

GUSTAVO JORGE PEREIRA

**CONTROLE CHAVEADO DE SISTEMAS FUZZY T-S
COM INCERTEZAS PARAMÉTRICAS E ATRASO NO
TEMPO**

Ilha Solteira - SP
2021

GUSTAVO JORGE PEREIRA

CONTROLE CHAVEADO DE SISTEMAS FUZZY T-S COM INCERTEZAS PARAMÉTRICAS E ATRASO NO TEMPO

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Estadual Paulista - UNESP - Câmpus de Ilha Solteira, como parte dos requisitos necessário para obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica.
Especialidade: Automação.

Prof. Dr. Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira
Orientador

Ilha Solteira - SP
2021

FICHA CATALOGRÁFICA

Desenvolvido pelo Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação

P436c Pereira, Gustavo Jorge.
Controle chaveado de sistemas Fuzzy T-S com incertezas paramétricas e atraso no tempo / Gustavo Jorge Pereira. -- Ilha Solteira: [s.n.], 2021
62 f.

Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira. Área de conhecimento: Automação, 2021

Orientador: Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira
Inclui bibliografia

1. Sistemas não lineares com incertezas paramétricas e atraso no tempo. 2. Controlador chaveado. 3. Modelos Fuzzy Takagi-Sugeno. 4. Desigualdades matriciais lineares . 5. Funcional de Lyapunov-krasovskii.



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Câmpus de Ilha Solteira

CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

TÍTULO DA TESE: Controle Chaveado de Sistemas Fuzzy T-S com Incertezas Paramétricas e Atraso no Tempo.

AUTOR: GUSTAVO JORGE PEREIRA

ORIENTADOR: MARCELO CARVALHO MINHOTO TEIXEIRA

Aprovado como parte das exigências para obtenção do Título de Doutor em ENGENHARIA ELÉTRICA, área: Automação pela Comissão Examinadora:

Prof. Dr. MARCELO CARVALHO MINHOTO TEIXEIRA (Participação Virtual)
Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira - UNESP

Prof. Dr. RODRIGO CARDIM (Participação Virtual)
Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira - UNESP

Prof. Dr. FLAVIO ANDRADE FARIA (Participação Virtual)
Departamento de Matemática / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira - UNESP

Profa. Dra. MARTA CILENE GADOTTI (Participação Virtual)
Departamento de Matemática / UNESP/Câmpus de Rio Claro

Prof. Dr. WALLYSONN ALVES DE SOUZA (Participação Virtual)
Coordenação de Ciências Matemáticas e Naturais / Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Tocantins - IFTO

Ilha Solteira, 11 de novembro de 2021

*À minha esposa Simone e à minha filha Clara por todo amor, apoio,
confiança e incentivo em todos os momentos.*

Dedico.

AGRADECIMENTOS

Meus agradecimentos a todos os familiares, amigos, professores e funcionários da FEIS-UNESP, que direta ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho. Em especial, dedico meus agradecimentos:

- A Deus, por ter me dado força e saúde para chegar até aqui;
- Aos meus pais Angelina e José Jorge, aos meus irmãos Juliano e Fabiana e a meu sobrinho Felipe pelo carinho, apoio e incentivo;
- À minha esposa Simone que sempre esteve ao meu lado durante minha formação acadêmica, dando força nos momentos difíceis, incentivo e, principalmente, me motivando para que esse sonho pudesse ser realizado.
- À minha filha Clara pelo amor e incentivo em todos os momentos deste trabalho;
- Ao Prof. Dr. Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira, por todo ensinamento, incentivo, confiança e orientação;
- Ao Prof. Dr. Uiliam Nelson Lenzion Tomaz Alves, pelo acompanhamento (co-orientação), sugestões e incentivo;
- Ao meu amigo Dr. Willian R. B. M. Nunes pela ajuda nos programas, pelo apoio, incentivo e conversas agradáveis;
- Ao meu amigo Arshad Jalal pelo incentivo, apoio e conversas agradáveis;
- Aos colegas professores da matemática do IFSP, campus Birigui, agradeço pelo companheirismo, solidariedade e toda ajuda prestada na reta final do meu doutorado;
- Aos meus amigos e colegas do laboratório de pesquisa e controle (LPC) que de forma direta ou indiretamente me ajudaram;
- Ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia (IFSP) por conceder o afastamento integral para conclusão desta tese;
- O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

*“Ainda que tivesse o dom da profecia,
o conhecimento de todos os mistérios
e de toda a ciência,
ainda que tivesse toda a fé,
a ponto de transformar montanhas
se não tivesse a caridade, nada seria”*

Coríntios 13, 2

RESUMO

Nesta tese são propostas condições que garantem a estabilidade de uma classe de sistemas não lineares com incertezas paramétricas e atraso no tempo, com a especificação da taxa de decaimento e utilizando um controle chaveado. Os projetos dos controladores são realizados com base no modelo fuzzy Takagi-Sugeno (T-S) com representação exata do sistema não linear com atraso no tempo. Novos teoremas são propostos com condições baseadas em desigualdades matriciais lineares (do inglês Linear Matrix Inequalities - LMIs) e funcional de Lyapunov-Krasovskii (L-K) com intuito de obter vários ganhos para o controlador. O controlador chaveado, em um certo instante de tempo, é formado por um único ganho, escolhido entre um conjunto de ganhos previamente projetados, que é determinado pela lei de chaveamento. Essa lei retorna o menor valor da derivada temporal do funcional de L-K. Os controladores chaveados apresentam um desempenho melhor ou igual, quando comparados com o controlador de ganho único na realimentação do vetor de estado, e as LMIs utilizadas para determinar os ganhos do controle chaveado são mais relaxadas do que as LMIs que determinam o ganho único, pois proporcionam áreas factíveis maiores ou iguais. Para verificar a eficácia da metodologia proposta, nesta tese são apresentadas simulações numéricas abordando projetos de controladores chaveados e de ganho único para modelos fuzzy T-S com atraso no tempo e parâmetros incertos, incluindo por exemplo um sistema Truck-Trailer.

Palavras-chave: Sistemas não lineares com incertezas paramétricas e atraso no tempo. Controlador chaveado. Modelos fuzzy Takagi-Sugeno. Desigualdades matriciais lineares (LMIs). Funcional de Lyapunov-Krasovskii.

ABSTRACT

This thesis proposes conditions to ensure stabilization of a class of nonlinear systems with uncertain parameters, time delay and considering the specification of the decay rate, using a switched control. The designs of the switched controllers are performed based on the Takagi-Sugeno (T-S) fuzzy model which exactly describes the nonlinear systems with time delay. New theorems are proposed with conditions based on Linear Matrix Inequalities (LMIs) and Lyapunov-Krasovskii (L-K) functional for obtaining several gains for the control. The switched controller, at a certain instant of time, is formed by a single gain, chosen from a set of previously projected gains, which is determined by the switching law. This law returns the smallest value of the time derivative of the L-K functional. The switched controller performs better than or equal to the controller with only one state feedback gain, and the LMIs for this switched control are more relaxed than the LMIs for one state feedback gain, because it offers feasible regions greater than or at least equal to that obtained with only one controller gain. To verify the efficacy of the proposed methodology, this thesis presented numerical simulations about the designs of switched and one state feedback gain controllers to T-S fuzzy models with time delay and uncertain parameters, including for instance a Truck-Trailer fuzzy system.

Keywords: Nonlinear systems with uncertain parameters and time delay. Takagi- Sugeno fuzzy model. Linear matrix inequalities (LMIs). Lyapunov-Krasovskii functional.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Região de factibilidade: Teorema 3.1 ($\bigcirc$) e Corolário 3.1 ($\times$).	32
Figura 2	Trajetórias de $x(t)$ do sistema (3.25) sob a lei de controle (3.6), $\tau = 20$ s e o índice de chaveamento σ	33
Figura 3	Região de factibilidade: Teorema 4.2 ($\bigcirc$) e Corolário 4.1 ($\times$).	50
Figura 4	Zoom da região de factibilidade do Exemplo 4.1.	51
Figura 5	Trajetórias de $x(t)$ do sistema (4.57), lei de controle (4.30) para $\tau = 1,5$ s e os índices de chaveamento σ e ω	52
Figura 6	Modelo Truck-Trailer.	53
Figura 7	Região de factibilidade: Teorema 4.2 ($\bigcirc$) e Corolário 4.1 ($\times$).	55
Figura 8	Trajetórias de $x(t)$ do sistema (4.65) sob a lei de controle (4.30) e $\tau = 1,345$ s.	56
Figura 9	Índices de chaveamento σ e ω para $\tau = 1,345$ s.	56

LISTA DE ABREVIACÕES E SIGLAS

LMI	Linear Matrix Inequalities
CDP	Compensaco Distribuída Paralela
T-S	Takagi-Sugeno
L-K	Lyapunov-Krasovskii
PVI	Problema de Valor Inicial

LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais.
$\mathbb{R}^+$	Conjunto dos números reais positivos.
$\mathbb{R}^n$	Conjunto dos vetores $n \times 1$ com elementos reais.
$\mathbb{R}^{n \times m}$	Conjunto das matrizes $n \times m$ com elementos reais.
$P > (\geq) 0$	P é uma matriz simétrica e definida (semi-definida) positiva.
$P < (\leq) 0$	P é uma matriz simétrica e definida (semi-definida) negativa.
$\mathbb{K}_r$	Conjunto $\{1, 2, \dots, r-1, r\}$.
$\ x\ _2$	Norma Euclidiana do vetor $x \in \mathbb{R}^n$.
$\ \phi\ _c$	Norma $\max_{a \leq \psi \leq b} \ \phi(\psi)\ $, para $\phi \in C[a, b]$.
$diag(P_1, P_2, \dots, P_n)$	Matriz bloco diagonal cujos elementos são $P_1, P_2, \dots, P_n$.
$\arg^* \min_{i \in \mathbb{K}_r} \{h_i\}$	Menor índice $j \in \mathbb{K}_r$ tal que, para o conjunto $\{h_1, h_2, \dots, h_r\}$, $h_j = \min_{i \in \mathbb{K}_r} \{h_i\}$.
I	Matriz identidade de ordem apropriada.
O	Matriz nula de ordem apropriada.
Π	Produto entre elementos.
$C^1([c, d], \mathbb{R})$	Funções $[c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ contínuas e diferenciáveis em $[c, d]$.
$C[a, b]$	Conjunto de funções contínuas $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$.
$l([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$	É o espaço de Banach das aplicações contínuas de $[-\tau, \mathbb{R}]$ em $\mathbb{R}^n$.
C_H	Conjunto das aplicações contínuas $\phi \in l([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$ tal que $\ \phi\ \leq H$.
$*$	O asterisco denota a transposição dos termos em seu lado direito.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
2	RESULTADOS PRELIMINARES	17
2.1	DEFINIÇÃO DE EQUAÇÃO DIFERENCIAL FUNCIONAL COM ATRASO	22
2.2	ESTABILIDADE DE SISTEMAS COM ATRASO NO TEMPO	24
3	MODELO FUZZY TAKAGI-SUGENO	25
3.1	CONTROLE CHAVEADO DE MODELOS FUZZY T-S COM ATRASO NAS VARIÁVEIS DE ESTADO E COM A MATRIZ B CONSTANTE	26
3.2	EXEMPLO NUMÉRICO	31
3.3	CONCLUSÕES PARCIAIS	34
4	CONTROLE CHAVEADO DE MODELOS FUZZY T-S COM A MATRIZ B DEPENDENTE DE α, ATRASO NO TEMPO E TAXA DE DECAIMENTO	35
4.1	NOVO CONTROLE CHAVEADO	43
4.2	CONTROLADOR DE GANHO ÚNICO	47
4.3	EXEMPLO NUMÉRICO	50
4.4	CONCLUSÕES PARCIAIS	57
5	CONCLUSÕES	58
	REFERÊNCIAS	59

1 INTRODUÇÃO

Os sistemas com atraso também são chamados de sistemas hereditários ou equações diferenciais de diferença. Estas equações representam modelos em que o estado futuro do sistema depende do seu passado e, por este motivo, esta dependência é conhecida como efeito hereditário. Sistema com atraso no tempo é uma subclasse de equações diferenciais funcionais. No século XVIII Bernoulli, Euler e Concordet foram uns dos primeiros a estudar equações com atraso (FRIDMAN, 2014).

No ano de 1931 Volterra escreveu um livro sobre o papel dos efeitos hereditários em modelos para a interação de espécies. Em 1940 este tema é fortemente estudado na Ex-União Soviética em modelos de engenharia de controle (SOUZA, 2019). Nas décadas de 50 e 60 surgiram as teorias básicas que tratam da estabilidade do sistema com atraso no tempo. Elas abrangem a existência e unicidade de soluções para equações dinâmicas, teoria de estabilidade para solução trivial, etc (WU; HE; SHE, 2010). Nas décadas seguintes surgiram os livros *Differential-Difference Equation* de R. Bellman e K. L. Cooke de 1963 e o livro *Functional Differential Equations* de Jack K. Hale de 1977 tratando deste tema (SOUZA, 2019).

Muitos sistemas de controle contínuos no tempo apresentam atraso podendo ocasionar instabilidade ou oscilações. A estabilidade e o controle dos sistemas com atraso no tempo é importante tanto na parte teórica como na parte prática. Modelos com atraso no tempo surgiram primeiramente na área de ciências biológicas e mais tarde foram encontrados em diversos sistemas da engenharia, tais como, transmissão mecânica, transmissão de fluido, processos metalúrgicos e controle de redes (KOLMANOVSKII; MYSHKIS, 2012, HALE; LUNEL, 2013, FRIDMAN, 2014, WU; HE; SHE, 2010).

Segundo Fridman (2014) o começo do século XXI pode ser caracterizado como o ápice do estudo de sistemas com atraso no tempo, pois foram obtidos vários resultados importantes (GUAN; CHEN, 2004, CAO; FRANK, 2001, MOON *et al.*, 2001, GU, 2000, GU; CHEN; KHARITONOV, 2003, LIN; WANG; LEE, 2006, ZHAO *et al.*, 2008).

O projeto de sistemas de controle, para plantas não lineares, baseado nos modelos fuzzy Takagi-Sugeno (T-S) (TAKAGI; SUGENO, 1985) está presente em diversos trabalhos (WANG; LAM, 2019, ANGULO; DAVID; BERNAL, 2018, CHE *et al.*, 2018, COSKUN, 2020, GAO *et al.*, 2019, LIAN *et al.*, 2017, SOUZA *et al.*, 2014b, LIN; WANG; LEE, 2006,). Ele é bastante eficaz em projeto de controle principalmente quando não se conhece toda a planta do projeto.

A descrição de sistemas não lineares com atraso através de modelos fuzzy T-S possibilita

representá-los como uma combinação de modelos locais ponderados por uma função de pertinência (WANG; TANAKA; GRIFFIN, 1996, WANG; TANAKA; GRIFFIN, 1995, TEIXEIRA; ASSUNÇÃO; AVELLAR, 2003). Com esta representação é possível utilizar LMIs (do inglês Linear Matrix Inequalities) (BOYD *et al.*, 1994) em projetos de controle para sistemas com atraso no tempo.

O método mais eficiente para analisar a estabilidade de sistemas com atraso no tempo é o de Lyapunov. Para estes sistemas, são dois os procedimentos mais importantes para o estudo da estabilidade, com base nos resultados de Lyapunov: o de Krasovskii (KRASOVSKII, 1963, GU; CHEN; KHARITONOV, 2003, ANGULO; DAVID; BERNAL, 2018, WANG; LAM, 2019,) e o de Razumikhin (RAZUMIKHIN, 1956, LIN; WANG; LEE, 2006).

Existem vários artigos publicados com a temática sobre sistemas fuzzy T-S com atraso no tempo. A grande maioria desses trabalhos buscam maximizar o atraso admissível dentro da estabilidade e diminuir o conservadorismo e, para isso, são desenvolvidos diversos tipos de funcionais de Lyapunov-Krasovskii (L-K) (WANG; LAM, 2018, ANGULO; DAVID; BERNAL, 2018, CHE *et al.*, 2018). Um estudo mais profundo sobre sistemas fuzzy T-S com atraso no tempo pode ser encontrado em Wang e Lam (2018). Em Fridman (2014) encontra-se um tutorial sobre métodos baseados em Lyapunov para estabilidade de sistemas com atraso no tempo e alguns resultados avançados sobre o tema.

Segundo Wang e Lam (2018) a maioria dos teoremas que garantem estabilidade para o sistema fuzzy T-S não utilizam as funções de pertinência no funcional de L-K tornando assim as condições para a estabilidade do sistema mais conservadoras. De fato, os melhores resultados presentes na literatura que abordam a estabilidade do sistema fuzzy T-S com atraso no tempo com menor conservadorismo e máximo atraso são os que utilizam as funções de pertinência no funcional de L-K (ANGULO; DAVID; BERNAL, 2018, WANG; LAM, 2018).

Recentemente o controle chaveado tem sido utilizado em projeto de controle mostrando um desempenho melhor ou pelo menos igual comparado com um controlador de ganho único (constante). O controlador chaveado proposto por Souza *et al.* (2013) para plantas lineares e invariantes no tempo com incertezas politópicas é menos conservador do que o controlador de ganho único na realimentação do vetor de estado. Um novo método de projeto de controle chaveado e um novo critério de estabilidade para sistemas não lineares incertos descrito por modelos fuzzy T-S são propostos em Souza *et al.* (2014a, 2014b). O projeto do controlador chaveado é baseado na função de Lyapunov quadrática por partes do tipo mínimo e na minimização da derivada temporal desta função de Lyapunov. No projeto de controle chaveado em Alves *et al.* (2016a, 2016b) são apresentados condições que garantem a estabilização local, com taxa de decaimento, de uma classe de sistemas não lineares contínua no tempo, incertas e com saturação no atuador. Além disso, Oliveira *et al.* (2018) considera o índice de desempenho $\mathcal{H}_\infty$ nesta estrutura. Em Wolmuth *et al.* (2019) é proposto o projeto de controle $\mathcal{H}_\infty$ chaveado

com realimentação derivativa de sistemas lineares incertos considerando a saturação do sinal de controle. Em Carniato *et al.* (2020) foi realizado um estudo do problema de controle robusto envolvendo custo $\mathcal{H}_\infty$ para sistemas lineares chaveado no tempo contínuo, sujeito à saturação no atuador e com incertezas politópicas considerando leis de chaveamento e controle chaveado dependentes da saída da planta.

De acordo com Santim *et al.* (2012) mesmo que o sistema não linear tenha parâmetros incertos é possível obter um modelo fuzzy que o represente através de um modelo exato dentro de uma região de operação. Porém, as funções de pertinência obtidas são incertas, pois dependem de parâmetros incertos e, desse modo, não podem ser aplicadas as técnicas de controle que utilizam a Compensação Distribuída Paralela (CDP).

Inspirado em Souza *et al.* (2014a, 2014b) este trabalho propõe um projeto de controle chaveado para modelos fuzzy T-S com atraso no tempo. A principal vantagem em utilizar o controlador chaveado que será empregado, é que o conhecimento das funções de pertinência não é necessário na sua implementação. Na verdade, sua definição é baseada no funcional de L-K e na minimização da derivada temporal desse funcional. O controlador chaveado, em um certo instante de tempo, é formado por um único ganho, escolhido entre um conjunto de ganhos previamente projetados, que é determinado pela lei de chaveamento. Esta lei retorna o menor valor da derivada temporal do funcional de L-K.

Para exemplificar a metodologia proposta, implementações computacionais foram realizadas utilizando a linguagem Yalmip (LOFBERG, 2004) com o solver SeDuMi (STURM, 1999) ou LMILab (GAHINET *et al.*, 1994).

No Capítulo 2 apresentam-se lemas e proposições que são fundamentais na demonstração do principal resultado desta tese e é introduzido o conceito de equações diferenciais com atraso no tempo.

