



ANTONIO EDSON GONÇALVES

29
5

**EQUAÇÕES DE BLOCH NÃO LINEARES: EFEITO DA
TEMPERATURA NO FENÔMENO DE SUPERRADIÂNCIA**

Dissertação de Mestrado Apresentada
no Instituto de Física Teórica.

Orientadores: Salomon Sylvain Mizrahi /Bruto Max Pimentel Escobar



23000000 3640

São Paulo
Junho de 1987

AGRADECIMENTOS

- Aos Professores Salomon Sylvain Mishari e Bruto Max Pimentel Escobar pela dedicação e orientação durante a realização deste trabalho.
- Ao Salomon e Pimentel pela amizade e apoio durante estes anos de convivência no L. F. T..
- Ao Professor Paulo Leal Ferreira pelo interesse e atenção a mim dedicados.
- Ao Professor Sergio Augusto Carias de Oliveira por ter me guiado em meus primeiros passos na física.
- Ao Carias pela amizade, companheirismo e pelas discussões que compartilhamos.
- Ao Jonas, pela oportunidade de juntos trabalharmos nesta pesquisa, pelo amigo insubstituível e por tudo o que juntos aprendemos.
- Ao Ricardo, Juan e Ubirajara pelas inúmeras sugestões nos cálculos numéricos, na confecção deste trabalho e por suas amizades.
- Ao Birinha, pela valiosa amizade.
- Ao CNPq e CAPES pelo suporte financeiro.

De um modo geral agradeço a todos estudantes, funcionários e professores que direta ou indiretamente colaboraram na realização deste trabalho.

RESUMO

A partir de uma descrição microscópica chega-se a uma equação piloto para o operador estatístico (na Aproximação Markoviana) que descreve a dinâmica de um sistema de muitos corpos interagindo com um reservoir. Na aproximação de campo médio é deduzida a equação para o operador estatístico de um corpo, a qual é usada no estudo de um sistema de dois níveis. Neste contexto obtemos um sistema de equações diferenciais não lineares acopladas, conhecidas como Equações de Bloch Não Lineares (E.B.N.L.). A partir destas estudamos o efeito da temperatura no fenômeno de superradiância.

ABSTRACT

Starting from a microscopic description we deduce a Master Equation for the statistical operator (in a Markovian approximation) which describes the dynamics of a many-body system interacting with a reservoir. Mean-field approximation leads to an equation for the one-body statistical operator useful in studying a two-level system. In this framework we obtain a non-linear, differential coupled equation system known as non-linear Bloch equations. We use them to analyse the effect of temperature in superradiance phenomenon.

EQUAÇÕES DE BLOCH NÃO LINEARES: EFEITO DA TEMPERATURA NO FENÔMENO DE SUPERRADIÂNCIA

Antonio Edson Gonçalves

Orientadores: Salomon Sylvain Mizrahi / Bruto Max Pimentel Escobar

ÍNDICE

	Página
INTRODUÇÃO.....	1
I - TEORIA QUÂNTICA DOS PROCESSOS DE RELAXAÇÃO	6
I.1 - O Espaço de Liouville.....	6
I.2 - Equação de Movimento para o Operador Estatístico ρ	8
II - A INTERAÇÃO ÁTOMO-FÓTON	16
II.1 - Segunda Quantização do Hamiltoniano H_A	18
II.2 - Quantização do Campo Eletromagnético Livre.....	20
II.3 - Segunda Quantização do Hamiltoniano de Interação Átomo-Campo.....	23
II.4 - O Átomo de Dois Níveis de Energia	25
III - EQUAÇÃO MASTER PARA O OPERADOR ESTATÍSTICO DE p-CORPOS NA APROXIMAÇÃO DE CAMPO MÉDIO DE UM CORPO	26
III.1 - Hierarquia de Equações para o Operador Estatístico de p-Corpos ρ_p	26
IV - EQUAÇÕES DE BLOCH NÃO LINEARES PARA A MAGNETIZAÇÃO E SUPERRADIÂNCIA	32

IV.1 - Equações de Bloch Não Lineares para a Magnetização e Superradiância.....	32
IV.1.1- Equações de Bloch	37
IV.2. - Descrição Clássica da Emissão de Radiação de um Sistema de N-Átomos.....	39
IV.3. - Os Estados de Dicke	46
V - ANÁLISE E DISCUSSÃO DAS E.B.N.L.	52
V.1 - Solução Numérica das E.B.N.L.	57
APÊNDICES	
A - Obtenção da Equação (1.28)	63
B - Sistemas de Dois Níveis de Energia.....	67
C - Obtenção da Equação Master	76
D - Obtenção do Sistema de Equações (4.20)-(4.23).....	91
REFERÊNCIAS	96
LEGENDAS DAS FIGURAS	98
FIGURAS	100

INTRODUÇÃO

Em 1954, R.H. Dicke [1] propôs a existência de um novo processo de emissão de radiação coerente por um sistema atômico, êle partiu de uma idéia simples: num sistema composto de átomos ou moléculas de um gás suficientemente diluído, apesar de que a interação entre os mesmos possa ser desprezada (suas funções de onda não se superpõem), seus constituintes não seriam livres de correlações, se estiverem interagindo com um campo eletromagnético externo. Dicke mostrou que este sistema pode emitir radiação coerente, com uma intensidade proporcional ao quadrado do número de átomos do sistema, e a este processo ele chamou de emissão superradiante para distinguir da emissão de radiação normal cuja intensidade é proporcional a densidade de átomos.

Considerando que os átomos do sistema possuem somente dois níveis ativos, pode-se aproveitar do isomorfismo existente entre a álgebra $SU(2)$ dos operadores de spin $1/2$ com a dos operadores de criação e destruição associados com os estados excitado e fundamental dos átomos, para contruir um estado coletivo de N -átomos totalmente simétrico, $|J M\rangle$, que é autoestado dos operadores J^2 e J_z , associados ao momento angular de N -partículas de spin- $1/2$. Em seu artigo Dicke considera que as dimensões do sistema são grandes com relação ao comprimento de onda da radiação emitida e faz uma análise semiclassical deste fenômeno, no entanto sem estudar a sua evolução dinâmica.

Posteriormente, com o desenvolvimento de fontes que emitem luz com alta coerência (laser), tornou-se possível tentar uma verificação experimental da emissão superradiante, a primeira experiência na qual pôde-se observar tal fenômeno foi feita por Feld e colaboradores em 1972 [2]. Nessa o sistema é um gás de HF contido num recipiente cujo comprimento pode variar de 30cm a 100cm e com diâmetro variando entre 12mm e 28mm; os átomos desta amostra são excitados por um pulso de laser de HF, de comprimento de onda $\lambda = 2.5\text{mm}$. As linhas do HF que foram estudadas correspondem a transição rotacional

$J + 1 \rightarrow J$ nas bandas $\nu = 1$, com J variando desde 0 até 4, correspondendo aos comprimentos de onda $\lambda = 252, 126, 84, 63, 50 \mu m$ respectivamente, (observe que as dimensões do sistema são maiores do que o comprimento de onda da radiação emitida). Neste experimento pôde-se verificar a previsão de Dicke de que um sistema, composto de átomos de dois níveis, sujeito a uma inversão total de população pode emitir um pulso superradiante. Desde então muitos trabalhos, tanto teóricos como experimentais foram realizados sobre este assunto, nos quais se percebe duas linhas de trabalho entre os pesquisadores: uma aborda (do ponto de vista quântico ou semiclássico) as condições favoráveis para que o sistema emita um pulso superradiante, correlações atômicas, simetrias e flutuações de um sistema de dois níveis, sem preocupação com a relação entre o meio e a propagação da radiação; a outra linha procura, através do cálculo numérico, obter uma compreensão do fenômeno real a partir das equações dinâmicas. Um estudo detalhado do fenômeno não é simples porque estão envolvidos a geometria do sistema, efeitos não lineares resultantes da interação da radiação com o sistema (as equações dinâmicas são não lineares e geralmente não podem ser integradas por quadraturas portanto sua solução não podem ser expressas em termos de funções elementares). Na maioria dos casos uma emissão superradiante não envolve somente dois níveis não degenerados, em vários trabalhos [3], considera-se os átomos de três níveis, assim como a existência de degenerescência dos níveis atômicos que poderiam explicar outras propriedades da emissão superradiante observadas experimentalmente, não previstas (teoricamente) quando os átomos são considerados como constituídos por dois níveis ativos. A preparação experimental de um átomo de dois níveis (não degenerado) não é propriamente um problema na montagem experimental, no entanto uma grande dificuldade ocorre na observação de emissão superradiante em sistemas cujas dimensões são pequenas com relação ao comprimento de onda da radiação emitida. Esta dificuldade tem sua origem na existência de interação dipolar (força de van der Waals) entre os constituintes do sistema (átomos ou moléculas). Para compreendermos tal dificuldade consideremos um sistema cujas dimensões são pequenas quando comparadas com

o comprimento de onda da radiação emitida, ao mesmo tempo que impomos a simetria da função de onda do sistema queremos que este seja suficientemente denso para que possamos ter uma condição favorável para uma emissão superradiante; porém com o aumento da densidade do sistema a interação dipolar entre os seus constituintes cresce consideravelmente (esta interação quebra a simetria de troca de partícula do sistema e destrói o efeito cooperativo que leva á emissão superradiante, num tempo muito curto, ou seja menor que o tempo necessário para que este efeito cooperativo se desenvolva ao máximo [3]. A função de onda do sistema, é totalmente simétrica (em relação a troca de qualquer par de átomos) enquanto que a interação dipolar depende da geometria do sistema e não é invariante pela troca de dois átomos quaisquer, ou seja a intensidade da interação dipolo-dipolo é diferente para os vários vizinhos de um dado átomo, de forma que a aproximação de campo médio é quebrada. Este problema foi apontado e abordado por vários autores [3], e algumas propostas para contornar este problema foram apresentadas, como por exemplo, considerar sistemas com uma particular distribuição atômica.

S. Harosche [3], em seu artigo de 1982, fez uma revisão da maioria dos trabalhos teóricos apresentados até então, êle discute os efeitos da interação dipolar e propõe uma particular distribuição atômica (circular) na qual a simetria do sistema pode ser recuperada. Ainda em 1982, S. Harosche [4] montou um experimento no qual se pode observar a emissão de um pulso superradiante de um sistema de dimensões menores do que o comprimento de onda da radiação emitida, onde o problema da interação dipolar entre os átomos do sistema foi superado usando-se uma cavidade ressonante tipo Fabry-Perot. Esta permite que todos os átomos do sistema sintam o mesmo campo, nas suas posições, de forma que toda a amostra possa ser tratada como um único sistema quântico, recuperando assim a validade da aproximação de campo médio e permitindo que o sistema emita um pulso superradiante, antes que a interação dipolar se torne dominante. Na figura 1 damos uma representação esquemática deste experimento:

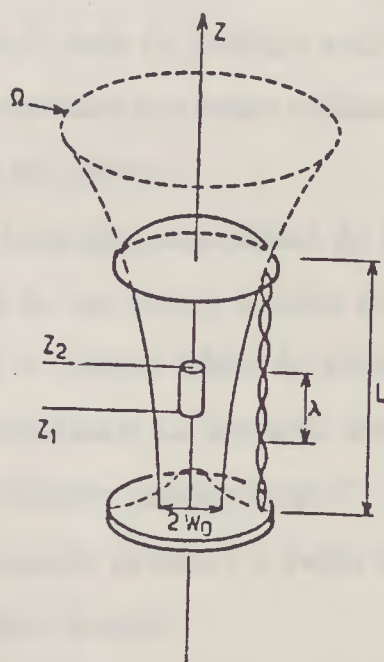


Fig.1. Representação esquemática da cavidade ressonante Fabry - Perot, dos parâmetros geométricos relevantes e a posição da amostra.

Uma amostra composta de átomos de Rydberg (átomos de Na com o elétron de valência excitado com um grande valor do número quântico principal n) é iluminada por um feixe de laser, de forma que transições correspondentes à emissão de radiação de comprimento de onda da ordem de milímetros são observadas. Os átomos de sódio são excitados para o nível $nS_{1/2}$ e a transição observada foi a $nS_{1/2} \rightarrow n'P_{1/2}$, com a cavidade ajustada para ressonar a frequências associadas a esta transição. O meio ativo (amostra) possui um comprimento $z_2 - z_1 < \lambda$. Neste experimento é observado um pulso superradiante assim como a dependência do tempo de retardo τ_0 (tempo que decorre desde a excitação de átomos do sistema até a emissão de um pulso superradiante) nas condições iniciais. A maioria dos trabalhos, tanto teóricos como experimentais têm seu interesse voltado a temperaturas $T \ll \frac{h\nu}{k}$ (teórico) assim a relaxação térmica do sistema se dá devido a

flutuações do vácuo. Dentre os trabalhos de revisão nesta área (que fazem um estudo abrangente do fenômeno) podemos citar, além daquele de S. Harosche, os de G.S. Agarwal [5], Persico [6], R. Bonifacio [7] (particularmente o de 1970, no qual ele faz um estudo, tanto quântico como semiclássico da emissão cooperativa de um sistema cujas dimensões são maiores do que o comprimento de onda da radiação emitida). No trabalho de A.V. Andreev [8] são citados vários experimentos que foram realizados para observar um pulso superradiante em vários regimes de frequências.

Neste trabalho fazemos uma abordagem semiclássica do fenômeno (ausência de correlações quânticas ou aproximação de um corpo) levando em conta os efeitos da temperatura sobre o sistema (ou seja o número médio de fótons presentes no sistema em $\tau = 0$) e observamos os efeitos resultantes da interação deste sistema com um campo eletromagnético (reservoir) para diferentes temperaturas T , o que nos permite ver que ocorre uma competição entre a relaxação térmica e a perda de coerência no sistema até este atingir o estado final de equilíbrio térmico.

No capítulo I apresentamos o formalismo usado para a abordagem deste problema e é deduzida, na aproximação Markoviana, uma equação piloto para o operador estatístico $\hat{\rho}_S(t)$ do sistema.

No capítulo II obtemos o Hamiltoniano do sistema + reservoir (no gauge de Coulomb), no formalismo de segunda quantização .

No capítulo III introduzimos a aproximação de campo médio na equação de hierarquia do operador estatístico de p-corpos.

No capítulo IV deduzimos as Equações de Bloch Não-Lineares (E.B.N.L.) e também discutimos o significado físico dos termos destas equações .Apresentamos também o modelo de Dicke [3] assim como uma outra abordagem (o método neoclássico) [6] que possibilita obter os mesmos termos não lineares que aparecem nas E.B.N.L.. Finalmente no capítulo V fazemos uma análise e discutimos as soluções (numéricas) das E.B.N.L. para várias condições iniciais e diferentes temperaturas do reservoir.

CAPÍTULO I

I.- TEORIA QUÂNTICA DOS PROCESSOS DE RELAXAÇÃO.

Consideremos um sistema aberto, S , em contato com o resto do universo, representado por um outro sistema, R , de forma que possa haver uma troca de energia, partículas, polarização, etc; entre estes dois sistemas. Se, inicialmente, o sistema S não se encontra em um estado de equilíbrio, para certas condições que serão especificadas abaixo, este evoluirá para um estado de equilíbrio determinado por condições externas tais como temperatura, potencial químico, pressão, etc. A esta gradual evolução para o estado de equilíbrio chamamos de um *processo de relaxação*.

Existem várias abordagens para tratar tais processos, neste capítulo vamos considerar uma que permite obter a equação de movimento que descreve a dinâmica irreversível do sistema S e cujo ponto crucial é a introdução da condição de irreversibilidade, já que partimos da equação de Liouville quântica que é reversível no tempo. Assim vamos associar ao sistema global ($S + R$) um operador estatístico $\hat{\rho}$ e usar subseqüentemente a técnica de projeção de Zwanzig [9].

I.1- O Espaço de Liouville.

Consideremos um sistema quântico isolado descrito por um hamiltoniano \hat{H} definido sobre o espaço de Hilbert \mathcal{H} . Em mecânica estatística os estados do sistema são representados por certos operadores sobre \mathcal{H} , chamados matriz densidade ou operador estatístico, que têm as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned}
 \text{i)} \quad \hat{\rho}^\dagger &= \hat{\rho} \\
 \text{ii)} \quad \text{Tr} \hat{\rho} &< \infty \\
 \text{iii)} \quad \text{Tr} \hat{\rho}^2 &\leq \text{Tr} \hat{\rho}
 \end{aligned}
 \tag{1.1}$$

Para estudarmos a cinemática dos observáveis do sistema é mais conveniente introduzirmos um novo espaço de Hilbert, ou seja o espaço de Liouville, \mathcal{L} , introduzido por Emch [10]. Seja \mathcal{X} o espaço de Hilbert (finito ou infinito) da descrição microscópica (vetores de estados) e $B(\mathcal{X})$ o conjunto de todas as aplicações lineares limitadas (operadores lineares) de \mathcal{X} sobre si. Cada estado microscópico pode ser representado por um operador estatístico, que é um operador limitado, auto-adjunto, positivo e de traço unitário, definido sobre \mathcal{X} ; cada operador corresponde a um estado. A seguir consideremos o conjunto:

$$\mathcal{L} = \{A | A \in B(\mathcal{X}); \text{Tr} A^\dagger A < \infty\},$$

equipado com a forma sesquilinear:

$$(A_1, A_2) = \text{Tr} A_1^\dagger A_2.$$

Esta forma satisfaz todos os axiomas de um produto escalar sobre o espaço de Hilbert complexo. Sabendo que a norma de um elemento f de \mathcal{X} é:

$$\|f\| = \sqrt{(f, f)},$$

e a distância entre f e g ; $g \in \mathcal{X}$, é $\|f - g\|$, segue que a expressão

$$(A_1, A_2) = \text{Tr} A_1^\dagger A_2$$

gera uma norma positiva definida:

$$\|A\|_{\mathcal{L}} = \sqrt{\text{Tr}(A^\dagger A)}.$$

Assim com a estrutura matemática definida \mathcal{L} acima é chamado de espaço de Liouville, associado ao espaço de Hilbert \mathcal{H} . Desta forma dadas as propriedades do operador estatístico, $\hat{\rho}$, e a estrutura matemática do espaço de Liouville, vemos que $\hat{\rho} \in \mathcal{L}$.

1.2- Equação de Movimento para o operador estatístico $\hat{\rho}$ [11].

Vamos definir agora o operador de Liouville \hat{L} , também chamado de "superoperador," por

$$\hat{L}A = [\hat{H}, A], \quad \forall A \in \mathcal{L}, \quad (1.2)$$

e assumimos que \hat{L} é limitado em \mathcal{L} , que decorre da condição de que \hat{H} é limitado em \mathcal{H} . Assim a equação de Liouville quântica, também chamada de von Neumann, descreve a evolução dinâmica de um sistema fechado e se escreve como

$$i \frac{d}{dt} | \hat{\rho}(t) \rangle = \hat{L} | \hat{\rho}(t) \rangle. \quad (1.3)$$

Consideremos agora um sistema global que pode ser decomposto em dois subsistemas que interagem entre si; sejam S e R estes dois subsistemas, se estamos interessados somente na dinâmica de um dos subsistemas é suficiente considerar o operador estatístico reduzido deste subsistema que é obtido fazendo-se a soma sobre todos os graus de liberdade do outro. Assumimos que inicialmente S e R são não-correlacionados (os sistemas são preparados sem interação), assim o operador estatístico do sistema total em $t=0$ tem a forma

$$\hat{\rho}(0) = \hat{\rho}_S(0) \hat{\rho}_R(0), \quad (1.4)$$

onde $\hat{\rho}_S$ e $\hat{\rho}_R$ são os operadores estatísticos associados aos sistemas S e R respectivamente. O acoplamento entre os dois subsistemas pode ocasionar em uma troca reversível de energia, polarização, etc.... Vamos considerar que S representa o subsistema que estamos querendo observar, agora para que o operador estatístico $\hat{\rho}_S$ descreva um processo

irreversível devemos impor condições sobre o sistema \mathcal{R} para evitar que a energia inicialmente transferida do sistema \mathcal{S} para o sistema \mathcal{R} , retorne para o sistema \mathcal{S} em um tempo finito. Neste ponto fazemos a seguinte suposição [12]: \mathcal{R} possui infinitos graus de liberdade de forma que os efeitos da interação com \mathcal{S} são totalmente dissipados e desta maneira não reagindo de volta em \mathcal{S} , e \mathcal{R} permanece descrito por uma distribuição de equilíbrio térmico a temperatura constante, independentemente da quantidade de energia e de polarização transferidas de \mathcal{S} para \mathcal{R} . Em outras palavras o subsistema \mathcal{R} , é considerado macroscopicamente grande (um "reservoir" ou banho de calor) representado em qualquer tempo t por seu estado inicial, $\hat{\rho}_{\mathcal{R}}(0)$, que pode ser uma distribuição microcanônica, canônica ou macrocanônica.

Seja H o hamiltoniano do sistema total, escrito como

$$H = H_0 + V, \quad (1.5)$$

onde H_0 , é a soma dos hamiltonianos dos sistemas \mathcal{S} e \mathcal{R} , isto é:

$$H_0 = H_S + H_R, \quad (1.6)$$

observe que se considerarmos que as partes do subsistema \mathcal{S} interagem entre si, estas interações estarão em H_S e não em V ; a mesma observação cabe para H_R , desta forma estamos considerando que V representa a interação entre \mathcal{S} e \mathcal{R} apenas. \hat{H} opera no espaço de Hilbert \mathcal{X} do sistema total, o qual é definido como o produto direto dos espaços de \mathcal{S} e \mathcal{R} , i.e. $\mathcal{X} = \mathcal{X}_{\mathcal{R}} \otimes \mathcal{X}_{\mathcal{S}}$.

Substituindo as expressões (1.5) e (1.6) em (1.2) obtemos

$$\begin{aligned} \hat{L}A &= [\hat{H}_S + \hat{H}_R + V, A] \\ &= [\hat{H}_S, A] + [\hat{H}_R, A] + [V, A], \end{aligned}$$

de onde decorre que o operador Liouvilliano \hat{L} pode ser escrito como

$$\hat{L} = \hat{L}_0 + \hat{L}_{int}, \quad (1.7)$$

com

$$\hat{L}_0 = \hat{L}_S + \hat{L}_R, \quad (1.8)$$

e \hat{L}_{int} e o operador associado à interação entre \mathcal{R} e \mathcal{S} . \hat{L} opera sobre o espaço de Liouville \mathcal{L} do sistema total, o qual é definido como o produto direto dos espaços \mathcal{L}_S e \mathcal{L}_R . Tomando-se o traço nas variáveis do reservóir (subsistema \mathcal{R}) obtemos o operador estatístico reduzido

$$\hat{\rho}_S(t) = Tr_R \hat{\rho}(t), \quad (1.9)$$

que é o operador estatístico para o subsistema \mathcal{S} . Para obtermos a equação de movimento para $\hat{\rho}_S(t)$, é conveniente escrever o operador estatístico do sistema global como

$$\hat{\rho}(t) = \hat{\rho}_S(t)\hat{\rho}_R(0) + \chi(t). \quad (1.10)$$

Neste ponto é conveniente fazermos algumas observações sobre a expressão (1.10). Seja $|\phi_i\rangle$ um conjunto completo de vetores, em um espaço vetorial descrevendo o sistema \mathcal{S} , e $|\theta_j\rangle$ o conjunto completo do resto do universo, o sistema \mathcal{R} . A função de onda mais geral associada ao sistema global ($\mathcal{S} + \mathcal{R}$) pode ser escrita como:

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{i,j} c_{ij}(t) |\phi_i\rangle \otimes |\theta_j\rangle,$$

$$\hat{H}_S |\phi_i\rangle = E_i^S |\phi_i\rangle,$$

$$\hat{H}_R |\theta_j\rangle = E_j^R |\theta_j\rangle,$$

com $c_{ij}(0) = a_i b_j$, e devida a correlações desenvolvidas no decorrer do tempo não podemos escrever

$$|\psi_i\rangle = |\phi_i\rangle \otimes |\theta_i\rangle.$$

Isto significa que neste caso o operador estatístico não pode ser decomposto como um produto direto dos operadores estatísticos de cada subsistema; ou seja ρ não pode ser escrito como

$$\hat{\rho}_R \otimes \hat{\rho}_S,$$

devido às correlações que existem entre os subsistemas S e R . Desta forma o operador $\hat{\chi}(t)$, na equação (1.10) descreve as correlações existentes entre os dois subsistemas. Observe que a equação (1.10) representa a condição básica de irreversibilidade, pois consideramos $\hat{\rho}_R(0)$ para qualquer tempo. Usando (1.9) segue de (1.10) que:

$$\hat{\rho}_S(t) = \text{Tr}_R \hat{\rho}(t) = \hat{\rho}_S(t) \text{Tr}_R \hat{\rho}_R(0) + \text{Tr}_R \hat{\chi}(t),$$

mas como $\hat{\rho}_R(0)$ é o operador estatístico associado a um ensemble, assim temos que $\text{Tr}_R \hat{\rho}_R(0) = 1$ e

$$\text{Tr}_R \hat{\chi}(t) = 0. \quad (1.11)$$

Para $t = 0$, considerando ausência de correlações iniciais, $\hat{\chi}(0) = 0$, temos que

$$\hat{\rho}(0) = \hat{\rho}_R(0) \hat{\rho}_S(0)$$

o que representa a condição de que para $t = 0$ os subsistemas S e R não interagem entre si.

Agora vamos introduzir o operador linear \hat{P} em \mathcal{L} que atua sobre $\hat{\rho}(t)$ e projeta a componente de interesse $\hat{\rho}_R(0) \hat{\rho}_S(t)$, \hat{P} é definido por

$$\hat{P}A = \hat{\rho}_R(0) \text{Tr}_R A, \quad \forall A \in \tilde{\mathcal{L}}_{\text{Tr}_R}, \quad (1.12)$$

onde

$$\tilde{\mathcal{L}}_{\text{Tr}_R} = \{A \in \mathcal{L} | \text{Tr}_R A < \infty\}. \quad (1.13)$$

A partir da igualdade

$$\hat{\rho}(t) = \hat{P} \hat{\rho}(t) + (I - \hat{P}) \hat{\rho}(t), \quad (1.14)$$

onde I , é o operador identidade, usando a equação (1.12) os dois termos do lado direito desta equação escrevem-se

$$\hat{P} \hat{\rho}(t) = \hat{\rho}_R(0) \text{Tr}_R \hat{\rho}(t) = \hat{\rho}_R(0) \hat{\rho}_S(t),$$

$$(I - \hat{P})\hat{\rho}(t) = \hat{\rho}(t) - \hat{\rho}_R(0)\hat{\rho}_S(t) = \hat{\chi}(t).$$

O operador \hat{P} possui as seguintes propriedades:

$$i) \hat{P}^2 = \hat{P} \implies \hat{P} \text{ idempotente}$$

ii) \hat{P} geralmente não é hermitiano para um subspaco $\mathcal{L}_R \subset \mathcal{L}_R$.

Para verificarmos a primeira propriedade vamos operar duas vezes com \hat{P}

$$\hat{P}^2 A = \hat{\rho}_R(0) \text{Tr}_R[\hat{\rho}_R \text{Tr}_R A],$$

mas como $\text{Tr}_R A$ não depende das grandezas associadas a \mathcal{R} podemos escrever

$$\begin{aligned} \hat{P}^2 A &= \hat{\rho}_R(0)(\text{Tr}_R A)\text{Tr}_R[\hat{\rho}_R(0)] \\ &= \hat{\rho}_R(0)\text{Tr}_R A = \hat{P}A, \end{aligned}$$

onde usamos o fato que $\text{Tr}_R \hat{\rho}_R(0) = 1$. Vamos considerar a segunda propriedade: Como já vimos o produto escalar no espaço de Liouville é definido como $(A, B) = \text{Tr}(A^\dagger B)$, e para um superoperador P , limitado em \mathcal{L} , seu adjunto é definido como

$$(A, P^\dagger B) = (PA, B) \quad \forall A, B \in \mathcal{L}. \quad (1.15).$$

P é hermitiano conjugado se

$$(A, PB) = (PA, B). \quad (1.16)$$

Vamos considerar que $A = A_R A_S$ e $B = B_R B_S$, assim temos que

$$\begin{aligned} (A, \hat{P}B) &= \text{Tr}(A^\dagger \hat{P}B) = \text{Tr}\{A^\dagger[\hat{\rho}_R(0)\text{Tr}_R B]\} \\ &= \text{Tr}\{A^\dagger \hat{\rho}_R(0)\text{Tr}_R(B_R B_S)\} \\ &= \text{Tr}\{A^\dagger \hat{\rho}_R(0)B_S \text{Tr}_R B_R\}, \end{aligned}$$

observe que $\text{Tr} \equiv \text{Tr}_R \text{Tr}_S$, e com isto a equação anterior pode ser escrita como

$$\begin{aligned} (A, \hat{P}B) &= \text{Tr}_R \text{Tr}_S[A^\dagger \hat{\rho}_R(0)B_S \text{Tr}_R B_R] \\ &= \text{Tr}_R[A_R^\dagger \hat{\rho}_R(0)]\text{Tr}_S(A_S^\dagger B_S)\text{Tr}_R B_R, \end{aligned}$$

por outro lado

$$(\hat{P}A, B) = \text{Tr}_R A_R^\dagger \text{Tr}_S (A_S^\dagger B_S) \text{Tr}_R [B_R \hat{\rho}_R(0)],$$

então \hat{P} é hermitiano se a seguinte condição for satisfeita,

$$\text{Tr}_R B_R \text{Tr}_R [A_R^\dagger \hat{\rho}_R(0)] = \text{Tr}_R [B_R \hat{\rho}_R(0)] \text{Tr}_R [A_R^\dagger]. \quad (1.17)$$

que nem sempre ocorre (em particular \hat{P} , é hermitiano se $B_R = A_R^\dagger$). Desta forma \hat{P} não é hermitiano sendo um operador de projeção num sentido menos restrito.

Vamos agora operar com \hat{P} e $(I - \hat{P})$ na equação de von Neumann (1.3), para obtermos um sistema de duas equações diferenciais lineares acopladas:

$$\begin{aligned} i \frac{d}{dt} [\hat{P} \hat{\rho}(t)] &= \hat{P} \hat{L} \hat{\rho}(t) \\ &= \hat{P} \hat{L} [\hat{P} \hat{\rho}(t) + (I - \hat{P}) \hat{\rho}(t)], \end{aligned} \quad (1.18)$$

e

$$i \frac{d}{dt} [(I - \hat{P}) \hat{\rho}(t)] = (I - \hat{P}) \hat{L} [\hat{P} \hat{\rho}(t) + (I - \hat{P}) \hat{\rho}(t)]. \quad (1.19)$$

Nas equações acima usamos a equação (1.14) considerando que o operador \hat{P} é independente do tempo; assim (1.18) é a equação de movimento para $\hat{\rho}_S(t)$ enquanto que (1.19) é para $\hat{\chi}(t)$. Para escrever a solução formal de (1.19), primeiro integramos a equação homogênea

$$i \frac{d}{dt} \chi(t) = (I - \hat{P}) \hat{L} \chi(t);$$

onde $\chi(t) = (I - \hat{P}) \hat{\rho}(t)$ cuja solução é

$$\chi(t) = e^{-it(I-\hat{P})\hat{L}} \chi(0),$$

usando o método da variação das constantes escrevemos

$$\chi(t) = e^{-it(I-\hat{P})\hat{L}} \phi(t),$$

a seguir substituímos esta na equação (1.19) obtendo

$$i \frac{d}{dt} [e^{-it(I-\hat{P})L} \phi(t)] = (I - \hat{P}) \hat{L} [\hat{P} \hat{\rho}(t) + e^{-it(I-\hat{P})L} \phi(t)],$$

cuja forma integral

$$\phi(t) = -i \int_0^t dt' e^{it'(I-\hat{P})L} (I - \hat{P}) \hat{L} \hat{P} \hat{\rho}(t');$$

equivale a

$$\chi(t) = (I - \hat{P}) \hat{\rho}(t) = -i \int_0^t dt' e^{-i(t-t')(I-\hat{P})L} (I - \hat{P}) \hat{L} \hat{P} \hat{\rho}(t'). \quad (1.20)$$

Esta equação é a representação integral da equação (1.19); não fizemos uma combinação linear desta equação com a solução para a equação homogênea porque consideramos ausência de correlações iniciais. Substituindo a equação (1.20) em (1.18) obtemos

$$i \frac{d}{dt} [\hat{P} \hat{\rho}(t)] = \hat{P} \hat{L} \hat{P} \hat{\rho}(t) - i \int_0^t dt' e^{-i(t-t')(I-\hat{P})L} (I - \hat{P}) \hat{L} \hat{P} \hat{\rho}(t'), \quad (1.21)$$

a qual é a equação de evolução para $\hat{P} \hat{\rho}(t)$. Enquanto a equação de evolução para $\hat{\rho}(t)$, é governada pela equação de *von Neumann*, a equação para $\hat{P} \hat{\rho}(t)$ é uma equação integro-diferencial com o mesmo conteúdo físico. A equação (1.21) pode ser simplificada levando em conta que $\hat{\rho}_R(0)$ é uma distribuição estacionária, i.e

$$[\hat{\rho}_R(0), H_R] = 0. \quad (1.22)$$

Substituindo a expressão (1.7) para o operador de Liouville, \hat{L} , e usando as relações :

$$\hat{P} \hat{L}_0 = \hat{L}_S \hat{P}, \quad (1.23)$$

$$\hat{P}(I - \hat{P}) = 0, \quad (1.24)$$

obtemos a seguinte equação para $[\hat{P}\hat{\rho}(t)]$:

$$i\frac{d}{dt}[\hat{P}\hat{\rho}(t)] = (L_S + \hat{P}L_{int})\hat{P}\hat{\rho}(t) + \\ - i \int_0^t dt' \hat{P}L_{int} e^{-i(t-t')[L_0 + (I-\hat{P})L_{int}]} (I - \hat{P})L_{int}\hat{P}\hat{\rho}(t'). \quad (1.25)$$

Consideremos o termo $\hat{P}L_{int}\hat{P}\hat{\rho}(t)$, que aparece nesta equação ,

$$PL_{int}\hat{P}\hat{\rho} = \hat{\rho}_R(0)Tr_R[H_{int}, \hat{\rho}_R(0)Tr_R\hat{\rho}] \\ = \hat{\rho}_R(0)Tr_R(H_{int}\hat{\rho}_R(0))\hat{\rho}_S - \hat{\rho}_R(0)\hat{\rho}_S Tr_R(H_{int}\hat{\rho}_R(0)).$$

que se anula pois

$$Tr_R(H_{int}\hat{\rho}_R(0)) = 0 \quad (1.26)$$

Esta condição não é satisfeita quando os elementos diagonais de H_{int} não são nulos, neste caso o termo $\hat{P}\hat{L}_{int}\hat{P}$ corresponde a forças exercidas sobre o sistema S que certamente não dão origem a dissipações . Nós assumimos que a parte diagonal de \hat{H}_{int} na representação de energia do sistema R está incorporada em \hat{H}_0 , desta forma \hat{H}_{int} não é diagonal e portanto

$$\hat{P}\hat{L}_{int}\hat{P} = 0. \quad (1.27)$$

Substituindo na equação (1.26) a definição explícita do operador \hat{P} , eq. (1.13), e tomando-se o traço nas variáveis de R sobre ambos os lados desta equação obtemos

$$i\frac{d}{dt}\rho_S(t) = L_S\rho_S(t) - i \int_0^t dt' G(t - t')\rho_S(t'), \quad (1.28)$$

onde o chamado kernel de memória G e dado por

$$G(t - t') = Tr_R[L_{int}e^{-i(t-t')[L_0 + (I-\hat{P})L_{int}]} L_{int}\rho_R(0)]. \quad (1.29)$$

Na equação (1.29) o primeiro termo descreve o movimento livre do sistema S , enquanto que no segundo termo aparecem os efeitos da interação entre S e R . Esta é a equação fundamental para estudarmos a dinâmica do sistema S .

CAPÍTULO II

II.-A INTERAÇÃO ÁTOMO-FÓTON.

