



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA "JÚLIO DE MESQUITA FILHO"  
Instituto de Geociências e Ciências Exatas  
Campus de Rio Claro

## Grupo Topológico

**Aline Cristina Bertoncelo Dutra**

Dissertação apresentada ao Programa de  
Pós-Graduação – Mestrado Profissional em  
Matemática Universitária do Departamento  
de Matemática como requisito parcial para a  
obtenção do grau de Mestre

Orientadora  
**Profa. Dra. Elíris Cristina Rizzioli**

**2011**

514.2      Dutra, Aline Cristina Bertencelo  
D978g      Grupo Topológico/ Aline Cristina Bertencelo Dutra- Rio Claro:  
[s.n.], 2011.  
88 f., il., gráfs., tab.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas.  
Orientadora: Elíris Cristina Rizzioli

1. Algebraic Topology. 2. Espaço Topológico. 3. Grupo Quociente. 4. Aplicações Contínuas. 5. Espaço Quociente. I. Título

# TERMO DE APROVAÇÃO

Aline Cristina Bertoncelo Dutra  
GRUPO TOPOLÓGICO

Dissertação APROVADA como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática Universitária do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, pela seguinte banca examinadora:

Profa. Dra. Eliris Cristina Rizzioli  
Orientadora

Prof. Dr. Edivaldo Lopes da Silva  
DM/UFSCAR-São Carlos

Prof. Dr. João Peres Vieira  
IGCE/UNESP-Rio Claro

**Rio Claro, 10 de Novembro de 2011**

*Dedico esta dissertação aos meus pais, minha irmã, minha orientadora e meus professores que me apoiaram durante minha vida acadêmica.*

# Agradecimentos

Primeiramente à Deus, meu criador, minha rocha forte, que tem me sustentado na destra de Sua justiça.

Agradeço à minha família, meu pai, minha mãe e minha irmã, que com tanto carinho motivaram meus estudos dando-me todo suporte para continuar.

Em especial, agradeço de todo coração à minha orientadora e amiga Elíris Cristina Rizziolli, que abraçou a minha causa e orientou-me com toda paciência e sabedoria. Nunca vou esquecer tudo o que fez por mim e seu exemplo de vida, amizade e profissionalismo.

Gostaria também de agradecer ao meu professor de Topologia por todo apoio e incentivo.

Por fim, agradeço ao corpo docente de Matemática Universitária do Mestrado Profissional da UNESP-Rio Claro, pessoas altamente capacitadas que fizeram crescer ainda mais meu interesse por esta disciplina deslumbrante e fascinante.

*O temor do Senhor é o princípio do conhecimento; os loucos desprezam a sabedoria e  
a instrução. Pv 1.7*

# Resumo

Neste trabalho tratamos do objeto matemático Grupo Topológico. Para este desenvolvimento, abordamos elementos básicos de Grupo e Espaço Topológico.

**Palavras-chave:** Algebraic Topology, Espaço Topológico, Grupo Quociente, Aplicações Contínuas, Espaço Quociente.

# Abstract

In this work we consider the mathematical object Topological Group. For this development, we discuss the basic elements of the Group and Topological Space.

**Keywords:** Topologia Algébrica, Topological Space, Quotient Group, Continuous Functions, Quotient Space.

# Lista de Figuras

|     |                                     |    |
|-----|-------------------------------------|----|
| 2.1 | Polígono Inscrito . . . . .         | 27 |
| 3.1 | Topologia discreta . . . . .        | 43 |
| 3.2 | Conjuntos $Y$ , $A$ e $C$ . . . . . | 48 |
| 3.3 | Conjuntos $Y$ , $A$ e $U$ . . . . . | 48 |
| 3.4 | Esquema do Toro . . . . .           | 67 |

# Lista de Tabelas

|     |                                  |    |
|-----|----------------------------------|----|
| 2.1 | Tabela $G = \{1, -1\}$ . . . . . | 25 |
| 2.2 | Tabela $D_3$ . . . . .           | 28 |
| 2.3 | Tabela $Q$ . . . . .             | 31 |
| 2.4 | Tabela $V_4$ . . . . .           | 32 |
| 2.5 | Tabela Subgrupo Normal . . . . . | 39 |

# Sumário

|          |                                               |           |
|----------|-----------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>Introdução</b>                             | <b>10</b> |
| <b>2</b> | <b>Sobre a Estrutura Algébrica: Grupo</b>     | <b>11</b> |
| 2.1      | Grupo . . . . .                               | 11        |
| 2.2      | Subgrupo . . . . .                            | 32        |
| 2.3      | Grupo Quociente . . . . .                     | 39        |
| <b>3</b> | <b>Elementos de Topologia Geral</b>           | <b>42</b> |
| 3.1      | Espaço Topológico . . . . .                   | 42        |
| 3.2      | Aplicações Contínuas . . . . .                | 57        |
| 3.3      | Espaço Quociente . . . . .                    | 66        |
| <b>4</b> | <b>Grupo Topológico</b>                       | <b>70</b> |
| 4.1      | Sobre Grupo Topológico . . . . .              | 70        |
| 4.2      | Propriedades em um Grupo Topológico . . . . . | 77        |
| <b>5</b> | <b>Conclusão</b>                              | <b>86</b> |
|          | <b>Referências</b>                            | <b>88</b> |

# 1 Introdução

Historicamente, o conceito de grupo topológico teve como motivação o grupo das funções contínuas sobre um determinado espaço topológico que possuía também estrutura de grupo. Espaços como este possuíam papel central na pesquisa matemática; um exemplo clássico é o corpo dos números reais.

Ao tratar de funções contínuas no espaço euclidiano  $\mathbb{R}^n$  observou-se propriedades interessantes envolvendo as duas áreas Álgebra e Topologia, por exemplo, a estrutura algébrica do fecho de um grupo, bem como a topologia sobre um grupo quociente.

Diante disto, destacamos a relevância deste trabalho pela conexão natural entre Álgebra e Topologia ao explorar o objeto matemático grupo topológico. Para este propósito adotamos [1] como principal referência bibliográfica.

Como sua própria denominação sugere, para o desenvolvimento de resultados envolvendo grupo topológico, é preciso primeiramente tratar dos conceitos básicos de grupo e espaço topológico. Esta é exatamente a finalidade dos dois primeiros capítulos: iniciamos com elementos básicos de grupos, usando [2, 3] como referências, e em seguida apresentamos resultados de espaços topológicos necessários para nossa finalidade, seguindo [4, 5]. Embora os dois capítulos sejam independentes, estes serão conectados no capítulo reservado para abordar grupo topológico e suas propriedades. Por fim, observamos que para a compreensão deste material o leitor deve estar familiarizado com noções básicas de teoria dos conjuntos (por exemplo, Princípio da Indução Finita, propriedades de interseções e reuniões de conjuntos, etc.), sugerimos a leitura do primeiro capítulo de [5].

## 2 Sobre a Estrutura Algébrica: Grupo

Neste capítulo tratamos noções básicas sobre a estrutura algébrica grupo, através da definição do mesmo, bem como exemplos e propriedades. Abordamos também subgrupos, classes laterais e grupo quociente. Detalhes sobre este assunto e demais considerações podem ser encontrados em [2, 3].

### 2.1 Grupo

**Definição 2.1.** *Sejam  $G$  um conjunto não vazio e  $*$  uma operação binária de  $G$  (isto é, uma função de  $G \times G$  em  $G$ ) tal que  $(x, y) \mapsto x * y$ .*

*Dizemos que  $(G, *)$  é um grupo em relação a esta operação binária ou que  $*$  define uma estrutura de grupo sobre o conjunto  $G$  se, e somente se, valem as seguintes propriedades:*

- (a) *Associativa:  $a * (b * c) = (a * b) * c$ ,  $\forall a, b, c \in G$ ;*
- (b) *Existência do elemento neutro:  $\exists e \in G \mid a * e = a = e * a$ ,  $\forall a \in G$ ;*
- (c) *Existência de elemento oposto:  $\forall a \in G$ ,  $\exists \bar{a} \in G \mid a * \bar{a} = e = \bar{a} * a$ .*

**Observação 2.1.** Dizemos que um grupo é aditivo, ou multiplicativo, se as operações binárias são: adição ou multiplicação, respectivamente. Adotamos para grupo aditivo  $e = 0$  e  $\bar{a} = (-a)$  e chamados os elementos neutro e oposto, respectivamente. Para um grupo multiplicativo usamos:  $e = 1$  e  $\bar{a} = a^{-1}$ , chamados elemento identidade e inverso, respectivamente.

**Proposição 2.1.** *Propriedades elementares de um grupo  $(G, *)$ :*

- (i) *O elemento neutro, cuja existência é assegurada por (b), é único.*
- (ii) *Cada elemento do grupo possui um único elemento oposto.*
- (iii) *Quaisquer que sejam  $x, y \in G$ , tem-se*
  - $\bar{\bar{x}} = x$ .
  - $\overline{x * y} = \bar{y} * \bar{x}$ .

(iv) Se  $x_1, \dots, x_n \in G$ , então

$$\overline{x_1 * \dots * x_n} = \bar{x}_n * \dots * \bar{x}_1.$$

(v) Quaisquer que sejam  $a, x, y \in G$ , temos que

$$a * x = a * y \Rightarrow x = y$$

e

$$x * a = y * a \Rightarrow x = y$$

são as leis do cancelamento à esquerda e à direita, respectivamente.

*Demonstração.* (i) Seja  $e$  o elemento neutro de  $G$ , ou seja,

$$e * a = a = a * e, \forall a \in G. \quad (I)$$

Suponhamos agora que exista outro elemento  $e'$  tal que, para qualquer  $a \in G$  :  $e' * a = a = a * e'$ . Em particular, para  $a = e$  temos:

$$e * e' = e.$$

Por outro lado, de (I), considerando  $a = e'$ , segue que  $e * e' = e'$ .

Consequentemente,

$$e' = e * e' = e.$$

Portanto,  $e' = e$ .

(ii) Se  $y$  e  $z$  são ambos elementos opostos de  $x$  em  $G$  temos

$$\bullet x * y = e = y * x;$$

$$\bullet x * z = e = z * x.$$

Deste modo,

$$z = e * z = (y * x) * z = y * (x * z) = y * e = y.$$

Portanto,  $y = z$ .

(iii) Se  $e$  é o elemento neutro de  $G$ , temos  $\bar{x} = x$ , pois  $\bar{x} * x = e$  e  $x * \bar{x} = e$ .

Provemos que  $\overline{x * y} = \bar{y} * \bar{x}$ . Como  $G$  é um grupo, dados  $x, y \in G$ , temos

$$\bar{x} * x = e = x * \bar{x}$$

e

$$\bar{y} * y = e = y * \bar{y}.$$

Deste fato e usando a propriedade associativa segue:

$$(x * y) * (\bar{y} * \bar{x}) = [(x * y) * \bar{y}] * \bar{x} = [x * (y * \bar{y})] * \bar{x} = (x * e) * \bar{x} = x * \bar{x} = e$$

e

$$(\bar{y} * \bar{x}) * (x * y) = [(\bar{y} * \bar{x}) * x] * y = [\bar{y} * (\bar{x} * x)] * y = (\bar{y} * e) * y = \bar{y} * y = e.$$

Consequentemente,  $\bar{y} * \bar{x}$  é o elemento oposto de  $x * y$ .

Portanto,  $\overline{x * y} = \bar{y} * \bar{x}$ .

(iv) Sejam  $x_1, \dots, x_n \in G$ , provemos por meio do Princípio da Indução Finita que

$$\overline{x_1 * \dots * x_n} = \bar{x}_n * \dots * \bar{x}_1, \forall n \in \mathbb{N}. \quad (I)$$

Obviamente a igualdade (I) é válida para  $n = 1$ .

Segue do item (iii), que (I) também é válida para  $n = 2$ .

Assumamos como hipótese de indução que a igualdade seja válida para  $n = k$ .

Ou seja,

$$\overline{x_1 * \dots * x_k} = \bar{x}_k * \dots * \bar{x}_1.$$

Mostremos agora que (I) é válida para  $n = k + 1$ . De fato:

$$\begin{aligned} \overline{x_1 * \dots * x_{k+1}} &= \overline{(x_1 * \dots * x_k) * x_{k+1}} = \bar{x}_{k+1} * \overline{x_1 * \dots * x_k} = \\ &= \bar{x}_{k+1} * \bar{x}_k * \dots * \bar{x}_1. \end{aligned}$$

Portanto, nestas condições, segue do Princípio de Indução Finita que:

$$\overline{x_1 * \dots * x_n} = \bar{x}_n * \dots * \bar{x}_1, \forall n \in \mathbb{N}.$$

(v) Por hipótese temos  $a * x = a * y$ . Logo,

$$x = e * x = (\bar{a} * a) * x = \bar{a} * (a * x) = \bar{a} * (a * y) = (\bar{a} * a) * y = e * y = y.$$

Portanto,  $x = y$ .

Analogamente, se  $x * a = y * a$ , segue

$$x = x * e = x * (a * \bar{a}) = (x * a) * \bar{a} = (y * a) * \bar{a} = y * (a * \bar{a}) = y * e = y.$$

□

**Exemplo 2.1.** Grupo Aditivo dos Reais.  $\mathbb{R}$  munido da adição usual,  $(\mathbb{R}, +)$  é um grupo.

**Exemplo 2.2.** Grupo Aditivo dos Complexos.

Seja  $\mathbb{C} = \{x + iy; x, y \in \mathbb{R}\}$  o conjunto dos números complexos.

Definimos em  $\mathbb{C}$  a seguinte operação:

$$+ : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$(\alpha, \beta) \longmapsto \alpha + \beta := (a + c) + (b + d)i,$$

admitindo  $\alpha = a + bi$ ,  $\beta = c + di$ ,  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ .

Veja que  $\alpha + \beta \in \mathbb{C}$ , logo  $+$  é uma operação binária e ainda:

- (a) Dados  $\alpha = a + bi$ ,  $\beta = c + di$  e  $\gamma = f + gi$ , elementos quaisquer em  $\mathbb{C}$  temos, pela propriedade associativa da adição usual em  $\mathbb{R}$  que

$$\begin{aligned} \alpha + (\beta + \gamma) &= a + bi + ((c + f) + (d + g)i) = (a + (c + f)) + (b + (d + g))i = \\ &= ((a + c) + f) + ((b + d) + g)i = ((a + c) + (b + d)i) + f + gi = (\alpha + \beta) + \gamma. \end{aligned}$$

Portanto, vale a propriedade associativa.

- (b) Dado  $\alpha = a + bi \in \mathbb{C}$  qualquer, usando a propriedade do elemento neutro em  $\mathbb{R}$  temos que  $0 = 0 + 0i \in \mathbb{C}$  satisfaz

$$\alpha + 0 = (a + 0) + (b + 0)i = a + bi = \alpha,$$

e

$$0 + \alpha = (0 + a) + (0 + b)i = a + bi = \alpha,$$

ou seja, existe elemento neutro para  $(\mathbb{C}, +)$ .

- (c) Para cada  $\alpha = a + bi \in \mathbb{C}$ , pela propriedade de elemento neutro de  $\mathbb{R}$ , o elemento  $-\alpha = -a - bi$  é tal que

$$\begin{aligned} \alpha + (-\alpha) &= (a + bi) + (-a - bi) = (a + (-a)) + (b + (-b))i = 0 + 0i = 0, \text{ e} \\ (-\alpha) + \alpha &= ((-a) + a) + ((-b) + b)i = 0 + 0i = 0. \end{aligned}$$

Portanto, segue dos itens (a), (b) e (c) que  $(\mathbb{C}, +)$  é um grupo.

**Exemplo 2.3.** O Produto Direto.

Dados  $(G, \triangle)$  e  $(G', \diamond)$  grupos quaisquer, o conjunto  $G \times G'$ , formado por todos os pares  $(x, x')$  com  $x \in G$  e  $x' \in G'$  é um grupo se munido da seguinte operação:  $(x, x') * (y, y') := (x \triangle y, x' \diamond y'), \forall (x, x'), (y, y') \in G \times G'$ . Com efeito,

- (a) Para quaisquer  $(x, x'), (y, y'), (z, z')$  em  $G \times G'$ , temos pela propriedade associativa de  $(G, \triangle)$  e  $(G', \diamond)$ :

$$(x, x') * [(y, y') * (z, z')] = (x, x') * (y \triangle z, y' \diamond z') =$$

$$(x \triangle (y \triangle z), x' \diamond (y' \diamond z')) = ((x \triangle y) \triangle z, (x' \diamond y') \diamond z') =$$

$$(x \triangle y, x' \diamond y') * (z, z') = [(x, x') * (y, y')] * (z, z').$$

Portanto, vale a propriedade associativa.

- (b) Seja  $(x, x') \in G \times G'$  qualquer. Defina  $e = (e_G, e_{G'})$ , onde  $e_G$  e  $e_{G'}$  são os elementos identidade de  $G$  e  $G'$ , respectivamente. Desta forma:

$$(x, x') * e = (x, x') * (e_G, e_{G'}) = (x \triangle e_G, x' \diamond e_{G'}) = (x, x') =$$

$$(e_G \triangle x, e_{G'} \diamond x') = (e_G, e_{G'}) * (x, x') = e * (x, x').$$

Logo,  $(x, x') * e = (x, x') = e * (x, x')$ .

Portanto,  $e = (e_G, e_{G'})$  é o elemento identidade de  $G \times G'$ .

- (c) Para qualquer  $X = (x, x') \in G \times G'$ , considere  $\bar{X} := (\bar{x}, \bar{x}')$ , onde  $\bar{x}$  e  $\bar{x}'$  são os elementos inversos de  $x$  e  $x'$ , respectivamente. Observe que

$$X * \bar{X} = (x, x') * (\bar{x}, \bar{x}') = (x \triangle \bar{x}, x' \diamond \bar{x}') = (e_G, e_{G'}) = e.$$

e

$$\bar{X} * X = (\bar{x}, \bar{x}') * (x, x') = (\bar{x} \triangle x, \bar{x}' \diamond x') = (e_G, e_{G'}) = e.$$

Logo,  $X * \bar{X} = e = \bar{X} * X$ .

Portanto,  $\bar{X}$  é o elemento inverso de  $X$  em  $G \times G'$ .

**Exemplo 2.4.** O Produto Direto de um número finito de Grupos.

Dados  $(G_1, \triangle_1), \dots, (G_n, \triangle_n)$  grupos quaisquer, o conjunto  $\prod_{i=1}^n G_i = G_1 \times \dots \times G_n$  é um grupo munido da operação  $*$ , definida da seguinte forma:

Para quaisquer  $X = (x_1, \dots, x_n), Y = (y_1, \dots, y_n) \in \prod_{i=1}^n G_i$ , segue que

$$X * Y := (x_1 \triangle_1 y_1, \dots, x_n \triangle_n y_n).$$

A demonstração segue usando o Princípio da Indução Finita e o exemplo anterior.

**Definição 2.2.** Dizemos que um grupo  $(G, *)$  é abeliano ou comutativo se, e somente se, a operação binária  $(x, y) \mapsto x * y$  é comutativa, isto é,

$$x * y = y * x, \forall x, y \in G.$$

**Exemplo 2.5.** Grupo Aditivo dos Inteiros.

Por propriedades da adição usual em  $\mathbb{Z}$  temos:  $\forall a, b, c \in \mathbb{Z}$ ,

$$a + (b + c) = (a + b) + c,$$

$$a + 0 = a = 0 + a,$$

$$a + (-a) = 0 = (-a) + a,$$

$$a + b = b + a.$$

Logo  $(\mathbb{Z}, +)$ , Grupo Aditivo dos Inteiros, é um grupo abeliano.

**Exemplo 2.6.** Grupo Aditivo dos Racionais. O par  $(\mathbb{Q}, +)$ , onde  $\mathbb{Q}$  é o conjunto dos racionais e  $+$  é a adição usual em  $\mathbb{Q}$ , é um grupo abeliano.

**Exemplo 2.7.** Grupo Aditivo dos Reais.  $\mathbb{R}$  munido da adição usual,  $(\mathbb{R}, +)$  é um grupo abeliano.

**Exemplo 2.8.** Nas condições do exemplo 2.3, se  $(G, \Delta)$  e  $(G', \Diamond)$  são grupos abelianos, então  $(G \times G', *)$  também o é. De fato,

$$\forall X = (x, x'), Y = (y, y') \in G \times G' :$$

$$X * Y = (x, x') * (y, y') := (x \Delta y, x' \Diamond y') =$$

$$(y \Delta x, y' \Diamond x') := (y, y') * (x, x') = Y * X$$

$$\text{Portanto, } X * Y = Y * X.$$

Por exemplo,  $\mathbb{R}^n$  munido da operação  $+$  para  $n$ -uplas é um grupo abeliano.

**Exemplo 2.9.** Grupo Multiplicativo dos Racionais não nulos.

Sejam  $\cdot$  a multiplicação usual em  $\mathbb{Q}$  e  $\mathbb{Q}^*$  o conjunto dos números racionais não nulos. O par  $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$  é um grupo abeliano. Observe que  $\mathbb{Q}^*$  é fechado para esta operação, pois para quaisquer  $a, b \in \mathbb{Q}^*$ , temos  $ab \neq 0$  e portanto  $ab \in \mathbb{Q}^*$ . Ainda,

(a) Para quaisquer  $a, b, c \in \mathbb{Q}^*$

$$(ab)c = a(bc);$$

(b) Temos que 1 é o elemento identidade de  $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$ , já que

$$a1 = a = 1a;$$

(c) Cada elemento  $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}^*$  tem como elemento inverso  $\frac{b}{a}$ , pois

$$\frac{a}{b} \frac{b}{a} = \frac{ab}{ba} = 1 = \frac{ba}{ab} = \frac{b}{a} \frac{a}{b};$$

(d) Para  $a, b \in \mathbb{Q}^*$  quaisquer, temos que  $ab = ba$ .

**Exemplo 2.10.** Grupo Multiplicativo dos Reais não nulos.

O par  $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ , onde  $\mathbb{R}^*$  é o conjunto dos reais não nulos e a operação  $\cdot$  é a multiplicação usual, é outro exemplo canônico de grupo abeliano.

**Exemplo 2.11.** Grupo Multiplicativo dos Complexos não nulos.

Seja  $\mathbb{C}^*$  o conjunto dos números complexos não-nulos. Considere em  $\mathbb{C}^*$  a seguinte operação:  $\forall \alpha = a + bi, \beta = c + di \in \mathbb{C}^*$

$$\alpha\beta = (a + bi)(c + di) := (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Veja que  $(\mathbb{C}^*, \cdot)$  é um grupo abeliano.

Com efeito:

(a)  $\forall \alpha = a + bi, \beta = c + di, \gamma = e + fi \in \mathbb{C}^*, \alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$ , pois

$$\begin{aligned} \alpha(\beta\gamma) &= (a + bi)((ce - df) + (cf + de)i) = \\ &= [a(ce - df) - b(cf + de)] + [a(cf + de) + b(ce - df)]i = \\ &= [ace - adf - bcf - bde] + [acf + ade + bce - bdf]i = \\ &= [(ac - bd)e - (ad + bc)f] + [(ac - bd)f + (ad + bc)e]i = \\ &= [(ac - bd) + (ad + bc)i](e + fi) = (\alpha\beta)\gamma = \end{aligned}$$

Portanto,  $\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$ .

(b) Seja  $\alpha = a + bi \in \mathbb{C}^*$ , qualquer. Observe que  $1 = 1 + 0i$  é tal que

$$\alpha 1 = (a1 - b0) + (a0 + b1)i = a + bi = (1a - 0b) + (0a + 1b)i = 1\alpha.$$

Logo,  $\alpha 1 = \alpha = 1\alpha$ .

Portanto,  $1 = 1 + 0i$  é o elemento identidade de  $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ .

(c) Para cada  $\alpha = a + bi \in \mathbb{C}^*$ , vejamos como determinar  $\alpha^{-1} \in \mathbb{C}^*$  tal que

$$\alpha\alpha^{-1} = 1 = \alpha^{-1}\alpha.$$

Suponha  $\alpha^{-1} = c + di$ . Veja que  $\alpha\alpha^{-1} = 1$  equivale a  $(a + bi)(c + di) = 1 + 0i$ , ou ainda,  $(ac - bd) + (ad + bc)i = 1 + 0i$ .

Consequentemente, as incógnitas  $c$  e  $d$  devem satisfazer o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} ac - bd = 1 \\ bc + ad = 0 \end{cases}.$$

Via regra de Cramer<sup>1</sup> temos que a solução deste sistema é

$$\begin{aligned} c &= \frac{a}{a^2 + b^2} \\ d &= -\frac{b}{a^2 + b^2} \end{aligned}.$$

Note que a igualdade  $\alpha^{-1}\alpha = 1$  gera o mesmo sistema linear. Portanto, para cada  $\alpha = a + bi \in \mathbb{C}^*$ , o seu elemento inverso é dado por  $\alpha^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i$ , conforme comprovamos a seguir.

$$\begin{aligned} \alpha\alpha^{-1} &= (a + bi) \left( \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i \right) = \\ &= \left( a \left( \frac{a}{a^2 + b^2} \right) - b \left( \frac{-b}{a^2 + b^2} \right) \right) + \left( a \left( \frac{-b}{a^2 + b^2}i \right) + b \left( \frac{a}{a^2 + b^2} \right) \right) i = \\ &= \left( \frac{a^2}{a^2 + b^2} + \frac{b^2}{a^2 + b^2} \right) + \left( -\frac{ab}{a^2 + b^2} + \frac{ab}{a^2 + b^2} \right) i = \\ &= \left( \frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2} \right) + \left( \frac{(-ab) + (ab)}{a^2 + b^2} \right) i = 1 + 0i = 1. \end{aligned}$$

Analogamente,  $\alpha^{-1}\alpha = 1 + 0i = 1$ .

(d) Para quaisquer  $\alpha = a + bi, \beta = c + di$ ,

$$\alpha\beta = \beta\alpha.$$

De fato,

$$\alpha\beta = (ac - bd) + (ad + bc)i = (ca - db) + (da + cb)i = \beta\alpha.$$

---

<sup>1</sup>Para noções sobre sistema linear e regra de Cramer sugerimos consultar [6], páginas 29 e 77, respectivamente.

Portanto,  $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ , o Grupo Multiplicativo dos Complexos não nulos é um grupo abeliano.

**Exemplo 2.12.** Grupo das Matrizes.

Seja  $(G, *)$  um grupo qualquer.

Defina  $M_{m \times n}(G)$  como sendo o conjunto das matrizes de ordem  $m \times n$  com coeficientes em  $G$ . Neste conjunto considere a seguinte operação:

Para quaisquer

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m \times n}(G),$$

$$A \triangle B = \begin{pmatrix} a_{11} * b_{11} & \cdots & a_{1n} * b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} * b_{m1} & \cdots & a_{mn} * b_{mn} \end{pmatrix}.$$

O par  $(M_{m \times n}(G), \triangle)$  é um grupo. De fato:

$$\begin{aligned} \text{(a) } A \triangle (B \triangle C) &:= \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \triangle \left[ \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} \triangle \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix} \right] = \\ & \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \triangle \begin{pmatrix} b_{11} * c_{11} & \cdots & b_{1n} * c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} * c_{m1} & \cdots & b_{mn} * c_{mn} \end{pmatrix} = \\ & \begin{pmatrix} a_{11} * (b_{11} * c_{11}) & \cdots & a_{1n} * (b_{1n} * c_{1n}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} * (b_{m1} * c_{m1}) & \cdots & a_{mn} * (b_{mn} * c_{mn}) \end{pmatrix} = \\ & \begin{pmatrix} (a_{11} * b_{11}) * c_{11} & \cdots & (a_{1n} * b_{1n}) * c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_{m1} * b_{m1}) * c_{m1} & \cdots & (a_{mn} * b_{mn}) * c_{mn} \end{pmatrix} = \\ & \begin{pmatrix} a_{11} * b_{11} & \cdots & a_{1n} * b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} * b_{m1} & \cdots & a_{mn} * b_{mn} \end{pmatrix} \triangle \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix} \\ & \left[ \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \triangle \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} \right] \triangle \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix} = [A \triangle B] \triangle C. \end{aligned}$$

Portanto,  $\triangle$  é associativa.