No Capítulo 3 é feita uma breve introdução sobre o método proposto por T-S para determinar uma representação de uma classe de sistemas não lineares com atraso como uma combinação convexa de sistemas lineares com atraso. Define-se a lei de chaveamento para sistemas fuzzy T-S com matriz B constante, o controle chaveado e o controle de ganho único. Os resultados que garantem a estabilidade do sistema apresentam taxa de decaimento para os controladores chaveado e de ganho único. São realizadas simulações numéricas comprovando que o desempenho do controlador chaveado é melhor ou pelo menos igual ao do obtido com um controlador de ganho único.

Uma nova lei de controle chaveada é proposta no Capítulo 4 para sistemas não lineares com atraso no tempo em que a matriz B possui parâmetros incertos que são representados por modelos fuzzy T-S. O controlador chaveado proposto apresenta um bom desempenho e elimina a necessidade de encontrar as expressões explícitas das funções de pertinência que, muitas vezes,

podem ser desconhecidas devido às incertezas na planta. Neste capítulo o principal resultado que garante a estabilidade do sistema com controle chaveado, permite a especificação da taxa de decaimento e, também, são adicionadas restrições nas normas dos ganhos do controlador. São apresentadas simulações numéricas para comprovar a eficácia da metodologia. Neste caso, foi observado que a região de factibilidade para o controlador chaveado é superior à região de factibilidade para o controlador de ganho único.

O Capítulo 5 aborda as conclusões finais e as perspectivas futuras.

2 RESULTADOS PRELIMINARES

Este capítulo apresenta alguns lemas e exemplos que são fundamentais para o entendimento da demonstração do principal resultado desta tese, tornando a prova mais clara e simples.

Proposição 2.1. (ZORICH, 2016) *Seja $P = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 / a \leq s \leq b \text{ e } c \leq t \leq d\}$. Se a função $f : P \rightarrow \mathbb{R}$ for contínua, então a função*

$$F(t) = \int_a^b f(s, t) ds \quad (2.1)$$

é contínua para todo $t \in [c, d]$.

Prova: Como f é uniformemente contínua em P , isto é, dado $\varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que

$$|(s, t) - (s, t_0)| < \delta \Rightarrow |f(s, t) - f(s, t_0)| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Assim,

$$|f(t) - f(t_0)| = \left| \int_a^b [f(s, t) - f(s, t_0)] ds \right| \leq \int_a^b |f(s, t) - f(s, t_0)| ds < \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a} ds = \varepsilon,$$

desde que $|(s, t) - (s, t_0)| < \delta$.

Proposição 2.2. (ZORICH, 2016) *Se a função $f : P \rightarrow \mathbb{R}$ for contínua e tem derivada parcial contínua em relação a t no retângulo $P = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 / a \leq s \leq b \text{ e } c \leq t \leq d\}$, então a integral definida em (2.1) é de classe $C^1([c, d], \mathbb{R})$ e*

$$\frac{dF(t)}{dt} = \int_a^b \frac{\partial f(s, t)}{\partial t} ds. \quad (2.2)$$

Prova: Para todo $t \in [c, d]$ e utilizando a igualdade (2.1) é verdade que

$$\frac{F(t+k) - F(t)}{k} = \frac{\int_a^b f(s, t+k) ds - \int_a^b f(s, t) ds}{k} = \int_a^b \frac{f(s, t+k) - f(s, t)}{k} ds. \quad (2.3)$$

Como por hipótese $w_s = f(s, t)$, com $t \in [c, d]$, pelo Teorema do Valor Médio existe $\bar{t}$ entre t e

$t + k$ tal que

$$f(s, t + k) - f(s, t) = \frac{\partial f(s, \bar{t})}{\partial t} k,$$

ou seja,

$$\frac{f(s, t + k) - f(s, t)}{k} = \frac{\partial f(s, \bar{t})}{\partial t}. \quad (2.4)$$

Substituindo (2.4) em (2.3), obtém-se

$$\frac{F(t + k) - F(t)}{k} = \int_a^b \frac{\partial f(s, \bar{t})}{\partial t} ds.$$

Como $\frac{\partial f}{\partial t}$ é contínua em P , então

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{F(t + k) - F(t)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \int_a^b \frac{\partial f(s, \bar{t})}{\partial t} ds,$$

isto é,

$$\frac{dF(t)}{dt} = \int_a^b \frac{\partial f(s, t)}{\partial t} ds$$

concluindo a prova.

Lema 2.1. (ZORICH, 2016) Para uma função $F(t) = \int_{\alpha_1(t)}^{\alpha_2(t)} f(s, t) ds$, se $\alpha_1(t)$ e $\alpha_2(t)$ são diferenciáveis em t e $f(s, t)$ é contínua em s e existe a derivada parcial de $f(s, t)$ em relação a t , então

$$\frac{dF(t)}{dt} = \dot{\alpha}_2(t) f(\alpha_2(t), t) - \dot{\alpha}_1(t) f(\alpha_1(t), t) + \int_{\alpha_1(t)}^{\alpha_2(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(s, t) ds. \quad (2.5)$$

Prova: Considerando $\alpha_1, \alpha_2 \in [a, b]$ e $t \in [c, d]$, a função

$$\Phi(\alpha_1, \alpha_2, t) = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(s, t) ds \quad (2.6)$$

está bem definida. E supondo que $H(s, t)$ é a primitiva de $\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(s, t) ds$, tem-se que

$$\Phi(\alpha_1, \alpha_2, t) = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(s, t) ds = H(\alpha_2, t) - H(\alpha_1, t).$$

Logo,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_2} = \frac{\partial H}{\partial \alpha_2}(\alpha_2, t) = f(\alpha_2, t), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_1} = \frac{\partial H}{\partial \alpha_2}(\alpha_1, t) = -f(\alpha_1, t),$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\partial f}{\partial t}(s, t) ds.$$

Pela Proposição 2.1 conclui-se que todas as derivadas parciais de Φ são contínuas em seu domínio. A fórmula dada por (2.5) segue da regra da cadeia para a função

$$F(t) = \Phi(\alpha_1(t), \alpha_2(t), t),$$

ou seja,

$$\frac{dF(t)}{dt} = \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_1} \cdot \frac{d\alpha_1}{dt} + \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_2} \cdot \frac{d\alpha_2}{dt} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \cdot \frac{dt}{dt}$$

concluindo a prova.

Lema 2.2. (WANG; LAM, 2019) Para uma função $F(t) = \int_{\theta_1(t)}^{\theta_2(t)} \int_{s_1(\theta, t)}^{s_2(\theta, t)} f(\theta, s, t) ds d\theta$ se $\theta_1(t)$, $\theta_2(t)$ são diferenciáveis em t ; $s_1(\theta, t)$, $s_2(\theta, t)$ são contínuas em θ e existe a derivada parcial em relação a t ; $f(s, \theta, t)$ é contínua em s, θ e existe a derivada parcial em t , então

$$\begin{aligned} \frac{dF(t)}{dt} &= \dot{\theta}_2(t) \int_{s_1(\theta_2(t), t)}^{s_2(\theta_2(t), t)} f(\theta_2(t), s, t) ds - \dot{\theta}_1(t) \int_{s_1(\theta_1(t), t)}^{s_2(\theta_1(t), t)} f(\theta_1(t), s, t) ds \\ &+ \int_{\theta_1(t)}^{\theta_2(t)} \frac{\partial s_2(\theta, t)}{\partial t} f(\theta, s_2(\theta, t), t) d\theta + \int_{\theta_1(t)}^{\theta_2(t)} \int_{s_1(\theta, t)}^{s_2(\theta, t)} \frac{\partial f(\theta, s, t)}{\partial t} ds d\theta \\ &- \int_{\theta_1(t)}^{\theta_2(t)} \frac{\partial s_1(\theta, t)}{\partial t} f(\theta, s_1(\theta, t), t) d\theta. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Prova: Seja

$$F(t) = \int_{\theta_1(t)}^{\theta_2(t)} F_1(\theta, t) d\theta, \text{ em que } F_1(\theta, t) = \int_{s_1(\theta, t)}^{s_2(\theta, t)} f(\theta, s, t) ds. \quad (2.8)$$

Então, aplicando o Lema 2.1 em (2.8), tem-se

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F(t)}{\partial t} &= \dot{\theta}_2(t)F_1(\theta_2(t),t) - \dot{\theta}_1(t)F_1(\theta_1(t),t) + \int_{\theta_1(t)}^{\theta_2(t)} \frac{\partial F_1(\theta,t)}{\partial t} d\theta \\
&= \dot{\theta}_2(t) \int_{s_1(\theta_2(t),t)}^{s_2(\theta_2(t),t)} f(\theta_2(t),s,t) ds - \dot{\theta}_1(t) \int_{s_1(\theta_1(t),t)}^{s_2(\theta_1(t),t)} f(\theta_1(t),s,t) ds \\
&\quad + \int_{\theta_1(t)}^{\theta_2(t)} \frac{\partial F_1(\theta,t)}{\partial t} d\theta
\end{aligned} \tag{2.9}$$

e

$$\frac{\partial F_1(\theta,t)}{\partial t} = \frac{\partial s_2(\theta,t)}{\partial t} f(\theta, s_2(\theta,t), t) - \frac{\partial s_1(\theta,t)}{\partial t} f(\theta, s_1(\theta,t), t) + \int_{s_1(\theta,t)}^{s_2(\theta,t)} \frac{\partial f(\theta, s, t)}{\partial t} ds. \tag{2.10}$$

Substituindo (2.10) em (2.9), encontra-se

$$\begin{aligned}
\frac{dF(t)}{dt} &= \dot{\theta}_2(t) \int_{s_1(\theta_2(t),t)}^{s_2(\theta_2(t),t)} f(\theta_2(t),s,t) ds - \dot{\theta}_1(t) \int_{s_1(\theta_1(t),t)}^{s_2(\theta_1(t),t)} f(\theta_1(t),s,t) ds \\
&\quad + \int_{\theta_1(t)}^{\theta_2(t)} \frac{\partial s_2(\theta,t)}{\partial t} f(\theta, s_2(\theta,t), t) d\theta - \int_{\theta_1(t)}^{\theta_2(t)} \frac{\partial s_1(\theta,t)}{\partial t} f(\theta, s_1(\theta,t), t) d\theta \\
&\quad + \int_{\theta_1(t)}^{\theta_2(t)} \int_{s_1(\theta,t)}^{s_2(\theta,t)} \frac{\partial f(\theta, s, t)}{\partial t} ds d\theta.
\end{aligned}$$

Os exemplos a seguir ilustram aplicações dos Lemas 2.1 e 2.2.

Exemplo 2.1. Seja $d(t)$ uma função real satisfazendo $0 < d(t) \leq \tau$; derivável em relação a t e $R = R^T > 0$, $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Mostre que a derivada da integral definida por

$$F(t) = \int_{t-d(t)}^t x(s)^T R x(s) ds$$

é igual a $\dot{F}(t) = x(t)^T R x(t) - (1 - \dot{d}(t))x(t-d(t))^T R x(t-d(t))$.

Considere $\alpha_2(t) = t$, $\alpha_1(t) = t - d(t)$ e $f(s, t) = x(s)^T R x(s)$. Utilizando o Lema 2.1

$$\begin{aligned}
\frac{dF(t)}{dt} &= x(t)^T R x(t) - (1 - \dot{d}(t))x(t-d(t))^T R x(t-d(t)) + \int_{t-d(t)}^t 0 ds. \\
&= x(t)^T R x(t) - (1 - \dot{d}(t))x(t-d(t))^T R x(t-d(t)).
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Exemplo 2.2. Sejam $\tau > 0$, $\tau \in \mathbb{R}$ e $S = S^T > 0$, $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Mostre que a derivada da integral definida por

$$G(t) = \int_{t-\tau}^t \int_{\theta}^t \dot{x}(s)^T S \dot{x}(s) ds d\theta \quad (2.12)$$

é igual a $\dot{G}(t) = \tau \dot{x}(t)^T S \dot{x}(t) - \int_{t-\tau}^t \dot{x}(s)^T S \dot{x}(s) ds$.

Considerando $\theta_1(t) = t - \tau$, $\theta_2(t) = t$, $s_2(\theta, t) = t$, ou seja, $s_2(\theta, t)$ depende apenas de t , $s_1(\theta, t) = \theta$, isto é, $s_1(\theta, t)$ depende apenas de θ e $f(\theta, s, t) = \dot{x}(s)^T S \dot{x}(s)$. Então,

$$\dot{\theta}_1(t) = 1, \quad \dot{\theta}_2(t) = 1, \quad f(\theta_2(t), s, t) = f(\theta_1(t), s, t) = \dot{x}(s)^T S \dot{x}(s), \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} s_2(\theta_2(t), t) &= t, \quad s_1(\theta_2(t), t) = \theta_2(t) = t, \\ s_2(\theta_1(t), t) &= t, \quad s_1(\theta_1(t), t) = \theta_1(t) = t - \tau, \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial s_2(\theta, t)}{\partial t} = 1, \quad \frac{\partial s_1(\theta, t)}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial f(\theta, s, t)}{\partial t} = 0, \quad (2.15)$$

$$f(\theta, s_2(\theta, t), t) = \dot{x}(t)^T S \dot{x}(t), \quad f(\theta, s_1(\theta, t), t) = \dot{x}(\theta)^T S \dot{x}(\theta). \quad (2.16)$$

Utilizando o Lema 2.2 em (2.12) e as igualdades dadas por (2.13)-(2.16), obtém-se

$$\begin{aligned} \dot{G}(t) &= 1 \int_t^t \dot{x}(s)^T S \dot{x}(s) ds - 1 \int_{t-\tau}^t \dot{x}(s)^T S \dot{x}(s) ds + \int_{t-\tau}^t 1 \dot{x}(t)^T S \dot{x}(t) d\theta \\ &\quad + \int_{t-\tau}^t \int_{\theta}^t 0 ds d\theta - \int_{t-\tau}^t 0 \dot{x}(\theta)^T S \dot{x}(\theta) d\theta \\ &= - \int_{t-\tau}^t \dot{x}(s)^T S \dot{x}(s) ds + (t - (t - \tau)) \dot{x}(t)^T S \dot{x}(t) \\ &= \tau \dot{x}(t)^T S \dot{x}(t) - \int_{t-\tau}^t \dot{x}(s)^T S \dot{x}(s) ds. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Lema 2.3. (Desigualdade de Jensen) Para qualquer matriz $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $S^T = S > 0$, escalar $a < b$ e $\omega : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, tal que a integral envolvida está bem definida, então

$$(b - a) \int_a^b \omega(s)^T S \omega(s) ds \geq \int_a^b \omega(s)^T ds S \int_a^b \omega(s) ds \quad (2.18)$$

Prova: Encontra-se em Gu (2000).

Lema 2.4. (Complemento de Schur, BOYD et al., 1994) Uma matriz simétrica $M = \begin{bmatrix} M_1 & M_2 \\ M_2^T & M_3 \end{bmatrix}$ é definida positiva se, e somente se,

$$1. M_1 > 0 \text{ e } M_3 - M_2^T (M_1)^{-1} M_2 > 0,$$

ou

$$2. M_3 > 0 \text{ e } M_1 - M_2^T (M_3)^{-1} M_2 > 0.$$

Prova: Veja (BOYD *et al.*, 1994).

2.1 DEFINIÇÃO DE EQUAÇÃO DIFERENCIAL FUNCIONAL COM ATRASO

Com o intuito de introduzir o conceito de equações diferenciais com atraso (retardo), considere a seguinte equação

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t-2)) \quad (2.19)$$

em que $f(t, x)$ é suposta contínua para $t \geq 0$, x é real. Esse caso não representa uma equação diferencial ordinária (em que $\dot{x}(t)$ depende apenas de t e da função $x(t)$). Veja que na equação (2.19) $\dot{x}(t)$ depende de t e da função x calculada no instante $t-2$. Equações desse tipo são chamadas de equação diferencial funcional com atraso.

Observa-se que a solução x para equações do tipo (2.19) não depende apenas do conhecimento da mesma em um instante inicial denotado por t_0 , como ocorre nas equações diferenciais ordinárias, mas sim do conhecimento da solução em um certo intervalo anterior a t_0 , ou seja, é preciso conhecer um certo passado da solução anterior a t_0 .

Sejam τ, H com $0 \leq \tau < \infty$, $0 < H \leq \infty$, $C_H = \{\phi \in l([-\tau, 0], \mathbb{R}^n) / \|\phi\| \leq H\}$ em que $l([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$ é o espaço de Banach das aplicações contínuas de $[-\tau, 0]$ em $\mathbb{R}^n$ com a norma $\|\phi\| = \sup_{-\tau \leq \theta \leq 0} |\phi(\theta)|$, $|\cdot|$ denotado uma norma usual do $\mathbb{R}^n$. Se $t_0 \in \mathbb{R}$, $A \geq 0$ e $x \in l([t_0 - \tau, t_0 + A], \mathbb{R}^n)$, então para qualquer $t \in [t_0, t_0 + A]$, tem-se $x_t \in l$ definida por $x_t(\theta) = x(t + \theta)$, $\theta \in [-\tau, 0]$ (HALE; LUNEL, 2013).

Definição 2.1. (HALE; LUNEL, 2013) Seja $f(t, \phi)$ uma aplicação de $[0, \infty] \times C_H$ em $\mathbb{R}^n$. Diz-se que

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t) \quad (2.20)$$

é uma equação diferencial funcional com atraso. Uma função $x(t)$ contínua em $[t_0 - \tau, t_0 + A]$, $0 < A \leq \infty$, $t_0 \geq 0$ é uma solução de (2.20) se existe a derivada de $x(t)$ em $[t_0, t_0 + A]$, $x(t_0) = x_{t_0} = \phi$ e $\dot{x}(t) = f(t, x_t)$ para $t_0 \leq t < t_0 + A$.

Observa-se que não é exigido de $x(t)$ definida em $[t_0 - \tau, t_0 + A]$ seja diferenciável em t_0 . No instante t_0 considera-se apenas a derivada à direita. Quando τ for igual a zero a equação

(2.20) reduz a uma equação diferencial ordinária (HALE; LUNEL, 2013).

Exemplo 2.3. Encontre a solução do Problema de Valor Inicial (PVI) dado por

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t-1) \\ x_t = \phi(t) = t, \quad t \in [-1, 2] \end{cases} \quad (2.21)$$

Para $t \in [0, 1]$ tem-se $t-1 \in [-1, 0]$, assim o PVI (2.21) pode ser escrito por

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \phi(t-1) \\ x_0 = \phi(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}(t) = t-1 \\ x_0 = 0 \end{cases} \quad (2.22)$$

Resolvendo (2.22), encontra-se $x(t) = \frac{t^2}{2} - t$. Portanto, a solução de (2.21) em $[-1, 1]$ é dada por

$$x(t) = \begin{cases} t, & -1 \leq t \leq 0 \\ \frac{t^2}{2} - t, & 0 \leq t \leq 1 \end{cases} \quad (2.23)$$

Agora, considere $t \in [1, 2]$. Logo, $t-1 \in [0, 1]$. De modo

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x_1(t-1) \\ x_1 = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}(t) = \frac{(t-1)^2}{2} - (t-1) \\ x_1 = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}(t) = \frac{t^2}{2} - 2t + \frac{3}{2} \\ x_1 = -\frac{1}{2} \end{cases} \quad (2.24)$$

Resolvendo (2.24), obtém-se $x(t) = \frac{t^3}{6} - t^2 + \frac{3t}{2} - \frac{7}{6}$. Portanto, a solução de (2.21) em $[-1, 2]$ é dada por

$$x(t) = \begin{cases} t, & -1 \leq t \leq 0 \\ \frac{t^2}{2} - t, & 0 \leq t \leq 1 \\ \frac{t^3}{6} - t^2 + \frac{3t}{2} - \frac{7}{6}, & 1 \leq t \leq 2 \end{cases} \quad (2.25)$$

Utilizando esse processo é possível determinar a solução (2.21) para o intervalo $[0, \infty]$.

