

Dissertação de Mestrado

*CONTROLE ATIVO DE VIBRAÇÕES EM  
ESTRUTURAS ESPACIAIS TIPO TRELIÇAS  
USANDO CONTROLADORES IMSC*

**Ricardo Carvalho**

Dissertação apresentada a Universidade Estadual Paulista, UNESP – Campus de Ilha Solteira, como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

*Orientador:* **Prof. Dr. Vicente Lopes Júnior**

Ilha Solteira  
2005

**A Deus e à minha família.  
Especialmente aos meus pais Elcio e Maria Ely,  
minha irmã Rafaela e meu irmão Renan.**

## AGRADECIMENTOS

Ao Professor Vicente Lopes Júnior pela oportunidade de desenvolver um trabalho de pesquisa, pela amizade e confiança desde a graduação.

Ao Professor Gilberto Pechoto de Melo pela disposição em conversar sobre assuntos relativos ao meu futuro profissional e pelo apoio nas minhas decisões.

Aos amigos Adriano (Peido), Rogério (Trans), Téo (Motoboy), Samuel, Douglas, Leandro (Padeco) e Clayton do Grupo de Materiais e Sistemas Inteligentes (GMSINT) da UNESP/Ilha Solteira, pelas trocas de idéias, colaboração e pelos momentos de descontração.

Aos meus grandes amigos Adailton (Mandacaru), Alessandro (Tofú), Flávio (Filó), Ricardo (Goiano), Alexandre (Tanaka), Danilo (Mintiroso), Fernando (Selvéria) e a amiga Amanda pelo companheirismo.

À minha avó Zilah, tios e tias pelo apoio durante todo o tempo que estive em Ilha Solteira.

À minha namorada Cíntia Mayumi Harada, pela compreensão, ajuda e pelos momentos felizes.

À FAPESP pela bolsa de mestrado, sem a qual seria difícil realizar esse trabalho de pesquisa, projeto N° 03/05169-1.

**A adversidade leva alguns a serem vencidos e outros a baterem recordes.**

**William Arthur Ward**

CARVALHAL, R. 2005. **Controle ativo de vibrações em estruturas espaciais tipo treliças usando controladores IMSC**. Dissertação de Mestrado (Engenharia Mecânica) – Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira.

## RESUMO

Este trabalho apresenta o desenvolvimento analítico da modelagem de estruturas flexíveis do tipo treliça com o objetivo de atenuação de vibrações através do uso de técnicas de controle ativo. Atuadores de pilha piezelétricos são usados para exercer as forças de controle na estrutura, os quais substituem barras inteiras ou somente uma parte delas. Estes tipos de atuadores, também, satisfazem a necessidade de obtenção de estruturas leves. O posicionamento ótimo desses atuadores e de sensores é encontrado através da norma  $H_{\infty}$ , que é usada como função objetivo. Como técnica de controle é aplicado o Controle no Espaço Modal Independente (IMSC), no qual os estados são estimados por um estimador modal e são realimentados de acordo com a teoria de controle ótimo, o Regulador Linear Quadrático (LQR). O IMSC é eficiente computacionalmente mesmo aplicado a sistemas de alta ordem e também reduz os efeitos de *spillover*. Uma melhoria do IMSC, o Controle Modal Eficiente (EMC) também é apresentado com o propósito de reduzir as amplitudes das forças de controle. O modelo matemático da estrutura inteligente é obtido a partir do Método dos Elementos Finitos (MEF) considerando o acoplamento eletromecânico entre os atuadores de pilhas piezelétricos e a estrutura base. O projeto de uma treliça espacial, o posicionamento ótimo dos atuadores e sensores e o controle ativo de vibração são apresentados em simulações numéricas. Os resultados mostram que ambos os controladores aumentam o amortecimento da estrutura e, ainda, o EMC reduz as amplitudes das forças de controle.

**Palavras-chave:** *Controle Ativo de Vibrações, Estruturas Inteligentes, Controle no Espaço Modal Independente, Atuador de Pilha Piezelétrico.*

CARVALHAL, R. 2005. **Active vibration control of spatial truss structures using IMSC**. Master of Science in Mechanical Engineering – Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, Brazil.

## ABSTRACT

This work presents the analytic development of the modeling of flexible truss structures with the aim to suppress the mechanical vibration using active control techniques. Piezoelectric stack actuators are used to produce control force in the structure, which can replace an entire bar or can be coupled to structural members. They also satisfy the necessity to obtain lighter structures. The optimal placement of actuators and sensors is found through the  $H_\infty$  norm as objective function. As control technique is presented the Independent Modal Space Control (IMSC), in which a modal estimator is used and the Linear Quadratic Regulator (LQR) feedback the estimated states according the optimal control theory. IMSC is computationally efficient also applied in high order system and reduces the negative effects of the control and observer spillover. An improvement in the IMSC is the Efficient Modal Control (EMC) that is proposed to reduce the amplitudes of control forces. The mathematical model of the intelligent structure is obtained from Finite Elements Method (FEM) considering the electromechanical coupling between the piezoelectric stack actuators and the base structure. The design of a space truss structure, the optimal placement of active members and the active damping vibration control is numerically implemented. Two control techniques are tested and compared: IMSC and EMC. Results show that the controllers increase the damping of the structure noticeably. The EMC controller provides better performance, reducing the amplitudes of control forces.

**Keywords:** *Active Vibration Control, Intelligent Structures, Independent Modal Space Control, Piezoelectric Stack Actuator.*

## LISTA DE SÍMBOLOS

$\epsilon_{ij}$	Constante dielétrica
$s_{ij}$	Compliância elástica
$c_{ij}$	Módulo de elasticidade
$d_{ij}$	Constante de carga piezelétrica
$e_{ij}$	Constante piezelétrica
$k_{33}$	Fator de acoplamento
<b>T</b>	Tensor tensão mecânica
<b>c</b>	Tensor elasticidade
<b>S</b>	Tensor deformação
$\mathbf{c}^E$	Tensor elasticidade em um campo elétrico constante
<b>E</b>	Vetor campo elétrico
<b>D</b>	Vetor deslocamento elétrico
$\epsilon^S$	Tensor de constante dielétrica com deformação constante
$( )^t$	Significa transposto
$T_{33}$	Tensão axial
$S_{33}$	Deformação
$D_3$	Deslocamento elétrico
$E_3$	Campo elétrico transversal
$\mathbf{s}^E$	Matriz de compliância elástica em um campo elétrico constante
<b>d</b>	Matriz de constante de carga piezelétrica
$\epsilon^T$	Tensor de constante dielétrica com tensão mecânica constante
<b>u</b>	Deslocamento
$n_{pzt}$	Número de camadas de cerâmica de PZT
<b>V</b>	Voltagem de operação
$A_p$	Área de secção transversal da cerâmica de PZT
<b>t</b>	Espessura das cerâmicas de PZT
$\omega_0$	Frequência de ressonância do atuador
<b>q</b>	Carga elétrica
$m_p$	Massa equivalente do atuador
$F_{max}$	Força máxima gerada por um atuador
<b>k</b>	Rigidez equivalente

$I$	Corrente elétrica
$C_p$	Capacitância do atuador de pilha piezolétrico
$\omega$	Frequência de operação
$\mathbf{q}$	Vetor deslocamento nodal
$\mathbf{q}_k$	Vetor deslocamento nodal generalizado
$N_q$	Matriz de funções de forma para os graus de liberdade mecânicos
$v_k$	Potencial elétrico generalizado
$N_v$	Matriz de funções de interpolação para os graus de liberdade elétricos
$N_{vi}$	Funções de forma para o potencial elétrico
$\mathbf{F}^e$	Vetor de forças externas aplicadas no elemento
$Q^e$	Carga elétrica induzida na superfície da piezocerâmica
$L$	Lagrangiano
$T$	Energia cinética
$U$	Energia potencial
$W_e$	Trabalho realizado pelo potencial elétrico
$\rho$	Massa específica
$\dot{\mathbf{q}}$	Vetor velocidade nodal
$V$	Volume
$n_e$	Número de elementos estruturais
$n_p$	Número de atuadores piezolétricos
$\mathbf{D}_a$	Matriz de amortecimento proporcional à massa e a rigidez
$\mathbf{v}_a$	Vetor potencial elétrico nos atuadores
$n$	Número de graus de liberdade do sistema
$\bar{\omega}_i$	$i$ -ésima frequência natural
$\phi_i$	$i$ -ésimo modo natural
$\Omega$	Matriz de frequências naturais
$\Phi$	Matriz modal
$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$	Vetor de variáveis de estados
$\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$	Vetor de entradas do sistema
$\mathbf{A}$	Matriz de estado
$\mathbf{B}_1$	Matriz de entrada de perturbação
$\mathbf{B}_2$	Matriz de entrada de controle
$\mathbf{C}$	Matriz de saída

<b>D</b>	Matriz de transmissão direta
$m_l$	Número de perturbações no sistema
$l$	Número de saídas do sistema
$\mathbf{q}_m$	Variável de estado
$\mathbf{M}_m$	Matriz de massa modal
$\mathbf{D}_m$	Matriz de amortecimento modal
$\mathbf{K}_m$	Matriz de rigidez modal
$\mathbf{W}_m$	Vetor de força de perturbação modal
$\mathbf{V}_m$	Vetor de força de controle modal
$\mathbf{q}_m, \dot{\mathbf{q}}_m$	Deslocamentos modais e velocidades modais
$(\mathbf{A}_m, \mathbf{B}_m, \mathbf{C}_m)$	Representação no espaço de estados modal
$\mathbf{q}_{mi}, \dot{\mathbf{q}}_{mi}$	i-ésimos deslocamentos e velocidades modais
$\zeta_i$	i-ésima razão de amortecimento
$\mathbf{x}$	Vetor de estado
$H(\omega)$	Função de transferência
$\sigma_{\max}(H(\omega))$	Maior valor singular de $H(\omega)$
$\ H\ _{\infty}$	Norma $H_{\infty}$ do sistema
$\ H_i\ _{\infty}$	Norma $H_{\infty}$ do i-ésimo modo
$\Sigma_A$	Matriz de posicionamento do atuador
$\Sigma_S$	Matriz de posicionamento do sensor
$\sigma_a$	Vetor de índice de posicionamento do atuador
$\sigma_s$	Vetor de índice de posicionamento do sensor
$\mathbf{G}_i$	Matriz de ganho modal para o i-ésimo modo
$\mathbf{J}_i$	Índice de desempenho para o i-ésimo modo
$\mathbf{Q}_i$	i-ésima matriz de peso de estado
$\mathbf{R}_i$	i-ésima matriz de peso de esforço de controle
$\mathbf{P}_i$	Solução da equação matricial de Ricatti para o i-ésimo modo
$G_r(i)$	Ganho ponderado do modo i
$\mathbf{x}_c$	Vetor de estados dos modos controlados
$\mathbf{x}_r$	Vetor de estados dos modos residuais
$\hat{\mathbf{x}}_c$	Vetor de estados estimados
<b>K</b>	Matriz de ganho do estimador

<b>S</b>	Solução da equação algébrica de Ricatti para o estimador modal
<b>V, W</b>	Matrizes de ponderação
<b>F</b>	Matriz de participação modal
<b>F<sup>+</sup></b>	Pseudoinversa de <b>F</b>

### Subscritos

s	Referente à estrutura
p	Referente à piezocerâmica

### Siglas

SISO	<i>Single Input Single Output</i>
MIMO	<i>Multi Input Multi Output</i>
LQG	Regulador Linear Quadrático Gaussiano
LQR	Regulador Linear Quadrático
IMSC	<i>Independent Modal Space Control</i>
EMC	<i>Efficient Modal Control</i>
SMA	<i>Shape Memory Alloy</i>
PZT	Zirconato Titanato de Chumbo
PVDF	Fluorido de Polivinilideno
FEM	<i>Finite Element Method</i>
LMI	<i>Linear Matrix Inequalities</i>
MIMSC	<i>Modified Independent Modal Space Control</i>

## SÚMARIO

1 INTRODUÇÃO .....	1
2 MATERIAIS INTELIGENTES .....	9
2.1 Materiais Piezelétricos .....	17
2.2 Relações Constitutivas .....	21
2.3 Atuadores de Pilhas .....	24
3 MODELAGEM DE ESTRUTURAS INTELIGENTES .....	34
3.1 Modelo com Acoplamento Eletromecânico .....	35
3.2 Aproximação por Elementos Finitos .....	36
3.3 Equações de Lagrange para Obtenção do Modelo da Treliça Inteligente .....	39
3.4 Representação no Espaço de Estados Modal .....	45
3.5 Normas de Sistemas .....	51
3.6 Posicionamento Ótimo de Atuadores e Sensores .....	52
3.7 Redução de Modelos .....	54
4 CONTROLE MODAL .....	57
4.1 Controle no Espaço Modal Independente .....	60
4.2 Controle Modal Eficiente .....	64
4.3 Estimadores de Estado .....	65
4.4 <i>Spillover</i> de Controle e de Observação .....	66
4.5 Força de Controle Física .....	68
5 RESULTADOS NUMÉRICOS .....	71
5.1 Treliça Espacial .....	71
5.2 Posicionamento Ótimo de Sensores e Atuadores .....	74
5.3 Controle IMSC .....	84
5.4 Controle EMC .....	92
6 CONSIDERAÇÕES FINAIS .....	97
6.1 Comentários e Conclusões .....	97
6.2 Propostas .....	99

## 1 INTRODUÇÃO

Entre as modernas estruturas de veículos espaciais e aviões, a treliça é uma das estruturas mais comumente usadas (Yan e Yam, 2002). As treliças são geralmente estruturas flexíveis e possuem algumas propriedades especiais, como vibrações periódicas com poucas frequências naturais dominantes, ressonância e modos naturais de vibração.

Uma estrutura flexível pode ter sua resposta minimizada, utilizando de forma integrada elementos ativos, como sensores, atuadores e controladores. Conseqüentemente, essa integração capacitaria o sistema a modificar a resposta dinâmica da estrutura e responder de modo controlado às variações das condições ambientais ou de operação, que poderiam levar sua resposta a se afastar de patamares aceitáveis. Esses sistemas integrando estrutura, sensores, atuadores e controladores são conhecidos como estruturas inteligentes.

Estruturas inteligentes também são chamadas de estruturas adaptativas (Clark, Saunders e Gibbs, 1998). As estruturas adaptativas são definidas como estruturas projetadas com atuadores e sensores distribuídos e diretamente relacionados por um controlador capaz de alterar dinamicamente a resposta da estrutura na presença de variações das condições ambientais ou de operação. Estas designações, contudo, têm o mesmo significado.

Recentemente, um grande número de estruturas inteligentes vem sendo utilizado para aplicações em diversos campos, como por exemplo, indústrias, esportes, veículos, etc. Novos materiais inteligentes e técnicas de controle têm sido desenvolvidos. Assim, as estruturas inteligentes poderão expandir seu campo de aplicação e substituir aplicações convencionais, seguindo o que vem ocorrendo com os transdutores piezelétricos. A Figura 1.1 mostra exemplos de estruturas inteligentes.



Figura 1.1 - Exemplos de estruturas inteligentes. Fonte: <http://www.nasa.com/>

Os projetos e o desenvolvimento das estruturas inteligentes são necessariamente baseados no conhecimento das demandas das estruturas. Estas demandas são relacionadas com minimização da geração de ruídos e vibrações, consumo de energia, massa, custo de operação e manutenção. Por exemplo, para localizar um alvo, cuja área seja de 1 a 10 m<sup>2</sup>, na superfície da Terra a partir de um satélite de observação utilizando um microscópio eletrônico e ótico ou um radar a laser, os erros de orientação e estabilidade nos suportes das lentes não podem exceder a 10<sup>-4</sup> rad (Breitbach, 1994).

O projeto destas estruturas envolve, também, aspectos ecológicos, vida útil, confiabilidade, funcionalidade, estabilidade e precisão. É necessário ter conhecimento do tipo de carregamento externo a que estas estruturas estão sujeitas, por exemplo, mecânicos, aerodinâmicos e também distorções causadas por radiação, corrosão, etc. A resposta dinâmica, como vibrações, instabilidades, tensões mecânicas, distorções geométricas, etc, depende da modelagem e da iteração eletromecânica entre a cerâmica piezolétrica e a estrutura base. O grau de exatidão dos últimos fatores depende diretamente do desenvolvimento de pesquisas de materiais, projeto de estruturas e tecnologia de manufatura.

Um ponto de fundamental importância é a interdisciplinaridade desta área, que deve ser particularmente focado como um pré-requisito para tornar as pesquisas em estruturas inteligentes bem-sucedidas. Podem-se listar as mais importantes disciplinas que compõem um projeto de estruturas inteligentes: tecnologia de sensores e atuadores, técnicas de controle e processamento de sinais digitais, modelagem do sistema mecânico e tecnologia de materiais.

Não muito obviamente, o sucesso de uma nova tecnologia não depende somente da disponibilidade, da maturidade e de um número completo de ferramentas técnicas, mas também de outros critérios, como a aplicabilidade na indústria e considerações econômicas e ecológicas. A interdisciplinaridade não somente fornece base tecnológica para as estruturas inteligentes como desenvolve, também, as interfaces entre as disciplinas. Isto pode ser ilustrado por uma interconexão já realizada entre dinâmica estrutural e controle.

O controle ativo de vibrações é uma área de pesquisa que vem recebendo uma crescente atenção nas últimas décadas. O fato das estruturas flexíveis serem caracterizadas por plantas de alta densidade modal e o grande número de sensores e atuadores exigidos não permite o uso da clássica abordagem SISO (uma entrada e uma saída). Conseqüentemente, técnicas de controle MIMO (múltiplas entradas e múltiplas saídas) devem ser empregadas nestas estruturas.

Com o avanço das tecnologias aplicadas à engenharia estrutural e devido aos requerimentos cada vez mais exigentes em diversas áreas de aplicação, principalmente robótica e

aeroespacial, a busca por novas técnicas tornou imperativa. Neste cenário inserem-se os problemas de controle ativo de estruturas flexíveis, tais como:

- Satélites e estações espaciais, que têm estruturas treliçadas de interface e painéis solares como apêndices flexíveis. Estas estruturas são leves e pouco amortecidas, em função da necessidade da redução da massa de carga útil a ser transportada para a órbita terrestre;
- Veículos lançadores de satélites e aeronaves, os quais ao longo do tempo, a massa é reduzida com o uso de novos materiais para permitir um aumento na carga útil transportada;
- Mecanismos robóticos com menor massa, de forma a reduzir a potência de alimentação, e com movimentos mais rápidos e maior exatidão (Moreira, 1998).
- Edifícios sujeitos à abalos sísmicos (Daí, 2002). Aplicações de controle ativo para reduzir instabilidades geradas por fatores ambientais, como vento e terremotos.
- Na área esportiva, os esquis e raquetes de tênis inteligentes possuem sensores e atuadores piezelétricos incorporados em sua estrutura, proporcionando maior estabilidade.

Tratando do controle ativo de vibração por realimentação em um contexto geral, o objetivo fundamental é projetar um controlador exequível e eficiente para atenuar os modos de vibrar de uma estrutura. Isto pode significar a supressão da vibração quando um mecanismo está seguindo uma trajetória com requerimentos de precisão e tempo reduzido. Neste caso, tem-se o controle de estruturas flexíveis, no qual se deseja suprimir as vibrações nos modos de baixa frequência, que produzem maiores deslocamentos.

O principal problema relacionado com o controle ativo de vibração é que o número de equações diferenciais é, geralmente, elevado. Estes sistemas são classificados como sistemas a parâmetros distribuídos, governados por equações diferenciais parciais. Existem técnicas de controle ativo que lidam com características de parâmetros distribuídos do sistema (Meirovitch, 1990) mas envolvendo modelos difíceis de se obter (Craig, 1990). Na maioria dos casos, estas técnicas requerem o uso de atuadores distribuídos ou um número grande de pontos de atuação (Meirovitch, 1990).

Bravo (2000) faz uma comparação entre os modelos de uma treliça espacial modelada por elementos de barra, isto é, elementos que levam em consideração somente o deslocamento axial e por elementos de viga que consideram o deslocamento e rotação em cada nó do elemento e conclui que elementos de barra são adequados para modelar e projetar o controlador da estrutura flexível.

A teoria de controle atual é suficiente para resolver o problema do ponto de vista teórico. Em geral, um sistema estrutural pode ser tratado como um sistema linear, invariante no

tempo, finito-dimensional e de parâmetros concentrados. Neste caso, a complexidade matemática do problema é reduzida, embora outros problemas apareçam em função da limitação da ordem do modelo, que introduz um erro de modelagem resultante da não consideração da dinâmica residual e da variação da dinâmica. O efeito da dinâmica residual no sistema controlado, denominado *spillover*, é o mais importante fator de instabilidade do sistema de controle (Moreira, 1998).

O planejamento de um teste estrutural é baseado nas próprias informações disponíveis da estrutura, nas perturbações que agem sobre a estrutura e no desempenho estrutural esperado. A primeira forma de informação é, tipicamente, sobre o modelo estrutural de elementos finitos. As informações sobre as perturbações incluem a localização e o tipo do espectro. O desempenho estrutural é comumente avaliado através de deslocamentos e acelerações em determinadas localizações da estrutura.

Em geral, não é possível representar exatamente a dinâmica de uma estrutura real durante testes. Isto acontece não somente devido às restrições físicas ou limitações no conhecimento das perturbações, mas também por dificuldade em posicionar os atuadores e sensores em posições ideais para obter o desempenho desejado. Dessa forma, para os testes em ambiente real usam-se sensores e atuadores em posições disponíveis e um critério de seleção e avaliação deve ser formulado.

O projeto de controle de uma estrutura pode ser definido de maneira similar. Os atuadores são posicionados em locais permitidos e não necessariamente co-localizados com as perturbações. Os sensores também são posicionados em locais permitidos, geralmente, fora das posições onde se deseja avaliar a performance estrutural.

Para testes simples, um engenheiro experiente consegue determinar as localizações apropriadas para sensores e atuadores de maneira direta. No entanto, para grandes e complexas estruturas, o posicionamento de sensores e atuadores não é uma tarefa óbvia e nem simples. Na prática, meios heurísticos são combinados com conhecimentos de engenharia e uma análise simplificada é feita para determinar as posições de sensores e atuadores.

O posicionamento de atuadores e sensores foi investigado por muitos pesquisadores Bueno et al, 2005, Carvalhal e Lopes Jr., 2004, Xu e Jiang, 2004, Gao et al., 2003, Yan e Yam, 2002 e Costa e Silva e Arruda, 1997. Uma solução típica para o problema de localização é encontrada através de um procedimento de busca. Para grandes números de posições candidatas de atuadores e sensores, o número de possíveis combinações é impressionante e somente um

subconjunto dessas posições candidatas é usada para o procedimento de busca. Essa é uma tarefa que consome tempo e não necessariamente leva a solução ótima.

Em geral, as técnicas de controle são divididas em duas partes: controle de alimentação direta (*feedforward*) e controle por realimentação (*feedback*). A primeira estratégia é um algoritmo de controle simples, mas que requer um sinal de referência. O controlador usa este sinal de referência e o erro de saída para ajustar continuamente o sinal de controle e minimizar este erro (Anthony, 2000). Grande parte das técnicas de controle ativo de ruído envolve esta estratégia, nas quais a meta é o cancelamento deste ruído através de um filtro digital adaptativo.

O controle por realimentação não requer um sinal de referência, mas há limitações no desempenho devido às restrições de estabilidade (Lee, 2000). Esta técnica é particularmente usada para controlar uma faixa de frequência, como é o caso da maioria das aplicações de controle ativo de estruturas flexíveis. Nestes problemas, os sistemas devem seguir uma trajetória com alta precisão em curto espaço de tempo, como exemplo prático há os mecanismos robóticos (Valer, 1999).

Na década de 80, muitos pesquisadores trabalharam no controle ativo de vibrações fazendo uso, principalmente, de leis de controle ótimo. Assim, métodos de controle ótimo LQG (regulador Linear Quadrático Gaussiano) têm sido aplicados satisfatoriamente para controle de sistemas estruturais, já que eles caracterizam de alguma forma as limitações dos atuadores e sensores. As limitações nos atuadores podem ser: largura de banda, potência e força limitadas; enquanto, as limitações nos sensores são: precisão limitada e ruído sensor/eletrônica. Charon (1997) discutiu uma forma de diminuir os efeitos de *spillover* em controladores LQG usando um filtro de Kalman como observador de estados. A idéia é considerar a influência da dinâmica dos modos residuais na medida do sensor como um ruído. Outra limitação do LQG é que a ordem do controlador é igual a da planta e considerando que, os modelos que representam fielmente os sistemas estruturais flexíveis contêm algumas centenas de modos, o controlador LQG sobrecarregará a capacidade de processamento em tempo real. Uma limitação fundamental do LQG no controle de vibrações é a falta de robustez, demonstrado por Doyle (1978).

Uma idéia para melhorar a robustez do LQG, baseada na robustez do LQR (Regulador Linear Quadrático), considera acelerar a dinâmica do regulador e do observador para recuperar as propriedades do LQR. Mediante a minimização da função sensibilidade à baixas frequências e da função sensibilidade complementar à altas frequências (Stein e Athans, 1987) é possível atingir as especificações de desempenho e de robustez à dinâmica não-modelada. Observa-se que este procedimento aplicado a um critério quadrático de desempenho, apresenta dois

inconvenientes: o critério quadrático envolve a norma  $H_2$  da resposta em frequência e o projetista só tem limitado o controle sobre faixas de frequências definidas; e a descrição da incerteza da planta não é consistente com a medida de desempenho e em conseqüência, é difícil calcular limitantes do desempenho robusto. Estes dois inconvenientes foram superados com o controle  $H_\infty$  (Doyle et al., 1989).

Outras técnicas têm sido usadas para modelar e projetar o controle de estruturas inteligentes: Cerna (2001) aplica o controle  $H_2/H_\infty$  para atenuação de vibração em uma viga flexível simplesmente apoiada; Fan (1991) compara o desempenho de um sistema rotor-mancal através do controle LQG/LTR e do controle por realimentação da saída; Bravo (2000) aplica as técnicas de controle por realimentação de velocidade e  $H_\infty$  em uma treliça espacial usando materiais inteligentes.

Meirovitch e Oz (1980) desenvolveram o controle no espaço modal independente (Independent Modal Space Control - IMSC) para controle de vibrações em sistemas distribuídos. Este método é caracterizado pelo controle de vários modos independentemente, e pela redução dos efeitos de *spillover* de controle e de observação. Segundo Liu e Zhang (2000), essa estratégia de controle é computacionalmente eficiente, sobretudo quando aplicada à sistemas de alta ordem. Liu e Zhang (2000) usaram IMSC aliado à teoria de controle ótimo para aumentar o amortecimento de uma treliça com 96 barras e membros ativos piezelétricos. Filtros modais também foram usados por Liu e Zhang (2000) para extrair os pares modais e converter a aceleração física, medida por um acelerômetro, em aceleração modal. A velocidade modal e o deslocamento modal foram estimados a partir da aceleração modal através de um observador modificado de Leunberger.

Jemai et al. (1999) aplicaram o IMSC em uma estrutura flexível do tipo placa utilizando atuadores e sensores distribuídos. Através de um método de otimização, determinaram-se os locais e os tamanhos dos sensores e dos atuadores na estrutura de modo a minimizar os efeitos dos modos residuais. O resultado foi um controle estável e robusto, aumentando o coeficiente de amortecimento dez vezes.

Lindberg (1982) assinala que a principal desvantagem do IMSC é a restrição quanto ao número de atuadores ser igual ao número de modos a ser controlado do sistema. No entanto, Lindberg usou uma transformação entre a força de controle modal ótima projetada e a força de controle real. Com esta transformação, os fundamentos do projeto do controle ótimo não são violados e a quantidade de atuadores pode ser diminuída. Porém, o uso desta transformação pode

trazer alguns problemas, podendo ser causados pelas características de cada estrutura, por exemplo, frequências naturais e modos de vibrar.

Baz e Poh (1988) realizaram uma aproximação diferente para diminuir o número de atuadores exigidos pelo método IMSC. Nesta técnica, as vibrações modais de um sistema flexível são classificadas de acordo com o seu nível de energia. Logo, os atuadores são posicionados para controlar os modos que possuem esses maiores níveis de energia. Depois de um certo período de tempo, os modos controlados inicialmente já estão suprimidos e os seus níveis de energia caíram abaixo do nível dos outros modos. Então, os atuadores são direcionados para controlar um novo grupo de modos que apresentam níveis de energia modal mais elevados. Este método é conhecido como *Modified Independent Modal Space Control* (MIMSC), isto é, a troca dos modos a serem controlados pelos mesmos atuadores, simplesmente, pela troca dos sinais de controle do atuador de acordo com os níveis de energia dos modos.

A necessidade de calcular e comparar as energias modais em certo intervalo de tempo pode sobrecarregar o controlador digital e produzir atrasos no sinal de realimentação, especialmente para o controle de frequências mais altas. Para superar essa dificuldade, Singh, Pruthi e Agarwal (2003) propõem uma modificação no IMSC no qual as forças modais em diferentes modos recebem um peso de acordo com as amplitudes nos respectivos modos, isto é, modos que possuem menor amplitude receberão menor força de realimentação. Esta melhoria no IMSC é chamada de *Efficient Modal Control* (EMC).

Outro tópico importante é o problema de redução de modelos, que tem recebido muita atenção durante as últimas três décadas. De fato, um modelo de baixa ordem que aproxima bem uma planta de alta ordem é muito importante para propósitos de controle. Modelos de baixa ordem são mais fáceis para analisar ou simular e podem ser eficientemente implementados (Assunção, 2000). A modelagem de estruturas flexíveis pelo método dos elementos finitos exige elevado número de graus de liberdade e, ainda, quanto mais complexa a estrutura, maior será o número de graus de liberdade necessários para representá-la adequadamente.

A redução de modelo é necessária nos casos de sistemas estruturais com um número elevado de graus de liberdade, pois, se uma estrutura tem um número  $n$  de graus de liberdade, o modelo na forma de espaço de estado resulta na ordem  $2n$ . Devido às limitações práticas e numéricas é impossível projetar controladores para sistemas de ordem elevada. Por esta razão, justifica-se a redução de modelos, isto é, obter um modelo reduzido que se aproxime bem do sistema de alta ordem. Muitos métodos de redução de modelos aparecem na literatura. Os que causaram maior impacto foram os métodos da realização balanceada (Moore, 1981) e da norma

Hankel, que basicamente eliminam os estados menos significativos para obter o modelo reduzido.

O trabalho apresentado a seguir está organizado da seguinte forma: o capítulo 2 mostra uma revisão sobre os principais conceitos de materiais inteligentes, mais especificamente sobre os materiais piezelétricos. Mostra, também, as relações constitutivas para esses materiais e suas aplicações em atuadores piezelétricos.

O capítulo 3 mostra uma síntese geral da dinâmica de estruturas inteligentes, considerando o acoplamento eletromecânico e desenvolvendo o modelo matemático completo de uma estrutura com atuadores axiais de pilhas piezelétricos acoplados usando o método dos elementos finitos e as equações de Lagrange. Alguns conceitos de sistemas lineares como normas de sistemas, redução de modelos, posicionamento de atuadores e sensores piezelétricos são também apresentados. Uma contribuição do atual trabalho foi à obtenção do modelo matemático da estrutura inteligente considerando o efeito do acoplamento eletromecânico, entre a estrutura base e o material piezelétrico, através das equações de Lagrange em conjunto com o método dos elementos finitos.

O capítulo 4 apresenta as técnicas de controle IMSC e EMC, e de forma detalhada a origem dos problemas de *spillover* de controle e observação. É apresentada a solução da pseudo-inversa para utilizar menor número de atuadores do que o número de modos controlados.

O capítulo 5 mostra as simulações numéricas realizadas e os resultados obtidos aplicando as técnicas de controle ativo IMSC e EMC em uma treliça espacial. Por fim, o capítulo 6 contém as conclusões gerais do trabalho e propostas para o direcionamento futuro de trabalhos nesta área.

## 2 MATERIAIS INTELIGENTES

Há vários tipos de materiais inteligentes usados para aplicações estruturais, como materiais piezelétricos, magnetoresistivos, ligas de memória de forma (SMA), fluidos eletroreológicos, etc (Fuller, Elliott e Nelson (1996), Clark, Saunders e Gibbs (1998)). Papel fundamental é desempenhado por esses materiais, capazes de sofrer alterações controláveis de suas características físicas (mecânicas, elétricas, ópticas, etc). Esta capacidade de adaptação tem possibilitado a proposição de tipos inovadores de sensores e atuadores.

O estudo de materiais inteligentes é recente e as mudanças neste campo provavelmente levarão décadas para se concretizarem. No entanto, benefícios já podem ser colhidos e nesse enfoque, intensa investigação matemática e experimental é fundamental para a correta aplicação e utilização desta tecnologia. Para conseguir bons resultados em aplicações de controle e sensoriamento são necessários modelos matemáticos que possam descrever de forma precisa o mecanismo da deformação induzida nos materiais piezelétricos.

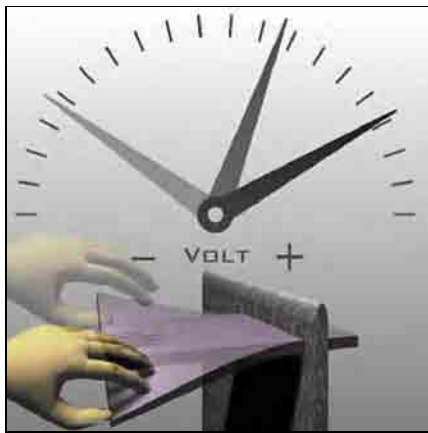
As propriedades de alguns destes materiais são conhecidas há muito tempo, como exemplo, o efeito piezelétrico descrito pela primeira vez em 1880 pelos irmãos Pierre e Jacques Curie. No entanto, apenas a partir do início da década de 90 estes materiais começaram a ter aplicações práticas.

Piezeletricidade em um cristal aquecido de tourmalina é conhecida desde o século XVIII. Em 1824, Brewster observou o efeito com vários tipos de cristais e criou o termo piroeletricidade. Kelvin notou que aquela piroeletricidade era causada pela polarização permanente e que o efeito piroelétrico é, simplesmente, uma manifestação do coeficiente de temperatura desta polarização. Conseqüentemente, este efeito foi conhecido como uma interação entre sistemas elétricos e térmicos.

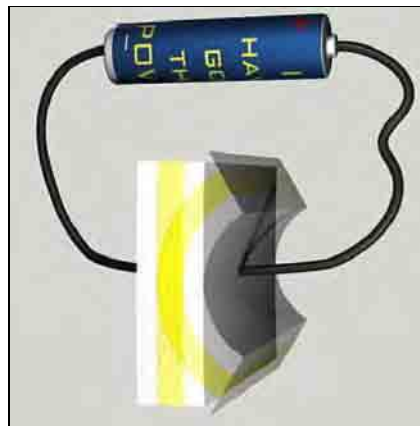
Pierre e Jacques Curie estudaram previamente a relação entre piroeletricidade e a simetria do cristal. Este estudo não só deve ter conduzido os irmãos Curie a verificar o efeito eletromecânico, mas, também, a prever em que direções deveriam ser aplicados os estímulos e em quais classes cristalinas o efeito seria esperado. Hankel propôs o nome piezeletricidade, que é uma interação entre sistemas elétricos e mecânicos.

O efeito piezelétrico direto é aquele no qual a polarização elétrica é produzida através de um esforço mecânico. O efeito inverso é obtido quando um campo elétrico é aplicado e o cristal sofre uma deformação. Ambos efeitos são manifestações da mesma propriedade

fundamental do cristal. Os materiais piezelétricos possuem a propriedade de exibir mudanças dimensionais quando é aplicado um campo elétrico sobre ele ou gerar eletricidade quando uma deformação é aplicada. A Figura 2.1 apresenta uma ilustração do efeito direto e do efeito inverso.



(a) efeito piezelétrico direto.



(a) efeito piezelétrico inverso.