- (b) Sendo  $e_G$  é o elemento neutro de  $G$ , então  $e := \begin{pmatrix} e_G & \cdots & e_G \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e_G & \cdots & e_G \end{pmatrix}$  é o elemento neutro para  $M_{m \times n}(G)$ , de fato:

$$\begin{aligned} A \triangle e &= \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \triangle \begin{pmatrix} e_G & \cdots & e_G \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e_G & \cdots & e_G \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} * e_G & \cdots & a_{1n} * e_G \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} * e_G & \cdots & a_{mn} * e_G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = A. \end{aligned}$$

Analogamente,  $e \triangle A = A$ .

Logo,  $A \triangle e = A = e \triangle A$ .

Portanto,  $e$  é o elemento neutro de  $(M_{m \times n}, \triangle)$ .

- (c) Para cada  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$  em  $M_{m \times n}(G)$ , defina  $\bar{A} = \begin{pmatrix} \bar{a}_{11} & \cdots & \bar{a}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{a}_{m1} & \cdots & \bar{a}_{mn} \end{pmatrix}$ , onde  $\bar{a}_{ij}$  é o elemento oposto de  $a_{ij}$  em  $G$ .

Desta forma,

$$\begin{aligned} A \triangle \bar{A} &= \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \triangle \begin{pmatrix} \bar{a}_{11} & \cdots & \bar{a}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{a}_{m1} & \cdots & \bar{a}_{mn} \end{pmatrix} := \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} * \bar{a}_{11} & \cdots & a_{1n} * \bar{a}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} * \bar{a}_{m1} & \cdots & a_{mn} * \bar{a}_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_G & \cdots & e_G \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e_G & \cdots & e_G \end{pmatrix} = e. \end{aligned}$$

Analogamente,  $\bar{A} \triangle A = e$ .

Logo,

$$A \triangle \bar{A} = e = \bar{A} \triangle A.$$

Portanto  $\bar{A}$  é o elemento oposto de  $A$  em  $M_{m \times n}(G)$ .

Portanto, segue dos itens (i), (ii) e (iii) que  $(M_{m \times n}(G), \Delta)$  é um grupo.

Observamos ainda que se  $(G, *)$  é um grupo abeliano, então  $(M_{m \times n}(G), \Delta)$  também o é, pois para quaisquer:

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m \times n}(G), \\ A \Delta B &= \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \Delta \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} := \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} * b_{11} & \cdots & a_{1n} * b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} * b_{m1} & \cdots & a_{mn} * b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} * a_{11} & \cdots & b_{1n} * a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} * a_{m1} & \cdots & b_{mn} * a_{mn} \end{pmatrix} := \\ &= \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} \Delta \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = B \Delta A. \end{aligned}$$

Como aplicação deste exemplo, podemos considerar os grupos aditivos  $(\mathbb{Z}, +)$ ,  $(\mathbb{Q}, +)$ ,  $(\mathbb{R}, +)$ ,  $(\mathbb{C}, +)$ . Nestes casos, temos os grupos aditivos das matrizes com coeficientes em  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$  e  $\mathbb{C}$  respectivamente.

**Exemplo 2.13.** Grupo Multiplicativo das Matrizes Invertíveis com Coeficientes Reais.

Seja  $GL(n) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \det(A) \neq 0\}$ , com  $M_n(\mathbb{R})$  o conjunto das matrizes de ordem  $n$  sobre  $\mathbb{R}$ . Considere  $A = (a_{ij})$ ,  $B = (b_{jk})$  matrizes quaisquer em  $GL(n)$ . Definimos o produto de  $A$  por  $B$ ,  $AB$ , como sendo a matriz  $C = (c_{ik})$ , tal que

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk}, \forall i, k \in \{1, \dots, n\}.$$

Observe que este produto está bem definido em  $GL(n)$  no seguinte sentido: se  $A, B \in GL(n)$ , então  $AB \in GL(n)$ .

De fato, uma vez que  $A, B \in GL(n)$  segue que  $\det A \neq 0$  e  $\det B \neq 0$ .

Agora, pela propriedade de determinante, sabemos que

$$\det AB = \det A \det B \tag{I}$$

Como  $\det A \neq 0$  e  $\det B \neq 0$  segue que  $\det A \det B \neq 0$ . Consequentemente, por (I), segue que  $\det AB \neq 0$ .

Afirmção:  $(GL(n), \cdot)$  é um grupo.

Com efeito,

(a)  $\forall A = (a_{ij}), B = (b_{jk}), C = (c_{kl}) \in GL(n)$ , temos que

$$A(BC) = \sum_{j=1}^n a_{ij} \left( \sum_{k=1}^n b_{jk} c_{kl} \right) = \sum_{j=1}^n a_{ij} (b_{j1} c_{1l} + b_{j2} c_{2l} + \dots + b_{jn} c_{nl}) =$$

$$a_{i1}(b_{11}c_{1l} + b_{12}c_{2l} + \dots + b_{1n}c_{nl}) + a_{i2}(b_{21}c_{1l} + b_{22}c_{2l} + \dots + b_{2n}c_{nl}) + \dots + a_{in}(b_{n1}c_{1l} + b_{n2}c_{2l} + \dots + b_{nn}c_{nl}) =$$

$$(a_{i1}b_{11})c_{1l} + (a_{i1}b_{12})c_{2l} + \dots + (a_{i1}b_{1n})c_{nl} + (a_{i2}b_{21})c_{1l} + (a_{i2}b_{22})c_{2l} + \dots + (a_{i2}b_{2n})c_{nl} + \dots + (a_{in}b_{n1})c_{1l} + (a_{in}b_{n2})c_{2l} + \dots + (a_{in}b_{nn})c_{nl} =$$

$$[(a_{i1}b_{11})c_{1l} + (a_{i2}b_{21})c_{1l} + \dots + (a_{in}b_{n1})c_{1l}] + \dots + [(a_{i1}b_{11})c_{nl} + (a_{i2}b_{21})c_{nl} + \dots + (a_{in}b_{n1})c_{nl}] =$$

$$(a_{i1}b_{11} + a_{i2}b_{21} + \dots + a_{in}b_{n1})c_{1l} + \dots + (a_{i1}b_{11} + a_{i2}b_{21} + \dots + a_{in}b_{n1})c_{nl} =$$

$$\sum_{k=1}^n (a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \dots + a_{in}b_{nk})c_{kl} =$$

$$\sum_{k=1}^n \left( \sum_{j=1}^n a_{ij}b_{jk} \right) c_{kl} = (AB)C.$$

Portanto,  $A(BC) = (AB)C$ , isto é, vale a propriedade associativa para  $(GL(n), \cdot)$ .

(b) Para qualquer  $A = (a_{ij}) \in GL(n)$ , a matriz  $I_n = (\delta_{jk})$ , cujas entradas são dadas por  $\delta_{jk} = 1$ , se  $j = k$ , e  $\delta_{jk} = 0$ , se  $k \neq j$ , é o elemento identidade de  $GL(n)$ . Pois, primeiro observe que  $I_n \in GL(n)$ , já que  $\det I_n = 1 \neq 0$ .

$$\text{Ainda, } AI_n = (c_{ik}), \text{ onde } c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij}\delta_{jk} = a_{i1}\delta_{1k} + \dots + a_{ik}\delta_{kk} + \dots + a_{in}\delta_{nk} = a_{ik}.$$

$$\text{Logo, } AI_n = (a_{ik}) = A.$$

Analogamente,  $I_n A = A$ . Consequentemente,  $AI_n = A = I_n A$ , ou seja,  $I_n$  é o elemento neutro de  $(GL(n), \cdot)$ .

(c) Seja  $A = (a_{ij}) \in GL(n)$ , qualquer. Definimos a matriz dos cofatores de  $A$  como sendo a matriz  $\bar{A} = (\Delta_{ij})$ , onde  $\Delta_{ij} = (-1)^{(i+j)} \det(A_{ij})$ , com  $A_{ij}$  a submatriz de  $A$  obtida extraindo-se a  $i$ -ésima linha e a  $j$ -ésima coluna de  $A$ .

$$\text{Afirmção: } B = \frac{1}{\det A} \bar{A}^t \text{ é tal que } AB = I_n = BA.$$

Com efeito, primeiro observe que a matriz  $B$  está bem definida já que  $\det A \neq 0$ .

Ainda,

$$AB = A \left[ \left( \frac{1}{\det A} \right) A^t \right] = \frac{1}{\det A} [A \bar{A}^t].$$

Agora,

$$A\bar{A}^t = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ii} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta_{11} & \cdots & \Delta_{1i} & \cdots & \Delta_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \Delta_{i1} & \cdots & \Delta_{ii} & \cdots & \Delta_{in} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta_{n1} & \cdots & \Delta_{ni} & \cdots & \Delta_{nn} \end{pmatrix}^t =$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ii} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta_{11} & \cdots & \Delta_{i1} & \cdots & \Delta_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \Delta_{1i} & \cdots & \Delta_{ii} & \cdots & \Delta_{ni} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta_{1n} & \cdots & \Delta_{in} & \cdots & \Delta_{nn} \end{pmatrix} = (c_{ij}),$$

onde  $c_{ii} = \det A$  e  $c_{ij} = 0$ , pois observe que escolhendo a  $i$ -ésima linha para calcular o determinante <sup>2</sup> de  $A$  segue que:

$$\det A = a_{i1}\Delta_{i1} + \cdots + a_{ii}\Delta_{ii} + \cdots + a_{in}\Delta_{in}.$$

Mas,  $c_{ii} = a_{i1}\Delta_{i1} + \cdots + a_{ii}\Delta_{ii} + \cdots + a_{in}\Delta_{in}$ .

Portanto,  $c_{ii} = \det A$ .

Por outro lado, usando o desenvolvimento de Laplace <sup>3</sup>, é possível mostrar que

$$c_{ij} = a_{i1}\Delta_{j1} + a_{i2}\Delta_{j2} + \cdots + a_{in}\Delta_{jn} = 0.$$

Por exemplo, se  $n = 3$  temos a seguinte situação:

$$c_{12} = -a_{11} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{13} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Assim,

$$c_{12} = -a_{11}(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) + a_{12}(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}) - a_{13}(a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31}) = 0.$$

Logo,

$$A\bar{A}^t = \det A \, I_n.$$

Consequentemente,

$$AB = A \frac{1}{\det A} \bar{A}^t = \frac{1}{\det A} \det A \, I_n = I_n.$$

<sup>2</sup>Para detalhes sobre o algoritmo para encontrar o determinante via matriz dos cofatores vide [6] p.64.

<sup>3</sup>Este desenvolvimento é encontrado em [6], p. 73.

Analogamente, podemos mostrar que  $BA = I_n$ .

Note ainda que, como  $B$  é tal que  $AB = I_n$  segue que

$$\det AB = \det I_n \neq 0.$$

Logo,  $\det A \det B = \det AB \neq 0$  e deste modo temos  $\det B \neq 0$ , isto é,  $B \in GL(n)$ .  
Portanto,  $B$  é o elemento inverso de  $A$  em  $(GL(n), \cdot)$ .

Por fim, pelos itens (a), (b) e (c), segue que  $(GL(n), \cdot)$  é um grupo.

Observamos que este grupo não é comutativo. Por exemplo, se  $n = 2$  e escolhendo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ temos}$$

$$AB = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \text{ e } BA = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Portanto,  $AB \neq BA$ .

#### **Exemplo 2.14.** Grupos de Permutações.

Seja  $E$  um conjunto não vazio. Denotamos por  $S(E)$  o conjunto de todas as funções  $f : E \rightarrow E$  bijetoras.

Neste conjunto definimos a operação composição  $\circ$ ,  $(f, g) \mapsto f \circ g, \forall f, g \in S(E)$ .

O par  $(S(E), \circ)$  é um Grupo denominando grupo das permutações sobre  $E$ . A seguir mostramos que  $(S(E), \circ)$  satisfaz as condições de um grupo.

- (a) A propriedade associativa é satisfeita, pois, para qualquer  $x \in E$ , segue da definição de composição de funções que

$$((f \circ g) \circ h)(x) = (f \circ g)(h(x)) = f(g(h(x))) = f((g \circ h)(x)) = (f \circ (g \circ h))(x).$$

Portanto,  $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ .

- (b) Para qualquer  $f \in S(E)$  a função identidade  $i_{d_E} : E \rightarrow E$  é o elemento neutro de  $(S(E), \circ)$ . De fato, para qualquer  $x \in E$ , segue que

$$(f \circ i_{d_E})(x) = f(i_{d_E}(x)) = f(x) = i_{d_E}(f(x)) = (i_{d_E} \circ f)(x).$$

Portanto,  $f \circ i_{d_E} = f = i_{d_E} \circ f$ .

- (c) Para cada  $f \in S(E)$ , como  $f$  é bijetora existe  $f^{-1} \in S(E)$  tal que

$$f \circ f^{-1} = i_{d_E} = f^{-1} \circ f.$$

Portanto, pelos itens (a), (b) e (c) o par  $(S(E), \circ)$  é um grupo.

Em particular, se  $E = \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $n \geq 1$ , denotamos  $S(E)$  por  $S_n$  e o chamamos de grupo simétrico de grau  $n$ . Através de análise combinatória sobre os elementos de  $E$  podemos constatar que  $S_n$  é um grupo com  $n!$  elementos.

Ainda, um elemento  $f \in S_n$  é indicado por

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix},$$

onde  $i_r = f(r)$ , com  $r$  variando entre 1 e  $n$ .

Para efetuar a composição de dois elementos  $f, g \in S_n$ , digamos

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix}, f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_n \end{pmatrix}.$$

Procedemos da seguinte maneira:  $(f \circ g)(r) =$

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & i_r & \cdots & n \\ j_1 & \cdots & j_{i_r} & \cdots & j_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \cdots & r & \cdots & n \\ i_1 & \cdots & i_r & \cdots & i_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdots & r & \cdots \\ \cdots & j_{i_r} & \cdots \end{pmatrix},$$

pois  $(f \circ g)(r) = f(g(r)) = f(i_r) = j_{i_r}$ , para todo  $r \in \{1, \dots, n\}$ .

Observe que, se  $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix}$ , então  $f^{-1} = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$ .

De fato:

$$(f^{-1} \circ f)(r) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & r & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & r & \cdots & n \end{pmatrix} = i_{d_{S_n}}(r) = (f \circ f^{-1})(r).$$

**Definição 2.3.** Dizemos que um grupo  $(G, *)$  é finito se o conjunto  $G$  é finito. O número de elementos de  $G$  é chamado de ordem do grupo  $G$  e denotado por  $o(G)$ .

**Exemplo 2.15.**  $(\{1, -1\}, \cdot)$ , onde  $\cdot$  denota a multiplicação usual dos números inteiros, é um grupo finito de ordem 2 e sua tabela de operações é dada por:

|         |    |    |
|---------|----|----|
| $\cdot$ | 1  | -1 |
| 1       | 1  | -1 |
| -1      | -1 | 1  |

Tabela 2.1: Tabela  $G = \{1, -1\}$

Podemos verificar que  $(\{1, -1\}, \cdot)$  é um grupo através dos seguintes cálculos

(a) A propriedade associativa é válida, pois

$$1 \cdot (1 \cdot 1) = 1 \cdot 1 = (1 \cdot 1) \cdot 1.$$

$$(-1) \cdot [(-1) \cdot (-1)] = (-1) \cdot 1 = (-1) = 1 \cdot (-1) = [(-1) \cdot (-1)] \cdot (-1).$$

$$(-1) \cdot (1 \cdot 1) = (-1) \cdot 1 = (-1) = 1 \cdot (-1) = (1 \cdot 1) \cdot (-1).$$

$$1 \cdot [(-1) \cdot 1] = 1 \cdot (-1) = (-1) = (-1) \cdot 1 = [(-1) \cdot 1] \cdot 1.$$

$$1 \cdot [1 \cdot (-1)] = 1 \cdot (-1) = (-1) = (1 \cdot 1) \cdot (-1).$$

$$1 \cdot [(-1) \cdot (-1)] = 1 \cdot 1 = 1 = (-1) \cdot (-1) = [(-1) \cdot (-1)] \cdot 1.$$

$$(-1) \cdot [(-1) \cdot 1] = (-1) \cdot (-1) = 1 = (-1) \cdot (-1) = [(-1) \cdot (-1)] \cdot 1.$$

$$(-1) \cdot [1 \cdot (-1)] = (-1) \cdot (-1) = 1 = (-1) \cdot (-1) = [(-1) \cdot 1] \cdot (-1).$$

(b)  $\exists 1 \in G \mid (-1) \cdot 1 = 1 \cdot (-1) = -1$ . Ainda,

$$1 \cdot 1 = 1 = 1 \cdot 1.$$

Portanto, 1 é o elemento identidade.

(c) Para  $1 \in G, \exists 1 \in G \mid 1 \cdot 1 = 1$ .

Para  $-1 \in G, \exists -1 \in G \mid (-1) \cdot (-1) = 1$ . Portanto, todo elemento de  $G$  tem inverso.

Logo  $(\{1, -1\}, \cdot)$  é um grupo. E ainda satisfaz,

$$(-1) \cdot (-1) = 1 = (-1) \cdot (-1).$$

$$1 \cdot (-1) = -1 = (-1) \cdot 1.$$

$$1 \cdot 1 = 1 = 1 \cdot 1.$$

$$(-1) \cdot 1 = -1 = 1 \cdot (-1).$$

Portanto,  $(\{-1, 1\}, \cdot)$  é um grupo comutativo.

**Exemplo 2.16.** Como exemplo de grupo finito com aplicação geométrica temos o Grupo Diedral.

Seja  $P_n$  um polígono regular com  $n$ -lados, qualquer. Consideramos no plano do polígono um sistema ortogonal de coordenadas cartesianas de maneira que sua origem seja o centro de  $P_n$  e o eixo- $x$  contenha um de seus vértices o qual indicamos pelo símbolo 1. Os vértices consecutivos serão indicados por  $2, 3, \dots, n$ , respectivamente, no sentido anti-horário, como na figura a seguir:

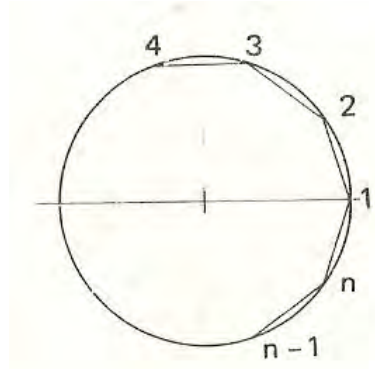


Figura 2.1: Polígono Inscrito

Considere  $D_n$  o conjunto formado pelos movimentos rígidos em um polígono regular de  $n$  lados e  $\circ$  a operação composição de movimentos. O par  $(D_n, \circ)$  é um grupo de ordem  $2n$  dado por,

$$D_n = \{e, r, r^2, \dots, r^{n-1}, s, rs, r^2s, \dots, r^{n-1}s\},$$

onde a operação  $r \circ s$  é abreviada por  $rs$  e, os movimentos  $r, s \in D_n$  são tais que  $r$  é uma rotação de  $\frac{2\pi}{n}$  em torno da origem (após  $n$  rotações com este ângulo o polígono volta a sua posição inicial) e  $s$  é uma reflexão em torno do eixo- $x$ .

Ainda,  $D_n$  é gerado pelo conjunto  $X = \{r, s \in D_n : r^n = e, s^2 = e, srs = r^{-1}\}$ , ou seja,

$$\{e, r, r^2, \dots, r^{n-1}, s, rs, r^2s, \dots, r^{n-1}s\} = \langle \{r, s \in D_n : r^n = e, s^2 = e, srs = r^{-1}\} \rangle$$

Para o caso  $n = 3$ , temos que  $D_3 = \{e, r, r^2, s, rs, r^2s\}$  é o conjunto de movimentos rígidos em um triângulo equilátero, com  $r$  uma rotação de  $\frac{2\pi}{3}$  em torno da origem e  $s$  uma reflexão em torno do eixo- $x$ , então o par  $(D_3, \circ)$  é um grupo. De fato: primeiramente, da associatividade da operação composição segue que vale a propriedade associativa para  $(D_3, \circ)$ , em particular, para a rotação temos que:  $r^u r^v = r^{u+v}$ , consequentemente,  $r^t(r^u r^v) = r^t(r^{u+v}) = r^{t+(u+v)} = r^{(t+u)+v} = r^{t+u} r^v = (r^t r^u) r^v$ . O elemento identidade,  $e$ , desta operação é o movimento que deixa o polígono na sua posição inicial, consequentemente  $e$  é tal que  $r^3 = e$  e  $s^2 = e$ . O elemento inverso de  $r$ ,  $r^{-1}$ , é o movimento  $r^2$  já que  $rr^2 = r^2r = r^3 = e$ . Destas propriedades mencionadas segue a tabela de operações entre os elementos de  $D_3$ :

|         |        |        |        |        |        |        |
|---------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $\circ$ | $e$    | $r$    | $r^2$  | $s$    | $rs$   | $r^2s$ |
| $e$     | $e$    | $r$    | $r^2$  | $s$    | $rs$   | $r^2s$ |
| $r$     | $r$    | $r^2$  | $e$    | $rs$   | $r^2s$ | $s$    |
| $r^2$   | $r^2$  | $e$    | $r$    | $r^2s$ | $s$    | $rs$   |
| $s$     | $s$    | $r^2s$ | $rs$   | $e$    | $r^2$  | $r$    |
| $rs$    | $rs$   | $s$    | $r^2s$ | $r$    | $e$    | $r^2$  |
| $r^2s$  | $r^2s$ | $rs$   | $s$    | $r^2$  | $r$    | $e$    |

Tabela 2.2: Tabela  $D_3$ 

Veja que a partir desta tabela podemos determinar o elemento inverso de cada elemento de  $D_3$ , a saber:

$$e^{-1} = e, \quad r^{-1} = r^2, \quad (r^2)^{-1} = r, \quad s^{-1} = s, \quad (rs)^{-1} = rs, \quad (r^2s)^{-1} = r^2s \quad (*)$$

A tabela foi determinada dos seguintes cálculos:

- Qualquer elemento operado com  $e$  é ele próprio.

- Operando  $r$  com os demais elementos temos:

$$rr = r^2.$$

$$rr^2 = r^3 = e.$$

$$rrs = r^2s.$$

$$rr^2s = r^3s = es = s.$$

- Operando  $r^2$  com os demais elementos temos

$$r^2r = r^3 = e.$$

$$r^2r^2 = rrr^2 = rr^3 = re = r.$$

$$r^2rs = r^3s = es = s.$$

$$r^2r^2s = rrr^2s = rr^3s = res = rs.$$

- Operando o elemento  $s$  com os demais elementos temos:

Analisemos primeiro o produto  $sr$ . Temos que  $sr s = r^{-1}$ . Aplicando  $s^{-1}$  de ambos os lados temos:

$$sr s s^{-1} = r^{-1} s^{-1} \xRightarrow{(*)} sr s s^{-1} = r^{-1} s \Rightarrow sre = r^{-1} s \Rightarrow sr = r^{-1} s \xRightarrow{(*)} sr = r^2 s.$$

Portanto,

$$sr = r^2 s \quad (**).$$

Agora,

$$sr^2 = srr \stackrel{(**)}{=} r^2 sr \stackrel{(**)}{=} r^2 r^2 s = r^3 rs = ers = rs. \text{ Portanto,}$$

$$sr^2 = rs \quad (** *).$$

Ainda, como  $srsr = e$  segue que

$$srs = r^{-1} \quad (I).$$

Logo,

$$srs = r^2.$$

E,

$$sr^2s \stackrel{(***)}{=} rss = rs^2 = re = r.$$

- Operando o elemento  $rs$  com os demais elementos temos:

$$rsr \stackrel{(**)}{=} rr^2s = es = s.$$

$$rsr^2 \stackrel{(***)}{=} rrs = r^2s.$$

$$rss = rs^2 = re = r.$$

$$rsrs \stackrel{(I)}{=} rr^{-1} = e.$$

$$rsr^2s \stackrel{(***)}{=} rrss = r^2s^2 = r^2e = r^2.$$

- Operando o elemento  $r^2s$  com os demais elementos temos:

$$r^2sr \stackrel{(**)}{=} r^2r^2s = rs.$$

$$r^2sr^2 \stackrel{(***)}{=} r^2rs = es = s.$$

$$r^2ss = r^2s^2 = r^2e = r^2.$$

$$r^2srs = r^2r^{-1} = re = r.$$

$$r^2sr^2s \stackrel{(***)}{=} r^2rss = es^2 = e.$$

Portanto, para o par  $(D_3, \circ)$  valem as propriedades: associativa, elemento identidade e elemento inverso, ou seja,  $(D_3, \circ)$  é um grupo.

Note que  $D_3 = \{e, r, r^2, s, rs, r^2s\}$  pois, qualquer outra combinação de movimento nos leva a um destes elementos novamente, por exemplo: se  $k > 3$ , temos então que  $k = 3q + p, 0 < p < 3$  e assim,  $r^k = r^{3q+p} = (r^3)^q r^p = r^p$ .

Sobretudo, veja que todos os cálculos feitos na construção da tabela foram derivados essencialmente das propriedades:  $r^3 = e$ ,  $s^2 = e$ ,  $srs = r^{-1}$ ; desta forma podemos concluir que  $D_3$  é gerado por seu subconjunto  $\{r, s \in D_3 : r^3 = e, s^2 = e, srs = r^{-1}\}$ .

Por fim temos, de acordo com a tabela, os seguintes conjuntos gerados por cada elemento:

$$\langle e \rangle = \{e\}.$$

$$\langle r \rangle = \{r, r^2, e\}.$$

$$\langle s \rangle = \{s, e\}.$$

$$\langle rs \rangle = \{rs, e\}.$$

$$\langle r^2s \rangle = \{r^2s, e\}.$$

Assim, o grupo  $D_3$  não é cíclico, pois nenhum dos elementos de  $D_3$  gera  $D_3$ .

De modo indutivo, segue que

$$\{e, r, r^2, \dots, r^{n-1}, s, rs, \dots, r^{n-1}s\} = D_n = \langle \{r, s : r^n = e, s^2 = e, srs = r^{-1}\} \rangle.$$

Para isto basta observarmos que os elementos do Grupo Diedral  $D_n$  podem ser obtidos da mesma forma como usada para  $D_3$ , levando em consideração que  $r^n = e$ ,  $s^2 = e$ ,  $srs = r^{n-1} = r^{-1}$ . Veja que cada elemento do grupo tem a forma  $r^a$  ou  $r^a s$  onde  $0 \leq a \leq n-1$  uma vez que  $r^a r^b = r^k$  e  $r^a(r^b s) = r^k s$ , com  $k = a +_n b$ , e ainda,  $(r^a s)r^b = r^l s$  e  $(r^a s)(r^b s) = r^l$ , com  $l = a +_n (n - b)$ , onde  $+_n$  é a notação para a soma módulo  $n$ .

