UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Câmpus de São José do Rio Preto

Paula Akari Fukushima

Sobre Polinômios Ortogonais Excepcionais

São José do Rio Preto
2018

Paula Akari Fukushima

Sobre Polinômios Ortogonais Excepcionais

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Câmpus de São José do Rio Preto.

Financiadora: CAPES

Orientadora: Profa. Dra. Cleonice Fátima Bracciali

São José do Rio Preto
2018

Fukushima, Paula Akari.
Sobre polinômios ortogonais excepcionais / Paula Akari Fukushima. -- São José do Rio Preto, 2018
63 f.

Orientador: Cleonice Fátima Bracciali
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Matemática. 2. Análise matemática. 3. Funções especiais 4. Polinômios ortogonais. I. Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho". Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. II. Título.

CDU – 517.66

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do IBILCE
UNESP - Câmpus de São José do Rio Preto

Paula Akari Fukushima

Sobre Polinômios Ortogonais Excepcionais

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Câmpus de São José do Rio Preto.

Financiadora: CAPES

Comissão Examinadora

Profa. Dra. Cleonice Fátima Bracciali
Orientadora

Prof. Dr. Alagacone Sri Ranga
Departamento de Matemática Aplicada - UNESP

Profa. Dra. Vanessa Avansini Botta Pirani
Departamento de Matemática e Computação - UNESP

São José do Rio Preto
23 de Maio de 2018

Aos meus pais,
dedico.

Agradecimentos

Aos meus pais Lourdes e Kenji, por toda a força e carinho durante cada etapa da minha vida.

Um agradecimento especial à Profa. Cleonice Fátima Bracciali, pelo incentivo, apoio, paciência e amizade durante todo período que me orientou.

Ao Prof. Alagacone Sri Ranga, pelo incentivo, empenho e amizade dedicados durante todo o curso.

Aos meus amigos, Antônio Carlos, Nilton, Gabi, Fabrício, Cheienne, Bruno, Gino, Juju, Heloísa, Otávio, Kumon, Diana, Marco, Eduardo, Luan, Maressa, Alessandra, Gustavo, Luana, Yen, Mariana, Gislaine e Pena pelo companheirismo e bons momentos. Em especial, queria agradecer ao Matheus, pela amizade, convivência e paciência durante toda a minha vida acadêmica.

À CAPES, pelo auxílio financeiro.

RESUMO

Nesta dissertação estudamos sequências de polinômios ortogonais que surgem como auto-funções polinomiais do problema de Sturm-Liouville, sob a condição de que, nem todos os graus das auto-funções polinomiais estejam presentes na sequência de graus dos polinômios que formam o conjunto ortogonal completo. Estas sequências são chamadas de sequências de polinômios ortogonais excepcionais. Em particular, realizamos um estudo dos polinômios ortogonais excepcionais X_1-Jacobi e X_1-Laguerre.

Palavras-chave: Polinômios Ortogonais. Polinômios Ortogonais Excepcionais. X_1-Jacobi. X_1-Laguerre.

ABSTRACT

In this dissertation we study sequences of orthogonal polynomials that arise as polynomial eigenfunctions of the Sturm-Liouville problem, with the condition that not all degrees of polynomial eigenfunctions are present in the sequence of degrees of the polynomials that form a complete orthogonal set. These sequences are called exceptional orthogonal polynomial sequences. In particular, we study the exceptional orthogonal polynomials X_1-Jacobi and X_1-Laguerre.

Keywords: Orthogonal Polynomials. Exceptional Orthogonal Polynomials. X_1-Jacobi. X_1-Laguerre.

Sumário

1 Introdução

Os polinômios ortogonais clássicos de Jacobi, Laguerre e Hermite aparecem em várias aplicações em matemática aplicada e física, estas três famílias são exemplos fundamentais da teoria de polinômios ortogonais. Uma das propriedades mais importantes desses polinômios ortogonais clássicos é o fato de que eles podem ser definidos por meio de um problema de Sturm-Liouville da forma

$$[p(x)y']' + q(x)y + \lambda w(x)y = 0,$$

com condições de contorno nas extremidades do intervalo, onde $p(x), q(x)$ e $w(x)$ são funções e λ representa os auto-valores da equação diferencial. O Teorema de Bochner [1] afirma que, se

$$T(y) = a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y$$

é um operador diferencial de segunda ordem tal que o problema de auto-valor

$$T(P_n) = \lambda_n P_n,$$

admite solução polinomial $P_n(x)$, com n = grau de P_n, para todo $n = 0, 1, 2, 3 \ldots,$ então, necessariamente, os coeficientes do operador T são polinomiais em x com grau de $a_2(x) = 2$, grau de $a_1(x) = 1$ e grau de $a_0(x) = 0$. Além disso, a sequência polinomial, $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, é de Jacobi, de Laguerre ou de Hermite.

Gomez-Ullate, Kamran e Milson, em [2] e [3], mostraram que existem sequências polinomiais ortogonais completas definidas por problemas de Sturm-Liouville além dos exemplos clássicos acima. Essas sequências possuem algumas propriedades que as distinguem das sequências polinomiais ortogonais clássicas. A mais aparente é que elas admitem falhas na sequência de graus, no sentido de que nem todos os graus estão presentes na sequência de graus dos polinômios que formam um conjunto ortogonal completo do espaço L^2. O operador destes problemas de Sturm-Liouville foi chamado, em [2] e [3], como operador excepcional. Estes operadores apresentam a propriedade de que um operador excepcional preserva um subespaço polinomial, mas não espaço polinomial padrão gerado pelos monômios. Além disso, os operadores diferenciais que geram os polinômios ortogonais clássicos têm apenas coeficientes polinomiais e os operadores excepcionais têm coeficientes racionais.

Os polinômios gerados por operadores excepcionais foram, em [2] e [3], denominados polinômios ortogonais excepcionais, que são os objetos de estudo desta dissertação. Os primeiros exemplos explícitos de polinômios ortogonais excepcionais foram os polinômios X_1-Jacobi e X_1-Laguerre e encontram-se em [2] e [3]. A partir desses exemplos os polinômios ortogonais excepcionais têm sido um tema de muita atividade de pesquisa ([4], [5] e [6]).

Em comparação aos polinômios ortogonais clássicos, surgem algumas perguntas sobre esses novos polinômios. Por exemplo, os polinômios ortogonais excepcionais possuem alguma relação com os polinômios ortogonais clássicos? Os polinômios dessa nova classe têm todos os seus zeros no intervalo de ortogonalidade?

O objetivo deste trabalho é, portanto, estudar essas novas sequências de autofunções polinomiais e fornecer respostas aos questionamentos anteriores.

Os resultados estabelecidos nesta dissertação estão distribuídos em três capítulos. No Capítulo 2 introduzimos alguns conceitos e resultados preliminares sobre polinômios ortogonais, problema de Sturm-Liouville e ortogonalidade.

No Capítulo 3 apresentamos cinco caracterizações dos polinômios ortogonais clássicos, e em seguida estudamos esses polinômios. Optamos por apresentar características dos polinômios ortogonais clássicos para, no Capítulo 4, comparar com as características dos polinômios ortogonais excepcionais.

No Capítulo 4 estudamos o problema de Sturm-Liouville que gera os polinômios ortogonais excepcionais. Também estudamos algumas propriedades dos polinômios X_1-Jacobi e X_1-Laguerre tais como, a ortogonalidade em relação ao produto interno definido no intervalo $(-1, 1)$ e $(0, \infty)$ respectivamente, a completude das sequências, seus zeros, a relação com os polinômios ortogonais clássicos, a fórmula tipo Rodrigues e a relação de recorrência de três termos.

2 Preliminares

Neste capítulo apresentamos as definições e resultados necessários para o desenvolvimento deste trabalho.

2.1 Polinômios Ortogonais

Apresentamos aqui algumas definições e resultados sobre polinômios ortogonais, que podem ser encontrados em Chihara [7], Ismail [8] e Szegő [9].

Definição 2.1. *Sejam (a, b) um intervalo real, $-\infty \leq a < b \leq \infty$, $w(x)$ uma função contínua, e $w(x) \geq 0$ em (a, b), mas não identicamente nula. Então, $w(x)$ é chamada de função peso.*

Os momentos associados à função peso $w(x)$ são definidos por

$$\mu_r = \int_a^b x^r w(x)dx, \quad r = 0, 1, 2, \ldots.$$

A seguir definimos sequência de polinômios ortogonais com relação a uma função peso $w(x)$ definida no intervalo (a, b).

Definição 2.2. *Uma sequência de polinômios ortogonais, com relação a função peso $w(x)$ no intervalo (a, b), é uma sequência de polinômios $P_0(x), P_1(x), \ldots$, com cada polinômio $P_n(x)$ de grau exatamente n, que satisfaz*

$$\int_a^b P_n(x)P_m(x)w(x)dx = \begin{cases} 0, & se \;\; n \neq m, \\ \rho_n > 0, & se \;\; n = m. \end{cases} \tag{2.1}$$

Podemos escrever (2.1) como

$$\int_a^b P_n(x)P_m(x)w(x)dx = \delta_{nm}\rho_n,$$

onde $\delta_{i,j}$ é conhecido como símbolo ou delta de Kronecker, e cujo significado é $\delta_{ij} = 1$ se $i = j$ e $\delta_{ij} = 0$ se $i \neq j$.

A partir de agora consideramos o produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ da seguinte forma

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)w(x)dx, \tag{2.2}$$

onde $f(x)$ e $g(x)$ são funções contínuas no intervalo (a, b).

O próximo resultado apresenta uma das características mais importantes dos polinômios ortogonais, o fato de que três polinômios consecutivos estão conectados por uma relação de recorrência.

Teorema 2.1. *Seja $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ uma sequência de polinômios ortogonais em (a, b) relativamente à função peso $w(x)$. Então,*

$$P_{n+1}(x) = (\gamma_{n+1}x - \beta_{n+1})P_n(x) - \alpha_{n+1}P_{n-1}(x), \quad n \geq 0, \tag{2.3}$$

com as condições iniciais $P_0(x) = 1$, $P_{-1}(x) = 0$, onde α_{n+1}, β_n, $\gamma_n \in \mathbb{R}$, para $n \geq 1$, e

$$\gamma_{n+1} = \frac{a_{n+1,n+1}}{a_{n,n}}, \quad \beta_{n+1} = \gamma_{n+1}\frac{\langle xP_n, P_n\rangle}{\langle P_n, P_n\rangle}, \quad \alpha_{n+1} = \frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n}\frac{\langle P_n, P_n\rangle}{\langle P_{n-1}, P_{n-1}\rangle}, \tag{2.4}$$

com $\gamma_{n+1} \neq 0$, $\alpha_{n+1} \neq 0$ e $a_{n,n}$ o coeficiente de maior grau de $P_n(x)$.

A recíproca desse resultado é verdadeira e é conhecida como Teorema de Favard, veja Chihara [7].

Teorema 2.2. *Sejam $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ e $\{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$ sequências de números reais arbitrários, com $\alpha_{n+1} > 0$ para $n \geq 1$, e seja $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ uma sequência de polinômios satisfazendo a relação de recorrência de três termos*

$$P_n(x) = (\gamma_n x - \beta_n)P_{n-1}(x) - \alpha_n P_{n-2}(x), \quad n \geq 1,$$

com as condições iniciais $P_0(x) = 1$, $P_{-1}(x) = 0$. Então, existe uma medida ψ, tal que a sequência de polinômios $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ é ortogonal em relação a ψ.

Aqui ψ é uma função definida no intervalo (a, b), $-\infty \leq a < b \leq \infty$, limitada, não decrescente e com infinitos pontos de aumento, tal que

$$\nu_k = \int_a^b x^k d\psi(x), \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

existam. Quando a função ψ é absolutamente contínua, podemos escrever $d\psi(x) = w(x)dx$.

Outra característica que podemos destacar dos polinômios ortogonais está relacionada a seus zeros. Sabe-se que seus zeros são todos reais, distintos e pertencentes ao intervalo de ortogonalidade (a, b).

Esses polinômios têm vasta aplicação nas áreas das Ciências Aplicadas e são ferramentas essenciais para a resolução de muitos problemas, contribuindo em vários estudos, em especial no estudo de Equações Diferenciais, que apresentamos a seguir.

2.2 Equações Diferenciais de Segunda Ordem

Nesta seção estamos interessados em estudar equações diferenciais de segunda ordem homogêneas, isto é, equações diferenciais do tipo

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x)) = 0,$$

onde além da variável x e da função $y(x)$, a equação envolve a primeira derivada $y'(x)$ e a segunda derivada $y''(x)$.

Como exemplos de equações diferenciais de segunda ordem, temos

- A EDO de Jacobi

  $(1-x^2)y''+[\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2)x]y'+n(n+\alpha+\beta+1)y=0, \quad \alpha>-1 \text{ e } \beta>-1.$

- A EDO de Laguerre

$$xy''+(\alpha+1-x)y'+ny=0, \quad \alpha>-1.$$

- A EDO de Hermite

$$y''-2xy'+2ny=0.$$

A seguir enunciamos um resultado que é uma característica da equação diferencial linear homogênea e conhecido como Princípio da Superposição.

Teorema 2.3. *Sejam $y_1(x)$ e $y_2(x)$ duas soluções da equação linear homogênea de segunda ordem*

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0,$$

então a combinação linear $y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$ também é solução, quaisquer que sejam os valores das constantes c_1 e c_2.

Definição 2.3. *Um problema da forma*

$$\begin{cases} y''=f(x,y,y'), \\ y(x_0)=y_0, \\ y'(x_0)=y_0', \end{cases}$$

é chamado um problema de valor inicial.

O teorema a seguir é um dos resultados fundamentais para problemas de valor inicial para equações lineares de segunda ordem e garante a existência e unicidade de soluções.

Teorema 2.4. *Considere o problema de valor inicial*

$$\begin{cases} y''+p(x)y'+q(x)y=g(x), \\ y(x_0)=y_0, \\ y'(x_0)=y_0', \end{cases}$$

onde $p(x), q(x)$ e $g(x)$ são funções contínuas em um intervalo aberto I que contém x_0. Então, existe exatamente uma solução $y(x)$ deste problema, e a solução existe para todo x no intervalo I.

Definição 2.4. *Duas soluções linearmente independentes de uma equação diferencial linear homogênea de segunda ordem são chamadas soluções fundamentais desta equação.*

Uma maneira de determinar se duas soluções de uma equação diferencial linear homogênea de segunda ordem são soluções fundamentais é verificar se a solução $c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$ satisfaz o par de condições iniciais (y_0, y_0'), i.e.,

$$\begin{aligned} c_1y_1(x_0)+c_2y_2(x_0)&=y_0, \\ c_1y_1'(x_0)+c_2y_2'(x_0)&=y_0', \end{aligned}$$

tem solução, ou seja, se o determinante Wronskiano,

$$W(y_1,y_2)(x_0)=det\begin{bmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{bmatrix},$$

é diferente de zero.

2.3 Problema de Sturm-Liouville e Ortogonalidade

Nesta seção apresentamos os conceitos e alguns resultados sobre o problema de Sturm-Liouville. Como referência utilizamos [10] e [11].

Consideremos a equação diferencial ordinária de segunda ordem da forma

$$[p(x)y']' + q(x)y + \lambda w(x)y = 0, \tag{2.5}$$

onde $p(x), q(x)$ e $w(x)$ são funções e λ representa os auto-valores da equação.

Seja L um operador diferencial linear definido por

$$Ly = [p(x)y']' + q(x)y. \tag{2.6}$$

Então, a equação diferencial (2.5) pode ser escrita como

$$Ly + \lambda w(x)y = 0. \tag{2.7}$$

Em (2.5), quando as funções $p(x), q(x)$ e $w(x)$ são contínuas em $a \leq x \leq b$, $p(x) > 0$ e $w(x) > 0$ em (a, b), a equação é dita de *Sturm-Liouville* ou estar na *forma auto-adjunta.*

Definição 2.5. *O problema de valores de contorno de Sturm-Liouville consiste em*

i) equação de Sturm-Liouville;

ii) condições de contorno nas extremidades do intervalo (a,b).

O termo das condições de contorno especifica o valor da variável dependente y, ou de sua derivada, em dois pontos diferentes; para o problema considerado aqui esses pontos são a e b.

Os auto-valores de um problema Sturm-Liouville são os valores de λ para os quais existem soluções não triviais, e as soluções correspondentes para cada um desses λ são as auto-funções deste problema.

Vamos considerar o problema de Sturm-Liouvlle com condições de contorno específicas. Tal problema é chamado Problema de Sturm-Liouville regular e definido a seguir.

Definição 2.6. *Um problema de Sturm-Liouville regular consiste em encontrar os auto-valores e as auto-funções que resolvem*

$$[p(x)y']' + q(x)y + \lambda w(x)y = 0, \quad a < x < b,$$

com as condições de contorno da forma

$$\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0, \tag{2.8}$$
$$\beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0, \tag{2.9}$$

onde

a) $p(x), p'(x), q(x)$ *e* $w(x)$ *funções reais e contínuas em* $a \leq x \leq b$;

b) $p(x) > 0$ *e* $w(x) > 0$ *em* $a \leq x \leq b$;

c) $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$ *e* β_2 *são valores reais tais que* ${\alpha_1}^2 + {\alpha_2}^2 \neq 0$ *e* ${\beta_1}^2 + {\beta_2}^2 \neq 0$*, isto é, não se anulam simultaneamente.*

As equações diferenciais de segunda ordem nem sempre aparecem como na forma (2.5). É necessário algumas manipulações para colocá-las na forma de Sturm-Liouville. Consideremos uma equação diferencial de segunda ordem

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + [a_0(x) + \lambda]y = 0, \tag{2.10}$$

onde os coeficientes $a_0(x)$, $a_1(x)$ e $a_2(x)$ são funções contínuas e $a_2(x) > 0$ em $a \leq x \leq b$.

Reescrevendo a equação diferencial auto-adjunta (2.5), obtemos

$$p(x)y'' + p'(x)y' + q(x)y + \lambda w(x)y = 0. \tag{2.11}$$

Dividindo a equação acima por $p(x)$ temos

$$y'' + \frac{p'(x)}{p(x)}y' + \frac{q(x)}{p(x)}y + \lambda\frac{w(x)}{p(x)}y = 0. \tag{2.12}$$

Agora, dividindo (2.10) por $a_2(x)$ e comparando com (2.12)

$$\frac{p'(x)}{p(x)} = \frac{a_1(x)}{a_2(x)}. \tag{2.13}$$

Lembrando que $\frac{p'(x)}{p(x)} = [ln(p(x)]'$ e integrando ambos os lados da equação (2.13), obtemos

$$\int [ln(p(x)]'dx = \int \frac{a_1(x)}{a_2(x)}dx.$$

Logo,

$$ln(p(x)) = \int \frac{a_1(x)}{a_2(x)}dx + k,$$

e podemos escrever

$$p(x) = e^{\int_a^x \frac{a_1(t)}{a_2(t)}dt}. \tag{2.14}$$

Além disso, da comparação de (2.10) com (2.12), temos

$$\frac{w(x)}{p(x)} = \frac{1}{a_2(x)},$$

ou seja,

$$w(x) = \frac{p(x)}{a_2(x)},$$

e, ainda

$$\frac{q(x)}{p(x)} = \frac{a_0(x)}{a_2(x)},$$

Por outro lado, se multiplicarmos (2.10) por $w(x) > 0$, obtemos

$$a_2(x)w(x)y'' + a_1(x)w(x)y' + a_0(x)w(x)y + \lambda w(x)y = 0. \tag{2.15}$$

Comparando (2.15) com (2.11), obtemos

$$q(x) = a_0(x)w(x), \tag{2.16}$$

e

$$w(x) = \frac{p(x)}{a_2(x)}, \tag{2.17}$$

ou seja,

$$w(x) = \frac{e^{\int_a^x \frac{a_1(t)}{a_2(t)}dt}}{a_2(x)}. \tag{2.18}$$

Assim, sob as condições (2.14), (2.16) e (2.17), podemos transformar uma equação diferencial homogênea (2.10) em uma equação diferencial na forma auto-adjunta (2.5).

A função peso $w(x)$ dada em (2.18), satisfaz uma equação diferencial de primeira ordem do tipo Pearson, da forma

$$(a_2(x)w(x))' - a_1(x)w(x) = 0.$$

Exemplo 2.1. Determinar a forma auto-ajunta da equação diferencial de Hermite

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0.$$

Comparando com os coeficientes da equação (2.10) temos $a_2 = 1$, $a_1 = -2x$ e $a_0 = 2n$. Substituindo em (2.14), vemos que

$$p(x) = e^{\int(-2x)dx} = e^{-x^2}.$$

Das equações (2.16) e (2.17), temos $w(x) = e^{-x^2}$ e $q(x) = 0$.

Portanto, substituindo em (2.5), obtemos

$$(e^{-x^2}y')' + 2ne^{-x^2}y = 0.$$

Antes de apresentarmos algumas propriedades do problema de Sturm-Liouville, vamos mostrar uma identidade muito utilizada no estudo de problemas de valores de contorno, conhecida como identidade de Lagrange. Suponha que $u(x)$ e $v(x)$ são funções com derivadas segundas contínuas no intervalo $-\infty \leq x_1 \leq x_2 \leq \infty$, e

$$\int_{x_1}^{x_2} L[u]vdx = \int_{x_1}^{x_2} ([p(x)u']'v + q(x)uv)dx.$$

Integrando por partes duas vezes o primeiro termo do lado direito, temos

$$\begin{aligned}\int_{x_1}^{x_2} L[u]vdx &= p(x)u'(x)v(x)\Big|_{x_1}^{x_2} - p(x)u(x)v'(x)\Big|_{x_1}^{x_2} \\ &\quad + \int_{x_1}^{x_2} [u(p(x)v')' + q(x)uv]dx \\ &= p(x)[u'(x)v(x) - u(x)v'(x)]\Big|_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} L[v]udx.\end{aligned}$$

Logo, subtraindo as integrais, obtemos

$$\int_{x_1}^{x_2} (L[u]v - uL[v])dx = p(x)[u'(x)v(x) - u(x)v'(x)]\Big|_{x_1}^{x_2}. \tag{2.19}$$

que é conhecida como identidade de Lagrange.

