



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Campus de São José do Rio Preto

MATHEUS HENRIQUE MARTINS

A SEQUÊNCIA ESPECTRAL DE SERRE

SÃO JOSÉ DO RIO PRETO

2021

MATHEUS HENRIQUE MARTINS

A SEQUÊNCIA ESPECTRAL DE SERRE

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de São José do Rio Preto.

Financiadora: CNPQ

Orientadora: Prof^ª. Dr^ª. Thaís Fernanda Mendes Monis

SÃO JOSÉ DO RIO PRETO

2021

M386s Martins, Matheus Henrique
A sequência espectral de Serre / Matheus Henrique Martins. -- São
José do Rio Preto, 2021
111 f. : il.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp),
Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas, São José do Rio
Preto
Orientadora: Thaís Fernanda Mendes Monis

1. Topologia algébrica. 2. Cohomologia de grupos. 3. Fibrados
(Matemática). 4. Sequências espectrais (Matemática). I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do Instituto de
Biociências Letras e Ciências Exatas, São José do Rio Preto. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

MATHEUS HENRIQUE MARTINS

A SEQUÊNCIA ESPECTRAL DE SERRE

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de São José do Rio Preto.

Financiadora: CNPQ

COMISSÃO EXAMINADORA

Prof^a. Dr^a. Thaís Fernanda Mendes Monis

UNESP – Câmpus de Rio Claro

Orientadora

Prof. Dr. João Peres Vieira

UNESP – Câmpus de Rio Claro

Prof^a. Dr^a. Mariana Rodrigues da Silveira

Universidade Federal do ABC

SÃO JOSÉ DO RIO PRETO

08 de Abril de 2020

AGRADECIMENTOS

Agradeço hoje e sempre minha família pelo tempo e dedicação sem limites.

Às minhas amigas Ana Paula, Crislaine e Isadora em virtude dos bons momentos juntos que me ajudaram nas batalhas cotidianas da vida e me deram forças para continuar.

À minha orientadora Thaís, que me ensinou a enxergar a matemática com outros olhos.

Agradeço pelo apoio financeiro do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - Brasil (CNPQ).

RESUMO

Nessa dissertação, estudamos a construção da sequência espectral de Serre associada a uma fibração. Para culminar em sua formulação, passamos por tópicos da Topologia Algébrica tais como álgebra homológica, grupos de homotopia, grupos de homologia e de cohomologia, sistemas de coeficientes locais e grupos de homologia e cohomologia com coeficientes locais.

Palavras-chave: Fibração. Homologia. Cohomologia. Sequência espectral.

ABSTRACT

In the present dissertation, we study the construction of the Serre spectral sequence associated to a fibration. In order to get its formulation, we first developed topics in Algebraic Topology such as homological algebra, homotopy groups, homology and cohomology groups, system of local coefficients, and homology and cohomology groups with local coefficients.

Keywords: Fibration. Homology. Cohomology. Spectral sequence.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

1	Comutatividade entre f_* e ∂ ($f_* \circ \partial = \partial \circ f_*$)	20
2	Levantamento de f relativo a p	23
3	Indução de f e p ao grupo fundamental	26
4	Representação da igualdade $p = p \circ \tilde{f}$	28
5	Comutatividade entre as composições $(p \times 1_I) \circ f$ e $1_{B \times I} \circ p'$	35
6	Comutatividade entre as composições $p \circ f$ e $1_B \circ p'$	36
7	Comutatividade entre as composições $\pi_1 \circ h$ e $\bar{h} \circ p$	36
8	Comutatividade entre as composições $\pi_1 \circ H$ e $\bar{H} \circ (p \times 1_I)$	37
9	Representação da propriedade de levantamento de homotopia	37
10	Divisão por quadrados do plano projetivo $\mathbb{R}P^2$	45
11	Interpretação do homomorfismo $\partial_* : H_n(X, A; G) \rightarrow H_{n-1}(A, B; G)$	50
12	Mudança de sinal presente no homomorfismo ∂	61
13	Comutatividade entre as composições $p \circ Su = \omega$ e $Su \circ (0 \times) = u$	69
14	Comutatividade entre as composições $p \circ Sv = \omega$ e $Sv _L = f$	70
15	Módulo bi-graduado diferencial de bi-grau $(3, -2)$	75
16	Igualdade entre as composições $\eta \circ d$ e $d_r \circ \eta$ ($\eta \circ d = d_r \circ \eta$)	81
17	Esquema do isomorfismo $E_{r+1}^{p,q} \cong H^{p,q}(E_r^{*,*}, d_r)$	81
18	Igualdade entre as composições $d^r \circ \rho_1$ e $\rho_2 \circ \partial$ ($d^r \circ \rho_1 = \rho_2 \circ \partial$)	84
19	Igualdade entre as composições $d_r \circ \rho_1$ e $\rho_2 \circ \delta$ ($d_r \circ \rho_1 = \rho_2 \circ \delta$)	85
20	Comutatividade de φ_* com d_0 e δ ($\varphi_* \circ d_0 = \delta \circ \varphi_*$)	88
21	Representação dos homomorfismos δ^* , p^* , d_{n+1} e k	92
22	Comutatividade do produto com os homomorfismos Ξ e $\Xi \times \Xi$	95
23	Esquema das filtrações de cocadeia do cilindro limitado	100

SUMÁRIO

1	Introdução	10
2	Preliminares	12
2.1	Grupos topológicos	12
2.2	Ações de um grupo topológico	13
2.3	Álgebra homológica	14
2.4	Classes de homotopia e grupos fundamentais	16
2.5	Propriedades fundamentais dos grupos de homotopia	18
3	Espaços de recobrimento, fibrados e fibrações	22
3.1	Espaços de recobrimento	22
3.1.1	Grupos de transformações de recobrimento	27
3.2	Fibrados	29
3.2.1	Propriedades dos fibrados	34
3.3	Fibrações	37
4	(Co)homologia de espaços topológicos	39
4.1	O anel de (co)homologia de um espaço topológico	39
4.1.1	Grupo de homologia	44
4.1.2	O anel de cohomologia	53
4.2	(Co)homologia com coeficientes locais	58
4.3	Os coeficientes locais de (co)homologia associado com fibrações	68
5	A construção da sequência espectral de Serre	75
5.1	Definições e propriedades básicas	75
5.2	Como surge uma sequência espectral?	78
5.2.1	Módulos diferenciais filtrados	78
5.3	A sequência espectral de Serre associada a uma fibração	83
6	Considerações finais	105
6.1	O índice de valor-ideal de Fadell-Husseini	107
6.2	A propriedade do ponto fixo para G/K	109
6.3	O futuro	110

1 Introdução

Depois de 1930, os seguintes novos invariantes de um espaço topológico X foram introduzidos: os grupos de homotopia de dimensão alta, $\pi_*(X)$, por Hurewicz e Čech, e o anel de cohomologia, por Alexander, Kolmogoroff e Whitney. As várias teorias de homologia (simplicial, de Rham, Čech, singular, etc.) foram classificadas a partir da axiomatização de Eilenberg e Steenrod.

O computo de tais invariantes seguiu lentamente, mesmo para classes de espaços importantes, como é o caso das variedades, os grupos de Lie, e seus espaços homogêneos associados. A inclusão de um subgrupo conexo e fechado H de um grupo de Lie G determina uma fibração (na verdade, um fibrado)

$$H \hookrightarrow G \rightarrow G/H.$$

Muitos esforços foram dispensados na tentativa de relacionar os invariantes algébricos de H , G e G/H . Apesar de ainda não ter a linguagem de sequências exatas longas, Hurewicz provou algo equivalente ao que conhecemos hoje como a sequência exata longa de grupos de homotopia

$$\cdots \rightarrow \pi_n(H) \rightarrow \pi_n(G) \rightarrow \pi_n(G/H) \rightarrow \pi_{n-1}(H) \rightarrow \cdots.$$

Leray resolveu o problema de relacionar os anéis de cohomologia dos espaços (F, E, π, B) quando essa quádrupla determina um espaço fibrado. A relação é explicitada nos seguintes dois teoremas.

Teorema [A sequência espectral de homologia de Leray-Serre]. Sejam G um grupo abeliano. Seja $F \hookrightarrow E \xrightarrow{\pi} B$ uma fibração, onde B é conexo por caminhos e F é conexo. Então, existe uma sequência espectral de primeiro quadrante, $\{E_{*,*}^r, d^r\}$, convergindo para $H_*(E; G)$, com

$$E_{p,q}^2 \cong H_p(B; \mathcal{H}_q(F; G)),$$

a homologia do espaço B , com coeficientes locais na homologia da fibra de π . Ademais, essa sequência espectral é natural com respeito às aplicações fibradas.

Teorema [A sequência espectral de cohomologia de Leray-Serre]. Seja R um anel comutativo com unidade. Seja $F \hookrightarrow E \xrightarrow{\pi} B$ uma fibração, onde B é conexo por caminhos e F é conexo. Então, existe uma sequência espectral de álgebras, de primeiro quadrante, $\{E_r^{*,*}, d_r\}$,

converging para $H^*(E; R)$ como uma álgebra, com

$$E_2^{p,q} \cong H^p(B; \mathcal{H}^q(F; R)),$$

a cohomologia do espaço B , com coeficientes locais na cohomologia da fibra de π . Essa sequência espectral é natural com respeito às aplicações fibradas. Ademais, o produto cup, $\smile$, sobre o anel de cohomologia com coeficientes locais e o produto $\cdot_2$ sobre $E_2^{*,*}$ estão relacionados por

$$u \cdot_2 v = (-1)^{p'q} u \smile v,$$

onde $u \in E_2^{p,q}$ e $v \in E_2^{p',q'}$.

Nessa dissertação, discutiremos a construção da sequência espectral de Serre. Para isso, organizamos o trabalho do seguinte modo: o Capítulo 2 é constituído de definições e resultados básicos da teoria de grupos topológicos, grupos de homotopia e álgebra homológica. No Capítulo 3, tratamos dos espaços de recobrimento, dos fibrados e das fibrações. O Capítulo 4 trata da homologia e cohomologia de um espaço obtida através de cubos singulares. Nesse capítulo, destacamos os Exemplos 4.1.1 e 4.1.2 onde descrevemos como calcular a (co)homologia do plano projetivo a partir de uma divisão por quadrados dada. Ainda no Capítulo 4, tratamos da teoria de (co)homologia com coeficientes locais. Para exemplificar, temos o Exemplo 4.2.1 onde determinamos a (co)homologia do plano projetivo com coeficientes locais dado pelo sistema local de orientação. Culminamos no Capítulo 5, onde tratamos da construção da sequência espectral de Serre e algumas de suas propriedades. Já no ápice do assunto objeto dessa dissertação, finalizamos com o Capítulo 6, onde explicamos a motivação para a escolha desse tema e lançamos luz sobre a nossa intenção para o doutoramento, e em como o traquejo com a sequência espectral de Serre nos será útil nessa fase vindoura.

2 Preliminares

Neste capítulo, serão introduzidos algumas definições e resultados básicos da teoria de grupos topológicos, bem como das teorias de grupos de homotopias e de álgebra homológica. O objetivo é ter uma fonte prática e rápida de algumas definições e resultados que sustentam os argumentos usados no decorrer dos próximos capítulos. Então, para mais detalhes tais como exemplos e demonstrações ou aprofundamento, vide referências apontadas no fim de cada seção.

2.1 Grupos topológicos

Um grupo topológico é essencialmente um espaço topológico com uma estrutura de grupo contínua.

Definição 2.1.1. Um conjunto G é um *grupo topológico* se possui as seguintes estruturas:

1. G é grupo, isto é, existe uma função multiplicação $\mu : G \times G \rightarrow G$ juntamente com um elemento identidade $e \in G$ e uma função inversão $\iota : G \rightarrow G$ satisfazendo os axiomas:

$$ge = eg = g, \quad (gg')g'' = g(g'g''), \quad gg^{-1} = g^{-1}g = e,$$

onde, por simplicidade, escrevemos $\mu(g, g') = gg'$ e $\iota(g) = g^{-1}$.

2. G é um T_1 -espaço, isto é, G é um espaço topológico: existe uma família de subconjuntos (abertos) $\mathcal{A} = \{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ satisfazendo os axiomas

- $\emptyset, G \in \mathcal{A}$;
- Se para cada λ , $A_\lambda \in \mathcal{A}$ então $\cup_\lambda A_\lambda \in \mathcal{A}$;
- Se $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ então $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{A}$;

e também satisfaz o axioma T_1 : Para todo elemento $g \in G$, $\{g\}$ é fechado.

3. As funções $\mu : G \times G \rightarrow G$ e $\iota : G \rightarrow G$ são contínuas.

Recordando que, dados espaços topológicos X e Y , uma função $f : X \rightarrow Y$ é *contínua* se a imagem inversa $f^{-1}(A)$ de todo conjunto aberto A de Y é aberto em X . No contexto de grupos topológicos, faremos uso das terminologias canônicas de grupos e de espaços topológicos:

G é *abeliano* se $gg' = g'g$ para quaisquer $g, g' \in G$;

H é um *subgrupo* de G se H é um subespaço não vazio de G e $h, h' \in H$ implica que $h^{-1}h' \in H$;

N é um subgrupo *normal* de G se N é um subgrupo de G e $gN = Ng$, para qualquer $g \in G$;

Considerando subconjuntos A, B de G , define-se:

$$A \cdot B = \{ab \mid a \in A, b \in B\};$$

$N(A) = \{g \in G \mid gA = Ag\}$ o *normalizador* do subconjunto A em G ;

$Z(A) = \{z \in G \mid za = az, \quad \forall a \in A\}$ o *centralizador* do subconjunto A em G ;

$Z(G) = \{z \in G \mid zg = gz, \quad \forall g \in G\}$ o *centro* de G .

H é um subgrupo *fechado (aberto)* de G se H é um subgrupo de G e um subconjunto *fechado (aberto)* de G .

$f : G \rightarrow G'$ é um *homomorfismo* de grupos topológicos se f é contínua e satisfaz $f(gg') = f(g)f(g')$, para quaisquer $g, g' \in G$.

Dois grupos topológicos G e G' são *isomorfos* se existem homomorfismos $\phi : G \rightarrow G'$ e $\psi : G' \rightarrow G$ de grupos topológicos tais que

$$\psi \circ \phi = 1_G \text{ (identidade de } G), \quad \phi \circ \psi = 1_{G'} \text{ (identidade de } G').$$

A funções ψ, ϕ são isomorfismos de grupos e homeomorfismos de espaço topológicos.

Para mais detalhes ver [11] e [15].

2.2 Ações de um grupo topológico

Definição 2.2.1. Para um grupo topológico G e um espaço topológico X , uma aplicação contínua

$$\mu = \mu_X : G \times X \rightarrow X \text{ (ou } X \times G \rightarrow X)$$

é uma *ação* à esquerda (ou à direita) de G em X se satisfaz as seguintes condições:

1. $g(g'x) = (gg')x$ (ou $(xg)g' = x(gg')$).
2. $ex = x$ (ou $xe = x$), para a identidade $e \in G$,

onde $\mu(g, x) = gx$.

A ação μ é dita ser *efetiva* se $gx = g'x$, para todo $x \in X$, então $g = g'$, e *transitiva* se para cada $x, x' \in X$, existe $g \in G$ tal que $gx = x'$.

Dado $g \in G$, para a ação à esquerda, define-se $L_g : X \rightarrow X$ dada por $L_g(x) = gx$, e para a ação à direita, define-se $R_g : X \rightarrow X$ dada por $R_g(x) = xg$. A continuidade da ação μ implica que L_g (ou R_g) é contínua e as condições 1 e 2 equivalem a

1. $L_g \circ L_{g'} = L_{gg'}$ (ou $R_{g'} \circ R_g = R_{gg'}$).
2. $L_e = 1_X$ (ou $R_e = 1_X$).

Consequentemente, $L_g : X \rightarrow X$ e $R_g : X \rightarrow X$ são homeomorfismos.

Definição 2.2.2. Um espaço topológico X é um *espaço homogêneo* de um grupo topológico G se G age sobre X transitivamente.

Se um espaço topológico G age pela esquerda (ou direita) sobre X , definimos a relação de equivalência em X dada por:

$$x \sim x' \text{ se, e só se, } gx = x' \quad (xg = x'),$$

para algum $g \in G$. E denotamos $X/G = X/\sim$ o espaço quociente e por $\pi : X \rightarrow X/G$ a projeção. Cada ponto de X/G é uma classe de equivalência $Gx = \{gx \mid g \in G\}$ (ou $xG = \{xg \mid g \in G\}$), a qual chamamos de *órbita* de x por G .

Para mais detalhes ver [15] e [11].

2.3 Álgebra homológica

Em toda essa seção, R denota um anel comutativo com unidade.

Definição 2.3.1. Um grupo abeliano aditivo X , juntamente com uma função $\mu : R \times X \rightarrow X$, é um R -módulo se μ satisfaz as seguintes condições:

- $\mu(\alpha + \beta, x) = \mu(\alpha, x) + \mu(\beta, x),$

- $\mu(\alpha, x+y) = \mu(\alpha, x) + \mu(\alpha, y)$
- $\mu(\alpha, \mu(\beta, x)) = \mu(\alpha\beta, x)$;
- $\mu(1, x) = x$;

para $\alpha, \beta \in R$ e $x, y \in X$ quaisquer.

Definição 2.3.2. Dados X e Y R -módulos, uma função $f : X \rightarrow Y$ é um R -homomorfismo se

$$f(u+v) = f(u) + f(v) \quad \text{e} \quad f(\alpha u) = \alpha f(u)$$

para todo $u, v \in X$ e todo $\alpha \in R$.

Definição 2.3.3. Um *complexo de cadeia* é uma sequência de R -módulos e R -homomorfismos

$$C : \cdots \xrightarrow{\partial_{n+2}} C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots$$

satisfazendo $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$ para cada n . Os elementos de C_n são chamados de *cadeias* de dimensão n e os homomorfismos ∂_n são chamados os operadores bordo.

Dado um complexo de cadeias C como acima, em C_n consideramos os R -submódulos $Z_n(C) = \ker(\partial_n : C_n \rightarrow C_{n-1})$ e $B_n(C) = \text{Im}(\partial_{n+1} : C_{n+1} \rightarrow C_n)$. Uma vez que $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$, temos $B_n(C) \subset Z_n(C)$ e, então, podemos considerar o quociente $H_n(C) = Z_n(C)/B_n(C)$, o qual é nomeado a *homologia de dimensão n* do complexo de cadeia C .

Definição 2.3.4. Sejam C e D complexos de cadeia. Um homomorfismo $f : C \rightarrow D$ entre esses complexos de cadeia é uma sequência de homomorfismos $f = \{f_n : C_n \rightarrow D_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ tais que $\partial \circ f_n = f_{n-1} \circ \partial$, para todo $n \in \mathbb{Z}$. Nesse caso, fica bem definido um homomorfismo entre as homologias, $H_n(f) : H_n(C) \rightarrow H_n(D)$, o qual é dado por $H_n(f)(z + B_n(C)) = f(z) + B_n(D)$, para cada n . O homomorfismo $H_n(f)$ é chamado de homomorfismo induzido de f .

Definição 2.3.5. Dados $f, g : C \rightarrow D$ dois homomorfismos entre os complexos de cadeia C e D , dizemos que tais homomorfismos são *homotópicos* quando existe uma família de homomorfismos $h = \{h_n : C_n \rightarrow D_{n+1} \mid n \in \mathbb{Z}\}$ tal que, para cada $n \in \mathbb{Z}$, $\partial \circ h_n + h_{n-1} \circ \partial = f_n - g_n$. Dizemos também que h é uma *homotopia* entre os homomorfismos f e g ($f \simeq g$).

Proposição 2.3.1. Se os homomorfismos de cadeias $f, g : C \rightarrow D$ são homotópicos, então

$$H_n(f) = H_n(g) : H_n(C) \rightarrow H_n(D),$$

onde $H_n(f)$ e $H_n(g)$ são os homomorfismos induzidos de f e g , para todo inteiro $n \in \mathbb{Z}$.

Definição 2.3.6. Um homomorfismo $h : C \rightarrow D$ entre complexos de cadeia é uma *equivalência de cadeias* se existir um homomorfismo $k : D \rightarrow C$ tal que as composições $k \circ h$ e $h \circ k$ são homotópicas aos homomorfismos identidade $1_C : C \rightarrow C$ e $1_D : D \rightarrow D$, respectivamente.

Proposição 2.3.2. Seja $h : C \rightarrow D$ uma equivalência de cadeias. Então, h induz um isomorfismo $H_n(C) \cong H_n(D)$ para cada n .

Definição 2.3.7. Por um complexo de *cocadeia* entende-se uma sequência

$$C : \dots \xrightarrow{\delta_{n-2}} C^{n-1} \xrightarrow{\delta_{n-1}} C^n \xrightarrow{\delta_n} C^{n+1} \xrightarrow{\delta_{n+1}} \dots$$

de R -módulos e R -homomorfismos tais que $\delta_n \circ \delta_{n-1} = 0$, para todo n . Denota-se por $Z^n(C) = \ker \delta_n$ e por $B^n(C) = \text{Im } \delta_{n-1}$. Uma vez que $\delta_n \circ \delta_{n-1} = 0$, tem-se $B^n(C) \subset Z^n(C)$ e, analogamente ao caso de homologia, definimos a *cohomologia de dimensão n* do complexo de cocadeia C por $H^n(C) = Z^n(C) / B^n(C)$.

Os resultados e definições acima para complexos de cadeia comportam-se similarmente para complexos de cocadeia.

Para mais detalhes ver [2] e [8].

2.4 Classes de homotopia e grupos fundamentais

Para subconjuntos $A_1, \dots, A_n$ e $B_1, \dots, B_n$ de espaços topológicos X e Y , respectivamente, e uma função contínua $f : X \rightarrow Y$ satisfazendo $f(A_i) \subset B_i$, $i = 1, \dots, n$, escrevemos

$$f : (X, A_1, \dots, A_n) \rightarrow (Y, B_1, \dots, B_n).$$

Definição 2.4.1. Duas funções $f, g : (X, A_1, \dots, A_n) \rightarrow (Y, B_1, \dots, B_n)$ são chamadas *homotópicas* se existe uma função $H : (X \times I, A_1 \times I, \dots, A_n \times I) \rightarrow (Y, B_1, \dots, B_n)$ tal que

$$H(x, 0) = f(x), \quad H(x, 1) = g(x), \quad \forall x \in X.$$

Dizemos que H é uma homotopia entre f e g , e escrevemos

$$f \simeq g : (X, A_1, \dots, A_n) \rightarrow (Y, B_1, \dots, B_n)$$

se f e g são homotópicas.

Pode-se provar as seguintes propriedades:

1. A relação de homotopia $\simeq$ é uma relação de equivalência.
2. A relação de homotopia é preservada por composição: estando definidas as composições $f' \circ f$ e $g' \circ g$, se $f \simeq g$ e $f' \simeq g'$ então $f' \circ f \simeq g' \circ g$.

Definição 2.4.2. Seja $f : (X, A_1, \dots, A_n) \rightarrow (Y, B_1, \dots, B_n)$ uma função contínua. Denotamos por $[f]$ o conjunto de todas as funções homotópicas a $f : (X, A_1, \dots, A_n) \rightarrow (Y, B_1, \dots, B_n)$ e chamamos $[f]$ de *a classe de homotopia* de f .

Os sistemas de espaços $(X, A_1, \dots, A_n)$ e $(Y, B_1, \dots, B_n)$ são chamados *homotopicamente equivalentes* se existem funções

$$f : (X, A_1, \dots, A_n) \rightarrow (Y, B_1, \dots, B_n)$$

e

$$g : (Y, B_1, \dots, B_n) \rightarrow (X, A_1, \dots, A_n)$$

tais que

$$g \circ f \simeq 1 : (X, A_1, \dots, A_n) \rightarrow (X, A_1, \dots, A_n)$$

e

$$f \circ g \simeq 1 : (Y, B_1, \dots, B_n) \rightarrow (Y, B_1, \dots, B_n).$$

Neste caso, também dizemos que os sistemas de espaços possuem o *mesmo tipo de homotopia*. Em particular, um espaço é dito *contrátil* se possui o mesmo tipo de homotopia que um ponto.

Espaços com o mesmo tipo de homotopia adquirem uma correspondência bijetiva entre seus conjuntos de classes de homotopia. E podem ser considerados equivalentes quando consideramos grupos fundamentais, grupos de homotopia, grupos de cohomologia e assim por diante.

Dado uma homotopia $H : X \times I \rightarrow Y$, para cada $t \in [0, 1]$, define-se a função

$$h_t : X \rightarrow Y \quad (0 \leq t \leq 1)$$

por $h_t(x) = H(x, t)$. Veja que, com essa notação, $h_0 \simeq h_1 : X \rightarrow Y$.

Notação:

$$\pi_1(X, x_0, x_1) = \{\omega : (I, 0, 1) \rightarrow (X, x_0, x_1)\} / \simeq$$

$$\pi_1(X, x_0) = \pi_1(X, x_0, x_0) = \{\omega : (I, \partial I) \rightarrow (X, x_0)\} / \simeq$$

$\pi_1(X, x_0)$ com a operação produto induzida pelo *produto de caminhos* é um grupo, o qual chamamos de *grupo fundamental* de X com ponto base x_0 .

Para mais detalhes ver [15], [1] e [6].

2.5 Propriedades fundamentais dos grupos de homotopia

Notação:

$$\begin{aligned} [X, A_1, \dots, A_n; Y, B_1, \dots, B_n] &= \{h : (X, A_1, \dots, A_n) \rightarrow (Y, B_1, \dots, B_n)\} / \simeq \\ &= \{\text{o conjunto das classes de homotopia } [h]\}; \end{aligned}$$

- $I^n = \{(t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq t_i \leq 1, i = 1, \dots, n\}$ o *cubo unitário*;
- $\partial I^n = \{(t_1, \dots, t_n) \in I^n \mid \prod_{i=1}^n t_i(1 - t_i) = 0\}$ o *bordo* do cubo unitário;
- $J^{n-1} = \{(t_1, \dots, t_n) \in I^n \mid t_n \prod_{i=1}^{n-1} t_i(1 - t_i) = 0\} = \overline{\partial I^n - I^{n-1} \times \{0\}}$;
- $\pi_n(X, A, x_0) = [I^n, \partial I^n, J^{n-1}; X, A, x_0], x_0 \in A \subset X$;
- $\pi_n(X, x_0) = [I^n, \partial I^n; X, x_0] (= \pi_n(X, x_0, x_0))$;

Para duas funções $h_1, h_2 : (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \rightarrow (X, A, x_0)$ definimos a operação $*$ por

$$h_1 * h_2 : (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \rightarrow (X, A, x_0) \quad \text{com}$$

$$(h_1 * h_2)(t_1, \dots, t_n) = \begin{cases} h_1(2t_1, t_2, \dots, t_n), & t_1 \leq \frac{1}{2}, \\ h_2(2t_1 - 1, t_2, \dots, t_n), & t_1 \geq \frac{1}{2}, \end{cases}$$

que só faz sentido para $n > 1$ ou $n = 1$ e $A = x_0$.

Então, para $n \geq 2$, sejam $M = \{h : (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \rightarrow (X, A, x_0) \text{ contínua}\}$,

$$s : M \times M \rightarrow M \quad \text{e} \quad \rho : M \rightarrow M / \simeq$$

dadas por $s(h_1, h_2) = h_1 * h_2$ e $\rho(h) = [h]$, respectivamente.

De s induzimos

$$\bar{s} : \pi_n(X, A, x_0) \times \pi_n(X, A, x_0) \rightarrow \pi_n(X, A, x_0),$$

pois $\pi_n(X, A, x_0) = M / \simeq$.

Portanto, obtemos a igualdade $\rho \circ s(h_1, h_2) = \bar{s} \circ (\rho \times \rho)(h_1, h_2)$, isto é, $[h_1] * [h_2] = [h_1 * h_2]$ que está bem definida, visto que se tomarmos $f_1 \stackrel{H_1}{\simeq} h_1$, $f_2 \stackrel{H_2}{\simeq} h_2$ e $g \stackrel{H}{\simeq} (h_1 * h_2)$, então a função

$$H_1 * H_2 : (I^n \times I, \partial I^n \times I, J^{n-1} \times I) \rightarrow (X, A, x_0)$$

definida por

$$(H_1 * H_2)(t_1, \dots, t_n, s) = \begin{cases} H_1(2t_1, t_2, \dots, t_n, s), & t_1 \leq \frac{1}{2}, \\ H_2(2t_1 - 1, t_2, \dots, t_n, s), & t_1 \geq \frac{1}{2}, \end{cases}$$

é uma homotopia entre $f_1 * f_2$ e $h_1 * h_2$. E pela transitividade da relação de equivalência ($\simeq$), $(f_1 * f_2) \simeq g$, de modo que $[f_1] * [f_2] = [g]$.

À vista disso, $\pi_n(X, A, x_0)$ é um grupo com a operação $*$, o qual chamamos de *n-ésimo grupo de homotopia* de (X, A, x_0) .

O caso em que $n = 1$, se considerarmos os caminhos $\omega : (I, 0, 1) \rightarrow (X, x_0, x_1)$ e $\omega' : (I, 0, 1) \rightarrow (X, x_1, x_2)$ dizemos que o caminho $\omega * \omega' : (I, 0, 1) \rightarrow (X, x_0, x_2)$ é a *justaposição* dos caminhos ω e ω' . Além disso, se $A = x_0$ chamamos o grupo $\pi_1(X, x_0)$ de *grupo fundamental*.

Proposição 2.5.1. Uma função contínua $f : (X, A, x_0) \rightarrow (Y, B, y_0)$ induz um morfismo $f_* : \pi_n(X, A, x_0) \rightarrow \pi_n(Y, B, y_0)$ que é dado por $f_*[h] = [f \circ h]$, onde são satisfeitas as seguintes propriedades:

- Se $f \simeq f'$ então $f_* = f'_*$
- $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$
- $(1_X)_* = 1$
- f_* é um homomorfismo quando a adição é definida.

Demonstração. Sejam $1_I : I \rightarrow I$ a identidade de I , $h \in M$ e H uma homotopia entre f e f' . Então, $H \circ (h \times 1_I) : (I^n \times I, \partial I^n \times I, J^{n-1} \times I) \rightarrow (X, A, x_0)$ é uma homotopia entre $f \circ h$ e $f' \circ h$ e, portanto $[f \circ h] = [f' \circ h]$, isto é, $f_*[h] = f'_*[h]$.

Dados $f : (X, A, x_0) \rightarrow (Y, B, y_0)$, $g : (Y, B, y_0) \rightarrow (Z, C, z_0)$ e $[h] \in \pi_n(X, A, x_0)$, por definição, $(g \circ f)_*[h] = [(g \circ f) \circ h] = [(g \circ (f \circ h))] = g_*[f \circ h] = g_* \circ f_*[h]$. $\square$

Proposição 2.5.2. Se $n > 2$, ou $n = 2$ e $A = x_0$, $\pi_n(X, A, x_0)$ é um grupo abeliano.

A classe da função constante $h : I^n \rightarrow \{x_0\}$ é denotada por $0 \in \pi_n(X, A, x_0)$. Quando $\pi_n(X, A, x_0)$ é um grupo, 0 é o elemento neutro.

Proposição 2.5.3. A sequência

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow \pi_{n+1}(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_n(A, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(X, x_0) \xrightarrow{j_*} \pi_n(X, A, x_0) \rightarrow \cdots \\ \rightarrow \pi_1(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_0(A) \xrightarrow{i_*} \pi_0(X) \end{aligned}$$

é exata, onde $i : (A, x_0) \rightarrow (X, x_0)$ e $j : (X, x_0) \rightarrow (X, A, x_0)$ são as inclusões e

$$\partial : \pi_{n+1}(X, A, x_0) \rightarrow \pi_n(A, x_0)$$

é dada por $\partial[h] = [h|_{I^n \times \{0\}}]$, sendo um homomorfismo para $n \geq 1$. Além disso, ∂ é natural, isto é, o seguinte diagrama é comutativo:

Diagrama 1: Comutatividade entre f_* e ∂ ($f_* \circ \partial = \partial \circ f_*$)

$$\begin{array}{ccc} \pi_{n+1}(X, A, x_0) & \xrightarrow{\partial} & \pi_n(A, x_0) \\ \downarrow f_* & & \downarrow f_* \\ \pi_{n+1}(Y, B, y_0) & \xrightarrow{\partial} & \pi_n(B, y_0) \end{array}$$

Fonte: Mimura [15] (1991, p. 63).

Proposição 2.5.4. A sequência

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow \pi_{n+1}(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_n(A, B, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(X, B, x_0) \xrightarrow{j_*} \pi_n(X, A, x_0) \rightarrow \cdots \\ \rightarrow \pi_1(X, A, x_0) \end{aligned}$$

é exata, onde i e j são as inclusões e ∂ é análogo ao anterior.

Proposição 2.5.5. Para uma função contínua $h : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_1)$ e um caminho $\omega : (I, 0, 1) \rightarrow (X, x_0, x_1)$, existe uma homotopia $h_t : I^n \rightarrow X$ tal que $h_1 = h$ e $h_t(\partial I^n) = \omega(t)$. A classe $[\omega]$ induz um isomorfismo

$$[\omega]_* : \pi_n(X, x_1) \rightarrow \pi_n(X, x_0) \quad \text{onde } [\omega]_*[h] = [h_0],$$

que independe dos representantes ω e h , e satisfaz

$$[\omega * \omega']_* = [\omega]_* \circ [\omega']_* \quad \text{e} \quad [0]_* = 1.$$

Em particular $\pi_1(X, x_0)$ age sobre $\pi_n(X, x_0)$.

Como resultado imediato, se X é conexo por caminho, $\pi_n(X, x_0)$ independe da escolha do ponto base x_0 a menos de isomorfismo. Portanto, o denotamos por $\pi_n(X)$. Analogamente, para $\pi_n(X, A, x_0)$ se A for conexo por caminho, tal será denotado por $\pi_n(X, A)$.

Para mais detalhes ver [1] e [15].

3 Espaços de recobrimento, fibrados e fibrações

3.1 Espaços de recobrimento

Definição 3.1.1. Dizemos que um espaço topológico X é *localmente conexo por caminhos* se dada uma vizinhança arbitrária U de cada ponto $x \in X$, existe uma vizinhança conexa por caminhos V de x tal que $x \in V \subset U$.

Definição 3.1.2. Um espaço X é chamado *1-conexo* quando X é *conexo por caminhos* ($\pi_0(X) = 0$) e *simplesmente conexo*, isto é, $\pi_1(X, x) = 0$ para todo $x \in X$ ($\pi_1(X) = 0$).

Definição 3.1.3. $(\tilde{X}, p, X)$ é um *espaço de recobrimento* se:

- i. Os espaços $\tilde{X}$ e X são localmente conexos por caminhos e conexos por caminhos;
- ii. A aplicação $p : \tilde{X} \rightarrow X$ é contínua e sobrejetiva e, para cada $x \in X$, existe uma vizinhança conexa por caminho U de x de modo que cada componente conexa por caminho U_α de $p^{-1}(U)$ é aberta e $p|_{U_\alpha} : U_\alpha \rightarrow U$ é um homeomorfismo. Chamamos U de *uma vizinhança fundamental*.

Segue de imediato da definição de espaço de recobrimento que:

- $p^{-1}(x)$ possui a topologia discreta, ou seja, todo ponto de $p^{-1}(x)$ é aberto em $p^{-1}(x)$: de fato, seja $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$ qualquer. Segue da definição de espaço de recobrimento que existe um aberto U_α de $\tilde{X}$ com $U_\alpha \cap p^{-1}(x) = \{\tilde{x}\}$. Portanto, $\{\tilde{x}\}$ é aberto em $p^{-1}(x)$.
- Seja U uma vizinhança fundamental. Então, $\psi : p^{-1}(U) \rightarrow U \times p^{-1}(x)$ dada por

$$\psi(y) = (p(y), z), \text{ onde } y \in U_\alpha \text{ e } z \in p^{-1}(x) \cap U_\alpha$$

é um homeomorfismo. Este fato segue da verificação direta de que $\psi^{-1} : U \times p^{-1}(x) \rightarrow p^{-1}(U)$ é dada por:

$$\psi^{-1}(y, z) = w, \quad w = p|_{U_\alpha}^{-1}(y) \text{ onde } z \in p^{-1}(x) \cap U_\alpha.$$

Dizemos que X é o *espaço base*, p é a *projeção* ou *aplicação de recobrimento*, $\tilde{X}$ é *espaço total* ou *espaço de recobrimento* e $p^{-1}(x)$ é a *fibra* sobre $x \in X$.

Exemplo 3.1.1. $(\mathbb{R}, p, S^1)$ é um espaço de recobrimento para $p(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$.

Considerando, por exemplo, o subconjunto $U = \{(x, y) \in S^1 \mid x > 0\} \subset S^1$, então $p^{-1}(U)$ consiste dos pontos $t \in \mathbb{R}$ tais que $\cos(2\pi t) > 0$, ou seja, $p^{-1}(U) = \cup_n V_n$, onde $V_n =]n - \frac{1}{4}, n + \frac{1}{4}[$ e $n \in \mathbb{Z}$. Restringindo ao intervalo fechado $\overline{V_n}$, a função $p|_{\overline{V_n}} : \overline{V_n} \rightarrow S^1$ é injetiva pois $\sin(2\pi t)$ é estritamente crescente em $\overline{V_n}$.

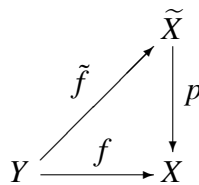
Além disso, por p , segue uma correspondência sobrejetiva de $\overline{V_n}$ em $\overline{U}$ e de V_n em U , pelo Teorema do valor intermediário. Sendo $\overline{V_n}$ compacto, $p|_{\overline{V_n}} : \overline{V_n} \cong \overline{U}$ (homeomorfismo). Em particular $p|_{V_n} : V_n \rightarrow U$ é um homeomorfismo.

Aplicando o mesmo argumento as interseções de S^1 com os semi-planos abertos de $\mathbb{R}^2$, obtemos as vizinhanças fundamentais.

Definição 3.1.4. Dois espaços de recobrimento $(\tilde{X}, p, X)$ e $(\tilde{Y}, q, Y)$ são *equivalentes* se existem homeomorfismos $\tilde{h} : \tilde{X} \rightarrow \tilde{Y}$ e $h : X \rightarrow Y$ tais que $h \circ p = q \circ \tilde{h}$.

Definição 3.1.5. Sejam $(\tilde{X}, p, X)$ um espaço recobrimento e $f : Y \rightarrow X$ uma função contínua qualquer. Chamamos uma função contínua $\tilde{f} : Y \rightarrow \tilde{X}$ de *um levantamento* de f em relação a p se a igualdade $p \circ \tilde{f} = f$ é satisfeita.

