquisadora teve como intuito identificar o que chamou de “unidades de significado”, sendo os recortes mais significativos os que poderiam indicar suas concepções por meio dos conteúdos que estavam ali expressos. No quarto tópico do capítulo, a autora apresenta a análise dos depoimentos, dos memoriais reflexivos e dos registros nos fóruns dos nove professores participantes, a respeito de sua formação profissional e do processo de ensino e aprendizagem de conteúdos geométricos. Suas principais considerações a respeito do ensino e aprendizagem de Geometria foram:

a) Para a autora, alguns professores veem o uso de materiais concretos como uma boa possibilidade efetiva para ensinar conceitos e procedimentos geométricos;
b) Apesar de os professores assumirem suas deficiências em relação aos conteúdos geométricos, às vezes “culpam” os alunos pela ausência dos famosos pré-requisitos;
c) Se apropriando das considerações de Pavanello (1998), segundo a pesquisadora, alguns conteúdos relacionados a Geometria, recomendados e descritos nos Guias Curriculares, não estavam propostos nos livros didáticos
d) Para ela, a ausência de tais conteúdos em livros didáticos constitui-se um grande entrave para muitos professores das escolas de 1.º grau, que deixariam de ensinar Geometria sob qualquer abordagem, passando a dar ênfase a Álgebra.
e) A Geometria nos Guias Curriculares apresenta seus objetivos em relação ao aluno como: “adquirir conhecimentos que possibilitem uma compreensão do mundo aparente; adquirir habilidades em construções geométricas e processos de medida; desenvolver a intuição geométrica” (SÃO PAULO, 1975, p. 212).

A pesquisadora argumenta ainda, que a Geometria nos PCNs e a Proposta Curricular de 2008 partem dos mesmos pressupostos: o professor deve propor aos alunos que explorem situações em que haja a necessidade de algumas construções geométricas com régua e compasso, objetivando a visualização e aplicação de propriedades das figuras geométricas, além da construção de relações.

Geometria na Formação de Professores: Ainda no capítulo 4, a autora expõe os resultados de sua análise a respeito da Geometria na formação do professor e a formação do educador matemático e destaca as seguintes questões:

a) A influência de experiências bem-sucedidas com a Matemática em sua vida estudantil, sobretudo pela ação de alguns de seus professores, tem interferência na sua atuação como professor;
b) Ao optar pela profissão docente, ele pôde ver nas escolas em que estudou a atuação de muitos profissionais e ter “construído” e/ou concebido características, senão a de um professor ideal, mas pelo menos de um bom mestre;
c) Concordando com Imbernón (2005), afirma que muitos se tornam professores não por opção, mas por não terem outro emprego ou apenas por vislumbrarem planos de carreira e melhor remuneração;
d) Com relação a Geometria, a autora garante que os professores foram unânimes em relação à falta de domínio de conhecimentos, além da insegurança em ensinar e aprender conceitos dessa área da Matemática;
e) Essa fragilidade do docente em relação ao conhecimento geométrico pode explicar o desejo de alguns em “retirar” a Geometria da Matemática;
f) Poucos têm segurança em ensinar Geometria, e para muitos deles, os livros não foram um instrumento de aquisição/apropriação de conhecimentos geométricos;
g) Assim como exposto por Tardif (2002), a autora afirma que tais conhecimentos poderiam ser construídos pela formação e pela socialização nas instituições de formação de professores.

Fundamentada em Tardif (2002), a autora argumenta que os saberes dos professores não são apenas aqueles provenientes da formação profissional para o magistério, mas também as experiências vindas da formação escolar anterior. Também afirma, concordando com Pietropaolo (1999), que há grande descompasso entre a formação do professor – inicial e continuada – e as mudanças indicadas pelos novos currículos.

Suporte teórico utilizado: Para essas discussões, a autora faz uso das obras:

IMBERNÓN, F. Formação docente e profissional: formar-se para a mudança e a incerteza. São Paulo: Cortez, 2005.

PAVANELLO, R. M. O abandono do ensino de Geometria: uma visão histórica. 1989. Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação, Campinas, 1989.

PIETROPAOLO, R. C. Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática: um estudo dos pareceres. 1999. Dissertação (Mestrado) – Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 1999.

PIETROPAOLO, R. C. (Re)significar a demonstração nos currículos da educação básica e da formação dos professores de Matemática. 2005. Tese (Doutorado) – Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2005.

PIRES, C. M. C. Currículos de Matemática: da organização linear à idéia de rede. São Paulo: FTD, 2000.

PIRES, C. M. Reflexões sobre Cursos de Licenciatura em Matemática, tomando como referência as orientações propostas nas Diretrizes Curriculares Nacionais para a formação de professores da Educação Básica. Educação Matemática em Revista, São Paulo, V. 11 A, p. 44-56. Abril. 2002.

SHULMAN, L. S. Those Who understand: Knowledge growth in teaching. Education Researcher, v. 15, n.2, p.4- 14, fevereiro. 1986.

TARDIF, M.; Saberes docentes e formação profissional. Petrópolis: Vozes, 2002.

TARDIF, M. Raymond, D. Saberes, tempo e aprendizagem do trabalho no magistério. Educação & Sociedade: revista quadrimestral da Ciência da Educação, Campinas. n. 73, p. 209 - 244, CEDES, 2000.

ZEICHNER, K. M. Formando professores reflexivos para a educação centrada no aluno. In: BARBOSA, Raquel Lazzari Leite (Org.). Formação de educadores: desafios e perspectivas. São Paulo: Editora Unesp, 2003. p. 35-55.

Em síntese, a pesquisa indicou certo nível de reflexão dos professores concernente às inovações propostas pelo novo currículo e à necessidade de incluir substancialmente em suas aulas atividades com intuito de desenvolver o pensamento geométrico dos alunos. Além disso, constataram-se também as relações entre a prática pedagógica e as concepções reais dos professores, sendo elas complexas com fatores que afetam decisivamente nas mudanças de suas práticas, como "fragilidade" dos conhecimentos de conceitos geométricos e dos conhecimentos didáticos e curriculares desses conteúdos, crenças sobre a Matemática e seu ensino e influências externas ou institucionais.

4.3.6 Trabalho 6

UMA (RE)CONSTRUÇÃO PRAXEOLÓGICA NO ESTUDO DE CONTEÚDOS DA GEOMETRIA COM ALUNOS DA LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

- Autor: Gladiston dos Anjos Almeida
- Orientadora: Cintia Aparecida Bento dos Santos
- Instituição: Universidade Cruzeiro do Sul
- Programa: Ensino de Ciências e Matemática
- Ano da defesa: 2018
- Tese de Doutorado

Descrição: O trabalho foi norteado pela seguinte questão: Quais as contribuições e restrições do estudo de atividades de geometria na construção do conhecimento geométrico que integre conteúdos da Geometria plana, Geometria analítica plana e Geometria analítica vetorial na formação dos alunos da Licenciatura em Matemática? Dessa forma, o trabalho teve como objetivo o estudo de atividades de Geometria com alunos da Licenciatura em Matemática na construção do conhecimento geométrico no âmbito da Geometria plana, Geometria analítica plana e da Geometria analítica vetorial. A interpretação, análise e descrição do estudo das atividades se respaldou nos pressupostos da Teoria

Antropológica do Didático, tendo como unidade de análise a noção de praxeologia matemática, e, além disso, a investigação se fundamentou nos pressupostos metodológicos da Engenharia Didática de Percurso na constituição de um Percurso de Estudo e Investigação, tomado como dispositivo de organização didática do estudo das atividades de geometria.

Sobre o Pensamento Geométrico: Em sua pesquisa, o autor privilegia o papel do aluno da Licenciatura em Matemática no processo de construção do conhecimento geométrico, do ponto de vista antropológico. No estudo de tais atividades, relacionadas ao ensino de Geometria, o autor busca dos alunos "uma postura de ator do processo de construção do conhecimento geométrico, ou seja, um aluno participativo, ativo, crítico na construção das praxeológias matemáticas relativas ao estudo de geometria na Licenciatura em Matemática" (ALMEIDA, 2018, p. 86). Nesse sentido, o autor considera que ao se transferir parte da responsabilidade matemática a esses alunos, atribuídas até então ao professor, a produção do conhecimento passa a ser uma construção coletiva, um produto e processo da construção do conhecimento geométrico, pois para ele, a produção do conhecimento na Licenciatura em Matemática não é um empreendimento e isolado.

Quanto a interpretação, análise e descrição do estudo das atividades de Geometria, além das tarefas problemáticas apresentadas e desenvolvidas com os alunos na formação inicial, Almeida (2018) expõe quais foram as contribuições e restrições na construção do conhecimento geométrico. No que se refere as contribuições, apontou-se que:

a) Permitiu aos alunos da Licenciatura em Matemática articular conceitos da Aritmética, da Álgebra e da Geometria;
b) Permitiu aos alunos envolvidos a estudar essas atividades em diferentes sistemas, como o euclidiano, o cartesiano e o vetorial, fundamentais para o estudo de outras disciplinas da Matemática e da física previstas na Licenciatura em Matemática;
c) Tem o potencial de integrar conteúdos da Geometria, o que favoreceu o desenvolvimento da infraestrutura didático-matemática na construção do equipamento praxeológico desses alunos, ou seja, no desenvolvimento das capacidades cognitivas desses alunos em Geometria;

d) Permitiu ao aluno a construção do conhecimento geométrico em diferentes âmbitos institucionais, ou seja, a construção do conhecimento geométrico integra conteúdos previstos para o Ensino Fundamental, o Ensino Médio e para a Licenciatura em Matemática;
e) A construção do conhecimento geométrico no estudo das tarefas problemáticas particulariza o estudo de conteúdos da Geometria no âmbito da Geometria plana, Geometria analítica plana e da Geometria analítica vetorial;
f) Destacou o papel das dimensões: epistemológica, econômico-institucional e a ecológica, as quais caracterizam as condições e restrições do estudo dessas atividades com alunos da Licenciatura em Matemática.

Com relação as restrições na construção do conhecimento geométrico no âmbito da Geometria plana, Geometria analítica plana e da Geometria analítica vetorial na Licenciatura em Matemática, apontou-se que:

a) O tempo institucional: a importância do tempo institucional no estudo das atividades de Geometria com os alunos, uma vez que o estudo dos conteúdos da Geometria demanda um tempo considerável;
b) A ausência de obras da Geometria que abordem o estudo de tais conteúdos da Geometria;
c) A limitação das técnicas no estudo das atividades de Geometria;
d) A fragmentação do estudo das disciplinas da Geometria na formação do aluno da Licenciatura em Matemática, pois os alunos não estudam conteúdos da Geometria no âmbito da Geometria plana, Geometria analítica plana e da Geometria analítica vetorial.

Por fim, Almeida (2018) entende que os desafios de se estudar conteúdos da Geometria em diferentes âmbitos institucionais com alunos da Licenciatura em Matemática são mais amplos que o ensino e aprendizagem de conteúdos da Geometria nessa formação. E, nesse contexto, reforça a ideia da importância da construção do conhecimento geométrico, partindo do entendimento de que, a aprendizagem, entendida como o efeito perseguido pelo estudo, não é produzida somente quando há ensino, nem é produzida unicamente durante o ensino, e concordando com Chevallard *et al*. (2001), destaca que o estudo ou processo didático deve ser considerado mais amplo, pois não se restringe ao processo de ensino e aprendizagem, mas o engloba.

Geometria na Formação de Professores: Considerando os resultados de sua investigação, Almeida (2018) destaca a importância do estudo de conteúdos da Geometria que privilegiem o papel do aluno da Licenciatura em Matemática como ator do processo de construção do conhecimento geométrico no âmbito da Geometria plana, Geometria analítica plana e da Geometria analítica vetorial, tomado como produto e processo de uma *práxis* institucional no âmbito de um Percurso de Estudo e Investigação. No que tange a formação do professor, o autor espera que sua pesquisa possibilite aos alunos envolvidos refletirem a respeito da construção do conhecimento geométrico na sua formação e que possam incorporá-los em suas futuras práticas docentes, realizando, então, mudanças no modo de produzir e refletir suas competências e habilidades no processo de ensino e aprendizagem na sala de aula.

Suporte teórico utilizado: Para essas discussões, o autor faz uso das obras:

ALVES-MAZZOTTI, Alda Judith. A “revisão da bibliografia” em teses e dissertações: meus tipos inesquecíveis – o retorno. *In*: BIANCHETTI, Lucídio; MACHADO, Ana Maria Netto. (Org.). A bússola do escrever: desafios e estratégias na orientação e escrita de teses e dissertações. 2. ed. Florianópolis: Editora da UFSC; São Paulo: Cortez, 2006.

CHEVALLARD, Yves. Aspectos problemáticos de la formación docente. XVI Jornadas del Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas, Huesca, España, 2001.

D’AMBROSIO, Ubiratan. Prefácio. In: Estela Kaufman Fainguelernt. Educação Matemática: representação e construção em Geometria. Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 1999.

GAMBOA, Silvio Sánchez. Pesquisa em educação: métodos e epistemologia. Chapecó: Argos, 2007.

GASCÓN, Josep. Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica. Recherches em Didactique des Mathématiques, v. 18, n. 52, pp. 7-33, 1998.

PONTE, João Pedro da. Práticas profissionais dos professores de Matemática. Lisboa: Universidade Aberta, 2014.

SADOVSKY, Patricia. O ensino de Matemática hoje: enfoque, sentidos e desafios. Tradução: Antônio de Pádua Danesi. São Paulo: Ática, 2007

SEVERINO, Antônio Joaquim; FAZENDA, Ivani Catarina Arantes Fazenda. Apresentação. In: SEVERINO, Antônio Joaquim; FAZENDA, Ivani Catarina Arantes Fazenda. (Orgs.). Formação docente: rupturas e possibilidades. Campinas: Papirus, 2002.

Em síntese, segundo o autor da presente pesquisa, os resultados da investigação apontam que o estudo de atividades de Geometria no âmbito da Geometria plana, Geometria analítica plana e da Geometria analítica vetorial com alunos da Licenciatura em Matemática proporciona aos futuros professores a construção do conhecimento geométrico como produto e processos de uma *práxis* institucional indispensável para suas futuras práticas docentes no que se refere ao ensino e aprendizagem da Geometria nas instituições escolares. Além disso, destaca a importância do estudo de conteúdos da Geometria que privilegie o papel do aluno da Licenciatura em Matemática como ator do processo de construção do conhecimento geométrico no âmbito da Geometria plana, Geometria analítica plana e da Geometria analítica vetorial.

4.3.7 Trabalho 7

AS GEOMETRIAS DO CURSO SUPERIOR E OS CONTEÚDOS GEOMÉTRICOS DO ENSINO MÉDIO: UM ESTUDO DAS RELAÇÕES EXISTENTES NO ENTENDIMENTO DE EGRESSOS DA LICENCIATURA EM MATEMÁTICA DO IFAL

- Autor: José Erisvaldo Lessa Vieira
- Orientador: Laerte Silva da Fonseca
- Instituição: Universidade Federal de Sergipe – UFS
- Programa: Ensino de Ciências e Matemática

- Ano da defesa: 2017
- Dissertação de Mestrado

Descrição: O trabalho teve como objetivo geral investigar as relações existentes, no entendimento de egressos da licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Alagoas – IFAL, entre as disciplinas de Geometria, abordadas na formação do professor, e os conteúdos geométricos do Ensino Médio, tratando-se de um estudo de caso, com seis egressos da Licenciatura em Matemática-IFAL. Para a coleta de dados, foram utilizadas diferentes técnicas: análises documentais, questionários e entrevistas. O aporte teórico teve como foco as temáticas: formação de professores, saberes docentes e ensino de Geometria.

Sobre o Pensamento Geométrico: No capítulo 2, destinado à fundamentação teórica, o autor expõe suas considerações acerca do ensino de Geometria, mais especificamente, no terceiro e último tópico do capítulo. Vieira (2017) inicia seu diálogo apresentando brevemente como se deu o surgimento da Geometria, com base em ideias primitivas, surgidas empiricamente e denominada por Geometria dedutiva, até o ensino de Geometria por meio de axiomas, definições, teoremas e demonstrações.

Nesse contexto, fazendo uso das considerações de Martins (2012), o autor trata do professor como mediador fundamental na aprendizagem dos alunos, contribuindo na construção do conhecimento geométrico, e apresenta os caminhos para a construção dos argumentos dedutivos. Entretanto, salienta também que os cursos de licenciatura dão espaço e cedem lugar nos currículos as demais áreas do ensino de Matemática, relembrando a visão da Geometria e da relação dela com a Matemática, apresentada atualmente nos Parâmetros Curriculares Nacionais, argumentando que “os cursos de licenciatura em Matemática possuem fragilíssima posição” (LORENZATO, 1995, p. 4).

Geometria na Formação de Professores: Fundamentado nos estudos de Pavanello (1995) e Cury (2001), o pesquisador evidencia a situação em que o professor não adquiriu em sua formação inicial um conhecimento geométrico relevante para sua prática, o que influencia a sua pratica docente e aumenta sua insegurança para abordar tais conteúdos em sala de aula, visto que os conteúdos geométricos que os futuros professores irão abordar não foram abordados em sua formação e/ou essa abordagem foi superficial.

Nesse cenário, o pesquisador levanta a seguinte questão: “Quais e como as geometrias devem ser abordadas na formação dos egressos das licenciaturas e dos alunos do Ensino Médio?” Fazendo uso das considerações de Pavanello (2002), o autor reforça a ideia de que para uma aprendizagem de Geometria mais efetiva, os alunos em formação inicial devem fazer uso de atividades que propiciem a construção gradual dos conhecimentos geométricos para então se utilizarem de axiomas e demonstrações. Ainda nesse sentido, o autor acredita que se o professor recém-formado não tiver passado pelos níveis de desenvolvimento do conhecimento geométrico, dificilmente ele se sentirá preparado para ensinar Geometria a seus alunos, e assim, conclui que sua investigação se torna relevante por buscar indícios de como as geometrias na formação inicial foram abordadas.

Em um contexto geral no âmbito da formação inicial, o autor menciona as políticas públicas voltadas à formação de professores, tendo como objetivo diminuir as lacunas existentes nos cursos de formação inicial que, segundo Gatti et al. (2011, p. 89) “mostram que as políticas relativas a formação inicial dos docentes no Brasil, no que se refere às instituições formadoras e aos currículos precisam ser repensadas”. Fundamentado em Tardif (2014), referencia que os saberes dos professores estão intimamente ligados ao trabalho docente, e, portanto, há a necessidade de uma aproximação entre escola e universidade.

Suporte teórico utilizado: Para essas discussões, o autor faz uso das obras:

CURY, Helena Noronha. Formação de professores de Matemática: uma visão multifacetada (Org). Porto Alegre: EDIPUCRS, 2001.

FIORENTINI, Dario (org.). Formação de professores de Matemática: explorando novos caminhos com outros olhares. Campinas, SP: Mercado de Letras, 2013.

GATTI, B. A. (Org.). Políticas Docentes no Brasil: Um estado da arte. Brasília, UNESCO, 2011.

IMBERNÓN, Francisco. Formação docente e profissional: formar-se para a mudança e a incerteza. São Paulo: Cortez, 2011. (Coleção questões da nossa época; v.14)

LORENZATO, S. Por que não ensinar Geometria? Educação Matemática em Revista, São Paulo, v. 4, p. 3-13, jan. /jun. 1995

MARTINS (2012) – Não mencionado pelo autor nas referências.