Figura 2.1 - Ilustração dos efeitos piezelétricos.

O material mais conhecido é o zirconato titanato de chumbo (PZT); comumente, o termo “PZT” é usado para materiais piezelétricos em geral, incluindo outros de composição diferente.

As ligas com memória de forma (SMA) constituem uma classe de compostos metálicos com capacidade de desenvolver e recuperar deformações relativamente grandes (em torno de 10%) sem apresentar deformações plásticas. Esta característica é devida, em grande parte, à capacidade que estes materiais possuem de desenvolver transformações de fase na presença de tensões mecânicas aplicadas e/ou variações de temperatura. Estas transformações são da fase austenítica, no estado livre de tensões e altas temperaturas, para diversas variantes da fase martensítica à baixas temperaturas. Embora estes materiais possam ser considerados como uma tecnologia emergente, vários deles já estão, comercialmente, disponíveis e têm sido usados em aplicações de engenharia. Dentre os mais populares está a liga de níquel-titânio conhecida por Nitinol (NiTi) e a liga de cobre, zinco e alumínio (CuZnAl). O Nitinol pode ser usado em dispositivos de alto desempenho com deformações recuperáveis na faixa de 6%, ao passo que o a liga CuZnAl opera satisfatoriamente nas condições de baixos carregamentos cíclicos com deformações recuperáveis de aproximadamente 2% (Steffen e Rade, 2004).

A fenomenologia das ligas com memória de forma é razoavelmente conhecida. Tomando as SMA sem tensões mecânicas a alta temperatura na fase austenítica e fazendo o seu resfriamento, ocorre uma transformação gradual para a fase martensítica. Diferentes variantes de martensita são obtidas durante o processo de resfriamento. Uma vez que, para uma dada SMA, a transformação de austenita para martensita (e a transformação inversa obtida por aquecimento) é gradual, uma importante variável de estado é a fração de martensita  $\xi$  ( $0 \leq \xi \leq 1$ ). Valores de  $\xi = 1$  e  $\xi = 0$  correspondem à fase completamente martensítica e completamente austenítica, respectivamente. São associadas à variável de estado  $\xi$  quatro valores de temperatura denotados por  $M_f$ ,  $M_s$ ,  $A_s$ ,  $A_f$ , caracterizando a finalização da transformação martensítica, inicialização da transformação martensítica, inicialização da transformação austenítica e finalização da transformação austenítica, respectivamente. Uma representação esquemática do fenômeno de transformação de fase durante o resfriamento/aquecimento de uma SMA sem tensões mecânicas é apresentada na Figura 2.2.

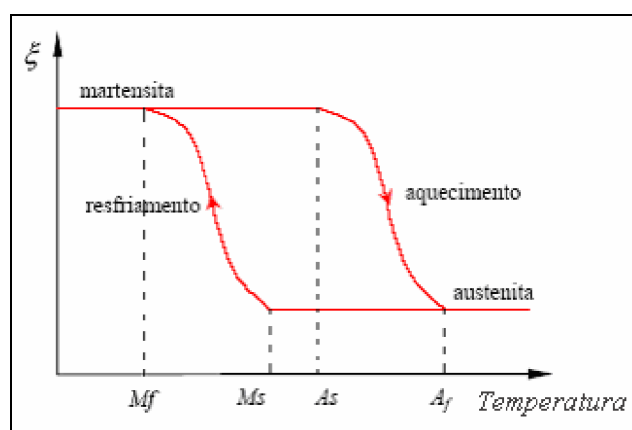


Figura 2.2 - Transformações de fase em uma SMA.

As transformações de fase induzidas por variações de temperatura constituem a base para o entendimento do fenômeno de recuperação das deformações exibidas pelas SMA. Se a SMA está na fase martensítica ( $\xi = 1$ ) e uma tensão unidirecional é aplicada, para um valor crítico desta tensão, o qual depende da temperatura, inicia-se a transformação das diferentes variantes da martensita, até que, finalmente, se obtenha uma única variante alinhada com o eixo do carregamento.

Um estado similar é obtido caso o processo seja iniciado aplicando o carregamento à SMA na fase austenítica. Durante estas transformações de fase, as tensões internas da SMA são apenas ligeiramente alteradas e uma significativa deformação aparente é obtida. Se a temperatura

for maior que  $A_f$  durante o carregamento, a martensita resulta instável à esta temperatura e a deformação pode ser completamente restituída pelo descarregamento. As curvas tensão-deformação do ciclo de carregamento-descarregamento têm a característica de ciclos de histerese, Figura 2.3(a), e o comportamento é classificado como “pseudo-elástico”. Por outro lado, se a temperatura for menor que  $A_s$  durante o carregamento, uma grande deformação residual  $S_r$  permanece após o descarregamento, conforme mostrado na Figura 2.3(b). Esta deformação pode ser recuperada pelo aquecimento da SMA. Este efeito é conhecido como efeito de memória de forma. É exatamente este efeito de memória de forma que é explorado na concepção de atuadores baseados em SMA. Em um exemplo típico, é possível empregar um SMA disposto sob a forma de fios no interior de um material compósito. Os fios de SMA são previamente solicitados mecanicamente e deformados a baixa temperatura, menor que  $A_s$ , na fase martensítica. Eles são, então, descarregados para gerar alguma deformação residual. Uma vez inseridos no material compósito, os fios podem ser aquecidos por efeito Joule para recuperação da deformação residual. Como os fios da SMA estão restringidos pelo material compósito, tensões mecânicas são produzidas.

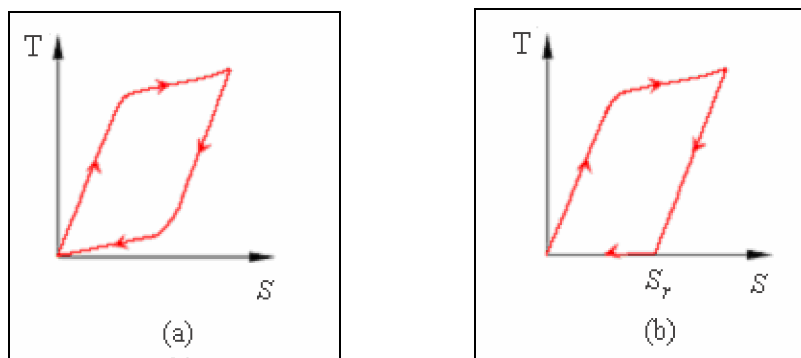


Figura 2.3 - (a) Pseudo-elasticidade e ciclo de histerese e (b) Efeito de memória de forma com deformação residual.

As aplicações práticas das SMA incluem: sistemas de abertura de antenas e painéis solares de satélites; acoplamentos de tubos; detectores de incêndio; sensores/atuadores em sistemas de ar condicionado. Em sistemas de controle semi-ativo de vibrações, as SMA podem ser usadas na confecção de molas e amortecedores com características variáveis (Steffen e Rade, 2004).

Segundo Banks, Smith e Wang (1996), um fato que limita o desenvolvimento de dispositivos de SMA aplicados ao controle é a dificuldade de obterem modelos dinâmicos

precisos para estes materiais, uma vez que seu comportamento é caracterizado por grandes deformações e não linearidades.

Resumidamente, pode-se estabelecer as seguintes principais características vantajosas e os inconvenientes das SMA:

Vantagens:

- Possibilitam a confecção de dispositivos miniaturizados, facilmente integráveis à estrutura;
- Podem ser ativados termicamente de diferentes formas: por efeito Joule, por meio de fluido aquecido, à distância por laser, etc.

Desvantagens:

- Apresentam respostas lentas em comparação com outros materiais inteligentes, fato limitante para sua utilização em aplicações de baixas frequências;
- Dificuldade de modelagem devido ao comportamento não linear e histerese;
- Alta quantidade de energia necessária para causar o efeito de memória de forma.

Fluidos eletroreológicos (ER) e magnetoreológicos são dispersões coloidais de partículas sólidas em um meio fluido isolante que experimentam modificações reversíveis de suas propriedades reológicas (viscosidade, plasticidade e elasticidade) quando submetidos a campos elétricos ou magnéticos externos, respectivamente. O mecanismo exato das interações inerentes ao efeito eletroreológico ainda não é bem conhecido. Existem numerosas hipóteses, parecendo haver um consenso acerca do mecanismo inicial da resposta eletroreológica: o campo elétrico externo induz o aparecimento de dipolos elétricos nas partículas do soluto, que interagem para formar fibras que se alinham na direção das linhas de campo. Contudo, esta fibrilação, por si só, não explica o aumento da tensão de cisalhamento observada em fluidos em movimento, fato explicado pela ocorrência de interações eletrostáticas entre as partículas polarizadas que provocam o aparecimento de cadeias longas (clusters) que bloqueiam o escoamento do solvente.

O comportamento dos fluidos ER pode ser entendido pelo fato que o campo elétrico externo aumenta a tensão de cisalhamento do fluido, de modo que o fluido tipicamente Newtoniano na ausência do campo elétrico passa a se comportar como um fluido de Bingham. Sabe-se que um fluido Newtoniano exibe uma relação linear entre a tensão de cisalhamento  $\tau$  e a velocidade de deformação cisalhante  $\dot{\gamma}$ , de acordo com:

$$\tau = \mu \dot{\gamma} \quad (2.1)$$

na qual  $\mu$  é a viscosidade absoluta do fluido.

Para um fluido de Bingham existe uma tensão cisalhante limite de escoamento  $\tau_s$  e um coeficiente de viscosidade plástica  $\mu_p$ , de modo que o comportamento do fluido é representado pela relação:

$$\tau = \tau_s + \mu_p \dot{\gamma} \quad (2.2)$$

Experimentos demonstram que o comportamento dos fluidos ER é similar ao dos fluidos de Bingham, no tocante à existência de uma tensão de cisalhamento limite  $\tau_s$ , quando o campo aplicado é da ordem de kV/mm ao fluido em condição estática. Entretanto, quando o fluido se encontra em movimento, ocorre uma redução da tensão limite de cisalhamento e a viscosidade aparente do fluido pode se mostrar dependente da velocidade de deformação.

O comportamento eletroreológico pode ser separado nos regimes de pré-escoamento e pós-escoamento, mostrados na Figura 2.4(a). A maioria das aplicações, no entanto, é baseada no regime de pós-escoamento. A Figura 2.4(b) mostra como se comporta a relação entre a tensão de cisalhamento no fluido  $\tau$  e a velocidade de deformação de cisalhamento  $\dot{\gamma}$ , no regime de pós-escoamento, quando o campo elétrico é variado.

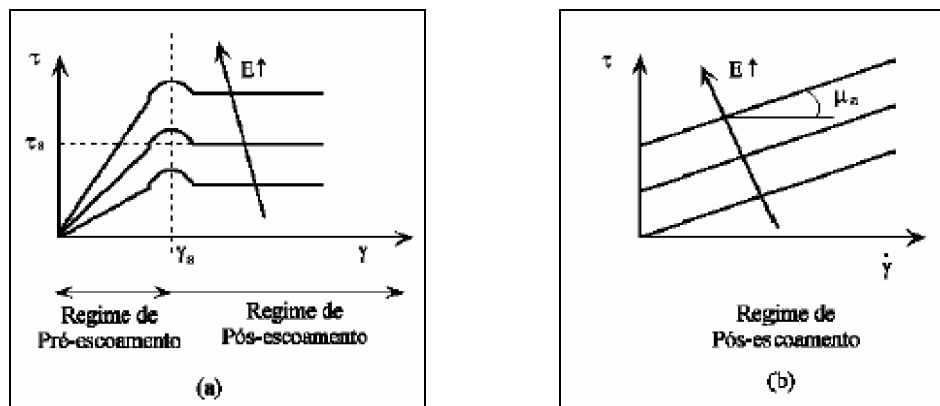


Figura 2.4 - Influência do campo elétrico nas curvas de: (a) tensão-deformação de cisalhamento; (b) tensão-velocidade de deformação de cisalhamento (Marques, 2000).

A utilidade dos fluidos ER como materiais inteligentes resulta da possibilidade de alterar a tensão limite de cisalhamento e a viscosidade mediante a aplicação do campo elétrico externo.

No caso de amortecedores, pode-se relacionar força de amortecimento com a tensão de cisalhamento no fluido, e velocidade com a taxa de deformação de cisalhamento. Assim, é estabelecida a relação entre amortecimento e campo elétrico para os fluidos eletroreológicos. Logo, esses fluidos são capazes de realizar esforços relativamente grandes com campos elétricos comparativamente pequenos. Porém, não se tem uma compreensão total do comportamento desses fluidos e a criação de um modelo é difícil, pois, a resposta dos fluidos eletroreológicos e magnetoreológicos é complexa e depende da força de campo aplicada, fração do volume de suspensão, propriedades reológicas e dielétricas, temperatura e também das propriedades físicas e químicas combinadas do solvente, soluto e interfaces sólidas-líquidas.

Portanto, a viabilidade do emprego destes fluidos como materiais inteligentes, depende da habilidade de regular ou controlar a tensão e todas as variáveis acima em função do campo elétrico ou magnético aplicado. Os fluidos eletroreológicos e magnetoreológicos têm sido utilizados como atuadores em estruturas e para a construção de válvulas hidráulicas sem partes móveis, amortecedores adaptativos, isoladores de vibrações, freios e embreagens.

Os elementos eletrostrictivos são caracterizados pela eletrostricção. Esta é, geralmente, caracterizada como uma deformação mecânica que ocorre em um material dielétrico quando submetido a um campo elétrico. As tensões geradas na maioria dos dielétricos são tipicamente de segunda ordem e muito pequenas para sensibilidade do campo e capacidade de atuação. Materiais como amortecedores ferroelétricos, porém, têm constante dielétrica suficientemente grande para gerar polarizações e, conseqüentemente, tensões que podem ser utilizadas para aplicações práticas.

Materiais eletrostrictivos são compostos de niobato de magnésio de chumbo (PMN) ou enriquecidos com titanato (PMN-PT). Em termos de consistência e durabilidade, os materiais eletrostrictivos possuem vantagens sobre os materiais piezelétricos, pois, ao contrário destes, os eletrostrictivos quando não carregados são isotrópicos e não polarizados, assim, não exibem uma polarização total, o que conduz a um desempenho superior. Nestes materiais, o acoplamento eletromecânico é não linear e a tensão gerada é aproximadamente proporcional à da polarização induzida para baixos campos elétricos com saturação.

Para campos elétricos baixos, o acoplamento eletro-mecânico destes materiais é aproximadamente quadrático, havendo saturação para altos valores de campo elétrico, tal como mostrado na Figura 2.5. Nota-se também que a inversão do campo elétrico não gera deformações negativas, como acontece com os materiais piezelétricos. Para a obtenção de deformações bi-

direcionais é necessário a adição de um nível DC ao sinal do campo elétrico, e a variação do campo se dará em torno deste nível.

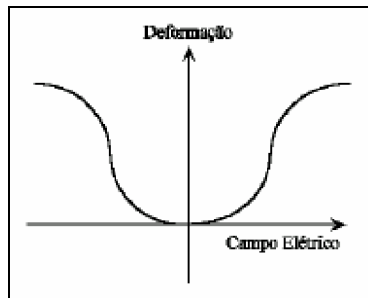


Figura 2.5 - Relação deformação-campo elétrico de um material eletrostrictivo (Marques, 2000).

Devido à simetria dos cristais eletrostrictivos e a natureza quadrática das relações do campo de tensão, uma reversão de campo não conduz à geração de tensões negativas como é o caso dos elementos piezelétricos. A resposta dos materiais eletrostrictivos também difere da exibida por piezelétricos. Quando operam muito abaixo da temperatura de Curie a polarização espontânea é bastante lenta, pois surgem tensões residuais, causadas por polarizações anteriores. Por isso os eletrostrictivos são empregados em uma faixa de operação na qual a histerese é desprezível, obtendo-se menores tensões residuais com fortes polarizações.

A modelagem das relações constitutivas é determinada considerando a energia livre e os efeitos termodinâmicos. Uma comparação entre as relações piezelétricas e eletrostrictivas revela que existem muitas similaridades. Porém, as relações constitutivas não lineares dos elementos eletrostrictivos permitem controlar as relações de tensão de campo. São estruturas leves que permitem controle sem causar profundas alterações dinâmicas e que apresentam pequena expansão térmica e larga faixa de frequência de resposta.

Contudo, relações não lineares entre tensão e campo, parâmetros restritos e o comportamento dependente da temperatura são as principais desvantagens dos materiais eletrostrictivos, que, atualmente são empregados como sensores e atuadores em sistemas estruturais.

Materiais magnetostrictivos produzem uma tensão sobre a ação de um campo magnético. O conceito de magnetostricção é similar ao de eletrostricção, no que se refere à tendência de certos materiais realizarem esforços mecânicos em resposta à aplicação de um campo, que neste caso, é magnético. Quando são colocados em um campo magnético, os dipolos magnéticos dos materiais magnetostrictivos se orientam buscando o alinhamento com o campo externo, resultando em deformação do material. Embora, significativamente maiores, a distribuição dos esforços gerados por elementos magnetostrictivos é semelhante à gerada pelos eletrostrictivos.

Nos transdutores atuais, os materiais magnetostrictivos são tipicamente compostos de terbídio e disprósio ligado com ferro. Um exemplo desta liga é o Terfenol-D, que pode ser alongado em até 1400  $\mu\text{m}/\text{m}$  e vem sendo utilizado no controle ativo de vibrações, geralmente disposto na forma de uma barra cilíndrica dentro de um transdutor. Assim como nos elementos eletrostrictivos, as relações são altamente não lineares. Neste caso, a relação entre o campo magnético aplicado e os esforços produzidos é não linear e gera significativa histerese.

Outro fato que precisa ser considerado ao se empregar transdutores magnetostrictivos em sistemas, é o grande peso e tamanho dos atuais transdutores, que podem comprometer o funcionamento da estrutura. Devido à sua capacidade de atuação maior que a dos piezelétricos e eletrostrictivos, os transdutores magnetostrictivos são empregados como sensores e atuadores em situações que exigem a geração de grandes tensões e absorvedores de vibração voltados para a indústria de máquinas.

## **2.1 Materiais Piezelétricos**

Materiais piezelétricos pertencem à uma classe de dielétricos que exibem uma deformação significativa no material em resposta à aplicação de um campo elétrico, assim como produzem uma polarização dielétrica, ou seja, um campo elétrico, em resposta a deformações que o material possa ter. Estes materiais podem ser usados como importantes componentes de controle ativo para determinação de tensão ou deformação (sensores piezelétricos distribuídos usando o efeito direto piezelétrico) ou para atuar controlando deformação (atuadores piezelétricos distribuídos usando o efeito inverso piezelétrico) em estruturas. Materiais piezelétricos apresentam três eixos de direções, sendo duas destas aproximadas para isotrópicas (mesmas propriedades em todos os pontos destas direções) e a outra associada com a direção de polarização, que sofre o efeito piezelétrico. Estes materiais têm sido amplamente usados em

sistemas de controle para detecção e supressão de vibrações (Brennan, Elliot e Pinnington, 1995).

Uma das vantagens de elementos piezelétricos para aplicações em problemas de controle e de localização de falhas resulta da relativa insensibilidade destes materiais, quando utilizados abaixo da temperatura de Curie. A variação no tensor de deformação piezelétrico para um material piezocerâmico sob a ação de uma carga constante é menor que 12 % para temperaturas até 120 °C. Devido ao fato das deformações sofridas pelo material estarem relacionadas com o valor do campo elétrico aplicado, tal estabilidade à temperatura é crucial em aplicações de controle e detecção de falhas, pois erros provenientes de variações térmicas podem acarretar erros na magnitude do controle e também fornecer informações errôneas no caso de monitoramento de defeitos estruturais.

A baixa sensibilidade à temperatura dos piezelétricos é uma vantagem sobre os elementos eletrostrictivos, pois estes são altamente dependentes da temperatura. Uma segunda vantagem dos piezelétricos está na flexibilidade em uma variedade de aplicações. Isto é parcialmente devido à diversidade de materiais que possuem tais propriedades. Além dos piezocerâmicos, os piezopolímeros também estão entre os materiais piezelétricos mais utilizados, dos quais os PZTs (zirconato titanato de chumbo) e os PVDFs (fluorido de polivinilideno) são respectivos exemplos.

Devido à natureza cerâmica, os PZTs têm boa rigidez e, freqüentemente, é da mesma ordem da estrutura base, o que resulta em uma excelente conversão da energia elétrica em energia mecânica. Isto torna estes materiais eficientes atuadores para uma grande variedade de aplicações. Materiais piezocerâmicos são efetivos sobre uma larga faixa de freqüência e a dupla propriedade exibida por estes materiais torna extremamente vantajosa sua aplicação para sistemas de controle ou localização de falhas (Dosch, Inman e Garcia, 1992).

Embora vantajosos em muitas aplicações, os materiais piezocerâmicos apresentam dificuldade em assumir moldes com formas complexas devido à fragilidade destes materiais. Alternativamente, filmes PVDF têm consistência de uma folha plástica e podem ser colados em praticamente qualquer geometria, tem alta sensibilidade e precisão nas medidas e são, portanto, utilizados principalmente como sensores. A aplicação direta dos filmes PVDF como atuadores tem sido limitada, pois exibem coeficientes de acoplamento eletromecânico mais baixo que os PZT. No entanto, a resistência dielétrica dos filmes PVDF é maior que a do PZT e eles podem ser expostos a maiores campos elétricos.

Observa-se que o comportamento da deformação com relação ao campo elétrico aplicado exhibe histerese, conforme se pode ver na Fig. 2.6. No entanto, a maior parte das aplicações se dá para baixos valores de campo elétrico, onde o comportamento é linear.

Por apresentarem um comportamento aproximadamente linear sob baixos campos elétricos, relativa insensibilidade à variação de temperatura e flexibilidade como sensores e atuadores, os elementos piezelétricos são utilizados, mais freqüentemente, em aplicações aeroespaciais e automotivas. Sensores e atuadores piezocerâmicos são leves e podem ser colados a uma variedade de estruturas.

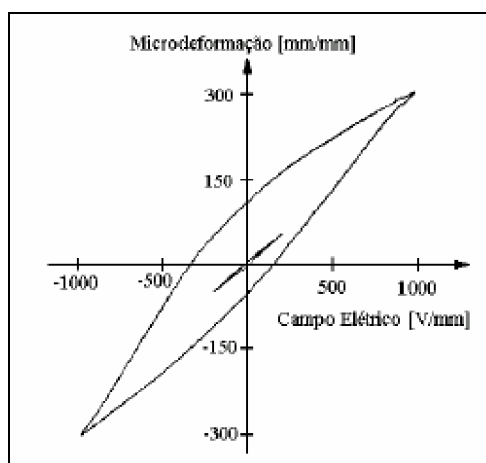


Figura 2.6 - Distribuição de tensão para campos elétricos moderados e altos (Banks, Smith e Wang, 1996).

Como citado anteriormente, após a polarização, a cerâmica de PZT permanecerá permanentemente polarizada e alguns cuidados devem ser tomados em seu manuseio para assegurar que a cerâmica não se despolarize, senão o resultado será a perda parcial ou total das propriedades piezelétricas. A cerâmica pode ser eletricamente, mecanicamente ou termicamente despolarizada. A exposição da cerâmica aos elevados campos elétricos de polaridade oposta ao campo elétrico de polarização despolariza a cerâmica de PZT. A intensidade do campo elétrico que pode afetar a vida útil da cerâmica de PZT depende entre outros fatores, do material piezelétrico, do tempo de exposição ao campo elétrico e da temperatura atingida durante a exposição. A despolarização mecânica ocorre quando a tensão mecânica no elemento piezelétrico torna-se alta o suficiente para desalinhar os dipolos elétricos. O limite de segurança para a tensão mecânica varia consideravelmente com o material piezelétrico. Se um elemento

piezelétrico for aquecido à sua temperatura de Curie, os dipolos perdem as orientações e o material fica completamente despolarizado. Uma cerâmica de PZT pode funcionar por um longo período de tempo sem sofrer despolarização, se trabalhar a uma temperatura bem abaixo da temperatura de Curie. Uma temperatura de operação segura é normalmente definida como a média entre 0 °C e a temperatura de Curie do material piezelétrico.

Como as cerâmicas piezelétricas são anisotrópicas, suas constantes físicas (elasticidade, permissividade, etc) são quantidades tensoriais e se relacionam com as direções da tensão aplicada e do campo elétrico e com as direções perpendiculares a estas. Por esta razão, essas constantes são, freqüentemente, dadas com dois índices subscritos que, geralmente, se referem à direção de duas quantidades relacionadas (tensão e deformação para a elasticidade, deslocamento e campo elétrico para a permissividade). Um índice sobrescrito é usado para indicar a quantidade que é mantida constante.

A direção da polarização positiva é usualmente escolhida para coincidir com a direção Z de um clássico sistema ortogonal de eixos X, Y e Z. As direções de X, Y e Z são representadas por 1, 2 e 3, respectivamente, como mostrado na Fig. 2.7.

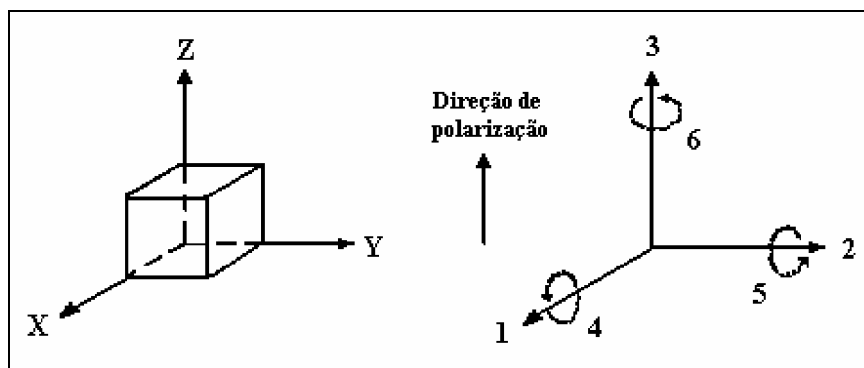


Figura 2.7 - Eixos e direções do sistema de coordenadas.

A seguir são descritas algumas das principais constantes piezelétricas:

Constante dielétrica ( $\epsilon_{ij}$ ) é definida como o deslocamento dielétrico por unidade de campo elétrico. O primeiro índice subscrito mostra a direção do deslocamento dielétrico e o segundo mostra a direção do campo elétrico. Constante dielétrica relativa é a relação entre a constante dielétrica e a permissividade no vácuo ( $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$ ).

A compliância elástica ( $s_{ij}$ ) de um material é definida como a deformação produzida por unidade de tensão. Isto é o recíproco do módulo de elasticidade ( $c_{ij}$ ). O primeiro subscrito refere-se à direção da deformação e o segundo à direção da tensão.

A constante de carga piezométrica ( $d_{ij}$ ) é definida como a polarização elétrica gerada no material por unidade de tensão mecânica aplicada. Alternativamente, é a deformação mecânica sofrida pelo material por unidade de campo elétrico aplicado. O primeiro índice subscrito refere-se à direção de polarização gerada no material ou do campo elétrico aplicado e o segundo refere-se, respectivamente, à direção da tensão aplicada ou a direção da deformação induzida no material.

A constante de voltagem piezométrica ou constante piezométrica ( $e_{ij}$ ) é definida pelo campo elétrico gerado no material por unidade de tensão mecânica aplicada. Alternativamente, pode ser também a deformação mecânica experimentada pelo material por unidade de deslocamento elétrico aplicado.

Um outro fator importante para os materiais piezométricos é o fator de acoplamento  $k_{33}$ , que é uma medida de eficiência entre a conversão de energia elétrica em energia mecânica e vice-versa. Este fator consiste em uma combinação dos coeficientes elásticos, piezométricos e dielétricos. E como é adimensional, é claro que esse fator serve para produzir uma comparação útil entre diferentes materiais piezométricos independente de valores específicos de permissividade ou compliância, pois ambos podem variar muito. Em frequências abaixo da frequência de ressonância do elemento piezométrico, o fator de acoplamento é dado pela seguinte expressão:

$$k_{33}^2 = \frac{d_{33}^2}{s_{33}^E \epsilon_{33}^T} \quad (2.3)$$

sendo  $d_{33}$  a constante de carga piezométrica,  $s_{33}^E$  a compliância elástica em um campo elétrico constante e  $\epsilon_{33}^T$  a constante dielétrica com tensão mecânica constante. Os valores de  $k_{33}$  contidos em tabelas são teoricamente máximos e são baseados em modos vibracionais bem definidos do elemento piezométrico. Os transdutores em condições normais de uso apresentam este fator menor que o valor tabelado.

## 2.2 Relações Constitutivas

O comportamento mecânico de um material elástico é dado por uma relação linear entre tensão e deformação:

$$\mathbf{T} = \mathbf{cS} \quad (2.4)$$

sendo  $\mathbf{T}$  o tensor tensão mecânica ( $\text{N/m}^2$ ),  $\mathbf{c}$  o tensor elasticidade ( $\text{N/m}^2$ ) e  $\mathbf{S}$  o tensor deformação ( $\text{m/m}$ ). Entretanto, para materiais piezelétricos devem ser feitas considerações adicionais devido às associações com o campo elétrico. Apesar dos elementos piezelétricos exibirem histerese não-linear em níveis altos de excitação, as respostas exigidas nas aplicações estruturais típicas são aproximadamente lineares. Por estes motivos as relações constitutivas são dadas por (Cady, 1946):

$$\mathbf{T} = \mathbf{c}^E \mathbf{S} - \mathbf{e}^t \mathbf{E} \quad (2.5)$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{e} \mathbf{S} + \boldsymbol{\varepsilon}^S \mathbf{E} \quad (2.6)$$

sendo  $\mathbf{c}^E$  o tensor elasticidade em um campo elétrico constante ( $\text{N/m}^2$ ),  $\mathbf{e}$  a matriz de constante piezelétrica ( $\text{N/V.m}$ ),  $\mathbf{E}$  o vetor campo elétrico ( $\text{V/m}$ ),  $\mathbf{D}$  o vetor deslocamento elétrico ( $\text{C/m}^2$ ) e  $\boldsymbol{\varepsilon}^S$  o tensor de constante dielétrica com deformação constante ( $\text{F/m}$ ). O sobrescrito ( $^t$ ) significa transposto. Os símbolos e unidades adotadas neste trabalho estão de acordo com o IEEE Standard on piezoelectricity (IEEE Standard, 1987).

A forma das equações constitutivas dadas pelas eqs. (2.5 e 2.6) é a única que modela exatamente um corpo contínuo no espaço quando não há condições de contorno presentes (IEEE Standard, 1987). Embora existem outras formas das equações constitutivas, estas são usadas em certas condições específicas quando condições de contorno estão presentes. Uma forma alternativa que pode ser usada na modelagem de atuadores de pilha piezelétricos está apresentada nas eqs. (2.10 e 2.11).

Em geral, assume-se que materiais piezelétricos são transversalmente isotrópicos, sendo comum assumir a direção de polarização ao longo do eixo 3, que também é o eixo isotrópico transversal, como mostrado na Fig. 2.8.

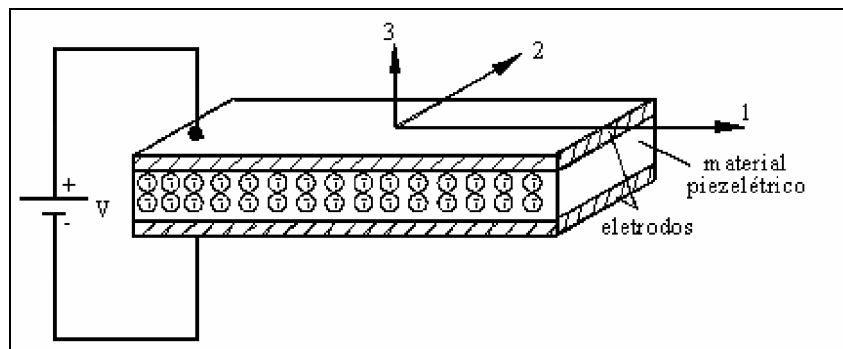


Figura 2.8 - Diagrama esquemático do efeito induzido nos dipolos de materiais piezelétricos.

Então as eqs. (2.5 e 2.6) podem ser escritas da seguinte forma (Batra, 1998):

$$\begin{Bmatrix} T_{11} \\ T_{22} \\ T_{33} \\ T_{23} \\ T_{31} \\ T_{12} \\ D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11}^E & c_{12}^E & c_{13}^E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -e_{31} \\ c_{12}^E & c_{11}^E & c_{13}^E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -e_{31} \\ c_{13}^E & c_{13}^E & c_{33}^E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -e_{33} \\ 0 & 0 & 0 & c_{44}^E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55}^E & 0 & 0 & -e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66}^E & -e_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & \varepsilon_{11}^S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & 0 & \varepsilon_{11}^S & 0 \\ e_{31} & e_{31} & e_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_{33}^S \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{33} \\ 2S_{23} \\ 2S_{31} \\ 2S_{12} \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{Bmatrix} \quad (2.7)$$

Para uma barra piezolétrica de uma dimensão, somente a tensão mecânica axial  $T_{33}$ , deformação  $S_{33}$ , deslocamento elétrico  $D_3$  e o campo elétrico transversal  $E_3$  são considerados. Então a eq. (2.7) se reduz às seguintes equações:

$$T_{33} = c_{33}^E S_{33} - e_{33} E_3 \quad (2.8)$$

$$D_3 = e_{33} S_{33} + \varepsilon_{33}^S E_3 \quad (2.9)$$

As relações constitutivas também podem ser escritas alternativamente como (Cudney, 1999):

$$\mathbf{S} = \mathbf{s}^E \mathbf{T} + \mathbf{d}^t \mathbf{E} \quad (2.10)$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{d} \mathbf{T} + \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{E} \quad (2.11)$$

sendo  $\mathbf{s}^E$  a matriz de compliância elástica em um campo elétrico constante ( $\text{m}^2/\text{N}$ ),  $\mathbf{d}$  uma matriz de constante de carga piezolétrica ( $\text{m}/\text{V}$ ) e  $\boldsymbol{\varepsilon}^T$  o tensor de constante dielétrica com tensão mecânica constante. As eqs (2.10 e 2.11) podem ser escritas similarmente à eq. (2.7). Assim:

$$\begin{Bmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{33} \\ 2S_{23} \\ 2S_{31} \\ 2S_{12} \\ D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11}^E & s_{12}^E & s_{13}^E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{31} \\ s_{12}^E & s_{11}^E & s_{13}^E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{31} \\ s_{13}^E & s_{13}^E & s_{33}^E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{33} \\ 0 & 0 & 0 & s_{44}^E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_{55}^E & 0 & 0 & d_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s_{66}^E & d_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{15} & \varepsilon_{11}^T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 & 0 & \varepsilon_{11}^T & 0 \\ d_{31} & d_{31} & d_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_{33}^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_{11} \\ T_{22} \\ T_{33} \\ T_{23} \\ T_{31} \\ T_{12} \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{Bmatrix} \quad (2.12)$$

De modo similar às eqs. (2.8 e 2.9), considera-se uma barra piezolétrica unidimensional, portanto:

$$S_{33} = s_{33}^E T_{33} + d_{33} E_3 \quad (2.13)$$

$$D_3 = d_{33} T_{33} + \varepsilon_{33}^T E_3 \quad (2.14)$$

Esta última forma das equações constitutivas, embora exata, é empregada em aproximações, sendo válida sobre certas condições limitantes. A utilidade destas formas das equações constitutivas depende do fato de certas variáveis do lado direito das equações serem aproximadamente zero sobre circunstâncias apropriadas. Conseqüentemente, o conjunto de equações a ser usado depende, crucialmente, de circunstâncias geométricas, mecânicas e elétricas. Estes conjuntos de equações são usados para descrever o comportamento dos micro-cristais e não são facilmente usados para descrever a resposta característica de um material piezolétrico (Guan, 2004).

