UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Câmpus de São José do Rio Preto

Karina Seviero Rampazzi

Coeficientes da Relação de Recorrência de Polinômios Ortogonais e Equações de Painlevé

São José do Rio Preto
2020

Karina Seviero Rampazzi

Coeficientes da Relação de Recorrência de Polinômios Ortogonais e Equações de Painlevé

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Câmpus de São José do Rio Preto.

Financiadora: CAPES

Orientadora: Profa. Dra. Cleonice Fátima Bracciali

São José do Rio Preto
2020

R177c

Rampazzi, Karina Seviero

Coeficientes da relação de recorrência de polinômios ortogonais e equações de Painlevé / Karina Seviero Rampazzi. -- São José do Rio Preto, 2020

79 f.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp), Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas, São José do Rio Preto

Orientadora: Cleonice Fátima Bracciali

1. Polinômios ortogonais semiclássicos. 2. Relação de recorrência de três termos. 3. Equações de Painlevé. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas, São José do Rio Preto. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

Karina Seviero Rampazzi

Coeficientes da Relação de Recorrência de Polinômios Ortogonais e Equações de Painlevé

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Câmpus de São José do Rio Preto.

Financiadora: CAPES

Comissão Examinadora

Profa. Dra. Cleonice Fátima Bracciali
UNESP - Câmpus de São José do Rio Preto
Orientadora

Prof. Dr. Maurílio Boaventura
UNESP - Câmpus de São José do Rio Preto

Prof. Dr. Jairo Santos da Silva
UFMA - Câmpus de São Luís

São José do Rio Preto
28 de fevereiro de 2020

Aos meus pais, Carlos e Sueli,
à minha irmã, Karla,
dedico.

AGRADECIMENTOS

Durante o período do mestrado muitas coisas aconteceram. Um trabalho árduo e contínuo foi realizado para que conseguisse chegar até aqui, e no meio do caminho encontrei muitas pessoas que colaboraram para a conclusão desta dissertação. Por esta razão, gostaria de lhes agradecer.

Agradeço aos meus pais, Carlos e Sueli, por todo o amor, apoio e suporte que me deram durante toda a trajetória. Papai e mamãe, amo muito vocês.

Agradeço também a minha irmã, Karla, pelo companheirismo e amizade. A gente se ama na mesma proporção em que brigamos, te amo.

A minha avó, Aurélia, que mesmo longe, sempre esteve presente rezando por mim a cada prova e apresentação.

Ao meu namorado, Thiago, que sempre me apoiou e incentivou a continuar os estudos, muito obrigada, amor!

Agradeço imensamente a minha orientadora, Profa. Cleonice Fátima Bracciali, por toda paciência e sensibilidade que teve comigo. Sempre me entendeu e fez acreditar que era possível realizar esse sonho.

Agradeço também o Prof. Alagacone Sri Ranga pelos conselhos, sugestões e amizade durante todo esse período.

À minha orientadora na graduação, Profa. Vanessa Avansini Botta Pirani, por ter me guiado até aqui. Você é uma inspiração para mim, te agradeço por toda a ajuda durante a graduação e pós-graduação.

Ao Prof. José Roberto Nogueira que foi quem me inseriu no mundo da iniciação científica.

À todos os professores da graduação e pós-graduação pelos ensinamentos.

À todos os funcionários que de alguma forma contribuíram para a realização deste trabalho.

À todos os amigos do grupo de pesquisa e da salinha da pós, agradeço.

Aos amigos que vieram comigo, Rodrigo e Jéssica, sempre soube que com vocês aqui eu iria ter um suporte e ter com quem contar. Obrigada!

Aos meus amigos de graduação, Fabiano que sempre me ajudou mesmo estando longe e, em especial, a Marcela que começou essa jornada comigo.

Às minhas amigas de escola que são como irmãs, Tauana, Giovana e Rafaela. Vocês são a razão de eu acreditar em amizade verdadeira, muito obrigada por sempre estarem comigo.

Não poderia deixar de citar os amigos que conheci em São José do Rio Preto, Livea, Samanta, Lucas, Vinícius, Amanda, Plínio, Sara, Guilherme, André, Clayton, Juninho, Marta e, em especial, João Vinícius por ter me ajudado com o modelo da dissertação. Vocês tiveram um papel fundamental para que tudo isso desse certo, obrigada de coração!

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001, à qual agradeço.

À Deus por tudo.

"Faça o teu melhor, na condição que você tem,
enquanto você não tem condições melhores,
para fazer melhor ainda."
(*CORTELLA*, 2018)

RESUMO

Neste trabalho estudamos a relação entre os coeficientes da relação de recorrência de alguns polinômios ortogonais semiclássicos e as equações discretas de Painlevé. Para isso consideramos uma propriedade importante de polinômios clássicos e semiclássicos que é a relação de estrutura. Além disso, utilizando as equações do tipo Toda, estudamos as relações existentes entre os coeficientes da relação de recorrência desses polinômios e as equações diferenciais de Painlevé.

Palavras−chave: Polinômios ortogonais semiclássicos. Relação de recorrência de três termos. Equações de Painlevé.

ABSTRACT

In this work we study the connection of the recurrence coefficients of some semiclassical orthogonal polynomials and discrete Painlevé equations. For this purpose, we consider an important property of classical and semiclassical orthogonal polynomials which is their structure relation. Moreover, using the Toda-type equations, we study the connection of the recurrence coefficients of these polynomials and Painlevé differential equations.

Keywords: Semiclassical orthogonal polynomials. Three-term recurrence relation. Painlevé equations.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Uma função w definida em um intervalo (a, b), onde $-\infty \leq a < b \leq \infty$, é chamada uma função peso, se w é uma função não negativa e integrável em (a, b).

Seja o espaço das funções contínuas no intervalo real (a, b). Suponhamos uma função peso $w(x) \geq 0$, não identicamente nula, em (a, b). Consideremos o produto interno definido por

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)w(x)dx,$$

onde f, g são funções contínuas.

Uma sequência de polinômios $\{P_n\}_{n\geq 0}$ é chamada de sequência de polinômios ortogonais com relação a uma função peso w sobre o intervalo (a, b), se P_n é de grau exatamente n e

$$\langle P_n, P_m \rangle = \int_a^b P_n(x)P_m(x)w(x)dx = \begin{cases} 0, & \text{se } n \neq m, \\ \rho_n > 0, & \text{se } n = m. \end{cases}$$

Os valores associados à função peso w, denotados por μ_k e dados por

$$\mu_k = \int_a^b x^k w(x)dx, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

são chamados de momentos.

Uma sequência de polinômios ortogonais $\{P_n\}_{n\geq 0}$ é chamada de sequência de polinômios ortonormais $\{p_n\}_{n\geq 0}$ se $\rho_n = 1$.

Esses polinômios satisfazem diversas propriedades e uma das mais importantes é que satisfazem a relação de recorrência de três termos dada por

$$xp_n(x) = a_{n+1}p_{n+1}(x) + b_n p_n(x) + a_n p_{n-1}(x), \quad n \geq 0,$$

com $p_{-1}(x) = 0$, $a_n = \langle xp_n, p_{n-1} \rangle$ e $b_n = \langle xp_n, p_n \rangle$. Estudos bem detalhados sobre esses polinômios podem ser encontrados em Chihara [4] e Szegő [17].

Entre os polinômios ortogonais, alguns são classificados como clássicos ou semiclássicos. Uma das caracterizações mais conhecidas dos polinômios ortogonais clássicos e semiclássicos é que a função peso w associada ao polinômio ortogonal satisfaz uma equação de Pearson que pode ser dada por

$$\frac{d}{dx}[\sigma(x)w(x)] = \tau(x)w(x),$$

onde σ e τ são polinômios. Os polinômios cuja função peso satisfaz a equação de Pearson onde σ é um polinômio de grau menor ou igual a 2 e τ é um polinômio de grau 1 são chamados de polinômios ortogonais clássicos. No caso semiclássico temos que σ é um polinômio de grau maior que 2 ou τ é um polinômio de grau diferente de 1.

Uma propriedade importante de polinômios clássicos e semiclássicos é que satisfazem uma relação de estrutura dada por

$$\sigma(x)p'_n(x) = \sum_{k=n-t}^{n+s-1} A_{n,k}p_k(x),$$

onde $s = grau(\sigma)$, $t = max\{grau(\tau), grau(\sigma) - 1\}$, $p'_n(x)$ denota a derivada de $p_n(x)$ e os coeficientes $A_{n,k}$ são constantes.

A relação de estrutura e a relação de recorrência de três termos devem ser compatíveis: se diferenciarmos os termos da relação de recorrência de três termos e substituirmos todos os p'_k usando a relação de estrutura, então conseguimos uma combinação linear de um número finito de polinômios ortogonais que é igual a 0. Como os polinômios ortogonais são linearmente independentes, os coeficientes nessa combinação linear são iguais a zero, e isso nos fornece uma relação entre os coeficientes de a_n, b_n e os coeficientes $A_{n,k}$. Eliminando os coeficientes $A_{n,k}$ obtém-se relações de recorrência para a_n e b_n que são não lineares. Se essas equações são de segunda ordem, podemos identificá-las como equações discretas de Painlevé. Isto será estudado no Capítulo 4.

Para obter uma relação entre os coeficientes da relação de recorrência com as equações diferenciais de Painlevé é preciso introduzir um parâmetro extra t. Para isso usa-se uma modificação exponecial na função peso w e investiga-se os polinômios ortogonais com relação a função peso $w_t(x) = e^{xt}w(x)$, sempre que todos os momentos dessa função peso existirem.

As equações (diferenciais e discretas) de Painlevé são equações especiais não lineares importantes, elas também aparecem na teoria de matrizes aleatórias, em sistemas integráveis e em mecânica estatística.

As equações diferenciais de Painlevé são equações diferenciais não lineares de segunda ordem que não possuem pontos críticos móveis, isto é, se todas as suas singularidades móveis são polos. Essa propriedade ficou conhecida como Propriedade de Painlevé. O estudo dessas equações surgiu no fim do século XIX, quando Painlevé, Fuchs, Picard e Poincaré, ficaram interessados em encontrar equações diferenciais ordinárias que satisfizessem tal propriedade.

Para entender melhor a propriedade de Painlevé, apresentamos no Capítulo 2 um breve estudo sobre as singularidades das equações diferenciais.

No início do século XX, Painlevé descobriu que existem 50 equações diferenciais na forma canônica que satisfaziam tal propriedade. Dessas 50, existem apenas 6 que não podiam ser reduzidas a equações lineares cujas soluções já são conhecidas. Essas equações ficaram conhecidas como equações de Painlevé.

As equações discretas de Painlevé apareceram mais recentemente. Elas são equações discretas não lineares (relações de recorrência) para qual o limite contínuo é uma das equações diferenciais de Painlevé.

A seguir descrevemos, brevemente, os capítulos que compõem esta dissertação.

No Capítulo 2 apresentamos algumas definições e resultados importantes para o desenvolvimento deste trabalho. Este capítulo foi dividido em 4 seções, na primeira são definidos alguns resultados sobre polinômios ortogonais na reta, na segunda seção mostramos, brevemente, algumas propriedades de polinômios ortogonais discretos. A terceira seção é um pouco diferenciada, nela falamos sobre a equação de Pearson, tal equação é muito importante para a classificação dos polinômios clássicos e semiclássicos, apresentamos também a relação de estrutura, além disso, fazemos um estudo sobre singularidades em equações diferenciais ordinárias. E, por fim, a última seção trata-se de polinômios ortogonais no círculo unitário, cuja as definições se diferenciam dos demais polinômios mencionados anteriormente.

No Capítulo 3 entendemos e demonstramos os resultados detalhadamente, afim de colaborar nos estudos futuros, o foco deste capítulo foi apresentar as equações diferenciais satisfeitas pelos coeficientes da relação de recorrência. Essas equações diferenciais tem um papel importantíssimo para o desenvolvimento do último capítulo. Além disso, na última seção, descrevemos a construção do par de Lax.

No capítulo 4, que é o principal objetivo desta dissertação, entendemos as principais relações entre os polinômios ortogonais e as equações de Painlevé descritas na literatura, neste capítulo fizemos um estudo detalhado sobre essas relações que são satisfeitas pelos coeficientes da relação de recorrência de cada polinômio ortogonal com relação a uma função peso diferente. Tais estudos foram feitos para os polinômios de Freud, os polinômios de Laguerre semiclássicos, os polinômios de Charlier generalizados e para os polinômios ortogonais no círculo unitário. Todos apresentam uma semelhança: são polinômios semiclássicos, ou seja, a função peso satisfaz a equação de Pearson com as condições necessárias para que seja polinômio semiclássico.

2 RESULTADOS PRELIMINARES

Neste capítulo apresentamos alguns resultados que são necessários para o desenvolvimento deste trabalho.

2.1 Polinômios ortogonais na reta real

Nesta seção apresentamos alguns resultados sobre polinômios ortogonais na reta real. Tais resultados podem ser encontrados em [4, 13] e [17].

Seja o espaço das funções contínuas em um intervalo real (a, b), onde $-\infty \leq a < b \leq \infty$. Suponhamos uma função $w(x) \geq 0$, não identicamente nula, em (a, b). Consideremos o produto interno definido por

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)w(x)dx,$$

onde f, g são funções contínuas.

A função w é chamada de função peso. Os valores associados a essa função dados por

$$\mu_k = \int_a^b x^k w(x)dx, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

são chamados de momentos.

