



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

ÁREA DE FÍSICA APLICADA

LUIS RENATO DE CAMPOS DAMIN

MODELOS PARA RESSONÂNCIA DE MOVIMENTO MÉDIO

INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS E CIÊNCIAS EXATAS

RIO CLARO

2023

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”

Instituto de Geociências e Ciências Exatas

Câmpus de Rio Claro - SP

Luis Renato de Campos Damin

Modelos para ressonância de movimento médio

Dissertação de Mestrado apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas do Câmpus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física.

Orientadora: Dra. Maria Helena Moreira Moraes

Rio Claro - SP

2023

D159m Damin, Luis Renato de Campos
Modelos para ressonância de movimento médio / Luis Renato de Campos Damin. -- Rio Claro, 2023
90 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp), Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro
Orientadora: Maria Helena Moreira Moraes

1. Física. 2. Mecânica Celeste. 3. Astronomia. 4. Ressonâncias. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“Júlio de Mesquita Filho”
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

Luis Renato de Campos Damin

Modelos para ressonância de movimento médio

Dissertação de Mestrado apresentada
ao Instituto de Geociências e Ciências
Exatas do Câmpus de Rio Claro, da
Universidade Estadual Paulista “Júlio de
Mesquita Filho”, como parte dos
requisitos para obtenção do título de
Mestre em Física

Comissão Examinadora

Prof(a). Dr(a). Maria Helena Moreira Moraes
IGCE / UNESP/Rio Claro (SP)

Prof. Dr. Tadashi Yokoyama
IGCE / UNESP/Rio Claro (SP)

Prof. Dr. Adrian Rodriguez Colucci
UFRJ / Rio de Janeiro

Conceito: Aprovado.

Rio Claro (SP), 10 de julho de 2023.

AGRADECIMENTOS

Esse trabalho não seria possível sem o apoio dos meus pais, Maria do Carmo e Luiz Antonio e minha irmã Denise, que incentivaram sempre meus estudos me dando apoio, suporte e condição para que eu pudesse enfrentar quaisquer intempéries que surgissem ao longo do trajeto.

Agradeço a instituição UNESP que sempre me acolheu desde a graduação, me fornecendo excelentes professores nos quais sem seus ensinamentos e carinho tornariam este trabalho inviável.

Sou grato pela paciência da minha orientadora Doutora Maria Helena Moreira Morais, que sempre se mostrou disposta a me orientar desde o começo, sempre disponível e de prontidão para quaisquer dúvidas que foram surgindo ao longo do estudo.

No posso esquecer de agradecer todos os amigos que se fizeram presente ao longo da trajetória, auxiliando de todas as maneiras, seja nos momentos de diversão fazendo a vida ficar mais leve, quanto nos momentos de tensão, onde o apoio de todos foi e sempre será fundamental.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001

Resumo

Já é conhecido que o problema de três corpos não possui uma solução analítica. Para o estudo de ressonâncias de movimento médio desse problema de maneira analítica se recorre ao uso da função perturbadora, onde a partir de uma expansão da mesma, resultados analíticos podem ser inferidos. A expansão clássica da função perturbadora é feita considerando problemas aproximadamente coplanares, logo sua aplicação fica um tanto quanto limitada. Aqui apresentamos as considerações necessárias para a expansão da função perturbadora considerando órbita quase polares e para inclinações arbitrárias. Feita a expansão explícita neste trabalho e comparando com relação a função perturbadora clássica algumas diferenças são notadas, como o fato de que os coeficientes que acompanham as potências na excentricidade e na inclinação de uma ressonância $p : q$ depende da paridade da ressonância, e não da sua ordem. Estudamos o modelo analítico conhecido como o modelo do pêndulo que faz uso de um ou mais ângulos ressonantes para inferir resultados sobre a oscilação do semieixo maior para uma determinada ressonância. Aplicamos os modelos para as ressonâncias $2 : 1$, $1 : 2$, $3 : 1$ e $1 : 3$ utilizando a expansão para o caso quase polar.

Palavra-chave: Dinâmica orbital, Estabilidade e Caos, Ressonância de movimento médio.

Abstract

It is already known that the study of the three-body problem does not have an analytical solution. For the study of mean motion resonances in an analytical way the disturbing function is used, where from an expansion in orbital elements, analytical results can be inferred. The classic expansion of the disturbing function is done considering approximately coplanar problems, so its application is limited. Here we present the necessary considerations for the expansion of the disturbing function considering almost polar orbits and for arbitrary inclinations. Having done the explicit expansion in this work and comparing it with the classical disturbing function, some differences are noted, such as the fact that the coefficients that accompany the powers in the eccentricity and inclination of a resonance $p : q$ depend on the parity of the resonance, and not on the order. We study the analytical model known as the pendulum model that makes use of one or more resonant angles to infer results on the semi-major axis libration for a given resonance. We apply the studied models in the resonances $2 : 1$, $1 : 2$, $3 : 1$ e $1 : 3$ using the expansion for the almost polar case.

Keyword: Orbital Dynamics, Stability and Chaos, Mean motion resonance.

Lista de Figuras

2.1	Diagrama do problema de três corpos.	15
4.1	Curvas de níveis do Hamiltoniano (4.12)	41
4.2	Curvas de níveis da equação (4.26) para diferentes valores de β . . .	45
5.1	Amplitude do coeficiente da função perturbadora $f_k^{3:1}$ associado a cada $\phi_k^{3:1}$	56
5.2	Oscilação esperada do parâmetro α de acordo com cada k associado ao ângulo $\phi_k^{3:1}$. Pontos interiores as linhas indicam uma condição inicial de forma que haja a libração do angulo ressonante $\phi_k^{3:1}$	57
5.3	Oscilação esperada do parâmetro α considerando $k = -2, 0, 2, 4$. A linha azul representa $\omega = 0^\circ$, a verde $\omega = 45^\circ$ e a vermelha $\omega = 90^\circ$. .	58
5.4	Amplitude do coeficiente da função perturbadora $f_k^{2:1}$ associado a cada $\phi_k^{2:1}$	59
5.5	Variação esperada do parâmetro α de acordo com cada k associado ao ângulo $\phi_k^{2:1}$	59
5.6	Variação esperada do parâmetro α considerando $k = -5, -3, -1, 1$. A linha azul representa $\omega = 0^\circ$, a verde $\omega = 45^\circ$ e a vermelha $\omega = 90^\circ$	60
5.7	Amplitude do coeficiente da função perturbadora $f_k^{1:3}$ associado a cada $\phi_k^{1:3}$	61
5.8	Amplitude do coeficiente da função perturbadora $f_{2k}^{2:6}$ associado a cada $\phi_{2k}^{2:6}$	62
5.9	Oscilação esperada do semieixo maior de acordo com cada k usando a contribuição de $\phi_k^{3:1}$ e seu segundo harmônico $\phi_{2k}^{6:2}$	63
5.10	Oscilação esperada do parâmetro α considerando $k = -2, 0, 2, 4$. A linha azul representa $\omega = 0^\circ$, a verde $\omega = 45^\circ$ e a vermelha $\omega = 90^\circ$. .	64

5.11 Amplitude do coeficiente da função perturbadora $f_k^{1:2}$ associado a	
cada $\phi_k^{1:2}$.	64
5.12 Amplitude do coeficiente da função perturbadora $f_{2k}^{2:4}$ associado a	
cada $\phi_{2k}^{2:4}$.	65
5.13 Oscilação esperada de α de acordo com cada k associado ao ângulo	
$\phi_k^{1:2}$ e seu segundo harmônico $\phi_{2k}^{2:4}$. Para a amplitude relacionada com	
$k = 0$ precisamos usar o modelo apenas com um harmônico (caso	
contrário β não está definido).	66
5.14 Oscilação esperada do parâmetro α considerando $k = -3, -1, 0, 1$. A	
linha azul representa $\omega = 0^\circ$, a verde $\omega = 45^\circ$ e a vermelha $\omega = 90^\circ$.	67
B.1 Curvas de níveis do Hamiltoniano (4.53) para $b = 0,8$ e diferentes	
valores de δ . Imagem retirada de [4]	81
B.2 Curvas de níveis do Hamiltoniano (4.53) para $b = 1,8$ e diferentes	
valores de δ . Imagem retirada de [4]	81
B.3 Curvas de níveis do Hamiltoniano (4.53) para $b = 2,5$ e diferentes	
valores de δ . Imagem retirada de [4]	82

SUMÁRIO

1	Introdução	13
2	Problema de 3 corpos, Função Perturbadora	15
2.1	Expansão literal em elementos orbitais	17
2.1.1	Parte direta	18
2.1.2	Parte indireta.	20
2.2	Exemplo de expansão até segunda ordem	20
2.2.1	Parte direta	21
2.2.2	Parte indireta	26
2.3	Pertubações Ressonantes	26
2.4	Ressonância de movimento médio	28
3	Função perturbadora para diferentes inclinações	31
3.1	Órbitas quase polares	31
3.1.1	Parte Direta	32
3.1.2	Parte Indireta	34
3.2	Inclinação arbitrária.	34
3.3	Pertubações Ressonantes	37
4	O Modelo do Pêndulo	39
4.1	O modelo para um ângulo ressonante	39
4.2	Modelo considerando um segundo harmônico	43
4.3	Modelo com diversos ângulos ressonantes	46
4.3.1	Modelo com dois ângulos ressonantes	47

4.3.2	Modelo com vários ângulos ressonantes	49
4.3.3	Modelo com dois ângulos ressonantes e respectivos segun-	
	dos harmônicos	50
4.3.4	Modelo com vários ângulos ressonantes e respectivos segun-	
	dos harmônicos	52
5	Exemplos de ressonâncias de movimento médio	55
5.1	Ressonância 3 : 1 quase polar com Júpiter	55
5.2	Ressonância 2 : 1 quase polar com Júpiter	58
5.3	Ressonância 1 : 3 quase polar com Netuno	60
5.4	Ressonância 1 : 2 quase polar com Netuno	63
6	Conclusão	69
	Referências	71
A	Coeficientes de Laplace	75
B	Modelo do pendulo, dois ângulos ressonantes com segundos harmô-	
	nicos	79
C	Expansões Elíticas	85

1 Introdução

O sistema solar formou-se a partir de uma nuvem de gás e poeira em rotação, o que explica as órbitas aproximadamente coplanares dos planetas e da maioria dos asteroides e transneptunianos. No entanto, asteroides com órbitas cujas inclinações não são nulas existem [1], em grande maioria entre as órbitas dos planetas gigantes (Centauros) e no cinturão de Kuiper (Transneptunianos).

Desenvolvimentos recentes na modelagem analítica de configurações com inclinação mútua elevada [2, 3, 4, 5, 6] foram essenciais para identificar objetos com órbitas polares e em ressonâncias orbitais com os planetas gigantes [7, 8, 9, 10].

Simulações no âmbito do problema de 3 corpos com dissipação mostraram que órbitas retrógradas [11] (órbitas em que a inclinação do corpo é superior a 90° e menor que 270°) capturam objetos mais frequentemente do que órbitas prógradas [12, 13]. No entanto, a maior parte dos estudos analíticos sobre ressonância aplicam-se para o caso de movimento prógrado e quase planar [14] (inclinação próxima de 0°). Dessa forma, torna-se necessário completar o estudo de modelos para ressonância em configurações orbitais com inclinação mútua arbitrária.

Um dos fenômenos recorrentes que acontecem no problema de 3 corpos são as ressonâncias de movimento médio, que ocorrem quando as frequências associadas ao movimento dos objetos nas suas órbitas (denominadas de movimentos médios) são ressonantes. Por exemplo, Plutão está na ressonância de movimento médio 2 : 3 com Netuno [15]. As órbitas de Plutão e Netuno se cruzam mas a periodicidade devido à ressonância (Plutão completa 2 órbitas em torno do sol enquanto que Netuno completa 3) confere estabilidade ao sistema (os 2 objetos não colidem). De forma análoga, os asteroides troianos estão na ressonância de movimento médio 1 : 1 com Júpiter, partilhando a órbita do planeta mas mantendo uma distância angular

a este de cerca de $\pm 60^\circ$ [16]. O asteroide (514107) Ka'epaoka'awela, recentemente descoberto, também está na ressonância de movimento médio 1 : 1 com Júpiter mas numa configuração retrógrada [8, 9]. Por outro lado, as órbitas de asteroides inicialmente na ressonância de movimento médio 3 : 1 com Júpiter têm aumento da excentricidade por difusão caótica na escala de tempo de alguns milhões de anos, tornando-se Near Earth Asteroids [17].

Como a maioria dos estudos sobre ressonâncias de movimento médio aplicam-se apenas aos casos de órbitas prógradas e quase-planares. O objetivo do trabalho é estudo de ressonâncias de movimento médio para configurações nas quais as inclinações são arbitrárias, seguindo as construções e considerações feitas em [2] e [3], com âmbito de aumentar o entendimento sobre esses casos.

O Capítulo 2 começa apresentando a expansão da função perturbadora para o caso prógrado planar [18, 19], que apresenta as ideias e metodologias nas quais serão seguidas para então no Capítulo 3 ampliarmos a validade da função perturbadora, realizando sua expansão tanto para o caso polar [2] (inclinações próximas de 90°) quanto para o caso de uma inclinação arbitrária [3].

No Capítulo 4 é desenvolvido um modelo (seguindo como base [3, 4]) para avaliar qual será a maior variação possível do semi eixo maior para estarmos dentro de uma ressonância e então usaremos o mesmo para obter as curvas de amplitude do semi eixo maior nas aplicações no Capítulo 5.

2 Problema de 3 corpos, Função Perturbadora

Seguindo como base a construção feita em [18] consideremos o problema geral de três corpos, isto é, sejam três corpos de massas m_c , m_i e m_j respectivamente onde ambas se atraem seguindo a lei da gravitação, logo monta-se o seguinte diagrama:

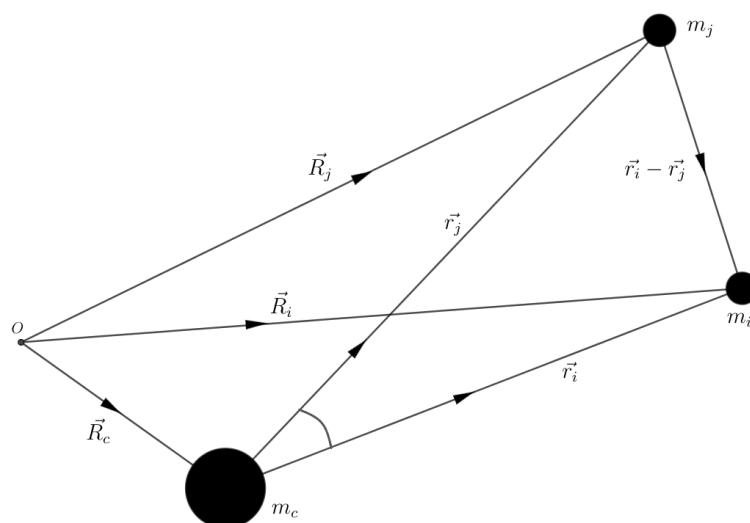


Figura 2.1: Diagrama do problema de três corpos.

Os vetores posições de m_c , m_i e m_j com base na origem inercial O são nomeados de $\vec{R}_c$, $\vec{R}_i$ e $\vec{R}_j$ respectivamente. Sejam $\vec{r}_i$ e $\vec{r}_j$ os vetores posições das massas m_i e m_j com respeito a m_c .

Ao construirmos a segunda lei de Newton para cada corpo obtemos as equações:

$$m_c \ddot{\vec{R}}_c = \mathbb{G} m_c m_i \frac{\vec{r}_i}{r_i^3} + \mathbb{G} m_c m_j \frac{\vec{r}_j}{r_j^3} \quad (2.1)$$

$$m_i \ddot{\vec{R}}_i = \mathbb{G} m_i m_j \frac{(\vec{r}_j - \vec{r}_i)}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|^3} - \mathbb{G} m_i m_c \frac{\vec{r}_i}{r_i^3} \quad (2.2)$$

$$m_j \ddot{\vec{R}}_j = \mathbb{G} m_j m_i \frac{(\vec{r}_i - \vec{r}_j)}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^3} - \mathbb{G} m_j m_c \frac{\vec{r}_j}{r_j^3} \quad (2.3)$$

onde $\mathbb{G}$ é a constante de gravitação de Newton.

Podemos escrever os vetores aceleração dos corpos secundários com relação ao primário da seguinte forma:

$$\ddot{\vec{r}}_i = \ddot{\vec{R}}_i - \ddot{\vec{R}}_c \quad \ddot{\vec{r}}_j = \ddot{\vec{R}}_j - \ddot{\vec{R}}_c \quad (2.4)$$

Substituindo a equação (2.4) em (2.2)-(2.3) temos

$$\ddot{\vec{r}}_i + \mathbb{G}(m_c + m_i) \frac{\vec{r}_i}{r_i^3} = \mathbb{G} m_j \left(\frac{\vec{r}_j - \vec{r}_i}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|^3} - \frac{\vec{r}_j}{r_j^3} \right) \quad (2.5)$$

$$\ddot{\vec{r}}_j + \mathbb{G}(m_c + m_j) \frac{\vec{r}_j}{r_j^3} = \mathbb{G} m_i \left(\frac{\vec{r}_i - \vec{r}_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^3} - \frac{\vec{r}_i}{r_i^3} \right) \quad (2.6)$$

onde podemos definir as seguintes expressões:

$$\mathcal{U}_i = \mathbb{G} \frac{m_c + m_i}{r_i} \quad \mathcal{U}_j = \mathbb{G} \frac{m_c + m_j}{r_j} \quad (2.7)$$

pois assim as equações (2.5) e (2.6) são transformadas em

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{r}}_i &= \ddot{\vec{V}}_i (\mathcal{U}_i + \mathcal{R}_i) \\ \ddot{\vec{r}}_j &= \ddot{\vec{V}}_j (\mathcal{U}_j + \mathcal{R}_j) \end{aligned} \quad (2.8)$$

de forma que $\mathcal{U}_i$ e $\mathcal{U}_j$ são as partes centrais do potencial total e os termos do tipo $\mathcal{R}$ são chamados de **função perturbadora**, que indicam o potencial que surge das massas secundárias. Como $\vec{r}_i$ não tem dependência de x_j , y_j e z_j e analogamente $\vec{r}_j$ não possui dependência de x_i , y_i e z_i então a função perturbadora pode ser escrita como

$$\mathcal{R}_i = \frac{\mathbb{G} m_j}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|} - \mathbb{G} m_j \frac{\vec{r}_i \cdot \vec{r}_j}{r_j^3} \quad \mathcal{R}_j = \frac{\mathbb{G} m_i}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} - \mathbb{G} m_i \frac{\vec{r}_j \cdot \vec{r}_i}{r_i^3} \quad (2.9)$$

onde o termo da função perturbadora que está associado com $|\vec{r}_j - \vec{r}_i|$ é chamado de **parte direta** enquanto a parte associado com $\vec{r}_i \cdot \vec{r}_j$ é chamado de **parte indireta**.

Pode-se estender a análise feita até então para o problema de n corpos sem perda de generalidade, porém focaremos no caso em que os corpos $m = m_i$ e $m' = m_j$ sejam duas massas pontuais e suas posições $\vec{r}$, $\vec{r}'$ serão dados com

relação ao centro de massa pois assim a equação do movimento para a massa secundária interna é escrita como

$$\ddot{\vec{r}} + \mathbb{G}(m_c + m) \frac{\vec{r}}{r^3} = Gm' \left(\frac{\vec{r}' - \vec{r}}{|\vec{r}' - \vec{r}|^3} - \frac{\vec{r}'}{r'^3} \right) \quad (2.10)$$

e para o secundário externo

$$\ddot{\vec{r}'} + \mathbb{G}(m_c + m') \frac{\vec{r}'}{r'^3} = Gm \left(\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} - \frac{\vec{r}}{r^3} \right) \quad (2.11)$$

onde a função perturbadora aparece como

$$\mathcal{R} = \frac{\mu'}{|\vec{r}' - \vec{r}|} - \mu' \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r'^3} \quad \mathcal{R}' = \frac{\mu}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \mu \frac{\vec{r}' \cdot \vec{r}}{r^3} \quad (2.12)$$

$$\mu' = \mathbb{G}m' \quad \mu = \mathbb{G}m$$

de maneira que $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}'$ correspondem a função perturbadora dos corpos secundários interno e externo respectivamente.

2.1 Expansão literal em elementos orbitais

Para fazer o uso da função perturbadora de maneira analítica (como será visto mais adiante) devemos primeiro realizar a sua expansão em função dos elementos orbitais dos corpos m e m' . Os elementos orbitais do corpo m em que a expansão será realizada são:

- a - semi eixo maior
- e - excentricidade
- I - inclinação
- ϖ - longitude do pericentro
- Ω - longitude do nodo ascendente
- λ - longitude média

de maneira análoga temos a' , e' , I' , ϖ' , Ω' e λ' para m' .

Começamos separando a função perturbadora (2.12) em suas partes direta e indireta da forma:

$$\mathcal{R} = \frac{\mu'}{a'} \mathcal{R}_D + \frac{\mu'}{a'} \alpha \mathcal{R}_E \quad \mathcal{R}' = \frac{\mu}{a'} \mathcal{R}_D + \frac{\mu}{a'} \frac{1}{\alpha^2} \mathcal{R}_I \quad (2.13)$$

onde

$$\alpha = \frac{a}{a'} \quad \mathcal{R}_D = \frac{a'}{|\vec{r}' - \vec{r}|} \quad \mathcal{R}_E = -\left(\frac{r}{a}\right) \left(\frac{a'}{r'}\right)^2 \cos \psi \quad \mathcal{R}_I = -\left(\frac{r'}{a'}\right) \left(\frac{a}{r}\right)^2 \cos \psi$$

de forma que $\mathcal{R}_D$ é parte direta, $\mathcal{R}_E$ é parte indireta do perturbador externo e $\mathcal{R}_I$ é parte indireta do perturbado interno. O fator α é importante pois é relevante no estudo de ressonâncias de movimento médio, devido a isso a expansão será feita introduzindo este fator.

2.1.1 Parte direta

Seja ψ o ângulo entre os vetores posições $\vec{r}$ e $\vec{r}'$, assim pela lei dos cossenos

$$|\vec{r}' - \vec{r}|^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \psi$$

logo podemos escrever a parte direta da função perturbadora da forma

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{\mathcal{R}_D}{a'} = (r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \psi)^{-\frac{1}{2}} \quad (2.14)$$

Assumindo que as duas massas estejam no mesmo plano (isto é $I = I' = 0^\circ$), temos

$$\psi = (f' + \varpi') - (f + \varpi) \quad (2.15)$$

onde f e f' representam as anomalias verdadeiras e ϖ e ϖ' representam as longitudes do pericentro de m e m' respectivamente. Com base na equação (2.15) podemos definir

$$\Psi = \cos \psi - \cos(\theta - \theta') \quad (2.16)$$

de forma que $\theta = \varpi + f$ e $\theta' = \varpi' + f'$ são as longitudes verdadeiras do corpo interior e exterior respectivamente. Repare que Ψ é próximo de zero quando $I, I' \approx 0$ e com base neste fato vamos substituir o valor de $\cos \psi$ dado por (2.16) em (2.14) para assim realizar uma expansão de Δ^{-1} em série de Taylor com respeito a Ψ em torno de $\Psi = 0$ obtendo

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta} &= (r^2 + r'^2 - 2rr'(\cos(\theta - \theta') + \Psi))^{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{\Delta_0} + rr'\Psi \frac{1}{\Delta_0^3} + \frac{3}{2}(rr'\Psi)^2 \frac{1}{\Delta_0^5} + \dots \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(2i)!}{(i!)^2} \left(\frac{1}{2}rr'\Psi\right)^i \frac{1}{\Delta_0^{2i+1}} \end{aligned} \quad (2.17)$$

onde $\Delta_0 = (r^2 + r'^2 - 2rr'(\cos(\theta - \theta')))^{\frac{1}{2}}$.