### 2.3 Atuadores de Pilhas

Os atuadores piezolétricos podem ser classificados em dois tipos principais: os de baixa voltagem (multi-camadas) que necessitam aproximadamente de 100 Volts para uma extensão total e os de alta voltagem que necessitam aproximadamente 1000 Volts para uma extensão total. O máximo campo elétrico suportado pelas cerâmicas de PZT é da ordem de 2 kV/mm. Para manter a voltagem de operação dentro de limites práticos, os atuadores piezolétricos são compostos de finas camadas de material cerâmico mecanicamente conectados em série e eletricamente conectados em paralelo. A Figura 2.9 mostra uma representação esquemática das ligações elétricas de um atuador de pilha.

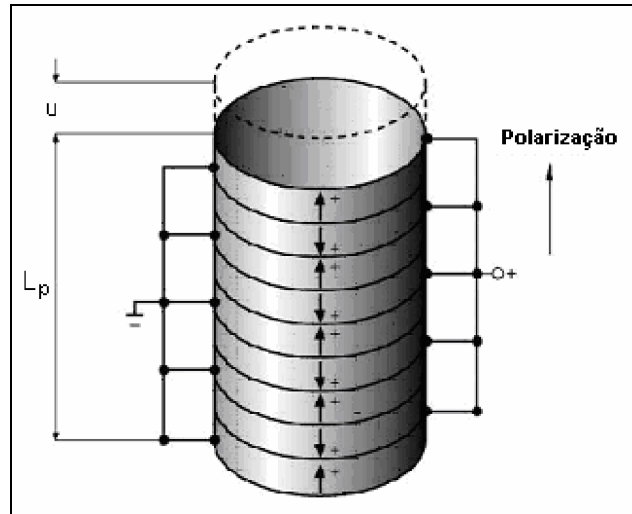


Figura 2.9 - Representação das ligações elétricas de um atuador.

Normalmente são usados atuadores de pilha onde para um atuador de camada única seria necessário um potencial elétrico muito alto para atingir o deslocamento nominal máximo. Potenciais elétricos elevados apresentam dificuldade para serem controlados pelos equipamentos eletrônicos disponíveis. Por outro lado, um atuador de pilha, eletricamente conectado em paralelo, pode ser operado com potenciais elétricos inferiores a 1000 V.

Ainda mais vantajosos são os atuadores que operam com potencial elétrico abaixo de 100 V. Estes atuadores são construídos usando a mesma técnica dos capacitores cerâmicos. A vantagem de serem controlados por um baixo potencial elétrico é obtida pelo uso de altas capacitâncias e correntes de operação, logo, quando tempos de respostas pequenos são requeridos, eletrodos e conectores devem suportar essas altas correntes.

Se a frequência de operação de um atuador piezoelétrico for muito menor que a primeira frequência de ressonância deste, pode ser assumido que a deformação em cada cerâmica de PZT será a mesma (Zhou, Liang e Rogers, 1995). Aplicando as eqs. (2.13 e 2.14) em cada cerâmica e somado-as, encontra-se a macro equação do atuador de pilha piezoelétrico. Usando as seguintes definições:  $F = A_p T_{33}$  a força aplicada,  $q = n_{pzt} A_p D_3$  a carga elétrica,  $V = E_3 t$  a voltagem aplicada,  $k_{cer} = \frac{A_p}{s_{33}^E t}$  a rigidez de uma cerâmica piezoelétrica,  $k_p = \frac{A_p}{n_{pzt} s_{33}^E t}$  a rigidez equivalente do atuador de pilha piezoelétrico,  $C_{cer} = \frac{A_p \epsilon_{33}^S}{t}$  a capacitância de uma cerâmica piezoelétrica,  $C_p = \frac{n_{pzt} A_p \epsilon_{33}^S}{t}$  a capacitância equivalente do atuador de pilha piezoelétrico,

$u = L_p S_{33}$  o deslocamento axial do atuador,  $A_p$  a área de seção transversal das cerâmicas de PZT,  $L_p$  o comprimento do atuador,  $t$  a espessura das cerâmicas de PZT e  $n_{pzt}$  o número de cerâmicas de PZT. As equações constitutivas acima podem ser transformadas em:

$$F = k_p u - d_{33} k_{cer} V \quad (2.15)$$

$$q = n_{pzt} d_{33} F + C_p V \quad (2.16)$$

Note que o segundo termo do lado direito da eq. (2.15) pode ser definido como a força de bloqueio produzida pelo atuador:

$$F_{max} = d_{33} k_{cer} V \quad (2.17)$$

Esta máxima força gerada é obtida considerando o atuador acoplado a uma estrutura rígida com impedância infinita, conseqüentemente, o deslocamento  $u$  produzido pelo atuador é zero (IEEE Standard, 1987).

Como o deslocamento máximo de um atuador é influenciado pelo tipo de carregamento aplicado, serão considerados em uma análise mais detalhada os seguintes tipos de carregamento: constante, variável e complexo.

O mais simples carregamento externo é o constante diretamente aplicado no topo do atuador. O deslocamento total do atuador de pilha é a soma das deformações nas camadas individuais do material piezelétrico, na qual a espessura de cada camada determina a máxima voltagem de operação do atuador de pilha. O deslocamento do atuador de pilha é função da voltagem aplicada, do material piezelétrico usado e da espessura das cerâmicas de PZT. As propriedades do material piezelétrico são descritas pelos coeficientes ( $d_{ij}$ ) da matriz de constante de carga piezelétrica. Estes coeficientes descrevem a relação entre o campo elétrico aplicado e a tensão mecânica produzida.

Neste caso, resolvendo a eq. (2.15), encontra-se o deslocamento do atuador:

$$u = n_{pzt} d_{33} V + \frac{F}{k_p} \quad (2.18)$$

O segundo termo do lado direito da equação,  $F/k_p$ , é sempre constante para o caso de uma carga constante. Logo, o deslocamento máximo pico-pico,  $\bar{u}$ , é o mesmo para qualquer caso de carregamento constante. Comparando o caso sem carga e com carga aplicada, o deslocamento  $u$  é transladado por um incremento  $\Delta = F/k_p$ , que é demonstrado graficamente na Figura 2.10.

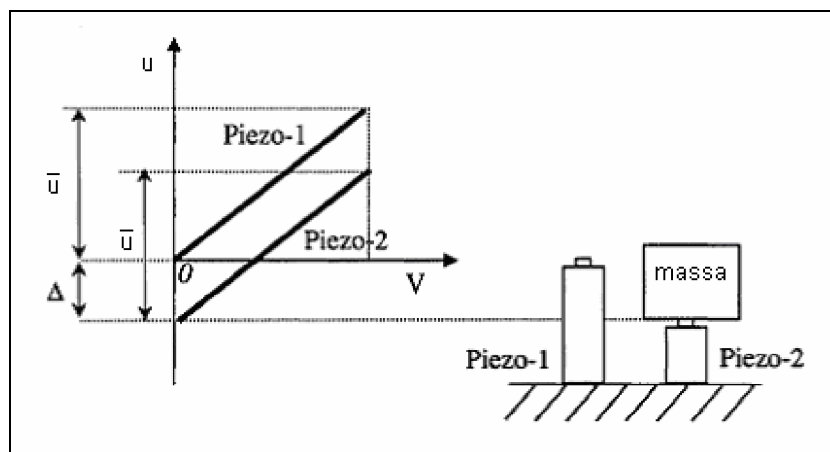


Figura 2.10 - Efeito de uma carga constante no deslocamento máximo do atuador.

Para o caso de carregamentos variáveis, a força externa aplicada é relacionada com o deslocamento do atuador. Assumindo uma mola, de rigidez  $k_s$ , conectada ao atuador como mostra a Figura 2.11, a força externa aplicada no atuador neste caso é:

$$F = -k_s u \quad (2.19)$$

Substituindo a força aplicada acima na eq. (2.15), tem-se:

$$u = n_{pzt} d_{33} V \frac{k_p}{k_p + k_s} \quad (2.20)$$

Como resultado, o deslocamento máximo do atuador é reduzido. Para uma mola externa mais rígida, o deslocamento máximo do atuador será menor. Quando se projeta um atuador piezoelétrico com pré-carregamento, a rigidez da mola que aplica a pré-carga deve ser menor do que 10 % da rigidez do atuador piezoelétrico. Senão, haverá perda considerável do deslocamento disponível do atuador. Por exemplo, se a rigidez da mola que fornece a pré-carga tiver o mesmo valor da rigidez do atuador piezoelétrico, o deslocamento disponível se reduzirá à metade do deslocamento nominal máximo. Este efeito é demonstrado na Figura 2.11. Se a mola externa possuir rigidez infinita, logo, o atuador não produzirá deslocamento.

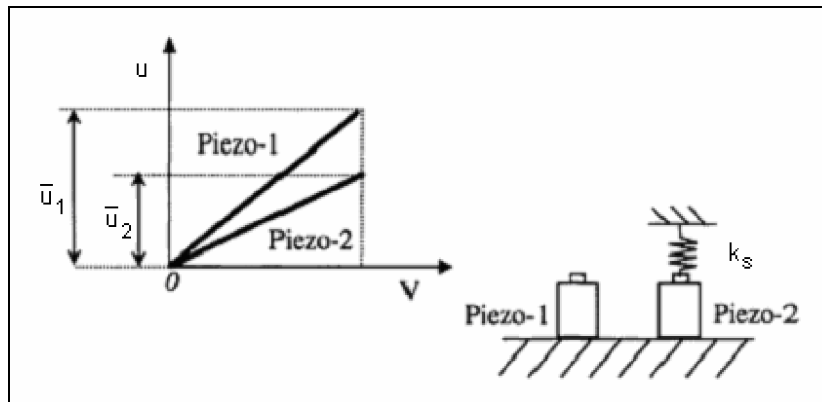


Figura 2.11 - Efeito de um carregamento variável no deslocamento máximo de um atuador.

Para um carregamento externo complexo, tal como um atuador agindo em uma estrutura flexível, a rigidez equivalente desta estrutura pode ser usada para se determinar o deslocamento máximo. Por exemplo, no atuador aplicado à estrutura da Figura 2.12, a rigidez no ponto de contato pode ser usada como rigidez equivalente (Guan, 2004). Note que a rigidez equivalente pode ter um valor complexo, isto significa que o deslocamento pode ter diferença de fase relativa à força de excitação. A rigidez equivalente pode ser calculada a partir de resultados experimentais ou de um modelo de elementos finitos. Pode-se continuar usando a eq. (2.19) para calcular a força externa aplicada ao atuador para um dado deslocamento. Conseqüentemente, a eq. (2.20) pode ser usada para calcular o deslocamento do atuador. Substituindo a eq. (2.20) na eq. (2.19) encontra-se a força efetiva aplicada na estrutura pelo atuador:

$$F = -k_p n_{pzt} d_{33} V \frac{k_s}{k_p + k_s} = -F_{\max} \frac{k_s}{k_p + k_s} \quad (2.21)$$

na qual  $F_{\max}$  foi definida na eq. (2.17). Através da equação acima, observa-se que a força efetiva aplicada na estrutura depende fortemente da rigidez da própria estrutura e da rigidez efetiva do atuador piezolétrico. O mesmo atuador pode gerar maior força dinâmica em uma estrutura mais rígida. Note que  $k_s$  pode variar com a frequência, e a força aplicada à estrutura pode variar com a frequência e voltagem.

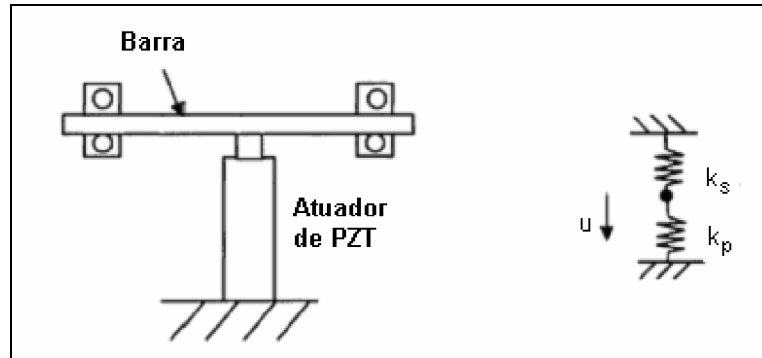


Figura 2.12 - Efeito de um carregamento complexo no deslocamento máximo de um atuador piezoelectrico.

A carga elétrica necessária para alimentar o atuador pode ser calculada usando a eq. (2.16). Substituindo a eq. (2.21) na eq. (2.16), tem-se (Liang, Sun e Rogers, 1996):

$$q = C_p \left[ 1 - k_{33}^2 \frac{k_s}{k_s + k_p} \right] V \quad (2.22)$$

na qual  $k_{33}^2$  é o coeficiente de acoplamento, que é sempre menor que a unidade. A partir da eq. (2.22), a capacitância efetiva do atuador piezoelectrico é definida por:

$$C_p^s = C_p \left[ 1 - k_{33}^2 \frac{k_s}{k_s + k_p} \right] \quad (2.23)$$

Assumindo um comportamento harmônico no tempo,  $e^{j\omega t}$ , para a voltagem aplicada e substituindo a eq. (2.23) na derivada em relação ao tempo da eq. (2.22), a corrente elétrica  $I$  aplicada ao atuador é encontrada como sendo:

$$I = j\omega C_p^s V \quad (2.24)$$

na qual  $j$  é o número imaginário e  $\omega$  é a frequência angular da voltagem.

Um atuador piezoelectrico somente suporta forças compressivas e não forças de tração, portanto, para gerar forças dinâmicas o atuador deve ter um pré-carregamento. A força de pré-carregamento é sempre imposta por uma mola menos rígida exercendo força nas cerâmicas de PZT (PI Physik Instrumente, 2004).

Considerando o efeito do mecanismo de pré-tensão na rigidez e da massa equivalente das partes com movimento, este atuador de pilhas piezoelectrico com pré-tensão pode ser modelado como um sistema massa-mola, como mostra a Figura 2.13.

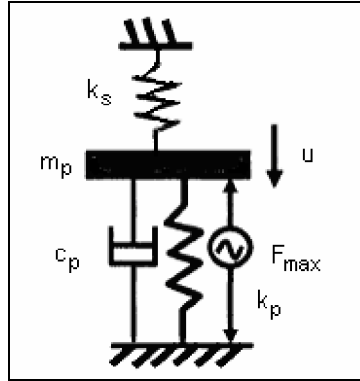


Figura 2.13 - Modelo do atuador de pilhas piezolétrico com pré-tensão.

Sendo  $m_p$ ,  $c_p$  e  $k_s$  a massa equivalente, o fator de amortecimento e a rigidez da mola de pré-tensão do atuador, respectivamente. A equação do movimento para esse modelo é:

$$m_p \ddot{u} + c_p \dot{u} + (k_p + k_s)u = F_{\max} \quad (2.25)$$

$F_{\max}$  é uma força ideal gerada pela voltagem externa, ou a força de bloqueio definida na eq. (2.17). A partir da eq. (2.25), a frequência de ressonância deste atuador, sem amortecimento, é (Guan, 2004):

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k_p + k_s}{m_p}} \quad (2.26)$$

e o deslocamento da extremidade livre do atuador em função da frequência é:

$$u = \frac{k_p / (k_p + k_s)}{1 - \omega^2 / \omega_0^2 + 2j\xi \omega / \omega_0} n_{\text{pzt}} d_{33} V \quad (2.27)$$

na qual  $\omega$  é a frequência de operação e  $\xi$  é o coeficiente de amortecimento do atuador. Combinando eq. (2.27) e (2.24), a corrente elétrica necessária para alimentar o atuador é determinada por:

$$I = j\omega C_p V \left[ 1 - k_{33}^2 \left( 1 - \frac{k_s / (k_s + k_p)}{1 - \omega^2 / \omega_0^2 + 2j\xi \omega / \omega_0} \right) \right] \quad (2.28)$$

Conseqüentemente, o deslocamento do atuador e a corrente elétrica requerida na frequência de ressonância serão muito grandes e dependerá do coeficiente de amortecimento  $\xi$ . A parte mecânica do atuador é modelada na eq. (2.25) e também na (2.27), enquanto a parte elétrica é modelada na eq. (2.28).

Os dois materiais piezelétricos mais comumente usados são os piezocerâmicos (PZT) e os piezopolímeros (PVDF). A rigidez e a constante piezelétrica do PZT e do PVDF sugerem o PZT como mais indicado para ser usado como atuador devido à rigidez e, também, à efetividade (relacionada com a geração de deformação em função da voltagem aplicada). Podem-se aplicar campos elétricos com vezes maiores ao PVDF em relação ao PZT. Portanto, os PVDF são usados como atuadores somente se alta voltagem estiver disponível.

Uma representação esquemática dos componentes mecânicos de um atuador de pilha pode ser vista na Figura 2.14.

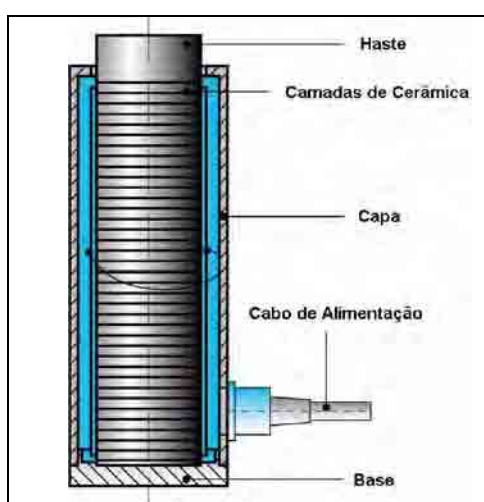


Figura 2.14 - Representação dos componentes mecânicos de um atuador de pilha.

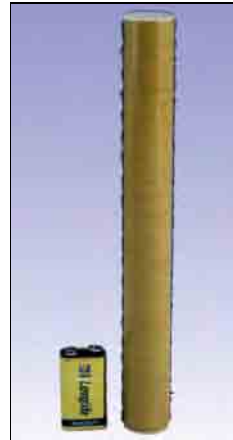
As Figuras 2.15, 2.16 e 2.17 mostram atuadores de pilhas piezoeletricos disponíveis comercialmente. A Fig. 2.15a mostra dois atuadores de baixa voltagem fabricados pela Piezo System Inc, o de maior tamanho produz força máxima de 3388 N, possui alongação máxima de 14,5  $\mu\text{m}$  e um tempo de resposta de 50  $\mu\text{s}$ . O atuador da Fig. 2.15b também da Piezo System Inc produz força máxima de 16000 N, possui alongação máxima de 300  $\mu\text{m}$ , frequência de ressonância (acoplado em uma extremidade) de 5000 Hz e comprimento de 244 mm.

Os atuadores da Fig. 2.16a são atuadores de pilhas piezoeletricos de alta voltagem sem capa metálica de proteção e pré-tensão fabricados pela Kinetic Ceramics Inc, um atuador com 150 mm de comprimento e 25 mm de diâmetro produz força máxima de 18000 N, possui alongação máxima de 160  $\mu\text{m}$ , frequência de ressonância (acoplado em uma extremidade) de 9300 Hz. A Fig. 2.16b mostra um atuador de pilha piezoeletrico de alta voltagem com capa metálica de proteção e pré-tensão também fabricado pela Kinetic Ceramics Inc. Este atuador, de 150 mm de comprimento e 25 mm de diâmetro, produz força máxima de 10000 N, possui

elongação máxima de 120  $\mu\text{m}$  e frequência de ressonância (acoplado em uma extremidade) de 12300 Hz.



(a) Atuadores de baixa voltagem.



(b) Atuador de alta voltagem.

Figura 2.15 - Atuadores de pilha da Piezo System Inc. Fonte: <http://www.piezo.com/>



(a) Atuadores sem corpo metálico.



(b) Atuador com corpo metálico.

Figura 2.16 - Atuadores de pilha de alta voltagem da Kinetic Ceramics Inc.

Fonte: <http://www.kineticceramics.com/>

Os atuadores da Fig. 2.17 são da Physic Instrumente Inc, o maior deles é um atuador de pilha piezelétrico de baixa voltagem e produz força máxima de 3000 N, possui elongação máxima de 90  $\mu\text{m}$ , frequência de ressonância (acoplado em uma extremidade) de 5500 Hz, massa de 200 g e comprimento de 137 mm.



Figura 2.17 - Atuadores de pilha de baixa voltagem da Physic Instrumente Inc.  
Fonte: <http://www.physikinstrumente.de/>

### 3 MODELAGEM DE ESTRUTURAS INTELIGENTES

Os modelos matemáticos de sistemas mecânicos podem ser divididos em duas grandes classes: modelos discretos (ou parâmetros concentrados) e modelos contínuos (ou parâmetros distribuídos). Sistemas discretos consistem de componentes discretas, tais como molas e massas. Massas são assumidas rígidas enquanto molas são flexíveis, mas sem massa. Massas e molas representam os parâmetros do sistema, nos quais as massas são concentradas em certos pontos e conectadas por molas. Já, em cada ponto dos sistemas contínuos há massa e rigidez, e estes parâmetros são distribuídos por todo o sistema. A posição de um ponto em um sistema contínuo é identificada por coordenadas espaciais. O conjunto de todos os pontos interiores define o domínio do sistema, enquanto o conjunto de pontos exteriores do domínio define o contorno do sistema. Como há um número infinito de pontos dentro do domínio, um sistema de parâmetros distribuídos é considerado como tendo um número infinito de graus de liberdade.

Matematicamente, o movimento de um sistema discreto com  $n$  graus de liberdade é governado por  $n$  equações diferenciais ordinárias. Já, o movimento de um sistema de parâmetros distribuídos é governado por um conjunto de equações diferenciais parciais, o qual é válido para todo o domínio do sistema, e por um número apropriado de equações diferenciais parciais nos pontos de fronteira.

Um sistema contínuo pode ser aproximado por um modelo discreto. A exatidão do resultado pode ser mais refinada quanto maior for o aumento do número de graus de liberdade. A princípio, um número infinito de graus de liberdade será necessário para que o resultado convirja para o resultado exato para uma estrutura com características de parâmetros distribuídos; Portanto, é impossível obter a solução exata usando esta aproximação.

Diferentes métodos podem ser utilizados para determinar as equações do movimento de sistemas dinâmicos com parâmetros distribuídos, tais como: Princípio do Trabalho Virtual, Princípio de Hamilton e as Equações de Lagrange, cada qual com suas vantagens e características.

Neste capítulo, as equações do movimento de estruturas inteligentes do tipo treliça serão deduzidas. As matrizes elementares de massa e rigidez desenvolvidas para a treliça com material piezelétrico incorporado são obtidas a partir do Método de Elementos Finitos e das Equações de Lagrange. A formulação das equações de movimento da estrutura inteligente através da

aplicação das equações de Lagrange foi outra contribuição deste trabalho, pois na literatura pesquisada estas equações são obtidas a partir do princípio variacional de Hamilton.

### 3.1 Modelo com Acoplamento Eletromecânico

O modelo dinâmico de uma piezoestrutura inclui as entradas e saídas mecânicas e elétricas, assim como os efeitos da modificação nas matrizes de massa e rigidez. Neste trabalho considera-se a modelagem de treliças com atuadores piezelétricos acoplados. Uma estrutura do tipo treliça é constituída por barras unidas por articulações perfeitas. Barra é um elemento estrutural cuja principal característica geométrica é possuir o comprimento bem maior do que as dimensões da seção transversal. Assim, considera-se uma barra como um elemento unidimensional, analisando o seu comportamento ao longo da direção paralela à dimensão longitudinal, ou seja, o eixo  $z$  do sistema de referência. A Figura 3.1 ilustra uma barra genérica com um atuador piezelétrico acoplado e a partir do sistema de coordenadas desta são obtidas as equações do movimento para a estrutura acoplada eletromecanicamente.

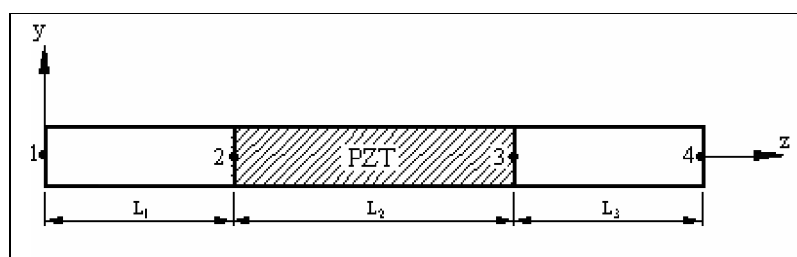


Figura 3.1 - Esquema de uma barra discretizada com um atuador piezelétrico.

Atuadores piezelétricos em estruturas inteligentes podem substituir um membro inteiro ou somente uma parte da barra da treliça. Os subscritos 1, 2 e 3 correspondem à barra estrutural esquerda, ao “*PZT wafer stack*” e a barra estrutural direita, respectivamente.  $L_i$  é relativo ao comprimento. Além disto, são assumidas as seguintes hipóteses na formulação:

- O atuador piezelétrico está completamente fixo na estrutura, ou seja, existe um acoplamento mecânico perfeito entre a estrutura base e o PZT;
- O comprimento do atuador piezelétrico não precisa ser considerado igual ao comprimento do elemento estrutural;

- O potencial elétrico tem uma variação linear ao longo do comprimento da cerâmica piezoeétrica;
- O atuador piezoeétrico é composto por um “*PZT wafer stack*” e duas barras estruturais conectadas.

### 3.2 Aproximação por Elementos Finitos

A descrição de uma barra, aqui apresentada, será limitada à discussão de materiais elásticos lineares isotrópicos, que apresentam uma relação linear entre tensão e deformação. A cinemática do modelo de barra consiste de ações de movimentos axiais, ou seja, as seções transversais permanecem perpendiculares ao eixo da barra. Desta forma, no caso de pequenas deformações assume-se apenas ações de estiramento e encurtamento da barra.

Cada barra da estrutura poderá ser identificada naturalmente como um elemento finito e um nó é localizado em cada extremidade da barra. Identifica-se que cada nó da barra poderá apenas se deslocar na direção axial, eixo  $z$  do sistema de coordenada local. Nestes nós são aplicadas as forças nodais, isto é, no nó  $i$  tem-se uma força aplicada  $F_i$  e no nó  $j$  tem-se uma força aplicada  $F_j$ .

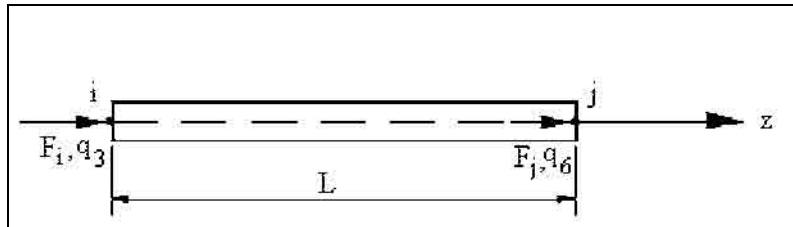


Figura 3.2 - Esquema de deslocamento de uma barra.

Para um elemento de treliça, pode-se considerar apenas a componente axial dos tensores de tensões e deformações. A relação entre deformação  $S_{33}$  e deslocamento para uma barra de seção transversal uniforme de área  $A$ , e tensão mecânica axial  $T_{33}$  constante ao longo da barra é dada por:

$$S_{33} = \frac{\partial q_z}{\partial z} = \frac{\Delta q}{L} \quad (3.1)$$

na qual  $\Delta q = q_6 - q_3$  é o deslocamento na direção  $z$  sob carga axial.

O tensor tensão mecânica  $\mathbf{T}$  é diretamente proporcional ao tensor deformação  $\mathbf{S}$  e é dada por:

$$\mathbf{T} = \mathbf{cS} \quad (3.2)$$

na qual  $\mathbf{c}$  é o tensor elasticidade.

Os elementos estruturais são discretizados por elementos isoparamétricos com três graus de liberdade em cada nó e um potencial elétrico em cada nó, como mostra a Figura 3.3.

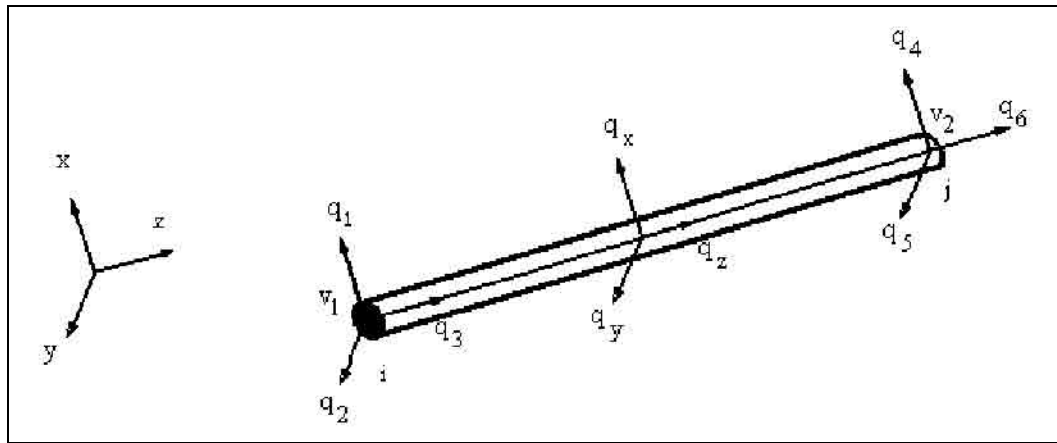


Figura 3.3 - Graus de liberdade mecânicos e elétricos em um elemento 3D de barra com PZT.

O vetor deslocamento nodal generalizado, no sistema local, nos nós  $i$  e  $j$  do  $k$ -ésimo elemento estrutural é dado por:

$$\mathbf{q}_k = [q_1 \quad q_2 \quad q_3 \quad q_4 \quad q_5 \quad q_6]^t \quad (3.3)$$

na qual  $q_i$  é o deslocamento nodal na direção  $x$ ,  $y$  ou  $z$ .

Para o elemento tridimensional de treliça mostrado na Figura 3.3, os deslocamentos ( $q_x$ ,  $q_y$ ,  $q_z$ ) de uma seção transversal genérica podem ser relacionados aos deslocamentos ( $q_1$ ,  $q_2$ ,  $q_3$ ) e ( $q_4$ ,  $q_5$ ,  $q_6$ ) das duas extremidades do elemento através de funções lineares de interpolação, ou seja:

$$\mathbf{q} = \begin{Bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{11} & 0 & 0 & N_{14} & 0 & 0 \\ 0 & N_{22} & 0 & 0 & N_{25} & 0 \\ 0 & 0 & N_{33} & 0 & 0 & N_{36} \end{bmatrix} \mathbf{q}_k = \mathbf{N}_q \mathbf{q}_k \quad (3.4)$$

sendo  $\mathbf{N}_q$  a matriz de funções de interpolação para os deslocamentos do  $k$ -ésimo elemento estrutural e  $\mathbf{q}$  o vetor deslocamento nodal. As funções de interpolação são dadas por (Pinheiro e Silveira, 2004):

$$\begin{aligned}
N_{11} &= 1 - z/L, \\
N_{22} &= 1 - z/L, \\
N_{33} &= 1 - z/L, \\
N_{14} &= z/L, \\
N_{25} &= z/L, \\
N_{36} &= z/L,
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Agora, o vetor potencial elétrico generalizado nodal, no sistema local, no  $k$ -elemento estrutural é dado por:

$$\mathbf{v}_k = [v_1 \quad v_2]^t \tag{3.6}$$

Para formular as matrizes eletroelásticas via FEM, o potencial elétrico pode ser aproximado de maneira similar a eq. (3.4) em termos de coordenadas nodais, via uma matriz de funções de interpolação  $\mathbf{N}_v$ . Assim:

$$\mathbf{v} = \mathbf{N}_v \mathbf{v}_k \tag{3.7}$$

sendo  $\mathbf{N}_v = [N_{v1} \quad N_{v2}]$  a matriz de funções de interpolação para os potenciais elétricos e  $\mathbf{v}$  o vetor potencial elétrico nodal, no  $k$ -ésimo elemento. As funções de interpolação para o potencial elétrico são dadas por:

$$\begin{aligned}
N_{v1} &= 1 - z/L \\
N_{v2} &= z/L
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Para um elemento tridimensional, a deformação  $S_{33}$  associada com o vetor deslocamento nodal generalizado é dada por:

$$\mathbf{S} = S_{33} = \frac{\partial q_z}{\partial z} = \frac{\partial \mathbf{N}'_q}{\partial z} \mathbf{q}_k = \mathbf{R}_q \mathbf{q}_k \tag{3.9}$$

Correspondentemente, a matriz de funções de interpolação para o deslocamento  $q_z$  tem a seguinte forma (Pinheiro e Silveira, 2004):

$$\mathbf{N}'_q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_{33} & 0 & 0 & N_{36} \end{bmatrix} \tag{3.10}$$

A matriz  $\mathbf{R}_q$  é obtida pela derivada de  $\mathbf{N}'_q$  em relação à coordenada  $z$ :

$$\mathbf{R}_q = \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{N}'_q \quad (3.11)$$

Agora, se for assumido que o campo elétrico é constante através do comprimento do PZT, o campo elétrico será o gradiente do potencial elétrico aplicado:

$$\mathbf{E} = E_3 = -\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} = -\frac{\partial \mathbf{N}_v}{\partial z} \mathbf{v}_k = \mathbf{R}_v \mathbf{v}_k, \quad \text{sendo } \mathbf{R}_v = -\frac{\partial}{\partial z} \mathbf{N}_v \quad (3.12)$$

Uma vez definidas estas funções de interpolação para os graus de liberdade mecânicos e elétricos e as relações de deformação e campo elétrico, é possível aplicar a formulação a seguir para obter as equações do movimento da piezoestrutura.

### 3.3 Equações de Lagrange para Obtenção do Modelo da Treliça Inteligente

A maioria dos autores aplica o princípio de Hamilton para um sistema acoplado eletromecanicamente, como descrito pioneiramente no trabalho de Allik e Hughes (1970). A idéia nesta pesquisa não é usar o princípio variacional aplicado a meios piezelétricos e sim utilizar as equações de Lagrange para o movimento da piezoestrutura (Meirovitch, 1997).

Na formulação, consideram-se os graus de liberdade mecânicos em cada elemento estrutural, definidos por  $\mathbf{q}_k$  e os graus de liberdade elétricos em cada elemento, definidos pelo potencial elétrico  $\mathbf{v}_k$ . Assim, as equações de Lagrange são dadas por:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}_k} = \mathbf{F}^e \quad (3.13)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{v}}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_k} = \mathbf{Q}^e \quad (3.14)$$

sendo  $\mathbf{F}^e$  o vetor de forças externas aplicadas no elemento,  $\mathbf{Q}^e$  o vetor de carga elétrica induzida na superfície das cerâmicas de PZT e  $L$  o Lagrangiano definido como:

$$L = T - U + W_e \quad (3.15)$$

sendo  $T$  a energia cinética,  $U$  a energia potencial e  $W_e$  o trabalho realizado pelo campo elétrico aplicado na piezocerâmica.

A energia cinética pode ser escrita por:

$$\mathbf{T} = \iiint_{V_s} \frac{1}{2} \rho_s \bar{\mathbf{q}}^t \bar{\mathbf{q}} dV_s + \iiint_{V_p} \frac{1}{2} \rho_p \bar{\mathbf{q}}^t \bar{\mathbf{q}} dV_p \quad (3.16)$$

sendo  $\rho$  a massa específica ( $\text{kg/m}^3$ ) e  $V$  o volume ( $\text{m}^3$ ). O sobrescrito  $(.)^t$  significa transposto e os subscritos  $s$  e  $p$  são relativos à estrutura e a piezocerâmica, respectivamente. Substituindo a eq. (3.4) na eq. (3.16), obtém-se:

$$\mathbf{T} = \iiint_{V_s} \frac{1}{2} \rho_s \bar{\mathbf{q}}_k^t \mathbf{N}_q^t \mathbf{N}_q \bar{\mathbf{q}}_k dV_s + \iiint_{V_p} \frac{1}{2} \rho_p \bar{\mathbf{q}}_k^t \mathbf{N}_q^t \mathbf{N}_q \bar{\mathbf{q}}_k dV_p \quad (3.17)$$

A energia potencial pode ser escrita como a soma das energias potenciais da estrutura e do material piezelétrico:

$$U = U_s + U_p = \iiint_{V_s} \mathbf{S}^t \mathbf{T} dV_s + \iiint_{V_p} \mathbf{S}^t \mathbf{T} dV_p \quad (3.18)$$

sendo  $\mathbf{S}$  o tensor deformação e  $\mathbf{T}$  o tensor tensão mecânica. No domínio da estrutura  $V_s$  as relações constitutivas do material são dadas pela eq. (3.2):

$$\mathbf{T} = T_{33} = E_s S_{33} = E_s \mathbf{R}_q \mathbf{q}_k \quad (3.19)$$

sendo  $E_s$  o módulo de elasticidade do material da estrutura. Substituindo as eqs. (3.19 e 3.9) no domínio  $V_s$  da eq. (3.18), obtém-se:

$$U_s = \iiint_{V_s} \frac{1}{2} \mathbf{q}_k^t \mathbf{R}_q^t E_s \mathbf{R}_q \mathbf{q}_k dV_s \quad (3.20)$$

Para o domínio do PZT consideram-se as relações constitutivas para o material piezelétrico, discutidas anteriormente.