Diagrama 2: Levantamento de f relativo a p



Fonte: Mimura [15] (1991, p. 50).

Para um caminho $\omega : (I, 0, 1) \rightarrow (X, x_0, x_1)$, denotamos por $\overline{\omega} : (I, 0, 1) \rightarrow (X, x_1, x_0)$ o caminho inverso de ω , onde $\overline{\omega}(s) = \omega(1 - s)$ para $s \in I$.

Lema 3.1.1. Seja $(\tilde{X}, p, X)$ um espaço de recobrimento. Para um caminho $\omega : I \rightarrow X$ e um ponto $\tilde{x}$ de $\tilde{X}$ satisfazendo $p(\tilde{x}) = \omega(0)$, existe um único levantamento $\tilde{\omega}$ de ω tal que $\tilde{\omega}(0) = \tilde{x}$. Além disso, se $\omega \simeq \omega_1$, então para os respectivos levantamentos $\tilde{\omega}$ e $\tilde{\omega}_1$, $\tilde{\omega}(0) = \tilde{\omega}_1(0)$ implica $\tilde{\omega}(1) = \tilde{\omega}_1(1)$ e $\tilde{\omega} \simeq \tilde{\omega}_1$.

Demonstração. Consideremos primeiramente o caso em que $\omega(I) \subset U$ para alguma vizinhança fundamental U de $p(\tilde{x})$. Temos $p^{-1}(U) = \cup_{\alpha} U_{\alpha}$, onde os U_{α} 's são as componentes conexas por caminhos de $p^{-1}(U)$, cada U_{α} é aberto em $\tilde{X}$ e $p|_{U_{\alpha}} : U_{\alpha} \rightarrow U$ é homeomorfismo. Assim, a função $p|_{U_{\alpha}}^{-1} \circ \omega : I \rightarrow \tilde{X}$ define um caminho em $\tilde{X}$. Sabendo que $U_{\alpha} \cap U_{\beta} = \emptyset$ para quaisquer $\alpha \neq \beta$, existe um único α tal que $\tilde{x} \in U_{\alpha}$. Portanto, o levantamento $\tilde{\omega} = p|_{U_{\alpha}}^{-1} \circ \omega : I \rightarrow \tilde{X}$ é único de modo que $\tilde{\omega}(0) = p|_{U_{\alpha}}^{-1}(\omega(0)) = p|_{U_{\alpha}}^{-1}(p(\tilde{x})) = \tilde{x}$. Supondo a existência de um outro levantamento $\tilde{\omega}'$ ($p \circ \tilde{\omega}' = \omega$), pela hipótese inicial, temos que $\tilde{\omega}'(I) \subset p^{-1}(U)$. Como $\tilde{\omega}'(0) = \tilde{x}$ e $\tilde{\omega}'(I)$ é conexo então $\tilde{\omega}'(I) \subset U_{\alpha}$ e, por conseguinte, $\tilde{\omega}' = p|_{U_{\alpha}}^{-1} \circ \omega = \tilde{\omega}$.

De modo geral, $\omega(I)$ pode ser coberto por um número finito de vizinhanças fundamentais pois $\omega(I)$ é compacto e, conseqüentemente, $\tilde{\omega}$ é obtido pela justaposição dos levantamentos obtidos pelo argumento acima reproduzido para cada vizinhança fundamental da cobertura finita em questão.

Seja $H : I \times I \rightarrow X$ uma homotopia entre ω e ω_1 . Particionamos I em um número finito de intervalos I_i de modo que cada $H(I_i \times I_j)$ esteja contido em uma vizinhança fundamental (ver [16], Lemma 54.2, pag. 343). A partir disso, existe um levantamento $\tilde{H} : I \times I \rightarrow \tilde{X}$ de H satisfazendo $\tilde{H}(0 \times I) = \tilde{\omega}(0) = \tilde{\omega}_1(0)$. Então $\tilde{H}(1 \times I)$ é um caminho constante em $\tilde{x}_1$, pois $\tilde{H}(1 \times I) \subset p^{-1}(x_1)$, $x_1 = \omega(1) = \omega_1(1)$ e $p^{-1}(x_1)$ possui a topologia discreta. Portanto, $\tilde{\omega}(1) = \tilde{\omega}_1(1) = \tilde{x}_1$ e $\tilde{\omega} \simeq \tilde{\omega}_1$, sendo que $\tilde{H}|_{I \times 0} = \tilde{\omega}$ e $\tilde{H}|_{I \times 1} = \tilde{\omega}_1$ pela unicidade. □

Teorema 3.1.2. *Seja $(\tilde{X}, p, X)$ um espaço de recobrimento.*

I - Para quaisquer dois pontos x_0 e x_1 de X existe uma bijeção $p^{-1}(x_0) \cong p^{-1}(x_1)$.

II - A aplicação $p_ : \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ é um monomorfismo.*

III - Para o quociente $\pi_1(X, x_0) / \text{Im } p_ = \{(\text{Im } p_*)\alpha \mid \alpha \in \pi_1(X, x_0)\}$, a aplicação*

$$\psi : \pi_1(X, x_0) / \text{Im } p_* \rightarrow p^{-1}(x_0)$$

dada por

$$\psi(\{[\omega]\}) = \tilde{\omega}(1),$$

onde $\tilde{\omega}$ é um levantamento do caminho fechado ω com $\tilde{\omega}(0) = \tilde{x}_0$, é uma bijeção.

Demonstração. (I) Considere um caminho $\alpha : (I, 0, 1) \rightarrow (X, x_0, x_1)$. Para qualquer $\tilde{x} \in p^{-1}(x_0)$, temos $\alpha(0) = p(\tilde{x})$ e, pelo Lema 3.1.1, existe um único levantamento $\tilde{\alpha}$ tal que $p \circ \tilde{\alpha} = \alpha$ e

$\tilde{\alpha}(0) = \tilde{x}$. Como $\tilde{\alpha}(1) \in p^{-1}(x_1)$, definimos a função $\psi_\alpha : p^{-1}(x_0) \rightarrow p^{-1}(x_1)$ sendo dada por $\psi_\alpha(\tilde{x}) = \tilde{\alpha}(1)$, onde a injetividade é garantida pela unicidade e a inversa $(\psi_\alpha)^{-1} = \psi_{\bar{\alpha}}$ se obtêm do caminho inverso $\bar{\alpha}$ de α .

(II) Dados quaisquer $[\alpha], [\beta] \in \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ tais que $[p \circ \alpha] = [p \circ \beta]$, existe uma homotopia $H : I \times I \rightarrow X$ tal que $H(s, 0) = p \circ \alpha(s)$ e $H(s, 1) = p \circ \beta(s)$. Denotando por $\omega = p \circ \alpha$ e $\omega' = p \circ \beta$ temos, pelo Lema 3.1.1, que existem únicos levantamentos $\tilde{\omega}$ e $\tilde{\omega}'$ tais que $\tilde{\omega} \simeq \tilde{\omega}'$. Como $p \circ \alpha = p \circ \tilde{\omega}$ e $p \circ \beta = p \circ \tilde{\omega}'$, segue da unicidade que $\tilde{\omega} = \alpha$ e $\tilde{\omega}' = \beta$, ou seja, $[\alpha] = [\beta]$.

(III) A função $\tilde{\psi} : \pi_1(X, x_0) \rightarrow p^{-1}(x_0)$ dada por $\tilde{\psi}([\omega]) = \tilde{\omega}(1)$, onde $\tilde{\omega}(0) = \tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$, está bem definida pela unicidade do Lema 3.1.1. Dado $\tilde{x}_1 \in p^{-1}(x_0)$ qualquer, sendo $\tilde{X}$ conexo por caminho, tomemos um caminho $\tilde{\alpha} : (I, 0, 1) \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{x}_0, \tilde{x}_1)$. Assim, $[p \circ \tilde{\alpha}] \in \pi_1(X, x_0)$ e $\tilde{\psi}([p \circ \tilde{\alpha}]) = \tilde{\alpha}(1)$, ou seja, $\tilde{\psi}$ é sobrejetora. Para $[v] \in \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$, o Lema 3.1.1 garante que $\tilde{\psi}(p_*([v][\omega]) = \tilde{\psi}([p \circ v][\omega]) = \tilde{\psi}([(p \circ v) * \omega]) = \tilde{\omega}(1)$. E se $\tilde{\psi}([\omega]) = \tilde{\psi}([\omega_1])$, então $[\omega][\omega_1]^{-1} = [\omega * \bar{\omega}_1] = [p \circ (\tilde{\omega} * \bar{\tilde{\omega}}_1)] \in \text{Im } p_*$, isto é, ψ é injetora. $\square$

Definição 3.1.6. O número de elementos ou a cardinalidade de $p^{-1}(x_0)$ é chamado de *grau do recobrimento*.

Proposição 3.1.3. Sejam $(\tilde{X}, p, X)$ um espaço de recobrimento, $\omega, \omega' : I \rightarrow X$ caminhos que começam no mesmo ponto x e terminam no mesmo ponto final y , e $\tilde{\omega}, \tilde{\omega}' : I \rightarrow \tilde{X}$ seus respectivos levantamentos a partir de um ponto $\tilde{x} \in \tilde{X}$. A fim de que $\tilde{\omega}(1) = \tilde{\omega}'(1)$, é necessário e suficiente que $[\omega * \bar{\omega}'] \in p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}))$.

Demonstração. Supondo que $[\omega * \bar{\omega}'] \in p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}))$, o levantamento λ do caminho $\omega * \bar{\omega}'$ a partir do ponto $\tilde{x}$ é fechado. Os caminhos $\tilde{\omega}, \tilde{\omega}'$ definidos por $\tilde{\omega}(s) = \lambda(s/2)$ e $\tilde{\omega}'(s) = \lambda(1 - s/2)$, começam no ponto $\tilde{x}$, terminam no ponto $\lambda(1/2)$ e são levantamentos de ω e ω' , respectivamente. A recíproca é imediata. $\square$

O seguinte lema nos proporciona um critério para a existência de um levantamento.

Lema 3.1.4. Sejam $(\tilde{X}, p, X)$ um espaço de recobrimento, Y conexo por caminhos e $f : (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$ uma função contínua.

I - Dados $\tilde{f}, \tilde{g} : Y \rightarrow \tilde{X}$ levantamentos de f , se $\tilde{f}(y_0) = \tilde{g}(y_0)$ então $\tilde{f} = \tilde{g}$.

II - Se Y é localmente conexo por caminhos e $f_*(\pi_1(Y, y_0)) \subset p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$, onde $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$, então existe um único levantamento $\tilde{f} : Y \rightarrow \tilde{X}$ de f tal que $\tilde{f}(y_0) = \tilde{x}_0$. Em particular, a suposição é satisfeita para qualquer $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$, onde Y é localmente conexo por caminhos e 1-conexo.

Diagrama 3: Indução de f e p ao grupo fundamental

$$\begin{array}{ccc} & & \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \\ & & \downarrow p_* \\ \pi_1(Y, y_0) & \xrightarrow{f_*} & \pi_1(X, x_0) \end{array}$$

Fonte: Elaborado pelo autor.

Demonstração. (I) Dados $y \in Y$ e um caminho $\omega : (I, 0, 1) \rightarrow (Y, y_0, y)$ em Y , segue que $f \circ \omega : (I, 0, 1) \rightarrow (X, x_0, f(y))$ é um caminho em X . Assim, por hipótese, $\tilde{f} \circ \omega$ e $\tilde{g} \circ \omega$ são levantamentos de $f \circ \omega$ tais que $\tilde{f} \circ \omega(0) = \tilde{g} \circ \omega(0)$. Consequentemente, pelo Lema 3.1.1, $\tilde{f} \circ \omega = \tilde{g} \circ \omega$, ou seja, $\tilde{f}(y) = \tilde{f} \circ \omega(1) = \tilde{g} \circ \omega(1) = \tilde{g}(y)$.

(II) Para y e ω como acima, seja $\tilde{v} : I \rightarrow \tilde{X}$ um levantamento de $f \circ \omega$ de modo que $\tilde{v}(0) = \tilde{x}_0$, definimos $\tilde{f}(y) = \tilde{v}(1)$. Se considerarmos um outro caminho $\omega' : (I, 0, 1) \rightarrow (Y, y_0, y)$ então $\omega' * \bar{\omega}$ é um caminho fechado em y_0 . Daí, $f \circ \omega' * f \circ \bar{\omega} = f \circ (\omega' * \bar{\omega})$ é um caminho fechado em x_0 e $[f \circ (\omega' * \bar{\omega})] \in f_*(\pi_1(Y, y_0))$. Portanto, de acordo com a Proposição 3.1.3, $\tilde{v}(1) = \tilde{v}'(1)$, onde $\tilde{v}'$ é um levantamento de $f \circ \omega'$, isto é, $\tilde{f}$ está bem definida e satisfaz $p \circ \tilde{f} = f$ e $\tilde{f}(y_0) = \tilde{x}_0$.

Considere uma vizinhança $\tilde{U}$ de $\tilde{f}(y)$ sendo uma componente conexa por caminhos da imagem inversa $p^{-1}(U)$ de uma vizinhança fundamental. Por hipótese, e pela continuidade da função f , existe uma vizinhança conexa por caminhos V tal que $f(V) \subset U$ e, consequentemente, $\tilde{f}(y) \in \tilde{f}(V) \cap \tilde{U}$.

Dado $y' \in V$ qualquer, seja $\omega' : (I, 0, 1) \rightarrow (Y, y, y')$ um caminho em Y de y a y' . Então $f \circ \omega'$ é um caminho na vizinhança fundamental U que, sendo homeomorfa a $\tilde{U}$ ($p|_{\tilde{U}} : \tilde{U} \cong U$), nos diz que existe um caminho $\tilde{\omega}' = p|_{\tilde{U}}^{-1} \circ f \circ \omega'$ do ponto $\tilde{f}(y)$ ao ponto $\tilde{x} = p|_{\tilde{U}}^{-1} \circ f(y')$, com $p \circ \tilde{\omega}' = f \circ \omega'$.

Assim, $\tilde{\omega} * \tilde{\omega}'$ é um caminho em $\tilde{X}$ de modo que $p \circ (\tilde{\omega} * \tilde{\omega}') = p \circ \tilde{\omega} * p \circ \tilde{\omega}' = f \circ \omega * f \circ \omega' = f \circ (\omega * \omega')$ e que pela definição de $\tilde{f}$ diz $\tilde{f}(y') = (\tilde{\omega} * \tilde{\omega}')(1) = \tilde{x}$, ou seja, $\tilde{f}(y') \in \tilde{U}$, donde $\tilde{f}(V) \subset \tilde{U}$. Logo $\tilde{f}$ é contínua. A unicidade é uma consequência imediata do item (I).

□

3.1.1 Grupos de transformações de recobrimento

Definição 3.1.7. Um homeomorfismo $\tilde{f} : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$ é uma *transformação de recobrimento* do espaço de recobrimento $(\tilde{X}, p, X)$ se $p \circ \tilde{f} = p$.

O conjunto das transformações de recobrimento com a operação de multiplicação sendo a composição forma um grupo, chamado de *grupo das transformações de recobrimento*.

Lema 3.1.5. I - Se uma função contínua $\tilde{f} : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$ satisfaz $p \circ \tilde{f} = p$, então $\tilde{f}$ é uma transformação de recobrimento.

II - Para dois pontos $\tilde{x}_0$ e $\tilde{x}_1$ em $p^{-1}(x_0)$, existe uma transformação de recobrimento $\tilde{f}$ tal que $\tilde{f}(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_1$ se, e só se, para cada caminho ω de $\tilde{x}_0$ em $\tilde{x}_1$ o elemento $[p \circ \omega]$ pertence ao normalizador

$$N(H) = \{ \alpha \in \pi_1(X, x_0) \mid \alpha H = H \alpha \} \quad \text{de} \quad H = p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)).$$

Demonstração. (II) Sejam $\omega : (I, 0, 1) \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{x}_1, \tilde{x}_0)$ um caminho em $\tilde{X}$, $\tilde{f}$ apenas um levantamento de p ($p = p \circ \tilde{f}$) tal que $\tilde{f}(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_1$ e $[a] \in \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ qualquer. Como $[\overline{\omega}](\tilde{f}_*[a])[\omega] \in \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ e $\alpha^{-1}(p_*[a])\alpha = p_*([\overline{\omega} * (f \circ a) * \omega])$, onde $\alpha = [p \circ \omega] \in \pi_1(X, x_0)$, então

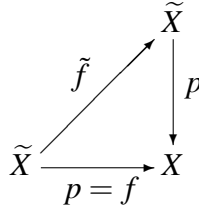
$$\alpha^{-1}(p_*[a])\alpha \in H = p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)),$$

ou melhor $\alpha \in N(H)$.

Reciprocamente, se considerarmos $\alpha = [p \circ \omega] \in N(H)$ então, para $[a] \in \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$, existe $[b] \in \pi_1(X, x_0)$ tal que $\alpha(p_*[a])\alpha^{-1} = p_*[b]$. Portanto, $p_*[a] = \alpha^{-1}(p_*[b])\alpha = p_*([\overline{\omega}][b][\omega]) \in p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1))$, isto é, $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) \subset p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1))$.

(I) Aplicando o item (II) do Lema 3.1.4, para $p = f$, obtemos um levantamento $\tilde{f}$ satisfazendo $\tilde{f}(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_1$. Assim, pelo mesmo argumento acima, tomando o caminho inverso $\overline{\omega}$ ligando $\tilde{x}_1$ a $\tilde{x}_0$, existe um levantamento $\tilde{g}$ de p tal que $\tilde{g}(\tilde{x}_1) = \tilde{x}_0$. Por conseguinte $\tilde{g} \circ \tilde{f}$ e $1_{\tilde{X}}$ são levantamentos de p que satisfazem $\tilde{g} \circ \tilde{f}(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_0 = 1_{\tilde{X}}(\tilde{x}_0)$, que pelo item (I) do Lema 3.1.4 nos diz que $\tilde{g} \circ \tilde{f} = 1_{\tilde{X}}$ e, de modo análogo, obtemos também que $\tilde{f} \circ \tilde{g} = 1_{\tilde{X}}$, ou seja, $\tilde{f}$ é um homeomorfismo. Logo, $\tilde{f}$ é uma transformação de recobrimento.

□

Diagrama 4: Representação da igualdade $p = p \circ \tilde{f}$ 

Fonte: Elaborado pelo autor.

Teorema 3.1.6. *O grupo G das transformações de recobrimento de $(\tilde{X}, p, X)$ é isomorfo ao grupo quociente $N(H)/H$.*

Demonstração. Dado $\tilde{f} \in G$ qualquer, sabemos que $p \circ \tilde{f} = p$. Assim $\tilde{x}_0, \tilde{x}_1 \in p^{-1}(x_0)$, onde $\tilde{x}_1 = \tilde{f}(\tilde{x}_0)$, e para qualquer caminho $\tilde{\omega} : (I, 0, 1) \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{x}_0, \tilde{x}_1)$, pelo item (II) do Lema 3.1.5, $[p \circ \tilde{\omega}] \in N(H)$ e consequentemente $\{[p \circ \tilde{\omega}]\} \in N(H)/H$.

Da bijeção ψ do Teorema 3.1.2 obtemos que $N(H)/H \cong \psi(N(H)/H) \subset p^{-1}(x_0)$ e $\psi(\{[p \circ \tilde{\omega}]\}) = \tilde{\omega}(1) = \tilde{x}_1 = \tilde{f}(\tilde{x}_0)$. À vista disso, estabelecemos por ϕ a correspondência $\phi(\tilde{f}) = \{[p \circ \tilde{\omega}]\} (= \tilde{f}(\tilde{x}_0))$ do grupo G ao grupo quociente $N(H)/H$.

O item (II) do Lema 3.1.5 nos diz que ϕ é sobrejetiva em relação a ψ . De fato, para qualquer $\tilde{x}_1 \in \psi(N(H)/H)$ existe $[\omega] \in N(H)$ de modo que $\psi(\{[\omega]\}) = \tilde{x}_1$ e $\tilde{x}_1 = \tilde{\omega}(1)$, onde $\tilde{\omega}$ é o levantamento de ω por p ($p \circ \tilde{\omega} = \omega$), ou seja, $[p \circ \tilde{\omega}] \in N(H)$ e existe uma transformação de recobrimento $\tilde{f}$ tal que $\tilde{x}_1 = \tilde{f}(\tilde{x}_0)$. Logo $\phi(\tilde{f}) \stackrel{\psi}{=} \tilde{x}_1$.

Supondo que $\phi(\tilde{f}) = \phi(\tilde{g})$, segue $\tilde{f}(\tilde{x}_0) = \tilde{g}(\tilde{x}_0)$, isto é, $\tilde{f} = \tilde{g}$, pelo item (I) do Lema 3.1.4.

Por fim, dados $\tilde{f}$ e $\tilde{g}$, considere os caminhos $\omega_1 : (I, 0, 1) \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{x}_0, \tilde{f}(\tilde{x}_0))$ e $\omega_2 : (I, 0, 1) \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{x}_0, \tilde{g}(\tilde{x}_0))$. Como $\omega_1 * (\tilde{f} \circ \omega_2)$ é um caminho de $\tilde{x}_0$ a $(\tilde{f} \circ \tilde{g})(\tilde{x}_0)$, então o elemento

$$[p \circ (\omega_1 * (\tilde{f} \circ \omega_2))] = [p \circ \omega_1][p \circ \tilde{f} \circ \omega_2] = [p \circ \omega_1][p \circ \omega_2],$$

em $N(H)/H$ correspondente a $\tilde{f} \circ \tilde{g}$ é um produto de elementos correspondentes a $\tilde{f}$ e $\tilde{g}$, ou seja $\phi(\tilde{f} \circ \tilde{g}) = \phi(\tilde{f})\phi(\tilde{g})$. Assim, ϕ é um isomorfismo. □

Definição 3.1.8. Um espaço de recobrimento é *regular* se, dados $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \in p^{-1}(x_0)$ quaisquer, existe uma transformação de recobrimento $\tilde{f}$ tal que $\tilde{f}(\tilde{x}_1) = \tilde{x}_2$.

Proposição 3.1.7. I - Um espaço de recobrimento $(\tilde{X}, p, X)$ é regular se, e somente se, $H = p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ é um subgrupo normal de $\pi_1(X, x_0)$.

II - Para um espaço de recobrimento regular $(\tilde{X}, p, X)$, o grupo quociente

$$G \cong \pi_1(X, x_0) / p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$$

age em $\tilde{X}$ sem fixar pontos (isto é, $g\tilde{x} = \tilde{x}$ implica $g = e$).

Demonstração. (I) Para qualquer $[\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$ existe um único caminho ω tal que $p \circ \omega = \alpha$ e $p(\omega(1)) = x_0$. Então, ω leva $\tilde{x}_0$ a $\tilde{x}_1 = \omega(1)$ que, por hipótese, nos diz que existe $\tilde{f}$ tal que $\tilde{f}(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_1$, ou seja, $[\alpha] = [p \circ \omega] \in N(H)$. À vista disso, $\pi_1(X, x_0) \subset N(H) \subset \pi_1(X, x_0)$. Logo, H é um subgrupo normal de $\pi_1(X, x_0) = N(H)$. Reciprocamente, sejam $\tilde{x}_0, \tilde{x}_1 \in p^{-1}(x_0)$ e $\omega(I, 0, 1) \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{x}_0, \tilde{x}_1)$. Por hipótese, $p_*[\omega] \in N(H)$. Daí, pelo item (II) do Lema 3.1.5, existe uma transformação de recobrimento $\tilde{f}$ satisfazendo $\tilde{f}(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_1$. Portanto $(\tilde{X}, p, X)$ é regular.

(II) Pelo isomorfismo do Teorema 3.1.6 podemos tomar G sendo o grupo das transformações de recobrimento do espaço $(\tilde{X}, p, X)$. Então, a ação de G em $\tilde{X}$ é dada por $\mu(\tilde{f}, \tilde{x}) = \tilde{f}(\tilde{x})$. Assim, para $e = 1_{\tilde{X}} \in G$ e $\tilde{f} \in G$ qualquer tal que $\tilde{f}(\tilde{x}) = \tilde{x}$, segue do item (I) do Lema 3.1.4 que $\tilde{f} = e$.

□

3.2 Fibrados

Definição 3.2.1. Seja $p : E \rightarrow B$ uma função contínua e sobrejetora. Dizemos que a quádrupla $\xi = (E, p, B, F)$ é um fibrado produto ou uma *fibração trivial* quando existe um homeomorfismo $\phi : B \times F \rightarrow E$ tal que $p \circ \phi(b, f) = b$. E $\xi = (E, p, B, F)$ é chamada uma *fibração localmente trivial* se para cada ponto de B existe uma vizinhança U tal que $\xi|_U = (p^{-1}(U), p|_{p^{-1}(U)}, U, F)$ é uma fibração trivial.

Nomenclatura: Dizemos que E é o *espaço total*, p a *projeção*, B o *espaço base*, F a *fibra*, $F_b = p^{-1}(b)$ a *fibra sobre b* , onde $b \in B$, U uma *vizinhança coordenada* e o homeomorfismo $\phi_U = \phi|_U : U \times F \rightarrow p^{-1}(U)$ de *função coordenada*.

Definição 3.2.2. Uma função $f : \xi' \rightarrow \xi$ entre fibrações localmente triviais $\xi' = (E', p', B', F)$ e $\xi = (E, p, B, F)$ com a mesma fibra é uma *aplicação fibrada* se $f : E' \rightarrow E$ é uma função contínua tal que para todo $b' \in B'$, $f(F_{b'}) \subset F_b$, para algum $b \in B$. Então a função $\tilde{f} : B' \rightarrow B$ definida por $\tilde{f}(b') = b$ satisfaz $p \circ f = \tilde{f} \circ p'$.

Lema 3.2.1. Dados uma fibração localmente trivial $\xi = (E, p, B, F)$ e uma função contínua $g : B' \rightarrow B$, se considerarmos

$$g^\#E = \{(x, b') \in E \times B' \mid p(x) = g(b')\}, \quad \tilde{g}(x, b') = x \text{ e } p'(x, b') = b'$$

então $g^\#\xi = (g^\#E, p', B', F)$ é uma fibração localmente trivial e $\tilde{g} : g^\#E \rightarrow E$ é uma aplicação fibrada ($\tilde{g} = g$). Chamamos $g^\#\xi$ de *fibração localmente trivial induzida de ξ* por g .

Demonstração. Para $b' \in B'$ qualquer, existe U vizinhança de $b = g(b')$ tal que $\phi_U : U \times F \rightarrow p^{-1}(U)$ é um homeomorfismo e $U' = g^{-1}(U)$ é uma vizinhança de b . Assim, dado $(x, y) \in U' \times F$, $(g(x), y) \in U \times F$ e $\phi_U(g(x), y) = z \in p^{-1}(U)$, logo $p \circ \phi_U(g(x), y) = p(z)$ implicando na igualdade $g(x) = p(z)$ o que nos diz $(z, x) \in g^\#E$ e consequentemente $p'(z, x) = x$ implica $(z, x) \in p'^{-1}(U')$. Assim, podemos descrever $\phi'_{U'} : U' \times F \rightarrow p'^{-1}(U')$ da seguinte forma

$$(x, y) \mapsto (x, (x, y)) \mapsto (x, (g(x), y)) \mapsto (x, \phi_U(g(x), y)) = (x, z) \mapsto (z, x)$$

que claramente é uma função contínua.

Dados $(x, y), (x', y') \in U' \times F$ tais que $\phi'_{U'}(x, y) = \phi'_{U'}(x', y')$, então $(z, x) = (z', x')$, donde $z = z'$ e $x = x'$, portanto $\phi_U(g(x), y) = z = z' = \phi_U(g(x'), y')$. Como ϕ_U é injetiva segue que $y = y'$, logo $\phi_{U'}$ é injetiva. Por outro lado tomando $y = (z, x) \in p'^{-1}(U')$, $p'(y) \in U' = g^{-1}(U)$ e $g(p'(y)) = g(x) = p(z) \in U$ por conseguinte $z \in p^{-1}(U) \cong U \times F$. Assim existe $(s, t) \in U \times F$ de modo que $\phi_U(s, t) = z$ e como $s = p \circ \phi_U(s, t) = p(z) = g(x)$ segue $\phi'_{U'}(x, t) = y$, isto é, $\phi'_{U'}$ é sobrejetiva.

A inversa de $\phi'_{U'}$ é dada por $\phi'^{-1}_{U'}(z, x) = (x, y)$ onde $(g(x), y) = \phi_U^{-1}(z)$ e como $\phi'^{-1}_{U'}$ pode ser descrita por

$$(z, x) \mapsto (x, z) \mapsto (x, \phi_U^{-1}(z)) = (x, (g(x), y)) \mapsto (x, y),$$

vemos que $\phi'^{-1}_{U'}$ é contínua. Portanto $\phi'_{U'}$ é um homeomorfismo e pela igualdade $p' \circ \phi'_{U'}(x, y) = p'(z, x) = x$ podemos dizer que $g^\#\xi$ é fibração localmente trivial.

Como os elementos da fibra sobre $b' \in B'$ são da forma $(x, b') \in F_{b'}$, de modo que $p(x) = g(b')$, segue que $\tilde{g}(F_{b'}) \subset F_b$, para $b = p(x)$. Definindo $\tilde{\tilde{g}}(b') = b$ obtemos $\tilde{\tilde{g}} \circ p' = p \circ \tilde{g}$, logo $\tilde{\tilde{g}} \circ p'(x, y) = p \circ \tilde{g}(x, y)$ que equivale a $\tilde{\tilde{g}}(y) = p(x) = g(y)$. Assim, $\tilde{\tilde{g}}$ é uma aplicação fibrada e $\tilde{\tilde{g}} = g$.

□

Definição 3.2.3. Seja (E, p, B, F) uma fibração localmente trivial e suponha G um grupo topológico agindo sobre a fibra F pela esquerda. Seja $\{U_\alpha, \phi_\alpha\}$ uma família de vizinhanças coorde-

nadas e funções coordenadas para (E, p, B, F) . Dizemos que a 6-upla $(E, p, B, F, G, \{U_\alpha, \phi_\alpha\})$ é um *fibrado coordenado* quando cada função $g_{\beta\alpha} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow G$ determinada pela condição

$$\phi_\alpha(b, y) = \phi_\beta(b, g_{\beta\alpha}(b) \cdot y)$$

é uma função contínua.

Dizemos que $\{g_{\beta\alpha}(b)\}$ são *transformações coordenadas* e que G é o *grupo estrutural*.

Definição 3.2.4. Uma *aplicação fibrada* $f : \xi \rightarrow \xi'$ entre fibrados coordenados

$$\xi = (E, p, B, F, G, \{U_\alpha, \phi_\alpha\}) \quad \text{e} \quad \xi' = (E', p', B', F, G, \{U'_\beta, \phi'_\beta\})$$

é uma aplicação fibrada f onde cada função $\bar{g}_{\beta\alpha} : U_\alpha \cap \bar{f}^{-1}(U'_\beta) \rightarrow G$ determinada pela condição

$$f \circ \phi_\alpha(b, y) = \phi'_\beta(\bar{f}(b), \bar{g}_{\beta\alpha}(b) \cdot y) \text{ é contínua, para } b \in U_\alpha \cap \bar{f}^{-1}(U'_\beta).$$

Definição 3.2.5. Dois fibrados coordenados

$$\xi = (E, p, B, F, G, \{U_\alpha, \phi_\alpha\}) \quad \text{e} \quad \xi' = (E, p, B, F, G, \{U'_\beta, \phi'_\beta\})$$

que diferem apenas nos sistemas de coordenadas, são *equivalentes* ($\xi \sim \xi'$) se a função identidade $1_E : E \rightarrow E$ é uma aplicação fibrada ($1_E : \xi \rightarrow \xi'$).

A definição acima define uma relação de equivalência. De fato, sejam ξ, ξ' e ξ'' fibrados coordenados como na Definição 3.2.5.

Considerando a função $1_E : E \rightarrow E$, vemos que $\bar{1}_E = 1_B$ e

$$1_E \circ \phi_\alpha(b, y) = \phi_\beta(1_B(b), \bar{g}_{\beta\alpha}(b) \cdot y) \implies \phi_\alpha(b, y) = \phi_\beta(b, \bar{g}_{\beta\alpha}(b) \cdot y)$$

que, pela definição de fibrado, equivale a dizer que $\phi_\beta(b, \bar{g}_{\beta\alpha}(b) \cdot y) = \phi_\beta(b, g_{\beta\alpha}(b) \cdot y)$. Como ϕ_β é um homeomorfismo, $\bar{g}_{\beta\alpha} = g_{\beta\alpha}$, isto é, $\bar{g}_{\beta\alpha}$ é contínua e por conseguinte $1_E : E \rightarrow E$ é uma aplicação fibrada ($\xi \sim \xi$).

Supondo $\xi \sim \xi'$ ($1_E : \xi \rightarrow \xi'$ uma aplicação fibrada), vale

$$\phi_\alpha(b, y) = \phi'_\beta(b, \bar{g}_{\beta\alpha}(b) \cdot y), \text{ onde } \bar{g}_{\beta\alpha} \text{ é contínua e } (b, y) \in (U_\alpha \cap U'_\beta) \times F.$$

Assim, a função $\bar{g}_{\alpha\beta}(b) = (\bar{g}_{\beta\alpha}(b))^{-1}$ determinada por

$$\phi'_\beta(b, y) = \phi'_\beta(b, [\bar{g}_{\beta\alpha}(b)(\bar{g}_{\beta\alpha}(b))^{-1}] \cdot y) = \phi'_\beta(b, \bar{g}_{\beta\alpha}(b)(\bar{g}_{\alpha\beta}(b) \cdot y)) = \phi_\alpha(b, \bar{g}_{\alpha\beta}(b) \cdot y)$$

é contínua pois a operação $g \mapsto g^{-1}$ em G é contínua. Logo $1_E : \xi' \rightarrow \xi$ é uma aplicação fibrada, isto é, $\xi' \sim \xi$.

Agora se $\xi \sim \xi'$ e $\xi' \sim \xi''$, então

$$\phi_\alpha(b, y) = \phi'_\beta(b, \bar{g}_{\beta\alpha}(b) \cdot y) \quad \text{e} \quad \phi'_\beta(b, y) = \phi''_\gamma(b, \bar{g}_{\gamma\beta}(b) \cdot y),$$

onde $\bar{g}_{\beta\alpha}$ e $\bar{g}_{\gamma\beta}$ são contínuas. E para $(b, y) \in (U_\alpha \cap U'_\beta \cap U''_\gamma) \times F$ obtemos

$$\phi_\alpha(b, y) = \phi'_\beta(b, \bar{g}_{\beta\alpha}(b) \cdot y) = \phi''_\gamma(b, (\bar{g}_{\gamma\beta}(b) \bar{g}_{\beta\alpha}(b)) \cdot y) = \phi''_\gamma(b, \bar{g}_{\gamma\alpha}(b) \cdot y)$$

Consequentemente $\bar{g}_{\gamma\alpha}$ definida por $\bar{g}_{\gamma\alpha}(b) = \bar{g}_{\gamma\beta}(b) \bar{g}_{\beta\alpha}(b)$ é contínua pois a operação do grupo topológico G é contínua. Portanto $\xi \sim \xi''$.

Definição 3.2.6. Uma classe de equivalência de fibrados coordenados é denominada um *fibrado* e é denotada por $\xi = (E, p, B, F, G)$ (omitindo o sistema de coordenadas).

Dado um fibrado coordenado $\xi = (E, p, B, F, G, \{U_\alpha, \phi_\alpha\})$, se considerarmos a função

$$\coprod_\alpha \phi_\alpha : \coprod_\alpha U_\alpha \times F \rightarrow E, \text{ dada por } \coprod_\alpha \phi_\alpha(b, y) = \phi_\alpha(b, y) \text{ para } (b, y) \in U_\alpha \times F \subset \coprod_\alpha U_\alpha \times F,$$

de uma soma topológica de $U_\alpha \times F$ no espaço total E , então E pode ser visto como:

$$E \cong \left(\coprod_\alpha U_\alpha \times F \right) / \sim \quad (\text{homeomorfismo}), \text{ onde } (b, y) \sim (b, g_{\beta\alpha}(b) \cdot y),$$

$(b, y) \in U_\alpha \times F$ e $(b, g_{\beta\alpha}(b) \cdot y) \in U_\beta \times F$. De fato, dados $(b, y), (b', y') \in \coprod_\alpha U_\alpha \times F$ de modo que $\coprod_\alpha \phi_\alpha(b, y) = \coprod_\alpha \phi_\alpha(b', y')$, então existem α e α' tais que $\phi_\alpha(b, y) = \phi_{\alpha'}(b', y')$ e como $b = p \circ \phi_\alpha(b, y) = p \circ \phi_{\alpha'}(b', y') = b'$ segue que $\phi_\alpha(b, y) = \phi_{\alpha'}(b, g_{\alpha'\alpha}(b) \cdot y) = \phi_{\alpha'}(b', y')$. Portanto, $g_{\alpha'\alpha}(b) \cdot y = y'$, isto é, $(b, y) \sim (b', y')$. E, dado $e \in E$, existe α tal que $p(e) = b \in U_\alpha$. Sendo $\phi_\alpha : U_\alpha \times F \rightarrow p^{-1}(U_\alpha)$ um homeomorfismo, existe $(b, y) \in U_\alpha \times F$ tal que $\phi_\alpha(b, y) = e$. Assim, $\coprod_\alpha \phi_\alpha(b, y) = \phi_\alpha(b, y) = e$. Observando que a continuidade de $\coprod_\alpha \phi_\alpha$ é uma consequência imediata da continuidade de ϕ_α , o mesmo valendo para a inversa, concluímos o homeomorfismo.

Exemplo 3.2.1. O fibrado tangente TM de uma variedade diferenciável M é construído como acima, com $g_{\beta\alpha}(b) \in GL(n, \mathbb{R})$. Além disso, o fibrado tangente de M é um fibrado: $\tau_M = (TM, p, M, \mathbb{R}^n, GL(n, \mathbb{R}))$.

Definição 3.2.7. Seja $\mathbb{F}$ um corpo. Um fibrado com fibra $\mathbb{F}^n$ e grupo estrutural G sendo um subgrupo do grupo linear $GL(n, \mathbb{F})$ é chamado de $\mathbb{F}$ -fibrado vetorial de dimensão n .

Teorema 3.2.2. Toda fibra $\mathbb{F}_b^n = p^{-1}(b)$ de um $\mathbb{F}$ -fibrado vetorial de dimensão n ,

$$\xi = (E, p, B, \mathbb{F}^n, GL(n, \mathbb{F})),$$

possui estrutura de um $\mathbb{F}$ -módulo à direita (em particular, um espaço vetorial complexo ou real quando $\mathbb{F} = \mathbb{C}, \mathbb{R}$) e a ação à direita de $\mathbb{F}$: $E \times \mathbb{F} \rightarrow E$ e a adição $\{(u, v) \mid p(u) = p(v)\} \subset E \times E \rightarrow E$ são contínuas. Reciprocamente, se uma fibração localmente trivial $(E, p, B, \mathbb{F}^n)$ possui adição e a ação à direita de $\mathbb{F}$ em E contínuas, então tal fibração possui estrutura de um $\mathbb{F}$ -fibrado vetorial de dimensão n .