Supondo, que as funções $u(x)$ e $v(x)$ na equação (2.19) satisfazem as condições de contorno (2.8) e (2.9), e que $\alpha_2 \neq 0$ e $\beta_2 \neq 0$, temos

$$\begin{aligned} p(x)[u'(x)v(x) - u(x)v'(x)]\Big|_{x_1}^{x_2} &= p(x_1)[u'(x_1)v(x_1) - u(x_1)v'(x_1)] \\ &\quad -p(x_2)[u'(x_2)v(x_2) - u(x_2)v'(x_2)] \\ &= p(x_1)[-\frac{\beta_1}{\beta_2}u(x_1)v(x_1) + \frac{\beta_1}{\beta_2}u(x_1)v(x_1)] \\ &\quad -p(x_2)[-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}u(x_2)v(x_2) + \frac{\alpha_1}{\alpha_2}u(x_2)v(x_2)] \\ &= 0. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Assim, se o operador diferencial L for definido pela equação (2.6) e se as funções $u(x)$ e $v(x)$ satisfazem as condições de contorno (2.8) e (2.9), a identidade de Lagrange se reduz a

$$\int_{x_1}^{x_2} L[u]vdx = \int_{x_1}^{x_2} L[v]udx.$$

Este operador é dito auto-adjunto.

Note que a identidade (2.19) também é válida em relação a função peso $w(x)$, então

$$\int_{x_1}^{x_2} (L[u]v - uL[v])w(x)dx = p(x)w(x)[u'(x)v(x) - u(x)v'(x)]\Big|_{x_1}^{x_2}. \tag{2.21}$$

Apresentamos, na sequência, algumas propriedades de auto-valores e auto-funções de um problema de Sturm-Liouville regular.

Teorema 2.5. *Se λ_m e λ_n são auto-valores distintos de um problema de Sturm-Liouville regular, as auto-funções correspondentes y_m e y_n são ortogonais com relação ao produto interno* (2.2).

Demonstração: Como as duas funções satisfazem as equações diferenciais (2.7) então

$$Ly_m + \lambda w(x)y_m = 0,$$

e

$$Ly_n + \lambda w(x)y_n = 0.$$

Multiplicando a primeira equação por y_n e a segunda por y_m, subtraindo os resultados e integrando no intervalo $a \leq x \leq b$, encontramos

$$\int_a^b (L[y_m]y_n - y_mL[y_n])\,dx + (\lambda_m - \lambda_n)\int_a^b y_m(x)y_n(x)w(x)dx = 0.$$

De (2.19) e (2.20), temos

$$\int_a^b (L[y_m]y_n - y_mL[y_n])\,dx = 0.$$

Assim,

$$(\lambda_m - \lambda_n)\int_a^b y_m(x)y_n(x)w(x)dx = 0.$$

Como $\lambda_m \neq \lambda_n$, obtemos
$$\int_a^b y_m(x)y_n(x)w(x)dx = 0.$$

Portanto, $\{y_m\}$ é um conjunto de funções ortogonais com relação à função peso $w(x)$. $\square$

Apresentamos a seguir dois resultados, cujas demonstrações podem ser encontradas em [11].

Teorema 2.6. *Se λ é um auto-valor de um problema de Sturm-Liouville regular, então*

a) λ é real;

b) Se ϕ e ψ são auto-funções correspondentes a λ, então $\psi(x) = k\phi(x)$, $a \leq x \leq b$, onde k é uma constante não nula e cada auto-função pode ser feita real multiplicando-a por uma constante não nula apropriada.

Teorema 2.7. *Dado o problema de Sturm-Liouville regular*

$$[p(x)y']' + q(x)y + \lambda r(x)y = 0, \quad a < x < b$$

com as condições de contorno da forma

$$\begin{aligned} \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) &= 0, \\ \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) &= 0. \end{aligned}$$

a) O problema possui um espectro infinito $S = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots\}$ e $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$;

b) Se $\alpha_1\beta_1 \leq 0$ e $\alpha_2\beta_2 \geq 0$, o espectro é limitado inferiormente e os auto-valores podem ser ordenados como $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n < \ldots$. Além disso, se $q(x) \leq 0$ para $a \leq x \leq b$, então, $\lambda_n \geq 0$ para todo $n \geq 1$;

c) Se os auto-valores são ordenados como $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n < \ldots$, a auto-função correspondente a λ_n possui exatamente $(n-1)$ zeros no intervalo $a < x < b$.

2.4 Função Gama

As definições e resultados que apresentamos a seguir pode ser encontrados em Szegő [9], Andrews, Askey e Roy [12] e Lebedev [13], e serão utilizadas neste trabalho.

Definição 2.7. *A função gama pode ser dada como a integral de Euler de segunda espécie*
$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt, \tag{2.22}$$
para $x \in \mathbb{C}$ e $Re(x) > 0$.

Para $a > 0$ e $b > 0$ pode-se definir

$$\binom{a}{b} = \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(b+1)\Gamma(a-b+1)}.$$

Propriedade 2.1. $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

Demonstração: Aplicando a equação (2.22) para $\Gamma(x+1)$, temos

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty e^{-t} t^{(x+1)-1} dt = \int_0^\infty e^{-t} t^x dt.$$

Integrando por partes, com $u = t^x$ e $dv = e^{-t}dt$, obtemos

$$\Gamma(x+1) = -t^x e^{-t}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty x e^{-t} t^{(x-1)} dt = x \int_0^\infty e^{-t} t^{(x-1)} dt = x\Gamma(x).$$

$\square$

Propriedade 2.2. $\Gamma(x+1) = x!$, para $x \in \mathbb{N}$.

Demonstração: Aplicando repetidas vezes a Propriedade 2.1, obtemos

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) = x(x-1)\Gamma(x-1) = \cdots = x(x-1)(x-2)\ldots 1\Gamma(1) = x!\Gamma(1).$$

Mas, pela equação (2.22)

$$\begin{aligned} \Gamma(1) &= \int_0^\infty e^{-t} t^0 dt = \lim_{m\to\infty} \int_0^m e^{-t} dt = -\lim_{m\to\infty} e^{-t}\Big|_0^m \\ &= -\lim_{m\to\infty} \left[e^{-m} - e^0\right] = -\lim_{m\to\infty} \left[\frac{1}{e^m} - 1\right] = 1. \end{aligned}$$

Portanto, $\Gamma(x+1) = x!$.

$\square$

3 Polinômios Ortogonais Clássicos

Segundo Chihara [7], os polinômios ortogonais de Jacobi, de Laguerre, de Hermite são chamados de polinômios ortogonais clássicos. Neste capítulo apresentamos algumas caracterizações desses polinômios e em seguida apresentamos algumas de suas propriedades.

Os polinômios de Jacobi são ortogonais no intervalo $(-1, 1)$ com relação à função peso $w(x) = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$, com os parâmetros $\alpha, \beta > -1$ e são denotados por $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$.

Os polinômios de Laguerre são ortogonais no intervalo $(0, \infty)$, com relação a função peso $w(x) = x^{\alpha}e^{-x}$, com o parâmetro $\alpha > -1$ e são denotados por $L_n^{(\alpha)}(x)$.

Os polinômios de Hermite, denotados por $H_n(x)$, são ortogonais no intervalo $(-\infty, \infty)$, com relação à função peso $w(x) = e^{-x^2}$.

3.1 Caracterizações dos Polinômios Ortogonais Clássicos

Existem várias características que destacam os polinômios ortogonais clássicos dos demais. Os próximos resultados estabelecem caracterizações destes polinômios, e podem ser encontrada em Chihara [7]. Optamos por apresentar as características dos polinômios ortogonais clássicos para, no Capítulo 4, comparar com as características dos polinômios ortogonais excepcionais.

A primeira caracterização foi obtida por S. Bochner [1], que classifica sequência de polinômios ortogonais clássicos como soluções polinomiais para uma equação diferencial de Sturm-Liouville.

Teorema 3.1. *(Bochner) Seja*

$$T(y) = a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y,$$

um operador diferencial de segunda ordem tal que, o problema de auto-valor

$$T(P_n) = \lambda_n P_n, \tag{3.1}$$

admite solução polinomial $P_n(x)$, onde n = grau P_n, para todo grau n = 0,1,2,3 .... Então, necessariamente os coeficientes de T são polinomiais em x com grau de $a_2(x)$ = 2, grau de $a_1(x)$ = 1 e grau de $a_0(x)$ = 0.

Além disso, analisando as únicas possibilidades de auto-funções polinomiais de (3.1), Bochner mostrou que são aquelas que podem ser reduzidas a

$$\begin{aligned}
y(x) &= P_n^{(\alpha,\beta)}(x) \text{ com a restrição } \alpha, \beta > -1;\\
y(x) &= L_n^{(\alpha)}(x) \text{ com a restrição } \alpha > -1;\\
y(x) &= H_n(x).
\end{aligned}$$

A segunda caracterização foi provada por W. Hahn [14].

Teorema 3.2. *Se $\{P_n(x)\}$ é uma sequência de polinômios ortogonais tal que $\{P_n'(x)\}$ é também uma sequência de polinômios ortogonais. Então, $\{P_n(x)\}$ é uma sequência de polinômios ortogonais clássicos.*

Segundo Chihara a terceira caracterização foi sugerida por Tricomi e uma demonstração completa foi fornecida por Ebert e Cryer, que apontaram e corrigiram um descuido na análise de Tricomi. Esta caracterização garante que os polinômios ortogonais clássicos são as únicas sequências polinomiais que possuem fórmulas de Rodrigues da forma

$$P_n(x) = K_n^{-1}[w(x)]^{-1}D^n[\rho^n(x)w(x)], \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots, \tag{3.2}$$

onde K_n é uma constante que depende de n, ρ é um polinômio que independe de n e de grau menor ou igual a 2, $w(x)$ é positiva e integrável sobre (a, b) e $D^k[\rho^n(x)w(x)]$ se anula para $x = a$ e $x = b$, $0 \leq k < n$.

A quarta caracterização foi sugerida na conjectura de Karlin e Szegő [15]. Al-Salam e Chihara [16] mostraram que os polinômios clássicos são caracterizados pela ortogonalidade e a existência de uma fórmula de diferenciação da forma

$$\pi(x)P_n'(x) = (\alpha_n x + \beta_n)P_n(x) + \gamma_n P_{n-1}(x), \tag{3.3}$$

onde $\pi(x)$ é um polinômio e α_n, β_n e γ_n são constantes que dependem de n.

Outra caracterização é encontrada no trabalho de Agarwal e Milovanović [17], com o seguinte resultado.

Teorema 3.3. *As funções peso $w(x)$ associadas aos polinômios ortogonais clássicos satisfazem a equação diferencial de Pearson dada por*

$$\frac{d}{dx}(M(x)w(x)) = N(x)w(x), \tag{3.4}$$

onde

$$M(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & se\ (a, b) = (-1, 1) \\ x, & se\ (a, b) = (0, \infty) \\ 1, & se\ (a, b) = (-\infty, \infty) \end{cases} \tag{3.5}$$

e $N(x)$ é um polinômio de grau 1.

3.2 Polinômios de Jacobi

Os polinômios de Jacobi, $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$, são ortogonais no intervalo $(-1,1)$ com relação à função peso $w(x)=(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$, com $\alpha,\beta>-1$ e $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

A fórmula de Rodrigues dada em (3.2) para o caso dos polinômios ortogonais de Jacobi é da forma

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)=\frac{(-1)^n}{2^n n!}(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}\frac{d^n}{dx^n}[(1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}].$$

Vamos mostrar a relação de ortogonalidade, e para isto optamos por utilizar a fómula de Rodrigues. Derivando a fórmula acima pela regra de Leibniz, obtemos

$$\begin{aligned}P_n^{(\alpha,\beta)}(x) &= \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!(n-k)!}(\alpha+n)(\alpha+n-1)\cdots(\alpha+k+1)\\ &\times(\beta+n)(\beta+n-1)\cdots(\beta+n-k+1)\Big\{(-1)^k x^n+\Big[(-1)^{k-1}\binom{k}{k-1}\\ &+(-1)^k\binom{n-k}{n-k-1}\Big]x^{n-1}+\cdots\Big\}.\end{aligned}$$

Pode-se observar que o coeficiente do termo de maior grau dos polinômios de Jacobi é

$$\begin{aligned}a_{n,n} &= \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!(n-k)!}(\alpha+n)(\alpha+n-1)\cdots(\alpha+k+1)\\ &\times(\beta+n)(\beta+n-1)\cdots(\beta+n-k+1).\end{aligned}$$

Usando a Propriedade 2.1 da função gama, obtemos

$$(\beta+n)(\beta+n-1)\cdots(\beta+n-k+1)=\frac{\Gamma(\beta+n+1)}{\Gamma(\beta+n-k+1)}.$$

Assim, podemos escrever

$$a_{n,n} = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!(n-k)!}\frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{\Gamma(\alpha+n-k+1)}\frac{\Gamma(\beta+n+1)}{\Gamma(\beta+n-k+1)}. \tag{3.6}$$

Usando o produto interno, obtemos

$$\begin{aligned}\langle P_n^{(\alpha,\beta)},P_m^{(\alpha,\beta)}\rangle &= \int_{-1}^{1}P_n^{(\alpha,\beta)}(x)P_m^{(\alpha,\beta)}(x)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta dx\\ &= \int_{-1}^{1}P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\frac{(-1)^m}{2^m m!}(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}\\ &\times\frac{d^m}{dx^m}[(1-x)^{\alpha+m}(1+x)^{\beta+m}](1-x)^\alpha(1+x)^\beta dx\\ &= \frac{(-1)^m}{2^m m!}\int_{-1}^{1}P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\frac{d^m}{dx^m}[(1-x)^{\alpha+m}(1+x)^{\beta+m}]dx.\end{aligned}$$

Fazendo $y_m(x) = (1-x)^{\alpha+m}(1+x)^{\beta+m}$ e integrando m vezes por partes, obtemos

$$\langle P_n^{(\alpha,\beta)}, P_m^{(\alpha,\beta)} \rangle = \frac{1}{2^m m!} \int_{-1}^{1} (P_n^{(\alpha,\beta)}(x))^{(m)} y_m(x) dx.$$

Portanto, disto e da definição da função gama (2.22), pode-se obter a relação de ortogonalidade para os polinômios de Jacobi

$$\langle P_n^{(\alpha,\beta)}, P_m^{(\alpha,\beta)} \rangle = \begin{cases} 0, & \text{se } m \neq n, \\ \dfrac{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(\beta+n+1)}{(\alpha+\beta+2n+1)n!\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}, & \text{se } m = n. \end{cases} \tag{3.7}$$

Eles podem também ser obtidos através da relação de recorrência de três termos

$$P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x) = (\gamma_{n+1}x - \beta_{n+1})P_n(x)^{(\alpha,\beta)} - \alpha_{n+1}P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x), \quad n \geq 0,$$

onde $P_0(x)^{(\alpha,\beta)} = 1$, $P_{-1}^{(\alpha,\beta)}(x) = 0$,

$$\begin{aligned} \gamma_{n+1} &= \frac{1}{2(n+1)} \frac{\Gamma(\alpha+\beta+2n+3)\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+n+2)\Gamma(\alpha+\beta+2n+1)}, \\ \beta_{n+1} &= \frac{(\beta^2-\alpha^2)(\alpha+\beta+2n+1)}{2(n+1)(\alpha+\beta+n+1)(\alpha+\beta+2n)} \end{aligned}$$

e

$$\alpha_{n+1} = \frac{(\alpha+n)(\beta+n)(\alpha+\beta+2n+2)}{(n+1)(\alpha+\beta+n+1)(\alpha+\beta+2n)}.$$

Pelo Teorema 3.1 sabemos que os polinômios de Jacobi são soluções de uma equação diferencial de Sturm-Liouville. Neste caso, $a_2(x) = 1-x^2$, $a_1(x) = \beta-\alpha-(\alpha+\beta+2)x$, $a_0(x) = 0$ e $\lambda_n = n(n+\alpha+\beta+1)$, portanto $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$, $n \geq 0$ é solução da equação diferencial linear homogênea de segunda ordem

$$(1-x^2)y'' + [\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2)x]y' + n(n+\alpha+\beta+1)y = 0, \tag{3.8}$$

ou, na forma auto-adjunta

$$\frac{d}{dx}\{(1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta+1}y'\} + n(n+\alpha+\beta+1)(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}y = 0.$$

Da equação (3.8) obtem-se o operador diferencial da forma

$$T_{\alpha,\beta}(y) = (1-x^2)y'' + [\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2)x]y',$$

tal que os polinômios de Jacobi satisfazem a equação de auto-valor

$$T_{\alpha,\beta}(y) = -n(n+\alpha+\beta+1)y. \tag{3.9}$$

Além disso, tomando

$$\begin{aligned} A_{\alpha,\beta}(y) &= y', \\ B_{\alpha,\beta}(y) &= (1-x^2)y' + [\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2)x]y, \end{aligned}$$

obtemos

$$T_{\alpha,\beta}(y) = B_{\alpha,\beta}(A_{\alpha,\beta}(y)). \tag{3.10}$$

A derivada dos polinômios de Jacobi satisfaz

$$A_{\alpha,\beta}(P_n^{(\alpha,\beta)}) = \frac{dP_n^{(\alpha,\beta)}}{dx} = \frac{1}{2}(n+\alpha+\beta+1)P_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}, \tag{3.11}$$

que é a caracterização dada pelo Teorema 3.2, e

$$B_{\alpha,\beta}(P_n^{(\alpha+1,\beta+1)}) = -2(n+1)P_n^{(\alpha,\beta)}. \tag{3.12}$$

Que podem ser chamados de operador de redução e operador de aumento, respectivamente.

A igualdade (3.12) pode ser mostrada da seguinte forma

$$B_{\alpha,\beta}(P_n^{(\alpha+1,\beta+1)}) = \frac{2}{\alpha+\beta+n+2}B_{\alpha,\beta}(A_{\alpha,\beta}(P_{n+1}^{(\alpha,\beta)})),$$

onde $P_n^{(\alpha+1,\beta+1)} = \frac{2}{\alpha+\beta+n+2}A_{\alpha,\beta}(P_{n+1}^{(\alpha,\beta)})$ da equação (3.11). Das equações (3.9) e (3.10) temos

$$B_{\alpha,\beta}(P_n^{(\alpha+1,\beta+1)}) = -2(n+1)P_n^{(\alpha,\beta)}.$$

A fórmula de diferenciação (3.3) da quarta caracterização é dada por

$$\begin{aligned}(2n+\alpha+\beta)(1-x^2)\frac{dP_n^{(\alpha,\beta)}(x)}{dx} &= n[\alpha-\beta-(2n+\alpha+\beta)x]P_n^{(\alpha,\beta)}(x) \\ &\quad +2(n+\alpha)(n+\beta)P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x).\end{aligned}$$

Sabemos que os polinômios de Jacobi são ortogonais com relação à função peso $w(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$ em (-1,1). Assim, por (3.5) temos que $M(x) = 1-x^2$ e

$$\frac{d}{dx}\left((1-x^2)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta\right) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta[-2x-\alpha(1+x)+\beta(1-x)].$$

Tomando $N(x) = -2x-\alpha(1+x)+\beta(1-x)$, temos que $N(x)$ é o polinômio de grau 1 da equação diferencial (3.4). Portanto, a função peso satisfaz a equação diferencial de Pearson.

Os polinômios de Jacobi têm alguns casos particulares para os parâmetros α e β, que aparecem com frequência na literatura e são conhecidos como polinômios de Gegenbauer quando $\alpha = \beta = \lambda - \frac{1}{2}$, polinômios de Legendre quando $\alpha = \beta = 0$ e polinômios de Chebyshev de primeira espécie, quando $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$, e de segunda espécie, quando $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$.

3.3 Polinômios de Laguerre

Os polinômios de Laguerre, denotados por $L_n^{(\alpha)}(x)$, são ortogonais no intervalo $(0,\infty)$, com relação a função peso $w(x) = x^\alpha e^{-x}$, $\alpha > -1$.

Para os polinômios ortogonais de Laguerre a fórmula de Rodrigues (3.2) é da forma

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{x^{-\alpha}e^x}{n!}\frac{d^n}{dx^n}[x^{\alpha+n}e^{-x}].$$

Com o intuito de mostrar a relação de ortogonalidade, optamos por utilizar a fórmula de Rodrigues. Derivando a fórmula acima pela regra de Leibniz, obtemos

$$\begin{aligned} L_n^{(\alpha)}(x) &= \frac{x^{-\alpha}e^x}{n!}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(\alpha+n)(\alpha+n-1)\cdots(\alpha+j+1)x^{\alpha+j}(-1)^j e^{-x} \\ &= \frac{1}{n!}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(\alpha+n)(\alpha+n-1)\cdots(\alpha+j+1)x^{j}(-1)^j. \end{aligned}$$

Ou ainda,

$$\begin{aligned} L_n^{(\alpha)}(x) &= \frac{1}{n!}\left[\binom{n}{n}(\alpha+n)(\alpha+n-1)\cdots(\alpha+n+1)x^n(-1)^n\right. \\ &\left. +\binom{n}{n-1}(\alpha+n)(\alpha+n-1)\cdots(\alpha+n-1+1)x^{n-1}(-1)^{n-1}+\cdots\right] \\ &= \frac{(-1)^n}{n!}x^n - \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}(\alpha+n)x^{n-1}+\cdots. \end{aligned}$$

Pode-se observar que o coeficiente do termo de maior grau dos polinômios de Laguerre é

$$a_{n,n} = \frac{(-1)^n}{n!}. \tag{3.13}$$

Usando o produto interno, obtemos

$$\langle L_n^{(\alpha)}, L_m^{(\alpha)}\rangle = \int_0^\infty L_n^{(\alpha)}(x)L_m^{(\alpha)}(x)x^\alpha e^{-x}dx = \frac{1}{n!}\int_0^\infty \frac{d^n}{dx^n}(x^{\alpha+n}e^{-x})L_m^{(\alpha)}(x)dx. \tag{3.14}$$

Seja $y_n(x) = x^{\alpha+n}e^{-x}$. Então,

$$\frac{d^n}{dx^n}(x^{\alpha+n}e^{-x}) = y_n^{(n)}(x).$$

Logo,

$$\langle L_n^{(\alpha)}, L_m^{(\alpha)}\rangle = \frac{1}{n!}\int_0^\infty L_m^{(\alpha)}(x)y_n^{(n)}(x)dx.$$

Integrando n vezes por partes, obtemos

$$\langle L_n^{(\alpha)}, L_m^{(\alpha)}\rangle = \frac{(-1)^n}{n!}\int_0^\infty [L_m^{(\alpha)}(x)]^{(n)}y_n(x)dx.$$

Assim, disto e da definição da função gama (2.22), concluí-se que para os polinômios de Laguerre, vale a relação de ortogonalidade

$$\langle L_n^{(\alpha)}, L_m^{(\alpha)}\rangle = \begin{cases} 0, & \text{se } m \neq n, \\ \frac{1}{n!}\Gamma(n+\alpha+1), & \text{se } m = n. \end{cases} \tag{3.15}$$

Eles podem também ser obtidos através da relação de recorrência de três termos

$$L_{n+1}^{(\alpha)}(x) = \frac{(2n+\alpha+1-x)L_n^{(\alpha)}(x) - (n+\alpha)L_{n-1}^{(\alpha)}(x)}{n+1}, \quad n \geq 1, \tag{3.16}$$

com $L_0^{(\alpha)}(x) = 1$ e $L_1^{(\alpha)}(x) = -x + \alpha + 1$.