Assumindo que as excentricidades são próximas de zero, é razoável esperar que $r \approx a$ e $r' \approx a'$, então vamos expandir Δ_0 em série de Taylor com respeito a r e r' em torno de a e a' obtendo:

$$\frac{1}{\Delta_0^{2i+1}} = \frac{1}{\rho_0^{2i+1}} + (r - a) \frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{1}{\rho_0^{2i+1}} \right) + (r' - a') \frac{\partial}{\partial a'} \left(\frac{1}{\rho_0^{2i+1}} \right) + \dots \quad (2.18)$$

onde

$$\rho_0 = [a^2 + a'^2 - 2aa' \cos(\theta - \theta')]^{\frac{1}{2}} \quad (2.19)$$

Isolando a e a' em cada parcela de (2.18) tem-se

$$\frac{1}{\Delta_0^{2i+1}} = \frac{1}{\rho_0^{2i+1}} + \left(\frac{r}{a} - 1 \right) \frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{1}{\rho_0^{2i+1}} \right) + \left(\frac{r'}{a'} - 1 \right) \frac{\partial}{\partial a'} \left(\frac{1}{\rho_0^{2i+1}} \right) + \dots \quad (2.20)$$

podemos chamar $\epsilon = \frac{r}{a} - 1$, $\epsilon' = \frac{r'}{a'} - 1$ e definir $D_{m,n} = a^m a'^n \frac{\partial^{m+n}}{\partial a^m \partial a'^n}$ para reescrever a equação (2.20) como:

$$\frac{1}{\Delta_0^{2i+1}} = \left[1 + \epsilon D_{1,0} + \epsilon' D_{0,1} + \frac{1}{2!} (\epsilon^2 D_{2,0} + 2\epsilon\epsilon' D_{1,1} + \epsilon'^2 D_{0,2}) + \dots \right] \frac{1}{\rho^{2i+1}} \quad (2.21)$$

Isolando a' em (2.19) e lembrando que $\alpha = \frac{a}{a'}$ resulta em

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho_0^{2i+1}} &= a'^{-(2i+1)} (1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos(\theta - \theta'))^{-(i+\frac{1}{2})} \\ &= a'^{-(2i+1)} \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{\infty} b_{i+\frac{1}{2}}^{(j)}(\alpha) \cos j(\theta - \theta') \end{aligned} \quad (2.22)$$

onde $b_{i+\frac{1}{2}}^{(j)}(\alpha)$ são chamados **coeficientes de Laplace**, definidos a partir da expansão em série de Fourier da função:

$$(1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos(\theta - \theta'))^{-(i+\frac{1}{2})} = \sum_{-\infty}^{\infty} b_{i+\frac{1}{2}}^{(j)}(\alpha) \cos j(\theta - \theta')$$

logo os coeficientes serão dados por:

$$b_s^j(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos ju}{(1 - 2\alpha \cos \psi + \alpha^2)^s} du$$

Como os operadores $D_{m,n}$ atuando somente nos coeficientes de Laplace temos

$$A_{i,j,m,n} = D_{m,n} \left(a'^{-(2i+1)} b_{i+\frac{1}{2}}^{(j)}(\alpha) \right) = a^m a'^n \frac{\partial^{m+n}}{\partial a^m \partial a'^n} \left(a'^{-(2i+1)} b_{i+\frac{1}{2}}^{(j)}(\alpha) \right)$$

de forma que $\Delta_0^{-(2i+1)}$ é escrito como:

$$\frac{1}{\Delta_0^{2i+1}} = \frac{1}{2} \sum_{j=-\infty}^{\infty} [A_{i,j,0} + \epsilon A_{i,j,1,0} + \epsilon' A_{i,j,0,1} + \dots] \cos j(\theta - \theta') \quad (2.23)$$

Agrupando a somatória em (2.23) resulta em

$$\frac{1}{\Delta_0^{2i+1}} = \frac{1}{2} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \sum_{k=0}^l \binom{l}{k} \epsilon^k \epsilon'^{l-k} A_{i,j,k,l-k} \right] \cos j(\theta - \theta') \quad (2.24)$$

onde ao juntar as equações (2.17) e (2.24) conclui-se que:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_D = & \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(2i)!}{(i!)^2} \left(\frac{1}{2} \frac{r}{a} \frac{r'}{a'} \Psi \right)^i \frac{a^i a'^{i+1}}{2} \\ & \times \frac{1}{2} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \sum_{k=0}^l \binom{l}{k} \epsilon^k \epsilon'^{l-k} A_{i,j,k,l-k} \right] \cos j(\theta - \theta') \end{aligned} \quad (2.25)$$

Lembrando que a construção feita assumiu hipóteses, como $I, I' \approx 0$ e $e, e' \approx 0$ para ambos os planetas, logo tal expansão não deve ser utilizada em casos em que $I = 60^\circ$ por exemplo. Para isso será estudado mais adiante outras expansões, tanto para o caso polar ($I \approx 90^\circ$) quando o caso em que a inclinação é arbitrária.

2.1.2 Parte indireta.

Para a expansão das partes indiretas $\mathcal{R}_E$ e $\mathcal{R}_I$ a construção é mais simples, pois como $\vec{r} \cdot \vec{r}' = rr' \cos \psi$ então

$$\cos \psi = \frac{xx' + yy' + zz'}{rr'} \quad (2.26)$$

onde teremos que:

$$\begin{aligned} \frac{x}{r} &= \cos \Omega \cos(\omega + f) - \sin \Omega \sin(\omega + f) \cos I, \\ \frac{y}{r} &= \sin \Omega \cos(\omega + f) + \cos \Omega \sin(\omega + f) \cos I, \\ \frac{z}{r} &= \sin(\omega + f) \sin I, \end{aligned} \quad (2.27)$$

e similarmente para x', y' e z' .

Assim para obter a expansão basta substituir (2.27) em (2.26) e aplicar as expansões elítica de $\sin f$ e $\cos f$ feitas no Apêndice C.

2.2 Exemplo de expansão até segunda ordem

Vamos dar o exemplo calculando a expansão até segunda ordem na excentricidades e inclinações, ou seja sempre que aparecer $e^{k_1} s^{k_2}$ teremos que $k_1 + k_2 \leq 2$ onde s estará associado com a inclinação como será mostrado adiante.

2.2.1 Parte direta

Começamos calculando a expansão de $\cos \psi$, logo precisamos encontrar uma expressão para (2.27) que não envolva f . Para isso sejam as expansões elíticas de $\sin f$ e $\cos f$ em termos de M calculadas no Apêndice C até segunda ordem dadas por:

$$\begin{aligned}\sin f &= M + e \sin 2M + e^2 \left(\frac{9}{8} \sin 3M - \frac{7}{8} \sin M \right) \\ \cos f &= \cos M + e(\cos 2M - 1) + e^2 \left(\frac{9}{8} \cos 3M - \frac{9}{8} \cos M \right)\end{aligned}\quad (2.28)$$

Assim podemos escrever $\cos(\omega + f)$ e $\sin(\omega + f)$ da forma:

$$\begin{aligned}\cos(\omega + f) &= \cos(\omega + M) + e(\cos(\omega + 2M) - \cos \omega) \\ &+ e^2 \left(-\cos(\omega + M) - \frac{1}{8} \cos(\omega - M) + \frac{9}{8} \cos(\omega + 3M) \right)\end{aligned}\quad (2.29)$$

$$\begin{aligned}\sin(\omega + f) &= \sin(\omega + M) + e(\sin(\omega + 2M) - \sin \omega) \\ &+ e^2 \left(-\sin(\omega + M) + \frac{1}{8} \sin(M - \omega) + \frac{9}{8} \sin(\omega + 3M) \right)\end{aligned}\quad (2.30)$$

Seja $s = \sin \frac{1}{2}I$ logo $\cos I = 1 - 2s^2$, $\sin I = 2s$ e assim todas as vezes que a inclinação aparecer na expansão será unicamente dentro de s facilitando a notação e sua escrita. As expressões de $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{r}$ e $\frac{z}{r}$ serão:

$$\begin{aligned}\frac{x}{r} &= \cos(\omega + \Omega + M) + e(\cos(\omega + \Omega + 2M) - \cos(\omega + \Omega)) \\ &+ e^2 \left(\frac{9}{8} \cos(\omega + \Omega + 3M) - \frac{1}{8} \cos(\omega + \Omega - M) - \cos(\omega + \Omega + M) \right) \\ &+ s^2 (\cos(\omega - \Omega + M) - \cos(\omega + \Omega + M)) \\ \frac{y}{r} &= \sin(\omega + \Omega + M) + e(\sin(\omega + \Omega + 2M) - \sin(\omega + \Omega)) \\ &+ e^2 \left(\frac{9}{8} \sin(\omega + \Omega + 3M) - \frac{1}{8} \sin(\omega + \Omega - M) - \sin(\omega + \Omega + M) \right) \\ &- s^2 (\sin(\omega - \Omega + M) - \sin(\omega + \Omega + M)) \\ \frac{z}{r} &= 2s \sin(\omega + M) + 2es(\sin(\omega + 2M) - \sin \omega)\end{aligned}\quad (2.31)$$

onde expressões análogas são obtidas para $\frac{x'}{r'}$, $\frac{y'}{r'}$ e $\frac{z'}{r'}$.

Juntando (2.31) com (2.26) e utilizando tanto $M = \lambda - \varpi$ como $\omega = \varpi - \Omega$ temos

que $\cos \psi$ é escrito da forma:

$$\begin{aligned}
 \cos \psi = & (1 - e^2 - e' - s^2 - s') \cos [\lambda - \lambda'] + ee' \cos [2\lambda - 2\lambda' - \varpi + \varpi'] \\
 & + ee' \cos [\varpi - \varpi'] + 2ss' \cos [\lambda - \lambda' - \Omega + \Omega'] \\
 & + e \cos [2\lambda - \lambda' - \varpi] - e \cos [\lambda' - \varpi] \\
 & + e' \cos [\lambda - 2\lambda' + \varpi'] - e' \cos [\lambda - \varpi'] \\
 & + \frac{9}{8}e^2 \cos [3\lambda - \lambda' - 2\varpi] - \frac{1}{8}e^2 \cos [\lambda + \lambda' - 2\varpi] \\
 & + \frac{9}{8}e' \cos [\lambda - 3\lambda' + 2\varpi'] - \frac{1}{8}e' \cos [\lambda + \lambda' - 2\varpi'] \\
 & - ee' \cos [2\lambda - \varpi - \varpi'] - ee' \cos [2\lambda' - \varpi - \varpi'] \\
 & + s^2 \cos [\lambda + \lambda' - 2\Omega] + s' \cos [\lambda + \lambda' - 2\Omega'] \\
 & - 2ss' \cos [\lambda + \lambda' - \Omega - \Omega']
 \end{aligned} \tag{2.32}$$

O termo $\cos(\theta - \theta')$ pode ser re-escrito através de $\theta = \omega + \Omega + f$ como:

$$\begin{aligned}
 \cos [\theta - \theta'] = & (\cos \Omega \cos [\omega + f] - \sin \Omega \sin [\omega + f]) \\
 & \times (\cos \Omega' \cos [\omega' + f'] - \sin \Omega' \sin [\omega' + f']) \\
 & + (\sin \Omega \cos [\omega + f] + \cos \Omega \sin [\omega + f]) \\
 & \times (\sin \Omega' \cos [\omega' + f'] + \cos \Omega' \sin [\omega' + f'])
 \end{aligned} \tag{2.33}$$

Aplicando as expansões elíticas em (2.33), e junto com (2.32) teremos que o termo $\Psi = \cos \psi - \cos(\theta - \theta')$ é escrito como:

$$\begin{aligned}
 \Psi = & s^2 (\cos [\lambda + \lambda' - 2\Omega] - \cos [\lambda - \lambda']) \\
 & + 2ss' (\cos [\lambda - \lambda' - \Omega + \Omega'] - \cos [\lambda + \lambda' - \Omega - \Omega']) \\
 & + s'^2 (\cos [\lambda + \lambda' - 2\Omega'] - \cos [\lambda - \lambda'])
 \end{aligned} \tag{2.34}$$

Como $\frac{r}{a} \approx 1$ e $\frac{r'}{a'} \approx 1$ (pois assumimos $e, e' \approx 0$) teremos:

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{1}{2} \frac{r}{a} \frac{r'}{a'} \Psi \right) = & \frac{1}{2} s^2 (\cos [\lambda + \lambda' - 2\Omega] - \cos [\lambda - \lambda']) \\
 & + ss' (\cos [\lambda - \lambda' - \Omega + \Omega'] - \cos [\lambda + \lambda' - \Omega - \Omega']) \\
 & + \frac{1}{2} s'^2 (\cos [\lambda + \lambda' - 2\Omega'] - \cos [\lambda - \lambda'])
 \end{aligned} \tag{2.35}$$

Para concluir a expansão de (2.25) falta obter $\cos^j(\theta - \theta')$, onde j é um inteiro qualquer. Começemos notando que:

$$\begin{aligned}\cos j[\theta - \theta'] &= \cos j[\omega + \Omega + f] \cos j[\omega' + \Omega' + f'] \\ &+ \sin j[\omega + \Omega + f] \sin j[\omega' + \Omega' + f']\end{aligned}\quad (2.36)$$

Vamos fazer uso da expansão elítica de f feita no Apêndice C até segunda ordem dada por:

$$f = M + 2e \sin M + \frac{5}{4}e^2 \sin 2M \quad (2.37)$$

Substituindo (2.37) em $\cos j(\omega + \Omega + f)$, realizando a mudança de longitudes $M = \lambda - \varpi$, $\omega = \varpi - \Omega$ e fazendo a expansão em série de Taylor em e para $e = 0$, a expressão para $\cos j\theta$ se torna:

$$\begin{aligned}\cos j\theta &\approx (1 - j^2 e^2) \cos[j\lambda] \\ &+ \left(\frac{1}{2}j^2 e^2 - \frac{5}{8}j e^2\right) \cos[(2 - j)\lambda - 2\varpi] \\ &+ \left(\frac{1}{2}j^2 e^2 + \frac{5}{8}j e^2\right) \cos[(2 + j)\lambda - 2\varpi] \\ &- j e \cos[(1 - j)\lambda - \varpi] + j e \cos[(1 + j)\lambda - \varpi]\end{aligned}\quad (2.38)$$

De forma análoga para $\sin j\theta$ tem-se:

$$\begin{aligned}\sin j\theta &\approx (1 - j^2 e^2) \sin[j\lambda] \\ &+ \left(\frac{5}{8}j e^2 - \frac{1}{2}j^2 e^2\right) \sin[(2 - j)\lambda - 2\varpi] \\ &+ \left(\frac{5}{8}j e^2 + \frac{1}{2}j^2 e^2\right) \sin[(2 + j)\lambda - 2\varpi] \\ &+ j e \sin[(1 - j)\lambda - \varpi] + j e \sin[(1 + j)\lambda - \varpi].\end{aligned}\quad (2.39)$$

As expressões para $\cos j\theta'$ e $\sin j\theta'$ são obtidas de maneira análoga. Assim a

expressão para $\cos j(\theta - \theta')$ é:

$$\begin{aligned}
\cos j[\theta - \theta'] &\approx (1 - j^2 e^2 - j^2 e'^2) \cos[j(\lambda - \lambda')] \\
&+ \left(\frac{5}{8} j e^2 + \frac{1}{2} j^2 e^2\right) \cos[(2+j)\lambda - j\lambda' - 2\varpi] \\
&+ \left(\frac{1}{2} j^2 e^2 - \frac{5}{8} j e^2\right) \cos[(2-j)\lambda + j\lambda' - 2\varpi] \\
&+ j e \cos[(1+j)\lambda - j\lambda' - \varpi] - j e \cos[(1-j)\lambda + j\lambda' - \varpi] \\
&+ \left(\frac{1}{2} j^2 e'^2 - \frac{5}{8} j e'^2\right) \cos[j\lambda + (2-j)\lambda' - 2\varpi'] \\
&+ \left(\frac{5}{8} j e'^2 + \frac{1}{2} j^2 e'^2\right) \cos[j\lambda - (2+j)\lambda' + 2\varpi'] \\
&- j e' \cos[j\lambda + (1-j)\lambda' - \varpi'] + j e' \cos[j\lambda - (1+j)\lambda' + \varpi'] \\
&- j^2 e e' \cos[(1+j)\lambda + (1-j)\lambda' - \varpi - \varpi'] \\
&- j^2 e e' \cos[(1-j)\lambda + (1+j)\lambda' - \varpi - \varpi'] \\
&+ j^2 e e' \cos[(1+j)\lambda - (1+j)\lambda' - \varpi + \varpi'] \\
&+ j^2 e e' \cos[(1-j)\lambda - (1-j)\lambda' - \varpi + \varpi']
\end{aligned} \tag{2.40}$$

Podemos encontrar uma expressão para ϵ e ϵ' (onde lembrando que $\epsilon = \frac{r}{a} - 1$), usando a expansão elítica de $\frac{r}{a}$ até segunda ordem feita no Apêndice C que é dada por:

$$\frac{r}{a} = 1 - e \cos M + \frac{e^2}{2}(1 - \cos 2M) \tag{2.41}$$

Logo ϵ é escrito da forma:

$$\epsilon = \frac{r}{a} - 1 \approx -e \cos M + \frac{1}{2} e^2 (1 - \cos 2M) \tag{2.42}$$

para ϵ' segue de maneira análoga.

Para finalizar precisamos calcular os coeficientes de Laplace que estão implícitos em (2.25) através da função $A_{i,j,m,n}$. Note que para dado i em (2.25) temos o termo:

$$a^i a'^{i+1} A_{i,j,m,n} = a^{i+m} a'^{i+n+1} \frac{\partial^{m+n}}{\partial a^m \partial a'^m} \left(a'^{-(2i+1)} b_{i+\frac{1}{2}}^{(j)}(a/a') \right) \tag{2.43}$$

Para a expansão até segunda ordem os termos necessários são:

$$\begin{aligned}
 a^i a'^{i+1} A_{i,j,0,0} &= \alpha^i b_{i+\frac{1}{2}}^{(j)}(\alpha) \\
 a^i a'^{i+1} A_{i,j,1,0} &= \alpha^{i+1} D b_{i+\frac{1}{2}}^{(j)}(\alpha) \\
 a^i a'^{i+1} A_{i,j,0,1} &= -\alpha^{i+1} D b_{i+\frac{1}{2}}^{(j)}(\alpha) - (2i+1) \alpha^i b_{i+\frac{1}{2}}^{(j)}(\alpha) \\
 a^i a'^{i+1} A_{i,j,2,0} &= \alpha^{i+2} D^2 b_{i+\frac{1}{2}}^{(j)}(\alpha) \\
 a^i a'^{i+1} A_{i,j,1,1} &= -\alpha^{i+2} D^2 b_{i+\frac{1}{2}}^{(j)}(\alpha) - 2\alpha^{i+1} (i+1) D b_{i+\frac{1}{2}}^{(j)}(\alpha) \\
 a^i a'^{i+1} A_{i,j,2,2} &= \alpha^{i+2} D^2 b_{i+\frac{1}{2}}^{(j)}(\alpha) + 4\alpha^{i+1} (i+1) D b_{i+\frac{1}{2}}^{(j)}(\alpha) + 2\alpha^i (2i^2 + 3i + 2) b_{i+\frac{1}{2}}^{(j)}(\alpha)
 \end{aligned} \tag{2.44}$$

onde o operador D é a derivada com respeito a α , isto é $D^n = \frac{d^n}{d\alpha^n}$ e i assume os valores de 0 ou 1, já que $i > 1$ pode ser desconsiderado devido ao termo Ψ^i .

Logo substituindo (2.35), (2.40), (2.42) e (2.44) em (2.25) temos que a parte direta da função perturbadora até segunda ordem é dada por:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{R}_D &= \left(\frac{1}{2} b_{\frac{1}{2}}^{(j)} + \frac{1}{8} (e^2 + e'^2) [-4j^2 + 2\alpha D + \alpha^2 D^2] b_{\frac{1}{2}}^{(j)} \right. \\
 &\quad + \frac{1}{4} (s^2 + s'^2) \left([-\alpha] b_{\frac{3}{2}}^{(j-1)} + [-\alpha] b_{\frac{3}{2}}^{(j+1)} \right) \left. \right) \cos [j\lambda' - j\lambda] \\
 &\quad + \left(\frac{1}{4} e e' [2 + 6j + 4j^2 - 2\alpha D - \alpha^2 D^2] b_{\frac{1}{2}}^{(j+1)} \right) \cos [j\lambda' - j\lambda + \varpi' - \varpi] \\
 &\quad + \left(s s' [\alpha] b_{\frac{3}{2}}^{(j+1)} \right) \cos [j\lambda' - j\lambda + \Omega' - \Omega] \\
 &\quad + \left(\frac{1}{2} e [-2j - \alpha D] b_{\frac{1}{2}}^{(j)} \right) \cos [j\lambda' + (1-j)\lambda - \varpi] \\
 &\quad + \left(\frac{1}{2} e' [-1 + 2j + \alpha D] b_{\frac{1}{2}}^{(j-1)} \right) \cos [j\lambda' + (1-j)\lambda - \varpi'] \\
 &\quad + \left(\frac{1}{8} e^2 [-5j + 4j^2 - 2\alpha D + 4j\alpha D + \alpha^2 D^2] b_{\frac{1}{2}}^{(j)} \right) \cos [j\lambda' + (2-j)\lambda - 2\varpi] \\
 &\quad + \left(\frac{1}{4} e e' [-2 + 6j - 4j^2 + 2\alpha D - 4j\alpha D - \alpha^2 D^2] b_{\frac{1}{2}}^{(j-1)} \right) \cos [j\lambda' + (2-j)\lambda - \varpi' - \varpi] \\
 &\quad + \left(\frac{1}{8} e'^2 [2 - 7j + 4j^2 - 2\alpha D + 4j\alpha D + \alpha^2 D^2] b_{\frac{1}{2}}^{(j-2)} \right) \cos [j\lambda' + (2-j)\lambda - 2\varpi'] \\
 &\quad + \left(\frac{1}{2} s^2 [\alpha] b_{\frac{3}{2}}^{(j-1)} \right) \cos [j\lambda' + (2-j)\lambda - 2\Omega] \\
 &\quad + \left(s s' [-\alpha] b_{\frac{3}{2}}^{(j-1)} \right) \cos [j\lambda' + (2-j)\lambda - \Omega' - \Omega] \\
 &\quad + \left(\frac{1}{2} s'^2 [\alpha] b_{\frac{3}{2}}^{(j-1)} \right) \cos [j\lambda' + (2-j)\lambda - 2\Omega'] .
 \end{aligned} \tag{2.45}$$

2.2.2 Parte indireta

A parte indireta é relativamente mais simples, uma vez que temos a expansão de $\cos \psi$ dada por (2.32), $\frac{r}{a}$ é dado por (2.41) e $\frac{a'}{r'}$ é dado através da expansão elítica no Apêndice C. Portanto a parte indireta é dada por:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{R}_E &= -\frac{r}{a} \left(\frac{a'}{r'} \right)^2 \cos \psi \\
 &\approx \left(-1 + \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{2}e'^2 + s^2 + s'^2 \right) \cos [\lambda' - \lambda] \\
 &\quad - ee' \cos [2\lambda' - 2\lambda - \varpi' + \varpi] - 2ss' \cos [\lambda' - \lambda - \Omega' + \Omega] \\
 &\quad - \frac{1}{2}e \cos [\lambda' - 2\lambda + \varpi] + \frac{3}{2}e \cos [\lambda' - \varpi] - 2e' \cos [2\lambda' - \lambda - \varpi'] \\
 &\quad - \frac{3}{8}e^2 \cos [\lambda' - 3\lambda + 2\varpi] - \frac{1}{8}e^2 \cos [\lambda' + \lambda - 2\varpi] \\
 &\quad + 3ee' \cos [2\lambda - \varpi' - \varpi] - \frac{1}{8}e'^2 \cos [\lambda' + \lambda - 2\varpi'] \\
 &\quad - \frac{27}{8}e'^2 \cos [3\lambda' - \lambda - 2\varpi'] - s^2 \cos [\lambda' + \lambda - 2\Omega] \\
 &\quad + 2ss' \cos [\lambda' + \lambda - \Omega' - \Omega] - s'^2 \cos [\lambda' + \lambda - 2\Omega'],
 \end{aligned} \tag{2.46}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{R}_I &= -\frac{r'}{a'} \left(\frac{a}{r} \right)^2 \cos \psi \\
 &\approx \left(-1 + \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{2}e'^2 + s^2 + s'^2 \right) \cos [\lambda' - \lambda] \\
 &\quad - ee' \cos [2\lambda' - 2\lambda - \varpi' + \varpi] - 2ss' \cos [\lambda' - \lambda - \Omega' + \Omega] \\
 &\quad - 2e \cos [\lambda' - 2\lambda + \varpi] + \frac{3}{2}e' \cos [\lambda - \varpi'] - \frac{1}{2}e' \cos [2\lambda' - \lambda - \varpi'] \\
 &\quad - \frac{27}{8}e^2 \cos [\lambda' - 3\lambda + 2\varpi] - \frac{1}{8}e^2 \cos [\lambda' + \lambda - 2\varpi] \\
 &\quad + 3ee' \cos [2\lambda - \varpi' - \varpi] - \frac{1}{8}e'^2 \cos [\lambda' + \lambda - 2\varpi'] \\
 &\quad - \frac{3}{8}e'^2 \cos [3\lambda' - \lambda - 2\varpi'] - s^2 \cos [\lambda' + \lambda - 2\Omega] \\
 &\quad + 2ss' \cos [\lambda' + \lambda - \Omega' - \Omega] - s'^2 \cos [\lambda' + \lambda - 2\Omega'].
 \end{aligned} \tag{2.47}$$

2.3 Perturbações Ressonantes

Com o estudo da função perturbadora podemos ver que a mesma possui um argumento específico ϕ dentro de cada $\cos$, onde o mesmo tem a forma geral

$$\phi = j_1\lambda' + j_2\lambda + j_3\varpi' + j_4\varpi + j_5\Omega' + j_6\Omega \tag{2.48}$$

de maneira que $j_1, \dots, j_6$ são coeficientes inteiros que satisfazem a relação de d' Alembert dada por:

$$\sum_{i=1}^6 j_i = 0 \quad (2.49)$$

É importante salientar que a relação de d' Alembert só é válida para a escolha específica de ângulos dada em (2.48) (ou seja, não pode ter a presença de ω , caso o mesmo tenha, pode-se removê-lo através de $\varpi = \Omega + \omega$).

A função perturbadora é usada para calcular as variações dos elementos orbitais devido a perturbação de um segundo corpo. Um jeito de aplicá-la é usando as equações planetárias de Lagrange deduzidas em [?]. A fim de descrevê-las aqui é necessário fazer a introdução de um ângulo adicional ϵ como feito em [18] (não é o ϵ descrito na expansão) dado através de

$$\lambda = M + \varpi = n(t - \tau) + \varpi = nt + \epsilon \quad (2.50)$$

onde ϵ então é chamado de *longitude média na época*, isto é, a longitude média da massa m no momento em que o tempo é medido.