Este método para encontrar a solução do PVI utilizado no Exemplo 2.3 não é aplicado para todas as equações diferenciais funcionais com atraso.

2.2 ESTABILIDADE DE SISTEMAS COM ATRASO NO TEMPO

Suponha que $x_t \in C_H$ para $t_0 \leq t < t_0 + A$ e $x_{t_0} = \phi$ sejam satisfeitas relativamente à equação (2.20) em $[0, \infty) \times C_H$. Suponha que a origem seja um ponto de equilíbrio de (2.20), isto é, $f(t, 0) = 0$, $t \leq 0$. As definições a seguir tratam da estabilidade do ponto de equilíbrio $x = 0$.

Definição 2.2. (GU; CHEN; KHARITONOV, 2003) Suponha $f(t, 0) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$. A solução $x = 0$ de (2.20) é

1. *estável se dado $\varepsilon > 0$ e $t_0 \geq 0$ existe um δ , δ dependendo de ε e t_0 , ou seja, $\delta = \delta(\varepsilon, t_0)$ tal que $\|\phi\| < \delta$ e $t \geq t_0$ implica $\|x_t(t_0, \phi)\| < \varepsilon$;*
2. *assintoticamente estável se for estável e a todo $t_0 \geq 0$ corresponde $b_0 = b_0(t_0) > 0$ tal que $\|\phi\| < b_0$ implica $x_t(t_0, \phi)$ tende a zero quando t tende ao infinito;*
3. *globalmente assintoticamente estável se a condição 2. for satisfeita com $\delta = \infty$;*
4. *uniformemente estável se dado $\varepsilon > 0$ e $t_0 \geq 0$ existe um $\delta = \delta(\varepsilon)$ tal que $\|\phi\| < \delta$ e $t \geq t_0$ implica $\|x_t(t_0, \phi)\| < \varepsilon$;*
5. *uniformemente assintoticamente estável se for uniformemente estável e existe $b_0 > 0$ de modo que para todo $\varepsilon > 0$ existe um $t_0(\varepsilon)$ tal que se $\|\phi\| < b_0$ e $t_0 \geq 0$, então $\|x_t(t_0, \phi)\| < \varepsilon$ para todo $t \geq t_0 + t_0(\varepsilon)$;*
6. *globalmente uniformemente assintoticamente estável se a condição 5. for satisfeita com $\delta = \infty$.*

Teorema 2.1. (Teorema Lyapunov-Krasovskii, FRIDMAN, 2014, GU; CHEN; KHARITONOV, 2003) Suponha $f(t, \phi)$ uma aplicação de $\mathbb{R} \times I[-\tau, 0]$ em $\mathbb{R}^n$ e que $u, v, w : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ funções contínuas não-decrescentes, $u(s)$ e $v(s)$ são positivas para $s > 0$ e $u(0) = v(0) = 0$. A solução $x = 0$ de (2.20) é uniformemente estável se existir um funcional contínuo $V : \mathbb{R} \times I[-\tau, 0] \rightarrow \mathbb{R}^+$ definido positivo, isto é,

$$u(\|\phi(0)\|) \leq V(t, \phi) \leq v(\|\phi\|_c),$$

e

$$\dot{V}(t, \phi) \leq -w(\|\phi(0)\|).$$

Se $w(s) > 0$, para $s > 0$, então $x = 0$ é uniformemente assintoticamente estável. Se em adição $\lim_{s \rightarrow \infty} u(s) = \infty$, então $x = 0$ é globalmente uniformemente assintoticamente estável.

Prova: Veja (GU; CHEN; KHARITONOV, 2003).

3 MODELO FUZZY TAKAGI-SUGENO

Este capítulo aborda condições para estabilidade de um sistema não linear contínuo no tempo com atrasos nas variáveis de estado. Para isso, usa-se o método proposto por Takagi-Sugeno (T-S) que permite obter uma representação de uma classe de sistemas não lineares como uma combinação convexa de sistemas lineares. Com o intuito de facilitar a leitura utiliza-se as seguintes notações:

$$\begin{aligned} \mathbb{K}_r &= \{1, 2, \dots, r\}, \quad \|x(t)\|_2 = \sqrt{x(t)^T x(t)}, \\ (A, A_d, B)(\alpha) &= \sum_{i=1}^r \alpha_i (A_i, A_{d_i}, B_i), \quad \alpha_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^r \alpha_i = 1, \quad \alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r]^T, \end{aligned} \quad (3.1)$$

em que $r = 2^s$ e s é o número de funções não lineares distintas somado ao número de termos distintos que dependam exclusivamente de parâmetros incertos da planta, como apresentado em Alves *et al.* (2016a, 2016b). Para o sistema não linear fuzzy T-S, $\alpha_i = \alpha_i(x(t))$ são funções que dependem das variáveis de estado.

O modelo fuzzy T-S, introduzido por Takagi e Sugeno (1985), utiliza regras Se-Então para descrever localmente a dinâmica de um sistema não linear. Uma regra i do modelo T-S para o sistema não linear com atraso nas variáveis de estado pode ser escrita da seguinte maneira (ANGULO; DAVID; BERNAL, 2018):

$$\begin{aligned} \text{Regra } i &- \text{ Se: } z_1(t) \text{ é } M_1^i \text{ e } z_2(t) \text{ é } M_2^i \text{ e } \dots \text{ e } z_p(t) \text{ é } M_p^i \\ \text{Então } &\begin{cases} \dot{x}(t) = A_i x(t) + A_{d_i} x(t - \tau) + B_i u(t) \\ x_t(\theta) = \phi(\theta), \quad \theta \in [-\tau, 0]. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.2)$$

em que $i \in \mathbb{K}_r$, r é o número de regra, z_1 é M_1^i e z_2 é M_2^i e $\dots$ e z_p é M_p^i é o antecedente da regra e a dinâmica $\dot{x}(t) = A_i x(t) + A_{d_i} x(t - \tau) + B_i u(t)$ é o consequente da regra sendo $x(t) \in \mathbb{R}^n$ o vetor estado, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ a entrada do controlador e $\tau \in \mathbb{R}^+$ a constante de atraso, $A_i, A_{d_i}, B_i, i \in \mathbb{K}_r$ são matrizes reais constantes de dimensões adequadas e $\phi \in l([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$ é uma função inicial para o sistema (3.2) e $l([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$ é o espaço de Banach de funções contínuas sob o intervalo $[-\tau, 0]$ com

$$\|\phi\|_\tau := \sup_{\theta \in [-\tau, 0]} \|\phi(\theta)\|.$$

Pode-se dizer que $x(t, \phi) \in \mathbb{R}^n$ é uma única solução para cada condição inicial $\phi \in l([- \tau, 0], \mathbb{R}^n)$ e $t \geq 0$. Uma solução $x(t, \phi)$ pode ser representada da seguinte maneira:

$$x(t, \phi) := \{x(t + \theta, \phi) : \theta \in [-\tau, 0]\}.$$

O modelo fuzzy T-S completo é obtido através de um processo de inferência e, nesse caso, é necessário calcular o grau de ativação de cada regra i a partir das variáveis de premissa. Considerando $M_j^i(z_j(t)) \in [0, 1]$, $j \in \mathbb{K}_p$ o grau de pertinência da variável de premissa $z_j(t)$ ao conjunto M_j^i , o grau de ativação da i -ésima regra é calculada como

$$\mu_i(z(t)) = \prod_{j=1}^p M_j^i(z_j(t)),$$

em que $z(t) = [z_1(t) \ z_2(t) \ \cdots \ z_p(t)]^T$. Do fato de $M_j^i(z_j(t)) \in [0, 1]$ segue que $\mu_i(z(t)) \in [0, 1]$.

Seja r o número de regras que compõe o sistema fuzzy. Ele é inferido como a soma ponderada dos r modelos locais usando o grau de ativação de cada regra. Denotando $\alpha(z(t)) = \alpha$ tem-se, para r regras como dada em (3.2), a descrição completa do sistema fuzzy dada por

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \alpha_i(z(t)) \{A_i x(t) + A_{d_i} x(t - \tau) + B_i u(t)\} \\ x_t(\theta) = \phi(\theta), \theta \in [-\tau, 0]. \end{cases} \quad (3.3)$$

com o grau de pertinência normalizado dado por

$$\alpha_i = \frac{\mu_i(z(t))}{\sum_{i=1}^r \mu_i(z(t))}.$$

Observa-se que $\alpha_i \geq 0$ e $\sum_{i=1}^r \alpha_i = 1$, pois $\mu_i(z(t)) \in [0, 1]$. Assim, considerando $z(t) = x(t)$ e usando a notação dada em (3.1) no sistema (3.3) tem-se, supondo que $B_i = B$, $i \in \mathbb{K}_r$, que

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(\alpha)x(t) + A_d(\alpha)x(t - \tau) + Bu(t) \\ x_t(\theta) = \phi(\theta), \theta \in [-\tau, 0]. \end{cases} \quad (3.4)$$

3.1 CONTROLE CHAVEADO DE MODELOS FUZZY T-S COM ATRASO NAS VARIÁVEIS DE ESTADO E COM A MATRIZ B CONSTANTE

Considere um modelo fuzzy T-S com atraso variável descrito por

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(\alpha)x(t) + A_d(\alpha)x(t - d(t)) + Bu(t) \\ x_t(\theta) = \phi(\theta), \theta \in [-\tau, 0] \end{cases} \quad (3.5)$$

em que $x(t) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor estado, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ é a entrada do controlador, $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $A_{d_i} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ são matrizes reais constantes para todo $i \in \mathbb{K}_r$, $d(t)$ é uma função calculada no instante t satisfazendo $0 < d(t) \leq \tau$ e $\dot{d}(t) \leq \rho < 1$, $\tau \in \mathbb{R}$, $\rho \in \mathbb{R}$.

O controle chaveado aplicado em (3.5) utiliza em sua construção a seguinte definição.

Definição 3.1. (SOUZA et al., 2013) Considere o conjunto de índices $\Omega_H(t)$ definido por

$$\Omega_H(t) = \arg \min_{i \in \mathbb{K}_N} x^T(t) H_i x(t) = \{j \in \mathbb{K}_N : x^T(t) H_j x(t) = \min_{i \in \mathbb{K}_N} x^T(t) H_i x(t)\}$$

sendo $H_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $i \in \mathbb{K}_N$ e $x(t) \in \mathbb{R}^n$. O menor índice $j \in \Omega_H(t)$ será denotado por

$$\arg \min_{i \in \mathbb{K}_N}^* \{x^T(t) H_i x(t)\} = \min_{j \in \Omega_H(t)} j.$$

O conjunto $\Omega_H(t)$ da Definição 3.1 pode conter mais de um elemento, mas o uso de $\arg \min^*$ faz com que seja escolhido apenas um elemento. Assim, utilizando a Definição 3.1 a lei de controle chaveada é dada por

$$\begin{aligned} u(t) &= u_\sigma = K_\sigma x(t) + J_\sigma x(t - d(t)) \\ (\sigma) &= \arg \min_{s \in \mathbb{K}_r}^* \xi^T \left\{ \begin{bmatrix} 2PBK_s & PBJ_s \\ * & O \end{bmatrix} \right\} \xi \end{aligned} \quad (3.6)$$

em que $\xi^T = \begin{bmatrix} x(t)^T & x(t - d(t))^T \end{bmatrix}$ e O é a matriz nula. Substituindo (3.6) em (3.5), tem-se

$$\dot{x}(t) = \mathcal{A}_\alpha x(t) + \mathcal{A}_{d_\alpha} x(t - d(t)) \quad (3.7)$$

sendo $\mathcal{A}_\alpha = A(\alpha) + BK_\sigma$ e $\mathcal{A}_{d_\alpha} = A_d(\alpha) + BJ_\sigma$.

Na demonstração do Teorema 3.1, proposto neste capítulo, que garante a estabilidade assintótica do ponto de equilíbrio $x(t) = 0$ de (3.7) são utilizados os Lemas 2.1 e 3.1.

Lema 3.1. Dado um sistema (3.5) sujeito à lei de controle (3.6), suponha que existam as matrizes simétricas definidas positivas $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\beta \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$ e o candidato ao funcional de Lyapunov-Krasoviskii (L-K)

$$V(x(t)) = x(t)^T P x(t) + \int_{t-d(t)}^t e^{2\beta(s-t)} x(s)^T R x(s) ds.$$

Então, vale a seguinte desigualdade

$$\dot{V}(x(t)) + 2\beta V(x(t)) \leq \xi^T \begin{bmatrix} 2P(A(\alpha) + BK_\sigma) + R + 2\beta P & P(A_d(\alpha) + BJ_\sigma) \\ * & -e^{-2\beta\tau}(1-\rho)R \end{bmatrix} \xi. \quad (3.8)$$

Prova: Considere o candidato ao funcional de L-K

$$V(x(t)) = V_1(x(t)) + V_2(x(t)) \quad (3.9)$$

em que

$$\begin{aligned} V_1(x(t)) &= x(t)^T P x(t), \\ V_2(x(t)) &= \int_{t-d(t)}^t e^{2\beta(s-t)} x(s)^T R x(s) ds, \end{aligned}$$

Derivando em relação ao tempo $V_1(x(t))$ descrita na equação (3.9), tem-se

$$\dot{V}_1(x(t)) = 2x(t)^T P \dot{x}(t). \quad (3.10)$$

Derivando em relação ao tempo $V_2(x(t))$ e utilizando o Lema 2.1, encontram-se

$$\begin{aligned} \dot{V}_2(x(t)) &= 1 \cdot e^{2\beta(t-t)} x(t)^T R x(t) - (1 - \dot{d}(t)) e^{-2\beta d(t)} x(t-d(t))^T R x(t-d(t)) \\ &\quad - 2\beta \int_{t-d(t)}^t e^{2\beta(s-t)} x(s)^T R x(s) ds \\ \dot{V}_2(x(t)) &= x(t)^T R x(t) - (1 - \dot{d}(t)) e^{-2\beta d(t)} x(t-d(t))^T R x(t-d(t)) \\ &\quad - 2\beta \int_{t-d(t)}^t e^{2\beta(s-t)} x(s)^T R x(s) ds. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Como $0 < d(t) \leq \tau$ e $\dot{d}(t) \leq \rho < 1$ e utilizando (3.10), (3.11) e (3.7) a derivada de (3.9) em relação ao tempo pode ser escrita da seguinte maneira

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) &\leq 2x(t)^T P \mathcal{A}_\alpha x(t) + x(t)^T R x(t) + 2x(t)^T P \mathcal{A}_{d\alpha} x(t-d(t)) \\ &\quad - e^{-2\beta\tau}(1-\rho)x(t-d(t))^T R x(t-d(t)) - 2\beta \int_{t-d(t)}^t e^{-2\beta(s-t)} x(s)^T R x(s) ds. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Multiplicando o candidato de L-K descrito em (3.9) por -2β , tem-se

$$-2\beta V(x(t)) + 2\beta x(t)^T P x(t) = -2\beta \int_{t-d(t)}^t e^{2\beta(s-t)} x(s)^T R x(s) ds \quad (3.13)$$

e substituindo (3.13) em (3.12), encontra-se

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) + 2\beta V(x(t)) &\leq 2x(t)^T P \mathcal{A}_\alpha x(t) + x(t)^T R x(t) + 2x(t)^T P \mathcal{A}_{d\alpha} x(t-d(t)) \\ &\quad + 2\beta x(t)^T P x(t) - e^{-2\beta\tau}(1-\rho)x(t-d(t))^T R x(t-d(t)), \end{aligned} \quad (3.14)$$

ou seja,

$$\dot{V}(x(t)) + 2\beta V(x(t)) \leq \xi^T \begin{bmatrix} 2P(A(\alpha) + BK_\sigma) + R + 2\beta P & P(A_d(\alpha) + BJ_\sigma) \\ * & -e^{-2\beta\tau}(1-\rho)R \end{bmatrix} \xi. \quad (3.15)$$

concluindo a prova do Lema.

O resultado a seguir garante a estabilidade assintótica do ponto de equilíbrio $x(t) = 0$ do sistema descrito em (3.7).

Teorema 3.1. *Considere um modelo fuzzy T-S descrito por (3.5) e sejam $\beta \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$, $\rho \in \mathbb{R}$, $\rho < 1$ e $\tau \in \mathbb{R}$ conhecidos. Suponha a existência de matrizes simétricas definidas positivas $X, \bar{R} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, e matrizes $M_i, N_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$ para todo $i \in \mathbb{K}_r$ tais que*

$$\begin{bmatrix} \Phi & A_{d_i}X + BN_i \\ * & -e^{-2\beta\tau}(1-\rho)\bar{R} \end{bmatrix} < 0, \quad (3.16)$$

sejam satisfeitas para todo $i \in \mathbb{K}_r$. Então, para quaisquer $d(t)$ e $\dot{d}(t)$, tais que $\dot{d}(t) < \rho$ e $0 < d(t) \leq \tau$, a lei de controle (3.6) aplicada ao sistema (3.5) torna a origem assintoticamente estável com taxa de decaimento maior ou igual a β sendo que $K_i = M_i X^{-1}$ e $J_i = N_i X^{-1}$, $\Phi = A_i X + X A_i^T + B M_i + M_i^T B^T + \bar{R} + 2\beta X$ e $i \in \mathbb{K}_r$.

Demonstração: Pré e pós-multiplicando (3.16) por $\text{diag}(X^{-1}, X^{-1})$, com $X^{-1} = P$ e substituindo $K_i = M_i X^{-1}$, $J_i = N_i X^{-1}$, $X^{-1} \bar{R} X^{-1} = R$, obtém-se

$$\begin{bmatrix} \overline{\Phi} & PA_{d_i} + PBJ_i \\ * & -e^{-2\beta\tau}(1-\rho)R \end{bmatrix} < 0 \quad (3.17)$$

em que $\overline{\Phi} = PA_i + A_i^T P + PBK_i + K_i^T B^T P + R + 2\beta P$ e $i \in \mathbb{K}_r$. Multiplicando a desigualdade (3.17) por α_i , em que $\alpha_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^r \alpha_i = 1$, e somando as desigualdades resultantes de 1 até r encontra-se

$$\begin{bmatrix} \overline{\overline{\Phi}} & PA_d(\alpha) + \sum_{i=1}^r \alpha_i PBJ_i \\ * & -e^{-2\beta\tau}(1-\rho)R \end{bmatrix} < 0 \quad (3.18)$$

sendo que $\overline{\overline{\Phi}} = PA(\alpha) + A(\alpha)^T P + \sum_{i=1}^r \alpha_i (PBK_i + K_i^T B^T P) + R + 2\beta P$.

Para $\xi \neq 0$, pré-multiplicando (3.18) por ξ^T e pós-multiplicando (3.18) por ξ , tem-se

$$\xi^T \begin{bmatrix} \overline{\overline{\Phi}} & PA_d(\alpha) + \sum_{i=1}^r \alpha_i PBJ_i \\ * & -e^{-2\beta\tau}(1-\rho)R \end{bmatrix} \xi < 0. \quad (3.19)$$

A partir da lei de controle (3.6) e sabendo que o mínimo em um conjunto de números reais é menor ou igual a qualquer combinação convexa dos elementos deste conjunto, observa-se da definição da lei de chaveamento em (3.6) que

$$\xi^T \begin{bmatrix} 2PBK_\sigma & PBJ_\sigma \\ * & O \end{bmatrix} \xi \leq \sum_{i=r}^r \alpha_i \xi^T \begin{bmatrix} 2PBK_i & PBJ_i \\ * & O \end{bmatrix} \xi. \quad (3.20)$$

Somando

$$\xi^T \begin{bmatrix} 2PA(\alpha) + R + 2\beta P & PA_d(\alpha) \\ * & -e^{-2\beta\tau}(1-\rho)R \end{bmatrix} \xi$$

em ambos os lados de (3.20), obtém-se para $\xi \neq 0$

$$\begin{aligned} \xi^T \begin{bmatrix} 2P(A(\alpha) + BK_\sigma) + R + 2\beta P & P(A_d(\alpha) + BJ_\sigma) \\ * & -e^{-2\beta\tau}(1-\rho)R \end{bmatrix} \xi &\leq \\ \xi^T \begin{bmatrix} \overline{\overline{\Phi}} & PA_d(\alpha) + \sum_{i=1}^r \alpha_i PBJ_i \\ * & -e^{-2\beta\tau}(1-\rho)R \end{bmatrix} \xi &< 0. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Comparando (3.21) com o Lema 3.1 conclui-se para $x(t) \neq 0$

$$\dot{V}(x(t)) < -2\beta V(x(t))$$

finalizando a demonstração do teorema.