Definição 2.1. *Uma sequência de polinômios $\{P_n\}_{n\geq 0}$ é uma sequência de polinômios ortogonais com relação a função peso w em (a, b), se P_n é de grau exatamente n e satisfaz*

$$\int_a^b P_n(x)P_m(x)w(x)dx = \begin{cases} 0, & se\ n \neq m, \\ \rho_n > 0, & se\ n = m. \end{cases} \tag{2.1}$$

Podemos escrever (2.1) como

$$\int_a^b P_n(x)P_m(x)w(x)dx = \delta_{nm}\rho_n, \tag{2.2}$$

onde δ_{nm} é o delta de Kronecker, isto é,

$$\delta_{nm} = \begin{cases} 0, & \text{se } n \neq m, \\ 1, & \text{se } n = m. \end{cases}$$

O próximo resultado traz três maneiras equivalentes de se definir uma sequência de polinômios ortogonais com relação a uma função peso w em (a, b).

Teorema 2.2. *Seja $\{P_n\}_{n\geq 0}$ uma sequência de polinômios e w uma função peso no intervalo (a,b). Então, as seguintes afirmações são equivalentes*

(a) $\{P_n\}_{n\geq 0}$ *é uma sequência de polinômios ortogonais com relação à função peso w em (a,b), ou seja, $\langle P_m, P_n\rangle = \delta_{mn}\rho_n$, onde $\rho_n \neq 0$.*

(b) $\langle P_n, \pi\rangle = 0$*, para todo $\pi \in \mathbb{P}_{n-1}$, $n \geq 1$.*

(c) $\langle x^m, P_n\rangle = \displaystyle\int_a^b x^m P_n(x) w(x) dx = \begin{cases} 0, & se\ 0 \leq m \leq n-1, \\ \tilde{\rho}_n \neq 0, & se\ m = n. \end{cases}$

Definição 2.3. *O determinante definido por*

$$\mathbf{H}_n = \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_n & \mu_{n+1} & \cdots & \mu_{2n} \end{vmatrix}, \qquad n \geq 0,$$

é chamado de determinante de Hankel de ordem $n+1$, onde μ_k, $k = 0, 1, 2, \ldots, 2n$ são os momentos.

Definição 2.4. *Uma sequência de polinômios ortogonais $\{P_n\}_{n\geq 0}$ é chamada sequência de polinômios ortonormais $\{p_n\}_{n\geq 0}$ se $\rho_n = 1$ em (2.2).*

Denotaremos o polinômio ortonormal de grau n, $n \geq 0$, p_n por

$$p_n(x) = c_{n,n}x^n + c_{n,n-1}x^{n-1} + \cdots + c_{n,1}x + c_{n,0} = \sum_{k=0}^{n} c_{n,k}x^k, \qquad c_{n,n} \neq 0.$$

Uma sequência de polinômios ortonormais $\{p_n\}_{n\geq 0}$ é obtida a partir dos polinômios ortogonais P_n, dividindo-se cada P_n por sua norma. Logo,

$$p_n(x) = \frac{P_n(x)}{||P_n(x)||}, \quad n \geq 1,$$

onde $||P_n(x)|| = \sqrt{\langle P_n, P_n\rangle}$.

O resultado abaixo é uma das características mais importantes de polinômios ortogonais, o fato de que três polinômios de graus consecutivos estarem conectados por uma relação de recorrência.

Teorema 2.5. *Uma sequência de polinômios ortonormais $\{p_n\}_{n\geq 0}$ sempre satisfaz uma relação de recorrência de três termos da forma*

$$xp_n(x) = a_{n+1}p_{n+1}(x) + b_np_n(x) + a_np_{n-1}(x), \quad n \geq 0, \tag{2.3}$$

com $p_{-1}(x) = 0,\ p_0(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\mu_0}},$

$$a_n = \langle xp_n, p_{n-1}\rangle = \int_a^b xp_n(x)p_{n-1}(x)w(x)dx$$

e

$$b_n = \langle xp_n, p_n\rangle = \int_a^b xp_n^2(x)w(x)dx.$$

Comparando os coeficientes do termo de maior grau, temos que $a_{n+1} = \dfrac{c_{n,n}}{c_{n+1,n+1}}$.

Seja uma sequência de polinômios ortogonais mônicos $\{\hat{P}_n\}_{n\geq 0}$ com relação a w. Podemos construir tal sequência a partir dos polinômios ortonormais $\{p_n\}_{n\geq 0}$ com relação a w, para isso, basta dividir cada p_n pelo coeficiente do termo de maior grau, isto é,

$$\hat{P}_n(x) = \frac{p_n(x)}{c_{n,n}}, \quad n \geq 1.$$

A relação de recorrência de três termos para esses polinômios pode ser obtida dividindo a relação de recorrência (2.3) por $c_{n+1,n+1}$ e, após alguns cálculos, temos

$$\hat{P}_{n+1}(x) = (x - b_n)\hat{P}_n(x) - a_n^2\hat{P}_{n-1}(x), \quad n \geq 0,$$

onde $\hat{P}_{-1}(x) = 0$ e $\hat{P}_0(x) = 1$.

Seja w uma função par definida em um intervalo $(-b, b)$, ou seja $w(x) = w(-x)$, então os momentos de ordem ímpar são nulos, isto é, $\mu_{2n+1} = 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, e se $\{P_n\}_{n\geq 0}$ é uma sequência de polinômios ortogonais com relação a w, então $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$, $n \geq 0$, e dizemos que são polinômios ortogonais simétricos.

O resultado abaixo mostra que os polinômios ortogonais serem simétricos é equivalente a dizer que $b_n = 0$ na relação de recorrência (2.3).

Teorema 2.6. *Seja* $\{p_n\}_{n\geq 0}$ *uma sequência de polinômios ortogonais com relação a função peso* w*. Então, são equivalentes as seguintes afirmações:*

(a) $p_n(-x) = (-1)^n p_n(x),\ n \geq 0,$

(b) *em (2.3),* $b_n = 0$*,* $n \geq 1$.

2.2 Polinômios ortogonais discretos

Nesta seção apresentamos os polinômios ortogonais discretos sobre $\mathbb{N}$. Tais resultados serão importantes para o desenvolvimento do trabalho e os resultados expostos aqui podem ser encontrados em [5] e [19].

Dizemos que p_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$, são polinômios ortonormais discretos com relação ao peso discreto $w(k)$ sobre $\mathbb{N}$, se satisfazem a seguinte propriedade de ortogonalidade

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_n(k)p_m(k)w(k) = \delta_{n,m}, \quad n, m \geq 0.$$

Estes polinômios também satisfazem a relação de recorrência (2.3), ou seja,

$$kp_n(k) = a_{n+1}p_{n+1}(k) + b_n p_n(k) + a_n p_{n-1}(k), \quad n \geq 0,$$

com $p_{-1}(k) = 0$ e os coeficientes de recorrência são dados por

$$a_n = \sum_{k=0}^{\infty} kp_n(k)p_{n-1}(k)w(k)$$

e

$$b_n = \sum_{k=0}^{\infty} kp_n^2(k)w(k).$$

Os momentos μ_n relacionados ao peso discreto $w(k)$ são dados por

$$\mu_n = \sum_{k=0}^{\infty} k^n w(k), \quad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{2.4}$$

2.3 Polinômios ortogonais clássicos e semiclássicos

Apresentamos aqui os polinômios ortogonais classificados como clássicos e semiclássicos e, no fim desta seção, explicamos sobre as singularidades das equações diferenciais ordinárias. As referências que utilizamos para tais estudos foram [3, 4, 5, 6, 9, 10] e [19].

Uma das caracterizações mais conhecidas dos polinômios ortogonais clássicos e semiclássicos é que a função peso w associada ao polinômio ortogonal satisfaz uma equação de Pearson do tipo

$$\frac{d}{dx}[\sigma(x)w(x)] = \tau(x)w(x), \tag{2.5}$$

onde σ e τ são polinômios.

Segundo Chihara em [4], os polinômios cuja função peso satisfaz a equação de Pearson (2.5) onde

- σ é um polinômio de grau ≤ 2

e

- τ é um polinômio de grau $= 1$

são chamados de polinômios ortogonais clássicos. Isto acontece quando

$$\sigma(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & \text{se } x \in (-1, 1), \\ x, & \text{se } x \in (0, \infty), \\ 1, & \text{se } x \in (-\infty, \infty). \end{cases} \tag{2.6}$$

Segundo Hendriksen e Van Rossum em [12], os polinômios cuja função peso satisfaz a equação de Pearson (2.5) onde

- σ é um polinômio de grau > 2

ou

- τ é um polinômio de grau $\neq 1$

são chamados de polinômios ortogonais semiclássicos.

Porém, em [10], os polinômios ortogonais $\{p_n\}_{n\geq 0}$ semiclássicos são divididos em classes, isto é, a equação (2.5) associa-se a classe l, onde l é um inteiro não negativo dado pelo menor valor de

$$l = max\{grau(\tau) - 1, grau(\sigma) - 2\},$$

para todos os polinômios σ e τ que satisfazem a equação de Pearson.

Note que, quando $l = 0$ os polinômios $\{p_n\}_{n\geq 0}$ são clássicos.

Existe uma propriedade dos polinômios ortogonais clássicos e semiclássicos que é a relação de estrutura, uma relação onde a derivada desses polinômios é escrita como uma combinação dos próprios polinômios. A relação de estrutura se deriva da equação de Pearson.

Propriedade 2.7. Se a função peso w satisfaz a equação de Pearson (2.5) e σw se anula em $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, então

$$\sigma(x)p_n'(x) = \sum_{k=n-t}^{n+s-1} A_{n,k}p_k(x), \tag{2.7}$$

onde $s = grau(\sigma)$ e $t = max\{grau(\tau), grau(\sigma) - 1\}$.

Demonstração. Como o polinômio $\sigma p_n'$ tem grau $n + s - 1$, então podemos expandí-lo em termos de polinômios ortonormais p_k com $0 \leq k \leq n + s - 1$, ou seja,

$$\sigma(x)p_n'(x) = \sum_{k=0}^{n+s-1} A_{n,k}p_k(x).$$

Os coeficientes $A_{n,k}$ são os coeficientes de Fourier e podem ser expressos como

$$A_{n,k} = \int_a^b \sigma(x)p_n'(x)p_k(x)w(x)dx.$$

Integrando por partes, e usando as hipóteses de que $\sigma(a)w(a) = 0 = \sigma(b)w(b)$, temos

$$\begin{aligned} A_{n,k} &= -\int_a^b p_n(x)[\sigma(x)w(x)p_k(x)]'dx \\ &= -\int_a^b p_n(x)p_k(x)[\sigma(x)w(x)]'dx - \int_a^b p_n(x)p_k'(x)\sigma(x)w(x)dx \\ &= -\int_a^b p_n(x)p_k(x)\tau(x)w(x)dx - \int_a^b p_n(x)p_k'(x)\sigma(x)w(x)dx, \end{aligned} \tag{2.8}$$

onde a equação de Pearson (2.5) foi usada na linha anterior. Pela ortogonalidade, a primeira integral em (2.8) se anula quando $k + grau(\tau) < n$, e a segunda integral se anula quando $k + s - 1 < n$. Consequentemente, ambos os coeficientes $A_{n,k}$ se anulam quando

$$k < n - t, \quad \text{com} \quad t = max\{grau(\tau), grau(\sigma) - 1\},$$

e sobram apenas os coeficientes $A_{n,k}$ com $n - t \leq k \leq n + s - 1$. Portanto,

$$\sigma(x)p_n'(x) = \sum_{k=n-t}^{n+s-1} A_{n,k}p_k(x).$$

□

Observe que para os polinômios ortogonais clássicos a relação de estrutura tem a forma

$$\sigma(x)p_n'(x) = \sum_{k=n-1}^{n+s-1} A_{n,k}p_k(x), \tag{2.9}$$

onde $s \in \{0, 1, 2\}$.

Outras caracterizações dos polinômios ortogonais clássicos é que são soluções de certas equações diferenciais ordinárias de segunda ordem, e além disso, a derivada de um polinômio ortogonal clássico pertence a uma sequência de polinômios ortogonais clássicos.

Como discutido anteriormente, os polinômios ortogonais clássicos e semiclássicos são caracterizados pela equação de Pearson (2.5). Analogamente, os polinômios ortogonais discretos clássicos e semiclássicos também são caracterizados pela equação de Pearson discreta dada por

$$\Delta[\sigma(k)w(k)] = \tau(k)w(k), \tag{2.10}$$

onde σ e τ são polinômios e Δ é o operador de diferenças progressivas, ou seja,

$$\Delta f(k) = f(k+1) - f(k).$$

A equação de Pearson discreta também pode ser definida usando o operador de diferenças regressivas ∇, ou seja,

$$\nabla[\sigma(k)w(k)] = \tau(k)w(k),$$

onde

$$\nabla f(k) = f(k) - f(k-1).$$

Segundo Dominici e Marcellán em [8], os polinômios cuja função peso satisfaz a equação de Pearson (2.10) onde

- σ é um polinômio de grau ≤ 2

e

- τ é um polinômio de grau $= 1$

são chamados de polinômios ortogonais discretos clássicos.

Se o peso discreto satisfaz a equação de Pearson (2.10) onde

- σ é um polinômio de grau > 2

ou

- τ é um polinômio de grau > 1,

então os polinômios ortogonais discretos são chamados de semiclássicos.

Assim, como para os polinômios ortogonais contínuos, existe uma relação de estrutura para os polinômios ortogonais discretos.