As equações planetárias de Lagrange então são dadas por:

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{2}{na} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \epsilon} \\ \frac{de}{dt} &= -\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \left(1 - \sqrt{1-e^2}\right) \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \epsilon} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \varpi} \\ \frac{d\epsilon}{dt} &= -\frac{2}{na} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial a} + \frac{\sqrt{1-e^2}(1 - \sqrt{1-e^2})}{na^2e} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial e} + \frac{\text{tg } \frac{1}{2}I}{na^2\sqrt{1-e^2}} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial I} \\ \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2} \sin I} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial I} \\ \frac{d\varpi}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial e} + \frac{\text{tg } \frac{1}{2}I}{na^2\sqrt{1-e^2}} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial I}, \\ \frac{dI}{dt} &= \frac{-\text{tg } \frac{1}{2}I}{na^2\sqrt{1-e^2}} \left(\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \epsilon} + \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \varpi} \right) - \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2} \sin I} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \Omega} \end{aligned} \quad (2.51)$$

No problema de três corpos os ângulos λ e λ' crescem linearmente com as taxas n e n' respectivamente, enquanto os outros ângulos (ϖ' , ϖ , Ω' e Ω) variam de forma lenta mesmo para vários períodos. Então qualquer argumento da função perturbadora onde $j_1 = j_2 = 0$ também varia lentamente dando origem aos chamados **termos seculares**. Porém isto não quer dizer que todos os outros argumentos variam rapidamente. Por exemplo seja

$$\lambda' \approx n't + \epsilon' \quad \lambda \approx nt + \epsilon$$

então podemos mostrar que

$$j_1\lambda' + j_2\lambda \approx (j_1n' + j_2n)t + \text{constante} \quad (2.52)$$

Ao escolhermos que a razão entre os semieixos maior dos corpos no problema sejam dados por

$$\frac{a}{a'} \approx \left(\frac{|j_1|}{|j_2|} \right)^{\frac{2}{3}} \quad (2.53)$$

podemos utilizar a terceira lei de Kepler

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{T'^2}{a'^3} \quad (2.54)$$

junto com $n = \frac{2\pi}{T}$ para mostrar que

$$j_1n' + j_2n \approx 0 \quad (2.55)$$

ou seja quando (2.53) é verdade, (2.55) também é verdadeiro, fazendo com que o ângulo (2.48) tenha uma variação lenta. Os ângulos onde (2.53) acontece dão origem aos chamados **ângulos ressonantes** e estão associados com a ressonância de movimento médio que será descrito a frente.

2.4 Ressonância de movimento médio

Para fazer a introdução sobre ressonâncias de movimento médio vamos tomar o exemplo de um asteroide e um planeta que estão em órbita de uma estrela. Suponha que o planeta possua uma órbita cujo o seu período T' seja o dobro do período do asteroide T , ou seja

$$T' = 2T \iff \frac{T'}{T} = \frac{2}{1}$$

então em termos do movimento médio temos

$$\frac{n}{n'} = \frac{2}{1} \quad (2.56)$$

que é uma condição necessária para os corpos estarem em uma ressonância de movimento médio 2 : 1. Outra condição necessária é a libração do ângulo ressonante que será descrito mais adiante.

Podemos examinar uma ressonância de maneira mais geral considerando dois corpos orbitando um corpo central de forma que:

$$\frac{n}{n'} = \frac{p}{q} \quad (2.57)$$

onde n e n' são os movimentos médios dos objetos interior e exterior respectivamente e $p, q \in \mathbb{N}$.

Então para que (2.55) seja válida podemos usar (2.54) e concluir que $j_1 = -p$ e $j_2 = q$. Portanto a razão entre os semieixo maior α dado por (2.53) é:

$$\alpha = \left(\frac{q}{p} \right)^{\frac{2}{3}} \quad (2.58)$$

Quando $p > q$ dizemos que a **ressonância é interna**, pois $p > q \Rightarrow a < a'$ e de maneira análoga, a **ressonância é externa** quando $q > p$. O conceito de interna e externa surge pois os casos analisados no trabalho serão de um asteroide de massa negligenciável e de um planeta qualquer onde o foco do estudo é no asteroide. Logo ressonância interna é para quando o asteroide possui uma órbita interior ao planeta e analogamente a ressonância externa é para quando o asteroide possui órbita exterior ao planeta. Porém em suma tanto a ressonância 2 : 1 quanto 1 : 2 representam o mesmo fenômeno físico, que é o corpo exterior possuindo uma órbita cujo o período é o dobro do corpo interior, sendo a diferença sobre qual corpo o estudo será feito.

Diremos neste trabalho que a **ordem de uma ressonância de movimento médio** será o valor $\mathcal{O} = |p - q|$. Por exemplo uma ressonância 3 : 1 tem ordem $\mathcal{O} = |3 - 1| = 2$, logo ordem par, enquanto a ressonância 2 : 1 tem ordem $\mathcal{O} = |2 - 1| = 1$, logo ordem impar. A definição de ordem neste trabalho é de interesse para avaliar se uma ressonância possui ordem impar ou par, pois veremos que sua paridade interfere nos argumentos presentes nas funções perturbadoras.

3 Função perturbadora para diferentes inclinações

3.1 Órbitas quase polares

A expansão feita anteriormente foi realizada para $I \approx 0$ (assumimos isso em (2.16)), logo estamos limitados com a validade da função perturbadora quando $I \neq 0$.

Seguiremos o estudo realizado em [2] para a construção analítica da função perturbadora no caso em que $I \approx 90^\circ$, onde após a construção seus termos serão obtidos através de rotinas feita no Mathematica. Essas inclinações acontecem com cometas e asteroides.

Hipóteses: Considere uma partícula teste (asteroide) de massa negligenciável que se move sobre a influência gravitacional de uma estrela de massa M_* e de um planeta de massa $m' \ll M_*$. Assumiremos que m' possui uma trajetória circular com respeito a M_* de raio a' e longitude média λ' . O plano de referência é definido pela órbita Estrela-Planeta.

A partícula teste então se move em uma osculadora órbita Kepleriana com respeito a M_* com semieixo maior a , excentricidade e , inclinação I , anomalia verdadeira f , argumento do pericentro ω e longitude do nodo ascendente Ω .

Normalizando todas as distâncias para a' e realizando a construção de maneira análoga a feita no Capítulo 2, teremos que a função perturbadora é da forma:

$$\mathcal{R} = \frac{\mathcal{G}m'}{a'} \left(\frac{1}{\Delta} - r \cos \psi \right) \quad (3.1)$$

onde r é o raio orbital da partícula, $\alpha = \frac{a}{a'}$ é o semieixo maior normalizado da

partícula (que pode ser maior ou menor que 1, dependendo se a órbita da partícula é exterior ou interior a m'), $\Delta^2 = 1 + r^2 - 2r \cos \psi$ é a distância entre partícula teste e o planeta com ψ sendo o ângulo entre os vetores raio do planeta e partícula teste. Através da equação (2.27) podemos encontrar a expressão para $\cos \psi$, (lembrando que como o corpo m' possui uma órbita circular e está sobre o nosso plano referencial, então $e' = 0$ e $I' = 0$) dada por:

$$\cos \psi = \cos (\Omega - \lambda') \cos (f + \omega) - \sin (\Omega - \lambda') \sin (f + \omega) \cos I \quad (3.2)$$

Denotaremos aqui a parte direta por $\bar{\mathcal{R}}_d$ e a parte indireta por $\bar{\mathcal{R}}_i$.

3.1.1 Parte Direta

Podemos construir um ângulo Ψ de maneira análoga a feita para a expansão do caso prógrado planar, porem neste caso desejamos um ângulo tal que quando $I \approx 90^\circ \Rightarrow \Psi \approx 0^\circ$. Com base na equação (3.2) seja:

$$\Psi = -\sin (\Omega - \lambda') \sin (f + \omega) \cos I \quad (3.3)$$

que vai a zero sempre que $I \approx 90^\circ$. Assim podemos substituir (3.3) em (3.2) de forma que Δ é dado por:

$$\Delta^2 = 1 + r^2 - 2r \cos (\Omega - \lambda') \cos (f + \omega) - 2r \Psi \quad (3.4)$$

Com a expressão de Δ podemos prosseguir de maneira similar ao feito na seção 2.1, expandindo o termo Δ^{-1} na vizinhança de $\Psi = 0$ obtendo

$$\frac{1}{\Delta} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(2i)!}{2^i (i!)^2} (r \Psi)^i \frac{1}{\Delta_0^{(2i+1)}} \quad (3.5)$$

onde $(\Delta_0)^2 = 1 + r^2 - 2r \cos (\Omega - \lambda') \cos (f + \omega)$.

Fazendo a expansão de $\Delta_0^{-(2i+1)}$ em torno de $r = a$ temos:

$$\Delta_0^{-(2i+1)} = \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\epsilon^k \alpha^k}{k!} \frac{d^k}{d\alpha^k} \right) \frac{1}{\rho^{(2i+1)}} \quad (3.6)$$

onde:

$$\epsilon = \frac{r}{\alpha} - 1 \quad \frac{1}{\rho^{(2i+1)}} = [1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos (\Omega - \lambda') \cos (f + \omega)]^{-(i+1/2)} \quad (3.7)$$

No Capítulo 2 vimos que o termo $\rho^{-(2i+1)}$ para o caso prógrado planar existe, porem no argumento da raiz aparece "somente um cosseno" diferente de agora que temos dois cossenos que se multiplicam. Então como agora $\rho^{-(2i+1)}$ possui uma dupla periodicidade, cada qual associada com um $\cos$, vamos expandir $\rho^{-(2i+1)}$ em uma série de Fourier de duas dimensões cada qual associada aos argumentos $f + \omega$ e $\Omega - \lambda'$ respectivamente. Obtemos então:

$$\frac{1}{\rho^{(2i+1)}} = \sum_{\substack{-\infty < j, k < \infty \\ j+k \text{ par}}} \frac{1}{4} b_{i+1/2}^{jk}(\alpha) \cos[k(f + \omega) + j(\Omega - \lambda')] \quad (3.8)$$

onde agora os $b_s^{jk}(\alpha)$ são os coeficientes de Laplace bidimensionais, dados em [2]:

$$b_s^{jk}(\alpha) = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos(ju + kv)}{(1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos u \cos v)^s} du dv \quad (3.9)$$

A série em (3.8) é somada apenas quando $j + k$ é par devido ao fato da invariância da função ρ^{2i+1} com respeito a mudança de variável $(f + \omega + \pi, \Omega - \lambda' + \pi)$ que faz $b_s^{jk} = 0$ quando $j + k$ é ímpar.

Substituindo então a série (3.8) na expressão (3.6) e aplicando em (3.5) a parte direta da função perturbadora é dada por:

$$\bar{\mathcal{R}}_d = \sum_{\substack{0 \leq i, l < \infty \\ -\infty < j, k < \infty \\ j+k \text{ par}}} \frac{(2i)!}{2^{i+2}(i!)^2} (r\Psi)^i \epsilon^l A_{i,j,k,l} \cos[k(f + \omega) + j(\Omega - \lambda')] \quad (3.10)$$

de forma que $A_{i,j,k,l} = \alpha^i D^i b_{i+1/2}^{jk}$, onde $D^i = \frac{d^i}{d\alpha^i}$. Repare que $A_{i,j,k,l}$ satisfaz a simetria dos coeficientes bidimensionais de Laplace, ou seja $A_{i,j,k,l} = 0$ se $j + k$ for par.

Novamente para obter uma expansão que não envolva f faremos uso das expansões elíticas calculadas no Apêndice C. Substituindo as expansões e truncando em ordem N na excentricidade e nos cossenos da inclinação obtemos a parte direta da função perturbadora. Porém alguns ajustes ainda podem ser feitos, por exemplo, sejam C_1 e C_2 dois termos que estão na função perturbadora dados por:

$$\begin{aligned} C_1 &= -\frac{e^2}{4} k^2 A_{0,j,k,0} \cos[k\lambda - j\lambda' + (j - k)\Omega] \\ C_2 &= \frac{e^2}{32} A_{0,j,k,2} \cos[(k - 2)\lambda - j\lambda' + (j - k + 2)\Omega + 2\omega]. \end{aligned} \quad (3.11)$$

como j e k são inteiros quaisquer, repare que ao fazer $j = p$, $k = q$ para C_1 e $j = p$,

$k = q + 2$ para C_2 obtemos:

$$C_1 = -\frac{e^2}{4} q^2 A_{0,p,q,0} \cos [q\lambda - p\lambda' + (p - q)\Omega],$$

$$C_2 = \frac{e^2}{32} A_{0,p,q+2,2} \cos [q\lambda - p\lambda' + (p - q)\Omega + 2\omega].$$

onde agora C_1 e C_2 estão associados com a mesma ressonância $p : q$.

Fazendo então essas considerações, a parte direta da função perturbadora pode ser escrita como:

$$\bar{\mathcal{R}}_d = \sum_{\substack{-N \leq k \leq N \\ |k| \leq m \leq N \\ 0 \leq n \leq N \\ m+n=N}} C(p, q, \alpha) e^m \cos^n I \cos(\phi_k^{p:q}) \quad (3.12)$$

onde $\phi_k^{p:q} = q\lambda - p\lambda' + (p - q)\Omega - k\omega$ e os coeficientes C carregam a dependência de p, q e α e são obtidos ao realizar as expansões.

A título de exemplificação, através da construção feita em Mathematica, obtemos que a parte direta da função perturbadora associada a ressonância 1 : 3 até ordem 8 possui 3145 termos.

3.1.2 Parte Indireta

A parte indireta $\bar{\mathcal{R}}_i$ é mais simples de se obter uma vez que a mesma é dada por $r \cos \psi$ somente.

Primeiro tomamos $\cos \psi$ dado em (3.2), deve-se então substituir f pela expressão dada em (2.37) e expandir a expressão resultante com respeito a excentricidade, truncando até a ordem N desejada. Para r basta tomar sua expansão elítica.

3.2 Inclinação arbitrária.

Generalizando o estudo seguiremos a construção feita em [3] para o caso genérico em que a inclinação I pode ser qualquer.

As considerações feitas são as mesmas do caso polar até (3.1), após isso, como a inclinação I pode ser qualquer, temos que $\cos \psi$ será dado por:

$$\cos \psi = \cos (\Omega - \lambda') \cos (f + \omega) - \sin (\Omega - \lambda') \sin (f + \omega) \cos I \quad (3.13)$$

A ideia neste caso é fixar uma inclinação I_r e então fazer uma pequena variação na mesma. Seja $I = I_r + \delta I$ e aplicando em (3.13) a expressão do $\cos \psi$ pode ser escrita como:

$$\cos \psi = \cos(\Omega - \lambda') \cos(f + \omega) - \sin(\Omega - \lambda') \sin(f + \omega) \cos I_r + \Psi \quad (3.14)$$

onde agora tem-se:

$$\Psi = \left(\left[1 - (1 - s^2)^{1/2} \right] \cos I_r + s \sin I_r \right) \sin(f + \omega) \sin(\Omega - \lambda')$$

de forma que $s = \sin(I - I_r)$. Repare que quando a variação é nula, então $I = I_r$ que resulta em $\Psi = 0$ como o acontece para os outros casos.

Podemos então escrever a distância entre o planeta e o asteroide em função de Ψ substituindo (3.14) em (2.14) obtendo:

$$\Delta^2 = 1 + r^2 - 2r \cos(\Omega - \lambda') \cos(f + \omega) + 2r \sin(\Omega - \lambda') \sin(f + \omega) \cos I_r - 2r\Psi \quad (3.15)$$

e então fazer a expansão do termo Δ^{-1} em torno de $\Psi = 0$ obtendo

$$\frac{1}{\Delta} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(2i)!}{2^i (i!)^2} (r\Psi)^i \Delta_0^{-(2i+1)} \quad (3.16)$$

onde $(\Delta_0)^2 = 1 + r^2 - 2r \cos(\Omega - \lambda') \cos(f + \omega) + 2r \sin(\Omega - \lambda') \sin(f + \omega) \cos I_r$.

Seguindo de maneira análoga ao feito para outros casos, fazendo a expansão de $\Delta_0^{-(2i+1)}$ em torno de $r = a$ resulta em:

$$\frac{1}{\Delta_0^{(2i+1)}} = \left(1 + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\epsilon^l \alpha^l}{l!} \frac{d^l}{d\alpha^l} \right) \rho^{-(2i+1)} \quad (3.17)$$

onde $\epsilon = \frac{r}{\alpha} - 1$ e:

$$\rho^{-(2i+1)} = \left[1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos(\Omega - \lambda') \cos(f + \omega) + 2\alpha \sin(\Omega - \lambda') \sin(f + \omega) \cos I_r \right]^{-(i+1/2)} \quad (3.18)$$

Novamente o termo $\rho^{-(2i+1)}$ pode ser expandido em séries bidimensionais de Fourier relativo aos ângulos $f + \omega$ e $\Omega - \lambda'$ ficando da forma

$$\frac{1}{\rho^{(2i+1)}} = \sum_{\substack{-\infty < j, k < \infty \\ j+k \text{ par}}} \frac{1}{4} b_{i+1/2}^{jk}(\alpha, I_r) \cos[k(f + \omega) + j(\Omega - \lambda')] \quad (3.19)$$

onde

$$b_s^{jk}(\alpha, I_r) = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos(ju + kv)}{[1 + \alpha^2 - 2\alpha (\cos u \cos v - \sin u \sin v \cos I_r)]^s} du dv \quad (3.20)$$

são os coeficientes de Laplace bidimensionais. Note que ao fazer $I = 90^\circ$ em (3.20) obtemos (3.9) como o esperado, já que estamos generalizando o estudo.

A série em (3.19) é somada apenas quando $j + k$ são pares devido a invariância da função ρ^{2i+1} (3.18) com em relação à mudança de variável $(f + \omega + \pi, \Omega - \lambda' + \pi)$ que faz o termo $b_s^{jk} = 0$ quando $j + k$ for ímpar.

Substituindo a série (3.19) na expressão (3.17) e juntando tudo na expressão (3.16), a parte direta da perturbação é escrita como a série:

$$\bar{\mathcal{R}}_d = \sum_{\substack{0 \leq i, l < \infty \\ -\infty < j, k < \infty \\ j+k \text{ par}}} \frac{1}{l!} \frac{(2i)!}{2^{i+2}(i!)^2} (r\Psi)^i \epsilon^l A_{i,j,k,l} \cos[k(f + \omega) + j(\Omega - \lambda')] \quad (3.21)$$

onde $A_{i,j,k,l} = \alpha^l D^l b_{i+\frac{1}{2}}^{jk}$ satisfaz a condição de ser nulo quando $j + k$ é ímpar.

Aplicando as expansões elíticas em (3.21), truncando a expansão em ordem N na excentricidade e nos cossenos da inclinação obtemos a parte direta da função perturbadora, porém não para uma ressonância $p : q$ qualquer devido ao fato de que vários termos ainda podem ser associados a mesma ressonância (como visto em (3.11)).

Fazendo então as necessárias considerações, a parte direta da função perturbadora pode ser escrita como:

$$\bar{\mathcal{R}}_d = \sum_{\substack{-N \leq k \leq N \\ |k| \leq m \leq N \\ 0 \leq n \leq N \\ m+n=N}} H(p, q, \alpha, I_r) e^m s^n \cos(\phi_k^{p:q}) \quad (3.22)$$

onde $\phi_k^{p:q} = q\lambda - p\lambda' + (p - q)\Omega - k\omega$, $s = \sin I - I_r$ e os coeficientes H carregam a dependência de p, q e α e são obtidos ao realizar as expansões.

Os coeficientes $h_{mn}^k(p, q, \alpha, I_r)$ possuem uma importante relação com a ordem de ressonância. Como mencionado na Seção 2.4 ao realizarmos a soma (3.22) podemos verificar que se a ordem da ressonância é par, então $h_{mn}^k(p, q, \alpha, I_r)$ é nulo para todo k ímpar, e analogamente se a ordem é ímpar, então $h_{mn}^k(p, q, \alpha, I_r)$ é nulo para todo k par.

Novamente para exemplificar, através da rotina feita no Mathematica, podemos verificar que a parte direta da função perturbadora até ordem 4 associada com a0 ressonância 1 : 2 possui 1400 termos.

A expansão para inclinação arbitrária foi feita escolhendo uma inclinação I_r como base e realizando uma variação na mesma de forma que temos a presença do termo $s = \sin(I - I_r)$. Escolhemos fazer uma expansão com respeito a e e s de forma que obtemos uma generalização das funções perturbadoras planar pró-grada e polar. Uma segunda interpretação pode ser analisada ao tomarmos $s = 0$, pois assim o referencial passa a ser o do próprio asteroide e a expansão resultante ficará em relação somente da excentricidade e manterá toda sua dependência da inclinação dentro dos coeficientes bidimensionais de Laplace.

As duas interpretações da função perturbadora ($s = 0, s \neq 0$) possuem diferentes aplicações. Por exemplo, quando os cálculos são obrigados a seguir a evolução temporal da dinâmica do asteroide, a expansão com os termos e e s é preferível para a aplicação nas equações planetárias de Lagrange. De fato para usar a expansão com dependência somente em e nas equações de Lagrange precisamos avaliar os coeficientes de Laplace e suas derivadas em relação à inclinação o que na prática significa o uso da expansão dos coeficientes de Laplace que fazemos no Apêndice A. Como pode ser visto em [3] para obter boa precisão da expansão dos coeficiente é necessário elevadas ordens, por esta razão a expansão com dependência de e e s é preferível para integrações numéricas já que coeficientes de Laplace dependem apenas da inclinação de referência (que será constante) e de α .

A **parte indireta** é obtida de forma análoga aos casos anteriores.

3.3 Perturbações Ressonantes

Se tivermos o caso em que $e' = 0$ e $I' = 0$ (planeta de órbita circular ao redor de uma estrela, sendo o terceiro corpo um asteroide com inclinação e excentricidade qualquer por exemplo) as ressonâncias de movimento médio podem ser detectadas através da **libração do ângulo ressonante**, como descrito em [2], onde os mesmos possuem a forma:

$$\phi_k^{p:q} = q\lambda - p\lambda' + (p - q)\Omega - k\omega \quad (3.23)$$

de forma que $k \in \mathbb{Z}$ é um número inteiro.

Exemplificando podemos tomar um asteroide em uma ressonância 3 : 1 com um planeta, ambos orbitando uma estrela (a órbita do planeta é circular). Então seu

ângulo ressonante é dado por:

$$\phi_k^{3:1} = \lambda - 3\lambda' + 2\Omega - k\omega \quad (3.24)$$

onde $k \in \mathbb{Z}$, ou seja para cada k temos um ângulo ressonante diferente, logo alguns exemplos de ângulos ressonantes são:

$$\begin{aligned} \phi_{-4}^{3:1} &= \lambda - 3\lambda' + 2\Omega + 4\omega \\ \phi_{-2}^{3:1} &= \lambda - 3\lambda' + 2\Omega + 2\omega \\ \phi_0^{3:1} &= \lambda - 3\lambda' + 2\Omega \\ \phi_2^{3:1} &= \lambda - 3\lambda' + 2\Omega - 2\omega \\ \phi_4^{3:1} &= \lambda - 3\lambda' + 2\Omega - 4\omega \end{aligned} \quad (3.25)$$

Repare que os valores de k seguem a paridade da ordem da ressonância, como a ressonância tem ordem 2 então temos somente os ângulos em que k é par, isto se deve ao fato de que o ângulo ressonante $\phi_k^{p:q}$ com k diferente da paridade não aparece na função perturbadora.

Temos uma infinidade de valores de k para cada ressonância, por exemplo o ângulo que libra no caso coplanar prógrado é aquele em que k é dado por $k = q - p$ como visto em [18] e no caso retrogrado, o ângulo que libra é aquele em que $k = p + q$ como visto em [11]. No entanto no caso tridimensional saber para quais k ocorre a libração do ângulo ressonante é uma questão em aberto.

4 O Modelo do Pêndulo

Obtendo a função perturbadora como descrito nos capítulos anteriores, um método de fazer seu uso para obter resultados quanto a possível amplitude que α pode ter para uma ressonância $p : q$ é o *modelo do pêndulo*, onde sua ideia descrito por [3] é a partir do ângulo ressonante criar uma equação diferencial análoga a equação diferencial de um pêndulo e fazer seu estudo.