Substituindo as eqs. (3.9 e 3.12) na eq. (2.8), temos:

$$T_{33} = E_p \mathbf{R}_q \mathbf{q}_k - e_{33} \mathbf{R}_v \mathbf{v}_k \quad (3.21)$$

sendo  $E_p$  o módulo de elasticidade do material piezocerâmico. Agora, substituindo as eqs. (3.21 e 3.9) no domínio  $V_p$  da eq. (3.18), obtém-se:

$$U_p = \iiint_{V_p} \frac{1}{2} \mathbf{q}_k^t \mathbf{R}_q^t E_p \mathbf{R}_q \mathbf{q}_k dV_p - \iiint_{V_p} \frac{1}{2} \mathbf{q}_k^t \mathbf{R}_q^t e_{33} \mathbf{R}_v \mathbf{v}_k dV_p \quad (3.22)$$

Somando as eqs. (3.20 e 3.22) é obtida a energia potencial da piezoestrutura:

$$U = \iiint_{V_s} \frac{1}{2} \mathbf{q}_k^t \mathbf{R}_q^t \mathbf{E}_s \mathbf{R}_q \mathbf{q}_k dV_s + \iiint_{V_p} \frac{1}{2} \mathbf{q}_k^t \mathbf{R}_q^t \mathbf{E}_p \mathbf{R}_q \mathbf{q}_k dV_p - \iiint_{V_p} \frac{1}{2} \mathbf{q}_k^t \mathbf{R}_q^t e_{33} \mathbf{R}_v \mathbf{v}_k dV_p \quad (3.23)$$

O trabalho realizado pelo campo elétrico aplicado na piezocerâmica é definido por:

$$W_e = \iiint_{V_p} \mathbf{E}^t \mathbf{D} dV_p \quad (3.24)$$

sendo  $\mathbf{E}$  o vetor campo elétrico e  $\mathbf{D}$  vetor deslocamento elétrico. Substituindo as eqs. (2.9, 3.9 e 3.12) na eq. (3.24), obtém-se:

$$W_e = \iiint_{V_p} \frac{1}{2} \mathbf{v}_k^t \mathbf{R}_v^t e_{33} \mathbf{R}_q \mathbf{q}_k dV_p + \iiint_{V_p} \frac{1}{2} \mathbf{v}_k^t \mathbf{R}_v^t \epsilon_{33}^S \mathbf{R}_v \mathbf{v}_k dV_p \quad (3.25)$$

A partir das eqs. (3.17, 3.23 e 3.25) substituídas na eq. (3.15) tem-se o Lagrangiano:

$$\begin{aligned} L = & \iiint_{V_s} \frac{1}{2} \rho_s \mathbf{q}_k^t \mathbf{N}_q^t \mathbf{N}_q \mathbf{q}_k dV_s + \iiint_{V_p} \frac{1}{2} \rho_p \mathbf{q}_k^t \mathbf{N}_q^t \mathbf{N}_q \mathbf{q}_k dV_p - \iiint_{V_s} \frac{1}{2} \mathbf{q}_k^t \mathbf{R}_q^t \mathbf{E}_s \mathbf{R}_q \mathbf{q}_k dV_s \\ & - \iiint_{V_p} \frac{1}{2} \mathbf{q}_k^t \mathbf{R}_q^t \mathbf{E}_p \mathbf{R}_q \mathbf{q}_k dV_p + \iiint_{V_p} \frac{1}{2} \mathbf{q}_k^t \mathbf{R}_q^t e_{33} \mathbf{R}_v \mathbf{v}_k dV_p + \iiint_{V_p} \frac{1}{2} \mathbf{v}_k^t \mathbf{R}_v^t e_{33} \mathbf{R}_q \mathbf{q}_k dV_p \\ & + \iiint_{V_p} \frac{1}{2} \mathbf{v}_k^t \mathbf{R}_v^t \epsilon_{33}^S \mathbf{R}_v \mathbf{v}_k dV_p \end{aligned} \quad (3.26)$$

Derivando o Lagrangiano em relação à coordenada  $\mathbf{q}_k$  e depois em relação ao tempo, obtém-se:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}_k} \right) = (\mathbf{M}_s^e + \mathbf{M}_p^e) \ddot{\mathbf{q}}_k \quad (3.27)$$

sendo  $\mathbf{M}_s^e$  e  $\mathbf{M}_p^e$  as matrizes locais de massa da estrutura e do atuador piezelétrico, respectivamente, dadas por:

$$\mathbf{M}_s^e = \iiint_{V_s} \rho_s \mathbf{N}_q^t \mathbf{N}_q dV_s \quad (3.28)$$

$$\mathbf{M}_p^e = \iiint_{V_p} \rho_p \mathbf{N}_q^t \mathbf{N}_q dV_p \quad (3.29)$$

Por sua vez, a derivada do Lagrangiano em relação à coordenada  $\mathbf{q}_k$  fornece:

$$-\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}_k} = (\mathbf{K}_s^e + \mathbf{K}_p^e) \mathbf{q}_k - \mathbf{K}_{qv}^e \mathbf{v}_k \quad (3.30)$$

sendo  $\mathbf{K}_s^e$  e  $\mathbf{K}_p^e$  as matrizes locais de rigidez da estrutura e do atuador piezolétrico, respectivamente, e  $\mathbf{K}_{qv}^e$  a matriz do acoplamento eletromecânico. Estas matrizes são dadas por:

$$\mathbf{K}_s^e = \iiint_{V_s} \mathbf{R}_q^t \mathbf{E}_s \mathbf{R}_q dV_s \quad (3.31)$$

$$\mathbf{K}_p^e = \iiint_{V_p} \mathbf{R}_q^t \mathbf{E}_p \mathbf{R}_q dV_p \quad (3.32)$$

$$\mathbf{K}_{qv}^e = \iiint_{V_p} \mathbf{R}_q^t e_{33} \mathbf{R}_v dV_p \quad (3.33)$$

Agora, fazendo a derivada do Lagrangiano em relação à coordenada  $\mathbf{v}_k$  tem-se:

$$-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{v}_k} = -(\mathbf{K}_{vq}^e \mathbf{q}_k + \mathbf{K}_{vv}^e \mathbf{v}_k) \quad (3.34)$$

sendo  $\mathbf{K}_{vq}^e$  a matriz do acoplamento eletromecânico ou matriz de rigidez eletroelástica e  $\mathbf{K}_{vv}^e$  a matriz de capacitância piezolétrica. Estas matrizes são dadas por:

$$\mathbf{K}_{vq}^e = \iiint_{V_p} \mathbf{R}_v^t e_{33} \mathbf{R}_q dV_p \quad (3.35)$$

$$\mathbf{K}_{vv}^e = \iiint_{V_p} \mathbf{R}_v^t \varepsilon_{33}^S \mathbf{R}_v dV_p \quad (3.36)$$

Nota-se das eqs. (3.33 e 3.35) que  $\mathbf{K}_{vq}^e = (\mathbf{K}_{qv}^e)^t$ . Substituindo todas as equações acima nas eqs. (3.13 e 3.14), obtém-se duas equações matriciais de equilíbrio, em coordenadas generalizadas locais:

$$(\mathbf{M}_s^e + \mathbf{M}_p^e) \ddot{\mathbf{q}}_k + (\mathbf{K}_s^e + \mathbf{K}_p^e) \mathbf{q}_k - \mathbf{K}_{qv}^e \mathbf{v}_k = \mathbf{F}^e \quad (3.37a)$$

$$-(\mathbf{K}_{vq}^e \mathbf{q}_k + \mathbf{K}_{vv}^e \mathbf{v}_k) = \mathbf{Q}^e \quad (3.37b)$$

As eqs. (3.32, 3.33, 3.35 e 3.36) são integradas, obtendo assim a matriz local de rigidez eletromecânica de um atuador de pilhas piezolétrico. Esta matriz modela os principais efeitos físicos considerados no modelo do atuador (Lammering, Jia e Rogers, 1994):

$$\mathbf{K}_{at}^e = \begin{bmatrix} \frac{k_1 k_2 k_3}{k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_2 k_3} & \frac{-k_1 k_2 k_3}{k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_2 k_3} & \frac{-k_1 c_2 k_3}{k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_2 k_3} \\ \frac{-k_1 k_2 k_3}{k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_2 k_3} & \frac{k_1 k_2 k_3}{k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_2 k_3} & \frac{k_1 c_2 k_3}{k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_2 k_3} \\ \frac{-k_1 c_2 k_3}{k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_2 k_3} & \frac{k_1 c_2 k_3}{k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_2 k_3} & \frac{-c_2^2 (k_1 + k_3)}{k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_2 k_3} - \bar{c}_2 \end{bmatrix} \quad (3.38a)$$

$$k_2 = \frac{E_2 A_2}{L_2} \quad (3.38b)$$

$$c_2 = \frac{n_{pzt} e_2 A_2}{L_2} \quad (3.38c)$$

$$\bar{c}_2 = \frac{n_{pzt}^2 \epsilon_2 A_2}{L_2} \quad (3.38d)$$

e  $E$  o módulo de elasticidade,  $L$  o comprimento,  $A$  a área de seção transversal, e a constante piezométrica,  $\epsilon$  a constante dielétrica e  $n_{pzt}$  o número de cerâmicas no atuador piezométrico. Os subscritos 1, 2 e 3 correspondem a barra metálica esquerda, as cerâmicas piezométricas e a barra metálica direita, respectivamente, como pode ser visto na Fig. 3.1; e  $k_1$  e  $k_3$  são definidos similarmente a  $k_2$  na eq. (3.38b).

A partir da técnica padrão de elementos finitos montam-se as matrizes globais. A montagem final das matrizes do sistema,  $\mathbf{M}_{qq}$ ,  $\mathbf{K}_{qq}$ ,  $\mathbf{K}_{qv}$ ,  $\mathbf{K}_{vq}$  e  $\mathbf{K}_{vv}$  é feita pela superposição de cada uma das matrizes dos elementos finitos. O sistema global de equações do movimento para o modelo de uma estrutura com o efeito do acoplamento eletromecânico incorporado é, então:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{qq} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{q}} \\ \bar{\mathbf{v}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{qq} & \mathbf{K}_{qv} \\ \mathbf{K}_{vq} & \mathbf{K}_{vv} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{v} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{Q} \end{Bmatrix} \quad (3.39)$$

sendo as matrizes globais de massa da estrutura, as matrizes globais de rigidez da estrutura, as matrizes globais de acoplamento eletromecânico e as matrizes globais de capacitância piezométrica definidas, respectivamente, por:

$$\mathbf{M}_{qq} = \sum_{i=1}^{ne} (\mathbf{M}_s^e)_i + \sum_{j=1}^{np} (\mathbf{M}_p^e)_j \quad (3.40)$$

$$\mathbf{K}_{qq} = \sum_{i=1}^{ne} (\mathbf{K}_s^e)_i + \sum_{j=1}^{np} (\mathbf{K}_p^e)_j \quad (3.41)$$

$$\mathbf{K}_{qv} = -\sum_{j=1}^{np} (\mathbf{K}_{qv}^e)_j \quad (3.42)$$

$$\mathbf{K}_{vv} = -\sum_{j=1}^{np} (\mathbf{K}_{vv}^e)_j \quad (3.43)$$

Nas equações acima,  $ne$  é o número de elementos estruturais em que a treliça foi discretizada e  $np$  o número de atuadores piezelétricos inseridos na estrutura. O símbolo de soma nas equações acima significa a montagem das matrizes globais a partir das matrizes locais.

Manipulando-se convenientemente as equações do sistema global de equações do movimento, obtém-se a equação do sensor:

$$\mathbf{v}_s = -\mathbf{K}_{vv}^{-1} \mathbf{K}_{vq} \mathbf{q} \quad (3.44)$$

na qual  $\mathbf{Q}$  é zero, pois não existe potencial elétrico aplicado ao sensor.

O termo  $\mathbf{K}_{qv} \mathbf{v}$  da eq. (3.39) pode ser decomposto em duas parcelas dependentes do potencial elétrico, uma referente ao material piezelétrico usado como sensor e a outra para o material piezelétrico usado como atuador, ou seja:

$$\mathbf{K}_{qv} \mathbf{v} = \mathbf{K}_{qvs} \mathbf{v}_s + \mathbf{K}_{qva} \mathbf{v}_a \quad (3.45)$$

Assim, substituindo a eq. (3.45) na eq. (3.39) e usando a eq. (3.44), (Nagamine, 2001):

$$\mathbf{M}_{qq} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}_{qq} \mathbf{q} + \mathbf{K}_{qvs} (-\mathbf{K}_{vv}^{-1} \mathbf{K}_{vq} \mathbf{q}) = \mathbf{F} - \mathbf{K}_{qva} \mathbf{v}_a \quad (3.46)$$

ou

$$\mathbf{M}_z \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}_z \mathbf{q} = \mathbf{F} - \mathbf{K}_{qva} \mathbf{v}_a \quad (3.47)$$

com:

$$\mathbf{K}_z = \mathbf{K}_{qq} - \mathbf{K}_{qvs} (\mathbf{K}_{vv})^{-1} \mathbf{K}_{vq} \quad \text{e} \quad \mathbf{M}_z = \mathbf{M}_{qq} \quad (3.48a,b)$$

Estruturas, em geral, apresentam um certo grau de amortecimento. Este amortecimento é difícil de ser definido com precisão, mas pode ser previsto. Neste trabalho consideramos que o amortecimento  $\mathbf{D}_a$  é proporcional à massa e à rigidez. Assim:

$$\mathbf{D}_a = \alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K} \quad (3.49)$$

Muitos autores mostram em detalhes que estruturas com baixos fatores de amortecimento podem ser aproximadas por amortecimento proporcional sem causar erros significativos (Bhaskar, 1995).

Uma vez definida a matriz de amortecimento, o sistema global de equações do movimento é dado por:

$$\mathbf{M}_z \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}_a \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}_z \mathbf{q} = \mathbf{F} - \mathbf{K}_{qva} \mathbf{v}_a \quad (3.50)$$

na qual  $\mathbf{v}_a$  é o vetor potencial elétrico nos atuadores.

### 3.4 Representação no Espaço de Estados Modal

Nota-se que as matrizes de massa e rigidez da eq. (3.39) não são definidas positivas. Isto impede a aplicação da forma padrão do problema de autovalor e autovetor a partir das matrizes globais. Porém, um dos graus de liberdade elétrico pode ser retirado do sistema, uma vez que apenas um valor de potencial elétrico é suficiente para modelar a resposta elétrica de cada elemento piezocerâmico (Hwang e Park, 1993). Lopes Jr., Pereira e Inman (2000) mostram que devido ao aterramento, a matriz de capacitância piezelétrica  $\mathbf{K}_{vv}^*$  se torna não-singular. Assim, o problema de autovalor e autovetor para o sistema homogêneo e sem amortecimento pode ser escrito na sua forma usual, utilizando a segunda parte da eq. (3.39), então:

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{q} = 0 \quad (3.51)$$

sendo:

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_{qq} \quad (3.52)$$

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_{qq} - \mathbf{K}_{qv}^* (\mathbf{K}_{vv}^*)^{-1} \mathbf{K}_{vq}^* \quad (3.53)$$

na qual  $\mathbf{K}_{qv}^*$  tem np colunas referentes aos potenciais elétricos restantes de  $\mathbf{K}_{qv}$  e  $\mathbf{K}_{vv}^*$  tem os elementos referentes aos potenciais elétricos restantes de  $\mathbf{K}_{vv}$ .

Podem ser encontrados n valores de  $\omega: (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$  tal que a eq. (3.51) seja satisfeita, sendo n o número de graus de liberdade do sistema. A frequência  $\omega_i$  é chamada de i-ésima frequência natural. Substituindo  $\omega_i$  na eq. (3.51), obtém-se as soluções correspondentes  $[\phi_1 \ \phi_2 \ \dots \ \phi_n]$  para cada frequência natural.  $\phi_i$  é chamado de i-ésimo modo natural. Estas

soluções não são únicas e podem ser escalonadas arbitrariamente. Comumente se define a matriz de frequências naturais (Maia et al., 1996):

$$\mathbf{\Omega} = \text{diag}(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) \quad (3.54)$$

e a matriz modal  $\Phi$  (n x n), que consiste dos n modos naturais da estrutura:

$$\Phi = [\phi_1 \ \phi_2 \ \dots \ \phi_n] \quad (3.55)$$

O estado de um sistema é um conjunto de variáveis tais que o conhecimento dessas variáveis e as funções de entrada, com as equações descrevendo a dinâmica, proverão o futuro estado e a saída do sistema (Dorf e Bishop, 1995). Para um sistema dinâmico, o estado de um sistema é descrito em termos de um conjunto de variáveis de estado. As variáveis de estado são aquelas que determinam a futura resposta de um sistema quando o presente estado do sistema e o sinal de excitação são conhecidos.

O espaço de estados é definido como o espaço n-dimensional no qual as componentes do vetor de estados representam os eixos coordenados. A resposta livre de um sistema com n variáveis de estados, a partir de um ponto inicial, descreve uma curva ou trajetória num espaço de estado n-dimensional.

A representação de um sistema no espaço de estados começa com a primeira seleção de um conjunto de variáveis do sistema, chamadas de variáveis de estado. Tomando como base a equação do movimento, selecionam-se as variáveis  $\mathbf{x}_1$  e  $\mathbf{x}_2$  como variáveis de estados, ou seja:

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{Bmatrix} \quad (3.56)$$

Também, da equação do movimento, definem-se as entradas do sistema como uma perturbação causada por forças mecânicas e por potenciais elétricos nos atuadores, ou seja:

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{v}_a \end{Bmatrix} \quad (3.57)$$

Retornando a eq. (3.56), calculando as derivadas das variáveis de estado, resulta:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_1 &= \mathbf{x}_2 \\ \dot{\mathbf{x}}_2 &= -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{x}_1 - \mathbf{M}^{-1}\mathbf{D}_a\mathbf{x}_2 + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{u}_1 - \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}_{qva}\mathbf{u}_2 \end{aligned} \quad (3.58)$$

que ao agrupar-se na forma matricial tem-se:

$$\begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_1 \\ \dot{\mathbf{x}}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{D}_a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}_{qva} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \end{Bmatrix} \quad (3.59)$$

as saídas do sistema podem ser os deslocamentos e as velocidades nos nós:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{oq} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_{ov} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \end{Bmatrix} \quad (3.60)$$

na qual  $\mathbf{C}_{oq}$  é a matriz de saída de deslocamento e  $\mathbf{C}_{ov}$  a matriz de saída de velocidade.

A forma geral das equações de um sistema representado por variáveis de estado é:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}_1\mathbf{u}_1 + \mathbf{B}_2\mathbf{u}_2 \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \end{aligned} \quad (3.61)$$

A matriz  $\mathbf{A}$  é conhecida como matriz de estado ou matriz dinâmica. Esta matriz apresenta dimensão  $2n$ , sendo  $n$  a ordem das matrizes do sistema global de equações do movimento. Sua representação é:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{D}_a \end{bmatrix} \quad (3.62)$$

A matriz  $\mathbf{B}_1$  é a matriz de entrada de perturbação ( $2n \times nd$ ), com  $nd$  representando o número de perturbações no sistema. Sua representação é dada por:

$$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1} \end{bmatrix} \quad (3.63)$$

A matriz  $\mathbf{B}_2$  é a matriz de entrada de controle ( $2n \times np$ ), com  $np$  representando o número de atuadores no sistema. Sua representação é dada por:

$$\mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}_{qva} \end{bmatrix} \quad (3.64)$$

A matriz  $\mathbf{C}$  é a matriz de saída ( $ns \times 2n$ ) na qual  $ns$  indica o número de saídas do sistema. Esta matriz é montada de acordo com as variáveis que se deseja a resposta devido à uma entrada. No caso geral, para todas as variáveis do sistema, tem-se:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{oq} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_{ov} \end{bmatrix} \quad (3.65)$$

A matriz  $\mathbf{D}$  é chamada de matriz de transmissão direta e no caso estudado é dada por:

$$\mathbf{D} = [\mathbf{0}] \quad (3.66)$$

no caso de existência desta matriz, a dimensão deve ser apropriada em função do número de perturbações (nd), ou do número de atuadores (np) e do número de sensores (ns).

A ordem  $2n$  da representação nodal é sempre inaceitavelmente alta para projetos práticos de controle. Por exemplo, o número de graus de liberdade de um modelo de elementos finitos é muito grande. Então, a representação nodal é raramente usada (Gawronski, 1998). Uma alternativa para obter uma representação no espaço de estados é usar um modelo modal.

Introduzindo uma nova variável de estado,  $\mathbf{q}_m$ , tal que:

$$\mathbf{q}_m = \Phi^{-1} \mathbf{q} \quad (3.67)$$

essa relação, entre o vetor de deslocamento nodal  $\mathbf{q}$  e o vetor de coordenadas modais  $\mathbf{q}_m$  obtida pela matriz modal  $\Phi$ , é usada para transformar as equações de movimento acopladas em equações desacopladas da seguinte forma:

$$\ddot{\mathbf{q}}_m + 2\mathbf{Z}\Omega\dot{\mathbf{q}}_m + \Omega^2\mathbf{q}_m = \mathbf{W}_m + \mathbf{V}_m \quad (3.68)$$

na qual  $\Omega^2 = \mathbf{M}_m^{-1}\mathbf{K}_m$  e  $\mathbf{Z} = 0.5\mathbf{M}_m^{-1}\mathbf{D}_m\Omega^{-1}$ .

Sendo  $\mathbf{M}_m$  a matriz de massa modal,  $\mathbf{D}_m$  a matriz de amortecimento modal,  $\mathbf{K}_m$  a matriz de rigidez modal,  $\mathbf{W}_m$  o vetor de força de excitação modal e  $\mathbf{V}_m$  o vetor de força de controle modal, definidos como:

$$\mathbf{M}_m = \Phi^t \mathbf{M} \Phi \quad (3.69a)$$

$$\mathbf{D}_m = \Phi^t \mathbf{D}_a \Phi \quad (3.69b)$$

$$\mathbf{K}_m = \Phi^t \mathbf{K} \Phi \quad (3.69c)$$

$$\mathbf{W}_m = \mathbf{M}_m^{-1} \Phi^t \mathbf{F} = \mathbf{N} \mathbf{F} \quad (3.69d)$$

$$\mathbf{V}_m = -\mathbf{M}_m^{-1} \Phi^t \mathbf{K}_{qva} \mathbf{v}_a = \mathbf{L} \mathbf{v}_a \quad (3.69e)$$

na qual  $\mathbf{N} = \mathbf{M}_m^{-1} \Phi^t$  e  $\mathbf{L} = -\mathbf{M}_m^{-1} \Phi^t \mathbf{K}_{qva}$ .

Pela definição da variável de estado  $\mathbf{q}_m$ , os estados são dados pelos deslocamentos modais e velocidades modais:

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_m \\ \dot{\mathbf{q}}_m \end{Bmatrix} \quad (3.70)$$

As entradas de perturbação e de controle do sistema são dadas pela eq. (3.57). Logo, a eq. (3.68) na forma de espaço de estados é dada pelo trio ( $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$ ):

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\boldsymbol{\Omega}^2 & -2\mathbf{Z}\boldsymbol{\Omega} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{N} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{L} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [\mathbf{C}_{mq} \quad \mathbf{C}_{mv}] \quad (3.71)$$

na qual  $\mathbf{C}_{mq} = \mathbf{C}_{oq}\Phi$  e  $\mathbf{C}_{mv} = \mathbf{C}_{ov}\Phi$ .

A representação no espaço de estados acima não é uma representação de estado modal, embora seja derivada em função dos deslocamentos modais,  $\mathbf{q}_m$ . A representação no espaço de estados modal tem o trio ( $\mathbf{A}_m$ ,  $\mathbf{B}_m$ ,  $\mathbf{C}_m$ ) caracterizado pela matriz bloco diagonal,  $\mathbf{A}_m$ , e as matrizes relacionadas com a entrada e a saída:

$$\mathbf{A}_m = \text{diag}(\mathbf{A}_{mi}), \quad \mathbf{B}_m = \begin{bmatrix} \wedge \\ \mathbf{B}_{mi} \\ \wedge \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_m = [\ ] \quad \mathbf{C}_{mi} \quad [\ ] \quad (3.72)$$

sendo  $i = 1, 2, \dots, n$  e  $\mathbf{A}_{mi}$ ,  $\mathbf{B}_{mi}$  e  $\mathbf{C}_{mi}$  são blocos  $2 \times 2$ ,  $2 \times$  número de entradas (nd ou np) e  $ns \times 2$ , respectivamente. Estes blocos podem ser arrançados de diversas formas diferentes e, também, transformados de uma forma a outra, a partir de transformações lineares. Isto pode ser feito usando as seguintes equações:

$$\mathbf{A}_m = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}, \quad \mathbf{B}_m = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}, \quad \mathbf{C}_m = \mathbf{C}\mathbf{P} \quad (3.73)$$

sendo  $\mathbf{P}$  uma matriz de transformação. Gawronski (1998) mostra diversas formas que esta matriz pode ter. Os blocos  $\mathbf{A}_{mi}$  utilizados são geralmente de quatro diferentes formas. A seguir, apresentam-se estas formas e os respectivos estados modais para cada realização:

- Forma Modal 1:

$$\mathbf{A}_{mi} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_i \\ -\omega_i & -2\zeta_i\omega_i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_i = \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_{mi} \\ \dot{\mathbf{q}}_{mi}/\omega_i \end{Bmatrix} \quad (3.74)$$

- Forma Modal 2:

$$\mathbf{A}_{mi} = \begin{bmatrix} -\zeta_i\omega_i & \omega_i \\ \omega_i(\zeta_i^2 - 1) & -\zeta_i\omega_i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_i = \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_{mi} \\ \mathbf{q}_{moi} \end{Bmatrix}, \quad \text{sendo } \mathbf{q}_{moi} = \zeta_i\mathbf{q}_{mi} + \dot{\mathbf{q}}_{mi}/\omega_i \quad (3.75)$$

- Forma Modal 3:

$$\mathbf{A}_{mi} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_i & -2\zeta_i\omega_i \end{bmatrix}, \mathbf{x}_i = \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_{mi} \\ \dot{\mathbf{q}}_{mi} \end{Bmatrix} \quad (3.76)$$

- Forma Modal 4:

$$\mathbf{A}_{mi} = \begin{bmatrix} -\zeta_i\omega_i + j\omega_i\sqrt{1-\zeta_i^2} & 0 \\ 0 & -\zeta_i\omega_i - j\omega_i\sqrt{1-\zeta_i^2} \end{bmatrix}, \mathbf{x}_i = \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_{mi} - j\mathbf{q}_{moi} \\ \mathbf{q}_{mi} + j\mathbf{q}_{moi} \end{Bmatrix} \quad (3.77)$$

na qual  $\mathbf{q}_{mi}$  e  $\dot{\mathbf{q}}_{mi}$  são os  $i$ -ésimos deslocamentos e velocidades modais,  $\zeta_i$  é o  $i$ -ésimo coeficiente de amortecimento e  $j = \sqrt{-1}$ .

A representação na forma modal 3 é a adotada nesse trabalho e é obtida a partir da eq. (3.71), simplesmente rearranjando as colunas das matrizes  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{C}$  e as linhas de  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$ , isto é feito usando a seguinte matriz de transformação  $\mathbf{P}$ :

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_2 & \mathbf{0} \\ \wedge & \wedge \\ \mathbf{0} & \mathbf{e}_n \\ \mathbf{e}_n & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.78)$$

na qual  $\mathbf{e}_i$  é um vetor de  $n$  linhas com todos os elementos iguais a zero exceto o  $i$ -ésimo elemento que é igual a 1.

Dessa forma, o vetor de estado  $\mathbf{x}^t = [\mathbf{q}_m^t \quad \dot{\mathbf{q}}_m^t]$ , consistindo de deslocamentos modais seguidos de velocidades modais, é transformado para o novo estado  $\mathbf{x}^t = [\mathbf{q}_{m1} \quad \dot{\mathbf{q}}_{m1} \quad \mathbf{q}_{m2} \quad \dot{\mathbf{q}}_{m2} \quad \dots \quad \mathbf{q}_{mn} \quad \dot{\mathbf{q}}_{mn}]$ , onde o deslocamento modal de cada componente fica próximo a sua velocidade modal.

O vetor de estado  $\mathbf{x}$  da representação modal consiste de  $n$  componentes  $\mathbf{x}_i$  independentes que representam o estado modal de cada modo.

$$\mathbf{x} = [\mathbf{x}_1 \quad \mathbf{x}_2 \quad \dots \quad \mathbf{x}_n]^t \quad (3.79)$$

O  $i$ -ésimo modo tem a representação  $(\mathbf{A}_{mi}, \mathbf{B}_{mi}, \mathbf{C}_{mi})$  e é independentemente obtido das equações de estados. Logo, tem-se:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_i &= \mathbf{A}_{mi}\mathbf{x}_i + \mathbf{B}_{1mi}\mathbf{F}_i + \mathbf{B}_{2mi}\mathbf{v}_{ai} \\ \mathbf{y}_i &= \mathbf{C}_{mi}\mathbf{x}_i\end{aligned}\quad (3.80)$$

na qual:

$$\mathbf{B}_{1mi} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{b}_1(i,nd) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_{2mi} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{b}_2(i,np) \end{bmatrix}$$

e  $\mathbf{b}_2(i,np)$  é um valor dependente dos modos a controlar e da posição do atuador.

### 3.5 Normas de Sistemas

Considerando um sistema estável, a norma  $H_\infty$  é definida como (Burl, 1999):

$$\|\mathbf{H}\|_\infty = \max_{\omega} \sigma_{\max}(\mathbf{H}(\omega)) \quad (3.81)$$

sendo  $\sigma_{\max}(\mathbf{H}(\omega))$  o maior valor singular de  $\mathbf{H}(\omega)$ . A norma  $H_\infty$  de um sistema SISO é a magnitude do maior pico da função de transferência  $\mathbf{H}(\omega)$  em termos de valores singulares.

A norma do  $i$ -ésimo modo natural do sistema dado pelo trio de matrizes  $(\mathbf{A}_{mi}, \mathbf{B}_{mi}, \mathbf{C}_{mi})$  pode ser estimada de diferentes formas (Gawronski, 1998). Neste trabalho, calcula-se a norma  $H_\infty$ , tanto dos modos quanto do sistema, a partir de um problema de otimização convexa. Em Assunção e Teixeira (2001) há uma sub-rotina para computar esta norma com o auxílio do LMI toolbox do Matlab<sup>®</sup>.

A norma  $H_\infty$  de um sistema é igual a maior norma dos modos, isto é:

$$\|\mathbf{H}\|_\infty = \max_i \|\mathbf{H}_i\|_\infty, \quad i = 1, \dots, nc \quad (3.82)$$

A propriedade da eq. (3.82) estabelece que o maior pico da função de resposta em frequência (FRF) determina a resposta de maior amplitude da estrutura. A norma  $H_\infty$  do  $i$ -ésimo modo de uma estrutura com um conjunto  $np$  de atuadores é a soma RMS das normas dos modos para cada atuador separadamente, ou seja:

$$\|\mathbf{H}_i\|_\infty = \sqrt{\sum_{j=1}^{np} \|\mathbf{H}_{ij}\|_\infty^2}, \quad i = 1, \dots, nc \quad (3.83)$$

sendo  $nc$  o número de modos considerados. Da mesma forma, a norma  $H_\infty$  do  $i$ -ésimo modo de uma estrutura com um conjunto  $r$  de sensores é a soma RMS das normas dos modos para cada sensor separadamente, ou seja:

$$\|H_i\|_\infty = \sqrt{\sum_{k=1}^r \|H_{ki}\|_\infty^2}, \quad i = 1, \dots, nc \quad (3.84)$$

### 3.6 Posicionamento Ótimo de Atuadores e Sensores

Os atuadores devem ser posicionados em localizações para excitar os modos de interesse mais eficientemente. O problema de localização ótima de sensores e atuadores pode ser interpretado como o posicionamento de um pequeno conjunto de atuadores e sensores, tal que as normas  $H_2$ ,  $H_\infty$  ou Hankel do sistema seja o mais próximo possível da norma do sistema, caso se utilize um conjunto grande de sensores e atuadores. A metodologia estudada neste trabalho é simples de ser implementada em comparação com outros métodos citados na literatura, além de ser eficiente para um grande conjunto de posições candidatas. Outra vantagem é a sua clara interpretação física (Gawronski, 1998).

Neste trabalho define-se a norma  $H_\infty$  como índice para o posicionamento, porém poderia utilizar outros índices sem perda de generalidade. Denota-se por  $H$ , a função de transferência do sistema. O índice de posicionamento  $\sigma_{\infty ik}$ , que avalia o  $k$ -ésimo atuador sobre o  $i$ -ésimo modo em termos de norma  $H_\infty$ , é definido para todos os modos e para todas as localizações candidatas possíveis:

$$\sigma_{\infty ik} = w_{ik} \frac{\|H_{ik}\|_\infty}{\|H\|_\infty}, \quad k = 1, \dots, S, \quad i = 1, \dots, nc \quad (3.85)$$

sendo  $w_{ik} \geq 0$  o peso para o  $k$ -ésimo atuador e para o  $i$ -ésimo modo e  $S$  é o número de posições candidatas para os atuadores. Usando estes índices, pode-se definir uma matriz de posicionamento do atuador:

$$\sum_A = \begin{bmatrix} \sigma_{\infty 11} & \sigma_{\infty 12} & \dots & \sigma_{\infty 1k} & \dots & \sigma_{\infty 1S} \\ \sigma_{\infty 21} & \sigma_{\infty 22} & \dots & \sigma_{\infty 2k} & \dots & \sigma_{\infty 2S} \\ \wedge & \wedge & \sim & \wedge & \sim & \wedge \\ \sigma_{\infty i1} & \sigma_{\infty i2} & \dots & \sigma_{\infty ik} & \dots & \sigma_{\infty iS} \\ \wedge & \wedge & \sim & \wedge & \sim & \wedge \\ \sigma_{\infty n1} & \sigma_{\infty n2} & \dots & \sigma_{\infty nk} & \dots & \sigma_{\infty nS} \end{bmatrix} \quad (3.86)$$

A  $i$ -ésima linha desta matriz corresponde ao  $i$ -ésimo modo e a  $k$ -ésima coluna ao atuador posicionado na  $k$ -ésima localização candidata. O procedimento para o índice de

posicionamento do sensor  $\sigma_{\infty ik}$  é similar e avalia o k-ésimo sensor no i-ésimo modo em termos da norma  $H_{\infty}$ :

$$\sigma_{\infty ik} = w_{ik} \frac{\|H_{ik}\|_{\infty}}{\|H\|_{\infty}}, \quad k = 1, \dots, R, \quad i = 1, \dots, n_c \quad (3.87)$$

sendo  $w_{ik} \geq 0$  o peso para o k-ésimo sensor e para o i-ésimo modo e R é o número de posições candidatas para os sensores. Usando estes índices, pode-se definir uma matriz de posicionamento do sensor:

$$\Sigma_S = \begin{bmatrix} \sigma_{\infty 11} & \sigma_{\infty 12} & \dots & \sigma_{\infty 1k} & \dots & \sigma_{\infty 1R} \\ \sigma_{\infty 21} & \sigma_{\infty 22} & \dots & \sigma_{\infty 2k} & \dots & \sigma_{\infty 2R} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{\infty i1} & \sigma_{\infty i2} & \dots & \sigma_{\infty ik} & \dots & \sigma_{\infty iR} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{\infty n1} & \sigma_{\infty n2} & \dots & \sigma_{\infty nk} & \dots & \sigma_{\infty nR} \end{bmatrix} \quad (3.88)$$

A i-ésima linha desta matriz corresponde ao i-ésimo modo e a k-ésima coluna ao sensor posicionado na k-ésima localização candidata.