Demonstração. Sejam U_α uma vizinhança coordenada de b em B e o homomorfismo $\phi_\alpha : U_\alpha \times \mathbb{F}^n \rightarrow p^{-1}(U_\alpha)$. Por um lado, $p \circ \phi_\alpha(b, y) = b$, o que implica que $\phi_\alpha(b, y) \in p^{-1}(b)$. E, por outro, dado $e \in p^{-1}(b)$, existe $(b, y') \in U_\alpha \times \mathbb{F}^n$ tal que $\phi_\alpha(b, y') = e$. Então, $\{b\} \times \mathbb{F}^n \cong p^{-1}(b) = \mathbb{F}_b^n$ e, pela identificação $\{b\} \times \mathbb{F}^n \equiv \mathbb{F}^n$, obtemos que $\mathbb{F}_b^n$ é um $\mathbb{F}$ -módulo à direita.

Para qualquer $(e, z) \in E \times \mathbb{F}$, digamos que $e \in \mathbb{F}_b^n$, $\phi_\alpha(b, x) = e$ e φ seja a identificação $\{b\} \times \mathbb{F}^n \equiv \mathbb{F}^n$. Assim, define-se a função $\mu : E \times \mathbb{F} \rightarrow E$ por $\mu(e, z) = \phi_\alpha(b, xz) \in \mathbb{F}_b^n \subset E$, sendo contínua, pois tal é descrita como composição de funções contínuas segundo a correspondência:

$$\begin{aligned} (e, z) &\mapsto (\phi_\alpha^{-1}(e), z) = ((b, x), z) \mapsto (\varphi(b, x), z) = (x, z) \mapsto xz \\ &\mapsto \varphi^{-1}(xz) = (b, xz) \mapsto \phi_\alpha(b, xz). \end{aligned}$$

Dando-se válidas as igualdades $\mu(\mu(e, y), y') = \mu(e, yy')$ e $\mu(e, 1) = e$ então μ é uma ação à direita de $\mathbb{F}$ em E . Analogamente, para $(u, v) = (\phi_\alpha(b, x), \phi_\alpha(b, y))$,

$$(u, v) \mapsto (\phi_\alpha^{-1}(u), \phi_\alpha^{-1}(v)) = ((b, x), (b, y)) \mapsto (\varphi(b, x), \varphi(b, y)) \text{ e}$$

$$(\varphi(b, x), \varphi(b, y)) = (x, y) \mapsto (x + y) \mapsto \varphi^{-1}(x + y) = (b, x + y) \mapsto \phi_\alpha(b, x + y)$$

define a adição contínua. Supondo $b \in U_\alpha \cap U_\beta$, $\phi_\alpha(b, x) = \phi_\beta(b, x') = e$ e $\phi_\alpha(b, y) = \phi_\beta(b, y') = e'$, por definição $g_{\beta\alpha}(b) \cdot x = x'$ e $g_{\beta\alpha}(b) \cdot y = y'$. Então $\phi_\alpha(b, xz) = \phi_\beta(b, x'z)$ e $\phi_\alpha(b, x + y) = \phi_\beta(b, x' + y')$, isto é, as funções definidas acima são independentes da escolha da vizinhança coordenada.

Reciprocamente, das igualdades $\phi_\alpha(b, x) = \phi_\beta(b, x')$ e $\phi_\alpha(b, y) = \phi_\beta(b, y')$ para $b \in U_\alpha \cap U_\beta$, obtêm-se pela ação e adição:

$$\phi_\alpha(b, xz) = \phi_\beta(b, x'z) \quad \text{e} \quad \phi_\alpha(b, x + y) = \phi_\beta(b, x' + y').$$

Isto é, um operador linear de $\mathbb{F}^n$ e se o denotarmos por $g_{\beta\alpha}(b)$, segue que $(E, p, B, \mathbb{F}^n)$ possui estrutura de um $\mathbb{F}$ -fibrado vetorial de dimensão n . $\square$

3.2.1 Propriedades dos fibrados

Antes de seguir com o próximo resultado, vale lembrar que da ação de G sobre F , a função $\bar{g}_{\beta\alpha}(b) : F \rightarrow F$ é um homeomorfismo, para todo $b \in U_\alpha \cap U'_\beta$.

Teorema 3.2.3. *Seja uma aplicação fibrada $f : \xi \rightarrow \xi'$, com $B = B'$ e $\bar{f} = 1_B$. Então $f : E \rightarrow E'$ é um homeomorfismo e a função inversa $f^{-1} : E' \rightarrow E$ é uma aplicação fibrada $f^{-1} : \xi' \rightarrow \xi$.*

Demonstração. Lembrando que dados $e, e' \in E$ de modo que $f(e) = f(e')$, pelas igualdades $p' \circ f = p$ e $p(e) = b$, obtemos que $e, e' \in p^{-1}(b)$ e $f(e), f(e') \in p'^{-1}(b)$. Assim, para as vizinhanças coordenadas U_α e U'_β de $b \in B$, denotamos $e = \phi_\alpha(b, x)$ e $e' = \phi_\alpha(b, x')$, portanto

$$\phi'_\beta(b, \bar{g}_{\beta\alpha}(b) \cdot x) = f \circ \phi_\alpha(b, x) = f \circ \phi_\alpha(b, x') = \phi'_\beta(b, \bar{g}_{\beta\alpha}(b) \cdot x').$$

Donde obtêm-se que $\bar{g}_{\beta\alpha}(b) \cdot x = \bar{g}_{\beta\alpha}(b) \cdot x'$, isto é, $x = x'$ ($e = e'$).

De modo semelhante, considerando $e' \in E'$ tal que $p'(e') = b$ e $e' = \phi'_\beta(b, y')$, onde $y' = \bar{g}_{\beta\alpha}(b) \cdot y$, então $f \circ \phi_\alpha(b, y) = e'$.

Definindo $f^{-1} : E' \rightarrow E$ por $f^{-1}(e') = \phi_\alpha(b, y) = e$ onde $e' = \phi'_\beta(b, y')$ e $y' = \bar{g}_{\beta\alpha}(b) \cdot y$. Se tomarmos U uma vizinhança qualquer de $e \in E$, $V = U \cap p^{-1}(U_\alpha)$ também será uma vizinhança de e . Logo, da topologia produto em $U_\alpha \times F$, existem $V_1 \subset U_\alpha$ e $V_2 \subset F$, ambos abertos, tais que $(b, y) \in V_1 \times V_2 \subset \phi_\alpha^{-1}(V)$. Como $b \in W_1 = V_1 \cap U'_\beta = V_1 \cap (U_\alpha \cap U'_\beta)$ e $y' \in W_2 = \bar{g}_{\beta\alpha}(b) \cdot (V_2)$, segue que $e' \in \phi'_\beta(W_1 \times W_2) \subset E'$ e

$$f^{-1}(\phi'_\beta(W_1 \times W_2)) = \phi_\alpha(W_1 \times V_2) \subset \phi_\alpha(V_1 \times V_2) \subset V \subset U,$$

isto é, f^{-1} é contínua. Em vista disso, f é um homeomorfismo e, tomando $\bar{g}_{\alpha\beta}(b) = (\bar{g}_{\beta\alpha}(b))^{-1}$, f^{-1} é uma aplicação fibrada. $\square$

Definição 3.2.8. Dois fibrados ξ e ξ' , com os mesmos B , F e G , são *equivalentes* ($\xi \equiv \xi'$) se existe uma aplicação fibrada $f : \xi \rightarrow \xi'$ tal que $\bar{f} = 1_B$.

Definição 3.2.9. Um espaço topológico X é *paracompacto* se para qualquer cobertura aberta $\{U_\alpha\}$ de X ($X = \cup_\alpha U_\alpha$), existe uma cobertura fechada $\{V_\beta\}$ sendo um refinamento de $\{U_\alpha\}$ (isto é, cada V_β está contido em algum U_α) e *localmente finita* (cada ponto de X possui uma vizinhança W de modo que o número de índices β tais que $W \cap V_\beta \neq \emptyset$ é finito).

Definição 3.2.10. Uma função $s : B_0 \rightarrow E$ é chamada de *seção* em $B_0 \subset B$ de uma função $p : E \rightarrow B$ se $p \circ s = 1_{B_0}$

Uma seção $s : B_0 \rightarrow E$ em B é simplesmente chamada de seção de p e uma seção de um fibrado (E, p, B, F, G) é definido como sendo a seção da projeção p .

Para um fibrado $\xi = (E, p, B, F, G)$ com o sistema de coordenadas $\{U_\alpha, \phi_\alpha\}$ e o intervalo unitário $I = [0, 1]$, denotamos por

$$\xi \times I = (E \times I, p \times 1_I, B \times I, F, G),$$

o fibrado com o sistema de coordenadas dado por $\{U_\alpha \times I, \Phi_\alpha\}$, onde $\Phi_\alpha((b, t), y) = (\phi_\alpha(b, y), t)$ para $t \in I$.

Proposição 3.2.4. 1. $\pi^\# \xi \equiv \xi \times I$ para a projeção $\pi : B \times I \rightarrow B$.

2. $i_t^\#(\xi \times I) \equiv \xi$ para a inclusão $i_t : B \rightarrow B \times I$ dada por $i_t(b) = (b, t)$.

Demonstração. (1) Como $\pi^\# \xi = (\pi^\# E, p', B \times I, F, G)$, onde

$$\pi^\# E = \{(x, (b, t)) \in E \times (B \times I) \mid p(x) = \pi(b, t) = b\}$$

e $p'(x, (b, t)) = (b, t)$. Então para $f : \pi^\# \xi \rightarrow \xi \times I$ dada por $f(x, (b, t)) = (x, t)$ e $\bar{f} = 1_{B \times I}$ segue que $(p \times 1_I) \circ f = \bar{f} \circ p'$.

Diagrama 5: Comutatividade entre as composições $(p \times 1_I) \circ f$ e $1_{B \times I} \circ p'$

$$\begin{array}{ccc} \pi^\# E & \xrightarrow{f} & E \times I \\ \downarrow p' & & \downarrow p \times 1_I \\ B \times I & \xrightarrow{1_{B \times I}} & B \times I \end{array}$$

Fonte: Elaborado pelo autor.

Considerando os sistemas de vizinhanças $\{U_\alpha \times I, \bar{\Phi}_\alpha\}$ e $\{U_\alpha \times I, \Phi_\alpha\}$ relacionados aos fibrados $\pi^\# \xi$ e $\xi \times I$, respectivamente, onde $\bar{\Phi}_\alpha((b, t), y) = (\phi_\alpha(b, y), (b, t))$ e $\{U_\alpha, \phi_\alpha\}$ é um sistema de ξ .

Assim, da igualdade $f \circ \bar{\Phi}_\alpha((b, t), y) = \Phi_\beta(\bar{f}(b, t), \bar{g}_{\beta\alpha}(b, t) \cdot y)$ obtemos que

$$(\phi_\beta(b, g_{\beta\alpha}(b) \cdot y), t) = (\phi_\alpha(b, y), t) = (\phi_\beta(b, \bar{g}_{\beta\alpha}(b, t) \cdot y), t),$$

isto é, $\bar{g}_{\beta\alpha}(b, t) = g_{\beta\alpha}(b)$ consequentemente $\bar{g}_{\beta\alpha} : (U_\alpha \times I) \cap (U_\beta \times I) \rightarrow G$ é contínua.

(2) Sendo $i_t^\#(\xi \times I) = (i_t^\#(E \times I), p', B, F, G)$ o fibrado induzido, onde

$$i_t^\#(E \times I) = \{((x, t), b) \in (E \times I) \times B \mid (p \times 1_I)(x, t) = i_t(b)\}$$

e $p'((x, t), b) = b$. Tomando $f : i_t^\#(\xi \times I) \rightarrow \xi$ definida por $f((x, t), b) = x$ e $\bar{f} = 1_B$ segue que $p \circ f = \bar{f} \circ p'$.

Diagrama 6: Comutatividade entre as composições $p \circ f$ e $1_B \circ p'$

$$\begin{array}{ccc} i_t^\#(E \times I) & \xrightarrow{f} & E \\ \downarrow p' & & \downarrow p \\ B & \xrightarrow{1_B} & B \end{array}$$

Fonte: Elaborado pelo autor.

Pelo mesmo argumento acima, com os devidos sistemas de vizinhanças, conclui-se que $\bar{g}_{\beta\alpha} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow G$ é contínua. $\square$

Definição 3.2.11. Chamamos uma aplicação fibrada $H : \xi \times I \rightarrow \xi'$ juntamente com a família $h_t = H(\cdot, t) : \xi \rightarrow \xi'$ de uma *homotopia de fibrados*. E denotamos por

$$h_0 \simeq h_1 : \xi \rightarrow \xi'$$

para nos referir que h_0, h_1 são homotópicos.

Teorema 3.2.5. *Sejam ξ e ξ' fibrados possuindo em comum o grupo estrutural G e a fibra F . Suponhamos que o espaço base B de ξ é paracompacto e Hausdorff. Dadas uma aplicação fibrada $h : \xi \rightarrow \xi'$ e uma homotopia $\bar{H} : B \times I \rightarrow B'$ de modo que $\bar{h} = \bar{h}_0$, então existe uma homotopia de fibrados $H : \xi \times I \rightarrow \xi'$ que induz $\bar{H}$ tal que $h = h_0$.*

Demonstração. Supondo que o fibrado ξ' é trivial, ou seja, $E' \cong B' \times F$ (homeomorfismo), podemos considerar o diagrama comutativo $(\pi_1 \circ h = \bar{h} \circ p)$.

Diagrama 7: Comutatividade entre as composições $\pi_1 \circ h$ e $\bar{h} \circ p$

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{h} & B' \times F \\ \downarrow p & & \downarrow \pi_1 \\ B & \xrightarrow{\bar{h}} & B' \end{array}$$

Fonte: Elaborado pelo autor.

Definimos $H(x, t) = (\bar{H}(p(x), t), h_2(x))$, onde $h : E \rightarrow B' \times F$ e $h(x) = (h_1(x), h_2(x))$. Assim,

$$\begin{aligned} H(x, 0) &= (\bar{H}(p(x), 0), h_2(x)) = (\bar{h}(p(x)), h_2(x)) \\ &= (\pi_1(h(x)), h_2(x)) = (h_1(x), h_2(x)) = h(x) \end{aligned}$$

e $\pi_1 \circ H = \bar{H} \circ (p \times 1_I)$.

Diagrama 8: Comutatividade entre as composições $\pi_1 \circ H$ e $\bar{H} \circ (p \times 1_I)$

$$\begin{array}{ccc} E \times I & \xrightarrow{H} & B' \times F \\ p \times 1_I \downarrow & & \downarrow \pi_1 \\ B \times I & \xrightarrow{\bar{H}} & B' \end{array}$$

Fonte: Elaborado pelo autor.

O caso geral pode ser encontrado em [18], pag. 96. □

3.3 Fibrações

Definição 3.3.1. Uma tripla (E, p, B) é chamada de *fibração* (no sentido de Serre) se $p : E \rightarrow B$ é contínua, sobrejetora e satisfaz a *propriedade de levantamento de homotopia* para I^n ($n = 0, 1, 2, \dots$), isto é, se $f : I^n \rightarrow E$ e $G : I^n \times I \rightarrow B$ são funções contínuas tais que

$$(p \circ f)(x) = G(x, 0), \quad \text{para } x \in I^n,$$

então existe uma função contínua $F : I^n \times I \rightarrow E$ satisfazendo

$$G = p \circ F \quad \text{e} \quad F(x, 0) = f(x), \quad \text{para } x \in I^n.$$

Diagrama 9: Representação da propriedade de levantamento de homotopia

$$\begin{array}{ccc} I^n & \xrightarrow{f} & E \\ \times 0 \downarrow & \nearrow F & \downarrow p \\ I^n \times I & \xrightarrow{G} & B \end{array}$$

Fonte: Mimura [15] (1991, p. 64).

Teorema 3.3.1. Se $\xi = (E, p, B, F, G)$ é um fibrado, então (E, p, B) é uma fibração. Em particular, um espaço de recobrimento $(\tilde{X}, p, X)$ é uma fibração.

Demonstração. Sejam $f : I^n \rightarrow E$ e $\bar{G} : I^n \times I \rightarrow B$ funções contínuas tais que $p \circ f(x) = \bar{G}(x, 0)$, para $x \in I^n$, e $g^\# \xi = (g^\# E, p', I^n, F, G)$ sendo o fibrado induzido por $g = p \circ f$, onde $g^\# E = \{(e, x) \in E \times I^n \mid p(e) = g(x)\}$ e $p'(e, x) = x$.

Como I^n é paracompacto e Hausdorff, segue do Teorema 3.2.5 que existe uma homotopia de fibrados $H : g^\# \xi \times I \rightarrow \xi$ tal que $\bar{H} = \bar{G}$, $H|_{I^n \times 0} = h_0 = \tilde{g}$ e $\tilde{g} : g^\# E \rightarrow E$. Em outras palavras, estendemos $\tilde{g} : g^\# \xi \rightarrow \xi$ para $H : g^\# \xi \times I \rightarrow \xi$.

Se definirmos uma seção $s : I^n \rightarrow g^\# E$ por

$$s(x) = (f(x), x) \quad \text{e} \quad \bar{F} = H \circ (s \times 1_I) : I^n \times I \rightarrow E$$

então

$$\begin{aligned} \bar{G}(x, t) &= \bar{H}(x, t) = \bar{H}(p'(f(x), x), 1_I(t)) = \bar{H} \circ (p' \times 1_I)((f(x), x), t) \\ &= p \circ H((f(x), x), t) = p \circ H \circ (s \times 1_I)(x, t) = p \circ F(x, t), \end{aligned}$$

para qualquer $(x, t) \in I^n \times I$, e

$$\bar{F}(x, 0) = H \circ (s \times 1_I)(x, 0) = H((f(x), x), 0) = H_0(f(x), x) = \tilde{g}(f(x), x) = f(x).$$

para $(x, 0) \in I^n \times I$, ou seja, $p \circ \bar{F} = \bar{G}$ e $\bar{F}|_{I^n \times 0} = f$. Por fim, segue diretamente do Lema 3.1.4 que um espaço de recobrimento é uma fibração, pois $\pi_1(I^n \times I) = 0$.

□

Para mais detalhes sobre o capítulo 4 ver [13] e [15].

4 (Co)homologia de espaços topológicos

4.1 O anel de (co)homologia de um espaço topológico

Notação: $[n] = \{1, \dots, n\}$. Para a função $\alpha : [m] \rightarrow [n]$ onde

$$1 \leq \alpha(1) < \alpha(2) < \dots < \alpha(m) \leq n,$$

definimos $\partial_\alpha^\varepsilon : I^m \rightarrow I^n$, com $\varepsilon = 0, 1$, por

$$\partial_\alpha^\varepsilon(s_1, \dots, s_m) = (t_1, \dots, t_n), \text{ onde } t_i = \begin{cases} s_j & (i = \alpha(j)), \\ \varepsilon & (i \notin \text{Im } \alpha). \end{cases}$$

Em particular, $\partial_k^\varepsilon : I^{n-1} \rightarrow I^n$ ($1 \leq k \leq n$) é definido por

$$\partial_k^\varepsilon = \partial_\alpha^\varepsilon, \text{ onde } \alpha(j) = \begin{cases} j & \text{se } j < k \\ j+1 & \text{se } j \geq k, \end{cases}$$

ou seja, $\partial_k^\varepsilon(s_1, \dots, s_{n-1}) = (s_1, \dots, s_{k-1}, \varepsilon, s_k, \dots, s_{n-1})$.

Também definimos a função $\pi_k : I^n \rightarrow I^{n-1}$ ($1 \leq k \leq n$) por

$$\pi_k(t_1, \dots, t_n) = (t_1, \dots, t_{k-1}, t_{k+1}, \dots, t_n).$$

Definição 4.1.1. Um *n-cubo singular* u em um espaço topológico X é uma aplicação contínua do cubo n -dimensional I^n no espaço X descrito por $u : I^n \rightarrow X$.

A *face* (k, ε) de um n -cubo singular u é uma aplicação $\partial_k^\varepsilon u = u \circ \partial_k^\varepsilon : I^{n-1} \rightarrow X$. Um n -cubo singular u é chamado *degenerado* ($n > 0$) se existem v e k tal que $u = v \circ \pi_k : I^n \rightarrow X$, isto é, existe um k tal que u é independente de t_k . Note que v é um $(n-1)$ -cubo singular.

Considerando o conjunto $B = \{u : I^n \rightarrow X \mid u \text{ é contínua}\}$ formado por todos os n -cubos singulares, para $u_1, \dots, u_k \in B$ e $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{Z}$, dizemos que

$$\sum_{i=1}^k a_i u_i$$

é uma combinação linear finita de $u_1, \dots, u_k$. Definimos $Q_n(X)$ como sendo o *grupo abeliano livre* que consiste de todas as combinações lineares finitas de elementos de B , isto é, $Q_n(X)$ é gerado pela base B .

Também definimos $D_n(X)$ o subgrupo de $Q_n(X)$ gerado pelos n -cubos singulares degenerados. Assim, podemos considerar o grupo quociente $C_n(X) = Q_n(X)/D_n(X)$.

Definimos o homomorfismo $d : C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X)$ dado por

$$du = \sum_{k=1}^n (-1)^k (\partial_k^0 u - \partial_k^1 u).$$

Dado $u \in D_n(X)$, existem v e j tais que $u = v \circ \pi_j : I^n \rightarrow X$. Assim,

$$du = \sum_{k=1}^n (-1)^k (\partial_k^0 u - \partial_k^1 u) = \sum_{k=1}^n (-1)^k (\partial_k^0 (v \circ \pi_j) - \partial_k^1 (v \circ \pi_j)),$$

onde $\partial_k^\varepsilon u = \partial_k^\varepsilon (v \circ \pi_j) = (v \circ \pi_j) \circ \partial_k^\varepsilon : I^{n-1} \rightarrow I^n \rightarrow I^{n-1} \rightarrow X$. Considerando $(s_1, \dots, s_{n-1}) \in I^{n-1}$, segue:

$$\begin{aligned} (s_1, \dots, s_{n-1}) &\xrightarrow{\partial_k^\varepsilon} (s_1, \dots, s_{k-1}, \mathcal{E}, s_k, \dots, s_{n-1}) \\ &\xrightarrow{\pi_j} (s_1, \dots, s_{j-1}, s_{j+1}, \dots, s_{k-1}, \mathcal{E}, s_k, \dots, s_{n-1}). \end{aligned}$$

Donde podemos ver que $(\partial_j^0 (v \circ \pi_j) - \partial_j^1 (v \circ \pi_j)) = 0$ e $\partial_k^\varepsilon (v \circ \pi_j)$ independe da j -ésima entrada se $j < k$ ou independe da $(j-1)$ -ésima entrada se $j > k$. Portanto, conclui-se que $du \in D_{n-1}(X)$, ou seja, $d(D_n(X)) \subset D_{n-1}(X)$.

Também, direto da definição, dado $u \in C_n(X)$, segue:

$$\begin{aligned} (d \circ d)(u) &= d \left(\sum_{k=1}^n (-1)^k (\partial_k^0 u - \partial_k^1 u) \right) \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^k d(\partial_k^0 u - \partial_k^1 u) = \sum_{k=1}^n (-1)^k (d(\partial_k^0 u) - d(\partial_k^1 u)) \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^k \left(\sum_{j=1}^{n-1} (-1)^j (\partial_j^0 \partial_k^0 u - \partial_j^1 \partial_k^0 u - \partial_j^0 \partial_k^1 u + \partial_j^1 \partial_k^1 u) \right). \end{aligned}$$

Observando que, para $j < k$,

$$\begin{aligned} \partial_j^{\varepsilon_j} \partial_k^{\varepsilon_k} u(s_1, \dots, s_{n-2}) &= u \circ \partial_k^{\varepsilon_k} \circ \partial_j^{\varepsilon_j}(s_1, \dots, s_{n-2}) = u \circ \partial_k^{\varepsilon_k}(s_1, \dots, s_{j-1}, \mathcal{E}_j, s_j, \dots, s_{n-2}) \\ &= u(s_1, \dots, s_{j-1}, \mathcal{E}_j, s_j, \dots, s_{k-2}, \mathcal{E}_k, s_{k-1}, \dots, s_{n-2}) \end{aligned}$$

então $\partial_j^{\varepsilon_j} \partial_k^{\varepsilon_k} u = \partial_{k-1}^{\varepsilon_k} \partial_j^{\varepsilon_j} u$, logo

$$(-1)^{(k+j+\delta)} \partial_j^{\varepsilon_j} \partial_k^{\varepsilon_k} u + (-1)^{((k-1)+j+\delta)} \partial_{k-1}^{\varepsilon_k} \partial_j^{\varepsilon_j} u = 0, \text{ onde } \delta = \varepsilon_k + \varepsilon_j.$$

De modo análogo, para $k < j$, temos $\partial_j^{\varepsilon_j} \partial_k^{\varepsilon_k} u = \partial_k^{\varepsilon_k} \partial_{j+1}^{\varepsilon_j} u$, consequentemente

$$(-1)^{(k+j+\delta)} \partial_j^{\varepsilon_j} \partial_k^{\varepsilon_k} u + (-1)^{(k+(j+1)+\delta)} \partial_k^{\varepsilon_k} \partial_{j+1}^{\varepsilon_j} u = 0.$$

O caso em que $k = j$ obtêm-se como consequência dos casos anteriores. Portanto podemos dizer que $(d \circ d)u = 0$. Assim $C_*(X) = (C_n(X), d)$ é um complexo de cadeia, chamado de complexo de cadeias *cúbicas* de X .

Para $f : X \rightarrow Y$ contínua, definimos o homomorfismo $f_\# : C_n(X) \rightarrow C_n(Y)$ dado por $f_\#(u) = f \circ u$. Como

$$\begin{aligned} (f_\# \circ d)(u) &= f_\#(d(u)) = f_\# \left(\sum_{k=1}^n (-1)^k (\partial_k^0 u - \partial_k^1 u) \right) = \sum_{k=1}^n (-1)^k [f_\#(\partial_k^0 u) - f_\#(\partial_k^1 u)] \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^k [f \circ u \circ \partial_k^0 - f \circ u \circ \partial_k^1] = \sum_{k=1}^n (-1)^k [f_\#(u) \circ \partial_k^0 - f_\#(u) \circ \partial_k^1] \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^k [\partial_k^0 f_\#(u) - \partial_k^1 f_\#(u)] = d f_\#(u) \\ &= (d \circ f_\#)(u), \end{aligned}$$

para qualquer $u \in C_n(X)$, segue $f_\# \circ d = d \circ f_\#$. Então $f_\#$ é um *homomorfismo de cadeia*.

Proposição 4.1.1. Sejam $f, g : X \rightarrow Y$ aplicações homotópicas ($f \stackrel{H}{\simeq} g$) então $f_\#$ e $g_\#$ são homomorfismos de cadeia *homotópicos* ($f_\# \simeq g_\# : C_*(X) \rightarrow C_*(Y)$), isto é, $dD + Dd = g_\# - f_\#$ onde $Du : I^{n+1} \rightarrow Y$ é definido por $Du(t_1, \dots, t_{n+1}) = H(u(t_2, \dots, t_{n+1}), t_1)$ para $u : I^n \rightarrow X$.

Demonstração. De fato, como

$$\begin{aligned} (dD + Dd)u &= d(Du) + D(du) \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k (\partial_k^0 Du - \partial_k^1 Du) + \sum_{l=1}^n (-1)^l (D(\partial_l^0 u) - D(\partial_l^1 u)) \\ &= g_\#u - f_\#u + \sum_{k=2}^{n+1} (-1)^k (\partial_k^0 Du - \partial_k^1 Du) + \sum_{l=1}^n (-1)^l (D(\partial_l^0 u) - D(\partial_l^1 u)) \end{aligned}$$

e $D(\partial_l^\varepsilon u) = \partial_{l+1}^\varepsilon Du$, então

$$\sum_{k=2}^{n+1} (-1)^k (\partial_k^0 Du - \partial_k^1 Du) + \sum_{l=1}^n (-1)^l (D(\partial_l^0 u) - D(\partial_l^1 u)) = 0.$$

Logo $(dD + Dd)u = g_\#u - f_\#u$, para qualquer $u : I^n \rightarrow X$, como queríamos. $\square$

Definição 4.1.2. Defini-se o *produto cross* de $C_p(X)$ por $C_q(Y)$ como sendo a função bilinear

$$\times : C_p(X) \times C_q(Y) \rightarrow C_{p+q}(X \times Y), \quad \text{dada por} \quad \times(u, v) = u \times v,$$

onde $(u \times v)(t_1, \dots, t_{p+q}) = (u(t_1, \dots, t_p), v(t_{p+1}, \dots, t_{p+q}))$ para $(t_1, \dots, t_{p+q}) \in I^{p+q}$.

Vale observar que se u ou v forem degenerados, então $u \times v$ também será.

Proposição 4.1.2. 1. O produto cross é natural, isto é, para as funções $f : X \rightarrow X'$, $g : Y \rightarrow Y'$ e $f \times g : X \times Y \rightarrow X' \times Y'$ temos

$$(f \times g)_\#(u \times v) = f_\#(u) \times g_\#(v).$$

2. Para $u \in C_p(X)$ e $v \in C_q(Y)$,

$$d(u \times v) = du \times v + (-1)^p u \times dv.$$

Demonstração. Dado $u \times v \in C_n(X \times Y)$,

$$(f \times g)_\#(u \times v) = f \times g(u \times v) = f(u) \times g(v) = f_\#(u) \times g_\#(v).$$

E para $u \times v \in C_{p+q}(X \times Y)$, obtemos as relações: $\partial_k^\varepsilon(u \times v) = (\partial_k^\varepsilon u) \times v$ para $k \leq p$ e $\partial_k^\varepsilon(u \times v) = u \times (\partial_{k-p}^\varepsilon v)$ para $k > p$. Portanto,

$$\begin{aligned} d(u \times v) &= \sum_{k=1}^{p+q} (-1)^k (\partial_k^0(u \times v) - \partial_k^1(u \times v)) = \sum_{k=1}^p (-1)^k (\partial_k^0(u \times v) - \partial_k^1(u \times v)) \\ &\quad + (-1)^p \sum_{l=1}^q (-1)^l (\partial_l^0(u \times v) - \partial_l^1(u \times v)) = \sum_{k=1}^p (-1)^k ((\partial_k^0 u) \times v - (\partial_k^1 u) \times v) \\ &\quad + (-1)^p \sum_{l=1}^q (-1)^l (u \times \partial_l^0 v - u \times \partial_l^1 v) = \left(\sum_{k=1}^p (-1)^k (\partial_k^0 u - \partial_k^1 u) \right) \times v \\ &\quad + (-1)^p u \times \left(\sum_{l=1}^q (-1)^l (\partial_l^0 v - \partial_l^1 v) \right) = du \times v + (-1)^p u \times dv. \end{aligned}$$

□

Como $d : C_n(X \times Y) \rightarrow C_{n-1}(X \times Y)$ dada acima satisfaz $d \circ d = 0$ e $d(D_n(X \times Y)) \subset D_{n-1}(X \times Y)$, podemos dizer que $(C_n(X \times Y), d) = C_*(X \times Y)$ é um complexo de cadeia.

Também chamamos de produto *cross* e denotamos da mesma forma o homomorfismo:

$$\times : C_p(X) \otimes C_q(Y) \rightarrow C_{p+q}(X \times Y), \quad \text{onde} \quad u \otimes v \xrightarrow{\times} u \times v.$$

Considerando o conjunto $C_*(X) \otimes C_*(Y)$ formado pelos elementos

$$(C_*(X) \otimes C_*(Y))_n = \bigoplus_{p+q=n} C_p(X) \otimes C_q(Y), \quad \text{para } n \geq 0, \quad \text{segue:}$$

Definição 4.1.3. Dizemos que um homomorfismo $f : C_*(X) \rightarrow C_*(X')$ é de grau $k \in \mathbb{Z}$ se $f : C_p(X) \rightarrow C_{p+k}(X')$. E dados $f : C_*(X) \rightarrow C_*(X')$ e $g : C_*(Y) \rightarrow C_*(Y')$, definimos $f \otimes g : C_*(X) \otimes C_*(Y) \rightarrow C_*(X') \otimes C_*(Y')$ por

$$(f \otimes g)(u \otimes v) = (-1)^{\text{grau}(u)\text{grau}(g)} f(u) \otimes g(v),$$

onde $\text{grau}(u), \text{grau}(v) \in \mathbb{Z}$, de modo que $u \in C_{\text{grau}(u)}(X)$ e $v \in C_{\text{grau}(v)}(Y)$.

Como consequência, têm-se a propriedade :

$$(f \otimes g) \circ (h \otimes k) = (-1)^{\text{grau}(g)\text{grau}(h)} (f \circ h) \otimes (g \circ k).$$

Observe que a identidade $1 : C_*(X) \rightarrow C_*(X)$ e o homomorfismo $d : C_*(X) \rightarrow C_*(X)$ possuem graus 0 e -1, respectivamente. Definimos o operador $d_{\otimes} = d \otimes 1 + 1 \otimes d$ como segue:

$$\begin{aligned} d_{\otimes}(u \otimes v) &= (d \otimes 1 + 1 \otimes d)(u \otimes v) = (d \otimes 1)(u \otimes v) + (1 \otimes d)(u \otimes v) \\ &= (-1)^{\text{grau}(u)\text{grau}(1)} du \otimes v + (-1)^{\text{grau}(u)\text{grau}(d)} u \otimes dv \\ &= du \otimes v + (-1)^p u \otimes dv, \end{aligned}$$

onde $p = \text{grau}(u)$. Assim, podemos dizer que $C_*(X) \otimes C_*(Y)$ é um complexo de cadeia, visto que $d_{\otimes} \circ d_{\otimes} = 0$.

Induzindo $\times : C_p(X) \otimes C_q(Y) \rightarrow C_{p+q}(X \times Y)$ para os complexos de cadeia, obtemos que

$$\times : C_*(X) \otimes C_*(Y) \rightarrow C_*(X \times Y)$$

é uma equivalência de cadeia, cuja equivalência de cadeia inversa é dada por

$$\square : C_*(X \times Y) \rightarrow C_*(X) \otimes C_*(Y),$$

sendo induzida e definida como abaixo:

$$\square : C_n(X \times Y) \rightarrow \sum_{p+q=n} C_p(X) \otimes C_q(Y)$$

$$\square(u) = \sum_{\alpha} \varepsilon(\alpha) \partial_{\alpha}^0 u_X \otimes \partial_{\beta}^1 u_Y, \quad u(\mathbf{t}) = (u_X(\mathbf{t}), u_Y(\mathbf{t})),$$

onde $\alpha : [p] \rightarrow [n]$, $\beta : [q] \rightarrow [n]$, $[n] = \alpha([p]) \cup \beta([q])$, $\varepsilon(\alpha) = (-1)^{v(\alpha)}$ e $v(\alpha) = \sum_{i=1}^p (\alpha(i) - i)$.

À vista disso segue as relações

$$\times \circ d_{\otimes} = d \circ \times \quad \square \circ d = d_{\otimes} \circ \square.$$

Além disso, obtemos que

$$\times \circ \square \simeq 1_{C_*(X \times Y)} \quad \text{e} \quad \square \circ \times \simeq 1_{C_*(X) \otimes C_*(Y)} \quad (\text{cadeias homotópicas});$$

Por conseguinte

$$H_n(C_*(X \times Y)) \cong H_n(C_*(X) \otimes C_*(Y)).$$

Para mais detalhes, ver [15] e [8].

4.1.1 Grupo de homologia

Sejam X um espaço topológico, A um subespaço de X e G um grupo abeliano, que será chamado de *grupo dos coeficientes*. Denotemos:

- $C_n(X, A; G) = (C_n(X)/C_n(A)) \otimes G$ o *grupo de cadeia*;
- $\partial = d \otimes 1 : C_n(X, A; G) \rightarrow C_{n-1}(X, A; G)$ o *homomorfismo bordo* ou *diferencial*;
- $Z_n(X, A; G) = \ker \partial = \ker (\partial : C_n(X, A; G) \rightarrow C_{n-1}(X, A; G))$ o *grupo de ciclos*;
- $B_n(X, A; G) = \text{Im } \partial = \text{Im}(\partial : C_{n+1}(X, A; G) \rightarrow C_n(X, A; G))$ o *grupo de bordos*;

Como $\partial \circ \partial = (d \otimes 1) \circ (d \otimes 1) = (d \circ d) \otimes (1 \circ 1) = 0 \otimes 1 = 0$, $C_*(X, A; G)$ é um complexo de cadeia. Considerando o homomorfismo

$$f_{\#} = \bar{f}_{\#} \otimes 1 : C_n(X, A; G) \rightarrow C_n(Y, B; G) \quad \text{induzido por} \quad f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$$

e definido por $f_{\#}(\{u\} \otimes g) = (\bar{f}_{\#} \otimes 1)(\{u\} \otimes g) = \{f_{\#}(u)\} \otimes g$, onde

$$\bar{f}_{\#} : C_n(X)/C_n(A) \rightarrow C_n(Y)/C_n(B)$$

e $\{u\} \otimes g \in C_n(X, A; G)$, segue a relação

$$f_{\#} \circ \partial = \bar{f}_{\#} \otimes 1 \circ d \otimes 1 = (\bar{f}_{\#} \circ d) \otimes (1 \circ 1) = (d \circ \bar{f}_{\#}) \otimes (1 \circ 1) = d \otimes 1 \circ \bar{f}_{\#} \otimes 1 = \partial \circ f_{\#}.$$

Assim, $f_{\#}$ é homomorfismo de cadeia. Logo

$$f_{\#}(B_n(X, A; G)) \subset B_n(Y, B; G) \quad \text{e} \quad f_{\#}(Z_n(X, A; G)) \subset Z_n(Y, B; G).$$

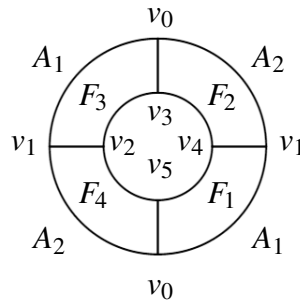
Definição 4.1.4. O grupo $H_n(X, A; G) = Z_n(X, A; G) / B_n(X, A; G)$ é chamado de *n-ésimo grupo de homologia do par (X, A) com coeficientes em G* . E $H_n(X; G) = H_n(X, \emptyset; G)$ é chamado de *n-ésimo grupo de homologia de X* .