Da mesma forma que os polinômios de Jacobi, os polinômios de Laguerre são soluções de uma equação diferencial de Sturm-Lioville, que neste caso é

$$xy'' + (\alpha + 1 - x)y' + ny = 0, \tag{3.17}$$

ou, na forma auto-ajunta,

$$\frac{d}{dx}\{x^{\alpha+1}e^{-x}y'\} + n(x^{\alpha}e^{-x})y = 0.$$

Da equação (3.17) obtem-se o operador diferencial da forma

$$T_k(y) = xy'' + (\alpha + 1 - x)y',$$

tal que os polinômios de Laguerre satisfazem a equação de auto-valor

$$T_k(y) = -ny. \tag{3.18}$$

Além disso, tomando

$$\begin{aligned} A_k(y) &= y', \\ B_k(y) &= xy' + (\alpha + 1 - x)y, \end{aligned}$$

obtemos

$$T_k(y) = B_k(A_k(y)). \tag{3.19}$$

A derivada dos polinômios de Laguerre satisfaz

$$A_k(L_n^{(\alpha)}) = \frac{dL_n^{(\alpha)}(x)}{dx} = -L_{n-1}^{(\alpha+1)}(x), \tag{3.20}$$

que é o resultado do Teorema 3.2, e

$$B_k(L_n^{(\alpha+1)}) = nL_{n+1}^{(\alpha)}. \tag{3.21}$$

Que podem ser chamados de operadores de redução e aumento, respectivamente.

A igualdade (3.21) pode ser mostrada da seguinte forma

$$B_k(L_n^{(\alpha+1)}) = -B_k(A_k(L_{n+1}^{(\alpha)})),$$

onde $L_n^{(\alpha+1)} = -A_k(L_{n+1}^{(\alpha)})$ da equação (3.20). Das equações (3.18) e (3.19) temos

$$B_k(L_n^{(\alpha+1)}) = nL_{n+1}^{(\alpha)}.$$

A fórmula de diferenciação (3.3) da quarta caracterização

$$x\frac{dL_n^{(\alpha)}(x)}{dx} = nL_n^{(\alpha)}(x) - (n+\alpha)L_{n-1}^{(\alpha)}(x).$$

Os polinômios de Laguerre são ortogonais com relação à função peso $w(x) = x^\alpha e^{-x}$ em $(0, \infty)$. Assim, por (3.5) segue que $M(x) = x$ e

$$\frac{d}{dx}\left(xx^\alpha e^{-x}\right) = (\alpha + 1 - x)x^\alpha e^{-x}.$$

Tomando $N(x) = \alpha + 1 - x$, $N(x)$ é o polinômio de grau 1 da equação (3.4). Assim, a função peso satisfaz a equação diferencial de Pearson.

3.4 Polinômios de Hermite

Os polinômios de Hermite, denotados por $H_n(x)$, são ortogonais no intervalo $(-\infty, \infty)$, com relação à função peso $w(x) = e^{-x^2}$.

A fórmula de Rodrigues (3.2) para os polinômios de Hermite é dada por

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2}\frac{d}{dx^n}[e^{-x^2}]. \tag{3.22}$$

Seja $\phi(x) = e^{-x^2}$, então

$$\phi^{(n)}(x) = \frac{d^n}{dx^n}[e^{-x^2}] = (-1)^n e^{-x^2} H_n(x). \tag{3.23}$$

Assim, usando a definição de produto interno e $\phi(x)$, obtemos

$$\langle H_n, H_m\rangle = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} H_m(x)\phi^{(n)}(x)dx.$$

Integrando n vezes por partes, temos

$$\langle H_n, H_m\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} H_m^{(n)}(x)\phi(x)dx.$$

E concluí-se que, para os polinômios de Hermite, vale a relação de ortogonalidade

$$\langle H_n, H_m\rangle = \begin{cases} 0, & \text{se } m \neq n, \\ 2^n n!\sqrt{\pi}, & \text{se } m = n. \end{cases}$$

A relação de recorrência de três termos para os polinômios de Hermite é obtida através da relação de três termos (2.3) com as condições iniciais (2.4) e da equação (3.22), e é da forma

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x),\ n \geq 1,$$

com $H_0(x) = 1$ e $H_1(x) = 2x$.

Derivando a expressão (3.23), obtemos

$$\phi^{(n+1)}(x) = (-1)^{n+1}e^{-x^2}[2xH_n(x) - H_n^{'}(x)].$$

Portanto, obtemos uma outra relação para os polinômios de Hermite,

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - H_n^{'}(x).$$

Pelo Teorema 3.1 os polinômios de Hermite satisfazem uma equação diferencial de Sturm-Liouville da forma

$$y''(x) - 2xy'(x) + 2ny(x) = 0,$$

ou, na forma auto-adjunta

$$(e^{-x^2}y')' + 2ne^{-x^2}y = 0.$$

A propriedade da derivada do Teorema 3.2 e da quarta caracterização desses polinômios é da forma

$$\frac{dH_n(x)}{dx} = 2nH_{n-1}(x).$$

Os polinômios de Hermite são ortogonais com relação à função peso $w(x) = e^{-x^2}$ em $(-\infty, \infty)$. Assim, de (3.5) temos $M(x) = 1$ e

$$\frac{d}{dx}\left(1e^{-x^2}\right) = -2xe^{-x^2}.$$

Sendo $N(x) = -2x$, o polinômio de grau 1 da equação (3.4). Desse modo, a função peso satisfaz a equação diferencial de Pearson.

4 Polinômios Ortogonais Excepcionais

Neste capítulo vamos apresentar novas sequências de polinômios ortogonais que surgem como auto-funções de um problema de Sturm-Liouville. E podem ser encontradas em [2] e [3].

4.1 Polinômios Ortogonais Excepcionais

De maneira geral, uma sequência de auto-funções polinomiais ortogonais de um problema de Sturm-Liouville é uma sequência de polinômios reais $y_1, y_2, \ldots,$ com $\text{grau}(y_i) > \text{grau}(y_j)$ se $i > j$, satisfazendo as seguintes condições

i) Existe uma operador diferencial de segunda ordem

$$T[y] = p(x)y'' + q(x)y' + r(x)y,$$

com coeficientes racionais $p(x), q(x)$ e $r(x)$ tal que

$$T[y_i] = \lambda_i y_i,$$

para todo i, com λ_i distintos.

ii) Existe um intervalo $I = (a, b), -\infty \leq a < b \leq \infty$ tal que a função peso

$$w(x) = \frac{1}{p(x)} e^{(\int^x \frac{q}{p} dt)}$$

é positiva para todo $x \in I$, os momentos são finitos, ou seja,

$$\int_a^b x^i w(x) dx < \infty, \quad i = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

e tal que $p(x)w(x) \to 0$ na extremidades do intervalo.

Do Teorema 2.5, temos que as auto-funções polinomiais são ortogonais com relação a função peso, ou seja,

$$\int_a^b y_i(x) y_j(x) w(x) dx = k_i \delta_{ij}, \quad k_i > 0.$$

iii) O conjunto dos polinômios ortogonais é completo, isto é, o $span\{y_i\}_{i=1}^{\infty}$ é denso em $L^2(w(x)dx, I)$, onde $span\{y_i\}_{i=1}^{\infty}$, o espaço gerado pelas auto-funções, é o conjunto de todas as combinações lineares de y_i, $i = 1, 2, \ldots$.

Observe que, se o grau de $y_i(x) = i - 1$ para todo i, então segundo Bochner [1] a sequência polinomial ortogonal é de Jacobi, de Laguerre ou Hermite. Além disso, os coeficientes $p(x)$, $q(x)$ e $r(x)$ são polinômios de grau 2, 1 e 0 respectivamente.

Definição 4.1. *Se a sequência de grau $\{y_i\}_{i=1}^{\infty}$ não contém todos os números naturais, então a sequência de polinômios ortogonais é chamada sequência de polinômios ortogonais excepcionais e os coeficientes de T são funções racionais.*

Para tal estudo precisamos da definição de subespaço polinomial excepcional.

Definição 4.2. *Sejam*

- $\mathbb{P}_n = span\{1, x, x^2, x^3, \ldots, x^n\}$, *o espaço dos polinômios de grau menor ou igual a n;*
- $M_k \subset \mathbb{P}_n$ *subespaço polinomial de dimensão k;*
- $m = n + 1 - k$*;*
- $\mathbb{D}_2(M_k)$ *espaço vetorial de operadores diferenciais lineares de segunda ordem com coeficientes racionais que preservam M_k.*

Se $\mathbb{D}_2(M_k) \nsubseteq \mathbb{D}_2(P_n)$ chamamos M_k de subespaço polinomial excepcional. Além disso, m é chamado de codimensão de M_k e denota-se um subespaço excepcional de codimensão m por X_m.

Exemplo 4.1. Sejam $\mathbb{P}_n$ e

$$M_k = span\{p_1(x), p_2(x), \ldots, p_k(x)\},$$

onde $M_k \subset \mathbb{P}_n$. Podemos encontrar um operador diferencial de segunda ordem

$$T(y) = p(x)y'' + q(x)y' + r(x)y,$$

tal que $T(M_k) \subset M_k$ mas $T(\mathbb{P}_n) \nsubseteq \mathbb{P}_n$? Considere $M_n = span\{1, x^2, \ldots, x^n\}$ e

$$T(y) = y'' - \frac{2}{x}y'.$$

Logo, com $y \in M_n$ temos

$$T[1] = 0,\ T[x^2] = -2,\ T[x^3] = 0 \text{ e } T[x^k] = const\, x^{k-2}, k > 3.$$

Note que,

$$T[x] = -\frac{2}{x} \notin \mathbb{P}_n.$$

Assim, $T(M_n) \subset M_n$ mas $T(\mathbb{P}_n) \nsubseteq \mathbb{P}_n$. Portanto, M_n é um subespaço excepcional de codimensão 1. Ver [4]

Quando $m = 1$ os polinômios são chamados de X_1-polinômios, seu estudo é o objetivo principal desta dissertação, e para isso estudamos os trabalhos [2] e [3].

Consideramos, agora, o espaço

$$\begin{aligned} \varepsilon_n^{a,b} &= span\{a(x-b)-1, (x-b)^2, (x-b)^3, \ldots, (x-b)^n\} \\ &= span\{x-c, (x-b)^2, (x-b)^3, \ldots, (x-b)^n\}, \end{aligned}$$

onde $a \neq 0$, $a = 1/(c-b)$, para $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Por simplicidade denotamos

$$u_1(x) = (x-c), \quad u_j(x) = (x-b)^j, \quad j = 2, 3, \ldots$$

Assim,

$$\varepsilon_n^{a,b} = span\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}.$$

Consideramos T o operador de segunda ordem definido por

$$T(y) := p(x)y'' + \frac{\tilde{q}(x)}{x-b}y' + \frac{\tilde{r}(x)}{x-b}y, \tag{4.1}$$

onde

$$\begin{aligned} p(x) &= k_2(x-b)^2 + k_1(x-b) + k_0, \\ \tilde{q}(x) &= a(x-c)(k_1(x-b) + 2k_0), \\ \tilde{r}(x) &= -ak_1(x-b) - 2ak_0, \\ a &= \frac{1}{c-b}, \end{aligned} \tag{4.2}$$

com a, b, c, k_0, k_1 e k_2 constantes reais e assumindo que $k_0 \neq 0$, $a \neq 0$ e $b \neq c$.

Primeiramente, vamos mostrar que T, definido em (4.1), deixa $\varepsilon_n^{a,b}$ invariante, ou seja, se P_n pertence ao espaço $span\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$, $n \geq 1$, e $T(P_n) = Q_n$ então $Q_n(x) \in span\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$.

De fato, substituindo $x - c = x - b - \frac{1}{a}$ em (4.2) obtemos

$$\begin{aligned} p(x) &= k_2(x-b)^2 + k_1(x-b) + k_0, \\ \tilde{q}(x) &= ak_1(x-b)^2 + (2ak_0 - k_1)(x-b) - 2k_0, \\ \tilde{r}(x) &= -ak_1(x-b) - 2ak_0, \end{aligned}$$

Como $P_n(x) \in span\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ então

$$P_n(x) = \alpha_1 u_1(x) + \alpha_2 u_2(x) + \alpha_3 u_3(x) + \cdots + \alpha_n u_n(x),$$

e usando o fato que $u_1(x) = x - b - \dfrac{1}{a}$, obtemos

$$P_n(x) = -\frac{\alpha_1}{a} + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j (x-b)^j.$$

Para o cálculo de $T(P_n)$ precisamos de

$$\begin{aligned}
p(x)P_n''(x) &= [k_2(x-b)^2 + k_1(x-b) + k_0][2\alpha_2 + 6\alpha_3(x-b) + \cdots] \\
&= 2k_0\alpha_2 + [6k_0\alpha_3 + 2k_1\alpha_2](x-b) + \cdots .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{q}(x)P_n'(x) &= [ak_1(x-b)^2 + (2ak_0 - k_1)(x-b) - 2k_0][\alpha_1 + 2\alpha_2(x-b) + 3\alpha_3(x-b)^2 + \cdots] \\
&= -2k_0\alpha_1 + [2ak_0\alpha_1 - k_1\alpha_1 - 4k_0\alpha_2](x-b) \\
&\quad +[(ak_1\alpha_1 + 4ak_0\alpha_2 - k_1\alpha_2) - 6k_0\alpha_3](x-b)^2 + \cdots .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{r}(x)P_n(x) &= [-ak_1(x-b) - 2ak_0][-\frac{\alpha_1}{a} + \alpha_1(x-b) + \alpha_2(x-b)^2 + \alpha_3(x-b)^3 + \cdots] \\
&= -2k_0\alpha_1 + [-2ak_0\alpha_1 + k_1\alpha_1](x-b) + [-ak_1\alpha_1 - 2ak_0\alpha_2](x-b)^2 + \cdots .
\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}
Q_n(x) = T(P_n(x)) &= p(x)P_n''(x) + \frac{\tilde{q}(x)}{x-b}P_n'(x) + \frac{\tilde{r}(x)}{x-b}P_n(x) \\
&= -2k_0\alpha_2 + 2ak_0\alpha_2(x-b) + \cdots .
\end{aligned}$$

Novamente usando $u_1(x) = x - b - \dfrac{1}{a}$, obtemos

$$Q_n(x) = 2ak_0\alpha_2 u_1(x) + \cdots .$$

Portanto, $Q_n \in span\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ □

Além disso, observe que

$$\begin{aligned}
T(x-c) &= \frac{\tilde{q}(x)}{x-b} + \frac{\tilde{r}(x)}{x-b}(x-c) \\
&= a(x-c)(k_1(x-b) + 2k_0) - a(k_1(x-b) + 2k_0)(x-c) = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T((x-b)^2) &= 2p(x) + 2\tilde{q}(x) + \tilde{r}(x)(x-b) \\
&= 2(k_2(x-b)^2 + k_1(x-b) + k_0) + 2(a(x-c)(k_1(x-b) + 2k_0)) \\
&\quad -a(k_1(x-b) + 2k_0)(x-b) \\
&= 2k_2(x-b)^2 + 2ak_0(x-c) + 2k_1(x-b) + 2k_0 + ak_1(x-b)^2 \\
&\quad +ak_1(x-b)^2 - 2k_1(x-b) - ak_1(x-b)^2 - 2ak_0(x-b) + 2ak_0(x-c) \\
&= (2k_2 + ak_1)(x-b)^2 + 2k_0a(x-c),
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
T((x-b)^n) &= n(n-1)p(x)(x-b)^{n-2} + n\tilde{q}(x)(x-b)^{n-2} + \tilde{r}(x)(x-b)^{n-1} \\
&= (k_2(x-b)^2 + k_1(x-b) + k_0)(n(n-1)(x-b)^{n-2}) \\
&\quad +(a(x-c)(k_1(x-b) + 2k_0))n(x-b)^{n-2} - a(k_1(x-b) + 2k_0)(x-b)^{n-1} \\
&= (n-1)(nk_2 + ak_1)(x-b)^n + (n(n-2)k_1 \\
&\quad +2(n-1)ak_0)(x-b)^{n-1} + n(n-3)k_0(x-b)^{n-2}, \quad n \geq 2.
\end{aligned}$$

Resumindo, temos

$$
\begin{aligned}
T(x-c) &= 0, \\
T((x-b)^2) &= (2k_2+ak_1)(x-b)^2+2k_0a(x-c), \\
T((x-b)^n) &= (n-1)(nk_2+ak_1)(x-b)^n+(n(n-2)k_1 \\
&\quad +2(n-1)ak_0)(x-b)^{n-1}+n(n-3)k_0(x-b)^{n-2}, \quad n\geq 2. \quad (4.3)
\end{aligned}
$$

Assim, a equação de auto-valor, $Ty_n=\lambda_n y_n$, define uma sequência polinomial, $\{P_1(x),P_2(x),\ldots,P_n(x)\}$, que por construção, cada $P_n\in\varepsilon_n^{a,b}$ e da equação (4.3) os auto-valores são da forma

$$\lambda_n=(n-1)(nk_2+ak_1), \quad n\geq 1.$$

Uma vez que T possui coeficientes racionais, ele não preserva $\mathbb{P}_n$. Logo, $T\in\mathbb{D}_2(\varepsilon_n^{a,b})$ mas $T\notin\mathbb{D}_2(P_n)$, além disso, $\varepsilon_n^{a,b}\subset\mathbb{P}_n$ é subespaço polinomial de dimensão n. Dessa forma, o subespaço tem codimensão 1 e $\mathbb{D}_2(\varepsilon_n^{a,b})\not\subseteq\mathbb{D}_2(P_n)$.

Portanto, pela Definição 4.2, $\varepsilon_n^{a,b}$ é um subespaço excepcional X_1 e é possível enunciar o seguinte resultado, encontrado em [2].

Teorema 4.1. *O operador T definido em* (4.1) *deixa invariante $\varepsilon_n^{a,b}$ para todo $n\geq 1$. Então, a equação de auto-valor*

$$Ty_n=\lambda_n y_n, \tag{4.4}$$

define uma sequência de polinômios $\{y_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, onde $y_n(x)\in\varepsilon_n^{a,b}$ com grau $y_n=n$ e $\lambda_n=(n-1)(nk_2+ak_1)$, $\quad n\geq 1$.

A recíproca desse resultado também é verdadeira e pode ser encontrada em [3].

Teorema 4.2. *Seja T operador diferencial de segunda ordem tal que a equação de auto-valor, $Ty_n=\lambda_n y_n$, seja satisfeita por polinômios $y_n(x)$ para todo grau $n\geq 1$, mas não para $n=0$. Então, a menos de uma constante aditiva, T tem a forma* (4.1) *sujeito a* (4.2) *e $y_n(x)\in\varepsilon_n^{a,b}$.*

O próximo resultado apresenta uma característica do operador T definido em (4.1), e é encontrado em [2].

Teorema 4.3. *Se todas as auto-funções polinomiais de um problema de Sturm-Liouville, com o operador T definido em* (4.1), *formam uma sequência de polinômios ortogonais de Sturm-Liouville, então a menos de uma transformação afim da variável independente, a família em questão é X_1-Jacobi ou X_1-Laguerre.*

Demonstração: Por hipótese, T é um operador diferencial de segunda ordem com um conjunto completo de auto-funções polinomiais, $\{y_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$. Note que, se uma constante, $y_0(x)$, é auto-função de T, então necessariamente essa auto-função pertence a L^2, uma vez que, o momento de ordem zero da medida $w(x)dx$ está bem definido. Consequentemente a sequência $\{y_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ não é densa, contrariando a hipótese.

Dessa forma a menos de uma transformação afim de x, $p(x)$ em (4.2) assume uma das seguintes formas canônicas

$$
\begin{aligned}
\text{i)}\ p(x) &= 1-x^2; \\
\text{ii)}\ p(x) &= 1+x^2; \\
\text{iii)}\ p(x) &= x^2; \\
\text{iv)}\ p(x) &= x; \\
\text{v)}\ p(x) &= 1.
\end{aligned}
\tag{4.5}
$$

Substituindo as formas canônicas acima em (4.2) encontramos uma expressão para o operador (4.1). Escrevendo o operador na forma auto-adjunta encontramos as expressões para as funções peso.

Como exemplo, consideramos a forma canônica $p(x) = 1$, vamos encontrar explicitamente a função peso relacionada ao problema de Sturm-Liouville. Os outros casos são análogos.