No capítulo anterior obtivemos uma equação de movimento para o operador estatístico $\hat{\rho}_S(t)$ a qual nos permite estudar as propriedades físicas de um sistema de interesse caracterizado por um hamiltoniano \hat{H} . Neste capítulo obteremos o hamiltoniano de N átomos interagindo com um campo eletromagnético, os N átomos constituem o sistema S que estudaremos, enquanto que o campo eletromagnético faz o papel do "reservoir", R . Partindo da hamiltoniana clássica de um elétron num campo eletromagnético, generalizaremos para N elétrons, e em seguida escreveremos o hamiltoniano em termos de operadores de campo. Este hamiltoniano é bastante comum na literatura que versa sobre assuntos tais como superradiância, superfluorescência e de uma forma geral nos textos relacionados à teoria quântica dos processos de relaxação. Vale observar também que a partir deste hamiltoniano podemos obter o hamiltoniano do modelo de Dick [6]. Poderíamos ter assumido este hamiltoniano como ponto de partida, porém as aproximações e considerações envolvidas e que levam à sua obtenção são bastante interessantes, por causa da necessária consistência das aproximações que serão feitas na equação de movimento de $\hat{\rho}_S(t)$.

Consideremos então a hamiltoniana clássica H de uma partícula não relativística de massa m e carga $-e$, na presença de um campo eletromagnético representado pelo potencial vetor $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ e pelo potencial escalar $\varphi(\mathbf{x})$

$$H = \frac{1}{2m}(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}(\mathbf{x}))^2 + V(|\mathbf{x}|) + e\varphi(\mathbf{x}); \quad (2.1)$$

onde $V(|\mathbf{x}|)$ pode ser considerada como sendo a energia potencial eletrostática (estamos trabalhando no sistema C.G.S.). Iremos agora considerar o campo eletromagnético sem

fontes, ou seja

$$\varphi(\mathbf{x}) = 0, \quad (2.2)$$

e usar o "gauge" de Coulomb

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0, \quad (2.3)$$

onde a equação para $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ pode ser expressa inteiramente em termos da corrente transversal \mathbf{J}_t ou seja temos

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{J}_t,$$

a partir das equações de Maxwell [13]. Reescrevendo a equação (2.1), levando em conta (2.2), obtém-se

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(|\mathbf{x}|) - \frac{e}{2mc} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{p} + \mathbf{p} \cdot \mathbf{A}) + \frac{e^2}{2mc^2} \mathbf{A}^2. \quad (2.4)$$

A quantização desta hamiltoniana é feita fazendo-se a correspondência usual entre "c-number \rightarrow q-number",

$$\mathbf{p} \rightarrow -i\hbar \nabla,$$

assim o comutador

$$[\mathbf{A}(\mathbf{x}), \mathbf{p}] = -i\hbar \nabla \cdot \mathbf{A},$$

juntamente com (2.3) permitem escrever a hamiltoniana (2.4) como

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(|\mathbf{x}|) - \frac{e}{mc} \mathbf{A} \cdot \mathbf{p} + \frac{e^2}{2mc^2} \mathbf{A}^2. \quad (2.5)$$

Para N átomos (considerando que cada átomo possui um único elétron) o hamiltoniano atômico é dado por

$$H_A = \sum_{i=1}^N \frac{\mathbf{p}_i^2}{2m} + \sum_{i=1}^N V(|\mathbf{x}_i|) + \sum_{i>j=1}^N V(|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|), \quad (2.6)$$

(desprezamos o movimento dos átomos e tomamos o centro de massa situado no núcleo); os termos restantes irão descrever a interação entre os átomos e o campo,

$$\begin{aligned} H_{int} &= H_{Iint} + H_{IIint} \\ &= -\frac{e}{mc} \sum_{i=1}^N \mathbf{A}(\mathbf{x}_i) \cdot \mathbf{p}_i + \frac{e^2}{2mc^2} \sum_{i=1}^N \mathbf{A}^2(\mathbf{x}_i). \end{aligned} \quad (2.7)$$

II.1-Segunda Quantização do Hamiltoniano H_A

No formalismo de segunda quantização a função de onda eletrônica $\Psi(\mathbf{x})$ torna-se um operador de campo [14]. Decompomos $\Psi(\mathbf{x})$ num conjunto completo de funções ortogonais

$$\Psi(\mathbf{x}) = \sum_j a_j \phi_j(\mathbf{x}), \quad (2.8)$$

$$\Psi^\dagger(\mathbf{x}) = \sum_j a_j^\dagger \phi_j^*(\mathbf{x}), \quad (2.9)$$

onde a_j^\dagger , é um operador de criação e a_j (seu hermitiano conjugado) um operador de destruição de elétrons. Como estamos trabalhando com um sistema fermiônico (os elétrons) os operadores obedecem à regra de anticomutação ,

$$\{ \Psi(\mathbf{x}), \Psi^\dagger(\mathbf{y}) \} \equiv \Psi(\mathbf{x})\Psi^\dagger(\mathbf{y}) + \Psi^\dagger(\mathbf{y})\Psi(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (2.10)$$

e considerando o grau de liberdade do spin ou de polarização temos:

$$\{ \Psi_\alpha(\mathbf{x}), \Psi_\beta^\dagger(\mathbf{y}) \} = \delta_{\alpha\beta} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (2.11)$$

$$\{ \Psi_\alpha(\mathbf{x}), \Psi_\beta(\mathbf{y}) \} = \{ \Psi_\alpha^\dagger(\mathbf{x}), \Psi_\beta^\dagger(\mathbf{y}) \} = 0, \quad (2.12)$$

O operador hamiltoniano neste formalismo é escrito como

$$H = \int d^3\mathbf{x} \Psi^\dagger(\mathbf{x}) H_1(\mathbf{x}) \Psi(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{x} d^3\mathbf{x}' \Psi^\dagger(\mathbf{x}) \Psi^\dagger(\mathbf{x}') V(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \Psi(\mathbf{x}') \Psi(\mathbf{x}), \quad (2.13)$$

onde $H_1(\mathbf{x})$ e $V(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ são operadores de um e dois corpos, respectivamente. Consideremos agora o hamiltoniano dos átomos H_A , onde vamos desprezar a interação entre os elétrons o termo $\sum_{i>j=1}^N V(|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|)$, assim H_A em segunda quantização é obtido substituindo o hamiltoniano usual da equação de Schrodinger

$$H_1 \Psi \equiv \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{x}) \right) \Psi = E \Psi, \quad (2.14)$$

em (2.13), resultando em

$$H_1 = \int d^3\mathbf{x} \Psi^\dagger(\mathbf{x}) H_1 \Psi(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N E_i \int d^3\mathbf{x} \Psi^\dagger(\mathbf{x}) \Psi(\mathbf{x}). \quad (2.15)$$

As funções $\phi(\mathbf{x})$ que aparecem na expansão de $\Psi(\mathbf{x})$, eq.(2.8), são soluções da equação de Schrodinger para o elétron livre,

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \quad (2.16)$$

onde V , é o volume de integração . Nas expressões (2.8) e (2.9) subentendemos que o índice j inclui a soma sobre a polarização do campo.

Substituindo (2.16) em (2.8) temos

$$\begin{cases} \Psi(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}} V^{-\frac{1}{2}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \\ \Psi^\dagger(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^\dagger V^{-\frac{1}{2}} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \end{cases} \quad (2.17)$$

que substituídas na equação (2.15) dão:

$$\begin{aligned} H_A &= \sum_{i=1}^N E_i \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\mathbf{k}'} a_{i\mathbf{k}}^\dagger a_{i\mathbf{k}'} V^{-\frac{1}{2}} \int d^3\mathbf{x} e^{-i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}} \\ &= \hbar \sum_{i=1}^N \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\mathbf{k}'} w_i a_{i\mathbf{k}}^\dagger a_{i\mathbf{k}'} \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} = \hbar \sum_{i=1}^N \sum_{\mathbf{k}} w_i a_{i\mathbf{k}}^\dagger a_{i\mathbf{k}}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

O índice i corre sobre os N átomos do sistema e a energia $\hbar\omega$ está associada ao vetor de onda \mathbf{k} através da relação

$$\hbar\omega = \frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2m}, \quad (2.19)$$

isto mostra claramente que a soma em \mathbf{k} equivale a somar sobre os níveis de energia dos átomos. Para obtermos a expressão em segunda quantização do hamiltoniano de interação , eq.(2.7), necessitamos da expressão do potencial vetor \mathbf{A} , portanto vamos considerar agora a quantização do campo eletromagnético.

II.2-Quantização do Campo Eletromagnético Livre.

As equações de Maxwell no vácuo são escritas como

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0, & \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{E} &= 0, & \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0,\end{aligned}\tag{2.20}$$

e os campos \mathbf{E} e \mathbf{B} podem ser escritos em termos dos potenciais \mathbf{A} e ϕ ,

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \phi \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A},\tag{2.21}$$

assim a densidade de Lagrangeana do campo eletromagnético é dada por

$$L = \frac{1}{8\pi} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{8\pi} (\nabla \times \mathbf{A})^2.\tag{2.22}$$

Como estamos considerando o campo eletromagnético sem fontes, $\phi = 0$, temos

$$L_{CE} = \frac{1}{8\pi} \left[\left(\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right)^2 - (\nabla \times \mathbf{A})^2 \right],\tag{2.23}$$

e lembrando que estamos trabalhando no "gauge" de Coulomb, as equações (2.22) dão as expressões para o campo eletromagnético transversal. De (2.23) podemos obter o momento canônico Π conjugado a \mathbf{A}

$$\Pi = \frac{\partial L_{CE}}{\partial \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right)} = \frac{1}{4\pi c^2} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t},\tag{2.24}$$

que é usado para escrever (2.23) como

$$L_{CE} = 2\pi c^2 \Pi^2 - \frac{1}{8\pi} (\nabla \times \mathbf{A})^2,\tag{2.25}$$

a partir da qual obtemos a densidade de hamiltoniano \mathcal{H}_{CE} e o hamiltoniano H_{CE} do campo livre como

$$\mathcal{H}_{CE} = 2\pi c^2 \Pi^2 + \frac{1}{8\pi} (\nabla \times \mathbf{A})^2, \quad H_{CE} = \int d^3x \mathcal{H}_{CE}\tag{2.26}$$

respectivamente. Consideremos agora que o campo eletromagnético satisfaz às condições de periodicidade sobre as faces de um cubo de lado L e de volume V , as transformadas de Fourier de \mathbf{A} e Π , são

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}_j} A_{\mathbf{k}_j}(t) \mathbf{e}_{\mathbf{k}_j} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} = \sum_{\mathbf{k}_j} A_{\mathbf{k}_j}(t) \mathbf{e}_{\mathbf{k}_j} u_{\mathbf{k}_j}(\mathbf{x}) \quad A_{\mathbf{k}_j} = -A_{-\mathbf{k}_j}^* \quad (2.27)$$

$$\Pi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}_j} \Pi_{\mathbf{k}_j}(t) \mathbf{e}_{\mathbf{k}_j} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} = \sum_{\mathbf{k}_j} \Pi_{\mathbf{k}_j}(t) \mathbf{e}_{\mathbf{k}_j} u_{\mathbf{k}_j}(\mathbf{x}) \quad \Pi_{\mathbf{k}_j} = -\Pi_{-\mathbf{k}_j}^* \quad (2.28)$$

onde

$$u_{\mathbf{k}_j}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}},$$

são vetores de base representando ondas planas, com o vetor número de onda

$$\mathbf{k} = \frac{2\pi}{L} (kn_x + jn_y + kn_z) \quad n_x, n_y, n_z = 0, \pm 1, \pm 2, \dots;$$

os versores $\mathbf{e}_{\mathbf{k}_1}$ e $\mathbf{e}_{\mathbf{k}_2}$ são perpendiculares ao número de onda \mathbf{k} com propriedades

$$\mathbf{e}_{\mathbf{k}_j} = \mathbf{e}_{\mathbf{k}_j}^* = \mathbf{e}_{-\mathbf{k}_j}, \quad \mathbf{e}_{\mathbf{k}_j} \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k}_j'} = \delta_{j,j'}, \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k}_j} = 0, \quad (j = 1, 2).$$

Junto com \mathbf{k} formam uma base, com isto obtemos a decomposição do campo eletromagnético em um conjunto discreto e infinito de modos normais, caracterizados por um dado vetor de onda \mathbf{k} e índice de polarização j .

A quantização é obtida considerando $A_{\mathbf{k}_j}$ e $\Pi_{\mathbf{k}_j}$ como operadores com regras de comutação

$$[A_{\mathbf{k}_j}(t), \Pi_{\mathbf{k}'_j}(t)] = i\hbar \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \delta_{j,j'}. \quad (2.29)$$

No entanto a introdução de novos operadores, $b_{\mathbf{k}_j}$ e $b_{-\mathbf{k}_j}^\dagger$, em (2.27) e (2.28),

$$A_{\mathbf{k}_j}(t) = \left(\frac{2\pi\hbar c^2}{\omega_{\mathbf{k}}}\right)^{\frac{1}{2}} [b_{\mathbf{k}_j}(t) + b_{-\mathbf{k}_j}^\dagger(t)], \quad (2.30)$$

$$\Pi_{\mathbf{k}_j}(t) = i\left(\frac{\hbar\omega_{\mathbf{k}}}{8\pi c^2}\right)^{\frac{1}{2}} [b_{\mathbf{k}_j}^\dagger(t) - b_{-\mathbf{k}_j}(t)], \quad \omega_{\mathbf{k}} = ck, \quad (2.31)$$

com as regras de comutação

$$[b_{\mathbf{k}j}, b_{\mathbf{k}'j'}^\dagger] = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \delta_{jj'}, \quad [b_{\mathbf{k}j}, b_{\mathbf{k}'j'}] = [b_{\mathbf{k}j}^\dagger, b_{\mathbf{k}'j'}^\dagger] = 0, \quad (2.32)$$

é conveniente para o tratamento formal assim como para a interpretação física.

Substituindo a eq.(2.30) na eq.(2.27) temos o potencial vetor quantizado

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mathbf{k}j} \left(\frac{2\pi\hbar c^2}{V\omega_{\mathbf{k}}} \right)^{1/2} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \mathbf{e}_{\mathbf{k}j} (b_{\mathbf{k}j}(t) + b_{-\mathbf{k}j}^\dagger(t)), \quad (2.33)$$

que substituído na expressão (2.26) dá a seguinte expressão para o Hamiltoniano do campo eletromagnético quantizado livre

$$H_{CE} = \hbar \sum_{\mathbf{k}j} \omega_{\mathbf{k}} \left(b_{\mathbf{k}j}^\dagger b_{\mathbf{k}j} + \frac{1}{2} \right). \quad (2.34)$$

As relações de comutação (2.32) são características de operadores bosônicos, desta forma a eq.(2.34) exhibe a equivalência do campo eletromagnético livre com um conjunto de partículas bosônicas. As expressões para os campos elétrico e magnético seguem diretamente de (2.33) e (2.21), com $\phi = 0$.

Os autovalores normalizados de H_{CE} , eq.(2.34), podem ser escritos na representação de Fock como $|n_{\mathbf{k}_1j_1}, n_{\mathbf{k}_2j_2}, \dots\rangle$ ou de forma mais compacta como $|\{n_{\mathbf{k}j}\}\rangle$, onde cada $n_{\mathbf{k}j}$ é um número inteiro e positivo. Nesta notação representamos o autoestado de H_{CE} caracterizado por $n_{\mathbf{k}_1j_1}$ bósons no modo do vetor de onda \mathbf{k}_1 e de polarização $\mathbf{e}_{\mathbf{k}_1j_1}$, $n_{\mathbf{k}_2j_2}$ bosons no modo do vetor de onda \mathbf{k}_2 e de polarização $\mathbf{e}_{\mathbf{k}_2j_2}$ etc.... Estes bosons que vão constituir o campo eletromagnético são chamados fótons. Usando as relações de comutação, eq.(2.32), pode se mostrar que [15]

$$b_{\mathbf{k}j} |\{n_{\mathbf{k}j}\}\rangle = \sqrt{n_{\mathbf{k}j}} |n_{\mathbf{k}_1j_1}, n_{\mathbf{k}_2j_2}, \dots, n_{\mathbf{k}j} - 1, \dots\rangle, \quad (2.35)$$

$$b_{\mathbf{k}j}^\dagger |\{n_{\mathbf{k}j}\}\rangle = \sqrt{n_{\mathbf{k}j} + 1} |n_{\mathbf{k}_1j_1}, n_{\mathbf{k}_2j_2}, \dots, n_{\mathbf{k}j} + 1, \dots\rangle, \quad (2.36)$$

$$b_{\mathbf{k}j}^\dagger b_{\mathbf{k}j} |\{n_{\mathbf{k}j}\}\rangle = n_{\mathbf{k}j} |\{n_{\mathbf{k}j}\}\rangle. \quad (2.37)$$

A ação do operador $b_{\mathbf{k}_1, j}$ sobre um autoestado de H_{CE} aniquila um fóton no modo \mathbf{k}_1, j_1 , enquanto que a ação de $b_{\mathbf{k}_1, j}^\dagger$ cria um fóton neste modo; por isso os nomes de operadores de criação e de aniquilação para b^\dagger e b respectivamente. O operador $b_{\mathbf{k}_1, j}^\dagger b_{\mathbf{k}_1, j}$ é chamado de número de fótons pois seu autovalor fornece o número de fótons $n_{\mathbf{k}_1, j}$ no modo (\mathbf{k}_1, j_1) .

II.3-Segunda Quantização do Hamiltoniano de Interação : Átomos-Campo.

O Hamiltoniano de interação dos átomos com o campo é dado pela expressão (2.7). Neste trabalho não vamos considerar o termo $(\frac{e^2}{2mc^2})A^2$ pois quando se trabalha (em nosso caso) com sistemas cujas dimensões lineares são pequenas comparadas com o comprimento de onda da radiação emitida este termo não modifica a dinâmica do sistema[16]. Para obtermos o Hamiltoniano de interação em segunda quantização substituímos a expressão para H_{int} dada por (2.7) no primeiro termo do lado direito da expressão (2.13) correspondente ao operador de um corpo, usando (2.34) e tendo em vista (2.28), obtemos

$$H_{int} = -\left(\frac{e}{mc}\right) \sum_{i,l,s=1}^N \sum_{\mathbf{k}_1, j_1} \sum_{\mathbf{k}_2, j_2} \sum_{\mathbf{k}_j} \left(\frac{2\pi\hbar}{\omega_{\mathbf{k}}}\right)^{\frac{1}{2}} a_{i\mathbf{k}_1, j_1}^\dagger a_{l\mathbf{k}_2, j_2} [b_{-\mathbf{k}_j}^\dagger(t) + b_{\mathbf{k}_j}(t)] \\ \times \int d^3x \phi_{i\mathbf{k}_1, j_1}^\dagger(\mathbf{x}) u_{\mathbf{k}_j}(\mathbf{x}_s) \cdot \mathbf{P}_s \phi_{l\mathbf{k}_2, j_2}(\mathbf{x}), \quad (2.38)$$

onde usamos as expressões (2.8) e (2.9) para os operadores de campo Ψ e Ψ^\dagger e as autofunções $\{\phi_{\mathbf{k}_j}(\mathbf{x})\}$ dadas por (2.16).

Vamos reescrever a expressão (2.38) como

$$\sum_{i,l,s=1}^N \sum_{\mathbf{k}_j} \sum_{\mathbf{k}_1, j_1} \sum_{\mathbf{k}_2, j_2} \hbar g_{i,l,s,\mathbf{k}_j,\mathbf{k}_1, j_1, \mathbf{k}_2, j_2} a_{i\mathbf{k}_1, j_1}^\dagger a_{l\mathbf{k}_2, j_2} [b_{-\mathbf{k}_j}^\dagger(t) + b_{\mathbf{k}_j}(t)], \quad (2.39)$$

onde

$$g_{i,l,s,\mathbf{k}_j,\mathbf{k}_1, j_1, \mathbf{k}_2, j_2} = -\left(\frac{e}{m\hbar}\right) \left(\frac{2\pi\hbar}{\omega_{\mathbf{k}}}\right)^{\frac{1}{2}} \int d^3x \phi_{i\mathbf{k}_1, j_1}^\dagger(\mathbf{x}) u_{\mathbf{k}_j}(\mathbf{x}_s) \cdot \mathbf{P}_s \phi_{l\mathbf{k}_2, j_2}(\mathbf{x}), \quad (2.40)$$

é a constante de acoplamento átomos-campo. Como não estamos considerando a interação entre os diversos átomos, as funções de onda dos elétrons não se superpõem e com isto os operadores associados a diferentes átomos comutam entre si, ou seja, estas funções de onda são ortogonais, desta forma podemos reescrever as expressões (2.39) e (2.40) colocando o índice i , no lugar de l e s e somamos sobre i . Vamos introduzir agora na expressão (2.40) a aproximação de dipolo: Os $\phi_{i\mathbf{k}j}$ representam funções de onda dos elétrons que estão centradas num ponto \mathbf{x}_{0i} (núcleo atômico) e com valor apreciável apenas num volume $(\Delta x)^3$ em torno de \mathbf{x}_{0i} ; assume-se que a onda plana $u_{\mathbf{k}}(\mathbf{x})$ associada ao campo possui um comprimento de onda muito maior do que as dimensões do átomo, $((\Delta x)^3)$, portanto $u_{\mathbf{k}}(\mathbf{x})$ variará muito pouco dentro deste volume de integração. Para se ter uma idéia as frequências que provavelmente influenciam o movimento atômico no domínio óptico correspondem a comprimentos de onda da ordem de 10^4 \AA , enquanto que as dimensões atômicas são da ordem de 1 \AA [5]. Desta forma nós podemos assumir que os $\{u_{\mathbf{k}j}(\mathbf{x}_i)\}$ são constantes dentro do volume de integração o que permite escrever (2.40) como

$$g_{i,\mathbf{k}j,\mathbf{k}_1j_1,\mathbf{k}_2j_2} = -\left(\frac{e}{m\hbar}\right)\left(\frac{2\pi\hbar}{w_{\mathbf{k}}}\right)^{\frac{1}{2}} u_{\mathbf{k}j}(\mathbf{x}_i) \cdot \int d^3x \phi_{i\mathbf{k}_1j_1}^\dagger(\mathbf{x}) \mathbf{P}_i \phi_{i\mathbf{k}_2j_2}(\mathbf{x}).$$

Agora vamos calcular o elemento de matriz que aparece nesta expressão, para isto usamos

$$\mathbf{P} = m\dot{\mathbf{x}} = \frac{im}{\hbar} [\hat{H}, \mathbf{x}], \quad (2.41)$$

e calculamos os elementos de matriz

$$\langle \mathbf{k}_1 | \mathbf{P}_i | \mathbf{k}_2 \rangle = imw_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2} \langle \mathbf{k}_1 | \mathbf{x}_i | \mathbf{k}_2 \rangle, \quad (2.42)$$

onde

$$w_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2} = \frac{E_{\mathbf{k}_1} - E_{\mathbf{k}_2}}{\hbar}.$$

Substituindo a expressão $u_{\mathbf{k}j}(\mathbf{x})$ que segue de (2.27) e usando a relação (2.42) na expressão para g obtemos,

$$g_{i,\mathbf{k}j,\mathbf{k}_1j_1,\mathbf{k}_2j_2} = -i\left(\frac{w_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2}}{\hbar c}\right)\left(\frac{2\pi\hbar c}{L^3}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{k}} \mathbf{e}_{\mathbf{k}j} \cdot \mathbf{P}_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}, \quad (2.43)$$

onde

$$V = L^3, \quad (2.44)$$

e

$$P_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2} = \langle \mathbf{k}_1 | \alpha_i | \mathbf{k}_2 \rangle, \quad (2.45)$$

Retomando as expressões (2.18), (2.34) e (2.39) obtemos o Hamiltoniano para N -átomos (de um elétron com infinitos níveis de energia) interagindo com um campo eletromagnético externo com infinitos modos, ou seja:

$$\begin{aligned} H = H_a + H_{ce} + H_{int} = & \\ & \hbar \sum_{i=1}^N \sum_{\mathbf{k}\lambda} w_i a_{i\mathbf{k}\lambda}^\dagger a_{i\mathbf{k}\lambda} + \hbar \sum_{\mathbf{k}j} w_k b_{\mathbf{k}j}^\dagger b_{\mathbf{k}j} + \\ & \sum_{i=1}^N \sum_{\mathbf{k}j} \sum_{\mathbf{k}_1 j_1} \sum_{\mathbf{k}_2 j_2} \hbar g_{i,\mathbf{k}j,\mathbf{k}_1 j_1, \mathbf{k}_2 j_2} a_{i\mathbf{k}_1 j_1}^\dagger a_{i\mathbf{k}_2 j_2} [b_{-\mathbf{k}j}^\dagger(t) + b_{\mathbf{k}j}(t)], \end{aligned} \quad (2.46)$$

onde a energia do vácuo $\frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}j} \hbar w_k$ não foi considerada.

II.4 - O Átomo de Dois Níveis de Energia.

Vamos supor que os átomos do nosso sistema possuem somente dois níveis de energia, neste caso a soma que corre sobre os índices \mathbf{k}_1 e \mathbf{k}_2 , nos termos correspondentes aos operadores dos átomos só, na equação (2.46), contribuem com dois termos, 1 e 2, e levam à seguinte expressão para o Hamiltoniano de N -átomos de dois níveis [Ap.B]:

$$H = w_0 \sum_{i=1}^N s_i^z + \hbar \sum_{\mathbf{k}j} w_k b_{\mathbf{k}j}^\dagger b_{\mathbf{k}j} + \sum_{i=1}^N \sum_{\mathbf{k}j} (g_{i,1,2,\mathbf{k}j} s_i^- + g_{i,1,2,\mathbf{k}j}^* s_i^+) (b_{-\mathbf{k}j}^\dagger + b_{\mathbf{k}j}), \quad (2.47)$$

onde s^+ , s^- e s^z são os operadores de momento angular para $s = 1/2$. Esta é a expressão para o hamiltoniano que usaremos em nosso trabalho.

CAPÍTULO III

III.- EQUAÇÃO MASTER PARA O OPERADOR ESTATÍSTICO DE P-CORPOS, NA APROXIMAÇÃO DE CAMPO MÉDIO DE UM CORPO (NÃO CORRELACIONADA)

O operador estatístico ρ_N contém toda a informação sobre um sistema de N -átomos. Para átomos de dois níveis, possui 2^{2N} diferentes elementos de matriz e a matriz densidade, reduz-se a um pequeno espaço gerado por $N + 1$ estados simétricos [3]. Portanto torna-se muito trabalhoso determinar este objeto matemático (operador estatístico ρ_N) o qual nos permite, em princípio, calcular os valores médios dos observáveis do sistema atômico. No entanto estando nosso interesse situado no estudo do processo de emissão individual segue que as correlações entre os átomos não precisarão ser consideradas. Neste espírito vamos obter neste capítulo uma equação de movimento para o operador estatístico de p -corpos ($1 \leq p \leq N$), ρ_p , o qual dependerá funcionalmente do operador ρ_{p+1} de $(p + 1)$ -corpos. Agora iremos considerar os átomos do sistema no estado coerente inicial $|\theta_0 \phi_0\rangle$ ($\theta_0 < \pi$) e obter uma hierarquia de equações na aproximação de partícula independente com ausência de correlações.

III.1- Hierarquia de Equações para o Operador Estatístico de p -Corpos ρ_p [13].

A equação piloto para o operador estatístico de N -corpos, $\rho_N(t)$ é dada por

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_N(t) = & -i\omega_\gamma \sum_{i=1}^N [s_i^+ s_i^-, \rho_N] - \gamma_0 \sum_{i,j=1}^N (s_i^+ s_j^- \rho_N - 2s_j^- \rho_N \rho_N s_i^+ + \rho_N s_i^+ s_j^-) [1 + n(\beta\omega_0)] + \\ & - \gamma_0 \sum_{i,j=1}^N (s_i^- s_j^+ \rho_N - 2s_j^+ \rho_N \rho_N s_i^- + \rho_N s_i^- s_j^+) n(\beta\omega_0); \end{aligned} \quad (3.1)$$

cuja dedução está no apêndice C, considerando o caso de temperatura $T = 0$; (segue de (C-46) que $n(\beta\omega_0) = 0$) a equação (3.1) reduz-se a

$$\dot{\rho}_N(t) = -i\omega_\gamma \sum_{i=1}^N [s_i^+ s_i^-, \rho_N] - \gamma_0 \sum_{i,j=1}^N (s_i^+ s_j^- \rho_N - 2s_j^- \rho_N s_i^+ + \rho_N s_i^+ s_j^-), \quad (3.2)$$

Assim o campo de radiação, no estado de vácuo, interagindo com o sistema atômico é um reservóir a temperatura nula, com isto fica descrito o processo de emissão espontânea com relaxação. Vamos definir agora a taxa de radiação $I(t)$ como a taxa de variação da energia do sistema atômico [5], ou seja

$$I(t) = -\omega_0 \frac{d}{dt} \sum_i Tr_S \{ \rho s_x^i(t) \} = -\omega_0 \frac{d}{dt} \sum_i \langle s_x^i(t) \rangle. \quad (3.3)$$

Multiplicando os dois lados da equação (3.2) por s_x , tomando-se o traço sobre as variáveis do sistema e usando as relações de comutação (B-17), ou seja

$$[s_x^i, s_j^\pm] = \pm \hbar s_i^\pm \delta_{ij}, \quad \hbar = 1, \quad (3.4)$$

obtemos

$$\frac{d}{dt} \langle s_x^i \rangle + \sum_j \gamma_{ij} \{ \langle s_i^+ s_j^- \rangle + \langle s_j^+ s_i^- \rangle \} = 0, \quad (3.5)$$

agora substituindo esta em (3.3) verificamos que a taxa de radiação é dada por

$$I(t) = 2\omega_0 \sum_{ij} \gamma_{ij} \langle s_i^+(t) s_j^-(t) \rangle. \quad (3.6)$$

Considerando as características da radiação emitida em $t = 0$ e fazendo a aproximação de grandes comprimentos de onda, (C-82), obtemos

$$I(0) = 2\omega_0 \gamma_0 \langle S_i^+ S_j^- \rangle_0, \quad (3.7)$$

onde S^+ e S^- são os operadores coletivos introduzidos no Apêndice B, eq.(B-30), e $\langle \rangle_0$ refere-se ao valor médio no estado inicial. Vamos calcular $I(0)$ quando os átomos estão inicialmente em estados coerentes de Bloch [14]

$$\rho_N(0) = \prod_{i=1}^N \rho_{i1}(0) = \prod_{i=1}^N |\theta_0 \phi_0 \rangle_i \langle \theta_0 \phi_0|_i, \quad (3.8)$$

na ausência de correlações onde $|\theta_0 \phi_0 \rangle$ e dado por

$$|\theta_0, \phi_0 \rangle_i = \cos\left(\frac{\theta_0}{2}\right) e^{-i\phi_0/2} |+\rangle_i + \sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right) e^{i\phi_0/2} |-\rangle_i, \quad (3.9)$$

e $|+\rangle_i$ e $|-\rangle_i$ são os estados excitado e fundamental do i -ésimo átomo respectivamente. Substituindo (3.8) em (3.7) e escrevendo

$$S^+ S^- = \sum_{i,j=1}^N s_i^+ s_j^- + \sum_{i \neq j=1}^N s_i^+ s_j^-, \quad (3.10)$$

obtemos a seguinte expressão para a intensidade da radiação :

$$I(0) = 2\gamma\omega_0 N \sin^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right) \{1 + (N-1)\cos^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right)\}; \quad (3.11)$$

para $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ e para grandes valores de N temos

$$I(0) \propto N^2,$$

o que mostra que um sistema excitado para um estado da forma (3.8), (com $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$) dá origem a uma emissão superradiante caracterizada por ser proporcional ao quadrado do número de átomos. Note-se que o estado inicial (3.8) com $\theta_0 = \pi/2$ e possuidor de um momento de dipólo máximo, pois

$$\langle S^+ \rangle_0 = \frac{N}{2} \sin(\theta_0) \cos(\phi_0),$$

e

$$\langle S^- \rangle_0 = \frac{N}{2} \sin(\theta_0) \sin(\phi_0).$$

Este tipo de emissão é conhecida como superradiância de primeira espécie e é devida ao fato de que o sistema possui inicialmente um momento de dipólo finito. Consideremos agora a equação (3.2), o operador estatístico de p -corpos, ($p < N$), é obtido de ρ_N , tomando-se o traço sobre as coordenadas das partículas restantes, ou seja

$$\rho_p = \text{Tr}_{p+1,p+2,\dots,N}(\rho), \quad (3.12)$$

onde $\text{Tr}_{p+1,p+2,\dots,N}$, indica o traço sobre as coordenadas dos $(p+1)$, $(p+2)$, ..., N -ésimo átomo. Considerando (3.2) e (3.12), obtemos a seguinte equação

$$\begin{aligned} -\dot{\rho}_p &= i\omega_\gamma \sum_{i=1}^N \text{Tr}_{(p+1),(p+2),\dots,n} [s_i^+ s_i^-, \rho] + \\ &+ \gamma_0 \sum_{i,j=1}^N \text{Tr}_{(p+1),(p+2),\dots,n} (s_i^+ s_j^- \rho_N - 2s_j^- \rho_N s_i^+ + \rho_N s_i^+ s_j^-), \end{aligned} \quad (3.13)$$

que pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} -\dot{\rho}_p &= i\omega_\gamma \left\{ \sum_{i=1}^p + \sum_{i=p+1}^N \right\} \text{Tr}_{(p+1),(p+2),\dots,n} [s_i^+ s_i^-, \rho] + \\ &+ \gamma_0 \left\{ \sum_{1 \leq i,j \leq p} + \sum_{\substack{1 \leq i \leq p \\ p+1 \leq j \leq N}} + \sum_{\substack{p+1 \leq i \leq N \\ 1 \leq j \leq p}} + \sum_{p+1 \leq i \neq j \leq N} \right\} \times \\ &\times \text{Tr}_{(p+1),(p+2),\dots,n} (s_i^+ s_j^- \rho_N - 2s_j^- \rho_N s_i^+ + \rho_N s_i^+ s_j^-) + \\ &+ \sum_{p+1 \leq i \leq N} \text{Tr}_{(p+1),(p+2),\dots,n} (s_i^+ s_i^- \rho_N - 2s_i^- \rho_N s_i^+ + \rho_N s_i^+ s_i^-). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Nos termos em que o índice da soma coincide com o índice do traço, podemos usar a propriedade cíclica deste último, como por exemplo

$$\begin{aligned} \sum_{i=p+1}^N \text{Tr}_{(p+1),(p+2),\dots,N} [s_i^+ s_i^-, \rho] &= \sum_{i=p+1}^N \text{Tr}_{(p+1),(p+2),\dots,N} (s_i^+ s_i^- \rho - \rho s_i^+ s_i^-) \\ &= \sum_{i=p+1}^N \text{Tr}_{(p+1),(p+2),\dots,N} (s_i^+ s_i^- \rho - s_i^+ s_i^- \rho) \\ &= 0, \end{aligned} \quad (3.15)$$

e desta forma os termos onde aparecem somatórias

$$\sum_{i=p+1}^N, \quad \sum_{p+1 \leq i \neq j \leq N}$$

são identicamente nulos. No segundo membro da equação (3.14), o segundo e terceiro símbolos de soma podem ser escritos num só termo se trocarmos $i \rightarrow j$, assim a equação (3.14) reduz-se a:

$$\begin{aligned} -\dot{\rho}_p(t) = & i\omega_\gamma \sum_{i=1}^p [s_i^+ s_i^-, \rho_p] + \gamma_0 \left\{ \sum_{i,j=1}^p (s_i^+ s_j^- \rho_p - 2s_j^- \rho_p s_i^+ + \rho_p s_i^+ s_j^-) + \right. \\ & \left. + \sum_{\substack{1 \leq i \leq p \\ p+1 \leq j \leq N}} (s_i^+ s_j^- \rho - 2s_j^- \rho s_i^+ + \rho s_i^+ s_j^- + s_j^+ s_i^- \rho - 2s_i^- \rho s_j^+ + \rho s_j^+ s_i^-) \right\} \end{aligned} \quad (3.16)$$

Vamos agora simplificar o ultimo termo desta expressão: Como todos os átomos são idênticos segue que todos os termos em $\sum_{p+1 \leq i \leq N}$, dão a mesma contribuição, portanto como

$$\sum_{p+1 \leq i \leq N} 1 = (N - p), \quad (3.17)$$

e usando a propriedade cíclica do traço no termo $-2s_j^- \rho s_i^+$, a equação (3.16) escreve-se

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_p(t) = & -i\omega_\gamma \sum_{i=1}^p [s_i^+ s_i^-, \rho_p] - \gamma_0 \sum_{i,j=1}^p (s_i^+ s_j^- \rho_p - 2s_j^- \rho_p s_i^+ + \rho_p s_i^+ s_j^-) + \\ & - \gamma_0 (N - p) \text{Tr}_{p+1} \left\{ s_{p+1}^- \left[\sum_{i=1}^p s_i^+, \rho_{p+1} \right] + h.c. \right\}, \end{aligned} \quad (3.18)$$

onde $h.c.$ e o termo adjunto do anterior. Esta equação mostra que o operador estatístico de p -corpos, ρ_p , depende funcionalmente do operador estatístico de $(p+1)$ -corpos, e é uma característica geral dos sistemas de muitos corpos. Para obtermos um sistema de equações fechados nós devemos romper a hierarquia destas equações, tornando-se necessário efetuar uma aproximação apropriada sobre o operador estatístico de $(p+1)$ -corpos. Consideramos que o operador estatístico de p -corpos, ρ_p , se constitua de um produto de operadores

estatísticos de um corpo. Nós nos referimos a esta aproximação como a "Aproximação de ausência de correlação", ou "Aproximação de Campo Médio",

$$\rho_p = \prod_{i=1}^p \rho_1(i). \quad (3.19)$$

Por exemplo o operador estatístico de dois corpos pode se escrito como

$$\rho_2(1,2) = \rho_1(1)\rho_1(2) + \chi(1,2), \quad (3.20)$$

onde

$$\rho_1(1) = \text{Tr}_2 \rho_2(1,2) \text{ e } \rho_1(2) = \text{Tr}_1 \rho_2(1,2), \quad (3.21)$$

e χ contém as correlações existentes entre as partículas 1 e 2; ao assumirmos a aproximação (3.19), estamos considerando que χ pode ser desprezada para certas condições iniciais em que o sistema pode ser preparado. Uma equação para o operador estatístico de p-corpos, ρ_p , pode ser obtida de (3.1), seguindo o mesmo procedimento usado na dedução da equação (3.2), ou por observar que o termo que é multiplicado por $n(\beta w_0)$ em (3.1) pode ser obtido de uma forma sistemática trocando os operadores $s_i^+ \rightarrow s_i^-$ e $s_j^+ \rightarrow s_j^-$, na expressão que é multiplicada por $[1 + n(\beta w_0)]$, desta forma segue diretamente de (3.18) que

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_p(t) = & -i\omega_\gamma \sum_{i=1}^p [s_i^+ s_i^-, \rho_p] - \gamma_0 \sum_{i,j=1}^p (s_i^+ s_j^- \rho_p - 2s_j^- \rho_p s_i^+ + \rho_p s_i^+ s_j^-) [1 + n(\beta w_0)] + \\ & - \gamma_0 (N-p) \text{Tr}_{p+1} \{ s_{p+1}^- [\sum_{i=1}^p s_i^+, \rho_{p+1}] + h.c. \} [1 + n(\beta w_0)] + \\ & - \gamma_0 \sum_{i,j=1}^p (s_i^- s_j^+ \rho_p - 2s_j^+ \rho_p s_i^- + \rho_p s_i^- s_j^+) n(\beta w_0) + \\ & - \gamma_0 (N-p) \text{Tr}_{p+1} \{ s_{p+1}^+ [\sum_{i=1}^p s_i^-, \rho_{p+1}] + h.c. \} n(\beta w_0), \end{aligned} \quad (3.22)$$

esta se caracteriza por ser uma equação não linear nos termos multiplicados por $(N-p)$.