Exemplo 4.1.1. Consideremos o plano projetivo $\mathbb{R}P^2 = D^2 / \sim$, onde

$$D^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\} \quad (\text{disco unitário em } \mathbb{R}^2)$$

e a relação é dada por $(x, y) \sim (-x, -y)$, para $(x, y) \in \partial D^2$.

Diagrama 10: Divisão por quadrados do plano projetivo $\mathbb{R}P^2$



Fonte: Elaborado pelo autor.

Com a **divisão por quadrados** dada acima, podemos calcular a homologia de $\mathbb{R}P^2$, com coeficientes em $\mathbb{Z}$, do seguinte modo:

- Vértices (dimensão 0): $v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5$;

- Arestas (dimensão 1):

$$\begin{aligned} A_1 &= [v_0 \ v_1] & A_2 &= [v_0 \ v_1] & A_3 &= [v_0 \ v_5] & A_4 &= [v_4 \ v_5] & A_5 &= [v_1 \ v_4] \\ A_6 &= [v_3 \ v_4] & A_7 &= [v_0 \ v_3] & A_8 &= [v_2 \ v_3] & A_9 &= [v_1 \ v_2] & A_{10} &= [v_2 \ v_5]; \end{aligned}$$

- Faces (dimensão 2):

$$\begin{aligned} F_1 &= [A_1 \ A_3 \ A_4 \ A_5] & F_2 &= [A_2 \ A_5 \ A_6 \ A_7] & F_3 &= [A_1 \ A_7 \ A_8 \ A_9] \\ F_4 &= [A_2 \ A_3 \ A_9 \ A_{10}] & F_5 &= [A_4 \ A_6 \ A_8 \ A_{10}]; \end{aligned}$$

Assim, obtemos o complexo de cadeia cúbica com coeficientes em $\mathbb{Z}$, $C_*(\mathbb{R}P^2, \mathbb{Z}) \cong C_*(\mathbb{R}P^2)$ (pois $C_n(\mathbb{R}P^2, \mathbb{Z}) = C_n(\mathbb{R}P^2) \otimes \mathbb{Z} \cong C_n(\mathbb{R}P^2)$) :

$$C_*(\mathbb{R}P^2) : 0 \longrightarrow C_2(\mathbb{R}P^2) \xrightarrow{d_2} C_1(\mathbb{R}P^2) \xrightarrow{d_1} C_0(\mathbb{R}P^2) \longrightarrow 0,$$

onde os grupos de cadeia são gerados pelos cubos singulares de mesma dimensão:

- $C_2(\mathbb{R}P^2) = \langle F_1, F_2, F_3, F_4, F_5 \rangle$;
- $C_1(\mathbb{R}P^2) = \langle A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8, A_9, A_{10} \rangle$;
- $C_0(\mathbb{R}P^2) = \langle v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \rangle$;

Calculando $\ker d_i$ e $\text{Im } d_{i+1}$ para $i = 0, 1, 2$, obtemos as homologias $H_i(\mathbb{R}P^2) = \ker d_i / \text{Im } d_{i+1}$.

Visto que $d_3 = 0$ e $d_0 = 0$, então $\text{Im } d_3 = 0$ e $\ker d_0 = C_0(\mathbb{R}P^2)$.

Convencionando que a orientação das arestas é dada do menor índice (dos vértices que o constitue) para o maior e que a orientação dos quadrados é a anti-horária, segue.

Para d_2 : Como

$$\begin{aligned} d_2(F_1) &= A_1 - A_3 + A_4 + A_5, & d_2(F_2) &= -A_2 - A_5 + A_6 + A_7, \\ d_2(F_3) &= A_1 - A_7 + A_8 + A_9, & d_2(F_4) &= -A_2 + A_3 - A_9 - A_{10}, \\ d_2(F_5) &= -A_4 - A_6 - A_8 + A_{10}, \end{aligned}$$

a matriz de d_2 é dada por

$$[d_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

De imediato segue que

$$\begin{aligned} \text{Im } d_2 = \langle c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 \rangle = \langle (1, 0, -1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0), (0, -1, 0, 0, -1, 1, 1, 0, 0, 0), \\ (1, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 1, 1, 0), (0, -1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, -1, -1), \\ (0, 0, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, 1) \rangle. \end{aligned}$$

Sendo

$$\begin{aligned} d_2 \left(\sum_{i=1}^5 n_i F_i \right) = (n_1 + n_3, -n_2 - n_4, -n_1 + n_4, n_1 - n_5, n_1 - n_2, \\ n_2 - n_5, n_2 - n_3, n_3 - n_5, n_3 - n_4, -n_4 + n_5), \end{aligned}$$

então $d_2 \left(\sum_{i=1}^5 n_i F_i \right) = 0$ nos diz que $n_i = 0$, para $i = 1, 2, 3, 4, 5$, ou seja, $\ker d_2 = \{0\}$.

Para d_1 : Como,

$$\begin{aligned} d_1(A_1) = v_1 - v_0, \quad d_1(A_2) = v_1 - v_0, \quad d_1(A_3) = v_5 - v_0, \quad d_1(A_4) = v_5 - v_4, \\ d_1(A_5) = v_4 - v_1, \quad d_1(A_6) = v_4 - v_3, \quad d_1(A_7) = v_3 - v_0, \quad d_1(A_8) = v_3 - v_2, \\ d_1(A_9) = v_2 - v_1, \quad d_1(A_{10}) = v_5 - v_2, \end{aligned}$$

a matriz de d_1 é dada por

$$[d_1] = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{e} \quad \text{Im } d_1 = \langle a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \rangle = \langle (-1, 1, 0, 0, 0, 0), (-1, 0, 0, 0, 0, 1), \\ (0, 0, 0, 0, -1, 1), (0, 0, 0, -1, 1, 0), (0, 0, -1, 1, 0, 0) \rangle. \end{aligned}$$

Pela igualdade $d_1 \left(\sum_{i=1}^{10} n_i A_i \right) = 0$ obtemos o sistema:

$$\begin{aligned}
-n_1 - n_2 - n_3 - n_7 &= 0 \\
n_1 + n_2 - n_5 - n_9 &= 0 \\
n_3 + n_4 + n_{10} &= 0 \\
n_5 - n_4 + n_6 &= 0 \\
n_7 - n_6 + n_8 &= 0 \\
-n_8 + n_9 - n_{10} &= 0.
\end{aligned}$$

Resolvendo, segue as relações:

$$\begin{aligned}
n_8 &= n_9 - n_{10} & n_6 &= n_7 + n_9 - n_{10} & n_4 &= n_7 + n_5 + n_9 - n_{10} \\
n_3 &= -n_7 - n_5 - n_9 & n_1 &= -n_2 + n_5 + n_9.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{10} n_i A_i &= (n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6, n_7, n_8, n_9, n_{10}) = (-n_2 + n_5 + n_9, n_2, -n_7 - n_5 - n_9, \\
& n_7 + n_5 + n_9 - n_{10}, n_5, n_7 + n_9 - n_{10}, n_7, n_9 - n_{10}, n_9, n_{10}) \\
&= n_2(-1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0) + n_5(1, 0, -1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0) \\
&+ n_7(0, 0, -1, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 0) + n_9(1, 0, -1, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0) \\
&+ n_{10}(0, 0, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, 1),
\end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned}
\ker d_1 &= \langle b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 \rangle = \langle (1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0), (-1, 0, 1, -1, -1, 0, 0, 0, 0, 0), \\
& (0, 0, 1, -1, 0, -1, -1, 0, 0, 0), (-1, 0, 1, -1, 0, -1, 0, -1, -1, 0), \\
& (0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, -1) \rangle
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\frac{\ker d_1}{\text{Im } d_2} &= \frac{\langle b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 \rangle}{\langle c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 \rangle} = \frac{\langle b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 \rangle}{\langle -b_2, b_1 + b_2 - b_3, b_3 - b_4, b_1 + b_4 + b_5, -b_5 \rangle} \\
&= \frac{\langle b_1, b_2, b_3 - b_4, b_1 + b_4, b_5 \rangle}{\langle -b_2, 2b_1, b_3 - b_4, b_1 + b_4, -b_5 \rangle} = \frac{\langle b_1 \rangle}{\langle 2b_1 \rangle} \cong \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}_2
\end{aligned}$$

e

$$\frac{C_0(\mathbb{R}P^2)}{\text{Im } d_1} = \frac{\langle a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, e_1 \rangle}{\langle a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \rangle} = \langle e_1 \rangle \cong \mathbb{Z},$$

onde $e_1 = (1, 0, 0, 0, 0, 0)$.

Portanto $H_2(\mathbb{R}P^2, \mathbb{Z}) = 0$, $H_1(\mathbb{R}P^2, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_2$ e $H_0(\mathbb{R}P^2, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$.

Considerando uma função contínua $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ podemos induzir o homomorfismo

$$f_* = (f_\#)_* : H_n(X, A; G) \rightarrow H_n(Y, B; G)$$

definido por $f_*(\{u \otimes g\}) = \{f_\#(u \otimes g)\}$, para $\{u \otimes g\} \in H_n(X, A; G)$.

Os axiomas a seguir, devido a *Eilenberg-Steenrod*, são satisfeitos:

(A1)- $1_* : H_n(X, A; G) \rightarrow H_n(X, A; G)$:

Da função identidade $1 = 1_X : X \rightarrow X$ induzimos os homomorfismos

$$1_\# : C_n(X) \rightarrow C_n(X), \quad \bar{1}_\# : C_n(X)/C_n(A) \rightarrow C_n(X)/C_n(A) \quad \text{e}$$

$$\bar{1}_\# \otimes 1_G : C_n(X, A; G) \rightarrow C_n(X, A; G).$$

Por fim obtemos $1_* = (\bar{1}_\# \otimes 1_G)_*$;

(A2)- Para as funções $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ e $g : (Y, B) \rightarrow (Z, C)$, vale $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$:

Observando que para f , o homomorfismo $f_* : H_n(X, A; G) \rightarrow H_n(Y, B; G)$ é dado por

$$f_*(\{z \otimes g\}) = (\bar{f}_\# \otimes 1)_*(\{z \otimes g\}) = \{\bar{f}_\#(z) \otimes (1)(g)\} = \{\bar{f}_\#(z) \otimes g\},$$

onde $\{z \otimes g\} \in H_n(X, A; G)$. Valendo analogamente para g , obtemos então,

$$\begin{aligned} (g \circ f)_*(\{z \otimes g\}) &= ((\overline{g \circ f})_\# \otimes 1)_*(\{z \otimes g\}) \\ &= \{(\overline{g \circ f})_\#(z) \otimes 1(g)\} = \{(\bar{g}_\# \circ \bar{f}_\#)(z) \otimes (1 \circ 1)(g)\} \\ &= \{(\bar{g}_\# \otimes 1)(\bar{f}_\#(z) \otimes (1)(g))\} = (\bar{g}_\# \otimes 1)_*(\{(\bar{f}_\# \otimes 1)(z \otimes g)\}) \\ &= ((\bar{g}_\# \otimes 1)_* \circ (\bar{f}_\# \otimes 1)_*)(\{z \otimes g\}) = (g_* \circ f_*)(\{z \otimes g\}); \end{aligned}$$

(A3)- Para a trio de espaços (X, A, B) , $B \subset A \subset X$, a sequência

$$0 \rightarrow C_n(A, B; G) \xrightarrow{i_\#} C_n(X, B; G) \xrightarrow{j_\#} C_n(X, A; G) \rightarrow 0$$

é uma sequência exata de complexos de cadeia e o homomorfismo bordo

$$\partial_* : H_n(X, A; G) \rightarrow H_{n-1}(A, B; G)$$

é definido por $\partial_* \{z\} = \{i_{\#}^{-1} \partial j_{\#}^{-1}(z)\}$, $z \in Z_n(X, A; G)$:

Das inclusões $i : (A, B) \rightarrow (X, B)$ e $j : (X, B) \rightarrow (X, A)$ induzimos os homomorfismos

$$i_{\#} : C_n(A, B; G) \rightarrow C_n(X, B; G), \quad j_{\#} : C_n(X, B; G) \rightarrow C_n(X, A; G).$$

(que estamos denotando simplesmente por $i_{\#}$ e $j_{\#}$ em vez de $\bar{i}_{\#} \otimes 1$ e $\bar{j}_{\#} \otimes 1$, para facilitar a notação).

Observando que

$$\begin{aligned} \text{Im } j_{\#} &= j_{\#}(C_n(X, B; G)) = \bar{j}_{\#}(C_n(X)/C_n(B)) \otimes G \\ &= j_{\#}(C_n(X))/C_n(A) \otimes G = C_n(X, A; G), \\ \ker i_{\#} &= C_n(B)/C_n(B) = \{0\} \quad \text{e} \quad \text{Im } i_{\#} = C_n(A, B; G) = \ker j_{\#}, \end{aligned}$$

podemos dizer que a sequência é exata.

O homomorfismo $\partial_* : H_n(X, A; G) \rightarrow H_{n-1}(A, B; G)$, definido por

$$\partial_* (\{x\}) = \{(i_{\#}^{-1} \partial j_{\#}^{-1})(x)\} = \{z\},$$

onde $x \in Z_n(X, A; G)$, $i_{\#}(z) = \partial(y)$ e $j_{\#}(y) = x$, está bem definido e sua construção pode ser interpretada pelo diagrama abaixo.

Diagrama 11: Interpretação do homomorfismo $\partial_* : H_n(X, A; G) \rightarrow H_{n-1}(A, B; G)$

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \rightarrow C_n(A, B; G) & \xrightarrow{i_{\#}} & C_n(X, B; G) & \xrightarrow{j_{\#}} & C_n(X, A; G) & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow \partial & & & & \\ 0 \rightarrow C_{n-1}(A, B; G) & \xrightarrow{i_{\#}} & C_{n-1}(X, B; G) & \xrightarrow{j_{\#}} & C_{n-1}(X, A; G) & \rightarrow & 0 \end{array}$$

Fonte: Elaborado pelo autor.

Dados $\{x\} = \{x'\} \in H_n(X, A; G)$, onde $i_{\#}(z) = \partial(y)$, $j_{\#}(y) = x$, $i_{\#}(z') = \partial(y')$ e $j_{\#}(y') = x'$, segue que $x - x' \in B_n(X, A; G)$, portanto existem $w' \in C_{n+1}(X, B; G)$ e $w \in C_{n+1}(X, A; G)$ tais que $\partial w = x - x'$ e $j_{\#}(w') = w$. Assim, $\partial \circ j_{\#}(w') = \partial w$ e por conseguinte $j_{\#} \circ \partial(w') = \partial w = x - x' = j_{\#}(y) - j_{\#}(y')$ o que implica $j_{\#}(\partial(w') - (y - y')) = 0$. Logo existe $v \in C_n(A, B; G)$ de modo que $i_{\#}(v) = \partial(w') - (y - y')$, então aplicando ∂ obtêm-se $\partial \circ i_{\#}(v) = \partial^2(w') - \partial(y - y')$ que equivale a $i_{\#} \circ \partial(v) = -i_{\#}(z - z')$, consequentemente $\partial(v) = z' - z$, isto é, $\{z\} = \{z'\}$, ou seja, ∂_* está bem definida.

$$(A4)- \partial_* \circ f_* = (f|_A)_* \circ \partial_*;$$

(A5)- *Axioma da exatidão.* A sequência

$$\cdots \rightarrow H_n(A, B; G) \xrightarrow{i_*} H_n(X, B; G) \xrightarrow{j_*} H_n(X, A; G) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(A, B; G) \rightarrow \cdots$$

é exata:

Primeiramente mostremos que as composições duas a duas são identicamente nulas. Tomando $\{u \otimes g\} \in H_n(X, B; G)$ segue $j_* \circ i_*(\{u \otimes g\}) = \{j_\# \circ i_\#(u \otimes g)\} = 0$. Se denotarmos por $\{x \otimes g\} = j_*(\{v \otimes g\})$, para $\{v \otimes g\} \in H_n(X, A; G)$, então $\partial_*(\{x \otimes g\}) = \{z \otimes g\}$, onde $i_\#(z \otimes g) = \partial(y \otimes g)$ e $j_\#(y \otimes g) = x \otimes g$. Daí, $j_\#(y \otimes g) = j_\#(v \otimes g)$, por consequência existe $u \otimes g \in C_n(A, B; G)$ tal que $i_\#(u \otimes g) = y \otimes g - v \otimes g$ e

$$i_\#(\partial(u \otimes g)) = \partial i_\#(u \otimes g) = \partial(y \otimes g - v \otimes g) = \partial(y \otimes g) = i_\#(z \otimes g),$$

pois $\partial(v \otimes g) = 0$. À vista disso, $\partial(u \otimes g) = z \otimes g$, sendo assim, $\{z \otimes g\} = 0$. Por fim, $i_* \partial_*(\{x \otimes g\}) = i_*(\{z \otimes g\}) = \{i_\#(z \otimes g)\} = \{\partial(y \otimes g)\} = 0$, segue pela definição do homomorfismo bordo ∂_* .

Assim, $\text{Im } i_* \subset \ker j_*$, $\text{Im } j_* \subset \ker \partial_*$ e $\text{Im } \partial_* \subset \ker i_*$.

Agora, as incluições contrárias. Para $\{u \otimes g\} \in \ker j_*$, $j_*(\{u \otimes g\}) = 0$, ou seja, $j_\#(u \otimes g) = \partial(u' \otimes g)$, para algum $u' \otimes g \in C_{n+1}(X, A; G)$. Sendo $j_\#$ um epimorfismo, existe $v \otimes g \in C_{n+1}(X, B; G)$ tal que $j_\#(v \otimes g) = \partial(u' \otimes g)$, logo

$$\begin{aligned} j_\#(u \otimes g - \partial(v \otimes g)) &= j_\#(u \otimes g) - j_\#(\partial(v \otimes g)) = \partial(u' \otimes g) - \partial(j_\#(v \otimes g)) \\ &= \partial(u' \otimes g) - \partial(u' \otimes g) = 0. \end{aligned}$$

Assim, existe $v' \otimes g \in C_n(A, B; G)$ de modo que $i_\#(v' \otimes g) = u \otimes g - \partial(v \otimes g)$, isto é,

$$i_*(\{v' \otimes g\}) = \{i_\#(v' \otimes g)\} = \{u \otimes g - \partial(v \otimes g)\} = \{u \otimes g\}.$$

Portanto $\ker j_* \subset \text{Im } i_*$.

Considerando $\{x \otimes g\} \in \ker \partial_*$, $\partial_*(\{x \otimes g\}) = \{z \otimes g\} = 0$ para , $i_\#(z \otimes g) = \partial(y \otimes g)$ e $j_\#(y \otimes g) = x \otimes g$, consequentemente $z \otimes g = \partial(x' \otimes g)$, onde $x' \otimes g \in C_n(A, B; G)$. Logo

$$\partial(i_\#(x' \otimes g)) = i_\#(\partial(x' \otimes g)) = i_\#(z \otimes g) = \partial(y \otimes g),$$

ou seja, $\partial(y \otimes g - i_{\#}(x' \otimes g)) = 0$, o que nos diz que $y \otimes g - i_{\#}(x' \otimes g) \in Z_n(X, B; G)$ e por conseguinte

$$\begin{aligned} j_*(\{y \otimes g - i_{\#}(x' \otimes g)\}) &= \{j_{\#}(y \otimes g - i_{\#}(x' \otimes g))\} \\ &= \{j_{\#}(y \otimes g) - 0\} = \{j_{\#}(y \otimes g)\} = \{x \otimes g\}. \end{aligned}$$

Deste modo, $\ker \partial_* \subset \text{Im } j_*$.

Dado $\{z \otimes g\} \in \ker i_*$, $i_*(\{z \otimes g\}) = 0$, isto é, $i_{\#}(z \otimes g) = \partial(y \otimes g)$ e $j_{\#}(y \otimes g) = x \otimes g \in C_{n+1}(X, A; G)$ para $(y \otimes g) \in C_{n+1}(X, B; G)$. Daí

$$\partial(x \otimes g) = \partial(j_{\#}(y \otimes g)) = j_{\#}(\partial(y \otimes g)) = j_{\#}(i_{\#}(y \otimes g)) = 0.$$

Assim, $\{x \otimes g\} \in H_{n+1}(X, A; G)$ e $\partial_*(\{x \otimes g\}) = \{z \otimes g\}$ implicando que $\ker i_* \subset \text{Im } \partial_*$;

(A6)- *O Axioma da Homotopia.* Se $f \simeq g : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ são funções homotópicas, então $f_* = g_* : H_n(X, A; G) \rightarrow H_n(Y, B; G)$. Pois se $f \simeq g$, pela Proposição 4.1.1, $f_{\#} \simeq g_{\#}$. Assim, $f_* = g_*$, pela Proposição 2.3.1;

Seja R um anel comutativo com unidade 1. Se o grupo coeficiente G é um R -módulo, então $H_n(X; G)$ também é, basta definir

$$\mu : R \times H_n(X; G) \rightarrow H_n(X; G), \text{ dada por } \mu(\alpha, \{u \otimes g\}) = \{u \otimes (\alpha g)\}.$$

Em particular, se R é um anel principal, o *Teorema do Coeficiente Universal* (vide [8]) vale:

$$\begin{aligned} H_n(X, A; R; G) &\cong H_n(X, A; R) \otimes_R G \\ &\oplus \text{Tor}^R(H_{n-1}(X, A; R), G), \end{aligned}$$

onde $H_n(X, A; R; G) = H_n(C_*(X, A; R) \otimes_R G)$. Sendo

$$\times : C_*(X, A; R) \otimes C_*(Y; R) \rightarrow C_*(X \times Y, A \times Y; R)$$

uma equivalência de cadeia, pela fórmula de *Kunneth*, segue

$$\begin{aligned} H_n(X \times Y, A \times Y; R) &\cong H_n(C_*(X, A; R) \otimes_R C_*(Y; R)) \\ &\cong \sum_{p+q=n} H_p(X, A; R) \otimes_R H_q(Y; R) \oplus \sum_{p+q=n-1} \text{Tor}^R(H_{p-1}(X, A; R), H_q(Y; R)). \end{aligned}$$

Quando X é um grupo topológico, a composição do produto cross com o homomorfismo $\eta_{\#}$ induzido pela ação $\eta : X \times X \rightarrow X$ de $X \times X$ em X nos define um produto em $H_*(X; G) = \sum_n H_n(X; G)$ (soma direta) da seguinte forma:

Definimos

$$\Psi : C_p(X; R) \otimes C_q(X; R) \rightarrow C_{p+q}(X \times X; R) \xrightarrow{\bar{\eta}_{\#}} C_{p+q}(X; R),$$

onde $\{u \otimes s\} \otimes \{v \otimes t\} \mapsto \{u \times v \otimes st\} \mapsto \eta_{\#}(u \times v) \otimes st$. Como $\Psi(Z_p(X; R) \subset Z_{p+q}(X; R)$ e $\Psi(B_p(X; R) \subset B_{p+q}(X; R)$ induzimos

$$\Psi : H_p(X; R) \otimes H_q(X; R) \rightarrow H_{p+q}(X; R).$$

Podemos ver que $\{u \otimes 1\} \in H_0(X; R)$, onde $u = e_X$ o elemento neutro do grupo X , é a unidade. Consequentemente $(H_*(X; G), +, \Psi)$ é um anel com unidade e é denominado por *anel de Pontrjagin* ou *anel de homologia* de X .

4.1.2 O anel de cohomologia

Notação:

- $C^n(X, A; G) = \text{Hom}(C_n(X)/C_n(A), G)$ o grupo de cocadeia;
- $\delta : C^n(X, A; G) \rightarrow C^{n+1}(X, A; G)$ (homomorfismo de cocadeias);
- $Z^n(X, A; G) = \ker \delta$ o grupo dos cociclos;
- $B^n(X, A; G) = \text{Im } \delta$ o grupo dos cofronteira/cobordo;

Como $(\delta \circ \delta)(h)(u) = \delta(\delta(h))(u) = \delta(h)(du) = h(d(du)) = h(0) = 0$ então

$$(C^n(X, A; G), \delta) = C^*(X, A; G)$$

é um complexo de cocadeia.

Dada uma função contínua $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$, pelo homomorfismo

$$f_{\#} : C_n(X, A) \rightarrow C_n(Y, B),$$

definimos o homomorfismo induzido

$$f^{\#} = (f_{\#})^* : C^n(Y, B; G) \rightarrow C^n(X, A; G),$$

por $(f^\#(h))(u) = h(f_\#(u))$ que satisfaz a relação $f^\# \circ \delta = \delta \circ f^\#$ pois,

$$(f^\# \circ \delta)(h) = f^\#(h \circ d) = (h \circ d) \circ f_\# = h \circ f_\# \circ d = f^\#(h) \circ d = \delta(f^\#(h)) = (\delta \circ f^\#)(h),$$

para qualquer $h \in C^n(Y, B; G)$

Definição 4.1.5. O grupo $H^n(X, A; G)$ é denominado o n -ésimo grupo de cohomologia.

Consequentemente obtemos o homomorfismo entre cohomologias

$$f^* = (f^\#)^* : H^n(Y, B; G) \rightarrow H^n(X, A; G)$$

induzido do homomorfismo $f^\#$.

Exemplo 4.1.2. Cohomologia de $\mathbb{R}P^2$ com coeficientes em $\mathbb{Z}$.

Considerando a divisão quadrangular do $\mathbb{R}P^2$ dada no Exemplo 4.1.1, obtemos:

$$C^*(\mathbb{R}P^2, \mathbb{Z}) : 0 \longrightarrow C^0(\mathbb{R}P^2, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\delta_1} C^1(\mathbb{R}P^2, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\delta_2} C^2(\mathbb{R}P^2, \mathbb{Z}) \longrightarrow 0.$$

Para δ_1 :

A matriz de δ_1 é dada por

$$[\delta_1] = [d_1]^t = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e consequentemente $\ker \delta_1 = \langle (1, 1, 1, 1, 1, 1) \rangle \cong \mathbb{Z}$ e

$$\begin{aligned} \text{Im } \delta_1 = \langle & (-1, -1, -1, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 0), (1, 1, 0, 0, -1, 0, 0, 0, -1, 0), \\ & (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 1, -1), (0, 0, 0, 0, 0, -1, 1, 1, 0, 0), (0, 0, 0, -1, 1, 1, 0, 0, 0, 0) \rangle. \end{aligned}$$

Para δ_2 :

A matriz de δ_2 é dada por

$$[\delta_2] = [d_2]^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e por conseguinte

$$\begin{aligned} \ker \delta_2 &= \langle (b_1, b_2, b_3, b_4, b_5) \rangle \\ &= \langle (0, 0, 0, -1, 1, 1, 0, 0, 0, 0), (1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0), \\ &\quad (-1, -1, -1, -1, 1, 0, 0, 1, 0, 0), (-1, -1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0), \\ &\quad (0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1) \rangle \end{aligned}$$

e

$$\text{Im } \delta_2 = \langle (1, 0, 1, 0, 0), (0, -1, 0, -1, 0), (-1, 0, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 0, -1), (1, -1, 0, 0, 0) \rangle.$$

Então

$$\frac{\ker \delta_2}{\text{Im } \delta_1} = \frac{\langle b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 \rangle}{\langle -b_2, -b_4, -b_3 + b_4 - b_5, -b_1 + b_2 + b_3, b_1 \rangle} = 0$$

e

$$\frac{C^2(\mathbb{R}P^2, \mathbb{Z})}{\text{Im } \delta_2} = \frac{\langle e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 \rangle}{\langle e_1 + e_3, -e_2 - e_4, -e_1 + e_4, e_1 - e_5, e_1 - e_2 \rangle}$$

$$= \frac{\langle e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 \rangle}{\langle e_1 + e_3, -e_2 - e_4, -e_1 + e_4, e_1 - e_5, 2e_4 \rangle}$$

$$= \frac{\langle e_1 + e_3, -e_2 - e_4, -e_1 + e_4, e_1 - e_5, e_4 \rangle}{\langle e_1 + e_3, -e_2 - e_4, -e_1 + e_4, e_1 - e_5, 2e_4 \rangle}$$

$$= \frac{\langle e_4 \rangle}{\langle 2e_4 \rangle} \cong \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}_2,$$

ou seja, $H^0(\mathbb{R}P^2; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, $H^1(\mathbb{R}P^2; \mathbb{Z}) = 0$ e $H^2(\mathbb{R}P^2; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_2$.

Analogamente, aos axiomas para homologia dados na seção anterior, são satisfeitos os seguintes axiomas para cohomologia:

(A1)- $1^* : H^n(X, A; G) \rightarrow H^n(X, A; G);$

(A2)- Para as funções $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ e $g : (Y, B) \rightarrow (Z, C)$, vale $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$;

(A3)- Para a trio de conjuntos (X, A, B) , $B \subset A \subset X$, a sequência

$$0 \rightarrow C_n(X, A; G) \xrightarrow{j^\#} C_n(X, B; G) \xrightarrow{i^\#} C_n(A, B; G) \rightarrow 0$$

é uma sequência exata de complexos de cadeia e o homomorfismo

$$\delta^* : H^n(A, B; G) \rightarrow H^{n+1}(X, A; G)$$

é definido por $\delta^*\{z\} = \{j^{\#-1} \circ \delta \circ i^{\#-1}(z)\}$, $z \in Z^n(A, B; G)$;

(A4)- *Axioma da exatidão.* A sequência

$$\cdots \rightarrow H^n(X, A; G) \xrightarrow{j^*} H^n(X, B; G) \xrightarrow{i^*} H^n(A, B; G) \xrightarrow{\delta_*} H^{n+1}(X, A; G) \rightarrow \cdots$$

é exata;

(A5)- *O Axioma da Homotopia.* Se $f \simeq g : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ são funções homotópicas, então

$$f^* = g^* : H^n(Y, B; G) \rightarrow H^n(X, A; G);$$

Sejam R um anel comutativo com unidade, $f \in C^p(X; R)$ e $g \in C^q(Y; R)$ homomorfismos, então definimos

$$f \otimes g : C_p(X; R) \otimes C_q(Y; R) \rightarrow R \otimes R \rightarrow R \quad \text{por} \quad (f \otimes g)(u \otimes v) = f(u) \cdot g(v),$$

onde $R \otimes R \rightarrow R$ é canônico (isto é, $\alpha \otimes \beta \mapsto \alpha \cdot \beta$).

Assim, é obtido

$$f \times g = (f \otimes g) \circ \square \in C^{p+q}(X \times Y; R)$$

sendo o *produto cross* para grupos de cocadeia.

A partir da função diagonal $\Delta : X \rightarrow X \times X$, definida por $\Delta(x) = (x, x)$, induzimos os homomorfismos

$$\Delta_\# : C_n(X) \rightarrow C_n(X \times X) \quad \text{e} \quad \Delta^\# : C^n(X \times X; R) \rightarrow C^n(X; R).$$

Então define-se *cup*

$$\smile : C^p(X; R) \times C^q(X; R) \rightarrow C^{p+q}(X; R),$$

para $f \in C^p(X; R)$, $g \in C^q(X; R)$ e $u \in C_{p+q}(X; R)$, por

$$\begin{aligned} \smile (f, g)(u) &= (f \smile g)(u) = \Delta^\#(f \times g)(u) = (f \times g) \circ \Delta_\#(u) = (f \otimes g) \circ \square \circ \Delta_\#(u) \\ &= (f \otimes g) \circ \square(\Delta \circ u) = (f \otimes g) \left(\sum \varepsilon(\alpha) \partial_\alpha^0(\Delta \circ u)_X \otimes \partial_\beta^1(\Delta \circ u)_X \right) \\ &= (f \otimes g) \left(\sum \varepsilon(\alpha) \partial_\alpha^0 u \otimes \partial_\beta^1 u \right) \\ &= \sum \varepsilon(\alpha) f(\partial_\alpha^0 u) \cdot g(\partial_\beta^1 u). \end{aligned}$$

Observação. Convenção de Sinal. Para ser consistente com a álgebra homológica, em alguns casos é necessário adicionar um sinal na fórmula $\delta f = f \circ \partial$, ou seja, $\delta f = (-1)^{\text{grau}(f)+1} f \circ \partial$. Vale ressaltar que esse sinal não possui efeito sobre cocadeia nem cociclos, isto é, não afeta grupos de cohomologia. Para mais detalhes vide [1].

Assim, obtemos as seguintes relações entre o operador δ e os produtos *cross* e *cup*:

Para o produto *cross*,

$$\begin{aligned} \delta(f \times g) &= (-1)^{p+q+1} (f \times g) \circ d = (-1)^{p+q+1} (f \otimes g) \circ \square \circ d \\ &= (-1)^{p+q+1} (f \otimes g) \circ d_\otimes \circ \square = (-1)^{p+q+1} (f \otimes g) \circ (1 \otimes d + d \otimes 1) \circ \square \\ &= (-1)^{p+q+1} [(f \otimes (g \circ d)) + (-1)^q (f \circ d) \otimes g] \circ \square \\ &= (-1)^{p+q+1} [(-1)^{q+1} (f \otimes \delta(g)) + (-1)^{p+q+1} (\delta(f) \otimes g)] \circ \square \\ &= (-1)^{p+2q+2} (f \otimes \delta(g)) \circ \square + (-1)^{2p+2q+2} (\delta(f) \otimes g) \circ \square \\ &= (-1)^p (f \otimes \delta(g)) \circ \square + (\delta(f) \otimes g) \circ \square \\ &= \delta(f) \times g + (-1)^p f \times \delta(g). \end{aligned}$$

Para o produto *cup*,

$$\begin{aligned} \delta(f \smile g) &= (-1)^{p+q+1} (f \smile g) \circ d = ((f \times g) \circ \Delta_\#) \circ d = (-1)^{p+q+1} (f \otimes g) \circ \square \circ d \circ \Delta_\# \\ &= (f \otimes g) \circ d_\otimes \circ \square \circ \Delta_\# = (-1)^{p+q+1} (f \otimes g) \circ (1 \otimes d + d \otimes 1) \circ \square \circ \Delta_\# \\ &= (-1)^{p+q+1} [(f \otimes (g \circ d)) + (-1)^q (f \circ d) \otimes g] \circ \square \circ \Delta_\# \\ &= (-1)^{p+q+1} [(-1)^{q+1} (f \otimes \delta(g)) + (-1)^{p+q+1} (\delta(f) \otimes g)] \circ \square \circ \Delta_\# \\ &= (-1)^{p+2q+2} (f \otimes \delta(g)) \circ \square \circ \Delta_\# + (-1)^{2p+2q+2} (\delta(f) \otimes g) \circ \square \circ \Delta_\# \\ &= (-1)^p (f \otimes \delta(g)) \circ \square \circ \Delta_\# + (\delta(f) \otimes g) \circ \square \circ \Delta_\# \\ &= (\delta(f) \times g) \circ \Delta_\# + (-1)^p (f \times \delta(g)) \circ \Delta_\# \\ &= \delta(f) \smile g + (-1)^p f \smile \delta(g). \end{aligned}$$

O produto *cup* possui também a propriedade associativa, isto é, para quaisquer $f \in C^p(X; R)$, $g \in C^q(X; R)$, $h \in C^r(X; R)$ e $u \in C_{p+q+r}(X)$,

$$\begin{aligned}
 (f \smile (g \smile h))(u) &= \sum_{\lambda'} \varepsilon(\lambda') f(\partial_{\lambda'}^0 u) \cdot (g \smile h)(\partial_{\lambda'}^1 u) \\
 &= \sum_{\lambda'} \varepsilon(\lambda') f(\partial_{\lambda'}^0 u) \cdot \left(\sum_{\lambda} \varepsilon(\lambda) g(\partial_{\lambda}^0 \partial_{\lambda'}^1 u) \cdot h(\partial_{\lambda}^1 \partial_{\lambda'}^1 u) \right) \\
 &= \sum_{\lambda', \lambda} \varepsilon(\lambda') \varepsilon(\lambda) f(\partial_{\lambda'}^0 u) \cdot g(\partial_{\lambda}^0 \partial_{\lambda'}^1 u) \cdot h(\partial_{\lambda}^1 \partial_{\lambda'}^1 u) \\
 &= \sum_{\alpha, \alpha'} \varepsilon(\alpha) \varepsilon(\alpha') f(\partial_{\alpha'}^0 \partial_{\alpha}^0 u) \cdot g(\partial_{\beta'}^1 \partial_{\alpha}^0 u) \cdot h(\partial_{\beta}^1 u) \\
 &= \sum_{\alpha} \varepsilon(\alpha) \left(\sum_{\alpha'} \varepsilon(\alpha') f(\partial_{\alpha'}^0 \partial_{\alpha}^0 u) \cdot g(\partial_{\beta'}^1 \partial_{\alpha}^0 u) \right) \cdot h(\partial_{\beta}^1 u) \\
 &= \sum_{\alpha} \varepsilon(\alpha) (f \smile g)(\partial_{\alpha}^0 u) \cdot h(\partial_{\beta}^1 u) \\
 &= ((f \smile g) \smile h)(u).
 \end{aligned}$$

Portanto $H^*(X; R) = \sum H^n(X; R)$, com o produto *cup* induzido, é um anel com unidade $1 \in H^0(X; R)$ sendo a classe de cohomologia de $1 \in C^0(X; R)$ dada por $1(u) = 1 \in R$, $u \in C_0(X)$. Chamamos $H^*(X; R)$ de *anel de cohomologia* do espaço topológico X sobre R .

Por fim, o *Teorema do Coeficiente Universal* toma a seguinte forma:

$$H^n(X, A; G) \cong \text{Hom}_R(H_n(X, A; R), G) \oplus \text{Ext}_R(H_{n-1}(X, A; R), G),$$

para R sendo um anel principal.

4.2 (Co)homologia com coeficientes locais

Definição 4.2.1. A coleção $\underline{G} = \{G_x\}_{x \in X}$ é um *grupo (anel) de coeficientes locais* sobre X se, para cada $x \in X$, G_x é um grupo abeliano (ou um anel) e para cada caminho $\omega : I \rightarrow X$, existe um homomorfismo $\omega_* : G_{\omega(1)} \rightarrow G_{\omega(0)}$ de grupos (anéis) satisfazendo:

- (a) $0_* = 1$, onde 0 é o caminho constante.
- (b) $\omega_0 \simeq \omega_1$ implica $\omega_{0*} = \omega_{1*}$.
- (c) Para o produto de caminhos, $(\omega_0 * \omega_1)_* = \omega_{0*} \circ \omega_{1*}$.

Para o caminho inverso $\bar{\omega}$ de ω temos $\omega * \bar{\omega} \simeq 0$ consequentemente $\omega_* \circ \bar{\omega}_* = 1$. De modo análogo, $\bar{\omega}_* \circ \omega_* = 1$.