NUNES, C. B. O Processo Ensino-Aprendizagem-Avaliação Geometria através da Resolução de Problemas: perspectivas didático-matemáticas na formação inicial de professores de matemática. Rio Claro, 2010. 430p. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Instituto de Geociência e Ciências exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2010.

TARDIF, M. Saberes docentes e formação profissional. Petrópolis, RJ: Vozes, 2002.

TARDIF, Maurice. Saberes docentes e formação profissional. Petrópolis, RJ: vozes, 2014.

PAVANELLO, R. M. Formação de professores e dificuldades de aprendizagem em Matemática. In: Maciel, L.S.B.; PAVANELLO, R. M.; Moraes, S. P. G. (Org). Formação de Professores e Prática Pedagógica. Maringá: Eduem, 2002. p.65-80.

PAVANELLO, R. O abandono do ensino de Geometria no Brasil: causas e consequências. In Zetetiké, v. 1, n. 1, 1993.

PAVANELLO, R. O abandono do ensino de Geometria: uma visão histórica. (Dissertação em Educação), Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1989.

Em síntese, segundo o autor, foi possível identificar como resultado que a abordagem dos conteúdos na formação dos egressos se deu por meio de teoremas, axiomas e demonstrações, o que segundo os egressos, favoreceu para que houvesse ampla visualização dos conteúdos do Ensino Médio, antes mesmo de adentrarem na sala de aula como egressos do curso. Por outro lado, constatou-se que essa abordagem foi pouco utilizada nas práticas pedagógicas desses sujeitos, visto que a abordagem nos livros didáticos se iniciou de forma intuitiva, além dos alunos da educação básica demonstrarem pouco domínio de argumentação, o que dificultou o processo de desenvolvimento do conhecimento geométrico destes.

4.4 Considerações sobre análise das dissertações e teses

É preciso ressaltar que, ao realizar este mapeamento, buscou-se analisar e discutir de que forma as pesquisas selecionadas abordam o pensamento geométrico na formação de professores que ensinam Matemática. Entretanto, a análise efetuada também nos permitiu ter uma visão mais abrangente do atual cenário das pesquisas relacionadas ao pensamento geométrico, quais as principais características e semelhanças de cada trabalho e as divergências e concordâncias expostas por cada autor quanto às potencialidades, a exploração e as contribuições do pensamento geométrico na formação do professor. Tal investigação também nos possibilitou conhecer as dificuldades encontradas pelos pesquisadores e os referenciais teóricos utilizados no embasamento de suas pesquisas.

Inicialmente, iremos evidenciar os resultados da categorização dos dados (conforme apresentado na Tabela 6) e, na sequência, nossas percepções sobre a visão de cada autor nos trabalhos analisados sobre o pensamento geométrico na formação do professor de Matemática.

No que tange à natureza das investigações, as pesquisas foram categorizadas como empíricas ou teóricas. Dos 7 trabalhos analisados, 6 (85,7%) caracterizam-se como empíricos, o que evidencia a preferência e necessidade dos autores em pesquisar e discutir com base em elementos provenientes da seleção, observação, consolidação e análise dos dados gerados pelo próprio pesquisador. Somente uma (14,3%) pesquisa caracterizou-se como teórica, apresentando uma discussão conceitual, respaldando-se em levantamentos ou análises de dados empíricos.

Quanto à abordagem de pesquisa, os trabalhos foram considerados como qualitativo, quantitativo ou quali-quantitativo (Tabela 6). Observamos que entre os trabalhos analisados integralmente, 6 (85,7%) fizeram uso da abordagem qualitativa em suas pesquisas, nenhum classificou-se como quantitativo e em apenas 1 (14,3%) foi possível identificar que os autores optaram pela utilização de uma abordagem quali-quantitativa na construção de seus dados. Com isso, observou-se uma hegemonia na escolha da abordagem qualitativa de pesquisa, o que está de acordo com Gatti (2004, p. 13) ao afirmar que “atualmente, na área da pesquisa educacional, excluindo análises de dados de avaliações de rendimento escolar realizadas em alguns sistemas educacionais no Brasil, poucos empregam metodologias quantitativas”. Nesse contexto, Schneider *et al.* (2017) salientam que,

> [...] constitui-se inviável afirmar, a priori, que determinada abordagem metodológica configura-se como melhor, mais aceitável e/ou mais confiável que outra, visto que esta escolha deve balizar-se nos objetivos da pesquisa, nos problemas a serem investigados, na habilidade do pesquisador para organização e aplicação metodológica, bem como, na clareza relacionada às potencialidades e limitações dos métodos em questão e não, necessariamente, na dicotomia entre a abordagem qualitativa e quantitativa (SCHNEIDER *et al.*, 2017, p. 575).

Buscamos sistematizar os instrumentos mais utilizados pelos pesquisadores para constituição de seus dados de pesquisa (conforme apresentado no Quadro 1) e constatamos uma diversidade de instrumentos, sendo: questionários, entrevistas, observação participante, gravação de áudio e vídeo, livros didáticos, documentos, teses e dissertações, situações problemas, sequências didáticas, diário de bordo, oficinas didáticas, minicursos, levantamentos e estudo de caso, sendo cada um desses métodos empregados individualmente ou em conjunto. O “questionário” caracterizou-se como o instrumento mais utilizado pelos pesquisadores, sendo utilizado por 5 (71,4%) pesquisadores, seguido por entrevistas e minicursos, utilizado por 2 (28,6%) pesquisadores.

Quadro 1 – Instrumentos de constituição de dados utilizados pelos pesquisadores

INSTRUMENTO	Nº DE TRABALHOS
Questionários	5
Entrevistas	2
Minicursos	2
Observação participante, gravação de áudio e vídeo, livros didáticos, documentos, teses e dissertações, situações problemas, sequências didáticas, diário de bordo,	1

oficinas didáticas, levantamentos e estudo de caso	

Fonte: elaborado pelo autora

Concordamos com Jiméne-Aleixandre (1998 *apud.* SCHNEIDER *et al.* 2017), quando diz que essa diversificação de instrumentos pode estar associada a consolidação e amadurecimento da pesquisa na área de ensino, bem como da unanimidade de busca pelas informações de caráter qualitativo nas investigações.

Para a identificação das metodologias de análises de dados, consideramos todos os procedimentos informados pelos autores dos trabalhos, entretanto, quando um mesmo procedimento era usado várias vezes, ele foi considerado apenas uma vez.

Equivalente aos resultados obtidos na investigação dos instrumentos utilizados para constituição de dados, a apuração das metodologias empregadas pelos pesquisadores nas análises desses dados revelou uma variedade metodológica utilizada, a saber: interpretação qualitativa, análise de conteúdo, análise documental, análise bibliográfica, análise de frequência, teoria antropológica da didática, teoria das situações didáticas e engenharia didática do percurso. As metodologias “análise de conteúdo, “interpretação qualitativa” e análise documental caracterizaram-se como as metodologias de análise de dados mais utilizadas pelos pesquisadores, utilizada por 2 (18,2%) pesquisadores, que somam juntas 54,6% das metodologias utilizadas nos trabalhos. Em nossa análise, estamos de acordo com Schneider *et al.* (2017, p. 579) que afirma que “os autores se limitam em indicar o emprego da metodologia qualitativa para análise dos dados, sem especificar nenhuma de suas diferentes variantes”.

A seguir, apresentamos as metodologias encontradas em nossa investigação.

Quadro 2 – Metodologias de análises de dados utilizadas pelos pesquisadores

METODOLOGIA	Nº DE TRABALHOS
Análise de conteúdo, análise documental e interpretação qualitativa.	2

Análise Bibliográfica, análise de frequência, teoria antropológica da didática, teoria das situações didáticas e engenharia didática do percurso.	1

Fonte: elaborado pelo autora

Os dados obtidos nas categorias de análise (Tabela 6) até aqui discutidas, coincidem com os resultados do estudo desenvolvido por Schneider *et al.* (2017), no qual foram analisados pelas pesquisadoras 240 artigos produzidos entre 2015 e 2016 de quatro periódicos (Investigações em Ensino de Ciências - *online*, Revista Brasileira de Pesquisa em Educação em Ciências, Experiências em Ensino de Ciências e Revista Ciências & Ideias), constatando-se uma predominância de pesquisas de natureza empírica, seguindo uma abordagem qualitativa e com metodologias relacionadas a interpretação qualitativa ou de análise de conteúdo.

No que diz respeito à abordagem geométrica, sendo essa pura ou sintética e Geometria analítica ou de coordenadas, houve uma predominância do segundo caso nos trabalhos selecionados e analisados. Dos 7 trabalhos, 4 (57,1%) faziam uso dessa abordagem. Isso justifica o tratamento dado pelos autores quanto ao ensino de Geometria, priorizando a utilização da Álgebra para resolver problemas geométricos ao invés de empregar apenas o raciocínio geométrico, formalizado em *Os elementos* de Euclides.

A última categoria de análise a ser considerada refere-se à formação de professores (Tabela 6), podendo estar relacionada a Formação Inicial ou a Formação Continuada. Observamos que os sujeitos de pesquisa envolvidos nos trabalhos analisados correspondem, em sua maioria, a professores atuantes na rede de ensino, ou seja, professores já formados e que por meio de uma formação continuada buscam ampliar e aperfeiçoar a sua prática docente. Isso demonstra uma ênfase em pesquisas que abordam a formação continuada de professores que ensinam Matemática, em detrimento a pesquisas sobre a formação inicial de professores. Segundo os trabalhos analisados, isso pode ser explicado pela motivação de desenvolver pesquisas que possam contribuir para diminuir as lacunas deixadas da formação inicial. Dos trabalhos analisados 5 (71,4%) correspondiam a formação continuada, 3 (42,8%) a formação inicial, e somente 1

(14,3%) dos trabalhos considerou as duas formações, inicial e continuada, desenvolvendo suas investigações e pesquisa com esses dois grupos de sujeitos.

Foram levantadas as argumentações dos autores de cada pesquisa, quanto as razões para o estudo de Geometria nos diversos níveis de escolaridade e, ao analisarmos os objetivos de cada pesquisador, fica evidente a disparidade na abordagem desse tema. No quadro a seguir, evidenciamos tais objetivos.

Quadro 3 – Objetivos de cada pesquisa

TEXTO	OBJETIVO
TEXTO 1 - TESE GASPAR (2003)	Apresentar uma proposta para o trabalho do conhecimento geométrico em cursos de formação de professores de Matemática por meio do uso da História da Matemática.
TEXTO 2 - DISSERTAÇÃO BALDOVINOTTI (2011)	Compreender as possibilidades para o ensino de Geometria Fractal perspectivadas por professores de Matemática e alunos do curso de licenciatura em Matemática.
TEXTO 3 – TESE CHAPARIN (2019)	Investigar as possíveis mudanças nas ações docentes de professores que ensinavam Matemática, durante e após a vivência de um curso de formação continuada com foco na resolução de problemas e nos processos do pensamento matemático.
TEXTO 4 – DISSERTAÇÃO OLIVEIRA (2016)	Analisar indícios de (re)construção do pensamento geométrico e de práticas docentes de professores que participaram de formação sobre transformações geométricas.
TEXTO 5 – DISSERTAÇÃO MAGNI (2011)	Identificar mudanças nas concepções de um grupo de professores de Matemática a respeito do processo de ensino e aprendizagem da Geometria em um contexto de formação continuada, cujo enfoque foi o estudo das inovações curriculares que ora são implementadas nas escolas públicas estaduais de São Paulo.
TEXTO 6 – TESE ALMEIDA (2018)	Estudo de atividades de Geometria com alunos da Licenciatura em Matemática na construção do conhecimento geométrico no âmbito da

	Geometria plana, Geometria analítica plana e da Geometria analítica vetorial.
TEXTO 7 – DISSERTAÇÃO VIEIRA (2017)	Investigar as relações existentes no entendimento de egressos da licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Alagoas – IFAL, entre as disciplinas de Geometria, abordadas na formação do professor; e os conteúdos geométricos do Ensino Médio.

Fonte: elaborado pelo autora

O primeiro trabalho aborda a utilização da História da Matemática para o ensino de Geometria, o segundo se preocupa com as possibilidades do ensino de determinado conteúdo especifico da Geometria para alunos de licenciatura e professores da rede de ensino. O terceiro trabalho é mais amplo, com foco na resolução de problemas e nos processos do pensamento matemático como um todo, incluindo o ensino de Geometria em um de seus tópicos. O terceiro investiga a mudança na prática docente após a realização de oficinas. Quanto ao quarto trabalho, a proposta está na investigação da (re)construção do pensamento geométrico e de práticas docentes de professores que participaram das oficinas, quanto a um conteúdo especifico da Geometria. Seguindo uma proposta semelhante, o quinto trabalho refere-se à identificação de mudanças nas concepções de um grupo de professores, a respeito do processo de ensino e aprendizagem da Geometria presente nas propostas curriculares do Estado de São Paulo. O sexto trabalho é um estudo de atividades de Geometria, com alunos da Licenciatura em Matemática, voltados à construção do conhecimento geométrico em três áreas da Geometria, diferenciando-se do sétimo trabalho, em que o foco está nos alunos egressos da licenciatura, quanto as suas concepções entre as disciplinas de Geometria abordadas na formação inicial e os conteúdos geométricos trabalhados em sua prática docente.

Com relação ao pensamento geométrico, Gaspar (2003) reconhece que esse conhecimento é importante para o desenvolvimento cognitivo do aluno e do seu raciocínio lógico-dedutivo, podendo ser uma forma de representação de outros conceitos e ideias matemáticas. Para a autora, a Geometria é um saber que estabelece conexões entre os diversos tipos de pensamento matemático e que, mais ainda, pode favorecer a análise de fatos e de relações, estabelecer ligações entre eles, e, a partir daí, deduzir novos fatos e novas relações, podendo proporcionar o desenvolvimento de um pensamento crítico e autônomo.

Em seu trabalho, Baldovinotti (2011) expõe diversas definições e exemplos que caracterizam a Geometria Fractal, quais os tipos e classificações encontradas, numa abordagem analítica, explorando pouco as questões relacionadas ao pensamento geométrico envolvido em tal conteúdo. O autor enfatiza as contribuições da Geometria Fractal na sociedade e suas aplicações em diversas áreas, apresentando alguns exemplos importantes dentro de cada área, contextualizando o conteúdo discutido e apresentado em seu trabalho, ainda relacionando o estudo de fractais à área educacional, presente nas propostas curriculares, citando alguns conceitos básicos da Matemática que fazem uso da Geometria fractal. Chaparim (2019) fala pouco dessa questão em sua tese, ou seja, trata de maneira tímida a contextualização dos conceitos geométricos. Em um de seus encontros desenvolvidos na pesquisa, mais especificamente no sétimo encontro, o autor propõe problemas geométricos que incentivam a discussão do pensamento geométrico, em especial, o processo de visualização, e se restringe a essa abordagem, dando pouco destaque em seu trabalho à construção do pensamento e à resolução do problema por meio do pensamento geométrico.

Oliveira (2016) foi a autora que mais se aproximou da nossa proposta de investigação. Em seu trabalho, a pesquisadora se dedica ao estudo do processo de construção do pensamento geométrico e das transformações geométricas, discutindo como se desenvolve o processo de construção do pensamento geométrico tomando por base os estudos de outros autores. A pesquisadora aponta em seu trabalho aspectos relevantes sobre o estudo de determinado conteúdo especifico da Geometria no plano euclidiano e ainda apresenta uma proposta para análise dos indícios de (re)construção do pensamento geométrico com relação as transformações geométricas. Por fim, a autora justifica a não assimilação dos conceitos geométricos ressaltando as definições apresentadas no livro didático, em que são apresentadas aos alunos de forma pronta, para ser assimiladas e utilizadas como verdades em demonstrações, a qual está de acordo com nossas concepções a respeito dessa questão, ou seja, acreditamos que é preciso aprofundar os estudos sobre o conhecimento geométrico, visto que, conforme a perspectiva apontada em seu trabalho, a construção do pensamento geométrico é um processo lento, gradual e complexo.

No que diz respeito ao pensamento geométrico e as construções geométricas na dissertação de Magni (2011), a autora teve como intuito identificar as concepções dos professores participantes a respeito de sua formação profissional e do processo de ensino e aprendizagem de conteúdos geométricos. A pesquisadora argumenta ainda que a Geometria nos PCNs e na Proposta Curricular de 2008 do Estado de São Paulo partem dos mesmos pressupostos: o professor deve propor ao aluno que ele explore situações em que haja a necessidade de algumas construções geométricas objetivando a visualização e aplicação de propriedades das figuras geométricas, além da construção de relações. Em contrapartida, salienta que a ausência de tais conteúdos em livros didáticos constitui-se em um obstáculo para muitos professores, levando-os, muitas vezes, a deixar de ensinar Geometria sob qualquer abordagem, passando a dar ênfase a Álgebra.

Assim como Gaspar (2003) e Baldovinotti (2011), Almeida (2018) também teve como foco da pesquisa a formação inicial de professores. Em sua pesquisa, o autor privilegia o papel do aluno no processo de construção do conhecimento geométrico, do ponto de vista antropológico, buscando nos alunos uma postura de atores do processo de construção do conhecimento geométrico, o tornando participativo, ativo e crítico na construção das praxeológias matemáticas relativas ao estudo de Geometria na Licenciatura em Matemática. Nesse sentido, sua pesquisa investiga as contribuições e restrições do estudo de atividades de Geometria na construção do conhecimento geométrico que integre os conteúdos da Geometria plana, Geometria analítica plana e Geometria analítica vetorial na formação dos alunos de graduação. Vieira (2017) aborda em seu trabalho o outro lado da questão, tratando o professor como mediador fundamental na aprendizagem dos alunos, contribuindo na construção do conhecimento geométrico e apresentando os caminhos para a construção dos argumentos dedutivos e necessários para a compreensão conceitos envolvidos.

Por meio da análise dos trabalhos selecionados, observamos diferenças entre as percepções e as abordagens dadas ao ensino de Geometria e sua importância na formação inicial ou continuada de professores de Matemática. A pesquisa realizada deixou evidente a fragilidade na exploração do pensamento geométrico na formação dos professores de matemática. Além disso, percebemos que as potencialidades do pensamento geométrico na formação inicial do professor são pouco exploradas.

Quanto a Geometria na formação do professor de Matemática, Gaspar (2003) afirma que o professor-aluno precisa ter domínio e entendimento dos conceitos básicos para trabalhá-los posteriormente. Além disso, o professor-aluno precisa ter consciência da relevância desse pensamento no desenvolvimento da formação de seus alunos. Baldovinotti (2011) garante que quando não ocorre, ou não ocorre da melhor forma, a aprendizagem de determinados conceitos geométricos na formação do professor-aluno, tal situação dificultaria lecionar tais conteúdos e aumentaria sua insegurança em abordá-los com seus alunos. Para ele, o atual cenário somente teria mudanças se os centros formadores de professores mudassem sua abordagem em relação a tais temas, propondo que se ampliassem as discussões sobre como essas mudanças poderiam ser realizadas. Isso vem ao encontro da proposta, em que defendemos o uso e exploração do pensamento geométrico na formação do professor de Matemática, em alternativa a uma abordagem tradicional do ensino de Geometria atrelada a analiticidade da Álgebra, dando espaço ao professor aluno para construir tais conceitos, tornando-o participante ativo em sua aprendizagem.