4.1 O modelo para um ângulo ressonante

Seguindo a construção de [3] seja um asteroide em uma ressonância $p : q$ com um planeta de massa m' que está em uma órbita circular ($e' = 0$) em torno de uma estrela de massa M_* , onde $m' \ll M_*$. O ângulo ressonante do asteroide é dado por:

$$\phi_k^{p:q} = q\lambda - p\lambda' - (q - p)\Omega - k\omega \quad (4.1)$$

Como já visto, sabemos que ao estarmos em uma ressonância do tipo $p : q$ temos a libração do ângulo ressonante, ou seja podemos estudar a sua taxa de variação com respeito ao tempo. Derivando então (4.1) em segunda ordem no tempo temos:

$$\ddot{\phi}_k^{p:q} = q\ddot{\lambda} - (q - p)\ddot{\Omega} - k\ddot{\omega} \quad (4.2)$$

onde o ângulo $\ddot{\lambda}'$ desaparece devido ao fato de estarmos assumindo que o asteroide possui massa irrelevante (assim a órbita do planeta não é perturbada pelo asteroide). Calculando $\ddot{\lambda}$ usando $\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}^* - t\dot{n}$ (como definido em [18]) tem-se:

$$\begin{aligned} \lambda = \epsilon + nt &\Rightarrow \ddot{\lambda} = \ddot{\epsilon} + (\ddot{n}t + \dot{n}) + \dot{n} & (\ddot{n}t + \dot{n} = \dot{\epsilon}^* - \ddot{\epsilon}) \\ &\Rightarrow \ddot{\lambda} = \dot{n} + \ddot{\epsilon}^* \end{aligned}$$

e substituindo no ângulo ressonante temos:

$$\ddot{\phi}_k^{p:q} = q(\dot{n} + \ddot{\epsilon}^*) - (q - p)\ddot{\Omega} - k\ddot{\omega} \quad (4.3)$$

A principal ideia do modelo do pêndulo é negligenciar no ângulo ressonante os termos $\ddot{\Omega}$, $\ddot{\epsilon}$ e $\ddot{\omega}$ em comparação com a variação temporal do movimento médio n de forma que (4.3) então se torna:

$$\ddot{\phi}_k^{p:q} = q\dot{n} \quad (4.4)$$

Através da terceira lei de Kepler a variação temporal do movimento médio de um corpo pode ser escrito como:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_*} \xRightarrow{T=2\pi n^{-1}} n^2 = \frac{GM_*}{a^3} \xRightarrow{\frac{d}{dt}} \dot{n} = -\frac{3}{2} \frac{GM_*}{na^4} \dot{a} \xRightarrow{n=\frac{GM_*}{a^3 n}} \dot{n} = -\frac{3}{2} \frac{n}{a} \dot{a} \quad (4.5)$$

onde nas equações planetárias de Lagrange a variação temporal do semieixo maior é dada por $\dot{a} = \frac{2}{na} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \epsilon}$. Substituindo $\dot{a}$ em (4.5) e levando em consideração a construção de [18] tem-se:

$$\dot{n} = -\frac{3}{a^2} \partial_{\epsilon^*} \mathcal{R} \xRightarrow{(3.1)} \dot{n} = -\frac{3Gm'}{a^2 a'} \partial_{\epsilon^*} \bar{\mathcal{R}} \quad (4.6)$$

onde ϵ^* está relacionado com a longitude média na época $\tau = \lambda - nt$ através de $\epsilon^* = tn + \tau$ e $\bar{\mathcal{R}}$ é a função perturbadora com sua parte direta, indireta e secular escrita da forma:

$$\bar{\mathcal{R}} = (f_{k,d}^{p:q} + f_{k,i}^{p:q}) \cos \phi_k^{p:q} + \bar{\mathcal{R}}_s \quad (4.7)$$

Multiplicando e dividindo (4.6) por a e utilizando (4.5) podemos escrever $\dot{n}$ como

$$\dot{n} = -\frac{3Gm'}{a^3} \frac{a}{a'} \partial_{\epsilon^*} \bar{\mathcal{R}} \iff \dot{n} = -\frac{3n^2 m' \alpha}{M_*} \partial_{\epsilon^*} \bar{\mathcal{R}} \quad (4.8)$$

Portanto substituindo (4.8) em (4.4) e realizando a derivação parcial da função perturbadora obtêm-se

$$\ddot{\phi}_k^{p:q} = \frac{3n^2 q^2 m' \alpha}{M_*} (f_{k,d}^{p:q} + f_{k,i}^{p:q}) \sin \phi_k^{p:q} \quad (4.9)$$

onde o termo $f_{k,d}^{p:q} + f_{k,i}^{p:q}$ é a soma dos coeficientes da função perturbadora (parte direta $f_{k,d}^{p:q}$ e indireta $f_{k,i}^{p:q}$) associado ao ângulo $\phi_k^{p:q}$. Note que a expressão (4.9) possui a forma geral da equação diferencial associada a um pêndulo:

$$\ddot{\phi}_k^{p:q} = \omega_0 \sin \phi_k^{p:q} \quad \text{onde} \quad \omega_0 = \frac{3n^2 q^2 m' \alpha}{M_*} (f_{k,d}^{p:q} + f_{k,i}^{p:q}) \quad (4.10)$$

No caso usual do pêndulo ω_0 sempre é positivo (tanto que na literatura é usual aparecer $(\omega_0)^2$ para deixar este fato explícito), porém o sinal de ω_0 irá depender da soma $f_{k,d}^{p:q} + f_{k,i}^{p:q}$ que não possui restrição de ser positivo. O sinal de $f_{k,d}^{p:q} + f_{k,i}^{p:q}$ irá determinar se a libração do ângulo ressonante ocorre em torno de $\phi_k^{p:q} = 0^\circ$ quando a soma é negativa, ou em torno de $\phi_k^{p:q} = 180^\circ$ quando a soma é positiva.

O hamiltoniano do sistema é a soma da energia cinética $K = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2$ e energia potencial, que pode ser obtida através da segunda lei de Newton por

$$\ddot{\phi} = -\frac{dV}{d\phi} \implies V = \omega_0 \cos \phi \quad (4.11)$$

de forma que H é dado por

$$H = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \omega_0 \cos \phi \quad (4.12)$$

Para dado $\omega_0 > 0$ qualquer e dado um valor de energia H_{sep} (que é a energia da curva separatriz, visível na figura abaixo) temos os seguintes comportamentos para ϕ :

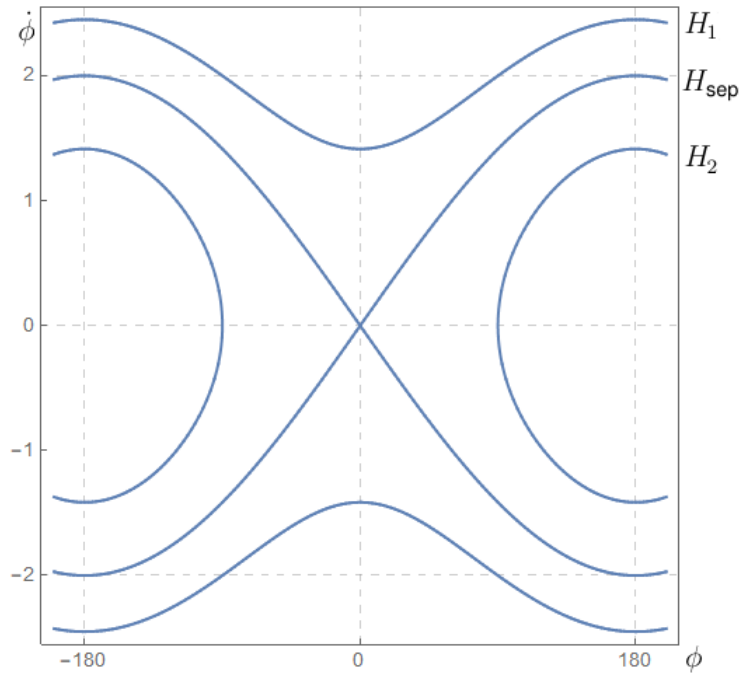


Figura 4.1: Curvas de níveis do Hamiltoniano (4.12)

- Se $H > H_{\text{sep}}$ (no caso H_1):

O movimento de ϕ fica irrestrito, ou seja o ângulo fica em um movimento contínuo e conseqüentemente não apresenta libração.

- Se $H < H_{\text{sep}}$ (no caso H_2):

O ângulo ϕ libra em torno de $\phi = 180^\circ$ porém sua libração ainda não é máxima possível.

- Se $H = H_{\text{sep}}$:

Neste caso estamos sobre a curva que separa o movimento de libração em torno de $\phi = 180^\circ$ ou ficar irrestrito (isso corresponderia a suspensão do pêndulo na posição vertical para cima). Aqui ϕ possui a máxima libração, sendo este o caso de interesse para calcular a libração máxima do ângulo e a amplitude máxima do semieixo maior em torno dos valores ressonantes.

Estudaremos então a condição associada a energia onde a libração do ângulo ressonante é máxima, que ocorre em H_{sep} . Para determinar o valor de H_{sep} nota-se que a curva correspondente a H_{sep} é a única que passa por $\dot{\phi} = 0$ e $\phi = 0^\circ$, logo substituindo esses valores no Hamiltoniano encontra-se

$$H_{\text{sep}} = \omega_0 \quad (4.13)$$

como o pêndulo é um sistema conservativo, H é constante, então aplicando H_{sep} no hamiltoniano e isolando $\dot{\phi}$ temos:

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \omega_0 \cos \phi \implies \dot{\phi} = \sqrt{2\omega_0(1 - \cos \phi)} \\ &\implies \dot{\phi} = \pm 2\sqrt{\omega_0} \sin \frac{1}{2}\phi \end{aligned} \quad (4.14)$$

Para encontrar a libração do semieixo maior eliminaremos a variável temporal de (4.4) dividindo ambos os lados por $\dot{\phi} = \frac{d\phi}{dt}$ da forma:

$$\frac{dt}{d\phi} \frac{dn}{dt} = \frac{1}{q} \frac{\ddot{\phi}}{\dot{\phi}} \implies \frac{dn}{d\phi} = \frac{1}{q} \frac{\ddot{\phi}}{\dot{\phi}} \quad (4.15)$$

Substituindo (4.10), (4.14) em (4.15) obtemos:

$$\frac{dn}{d\phi} = \frac{1}{q} \frac{\ddot{\phi}}{\dot{\phi}} \iff \frac{dn}{d\phi} = \pm \frac{1}{q} \frac{\omega_0 \sin \phi}{2\sqrt{\omega_0} \sin \frac{1}{2}\phi} \quad (4.16)$$

podendo ser simplificada de forma a obter a seguinte equação diferencial

$$\frac{dn}{d\phi} = \pm \frac{1}{q} \sqrt{\omega_0} \cos \frac{\phi}{2} \quad (4.17)$$

onde sua solução é dada integrando com respeito a ϕ , resultando em

$$n = n_0 \pm \frac{2}{q} \sqrt{\omega_0} \sin \frac{\phi}{2} \quad (4.18)$$

e como $\left| \sin \frac{\phi}{2} \right| < 1$ então a maior variação que o movimento médio pode ter é:

$$\Delta n = \pm \frac{2}{q} \sqrt{\omega_0} \quad (4.19)$$

Por fim podemos usar a terceira Lei de Kepler na forma $\Delta a = \left(\frac{2}{3n} \Delta n \right) a$ obtendo que a oscilação máxima do semieixo maior do asteroide que estará em ressonância com o planeta m' é dada por:

$$\Delta a = \pm \left[\frac{16\alpha m' |f_{k,d}^{p:q} + f_{k,i}^{p:q}|}{3M_\star} \right]^{1/2} a \quad (4.20)$$

4.2 Modelo considerando um segundo harmônico

O modelo feito na seção anterior se mostra suficiente para descrever ressonâncias interiores, ou seja aquelas em que $p > q$, porém para ressonâncias exteriores ($q > p$) como pode ser visto em [3] o modelo deve ser expandido incluindo um **segundo harmônico** ($\phi_{2k}^{2p:2q} = 2\phi_k^{p:q}$) associado ao angulo ressonante $\phi_k^{p:q}$ (ou primeiro harmônico) para que se possa explicar as librações assimétricas que aparecem ao estudar os problemas numericamente.

O modelo do pêndulo com um segundo harmônico é dado por:

$$\ddot{\phi}_k^{p:q} = \frac{3n^2 q^2 m' \alpha}{M_\star} [(f_{k,d}^{p:q} + f_{k,i}^{p:q}) \sin \phi_k^{p:q} + 2(f_{2k,d}^{2p:2q} + f_{2k,i}^{2p:2q}) \sin 2\phi_k^{p:q}] \quad (4.21)$$

Para não carregar a notação, seja

$$\begin{aligned} f_{k,d}^{p:q} + f_{k,i}^{p:q} &= f_k^{p:q} & f_{2k,d}^{2p:2q} + f_{2k,i}^{2p:2q} &= f_{2k}^{2p:2q} \\ \phi_k^{p:q} &= \phi & u &= \frac{3n^2 q^2 m' \alpha}{M_\star} (f_k^{p:q}) & v &= \frac{3n^2 q^2 m' \alpha}{M_\star} 2 (f_{2k}^{2p:2q}) \end{aligned}$$

então a equação (4.21) se torna:

$$\ddot{\phi} = u \sin \phi + v \sin 2\phi \quad (4.22)$$

Focaremos no caso $u > 0$ pois quando $u < 0$ a mudança $\phi = \phi + 180^\circ$ faz com que o coeficiente de $\sin \phi$ fique positivo.

Através da mudança $t = t'|u|^{-\frac{1}{2}}$ o modelo é simplificado passando a ter somente um parâmetro, pois

$$\frac{d\phi}{dt'} = \frac{d\phi}{dt} \frac{dt}{dt'} \implies \frac{d\phi}{dt'} = \frac{d\phi}{dt'} |u|^{-\frac{1}{2}} \quad \text{então} \quad \frac{d^2\phi}{dt'^2} = \frac{d^2\phi}{dt^2} |u|^{-1} \quad (4.23)$$

Substituindo (4.23) em (4.22) tem-se

$$\phi'' = \sin \phi + \frac{v}{|u|} \sin 2\phi \quad \text{onde} \quad \frac{d^2\phi}{dt'^2} = \phi'' \quad (4.24)$$

onde podemos introduzir um único parâmetro $\beta = \frac{2v}{|u|}$ para assim reescrever (4.24) como

$$\phi'' = \sin \phi + \frac{\beta}{2} \sin 2\phi \quad (4.25)$$

de forma que o sistema possui sua energia potencial dada por $V = \cos \phi + \frac{\beta}{4} \cos 2\phi$, concluindo que o Hamiltoniano associado a (4.25) é:

$$H = \frac{p^2}{2} + \cos \phi + \frac{\beta}{4} \cos 2\phi \quad (4.26)$$

aqui $p = \phi'$ é o momento, não confundir com o termo p da ressonância $p : q$.

A dedução para obter a libração do semieixo maior é de certa forma análoga ao já feito para um harmônico. Usando a transformação temporal de (4.23) em (4.4) obtêm-se:

$$n' = \frac{1}{q} |u|^{\frac{1}{2}} \phi'' \quad (4.27)$$

De maneira similar a feita em (4.15), a variável temporal de (4.27) pode ser eliminada resultando em:

$$\frac{dt'}{d\phi} \frac{dn}{dt'} = \frac{|u|^{\frac{1}{2}} \phi''}{q \phi'} \implies \frac{dn}{d\phi} = \frac{|u|^{\frac{1}{2}} \phi''}{q \phi'} \quad (4.28)$$

Usando $p = \phi'$ e isolando p de (4.26) resulta em

$$\phi' = [2(H - V)]^{\frac{1}{2}} = \left[2 \left(H - \cos \phi - \frac{\beta}{4} \cos 2\phi \right) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.29)$$

e aplicando (4.29) e (4.25) em (4.28) obtemos:

$$\frac{dn}{d\phi} = \frac{|u|^{\frac{1}{2}} \phi''}{q \phi'} \iff \frac{dn}{d\phi} = \frac{|u|^{\frac{1}{2}}}{q} \frac{\sin \phi + \frac{\beta}{2} \sin 2\phi}{[2(H - \cos \phi - \frac{\beta}{4} \cos 2\phi)]^{\frac{1}{2}}} \quad (4.30)$$

cuja a solução é obtida integrando com respeito a ϕ de forma que

$$n = n_0 + \frac{|u|^{\frac{1}{2}}}{q} \left[2H - 2 \cos \phi - \frac{\beta}{2} \cos 2\phi \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.31)$$

lembrando que H é constante pois o sistema é conservativo. Então a variação do movimento médio será:

$$\Delta n = \frac{|u|^{\frac{1}{2}}}{q} \left[2H - 2 \cos \phi - \frac{\beta}{2} \cos 2\phi \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.32)$$

As curvas de níveis do Hamiltoniano são mostrados a seguir, onde podemos ver comportamentos diferente para determinados valores de β

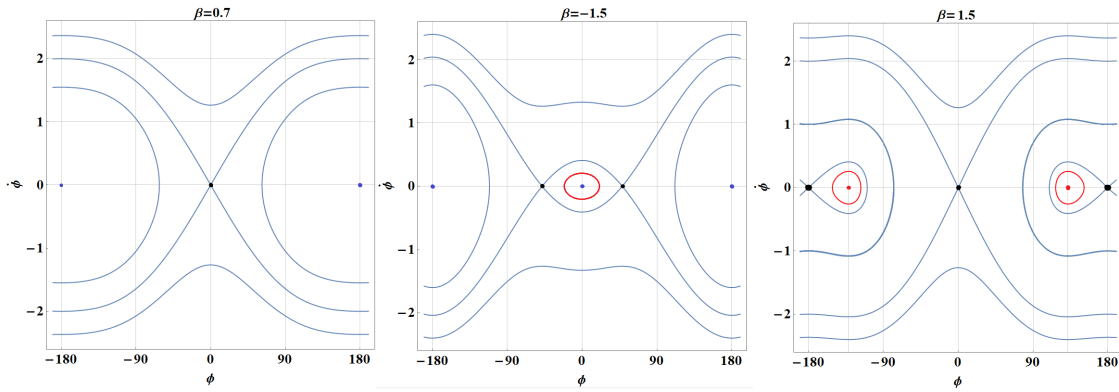


Figura 4.2: Curvas de níveis da equação (4.26) para diferentes valores de β .

A equação (4.32) é usada para deduzir a oscilação do semieixo maior do asteroide de maneira similar ao caso para um harmônico já feito. Primeiro encontra-se a energia da curva separatriz H_{sep} , aplica-se o valor obtido em (4.32) e usa-se a terceira lei de Kepler (na forma $\Delta a = 2(3n)^{-1} \Delta n a$) para determinar a oscilação máxima.

- Para $|\beta| < 1$ a libração ocorre com $\phi = 180^\circ$ e com a energia da separatriz sendo $H_{\text{sep}} = 1 + \frac{\beta}{4}$. Temos então que a libração máxima do semieixo maior será

$$\Delta_0 a_k^{p:q} = \frac{4|u|^{1/2} a_k^{p:q}}{3qn} = \left[\frac{16\alpha m' |f_k^{p:q}|}{3M_\star} \right]^{1/2} a_k^{p:q} \quad (4.33)$$

onde $a_k^{p:q} = \alpha a'$ é o semieixo maior associado a ressonância em que o asteroide se encontra. Note que a equação acima é análoga a (4.20), mostrando neste caso o modelo com apenas um harmônico é o suficiente para fazer o estudo.

Quando $|\beta| > 1$, o segundo harmônico já apresenta uma influência na ressonância onde β pode ser tanto positivo quanto negativo e deve ser estudado separadamente.

- Para $\beta < -1$ vemos pela figura que a libração pode ocorrer tanto para $\phi = 0^\circ$ quanto $\phi = 180^\circ$, onde a amplitude de libração é maior. A energia da separatriz é dada por $H_{\text{sep}} = -\frac{\beta}{4} - \frac{1}{2\beta}$. Para o ângulo $\phi = 0^\circ$ a libração máxima do semieixo maior é:

$$\Delta_1 a_k^{p:q} = \frac{2|2v + |u||a_k^{p:q}}{3qn|2v|^{1/2}} = \left[\frac{\alpha m'}{3M_\star} \right]^{\frac{1}{2}} \frac{|4f_{2k}^{2p:2q} + |f_k^{p:q}||}{|f_{2k}^{2p:2q}|^{1/2}} a_k^{p:q} \quad (4.34)$$

enquanto para $\phi = 180^\circ$:

$$\Delta_2 a_k^{p:q} = \frac{2|2v - |u||a_k^{p:q}}{3qn|2v|^{1/2}} = \left[\frac{\alpha m'}{3M_\star} \right]^{1/2} \frac{|4(f_{2k}^{2p:2q}) - |f_k^{p:q}||}{|f_{2k}^{2p:2q}|^{1/2}} a_k^{p:q} \quad (4.35)$$

- Para o caso $\beta > 1$, temos duas separatrizes. A separatriz que possui energia $H_{\text{sep}_1} = \frac{\beta}{4} - 1$, onde ocorrem librações assimétricas em $\phi_{s\pm} = \pm \arccos(-\beta^{-1})$ e a amplitude da ressonância possui a mesma expressão de $\Delta_2 a_k^{p:q}$. A segunda separatriz possui energia $H_{\text{sep}_2} = \frac{\beta}{4} + 1$ onde a libração ocorre em $\phi = 180^\circ$ com variação máxima do semieixo maior dado por $\Delta_1 a_k^{p:q}$.

Toda a análise é realizada considerando que o caso $f_{k,d}^{p:q} + f_{k,i}^{p:q} > 0$. Se este valor for negativo, a mudança é que todos os ângulos críticos são transladados em 180° , que pode ser visto através da mudança $\phi = 180 + \bar{\phi}$

4.3 Modelo com diversos ângulos ressonantes

O estudo do modelo do pêndulo até aqui foi feito utilizando apenas um ângulo ressonante $\phi_k^{p:q}$, porém quando estamos em uma ressonância do tipo $p : q$ outros valores de k podem contribuir para a libração do ângulo. Seguindo então o estudo realizado em [4] vamos adicionar um segundo ângulo ressonante ao modelo, e depois generalizar o procedimento para um número arbitrário.

Deixando claro que dada uma ressonância $p : q$ podemos ter diversos **ângulos ressonantes** dados por $\phi_{k_1}^{p:q}, \phi_{k_2}^{p:q}, \dots, \phi_{k_n}^{p:q}$, onde $k_n \in \mathbb{Z}$ onde para cada ângulo ressonante tem-se um **segundo harmônico** associado a cada um deles, dados por

$$\phi_{2k_1}^{2p:2q}, \phi_{2k_2}^{2p:2q}, \dots, \phi_{2k_n}^{2p:2q}.$$

4.3.1 Modelo com dois ângulos ressonantes

Dado ângulo ressonante $\phi_{k_0}^{p:q}$ podemos obter $\phi_{k_1}^{p:q}$ através de

$$\phi_{k_1}^{p:q} = \phi_{k_0}^{p:q} - l\omega \quad \text{onde} \quad k_1 = k_0 + l \quad (4.36)$$

logo de forma mais geral sejam $\phi_{k_1}^{p:q}$ e $\phi_{k_2}^{p:q}$ onde para cada um deles podemos associar um modelo do pêndulo da forma:

$$\begin{aligned} \ddot{\phi}_{k_1}^{p:q} &= \frac{3n^2 q^2 m' \alpha}{M_\star} (f_{k_1,d}^{p:q} + f_{k_1,i}^{p:q}) \text{sen } \phi_{k_1}^{p:q} \\ \ddot{\phi}_{k_2}^{p:q} &= \frac{3n^2 q^2 m' \alpha}{M_\star} (f_{k_2,d}^{p:q} + f_{k_2,i}^{p:q}) \text{sen } \phi_{k_2}^{p:q} \end{aligned} \quad (4.37)$$

Somando ambas equações obtêm-se

$$\ddot{\phi}_{k_1}^{p:q} + \ddot{\phi}_{k_2}^{p:q} = \frac{3n^2 q^2 m' \alpha}{M_\star} \left((f_{k_1,d}^{p:q} + f_{k_1,i}^{p:q}) \text{sen } \phi_{k_1}^{p:q} + (f_{k_2,d}^{p:q} + f_{k_2,i}^{p:q}) \text{sen } \phi_{k_2}^{p:q} \right) \quad (4.38)$$

Através de (4.36) quaisquer ângulos ressonantes podem ser escritos em função de apenas um ângulo, ou seja sem perda de generalidade tome $\phi_0^{p:q}$ de forma que (4.38) é simplificada em

$$\ddot{\phi}_0^{p:q} = \frac{3n^2 q^2 m' \alpha}{M_\star} \left(f_{k_1}^{p:q} \text{sen } \phi_{k_1}^{p:q} + f_{k_2}^{p:q} \text{sen } \phi_{k_2}^{p:q} \right) \quad (4.39)$$

onde os termos $f_{k_1}^{p:q}$ e $f_{k_2}^{p:q}$ já incluem a parte direta e indireta da função perturbadora (assim será até o final do texto).

A ideia é transformar a equação (4.39) em algo semelhante a (4.9) utilizar o estudo já realizado.