Definição 4.2.2. Um grupo (anel) de coeficientes locais é *trivial* se existe um grupo (anel) G e isomorfismos $\lambda_x : G \rightarrow G_x$, para todo $x \in X$, tal que $\omega_* \circ \lambda_{\omega(1)} = \lambda_{\omega(0)}$.

Quando $\underline{G}$ é dado sobre um espaço topológico X , supomos que o coeficiente g_u de um cubo singular não-degenerado $u : I^n \rightarrow X$ pertence ao grupo $G_{u(\mathbf{0})}$, onde $\mathbf{0} = (0, \dots, 0) \in I^n$.

Considerando o conjunto

$$C_n(X; \underline{G}) = \left\{ \sum_u g_u \cdot u \text{ (soma finita)} \mid g_u \in G_{u(\mathbf{0})} \right\}$$

e definindo a soma e o homomorfismo bordo ∂ por

$$\begin{aligned} \sum g_u \cdot u + \sum g'_u \cdot u &= \sum (g_u + g'_u) \cdot u \quad \text{e} \\ \partial \left(\sum_u g_u \cdot u \right) &= \sum_u \sum_{k=1}^n (-1)^k (g_u \cdot \partial_k^0 u - \bar{\omega}_{k*} g_u \cdot \partial_k^1 u), \end{aligned}$$

respectivamente, onde $\omega_k(s) = u(0, \dots, \overset{(k)}{s}, \dots, 0)$ (s pertence à k -ésima entrada). Dizemos que $u(\mathbf{0})$ é o *ponto base* do cubo singular u .

Dado $u : I^n \rightarrow X$, segue que

$$\begin{aligned} \partial^2(g_u \cdot u) &= \partial \left(\sum_{k=1}^n (-1)^k (g_u \cdot \partial_k^0 u - \bar{\alpha}_{k*}(g_u) \cdot \partial_k^1 u) \right) \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^k \left(\partial(g_u \cdot \partial_k^0 u) - \partial(\bar{\alpha}_{k*}(g_u) \cdot \partial_k^1 u) \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{k+j} (g_u \cdot \partial_j^0 \partial_k^0 u - \bar{\beta}_{j*}(g_u) \cdot \partial_j^1 \partial_k^0 u - \bar{\alpha}_{k*}(g_u) \cdot \partial_j^0 \partial_k^1 u + \bar{\gamma}_{j*} \circ \bar{\alpha}_{k*}(g_u) \cdot \partial_j^1 \partial_k^1 u), \end{aligned}$$

onde, para o par de índices (j, k) ,

$$\begin{cases} \alpha_k(s) = u(0, \dots, \overset{(k)}{s}, \dots, 0) \\ \beta_j(s) = \partial_k^0 u(0, \dots, \overset{(j)}{s}, \dots, 0) \\ \gamma_j(s) = \partial_k^1 u(0, \dots, \overset{(j)}{s}, \dots, 0) \end{cases} \implies \begin{cases} \bar{\alpha}_{k*} : G_{u(0)} \rightarrow G_{\partial_k^1 u(0)} \\ \bar{\beta}_{j*} : G_{\partial_j^0 \partial_k^0 u(0)} = G_{u(0)} \rightarrow G_{\partial_j^1 \partial_k^0 u(0)} \\ \bar{\gamma}_{j*} : G_{\partial_j^0 \partial_k^1 u(0)} = G_{\partial_k^1 u(0)} \rightarrow G_{\partial_j^1 \partial_k^1 u(0)}. \end{cases}$$

Sabendo que para $j < k$, $\partial_j^{\varepsilon_j} \partial_k^{\varepsilon_k} = \partial_{k-1}^{\varepsilon_k} \partial_j^{\varepsilon_j}$, onde $\varepsilon_k = 0, 1$ e $\varepsilon_j = 0, 1$. Obtemos, pelo par de índices $(k-1, j)$, os caminhos

$$\begin{cases} \alpha_j(s) = u(0, \dots, \overset{(j)}{s}, \dots, 0) \\ \beta_{k-1}(s) = \partial_j^0 u(0, \dots, \overset{(k-1)}{s}, \dots, 0) \\ \gamma_{k-1}(s) = \partial_j^1 u(0, \dots, \overset{(k-1)}{s}, \dots, 0) \end{cases}$$

e conseqüentemente as igualdades

$$\begin{cases} \alpha_k = \beta_{k-1} \\ \beta_j = \alpha_j \\ \alpha_k * \gamma_j \simeq \alpha_j * \gamma_{k-1}, \end{cases}$$

onde os caminhos do lado esquerdo das igualdades ou da homotopia são referentes ao par de índices (j, k) e os caminhos do lado direito são referentes ao par de índices $(k-1, j)$.

À vista disso, pelas propriedades da Definição 4.2.1, segue as igualdades

$$\overline{\alpha}_{j*} = \overline{\beta}_{j*} \quad \overline{\alpha}_{k*} = \overline{\beta}_{k-1*} \quad \overline{\gamma}_{j*} \circ \overline{\alpha}_{k*} = \overline{\gamma}_{k-1*} \circ \overline{\alpha}_{j*}.$$

Portanto, se considerarmos $\partial^2(g_u \cdot u) = \sum_k \sum_j (-1)^{j+k} a_{j,k}$, podemos dizer que $a_{j,k} = a_{k-1,j}$, para $j < k$. Como resultado segue que $\partial^2(g_u \cdot u) = 0$.

Assim, $C_*(X; \underline{G}) = (C_n(X; \underline{G}), \partial)$ é um complexo de cadeia e podemos definir o *grupo de homologia de X com coeficientes locais* sendo

$$H_n(X; \underline{G}) = H_n(C_*(X; \underline{G})).$$

Exemplo 4.2.1. A homologia de $\mathbb{R}P^2$ com coeficientes locais $\underline{\mathbb{Z}}$ sendo o sistema local de orientação;

O sistema local de orientação, com grupo típico $\mathbb{Z}$, sobre $\mathbb{R}P^2$ funciona do seguinte modo: para cada caminho fechado $\omega : I \rightarrow \mathbb{R}P^2$, o homomorfismo $\omega_* : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ é o homomorfismo identidade caso o laço omega preserve orientação e é o homomorfismo menos identidade caso inverta a orientação.

Com o sistema de coeficientes locais, fixaremos como ponto base o vértice de menor índice do cubo singular em questão. Por exemplo, os pontos base dos cubos F_3 e A_9 são v_0 e v_1 , respectivamente. Então:

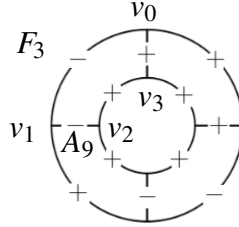
$$z \cdot F_3 \in C_2(\mathbb{R}P^2; \underline{\mathbb{Z}}), \quad z \in \mathbb{Z}_{v_0}.$$

$$z \cdot A_9 \in C_1(\mathbb{R}P^2; \underline{\mathbb{Z}}), \quad z \in \mathbb{Z}_{v_1}.$$

Assim, o isomorfismo presente na fórmula do homomorfismo bordo ∂ pode ser interpretado com a mudança de sinal do respectivo coeficiente de acordo como a mudança de sinal do

caminho, pelo bordo, do ponto em questão ao ponto base. O sinal é encontrado no seguinte diagrama.

Diagrama 12: Mudança de sinal presente no homomorfismo ∂



Fonte: Elaborado pelo autor.

Para F_3 , como $d(F_3) = A_1 - A_7 + A_8 + A_9$ e os pontos base dos cubos F_3 , A_1 , A_7 , A_8 e A_9 são v_0 , v_0 , v_0 , v_2 e v_1 , respectivamente, obtemos que

$$\partial(1 \cdot F_3) = 1 \cdot A_1 - 1 \cdot A_7 + \alpha(1) \cdot A_8 + \beta(1) \cdot A_9$$

pois os pontos base dos cubos A_1 e A_7 coincidem e os pontos base dos cubos A_8 e A_9 diferem do cubo F_3 . Assim, considerando o caminho, pelo bordo de F_3 , de v_0 a v_2 , segue que o produto dos sinais é igual a $+$, ou seja, o isomorfismo α é o identidade. De modo análogo, temos que β é o isomorfismo menos identidade. Portanto,

$$\partial(1 \cdot F_3) = A_1 - A_7 + A_8 - A_9.$$

Assim obtemos o complexo de cadeia

$$C_*(\mathbb{R}P^2, \mathbb{Z}) : 0 \longrightarrow C_2(\mathbb{R}P^2, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\partial_2} C_1(\mathbb{R}P^2, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\partial_1} C_0(\mathbb{R}P^2, \mathbb{Z}) \longrightarrow 0.$$

Para ∂_2 : Como

$$\begin{aligned} \partial_2(F_1) &= A_1 - A_3 - A_4 - A_5, & \partial_2(F_2) &= -A_2 - A_5 + A_6 + A_7, \\ \partial_2(F_3) &= A_1 - A_7 + A_8 - A_9, & \partial_2(F_4) &= -A_2 + A_3 - A_9 + A_{10}, \\ \partial_2(F_5) &= -A_4 - A_6 - A_8 + A_{10}, \end{aligned}$$

a matriz de ∂_2 é dada por

$$[\partial_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Portanto, $\ker \partial_2 = \langle (1, -1, -1, 1, -1) \rangle \cong \mathbb{Z}$ e

$$\begin{aligned} \text{Im } \partial_2 = \langle & (1, 0, -1, -1, -1, 0, 0, 0, 0, 0), (0, -1, 0, 0, -1, 1, 1, 0, 0, 0), \\ & (1, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 1, -1, 0), (0, -1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 1) \rangle. \end{aligned}$$

Para ∂_1 : Como,

$$\begin{aligned} \partial_1(A_1) &= -v_1 - v_0, & \partial_1(A_2) &= v_1 - v_0, & \partial_1(A_3) &= -v_5 - v_0, & \partial_1(A_4) &= v_5 - v_4, \\ \partial_1(A_5) &= v_4 - v_1, & \partial_1(A_6) &= v_4 - v_3, & \partial_1(A_7) &= v_3 - v_0, & \partial_1(A_8) &= v_3 - v_2, \\ \partial_1(A_9) &= -v_2 - v_1, & \partial_1(A_{10}) &= v_5 - v_2, \end{aligned}$$

a matriz de ∂_1 é dada por

$$[\partial_1] = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

então segue que

$$\begin{aligned}\ker \partial_1 &= \langle (b_1, b_2, b_3, b_4) \rangle \\ &= \langle (-1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0), (-1, -1, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 0), \\ &\quad (0, 1, -1, -1, 0, -1, 0, -1, 1, 0), (0, 0, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, 1) \rangle\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\operatorname{Im} \partial_1 &= \langle (-1, -1, 0, 0, 0, 0, 0), (-1, 1, 0, 0, 0, 0, 0), (-1, 0, 0, 0, 0, -1), \\ &\quad (0, 0, 0, 0, -1, 1), (0, 0, 0, -1, 1, 0), (0, 0, -1, 1, 0, 0) \rangle\end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{\ker \partial_1}{\operatorname{Im} \partial_2} = \frac{\langle b_1, b_2, b_3, b_4 \rangle}{\langle -b_1, -b_1 + b_2, -b_2 - b_3, -b_3 + b_4 \rangle} = \frac{\langle -b_1, -b_1 + b_2, -b_2 - b_3, -b_3 + b_4 \rangle}{\langle -b_1, -b_1 + b_2, -b_2 - b_3, -b_3 + b_4 \rangle} = 0$$

e

$$\begin{aligned}\frac{C_0(\mathbb{R}P^2)}{\operatorname{Im} \partial_1} &= \frac{\langle v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \rangle}{\langle -v_0 - v_1, -v_0 + v_1, -v_0 - v_5, -v_4 + v_5, -v_3 + v_4, -v_2 + v_3 \rangle} \\ &= \frac{\langle v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \rangle}{\langle -v_0 - v_1, 2v_1, -v_0 - v_5, -v_4 + v_5, -v_3 + v_4, -v_2 + v_3 \rangle} \\ &= \frac{\langle -v_0 - v_1, v_1, -v_0 - v_5, -v_4 + v_5, -v_3 + v_4, -v_2 + v_3 \rangle}{\langle -v_0 - v_1, 2v_1, -v_0 - v_5, -v_4 + v_5, -v_3 + v_4, -v_2 + v_3 \rangle} \\ &= \frac{\langle v_1 \rangle}{\langle 2v_1 \rangle} \cong \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}_2\end{aligned}$$

Logo, $H_2(\mathbb{R}P^2, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, $H_1(\mathbb{R}P^2, \mathbb{Z}) = 0$ e $H_0(\mathbb{R}P^2, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_2$.

Agora, dado o conjunto

$$C^n(X; \underline{G}) = \{f : C_n(X) \rightarrow \underline{G} \mid f(u) \in G_{u(0)}\}$$

com a operação de adição $(f + f')(u) = f(u) + f'(u)$ e o homomorfismo cobordo δ dado por

$$\delta(f)(u) = \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k (f(\partial_k^0 u) - \omega_{k*} f(\partial_k^1 u)),$$

onde $\omega_{k*} : G_{\partial_k^1 u(0)} \rightarrow G_{u(0)}$ e $u : I^{n+1} \rightarrow X$, segue que $\delta^2 = 0$.

De fato, desenvolvendo $\delta^2(f)(u)$ para $f \in C_n(X)$ e $u \in C_{n+2}(X)$, obtemos:

$$\delta^2(f)(u) = \delta(\delta(f))(u) = \sum_{k=1}^{n+2} (-1)^k (\delta(f)(\partial_k^0 u) - \omega_{k*} \delta(f)(\partial_k^1 u)) =$$

$$\sum_{k=1}^{n+2} \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{k+j} (f(\partial_j^0 \partial_k^0 u) - \omega_{j*} f(\partial_j^1 \partial_k^0 u) - \omega_{k*} f(\partial_j^0 \partial_k^1 u) + \omega_{k*} \omega'_{j*} f(\partial_j^1 \partial_k^1 u)),$$

denotando $a_{(j,k)} = (f(\partial_j^0 \partial_k^0 u) - \omega_{j*} f(\partial_j^1 \partial_k^0 u) - \omega_{k*} f(\partial_j^0 \partial_k^1 u) + \omega_{k*} \omega'_{j*} f(\partial_j^1 \partial_k^1 u))$ o termo geral do duplo somatório, vamos mostrar que $a_{(j,k)} = a_{(k-1,j)}$, para $j < k$.

Dados os caminhos $\alpha, \beta : I \rightarrow I^{n+2}$ definidos por

$$\alpha(s) = \begin{cases} (0, \dots, 2s, \dots, 0), & s \in [0, \frac{1}{2}] \\ (0, \dots, 2s-1, \dots, 1, \dots, 0), & s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} \quad e$$

$$\beta(s) = \begin{cases} (0, \dots, 2s, \dots, 0), & s \in [0, \frac{1}{2}] \\ (0, \dots, 1, \dots, 2s-1, \dots, 0), & s \in [\frac{1}{2}, 1], \end{cases}$$

e uma homotopia H entre α e β dada por

$$H(s, t) = \begin{cases} (0, \dots, 2st, \dots, 2s(1-t), \dots, 0), & s \in [0, \frac{1}{2}] \\ (0, \dots, (2s-1)(1-t) + t, \dots, (1-t) + (2s-1)t, \dots, 0), & s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

vemos que $u \circ \alpha = \omega_k * \omega'_j$ e $u \circ \beta = \omega_j * \omega'_{k-1}$ portanto

$$\omega_k * \omega'_j = u \circ \alpha \simeq u \circ \beta = \omega_j * \omega'_{k-1}$$

e por (b) e (c) da Definição 4.2.1 obtemos $\omega_{k*} \circ \omega'_{j*} = \omega_{j*} \circ \omega'_{(k-1)*}$.

Além disso, como $\omega_{k-1}(s) = \partial_j^0 u(0, \dots, s, \dots, 0) = u(0, \dots, s, \dots, 0) = \omega_k(s)$, podemos dizer que

$$a_{(j,k)} = a_{(k-1,j)},$$

pois já foi provado que para $j < k$, $\partial_j^{\varepsilon_j} \partial_k^{\varepsilon_k} u = \partial_{k-1}^{\varepsilon_k} \partial_j^{\varepsilon_j} u$. Assim, para cada termo do duplo somatório, existe um correspondente ao qual se anulam.

Consequentemente $C^*(X; \underline{G}) = (C^n(X; \underline{G}), \delta)$ é um complexo de cocadeia e a partir disso definimos o grupo de cohomologia de X com coeficientes locais

$$H^n(X; \underline{G}) = H^n(C^*(X; \underline{G})).$$

Observação. Tomando dois caminhos homotópicos em I^n , segue pelo item (b) da Definição 4.2.1 que, quando compostos com um cubo singular u , os isomorfismos induzidos dos caminhos resultantes, são iguais (este resultado foi provado de modo particular para os caminhos α e β acima). Assim não há necessidade de especificar detalhadamente os caminhos que surgem nas definições dos operadores ∂ e δ .

Observação. Vale a pena ressaltar que a existência dos caminhos cujos isomorfismos aparecem nas definições de ∂ e δ é garantida pelo cubo singular tomado.

Exemplo 4.2.2. Cohomologia de $\mathbb{R}P^2$ com coeficientes locais $\mathbb{Z}$:

$$C^*(\mathbb{R}P^2, \mathbb{Z}) : 0 \longrightarrow C^0(\mathbb{R}P^2, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\delta_1} C^1(\mathbb{R}P^2, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\delta_2} C^2(\mathbb{R}P^2, \mathbb{Z}) \longrightarrow 0.$$

Para δ_1 : Sua matriz é dada por

$$[\delta_1] = [\partial_1]^t = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e $\ker \delta_1 = 0$ e

$$\begin{aligned} \text{Im } \delta_1 = \langle & (-1, -1, -1, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 0), (-1, 1, 0, 0, -1, 0, 0, 0, -1, 0), \\ & (0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, -1, -1), (0, 0, 0, 0, 0, -1, 1, 1, 0, 0), \\ & (0, 0, 0, -1, 1, 1, 0, 0, 0, 0), (0, 0, -1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1) \rangle. \end{aligned}$$

Para δ_2 : Sua matriz é dada por

$$[\delta_2] = [\partial_2]^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Por conseguinte

$$\begin{aligned}\ker \delta_2 &= \langle b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6 \rangle \\ &= \langle (0, 1, 1, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0), (0, -1, -1, 1, 0, -1, 0, 0, 0, 0), \\ &\quad (-1, -1, -1, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 0), (1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, -1, 0, 0), \\ &\quad (-1, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 0), (0, 0, 1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, -1) \rangle.\end{aligned}$$

e

$$\operatorname{Im} \delta_2 = \langle (1, 0, 1, 0, 0), (0, -1, 0, -1, 0), (-1, 0, 0, 1, 0), (-1, 0, 0, 0, -1) \rangle.$$

Então

$$\begin{aligned}\frac{\ker \delta_2}{\operatorname{Im} \delta_1} &= \frac{\langle b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6 \rangle}{\langle b_3, b_1 + b_5, b_4 + b_5 + b_6, b_2 - b_3 - b_4, -b_1 - b_2, -b_6 \rangle} \\ &= \frac{\langle b_1, b_2, b_4, b_5 \rangle}{\langle b_1 + b_5, b_4 + b_5, b_2 - b_4, -b_1 - b_2 \rangle} \\ &= \frac{\langle b_1, b_2, b_4, b_5 \rangle}{\langle b_1 + b_5, b_4 + b_5, b_2 - b_4, 2b_2 \rangle} \\ &= \frac{\langle b_1 + b_5, b_4 + b_5, b_2 - b_4, b_2 \rangle}{\langle b_1 + b_5, b_4 + b_5, b_2 - b_4, 2b_2 \rangle} \\ &= \frac{\langle b_2 \rangle}{\langle 2b_2 \rangle} \cong \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}_2\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\frac{C^2(\mathbb{R}P^2, \underline{\mathbb{Z}})}{\operatorname{Im} \delta_2} &= \frac{C^2(\mathbb{R}P^2, \underline{\mathbb{Z}})}{\langle (1, 0, 1, 0, 0), (0, -1, 0, -1, 0), (-1, 0, 0, 1, 0), (-1, 0, 0, 0, -1) \rangle} \\ &= \frac{\langle e_1, (1, 0, 1, 0, 0), (0, -1, 0, -1, 0), (-1, 0, 0, 1, 0), (-1, 0, 0, 0, -1) \rangle}{\langle (1, 0, 1, 0, 0), (0, -1, 0, -1, 0), (-1, 0, 0, 1, 0), (-1, 0, 0, 0, -1) \rangle} \\ &= \langle e_1 \rangle = \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

Assim, $H^0(\mathbb{R}P^2, \underline{\mathbb{Z}}) = 0$, $H^1(\mathbb{R}P^2, \underline{\mathbb{Z}}) = \mathbb{Z}_2$ e $H^2(\mathbb{R}P^2, \underline{\mathbb{Z}}) = \mathbb{Z}$.

Quando $\underline{R} = \{R_x\}$ é um anel de coeficientes locais sobre X , definimos o produto *cup* de $f \in C^p(X; \underline{R})$ e $g \in C^q(X; \underline{R})$ por

$$(f \smile g)(u) = \sum_{\alpha} \varepsilon(\alpha) f(\partial_{\alpha}^0 u) \cdot \omega_{\beta*} g(\partial_{\beta}^1 u).$$

De modo análogo vale as relações

$$(f \smile g) \smile h = f \smile (g \smile h) \text{ e}$$

$$\delta(f \smile g) = \delta(f) \smile g + (-1)^p f \smile \delta(g).$$

Então o produto

$$\smile : H^p(X; \underline{R}) \times H^q(X; \underline{R}) \rightarrow H^{p+q}(X; \underline{R})$$

é definido e portanto $H^*(X; \underline{R}) = \sum H^n(X; \underline{R})$ é um anel.

Lema 4.2.1. 1. Se X é 1-conexo então qualquer grupo de coeficientes locais é trivial.

2. Se um grupo (anel) de coeficientes locais sobre X é trivial, então os grupos de homologia e cohomologia com tais coeficientes locais podem ser identificados com os grupos de homologia e cohomologia padrões (isto é, com um único coeficiente).

Demonstração. (1) Seja $\underline{G} = \{G_x\}$ um grupo de coeficientes locais sobre X . Fixado $x_0 \in X$ e denotando $G = G_{x_0}$, se considerarmos dois caminhos $\omega, \omega' : (I, 0, 1) \rightarrow (X, x, x_0)$, então $\bar{\omega} * \omega' : (I, 0, 1) \rightarrow (X, x_0, x_0)$. Por hipótese $\bar{\omega} * \omega' \simeq 0_{x_0}$ consequentemente $(\bar{\omega} * \omega')_* = 1_{G_{x_0}}$, logo $\bar{\omega}_* \circ \omega'_* = 1_{G_{x_0}}$ donde $\omega_* = \omega'_*$, pois $\bar{\omega}_* = \omega_*^{-1}$. Assim, basta definir $\lambda_x = \omega_*$ onde a condição $\bar{\omega}_* \lambda_{\bar{\omega}(1)} = \lambda_{\bar{\omega}(0)}$ é provada usando o mesmo argumento acima.

(2) Considerando o isomorfismo $\varphi : C_n(X; \underline{G}) \rightarrow C_n(X; G)$ definido por

$$\varphi\left(\sum_u g_u \cdot u\right) = \sum_u (u \otimes g^u), \text{ onde } g^u = \lambda_{u(0)}^{-1}(g_u).$$

Para qualquer $g_u \cdot u \in C_n(X; \underline{G})$,

$$\begin{aligned} \varphi \circ \partial(g_u \cdot u) &= \varphi \circ \left(\sum_{k=1}^n (-1)^k (g_u \cdot \partial_k^0 u - \bar{\omega}_{k*} g_u \cdot \partial_k^1 u) \right) \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^k (\partial_k^0 u \otimes g^u - \partial_k^1 u \otimes \lambda_{\partial_k^1 u(0)}^{-1}(\bar{\omega}_{k*} g_u)). \end{aligned}$$

Como $\lambda_{\partial_k^1 u(0)}^{-1} \bar{\omega}_{k*} = \lambda_{\partial_k^1 u(0)}^{-1} \omega_{k*}^{-1} = (\omega_{k*} \lambda_{\partial_k^1 u(0)})^{-1} = \lambda_{u(0)}^{-1}$ segue que

$$\varphi \circ \partial(g_u \cdot u) = \left(\sum_{k=1}^n (-1)^k (\partial_k^0 u - \partial_k^1 u) \right) \otimes g^u = du \otimes g^u = \partial(u \otimes g^u) = \partial \circ \varphi(g_u \cdot u),$$

logo $\varphi \circ \partial = \partial \circ \varphi$. Assim obtemos a identificação $H_n(X; \underline{G}) \cong H_n(X; G)$.

De modo análogo, considerando o isomorfismo $\psi : C^n(X; \underline{G}) \rightarrow C^n(X; G)$ dado por

$$\psi\left(\sum_f f\right) = \sum_f \lambda^{-1} f, \text{ onde } (\lambda^{-1} f)(u) = \lambda_{u(0)}^{-1} f(u).$$

Segue que

$$\begin{aligned} \psi(\delta(f))u &= (\lambda^{-1} \delta(f))(u) = \lambda_{u(0)}^{-1} \delta(f)(u) = \lambda_{u(0)}^{-1} \left(\sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k \{f(\partial_k^0 u) - \omega_{k*} f(\partial_k^1 u)\} \right) \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k \{ \lambda_{u(0)}^{-1} f(\partial_k^0 u) - \lambda_{u(0)}^{-1} \omega_{k*} f(\partial_k^1 u) \}. \end{aligned}$$

Como $\lambda_{u(0)}^{-1} \omega_{k*} = (\omega_{k*}^{-1} \lambda_{u(0)})^{-1} = (\bar{\omega}_{k*} \lambda_{u(0)})^{-1} = \lambda_{\partial_k^1 u(0)}^{-1}$, então

$$\begin{aligned} \psi(\delta(f))u &= \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k \{ \lambda_{u(0)}^{-1} f(\partial_k^0 u) - \lambda_{\partial_k^1 u(0)}^{-1} f(\partial_k^1 u) \} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k \{ (\lambda^{-1} f)(\partial_k^0 u) - (\lambda^{-1} f)(\partial_k^1 u) \} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k \{ \psi(f)(\partial_k^0 u) - \psi(f)(\partial_k^1 u) \} \\ &= \psi(f) \left(\sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k (\partial_k^0 u - \partial_k^1 u) \right) = \psi(f)(du) = \delta(\psi(f))u, \end{aligned}$$

isto é, $\psi \circ \delta = \delta \circ \psi$. Por conseguinte $H^n(X; \underline{G}) \cong H^n(X; G)$.

□

4.3 Os coeficientes locais de (co)homologia associado com fibrações

Nesta seção mostraremos que em uma fibração (E, p, B) os grupos de (co)homologia das fibras F_b sobre cada ponto $b \in B$ formam um sistema de coeficientes locais sobre B .

Lema 4.3.1. Seja L não-vazio, contrátil e formado pela união de faces $\partial_i^\varepsilon I^n$. Se as funções $f : L \rightarrow E$ e $h : I^n \rightarrow B$ satisfazem $p \circ f = h|_L$, então existe uma extensão $\bar{f} : I^n \rightarrow E$ de f , isto é, $\bar{f}|_L = f$, tal que $p \circ \bar{f} = h$.

Demonstração. Para mais detalhes ver Mimura [15] (1991, p.107)

□

Lema 4.3.2. Para cada caminho $\omega : I \rightarrow B$ em B existe uma função $S = S_\omega : Q_n(F_{\omega(0)}) \rightarrow Q_n(F_{\omega(1)})$ satisfazendo as seguintes condições (onde para $u : I^n \rightarrow F_b$, $Su : I^{n+1} \rightarrow E$) :

1. $(p \circ Su)(t_1, \dots, t_{n+1}) = \omega(t_1)$;
2. $\partial_1^0(Su) = u$, $\partial_{i+1}^\varepsilon(Su) = S(\partial_i^\varepsilon u)$, $(1 \leq i \leq n)$;
3. $S(u' \circ \pi_k) = Su' \circ \pi_{k+1}$, $(1 \leq k \leq n, u' : I^{n-1} \rightarrow F_{\omega(0)})$;

Definindo $\omega_\# u = \partial_1^1(S_\omega u)$. Se $\omega \simeq \omega'$ (caminhos homotópicos) então $\omega_\# \simeq \omega'_\# : C_n(F_{\omega(0)}) \rightarrow C_n(F_{\omega(1)})$.

Demonstração. A prova é feita por indução em n , onde construímos S . Para $n = 0$ e qualquer $u : I^0 \rightarrow F_{\omega(0)}$ se considerarmos $\omega : I \times I^0 \rightarrow B$ onde $\omega(I \times I^0) = \omega(I)$, então $(p \circ u)(I^0) = \omega(\{0\} \times I^0) = \omega(0)$.

Assim, pela propriedade de levantamento de homotopia, existe $Su : I \cong I \times I^0 \rightarrow E$ tal que $u(I^0) = Su(0)$ e $(p \circ Su)(t) = \omega(t)$.

Diagrama 13: Comutatividade entre as composições $p \circ Su = \omega$ e $Su \circ (0 \times) = u$

$$\begin{array}{ccc}
 I^0 & \xrightarrow{u} & E \\
 0 \times \downarrow & \nearrow Su & \downarrow p \\
 I \times I^0 & \xrightarrow{\omega} & B
 \end{array}$$

Fonte: Elaborado pelo autor.

Portanto $S : Q_0(F_{\omega(0)}) \rightarrow Q_0(F_{\omega(1)})$ é dada por $S(u) = Su(1)$. Em resumo, para cada ponto da fibra $F_{\omega(0)}$ definimos caminhos em E de modo a percorrer cada fibra $F_{\omega(t)}$. Fixando cada caminho obtido em $n = 0$ partimos para o caso $n = 1$.

Dado $v : I \rightarrow F_{\omega(0)}$ não-degenerado podemos ver $v(0)$ e $v(1)$ como cubos singulares de dimensão 0, ou seja, $v(0), v(1) \in Q_0(F_{\omega(0)})$ e por conseguinte $S(v(0)), S(v(1)) : I \rightarrow E$ são caminhos em E , pelo caso anterior.

Considerando I^2 façamos a identificação nos domínios desses caminhos do seguinte modo:

$$v : \partial_1^0 I^2 \cong I \rightarrow F_{\omega(0)} \quad S(v(0)) : \partial_2^0 I^2 \cong I \rightarrow E \quad S(v(1)) : \partial_2^1 I^2 \cong I \rightarrow E.$$

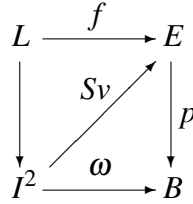
Agora, se denotamos por $L = \partial_1^0 I^2 \cup \partial_2^0 I^2 \cup \partial_2^1 I^2 = \{0\} \times I \cup I \times \partial I \subset I^2$, a função $f : L \rightarrow E$

dada por

$$f(s, t) = \begin{cases} v(t), & \text{se } s = 0, \\ S(v(0))(s), & \text{se } t = 0, \\ S(v(1))(s), & \text{se } t = 1. \end{cases}$$

é contínua e satisfaz $p \circ f = \omega$ para $\omega(s, t) = \omega(s)$. Logo, pelo Lema 4.3.1, existe $Sv : I^2 \rightarrow E$ tal que $Sv|_L = f$ e $p \circ Sv = \omega$.

Diagrama 14: Comutatividade entre as composições $p \circ Sv = \omega$ e $Sv|_L = f$



Fonte: Elaborado pelo autor.

Em vista disso, vale as propriedades:

- i. $p \circ Sv(s, t) = \omega(s)$;
- ii. $\partial_1^0 Sv(t) = Sv(0, t) = f(0, t) = v(t)$;
 $\partial_2^\varepsilon (Sv)(s) = Sv(s, \varepsilon) = f(s, \varepsilon) = S(v(\varepsilon))(s) = S(\partial_1^\varepsilon v)(s)$, para $\varepsilon = 0, 1$;
- iii. Para v degenerado (isto é $v = v' \circ \pi_1$, onde $v' : I^0 \rightarrow F_{\omega(0)}$) temos $v(t) = x \in F_{\omega(0)}$, para todo $t \in I$. Então, por construção, $S(v(0)) = S(v(1)) = S(v(t)) : I \rightarrow E$ e consequentemente $Sv(s, t) = S(v(t))(s)$. Como $v'(I^0) = x$ então $S(v(t)) = Sv'$, por isso

$$Sv(s, t) = S(v(t))(s) = Sv'(s) = Sv' \circ \pi_2(s, t),$$

ou seja, $S(v' \circ \pi_1) = Sv' \circ \pi_2$. E definimos $S : Q_1(F_{\omega(0)}) \rightarrow Q_1(F_{\omega(1)})$ por $S(v)(t) = Sv(1, t)$.

Fixamos as funções Sv obtida pelos caminhos v , partimos para $n = 3$ e assim por diante. Formalmente, supondo por indução a existência da função S satisfazendo as propriedades para n , a demonstração para $n + 1$ é feita de maneira bem semelhante e se faz uso do Lema 4.3.1, onde $L = 0 \times I^n \cup I \times \partial I^n$.

Seja $W : I^2 \rightarrow B$ uma homotopia entre ω e ω' (isto é, $W(0, t_2) = \omega(t_2)$, $W(1, t_2) = \omega'(t_2)$, $W(t_1, 0) = \omega(0)$ e $W(t_1, 1) = \omega(1)$) construímos $Du : I^{n+2} \rightarrow E$ analogamente a Su , onde tomamos $L = \partial I \times I^{n+1} \cup I \times 0 \times I^n \cup I^2 \times \partial I^n$, satisfazendo:

$$\text{i}'. \quad p \circ Du(t_1, \dots, t_{n+2}) = W(t_1, t_2);$$

$$\text{ii}'. \quad \partial_1^0(Du) = S_\omega u, \partial_1^1(Du) = S_{\omega'} u, \partial_2^0(Du) = u \circ \pi_1, \partial_{i+1}^\varepsilon(Du) = D(\partial_i^\varepsilon u);$$

$$\text{iii}'. \quad D(u' \circ \pi_k) = D(u') \circ \pi_{k+2};$$

Definindo $D'u = \partial_2^1(Du)$ segue, para $u : I^n \rightarrow F_{\omega(0)}$,

$$\begin{aligned} (dD' + D'd)u &= (d \circ D')u + (D' \circ d)u = d(\partial_2^1(Du)) + D' \left(\sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k (\partial_k^0 u - \partial_k^1 u) \right) \\ &= \sum_{l=1}^{n+2} (-1)^l (\partial_l^0 \partial_2^1(Du) - \partial_l^1 \partial_2^1(Du)) + \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k (D'(\partial_k^0 u) - D'(\partial_k^1 u)) \\ &= \sum_{l=1}^{n+2} (-1)^l (\partial_l^0 \partial_2^1(Du) - \partial_l^1 \partial_2^1(Du)) + \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k (\partial_2^1 D(\partial_k^0 u) - \partial_2^1 D(\partial_k^1 u)) \\ &= \partial_1^1 \partial_2^1(Du) - \partial_1^0 \partial_2^1(Du) + \sum_{l=2}^{n+2} (-1)^l (\partial_l^0 \partial_2^1(Du) - \partial_l^1 \partial_2^1(Du)) \\ &\quad + \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k (\partial_2^1 \partial_{k+1}^0 D(u) - \partial_2^1 \partial_{k+1}^1 D(u)) = \partial_1^1 \partial_2^1(Du) - \partial_1^0 \partial_2^1(Du) \\ &= \partial_1^1 \partial_1^1(Du) - \partial_1^1 \partial_1^0(Du) = \partial_1^1(S_{\omega'} u) - \partial_1^1(S_\omega u) = \omega'_\# u - \omega_\# u, \end{aligned}$$

pois $\partial_l^\varepsilon \partial_2^1 = \partial_2^1 \partial_{l+1}^\varepsilon$ para $l \geq 2$. Portanto $\omega'_\# \simeq \omega_\#$.

□

Observação. A necessidade de fixar as funções em cada passo n vem da propriedade de levantamento de homotopia que nos garante a existência e não a unicidade.

Assim, para o caminho $\omega : I \rightarrow B$, obtemos os homomorfismos

$$\omega_\# : C_n(F_{\omega(0)}) \rightarrow C_n(F_{\omega(1)}), \quad \overline{\omega}_\# : C_n(F_{\omega(1)}) \rightarrow C_n(F_{\omega(0)}) \text{ e}$$

$$\omega^\# : C^n(F_{\omega(1)}; R) \rightarrow C^n(F_{\omega(0)}; R),$$

onde $\omega^\#(f) = f \circ \omega_\#$ e $\overline{\omega}$ é o caminho inverso de ω . Também para $u \in C_n(F_{\omega(1)})$, $v \in C_{n+1}(F_{\omega(1)})$

e $f \in C^n(F_{\omega(1)}; R)$, obtêm-se as igualdades:

$$\begin{aligned}
 (\overline{\omega}_{\#} \circ d)(u) &= \overline{\omega}_{\#} \left(\sum_{k=1}^n (-1)^k (\partial_k^0 u - \partial_k^1 u) \right) = \sum_{k=1}^n (-1)^k (\overline{\omega}_{\#}(\partial_k^0 u) - \overline{\omega}_{\#}(\partial_k^1 u)) \\
 &= \sum_{k=1}^n (-1)^k (\partial_1^1 (S \partial_k^0 u) - \partial_1^1 (S \partial_k^1 u)) = \sum_{k=1}^n (-1)^k (\partial_1^1 \partial_{k+1}^0 S u - \partial_1^1 \partial_{k+1}^1 S u) \\
 &= \sum_{k=1}^n (-1)^k (\partial_k^0 \partial_1^1 S u - \partial_k^1 \partial_1^1 S u) = \sum_{k=1}^n (-1)^k (\partial_k^0 \overline{\omega}_{\#}(u) - \partial_k^1 \overline{\omega}_{\#}(u)) \\
 &= (d \circ \overline{\omega}_{\#})(u).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\delta \circ \omega^{\#})(f)(v) &= \delta(\omega^{\#}(f))(v) = \delta(f \circ \omega_{\#})(v) = (f \circ \omega_{\#})(dv) = (f \circ \omega_{\#} \circ d)(v) \\
 &= (f \circ d \circ \omega_{\#})(v) = (f \circ d)(\omega_{\#}(v)) = f(d(\omega_{\#}(v))) = \delta(f)(\omega_{\#}(v)) \\
 &= (\delta(f) \circ \omega_{\#})(v) = \omega^{\#}(\delta(f))(v) = (\omega^{\#} \circ \delta)(f)(v).
 \end{aligned}$$

Consequentemente podemos induzir os homomorfismos:

- Para homologia de fibras com o grupo coeficiente G ,

$$\omega_* = (\overline{\omega}_{\#})_* : H_n(F_{\omega(1)}; G) \rightarrow H_n(F_{\omega(0)}; G) \quad \text{dada por} \quad \omega_*(\{u \otimes g\}) = \{(\overline{\omega}_{\#}u) \otimes g\}.$$

- Para cohomologia de fibras com o anel coeficiente R ,

$$\omega_* = (\omega^{\#})^* : H^n(F_{\omega(1)}; R) \rightarrow H^n(F_{\omega(0)}; R) \quad \text{dada por} \quad \omega_*(\{f\}) = \{\omega^{\#}f\}.$$

Teorema 4.3.3. Com ω_* acima, $\{H_n(F_b; G)\}_{b \in B}$ e $\{H^n(F_b; R)\}_{b \in B}$ são sistemas de grupos de coeficientes locais sobre B .