Em relação à tese de Chaparin (2019), o autor parte do pressuposto que a formação continuada contribuiria para diminuir as lacunas deixadas pela formação inicial desse professor. Já Oliveira (2016) afirma que há pouca preocupação, por parte de educadores, com a formação de professores. Para ela, pensar nos desafios e potencialidades da formação docente tornou-se fundamental e importante. Em um dos trechos do seu trabalho, a autora menciona a dificuldade da atual geração de professores no ensino de Geometria, e entendemos que ela reconhece a importância e as potencialidades do ensino de Geometria, além das consequências deixadas pela formação inicial, com impacto direto na prática docente de tais professores.

Vindo ao encontro dos autores supracitados, Magni (2011) ainda diz que essa fragilidade do docente em relação ao conhecimento geométrico pode explicar o desejo de alguns em “retirar” a Geometria da Matemática. A autora salienta que tais conhecimentos poderiam ser construídos pela formação e pela socialização nas instituições de formação de professores e, para ela, há um descompasso entre a formação do professor, seja ela inicial ou continuada, e as mudanças indicadas pelos novos currículos, dificultando ainda mais o ensino de conteúdos relacionados à Geometria. Concordamos com Almeida (2018) ao destacar a importância do estudo da Geometria, privilegiando o papel do aluno da Licenciatura em Matemática como ator do processo de construção do conhecimento geométrico e assim como ela, esperamos que nossa pesquisa possibilite a reflexão a respeito da construção do conhecimento geométrico na formação do futuro professor.

Também concordamos com as afirmações de Vieira (2017) ao reforçar a ideia de que para uma aprendizagem de Geometria mais efetiva, os alunos na formação inicial deveriam fazer uso de atividades que propiciem a construção gradual dos conhecimentos geométricos, para então se utilizarem de axiomas e demonstrações. Neste contexto, o autor menciona as políticas públicas voltadas à formação de professores e que tem por objetivo diminuir as lacunas existentes nos cursos de formação inicial que, segundo Gatti et al. (2011, p. 89), “mostram que as políticas relativas a formação inicial dos docentes no Brasil, no que se refere às instituições formadoras e aos currículos precisam ser repensadas”.

Com o intuito de investigar a bibliografia utilizada nos trabalhos por nós selecionados quanto ao ensino de Geometria e a formação do professor, inicial ou continuada, apresentamos o quadro a seguir com os autores e obras citadas pelos pesquisadores. Para a nossa análise, separamos aqueles que aparecem em dois ou mais dos 7 trabalhos analisados.

Quadro 4 – Bibliografia utilizada pelos autores com relação ao ensino de Geometria e formação de professores

AUTOR	TRABALHOS
IMBERNÓN, F.	- Formação docente e profissional: formar-se para a mudança e a incerteza.
NÓVOA, A.	- Formação de professores e o trabalho pedagógico. - Para uma formaciòn de professores construída dentro de la profesión.
PAVANELLO, R. M.	- O abandono do ensino de Geometria: uma visão histórica. - O abandono do ensino da Geometria no Brasil: causa e consequências. O abandono do ensino de Geometria: uma visão histórica. - O abandono do ensino de Geometria no Brasil: causas e consequências. - Formação de professores e dificuldades de aprendizagem em Matemática.
PONTE, J. P.	- Concepções dos professores de Matemática e processos de formação. - Da formação ao desenvolvimento profissional. - Formação do professor de Matemática: Perspectivas atuais.
SHULMAN, L. S	- *Those who understand: knowledge growth in teaching*.
TARDIF, M.	- Saberes, tempo e aprendizagem do trabalho no magistério.

	- Saberes docentes e formação profissional. - Saberes docentes e formação profissional.

Fonte: elaborado pelo autora

A análise da bibliografia utilizada pelos pesquisadores em seus trabalhos nos permitiu identificar uma distinção na escolha do material utilizado, já que autor algum foi mencionado em todos os trabalhos. Das 7 pesquisas analisadas, 3 citaram os autores Pavanello e Shulman e, assim, pode-se constatar que esses são os dois autores mais utilizados na construção das pesquisas eleitas. Pavanello aborda noções a respeito do ensino de Geometria e Shulman o estudo da produção de saber na prática docente. A única pesquisa que utilizou de fato uma obra que abordasse o desenvolvimento do pensamento geométrico foi a pesquisa desenvolvida por Chaparin (2019) com a obra *Desenvolvimento do Pensamento Geométrico: modelo de van Hiele*, Kaleff *et al.* (1994).

Após analisarmos integralmente os sete trabalhos selecionados, foi possível constatar que, apesar de todos abordarem a importância do pensamento geométrico na formação do professor, pouco se detalha sobre o que é entendido como pensamento geométrico. Os trabalhos enfatizam as contribuições da exploração desse pensamento para a prática docente, mas observamos que os autores aqui apresentados possuem um olhar mais direcionado aos conteúdos relacionados à Geometria, do que de fato para a construção dos conceitos envolvidos na aprendizagem desses conteúdos, ou seja, o foco da investigação está no produto final e não no processo realizado. Além disso, este mapeamento nos permitiu apontar a ausência de pesquisas e literaturas disponíveis para essa reflexão. Podemos concluir que são poucos os pesquisadores interessados na investigação das potencialidades do pensamento geométrico na formação inicial de professores de Matemática e, como afirmou Baldovinotti (2011), o atual cenário só poderá ser modificado se houvessem mais pesquisas sobre o assunto.

Como Fainguelernt (1995), defendemos que o professor-aluno, no seu aprendizado dos conteúdos matemáticos no ensino superior, deve ser levado a agir, a investigar, a explorar situações e aplicações que o levem a construir seu próprio conhecimento, fazendo uso do pensamento geométrico no processo de ensino e aprendizagem dos conteúdos. Propomos ainda que, no estudo dos conteúdos matemáticos que fazem parte do currículo dos cursos de Licenciatura em Matemática, os professores incluam aspectos relacionados ao pensamento geométrico, trazendo mais significado e contextualização para o ensino de tais conteúdos, desenvolvendo uma abordagem construtiva dos conceitos matemáticos. Essa abordagem pode trazer para a sala de aula uma reflexão sobre os problemas e sobre métodos de aprendizagem, podendo ser um modo alternativo de desenvolver as competências exigidas na formação do futuro professor.

As considerações feitas neste capítulo, a respeito do pensamento geométrico no ensino-aprendizagem da Matemática, devem ser levadas em conta pelos professores que ministram disciplinas de conteúdo matemático nos cursos de formação.

Assim como Barbin (2000), acreditamos que para mudar as crenças que os professores possuem sobre a Matemática e sua prática é necessário encorajá-los a pensarem a Matemática como um processo contínuo de reflexão e desenvolvimento, deixando de vê-la como uma estrutura definida e composta de “verdades absolutas”, pensando na Matemática como uma atividade intelectual e não como um produto pronto e acabado, pensando em situações problemas e, assim, valorizando as conjecturas e intuições matemáticas. Com isso, é fundamental que as disciplinas dos cursos de Licenciatura em Matemática adotem uma postura investigativa, deixando de lado abordagens simplistas e abstratas do campo teórico dos conteúdos, criando um espaço propicio ao desenvolvimento e construção do pensamento geométrico, estimulando o olhar investigativo do professor-aluno mediante a estratégias pedagógicas que favoreçam a descoberta de novos caminhos para a aprendizagem.

5 O PENSAMENTO GEOMÉTRICO E A FORMAÇÃO DE PROFESSORES

O intuito deste capítulo é apresentar uma discussão sobre a importância do Pensamento Geométrico na Formação de Professores de Matemática. No primeiro tópico, exibimos a definição do Pensamento Geométrico e seu desenvolvimento, de acordo com as perspectivas de alguns pesquisadores da área. Logo na sequência, tratamos de tal pensamento na Licenciatura em Matemática, quanto ao que a formação de professores deve privilegiar e a fragilidade do ensino de Geometria para essa formação. Finalizamos o segundo tópico trazendo a relevância das pesquisas sobre a Formação de Professores e como o impacto gerado por uma boa formação de professores reflete na qualidade do ensino da Educação Básica. Nesse sentido, no terceiro tópico deste capítulo, apontamos como Geometria é um importante elemento de conexão dos conceitos e, além disso, expomos que o estudo da Geometria possibilita uma abordagem mais significativa, ao relacionar os conteúdos com situações concretas, em que o aluno parte do concreto para situações mais abstratas.

5.1 Definindo o pensamento geométrico

Ao realizarmos um mapeamento sobre as pesquisas desenvolvidas no campo da educação geométrica, evidenciamos diferentes autores que tratam do pensamento geométrico (LABORDE, 1985; BISHOP, 1989; NASSER, 1990, DELGRANDE, 1990; GUTIERREZ, 1991; PASTOR, 1993; FISCHBEIN, 1993; DUVAL, 1995; PAIS, 1996; GRAVINA, 2001; MICHOUX, 2008, CÂMARA DOS SANTOS, 2009; LEIVAS, 2009; BLANCO, 2014; PEREIRA DA COSTA e ROSA DOS SANTOS, 2020 e PEREIRA DA COSTA, 2019 e 2020), entretanto, esses estudos não apresentam uma definição sobre o que está sendo compreendido por esse termo. Ainda que persista uma ausência de uma definição ou mesmo de uma explicação sobre o significado dessa instância do pensamento matemático, tais pesquisadores concordam com a importância do desenvolvimento desse tipo de pensamento matemático nos estudantes.

Diante de tal situação, faz-se necessário construir uma caracterização do Pensamento Geométrico que dialogue com o objetivo de nosso estudo, elaborando uma definição de pensamento geométrico tomando como base alguns educadores matemáticos (FISCHBEIN, 1993; DUVAL 1995; PAIS; 1996; GRAVINA, 2001 e LEIVAS, 2009) e a análise da compreensão de tais educadores (PEREIRA DA COSTA, 2019). Acreditamos que esse estudo contribuirá com a prática pedagógica dos professores que ensinam Matemática e com as pesquisas em Educação Matemática que abordem noções a respeito do pensamento geométrico.

Para construção de uma definição de pensamento geométrico, fundamentamo-nos, sobretudo, nos estudos de André Pereira da Costa (2019), por apresentar em sua Tese uma análise detalhada da compreensão de determinados autores quanto a caracterização do pensar em Geometria. Sendo assim, apresentaremos um recorde das principais considerações evidenciadas pelo autor quanto a construção e desenvolvimento do pensamento geométrico.

5.1.1 O que dizem os pesquisadores

Na compreensão de Efraim Fischbein (1993), o pensamento geométrico é caracterizado pela interação entre o aspecto figurativo e o aspecto conceitual, sendo definido como a capacidade metal que permite considerar a Geometria como um conjunto de entidades mentais, chamadas figuras geométricas, das quais possuem características conceituais e figurativas que interagem entre si (PEREIRA DA COSTA, 2020). Na combinação entre conceito e figura, o elemento imagem acaba estimulando novas orientações ao pensamento geométrico, ainda que restrições lógicas e conceituas controlem o rigor do processo formal. Quanto a imagem mental, o autor a define como uma representação sensorial de um fenômeno ou objeto.

Fischbein (1993), segundo Pereira da Costa (2020), caracteriza um conceito como a expressão de uma ideia, uma representação geral, uma classe de objetos com base nas suas características comuns. Para o autor, as entidades (pontos, lados, ângulos, operações geométricas) apresentam qualidades conceituais. Em um sentido conceitual, “pode se considerar a perfeição absoluta de entidades geométricas: linhas retas, circunferências, quadrados, cubos, etc.” (PEREIRA DA COSTA, 2019, p. 67-68). Para Fischbein (1993), tais entidades não possuem correspondentes de material autênticos, os pontos, retas e planos não existem e não podem existir na realidade, sendo os objetos de nossa experiência prática tridimensionais, como o cubo ou a esfera, "meras construções mentais que não devem possuir qualquer realidade substancial" (PEREIRA DA COSTA, 2019, p. 68).

Concordamos com os autores supracitados, ao considerarem que os objetos geométricos não existem no mundo físico, e o que podemos de fato encontrar são as representações desses objetos valendo-se de objetos físicos. Quanto a distinção entre objeto geométrico e sua representação, Pereira da Costa (2019, p.68) indica que:

> A distinção entre o objeto geométrico (construção mental) e sua representação (objeto físico) desempenha papel importante ao desenvolvimento do pensar em Geometria. Uma pessoa que ainda não consegue perceber essa diferença, geralmente, não alcançou o pensamento geométrico de natureza avançada.

Nesse sentido, podemos considerar o campo geométrico como uma ferramenta para compreensão do mundo físico e, com isso, "a Geometria não é vista como um modelo teórico para o estudo dos objetos matemáticos do mundo platônico" (PEREIRA DA COSTA, 2019, p. 68).

No que diz respeito as figuras geométricas, conforme indicado pelo investigador, suas propriedades são impostas ou derivadas de definições, em relação a um determinado sistema axiomático. Fischbein (1993) ressalta que uma figura geométrica pode ser descrita como tendo propriedades intrinsicamente conceituais, entretanto, não se limita a um mero conceito, mas a uma imagem visual, possuindo propriedades que os conceitos usuais não possuem, isto é, inclui a representação mental da propriedade espacial. Em virtude disso, Pereira da Costa (2019) sinaliza:

> [...] o autor afirma que os conceitos não se transformam, não se movem e as imagens, como tal, não possuem a perfeição, a generalização, a abstração, a pureza que se supõe ao realizar os cálculos (por exemplo, calcular a distância percorrida por um veículo, conhecendo o raio das rodas, o número de rotações por unidade de tempo e o tempo gasto) [...] deve ficar claro que a fusão entre conceito e figura em raciocínio geométrico expressa apenas a situação ideal e extrema. Geralmente não alcançada absolutamente devido a restrições psicológicas (PEREIRA DA COSTA, 2019, p. 69-70).

Como mencionado anteriormente, Fischbein (1993) defende que o pensamento geométrico seria uma interação permanente entre imagens e conceito e o desenvolvimento dessa forma de pensar é determinado por construções conceituais ou vice e versa. É o pensamento geométrico que possibilita perceber uma figura geométrica como uma imagem visual mediante a sua representação mental, na qual é construída com base nas propriedades conceituais e figurativas.

De acordo com Pereira da Costa (2019), quando se refere as figuras geométricas, Fischbein (1993) considera três categorias de entidades mentais: a definição, a imagem e o conceito figurativo, sendo o último uma realidade mental, uma construção tratada pelo raciocínio matemático no domínio da Geometria. Para o investigador, o termo “figura” é ambíguo, podendo indicar uma variedade de significados, mas para ele, em seu texto, refere-se apenas a imagens espaciais, onde geralmente, há uma certa estrutura ou forma.

Ainda sobre as figuras geométricas, destaca-se que:

> Segundo Fischbein (1993), as figuras geométricas correspondem a esta descrição, mas algumas especificações devem ser adicionadas: (a) uma figura geométrica e uma imagem mental, cujas propriedades são completamente controladas por uma definição; (b) um desenho não é a própria figura geométrica, mas uma concretização gráfica ou materialização; (c) a imagem mental de uma figura geométrica e, usualmente, a representação do modelo materializado dela. Ele considera que a figura geométrica em si é apenas a ideia correspondente que é a entidade figural abstrata, idealizada e purificada, determinada estritamente pela sua definição (PEREIRA DA COSTA, 2019, p. 70-71).

Portanto, para Fischbein (1993), o pensamento geométrico é a capacidade que permite uma pessoa compreender a Geometria composta por entidades mentais, com características conceituais e figurativas, possibilitando perceber uma figura geométrica como imagem visual mediante a sua representação mental.

Na compreensão de Raymond Duval (1995), o pensamento geométrico é caracterizado por uma abordagem cognitiva e de um ponto de vista perceptual. O autor fornece uma importante análise de tal pensamento fundamentando-se na sua Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS), que analisa o funcionamento cognitivo vinculado a atividade matemática e a problemática envolvida na sua aprendizagem. Considerando as dificuldades conceituais apresentadas por estudantes da educação básica, relacionadas com a aprendizagem matemática, Duval (1995) passou a investigá-las por uma perspectiva cognitiva, indicando a diferenciação do objeto matemático de sua representação, um aspecto crucial para a compreensão matemática. Normalmente, o aluno considera que a representação do objeto é o próprio objeto matemático em si, e consequentemente, deixa de construir uma compreensão matemática com significado (PEREIRA DA COSTA, 2020).

Diante disto, para Fischbein (1993) trata-se da associação de duas entidades definidas e autônomas, o conceito e as representações sensoriais, em que o primeiro se refere às ideias abstratas e o segundo a algumas operações concretas. Nesta direção, para Duval (1995) o conceito seria o objeto geométrico, uma representação mental de natureza platônica, sendo as representações sensoriais um modelo de representação desse objeto.

Duval (1995) classifica as representações dos objetos matemáticos em três categorias, sendo elas:

a) Mentais: formadas por uma coleção de imagens e pontos de vista que um indivíduo apresenta, relacionadas a um objeto ou a um cenário.
b) Internas: marcadas pela realização de uma atividade de modo automático, procurando possibilitar um resultado moldado ou a um cenário padrão.
c) Semióticas: consistem em construções formadas pela aplicação de signos provenientes de um sistema de representação, apresentando uma complexidade de sentido e lógica.

No que diz respeito as representações semióticas, o autor destaca sua importância para atividades cognitivas do pensamento do ser humano, em que são responsáveis por comunicar, por deixar as representações perceptíveis e disponíveis, ou seja, as representações semióticas exercem funções indispensáveis na formação do pensamento matemático (PEREIRA DA COSTA, 2019). Considerando o campo matemático, existe uma ampla diversidade dessas representações, organizadas por Durval (1995) em quatro grupos:

> a língua natural (associações verbais e conceituais), as escritas algébricas e formais (sistemas de escritas numéricas, algébricas, simbólicas e calculo), as representações gráficas (gráficos cartesianos) e figuras geométricas (planas ou em perspectivas) (PEREIRA DA COSTA, 2019, p. 74).

Duval (1995) aponta duas operações cognitivas importantes para a compreensão do funcionamento cognitivo, o tratamento e a conversão, quando trata do estudo dos objetos em sua Teoria dos Registros de Representação Semiótica. O tratamento seria a modificação que ocorre dentro de um mesmo registro, ficando para a conversão a mudança de representação de um objeto matemático para outra representação desse objeto. Assim, por meio dessas duas operações cognitivas podemos realizar uma análise aprofundada do ensino e aprendizagem da Geometria.

Em sua tese, Pereira da Costa (2019) ilustra tais modificações:

> Consideremos, por exemplo, uma atividade relacionada a orientação espacial, na qual, em uma turma do quinto ano do ensino fundamental brasileiro, os estudantes recebem do professor o mapa do bairro da escola. Ao marcarem o percurso que realizam de casa até a escola, certamente, cada estudante apresentara um resultado diferente do seu colega, ou seja, diferentes tratamentos produzirão a mesma representação gráfica, no caso, o mapa fornecido pelo docente. Em um segundo momento, os estudantes registram na folha do caderno o modo como realizam o percurso a partir da leitura do mapa. Nessa fase, os discentes fazem a conversão, isto é, a mudança da representação gráfica (o mapa) para a língua natural (a descrição no caderno) (PEREIRA DA COSTA, 2019, p. 75).