CAPÍTULO IV

I.- EQUAÇÕES DE BLOCH NÃO LINEARES PARA A MAGNETIZAÇÃO E SUPERRADIÂNCIA .

Vamos passar ao estudo da dinâmica de um átomo genérico do conjunto dos N -átomos do sistema considerando $p = 1$ na equação (3.22) que vai descrever o comportamento de um átomo imerso no campo médio dos $(N - 1)$ -átomos restantes, onde todos os N -átomos interagem com o reservóir. Como iremos trabalhar com o operador estatístico de um corpo, de um átomo de dois níveis, será introduzida uma base completa de operadores hermitianos, construída a partir dos operadores s^+ , s^- e s_z de spin $1/2$ junto com o operador identidade I . Nesta base é possível decompor o operador estatístico de um corpo com o intuito de obter um sistema de equações diferenciais não lineares de primeira ordem, acopladas, conhecidas como Equações de Bloch Não Lineares (E.B.N.L.). Também iremos apresentar uma outra abordagem conhecida como método neoclássico [6], o qual permite obter os mesmos termos não lineares que aparecem nas equações de Bloch mas onde agora o campo eletromagnético é tratado classicamente, enquanto que as variáveis atômicas são consideradas como objetos quânticos. Estes tratamentos serão aplicados ao modelo de Dicke que descreve o fenômeno de superradiância.

IV.1- Equações de Bloch Não Lineares para a Magnetização .

O operador estatístico de um átomo é obtido de (3.22) fazendo $p = 1$, ou seja

$$\begin{aligned}
\dot{\rho}_1 = & -iw_\gamma[s_1^+s_1^-, \rho_1] - \gamma_0(s_1^+s_1^-\rho_1 - 2s_1^-\rho_1s_1^+ + \rho_1s_1^+s_1^-)[1 + n(\beta w_0)] + \\
& - \gamma_0(\rho_0 - V^{-1})Tr_2\{s_2^-[s_1^+, \rho_1(1)\rho_1(2)] + h.c.\}[1 + n(\beta w_0)] + \\
& - \gamma_0(s_1^-s_1^+\rho_1 - 2s_1^+\rho_1s_1^- + \rho_1s_1^-s_1^+)n(\beta w_0) + \\
& - \gamma_0(\rho_0 - V^{-1})Tr_2\{s_2^+[s_1^-, \rho_1(1)\rho_1(2)] + h.c.\}n(\beta w_0), \tag{4.1}
\end{aligned}$$

onde usamos a aproximação de um corpo (ausência de correlações quânticas) para o operador estatístico $\rho_2(1, 2)$,

$$\rho_2(1, 2) = \rho_1(1)\rho_1(2), \tag{4.2}$$

e Tr_2 representa o traço sobre os operadores da partícula 2. Os termos dentro do sinal do traço na equação (4.1) podem ser agrupados e com isto esta equação reduz-se a

$$\begin{aligned}
\dot{\rho} = & -iw_\gamma[s^+s^-, \rho] - \gamma_0(s^+s^-\rho - 2s^-\rho s^+ + \rho s^+s^-)[1 + n(\beta w_0)] + \\
& - \gamma_0(s^-s^+\rho - 2s^+\rho s^- + \rho s^-s^+)n(\beta w_0) + \\
& - \gamma_0(\rho_0 - V^{-1})\{\langle s^- \rangle [s^+, \rho] + [\rho, s^-] \langle s^+ \rangle\}, \tag{4.3}
\end{aligned}$$

e como todos os operadores são de uma partícula genérica não se torna necessário manter os índices. O último termo desta equação é quadrático no operador estatístico, porque

$$\langle s^- \rangle = Tr(s^-\rho), \tag{4.4}$$

isto mostra a sua natureza não linear. No Apêndice B introduzimos os autovetores $|2\rangle$ e $|1\rangle$ representando respectivamente o estado excitado e fundamental de um átomo de dois níveis, aqui vamos representar estes estados por $|+\rangle$ e $|-\rangle$, autoestados do operador s_x , e da teoria geral do momento angular temos que

$$s^+|+\rangle = s^-|-\rangle = 0, \tag{4.5a}$$

$$s^+|-\rangle = |+\rangle, \tag{4.5b}$$

$$s^-|+\rangle = |-\rangle, \quad (4.5c)$$

$$s_z|\pm\rangle = \pm\frac{1}{2}|\pm\rangle, \quad (4.5d)$$

onde os operadores s^+ , s^- e s_z estão definidos no Apêndice B. Os estados $|+\rangle$ e $|-\rangle$ são ortonormais, ou seja

$$\langle +|+\rangle = \langle -|-\rangle = 1, \quad (4.6a)$$

$$\langle +|-\rangle = \langle -|+\rangle = 0. \quad (4.6b)$$

Vale observar que estes estados correspondem a uma notação conveniente dos estados $|j, m\rangle$, onde $j = 1/2$, $m = \pm 1/2$, com

$$s^\pm|j, m\rangle = [j(j+1) - m(m \pm 1)]^{1/2}|j, m \pm 1/2\rangle, \quad (4.7)$$

$$s_z|j, m\rangle = m|j, m\rangle, \quad (4.8)$$

a partir das quais segue as equações (4.5). Com os operadores s^+ , s^- e s_z podemos construir uma base gerada pelos operadores

$$O_1 = \frac{1}{2}(I + 2s_z), \quad (4.9)$$

$$O_2 = \frac{1}{2}(I - 2s_z), \quad (4.10)$$

$$O_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(s^+ + s^-), \quad (4.11)$$

$$O_4 = \frac{i}{\sqrt{2}}(s^+ - s^-), \quad (4.12)$$

ou inversamente

$$s_x = \frac{1}{\sqrt{2}}O_3, \quad s_y = -\frac{1}{\sqrt{2}}O_4, \quad s_z = \frac{1}{2}(O_1 - O_2). \quad (4.13)$$

Os operadores O_i são hermitianos,

$$O_i = O_i^\dagger, \quad (4.14)$$

e satisfazem á condição de ortonormalidade na definição de produto interno

$$\langle O_i | O_j \rangle = \text{Tr} O_i O_j = \sum_{m=-,+} \langle m | O_i O_j | m \rangle = \delta_{ij}, \quad (4.15)$$

que é de imediata verificação usando as definições (4.9) a (4.12) e (4.5). Nesta base o operador estatístico de um corpo ρ pode ser escrito como

$$\rho(t) = \sum_{i=1}^4 w_i(t) O_i, \quad w_i = w_i^*, \quad (4.16)$$

onde a dependência temporal de $\rho(t)$ está nos coeficiente da expansão $w_i(t)$. Substituindo esta expressão em (4.3), multiplicando em seguida os dois lados por O_i e calculando o traço obtemos um sistema de quatro equações acopladas para os coeficientes

$$\begin{aligned} \dot{w}_j(t) = & -i w_\gamma \sum_{i=1}^4 w_i \text{Tr} O_j [s^+ s^-, O_i] - \gamma [1 + n(\beta w_0)] \sum_{i=1}^4 w_i \text{Tr} O_j (s^+ s^- O_i - 2s^- O_i s^+ + O_i s^+ s^-) \\ & - \gamma_0 n(\beta w_0) \sum_{i=1}^4 w_i \text{Tr} O_j (s^- s^+ O_i - 2s^+ O_i s^- + O_i s^- s^+) + \\ & - \gamma_0 (\rho_0 - V^{-1}) \sum_{i=1}^4 w_i \text{Tr} O_j \{ \langle s^- \rangle [s^+, O_i] + [O_i, s^-] \langle s^+ \rangle \}, \quad i = 1, 2, 3, 4, \end{aligned} \quad (4.17)$$

onde

$$\langle s^\pm \rangle = \sum_{i=1}^4 w_i \text{Tr} (s^\pm O_i), \quad (4.18)$$

porém a condição de normalização do operador estatístico $\rho(t)$,

$$\text{Tr} \rho(t) = \sum_{m=-}^+ \langle m | \sum_{i=1}^4 w_i(t) O_i | m \rangle = w_1 + w_2 = 1, \quad (4.19)$$

vincula os coeficiente w_1 e w_2 e com isto o sistema se reduz a três equações acopladas. Os cálculos são feitos no Apêndice D, aqui apresentamos as equações obtidas para estes coeficientes

$$\dot{w}_1 = -2\gamma_0(1 + n)w_1 + 2\gamma_0 n w_2 - \gamma_0(\rho_0 - V^{-1})(w_3^2 + w_4^2), \quad (4.20)$$

$$\dot{w}_2 = 2\gamma_0(1+n)w_1 - 2\gamma_0nw_2 + \gamma_0(\rho_0 - V^{-1})(w_3^2 + w_4^2), \quad (4.21)$$

$$\dot{w}_3 = w_1w_4 - \gamma_0(1+2n)w_3 + \gamma_0(\rho_0 - V^{-1})w_3(w_1 - w_2), \quad (4.22)$$

$$\dot{w}_4 = -w_1w_3 - \gamma_0(1+2n)w_4 + \gamma_0(\rho_0 - V^{-1})w_4(w_1 - w_2), \quad (4.23)$$

lembrando que $\rho_0 = N/V$ e a densidade atômica.

Vamos introduzir a definição da magnetização macroscópica \mathbf{M} [12] dada por

$$\mathbf{M}_i = \frac{1}{2}\rho_0\gamma_g \langle \sigma_i \rangle, \quad \hbar = 1, \quad (4.24)$$

onde $i = x, y$ e z e γ_g e a razão giromagnética. Usando as expressões em (4.13) e a equação (4.15), obtemos de (4.24) que

$$M_x = \rho_0\gamma_g \text{Tr}(s_x \sum_{i=1}^4 w_i O_i) = \frac{1}{\sqrt{2}}\rho_0\gamma_g w_3, \quad (4.25)$$

$$M_y = \rho_0\gamma_g \text{Tr}(s_y \sum_{i=1}^4 w_i O_i) = \frac{1}{\sqrt{2}}\rho_0\gamma_g w_4, \quad (4.26)$$

$$M_z = \rho_0\gamma_g \text{Tr}(s_z \sum_{i=1}^4 w_i O_i) = \frac{1}{2}\rho_0\gamma_g(w_1 - w_2). \quad (4.27)$$

Substituindo as equações (4.20)-(4.23) em (4.25)-(4.27) e como $w_1 + w_2 = 1$, conforme a equação (4.19), obtemos:

$$\dot{M}_x = -w_L M_y - \frac{M_x}{T_2} + \gamma \frac{\rho_0 - V^{-1}}{\rho_0\gamma_g} M_x M_z, \quad (4.28)$$

$$\dot{M}_y = w_L M_x - \frac{M_y}{T_2} + \gamma \frac{\rho_0 - V^{-1}}{\rho_0\gamma_g} M_y M_z, \quad (4.29)$$

$$\dot{M}_z = -\frac{M_x}{T_1} - \frac{\gamma\rho_0\gamma_g}{2} - \gamma \frac{\rho_0 - V^{-1}}{\rho_0\gamma_g} (M_x^2 + M_y^2), \quad (4.30)$$

onde

$$T_1 = [2\gamma(n + \frac{1}{2})]^{-1}, \quad (4.31)$$

$$T_2 = [\gamma(n + \frac{1}{2})]^{-1}, \quad (4.32)$$

são tempos de relaxação térmica e

$$\tau = 2\tau_0. \quad (4.33)$$

A equação (4.30) sem o termo não linear tem como solução :

$$M_x(t) = M_x(0)e^{-t/\tau_1} + \frac{\rho_0}{2}\gamma_g\tau T_1(e^{-t/\tau_1} - 1), \quad (4.34)$$

e para tempos muito grandes seu valor de equilíbrio é

$$M_x|_{t \rightarrow \infty} = M_x(\infty) = -\frac{\rho_0}{2}\gamma_g\tau T_1. \quad (4.35)$$

Fazendo a mudança de variáveis

$$X = \frac{M_x}{\gamma_g}, \quad Y = \frac{M_y}{\gamma_g}, \quad Z = \frac{M_z}{\gamma_g}, \quad Z(\infty) = \frac{M(\infty)}{\gamma_g}, \quad (4.36)$$

usando (4.35) e multiplicando os dois lados das equações (4.28)-(4.30) por w_L^{-1} , podemos reescrever este conjunto de equações como

$$\dot{X} = -\frac{w_L}{\tau}Y - \frac{X}{\tau T_2} + \frac{\rho_0 - V^{-1}}{\rho_0}XZ, \quad (4.37)$$

$$\dot{Y} = \frac{w_L}{\tau}X - \frac{Y}{\tau T_2} + \frac{\rho_0 - V^{-1}}{\rho_0}YZ, \quad (4.38)$$

$$\dot{Z} = -\frac{Z - Z(\infty)}{\tau T_1} - \frac{\rho_0 - V^{-1}}{\rho_0}(X^2 + Y^2), \quad (4.39)$$

onde o tempo é medido em unidades de τ^{-1} assim temos uma variação temporal adimensional, e X , Y e Z possuem dimensão de densidade.

IV.1.1-Equações de Bloch.

Consideremos a parte linear do sistema de equações (4.37)-(4.39),

$$\dot{X} = -\frac{w_L}{\tau}[\mathbf{J} \times \hat{\mathbf{k}}]_x - \frac{X}{\tau T_2}, \quad (4.40)$$

$$\dot{Y} = -\frac{\omega_L}{\gamma} [\mathbf{J} \times \hat{\mathbf{k}}]_y - \frac{Y}{\gamma T_2}, \quad (4.41)$$

$$\dot{Z} = -\frac{Z - Z(\infty)}{\gamma T_1}, \quad (4.42)$$

onde

$$\mathbf{J} = X\hat{\mathbf{i}} + Y\hat{\mathbf{j}} + Z\hat{\mathbf{k}} \quad (4.43)$$

é chamado de vetor de Bloch. O conjunto das equações (4.40)-(4.42) foi primeiramente introduzido fenomenologicamente por Bloch (1946)[18] e posteriormente justificado microscopicamente por Bloch e Wangsness (1952)[19]; este sistema é conhecido como Equações de Bloch. A principal característica do processo de relaxação é a sua descrição em termos dos tempos de relaxação, T_1 e T_2 . Vamos discutir a natureza física destes tempos: Consideremos as equações (4.40)-(4.42) sem os termos que descrevem o processo de relaxação

$$\dot{X} = -Y, \quad (4.44a)$$

$$\dot{Y} = X, \quad (4.44b)$$

$$\dot{Z} = 0, \quad (4.44c)$$

o vetor \mathbf{J} precessa livremente ao redor do campo estático \mathbf{H}_0 com uma frequência ω_L . A componente Z permanece constante e X e Y giram, com módulo constante no plano $x - y$. Introduzindo a interação do sistema de spin com a vizinhança, este relaxará para o equilíbrio térmico e seu comportamento será descrito pelas soluções das equações (4.40)-(4.42), ou seja:

$$X(t) = X(0)\text{sen}(\omega_L t + \phi)e^{-t/T_2}, \quad (4.45a)$$

$$Y(t) = Y(0)\text{cos}(\omega_L t + \phi)e^{-t/T_2}, \quad (4.45b)$$

$$Z(t) = [Z(0) - Z(\infty)]e^{-t/T_1} + Z(\infty), \quad (4.45c)$$

onde ϕ é uma fase inicial. Estas equações mostram que $X(t)$ e $Y(t)$ tendem assintoticamente a zero e $Z(t)$ alcançará seu valor de equilíbrio $Z(\infty)$. Desta forma T_2 está relacionado a

relaxação de $X(t)$ e $Y(t)$, os quais são ortogonais a \mathbf{H}_0 , e por esta razão T_2 é chamado de "tempo de relaxação transversal"; enquanto que T_1 está relacionado com a relaxação da componente longitudinal Z de \mathbf{J} e desta forma é chamado de "tempo de relaxação longitudinal".

A razão porque $X(t)$ e $Y(t)$ vão a zero quando o sistema atinge o equilíbrio térmico é devido ao fato de não haver uma direção transversal preferida. A direção das componentes transversais individuais variam aleatoriamente de um átomo para outro de forma que a resultante é nula. Por sua vez a componente longitudinal $Z(t)$ não é nula no equilíbrio térmico devido à simetria axial do sistema, mantida pelo campo magnético estático \mathbf{H}_0 , o qual produz uma diferença de energia entre os dois níveis que está associada à diferença de população destes no equilíbrio térmico. Observamos que nestas equações os tempos T_1 e T_2 dependem da temperatura; usando a expressão (C-44) podemos escrever a componente $Z(\infty)$ como:

$$Z(\infty) = -\frac{\rho_0}{2} \tanh\left(\frac{w_L}{2k_B T}\right), \quad (4.46)$$

e desta forma vemos que a diferença de população dos estados de spin ou de partículas nos estados $|+\rangle$ e $|-\rangle$ depende da temperatura do reservóir.

IV.2.-Descrição Clássica da Emissão de Radiação de um Sistema de N -Átomos [6].

Nosso objetivo nesta seção é apresentar uma descrição semiclássica do comportamento dinâmico do modelo de Dicke para N -átomos na ausência de um campo externo e assim obter os mesmos termos não lineares que aparecem nas equações (4.37)-(4.39). A abordagem é chamada "neoclássica" [6] e supõe que o campo eletromagnético seja descrito classicamente, enquanto que as variáveis atômicas são consideradas como objetos quânticos. As componentes dos operadores de dipolo são substituídas por seus valores

médios, que têm o mesmo papel das componentes dos dipolos clássicos [20]. Seguindo esta linha vamos calcular o campo elétrico $E_l(t)$, que atua no l -ésimo átomo, gerado pelos dipolos elétricos oscilantes associados a todas as fontes (átomos de dois níveis) presentes no sistema. Primeiro vamos escrever a contribuição para $E_l(t)$ devido a fonte m , com $m \neq l$, a qual representamos por $E_{lm}(t)$. O dipolo oscilante clássico associado ao m -ésimo átomo é [21]

$$D_m(t) = \langle e q_m \rangle_t = \hat{n} D_m(t), \quad (4.47)$$

onde q_m é a média do operador posição da carga eletrônica do m -ésimo átomo, conforme a equação (2.45), onde a média é feita sobre o estado quântico do m -ésimo átomo no tempo t . Vamos assumir que todos os dipolos estão orientados na mesma direção de forma que o vetor unitário \hat{n} é independente de m . O campo elétrico gerado no ponto x_l é dado pela expressão [22]

$$E_{lm}(t) = \left\{ \frac{3[D_m]}{x_{lm}^3} + \frac{3[\dot{D}_m]}{c x_{lm}^4} + \frac{[\ddot{D}_m]}{c^2 x_{lm}^3} \right\} (\hat{n} \cdot x_{lm}) x_{lm} - \left\{ \frac{[D_m]}{x_{lm}^3} + \frac{[\dot{D}_m]}{c x_{lm}^2} + \frac{[\ddot{D}_m]}{c^2 x_{lm}} \right\} \hat{n}; \quad (4.48)$$

onde

$$x_{lm} = x_l - x_m, \quad (4.48a)$$

$$x_{lm} = |x_{lm}|, \quad (4.48b)$$

e

$$[D_m] = D_m\left(t - \frac{x_m}{c}\right). \quad (4.49)$$

Na eletrodinâmica clássica costuma-se considerar o campo gerado por cargas em movimento como o resultado da soma de duas contribuições, o campo de indução e o campo de radiação [23]. O campo de indução é a parte do campo total que se caracteriza pelo fato de que sua contribuição para o fluxo associado ao vetor de Poynting se anula quando o raio da esfera de integração é tomado como infinito e a restante é chamada campo de radiação. Esta separação é importante para que a descrição neoclássica seja consistente com a emissão superradiante de Dicke e neste caso o campo de indução deve ser desprezado.

Infelizmente a separação destas duas contribuições para um dado valor de x_{lm} não é imediata na equação (4.48) por causa da dependência espacial implícita nos tempos de atraso em (4.49). Porém usando a suposição que temos feito nos cálculos anteriores, de que a dimensão do sistema é bastante pequena com relação ao comprimento de onda da radiação emitida, pode-se considerar o campo elétrico $\mathbf{E}_{lm}(t)$ no limite de pequenas distâncias. Nestas condições a equação (4.48) torna-se [24]

$$\mathbf{E}_{lm}(t) = \left\{ \frac{3(\hat{n} \cdot \mathbf{x}_{lm})}{x_{lm}^3} \mathbf{x}_{lm} - \frac{\hat{n}}{x_{lm}^3} \right\} D_m - \frac{2w_m^2}{3c^3} \hat{n} \cdot \dot{D}_m, \quad (4.50)$$

onde o campo de indução é o termo dentro das chaves, observamos que este depende do inverso do cubo da distância. O campo total gerado por todas as fontes sobre o l -ésimo átomo, é a soma de todas as contribuições $\mathbf{E}_{lm}(t)$ com $l \neq m$. Devemos considerar também o campo $\mathbf{E}_{ll}(t)$, do l -ésimo átomo, que atua sobre si mesmo. Conforme Stroud e Jaynes podemos escrever [20]

$$\mathbf{E}_{ll}(t) = \frac{4w_l^2 k_c}{3\pi c^2} \hat{n} D_l - \frac{2w_l^2}{3c^3} \hat{n} \dot{D}_l. \quad (4.51)$$

Esta equação dá a contribuição para o autocampo devido a todos os modos eletromagnéticos com uma frequência de corte k_c , o termo associado a frequência de corte k_c dá, somente a contribuição para o "Lamb-shift", de forma que aqui não consideraremos este termo. Vamos agora obter as equações para a evolução quântica de cada uma das N -fontes que formam a parte atômica de nosso sistema. Como a fonte l está sujeita ao campo elétrico clássico

$$\mathbf{E}^{(l)}(t) = \sum_{m=1}^N \mathbf{E}_{lm}(t), \quad (4.52)$$

dado por (4.50) e (4.51) vamos escrever o operador interação entre as fontes e o campo como

$$H_I = - \sum_{l=1}^N \mathbf{D}_l \cdot \mathbf{E}_l(t), \quad (4.53)$$

onde \mathbf{D}_l é o operador de momento de dipolo da l -ésima fonte. Como o campo elétrico é clássico, H_I age somente no espaço de Hilbert da parte atômica de todo sistema. Além

disto como os operadores de dipolo associados a diferentes átomos comutam entre si então H_I é aditivo com respeito a estes operadores (partícula independente em campo médio). Se o estado atômico inicial pode ser escrito como o produto de estados de uma fonte, esse permanecerá nesta forma para qualquer tempo [25]. Neste sentido podemos dizer que a aproximação neoclássica tem como consequência direta forçar a evolução do sistema, em estados fatorizados. Desta forma nosso problema se reduz ao de uma única fonte genérica e por isto podemos centrar nossa atenção na l -ésima fonte. No espaço de Hilbert bi-dimensional gerado pelos autoestados $|+ \rangle_l$ e $|- \rangle_l$ da l -ésima fonte, podemos escrever um operador vetorial como uma superposição linear dos operadores de Pauli $\sigma_x^{(l)}$, $\sigma_y^{(l)}$ e $\sigma_z^{(l)}$, como já fizemos anteriormente. A energia da l -ésima fonte pode ser escrita como

$$H_\lambda^{(l)} = \omega_l \sigma_z^{(l)}, \quad \hbar = 1, \quad (4.54)$$

enquanto que o operador de dipolo pode ser escrito como

$$\mathbf{D}^{(l)} = \hat{n} d s_z^{(l)}, \quad (4.55)$$

(o momento de dipolo d é definido na equação (2.45)) observe que \hat{n} não é operador e sim um versor. A evolução temporal da l -ésima fonte na representação de interação obedece à equação

$$i \frac{\partial}{\partial t} |t \rangle_l = \tilde{H}_I(t) |t \rangle_l, \quad (4.56)$$

onde

$$\begin{aligned} \tilde{H}_I(t) &= e^{iH^{(l)}t} (-\mathbf{D}^{(l)} \cdot \mathbf{E}^{(l)}) e^{-iH^{(l)}t} = \\ &= -d \hat{n} \cdot \mathbf{E}^{(l)} [\sigma_x^{(l)} \cos(\omega_l t) - \sigma_y^{(l)} \sin(\omega_l t)]. \end{aligned} \quad (4.57)$$

A equação de Schrodinger (4.56) é equivalente a equação vetorial [26]

$$\dot{\mathbf{j}}^{(l)} = \boldsymbol{\Omega}^{(l)} \times \mathbf{J}^{(l)}, \quad (4.58)$$

de valores médios de um conjunto completo de operadores, onde $\mathbf{J}^{(l)}$ e o vetor de Bloch, já definido na equação (4.43) caracterizando o estado do l -ésimo átomo. Neste caso as componentes cartesianas $X^{(l)}$, $Y^{(l)}$ e $Z^{(l)}$ de $\mathbf{J}^{(l)}$ são iguais aos valores médios dos operadores $\sigma_x^{(l)}$, $\sigma_y^{(l)}$ e $\sigma_z^{(l)}$ respectivamente. O vetor frequência $\Omega^{(l)}$, que depende do tempo, tem componentes

$$\Omega_x^{(l)}(t) = -2d^* \mathbf{E}^{(l)} \cos(\omega_l t), \quad (4.59)$$

$$\Omega_y^{(l)}(t) = -2d^* \mathbf{E}^{(l)} \text{sen}(\omega_l t), \quad (4.60)$$

$$\Omega_z^{(l)}(t) = 0, \quad (4.61)$$

Observe que o movimento descrito pelas equações (4.59) e (4.60) ocorre no espaço fictício da esfera de Bloch de raio unitário ($X^{(l)2} + Y^{(l)2} + Z^{(l)2} = 1$). Para podermos manter a condição de invariância do campo na região ativa não consideramos a interação dipolo-dipolo, (campo de indução) que é o termo entre chaves na equação (4.50), assumiremos que o campo elétrico na posição do l -ésimo átomo seja dado por

$$\mathbf{E}^{(l)} = \frac{2}{3c^3} \hat{n} \sum_m \omega_m^2 \dot{\mathbf{D}}_m(t). \quad (4.62)$$

Escrevendo o momento de dipolo $\dot{\mathbf{D}}^{(m)}(t)$ em função das componentes transversais do vetor de Bloch \mathbf{J} , num sistema de referência que gira com frequência angular constante ω_l e substituindo $\mathbf{E}^{(l)}(t)$ dado pela eq.(4.62) em (4.59)-(4.61), a equação de movimento para $\mathbf{J}^{(l)}$ toma a forma

$$\dot{X}^{(l)} = \gamma_0 Z^{(l)} \sum_m \{X^{(m)} \cos[(\omega_l - \omega_m)t] + Y^{(m)} \text{sen}[(\omega_l - \omega_m)t]\}, \quad (4.63)$$

$$\dot{Y}^{(l)} = -\gamma_0 Z^{(l)} \sum_m \{X^{(m)} \text{sen}[(\omega_l - \omega_m)t] + Y^{(m)} \cos[(\omega_l - \omega_m)t]\}, \quad (4.64)$$

$$\begin{aligned} \dot{Z}^{(l)} = & \gamma_0 \{Y^{(l)} \sum_m \{X^{(m)} \text{sen}[(\omega_l - \omega_m)t] + Y^{(m)} \cos[(\omega_l - \omega_m)t]\} + \\ & - X^{(l)} \sum_m \{X^{(m)} \cos[(\omega_l - \omega_m)t] + Y^{(m)} \text{sen}[(\omega_l - \omega_m)t]\}. \end{aligned} \quad (4.65)$$

Para chegar a esta expressão despreza-se os termos de oscilação rápida de frequências $\omega_l + \omega_m \sim 2\omega_0$, onde ω_0 e a frequência de ressonância e o valor de gama é dado por (C-72). Estas equações mostram que mesmo na ausência da interação dipolo-dipolo o comportamento de cada fonte é modificado pela presença das outras, e que este efeito pode ser descrito em termos clássicos. Vamos considerar o caso em que os N -átomos possuem a mesma frequência ressonante $\omega_l = \omega_0$, as equações (4.63)-(4.65) são somadas em l , levando a

$$\dot{X} = \gamma_0 X Z, \quad (4.66)$$

$$\dot{Y} = \gamma_0 Y Z, \quad (4.67)$$

$$\dot{Z} = -\gamma_0(X^2 + Y^2), \quad (4.68)$$

onde X , Y e Z são as componentes do vetor de Bloch macroscópico

$$\mathbf{J} = \sum_{l=1}^N \mathbf{J}^{(l)}. \quad (4.69)$$

Podemos verificar que J^2 é uma constante de movimento: Tendo em vista (4.69) é suficiente mostrar que o produto escalar $\mathbf{J}^{(l)} \cdot \mathbf{J}^{(m)}$ de um dado par de fontes é independente do tempo, segue de (4.58) que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\mathbf{J}^{(l)} \cdot \mathbf{J}^{(m)}) &= (\boldsymbol{\Omega}^{(m)} \times \mathbf{J}^{(m)}) \cdot \mathbf{J}^{(l)} + (\boldsymbol{\Omega}^{(l)} \times \mathbf{J}^{(l)}) \cdot \mathbf{J}^{(m)} = \\ &= (\boldsymbol{\Omega}^{(m)} - \boldsymbol{\Omega}^{(l)}) \cdot (\mathbf{J}^{(m)} \times \mathbf{J}^{(l)}); \end{aligned} \quad (4.70)$$

que é nula para $\omega_l = \omega_m$. Consequentemente o comprimento do vetor macroscópico é determinado pelas direções iniciais dos N vetores de Bloch $\mathbf{J}^{(l)}(0)$

$$\mathbf{J}^2(t) = \sum_{l,m} \mathbf{J}^{(m)} \cdot \mathbf{J}^{(l)} = \sum_{l,m} \mathbf{J}^{(m)}(0) \cdot \mathbf{J}^{(l)}(0) = \mathbf{J}^2(0). \quad (4.71)$$

Dependendo das orientações iniciais do vetor $\mathbf{J}^{(l)}$, o comprimento do vetor \mathbf{J} pode assumir valores entre 0 e N . Como veremos mais adiante se todos os vetores de Bloch

individuais $J^{(i)}$ estiverem alinhados em $t = 0$ então $J \sim N$ e os dipolos irão emitir em fase possibilitando assim a emissão de radiação cuja intensidade é proporcional ao quadrado do número de dipolos radiantes do sistema, ou seja N^2 , chamada de emissão superradiante e neste caso

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = N^2. \quad (4.72)$$

Tendo em vista a expressão para a intensidade da radiação, eq.(3.3), e usando as eqs.(4.54) e (4.68) temos

$$I(t) = -\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N \langle H_A \rangle = -\frac{1}{2} \omega_0 \dot{Z} = \frac{1}{2} \omega_0 \gamma_0 (N^2 - Z^2), \quad (4.73)$$

a qual mostra que para $Z \sim 0$ ocorre uma emissão superradiante. Substituindo a eq.(4.72) em (4.68) e integrando obtém-se

$$Z(t) = -N \tanh\left[\left(\frac{t - t_0}{T_R}\right)\right], \quad (4.74)$$

onde

$$T_R = \frac{1}{N\gamma_0}. \quad (4.75)$$

é o tempo de relaxação característico da emissão superradiante sendo da ordem do tempo de relaxação da emissão normal, $\tau_n = \gamma_0^{-1}$, (decaimento exponencial) dividido pelo número de fontes radiantes Na equação (4.74) o tempo de retardo, t_0 , é o tempo decorrido desde $t = 0$ até o momento em que a intensidade da emissão de radiação atinge o seu valor máximo proporcional a N^2 . Uma expressão para a intensidade da radiação pode ser obtida das equações (4.73) e (4.74),

$$I(t) = I_0 \frac{N^2}{2} \operatorname{sech}^2\left[\left(\frac{t - t_0}{T_R}\right)\right], \quad (4.76)$$

onde

$$I_0 = \gamma_0 \omega_0, \quad (4.77)$$

e

$$I(t_0) = I_0 \frac{N^2}{2}. \quad (4.78)$$

O tempo t_0 depende das condições iniciais, dos valores absolutos das componentes transversais do vetor de Bloch, isto pode ser visto substituindo a equação (4.74) em (4.72)

$$X(0)^2 + Y(0)^2 = N^2[1 - \tanh^2(\frac{t_0}{T_R})], \quad (4.79)$$

assim quanto menor o valor absoluto dos dipolos iniciais, será mais longo o tempo de retardo. Podemos verificar também que para diferentes valores de $X(0)$ e $Y(0)$ teremos iguais curvas para a intensidade da radiação, no entanto com picos de emissão máximo localizados de acordo com os diferentes valores de t_0 .

Segue também desta equação que a condição inicial $X(0) = Y(0) = 0$ conduz a uma configuração metaestável, ou seja o tempo de retardo t_0 diverge, $t_0 \rightarrow \infty$, e isto significa que o sistema deve permanecer num estado excitado indefinidamente. Isto é uma falha que ocorre neste tratamento neoclássico.