Começaremos chamando $\gamma = \frac{3n^2 q^2 m' \alpha}{M_\star}$ e notando que podemos fazer:

$$\phi_{k_1}^{p:q} = \phi_{k_0}^{p:q} - \omega k_1 + \omega k_0 \quad \phi_{k_2}^{p:q} = \phi_{k_0}^{p:q} - \omega k_2 + \omega k_0$$

pois com essa mudança podemos re-escrever (4.39) como:

$$\ddot{\phi}_0^{p:q} = \gamma \left[f_{k_1}^{p:q} \text{sen}(\phi_{k_0}^{p:q} - \omega k_1 + \omega k_0) + f_{k_2}^{p:q} \text{sen}(\phi_{k_0}^{p:q} - \omega k_2 + \omega k_0) \right]$$

Fazendo o uso da igualdade:

$$\begin{aligned} \text{sen}(a + b + c) &= -\text{sen}(a) \text{sen}(b) \text{sen}(c) + \text{sen}(a) \cos(b) \cos(c) \\ &\quad + \cos(a) \text{sen}(b) \cos(c) + \cos(a) \cos(b) \text{sen}(c) \end{aligned}$$

para ambos os senos, teremos:

$$\begin{aligned} \ddot{\phi}_0^{p:q} = \gamma \bigg[& f_{k_1}^{p:q} \sin(\phi_0^{p:q}) \sin(k_0\omega) \sin(k_1\omega) + f_{k_1}^{p:q} \sin(\phi_0^{p:q}) \cos(k_0\omega) \cos(k_1\omega) \\ & + f_{k_1}^{p:q} \cos(\phi_0^{p:q}) \sin(k_0\omega) \cos(k_1\omega) - f_{k_1}^{p:q} \cos(\phi_0^{p:q}) \cos(k_0\omega) \sin(k_1\omega) \\ & + f_{k_2}^{p:q} \sin(\phi_0^{p:q}) \sin(k_0\omega) \sin(k_2\omega) + f_{k_2}^{p:q} \sin(\phi_0^{p:q}) \cos(k_0\omega) \cos(k_2\omega) \\ & + f_{k_2}^{p:q} \cos(\phi_0^{p:q}) \sin(k_0\omega) \cos(k_2\omega) - f_{k_2}^{p:q} \cos(\phi_0^{p:q}) \cos(k_0\omega) \sin(k_2\omega) \bigg] \end{aligned}$$

Coletando todos os termos em que aparece $\phi_0^{p:q}$ tem-se:

$$\begin{aligned} \ddot{\phi}_0^{p:q} = \gamma \bigg[& \sin(\phi_0^{p:q}) \left(f_{k_1}^{p:q} \sin(k_0\omega) \sin(k_1\omega) + f_{k_1}^{p:q} \cos(k_0\omega) \cos(k_1\omega) \right. \\ & \left. + f_{k_2}^{p:q} \cos(k_0\omega) \cos(k_2\omega) + f_{k_2}^{p:q} \sin(k_0\omega) \sin(k_2\omega) \right) \\ & + \cos(\phi_0^{p:q}) \left(f_{k_1}^{p:q} \sin(k_0\omega) \cos(k_1\omega) - f_{k_1}^{p:q} \cos(k_0\omega) \sin(k_1\omega) \right. \\ & \left. + f_{k_2}^{p:q} \sin(k_0\omega) \cos(k_2\omega) - f_{k_2}^{p:q} \cos(k_0\omega) \sin(k_2\omega) \right) \bigg] \end{aligned}$$

Porem podemos usar as relações

$$\begin{aligned} \sin(a+b) &= \sin(a) \cos(b) + \cos(a) \sin(b) \\ \cos(a+b) &= \cos(a) \cos(b) - \sin(a) \sin(b) \end{aligned} \tag{4.40}$$

e re-escrever os termos que acompanham $\sin(\phi_0^{p:q})$ e $\cos(\phi_0^{p:q})$ como:

$$\begin{aligned} \ddot{\phi}_0^{p:q} = \gamma \bigg[& \sin \phi_0^{p:q} \left(f_{k_1}^{p:q} \cos(k_0\omega - k_1\omega) + f_{k_2}^{p:q} \cos(k_0\omega - k_2\omega) \right) \\ & + \cos \phi_0^{p:q} \left(f_{k_1}^{p:q} \sin(k_0\omega - k_1\omega) + f_{k_2}^{p:q} \sin(k_0\omega - k_2\omega) \right) \bigg] \end{aligned} \tag{4.41}$$

fazendo $k_0 = 0$ (uma vez que k_0 é apenas um parametro inicial) teremos:

$$\begin{aligned} \ddot{\phi}_0^{p:q} = \gamma \bigg[& \sin \phi_0^{p:q} \left(f_{k_1}^{p:q} \cos k_1\omega + f_{k_2}^{p:q} \cos k_2\omega \right) \\ & - \cos \phi_0^{p:q} \left(f_{k_1}^{p:q} \sin k_1\omega + f_{k_2}^{p:q} \sin k_2\omega \right) \bigg] \end{aligned} \tag{4.42}$$

Para usar novamente as relações (4.40), seria conveniente se pudéssemos fazer a mudança:

$$\begin{aligned} \cos(\delta\phi_{k_1,k_2}^{p:q}) &= f_{k_1}^{p:q} \cos(k_1\omega) + f_{k_2}^{p:q} \cos(k_2\omega) \\ \sin(\delta\phi_{k_1,k_2}^{p:q}) &= f_{k_1}^{p:q} \sin(k_1\omega) + f_{k_2}^{p:q} \sin(k_2\omega) \end{aligned}$$

porém para garantir que a mudança seja válida, é necessário verificar que:

$$\sin^2 \delta\phi_{k_1,k_2}^{p:q} + \cos^2 \delta\phi_{k_1,k_2}^{p:q} = (f_{k_1}^{p:q})^2 + (f_{k_2}^{p:q})^2 + 2f_{k_1}^{p:q} f_{k_2}^{p:q} \cos(\omega[k_1 - k_2]) \neq 1 \quad (4.43)$$

que deveria ser igual a 1 para satisfazer a relação $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$. Com base nisso podemos tomar

$$\begin{aligned} \cos(\delta\phi_{k_1,k_2}^{p:q}) &= \frac{f_{k_1}^{p:q} \cos(-k_1\omega) + f_{k_2}^{p:q} \cos(-k_2\omega)}{g_{k_1,k_2}^{p:q}} \\ \sin(\delta\phi_{k_1,k_2}^{p:q}) &= \frac{f_{k_1}^{p:q} \sin(-k_1\omega) + f_{k_2}^{p:q} \sin(-k_2\omega)}{g_{k_1,k_2}^{p:q}} \end{aligned}$$

onde para satisfazer (4.43) basta tomar:

$$g_{k_1,k_2}^{p:q} = \sqrt{(f_{k_1}^{p:q})^2 + (f_{k_2}^{p:q})^2 + 2f_{k_1}^{p:q} f_{k_2}^{p:q} \cos(\omega[k_1 - k_2])}$$

pois assim a equação (4.42) se reduz a

$$\ddot{\phi}_0^{p:q} = \gamma g_{k_1,k_2}^{p:q} \left[\sin \phi_0^{p:q} \cos \delta\phi_{k_1,k_2}^{p:q} - \cos \phi_0^{p:q} \sin \delta\phi_{k_1,k_2}^{p:q} \right] \quad (4.44)$$

onde novamente através de (4.40) torna-se:

$$\ddot{\phi}_0^{p:q} = \frac{3n^2 q^2 m' \alpha}{M_\star} g_{k_1,k_2}^{p:q} \sin(\phi_0^{p:q} - \delta\phi_{k_1,k_2}^{p:q}) \quad (4.45)$$

Como (4.45) é análoga a (4.9) então a variação do semieixo maior será dada por (4.20) onde agora a amplitude da variação será dado por $g_{k_1,k_2}^{p:q}$ que neste modelo também depende do argumento do periastro ω , algo que não ocorria para um ângulo ressonante. Além do mais ambos os argumentos da libração são deslocados por $\delta\phi_{k_1,k_2}^{p:q}$ que também é uma função de ω , chamamos este tipo de libração de *libração deslocada* que não deve ser confundida com a libração assimétrica que está relacionada com a existência de pontos críticos no sistema.

4.3.2 Modelo com vários ângulos ressonantes

Pode-se generalizar a construção feita acima para o caso de N_k ângulos ressonantes que podem ou não oscilar simultaneamente. Sendo assim, podemos reduzir o modelo com vários ângulos ressonantes a uma equação do pêndulo da forma:

$$\ddot{\phi}_0^{p:q} = \frac{3n^2 q^2 m' \alpha}{M_\star} g_{k_1,\dots}^{p:q} \sin(\phi_0^{p:q} - \delta\phi_{k_1,\dots}^{p:q}) \quad (4.46)$$

onde $k_1, \dots$ representa a lista com os N_k valores de k e os coeficientes serão:

$$\begin{aligned} (g^{p:q})^2 &= \sum_{\substack{0 \leq \mu, \nu \leq N_k \\ \mu \neq \nu}} f_{k_\nu}^{p:q} f_{k_\mu}^{p:q} \cos([k_\mu - k_\nu] \omega) + \sum_{\mu=1}^{N_k} f_{k_\mu}^{p:q^2} \\ \cos \delta \phi^{p:q} &= \left[\sum_{\mu=1}^{N_k} f_{k_\mu}^{p:q} \cos k_\mu \omega \right] (g^{p:q})^{-1} \\ \sin \delta \phi^{p:q} &= \left[\sum_{\mu=1}^{N_k} f_{k_\mu}^{p:q} \sin k_\mu \omega \right] (g^{p:q})^{-1} \end{aligned} \quad (4.47)$$

Como a construção feita segue de forma análoga ao modelo com um ângulo ressonante, então a variação máxima do semieixo maior continua sendo dada por (4.20), da forma:

$$\Delta a = \pm \left[\frac{16\alpha m' |g^{p:q}|}{3M_\star} \right]^{1/2} a$$

4.3.3 Modelo com dois ângulos ressonantes e respectivos segundos harmônicos

Para expandir o modelo podemos tomar um segundo ângulo ressonante e seu segundo harmônico associado a ele, de forma que o modelo agora será:

$$\ddot{\phi}_0^{p:q} = \frac{3n^2 q^2 m' \alpha}{M_\star} \left(f_{k_1}^{p:q} \sin \phi_{k_1}^{p:q} + 2f_{2k_1}^{2p:2q} \sin 2\phi_{k_1}^{p:q} + f_{k_2}^{p:q} \sin \phi_{k_2}^{p:q} + 2f_{2k_2}^{2p:2q} \sin 2\phi_{k_2}^{p:q} \right) \quad (4.48)$$

onde através de manipulações análogas a já feitas anteriormente a equação é escrita de uma forma semelhante a (4.21), sendo ela:

$$\ddot{\phi}_0^{p:q} = \frac{3n^2 q^2 m' \alpha}{M_\star} \left[g_{k_1, k_2}^{p:q} \sin(\phi_0^{p:q} - \delta \phi_{k_1, k_2}^{p:q}) + 2g_{2k_1, 2k_2}^{2p:2q} \sin(2\phi_0^{p:q} - \delta \phi_{2k_1, 2k_2}^{2p:2q}) \right] \quad (4.49)$$

Com base ao feito na seção 4.2 introduziremos as mudanças de variáveis:

$$\phi = \phi_0^{p:q} - \frac{1}{2} \delta \phi_{2k_1, 2k_2}^{2p:2q} \quad t' = t \left| \frac{3n^2 q^2 m' \alpha g_{k_1, k_2}^{p:q}}{M_\star} \right|^{\frac{1}{2}} \quad (4.50)$$

pois assim (4.49) se reduz a:

$$\phi'' = \frac{1}{2} b \sin(2\phi) + \sin(\phi - \delta) \quad (4.51)$$

de forma que ϕ'' representa a segunda derivada temporal com respeito a t' e os parâmetros b e δ são dados por:

$$b = \frac{4g_{2k_1, 2k_2}^{2p:2q}}{|g_{k_1, k_2}^{p:q}|} \quad \delta = \delta \phi_{k_1, k_2}^{p:q} - \frac{1}{2} \delta \phi_{2k_1, 2k_2}^{2p:2q} \quad (4.52)$$

O Hamiltoniano de (4.51) é dado por:

$$H = \frac{p^2}{2} + \cos(\phi - \delta) + \frac{b}{4} \cos(2\phi) \quad (4.53)$$

onde lembrando que $p = \phi'$.

Um estudo mais detalhado sobre os pontos de equilíbrio e suas respectivas estabilidades esta feita no Apêndice B, onde temos que a variação máxima de Δp associado a ϕ_c (valor no qual ocorre a libração do ângulo ressonante), para cada condição inicial b e δ é dado por:

$$\Delta p = \sqrt{2(H_{\text{sep}} - V(\phi_c))} \quad (4.54)$$

onde $V(\phi_c)$ é a energia potencial do Hamiltoniano, ou seja

$$V(\phi_c) = \cos(\phi_c - \delta) + \frac{b}{4} \cos(2\phi_c)$$

de forma que o valor H_{sep} é o valor de energia associado a curva separatriz. Para encontrarmos de fato esta variação é mais conveniente usar as equações de Hamilton $\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial \phi}$, $\dot{\phi} = \frac{\partial H}{\partial p}$ montando o sistema:

$$\begin{cases} \dot{\phi} = p \\ \dot{p} = \frac{1}{2}b \sin(2\phi) + \sin(\phi - \delta) \end{cases} \quad (4.55)$$

Sabemos que a curva separatriz passa pelos pontos críticos do sistema (4.55), que são os pontos onde $(\dot{\phi}, \dot{p}) = (0, 0)$, logo teremos que:

$$\begin{cases} 0 = p \\ 0 = \frac{1}{2}b \sin(2\phi) + \sin(\phi - \delta) \end{cases} \quad (4.56)$$

Seja ϕ_c, p_c os valores que satisfazem $\dot{p} = 0$ e $\dot{\phi} = 0$ respectivamente. Podemos lembrar que a natureza de um ponto crítico (estável ou instável) é determinada através do auto valor da matriz de coeficientes do sistema linearizado em torno deste ponto. Fazendo então a linearização de (4.55) em torno dos pontos de equilíbrio obtemos o sistema na sua forma matricial

$$\begin{pmatrix} \dot{p} \\ \dot{\phi} \end{pmatrix} = J \cdot \begin{pmatrix} p \\ \phi - \phi_c \end{pmatrix}$$

onde a matriz J é dada por:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & b \cos(2\phi_c) + \cos(\phi_c - \delta) \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

cujo seus autos valores τ associados são dados por:

$$\tau^2 - b \cos(2\phi_c) + \cos(\phi_c - \delta) = 0 \iff \tau(\phi_c) = \pm \sqrt{b \cos(2\phi_c) + \cos(\phi_c - \delta)} \quad (4.57)$$

- Se o par $\tau(\phi_c)$ for complexo puro, o ponto $(\phi_c, 0)$ é um centro, logo estável.
- Se o par $\tau(\phi_c)$ for real, os autovalores tem sinais opostos, logo $(\phi_c, 0)$ é um ponto instável.

Com base nisso, podemos resolver o sistema (4.55) numericamente, encontrar todos os possíveis pontos críticos, analisar suas estabilidades de acordo com (4.57) para encontrar o valor de energia associado com as curvas separatrizes para assim aplicar H_{sep} em (4.54) encontrando a variação máxima do Δp para por fim usarmos este valor em

$$\Delta a_k^{p:q} = 2 \left[\frac{\alpha m' |g_{k_1, k_2}^{p:q}|}{3M_\star} \right]^{\frac{1}{2}} \Delta p a_k^{p:q} \quad (4.58)$$

encontrando então a variação máxima do semieixo maior (deduzida de maneira análoga a já feita nas seções anteriores).

4.3.4 Modelo com vários ângulos ressonantes e respectivos segundos harmônicos

Da mesma forma que generalizamos o modelo para um harmônico e diversos ângulos ressonantes, podemos generalizar o caso com dois harmônicos para diversos ângulos ressonantes. A equação resultante é a mesma, porém trocando $g_{k_1, k_2}^{p:q}$ por $g_{k_1, \dots}^{p:q}$ e $\delta_{k_1, k_2}^{p:q}$ por $\delta_{k_1, \dots}^{p:q}$ e substituindo $g_{2k_1, 2k_2}^{2p:2q}$ e $\delta_{2k_1, 2k_2}^{2p:2q}$ por:

$$\begin{aligned} (g^{2p:2q})^2 &= \sum_{\substack{0 \leq \mu, \nu \leq N_k \\ \mu \neq \nu}} f_{2k_\nu}^{2p:2q} f_{2k_\mu}^{2p:2q} \cos(2[k_\mu - k_\nu]\omega) + \sum_{\mu=1}^{N_k} f_{2k_\mu}^{2p:2q^2} \\ \cos \delta \phi^{2p:2q} &= \left[\sum_{\mu=1}^{N_k} f_{2k_\mu}^{2p:2q} \cos 2k_\mu \omega \right] (g^{2p:2q})^{-1} \\ \sin \delta \phi^{2p:2q} &= \left[\sum_{\mu=1}^{N_k} f_{2k_\mu}^{2p:2q} \sin 2k_\mu \omega \right] (g^{2p:2q})^{-1} \end{aligned} \quad (4.59)$$

onde todo o estudo realizado com o Hamiltoniano (4.53) se mantém o mesmo, apenas precisando ser feita a consideração que agora os parâmetros δ e β são dados por:

$$b = \frac{4g^{2p:2q}}{|g^{p:q}|} \quad \delta = \delta\phi^{p:q} - \frac{1}{2}\delta\phi^{2p:2q} \quad (4.60)$$

5 Exemplos de ressonâncias de movimento médio

Neste Capítulo iremos aplicar os modelos estudados para um possível objeto de massa negligenciável em ressonância de movimento médio com um planeta cuja massa seja igual a de Júpiter ou Netuno em torno de uma estrela de massa semelhante a do Sol assumindo que tanto inclinações quanto excentricidades destes planetas são nulas. As análises a seguir não foram feitas em detalhes em [2] ou [3] uma vez que nos mesmo, o estudo foi feito fixando alguns valores de excentricidade e variando a inclinação do asteroide. Aqui será fixado a inclinação (em todos os caso em $I = 89^\circ$) e analisar qual a amplitude máxima que o semi eixo maior pode assumir de acordo com cada excentricidade. Para isto, foi realizada a construção tanto dos modelos estudados, quanto das funções perturbadoras no Mathematica.

5.1 Ressonância 3 : 1 quase polar com Júpiter

Usando um planeta cuja massa é semelhante a Júpiter, o ponto de partida é determinar α da ressonância, que através de (2.58) é dada por:

$$\alpha = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{3}} \approx 0.48075$$

Como $p = 3$ e $q = 1$ temos que os ângulos ressonantes dados por (4.1) são da forma:

$$\phi_k^{3:1} = \lambda - 3\lambda' + 2\Omega - k\omega \quad (5.1)$$

onde k é um inteiro par qualquer.

Para tentarmos entender quais valores de k tem maior influência na amplitude de α , vamos plotar o gráfico do valor dos coeficientes da função perturbadora associado a um determinado ângulo ressonante (ou seja, vamos plotar $f_k^{3:1}$ que é a soma de todos os coeficientes que acompanham o termo $\phi_k^{3:1}$ em (3.12)) em função da excentricidade, dada uma inclinação, e avaliar qual termo $f_k^{3:1}$ possui maior influência. Para isso vamos tomar o caso particular em que $I = 89^\circ$, logo vamos fazer uso da função perturbadora polar, obtendo então a Figura 5.1 a seguir:

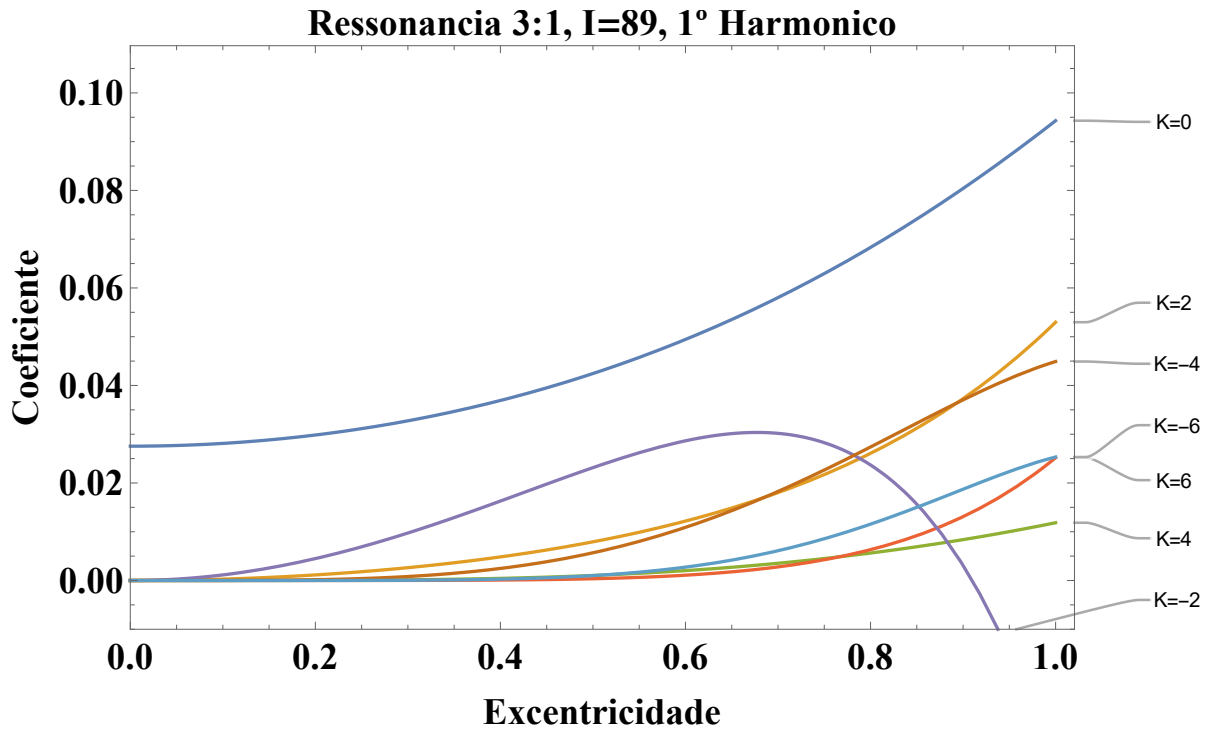


Figura 5.1: Amplitude do coeficiente da função perturbadora $f_k^{3:1}$ associado a cada $\phi_k^{3:1}$.

Através da Figura 5.1, podemos ver que os ângulos com maior influência (aqueles que apresentam maiores valores) são aqueles em que $k = -4$, $k = -2$, $k = 0$ e $k = 2$, então podemos usar o modelo da Seção 4.1 referente ao caso de posuirmos apenas um ângulo ressonante e um harmônico para estudar a variação do parâmetro α do asteroide.

Utiliza-se a expansão da função perturbadora até quarta ordem para que apareçam todos ângulos ressonantes (que é o suficiente como visto em [3]) para a escolha de k feita e então calcula-se os coeficientes de Laplace utilizando a expansão feita no Apêndice A, obtendo a Figura 5.2.

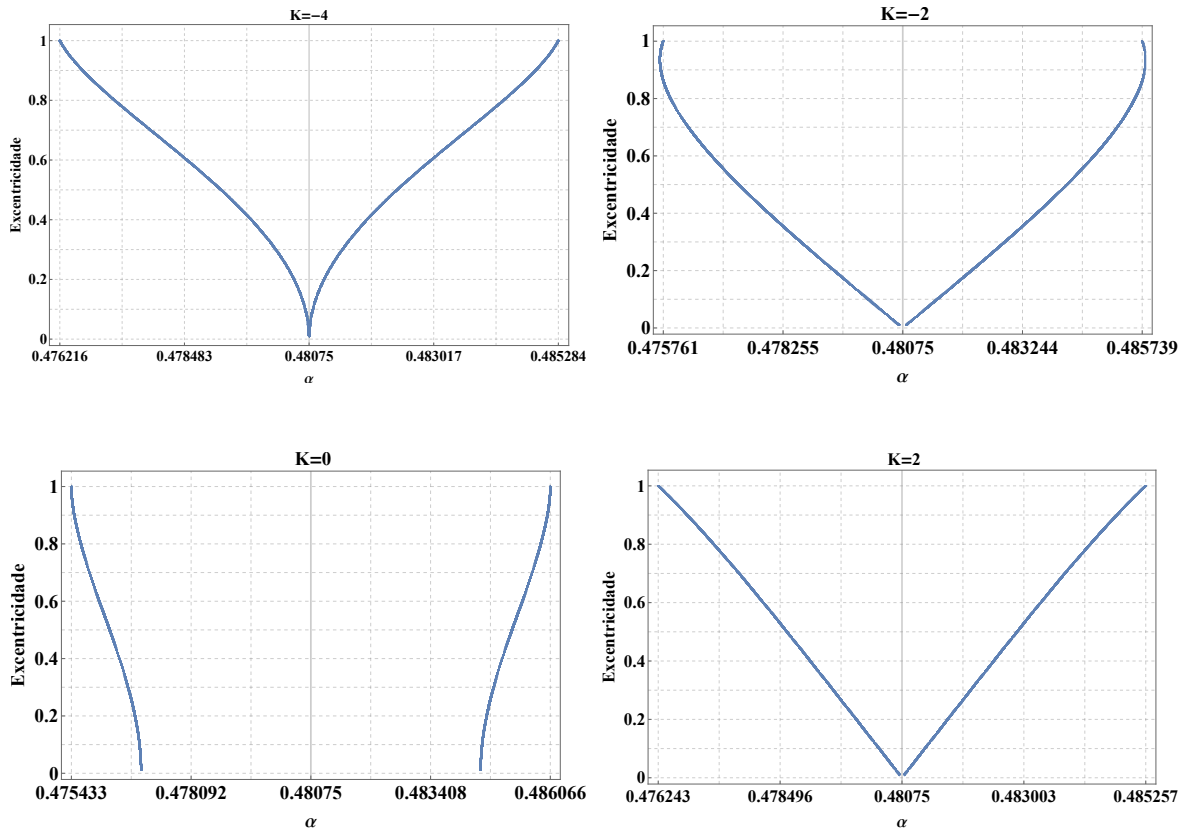


Figura 5.2: Oscilação esperada do parâmetro α de acordo com cada k associado ao ângulo $\phi_k^{3:1}$. Pontos interiores as linhas indicam uma condição inicial de forma que haja a libração do angulo ressonante $\phi_k^{3:1}$.

Porém como mencionado, a libração de um ângulo ressonante pode ser influenciado pelos outros. Portanto fazendo uso do modelo da Seção 4.3.1 que leva em conta a contribuição de mais de um ângulo ressonante podemos fazer a Figura 5.3:

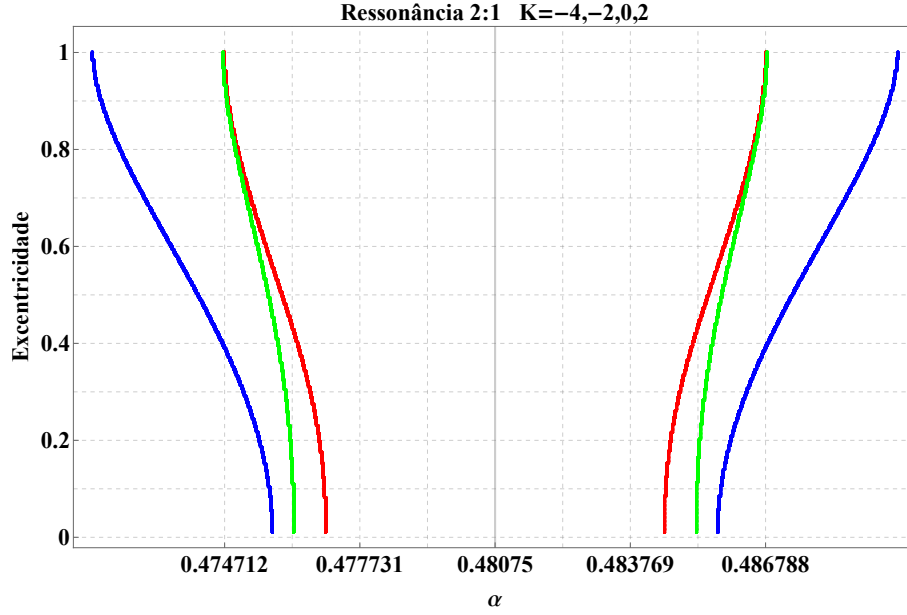


Figura 5.3: Oscilação esperada do parâmetro α considerando $k = -2, 0, 2, 4$. A linha azul representa $\omega = 0^\circ$, a verde $\omega = 45^\circ$ e a vermelha $\omega = 90^\circ$.

5.2 Ressonância 2 : 1 quase polar com Júpiter

Para o estudo de uma ressonância 2 : 1 teremos que seu parâmetro α será:

$$\alpha = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}} \approx 0.6299$$

e como $p = 2$ e $q = 1$ temos que os ângulos ressonantes são:

$$\phi_k^{2:1} = \lambda - 2\lambda' + \Omega - k\omega \quad (5.2)$$

de maneira análoga, para determinar os k de interesse faremos o gráfico dos coeficientes da função perturbadora (os coeficientes que acompanham o termo $\phi_k^{2:1}$ em (3.12)) em função da excentricidade fixando $I = 89^\circ$ obtendo a Figura 5.4, onde através da mesma podemos ver que os ângulos que têm maior influência são aqueles em que $k = -5$, $k = -3$, $k = -1$ e $k = 1$, então podemos usar o modelo da Seção 4.1 para estudar a variação máxima do semieixo maior do asteroide vista na Figura 5.5.