Agora, considere a lei de controle

$$u(t) = Kx(t) + Jx(t - d(t)), \quad (3.22)$$

em que $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $J \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Aplicando (3.22) em (3.5), obtém-se

$$\dot{x}(t) = \overline{\mathcal{A}}_\alpha x(t) + \overline{\mathcal{A}}_{d_\alpha} x(t - d(t)) \quad (3.23)$$

sendo $\overline{\mathcal{A}}_\alpha = A(\alpha) + BK$ e $\overline{\mathcal{A}}_{d_\alpha} = A_d(\alpha) + BJ$.

Nestas condições é possível enunciar o seguinte Corolário.

Corolário 3.1. *Considere um sistema descrito por um modelo fuzzy T-S (3.23) sendo $\beta, \rho \in \mathbb{R}$, $\rho < 1$, $\beta > 0$, $\tau \in \mathbb{R}$ conhecidos. Suponha a existência de matrizes simétricas positivas definidas $X, R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e matrizes $M, N \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tal que*

$$\begin{bmatrix} \Pi & A_{d_i}X + BN \\ * & -e^{-2\beta\tau}(1-\rho)R \end{bmatrix} < 0, \quad (3.24)$$

$$i = 1, \dots, r$$

sejam satisfeitas para todo $i \in \mathbb{K}_r$. Então, para quaisquer $0 < d(t) \leq \tau$ a lei de controle (3.22) aplicada ao sistema (3.23) torna a origem assintoticamente estável com taxa de decaimento maior ou igual a β sendo que $K = MX^{-1}$ e $J = NX^{-1}$, $\Pi = A_iX + XA_i^T + BM + M^TB^T + R + 2\beta X$.

Demonstração: A prova é similar ao do Teorema 3.1

Para obter a solução das LMIs do exemplo numérico, a seguir, utiliza-se o software MatLab com o solver SeDuMi e a interface Yalmip. Com o MatLab/Simulink é possível obter a trajetória das variáveis de estado desse sistema.

3.2 EXEMPLO NUMÉRICO

Seja

$$\dot{x}(t) = A(\alpha)x + A_d(\alpha)x(t - d(t)) + Bu(t), \quad (3.25)$$

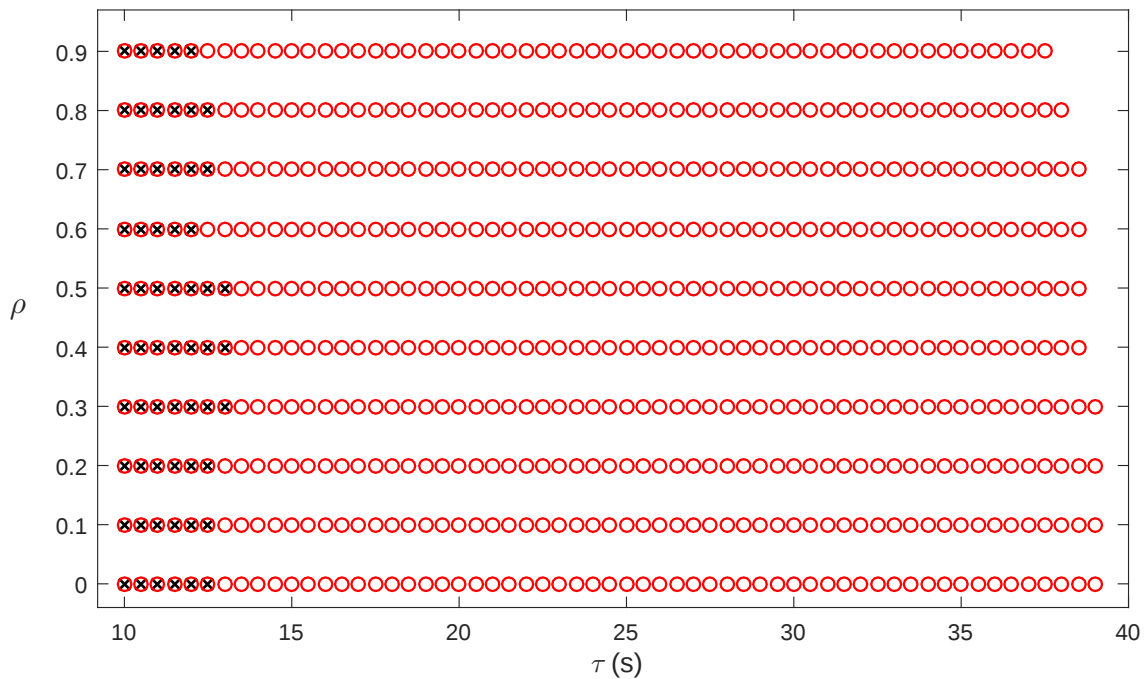
um sistema fuzzy T-S com atraso no tempo, $0 < d(t) \leq \tau$, $\dot{d}(t) < \rho$ e B uma matriz constante. O Exemplo 3.1 utiliza o Teorema 3.1 e o Corolário 3.1 para comprovar que o Teorema 3.1 é menos conservador do que o Corolário 3.1.

Exemplo 3.1. Considere o sistema (3.25) com as seguintes matrizes

$$A_1 = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0,1 & -2 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_{d_1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_{d_2} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Considere as restrições $10 \leq \tau \leq 50$, $0 \leq \rho \leq 0,9$ e $\beta = 0,9$. Utilizando o Teorema 3.1 e o Corolário 3.1 é possível obter a região de factibilidade que pode ser vista na Figura 1. Observe que a região de factibilidade utilizando o Teorema 3.1 é maior do que a região obtida com o Corolário 3.1.

Figura 1 - Região de factibilidade: Teorema 3.1 (○) e Corolário 3.1 (×).



Fonte: próprio autor.

Com os parâmetros $\tau = 20$ s, $\rho = 0,3$, $\beta = 0,9$ e usando o Teorema 3.1, obtém-se

$$X^{-1} = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 1.0000 \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

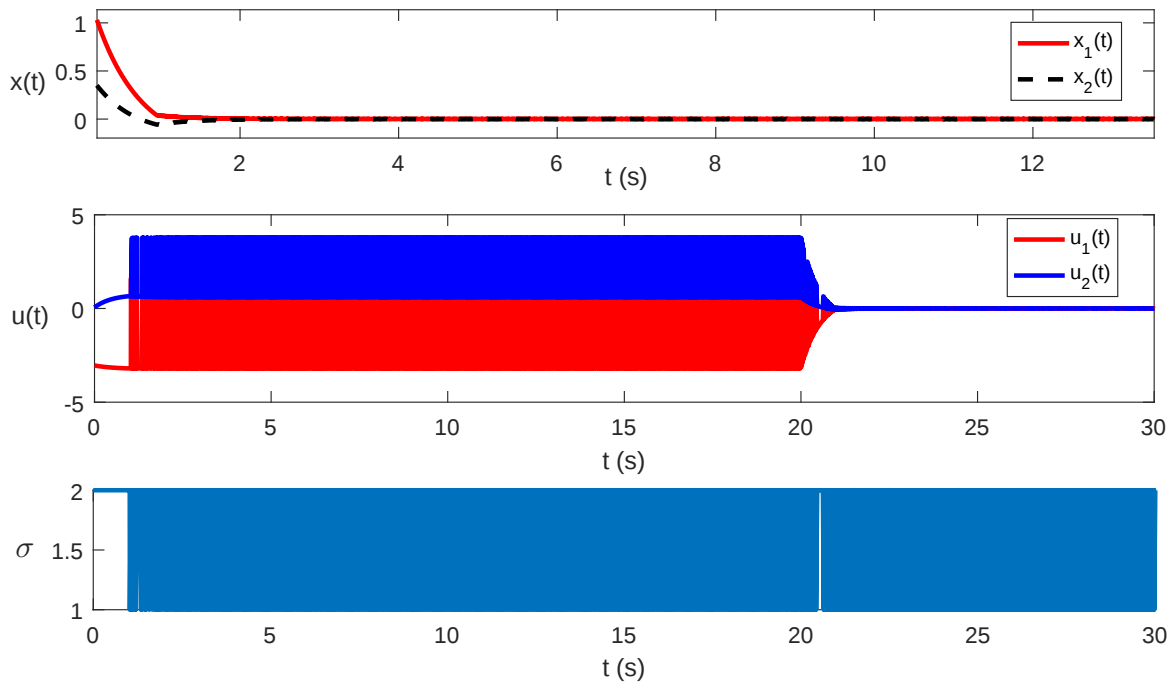
e

$$K_1 = \begin{bmatrix} 0.1000 & 0.0000 \\ -1.1000 & 0.1000 \end{bmatrix}, \quad K_2 = \begin{bmatrix} 0.1000 & 0.0000 \\ -0.0000 & -0.9000 \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

$$J_1 = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0.0000 \\ 2.0000 & 1.0000 \end{bmatrix}, \quad J_2 = \begin{bmatrix} -2.0000 & -0.0000 \\ 0.0000 & 1.0000 \end{bmatrix}. \quad (3.28)$$

O sistema (3.25) com a lei de controle (3.6) foi simulado com uma condição funcional inicial dada por $x(\theta) = [1, 6 \ 0, 6]^T$, $\forall \theta \in [-20, 0]$, com as funções de pertinência $\alpha_1(t) = \frac{1}{1 + e^{x_1(t)+0,5}}$, $\alpha_2(t) = 1 - \alpha_1(t)$, com os ganhos dados por (3.27), (3.28) e a matriz (3.26) obtendo a resposta temporal em malha fechada. A Figura 2 mostra o desempenho das variáveis de estado, o respectivo sinal de controle denotado por $u(t)$ e o índice de chaveamento.

Figura 2 - Trajetórias de $x(t)$ do sistema (3.25) sob a lei de controle (3.6), $\tau = 20$ s e o índice de chaveamento σ .



Fonte: próprio autor.

3.3 CONCLUSÕES PARCIAIS

Neste capítulo foi proposto um novo método de projeto de controle chaveado para sistemas fuzzy T-S com atraso no tempo em que a matriz B deste sistema é constante. Os resultados que garantem a estabilidade do sistemas apresentam taxa de decaimento para os controladores chaveado e de ganho único. Além disso, as LMIs utilizadas para obter os ganhos do controlador chaveado são menos conservadoras do que as LMIs do controlador de ganho único como pode ser visto na Figura 1, em que a região de factibilidade utilizando o Teorema 3.1 é bem maior quando comparada com o Corolário 3.1. Como o Exemplo 3.1 não apresentou o modelo não linear com atraso, pois é um exemplo numérico, a simulação para obter a resposta temporal das variáveis de estado foi encontrada usando o MatLab/Simulink utilizando o controlador chaveado e as funções de pertinências descritas no exemplo.

4 CONTROLE CHAVEADO DE MODELOS FUZZY T-S COM A MATRIZ B DEPENDENTE DE α , ATRASO NO TEMPO E TAXA DE DECAIMENTO

Este capítulo aborda uma nova lei de controle chaveada para sistemas não lineares com atraso no tempo em que a matriz B possui parâmetros incertos que são representados por modelos fuzzy T-S. Além disso, é apresentado um controlador com ganhos constantes com intuito de comparar a região de factibilidade deste sistema utilizando esses dois controladores. Observa-se que a região de factibilidade com controle chaveado é maior do que a região de factibilidade com controle de ganho constante, comprovando a eficácia do projeto de controle chaveado proposto nesta tese. Este resultado pode ser visto nas Figuras 3, 4 e 7.

São necessários alguns lemas e teoremas para obter o principal resultado deste capítulo (Teorema 4.2) que garante a estabilidade do sistema não linear com controle chaveado.

Lema 4.1. (GUAN; CHEN, 2004) Para quaisquer matrizes reais X_i, Y_i , $i \in \mathbb{K}_r$ e $S = S^T > 0$ com dimensões apropriadas, valem a desigualdade:

$$2 \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i \alpha_j X_i^T S Y_j \leq \sum_{i=1}^r \alpha_i (X_i^T S X_i + Y_i^T S Y_i) \quad (4.1)$$

sendo $\alpha_i \geq 0$, $\alpha_j \geq 0$, $\sum_{i=1}^r \alpha_i = 1$ e $\sum_{j=1}^r \alpha_j = 1$.

Prova: Como $S = S^T > 0$ é verdade que

$$0 \leq (X_i - Y_j)^T S (X_i - Y_j) = X_i^T S X_i - X_i^T S Y_j - Y_j^T S X_i + Y_j^T S Y_j, \quad i, j \in \mathbb{K}_r,$$

ou seja,

$$X_i^T S Y_j + Y_j^T S X_i \leq X_i^T S X_i + Y_j^T S Y_j. \quad (4.2)$$

Seja $x(t) \in \mathbb{R}^n$, pré-multiplicando a desigualdade (4.2) por $x(t)^T$ e pós-multiplicando por $x(t)$, encontra-se

$$\begin{aligned} x(t)^T \left(X_i^T S Y_j + Y_j^T S X_i \right) x(t) &\leq x(t)^T \left(X_i^T S X_i + Y_j^T S Y_j \right) x(t) \\ x(t)^T \left(2 X_i^T S Y_j \right) x(t) &\leq x(t)^T \left(X_i^T S X_i \right) x(t) + x(t)^T \left(Y_j^T S Y_j \right) x(t). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Multiplicando a desigualdade (4.3) por $\alpha_1 \alpha_j$ e somando de 1 até r , tem-se

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i \alpha_j x(t)^T \left(2X_i^T S Y_j \right) x(t) &\leq \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i \alpha_j \left\{ x(t)^T \left(X_i^T S X_i \right) x(t) + x(t)^T \left(Y_j^T S Y_j \right) x(t) \right\} \\ \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i \alpha_j x(t)^T \left(2X_i^T S Y_j \right) x(t) &\leq \sum_{i=1}^r \alpha_i x(t)^T \left(X_i^T S X_i \right) x(t) + \sum_{j=1}^r \alpha_j x(t)^T \left(Y_j^T S Y_j \right) x(t) \\ &= \sum_{i=1}^r \alpha_i x(t)^T \left(X_i^T S X_i + Y_i^T S Y_i \right) x(t). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Portanto,

$$2 \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i \alpha_j X_i^T S Y_j \leq \sum_{i=1}^r \alpha_i \left(X_i^T S X_i + Y_i^T S Y_i \right). \quad (4.5)$$

Considere um modelo fuzzy T-S descrito em (3.5) com $u(t) = 0$, ou seja,

$$\dot{x}(t) = A(\alpha)x(t) + A_d(\alpha)x(t - d(t)) \quad (4.6)$$

Lema 4.2. Dado um modelo fuzzy T-S descrito por (4.6) com ρ , β e τ escalares conhecidos, $\rho < 1$, $\beta > 0$, $0 < d(t) \leq \tau$ e $\dot{d}(t) \leq \rho$. Suponha que existam as matrizes simétricas definidas positivas $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e o candidato de L-K

$$V(x(t)) = x(t)^T P x(t) + \int_{t-d(t)}^t e^{2\beta(s-t)} x(s)^T R x(s) ds + \tau \int_{t-\tau}^t \int_{\theta}^t e^{2\beta(s-t)} \dot{x}(s)^T S \dot{x}(s) ds d\theta.$$

Então, vale a seguinte desigualdade

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) + 2\beta V(x(t)) &\leq \sum_{i=1}^r \alpha_i \xi^T \begin{bmatrix} 2PA_i + \Psi_{22} & PA_{d_i} + e^{-2\beta\tau} S \\ * & -e^{-2\beta\tau} [(1-\rho)R + S] \end{bmatrix} \xi \\ &\quad + \tau^2 \xi^T \begin{bmatrix} A_i^T \\ A_{d_i}^T \end{bmatrix} S \begin{bmatrix} A_i & A_{d_i} \end{bmatrix} \xi, \end{aligned} \quad (4.7)$$

com $\xi = [x(t)^T \ x(t - d(t))^T]^T$ e $\Psi_{22} = R - e^{-2\beta\tau} S + 2\beta P$.

Prova: Considere o candidato de L-K

$$V(x(t)) = V_1(x(t)) + V_2(x(t)) + V_3(x(t)) \quad (4.8)$$

em que

$$\begin{aligned} V_1(x(t)) &= x(t)^T P x(t), \\ V_2(x(t)) &= \int_{t-d(t)}^t e^{2\beta(s-t)} x(s)^T R x(s) ds, \\ V_3(x(t)) &= \tau \int_{t-\tau}^t \int_{\theta}^t e^{2\beta(s-t)} \dot{x}(s)^T S \dot{x}(s) ds d\theta \end{aligned}$$

Derivando $V_1(x(t))$ descrita na equação (4.8), tem-se

$$\dot{V}_1(x(t)) = 2x(t)^T P \dot{x}(t). \quad (4.9)$$

Derivando $V_2(x(t))$ descrita em (4.8) e utilizando o Lema 2.1, encontram-se

$$\begin{aligned} \dot{V}_2(x(t)) &= 1 \cdot e^{2\beta(t-t)} x(t)^T R x(t) - (1 - \dot{d}(t)) e^{-2\beta d(t)} x(t-d(t))^T R x(t-d(t)) \\ &\quad - 2\beta \int_{t-d(t)}^t e^{2\beta(s-t)} x(s)^T R x(s) ds \\ \dot{V}_2(x(t)) &= x(t)^T R x(t) - (1 - \dot{d}(t)) e^{-2\beta d(t)} x(t-d(t))^T R x(t-d(t)) \\ &\quad - 2\beta \int_{t-d(t)}^t e^{2\beta(s-t)} x(s)^T R x(s) ds. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Derivando $V_3(x(t))$ descrita em (4.8) e utilizando o Lema 2.2, obtém-se

$$\begin{aligned} \dot{V}_3(x(t)) &= \tau^2 \dot{x}(t)^T S \dot{x}(t) - \tau \int_{t-\tau}^t e^{2\beta\tau(s-t)} \dot{x}(s)^T S \dot{x}(s) ds \\ &\quad - 2\beta\tau \int_{t-\tau}^t \int_{\theta}^t e^{2\beta(s-t)} \dot{x}(s)^T S \dot{x}(s) ds d\theta. \\ \dot{V}_3(x(t)) &= \tau^2 \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i \alpha_j \xi^T \begin{bmatrix} A_i^T \\ A_{d_i}^T \end{bmatrix} S \begin{bmatrix} A_j & A_{d_j} \end{bmatrix} \xi - \tau \int_{t-\tau}^t e^{2\beta\tau(s-t)} \dot{x}(s)^T S \dot{x}(s) ds \\ &\quad - 2\beta\tau \int_{t-\tau}^t \int_{\theta}^t e^{2\beta(s-t)} \dot{x}(s)^T S \dot{x}(s) ds d\theta. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Aplicando o Lema 4.1 em (4.11), encontra-se

$$\begin{aligned} \dot{V}_3(x(t)) &\leq \tau^2 \sum_{i=1}^r \alpha_i \xi^T \begin{bmatrix} A_i^T \\ A_{d_i}^T \end{bmatrix} S \begin{bmatrix} A_i & A_{d_i} \end{bmatrix} \xi - \tau \int_{t-\tau}^t e^{2\beta\tau(s-t)} \dot{x}(s)^T S \dot{x}(s) ds \\ &\quad - 2\beta\tau \int_{t-\tau}^t \int_{\theta}^t e^{2\beta(s-t)} \dot{x}(s)^T S \dot{x}(s) ds d\theta. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Considerando que para todo $s \in [t - \tau, t]$ é verdade que $e^{-2\beta\tau} \leq e^{2\beta(s-t)} \leq 1$, ou seja, $-1 \leq -e^{2\beta(s-t)} \leq -e^{-2\beta\tau}$, e do fato de $d(t) \leq \tau$ tem-se $-\frac{\tau}{d(t)} \leq -1$ e $t - \tau \leq t - d(t)$, então

$$\begin{aligned} -\tau \int_{t-\tau}^t e^{2\beta(s-t)} \dot{x}(s)^T S \dot{x}(s) ds &\leq -\tau \int_{t-d(t)}^t e^{2\beta(s-t)} \dot{x}(s)^T S \dot{x}(s) ds \\ &\leq -\tau \int_{t-d(t)}^t e^{-2\beta\tau} \dot{x}(s)^T S \dot{x}(s) ds. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Utilizando a desigualdade de Jensen, descrita em (2.18), no lado direito de (4.13), tem-se

$$\begin{aligned} -\tau \int_{t-d(t)}^t e^{-2\beta\tau} \dot{x}(s)^T S \dot{x}(s) ds &\leq -\frac{\tau}{d(t)} e^{-2\beta\tau} \int_{t-d(t)}^t \dot{x}(s)^T ds S \int_{t-d(t)}^t \dot{x}(s) ds \\ &\leq -e^{-2\beta\tau} [x(t)^T - x(t-d(t))^T] S [x(t) - x(t-d(t))]. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Das desigualdades (4.13) e (4.14) conclui-se

$$-\tau \int_{t-\tau}^t e^{2\beta(s-t)} \dot{x}(s)^T S \dot{x}(s) ds \leq -e^{-2\beta\tau} [x(t)^T - x(t-d(t))^T] S [x(t) - x(t-d(t))]. \quad (4.15)$$