**Exemplo 2.17.** Grupo das Simetrias do Quadrado  $Q$ .

Seja  $Q$  um quadrado pertencente a um plano  $\mathbb{R}^2$  com centro na origem e lados paralelos aos eixos  $OX$  e  $OY$ . O quadrado  $Q$  retorna a sua posição inicial a partir dos seguintes movimentos rígidos:

- $R_0$ :  $R_0(x, y) := (x, y), \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Função identidade.
- $R_1$ :  $R_1(x, y) := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (-y, x)$ . Rotação no sentido anti-horário de  $\frac{\pi}{2}$  graus radianos em torno da origem.
- $R_2$ :  $R_2(x, y) := \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (-x, -y)$ . Rotação no sentido anti-horário de  $\pi$  graus radianos em torno da origem.
- $R_3$ :  $R_3(x, y) := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (y, -x)$ . Rotação no sentido anti-horário de  $\frac{3\pi}{2}$  graus radianos em torno da origem.
- $X$ :  $X(x, y) := (x, -y)$ . Simetria em relação ao eixo  $OX$ .
- $Y$ :  $Y(x, y) := (-x, y)$ . Simetria em relação ao eixo  $OY$ .
- $D_1$ :  $D_1(x, y) := (y, x)$ , Simetria em relação à reta  $D_1$  que contém a bissetriz do primeiro quadrante.
- $D_2$ :  $D_2(x, y) := (-y, -x)$ . Simetria em relação à reta  $D_2$  que contém a bissetriz do segundo quadrante.

Assim obtemos o grupo  $(G, \circ)$ , onde  $G = \{R_0, R_1, R_2, R_3, X, Y, D_1, D_2\}$  e “ $\circ$ ” a composição de quaisquer dois elementos de  $G$  que resultará em um elemento de  $G$  como vemos:

---

<sup>4</sup>Seja  $n > 1$  um inteiro e indiquemos por  $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$  o sistema completo de restos mínimos positivos, módulo  $n$ . Se  $x, y \in \mathbb{Z}_n$ , entendemos por soma módulo  $n$  de  $x$  com  $y$ ,  $+_n$  o resto da divisão euclidiana de  $x + y$  por  $n$ .

- (i) A operação de qualquer elemento com a identidade  $R_0$  resultará no próprio elemento.
- (ii) Operando  $R_1$  com os demais elementos:
- $R_1 \circ R_1(x, y) = R_1(-y, x) = (-x, -y) = R_2(x, y);$
  - $R_1 \circ R_2(x, y) = R_1(-x, -y) = (y, -x) = R_3(x, y);$
  - $R_1 \circ R_3(x, y) = R_1(y, -x) = (x, y) = R_0(x, y);$
  - $R_1 \circ X(x, y) = R_1(x, -y) = (y, x) = D_1(x, y);$
  - $R_1 \circ Y(x, y) = R_1(-x, y) = (-y, -x) = D_2(x, y);$
  - $R_1 \circ D_1(x, y) = R_1(y, x) = (-x, y) = Y(x, y);$
  - $R_1 \circ D_2(x, y) = R_1(-y, -x) = (x, -y) = X(x, y);$
- (iii) Procedendo com os demais cálculos obtemos a tabela 2.5.

| $\circ$ | $R_0$ | $R_1$ | $R_2$ | $R_3$ | $X$   | $Y$   | $D_1$ | $D_2$ |
|---------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $R_0$   | $R_0$ | $R_1$ | $R_2$ | $R_3$ | $X$   | $Y$   | $D_1$ | $D_2$ |
| $R_1$   | $R_1$ | $R_2$ | $R_3$ | $R_0$ | $D_1$ | $D_2$ | $Y$   | $X$   |
| $R_2$   | $R_2$ | $R_3$ | $R_0$ | $R_1$ | $Y$   | $X$   | $D_2$ | $D_1$ |
| $R_3$   | $R_3$ | $R_0$ | $R_1$ | $R_2$ | $D_2$ | $D_1$ | $X$   | $Y$   |
| $X$     | $X$   | $D_2$ | $Y$   | $D_1$ | $R_0$ | $R_2$ | $R_3$ | $R_1$ |
| $Y$     | $Y$   | $D_1$ | $X$   | $D_2$ | $R_2$ | $R_0$ | $R_1$ | $R_3$ |
| $D_1$   | $D_1$ | $X$   | $D_2$ | $Y$   | $R_1$ | $R_3$ | $R_0$ | $R_2$ |
| $D_2$   | $D_2$ | $Y$   | $D_1$ | $X$   | $R_3$ | $R_1$ | $R_2$ | $R_0$ |

Tabela 2.3: Tabela  $Q$ 

Como os elementos de  $G$  são permutações no plano  $\mathbb{R}^2$  temos que a operação composição “ $\circ$ ” é associativa. Pela tabela podemos verificar que  $R_0$  é o elemento neutro e que todo elemento de  $G$  possui elemento inverso, a saber:  $R_0$  é o elemento inverso de  $R_0$ ,  $R_3$  é o elemento inverso de  $R_1$ ,  $R_2$  é o elemento inverso de  $R_2$ ,  $X$  é o elemento inverso de  $X$ ,  $Y$  é o elemento inverso de  $Y$ ,  $D_1$  é o elemento inverso de  $D_1$  e  $D_2$  é o elemento inverso de  $D_2$ .

**Observação 2.2.** De forma análoga podemos fazer as seguintes considerações sobre um retângulo.

1.  $x$  e  $y$  são eixos de reflexão.

2. Para as diagonais a simetria se dá através da meia volta em torno da origem.
3.  $\sigma_h(x, y) = (x, -y)$ , reflexão horizontal.
4.  $\sigma_v(x, y) = (-x, y)$ , reflexão vertical.
5.  $\sigma_o(x, y) = (-x, -y)$ , antípoda.
6.  $i_d(x, y) = (x, y)$ .

Estas quatro isometrias constituem o Grupo  $(V_4, \circ)$ , onde  $V_4 = \{\sigma_h, \sigma_v, \sigma_o, i_d\}$ .  
Através deste obtemos a seguinte tabela:

|            |            |            |            |            |
|------------|------------|------------|------------|------------|
| $\circ$    | $i$        | $\sigma_h$ | $\sigma_v$ | $\sigma_o$ |
| $i$        | $i$        | $\sigma_h$ | $\sigma_v$ | $\sigma_o$ |
| $\sigma_h$ | $\sigma_h$ | $i$        | $\sigma_o$ | $\sigma_v$ |
| $\sigma_v$ | $\sigma_v$ | $\sigma_o$ | $i$        | $\sigma_h$ |
| $\sigma_o$ | $\sigma_o$ | $\sigma_v$ | $\sigma_h$ | $i$        |

Tabela 2.4: Tabela  $V_4$

Observe pela tabela que o par  $(V_4, \circ)$  tem a estrutura de grupo abeliano.

## 2.2 Subgrupo

**Definição 2.4.** *Seja  $(G, *)$  um grupo. Dizemos que um subconjunto não vazio  $H \subset G$  é um subgrupo de  $G$  se, e somente se,*

$$(i) \quad \forall a, b \in H \Rightarrow a * b \in H;$$

$$(ii) \quad (H, *) \text{ tem estrutura de grupo.}$$

**Teorema 2.1.** *Para que um subconjunto não vazio  $H \subset G$  seja subgrupo de um grupo  $(G, *)$ , é necessário e suficiente que*

$$\forall a, b \in H \Rightarrow a * \bar{b} \in H,$$

onde  $\bar{b}$  é o elemento inverso de  $b$ .

*Demonstração.*

( $\implies$ ) Por hipótese, temos que  $H$  é um subgrupo de  $G$ , isto é, para quaisquer  $a, b \in H$  temos que  $a * b \in H$ , e também que  $(H, *)$  tem estrutura de grupo.

Queremos mostrar que para quaisquer  $a, b \in H$ , temos que  $a * \bar{b} \in H$ .

Primeiramente, mostramos que  $e_H = e_G$ , onde  $e_H$  é o elemento identidade de  $H$  e  $e_G$  é o elemento identidade de  $G$ . De fato, como  $e_H$  é o elemento identidade de  $H$  temos que  $e_H * e_H = e_H$ , por outro lado, como  $e_H \in H \subset G$ , segue que  $e_H * e_G = e_H$ . Logo,

$$e_H * e_H = e_H = e_H * e_G.$$

Assim, pela lei do cancelamento em  $G$ ,

$$e_H = e_G.$$

Denotamos  $e_H = e_G := e$ .

Também pela lei do cancelamento segue que, para cada  $a \in H$  temos  $\bar{a}_H = \bar{a}$ , onde  $\bar{a}_H$  é o elemento inverso de  $a$  em  $H$  e  $\bar{a}$  é o elemento inverso de  $a$  em  $G$ . Com efeito,

$$a * \bar{a}_H = e_H = e_G = a * \bar{a}.$$

Logo,  $\bar{a}_H = \bar{a}$ .

Consequentemente, para quaisquer  $a, b \in H$ , temos que

$$a * \bar{b} = a * \bar{b}_H \in H.$$

( $\impliedby$ ) Temos por hipótese que para todo  $a, b \in H, a * \bar{b} \in H$ . Então,  $e \in H$ , já que  $e = a * \bar{a} \in H, \forall a \in H$ .

Como  $e * a = a = a * e$ , para qualquer  $a \in H \subset G$ , segue que  $e$  é o elemento identidade para  $(H, *)$ .

Também, para cada  $b \in H, \bar{b} \in H$ , pois

$$\bar{b} = e * \bar{b} \in H.$$

E para cada  $b \in H \subset G$ ,

$$b * \bar{b} = e = \bar{b} * b.$$

$\therefore \bar{b}$  é o elemento inverso de  $b$  em  $(H, *)$ .

Em particular, dados  $a, b \in H$ , como  $\bar{b} \in H$ , segue por hipótese que

$$a * b = a * \bar{\bar{b}} \in H.$$

Finalmente, a propriedade associativa para  $H$  é válida uma vez que  $G$  é um grupo e  $H \subset G$ .  $\square$

**Observação 2.3.** Todo grupo  $G$  admite pelo menos dois subgrupos a saber,  $G$  e  $\{e\}$ , chamados de subgrupos triviais de  $G$ .

**Observação 2.4.** Lembramos que, para um determinado elemento  $b$ , a notação de seu oposto  $\bar{b}$  será  $b^{-1}$ , para grupos multiplicativos e  $-b$ , para grupos aditivos.

**Exemplo 2.18.** Para o Grupo Multiplicativo dos Reais não nulos  $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ , tomemos  $H = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ .

Sejam  $a, b \in H$ . Como  $b > 0$ , então  $\bar{b} = b^{-1} = \frac{1}{b} > 0$  e igualmente  $ab^{-1} > 0$ . Assim  $ab^{-1} \in H$  e, portanto,  $H$  é subgrupo.

**Exemplo 2.19.** Seja agora o Grupo Aditivo dos Reais  $(\mathbb{R}, +)$  e tomemos o subconjunto  $\mathbb{Z}$  dos inteiros. Então,

$$\forall a, b \in \mathbb{Z} \implies a + (-b) = a - b \in \mathbb{Z}.$$

Portanto,  $(\mathbb{Z}, +)$  é subgrupo.

**Exemplo 2.20.** Seja  $(\mathbb{R}^n, +)$  Grupo Aditivo de vetores de  $n$  coordenadas reais. O subconjunto  $A$  consistindo de todos os vetores que tem 0 como a primeira coordenada é subgrupo de  $\mathbb{R}^n$ .

Sejam  $a = (0, x_2, \dots, x_n), b = (0, y_2, \dots, y_n) \in A$  então  $-b = (0, -y_2, \dots, -y_n)$  e assim

$$a - b = (0, x_2, \dots, x_n) + (0, -y_2, \dots, -y_n) = (0, x_2 - y_2, \dots, x_n - y_n) \in A.$$

**Exemplo 2.21.** Para cada  $z = x + yi \in \mathbb{C}$  definimos como a norma de  $z$  o número real positivo  $|z|_{\mathbb{C}} = \sqrt{x^2 + y^2}$ . O conjunto  $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z|_{\mathbb{C}} = 1\}$  um subgrupo de  $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ .

De fato, temos que  $1 \in S^1$  e para quaisquer  $z = x_1 + y_1i, z' = x_2 + y_2i$  em  $S^1$ , temos ainda

$$\begin{aligned} zz' &= (x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1y_2 + y_1x_2)i \Rightarrow |zz'|_{\mathbb{C}}^2 = (x_1x_2 - y_1y_2)^2 + (x_1y_2 + y_1x_2)^2 = \\ &= (x_1x_2)^2 - 2x_1x_2y_1y_2 + (y_1y_2)^2 + (x_1y_2)^2 + 2x_1y_2y_1x_2 + (y_1x_2)^2 = \\ &= x_1^2(x_2^2 + y_2^2) + y_1^2(x_2^2 + y_2^2) = (x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2) = |z|_{\mathbb{C}}^2 |z'|_{\mathbb{C}}^2 = 1 \cdot 1 = 1. \end{aligned}$$

Portanto,  $zz' \in S^1$ .

Além disso, como  $z^{-1} = \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{y}{x^2 + y^2}i = \frac{\bar{z}}{|z|_{\mathbb{C}}^2}$ , onde  $\bar{z} = x_1 - y_1i$ , e  $|\bar{z}|_{\mathbb{C}} = |z|_{\mathbb{C}} = 1$ , temos

$$|z^{-1}|_{\mathbb{C}} = \left| \frac{\bar{z}}{|z|_{\mathbb{C}}^2} \right|_{\mathbb{C}} = \frac{|\bar{z}|_{\mathbb{C}}}{|z|_{\mathbb{C}}^2} = \frac{1}{1} = 1.$$

Portanto,  $z^{-1} \in S^1$ .

No próximo capítulo trataremos mais profundamente propriedades da norma  $\|\cdot\|_{\mathbb{C}}$ .

A partir de agora, no intuito de simplificar a notação, admitimos que  $G$  é um grupo multiplicativo.

**Definição 2.5.** *Seja  $H$  um subgrupo de um grupo  $G$ . Então, o subgrupo de  $G$   $aH = \{ax \mid x \in H\}$ , é chamado classe lateral à esquerda módulo  $H$ . Analogamente,  $Ha = \{xa \mid x \in H\}$ , é a classe lateral à direita módulo  $H$ .*

**Exemplo 2.22.** Sejam o grupo  $G = (\{1, i, -1, -i\}, \cdot)$  e seu subgrupo  $H = \{1, -1\}$ . Para encontrar as classes laterais à esquerda basta fazermos os seguintes cálculos:

$$1 \cdot H = \{1 \cdot 1, 1 \cdot (-1)\} = \{1, -1\} = H \quad 1 = H.$$

$$(-1)H = \{(-1) \cdot 1, (-1) \cdot (-1)\} = \{-1, 1\} = H \quad (-1) = H.$$

$$i \cdot H = \{i \cdot 1, i \cdot (-1)\} = \{i, -i\}.$$

$$(-i)H = \{(-i) \cdot 1, (-i) \cdot (-1)\} = \{-i, i\} = iH.$$

Portanto, as classes laterais à esquerda módulo  $H$  são:  $H$  e  $\{-i, i\}$ .

No que segue exploramos propriedades de classes laterais que, embora sejam enunciadas usando classes laterais à esquerda, todas são válidas para classes laterais à direita (as demonstrações são análogas).

**Proposição 2.2.** *A união de todas as classes laterais módulo  $H$  é igual a  $G$ .*

*Demonstração.* Queremos mostrar que

$$\bigcup_{a \in G} aH = G.$$

Façamos isto.

$$(i) \quad \bigcup_{a \in G} aH \subseteq G.$$

Seja  $x \in \bigcup_{a \in G} aH$ , qualquer, então  $x \in a_0H$ , para algum  $a_0 \in G$ . Consequentemente, existe  $h \in H$  tal que  $x = a_0h$ . Mas,  $a_0h \in G$ , logo  $x = a_0h \in G$ . Portanto,

$$\bigcup_{a \in G} aH \subseteq G.$$

$$(ii) \quad G \subseteq \bigcup_{a \in G} aH.$$

Seja  $a_0 \in G$ , qualquer. Observe que, como  $G$  é um grupo, temos que  $a_0 = a_0e$ , onde  $e$  denota o elemento neutro de  $G$ . Mas  $e$  pertence a  $H$ , já que  $H$  é subgrupo de  $G$ . Assim,

$$a_0 = a_0e \in a_0H.$$

Por sua vez,

$$a_0H \subset \bigcup_{a \in G} aH.$$

Logo,  $a_0 \in \bigcup_{a \in G} aH$ .

Portanto,  $G \subseteq \bigcup_{a \in G} aH$ .

Consequentemente, por (i) e (ii) segue que

$$G = \bigcup_{a \in G} aH.$$

□

**Proposição 2.3.** *Seja  $G$  um grupo. Para quaisquer  $a, b \in G$ :*

$$aH = bH \Leftrightarrow a^{-1}b \in H.$$

*Demonstração.* ( $\Rightarrow$ ) Suponha que  $aH = bH$ . Sabemos pela proposição 2.2 que  $a$  pertence a  $aH$ , mas  $aH = bH$ , logo  $a \in bH$ . Disto segue que

$$a = bh, \quad \text{para algum } h \in H.$$

Mas,

$$a = bh \Rightarrow a^{-1}b = h^{-1} \in H.$$

Portanto,  $a^{-1}b \in H$ .

( $\Leftarrow$ ) Suponha  $a^{-1}b \in H$ , então existe  $h \in H$  tal que  $a^{-1}b = h$ .

Logo,

$$a = bh^{-1} \quad \text{e} \quad b = ah. \tag{I}$$

Mostremos agora que  $aH = bH$ .

(i)  $aH \subset bH$ . Se  $y \in aH$ , qualquer, então

$$y = ah_1 \stackrel{I}{=} (bh^{-1})h_1 = b(h^{-1}h_1) \in bH,$$

já que  $h^{-1}h_1 \in H$ , pois  $H$  é subgrupo de  $G$ .

Portanto,  $aH \subset bH$ .

(ii)  $bH \subset aH$ . Se  $y \in bH$ , qualquer, então

$$y = bh_2, \text{ para algum } h_2 \in H.$$

Assim,

$$y = bh_2 \stackrel{I}{=} (ah)h_2 = a(hh_2) \in aH,$$

pois  $hh_2 \in H$  uma vez que  $H$  é subgrupo de  $G$ .

Portanto,  $bH \subset aH$ .

Assim, por (i) e (ii), segue que

$$aH = bH.$$

□

**Proposição 2.4.** *Se  $aH$  e  $bH$  são duas classes laterais à esquerda módulo  $H$ , então*

$$aH \cap bH = \emptyset \text{ ou } aH = bH.$$

*Demonstração.* Suponha que  $aH \cap bH \neq \emptyset$ , logo existe  $x \in aH \cap bH$ , ou seja

$$x \in aH \text{ e } x \in bH.$$

Disto segue que existem  $h_1, h_2 \in H$  tais que

$$ah_1 = x = bh_2.$$

Mas,

$$ah_1 = bh_2 \Rightarrow a^{-1}b = h_1h_2^{-1},$$

com  $h_1h_2^{-1} \in H$ , pois  $H$  é subgrupo de  $G$ . Isto é,  $a^{-1}b \in H$ .

Com isto, pela proposição 2.3, segue que

$$aH = bH.$$

Portanto, por dicotomia da igualdade,

$$aH \cap bH = \emptyset \text{ ou } aH = bH.$$

□

**Observação 2.5.** Pelas proposições 2.2, 2.4, 2.3 segue que o conjunto das classes laterais à esquerda módulo  $H$  forma uma partição<sup>5</sup> em  $G$ .

**Definição 2.6.** Dizemos que um subgrupo  $N$  de um grupo  $G$  é um subgrupo normal quando satisfaz a seguinte propriedade

$$xN = Nx, \forall x \in G,$$

Notação:  $H \triangleleft G$ .

**Proposição 2.5.** Um subgrupo  $N$  de um grupo  $G$  é normal se, e somente se,  $\forall n \in N, a \in G$  temos  $a^{-1}na \in N$ .

*Demonstração.* ( $\Rightarrow$ ) Supondo  $N \triangleleft G$ , temos que:  $aN = Na, \forall a \in G$ .

Agora, se  $n \in N$  é qualquer, então:

$$na \in Na = aN \Rightarrow na = an', \text{ para algum } n' \in N \Rightarrow$$

$$a^{-1}na = a^{-1}an' \Rightarrow a^{-1}na = n' \in N \Rightarrow a^{-1}na \in N.$$

( $\Leftarrow$ )

(i)  $aN \subseteq Na$ .

Seja  $x \in aN$ , qualquer. Então  $x = an$ , para algum  $n \in N$ . Temos por hipótese que  $xa^{-1} = ana^{-1} \in N$ . Assim, como  $xa^{-1} \in N$ , temos que  $xa^{-1} = n'$  para algum  $n' \in N$  e isto implica em  $x = xe = x(a^{-1}a) = (xa^{-1})a = n'a \in Na$ . Portanto,  $x \in Na$ .

(ii)  $Na \subseteq aN$ .

Se  $x \in Na$  é qualquer, então  $x = na$ , para algum  $n \in N$ . Por hipótese temos que  $a^{-1}x = a^{-1}na \in N$ . Desde que  $a^{-1}x \in N$ , temos  $a^{-1}x = n'$  para algum  $n' \in N$ . Logo,  $x = aa^{-1}x = an' \in aN$ .

□

**Exemplo 2.23.** Sejam  $G = \{1, i, -1, -i\}$  e  $H = \{1, -1\}$  como no exemplo 2.22, definimos a operação  $xH * yH = xyH, \forall x, y \in G$ . Então temos a seguinte tabela

Portanto,  $H$  é um subgrupo normal de  $G$ .

---

<sup>5</sup>Seja  $E$  um conjunto não vazio. Diz-se que uma coleção  $\mathcal{F}$  de subconjuntos não vazios de  $E$  é uma partição de  $E$  se, e somente se:

- (a) Dois membros quaisquer de  $\mathcal{F}$  ou são iguais ou são disjuntos.
- (b) A união dos membros de  $\mathcal{F}$  é igual a  $E$ .

|      |      |      |
|------|------|------|
| *    | $H$  | $iH$ |
| $H$  | $H$  | $iH$ |
| $iH$ | $iH$ | $H$  |

Tabela 2.5: Tabela Subgrupo Normal

**Lema 2.1.** *Se o grupo  $G$  é abeliano, então todo subgrupo de  $G$  é normal.*

*Demonstração.* Seja  $N$  um subgrupo de  $G$ , qualquer.

Para quaisquer  $a \in G$  e  $n \in N$  temos por hipótese que  $na = an$ . Assim, temos  $a^{-1}na = a^{-1}(na) = a^{-1}(an) = (a^{-1}a)n = en = n \in N$  e, portanto,  $a^{-1}na \in N$ .

Desta maneira,  $a^{-1}na \in N$ , para todo  $a \in G$ . Logo, pela proposição anterior,  $N \triangleleft G$ .  $\square$

## 2.3 Grupo Quociente

**Definição 2.7.** *Sejam  $(G, \cdot)$  um grupo e  $N \triangleleft G$ . Definimos o grupo quociente,  $G/N$ , como o seguinte conjunto:*

$$G/N := \{aN, a \in G\},$$

*munido da operação:*

$$* : G/N \times G/N \longrightarrow G/N$$

$$(aN, bN) \longmapsto (aN) * (bN) := (ab)N.$$

Uma vez que  $G$  é um grupo segue que  $ab \in G$ , logo  $(ab)N \in G/N$ , isto é, a operação acima é binária e é bem definida, conforme vemos a seguir

Sejam  $(aN, bN), (a'N, b'N) \in G/N \times G/N$ , tais que

$$(aN, bN) = (a'N, b'N).$$

Temos,

$$(aN) * (bN) := (ab)N.$$

e

$$(a'N) * (b'N) := (a'b')N.$$

Queremos mostrar que  $(ab)N = (a'b')N$ , o que é equivalente a  $(ab)^{-1}a'b' \in N$ .

Por hipótese,

$$\begin{cases} aN = a'N \\ bN = b'N \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^{-1}a' \in N \Rightarrow a^{-1}a' = n_1, n_1 \in N \\ b^{-1}b' \in N \Rightarrow b^{-1}b' = n_2, n_2 \in N \end{cases} \quad (I).$$

Agora,

$$(ab)^{-1}a'b' = (b^{-1}a^{-1})a'b' = b^{-1}(a^{-1}a')b' = b^{-1}n_1b' \quad (II).$$

Como  $N$  é normal, segue que  $b'N = Nb'$ , consequentemente, como temos que  $n_1b' \in Nb' = b'N$ , segue que existe  $n_3 \in N$  tal que:

$$n_1b' = b'n_3 \quad (III).$$

Substituindo (III) em (II) e usando (I) segue que

$$(ab)^{-1}a'b' = b^{-1}(n_1b') = b^{-1}(b'n_3) = (b^{-1}b')n_3 = n_2n_3 \in N.$$

Portanto,  $(ab)^{-1}a'b' \in N$ .

**Lema 2.2.**  $(G/N, *)$  é um grupo.

*Demonstração.* Já sabemos que a operação  $\cdot$  está bem definida.

Verifiquemos a associatividade e a existência dos elementos identidade e inverso.

$$(i) \text{ Se } a, b, c \in G, \text{ então } (aN) * [(bN) * (cN)] = (aN) * ((bc)N) = (a(bc))N = ((ab)c)N = ((ab)N) * (cN) = [(aN) * (bN)] * (cN).$$

(ii) Assumindo  $e$  elemento identidade de  $G$ , então temos como elemento identidade de  $G/N$  a classe  $eN$ , pois para qualquer  $a \in G$  temos

$$(aN) * (eN) = (ae)N = aN = (ea)N = (eN) * (aN).$$

(iii) Dado  $b \in G$ , qualquer, o elemento inverso da classe  $bN$  é o elemento  $(b^{-1}N)$ :

$$(bN) * (b^{-1}N) = (bb^{-1})N = eN = (b^{-1}b)N = (b^{-1}N) * (bN).$$

□

**Observação 2.6.** (i) Dados  $G$  um grupo e  $N$  um subgrupo normal de  $G$ , existe uma função sobrejetora de  $G$  em  $G/N$ , a saber,

$$\begin{aligned} p: G &\rightarrow G/N . \\ a &\mapsto aN \end{aligned}$$

Note que de fato  $p$  é uma função sobrejetora, pois cada classe  $K$  em  $G/N$  é da forma  $xN$  para algum  $x \in G$ , logo, tomando  $x$  em  $G$ , temos  $p(x) = K$ .

- (ii) Veja que pela observação 2.5 o grupo quociente  $G/N$  é uma partição para o grupo  $G$ .

Após esta abordagem sobre conceitos algébricos envolvendo grupos, temos no próximo capítulo os conceitos topológicos e alguns tópicos sobre funções contínuas que servirão como prerequisites para o estudo de grupos topológicos.

## 3 Elementos de Topologia Geral

### 3.1 Espaço Topológico

Neste capítulo abordamos noções básicas sobre topologia geral. Definimos espaço topológico e topologias, bem como as topologias trivial, discreta, padrão e produto. Através da definição de base (e subbase) construímos a topologia gerada para uma base (ou subbase) em um determinado conjunto. Definimos subespaço topológico e espaço de Hausdorff e trabalhamos propriedades referentes a estes.

Também há uma seção abordando aplicações contínuas com vários exemplos e propriedades. Seguem também definição e exemplo de espaço quociente.

Detalhes sobre este assunto e demais considerações podem ser encontrados em [5, 4].

**Definição 3.1.** *Se  $X$  é um conjunto e  $\tau$  uma coleção de subconjuntos de  $X$  satisfazendo:*

- (a)  $\emptyset, X \in \tau$ ;
- (b) *União arbitrária de elementos de  $\tau$  pertence a  $\tau$ ;*
- (c) *Intersecção finita de elementos de  $\tau$  pertence a  $\tau$ .*

*Então, o par  $(X, \tau)$  é chamado espaço topológico e  $\tau$  é uma topologia para  $X$ .*

**Exemplo 3.1.** Se  $X$  é um conjunto não vazio e  $\tau = \{\emptyset, X\}$ , então  $(X, \tau)$  é um espaço topológico, pois  $\tau$  satisfaz todas as condições da definição acima. Esta topologia é chamada topologia indiscreta ou trivial.