Propriedade 2.8. Seja w uma função peso discreta que satisfaz a equação de Pearson

$$\nabla[\sigma(k)w(k)] = \tau(k)w(k),$$

com condição inicial $w(-1) = 0$. Então, os polinômios ortonormais sobre $\mathbb{N}$ para essa função peso satisfazem a relação de estrutura

$$\sigma(k)\Delta p_n(k) = \sum_{j=n-t}^{n+s-1} A_{n,j} p_j(k),$$

onde $s = grau(\sigma)$ e $t = max\{grau(\tau), grau(\sigma) - 1\}$.

2.3.1 Polinômios ortogonais clássicos

Por (2.6) temos que os polinômios ortogonais de Jacobi, Laguerre e Hermite são polinômios ortogonais clássicos. Neste capítulo vamos apresentar algumas de suas propriedades. A literatura sobre esses polinômios é extensa, e aqui utilizamos duas das referências mais conhecidas,

[4] e [17].

• Polinômios de Jacobi

Os polinômios de Jacobi, denotados por $P_n^{(\alpha,\beta)}$, são ortogonais com respeito a função peso $w(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$ sobre $(-1, 1)$ e são definidos pela fórmula

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = (-2)^{-n}(n!)^{-1}(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}\frac{d^n}{dx^n}[(1-x)^{n+\alpha}(1+x)^{n+\beta}], \tag{2.11}$$

onde α e β são parâmetros, $\alpha > -1$, $\beta > -1$.

Segundo Chihara em [4], a fórmula (2.11) para $\alpha = \beta = 0$ é usualmente chamada de Fórmula de Rodrigues, enquanto que o caso geral é chamado de Fórmula do tipo Rodrigues.

A função peso w satisfaz a equação de Pearson (2.5) com

$$\begin{aligned} \sigma(x) &= 1 - x^2, \\ \tau(x) &= \beta - \alpha - (2+\alpha+\beta)x, \end{aligned}$$

ou seja,

$$[(1-x^2)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta]' = (\beta-\alpha-(2+\alpha+\beta)x)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta.$$

A equação diferencial de segunda ordem satisfeitas pelos polinômios de Jacobi é

$$(1-x^2)y'' + [\beta-\alpha-(2+\alpha+\beta)x]y' + n(n+\alpha+\beta+1)y = 0, \quad y = P_n^{\alpha,\beta}(x).$$

Em Chihara [4], encontramos a relação de recorrência de três termos para os polinômios de Jacobi:

$$\begin{aligned} xP_n^{(\alpha,\beta)}(x) &= \frac{2(n+1)(n+\alpha+\beta+1)}{(2n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta+2)}P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x) \\ &+\frac{1}{(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+2)}(\beta^2-\alpha^2)P_n^{(\alpha,\beta)}(x) \\ &-\frac{2(n+\alpha)(n+\beta)}{(2n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta)}P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x), \quad n \geq 0, \end{aligned} \tag{2.12}$$

onde $P_{-1}^{(\alpha,\beta)}(x) = 0$.

De (2.9), com $s = 2$, temos $(1-x^2)\dfrac{d}{dx}P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ escrito em função de três polinômios: $P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}$, $P_n^{(\alpha,\beta)}$ e $P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}$. Porém, substituindo $P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}$ usando a relação de recorrência de três termos (2.12) obtemos a relação de estrutura para os polinômios de Jacobi

$$(1-x^2)\frac{d}{dx}P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = n\Big[\frac{\alpha-\beta}{2n+\alpha+\beta} - x\Big]P_n^{(\alpha,\beta)}(x) + \frac{2(n+\alpha)(n+\beta)}{2n+\alpha+\beta}P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x).$$

Esses polinômios satisfazem também a relação diferencial dada por

$$\frac{dP_n^{(\alpha,\beta)}(x)}{dx} = \frac{1}{2}(n+\alpha+\beta+1)P_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(x),$$

ou seja, a derivada do polinômio $P_n^{(\alpha,\beta)}$ é um polinômio ortogonal clássico.

• **Polinômios de Laguerre**

Os polinômios de Laguerre, denotados por $L_n^{(\alpha)}$, são ortogonais com respeito a função peso $w(x) = x^\alpha e^{-x}$, $\alpha > -1$, sobre $(0, \infty)$ e também podem ser definidos pela fórmula do tipo Rodrigues

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{x^{-\alpha}}{n!}e^x \frac{d^n}{dx^n}[x^{n+\alpha}e^{-x}], \quad \alpha > -1.$$

A função peso w satisfaz a equação de Pearson com

$$\sigma(x) = x,$$
$$\tau(x) = 1 + \alpha - x,$$

ou seja,

$$[x(x^\alpha e^{-x})]' = (1+\alpha-x)(x^\alpha e^{-x}).$$

A equação diferencial de segunda ordem para os polinômios de Laguerre é

$$xy'' + (\alpha+1-x)y' + ny = 0, \quad y = L_n^{(\alpha)(x)}.$$

Esses polinômios também satisfazem a relação de recorrência de três termos

$$xL_n^{(\alpha)}(x) = -(n+1)L_{n+1}^{(\alpha)}(x) + (2n+\alpha+1)L_n^{(\alpha)}(x) - (n+\alpha)L_{n-1}^{(\alpha)}(x), \quad n \geq 0,$$

onde $L_{-1}^{(\alpha)}(x) = 0$.

Para os polinômios de Laguerre, de (2.9) com $s = 1$, a relação de estrutura é

$$x\frac{dL_n^{(\alpha)}(x)}{dx} = nL_n^{(\alpha)}(x) - (n+\alpha)L_{n-1}^{(\alpha)}(x).$$

Os polinômios de Laguerre satisfazem a relação diferencial

$$\frac{dL_n^{(\alpha)}(x)}{dx} = -L_{n-1}^{(\alpha+1)}(x).$$

• **Polinômios de Hermite**

E, por fim, os polinômios de Hermite, H_n, são ortogonais com respeito a função peso

$w(x) = e^{-x^2}$ sobre $(-\infty, \infty)$ e são definidos pela fórmula do tipo Rodrigues

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}.$$

A função peso w satisfaz a equação de Pearson com

$$\sigma(x) = 1,$$
$$\tau(x) = -2x,$$

ou seja,

$$(e^{-x^2})' = -2xe^{-x^2}.$$

A equação diferencial de segunda ordem para os polinômios de Laguerre é

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0, \quad y = H_n(x).$$

A relação de recorrência para tais polinômios é

$$xH_n(x) = \frac{H_{n+1}(x)}{2} + H_{n-1}(x), \quad n \geq 0,$$

onde $H_{-1}(x) = 0$.

Para esses polinômios temos a seguinte propriedade

$$\frac{dH_n(x)}{dx} = 2nH_{n-1}(x)$$

que também é a relação de estrutura para os polinômios de Hermite, pois $s = 0$ em (2.9).

Abaixo apresentamos os polinômios ortogonais discretos de Charlier.

- **Polinômios de Charlier**

Os polinômios de Charlier são polinômios discretos ortonormais para a distribuição de Poisson

$$w(k) = \frac{a^k}{k!}, \quad k \in \mathbb{N}, a > 0. \tag{2.13}$$

A distribuição de Poisson $w(k)$ satisfaz a equação de Pearson (2.10) com

$$\sigma(k) = k,$$
$$\tau(k) = a - k,$$

ou seja,

$$\Delta(kw(k)) = (a-k)w(k).$$

Observe que

$$w(k-1) = \frac{k}{a}w(k). \tag{2.14}$$

De fato,

$$w(k-1) = \frac{a^{k-1}}{(k-1)!} = \frac{a^k a^{-1} k}{k!} = \frac{k}{a}w(k),$$

que é uma equação de Pearson discreta para a distribuição de Poisson, e pode também ser escrita como

$$a\nabla w(k) = (a-k)w(k), \tag{2.15}$$

que é uma forma especial da equação geral de Pearson

$$\nabla(\sigma w) = \tau w$$

para o operador de diferenças regressivas.

Os polinômios de Charlier satisfazem a seguinte relação de recorrência de três termos

$$kp_n(k;a) = a_{n+1}(a)p_{n+1}(k;a) + b_n(a)p_n(k;a) + a_n(a)p_{n-1}(k;a),$$

com $p_{-1}(k;a) = 0$.

A equação de Pearson (2.15) fornece a seguinte relação de estrutura para os polinômios de Charlier.

Propriedade 2.9. Para os polinômios ortonormais de Charlier têm-se

$$p_n(k+1) = p_n(k) + A_n p_{n-1}(k),$$

ou seja, $\Delta p_n(k) = A_n p_{n-1}(k)$.

Demonstração. Usando a série de Fourier podemos expandir

$$p_n(k+1) = \sum_{j=0}^{n} A_{n,j} p_j(k),$$

e se compararmos os coeficientes de maior grau em ambos os lados, então $A_{n,n} = 1$. Os outros coeficientes de Fourier são dados por

$$\begin{aligned} A_{n,j} &= \sum_{k=0}^{\infty} p_n(k+1)p_j(k)w(k) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} p_n(k)p_j(k-1)w(k-1), \quad j = 1, 2, \ldots, n. \end{aligned}$$

Daí, usando (2.14), obtemos

$$A_{n,j} = \frac{1}{a} \sum_{k=0}^{\infty} k p_n(k) p_j(k-1) w(k).$$

Note que o polinômio $kp_j(k-1)$ tem grau $j+1$, consequentemente pela ortogonalidade $A_{n,j} = 0$ sempre que $j+1 < n$, isto é, sempre que $j < n-1$. Portanto,

$$p_n(k+1) = p_n(k) + A_n p_{n-1}(k),$$

onde $A_n = A_{n,n-1}$. □

2.3.2 Polinômios ortogonais semiclássicos

Nesta seção apresentamos alguns polinômios ortogonais semiclássicos que são importantes para essa dissertação. As informações aqui presentes podem ser encontradas em [1, 5, 6, 11] e [18].

- **Polinômios de Freud**

Os polinômios de Freud são ortogonais com respeito à função peso w, em $(-\infty, \infty)$, dada por

$$w(x) = e^{-P(x)},$$

onde $P(x)$ é real, par, não negativo, e continuamente diferenciável.

Definição 2.10. *Os polinômios generalizados de Freud são ortogonais com respeito à função peso w, em* $(-\infty, \infty)$*, dada por*

$$w(x) = |x|^{\rho} e^{-|x|^s}, \qquad \rho > -1,\ s > 0.$$

Denotamos por $p_n(x) = c_n x^n + \cdots$, com o coeficente $c_n > 0$, os polinômios ortonormais de Freud.

Consideremos a função peso de Freud, dada por

$$w_t(x) = e^{-x^4 + tx^2}, \qquad x \in (-\infty, \infty),$$

onde $t \in \mathbb{R}$ é um parâmetro.

A função peso w_t satisfaz a equação de Pearson com

$$\sigma(x) = 1,$$
$$\tau(x) = -4x^3 + 2tx,$$

ou seja,

$$(e^{-x^4+tx^2})' = (-4x^3 + 2tx)e^{-x^4+tx^2}.$$

Os polinômios de Freud ortonormais com relação a função peso w_t satisfazem a relação de recorrência

$$xp_n(x;t) = a_{n+1}(t)p_{n+1}(x;t) + a_n(t)p_{n-1}(x;t), \qquad n \geq 0,$$

onde $p_{-1}(x;t) = 0$.

A relação de estrutura para esses polinômios é

$$p_n'(x;t) = A_n(t)p_{n-1}(x;t) + C_n(t)p_{n-3}(x;t),$$

onde $A_n = A_{n,n-1}$ e $C_n = A_{n,n-3}$ em (2.7).

Observe que, como os polinômios de Freud são polinômios ortogonais simétricos, então $A_{n,n-2}$ é nulo.

- **Polinômios de Laguerre semiclássicos**

Aqui vamos considerar os polinômios ortonormais sobre $\mathbb{R}^+$ com relação a função peso chamada Laguerre semiclássica, isto é,

$$w_t(x) = x^\alpha e^{-x^2+tx}, \qquad x \in \mathbb{R}^+, \tag{2.16}$$

com $\alpha > -1$ e $t \in \mathbb{R}$.

A função peso w_t satisfaz a equação de Pearson com

$$\begin{aligned}\sigma(x) &= x,\\ \tau(x) &= 1 + \alpha + tx - 2x^2,\end{aligned}$$

ou seja,

$$[x(x^\alpha e^{-x^2+tx})]' = (1 + \alpha + tx - 2x^2)(x^\alpha e^{-x^2+tx}). \tag{2.17}$$

Os polinômios de Laguerre semiclássicos satisfazem a seguinte relação de recorrência

$$xp_n(x;t) = a_{n+1}(t)p_{n+1}(x;t) + b_n(t)p_n(x;t) + a_n(t)p_{n-1}(x;t),$$

com $p_{-1}(x;t) = 0$.

A relação de estrutura para esses polinômios é

$$xp_n'(x;t) = A_n(t)p_{n-1}(x;t) + B_n(t)p_{n-2}(x;t) + C_n(t)p_{n-3}(x;t),$$

onde $A_n = A_{n,n-1}$, $B_n = A_{n,n-2}$ e $C_n = A_{n,n-3}$ são constantes em (2.7).

Abaixo apresentamos os polinômios ortogonais discretos semiclássicos de Charlier generalizados.

• **Polinômios de Charlier generalizados**

Smet e Van Assche [16] generalizaram o peso de Charlier (2.13) adicionando um parâmetro η na função peso.