IV.3.-Os Estados de Dicke [1,3].

Obtivemos anteriormente, eq.(B-31) o Hamiltoniano de Dicke, bem como os operadores coletivos (B-20) de forma que este Hamiltoniano define o chamado modelo de Dicke. O que faremos agora é obter os autoestados dos operadores coletivos J^\pm e J_z . Para isto vamos assumir que em $t = 0$ todos os átomos estão excitados no nível $|+\rangle$, de forma que o sistema atômico esteja no estado

$$|\Psi(0)\rangle = \prod_{i=1}^N |+\rangle_i. \quad (4.80)$$

No formalismo do "pseudo-spin" introduzido no Apêndice B, descrevemos cada átomo do ensemble como um sistema de spin 1/2, representado pelos estados $|+\rangle$ e $|-\rangle$. Um estado de N -átomos invariante por permutações destes é isomorfo a uma superposição simétrica de N -estados de spin 1/2, $|JM\rangle$, com $J = N/2$. Existem $N + 1$ estados

obtidos por repetidas operações com o operador coletivo de destruição, $\sum_{i=1}^N s_i^-$, sobre o estado inicial $|\Psi(0)\rangle$:

$$|JM\rangle = \left[\frac{(J+M)!}{N!(J-M)!} \right] \left(\sum_{i=1}^N s_i^- \right)^{J-M} |+, +, \dots, +\rangle, \quad (4.81)$$

onde

$$-J \leq M \leq J. \quad (4.82)$$

O estado $|JM\rangle$, é totalmente simétricos com $(J+M)$ átomos no estado $|+\rangle$ e $(J-M)$ átomos no estado $|-\rangle$. Os operadores coletivos J^\pm e J_z dados por (B-20), também podem ser escritos em termos dos operadores individuais

$$s_i^+ = |+\rangle\langle-|, \quad s_i^- = |-\rangle\langle+|, \quad (4.83)$$

$$s_z^i = \frac{1}{2} [|+\rangle\langle+| - |-\rangle\langle-|], \quad (4.84)$$

como

$$J^\pm = \sum_{i=1}^N s_i^\pm; \quad J_z = \sum_{i=1}^N s_z^i; \quad (4.85)$$

satisfazendo a equação

$$J^2 = \frac{1}{2}(J^+J^- + J^-J^+) + J_z^2. \quad (4.86)$$

Os estados $|JM\rangle$ são autoestados de J^2 e J_z ;

$$J_z|JM\rangle = M|JM\rangle, \quad (4.87)$$

$$J^2|JM\rangle = J(J+1)|JM\rangle \quad (4.88)$$

e pode-se verificar facilmente que

$$\langle JM | \sum_i s_i^+ s_i^- | JM \rangle = J+M \quad \langle JM | \sum_i s_i^- s_i^+ | JM \rangle = J-M, \quad (4.89)$$

de forma que os operadores $\sum_i s_i^+ s_i^-$ e $\sum_i s_i^- s_i^+$ representam o número de átomos nos estados $|+\rangle$ e $|-\rangle$ respectivamente. A energia do sistema, H_A , sem o campo externo,

(reservoir) no estado $|JM\rangle$ e $M\omega_0$ enquanto que a energia no estado $|J0\rangle$ é tomada como "origem". Desta forma a evolução temporal do sistema atômico aparece como uma evolução em "cascata" dos $2J + 1 = N + 1$ níveis equidistantes. Na figura abaixo representamos esquematicamente este processo

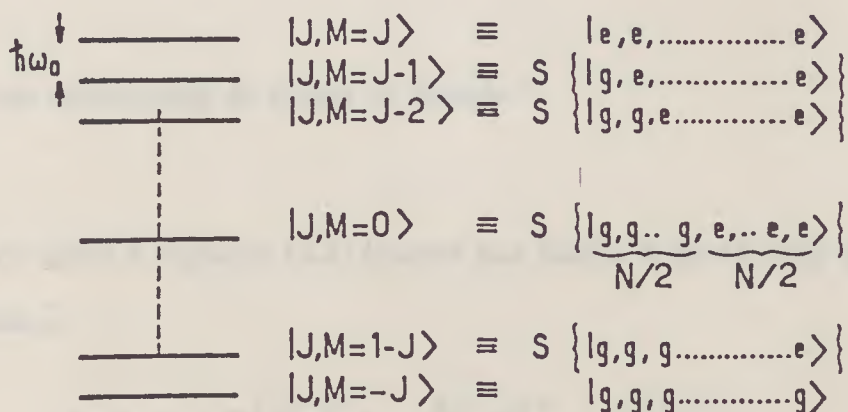


Fig.2. Diagramas dos $N + 1$ estados simétricos $|JM\rangle$:

O sistema atômico é preparado em $t = 0$ no estado $|JM\rangle = |+, +, \dots, +\rangle$ e decai, emitindo radiação, através dos estados intermediários $|JM\rangle$ até o estado fundamental $|-, -, \dots, -\rangle$.

Usando a equação (3.7) podemos calcular a taxa de emissão ou intensidade de radiação, eq.(3.2), quando o estado inicial é dado por (4.81) da mesma forma que foi feito para a obtenção da equação (3.11),

$$I(0) = 2\gamma\omega \frac{N}{2} \left(\frac{N}{2} + 1 \right) - M^2 + M]. \quad (4.90)$$

Para $M = 0$ temos

$$I(0) \propto N^2, \quad (4.91)$$

ou seja, o sistema preparado em $t = 0$ num estado $|\frac{N}{2} 0\rangle$ conduz a uma emissão superradiante; fazer $M = 0$ significa que o momento de dipolo coletivo é nulo a emissão

superradiante é devida às correlações atômicas presentes no sistema. Desta forma podemos distinguir duas espécies de emissão superradiante: aquelas dada pela equação (3.11) na qual não existe em $t = 0$ correlações entre os átomos e a superradiância é devida a um momento de dipolo inicial finito; este tipo de superradiância é chamado de superradiância de primeira espécie. Já na emissão de radiação dada pela equação (4.90), de segunda espécie os momentos de dipolos em $t = 0$ são nulos e mesmo assim o sistema conduz a uma emissão superradiante a qual neste caso é devida às correlações atômicas presentes no sistema em $t = 0$.

IV.3.1-Cálculo aproximado do tempo de retardo.

Consideremos agora a equação (3.2) (vamos nos limitar a parte real) que descreve o processo de relaxação

$$\dot{\rho}_{real} = -\gamma_0(S^+S^-\rho - 2S^-\rho S^+ + \rho S^+S^-), \quad (4.92)$$

onde introduzimos os operadores coletivos (4.85). Calculando o valor esperado nos estados $|JM\rangle$ obtemos a equação master

$$\dot{\rho}_M(t) = -2\gamma_0(J+M)(J-M+1)\rho_M + 2\gamma_0(J+M+1)(J-M)\rho_{M+1}. \quad (4.93)$$

Definindo as probabilidades de transição

$$\Gamma_{M \rightarrow M-1} = 2\gamma_0(J+M)|J-(M-1)|, \quad (4.94)$$

$$\Gamma_{M+1 \rightarrow M} = 2\gamma_0(J+M+1)(J-M), \quad (4.95)$$

podemos reescrever a equação (4.93) como

$$\dot{\rho}_M = -\Gamma_{M \rightarrow M-1}\rho_M + \Gamma_{M+1 \rightarrow M}\rho_{M+1}, \quad (4.96)$$

onde ρ_M é a probabilidade de encontrar o sistema no tempo t , no estado $|JM\rangle$, e consequentemente a probabilidade de que o sistema tenha emitido $J - M$ fótons. Vamos usar esta equação para fazer uma análise qualitativa do processo de emissão: No início do processo de emissão em "cascata" com o sistema, preparado em $t = 0$, no estado $|JJ\rangle$; a probabilidade de emissão por unidade de tempo do primeiro fóton é

$$\Gamma_{J \rightarrow J-1} = 2\gamma_0 N, \quad (4.97)$$

assim para tempos $t \geq 0$, podemos fazer a seguinte aproximação na equação (4.94)

$$J + M \simeq N, \quad (4.98)$$

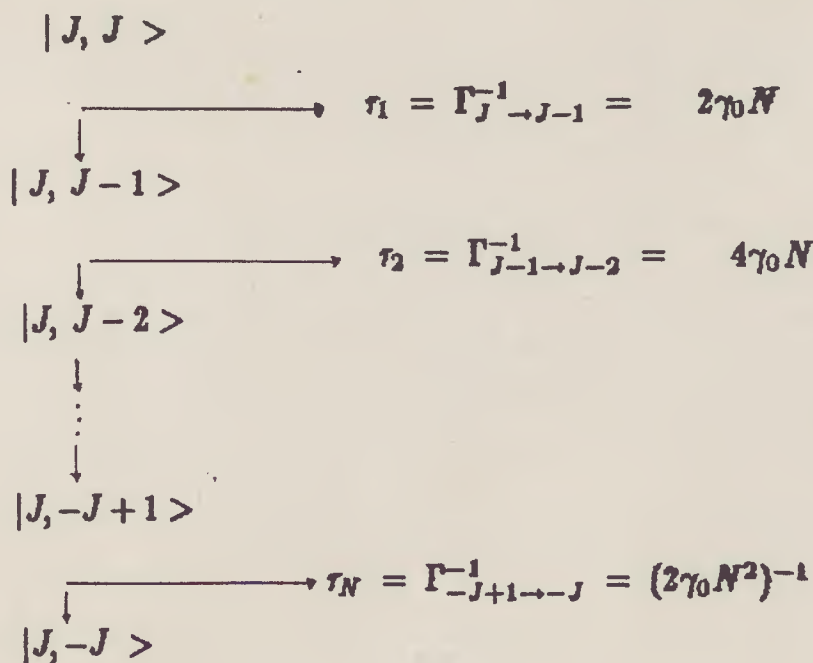
e escrever

$$(J - M + 1) = s; \quad (4.99)$$

definindo o tempo médio de emissão do s -ésimo fóton como

$$\tau_s = \Gamma_{M \rightarrow M-1}^{-1} = (2\gamma_0 N s)^{-1}, \quad (4.100)$$

construimos o seguinte diagrama para os intervalos de tempo de emissão entre dois estados consecutivos



A soma dos τ_i nos dá uma estimativa da duração do processo global, ou seja

$$t_0 = \sum_{i=1}^N \tau_i = \frac{1}{2\gamma_0 N} \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{N} \right] =$$

$$= \frac{C}{2\gamma_0 N} + \frac{1}{2\gamma_0} \frac{\ln N}{N} + \frac{1}{4\gamma_0 N^2} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_k}{N^2(N+1)\dots(N+K-1)}; \quad (4.101)$$

onde

$$A_k = \frac{1}{k} \int_0^1 dx x(1-x)(2-x)(3-x)\dots(k-1-x),$$

e $C = .577215\dots$, a constante de Euler. Para $N \gg 1$ e mantendo somente os termos da ordem de N^{-1} , obtemos

$$t_0 = \frac{1}{2\gamma_0} \frac{\ln N}{N} = \frac{1}{2} \tau_R \ln N = \frac{1}{2} \tau_n \frac{\ln N}{N}, \quad (4.102)$$

onde τ_R é o tempo de duração do pulso, eq.(4.79); assim esta equação nos dá um valor finito para o tempo de retardo t_0 , o qual não foi possível de ser obtido da abordagem neoclássica.

CAPÍTULO V

V.- ANÁLISE E DISCUSSÃO DAS E.B.N.L..

No capítulo anterior apresentamos as E.B.N.L., eqs.(4.37)-(4.39), e discutimos as implicações físicas decorrentes de situações truncadas: as equações de Bloch, eqs.(4.41)-(4.43) e o sistema de equações não lineares, eqs.(4.66)-(4.68). Neste capítulo vamos estudar as E.B.N.L. sem truncamento e verificar como elas descrevem o fenômeno de superradiância. O sistema foi integrado para diferentes condições iniciais e para diferentes valores da temperatura.

Vamos escrever as E.B.N.L. considerando $\rho \gg V^{-1}$

$$\dot{X} = -\frac{\omega_L}{\gamma}Y - \frac{1}{\gamma T_2}X + XZ, \quad (5.1)$$

$$\dot{Y} = \frac{\omega_L}{\gamma}X - \frac{1}{\gamma T_2}Y + YZ, \quad (5.2)$$

$$\dot{Z} = -\frac{1}{\gamma T_1}[Z - Z_{(\infty)}] - (X^2 + Y^2), \quad (5.3)$$

e onde o tempo é medido em unidades de γ^{-1} , $\tau = \gamma t$. As transformações

$$X = W(\tau)\cos\left(\frac{\omega_L}{\gamma}\tau + \phi\right), \quad (5.4)$$

$$Y = W(\tau)\sin\left(\frac{\omega_L}{\gamma}\tau + \phi\right), \quad (5.5)$$

permitem eliminar os termos oscilantes das E.B.N.L. onde $W(\tau)$ é o módulo da projeção do vetor de Bloch sobre o plano $x - y$. Substituindo as expressões (4.31) e (4.32) para T_1 e T_2 podemos reescrever (5.1)-(5.3) como:

$$\dot{W} = -\left[\left(n + \frac{1}{2}\right) - Z\right]W, \quad (5.6)$$

$$\dot{Z} = -\left[(2n + 1)Z + \frac{\rho}{2} + W^2\right]. \quad (5.7)$$

A intensidade da radiação emitida pelo sistema segue imediatamente das eqs.(3.3) e (5.7), sendo dada por

$$I(\tau) = (2n + 1)Z + \frac{\rho}{2} + W^2. \quad (5.8)$$

O sistema de duas equações acopladas, (5.6) e (5.7) pode ser reduzido a uma única equação diferencial de segunda ordem para $Z(\tau)$

$$\ddot{Z} + 4(an + 1)\dot{Z} - 2Z\dot{Z} = 4(2n + 1)Z^2 + (4(2n + 1)^2 + \rho)Z - \rho, \quad (5.9)$$

identificamos o lado esquerdo como a equação de Ricatti [27] que no caso homogêneo possui solução dada em termos das funções de Bessel. Nas equações (5.1)-(5.3) X e Y representam as densidades de momento de dipolo transversal do sistema, enquanto que Z e a densidade de momento de dipolo longitudinal (na direção do campo magnético H_0 , o qual tem a direção \hat{k}), assim se no tempo $\tau = 0$ todos os dipolos do sistema estiverem alinhados na direção do campo as componentes X e Y serão nulas, por sua vez para $X(0)$ e $Y(0)$ máximos, $Z(0)$ será nulo. Desta forma as condições iniciais $W(0)$ e $Z(0)$ não são independentes mas possuem um vínculo que pode ser determinado a partir das definições (4.24) e (4.36) e de X , Y e Z . Consideremos o sistema S preparado em $t = 0$ nos estados coerentes atômicos, de forma que o operador estatístico de um corpo seja escrito como

$$\rho(0) = |\theta_0, \phi_0 \rangle \langle \theta_0, \phi_0|, \quad (5.10)$$

com isto os valores médios iniciais das componentes do vetor de Bloch são dadas por

$$\begin{aligned} J_i &= \rho \langle s_i \rangle_0 = \rho \text{Tr}\{s_i |\theta_0, \phi_0 \rangle \langle \theta_0, \phi_0|\} \\ &= \rho \langle \theta_0, \phi_0 | s_i | \theta_0, \phi_0 \rangle; \quad (i = x, y, z). \end{aligned} \quad (5.11)$$

substituindo

$$s_x = \frac{1}{2}(s^+ + s^-), \quad (5.12)$$

$$s_y = \frac{1}{2i}(s^+ - s^-), \quad (5.13)$$

e o estado atômico coerente

$$|\theta_0, \phi_0\rangle = \cos\left(\frac{\theta_0}{2}\right)e^{-i\phi_0/2}|+\rangle + \text{sen}\left(\frac{\theta_0}{2}\right)e^{i\phi_0/2}|-\rangle, \quad (5.14)$$

em (5.11) obtemos

$$\begin{aligned} J_x(0) &= X(0) = \rho \langle \theta_0, \phi_0 | s_x | \theta_0, \phi_0 \rangle \\ &= \frac{\rho}{2} \text{sen}(\theta_0) \cos(\phi_0), \end{aligned} \quad (5.15)$$

$$\begin{aligned} J_y(0) &= Y(0) = \rho \langle \theta_0, \phi_0 | s_y | \theta_0, \phi_0 \rangle \\ &= \frac{\rho}{2} \text{sen}(\theta_0) \text{sen}(\phi_0), \end{aligned} \quad (5.16)$$

$$\begin{aligned} J_z(0) &= Z(0) = \rho \langle \theta_0, \phi_0 | s_z | \theta_0, \phi_0 \rangle \\ &= \frac{\rho}{2} \cos(\theta_0), \end{aligned} \quad (5.17)$$

que são as componentes do vetor de Bloch em coordenadas esféricas; segue destas equações que

$$X(0)^2 + Y(0)^2 + Z(0)^2 = W(0)^2 + Z(0)^2 = \left(\frac{\rho}{2}\right)^2, \quad (5.18)$$

assim fixando o valor inicial de $Z(0)$ ($W(0)$) o valor de $W(0)$ ($Z(0)$) é determinado por

$$W(0) = \left[\left(\frac{\rho}{2}\right)^2 - Z(0)^2 \right]^{1/2}, \quad (5.19)$$

ou

$$Z(0) = \left[\left(\frac{\rho}{2}\right)^2 - W(0)^2 \right]^{1/2}. \quad (5.20)$$

Isto mostra que para

$$Z(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad W_{\max} = \frac{\rho}{2}, \quad (5.21)$$

e para

$$W(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad Z_{\max} = \frac{\rho}{2}. \quad (5.22)$$

No modelo neoclássico (seção 4.2) o vetor de Bloch é uma constante de movimento devido à ausência de interação do sistema com o reservoir. Considerando a interação ligada o valor máximo do módulo desse vetor é $\frac{\rho}{2}$ que não é mais uma constante de movimento, sua evolução temporal é governada pela equação

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt}(W^2 + Z^2) = -(n + \frac{1}{2})[W^2 + 2Z^2] - \frac{\rho}{2}Z,$$

que reflete a influência do reservoir sobre o sistema. Ao conduzir o sistema para o equilíbrio térmico o reservoir introduz uma irreversibilidade no mesmo, que pode ser verificada a partir das equações (5.6) e (5.7): Consideremos primeiro o sistema e o reservoir não interagindo, as equações dinâmicas são dadas por

$$\dot{W} = WZ, \tag{5.23}$$

$$\dot{Z} = -W^2, \tag{5.24}$$

as quais são basicamente as equações (4.66)-(4.68). Como o vetor de Bloch tem o mesmo caráter de simetria que o vetor de momento angular

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}, \tag{5.25}$$

vemos que as três componentes, X , Y e Z do vetor de Bloch trocam de sinal sob uma troca $\tau \rightarrow -\tau$

$$X \rightarrow -X, \tag{5.26a}$$

$$Y \rightarrow -Y, \tag{5.26b}$$

$$Z \rightarrow -Z \tag{5.26c}$$

e

$$W(-\tau) \rightarrow W(\tau), \tag{5.26d}$$

verificando-se assim a invariância por reversão temporal das equações (5.23) e (5.24). No entanto fazendo uma reversão temporal no sistema de eqs. (5.6) e (5.7) obtemos

$$\dot{W} = [(n + \frac{1}{2}) + Z]W, \quad (5.27)$$

$$\dot{Z} = -[-(2n + 1)Z + \frac{\rho}{2} + W^2], \quad (5.28)$$

não se verificando a invariância por reversão temporal, o que caracteriza a ocorrência de um processo irreversível.

A interpretação do fenômeno descrito pelas E.B.N.L. pode ser feita em termos da magnetização ou em termos da diferença de população dos níveis. No primeiro caso $X(\tau)$, $Y(\tau)$ e $Z(\tau)$ nos dão a evolução temporal das componentes longitudinal e transversal da magnetização macroscópica $\mathbf{M} = \mathbf{J}\gamma g$, e as condições iniciais $W(0) = 0$ e $Z(0) = Z(0)_{max} = \frac{\rho}{2}$ significam que todos os momentos de dipolo dos átomos do sistema estão alinhados na direção do campo; quando o sistema vai para o equilíbrio térmico $Z(\infty) = -\frac{\rho}{2}$, os momentos de dipolo estão alinhados com a direção positiva do campo magnético estático. Quando o sistema tem, em $\tau = 0$, componentes de momentos de dipolo transversais não nulas, ou seja $W(0) \neq 0$, o vetor de Bloch precessa ao redor do eixo do campo com a frequência de Larmor ω_L . Já quando interpretamos estas equações como representando a dinâmica do número de ocupação dos níveis de energia, as componentes do vetor de Bloch, $X(\tau)$ e $Y(\tau)$, correspondem á taxa de transição de população entre os dois níveis dos átomos, enquanto que $2Z(\tau)$ mede a diferença de população das partículas que se encontram nos estados $|+\rangle$ e $|-\rangle$. Assim quando $2Z(0) = \rho$, todos os átomos do sistema estão no estado excitado e para τ suficientemente grande o sistema alcança o equilíbrio com $2Z(\infty) = -\rho$, ou seja todos os átomos estão no estado fundamental (para $T = 0$).

V.1- Solução Numérica das E.B.N.L.

As equações (5.6) e (5.7) podem ser integradas numericamente para diversas condições iniciais, $W(0)$ e $Z(0)$, e para diversas temperaturas via $n(\beta w_L)$. Consideremos as figuras A-1 a A-4, que contêm em gráfico $W(\tau)$, $Z(\tau)$, a intensidade da radiação $I(\tau)$ e a função $2[W(\tau)^2 + Z(\tau)^2]^{1/2}$ respectivamente; para $n(\beta w_L) = 0$ e $\rho = 100$, $Z(0)$ assume alguns valores entre 0 e 50 e $W(0)$ assume os valores dados pela eq. (5.19). A figura A-1 mostra que $W(\tau)$ possui um máximo em $\tau = 0$ para as condições iniciais $Z(0) = 0$ e $W(0) = 50$, todas as componentes dos dipolos do sistema no instante inicial são transversais, porém a medida que o valor $Z(0)$ é aumentado os valores máximos $W(\tau_0)$ se tornam menores e se deslocam para a direita porque o efeito de relaxação "térmica" do sistema começa a tornar-se significativo. Esses valores máximos ocorrem num tempo de retardo, τ_0 , que é o tempo para o qual $Z(\tau_0) = 0$ (fig. A-2), ou seja, para $W(0) = 50$ e $Z(0) = 0$ o tempo τ_0 é nulo e a medida que aumentamos os valores iniciais de $Z(0)$, (consequentemente diminuimos $W(0)$) o tempo τ_0 começa a assumir valores não nulos. Esta situação torna-se mais evidente quando olhamos a fig. A-3, que mostra a intensidade de radiação $I(\tau)$ emitida pelo sistema.

Para as condições iniciais $Z(0) = 50$ e $W(0) = 0$ o sistema emite radiação normal, isotrópica e não coerente, cuja intensidade de emissão segue uma lei exponencial com tempo característico $\tau_n = \gamma_0^{-1}$, representada pela curva assinalada por $Z(0) = 50$, as componentes transversais terão momento de dipolo nulo em $\tau = 0$, que assim permanecerão indefinidamente. A medida que $W(0)$ assume um valor finito, por menor que seja, as componentes transversais passam a interagir de uma maneira ordenada criando no sistema um efeito cooperativo que leva a uma emissão coletiva de radiação coerente e anisotrópica que é chamada emissão superradiante. As características essenciais desta emissão são: a intensidade de emissão proporcional ao quadrado do valor máximo que

podem assumir as componentes dos momentos de dipolo transversais (c.m.d.t.) em $\tau = \tau_0$; o tempo de retardo τ_0 , que depende da condição inicial $W(0)$, e a largura de linha que é da ordem de $2/\rho$. Em particular a condição inicial $Z(0) = 0$ leva o sistema a emitir coletivamente com uma intensidade máxima proporcional a $W(0)^2 = W_{max}^2$, pois o tempo de retardo é nulo; a medida que diminuimos o valor de $W(0)$, a emissão normal torna-se mais significativa, de maneira que será necessário mais tempo para a ocorrência de um apreciável alinhamento das c.m.d.t., ou seja para que o efeito cooperativo seja máximo. O tempo de retardo, τ_0 , aumenta fazendo com que o sistema demore mais para emitir coletivamente porém com uma intensidade atenuada devido á competição com a emissão normal. Nas figs. A-1 e A-3, para tempos suficientemente grandes, tanto $W(\tau)$ quanto $I(\tau)$ vão a zero por valores positivos enquanto que $Z(\tau)$, (fig.A-2), vai a $-\frac{\rho}{2}$ no caso do reservóir se encontrar a temperatura nula. Observe que a área limitada pelas curvas da fig. A-3 são as mesmas tanto para a emissão coletiva superradiante como para a emissão normal, já que no primeiro caso o sistema emite um pulso de alta intensidade, porém num intervalo de tempo bastante curto, da ordem de $\frac{2}{\rho}$; no segundo caso o sistema emite com baixa intensidade, porém durante um tempo mais longo $\tau_n = \gamma_0^{-1}$.

A figura A-4 mostra o comportamento do módulo do vetor de Bloch na ausência de interação com o reservóir este módulo é uma constante de movimento; já com a interação ligada a temperatura nula, o módulo deixa de ser constante, partindo do valor máximo em $\tau = 0$ ele decresce com o tempo atingindo um mínimo que será menor quanto menor for o valor inicial $W(0)$. Este mínimo ocorre em $\tau = \tau_0$ e para τ suficientemente grande todas as curvas voltam para o valor inicial. Desta maneira podemos dizer que o desvio no módulo do vetor de Bloch do seu valor inicial no decorrer do tempo fornece uma medida da perda de coerência do sistema e quanto menor o mínimo maior será o tempo necessário para que se desenvolva um efeito cooperativo no sistema, verificando-se portanto um efeito competitivo entre a relaxação térmica e o desenvolvimento do efeito cooperativo.

Nas figuras B-1 a B-4 estão os gráficos de $W(\tau)$, $Z(\tau)$, $I(\tau)$ e $2[W(\tau)^2 + Z(\tau)^2]^{1/2}$

para $n(\beta\omega_L) = 0$, $\rho = 100$, $W(0) = 1, 10^{-3}$ e 10^{-5} com $Z(0)$ assumindo os valores dados pela eq.(5.20), considerando o sistema sem e com interação com o reservóir. Na fig. B-3 as três curvas que possuem o mesmo valor para $I(\tau)$ máximo representam a radiação emitida pelo sistema sem a interação com o reservóir para diversos valores iniciais da componente transversal $W(0)$; os tempos de retardo serão maiores quanto menor for $W(0)$ apresentando porém a mesma intensidade máxima. Já com a interação ligada as curvas se modificam de forma bastante acentuada e para pequenos valores de $W(0)$ o sistema levará mais tempo para emitir coletivamente, o efeito de relaxação térmica (emissão normal) se tornará apreciável (uma fração significativa dos átomos do sistema já terão decaído espontaneamente de forma que o efeito cooperativo, responsável pela emissão coletiva se dará somente com a fração restante dos átomos excitados que devem decair) de maneira a levar a uma grande redução da intensidade da radiação a ser emitida em τ_0 . Também podemos notar uma alteração nos tempos de retardo que se tornam maiores na presença do reservóir, porque este faz com que aumente a desordem no sistema de tal maneira que se torna necessário um maior intervalo de tempo para que se desenvolva o efeito cooperativo que conduz á emissão coletiva.

Nas figs. C-1 a C-5 estão em gráfico as funções $W(\tau)$, $Z(\tau)$, $I(\tau)$ e $2[W(\tau)^2 + Z(\tau)^2]^{1/2}$ para $n(\beta\omega_L)$ variando desde 0 até 40 com sucessivos incrementos de 10, com condições iniciais $\rho = 100$, $W(0) = 50$ e $Z(0) = 0$, o que corresponde a assumir o sistema inicialmente em um estado coerente que emite em $\tau_0 = 0$ uma radiação com uma amplitude máxima que não é afetada pela relaxação térmica. Nestas condições o efeito cooperativo predomina sobre o efeito de relaxação. Na fig. C-2, com o aumento da temperatura, verifica-se a existência de dois estados de equilíbrio distintos competindo: o equilíbrio alcançado pelo sistema após a perda total de coerência e o equilíbrio térmico com este dominando assintoticamente. Nessa figura todas as curvas começam em $Z(0) = 0$ e para τ suficientemente grande elas atingem valores assintóticos diferentes para as diferentes temperaturas ou seja, $Z(0) = -\frac{f}{4(n+1/2)}$; assim quanto maior a temperatura, o sistema tenderá a um estado

de equilíbrio térmico caracterizado por um número menor de componentes de momento de dipolo longitudinal (c.m.d.l.) na direção oposta á do campo magnético ; outrossim com uma diferença de população , $-\frac{\rho}{2(n+1/2)}$, cada vêz menor. As c.m.d.t. irão sempre a zero, por valores positivos, num tempo suficientemente grande, o que mostra que essas distribuir-se-ão aleatoriamente.

Para $T \neq 0$, a curva $Z(\tau)$ apresenta um mínimo associado com a perda de coerência do sistema, que sempre assume um valor menor que o valor de equilíbrio assintótico. A análise do mínimo pode ser feita partindo da solução da equação (4.84) que descreve a dinâmica do sistema sem interação com o reservoir,

$$Z(\tau) = -\frac{\rho}{2} \tanh\left[\frac{(\tau - \tau_0)}{T_r}\right],$$

onde esta atinge o seu mínimo assintótico em $-\frac{\rho}{2}$. Por outro lado considerando as equações com a interação ligada, da fig. C-2 podemos ver que o mínimo de $Z(\tau)$ não atinge o valor de $-\rho/2$, pois $Z(\tau)$ contém uma contribuição exponencial devida á relaxação térmica; contudo o ponto de mínimo será menor que o valor assintótico $-\rho/4(n+1/2)$. Assim este ponto de mínimo está relacionado com a presença dos termos não lineares das eqs. (5.6) e (5.7), enquanto que os demais termos são responsáveis pelo equilíbrio térmico que domina para tempos suficientemente grandes; fica então caracterizado que o efeito cooperativo é um fenômeno transiente.

A figura C-3 mostra a energia irradiada pelo sistema e verifica-se que para $T \neq 0$ haverá uma emissão seguida por uma absorção pois o valor de equilíbrio de perda de coerência é menor que o valor de equilíbrio térmico; o sistema absorve energia do reservoir após ter havido uma emissão superradiante com tempo de retardo nulo. As figs. C-4 e C-5 mostram o comportamento da função $2[W(\tau)^2 + Z(\tau)^2]^{1/2}$ para diferentes intervalos de tempo, a curva que aparece para $n = 0$ desvia-se muito pouco em relação à reta $J = 100$, vendo-se que com $T = 0$ e $W(0) = \frac{\rho}{2}$ a relaxação térmica afeta muito pouco a emissão coerente do sistema; porém a medida que aumentamos a temperatura o efeito

cooperativo é rapidamente atenuado. O módulo do vetor de Bloch retoma seu valor inicial quando $T = 0$, mas para $T \neq 0$ seu valor assintótico é dado por

$$J|_{t \rightarrow \infty} = \frac{\rho}{2(n + 1/2)},$$

como pode se visto nas figs. C-4 e C-5.

As figs. D-1 a D-4 mostram o comportamento das mesmas funções anteriores com $n(\beta\omega_L)$ variando desde 0 até 8 com incrementos sucessivos de 2, e com $W(0) = 1$. Estas figuras mostram que com o aumento da temperatura a taxa de emissão de radiação coerente é fortemente reduzida devido ao decaimento normal, pois como a densidade de c.m.d.t. é inicialmente pequena o tempo τ_0 , é grande com relação ao tempo de decaimento da emissão normal $[2(n + 1/2)\gamma_0]^{-1}$ para $n \neq 0$. Também pode-se verificar que o tempo de retardo τ_0 aumenta com a temperatura até que a emissão siga essencialmente uma lei de decaimento exponencial, sem a presença do pico de emissão coerente, portanto não podemos mais falar em tempo de retardo. Na figura D-3 podemos ver que a taxa de radiação emitida assume valores negativos, enquanto que a figura D-4 mostra o comportamento de $J(\tau)$ para os diversos valores de $n(\beta\omega_L)$; para $T = 0$, a intensidade do efeito cooperativo é menos afetada quando comparada com as outras curvas.

É importante notar que o pico da taxa de emissão de radiação é atenuado com o decréscimo do valor inicial $W(0)$, assim para $W(0)$ muito pequeno a emissão normal predomina sobre a emissão coerente, ou seja o efeito cooperativo do sistema desaparece dando lugar somente a uma emissão incoerente, tal situação é mostrada na figura E-1 onde $I(\tau)$ é dado para $n(\beta\omega_L) = 0$ com diversas condições iniciais de $W(0)$ variando desde 10^{-6} até 10^{-5} com incrementos de 3×10^{-6} . A medida que $W(0)$ diminui τ_0 aumenta até que se deixe de observar o pico correspondente à emissão coerente.

Em todas as figuras A-D consideramos $\rho = 100$, porém todas as características apresentadas por estas curvas são preservadas para densidades atômicas diferentes.

Vale a pena observar que para temperaturas $T \neq 0$, a eq.(C-76) possui um termo de correção da frequência ("Lamb-shift") dependente da temperatura, que não consideramos

em nossos cálculos, porém para introduzi-lo nas equações anteriores é suficiente fazer a seguinte substituição

$$w_L \rightarrow w'_L = w_0 + \Omega[1 + 2n(\beta w_0)], \quad (5.29)$$

com isto podemos ver das equações (5.1) e (5.2), que , as componentes de momento de dipolo transversal precessarão com uma frequência tanto maior quanto maior for T . Dos resultados obtidos das equações (5.6) e (5.7) vemos que a emissão superradiante ocorre com maior intensidade quando $\tau_0 \ll \tau_n$, assim para o acoplamento átomo-reservoir fraco (γ pequeno) e altas densidades atômicas obtemos condições mais favoráveis para a emissão coerente (mesmo nos casos de acoplamento átomo-reservoir fraco, o aumento da densidade do sistema é limitado pela interação dipolo-dipolo -força de Van der Waals- a qual pode tornar-se bastante significativa para a maioria das distribuições geométricas dos átomos numa amostra [28]).

Por último vale observar que embora nós nos limitamos a átomos de dois níveis o Hamiltoniano obtido no capítulo II pode ser usado para átomos com mais de dois níveis de energia, e também outra generalização consistiria em introduzir as correlações quânticas tratando o operador estatístico de p-corpos numa ordem mais alta.