Substituindo $p(x) = 1$ em (4.2) obtemos $k_2 = k_1 = 0$ e $k_0 = 1$. Assim, as funções $\tilde{q}(x)$ e $\tilde{r}(x)$ em (4.2) são dadas por

$$\begin{aligned} \tilde{q}(x) &= 2a(x-c), \\ \tilde{r}(x) &= -2a, \end{aligned}$$

e, substituindo em (4.1) obtemos

$$T(y) = y'' + \frac{2a(x-c)}{x-b}y' - \frac{2a}{x-b}y.$$

Para que T esteja na forma auto-adjunta (2.5), precisamos obter $\tilde{p}(x)$, para isso temos que calcular $\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx$ que aparece em (2.14)

$$\begin{aligned} \int \frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx &= \int \frac{\tilde{q}(x)}{x-b}dx = \int \frac{2a(x-c)}{x-b}dx \\ &= 2a\left[\int \frac{x}{x-b}dx - \int \frac{c}{x-b}dx\right] \\ &= 2a\left[(b\,log(x-b)+x) - c\,log(x-b)\right] \\ &= 2a(b-c)log(x-b) + 2ax \\ &= -2log(x-b) + 2ax \\ &= log(x-b)^{-2} + 2ax, \end{aligned}$$

pois $a(b-c) = -1$. Assim,

$$\tilde{p}(x) = \frac{e^{2ax}}{(x-b)^2}. \tag{4.6}$$

Substuindo (4.6) em (2.17), obtemos a função peso

$$w(x) = \frac{e^{2ax}}{(x-b)^2}.$$

□

De maneira análoga, escrevendo cada um dos 5 casos de $p(x)$ dado (4.5) na forma auto-adjunta, obtemos as seguintes expressões para as respectivas funções peso

i) $w(x) = \frac{(x-1)^{-a+ab}(x+1)^{a+ab}}{(x-b)^2}$;

ii) $w(x) = \frac{e^{2aarctanx}(1+x^2)^{ab}}{(x-b)^2}$;

iii) $w(x) = \frac{x^{2ab}}{(x-b)^2}$;

iv) $w(x) = \frac{e^{ax}x^{ab}}{(x-b)^2}$;

v) $w(x) = \frac{e^{2ax}}{(x-b)^2}$.

Note que o intervalo de ortogonalidade não pode incluir $x = b$, pois todas as auto-funções polinomiais devem ser quadrado integrável. Pode-se então, usar a indentidade (2.21), onde $f(x)$ e $g(x)$ são quaisquer combinações lineares de auto-funções polinomiais de T. O Teorema 4.2 afirma que as auto-funções polinomiais pertencem ao subespaço $\varepsilon^{a,b}$, e como

$$(x-b)^2 P \subset \varepsilon^{a,b}, \quad \text{para } P \in \mathbb{P}_{n-2},$$

então a identidade (2.21) vale, em particular, para

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-b)^2 f_1(x), \\ g(x) &= (x-b)^2 g_1(x), \end{aligned}$$

onde $f_1(x), g_1(x)$ são polinômios arbitrários.

Observe que

$$\begin{aligned} f'(x)g(x) - f(x)g'(x) &= (x-b)^4(f_1'(x)g_1(x) - f_1(x)g_1'(x)) \\ &= (x-b)^4 h(x), \end{aligned}$$

onde $h(x) = (f_1'(x)g_1(x) - f_1(x)g_1'(x))$ é um polinômio arbitrário.

Pela ortogonalidade o lado esquerdo de (2.21) se anula, então, a expressão $[p(x)w(x)(x-b)^4h(x)]_{x_1}^{x_2} = 0$ para todo polinômio $h(x)$, que é equivalente a

$$p(x_1)w(x_1) = p(x_2)w(x_2) = 0, \tag{4.7}$$

onde as avaliações acima devem ser entendidas no sentido limite se um ou ambos os pontos finais x_1, x_2 forem infinitos.

Vamos, agora, analisar os 5 casos de funções peso de acordo com a condição (4.7).

A condição (4.7) exclui os casos (ii) e (v) de (4.5) para todas as possíveis escolhas de x_1 e x_2 uma vez que, $p(x)$ e $w(x)$ são não nulos para x no intervalo $[x_1, x_2]$.

O caso (iii) também é excluído pelo requisito de que todas auto-funções polinomiais sejam quadrados integráveis em relação a $w(x)$ sobre o intervalo $[x_1, x_2]$.

No caso iv), ao redimensionar x podemos assumir, sem perda de generalidade, $a = -1$. Da equação (4.7) obtem-se

$$x_1 \frac{e^{-x_1} x_1^{-b}}{(x_1-b)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \text{ ou } x_1 = \infty, \\ b < 1 \end{cases}$$

Então, $x_1 = 0, x_2 = \infty$ e $b < 1$.

Contudo para que b permaneça fora do intervalo $[x_1, x_2]$ devemos impor $b < 0$.

Fazendo

$$a = -1 \quad \text{e} \quad b = -k,$$

a função peso iv) torna-se

$$\hat{W}_k(x) = \frac{e^{-x}x^k}{(x+k)^2}, \tag{4.8}$$

onde $x \in (0, \infty)$ e $k > 0$.

Assim, os polinômios ortogonais com relação a $\hat{W}_k(x)$ são soluções do problema de Sturm-Liouville

$$-xy'' + \frac{x-k}{x+k}((x+k+1)y' - y),$$

com as seguintes condições de contorno

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} x^{k+1}e^{-x}(y(x)-(x-c)y'(x)) &= 0,\\ \lim_{x\to\infty} x^{k+1}e^{-x}(y(x)-(x-c)y'(x)) &= 0,\end{aligned}$$

e os correspondentes auto-valores $\lambda_n = n-1$, $n = 1, 2, \ldots$. Eles são conhecidos como polinômios ortogonais X_1- Laguerre, $\{\hat{L}_i^{(k)}(x)\}_{i=1}^{\infty}$. Além disso, eles pertencem ao espaço $\varepsilon_n^{-1,-k} := \{p \in P_n | p'(-k) - p(-k) = 0\}$, ou ainda,

$$\varepsilon_n^{-1,-k} = span\{x+k+1, (x+k)^2, (x+k)^3, \ldots, (x+k)^n, \ldots\} \tag{4.9}$$

No caso (i), a equação (4.7) implica

$$(1-x_1^2)\frac{(x_1-1)^{-a+ab}(x_1+1)^{a+ab}}{(x_1-b)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \text{ ou } x_1 = 1, \\ |b| > 1 \text{ e } sgn(a) = sgn(b) \end{cases},$$

onde $sgn(a)$ é o sinal de a. Então,

$$x_1 = -1, x_2 = 1 \text{ e } a(b \pm 1) > -1.$$

Fazendo $\alpha = ab - a$ e $\beta = ab + a$, obtemos

$$a = \frac{\beta-\alpha}{2}, \quad b = \frac{\beta+\alpha}{\beta-\alpha}, \quad sgn(\alpha) = sgn(\beta) \quad \text{e} \quad \alpha \neq \beta. \tag{4.10}$$

Com as restrições (4.10) a função peso $i)$ torna-se

$$\hat{W}_{\alpha,\beta}(x) = \frac{(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}}{\left(x - \dfrac{\beta+\alpha}{\beta-\alpha}\right)^2}, \tag{4.11}$$

onde $x \in (-1, 1)$, $\quad \alpha \neq \beta$, $\quad \alpha$ e $\beta > -1$.

Assim, os polinômios ortogonais com relação a $\hat{W}_{\alpha,\beta}(x)$ são soluções do problema de Sturm-Liouville

$$(x^2-1)y'' + 2a\left(\frac{1-bx}{b-x}\right)((x-c)y' - y),$$

com as seguintes condições de contorno

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1^-} (1-x)^{\alpha+1}(y(x)-(x-c)y'(x)) &= 0,\\ \lim_{x\to 1^+} (1-x)^{\beta+1}(y(x)-(x-c)y'(x)) &= 0,\end{aligned}$$

e os correspondentes auto-valores $\lambda_n = (n-1)(n+\alpha+\beta)$, $n = 1, 2, \ldots$. Eles são conhecidos como polinômios ortogonais X_1-Jacobi, $\{\hat{P}_i^{(\alpha,\beta)}(x)\}_{i=1}^{\infty}$. Além disso, eles pertencem ao espaço $\varepsilon_n^{a,b} := \{p \in P_n | p'(b) + ap(b) = 0\}$, ou ainda,

$$\varepsilon_n^{a,b} = span\{x-c, (x-b)^2, (x-b)^3, \ldots, (x-b)^n, \ldots\}, \tag{4.12}$$

com $c = b + 1/a$. $\square$

4.2 Os Polinômios X_1-Laguerre

Como vimos os polinômios X_1-Laguerre são definidos como sendo a sequência polinomial, $\{\hat{L}_i^{(k)}(x)\}_{i=1}^{\infty}$, $k > 0$ que, por (4.8) e (4.9), podem ser obtidos pela ortogonalização de Gram-Schmidt a partir da sequência

$$\{x+k+1, (x+k)^2, (x+k)^3, \dots, (x+k)^n, \dots\} \tag{4.13}$$

que provém de $\varepsilon_n^{a,b}$ com $a = -1$ e $b = -k$ e relativo ao produto interno

$$\langle f, g\rangle_k \;:=\; \int_0^{\infty} f(x)g(x)d\hat{\mu}_k, \tag{4.14}$$

onde

$$d\hat{\mu}_k = \hat{W}_k(x)dx = \frac{e^{-x}x^k}{(x+k)^2}dx, \quad x \in (0,\infty). \tag{4.15}$$

Pode-se impor a condição de normalização

$$\hat{L}_n^{(k)}(x) = \frac{(-1)^n}{(n-1)!}x^n + \text{termos de graus menores}, \; n \geq 1. \tag{4.16}$$

Proposição 4.1. *Os polinômios X_1-Laguerre formam uma sequência de auto-funções polinomiais ortogonais de um problema de Sturm-Liouville.*

Demonstração: O Teorema 4.1 garante que os polinômios X_1-Laguerre são soluções do seguinte problema de Sturm-Liouville

$$T_k(y) = -xy'' + \frac{x-k}{x+k}(x+k+1)y' - y), \tag{4.17}$$

com as seguintes condições de contorno

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} x^{k+1}e^{-x}(y(x) - (x-c)y'(x)) &= 0,\\ \lim_{x\to\infty} x^{k+1}e^{-x}(y(x) - (x-c)y'(x)) &= 0,\end{aligned}$$

e de (4.4) os correspondentes auto-valores são $\lambda_n = n-1,\; n = 1, 2, \dots$.

Falta mostrar que a sequência formada por essas auto-funções polinomiais é completa em L^2. Para isso, vamos precisar da seguinte propriedade.

Propriedade 4.1. Seja P o anel de polinômios em $x \in \mathbb{R}$ com coeficientes reais. O espaço vetorial

$$\tilde{\varepsilon} = \{p \in P | p(-k) = 0\},$$

é denso no espaço de Hilbert $L^2([0,\infty), \mu_k)$ onde

$$d\mu_k = (x+k)^2 d\hat{\mu}_k = x^k e^{-x}dx.$$

Demonstração: Como $P = \mathbb{R} \oplus \tilde{\varepsilon}$, é suficiente mostrar que 1 está em $L^2(\mu_k)$ fecho de $\tilde{\varepsilon}$, pois queremos mostrar que $\int_0^\infty |f(x) - \tilde{p}(x)|^2 x^k e^{-x}dx < \epsilon$, $\tilde{p}(x) \in \tilde{\varepsilon}$ e $f(x) \in L^2([0,\infty), \mu_k)$. Assim,

$$\begin{aligned}\int_0^\infty |f(x) - \tilde{p}(x)|^2 x^k e^{-x}dx \;&<\; \int_0^\infty |f(x) - p(x)|^2 x^k e^{-x}dx\\ &\quad + \int_0^\infty |p(x) - \tilde{p}(x)|^2 x^k e^{-x}dx, \quad p(x) \in P.\end{aligned}$$

Como $p(x) \in P$, pode-se escrever $p(x) = c(x).1 + q_0(x)$, onde $c(x).1 \in \mathbb{R}$ e $q_0(x) \in \tilde{\varepsilon}$.
Logo,

$$\begin{aligned}\int_0^\infty |f(x)-\tilde{p}(x)|^2 x^k e^{-x}dx &< \int_0^\infty |f(x)-p(x)|^2 x^k e^{-x}dx \\ &+ \int_0^\infty |1-\tilde{q}(x)|^2 x^k e^{-x}dx, \quad \tilde{q}(x) \in \tilde{\varepsilon}.\end{aligned}$$

Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } \ 0 \leqslant x < k, \\ \frac{1}{x}, & \text{se } \ x \geqslant k, \end{cases}$$

que pertence a $L^2([0,\infty),\mu_k)$. Como o conjunto dos polinômios de Laguerre, $L_n^{(k+2)}(x)$, é denso em $L^2([0,\infty),\mu_k)$ existe um polinômio $p \in P$ tal que

$$\int_0^\infty |f(x)-p(x)|^2 x^{k+2} e^{-x}dx < e^{-k}\epsilon.$$

Dado $\epsilon > 0$,

$$\begin{aligned}\int_0^\infty |1-(x+k)p(x+k)|^2 x^k e^{-x}dx &= \int_0^\infty |\frac{1}{(x+k)} - p(x+k)|^2 (x+k)^2 x^k e^{-x}dx \\ &\leqslant \int_0^\infty |\frac{1}{x+k} - p(x+k)|^2 (x+k)^{k+2} e^{-x}dx \\ &= e^k \int_k^\infty |\frac{1}{y} - p(y)|^2 y^{k+2} e^{-y}dy \\ &\leqslant e^k \int_0^\infty |f(y)-p(y)|^2 y^{k+2} e^{-y}dy \\ &\leqslant \epsilon.\end{aligned}$$

□

Lembrando que $\{\hat{L}_i^{(k)}(x)\}_{i=1}^\infty$ são definidos pela ortogonalização de Gram-Schmidt da sequência (4.13), o conjunto é ortogonal por construção. Logo, é suficiente mostrar que

$$\varepsilon^{-1,-k} := \text{span } \{u_i\}_{i=1}^\infty \text{ é denso em } L^2([0,\infty),\mu_k).$$

Dado um $f \in L^2([0,\infty),\hat{\mu}_k)$ arbitrário e $\epsilon > 0$. Seja

$$\tilde{f}(x) = \frac{f(x)}{x+k}, \quad x \geq 0.$$

Como, $f \in L^2([0,\infty),\hat{\mu}_k)$ temos

$$\begin{aligned}\int_0^\infty |f(x)|^2 d\hat{\mu}_k < \epsilon &\Leftrightarrow \int_0^\infty |f(x)|^2 \frac{x^k e^{-x}}{(x+k)^2}dx < \epsilon \\ &\Leftrightarrow \int_0^\infty \left|\frac{f(x)}{x+k}\right|^2 x^k e^{-x}dx < \epsilon \\ &\Leftrightarrow \tilde{f}(x) \in L^2([0,\infty),\mu_k).\end{aligned}$$

A Propriedade 4.1 garante que existe um polinômio $p(x)$ tal que

$$\int_0^\infty |\tilde{f}(x) - (x+k)p(x)|^2 x^k e^{-x} dx < \epsilon.$$

Portanto,

$$\int_0^\infty \left| f(x) - (x+k)^2 p(x) \right|^2 d\hat{\mu}_k < \epsilon.$$

Tomando $h(x) = (x+k)^2 p(x)$, temos que $h'(-k) - h(-k) = 0$ e deste modo $(x+k)^2 p(x) \in \varepsilon^{-1,-k}$. Assim, os polinômios X_1-Laguerre formam uma base ortogonal de $L^2([0,\infty), \hat{\mu}_k)$.

E, disto concluí-se que, os polinômios X_1- Laguerre formam uma sequência polinomial de um problema de Sturm-Liouville. □

É fácil mostrar que a função peso $\hat{W}_k(x)$, dada em (4.15), satisfaz uma equação do tipo Pearson, da forma

$$(-x\,\hat{W}_k(x))' = \frac{x-k}{x+k}(x+k+1)\hat{W}_k(x).$$

4.2.1 Fórmula Tipo Rodrigues

A seguir são definidos dois operadores que podem fatorar o operador T dado em (4.17) de duas formas diferentes.

Sejam

$$\begin{aligned} A_k(y) &= -\frac{x+k+1}{x+k}(y'-y) - y && (4.18)\\ &= -\frac{(x+k+1)^2}{x+k}\frac{d}{dx}\left(\frac{y}{x+k+1}\right), \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} B_k(y) &= \frac{x(x+k)}{x+k+1}(y'-y) + ky && (4.19)\\ &= \left((x+k+1)\hat{W}_k\right)^{-1}\frac{d}{dx}\left(\frac{(x+k+1)^2}{x+k}\hat{W}_{k+1}y\right), && (4.20) \end{aligned}$$

onde a função $\hat{W}_k(x)$ é a função peso dada em (4.15). Usando os operadores acima, concluí-se que

$$\begin{aligned} T_k &= B_k A_k && (4.21)\\ &= A_{k-1}B_{k-1} - 1. && (4.22) \end{aligned}$$

De fato, observe que

$$\begin{aligned} A_k'(y) &= -\frac{(x+k+1)(x+k)y'' + (x+k+1)y' - (x+k+1)y + (x+k)y}{(x+k)^2},\\ B_k'(y) &= \frac{(x^2+kx)y'' + (-2x^2+k^2+2(x+k)-kx)y' + (-2x-k-x^2+k^2)y}{(x+k+1)^2}. \end{aligned}$$

Assim, substituindo $A'_k(y)$ e $A_k(y)$ em (4.19) e $B'_k(y)$ e $B_k(y)$ em (4.18) encontramos (4.21) e (4.22). $\square$

Esses operadores satisfazem a seguinte relação

$$\langle f, B_k g\rangle_k = \langle A_k f, g\rangle_{k+1}, \tag{4.23}$$

onde o produto interno está definido em (4.14) e (4.15).

De fato, usando (4.20), sabemos que

$$\begin{aligned}\langle f, B_k g\rangle_k &= \int_0^\infty \frac{f(x)}{(x+k+1)\hat{W}_k(x)}\frac{d}{dx}\left[\frac{(x+k+1)^2}{x+k}g(x)\hat{W}_{k+1}(x)\right]\hat{W}_k(x)dx\\ &= \int_0^\infty \frac{f(x)}{x+k+1}\frac{d}{dx}\left[\frac{(x+k+1)^2}{x+k}g(x)\hat{W}_{k+1}(x)\right]dx.\end{aligned}$$

Integrando por partes, temos

$$\begin{aligned}\langle f, B_k g\rangle_k &= \frac{f'(x)(x+k+1)-f(x)}{(x+k+1)^2}\frac{(x+k+1)^2}{x+k}g(x)\hat{W}_{k+1}(x)\Big|_0^\infty\\ &\quad -\int_0^\infty \frac{(x+k+1)^2}{x+k}g(x)\hat{W}_{k+1}(x)\frac{f'(x)(x+k+1)-f(x)}{(x+k+1)^2}dx.\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\langle f, B_k g\rangle_k &= -\int_0^\infty \frac{[f'(x)(x+k+1)-f(x)]g(x)}{x+k}\hat{W}_{k+1}(x)dx\\ &= \int_0^\infty \left[-\frac{x+k+1}{x+k}(f'(x)-f(x))-f(x)\right]g(x)\hat{W}_{k+1}(x)dx\\ &= \langle A_k f, g\rangle_{k+1}.\end{aligned}$$

$\square$

Vamos mostrar, agora, que o operador A_k é um operador de redução de grau e o operador B_k é um operador de aumento de grau para $\hat{L}_n^{(k)}(x)$, ou seja,

$$A_k(\hat{L}_n^{(k)}) = \hat{L}_{n-1}^{(k+1)}, \quad n \geq 2, \tag{4.24}$$

$$B_k(\hat{L}_n^{(k+1)}) = n\hat{L}_{n+1}^{(k)}, \quad n \geq 1. \tag{4.25}$$

Mostremos por indução que as relações são válidas.