Definição 2.11. *Os polinômios de Charlier generalizados são ortonormais com respeito a função peso*

$$w(k) = \frac{a^k}{k!(\eta)_k}, \quad k \in \mathbb{N}, a > 0, \eta > 0,$$

onde $(\eta)_k$ *é o símbolo de Pochhammer, dado por*

$$(\eta)_k = \eta(\eta+1)(\eta+2)\dots(\eta+k-1).$$

Os polinômios $\{p_n\}_{n\geq 0}$ são ortonormais em relação ao peso dado acima, ou seja,

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_n(k;a)p_m(k;a)\frac{a^k}{k!(\eta)_k} = \delta_{nm}, \tag{2.18}$$

onde δ_{nm} é o delta de Kronecker.

O peso discreto w satisfaz a equação de Pearson (2.10) com

$$\sigma(k) = k(k+\eta-1),$$
$$\tau(k) = -k^2 - (\eta-1)k + a,$$

ou seja,

$$\Delta(k(k+\eta-1)w(k)) = (-k^2 - (\eta-1)k + a)w(k).$$

Os polinômios de Charlier generalizados satisfazem a seguinte relação de recorrência

$$kp_n(k;a) = a_{n+1}(a)p_{n+1}(k;a) + b_n(a)p_n(k;a) + a_n(a)p_{n-1}(k;a),$$

com $p_{-1}(k;a) = 0$.

Observe que

$$w(k-1) = \frac{k(\eta+k-1)}{a}w(k),$$

que também pode ser escrito como $a\nabla w(k) = (a - (\eta-1)k - k^2)w(k)$. O polinômio τ é de grau 2 e consequentemente essa é uma função peso discreta semiclássica.

Podemos escrever essa função peso como

$$w(k) = \frac{a^k \Gamma(\eta)}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\eta)}. \tag{2.19}$$

De fato, usando as propriedades da função gama como $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ temos

$$\Gamma(k+1) = k\Gamma(k) = k(k-1)\Gamma(k-1) = k(k-1)(k-2)\dots 1\Gamma(1) = k!,$$

pois $\Gamma(1) = 1$. Então, observe que

$$\begin{aligned}
\frac{\Gamma(\eta+k)}{\Gamma(\eta)} &= \frac{(k+\eta-1)(k+\eta-2)\dots(k+\eta-k)\Gamma(\eta)}{\Gamma(\eta)} \\
&= (\eta)(\eta+1)\dots(\eta+k-1) \\
&= (\eta)_k.
\end{aligned}$$

Portanto, temos

$$w(k) = \frac{a^k}{k!(\eta)_k} = \frac{a^k \Gamma(\eta)}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\eta)}.$$

A função peso associada aos polinômios de Charlier generalizados (dada também por (2.19)) satisfaz a equação de Pearson

$$a\nabla w(k) = (a - (\eta-1)k - k^2)w(k), \tag{2.20}$$

com a condição $w(-1) = 0$.

Os polinômios de Charlier generalizados satisfazem a seguinte relação de estrutura

$$p_n(k+1) = p_n(k) + A_n p_{n-1}(k) + B_n p_{n-2}(k)$$

ou $\Delta p_n(k) = A_n p_{n-1}(k) + B_n p_{n-2}(k)$.

2.3.3 Sobre singularidades em equações diferenciais ordinárias

Nesta seção apresentamos, brevemente, um estudo sobre as singularidades em equações diferenciais ordinárias. Um estudo mais aprofundado pode ser encontrado em [9].

As soluções de equações diferenciais ordinárias podem incorporar singularidades que são classificadas por duas propriedades: a sua dependência pelas condições iniciais, classificadas como móveis ou fixas, e o comportamento da solução ao redor da singularidade. Tal comportamento pode ser classificado como polo, singularidade essencial ou ponto de ramificação.

As singularidades das soluções das equações diferenciais lineares estão sempre em pontos que são fixos, ou seja, suas posições são independentes das constantes arbitrárias de integração, por exemplo, a equação

$$x\frac{dy(x)}{dx} + y(x) = 0,$$

com solução geral

$$y(x) = \frac{c}{x},$$

onde c é uma constante. A solução tem um polo em $x = 0$, para todo $c \neq 0$.

As equações diferenciais ordinárias não lineares podem ter soluções que tem singularidades móveis, isto é, cuja posição depende das constantes arbitrárias de integração, por exemplo, a equação

$$\frac{dy(x)}{dx} + y^2(x) = 0,$$

tem solução geral

$$y(x) = \frac{1}{x - c},$$

onde c é uma constante. Esta solução tem um polo no ponto móvel $x = c$.

É importante diferenciar polo de todos os outros tipos de singularidades de uma equação diferencial ordinária. Um ponto crítico é uma singularidade, ou seja, um ponto em que a solução não é analítica e, que não seja um polo. Assim, ponto crítico pode ser um ponto de ramificação ou uma singularidade essencial, temos como exemplo a equação

$$\frac{dy(x)}{dx} - e^{-y(x)} = 0,$$

em que a solução geral é

$$y(x) = ln(x - c),$$

onde c é uma constante. Esta solução tem, portanto, um ponto de ramificação no ponto $x = c$.

2.4 Polinômios ortogonais no círculo unitário

Nesta seção apresentamos os polinômios ortogonais no círculo unitário $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Uma boa fonte para a teoria geral desses polinômios pode ser encontrada em Simon [15].

A sequência de polinômios $\{\varphi_n\}_{n\geq 0}$ é ortonormal sobre o círculo unitário com respeito a função peso w em $\theta \in (0, 2\pi)$ e $z = e^{i\theta}$, se

$$\int_0^{2\pi} \varphi_n(z)\overline{\varphi_m(z)}w(\theta)d\theta = \delta_{n,m}.$$

Esses polinômios são denotados por

$$\varphi_n(z) = k_n z^n + \cdots, \quad k_n > 0.$$

Os polinômios ortogonais mônicos são usualmente denotados por $\Phi_n(z) = \dfrac{\varphi_n(z)}{k_n}$. Os momentos $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ (trigonométricos) são dados por

$$\mu_n = \int_0^{2\pi} e^{-in\theta} w(\theta) d\theta.$$

Logo, a sequência de polinômios ortogonais mônicos $\{\Phi_n\}_{n\geq 0}$, onde Φ_n é de grau exatamente n, com relação a função peso w, satisfaz

$$\int_0^{2\pi} \Phi_n(z)\overline{\Phi_m(z)} w(\theta) d\theta = \begin{cases} 0, & \text{se } n \neq m, \\ k_n^{-2}, & \text{se } n = m. \end{cases}$$

Correspondente a sequência de momentos $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ podemos definir a seguinte matriz, conhecida como matriz de Toeplitz

$$\mathbf{T}_n = \begin{pmatrix} \mu_0 & \mu_{-1} & \cdots & \mu_{-n} \\ \mu_1 & \mu_0 & \cdots & \mu_{-n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_n & \mu_{n-1} & \cdots & \mu_0 \end{pmatrix}, \qquad n \geq 0.$$

O determinante da matriz $\mathbf{T_n}$ é conhecido como determinante de Toeplitz e é definido por

$$\mathbf{D_{-1}} = 1 \quad \text{e} \quad \mathbf{D}_n = \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_{-1} & \cdots & \mu_{-n} \\ \mu_1 & \mu_0 & \cdots & \mu_{-n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_n & \mu_{n-1} & \cdots & \mu_0 \end{vmatrix}, \qquad n \geq 0.$$

Assim como no caso dos polinômios ortogonais na reta real, também prova-se que, todo polinômio π_m de grau $m < n$ é ortogonal ao polinômio Φ_n, se $n \neq 0$.

Teorema 2.12. *Seja $\{\Phi_n\}_{n\geq 0}$ a sequência de polinômios mônicos ortogonais com relação a w, ou seja, $\langle \Phi_n, \Phi_m \rangle = \delta_{n,m} k_n^{-2}$, onde $k_n^{-2} \neq 0$. Então, para todo polinômio π_m de grau $m \leq n$, temos*

$$\langle \Phi_n, \pi_m \rangle = \int_0^{2\pi} \Phi_n(z)\overline{\pi_m(z)} w(\theta) d\theta = \begin{cases} 0, & se\ m < n, \\ \hat{k}_n \neq 0, & se\ m = n. \end{cases} \tag{2.21}$$

Demonstração. Como $\{\Phi_n\}_{n\geq 0}$ é uma sequência de polinômios ortogonais com relação a w, então $\Phi_0, \Phi_1, \ldots, \Phi_{n-1}$ formam uma base para os polinômios de grau menor ou igual a $n - 1$.

Assim, para $m < n$ podemos escrever $\pi_m(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \Phi_k(z)$, onde $\alpha_k \in \mathbb{C}$, para $k = 0, 1, \ldots n-1$. Logo,

$$\langle \Phi_n, \pi_m \rangle = \left\langle \Phi_n, \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \Phi_k \right\rangle = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \langle \Phi_n, \Phi_k \rangle = 0.$$

Agora, para $m = n$, temos que π_m é um polinômio de grau exatamente n, e então podemos escrevê-lo como $\pi_m(z) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \Phi_k(z)$, onde $\alpha_k \in \mathbb{C}$, para $k = 0, 1, \ldots n$. Logo,

$$\langle \Phi_n, \pi_m \rangle = \left\langle \Phi_n, \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \Phi_k \right\rangle = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \langle \Phi_n, \Phi_k \rangle = \alpha_n k_n^{-2} \neq 0,$$

onde $\hat{k}_n = \alpha_n k_n^{-2}$. □

Escrevendo, para $n \geq 0$,

$$\Phi_n(z) = \sum_{k=0}^{n} d_{k,n} z^k, \quad d_{k,n} \in \mathbb{C}, \quad d_{n,n} = 1,$$

e usando (2.21) para $n \geq 0$ e $m = 0, 1, \ldots, n$, obtemos

$$\langle \Phi_n, z^m \rangle = \int_0^{2\pi} \Phi_n \overline{z^m} w(\theta) d\theta = \sum_{k=0}^{n} d_{k,n} \mu_{m-k} = \begin{cases} 0, & \text{se } m < n, \\ k_n^{-2} \neq 0, & \text{se } m = n. \end{cases} \tag{2.22}$$

Fazendo $m = 0, 1, 2, \ldots, n$, em (2.22), obtemos o sistema de equações lineares

$$\begin{pmatrix} \mu_0 & \mu_{-1} & \cdots & \mu_{-n+1} & \mu_{-n} \\ \mu_1 & \mu_0 & \cdots & \mu_{-n+2} & \mu_{-n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mu_{n-1} & \mu_{n-2} & \cdots & \mu_0 & \mu_{-1} \\ \mu_n & \mu_{n-1} & \cdots & \mu_1 & \mu_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_{0,n} \\ d_{1,n} \\ \vdots \\ d_{n-1,n} \\ d_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ k_n^{-2} \end{pmatrix}.$$

Calculando $d_{n,n}$ pela regra de Crammer, temos

$$d_{n,n} = \frac{k_n^{-2} \mathbf{D_{n-1}}}{\mathbf{D_n}},$$

mas como $d_{n,n} = 1$, então

$$k_n^{-2} = \frac{\mathbf{D_n}}{\mathbf{D_{n-1}}}.$$

Logo, obtemos

$$\langle \Phi_n, z^m \rangle = \begin{cases} 0, & \text{se } m < n, \\ \dfrac{\mathbf{D_n}}{\mathbf{D_{n-1}}} \neq 0, & \text{se } m = n. \end{cases}$$

Substituindo a última linha do sistema por $\Phi_n(z) = \sum_{k=0}^{n} d_{k,n} z^k$, obtemos o novo sistema linear

$$\begin{pmatrix} \mu_0 & \mu_{-1} & \cdots & \mu_{-n+1} & \mu_{-n} \\ \mu_1 & \mu_0 & \cdots & \mu_{-n+2} & \mu_{-n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mu_{n-1} & \mu_{n-2} & \cdots & \mu_0 & \mu_{-1} \\ 1 & z & \cdots & z^{n-1} & z^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_{0,n} \\ d_{1,n} \\ \vdots \\ d_{n-1,n} \\ d_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \Phi_n(z) \end{pmatrix}.$$

Calculando $d_{n,n}$ pelo mesmo método anterior, podemos escrever Φ_n da forma

$$\Phi_n(z) = \frac{1}{\mathbf{D_{n-1}}} \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_{-1} & \cdots & \mu_{-n+1} & \mu_{-n} \\ \mu_1 & \mu_0 & \cdots & \mu_{-n+2} & \mu_{-n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mu_{n-1} & \mu_{n-2} & \cdots & \mu_0 & \mu_{-1} \\ 1 & z & \cdots & z^{n-1} & z^n \end{vmatrix}. \tag{2.23}$$

A relação (2.23) mostra a existência e unicidade dos polinômios Φ_n, pois $\mathbf{D_{n-1}} \neq 0$, e também é uma forma de construir esses polinômios.

Considere os números α_n definidos por

$$\alpha_n = -\overline{\Phi_{n+1}(0)}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{2.24}$$

Em [15] os coeficientes α_n são chamados de coeficientes de Verblunsky.