APÊNDICE - A

Obtenção da equação (1.28)

Consideremos a dedução da equação (1.28). Para isto reescrevemos a equação (1.21.4):

$$i \frac{d}{dt} [\hat{P} \hat{\rho}(t)] = \hat{P} \hat{L} \hat{\rho}(t) - i \int_0^t dt' \hat{P} \hat{L} e^{-i(t-t')(\hat{I} - \hat{P})\hat{L}} (\hat{I} - \hat{P}) \hat{L} \hat{P} \hat{\rho}(t'), \quad (A-1)$$

e também as relações (1.7), (1.12), (1.23) e (1.24) do capítulo 1,

$$\hat{L} = \hat{L}_0 + \hat{L}_{int} = \hat{L}_S + \hat{L}_R + \hat{L}_{int}, \quad (A-2)$$

$$\hat{P} A = \hat{\rho}_R Tr_R A, \quad \forall A \in \tilde{\mathcal{L}}_{Tr_R}, \quad (A-3)$$

$$\hat{P} \hat{L}_0 = \hat{L}_S \hat{P}, \quad (A-4)$$

$$\hat{P}(\hat{I} - \hat{P}) = 0, \quad (A-5)$$

as expressões (A-2) e (A-3) já foram comentadas anteriormente; (A-4) pode ser verificada operando com o lado esquerdo desta em um operador A , onde $A \in \tilde{\mathcal{L}}_{Tr_R}$, temos

$$\begin{aligned} \hat{P} \hat{L}_0 A &= \hat{P}(\hat{L}_S + \hat{L}_R) A = \hat{P}(\hat{L}_S + \hat{L}_R) A_S A_R = \\ &= \hat{P} A_R L_S A_S = L_S \hat{P} A_R A_S = L_S \hat{P} A, \end{aligned}$$

O operador \hat{P} só opera nas variáveis do reservóir \mathcal{R} portanto ele comuta com L_S , devido a definição de \hat{L} ,

$$\hat{L} \equiv [\hat{H},], \quad (A-6)$$

segue que

$$\hat{P} \hat{L}_R A_R = \hat{P} [H_R, A_R] = \rho_R(0) Tr_R [H_R, A_R] = 0,$$

Nesta última passagem usamos a propriedade cíclica do traço. Como já dissemos A e um operador arbitrário, assim a equação (A-4) fica demonstrada. A expressão (A-5) segue

diretamente da idempotência de \hat{P} ; ou seja $\hat{P}^2 = \hat{P}$. Vamos substituir a expressão (A-2) em (A-1) e considerar cada termos separadamente, o primeiro termo do lado direito desta expressão fica:

$$\hat{P}\hat{L}\hat{P}\hat{\rho}(t) = \hat{P}(\hat{L}_0 + \hat{L}_{int})\hat{P}\hat{\rho}(t) = \hat{P}\hat{L}_0\hat{P}\hat{\rho}(t) = \hat{L}_S\hat{P}\hat{\rho}(t), \quad (A-7)$$

conforme a equação (1.27), ou seja estamos considerando que a interação não é diagonal. O termo $\hat{P}\hat{L} \exp[-i(t-t')(\hat{I} - \hat{P})\hat{L}](\hat{I} - \hat{P})\hat{L}\hat{P}\hat{\rho}$ que aparece dentro do sinal de integração fica:

$$\begin{aligned} \hat{P}\hat{L}e^{-i(t-t')(\hat{I}-\hat{P})\hat{L}}(\hat{I}-\hat{P})\hat{L}\hat{P}\hat{\rho} &= \hat{P}(\hat{L}_0 + \hat{L}_{int})e^{-i(t-t')(\hat{I}-\hat{P})(\hat{L}_0 + \hat{L}_{int})} \times \\ &\times (\hat{I}-\hat{P})(\hat{L}_0 + \hat{L}_{int})\hat{P}\hat{\rho}, \end{aligned} \quad (A-8)$$

onde

$$\begin{aligned} \hat{P}\hat{L}_0e^{-i(t-t')(\hat{I}-\hat{P})\hat{L}} &= \hat{L}_S\hat{P}e^{-i(t-t')(\hat{I}-\hat{P})\hat{L}} \\ \hat{L}_S\hat{P} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} (t-t')^n [(\hat{I}-\hat{P})\hat{L}]^n &= \hat{L}_S\hat{P}; \end{aligned} \quad (A-9)$$

ou seja o unico termo não nulo na soma ocorre para $n = 0$, os restantes anulam-se devido à propriedade de idempotência de \hat{P} , eq.(A-5). Levando este resultado em (A-8) temos para o primeiro termo no parentese, no lado direito da equação ,

$$\hat{P}\hat{L}_0e^{-i(t-t')(\hat{I}-\hat{P})\hat{L}}(\hat{I}-\hat{P})\hat{L}\hat{P}\hat{\rho} = \hat{L}_S\hat{P}(\hat{I}-\hat{P})\hat{L}\hat{P}\hat{\rho} = 0, \quad (A-10)$$

novamente devido a idempotência de \hat{P} . Consideremos agora o termo $(\hat{I}-\hat{P})(\hat{L}_0 + \hat{L}_{int})\hat{P}\hat{\rho}$ de (A-8), sabendo que

$$(\hat{I}-\hat{P})(\hat{L}_0 + \hat{L}_{int}) = \hat{L}_0 - \hat{L}_S\hat{P} + (\hat{I}-\hat{P})\hat{L}_{int}, \quad (A-11)$$

seque que

$$\begin{aligned} (\hat{I}-\hat{P})(\hat{L}_0 + \hat{L}_{int})\hat{P}\hat{\rho} &= \hat{L}_0\hat{P}\hat{\rho} - \hat{L}_S\hat{P}^2\hat{\rho} + (\hat{I}-\hat{P})\hat{L}_{int}\hat{P}\hat{\rho} = \\ &= (\hat{L}_0\hat{P} - \hat{L}_S\hat{P})\hat{\rho} + (\hat{I}-\hat{P})\hat{L}_{int}\hat{P}\hat{\rho} = \\ &= \hat{L}_R\hat{P}\hat{\rho} + (\hat{I}-\hat{P})\hat{L}_{int}\hat{P}\hat{\rho} = \\ &= (\hat{I}-\hat{P})\hat{L}_{int}\hat{P}\hat{\rho}, \end{aligned} \quad (A-12)$$

onde usamos o fato que $\hat{L}_0 = \hat{L}_S + \hat{L}_R$ e que $\hat{\rho}_R(0)$ é uma distribuição estacionária. Substituindo a expressão (A-11) no argumento da exponencial que aparece no lado direito da expressão (A-8) e expandindo em série de potência obtemos:

$$e^{-i(t-t')(\hat{I}-\hat{P})(\hat{L}_0 + \hat{L}_{int})}(\hat{I} - \hat{P}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} \hat{\beta}^n (\hat{I} - \hat{P}), \quad (A-13)$$

onde

$$\alpha = -i(t - t'),$$

$$\hat{\beta} = \hat{L}_0 - \hat{L}_S \hat{P} + (\hat{I} - \hat{P}) \hat{L}_{int}.$$

Desenvolvendo a soma obtemos as seguintes expressões para as potências $\hat{\beta}$ e $\hat{\beta}^2$,

$$\begin{aligned} \hat{\beta}(\hat{I} - \hat{P}) &= [\hat{L}_0 - \hat{L}_S \hat{P} + (\hat{I} - \hat{P}) \hat{L}_{int}](\hat{I} - \hat{P}) = [\hat{L}_0 + (\hat{I} - \hat{P}) \hat{L}_{int}](\hat{I} - \hat{P}), \\ \hat{\beta}^2(\hat{I} - \hat{P}) &= [\hat{L}_0 - \hat{L}_S \hat{P} + (\hat{I} - \hat{P}) \hat{L}_{int}][\hat{L}_0 + (\hat{I} - \hat{P}) \hat{L}_{int}](\hat{I} - \hat{P}) = \\ &= \{\hat{L}_0^2 + \hat{L}_0(\hat{I} - \hat{P}) \hat{L}_{int} - \hat{L}_S \hat{P} \hat{L}_0 - \hat{L}_S \hat{P}(\hat{I} - \hat{P}) \hat{L}_{int} + \\ &\quad + (\hat{I} - \hat{P}) \hat{L}_{int} \hat{L}_0 + [(\hat{I} - \hat{P}) \hat{L}_{int}]^2\}(\hat{I} - \hat{P}) = \\ &= [\hat{L}_0 + (\hat{I} - \hat{P}) \hat{L}_{int}]^2(\hat{I} - \hat{P}); \end{aligned}$$

onde usamos a equação (A-5) em $\hat{\beta}(\hat{I} - \hat{P})$ e para $\hat{\beta}^2(\hat{I} - \hat{P})$ usamos

$$\hat{L}_S \hat{P} \hat{L}_0(\hat{I} - \hat{P}) = \hat{L}_S^2 \hat{P} \hat{L}_0(\hat{I} - \hat{P}) = 0,$$

que é obtida usando (A-4). Para $n = 3, 4, \dots$, o termo em potências de $\hat{L}_S \hat{P}$ bem como os termos cruzados anulam-se, com estes resultados a expressão (A-13), torna-se, por indução

$$\begin{aligned} e^{-i(t-t')(\hat{I}-\hat{P})(\hat{L}_0 + \hat{L}_{int})}(\hat{I} - \hat{P}) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} [\hat{L}_0 + (\hat{I} - \hat{P}) \hat{L}_{int}]^n (\hat{I} - \hat{P}) = \\ &= e^{-i(t-t')[\hat{L}_0 + (\hat{I}-\hat{P})\hat{L}_{int}]}(\hat{I} - \hat{P}). \end{aligned} \quad (A-14)$$

Substituindo as expressões (A-7), (A-10), (A-12) e (A-14) em (A-1), e usando a definição do operador \hat{P} , expressão (A-3), obtemos,

$$\begin{aligned} i \frac{d}{dt} [\hat{\rho}_R(0) \text{Tr}_R \hat{\rho}(t)] &= \hat{L}_S \hat{\rho}_R(0) \text{Tr}_R \hat{\rho}(t) + \\ &\quad - i \int_0^t dt' \hat{\rho}_R(0) \text{Tr}_R \{ \hat{L}_{int} e^{-i(t-t')[\hat{L}_0 + (\hat{I}-\hat{P})\hat{L}_{int}]} \times \\ &\quad \times (\hat{I} - \hat{P}) \hat{L}_{int} \hat{\rho}_R(0) \text{Tr}_R \hat{\rho}(t') \}. \end{aligned} \quad (A-15)$$

Agora como

$$\hat{\rho}_S(t) = \text{Tr}_R \hat{\rho}(t),$$

considerando a interação não diagonal,

$$\hat{P} \hat{L}_{int} \hat{P} = 0,$$

tamando o traço sober as variáveis do reservoir em ambos os lados da equação (A-15), tendo em vista a normalização

$$\text{Tr}_R \hat{\rho}_R(0) = 1,$$

segue que

$$i \frac{d}{dt} \hat{\rho}_S(t) = \hat{L}_S \hat{\rho}_S(t) + i \int_0^t dt' \text{Tr}_R \{ \hat{L}_{int} e^{-i(t-t')[\hat{L}_0 + (i-\hat{P})\hat{L}_{int}]} \hat{L}_{int} \hat{\rho}_R(0) \} \hat{\rho}(t'), \quad (A-16)$$

que é a equação (1.28).

APÊNDICE - B

Sistemas de Dois Níveis.

Na obtenção da equação (2.47) temos considerado um caso particular, ou seja que os átomos que constituem nosso sistema possuem apenas dois níveis de energia. Esta aproximação pode ser justificada porque para determinadas experiências, as condições experimentais evidenciam um particular par de estados atômicos, o qual representamos por $|1\rangle$ e $|2\rangle$, sendo que todos os outros estados exercem uma influência negligenciável na dinâmica do processo que se está observando. Em particular podemos citar um experimento de ressonância fluorescente de um átomo de dois níveis; na figura 3, fazemos uma representação esquemática do experimento.

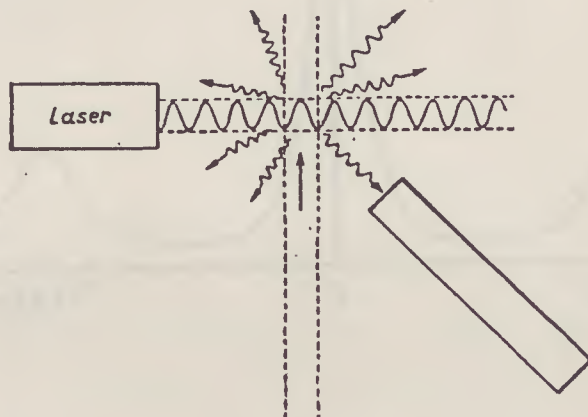


Fig.3. Representação esquemática de um experimento de ressonância fluorescente. Um feixe de luz de laser monocromática é analisada após ser espalhada por um feixe de átomos de dois níveis.

Um feixe de átomos de dois níveis, de frequência ω_0 , com $\omega_0 = \omega_2 - \omega_1$, é espalhado por um feixe de laser de frequência ω próxima a frequência atômica ω_0 . A frequência da

luz fluorescente emitida pelos átomos na região do espalhamento é analisada. O espectro desta luz mostra um único pico com seu máximo ocorrendo para uma frequência ω_0 , para um laser de baixa potência. Quando o feixe de laser é de alta potência aparecerá um espectro com três picos como mostra a figura 4. Nesta figura a frequência do pico central é a mesma do laser a $\omega = \omega_0$, tomada como origem, enquanto que os picos laterais são deslocados por $\delta_n = 2\epsilon\sqrt{n}$, onde ϵ é a constante de acoplamento do campo do laser com os átomos de dois níveis, e n o número de fótons do laser na unidade de volume do campo quantizado; sendo proporcional a potência do laser.

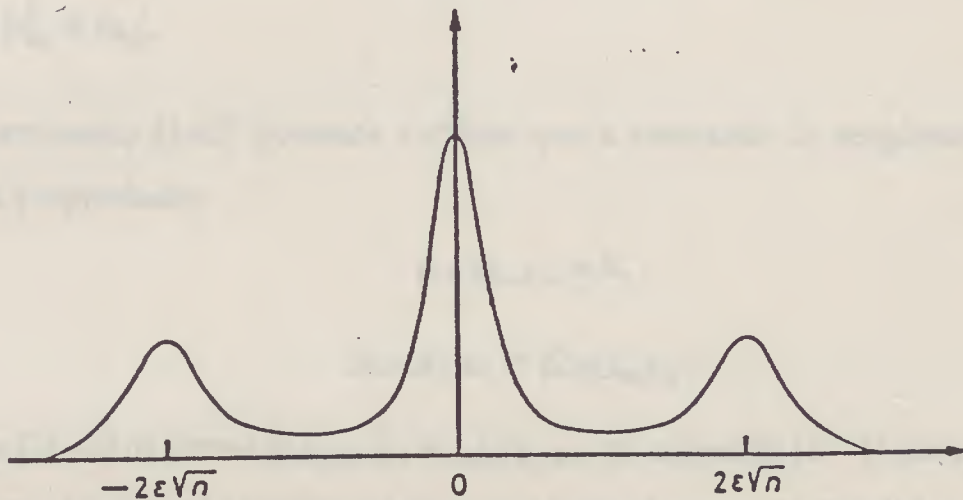


Fig.4. Espectro de alta potência da radiação fluorescente de um átomo de dois níveis.

O primeiro experimento (o qual proporciona dados satisfatórios para a radiação emitida) só realizado por Schuda et.al. em 1974 [29], que usou um laser de corante cuja frequência ω pode ser variada dentro de um intervalo de 100 MHz centrado na frequência ω_0 . As bandas atômicas são de átomos de Na, sendo que os níveis envolvidos são: $3^2S_{1/2}$, $F = 2$ e $3^2P_{1/2}$, $F = 3$ separadas por $\lambda_0 = 5890 \text{ \AA}$. Os resultados experi-

mentais evidenciam a existência de três picos no espectro de luz fluorescente. Observamos que cada um dos estados, $F = 2$ e $F = 3$, é $(2F + 1)$ vezes degenerado; conseqüentemente o sistema físico não é exatamente um sistema de dois níveis. Harting et. al.[30] melhoraram as condições experimentais usando luz circularmente polarizada e assim selecionam somente as transições de $m_F = 3$ para $m_F = 2$ e desta forma eles obtêm realmente um átomo de dois níveis.

Consideremos então a expressão (2.46) e especializamos esta para N -átomos de dois níveis, ou seja

$$\begin{aligned}
 H = & \hbar \sum_{i=1}^N (w_1 a_i^\dagger a_i + w_2 a_{i,2}^\dagger a_{i,2}) + \hbar \sum_{k_j} w_k b_{k_j}^\dagger b_{k_j} + \\
 & + \hbar \sum_{i=1}^N \sum_{k_j} (g_{i,k_j,1,1} a_{i,1}^\dagger a_{i,1} + g_{i,k_j,1,2} a_{i,1}^\dagger a_{i,2} + g_{i,k_j,2,1} a_{i,2}^\dagger a_{i,1} + g_{i,k_j,2,2} a_{i,2}^\dagger a_{i,2}) \times \\
 & \times |b_{k_j}^\dagger + b_{k_j}\rangle, \tag{B-1}
 \end{aligned}$$

Da expressão (2.40) podemos verificar que a constante de acoplamento possui as seguintes propriedades

$$g_{i,k_j,k_1,k_1} = 0, \tag{B-1}$$

$$g_{i,k_j,k_1,k_2} = g_{i,k_j,k_2,k_1}; \tag{B-2}$$

assim por (B-2) os termos g_{i,k_j,k_1,k_1} e g_{i,k_j,k_2,k_2} , na expressão (B-1) são nulos. Observe que estamos descrevendo a dinâmica do sistema no subespaço 2×2 gerado por $|1\rangle$ e $|2\rangle$ onde $|2\rangle$ e $|1\rangle$ representam os estados excitados e fundamental respectivamente. A representação matricial destes estados pode ser obtida lembrando que os operadores a e a^\dagger são fermiônicos e desta forma para um átomo no qual os elétrons têm dois níveis acessíveis seguem as relações de anticomutação :

$$\begin{aligned}
 \{a_k, a_{k'}^\dagger\} &= \delta_{kk'} \quad k, k' = 1, 2 \\
 \{a_k, a_{k'}\} &= \{a_k^\dagger, a_{k'}^\dagger\} = 0, \tag{B-4}
 \end{aligned}$$

onde temos que

$$\hat{n}_k = a_k^\dagger a_k, \quad (B-5a)$$

é o número de ocupação do nível k e

$$\hat{n}_k^2 = \hat{n}_k, \quad (B-5b)$$

os autovalores de n_k , ou seja

$$\hat{n}_k |n_k\rangle = n_k |n_k\rangle;$$

com autovalores $n_k = 0, 1$. Como os estados $k = 1, 2$ são excludentes, segue que

$$n_1 + n_2 = 1, \quad (B-6)$$

e nos rotulamos $|n_k\rangle = |k\rangle$, mas especificamnte,

$$|1_2\rangle = |2\rangle,$$

$$|1_1\rangle = |1\rangle.$$

Tendo em vista as equações (B-4), (B-5) e (B-6) podemos verificar as seguintes relações para os operadores que aparecem na expressão (B-1)

$$(a_2^\dagger a_1)^2 = (a_1^\dagger a_2)^2 = 0, \quad (B-7)$$

$$[a_1^\dagger a_2, \frac{1}{2}(a_2^\dagger a_2 - a_1^\dagger a_1)] = -a_1^\dagger a_2, \quad (B-8)$$

$$[a_2^\dagger a_1, \frac{1}{2}(a_2^\dagger a_2 - a_1^\dagger a_1)] = a_2^\dagger a_1, \quad (B-9)$$

$$[a_2^\dagger a_1, a_1^\dagger a_2] = (a_2^\dagger a_2 - a_1^\dagger a_1), \quad (B-10)$$

$$\{a_2^\dagger a_1, a_1^\dagger a_2\} = 1. \quad (B-11)$$

Agora consideremos os operadores de momento angular para uma partícula de spin $1/2$; as matrizes de Pauli

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (B-12)$$

servem como uma base para os operadores de spin

$$s_x = \frac{\hbar}{2}\sigma_x; \quad s_y = \frac{\hbar}{2}\sigma_y; \quad s_z = \frac{\hbar}{2}\sigma_z; \quad (B-13)$$

com os quais podemos definir os operadores

$$s^{\dagger} = s_x + is_y, \quad (B-14)$$

$$s^{-} = s_x - is_y, \quad (B-15)$$

$$s = \frac{\hbar}{2}\sigma, \quad (B-16)$$

os quais satisfazem as seguintes relações de comutação

$$[s_x, s^{\pm}] = \pm \hbar s^{\pm}, \quad (B-17)$$

$$[s^{\dagger}, s^{-}] = 2\hbar s_x, \quad (B-18)$$

$$[s^2, s^{\dagger}] = [s^2, s^{-}] = [s^2, s_x] = 0, \quad (B-19)$$

e s^2 pode ser escrito como

$$s^2 = \frac{1}{2}(s^{\dagger}s^{-} + s^{-}s^{\dagger}) + s_x^2. \quad (B-20)$$

Usando as equações (B-12)-(B-15) podemos mostrar que

$$(s^{\dagger})^2 = (s^{-})^2 = 0. \quad (B-21)$$

Comparando as expressões (B-7) com (B-12), (B-8) e (B-9) com (B-17), e (B-10) com (B-19), vemos que existe um isomorfismo da álgebra dos operadores de um sistema de dois níveis com a álgebra de uma partícula de spin 1/2, desta forma fazemos a seguinte correspondência

$$s^{\dagger} \leftrightarrow \hbar a_2^{\dagger} a_1, \quad (B-22)$$

$$s^{-} \leftrightarrow \hbar a_1^{\dagger} a_2, \quad (B-23)$$

$$s_x \leftrightarrow \frac{\hbar}{2}(a_2^\dagger a_2 - a_1^\dagger a_1), \quad (B-24)$$

e usando estas expressões podemos reescrever o hamiltoniano (B-1) em função dos operadores s^\dagger , s^- e s_x , consideremos o primeiro termo do lado direito de (B-1), este pode ser escrito como

$$\begin{aligned} H_A &= \sum_{i=1}^N \left[\frac{\hbar}{2}(w_1 + w_2)(a_1^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_2) + \frac{\hbar}{2}(w_2 - w_1)(a_2^\dagger a_2 - a_1^\dagger a_1) \right]_i \\ &= \sum_{i=1}^N \left[\frac{\hbar}{2}(w_1 + w_2) \hat{I} + \hbar w_0 s_x \right]_i, \end{aligned} \quad (B-25)$$

onde

$$w_0 = w_2 - w_1, \quad (B-26)$$

é a frequência de ressonância dos átomos do sistema. No termo que descreve a interação podemos substituir diretamente os operadores s^\dagger e s_- , de forma que a expressão (B-1) para o hamiltoniano torna-se

$$H = w_0 \sum_{i=1}^N s_x^i + \hbar \sum_{\mathbf{k}_j} w_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}_j}^\dagger b_{\mathbf{k}_j} + \sum_{i=1}^N \sum_{\mathbf{k}_j} (g_{i,1,2,\mathbf{k},j} s_i^- + g_{i,1,2,\mathbf{k},j}^* s_i^\dagger) (b_{-\mathbf{k}_j}^\dagger + b_{\mathbf{k}_j}), \quad (B-27)$$

a qual é a expressão (2.48). No início do capítulo 2 comentamos que deste hamiltoniano podemos obter o hamiltoniano de Dicke, isto pode ser feito se primeiro considerarmos que ao fazer a aproximação de dipolo, consideramos que na expansão do campo $\mathbf{A}(\mathbf{x}_1)$ em série de Fourier, as componentes que dominam a dinâmica do sistema atômico são caracterizados por fatores de fases para os quais $\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) \simeq 1$, assumindo o núcleo localizado em \mathbf{x}_0 . Desta forma podemos aproximar o hamiltoniano de interação por

$$H_{int} = \frac{e}{mc} \sum_{i=1}^N \mathbf{P}_i \cdot \mathbf{A}(0), \quad (B-28)$$

conseqüentemente a expressão para a constante de acoplamento torna-se

$$g_{\mathbf{k},j} = -i \left(\frac{2\pi\hbar w_0^2}{V w_{\mathbf{k}}} \right)^{1/2} \mathbf{e}_{\mathbf{k},j} \cdot \mathbf{d}_{12}, \quad (B-29)$$

a qual segue de (2.43). A soma sobre i (número de átomos) não aparece mais na constante de acoplamento, de forma que esta é feita somente nos operadores s^\dagger , s^- , e s_x , o que permite introduzir os operadores atômicos coletivos

$$S^\dagger = \sum_{i=1}^N s_i^\dagger, \quad S^- = \sum_{i=1}^N s_i^-, \quad S_x = \sum_{i=1}^N s_x^i, \quad (B-30)$$

agora assumindo a aproximação de onda girante na expressão (B-27), a qual consiste em desprezar os termos antiressonantes $b^\dagger S^\dagger$ e $b S^-$, o que pode ser justificado quando temos o sistema em ressonância com o campo externo. Por exemplo na representação de interação o termo $b S^-$ possui o fator de fase $\exp[-i(\omega_\lambda + \omega_0)t]$, enquanto que ao termo $b^\dagger s^-$ está associada a fase $\exp[i(\omega_\lambda - \omega_0)t]$, onde ω_λ é a frequência do campo externo, como na ressonância $\omega_0 \sim \omega_\lambda$, a contribuição do termo $b S^-$ torna-se negligenciável em relação a de $b^\dagger S^-$, devido a oscilações rápidas. Temos então o hamiltoniano de Dicke escrito como

$$H = \omega_0 S^z + \hbar \sum_{\mathbf{k}_j} \omega_{\mathbf{k}_j} b_{\mathbf{k}_j}^\dagger b_{\mathbf{k}_j} + \sum_{\mathbf{k}_j} (g_{\mathbf{k}_j} b_{\mathbf{k}_j}^\dagger S^- + g_{\mathbf{k}_j}^* b_{-\mathbf{k}_j} S^\dagger); \quad (B-31)$$

os operadores coletivos dados por (B-30) satisfazem às mesmas relações de comutação que (B-13)-(B-16), só que para um momento angular $S = N/2$ e não $s = 1/2$ para o caso de um único átomo.

Os cálculos que temos feito a partir da equação (B-1) são para N -átomos de dois níveis, e como temos mostrado, eqs. (B-22)-(B-24), existe um isomorfismo, puramente matemático, entre a álgebra dos operadores atômicos com a do grupo $SU(2)$. Isto nos permitiu introduzir os operadores s^\pm e s_x , de uma partícula de spin $1/2$, sendo que o papel destes operadores pode ser encarado de duas maneiras. Tratando o sistema como N -átomos de dois níveis, os operadores possuem o seguinte papel:

- s^+ : excita uma partícula passando-a do estado $|-\rangle$ para o estado $|+\rangle$,
- s^- : desexcita uma partícula, passando-a do estado $|+\rangle$ para o estado $|-\rangle$,
- s_x : a soma de todos os s_x^i dá a diferença de população entre o número de partículas que se encontram no estado $|+\rangle$ e as que se encontram em $|-\rangle$.

Observe que estamos considerando as partículas sem graus de liberdade adicionais.

Podemos também atribuir aos operadores s^\pm e s_z um outro significado:

s^+ : troca o spin da direção z negativa para a positiva,

s^- : troca o spin da direção z positiva para a negativa,

s_z : seu autovalor dá o valor da projeção do spin sobre o eixo z .

Em particular temos a seguinte equivalência entre a Hamiltoniana do sistema de elétrons com o sistema de spin:

$$H_s = \hbar(\nu_0 \sigma_z + g_s^+ F_m^+ \sigma^+ + g_s F_m \sigma^-) \longleftrightarrow \frac{\Delta E}{2} (a_2^\dagger a_2 - a_1^\dagger a_1) + \hbar(g_1^+ F_e^+ a_2^\dagger a_1 + g_1 F_1 a_1^\dagger a_2),$$

onde

$$\Delta E = E_2 - E_1.$$

Note que o significado físico de $\hbar\nu_0$ e ΔE bem como de $g_s F_m$ e $g_1 F_1$ são completamente diferentes, $\hbar\nu_0$ e g_s são determinados do produto do campo magnético \mathbf{H} com o campo magnético associado ao spin, ou seja, sendo

$$H_s = -\frac{e\hbar}{mc} \sigma \cdot \mathbf{H} = -\frac{e\hbar}{mc} H_x \sigma_x - \frac{e\hbar}{2mc} (H_x - iH_y) \sigma^+ - \frac{e\hbar}{2mc} (H_x + iH_y) \sigma^-, \quad (B-32)$$

temos que

$$\hbar\nu_0 = -\frac{e\hbar}{mc} H_x, \quad (B-33)$$

$$\hbar g_s^+ F_m^+ = -\frac{e\hbar}{2mc} (H_x - iH_y), \quad (B-34)$$

$$\hbar g_s F_m = -\frac{e\hbar}{2mc} (H_x + iH_y). \quad (B-35)$$

Um sistema de dois níveis é o mais simples no qual podemos observar a ressonância magnética [12], por exemplo, átomos ou moléculas com momento angular orbital nulo e spin 1/2, ou átomos sem momento angular eletrônico e spin nuclear 1/2. Se um campo magnético estático \mathbf{H}_0 aplicado na direção z , a energia dos dois estados de spin $|+\rangle$ e $|-\rangle$

$$E_+ = -\mu|\mathbf{H}_0|, \quad E_- = \mu|\mathbf{H}_0|, \quad (B-36)$$

(ver fig.(5) onde assumimos que o momento magnético μ é positivo).

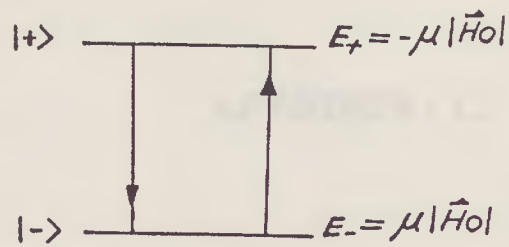


Fig.5. Separação dos níveis de energia de um átomo em um campo magnético estático.

A diferença de energia entre os níveis $|+ \rangle$ e $|- \rangle$ é

$$\Delta E = E_+ - E_- = -2\mu|\mathbf{H}_0|, \quad (B-37)$$

desta forma se um campo eletromagnético transversal $\mathbf{H}(t)$, oscilando a frequência ω_L e satisfazendo a condição de ressonância

$$\hbar\omega_L = \Delta E, \quad (B-38)$$

é aplicado, o sistema absorve energia quando os elétrons são excitados do nível $|- \rangle$ para o $|+ \rangle$. Na equação (B-38) ω_L é a frequência de Larmor.

APÊNDICE - C.

Obtenção da Equação Master

Consideremos a equação (1.29), obtida no capítulo 1,

$$i \frac{d}{dt} \rho_S(t) = L_S \rho_S(t) - i \int_0^t dt' \text{Tr}_R [L_{int} e^{-i(t-t')|L_0+(I-P)L_{int}|L_{int}} \rho_R(0)] \rho_S(t'), \quad (C-1)$$

na qual faremos a aproximação de Born; que consiste em manter a menor potência na interação. Como já temos esta em segunda ordem dentro da expressão do traço, a exponencial é aproximada para

$$e^{-i(t-t')|L_0+(I-P)L_{int}|L_{int}} \sim e^{-i(t-t')L_0}, \quad (C-2)$$

Agora do ponto de vista operacional torna-se mais conveniente escrever a equação (C-1) na representação de interação, antes porém consideremos algumas propriedades do operador Liouvilliano $L = \frac{1}{\hbar}[H, \]$. Sabendo que para operadores arbitrários A , B e C temos a relação

$$e^A B e^{-A} = B + [A, B] + \frac{1}{2!}[A, [A, B]] + \dots, \quad (C-3)$$

segue imediatamente que

$$e^{iHt/\hbar} B e^{-iHt/\hbar} = e^{iLt} B. \quad (C-4)$$

onde e^{iLt} é a versão quântica do operador de evolução para operadores, e que têm a propriedade distributiva,

$$e^{iLt}(ABC) = (e^{iLt} A)(e^{iLt} B)(e^{iLt} C). \quad (C-5)$$

Usando a propriedade (C-4) escrevemos a expressão para o operador estatístico $\rho_S(t)$ na representação de interação como

$$\rho_{SI}(t) \equiv \tilde{\rho}_S(t) = e^{iH_S t/\hbar} \rho_S(t) e^{-iH_S t/\hbar} = e^{iL_S t} \rho_S(t); \quad (C-6)$$

Derivando no tempo a expressão (C-6) e substituindo em (C-1) obtemos

$$\frac{d}{dt}\tilde{\rho}_S(t) = - \int_0^t dt' e^{iL_0 t'} \text{Tr}_{\mathcal{R}} [L_{int} e^{-i(t-t')L_0} L_{int} \rho_{\mathcal{R}}(0)] e^{-iL_S t'} \rho_S(t'), \quad (C-7)$$

onde o kernel da integral (C-7) pode ser escrito como

$$K(t-t')\tilde{\rho}_S(t') = \text{Tr}_{\mathcal{R}} [e^{iL_S t'} H_{int}, [e^{iL_S t' - i(t-t')L_{\mathcal{R}}} H_{int}, \rho_{\mathcal{R}}(0)\tilde{\rho}_S(t')]]. \quad (C-8)$$

Para obtermos esta expressão o termo $\exp(iL_S t)$ foi inserido dentro do sinal do traço e em seguida usamos a equação (C-6) e o fato de $L_{\mathcal{R}}$ comutar com L_S e ambos comutarem com $\rho_{\mathcal{R}}(0)$, obtendo portanto a equação de evolução do operador estatístico reduzido, na representação de interação e na aproximação de Born

$$\frac{d}{dt}\tilde{\rho}_S(t) = - \int_0^t dt' K(t-t')\tilde{\rho}_S(t'). \quad (C-9)$$

Retomando agora a expressão (2.47) para H , a qual escrevemos como

$$H = H_S + H_{\mathcal{R}} + H_{int}, \quad (C-10)$$

onde

$$H_S = w_0 \sum_{i=1}^N s_x^{(i)}, \quad (C-11a)$$

$$H_{\mathcal{R}} = \sum_{\mathbf{k}_j} w_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}_j}^{\dagger} b_{\mathbf{k}_j}, \quad (C-11b)$$

$$H_{int} = \sum_{i=1}^N \sum_{\mathbf{k}_j} (g_{i,1,2,\mathbf{k},j} s_{(i)}^- + g_{i,2,1,\mathbf{k},j} s_{(i)}^+) (b_{\mathbf{k}_j}^{\dagger} + b_{\mathbf{k}_j}), \quad (C-11c)$$

onde consideremos $\hbar = 1$. Antes de substituirmos a expressão (C-10) na equação (C-9) vamos introduzir uma notação mais prática onde os conjuntos de operadores $\{u_{\lambda}\}$ e $\{v_{\mu}\}$ pertencem aos espaços do sistema S e do reservóir \mathcal{R} respectivamente. Para o nosso estudo vamos identificar o conjunto,

$$\{u_{\lambda}\} = (s_x, s^+, s^-) = (u_1, u_2, u_3); \quad (C-12)$$

$$\{v_\mu\} = (b, b^\dagger) = (0, v_2, v_3), \quad (C-13)$$

os quais permitem reescrever o Hamiltoniano de interação como

$$H_{int} = \sum_{\lambda, \mu=2}^3 \gamma_{\lambda\mu} u_\lambda v_\mu. \quad (C-14)$$

Substituindo (C-14) em (C-8) obtemos

$$\begin{aligned} K(t-t')\tilde{\rho}_S(t') &= Tr_{\mathcal{R}}[(e^{iL_S t} u_\lambda) v_\mu, [(e^{iL_S t'} u_\alpha)(e^{i(t'-t)L_{\mathcal{R}}} v_\beta), \rho_{\mathcal{R}}(0)\tilde{\rho}_S(t')]] \gamma_{\lambda\mu} \gamma_{\alpha\beta} \\ &= \gamma_{\lambda\mu} \gamma_{\alpha\beta} \{ \tilde{u}_\lambda(t) \tilde{u}_\alpha(t') Tr_{\mathcal{R}}[\tilde{v}_\mu(t-t') v_\beta \rho_{\mathcal{R}}(0)] \tilde{\rho}_S(t') + \\ &\quad - \tilde{u}_\alpha(t') Tr_{\mathcal{R}}[\tilde{v}_\mu(t-t') v_\beta \rho_{\mathcal{R}}(0)] \tilde{\rho}_S(t') \tilde{u}_\lambda(t) + \\ &\quad - \tilde{u}_\lambda(t) Tr_{\mathcal{R}}[v_\beta \tilde{v}_\mu(t-t') \rho_{\mathcal{R}}(0)] \tilde{\rho}_S(t') \tilde{u}_\alpha(t') + \\ &\quad + \tilde{\rho}_S(t') \tilde{u}_\alpha(t') Tr_{\mathcal{R}}[v_\beta \tilde{v}_\mu(t-t') \rho_{\mathcal{R}}(0)] \tilde{u}_\lambda(t) \}. \end{aligned}$$

Para deduzir esta expressão primeiro observamos que o operador L_S só atua sobre os operadores u_λ enquanto que $L_{\mathcal{R}}$ atua sobre os v_μ , assim usando a propriedade distributiva (C-5) e (C-4) podemos escrever, por exemplo

$$\begin{aligned} Tr_{\mathcal{R}}[v_\lambda \tilde{v}_\mu(t'-t) \rho_{\mathcal{R}}(0)] &= Tr_{\mathcal{R}}[v_\lambda e^{i(t'-t)H_{\mathcal{R}}} v_\mu e^{-i(t'-t)H_{\mathcal{R}}} \rho_{\mathcal{R}}(0)] = \\ &= Tr_{\mathcal{R}}[e^{-i(t'-t)H_{\mathcal{R}}} v_\lambda e^{-i(t'-t)H_{\mathcal{R}}} v_\mu \rho_{\mathcal{R}}(0)] = \\ &= Tr_{\mathcal{R}}[\tilde{v}_\lambda(t-t') v_\mu \rho_{\mathcal{R}}(0)], \end{aligned}$$

com procedimento análogo para os demais termos. Nas expressões anteriores estamos considerando que os índices mudos estão sendo somados de $2 \leq \lambda, \mu, \alpha, \beta \leq 3$, conforme a expressão (C-14). Por conveniência vamos definir

$$\xi_{\mu\beta}(t-t') = Tr_{\mathcal{R}}[\tilde{v}_\mu(t-t') v_\beta \rho_{\mathcal{R}}(0)], \quad (C-15)$$

$$\zeta_{\beta\mu}(t-t') = Tr_{\mathcal{R}}[v_\beta \tilde{v}_\mu(t-t') \rho_{\mathcal{R}}(0)], \quad (C-16)$$

e assim a expressão para o Kernel $K(t - t')\tilde{\rho}_S(t')$ pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
 K(t - t') &= [K_I(t - t') - K_{II}(t - t')]\tilde{\rho}(t') = \\
 &= \gamma_{\lambda\mu}\gamma_{\alpha\beta}\{[\tilde{u}_\lambda(t), \tilde{u}_\alpha(t')\tilde{\rho}_S(t')]\xi_{\mu\beta}(t - t') + \\
 &\quad - [\tilde{u}_\lambda(t), \tilde{\rho}_S(t')\tilde{u}_\alpha(t')]\zeta_{\beta\mu}(t - t')\} = \\
 &= \mathcal{L}_{\lambda\mu\alpha\beta}\tilde{\rho}_S(t'), \tag{C-17}
 \end{aligned}$$

onde $\mathcal{L}_{\lambda\mu\alpha\beta}$ é definido como

$$\mathcal{L}_{\lambda\mu\alpha\beta} = \gamma_{\lambda\mu}\gamma_{\alpha\beta}\{[\tilde{u}_\lambda(t), \tilde{u}_\alpha(t') \bullet]\xi_{\mu\beta}(t - t') - [\tilde{u}_\lambda(t), \bullet \tilde{u}_\alpha(t')]\zeta_{\beta\mu}(t - t')\}, \tag{C-18}$$

onde \bullet é o lugar ocupado pelo operador sobre o qual $\mathcal{L}_{\lambda\mu\alpha\beta}$ atua.