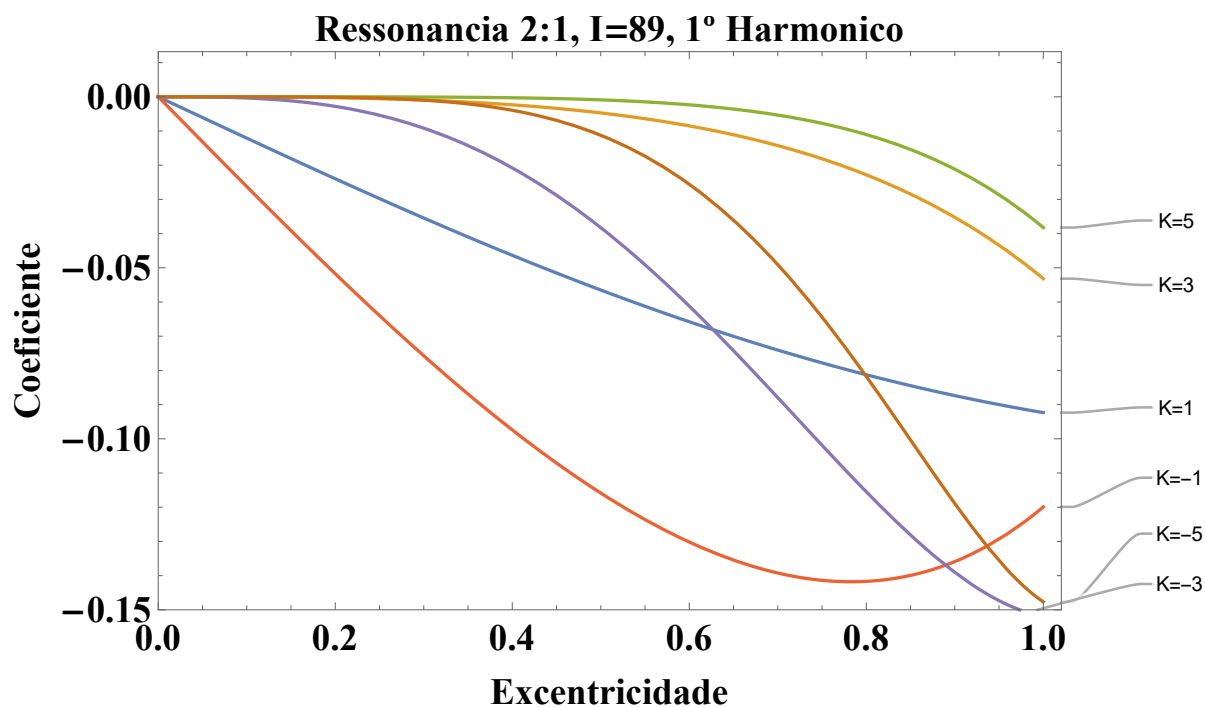


Figura 5.4: Amplitude do coeficiente da função perturbadora $f_k^{2:1}$ associado a cada $\phi_k^{2:1}$.

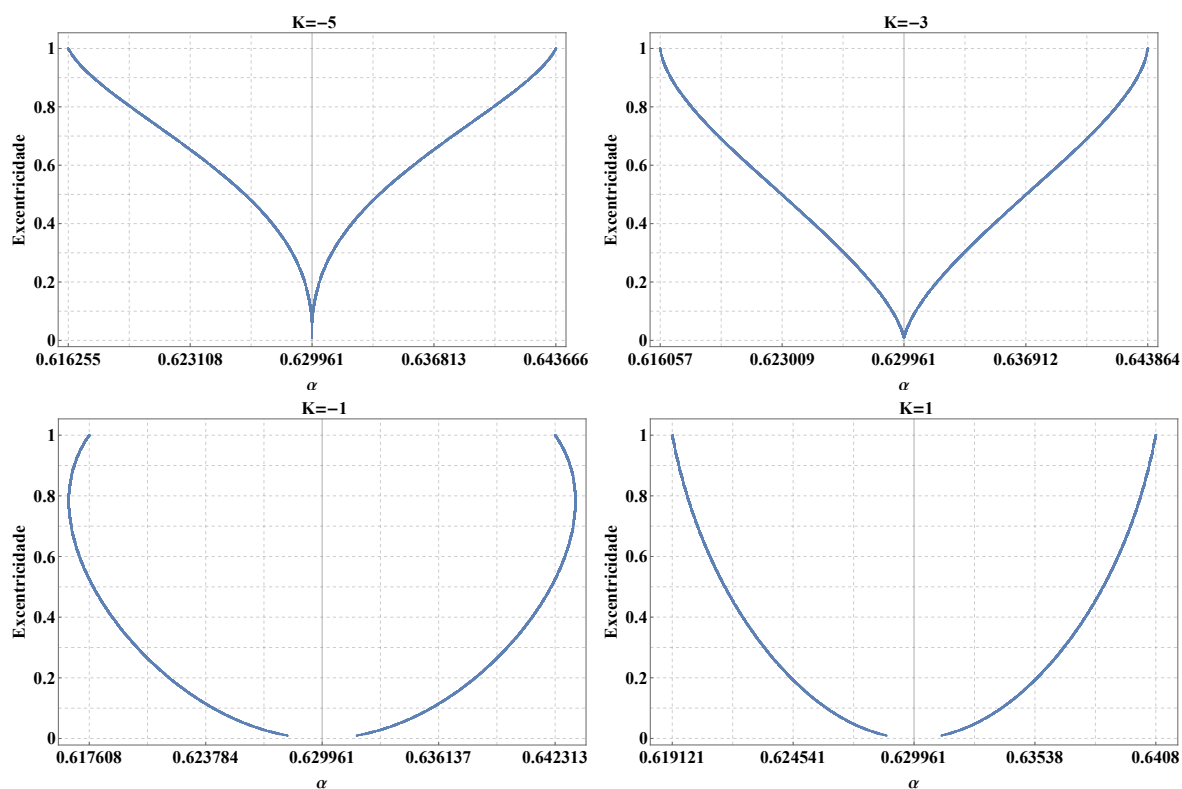


Figura 5.5: Variação esperada do parâmetro α de acordo com cada k associado ao ângulo $\phi_k^{2:1}$.

Analogamente pode haver a contribuição de mais de um ângulo ressonante na amplitude do parâmetro α , logo usando novamente modelo da Seção 4.3.1 para levar em conta essas contribuições temos:

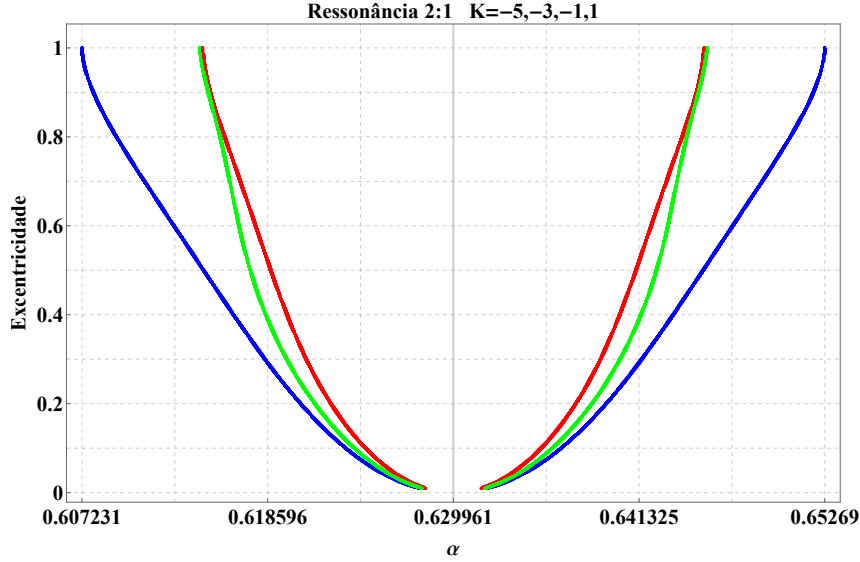


Figura 5.6: Variação esperada do parâmetro α considerando $k = -5, -3, -1, 1$. A linha azul representa $\omega = 0^\circ$, a verde $\omega = 45^\circ$ e a vermelha $\omega = 90^\circ$

5.3 Ressonância 1 : 3 quase polar com Netuno

Para este exemplo usaremos agora um planeta com massa semelhante a Netuno. Como a ressonância é externa (pois $q > p$) precisamos usar o modelo do pêndulo que leva em conta o segundo harmônico de um ângulo ressonante feito na Seção 4.2. A título de comparação vamos tomar $I = 89^\circ$. Como $p = 1$ e $q = 3$ temos que

$$\alpha = \left(\frac{3}{1}\right)^{\frac{2}{3}} \approx 2.08008 \quad (5.3)$$

e os ângulos ressonantes dados por (4.1) são forma:

$$\phi_k^{1:3} = 3\lambda - \lambda' + 2\Omega - k\omega \quad (5.4)$$

para determinar os k de interesse faremos o gráfico dos coeficientes da função perturbadora $f_k^{1:3}$ em função da excentricidade, fixando $I = 89^\circ$, assim obtendo:

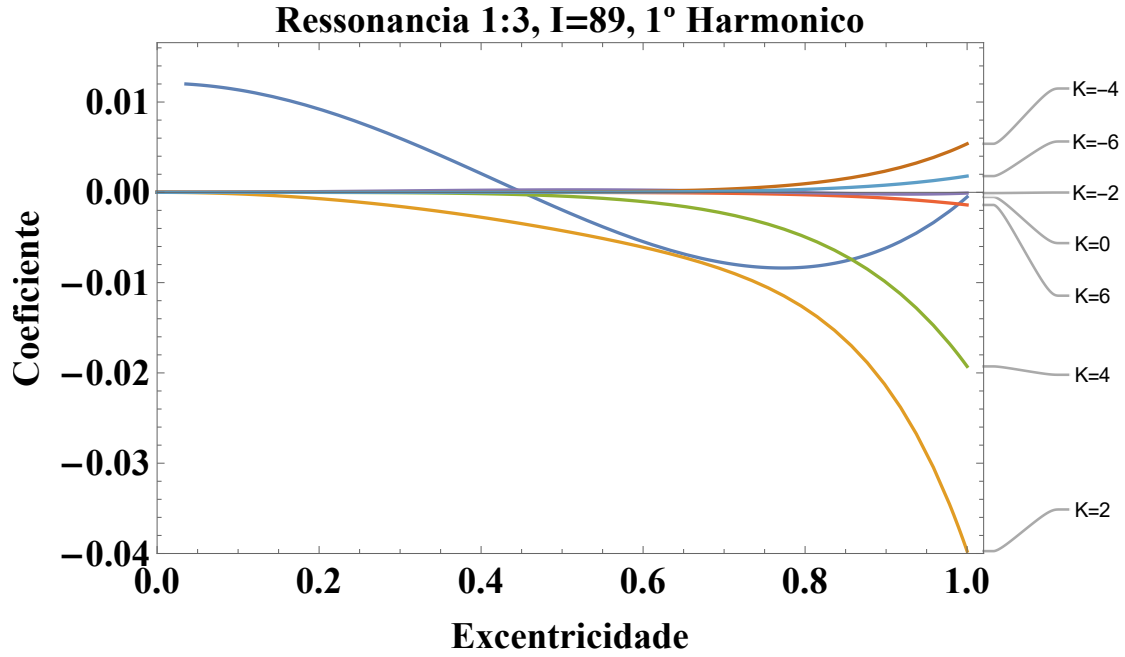


Figura 5.7: Amplitude do coeficiente da função perturbadora $f_k^{1:3}$ associado a cada $\phi_k^{1:3}$.

Através da Figura 5.7, a escolha $k = -2, k = 0, k = 2$ e $k = 4$ é razoável. Vale ressaltar que para aplicar o modelo visto precisamos do segundo harmônico dado pela expressão

$$\phi_{2k}^{2:6} = 6\lambda - 2\lambda' - 4\Omega - 2k\omega \quad (5.5)$$

de forma que para obtermos os coeficientes relacionados ao ângulo $\phi_8^{2:6}$ precisamos fazer uso da expansão da função perturbadora polar até a oitava ordem (como discutido em [3]). Com o segundo harmônico, também podemos ver quais k tem maior relevância fazendo o gráfico dos coeficientes da função perturbadora agora associados ao segundo harmônico $\phi_{2k}^{2:6}$ obtendo a Figura 5.8, onde na mesma nota-se que os valores de $k = -2, k = 0, k = 2$ e $k = 4$ também são os mais relevantes.

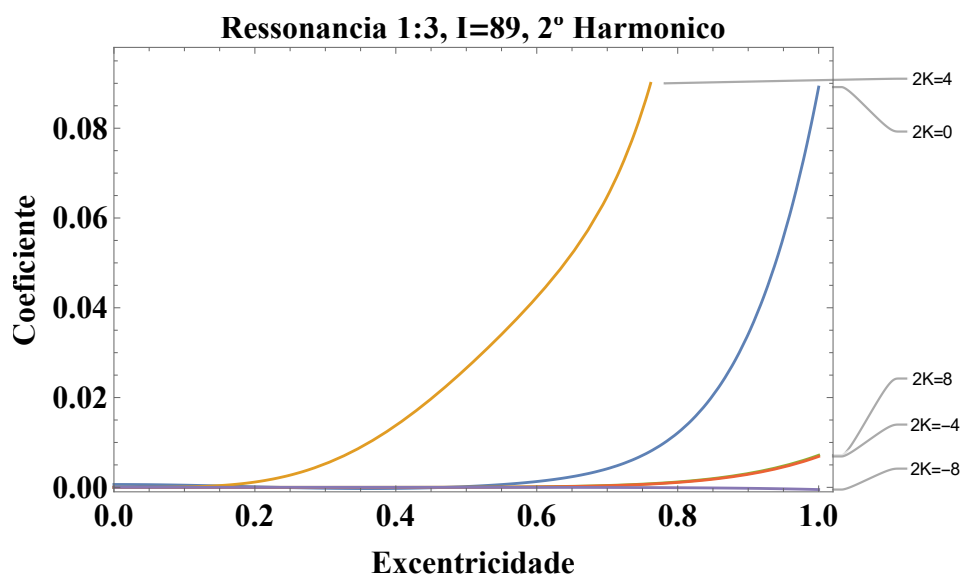


Figura 5.8: Amplitude do coeficiente da função perturbadora $f_{2k}^{2:6}$ associado a cada $\phi_{2k}^{2:6}$.

Usando o modelo visto na Seção 4.2 levaremos em conta tanto a contribuição do ângulo $\phi_k^{1:3}$ quanto do seu segundo harmônico $\phi_{2k}^{2:6}$ obtendo as amplitudes para α mostradas na Figura 5.9.

Para o caso em que a contribuição de mais de um ângulo ressonante, usaremos o modelo dado por Seção 4.3.4 onde para cada $\phi_k^{3:1}$ também é usado o segundo harmônico $\phi_{2k}^{6:2}$ temos:

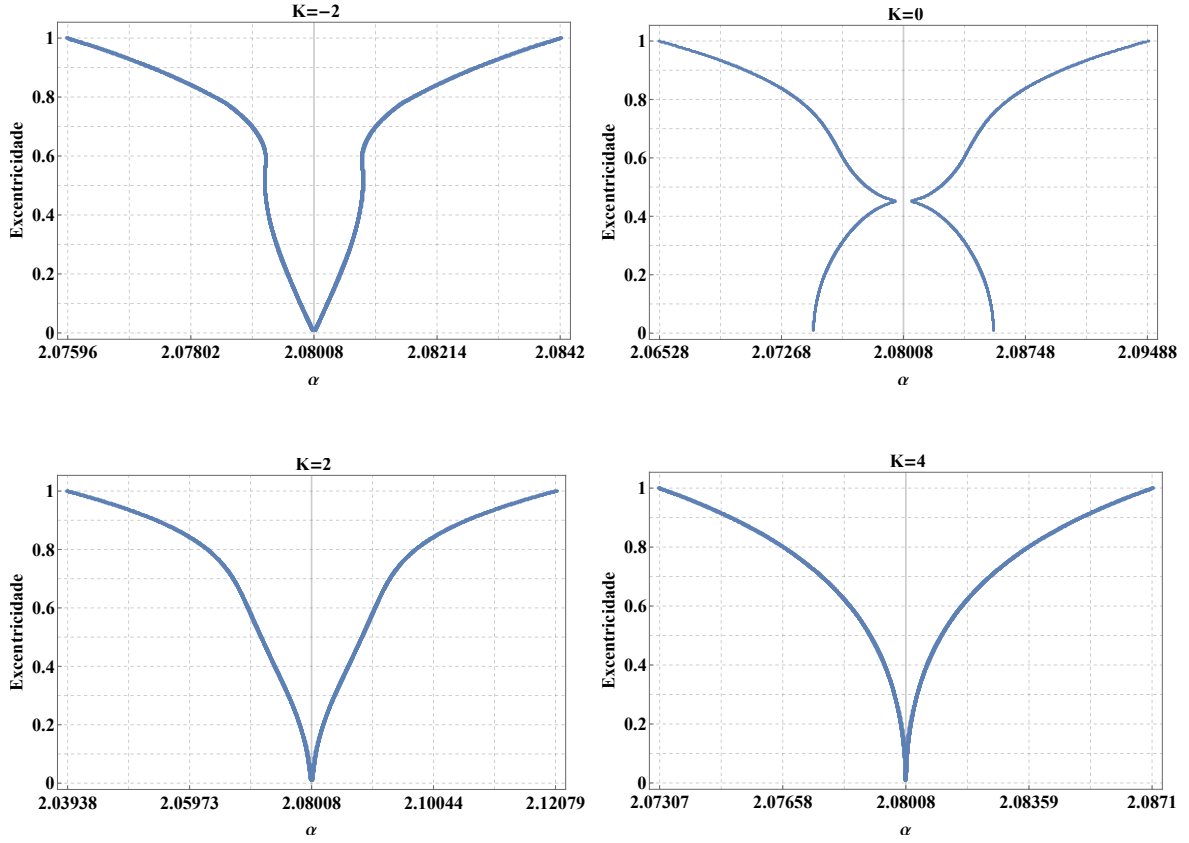


Figura 5.9: Oscilação esperada do semieixo maior de acordo com cada k usando a contribuição de $\phi_k^{3:1}$ e seu segundo harmônico $\phi_{2k}^{6:2}$.

5.4 Ressonância 1 : 2 quase polar com Netuno

Para uma ressonância 1 : 2 quase polar com um planeta de massa semelhante a Netuno teremos que o parâmetro α da ressonância será:

$$\alpha = (2)^{\frac{2}{3}} \approx 1,5874$$

e como para este caso $p = 1$ e $q = 3$ temos que os ângulos ressoantes são:

$$\phi_k^{1:2} = 2\lambda - 1\lambda' - \Omega - k\omega \quad (5.6)$$

Para determinar os k de interesse faremos então gráfico dos coeficientes da função perturbadora $f_k^{1:2}$ em função da excentricidade, fixando $I = 89^\circ$, obtendo

Através da Figura 5.11, poderíamos selecionar os valores de $k = -3$, $k = -1$, $k = 1$ e $k = 3$, porem vale ressaltar que para aplicar o modelo visto precisamos do

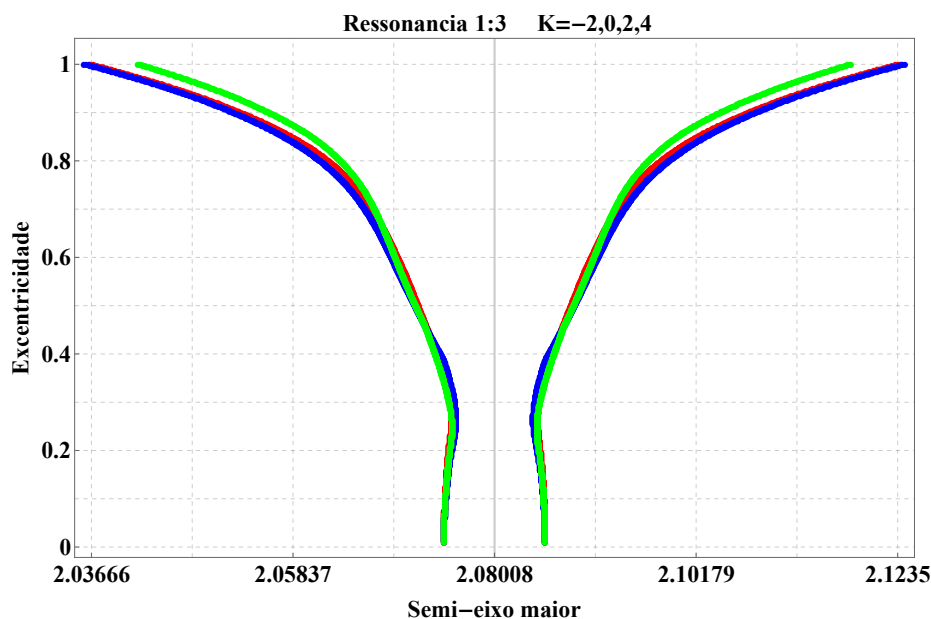


Figura 5.10: Oscilação esperada do parâmetro α considerando $k = -2, 0, 2, 4$. A linha azul representa $\omega = 0^\circ$, a verde $\omega = 45^\circ$ e a vermelha $\omega = 90^\circ$.

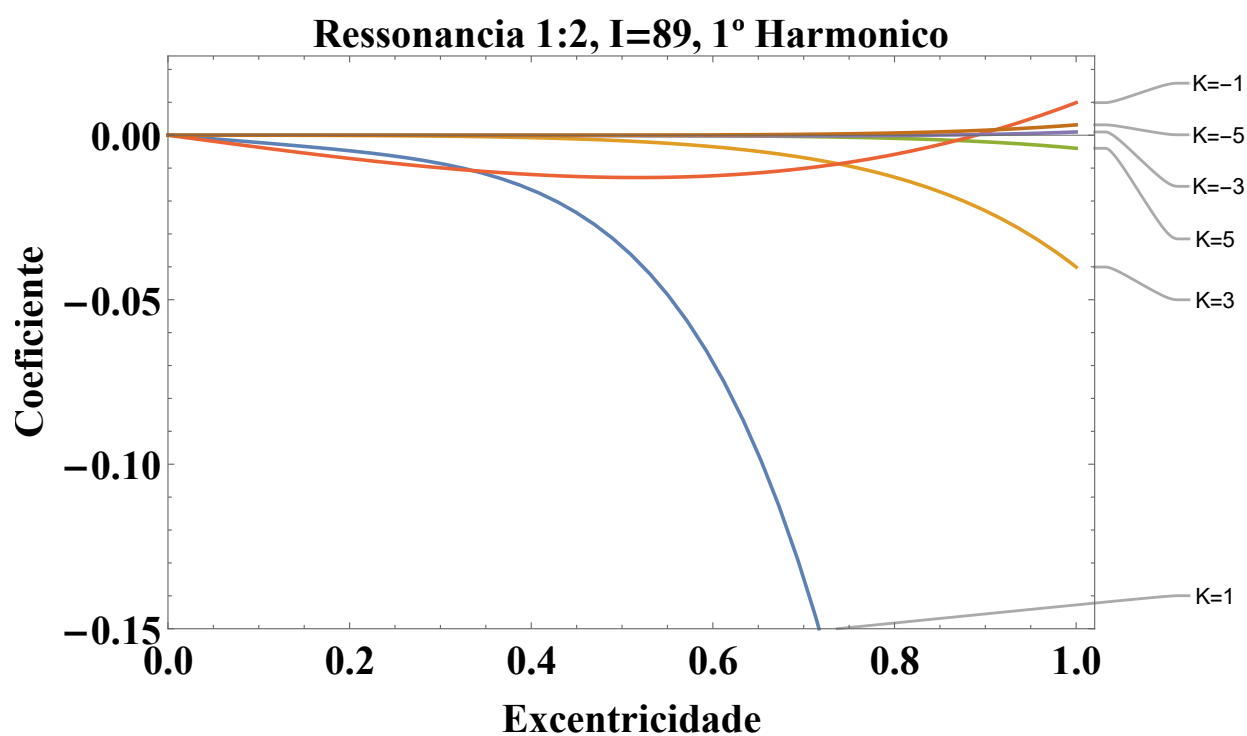


Figura 5.11: Amplitude do coeficiente da função perturbadora $f_k^{1:2}$ associado a cada $\phi_k^{1:2}$.

segundo harmônico dado pela expressão:

$$\phi_{2k}^{2:4} = 4\lambda - 2\lambda' - 2\Omega - 2k\omega \quad (5.7)$$

de forma que para obter o termo $\phi_6^{2:4}$ precisamos da expansão da função perturbadora polar até a ordem 6 como discutido em [3].

Com o segundo harmônico também podemos ver quais k tem maior relevância, logo fazendo novamente o gráfico dos coeficientes da função perturbadora associados agora ao segundo harmônico $f_k^{2:4}$ nos resulta na Figura 5.12.