Nessa direção, para que o aluno desenvolva compreensão com significado em Matemática é necessário que ele realize as duas operações cognitivas, ou seja, que ele desenvolva o tratamento e a conversão dos objetos matemáticos. Quanto à Geometria, Duval (1995) realça três processos cognitivos indispensáveis para a aprendizagem geométrica dos estudantes: a visualização (formada pelo estudo de natureza heurística), construção (produção de configurações que constituem um modelo de procedimentos representados e aos produtos obtidos, no qual os objetos matemáticos estão inseridos) e raciocínio (processo discursivo utilizado em provas e justificativas). Segundo o autor, um estudante se torna proficiente em Geometria quando consegue articular esses três processos.

Dessa forma, por meio das considerações apresentadas por Pereira da Costa (2019) sobre as discussões propostas por Durval (1993), em nosso entendimento, o pensamento geométrico seria a capacidade mental do indivíduo de construir conhecimentos geométricos a partir das apreensões geométricas, ou seja, quando reconhece um objeto geométrico no plano ou espaço, quando constrói figuras geométricas, quando descreve ou analisa tal figura apoiado em suas propriedades, além de operar, manipular ou decompor figuras geometrias, entre outras apreensões. Como mencionado por Pereira da Costa (2019), esta definição implica a existência de níveis de pensamento geométrico, mesmo que de maneira indireta, entretanto, o autor não aborda essa questão em suas discussões. Nesse sentido, o autor reforça a ideia de como se apresenta o desenvolvimento do pensamento geométrico nos estudantes, trazendo o seguinte lembrete:

> E importante destacar que um estudante desenvolverá o pensamento geométrico quando ele mobilizar no mínimo uma dessas características, ou seja, quando ele atuar em uma das apreensões geométricas. Além disso, como mencionado por Duval, não há hierarquia, logo, um mesmo discente pode trabalhar em duas ou mais apreensões simultaneamente (PEREIRA DA COSTA, 2019, p. 83).

Já o pensamento geométrico na compreensão de Luiz Carlos Pais (1996), pode ser definido como “a capacidade mental de construir conhecimentos geométricos a partir de intuição, experimentação e teoria, correlacionados com objeto, desenho, imagem mental e conceito” (PEREIRA DA COSTA, 2019, p. 92).

Pais (1996) considera o termo objeto como uma parte material e visível na realidade sentida do aluno, podendo ser relacionada à maneira como determinados conceitos em Geometria são ensinados, empregado tanto como modelo físico como material didático. Dessa forma, para Pais (1996), o termo é utilizado apenas em sua acepção concreta, associado, sobretudo aos moldes ou materiais didáticos. Diante disso, “na manipulação de objetos, é fundamental que o estudante realize interpretação geométrica do(s) conceito(s) que está(ao) sendo representado(s), para que possa desenvolver a abstração e a generalização dele(s)” (PEREIRA DA COSTA, 2019, p. 84).

Para Pais (1996), o desenho é também de âmago concreto e peculiar, ao contrário dos atributos globais e abstratos do conceito. Para o autor, representar por desenho os conceitos vinculados a Geometria passa a ser um recurso didático eficaz para os processos de ensino e aprendizagem desse campo da Matemática. É importante destacar a potencialidade do desenho na conceitualização geométrica, e para isso, destacamos as considerações de Pais (1996) a respeito disso:

> Quer seja na representação de figuras planas ou espaciais, o desenho tem sido, na realidade, uma passagem quase que totalmente obrigatória no processo de conceitualização geométrica. Sua presença destaca-se tanto nas aulas de geometria, como nos livros didáticos, ou mesmo, simplesmente, para ilustrar os enunciados de exercícios, definições ou teoremas. Essa sua presença significativa leva a necessidade de uma reflexão epistemológica e didática sobre o seu verdadeiro estatuto na aprendizagem geométrica (PAIS, 1996, p. 68 *apud* PEREIRA DA COSTA, 2019, p. 85).

Fischbein (1993) destaca que um desenho não é a própria figura geométrica, mas uma concretização gráfica, uma materialização.

Pais (1996) define o termo imagem mental como a capacidade do sujeito, de “enunciar, por meio de descrição, as especificidades de um desenho ou de um objeto, quando esses componentes não estão presentes” (PEREIRA DA COSTA, 2019, p. 86). Com isso, para o autor, essas imagens são de âmago diferente das consideradas pelo objeto e desenho, sendo evidenciadas pelos atributos da abstração e subjetividade, considerados fundamentais.

No que diz respeito ao papel das imagens mentais no processo de ensino e aprendizagem da Geometria, Pais (1996) explica que:

> [...] a aprendizagem geométrica engloba necessariamente uma razoável habilidade racional de trabalho, com boas imagens mentais associadas não só aos conceitos como também aos teoremas e situações geométricas fundamentais. Exemplos de frases como: “Imagine uma reta perpendicular a um plano”; “seja a diagonal principal de um cubo”, fazem um apelo direto ao uso de uma imagem desse tipo. No transcorrer da aprendizagem, aos poucos, o conjunto de tais imagens e enriquecido tanto no aspecto quantitativo como qualitativo. Para os interesses educacionais, essas imagens são tanto melhores quanto mais operacionais elas forem, o que permitirá o desenvolvimento de um raciocínio mais dinâmico para a resolução de problemas ou para novas aprendizagens. Para os interesses do ensino da geometria, são os objetos e os desenhos que podem principalmente estimular a formação de boas imagens e, neste contexto, elas constituem uma terceira forma de representação das noções geométricas. A natureza desta representação e bem mais complexa em relação ao uso de um objeto ou de um desenho, mas, por outro lado, permite uma utilização muita mais rápida e eficiente (PAIS, 1996, p.70 *apud* PEREIRA DA COSTA, 2019, p. 87).

Diante do exposto, normalmente, o aluno mobiliza as representações por objetos e desenhos, para que, na sequência, mobilize imagens mentais.

Pereira da Costa (2019) considera importante destacar que, num primeiro momento da aprendizagem, o aluno tende a identificar certas conexões entre o conceito e sua representação, quando se depara com as dificuldades encontradas no processo de abstração. Além disso, o autor salienta que o termo figura apresenta duas interpretações, sendo a primeira como um conceito da Geometria e, a segunda, caracterizada como uma representação gráfica. Diante disto, é mencionado que "cientificamente, o conceito não pode ser vulnerável às mudanças que possibilitam a produção de diferentes interpretações" (PEREIRA DA COSTA, 2019, p. 88) e, nesse cenário, Pais (1996) comenta:

> [...] enquanto conhecimento e construído pelo homem, existe uma serie de particularidades que acabam determinando níveis de conceitualização diferentes. Cada indivíduo possui uma serie de imagens mentais associadas a um determinado conceito. Embora esses dois elementos sejam de natureza puramente abstrata, o primeiro deles refere-se ao domínio da psicologia cognitiva, enquanto que o segundo refere-se ao aspecto racional e objetivo da ciência. O trabalho didático situa-se entre esses polos interligados (PAIS, 1996, p. 71 *apud* PEREIRA DA COSTA, 2019, p. 87).

Em sua tese, Pereira da Costa (2019) traz o esquema de articulação, apresentado por Pais (1996), com a correlação entre três aspectos fundamentais do conhecimento geométrico (teoria, expectativa e intuição) e os quatro componentes básicos para a aprendizagem geométrica (conceito, objeto, desenho e imagem mental), constituindo assim, a formação do pensamento geométrico.

Na sequência, o pesquisador descreve o que seriam os termos teoria, expectativa e intuição, mencionados no esquema supracitado, na concepção de Pais (1996) quanto ao pensamento geométrico e, segundo o Pereira da Costa (2019), referem-se à:

- Pensamento Geométrico Teórico: é caracterizado pelo desenvolvimento de demonstrações geométricas, em que o estudante realiza a resolução sem o uso da intuição e do desenho, fazendo uso de conceitos geométricos. Assim, o aluno atuaria no pensamento geométrico teórico, reconhecido pelo uso de processos demonstrativos na análise do problema.

- Pensamento Geométrico Experimental: caracterizado pelo uso de desenhos, em que o desenho é aplicado para localizar ou evidenciar uma proposição, e com isso, o aluno mobilizaria o pensamento geométrico experimental ao fazer uso de desenhos em sua análise do problema.
- Pensamento Geométrico Intuitivo: o pensar em Geometria é de natureza intuitiva, ou seja, o aluno mobiliza o pensamento geométrico intuitivo, pois analisa os objetos geométricos de forma intuitiva. De acordo com o pesquisador, "a intuição é um modo de conhecimento direto que está, a todo momento, acessível na essência das pessoas" (PEREIRA DA COSTA, 2019, p. 89), em que a justificativa não solicitaria um processo dedutivo, seguindo uma série lógica de argumentações.

Nesse cenário, o pensamento geométrico intuitivo e o experimental, de natureza subjetiva e empírica, constituem níveis mais elementares, ao passo que o pensamento geométrico teórico corresponde ao nível mais complexo.

Diante do exposto, Pereira da Costa realiza uma ampliação das discussões de Pais (1996), apresentando a tipologia de pensamento geométrico, salientando que a hierarquia não é tão estanque, e que o aluno poderia mobilizar as três formas de pensar em geometria ao realizar uma demonstração ou fazer a análise de um problema. Conforme Pereira da Costa (2019),

> [...] na produção do conhecimento teórico da Geometria, formado principalmente pelos conceitos que estabelecem o pensamento geométrico teórico, se faz necessário analisar as implicações da intuição e da experimentação. Portanto, os elementos objeto, desenho, imagem mental e conceito se complementam e articulam-se com os aspectos intuitivo, experimental e teórico, formando o pensamento geométrico (PEREIRA DA COSTA, 2019, p. 92).

O pensamento geométrico na compreensão de Maria Alice Gravina (2001) pode ser caracterizado pela elaboração de formas que são, inicialmente, abstraídas do mundo em que vivemos. Além disso, segundo a autora, o pensamento geométrico pode ser classificado em duas categorias, o pensamento de natureza empírica e de natureza hipotético-dedutiva.

Para Gravina (2001), o primeiro pensamento, de natureza empírica, identifica regularidades, mas sem a necessidade ou preocupação de explicá-las; já o segundo pensamento, refere-se aos pensamentos conceituais, que se organizam por meio de noções e relações primitivas, além dos axiomas, definições e teoremas. É importante salientar que o pensamento de natureza hipotético-dedutiva só é atingido por meio da educação formal, ao contrário do pensamento de natureza empírica, que poderia ser concebido com experiências práticas. Em sua tese, Gravina (2001) aponta que "a natureza evolutiva do pensamento geométrico se inicia com o pensamento empírico, e finaliza nos pensamentos hipotético-dedutivos" (PEREIRA DA COSTA, 2019, p. 92).

Nessa direção, Gravina (2008) denota que o pensamento geométrico hipotético-dedutivo é marcado por dois níveis de desenvolvimento de aprendizagem em Geometria:

> [...] podemos considerar pelo menos dois níveis de desenvolvimento dos alunos no processo de aprendizagem de geometria. O primeiro enfoca a compreensão da geometria como um modelo teórico baseado em axiomas, definições, teoremas e provas. O segundo enfoca o desenvolvimento de habilidades que dão suporte a própria produção de provas dos estudantes, assumindo que já é muito claro para eles o significado de provar um teorema – um raciocínio dedutivo baseado em axiomas, definições e teoremas já provados. Alguns quadros teóricos foram desenvolvidos como uma contribuição para a compreensão das habilidades cognitivas necessárias neste processo de aprendizagem em ambos os níveis (GRAVINA, 2008, p.565 *apud* PEREIRA DA COSTA, 2019, p. 94).

Diante disso, concordamos com Pereira da Costa (2019) quando diz que a pesquisadora entende o pensamento geométrico como os raciocínios de origem dedutiva e visual, sendo esses manifestados por meio da manipulação de desenhos utilizados em um campo conceitual fortemente estabelecido. Além disso, é o pensamento que favorece a produção do conhecimento, concebendo a Geometria como "modelo teórico do meio sensível adjacente" (PEREIRA DA COSTA, 2019, p. 95).

Gravina (2001) cita em sua tese as habilidades intelectuais essenciais à produção de conhecimento geométrico e ao desenvolvimento do pensamento geométrico. Para a autora, tais habilidades seriam a abstração, generalização, estabelecimento de relações, o erro, a elaboração e refinamento de conjecturas, o teste de hipóteses e produção de demonstrações. Além disso, para ela “o pensar geometricamente é constituído por todos esses elementos, e que eles não se desenvolvem de forma hierárquica, isto é, um aluno pode apresentar mais de uma dessas características em seu pensamento geométrico” (PEREIRA DA COSTA, 2019, p. 95).

Outros autores também tratam desta questão. É o caso de Kopke (2006) e Almeida (2016). Kopke menciona em sua tese outros experimentos matemáticos que caracterizam o pensamento geométrico, como reconhecer formas, representa-las, identificar suas propriedades e abstrai-las. Já Almeida enfatiza que o pensamento geométrico deriva “das generalizações estabelecidas, como resultado de conjecturas sobre dados e relações matemáticas e por meio de uma linguagem cada vez mais simbólica, usada na argumentação” (ALMEIDA, 2016, p. 66). Gravina (2001) e Kopke (2006) mencionam em seus trabalhos a importância da modelagem no desenvolvimento do pensamento geométrico. Além disso, a segunda autora defende que, para promover com sucesso o desenvolvimento do pensamento geométrico, o professor de Matemática deve procurar trabalhar os conceitos geométricos em conexões com as diferentes disciplinas e, para que haja um cenário ideal que promova o conhecimento e o pensamento geométrico, é importante que o professor trabalhe de maneira intencional (PEREIRA DA COSTA, 2019).

Na compreensão de José Carlos Pinto Leivas (2009), o pensamento geométrico pode ser definido como uma ação humana, manifestada por meio da exploração de atividades que privilegiem a curiosidade dos alunos ao realizarem conjecturas que podem ser validadas ou não por contraexemplos, fazendo uso de recursos apropriados, justificativas e argumentações. Leivas (2009), em sua tese de doutorado, considera a existência do pensamento geométrico avançado. Para o autor, o pensamento avançado “pode ser caracterizado como um processo capaz de produzir estruturas mentais de natureza geométrica por meio da imaginação, intuição e visualização, para a construção de conhecimentos matemáticos científicos” (PEREIRA DA COSTA, 2019, p. 104).

Quanto ao pensamento geométrico avançado, o pesquisador defende que o grau de escolaridade ou a idade biológica nada interferem em seu desenvolvimento, ou seja, ele não é alcançado exclusivamente por estudantes em níveis mais elevados de ensino, como alunos de graduação ou pós-graduação, considerando o fato de tais alunos, “teoricamente”, terem tido mais contato com os conceitos geométricos.

Em sua pesquisa, o autor considera que a imaginação, a intuição e a visualização formam uma tríade fundamental ao desenvolvimento do pensamento geométrico, e as define como:

- Imaginação: modo de concepção mental de um conceito em Matemática, podendo ser representado por meio de um símbolo ou esquema visual, sendo ele verbal, algébrico ou um arranjo deles, com a finalidade de informar tal conceito a si próprio ou a terceiros.
- Intuição: processo de produção de estruturas mentais, utilizadas na elaboração de um dado conceito em Matemática, mediante as vivências concretas com um determinado objeto.
- Visualização: processo de elaboração de imagens mentais com a finalidade de produzir e informar certo conceito em Matemática, tendo como objetivo favorecer a solução de problemas.

Segundo Leivas (2009), a intuição influencia no processo de matematização, sendo muito eficaz, na medida em que transforma um conhecimento intuitivo em um conhecimento mais elaborado e avançado. Já a visualização, apresenta determinados benefícios, tanto mentais quanto físicos, “à medida que a imaginação pode ter algum aspecto pictórico e possuir ligações com percepção, com memorização e com o amago dinâmico de imagens, além do diálogo com a elaboração de conceitos” (PEREIRA DA COSTA, 2019, p. 108). Com relação a imaginação, o autor defende a necessidade de seu desenvolvimento desde a infância, nos anos iniciais do Ensino Fundamental, evitando assim, problemas futuros no desenvolvimento do pensamento geométrico. O autor acredita que:

> [...] se a imaginação fosse explorada no desenvolvimento de um pensamento geométrico durante toda a escolaridade, a Análise não teria a conotação que muitas vezes lhe é atribuída nos diversos cursos de Licenciatura, como a disciplina mais difícil. Em razão de as disciplinas de Cálculo utilizarem desenvolvimento apenas algorítmico e elementos não visuais, quando o aluno chega a Análise, as dificuldades são imensas, haja vista, por exemplo, a representação geométrica em Álgebra Linear, quando os vetores

> são definidos em espaços de dimensão n, com n ≥ 3. Até n = 3 ainda as representações são visuais, como feitos antes na representação do cubo tridimensional num plano bidimensional ou a representação no tridimensional de um cubo em quatro dimensões, o qual necessita de imaginação para poder abstrair (LEIVAS, 2009, p.168 *apud* PEREIRA DA COSTA, 2019, p. 107-108).

Sendo assim, a partir do que foi exposto, podemos considerar que para Leivas (2009) o pensamento geométrico seria o processo envolvido na elaboração de estruturas geométricas mentais, por meio da imaginação, intuição e visualização, voltadas a elaboração de conhecimento em Matemática.

Por fim, após a análise dos estudos de outros autores, o pensamento geométrico na compreensão de André Pereira da Costa (2019) pode ser definido como a capacidade mental de produzir conhecimentos em Geometria, podendo ser representado como a capacidade de mobilizar os instrumentos geométricos na resolução de problemas, de maneira coerente e de reconhecer e verificar a relevância da Geometria como um instrumento para a compreensão do mundo, além de modelo em Matemática para entendimento do mundo teórico.

Em sua tese, Pereira da Costa (2019) evidencia a complexidade em caracterizar e definir o pensamento geométrico, em que, possivelmente, essa complexidade se justifique em razão da própria natureza evolutiva da Geometria. Por meio de sua análise, o autor pode perceber que todos os autores estudados consideram o pensamento geométrico como uma capacidade mental de construir conhecimentos geométricos, entretanto, notou que essa unanimidade não ocorreu na compreensão desses mesmos autores (FISCHBEEIN, 1993, DUVAL, 1995, PAIS, 1996, GRAVINA, 2001 e LEIVAS, 2009) quanto à forma em que esse processo ocorre.