Note que a expressão (C-17) define K_I e K_{II} . Consideremos agora K_I , fazendo a soma sobre os índices $\lambda, \mu, \alpha, \beta$ de 2 à 3 temos

$$\begin{aligned}
 K_I(t - t') &= \gamma_{22}\gamma_{22}[\tilde{u}_2(t), \tilde{u}_2(t')\tilde{\rho}_S(t')]\xi_{22}(t - t') + \gamma_{32}\gamma_{22}[\tilde{u}_3(t), \tilde{u}_2(t')\tilde{\rho}_S(t')]\xi_{22}(t - t') + \\
 &\quad + \gamma_{23}\gamma_{22}[\tilde{u}_2(t), \tilde{u}_2(t')\tilde{\rho}_S(t')]\xi_{32}(t - t') + \gamma_{33}\gamma_{22}[\tilde{u}_3(t), \tilde{u}_2(t')\tilde{\rho}_S(t')]\xi_{32}(t - t') + \\
 &\quad + \gamma_{22}\gamma_{32}[\tilde{u}_2(t), \tilde{u}_3(t')\tilde{\rho}_S(t')]\xi_{22}(t - t') + \gamma_{32}\gamma_{32}[\tilde{u}_3(t), \tilde{u}_3(t')\tilde{\rho}_S(t')]\xi_{22}(t - t') + \\
 &\quad + \gamma_{23}\gamma_{32}[\tilde{u}_2(t), \tilde{u}_3(t')\tilde{\rho}_S(t')]\xi_{32}(t - t') + \gamma_{33}\gamma_{32}[\tilde{u}_3(t), \tilde{u}_3(t')\tilde{\rho}_S(t')]\xi_{32}(t - t') + \\
 &\quad + \gamma_{22}\gamma_{23}[\tilde{u}_2(t), \tilde{u}_2(t')\tilde{\rho}_S(t')]\xi_{23}(t - t') + \gamma_{32}\gamma_{23}[\tilde{u}_3(t), \tilde{u}_2(t')\tilde{\rho}_S(t')]\xi_{23}(t - t') + \\
 &\quad + \gamma_{23}\gamma_{23}[\tilde{u}_2(t), \tilde{u}_2(t')\tilde{\rho}_S(t')]\xi_{33}(t - t') + \gamma_{33}\gamma_{23}[\tilde{u}_3(t), \tilde{u}_2(t')\tilde{\rho}_S(t')]\xi_{33}(t - t') + \\
 &\quad + \gamma_{22}\gamma_{33}[\tilde{u}_2(t), \tilde{u}_3(t')\tilde{\rho}_S(t')]\xi_{23}(t - t') + \gamma_{32}\gamma_{33}[\tilde{u}_3(t), \tilde{u}_3(t')\tilde{\rho}_S(t')]\xi_{23}(t - t') + \\
 &\quad + \gamma_{23}\gamma_{33}[\tilde{u}_2(t), \tilde{u}_3(t')\tilde{\rho}_S(t')]\xi_{33}(t - t') + \gamma_{33}\gamma_{33}[\tilde{u}_3(t), \tilde{u}_3(t')\tilde{\rho}_S(t')]\xi_{33}(t - t').
 \end{aligned} \tag{C-19}$$

Retomemos o Hamiltoniano de interação para reescrevermos a constante de acoplamento g explicitamente, segue de (2.44) que

$$g_{i,1,2,kj} = -i\left(\frac{\omega_{12}}{c}\right)\left(\frac{2\pi c}{L^3}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{k}}e_{kj}\cdot P_{1,2,i}\exp i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}_i, \tag{C-20}$$

$$g_{i,2,1,k,j} = -i\left(\frac{w_{21}}{c}\right)\left(\frac{2\pi c}{L^3}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{k}} e_{kj} \cdot P_{2,1,i} \exp ik \cdot x_i, \quad (C-21)$$

onde

$$w_{21} = w_{12} = E_2 - E_1 = w_0, \quad \hbar = 1,$$

conforme a expressão (B-26) e o valor médio de momento de dipolo dos átomos é dado pela expressão (2.46). Fazendo a soma nos índices λ e μ da expressão (C-14) e usando (C-12) e (C-13) temos

$$H_{int} = \gamma_{22} b s^+ + \gamma_{23} b^\dagger s^+ + \gamma_{32} b s^- + \gamma_{33} b^\dagger s^-,$$

comparando esta com a expressão para H_{int} , eq.(C-11), verifica-se que

$$\gamma_{22} = \gamma_{23} = g_{i,2,1,k,j}, \quad (C-22a)$$

$$\gamma_{33} = \gamma_{32} = g_{i,1,2,k,j}, \quad (C-22b)$$

e assim podemos escrever para os produtos dos γ 's que aparecem em (C-19),

$$\gamma_{22} \gamma_{22} = \gamma_{22} \gamma_{23} = \gamma_{23} \gamma_{23} = g_{i,2,1,k,j} g_{i,2,1,k,j}, \quad (C-23a)$$

$$\gamma_{33} \gamma_{33} = \gamma_{33} \gamma_{32} = \gamma_{32} \gamma_{32} = g_{i,1,2,k,j} g_{i,1,2,k,j}, \quad (C-23b)$$

$$\gamma_{22} \gamma_{32} = \gamma_{23} \gamma_{33} = \gamma_{23} \gamma_{32} = g_{i,2,1,k,j} g_{i,1,2,k,j}, \quad (C-23c)$$

Vamos calcular agora as expressões para ξ_{21} , ξ_{23} , ξ_{32} e ξ_{33} ; tendo em vista que os $\xi_{\mu\beta}$ são dados por (C-15), e usamos a matriz densidade do ensemble canônico para caracterizarmos o reservóir, ou seja

$$\rho_R(0) = \frac{e^{-\beta H_R^{(i)}}}{\sum_i e^{-\beta H_R^{(i)}}}, \quad (C-24)$$

onde

$$\beta = (k_B T)^{-1}, \quad (C-25)$$

sendo k_B a constante de Boltzmann. Temos de (C-13) e (C-15) que

$$\xi_{22}(t - t') = \text{Tr}_{\mathcal{R}}[\tilde{b}_{\mathbf{k}}(t - t')b_{\mathbf{k}} \rho_{\mathcal{R}}(0)], \quad (\text{C} - 26)$$

$$\xi_{33}(t - t') = \text{Tr}_{\mathcal{R}}[\tilde{b}_{\mathbf{k}}(t - t')b_{\mathbf{k}}^{\dagger} \rho_{\mathcal{R}}(0)], \quad (\text{C} - 27)$$

$$\xi_{32}(t - t') = \text{Tr}_{\mathcal{R}}[\tilde{b}_{\mathbf{k}}^{\dagger}(t - t')b_{\mathbf{k}} \rho_{\mathcal{R}}(0)], \quad (\text{C} - 28)$$

$$\xi_{23}(t - t') = \text{Tr}_{\mathcal{R}}[\tilde{b}_{\mathbf{k}}^{\dagger}(t - t')b_{\mathbf{k}}^{\dagger} \rho_{\mathcal{R}}(0)], \quad (\text{C} - 29)$$

O traço é calculado fazendo-se a soma dos elementos diagonais do valor esperado dos operadores, calculado nos autoestados do campo eletromagnético definidos pelas expressões (2.35)-(2.37). A expressão (2.37) mostra que o termo $\exp(-\beta \omega_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}}^{\dagger} b_{\mathbf{k}})$ é diagonal, desta forma segue diretamente que as expressões para ξ_{22} e ξ_{33} são nulas porque a operação consecutiva de dois operadores de criação ou aniquilação levarão a estados ortogonais para $\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_2$ ou $\mathbf{k}_1 \neq \mathbf{k}_2$, portanto

$$\xi_{22}(t - t') = \xi_{33}(t - t') = 0. \quad (\text{C} - 30)$$

Para calcular ξ_{23} e ξ_{32} vamos antes obter a dependência temporal dos operadores b e b^{\dagger} usando a equação de movimento de Heisenberg no subespaço $\mathcal{E}_{\mathcal{R}}$ de \mathcal{R} , ou seja

$$i \frac{d}{dt} b_{\mathbf{k}}^{\dagger} = [b_{\mathbf{k}}^{\dagger}, H_{\mathcal{R}}], \quad \hbar = 1, \quad (\text{C} - 31)$$

onde $H_{\mathcal{R}}$ é dado por (C-11), esta expressão pode ser integrada diretamente para dar

$$\tilde{b}_{\mathbf{k}}^{\dagger}(t) = b_{\mathbf{k}}^{\dagger} e^{i\omega_{\mathbf{k}} t}, \quad (\text{C} - 32a)$$

e analogamente

$$\tilde{b}_{\mathbf{k}}(t) = b_{\mathbf{k}} e^{-i\omega_{\mathbf{k}} t}, \quad (\text{C} - 32b)$$

Da mesma forma a dependência temporal dos operadores s^{\pm} no subespaço $\mathcal{E}_{\mathcal{S}}$ do sistema é

$$\tilde{s}^{\pm}(t) = s^{\pm} e^{\pm i\omega_0 t}, \quad (\text{C} - 33)$$

$$i \frac{d}{dt} s_z = 0, \quad (C-34)$$

onde s_z é uma constante de movimento. Retomemos agora o cálculo de ξ_{32} , substituindo os autoestados definidos por (2.36)-(2.38) e a expressão (C-24) em (C-28) temos

$$\xi_{32}(t - t') = \sum_{n_{k_1}, n_{k_2}, \dots} \Pi_{\alpha\theta} \langle n_{\alpha} | b_{k_1}^{\dagger}(t - t') b_{k_2} \rangle \frac{e^{-\beta \sum_i w_{k_i} b_{k_i}^{\dagger} b_{k_i}}}{Z(\beta)} | n_{\theta} \rangle, \quad (C-35)$$

onde

$$\Pi_{\alpha} | n_{\alpha} \rangle = | \{ n_{\alpha} \} \rangle = | n_{k_1, j_1}, n_{k_2, j_2}, \dots, n_{k_i, j_i}, \dots \rangle, \quad (C-36)$$

e

$$Z(\beta) = \text{Tr}_{\mathcal{R}} e^{-\beta \sum_k w_k b_k^{\dagger} b_k} = \sum_{n_{k_1}, n_{k_2}, \dots} e^{-\beta \sum_i w_{k_i} n_{k_i}}, \quad (C-37)$$

é a função partição do ensemble canônico. A operação de $\exp(\beta w_k b_k^{\dagger} b_k)$ sobre $| n_{\theta} \rangle$ dá

$$e^{-\beta \sum_k w_k b_k^{\dagger} b_k} \Pi_{\theta} | n_{\theta} \rangle = e^{-\beta \sum_k w_k n_k} \Pi_{\theta} | n_{\theta} \rangle, \quad (C-38)$$

agora o fator exponencial comuta com $b^{\dagger} b$ e pode sair da expressão do valor médio, e com isto resta calcularmos

$$\Pi_{\alpha\theta} \langle n_{\alpha} | b_{k_1}^{\dagger}(t - t') b_{k_2} | n_{\theta} \rangle = e^{i w_{k_1} (t - t')} n_{k_1} \delta_{k_1, k_2}, \quad (C-39)$$

substituindo (C-38), (C-39) em (C-35) obtemos

$$\xi_{32}(t - t') = Z(\beta)^{-1} e^{i w_{k_1} (t - t')} \sum_{n_{k_1}, n_{k_2}, \dots} e^{-\beta \sum_i w_{k_i} n_{k_i}} n_{k_1} \delta_{k_1, k_2}, \quad (C-40)$$

a soma que aparece nesta expressão é efetuada

$$\begin{aligned} \sum_{n_{k_1}, n_{k_2}, \dots} n_k e^{-\beta \sum_i w_{k_i} n_{k_i}} &= \left(\sum_{n_{k_1}} n_{k_1} e^{-\beta w_{k_1} n_{k_1}} \right) \sum_{n_{k_2}, n_{k_3}, \dots} e^{-\beta \sum_{i \neq 1} w_{k_i} n_{k_i}} = \\ &= \frac{e^{-\beta w_{k_1}}}{(1 - e^{-\beta w_{k_1}})^2} \sum_{n_{k_2}, n_{k_3}, \dots} e^{-\beta \sum_{i \neq 1} w_{k_i} n_{k_i}}. \end{aligned} \quad (C-41)$$

Substituindo (C-37) e (C-41) em (C-40) obtemos

$$\xi(t - t') = \left(\sum_{n_{R_1}, n_{R_2}, \dots} e^{-\beta \sum_i w_{n_i} n_{k_i}} \right)^{-1} \times \\ \sum_{n_{R_1}, n_{R_2}, \dots} e^{-\beta \sum_{i \neq \ell} w_{n_i} n_{k_i}} \frac{e^{-\beta w_{n_\ell}}}{(1 - e^{-\beta w_{n_\ell}})^2} e^{i w_{n_\ell} (t - t')} \delta_{k_1 k_p}$$

No produto dos dois primeiros termos do lado direito da expressão anterior, todos os termos a menos da soma sobre k_1 cancelam-se e esta soma dá:

$$\left(\sum_{n_{k_1}} e^{-\beta w_{k_1} n_{k_1}} \right)^{-1} = 1 - e^{-\beta w_{k_1}}, \quad (C-42)$$

substituindo esta na expressão para ξ_{32} temos

$$\xi_{32}(t - t') = n(\beta w_{k_1}) e^{i w_{k_1} (t - t')} \delta_{k_1 k_p}, \quad (C-43)$$

onde definimos

$$n(\beta w_{k_1}) \equiv \frac{1}{e^{\beta w_{k_1}} - 1}, \quad \beta = \frac{1}{kT}, \quad (C-44)$$

como o número de ocupação médio do estado k é uma temperatura T . O cálculo de ξ_{23} segue analogamente se usamos a relação de comutação de b^\dagger e b ,

$$\xi_{23}(t - t') = \text{Tr}_R [\bar{b}_k (t - t') b_k^\dagger \rho_R(0)] = \\ = \text{Tr}_R [\rho_R(0)] \delta_{k k} + \text{Tr}_R [b_k^\dagger \bar{b}_k (t - t') \rho_R(0)] = \\ = [n(\beta w_k) + 1] e^{-i w_k (t - t')} \delta_{k k}. \quad (C-45)$$

Substituindo as expressões (C-23), (C-44) e (C-45) em (C-19) obtemos que

$$K_I(t - t') \bar{\rho}_S(t') = \sum_{i,j=1}^N \sum_{k,k} \{ g_{i,2,1,k} g_{j,2,1,k} \{ \bar{s}_j^\dagger(t') [\bar{s}_i^\dagger(t), \bar{\rho}_S(t')] + \bar{s}_j^-(t') [\bar{s}_i^-(t), \bar{\rho}_S(t')] \} + \\ + g_{i,1,2,k} g_{j,1,2,k} \{ [\bar{s}_i^-(t), \bar{s}_i^\dagger(t') \bar{\rho}_S(t')] + [\bar{s}_i^\dagger(t), \bar{s}_i^-(t') \bar{\rho}_S(t')] \} \} \times \\ \times [1 + n(\beta w_{k_2})] e^{-i w_{k_2} (t - t')} + n(\beta w_{k_2}) e^{-i w_{k_2} (t - t')} \delta_{k_2 k_p}. \quad (C-46)$$

Consideremos agora a equação para $K_{II}(t - t')$ dado por (C-17). Tendo em vista os cálculos que levaram a equação para $K_I(t - t')$ e observando a dependência temporal nos operadores da expressão (C-16) em relação a (C-15) bem como a posição dos operadores no comutador de K_{II} , com relação aos operadores de K_I , podemos escrever imediatamente que

$$\begin{aligned}
 K_{II}(t - t')\bar{\rho}_S(t') = & \sum_{i,j=1}^N \sum_{\mathbf{k}} \{g_{i,2,1,\mathbf{k}} g_{j,2,1,\mathbf{k}} \{[\bar{s}_i^+(t), \bar{\rho}_S(t')]\bar{s}_j^+(t') + [\bar{s}_i^-(t), \bar{\rho}_S(t')]\bar{s}_j^-(t')\} + \\
 & + g_{i,1,2,\mathbf{k}} g_{j,1,2,\mathbf{k}} \{[\bar{s}_i^-(t), \bar{\rho}_S(t')]\bar{s}_j^+(t') + [\bar{s}_i^+(t), \bar{\rho}_S(t')]\bar{s}_j^-(t')\}\} \times \\
 & \times [1 + n(\beta\omega_{\mathbf{k}_\perp})]e^{-i\omega_{\mathbf{k}_\perp}(t-t')} + n(\beta\omega_{\mathbf{k}_\perp})e^{-i\omega_{\mathbf{k}_\perp}(t-t')}\delta_{\mathbf{k}_\perp, \mathbf{k}'_\perp}. \quad (C-47)
 \end{aligned}$$

Por conveniência não vamos somar as expressões (C-46) e (C-47), mas sim considerar primeiro a integração no tempo, que aparece na equação (C-9) dos termos de $K_I(t - t')$ começemos com o termo $\exp -i\omega_{\mathbf{k}}(t - t')$,

$$\begin{aligned}
 I_{II(-)} = & - \int_0^t dt \bar{s}_j^+(t') [\bar{s}_i^+(t), \bar{\rho}_S(t')] e^{-i\omega_{\mathbf{k}_\perp}(t-t')} = \\
 = & - \int_0^t d\tau \bar{s}_j^+(t') [\bar{s}_i^+(t), \bar{\rho}_S(t-\tau)] e^{2i\omega_0 t} e^{-i(\omega_0 + \omega_{\mathbf{k}_\perp})\tau},
 \end{aligned}$$

introduzindo a Aproximação Markoviana (AM),

$$\begin{aligned}
 I_{II(-)} \longrightarrow & - \bar{s}_j^+(t') [\bar{s}_i^+(t), \bar{\rho}_S(t)] e^{2i\omega_0 t} \int_0^t d\tau e^{-i(\omega_0 + \omega_{\mathbf{k}_\perp})\tau} = \\
 = & - \bar{s}_j^+(t') [\bar{s}_i^+(t), \bar{\rho}_S(t)] e^{2i\omega_0 t} [\pi\delta(\omega_0 + \omega_{\mathbf{k}_\perp}) - iP \frac{1}{\omega_0 + \omega_{\mathbf{k}_\perp}}]. \quad (C-48)
 \end{aligned}$$

A aproximação Markoviana consiste em desprezar a memória do sistema \mathcal{R} sobre \mathcal{S} , e o operador estatístico depende agora apenas de t e não mais da diferença $(t - t')$. Na integral (C-48) usamos o resultado [31]

$$\delta^\pm(\Omega) = \int_0^\infty d\tau e^{\pm i\Omega\tau} = \pi\delta(\Omega) \pm iP \frac{1}{\Omega}, \quad (C-49)$$

onde o simbolo P refere-se a parte principal. O simbolo $I_{II}(-)$ representa a integral do primeiro membro do Kernel $K_I(t-t')$ associado a fase $\exp\{-i\omega_k(t-t')\}$. Considerando que os campos não possuem frequências negativas obtemos que

$$\sum_k \delta(\omega_0 + \omega_k) = 0. \quad (C-50)$$

Procedendo analogamente introduzimos a aproximação de onda girante nas equações (C-46) e (C-47) para obtermos:

$$I_I(t) = - \sum_{i,j}^N \sum_{\mathbf{k}} \gamma_{i,j,\mathbf{k}} \{ \{ [s_i^-, s_j^+ \tilde{\rho}_S(t)] (-i) P \frac{1}{\omega_0 + \omega_k} + [s_i^+, s_j^- \tilde{\rho}_S(t)] \delta^+(\omega_0 - \omega_k) \} \times \\ [1 + n(\beta\omega_k)] + \{ [s_i^-, s_j^+ \tilde{\rho}_S(t)] \delta^-(\omega_0 - \omega_k) + [s_i^+, s_j^- \tilde{\rho}_S(t)] (i) P \frac{1}{\omega_0 + \omega_k} \} \times \\ n(\beta\omega_k) \}, \quad (C-51)$$

$$I_{II}(t) = - \sum_{i,j}^N \sum_{\mathbf{k}} \gamma_{i,j,\mathbf{k}} \{ \{ [s_i^-, \tilde{\rho}_S s_j^+(t)] \delta^-(\omega_0 - \omega_k) + [s_i^+, \tilde{\rho}_S(t) s_j^-] (i) P \frac{1}{\omega_0 + \omega_k} \} \times \\ [1 + n(\beta\omega_k)] + \{ [s_i^-, \tilde{\rho}_S(t) s_j^+] (-i) P \frac{1}{\omega_0 + \omega_k} + [s_i^+, \tilde{\rho}_S(t) s_j^-] \delta^+(\omega_0 - \omega_k) \} \times \\ n(\beta\omega_k) \}, \quad (C-52)$$

onde

$$\gamma_{i,j,\mathbf{k}} = g_{i,2,1,\mathbf{k}} g_{j,2,1,\mathbf{k}}. \quad (C-53)$$

Vamos fazer agora a integração angular sobre o vetor $\mathbf{e}_{\mathbf{k},j}$ do campo; a soma sobre as direções de polarização está implícita na soma sobre o índice \mathbf{k} . Aproximando a soma para uma integral,

$$\sum_{\mathbf{k},\alpha} \rightarrow \sum_{\alpha} \left(\frac{L}{2\pi c}\right)^3 \int_0^{\infty} d\omega_k \omega_k^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta = \\ = \sum_{\alpha} \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 \int_0^{\infty} dk k^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta, \quad (C-54)$$

usando (C-20) e (C-21) escrevemos explicitamente a expressão (C-53)

$$\begin{aligned} \gamma_{i,j,k} &= g_{i,2,1,k} g_{j,2,1,k} = g_{i,2,1,k} g_{j,1,2,k}^* = \\ &= \left(\frac{w_0}{c}\right)^2 \left(\frac{2\pi c}{L^3}\right) \frac{1}{k} (\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k},\alpha} \cdot \mathbf{P}_{2,1,i}) (\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k},\alpha} \cdot \mathbf{P}_{1,2,j}) e^{i\hat{\mathbf{k}} \cdot (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)}, \end{aligned} \quad (C-55)$$

onde $\mathbf{e}_{\mathbf{k},\alpha}$ já foi definido anteriormente. Consideremos agora a integral

$$I = P_i P_j \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin\theta \sum_\alpha (\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k},\alpha} \cdot \hat{\mathbf{P}}_{2,1,i}) (\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k},\alpha} \cdot \hat{\mathbf{P}}_{1,2,j}) e^{i\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{x}_{ij}}, \quad \hat{\mathbf{P}} = \mathbf{P} P, \quad (C-56)$$

onde

$$\mathbf{x}_{ij} \equiv \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j. \quad (C-57)$$

Lembrando que $\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k},\alpha} \cdot \mathbf{k} = 0$, $\mathbf{e}_{\mathbf{k},\alpha} \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k},\alpha'} = \delta_{\alpha\alpha'}$, onde $\alpha = 1, 2$ obtemos que

$$\sum_\alpha (\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k},\alpha} \cdot \hat{\mathbf{P}}_i) (\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k},\alpha} \cdot \hat{\mathbf{P}}_j) = \hat{\mathbf{P}}_i \cdot \hat{\mathbf{P}}_j - (\hat{\mathbf{P}}_i \cdot \hat{\mathbf{k}}) (\hat{\mathbf{P}}_j \cdot \hat{\mathbf{k}}), \quad (C-58)$$

substituindo em (C-56) temos que

$$\frac{I}{P_i P_j} = \int_\Omega d\hat{\mathbf{k}} [\hat{\mathbf{P}}_i \cdot \hat{\mathbf{P}}_j - (\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{P}}_i) (\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{P}}_j)] e^{i\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{x}_{ij}}, \quad (C-59)$$

como estamos integrando no vetor unitário $\hat{\mathbf{k}}$, o resultado da integral deve ser da forma

$$\frac{I}{P_i P_j} = [a \hat{\mathbf{P}}_i \cdot \hat{\mathbf{P}}_j + b (\hat{\mathbf{P}}_i \cdot \mathbf{x}_{ij}) (\hat{\mathbf{P}}_j \cdot \mathbf{x}_{ij})], \quad (C-60)$$

onde a e b independem de \mathbf{P}_i e \mathbf{P}_j . Observe que precisamos de duas condições para determinarmos a e b , considerando todos os dipolos iguais entre si e com a condição

$$\hat{\mathbf{P}}_i = \hat{\mathbf{P}}_j = \hat{\mathbf{x}}_{ij}, \quad (C-61)$$

segue de (C-59) e (C-60) que

$$a + b = 8\pi \left| \frac{\text{sen}(kx_{ij})}{(kx_{ij})^3} - \frac{\text{cos}(kx_{ij})}{(kx_{ij})^2} \right|, \quad (C-62)$$

agora fazendo

$$\hat{\mathbf{P}}_i = \hat{\mathbf{P}}_j = \hat{\mathbf{S}}, \quad \hat{\mathbf{S}} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1), \quad \hat{\mathbf{x}}_{ij} = (1, 0, 0), \quad (C-63)$$

obtemos de (C-59) e (C-60) que

$$a + \frac{1}{3}b = \frac{8 \operatorname{sen}(kx_{ij})}{\pi (kx_{ij})}. \quad (C-64)$$

As equações (C-62) e (C-64) definem a e b , e portanto

$$I = 4\pi |P_i|^2 \left\{ [1 - (\hat{P}_i \hat{x}_{ij})^2] \frac{\operatorname{sen}(kx_{ij})}{(kx_{ij})} + [1 - 3(\hat{P}_i \hat{x}_{ij})^2] \left[\frac{\cos(kx_{ij})}{(kx_{ij})^2} - \frac{\operatorname{sen}(kx_{ij})}{(kx_{ij})^3} \right] \right\}, \quad (C-65)$$

como consideramos $\hat{P}_i = \hat{P}_j$, então

$$P_i \cdot P_j = P_i P_j \cos \theta = |P_i|^2; \quad \cos \theta = 1.$$

Por conveniência vamos introduzir a notação

$$I = \frac{8}{3} \pi |P_i|^2 \Delta_{ij}(kx_{ij}), \quad (C-66)$$

onde (C-65) e (C-66) definem $\Delta_{ij}(kx_{ij})$. Substituindo (C-66) em (C-51) e (C-52) e tendo em vista (C-17), a equação master (C-9) escreve-se

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dt} \tilde{\rho}_S(t) &= i \frac{1}{w_0 c \pi} \left\{ \sum_{i=1}^N \gamma_i \int_0^\infty dk k \Delta_{ii}(kx_{ii}) \left\{ [s_i^+ s_i^-, \tilde{\rho}_S(t)] P \frac{1}{w_0 - w_k} - [s_i^- s_i^+, \tilde{\rho}_S(t)] P \frac{1}{w_0 + w_k} \right\} \times \right. \\ &\quad \times [1 + n(\beta w_k)] + \\ &\quad + \left. \left\{ [s_i^+ s_i^-, \tilde{\rho}_S(t)] P \frac{1}{w_0 + w_k} - [s_i^- s_i^+, \tilde{\rho}_S(t)] P \frac{1}{w_0 - w_k} \right\} n(\beta w_k) \right\} + \\ &\quad + \sum_{i \neq j=1}^N \gamma_i \int_0^\infty dk k \Delta_{ij}(kx_{ij}) \left\{ [s_i^+ s_j^-, \tilde{\rho}_S(t)] P \frac{1}{w_0 - w_k} - [s_i^- s_j^+, \tilde{\rho}_S(t)] P \frac{1}{w_0 + w_k} \right\} \times \\ &\quad \times [1 + n(\beta w_k)] + \\ &\quad + \left\{ [s_i^+ s_j^-, \tilde{\rho}_S(t)] P \frac{1}{w_0 + w_k} - [s_i^- s_j^+, \tilde{\rho}_S(t)] P \frac{1}{w_0 - w_k} \right\} n(\beta w_k) \left. \right\} + \\ &\quad + \sum_{i,j=1}^N \gamma_{ij} [s_i^+ s_j^- \tilde{\rho}_S(t) - 2s_j^- \tilde{\rho}_S(t) s_i^+ + \tilde{\rho}_S(t) s_i^+ s_j^-] [1 + n(\beta w_0)] + \\ &\quad + \sum_{i,j=1}^N \gamma_{ij} [s_i^- s_j^+ \tilde{\rho}_S(t) - 2s_j^+ \tilde{\rho}_S(t) s_i^- + \tilde{\rho}_S(t) s_i^- s_j^+] n(\beta w_0). \quad (C-67) \end{aligned}$$

Observe-se que separamos a soma sobre as partes principais em $i = j$ e $i \neq j$, ainda usamos as seguintes relações, válidas para sistemas de dois níveis [32]:

$$[s_i^+ s_i^-, \rho] = -[s_i^- s_i^+, \rho] = [s_x, \rho], \quad (C-68)$$

$$[s_i^+ s_j^-, \rho] = [s_j^- s_i^+, \rho], \quad i \neq j, \quad (C-69)$$

e nos dois últimos termos foi efetuada a integração sobre $\delta(\omega_0 - \omega_k)$. As integrações que envolvem os Δ_{ij} , com $i \neq j$, são efetuadas usando o cálculo dos resíduos para os polos em $\omega_k = \pm \omega_0$, onde consideramos que $n(\beta \omega_k)$ é centrado em torno da frequência ω_0 , com isto $n(\beta \omega_k) \sim n(\beta \omega_0)$, saindo este termo do integrando. Quanto às integrações sobre $\Delta_{ij}(kx_{ij})$, vemos de (C-65) e (C-66) que

$$\Delta_{ii}(k_0 x_{ii}) = 1, \quad (C-70)$$

e estas integrais podem ser feitas diretamente levando a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \tilde{\rho}_S(t) = & -i\Omega \sum_{i=1}^N [s_i^+ s_i^-, \tilde{\rho}_S(t)] [1 + n(\beta \omega_0)] - i \sum_{i \neq j=1}^N \Omega_{ij}(kx_{ij}) [s_i^+ s_j^-, \tilde{\rho}_S(t)] + \\ & - \sum_{i,j=1}^N \gamma_{ij} [s_i^+ s_j^- \tilde{\rho}_S(t) - 2s_j^- \tilde{\rho}_S(t) s_i^+ + \tilde{\rho}_S(t) s_i^+ s_j^-] [1 + n(\beta \omega_0)] + \\ & - \sum_{i,j=1}^N \gamma_{ij} [s_i^- s_j^+ \tilde{\rho}_S(t) - 2s_j^+ \tilde{\rho}_S(t) s_i^- + \tilde{\rho}_S(t) s_i^- s_j^+] n(\beta \omega_0), \quad (C-71) \end{aligned}$$

onde

$$\gamma_{ii} = \gamma_0 = \frac{2}{3} \left(\frac{\omega_0}{c}\right)^3 |P|^2, \quad (C-72)$$

$$\Omega = -\frac{\gamma_0}{\pi} \ln \left\{ \left| \frac{k_c + k_0}{k_0} \right| \left| \frac{k_c - k_0}{k_0} \right| \right\}, \quad (C-73)$$

$$\gamma_{ij} = \gamma_0 \Delta_{ij}(k_0 x_{ij}), \quad x_{ij} = x_i - x_j, \quad (C-74)$$

e

$$\Omega_{ij}(k_0 x_{ij}) = \frac{3}{2} \gamma_0 \left\{ [1 - 3(\hat{P} \hat{x}_{ij})^2] \left| \frac{\sin(k_0 x_{ij})}{(k_0 x_{ij})^2} + \frac{\cos(k_0 x_{ij})}{(k_0 x_{ij})^3} \right| - \frac{\cos(k_0 x_{ij})}{(k_0 x_{ij})} [1 - (\hat{P} \hat{x}_{ij})^2] \right\}. \quad (C-75)$$

Na equação (C-73) k_c é um "cut-off". A equação (C-71) está na representação de interação, na representação de Schrodinger $\tilde{\rho}_S(t)$ é escrita como

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_S(t) = & -i\omega_\gamma \sum_{i=1}^N [s_i^+ s_i^-, \rho_S(t)] - 2i\Omega \sum_{i=j=1}^N [s_i^+ s_j^-, \rho_S(t)] n(\beta\omega_0) - i \sum_{i \neq j=1}^N \Omega_{ij}(k_0 x_{ij}) [s_i^+ s_j^-, \rho_S(t)] + \\ & - \sum_{i,j=1}^N \gamma_{ij} [s_i^+ s_j^- \rho_S(t) - 2s_j^- \rho_S(t) s_i^+ + \rho_S(t) s_i^+ s_j^-] [1 + n(\beta\omega_0)] + \\ & - \sum_{i,j=1}^N \gamma_{ij} [s_i^- s_j^+ \rho_S(t) - 2s_j^+ \rho_S(t) s_i^- + \rho_S(t) s_i^- s_j^+] n(\beta\omega_0), \end{aligned} \quad (C-76)$$

onde

$$\omega_\gamma = \omega_0 + \Omega, \quad (C-77)$$

é a frequência renormalizada. Vale a pena observar que não fizemos a aproximação de onda girante na Hamiltoniana (C-11), como foi feito para obter o hamiltoniano de Dicke, expressão (B-31), assim como nas expressões (C-46) e (C-47); com isto obtivemos uma frequência ω_γ renormalizada e o termo $\Omega_{ij}(k_0 x_{ij})$, os quais não aparecem quando usamos o hamiltoniano (B-31), já que estes termos provêm dos termos antiressonantes $s^+ b^+$ e $s^- b$, os quais são desprezados em (B-1). A parte imaginária da equação (C-64) possui termos dispersivos, $(\omega_0 - \omega)^{-1}$ e $(\omega_0 + \omega)^{-1}$, e assim descrevem processos antiressonantes, as somas em $i = j$ levam somente a uma correção na frequência, também chamada "Lamb-shift" e pode ser vista como uma renormalização da frequência atômica livre ω_0 . Os termos correspondentes a $i \neq j$ aparece como uma nova contribuição que representa a troca de fótons virtuais, entre i e j . Observe que na aproximação de dipolo, $\lambda_0 \gg x_{ij}$, este termo possui uma forte contribuição, ou seja este termo diverge para $k_0 x_{ij} \rightarrow 0$. A parte real da equação (C-67) corresponde aos termos nos quais apareceu $\delta(\omega_0 - \omega_k)$, e desta forma descreve o acoplamento de fótons ressonantes ($\omega_0 = \omega_k$), assim a expressão (C-74) pode ser aproximada para

$$\gamma_{ij} \sim \gamma_0; \quad \Lambda_{ij}(k_0 x_{ij}) \rightarrow 1 \text{ para } \lambda_0 \gg x_{ij},$$

na aproximação de dipolo. Vamos ignorar aqui os efeitos do termo $\Omega_{ij}(k_0 x_{ij})$ bem como o "Lamb-shift" dependente da temperatura, com isto a equação (C-76) reduz-se à

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_s(t) = & -i\omega_\gamma \sum_{i=1}^N [s_i^\dagger s_i^-, \rho_s(t)] - \gamma_0 \sum_{i,j=1}^N [s_i^\dagger s_j^- \rho_s(t) - 2s_j^- \rho_s(t) s_i^\dagger + \rho_s(t) s_i^\dagger s_j^-] \times \\ & \times [1 + n(\beta\omega_0)] + \\ & - \gamma_0 \sum_{i,j=1}^N [s_i^- s_j^\dagger \rho_s(t) - 2s_j^\dagger \rho_s(t) s_i^- + \rho_s(t) s_i^- s_j^\dagger] n(\beta\omega_0), \end{aligned} \quad (C-78)$$

Observe que nas equações (C-76) e (C-78) suprimimos os índices s de ρ_s .