Substituindo (4.15) em (4.12), tem-se

$$\begin{aligned} \dot{V}_3(x(t)) &\leq \tau^2 \sum_{i=1}^r \alpha_i \xi^T \begin{bmatrix} A_i^T \\ A_{d_i}^T \end{bmatrix} S \begin{bmatrix} A_i & A_{d_i} \end{bmatrix} \xi - e^{-2\beta\tau} [x(t)^T - x(t-d(t))^T] S [x(t) - x(t-d(t))] \\ &\quad - 2\beta\tau \int_{t-\tau}^t \int_{\theta}^t e^{2\beta(s-t)} \dot{x}(s)^T S \dot{x}(s) ds d\theta. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Assim, da desigualdade (4.16) e das igualdades (4.10) e (4.9), sabendo que $0 < d(t) \leq \tau$ e $\dot{d}(t) \leq \rho$ a derivada de $V(x(t))$ é dada por

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) &\leq 2x(t)^T P \dot{x}(t) + x(t)^T R x(t) - (1 - \rho) e^{-2\beta\tau} x(t-d(t))^T R x(t-d(t)) \\ &\quad + \tau^2 \sum_{i=1}^r \alpha_i \xi^T \begin{bmatrix} A_i^T \\ A_{d_i}^T \end{bmatrix} S \begin{bmatrix} A_i & A_{d_i} \end{bmatrix} \xi - e^{-2\beta\tau} [x(t)^T - x(t-d(t))^T] S [x(t) - x(t-d(t))] \\ &\quad - 2\beta \int_{t-d(t)}^t e^{2\beta(s-t)} x(s)^T R x(s) ds - 2\beta\tau \int_{t-\tau}^t \int_{\theta}^t e^{2\beta(s-t)} \dot{x}(s)^T S \dot{x}(s) ds d\theta. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Como o candidato de L-K descrita em (4.8) pode ser reescrita por

$$\begin{aligned} -2\beta V(x(t)) + 2\beta x(t)^T P x(t) = & -2\beta \int_{t-d(t)}^t e^{2\beta(s-t)} x(s)^T R x(s) ds \\ & -2\beta \tau \int_{t-\tau}^t \int_{\theta}^t e^{2\beta(s-t)} \dot{x}(s)^T S \dot{x}(s) ds d\theta \end{aligned} \quad (4.18)$$

e substituindo (4.18) em (4.17), encontra-se

$$\dot{V}(x(t)) + 2\beta V(x(t)) \leq \sum_{i=1}^r \alpha_i \xi^T \left\{ \begin{bmatrix} 2PA_i + \Psi_{22} & PA_{d_i} + e^{-2\beta\tau} S \\ * & \Psi_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tau A_i^T \\ \tau A_{d_i}^T \end{bmatrix} S \begin{bmatrix} \tau A_i & \tau A_{d_i} \end{bmatrix} \right\} \xi \quad (4.19)$$

sendo que $\Psi_{33} = -e^{-2\beta\tau}[(1-\rho)R + S]$ concluindo a prova.

Teorema 4.1. *A origem do modelo fuzzy T-S descrito em (4.6) com escalares $\rho, \beta \in \mathbb{R}$ com $\rho < 1, \beta > 0$ conhecidos é assintoticamente estável com taxa de decaimento maior ou igual a β para todo $0 < d(t) \leq \tau, \dot{d}(t) < \rho$, se existirem matrizes simétricas definidas positivas $P, R, S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tais que a LMI*

$$\begin{bmatrix} A_i^T P + PA_i + \Psi_{22} & PA_{d_i} + e^{-2\beta\tau} S & \tau A_i^T S \\ * & \Psi_{33} & \tau A_{d_i}^T S \\ * & * & -S \end{bmatrix} < 0 \quad (4.20)$$

é satisfeita para todo $i \in \mathbb{K}_r$.

Prova: Supondo que a condição no Teorema 4.1 seja satisfeita e aplicando o complemento de Schur em relação à última linha e coluna de (4.20), obtém-se

$$\begin{bmatrix} A_i^T P + PA_i + \Psi_{22} & PA_{d_i} + e^{-2\beta\tau} S \\ * & \Psi_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tau A_i^T S \\ \tau A_{d_i}^T S \end{bmatrix} S^{-1} \begin{bmatrix} \tau S A_i & \tau S A_{d_i} \end{bmatrix} < 0. \quad (4.21)$$

Multiplicando as desigualdades resultantes de (4.21) por α_i e fazendo a soma de i até r , encontra-se

$$\sum_{i=1}^r \alpha_i \left\{ \begin{bmatrix} A_i^T P + PA_i + \Psi_{22} & PA_{d_i} + e^{-2\beta\tau} S \\ * & \Psi_{33} \end{bmatrix} + \tau^2 \begin{bmatrix} A_i^T \\ A_{d_i}^T \end{bmatrix} S \begin{bmatrix} A_i & A_{d_i} \end{bmatrix} \right\} < 0. \quad (4.22)$$

Para $\xi \neq 0$, pré-multiplicando (4.22) por ξ^T e pós-multiplicando por ξ , obtém-se

$$\sum_{i=1}^r \alpha_i \xi^T \left\{ \begin{bmatrix} A_i^T P + P A_i + \Psi_{22} & P A_{d_i} + e^{-2\beta\tau} S \\ * & \Psi_{33} \end{bmatrix} + \tau^2 \begin{bmatrix} A_i^T \\ A_{d_i}^T \end{bmatrix} S \begin{bmatrix} A_i & A_{d_i} \end{bmatrix} \right\} \xi < 0. \quad (4.23)$$

Substituindo (4.23) em (4.19) encontra-se

$$\dot{V}(x(t)) + 2\beta V(x(t)) < 0,$$

isto é,

$$\dot{V}(x(t)) < -2\beta V(x(t))$$

concluindo a prova do Teorema.

Lema 4.3. (Lema da Projeção, TUAN; APKARIAN; NGUYEN, 2001) Dados $\Phi \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\Lambda \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $\Upsilon \in \mathbb{R}^{r \times n}$, existe uma matriz $\Omega \in \mathbb{R}^{r \times m}$ tal que

$$\Phi + \Lambda^T \Omega^T \Upsilon + \Upsilon^T \Omega \Lambda < 0 \quad (4.24)$$

se, e somente, se

$$N_\Lambda^T \Phi N_\Lambda < 0 \text{ e } N_\Upsilon^T \Phi N_\Upsilon < 0. \quad (4.25)$$

com $\Lambda N_\Lambda = 0$ e $\Upsilon N_\Upsilon = 0$.

Prova: Veja (TUAN; APKARIAN; NGUYEN, 2001).

Note que N_Λ e N_Υ são as bases dos espaços nulos Λ e Υ respectivamente.

Lema 4.4. A origem do modelo fuzzy T-S descrito por (4.6) com escalares $\tau, \rho, \beta \in \mathbb{R}$ com $\beta > 0$ conhecidos é assintoticamente estável com taxa de decaimento maior ou igual a β para todo $0 < d(t) \leq \tau, \dot{d}(t) < \rho$, se existirem matrizes simétricas definidas positivas P, R, S, V_1, V_2 , e $V_3 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tais que a LMI

$$\begin{bmatrix} -V_1 - V_1^T & P - V_2^T + V_1 A_i & -V_3^T + V_1 A_{d_i} & V_1 + \tau S \\ * & \Psi_{22} + A_i^T V_2^T + V_2 A_i & e^{-2\beta\tau} S + A_i^T V_3^T + V_2 A_{d_i} & V_2 - P \\ * & * & \Psi_{33} + V_3 A_{d_i} + A_{d_i}^T V_3^T & V_3 \\ * & * & * & -S - 2\tau S \end{bmatrix} < 0. \quad (4.26)$$

é satisfeita com $\Psi_{22} = R - e^{-2\beta\tau}S + 2\beta P$ e $\Psi_{33} = -e^{-2\beta\tau}[(1-\rho)R + S]$.

Prova: A prova desse Lema é inspirada em Coskun (2020). Além disso, faz-se o uso do Lema da Projeção na LMI (4.26) que pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} -V_1 - V_1^T & P - V_2^T + V_1 A_i & -V_3^T + V_1 A_{d_i} & V_1 + \tau S \\ * & \Psi_{22} + A_i^T V_2^T + V_2 A_i & e^{-2\beta\tau}S + A_i^T V_3^T + V_2 A_{d_i} & V_2 - P \\ * & * & \Psi_{33} + V_3 A_{d_i} + A_{d_i}^T V_3^T & V_3 \\ * & * & * & -S - 2\tau S \end{bmatrix} = \\
 & \begin{bmatrix} O & P & O & \tau S \\ * & \Psi_{22} & e^{-2\beta\tau}S & -P \\ * & * & \Psi_{33} & O \\ * & * & * & -S - 2\tau S \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -V_1 - V_1^T & -V_2^T + V_1 A_i & -V_3^T + V_1 A_{d_i} & V_1 \\ * & A_i^T V_2^T + V_2 A_i & A_i^T V_3^T + V_2 A_{d_i} & V_2 \\ * & * & A_{d_i}^T V_3^T + V_3 A_{d_i} & V_3 \\ * & * & * & O \end{bmatrix} = \\
 & \Phi + \begin{bmatrix} -V_1^T & -V_2^T & -V_3^T & O \\ A_i^T V_1^T & A_i^T V_2^T & A_i^T V_3^T & O \\ A_{d_i}^T V_1^T & A_{d_i}^T V_2^T & A_{d_i}^T V_3^T & O \\ V_1^T & V_2^T & V_3^T & O \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -V_1 & V_1 A_i & V_1 A_{d_i} & V_1 \\ -V_2 & V_2 A_i & V_2 A_{d_i} & V_2 \\ -V_3 & V_3 A_i & V_3 A_{d_i} & V_3 \\ O & O & O & O \end{bmatrix} = \\
 & \Phi + \begin{bmatrix} -V_1^T & -V_2^T & -V_3^T \\ A_i^T V_1^T & A_i^T V_2^T & A_i^T V_3^T \\ A_{d_i}^T V_1^T & A_{d_i}^T V_2^T & A_{d_i}^T V_3^T \\ V_1^T & V_2^T & V_3^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & O & O & O \\ O & I & O & O \\ O & O & I & O \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I & O & O \\ O & I & O \\ O & O & I \\ O & O & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -V_1 & V_1 A_i & V_1 A_{d_i} & V_1 \\ -V_2 & V_2 A_i & V_2 A_{d_i} & V_2 \\ -V_3 & V_3 A_i & V_3 A_{d_i} & V_3 \end{bmatrix} = \\
 & \Phi + \begin{bmatrix} -I \\ A_i^T \\ A_{d_i}^T \\ I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^T & V_2^T & V_3^T \end{bmatrix} \Upsilon + \Upsilon^T \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -I & A_i & A_{d_i} & I \end{bmatrix} = \\
 & \Phi + \Lambda^T \Omega \Upsilon + \Upsilon^T \Omega \Lambda
 \end{aligned}$$

com,

$$\begin{aligned}
 \Phi &= \begin{bmatrix} O & P & O & \tau S \\ * & \Psi_{22} & e^{-2\beta\tau}S & -P \\ * & * & \Psi_{33} & O \\ * & * & * & -S - 2\tau S \end{bmatrix}, \quad \Lambda = \begin{bmatrix} -I & A_i & A_{d_i} & I \end{bmatrix}, \\
 \Upsilon &= \begin{bmatrix} I & O & O & O \\ O & I & O & O \\ O & O & I & O \end{bmatrix}, \quad \Omega = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Tome as bases dos espaços nulos Λ e Υ dadas por

$$N_{\Lambda} = \begin{bmatrix} A_i & A_{d_i} & I \\ I & O & O \\ O & I & O \\ O & O & I \end{bmatrix} \text{ e } N_{\Upsilon} = \begin{bmatrix} O \\ O \\ O \\ I \end{bmatrix}.$$

Assim,

$$\Lambda N_{\Lambda} = \begin{bmatrix} -I & A_i & A_{d_i} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_i & A_{d_i} & I \\ I & O & O \\ O & I & O \\ O & O & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O & O & O \end{bmatrix}$$

e

$$\Upsilon N_{\Upsilon} = \begin{bmatrix} I & O & O & O \\ O & I & O & O \\ O & O & I & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O \\ O \\ O \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O \\ O \\ O \end{bmatrix}.$$

Considerando que (4.26) é válida então segue que $N_{\Lambda}^T \Phi N_{\Lambda} < 0$, isto é,

$$\begin{aligned} N_{\Lambda}^T \Phi N_{\Lambda} &= \begin{bmatrix} A_i^T & I & O & O \\ A_{d_i}^T & O & I & O \\ I & O & O & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O & P & O & \tau S \\ * & \Psi_{22} & e^{-2\beta\tau}S & -P \\ * & * & \Psi_{33} & O \\ * & * & * & -S - 2\tau S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_i & A_{d_i} & I \\ I & O & O \\ O & I & O \\ O & O & I \end{bmatrix} \\ N_{\Lambda}^T \Phi N_{\Lambda} &= \begin{bmatrix} P & A_i^T P + \Psi_{22} & e^{-2\beta\tau}S & \tau A_i^T S - P \\ O & A_{d_i}^T P + e^{-2\beta\tau}S & \Psi_{33} & \tau A_{d_i}^T S \\ \tau S & O & O & (-I - \tau)S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_i & A_{d_i} & I \\ I & O & O \\ O & I & O \\ O & O & I \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A_i^T P + P A_i + \Psi_{22} & P A_{d_i} + e^{-2\beta\tau}S & \tau A_i^T S \\ * & \Psi_{33} & \tau A_{d_i}^T S \\ * & * & -S \end{bmatrix} < 0. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Observe que a desigualdade (4.27) é igual a (4.20) que pelo Teorema 4.1 resulta em $\dot{V}(x(t)) \leq 2\beta V(x(t))$. Por outro lado $N_{\Upsilon}^T \Phi N_{\Upsilon} < 0$ e assim,

$$\begin{aligned}
N_Y^T \Phi N_Y &= \begin{bmatrix} O & O & O & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O & P & O & \tau S \\ * & \Psi_{22} & e^{-2\beta\tau} S & -P \\ * & * & \Psi_{33} & O \\ * & * & * & -S - 2\tau S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O \\ O \\ O \\ I \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \tau S & -P & O & -S - 2\tau S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O \\ O \\ O \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -S - 2\tau S \end{bmatrix} < 0.
\end{aligned} \tag{4.28}$$

De (4.27) e (4.28) conclui-se a prova do Lema.

4.1 NOVO CONTROLE CHAVEADO

Considere o modelo fuzzy descrito por

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(\alpha)x(t) + A_d(\alpha)x(t-d(t)) + B(\alpha)u(t) \\ x_t(\theta) = \phi(\theta), \theta \in [-\tau, 0] \end{cases} \tag{4.29}$$

e a lei de controle chaveado

$$\begin{aligned}
u(t) &= u_{\sigma\omega} = K_{\sigma}x(t) + J_{\omega}x(t-d(t)) \\
(\sigma, \omega) &= \arg \min_{\substack{q \in \mathbb{K}_r \\ s \in \mathbb{K}_r}}^* \xi^T \left\{ \begin{bmatrix} Q_{11q} & Q_{12q} \\ Q_{12q}^T & Q_{22q} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Y_{11s} & Y_{12s} \\ Y_{12s}^T & Y_{22s} \end{bmatrix} \right\} \xi
\end{aligned} \tag{4.30}$$

com $\xi^T = [x(t)^T x(t-d(t))^T]$. Substituindo (4.30) em (4.29), obtém-se

$$\dot{x}(t) = \mathbb{A}_{\alpha}x(t) + \mathbb{A}_{d_{\alpha}}x(t-d(t)) \tag{4.31}$$

em que $\mathbb{A}_{\alpha} = A(\alpha) + B(\alpha)K_{\sigma}$ e $\mathbb{A}_{d_{\alpha}} = A_d(\alpha) + B(\alpha)J_{\omega}$

Lema 4.5. *Dado um sistema descrito por (4.31) com $0 < d(t) \leq \tau$, $\dot{d}(t) < \rho$. Suponha que existam as matrizes simétricas definidas positivas $P, R, S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e o candidato de L-K*

$$V(x(t)) = x(t)^T P x(t) + \int_{t-d(t)}^t e^{2\beta(s-t)} x(s)^T R x(s) ds + \tau \int_{t-\tau}^t \int_{\theta}^t e^{2\beta(s-t)} \dot{x}(s)^T S \dot{x}(s) ds d\theta.$$

Então, vale a seguinte desigualdade

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) + 2\beta V(x(t)) \leq & \xi^T \left\{ \begin{bmatrix} 2P\mathbb{A}_\alpha + R - e^{-2\beta\tau}S + 2\beta P & P\mathbb{A}_{d_\alpha} + e^{-2\beta\tau}S \\ * & -e^{-2\beta\tau}[(1-\rho)R + S] \end{bmatrix} \right. \\ & \left. + \tau^2 \begin{bmatrix} \mathbb{A}_\alpha^T \\ \mathbb{A}_{d_\alpha}^T \end{bmatrix} S \begin{bmatrix} \mathbb{A}_\alpha & \mathbb{A}_{d_\alpha} \end{bmatrix} \right\} \xi, \end{aligned} \quad (4.32)$$

com $\xi^T = [x(t)^T - x(t-d(t))^T]$.

Prova: A prova é similar a do Lema 4.2.