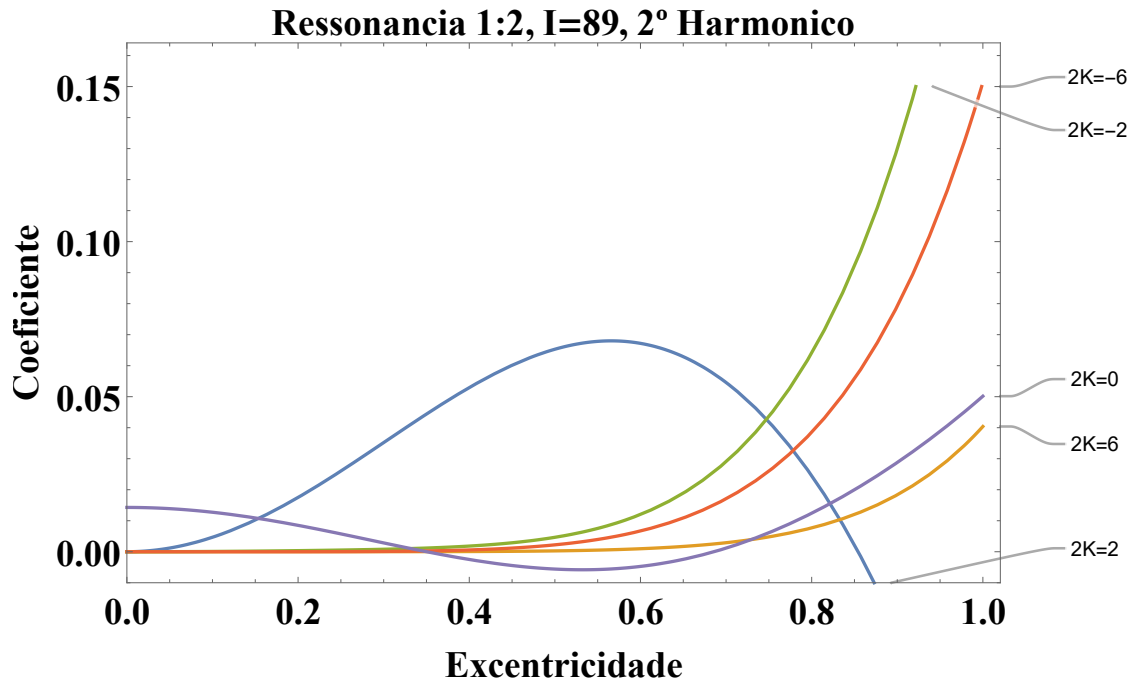


Figura 5.12: Amplitude do coeficiente da função perturbadora $f_{2k}^{2:4}$ associado a cada $\phi_{2k}^{2:4}$.

Note que na Figura 5.12 surge o termo $2k = 0$, isto se deve ao fato de que o ângulo ressonante $\phi_0^{1:2}$ não existe na função perturbadora (devido ao fato da ordem da ressonância ser ímpar), porém ao considerarmos os segundos harmônicos estamos vendo os termos da função perturbadora associados com o ângulo $\phi_{2k}^{2:4}$, onde agora sim passa a existir o termo $k = 0$ (pois agora o termo $\phi_{2k}^{2:4}$ possui ordem par).

Tendo então como base as figuras 5.12 e 5.11 faz mais sentido tomar os valores de k como sendo $k = -3, k = -1, k = 0$ e $k = 1$ para assim obtermos a Figura 5.13.

Ao se levar em conta a contribuição dos ângulos com $k = -3, k = -1, k = 0$ e $k = 1$ e seus respectivos segundos harmônicos obtemos a Figura 5.14, onde vale ressaltar que o ângulo $\phi_0^{2:4}$ possui uma forte contribuição para $e < 0,2$.

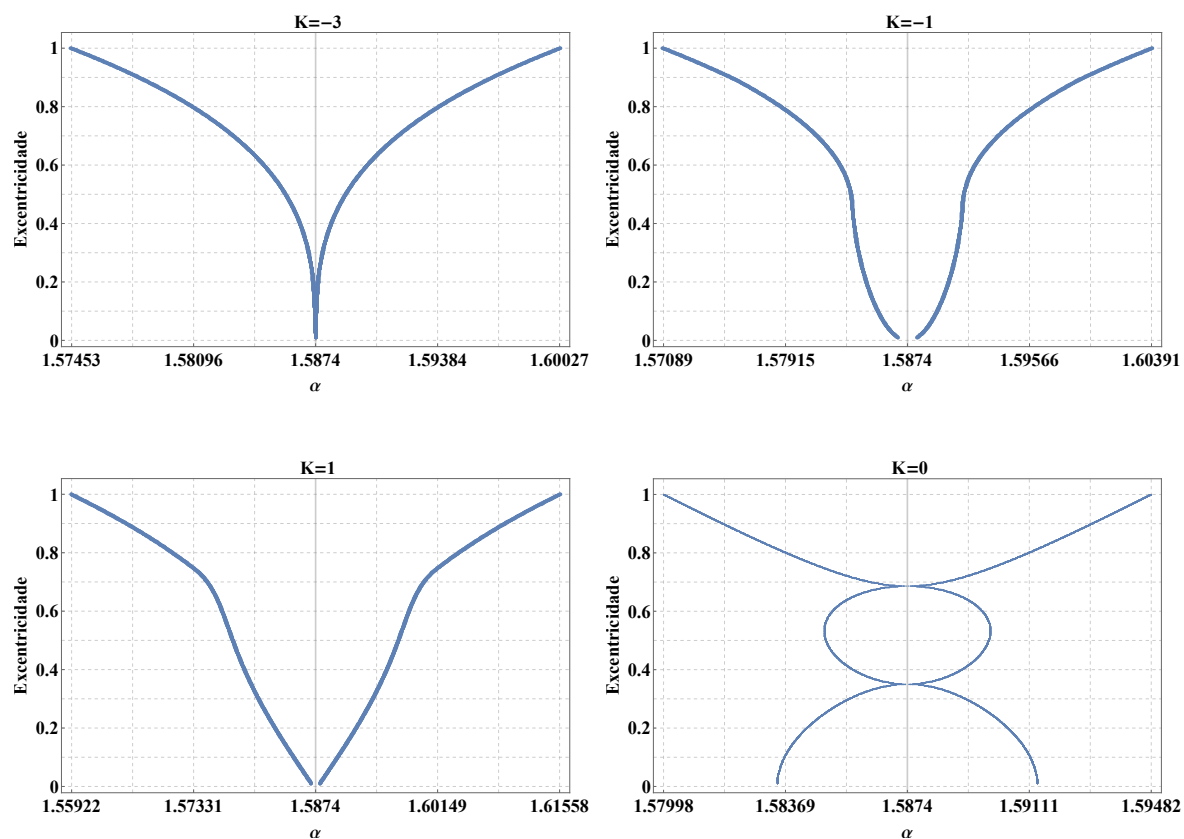


Figura 5.13: Oscilação esperada de α de acordo com cada k associado ao ângulo $\phi_k^{1:2}$ e seu segundo harmônico $\phi_{2k}^{2:4}$. Para a amplitude relacionada com $k = 0$ precisamos usar o modelo apenas com um harmônico (caso contrário β não está definido).

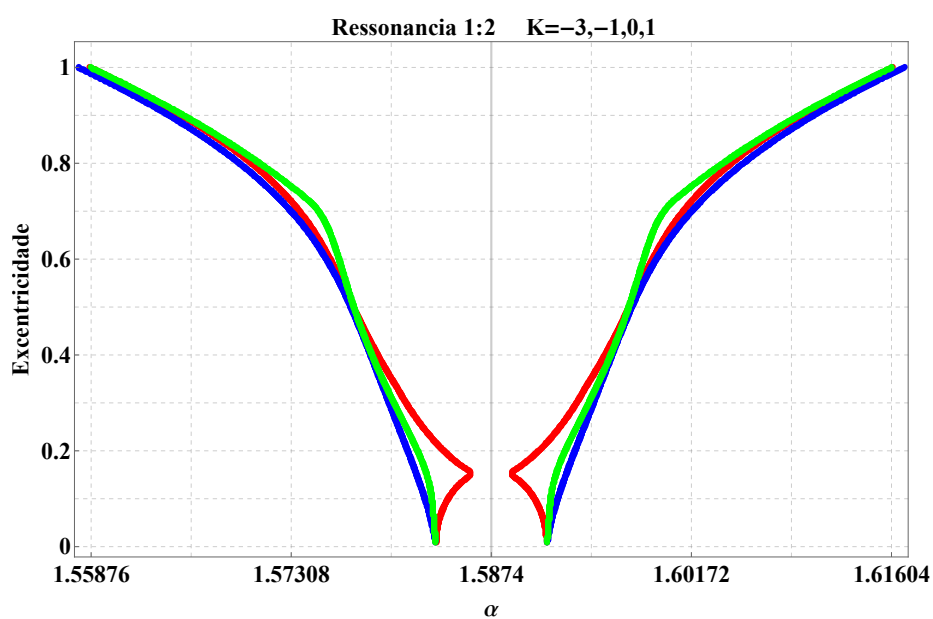


Figura 5.14: Oscilação esperada do parâmetro α considerando $k = -3, -1, 0, 1$. A linha azul representa $\omega = 0^\circ$, a verde $\omega = 45^\circ$ e a vermelha $\omega = 90^\circ$.

6 Conclusão

Tendo como base [18], [2] e [3] foi realizado a expansão da função perturbadora para diferentes casos. No primeiro caso ambos os corpos possuem suas inclinações próximas de zeros (caso prógrado planar). No segundo caso um dos corpos foi considerado um asteroide de massa desprezível possuindo uma inclinação $I \approx 90^\circ$ (caso polar) com relação a um planeta em uma órbita circular, comum em asteroides transneptunianos por exemplo. Já no terceiro assumimos que o asteroide do caso anterior pudesse possuir uma inclinação arbitrária.

A expansão da função perturbadora foi realizada para o estudo de ressonâncias de movimento médio de maneira analítica. Para isso, com base em [4] montamos o conhecido modelo do pêndulo, para obter as condições onde ocorre a libração do chamado ângulo ressonante $\phi_k^{p:q}$ de forma que como visto em [11], [2] e [3] sempre que ocorre a libração de $\phi_k^{p:q}$ para uma determinada condição inicial significa que estamos na presença de uma ressonância de movimento médio $p : q$.

Através do modelo do pêndulo desenvolvido no Capítulo 4 foi possível determinar quais condições iniciais (excentricidade, inclinação e semieixo maior) um determinado asteroide deve possuir para que se encontre em uma ressonância de movimento médio. A aplicação deste modelo foi feita no Capítulo 5 onde foi estudada qual a variação máxima que o semieixo maior pode sofrer para determinadas excentricidades de forma a ainda estar em uma ressonância.

Como fruto do estudo, rotinas no software *Mathematica* foram desenvolvidas para realizar tanto a expansão feita nos Capítulos 2 e 3 até uma ordem qualquer desejada (o que é de fundamental importância uma vez que como pode ser visto em [2] e [3] a ordem da expansão está diretamente ligada com a ordem da ressonância a ser estudada, logo com a rotina construída, podemos ampliar o estudo para uma

ressonância de ordem qualquer, onde os termos da função perturbadora associado a um dado $\phi_k^{p:q}$ são facilmente obtidos para uma ordem qualquer), quanto para obter a expansão em série dos coeficientes de Laplace e das expansões Elíticas dados nos Apêndices [A](#) e [C](#) respectivamente.

Visando a aplicação do modelo do pêndulo, rotinas também foram construídas para viabilizar e facilitar a aplicação do modelo do pêndulo para uma ressonância qualquer, possibilitando assim que o estudo da variação do semieixo maior para uma ressonância $p : q$ seja facilmente encontrada.

O trabalho foi realizado seguindo de maneira analítica, porem existem outras abordagem que podem ser usadas para encontrar a variação máxima do semi-eixo maior de uma ressonância, como modelos que possuem uma abordagem semi analítica [\[20\]](#), [\[5\]](#).

Referências

- [1] HELIN, Eleanor F. et al. Near-Earth asteroid tracking (NEAT) program. *Annals of the New York Academy of Sciences*, v. 822, n. 1, p. 6-25, 1997.
- [2] NAMOUNI, Fathi; MORAIS, Maria Helena Moreira. The disturbing function for polar Centaurs and transneptunian objects. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, v. 471, n. 2, p. 2097-2110, 2017.
- [3] NAMOUNI, Fathi; MORAIS, Maria Helena Moreira. The disturbing function for asteroids with arbitrary inclinations. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, v. 474, n. 1, p. 157-176, 2018.
- [4] NAMOUNI, Fathi; MORAIS, M. H. M. Resonance libration and width at arbitrary inclination. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, v. 493, n. 2, p. 2854-2871, 2020.
- [5] GALLARDO, Tabaré. Strength, stability and three dimensional structure of mean motion resonances in the solar system. *Icarus*, v. 317, p. 121-134, 2019.
- [6] MORAIS, Maria Helena M.; NAMOUNI, Fathi. A numerical investigation of co-orbital stability and libration in three dimensions. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, v. 125, p. 91-106, 2016.
- [7] MORAIS, M. H. M.; NAMOUNI, F. First trans-Neptunian object in polar resonance with Neptune. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society: Letters*, v. 472, n. 1, p. L1-L4, 2017.
- [8] WIEGERT, Paul; CONNORS, Martin; VEILLET, Christian. A retrograde co-orbital asteroid of Jupiter. *Nature*, v. 543, n. 7647, p. 687-689, 2017.

-
- [9] MORAIS, Helena; NAMOUNI, Fathi. Reckless orbiting in the Solar System. *Nature*, v. 543, n. 7647, p. 635-636, 2017.
- [10] MORAIS, M. H. M.; NAMOUNI, F. Asteroids in retrograde resonance with Jupiter and Saturn. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society: Letters*, v. 436, n. 1, p. L30-L34, 2013.
- [11] MORAIS, M. H. M.; NAMOUNI, F. Retrograde resonance in the planar three-body problem. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, v. 117, n. 4, p. 405-421, 2013.
- [12] NAMOUNI, Fathi; MORAIS, Maria Helena Moreira. Resonance capture at arbitrary inclination. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, v. 446, n. 2, p. 1998-2009, 2015.
- [13] NAMOUNI, Fathi; MORAIS, Maria Helena Moreira. Resonance capture at arbitrary inclination—II. Effect of the radial drift rate. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, v. 467, n. 3, p. 2673-2683, 2017.
- [14] ELLIS, Keren M.; MURRAY, Carl D. The disturbing function in solar system dynamics. *Icarus*, v. 147, n. 1, p. 129-144, 2000.
- [15] KINOSHITA, Hiroshi; NAKAI, Hiroshi. Motions of the perihelions of Neptune and Pluto. *Celestial Mechanics*, v. 34, p. 203-217, 1984.
- [16] MARZARI, Francesco et al. Origin and evolution of Trojan asteroids. *Asteroids III*, v. 1, p. 725-738, 2002.
- [17] BOTTKE JR, William F. et al. Understanding the distribution of near-Earth asteroids. *Science*, v. 288, n. 5474, p. 2190-2194, 2000.
- [18] MURRAY, Carl D.; DERMOTT, Stanley F. *Solar system dynamics*. Cambridge university press, 1999.
- [19] BROUWER, Dirk; CLEMENCE, Gerald M. *Methods of celestial mechanics*. Elsevier, 1961.

-
- [20] GALLARDO, Tabaré. Three-dimensional structure of mean motion resonances beyond Neptune. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, v. 132, n. 2, p. 9, 2020.

A Coeficientes de Laplace

Como visto ao longo do trabalho, os coeficientes de Laplace aparecem sempre na expansão da parte direta da função perturbadora, sendo então eles fundamentais para obtenção dos termos da mesma. Os coeficientes de Laplace para uma inclinação qualquer são dados por:

$$b_s^{jk}(\alpha, I_r) = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos(ju + kv)}{[1 + \alpha^2 - 2\alpha(\cos u \cos v - \sin u \sin v \cos I_r)]^s} du dv \quad (\text{A.1})$$

onde eles estão definidos tanto para $\alpha < 1$ quanto para $\alpha > 1$. A integral (A.1) não possui solução analítica, logo métodos numéricos precisam ser utilizados para resolver a mesma, porém o integrando possui grandes oscilações o que resulta em um calculo numérico lento. Com base nisso vamos usar a expansão como feita em [3] para (A.1) de forma que as contas convirjam de maneira mais rápida.

Pare o coeficiente de inclinação arbitrária vale

$$b_s^{jk}(\alpha, I_r) = 0 \quad \text{se } j \pm k \text{ for impar} \quad (\text{A.2})$$

$$b_s^{jk}(\alpha, I_r) = \alpha^{-2s} b_s^{jk}(\alpha^{-1}, I_r) \quad (\text{A.3})$$

estas relações são fundamentais quando estudarmos a expansão em série para o caso $\alpha > 1$.

Outras relações entre os coeficientes são:

$$b_s^{-j-k}(\alpha, I_r) = b_s^{jk}(\alpha, I_r) = b_s^{kj}(\alpha, I_r) \quad (\text{A.4})$$

$$\begin{aligned} b_s^{(-j)k}(\alpha, I_r) &= b_s^{j(-k)}(\alpha, I_r), \\ &= b_s^{jk}(\alpha, I_r - 180^\circ) \\ &= b_s^{jk}(\alpha, I_r + 180^\circ) \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Vamos expandir (A.1) com respeito a α até uma ordem N_α , começando notando que no denominador da integral, temos algo similar a $[1 + \alpha^2 - 2\alpha x]^s$, onde para

esse fator podemos usar os conhecido Polinômios de Gegenbauer (ou polinômios ultra esféricos) para expandir a expressão anterior com respeito a α obtendo:

$$b_s^{jk} = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{v=0}^{N_\alpha} \alpha^\nu C_v^s(\cos u \cos v - \sin u \sin v \cos I) \cos(ju + kv) du dv \quad (\text{A.6})$$

onde C_v^s são os polinômios de Gegenbauer, que podem ser expressos através da função Hipergeométrica ${}_2F(-v, v+2s, s+\frac{1}{2}, z) = v! C_v^s / (2s)_v$ como o polinômio:

$$C_v^s(x) = \sum_{n=0}^{\text{Floor}[v/2]} \frac{(-1)^n (s)_{(v-n)}}{n!(v-2n)!} (2x)^{v-2n} \quad (\text{A.7})$$

onde $(s)_v = \prod_{i=0}^{v-1} s+i$, logo $(s)_{v-n} = \prod_{i=0}^{v-n-1} s+i = s(s+1)(s+2)\dots(s+v-n-1)$.

Seja então:

$$x = \frac{\eta_1 \cos(u-v) + \eta_2 \cos(u+v)}{2} \quad \text{com} \quad \begin{cases} \eta_1 = 1 - \cos I \\ \eta_2 = 1 + \cos I \end{cases} \quad (\text{A.8})$$

Aplicando (A.8) em (A.7) e juntando com (A.6) temos:

$$b_s^{jk} = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{v=0}^{N_\alpha} \alpha^\nu \sum_{n=0}^{\text{Floor}[v/2]} \frac{(-1)^n (s)_{(v-n)}}{n!(v-2n)!} (2x)^{v-2n} \cos(ju + kv) du dv \quad (\text{A.9})$$

Para realizar a integração transformaremos $\cos$ em sua forma exponencial. Antes disso seja $m = v - 2n$ pois assim o termo x^{v-2n} se torna x^m que pode ser escrito como binômio de Newton (já transformando $\cos$ para exponencial) da forma

$$x^m = 2^{-2m} \sum_{l=0}^m \binom{m}{l} \eta_1^l \eta_2^{m-l} \sum_{p=0}^l \sum_{q=0}^{m-l} \binom{l}{p} \binom{m-l}{q} e^{i[2(q+p)-m]u} e^{i[2(q-p)-m+2l]v} \quad (\text{A.10})$$

como $\cos(ju + kv) = \frac{1}{2}(e^{i(ju+kv)} + e^{-i(ju+kv)})$, ao fazer $x^m \cos(ju + kv)$ teremos dois termos:

$$x_{jk+}^m = 2^{-2m-1} \sum_{l=0}^m \binom{m}{l} \eta_1^l \eta_2^{m-l} \sum_{p=0}^l \sum_{q=0}^{m-l} \binom{l}{p} \binom{m-l}{q} e^{i[2(q+p)-m+j]u} e^{i[2(q-p)-m+2l+k]v} \quad (\text{A.11})$$

$$x_{jk-}^m = 2^{-2m-1} \sum_{l=0}^m \binom{m}{l} \eta_1^l \eta_2^{m-l} \sum_{p=0}^l \sum_{q=0}^{m-l} \binom{l}{p} \binom{m-l}{q} e^{i[2(q+p)-m-j]u} e^{i[2(q-p)-m+2l-k]v} \quad (\text{A.12})$$

Ao integrar x_{jk+}^m ou x_{jk-}^m de 0 a 2π em relação a u e v os mesmos são nulos devido ao expoente de e ser 2π periódico. Portanto é preciso zerar os expoentes dos mesmos, ou seja

- Para x_{jk+}^m é necessário que $2(q+p) = m-j$ e $2(q-p) = m-k-2l$.
- Para x_{jk-}^m é necessário que $2(q+p) = m+j$ e $2(q-p) = m+k-2l$.

como $2(q+p)$ é par, logo $m-j$ necessariamente é par, o que leva a conclusão que m possui a mesma paridade que j (consequentemente k) e que $m \geq j$. Para simplificar o estudo e reduzir as somatórias, podemos explicitar os valores que p e q da forma:

- Para x_{jk+}^m temos $p = \frac{2l-j+k}{4}$ e $q = \frac{2(m-l)-(j+k)}{4}$.
- Para x_{jk-}^m temos $p = \frac{2l+j-k}{4}$ e $q = \frac{2(m-l)+(j+k)}{4}$.

através de como p é escrito temos que l precisa ter a mesma paridade de $\frac{j-k}{2}$, e pelas expressões de q nos mostram que $m-l$ tem a mesma paridade de $\frac{j+k}{2}$. Os somatórios mostram que $0 \leq p \leq l$ e $0 \leq q \leq m-l$ que nos leva as relações para x_{jk+}^m :

$$p \geq 0 \implies l \geq \frac{j-k}{2} \quad (\text{A.13}) \quad q \geq 0 \implies l \leq m - \frac{j+k}{2} \quad (\text{A.15})$$

$$p \leq 0 \implies l \geq \frac{k-j}{2} \quad (\text{A.14}) \quad q \leq 0 \implies l \leq m + \frac{j+k}{2} \quad (\text{A.16})$$

As equações (A.14) e (A.16) são condições triviais, pois já temos que $j \geq k$ e $l \leq m$ respectivamente, enquanto (A.13) e (A.15) determinam todo o intervalo onde a somatória em l deve ser realizada, sendo $\frac{j-k}{2} \leq l \leq m - \frac{j+k}{2}$. Os resultados são análogos para x_{jk-}^m .

Seja $y_{jk\pm}^m = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} x_{jk\pm}^m du dv$, pode-se mostrar que $y_{jk+}^m = y_{jk-}^m$ e então temos que:

$$y_{jk\pm}^m = \frac{m!}{2^{2m-1}} \sum_{\substack{\frac{j-l}{2} \leq l \leq m - \frac{j+k}{2} \\ l \text{ mesma paridade } \frac{j-k}{2}}} \frac{\eta_1^l \eta_2^{m-l}}{[\frac{2l-j+k}{4}]! [\frac{2l+j-k}{4}]! [\frac{2m-2l-k-j}{4}]! [\frac{2m-2l+k+j}{4}]!} \quad (\text{A.17})$$

A condição em que m precisa ter a mesma paridade de j e ainda $m \geq j$ restringe os polinômios de Gegenbauer (A.7) em $0 \leq n \leq \text{Floor}[\frac{\nu-j}{2}]$. Substituindo (A.17) em (A.7) e aplicando a mudança de índice $\nu \rightarrow 2\nu + j$ tem-se que a expansão em

série de (A.1) com respeito a α até ordem N_α é dada por:

$$b_s^{jk}(\alpha, I_r) = \gamma_{\alpha, I_r}^{jk} \sum_{v=0}^{\text{Floor} \left[\frac{N_\alpha - j}{2} \right]} \alpha^{2v} \sum_{n=0}^v \frac{(-1)^n (s)_{(2v+j-n)}}{n! 2^{2(v-n)}} \sum_{l=0}^{v-n} \frac{(1 - \cos I_r)^{2l} (1 + \cos I_r)^{2(v-n-l)}}{l! \left[\frac{l+(j-k)}{2} \right]! (v-n-l)! \left[\frac{v-n-l+(j+k)}{2} \right]!} \quad (\text{A.18})$$

onde:

$$\gamma_{\alpha, I_r}^{jk} = \frac{(1 - \cos I_r)^{\frac{j-k}{2}} (1 + \cos I_r)^{\frac{j+k}{2}} \alpha^j}{2^{j-2}}$$

Lembrando que (A.18) assume que $\alpha \leq 1$ e $0 \leq k \leq j$. Para diferentes parâmetros as relações (A.2), (A.3), (A.4) e (A.5) devem ser utilizadas.

B Modelo do pendulo, dois ângulos ressonantes com segundos harmônicos

Neste apêndice, é feito o estudo analítico sobre os pontos de equilíbrio e estabilidade do Hamiltoniano do modelo que leva em conta dois ângulos ressonantes e seus respectivos segundos harmônicos visto na Seção 4.3.3.

O hamiltoniano dado em (4.53) é invariante perante as transformações

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi \rightarrow \psi + 90^\circ \\ \delta \rightarrow \delta + 90^\circ \\ b \rightarrow -b \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \psi \rightarrow \psi - 90^\circ \\ \delta \rightarrow \delta - 90^\circ \\ b \rightarrow -b \end{array} \right. \quad (\text{B.1})$$

devido a isso o estudo analítico pode ser reduzido apenas ao caso em que $b \geq 0$, pois quando $b \leq 0$ as transformações acima podem ser utilizada para recuperar os resultados.

De forma semelhante, podemos restringir o ângulo δ apenas para o intervalo $0 \leq \delta \leq 90^\circ$ pois caso $\delta > 90^\circ$ basta fazer:

$$\begin{aligned} -180^\circ \leq \delta \leq -90^\circ & \quad \delta \rightarrow 180^\circ + \delta, \psi \rightarrow 180^\circ + \psi \\ -90^\circ \leq \delta \leq 0^\circ & \quad \delta \rightarrow -\delta, \psi \rightarrow -\psi \\ 90^\circ \leq \delta \leq 180^\circ & \quad \delta \rightarrow 180^\circ - \delta, \psi \rightarrow 180^\circ - \psi \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

As relações acima são úteis para determinar a amplitude da libração, uma vez que os pontos críticos que iremos estudar são dados dependendo do valor de δ .