De (2.23), obtemos

$$\Phi_{n+1}(0) = \frac{1}{\mathbf{D_n}} \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_{-1} & \cdots & \mu_{-n} & \mu_{-n-1} \\ \mu_1 & \mu_0 & \cdots & \mu_{-n+1} & \mu_{-n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mu_n & \mu_{n-1} & \cdots & \mu_0 & \mu_{-1} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Assim,

$$\overline{\alpha}_n = \frac{(-1)^n}{\mathbf{D_n}} \begin{vmatrix} \mu_{-1} & \cdots & \mu_{-n} & \mu_{-n-1} \\ \mu_0 & \cdots & \mu_{-n+1} & \mu_{-n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mu_{n-1} & \cdots & \mu_0 & \mu_{-1} \end{vmatrix}. \tag{2.25}$$

Observe que os coeficientes de Verblunsky são reais quando $w(\theta) = w(-\theta)$. De fato, basta mostrar que $\overline{\alpha_n} = \alpha_n$, mas por (2.25) devemos mostrar que $\mu_n = \overline{\mu_n}$, isto é, que os momentos são todos reais. Seja

$$\begin{aligned} \overline{\mu_n} &= \int_0^{2\pi} \overline{e^{-in\theta}} w(\theta) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} e^{in\theta} w(\theta) d\theta, \end{aligned}$$

fazendo $u = -\theta$ então,

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} e^{in\theta} w(\theta) d\theta &= \int_0^{-2\pi} e^{-inu} w(-u)(-d(u)) \\ &= -\int_0^{2\pi} e^{-inu} w(-u)(-d(u)) \\ &= \int_0^{2\pi} e^{-inu} w(u) d(u) = \mu_n. \end{aligned}$$

Logo, $\mu_n = \overline{\mu_n}$ e então os coeficientes de Verblunsky são reais.

Uma propriedade importante é que os polinômios Φ_n satisfazem a recorrência de Szegő

$$z\Phi_n(z) = \Phi_{n+1}(z) + \overline{\alpha}_n \Phi_n^*(z), \tag{2.26}$$

onde $\Phi_n^*(z) = z^n \overline{\Phi}_n(1/z)$ é o polinômio recíproco.

E, além disso, os coeficientes k_n^2 e α_n associados a esses polinômios satisfazem a seguinte relação

$$\frac{k_n^2}{k_{n+1}^2} = 1 - |\alpha_n|^2. \tag{2.27}$$

Considere agora a seguinte função peso

$$w(\theta) = \frac{1}{2\pi} e^{tcos(\theta)}, \quad \theta \in (0, 2\pi),$$

onde $t \in \mathbb{R}$ é um parâmetro.

Como no círculo unitário temos $z = e^{i\theta}$ então

$$z = e^{i\theta} = cos(\theta) + isen(\theta) \quad \text{e} \quad \frac{1}{z} = e^{-i\theta} = cos(\theta) - isen(\theta).$$

Logo,

$$z + \frac{1}{z} = 2cos(\theta),$$

e, então, defininos

$$w(\theta) = \frac{1}{2\pi} e^{tcos(\theta)} = \frac{1}{2\pi} e^{t(z+z^{-1})/2} := \hat{w}(z).$$

A função peso $\hat{w}$ satisfaz a equação de Pearson da forma

$$\hat{w}'(z) = \frac{t}{2}\left(1 - \frac{1}{z^2}\right)\hat{w}(z).$$

Note que o lado direito da equação anterior contém um polinômio de grau 2 em $1/z$ e isso é interessante já que a ortogonalidade é no círculo unitário, onde $\overline{z} = 1/z$. Apresentamos agora a relação de estrutura para os polinômios ortogonais mônicos no círculo unitário.

Propriedade 2.13. Os polinômios ortogonais mônicos $\{\Phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sobre o círculo unitário para a função peso w satisfazem

$$\Phi_n'(z) = n\Phi_{n-1}(z) + B_n\Phi_{n-2}(z), \tag{2.28}$$

com

$$B_n = \frac{t}{2}\frac{k_{n-2}^2}{k_n^2}. \tag{2.29}$$

Demonstração. Expandindo Φ_n' em termos de polinômios ortogonais mônicos, temos

$$\Phi_n'(z) = \sum_{j=0}^{n-1} B_{n,j}\Phi_j(z).$$

Comparando os coeficientes de z^{n-1}, temos que $B_{n,n-1} = n$, pois

$$\Phi_n(z) = z^n + k_{n-1}z^{n-1} + \ldots \quad \text{e} \quad \Phi_n'(z) = nz^{n-1} + (n-1)z^{n-2} + \ldots.$$

Para os outros coeficientes, multiplicando a expansão por $\overline{\Phi_m(z)}$, onde $0 \leq m \leq n-1$, e calculando a ortogonalidade, ou seja,

$$\int_0^{2\pi} \Phi_n'(z)\overline{\Phi_m(z)}w(\theta)d\theta = \int_0^{2\pi}\sum_{j=0}^{n-1} B_{n,j}\Phi_j(z)\overline{\Phi_m(z)}w(\theta)d\theta.$$

que resulta em

$$B_{n,m}k_m^{-2} = \int_0^{2\pi} \Phi_n'(z)\overline{\Phi_m(z)}w(\theta)d\theta.$$

Fazendo $z = e^{i\theta}$, temos

$$k_m^{-2}B_{n,m} = \frac{1}{i}\int_{\mathbb{T}} \Phi_n'(z)\overline{z\Phi_m(z)}\hat{w}(z)dz.$$

Integrando por partes, temos

$$k_m^{-2}B_{n,m} = -\frac{1}{i}\int_{\mathbb{T}} \Phi_n(z)(\overline{z\Phi_m(z)}\hat{w}(z))'dz$$

e como $[\overline{z\Phi_m(z)}]' = -\overline{z^2[z\Phi_m(z)]'}$ para $z \in \mathbb{T}$, então

$$k_m^{-2}B_{n,m} = \frac{1}{i}\int_{\mathbb{T}} \Phi_n(z)\overline{z^2[z\Phi_m(z)]'}\hat{w}(z)dz - \frac{1}{i}\int_{\mathbb{T}} \Phi_n(z)\overline{z\Phi_m(z)}\hat{w}'(z)dz.$$

A primeira integral pode ser escrita como

$$\int_0^{2\pi} \Phi_n(z)\overline{z[z\Phi_m(z)]'}w(\theta)d\theta$$

que é nula sempre que $m < n-1$. Para a segunda integral vamos usar a equação de Pearson e então temos

$$\frac{1}{i}\int_{\mathbb{T}} \Phi_n(z)\overline{\Phi_m(z)}\hat{w}'(z)dz = \frac{t}{2}\int_0^{2\pi} \Phi_n(z)\overline{\Phi_m(z)(1-z^2)}w(\theta)d\theta$$

e isso se anula quando $m < n-2$.

Para $m = n-2$ e escrevendo $B_{n,n-2} = B_n$, então

$$k_{n-2}^{-2}B_n = -\frac{t}{2}\int_0^{2\pi} \Phi_n(z)\overline{\Phi_{n-2}(z)(1-z^2)}w(\theta)d\theta.$$

Como $\Phi_{n-2}(z)(1-z^2) = -\Phi_n(z) +$ termos de menor grau, temos

$$k_{n-2}^{-2}B_n = \frac{t}{2}\int_0^{2\pi} |\Phi_n(z)|^2 w(\theta)d\theta.$$

E lembrando que, $\Phi_n(z) = \dfrac{\varphi_n(z)}{k_n}$, então $k_{n-2}^{-2}B_n = \dfrac{t}{2k_n^2}$. Portanto, $B_n = \dfrac{t}{2}\dfrac{k_{n-2}^2}{k_n^2}$. □

3 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS SATISFEITAS PELOS COEFICIENTES DA RELAÇÃO DE RECORRÊNCIA

Neste capítulo vamos estudar modificações de uma função peso obtidas pela multiplicação por uma função exponencial e, além disso, apresentamos a representação de Lax associada. As principais referências usadas para a elaboração do capítulo foram [1, 2, 13, 14] e [19].

3.1 Equações de Toda

Seja w uma função peso, e sejam a_n e b_n os coeficientes da relação de recorrência dos polinômios ortonormais com relação a w. Sejam $p_n = p_n(x;t)$ os polinômios ortonormais com respeito a

$$w_t(x) = e^{xt}w(x),$$

sob a condição adicional de que os momentos $\mu_n = \int_{\mathbb{R}} x^n e^{xt}w(x)dx$ existem para todo $n \geq 0$, então a relação de recorrência para os polinômios ortonormais com relação a função peso w_t é

$$xp_n(x;t) = a_{n+1}(t)p_{n+1}(x;t) + b_n(t)p_n(x;t) + a_n(t)p_{n-1}(x;t), \tag{3.1}$$

onde

$$a_n(t) = \langle xp_n(x;t), p_{n-1}(x;t)\rangle \tag{3.2}$$

e

$$b_n(t) = \langle xp_n(x;t), p_n(x;t)\rangle. \tag{3.3}$$

Abaixo apresentamos um teorema que mostra que as derivadas dos coeficientes da relação de recorrência (3.1) podem ser escritas em função dos mesmos.

Teorema 3.1. *Seja a_n e b_n os coeficientes da relação de recorrência para os polinômios ortogonais com relação a função peso w_t. Então a_n e b_n resolvem o sistema*

$$\frac{d}{dt}a_n^2(t) = a_n^2(t)(b_n(t) - b_{n-1}(t)), \quad n \geq 1, \tag{3.4}$$

$$\frac{d}{dt}b_n(t) = a_{n+1}^2(t) - a_n^2(t), \qquad n \geq 0, \tag{3.5}$$

com $a_0^2(t) = 0$.

As equações (3.4) e (3.5) são conhecidas como equações de Toda ou Lattice de Toda.

Demonstração. Derivando a relação de recorrência (3.1) com relação a t, obtemos

$$x\frac{d}{dt}p_n(x;t) = \Big(\frac{d}{dt}a_{n+1}(t)\Big)p_{n+1}(x;t) + \Big(\frac{d}{dt}b_n(t)\Big)p_n(x;t) + \Big(\frac{d}{dt}a_n(t)\Big)p_{n-1}(x;t)$$
$$+a_{n+1}(t)\frac{d}{dt}p_{n+1}(x;t) + b_n(t)\frac{d}{dt}p_n(x;t) + a_n(t)\frac{d}{dt}p_{n-1}(x;t).$$

Multiplicando por p_{n+1}, integrando com respeito ao peso w_t, e utilizando a ortogonalidade temos

$$\int_{\mathbb{R}} x\Big(\frac{d}{dt}p_n(x;t)\Big)p_{n+1}(x;t)w_t(x)dx = \frac{d}{dt}a_{n+1}(t) + a_{n+1}(t)\int_{\mathbb{R}}\Big(\frac{d}{dt}p_{n+1}(x;t)\Big)p_{n+1}(x;t)w_t(x)dx.$$

Agora, usando a relação de recorrência de três termos para $n+1$ no lado esquerdo da equação, então

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}a_{n+1}(t) = a_{n+1}(t)\Big(&\int_{\mathbb{R}} p_n(x;t)\Big(\frac{d}{dt}p_n(x;t)\Big)w_t(x)dx \\ &- \int_{\mathbb{R}} p_{n+1}(x;t)\Big(\frac{d}{dt}p_{n+1}(x;t)\Big)w_t(x)dx\Big).\end{aligned} \tag{3.6}$$

Sabemos que

$$\int_{\mathbb{R}} p_n^2(x;t)e^{xt}w(x)dx = 1.$$

Derivando a igualdade anterior com relação a t, obtemos

$$2\int_{\mathbb{R}} p_n(x;t)\Big(\frac{d}{dt}p_n(x;t)\Big)w_t(x)dx + \int_{\mathbb{R}} xp_n^2(x;t)w_t(x) = 0,$$

e usando (3.3) chegamos no seguinte resultado:

$$2\int_{\mathbb{R}} p_n(x;t)\Big(\frac{d}{dt}p_n(x;t)\Big)w_t(x)dx = -b_n(t).$$

Daí, substituindo esse resultado em (3.6) encontramos a equação

$$\frac{d}{dt}a_{n+1}(t) = \frac{a_{n+1}(t)}{2}(b_{n+1}(t) - b_n(t))$$

fazendo para n, temos

$$\frac{d}{dt}a_n(t) = \frac{a_n(t)}{2}(b_n(t) - b_{n-1}(t))$$

e, observando que $(a_n^2(t))' = 2a_n(t)a_n'(t)$ chegamos a igualdade em (3.4), isto é

$$\frac{d}{dt}a_n^2(t) = a_n^2(t)(b_n(t) - b_{n-1}(t)).$$

Agora, para mostrar a equação (3.5) vamos fazer o mesmo procedimento.