APÊNDICE - D.

Obtenção do Sistema de Equações (4-20) a (4-23)

No capítulo IV introduzimos uma nova base de operadores, O_i , $i = 1, 2, 3$ e 4 a qual é obtida de uma combinação linear dos operadores de spin s^+ , s^- e s_x , que satisfazem às seguintes relações de comutação

$$[s_x, s^\pm] = \pm s^\pm, \quad (D-1)$$

$$[s^+, s^-] = 2s_x, \quad (D-2)$$

(consideramos $\hbar = 1$) e como consideramos spin $1/2$ os operadores s^+ e s^- tem o seu quadrado nulo,

$$(s^+)^2 = (s^-)^2 = 0. \quad (D-3)$$

Os operadores s^\pm e s_x agem nos autoestados $|+\rangle$ e $|-\rangle$ modificando-os,

$$s^+|+\rangle = s^-|-\rangle = 0, \quad (D-4)$$

$$s^+|-\rangle = |+\rangle, \quad (D-5)$$

$$s^-|+\rangle = |-\rangle, \quad (D-6)$$

enquanto que s_x é diagonal

$$s_x|\pm\rangle = \pm\frac{1}{2}|\pm\rangle, \quad (D-7)$$

conforme as equações (4.5a)-(4.5d). Neste apêndice introduzimos os operadores O_1 , O_2 , O_3 e O_4 que são uma combinação linear dos operadores s^\pm e s_x e são dados pelas expressões (4.9)-(4.12) ou seja

$$O_1 = \frac{1}{2}(I + 2s_x), \quad (D-8)$$

$$O_2 = \frac{1}{2}(I - 2s_z), \quad (D-9)$$

$$O_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(s^+ + s^-), \quad (D-10)$$

$$O_4 = \frac{i}{\sqrt{2}}(s^+ - s^-). \quad (D-11)$$

Estes operadores são hermitianos, e as relações de comutação para eles podem ser obtidas com a ajuda das equações (D-1) e (D-2), e são mostradas na tabela T-1 abaixo:

$[O_i, O_j]$	O_1	O_2	O_3	O_4
O_1	0	0	$-iO_4$	iO_3
O_2	0	0	iO_4	$-iO_3$
O_3	iO_4	$-iO_4$	0	$-i(O_1 - O_2)$
O_4	$-iO_3$	iO_3	$i(O_1 - O_2)$	0

Com a ajuda das equações (D-4)-(D-7) podemos determinar o resultado da ação dos operadores O_i, s sobre os autovetores $|+\rangle$ e $|-\rangle$, temos que

$$O_1|+\rangle = \frac{1}{2}(I + 2s_z)|+\rangle = |+\rangle, \quad O_1 = |+\rangle\langle +|, \quad (D-12)$$

$$O_1|-\rangle = 0, \quad (D-13)$$

$$O_2|+\rangle = \frac{1}{2}(I - 2s_z)|+\rangle = 0, \quad O_2 = |-\rangle\langle -|, \quad (D-14)$$

$$O_2|-\rangle = |-\rangle, \quad (D-15)$$

$$O_3|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(s^+ + s^-)|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|-\rangle, \quad O_3 = \frac{|-\rangle\langle +| + |+\rangle\langle -|}{\sqrt{2}}, \quad (D-16)$$

$$O_3|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle, \quad (D-17)$$

$$O_4|+\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}}(s^+ - s^-)|+\rangle = \frac{-i}{\sqrt{2}}|-\rangle, \quad O_4 = i \frac{|+\rangle\langle -| - |-\rangle\langle +|}{\sqrt{2}}, \quad (D-18)$$

$$O_4|-\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}}|+\rangle. \quad (D-19)$$

Temos também que o traço dos O_i s são

$$\text{Tr}O_1 = \frac{1}{2} \langle +|(I + 2s_x)|+\rangle = 1, \quad (D-20)$$

$$\text{Tr}O_2 = 1, \quad (D-21)$$

$$\text{Tr}O_3 = 0, \quad (D-22)$$

$$\text{Tr}O_4 = 0, \quad (D-23)$$

e $\text{Tr}O_i O_j$ são mostrados na tabela T-2 abaixo,

$\text{Tr}O_i O_j$	O_1	O_2	O_3	O_4
O_1	1	0	0	0
O_2	0	1	0	0
O_3	0	0	1	0
O_4	0	0	0	1

Desta tabela segue a equação (4-15), ou seja o conjunto de operadores $\{O_1, O_2, O_3, O_4\}$ é ortogonal a partir da definição do produto interno

$$\langle O_i | O_j \rangle = \text{Tr}O_i^\dagger O_j = \text{Tr}O_i O_j = \delta_{ij}, \quad (D-24)$$

Vamos determinar agora, de (4-17), a equação para ψ_1 , as equações para ψ_2 , ψ_3 e ψ_4 seguem analogamente. Consideremos então a equação (4.17)

$$\begin{aligned}
\dot{w}_j(t) = & -iw_\gamma \sum_{i=1}^4 w_i \text{Tr} O_j |s^+ s^-, O_i\rangle - \gamma [1 + n(\beta w_0)] \sum_{i=1}^4 w_i \text{Tr} O_j (s^+ s^- O_i - 2s^- O_i s^+ + O_i s^+ s^-) + \\
& -\gamma_0 n(\beta w_0) \sum_{i=1}^4 w_i \text{Tr} O_j (s^- s^+ O_i - 2s^+ O_i s^- + O_i s^- s^+) + \\
& -\gamma_0 (\rho_0 - V^{-1}) \sum_{i=1}^4 w_i \text{Tr} O_j \{ \langle s^- \rangle |s^+, O_i\rangle + [O_i, s^-] \langle s^+ \rangle \}, \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad (D-25)
\end{aligned}$$

Considerando $j = 1$ e tratando separadamente cada termo desta equação, temos para o primeiro que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^4 w_i \text{Tr} O_1 |s^+ s^-, O_i\rangle &= \sum_{i=1}^4 w_i \sum_{m=-}^+ \langle m | O_1 s^+ s^- O_i - O_1 O_i s^+ s^- | m \rangle = \\
&= \sum_{i=1}^4 w_i \sum_{m=-}^+ \langle m | [O_i, O_1] s^+ s^- | m \rangle = \\
&= \sum_{i=1}^4 w_i \langle + | [O_i, O_1] | + \rangle = \\
&= iw_3 \langle + | O_4 | + \rangle - iw_4 \langle + | O_3 | + \rangle = 0. \quad (D-26)
\end{aligned}$$

Para obtermos esta expressão usamos a propriedade cíclica do traço, as relações de comutação para os O_i s definidas na tabela T-1 e as equações (D-12)-(D-19); nos cálculos seguintes estaremos usando estas relações. Consideremos o segundo termo de (D-25), que possui três parcelas, vamos tratar separadamente cada uma delas. A primeira parcela:

$$\sum_{i=1}^4 w_i \text{Tr} O_1 s^+ s^- O_i = \sum_{i=1}^4 w_i \sum_{m=+}^- \langle m | O_i O_1 s^+ s^- | m \rangle = \sum_{i=1}^4 w_i \langle + | O_i O_1 | + \rangle = w_1, \quad (D-27)$$

a segunda parcela:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^4 w_i \text{Tr} O_1 s^- O_i s^+ &= \sum_{i=1}^4 w_i \sum_{m=+}^- \langle m | O_1 s^- O_i s^+ | m \rangle = \sum_{i=1}^4 w_i \langle - | O_1 s^- O_i | - \rangle = \\
&= w_1 \langle - | O_1 s^- | + \rangle + \frac{w_3}{\sqrt{2}} \langle - | O_1 s^- | - \rangle - \frac{iw_4}{\sqrt{2}} \langle - | O_1 s^- | - \rangle = \\
&= w_1 \langle - | O_1 | - \rangle = 0, \quad (D-28)
\end{aligned}$$

e a terceira parcela:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^4 w_i \text{Tr} O_1 O_i s^+ s^- &= \sum_{i=1}^4 w_i \sum_{m=+}^- \langle m | O_1 O_i s^+ s^- | m \rangle = \\ &= \sum_{i=1}^4 w_i \langle + | O_1 O_i | + \rangle = w_1, \end{aligned} \quad (D-29)$$

e das equações (D-26)-(D-28) segue então que

$$\sum_{i=1}^4 w_i \text{Tr} O_1 (s^+ s^- O_i - 2s^- O_i s^+ + O_i s^+ s^-) = 2w_1, \quad (D-30)$$

procedendo analogamente com os demais termos obtemos

$$\dot{w}_1 = -2\gamma_0(1+n)w_1 + 2\gamma_0 n w_2 - \gamma_0 \left(\frac{\rho_0 - V^{-1}}{\rho} \right) (w_3^2 + w_4^2), \quad (D-31)$$

o termo não linear provém do último termo em (D-25), uma vez que

$$\langle s^\pm \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [w_3 \pm i w_4].$$

REFERENCIAS

- [1] - R. H. Dicke, Phys. Rev. **93**, 99 (1954).
- [2] - N. Skribanowitz, I. P. Herman, J. C. Mac Givray and M. S. Feld, Phys. Rev. Lett. **30**, 309 (1976).
- [3] - M. Gross and S. Harosche, Phys. Rep., **93**, 301 (1982).
- [4] - L. Moy, P. Goy, M. Gross, J. M. Raimond, C. Fabre and S. Harosche, Phys. Rev. A, **27**, 2043 (1983).
- [5] - G. S. Agarwal, Third Rochester Conference on Coherence and Quantum Optics; L. Mandel and E. Wolf, Coherence and Quantum Optics (1973).
- [6] - C. Leonardi, I. Persico and G. Vetri, Nuovo Cimento, **9**, 1 (1986).
- [7] - R. Bonifacio and P. Schwendimann, Phys. Rev. A, **4**, 302 (1971); **4**, 854 (1971).
- [8] - A. V. Andreev, V. I. Emel'yanov and Y. A. Il'inskil, Usp. Fiz. Nauk **131**, 653 (1980).
- [9] - R. W. Zwanzig, Lectures in Theoretical Physics, Boulder **3**, 106 (1960).
- [10] - G. Emch, Helv. Phys. Acta, **37**, 532 (1964).
- [11] - W. Peier, Physica, **57**, 565 (1972).
- [12] - K. Blum, Density Matrix Theory and Applications. Plenum Press. New York, N. Y. (1972).
- [13] - J. D. Jackson, Classical Electrodynamics. John Wiley & Sons, Inc., 2nd (1975).
- [14] - A. L. Fetter and J. D. Walecka, Quantum Theory of Many Particles Systems. Mac Graw-Hill, (1971).
- [15] - J. J. Sakuray, Advanced Quantum Mechanics. Addison-Wesley, (1967).
- [16] - J. A. Silva - Tese de Mestrado, IFT/TM-06/78.
- [17] - G. S. Agarwal, Phys. Rev. A, **4**, (1971).
- [18] - F. Bloch, Phys. Rev. **70**, 460, (1946).
- [19] - F. Bloch and R. K. Wangness, Phys. Rev. **89**, 728 (1952).

- [20] - C. R. Stroud and E. T. Jaynes, *Phys. Rev. A*, **1**, 106 (1970).
- [21] - L. Allen and J. H. Eberly, *Optical Resonance and Two-Level Atoms* J. Wiley and Sons, New York, N. Y. (1975).
- [22] - M. Born and E. Wolf, *Principles of Optics*, Pergamon Press London (1980).
- [23] - W. K. H. Panofsky and H. Phillips, *Classical Electricity and Magnetism*, Addison-Wesley, Mass. (1955).
- [24] - C. R. Stroud, J. H. Eberly, W. L. Lama and L. Mendel, *Phys. Rev. A*, **5**, 1094 (1972).
- [25] - F. T. Arecchi, E. Courtens, R. Gilmore and H. Thomas, *Phys. Rev. A*, **6**, 2211 (1972).
- [26] - R. P. Feynman, F. L. Vernon and R. W. Hellarath, *J. Appl. Phys*; **28**, 49 (1975).
- [27] - H. T. Davis, *Introduction to Nonlinear Differential and Integral Equations*, Dover Publications, Inc. New York (1962).
- [28] - F. Friedberg and S. R. Hortmann, *Phys. Rev. A*, **10**, 1728 (1974); B. Coffey and R. Friedberg, *Phys. Rev. A*, **17**, 1023 (1978).
- [29] - F. Schuda, C. R. Stroud and M. Hercher, *J. Phys. B*, **7**, 1198 (1974).
- [30] - W. Harting, W. Fasmussen, R. Schieder and H. Walter, *Z. Phys. A*, **278**, 105 (1977).
- [31] - W. H. Louisell. *Quantum Statistical Properties of Radiation*. Wiley, New York, N. Y. (1973).
- [32] - G. S. Agarwal, *Phys. Rev. A*, **7**, 1195 (1973).

LEGENDAS DAS FIGURAS

- Fig. A-1. $W(\tau) \times \tau$, eq.(5.6), para as condições iniciais: $W(0) = 50, 48.96, 40, 0, n = 0$, e $\rho = 100$; curvas 1, 2, 3, e 4, respectivamente. Para a condição inicial $W(0) = 0$, $W(\tau)$ e sempre nulo.
- Fig. A-2. $Z(\tau) \times \tau$, eq.(5.7), para as condições iniciais: $Z(0) = 0, 10, 30, 50, n = 0$ e $\rho = 100$; curvas 1, 2, 3, e 4, respectivamente.
- Fig. A-3. $I(\tau) \times \tau$, eq.(5.8), para as condições iniciais citadas nas figuras A-1 e A-2; curvas 1, 2, 3, e 4, respectivamente.
- Fig. A-4. $|J(\tau)| \times \tau$, para as condições iniciais citadas nas figuras A-1 e A-2; curvas 1, 2, 3, e 4, respectivamente.
- Fig. B-1. $W(\tau) \times \tau$, para as condições iniciais: $W(0) = 1, 10^{-3}, 10^{-5}, 0, n = 0$, e $\rho = 100$; curvas 1, 2, e 3 para o sistema sem a interação com o reservóir e curvas 4, 5 e 6 para o sistema com interação com o reservóir, respectivamente.
- Fig. B-2. $Z(\tau) \times \tau$, para as condições iniciais: $Z(0) = 49.989, 49.999, n = 0$, e $\rho = 100$; curvas 1 - 3 e 4 - 6 como na figura B-1.
- Fig. B-3. $I(\tau) \times \tau$, para as condições iniciais citadas nas figuras B-1 e B-2, curvas 1 - 3 e 4 - 6 como na figura B-1.
- Fig. B-4. $|J(\tau)| \times \tau$, para as condições iniciais citadas nas figuras B-1 e B-2, curvas 1 - 3 para o sistema interagindo com o reservóir, para o sistema sem interação $|J(\tau)|$ e uma constante de movimento e as curvas 4 - 6 são as retas $|J(\tau)| = 100$.
- Fig. C-1. $W(\tau) \times \tau$, para as condições iniciais: $W(0) = 50, \rho = 100$ e $n = 0, 10, 20, e 40$; curvas 1, 2, 3, e 4, respectivamente.
- Fig. C-2. $Z(\tau) \times \tau$, para as condições iniciais: $Z(0) = 0, \rho$ e n assumem os mesmos valores da figura C-1 com as curvas 1 - 5 associadas a estes valores, respectivamente.

- Fig. C-3. $I(\tau) \times \tau$, para as condições iniciais citadas nas figuras C-1 e C-2, curvas 1 – 5 como na figura C-1.
- Fig. C-4 . $|J(\tau)| \times \tau$, para as condições iniciais: $W(0) = 50$, $Z(0) = 0$, $\rho = 100$ e $n = 0$.
- Fig. D-1. $W(\tau) \times \tau$, para as condições iniciais: $W(0) = 1$, $\rho = 100$ e $n = 0, 2, 4, 6, e 8$; curvas 1, 2, 3, 4 e 5, respectivamente.
- Fig. D-2. $Z(\tau) \times \tau$, para as condições iniciais: $Z(0) = 49.989998$, ρ e n assumem os mesmos valores da figura D-1 com as curvas 1 – 5 associadas a estes valores, respectivamente.
- Fig. D-3. $I(\tau) \times \tau$, para as condições iniciais citadas nas figuras D-1 e D-2, curvas 1 – 5 como na figura D-1.
- Fig. D-4 . $|J(\tau)| \times \tau$, para as condições iniciais citadas nas figuras D-1 e D-2, curvas 1 – 5 como na figura D-1.

Figura A-1

$w(0) = 50, 48.96, 40, 0$

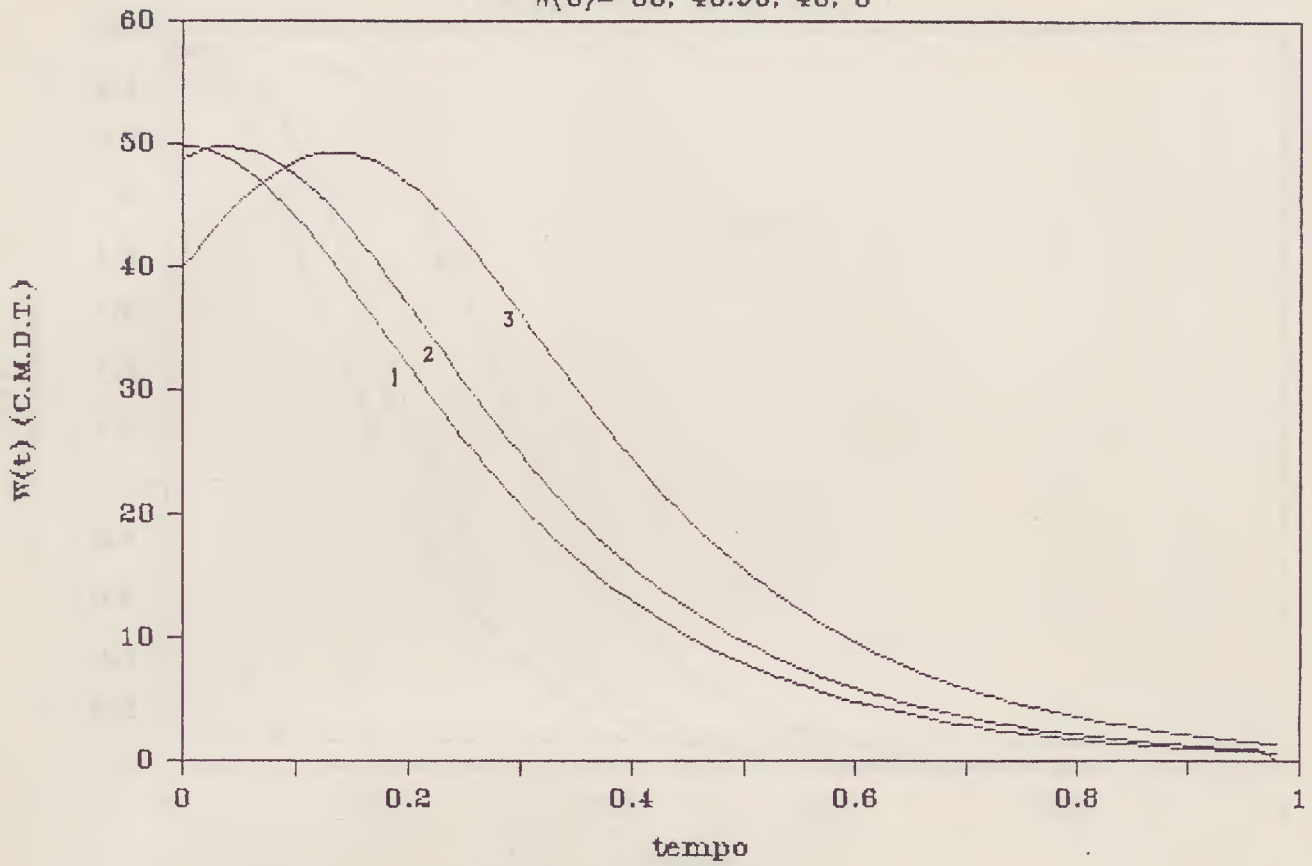


Figura A - 2

$Z(0) = 0, 10, 30, 50$

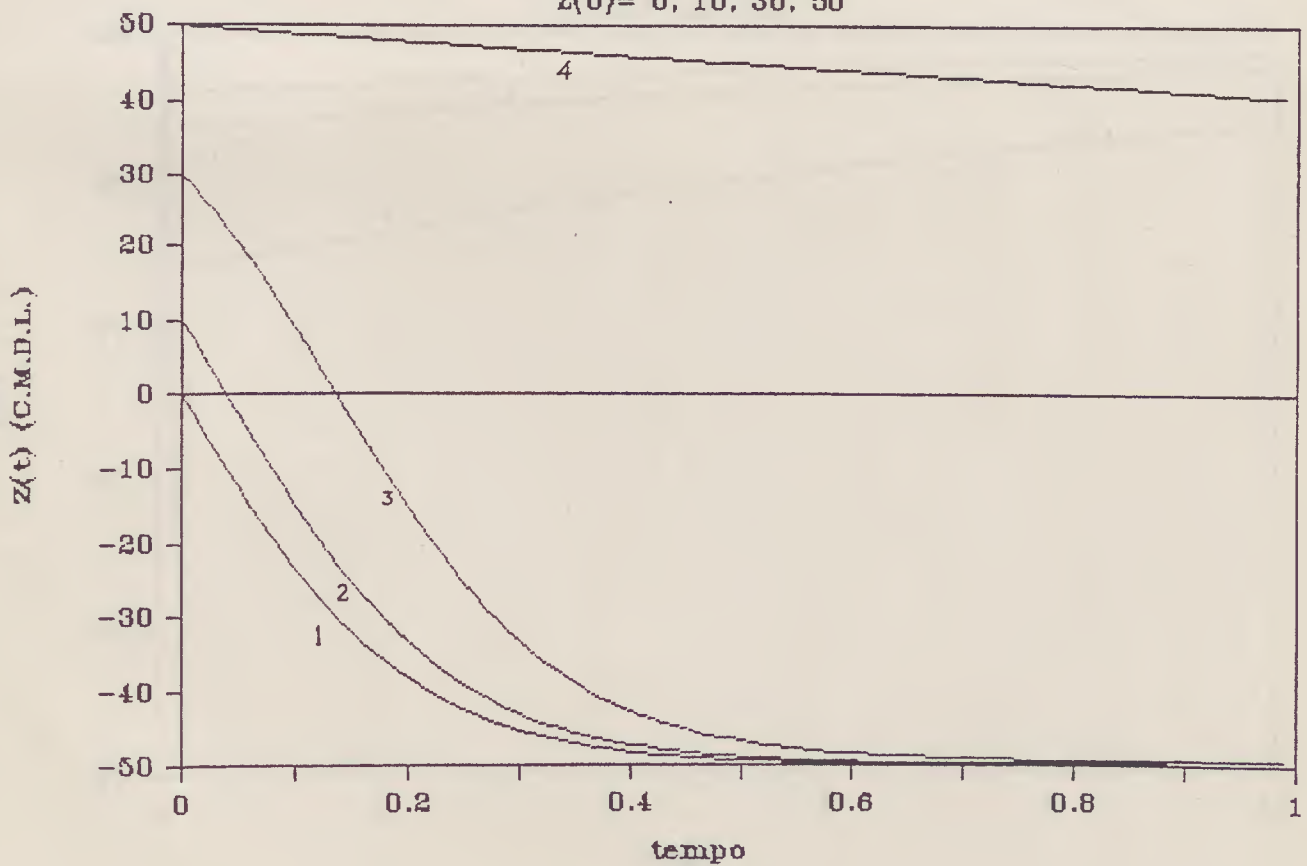


Figura A-3

$I(\max) = 2.25, 2.54, 2.49, .1$

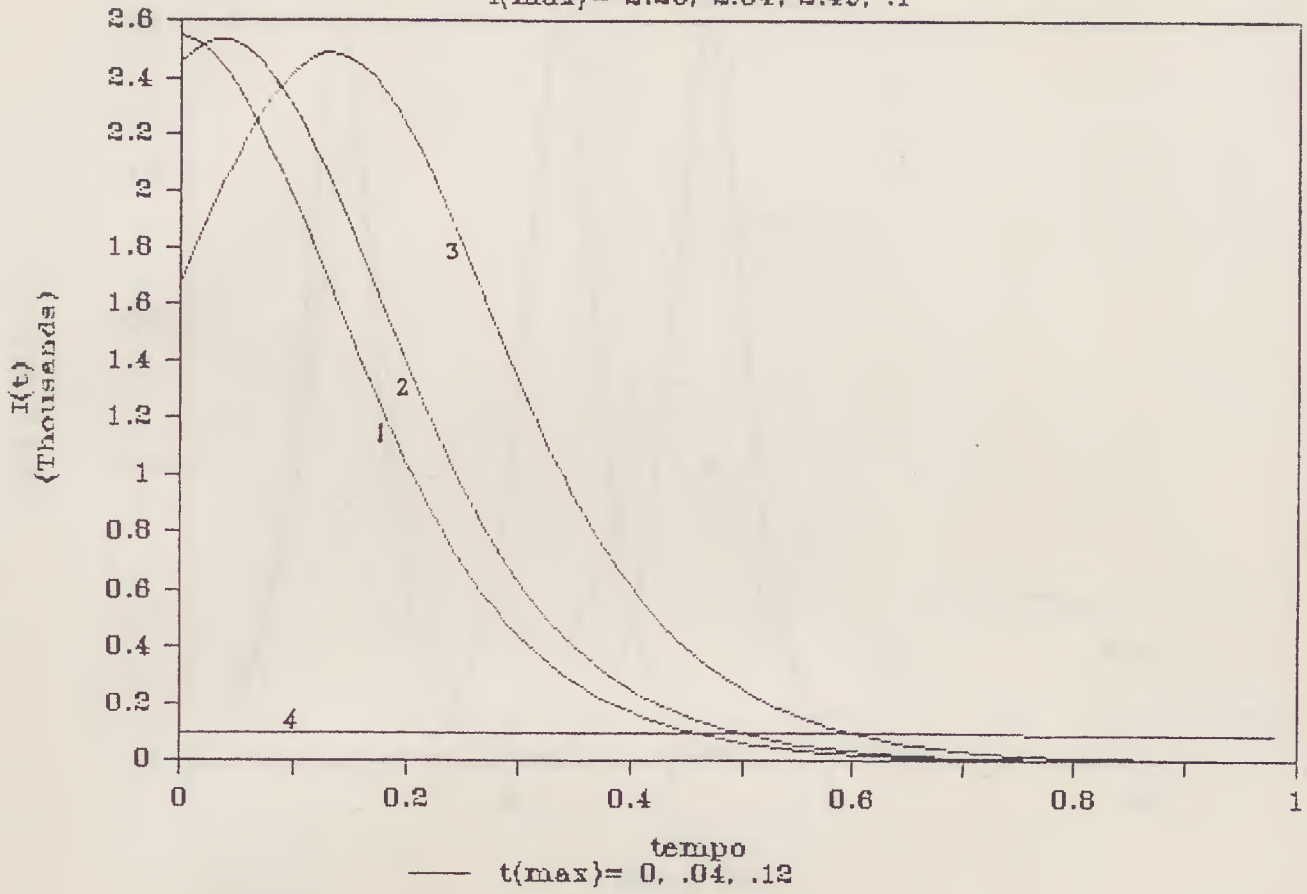


Figura A-4

(Mod. Vet. Bloch)