Demonstração. Para homologia de fibras: Sendo $\overline{\omega}$ trivialmente homotópico a si mesmo, se tomarmos $\overline{\omega}_{1\#}(u) = \overline{\omega}_{\#}(u) = \partial_1^1(S_1 u)$ e $\overline{\omega}_{2\#}(u) = \overline{\omega}_{\#}(u) = \partial_1^1(S_2 u)$ para $S_1 u$ e $S_2 u$ distintos, então o Lema 4.3.2 nos diz que $\overline{\omega}_{1\#} \simeq \overline{\omega}_{2\#}$ o que implica, pela Proposição 2.3.1, $(\overline{\omega}_{1\#})_* = (\overline{\omega}_{2\#})_*$, ou seja, ω_* independe da escolha de $S_{\overline{\omega}}$.

Dado o caminho constante $0 = 0_b : I \rightarrow \{b\} \subset B$, escolhendo S_0 de modo que $S_0 u = u \circ \pi_1$, então

$$0_* \{u \otimes g\} = \{0_{\#}(u) \otimes g\} = \{\partial_1^1(S_0 u) \otimes g\} = \{\partial_1^1(u \circ \pi_1) \otimes g\} = \{u \otimes g\},$$

para $u \otimes g \in H_n(F_b; G)$. Logo $0_* = 1$.

Pelo Lema 4.3.2, se $\omega \simeq \omega'$ então $\overline{\omega}_{\#} \simeq \overline{\omega}'_{\#} : C_n(F_{\omega(1)}) \rightarrow C_n(F_{\omega(0)})$ que, pela proposição 2.3.1, implica $\omega_* = \omega'_* : H_n(F_{\omega(1)}) \rightarrow H_n(F_{\omega(0)})$.

Sejam $\omega, \omega' : I \rightarrow B$ caminhos em B tais que $\omega(1) = \omega'(0)$, denotemos $\alpha = \overline{\omega}$, $\beta = \overline{\omega'}$ e definimos $S_{\beta*\alpha}u$ para S_α e S_β por

$$S_{\beta*\alpha}u(t_1, \dots, t_n) = \begin{cases} S_\beta u(2t_1, \dots, t_n), & t_1 \in [0, \frac{1}{2}] \\ S_\alpha(\partial_1^1(S_\beta u))(2t_1 - 1, \dots, t_n), & t_1 \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \overline{\omega * \omega'}_\#(u)(t_1, \dots, t_n) &= (\overline{\omega'} * \overline{\omega})_\#(u)(t_1, \dots, t_n) = (\beta * \alpha)_\#(u)(t_1, \dots, t_n) \\ &= \partial_1^1(S_{\beta*\alpha}u)(t_1, \dots, t_n) = (S_{\beta*\alpha}u)(1, t_1, \dots, t_n) \\ &= S_\alpha(\partial_1^1(S_\beta u))(1, t_1, \dots, t_n) = \partial_1^1(S_\alpha(\partial_1^1(S_\beta u)))(t_1, \dots, t_n) \\ &= \partial_1^1(S_\alpha(\beta_\#u))(t_1, \dots, t_n) = \alpha_\#(\beta_\#u)(t_1, \dots, t_n) \\ &= \alpha_\# \circ \beta_\#(u)(t_1, \dots, t_n) \\ &= \overline{\omega}_\# \circ \overline{\omega'}_\#(u)(t_1, \dots, t_n), \end{aligned}$$

ou seja, $(\omega * \omega')_* = \omega_* \circ \omega'_*$.

Para cohomologia de fibras: Primeiramente observemos que se $\omega \simeq \omega'$ então

$$\begin{aligned} (\delta \circ D'' + D'' \circ \delta)(f)(u) &= (\delta \circ D'')(f)(u) + (D'' \circ \delta)(f)(u) \\ &= \delta(D''(f))(u) + D''(\delta(f))(u) = D''(f)(du) + D''(f \circ d)(u) \\ &= f(D'(du)) + f(d(D'(u))) = f(D'(du) + d(D'(u))) \\ &= f(\omega'_\#(u) - \omega_\#(u)) = f \circ \omega'_\#(u) - f \circ \omega_\#(u) \\ &= \omega'^\#(f)(u) - \omega^\#(f)(u) = (\omega'^\# - \omega^\#)(f)(u), \end{aligned}$$

isto é, $\omega'_\# \simeq \omega_\#$, onde D'' é induzida por D' pela cohomologia.

Usando o mesmo argumento acima, obtemos que ω_* independe da escolha de S_ω e consequentemente para um caminho constante $0 = 0_b : I \rightarrow b$ temos:

$$0_*(\{f\}) = \{0^\#(f)\} = \{f \circ 0_\#\} = \{f\},$$

onde S_0 é dada como anteriormente.

Supondo que $\omega \simeq \omega'$ temos $\omega^\# \simeq \omega'^\#$, usando a versão para cohomologia da Proposição 2.3.1 conclui-se que $\omega_* = \omega'_*$. Por fim, dado o caminho $\omega * \omega'$ definimos $S_{\omega*\omega'}$ por

$$S_{\omega*\omega'}u(t_1, \dots, t_n) = \begin{cases} S_\omega u(2t_1, \dots, t_n), & t_1 \in [0, \frac{1}{2}] \\ S_{\omega'}(\partial_1^1(S_\omega u))(2t_1 - 1, \dots, t_n), & t_1 \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Assim obtêm-se a igualdade $\omega * \omega' = \omega'_\# \circ \omega_\#$ e por conseguinte

$$\begin{aligned} (\omega * \omega')_*(\{f\}) &= \{(\omega * \omega')^\#(f)\} = \{f \circ (\omega * \omega')_\#\} = \{f \circ \omega'_\# \circ \omega_\#\} = \{\omega^\#(f \circ \omega'_\#)\} \\ &= \omega_*\{\omega'^\#(f)\} = \omega_* \circ \omega'_*(\{f\}), \end{aligned}$$

portanto $(\omega * \omega')_* = \omega_* \circ \omega'_*$. □

Corolário 4.3.4. $\{H^*(F_b; R)\}_{b \in B}$ é um sistema de anel de coeficientes locais.

Para mais detalhes sobre o capítulo 4 ver [15].

5 A construção da sequência espectral de Serre

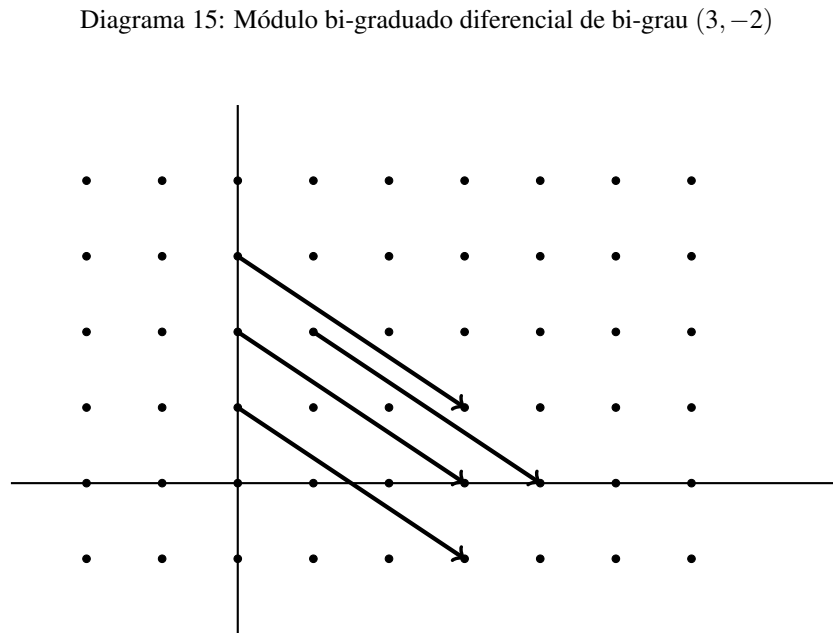
Nesse capítulo, introduzimos a noção de sequência espectral, com particular atenção à sequência espectral de cohomologia de Serre de uma fibração $p : E \rightarrow B$. Baseamo-nos em [14] e [15].

Em todo o capítulo, os módulos bi-graduados são $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$ -módulos bi-graduados sobre R , onde R é um anel comutativo com unidade.

5.1 Definições e propriedades básicas

Definição 5.1.1. Um **módulo bi-graduado diferencial** sobre um anel R é uma coleção de R -módulos $\{E^{p,q}\}$, onde p e q são inteiros, juntamente com uma aplicação R -linear, $d : E^{*,*} \rightarrow E^{*,*}$, chamada de **diferencial**, de bi-grau $(s, 1 - s)$ ou $(-s, s - 1)$, para algum s , e satisfazendo $d \circ d = 0$.

Abaixo, uma representação gráfica de um módulo bi-graduado diferencial de bi-grau $(3, -2)$. O modo canônico de representação é, no plano cartesiano, pensar no R -módulo $E^{p,q}$ localizado no ponto (p, q) e, então, representar as diferenciais por setas.



Fonte: McCleary [14] (2001, p. 29).

Com a diferencial, digamos de bi-grau $(s, 1 - s)$, podemos considerar a **homologia** do mó-

dulo bi-graduado diferencial:

$$H^{p,q}(E^{*,*}, d) = \frac{\ker d : E^{p,q} \rightarrow E^{p+s, p-s+1}}{\operatorname{Im} d : E^{p-s, q+s-1} \rightarrow E^{p,q}}.$$

Combinando esses objetos, temos a seguinte definição:

Definição 5.1.2. Uma **sequência espectral** é uma coleção de R -módulos bi-graduados diferenciais $\{E_r^{*,*}, d_r\}$, onde $r = 1, 2, \dots$; as diferenciais são todas de bi-grau $(-r, r-1)$ (para as sequências espectrais do **tipo homológicas**), ou todas são de bi-grau $(r, 1-r)$ (para as sequências espectrais do **tipo cohomológicas**), e para todo p, q, r , $E_{r+1}^{p,q}$ é isomorfo a $H^{p,q}(E_r^{*,*}, d_r)$.

Apesar de, na definição acima, termos feito a indexação por $r = 1, 2, \dots$, é claro que podemos começar a indexação a partir de qualquer inteiro. O mais frequente é começar a sequência com $r = 2$, onde $E_2^{*,*}$ é conhecido. Quando $E_r^{p,q} = 0$ sempre que $p < 0$ ou $q < 0$, dizemos que a sequência espectral é de **primeiro quadrante**.

Mostraremos abaixo que uma sequência espectral pode ser representada como uma torre de submódulos de um módulo dado.

Começemos com $E_2^{*,*}$. Denote:

$$Z_2^{p,q} = \ker(d_2 : E_2^{p,q} \rightarrow E_2^{p+2, q-1})$$

e

$$B_2^{p,q} = \operatorname{Im}(d_2 : E_2^{p-2, q+1} \rightarrow E_2^{p,q}).$$

A condição $d_2 \circ d_2 = 0$ implica em $B_2^{p,q} \subset Z_2^{p,q}$ e, por definição, $E_3^{p,q} \cong Z_2^{p,q} / B_2^{p,q}$. Denotemos

$$\bar{Z}_3^{p,q} = \ker d_3 : E_3^{p,q} \rightarrow E_3^{p+3, q-2}.$$

Uma vez que $\bar{Z}_3^{p,q}$ é um submódulo de $E_3^{p,q}$, $\bar{Z}_3^{p,q}$ é da forma $Z_3^{p,q} / B_2^{p,q}$ para algum submódulo $Z_3^{p,q}$ de $Z_2^{p,q}$. E se denotamos

$$\bar{B}_3^{p,q} = \operatorname{Im} d_3 : E_3^{p-3, q+2} \rightarrow E_3^{p,q},$$

então, como submódulo de $E_3^{p,q}$, $\bar{B}_3^{p,q}$ é da forma $B_3^{p,q} / B_2^{p,q}$ para algum submódulo $B_3^{p,q}$ de $Z_2^{p,q}$.

Consequentemente,

$$E_4^{p,q} \cong \frac{\bar{Z}_3^{p,q}}{\bar{B}_3^{p,q}} \cong \frac{\frac{Z_3^{p,q}}{B_2^{p,q}}}{\frac{B_3^{p,q}}{B_2^{p,q}}} \cong \frac{Z_3^{p,q}}{B_3^{p,q}}.$$

As informações acima podem ser representadas por uma torre de inclusões de submódulos de $E_2^{p,q}$:

$$B_2^{p,q} \subset B_3^{p,q} \subset Z_3^{p,q} \subset Z_2^{p,q} \subset E_2^{p,q}.$$

Indutivamente, a sequência espectral nos dá uma torre infinita de submódulos de $E_2^{p,q}$,

$$B_2^{p,q} \subset B_3^{p,q} \subset \dots \subset B_n^{p,q} \subset \dots \subset Z_n^{p,q} \subset \dots \subset Z_3^{p,q} \subset Z_2^{p,q} \subset E_2^{p,q},$$

com a propriedade de que $E_{n+1}^{p,q} = Z_n^{p,q} / B_n^{p,q}$, a diferencial, $d_{n+1} : E_{n+1}^{p,q} \rightarrow E_{n+1}^{p+n+1, q-n}$, pode ser tomada como um homomorfismo $Z_n^{p,q} / B_n^{p,q} \rightarrow Z_n^{p+n+1, q-n} / B_n^{p+n+1, q-n}$ cujo núcleo é $Z_{n+1}^{p,q} / B_n^{p,q}$, e a diferencial $d_{n+1} : E_{n+1}^{p-n-1, q+n} \rightarrow E_{n+1}^{p,q}$ como um homomorfismo $Z_n^{p-n-1, q+n} / B_n^{p-n-1, q+n} \rightarrow Z_n^{p,q} / B_n^{p,q}$ cuja imagem é $B_{n+1}^{p,q} / B_n^{p,q}$. A sequência exata curta induzida por d_{n+1} ,

$$0 \rightarrow \frac{Z_{n+1}^{p,q}}{B_n^{p,q}} \rightarrow \frac{Z_n^{p,q}}{B_n^{p,q}} \rightarrow \frac{B_{n+1}^{p,q}}{B_n^{p,q}} \rightarrow 0,$$

nos dá o isomorfismo $Z_n^{p,q} / Z_{n+1}^{p,q} \cong B_{n+1}^{p,q} / B_n^{p,q}$, para todo p, q, n . Reciprocamente, uma torre de submódulos de E_2 juntamente com tais isomorfismo determina a sequência espectral.

Abaixo, quando possível, omitiremos os super-índices por economia.

Definição 5.1.3. Dizemos que os elemento de E_2 que moram em Z_r **sobrevivem ao r -ésimo estágio da sequência**. Já os elementos do submódulo B_r de E_2 são chamados de bordos do r -ésimo estágio da sequência. O módulo bi-graduado $E_r^{*,*}$ é chamado de E_r -**termo** da sequência espectral, ou de E_r -**página** da sequência espectral.

Seja $Z_\infty = \bigcap_n Z_n$ o submódulo de E_2 dos elementos que **sobrevivem sempre**, ou seja, os elementos que são ciclos em todos os estágios. O submódulo $B_\infty = \bigcup_n B_n$ consiste dos elementos que em algum estágio são bordos. Da torre de inclusões, vê-se claramente que $B_\infty \subset Z_\infty$ e, assim, aparece o que, em geral, é o objetivo dos cálculos com sequências espectrais: $E_\infty = Z_\infty / B_\infty$ é o módulo bi-graduado que sobra após o computo das sucessivas homologias. Mais adiante, discutiremos a noção de convergência da sequência espectral.

Definição 5.1.4. Dizemos que a sequência espectral colapsa no N -ésimo termo quando $d_r = 0$ para todo $r \geq N$.

Observe que, da sequência exata curta

$$0 \longrightarrow Z_r / B_{r-1} \longrightarrow Z_{r-1} / B_{r-1} \xrightarrow{d_r} B_r / B_{r-1} \rightarrow 0,$$

a condição $d_r = 0$ acarreta em $B_r = B_{r-1}$ e $Z_r = Z_{r-1}$. Assim, se a sequência colapsa no N -ésimo termo, teremos

$$B_2 \subset B_3 \subset \cdots \subset B_{N-1} = B_N = \cdots = B_\infty \subset Z_\infty = \\ \cdots = Z_N = Z_{N-1} \subset Z_{N-2} \subset \cdots \subset Z_3 \subset Z_2 \subset E_2$$

e, conseqüentemente, $E_\infty = E_N$.

5.2 Como surge uma sequência espectral?

5.2.1 Módulos diferenciais filtrados

Definição 5.2.1. Uma **filtração** F^* sobre um R -módulo A é uma família de submódulos $\{F^p A\}_{p \in \mathbb{Z}}$ tal que

$$\cdots F^{p+1} A \subset F^p A \subset F^{p-1} A \subset \cdots \subset A \quad (\text{filtração decrescente})$$

ou

$$\cdots F^{p-1} A \subset F^p A \subset F^{p+1} A \subset \cdots \subset A \quad (\text{filtração crescente}).$$

Exemplo 5.2.1. Considere a seguinte família de submódulos de $\mathbb{Z}$:

$$F^p \mathbb{Z} = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{se } p \leq 0 \\ 2^p \mathbb{Z}, & \text{se } p > 0 \end{cases}$$

A família acima é uma filtração decrescente de $\mathbb{Z}$:

$$\cdots \subset 32\mathbb{Z} \subset 16\mathbb{Z} \subset 8\mathbb{Z} \subset 4\mathbb{Z} \subset 2\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Z} \subset \cdots \subset \mathbb{Z}.$$

Definição 5.2.2. Dado um módulo filtrado A , o **módulo graduado associado**, E_0^* , é definido por

$$E_0^*(A) = \begin{cases} F^p A / F^{p+1} A, & \text{quando } F \text{ é decrescente} \\ F^p A / F^{p-1} A, & \text{quando } F \text{ é crescente} \end{cases}$$

No exemplo acima, $E_0^p(\mathbb{Z}) = \{0\}$ se $p < 0$ e $E_p(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ se $p \geq 0$.

Definição 5.2.3. Seja H^* um R -módulo graduado e filtrado e considere $F^p H^n = F^p H^* \cap H^n$ (a filtração no nível n). Define-se

$$E_0^{p,q}(H^*, F) = \begin{cases} F^p H^{p+q} / F^{p+1} H^{p+q}, & \text{quando } F \text{ é decrescente} \\ F^p H^{p+q} / F^{p-1} H^{p+q}, & \text{quando } F \text{ é crescente} \end{cases}$$

Definição 5.2.4. Dizemos que a sequência espectral $\{E_r^{*,*}\}$ **converge** para H^* , H^* um R -módulo graduado, se existir uma filtração F sobre H^* tal que

$$E_\infty^{p,q} \cong E_0^{p,q}(H^*, F),$$

onde $E_\infty^{*,*}$ é o termo limite da sequência espectral.

Definição 5.2.5. Um R -módulo A é um **módulo graduado diferencial filtrado** se

1. A é uma soma direta de submódulos, $A = \bigoplus_{n=0}^{\infty} A^n$.
2. Existe uma aplicação R -linear, $d : A \rightarrow A$, de grau 1 ($d : A^n \rightarrow A^{n+1}$) ou grau -1 ($d : A^n \rightarrow A^{n-1}$) satisfazendo $d \circ d = 0$.
3. A possui uma filtração F que é respeitada pela diferencial d , ou seja, $d : F^p A \rightarrow F^p A$.

Com as definições necessárias colocadas, enunciamos e provamos o principal teorema da seção. Por conveniência, suporemos A um módulo graduado diferencial filtrado com diferencial de grau $+1$ e filtração decrescente. Esse é geralmente o caso dos exemplos cohomológicos.

Teorema 5.2.1. *Cada módulo graduado diferencial filtrado (A, d, F^*) determina uma sequência espectral, $\{E_r^{*,*}, d_r\}$, $r = 1, 2, \dots$, com d_r de bi-grau $(r, 1-r)$ e*

$$E_1^{p,q} \cong H^{p+q}(F^p A / F^{p+1} A).$$

*Adicionalmente, suponha que a filtração seja **limitada**, ou seja, que em cada dimensão n , existem valores $s = s(n)$ e $t = t(n)$ tais que*

$$\{0\} \subset F^s A^n \subset F^{s-1} A^n \subset \dots \subset F^{t+1} A^n \subset F^t A^n = A^n.$$

Então, a sequência espectral converge para $H(A, d)$, ou seja,

$$E_\infty^{p,q} \cong F^p H^{p+q}(A, d) / F^{p+1} H^{p+q}(A, d).$$

Demonstração. No que segue, mantemos em mente a filtração decrescente:

$$\dots \subset F^p A^{p+q} \subset F^{p-1} A^{p+q} \subset F^{p-2} A^{p+q} \subset \dots,$$

bem como o fato de que $d(F^p A^{p+q}) \subset F^p A^{p+q+1}$. Considere as seguintes definições:

$$\begin{aligned} Z_r^{p,q} &= \text{elementos em } F^p A^{p+q} \text{ que possuem bordo em } F^{p+r} A^{p+q+1} \\ &= F^p A^{p+q} \cap d^{-1}(F^{p+r} A^{p+q+1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_r^{p,q} &= \text{elementos em } F^p A^{p+q} \text{ que formam a imagem de } d \text{ definida sobre } F^{p-r} A^{p+q-1} \\ &= F^p A^{p+q} \cap d(F^{p-r} A^{p+q-1}) \end{aligned}$$

$$Z_\infty^{p,q} = \ker(d) \cap F^p A^{p+q}$$

$$B_\infty^{p,q} = \text{Im}(d) \cap F^p A^{p+q}.$$

A filtração decrescente, juntamente com o fato de que a filtração é respeitada pela diferencial, ou seja, $d(F^p A^{p+q}) \subset F^p A^{p+q+1}$, nos fornece a torre de submódulos

$$B_0^{p,q} \subset B_1^{p,q} \subset \dots \subset B_\infty^{p,q} \subset Z_\infty^{p,q} \subset \dots \subset Z_1^{p,q} \subset Z_0^{p,q}$$

bem como

$$\begin{aligned} d(Z_r^{p-r,q+r-1}) &= d(F^{p-r} A^{p+q-1} \cap d^{-1}(F^p A^{p+q})) \\ &= F^p A^{p+q} \cap d(F^{p-r} A^{p+q-1}) \\ &= B_r^{p,q}. \end{aligned}$$

A hipótese da filtração ser limitada nos dá que, para $r > s(p+q+1) - p$ e $r \geq p - t(p+q-1)$, $Z_r^{p,q} = Z_\infty^{p,q}$ e $B_r^{p,q} = B_\infty^{p,q}$, o que nos assegura a convergência.

Defina, para todo $0 \leq r \leq \infty$, $E_r^{p,q} = Z_r^{p,q} / (Z_{r-1}^{p+1,q-1} + B_{r-1}^{p,q})$, e $\eta_r^{p,q} : Z_r^{p,q} \rightarrow E_r^{p,q}$ como sendo a projeção canônica cujo núcleo é $\ker(\eta_r^{p,q}) = Z_{r-1}^{p+1,q-1} + B_{r-1}^{p,q}$. Observe que $d(Z_r^{p,q}) = B_r^{p+q,q-r+1} \subset Z_r^{p+r,q-r+1}$ e

$$\begin{aligned} d(Z_{r-1}^{p+1,q-1} + B_{r-1}^{p,q}) &= d(Z_{r-1}^{p+1,q-1}) + d(B_{r-1}^{p,q}) \\ &\subset B_{r-1}^{p+r,q-r+1} + 0 \\ &\subset Z_{r-1}^{p+r+1,q-r} + B_{r-1}^{p+r,q-r+1}. \end{aligned}$$

Assim, a diferencial como uma aplicação $d : Z_r^{p,q} \rightarrow Z_r^{p+r,q-r+1}$ induz um homomorfismo, d_r , de modo que o seguinte diagrama comuta.

Diagrama 16: Igualdade entre as composições $\eta \circ d$ e $d_r \circ \eta$ ($\eta \circ d = d_r \circ \eta$)

$$\begin{array}{ccc} Z_r^{p,q} & \xrightarrow{d} & Z_r^{p+r,q-r+1} \\ \eta \downarrow & & \downarrow \eta \\ E_r^{p,q} & \xrightarrow{d_r} & E_r^{p+r,q-r+1} \end{array}$$

Fonte: McCleary [14] (2001, p. 35).

Uma vez que $d \circ d = 0$, conclui-se que $d_r \circ d_r = 0$.

Para finalizarmos a demonstração, devemos ainda estabelecer os isomorfismos:

- I.** $H^*(E_r^{*,*}, d_r) \cong E_{r+1}^{*,*}$.
- II.** $E_1^{p,q} \cong H^{p+q}(F^p A / F^{p+1} A)$.
- III.** $E_\infty \cong F^p H^{p+q}(A, d) / F^{p+1} H^{p+q}(A, d)$.

Com respeito a **I**, considere o diagrama

Diagrama 17: Esquema do isomorfismo $E_{r+1}^{p,q} \cong H^{p,q}(E_r^{*,*}, d_r)$

$$\begin{array}{ccccccc} Z_r^{p+1,q-1} + B_r^{p,q} & \xrightarrow{\subset} & Z_{r+1}^{p,q} & \xrightarrow{\subset} & Z_r^{p,q} & \xrightarrow{d} & Z_r^{p+r,q-r+1} \\ & & \downarrow \eta| & & \downarrow \eta_r^{p,q} & & \downarrow \eta_r^{p+r,q-r+1} \\ & & \ker d_r & \xrightarrow{\quad} & E_r^{p,q} & \xrightarrow{d_r} & E_r^{p+r,q-r+1} \\ & & \downarrow & & & & \\ & & H^{p,q}(E_r^{*,*}, d_r) & & & & \\ & & \downarrow & & & & \\ & & 0 & & & & \end{array}$$

Fonte: McCleary [14] (2001, p. 35).

Observe que $\eta_r^{p,q}(Z_{r+1}^{p,q}) = \ker d_r$. Considere $\eta^{-1}(\ker d_r)$. Uma vez que $d_r \circ \eta = \eta \circ d$, $d_r(\eta(z)) = 0$ se, e somente se, $d(z) \in Z_{r-1}^{p+r+1,q-r} + B_{r-1}^{p+r,q-r+1}$ e, pelas definições de $Z_*^{*,*}$ e $B_*^{*,*}$, isso só ocorre se, e somente se, $z \in Z_{r+1}^{p,q} + Z_{r-1}^{p+1,q-1}$. Assim, $\eta^{-1}(\ker d_r) = Z_{r+1}^{p,q} + Z_{r-1}^{p+1,q-1}$ e, portanto, $\ker d_r = \eta(Z_{r+1}^{p,q} + Z_{r-1}^{p+1,q-1}) = \eta(Z_{r+1}^{p,q})$, uma vez que $Z_{r-1}^{p+1,q-1} \subset \ker \eta_r^{p,q}$.

Observe que $Z_r^{p+1,q-1} + B_r^{p,q} = Z_{r-1}^{p,q} \cap ((\eta_r^{p,q})^{-1}(\text{Im } d_r))$. Sabemos que

$$\text{Im } d_r = \eta_r^{p,q}(d(Z_r^{p-r,q+r-1})) = \eta_r^{p,q}(B_r^{p,q})$$

e, assim,

$$\begin{aligned}
 (\eta_r^{p,q})^{-1}(\text{Im } d_r) &= B_r^{p,q} + \ker \eta_r^{p,q} \\
 &= B_r^{p,q} + B_{r-1}^{p,q} + Z_{r-1}^{p+1,q-1} \\
 &= B_r^{p,q} + Z_{r-1}^{p+1,q-1}.
 \end{aligned}$$

Uma vez que

$$\begin{aligned}
 Z_{r-1}^{p+1,q-1} \cap Z_{r+1}^{p,q} &= F^{p+1}A^{p+q} \cap d^{-1}(F^{p+r}A^{p+q+1}) \cap F^pA^{p+q} \cap d^{-1}(F^{p+r+1}A^{p+q+1}), \\
 F^{p+1}A^{p+q} &\subset F^pA^{p+q}
 \end{aligned}$$

e

$$F^{p+r+1}A^{p+q} \subset F^{p+r}A^{p+q},$$

temos

$$Z_{r-1}^{p+1,q-1} \cap Z_{r+1}^{p,q} = F^{p+1}A^{p+q} \cap d^{-1}(F^{p+r+1}A^{p+q+1}) = Z_r^{p+1,q-1}.$$

Isso, unido aos cálculos anteriores, nos dá

$$Z_{r-1}^{p+1,q-1} \cap (\eta_r^{p,q})^{-1}(\text{Im } d_r) = Z_r^{p+1,q-1} + B_r^{p,q}.$$

Finalmente, seja $\gamma: Z_{r+1}^{p,q} \rightarrow H^{p,q}(E_r^{*,*}, d_r)$ a composição de $\eta_r^{p,q}$ com a projeção canônica $\ker d_r \rightarrow H^{p,q}(E_r^{*,*}, d_r)$. O núcleo de γ é dado por

$$\ker \gamma = Z_{r+1}^{p,q} \cap (\eta_r^{p,q})^{-1}(\text{Im } d_r) = Z_r^{p+1,q-1} + B_r^{p,q}.$$

Como γ é um epimorfismo, o teorema do isomorfismo nos fornece

$$E_{r+1}^{p,q} = Z_{r+1}^{p,q} / (Z_r^{p+1,q-1} + B_r^{p,q}) \cong H^{p,q}(E_r^{*,*}, d_r).$$

Portanto, γ induz um isomorfismo que torna a nossa torre de inclusões numa sequência espectral.

Com respeito a **II**, observe que $E_0^{p,q} = Z_0^{p,q} / (Z_{-1}^{p+1,q-1} + B_{-1}^{p,q})$, onde $Z_{-1}^{p+1,q-1}$ e $B_{-1}^{p,q}$ são definidos por

$$Z_{-1}^{p+1,q-1} = F^{p+1}A^{p+q} \quad \text{e} \quad B_{-1}^{p,q} = d(F^{p+1}A^{p+q-1}).$$

Uma vez que d respeita a filtração,

$$\begin{aligned}
 E_0^{p,q} &= F^pA^{p+q} \cap d^{-1}(F^pA^{p+q+1}) / (F^{p+1}A^{p+q} + d(F^{p+1}A^{p+q-1})) \\
 &= F^pA^{p+q} / F^{p+1}A^{p+q}.
 \end{aligned}$$

A diferencial $d_0 : E_0^{p,q} \rightarrow E_0^{p,q+1}$ é induzida da diferencial $d : F^p A^{p+q} \rightarrow F^p A^{p+q+1}$ e, assim,

$$E_1^{p,q} \cong H^{p+q}(F^p A / F^{p+1}(A)).$$

Com respeito a **III**, sejam $\eta_\infty^{p,q} : Z_\infty^{p,q} \rightarrow E_\infty^{p,q}$ e $\pi : \ker d \rightarrow H(A, d)$ as projeções naturais. Então:

$$F^p H^{p+q}(A, d) = H^{p+q}(\text{Im}(F^p A \rightarrow A), d) = \pi(F^p A^{p+q} \cap \ker d) = \pi(Z_\infty^{p,q}).$$

Como

$$\pi(\ker \eta_\infty^{p,q}) = \pi(Z_\infty^{p+1,q-1} + B_\infty^{p,q}) = F^{p+1} H^{p+q}(A, d),$$

temos que π induz um epimorfismo $d_\infty : E_\infty^{p,q} \rightarrow F^p H^{p+q}(A, d) / F^{p+1} H^{p+q}(A, d)$. Observe que

$$\begin{aligned} \ker d_\infty &= \eta_\infty^{p,q}(\pi^{-1}(F^{p+1} H^{p+q}(A, d)) \cap Z_\infty^{p,q}) \\ &= \eta_\infty^{p,q}(Z_\infty^{p+1,q-1} \cap d(A) \cap Z_\infty^{p,q}) \\ &\subset \eta_\infty^{p,q}(Z_\infty^{p+1,q-1} + B_\infty^{p,q}) = \{0\}. \end{aligned}$$

Portanto, d_∞ é um isomorfismo. □

5.3 A sequência espectral de Serre associada a uma fibração

Nessa seção, construiremos a sequência espectral de Serre associada a uma fibração, a qual é comumente utilizada para relacionar a (co)homologia do espaço total E com as (co)homologias do espaço base e da fibra, como veremos no teorema principal e nas aplicações.

No que segue, $p : E \rightarrow B$ é uma fibração no sentido de Serre, com fibra F .

Definição 5.3.1. $A_{p,q}$ é o subgrupo de $C_{p+q}(E)$ constituído pelos cubos singulares $u : I^{p+q} \rightarrow E$ tais que $(p \circ u)(t_1, \dots, t_{p+q})$ independe das q últimas coordenadas $t_{p+1}, \dots, t_{p+q}$, onde $p, q \in \mathbb{Z}$.

Para $u \in A_{p,q}$, $p \circ u$ independe das q últimas coordenadas, então, com maior razão, $p \circ u$ independe das $q-1$ últimas coordenadas, isto é, $u \in A_{p+1,q-1}$. Assim, obtemos as relações:

- $A_{p,q} \subset A_{p+1,q-1}$.
- $A_{p,q} = C_{p+q}(E)$ se $q \leq 0$.

- $A_{p,q} = \{0\}$ se $p \leq 0$,

o que define uma filtração limitada do $\mathbb{Z}$ -módulo $C_{p+q}(E)$:

$$\{0\} \subset \cdots \subset A_{p-1,q+1} \subset A_{p,q} \subset A_{p+1,q-1} \subset \cdots \subset C_{p+q}(E).$$

Além disso, considerando $u \in A_{p,q}$, notemos que $\partial_i^\varepsilon u \in A_{p-1,q} \subset A_{p,q-1}$ para $i = 1, \dots, p$, e $\partial_i^\varepsilon u \in A_{p,q-1}$ para $i = p+1, \dots, p+q$. Ou seja, $d(A_{p,q}) \subset A_{p,q-1}$. Por conseguinte, definimos o *subcomplexo de cadeia*

$$A_p = \sum_q A_{p,q} : \cdots \longrightarrow A_{p,q+1} \xrightarrow{d} A_{p,q} \xrightarrow{d} A_{p,q-1} \longrightarrow \cdots.$$

Para a sequência espectral de homologia, tomamos $A'_{p,q} = A_{p,q} \otimes G$, $\partial = d \otimes 1$ e definimos os grupos

$$\begin{aligned} Z_{p,q}^r &= A'_{p,q} \cap \partial^{-1}(A'_{p-r,q+r-1}), & B_{p,q}^r &= A'_{p,q} \cap \partial(A'_{p+r,q-r+1}), \\ E_{p,q}^r &= Z_{p,q}^r / (Z_{p-1,q+1}^{r-1} + B_{p,q}^{r-1}), & D_{p,q} &= \text{Im}(i_* : H_{p+q}(A_p; G) \rightarrow H_{p+q}(E; G)), \end{aligned}$$

para $r \geq 1, 2, \dots$ e $p, q \in \mathbb{Z}$.

Definimos também o homomorfismo

$$d^r : E_{p,q}^r \rightarrow E_{p-r,q+r-1}^r$$

induzido por $\partial : Z_{p,q}^r \rightarrow B_{p-r,q+r-1}^r$ de acordo com o diagrama:

Diagrama 18: Igualdade entre as composições $d^r \circ \rho_1$ e $\rho_2 \circ \partial$ ($d^r \circ \rho_1 = \rho_2 \circ \partial$)

$$\begin{array}{ccc} Z_{p,q}^r & \xrightarrow{\rho_1} & Z_{p,q}^r / (Z_{p-1,q+1}^{r-1} + B_{p,q}^{r-1}) = E_{p,q}^r \\ \partial \downarrow & & \downarrow d^r \\ B_{p-r,q+r-1}^r & \xrightarrow{\rho_2} & B_{p-r,q+r-1}^r / \partial(Z_{p-1,q+1}^{r-1} + B_{p,q}^{r-1}) \subset E_{p-r,q+r-1}^r \end{array}$$

Fonte: Elaborado pelo autor.

Isto é, $d^r(\{u\}) = \{\partial(u)\}$, onde ρ_1 e ρ_2 são as aplicações quociente. Como d^r está bem definida e satisfaz $d^r \circ d^r = 0$, obtemos a sequência espectral de homologia:

$$\cdots \longrightarrow E_{p+r,q-r+1}^r \xrightarrow{d^r} E_{p,q}^r \xrightarrow{d^r} E_{p-r,q+r-1}^r \longrightarrow \cdots.$$

De modo semelhante, para a sequência espectral de cohomologia, consideremos o subgrupo

$$A^{p,q} = \{f \in \text{Hom}(C_{p+q}(E), R) \mid f(A_{p-1,q+1}) = 0\}.$$

Observando que $A^{p,q} \subset A^{p-1,q+1}$, pois $A_{p-2,q+2} \subset A_{p-1,q+1}$, obtemos a seguinte filtração limitada de $C^{p+q}(E; R)$:

$$\{0\} \subset \dots \subset A^{p+1,q-1} \subset A^{p,q} \subset A^{p-1,q+1} \subset \dots \subset C^{p+q}(E; R).$$

Como, para $f \in A^{p,q}$, $\delta(f) \in A^{p+1,q}$, então $\delta(A^{p,q}) \subset A^{p,q+1}$. Assim, definimos $\delta : A^{p,q} \rightarrow A^{p,q+1}$ por $\delta(f) = f \circ d$, que satisfaz $\delta \circ \delta = 0$ e, por conseguinte, obtemos o *subcomplexo de cocadeia*:

$$A^p : \dots \longrightarrow A^{p,q-1} \xrightarrow{\delta} A^{p,q} \xrightarrow{\delta} A^{p,q+1} \longrightarrow \dots$$

Considerando os grupos

$$\begin{aligned} Z_r^{p,q} &= A^{p,q} \cap \delta^{-1}(A^{p+r,q-r+1}), & B_r^{p,q} &= A^{p,q} \cap \delta(A^{p-r,q+r-1}), \\ E_r^{p,q} &= Z_r^{p,q} / (Z_{r-1}^{p+1,q-1} + B_{r-1}^{p,q}), & D^{p,q} &= \ker(i^* : H^{p+q}(E; R) \rightarrow H^{p+q}(A_{p-1}; R)), \end{aligned}$$

onde $r \geq 1, 2, \dots$, $p, q \in \mathbb{Z}$ e $i : A_{p-1,q+1} \rightarrow C_{p+q}(E)$ induz

$$i_* : C^{p+q}(E; R) \rightarrow C^{p+q}(A_{p-1,q+1}; R).$$

Então, define-se d_r como sendo o homomorfismo induzido por $\delta : Z_r^{p,q} \rightarrow B_r^{p+r,q-r+1}$ de acordo com o diagrama:

Diagrama 19: Igualdade entre as composições $d_r \circ \rho_1$ e $\rho_2 \circ \delta$ ($d_r \circ \rho_1 = \rho_2 \circ \delta$)

$$\begin{array}{ccc} Z_r^{p,q} & \xrightarrow{\rho_1} & Z_r^{p,q} / (Z_{r-1}^{p+1,q-1} + B_{r-1}^{p,q}) = E_r^{p,q} \\ \delta \downarrow & & \downarrow d_r \\ B_r^{p+r,q-r+1} & \xrightarrow{\rho_2} & B_r^{p+r,q-r+1} / \delta(Z_{r-1}^{p+1,q-1} + B_{r-1}^{p,q}) \subset E_r^{p+r,q-r+1} \end{array}$$

Fonte: Elaborado pelo autor.

onde ρ_1 e ρ_2 são as aplicações quociente.