Derivando a relação de recorrência com relação a t, multiplicando o resultado da derivação por p_n e integrando com respeito a função peso w_t, temos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} x\Big(\frac{d}{dt}p_n(x;t)\Big)p_n(x;t)w_t(x)dx = \frac{d}{dt}b_n(t) + a_{n+1}(t)\int_{\mathbb{R}}\Big(\frac{d}{dt}p_{n+1}(x;t)\Big)p_n(x;t)w_t(x)dx \\ +b_n(t)\int_{\mathbb{R}}\Big(\frac{d}{dt}p_n(x;t)\Big)p_n(x;t)w_t(x)dx.\end{aligned}$$

Usando a relação de recorrência sobre o lado esquerdo, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}} x\Big(\frac{d}{dt}p_n(x;t)\Big)p_n(x;t)w_t(x)dx = b_n(t)\int_{\mathbb{R}}\Big(\frac{d}{dt}p_n(x;t)\Big)p_n(x;t)w_t(x)dx$$

$$+a_n(t)\int_{\mathbb{R}}\Big(\frac{d}{dt}p_n(x;t)\Big)p_{n-1}(x;t)w_t(x)dx.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}b_n(t) = \quad & a_n(t)\int_{\mathbb{R}}\Big(\frac{d}{dt}p_n(x;t)\Big)p_{n-1}(x;t)w_t(x)dx \\ & -a_{n+1}(t)\int_{\mathbb{R}}\Big(\frac{d}{dt}p_{n+1}(x;t)\Big)p_n(x;t)w_t(x)dx.\end{aligned} \tag{3.7}$$

Sabemos que

$$\int_{\mathbb{R}} p_{n+1}(x;t)p_n(x;t)e^{xt}w(x)dx = 0.$$

Derivando com relação a t encontramos

$$\int_{\mathbb{R}}\Big(\frac{d}{dt}p_{n+1}(x;t)\Big)p_n(x;t)w_t(x)dx + \int_{\mathbb{R}} xp_{n+1}(x;t)p_n(x;t)w_t(x)dx = 0,$$

e usando (3.2) obtemos

$$\int_{\mathbb{R}}\Big(\frac{d}{dt}p_{n+1}(x;t)\Big)p_n(x;t)w_t(x)dx = -a_{n+1}(t).$$

Finalmente, substituindo esse valor em (3.7) encontramos a equação desejada, ou seja,

$$\frac{d}{dt}b_n(t) = a_{n+1}^2(t) - a_n^2(t).$$

□

3.2 Equação de Langmuir

Seja w uma função peso par em um intervalo simétrico $(-b, b)$ e seja

$$w_t(x) = e^{tx^2}w(x),$$

onde $t \in \mathbb{R}$. Então a relação de recorrência para os polinômios ortonormais com relação a w_t é

$$xp_n(x;t) = a_{n+1}(t)p_{n+1}(x;t) + a_n(t)p_{n-1}(x;t), \quad n \geq 0, \tag{3.8}$$

com $p_{-1}(x;t) = 0$.

O resultado abaixo mostra que os coeficientes da relação de recorrência de polinômios ortogonais com relação a uma função peso par w_t em um intervalo simétrico satisfazem uma equação diferencial de diferenças.

Teorema 3.2. *Os coeficientes da relação de recorrência (3.8) dos polinômios ortonormais para a função peso w_t satisfazem a equação*

$$\frac{d}{dt}a_n^2(t) = a_n^2(t)[a_{n+1}^2(t) - a_{n-1}^2(t)], \qquad n \geq 1. \tag{3.9}$$

Demonstração. Derivando a relação de recorrência (3.8) com respeito a t, temos

$$\begin{aligned} x\frac{d}{dt}p_n(x;t) = {} & \Big(\frac{d}{dt}a_{n+1}(t)\Big)p_{n+1}(x;t) + a_{n+1}(t)\frac{d}{dt}p_{n+1}(x;t) \\ & + \Big(\frac{d}{dt}a_n(t)\Big)p_{n-1}(x;t) + a_n(t)\frac{d}{dt}p_{n-1}(x;t). \end{aligned}$$

A partir de agora vamos deixar implícita a dependência de t. Multiplicando a equação anterior por p_{n+1} e integrando usando w_t, encontramos

$$\int_{-b}^{b} x\Big(\frac{d}{dt}p_n(x)\Big)p_{n+1}(x)w_t(x)dx = \frac{d}{dt}a_{n+1} + a_{n+1}\int_{-b}^{b}\Big(\frac{d}{dt}p_{n+1}(x)\Big)p_{n+1}(x)w_t(x)dx,$$

onde, no último passo, usamos a ortonormalidade dos polinômios $\{p_n\}_{n\geq 0}$. No lado esquerdo da equação, usamos a relação de recorrência de três termos para $n+1$ para encontrar

$$\frac{d}{dt}a_{n+1} = a_{n+1}\Big(\int_{-b}^{b}\Big(\frac{d}{dt}p_n(x)\Big)p_n(x)w_t(x)dx - \int_{-b}^{b}\Big(\frac{d}{dt}p_{n+1}(x)\Big)p_{n+1}(x)w_t(x)dx\Big). \tag{3.10}$$

Sabe-se que a ortonormalidade dada é

$$\int_{-b}^{b} p_n^2(x)e^{tx^2}w(x)dx = 1,$$

e derivando com relação a t, temos

$$2\int_{-b}^{b}\Big(\frac{d}{dt}p_n(x)\Big)p_n(x)w_t(x)dx + \int_{-b}^{b} x^2p_n^2(x)w_t(x)dx = 0.$$

Usando a relação de recorrência (3.8) e a ortogonalidade, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{-b}^{b}\Big(\frac{d}{dt}p_n(x)\Big)p_n(x)w_t(x)dx &= -\frac{1}{2}\int_{-b}^{b}(a_{n+1}p_{n+1}(x) + a_np_{n-1}(x))^2w_t(x)dx \\ &= -\frac{1}{2}(a_{n+1}^2 + a_n^2). \end{aligned}$$

Substituindo em (3.10), temos

$$\frac{d}{dt}a_{n+1} = \frac{1}{2}a_{n+1}(a_{n+2}^2 - a_n^2).$$

Consequentemente, como $\frac{d}{dt}a_n^2 = 2a_n\frac{d}{dt}a_n$, então

$$\frac{d}{dt}a_n^2(t) = a_n^2(t)(a_{n+1}^2(t) - a_{n-1}^2(t)).$$

□

A equação (3.9) é conhecida como equação de Langmuir ou lattice de Langmuir.

3.3 Equação de Ablowitz-Ladik

Os coeficientes de Verblunsky dos polinômios ortogonais no círculo unitário, $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definidos em (2.24), satisfazem uma equação diferencial de diferenças conhecida como Lattice de Ablowitz-Ladik ou equação de Ablowitz-Ladik.

Seja w uma função peso par no círculo unitário (ou seja, os coeficientes $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ são todos reais). Seja w_t uma função peso tal que

$$w_t(\theta) = \frac{1}{2\pi}e^{tcos(\theta)}w(\theta), \quad t \in \mathbb{R}.$$

O resultado abaixo mostra que a derivada dos coeficientes $\alpha_n(t)$ associados a w_t pode ser escrita em função dos próprios coeficientes.

Teorema 3.3. *Os coeficientes de Verblunsky $\{\alpha_n(t)\}_{n\in\mathbb{N}}$ dos polinômios ortogonais sobre o círculo unitário para a função peso w_t satisfazem*

$$2\alpha_n'(t) = (1 - \alpha_n^2(t))(\alpha_{n+1}(t) - \alpha_{n-1}(t)), \quad n \geq 0, \tag{3.11}$$

onde $\alpha_n'(t) = \frac{d}{dt}\alpha_n(t)$.

Demonstração. A norma do n-ésimo polinômio ortogonal mônico é

$$\int_0^{2\pi} |\Phi_n(z;t)|^2 w_t(\theta)d\theta = \frac{1}{k_n^2(t)}.$$

Calculando a derivada da equação acima com respeito a t, obtemos

$$\int_0^{2\pi} \Phi_n'(z;t)\overline{\Phi_n(z;t)}w_t(\theta)d\theta + \int_0^{2\pi} \Phi_n(z;t)\overline{\Phi_n(z;t)}' w_t(\theta)d\theta$$
$$+ \int_0^{2\pi} cos(\theta)\Phi_n(z;t)\overline{\Phi_n(z;t)}w_t(\theta)d\theta = -2\frac{k_n'(t)}{k_n^3(t)}. \tag{3.12}$$

O polinômio Φ_n é mônico, então o coeficiente de maior grau não depende de t e, além disso, $\frac{d}{dt}\Phi_n(z;t)$ é de grau menor que n. Consequentemente a equação (3.12) torna-se

$$-2\frac{k_n'(t)}{k_n^3(t)} = \int_0^{2\pi} cos(\theta)|\Phi_n(z;t)|^2 w_t(\theta)d\theta.$$

A partir de agora a dependência de t passa a ser implícita. Como $cos(\theta) = (z+\overline{z})/2$ temos que $cos(\theta) = Re(z)$, então

$$-2\frac{k_n'}{k_n^3} = Re\int_0^{2\pi} z|\Phi_n(z)|^2 w_t(\theta)d\theta.$$

Usando a recorrência de Szegő (2.26), temos

$$\int_0^{2\pi} z|\Phi_n(z)|^2 w_t(\theta)d\theta = \int_0^{2\pi} \Phi_{n+1}(z)\overline{\Phi_n(z)}w_t(\theta)d\theta + \alpha_n \int_0^{2\pi} \Phi_n^*(z)\overline{\Phi_n(z)}w_t(\theta)d\theta.$$

A primeira integral no lado direito da igualdade se anula usando a propriedade de ortogonalidade. Observe que $\Phi_n^*(z) = \Phi_n(0)z^n + \cdots + 1$, então

$$\int_0^{2\pi} z|\Phi_n(z)|^2 w_t(\theta)d\theta = \alpha_n\Phi_n(0)\int_0^{2\pi} |\Phi_n(z)|^2 w_t(\theta)d\theta = -\frac{\alpha_n\alpha_{n-1}}{k_n^2}.$$

Logo,

$$2\frac{k_n'}{k_n} = \alpha_n\alpha_{n-1}. \tag{3.13}$$

Como os coeficientes de Verblunsky são todos reais e aqui estamos usando a função peso w_t então a relação (2.27) torna-se

$$\frac{k_n^2}{k_{n+1}^2} = 1 - \alpha_n^2. \tag{3.14}$$

Calculando a derivada com relação a t da equação acima, obtemos

$$\frac{k_n^2}{k_{n+1}^2}\left(\frac{k_n'}{k_n} - \frac{k_{n+1}'}{k_{n+1}}\right) = -\alpha_n\alpha_n'.$$

Substituindo (3.13), juntamente com (3.14), na equação obtida anteriormente, temos a equação desejada, isto é, $2\alpha_n'(t) = (1-\alpha_n^2(t))(\alpha_{n+1}(t) - \alpha_{n-1}(t))$. □

3.4 Par de Lax

Nesta seção apresentamos, brevemente, a representação de Lax, ou Par de Lax para as equações de Toda e para a equação de Langmuir. Para esse estudo foram utilizadas as referências [1, 2] e [14].

Uma forma usual de se representar as equações de Toda, isto é,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}a_n(t) &= \frac{a_n(t)}{2}(b_n(t) - b_{n-1}(t)), \quad n \geq 1,\\
\frac{d}{dt}b_n(t) &= a_{n+1}^2(t) - a_n^2(t), \qquad n \geq 0,
\end{aligned}$$

é na forma matricial chamada representação de Lax. Aqui mostramos a sua construção.

Podemos reescrever a relação de recorrência de três termos

$$xp_n(x;t) = a_{n+1}(t)p_{n+1}(x;t) + b_n(t)p_n(x;t) + a_n(t)p_{n-1}(x;t)$$

na forma matricial, ou seja,

$$x\mathbf{P} = \mathbf{JP},$$

onde

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ \vdots \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{J} = \begin{pmatrix} b_0 & a_1 & & & & \\ a_1 & b_1 & a_2 & & & \\ & a_2 & b_2 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & a_n & \\ & & & a_n & b_n & \ddots \\ & & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \tag{3.15}$$

onde $\mathbf{J}$ é a matriz de Jacobi tridiagonal infinita e, além disso, estamos omitindo a dependência de t para simplicação.

Consideremos agora a seguinte matriz infinita

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -a_1 & & & & \\ a_1 & 0 & -a_2 & & & \\ & a_2 & 0 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & -a_n & \\ & & & a_n & 0 & \ddots \\ & & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix},$$

onde a dependência de t segue implícita. Então, as equações de Toda (3.4) e (3.5) podem ser escritas na forma matricial como

$$\dot{\mathbf{J}} = [\mathbf{J}, \mathbf{B}] = \mathbf{JB} - \mathbf{BJ}, \tag{3.16}$$

onde $\dot{f} = \dfrac{df}{dt}$.

O par de matrizes $\{\mathbf{J}, \mathbf{B}\}$ é chamado par de Lax e a representação dada em (3.16) é chamada representação de Lax para as equações de Toda (3.4) e (3.5).

Para o caso simétrico, temos a equação de Langmuir

$$\frac{d}{dt}a_n(t) = \frac{a_n}{2}(t)[a_{n+1}^2(t) - a_{n-1}^2(t)].$$

Considere a matriz pentadiagonal infinita

$$\mathbf{B}_s = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -a_1a_2 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & -a_2a_3 & & & \\ a_1a_2 & 0 & 0 & 0 & \ddots & & \\ & a_2a_3 & 0 & 0 & \ddots & -a_na_{n+1} & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \ddots \\ & & & a_na_{n+1} & 0 & 0 & \ddots \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix},$$

onde $a_n = a_n(t)$ e usando que $b_n(t) = 0$ para $n \geq 0$, obtemos a representação de Lax associada a equação de Langmuir (3.9) na forma

$$\dot{\mathbf{J}} = [\mathbf{J}, \mathbf{B_s}] = \mathbf{JB_s} - \mathbf{B_sJ},$$

onde $\dot{f} = \dfrac{df}{dt}$.

4 POLINÔMIOS ORTOGONAIS E AS EQUAÇÕES DE PAINLEVÉ

Neste capítulo apresenta-se as seis equações diferenciais de Painlevé e uma lista parcial das equações discretas. Além disso, em cada seção é apresentada uma função peso que está associada a uma relação de recorrência, onde os coeficientes de cada relação são associados com as equações diferenciais e discretas de Painlevé. As referências utilizadas para este capítulo foram [1, 5, 6, 11, 15, 18] e [19].