**Exemplo 3.2.** Seja  $X$  um conjunto não vazio e denotemos por  $\wp(X)$  o conjunto das partes de  $X$ , ou seja, o conjunto formado por todos os subconjuntos de  $X$ . O par  $(X, \tau)$ , onde  $\tau = \wp(X)$  é um espaço topológico. A topologia  $\tau$  é denominada topologia discreta. Por exemplo, se  $X = \{a, b, c\}$ , então

$$\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\},$$

é a topologia discreta para  $X$ . Se  $X = \mathbb{Z}$ , então  $\tau = \wp(\mathbb{Z})$ .

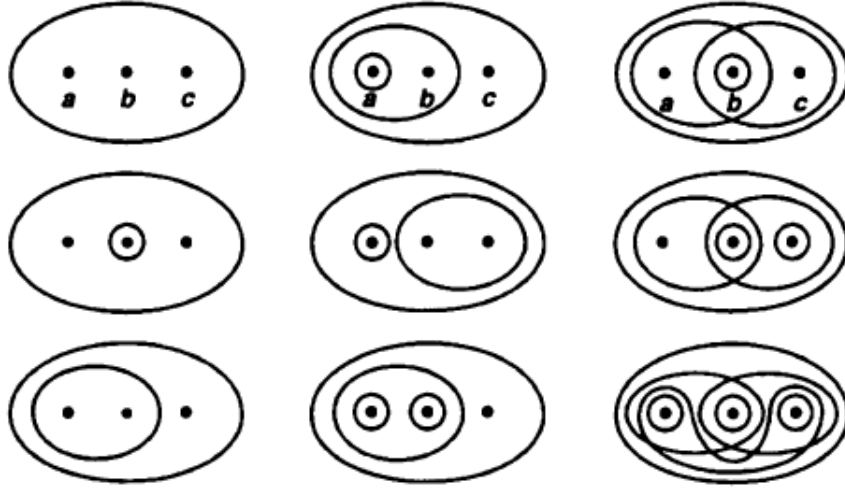


Figura 3.1: Topologia discreta

**Definição 3.2.** Se  $(X, \tau)$  é um espaço topológico, dizemos que um subconjunto  $U$  de  $X$  é um conjunto aberto de  $X$ , se  $U$  pertence a coleção  $\tau$ .

**Definição 3.3.** Se  $(X, \tau)$  é um espaço topológico, dizemos que um subconjunto  $F$  de  $X$  é um conjunto fechado de  $X$ , se o complementar de  $F$ ,  $\complement F$ , é um conjunto aberto para a topologia  $\tau$ .

**Observação 3.1.** Veja que, devido as leis de De Morgan<sup>1</sup> e as definições de topologia e de conjunto fechado, segue que interseção arbitrária e união finita de conjuntos fechados são conjuntos fechados em  $X$ . Também, segue que  $\emptyset, X$  são conjuntos fechados em  $X$ .

**Definição 3.4.** Sejam  $(X, \tau)$  um espaço topológico,  $x \in X$  um elemento de  $X$  e  $U$  um subconjunto de  $X$ . Dizemos que  $U$  é uma vizinhança de  $x$  se  $U$  é um conjunto aberto em  $X$  e  $x \in U$ .

**Definição 3.5.** Uma base  $\mathcal{B}$  para uma topologia  $\tau$  de  $X$  é uma subcoleção  $\mathcal{B}$  de  $\tau$ ,  $\mathcal{B} \subset \tau$ , onde

- (a) Para todo  $x \in X$ , existe  $B \in \mathcal{B}$  tal que  $x \in B$ .
- (b) Se  $x \in B_1 \cap B_2$ , com  $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ , então existe  $B_3 \in \mathcal{B}$  tal que  $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$ .

<sup>1</sup>Se  $\{A_i\}_{i \in I}$  é uma família de conjuntos (de um mesmo conjunto universo), então:

$$(1) \complement\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} \complement A_i;$$

$$(2) \complement\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcap_{i \in I} \complement A_i.$$

Os elementos de  $\mathcal{B}$  são chamados elementos básicos de  $X$ .

**Exemplo 3.3.** Se  $X$  é um conjunto não vazio qualquer, então a coleção de todos os subconjuntos unitários de elementos de  $X$ ,  $\{\{x\}, x \in X\}$ , é uma base para a topologia discreta de  $X$ .

**Lema 3.1.** Se  $\mathcal{B}$  é uma base para uma topologia  $\tau$  de  $(X, \tau)$  e  $\tau_{\mathcal{B}}$  é a coleção constituída pelo conjunto vazio e pelos subconjuntos  $U$  de  $X$  tais que para cada  $x \in U$  existe um elemento básico  $B$  com  $B \in \mathcal{B}$  tal que  $x \in B \subset U$ , então,  $\tau_{\mathcal{B}}$  é uma topologia para  $X$ , a qual denominamos topologia gerada por  $\mathcal{B}$ .

*Demonstração.* Mostremos que  $\tau_{\mathcal{B}}$  é de fato uma topologia para  $X$ .

(a)  $\emptyset$  e  $X$  pertencem a  $\tau_{\mathcal{B}}$ . De fato:

Se  $U = \emptyset$ , o resultado segue pela definição de  $\tau_{\mathcal{B}}$ . Para  $U = X$ , dado qualquer  $x \in X$ , temos que existe algum elemento básico  $B \in \mathcal{B}$  contendo  $x$  e contido em  $X$ , uma vez que  $X \in \tau$  e  $\mathcal{B}$  é uma base para  $\tau$ .

(b) Se  $\{U_{\alpha}\}_{\alpha \in J}$  é uma família de subconjuntos pertencentes a  $\tau_{\mathcal{B}}$ , então temos que  $U = \bigcup_{\alpha \in J} U_{\alpha} \in \tau_{\mathcal{B}}$ . Com efeito, dado  $x \in U$  temos que  $x \in U_{\alpha}$  para algum  $\alpha \in J$ .

Uma vez que  $U_{\alpha}$  pertence a  $\tau_{\mathcal{B}}$  e  $\mathcal{B}$  é uma base para  $\tau_{\mathcal{B}}$ , segue que existe um elemento básico  $B \in \mathcal{B}$  tal que  $x \in B \subset U_{\alpha} \subset \bigcup_{\alpha \in J} U_{\alpha} = U$ , isto é,  $x \in B$  e  $B \subset U$ . Logo,  $U \in \tau_{\mathcal{B}}$ .

(c) Se  $U_1, U_2, \dots, U_n$  são subconjuntos pertencentes a  $\tau_{\mathcal{B}}$ , então  $U = \bigcap_{i=1}^n U_i \in \tau_{\mathcal{B}}$ .

Mostraremos esta implicação apenas para o caso  $n = 2$ , já que o resultado segue pelo Princípio da Indução Finita.

Seja  $x \in U = U_1 \cap U_2$ , qualquer. Como  $x$  pertence a interseção, temos que  $x \in U_1$  e  $x \in U_2$ . Todavia,  $U_1$  e  $U_2$  pertencem a  $\tau_{\mathcal{B}}$ , consequentemente existem  $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$  tais que  $x \in B_1 \subset U_1$  e  $x \in B_2 \subset U_2$ , respectivamente. Assim, temos que  $x \in B_1 \cap B_2$  e  $B_1 \cap B_2 \subset U_1 \cap U_2$ .

Nestas condições, do item (b) da definição 3.5, temos que existe  $B_3 \subset \mathcal{B}$  tal que  $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2 \subset U_1 \cap U_2 = U$ . Portanto, existe  $B_3 \in \mathcal{B}$  tal que  $x \in B_3 \subset U$ , ou seja,  $U \in \tau_{\mathcal{B}}$ .

□

**Observação 3.2.** É possível mostrar que se  $(X, \tau)$  é um espaço topológico e  $\mathcal{B}$  é uma base para a topologia  $\tau$  então,  $\tau$  é igual a coleção de todas as uniões de elementos de  $\mathcal{B}$  (vide Lema 13.1, página 80 de [5]).

**Exemplo 3.4.** Dado um conjunto simplesmente ordenado é possível definir, por meio de sua relação de ordem, uma topologia para este. Esta topologia é denominada topologia da ordem. A saber, se  $(X, <)$  é um conjunto simplesmente ordenado <sup>2</sup> definimos os seguintes subconjuntos de  $X$ , chamados de intervalo aberto, intervalo semi-aberto à direita, intervalo semi-aberto à esquerda e intervalo fechado, respectivamente:

$$(a, b) = \{x \in X \mid a < x < b\},$$

$$[a, b) = \{x \in X \mid a \leq x < b\},$$

$$(a, b] = \{x \in X \mid a < x \leq b\},$$

$$[a, b] = \{x \in X \mid a \leq x \leq b\},$$

onde o símbolo  $\leq$  significa que  $a \leq b$  se, e somente se,  $a < b$  ou  $a = b$ .

Os seguintes subconjuntos formam uma base para  $(X, <)$ :

- (1) Todos os intervalos abertos  $(a, b)$  em  $X$ ;
- (2) Todos os intervalos da forma  $[a_0, b)$ , onde  $a_0$  é o menor elemento de  $X$ , se houver;
- (3) Todos os intervalos da forma  $(a, b_0]$ , onde  $b_0$  é o maior elemento de  $X$ , se houver.

De fato:

- (a) Para todo  $x \in X$  existe  $B \in \mathcal{B}$  tal que  $x \in B$ , pois o menor elemento (se houver) pertence a todos os conjuntos do tipo (2), o maior elemento (se houver) pertence a todos os conjuntos do tipo (3); além disso, qualquer elemento pertence a algum conjunto do tipo (1) já que neste caso ( $x$  não sendo nem o maior nem o menor elemento) sempre existem  $a, b \in X$  tais que  $a < x < b$  e então  $x \in (a, b)$ .
- (b) Suponha que  $x \in B_1 \cap B_2$ , com  $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ . Veja que a interseção entre quaisquer dois subconjuntos dos tipos (1), (2) e (3) ainda é um conjunto de um destes tipos ou o conjunto vazio. Desta maneira basta considerar o elemento básico  $B_3$  como sendo a própria interseção  $B_1 \cap B_2$  para obtermos  $B_3 \subset B_1 \cap B_2$ .

---

<sup>2</sup>Um conjunto  $X$  qualquer é dito simplesmente ordenado se existe uma relação  $<$ , denominada relação de ordem, que satisfaz:

- (1) Para quaisquer  $x, y \in X$  com  $x \neq y$  temos  $x < y$  ou  $y < x$ ;
- (2) Para nenhum  $x \in X$  a relação  $x < x$  é válida;
- (3) Para quaisquer  $x, y, z \in X$ , se  $x < y$  e  $y < z$  então  $x < z$ .

Observe que se  $X$  não tem menor elemento, então não existem subconjuntos do tipo (2) e se  $X$  não tem maior elemento não existem subconjuntos do tipo (3). Em particular, se  $X = \mathbb{R}$ , então  $\mathcal{B} = \{(a, b), a, b \in \mathbb{R}\}$  é uma base para a topologia da ordem  $\tau_{\mathcal{B}}$ , para  $\mathbb{R}$ , conhecida como topologia padrão.

A partir de agora denotamos um espaço topológico  $(X, \tau)$  apenas por  $X$ , ou seja, a topologia está subentendida sempre que possível.

**Definição 3.6.** Uma subbase  $S$  para uma topologia em um espaço topológico  $X$  é uma coleção de subconjuntos de  $X$  cuja união é igual a  $X$ .

**Lema 3.2.** A coleção  $\tau$  de todas as uniões de interseções finitas de elementos de uma subbase  $S$  para um espaço topológico  $(X, \tau)$  é uma topologia. Esta topologia é denominada topologia gerada pela subbase  $S$ .

*Demonstração.* Pela observação 3.2, para mostrar que  $\tau$  é uma topologia é suficiente mostrar que a coleção  $\mathcal{B}$  de todas as interseções finitas de elementos de  $S$  é uma base para  $\tau$ . Observe que  $S \subset \mathcal{B}$ .

Verifiquemos as duas condições para ser base.

- (a) Para todo  $x \in X$ , como  $X$  é a união de elementos de  $S$ , segue que  $x$  pertence a algum elemento de  $S$ . Mas,  $S \subset \mathcal{B}$ , assim temos que  $x$  pertence a algum elemento de  $\mathcal{B}$ .
- (b) Suponha que  $x \in B_1 \cap B_2$ , com  $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ . Mostremos que existe  $B_3 \in \mathcal{B}$  tal que  $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$ . De fato, de  $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$  segue que  $B_1 = S_1 \cap S_2 \cap \dots \cap S_m$ , com  $S_i \in S$  e  $i = 1 \dots m$  e também  $B_2 = Q_1 \cap Q_2 \cap \dots \cap Q_r$ , com  $Q_j \in S$  e  $j = 1 \dots r$ . Desta forma  $B_1 \cap B_2 = S_1 \cap \dots \cap S_m \cap Q_1 \cap \dots \cap Q_r$ , ou seja,  $B_1 \cap B_2$  é uma interseção finita de elementos de  $S$ , logo  $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{B}$ . Deste modo, tomando  $B_3 = B_1 \cap B_2$ , segue o resultado.

□

**Definição 3.7.** Sejam  $X, Y$  espaços topológicos. A topologia produto sobre  $X \times Y$  é a topologia tendo como base a coleção  $\mathcal{B}$  de todos os conjuntos da forma  $U \times V$ , onde  $U$  é um subconjunto aberto de  $X$  e  $V$  um subconjunto aberto de  $Y$ .

**Definição 3.8.** Dados  $X$  e  $Y$ , conjuntos quaisquer, as funções

$$\begin{array}{ccc} \pi_1 : X \times Y & \longrightarrow & X \\ (x, y) & \longmapsto & x \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \pi_2 : X \times Y & \longrightarrow & Y \\ (x, y) & \longmapsto & y \end{array} .$$

são denominadas projeções em  $X$  e  $Y$ , respectivamente.

**Lema 3.3.** *Sejam  $X, Y$  espaços topológicos. A coleção*

$$S = \{\pi_1^{-1}(U) \mid U \text{ é aberto em } X\} \cup \{\pi_2^{-1}(V) \mid V \text{ é aberto em } Y\},$$

*é uma subbase para a topologia produto sobre  $X \times Y$ .*

*Demonstração.* Considere  $\tau$  a topologia produto sobre  $X \times Y$  e  $\tau'$  a topologia gerada por  $S$ . Mostremos que  $\tau = \tau'$ .

(i)  $\tau' \subset \tau$ . De fato, observe que cada elemento  $A \in S$  é tal que  $A = \pi_1^{-1}(U)$ , com  $U$  aberto em  $X$ , ou  $A = \pi_2^{-1}(V)$ , com  $V$  aberto em  $Y$ . Mas,  $\pi_1^{-1}(U) = U \times Y$  e  $\pi_2^{-1}(V) = X \times V$ , ambos abertos em  $X \times Y$ , ou seja, cada elemento de  $S$  pertence a topologia  $\tau$ . Consequentemente, uniões arbitrárias de interseções finitas de elementos de  $S$  também, logo  $\tau' \subset \tau$ .

(ii)  $\tau \subset \tau'$ . Com efeito, todo elemento básico  $U \times V$  para a topologia  $\tau$  se escreve como

$$U \times V = \pi_1^{-1}(U) \cap \pi_2^{-1}(V),$$

ou seja, cada elemento  $U \times V$  é interseção finita de elementos de  $S$ . Consequentemente,  $U \times V \in \tau'$ . Portanto,  $\tau \subset \tau'$ .

Por (i) e (ii) segue que  $\tau = \tau'$ . □

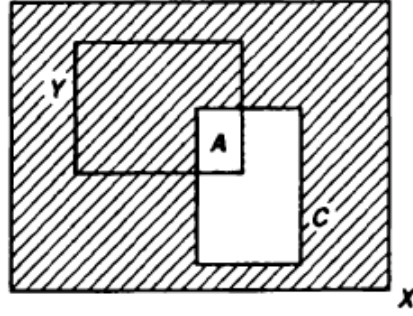
**Definição 3.9.** *Se  $(X, \tau)$  é um espaço topológico e  $Y$  um subconjunto de  $X$ , então a coleção*

$$\tau_Y = \{Y \cap U \mid U \in \tau\}$$

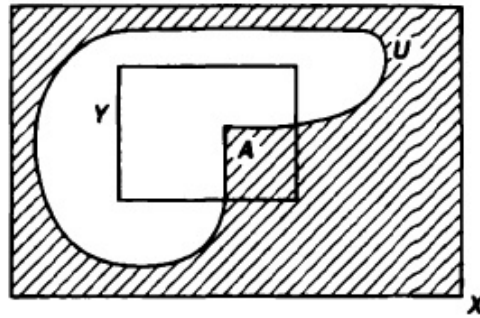
*é uma topologia em  $Y$  e com esta topologia,  $(Y, \tau_Y)$  é chamado subespaço de  $X$ .*

**Proposição 3.1.** *Dado  $Y$  um subespaço de espaço topológico  $X$ , temos que um conjunto  $A$  é um conjunto fechado em  $Y$  se, e somente se, este é igual a interseção de um conjunto fechado de  $X$  com  $Y$ .*

*Demonstração.* ( $\implies$ ) Suponha que  $A = C \cap Y$ , onde  $C$  é um conjunto fechado em  $X$ . Então,  $X - C$  é um conjunto aberto em  $X$  e, consequentemente,  $(X - C) \cap Y$  é aberto em  $Y$ , pela definição de subespaço. Mas, como  $Y \subset X$ ,  $(X - C) \cap Y = Y - (C \cap Y) = Y - A$ . Logo,  $Y - A$  é um conjunto aberto em  $Y$  e portanto  $A$  é um conjunto fechado em  $Y$ . Como vemos na figura 3.2.


 Figura 3.2: Conjuntos  $Y$ ,  $A$  e  $C$ 

( $\Leftarrow$ ) Suponha que  $A$  seja um conjunto fechado em  $Y$ , então  $Y - A$  é um aberto em  $Y$ . Logo, pela definição de abertos no subespaço  $Y$ ,  $Y - A = U \cap Y$ , para algum subconjunto aberto  $U$  de  $X$ . Portanto,  $A = Y \cap (X - U)$  com  $X - U$  um subconjunto fechado em  $X$ . Como na figura 3.3.


 Figura 3.3: Conjuntos  $Y$ ,  $A$  e  $U$ 

□

**Observação 3.3.** Observamos que se  $Y$  é um subconjunto fechado em  $X$  e  $A$  é um subconjunto fechado no subespaço  $Y$ , então  $A$  é fechado em  $X$ .

**Definição 3.10.** Se  $A$  é um subconjunto de um espaço topológico  $X$ , então

- (a) A união de todos os conjuntos abertos contidos em  $A$  é denominada interior de  $A$  e denotada por  $\text{Int}A$ ;
- (b) A interseção de todos os conjuntos fechados contendo  $A$  é chamada o fecho de  $A$  e denotada por  $\bar{A}$ .

**Observação 3.4.** Veja que da definição acima segue que  $\text{Int}A \subset A \subset \bar{A}$  e ainda,  $A$  é aberto quando  $A = \text{Int}A$  e fechado quando  $A = \bar{A}$ .

**Proposição 3.2.** Se  $Y$  é um subespaço de  $X$  e  $A$  é um subconjunto de  $Y$ , então  $\bar{Y} = \bar{A} \cap Y$ .

*Demonstração.* Seja  $B$  o fecho de  $A$  em  $Y$ . Mostremos que  $B = \bar{A} \cap Y$ .

- (i)  $B \subset \bar{A} \cap Y$ . Como  $\bar{A}$  é fecho em  $X$ , segue pela proposição 3.1 que  $\bar{A} \cap Y$  é um subconjunto fechado em  $Y$ . Mas  $\bar{A} \cap Y$  contém  $A$  e temos por definição de  $B$  que este é igual a interseção de todos os subconjuntos fechados de  $Y$  contendo  $A$ . Consequentemente,  $B \subset \bar{A} \cap Y$ .
- (ii)  $\bar{A} \cap Y \subset B$ . Sabemos que  $B$  é fechado em  $Y$  logo, pela proposição 3.1, segue que  $B = C \cap Y$  para algum conjunto fechado  $C$  em  $X$ . Então,  $C$  é um conjunto fechado de  $X$  contendo  $A$ . Uma vez que  $\bar{A}$  é a interseção de todos os subconjuntos fechados de  $X$  contendo  $A$ , segue que  $\bar{A} \subset C$ . Consequentemente,  $\bar{A} \cap Y \subset C \cap Y = B$ .

□

**Proposição 3.3.** *Se  $A$  é um subconjunto de um espaço topológico  $X$ . Então  $x \in \bar{A}$  se, e somente se, toda vizinhança  $U$  de  $x$  (onde  $U$  é um conjunto aberto contendo  $x$ ) intercepta  $A$ .*

*Demonstração.* Devemos mostrar que  $x \in \bar{A}$  se, e somente se, toda vizinhança  $U_x$  intercepta  $A$ . Mas, pela contrapositiva desta bicondicional provar isto é o mesmo que mostrar que  $x \notin \bar{A}$  se, e somente se, existe uma vizinhança  $U_x$  que não intercepta  $A$ . De fato,

- ( $\implies$ ) Se  $x \notin \bar{A}$ , então  $U = X - \bar{A}$  é uma vizinhança de  $x$  que não intercepta  $A$ .
- ( $\impliedby$ ) Se existe uma vizinhança  $U$  de  $x$  que não intercepta  $A$ , então  $X - U$  é um subconjunto fechado contendo  $A$ . Pela definição do fecho  $\bar{A}$ , o conjunto  $X - U$  necessariamente contém  $\bar{A}$ , portanto  $x \notin \bar{A}$ .

□

**Definição 3.11.** *Sejam  $A$  um subconjunto de um espaço topológico  $X$  e  $x \in X$ . Dizemos que  $x$  é um ponto de acumulação de  $A$  se toda vizinhança de  $x$  intercepta  $A$  em algum ponto diferente de  $x$ . Denotamos o conjunto formado por todos os pontos de acumulação de  $A$  por  $A'$ .*

**Observação 3.5.** Segue da proposição 3.2 que, nas condições da definição acima,  $x$  é um ponto de acumulação de  $A$  se este pertence ao fecho do conjunto  $A - \{x\}$ .

**Proposição 3.4.** *Se  $A$  é um subconjunto de um espaço topológico  $X$ , então  $\bar{A} = A \cup A'$ .*

*Demonstração.* Mostremos que  $\bar{A} = A \cup A'$ .

- (i)  $A \cup A' \subset \bar{A}$ . Se  $x \in A'$  toda vizinhança de  $x$  intercepta  $A$ . Portanto, pela proposição 3.3 segue que  $x \in \bar{A}$ , consequentemente  $A' \subset \bar{A}$ . Portanto,  $A \cup A' \subset \bar{A}$ .

- (ii)  $\bar{A} \subset A \cup A'$ . Seja  $x \in \bar{A}$  qualquer. Mostremos que  $x \in A \cup A'$ . Se  $x \in A$  segue que  $x \in A \cup A'$ . Suponha que  $x \notin A$ , logo como  $x \in \bar{A}$  temos que dado uma vizinhança  $U$  de  $x$  que intercepta  $A$ , como  $x \notin A$  este tal conjunto necessariamente intercepta  $A$  em um ponto diferente de  $x$ , ou seja,  $x \in A'$ . Portanto,  $x \in A \cup A'$ .

□

**Definição 3.12.** Dizemos que um espaço topológico  $X$  é um espaço de Hausdorff se, para quaisquer pontos distintos  $x_1$  e  $x_2$  de  $X$ , existirem vizinhanças  $U_1$  e  $U_2$  de  $x_1$  e  $x_2$ , respectivamente, que são disjuntas (isto é,  $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ ).

**Proposição 3.5.** Todo conjunto finito num espaço de Hausdorff  $X$  é fechado.

*Demonstração.* Uma vez que a união finita de conjuntos fechados é um conjunto fechado, para mostrar que um conjunto finito, num espaço de Hausdorff, é fechado é suficiente mostrar que cada conjunto unitário  $\{x_0\}$  é fechado. Para tanto, mostraremos que, num espaço de Hausdorff, o fecho de  $\{x_0\}$  é  $\{x_0\}$ . Veja que, se  $x$  é um ponto de  $X$  diferente de  $x_0$ , então  $x$  e  $x_0$  tem vizinhanças disjuntas  $U$  e  $V$  respectivamente, pois  $X$  é um espaço de Hausdorff. Como  $U$  não intercepta  $\{x_0\}$  o ponto  $x$  não pertence ao fecho do conjunto  $\{x_0\}$ . Como resultado temos que o fecho do conjunto  $\{x_0\}$  é o próprio  $\{x_0\}$ , logo este é fechado. □

**Proposição 3.6.** São válidas as seguintes propriedades:

- (i) Todo conjunto simplesmente ordenado é um espaço de Hausdorff na topologia da ordem.
- (ii) O produto de dois espaços de Hausdorff é um espaço de Hausdorff.
- (iii) Todo subespaço de um espaço de Hausdorff é um espaço de Hausdorff.

*Demonstração.* (i) • Seja  $X$  um conjunto simplesmente ordenado e finito, digamos

$$X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}, \quad \text{com } x_1 < \dots < x_n.$$

Dados quaisquer  $x_i, x_j$ , supondo  $x_i < x_j$ ,  $i, j \notin \{1, n\}$ , temos que as vizinhanças  $I_i = (x_{i-1}, x_{i+1})$  e  $I_j = (x_{j-1}, x_{j+1})$  de  $x_i$  e  $x_j$  respectivamente, são tais que  $I_i \cap I_j = \emptyset$ .

Para os casos, em que  $x_i$  ou  $x_j$  são os extremos, basta considerar:

$$I_i = [x_1, x_2) \quad \text{e} \quad I_j = (x_{j-1}, x_{j+1}), \quad \text{quando } x_i = x_1 \quad \text{e} \quad x_j \neq x_n.$$

$$I_i = (x_{i-1}, x_{i+1}) \quad \text{e} \quad I_j = (x_{n-1}, x_n], \quad \text{quando } x_i \neq x_1 \quad \text{e} \quad x_j = x_n.$$

$$I_i = [x_1, x_2) \quad \text{e} \quad I_j = (x_{n-1}, x_n], \quad \text{quando } x_i = x_1 \quad \text{e} \quad x_j = x_n.$$

- Seja agora  $X$  um conjunto simplesmente ordenado e infinito (discreto ou não).

Dados  $x_i, x_j \in X$ , com  $x_i < x_j$ , se ambos não forem nem o elemento mínimo, nem o elemento máximo de  $X$ , basta considerarmos as seguintes vizinhanças  $I_i$  e  $I_j$  de  $x_i$  e  $x_j$ , respectivamente:

$$I_i = (a_i, c) \quad \text{e} \quad I_j = (c, b_j), \quad \text{com } a_i, c, b_j \in X,$$

onde  $a_i < x_i < c < x_j < b_j$ .