Podemos ver que o resultado ocorre para $n = 2$ e $n = 1$, respectivamente, pois como $\hat{L}_1^{(k)}(x) = -x-k-1$ e $\hat{L}_2^{(k)}(x) = x^2 - k(k+2)$, de (4.18) e (4.19) temos

$$\begin{aligned}A_k(\hat{L}_2^{(k)}) &= A_k(x^2 - k(k+2))\\ &= -\frac{(x+k+1)[2x-x^2+k(k+2)]}{x+k} - x^2 + k(k+2)\\ &= \frac{-(x+k)^2 - 2(x+k)}{x+k}\\ &= -(x+k) - 2 = \hat{L}_1^{(k+1)}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_k(\hat{L}_1^{(k+1)}) &= B_k(-(x+k)-2)\\
&= \frac{(x(x+k))(-1+x+k+2)}{x+k+1}+k(-(x+k)-2)\\
&= x^2-k(k+2)=\hat{L}_2^{(k)}.
\end{aligned}$$

Suponha, que as relações são válidas para n, ou seja,

$$\begin{aligned}
A_k(\hat{L}_n^{(k)}) &= \hat{L}_{n-1}^{(k+1)},\\
B_k(\hat{L}_n^{(k+1)}) &= n\hat{L}_{n+1}^{(k)}.
\end{aligned}$$

Como T_k é inversível, obtemos

$$\begin{aligned}
\hat{L}_n^{(k)} &= A_k^{-1}(\hat{L}_{n-1}^{(k+1)}),\\
\hat{L}_n^{(k+1)} &= B_k^{-1}(n\hat{L}_{n+1}^{(k)}).
\end{aligned}$$

Lembrando que a equação de auto-valor para os polinômios X_1- Laguerre é da forma

$$T_k(\hat{L}_n^{(k)})=(n-1)\hat{L}_n^{(k)},$$

e T_k pode ser fatorado de duas maneiras (4.21) e (4.22), assim, de (4.21) e da equação de auto-valor acima, temos

$$T_k(\hat{L}_n^{(k)})=B_k(A_k(\hat{L}_n^{(k)}))=(n-1)\hat{L}_n^{(k)}.$$

Como B_k é inversível temos

$$A_k(\hat{L}_n^{(k)})=B_k^{-1}(n-1)\hat{L}_n^{(k)}. \tag{4.26}$$

E de (4.22) e da equação de auto-valor, obtemos

$$(A_{k-1}B_{k-1}-1)(\hat{L}_n^{(k)})=(n-1)\hat{L}_n^{(k)},$$

ou seja,

$$(A_{k-1}(B_{k-1}(\hat{L}_n^{(k)})))=n\hat{L}_n^{(k)}.$$

A_k é inversível, então, podemos escrever

$$B_{k-1}(\hat{L}_n^{(k)})=A_{k-1}^{-1}(n\hat{L}_n^{(k)}). \tag{4.27}$$

Usando (4.26), (4.27) e as hipóteses de indução, obtemos

$$\begin{aligned}
A_k(\hat{L}_{n+1}^{(k)}) &= B_k^{-1}(n\hat{L}_{n+1}^{(k)})=\hat{L}_n^{(k+1)},\\
B_k(\hat{L}_{n+1}^{(k+1)}) &= A_k^{-1}((n+1)\hat{L}_{n+1}^{(k+1)})=(n+1)\hat{L}_{n+2}^{(k)}.
\end{aligned}$$

Portanto, pelo princípio de indução finita, concluímos que (4.24) e (4.25) valem. □

Outra propriedade desses operadores é o fato de que aplicando iterativamente o operador de aumento (4.25) obtêm-se a fórmula tipo-Rodrigues para os polinômios X_1-Laguerre da forma

$$-(n-1)!\hat{L}_n^{(k)}=\frac{(\tilde{B}_1\tilde{B}_2\ldots\tilde{B}_{n-1})[(x+k+n)^2\hat{W}_{k+n-1}]}{(x+k+1)\hat{W}_k}.$$

De fato, iterando (4.25) obtemos

$$\begin{aligned}
B_{k+n-2}\hat{L}_1^{(k+n-1)} &= 1\hat{L}_2^{(k+n-2)} \\
B_{k+n-3}B_{k+n-2}\hat{L}_1^{(k+n-1)} &= B_{k+n-3}1\hat{L}_2^{(k+n-2)} = (2)(1)\hat{L}_3^{(k+n-3)} \\
B_{k+n-4}B_{k+n-3}B_{k+n-2}\hat{L}_1^{(k+n-1)} &= B_{k+n-4}(2)(1)\hat{L}_3^{(k+n-3)} = 3!\hat{L}_4^{(k+n-4)} \\
&\vdots \\
B_{k+n-n}\dots B_{k+n-4}B_{k+n-3}B_{k+n-2}\hat{L}_1^{(k+n-1)} &= (n-1)!\hat{L}_n^{(k)}. \qquad (4.28)
\end{aligned}$$

Usando (4.20) em $B_{k+n-2}(\hat{L}_1^{(k+n-1)})$ na equação (4.28) temos

$$\begin{aligned}
-(n-1)!\hat{L}_n^{(k)} &= B_{k+n-n}\dots(B_{k+n-4}(B_{k+n-3}(B_{k+n-2}(x+k+n)))) \\
-(n-1)!\hat{L}_n^{(k)} &= B_{k+n-n}\dots(B_{k+n-4}(B_{k+n-3}\frac{\frac{d}{dx}\left(\frac{(x+k+n-1)^2}{x+k+n-2}\hat{W}_{k+n-1}(x+k+n)\right)}{(x+k+n-1)\hat{W}_{k+n-2}})).
\end{aligned}$$

Tomando $\tilde{B}_j(y) = \frac{d}{dx}\left[\frac{(x+k+j)^2}{(x+k+j-1)(x+k+j+1)}y\right]$ e reescrevendo (4.28) obtemos

$$-(n-1)!\hat{L}_n^{(k)} = \frac{(\tilde{B}_1\tilde{B}_2\dots\tilde{B}_{n-1})[(x+k+n)^2\hat{W}_{k+n-1}]}{(x+k+1)\hat{W}_k}.$$

□

4.2.2 Relação de Recorrência de Três Termos

Os coeficientes dos termos de maior grau do polinômio, $\hat{L}_n^{(k)}(x)$ de grau n, são

$$\frac{(-1)^n}{(n-1)!}x^n + \frac{(-1)^n(n-2)(n+k)}{(n-1)!}x^{n-1} + \cdots. \qquad (4.29)$$

De fato, mostremos por indução quais são os termos dos coeficientes de maior grau do polinômio de grau n.

Pela condição de normalização (4.16) e do primeiro termo do conjunto (4.13) temos que $\hat{L}_1^{(k)} = -x-(1+k)$. Assim, usando a notação

$$\hat{L}_n^{(k)}(x) = \hat{a}_{n,n}^{(k)}x^n + \hat{a}_{n,n-1}^{(k)}x^{n-1} + \hat{a}_{n,n-2}^{(k)}x^{n-2} + \cdots,$$

temos

$$\hat{a}_{1,1}^{(k)} = \frac{(-1)^1}{0!} = -1,$$

e

$$\hat{a}_{1,0}^{(k)} = \frac{(-1)^1(1-2)(1+k)}{0!} = -(k+1),$$

Logo, o resultado é válido para $n = 1$.

Suponha, que é válido para $n-1$, ou seja,

$$\hat{a}_{n-1,n-1}^{(k+1)} = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-2)!},$$

e

$$\hat{a}_{n-1,n-2}^{(k+1)} = \frac{(-1)^{n-2}(n-3)(n+k)}{(n-2)!}.$$

Usando (4.18) e (4.24), obtemos

$$\frac{-(x+k+1)\left(\hat{L}_n^{(k)}\right)' + \hat{L}_n^{(k)}}{x+k} = \hat{L}_{n-1}^{(k+1)}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}&-(x+k+1)\left[n\,\hat{a}_{n,n}^{(k)}x^{n-1} + (n-1)\hat{a}_{n,n-1}^{(k)}x^{n-2} + \cdots\right]\\ &+\left[\hat{a}_{n,n}^{(k)}x^n + \hat{a}_{n,n-1}^{(k)}x^{n-1} + \cdots\right] = (x+k)\left[\hat{a}_{n-1,n-1}^{(k+1)}x^{n-1} + \hat{a}_{n-1,n-2}^{(k+1)}x^{n-2} + \cdots\right].\end{aligned}$$

E pode ser reorganizado como

$$\begin{aligned}&\left(n\,\hat{a}_{n,n}^{(k)} + \hat{a}_{n,n}^{(k)}\right)x^n + \left(-n(k+1)\hat{a}_{n,n}^{(k)} - (n-1)\hat{a}_{n,n-1}^{(k)} + \hat{a}_{n,n-1}^{(k)}\right)x^{n-1} + \cdots =\\ &\hat{a}_{n-1,n-1}^{(k+1)}x^n + \left(k\hat{a}_{n-1,n-1}^{(k+1)} + \hat{a}_{n-1,n-2}^{(k+1)}\right)x^{n-1} + \cdots .\end{aligned}$$

Comparando os coeficientes dos termos de maior grau em ambos os lados, temos

$$-(n-1)\hat{a}_{n,n}^{(k)} = \hat{a}_{n-1,n-1}^{(k+1)},$$

e

$$-n(k+1)\hat{a}_{n,n}^{(k)} - (n-2)\hat{a}_{n,n-1}^{(k)} = k\hat{a}_{n-1,n-1}^{(k+1)} + \hat{a}_{n-1,n-2}^{(k+1)}.$$

Usando a hipótese de indução, obtemos

$$\hat{a}_{n,n}^{(k)} = \frac{(-1)^n}{(n-1)!},$$

e

$$\begin{aligned}\hat{a}_{n,n-1}^{(k)} &= -\frac{n(k+1)\hat{a}_{n,n}^{(k)} + k\hat{a}_{n-1,n-1}^{(k+1)} + \hat{a}_{n-1,n-2}^{(k+1)}}{(n-2)}\\ &= \frac{-1}{(n-2)}\left(\frac{n(k+1)(-1)^n}{(n-1)!} + k\frac{(-1)^{n-1}}{(n-2)!} + \frac{(-1)^{n-2}(n-3)(n+k)}{(n-1)!}\right)\\ &= \frac{(-1)^{n-1}(n-2)(n+k)}{(n-1)!}.\end{aligned}$$

Portanto, pelo princípio de indução finita, concluímos que

$$\hat{a}_{n,n}^{(k)} = \frac{(-1)^n}{(n-1)!}, \tag{4.30}$$

e

$$\hat{a}_{n,n-1}^{(k)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-2)(n+k)}{(n-1)!},$$

para todo $n \geq 1$. □

Propriedade 4.2. Para os polinômios X_1- Laguerre vale

$$\int_0^\infty (\hat{L}_n^{(k)})^2 \frac{e^{-x}x^k}{(x+k)^2}dx = \frac{k+n}{k+n-1}k_{n-1}, \quad n \geq 1. \tag{4.31}$$

onde $k_{n-1} = \dfrac{\Gamma(n+k)}{(n-1)!}$ é a norma dos polinômios de Laguerre, $L_{n-1}^{(k)}(x)$, definida em (3.15).

Demonstração: Mostremos por indução que a igualdade é válida.

Usando o produto interno (4.14) temos

$$\left\langle \hat{L}_1^{(k)}, \hat{L}_1^{(k)} \right\rangle_k = \frac{k+1}{k}\Gamma(k+1).$$

Logo, para $n = 1$ o resultado ocorre.

Suponha, que a relação é válida para $n-1$, ou seja,

$$\left\langle \hat{L}_{n-1}^{(k)}, \hat{L}_{n-1}^{(k)} \right\rangle_k = \frac{k+n-1}{k+n-2}\frac{\Gamma(n+k-1)}{(n-2)!}.$$

Lembrando que o operador T_k satisfaz

$$T_k(\hat{L}_n^{(k)}) = (n-1)\hat{L}_n^{(k)},$$

e usando a propriedade do produto interno (4.23) temos

$$\begin{aligned}
\left\langle \hat{L}_n^{(k)}, \hat{L}_n^{(k)} \right\rangle_k &= \left\langle \frac{1}{n-1}\hat{L}_n^{(k)}, B_k(A_k(\hat{L}_n^{(k)})) \right\rangle_k \\
&= \left\langle \frac{1}{n-1}\hat{L}_n^{(k)}, B_k(\hat{L}_{n-1}^{(k+1)}) \right\rangle_k \\
&= \left\langle \frac{1}{n-1}A_k(\hat{L}_n^{(k)}), \hat{L}_{n-1}^{(k+1)} \right\rangle_{k+1} \\
&= \left\langle \frac{1}{n-1}\hat{L}_{n-1}^{(k+1)}, \hat{L}_{n-1}^{(k+1)} \right\rangle_{k+1} \\
&= \frac{1}{n-1}\frac{k+n}{k+n-1}\frac{\Gamma(n+k)}{(n-2)!} \\
&= \frac{k+n}{k+n-1}\frac{\Gamma(n+k)}{(n-1)!}.
\end{aligned}$$

Portanto, usando o princípio de indução finita, (4.31) vale, para todo $n \geq 1$. □

A seguinte relação apresenta uma conexão entre os polinômios ortogonais X_1-Laguerre, $\hat{L}_n^{(k)}(x)$, e os polinômios ortogonais de Laguerre, $L_n^{(k)}(x)$, da forma

$$\hat{L}_n^{(k)}(x) = -(x+k+1)L_{n-1}^{(k)}(x) + L_{n-2}^{(k)}(x). \tag{4.32}$$

De fato, comparando os coeficientes dos termos de maior grau de $\hat{L}_n^{(k)}(x)$ dado em (4.30) e de $L_n^{(k)}(x)$ em (3.13), e lembrando que $\{L_j^{(k)}(x)\}_{j=0}^n$ é uma base para $\mathbb{P}_n$, podemos escrever

$$\hat{L}_n^{(k)}(x) = -xL_{n-1}^{(k)}(x) + \sum_{i=0}^{n-1}\alpha_i L_i^{(k)}(x). \tag{4.33}$$

Assim, aplicando o produto interno (3.14) dos polinômios de Laguerre, temos

$$\left\langle \hat{L}_n^{(k)}, L_j^{(k)} \right\rangle = \left\langle -xL_{n-1}^{(k)} + \sum_{i=0}^{n-1}\alpha_i L_i^{(k)}, L_j^{(k)} \right\rangle = \left\langle -xL_{n-1}^{(k)}, L_j^{(k)} \right\rangle + \left\langle \sum_{i=0}^{n-1}\alpha_i L_i^{(k)}, L_j^{(k)} \right\rangle$$

Considerando $j = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ e usando a ortogonalidade dos polinômios de Laguerre, obtemos

$$\left\langle \hat{L}_n^{(k)}, L_j^{(k)} \right\rangle = -\left\langle L_{n-1}^{(k)}, xL_j^{(k)} \right\rangle + \alpha_j \left\langle L_j^{(k)}, L_j^{(k)} \right\rangle. \tag{4.34}$$

Lembrando que a função peso de Laguerre é $w(x) = e^{-x}x^k$ e $w(x) = (x-k)^2\hat{W}_k(x)$, temos

$$\left\langle \hat{L}_n^{(k)}, L_j^{(k)} \right\rangle = \left\langle \hat{L}_n^{(k)}, (x+k)^2 L_j^{(k)} \right\rangle_k = 0, \text{ para } j < n-2.$$

Dessa forma, usando a ortogonalidade dos polinômios de Laguerre e X_1-Laguerre em (4.34) obtemos

$$\alpha_j = 0, \quad \text{para } j < n-2. \tag{4.35}$$

Com $j = n-2$, (4.34) torna-se

$$\left\langle \hat{L}_n^{(k)}, L_{n-2}^{(k)} \right\rangle = -\left\langle L_{n-1}^{(k)}, xL_{n-2}^{(k)} \right\rangle + \alpha_{n-2} \left\langle L_{n-2}^{(k)}, L_{n-2}^{(k)} \right\rangle. \tag{4.36}$$

Vamos calcular

$$\left\langle \hat{L}_n^{(k)}, L_{n-2}^{(k)} \right\rangle = \left\langle \hat{L}_n^{(k)}, (x+k)^2 L_{n-2}^{(k)} \right\rangle_k.$$

Escrevendo

$$(x+k)^2 L_{n-2}^{(k)}(x) = \hat{\alpha}_n \hat{L}_n^{(k)}(x) + \sum_{i=1}^{n-1} \hat{\alpha}_i \hat{L}_i^{(k)}(x),$$

o valor de $\hat{\alpha}_n$ pode ser calculado pela igualdade

$$\frac{(-1)^{n-2}}{(n-2)!}x^n + \cdots = \hat{\alpha}_n \frac{(-1)^n}{(n-1)!}x^n + \cdots .$$

Assim, $\hat{\alpha}_n = (n-1)$.

E, portanto

$$\begin{aligned} \left\langle \hat{L}_n^{(k)}, L_{n-2}^{(k)} \right\rangle &= \left\langle \hat{L}_n^{(k)}, (x+k)^2 L_{n-2}^{(k)} \right\rangle_k \\ &= (n-1) \left\langle \hat{L}_n^{(k)}, \hat{L}_n^{(k)} \right\rangle_k \\ &= (n-1) \frac{k+n}{k+n-1} \frac{\Gamma(n+k)}{(n-1)!}. \end{aligned} \tag{4.37}$$

Calculemos agora, $\left\langle L_{n-1}^{(k)}, xL_{n-2}^{(k)} \right\rangle$. Escrevendo

$$xL_{n-2}^{(k)}(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \beta_i L_i^{(k)}(x) = \beta_{n-1} L_{n-1}^{(k)}(x) + \beta_{n-2} L_{n-2}^{(k)}(x) + \cdots , \tag{4.38}$$

o valor de β_{n-1} pode ser calculado pela igualdade

$$\frac{(-1)^{n-2}}{(n-2)!}x^{n-1} + \cdots = \beta_{n-1} \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}x^{n-1} + \cdots .$$

Assim, $\beta_{n-1} = -(n-1)$.

Portanto, usando (4.38) e a ortogonalidade dos polinômios de Laguerre, temos

$$\left\langle L_{n-1}^{(k)}, xL_{n-2}^{(k)} \right\rangle = \left\langle L_{n-1}^{(k)}, \beta_{n-1} L_{n-1}^{(k)} \right\rangle = (n-1)\frac{\Gamma(n+k)}{(n-2)!}. \tag{4.39}$$

Usando (4.37) e (4.39) e a ortogonalidade dos polinômios de Laguerre em (4.36) obtemos

$$\frac{k+n}{k+n-1}\frac{\Gamma(n+k)}{(n-2)!} = \frac{\Gamma(n+k)}{(n-2)!} + \alpha_{n-2}\frac{\Gamma(n+k-1)}{(n-2)!}.$$

Deste modo,

$$\alpha_{n-2} = \frac{\Gamma(n+k)}{(k+n-1)\Gamma(n+k-1)} = 1. \tag{4.40}$$

Fazendo $j = n-1$ em (4.34), temos

$$\left\langle \hat{L}_n^{(k)}, L_{n-1}^{(k)} \right\rangle = -\left\langle L_{n-1}^{(k)}, xL_{n-1}^{(k)} \right\rangle + \alpha_{n-1}\left\langle L_{n-1}^{(k)}, L_{n-1}^{(k)} \right\rangle. \tag{4.41}$$

Calculemos $\left\langle \hat{L}_n^{(k)}, L_{n-1}^{(k)} \right\rangle$. Escrevendo

$$\hat{L}_n^{(k)}(x) = \sum_{i=0}^{n} \beta_i L_i^{(k)}(x) = \beta_n L_n^{(k)}(x) + \beta_{n-1} L_{n-1}^{(k)}(x) + \cdots,$$

o valor de β_{n-1} pode ser calculado por

$$\begin{aligned} &\frac{(-1)^n}{(n-1)!}x^n + \frac{(-1)^{n-1}(n-2)(n+k)}{(n-1)!}x^{n-1} + \cdots = \\ &\qquad \beta_n\left[\frac{(-1)^n}{(n)!}x^n + \frac{(-1)^{n-1}(n+k)}{(n-1)!}x^{n-1} + \cdots\right] \\ &\qquad +\beta_{n-1}\left[\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}x^{n-1} + \delta_{n-1}x^{n-2} + \cdots\right] + \cdots. \end{aligned}$$

Comparando os coeficientes dos termos de maiores graus em ambos os lados da igualdade, obtemos

$$\beta_n = n,$$

e

$$\frac{(-1)^{n-1}(n-2)(n+k)}{(n-1)!} = n\frac{(-1)^{n-1}(n+k)}{(n-1)!} + \beta_{n-1}\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Assim, $\beta_{n-1} = -2(n+k)$.

Portanto,

$$\left\langle \hat{L}_n^{(k)}, L_{n-1}^{(k)} \right\rangle = -2(n+k)\left\langle L_{n-1}^{(k)}, L_{n-1}^{(k)} \right\rangle. \tag{4.42}$$

Da relação de recorrência de três termos (3.16) dos polinômios de Laguerre, temos

$$\left\langle L_{n-1}^{(k)}, xL_{n-1}^{(k)} \right\rangle = (2n-1+k)\left\langle L_{n-1}^{(k)}, L_{n-1}^{(k)} \right\rangle. \tag{4.43}$$

Substituindo (4.42) e (4.43) em (4.41), obtemos

$$-2(n+k)\left\langle L_{n-1}^{(k)}, L_{n-1}^{(k)} \right\rangle = (2n-1+k)\left\langle L_{n-1}^{(k)}, L_{n-1}^{(k)} \right\rangle + \alpha_{n-1}\left\langle L_{n-1}^{(k)}, L_{n-1}^{(k)} \right\rangle.$$

Assim,
$$\alpha_{n-1} = -(k+1). \tag{4.44}$$

Portanto, substituindo (4.35), (4.40) e (4.44) em (4.33) , a relação entre os polinômios ortogonais X_1-Laguerre, $\hat{L}_n^{(k)}(x)$, e os polinômios ortogonais de Laguerre, $L_n^{(k)}(x)$ é da forma
$$\hat{L}_n^{(k)}(x) = -(x+k+1)L_{n-1}^{(k)}(x) + L_{n-2}^{(k)}(x).$$
$\square$

Os polinômios X_1- Laguerre satisfazem uma relação de recorrência de três termos da forma
$$\begin{aligned}&(n+1)\left[(x+k)^2(n+k)-k\right]\hat{L}_{n+2}^{(k)}(x) + (n+k)\left[(x+k)^2(x-2n-k-1)+2k\right]\hat{L}_{n+1}^{(k)}(x)\\ &+(n+k-1)\left[(x+k)^2(n+k+1)-k\right]\hat{L}_n^{(k)}(x) = 0, \quad n \geq 2,\end{aligned}$$
com $\hat{L}_1^{(k)}(x) = -x-k-1$ e $\hat{L}_2^{(k)}(x) = x^2 - k(k+2)$.