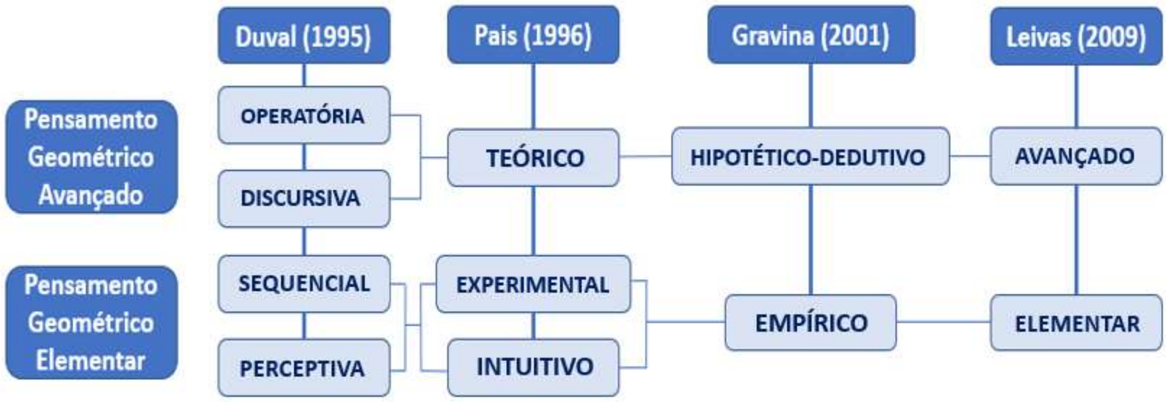
Desse modo, o pesquisador apresenta suas discussões acerca da natureza do pensamento geométrico, e em seguida, expõe a produção de um modelo capaz de possibilitar a identificação dos níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico, obtidos por meio de atividades desenvolvidas por estudantes do ensino básico ao resolverem questões relacionadas aos quadriláteros notáveis (trapézio, paralelogramo, retângulo, losango e quadrado).

Pereira da Costa (2019) discute em seu trabalho noções a respeito do pensamento matemático elementar e avançado. Para o autor, o primeiro termo é marcado pelo convívio e contato do indivíduo com a Geometria da prática cotidiana e também pelo contato com os conceitos mais simples vinculados a Geometria Euclidiana Plana, ao iniciar o processo de escolarização formal. No segundo termo, o foco está no estudo dos objetos geométricos mais complexos, bem como a utilização de axiomas e teoremas no modelo teórico que constitui a Geometria Euclidiana. Com isso, para o autor

> [...] o que determina a natureza do pensamento geométrico do estudante, é o tipo de Geometria que a pessoa (criança ou adulto) estiver estudando ou vivenciando (mesmo em ambientes não escolares), independentemente do seu nível de escolaridade, de sua idade e sua maturação biológica (PEREIRA DA COSTA, 2019, p. 113-114).

Com base nas discussões apresentadas pelos autores analisados, Pereira da Costa (2019) desenvolveu um esquema (Figura 9) capaz de inserir as compreensões dos autores dentro de sua perspectiva de pensamento geométrico avançado e elementar.

Figura 9 – Esquematização da natureza do pensamento geométrico



Fonte: adaptado de Pereira da Costa (2019)

Pelo esquema exposto e pelas discussões apresentadas pelos autores, percebe-se a existência de determinados níveis do pensar em Geometria, ainda que indiretamente, como é o caso de Duval (1995), que não fala em níveis, mas em apreensões geométricas. Além disso, como indicado por Fischbein (1993), Duval (1995), Pais (1996), Gravina (2001) e Leivas (2009), a Geometria é constituída por objetos idealizados e, como mencionado por Pereira da Costa (2019), os objetos geométricos não existem na realidade, mas no mundo das ideias, provenientes da abstração. Objetos como o cubo e a esfera são objetos da nossa realidade prática e, ainda que sejam tridimensionais, são apenas construções mentais, vinculadas ao mundo abstrato, não existentes no mundo concreto.

Para Pereira da Costa (2019), o processo de abstração pode ocorrer já no pensamento geométrico elementar, ou seja, assim como no pensamento geométrico avançado, com o estudo de processos dedutivos de diferentes sistemas axiomáticos, as habilidades de abstração já podem ser desenvolvidas desde os primeiros anos de escolaridade. Nesta direção, Almouloud (2017) defende que a abstração em Geometria pode ser iniciada na interação das crianças com o mundo físico.

> […] a geometria começa com uma teoria baseada em objetos, pois inclui muitos atos de abstração empírica com foco em objetos, mas que não despreza, de forma alguma, a existência de processos. Os conceitos, em geometria, são decorrentes de atividades que envolvem a interação física com o mundo real e dependem, também, da sofisticação da linguagem. O objeto e o foco da atenção e, só mais tarde, a linguagem utilizada para a descrição

> permite que a mente construa objetos platônicos, como linhas "sem largura", por exemplo (ALMOULOUD, 2017, p. 29 *apud* PEREIRA DA COSTA, 2019, p. 116).

A abstração geométrica pode ocorrer em diversos momentos educacionais, sendo diferenciada pelo foco dado em cada nível, tanto na educação básica quanto em cursos de graduação, e, neste contexto, quando um aluno abstrai, podemos dizer que ele alcançou um determinado nível de pensamento geométrico, mais refinado que o anterior. Então, segundo a definição dada pelo autor quanto ao pensamento geométrico, são as abstrações geométricas que possibilitam ao aluno desenvolver o pensar em Matemática.

A proposta apresentada por Pereira da Costa (2019) em sua tese, diz respeito à tipologia de abstrações geométricas, fundamentada no estudo dos autores por ele analisados, como Duval (1995), Pais (1996), Gravina (2001) e Leivas (2009). Nosso objetivo aqui, não é detalhar cada abstração geométrica apresentada pelo autor em seu esquema de caracterização do pensamento geométrico, e nem detalhar os resultados por ele obtidos, mas expor como essas abstrações se articulam entre si, além de suas principais características na perspectiva do autor.

Sendo assim, o esquema das abstrações geométricas que caracterizam o pensamento geométrico, corresponde a:

- Abstração geométrica espacial: Operações cognitivas sem coordenação, com apreensões perceptivas e sequenciais, de linguagem cotidiana e de natureza elementar;
- Abstração geométrica perceptiva: Operações cognitivas sem coordenação, com apreensões perceptivas e sequenciais, de linguagem cotidiana e de natureza elementar;
- Abstração geométrica analítica: Operações cognitivas sem coordenação, com apreensões perceptivas, sequenciais e discursivas, de linguagem cotidiana com caráter analítico e de natureza elementar;
- Abstração geométrica descritiva: Operações cognitivas com coordenação, com apreensões sequenciais e discursivas, de linguagem formal dedutiva e de natureza elementar;

- Abstração geométrica dedutiva: Operações cognitivas com coordenação e tratamento, com apreensões sequenciai, discursivas e operatórias, de linguagem formal argumentativa e de natureza formal dedutiva e avançada;
- Abstração geométrica hipotética: Operações cognitivas com coordenação e tratamento, com apreensões sequenciais, discursivas e operatórias, de linguagem formal argumentativa e de natureza formal não euclidiana e avançada.

Assim como mencionado pelo pesquisador, de acordo com as propriedades destacadas, é possível perceber que as abstrações geométricas apontam a existência de níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico e isso se justifica em virtude do fato das características se tornarem mais sofisticadas à medida que avançam as abstrações geométricas. Pereira da Costa (2019) teve por objetivo geral em sua tese propor um modelo que possibilitasse a identificação de tais níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico, evidenciadas por estudantes do ensino básico ao resolverem atividades relacionadas aos quadriláteros notáveis. Tal modelo foi submetido aos alunos dos anos finais do Ensino Fundamental e, para o autor, com base nesse modelo, seria possível analisar as características do pensamento geométrico e, com isso, o professor de Matemática poderia compreender melhor o funcionamento cognitivo dos seus alunos, para, em seguida, propor intervenções pedagógicas que promovam o desenvolvimento desses atributos, além da passagem entre os níveis do pensamento geométrico.

A pesquisa desenvolvida pelo autor teve como resultado a comprovação de que o estudo das Geometrias Não-Euclidianas pode ser introduzido no Ensino Básico, não sendo exclusividade do ensino superior. Além disso, observou-se que ao resolverem o problema proposto, os alunos atuaram na abstração geométrica hipotética (teórica).

5.1.2 O desenvolvimento do Pensamento Geométrico

Diversos estudos foram desenvolvidos com a intenção de compreender e promover o desenvolvimento do pensamento geométrico. Autores como Nasser

(1992), Pastor (1993) e Knigth (2006) apontam a resolução de problemas e o domínio no processo dedutivo como de grande importância para o desenvolvimento deste modo de pensamento. Pesquisas indicam a relevância da diversificação dos tipos de atividades, exploradas em sala de aula, com objetivo de possibilitar o desenvolvimento do pensamento geométrico.

Neste contexto, temos como proposta apresentar como ocorre o desenvolvimento do pensamento geométrico na compreensão dos autores citados no tópico anterior (DUVAL, 1995; GRAVINA, 2001; LEIVAS, 2009 e PEREIRA DA COSTA, 2019), suas principais considerações e perspectivas para o desenvolvimento desse modo especifico de pensamento.

Em sua pesquisa, Duval (1995) introduz três processos cognitivos indispensáveis à aprendizagem geométrica: a visualização, a construção e o raciocínio, em que:

- Visualização: formada pelo estudo de natureza heurística de um cenário sofisticado;
- Construção: produção de configurações que estabelecem um modelo no qual os objetos são conectados aos procedimentos representados e aos produtos obtidos, no âmbito da Matemática;
- Raciocínio: seria o processo discursivo utilizado em provas e justificativas.

Dizemos que um aluno se torna proficiente em Geometria, cognitivamente, quando articula sinergicamente esses três processos (PEREIRA DA COSTA, 2019). Além disso, segundo o pesquisador, podemos dizer que o aluno aprende Geometria, especialmente quando possui contato com as figuras geométricas, por meio das apreensões geométricas, indicadas por Durval (2005), em que se expressam em um modelo de desenvolvimento do pensamento geométrico, por meio da apreensão perceptiva, apreensão discursiva, apreensão operatória e apreensão sequencial. Em síntese, podemos considerar que esses termos se referem a:

- Apreensão Perceptiva: Possibilita a identificação ou o reconhecimento, rapidamente, de uma forma (ou objeto) representada no plano ou no espaço. Epistemologicamente, tem o papel de identificar os objetos de duas ou de três dimensões. Tal tarefa e executada com base em tratamentos de natureza cognitiva, realizados de modo automático, logo, sem consciência. Esse tipo de apreensão refere-se à primeira impressão visual e com a leitura dos formatos da figura em um cenário da Geometria.

- Apreensão Discursiva: Marcada pela construção de uma figura geométrica, ou ainda, pela descrição dessa construção. Ela corresponde a ordem de como ocorre a produção da figura, então, não depende somente das propriedades geométricas vinculadas a figura, mas de demandas de natureza técnica dos instrumentos empregados (software, compasso, régua, etc.).
- Apreensão Operatória: Refere-se a uma hipótese, uma legenda ou a uma denominação. Ela está relacionada ao fato de que as propriedades geométricas representadas em um desenho não podem ser definidas por meio da percepção, logo, devem ser explicadas a partir das variáveis da figura geométrica. Segundo Duval (1995), essa justificativa e de ordem dedutiva.
- Apreensão Sequencial: Mobilizada quando o estudante opera sobre as figuras geométricas por meio de manipulação, composição, transformação, reconfiguração, comparação dos objetos voltados a Geometria para solucionar certa situação geométrica. Para Duval (1995) essa apreensão e mais sofisticada cognitivamente do que as demais apreensões, sendo alcançada por um estudante proficiente em Geometria.

As apreensões geométricas não ocorrem de maneira isolada, com isso, na solução de um problema, é possível que o aluno utilize mais de uma apreensão em sua resolução, o que nos faz destacar a importância do estudo das conexões entre as apreensões, necessárias a compreensão da situação. Ainda nesse sentido, como sinaliza Pereira da Costa (2019, p.79), “não há hierarquia entre as apreensões, mas sim uma subordinação, sendo que a apreensão perceptiva coordena esse processo”, e vindo de encontro ao autor:

> [...] o que se desprende do trabalho desenvolvido por Duval (1995) é que não há uma hierarquia entre estas apreensões, mas uma

> subordinação de uma à outra dependendo do tipo de problema. Em geral, nas atividades propostas para o ensino fundamental, é a apreensão perceptiva que subordina as demais (MORETTI 2013, p.291).

Assim, fundamentado nas discussões apresentadas por Duval (1995), podemos afirmar que um aluno desenvolverá o pensamento geométrico quando mobilizar ao menos uma das características apresentadas, isto é, quando ele atuar em uma das apreensões geométricas, e ainda, como não existe uma hierarquia no desenvolvimento, esse aluno pode atuar em duas ou mais apreensões ao mesmo tempo.

Com relação as considerações apresentadas por Gravina (2001), para promover o desenvolvimento do pensamento geométrico é necessário que o professor trabalhe os conceitos geométricos em conexão com as diferentes disciplinas, ou seja, é importante que o professor propicie a perspectiva interdisciplinar do desenvolvimento de tal pensamento, e, sendo assim, podemos dizer que para a autora a interdisciplinaridade pode desenvolver o pensar geometricamente.

Nessa direção, a autora destaca a importância da modelagem no desenvolvimento do pensar geometricamente, para ela, no processo de modelagem dos objetos geométricos e suas conexões, existe um sistema de representação envolvendo diferentes tipos de linguagens, como a linguagem natural, a simbólica, a visual, a gráfica, entre outras. Sobre a evolução do pensamento geométrico, Gravina (2001) toma como base os estágios do desenvolvimento da inteligência de Piaget em sua análise do desenvolvimento do pensar em Geometria, podendo ser verificada nas seguintes passagens:

> [...] e a luz da teoria de Piaget que se pode entender esta evolução do pensamento geométrico. A identificação de diferentes formas geométricas começa com as *abstrações empíricas*; e assim que a palavra “triangulo” passa a designar a classe das formas triangulares pela comparação com formas que não guardam esta característica. As *abstrações pseudoempíricas* respondem pela depreensão, nos objetos geométricos, de propriedades neles não explicitas, mediante experimentos de pensamento; e quando são identificadas as diferentes propriedades de um quadrado – ângulos retos, lados iguais, diagonais perpendiculares – mas ainda sem o estabelecimento de relações inferenciais entre essas propriedades. Quanto aos teoremas e demonstrações, entram em cena, sobremodo, as *abstrações reflexionastes*, quando relações

> inferenciais se tornam objeto de investigação e a explicação exige raciocínios de natureza logico-dedutiva. E na coordenação das operações mentais que se constituem as relações existentes entre esses objetos e as razoes que as explicam. Isto implica a construção de conhecimento na forma de teoria, viabilizando novos patamares de conhecimento. Para Piaget, a axiomatização resulta da *abstração reflexiva*. Esta, ao retroagir sobre o modelo teórico, leva a tomada de consciência da essência da axiomatização. Em novo patamar de reflexão, a liberdade de escolha de axiomas assegura fundamentos para teorias cada vez menos intuitivas (GRAVINA, 2001, p.55 *apud* PEREIRA DA COSTA, 2019, p. 101-102).

Nesse sentido, a articulação adequada entre os diferentes tipos de abstrações pode promover o desenvolvimento do pensar em Geometria. Por fim, apoiado nas discussões apresentadas pelos autores, podemos considerar que para que haja a mobilização do pensamento geométrico, é necessário que ocorra a aprendizagem geométrica com entendimento, ou seja, estimulando situações nas quais os alunos sejam capazes de desenvolver compreensão e vocabulário geométrico. Sendo assim, para o desenvolvimento do pensamento geométrico, a aprendizagem geométrica deve focar na produção com significado (PEREIRA DA COSTA, 2019).

Gravina (2001), na perspectiva de Leivas (2009), para que o aluno desenvolva o pensamento geométrico, a aprendizagem geométrica deve ocorrer com compreensão e sentido, em que o professor promova o ensino por meio de situações que propiciem aos alunos uma compreensão do campo geométrico e sua linguagem matemática. Além disso, o autor considera a Geometria como um saber interdisciplinar, dando destaque a "esse campo matemático como vértice de conexões entre as várias disciplinas que contemplam os currículos dos cursos de formação de professores" (PEREIRA DA COSTA, 2019, p. 109), ou seja, o autor considera que o caráter interdisciplinar dado a Geometria promove o desenvolvimento do pensamento geométrico.

Por fim, na compreensão de Pereira da Costa (2019), o desenvolvimento do pensamento geométrico pode ser apresentado por meio de uma metáfora, entre o desenvolvimento do pensamento geométrico com o processo de construção da casa. Para ele, na base da casa estão os alicerces, correspondendo a abstração geométrica espacial, sendo a base da estrutura do pensamento geométrico. As paredes são formadas pelas abstrações geométricas perceptiva, analítica e descritiva, com a finalidade de vedar e sustentar a estrutura do pensar em Geometria. Por último, temos o teto da casa, composto pelas abstrações geométricas dedutiva e hipotética, representando a cobertura da estrutura do pensamento geométrico, estabelecendo uma ligação com a abstração geométrica espacial meio das abstrações perceptiva, analítica e descritiva.

O autor ainda defende que é possível o desenvolvimento de até duas abstrações geométricas simultaneamente, em que obrigatoriamente uma delas e a espacial, e ainda, que o progresso de uma pode impulsionar o desenvolvimento das demais abstrações.

5.2 O pensamento geométrico na licenciatura em matemática

A seguir, apresentaremos o que a literatura diz a respeito do que a formação de professores deve privilegiar, quanto ao pensamento geométrico, a fragilidade do ensino na formação inicial e a relevância de pesquisas na área.

5.2.1 O que a formação de professores deve privilegiar?

Nos estudos desenvolvidos por Oliveira (2016), a autora discute a respeito da formação de professores e prática docente, evidenciando o que a formação de professores deveria privilegiar. Para a autora, a formação de professores deve articular conteúdo e pedagogia, com estratégias e metodologias que contribuam para o entendimento dos conteúdos matemáticos, levando em consideração os aspectos didáticos e pedagógicos. Segundo Oliveira (2016), é essencial que se conheça as dificuldades dos alunos com relação a determinados tópicos da Matemática, e que aprendizagem ocorra a partir dos seus conhecimentos prévios, favorecendo assim, uma aprendizagem mais significativa. Para Ponte (2014), a formação de professores deve privilegiar espaços abertos a investigação sobre a própria prática, fundamentados em atitudes reflexivas da prática docente, tornando as intervenções pedagógicas mais significativas. Em conformidade com esses autores, Bolzan (2002) afirma que:

> Ao refletir sobre sua ação pedagógica, o professor estará atuando como um pesquisador da sua própria sala de aula, deixando de

> seguir cegamente as prescrições impostas pela administração escolar (coordenação pedagógica e direção) ou pelos esquemas preestabelecidos nos livros didáticos, não dependendo de regras, técnicas, guia de estratégias e receitas decorrentes de uma teoria proposta/imposta de fora, tornando-se ele próprio um produtor de conhecimento profissional e pedagógico (BOLZAN, 2002, p.17 *apud* OLIVEIRA, 2016, p. 31).

Ponte (2014) também considera importante o uso das tecnologias e dos recursos didáticos para a formação de professores, podem ser tanto os digitais quanto os convencionais, como por exemplo, aplicativos e softwares ou régua, compasso e geoplano. O uso desses recursos e tecnologias podem contribuir para o desenvolvimento das potencialidades dos alunos, tornando as aulas de Matemática mais significativas, cabe ao professor identificar e selecionar os recursos que mais se adequam e contribuem a sua proposta de intervenção.