As matrizes de posicionamento dão as propriedades de localização de cada atuador/sensor. O índice de posicionamento no k-ésimo atuador é determinado pelo máximo valor da k-ésima coluna da matriz da eq. (3.86). O vetor de índice de posicionamento do atuador pode, então, ser definido por:

$$\sigma_a = [\sigma_{a1} \quad \sigma_{a2} \quad \dots \quad \sigma_{aS}] \quad (3.89)$$

No caso do índice envolvendo a norma  $H_{\infty}$ , é o maior índice sobre todos os modos, ou seja:

$$\sigma_{ak} = \max_i(\sigma_{\infty ik}) \quad i = 1, \dots, n \quad k = 1, \dots, S \quad (3.90)$$

De maneira similar, o vetor de índice de posicionamento do sensor é definido como:

$$\sigma_s = [\sigma_{s1} \quad \sigma_{s2} \quad \dots \quad \sigma_{sR}] \quad (3.91)$$

No caso do índice envolvendo a norma  $H_{\infty}$ , é o maior índice sobre todos os modos, ou seja:

$$\sigma_{sk} = \max_i(\sigma_{\infty ik}) \quad i = 1, \dots, n \quad k = 1, \dots, R \quad (3.92)$$

O vetor de índice dos modos, por sua vez, é definido da seguinte forma:

$$\sigma_m = [\sigma_{m1} \quad \sigma_{m2} \quad \dots \quad \sigma_{mn}] \quad (3.93)$$

Estes índices podem ser determinados como sendo a soma RMS do  $i$ -ésimo modo sobre todos os atuadores:

$$\sigma_{mi} = \sqrt{\sum_{k=1}^S \sigma_{ik}^2}, \quad i = 1, \dots, n \quad (3.94)$$

ou a soma RMS do  $i$ -ésimo modo sobre todos os sensores:

$$\sigma_{mi} = \sqrt{\sum_{k=1}^R \sigma_{ik}^2}, \quad i = 1, \dots, n \quad (3.95)$$

Das propriedades e equações acima, constata-se que o índice  $\sigma_{ak}$  ( $\sigma_{sk}$ ) caracteriza a importância do  $k$ -ésimo atuador (ou sensor). Assim, este índice pode ser usado como um índice de posicionamento de atuador (ou sensor). Por outro lado, os índices de atuadores (sensores) com valor pequeno podem ser removidos por terem participação insignificante.

O índice modal  $\sigma_{mi}$  também pode ser usado. Este índice caracteriza a importância do  $i$ -ésimo modo para uma dada localização de sensores e atuadores. Os modos com normas menos significativas (ou seja, com valores pequenos do índice  $\sigma_{mi}$ ) podem ser eliminados da escolha de melhor posicionamento. Maiores detalhes podem ser encontrados em Gawronski (1998).

A metodologia apresentada acima é comparativamente simples, permitindo quase sempre o posicionamento ótimo de sensores e atuadores para grandes estruturas. Esta metodologia foi utilizada por Panossian, Gawronski e Ossman (1998) para o posicionamento de 4 atuadores e de 341 sensores no módulo Z1 da estação espacial internacional da NASA. A estrutura do módulo Z1 consiste, basicamente, de uma estrutura treliçada com numerosos painéis e módulos acoplados e foi modelada por elementos finitos com 11.804 graus de liberdade.

### 3.7 Redução de Modelos

A obtenção de um modelo de baixa ordem que aproxime bem uma planta de alta ordem é muito importante para controle e tem atraído a atenção de muitos pesquisadores, sobretudo nos últimos 30 anos (Assunção, 2000). Este interesse pode ser explicado pelo fato de que a complexidade e o desempenho de um controlador baseado em um modelo depende, sobretudo da ordem da planta em estudo. Porém, a obtenção de um modelo reduzido também é interessante

para propósitos de análise dinâmica e testes modais. Tipicamente, um modelo obtido via FEM contém um grande número de graus de liberdade quando desenvolvido (Wang, Chen e Han, 1999). Isto pode causar dificuldades numéricas em análise dinâmica, sem falar no alto custo computacional. Em todos estes casos a redução de modelos é uma etapa crucial em projeto e análise.

Muitos métodos ótimos de redução utilizando desigualdades matriciais lineares (LMI) foram propostos para os casos de otimização local e global, usando como critérios de desempenho normas de sistemas, por exemplo, em Assunção e Teixeira (2002). Estas técnicas fornecem excelentes resultados, mas, infelizmente, são complexas e computacionalmente caras.

Outros métodos, comparativamente mais simples, também foram propostos, sobretudo nos anos 80, e causaram um profundo impacto se tornando métodos clássicos, como por exemplo, o método de Moore que inclui a realização balanceada (Moore, 1981). Os problemas típicos de redução de modelos de estruturas flexíveis exigem formulação específica e foram estudados por diversos autores como, por exemplo, em Skelton (1988) e Gawronski e Juang (1990). A chave para o sucesso de uma redução de modelos depende sobretudo da escolha do índice a ser usado para avaliar o erro de redução. Em geral, utilizam-se normas de sistemas como critério de avaliação.

Um modelo de ordem reduzida é obtido truncando os estados. Denota-se por  $\mathbf{x}$  os estados e o trio  $(\mathbf{A}_m, \mathbf{B}_m, \mathbf{C}_m)$  a realização no espaço de estados modal. O vetor de estados  $\mathbf{x}$  é particionado da seguinte forma:

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} \mathbf{x}_c \\ \mathbf{x}_r \end{Bmatrix} \quad (3.96)$$

sendo  $\mathbf{x}_c$  o vetor de estados reduzidos e  $\mathbf{x}_r$  o vetor de estados truncados. Se existem  $k < n$  estados reduzidos,  $\mathbf{x}_c$  é um vetor de  $2k$  estados e  $\mathbf{x}_r$  é um vetor de  $2(n-k)$  estados. As matrizes do sistema  $(\mathbf{A}_m, \mathbf{B}_m, \mathbf{C}_m)$  podem ser particionadas considerando a decomposição canônica modal. Da forma canônica de Jordan pode ser obtido:

$$\mathbf{A}_m = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_c & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_r \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_m = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_c \\ \mathbf{B}_r \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_m = [\mathbf{C}_c \quad \mathbf{C}_r] \quad (3.97)$$

O modelo reduzido é obtido desconsiderando as últimas  $2(n-k)$  linhas das matrizes  $\mathbf{A}_m$  e  $\mathbf{B}_m$  e as últimas  $2(n-k)$  colunas de  $\mathbf{A}_m$  e  $\mathbf{C}_m$ . Matematicamente, temos:

$$\mathbf{A}_c = \mathbf{R}\mathbf{A}_m\mathbf{R}^t, \quad \mathbf{B}_c = \mathbf{R}\mathbf{B}_m, \quad \mathbf{C}_c = \mathbf{C}_m\mathbf{R}^t \quad (3.98)$$

sendo  $\mathbf{R} = [\mathbf{I}_{2k} \quad 0]$ .

A redução de modelos pelo truncamento de modelos estáveis sempre produz um modelo reduzido estável, desde que os pólos do modelo reduzido sejam os pólos dominantes do sistema. O grande problema é decidir quais estados  $\mathbf{x}_c$  devem ser mantidos tal que se obtenha a melhor reprodução do sistema de alta ordem. Esta escolha depende da definição do índice de redução escolhido. Em geral, utilizam-se as normas  $H_2$ ,  $H_\infty$  e Hankel para se avaliar os erros de redução. A primeira formulação baseada na norma  $H_2$  é conhecida na literatura como método de Skelton (Skelton, 1988). Já o segundo método baseado nas normas  $H_\infty$  e Hankel é conhecido como método de Moore (Moore, 1981). Uma vez que a norma  $H_\infty$  é aproximadamente duas vezes a norma Hankel a metodologia de redução utilizando estas normas é idêntica. Este trabalho aborda a mesma idéia do método de Moore, entretanto, trabalha-se em coordenadas modais e não em coordenadas balanceadas como no método original.

O erro de redução  $H_\infty$  é definido como:

$$e_\infty = \|\mathbf{H} - \mathbf{H}_c\|_\infty \quad (3.99)$$

sendo  $\mathbf{H}$  a função de transferência do sistema completo e  $\mathbf{H}_c$  a função de transferência do modelo reduzido, considerando os modos a se controlar. Foi mostrado por Glover (1984) que o limite superior do erro de redução  $H_\infty$  é dado por:

$$e_\infty = \|\mathbf{H} - \mathbf{H}_c\|_\infty \leq \sum_{i=k+1}^n \|\mathbf{H}_i\|_\infty \quad (3.100)$$

Porém, para estruturas flexíveis em coordenadas modais o erro pode ser estimado menos conservativamente. Neste caso, a função de transferência é a soma dos modos, além disto:

$$\mathbf{H} = \sum_{i=1}^n \mathbf{H}_i \quad \text{e} \quad \mathbf{H}_c = \sum_{i=1}^k \mathbf{H}_i \quad (3.101)$$

Assim:

$$\mathbf{H} - \mathbf{H}_c = \sum_{i=k+1}^n \mathbf{H}_i = \mathbf{H}_r \quad (3.102)$$

sendo  $\mathbf{H}_r$  a função de transferência da parte truncada (modos residuais). Assim, a equação a seguir mostra que o erro de redução  $H_\infty$  é igual a maior norma  $H_\infty$  dos modos truncados:

$$e_\infty = \|\mathbf{H} - \mathbf{H}_c\|_\infty = \|\mathbf{H}_r\|_\infty \cong \|\mathbf{H}_{k+1}\|_\infty \quad (3.103)$$

## 4 CONTROLE MODAL

Controle modal é um termo genérico para uma classe de técnicas baseadas na idéia de que o controle de um sistema pode ser alcançado pelo controle de seus modos. Em sistemas de controle distribuído além do projeto e implantação do controlador, o modelo é uma preocupação importante. Muitas técnicas estão disponíveis para modelar e projetar um sistema de controle de múltiplas entradas e múltiplas saídas, por exemplo: LQR, LQG e  $H_\infty$ . Estas técnicas consistem na minimização de um índice de desempenho e são conhecidas como técnicas de controle ótimo e encaixam no domínio de controle moderno. O controle moderno é, essencialmente, uma técnica no domínio do tempo, baseada no conceito de espaço de estados para descrever o comportamento dinâmico dos sistemas.

O movimento de um sistema de parâmetros distribuídos é descrito por variáveis que dependem não somente do tempo, mas também do espaço. Como resultado, o movimento é governado por equações diferenciais parciais que devem ser satisfeitas dentro do domínio da estrutura e devem ser satisfeitas pelas condições de contorno no contorno do sistema. Na essência, um sistema de parâmetros distribuídos é infinito dimensional, logo o controle dessas estruturas apresenta problemas não encontrados em sistemas de parâmetros concentrados. Certamente, para a maioria dos casos, a teoria de controle foi desenvolvida para um sistema de parâmetros concentrados e muitos dos conceitos não são aplicados em sistemas de parâmetros distribuídos. A situação melhora se for usado o controle modal que controla a estrutura através do controle de seus modos. Nesse caso, muitos dos conceitos desenvolvidos para sistemas de parâmetros concentrados podem ser deduzidos para sistema de parâmetros distribuídos, pois ambos os tipos de estruturas podem ser descritas em coordenadas modais. A maior dificuldade aparece no cálculo dos ganhos dos controladores, pois isto implica em matrizes de ganhos dos controladores infinitas. Esta questão pode ser evitada pelo uso do controle no espaço modal independente (IMSC), mas é necessária uma força de controle distribuída, que pode ser difícil de ser implementada. É possível implementar essa força de controle distribuída através de atuadores posicionados em certos pontos da estrutura, mas isto implica em controle de um número reduzido de modos.

Uma estratégia tem sido primeiro discretizar geometricamente o sistema para obter os autovetores, assim a variável dependente distribuída pode ser expandida em uma série finita de autovetores e então o sistema discretizado pode ser controlado. Um número reduzido de modos é

considerado para o controle e os outros deixados sem controle. As duas classes de modos são chamadas de modos controlados e residuais, respectivamente. Essas duas classes juntas são chamadas de modos modelados. A discretização implica que um número finito de modos é considerado, sendo que no sistema real existe um número infinito de modos.

O projeto de estratégias de controle segue o modelo dos sistemas, vistos no parágrafo anterior. A teoria de controle ativo para sistemas de parâmetros distribuídos está disponível em diversas formas. Todas em uma ou outra forma de controle modal. Uma das mais utilizadas, o controle no espaço modal independente (IMSC), foi originalmente proposta por Meirovitch e Oz (1980). Como o nome indica, vários modos são controlados independentemente. Essencialmente, um conjunto de sistemas de segunda ordem independentes é controlado em paralelo. As vibrações modais são obtidas pela transformação das vibrações do sistema de parâmetro distribuído para o espaço modal. As vibrações modais são desacopladas uma das outras, pois são ortogonais, e permitem a geração de leis de controle para cada um dos graus de liberdade de vibração modal ao invés do sistema de parâmetros distribuídos.

Em virtude do projeto de controle ser realizado no espaço modal para cada modo, as forças de controle obtidas no espaço modal não são forças físicas (Meirovitch e Baruh, 1981). As forças físicas podem ser obtidas por uma transformação inversa. O resultado é um conjunto de forças físicas de controle que são sempre forças distribuídas. Esta é uma situação quase que impossível de se obter na prática; na estrutura espacial utilizada neste trabalho o sistema de controle é implementado através de forças de controle aplicadas por atuadores de pilhas piezelétricos. Como as forças de controle dos atuadores não são distribuídas e o número de atuadores é normalmente limitado, a força física de controle pode não ser exatamente igual às forças contínuas distribuídas exigidas para controlar o sistema. Então, as forças de controle discretas aplicadas pelos atuadores não só controlam os “modos projetados” como também perturbam os modos que a força de controle não deveria afetar. Este problema é conhecido como *spillover* de controle (Jia, 1990).

Outra característica importante do método IMSC é que a sua implementação requer o número de atuadores igual ao número de modos controlados. Sem esta exigência, quando transformada de força de controle modal, a força de controle física não pode produzir a força de controle modal ótima para os modos controlados (Jia, 1990). O número de atuadores exigidos passa a ser uma limitação se o objetivo for reduzir o número de atuadores devido às considerações econômicas ou restrições físicas. Por exemplo, no caso de atuadores piezelétricos,

o número de atuadores usado deve ser ditado pelo projeto estrutural, isto é, nenhum atuador deve ficar em cima de outro, este problema foi discutido por Lindberg (1982).

Lindberg (1982) notou que a principal desvantagem do IMSC é a restrição quanto ao número de atuadores ser igual ao número de modos controlados do modelo. Para contornar essa desvantagem, Lindberg usou uma técnica de mínimos quadrados, chamada de pseudo-inversa, para transformar as forças de controle modais em forças no espaço físico. O ponto principal é que a transformação não pode ser exata sem uma matriz de transformação de *rank* completa. Uma matriz de transformação modal de *rank* completa só pode ser produzida pelo uso de um número de atuadores igual ao número de modos controlados. Aplicando a técnica de mínimos quadrados, a força de controle física pode ser sintetizada a partir das forças de controle modal. O resultado obtido é uma aproximação dos valores ótimos. Foi discutido por Lindberg que com esta técnica os fundamentos do projeto do controle ótimo não são violados e a quantidade de atuadores exigidos pode ser diminuída. Este argumento é válido, embora o uso da técnica da pseudo-inversa no IMSC pode apresentar alguns problemas. As forças de controle obtidas pela técnica da pseudo-inversa podem se concentrar em certos modos, deixando outros modos pouco controlados. Segundo Lindberg usando somente a técnica da pseudo-inversa, não há muito controle sobre quão perto está o resultado das forças de controle modal ótimas. Este problema foi discutido em Jia (1990), no qual foi proposta a técnica da pseudo-inversa ponderada, nesta técnica pesos melhoram a distribuição das forças de controle nos modos controlados. No entendimento do autor, este fenômeno é dependente de características inerentes a cada estrutura, tais como frequências naturais e modos de vibrar.

Baz e Poh (1988) realizaram uma aproximação diferente para diminuir o número de atuadores exigidos pelo método IMSC. Nesta técnica as vibrações modais de um sistema flexível são primeiro classificadas de acordo com o seu nível de energia modal. Os atuadores, então, são posicionados para controlar os modos que possuem os maiores níveis de energia modal. Depois de um certo período de tempo, os modos controlados inicialmente já estão supridos e os seus níveis de energia caíram abaixo dos níveis dos outros modos. Nesse momento, os atuadores são direcionados para controlar um novo grupo de modos que tem os mais altos níveis de energia modal. Baz e Poh (1988) referiram-se a este método como *Modified Independent Modal Space Control* (MIMSC). O princípio desse método é a divisão dos atuadores entre os diferentes modos de acordo com os níveis de energia modal.

A diferença entre o MIMSC e o IMSC é que o MIMSC necessita de um controle lógico extra para determinar que modos controlar para compensar o número de atuadores reduzidos.

Como a efetividade do controlador sobre os modos do sistema é estruturalmente dependente, o posicionamento de diferentes atuadores é necessário para controlar diferentes modos eficientemente. O MIMSC não aborda este tipo de problema.

Recentemente foi proposto por Singh, Pruthi e Agarwal (2003) uma nova estratégia de controle modal, chamada de *Efficient Modal Control* (EMC), onde a essência deste método é que a força de controle modal em diferentes modos pode ser aplicada de acordo com a amplitude de vibração modal ou energia modal dos respectivos modos. Modos com menor amplitude de vibração modal ou energia modal recebem forças de controles menores. As informações do sistema à malha aberta podem ser utilizadas para a atualização das forças de controle, onde o objetivo é reduzir a amplitude de vibração estrutural para um nível aceitável com a aplicação da mínima força de controle em um mínimo intervalo de tempo. Segundo Singh, Pruthi e Agarwal (2003), os ganhos modais ótimos são independentes do tipo de força de perturbação para o controlador IMSC.

#### 4.1 Controle no Espaço Modal Independente

Considere a equação do movimento no espaço de estado modal para o  $i$ -ésimo modo, ignorando-se as entradas de perturbação:

$$\dot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{A}_{mi} \mathbf{x}_i + \mathbf{V}_{mi} \quad (4.1)$$

sendo:  $\mathbf{V}_{mi} = \mathbf{B}_{2mi} \mathbf{v}_{ai}$ .

Para desenvolver a metodologia de controle no espaço modal independente, deve-se considerar inicialmente a entrada de controle na estrutura, pois esta é a causa principal do acoplamento do sistema de controle. A  $i$ -ésima força de controle modal  $\mathbf{V}_{mi}$  é dada por:

$$\mathbf{V}_{mi} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \mathbf{V}_{mi} \end{Bmatrix} \quad (4.2)$$

É assumido que a  $i$ -ésima força de controle modal  $\mathbf{V}_{mi}$  dependa somente do estado modal  $\mathbf{x}_i$ , isto é:

$$\mathbf{V}_{mi} = \mathbf{V}_{mi}(\mathbf{x}_i) \quad (4.3)$$

O controle no espaço modal independente pode ser usado tanto com uma lei de controle linear como não linear. Neste caso, será considerada uma lei de realimentação negativa linear de estados:

$$\mathbf{V}_{mi} = -\mathbf{G}_i \mathbf{x}_i \quad (4.4)$$

sendo:

$$\mathbf{G}_i = \begin{bmatrix} G_{i11} & G_{i12} \\ G_{i21} & G_{i22} \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

a matriz de ganho modal. Substituindo a eq. (4.5) na eq. (4.4) e utilizando o vetor de estados modal, tem-se:

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ \mathbf{V}_{mi} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} G_{i11} \mathbf{q}_{mi} + G_{i12} \dot{\mathbf{q}}_{mi} \\ G_{i21} \mathbf{q}_{mi} + G_{i22} \dot{\mathbf{q}}_{mi} \end{Bmatrix} \quad (4.6)$$

que pode ser satisfeita somente se  $G_{i11} = G_{i12} = 0$ . Portanto, a matriz de ganho modal é:

$$\mathbf{G}_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ G_{i21} & G_{i22} \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

Então, o termo  $\mathbf{V}_{mi}$  na eq. (4.2) tem a forma:

$$\mathbf{V}_{mi} = G_{i21} \mathbf{q}_{mi} + G_{i22} \dot{\mathbf{q}}_{mi} \quad (4.8)$$

logo, a força de controle modal  $\mathbf{V}_{mi}$  é proporcional ao deslocamento modal  $\mathbf{q}_{mi}$  e a velocidade modal  $\dot{\mathbf{q}}_{mi}$ .

Pela teoria de controle ótimo, os ganhos de realimentação  $G_{i21}$  e  $G_{i22}$  podem ser obtidos pela minimização de um índice de desempenho. Um índice de desempenho pode ser dado por:

$$\mathbf{J}_i = \int_{t_0}^{t_r} \mathbf{g}(\mathbf{x}_i, \mathbf{V}_{mi}) dt \quad (4.9)$$

na qual  $\mathbf{g}$  representa uma função dos estados e da força de controle modal.

Esta equação impõe uma restrição extra nas variáveis  $\mathbf{x}_i$  e  $\mathbf{V}_{mi}$  já relacionadas através da equação do movimento no espaço modal, eq. (4.1). Formalmente, a minimização do índice de desempenho  $\mathbf{J}_i$  força a busca da melhor força de controle modal  $\mathbf{V}_{mi}$ , combinada com o estado  $\mathbf{x}_i$  em um processo de otimização. É esperado que, pelo menos, uma combinação de  $\mathbf{V}_{mi}$  e  $\mathbf{x}_i$  exista e satisfaça essa condição. Esta solução é conhecida como a solução ótima.

A execução do controle ótimo depende da forma de  $\mathbf{g}(\mathbf{x}_i, \mathbf{V}_{mi})$ . Alguns significados físicos podem ser designados para esta função. Se  $\mathbf{g} = \mathbf{g}(\mathbf{x}_i) = \mathbf{x}_i \mathbf{Q}_i \mathbf{x}_i$ , na qual  $\mathbf{Q}_i$  representa a  $i$ -ésima matriz de peso, então  $\mathbf{g}$  representa a energia durante o intervalo de controle. Se

$\mathbf{g} = \mathbf{g}(\mathbf{V}_{mi}) = \mathbf{V}_{mi} \mathbf{R}_i \mathbf{V}_{mi}$ , na qual  $\mathbf{R}_i$  representa a  $i$ -ésima matriz de peso, o índice de desempenho a ser minimizado é a energia da força de controle. Se  $\mathbf{g} = c$ , sendo  $c$  uma constante, então, o índice de desempenho a ser minimizado é o tempo de controle.

O índice de desempenho para a maioria dos sistemas mecânicos é especificado na forma quadrática em termos dos estados e das forças de controle, e é dado por:

$$\mathbf{J} = \sum_{i=1}^{nc} \mathbf{J}_i \quad (4.10)$$

sendo:

$$\mathbf{J}_i = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} (\mathbf{x}_i^t \mathbf{Q}_i \mathbf{x}_i + \mathbf{V}_{mi}^t \mathbf{R}_i \mathbf{V}_{mi}) dt \quad (4.11)$$

o índice de desempenho quadrático modal,  $t_f$  o tempo final e  $nc$  o número de modos considerados no controle.  $\mathbf{Q}_i$  é a matriz  $2 \times 2$  de peso de estado e  $\mathbf{R}_i$  é uma matriz de peso de esforço de controle. Como  $\mathbf{V}_{mi}$  depende somente do estado  $\mathbf{x}_i$ , os índices de desempenho quadrático modal são independentes. O índice  $\mathbf{J}$ , então, pode ser minimizado minimizando independentemente cada índice de desempenho quadrático modal  $\mathbf{J}_i$ .

A minimização de  $\mathbf{J}_i$  leva a força de controle modal  $\mathbf{V}_{mi}$  (Fang, Li e Jeary, 2003):

$$\mathbf{V}_{mi} = -\mathbf{R}_i^{-1} \mathbf{B}_{2mi}^t \mathbf{P}_i \mathbf{x}_i \quad (4.12)$$

sendo  $\mathbf{B}_{2mi}$  a matriz de entrada de controle para o  $i$ -ésimo modo e  $\mathbf{P}_i$  a solução da equação matricial de Ricatti.

$$\dot{\mathbf{P}}_i = -\mathbf{P}_i \mathbf{A}_{mi} - \mathbf{A}_{mi}^t \mathbf{P}_i + \mathbf{P}_i \mathbf{B}_{2mi} \mathbf{R}_i^{-1} \mathbf{B}_{2mi}^t \mathbf{P}_i - \mathbf{Q}_i \quad (4.13)$$

Se  $\mathbf{P}_i$  pode ser encontrado resolvendo a equação matricial de Ricatti, então esta solução pode ser substituída na eq. (4.12) para se obter a força de controle modal. A eq. (4.13) pode ser simplificada se o tempo final  $t_f$  é assumido infinito, para esse caso  $\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{0}$  e a equação matricial de Ricatti fica da seguinte forma:

$$\mathbf{0} = -\mathbf{P}_i \mathbf{A}_{mi} - \mathbf{A}_{mi}^t \mathbf{P}_i + \mathbf{P}_i \mathbf{B}_{2mi} \mathbf{R}_i^{-1} \mathbf{B}_{2mi}^t \mathbf{P}_i - \mathbf{Q}_i \quad (4.14)$$

a eq. (4.14) é conhecida como equação algébrica de Ricatti.

Como é de interesse minimizar a energia estrutural do sistema, a matriz de peso de estado é escolhida como:

$$\mathbf{Q}_i = \begin{bmatrix} \omega_i^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

expandindo o primeiro termo do índice de desempenho quadrático modal, tem-se,  $\frac{1}{2} \mathbf{x}_i^t \mathbf{Q}_i \mathbf{x}_i = \frac{1}{2} \omega_i^2 x_i^2 + \frac{1}{2} \dot{x}_i^2$ , no qual o primeiro e segundo termos denotam a i-ésima energia potencial modal e a i-ésima energia cinética modal, respectivamente.

Expandindo o segundo termo do índice de desempenho quadrático modal tem-se  $\frac{1}{2} \mathbf{V}_{mi}^t \mathbf{R}_i \mathbf{V}_{mi} = \frac{1}{2} \mathbf{R}_i \mathbf{V}_{mi}^2$ , no qual este termo representa a energia de controle correspondente ao i-ésimo modo.

A forma de  $\mathbf{V}_{mi}$  na eq. (4.12) pode ser obtida definindo que a primeira linha de  $\mathbf{R}_i^{-1}$  da eq. (4.14) seja zero. Logo, por simetria, os elementos restantes fora da diagonal principal são zero. Isto é,

$$\mathbf{R}_i = \begin{bmatrix} \infty & 0 \\ 0 & R_i \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

Uma solução analítica para a determinação dos ganhos modais  $G_{i21}$  e  $G_{i22}$  é impossível de ser encontrada, pois na eq. (4.14) a matriz  $\mathbf{B}_{2mi}$  não é igual a  $[0 \ 1]^t$ .

Por conveniência, os ganhos modais ótimos são definidos da seguinte forma:

$$\begin{aligned} G_{id} &= G_{i21} \\ G_{iv} &= G_{i22} \end{aligned} \quad (4.17)$$

A equação do movimento à malha fechada no espaço de estado modal para o i-ésimo modo, ignorando as entradas de perturbação é:

$$\dot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{A}_{ci} \mathbf{x}_i \quad (4.18)$$

sendo,

$$\mathbf{A}_{ci} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_i - G_{id} & -2\zeta_i \omega_i - G_{iv} \end{bmatrix}.$$

O resultado acima pode ser interpretado como o resultado ótimo que mantém o vetor de estado tão próximo quanto possível da origem do sistema no espaço de estados com a mínima força de controle, e sem aumentar a energia total do sistema à malha aberta. Pode ser claramente

visto que esta estratégia de controle influencia as características do sistema. Devido aos efeitos de amortecimento de controle, as frequências naturais do sistema à malha fechada podem mudar. Estas mudanças variam de modo a modo, pois os autovalores do sistema à malha aberta são diferentes.

## 4.2 Controle Modal Eficiente

Quando um sistema é controlado usando os ganhos modais selecionados de acordo com o algoritmo IMSC as voltagens aplicadas nos atuadores podem atingir valores muito altos (Singh, Pruthi e Agarwal, 2003).

O objetivo é reduzir a amplitude de vibração a um nível aceitável pela aplicação da menor força de controle em um intervalo mínimo de tempo. É observado dos resultados do IMSC que os ganhos modais ótimos são maiores para os maiores modos de vibrar, mas a amplitude de vibração é geralmente menor nestes modos.

Se for usado um nível aceitável de amplitude de vibração como critério a ser atingido, o tempo necessário para atingir essa amplitude depende das condições iniciais para um mesmo valor de amortecimento. Por esta razão, quando controlando modos simultaneamente, uma força de controle reduzida pode ser aplicada aos modos que tem menores amplitudes de vibrações. Logo, nesta técnica é proposto ponderar os ganhos modais de acordo com o deslocamento modal ou energia modal em cada modo.

É importante notar que o método EMC, como qualquer outro método de controle modal, necessita de medidas modais. No caso de vibrações livres, cada modo vibra em sua própria frequência e a resposta total é uma combinação de todos os modos excitados. Filtros podem ser usados para separar os deslocamentos modais. Em vibrações forçadas, a resposta de cada modo pode ser estimada usando um estimador (Singh, Pruthi e Agarwal, 2003).

Os ganhos modais podem ser ponderados de acordo com o deslocamento modal em cada modo, então, a transformada de Fourier da resposta da estrutura não controlada no tempo é usada para estimar esses pesos. A ponderação das amplitudes em diferentes modos é calculada em relação ao modo que tem a máxima amplitude. Os ganhos de realimentação dos modos que possuem menores amplitudes são reduzidos pelas suas respectivas relações. Conseqüentemente, se são controlados o  $i$ -ésimo,  $j$ -ésimo e  $k$ -ésimo modos, os ganhos modais são dados pela seguinte relação:

$$G_r(i):G_r(j):G_r(k)=1:\frac{\text{deslocamento}(j)}{\text{deslocamento}(i)}:\frac{\text{deslocamento}(k)}{\text{deslocamento}(i)} \quad (4.19)$$

na qual  $G_r(i)$  é o ganho ponderado do modo  $i$ , considerando que o  $i$ -ésimo modo possui o maior deslocamento modal.

Uma forma alternativa de ponderar os ganhos modais é através da energia modal em cada modo. A energia modal é dada pela soma da energia potencial e energia cinética. Baz e Poh (1988) já haviam usado essa ponderação de energia para priorizar diferentes modos. A frequência de cada modo, também, deve ser levada em consideração, pois um modo de maior frequência irá executar maior número de ciclos em um mesmo intervalo de tempo, logo, é necessário adicionar menos amortecimento neste modo. Um critério para controlar o  $i$ -ésimo,  $j$ -ésimo e  $k$ -ésimo modos por realimentação é (Singh, Pruthi e Agarwal, 2003):

$$G_r(i):G_r(j):G_r(k)=1:\frac{\text{energia}(j)}{\text{energia}(i)}\cdot\frac{\text{frequencia}(i)}{\text{frequencia}(j)}:\frac{\text{energia}(k)}{\text{energia}(i)}\cdot\frac{\text{frequencia}(i)}{\text{frequencia}(k)} \quad (4.20)$$

### 4.3 Estimadores de Estado

Geralmente, nem todos os estados de um sistema estão disponíveis para realimentação direta, pois o número de sensores disponíveis é limitado, ou existem variáveis de estados com difícil acesso, ou até mesmo variáveis de estado que não possuem significado físico. Nestes casos, é necessário estimar estas variáveis de estados que não estão disponíveis, através de um estimador de estados.

Dividindo o conjunto de modos modelados em modos controlados e modos residuais, tem-se:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_c \\ \dot{\mathbf{x}}_r \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_c & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_r \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{x}_c \\ \mathbf{x}_r \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{V}_{mc} \\ \mathbf{V}_{mr} \end{Bmatrix} \\ \mathbf{y} &= \begin{bmatrix} \mathbf{C}_c & \mathbf{C}_r \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{x}_c \\ \mathbf{x}_r \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (4.21)$$

sendo  $\mathbf{x}_c$  o vetor de estados dos modos controlados e  $\mathbf{x}_r$  o vetor de estados dos modos residuais.

Neste trabalho é considerado um estimador de estado determinístico para os modos controlados, assim:

$$\hat{\dot{\mathbf{x}}}_c = \mathbf{A}_c \hat{\mathbf{x}}_c + \mathbf{V}_{mc} + \mathbf{K}[\mathbf{y} - \mathbf{C}_c \hat{\mathbf{x}}_c] \quad (4.22)$$

sendo  $\hat{\mathbf{x}}_c$  o vetor de estados estimados dos modos controlados, e  $\mathbf{K}$  é a matriz de ganho do estimador que pode ser obtida por diferentes técnicas.

Utilizando a equação algébrica de Ricatti para o estimador modal, tem-se:

$$\mathbf{0} = \mathbf{S}\mathbf{A}_c^t + \mathbf{A}_c\mathbf{S} - \mathbf{S}\mathbf{C}_c^t\mathbf{V}^{-1}\mathbf{C}_c\mathbf{S} + \mathbf{W} \quad (4.23)$$

na qual  $\mathbf{S}$  é a solução desta equação,  $\mathbf{V}$  e  $\mathbf{W}$  são as matrizes de ponderação, e  $\mathbf{K} = \mathbf{S}\mathbf{C}_c^t$ .

Para obter a equação do erro do estimador, subtrai-se a eq. (4.22) da eq. (4.1):

$$\dot{\mathbf{e}}_c = (\mathbf{A}_c - \mathbf{K}\mathbf{C}_c)\mathbf{e}_c + \mathbf{K}\mathbf{C}_r\mathbf{x}_r \quad (4.24)$$

na qual  $\mathbf{e}_c = \hat{\mathbf{x}}_c - \mathbf{x}_c$ , isto é, a diferença entre os estados estimados e os estados atuais.

A partir da eq. (4.22), nota-se que o estimador é um sistema dinâmico. Logo, os estados estimados têm uma resposta dinâmica. A velocidade que o erro converge para zero depende da localização dos pólos da matriz  $(\mathbf{A}_c - \mathbf{K}\mathbf{C}_c)$ . Para os estimadores implementados num sistema de controle por realimentação, os autovalores do estimador deverão ser escolhidos tal que a resposta deste seja muito mais rápida que a resposta do sistema de controle à malha fechada quando todo vetor de estado é disponível. Isto é para não alterar a velocidade de resposta do sistema de controle. Uma boa regra prática é escolher estes autovalores tal que a resposta dinâmica do estimador seja pelo menos 2 a 5 vezes mais rápida que a resposta do sistema à malha fechada com realimentação total de estado (Valer, 1999).

#### 4.4 Spillover de Controle e de Observação

Até aqui foi considerada somente a parte controlada do sistema, ignorando a influência que os modos residuais tem no desempenho do controlador. Isto é aceitável se a matriz de entrada de controle residual ( $\mathbf{B}_{2r}$ ) e a matriz de saída residual ( $\mathbf{C}_r$ ) são ambas zero. Geralmente, não são. Os modos residuais são normalmente excitados de alguma forma pelos atuadores do sistema de controle, e os sensores medem as respostas dos modos controlados e as contribuições dos modos residuais também. Esses dois efeitos são conhecidos como *spillover* de controle e *spillover* de observação, respectivamente, e podem ter um efeito negativo no desempenho do sistema.