• Pontos Críticos

Para estimar então a amplitude de libração, vamos encontrar primeiro os pontos críticos de (4.53) que são dados através das equações:

$$\frac{\partial H}{\partial p} = 0 \quad \frac{\partial H}{\partial \psi} = 0$$

Para $\frac{\partial H}{\partial p} = 0$ tem-se somente $p = 0$, agora para $\frac{\partial H}{\partial \psi} = 0$ temos

$$\sin(\delta - \psi) - \frac{1}{2}b \sin(2\psi) = 0 \quad (\text{B.3})$$

Seja ψ_c o valor que satisfaz (B.3). Ao fazermos a mudança $v = \operatorname{tg}\left(\frac{\psi_c}{2}\right)$ podemos multiplicar ambos os lados da equação (B.3) por $\sec\left(\frac{\psi_c}{2}\right)^4$ e escreve-la como:

$$\sin \delta v^4 - 2(b - \cos \delta)v^3 + 2(b + \cos \delta)v - \sin \delta = 0 \quad (\text{B.4})$$

de forma que agora temos um polinômio de grau 4 onde o mesmo possui uma fórmula para encontrar suas raízes, onde na mesma existe a presença do discriminante $\Delta = 32[8b^6 - 24b^4 - 3(1 - 9 \cos 4\delta)b^2 - 8]$ de forma que temos duas soluções reais se $\Delta < 0$ e quatro se $\Delta > 0$. A solução analítica de (B.4) é dada através de

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{b - \cos \delta}{2 \sin \delta} - S - R_-, \\ v_2 &= \frac{b - \cos \delta}{2 \sin \delta} - S + R_-, \\ v_3 &= \frac{b - \cos \delta}{2 \sin \delta} + S - R_+, \\ v_4 &= \frac{b - \cos \delta}{2 \sin \delta} + S + R_+, \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

onde os coeficientes são dados por:

$$\begin{aligned} S &= \left[\left(\frac{b - \cos \delta}{\sin \delta} \right)^2 + \frac{2^{\frac{1}{3}} S_0}{9^{\frac{1}{3}}} + \frac{32^{\frac{1}{3}} (b^2 - 1)}{3^{\frac{1}{3}} S_0 \sin^2 \delta} \right]^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} \\ S_0 &= \left[\frac{36b \cos \delta}{\sin^2 \delta} - \frac{(-3\Delta)^{\frac{1}{2}}}{4 \sin^3 \delta} \right]^{\frac{1}{3}} \\ R_{\pm} &= \left[\frac{3(b - \cos \delta)^2}{\sin^2 \delta} - 4S^2 \pm \frac{(b - \cos \delta)^3 - 2(b + \cos \delta) \sin^2 \delta}{S \sin^3 \delta} \right]^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Uma dada raiz não necessariamente corresponde a um ponto fixo, uma vez que as mesma não são funções contínuas com respeito a δ . Porém os pontos críticos ψ_c são funções contínuas de δ e b . A existência dos pontos críticos e suas estabilidades são diferentes para cada valor do parâmetro. Dividiremos o estudo nos casos em que $0 \leq b \leq 1$, $1 \leq b \leq 2$ e $b \geq 2$.

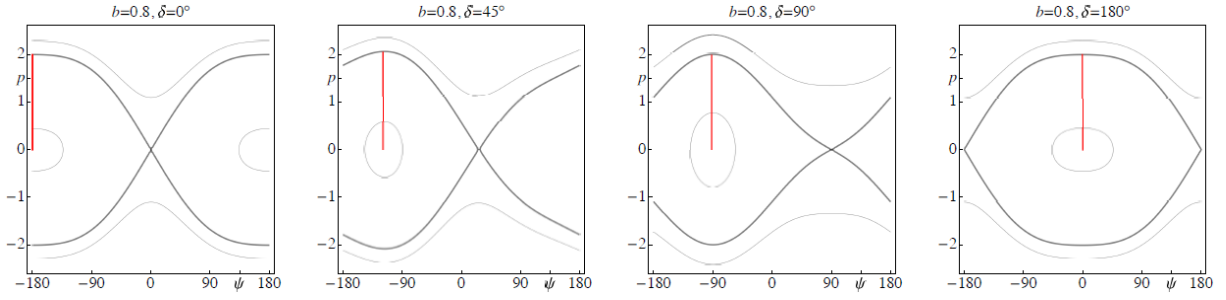
Caso $0 \leq b \leq 1$


Figura B.1: Curvas de níveis do Hamiltoniano (4.53) para $b = 0,8$ e diferentes valores de δ . Imagem retirada de [4]

Neste caso temos sempre a presença de dois pontos fixos, um estável e um instável, dados por:

Ponto instável

$$-180^\circ \leq \delta \leq -90^\circ, \quad \psi_u = 2 \arctg v_1$$

$$-90^\circ \leq \delta \leq 90^\circ, \quad \psi_u = 2 \arctg v_3$$

$$90^\circ \leq \delta \leq 180^\circ, \quad \psi_u = 2 \arctg v_4$$

Ponto estável

$$-180^\circ \leq \delta \leq -90^\circ, \quad \psi_s = 2 \arctg v_2,$$

$$-90^\circ \leq \delta \leq 0^\circ, \quad \psi_s = 2 \arctg v_4,$$

$$0^\circ \leq \delta \leq 180^\circ, \quad \psi_s = 2 \arctg v_1.$$

Note que para cada valor de δ temos a translação dos pontos fixos.

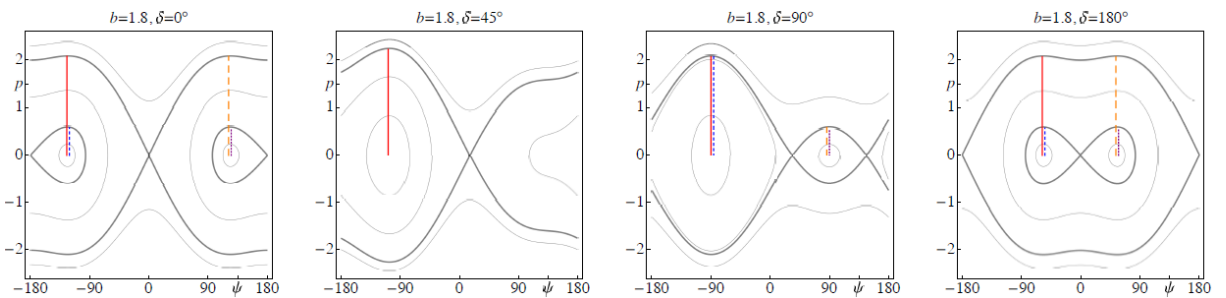
Caso $1 \leq b \leq 2$


Figura B.2: Curvas de níveis do Hamiltoniano (4.53) para $b = 1,8$ e diferentes valores de δ . Imagem retirada de [4]

Neste caso o número de pontos fixos existentes depende do valor de δ . Existe um amplitude δ_c dado por

$$\delta_c = \frac{1}{4} \arccos \left[\frac{8 + 3b^2 + 24b^4 - 8b^6}{27b^2} \right] \quad (\text{B.7})$$

ao redor de $\delta = -90^\circ, 0^\circ, 90^\circ, 180^\circ$ onde sempre existem quatro pontos fixos, para quaisquer outros valores, existem apenas dois que são dados por:

– Pontos Instáveis:

$$\psi_{u_1} = 2 \arctg v_1 \text{ se } -180^\circ \leq \delta \leq -90^\circ + \delta_c \text{ com } -\delta_c \leq \delta \leq 0^\circ$$

$$\psi_{u_1} = 2 \arctg v_4 \text{ se } 90^\circ - \delta_c \leq \delta \leq -180^\circ \text{ com } 0 \leq \delta \leq \delta_c$$

$$\psi_{u_2} = 2 \arctg v_3 \text{ se } -180^\circ \leq \delta \leq -180^\circ + \delta_c \text{ com } -90^\circ - \delta_c \leq \delta \leq 0^\circ$$

$$\psi_{u_2} = 2 \arctg v_2 \text{ se } 0^\circ \leq \delta \leq 90^\circ + \delta_c \text{ com } 180^\circ - \delta_c \leq \delta \leq 180^\circ$$

– Pontos estáveis:

$$\psi_{s_1} = 2 \arctg v_2 \text{ se } -180^\circ \leq \delta \leq -180^\circ + \delta_c \text{ ou } -90^\circ - \delta_c^\circ \leq \delta \leq -90^\circ + \delta_c \text{ com } -\delta_c \leq \delta \leq 0^\circ$$

$$\psi_{s_1} = 2 \arctg v_1 \text{ se } 0^\circ \leq \delta \leq 180^\circ$$

$$\psi_{s_2} = 2 \arctg v_4 \text{ se } -180^\circ \leq \delta \leq 0^\circ$$

$$\psi_{s_2} = 2 \arctg v_3 \text{ se } -90^\circ - \delta_c \leq \delta \leq 90^\circ + \delta_c \text{ ou } 180^\circ - \delta_c^\circ \leq \delta \leq -180^\circ \text{ com } 0^\circ \leq \delta \leq \delta_c$$

Caso $b \geq 2$

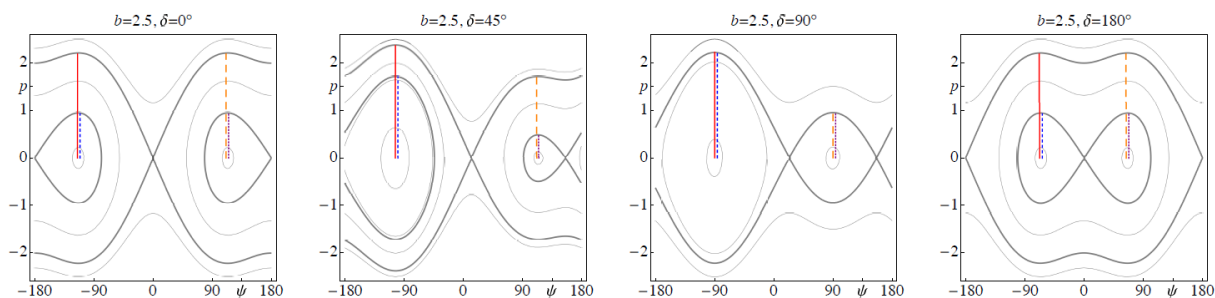


Figura B.3: Curvas de níveis do Hamiltoniano (4.53) para $b = 2,5$ e diferentes valores de δ . Imagem retirada de [4]

Para este caso existem sempre quatro pontos fixos, independente do valor de δ onde suas expressões são dadas por:

– Pontos instáveis:

$$\psi_{u_1} = 2 \arctg v_1 \text{ se } -180^\circ \leq \delta \leq 0^\circ$$

$$\psi_{u_1} = 2 \arctg v_4 \text{ se } 0^\circ \leq \delta \leq 180^\circ$$

$$\psi_{u_2} = 2 \arctg v_3 \text{ se } -180^\circ \leq \delta \leq 0^\circ$$

$$\psi_{u_2} = 2 \arctg v_2 \text{ se } 0^\circ \leq \delta \leq 180^\circ$$

– Pontos estáveis:

$$\psi_{s_1} = 2 \arctg v_2 \text{ se } -180^\circ \leq \delta \leq 0^\circ$$

$$\psi_{s_1} = 2 \arctg v_1 \text{ se } 0^\circ \leq \delta \leq 180^\circ$$

$$\psi_{s_2} = 2 \arctg v_4 \text{ se } -180^\circ \leq \delta \leq 0^\circ$$

$$\psi_{u_2} = 2 \arctg v_3 \text{ se } 0^\circ \leq \delta \leq 180^\circ$$

Sabendo quais são os valores dos pontos fixos podemos encontrar a variação máxima de Δp que assume diferentes valores dependendo do parâmetro b .

• **Para:** $0 \leq b \leq 1$:

Para derivar a variação máxima de Δp usa-se o fato de que a curva separatriz passa através do ponto instável $(\psi_u, 0)$. Sendo (4.53) escrita da forma $H = \frac{p^2}{2} + V(\psi)$ e aplicando o ponto $(\psi_u, 0)$ temos que a energia será dada por $H_{\text{sep}} = V(\psi_u)$. Logo a variação máxima de Δp é obtida aplicando o ponto ψ_s em H_{sep} resultando em:

$$H_{\text{sep}} = \frac{(\Delta p)^2}{2} + V(\psi_s) \iff \Delta p = \sqrt{2[V(\psi_u) - V(\psi_s)]}$$

• **Para:** $b \geq 2$

Neste caso temos duas separatrizes, uma associada a energia $H_{\text{min}} = V(\psi_{u_1})$ e outra com energia $H_{\text{max}} = V(\psi_{u_2})$ onde para cada uma delas temos dois máximos, resultando em quatro valores de variação máxima de Δp .

Quando $H = H_{\text{min}}$ temos que as variações máximas serão:

$$\begin{aligned} \Delta p_{\text{min},1} &= (2[V(\psi_{u_1}) - V(\psi_{s_1})])^{\frac{1}{2}} \\ \Delta p_{\text{min},2} &= (2[V(\psi_{u_1}) - V(\psi_{s_2})])^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \tag{B.8}$$

Quando $H = H_{\text{max}}$ temos que as variações máximas serão:

$$\begin{aligned} \Delta p_{\text{max},1} &= (2[V(\psi_{u_2}) - V(\psi_{s_1})])^{\frac{1}{2}} \\ \Delta p_{\text{max},2} &= (2[V(\psi_{u_2}) - V(\psi_{s_2})])^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \tag{B.9}$$

onde $\Delta p_{\text{max},1} \geq \Delta p_{\text{max},2}$. As equações (B.8) e (B.9) são válidas para o intervalo em que $0^\circ \leq \delta \leq 90^\circ$ e são periódicas com o período de 90° , ou seja, para qualquer outro valor de $\delta > 90^\circ$ basta usar as transformações dadas em (B.2).

- **Para:** $1 \leq b \leq 2$

Neste caso, as amplitudes $\Delta p_{\min,1}$, $\Delta p_{\min,2}$ e $\Delta p_{\max,2}$ existem apenas para o valor de $90^\circ - \delta_c \leq \vartheta \leq 90^\circ$ com $0 \leq \delta \leq \delta_c$, enquanto $\Delta p_{\max,1}$ existe independente do valor de δ .

C Expansões Elíticas

Neste apêndice, será feita as expansões elíticas usadas nas expansão de todas as funções perturbadoras. A expansões elíticas aqui feitas seguem como feito em [19].

Expansão de E em função de e, M .

Poremos escrever a equação de Kepler como:

$$E - M = e \sin E$$

como $\sin E$ é uma função ímpar, logo $E - M$ também será uma função ímpar, portanto podemos expandir $E - M$ em séries de Fourier. Seja $f(M) = E - M$ temos:

$$F(M) = \sum_{s=1}^{\infty} b_s(e) \sin(sM) \quad (\text{C.1})$$

onde

$$b_s(e) = \int_0^{\pi} (E - M) \sin(sM) dM$$

Nosso objetivo será escrever os coeficientes $b_s(e)$ em termos das funções de Bessel. Para isso começemos usando a equação de Kepler para rescrever $b_s(e)$ como:

$$b_s(e) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e \sin E \sin(sM) dM$$

onde o termo $e \sin E$ depende de M (que é a variável de integração). Realizando a

integração por partes resulta em:

$$\begin{aligned} u &= e \sin E & dv &= \sin(sM) \\ du &= \frac{d}{dM}(e \sin E) & v &= \frac{-\cos(sM)}{s} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi e \sin E \sin(sM) dM = -\frac{1}{\pi s} e \sin E \cos(sM) \Big|_0^\pi + \frac{1}{\pi s} \int_0^\pi \cos(sM) \frac{d}{dM}(e \sin E) dM$$

a primeira integral é zero e a segunda é re-escrita notando que:

$$E - M = e \sin E \implies \frac{d}{dM}(E - M) = \frac{d}{dM}(e \sin E) \implies \frac{d}{dM}(e \sin E) = \frac{dE}{dM} - 1$$

ao substituir $\frac{d}{dM}(e \sin E)$ na integral tem-se:

$$\begin{aligned} b_s(e) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e \sin E \sin(sM) dM = \frac{1}{\pi s} \int_0^\pi \cos(sM) \left(\frac{dE}{dM} - 1 \right) dM \\ &= -\frac{1}{\pi s} \int_0^\pi \cos(sM) dM + \frac{1}{\pi s} \int_0^\pi \cos(sM) \frac{dE}{dM} dM \\ &= \frac{1}{\pi s} \int_0^\pi \cos(sM) dE \quad (\text{usando a equação de Kepler}) \\ &= \frac{1}{\pi s} \int_0^\pi \cos(se - se \sin E) dE \end{aligned}$$

de forma que $b_s(e)$ pode ser escrito como:

$$b_s(e) = \frac{2}{s} J_s(se) \quad \text{onde} \quad J_s(se) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(se - se \sin E) dE$$

é conhecida como função de Bessel, que para valores positivos de s também pode ser escrita como a somatória:

$$J_s(x) = \frac{1}{s!} \left(\frac{x}{2} \right)^s \sum_{\beta=0}^{\infty} (-1)^\beta \frac{(x/2)^{2\beta}}{\beta!(s+1)(s+2)\dots(s+\beta)} \quad (\text{C.2})$$

Concluimos então que a equação (C.1) pode ser escrita como:

$$F(M) = E - M = 2 \sum_{s=1}^{\infty} J_s(se) \sin(sM) \longrightarrow E = M + 2 \sum_{s=1}^{\infty} J_s(se) \sin(sM)$$

portanto obtivemos uma expansão de E em função de M, e dada por:

$$\begin{aligned} E &= M + 2 \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s} J_s(se) \sin sM \\ &= M + e \sin M + e^2 \left(\frac{1}{2} \sin 2M \right) + e^3 \left(\frac{3}{8} \sin 3M - \frac{1}{8} \sin M \right) \\ &\quad + e^4 \left(\frac{1}{3} \sin 4M - \frac{1}{6} \sin 2M \right) + \mathcal{O}(e^5) \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

Expansão de f em função de e, M .

Faremos a expansão f em função de M, e partindo primeiro da equação que define o momento angular para orbitas elíticas dada por:

$$r^2 \dot{f} = na^2(1 - e^2)^{\frac{1}{2}}$$

como $dM = ndt$ e $r = a(1 - e \cos E)$ temos:

$$df = \frac{\sqrt{1 - e^2}}{(1 - e \cos E)^2} dM \quad (\text{C.4})$$

Através da equação de Kepler $M = E - e \sin E$ obtêm-se que:

$$\frac{dM}{dE} = 1 - e \cos E \implies \left(\frac{dE}{dM} \right)^2 = \frac{1}{(1 - e \cos E)^2} \quad (\text{C.5})$$

aplicando (C.5) em (C.4) temos:

$$df = \sqrt{1 - e^2} \left(\frac{dE}{dM} \right)^2 dM \quad (\text{C.6})$$

Podemos agora usar a expansão de E obtida em (C.3), calcular explicitamente $\frac{dE}{dM}$ e substituir em (C.6), onde a mesma é resolvida integrando termo a termo, obtendo como solução:

$$\begin{aligned} f - M = & 2e \sin M + \frac{5}{4}e^2 \sin 2M + e^3 \left(\frac{13}{12} \sin 3M - \frac{1}{4} \sin M \right) \\ & + e^4 \left(\frac{103}{96} \sin 4M - \frac{11}{24} \sin 2M \right) + \mathcal{O}(e^5) \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

Expansão de $\cos f$ em função de e, M

Lembrando que a solução do problema de dois corpos para órbitas elíticas pode ser escrita através da anomalia excêntrica E como:

$$r = a(1 - e \cos E) \iff \frac{a}{r} = \frac{1}{1 - e \cos E} \quad (\text{C.8})$$

e através da equação de Kepler:

$$M = E - e \sin E \quad \underbrace{\implies}_{\frac{d}{dM}} \quad 1 = \frac{dE}{dM} - e \cos E \frac{dE}{dM} \implies \frac{dE}{dM} = \frac{1}{1 - e \cos E} \quad (\text{C.9})$$

logo juntando (C.9) com (C.8) temos:

$$\frac{a}{r} = \frac{dE}{dM} \quad (\text{C.10})$$

como a expansão de E em função de M é dada em (C.3) logo basta derivar termo a termo para concluirmos que $\frac{a}{r}$ é dado por:

$$\frac{a}{r} = 1 + 2 \sum_{s=1}^{\infty} J_s(se) \cos sM \quad (\text{C.11})$$

Para orbitas elíticas a solução do problema de 2 corpos em função da anomalia verdadeira é dada por:

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos f} \implies e \cos f = -1 - (1-e^2) \frac{a}{r} \quad (\text{usando a expansão acima})$$

$$e \cos f = -1 - (1-e^2) \left(1 + 2 \sum_{s=1}^{\infty} J_s(se) \cos sM \right)$$

assim dividindo tudo por e obtemos que:

$$\begin{aligned} \cos f &= -e + \frac{2(1-e^2)}{e} \sum_{s=1}^{\infty} J_s(se) \cos sM \\ &= \cos M + e(\cos 2M - 1) + \frac{9e^2}{8}(\cos 3M - \cos M) \\ &\quad + \frac{4e^3}{3}(\cos 4M - \cos 2M) \\ &\quad + e^4 \left(\frac{25}{192} \cos M - \frac{225}{128} \cos 3M + \frac{625}{384} \cos 5M \right) + \mathcal{O}(e^5). \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

Expansão de $\cos E$ em função de e, M

Tendo em vista que encontramos uma expansão de $\cos f$ em função de e, M junto com o fato de que $\cos f$ e $\cos E$ estão diretamente relacionados é razoável supor que ira existir uma expansão também em series de Fourier de $\cos E$ que será dada em função de e e M , logo:

$$\cos E = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nM \quad (\text{C.13})$$

onde:

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos E \cos nM dM \\
 &= \frac{2}{n\pi} \cos E \sin nM \Big|_0^\pi + \frac{2}{n\pi} \int_0^\pi \sin E \sin nM dE \\
 &= \frac{1}{n\pi} \int_0^\pi \cos(nM - E) dE - \frac{1}{n\pi} \int_0^\pi \cos(nM + E) dE \\
 &= \frac{1}{n\pi} \int_0^\pi \cos[(n-1)E - ne \sin E] dE - \frac{1}{n\pi} \int_0^\pi \cos[(n+1)E - ne \sin E] dE \\
 &= \frac{1}{n} [J_{n-1}(ne) - J_{n+1}(ne)].
 \end{aligned} \tag{C.14}$$

Ao calcular o valor de a_0 temos que:

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos E dM \quad \xRightarrow{dM=(1-e \cos E)dE} \quad a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos E (1 - e \cos E) dE = -e$$

logo tem-se:

$$\cos E = -\frac{1}{2}e + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} [J_{n-1}(ne) - J_{n+1}(ne)] \cos nM$$

que através das relações de recorrência para funções de Bessel pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}
 \cos E &= -\frac{1}{2}e + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \frac{d}{de} J_n(ne) \cos nM \\
 &= \cos M + \frac{e}{2}(\cos 2M - 1) + \frac{3e^2}{8}(\cos 3M - \cos M) \\
 &\quad + e^3 \left(\frac{1}{3} \cos 4M - \frac{1}{3} \cos 2M \right) \\
 &\quad + e^4 \left(\frac{5}{192} \cos M - \frac{45}{128} \cos 3M + \frac{125}{384} \cos 5M \right) + \mathcal{O}(e^5).
 \end{aligned} \tag{C.15}$$

Expansão $\frac{r}{a}$ em função de e, M

Como $\frac{r}{a}$ pode ser dado em função de $\cos E$ através de:

$$\frac{r}{a} = (1 - e \cos E) \tag{C.16}$$

basta usar a expansão de $\cos E$ para obter:

$$\begin{aligned}
\frac{r}{a} &= 1 + \frac{1}{2}e^2 - 2e \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \frac{d}{de} J_n(ne) \cos nM \\
&= 1 - e \cos M + \frac{e^2}{2}(1 - \cos 2M) + \frac{3e^3}{8}(\cos M - \cos 3M) \\
&\quad + \frac{e^4}{3}(\cos 2M - \cos 4M) + \mathcal{O}(e^5)
\end{aligned} \tag{C.17}$$

Expansão de $\sin f$ em função de e, M

A solução do problema de 2 corpos também pode ser escrita em função de E e f na forma:

$$r = \frac{a\sqrt{1-e^2} \sin E}{\sin f} \longrightarrow \sin f = \frac{a\sqrt{1-e^2} \sin E}{r} \tag{C.18}$$

porem da equação (C.8) vale notar que:

$$\frac{dr}{dE} = ae \sin E \tag{C.19}$$

que através da regra da cadeia, vale:

$$\frac{dr}{dE} = \frac{dr}{dM} \frac{dM}{dE} = \frac{r}{a} \frac{dr}{dM} \quad \text{onde foi usado (C.10);} \quad \frac{a}{r} = \frac{dE}{dM} \tag{C.20}$$

Juntando (C.19), (C.20) em (C.18) teremos:

$$\sin f = \frac{\sqrt{1-e^2}}{e} \frac{d}{dM} \left(\frac{r}{a} \right) \tag{C.21}$$

onde ja temos a expansão de $\frac{r}{a}$ dada em (C.17) bastando derivar termo a termo para obter:

$$\begin{aligned}
\sin f &= 2\sqrt{1-e^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{d}{de} J_n(ne) \sin nM \\
&= \sin M + e \sin 2M + e^2 \left(\frac{9}{8} \sin 3M - \frac{7}{8} \sin M \right) \\
&\quad + e^3 \left(\frac{4}{3} \sin 4M - \frac{7}{6} \sin 2M \right) \\
&\quad + e^4 \left(\frac{17}{192} \sin M - \frac{207}{128} \sin 3M + \frac{625}{384} \sin 5M \right) + \mathcal{O}(e^5)
\end{aligned} \tag{C.22}$$