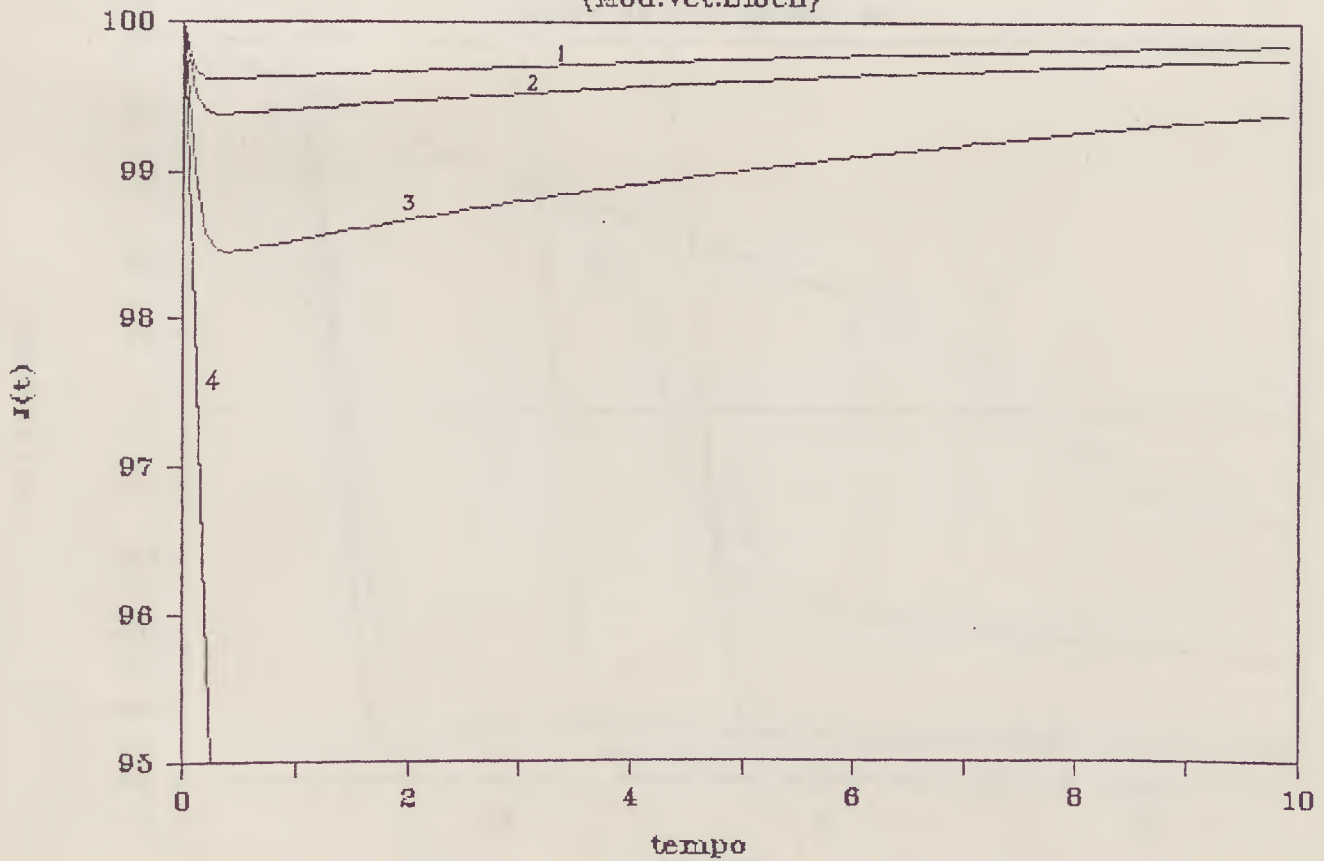


Figura B-1

$$W(0) = 1, .001, .00001$$

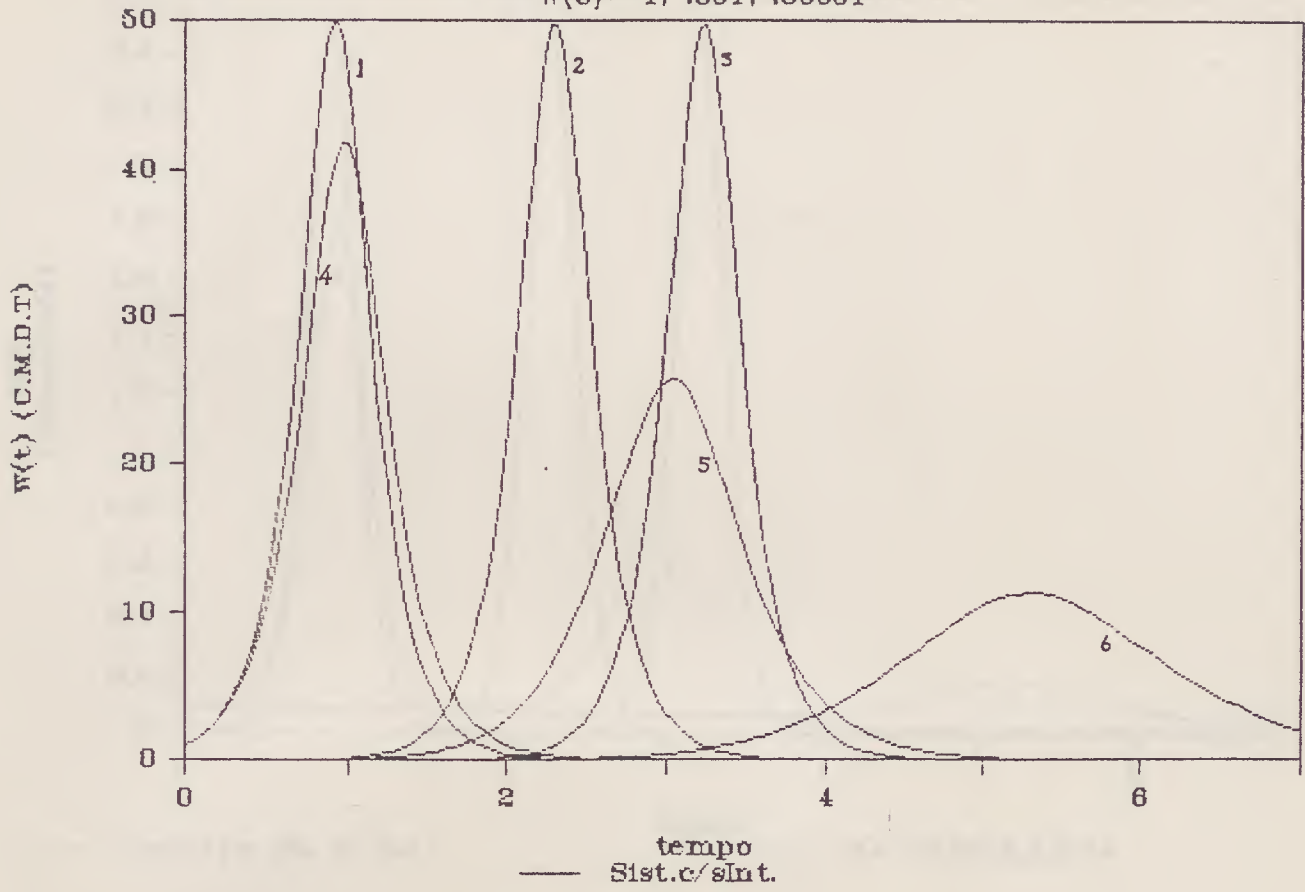


Figura B-2

$$Z(0) = 49.989, 49.999, 50$$

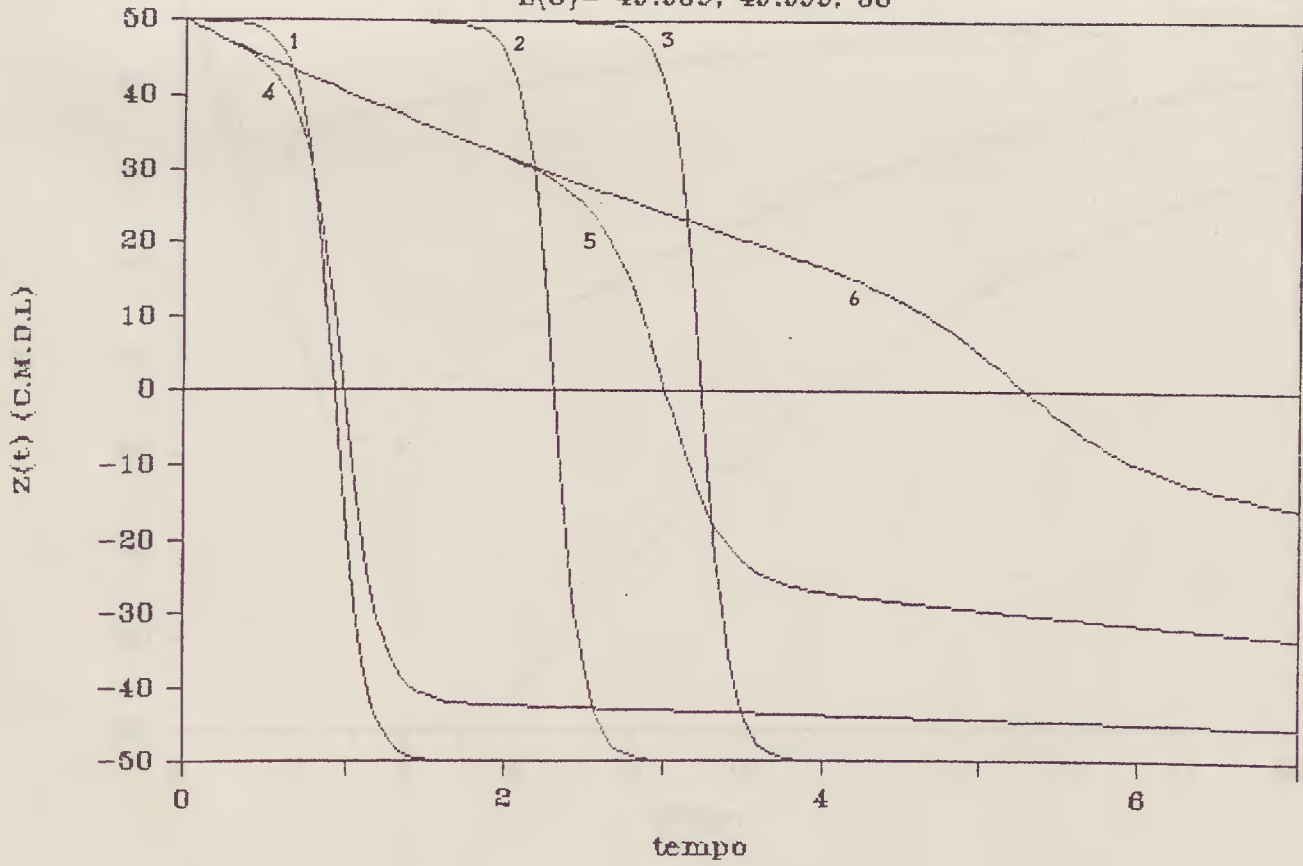


Figura B-3

$I(\max) = 1.8, .712, .178, *2.25$

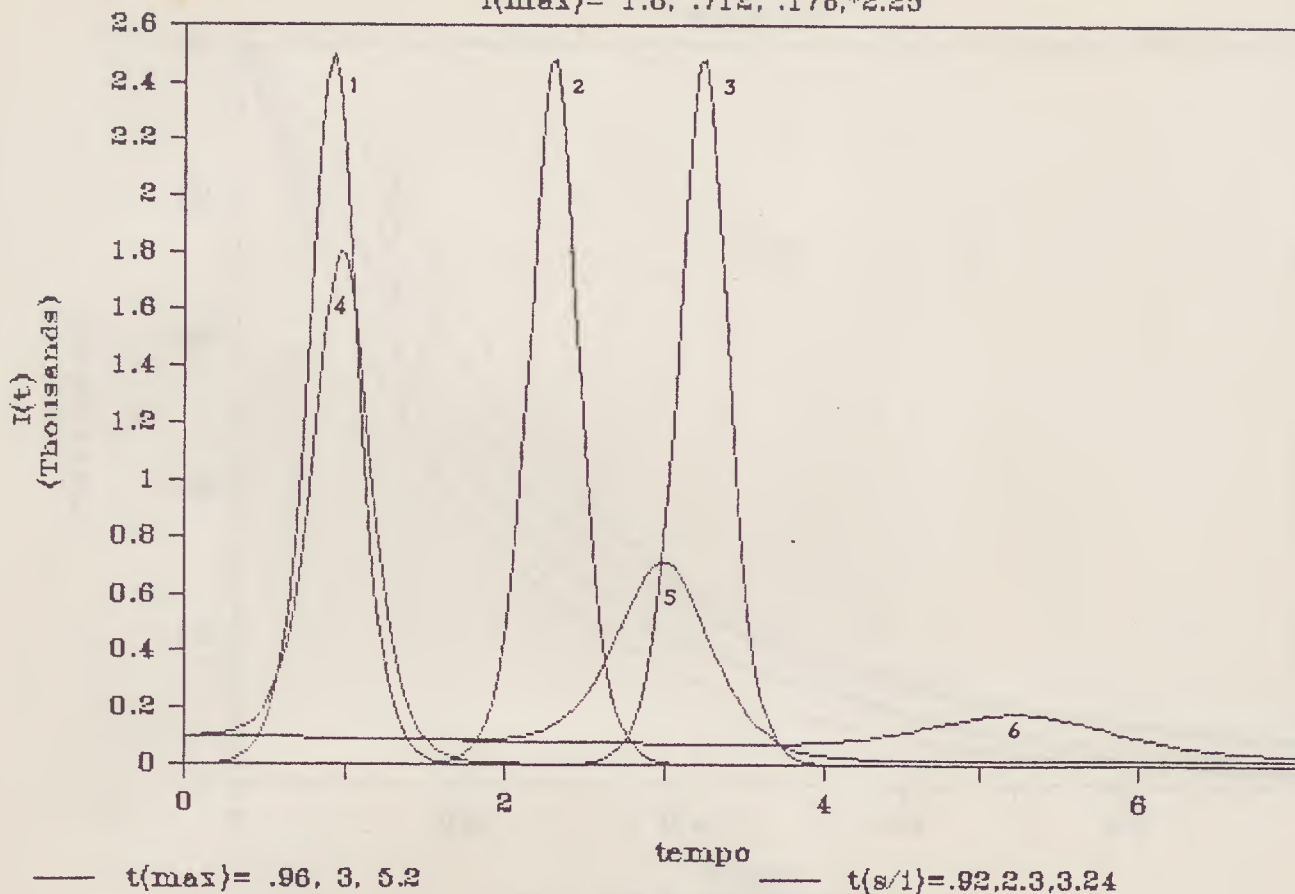


Figura B-4

(Mod. Vet. Bloch)

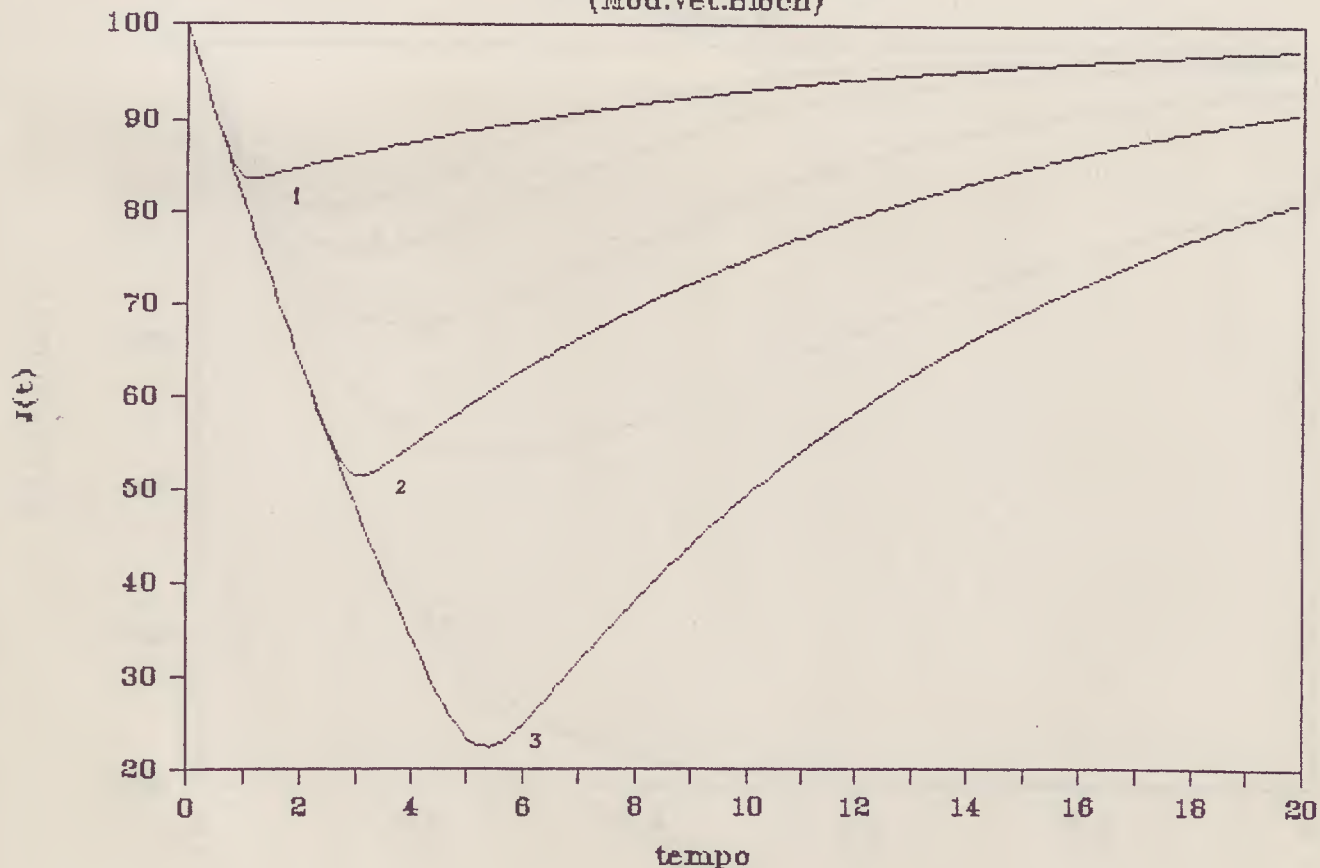


Figura C-1

$$w(0) = 50$$

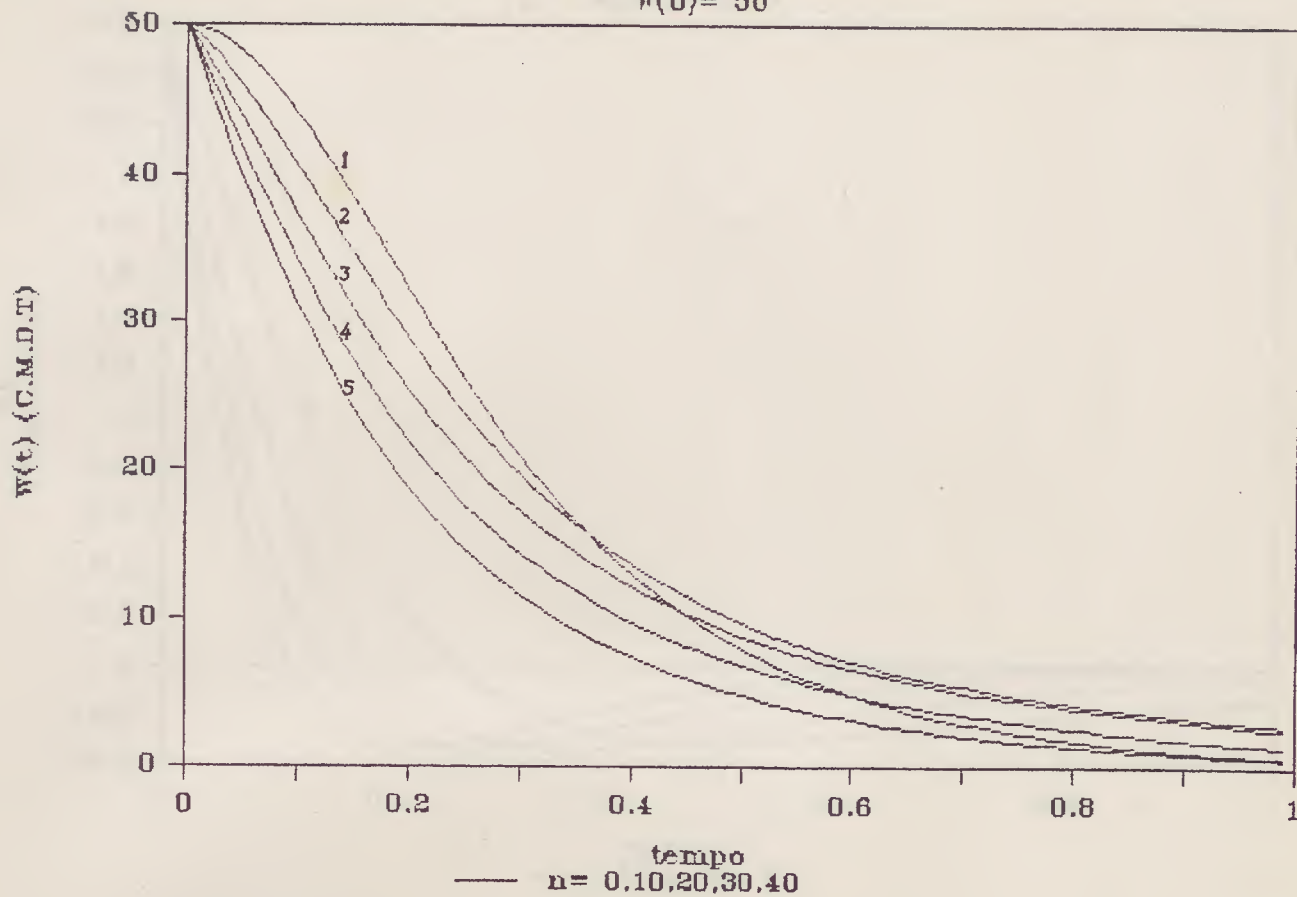


Figura C-2

$$z(0) = 0$$

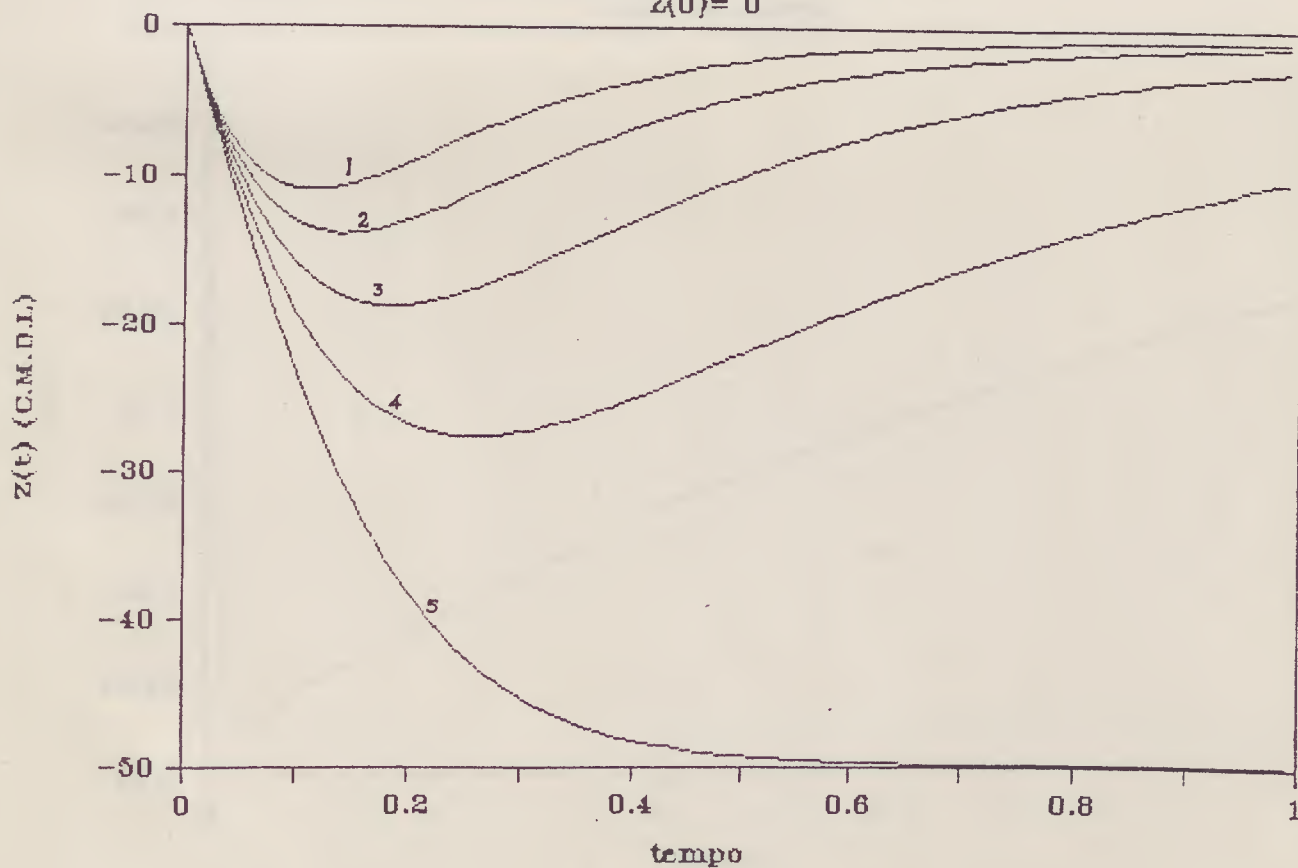


Figura C-3

$I(\max) = 2.55$

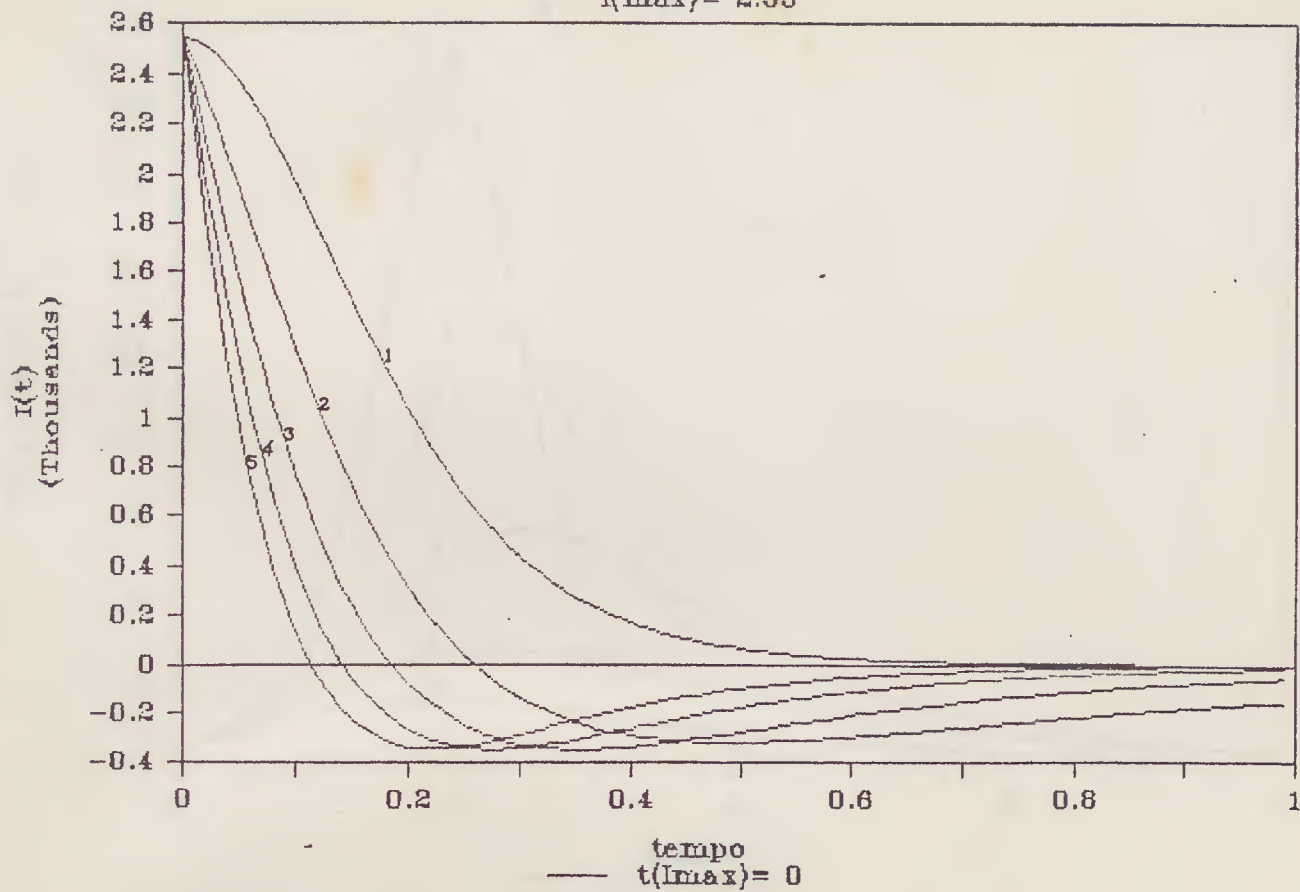


Figura C-4

(Mod. Vet. Bloch)

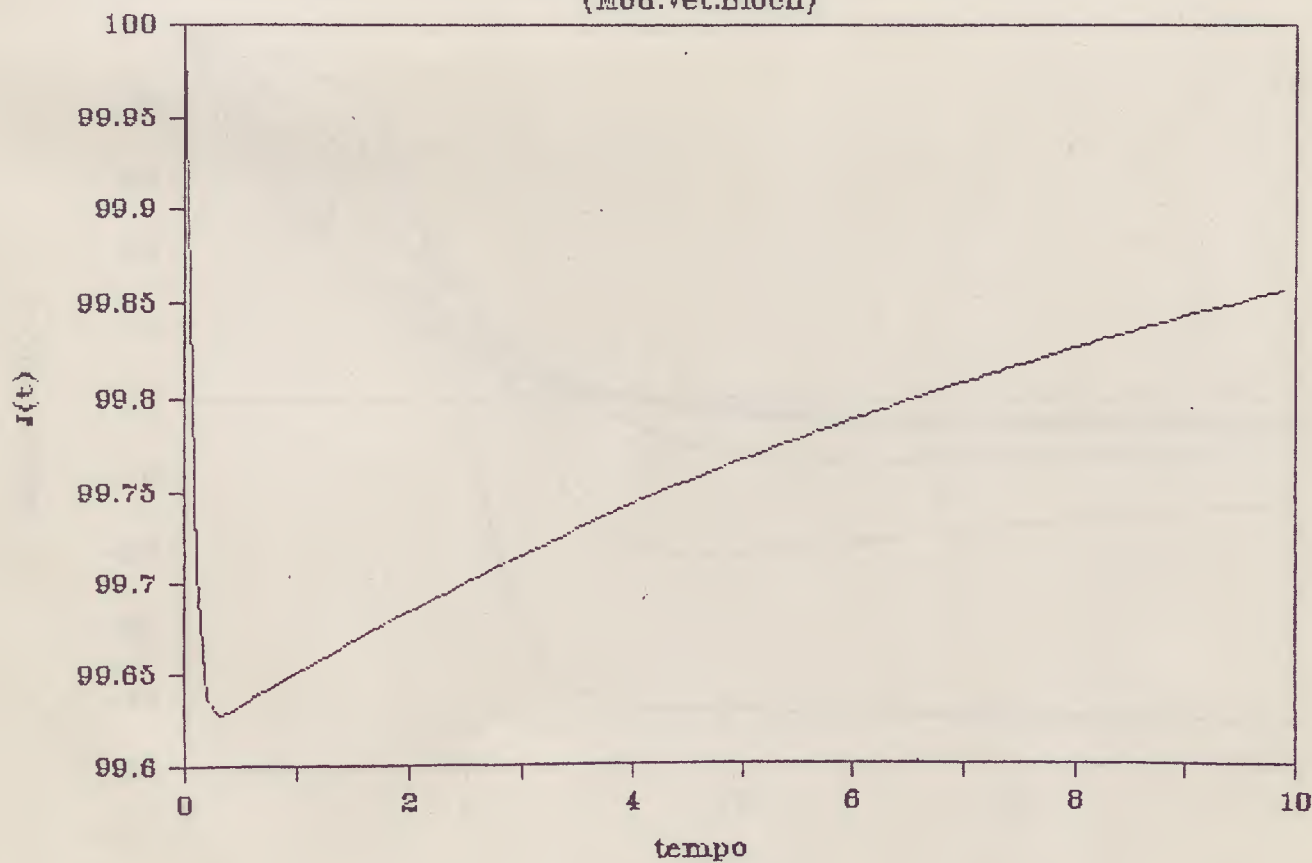


Figura D-1

$$W(0) = 1$$

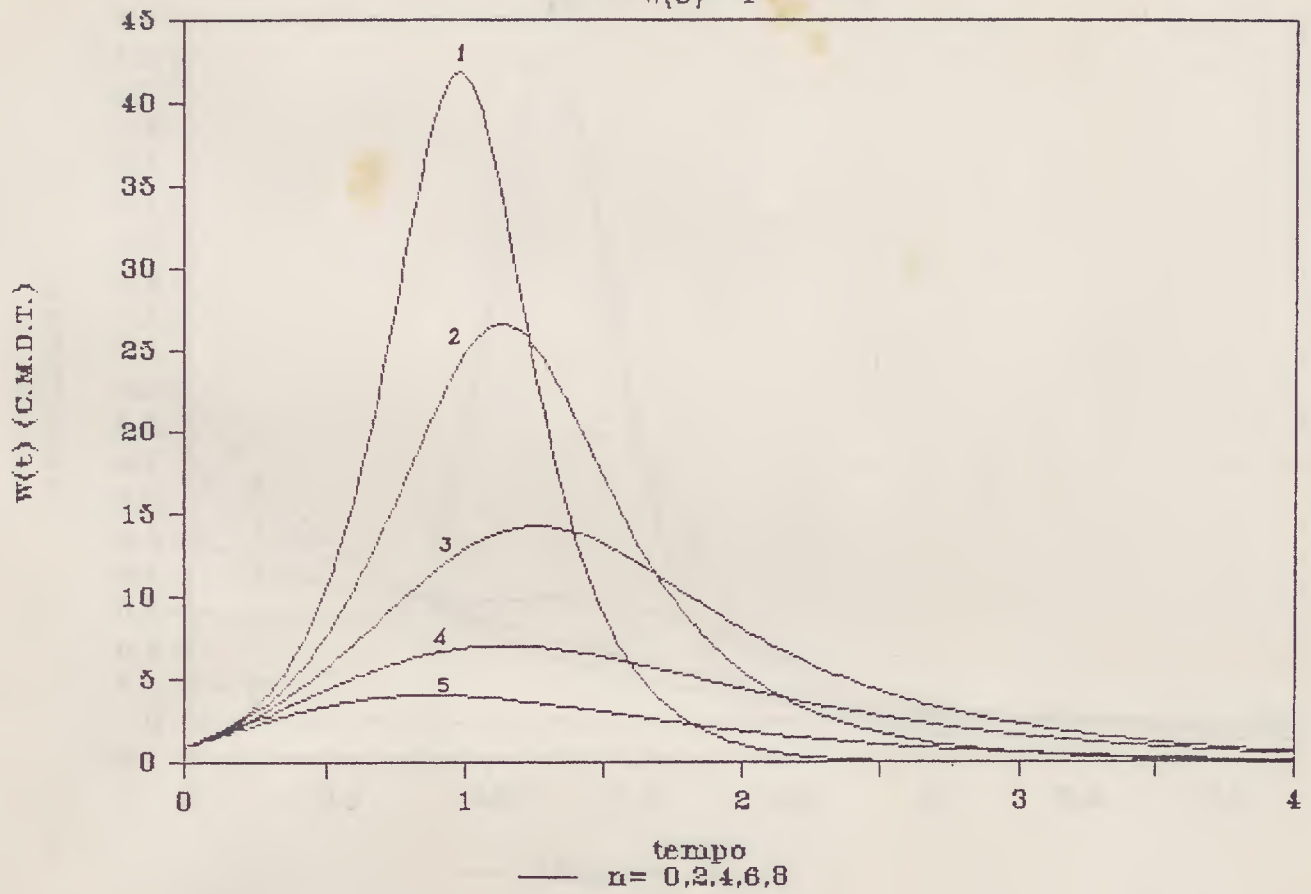


Figura D-2

$$Z(0) = 49.989998$$

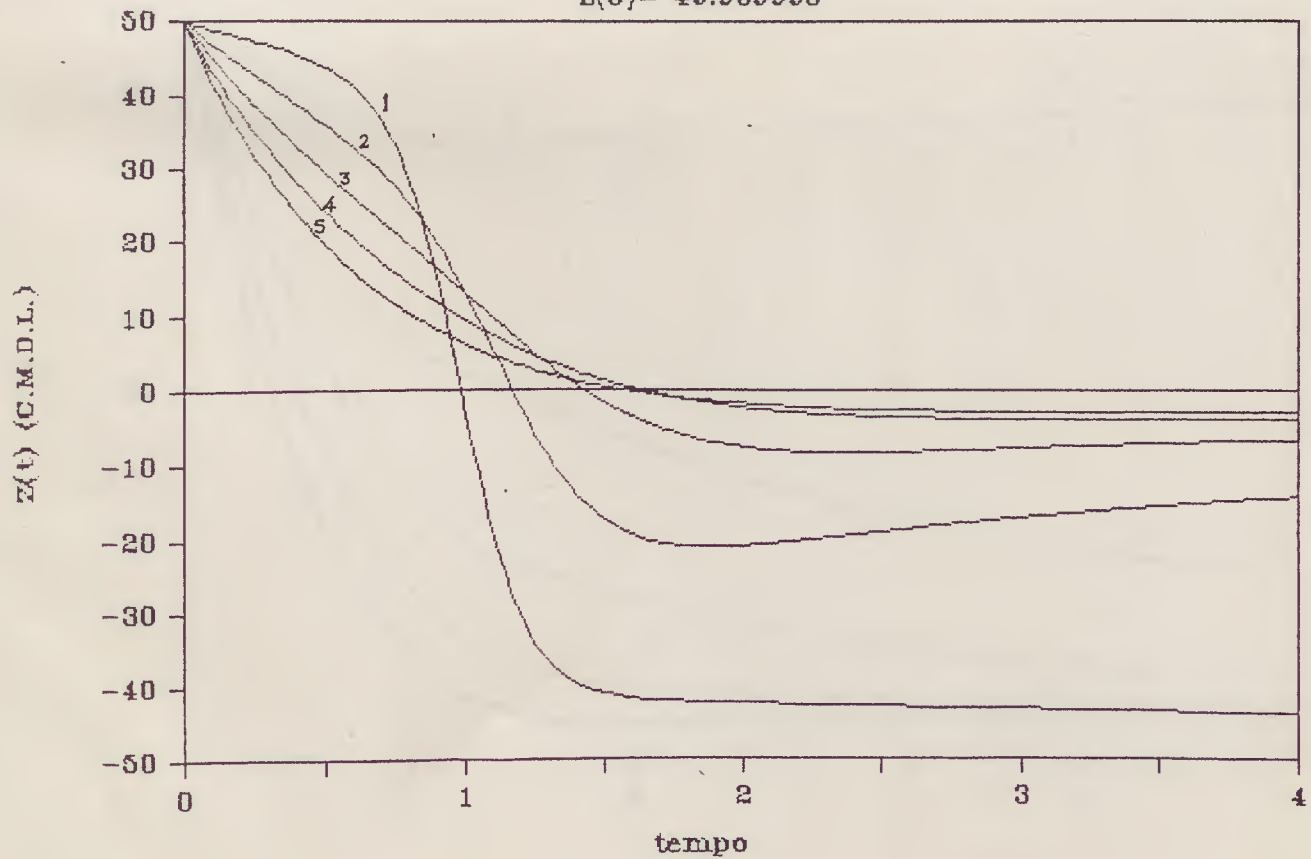


Figura D-3

$I(\max) = 1.8107, .7795$

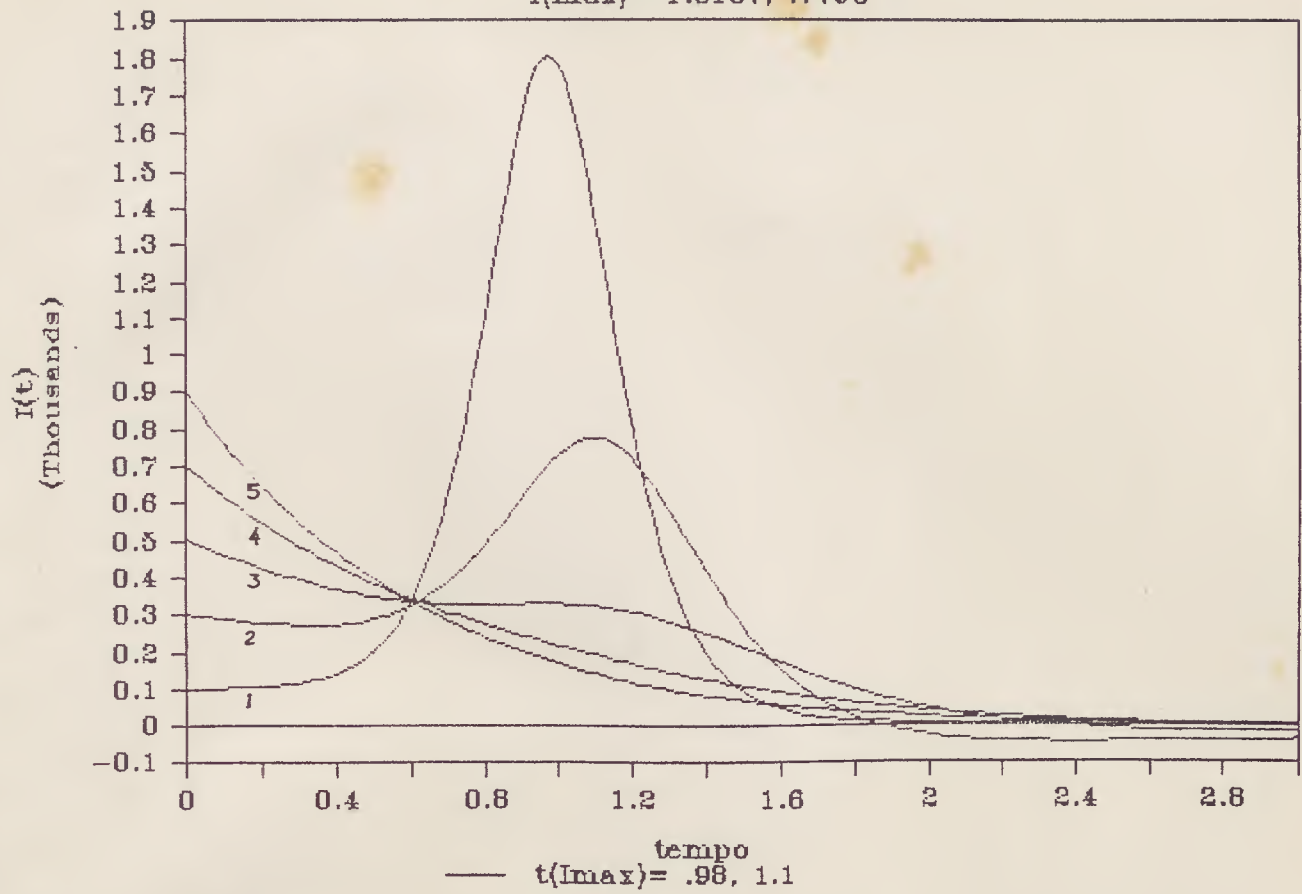


Figura D-4

(Mod. Vet. Bloch)