Veja que  $a_i, b_j$  sempre existem já que  $x_i$  e  $x_j$  não são extremos de  $X$ . Agora, pode ocorrer de não existir  $c$ , tal que  $x_i < c < x_j$ , neste caso basta considerar as vizinhanças:

$$I_i = (a_i, x_j) \quad \text{e} \quad I_j = (x_i, b_j).$$

de  $x_i$  e  $x_j$  respectivamente. Se  $x_i$  for o menor elemento de  $X$  e  $x_j$  não for o maior elemento de  $X$ , então definimos

$$I_i = [x_i, c) \quad \text{e} \quad I_j = (c, b_j), \quad \text{com } b_j, c \in X,$$

onde  $x_i < c < x_j < b_j$ . Caso não exista  $c$  tal que  $x_i < c < x_j$  (veja que a existência de  $b_j$  é garantida pelo fato de  $x_j$  não ser o maior elemento de  $X$ ), consideramos:

$$I_i = [x_i, x_j) \quad \text{e} \quad I_j = (x_i, b_j), \quad \text{onde } x_i < x_j < b_j.$$

Se  $x_j$  for o maior elemento e  $x_i$  não for o menor elemento de  $X$ , então definimos:

$$I_i = (a_i, c) \quad \text{e} \quad I_j = (c, x_j], \quad \text{onde } a_i, c \in X,$$

com  $a_i < x_i < c < x_j$ . Caso não exista  $c$  tal que  $x_i < c < x_j$  (veja que a existência de  $a_i$  é garantida pelo fato de que  $x_i$  não é o menor elemento de  $X$ ), consideramos:

$$I_i = (a_i, x_j) \quad \text{e} \quad I_j = (x_i, x_j], \quad \text{com } a_i < x_i < x_j.$$

Se  $x_i$  e  $x_j$  são os elementos menor e maior de  $X$  respectivamente, consideramos as vizinhanças:

$$I_i = [x_i, c) \text{ e } I_j = (c, x_j], \text{ onde } c \in X,$$

com  $x_i < c < x_j$ . Note que se não existisse  $c$  em  $X$ , este seria um conjunto com apenas dois elementos.

- (ii) O produto de dois espaços de Hausdorff,  $X$  e  $Y$ , é um espaço de Hausdorff. De fato, sejam  $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X \times Y$ . Como  $x_1, x_2 \in X$  e  $X$  é um espaço de Hausdorff, temos que existem vizinhanças disjuntas  $U_1$  e  $U_2$  de  $x_1$  e  $x_2$ , respectivamente; também como  $y_1, y_2 \in Y$  e  $Y$  é um espaço de Hausdorff, temos que existem vizinhanças disjuntas  $V_1$  e  $V_2$  de  $y_1$  e  $y_2$ , respectivamente.

Deste modo, segue que os conjuntos abertos  $U_1 \times V_1$  e  $U_2 \times V_2$  são vizinhanças de  $(x_1, y_1)$  e  $(x_2, y_2)$ , respectivamente, e ainda  $(U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2) = \emptyset$ .

- (iii) Suponha que  $Y$  seja um subespaço de um espaço de Hausdorff  $X$ .

Sejam  $y_1, y_2 \in Y \subset X$ , quaisquer. Como  $y_1, y_2 \in X$  e  $X$  é um espaço de Hausdorff, segue que existem vizinhanças disjuntas de  $U_1$  e  $U_2$ , em  $X$ , de  $y_1$  e  $y_2$ , respectivamente.

Desta maneira, as interseções  $V_1 = U_1 \cap Y$  e  $V_2 = U_2 \cap Y$  são ambos conjuntos abertos de  $Y$  contendo  $y_1$  e  $y_2$ , respectivamente; e mais, são vizinhanças disjuntas, uma vez que:

$$V_1 \cap V_2 = (U_1 \cap Y) \cap (U_2 \cap Y) = (U_1 \cap U_2) \cap Y = \emptyset.$$

□

**Definição 3.13.** *Seja  $X$  um conjunto não vazio. Dizemos que a função  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  é uma métrica sobre  $X$  se, para quaisquer  $x, y, z \in X$ , as propriedades são válidas:*

$$(a) \ d(x, y) \geq 0 \text{ e } d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y;$$

$$(b) \ d(x, y) = d(y, x);$$

$$(c) \ d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z).$$

Neste caso, o par  $(X, d)$  é denominado um espaço métrico. Ainda, o número real não negativo  $d(x, y)$  é chamado de distância entre os pontos  $x$  e  $y$ .

**Definição 3.14.** *Sejam  $(X, d)$  um espaço métrico e  $\varepsilon > 0$ . O conjunto*

$$B_d(x, \varepsilon) = \{y \in X \mid d(y, x) < \varepsilon\},$$

*é chamado  $\varepsilon$ -bola segundo a métrica  $d$ .*

**Lema 3.4.** *Em um espaço métrico  $(X, d)$  o conjunto formado por todas as  $\varepsilon$ -bolas forma uma base para uma topologia  $\tau$  em  $X$ .*

*Esta topologia  $\tau$  é chamada topologia métrica induzida por  $d$ .*

*Demonstração.* Dado  $(X, d)$  um espaço métrico, mostraremos que a coleção

$$\mathcal{B} = \{B_d(x, \varepsilon), \varepsilon > 0\},$$

forma uma base para a topologia  $\tau$  em  $X$ . Para tanto, precisamos mostrar que:

- Para todo  $x \in X$ , existe  $B \in \mathcal{B}$  tal que  $x \in B$ ;
- Se  $x \in B_1 \cap B_2$ , com  $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ , então existe  $B_3$  tal que  $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$ .

Observe que a primeira condição segue do fato de que para todo  $\varepsilon > 0$  a  $\varepsilon$ -bola,  $B_d(x, \varepsilon)$ , contém  $x$  e  $B_d(x, \varepsilon) \in \mathcal{B}$ . Logo, basta tomar  $B = B_d(x, \varepsilon)$ ,  $\forall \varepsilon > 0$ .

Agora, para provar a segunda condição, suponha que  $x \in B_1 \cap B_2$ , com  $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ . Como  $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ , segue que:

$$B_1 = B_d(y_1, \varepsilon_1) \text{ e } B_2 = B_d(y_2, \varepsilon_2), \text{ para alguns } y_1, y_2 \in X, \varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0.$$

Observe que existem  $\delta_1, \delta_2 > 0$  tais que

$$B_d(x, \delta_1) \subset B_d(y_1, \varepsilon_1) \text{ e } B_d(x, \delta_2) \subset B_d(y_2, \varepsilon_2),$$

a saber, tome  $\delta_i = \varepsilon_i - d(y_i, x)$ , pois, desta maneira:

$$z \in B_d(x, \delta_i) \Rightarrow d(x, z) < \delta_i = \varepsilon_i - d(y_i, x),$$

isto é,

$$d(x, z) < \varepsilon_i - d(y_i, x) \Rightarrow d(y_i, x) + d(x, z) < \varepsilon_i.$$

Logo, pela desigualdade triangular segue:

$$d(y_i, z) \leq d(y_i, x) + d(x, z) < \varepsilon_i \Rightarrow z \in B_d(y_i, \varepsilon_i).$$

Portanto,  $B_d(x, \delta_i) \subset B_d(y_i, \varepsilon_i)$ .

Agora, se tomarmos  $\delta$  como mínimo entre  $\delta_1$  e  $\delta_2$ , segue que:

$$B_d(x, \delta) \subset B_d(x, \delta_1) \subset B_d(y_1, \varepsilon_1) = B_1.$$

e

$$B_d(x, \delta) \subset B_d(x, \delta_2) \subset B_d(y_2, \varepsilon_2) = B_2.$$

Ou seja,  $B_3 := B_d(x, \delta)$  é tal que  $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$ . □

**Observação 3.6.** Do lema anterior segue, em particular, que toda  $\varepsilon$ -bola é um conjunto aberto para  $X$ .

**Exemplo 3.5.** Denotamos o módulo em  $\mathbb{R}$  por  $|\cdot|$  onde, dado  $x \in \mathbb{R}$ , o módulo de  $x$ ,  $|x|$ , é definido da seguinte maneira: se  $x \geq 0$ , então  $|x| = x$ , e se  $x < 0$  então  $|x| = -x$ . Seja agora  $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}$  uma função norma no espaço  $E$ , a saber, a função que cumpre, para quaisquer  $x, y \in E$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$ , as seguintes propriedades:

- (a)  $\|x\| = 0$  se, e somente se,  $x = 0$ ;
- (b)  $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ ;
- (c)  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ .

Um espaço  $E$  munido de uma norma é denominado um espaço normado.

A função  $d_E : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $d_E(x, y) := \|x - y\|$  é uma métrica para  $E$ , chamada de métrica induzida pela norma  $\|\cdot\|$ . Com efeito, as condições (a) e (c) para métrica seguem de modo natural pelos itens (a) e (c) da definição de norma. A condição (b) para métrica também é satisfeita, pois, pelo item (b) acima,

$$d_E(x, y) = \|x - y\| = \|(-1)(y - x)\| \stackrel{(b)}{=} |-1| \|y - x\| = \|y - x\| = d_E(y, x).$$

**Exemplo 3.6.**  $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ , onde  $\|\cdot\|$  é tal que  $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ , é um espaço normado.

**Exemplo 3.7.** Seja  $\mathbb{C}^*$  o conjunto dos números complexos não nulos. A aplicação,

$$\begin{aligned} |\cdot|_{\mathbb{C}} : \quad \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{R} \\ z = x + yi &\mapsto |z|_{\mathbb{C}} = \sqrt{x^2 + y^2} \end{aligned},$$

é uma norma para  $\mathbb{C}^*$ .

De fato, para qualquer  $z = x + yi \in \mathbb{C}^*$ ,

$$|z|_{\mathbb{C}} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 = y.$$

Também, para quaisquer  $z = x + yi \in \mathbb{C}$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$ , temos:

$$|\lambda z|_{\mathbb{C}} = |\lambda x + \lambda yi| = \sqrt{(\lambda x)^2 + (\lambda y)^2} = \sqrt{\lambda^2(x^2 + y^2)} = |\lambda| \sqrt{x^2 + y^2} = |\lambda| |z|_{\mathbb{C}}.$$

E, finalmente, para quaisquer  $z_1 = x_1 + y_1 i, z_2 = x_2 + y_2 i \in \mathbb{C}$ , temos:

$$|z_1 + z_2|_{\mathbb{C}} \leq |z_1|_{\mathbb{C}} + |z_2|_{\mathbb{C}}.$$

Com efeito,

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|_{\mathbb{C}}^2 &= |(x_1 + y_1 i) + (x_2 + y_2 i)|_{\mathbb{C}}^2 = |(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i|_{\mathbb{C}}^2 = \\ &= (x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2 = (x_1 + x_2 + y_1 i + y_2 i)(x_1 + x_2 - y_1 i - y_2 i) = \\ &= ((x_1 + y_1 i) + (x_2 + y_2 i))((x_1 - y_1 i) + (x_2 - y_2 i)) = \\ &= (x_1 + y_1 i)(x_1 - y_1 i) + (x_2 + y_2 i)(x_2 - y_2 i) + (x_1 + y_1 i)(x_2 - y_2 i) + (x_2 + y_2 i)(x_1 - y_1 i) = \\ &= (x_1^2 + y_1^2) + (x_2^2 + y_2^2) + x_1 x_2 - x_1 y_2 i + y_1 x_2 i + y_1 y_2 + x_2 x_1 + y_2 x_1 i - x_2 y_1 i + y_1 y_2 = \\ &= |z_1|_{\mathbb{C}}^2 + |z_2|_{\mathbb{C}}^2 + 2(x_1 x_2 + y_1 y_2) \leq |z_1|_{\mathbb{C}}^2 + |z_2|_{\mathbb{C}}^2 + 2|x_1 x_2 + y_1 y_2| \stackrel{(*)}{\leq} \end{aligned}$$

$$|z_1|_{\mathbb{C}}^2 + |z_2|_{\mathbb{C}}^2 + 2|(x_1 + y_1i)(x_2 - y_2i)|_{\mathbb{C}} = |z_1|_{\mathbb{C}}^2 + |z_2|_{\mathbb{C}}^2 + 2|x_1 + y_1i|_{\mathbb{C}}|x_2 + y_2i|_{\mathbb{C}} = |z_1|_{\mathbb{C}}^2 + |z_2|_{\mathbb{C}}^2 + 2|z_1||z_2| = (|z_1|_{\mathbb{C}} + |z_2|_{\mathbb{C}})^2.$$

$*|x| \leq \sqrt{x^2 + q}$ , onde  $q$  é um número real positivo.

Na passagem (\*) usamos o fato de que, se  $|z_1 + z_2|_{\mathbb{C}}^2 \leq (|z_1|_{\mathbb{C}} + |z_2|_{\mathbb{C}})^2$  então  $|z_1 + z_2|_{\mathbb{C}} \leq |z_1|_{\mathbb{C}} + |z_2|_{\mathbb{C}}$ .

Portanto,  $(\mathbb{C}, |\cdot|_{\mathbb{C}})$  é um espaço normado e, conseqüentemente, um espaço topológico.

**Exemplo 3.8.** O par  $(GL(n), \|\cdot\|)$  é um espaço normado onde a norma  $\|\cdot\|$  é dada por:

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : GL(n) &\rightarrow \mathbb{R} \\ A = (a_{ij}) &\mapsto \|A\| = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|. \end{aligned}$$

Note que as propriedades de norma são satisfeitas: primeiramente,  $\|A\| = 0$  se, e somente se,  $\max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| = 0$ . Mas esta última igualdade ocorre se, e somente se,  $|a_{ij}| = 0$ , ou seja,  $a_{ij} = 0$ . Logo,  $\|A\| = 0$  se, e somente se,  $A$  é uma matriz nula.

Agora,  $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$  é uma consequência da desigualdade triangular do módulo de números reais e de propriedades de Máximo e Somatória. Enquanto  $\|\lambda A\| = |\lambda| \|A\|$ , para qualquer  $\lambda \in \mathbb{R}$ , uma vez que  $|\lambda a_{ij}| = |\lambda| |a_{ij}|$ .

**Exemplo 3.9.** Se  $(E, \|\cdot\|)$  e  $(E', \|\cdot\|')$  são espaços normados então  $E \times E'$  também o é, para isto basta definir a seguinte norma para  $E \times E'$ :

$$\|(x, b)\|_{E \times E'} := \|x\|_E + \|b\|_{E'}, \quad \forall (x, b) \in E \times E'.$$

E conseqüentemente, é possível definir uma métrica para  $E \times E'$ , induzida por esta norma.

**Definição 3.15.** Seja  $(X, \tau)$  um espaço topológico, então dizemos que  $X$  é metrizável se existe uma métrica  $d$  em  $X$  que induz a topologia  $\tau$  em  $X$ .

**Exemplo 3.10.** Se  $X$  é um conjunto qualquer e  $\tau_0$  a topologia discreta, então  $(X, \tau_0)$  é um espaço metrizável. Basta considerarmos a métrica tal qual  $d(x, y) = 1$  para  $x, y$  quaisquer tais que  $x \neq y$  e  $d(x, y) = 0$  para  $x = y$ . O elemento básico  $B(x, 1)$ , por exemplo, consiste somente do ponto  $x$ . Por exemplo,  $X = \mathbb{Z}$  é um espaço topológico metrizável.

**Lema 3.5.** A topologia padrão para  $\mathbb{R}$  é induzida pela métrica  $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por:

$$(x, y) \mapsto d(x, y) := |x - y|.$$

*Demonstração.* Primeiramente note que  $d$  de fato é uma métrica para  $\mathbb{R}$ , com efeito:

•  $d(x, y) = |x - y| \geq 0$ , ainda  $d(x, y) = |x - y| = 0$  se, e somente se,  $x = y$ . Pois, se  $x = y$  obviamente  $|x - y| = 0$ , por outro lado, se  $0 = d(x, y) = |x - y|$  então  $(x - y) = 0$  (se  $x - y > 0$ ) ou  $-(x - y) = 0$  (se  $x - y < 0$ ), em ambos os casos segue que  $x = y$ .

•  $d(x, y) = |x - y| = |y - x| = d(y, x)$ ;

•  $d(x, y) + d(y, z) = |x - y| + |y - z| = |x - y + y - z| = |x - z| = d(x, z)$ .

A topologia padrão é induzida por esta métrica, pois basta observar que cada elemento básico  $(a, b)$  para a topologia da ordem é também um elemento básico para a topologia métrica induzida por  $d$  da seguinte forma:

$$(a, b) = B\left(\frac{a+b}{2}, \frac{b-a}{2}\right),$$

pois  $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$  e

$$\begin{aligned} B &= \left\{x \in \mathbb{R} \mid d\left(x, \frac{a+b}{2}\right) < \frac{b-a}{2}\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \left|x - \frac{a+b}{2}\right| < \frac{b-a}{2}\right\} = \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{-(b-a)}{2} < x - \frac{a+b}{2} < \frac{b-a}{2}\right\} = \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{-(b-a)}{2} + \frac{a+b}{2} < x < \frac{b-a}{2} + \frac{a+b}{2}\right\} = \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{-b+a+a+b}{2} < x < \frac{b-a+a+b}{2}\right\} = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}. \end{aligned}$$

Observe que  $\frac{b-a}{2} > 0$  uma vez que  $a$  é menor que  $b$  e, reciprocamente, cada elemento básico para a topologia métrica induzida por  $d$ ,  $B(x, \varepsilon)$ , é um elemento básico para a topologia da ordem. Uma vez que

$$\begin{aligned} B(x, \varepsilon) &= \{y \in \mathbb{R} \mid |y - x| < \varepsilon\} = \{y \in \mathbb{R} \mid -\varepsilon < y - x < \varepsilon\} = \\ &= \{y \in \mathbb{R} \mid x - \varepsilon < y < x + \varepsilon\} = (x - \varepsilon, x + \varepsilon). \end{aligned}$$

□

**Definição 3.16.** Um subconjunto  $A$  de um espaço métrico  $M$  é um conjunto aberto quando todo ponto de  $A$  é centro de uma bola aberta inteiramente contida em  $A$ .

**Proposição 3.7.** Uma bola aberta  $B(a; r)$  em um espaço métrico é um conjunto aberto.

*Demonstração.* Para mostrarmos que  $B(a; r)$  é um conjunto aberto, basta mostrarmos que contém uma bola centrada em  $x$ .

Se  $x \in B(a; r)$  então  $d(a, x) < r$ . Assim, sendo  $s = r - d(a, x)$  um número positivo, teremos  $B(x, s) \subset B(a; r)$ .

De fato, seja  $y \in B(x, s)$  então  $d(x, y) < s$ . Queremos  $d(a, y) < r$ , mas isto ocorre, pois

$$d(a, y) \leq d(a, x) + d(x, y) \leq d(a, x) + s = r.$$

E, portanto,  $y \in B(a; r)$ . □

## 3.2 Aplicações Contínuas

**Definição 3.17.** *Sejam  $X, Y$  espaços topológicos e  $f : X \rightarrow Y$  uma função.*

- (a) *Dizemos que  $f$  é contínua em um ponto  $x \in X$  quando para cada aberto  $V$  de  $Y$  contendo  $f(x)$  existe aberto  $U$  de  $X$  contendo  $x$  tal que  $f(U) \subset V$ .*
- (b) *Dizemos que  $f$  é contínua se para todo aberto  $V$  de  $Y$  o conjunto  $f^{-1}(V)$  é um subconjunto aberto de  $X$ .*
- (c) *Dizemos que  $f$  é aberta se para todo aberto  $U$  de  $X$  o conjunto  $f(U)$  é um subconjunto aberto de  $Y$ .*

**Definição 3.18.** *Sejam  $X, Y$  espaços topológicos e  $f : X \rightarrow Y$  uma bijeção. Dizemos que  $f$  é um homeomorfismo quando  $f$  e sua inversa  $f^{-1}$  são funções contínuas.*

**Exemplo 3.11.** A função  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $F(x) = kx, k \in \mathbb{R}^*$ , é um homeomorfismo. De fato, para qualquer  $y \in \mathbb{R}$  a função  $F^{-1}(y) = k^{-1}y$  é a função inversa de  $f$ , pois  $F \circ F^{-1}(y) = F(F^{-1}(y)) = F(k^{-1}y) = kk^{-1}y = y$  e ainda  $F^{-1} \circ F(x) = F^{-1}(F(x)) = F^{-1}(kx) = k^{-1}kx = x$ . Como  $F$  possui inversa segue que  $F$  é uma bijeção. Ainda,  $F$  e  $F^{-1}$  são contínuas, pelo exemplo 3.14. Logo, como  $F$  é bijeção tal que  $F$  e  $F^{-1}$  são contínuas, segue que  $F$  é um homeomorfismo.

**Exemplo 3.12.** A aplicação  $f : [0, 2\pi) \rightarrow S^1$ , definida por  $f(t) = (\cos t, \sin t)$ , é uma bijeção contínua, mas não é um homeomorfismo. Sua inversa  $f^{-1} : S^1 \rightarrow [0, 2\pi)$  é descontínua. Mais precisamente,  $f^{-1}$  é descontínua no ponto  $a = (1, 0) = f(0) \in S^1$ . Com efeito, todo aberto em  $[0, 2\pi)$  contendo 0 é da forma  $[0, b)$ , com  $b \in (0, 2\pi)$  e temos que  $(f^{-1})^{-1}([0, b))$  não é um conjunto aberto em  $S^1$ . Pois, todos os subconjuntos abertos  $B$  de  $S^1$  são tais que  $f^{-1}(B)$  é da forma  $(c, 2\pi)$ , com  $c \in (0, 2\pi)$ , isto é  $c \neq 0$ .

**Proposição 3.8.** *A seguir apresentamos propriedades importantes envolvendo continuidade entre espaços topológicos.*

*Sejam  $X, Y$  e  $Z$  espaços topológicos. São válidas as afirmações:*

- (I) *Função inclusão e constante são contínuas. Ou seja,*
  - (i) *Se  $A$  é um subespaço de  $X$ , então a função inclusão,*

$$j : A \rightarrow X$$

$$a \mapsto a,$$

é contínua. Em particular, a função identidade  $i_d : X \rightarrow X$ ,  $i_d(a) = a$ , é contínua.

(ii) Se  $f : X \rightarrow Y$  tal que  $f(x) = y_0$ , para todo  $x$  em  $X$ , então a função  $f$  é contínua.

(II) Composição de funções contínuas é uma função contínua. A saber,

Se  $f : X \rightarrow Y$  e  $g : Y \rightarrow Z$  são contínuas então  $g \circ f$  é contínua.

(III) Se  $f : X \rightarrow Y$  é uma função contínua e  $A$  é um subespaço de  $X$ , então a restrição  $f|_A : A \rightarrow Y$  é uma função contínua.

*Demonstração.* (I) (i) Seja  $V$  um subconjunto aberto de  $X$ , devemos mostrar que  $j^{-1}(U)$  é um subconjunto aberto em  $A$ . Observe que, pela definição da função  $j$ ,  $j^{-1}(U) = U \cap A$  e este conjunto, pela topologia do subespaço de  $A$ , é um conjunto aberto em  $A$ .

(ii) Seja  $V$  um subconjunto aberto de  $Y$ . Queremos mostrar que  $f^{-1}(V)$  é um subconjunto aberto de  $X$ . Para isto, observe que se  $y_0 \in V$ , então  $f^{-1}(V) = X$  e, portanto, um conjunto aberto em  $X$ ; caso contrário, isto é, se  $y_0 \notin V$ , então  $f^{-1}(V) = \emptyset$  que também é um conjunto aberto em  $X$ . Portanto  $f^{-1}(V)$  um conjunto aberto em  $X$ .

(II) Seja  $W$  um subconjunto aberto de  $Z$ . Queremos mostrar que  $(g \circ f)^{-1}(W)$  é um conjunto aberto em  $X$ .

Primeiramente, observe que, como  $g$  é uma função contínua e  $W$  é um subconjunto aberto de  $Z$ , temos que  $g^{-1}(W)$  é um subconjunto aberto em  $Y$ . Por outro lado, como  $f$  também é uma função contínua e  $g^{-1}(W)$  é um subconjunto aberto em  $Y$ , segue que  $f^{-1}(g^{-1}(W))$  é um subconjunto aberto de  $X$ . Mas,  $f^{-1}(g^{-1}(W)) = (g \circ f)^{-1}(W)$ , consequentemente  $(g \circ f)^{-1}(W)$  é um conjunto aberto em  $X$ .

(III) Este resultado segue do item anterior. Basta observar que a restrição de  $f$  para o subespaço  $A$ ,  $f|_A$ , nada mais é do que a composição da função  $f$  com a função inclusão  $j$  de  $A$  em  $X$ , ou seja,  $f|_A = f \circ j$  com ambas funções contínuas. Portanto, a função  $f|_A$  é contínua.

□

**Proposição 3.9.** *Se  $f : A \rightarrow X_1 \times X_2$  é tal que  $f(a) = (f_1(a), f_2(a))$ , sendo que  $f_i : A \rightarrow X_i$ ,  $i = 1, 2$ , então,  $f$  é contínua se, e somente se, as funções coordenadas  $f_1$  e  $f_2$  são contínuas.*

*Demonstração.* Primeiramente consideramos as seguintes composições:

( $\Rightarrow$ )

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{f} & X \times Y & \xrightarrow{\pi_1} & X \\ \mapsto & & (f_1(a), f_2(a)) & \mapsto & f_1(a) \end{array},$$

e

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{f} & X \times Y & \xrightarrow{\pi_2} & Y \\ \mapsto & & (f_1(a), f_2(a)) & \mapsto & f_2(a) \end{array},$$

onde  $\pi_1$  é a projecção natural de  $X \times Y$  em  $X$  e  $\pi_2$  é a projecção natural de  $X \times Y$  em  $Y$ .

Temos, por hipótese, que  $f$  é contínua e observe que podemos escrever as funções coordenadas como as seguintes composições:

$$f_1 = \pi_1 \circ f \text{ e } f_2 = \pi_2 \circ f.$$

Observe ainda que  $\pi_1$  e  $\pi_2$ , projecções de  $X \times Y$ , são funções contínuas. De fato, se  $U$  é um subconjunto aberto de  $X$ , então  $\pi_1^{-1}(U) = U \times Y$  é um subconjunto aberto de  $X \times Y$ . Analogamente, se  $V$  é um subconjunto aberto de  $Y$  temos  $\pi_2^{-1}(V) = X \times V$  como subconjunto aberto de  $X \times Y$ . Portanto, segue do item II da proposição 3.8, que  $f_1$  e  $f_2$  são funções contínuas.

( $\Leftarrow$ ) Considere um elemento básico  $U \times V$  em  $X \times Y$ , com  $U$  um subconjunto aberto de  $X$  e  $V$  um subconjunto aberto de  $Y$ . Veja que,

$$f^{-1}(U \times V) = f_1^{-1}(U) \cap f_2^{-1}(V) \text{ é um subconjunto aberto de } A, \quad (*)$$

pois

$$a \in f^{-1}(U \times V) \Leftrightarrow f(a) \in U \times V \Leftrightarrow f_1(a) \in U \text{ e } f_2(a) \in V \Leftrightarrow a \in f_1^{-1}(U),$$

e

$$a \in f_2^{-1}(V) \Leftrightarrow a \in f_1^{-1}(U) \cap f_2^{-1}(V).$$

Por outro lado, como  $U$  é um subconjunto aberto de  $X$  e  $f_1$  é uma função contínua, segue que  $f_1^{-1}(U)$  é um subconjunto aberto de  $A$  e também, como  $V$  é um

subconjunto aberto de  $Y$  e  $f_2$  é uma função contínua, segue que  $f_2^{-1}(U)$  é um subconjunto aberto em  $A$ . Logo,  $f^{-1}(U \times V) = f_1^{-1}(U) \cap f_2^{-1}(V)$  é um subconjunto aberto em  $A$  e, conseqüentemente,  $f$  é uma função contínua.

□

**Corolário 3.1.** *Se  $f : A \rightarrow X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$  é tal que  $f(a) = (f_1(a), f_2(a), \dots, f_n(a))$ , onde  $f_i : A \rightarrow X_i, i = 1, \dots, n$ , então,  $f$  é contínua se, e somente se, as funções coordenadas  $f_1, f_2, \dots, f_n$  são contínuas.*

*Demonstração.* Segue da proposição anterior utilizando o Princípio de Indução Finita.