Teorema 4.2. *A origem do sistema fuzzy descrito em (4.31) com $\lambda, \delta, \rho, \beta, \tau \in \mathbb{R}$, $\rho < 1$, $\beta > 0$ conhecidos é assintoticamente estável com taxa de decaimento maior ou igual a β para todo $0 < d(t) \leq \tau$, $\dot{d}(t) < \rho$, se existirem matrizes simétricas definidas positivas $\tilde{P}, \tilde{R}, \tilde{S}, X, \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrizes simétricas $\tilde{Q}_{1l}, \tilde{Y}_{1l}, \tilde{Z}_{1l}, \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $l = 1, 2$, matrizes $\tilde{Q}_{12}, \tilde{Y}_{12}, \tilde{Z}_{12}, \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e matrizes $M_j, N_k \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $j, k \in \mathbb{K}_r$ tais que*

$$\begin{bmatrix} \tilde{Q}_{11_i} & \tilde{Q}_{12_i} \\ \tilde{Q}_{12_i}^T & \tilde{Q}_{22_i} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{Y}_{11_i} & \tilde{Y}_{12_i} \\ \tilde{Y}_{12_i}^T & \tilde{Y}_{22_i} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{Z}_{11_i} & \tilde{Z}_{12_i} \\ \tilde{Z}_{12_i}^T & \tilde{Z}_{22_i} \end{bmatrix} < 0, \quad (4.33)$$

$$\begin{bmatrix} -2X & \tilde{P} - \lambda X + A_i X + B_i M_j & -\delta X + A_{d_i} X + B_i N_k & X + \tau \tilde{S} \\ * & \tilde{\Sigma}_{22} & \tilde{\Sigma}_{23} & \lambda X - \tilde{P} \\ * & * & \tilde{\Sigma}_{33} & \delta X \\ * & * & * & -\tilde{S} - 2\tau \tilde{S} \end{bmatrix} < 0 \quad (4.34)$$

seja satisfeita para todo $i, j, k \in \mathbb{K}_r$ sendo

$$\begin{aligned} He(B) &= B + B^T, \\ \tilde{\Sigma}_{22} &= \tilde{\Delta}_{22} + \lambda He(A_i X + B_i M_j), \\ \tilde{\Sigma}_{23} &= \tilde{\Delta}_{12} + \delta(XA_i^T + M_j^T B_i^T) + \lambda(A_{d_i} X + B_i N_k), \\ \tilde{\Sigma}_{33} &= \tilde{\Delta}_{33} + \delta He(A_{d_i} X + B_i N_k), \\ \tilde{\Delta}_{22} &= \tilde{R} - e^{-2\beta\tau} \tilde{S} + 2\beta \tilde{P} - \tilde{Q}_{11_j} - \tilde{Y}_{11_k} - \tilde{Z}_{11_i}, \\ \tilde{\Delta}_{12} &= e^{-2\beta\tau} \tilde{S} - \tilde{Q}_{12_j} - \tilde{Y}_{12_k} - \tilde{Z}_{12_i}, \\ \tilde{\Delta}_{33} &= -e^{-2\beta\tau} [(1-\rho)\tilde{R} + \tilde{S}] - \tilde{Q}_{22_j} - \tilde{Y}_{22_k} - \tilde{Z}_{22_i}, \\ K_j &= M_j X^{-1}, J_k = N_k X^{-1}, j, k \in \mathbb{K}_r. \end{aligned}$$

Prova: Multiplicando (4.34) por α_i , em que $\alpha_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^r \alpha_i = 1$, somando as desigualdades resultantes de 1 até r , e fazendo a mudança $j = \sigma$ e $k = \omega$, tem-se

$$\begin{bmatrix} -2X & \tilde{P} - \lambda X + A(\alpha)X + B(\alpha)M_\sigma & -\delta X + A_d(\alpha)X + B(\alpha)N_\omega & X + \tau\tilde{S} \\ * & \tilde{\Sigma}_{22} & \tilde{\Sigma}_{23} & \lambda X - \tilde{P} \\ * & * & \tilde{\Sigma}_{33} & \delta X \\ * & * & * & -\tilde{S} - 2\tau\tilde{S} \end{bmatrix} < 0 \quad (4.35)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Sigma}_{22} &= \tilde{\Delta}_{22} + \lambda He(A(\alpha)X + B(\alpha)M_\sigma) \\ \tilde{\Sigma}_{23} &= \tilde{\Delta}_{12} + \delta(XA(\alpha)^T + M_\sigma^T B(\alpha)^T) + \lambda(A_d(\alpha)X + B(\alpha)N_\omega), \\ \tilde{\Sigma}_{33} &= \tilde{\Delta}_{33} + \delta He(A_d(\alpha)X + B(\alpha)N_\omega), \\ \tilde{\Delta}_{22} &= \tilde{R} - e^{-2\beta\tau}\tilde{S} + 2\beta\tilde{P} - \tilde{Q}_{11\sigma} - \tilde{Y}_{11\omega} - \tilde{Z}_{11}(\alpha), \\ \tilde{\Delta}_{12} &= e^{-2\beta\tau}\tilde{S} - \tilde{Q}_{12\sigma} - \tilde{Y}_{12\omega} - \tilde{Z}_{12}(\alpha), \\ \tilde{\Delta}_{33} &= -e^{-2\beta\tau}[(1-\rho)\tilde{R} + \tilde{S}] - \tilde{Q}_{22\sigma} - \tilde{Y}_{22\omega} - \tilde{Z}_{22}(\alpha). \end{aligned}$$

Pré e pós-multiplicando (4.34) por $diag(X^{-1}, X^{-1}, X^{-1}, X^{-1})$, $X^{-1} = V$ e considerando $V_1 = V$, $V_2 = \lambda V$, $V_3 = \delta V$, $K_\sigma = M_\sigma X^{-1}$, $J_\omega = N_\omega X^{-1}$, $V\tilde{P}V = P$, $V\tilde{S}V = S$, $V\tilde{R}V = R$, $V\tilde{\Delta}_{22}V = \Delta_{22}$, $V\tilde{\Delta}_{12}V = \Delta_{12}$, $V\tilde{\Delta}_{33}V = \Delta_{33}$, $V\tilde{Q}_{kl}V = Q_{kl}$, $V\tilde{Y}_{kl}V = Y_{kl}$, $V\tilde{Z}_{kl}V = Z_{kl}$, $k, l = 1, 2$, encontra-se

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} -2V & P - \lambda V + V\mathbb{A}_\alpha & -\delta V + V\mathbb{A}_{d\alpha} & V + \tau S \\ * & \Delta_{22} + \lambda He(V\mathbb{A}_\alpha) & \Delta_{12} + \delta \mathbb{A}_\alpha^T V + \lambda V\mathbb{A}_{d\alpha} & \lambda V - P \\ * & * & \Delta_{33} + \delta He(V\mathbb{A}_{d\alpha}) & \delta V \\ * & * & * & -S - 2\tau S \end{bmatrix} = \\ &\begin{bmatrix} -V_1 - V_1 & P - V_2 + V_1\mathbb{A}_\alpha & -V_3 + V_1\mathbb{A}_{d\alpha} & V_1 + \tau S \\ * & \Delta_{22} + He(V_2\mathbb{A}_\alpha) & \Delta_{12} + V_2\mathbb{A}_{d\alpha} + \mathbb{A}_\alpha^T V_3 & V_2 - P \\ * & * & \Delta_{33} + He(V_3\mathbb{A}_{d\alpha}) & V_3 \\ * & * & * & -S - 2\tau S \end{bmatrix} = \\ &\begin{bmatrix} -V_1 - V_1^T & P - V_2^T + V_1\mathbb{A}_\alpha & -V_3^T + V_1\mathbb{A}_{d\alpha} & V_1 + \tau S \\ * & \Delta_{22} + He(V_2\mathbb{A}_\alpha) & \Delta_{12} + V_2\mathbb{A}_{d\alpha} + \mathbb{A}_\alpha^T V_3^T & V_2 - P \\ * & * & \Delta_{33} + He(V_3\mathbb{A}_{d\alpha}) & V_3 \\ * & * & * & -S - 2\tau S \end{bmatrix} < 0, \end{aligned} \quad (4.36)$$

$$\begin{aligned} \Delta_{22} &= R - e^{-2\beta\tau}S + 2\beta P - Q_{11\sigma} - Y_{11\omega} - Z_{11}(\alpha), \\ \Delta_{12} &= e^{-2\beta\tau}S - Q_{12\sigma} - Y_{12\omega} - Z_{12}(\alpha), \\ \Delta_{33} &= -e^{-2\beta\tau}[(1-\rho)R + S] - Q_{22\sigma} - Y_{22\omega} - Z_{22}(\alpha). \end{aligned}$$

Como (4.36) pode ser escrita no formato $\Phi + \Lambda^T \Omega^T \Upsilon + \Upsilon^T \Omega \Lambda < 0$ e utilizando o Lema da

Projeção, tem-se

$$N_{\Lambda}^T \Phi N_{\Lambda} < 0 \text{ e } N_Y^T \Phi N_Y < 0.$$

Com,

$$\Phi = \begin{bmatrix} O & P & O & \tau S \\ * & \Delta_{22} & \Delta_{12} & -P \\ * & * & \Delta_{33} & O \\ * & * & * & -S - 2\tau S \end{bmatrix} \quad N_{\Lambda} = \begin{bmatrix} \mathbb{A}_{\alpha} & \mathbb{A}_{d_{\alpha}} & I \\ I & O & O \\ O & I & O \\ O & O & I \end{bmatrix} \text{ e } N_Y = \begin{bmatrix} O \\ O \\ O \\ I \end{bmatrix}.$$

De $N_{\Lambda}^T \Phi N_{\Lambda} < 0$, obtém-se

$$\begin{bmatrix} 2P\mathbb{A}_{\alpha} + \Delta_{22} & P\mathbb{A}_{d_{\alpha}} + \Delta_{12} & \tau\mathbb{A}_{\alpha}^T S \\ * & \Delta_{33} & \tau\mathbb{A}_{d_{\alpha}}^T S \\ * & * & -S \end{bmatrix} < 0. \quad (4.37)$$

Aplicando o complemento de Schur em relação à última linha e coluna de (4.37), encontra-se

$$\begin{bmatrix} 2P\mathbb{A}_{\alpha} + \Delta_{22} & P\mathbb{A}_{d_{\alpha}} + \Delta_{12} \\ * & \Delta_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tau\mathbb{A}_{\alpha}^T S \\ \tau\mathbb{A}_{d_{\alpha}}^T S \end{bmatrix} S^{-1} \begin{bmatrix} \tau S\mathbb{A}_{\alpha} & \tau S\mathbb{A}_{d_{\alpha}} \end{bmatrix} < 0. \quad (4.38)$$

Para $\xi \neq 0$ pré-multiplicando (4.38) por ξ^T e pós-multiplicando (4.38) por ξ , tem-se

$$\xi^T \left\{ \begin{bmatrix} 2P\mathbb{A}_{\alpha} + \Delta_{22} & P\mathbb{A}_{d_{\alpha}} + \Delta_{12} \\ * & \Delta_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tau\mathbb{A}_{\alpha}^T S \\ \tau\mathbb{A}_{d_{\alpha}}^T S \end{bmatrix} S^{-1} \begin{bmatrix} \tau S\mathbb{A}_{\alpha} & \tau S\mathbb{A}_{d_{\alpha}} \end{bmatrix} \right\} \xi < 0, \quad (4.39)$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \xi^T \left\{ \begin{bmatrix} 2P\mathbb{A}_{\alpha} + \Psi_{22} & P\mathbb{A}_{d_{\alpha}} + e^{-2\beta\tau} S \\ * & \Psi_{33} \end{bmatrix} + \tau^2 \begin{bmatrix} \mathbb{A}_{\alpha}^T \\ \mathbb{A}_{d_{\alpha}}^T \end{bmatrix} S \begin{bmatrix} \mathbb{A}_{\alpha} & \mathbb{A}_{d_{\alpha}} \end{bmatrix} \right\} \xi &< \xi^T \left\{ \begin{bmatrix} Q_{11\sigma} & Q_{12\sigma} \\ Q_{12\sigma}^T & Q_{22\sigma} \end{bmatrix} + \right. \\ &\left. \begin{bmatrix} Y_{11\omega} & Y_{12\omega} \\ Y_{12\omega}^T & Y_{22\omega} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Z_{11}(\alpha) & Z_{12}(\alpha) \\ Z_{12}(\alpha)^T & Z_{22}(\alpha) \end{bmatrix} \right\} \xi \end{aligned} \quad (4.40)$$

$$\Psi_{22} = R - e^{-2\beta\tau} S + 2\beta P,$$

$$\Psi_{33} = -e^{-2\beta\tau} [(1 - \rho)R + S].$$

A partir da lei de controle (4.30) e sabendo que o mínimo em um conjunto de números reais é menor ou igual a qualquer combinação convexa dos elementos deste conjunto, observa-se

$$\xi^T \left\{ \begin{bmatrix} Q_{11\sigma} & Q_{12\sigma} \\ Q_{12\sigma}^T & Q_{22\sigma} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Y_{11\omega} & Y_{12\omega} \\ Y_{12\omega}^T & Y_{22\omega} \end{bmatrix} \right\} \xi \leq \sum_{i=1}^r \alpha_i \xi^T \left\{ \begin{bmatrix} Q_{11i} & Q_{12i} \\ Q_{12i}^T & Q_{22i} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Y_{11i} & Y_{12i} \\ Y_{12i}^T & Y_{22i} \end{bmatrix} \right\} \xi. \quad (4.41)$$

Somando em ambos os lados de (4.41) $\sum_{i=1}^r \alpha_i \xi^T \begin{bmatrix} Z_{11i} & Z_{12i} \\ Z_{12i}^T & Z_{22i} \end{bmatrix} \xi$, obtém-se

$$\begin{aligned} \xi^T \left\{ \begin{bmatrix} Q_{11\sigma} & Q_{12\sigma} \\ Q_{12\sigma}^T & Q_{22\sigma} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Y_{11\omega} & Y_{12\omega} \\ Y_{12\omega}^T & Y_{22\omega} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Z_{11}(\alpha) & Z_{12}(\alpha) \\ Z_{12}(\alpha)^T & Z_{22}(\alpha) \end{bmatrix} \right\} \xi \leq \\ \sum_{i=1}^r \alpha_i \xi^T \left\{ \begin{bmatrix} Q_{11i} & Q_{12i} \\ Q_{12i}^T & Q_{22i} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Y_{11i} & Y_{12i} \\ Y_{12i}^T & Y_{22i} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Z_{11i} & Z_{12i} \\ Z_{12i}^T & Z_{22i} \end{bmatrix} \right\} \xi. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Multiplicando (4.33) por α_i , em que $\alpha_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^r \alpha_i = 1$ e somando as desigualdades resultantes para $i \in \mathbb{K}_r$, tem-se

$$\sum_{i=1}^r \alpha_i \left\{ \begin{bmatrix} Q_{11i} & Q_{12i} \\ Q_{12i}^T & Q_{22i} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Y_{11i} & Y_{12i} \\ Y_{12i}^T & Y_{22i} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Z_{11i} & Z_{12i} \\ Z_{12i}^T & Z_{22i} \end{bmatrix} \right\} < 0. \quad (4.43)$$

De (4.43), (4.40) e do Lema 4.5 conclui-se

$$\dot{V}(x(t)) < -2\beta V(x(t)) \quad (4.44)$$

finalizando a prova do Teorema.

4.2 CONTROLADOR DE GANHO ÚNICO

Considere o modelo fuzzy (4.29) descrito por

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(\alpha)x(t) + A_d(\alpha)x(t-d(t)) + B(\alpha)u(t) \\ x_t(\theta) = \phi(\theta), \quad \theta \in [-\tau, 0]. \end{cases}$$

Seja

$$u(t) = Kx(t) + Jx(t-d(t)) \quad (4.45)$$

o controle de ganho único em que $K, J \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Aplicando (4.45) em (4.29), encontra-se

$$\dot{x}(t) = \mathbf{A}_\alpha x(t) + \mathbf{A}_{d_\alpha} x(t - d(t)), \quad (4.46)$$

sendo que $\mathbf{A}_\alpha = A(\alpha) + B(\alpha)K$ e $\mathbf{A}_{d_\alpha} = A_d(\alpha) + B(\alpha)J$

Nestas condições é possível enunciar o seguinte corolário.

Corolário 4.1. *A origem do sistema fuzzy descrito em (4.46) com $\lambda, \delta, \rho, \beta, \tau \in \mathbb{R}, \rho < 1, \beta > 0$ conhecidos é assintoticamente estável com taxa de decaimento maior ou igual a β para todo $0 < d(t) \leq \tau, \dot{d}(t) < \rho$, se existirem matrizes simétricas definidas positivas $\tilde{P}, \tilde{R}, \tilde{S}, X, \in \mathbb{R}^{n \times n}$, matrizes simétricas $\tilde{Q}_{ll}, \tilde{Y}_{ll}, \tilde{Z}_{ll}, \in \mathbb{R}^{n \times n}, l = 1, 2$, matrizes $\tilde{Q}_{12}, \tilde{Y}_{12}, \tilde{Z}_{12}, \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e matrizes $M, N \in \mathbb{R}^{m \times n}$, tais que*

$$\begin{bmatrix} -2X & \tilde{P} - \lambda X + A_i X + B_i M & -\delta X + A_{d_i} X + B_i N & X + \tau \tilde{S} \\ * & \tilde{\Sigma}_{22} & \tilde{\Sigma}_{23} & \lambda X - \tilde{P} \\ * & * & \tilde{\Sigma}_{33} & \delta X \\ * & * & * & -\tilde{S} - 2\tau \tilde{S} \end{bmatrix} < 0 \quad (4.47)$$

seja satisfeita para todo $i, j, k \in \mathbb{K}_r$ sendo

$$\begin{aligned} He(B) &= B + B^T, \\ \tilde{\Sigma}_{22} &= \tilde{R} - e^{-2\beta\tau} \tilde{S} + 2\beta \tilde{P} + \lambda He(A_i X + B_i M), \\ \tilde{\Sigma}_{23} &= e^{-2\beta\tau} \tilde{S} + \delta(XA_i^T + M^T B_i^T) + \lambda(A_{d_i} X + B_i N), \\ \tilde{\Sigma}_{33} &= -e^{-2\beta\tau} [(1 - \rho)\tilde{R} + \tilde{S}] + \delta He(A_{d_i} X + B_i N), \\ K &= MX^{-1}, J = NX^{-1}. \end{aligned}$$

Prova: A prova é similar a do Teorema 4.2.

Teorema 4.3. *Dada uma constante $\mu, \mu > 0$, pode-se obter um limitante $\eta, \eta > 0$ para a norma das matrizes $K_j, J_k, \in \mathbb{R}^{m \times n}, j, k \in \mathbb{K}_r$ de realimentação dos estados, com $K_j = M_j X^{-1}, J_k = N_k X^{-1}, X = X^T > 0, X \in \mathbb{R}^{n \times n}, M_j, N_k \in \mathbb{R}^{m \times n}$ (substituindo $K_j = K, J_k = J, M_j = M$ e $N_k = N$) encontrando o valor mínimo de η tais que $K_j K_j^T < \frac{\eta I}{\mu^2}$ e $J_k J_k^T < \frac{\eta I}{\mu^2}$. O valor ótimo de η é obtido através da solução do seguinte problema de otimização*

$$\begin{aligned} \min \eta \\ \begin{bmatrix} \eta I & M_j \\ M_j^T & I \end{bmatrix} > 0 \end{aligned} \quad (4.48)$$

$$\begin{bmatrix} \eta I & N_k \\ N_k^T & I \end{bmatrix} > 0 \quad (4.49)$$

$$X > \mu I \quad (4.50)$$

(conjunto de LMIs)

em que o conjunto de LMIs é igual a (4.33), (4.34) (conjunto de LMI (4.47)) sejam factíveis para todo $j, k \in \mathbb{K}_r$.