Fiorentini *et al* (1998), destaca que, até pouco tempo, a formação de professores, quase que exclusivamente, centrava-se no conhecimento que os professores deveriam ter sobre sua disciplina, e, com o passar do tempo, a investigação se ampliou e deu espaço as discussões a respeito dos tipos de saberes que os professores possuem, a medida esses são considerados e valorizados nos cursos de formação. Assim como outros autores, Tardif (2002) também discutiu tais questões, caracterizando os saberes docentes como um saber plural, estratégico e desvalorizado.

Como apontam Reis e Teixeira (2007), ao reconhecermos e valorizarmos os saberes produzidos pelos professores em sua prática, nos opomos à concepção, ainda tradicional, da teoria na formação, isto é, a ideia de que o saber está somente do lado da teoria e que a prática é desprovida de qualquer tipo de saber, e, além disso, que a teoria é produzida fora da prática, tendo sua relação estabelecida valendo-se de sua aplicação. Portanto, as autoras concluem que:

> é preciso que os cursos de formação e os pesquisadores procurem uma aproximação com os saberes dos professores, principalmente os saberes experienciais, evitando de privilegiar exclusivamente os formadores/pesquisadores como produtores de saberes, passando a perceber os professores como sujeitos do conhecimento e também como produtores de saberes e ofereçam condições para que os próprios professores possam se perceber dessa forma (REIS e TEIXEIRA, 2007, p. 8).

Quando falamos sobre formação de professores, nos deparamos com um vasto campo de conhecimento, com pesquisas dispostas a investigar o conhecimento do professor, suas características, seu processo formativo e que conhecimentos são essenciais para o ensino. Entre os vários pesquisadores dedicados a temática, não podemos deixar de considerar as compreensões de Lee Shulman, um psicólogo educacional americano, que fez contribuições notáveis para o estudo e avaliação do ensino.

Shulman (1986) defende que cada área do conhecimento possui sua especificidade própria, justificando a necessidade de investigar o conhecimento produzido pelo professor com relação a disciplina que ele leciona. Na perspectiva do autor, o processo formativo docente ocorre por meio duas premissas dentro das competências necessárias ao ensino, sendo elas, a do conhecimento de conteúdo especifico e conhecimento pedagógico de conteúdo. Shulman (1986) define conhecimento de conteúdo específico como dominar os conceitos e as ideias de uma área de conhecimento, levando em consideração as formas de construção de conhecimento dentro de uma área especifica. Já o conhecimento pedagógico de conteúdo, se caracteriza como um elo entre o conteúdo e a pedagogia, produzido pelo professor no anseio de ensinar um tópico em particular aos alunos, considerado pelo autor, a competência mais importante.

Nesse sentido, Oliveira (2016) destaca que cabe ao professor compreensão dos dispositivos facilitadores e complicadores, tanto epistemológicos quanto didáticos, da disciplina que leciona, ou seja:

> Essa compreensão deve considerar diferentes estratégias, fazendo uso de diversas perspectivas ou abordagens, criando relações entre outros ramos da disciplina a ser lecionada, bem como possíveis relações da mesma com outras. Dessa forma, o conteúdo a ser ensinado passa por uma transformação e o professor deve adaptá-lo, considerando os diversos níveis de habilidades, conhecimentos e formação de seus alunos (OLIVEIRA, 2016, p. 34)

5.2.2 A fragilidade do ensino de Geometria na formação inicial

Autores como Brousseau (2008), Kaleff (2008), Lorenzato (2006, 2008), Moreira (2014, 2015, 2016), Magni (2011), Muniz (2009), Pavanello (1993), Ponte (2002), Pozo (2002) e Santos (2017), apresentam algumas ideias acerca da formação de professores, com relação ao ensino e à aprendizagem da Matemática e o ensino de Geometria na formação de professores. Como defendem diversos pesquisadores, acreditamos que a formação inicial e continuada é imprescindível para o ensino e aprendizagem da Geometria, estando em consonância com os preceitos da educação significativa. Neste sentido, Moreira (2016) advoga por uma prática docente fundamentada no estudo contínuo, isto é, ele defende que “os professores devem ter assegurada uma formação inicial adequada, com um currículo atualizado e que, de fato, atenda às necessidades da diversidade humana presente em cada uma das salas de aula” (p. 751), além disso, o autor acredita na priorização da formação continuada como correção das lacunas deixadas pela formação inicial, e esclarece que a formação continua é necessária e obrigatória para os professores de Matemática, sobretudo no momento histórico em que vivemos.

Não podemos deixar de considerar que os interesses e saberes dos docentes de Matemática são adquiridos, em grande parte, na formação inicial e, posteriormente, no convívio social com seus alunos. O professor, em sua formação inicial, não é de fato bem preparado para realizar um trabalho glorioso em sala de aula, especialmente no que diz respeito à Matemática, em particular, a Geometria, e consequentemente “a formação desses estudantes, possivelmente, será precária e representará pouco para sua constituição como sujeito capaz de utilizar, na prática, esses ensinamentos adquiridos no ambiente escolar” (SANDES e MOREIRA, 2018, p. 101). Sandes e Moreira (2018) discutem em seu trabalho a formação inicial de professores de Matemática, e apresentam suas considerações a respeito de como essa formação mostra-se deficitária para a realização de um trabalho pedagógico de qualidade em sala de aula, impossibilitando que os alunos sejam contemplados com um ensino de qualidade que os prepare para os desafios cotidianos, ou seja, para vivenciarem uma Matemática que extrapole os muros da escola, a Matemática que se usa na vida. Ainda nessa direção, os autores mencionam o surgimento da SBEM (Sociedade Brasileira de Educação Matemática) como propulsor das discussões, debates, pesquisas diversas e a divulgação dos resultados dessas pesquisas, com o intuito de auxiliar o professor que, em muitas ocasiões, pouco ensina, em virtude de sua formação inicial deficitária e pouco eficiente e, com isso, Lorenzato (2008) reforça que por sua formação inicial não ser eficiente, faz que haja um hiato na concepção desse profissional.

Nesse cenário, a formação inicial deve ser priorizada e “requer não só a capacidade de mobilização e articulação de conhecimentos teóricos”, mas, também, “a capacidade de lidar com situações concretas, competências que se têm de desenvolver progressivamente ao longo da sua formação – durante a etapa da formação inicial e ao longo da carreira profissional” (PONTE, 2002, p. 4), porque se, por um lado a formação inicial é fragilizada, por outro lado, a carreira docente exige constante aprimoramento (MOREIRA, 2014, 2015, 2016).

Quando consideramos o ensino de Geometria na formação inicial, o cenário não é diferente das considerações apresentadas até aqui, e com isso, alguns pesquisadores se dedicam a estudar os impactos que uma irregular formação inicial pode ocasionar na prática docente e na atuação profissional do professor aluno, como a falta de domínio e insegurança ao lecionar conteúdos relacionados a Geometria.

Em sua pesquisa de mestrado, Oliveira (2016) constatou que uma parte considerável dos professores de Matemática, em sua formação inicial, obtiveram uma aprendizagem fragilizada dos conteúdos relacionados à Geometria, o que contribuiu para uma defasagem no ensino dos conteúdos. Além disso, a autora ainda menciona outro aspecto importante a ser considerado, os professores participantes da pesquisa relataram que, por não dominarem os conceitos e metodologias do ensino de Geometria, era necessário um tempo maior para estudar e planejar suas aulas, tornando o processo diário da profissão ainda mais trabalhoso.

A autora destaca que não apenas em Geometria, mas em outros áreas da Matemática, na maioria das vezes, os conteúdos são trabalhados apenas por meio das situações mais elementares, limitando a construção do conhecimento pelo aluno. Este fato evidencia que durante a formação inicial, geralmente, é feita uma discussão limitada com relação aos conceitos geométricos e, portanto, os cursos de formação continuada são importantes para auxiliar os professores a visualizar outras formas de abordar o conteúdo matemático quando a formação inicial é defasada.

5.2.3 A relevância de pesquisas sobre a formação de professores

Diante do que foi exposto, não dá para negar a importância e relevância das pesquisas relacionadas a formação de professores, tanto para a formação inicial quanto para a continuada. Entretanto, autores como Curi e Pires (2008) salientam que educadores do mundo todo se preocupam muito pouco com a formação de professores, justificando tal afirmação pela observação das datas de referências dos teóricos citados em trabalhos relacionados a temática. Neste contexto, a relevância de pesquisas relacionadas a formação de professores é reconhecida por autores como Garcia (1999), em que o autor define formação de professores como:

> [...] área de conhecimento, investigação e de propostas teóricas e práticas que, no âmbito da Didática e da Organização Escolar, estuda os processos por meio dos quais os professores - em formação ou em exercício - se implicam, individualmente ou em equipe, em experiências de aprendizagem através das quais adquirem ou melhoram os seus conhecimentos, competências e disposições, e que lhes permitem intervir profissionalmente no desenvolvimento do seu ensino, do currículo e da escola, com o objetivo de melhorar a qualidade da educação que os alunos recebem (GARCIA, 1999, p.26).

Nessa direção, Ponte (2014) defende que a formação de professores está relacionada a dois aspectos, o conhecimento profissional, em que o professor necessita ter uma formação matemática adequada, com competências didáticas necessárias a condução do processo de ensino e aprendizagem da Matemática, e o desenvolvimento profissional, destacando que o professor é protagonista do seu processo de crescimento durante sua formação e, para ele, essa formação representa “um movimento de ‘fora para dentro’, do curso e do formador para o formando, ao passo que o desenvolvimento profissional constitui um movimento de ‘dentro para fora’, do professor em formação para o ambiente onde está inserido” (PONTE, 2014, p.346).

No cenário investigativo sobre a formação de professores, "tornou-se um campo fértil para pesquisas, investigar sobre o conhecimento do professor, suas características, seu processo formativo e que conhecimentos são essenciais para o ensino" (OLIVEIRA, 2016, p. 33). O impacto gerado com uma boa formação de professores reflete na qualidade do ensino da Educação Básica, um professor qualificado influencia a rotina em sala de aula de maneira positiva, melhorando o rendimento escolar dos alunos. Mas o que é preciso para ser um bom professor? Essa não é uma pergunta fácil de se responder, não existe uma receita pronta para ser um bom professor, um professor eficiente, porém podemos utilizar os estudos atuais como ponto de partida. É preciso mais do que vocação e afinidade com o ensino para ser um bom professor, é preciso que formação desenvolva habilidades cognitivas, sociais e emocionais, para que esse professor visualize e implemente soluções criativas e eficientes às demandas do dia a dia. Em resumo, é essencial que cursos de formação se preocupem com todas as variáveis que interferem e impactam significativamente na formação do professor, seja ela inicial ou continuada, de maneira atualizada em concomitância com pesquisas desenvolvidas na área da Educação e Educação Matemática, em especial, com relação aos desenvolvidos sobre a formação de professores.

5.3 o ensino de geometria na educação básica

Como apontado por Rogenski e Pedroso (2007), as ideias geométricas estão presentes no nosso cotidiano em diversas formas, sejam elas na natureza, na Arquitetura, nas Artes e também em outras áreas do conhecimento. Entretanto, apesar da sua importância, geralmente, não se é verificado o sucesso escolar dos alunos em Geometria. Segundo Oliveira e Velasco (2007), estudos comprovam que uma parte considerável dos alunos que ingressam o ensino superior não possui uma base suficiente de Geometria, como reflexo de uma defasagem na Educação Básica.

Como apontado por Almouloud, citado por Machado (2003), estudos comprovam que "na prática, vem sendo dada à geometria menos atenção do que ao trabalho com outros temas e, muitas vezes, confunde-se seu ensino com o ensino de medidas" (MACHADO, 2003, p.125). Quando pensamos em Geometria, à relacionamos a algumas imagens e a conceitos, mas sabe-se que a Geometria, segundo Ferreira (1999):

> É a ciência que investiga as formas e as dimensões dos seres matemáticos" ou ainda "um ramo da matemática que estuda as formas, plana e espacial, com as suas propriedades, ou ainda, ramo da matemática que estuda a extensão e as propriedades das figuras (geometria Plana) e dos sólidos (geometria no espaço) (FERREIRA, 1999, p.983).

E nesse sentido, de acordo com Boyer (1996, p. 5), "o desenvolvimento da geometria pode ter sido estimulado por necessidades práticas de construção e demarcação de terras, ou por sentimentos estéticos em relação a configurações e ordem". Os conteúdos trabalhados em sala de aula, ao partirem de situações vivenciadas pelo aluno, acabam facilitando o entendimento dos conteúdos, e no caso especifico da Geometria, é importante que ela parta de "objetos que tenham relação com as formas geométricas usuais", aqueles que lembram os sólidos geométricos e que estão ao nosso alcance (PARANÁ, 2006, p.30-31). Percebe-se então, a importância de levar os alunos a desenvolver um olhar geométrico sobre a realidade de forma a "construir e apropriar-se de conceitos geométricos abstratos, sobretudo daqueles que se referem ao objeto geométrico em si" (PARANÁ, 2006, p.37). A Geometria é um importante elemento de conexão dos conceitos, ao interligar-se, por exemplo, com a Álgebra e a Aritmética, e quanto a isso, Lorenzato (1995, p.7) esclarece que "conceitos, propriedades e questões aritméticas ou algébricas podem ser clarificados pela geometria, que realiza uma verdadeira tradução para o aprendiz". Quanto à utilização da Geometria em outras áreas do conhecimento, Lorenzato (2006, p. 37) defende que "a geometria é rica em elementos que favorecem a percepção espacial e a visualização; e constitui, portanto, conhecimentos relevantes, inclusive para outras disciplinas escolares". O autor ainda reforça que:

> A Geometria é a mais eficiente conexão didático-pedagógica que a Matemática possui: ela se interliga com a Aritmética e com a Álgebra porque os objetos e relações dela correspondem aos das outras; assim sendo, conceito, propriedades e questões aritméticas ou algébricas podem ser classificados pela Geometria, que realiza uma verdadeira tradução para o aprendiz (LORENZATO, 1995, p.6).

E corroborando com esses autores, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) também destacam a importância da Geometria e como ela serve de instrumento para outras áreas do conhecimento:

> O aluno desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive. [...] O trabalho com noções geométricas contribui para a aprendizagem de números e medidas, pois estimula a criança a observar, perceber semelhanças e diferenças, identificar regularidades e vice e versa. Além disso, se esse trabalho for feito a partir da exploração dos objetos do mundo físico, de obras de arte, pinturas, desenhos, esculturas e artesanato, ele permitirá ao aluno estabelecer conexões entre a Matemática e outras áreas do conhecimento (BRASIL, 1997, p. 39).

Pesquisas revelam que em virtude da sua formação deficitária, alguns professores de Matemática tendem a pensar em Geometria como segundo plano, dando mais destaque em suas aulas aos estudos dos conteúdos relacionados à Álgebra e ao Cálculo, pois possuem um maior domínio dos conteúdos e a percepção de que são mais importantes para o aprendizado dos alunos (LOBO e BAYER, 2004; RESENDE e MESQUITA, 2013; OLIVEIRA, 2016; LOBATO e ANDRADE, 2019). Nessa direção, Lindquist (1994, *apud* ROGENSKI e PEDROSO, 2007, p. 7) salienta que os professores deveriam ensinar Geometria com tal qual importância que ensinam a Álgebra e o Cálculo Diferencial e Integral, e corroborando com tal autor, Lorenzato (2006) reforça que “por mais conhecimento sobre outras partes da matemática que alguém possuir, eles não serão suficientes para resolver questões que demandarem percepção e raciocínio geométrico” (LORENZATO, 2006, p.59). Sendo assim, percebe-se que a Matemática detém questões que demandam um raciocínio especifico que apenas se desenvolve estudando a Geometria. Além disso, ao considerarmos que o entendimento de diferentes conteúdos matemáticos advém da Geometria, faz se necessário que ela seja trabalhada em conjunto com outros conteúdos relacionados à Matemática. Por se tratar de uma área da Matemática com forte utilização da visualização e manipulação de objetos, a aprendizagem geométrica se dá mais facilmente, o aluno consegue por meio de situações concretas construir o seu conhecimento com maior êxito.

Muitas vezes, nos diferentes níveis de ensino, a Geometria é trabalhada de forma abstrata, sem relações com o cotidiano do aluno, fazendo que esse não consiga entender alguns conceitos trabalhados. Isso se deve, sobretudo, a dificuldade do aluno em associar o que é ensinado pelo professor a situações vivenciadas por ele, e nessa direção, Freudenthal apud Fonseca (2009), destaca que a Geometria

> [...] é uma das melhores oportunidades que existem para aprender matematizar a realidade. É uma oportunidade de fazer descobertas como muitos exemplos mostrarão. Com certeza, os números são também um domínio aberto às investigações, e pode-se aprender a pensar através da realização de cálculos, mas as descobertas feitas pelos próprios olhos e mãos são mais surpreendentes e convincentes. Até que possa de algum modo ser dispensadas, as formas no espaço são um guia insubstituível para a pesquisa e a descoberta (FONSECA, 2009, p. 92-93).

Dessa forma, o estudo da Geometria possibilita uma abordagem mais significativa, relacionando os conteúdos com situações concretas, fazendo que o aluno parta do concreto para situações mais abstratas. Para Borges (2009), o professor é responsável por determinar o melhor momento para passar da linguagem intuitiva para a linguagem formal, uma vez que a Geometria dos anos iniciais se caracteriza, inicialmente, do concreto para o simbólico. O papel do professor nesse momento seria o de observador e mediador, percebendo o momento para intervir, questionando os alunos e assim criando com eles os conceitos predefinidos. É sabido que o estudo da Geometria deve ser iniciado desde muito cedo, logo na Educação Infantil a criança já é capaz de manipular e classificar objetos. Mesmo sabendo dessa importância, alguns professores deixam de considerar tal potencial no aluno e a necessidade de planejar aulas que envolvam a Geometria, Fainguelernt (1999) considera que:

> Entre os matemáticos e os educadores matemáticos, existe um consenso de que o ensino da Geometria deveria começar desde cedo e continuar, de forma apropriada, através de todo o currículo de Matemática. Entretanto, tradicionalmente existe divergência de opiniões entre os conteúdos e os métodos de ensino da Geometria nos diferentes níveis, desde a escola primária até a universidade. Uma das razões dessas divergências é que a Geometria possui muitos aspectos e, consequentemente, talvez não exista um caminho simples, linear, claro, hierárquico desde os princípios elementares até as abstrações e axiomas, embora seus conceitos

> devam ser considerados em diferentes estágios e diferentes pontos de vista (FAINGUELERNT,1999, p. 21)

Tendo em vista as considerações apresentadas, observa-se que o ensino de Geometria deve ser cumprido no decorrer do planejamento escolar da Educação Básica, além de ser fundamental que o professor se preocupe em realizar uma cuidadosa análise acerca das alternativas metodológicas e recursos didáticos que o auxiliem no processo de ensino e de aprendizagem dos conteúdos. Assim sendo, considerando as orientações presentes em documentos oficiais, a compreensão aprofundada da Geometria possui implicações em diversas áreas do currículo pela possibilidade de estabelecer conexões fundamentais para uma construção mais sólida do conhecimento matemático (BRASIL, 1998). Em concordância disso, Fainguelernt *et al.* (2012, p.114) afirma:

> A geometria, talvez mais do que qualquer outro campo da matemática, é uma área propícia para um ensino fortemente baseado na realização de descobertas e na resolução de problemas. Nessa área há um imenso espaço para escolha de tarefas de natureza exploratória e investigativa (FAINGUELERNT *et al,* 2012, p.114)

Quando nos referimos ao pensamento geométrico, sabemos que ele se desenvolve inicialmente pela visualização, em que a criança é capaz de identificar uma figura apenas por sua forma, aparência física e geral e, por fim, por sua imagem, daí em diante, têm-se início as representações mentais que lhe permitirão trazer à memória objetos e espaços ausentes (CLEMENTE *et al*, 2015). Nessa perspectiva, acreditamos que uma proposta de ensino pautada na aprendizagem dos alunos por meio de atividades que estimulem o desenvolvimento do pensamento geométrico, contribui significativamente para uma boa compreensão dos conceitos geométricos.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo da presente pesquisa foi o de estabelecer uma discussão epistemológica sobre o pensamento geométrico no ensino e aprendizagem de Matemática e seus significados em teses e dissertações brasileiras que relacionam esse tema a formação de professores de Matemática. Sendo assim, foram propostas as seguintes questões de pesquisa: O que é o pensamento geométrico e qual o papel do pensamento geométrico e das representações visuais na construção do conhecimento matemático? De que forma esse pensamento é definido em teses e dissertações brasileiras que tratam da formação de professores de Matemática?