De fato, reescrevendo a relação (4.32) usando a relação de recorrência de três termos (3.16) dos polinômios de Laguerre, temos as seguintes igualdades:
$$\hat{L}_n^{(k)}(x) = nL_n^{(k)}(x) - 2(n+k)L_{n-1}^{(k)}(x) + (n+k)L_{n-2}^{(k)}(x) \tag{4.45}$$
e
$$(x+k)^2L_n^{(k)}(x) = (n+1)\hat{L}_{n+2}^{(k)}(x) - 2(n+k)\hat{L}_{n+1}^{(k)}(x) + (n+k-1)\hat{L}_n^{(k)}(x). \tag{4.46}$$

De fato, usando a relação de recorrência de três termos de Laguerre em $L_{n-2}^{(k)}(x)$ na relação (4.32), temos
$$\begin{aligned}\hat{L}_n^{(k)}(x) &= -(x+k+1)L_{n-1}^{(k)}(x) + L_{n-2}^{(k)}(x)\\ &= -(x+k+1)L_{n-1}^{(k)}(x) + nL_n^{(k)}(x) + (x-2n-k+1)L_{n-1}^{(k)}(x) + (n+k)L_{n-2}^{(k)}(x)\\ &= nL_n^{(k)}(x) - 2(n+k)L_{n-1}^{(k)}(x) + (n+k)L_{n-2}^{(k)}(x).\end{aligned}$$

Para mostrar a igualdade (4.46), note que, a relação (4.32) pode ser reescrita como
$$\begin{aligned}(n+1)\hat{L}_{n+2}^{(k)}(x) &= (n+1)[-(x+k+1)L_{n+1}^{(k)}(x) + L_n^{(k)}](x).\\ -2(n+k)\hat{L}_{n+1}^{(k)}(x) &= -2(n+k)[-(x+k+1)L_n^{(k)}(x) + L_{n-1}^{(k)}](x).\\ (n+k-1)\hat{L}_n^{(k)}(x) &= (n+k-1)[-(x+k+1)L_{n-1}^{(k)}(x) + L_{n-2}^{(k)}](x).\end{aligned}$$
Somando as três equações anteriores, obtemos
$$\begin{aligned}&(n+1)\hat{L}_{n+2}^{(k)}(x) - 2(n+k)\hat{L}_{n+1}^{(k)}(x) + (n+k-1)\hat{L}_n^{(k)}(x) =\\ &-(n+1)(x+k+1)L_{n+1}^{(k)}(x) + [2n(x+k)+3n+2k(x+k+1)+1]L_n^{(k)}(x) +\\ &[-2n-2k-nx-nk-n-kx-k^2+x+1]L_{n-1}^{(k)}(x) + (n+k-1)L_{n-2}^{(k)}(x).\end{aligned}$$
Usando a relação de recorrência de três termos (3.16) dos polinômios de Laguerre em $L_{n+1}^{(k)}(x)$ e $L_{n-2}^{(k)}(x)$, temos
$$\begin{aligned}&(n+1)\hat{L}_{n+2}^{(k)}(x) - 2(n+k)\hat{L}_{n+1}^{(k)}(x) + (n+k-1)\hat{L}_n^{(k)}(x) =\\ &(x+k+1)[(x-2(n+1)-k+1)L_n^{(k)}(x) + (n+k)L_{n-1}^{(k)}](x) +\\ &[2n(x+k)+3n+2k(x+k+1)+1]L_n^{(k)}(x) +\\ &[-2n-2k-nx-nk-n-kx-k^2+x+1]L_{n-1}^{(k)}(x) - nL_n^{(k)}(x) +\\ &-(x-2n-k+1)L_{n-1}^{(k)}(x).\end{aligned}$$

Assim,

$$(n+1)\hat{L}^{(k)}_{n+2}(x) - 2(n+k)\hat{L}^{(k)}_{n+1}(x) + (n+k-1)\hat{L}^{(k)}_{n}(x) = (x+k)^2 L^{(k)}_{n}(x).$$

□

Usando novamente a recorrência de três termos (3.16) dos polinômios de Laguerre e a equação (4.45), obtemos

$$\begin{aligned}&(n+1)(n+k)\hat{L}^{(k)}_{n+2}(x) + (n+k)(x-2n-k-1)\hat{L}^{(k)}_{n+1}(x)\\&+(n+k-1)(n+k+1)\hat{L}^{(k)}_{n}(x) = kL^{(k)}_{n}(x).\end{aligned}$$

Usando a relação acima e (4.46) temos

$$\begin{aligned}&(n+1)\left[(x+k)^2(n+k)-k\right]\hat{L}^{(k)}_{n+2}(x) + (n+k)\left[(x+k)^2(x-2n-k-1)+2k\right]\hat{L}^{(k)}_{n+1}(x)\\&+(n+k-1)\left[(x+k)^2(n+k+1)-k\right]\hat{L}^{(k)}_{n}(x) = 0.\end{aligned}$$

Obtendo assim a relação de recorrência de três termos dos polinômios X_1-Laguerre. □

4.2.3 Zeros

Os zeros dos polinômios excepcionais são classificados em duas classes: zeros regulares, que estão no intervalo de ortogonalidade, e zeros excepcionais, que ficam fora desse intervalo.

Proposição 4.2. *O n-ésimo polinômio X_1-Laguerre, $\hat{L}^{(k)}_{n}(x)$, $k>0$, tem um zero em $(-\infty,-k)$ e $n-1$ zeros em $[0,\infty)$.*

Para a demonstração da proposição vamos precisar do auxílio dos seguintes lemas.

Lema 4.1. *Seja $P \in \varepsilon_n^{-1,-k}$ polinômio com n zeros reais. Se $P(-k)\neq 0$, pelo menos uma desses zeros está em $(-\infty,-k)$.*

Demonstração: Lembremos que $\varepsilon_n^{-1,-k} = \{p \in P | p'(-k) - p(-k) = 0\}$.

Assim, $p'(-k)$ e $p(-k)$ tem o mesmo sinal, isto é, $p'(-k) > 0$ e $p(-k) > 0$ ou $p'(-k) < 0$ e $p(-k) < 0$.

Analisemos o caso em que $p'(-k) > 0$ e $p(-k) > 0$. Considerando o mínimo que o polinômio atinge para x em $(-\infty,-k)$ é possível identificar dois casos:

- Se $-\infty < \min_{x\in(-\infty,-k)} P(x) < 0$ ou $\min_{x\in(-\infty,-k)} P(x) = -\infty$, então existe um $m < -k$ tal que $P(m)P(-k) < 0$. Logo, existe pelo menos um zero no intervalo $(-\infty,-k)$.
- Se $\min_{x\in(-\infty,-k)} P(x) > 0$, então P_n não tem n zeros reais contrariando a hipótese.

No caso em que $p'(-k) < 0$ e $p(-k) < 0$, considerando o máximo que o polinômio atinge para x em $(-\infty,-k)$, também é possível identificar dois casos:

- Se $-\infty < \max_{x\in(-\infty,-k)} P(x) < 0$ ou $\max_{x\in(-\infty,-k)} P(x) = -\infty$, então existe um $m < -k$ tal que $P(m)P(-k) < 0$. Logo, existe pelo menos um zero no intervalo $(-\infty,-k)$.
- Se $\min_{x\in(-\infty,-k)} P(x) > 0$, então P_n não tem n zeros reais contrariando a hipótese.

Assim, pelo menos um zero de $P(x)$ deve estar em $(-\infty, -k)$. Caso contrário $P(x)$ não pode ter n zeros reais. □

Lema 4.2. *$\hat{L}_n^{(k)}(-k) \neq 0$.*

Demonstração: Primeiramente lembremos que $\hat{L}_n^{(k)}(x)$ são definidos recursivamente pelo operador de aumento B_k, (4.20), que tem a forma

$$B_k(y) = (x+k)^2 f(x) \frac{d}{dx}\left(\frac{g(x)}{x+k}y\right),$$

onde $f(x) = \frac{1}{(x+k+1)e^{-x}x^k}$ e $g(x) = e^{-x}x^{k+1}$ e desse modo $f(-k)$ e $g(-k)$ são não nulos. Como $\hat{L}_1^{(k)}(-k) \neq 0$, segue por indução que $\hat{L}_n^{(k)}(-k) \neq 0$, para todo $n > 1$. □

Demonstração da Proposição 4.2*:* Pelos Lemas 4.1 e 4.2 segue que $\hat{L}_n^{(k)}(x)$ tem no máximo $n-1$ zeros em $(-k, \infty)$ em particular $n-1$ zeros em $[0, \infty)$.

Suponhamos por absurdo que $\hat{L}_n^{(k)}(x)$ tem $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_j \quad 1 \leq j \leq n-2$ zeros em $[0, \infty)$ e seja

$$Q_1(x) = (x-\xi_1)(x-\xi_2)\ldots(x-\xi_j).$$

Se $\hat{L}_n^{(k)}(x)$ não tem zeros em $[0, \infty)$ consequentemente $Q_1(x)$ não tem zeros nesse intervalo, então neste caso consideramos $Q_1(x) = 1$.

Por hipótese $Q_1(-k) \neq 0, \quad \forall k \in [0, \infty)$, assim pela contrapositiva do Lema 4.1 temos $Q_1(x) \notin \varepsilon_n^{-1,-k}$.

Mas podemos escolher ξ tal que

$$Q(x) = (x-\xi)Q_1(x).$$

Dessa maneira $Q(x) \in \varepsilon_{n-1}^{-1,-k}$, pois $(-k-\xi)(Q_1'(-k) - Q_1(-k)) + Q_1(-k) = 0$.

Assim, usando novamente o Lema 4.1 temos $\xi \notin [0, \infty)$.

Como ξ é zero de $Q(x)$ e $\xi \notin [0, \infty)$ então, a função

$$Q(x)\hat{L}_n^{(k)}(x) = (x-\xi)(x-\xi_1)^2(x-\xi_2)^2\ldots(x-\xi_j)^2(x-x_{j+1})\ldots(x-x_n)$$

não muda de sinal em $[0, \infty)$.

Consequentemente, $\langle \hat{L}_n^{(k)}, Q\rangle_k \neq 0$. Absurdo, pois $\hat{L}_n^{(k)}$ é ortogonal com relação a polinômios em $\varepsilon_{n-1}^{-1,-k}$.

Portanto, $\hat{L}_n^{(k)}(x)$ tem exatamente $n-1$ zeros em $[0, \infty)$. O zero restante é real e, pelo Lema 4.1, pertence a $(-\infty, -k)$. □

4.3 Polinômios X_1-Jacobi

Sejam α e β números reais tais que $\alpha > -1$, $\beta > -1$, $\alpha \neq \beta$, $\text{sgn}(\alpha) = \text{sgn}\ (\beta)$ e

$$a = \frac{\beta-\alpha}{2}, \quad b = \frac{\beta+\alpha}{\beta-\alpha}, \quad c = b + \frac{1}{a}. \tag{4.47}$$

com $|b| > 1$.

Como vimos, em (4.11) e (4.12), podemos obter os polinômios X_1-Jacobi, $\{\hat{P}_i^{(\alpha,\beta)}(x)\}_{i=1}^{\infty}$, pela ortogonalização de Gram-Schmidt a partir da sequência

$$\{x-c,(x-b)^2,(x-b)^3,\dots,(x-b)^n,\dots\} \tag{4.48}$$

que é obtida de $\varepsilon_n^{a,b}$ e relativo ao produto interno

$$\langle f,g\rangle_{\alpha,\beta} := \int_{-1}^{1} f(x)g(x)d\hat{\mu}_{\alpha,\beta}, \tag{4.49}$$

onde

$$d\hat{\mu}_{\alpha,\beta} = \hat{W}_{\alpha,\beta}(x)dx = \frac{(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}}{\left(x-\dfrac{\beta+\alpha}{\beta-\alpha}\right)^2}dx, \quad x\in(-1,1). \tag{4.50}$$

Pode-se impor a condição de normalização

$$\hat{P}_n^{(\alpha,\beta)}(1) = \frac{\alpha+n}{\beta-\alpha}\binom{\alpha+n-2}{n-1}. \tag{4.51}$$

Proposição 4.3. *Os polinômios X_1-Jacobi formam uma sequência de auto-funções polinomiais ortogonais de um problema de Sturm-Liouville.*

Demonstração: O Teorema 4.1 garante que os polinômios X_1-Jacobi são soluções do seguinte problema de Sturm-Liouville

$$T_{\alpha,\beta}(y) = (x^2-1)y'' + 2a\left(\frac{1-bx}{b-x}\right)((x-c)y'-y), \tag{4.52}$$

com as seguintes condições de contorno

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1^-}(1-x)^{\alpha+1}(y(x)-(x-c)y'(x)) &= 0,\\ \lim_{x\to 1^+}(1-x)^{\beta+1}(y(x)-(x-c)y'(x)) &= 0,\end{aligned}$$

e (4.4) os correspondentes auto-valores são $\lambda_n = (n-1)(n+\alpha+\beta), \quad n=1,2,\dots$

Falta mostrar que a sequência formada por essas auto-funções polinomiais é completa em L^2. Para isso, vamos precisar das seguintes propriedades.

Propriedade 4.3. Seja P o anel de polinômios em $x\in\mathbb{R}$ com coeficientes reais e defina $\tilde{P}\subset P$ o seguinte subespaço de P

$$\tilde{P} = \{p\in P \mid \sum_{j=0}^{r_i} a_{ij}p^{(j)}(x_i) = 0, \quad i=1,2,3,\cdots,k\},$$

onde os k pontos $x_1,x_2,\cdots,x_k$ não pertencem a $[-1,1]$ e $p^{(j)}(x_i)$ denota a j-ésima derivada de p avaliada em x_i. Então $\tilde{P}$ é denso em $C[-1,1]$ com respeito a norma do supremo.

Demonstração: Precisamos mostrar que, dada uma $f\in C[-1,1]$ arbitrária e $\epsilon>0$ qualquer, existe um polinômio $\tilde{p}\in\tilde{P}$ tal que

$$|f(x)-\tilde{p}(x)| < \epsilon, \quad \forall x\in[-1,1].$$

Considere a função

$$g(x) = \frac{f(x)}{\prod_{i=1}^{k}(x - x_i)^{1+r_i}} \in C[-1, 1],$$

onde todos os polos x_i estão fora do intervalo $[-1, 1]$.

Pelo Teorema de Aproximação de Weierstrass [18], existe um polinômio $p \in P$ tal que

$$|g(x) - p(x)| < \frac{\epsilon}{\alpha}, \quad \forall x \in [-1, 1],$$

onde $\alpha = \prod_{i=1}^{k}(1 + |x_i|)^{1+r_i}$.

Note que o polinômio $\tilde{p}(x) = \prod_{i=1}^{k}(x - x_i)^{1+r_i}p(x) \in \tilde{P}$. Assim,

$$\begin{aligned} |f(x) - \tilde{p}(x)| &= \left| \frac{\prod_{i=1}^{k}(x - x_i)^{1+r_i} f(x)}{\prod_{i=1}^{k}(x - x_i)^{1+r_i}} - \prod_{i=1}^{k}(x - x_i)^{1+r_i}p(x) \right| \\ &= \left| \prod_{i=1}^{k}(x - x_i)^{1+r_i} \right| |g(x) - p(x)| < \epsilon \quad \forall x \in [-1, 1], \end{aligned}$$

sendo que $|(x - x_i)^{1+r_i}| < (1 + |x_i|)^{1+r_i}$ para $x \in [-1, 1]$. □

Propriedade 4.4. Se $|b| > 1$, o espaço $\varepsilon^{a,b} = \bigcup_n \varepsilon_n^{a,b}$ é denso em $L^2([-1, 1], \hat{\mu}_{\alpha,\beta})$.

Demonstração: Como $\varepsilon_n^{a,b} := \{p \in P_n | p'(b) + ap(b) = 0\} \subset \tilde{P}$ e $|b| > 1$, a Propriedade 4.3 garante que $\varepsilon^{a,b}$ é denso em $C[-1, 1]$ com respeito a norma do supremo. Portanto, como o espaço das funções contínuas $C(\mathbb{R}^n)$ é denso em L^p, $\varepsilon^{a,b}$ também é denso em $L^2([-1, 1], \hat{\mu}_{\alpha,\beta})$. □

A sequência $\{\hat{P}_i^{(\alpha,\beta)}\}_{i=1}^{\infty}$ é ortogonal por construção, então é suficiente provar que é uma base para $L^2([-1, 1], \hat{\mu}_{\alpha,\beta})$.

Mas por definição $span\{\hat{P}_i^{(\alpha,\beta)}\}_{i=1}^{\infty} = \varepsilon^{a,b}$ então, pela Propriedade 4.4 garantimos o resultado.

Portanto, os polinômios X_1-Jacobi formam uma sequência polinomial de um problema de Sturm-Liouville. □

Também é fácil mostrar que a função peso $\hat{W}_{\alpha,\beta}(x)$, dada em (4.50), satisfaz uma equação do tipo Pearson, da forma

$$((x^2 - 1)\, \hat{W}_{\alpha,\beta}(x))' = 2a \left(\frac{1 - bx}{b - x} \right) (x - c)\hat{W}_{\alpha,\beta}(x).$$

4.3.1 Fórmula Tipo Rodrigues

Como no caso dos polinômios X_1-Laguerre, o operador T dado em (4.52) dos polinômios X_1-Jacobi pode ser fatorado de duas formas diferentes.

Sejam

$$\begin{aligned} A_{\alpha,\beta}(y) &= \frac{x - c}{x - b}(y' + ay) - ay && (4.53) \\ &= \frac{(x - c)^2}{x - b} \frac{d}{dx} \left(\frac{y}{x - c} \right), && (4.54) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} B_{\alpha,\beta}(y) &= (x^2-1)\left(\frac{x-c}{x-b}\right)(y'+ay) - a(x^2-2bx+1)y & (4.55)\\ &= -\left((x-c)\hat{W}_{\alpha,\beta}\right)^{-1}\frac{d}{dx}\left(\frac{(x-c)^2}{x-b}\hat{W}_{\alpha+1,\beta+1}y\right), & (4.56)\end{aligned}$$

onde a, b, c estão relacionados com α, β por (4.47) e a função peso $\hat{W}_{\alpha,\beta}(x)$ é definida em (4.50). Usando os operadores (4.53) e (4.55), obtemos

$$\begin{aligned} T_{\alpha,\beta} &= B_{\alpha,\beta}A_{\alpha,\beta} & (4.57)\\ &= A_{\alpha-1,\beta-1}B_{\alpha-1,\beta-1} - \alpha - \beta. & (4.58)\end{aligned}$$

Estas relações podem ser mostradas analogamente ao que foi feito para os operadores dos polinômios X_1-Laguerre.

Outra propriedade desses operadores é a relação do produto interno definido em (4.49) e (4.50), dada por

$$\langle A_{\alpha,\beta}f, g\rangle_{\alpha+1,\beta+1} = \langle f, B_{\alpha,\beta}g\rangle_{\alpha,\beta}. \tag{4.59}$$

De fato, usando (4.53) vemos que

$$\begin{aligned} \langle A_{\alpha,\beta}f, g\rangle_{\alpha+1,\beta+1} &= \int_{-1}^{1}\left[\frac{x-c}{x-b}(f'(x)+af(x)) - af(x)\right]g(x)\hat{W}_{\alpha+1,\beta+1}(x)dx\\ &= \int_{-1}^{1}\frac{x-c}{x-b}f'(x)g(x)\hat{W}_{\alpha+1,\beta+1}(x)dx\\ &\quad + \int_{-1}^{1}\left[\frac{af(x)[(x-c)-(x-b)]}{x-b}\right]g(x)\hat{W}_{\alpha+1,\beta+1}(x)dx\\ &= \int_{-1}^{1}\frac{x-c}{x-b}f'(x)g(x)\hat{W}_{\alpha+1,\beta+1}(x)dx\\ &\quad + \int_{-1}^{1}\frac{a(b-c)f(x)g(x)}{x-b}\hat{W}_{\alpha+1,\beta+1}(x)dx.\end{aligned}$$

Como $a(b-c) = -1$,

$$\langle A_{\alpha,\beta}f, g\rangle_{\alpha+1,\beta+1} = \int_{-1}^{1}\frac{(x-c)f'(x)g(x) - f(x)g(x)}{x-b}\hat{W}_{\alpha+1,\beta+1}(x)dx. \tag{4.60}$$

Usando (4.56), sabemos que

$$\begin{aligned} \langle f, B_{\alpha,\beta}g\rangle_{\alpha,\beta} &= \int_{-1}^{1} f(x)B_{\alpha,\beta}(g(x))\hat{W}_{\alpha,\beta}(x)dx\\ &= \int_{-1}^{1}\frac{f(x)\left[-\frac{d}{dx}\left(\frac{(x-c)^2}{x-b}\hat{W}_{\alpha+1,\beta+1}g(x)\right)\right]}{(x-c)\hat{W}_{\alpha,\beta}}\hat{W}_{\alpha,\beta}(x)dx\\ &= -\int_{-1}^{1}\frac{f(x)}{x-c}\frac{d}{dx}\left(\frac{(x-c)^2g(x)}{x-b}\hat{W}_{\alpha+1,\beta+1}(x)\right)dx.\end{aligned}$$

Integrando por partes, temos

$$\begin{aligned}\langle f, B_{\alpha,\beta} g\rangle_{\alpha,\beta} &= -\frac{(x-c)f(x)g(x)}{x-b}\hat{W}_{\alpha+1,\beta+1}(x)\Big|_{-1}^{1} \\ &+ \int_{-1}^{1} \frac{(x-c)f'(x)g(x) - f(x)g(x)}{x-b}\hat{W}_{\alpha+1,\beta+1}(x)dx.\end{aligned}$$

Como o primeiro termo da expressão acima é nulo, obtemos

$$\langle f, B_{\alpha,\beta} g\rangle_{\alpha,\beta} = \int_{-1}^{1} \frac{(x-c)f'(x)g(x) - f(x)g(x)}{x-b}\hat{W}_{\alpha+1,\beta+1}(x)dx. \tag{4.61}$$

Portanto, de (4.60) e (4.61)

$$\langle A_{\alpha,\beta} f, g\rangle_{\alpha+1,\beta+1} = \langle f, B_{\alpha,\beta} g\rangle_{\alpha,\beta}.$$

□

Além disso, o operador $A_{\alpha,\beta}$ é um operador de redução de grau e o operador $B_{\alpha,\beta}$ é um operador de aumento de grau para $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$, ou seja,

$$A_{\alpha,\beta}(\hat{P}_n^{(\alpha,\beta)}) = \frac{1}{2}(n+\alpha+\beta)\hat{P}_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}, \quad n \geq 2 \tag{4.62}$$

$$B_{\alpha,\beta}(\hat{P}_n^{(\alpha+1,\beta+1)}) = 2n\hat{P}_{n+1}^{(\alpha,\beta)}, \quad n \geq 1. \tag{4.63}$$

De fato, mostremos por indução que as relações acima são válidas.