Então $d_r : E_r^{p,q} \rightarrow E_r^{p+r,q-r+1}$, dada por $d_r(\{f\}) = \{\delta(f)\}$, está bem definida e satisfaz $d_r \circ d_r = 0$. Dando origem a sequência espectral de cohomologia

$$E_r^{*,*} : \dots \longrightarrow E_r^{p-r,q+r-1} \xrightarrow{d_r} E_r^{p,q} \xrightarrow{d_r} E_r^{p+r,q-r+1} \longrightarrow \dots$$

Mostremos que o produto cup está definido naturalmente para os subgrupos $A^{p,q}$ de $C^{p+q}(E;R)$, isto é,

$$\smile : A^{p,q} \times A^{p',q'} \rightarrow A^{p+p',q+q'}.$$

Primeiramente façamos a seguinte observação do comportamento dos índices α e β do produto cup, focando especialmente nas funções ∂_α^0 e ∂_β^1 , a partir do exemplo particular:

Considerando $p = 3$ e $q = 2$. Sejam $f \in C^3(E;R)$ e $g \in C^2(E;R)$, então $f \smile g \in C^5(E;R)$ e

$$(f \smile g)(u) = \sum_{\alpha} \varepsilon(\alpha) f(\partial_\alpha^0 u) \cdot g(\partial_\beta^1 u),$$

para $u \in C_5(E)$. Como $\alpha : [3] \rightarrow [5]$ e $\beta : [2] \rightarrow [5]$ são funções crescentes, de modo que $\alpha([3]) \cup \beta([2]) = [5]$, então um dos índices do somatório é dado por $\alpha : [3] \rightarrow [5]$, onde $\alpha(1) = 1$, $\alpha(2) = 3$ e $\alpha(3) = 5$. Assim, $\partial_\alpha^0(t_1, t_2, t_3) = (t_1, 0, t_2, 0, t_3)$ e, como β complementa α , $\partial_\beta^1(s_1, s_2) = (1, s_1, 1, s_2, 1)$. Agora, voltando para o nosso objetivo.

Dado $u \in A_{p+p'-1,q+q'+1}$, então $p \circ u$ independe das $(q+q'+1)$ últimas entradas e

$$(f \smile g)(u) = \sum_{\alpha} \varepsilon(\alpha) f(\partial_\alpha^0 u) \cdot g(\partial_\beta^1 u),$$

onde $\partial_\alpha^0 u : I^{p+q} \rightarrow E$ e $\partial_\beta^1 u : I^{p'+q'} \rightarrow E$. Fixado $\alpha : [p+q] \rightarrow [p+p'+q+q']$. Se ∂_α^0 leva no mínimo as $(q+1)$ últimas entradas nas $(q+q'+1)$ últimas entradas, então $\partial_\alpha^0 u \in A_{p-1,q+1}$. Caso contrário, ou seja, ∂_α^0 leva no máximo as q últimas entradas nas $(q+q'+1)$ últimas então ∂_β^1 , sendo a função que complementa ∂_α^0 , leva as $q'+1$ últimas entradas nas $(q+q'+1)$ últimas, ou seja, $\partial_\beta^1 u \in A_{p'-1,q'+1}$. Assim, para qualquer α , $\partial_\alpha^0 u \in A_{p-1,q+1}$ ou $\partial_\beta^1 u \in A_{p'-1,q'+1}$. Logo $(f \smile g)(A_{p+p'-1,q+q'+1}) = 0$ e por conseguinte $f \smile g \in A_{p+p',q+q'}$.

A partir do subcomplexo de cadeia

$$A_p/A_{p-1} : \dots \rightarrow A_{p,q+1}/A_{p-1,q+2} \xrightarrow{d} A_{p,q}/A_{p-1,q+1} \xrightarrow{d} A_{p,q-1}/A_{p-1,q} \rightarrow \dots,$$

onde $d(\{u\}) = \{d(u)\} \in A_{p,q-1}/A_{p-1,q}$, para $\{u\} \in A_{p,q}/A_{p-1,q+1}$, obtemos o complexo de cocadeia

$$C^*(A_p/A_{p-1};R) : \dots \rightarrow C^{p+q}(A_{p,q}/A_{p-1,q+1};R) \xrightarrow{\delta} C^{p+q+1}(A_{p,q+1}/A_{p-1,q+2};R) \rightarrow \dots,$$

onde $\delta(f)\{u\} = f(d\{u\}) = f\{d(u)\}$.

Proposição 5.3.1. $\varphi_* : E_0^{p,q} \rightarrow C^{p+q}(A_p/A_{p-1}; R)$ e $\psi_* : E_1^{p,q} \rightarrow H^{p+q}(A_p/A_{p-1}; R)$ são isomorfismos.

Demonstração. Como $A_{p-1,q+1} \subset A_{p,q}$, dado $\{f\} \in E_0^{p,q}$, por definição, $f : C_{p+q}(E) \rightarrow R$ é um homomorfismo e $f(A_{p-1,q+1}) = 0$. Logo o homomorfismo $\bar{f} : A_{p,q}/A_{p-1,q+1} \rightarrow R$ está bem definido por $\bar{f}(\{u\}) = f(u)$, isto é, $\bar{f} \in C^{p+q}(A_p/A_{p-1}; R)$.

Denotando por φ_* a correspondência $\{f\} \mapsto \bar{f}$ e observando que se $h \in Z_{-1}^{p+1,q-1}, B_{-1}^{p,q}$ então $h(A_{p,q}) = 0$, vemos que se $\{f\} = \{g\}$ em $E_0^{p,q}$ teremos que $(\bar{f} - \bar{g})(A_{p,q}/A_{p-1,q+1}) = (f - g)(A_{p,q}) = 0$, ou seja, $\bar{f} = \bar{g}$, em palavras, φ_* está bem definida.

Sejam $\{f\}, \{g\} \in E_0^{p,q}$ quaisquer, de modo que $\varphi_*(\{f\}) = \varphi_*(\{g\})$, então $\varphi_*(\{f - g\}) = 0$ o que equivale a dizer que $(f - g)(A_{p,q}) = 0$, em particular $(f - g)(d(A_{p-1,q+2})) = 0$, pois $d(A_{p-1,q+2}) \subset A_{p-1,q+1} \subset A_{p,q}$. Assim $\delta(f - g) \in A^{p,q+1}$ o que implica $f - g \in \delta^{-1}(A^{p,q+1})$, consequentemente $f - g \in Z_{-1}^{p+1,q-1} \subset (Z_{-1}^{p+1,q-1} + B_{-1}^{p,q})$, portanto $\{f\} = \{g\}$.

Por outro lado, dado $\bar{h} \in C^{p+q}(A_p/A_{p-1}; R)$, se tomarmos $h \in A^{p,q}$ tal que $h(u) = \bar{h}(\{u\})$, onde $u \in A_{p,q}$, então $h \in Z_0^{p,q}$ e $\varphi_*(\{h\}) = \bar{h}$.

Considerando $f \in Z_1^{p,q} = A^{p,q} \cap \delta^{-1}(A^{p+1,q})$, então $\delta f \in A^{p+1,q}$, isto é, $f(d(A_{p,q+1})) = 0$, em vista disso, $\delta \bar{f}(A_{p,q+1}/A_{p-1,q+2}) = \bar{f}(d(A_{p,q+1}/A_{p-1,q+2})) = f(d(A_{p,q+1})) = 0$ implicando que $\bar{f} \in Z^{p+q}(A_p/A_{p-1}; R)$.

Assim definimos

$$\psi_* : E_1^{p,q} \rightarrow H^{p+q}(A_p/A_{p-1}; R) \quad \text{por} \quad \psi_*(\{f\}) = \{\bar{f}\},$$

onde $\bar{f}$ possui a mesma definição acima e $\bar{f} \in Z^{p+q}(A_p/A_{p-1}; R)$. Para provar que ψ_* está bem definida observemos, para $\{f\} = 0 \in E_1^{p,q} = Z_1^{p,q} / (Z_0^{p+1,q-1} + B_0^{p,q})$, que:

- Se $f \in Z_0^{p+1,q-1} = A^{p+1,q-1} \cap \delta^{-1}(A^{p+1,q})$ então

$$\bar{f}(A_{p,q}/A_{p-1,q+1}) = f(A_{p,q}) = 0 \quad (\psi_*\{f\} = 0).$$

- Se $f \in B_0^{p,q} = A^{p,q} \cap \delta(A^{p,q-1})$ então $\delta(h) = f$, onde $h \in A^{p,q-1}$ e $f(A_{p-1,q+1}) = 0$. Como h também pertence a $Z_0^{p,q-1} = A^{p,q-1} \cap \delta^{-1}(A^{p,q})$, segue que $\{h\} \in E_0^{p,q-1}$. Portanto, $\varphi_*\{h\} = \bar{h} \in C^{p+q-1}(A_p/A_{p-1}; R)$. Assim,

$$\delta(\bar{h}) = \delta \circ \varphi_*\{h\} = \varphi_* \circ d_0\{h\} = \varphi_*\{\delta h\} = \varphi_*\{f\} = \bar{f},$$

isto é, $\bar{f} \in B^{p+q}(A_p/A_{p-1}; R)$, o que implica em $\psi_*\{f\} = \{\bar{f}\} = 0$.

Diretamente dos dois itens acima podemos dizer que se $\{f\} = \{g\} \in E_1^{p,q}$ então $\varphi_*\{f\} = \varphi_*\{g\}$.

Dados $\{f\}, \{g\} \in E_1^{p,q} = Z_1^{p,q} / (Z_0^{p+1,q-1} + B_0^{p,q})$ tais que $\varphi_*\{f\} = \varphi_*\{g\}$, então

$$\bar{f} - \bar{g} \in B^{p+q}(A_p/A_{p-1}; R),$$

ou seja, existe $\bar{h} \in C^{p+q-1}(A_p/A_{p-1}; R)$ tal que $\delta\bar{h} = \bar{f} - \bar{g}$. Por φ_* temos

$$\varphi_*\{\delta h\} = \varphi_* \circ d_0\{h\} = \delta \circ \varphi_*\{h\} = \delta\bar{h} = \bar{f} - \bar{g} = \varphi_*\{f\} - \varphi_*\{g\} = \varphi_*\{f - g\}$$

o que implica que $(f - g) - \delta h \in (Z_{-1}^{p+1,q-1} + B_{-1}^{p,q})$. Novamente em casos:

- Se $(f - g) - \delta h \in Z_{-1}^{p+1,q-1} = A^{p+1,q-1} \cap \delta^{-1}(A^{p,q+1})$ então $\delta((f - g) - \delta h) = \delta(f - g) \in \delta(A^{p+1,q-1}) \subset A^{p+1,q}$. Logo $(f - g) \in Z_0^{p+1,q-1} = A^{p+1,q-1} \cap \delta^{-1}(A^{p+1,q})$.
- Se $(f - g) - \delta h \in B_{-1}^{p,q} = A^{p,q} \cap \delta(A^{p+1,q-2})$ então $(f - g) - \delta h = \delta(h')$, para $h' \in A^{p+1,q-2}$. Como $A^{p+1,q-2} \subset A^{p,q-1}$ segue que $(f - g) = \delta(h' + h) \in \delta(A^{p,q-1})$. Portanto, $(f - g) \in B_0^{p,q} = A^{p,q} \cap \delta(A^{p,q-1})$.

Assim, em ambos os casos, obtemos que $\{f\} = \{g\}$. Seja $\{\bar{h}\} \in H$, então $\psi_*\{h\} = \{\bar{h}\}$, para $h(A_{p,q}) = \bar{h}(A_{p,q}/A_{p-1,q+2})$. $\square$

Um fato usado para demonstrar que ψ_* é isomorfismo é dado como consequência imediata do isomorfismo φ_* :

Corolário 5.3.2. O diagrama

Diagrama 20: Comutatividade de φ_* com d_0 e δ ($\varphi_* \circ d_0 = \delta \circ \varphi_*$)

$$\begin{array}{ccc} E_0^{p,q} & \xrightarrow{d_0} & E_0^{p,q+1} \\ \varphi_* \downarrow & & \downarrow \varphi_* \\ C^{p+q}(A_p/A_{p-1}; R) & \xrightarrow{\delta} & C^{p+q+1}(A_p/A_{p-1}; R) \end{array}$$

Fonte: Elaborado pelo autor.

é comutativo, ou seja, $\delta \circ \varphi_* = \varphi_* \circ d_0$.

Demonstração. Para quaisquer $\{f\} \in E_0^{p,q}$ e $\{u\} \in A_{p,q+1}/A_{p-1,q+2}$, vale:

$$\delta \circ \varphi_*\{f\}(\{u\}) = \delta(\bar{f})(\{u\}) = \bar{f} \circ d(\{u\}) = \bar{f}(\{du\}) = f(du)$$

$$\varphi_* \circ d_0\{f\}(\{u\}) = \varphi_*\{\delta f\}(\{u\}) = \overline{\delta f}(\{u\}) = \delta f(u) = f(du).$$

Portanto $\delta \circ \varphi_* = \varphi_* \circ d_0$. $\square$

Definição 5.3.2. Para $u : I^{p+q} \rightarrow E$, $u \in A_{p,q}$, definimos

$$\begin{aligned} Bu : I^p \rightarrow B \quad \text{por} \quad Bu(t_1, \dots, t_p) &= (p \circ u)(t_1, \dots, t_p, t_{p+1}, \dots, t_{p+q}) \quad \text{e} \\ Fu : I^q \rightarrow F_b \quad \text{por} \quad Fu(t_1, \dots, t_q) &= u(0, \dots, 0, t_1, \dots, t_q), \end{aligned}$$

onde $b = Bu(0, \dots, 0)$.

Considerando $C^p(B; \underline{C^q(F; R)})$ como o R -módulo formado pelas funções que associam cada cubo singular $u : I^p \rightarrow B$ em $C^p(B)$ ao homomorfismo $f(u)$ em $C^q(F_b; R)$, onde $b = u(0, \dots, 0)$.

Assim, pelo homomorfismo

$$\delta_0 : C^p(B; \underline{C^q(F; R)}) \rightarrow C^p(B; \underline{C^{q+1}(F; R)}) \quad \text{dado por} \quad \delta_0(f)(u) = (-1)^p \delta(f(u)),$$

obtemos que $C^p(B; \underline{C^*(F; R)}) = (C^p(B; \underline{C^q(F; R)}), \delta_0)$ é um complexo de cocadeia.

Com as seguintes propriedades:

$$\text{Se } u \in A_{p-1, q+1} \text{ então } Bu \text{ é degenerado.} \quad (1)$$

$$\text{Se } u \in A_{p, q+1} \text{ para } i \leq p \text{ então } \partial_i^\varepsilon u \in A_{p-1, q+1}. \quad (2)$$

podemos definir o homomorfismo

$$\varphi : C^p(B; \underline{C^q(F; R)}) \rightarrow C^{p+q}(A_p/A_{p-1}; R) \cong E_0^{p,q},$$

onde $(\varphi f)(\{u\}) = (f(Bu))(Fu)$ para cada $\{u\} \in A_p/A_{p-1}$.

O homomorfismo satisfaz a relação $\delta \circ \varphi = \varphi \circ \delta_0$. De fato, considerando

$$f \in C^p(B; \underline{C^q(F; R)})$$

e $\{u\} \in A_{p, q+1}/A_{p-1, q+2}$ quaisquer. Pelas propriedades (1) e (2), segue que $B(\partial_k^\varepsilon u) = 0 \in C_p(B)$, pois $\partial_k^\varepsilon u \in A_{p-1, q+1}$ para qualquer $k = 1, \dots, p$. Ou seja, $(\varphi f)(\partial_k^\varepsilon u) = 0$, para qualquer $k = 1, \dots, p$.

Por definição, podemos ver que $B\partial_k^\varepsilon u = Bu$ e $F(\partial_k^\varepsilon u) = \partial_{k-p}^\varepsilon(Fu)$, para $k = p+1, \dots, p+q+1$. Daí, como por um lado têm-se

$$\begin{aligned}
((\delta \circ \varphi)(f))(\{u\}) &= (\delta(\varphi f))(\{u\}) = (\varphi f)(\{du\}) = (\varphi f)\left(\sum_{k=1}^{p+q+1} (-1)^k (\partial_k^0 u - \partial_k^1 u)\right) \\
&= (\varphi f)\left(\sum_{k=p+1}^{p+q+1} (-1)^k (\partial_k^0 u - \partial_k^1 u)\right) = \sum_{k=p+1}^{p+q+1} (-1)^k ((\varphi f)(\partial_k^0 u) - (\varphi f)(\partial_k^1 u)) \\
&= \sum_{k=p+1}^{p+q+1} (-1)^k \left((f(B\partial_k^0 u))(F(\partial_k^0 u)) - (f(B\partial_k^1 u))(F(\partial_k^1 u)) \right) \\
&= \sum_{k=p+1}^{p+q+1} (-1)^k \left((f(Bu))(\partial_{k-p}^0(Fu)) - (f(Bu))(\partial_{k-p}^1(Fu)) \right) \\
&= \sum_{k=p+1}^{p+q+1} (-1)^k \left((f(Bu))(\partial_{k-p}^0(Fu) - \partial_{k-p}^1(Fu)) \right) \\
&= (-1)^p (f(Bu)) \left(\sum_{j=1}^{q+1} (-1)^j (\partial_j^0(Fu) - \partial_j^1(Fu)) \right) = (-1)^p (f(Bu))(d(Fu))
\end{aligned}$$

e por outro,

$$((\varphi \circ \delta_0)(f))(\{u\}) = (\delta_0(f)(Bu))(Fu) = ((-1)^p \delta(f(Bu)))(Fu) = (-1)^p (f(Bu))(d(Fu)),$$

então obtemos a relação $\delta \circ \varphi = \varphi \circ \delta_0$.

Então, através de φ , podemos induzir o homomorfismo

$$\Phi : C^p(B; \underline{H^q(F; R)}) \rightarrow H^{p+q}(A_p/A_{p-1}; R) \cong E_1^{p,q},$$

definido por $\Phi(\{f\}) = \{\varphi(f)\}$, pois para $f \in C^p(B; \underline{Z^q(F; R)})$ (isto é, $\delta_0(f) = 0$),

$$\delta \circ \varphi(f) = \varphi \circ \delta_0(f) = 0,$$

o que implica que $\{\varphi(f)\} \in H^{p+q}(A_p/A_{p-1}; R) \cong E_1^{p,q}$. Dados $\{f\}, \{g\} \in C^p(B; \underline{H^q(F; R)})$ tais que $\{f\} = \{g\}$, então $f - g = \delta_0(h)$, para algum $h \in C^p(B; \underline{C^{q-1}(F; R)})$. Logo, a igualdade

$$\varphi(f - g) = \varphi(\delta_0(h)) = \delta(\varphi(h))$$

nos diz que $\varphi(f - g) \in B^{p+q}(A_p/A_{p-1}; R)$ (pois $\varphi(h) \in C^{p+q-1}(A_p/A_{p-1}; R)$) e por conseguinte $\{\varphi(f)\} = \{\varphi(g)\}$. Portanto Φ está bem definida.

Teorema 5.3.3. (O Teorema Fundamental de Serre). *Sejam (E, p, B) uma fibração, R um anel comutativo com unidade, então existem uma sequência $\{E_r^{p,q}\}$, $p, q \in \mathbb{Z}$, $r = 2, 3, \dots, \infty$ e uma sequência de subgrupos $\{D^{p, n-p}\}$ de $H^n(E; R)$ satisfazendo as seguintes propriedades:*

1. $E_r^{p,q}$ é um R -módulo com o produto

$$E_r^{p,q} \times E_r^{p',q'} \rightarrow E_r^{p+p',q+q'}.$$

2. Existe um homomorfismo $d_r : E_r^{p,q} \rightarrow E_r^{p+r,q-r+1}$ satisfazendo

$$d_r \circ d_r(x) = 0 \quad e \quad d_r(x \smile y) = d_r(x) \smile y + (-1)^p x \smile d_r(y),$$

para todo $x \in E_r^{p,q}$. Além disso, o grupo de cohomologia $H(E_r^{p,q})$, com respeito a d_r , é isomorfo a $E_{r+1}^{p,q}$ (preservando o produto).

3. $E_2^{p,q}$ é isomorfo ao grupo de cohomologia $H^p(B; \underline{H^q(F; R)})$. O produto do lado esquerdo do isomorfismo, dado por 5.3.3(1), difere apenas pelo sinal $(-1)^{p'q}$ do produto do anel de cohomologia do lado direito.

4. $E_r^{p,q} = E_\infty^{p,q}$ ($r > \text{Max}(p, q+1)$).

5. O produto em $H^*(E; R)$ induz o produto $D^{p,q} \times D^{p',q'} \rightarrow D^{p+p',q+q'}$.

6. $D^{p+1,q-1} \subset D^{p,q}$, $D^{p,q}/D^{p+1,q-1} \cong E_\infty^{p,q}$ (isomorfismo preservando o produto).

7. $H^n(E; R) = D^{0,n} \supset D^{n+1,-1} = 0$.

8. A função fibra $f : (E, p, B) \rightarrow (E', p', B')$ entre fibrações induzem as funções

$$f_r : E_r^{p,q} \rightarrow E_r^{p',q'} \quad e \quad f_D : D^{p,q} \rightarrow D^{p',q'}$$

que preservam e comutam com d_r , $(f_r)^* = f_{r+1}^*$ e $(f_D)^* = f_\infty$. Também f_2 e $(f_D)|_{D^{0,n}}$ são induzidas por f .

9. O homomorfismo $i^* : H^n(E; R) \rightarrow H^n(F_b; R)$ induzido pela inclusão $i : F_b \rightarrow E$ se decompõe como segue:

$$\begin{aligned} H^n(E; R) &= D^{0,n} \xrightarrow{\text{proj}} E_\infty^{0,n} = E_{n+2}^{0,n} \subset E_{n+1}^{0,n} \subset \dots \subset E_2^{0,n} \\ &= H^0(B; \underline{H^n(F; R)}) \xrightarrow{i_0^*} H^0(\{b\}; H^n(F_b; R)) = H^n(F_b; R), \end{aligned}$$

onde $i_0 : \{b\} \rightarrow B$ é a inclusão. Como $d_r = 0 : E_r^{-r,n+r-1} = 0 \rightarrow E_r^{0,n}$, podemos observar $E_{r+1}^{0,n} = H(E_r^{0,n}) = \ker(d_r : E_r^{0,n} \rightarrow E_r^{r,n-r+1}) \subset E_r^{0,n}$.

10. O homomorfismo $p^* : H^*(B; R) \rightarrow H^*(E; R)$ induzido pela projeção $p : E \rightarrow B$ se decompõe como segue:

$$\begin{aligned} H^n(B; R) &\xrightarrow{i_*} H^n(B; \underline{H^0(F; R)}) = E_2^{n,0} \xrightarrow{proj} E_3^{n,0} \xrightarrow{proj} \dots \xrightarrow{proj} E_{n+1}^{n,0} \\ &= E_\infty^{n,0} = D^{n,0} \subset H^n(E; R), \end{aligned}$$

onde $i : R \rightarrow H^0(F; R)$ é uma função definida no **anel de coeficientes locais trivial** $R = \{R_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ dada por $r \mapsto r \cdot 1_b \in H^0(F_b; R)$.

Como $d_r = 0 : E_r^{n,0} \rightarrow E_r^{n+r, -r+1} = 0$ ($r \geq 2$), então existe uma projeção

$$E_r^{n,0} \longrightarrow \frac{E_r^{n,0}}{d_r(E_r^{n-r, r-1})} = H(E_r^{n,0}) = E_{r+1}^{n,0}.$$

11. Suponhamos que o anel de coeficientes locais é trivial e que F e B são **0-conexo**, então podemos assumir que $H^n(F_b; R) = E_2^{0,n}$ e $H^{n+1}(B; R) = H^{n+1}(B, \{b\}; R) = E_2^{n+1,0}$ ($n > 0$). Então no diagrama

Diagrama 21: Representação dos homomorfismos δ^* , p^* , d_{n+1} e k

$$\begin{array}{ccccc} H^n(F_b; R) & \xrightarrow{\delta^*} & H^{n+1}(E, F_b; R) & \xleftarrow{p^*} & H^{n+1}(B; R) \\ \parallel & & & & \parallel \\ E_2^{0,n} \supset E_{n+1}^{0,n} & \xrightarrow{d_{n+1}} & E_{n+1}^{n+1,0} & \xleftarrow{k} & E_2^{n+2,0} \quad (k : \text{projeção}) \end{array}$$

Fonte: Mimura [15] (1991, p. 110).

obtemos $E_{n+1}^{0,n} = \{x \in H^n(F_b; R) \mid \delta^*(x) \in \text{im } p^*\}$ e $\delta^*(x) = p^*(y)$ se, e só se, $d_{n+1}(x) = k(y)$.

Com respeito a d_r , $E_r = \sum_{p,q} E_r^{p,q}$ de **grau total** $p+q$ é um complexo de cadeia e obtemos uma sequência de cohomologias

$$H(E_2) = E_3, \quad H(E_3) = E_4, \quad \dots, \quad H(E_r) = E_{r+1}, \quad \dots$$

$\{E_r, d_r\}$ é geralmente chamada de *sequência espectral (de cohomologia)*. A sequência presente no Teorema 5.3.3 é chamada de *sequência espectral de Serre (para cohomologia)*.

Demonstração. Abordaremos a seguir a verificação dos itens iniciais do teorema, para mais detalhes ver [15].

1. Pela função $\mu : R \times E_r^{p,q} \rightarrow E_r^{p,q}$ dada por $\mu(\alpha, \{f\}) = \{\alpha f\}$ vemos que :

$$\mu(1, \{f\}) = \{f\}.$$

$$\mu(\alpha + \beta, \{f\}) = \{(\alpha + \beta)f\} = \{\alpha f + \beta f\} = \{\alpha f\} + \{\beta f\} = \mu(\alpha, \{f\}) + \mu(\beta, \{f\}).$$

$$\mu(\alpha, \{f + g\}) = \{\alpha(f + g)\} = \{\alpha f + \alpha g\} = \{\alpha f\} + \{\alpha g\} = \mu(\alpha, \{f\}) + \mu(\alpha, \{g\}).$$

$$\mu(\alpha, \mu(\beta, \{f\})) = \mu(\alpha, \{\beta f\}) = \{\alpha(\beta f)\} = \{(\alpha\beta)f\} = \mu(\alpha\beta, \{f\})$$

Assim, $E_r^{p,q}$ é um R -módulo.

Dados $f \in Z_r^{p,q}$ e $g \in Z_r^{p',q'}$, então $\delta f \cdot g, f \cdot \delta g \in A^{p+p'+r, q+q'-r+1}$, portanto, pela relação

$$\delta(f \cdot g) = \delta f \cdot g + (-1)^{p+q} f \cdot \delta g,$$

$$f \cdot g \in A^{p+p', q+q'} \cap \delta^{-1}(A^{p+p'+r, q+q'-r+1}) = Z_r^{p+p', q+q'}.$$

Isto basta para definir o produto cup

$$\cdot : E_r^{p,q} \times E_r^{p',q'} \rightarrow E_r^{p+p', q+q'} \quad \text{por} \quad \{f\} \smile \{g\} = \{f \smile g\}.$$

2. Sendo d_r definido por $d_r(\{f\}) = \{\delta(f)\}$ temos

$$\begin{aligned} d_r(\{f\} \cdot \{g\}) &= d_r(\{f \cdot g\}) = \{\delta(f \cdot g)\} = \{\delta f \cdot g + (-1)^{p+q} f \cdot \delta g\} \\ &= \{\delta f \cdot g\} + (-1)^{p+q} \{f \cdot \delta g\} = \{\delta f\} \cdot \{g\} + (-1)^{p+q} \{f\} \cdot \{\delta g\} \\ &= d_r(\{f\}) \cdot \{g\} + (-1)^{p+q} \{f\} \cdot d_r(\{g\}) \quad \text{e} \end{aligned}$$

$$d_r \circ d_r(\{f\}) = d_r\{\delta(f)\} = \{\delta \circ \delta(f)\} = 0$$

O isomorfismo $E_{r+1}^{p,q} \cong H(E_r^{p,q})$:

Pela relação $Z_{r+1}^{p,q} \subset Z_r^{p,q}$, se considerarmos $f = \{f'\} \in E_{r+1}^{p,q}$ então $\{f'\} \in E_r^{p,q}$. Aqui vale observar que mesmo possuindo o mesmo representante a classe de f' em $E_{r+1}^{p,q}$ é diferente da classe de f' em $E_r^{p,q}$, assim usaremos a notação $\xi f = \{f'\}$ para representar a classe de f' em $E_r^{p,q}$.

Como $\{f'\} \in E_{r+1}^{p,q}$, segue que $f' \in Z_{r+1}^{p,q} = A^{p,q} \cap \delta^{-1}(A^{p+r+1, q-r})$, então

$$f' \in A^{p+r+1, q-r-1} \subset \dots \subset A^{p+1, q-1}.$$

Aplicando δ em f' têm-se $\delta f' \in A^{p+r+1, q-r} \subset A^{p+r, q-r+1}$, logo

$$\delta f' \in A^{p+r, q-r+1} \cap \delta(A^{p+1, q-1}) = B_{r-1}^{p+r, q-r+1}.$$

Portanto, para $d_r : E_r^{p, q} \rightarrow E_r^{p+r, q-r+1}$, $d_r(\xi f) = d_r\{f'\} = \{\delta f'\} = 0$, pois

$$E_r^{p+r, q-r+1} = Z_r^{p+r, q-r+1} / (Z_{r-1}^{p+r+1, q-r} + B_{r-1}^{p+r, q-r+1}),$$

ou seja, $\xi f \in \ker (d_r : E_r^{p, q} \rightarrow E_r^{p+r, q-r+1})$.

À vista disso estabelecemos a correspondência $\Xi : E_{r+1}^{p, q} \rightarrow H(E_r^{p, q})$, por $\Xi(f) = \{\xi f\}$.

Dados $f = \{f'\} = \{g'\} = g \in E_{r+1}^{p, q}$, $f' - g' \in Z_r^{p+1, q-1} + B_r^{p, q}$.

- Supondo que $f' - g' \in Z_r^{p+1, q-1} \subset Z_{r-1}^{p+1, q-1}$ segue $\xi f = \xi g \in E_r^{p, q}$, ou seja,

$$\Xi(f) = \Xi(g).$$

- Se

$$f' - g' \in B_r^{p, q} = A^{p, q} \cap \delta(A^{p-r, q+r-1})$$

então $\delta h' = f' - g'$, para algum $h' \in A^{p-r, q+r-1}$. Como $f' - g' \in A^{p, q}$, segue de imediato que $h' \in \delta^{-1}(A^{p, q})$, daí

$$h' \in A^{p-r, q+r-1} \cap \delta^{-1}(A^{p, q}) = Z_r^{p-r, q+r-1}, \quad h = \{h'\} \in E_r^{p-r, q+r-1}$$

$$\text{e } d_r(h) = \xi f - \xi g.$$

Em ambos os casos, $\xi f - \xi g \in \text{im } (d_r : E_r^{p-r, q+r-1} \rightarrow E_r^{p, q})$. O caso mais geral segue do homomorfismo:

$$\Xi(f + g) = \{\xi(f + g)\} = \{\{f' + g'\}\} = \{\{f'\}\} + \{\{g'\}\} = \{\xi f\} + \{\xi g\} = \Xi(f) + \Xi(g).$$

Tomando $f, g \in E_{r+1}^{p, q}$ tais que $\Xi(f) = \Xi(g)$, então $\xi f - \xi g \in \text{im } d_r$ e existe $h = \{h'\} \in E_r^{p-r, q+r-1}$ de modo que $d_r(h) = \xi f - \xi g$. Assim, pode-se ocorrer:

- $\delta(h') - (f' - g') \in B_{r-1}^{p, q} = A^{p, q} \cap \delta(A^{p-r+1, q+r-2})$
- $\delta(h') - (f' - g') \in Z_{r-1}^{p+1, q-1} = A^{p+1, q-1} \cap \delta^{-1}(A^{p+r, q-r+1})$

No primeiro caso, existe $l \in A^{p-r+1, q+r-2} \subset A^{p-r, q+r-1}$ satisfazendo

$$\delta(l) = \delta(h') - (f' - g'),$$

isto é, $(f' - g') = \delta(h' - l) \in \delta(A^{p-r, q+r-1})$. Por conseguinte

$$f' - g' \in B_r^{p, q} = A^{p, q} \cap \delta(A^{p-r, q+r-1}).$$

No segundo caso, $\delta(h') - (f' - g') \in \delta^{-1}(A^{p+r, q-r+1}) \subset A^{p+r, q-r} \subset A^{p+1, q-1}$, donde $\delta(f' - g') \in A^{p+1, q}$ e $f' - g' \in \delta^{-1}(A^{p+1, q}) \subset A^{p+1, q-1}$. Como supomos que $f, g \in E_{r+1}^{p, q}$ podemos dizer que $f' - g' \in \delta^{-1}(A^{p+r+1, q-r})$. Então

$$f' - g' \in A^{p+1, q-1} \cap \delta^{-1}(A^{p+r+1, q-r}) = Z_r^{p+1, q-1}.$$

As outras situações se obtêm em função das acima. Em todo caso, $f = g$ (Ξ é um monomorfismo).

Para provar que Ξ é um epimorfismo, tomamos $\{\xi f\} = \{\{f'\}\} \in H(E_r^{p, q})$ qualquer, então observa-se que

- $f' \in Z_r^{p, q} = A^{p, q} \cap \delta^{-1}(A^{p+r, q-r+1})$;
- $\delta f' \in Z_r^{p+r, q-r+1} = A^{p+r, q-r+1} \cap \delta^{-1}(A^{p+2r, q-2r+2})$, pois

$$d_r\{f'\} = \{\delta f'\} \in E_r^{p+r, q-r+1};$$

Como $\delta^{-1}(A^{p+2r, q-2r+2}) \subset A^{p+2r, q-2r+1} \subset A^{p+2r-(r-1), q-2r+1+(r-1)} = A^{p+r+1, q-r}$ segue $\delta f' \in A^{p+r+1, q-r}$. Portanto $f' \in A^{p, q} \cap \delta^{-1}(A^{p+r+1, q-r}) = Z_{r+1}^{p, q}$, isto é,

$$f = \{f'\} \in E_{r+1}^{p, q} \quad \text{e} \quad \Xi(f) = \{\xi f\} = \{\{f'\}\} \in H(E_r^{p, q}).$$

Por fim, o isomorfismo preserva o produto:

Diagrama 22: Comutatividade do produto com os homomorfismos Ξ e $\Xi \times \Xi$

$$\begin{array}{ccc} E_r^{p, q} \times E_r^{p', q'} & \xrightarrow{\Xi \times \Xi} & H(E_r^{p, q}) \times H(E_r^{p', q'}) \\ \downarrow \smile & & \downarrow \smile \\ E_{r+1}^{p+p', q+q'} & \xrightarrow{\Xi} & H(E_r^{p+p', q+q'}) \end{array}$$

Fonte: Elaborado pelo autor.

$$\begin{aligned} \Xi(f \smile g) &= \Xi(\{f' \smile g'\}) = \{\xi(f \smile g)\} = \{\{f' \smile g'\}\} = \{\{f'\} \smile \{g'\}\} \\ &= \{\{f'\}\} \smile \{\{g'\}\} = \{\xi f\} \smile \{\xi g\} = \Xi(f) \smile \Xi(g). \end{aligned}$$

3. Analisando o conjunto $A_{p+r-1, q-r+2}$, segue:

- Se $\text{Max}(p, q+1) = p$ então $0 > q-r+2$, quando $r > p$;
- Se $\text{Max}(p, q+1) = q+1$ então $0 \geq q-r+2$, quando $r > q+1$;

Em ambas as situações, se $u \in A_{p+r-1, q-r+2}$ segue que $p \circ u$ depende de todas as $p+q+1$ coordenadas. Dessa observação obtêm-se as relações:

$$\cdots \subset A_{p+r-3, q-r+4} \subset A_{p+r-2, q-r+3} = A_{p+r-1, q-r+2} = A_{p+r, q-r+1} = \cdots$$

$$\cdots = A^{p+r+1, q-r} = A^{p+r, q-r+1} = A^{p+r-1, q-r+2} \subset A^{p+r-2, q-r+3} \subset \cdots$$

E isso é o suficiente para dizer que

$$Z_{r+1}^{p,q} = Z_{r+2}^{p,q}, \quad Z_r^{p+1, q-1} = Z_{r+1}^{p+1, q-1} \quad \text{e} \quad B_r^{p,q} = B_{r+1}^{p,q},$$

ou seja, $E_r^{p,q} = E_{r+1}^{p,q}$. A prova sendo feita por indução em n , o caso $n = 1$ está provado.

Supondo que $E_\infty^{p,q} = E_{r+n}^{p,q}$, para provar que $E_\infty^{p,q} = E_{r+n+1}^{p,q}$ basta repetir o mesmo argumento acima para mostrar a igualdade $E_{r+n}^{p,q} = E_{r+n+1}^{p,q}$.