4.1 Equações de Painlevé

Segundo Van Assche [19], Painlevé descobriu tais equações no início do século XX enquanto analisava as singularidades de equações não lineares de segunda ordem no plano complexo do tipo

$$\frac{d^2y}{dz^2} = F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right),$$

onde F é uma função racional em y e analítica em x e dy/dx. Tais equações deveriam satisfazer a propriedade que ficou conhecida como Propriedade de Painlevé, ou seja, as equações diferenciais de Painlevé são equações diferenciais não lineares de segunda ordem que não possuem pontos críticos móveis, isto é, se todas as suas singularidades móveis são polos.

As seis equações diferenciais encontradas por Painlevé, são dadas por

$$\begin{aligned}
\mathrm{P_I}: \quad y'' &= 6y^2 + x,\\
\mathrm{P_{II}}: \quad y'' &= 2y^3 + xy + \alpha,\\
\mathrm{P_{III}}: \quad y'' &= \frac{(y')^2}{y} - \frac{y'}{x} + \frac{\alpha y^2 + \beta}{x} + \gamma y^3 + xy + \frac{\delta}{y},\\
\mathrm{P_{IV}}: \quad y'' &= \frac{(y')^2}{2y} + \frac{3y^3}{2} + 4xy^2 + 2y(x^2 - \alpha) + \frac{\beta}{y}, \qquad (4.1)\\
\mathrm{P_V}: \quad y'' &= \left(\frac{1}{2y} + \frac{1}{y-1}\right)(y')^2 + \frac{y'}{x} + \frac{(y-1)^2}{x^2}\left(\alpha y + \frac{\beta}{y}\right) + \frac{\gamma y}{x}\\
&\quad + \frac{\delta y(y+1)}{y-1}, \qquad (4.2)\\
\mathrm{P_{VI}}: \quad y'' &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{y-1} + \frac{1}{y-x}\right)(y')^2 - \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y-x}\right)y'\\
&\quad + \frac{y(y-1)(y-x)}{x^2(x-1)^2}\left(\alpha + \frac{\beta x}{y^2} + \frac{\gamma(x-1)}{(y-1)^2} + \frac{\delta x(x-1)}{(y-x)^2}\right),
\end{aligned}$$

onde α, β, γ e δ são constantes e $y' = \dfrac{dy}{dx}$.

Abaixo segue uma lista parcial das equações discretas de Painlevé. Elas são equações discretas não lineares (relações de recorrência) para as quais o limite contínuo é uma das equações diferenciais de Painlevé.

$$\mathrm{dP_I}: \qquad x_{n+1} + x_n + x_{n-1} = \frac{z_n + (-1)^n a}{x_n} + b, \tag{4.3}$$

$$\mathrm{dP_{II}}: \qquad x_{n+1} + x_{n-1} = \frac{x_n z_n + a}{1 - x_n^2}, \tag{4.4}$$

$$\mathrm{dP_{IV}}: \qquad (x_{n+1} + x_n)(x_n + x_{n-1}) = \frac{(x_n^2 - a^2)(x_n^2 - b^2)}{(x_n + z_n)^2 - c^2}, \tag{4.5}$$

$$\mathrm{dP_V}: \qquad \frac{(x_{n+1} + x_n - z_{n+1} - z_n)(x_n + x_{n-1} - z_n - z_{n-1})}{(x_{n+1} + x_n)(x_n + x_{n-1})} =$$

$$\frac{[(x_n - z_n)^2 - a^2][(x_n - z_n)^2 - b^2]}{(x_n - c^2)(x_n - d^2)},$$

onde $z_n = \alpha\, n + \beta$ e a, b, c e d são constantes.

Na lista de Clarkson dada em [18], encontra-se outra maneira de se representar as equações discretas de Painlevé, que é escrevê-las como equações assimétricas. Aqui apresentamos apenas a representação assimétrica da quarta equação discreta de Painlevé.

$$\mathrm{dP_{IV}}: \qquad x_n x_{n-1} = \frac{a(y_n + z_n - b)}{y_n^2 - \gamma^2}, \qquad y_n + y_{n+1} = \frac{c}{x_n} + \frac{z_{n+1/2} + d}{x_n - 1}, \tag{4.6}$$

onde $z_n = \alpha n + \beta$ e a, b, c, d e γ são constantes.

4.2 Polinômios de Freud

Nesta seção apresentamos os polinômios de Freud e a relação com as equações de Painlevé. As referências utilizas para os estudos foram [6] e [19].

Consideremos a função peso de Freud, dada por

$$w_t(x) = e^{-x^4 + tx^2}, \qquad x \in (-\infty, \infty),$$

onde $t \in \mathbb{R}$ é um parâmetro.

Assim, como descrito no Capítulo 2, os polinômios de Freud ortonormais com relação a função peso w_t satisfazem a seguinte relação de recorrência

$$xp_n(x;t) = a_{n+1}(t)p_{n+1}(x;t) + a_n(t)p_{n-1}(x;t), \qquad n \geq 0, \tag{4.7}$$

onde $p_{-1}(x;t) = 0$.

E a relação de estrutura para esses polinômios é

$$p_n'(x;t) = A_n(t)p_{n-1}(x;t) + C_n(t)p_{n-3}(x;t). \tag{4.8}$$

Agora apresentamos a relação entre as equações de Painlevé com os coeficientes da relação de recorrência dos polinômios ortogonais de Freud.

Teorema 4.1. *Os coeficientes $\{a_n\}_{n\geq 0}$ da relação de recorrência dos polinômios ortonormais com relação a função peso w_t satisfazem*

$$a_{n+1}^2(t) + a_n^2(t) + a_{n-1}^2(t) = \frac{n}{4a_n^2(t)} + \frac{t}{2}, \qquad n \geq 1 \tag{4.9}$$

com condições iniciais $a_0(t) = 0$ e

$$a_1^2(t) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x^2 w_t(x)dx}{\int_{-\infty}^{\infty} w_t(x)dx} = \frac{\mu_2}{\mu_0}.$$

Observe que (4.9) é a primeira equação discreta de Painlevé (4.3), ou seja,

$$\mathrm{dP_I}: \quad x_{n+1} + x_n + x_{n-1} = \frac{\alpha n + \beta + (-1)^n a}{x_n} + b,$$

com $x_n = a_n^2(t)$ e parâmetros $a = 0$, $b = t/2$, $\alpha = 1/4$ e $\beta = 0$.

Demonstração. Derivando, com relação a x, a relação de recorrência (4.7), obtemos

$$p_n(x;t) + xp_n'(x;t) = a_{n+1}(t)p_{n+1}'(x;t) + a_n(t)p_{n-1}'(x;t).$$

Substituindo todas as derivadas pela relação (4.8), encontramos

$$p_n(x;t) + x(A_n(t)p_{n-1}(x;t) + C_n(t)p_{n-3}(x;t)) = a_{n+1}(t)[A_{n+1}(t)p_n(x;t)$$
$$+C_{n+1}(t)p_{n-2}(x;t)] + a_n(t)(A_{n-1}(t)p_{n-2}(x;t) + C_{n-1}(t)p_{n-4}(x;t)).$$

Então, substituindo xp_{n-1} e xp_{n-3} pela relação de recorrência (4.7) para $n-1$ e $n-3$, encontramos

$$p_n(x;t) + A_n(t)(a_n(t)p_n(x;t) + a_{n-1}(t)p_{n-2}(x;t)) + C_n(t)(a_{n-2}(t)p_{n-2}(x;t)$$
$$+a_{n-3}(t)p_{n-4}(x;t)) = a_{n+1}(t)A_{n+1}(t)p_n(x;t) + a_{n+1}(t)C_{n+1}(t)p_{n-2}(x;t)$$
$$+a_n(t)A_{n-1}(t)p_{n-2}(x;t) + a_n(t)C_{n-1}(t)p_{n-4}(x;t).$$

A partir de agora a dependência de t ficará implícita. Comparando os coeficientes de p_n, p_{n-2} e p_{n-4}, respectivamente, em ambos os lados da equação anterior, temos

$$\begin{aligned} 1 + A_n a_n &= a_{n+1} A_{n+1} & (4.10) \\ A_n a_{n-1} + C_n a_{n-2} &= a_{n+1} C_{n+1} + a_n A_{n-1} & (4.11) \\ C_n a_{n-3} &= a_n C_{n-1} & (4.12) \end{aligned}$$

De (4.10), sabemos que $a_{n+1}A_{n+1} - A_n a_n = 1$, $n \geq 0$, logo,

$$\sum_{k=0}^{n} (a_{k+1}A_{k+1} - A_k a_k) = \sum_{k=0}^{n} 1$$

e isso nos fornece

$$a_{n+1}A_{n+1} - A_0 a_0 = n + 1,$$

então, como $a_0 = 0$, concluímos que

$$a_{n+1}A_{n+1} = n + 1, \quad n \geq 0,$$

ou seja,

$$a_n A_n = n, \quad n \geq 1. \tag{4.13}$$

De (4.12), obtemos

$$\frac{C_n}{a_n a_{n-1} a_{n-2}} = \frac{C_{n-1}}{a_{n-1} a_{n-2} a_{n-3}} = \cdots = \frac{C_3}{a_3 a_2 a_1}, \tag{4.14}$$

de modo que $C_n / a_n a_{n-1} a_{n-2}$ é constante. Consequentemente,

$$C_n = c a_n a_{n-1} a_{n-2}, \quad n \geq 3, \tag{4.15}$$

onde c é uma constante. Se usarmos (4.13) e (4.15) em (4.11), encontramos

$$\frac{n}{a_n} a_{n-1} + c a_n a_{n-1} a_{n-2}^2 = c a_{n+1}^2 a_n a_{n-1} + a_n \frac{(n-1)}{a_{n-1}},$$

dividindo a equação acima por $a_n a_{n-1}$, obtemos

$$\frac{n}{a_n^2} - \frac{n-1}{a_{n-1}^2} = c(a_{n+1}^2 - a_{n-2}^2), \quad n \geq 2.$$

Então, calculando

$$\sum_{k=2}^{n} \left(\frac{k}{a_k^2} - \frac{k-1}{a_{k-1}^2} \right) = c \sum_{k=2}^{n} (a_{k+1}^2 - a_{k-2}^2),$$

obtemos

$$\frac{n}{a_n^2} - \frac{1}{a_1^2} = c(a_{n+1}^2 + a_n^2 + a_{n-1}^2 - a_2^2 - a_1^2 - a_0^2),$$

multiplicando a equação por a_n^2 e sabendo que $a_0 = 0$, temos

$$n = \frac{a_n^2}{a_1^2} + ca_n^2(a_{n+1}^2 + a_n^2 + a_{n-1}^2) - ca_n^2(a_2^2 + a_1^2). \tag{4.16}$$

A equação acima ainda contém a constante c e os valores iniciais a_1^2 e a_2^2, que precisamos determinar.

Para encontrarmos a constante c vamos utilizar a relação de estrutura (4.8) para $n = 3$ e multiplicar p_0 em ambos os lados, isto é,

$$p_3'(x)p_0(x) = A_3 p_2(x)p_0(x) + C_3 p_0(x)^2.$$

Calculando a integral com relação a $w_t(x) = e^{-x^4+tx^2}$, temos

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_3'(x)p_0(x)w_t(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} A_3 p_2(x)p_0(x)w_t(x)dx + \int_{-\infty}^{\infty} C_3 p_0(x)^2 w_t(x)dx,$$

ou seja,

$$C_3 = \int_{-\infty}^{\infty} p_3'(x)p_0(x)w_t(x)dx. \tag{4.17}$$

Observe que usamos a ortogonalidade no último passo. Integrando (4.17) por partes, temos

$$C_3 = 4p_0(x)\int_{-\infty}^{\infty} x^3 p_3(x)e^{-x^4+tx^2}dx.$$

Agora para encontrarmos c basta usar a relação de recorrência a partir da integral acima, para n=3, n=2 e n=1, respectivamente, e a relação de ortogonalidade dos polinômios, ou seja,

$$\begin{aligned}
C_3 &= 4p_0(x)\int_{-\infty}^{\infty} x^2(a_4p_4(x) + a_3p_2(x))e^{-x^4+tx^2}dx \\
&= 4a_3p_0(x)\int_{-\infty}^{\infty} x(a_3p_3(x) + a_2p_1(x))e^{-x^4+tx^2}dx \\
&= 4a_3a_2\int_{-\infty}^{\infty} p_0(x)(a_2p_2(x) + a_1p_0(x))e^{-x^4+tx^2}dx \\
&= 4a_3a_2a_1\int_{-\infty}^{\infty} p_0(x)^2e^{-x^4+tx^2}dx \\
&= 4a_3a_2a_1.
\end{aligned}$$

Logo, $C_3 = 4a_3a_2a_1$, mas de (4.14) $C_3 = ca_3a_2a_1$, então

$$c = 4. \tag{4.18}$$

Vimos que, como w é uma função par, os momentos

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k e^{-x^4+tx^2} dx.$$

são nulos quando k é ímpar, ou seja, $\mu_{2j+1} = 0$, para $j = 0, 1, 2, \ldots$.