□

**Observação 3.7.** Veja que para espaços topológicos metrizáveis  $X$  e  $Y$ , via métricas  $d$  e  $d'$  respectivamente, podemos escrever a definição de continuidade da seguinte maneira: Sejam  $X$  e  $Y$  espaços topológicos metrizáveis e  $f : X \rightarrow Y$  uma função. Dizemos que  $f$  é contínua em  $x_0 \in X$ , quando para toda  $\varepsilon$ -bola,  $\varepsilon > 0$  arbitrário, existe  $\delta > 0$  tal que  $f(B_d(x_0, \delta)) \subset B_{d'}(f(x_0), \varepsilon)$ . Em outras palavras,  $f$  é contínua em  $x_0 \in X$  quando para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tais que

$$d(y, x_0) < \delta \Rightarrow d(f(y), f(x_0)) < \varepsilon.$$

Em particular, para  $(\mathbb{R}, | \cdot |)$  temos que uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua em  $x_0 \in \mathbb{R}$  se, e somente se,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid |y - x_0| < \delta \Rightarrow |f(y) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

E para  $(\mathbb{R}^n, \| \cdot \|)$  uma função  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua em  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  se, e somente se

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid \|y - x_0\| < \delta \Rightarrow |f(y) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

**Lema 3.6.** *Sejam  $M, N$  espaços topológicos metrizáveis. Se  $M$  é discreto, ou seja, todo ponto  $a \in M$  é ponto isolado, então, a função  $f : M \rightarrow N$  é contínua no ponto  $a$ .*

*Demonstração.* Aqui usamos a versão de continuidade para espaços topológicos metrizáveis, conforme observação 3.7. Mostremos que  $f$  é contínua: dado  $\varepsilon > 0$ , basta tomar  $\delta > 0$  tal que  $B(a, \delta) = \{a\}$ . Desta maneira,

$$d(x, a) < \delta \Rightarrow x = a \Rightarrow d(f(x), f(a)) = 0 < \varepsilon.$$

□

**Proposição 3.10.** *Seja  $f : M \rightarrow N$  uma função entre espaços topológicos metrizáveis  $M$  e  $N$ .*

- (i) Se existir uma constante  $c > 0$  tal que,  $d_N(f(x), f(y)) \leq c d_M(x, y)$ ,  $\forall x, y \in M$ , então  $f$  é contínua. Uma função  $f$  com esta propriedade é chamada lipschitziana e a constante  $c$  é chamada de constante de Lipschitz.
- (ii) Se  $d_N(f(x), f(y)) \leq d_M(x, y)$ ,  $\forall x, y \in M$ , então  $f$  é contínua. Uma função  $f$  com esta propriedade é denominada uma contração fraca.
- (iii) Se cada ponto  $a \in M$  é centro de uma bola aberta  $B = B(a, r)$ ,  $r > 0$  tal que  $f|_B$  é lipschitziana, então  $f$  é contínua. Dizemos que uma função  $f$  com esta propriedade é localmente lipschitziana.

*Demonstração.* (i) Para qualquer  $\varepsilon > 0$ , se tomamos  $\delta = \frac{\varepsilon}{c}$ , a condição  $d_M(x, y) < \frac{\varepsilon}{c}$  implica em

$$d_N(f(x), f(y)) \leq c d_M(x, y) < c \delta = c \frac{\varepsilon}{c} = \varepsilon$$

$$\therefore \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid d_M(x, y) < \delta \Rightarrow d_N(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

Portanto,  $f$  é contínua.

- (ii) De fato, sejam  $a \in M$  e  $\varepsilon > 0$ , quaisquer. Basta tomar  $\delta = \varepsilon$  para obter:

$$d_M(x, a) < \delta \Rightarrow d_N(f(x), f(a)) \leq d_M(x, a) < \varepsilon.$$

Observe que (ii) também pode ser vista como um caso particular de (i), considerando  $c = 1$ .

- (iii) Seja  $a \in M$ , qualquer. Por hipótese, existe  $r > 0$  tal que  $f|_B$  é lipschitziana, onde  $B = B(a, r)$ , isto é, existe  $c > 0$  tal que:

$$d_N(f(x), f(y)) \leq c d(x, y), \forall x, y \in B.$$

Em particular, para  $x = a$ , temos:

$$d_N(f(a), f(y)) \leq c d(a, y), \forall y \in B \quad (*)$$

Agora, para qualquer  $\varepsilon > 0$  defina  $\delta = \min \left\{ \frac{\varepsilon}{2c}, \frac{r}{2} \right\}$ . Veja que, se  $d(a, y) < \delta$ , então  $d(a, y) < \frac{r}{2} < r$ , isto é,  $y \in B$ . Logo, por (\*) segue que:

$$d_N(f(a), f(y)) \stackrel{(*)}{\leq} c d(a, y) < c \delta \leq c \frac{\varepsilon}{2c} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Portanto,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid d_M(x, y) < \delta \Rightarrow d_N(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

isto é,  $f$  é contínua em  $a$ , para qualquer  $a \in M$ . Ou seja,  $f$  é contínua.  $\square$

**Observação 3.8.** Se  $M$  e  $N$  são espaços normados com normas  $\| \cdot \|_M$  e  $\| \cdot \|_N$ , respectivamente, e considerando as métricas induzidas por estas normas, então a função  $f$  é lipschitziana se, e somente se,

$$\|f(x) - f(y)\|_N \leq c\|x - y\|_M.$$

**Exemplo 3.13.** Considere  $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$ . A função  $r : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $r(x) = \frac{1}{x}$  é contínua em  $\mathbb{R} - \{0\}$ .

De fato, primeiro observe que, para cada  $k > 0$ ,  $r$  é lipschitziana no conjunto:

$$X_k = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \geq k\}.$$

Pois, dados  $x, y$  de modo que  $|x| \geq k$  e  $|y| \geq k$ , e considerando  $\mathbb{R}$  com a métrica induzida por  $| \cdot |$  temos:

$$|r(x) - r(y)| = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right| = \frac{|x - y|}{|x y|} = \frac{|x - y|}{|x| |y|} \leq c|x - y|, \text{ onde } c = \frac{1}{k^2}.$$

Veja ainda que todo ponto  $a$  pertencente a  $\mathbb{R}^*$  também pertence a algum conjunto  $X_k$ , pois como  $\mathbb{R}$  é arquimediano <sup>3</sup> e  $|a| > 0$ , existe  $k > 0$  tal que  $|a| \geq k$ . Note também que, sempre existe um intervalo de centro  $a$ , digamos  $I_a = (a - l_a, a + l_a)$ ,  $l_a \in \mathbb{R}_+$ , contido em  $X_k$ . Assim, como a função  $r$  é lipschitziana em  $X_k$ , segue que  $r$  é lipschitziana em  $I_a$ . Ou seja,  $r : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$  é localmente lipschitziana (pois, para todo  $a \in \mathbb{R}^*$ , existe  $I_a$  tal que  $r|_{I_a}$  é lipschitziana) logo, pelo item (iii) da proposição 3.10, segue que  $r$  é contínua.

**Proposição 3.11.** Se  $(E, \| \cdot \|)$  é um espaço normado, então as seguintes funções são contínuas:

$$(i) \quad \begin{aligned} s : E \times E &\rightarrow E \\ (x, y) &\mapsto s(x, y) := x + y \end{aligned}.$$

$$(ii) \quad \begin{aligned} m : \mathbb{R} \times E &\rightarrow E \\ (\lambda, x) &\mapsto m(\lambda, x) := \lambda x \end{aligned}.$$

*Demonstração.* (i) Primeiro observe que a função dada por

$$\|(x, y)\|_{E \times E'} := \|x\|_E + \|y\|_{E'},$$

<sup>3</sup>Para mais informações consulte as páginas 59 e 60, [7].

é uma norma para  $E \times E$ , onde  $\|\cdot\|_E$  é a norma de  $E$ , conseqüentemente  $E \times E$  é um espaço normado. Agora, veja que  $s : E \times E \rightarrow E$  é uma contração fraca (utilizando a métrica  $d$  induzida pela norma de  $E \times E$ ), isto é,

$$\|s(x, y) - s(x', y')\|_E \leq \|(x, y) - (x', y')\|_{E \times E'}.$$

Pois,

$$\begin{aligned} \|s(x, y) - s(x', y')\|_E &= \|(x + y) - (x' + y')\|_E = \\ \|(x - x') + (y - y')\|_E &\leq \|x - x'\|_E + \|y - y'\|_E := \|(x - x', y - y')\|_{E \times E'} = \\ \|(x, y) - (x', y')\|. \end{aligned}$$

Portanto,  $\|s(x, y) - s(x', y')\|_E \|(x, y) - (x', y')\|_{E \times E'}$ .

Logo, como  $s$  é uma contração fraca, segue da proposição 3.10, que  $s$  é contínua.

- (ii) Observemos que é possível mostrar que, se uma função é contínua em uma parte limitada do seu domínio, então esta é contínua para todo o domínio. Então para mostrarmos que  $m$  é uma função contínua, basta mostrarmos que  $m$  é contínua para cada parte limitada do domínio  $\mathbb{R} \times E$ . Mas para isto é suficiente mostrar que  $m$  é uma função lipschitziana em cada parte limitada de  $\mathbb{R} \times E$ . Façamos isto. Suponha que  $(\lambda, x)$  e  $(\mu, y)$  pertencem a uma parte limitada de  $\mathbb{R} \times E$ , logo podemos dizer que existe  $a > 0$  tal que

$$|\lambda| \leq a, |\mu| \leq a, \|x\|_E \leq a \text{ e } \|y\|_E \leq a.$$

Com isto, segue:

$$\begin{aligned} \|m(\lambda, x) - m(\mu, y)\|_E &= \|\lambda x - \mu y\|_E = \|\lambda x - \mu x + \mu x - \mu y\|_E = \\ \|(\lambda - \mu)x + \mu(x - y)\|_E &\leq \|(\lambda - \mu)x + \mu(x - y)\|_E \leq \\ \|(\lambda)x\|_E + \|\mu(x - y)\|_E &\leq |\lambda - \mu| \|x\|_E + |\mu| \|x - y\|_E \leq \\ |\lambda - \mu| a + a \|x - y\|_E &= a(|\lambda - \mu| + \|x - y\|_E) = \\ a(|\lambda - \mu| + \|x - y\|_E) &= a \|(\lambda - \mu, x - y)\|_{\mathbb{R} \times E} = \\ a \|(\lambda, x) - (\mu, y)\|_{\mathbb{R} \times E}. \end{aligned}$$

Portanto, tomando  $c := a$ , segue que

$$\|m(\lambda, x) - m(\mu, y)\|_E \leq c \|(\lambda, x) - (\mu, y)\|_{\mathbb{R} \times E}.$$

Logo,  $m$  é contínua pela proposição 3.10.

□

**Proposição 3.12.** *Sejam  $(M, d_M)$  um espaço métrico,  $(E, || \cdot ||_E)$  um espaço vetorial normado. Se as funções  $f, g : M \rightarrow E$  e  $\alpha, \beta : M \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\beta \neq 0$  são funções contínuas, então são contínuas as aplicações  $f + g : M \rightarrow E$ ,  $\alpha f : M \rightarrow E$  e  $\frac{\alpha}{\beta} : M \rightarrow \mathbb{R}$ , definidas por:*

(i)

$$\begin{aligned} f + g : M &\rightarrow E \\ x &\mapsto (f + g)(x) := f(x) + g(x) \end{aligned} .$$

(ii)

$$\begin{aligned} \alpha f : M &\rightarrow E \\ x &\mapsto (\alpha f)(x) := \alpha(x) f(x) \end{aligned} .$$

(iii)

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{\beta} : M &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \left( \frac{\alpha}{\beta} \right)(x) := \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \end{aligned} .$$

*Demonstração.* (i) Considere a função  $h$  definida por

$$\begin{aligned} h : M &\rightarrow E \times E \\ x &\mapsto (f(x), g(x)) \end{aligned} .$$

Pela proposição 3.9 esta função é contínua, já que  $f$  e  $g$  o são.

Agora, pelo item (i) da proposição 3.11, a função

$$\begin{aligned} s : E \times E &\rightarrow E \\ (a, b) &\mapsto a + b \end{aligned}$$

é contínua.

Observe que  $f + g = s \circ h$ , ou seja,

$$\begin{aligned} f + g : M &\xrightarrow{h} E \times E \xrightarrow{s} E \\ x &\longmapsto (f(x), g(x)) \longmapsto f(x) + g(x) = (f + g)(x) \end{aligned} .$$

Como provado na proposição 3.8 composição de funções contínuas é uma função contínua, logo temos  $f + g$  uma função contínua.

(ii) Considere a função  $n$  definida por

$$\begin{aligned} n : M &\rightarrow \mathbb{R} \times E \\ x &\mapsto (\alpha(x), f(x)) \end{aligned}$$

Veja que a função  $n$  é contínua, pela proposição 3.9, pois  $\alpha$  e  $f$  o são.

Agora, pelo item (ii) da proposição 3.11, a função

$$\begin{aligned} m : \mathbb{R} \times E &\rightarrow E \\ (\lambda, y) &\mapsto \lambda y \end{aligned}$$

também é contínua.

Note ainda que  $\alpha f = m \circ n$ , isto é,

$$\begin{aligned} \alpha f : M &\xrightarrow{n} \mathbb{R} \times E \xrightarrow{m} E \\ x &\mapsto (\alpha(x), f(x)) \mapsto \alpha(x)f(x) = \alpha f(x) \end{aligned}$$

Logo,  $\alpha f$  é uma composição de funções contínuas e, pela proposição 3.8, contínua.

(iii) Considere  $p$  a seguinte função

$$\begin{aligned} p : M &\rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \\ x &\mapsto (\alpha(x), \beta(x)) \end{aligned}$$

Temos que a função  $p$  é contínua, pois suas funções coordenadas o são. Além disso, pelo exemplo 3.13 a função  $r$

$$\begin{aligned} r : \mathbb{R}^* &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto r(x) = \frac{1}{x} \end{aligned}$$

é contínua, e pelo item (i) da proposição 3.8 a função identidade  $i_d : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i_d(a) = a$ , também é contínua.

Consequentemente a função  $t$  definida por

$$\begin{aligned} t : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* &\rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ (y, z) &\mapsto (i_d(y), r(z)) = \left(y, \frac{1}{z}\right) \end{aligned}$$

também é contínua, pela proposição 3.9.

Observe que  $\frac{\alpha}{\beta}$  é a composição  $\frac{\alpha}{\beta} = m \circ t \circ p$ , já que,

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{\beta} : M &\xrightarrow{p} \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \xrightarrow{t} \mathbb{R} \times \mathbb{R} \xrightarrow{m} \mathbb{R} \\ x &\mapsto (\alpha(x), \beta(x)) \mapsto \left(\alpha(x), \frac{1}{\beta(x)}\right) \mapsto \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \frac{\alpha}{\beta}(x) \end{aligned}$$

Logo,  $\frac{\alpha}{\beta}$  é uma composição de funções contínuas e, portanto, pela proposição 3.8, contínua.

□

**Exemplo 3.14.** Pelo item (ii) do resultado anterior, segue que a função  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $F(x) = kx$ ,  $k \in \mathbb{R}^*$ , é uma função contínua.

Já que, considerando  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  como a função constante  $\alpha(x) = k$  e  $I : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  a aplicação identidade, temos  $F(x) = kx = \alpha(x)I(x)$ .

### 3.3 Espaço Quociente

**Definição 3.19.** *Sejam  $X$  e  $Y$  espaços topológicos e  $p : X \rightarrow Y$  uma função sobrejetora. Dizemos que  $p$  é uma aplicação quociente se  $p$  satisfaz a seguinte propriedade:*

$$U \text{ é um subconjunto aberto de } Y \iff p^{-1}(U) \text{ é um subconjunto aberto de } X.$$

**Observação 3.9.** Das definições 3.17 e 3.19 vemos que toda função sobrejetora, aberta (ou fechada) e contínua, entre espaços topológicos, é uma aplicação quociente. Ressaltamos porém que nem toda aplicação quociente é aberta (por exemplo, a aplicação quociente do exercício 3, p.145, [5]).

**Definição 3.20.** *Sejam  $X$  um espaço topológico,  $A$  um conjunto e  $p : X \rightarrow A$  uma função sobrejetora. Então, existe uma única topologia  $\tau$  em  $A$  sob a qual  $p$  é uma aplicação quociente, a saber:*

$$\tau = \{U \subset A \mid p^{-1}(U) \text{ é um subconjunto aberto de } X\}.$$

*Esta topologia é denominada topologia quociente induzida por  $p$ .*

**Observação 3.10.** Note que, de fato, a coleção  $\tau$  da definição anterior é uma topologia:

(a)  $\emptyset$  e  $A$  pertencem a  $\tau$ , pois:

$$p^{-1}(\emptyset) = \emptyset \text{ e } p^{-1}(A) = X,$$

com ambos abertos de  $X$  (já que a função  $p$  é sobrejetora).

(b) Dada uma família  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$  de abertos de  $A$ , temos que  $\bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha$  pertence a  $\tau$ , já que

$$p^{-1}\left(\bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha \in J} p^{-1}(U_\alpha),$$

é um aberto em  $X$ .

- (c) Dado um conjunto finito de abertos de  $A$ ,  $\{U_1, \dots, U_n\}$ , temos que  $\bigcap_{i=1}^n U_i$  pertence a  $\tau$  uma vez que:

$$p^{-1}\left(\bigcap_{i=1}^n U_i\right) = \bigcap_{i=1}^n p^{-1}(U_i),$$

é um conjunto aberto em  $X$ .

**Definição 3.21.** Seja  $X$  um espaço topológico e  $X^*$  uma partição de  $X$ . Considere também  $p : X \rightarrow X^*$  uma função sobrejetora que aplica cada elemento  $x \in X$  ao elemento de  $X^*$  que o contém. Com a topologia quociente induzida por  $p$ , dizemos que  $X^*$  é um espaço quociente de  $X$ .

**Observação 3.11.** A função  $p$  apresentada em 3.21 está bem definida uma vez que, sendo  $X^*$  uma partição para  $X$ , existe um único elemento de  $X^*$  que contém aquele elemento  $x$ .

**Exemplo 3.15.** Seja  $X$  um quadrado dado por  $[0, 1] \times [0, 1]$ . Definimos a partição  $X^* = \{X_1, X_2, X_3, X_4\}$  de  $X$ , onde  $X_1 = \{(x, y) : 0 < x < 1 \text{ e } 0 < y < 1\}$ ,  $X_2 = \{(x, 0), (x, 1) : 0 < x < 1\}$ ,  $X_3 = \{(0, y), (1, y) : 0 < y < 1\}$  e  $X_4 = \{(0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 1)\}$ . Os respectivos conjuntos abertos em  $X$  são denotados pelas regiões sombreadas na figura que segue. Veja que a imagem de cada um desses conjuntos sob  $p$  é um conjunto aberto de  $X^*$ , como indicado na figura. Esta descrição de  $X^*$  descreve o toro via a identificação das arestas de  $X$  pela aplicação  $p$ .

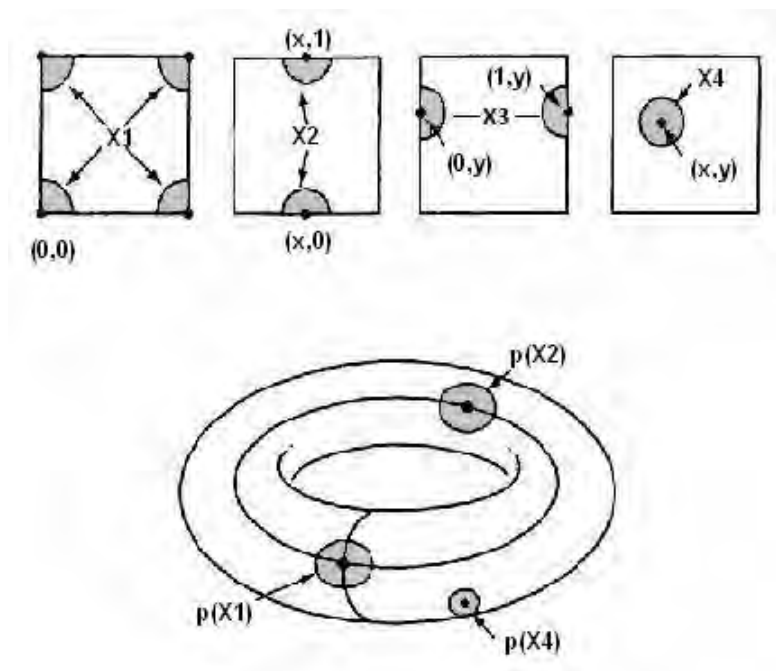


Figura 3.4: Esquema do Toro

**Observação 3.12.** Dados  $X$  espaço topológico e  $\sim$  uma relação de equivalência<sup>4</sup> sobre  $X$ , é possível de se mostrar que o conjunto quociente  $\frac{X}{\sim} := \{[x] : x \in X\}$ , onde  $[x] := \{y \in X : x \sim y\}$  é uma classe de equivalência, forma uma partição para  $X$  (para mais detalhes, consulte [2], página 26.). E ainda, observe que a aplicação natural  $p : X \rightarrow \frac{X}{\sim}$  definida por  $p(x) = [x]$  é uma aplicação sobrejetora. Portanto, podemos munir o conjunto  $\frac{X}{\sim}$  com a topologia quociente induzida por  $p$  via  $X$ .

Por exemplo, a relação de equivalência sobre  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$  dada por:  $v \sim w$  se, e somente se, existe  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  tal que  $v = \lambda w$  define o espaço quociente  $\frac{\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}}{\sim}$ , chamado espaço projetivo  $n$ -dimensional e denotado por  $\mathbb{P}^n$ .

No contexto acima, enunciamos o seguinte resultado:

**Proposição 3.13.** *Sejam  $X$  e  $Y$  espaços topológicos,  $f : X \rightarrow Y$  uma função contínua e  $\sim$  uma relação de equivalência em  $X$ . Então existe uma função contínua  $g : \frac{X}{\sim} \rightarrow Y$  satisfazendo  $f = g \circ p$  se, e somente se,  $x \sim y$  implica  $f(x) = f(y)$ .*

*Demonstração.* Note que da existência de  $g$  temos que  $x \sim y$  implica  $[x] = [y]$ , e consequentemente, temos:

$$f(x) = g(p(x)) = g([x]) = g([y]) = g(p(y)) = f(y).$$

Ou seja,  $x \sim y$  implica  $f(x) = f(y)$ .

Por um outro lado, se  $x \sim y$  implica  $f(x) = f(y)$ , a aplicação  $g : \frac{X}{\sim} \rightarrow Y$  dada por  $g([x]) = f(x)$  está bem definida. Note ainda que, da definição de  $g$  segue, de modo natural, que se  $x \in X$  então  $(g \circ p)(x) = g([x]) = f(x)$ . Logo,  $g$  é tal que  $f = g \circ p$ . Também,  $g$  é contínua, pois se  $A$  é aberto em  $Y$  então  $f^{-1}(A)$  é aberto em  $X$ , pois  $f$  é contínua. Mas pela definição da topologia quociente,  $g^{-1}(A)$  é aberto em  $\frac{X}{\sim}$  se, e somente se,  $p^{-1}(g^{-1}(A)) = f^{-1}(A)$  é aberto em  $X$ . Portanto,  $g^{-1}(A)$  é aberto e segue a continuidade de  $g$ .

□

A proposição acima é particularmente útil para reconhecer espaços quocientes homeomorfos a espaços topológicos familiares, como veremos nos próximos exemplos.

**Exemplo 3.16.** Defina a seguinte relação de equivalência sobre  $\mathbb{R}$ : dois números reais  $x$  e  $y$  são equivalentes quando estes diferem-se por um número inteiro, isto é,  $x \sim y$

<sup>4</sup>Uma relação de equivalência é uma relação binária de  $X$  que cumpre as seguintes propriedades:

1. (Reflexiva)  $\forall x \in X, x \sim x$ ;
2. (Simétrica)  $\forall x, y \in X$ , se  $x \sim y$ , então  $y \sim x$ ;
3. (Transitiva)  $\forall x, y, z \in X$ , se  $x \sim y$  e  $y \sim z$ , então  $x \sim z$ .

se, e somente se,  $x - y \in \mathbb{Z}$ . Se consideramos  $\mathbb{R}$  com a topologia usual então  $\frac{\mathbb{R}}{\sim}$  é homeomorfo ao círculo  $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ .

Com efeito, a função  $f : \mathbb{R} \rightarrow S^1$  definida por  $f(t) := (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$  é sobrejetora. Com isto, pela proposição 3.13 temos a existência de uma função  $g : \frac{\mathbb{R}}{\sim} \rightarrow S^1$  tal que  $f = g \circ p$ . É possível de se demonstrar que  $g$  é uma bijeção com inversa  $g^{-1}$  também contínua. Ou seja,  $g$  é um homeomorfismo entre  $\frac{\mathbb{R}}{\sim}$  e  $S^1$ .

**Exemplo 3.17.** Se  $0 < a < c$ , podemos definir um toro  $\mathbb{T}^2$  como o conjunto de pontos  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  tais que

$$(c - \sqrt{x^2 + y^2})^2 + z^2 = a^2.$$

Do ponto de vista métrico há vários toros (variando as constantes  $a$  e  $c$ ). Mas do ponto de vista topológico só há um toro no seguinte sentido: todos estes toros são homeomorfos. Assim, sem perda de generalidade, podemos supor  $c = 1$  e  $0 < a < 1$ .

Vamos visualizar o toro,  $\mathbb{T}^2$ , como um espaço quociente. Para isto, defina a seguinte relação de equivalência em  $\mathbb{R}^2$ : dados  $v, w \in \mathbb{R}^2$ ,  $v \sim w$  se, e somente se,  $v - w \in \mathbb{Z}^2$ . O conjunto quociente  $\frac{\mathbb{R}^2}{\sim}$  é homeomorfo a  $\mathbb{T}^2$ .

De fato, observe que a função  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  dada por

$$f(u, v) = ((1 + a \cos(2\pi v)) \cos(2\pi u), (1 + a \cos(2\pi v)) \sin(2\pi u), a \sin(2\pi v))$$

é sobrejetora, então pela proposição 3.13 segue que existe uma aplicação contínua  $g : \frac{\mathbb{R}^2}{\sim} \rightarrow \mathbb{T}^2$  tal que  $f = g \circ p$ . Pode-se mostrar que a aplicação  $g$  é bijetora e ainda com inversa contínua, ou seja,  $g$  é um homeomorfismo entre  $\frac{\mathbb{R}^2}{\sim}$  e  $\mathbb{T}^2$ .

**Observação 3.13.** Sejam  $X$  um conjunto e  $H \subset X$ . Se o conjunto quociente  $\frac{X}{\sim}$  é definido a partir da relação  $\sim$  dada por:  $x \sim y$  se, e somente se,  $x - y \in H$ , denotamos  $\frac{X}{\sim}$  por  $\frac{X}{H}$ . Deste forma, pelos exemplos anteriores podemos dizer que  $S^1$  é homeomorfa a  $\frac{\mathbb{R}}{\mathbb{Z}}$  e  $\mathbb{T}^2$  é homeomorfo a  $\frac{\mathbb{R}^2}{\mathbb{Z}^2}$ . De modo geral, é possível se demonstrar que  $\mathbb{T}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  é homeomorfo a  $\frac{\mathbb{R}^n}{\mathbb{Z}^n}$ .

Encerrado este capítulo partimos finalmente para a conexão entre a álgebra e a topologia, até então desvinculadas.