4. Dados $\{f\} \in D^{p,q}$ e $\{g\} \in D^{p',q'}$ obtemos que

$$\{f\} \smile \{g\} = \{f \smile g\} \in H^{p+p', q+q'}(E; R),$$

$$i^*(\{f \smile g\}) = \{i^\#(f \smile g)\}, \text{ onde } i^\# : C^{p+p'+q+q'}(E; R) \rightarrow C^{p+p'+q+q'}(A_{p+p'-1}; R).$$

Assim, por hipótese, $\delta(f') = f$, para $f' \in C^{p+q-1}(E; R)$, então

$$f' \smile g \in C^{p+p'+q+q'-1}(E; R) \quad \text{e} \quad i^\#(f' \smile g) \in C^{p+p'+q+q'-1}(A_{p+p'-1}; R).$$

Logo,

$$\begin{aligned} \delta \circ i^\#(f' \smile g) &= i^\# \circ \delta(f' \smile g) = i^\# \circ (\delta(f') \smile g + (-1)^{p+q-1} f' \smile \delta(g)) \\ &= i^\# \circ \delta(f') \smile g = i^\#(f \smile g). \end{aligned}$$

Portanto, $i^\#(f \smile g) \in B^{p+p'+q+q'}(A_{p+p'-1}; R)$, ou seja, $i^*(\{f \smile g\}) = 0$ o que equivale a dizer que $\{f \smile g\} \in D^{p+p', q+q'}$.

□

Abaixo, apresentamos um exemplo simples, com o objetivo de apresentar as filtrações e os passos técnicos na sequência espectral de Serre.

Exemplo 5.3.1. Considere o fibrado $(E, p, S^1, I, \mathbb{Z})$, onde o espaço total

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1 \text{ e } z \in I = [0, 1]\}$$

é o cilindro e $p : E \rightarrow S^1$ é a projeção dada por $p(x, y, z) = (x, y)$ para qualquer $(x, y, z) \in E$.

No espaço total E consideramos a divisão por quadrados de modo a obter como:

- Cubos singulares de dimensão 0 (Vértices): Sendo as funções $v_i : I^0 \rightarrow E$, para $i = 0, 1, 2, 3$, $v_i(I^0) = v_i$ e

$$v_0 = (0, -1, 0) \quad v_1 = (0, 1, 0) \quad v_2 = (0, -1, 1) \quad v_3 = (0, 1, 1).$$

Assim, podemos tomar o grupo $C_0(E; \mathbb{Z}) = \langle v_0, v_1, v_2, v_3 \rangle$ como sendo o grupo de cadeia de dimensão 0 do espaço E gerado pelos cubos singulares v_i .

- Cubos singulares de dimensão 1 (Arestas): Sendo as funções $A_i : I \rightarrow E$, para $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, dadas por

$$A_0(s) = \left(\cos \pi\left(s - \frac{1}{2}\right), \sin \pi\left(s - \frac{1}{2}\right), 0 \right) \quad A_1(s) = \left(\cos \pi\left(s + \frac{1}{2}\right), \sin \pi\left(s + \frac{1}{2}\right), 0 \right)$$

$$A_2(s) = \left(\cos \pi\left(s - \frac{1}{2}\right), \sin \pi\left(s - \frac{1}{2}\right), 1 \right) \quad A_3(s) = \left(\cos \pi\left(s + \frac{1}{2}\right), \sin \pi\left(s + \frac{1}{2}\right), 1 \right)$$

$$A_4(t) = (0, -1, t)$$

$$A_5(t) = (0, 1, t)$$

Portanto, definimos o grupo $C_1(E; \mathbb{Z}) = \langle A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 \rangle$ como sendo o grupo de cadeia de dimensão 1 do espaço E gerado pelos cubos singulares A_i . Obtemos também as seguintes relações entre os vértices e as arestas definidos acima:

$$A_0 = [v_0 \ v_1] \quad A_1 = [v_1 \ v_0] \quad A_2 = [v_2 \ v_3] \quad A_3 = [v_3 \ v_2] \quad A_4 = [v_0 \ v_2] \quad A_5 = [v_1 \ v_3]$$

- Cubos singulares de dimensão 2 (Faces): Sendo as funções $F_i : I^2 \rightarrow E$, $i = 0, 1$, dadas por

$$F_0(s, t) = \left(\cos \pi \left(s - \frac{1}{2} \right), \sin \pi \left(s - \frac{1}{2} \right), t \right) \text{ e}$$

$$F_1(s, t) = \left(\cos \pi \left(s + \frac{1}{2} \right), \sin \pi \left(s + \frac{1}{2} \right), t \right).$$

Por conseguinte obtemos o grupo $C_2(E; \mathbb{Z}) = \langle F_0, F_1 \rangle$ como sendo o grupo de cadeia de dimensão 2 do espaço E gerado pelos cubos singulares F_i . As relações entre arestas e faces são dadas por:

$$F_0 = [A_0 \ A_5 \ A_2 \ A_4] \quad F_1 = [A_1 \ A_4 \ A_3 \ A_5].$$

Assim, podemos definir o complexo de cadeia

$$0 \longrightarrow C_2(E; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\partial_2} C_1(E; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\partial_1} C_0(E; \mathbb{Z}) \longrightarrow 0,$$

onde

$$\partial_i(u) = \sum_{k=1}^i (-1)^k (\partial_k^0 u - \partial_k^1 u),$$

para $u \in C_i(E; \mathbb{Z})$ e $i = 1, 2$.

Como, para $i = 2$:

$$\partial_2(F_0) = A_0 - A_2 - A_4 + A_5 \quad \partial_2(F_1) = A_1 - A_3 + A_4 - A_5$$

e para $i = 1$:

$$\partial_1(A_0) = -v_0 + v_1 \quad \partial_1(A_1) = -v_1 + v_0 \quad \partial_1(A_2) = -v_2 + v_3$$

$$\partial_1(A_3) = -v_3 + v_2 \quad \partial_1(A_4) = -v_0 + v_2 \quad \partial_1(A_5) = -v_1 + v_3,$$

as matrizes de ∂_2 e ∂_1 são dadas por:

$$[\partial_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad [\partial_1] = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Por consequência, os grupos de cocadeia $C^k(E; \mathbb{Z}) = \text{Hom}(C_k(E; \mathbb{Z}); \mathbb{Z})$, para $k = 0, 1, 2$, são definidos como

$$C^0(E; \mathbb{Z}) = \langle f_0, f_1, f_2, f_3 \rangle, \text{ onde } f_i(v_j) = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad \text{para } i, j = 0, 1, 2, 3.$$

$$C^1(E; \mathbb{Z}) = \langle g_0, g_1, g_2, g_3, g_4, g_5 \rangle, \text{ onde } g_i(A_j) = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad \text{para } i, j = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

$$C^2(E; \mathbb{Z}) = \langle h_0, h_1 \rangle, \text{ onde } h_i(F_j) = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad \text{para } i, j = 0, 1.$$

dando origem ao complexo de cocadeia

$$0 \longrightarrow C^0(E; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\delta_1} C^1(E; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\delta_2} C^2(E; \mathbb{Z}) \longrightarrow 0,$$

onde os homomorfismos δ_i são dados como

$$\delta_i(f)(u) = f \circ \partial_i(u),$$

onde $f \in C^{i-1}(E; \mathbb{Z})$ e $u \in C_i(E; \mathbb{Z})$, para $i = 1, 2$. Consequentemente obtemos as matrizes

$$[\delta_1] = [\partial_1]^t \quad \text{e} \quad [\delta_2] = [\partial_2]^t$$

de δ_1 e δ_2 em função das matrizes dos homomorfismos ∂_1 e ∂_2 , respectivamente.

Filtração dos grupos de cadeias $C_k(E; \mathbb{Z})$, $k = 0, 1, 2$ (com $p, q \in \mathbb{Z}$):

• Para $p + q = 2$:

- $A_{2,0} = C_2(E; \mathbb{Z})$.
- $A_{1,1} = C_2(E; \mathbb{Z})$. Pois $p \circ F_0(s, t) = (\cos \pi(s - \frac{1}{2}), \sin \pi(s - \frac{1}{2}))$, ou seja, $p \circ F_0$ independe da última coordenada, o mesmo valendo para $p \circ F_1$, segue que $A_{1,1} = C_2(E; \mathbb{Z})$.
- $A_{0,2} = \{0\}$.

$$\{0\} = A_{0,2} \subset A_{1,1} = A_{2,0} = C_2(E; \mathbb{Z}).$$

- Para $p + q = 1$:

$$- A_{1,0} = C_1(E; \mathbb{Z}).$$

$$- A_{0,1} = \langle A_4, A_5 \rangle. \text{ Pois } p \circ A_4(t) = p \circ F_0(0, t) = (0, -1, 0) \text{ e } p \circ A_5(t) = p \circ F_1(0, t) = (0, 1, 0), \text{ isto é, } p \circ A_4 \text{ e } p \circ A_5 \text{ independem da última coordenada (no caso, a única).}$$

$$- A_{-1,2} = \{0\}.$$

$$\{0\} = A_{-1,2} \subset A_{0,1} \subset A_{1,0} = C_1(E; \mathbb{Z}).$$

- Para $p + q = 0$:

$$\{0\} = A_{-1,1} \subset A_{0,0} = C_0(E; \mathbb{Z}).$$

Filtração dos grupos de cocadeia $C^k(E; \mathbb{Z})$, $k = 0, 1, 2$: Como

$$A^{p,q} = \{f \in C^{p+q}(E; \mathbb{Z}) \mid f(A_{p-1,q+1}) = 0\},$$

então verifica-se que

$$\bullet C^2(E; \mathbb{Z}) = A^{0,2} = A^{1,1} \supset A^{2,0} = \{0\}.$$

$$\bullet \text{ Dado que } A^{1,0} = \{g \in C^1(E; \mathbb{Z}) \mid g(A_{0,1}) = 0\} \text{ e } A_{0,1} = \langle A_4, A_5 \rangle, \text{ segue que}$$

$$A^{1,0} = \langle g_0, g_1, g_2, g_3 \rangle \text{ e, por conseguinte,}$$

$$C^1(E; \mathbb{Z}) = A^{0,1} \supset A^{1,0} \supset A^{2,-1} = \{0\}.$$

$$\bullet C^0(E; \mathbb{Z}) = A^{0,0} \supset A^{1,-1} = \{0\}.$$

dando origem ao seguinte diagrama:

Diagrama 23: Esquema das filtrações de cocadeia do cilindro limitado

$$\begin{array}{ccccccc} C^0(E; \mathbb{Z}) & = & A^{0,0} & \supset & A^{1,-1} & = & A^{2,-2} = \{0\} \\ & & \delta_1 \downarrow & & \delta_1 \downarrow & & \delta_1 \downarrow \\ C^1(E; \mathbb{Z}) & = & A^{0,1} & \supset & A^{1,0} & \supset & A^{2,-1} = \{0\} \\ & & \delta_2 \downarrow & & \delta_2 \downarrow & & \delta_2 \downarrow \\ C^2(E; \mathbb{Z}) & = & A^{0,2} & = & A^{1,1} & \supset & A^{2,0} = \{0\}. \end{array}$$

Fonte: Elaborado pelo autor.

Como por definição

$$Z_r^{p,q} = A^{p,q} \cap \delta^{-1}(A^{p+r,q-r+1}), \quad B_r^{p,q} = A^{p,q} \cap \delta(A^{p-r,q+r-1}) \quad \text{e} \quad E_r^{p,q} = \frac{Z_r^{p,q}}{Z_{r-1}^{p+1,q-1} + B_{r-1}^{p,q}}.$$

Então, para $r = 1$, $(r, 1-r) = (1, 0)$ e $\delta_{i|} = A^{p,q} \rightarrow A^{p,q+1}$, onde $i = 1, 2$, obtemos que

$$\begin{aligned} Z_1^{-2,2} &= A^{-2,2} \cap \delta^{-1}(A^{-1,2}) & Z_1^{-1,2} &= A^{-1,2} \cap \delta^{-1}(A^{0,2}) \\ &= C^0(E; \mathbb{Z}) \cap \delta_1^{-1}(C^1(E; \mathbb{Z})) & &= C^1(E; \mathbb{Z}) \cap \delta_2^{-1}(C^2(E; \mathbb{Z})) \\ &= C^0(E; \mathbb{Z}) & &= C^1(E; \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z_1^{0,2} &= A^{0,2} \cap \delta^{-1}(A^{1,2}) & Z_1^{-1,1} &= A^{-1,1} \cap \delta^{-1}(A^{0,1}) \\ &= C^2(E; \mathbb{Z}) \cap \delta^{-1}(\{0\}) & &= C^0(E; \mathbb{Z}) \cap \delta_1^{-1}(C^1(E; \mathbb{Z})) \\ &= C^2(E; \mathbb{Z}) & &= C^0(E; \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z_1^{0,1} &= A^{0,1} \cap \delta^{-1}(A^{1,1}) & Z_1^{1,1} &= A^{1,1} \cap \delta^{-1}(A^{2,1}) \\ &= C^1(E; \mathbb{Z}) \cap \delta_2^{-1}(C^2(E; \mathbb{Z})) & &= C^2(E; \mathbb{Z}) \cap \{0\} \\ &= C^1(E; \mathbb{Z}) \cap A^{1,0} & &= \{0\} \\ &= A^{1,0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z_1^{0,0} &= A^{0,0} \cap \delta^{-1}(A^{1,0}) & Z_1^{1,0} &= A^{1,0} \cap \delta^{-1}(A^{2,0}) \\ &= C^0(E; \mathbb{Z}) \cap \delta_1^{-1}(A^{1,0}) & &= A^{1,0} \cap \delta_2^{-1}(A^{2,0}) \\ &= C^0(E; \mathbb{Z}) \cap \{0\} & &= A^{1,0} \cap \{0\} \\ &= \{0\} & &= \{0\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z_1^{2,0} &= A^{2,0} \cap \delta^{-1}(A^{3,0}) \\ &= \{0\} \cap \delta^{-1}(A^{3,0}) \\ &= \{0\}. \end{aligned}$$

o que implica na seguinte igualdade $E_1^{1,1} = E_1^{0,0} = E_1^{1,0} = E_1^{2,0} = \{0\}$. E para $r = 0$, $(r, 1-r) =$

$(0, 1)$, segue que

$$\begin{aligned} Z_0^{-1,1} &= A^{-1,1} \cap \delta^{-1}(A^{-1,2}) & Z_0^{0,1} &= A^{0,1} \cap \delta^{-1}(A^{0,2}) \\ &= C^0(E; \mathbb{Z}) \cap \delta_1^{-1}(C^1(E; \mathbb{Z})) & &= C^1(E; \mathbb{Z}) \cap \delta_2^{-1}(C^2(E; \mathbb{Z})) \\ &= C^0(E; \mathbb{Z}) & &= C^1(E; \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z_0^{0,0} &= A^{0,0} \cap \delta^{-1}(A^{0,1}) & Z_0^{1,0} &= A^{1,0} \cap \delta^{-1}(A^{1,1}) \\ &= C^0(E; \mathbb{Z}) \cap \delta_1^{-1}(C^1(E; \mathbb{Z})) & &= A^{1,0} \cap \delta_2^{-1}(C^2(E; \mathbb{Z})) \\ &= C^0(E; \mathbb{Z}) & &= A^{1,0} \cap A^{1,0} \\ & & &= A^{1,0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z_0^{1,1} &= A^{1,1} \cap \delta^{-1}(A^{1,2}) \\ &= C^2(E; \mathbb{Z}) \cap \delta^{-1}(\{0\}) \\ &= C^2(E; \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

o que implica que $E_1^{-2,2} = E_1^{-1,2} = E_1^{0,2} = E_1^{-1,1} = E_1^{1,0} = \{0\}$.

Além disso, como

$$\ker \delta_1 = \langle (1, 1, 1, 1) \rangle,$$

$$\begin{aligned} \text{Im } \delta_1 &= \langle (-1, 1, 0, 0, -1, 0), (1, -1, 0, 0, 0, -1), (0, 0, -1, 1, 1, 0), (0, 0, 1, -1, 0, 1) \rangle \\ &= \langle a_1, a_2, a_3, a_4 \rangle = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle \quad (\text{pois } a_4 = -a_1 - a_2 - a_3), \end{aligned}$$

$$\ker \delta_2 = \langle (1, 0, 0, 1, 1, 0), (0, 1, 0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, -1, -1, 0), (0, 0, 0, 0, 1, 1) \rangle$$

$$= \langle b_1, b_2, b_3, b_4 \rangle \quad \text{e}$$

$$\text{Im } \delta_2 = \langle (1, 0), (0, 1), (-1, 0), (0, -1) \rangle = \langle (1, 0), (0, 1) \rangle = C^2(E; \mathbb{Z}),$$

segue de imediato que

$$H^0(E, \mathbb{Z}) = \ker \delta_1 = \langle (1, 1, 1, 1) \rangle \cong \mathbb{Z},$$

$$\begin{aligned} H^1(E, \mathbb{Z}) &= \frac{\ker \delta_2}{\text{Im } \delta_1} = \frac{\langle b_1, b_2, b_3, b_4 \rangle}{\langle a_1, a_2, a_3 \rangle} = \frac{\langle b_1, b_2, b_3, b_4 \rangle}{\langle -b_1 + b_2, b_1 - b_2 - b_4, -b_3 \rangle} = \frac{\langle b_1, b_2, b_4 \rangle}{\langle -b_1 + b_2, -b_4 \rangle} \\ &= \frac{\langle -b_1 + b_2, b_2 \rangle}{\langle -b_1 + b_2 \rangle} = \langle b_2 \rangle \cong \mathbb{Z} \quad \text{e} \end{aligned}$$

$$H^2(E, \mathbb{Z}) = \frac{C^2(E, \mathbb{Z})}{\text{Im } \delta_2} = \frac{C^2(E, \mathbb{Z})}{\langle (1, 0), (0, 1) \rangle} = \frac{C^2(E, \mathbb{Z})}{C^2(E, \mathbb{Z})} = \{0\}.$$

Teorema 5.3.4. (A sequência exata de Serre). *Sejam m e n números inteiros positivos. Se, na fibração (E, p, B) , B e F são 0-conexos, o sistema de coeficientes locais $H^q(F; R)$ é trivial, $H^i(B; R) = 0$ para $0 < i < m$ e $H^j(F; R) = 0$ para $0 < j < n$, então tem-se a seguinte sequência exata:*

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^1(B; R) &\xrightarrow{p^*} H^1(E; R) \xrightarrow{i^*} \dots \xrightarrow{\tau} H^k(B; R) \\ &\xrightarrow{p^*} H^k(E; R) \xrightarrow{i^*} H^k(F; R) \xrightarrow{\tau} H^{k+1}(B; R) \xrightarrow{p^*} \dots \\ &\dots \xrightarrow{p^*} H^{m+n-1}(E; R) \xrightarrow{i^*} H^{m+n-1}(F; R). \end{aligned}$$

Demonstração. Veja que, das hipóteses, na sequência espectral de Serre (cohomologia) associada à fibração (E, p, B) , tem-se $E_2^{p,0} = H^p(B; R)$ e $E_2^{0,q} = H^q(F; R)$. Ainda, se $p \neq 0$, $q \neq 0$ e $p + q < m + n$, $E_2^{p,q} = 0$. Logo, para $k < m + n$,

$$H^k(E; R) = \bigoplus_{p+q=k} E_{\infty}^{p,q} = E_{\infty}^{k,0} \oplus E_{\infty}^{0,k}.$$

Assim, para $k < m + n$, temos a sequência exata

$$0 \longrightarrow E_{\infty}^{k,0} \xrightarrow{\text{inclusão}} H^k(E; R) \xrightarrow{\text{projecção}} E_{\infty}^{0,k} \longrightarrow 0.$$

Para determinar os termos $E_{\infty}^{k,0}$ e $E_{\infty}^{0,k}$, sob a condição $k < m + n$, veja que:

$$\bullet \quad E_{\infty}^{k,0} = E_{k+1}^{k,0} = \frac{E_k^{k,0}}{\text{Im}(d_k : E_k^{0,k-1} \rightarrow E_k^{k,0})}.$$

- Para $s < k$, $E_s^{k-s, s-1} = 0$. Portanto, $E_{s+1}^{k,0} = \frac{E_s^{k,0}}{\text{Im}(d_s : E_s^{k-s, s-1} \rightarrow E_s^{k,0})} = E_s^{k,0}$. Assim,

$$H^k(B; R) = E_2^{k,0} = E_3^{k,0} = \dots = E_k^{k,0}.$$

- $E_2^{0, k-1} = H^{k-1}(F; R)$; $E_3^{0, k-1} = \ker(d_2 : E_2^{0, k-1} \rightarrow \underbrace{E_2^{2, k-2}}_{=0}) = E_2^{0, k-1}$; $\dots$, $E_k^{0, k-1} = \ker(d_{k-1} : E_{k-1}^{0, k-1} \rightarrow \underbrace{E_{k-1}^{k-1, 1}}_{=0}) = E_{k-1}^{0, k-1}$. Ou seja,

$$H^{k-1}(F; R) = E_2^{0, k-1} = E_3^{0, k-1} = \dots = E_k^{0, k-1}.$$

- $E_\infty^{0, k-1} = E_{k+1}^{0, k-1} = \ker(d_k : E_k^{0, k-1} \rightarrow E_k^{k,0}) \subset E_k^{0, k-1}$.

Logo, para $k < m+n$, é exata a sequência

$$0 \longrightarrow E_\infty^{k,0} \xrightarrow{\text{inclusão}} E_k^{0, k-1} \xrightarrow{d_k} \underbrace{E_k^{k,0}}_{=E_2^{k,0}} \xrightarrow{\text{projeção}} E_{k+1}^{k,0} \longrightarrow 0.$$

Arranjando as sequências exatas acima, obtemos a sequência desejada:

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^1(B; R) = E_2^{1,0} &= E_\infty^{1,0} \xrightarrow{\text{inclusão}} \underbrace{H^1(E; R)}_{=p^*} \\ \xrightarrow{\text{projeção}} E_\infty^{0,1} &= E_3^{0,1} \xrightarrow{\text{inclusão}} \underbrace{E_2^{0,1}}_{=i^*} = H^1(F; R) \\ \xrightarrow{d_2=\tau} E_2^{2,0} &= H^2(B; R) \dots \end{aligned}$$

□

Uma classe importante de fibrados são os fibrados cuja fibra possui a (co)-homologia de uma esfera. Nesse caso, a sequência espectral de Serre nos fornece uma importante ferramenta: a **Sequência exata de Gysin**. Abaixo, enunciamos o resultado. Para uma demonstração, ver [15] ou [14].

Teorema 5.3.5. *Seja $n \geq 1$ um número natural. Seja (E, p, B, F, G) um fibrado. Se o sistema de coeficientes locais $\underline{H^n(F; R)}$ é trivial e $H^*(F; R) \simeq H^*(S^{n-1}; R)$, existe uma sequência exata*

$$\dots \longrightarrow H^{i+n-1} \xrightarrow{\lambda} H^i(B; R) \xrightarrow{\xi^*} H^{i+n}(B; R) \xrightarrow{p^*} H^{i+n}(E; R) \longrightarrow \dots,$$

onde $\xi \in H^n(B; R)$ é chamada de **classe de Euler** do fibrado (E, p, B, F, G) , $\xi^* : H^i(B; R) \rightarrow H^{i+n}(B; R)$ é dada pelo produto cup $\xi^*(y) = \xi \cdot y$, e $\lambda(p^*(x) \cdot y) = x \cdot \lambda(y)$.

6 Considerações finais

O teorema clássico de Borsuk-Ulam afirma que para toda função contínua $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, da esfera de dimensão n no espaço euclidiano de dimensão n , existe um ponto $z \in S^n$ tal que $f(z) = f(-z)$, onde $-z$ é o ponto antipodal a z . Esse resultado possui várias formas equivalentes de enunciado, diversos tipos de demonstração e muitas aplicações. Uma das formas equivalentes de enunciado é àquela da não existência de uma função contínua $\mathbb{Z}_2$ -equivariante $\varphi : S^n \rightarrow S^{n-1}$. Conta-se que o enunciado do Teorema de Borsuk-Ulam foi conjecturado pelo matemático polonês Stanisław Ulam e provado pelo matemático Karol Borsuk, também polonês. Depois de sua formulação clássica, temos na literatura um desenvolvimento significativo de generalizações do teorema de Borsuk-Ulam. Muitas dessas generalizações são aplicações de resultados de não existência de funções G -equivariante. Já para o tratamento de não existência de funções equivariantes, temos o desenvolvimento de teorias de índice. Na década de 1950, C. Yang usou teoria de índice cohomológico de valor numérico para estabelecer resultados de não existência de aplicações equivariantes. Posteriormente, Connor-Floyd, Krasnoselski e Fadell-Husseini generalizaram tal teoria de índice com aplicações em teoria de pontos críticos e em análise não linear. Em 1988, Fadell e Husseini [4] introduziram um índice de valor ideal $\text{Ind}^G X$ para um G -espaço X , o qual se encontra no anel de cohomologia $H^*(BG)$ do espaço classificante BG de G . Em particular, eles mostraram que se existe uma G -aplicação $\varphi : X \rightarrow Y$ entre dois G -espaços então $\text{Ind}^G Y \subseteq \text{Ind}^G X$. Essa teoria tem se mostrado bastante útil em resultados recentes com respeito a problemas do tipo Borsuk-Ulam (ver [4, 7, 10, 12]).

Outra linha clássica em Topologia Algébrica é o problema do ponto fixo, o qual consiste em resolver uma equação da forma $f(x) = x$, sendo esse fundamental em *toda* a matemática. O primeiro teorema dessa natureza é aquele equivalente ao *Teorema do Valor Intermediário*, de B. Bolzano, provado em 1817. Em 1909, L.E.J. Brouwer provou a versão análoga para dimensões maiores, a qual afirma que toda função contínua $f : D^n \rightarrow D^n$ sobre o disco fechado de dimensão n possui ao menos um ponto fixo. Posteriormente, S. Lefschetz, um dos pioneiros da Topologia Algébrica, contribuiu para o desenvolvimento de técnicas topológicas a fim de provar seu celebrado Teorema de ponto fixo de Lefschetz de 1921, uma generalização de longo alcance do Teorema de Brouwer. Não muito tempo depois, 1927, J. Nielsen desenvolveu uma teoria de ponto fixo um tanto mais fina (hoje conhecida como teoria de ponto fixo de Nielsen).

Essas duas teorias clássicas - Teoria de Ponto Fixo e Teoremas do tipo Borsuk-Ulam, possuem numerosas aplicações tais como existência de múltiplas soluções em equações diferenci-

ais, existência de um número infinito de pontos críticos de funcionais, bem como soluções para problemas de equipartição na geometria combinatorial. E novas relações com outros ramos da matemática continuam lançando luzes sobre esses dois temas clássicos.

Dado um espaço topológico X , dizemos que esse possui a *propriedade do ponto fixo* (p.p.f.) se *toda* função contínua $f : X \rightarrow X$ possui ao menos um ponto fixo. Assim, o resultado clássico de Brouwer nos diz que o disco D^n possui a propriedade do ponto fixo. Usando a teoria de Lefschetz, conclui-se que X possui a p.p.f. se X possui o mesmo tipo de homotopia de D^n .

Saber se um dado espaço topológico X possui a p.p.f. é uma questão fundamental em topologia. No entanto, a p.p.f. não é uma propriedade bem comportada. Por exemplo, se X e Y são variedades compactas, cada uma com a p.p.f., sabe-se (ver, por exemplo, [9]) que $X \times Y$ não precisa possuir a p.p.f. (para uma descrição da teoria de ponto fixo topológica até 1970, ver [3]).

Findado o mestrado, daremos continuidade com o doutoramento, onde propomos um estudo da p.p.f. para espaços homogêneos via resultados do tipo Borsuk-Ulam. Segundo [3], a propriedade do ponto fixo para espaços homogêneos é equivalente a um problema do tipo Borsuk-Ulam, como segue.

Sejam G um grupo de Lie conexo e compacto, K um subgrupo fechado de G e G/K o espaço das classes laterais. Uma primeira observação é a seguinte.

Proposição 6.0.1. Se G/K possui a p.p.f. então o normalizador de K em G , $N_G(K)$, é igual a K .

Para uma demonstração do resultado acima, observe que se existir um elemento $\alpha \in N_G(K) - K$, pode-se demonstrar que a aplicação $f : G/K \rightarrow G/K$ dada por $f(gK) = g\alpha K$ é livre de ponto fixo.

A segunda observação que fazemos é: pode-se considerar as seguintes ações de K sobre G e sobre G/K :

1. K age sobre G via $k * g = gk^{-1}$.
2. K age sobre G/K via $k \cdot (gK) = (kg)K$.

Seja $f : G/K \rightarrow G/K$ uma auto-aplicação de G/K . Associada a f , temos a K -aplicação

$$\varphi_f : G \rightarrow G/K$$

dada por

$$\varphi_f(g) = g^{-1}f(gK).$$

Seja $\text{Fix}(f) = \{x \in G/K \mid f(x) = x\}$ o conjunto dos pontos fixos de f . Então,

$$gK \in \text{Fix}(f) \iff \varphi_f(g) = eK.$$

Por outro lado, dada uma K -aplicação $\varphi : G \rightarrow G/K$, fica bem definida e é contínua a função

$$f_\varphi : G/K \rightarrow G/K$$

dada por

$$f_\varphi(gK) = g\varphi(g).$$

Além disso, pode-se mostrar que $\varphi(gK) = eK$ se, e somente se, $f_\varphi(gK) = gK$.

Tal equivalência nos diz que os pontos fixos das auto-aplicações de G/K estão intimamente ligados aos zeros das K -aplicações de G em G/K . Abaixo, sintetizamos a discussão acima.

Proposição 6.0.2. O espaço G/K possui a p.p.f. se, e somente se, para toda K -aplicação $\varphi : G \rightarrow G/K$, $\varphi^{-1}(eK) \neq \emptyset$. Em outras palavras, G/K possui a p.p.f. se, e somente se, **não existe** K -aplicação $\varphi : G \rightarrow G/K - \{eK\}$.

Dado um subgrupo K' de K , por restrição da ação, os espaços G e G/K podem ser vistos como K' -espaços. Assim:

Corolário 6.0.3. Se não existir K' -aplicação $\varphi : G \rightarrow G/K - \{eK\}$ para algum subgrupo K' de K então G/K possui a propriedade do ponto fixo.

6.1 O índice de valor-ideal de Fadell-Husseini

Dado um G -espaço X , o grupo de isotropia de $x \in X$ é o subgrupo

$$G_x = \{g \in G \mid gx = x\}.$$

O subespaço

$$G(x) = \{gx \in X \mid g \in G\}$$

é a órbita do ponto x . O espaço das órbitas é denotado por X/G .

Um ponto x do G -espaço X é dito estacionário (ou um ponto fixo da ação) se $G(x) = \{x\}$, ou seja, $gx = x$ para todo $g \in G$. O subespaço dos pontos fixos da ação é denotado por

$$X^G = \{x \in X \mid gx = x \text{ para todo } g \in G\}.$$

Em alguns livros, também encontramos a notação

$$F(G, X) = X^G.$$

Sejam G um grupo de Lie, EG um G -espaço livre e acíclico e BG o espaço classificante de G . Dado um G -espaço X , a construção de Borel associada é o espaço de órbitas

$$X_G = EG \times_G X = (EG \times X)/G,$$

onde G age sobre o produto $EG \times X$ via $g \cdot (y, x) = (y \cdot g^{-1}, g \cdot x)$, $(y, x) \in EG \times X$. A cohomologia equivariante de X , com coeficientes no anel R , é definida por

$$H_G^*(X, R) = H^*(EG \times_G X; R).$$

A aplicação que colapsa X em um ponto determina uma fibração

$$X \hookrightarrow EG \times_G X \xrightarrow{\pi_X} EG \times_G * = BG.$$

Definição 6.1.1. O índice de valor ideal de Fadell-Husseini do G -espaço X , com coeficientes no anel R , é definido por

$$\text{Ind}_G^R(X) := \ker(\pi_X^* : H^*(BG; R) \rightarrow H_G^*(X; R)).$$

Para calcular o índice de valor ideal de Fadell-Husseini do G -espaço X , note que a sequência espectral de Leray-Serre induzida pela fibração

$$X \hookrightarrow EG \times_G X \xrightarrow{\pi_X} BG$$

converge para o anel graduado $H_G^*(X, R)$. Os E_2 -termos da sequência espectral são dados por

$$E_2^{p,q} \cong H^p(BG; \mathcal{H}^q(X; R)),$$

onde $\mathcal{H}^q(X; R)$ é um sistema de coeficientes locais. A sequência espectral de Leray-Serre nos dá uma fatoração do homomorfismo π_X^* como uma composição:

$$H^*(BG; R) = E_2^{*,0} \rightarrow E_3^{*,0} \rightarrow E_4^{*,0} \rightarrow \cdots \rightarrow E_\infty^{*,0} \subset H^*(EG \times_G X; R).$$

Em geral, usamos a decomposição acima para calcular o núcleo de π_X^* .

Uma propriedade importante do índice de valor ideal de Fadell-Husseini é a seguinte.

Teorema 6.1.1 ([4]). *Sejam X e Y G -espaços. Se existir uma G -aplicação $f : X \rightarrow Y$ então*

$$\text{Ind}_G^R(Y) \subset \text{Ind}_G^R(X).$$

6.2 A propriedade do ponto fixo para G/K

Em vista do Teorema 6.1.1 e do Corolário 6.0.3, uma estratégia para mostrar que um espaço da forma G/K possui a propriedade do ponto fixo é mostrar a existência de um subgrupo K' de K tal que

$$\text{Ind}_{K'}(G/K - \{eK\}) \not\subseteq \text{Ind}_{K'}(G).$$

Uma classe importante de espaços homogêneos é a classe das variedades grassmannianas:

$$\begin{aligned} G_{\mathbb{R}}(p, q) &= \{V \mid V \text{ é subespaço vetorial de } \mathbb{R}^{p+q} \text{ de } \dim_{\mathbb{R}} V = p\} \\ &\cong \frac{O(p+q)}{O(p) \times O(q)} \end{aligned}$$

Pode-se observar que se a grassmanniana $G_{\mathbb{R}}(p, q)$ possui a p.p.f. então $p \neq q$ e os números p e q não podem ser ambos ímpares, ou seja, pq é par. Uma conjectura posta na década de 70 é que essas duas condições necessárias são também suficientes. Os casos já resolvidos na literatura são os seguintes:

1. Espaços projetivos: $G_{\mathbb{R}}(1, 2n) = \mathbb{R}P^{2n}$ (aplicação clássica do teorema de Lefschetz).
2. $G_{\mathbb{R}}(2, q)$ possui a p.p.f. para todo $q = 4k$ e $q = 4k + 1$, $k = 1, 2, 3, \dots$ ([17]).
3. Suponha pq par. Então:

(a) Se $p \leq 7$ e $[q/2] > [p/2]$ ou

(b) $p > 7$ e $[q/2] > 2[p/2]^2 - [p/2] - 1$

então $G_{\mathbb{R}}(p, q)$ possui a p.p.f. ([5])

O estudo das variedades de Grassmann possui longa história. A topologia das variedades de Grassmann é bem entendida. No entanto, é interessante notar que a classificação dos espaços

dessa classe que possuem a p.p.f. ainda não está totalmente estabelecida. A técnica básica usada na demonstração dos resultados listados acima é o cálculo do número de Lefschetz de uma auto-aplicação de um tal espaço mas a dificuldade é o entendimento dos endomorfismo do anel de cohomologia das grassmannianas.

6.3 O futuro

Uma questão relevante na Topologia Algébrica é o estudo da propriedade do ponto fixo para espaços homogêneos. Em geral, a técnica utilizada para tal estudo é o cálculo do número de Lefschetz das auto-aplicações de um tal espaço. Com tal técnica mostrando-se insuficiente mesmo em casos onde os espaços tem topologia bastante conhecida, como é o caso das variedades grassmannianas, no doutoramento, pretendemos utilizar uma abordagem via não existência de função equivariante que, por sua vez, pode ser tratada via teorias de índice tais como a teoria de índice de valor ideal de Fadell-Husseini. Observamos que o uso da teoria de valor ideal de Fadell-Husseini demanda certo traquejo com cálculos utilizando a sequência espectral de Leray-Serre. Por isso a importância de termos desenvolvido tal treinamento no mestrado.

REFERÊNCIAS

- [1] Bredon, Glen E. *Topology and Geometry*. New York: Springer-Verlag, 1993.
- [2] Cartan, H.; Eilenberg, S. *Homological Algebra*. Princeton: Princeton University Press, 1956.
- [3] Fadell, Edward. *Recent results in the fixed point theory of continuous maps*. Bulletin of the American Mathematical Society, Providence, v. 76, n. 1, p. 10-29, jan. 1970 .
- [4] Fadell, E.; Husseini, S. *An ideal-valued cohomological index theory with applications to Borsuk-Ulam and Bourgin-Yang theorems*. Ergodic Theory and Dynamical Systems, Cambridge, v. 8, n. 8, p. 73-85, dez. 1988.
- [5] Glover H.; Homer B. *Endomorphisms of the cohomology ring of finite Grassmann manifolds*. Heidelberg: Springer-Verlag, 1978.
- [6] Gray, B. *Homotopy Theory: An Introduction to Algebraic Topology*. New York: Academic Press, 1975.
- [7] Hara, Y. *The degree of equivariant maps*. Topology and its Applications, Amesterdã, v. 148, n. 3 , p. 113-121, 28 fev. 2005.
- [8] Hu, S.-T. *Introduction to Homological Algebra*. San Francisco: Holden-Day, 1968.
- [9] Husseini, S. Y. *The products of manifolds with the f.p.p. need not have the f.p.p.* American Journal of Mathematics, Baltimore, v. 99, n. 5, p. 919-931, out. 1977.
- [10] Inoue, A. *Borsuk-Ulam type theorems on Stiefel manifolds*. Osaka Journal of Mathematics, Osaka, v. 43, n. 1, p. 183-191, mar. 2006.
- [11] Kawakubo, K. *The Theory of Transformation Groups*. New York: Oxford University Press, 1991.
- [12] Komiya, K. *Borsuk-Ulam theorem and Stiefel manifolds*. Journal of the Mathematical Society of Japan, Tokyo, v. 45, n. 4, p. 611-626, out. 1993.
- [13] Lima, Elon L. *Grupo Fundamental e Espaços de Recobrimento*. 2. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2006.

- [14] McCleary, J. *A user's guide to spectral sequences*. 2. ed. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 58. Cambridge: Cambridge University Press, 2001.
- [15] Mimura, M.; Toda, H. *Topology of Lie Groups, I and II*. Providence: American Mathematical Society, 2000.
- [16] Munkres, James R. *Topology*. 2. ed. Upper Saddle River: Prentice Hall, 2000.
- [17] O'Neill, Larkin S. *On the fixed point property for Grassmann manifolds*. 1974. Thesis (PhD in Mathematics) - Mathematics Faculty, Ohio State University, Columbus, 1974.
- [18] Spanier, Edwin H. *Algebraic topology*. 3. ed. New York: Springer-Verlag, 1966.