A lei de controle linear implementada utiliza os estados estimados:

$$\mathbf{V}_{mi} = -\mathbf{G}_i\hat{\mathbf{x}}_i, \quad i = 1, \dots, n_c \quad (4.25)$$

ou

$$\mathbf{V}_{mc} = -\mathbf{G}\hat{\mathbf{x}}_c \quad (4.26)$$

Realimentando o sistema da eq. (4.21), tem-se:

$$\dot{\mathbf{x}}_c = \mathbf{A}_c \mathbf{x}_c - \mathbf{B}_{2c} \mathbf{G} \hat{\mathbf{x}}_c \quad (4.27)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_r = \mathbf{A}_r \mathbf{x}_r - \mathbf{B}_{2r} \mathbf{G} \hat{\mathbf{x}}_c \quad (4.28)$$

Reescrevendo as eq. (4.24, 4.26 e 4.27) na forma matricial, como descrito em Meirovitch (1990), tem-se:

$$\begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_c \\ \dot{\mathbf{x}}_r \\ \dot{\mathbf{e}}_c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_c - \mathbf{B}_{2c} \mathbf{G} & \mathbf{0} & -\mathbf{B}_{2c} \mathbf{G} \\ -\mathbf{B}_{2r} \mathbf{G} & \mathbf{A}_r & -\mathbf{B}_{2r} \mathbf{G} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{K} \mathbf{C}_r & \mathbf{A}_c - \mathbf{K} \mathbf{C}_c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{x}_c \\ \mathbf{x}_r \\ \mathbf{e}_c \end{Bmatrix} \quad (4.29)$$

O termo  $-\mathbf{B}_{2r} \mathbf{G}$  é responsável pela excitação dos modos residuais pelo sinal de controle. Este termo não afeta os autovalores do sistema a malha fechada, portanto, não pode desestabilizar o sistema. No entanto, este termo pode causar alguma degradação no desempenho.

Por outro lado, o termo  $\mathbf{K} \mathbf{C}_r$  pode produzir instabilidade nos modos residuais. Porém, um pequeno amortecimento modal, inerente à estrutura, é geralmente suficiente para contornar o efeito do *spillover* de observação (Meirovitch, 1990). Outro efeito é o *spillover* dinâmico que é provocado pelo acoplamento entre os modos controlados e residuais. Em geral, o problema de controle estrutural não apresenta *spillover* dinâmico, uma vez que a representação da matriz dinâmica é do tipo bloco diagonal.

Caso não exista o *spillover* de observação ou *spillover* de controle, os autovalores do sistema são determinados pelos autovalores de  $\mathbf{A}_c - \mathbf{B}_{2c} \mathbf{G}$ ,  $\mathbf{A}_c - \mathbf{K} \mathbf{C}_c$  e  $\mathbf{A}_r$  conservando as propriedades de estabilidade em presença de dinâmica residual. No entanto, quando estes termos existem, os autovalores do sistema completo são perturbados. Esta perturbação pode causar que pelo menos um autovalor tenha parte real positiva e portanto o sistema será instável. Já que os autovalores de  $\mathbf{A}_c - \mathbf{B}_{2c} \mathbf{G}$ ,  $\mathbf{A}_c - \mathbf{K} \mathbf{C}_c$  e  $\mathbf{A}_r$  são projetados para ter suficiente margem de estabilidade, o sistema será mais suscetível a instabilizar quanto menor for o amortecimento da matriz  $\mathbf{A}_r$  (Valer, 1999). Este é o motivo porquê o *spillover* é um problema que sempre pode acontecer em estruturas grandes e com pouco amortecimento se o controlador não é adequadamente projetado.

Existem na literatura, muitos trabalhos que descrevem e mostram maneiras de diminuir estes efeitos indesejáveis em sistemas de controle estrutural. Charon (1997) discutiu com

detalhes duas formas de diminuir os efeitos do *spillover*. A primeira é utilizando como observador de estados um filtro de Kalman. A idéia é considerar a influência da dinâmica dos modos residuais na medida do sensor como um ruído. Isto pode ser feito aumentando a variância do ruído do sensor, que é utilizada para calcular o ganho do observador. Charon (1997) concluiu que isto implica em uma perda na confiança das medidas do sensor. Uma vez que a matriz de ganho do controlador permanece inalterada o desempenho do sistema controlado irá diminuir. Silva e Lopes Jr. (2004) aplicam esta técnica para reduzir os efeitos do *spillover* no controle de vibração em uma viga bi-engastada e Carvalhal et al. (2004) no controle de uma estrutura tipo treliça com atuadores piezelétricos.

A segunda forma é mais popular e consiste em aumentar a ordem do observador mantendo fixa a ordem do controlador. A estimação pode ser melhorada considerando um número maior de modos no observador. Esta alternativa é interessante, pois pode considerar modos observáveis, mas não controlados. Porém, nada pode ser dito sobre a evolução dos pólos dos modos não observados. Lewis (2000) também utiliza esta segunda estratégia para diminuir os efeitos do *spillover* no controle de vibrações de um toróide com sensores e atuadores piezelétricos.

## 4.5 Força de Controle Física

A relação entre as forças de controle modal e as forças de controle físicas exercidas pelos atuadores piezelétricos é:

$$\mathbf{V}_m = \mathbf{F}\mathbf{v}_a \quad (4.30)$$

sendo  $\mathbf{V}_m$  um vetor de ordem  $n_c$  e  $\mathbf{v}_a$  um vetor de ordem  $n_p$ . A matriz  $\mathbf{F}$  é chamada de matriz de participação modal. Esta matriz determina quanto cada modo será influenciado pelos atuadores.

Se  $n_c \neq n_p$ , isto é, o número de modos controlados for diferente do número de atuadores, a matriz  $\mathbf{F}$  não é quadrada e a inversa não pode ser calculada. Isto é demonstrado em Jia (1990) de forma bem detalhada.

Aplicando o teorema da decomposição em valor singular na matriz  $\mathbf{F}$ , a matriz de participação modal pode ser decomposta em:

$$\mathbf{F} = \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^t \quad (4.31)$$

substituindo a eq. (4.31) na eq. (4.30), tem-se:

$$\mathbf{V}_m = \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^t \mathbf{v}_a \quad (4.32)$$

multiplicando ambos os lados por  $\mathbf{U}^t$  e definindo:

$$\tilde{\mathbf{V}}_m = \mathbf{U}^t \mathbf{V}_m \quad (4.33)$$

$$\tilde{\mathbf{v}}_a = \mathbf{V}^t \mathbf{v}_a \quad (4.34)$$

tem-se:

$$\tilde{\mathbf{V}}_m = \mathbf{U}^t \mathbf{U} \mathbf{S} \tilde{\mathbf{v}}_a \quad (4.35)$$

Pelo fato de  $\mathbf{U}$  e  $\mathbf{V}$  serem unitários e ortogonais, a transformação acima não altera o comprimento dos dois vetores. Geometricamente, acontece uma rotação no sistema de coordenadas, mas sem mudança em  $\mathbf{V}_m$  e  $\mathbf{v}_a$ . Através dessa transformação, a relação entre as forças de controle modal e as forças de controle físicas é:

$$\tilde{\mathbf{V}}_m = \mathbf{S} \tilde{\mathbf{v}}_a \quad (4.36)$$

As duas transformações ortogonais introduzidas nas eqs. (4.33 e 4.34) rotacionam as orientações das coordenadas no espaço modal e no espaço físico. Por causa da forma diagonal da matriz de valor singular  $\mathbf{S}$ , a eq. (4.36) mostra claramente o problema, quando é usado um número menor de atuadores para o sistema de controle.

Expandindo a eq. (4.36), tem-se:

$$\begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{V}}_{m1} \\ \tilde{\mathbf{V}}_{m2} \\ \wedge \\ \tilde{\mathbf{V}}_{mnc} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_1 \tilde{\mathbf{v}}_{a1} \\ \sigma_2 \tilde{\mathbf{v}}_{a2} \\ \wedge \\ \sigma_k \tilde{\mathbf{v}}_{ak} \\ \mathbf{0} \\ \wedge \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (4.37)$$

na qual os elementos  $\sigma_i$  são os valores singulares da matriz de participação modal, e  $\sigma_i > 0$  e  $i \leq np$ . Conseqüentemente, nenhuma matriz  $\tilde{\mathbf{v}}_a$  pode ser encontrada para satisfazer a equação acima caso o número de atuadores seja menor que o número de modos controlados.

Como,  $\mathbf{v}_a = \mathbf{V} \tilde{\mathbf{v}}_a$ , nenhum vetor de força de controle física pode fazer os dois lados da equação acima exatamente iguais. Em outras palavras, pode ser dito que os atuadores não conseguem realizar as forças de controle modal como projetado pelas teorias de controle.

Através da natureza desigual da eq. (4.37), é lógico assumir que diferentes métodos de controle dos atuadores irão produzir discrepâncias nas forças de controle modal quando transformadas no espaço modal.

O método proposto em Lindberg (1982) para resolver esse problema foi o da pseudo-inversa. Definindo a norma do erro entre o vetor de força de controle modal projetada e o vetor de força de controle modal realizada pelos atuadores:

$$\Xi = \{\mathbf{V}_m - \mathbf{F}\mathbf{v}_a\}^t \{\mathbf{V}_m - \mathbf{F}\mathbf{v}_a\} \quad (4.38)$$

Diferenciando  $\Xi$  em relação à  $\mathbf{v}_a$ :

$$\frac{\partial \Xi}{\partial \mathbf{v}_a} = -\mathbf{F}^t \{\mathbf{V}_m - \mathbf{F}\mathbf{v}_a\} - \{\mathbf{V}_m - \mathbf{F}\mathbf{v}_a\}^t \mathbf{F} \quad (4.39)$$

Assumindo:

$$\frac{\partial \Xi}{\partial \mathbf{v}_a} = 0 \quad (4.40)$$

Tem-se:

$$-\mathbf{F}^t \{\mathbf{V}_m - \mathbf{F}\mathbf{v}_a\} - \{\mathbf{V}_m - \mathbf{F}\mathbf{v}_a\}^t \mathbf{F} = \mathbf{0} \quad (4.41)$$

ou

$$-\mathbf{F}^t \{\mathbf{V}_m - \mathbf{F}\mathbf{v}_a\} = 0 \quad (4.42)$$

$$\mathbf{F}^t \mathbf{F}\mathbf{v}_a = \mathbf{F}^t \mathbf{V}_m \quad (4.43)$$

Conseqüentemente, as forças de controle físicas são dadas por:

$$\mathbf{v}_a = (\mathbf{F}^t \mathbf{F})^{-1} \mathbf{F}^t \mathbf{V}_m \quad (4.44)$$

A expressão encontrada acima é do tipo inversão de um sistema singular de equações lineares. Define-se  $\mathbf{F}^+$  como a pseudo-inversa de  $\mathbf{F}$ :

$$\mathbf{F}^+ = (\mathbf{F}^t \mathbf{F})^{-1} \mathbf{F}^t \quad (4.45)$$

## 5 RESULTADOS NUMÉRICOS

Inicialmente, é estudado o comportamento estrutural de uma treliça espacial sem considerar a utilização de materiais inteligentes. São considerados no modelo reduzido os quatro primeiros modos de vibrar da treliça espacial, pois estes são os responsáveis pela maior contribuição na resposta física da estrutura. Em seguida, com objetivo de controlar estes quatro primeiros modos, são determinadas as posições ótimas para dois atuadores piezelétricos. Para a implementação dos estimadores modais são posicionados quatro sensores usando como função objetivo a norma  $H_{\infty}$ . Com o propósito de atenuar a vibração do nó 13 são utilizados dois sensores de desempenho para medir o deslocamento no referido nó no plano  $xy$ . Finalmente, são computacionalmente implementados os controladores IMSC e EMC na estrutura e os resultados são avaliados de forma quantitativa. O programa desenvolvido, *SmartTruss*, engloba os algoritmos de modelagem estrutural, posicionamento ótimo e as técnicas de controle modal descritas nos capítulos 3 e 4.

### 5.1 Treliça Espacial

A estrutura modelada consiste de uma treliça espacial, de três andares, composta por 39 barras, Fig. 5.1. Os números designam os nós e os números dentro dos círculos designam as barras. No programa *SmartTruss*, todos os nós têm três graus de liberdade, translação nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ . A estrutura está engastada pelos nós de 1 a 4, portanto, possui 36 graus de liberdade livres. As barras são de aço com diâmetro de 6 mm. Uma massa concentrada de 0,3 kg em cada um dos nós da treliça é adicionada no modelo para simular as uniões entre as barras. A massa total da estrutura é 13,2 kg. É considerado um amortecimento proporcional à massa e à rigidez ( $\alpha = 10^{-4}$  e  $\beta = 10^{-6}$ ). A Tabela 5.1 mostra as propriedades do material e as dimensões da estrutura.

Tabela 5.1- Propriedades físicas e geométricas da treliça espacial.

Propriedades	Valores
Modulo de Young (N/m <sup>2</sup> )	2,1 x 10 <sup>11</sup>
Área de Seção Transversal (m <sup>2</sup> )	2,83 x 10 <sup>-5</sup>
Densidade (kg/m <sup>3</sup> )	7800
L (m)	0,6

Inicialmente, foi utilizado o programa *ANSYS*<sup>®</sup>, elemento *link8*, para a modelagem da treliça com o objetivo de se verificar a parte estrutural do programa implementado, *SmartTruss*. A Tabela 5.2 apresenta os valores das doze primeiras frequências naturais dos modelos e as diferenças percentuais em relação aos valores obtidos pelo programa *ANSYS*<sup>®</sup>.

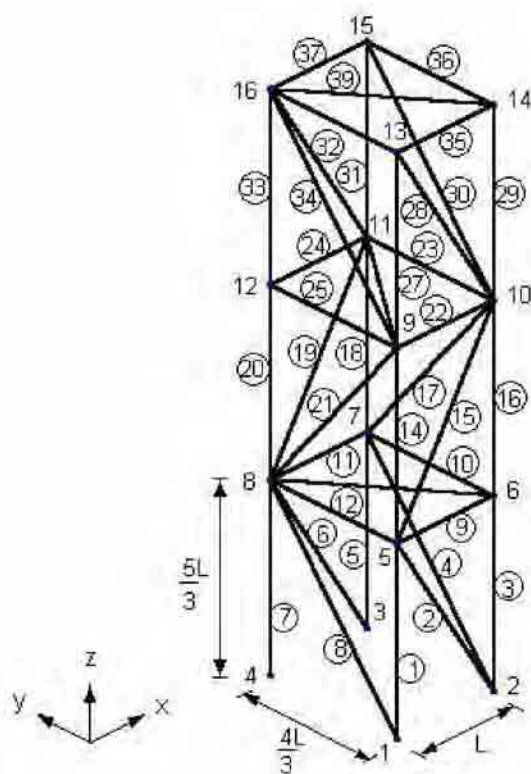


Figura 5.1- Treliça espacial formada por 39 barras.

Tabela 5.2 - Frequências naturais e diferenças percentuais.

Modos	<i>ANSYS</i> <sup>®</sup> (Hz)	<i>SmartTruss</i> (Hz)	Diferença (%)
1	32,6	32,6	0,0
2	41,3	41,3	0,0
3	65,7	65,7	0,0
4	115,8	115,8	0,0
5	143,9	143,9	0,0
6	168,9	168,8	-0,06
7	182,4	182,4	0,0
8	260,3	260,3	0,0
9	286,0	285,9	-0,04
10	304,9	304,8	-0,03
11	374,2	374,1	-0,03
12	378,0	377,9	-0,03

A Figura 5.2 apresenta os doze primeiros modos de vibrar da treliça obtidos através do programa *SmartTruss*, na qual as estruturas de referência estão em vermelho.

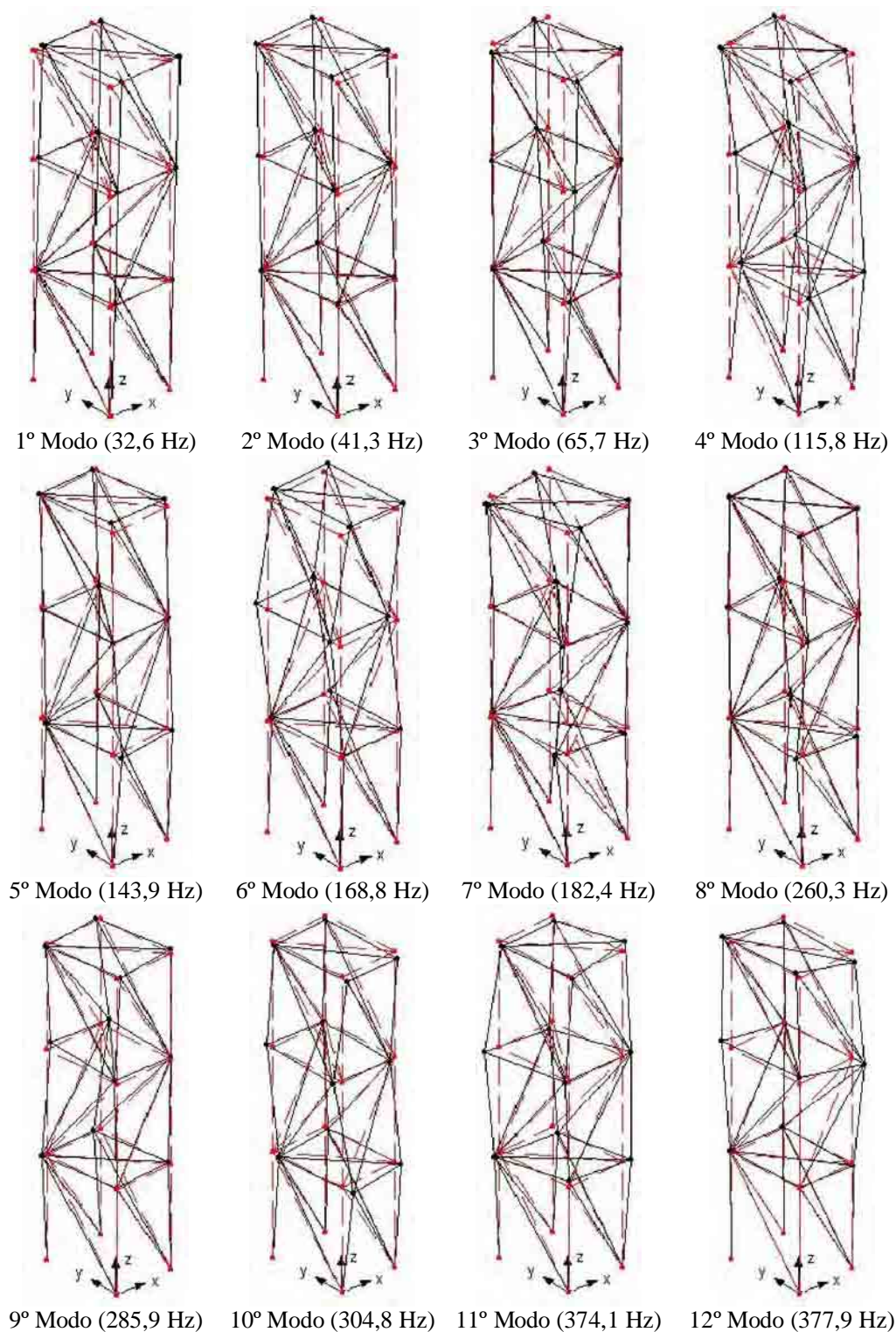


Figura 5.2 – Doze primeiros modos de vibrar - *SmartTruss*.

Pode-se observar que a formulação de treliças espaciais vista no capítulo 3 foi computacionalmente implementado com sucesso, o que pode ser notado pela concordância dos valores alcançados com aqueles fornecidos pelo programa *ANSYS*<sup>®</sup>, Tabela 5.2.

O primeiro modo de vibrar da estrutura é de flexão na direção  $x$ , o segundo modo é de flexão em  $y$ , o terceiro modo é de torção em  $z$ , o quarto modo é de flexão em  $x$ , o quinto e o sexto modos são de flexão em  $y$  e o sétimo modo é de torção em  $z$ . Os modos restantes são modos locais e não possuem uma forma uniforme de deslocamento. Como os modos de vibrar da estrutura modelada pelo programa *ANSYS*<sup>®</sup> coincidem com os modos apresentados pelo programa *SmartTruss*, eles são omitidos.

## 5.2 Posicionamento Ótimo de Sensores e Atuadores

O objetivo é posicionar sensores e atuadores piezelétricos na estrutura para obtenção de um melhor desempenho do controle nos modos de interesse. A princípio, cada membro da estrutura pode ser substituído pelo atuador. Na prática, normalmente, é possível se descartar algumas posições candidatas em função do conhecimento das propriedades dinâmicas do sistema. Na estrutura em análise, os atuadores piezelétricos que não estão em contato com a base da estrutura necessitam de maior energia em relação aos que estão, provavelmente devido à flexibilidade local. Portanto, serão considerados como posições candidatas somente os atuadores nos elementos de 1 a 8. Logo, tem-se 8 posições candidatas para os atuadores axiais piezelétricos, que podem ser vistas na Figura 5.1. Em vários trabalhos encontrados na literatura, os atuadores sempre estão próximos a base da estrutura, mas não há explicitamente uma explicação, por exemplo, Xu e Jiang (2004), Yan e Yam (2002), Liu e Zhang (2000) e Lammering, Jia e Rogers (1994).

Esta técnica de posicionamento ótimo classifica as posições candidatas para os atuadores levando em consideração o número de modos que se deseja controlar. O procedimento consiste em adicionar sensores em todos os graus de liberdade livres, e calcular a norma  $H_{\infty}$  para cada posição candidata do atuador e para cada modo do modelo reduzido, com estas informações é montada a matriz de posicionamento do atuador. Seguindo o procedimento do item 3.6, encontra-se a classificação das posições candidatas. Vários atuadores podem ser adicionados em posições ótimas, em uma mesma estrutura de acordo com a classificação das posições candidatas. O número de modos do modelo reduzido será considerado igual a quatro, pois a

atenuação dos níveis de vibração nestes quatro primeiros modos satisfaz adequadamente o comportamento dinâmico estrutural desejado.

São utilizados dois tipos de sensores na metodologia de controle adotada neste trabalho, os sensores necessários para implementar os estimadores de estado e os sensores de desempenho utilizados para visualizar a resposta da estrutura nos graus de liberdade desejados. Estes dois tipos de sensores podem ser coincidentes. Esta técnica de posicionamento ótimo fornece como resultado as posições dos sensores necessários para implementar os estimadores de estados. Para se visualizar a resposta da estrutura em um ponto desejado, utiliza-se os sensores de desempenho neste determinado ponto. De acordo com Liu e Zhang (2000) pode-se escolher o número de sensores igual ao número de modos considerados no modelo reduzido. Pois os estimadores usam informações desses sensores para estimar os estados modais. Logo, com esta consideração deseja-se posicionar quatro sensores na estrutura, sendo que todos os graus de liberdade livres nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$  são candidatos ao posicionamento. A estrutura possui 12 nós livres, portanto existem 36 posições candidatas para se posicionar os sensores.

Definida a quantidade e a posição dos atuadores escolhidos é, então, calculada a norma  $H_\infty$  para cada posição candidata do sensor e para cada modo do modelo reduzido, com estas informações é montada a matriz de posicionamento do sensor. Finalmente, encontra-se a classificação das posições candidatas para os sensores. Vários sensores podem ser adicionados, em posições ótimas, em uma mesma estrutura de acordo com a classificação das posições candidatas.

A técnica de posicionamento ótimo de atuadores e sensores na estrutura, empregada nesse trabalho, usa como função objetivo a norma  $H_\infty$ . Essa função objetivo considera a maior eficiência para a atenuação dos modos de interesse que se deseja controlar. A treliça foi analisada na mesma condição descrita na seção anterior. As propriedades e dimensões dos atuadores axiais piezelétricos são mostradas na Tabela 5.3.

Tabela 5.3 - Dimensões e propriedades dos atuadores piezelétricos.

	Atuador
Módulo de Young ( $\text{N/m}^2$ )	$4,83 \times 10^{10}$
Densidade ( $\text{kg/m}^3$ )	7800
Área ( $\text{m}^2$ )	$2,83 \times 10^{-5}$
L (m)	0,25
Permissividade dielétrica ( $\epsilon_{33}$ ) (N/V.m)	40
Constante dielétrica ( $\epsilon_{33}$ ) (F/m)	$1,593 \times 10^{-8}$

As propriedades dos atuadores piezelétricos são baseadas no material PIC255 da empresa PI ceramic, uma divisão da Physic Instrumente Inc responsável pela manufatura de materiais piezocerâmicos, fonte: <http://www.piceramic.com/>. São fornecidas também outras informações relevantes, como fator de acoplamento ( $k_{33}$ ) próximo a 70% e temperatura de Curie 350 °C.

As posições candidatas dos atuadores estão em função da localização das barras, isto é, a barra 1 corresponde a posição candidata 1, a barra 2 corresponde a posição candidata 2 e assim por diante até a barra 8. A Tabela 5.4 mostra as posições dos sensores em relação aos graus de liberdade em que estão localizados, para facilidade de entendimento.

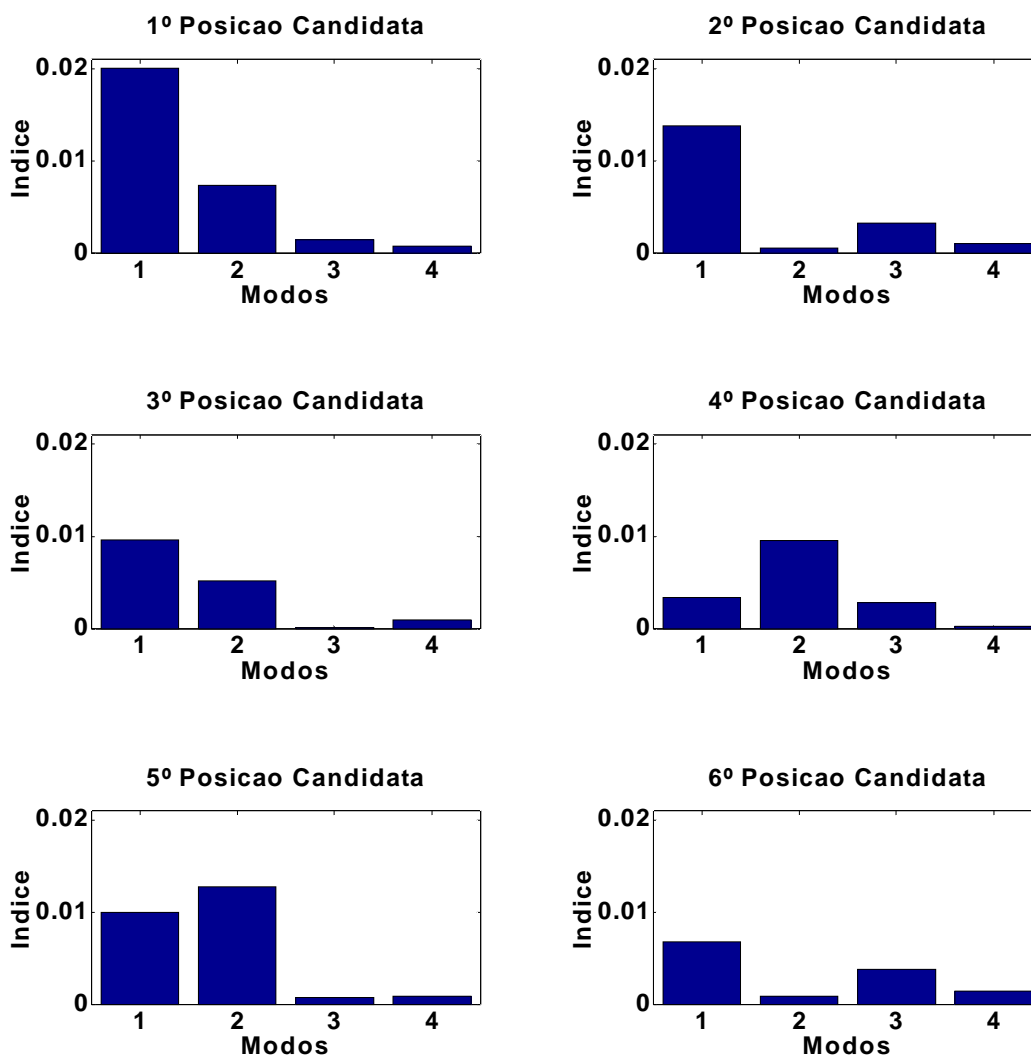
Tabela 5.4 - Posições candidatas dos sensores.

Nó	Direção	Posição Candidata
5	$x$	1
	$y$	2
	$z$	3
6	$x$	4
	$y$	5
	$z$	6
7	$x$	7
	$y$	8
	$z$	9
8	$x$	10
	$y$	11
	$z$	12
9	$x$	13
	$y$	14
	$z$	15
^	^	^

Devido às razões técnicas e econômicas, o número de sensores excede significativamente o número de atuadores. Portanto, primeiramente, deve ser resolvido o problema de posicionamento ótimo dos atuadores por ser um processo menos flexível (Gawronki, 1998).

Será analisado o caso de posicionamento ótimo de atuadores e sensores na estrutura da Figura 5.1. A quantidade mínima de atuadores a ser usada na estrutura é dada pelo *rank* da matriz de controlabilidade, isto é, este valor tem que ser igual ao *rank* do modelo reduzido. Como descrito no item 3.6, define-se o vetor de índice de posicionamento do atuador para cada

modo do modelo reduzido e para cada posição candidata, de acordo com a eq. (3.89). A Figura 5.3 mostra o índice de posicionamento  $\sigma_{\infty a}$ , para cada posição candidata da estrutura.



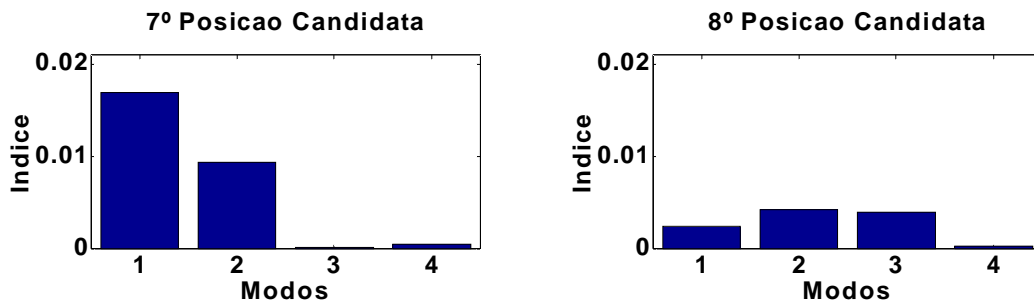


Figura 5.3 - Índice de posicionamento dos atuadores para cada posição candidata em função dos modos.

As magnitudes destes índices fornecem informações da eficiência do atuador de pilha piezolétrico sobre os modos de vibrar da estrutura. Através da eq. (3.90), determina-se o maior índice sobre os modos de cada posição candidata, como mostra a Figura 5.4.

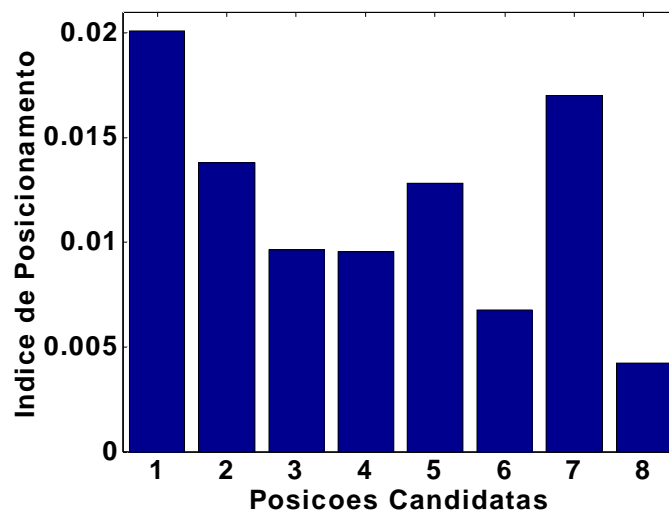
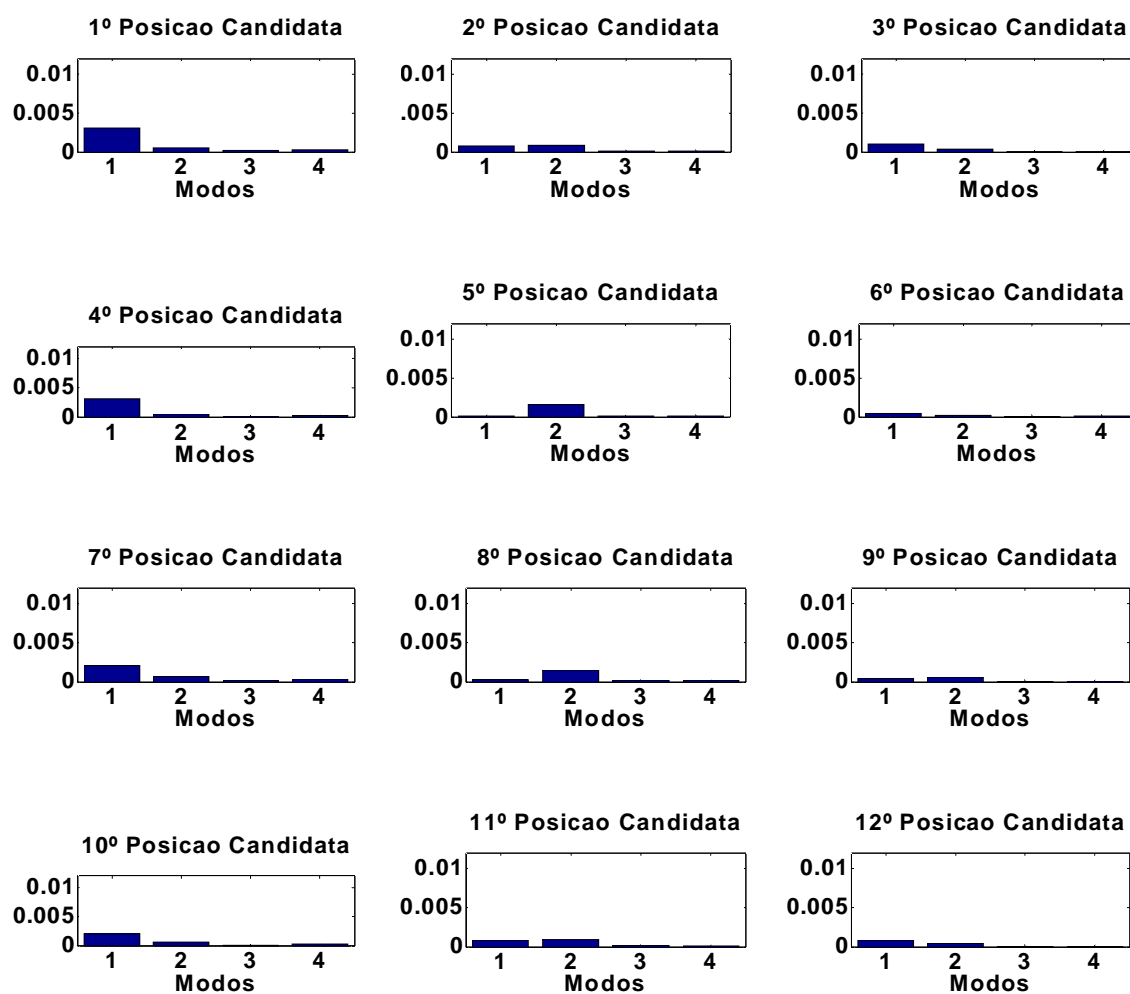


Figura 5.4 - Índice de posicionamento do atuador para as posições candidatas.