## 4 Grupo Topológico

Neste capítulo finalmente ocorre a conexão dos capítulos anteriores explorando o objeto grupo topológico, sua definição e propriedades, bem como a abordagem de todos os conceitos anteriores permeadas neste novo contexto.

Como referência base para tanto utilizamos [1].

### 4.1 Sobre Grupo Topológico

**Definição 4.1.** Um grupo topológico  $G$  é uma terna  $(G, \cdot, \tau_G)$ , tal que:

$G_1.$   $(G, \cdot)$  é um Grupo;

$G_2.$   $(G, \tau_G)$  é um Espaço Topológico com a Topologia  $\tau_G$ ;

$G_3.$  Todo subconjunto finito de pontos é fechado na topologia  $\tau_G$ ;

$G_4.$  As funções

$$\begin{array}{ll} g : G \times G \longrightarrow G & q : G \longrightarrow G \\ (x, y) \longmapsto xy & x \longmapsto x^{-1} \end{array}$$

são contínuas.

**Observação 4.1.** A propriedade  $G_3$ , isto é, todo subconjunto finito de pontos é fechado para a topologia  $\tau_G$ , é conhecida como axioma  $T_1$ , o qual é uma condição um pouco mais fraca do que o espaço topológico ser um espaço de Hausdorff.

**Proposição 4.1.** Seja  $(G, \cdot, \tau)$  uma terna tal que  $(G, \cdot)$  é um grupo e  $(G, \tau)$  é um espaço topológico satisfazendo o axioma  $T_1$ . Então:

$(G, \cdot, \tau)$  é um grupo topológico se, e somente se, a função  $f$  de  $G \times G$  em  $G$  definida por  $(x, y) \longmapsto xy^{-1}$  é contínua.

*Demonstração.* ( $\implies$ ) Se  $(G, \cdot, \tau)$  é Grupo Topológico sabemos que a função  $f$  está bem definida já que  $\forall x, y \in G : xy^{-1} \in G$ .

A continuidade da função  $f$  segue do fato de que as funções  $g$  e  $q$  são contínuas, pois por hipótese  $G$  é um grupo topológico e  $f = g \circ q$

$$\begin{array}{ccccc} G \times G & \xrightarrow{a=(id, q)} & G \times G & \xrightarrow{g} & G \\ (x, y) & \mapsto & (x, y^{-1}) & \mapsto & xy^{-1} \end{array} .$$

E como já vimos composição de funções contínuas é uma função contínua.

( $\Leftarrow$ ) Sabemos que a função  $f$  de  $G \times G$  em  $G$  dada por  $f(x, y) := xy^{-1}$  é contínua. Logo, sua restrição

$$\begin{array}{ccccc} h = f|_{\{e\} \times G} : \{e\} \times G & \longrightarrow & G \\ (e, x) & \mapsto & ex^{-1} = x^{-1} \end{array} ,$$

onde  $e$  elemento neutro de  $G$ , também é contínua.

Consequentemente, a composição  $h \circ H$ , abaixo, também é contínua

$$\begin{array}{ccccc} G & \xrightarrow{H=(e, id)} & \{e\} \times G & \xrightarrow{h} & G \\ y & \mapsto & (e, y) & \mapsto & y^{-1} \end{array} .$$

Mas esta função resulta exatamente na função  $q$ , isto é,  $q$  é contínua.

Também, a função  $g$  é contínua, pois:

$$\begin{array}{ccccc} G \times G & \xrightarrow{K=(id, q)} & G \times G & \xrightarrow{f} & G \\ (x, y) & \mapsto & (x, y^{-1}) & \mapsto & x(y^{-1})^{-1} = xy \end{array}$$

e

$$g = f \circ K.$$

□

**Observação 4.2.** Para testar o axioma  $T_1$  basta verificar se todo conjunto unitário  $\{a\}$  é fechado sob a topologia do espaço interessado já que todo conjunto finito  $X$  é reunião finita de conjuntos unitários, isto é, se  $X = \{a_1, \dots, a_n\}$ , temos que  $X = \bigcup_{i=1}^n \{a_i\}$ .

**Definição 4.2.** Se  $A$  e  $B$  são subconjuntos de  $G$ , denotemos  $AB$  o conjunto dos pontos  $ab$  para  $a \in A$  e  $b \in B$ . Denotemos, também,  $A^{-1}$  o conjunto de todos os pontos  $a^{-1}$ , para  $a \in A$ .

**Proposição 4.2.** Seja  $(G, \cdot, \tau)$  uma terna tal que  $(G, \cdot)$  é um grupo e  $(G, \tau)$  é um espaço topológico satisfazendo o axioma  $T_1$ . Então  $(G, \cdot, \tau)$  é um grupo topológico se, e somente se, as duas condições a seguir são satisfeitas:

1. Sejam  $x$  e  $y$  elementos quaisquer de  $G$ . Então para toda vizinhança  $W_{xy}$  de  $xy$  existem vizinhanças  $U_x$  e  $V_y$  de  $x$  e  $y$ , respectivamente, tais que  $U_x V_y \subset W_{xy}$ .
2. Seja  $a \in G$ , qualquer. Então para toda vizinhança  $V_{a^{-1}}$  de  $a^{-1}$  existe uma vizinhança  $U_a$  de  $a$  tal que  $U_a^{-1} \subset V_{a^{-1}}$ .

*Demonstração.* ( $\implies$ ) Seja  $(G, \cdot, \tau)$  um grupo topológico. Denotamos por  $V_x$  um aberto de um determinado espaço que contém o elemento  $x$ , ora denominado por vizinhança de  $x$ .

1. Da continuidade de  $m$  em  $G \times G$ ,  $m(x, y) = xy$ , segue que para todo subconjunto  $W_{xy}$  de  $G$  a imagem inversa  $m^{-1}(W_{xy})$  é um subconjunto aberto de  $G \times G$ . Como  $m^{-1}(W_{xy})$  é um aberto de  $G \times G$  contendo  $(x, y)$  temos que existem vizinhanças  $U_x, V_y$  de  $x$  e  $y$ , respectivamente, tais que  $U_x \times V_y \subset m^{-1}(W_{xy})$ .

Afirmção.  $U_x V_y \subset W_{xy}$ .

De fato, seja  $z \in U_x V_y$ , qualquer, então  $z = uv, u \in U_x, v \in V_y$ . Desta forma,

$$(u, v) \in U_x \times V_y = m^{-1}(W_{xy}) \Rightarrow (u, v) \in m^{-1}(W_{xy}) \Rightarrow m(u, v) \in W_{xy}.$$

Logo,  $z = uv = m(u, v) \in W_{xy}$ .

2. Segue da continuidade de  $r$ ,  $r(x) = x^{-1}$ , que para todo subconjunto  $V_{a^{-1}}$  de  $G$  a imagem inversa  $r^{-1}(V_{a^{-1}})$  é um subconjunto aberto de  $G$ . Desta fato, segue que existe uma vizinhança de  $a$ ,  $U_a$  em  $G$ , tal que  $U_a \subset r^{-1}(V_{a^{-1}})$ .

Afirmção.  $U_a^{-1} \subset V_{a^{-1}}$ .

Com efeito, seja  $z \in U_a^{-1}$ , qualquer, então  $z = u^{-1}$ , com  $u \in U_a$ . Logo,

$$u \in U_a \subset r^{-1}(V_{a^{-1}}) \Rightarrow u \in r^{-1}(V_{a^{-1}}) \Rightarrow r(u) \in V_{a^{-1}}.$$

E portanto temos que  $z = u^{-1} = r(u) \in V_{a^{-1}}$ .

( $\Leftarrow$ ) Assumindo as condições como hipóteses provemos a continuidade das funções  $m$  e  $r$ .

Para mostrar que a função  $m$  é contínua em qualquer ponto  $(x, y) \in G \times G$  temos que provar que para toda vizinhança,  $W_{xy}$ , de  $m(x, y) = xy$  a imagem inversa  $m^{-1}(W_{xy})$  é um subconjunto aberto de  $G \times G$ , isto é, que todo  $z = (z_1, z_2) \in m^{-1}(W_{xy}) \subset G \times G$  é um ponto interior de  $m^{-1}(W_{xy})$ . Para tanto é suficiente que exista uma vizinhança de  $z = (z_1, z_2)$  inteiramente contida em  $m^{-1}(W_{xy})$ .

Uma vez que  $z = (z_1, z_2) \in m^{-1}(W_{xy}) \subset G \times G$  segue que  $m(z) = z_1 z_2 \in W_{xy}$ , consequentemente  $W_{xy}$  é uma vizinhança de  $m(z)$  em  $G$ . Nestas condições segue, pela hipótese [item(1)], que existem  $U_{z_1}$  e  $V_{z_2}$  vizinhanças de  $z_1$  e  $z_2$ , respectivamente, tais que  $U_{z_1} V_{z_2} \subset W_{xy}$ . Agora observe que  $U_{z_1} \times V_{z_2}$  é um aberto de  $G \times G$  tal que  $U_{z_1} \times V_{z_2} \subset m^{-1}(W_{xy})$ , já que para todo  $(a, b) \in U_{z_1} \times V_{z_2}$  temos  $m(a, b) = ab \in U_{z_1} V_{z_2} \subset W_{xy}$ . Portanto, existe uma vizinhança de  $z = (z_1, z_2)$  inteiramente contida em  $m^{-1}(W_{xy})$ , a saber,  $U_{z_1} \times V_{z_2}$ .

Para mostrar que a função  $r$  é contínua em qualquer ponto  $a \in G$  temos que provar que para toda vizinhança,  $W_{a^{-1}}$ , de  $r(a) = a^{-1}$  a imagem inversa  $r^{-1}(W_{a^{-1}})$  é um subconjunto aberto de  $G$ , isto é, que todo  $z_0 \in r^{-1}(W_{a^{-1}}) \subset G$  é um ponto interior de

$r^{-1}(W_{a-1})$ . Para tanto é suficiente que exista uma vizinhança de  $z_0$  inteiramente contida em  $r^{-1}(W_{a-1})$ .

Uma vez que  $z_0 \in r^{-1}(W_{a-1}) \subset G$  segue que  $r(z_0) = z_0^{-1} \in W_{a-1}$ , consequentemente  $W_{a-1}$  é uma vizinhança de  $r(z_0)$  em  $G$ . Nestas condições segue, pela hipótese [item(2)], que existe  $U_{z_0}$  vizinhança de  $z_0$  tal que  $U_{z_0}^{-1} \subset W_{a-1}$ . Agora observe que  $U_{z_0}$  é um aberto de  $G$  tal que  $U_{z_0} \subset r^{-1}(W_{a-1})$ , já que para todo  $b \in U_{z_0}$  temos  $r(b) = b^{-1} \in U_{z_0}^{-1} \subset W_{a-1}$ . Portanto, existe uma vizinhança de  $z_0$  inteiramente contida em  $r^{-1}(W_{a-1})$ , a saber,  $U_{z_0}$ .

□

**Proposição 4.3.** *Seja  $(G, \cdot, \tau)$  uma terna tal que  $(G, \cdot)$  é um grupo e  $(G, \tau)$  é um espaço topológico satisfazendo o axioma  $T_1$ . Então  $(G, \cdot, \tau)$  é um grupo topológico se, e somente se a seguinte condição é satisfeita: Sejam  $x$  e  $y$  elementos quaisquer de  $G$ . Então para toda vizinhança  $W$  de  $xy^{-1}$  existem vizinhanças  $U$  e  $V$  de  $x$  e  $y$ , respectivamente, tais que  $UV^{-1} \subset W$ .*

*Demonstração.* ( $\implies$ ) Sendo  $G$  grupo topológico, pela continuidade de  $f$ ,  $f(x, y) = xy^{-1}$ , para todo subconjunto  $W_{xy^{-1}}$  de  $G$  temos que  $f^{-1}(W_{xy^{-1}})$  é um subconjunto aberto de  $G \times G$ .

Deste fato, segue que existem vizinhanças  $U_x$  e  $V_y$  tais que  $U_x \times V_y \subset f^{-1}(W_{xy^{-1}})$ .

Afirmção.  $U_x V_y^{-1} \subset W_{xy^{-1}}$ .

De fato: seja  $w \in U_x V_y^{-1}$ , qualquer. Então  $w = xy^{-1}$ , com  $x \in U_x, y \in V_y$ . Desta maneira,  $(x, y) \in U_x \times V_y \subset f^{-1}(W_{xy^{-1}})$ . Consequentemente,  $f(x, y) \in W_{xy^{-1}}$ .

Portanto,  $w = xy^{-1} = f(x, y) \in W_{xy^{-1}}$ .

( $\impliedby$ ) Para mostrar que  $f$  é contínua em qualquer ponto  $(x, y) \in G \times G$  temos que provar que para toda vizinhança,  $W_{xy^{-1}}$ , de  $f(x, y) = xy^{-1}$  a imagem inversa  $f^{-1}(W_{xy^{-1}})$  é um subconjunto aberto de  $G \times G$ , isto é, que todo  $z = (z_1, z_2) \in f^{-1}(W_{xy^{-1}}) \subset G \times G$  é um ponto interior de  $f^{-1}(W_{xy^{-1}})$ . Para tanto é suficiente que exista uma vizinhança de  $z = (z_1, z_2)$  inteiramente contida em  $f^{-1}(W_{xy^{-1}})$ .

Uma vez que  $z = (z_1, z_2) \in f^{-1}(W_{xy^{-1}}) \subset G \times G$  segue que  $f(z) = z_1 z_2^{-1} \in W_{xy}$ , consequentemente  $W_{xy^{-1}}$  é uma vizinhança de  $f(z)$  em  $G$ . Nestas condições segue, pela hipótese, que existem  $U_{z_1}$  e  $V_{z_2}$  vizinhanças de  $z_1$  e  $z_2$ , respectivamente, tais que  $U_{z_1} V_{z_2}^{-1} \subset W_{xy^{-1}}$ . Agora observe que  $U_{z_1} \times V_{z_2}^{-1}$  é um aberto de  $G \times G$  tal que  $U_{z_1} \times V_{z_2} \subset f^{-1}(W_{xy^{-1}})$ , já que para todo  $(a, b) \in U_{z_1} \times V_{z_2}^{-1}$  temos  $f(a, b) = ab^{-1} \in U_{z_1} V_{z_2}^{-1} \subset W_{xy^{-1}}$ . Portanto, existe uma vizinhança de  $z = (z_1, z_2)$  inteiramente contida em  $f^{-1}(W_{xy^{-1}})$ , a saber,  $U_{z_1} \times V_{z_2}$ .

□

**Corolário 4.1.** *O fato da terna  $(G, \cdot, \tau)$  ser um grupo topológico independe da topologia escolhida para  $G$ , desde que esta cumpra pelo menos o axioma  $T_1$ .*

*Demonstração.* Imediato das proposições 4.2 e 4.3 já que com estas mostramos que uma terna  $(G, \cdot, \tau)$  é um grupo topológico via condições específicas sobre vizinhanças caracterizadas por topologias que cumpram o axioma  $T_1$ . □

**Exemplo 4.1.** Sejam  $a_1, \dots, a_n$  uma coleção finita de elementos de um grupo topológico  $G$ ,  $a_1^{r_1}, \dots, a_n^{r_n} = c$  o produto de potências de  $a$ , onde as potências podem ser positivas ou negativas, e seja  $W$  uma vizinhança arbitrária do elemento  $c$ . Então, existem vizinhanças  $U_1, \dots, U_n$  dos elementos  $a_1, \dots, a_n$  tais que  $U_1^{r_1} \dots U_n^{r_n} \subset W$ , onde definimos  $U_i$  igual a  $U_j$  se  $a_i = a_j$ .

**Exemplo 4.2.**  $(\mathbb{Z}, +, \tau)$  é um grupo topológico, onde  $+$  é a adição usual e  $\tau$  é a topologia discreta. Pela definição 4.1 para mostrar isto temos que verificar as condições:  $G_1$ ,  $G_2$ ,  $G_3$  e  $G_4$ . Façamos isso:

$G_1$ . Observamos no exemplo 2.5 que  $(\mathbb{Z}, +)$  é grupo.

$G_2$ . Temos também, que  $(\mathbb{Z}, \tau)$  é um espaço topológico. Basta tomarmos  $\tau$  como sendo a topologia discreta, como citado no exemplo 3.2.

$G_3$ . O axioma  $T_1$  é satisfeito já que o complementar de todo subconjunto finito de  $\mathbb{Z}$  ainda é um subconjunto de  $\mathbb{Z}$  e, portanto, pela topologia discreta, um conjunto aberto. Deste modo, todo subconjunto finito de  $\mathbb{Z}$  é um conjunto fechado.

$G_4$ . Veja que a função:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ (x, y) &\longmapsto x - y \end{aligned}$$

é contínua.

Com efeito, temos que  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  é discreto, pois todo ponto de  $\mathbb{Z}$  é isolado e cada par  $(a, b)$  em  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  é isolado (por exemplo,  $B((a, b), 1/4) = \{(a, b)\}$ ). Ainda  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  é metrizável. Assim, pelo lema 3.6 da seção 3.2, a função  $f$  é contínua.

**Exemplo 4.3.**  $(\mathbb{R}, +, \tau)$  é um grupo topológico, onde  $+$  é a adição usual e  $\tau$  é a topologia padrão. De fato,

$G_1$ . Observamos no exemplo 2.7 que  $(\mathbb{R}, +)$  é um grupo.

$G_2$ .  $(\mathbb{R}, \tau)$  é um espaço topológico, com a topologia padrão apresentada no lema 3.5.

$G_3$ . O axioma  $T_1$  é satisfeito, pois  $\{a\} \subset \mathbb{R}$  é um conjunto fechado em  $\mathbb{R}$ , já que  $\mathbb{R} - \{a\}$  é um conjunto aberto pois este pode ser escrito como a reunião de intervalos abertos em  $\mathbb{R}$  (digamos  $a > 0$ , então  $\mathbb{R} - \{a\} = (-\infty, 0) \cup (0, a) \cup (a, +\infty)$ ).

Assim, se  $X = \{a_1, \dots, a_n\}$ , temos que  $X = \bigcup_{i=1}^n \{a_i\}$ , logo  $X$  é um conjunto fechado, ou seja, todo conjunto finito de pontos é um conjunto fechado.

$G_4$ . A continuidade das funções

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto x + y \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} q : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ y &\longmapsto -y \end{aligned}$$

foi verificada na seção 3.2, através da proposição 3.11.

**Exemplo 4.4.**  $(\mathbb{R}^*, \cdot, \tau)$ , onde  $\cdot$  é a multiplicação usual em  $\mathbb{R}$  e  $\tau$  é a topologia padrão, é um grupo topológico.

$G_1$ .  $(\mathbb{R}^*, \cdot)$  é um grupo, como visto no exemplo 2.10.

$G_2$ .  $(\mathbb{R}^*, \tau)$  é um espaço topológico, com a topologia padrão conforme visto no lema 3.5.

$G_3$ . O axioma  $T_1$  é satisfeito, pelo mesmo argumento do exemplo anterior.

$G_4$ . As funções  $g$  e  $q$

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* &\longrightarrow \mathbb{R}^* & q : \mathbb{R}^* &\longrightarrow \mathbb{R}^* \\ (x, y) &\longmapsto xy & y &\longmapsto y^{-1} \end{aligned}$$

são contínuas

De fato, primeiramente sejam

$$\begin{aligned} \pi_1 : \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* &\longrightarrow \mathbb{R}^* & \pi_2 : \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* &\longrightarrow \mathbb{R}^* \\ (x, y) &\longmapsto x & (x, y) &\longmapsto y \end{aligned} \quad \text{e}$$

Temos que a função  $\pi_1$  é contínua, pois existe  $\delta = \frac{\varepsilon}{2} > 0$  tal que, para qualquer  $\varepsilon > 0$ ,  $\|(x, y) - (\bar{x}, \bar{y})\| < \delta$  implica em

$$|\pi_1(x, y) - \pi_1(\bar{x}, \bar{y})| \stackrel{(*)}{\leq} \|(x, y) - (\bar{x}, \bar{y})\| < \delta = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

onde  $(*)$  refere-se a propriedade  $|a| = \sqrt{a^2} \leq \sqrt{a^2 + q}$ , sendo  $q$  um número real positivo.

Logo,  $\pi_1$  é contínua e a continuidade de  $\pi_2$  segue de forma analoga.

Agora, observe que  $g = \pi_1 \pi_2$ ,

$$\begin{aligned} g: \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* &\longrightarrow \mathbb{R}^* \\ (x, y) &\longmapsto g(x, y) := (\pi_1 \cdot \pi_2)(x, y) = \pi_1(x, y) \cdot \pi_2(x, y) = xy \end{aligned} .$$

Nestas condições, pelo item (ii) da proposição 3.12, segue que  $g$  é uma função contínua.

Ainda, podemos escrever a função  $q$  como o quociente da função constante igual a 1 pela função identidade de  $\mathbb{R}^*$ , isto é

$$\begin{aligned} q: \mathbb{R}^* &\longrightarrow \mathbb{R}^* \\ y &\longmapsto q(y) := \frac{1}{y} = \frac{1}{Id_{\mathbb{R}^*}(y)} , \end{aligned}$$

onde,

$$\begin{aligned} Id_{\mathbb{R}^*}: \mathbb{R}^* &\longrightarrow \mathbb{R}^* \\ y &\longmapsto y \end{aligned} .$$

Deste modo, segue do item (iii) da proposição 3.12 que a função  $q$  é contínua.

**Exemplo 4.5.**  $(\mathbb{C}^*, \cdot, \tau)$ , onde  $(\mathbb{C}^*, \cdot)$  é um grupo com a operação vista no exemplo 2.11 e  $\tau$  é a topologia induzida pela norma vista no exemplo 3.7, é um grupo topológico.

Com efeito,

$G_1$ . Verificamos no exemplo 2.11 que  $(\mathbb{C}^*, \cdot)$  é um grupo.

$G_2$ .  $(\mathbb{C}^*, \tau)$  é um espaço topológico, com a topologia induzida pela norma conforme visto no exemplo 3.7.

$G_3$ . O axioma  $T_1$  é satisfeito, isto é, o subconjunto  $\{z_1, \dots, z_n\} \subset \mathbb{C}^*$  é fechado. Para tanto basta observar que, pela definição 3.16, o conjunto  $A = \mathbb{C}^* - \{z_1, \dots, z_n\}$  é aberto já que para todo ponto  $z \in A$ , tomando  $r = \min\{|z - z_i|, i \in \{1, \dots, n\}\}$ , temos  $B(z, r) \subset A$ .

$G_4$ . A função

$$\begin{aligned} f: \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^* &\longrightarrow \mathbb{C}^* \\ (z_1, z_2) &\longmapsto z_1 z_2^{-1} , \end{aligned}$$

é contínua. Pois

$$z_1 z_2^{-1} = (x_1 + y_1 i) \frac{(x_2 - y_2 i)}{x^2 + y^2} = \left( \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x^2 + y^2} \right) + \left( \frac{y_2 x_1 - y_1 x_2}{x^2 + y^2} \right) i.$$

e sabemos, via Análise Complexa <sup>1</sup>, que a função  $f$  é contínua se, e somente se, as respectivas partes real e imaginária são funções reais contínuas.

Como neste caso, as partes real e imaginária de  $f$  apenas envolvem as funções soma, multiplicação, subtração e quociente de números reais, que tem continuidade garantida pela proposição 3.12, segue a continuidade de  $f$ .

**Exemplo 4.6.** A terna  $(GL(n), \cdot, \tau)$ , onde  $\cdot$  é a operação de multiplicação de matrizes e  $\tau$  é uma topologia induzida pela norma dada no exemplo 3.8, é um grupo topológico.

$G_1$ . Provamos no exemplo 2.13 que  $(GL(n), \cdot)$  é um grupo.

$G_2$ .  $(GL(n), \tau)$ , é um espaço topológico induzido pela norma vista no exemplo 3.8.

$G_3$ . Segue pelo fato de que  $GL(n)$  é um espaço normado.

$G_4$ . Usando Análise de Várias Variáveis (especificamente, Teoria de Lie) é possível mostrar que a função  $f$

$$\begin{aligned} f : GL(n) \times GL(n) &\longrightarrow GL(n) \\ (A, B) &\longmapsto AB^{-1} \end{aligned}$$

é diferenciável e como consequência segue sua continuidade. Para não perder o foco do nosso trabalho não abordamos diferenciabilidade porém para mais detalhes veja [9].

## 4.2 Propriedades em um Grupo Topológico

**Proposição 4.4.** *Sejam  $(G, \cdot, \tau)$  um grupo topológico e  $H$  subespaço de  $G$ . Se  $H$  é subgrupo de  $G$  então  $H$  e  $\bar{H}$  são grupos topológicos.*

*Demonstração.*  $(H, \cdot|_H, \tau|_H)$  é um grupo topológico onde  $\cdot|_H$  é a operação de  $G$  restrita a  $H$  e  $\tau|_H$  é a topologia para  $H$  induzida por  $\tau$ . De fato:

Esta terna claramente cumpre  $G_1$  e  $G_2$ .

Cada conjunto finito de pontos em  $H \subset G$  é fechado em  $G$ , pois  $G$  é grupo topológico, desta maneira, segue que este conjunto também será fechado em  $H$ , já que sua interseção com  $H$  resulta o próprio conjunto.

Temos também as funções

$$\begin{aligned} g_H : H \times H &\longrightarrow H \\ (x, y) &\longmapsto x \cdot|_H y = xy \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup>Vide [8].

e

$$\begin{aligned} q_H : H &\longrightarrow H \\ x &\longmapsto x^{-1} \end{aligned} ,$$

contínuas, pois são restrições de contínuas:  $g_H = g|_{H \times H}$  e  $q_H = q|_H$ , onde  $g$  e  $q$  são as funções contínuas

$$\begin{aligned} g : G \times G &\longrightarrow G & q : G &\longrightarrow G \\ (x, y) &\longmapsto xy & x &\longmapsto x^{-1} . \end{aligned}$$

Observe que ambos contradomínios são iguais a  $H$ , já que  $H$  é subgrupo e consequentemente  $g_H(H \times H) = g(H \times H) \subset H$  e  $q_H(H) = q(H) \subset H$ .

Portanto, a terna  $(H, \cdot|_H, \tau|_H)$  é um grupo topológico.

Para mostrar que  $\bar{H}$  é um grupo topológico é suficiente mostrar que  $\bar{H}$  é um subgrupo de  $G$ . Lembremos que um elemento  $c$  pertence a  $\bar{H}$  se, e somente se, para toda vizinhança  $W$  de  $c$  existir  $c_0 \in H$  tal que  $c_0 \in W$ , isto é,  $H \cap W \neq \emptyset$ .

Façamos isto. Primeiro observe que, como  $H \subset \bar{H}$  (veja observação 3.4) e  $e_G \in H$ , pois  $H$  é subgrupo de  $G$ , segue que  $e_G \in H \subset \bar{H}$ , ou seja,  $\bar{H}$  contém o elemento neutro.

Agora, sejam  $a, b \in \bar{H} \subset G$ , quaisquer. Mostremos que  $ab^{-1} \in \bar{H}$ , onde  $\cdot$  é a operação induzida por  $G$  e  $b^{-1}$  é o elemento oposto a  $b$  em  $G$ .

De fato, seja  $W$  uma vizinhança do elemento  $ab^{-1} \in G$ , qualquer. Então, como  $G$  é um grupo topológico, segue pela proposição 4.3, que existem vizinhanças  $U$  e  $V$  dos elementos  $a$  e  $b$ , em  $G$ , tais que  $UV^{-1} \subset W$ . Mas,  $a, b \in \bar{H}$ , logo existem elementos  $x, y \in H$  tais que  $x \in U$  e  $y \in V$ , consequentemente  $xy^{-1} \in UV^{-1} \subset W$ .