Buscando respostas para essas perguntas, como mencionado da introdução desta pesquisa, para a discussão sobre o que é o pensamento geométrico e qual o papel do pensamento geométrico e das representações visuais na construção do conhecimento matemático, foi elaborada uma revisão histórica e filosófica, numa metodologia de análise documental, buscando contextualizar a relação do pensamento geométrico e da Geometria como modelo de conhecimento, evidenciadas tanto no segundo quanto no terceiro capítulo desta pesquisa. Já para a discussão sobre a forma como o pensamento geométrico é definido nas teses e dissertações brasileiras que tratam da formação de professores de Matemática, foi utilizada a metodologia de Estado da Arte, apresentada no quarto capítulo, o que tornou possível mapear o que tem se falado e as contribuições de tal assunto, além de conhecermos de que maneira pesquisadores lidam como o pensamento geométrico e o relacionam com a formação de professores. Para fechar as discussões propostas, o quinto capítulo desta pesquisa se deu em virtude da relação presente entre a formação de professores e o pensamento geométrico.

No capítulo referente aos aspectos históricos e filosóficos do pensamento geométrico, apresentamos alguns exemplos do pensamento geométrico presente em algumas sociedades ou civilizações que nos permitiram uma compreensão sobre a origem e utilização dos elementos geométricos em seu cotidiano, abrangendo a construção de casas, rituais religiosos, elaboração de rotas e trajetos, entre outros. Nesse contexto, expomos algumas culturas primitivas nas quais as representações de espaço possuíam aspectos mais simbólicos em relação aos aspectos geométricos, ficando evidente a utilização de um sistema espacial geométrico euclidiano cuja concepção de geometria estava intimamente ligada à visão do espaço físico ambiental.

No capítulo seguinte, destinado a discussão sobre a Geometria como um modelo de conhecimento, mostramos como o homem concebe tais elementos geométricos a partir dos seus sentidos e, em especial, considerando as representações visuais e a sua intuição. Além disso, também expomos alguns aspectos da compreensão empírica e do esquematismo empírico, o esquema geométrico e as construções geométricas. Com esse capítulo, foi possível constatar que o processo cognitivo envolvido na obtenção da crença, da convicção geométrica (na qual refere-se a atitude do ser pensante em aceitar as demonstrações geométricas que podem ser justificadas ou não pela validade dos elementos geométricos que as compõem), pode ser considerado de duas maneiras, sendo elas: o raciocínio verbal válido e o ato de visualizar os elementos geométricos, em que essa visualização nos faz chegar a tal convicção matemática. Não podemos deixar de salientar que, em ambas as maneiras, o papel da visualização é fornecer evidências experienciais. Por fim, pautados em Giaquinto (2007), afirmamos que a experiência sensorial dispõe de duas funções distintas na formação da crença geométrica em um indivíduo, mediante a visualização de objetos geométricos. A primeira função diz respeito às determinadas situações em que precisamos da experiência sensorial agregada a algumas predisposições mentais inatas, com o objetivo de construir conceitos geométricos básicos. A segunda função diz respeito as nossas memórias, as experiencias visuais dos objetos geométricos, das quais podem fornecer elementos iniciais que atuarão na mente do indivíduo pensante, com o propósito de elaborar experiencias de imaginação visual.

A proposta do capítulo quatro foi a de selecionar, analisar e discutir alguns dos trabalhos produzidos em nível de Pós-Graduação no Brasil, e apresentar um panorama constituído por tais pesquisas, das quais propostas didáticas estivessem vinculadas ao pensamento geométrico na formação de professores, mediante ao ensino e aprendizagem de conteúdos de Matemática. Por meio deste mapeamento, encontramos pouquíssimos trabalhos relacionados ao tema de interesse e investigação (precisamente, 7 trabalhos) e, apesar de todos os trabalhos encontrados e analisados abordarem a importância do pensamento geométrico na formação do professor de Matemática, pouco se disse sobre o que realmente é entendido como pensamento geométrico. Esses trabalhos enfatizaram as contribuições da exploração desse pensamento para a prática docente, e foi verificado um olhar mais direcionado aos conteúdos relacionados à Geometria, do que de fato a construção dos conceitos envolvidos na aprendizagem desses conteúdos, ou seja, o foco da investigação estava no produto final e não no processo realizado. Além disso, este mapeamento também nos permitiu apontar a ausência de pesquisas e literaturas disponíveis para essa reflexão. Podemos concluir então que, no Brasil, ainda são poucos os pesquisadores interessados na investigação das potencialidades do pensamento geométrico na formação inicial de professores de Matemática.

Sobre relação entre o pensamento geométrico e a formação de professores, tratada no quinto capítulo desta pesquisa, fundamentamo-nos, especialmente, nos estudos de André Pereira da Costa (2019), que apresenta em sua tese uma análise detalhada da compreensão de determinados autores quanto a caracterização do pensar em Geometria, ao construir uma definição de pensamento geométrico. Ademais, apresentamos um recorte das principais considerações evidenciadas pelo autor quanto à construção e desenvolvimento do pensamento geométrico. De maneira geral, podemos dizer que o pensamento geométrico seria a interação permanente entre imagens e conceito, e o desenvolvimento dessa forma de pensar é determinado por construções conceituais ou vice e versa. É o pensamento geométrico que possibilita perceber uma figura geométrica como uma imagem visual mediante a sua representação mental.

Em nosso entendimento, o pensamento geométrico seria a capacidade mental do indivíduo de construir conhecimentos geométricos a partir das apreensões geométricas, ou seja, quando reconhece um objeto geométrico no plano ou espaço, quando constrói figuras geométricas, quando descreve ou analisa tal figura fundamentado em suas propriedades, além de operar, manipular ou decompor figuras geometrias, entre outras apreensões. Com isso, fica subentendido a existência de níveis do pensamento geométrico, mesmo que de maneira indireta, como apontado por Pereira da Costa (2019). Nesse sentido, o autor ainda reforça a ideia de como se estabelece o desenvolvimento do pensamento geométrico nos estudantes, em que salienta que “um estudante desenvolverá o pensamento geométrico quando ele mobilizar no mínimo uma dessas características, ou seja, quando ele atuar em uma das apreensões geométricas” (PEREIRA DA COSTA, 2019, p. 83) e complementa declara que não há hierarquia entre a mobilização de tais características, isto é, “um mesmo discente pode trabalhar em duas ou mais apreensões simultaneamente” (PEREIRA DA COSTA, 2019, p. 83).

Diante do exposto, podemos afirmar que, normalmente, o aluno mobiliza as representações e apreensões por meio de objetos e desenhos, para que, na sequência, mobilize imagens mentais na construção do seu conhecimento geométrico. É importante considerar que, num primeiro momento da aprendizagem, o aluno tende a identificar certas conexões entre o conceito e sua representação, quando se depara com as dificuldades encontradas no processo de abstração. Ainda neste capítulo, mencionamos a importância da modelagem no desenvolvimento do pensamento geométrico, e o impacto do professor de Matemática na promoção e sucesso do seu desenvolvimento. Defendemos a ideia de que o professor de Matemática se preocupe em procurar trabalhar os conceitos geométricos em conexões com as diferentes disciplinas e, para que haja um cenário ideal de promoção do conhecimento e do pensamento geométrico, é de extrema importância que o professor trabalhe de maneira intencional seus conteúdos, por meio da exploração de atividades que privilegiem a curiosidade dos estudantes ao realizarem conjecturas que possam ser validadas ou não por contraexemplos, fazendo uso de recursos apropriados, justificativas e argumentações.

Com isso, reforçamos que os cursos de Licenciatura em Matemática, no desenvolvimento das disciplinas, precisam adotar uma postura investigativa, deixando de lado abordagens simplistas e abstratas do campo teórico dos conteúdos, criando um espaço propício ao desenvolvimento e construção do pensamento geométrico, estimulando o olhar investigativo do professor-aluno mediante estratégias pedagógicas que favoreçam a descoberta de novos caminhos para a aprendizagem.

Com a elaboração da presente pesquisa, ficou evidente que as representações visuais podem ser exploradas não somente como facilitadoras para a compreensão de um conceito, mas também para a construção do conhecimento relacionado a um dado conteúdo. Diante disso, acreditamos que nossa investigação seja relevante para o atual cenário de ensino e aprendizagem da Matemática, em especial, ao ensino de Geometria, para a formação de professores e para os futuros investigadores da área de Educação Matemática.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, J. R. **Níveis de desenvolvimento do pensamento algébrico:** um modelo para os problemas de partilha de quantidade. 2016. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2016.

BALDOVINOTTI, N. J. **Um estudo de fractais geométricos na formação de professores de matemática.** 2011. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), UNESP, Rio Claro, 2011.

BALIEIRO, I. F. Um Passeio pelo Labirinto da Lógica Matemática em companhia de Malba Tahan. **Revista de Educação Matemática**, São Paulo, v. 15, n. 19, p. 247-264, mai. /ago. 2018

BARBIN, E. Integrating history: research perspectives In: FAUVEL, J.; van MAANEN, J. **History in Mathematics Education. The ICMI Study.** Holanda: Kluwer Academic Publishers, 2000. 2. p. 63-70.

BARDIN, L. **Análise de conteúdo.** Tradução de Luíz Antero Reto e Algusto Pinheiro. São Paulo: LDA/Almedina Brasil, 2016.

BEHRMANN, M.; VIDA, M. Visual Object Recognition. In Wixted, J. T., editor. **Stevens' Handbook of Experimental Psychology and Cognitive Neuroscience.** New York: John Wiley & Sons, 2018.

BOYER, Carl B. **História da Matemática**. São Paulo: Edgard Blücher, 1996. Tradução: Elza F. Gomide.

BRASIL. Ministério da Educação. **Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura.** Ministério da Educação Conselho Nacional de Educação. 8p. 2010

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental, **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática.** Brasília: MEC/SEF, 1997.

BROAD, C. **Kant.** An Introduction, Cambridge University Press, Cambridge, 1978.

BROUSSEAU, Guy. **Os diferentes papéis do professor.** In: PARRA, Cecília; SAIZ, Irma (Org.). *Didática da Matemática*: reflexões psicopedagógicas. Porto Alegre: Artmed, 2008.

CARSON, E.; HUBER, R. **Intuition and Axiomatic Method**. Dordrecht: Springer, 2006.

CHAGAS, E. M. P. F. Educação Matemática na sala de aula: problemáticas e possíveis soluções. In: IPV. **Educação, Ciência e Tecnologia**. [S. l.: s. n.], 2017. p. 240 - 248.

CHAPARIN, R. O. **A formação continuada de professores que ensinam matemática, centrada na resolução de problemas e em processos do pensamento matemático.** 2019. Tese (Doutorado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2019.

CLEMENTE, J. C., et al. **Ensino e aprendizagem da geometria: um estudo a partir dos periódicos em educação matemática.** VII Encontro Mineiro de Educação Matemática – UFJF, 2015.

COSTA, André Pereira da. A construção de um modelo de níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico: o caso dos quadriláteros notáveis / André Pereira da Costa. – Recife, 2019.

CURI, Edda; PIRES, Célia Maria Carolino**. Pesquisas sobre a formação do professor que ensina matemática por grupos de pesquisa de instituições paulistanas**. Educação Matemática Pesquisa, São Paulo, v. 10, n. 1, p. 151-189, 2008.

DUVAL, R. Sémiosis et pensée humaine: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels. Berne: Peter Lang, 1995.

EVES, H. **Foundations and Fundamental Concepts of Mathematics**. New York: Dover, 1990.

FAINGUELERNT, Estela Kaufman. **Educação matemática: representação e construção em geometria.** Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 1999.

FAINGUELERNT, E. K. **A Prática de Ensino e a Formação do Professor de Matemática**. Boletim GEPEM. ANO XIX, Rio de Janeiro, n. 33, p. 60-72, 1995.

FERREIRA, N. S. A. **As pesquisas denominadas "estado da arte".** *Educ. Soc.* [online]. 2002, v. 23, n.79, pp.257-272. ISSN 1678-4626.

FERREIRA, Aurélio B. de H. **Novo dicionário Aurélio da Língua Portuguesa.** 2.ed. Curitiba: Nova Fronteira, 1999.

FIORENTINI, D; SOUZA Jr, A.; MELO, G. **A Saberes docentes: um desafio para acadêmicos e práticos** In: GERALDI, C. M. G.; FIORENTINI, D.; PEREIRA0, E. M.(orgs). Cartografias do trabalho docente: professor(a) - pesquisador(a). Campinas: ALB e Mercado das Letras, 1998. p.307-335.

FIORENTINI, D. **Rumos da pesquisa brasileira em educação matemática:** o caso da produção cientifica em cursos de pós-graduação. 1994. Tese (Doutorado em Educação), Universidade de Campinas, Campinas, 1994.

FISCHBEIN, E. Intuition in science and mathematics: an educational approach. Dordrecht: Reidel, 1987

FRENCH, D. **Teaching and Learning Geometry**. New York: Continuum Publications, 2004.

FONSECA, Maria da Conceição F. R., et al. **O ensino da geometria na escola fundamental – três questões para a formação do professor dos ciclos iniciais.** Belo Horizonte: Autêntica, 2009.

FULLAN, M. Change Forces: **Probing the Depths of Educational Reform**. London: Falmer, 1993.

GARCIA, C. M. **Formação de professores:** para uma mudança educativa. Porto: Porto Editora, 1999.

GASPAR, M. T. J. **Aspectos do desenvolvimento do pensamento geométrico em algumas civilizações e povos e a formação de professores.** 2003. Tese (Doutorado em Educação Matemática), UNESP Rio Claro, 2003.

GATTI, B. A. Estudos quantitativos em educação. **Educação e Pesquisa**, São Paulo, v. 30, n.1, p. 11-30, jan./abr. 2004.

GIAQUINTO, M. **Visual Thinking in Mathematics: an epistemological study**. New York: Oxford, 2007

GRANDE Enciclopédia Portuguesa e Brasileira. Lisboa/Rio de Janeiro: Editorial Enciclopédia, 1936.

GRAVINA, M. A. Os ambientes de geometria dinâmica e o pensamento hipotético-dedutivo. 2001. Tese (Doutorado em Informática na Educação) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2001.

HEATH, T. (1967). **The Thirteen Books of Euclid's Elements.** New York: Dover.

JAPIASSU, Hilton e MARCONDES, Danilo. **Dicionário Básico de Filosofia**. 3.ed. Rio de Janeiro: Zahar, 1996.

JOHNSTON-WILDER, S.; MASON, J. **Developing Thinking in Geometry**. London: Sage, 2005.

KALEFF, Ana Maria Martensen Roland. **Tópicos em Ensino de Geometria**: A Sala de Aula Frente ao Laboratório de Ensino e à História da Geometria. Rio de Janeiro: UFF/UAB/CEDERJ, 2008.

KANT, I. **Crítica da Razão Pura**. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 2001.

KATZ, V. J. **A History of Mathematics**: an Introduction. New York: Pearson, 2009.

KOPKE, R. C. M. **Geometria, desenho, escola e transdisciplinaridade:** abordagens possíveis para a educação. 2006. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2006.

LEIVAS, J.C.P. Imaginação, Intuição e Visualização: a riqueza de possibilidades da abordagem geométrica no currículo de cursos de Licenciatura de Matemática. 2009. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2009.

LOBATO, L. F., ANDRADE, G. O. **Desafios do ensino de geometria no ensino médio.** Base Institucional Acadêmica do Instituto Federal do Piauí – BIA, 2019

LOBO, J. S., BAYER. A. **O ensino de Geometria no Ensino Fundamental.** ACTA SCIENTIAE – Canoas, v.6 – n.1, p. 19-26 – jan./jun. 2004.

LORENZATO, S. **Para aprender Matemática**. 2. ed. Campinas: Autores Associados, 2008.

LORENZATO, S. (org.). **O Laboratório de ensino de Matemática na formação de professores**. Campinas: Autores Associados, 2006.

LORENZATO, S. **Por que não ensinar Geometria?** A educação matemática em revista. Geometria. Blumenau, número 04, p.03-13, 1995. Edição especial.

MACHADO, S. D A. (org). **Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica.** Campinas: Papirus, 2003.

MAGNI, R. J. M. **Formação continuada de professores de matemática:** mudanças de concepções sobre o processo de ensino e aprendizagem de geometria. 181 f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática) – Universidade Bandeirante de São Paulo, São Paulo, 2011.

MAGNANI. L. **Philosophy and Geometry**: theoretical and historical issues. Atlanta, Georgia, USA. 2001.

MIZUKAMI, Reali, A. M. de M. R. (Orgs.) Aprendizagem profissional da docência: saberes, contextos e práticas. São Carlos: EdUFSCar, 2004. 347 p.

MOREIRA, G. E. O ensino de Matemática para alunos surdos: dentro e fora do texto em contexto. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 18, n. 2, , 2016.

MOREIRA, G. E. A Educação Matemática Inclusiva no contexto da Pátria Educadora e do novo PNE: reflexões no âmbito do GD7. **Educação Matemática Pesquisa,** São Paulo, v. 17, n. 3, 2015.

MOREIRA, G. E. Resolvendo problemas com alunos com Transtornos Globais do Desenvolvimento: desafios e conquistas. **Educação Matemática em Revista-RS**, [*s. l.*], v. 01, n. 15, 2014.

MORWOOD, M. J. **Visions from the Past**: the Archaeology of Australian Aboriginal Art. Sydney: Allen&Unwin, 2002.

MUNIZ, C. A. **Educação e linguagem matemática**. Brasília: Universidade de Brasília. Centro de Educação a distância, 2009.

NASSER, Lilian. O desenvolvimento do raciocínio em Geometria. **Boletim Gepem**: Rio de Janeiro, ano XV, n. 27, p.93-99, 1990.