O *rank* do modelo reduzido é 8, e o *rank* da matriz de controlabilidade para um atuador localizado em qualquer posição candidata tem valor 5, portanto, é necessário considerar mais do que um atuador nessa estrutura. Utilizando a Figura 5.4 é possível definir em quais posições os atuadores desenvolvem a melhor performance. Posicionando um atuador piezolétrico nas posições candidatas 1 e 7, o *rank* da matriz de controlabilidade tem valor 8. Logo, estas posições candidatas são definidas como posições ótimas para os dois atuadores.

A seguir será determinado o posicionamento ótimo dos sensores. Nas Figuras 5.5 e 5.6 são mostrados os índices de posicionamento dos sensores para cada posição candidata em função dos modos, observa-se que sensores localizados em graus de liberdade com maior amplitude de vibração modal tem índices maiores, mostrando que essa técnica tem uma clara interpretação física.



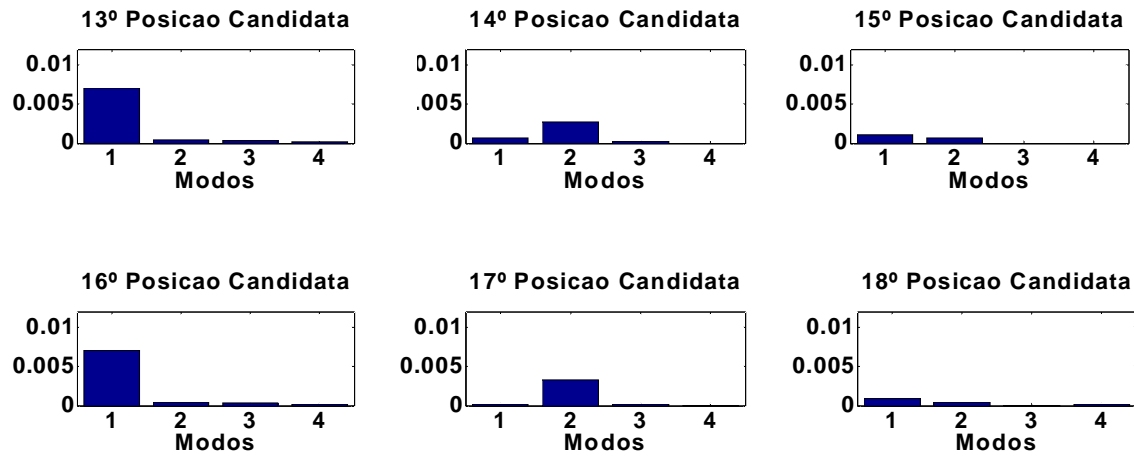
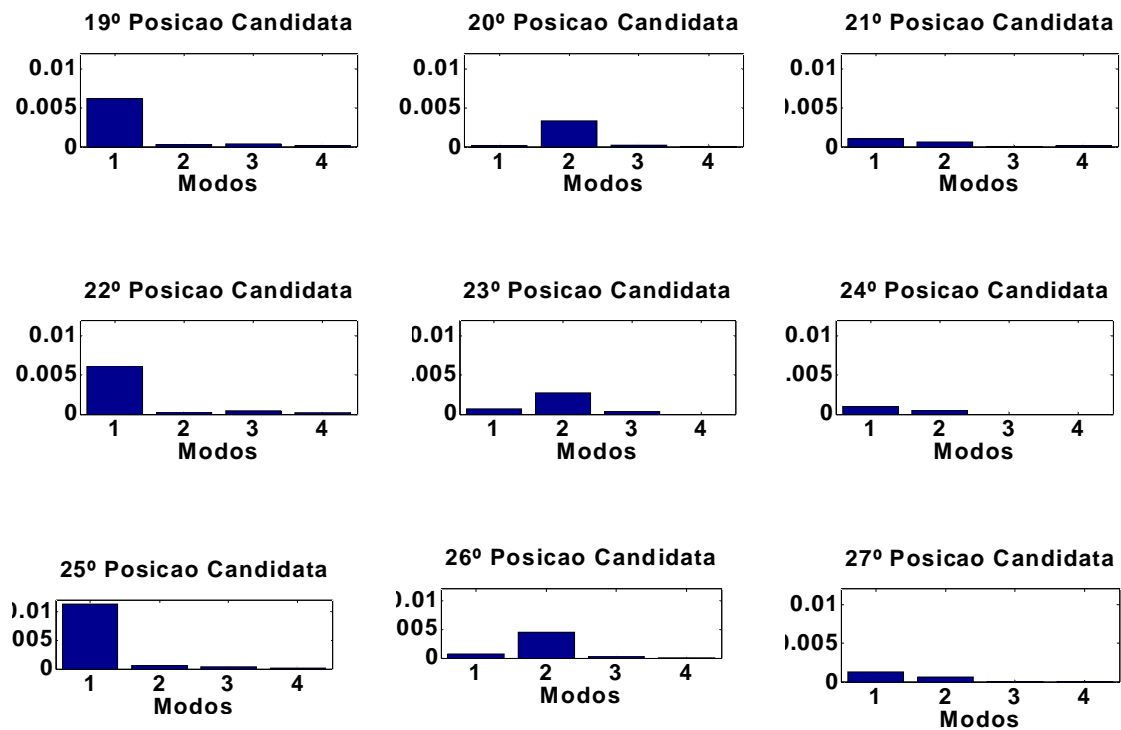


Figura 5.5 - Índice de posicionamento dos sensores para as 18 primeiras posições candidatas em função dos modos.



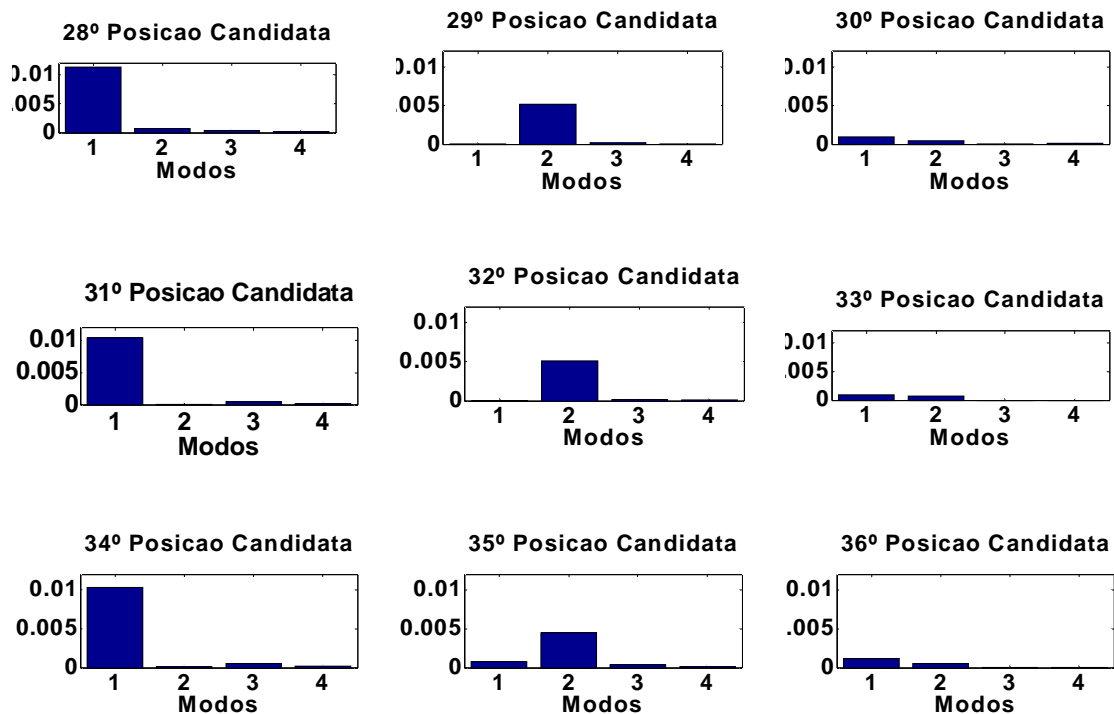


Figura 5.6 - Índice de posicionamento dos sensores para as 18 últimas posições candidatas em função dos modos.

A Figura 5.7 mostra o índice de posicionamento dos sensores  $\sigma_{\infty s}$ , para cada posição candidata da estrutura.

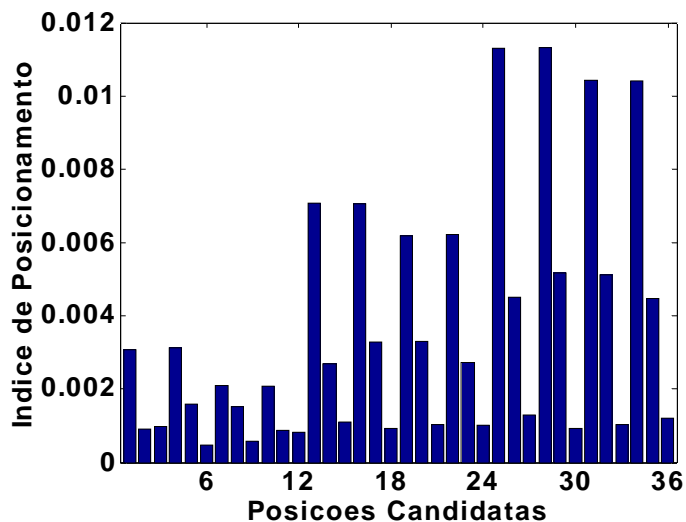


Figura 5.7 - Índice de posicionamento do sensor para as posições candidatas.

Os maiores índices de posicionamento do sensor são para as posições candidatas 28, 25, 31, 34, 13, 16, 22 e 19, todos nos dois andares superiores da estrutura e na direção  $x$ . Como estão todas na mesma direção, dentre estas posições candidatas escolhe-se somente a 28. As posições candidatas 29, 32, 26, 35, 20 e 17 estão nos dois andares superiores da estrutura e na direção  $y$ , portanto, dentre estas posições candidatas escolhe-se somente a posição 26. Entre as posições candidatas 4 e 1 é escolhida a posição 4. A última posição escolhida é a 23, dentre as posições candidatas 23 e 14. Logo, as posições ótimas para os quatro sensores são as posições candidatas 28, 26, 4 e 23. O *rank* da matriz de observabilidade para os sensores nestas quatro posições é 8.

A Figura 5.8 mostra as posições dos atuadores e sensores na estrutura de acordo com as posições ótimas encontradas. Resumindo, esta técnica considera a influência do atuador piezolétrico na estrutura para determinar as posições ótimas, não considerando a força de perturbação. Aliás, posicionar os atuadores em função das forças de perturbação seria uma outra alternativa de posicionamento ótimo, mas somente seria ótima para as perturbações consideradas.

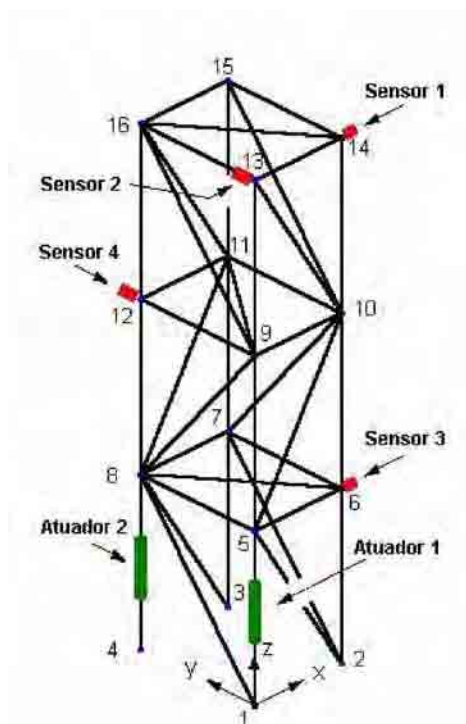


Figura 5.8 - Estrutura com atuadores e sensores acoplados.

As frequências naturais relativas aos doze primeiros modos de vibrar da estrutura e as variações nestas frequências naturais causadas pelo acoplamento eletromecânico dos atuadores piezelétricos são mostradas na Tabela 5.5.

Tabela 5.5 - Frequências naturais e variações devido ao acoplamento dos atuadores.

Modos	Treliça Freq. (Hz)	Treliça + Atuadores	
		Freq. (Hz)	Var. (%)
1	32,6	31,9	-2,15
2	41,3	40,9	-0,97
3	65,7	65,7	0,0
4	115,8	115,3	-0,43
5	143,9	143,6	-0,21
6	168,8	168,3	-0,30
7	182,4	182,3	-0,05
8	260,3	260,2	-0,04
9	285,9	285,6	-0,10
10	304,8	304,3	-0,16
11	374,1	373,4	-0,19
12	377,9	377,7	-0,05

As variações percentuais são calculadas tendo como base os valores das frequências naturais da estrutura antes da implementação dos atuadores de pilha de PZT. Através da Tabela 5.5, verifica-se que os atuadores piezelétricos exercem maior influência sobre os primeiros modos. Em aplicações para atenuação de vibrações os primeiros modos são, em geral, os mais importantes, pois apresentam maiores amplitudes de vibração. A Figura 5.9 mostra a influência individual dos atuadores na variação das frequências naturais da estrutura.

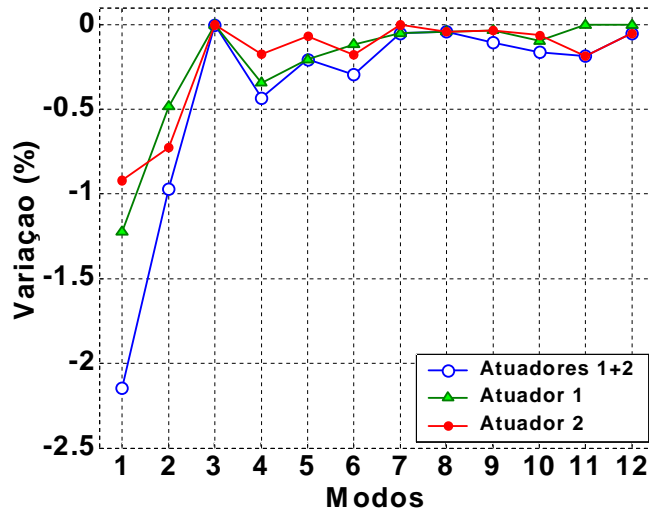


Figura 5.9 - Variação das frequências naturais da estrutura em função dos atuadores.

É observado a maior influência do atuador 1 sobre o primeiro, o segundo e o quarto modo e do atuador 2 sobre o primeiro e o segundo modo. Ambos atuadores tem pouca influência sobre o terceiro modo, como já havia sido visto durante a escolha dos atuadores.

### 5.3 Controle IMSC

Nesta etapa, é projetado um controlador IMSC para atenuação de vibrações da treliça espacial descrita no item 5.2. Serão considerados dois sensores de desempenho no nó 13, o sensor 1 na direção  $x$  e o sensor 2 na direção  $y$ . A força de perturbação consiste de uma força impulsiva no nó 13 na direção  $x$  e outra força impulsiva no nó 12 na direção  $y$  aplicadas simultaneamente. Logo, serão definidas duas funções de resposta em frequência (FRF), FRF G1 tendo como entrada a força de excitação no nó 13 e saída o sinal medido pelo sensor 1, e FRF G2 tendo como entrada a força de excitação no nó 12 e como saída o sinal do sensor 2, respectivamente.

Deseja-se controlar os quatro primeiros modos de vibrar da treliça espacial. Através de um método de redução, obtém-se o modelo de oitava ordem contendo a dinâmica de interesse no projeto do controlador. O sistema reduzido é composto pelos quatro primeiros modos, portanto, os trinta e dois modos restantes são considerados modos residuais. Para melhor visualização, na Figura 5.10 é mostrada a função de resposta em frequência G1 tanto do modelo reduzido como do modelo completo.

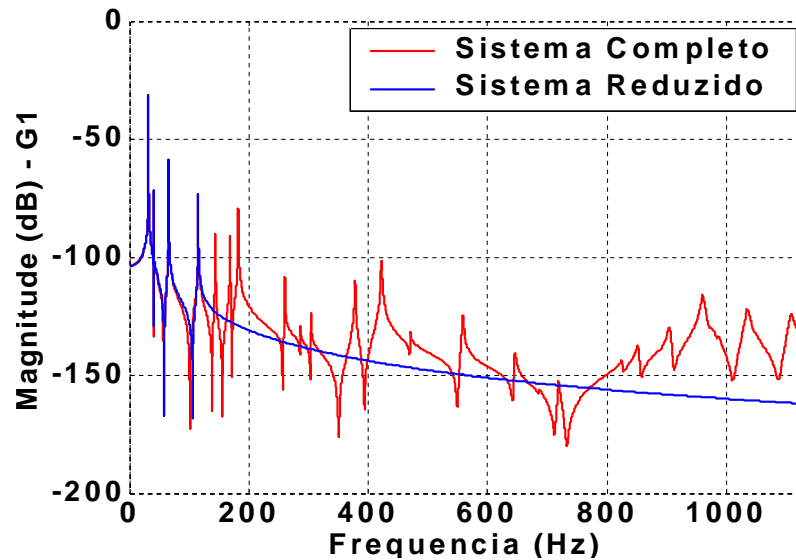


Figura 5.10 - Magnitude da FRF G1 para o sistema reduzido e completo. Unidades: m/N.

O procedimento para encontrar a matriz de ganho do controlador  $\mathbf{G}$  envolve a solução da equação algébrica de Riccati do controlador, eq. (4.14). Esta solução depende da escolha dos parâmetros  $\mathbf{Q}$  e  $\mathbf{R}$ ; a matriz  $\mathbf{Q}$  é definida pela eq. (4.15) e os  $R_i$  são escolhidos após várias tentativas como:

$$R_i = 10^{-5} \cdot [3,0 \quad 2,4 \quad 0,51 \quad 6,0]$$

estes pesos de esforço de controle são escolhidos de forma que os pólos do sistema à malha fechada sejam uniformemente deslocados em relação aos pólos do sistema à malha aberta no plano complexo e que a estrutura produza uma resposta física satisfatória.

A matriz de ganho  $\mathbf{G}$ , calculada através das eqs. (4.4 e 4.12), é:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} -490,2 & -197,0 & -450,6 & -178,4 & 1654 & 613,9 & 438,6 & 146,0 \\ -411,2 & -165,2 & 567,1 & 224,5 & -146,1 & -54,2 & 286,5 & 95,4 \end{bmatrix}$$

na qual os ganhos modais da primeira linha são referentes ao primeiro atuador e os da segunda linha referentes ao segundo atuador. Os ganhos modais também estão agrupados por modos, as duas primeiras colunas referem ao deslocamento modal e a velocidade modal do primeiro modo, respectivamente, a terceira e quarta colunas são referentes ao deslocamento modal e a velocidade modal do segundo modo, respectivamente, e assim por diante.

A solução da matriz de ganho do estimador  $\mathbf{K}$ , eq. (4.23), é dependente das matrizes de ponderação  $\mathbf{W}$  e  $\mathbf{V}$ , a matriz  $\mathbf{W}$  é escolhida igual a matriz  $\mathbf{Q}$ , e  $\mathbf{V}$  é escolhido após várias tentativas:

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 50 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 80 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 220 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 500 \end{bmatrix}$$

estes valores são escolhidos para que o erro do estimador  $\mathbf{e}_c$  convirja para zero rapidamente, isto é, os pólos do estimador estarão mais à esquerda do que os pólos do sistema à malha fechada no plano complexo, como pode ser visto no mapeamento de pólos da Figura 5.16.

A matriz de ganho do estimador de estados  $\mathbf{K}$  é dada por:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} -7,63 & 0,30 & -2,56 & 0,17 & 7,97 & -1,36 & 22,38 & -11,74 \\ 1,70 & -0,07 & -14,5 & 0,96 & -12,78 & 2,18 & -4,06 & 2,13 \\ 1,93 & -0,08 & -24,14 & 1,59 & -17,23 & 2,93 & 9,14 & -4,79 \\ -27,07 & 1,09 & -4,01 & 0,26 & 15,23 & -2,59 & -19,46 & 10,21 \end{bmatrix}^t$$

Devido ao movimento na direção  $z$  ter amplitude muito menor do que nas direções  $x$  e  $y$ , a resposta física resultante do nó 13 da estrutura é dada pela soma das respostas dos sensores de desempenho 1 e 2, para o sistema à malha aberta e à malha fechada, como mostra a Figura 5.11.

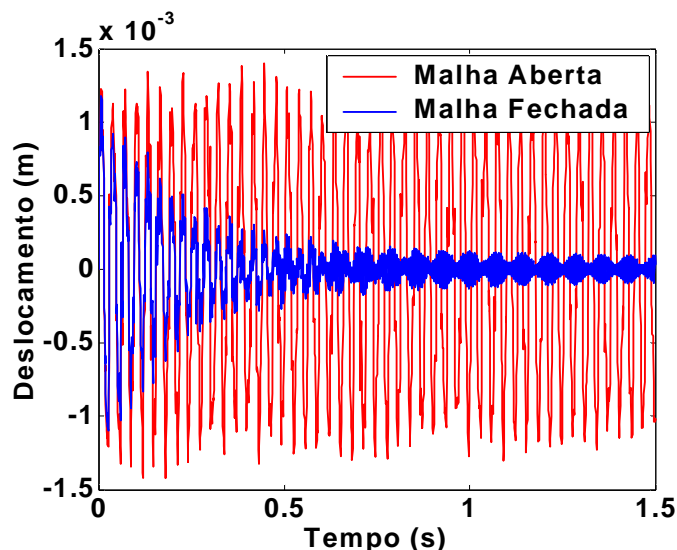


Figura 5.11 - Resposta do nó 13 no domínio do tempo para o sistema à malha aberta e à malha fechada.

A resposta física do sistema é uma combinação linear de todos os modos, sendo os modos de baixa frequência os que têm maior contribuição para a resposta física do sistema. Logo, o movimento residual observado na Figura 5.11 após 0,7 s é devido à contribuição dos

modos residuais. O deslocamento resultante da estrutura medido no plano  $xy$  decresce de  $1,4 \times 10^{-3}$  m para  $1,5 \times 10^{-4}$  m em aproximadamente 0,7 s, isto representa uma redução de 89,3 %.

A Figura 5.12 mostra a magnitude das FRFs G1 e G2 do sistema à malha aberta e à malha fechada usando o controlador IMSC.

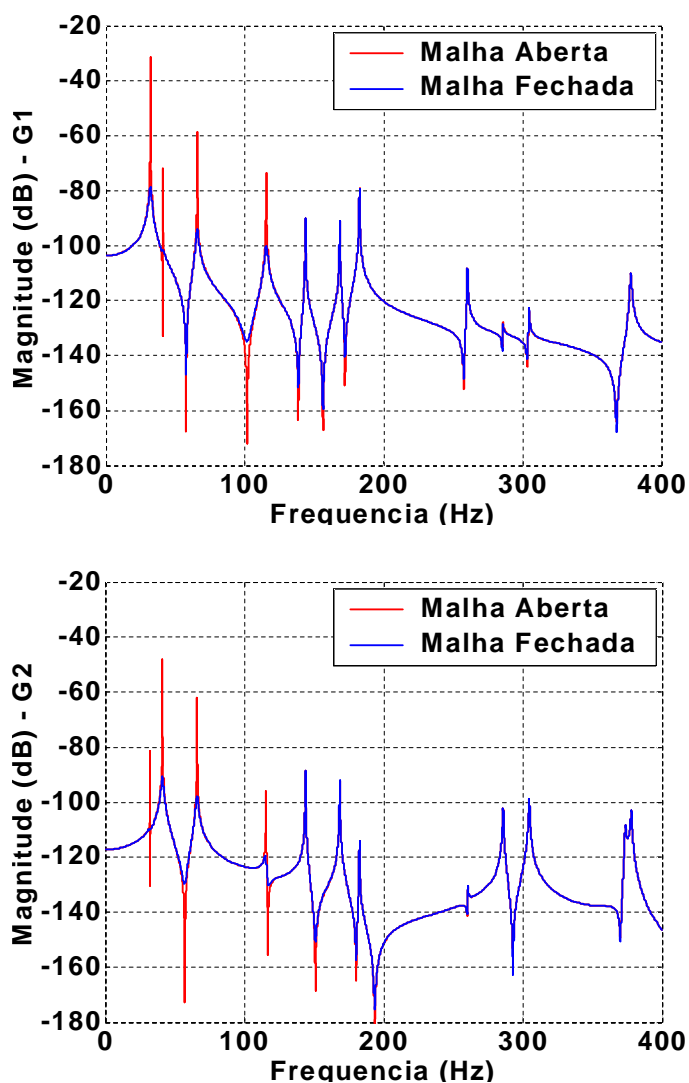


Figura 5.12 - Magnitude das FRFs G1 e G2 para o sistema à malha aberta e à malha fechada (IMSC). Unidades: m/N.

Para se conseguir o controle simultâneo de vários modos, as forças de controle modais são calculadas para cada modo individualmente. Estas forças são convertidas para forças de controle físicas em cada um dos atuadores. As forças de controle físicas para todos os modos controlados são somadas para cada um dos atuadores. Isto pode ser feito, pois os modos do

sistema são linearmente independentes para uma dada estrutura descrita em coordenadas modais. Cada força de controle produz um efeito independente. Portanto, estas forças são vetorialmente somadas e como são diretamente proporcionais às voltagens a serem aplicadas nos atuadores, essas voltagens podem ser adicionadas dando a voltagem total a ser aplicada em cada atuador.

Os sinais de controle aplicados aos atuadores piezelétricos no domínio do tempo são mostrados na Fig. 5.13. Os valores máximos da voltagem de controle nos atuadores 1 e 2 são de 1520 V e 1900 V, respectivamente. Estes valores não podem ser implementados na prática, pois as cerâmicas piezelétricas não suportam tais voltagens.

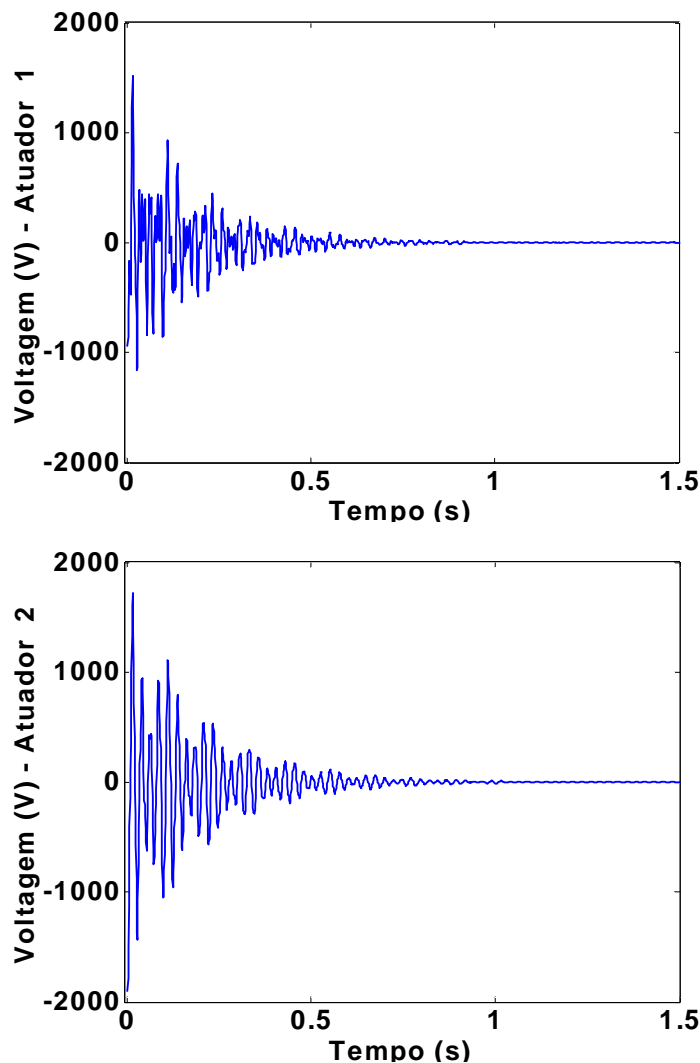


Figura 5.13 - Sinal de controle aplicado aos atuadores piezelétricos

Embora a resposta da estrutura esteja satisfatória, é praticamente impossível implementar este controlador, pois a voltagem máxima é muito alta. A Tabela 5.6 mostra a

atenuação alcançada pelo controle IMSC para os doze primeiros modos da treliça espacial, comparando o sistema à malha aberta e à malha fechada. Como resultado do controle ativo os picos de ressonância dos modos controlados são reduzidos. Já nos modos residuais não há variação de amplitude nos picos de ressonância. Exceto, no quinto modo há um pequeno aumento de magnitude de 0,1 dB. Isto ocorre devido ao *spillover* de controle, ou seja, a energia do sinal de controle excita este modo, mas devido à magnitude deste modo ( $5,5 \times 10^{-5}$ ) ser tão pequena em relação à magnitude dos modos controlados, este não instabiliza a estrutura à malha fechada.

Tabela 5.6 - Desempenho do controlador IMSC.

Modos	Malha aberta		Malha Fechada		Atenuação (dB)
	Magnitude (dB)	$\xi$ modal	Magnitude (dB)	$\xi$ modal	
1	-31,4	0,0001	-78,8	0,0247	47,4
2	-71,8	0,000129	-101	0,0195	29,2
3	-58,5	0,000206	-94,2	0,0129	35,7
4	-73,6	0,000362	-100	0,00793	26,4
5	-89,8	0,000451	-89,7	0,000450	-0,1
6	-91	0,000529	-91	0,000529	0
7	-79,2	0,000573	-79,2	0,000574	0
8	-108	0,000817	-108	0,000817	0
9	-128	0,000897	-128	0,000897	0
10	-123	0,000956	-123	0,000956	0
11	-134	0,00117	-134	0,00117	0
12	-110	0,00119	-110	0,00119	0

A Figura 5.14 mostra os deslocamentos modais dos quatro modos do modelo reduzido, no domínio do tempo, para o sistema à malha aberta e à malha fechada. O tempo de resposta dos deslocamentos modais para os modos do modelo reduzido é de aproximadamente 0,7 s, considerando uma variação de 5 %. Já a Figura 5.15 mostra os deslocamentos modais, no domínio do tempo, para o sistema à malha aberta e à malha fechada para alguns modos residuais. Os deslocamentos modais dos modos residuais não sofrem alteração devido à implementação do controlador IMSC, exceto o primeiro modo residual que mostra um aumento de amplitude no início da simulação, mas este aumento desaparece com o tempo.

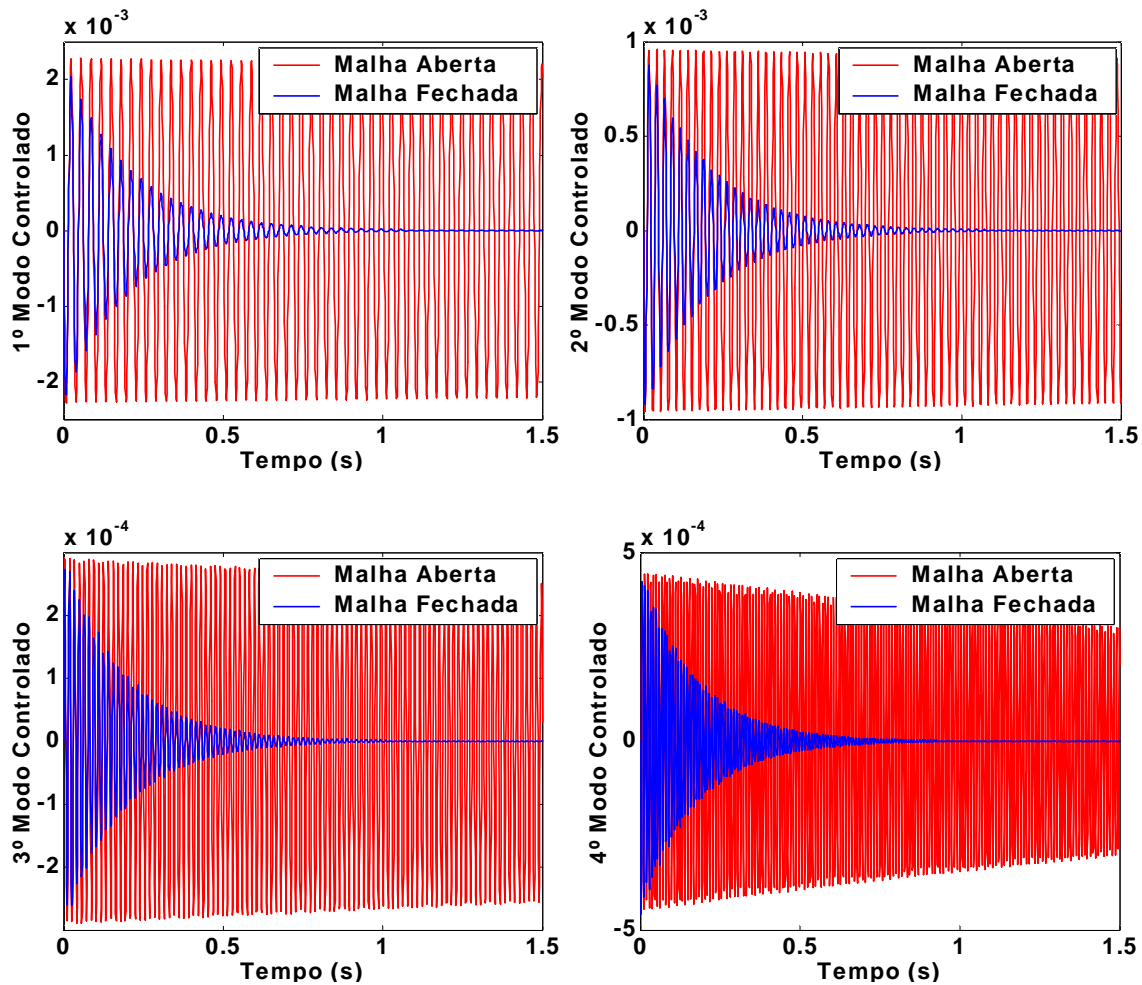


Figura 5.14 – Deslocamentos modais, no domínio do tempo, para o sistema à malha aberta e a malha fechada para os modos do modelo reduzido.

A atenuação de vibrações de uma estrutura flexível depende da mobilidade dos pólos do lado esquerdo do plano complexo. Portanto, se um par de pólos é movido facilmente, os respectivos estados são fáceis de controlar e estimar. Por outro lado, se há dificuldade em mover um par de pólos, os respectivos estados são de difícil estimação e controle. O mapeamento dos pólos do estimador de estados, do sistema à malha fechada e à malha aberta pode ser visto na Figura 5.16.