Podemos ver que o resultado ocorre para $n = 2$ e $n = 1$ respectivamente, pois como $\hat{P}_1^{(\alpha,\beta)}(x) = -\frac{1}{2}x - \frac{\alpha+\beta+2}{2(\alpha-\beta)}$ e $\hat{P}_2^{(\alpha,\beta)}(x) = -\frac{\alpha+\beta+2}{4}x^2 - \frac{\alpha^2+\beta^2+2(\alpha+\beta)}{2(\alpha-\beta)}x - \frac{\alpha+\beta+2}{4}$, então

$$\begin{aligned}A_{\alpha,\beta}(\hat{P}_2^{(\alpha,\beta)}) &= A_{\alpha,\beta}\left(-\frac{(\alpha+\beta+2)x^2}{4} - \frac{\alpha^2+\beta^2+2(\alpha+\beta)x}{2(\alpha-\beta)} - \frac{\alpha+\beta+2}{4}\right) \\ &= \frac{(x - \frac{\alpha+\beta+2}{\beta-\alpha})}{x - \frac{\beta+\alpha}{\beta-\alpha}}\left(-\frac{(\alpha+\beta+2)x}{2} - \frac{\alpha^2+\beta^2+2(\alpha+\beta)}{2(\alpha-\beta)}\right) \\ &+ \frac{1}{x - \frac{\beta+\alpha}{\beta-\alpha}}\left[\frac{(\alpha+\beta+2)x^2}{4} + \frac{(\alpha^2+\beta^2+2(\alpha+\beta))x}{2(\alpha-\beta)} + \frac{\alpha+\beta+2}{4}\right] \\ &= \frac{1}{x - \frac{\beta+\alpha}{\beta-\alpha}}\left[-\frac{(\alpha+\beta+2)x^2}{4} + \frac{(\alpha+\beta+2)^2 x}{2(\beta-\alpha)} - \frac{(\alpha+\beta)[(\alpha+\beta)^2+6(\alpha+\beta)+8]}{4(\alpha-\beta)^2}\right] \\ &= -\frac{(\alpha+\beta+2)x}{4} - \frac{(\alpha+\beta+2)(\alpha+\beta+4)}{4(\alpha-\beta)} \\ &= \frac{1}{2}(2+\alpha+\beta)\hat{P}_1^{(\alpha+1,\beta+1)},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{\alpha,\beta}(\hat{P}_1^{(\alpha+1,\beta+1)}) &= B_{\alpha,\beta}(-\frac{x}{2} - \frac{\alpha+\beta+2}{2(\alpha-\beta)}) \\
&= \frac{1}{(x - \frac{\alpha+\beta+2}{\beta-\alpha})}\left[-\frac{(x^2-1)(x-b)}{2} + 2a(bx-1)(x-b)\left[-\frac{x}{2} - \frac{\alpha+\beta+2}{2(\alpha-\beta)}\right]\right] \\
&\quad -\frac{(x^2-2b\,x+1)}{(x-\frac{\alpha+\beta+2}{\beta-\alpha})}\left[-\frac{x}{2} - \frac{\alpha+\beta+2}{2(\alpha-\beta)}\right] \\
&= \frac{1}{(x - \frac{\alpha+\beta+2}{\beta-\alpha})}\left[-\frac{(\alpha+\beta+2)x^3}{2} - \frac{[(\alpha+\beta)^2 - 8(\alpha+\beta) - 4 - 2\alpha^2 - 2\beta^2]x^2}{2(\beta-\alpha)}\right] \\
&\quad \frac{1}{(x - \frac{\alpha+\beta+2}{\beta-\alpha})}\left[-\frac{(3\alpha^2 - 3\beta^2 - 4(\alpha+\beta) + 2\alpha\beta)x}{2(\alpha-\beta)^2} + \frac{(\alpha+\beta+2)^2}{2(\beta-\alpha)}\right] \\
&= -\frac{(\alpha+\beta+2)x^2}{2} - \frac{(\alpha^2+\beta^2+2(\alpha+\beta))x}{\alpha-\beta} - \frac{(\alpha+\beta+2)}{2} \\
&= 2\hat{P}_2^{(\alpha,\beta)}.
\end{aligned}$$

Suponha que as relações são válidas para n, ou seja,

$$A_{\alpha,\beta}(\hat{P}_n^{(\alpha,\beta)}) = \frac{1}{2}(n+\alpha+\beta)\hat{P}_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}, \tag{4.64}$$

$$B_{\alpha,\beta}(\hat{P}_n^{(\alpha+1,\beta+1)}) = 2n\hat{P}_{n+1}^{(\alpha,\beta)}. \tag{4.65}$$

Lembrando que a equação de auto-valor para os polinômios X_1-Jacobi é da forma

$$T_{\alpha,\beta}(\hat{P}_n^{(\alpha,\beta)}) = (n-1)(\alpha+\beta+n)\hat{P}_n^{(\alpha,\beta)},$$

e $T_{\alpha,\beta}$ é inversível e pode ser fatorado de duas maneiras (4.57) e (4.58). Assim, de (4.57) e da equação de auto-valor acima, temos

$$B_{\alpha,\beta}(A_{\alpha,\beta}(\hat{P}_n^{(\alpha,\beta)})) = (n-1)(\alpha+\beta+n)\hat{P}_n^{(\alpha,\beta)}.$$

Como $B_{\alpha,\beta}$ é inversível, temos

$$A_{\alpha,\beta}(\hat{P}_n^{(\alpha,\beta)}) = B^{-1}_{\alpha,\beta}((n-1)(\alpha+\beta+n)\hat{P}_n^{(\alpha,\beta)}). \tag{4.66}$$

E, de (4.58) e da equação de auto-valor, obtemos

$$(A_{\alpha-1,\beta-1}B_{\alpha-1,\beta-1} - \alpha - \beta)\hat{P}_n^{(\alpha,\beta)} = (n-1)(\alpha+\beta+n)\hat{P}_n^{(\alpha,\beta)},$$

ou seja,

$$A_{\alpha-1,\beta-1}(B_{\alpha-1,\beta-1}(\hat{P}_n^{(\alpha,\beta)})) = n(\alpha+\beta+n-1)\hat{P}_n^{(\alpha,\beta)}.$$

$A_{\alpha,\beta}$ é inversível, então, podemos escrever

$$B_{\alpha-1,\beta-1}(\hat{P}_n^{(\alpha,\beta)}) = A^{-1}_{\alpha-1,\beta-1}(n(\alpha+\beta+n-1)\hat{P}_n^{(\alpha,\beta)}). \tag{4.67}$$

Usando (4.66), (4.67) e as hipóteses de indução, temos

$$\begin{aligned}
A_{\alpha,\beta}(\hat{P}_{n+1}^{(\alpha,\beta)}) &= B^{-1}_{\alpha,\beta}(n(\alpha+\beta+n+1)\hat{P}_{n+1}^{(\alpha,\beta)}) = \frac{1}{2}(n+1+\alpha+\beta)\hat{P}_n^{(\alpha+1,\beta+1)}. \\
B_{\alpha,\beta}(\hat{P}_{n+1}^{(\alpha+1,\beta+1)}) &= A^{-1}_{\alpha,\beta}((n+1)(\alpha+\beta+2+n)\hat{P}_{n+1}^{(\alpha+1,\beta+1)}) = 2(n+1)\hat{P}_{n+2}^{(\alpha,\beta)}.
\end{aligned}$$

Portanto, pelo princípio de indução finita, concluímos que (4.62) e (4.63) vale para todo $n \geq 2$ e $n \geq 1$, respectivamente. □

Usando estes operadores é possível obter uma fórmula tipo-Rodrigues para os polinômios X_1- Jacobi, da forma

$$(-2)^n (n-1)! \hat{P}_n^{(\alpha,\beta)} = \frac{(\tilde{B}_1 \tilde{B}_2 \ldots \tilde{B}_{n-1})[(x-b_n)^2 \hat{W}_{n-1}]}{(x-b_1)\hat{W}_0},$$

onde $b_j = b + j/a$.

De fato, iterando o operador de aumento (4.63) e denotando $B_n = B_{\alpha+n,\beta+n}$, obtemos

$$\begin{aligned} B_{n-2}\hat{P}_1^{(\alpha+n-1,\beta+n-1)} &= 2(1)!\hat{P}_2^{(\alpha+n-2,\beta+n-2)} \\ B_{n-3}B_{n-2}\hat{P}_1^{(\alpha+n-1,\beta+n-1)} &= 2^2(2)!\hat{P}_3^{(\alpha+n-3,\beta+n-3)} \\ B_{n-4}B_{n-3}B_{n-2}\hat{P}_1^{(\alpha+n-1,\beta+n-1)} &= 2^3(3)!\hat{P}_4^{(\alpha+n-4,\beta+n-4)} \\ &\vdots \\ B_{n-n}\ldots B_{n-2}\hat{P}_1^{(\alpha+n-1,\beta+n-1)} &= 2^{n-1}(n-1)!\hat{P}_n^{(\alpha,\beta)}. \end{aligned} \tag{4.68}$$

Usando (4.56) em $B_{n-2}(\hat{P}_1^{(\alpha+n-1,\beta+n-1)})$, temos

$$\begin{aligned} (-2)^n(n-1)!\hat{P}_n^{(\alpha,\beta)} &= B_{n-n}\ldots(B_{n-2}(x-b_n)) \\ (-2)^n(n-1)!\hat{P}_n^{(\alpha,\beta)} &= B_{n-n}\ldots\left(B_{n-3}\left(\frac{\frac{d}{dx}\left(\frac{(x-\frac{\beta+\alpha+2n-2}{\beta-\alpha})^2}{x-\frac{\beta+\alpha+2n-4}{\beta-\alpha}}\hat{W}_{\alpha+n-1,\beta+n-1}(x-b_n)\right)}{(x-\frac{\beta+\alpha+2n-2}{\beta-\alpha})\hat{W}_{\alpha+n-2,\beta+n-2}}\right)\right) \end{aligned}$$

Tomando

$$\tilde{B}_j(y) = \frac{d}{dx}\left[\frac{(x-b_j)^2}{(x-b_{j-1})(x-b_{j+1})}y\right],$$

e reescrevendo (4.68) obtemos

$$(-2)^n (n-1)! \hat{P}_n^{(\alpha,\beta)} = \frac{(\tilde{B}_1 \tilde{B}_2 \ldots \tilde{B}_{n-1})[(x-b_n)^2 \hat{W}_{n-1}]}{(x-b_1)\hat{W}_0}.$$

□

4.3.2 Relação de Recorrência de Três Termos

Denotando os polinômios X_1-Jacobi por $\hat{P}_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \sum_{j=0}^{n} \hat{a}_{n,j}^{(\alpha,\beta)} x^j$, os coeficientes dos termos de maior grau são

$$\hat{a}_{n,n}^{(\alpha,\beta)} = -\frac{\Gamma(\alpha+\beta+2n-1)}{2^n(n-1)!\Gamma(\alpha+\beta+n)} \tag{4.69}$$

e

$$\hat{a}_{n,n-1}^{(\alpha,\beta)} = \left[\frac{-n(\alpha-\beta)}{(\alpha+\beta+2n)} + \frac{(\alpha^2-\beta^2)(\beta-\alpha)+(\beta+\alpha)(\alpha+\beta+2n)^2}{(\alpha+\beta+2n)(\alpha+\beta+2n-2)(\beta-\alpha)}\right]\frac{\Gamma(\alpha+\beta+2n-1)}{2^n(n-1)!\Gamma(\alpha+\beta+n)}. \tag{4.70}$$

De fato, mostremos por indução matemática quais são os termos de maiores graus dos polinômios X_1-Jacobi.

Pela condição de normalização (4.51) e do primeiro termo da sequência (4.48) temos que $\hat{P}_1^{(\alpha,\beta)}(x) = -\frac{1}{2}x - \frac{2+\alpha+\beta}{2(\alpha-\beta)}$. Assim,

$$\hat{a}_{1,1}^{(\alpha,\beta)} = -\frac{1}{2} = -\frac{\Gamma(\alpha+\beta+1)}{2\Gamma(\alpha+\beta+1)}$$

e

$$\hat{a}_{1,0}^{(\alpha,\beta)} = -\frac{2+\alpha+\beta}{2(\alpha-\beta)} = -\frac{(\alpha-\beta)}{2(\alpha+\beta+2)} + \frac{[(\alpha-\beta)^2-(\alpha+\beta+2)^2]}{2(\alpha+\beta+2)(\alpha-\beta)}\frac{\Gamma(\alpha+\beta+1)}{2\Gamma(\alpha+\beta+1)}.$$

Logo, o resultado é válido para $n=1$.

Suponhamos, que para $n-1$, é válido

$$\hat{a}_{n-1,n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)} = -\frac{\Gamma(\alpha+\beta+2n-1)}{2^{n-1}(n-2)!\Gamma(\alpha+\beta+n+1)} \tag{4.71}$$

e

$$\begin{aligned}\hat{a}_{n-1,n-2}^{(\alpha+1,\beta+1)} &= \left[\frac{-(n-1)(\alpha-\beta)}{(\alpha+\beta+2n)} + \frac{((\alpha+1)^2-(\beta+1)^2)(\beta-\alpha)+(\beta+\alpha+2)(\alpha+\beta+2n)^2}{(\alpha+\beta+2n)(\alpha+\beta+2n-2)(\beta-\alpha)}\right] \\ &\quad \times \frac{\Gamma(\alpha+\beta+2n-1)}{2^{n-1}(n-2)!\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}.\end{aligned} \tag{4.72}$$

Usando o operador de redução $A_{\alpha,\beta}$ dado em (4.53) e (4.62), temos

$$\frac{(x-c)(\hat{P}_n^{(\alpha,\beta)}(x))' - \hat{P}_n^{(\alpha,\beta)}(x)}{x-b} = \frac{1}{2}(\alpha+\beta+n)\hat{P}_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(x).$$

Logo, substituindo $\hat{P}_n^{(\alpha,\beta)}(x)$, $(\hat{P}_n^{(\alpha,\beta)}(x))'$ e $\hat{P}_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x)$, obtemos

$$\begin{aligned}&(x-c)\left[n\,\hat{a}_{n,n}^{(\alpha,\beta)}x^{n-1} + (n-1)\hat{a}_{n,n-1}^{(\alpha,\beta)}x^{n-2} + \cdots\right] - \left[\hat{a}_{n,n}^{(\alpha,\beta)}x^n + \hat{a}_{n,n-1}^{(\alpha,\beta)}x^{n-1} + \cdots\right] \\ = &\ \frac{(x-b)(\alpha+\beta+n)}{2}\left[\hat{a}_{n-1,n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}x^{n-1} + \hat{a}_{n-1,n-2}^{(\alpha+1,\beta+1)}x^{n-2} + \cdots\right],\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}&(n-1)\hat{a}_{n,n}^{(\alpha,\beta)}x^n + \left[(n-1)\hat{a}_{n,n-1}^{(\alpha,\beta)} - c\,n\,\hat{a}_n^{(\alpha,\beta)} - \hat{a}_{n,n-1}^{(\alpha,\beta)}\right]x^{n-1} \\ = &\ \frac{\alpha+\beta+n}{2}\left[\hat{a}_{n-1,n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}x^n + (\hat{a}_{n-1,n-2}^{(\alpha+1,\beta+1)} - b\,\hat{a}_{n-1,n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)})x^{n-1}\right].\end{aligned}$$

Comparando os coeficientes em ambos os lados, obtemos

$$(n-1)\hat{a}_{n,n}^{(\alpha,\beta)} = \frac{\alpha+\beta+n}{2}\hat{a}_{n-1,n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}$$

e

$$(n-2)\hat{a}_{n,n-1}^{(\alpha,\beta)} = c\,n\,\hat{a}_{n,n}^{(\alpha,\beta)} + \frac{\alpha+\beta+n}{2}\left[\hat{a}_{n-1,n-2}^{(\alpha+1,\beta+1)} - b\,\hat{a}_{n-1,n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}\right].$$

Usando as hipóteses de indução, (4.71) e (4.72), obtemos (4.69) e (4.70). □

Propriedade 4.5. Para os polinômios X_1-Jacobi vale

$$\int_{-1}^{1}(\hat{P}_n^{(\alpha,\beta)})^2\hat{w}_{\alpha,\beta}(x)dx = \frac{(\alpha+n)(\beta+n)}{4(\alpha+n-1)(\beta+n-1)}C_{n-1}, \tag{4.73}$$

onde $C_{n-1} = \dfrac{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(\alpha+n)\Gamma(\beta+n)}{(\alpha+\beta+2n-1)\Gamma(n)\Gamma(\alpha+\beta+n)}$ é a norma do polinômio de Jacobi dada em (3.7).

Demonstração: Mostremos por indução que a igualdade (4.73) é válida.

Usando o produto interno (4.49), obtemos

$$\left\langle \hat{P}_1^{(\alpha,\beta)}, \hat{P}_1^{(\alpha,\beta)} \right\rangle_{\alpha,\beta} = \frac{2^{\alpha+\beta+1}(\alpha+1)(\beta+1)\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{4\alpha\beta(\alpha+\beta+1)\Gamma(\alpha+\beta+1)}.$$

Logo, para $n=1$ o resultado vale.

Suponha, que a relação é válida para $n-1$, ou seja,

$$\left\langle \hat{P}_{n-1}^{(\alpha,\beta)}, \hat{P}_{n-1}^{(\alpha,\beta)} \right\rangle_{\alpha,\beta} = \frac{2^{\alpha+\beta+1}(\alpha+n-1)(\beta+n-1)\Gamma(\alpha+n-1)\Gamma(\beta+n-1)}{4(\alpha+n-2)(\beta+n-2)(\alpha+\beta+2n-3)\Gamma(n-1)\Gamma(\alpha+\beta+n-1)}$$

Lembrando que o operador $T_{\alpha,\beta}$ satisfaz

$$T_k(\hat{P}_n^{(\alpha,\beta)}) = (n-1)(\alpha+\beta+n)\hat{P}_n^{(\alpha,\beta)},$$

e usando a propriedade do produto interno (4.59), a propriedade (4.62) e a hipótese de indução, temos

$$\begin{aligned}
\left\langle \hat{P}_n^{(\alpha,\beta)}, \hat{P}_n^{(\alpha,\beta)} \right\rangle_{\alpha,\beta} &= \left\langle \frac{1}{(n-1)(\alpha+\beta+n)}\hat{P}_n^{(\alpha,\beta)}, B_{\alpha,\beta}(A_{\alpha,\beta}(\hat{P}_n^{(\alpha,\beta)})) \right\rangle_{\alpha,\beta} \\
&= \left\langle \frac{1}{(n-1)(\alpha+\beta+n)}\hat{P}_n^{(\alpha,\beta)}, B_{\alpha,\beta}(\frac{\alpha+\beta+n}{2}\hat{P}_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}) \right\rangle_{\alpha,\beta} \\
&= \left\langle \frac{1}{2(n-1)}A_{\alpha,\beta}(\hat{P}_n^{(\alpha,\beta)}), \hat{P}_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)} \right\rangle_{\alpha+1,\beta+1} \\
&= \left\langle \frac{\alpha+\beta+n}{4(n-1)}\hat{P}_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}, \hat{P}_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)} \right\rangle_{\alpha+1,\beta+1} \\
&= \frac{2^{\alpha+\beta+1}(\alpha+n)(\beta+n)\Gamma(\alpha+n)\Gamma(\beta+n)}{4(\alpha+n-1)(\beta+n-1)(\alpha+\beta+2n-1)\Gamma(n)\Gamma(\alpha+\beta+n)}
\end{aligned}$$

Portanto, usando o princípio de indução finita, (4.31) vale, para todo $n>0$. □

Os polinômios X_1-Jacobi apresenta uma conexão com os polinômios de Jacobi da seguinte forma

$$\hat{P}_n^{(\alpha,\beta)}(x) = -\frac{1}{2}(x-b)\hat{P}_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x) + \frac{b\,\hat{P}_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x) - \hat{P}_{n-2}^{(\alpha,\beta)}(x)}{\alpha+\beta+2n-2}. \tag{4.74}$$

Comparando os coeficientes de maior grau dos polinômios X_1-Jacobi (4.69) com os dos polinômios de Jacobi (3.6), podemos escrever

$$\begin{aligned}\hat{P}_n^{(\alpha,\beta)}(x) &= -\frac{1}{2}xP_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x) + q_{n-1}(x)\\ &= \frac{1}{2}xP_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k P_k^{(\alpha,\beta)}(x).\end{aligned}$$

Assim, usando o produto interno do polinômio de Jacobi, temos

$$\langle \hat{P}_n^{(\alpha,\beta)}, P_j^{(\alpha,\beta)}\rangle = \left\langle -\frac{1}{2}xP_{n-1}^{(\alpha,\beta)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k P_k^{(\alpha,\beta)}, P_j^{(\alpha,\beta)}\right\rangle.$$

Considerando $j = 0, 1, \ldots, n-1$, e usando a ortogonalidade dos polinômios de Jacobi obtemos

$$\langle \hat{P}_n^{(\alpha,\beta)}, P_j^{(\alpha,\beta)}\rangle = -\frac{1}{2}\left\langle xP_{n-1}^{(\alpha,\beta)}, P_j^{(\alpha,\beta)}\right\rangle + a_j\left\langle P_j^{(\alpha,\beta)}, P_j^{(\alpha,\beta)}\right\rangle. \tag{4.75}$$

Note que

$$\langle \hat{P}_n^{(\alpha,\beta)}, P_j^{(\alpha,\beta)}\rangle = \langle \hat{P}_n^{(\alpha,\beta)}, (x-b)^2 P_j^{(\alpha,\beta)}\rangle_{\alpha,\beta}.$$

Dessa forma, usando as ortogonalidades na equação (4.75) os coeficientes $a_j = 0$ para $j < n-2$. Para $j = n-2$ em (4.75), temos

$$\langle \hat{P}_n^{(\alpha,\beta)}, P_{n-2}^{(\alpha,\beta)}\rangle = -\frac{1}{2}\left\langle P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}, xP_{n-2}^{(\alpha,\beta)}\right\rangle + a_{n-2}\left\langle P_{n-2}^{(\alpha,\beta)}, P_{n-2}^{(\alpha,\beta)}\right\rangle. \tag{4.76}$$

Vamos calcular

$$\langle \hat{P}_n^{(\alpha,\beta)}, P_{n-2}^{(\alpha,\beta)}\rangle = \langle \hat{P}_n^{(\alpha,\beta)}, (x-b)^2 P_{n-2}^{(\alpha,\beta)}\rangle_{\alpha,\beta}.$$

Escrevendo

$$(x-b)^2 P_{n-2}^{(\alpha,\beta)}(x) = \hat{a}_n \hat{P}_n^{(\alpha,\beta)}(x) + \sum_{k=1}^{n-1} \hat{a}_k \hat{P}_k^{(\alpha,\beta)}(x),$$

o valor de $\hat{a}_n$ pode ser calculado pela seguinte igualdade

$$x^2 \frac{\Gamma(\alpha+\beta+2(n-2)+1)}{2^{n-2}(n-2)!\Gamma(\alpha+\beta+(n-2)+1)} x^{n-2} + \cdots = \hat{a}_n \frac{\Gamma(\alpha+\beta+2n-1)}{2^n(n-1)!\Gamma(\alpha+\beta+n)} x^n.$$

Assim, $\hat{a}_n = -\frac{4\Gamma(\alpha+\beta+2n-3)\Gamma(\alpha+\beta+n)(n-1)}{\Gamma(\alpha+\beta+n-1)\Gamma(\alpha+\beta+2n-1)}$.