Prova: Aplicando o complemento de Schur em (4.48) e (4.49), encontra-se

$$M_j M_j^T < \eta I \text{ e } N_k N_k^T < \eta I. \quad (4.51)$$

Pré e pós-multiplicando ambos os lados de (4.50) por $\sqrt{X}$, obtém-se

$$\mu X < XX. \quad (4.52)$$

Agora, pré-multiplicando (4.50) por K_j e pós-multiplicando (4.50) por K_j^T , tem-se

$$K_j \mu I K_j^T < K_j X K_j^T. \quad (4.53)$$

De modo análogo, pré-multiplicando (4.50) J_k e pós-multiplicando (4.50) por J_k^T , obtém-se

$$J_k \mu I J_k^T < J_k X J_k^T. \quad (4.54)$$

Substituindo $M_j = K_j X$ e $N_k = J_k X$ em (4.51), encontra-se

$$K_j X X K_j^T < \eta I \text{ e } J_k X X J_k^T < \eta I \quad (4.55)$$

De (4.50) - (4.55), tem-se

$$\begin{aligned} K_j \mu I K_j^T < K_j X X K_j^T < \frac{K_j X X K_j^T}{\mu} &= \frac{M_j M_j^T}{\mu} < \frac{\eta I}{\mu}, \\ J_k \mu I J_k^T < J_k X X J_k^T < \frac{J_k X X J_k^T}{\mu} &= \frac{N_k N_k^T}{\mu} < \frac{\eta I}{\mu}. \end{aligned} \quad (4.56)$$

Logo, $K_j K_j^T < \frac{\eta I}{\mu^2}$ e $J_k J_k^T < \frac{\eta I}{\mu^2}$ concluindo a prova do Teorema.

Para obter a solução das LMIs dos exemplos numéricos, a seguir, utiliza-se o software

MatLab com o solver SeDuMi e a interface Yalmip. Com o MatLab/Simulink é possível obter a trajetória das variáveis de estado desse sistema.

4.3 EXEMPLO NUMÉRICO

Seja

$$\dot{x}(t) = A(\alpha)x(t) + A_d(\alpha)x(t - d(t)) + B(\alpha)u(t) \quad (4.57)$$

um sistema fuzzy T-S com atraso $d(t)$, $0 < d(t) \leq \tau$, $\dot{d}(t) < \rho$.

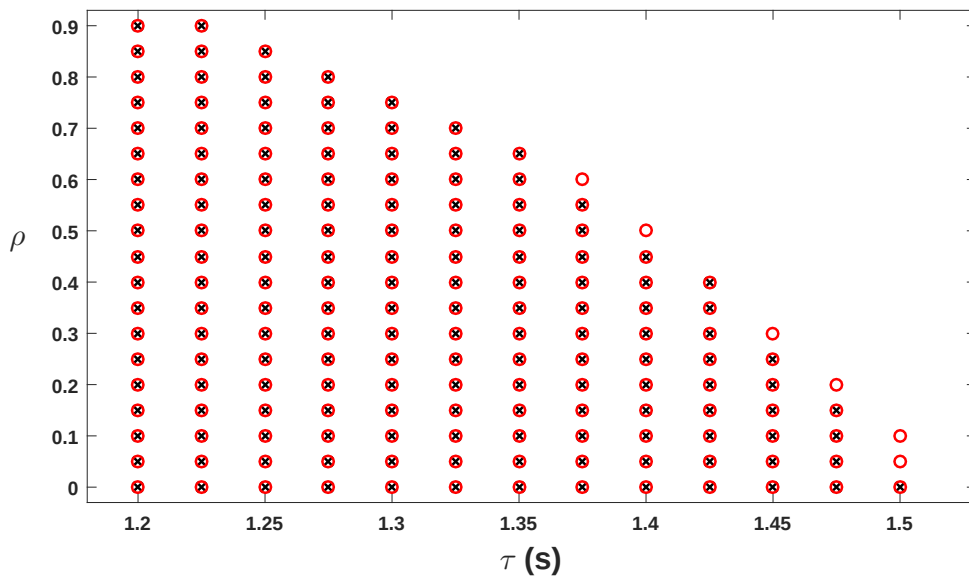
O Exemplo 4.1 dessa seção apresenta apenas a estabilidade do sistema (4.57). A Figura 3 comprova que as LMIs do Teorema 4.2 que determina os ganhos do controlador chaveado são menos conservadores do que a LMI do controlador de ganho único (Corolário 4.1).

Exemplo 4.1. (COSKUN, 2020) Considere o sistema (4.57) com as seguintes matrizes

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0,3 & 0,1 \\ 0 & 0,2 \end{bmatrix}, \quad A_{d_1} = \begin{bmatrix} -1 & 0,4 \\ 0,2 & 0,1 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0,1 & 0,4 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0,1 & 0,3 \\ 0,7 & 0,1 \end{bmatrix}, \quad A_{d_2} = \begin{bmatrix} 0,1 & 0 \\ 0,5 & 0,4 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0,2 & 1 \\ 0,4 & -0,3 \end{bmatrix}.$$

Figura 3 - Região de factibilidade: Teorema 4.2 (○) e Corolário 4.1 (×).

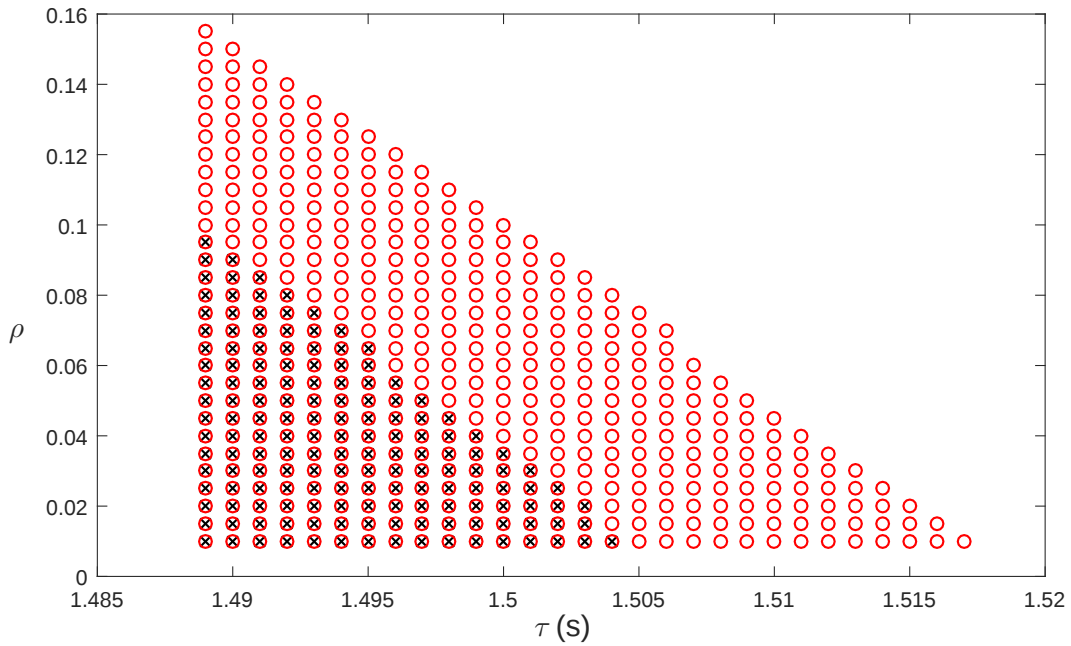


Fonte: próprio autor.

Com os parâmetros $1,2 < \tau \leq 1,5$, $0,1 \leq \rho \leq 0,9$, $\lambda = 2,75$, $\delta = 0,35$, $\beta = 0,15$, $\eta = 114,4$, $\mu = 1$ e utilizando o Teorema 4.2 e o Corolário 4.1 para determinar a região de factibilidade representada pela Figura 3. Observando a Figura 3 nota-se que a região de factibilidade utilizando o Teorema 4.2 é maior do que a região obtida com o Corolário 4.1, comprovando a eficácia do projeto de controle chaveado em relação ao projeto de controle de ganho único.

A Figura 4 é uma ampliação da região de factibilidade do Exemplo 4.1 utilizando o Teorema 4.2 e o Corolário 4.1 para determinar a região de factibilidade com $1,489 \leq \tau \leq 1,529$ e $0,01 \leq \rho \leq 0,2$. Observa-se que a região de factibilidade utilizando Teorema 4.2, representada por $\bigcirc$, é bem maior do que a região $\times$ obtida através do Corolário 4.1, isto é, o controlador chaveado proposto apresenta um espaço de solução maior em relação ao controlador de ganho único.

Figura 4 - Zoom da região de factibilidade do Exemplo 4.1.



Fonte: próprio autor.

Utilizado o Teorema 4.2 no Exemplo 4.1 com $\tau = 1,5$ s, $\beta = 0,15$, $\lambda = 2,75$, $\delta = 0,35$ e $\rho = 0,1$, $\eta = 114,4$, $\mu = 1$, obtém-se

$$X^{-1} = \begin{bmatrix} 0.9334 & -0.1854 \\ -0.1854 & 0.4833 \end{bmatrix}, \quad (4.58)$$

$$K_1 = \begin{bmatrix} -4.4330 & -2.9245 \\ -0.6111 & 0.5597 \end{bmatrix}, \quad (4.59)$$

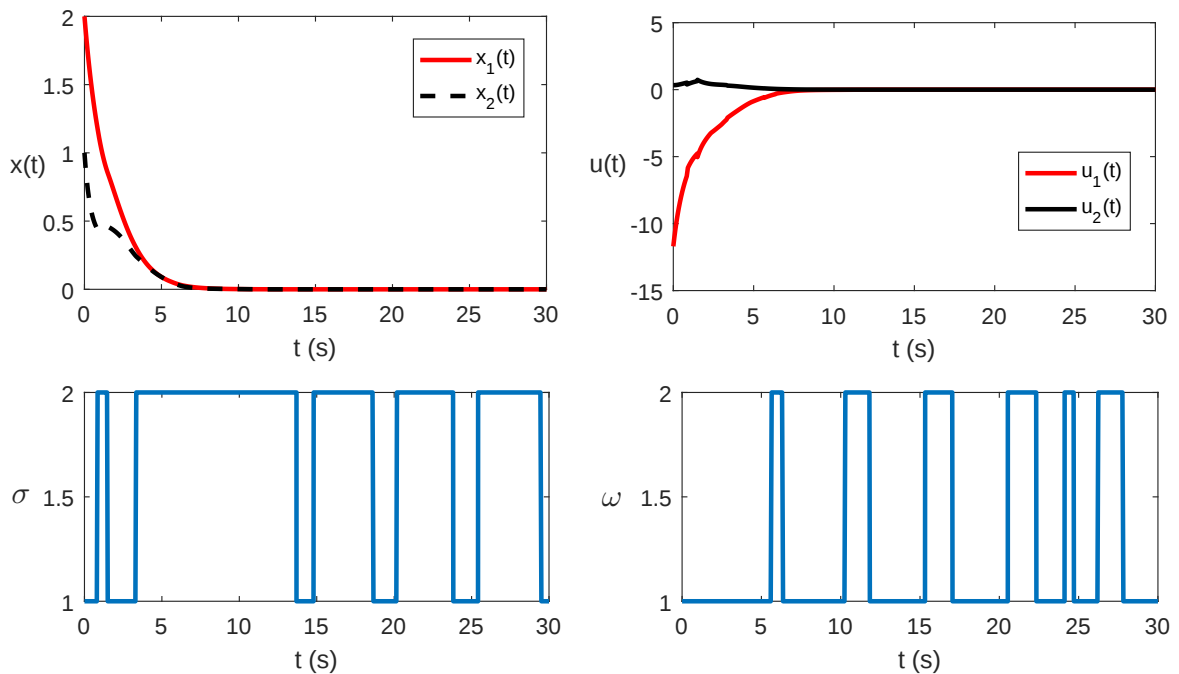
$$K_2 = \begin{bmatrix} -3.9919 & -3.1441 \\ -0.7374 & 0.5883 \end{bmatrix},$$

$$J_1 = \begin{bmatrix} 1.3357 & -2.5789 \\ 0.3830 & 0.2326 \end{bmatrix}, \quad (4.60)$$

$$J_2 = \begin{bmatrix} 0.9134 & -2.4178 \\ 0.5077 & 0.1181 \end{bmatrix}.$$

O sistema com a lei de controle (4.30) foi simulado com uma condição funcional inicial dada por $x(\theta) = [2, 1], \forall \theta \in [-1, 5, 0]$, com as funções de pertinência $\alpha_1(t) = \frac{1}{1 + e^{x_1(t)x_2(t)}}$, $\alpha_2(t) = 1 - \alpha_1(t)$, com os ganhos dados por (4.59), (4.60) e a matriz (4.58). Para $\tau = 1,5$ s obtém-se a resposta temporal em malha fechada, o sinal de controle chaveado denotado por $u(t)$ e os índices de chaveamento σ e ω que podem ser vistos na Figura 5.

Figura 5 - Trajetórias de $x(t)$ do sistema (4.57), lei de controle (4.30) para $\tau = 1,5$ s e os índices de chaveamento σ e ω .



Fonte: próprio autor.

Exemplo 4.2. (ANGULO; DAVID; BERNAL, 2018) O modelo matemático do Truck-Trailer é

dado por

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= -\frac{v\bar{t}}{Lt_0}x_1(t) + \frac{v\bar{t}}{lt_0}u(t), \\ \dot{x}_2(t) &= \frac{v\bar{t}}{Lt_0}x_1(t), \\ \dot{x}_3(t) &= \frac{v\bar{t}}{t_0} \sin \left[x_2(t) + \frac{v\bar{t}}{2L}x_1(t) \right]\end{aligned}\quad (4.61)$$

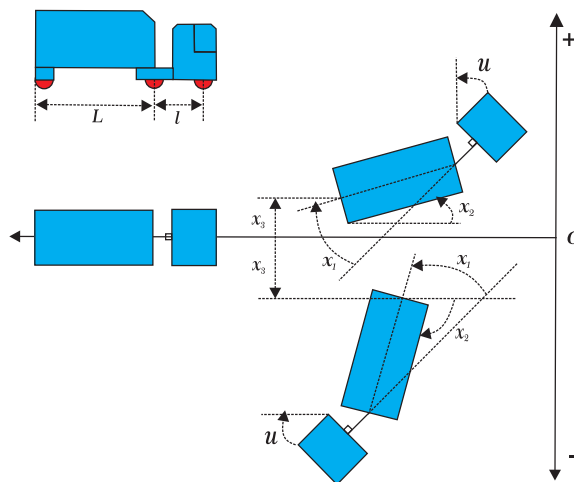
em que $l = 2,8 \text{ m}$, $L = 5,5 \text{ m}$, $v = -1,5 \text{ m/s}$, $\bar{t} = 2 \text{ s}$ e $t_0 = 0,5 \text{ s}$.

Para aplicar o Teorema 4.2 em um sistema com atraso assume-se que o estado $x_1(t)$ do sistema (4.61) contém um atraso, obtendo um novo sistema dado por:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= -a\frac{v\bar{t}}{Lt_0}x_1(t) - (1-a)\frac{v\bar{t}}{Lt_0}x_1(t-d(t)) + \frac{v\bar{t}}{lt_0}u(t), \\ \dot{x}_2(t) &= a\frac{v\bar{t}}{Lt_0}x_1(t) + (1-a)\frac{v\bar{t}}{Lt_0}x_1(t-d(t)), \\ \dot{x}_3(t) &= \frac{v\bar{t}}{t_0} \sin \left[x_2(t) + a\frac{v\bar{t}}{2L}x_1(t) + (1-a)\frac{v\bar{t}}{2L}x_1(t-d(t)) \right]\end{aligned}\quad (4.62)$$

sendo que $a \in [0, 1]$. Quando $a = 1$ no sistema (4.62) é equivalente ao sistema (4.61), ou seja, sem atraso, e para $a = 0$ ele terá o estado atrasado. Nessa análise usa-se $a = 0.7$. O estado $x_1(t)$ representa a diferença angular entre a cabine do caminhão com a carreta, $x_2(t)$ é o ângulo da carreta e $x_3(t)$ é a posição vertical da parte traseira da carreta do caminhão como mostra a Figura 6

Figura 6 - Modelo Truck-Trailer.



Fonte: GAO et al. p. 342.

O modelo fuzzy para o sistema (4.62) é dado pelas regras

Regra 1

Se $x_2(t) + a\frac{\bar{v}\bar{t}}{2L}x_1(t) + (1-a)\frac{\bar{v}\bar{t}}{Lt_0}x_1(t-d(t))$ for igual a 0,
então $\dot{x}(t) = A_1x(t) + A_{d_1}x(t-d(t)) + B_1u(t)$.

Regra 2

Se $x_2(t) + a\frac{\bar{v}\bar{t}}{2L}x_1(t) + (1-a)\frac{\bar{v}\bar{t}}{Lt_0}x_1(t-d(t))$ for igual a π ou $-\pi$,
então $\dot{x}(t) = A_2x(t) + A_{d_2}x(t-d(t)) + B_2u(t)$.

sendo

$$A_1 = \begin{bmatrix} -a\frac{\bar{v}\bar{t}}{Lt_0} & 0 & 0 \\ a\frac{\bar{v}\bar{t}}{Lt_0} & 0 & 0 \\ a\frac{v^2\bar{t}^2}{2Lt_0} & \frac{\bar{v}\bar{t}}{t_0} & 0 \end{bmatrix}, \quad A_{d_1} = \begin{bmatrix} -(1-a)\frac{\bar{v}\bar{t}}{Lt_0} & 0 & 0 \\ (1-a)\frac{\bar{v}\bar{t}}{Lt_0} & 0 & 0 \\ (1-a)\frac{v^2\bar{t}^2}{2Lt_0} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} \frac{\bar{v}\bar{t}}{Lt_0} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (4.63)$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -a\frac{\bar{v}\bar{t}}{Lt_0} & 0 & 0 \\ a\frac{\bar{v}\bar{t}}{Lt_0} & 0 & 0 \\ a\frac{dv^2\bar{t}^2}{2Lt_0} & \frac{d\bar{v}\bar{t}}{t_0} & 0 \end{bmatrix}, \quad A_{d_2} = \begin{bmatrix} -(1-a)\frac{\bar{v}\bar{t}}{Lt_0} & 0 & 0 \\ (1-a)\frac{\bar{v}\bar{t}}{Lt_0} & 0 & 0 \\ (1-a)\frac{dv^2\bar{t}^2}{2Lt_0} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} \frac{\bar{v}\bar{t}}{Lt_0} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (4.64)$$

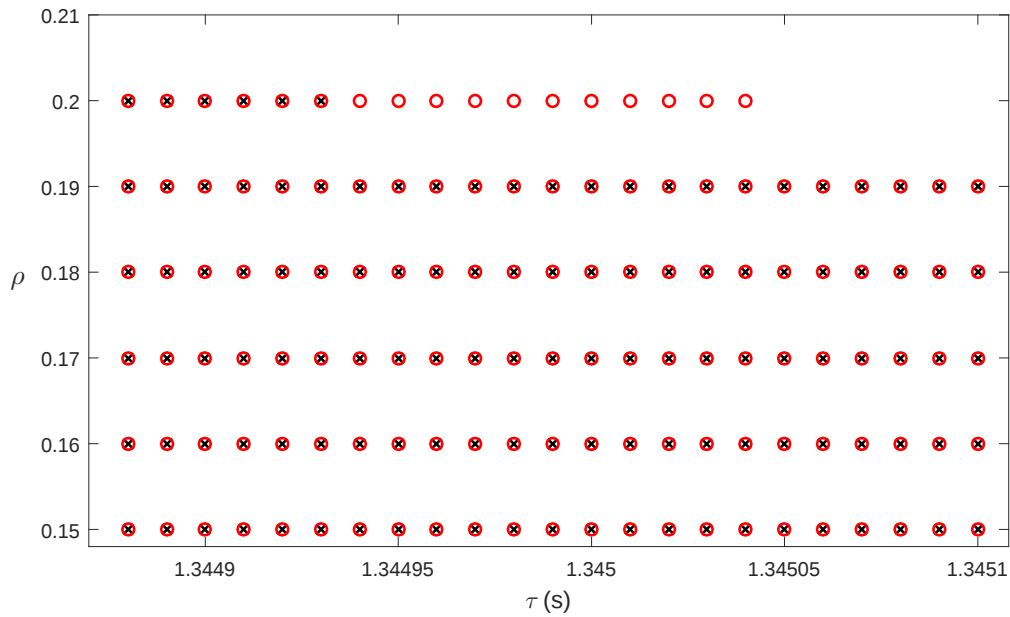
com $d = \frac{10t_0}{\pi}$. Desse modo, o modelo fuzzy T-S para o Truck-Trailer é dado por

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_i x(t) + A_{d_i} x(t-d(t)) + B_i u(t) \\ x_t(\theta) = \phi(\theta), \quad \theta \in [-\tau, 0], \end{cases} \quad (4.65)$$

com as funções de pertinência $\alpha_1(t) = \frac{1}{1 + e^{(x_1(t)+0,5)}}$, $\alpha_2(t) = 1 - \alpha_1(t)$.