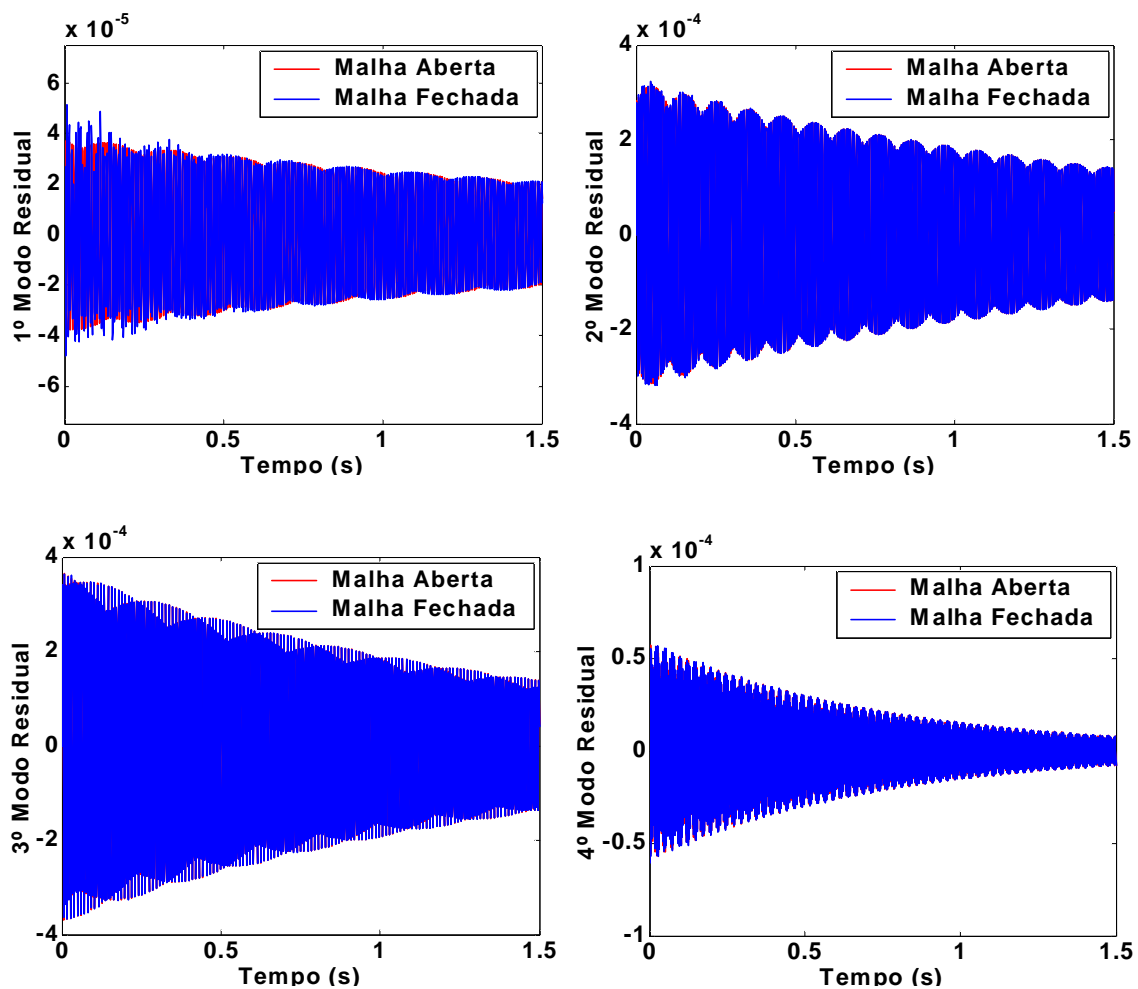


Figura 5.15 – Deslocamentos modais, no domínio do tempo, para o sistema à malha aberta e a malha fechada para alguns modos residuais.

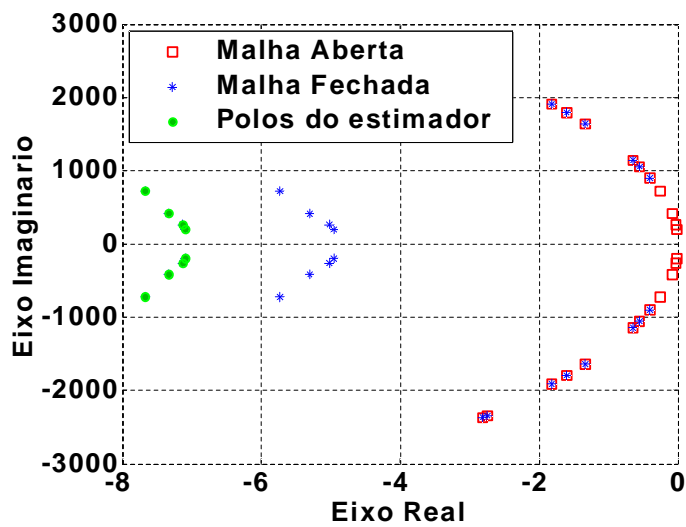


Figura 5.16 - Mapeamento de pólos do sistema.

## 5.4 Controle EMC

Nesta etapa, é projetado um controlador EMC para a treliça espacial descrita no item 5.2 e compara-se com os resultados obtidos com o controlador IMSC. Todos os parâmetros adotados anteriormente são mantidos, somente os ganhos modais serão atualizados. As energias modais, isto é, a soma da energia potencial e da energia cinética, são calculadas para os quatro primeiros modos, [291,9 148,4 2,8 122,8], respectivamente. As quatro primeiras frequências naturais são [31,9 40,9 65,7 115,3] Hz, respectivamente. Usando a relação energia/frequência como um parâmetro de ponderação dos ganhos modais, segundo a eq. (4.20), tem-se:

$$1: \frac{148,4}{291,9} \times \frac{31,9}{40,9} : \frac{2,8}{291,9} \times \frac{31,9}{65,7} : \frac{122,8}{291,9} \times \frac{31,9}{115,3} = 1:0,396:0,005:0,116$$

Atualizando a matriz de ganho do controlador obtida pelo controle IMSC com os pesos acima, é encontrada a matriz de ganho do controlador EMC:

$$\mathbf{G}_{EMC} = \begin{bmatrix} -490,2 & -197,0 & -178,7 & -70,7 & 7,70 & 2,86 & 51,1 & 16,9 \\ -411,2 & -165,2 & 224,9 & 89,0 & -0,68 & -0,25 & 33,3 & 11,1 \end{bmatrix}$$

Para a mesma configuração dos sensores de desempenho do item 5.3, a resposta física resultante do nó 13 da estrutura, para o sistema à malha fechada, controlada pelo IMSC e EMC, é mostrada na Figura 5.17.

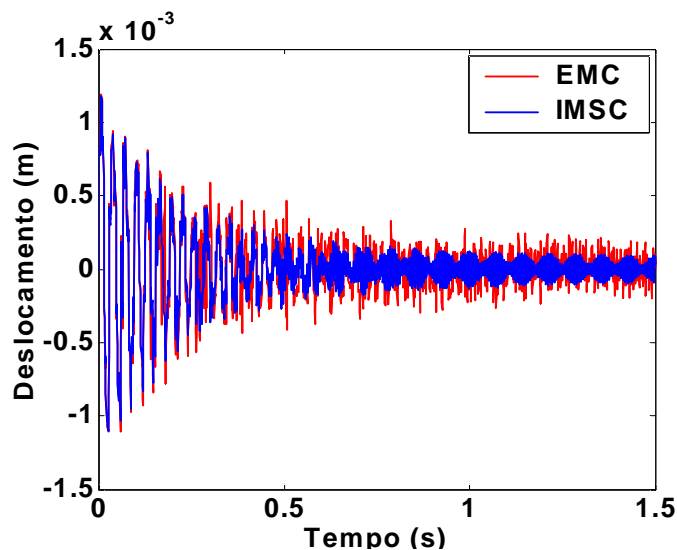


Figura 5.17 - Resposta da estrutura, no domínio do tempo, para o sistema à malha fechada, controlada pelo IMSC e EMC.

O deslocamento resultante da estrutura medido no plano  $xy$  decresce de  $1,4 \times 10^{-3}$  m para  $3,0 \times 10^{-4}$  m em aproximadamente 0,7 s usando o controlador EMC, isto representa uma redução de 78,6 % em relação ao sistema à malha aberta.

As Figuras 5.18 mostram as FRFs G1 e G2 do sistema à malha fechada para os controladores IMSC e EMC. Claramente, o controlador IMSC é mais eficiente para os segundo, terceiro e quarto modos do modelo reduzido.

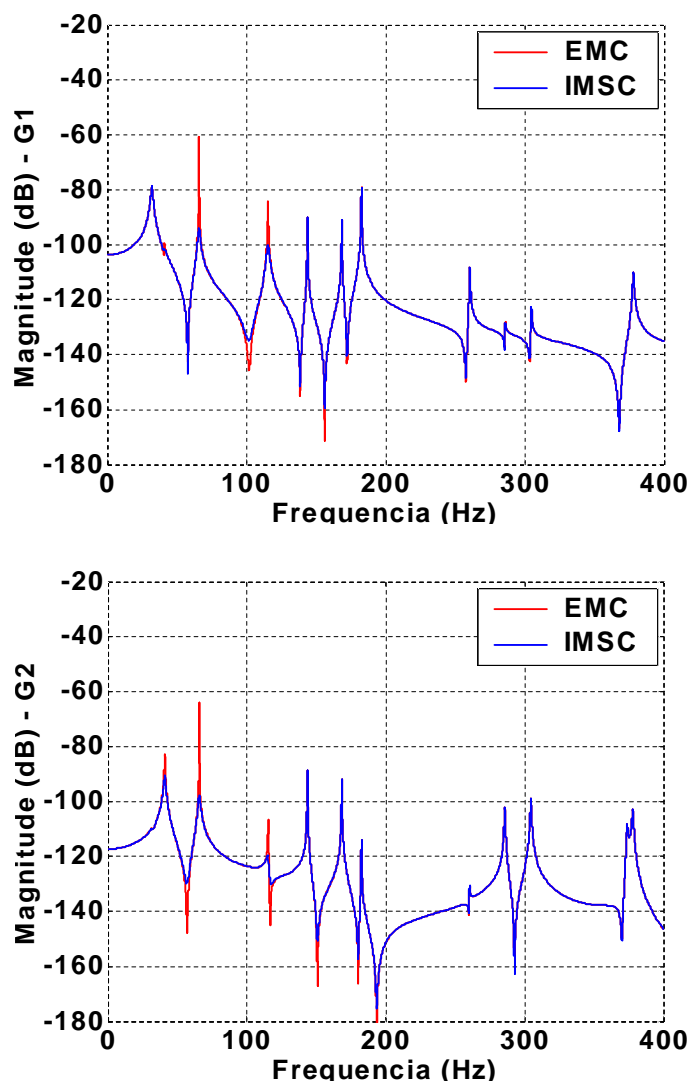


Figura 5.18 - Magnitude das FRFs G1 e G2 para o sistema controlado pelo IMSC e EMC.

Unidades: m/N.

O sinal de controle aplicado aos atuadores piezelétricos usando o controle EMC, no domínio do tempo, é mostrado na Fig. 5.19. Os valores máximos das voltagens de controle são de 560 e 910 V, respectivamente para os atuadores 1 e 2.

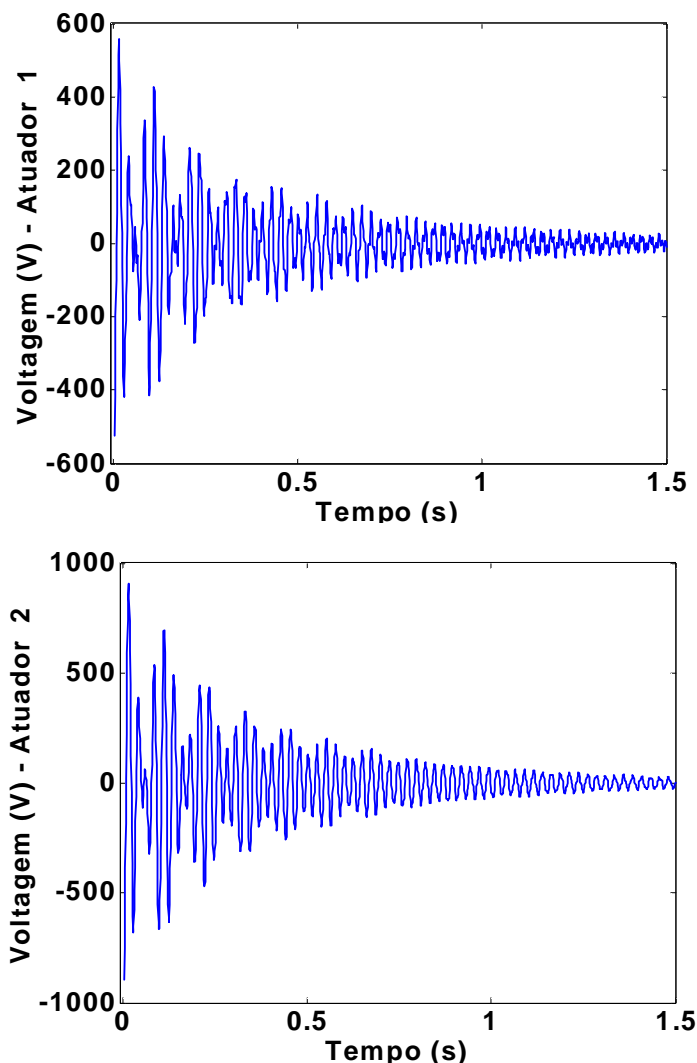


Figura 5.19 - Sinal de controle aplicado aos atuadores piezelétricos.

Comparando os sinais de controle necessários para controlar a estrutura da Figura 5.19 com os sinais de controle calculados pelos IMSC da Figura 5.13, há uma redução significativa nas amplitudes máximas desses sinais, aproximadamente 63 % para o atuador 1 e 52 % para o atuador 2. São calculadas as áreas internas das respostas da estrutura à malha aberta e à malha fechada controlada pelo IMSC e EMC, Figuras 5.11 e 5.17. Estes valores são utilizados como uma medida de eficiência dos controladores. Para o sistema à malha aberta este valor é de 2,77 x

$10^{-4}$  m.s, à malha fechada usando o controlador IMSC é de  $1,39 \times 10^{-4}$  m.s, isto representa uma redução de 49,8 %, e a área para o sistema à malha fechada usando o controlador EMC é de  $1,53 \times 10^{-4}$  m.s, isto é, uma redução de 44,8 %.

A Tabela 5.7 compara a atenuação alcançada pelos controladores IMSC e EMC para os quatro modos do modelo reduzido, pois a magnitude e o amortecimento modal de todos os outros modos residuais permanecem inalterados.

Tabela 5.7 - Comparação de desempenho do controlador EMC e IMSC.

Modos	Controle IMSC		Controle EMC		Diferença de Atenuação (dB)
	Magnitude (dB)	$\xi$ modal	Magnitude (dB)	$\xi$ modal	
1	-78,8	0,0247	-78,8	0,0247	0
2	-101	0,0195	-99,6	0,00783	-1,4
3	-94,2	0,0129	-60,6	0,000265	-33,6
4	-100	0,00793	-84,3	0,00124	-15,7

O mapeamento dos pólos do estimador de estados, do sistema à malha aberta e à malha fechada para os controladores IMSC e EMC pode ser visto na Figura 5.20.

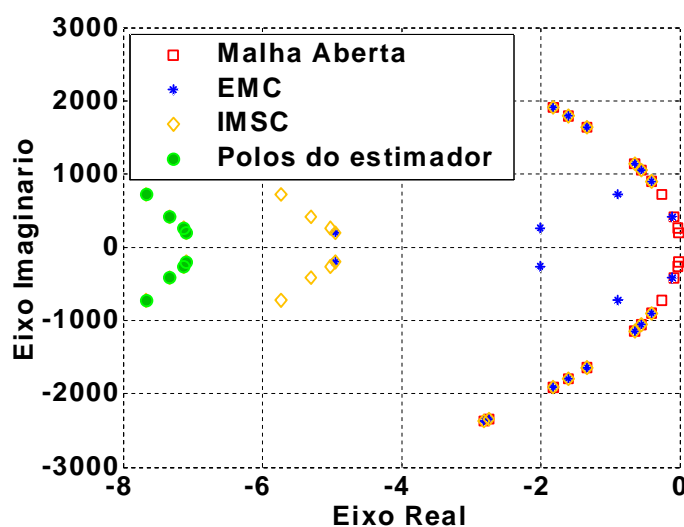


Figura 5.20 - Mapeamento de pólos do sistema à malha fechada.

Através do mapeamento dos pólos, nota-se que os pólos do estimador não são alterados pelo controlador EMC, pois as matrizes de ponderação deste não foram alteradas. As propriedades dos pólos dos modos residuais não são alteradas pela adição dos controladores.

Pode ser observado também que os pólos complexos conjugados relativos ao primeiro modo possuem as mesmas propriedades para ambos os controladores. Já os outros pólos do modelo controlado pelo EMC estão deslocados em relação aos do IMSC de acordo com a ponderação dos ganhos modais.

## 6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste capítulo são apresentados alguns comentários, conclusões e sugestões para novas pesquisas a partir dos assuntos discutidos neste trabalho.

### 6.1 Comentários e Conclusões

Este trabalho apresentou a modelagem matemática de estruturas inteligentes do tipo treliça com atuadores piezelétricos acoplados. A equação do movimento da estrutura inteligente a partir da aplicação das equações de Lagrange foi uma contribuição deste trabalho, pois na literatura pesquisada estas equações são obtidas a partir do princípio variacional de Hamilton.

É feita uma revisão sobre a importância da modelagem de estruturas inteligentes do tipo treliça, do controle ativo de vibrações em estruturas flexíveis, técnicas de posicionamento ótimo de atuadores e sensores piezelétricos e de técnicas de controle modal. Como exemplo o Controle no Espaço Modal Independente (IMSC) e o Controle Modal Eficiente (EMC) são aplicados para o controle de uma estrutura tipo treliça.

Considera-se, portanto, que esta dissertação apresenta uma abordagem unificada, permitindo também o uso de diferentes técnicas de redução de modelos e de posicionamento ótimo de atuadores e sensores piezelétricos, sistematizando as metodologias relacionadas à modelagem e controle de estruturas inteligentes.

A técnica de controle IMSC foi desenvolvida há mais de duas décadas, tendo uma formulação bem definida para sistemas distribuídos. Desde o seu desenvolvimento, esta técnica vem recebendo várias melhorias, como exemplo o MIMSC em 1988 e o EMC em 2003. Estas melhorias são propostas para contornar problemas associados à limitação do número de atuadores, controlar o maior número de modos usando o menor número de atuadores e redução das voltagens aplicadas nos atuadores. A formulação dos controles modais IMSC e EMC é descrita no capítulo 4. Esta técnica apresenta bons resultados em aplicações práticas disponíveis na literatura.

O posicionamento ótimo dos atuadores e sensores piezelétricos na estrutura é realizado antes da aplicação das técnicas de controle modal. Foi utilizada como função objetivo a norma  $H_{\infty}$ , como descrita no item 3.6. A técnica de posicionamento ótimo aplicada nesse trabalho indica a quantidade mínima de atuadores que devem ser utilizados de forma a ter-se um sistema

controlável. Em relação aos sensores utilizados para implementar os estimadores modais, esta técnica fornece a quantidade mínima de sensores que devem ser posicionados na estrutura de forma que o sistema seja observável. Mas, normalmente são utilizados mais sensores do que o mínimo necessário, pois a técnica de controle a ser usada é de realimentação de estados, logo, deve-se ter informações suficientes desses modos a serem controlados. Estas informações são obtidas dos estimadores modais que usam informações destes sensores. De acordo com a técnica de posicionamento ótimo, o uso de dois sensores era suficiente para tornar o sistema observável, mas foram usados quatro sensores, seguindo uma recomendação de Liu e Zhang (2000) que estabelece o número de sensores, no mínimo, igual ao número de modos controlados.

O capítulo 5 apresenta o controle ativo de vibrações em uma treliça espacial, de 3 andares composta por 39 barras, usando o controle no espaço modal independente (IMSC) baseado em um Regulador Linear Quadrático (LQR). A localização dos pólos do sistema pode ser usada como um parâmetro de escolha dos elementos ( $R_i$ ) da matriz de ponderação da força de controle, num procedimento de tentativa e erro. Deslocando de forma uniforme os pólos do sistema à malha fechada em relação aos pólos do sistema à malha aberta, necessita-se de grandes voltagens de controle para encontrar respostas satisfatórias para a estrutura. Por outro lado, através de um procedimento de tentativa e erro, pode-se tentar encontrar os elementos ( $R_i$ ) que regulam as forças de controle. Esta última forma é um procedimento exaustivo no qual não se tem garantia de encontrar a solução ótima ou atender os requisitos de projeto.

O controle modal eficiente é uma melhoria do controle IMSC no seguinte aspecto, ele fornece uma boa estimativa da proporcionalidade que os elementos ( $R_i$ ) devem ter em função da energia modal ou amplitude modal de cada modo. Logo, a resposta obtida pela estrutura simulada pelo controlador EMC, também pode ser encontrada pelo controlador IMSC, basta encontrar elementos adequados para a matriz de ponderação da força de controle.

Uma limitação importante das técnicas de controle de ganho fixo é que se houver mudança na natureza das vibrações estruturais, devido à mudança na localização das perturbações, por exemplo, os ganhos não mais serão ótimos. Neste caso, sendo necessário recalcular os ganhos, de forma a aumentar a efetividade do controlador.

O programa desenvolvido *SmartTruss*, em ambiente Matlab<sup>®</sup>, realiza o posicionamento ótimo de atuadores e sensores e é capaz de simular e controlar estruturas inteligentes do tipo treliça aplicando as técnicas de controle IMSC e EMC.

## 6.2 Sugestões para Trabalhos Futuros

Como propostas para trabalhos futuros podemos citar:

- Simulação em tempo real dos controladores implementados neste trabalho.
- Usar medidas de energia modal para avaliar o desempenho global do sistema.
- Desenvolver ferramentas que possibilitem definir o número mínimo de atuadores e sensores a ser usado e o menor número de modos a serem controlados, obedecendo às limitações e atendendo os requisitos do projeto.
- Avaliação da robustez do controlador IMSC considerando incertezas no modelo, tais como: frequências naturais, fator de acoplamento, amortecimento estrutural.

Finalmente, a seguir são apresentadas as publicações decorrentes desta dissertação:

- Carvalhal, R., Lopes Jr., V. e Brennan, M. J., “An Efficient Modal Control Strategy for the Active Vibration Control of a Truss Structure”. Submetido à Revista Shock and Vibration em 2005.
- Carvalhal, R., Lopes Jr., V. e Brennan, M. J., “A Comparison of Two Modal Control Strategies for the Active Vibration Control of a Truss Structure”, In: Proceedings of the XIX COBEM – 19<sup>th</sup> International Congress of Mechanical Engineering, Minas Gerais, Brasil, in CD Room, 2005 (A ser apresentado)
- Carvalhal, R., Silva, S., e Lopes Jr., V., “Robust Control Applications for Smart Truss Structure”, In: Proceedings of the XXIII IMAC – 23<sup>th</sup> International Modal Analysis Conference, Orlando, Florida, USA, in CD Room, 2004.
- Carvalhal, R., e Lopes Jr., V., “Active Vibration Attenuation in Truss Structures Using LQR Control and State Observer”, In: Proceedings of the III CONEM – 3<sup>th</sup> National Congress of Mechanical Engineering, Belém, Brasil, in CD Room, 2004.
- Carvalhal, R., Silva, S., Bueno, D. D., e Lopes Jr., V., “Active Structural Control for Spatial Truss Structure With Sensors/Actuators in Optimal Placement”, In: Proceedings of the XXV CILAMCE – 25<sup>th</sup> Iberian Latin American Congress on Computational Methods, Recife, Brasil, in CD Room, 2004.
- Carvalhal, R., Silva, S., e Lopes Jr., V., “Posicionamento Ótimo de Atuadores e Sensores Piezelétricos em uma Treliça 3D”, In: Anais do DINCON 2004 – 3.º Congresso

Temático de Aplicações de Dinâmica e Controle da Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional (SBMAC), Ilha Solteira, SP, Brasil, Volume 1, pp. 1244-1250, 2004.

- Carvalho, R., Silva, S., e Lopes Jr., V., “Redução de Modelos e Controle Modal de Estruturas Flexíveis Usando Controlador LQR”, In: Anais do DINCON 2003 – 2.º Congresso Temático de Aplicações de Dinâmica e Controle da Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional (SBMAC), São José dos Campos, SP, Brasil, Volume 2, pp. 1453 – 1463, 2003.

- Carvalho, R., Silva, S., e Lopes Jr., V., “Modal Control Applications in Intelligent Truss Structures”, In: Proceedings of the XVII COBEM – 17<sup>th</sup> International Congress of Mechanical Engineering, São Paulo, Brasil, in CD Room, 2003.

## REFERÊNCIAS

- Allik, H. And Hughes, T. J. R. Finite element method for piezoelectric vibration. Journal For Numerical Methods In Engineering, vol. 2, pp. 151-157, 1970.
- Anthony, D. K. Robust optimal design using passive and active methods of vibration control. Ph. D. Thesis, Faculty of engineering and applied science, Institute of sound and vibration research, University of Southampton, 2000.
- Assunção, E. Redução  $H_2$  e  $H_\infty$  de modelos através de desigualdades matriciais lineares: Otimização Local e Global, Tese de doutorado em engenharia elétrica, UNICAMP, Campinas, SP, 2000.
- Assunção, E. E Teixeira, M. C. M. Projeto de sistema de controle via LMI usando o MATLAB. In: Escola Brasileira de Aplicações em Dinâmica e Controle - APLICON. USP – São Carlos – SP, 2001.
- Banks, H.T., Smith, C. and Wang, Y., Smart material structures - Modelling, estimation and control, Wiley-Masson, 1996.
- Batra, R. C. Design of smart materials & structures, Lecture notes for short-course, Department of Engineering Science and Mechanics, Virginia Polytechnic Institute & State University, Blacksburg, Virginia, USA, 1998.
- Baz, A., Poh, S. Performance of an active control system with piezoelectric actuator. Journal of Sound and Vibration, vol. 126, pp. 327-343, 1988.
- Bhaskar, A. Estimates of error in the frequency response of non-classically damped systems. Journal of Sound and Vibration, vol. 184, pp. 59-72, 1995.
- Bravo, R. Vibration control of flexible structures using smart materials. Ph. D. Thesis, McMaster University, Ontario, Canada, 2000.
- Breitbart, E. J. Smart structures research in aerospace engineering. Proceedings of Second European Conference on Smart Structure and Materials, Glasgow, U.K., pp.11-18, 1994.
- Brennan, M. J.; Elliot, S. J. and Pinnington, R. J. Strategies for the active control of flexural vibration on a beam. Journal of Sound and Vibration, pp. 657-688, 1995.
- Bueno, D. D., Marqui, C. R., Cordeiro, L. e Lopes Jr., V. Estudo comparativo da norma  $H_2$  e matrizes gramianas para o posicionamento de sensores/atuadores piezelétricos. In: 4.º Congresso Temático de Dinâmica, Controle e Aplicações - 4.º DINCON, Bauru, junho, 2005.
- Burl, J. B. Linear optimal control:  $H_2$  and  $H_\infty$  methods. Addison-Wesley, ISBN 0-21-80868-4, 1999.
- Cady, W. G. Piezoelectricity: An introduction to the theory and applications of eletromechanical phenomena in crystals. New York, McGraw Hill, 1946.

- Carvalho, R. e Lopes Jr., V. Posicionamento ótimo de atuadores e sensores piezelétricos em uma treliça 3D. In: 3.º Congresso Temático de Dinâmica, Controle e Aplicações - 3.º DINCON, Ilha Solteira, junho, 2004.
- Carvalho, R., Silva, S., Bueno, D. D. e Lopes Jr., V. active structural control for spacial truss structure with sensors/actuators in optimal placement". In: 25th Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering, 25.º CILAMCE, Recife, PE, 2004.
- Cerna, E. R. V. Controle robusto de vibrações: Aplicações de um controlador  $H_2/H_\infty$ . Dissertação de Mestrado, PUC/RJ, 2001.
- Charon, W. Practical design and verification of LQG controllers as applied to active structure. Journal of Intelligent Material Systems and Structures, vol. 8, n. 11, pp. 960-985, 1997.
- Clark, R.L.; Saunders, W.R. and Gibbs, G.P. Adaptable structures: Dynamics and control, John Wiley & Sons, Inc., 1998.
- Costa e Silva, V. M. e Arruda, J. R. F. Otimização do posicionamento de atuadores piezocerâmicos em estruturas flexíveis usando um algoritmo genético. In: International Congress of Mechanical Engineering – XI COBEM, Bauru, SP, 1997.
- Craig, R. R., Recent literature on structural modeling, identification, and analysis, Cap. 1: Mechanics and control of large flexible structures, Progress in astronautics and aeronautics, vol. 129, Editado por J. L. Junkins, AIAA Inc., Washington, 1990.
- Cudney, H. H. Introduction to actuation and sensing using active materials. Lecture notes for short-course, Center for Intelligent Materials, System and Structures, Virginia Polytechnic Institute & State University, Blacksburg, Virginia, 1999.
- Dai, Y. Feedback control of multi-story structures under seismic excitations. Ph. D. Thesis, Department of Mechanical Engineering, Faculty of the Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, Virginia, 2002.
- Dorf, R. C. and Bishop, R. H., Modern control systems, Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Massachusetts, 1995.
- Dosch, J.J. Inman, D. J. and Garcia, E., Self-sensing piezoelectric actuator for collocated control, Journal of Intelligent Material Systems and Structures, vol.3, n. 1, pp. 166-185, 1992.
- Doyle, J.C. Guaranteed margins for LQG regulators, IEEE Transactions on Automatic Control, AC-23, 756-757, 1978.
- Doyle, J., Glover, K., Khargonekar, P. and Francis, B. State-Space solutions to standard  $H_2$  and  $H_\infty$  control problems. IEEE Transactions on Automatic Control, AC-34(8), 831-847, 1989.
- Fan, G. W. Optimal output feedback vibration control of rotor-bearing systems. Ph. D. Thesis, Arizona State University, Arizona, 1991.
- Fang, J. Q., Li, Q. S. and Jeary, A. P., 2003, Modified independent modal space control of m.d.o.f. system, Journal of Sound and Vibration, vol.261, n. 1, pp. 421-441.

- Flint, E.; Liang, C. and Rogers, C. A., Eletromechanical analysis of piezoelectric stack active member power consumption. Journal of Intelligent Material Systems and Structures, vol.6, pp. 117-124, 1995.
- Fuller, C. R., Elliott, S. J. and Nelson, P. A., Active control of vibration, Academic Press, 1996.
- Gao, W.; Chen, J. J.; Ma, H. B. and Ma, X. S. Optimal placement of active bars in active vibration control for piezoelectric intelligent truss structures with random parameters. Computers and structures, vol. 1, n. 81, pp. 53-60, 2003.
- Gawronski, W. and Juang, J. N. Model reduction for flexible structures. In: Control and dynamics systems science, ed. C.T. Leondes, v. 36, Academic Press, San Diego, CA, p. 143-222, 1990.
- Gawronski, W. Dynamics and control of structures: A modal approach. 1.ed. New York: Springer Verlag, 231p, 1998.
- Glover, K. Optimal hankel-norm approximations of linear multivariable systems and their  $H_\infty$  - Error Bounds. In: International Journal of Control, v. 39, p. 1115-1193, 1984.
- Guan, Y. Active vibration control of a gear pair system. Ph. D. Thesis, Department of Mechanical Engineering, Graduate School of University of Alabama, Tuscaloosa, Alabama, 2004.
- Hwang, W. S. and Park, H. C. Finite element modeling of piezoelectric sensors and actuators. AIAA Journal, v. 31, n. 5, p. 930-937, 1993.
- IEEE Standard on Piezoelectricity, (IEEE Standard 176-1987), Institute of Electrical and Electronic Engineers, 345 East 47th St., New York, NY 10017, 54 pages, 1987.
- Jemai, B., Ichchou, M. N., Jézéquel, L. e Noe, M. An assemble plate active control damping set-up: Optimization and control, Journal of Sound and Vibration, vol.225, n. 2, pp. 327-343, 1999.
- Jia, J. Optimization of piezoelectric actuator systems for vibration control of flexible structures. Ph. D. Thesis, Department of Mechanical Engineering, Faculty of the Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, Virginia, 1990.
- Lammering, R., Jia, J. and Rogers, C. A., "Optimal placement of piezoelectric actuators in adaptive truss structures", Journal of Sound and Vibration, vol.171, n. 1, pp. 67-85, 1994.
- Lee, Y. S. Active control of smart structures using distributed piezoelectric transducers. Ph. D. Thesis, University of Southampton, Faculty of Engineering and Applied Science, Institute of Sound and Vibration Research, 2000.
- Lewis, B.S. J. A. Finite element modeling and active control of an inflated torus using piezoelectric devices. Master Thesis, Faculty of the Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, Virginia, 2000.

- Liang, C.; Sun, F. P. and Rogers, C. A., Electro-mechanical impedance modeling of active material systems, Journal of Smart Materials and Structures, vol.5, pp. 171-186, 1996.
- Lindberg, R. E. Jr. Optimization of actuator placement via degree of controllability criteria including spillover consideration. AIAA Journal, 1982.
- Liu, F., Zhang, L. “Modal-Space control of flexible intelligent truss structures via modal filters”, In: International Modal Analysis Conference – XXIII IMAC, pp. 187-193, 2000.
- Lopes Jr. V.; Pereira, J. A. and Inman D. J. Structural FRF acquisition via electric impedance measurement applied to damage location. In: International Modal Analysis Conference – XVIII IMAC, San Antonio, pp. 1549-1555, 2000.
- Maia, N., Silva, J. et al. Theoretical and experimental modal analysis. Research Studies Press Ltd., Baldock, Hertfordshire, England, 1996.
- Marques, R. F. A. Estudo teórico e numérico de absorvedores dinâmicos de vibrações ativos e adaptativos, Dissertação de Mestrado, UFU, 2000.
- Meirovitch, L., and Oz, H. Modal-space control of large flexible spacecraft possessing ignorable coordinates, Journal of Guidance, Control and Dynamics, vol. 3, n. 6, pp.569-577, 1980.
- Meirovitch, L. Dynamics and Control of Structures. John Wiley & Sons, 1990.
- Meirovitch, L. Principles and Techniques of Vibrations. Prentice Hall, 1997.
- Moore, B. C. Principal component analysis in linear systems: Controllability, observability and model reduction. In: IEEE Trans. on Automat. Contr., AC-26, p. 17-31, 1981.
- Moreira, F. J. O. Um controlador  $H_{\infty}$  de banda limitada para controle ativo de vibração estrutural. Tese de Doutorado, Depto. de Mecânica Computacional, UNICAMP, 199p, 1998.
- Nagamine, R. K. Lógica difusa para controle não convencional de uma viga inteligente, Dissertação de Mestrado, USP-São Carlos, 2001.
- Panossian, H.; Gawronski, W. and Ossman, J. Balanced shaker and sensor placement for modal testing of large flexible structures. In: International Modal Analysis Conference – IMAC-XVI, Santa Barbara, CA, 1998.
- PI Physik Instrumente L. P., Applications and research. Disponível em: <http://www.piceramic.com>, acesso em: janeiro de 2004.
- Pinheiro, L. e Silveira, R. A. M., Análise da estabilidade elástica de treliças espaciais. In: R. Esc. Minas, vol.57, n. 2, pp. 85-92, 2004.
- Silva, S. e Lopes Jr., V. Redução dos efeitos spillover em problemas de controle estrutural. In: 3.º Congresso Temático de Dinâmica, Controle e Aplicações, 3.º DINCON, pp. 520-524, 2004.
- Singh, S. P., Pruthi, H. S. and Agarwal, V. P., Efficient modal control strategies for active control of vibrations, Journal of Sound and Vibration, vol.262, n. 2, pp. 563-575, 2003.

- Skelton, R. E., Dynamic system control: Linear system analysis and synthesis, Wiley, New York, 1998.
- Steffen Jr., V., e Rade, D. A., Fundamentos e aplicações de materiais inteligentes, In: 3.º Congresso Temático de Aplicações de Dinâmica e Controle, in CD Room, 2004.
- Stein, G. and Athans, M. The LQG/LTR procedure for multivariable control design. IEEE Transactions on automatic control, AC-32, 105-114, 1987.
- Valer, C. E. I. Uma introdução ao controle robusto com aplicações a estruturas flexíveis. Dissertação de Mestrado, PUC-RJ – Depto. de Engenharia Mecânica, 1999.
- Wang., Z.; Chen, S. and Han, W. Integrated structural and control optimization of intelligent structures. Engineering Structures – Elsevier, vol. 21, p. 183-191, 1999.
- Xu, B. and Jiang, J. S. Integrated optimization of structure and control for piezoelectric intelligent trusses with uncertain placement of actuators and sensors. Computational Mechanics, 2004.
- Yan., Y. J. and Yam, L. H. A synthetic analysis on design of optimum control for an optimized intelligent structure. Journal of Sound and Vibration, vol. 4, n. 249, p. 775-784, 2002.
- Zhou, S., Liang, C. and Rogers, C. A., Integration and design of piezoceramic elements in intelligent structures, Journal of Intelligent Material Systems and Structures, vol. 6, n. 6, pp. 733-742, 1995.