E, portanto

$$\begin{aligned}\langle \hat{P}_n^{(\alpha,\beta)}, P_{n-2}^{(\alpha,\beta)}\rangle &= \langle \hat{P}_n^{(\alpha,\beta)}, (x-b)^2 P_{n-2}^{(\alpha,\beta)}\rangle_{\alpha,\beta}\\ &= -\frac{4\Gamma(\alpha+\beta+2n-3)\Gamma(\alpha+\beta+n)(n-1)}{\Gamma(\alpha+\beta+n-1)\Gamma(\alpha+\beta+2n-1)}\langle \hat{P}_n^{(\alpha,\beta)}, \hat{P}_n^{(\alpha,\beta)}\rangle_{\alpha,\beta}\\ &= -\frac{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(\alpha+\beta+2n-3)\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(\beta+n+1)(n-1)}{\Gamma(\alpha+\beta+n-1)\Gamma(\alpha+\beta+2n)\Gamma(n)(\alpha+n-1)(\beta+n-1)}.\end{aligned} \tag{4.77}$$

Calculemos agora, $\left\langle P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}, xP_{n-2}^{(\alpha,\beta)}\right\rangle$. Escrevendo

$$xP_{n-2}^{(\alpha,\beta)}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \beta_k P_n^{(\alpha,\beta)}(x), \tag{4.78}$$

o valor de β_{n-1} pode ser calculado pela seguinte igualdade

$$\frac{\Gamma(\alpha+\beta+2(n-2)+1)}{2^{n-2}(n-2)!\Gamma(\alpha+\beta+(n-2)+1)}x^{n-1}+\cdots=\beta_{n-1}\frac{\Gamma(\alpha+\beta+2(n-1)+1)}{2^{n-1}(n-1)!\Gamma(\alpha+\beta+(n-1)+1)}x^{n-1}.$$

Assim,

$$\beta_{n-1}=\frac{2(n-1)(\alpha+\beta+n-1)}{(\alpha+\beta+2n-3)(\alpha+\beta+2n-2)}.$$

Portanto, usando (4.78) e a ortogonalidade dos polinômios de Jacobi, temos

$$\left\langle P_{n-1}^{(\alpha,\beta)},xP_{n-2}^{(\alpha,\beta)}\right\rangle=\frac{2^{\alpha+\beta+2}(n-1)(\alpha+\beta+n-1)\Gamma(\alpha+n)\Gamma(\beta+n)}{(\alpha+\beta+2n-3)(\alpha+\beta+2n-2)(\alpha+\beta+2n-1)\Gamma(n)\Gamma(\alpha+\beta+n)}. \tag{4.79}$$

Usando (4.77), (4.79) e a ortogonalidade dos polinômios de Jacobi em (4.76) obtemos

$$a_{n-2}=-\frac{1}{\alpha+\beta+2n-2}.$$

Fazendo $j=n-1$ em (4.75), temos

$$\langle\hat{P}_n^{(\alpha,\beta)},P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}\rangle=-\frac{1}{2}\left\langle xP_{n-1}^{(\alpha,\beta)},P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}\right\rangle+a_{n-1}\left\langle P_{n-1}^{(\alpha,\beta)},P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}\right\rangle. \tag{4.80}$$

Calculemos $\langle\hat{P}_n^{(\alpha,\beta)},P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}\rangle$. Escrevendo

$$\hat{P}_n^{(\alpha,\beta)}(x)=\sum_{k=0}^{n}\beta_kP_k^{(\alpha,\beta)}(x),$$

os valor de β_n e β_{n-1} podem ser calculados pela igualdade

$$\begin{aligned}
&-\frac{\Gamma(\alpha+\beta+2n-1)}{2^n(n-1)!\Gamma(\alpha+\beta+n)}x^n\\
&-\frac{n(\alpha+\beta+n)(\alpha-\beta)\Gamma(\alpha+\beta+2n)}{2^n(n-1)!(\alpha+\beta+2n)(\alpha+\beta+2n-1)\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}x^{n-1}\\
&+\frac{(\alpha^2-\beta^2)(\beta-\alpha)+(\beta+\alpha)(\alpha+\beta+2n)^2}{(\alpha+\beta+2n)(\alpha+\beta+2n-2)(\beta-\alpha)}x^{n-1}+\cdots\\
=\;&\beta_n\left[\frac{\Gamma(\alpha+\beta+2n+1)}{2^nn!\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}x^n+\frac{(\alpha-\beta)\Gamma(\alpha+\beta+2n)}{2^n(n-1)!\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}x^{n-1}+\cdots\right]\\
&+\beta_{n-1}\left[\frac{\Gamma(\alpha+\beta+2n-1)}{2^{n-1}(n-1)!\Gamma(\alpha+\beta+n)}x^{n-1}+\frac{(\alpha-\beta)\Gamma(\alpha+\beta+2n-2)}{2^{n-1}(n-2)!\Gamma(\alpha+\beta+n)}x^{n-2}+\cdots\right].
\end{aligned}$$

Comparando coeficiente a coeficiente de ambos os lados da igualdade, obtemos

$$\beta_n=-\frac{n(\alpha+\beta+n)}{(\alpha+\beta+2n)(\alpha+\beta+2n-1)}$$

e

$$\beta_{n-1}=\frac{(\alpha^2-\beta^2)(\beta-\alpha)+(\beta+\alpha)(\alpha+\beta+2n)^2}{2(\alpha+\beta+2n)(\alpha+\beta+2n-2)(\beta-\alpha)}.$$

Portanto,

$$\langle\hat{P}_n^{(\alpha,\beta)},P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}\rangle=\frac{(\alpha^2-\beta^2)(\beta-\alpha)+(\beta+\alpha)(\alpha+\beta+2n)^2}{2(\alpha+\beta+2n)(\alpha+\beta+2n-2)(\beta-\alpha)}\langle P_{n-1}^{(\alpha,\beta)},P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}\rangle. \tag{4.81}$$

Da relação de recorrência de três termos, temos

$$\langle xP_{n-1}^{(\alpha,\beta)}, P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}\rangle = \frac{\beta^2-\alpha^2}{(\alpha+\beta+2n)(\alpha+\beta+2n-2)}\langle P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}, P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}\rangle. \tag{4.82}$$

Substituindo (4.81) e (4.82) em (4.80), obtemos

$$a_{n-1} = \frac{(\beta+\alpha)(\alpha+\beta+2n)}{2(\beta-\alpha)(\alpha+\beta+2n-2)}.$$

Portanto, relação entre os polinômios ortogonais X_1-Jacobi, $\hat{P}_n^{(\alpha,\beta)}(x)$, e os polinômios ortogonais de Jacobi, $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ é da forma

$$\hat{P}_n^{(\alpha,\beta)}(x) = -\frac{1}{2}(x-b)\hat{P}_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x) + \frac{b\,\hat{P}_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x) - \hat{P}_{n-2}^{(\alpha,\beta)}(x)}{\alpha+\beta+2n-2}.$$

□

Os polinômios X_1-Jacobi satisfazem uma relação de recorrência de três termos da forma

$$\begin{aligned}
&f_{n+1}[(b^2-1)-(\alpha+n)(\beta+n)(x-b)^2]\hat{P}_{n+2}^{(\alpha,\beta)}(x)\\
&[-2b\,\hat{g}_n(b^2-1)-2b\,\hat{g}_n(a^2-1)(x-b)^2+\frac{(\alpha+n)(\beta+n)x(x-b)^2}{2}]\hat{P}_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x)\\
&+\hat{h}_n[(b^2-1)-(\alpha+n+1)(\beta+n+1)(x-b)^2]\hat{P}_n^{(\alpha,\beta)}(x)=0,
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
f_n &= \frac{n(\alpha+\beta+n)}{(\alpha+\beta+2n-1)(\alpha+\beta+2n)},\\
\hat{g}_n &= \frac{(n+\alpha)(n+\beta)}{(\alpha+\beta+2n)(\alpha+\beta+2n+2)},\\
\hat{h}_n &= \frac{(n-1+\alpha)(n-1+\beta)}{(\alpha+\beta+2n)(\alpha+\beta+2n+1)},
\end{aligned}$$

com $\hat{P}_1^{(\alpha,\beta)}(x) = -\frac{1}{2}x - \frac{\alpha+\beta+2}{2(\alpha-\beta)}$ e $\hat{P}_2^{(\alpha,\beta)}(x) = -\frac{\alpha+\beta+2}{4}x^2 - \frac{\alpha^2+\beta^2+2(\alpha+\beta)}{2(\alpha-\beta)}x - \frac{\alpha+\beta+2}{4}$.

De fato, reescrevendo a relação (4.74) usando a relação de recorrência de três termos dos polinômios de Jacobi temos as seguintes igualdades

$$\hat{P}_n^{(\alpha,\beta)}(x) = -f_nP_n^{(\alpha,\beta)}(x) + 2b\,g_nP_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x) + \frac{bP_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x) - P_{n-2}^{(\alpha,\beta)}(x)}{\alpha+\beta+2n-2}, \tag{4.83}$$

onde

$$\begin{aligned}
g_n &= \frac{(\alpha+n)(\beta+n)}{(\alpha+\beta+2n-2)(\alpha+\beta+2n)},\\
h_n &= \frac{(\alpha+n)(\beta+n)}{(\alpha+\beta+2n-2)(\alpha+\beta+2n-1)}.
\end{aligned}$$

e

$$-\frac{(x-b)^2}{4}P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = f_{n+1}\hat{P}_{n+2}^{(\alpha,\beta)}(x) - 2b\,\hat{g}_n\hat{P}_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x) + \hat{h}_n\hat{P}_n^{(\alpha,\beta)}(x), \tag{4.84}$$

pois, usando a relação de recorrência de três termos de Jacobi em $P_{n-2}^{(\alpha,\beta)}(x)$ e substituindo na equação (4.74) temos (4.83) e usando a relação de recorrência de três termos de Jacobi em $P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x)$ e $P_{n-2}^{(\alpha,\beta)}(x)$ na relação (4.74) obtemos (4.84).

Usando novamente a recorrência de três termos dos polinômios de Jacobi e a equação (4.83), obtemos

$$\begin{aligned}\frac{(b^2-1)}{4}P_n^{(\alpha,\beta)}(x) &= (\alpha+n)(\beta+n)\left(-f_{n+1}\hat{P}_{n+2}^{(\alpha,\beta)}(x)+\frac{x}{2}\hat{P}_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x)\right)\\ &\quad -2(a^2-1)b\,\hat{g}_n\hat{P}_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x)-(\alpha+n+1)(\beta+n+1)\hat{h}_n\hat{P}_n^{(\alpha,\beta)}(x).\end{aligned}$$

E usando a relação acima e (4.84), temos

$$\begin{aligned}&f_{n+1}[(b^2-1)-(\alpha+n)(\beta+n)(x-b)^2]\hat{P}_{n+2}^{(\alpha,\beta)}(x)\\ &[-2b\,\hat{g}_n(b^2-1)-2b\,\hat{g}_n(a^2-1)(x-b)^2+\frac{(\alpha+n)(\beta+n)x(x-b)^2}{2}]\hat{P}_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x)\\ &+\hat{h}_n[(b^2-1)-(\alpha+n+1)(\beta+n+1)(x-b)^2]\hat{P}_n^{(\alpha,\beta)}(x)=0.\end{aligned}$$

Obtendo assim a relação de recorrência de três termos dos polinômios X_1-Jacobi. □

4.3.3 Zeros

Sobre a localização do zero excepcional e dos zeros regulares dos polinômios X_1-Jacobi tem-se a seguinte propriedade.

Proposição 4.4. *Suponhamos sem perda de generalidade que $a<0$ então o n-ésimo polinômio de Jacobi, $\hat{P}_n^{(\alpha,\beta)}$, tem um zero em $(-\infty,b)$ e $n-1$ zeros em $(-1,1)$.*

Para a demonstração da proposição vamos precisar do auxílio dos seguintes lemas :

Lema 4.3. *Seja $P\in\varepsilon_n^{a,b}$ polinômio com n zeros reais. Se $a<0$ e $P(b)\neq 0$, pelo menos uma desses zeros está em $(-\infty,b)$.*

Demonstração: Lembremos que $\varepsilon_n^{a,b}=\{p\in P|p'(b)+ap(b)=0\}$.

Assim, $a=-\frac{p'(b)}{p(b)}$ e portanto $p'(b)$ e $p(b)$ tem o mesmo sinal, isto é, $p'(b)>0$ e $p(b)>0$ ou $p'(b)<0$ e $p(b)<0$.

Analisemos o caso em que $p'(b)>0$ e $p(b)>0$. Considerando o mínimo que o polinômio atinge para x em $(-\infty,b)$ é possível identificar dois casos:

- Se $-\infty<\min_{x\in(-\infty,b)}P(x)<0$ ou $\min_{x\in(-\infty,b)}P(x)=-\infty$, então existe um $m<b$ tal que $P(m)P(b)<0$. Logo, existe pelo menos um zero no intervalo $(-\infty,b)$.

- Se $\min_{x\in(-\infty,b)}P(x)>0$, então P_n não tem n zeros reais contrariando a hipótese.

No caso em que $p'(b)<0$ e $p(b)<0$, considerando o máximo que o polinômio atinge para x em $(-\infty,b)$, também é possível identificar dois casos:

- Se $-\infty<\max_{x\in(-\infty,b)}P(x)<0$ ou $\max_{x\in(-\infty,b)}P(x)=-\infty$, então existe um $m<b$ tal que $P(m)P(b)<0$. Logo, existe pelo menos um zero no intervalo $(-\infty,b)$.

- Se $\min_{x\in(-\infty,b)}P(x)>0$, então P_n não tem n zeros reais contrariando a hipótese.

Assim, pelo menos um zero de $P(x)$ deve estar em $(-\infty, b)$. Caso contrário $P(x)$ não pode ter n zeros reais. $\square$

Lema 4.4. $\hat{P}_n^{(\alpha,\beta)}(b) \neq 0$.

Demonstração: Primeiramente lembremos que $\hat{P}_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ são definidos recursivamente pelo operador de aumento $B_{\alpha,\beta}$, (4.56), que tem a forma

$$B_{\alpha,\beta}(y) = (x-b)^2 f(x) \frac{d}{dx}\left(\frac{g(x)}{x-b} y\right),$$

onde $f(x) = -\frac{1}{(x-c)(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}}$ e $g(x) = (1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta+1}$ e desse modo $f(b)$ e $g(b)$ são não nulos. Como $\hat{P}_1^{(\alpha,\beta)}(b) \neq 0$, segue por indução que $\hat{P}_n^{(\alpha,\beta)}(b) \neq 0$, para todo $n > 1$. $\square$

Demonstração da Proposição 4.4*:* Pelos Lemas 4.3 e 4.4 segue que $\hat{P}_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ tem no máximo $n-1$ zeros em (b, ∞) em particular $n-1$ zeros em $(-1, 1)$.

Suponhamos por absurdo que $\hat{P}_n^{\alpha,\beta}(x)$ tem $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k \quad 1 \leq k \leq n-2$ zeros em $(-1, 1)$ e seja

$$Q_1(x) = (x-\xi_1)(x-\xi_2)\ldots(x-\xi_k).$$

Se $\hat{P}_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ não tem zeros em $(-1,1)$ consequentemente $Q_1(x)$ não tem zeros nesse intervalo, então neste caso consideramos $Q_1(x) = 1$.

Por hipótese $a < 0$ e $Q_1(b) \neq 0, \quad \forall b \in (-1, 1)$, assim pela contrapositiva do Lema 4.3 temos $Q_1(x) \notin \varepsilon_n^{a,b}$.

Mas podemos escolher ξ tal que

$$Q(x) = (x-\xi)Q_1(x).$$

Dessa maneira $Q(x) \in \varepsilon_{n-1}^{a,b}$, pois $(b-\xi)(Q_1'(b) + aQ_1(b)) + Q_1(b) = 0$.

Assim, usando novamente o Lema 4.3 temos $\xi \notin (-1, 1)$.

Como ξ é zero de $Q(x)$ e $\xi \notin (-1, 1)$ então, a função

$$Q(x)\hat{P}_n^{(\alpha,\beta)}(x) = (x-\xi)(x-\xi_1)^2(x-\xi_2)^2\ldots(x-\xi_k)^2(x-x_{k+1})\ldots(x-x_n)$$

não muda de sinal em $(-1, 1)$.

Consequentemente, $\langle \hat{P}_n^{(\alpha,\beta)}, Q\rangle_{\alpha,\beta} \neq 0$. Absurdo, pois $\hat{P}_n^{(\alpha,\beta)}$ é ortogonal com relação a polinômios em $\varepsilon_{n-1}^{a,b}$.

Portanto, $\hat{P}_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ tem exatamente $n-1$ zeros em $(-1, 1)$. O zero restante é real e, pelo Lema 4.3, pertence a $(-\infty, b)$. $\square$

Considerações Finais

Nesta dissertação estudamos os polinômios ortogonais excepcionais de codimensão 1, em particular, realizamos um estudo dos polinômios ortogonais excepcionais X_1-Jacobi e X_1-Laguerre, cujos resultados são encontrados em [2] e [3]. Mostramos que, de fato os polinômios ortogonais excepcionais apresentam uma conexão com os polinômios ortogonais e observamos que existem dois tipos de zeros, os conhecidos como zeros regulares, que pertencem ao intervalo de ortogonalidade, e o zero excepcional, que não pertence ao intervalo de ortogonalidade.

Outros resultados em comparação com os polinômios ortogonais clássicos também são válidos, como por exemplo, os polinômios ortogonais excepcionais são soluções de um problema de Sturm-Liouville, possuem fórmula tipo Rodrigues, possuem operador diferencial de redução e de aumento de grau e a função peso satisfaz uma equação do tipo Pearson. Além disso, satisfazem uma relação de recorrência de três termos e a norma é um múltiplo da norma dos respectivos polinômios ortogonais clássicos.

Referências

[1] BOCHNER, S. Über Sturm-Liouvillesche polynomsysteme. *Mathematische Zeitschrift*, v. 29, n. 1, p. 730–736, Dec 1929.

[2] GÓMEZ-ULLATE, D.; KAMRAN, N.; MILSON, R. An extended class of orthogonal polynomials defined by a Sturm-Liouville problem. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Elsevier Inc., v. 359, p. 352–367, 2009.

[3] GÓMEZ-ULLATE, D.; KAMRAN, N.; MILSON, R. An extension of Bochner's problem: Exceptional invariant subspaces. *Journal of Approximation Theory*, v. 162, n. 5, p. 987–1006, 2010.

[4] GÓMEZ-ULLATE, D.; KAMRAN, N.; MILSON, R. On orthogonal polynomials spanning a non-standard flag. In: ACOSTA-HUMANEZ FEDERICO FINKEL, N. K. P. J. O. P. B. (Ed.). *Algebraic Aspects of Darboux Transformations, Quantum Integrable Systems and Supersymmetric Quantum Mechanics*. [S.l.]: American Mathematical Society, 2012. (Contemporary Mathematics 563), p. 51–71.

[5] GÓMEZ-ULLATE, D.; KAMRAN, N.; MILSON, R. A Conjecture on exceptional orthogonal polynomials. *Foundations of Computational Mathematics*, v. 13, p. 615–666, 2013.

[6] GARCÍA-FERRERO, M. Á.; GÓMEZ-ULLATE, D.; MILSON, R. A Bochner type classification theorem for exceptional orthogonal polynomials. *arXiv preprint arXiv:1603.04358*, p. 1–41, 2016.

[7] CHIHARA, T. S. *An Introduction to Orthogonal Polynomials*. [S.l.]: Gordon and Breach, 1978. (Mathematics and its Applications).

[8] ISMAIL, M. E. H. *Classical and Quantum Orthogonal Polynomials in One Variable*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2005. (Encyclopedia of Mathematics and its Applications 98).

[9] SZEGŐ, G. *Orthogonal Polynomials*. 4th. ed. [S.l.]: American Mathematical Society, 1939. (Colloquium Publications).

[10] BOYCE, R. C. D. W. E. *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*. [S.l.]: Livros Técnicos e Científicos Editora Ltda, 2015.

[11] BROWN, R. C. J. *Fourier Series and Boundary Value Problems*. 7th. ed. [S.l.]: McGraw-Hill, 2007.

[12] ANDREWS, G. E.; ASKEY, R.; ROY, R. *Special Functions*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1999.

[13] LEBEDEV, R. R. S. N. N. *Special Functions and Their Applications*. Revised. [S.l.]: Dover Publications, 1972.

[14] HAHN, W. Über höhere ableitungen von orthogonalpolynomen. *Mathematische Zeitschrift*, Springer Nature, v. 43, n. 1, p. 101–101, dec 1938.

[15] KARLIN, S.; SZEGŐ, G. On certain determinants whose elements are orthogonal polynomials. *Journal d'Analyse Mathématique*, Springer Nature, v. 8, n. 1, p. 1–157, dec 1960.

[16] AL-SALAM, W. A.; CHIHARA, T. S. Another characterization of the classical orthogonal polynomials. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, Society for Industrial & Applied Mathematics (SIAM), v. 3, n. 1, p. 65–70, feb 1972.

[17] AGARWAL, R. P.; MILOVANOVIĆ, G. V. Extremal problems, inequalities, and classical orthogonal polynomials. *Applied Mathematics and Computation*, Elsevier BV, v. 128, n. 2-3, p. 151–166, may 2002.

[18] DAVIS, P. J. *Interpolation and Approximation*. [S.l.]: Dover Publications, 1975.