Por outro lado, como  $H$  é subgrupo, segue que  $xy^{-1} \in H$ . Ou seja,  $xy^{-1} \in H$  e  $xy^{-1} \in W$ .

Uma vez que  $W$  é uma vizinhança qualquer de  $ab^{-1}$  e  $W \cap H \neq \emptyset$ , pois  $xy^{-1} \in W \cap H$ , segue que  $ab^{-1} \in \bar{H}$ .

□

**Exemplo 4.7.** O conjunto  $S^1$  é um grupo topológico via proposição anterior, pois é um subgrupo do grupo topológico  $\mathbb{C}^*$ .

**Definição 4.3.** Dizemos que um espaço topológico  $G$  é um espaço homogêneo se para todo par  $x, y$  de pontos de  $G$ , existe um homeomorfismo de  $G$  nele mesmo que leva  $x$  em  $y$ .

**Lema 4.1.** Se  $G$  é um grupo topológico e  $\alpha \in G$ , então as funções  $f_\alpha, g_\alpha : G \rightarrow G$  definidas por

$$f_\alpha = \alpha x \text{ e } g_\alpha = x \alpha,$$

são homeomorfismos de  $G$ .

*Demonstração.* Veja que  $f_\alpha$  e  $g_\alpha$  são ambas bijeções com inversas  $(f_\alpha)^{-1}(x) = \alpha^{-1}x$  e  $(g_\alpha)^{-1} = x\alpha^{-1}$ , respectivamente.

A continuidade de  $f_\alpha$  e  $g_\alpha$ , bem como de suas funções inversas, segue da continuidade da função multiplicação  $m$ . Por exemplo,  $f_\alpha$  é contínua pois se escreve como a composição  $f_\alpha = m|_{\{\alpha\} \times G} \circ j$ , com  $m|_{\{\alpha\} \times G}$  e  $j = (cte, id)$  contínuas.

$$\begin{array}{ccccc} G & \xrightarrow{j} & \{\alpha\} \times G & \xrightarrow{m|_{\{\alpha\} \times G}} & G \\ x & \mapsto & (\alpha, x) & \mapsto & \alpha x \end{array},$$

e  $g_\alpha = m|_{G \times \{\alpha\}} \circ k$ , com  $m|_{G \times \{\alpha\}}$  e  $k = (id, cte)$  contínuas,

$$\begin{array}{ccccc} G & \xrightarrow{k} & G \times \{\alpha\} & \xrightarrow{m|_{G \times \{\alpha\}}} & G \\ x & \mapsto & (x, \alpha) & \mapsto & x\alpha \end{array}.$$

□

**Proposição 4.5.** *Todo grupo topológico é um espaço homogêneo.*

*Demonstração.* Sejam  $G$  um grupo topológico e  $x, y \in G$ , quaisquer. Pelo lema anterior a aplicação  $f_\alpha$  onde  $\alpha = yx^{-1} \in G$  é um homeomorfismo, tal que  $f_\alpha(x) = \alpha x = (yx^{-1})x = y(x^{-1}x) = y$ .

Ou seja, existe um homeomorfismo de  $G$  em  $G$  que aplica  $x$  em  $y$ .

Portanto,  $G$  é um espaço homogêneo. □

**Lema 4.2.** *Sejam  $U$  e  $H$  subconjuntos de  $G$ . Se  $U$  é um conjunto aberto de  $G$  então  $UH$  também o é.*

*Demonstração.* Observe que  $UH = \bigcup_{h \in H} U\{h\}$  e  $U\{h\}$  é aberto em  $G$ , pois  $U\{h\}$  é aberto em  $G$ , uma vez que  $U\{h\} = f_{h^{-1}}^{-1}(U)$ , com  $U$  aberto de  $G$  e  $f_{h^{-1}}$  o homeomorfismo que aplica cada elemento  $x$  em  $xh^{-1}$  visto no lema 4.1 e como sabemos do item (b) da definição 3.17, imagem inversa de um conjunto aberto por uma função contínua é um conjunto aberto. □

**Lema 4.3.** *Sejam  $G$  um grupo topológico,  $H$  um subgrupo normal de  $G$  e  $\mathcal{B}$  uma base para o espaço topológico  $G$ . Para cada elemento  $U \in \mathcal{B}$  definimos o conjunto  $U^*$  de todas as classes laterais da forma  $xH$ , com  $x \in U$ . Nestas condições, o conjunto  $\mathcal{B}^* = \{U^* : U \in \mathcal{B}\}$  é uma base para  $G/H$ .*

*Demonstração.* Primeiro note que  $U^*$  é um aberto em  $G/H$  na topologia quociente, pois  $U^* \subset G/H$  é tal que  $p^{-1}(U^*) = U$  é um aberto de  $G$ , onde  $p$  é a função sobrejetora de  $G$  em  $G/H$  vista na definição 3.20.

Ainda, veja que dado qualquer elemento  $k$  de  $G/H$  existe  $U_0^*$  de  $\mathcal{B}^*$  tal que  $k \in U_0^*$ .

Com efeito, como  $k \in G/H$ , temos que existe  $x \in G$  tal que  $k = xH$ . Mas,  $\mathcal{B}$  é uma base para  $G$ , desta forma existe  $U_0 \in \mathcal{B}$  tal que  $x \in U_0$ .

Consequentemente,  $k \in U_0^*$ , pois  $k = xH$ , com  $x \in U_0$ .

Portanto,  $\mathcal{B}^*$  cumpre a condição (a) da definição 3.5 de base.

Também,  $\mathcal{B}^*$  satisfaz a condição (b) da definição 3.5, ou seja, se  $k \in U_1^* \cap U_2^*$ , com  $U_i^* = \{x_iH, x_i \in U_i\}$  em  $\mathcal{B}^*$ , então existe  $W^* \in \mathcal{B}^*$  tal que  $k \in W^* \subset U_1^* \cap U_2^*$ .

Observe que como  $k \in U_1^* \cap U_2^*$  e  $U_i^*$  é o conjunto de todas as classes laterais  $yH$ , com  $y \in U_i$ , segue que existem  $x_1 \in U_1$  e  $x_2 \in U_2$  tais que  $k = x_1H$  e  $k = x_2H$ .

Afirmção. Se  $a \in k$  então  $U_1H$  e  $U_2H$  são conjuntos abertos em  $G$  tais que  $a \in U_1H \cap U_2H$ .

De fato, primeiro veja que do lema 4.2  $U_1H$  e  $U_2H$  são conjuntos abertos.

Além disso,  $a \in U_1H \cap U_2H$ , pois sendo  $a \in k$ ,  $k = x_1H$  e  $k = x_2H$ , segue que  $a = x_1h \in U_1H$  e  $a = x_2\bar{h} \in U_2H$ , com  $h, \bar{h} \in H$ .

Além disto, são abertos pelo lema 4.2.

Desta afirmação e pela condição (b) da definição 3.5, para  $\mathcal{B}$  segue que existe  $W \in \mathcal{B}$  com  $a \in W \subset U_1H \cap U_2H$ .

Consequentemente  $W^* = \{zH, z \in W\}$ , é tal que

$$W^* \subset U_1^* \cap U_2^*.$$

De fato, dado qualquer  $zH \in W^*$ , temos que  $z \in W \subset U_1H \cap U_2H$ . Logo,  $z \in U_1H$  e  $z \in U_2H$ , isto é,  $z = u_1h$  e  $z = u_2\bar{h}$ , com  $u_1 \in U_1$ ,  $u_2 \in U_2$ ,  $h, \bar{h} \in H$ .

Assim,

$$zH = u_1hH = u_1H, u_1 \in U_1$$

e

$$zH = u_2\bar{h}H = u_2H, u_2 \in U_2.$$

Logo,  $zH \in U_1^* \cap U_2^*$ , ou seja,  $W^* \subset U_1^* \cap U_2^*$ .

□

**Observação 4.3.** Embora definimos  $U^*$  em  $G/H$  apenas quando  $U$  é um elemento de uma base de  $G$ , podemos estender de modo natural esta definição para qualquer aberto  $A$  em  $G$ . A saber, se  $A$  é um conjunto aberto qualquer de  $G$  e  $\mathcal{B}$  é uma base de  $G$  tais que  $A = \bigcup_{i=0}^n U_i, U_i \in \mathcal{B}$ , definimos  $A^* := \bigcup_{i=0}^n U_i^*, U_i^* \in \mathcal{B}^*$ . Uma vez que é possível mostrar que  $(U_i \cup U_j)^* = U_i^* \cup U_j^*$  e união de conjuntos abertos é ainda um conjunto aberto podemos também definir a  $A^*$  apenas como sendo o conjunto  $\{aH, a \in A\}$ .

**Proposição 4.6.** *Seja  $G$  um grupo topológico e  $H$  em subgrupo de  $G$ . Considere o espaço topológico  $(G/H, \tau)$ , onde  $\tau$  é topologia quociente*

(i) *O espaço topológico  $G/H$  é um espaço homogêneo;*

- (ii) Se  $H$  é um conjunto fechado na topologia de  $G$ , então conjuntos unitários são fechados em  $G/H$ ;
- (iii) A função quociente  $p : G \longrightarrow G/H$  é aberta;
- (iv) Se  $H$  é fechado na topologia de  $G$  e é um subgrupo normal de  $G$ , então  $G/H$  é um grupo topológico.

*Demonstração.* (i) Para mostrar que  $G/H$  é um espaço homogêneo devemos mostrar que para quaisquer  $a, b \in G/H$  existe um homeomorfismo de  $G/H$  em  $G/H$  que aplica  $a$  em  $b$ . Veja que, como  $a$  e  $b$  pertencem a  $G/H$  segue que existem  $x, y \in G$  tais que  $a = xH$  e  $b = yH$ . Defina a seguinte função:

$$\begin{aligned} F_\alpha : G/H &\longrightarrow G/H \\ xH &\longmapsto F_\alpha(xH) := f_\alpha(x)H = (\alpha x)H \end{aligned} ,$$

onde,  $f_\alpha$  é o homeomorfismo visto no lema 4.1.

Note que, como  $f_\alpha$  é um homeomorfismo, segue que  $F_\alpha$  também o é.

Primeiro observe que  $F_\alpha$  é uma bijeção pois

$$\begin{aligned} \bar{F} : G/H &\longrightarrow G/H \\ xH &\longmapsto \bar{F}(xH) := f_\alpha^{-1}(x)H = (\alpha^{-1}x)H \end{aligned} ,$$

é a função inversa de  $F_\alpha$ . De fato,

$$\begin{aligned} (F_\alpha \circ \bar{F})(xH) &= F_\alpha(f_\alpha^{-1}(x)H) = F_\alpha((\alpha^{-1}x)H) = \\ &\alpha(\alpha^{-1}x)H = (\alpha\alpha^{-1})xH = xH \end{aligned}$$

e

$$(\bar{F} \circ F_\alpha)(xH) = \bar{F}(F_\alpha(xH)) = \bar{F}((\alpha x)H) = \alpha^{-1}(\alpha x)H = xH.$$

Portanto,  $\bar{F}$  é a inversa,  $F_\alpha^{-1}$ , de  $F_\alpha$ .

Ainda, a continuidade de  $F_\alpha$  e de sua inversa seguem da continuidade de  $f_\alpha$  e de sua inversa, como veremos a seguir.

Sejam  $k \in G/H$  qualquer e  $A$  um subconjunto aberto de  $G/H$  contendo  $F_\alpha$ .

Como todo conjunto aberto pode ser escrito como a união de elementos de uma base (conforme a observação 4.3), podemos supor sem perda de generalidade que  $A = V^*$ , para algum aberto  $V \subset G$ .

Queremos mostrar que existe um aberto  $W^*$  de  $G/H$  contendo  $k$  e tal que

$$F_\alpha(W^*) \subset V^*.$$

Observe que como  $k \in G/H$  temos que  $k = aH$ , para algum  $a \in G$ .

Também,  $F_\alpha(k) \in V^* = \{xH, x \in V \subset G\}$ , logo  $F_\alpha(k) = \bar{x}H$ , para algum  $\bar{x} \in V$ .

Assim,  $f_\alpha(a)H = F_\alpha(aH) = F_\alpha(k) = \bar{x}H, \bar{x} \in V$ .

Desta forma, temos que

$$f_\alpha(a) \in VH \subset G,$$

onde  $VH$  é um aberto de  $G$  pelo lema 4.2.

Agora, pela continuidade de  $f_\alpha$ , segue pelo item (a) da definição 3.17, que existe  $W \subset G$  aberto com  $a \in W$  tal que

$$f_\alpha(W) \subset V_H.$$

Afirmção.  $W^*$  é um aberto de  $G/H$  contendo  $k$  e tal que  $F_\alpha(W^*) \subset V^*$ .

De fato, pela definição de  $W^*$  temos que este é aberto em  $G/H$  e ainda contém  $k$ , pois  $k = aH$  e  $a \in W$ .

Agora, seja  $b \in F_\alpha(W^*)$  qualquer. Mostremos que  $b \in V^*$ . Como  $b \in F_\alpha(W_*)$  temos que  $b = F_\alpha(\bar{k})$  para algum  $\bar{k} \in W^*$ .

Como  $\bar{k} \in W^*$ , segue que existe  $l \in W$  tal que  $k = lH$ , assim:

$$b = F_\alpha(\bar{k}) = F_\alpha(lH) = f_\alpha(l)H,$$

com  $f_\alpha(l) \in f_\alpha(W) \subset V_H$ .

Supondo  $f_\alpha(l) = vh', v \in V$  e  $h' \in H$  temos

$$b = f_\alpha(l)H = vh'H = vH, v \in V.$$

Como  $f_\alpha(a)H = \bar{x}H$ , segue que  $(\bar{x}^{-1}f_\alpha(a)) \in H$ , logo existe  $h \in H$ , tal que

$$\bar{x}^{-1}f_\alpha(a) = h \Rightarrow f_\alpha(a) = \bar{x}h \in VH.$$

Ou seja,  $b \in V^*$ .

A continuidade da inversa segue de forma análoga.

(ii) Seja  $F = \{x_0H\}$  um conjunto unitário em  $G/H$ .

Afirmção:  $G/H - F$  é um aberto em  $G/H$ .

De fato, observe que

$$G/H - F = \{aH, a \in G - \{x_0\}\},$$

mas  $A = G - \{x_0\}$  é aberto já que  $\{x_0\}$  é fechado em  $G$  (axioma  $-T_1$ ).

Portanto,  $G/H - F = A^*$ , com  $A$  um aberto de  $G$ . Logo,  $G/H - F$  é aberto em  $G/H$  e consequentemente  $F$  é fechado em  $G/H$ .

(iii) Seja  $A$  um aberto qualquer de  $G$ . Mostremos que  $p(A)$  é um aberto de  $G/H$ .

Suponha  $\mathcal{B}$  uma base para  $G$  e que  $A = \bigcup U_i, U_i \in \mathcal{B}$ .

Em decorrência da observação 4.3 e da propriedade que imagem da união é a união das imagens por uma função, segue que

$$p(A) = p(\bigcup U_i) = \bigcup p(U_i) = \bigcup \{p(u), u \in U_i\} = \bigcup \{uH, u \in U_i\} = \bigcup U_i^* = A^*.$$

Como  $A^*$  é um aberto de  $G/H$ , segue que  $p(A)$  é aberto.

Portanto,  $p$  é uma aplicação aberta.

(iv)  $G/H$  é um grupo topológico.

$G_1$ . Sabemos pelo lema 2.3 que, sendo  $H$  subgrupo normal de  $G$ ,  $(G/H, *)$  é um grupo, onde a operação  $*$  é dada por

$$\begin{aligned} * : G/H \times G/H &\longrightarrow G/H \\ (aH, bH) &\longmapsto (aH) * (bH) := (ab)H \end{aligned}$$

$G_2$ .  $(G/H, \tau)$  é um espaço topológico, onde  $\tau$  é a topologia quociente induzida pela aplicação  $p$  do item anterior (a sobrejetividade de  $p$  segue da observação 3.9) A saber:

$$\tau = \{A \subset G/H : p^{-1}(A) \text{ é um aberto em } G\}.$$

Note que a coleção  $\mathcal{B}^*$  apresentada no lema 4.3 é uma base para esta topologia já que todo subconjunto aberto  $A$  de  $G/H$ , via  $\tau$ , é formado por classes laterais.

$G_3$ . Pelo item (ii) desta proposição, a terna  $(G/H, *, \tau)$  cumpre o axioma  $-T_1$ .

$G_4$ . Mostremos que a função

$$\begin{aligned} \bar{f} : G/H \times G/H &\longrightarrow G/H \\ (aH, bH) &\longmapsto \bar{f}(aH, bH) := (aH) * (bH)^{-1} = ab^{-1}H \end{aligned}$$

é contínua.

Seja  $V^*$  um aberto qualquer de  $G/H$ , queremos mostrar que existe um aberto  $U_1 \times U_2$  em  $G/H \times G/H$  tal que  $\bar{f}(U_1 \times U_2) \subset V^*$ .

Observe que do fato de  $V$  ser um subconjunto aberto de  $G$  e da aplicação  $f$  de  $G \times G$  em  $G$ , dada por

$$\begin{aligned} f : G \times G &\longrightarrow G \\ (a, b) &\longmapsto f(a, b) := ab^{-1}, \end{aligned}$$

ser contínua (pois  $G$  é um grupo topológico), segue que existe um aberto  $U_1 \times U_2$  de  $G \times G$ , com  $U_1, U_2$ , subconjuntos abertos de  $G$ , tal que  $f(U_1 \times U_2) \subset V$ .

Afirmção:  $U_1^* \times U_2^*$  é um aberto de  $G/H \times G/H$ , tal que  $\bar{f}(U_1^* \times U_2^*) \subset V^*$ .

De fato, obviamente  $U_1^*$  e  $U_2^*$  são ambos abertos de  $G/H$ , consequentemente  $U_1^* \times U_2^*$  é um aberto de  $G/H \times G/H$ .

Agora, dado  $l \in \bar{f}(U_1^* \times U_2^*)$ , temos que  $l = \bar{f}(k)$ , para algum  $k \in U_1^* \times U_2^*$ .

Como  $k \in U_1^* \times U_2^*$ , segue que  $k = (u_1H, u_2H)$ , com  $u_1 \in U_1$  e  $u_2 \in U_2$ .

Assim,

$$l = \bar{f}(k) = \bar{f}(u_1H, u_2H) = u_1u_2^{-1}H = f(u_1, u_2)H,$$

com  $f(u_1, u_2) \in f(U_1 \times U_2) \subset V$ .

Logo, denotando  $f(u_1, u_2)$  por  $q$ , temos

$$l = qH, \quad \text{com } q \in V.$$

Ou seja,  $l \in V^*$  e, portanto  $\bar{f}(U_1^* \times U_2^*) \subset V^*$ .

□

**Exemplo 4.8.** Temos que  $\mathbb{Z}^2$  é um subgrupo normal do grupo aditivo abeliano  $(\mathbb{R}^2, +)$  e ainda a terna  $(\mathbb{R}^2, +, \tau)$ , onde  $\tau$  é a topologia induzida pela norma euclidiana, é um grupo topológico. Pelo resultado anterior segue que  $\frac{\mathbb{R}^2}{\mathbb{Z}^2}$  é um grupo topológico. Por conseguinte, segue que o toro,  $\mathbb{T}^2$ , é um grupo topológico, já que no exemplo 3.17 vimos que  $\mathbb{T}^2$  é homeomorfo a  $\frac{\mathbb{R}^2}{\mathbb{Z}^2}$ .

**Definição 4.4.** Uma vizinhança  $V$  do elemento neutro  $e$  é dita simétrica se  $V = V^{-1}$ .

**Lema 4.4.** Sejam  $G$  grupo topológico e  $e$  o elemento neutro de  $G$ . Se  $U$  é uma vizinhança de  $e$ , então existe uma vizinhança simétrica  $V$  de  $e$  tal que  $V \cdot V \subset U$ .

*Demonstração.* Pela proposição 4.3, sendo  $U$  uma vizinhança de  $e = ee^{-1}$  sabemos que existem vizinhanças  $V$  e  $W$  de  $e$  e  $e^{-1}$ , respectivamente tais que  $VW \subset U$ . Mas  $e = e^{-1}$ , deste modo temos que  $V = V^{-1}$ . Ainda, pelo item 2 da proposição 4.2 e novamente do fato que  $e = e^{-1}$  podemos admitir  $W$  como sendo  $V$ . Portanto, existe uma vizinhança simétrica de  $e$  tal que  $V \cdot V \subset U$ . □

**Teorema 4.1.** *Todo grupo topológico é Hausdorff, ou seja, para cada  $x, y \in G$  tais que  $x \neq y$ , existe uma vizinhança  $V$  de  $e$  tal que  $Vx$  e  $Vy$  são disjuntas.*

*Demonstração.* Temos pelo lema 4.4 que existe uma vizinhança  $V$  de  $e$  tal que  $V \cdot V \subset U$ , onde  $U$  é uma vizinhança de  $e$ .

Desta forma,  $Vx = \{vx, v \in V\}$  e  $Vy = \{vy, v \in V\}$  são vizinhanças de  $x$  e  $y$ , respectivamente e ainda são disjuntas já que  $x \neq y$ . □

**Definição 4.5.** *Sejam espaço topológico  $X$  e  $x \in X$ , dizemos que  $X$  é regular se para toda vizinhança  $V$  de  $x$  existe uma vizinhança  $U$  de  $x$  tal que  $\bar{U} \subset V$ .*

**Teorema 4.2.** *Todo grupo topológico satisfaz o axioma da regularidade, qual seja, dado um conjunto fechado  $A$  e um ponto  $x$  que não pertença a  $A$ , existem conjuntos abertos disjuntos contendo  $A$  e  $x$ , respectivamente.*

*Demonstração.* Sendo  $A \cap \{x\} = \emptyset$  temos que  $x \neq y$ , para todo  $y \in A$ . Desta forma, pelo teorema 4.1 para todo  $y \in A$  existe uma vizinhança  $V$  de  $e$  tal que  $Vx$  e  $Vy$  são disjuntos. Já sabemos também pelo lema 4.4 que, como  $V$  é um aberto, segue que  $VA$  também o é.

Consequentemente,  $Vx$  e  $VA$  são conjuntos abertos disjuntos contendo  $x$  e  $A$ , respectivamente. □

**Corolário 4.2.** *Se  $G$  é um grupo topológico e  $H$  um subgrupo normal de  $G$  fechado na topologia de  $G$ , então  $G/H$  satisfaz o axioma da regularidade.*

*Demonstração.* Segue do teorema 4.2, já que nestas condições  $G/H$  é um grupo topológico. □

## 5 Conclusão

Nesta dissertação de mestrado apresentamos as definições necessárias para estabelecer grupo topológico que ainda hoje serve como fio condutor em linhas de pesquisa. Neste sentido fizemos um levantamento bibliográfico simbólico para identificar mais precisamente a atuação deste objeto matemático ao longo do tempo.

A interligação do objeto algébrico grupo com as ciências exatas está presente em diversos temas, por exemplo na topologia algébrica, onde grupos são usados para descrever invariantes de espaços topológicos; dentre estes podemos destacar o grupo fundamental, o grupo de homologia e o grupo de cohomologia. Em Física, o interesse maior está na representação de grupos de Lie, que podem descrever as simetrias que as leis físicas devem obedecer em certos sistemas. Em Química, grupos são utilizados para classificar estruturas cristalinas e as simetrias das moléculas. Sendo que em ambas os grupos estão intimamente relacionados com a teoria de representação.

Historicamente, segundo Ioan Mackenzie James em *History of topology*, o primeiro matemático a descrever precisamente os fundamentos da teoria moderna de grupos topológicos foi Schreier, o qual destacou-se pelo seu trabalho em subgrupos de grupos livres, fornecendo uma abordagem mais algébrica em 1927.

Pouco antes, 1924, Herman Weyl já havia, de modo informal, introduzido considerações topológicas na teoria de estruturas e representações de grupos de Lie semisimples e relativamente fechados segundo o teorema de Schreier. Foram então os teoremas e o trabalho realizado por Weyl que motivaram o desenvolvimento global de aspectos topológicos na teoria matemática relacionada com grupos contínuos. Do desenvolvimento das noções topológicas em conexão com a continuidade ramificam-se três áreas: a topologia de grupos de Lie; o desenvolvimento geral de grupos topológicos em conjunto com o quinto problema de Hilbert e o desenvolvimento da Análise harmônica em grupos.

A maior concentração de trabalhos relacionados aos grupos topológicos ocorreu na década de 40 como, por exemplo, o trabalho realizado por Sze-Tsen Hu (1946) sobre propriedades homotópicas peculiares de um grupo topológico, mediante as operações de grupos; também Kenkichi Iwasawa (1948) mostra que grupos localmente compactos podem ser aproximados por grupos de Lie e ainda Jean Dieudonné (1947) o qual teve o objetivo de sistematizar e estender resultados de topologias em grupos homeomorfos

---

publicados na época.

Posteriormente surgiram questões básicas da existência de uma única topologia e um grupo topológico abeliano livre ou mesmo o estudo de um anel topológico e trabalhos voltados à estas questões. Há também trabalhos pautados no Teorema de Birkhoff-Kakutani que relaciona grupos topológicos metrizáveis com espaços de Hausdorff.

Recentemente as aplicações são diversas como a interação entre grupo topológico e lógica fuzzy vista em artigos como "On the Fuzzy Sheaf of the Groups Formed by Fuzzy Topological Groups" (Serkan Gümüş Cemil Yildiz) publicado em 2008, ou mesmo os inúmeros trabalhos realizados por Sergey A. Antonyan em 2009 que mostram diversos resultados e propriedades de grupos topológicos envolvendo paracompacidade e normalidade em "Proper actions on topological groups: Applications to quotient spaces", além de apresentar uma representação contínua de um grupo topológico abeliano em um espaço de Banach.

Feita esta sucinta localização histórico-científica do grupo topológico em ciências exatas finalizamos este trabalho e esperamos que este seja uma fonte segura e detalhada sobre as noções básicas sobre grupo topológico e seus prerequisites para que, um iniciante desta linha de pesquisa possa percorrer outros temas que envolvam este objeto matemático. Além disso, destacamos que este material traz a tona uma conexão interessante envolvendo as grandes áreas Álgebra e Topologia e este tipo de articulação está presente nos objetivos deste programa de pós-graduação em Matemática Universitária, comprovando sua pertinência neste.

# Referências

- [1] PONTRJAGIN, L. S. *Topological Groups*. 1. ed. Princenton: Princenton University Press, 1958.
- [2] DOMINGUES, H. *Álgebra Moderna*. 4. ed. São Paulo: Atual, 2003.
- [3] FRALEIGH, J. B. *A First Course in Abstract Algebra*. 5. ed. New York: Addison-Wesley Publishing Company, 1994.
- [4] LIMA, E. L. *Elementos de Topologia Geral*. 5. ed. Rio de Janeiro: SBM-Textos Universitários, 2009.
- [5] MUNKRES, J. R. *Topology*. 2. ed. New Jersey: Prentice Hall, 2000.
- [6] BOLDRINI, J. L. *Álgebra Linear*. 3. ed. São Paulo: Harbra, 1980.
- [7] LIMA, E. L. *Curso de Análise*. 8. ed. Rio de Janeiro: IMPA-Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1995.
- [8] ÁVILA, G. *Variáveis Complexas e Aplicações*. 3. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2008.
- [9] HALL, B. C. *Lie Groups, Lie Algebras, and Representations: An Elementary Introduction*. Graduate texts in mathematics 222, 1. New York: Springer, 2003.
- [10] SMANIA, D. *Espaços Quocientes-Notas de aula*. São Carlos: ICMC-USP, 2010.