Considerando os parâmetros, $\dot{d}(t) < \rho$, $0,15 \leq \rho \leq 0,22$, $1,34488 \leq \tau \leq 1,3451$, $\lambda = 5,75$, $\delta = 1,35$, $\beta = 0,15$, $\eta = 2,9559$, $\mu = 1$ e utilizando o Teorema 4.2 e o Corolário 4.1 para determinar a região de factibilidade. A Figura 7 comprova que a região de factibilidade utilizando o Teorema 4.2 é maior do que a região obtida como o Corolário 4.1.

Figura 7 - Região de factibilidade: Teorema 4.2 (○) e Corolário 4.1 (×).



Fonte: próprio autor.

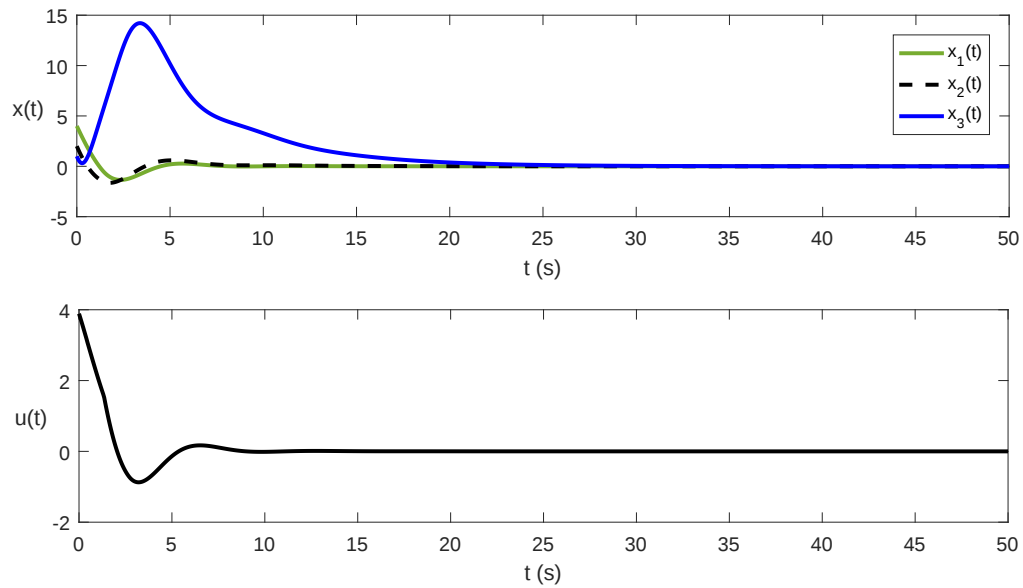
Utilizado o Teorema 4.2 para o modelo fuzzy Truck-Trailer descrito matricialmente em (4.65) com $\tau = 1,345$ s, $\beta = 0,15$, $\lambda = 5,75$, $\delta = 1,35$ e $\rho = 0,2$, $\eta = 2,9559$, $\mu = 1$, obtém-se

$$X^{-1} = \begin{bmatrix} 0.6267 & -0.3945 & 0.0117 \\ -0.3945 & 0.5822 & -0.0183 \\ 0.0117 & -0.0183 & 0.0009 \end{bmatrix} \quad (4.66)$$

$$\begin{aligned} K_1 &= \begin{bmatrix} 0.9352 & -0.4848 & 0.0140 \end{bmatrix}, \\ K_2 &= \begin{bmatrix} 0.9311 & -0.4785 & 0.0138 \end{bmatrix}, \\ J_1 &= \begin{bmatrix} 0.2417 & 0.0700 & -0.0024 \end{bmatrix}, \\ J_2 &= \begin{bmatrix} 0.2409 & 0.0705 & -0.0025 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.67)$$

O sistema Truck-Trailer com a lei de controle (4.30) foi simulado utilizando com uma condição funcional inicial dada por $x(\theta) = [4, 2, 1]$, $\forall \theta \in [-1, 345, 0]$, com os ganhos dados por (4.67), a matriz (4.66) e o sistema não linear descrito neste exemplo, dispensando o uso das funções de pertinências. Os resultados obtidos na simulação digital deste sistema controlado, relacionados às variáveis de estado e ao sinal de controle, denotado por $u(t)$, podem ser vistos na Figura 8.

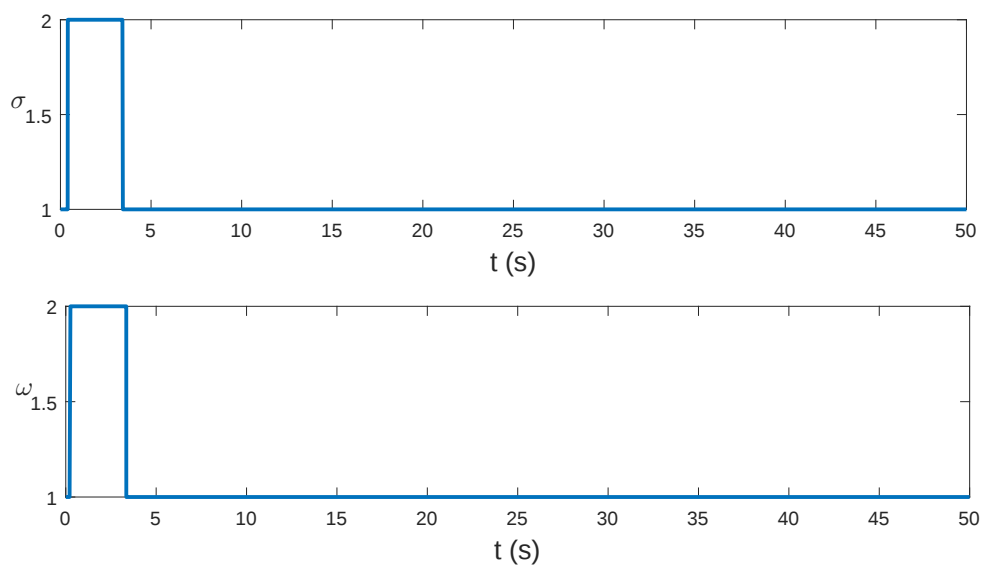
Figura 8 - Trajetórias de $x(t)$ do sistema (4.65) sob a lei de controle (4.30) e $\tau = 1,345$ s.



Fonte: próprio autor.

Os índices de chaveamento σ e ω que corresponde aos ganhos K_σ e J_ω , respectivamente, foram utilizados a cada instante de tempo, como mostra a Figura 9.

Figura 9 - Índices de chaveamento σ e ω para $\tau = 1,345$ s.



Fonte: próprio autor.

4.4 CONCLUSÕES PARCIAIS

Neste capítulo foi apresentada uma nova lei de controle chaveada para sistemas fuzzy T-S com atraso no tempo em que a matriz B depende de α . A vantagem do controlador chaveado é que ele elimina a necessidade de obter as expressões explícitas das funções de pertinência para implementar a lei de controle. As LMIs utilizadas para obter os ganhos do controlador chaveado são menos conservadoras do que as LMIs do controlador de ganho único como podem ser vistas nas Figuras 3, 4 e 7.

5 CONCLUSÕES

Neste trabalho foram propostos novos métodos de projeto de controle chaveado de sistemas não lineares com parâmetros incertos e atraso no tempo utilizando o modelo fuzzy T-S para determinar LMIs, com taxa de decaimento, que garante a estabilidade assintótica da origem do sistema. Uma nova lei de controle chaveada foi definida para este sistema com matriz B constante e com matriz B dependente de parâmetros incertos.

No Capítulo 3, foram propostos novos métodos de controle para sistemas não lineares com parâmetros incertos e atraso no tempo descritos por modelo fuzzy T-S com matriz B constante. Neste controlador o ganho é escolhido por uma lei de chaveamento que retorna o menor valor da derivada temporal do funcional L-K. Além disso, as LMIs utilizadas para determinar os ganhos são menos conservadoras do que as LMIs que utilizam apenas um ganho único de realimentação do vetor de estado, como pode ser visto na Figura 1.

No Capítulo 4 foi proposta uma lei de controle para sistemas não lineares com parâmetros incertos e atraso no tempo descritos por modelos fuzzy T-S com incertezas na matriz B . Neste caso, a lei de chaveamento, também, retorna o menor valor da derivada temporal do funcional L-K. As LMIs utilizadas para determinar os ganhos do controle chaveado são menos conservadoras quando comparada com as LMIs que utilizam ganho único na realimentação do vetor de estado. Este resultado pode ser visto nas Figuras 4 e 7.

Uma proposta de trabalho futuro seria adicionar no modelo fuzzy T-S com atraso no tempo uma região de operação e saturação no atuador. Como observado na Figura 2 o surgimento de chattering, utilizar a definição de mínimo suave desenvolvida por Alves *et al.* (2016a, 2016b) e, de modo análogo, construir um controle chaveado suave com intuito de minimizá-lo no sinal de controle. Fazer uma implementação prática utilizando o projeto de controle chaveado proposto em sistemas não lineares com atraso no tempo.

REFERÊNCIAS

- ALVES, U. N. L. T.; TEIXEIRA, M. C. M.; OLIVEIRA, D. R.; CARDIM, R.; ASSUNÇÃO, E. Smoothing switched control for uncertain T-S fuzzy systems with unknown membership functions, actuator saturation and disturbance. *In: IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE ON FUZZY SYSTEMS*, 2016. Vancouver. **Proceedings of the [...]**, Vancouver: IEEE, 2016, p. 2212–2219, 2016a.
- ALVES, U. N. L. T.; TEIXEIRA, M. C. M.; OLIVEIRA, D. R.; CARDIM, R.; ASSUNÇÃO, E.; SOUZA, W. A. d. Smoothing switched control laws for uncertain nonlinear systems subject to actuator saturation. **International Journal of Adaptive Control and Signal Processing**, Oxford, v. 30, n. 8-10, p. 1408–1433, 2016b.
- ANGULO, S.; DAVID, V.; BERNAL, M. Nonquadratic stabilization conditions for time-delay nonlinear systems in a Takagi-Sugeno form. *In: IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE ON FUZZY SYSTEMS* **Proceedings of the [...]**. Rio de Janeiro: IEEE, 2018.
- BOYD, S. P.; L., G. E.; FERON, E.; BALAKRISHNAN, V. **Linear matrix inequalities in system and control theory**. Philadelphia: SIAM, 1994.
- CAO, Y.-Y.; FRANK, P. M. Stability analysis and synthesis of nonlinear time-delay systems via linear Takagi–Sugeno fuzzy models. **Fuzzy Sets and Systems**, Amsterdam, v. 124, n. 2, p. 213–229, 2001.
- CARNIATO, L. A.; CARNIATO, A. A.; TEIXEIRA, M. C. M.; CARDIM, R.; JUNIOR, E. I. M.; ASSUNÇÃO, E. Output control of continuous-time uncertain switched linear systems via switched static output feedback. **International Journal of Control**, Abingdon, v. 93, n. 5, p. 1127–1146, 2020.
- CHE, C.; PENG, J.; ZHAO, T.; XIAO, J.; ZHOU, J. Improved stabilization conditions for nonlinear systems with input and state delays via T-S fuzzy Model. *Mathematical Problems in Engineering*, London, v. 2018, 2018.
- COSKUN, S. Robust delay-dependent h_∞ control design for uncertain takagi-sugeno time-delay systems. **Sigma: Journal of Engineering & Natural Sciences**, Istambul, v. 38, n. 3, p. 1351–1368, 2020.
- FRIDMAN, E. Tutorial on Lyapunov-based methods for time-delay systems. **European Journal of Control**, Amsterdam, v. 20, n. 6, p. 271–283, 2014.
- GAHINET, P.; NEMIROVSKII, A.; LAUB, A. J.; CHILALI, M. The lmi control toolbox. *In: IEEE CONFERENCE ON DECISION CONTROL*, 33, 1994, Lake Buena Vista. **Proceedings of the [...]**. Lake Buena Vista: IEEE, 1994. v. 3, p. 2038–2041.
- GAO, Y.; XIAO, F.; LIU, J.; WANG, R. Distributed soft fault detection for interval type-2

fuzzy-model-based stochastic systems with wireless wensor Networks. **IEEE Transactions on Industrial Informatics**, Piscataway, v. 15, n. 1, p. 334–347, 2019.

GU, K. An integral inequality in the stability problem of time-delay systems. *In: IEEE. PROCEEDINGS OF THE IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL*, 39, 2000. Sydney. **Proceedings of the [...]**. Sydney: IEEE, 2000. v. 3, p. 2805–2810.

GU, K.; CHEN, J.; KHARITONOV, V. L. **Stability of time-delay systems**. New York: Springer Science & Business Media, 2003.

GUAN, X. P.; CHEN, C. L. Delay-dependent guaranteed cost control for T-S fuzzy systems with times delays. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, Piscataway, v. 12, n. 2, p. 236–249, 2004.

HALE, J. K.; LUNEL, S. M. V. **Introduction to functional differential equations**. New York: Springer Science & Business Media, 2013.

KOLMANOVSKII, V.; MYSHKIS, A. **Applied theory of functional differential equations**. New York: Springer Science & Business Media, 2012.

KRASOVSKII, N. N. **Stability of motion**. Stanford: Stanford University Press, 1963.

LIAN, Z.; HE, Y.; ZHANG, C. K.; WU, M. Further robust stability analysis for uncertain takagi-sugeno fuzzy systems with time-varying delay via relaxed integral inequality. **Information Sciences**, Philadelphia, v. 409/410, p. 139–150, 2017.

LIN, C.; WANG, Q.-G.; LEE, T. H. Delay-dependent lmi conditions for stability and stabilization of T-S fuzzy systems with bounded time-delay. **Fuzzy sets and systems**, Amsterdam, v. 157, n. 9, p. 1229–1247, 2006.

LOFBERG, J. Yalmip : a toolbox for modeling and optimization in matlab. *In: IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE ON ROBOTICS AND AUTOMATION*, 2004, Taipei. **Proceedings of the [...]**. Taipei: IEEE, 2004. p. 284–289.

MOON, Y. S.; PARK, P.; KWON, W. H.; LEE, Y. S. Delay-dependent robust stabilization of uncertain state-delayed systems. **International Journal of Control**, Abingdon, v. 74, n. 14, p. 1447–1455, 2001.

OLIVEIRA, D. R.; TEIXEIRA, M. C. M.; ALVES, U. N. L. T.; SOUZA, W. A. de; ASSUNÇÃO, E.; CARDIM, R. On local $\mathcal{H}_\infty$ switched controller design for uncertain t–s fuzzy systems subject to actuator saturation with unknown membership functions. **Fuzzy Sets and Systems**, Amsterdam, v. 344, p. 1–26, 2018.

RAZUMIKHIN, B. Stability of delay systems. **Prikladnaâ Matematika i Mehhanika**, Moskow, v. 20, n. 4, p. 500–512, 1956.

SANTIM, M. P. A.; TEIXEIRA, M. C. M.; SOUZA, W. A.; ASSUNÇÃO, E.; CARDIM, R. Design of a Takagi-Sugeno fuzzy regulator for a set of operation points. **Mathematical Problems in Engineering**, New York, v. 2012, n. 1, p. 1–17, 2012.

SOUZA, K. S. **Estudo sobre existência de soluções e oscilação para equações diferenciais**

- funcionais com retardamento**. 2019. 71 f. Dissertação (Mestrado profissional em matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista , Rio Claro, 2019.
- SOUZA, W. A.; TEIXEIRA, M. C.; CARDIM, R.; ASSUNCAO, E. On switched regulator design of uncertain nonlinear systems using Takagi-Sugeno fuzzy models. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, Piscataway, v. 22, n. 6, p. 1720–1727, 2014a.
- SOUZA, W. A.; TEIXEIRA, M. C.; SANTIM, M. P.; CARDIM, R.; ASSUNÇÃO, E. On switched control design of linear time-invariant systems with polytopic uncertainties. **Mathematical Problems in Engineering**, New York, v. 2013, 2013.
- SOUZA, W. A.; TEIXEIRA, M. C. M.; SANTIM, M. P. A.; CARDIM, R.; ASSUNÇÃO, E. Robust switched control design for nonlinear systems using fuzzy models. **Mathematical Problems in Engineering**, New York, v. 2014, 2014b.
- STURM, J. F. Using sedumi 1.02, a matlab toolbox for optimization over symmetric cones. **Optimization Methods and Software**, Abingdon, v. 11, n. 1-4, p. 625–653, 1999.
- TAKAGI, T.; SUGENO, M. Fuzzy identification of systems and Its applications to modeling and control. **IEEE Transaction on Systems, Man, and Cybernetics**, Piscataway, v. 15, n. 1, p. 116–132, 1985.
- TEIXEIRA, M. C. M.; ASSUNÇÃO, E.; AVELLAR, R. G. On relaxed lmi-based designs for fuzzy regulators and fuzzy observers. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, Piscataway , v. 11, n. 5, p. 613–623, 2003.
- TUAN, H. D.; APKARIAN, P.; NGUYEN, T. Q. Robust and reduced-order filtering: new lmi-based characterizations and methods. **IEEE Transactions on Signal Processing**, Piscataway, v. 49, n. 12, p. 2975–2984, 2001.
- WANG, H. O.; TANAKA, K.; GRIFFIN, M. Parallel distributed compensation of nonlinear systems by takagi-sugeno fuzzy model. In: PROCEEDINGS OF IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE ON FUZZY SYSTEMS, 1995, Yokohama. **Proceedings of the [...]**. Yokoham: IEEE, 1995. v. 2, p. 531–538.
- WANG, H. O.; TANAKA, K.; GRIFFIN, M. F. An approach to fuzzy control of nonlinear systems: Stability and design issues. **IEEE transactions on fuzzy systems**, Piscataway, v. 4, n. 1, p. 14–23, 1996.
- WANG, L.; LAM, H. K. A new approach to stability and stabilization analysis for continuous-time Takagi-Sugeno fuzzy systems with time delay. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, IEEE, Piscataway, v. 26, n. 4, p. 2460–2465, 2018.
- WANG, L.; LAM, H. K. New stability criterion for continuous-time Takagi-Sugeno fuzzy systems with time-varying delay. **IEEE Transactions on Cybernetics**, IEEE, Piscataway, v. 49, n. 4, p. 1551–1556, 2019.
- WOLMUTH, L. D.; ALVES, U. N. L. T.; TEIXEIRA, M. C. M.; ASSUNÇÃO, E.; CARDIM, R.; MOREIRA, M. R. Derivative feedback control for a class of uncertain linear systems subject to actuator saturation. **Journal of Control, Automation and Electrical Systems**, Heidelberg, v. 30, n. 4, p. 490–500, 2019.

WU, M.; HE, Y.; SHE, J.-H. **Stability analysis and robust control of time-delay systems**. New York: Springer, 2010.

ZHAO, Y.; GAO, H.; LAM, J.; DU, B. Stability and stabilization of delayed t–s fuzzy systems: a delay partitioning approach. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, IEEE, Piscataway, v. 17, n. 4, p. 750–762, 2008.

ZORICH, V. A. **Mathematical analysis II**. New York: Springer, 2016.