OLIVEIRA, D. C. et al. Análise das evocações livres: uma técnica de análise estrutural das representações sociais. In: OLIVEIRA, M. I. **Fatores psicossociais e pedagógicos da indisciplina**: da infância à adolescência. Linhas Críticas, Brasília, v. 15, n. 29, p. 289-305, jul./dez. 2009.

OLIVEIRA, L. L.; VELASCO, A. D. **Ensino de geometria nas escolas de nível médio da rede pública da cidade de Guaratinguetá**. Curitiba, 2007. Disponível em: http://www.degraf.ufpr.br/artigos_graphica/OENSINO.
Pdf. Acesso em 13 jan. 2021.

OLIVEIRA, S. C. **(Re)construção do pensamento geométrico de professores sobre transformações geométricas.** Dissertação (mestrado) – Instituto Federal do Espírito Santo, Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e Matemática, Vitória, 2016.
PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação – SEED. Diretrizes Curriculares da Rede Pública da Educação Básica do Estado do Paraná (DCE): Matemática, Curitiba, 2006.

PAIS, L. C. Intuição, experiência e teoria geométrica. Revista Zetetiké, Campinas, v.4, n.6, p. 65-74, 1996.

PARZYSZ, Bernard. La géométrie dans l'enseignement secondaire et em formation de professeurs des écoles: de quoi s'agit-il? Quaderni di Ricerca in Didattica: University of Palermo, Italy, n. 17, p.128-151, 2006.

PAVANELLO, R. M. O abandono do ensino da geometria no Brasil: causas e consequências. **Zetetiké**, Campinas, ano 1, n.1, p.7-17, 1993.

PIMENTEL, A. O método da análise documental: seu uso numa pesquisa historiográfica. **Cadernos de Pesquisa**, Londrina, n. 114, p. 179-195, novembro/ 2001

POGORELOV, A. **Geometry**. Moscow: Mir, 1987.

PONTE, J. P. A vertente profissional da formação inicial de professores de Matemática. **Educação Matemática em Revista – SBEM**, [*s. l.*], Ano 9, nº 11, abril, pp. 3-8, 2002.

POZO, Juan Ignacio. **Aprendizes e mestres: a nova cultura da aprendizagem**. Trad.: Ernani Rosa. Porto Alegre: Artmed, 2002.

RICHARDSON, R. J. **Pesquisa social**: métodos e técnicas. São Paulo: Atlas, 1989.

REIS, M. E. T; AFFONSO, S. A. B. Os programas formais de formação continuada e sua relação com os saberes docente. **Revista de Educação do Curso de Pedagogia,** Jataí, v. 1, n. 3, 2007.

RESENDE, G., MESQUISTA, M. G. B. F. **P**rincipais dificuldades percebidas no processo ensino-aprendizagem de matemática em escolas do município de Divinópolis, MG. **Educ. Matem. Pesq**., São Paulo, v.15, n.1, p. 199-222, 2013

ROGENSKI, M. L. C.; PEDROSO, S. M. D. O **Ensino da Geometria na Educação Básica**: realidade e possibilidades. [*S. l.: s. n*.], 2007. Disponível em: http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/44-4.pdf. Acesso em: 17 jan. 2021.

SANDES J. P.; MOREIRA, G. E. Educação matemática e a formação de professores para uma prática docente significativa. ***Revista @mbienteeducação.*** São Paulo, v. 11, n. 1, p. 99-109,2018.

SANTOS, Júlio César Furtado dos. **Aprendizagem Significativa:** modalidades de aprendizagem e o papel do professor. Porto Alegre: Mediação, 2008.

SCHNEIDER, E. M. et al. Pesquisas quali-quantitativas: contribuições para a pesquisa em ensino de ciências. **Revista Pesquisa Qualitativa,** São Paulo, v. 5, n.9, p. 569-584, 2017

SCRIBA, J. C.; SCHREIBER, P. **5000 Years of Geometry**: Mathematics in History and Culture. Basel: Springer, 2015.

SELIN, H. (ed.) **Encyclopedia of the History of Science, Technology, and Medicine in Non-Western Cultures**. New York: Springer, 2008.

SHULMAN, Lee S. Those who understand: Knowledge growth in teaching. **Educational Researcher**, [*s. l*.], v. 15, n. 2, p. 4-14, 1986.

TARDIF, M. **Saberes docentes e formação profissional**. Petrópolis: Vozes, 2002.

VAN DE WALLE, J. A. **Matemática no ensino fundamental:** formação de professores e aplicação em sala de aula. 6. ed. Porto Alegre: Artmed, 2009. 584 p.

VAN-HIELE, P. M. **Structure and Insight**: a theory of mathematics education. Orlando, FL: Academic, 1986.

VAN-HIELE, Pierre Marie. Developing Geometric Thinking through Activities That Begin with Play. **Teaching Children Mathematics**, v.6, p.310-316, 1999.

ANEXO A – Resumo das teses e dissertações

GASPAR, Maria Terezinha Jesus. Aspectos do desenvolvimento do pensamento geométrico em algumas civilizações e povos e a formação de professores. 307 f. Tese (doutorado) – Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e ciências exatas, Rio Claro, 2003.
As principais questões deste trabalho surgem das minhas experiências como professora em cursos de Licenciatura em Matemática e do meu interesse em pesquisar as relações entre a história e o ensino-aprendizagem da matemática. Por que a incorporação da história da matemática em cursos de geometria na formação de professores? Como utilizar a história da matemática para discutir conhecimentos geométricos e abordagens pedagógicas para o ensino-aprendizagem da geometria? Trata-se de um trabalho teórico, de levantamento bibliográfico e organizacional do material encontrado em livros de história da matemática, e trabalhos de pesquisa sobre as tradições geométricas de algumas civilizações e povos, a saber: China, Índia, Egito, Babilônia, Indígenas Brasileiros e alguns Povos Africanos. O objetivo é fazer uma compilação e análise desse conhecimento e então propor uma forma de trabalhar o conhecimento geométrico na formação de professores do ensino fundamental e médio tomando como referencial a dimensão histórica.

BALDOVINOTTI, Nilson Jorge. Um estudo de fractais geométricos na formação de professores de matemática. 204 f. Dissertação - (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro, 2011.
Esta pesquisa tem a finalidade de compreender as possibilidades para o ensino de Geometria Fractal perspectivadas por professores de matemática e alunos do curso de licenciatura em Matemática. Os dados foram provenientes da realização de duas oficinas com cinco professores de matemática os quais atuam no ensino fundamental ou médio e de vinte estudantes do curso de licenciatura em Matemática e de um questionário preenchido por eles. Essas oficinas foram organizadas de forma a introduzir a ideia de Geometria Fractal a partir do emprego de recursos tecnológicos e materiais manipuláveis. Os programas computacionais utilizados foram o SuperLogo e o Geometricks. Usou-se também materiais manipuláveis como o compasso, a régua, a tesoura e papel cartão. A pesquisa empregou os pressupostos teóricos de Shulman para

o estudo da produção de saber na prática docente; os pensamentos de Mizukami e Reali sobre os aspectos da formação de professores; o uso e o emprego de maneira significativa da Tecnologia na Educação por Papert e Valente; e as concepções de Penteado sobre a formação de professores para o uso de tecnologia informática. Os resultados tratam dos seguintes aspectos: a) como os participantes das oficinas percebem os fractais como tema gerador de outros tópicos de matemática; b) a relação dos participantes da oficina com a tecnologia informática utilizada; c) as dificuldades existentes ou não com os temas matemáticos relacionados ao estudo dos fractais; d) as possíveis dificuldades para ensinar esse tópico que os participantes da oficina conseguem antecipar.

CHAPARIN, Rogério Osvaldo. A formação continuada de professores que ensinam matemática, centrada na resolução de problemas e em processos do pensamento matemático. 432 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2019.
Este trabalho se insere na esfera da Formação de Professores, especificamente na formação continuada de professores que ensinam matemática. Fazemos parte do Grupo de Pesquisa em Educação Algébrica (GPEA). Nossa pesquisa se insere no projeto de pesquisa: A Matemática na Estrutura Escolar e Formação de Professores e História, Epistemologia e Didática da Matemática. O estudo é fruto de uma pesquisa que teve o objetivo de investigar as possíveis mudanças nas ações docentes de professores que ensinam matemática, durante e após a vivência de um curso de formação continuada com foco: na resolução de problemas e nos processos do pensamento matemático. Para atingir o objetivo, utilizamos a abordagem qualitativa, embasada nas fases da engenharia didática, tanto como metodologia de pesquisa como de ensino, fruto da Teoria das Situações Didáticas de Brousseau, em conexão com as ideias sobre Resolução de Problemas, principalmente sob o ponto de vista de Polya e Lester. Os sujeitos da pesquisa foram 37 de 51 professores da rede estadual de São Paulo que participaram de um curso de atualização de 30 horas em oito sessões abordando os seguintes temas: desafios e problemas abertos; estratégias de resolução de problema; atividades investigativas; resolução de problemas e pensamento matemático; pensamento algébrico e pensamento geométrico. Optamos pelos

seguintes tipos de problemas: problemas abertos, de processo, de investigação matemática, quebra cabeças, visuais, que permitem encontrar todas as possibilidades e aqueles que possibilitam trabalhar com padrões. Nosso objetivo foi propor tarefas que visavam o desenvolvimento dos processos do pensamento matemático. Portanto, selecionamos as atividades de acordo com Blanco, cujas tarefas escolhidas devem permitir: abstrair, aplicar, convencer, classificar, inferir, organizar, representar, generalizar, comparar, explicar, conjecturar, analisar, sintetizar e outros. Destacamos que as resoluções feitas pelos professores evoluíram gradativamente do primeiro encontro até o último. No final percebe-se que as resoluções são centradas no processo: elaboração de estratégias pessoais, preocupação com as justificativas e argumentações. Consideramos as ideias de Mason, Burton e Stacey de que a resolução de problemas deve ser centrada no pensar matematicamente segundo os processos de: especialização, generalização, elaboração de conjecturas e a justificativa. Analisamos os seguintes dados: questionário sobre perfil de cada sujeito, a produção escrita dos sujeitos tanto nos encontros presenciais quanto na aplicação de resolução de problemas em suas salas de aula. As análises feitas evidenciaram algumas mudanças de percepção dos sujeitos sobre: o trabalho em duplas ou ternas quanto à produtividade dos mesmos em relação à resolução de atividades; a aprendizagem dos vários tipos de problemas; a discussão sobre as diferentes estratégias de resolução durante as institucionalizações. Assim, concluímos que o curso propiciou mudança nas práticas de sala de aula desses professores e que, principalmente, eles revelaram ter iniciado a incorporar a resolução de problemas à suas atividades de aula.

OLIVEIRA, Sabrine Costa. (Re)Construção do pensamento geométrico de professores sobre transformações geométricas. 168 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) – Programa de Pós-Graduação, Instituto Federal do Espirito Santo, Vitória, 2016.
Esta pesquisa teve por objetivo analisar indícios de (re)construção do pensamento geométrico e de práticas docentes de professores que participaram de formação sobre transformações geométricas. Para isso, foi elaborado um curso de extensão sobre o tema em uma abordagem investigativa com o uso de materiais manipulativos. Optou-se por realizar uma pesquisa de natureza

qualitativa, caracterizada como pesquisa do tipo intervenção pedagógica, pois é o pesquisador quem identifica e propõe ações para solucionar o problema, com o objetivo de transformar a prática docente. Os dados foram construídos por meio de observações, registradas em áudio e vídeo dos encontros presenciais, do diário de bordo da pesquisadora, de questionários e de atividades realizadas. O curso semipresencial foi realizado no Laboratório de Ensino de Matemática do Instituto Federal do Espírito Santo – *Campus* Vitória e envolveu dez professores atuantes no ensino fundamental entre os meses de setembro a dezembro de 2015. Foi uma oportunidade para ampliar conhecimentos sobre transformações geométricas com professores dos anos finais do ensino fundamental, em um grupo com práticas colaborativas e metodologia que privilegiou o diálogo e reflexões sobre o conteúdo abordado. Com o objetivo de identificar indícios de (re)construção do pensamento geométrico e de práticas docentes sobre transformações geométricas dos participantes, elaborou-se um quadro de referência que associa conteúdos, objetivos e capacidades e os relaciona relacionando-os com aportes teóricos da pesquisa. Em síntese, os professores (re)construíram seus conhecimentos em momentos de reflexão por meio de atividades investigativas sobre transformações geométricas e em práticas docentes incentivadas pelo curso. Além disso, ocorreram nos diálogos e relatos mudanças na compreensão sobre o ensino de geometria, em especial os conceitos de isometrias e homotetias. As atividades aplicadas e discutidas neste estudo subsidiaram a construção do caderno de atividades sobre transformações geométricas em uma abordagem investigativa e com o uso de materiais manipulativos, produto educacional desta pesquisa. Este material está disponível na página do programa Educimat e espera-se que seja utilizado tanto por professores em suas aulas quanto em formações de professores. Nosso desejo é que esse caderno contribua com um trabalho significativo utilizando materiais manipulativos sobre transformações geométricas em aulas de matemática.

MAGNI, Rosana Jorge Monteiro. Formação continuada de professores de matemática: mudanças de concepções sobre o processo de ensino e aprendizagem de geometria. 181 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Programa de Pós-Graduação da Universidade Bandeirante de São Paulo, São Paulo, 2011.
O propósito desta pesquisa é identificar mudanças nas concepções de um grupo de professores de Matemática a respeito do processo de ensino e aprendizagem da Geometria em um contexto de formação continuada, cujo enfoque foi o estudo das inovações curriculares que ora são implementadas nas escolas públicas estaduais de São Paulo. Esta investigação, que foi desenvolvida no âmbito do Projeto Observatório da Educação da CAPES/Uniban, insere-se, metodologicamente, em uma abordagem qualitativa de pesquisa. Para identificar as mudanças de concepções dos professores recorreu-se a fontes diversas: entrevistas e depoimentos, participações nos fóruns e nas atividades presenciais do Observatório. A análise desses dados está fundamentalmente referenciada em Shulman (1986 e 1992) e Tardif (2000, 2003). Cabe também ressaltar que, para a compreensão das inovações da Proposta Curricular a respeito da Geometria, é também apresentado neste trabalho um breve estudo de recentes currículos prescritos de Matemática para o Ensino Fundamental. Esta pesquisa indicou certo nível de reflexão dos professores concernente às inovações propostas pelo novo currículo e à necessidade de incluir substancialmente em suas aulas atividades com intuito de desenvolver o pensamento geométrico dos alunos. Convém destacar que essas reflexões foram sensivelmente acompanhadas de argumentos reforçadores e/ou questionadores sobre a relevância, a validade da iniciativa e os pressupostos da Proposta Curricular. Constatou-se, também, que as relações entre a prática pedagógica e as concepções reais dos professores são complexas e há fatores que afetam decisivamente nas mudanças de suas práticas: “fragilidade” dos conhecimentos de conceitos geométricos e dos conhecimentos didáticos e curriculares desses conteúdos; crenças sobre a Matemática e seu ensino; influências externas ou institucionais – para mudar, os outros professores de Matemática da escola não deveriam também mudar?

ALMEIDA, Gladiston dos Anjos. Uma (re)construção praxeológica no estudo de geometria com alunos da Licenciatura em Matemática. 200 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Educação em Ensino de Ciências e Matemática, Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo, 2018.
Esta pesquisa de doutorado tomada como instrumento de construção do conhecimento e de ação reflexiva desenvolveu-se no Grupo de Estudo e Pesquisa em Didática e Metodologia em Educação Matemática do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo, SP. A presente investigação teve por objetivo o estudo de atividades de geometria com alunos da Licenciatura em Matemática na construção do conhecimento geométrico no âmbito da geometria plana, geometria analítica plana e da geometria analítica vetorial, e visou responder nossa questão de pesquisa, qual seja: Quais as contribuições e restrições do estudo de atividades de geometria na construção do conhecimento geométrico que integre conteúdos da geometria plana, geometria analítica plana e geometria analítica vetorial na formação dos alunos da Licenciatura em Matemática? A interpretação, análise e descrição do estudo das atividades de geometria se respaldou nos pressupostos da Teoria Antropológica do Didático, tendo como unidade de análise a noção de praxeologia matemática. A nossa investigação se fundamentou nos pressupostos metodológicos da Engenharia Didática de Percurso na constituição de um Percurso de Estudo e Investigação, tomado como dispositivo de organização didática do estudo das atividades de geometria. Os resultados da presente investigação apontam que o estudo de atividades de geometria no âmbito da geometria plana, geometria analítica plana e da geometria analítica vetorial com alunos da Licenciatura em Matemática proporciona aos futuros professores a construção do conhecimento geométrico como produto e processos de uma *práxis* institucional indispensável para suas futuras práticas discentes no que se refere ao ensino e aprendizagem da geometria nas instituições escolares. No estudo das atividades de geometria no âmbito da geometria plana, geometria analítica plana e da geometria analítica vetorial, o Curso de Licenciatura em Matemática se constituiu em um importante espaço de construção do conhecimento da geometria, proporcionando aos alunos uma formação crítica, reflexiva e emancipadora. A partir dos resultados da nossa investigação, destacamos a importância do estudo de conteúdos da

geometria que privilegie o papel do aluno da Licenciatura em Matemática como ator do processo de construção do conhecimento geométrico no âmbito da geometria plana, geometria analítica plana e da geometria analítica vetorial.

VIEIRA, José Erisvaldo Lessa. As geometrias do curso superior e os conteúdos geométricos do ensino médio: um estudo das relações existentes no entendimento de egressos da licenciatura em matemática do IFAL. 132 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Universidade Federal de Sergipe - UFS, São Cristóvão, 2018.
Esta dissertação apresenta os resultados de uma pesquisa que teve como objetivo geral investigar as relações existentes no entendimento de egressos da licenciatura em matemática do Instituto Federal de Alagoas – IFAL, entre as disciplinas de geometria, abordadas na formação do professor; e os conteúdos geométricos do ensino médio. Trata-se de um estudo de caso, com seis egressos da licenciatura em matemática-IFAL, *campus*/Maceió, que atuam na rede pública de ensino. A análise de dados de natureza qualitativa utilizou-se de diferentes técnicas para a coleta: análises documentais, questionários e entrevistas. O aporte teórico teve como foco as temáticas: formação de professores, saberes docentes e ensino de geometria. Para a formação de professores, utilizaram-se – Tardif (2014) e Imbernón (2011) como principais contribuições; para formação, especificamente, do professor de matemática as discussões pautaram-se em Moreira e David (2014), Nacarato e Paiva (2008) e Cury (2001); e para abordar o ensino de geometria, teve-se como fundamentos os estudos de Lorenzato (1995) e Pavanello (2002). A partir das análises documentais e das falas dos sujeitos foi possível identificar como resultado que a abordagem dos conteúdos na formação dos egressos se deu por meio de teoremas, axiomas e demonstrações, o que segundo os egressos, favoreceu para que houvesse ampla visualização dos conteúdos do ensino /médio, antes mesmo de adentrarem na sala de aula como ingressos do curso. Por outro lado, constatou-se que essa abordagem foi pouco utilizada nas práticas pedagógicas desses sujeitos, visto que a abordagem nos livros didáticos se iniciou de forma intuitiva, além dos alunos da educação básica demonstrarem pouco domínio de argumentação, o que dificultou o processo de desenvolvimento do conhecimento geométrico destes.