Para $k = 0$, temos

$$\mu_0 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^4+tx^2} dx. \tag{4.19}$$

Integrando (4.19) por partes, obtemos

$$\begin{aligned}
\mu_0 &= -\int_{-\infty}^{\infty} x(-4x^3 + 2tx)e^{-x^4+tx^2} dx \\
&= 4\int_{-\infty}^{\infty} x^4 e^{-x^4+tx^2} dx - 2t\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^4+tx^2} dx \\
&= 4\mu_4 - 2t\mu_2.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\mu_4 = \frac{\mu_0 + 2t\mu_2}{4}.$$

Observe que

$$p_0^2(x) = \frac{1}{\mu_0}, \tag{4.20}$$

de fato,

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} p_0^2(x) w_t(x) = p_0^2(x)\int_{-\infty}^{\infty} w_t(x) = p_0^2(x)\mu_0.$$

Agora, com a relação de recorrência para $n = 0$, obtemos

$$p_1(x) = \frac{xp_0(x)}{a_1}. \tag{4.21}$$

Usando os resultados em (4.20),(4.21) e sabendo que

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_1^2(x) w_t(x) dx = 1,$$

temos

$$
\begin{aligned}
1 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{xp_0(x)}{a_1}\right)^2 w_t(x)dx \\
&= \frac{1}{a_1^2}\int_{-\infty}^{\infty} x^2 p_0^2(x) w_t(x)dx \\
&= \frac{1}{a_1^2\mu_0}\int_{-\infty}^{\infty} x^2 w_t(x)dx \\
&= \frac{\mu_2}{a_1^2\mu_0}.
\end{aligned}
$$

Portanto, $a_1^2 = \mu_2/\mu_0$ que é a condição inicial dada no teorema.

Observe que

$$a_1^2 + a_2^2 = \int_{-\infty}^{\infty} [xp_1(x)]^2 w_t(x)dx.$$

De fato, usando a relação de recorrência (4.7) com $n = 1$ e a ortogonalidade dos polinômios, então

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} [xp_1(x)]^2 w_t(x)dx &= \int_{-\infty}^{\infty} [a_2p_2(x) + a_1p_0(x)]^2 w_t(x)dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} a_2^2p_2^2(x)w_t(x)dx + \int_{-\infty}^{\infty} a_1^2p_0^2(x)w_t(x)dx \\
&= a_2^2 + a_1^2.
\end{aligned}
$$

Temos também

$$
\begin{aligned}
a_1^2 + a_2^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p_1^2(x) w_t(x)dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \left(\frac{xp_0(x)}{a_1}\right)^2 w_t(x)dx \\
&= \frac{1}{a_1^2\mu_0}\int_{-\infty}^{\infty} x^4 w_t(x)dx \\
&= \frac{\mu_4}{a_1^2\mu_0},
\end{aligned}
$$

e como $a_1^2 = \dfrac{\mu_2}{\mu_0}$ e $\mu_4 = \dfrac{\mu_0 + 2t\mu_2}{4}$, então

$$a_1^2 + a_2^2 = \frac{\mu_0 + 2t\mu_2}{4\mu_2} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a_1^2} + 2t\right). \tag{4.22}$$

E, por fim, substituindo (4.18) e (4.22) em (4.16), encontramos

$$4a_n^2\left(a_{n+1}^2 + a_n^2 + a_{n-1}^2 - \frac{t}{2}\right) = n.$$

□

Van Assche [19] afirma que a relação de recorrência (4.9) não é tão boa para calcular recursivamente os coeficientes de recorrência e, além disso, ela é muito sensível a erros no valor inicial. A razão para estes erros é que a solução esperada é uma solução positiva com $a_0^2(t) = 0$ e esta solução é única, ou seja, existe apenas um valor inicial para $a_1^2(t)$ que leva a uma solução que é positiva para cada $n \geq 0$. Abaixo vemos um resultado (encontrado em [19]) que garante a unicidade da solução positiva de dP$_\mathrm{I}$ com $x_0 = 0$ para o caso $t = 0$.

Teorema 4.2. *Há uma única solução positiva de*

$$x_n(x_{n+1} + x_n + x_{n-1}) = an, \qquad a > 0,$$

para cada $x_0 = 0$ *e* $x_n > 0$ *para todo* $n \geq 1$. *Essa solução corresponde ao valor inicial* $x_1 = \sqrt{4a}\Gamma(3/4)/\Gamma(1/4)$, *onde* $\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-z}z^{x-1}dz$ *para* $x \in \mathbb{C}$ *e* $Re(x) > 0$.

Vamos mostrar, agora, que os coeficientes da relação de recorrência dos polinômios ortogonais com relação a função peso $w_t(x) = e^{-x^4+tx^2}$ também satisfazem uma equação diferencial de Painlevé na variável t. Para isso, precisamos do Teorema 3.2, que mostra que os coeficientes da relação de recorrência de polinômios ortogonais com relação a uma função peso w_t par sob um intervalo simétrico satisfazem uma equação diferencial de diferenças (equação de Langmuir).

A função peso $w_t(x) = e^{-x^4+tx^2}$ é da forma dada pelo Teorema 3.2 para cada $t \in \mathbb{R}$, então os coeficientes da relação de recorrência dos polinômios de Freud satisfazem a equação de Langmuir

$$\frac{d}{dt}a_n^2(t) = a_n^2(t)[a_{n+1}^2(t) - a_{n-1}^2(t)], \qquad n \geq 1.$$

Chamando $a_n^2(t) = x_n$ e $x_n' = \dfrac{d}{dt}x_n$, e então, reescrevendo a equação de Langmuir e a equação (4.9), obtemos

$$n = 4x_n(x_{n+1} + x_n + x_{n-1} - t/2), \tag{4.23}$$

$$x_n' = x_n(x_{n+1} - x_{n-1}). \tag{4.24}$$

Diferenciando (4.24), encontramos

$$x_n'' = x_n'(x_{n+1} - x_{n-1}) + x_n(x_{n+1}' - x_{n-1}').$$

Substituindo x_{n+1}' e x_{n-1}' usando (4.24), obtemos

$$x_n'' = x_n'(x_{n+1} - x_{n-1}) + x_n(x_{n+1}(x_{n+2} - x_n) - x_{n-1}(x_n - x_{n-2})).$$

Os termos $x_{n+1}x_{n+2}$ e $x_{n-1}x_{n-2}$ podem ser substituídos usando (4.23). De fato, de (4.23), temos

$$4x_nx_{n+1} = n - 4x_n(x_n + x_{n-1} - t/2), \tag{4.25}$$

$$4x_nx_{n-1} = n - 4x_n(x_{n+1} + x_n - t/2). \tag{4.26}$$

Então utilizando (4.25) com $n + 1$ e (4.26) com $n - 1$, encontramos

$$\begin{aligned} 4x_{n+1}x_{n+2} &= n + 1 - 4x_{n+1}(x_{n+1} + x_n - t/2), \\ 4x_{n-1}x_{n-2} &= n - 1 - 4x_{n-1}(x_n + x_{n-1} - t/2). \end{aligned}$$

Logo,

$$x_n'' = x_n'(x_{n+1} - x_{n-1}) - x_n^2(x_{n+1} + x_{n-1}) + \frac{1}{2}x_n(n - 2(x_{n+1}^2 + x_{n-1}^2) + (t - 2x_n)(x_{n+1} + x_{n-1})). \tag{4.27}$$

Agora, eliminaremos $x_{n+1} + x_{n-1}$ e $x_{n+1} - x_{n-1}$ utilizando (4.23) e (4.24). De fato, de (4.23), temos

$$x_{n+1} + x_{n-1} = \frac{n}{4x_n} - x_n + \frac{t}{2}, \tag{4.28}$$

e de (4.24), encontramos

$$x_{n+1} - x_{n-1} = \frac{x_n'}{x_n}. \tag{4.29}$$

E como em (4.27) precisamos de $2(x_{n+1}^2 + x_{n-1}^2)$, ou seja,

$$2(x_{n+1}^2 + x_{n-1}^2) = (x_{n+1} + x_{n-1})^2 + (x_{n+1} - x_{n-1})^2,$$

podemos usar os valores de $x_{n+1} + x_{n-1}$ e $x_{n+1} - x_{n-1}$ exibidos em (4.28) e (4.29), para obter as equações

$$(x_{n+1}+x_{n-1})^2=\left(\frac{n}{4x_n}-x_n+\frac{t}{2}\right)^2=\frac{n^2}{16x_n^2}-\frac{n}{2}+\frac{nt}{4x_n}+x_n^2-tx_n+\frac{t^2}{4},$$

$$(x_{n+1}-x_{n-1})^2=\left(\frac{x_n'}{x_n}\right)^2=\frac{(x_n')^2}{x_n^2},$$

que somando, membro a membro, obtemos

$$2(x_{n+1}^2+x_{n-1}^2)=\frac{n^2}{16x_n^2}-\frac{n}{2}+\frac{nt}{4x_n}+x_n^2-tx_n+\frac{t^2}{4}+\frac{(x_n')^2}{x_n^2}. \tag{4.30}$$

Então, substituindo (4.28), (4.29) e (4.30) em (4.27), encontramos

$$x_n''=\frac{(x_n')^2}{2x_n}+\frac{3(x_n)^3}{2}-t(x_n)^2+x_n\left(\frac{n}{4}+\frac{t^2}{8}\right)-\frac{n^2}{32x_n}. \tag{4.31}$$

Usando a transformação

$$2x_n(t)=y(-t/2),$$

vamos mostrar que y satisfaz uma equação diferencial de Painlevé.

Calculando as derivadas da transformação, temos

$$x_n'(t)=-\frac{1}{4}y'(-t/2)\quad\text{e}\quad x_n''(t)=\frac{1}{8}y''(-t/2).$$

Substituindo essas derivadas em (4.31), obtemos

$$y''(-t/2)=\frac{(y'(-t/2))^2}{2y(-t/2)}+\frac{3y^3(-t/2)}{2}-2ty^2(-t/2)+4y(-t/2)\left(\frac{n}{4}+\frac{t^2}{8}\right)-\frac{n^2}{2y(-t/2)}.$$

Fazendo $z=-\frac{t}{2}$, temos

$$y''(z)=\frac{(y'(z))^2}{2y(z)}+\frac{3y^3(z)}{2}+4zy^2(z)+2y(z)\left(\frac{n}{2}+z^2\right)-\frac{n^2}{2y(z)}.$$

Esta equação é a quarta equação diferencial de Painlevé (4.1), ou seja,

$$\mathrm{P_{IV}}:\quad y''=\frac{(y')^2}{2y}+\frac{3y^3}{2}+4xy^2+2y(x^2-\alpha)+\frac{\beta}{y},$$

com $z=x$, $\alpha=-\frac{n}{2}$ e $\beta=-\frac{n^2}{2}$.

4.3 Polinômios de Laguerre semiclássicos

Nesta seção apresentamos a relação entre os polinômios de Laguerre semiclássicos com a quarta equação diferencial de Painlevé. Estes resultados são encontrados em [1, 11] e [19].

Consideramos os polinômios ortonormais p_n sobre $\mathbb{R}^+$ com relação a função peso Laguerre semiclássica, isto é, com relação a

$$w_t(x) = x^\alpha e^{-x^2+tx}, \qquad x \in \mathbb{R}^+,$$

com $\alpha > -1$ e $t \in \mathbb{R}$.

Como visto anteriormente, os polinômios de Laguerre semiclássicos satisfazem a seguinte relação de recorrência

$$xp_n(x;t) = a_{n+1}(t)p_{n+1}(x;t) + b_n(t)p_n(x;t) + a_n(t)p_{n-1}(x;t),$$

com $p_{-1}(x;t) = 0$ e os coeficientes da relação de recorrência dados por

$$a_n(t) = \int_0^\infty xp_n(x;t)p_{n-1}(x;t)w_t(x)dx,$$

e

$$b_n(t) = \int_0^\infty xp_n^2(x;t)w_t(x)dx.$$

Para a função peso dada acima, temos as seguintes equações discretas para os coeficientes da relação de recorrência.

Teorema 4.3. *Sejam a_n e b_n os coeficientes da relação de recorrência para os polinômios ortonormais com relação a função peso w_t. Então*

$$x_n(t) = \frac{\sqrt{2}}{t - 2b_n(t)}, \quad y_n(t) = 2a_n^2(t) - n - \frac{\alpha}{2}, \tag{4.32}$$

satisfazem

$$\begin{cases} x_{n-1}(t)x_n(t) &= \dfrac{y_n(t) + z_n}{y_n^2(t) - \alpha^2/4}, \\ y_n(t) + y_{n+1}(t) &= \dfrac{1}{x_n(t)}\left(\dfrac{t}{\sqrt{2}} - \dfrac{1}{x_n(t)}\right), \end{cases} \tag{4.33}$$

onde $z_n = n + \alpha/2$.

As equações em (4.33) são similares com (4.6), ou seja, com a equação assimétrica de

Painlevé para a $\mathrm{dP_{IV}}$ na lista de Clarkson dada em [18], que pode ser dada por

$$\begin{cases} u_n u_{n-1} &= \dfrac{a(v_n + z_n - b)}{v_n^2 - \gamma^2}, \\ v_n + v_{n+1} &= \dfrac{c}{u_n} + \dfrac{z_{n+1/2} + d}{u_n - 1}. \end{cases} \tag{4.34}$$

De fato, podemos obter (4.33) de (4.34) fazendo $u_n = x_n/\epsilon$, $v_n = \epsilon y_n$, $z_n = \epsilon n + \epsilon\alpha/2$, $a = 1/\epsilon$, $b = 0$, $\gamma = \epsilon\alpha/2$, $c = 1/\epsilon + t/\sqrt{2}$, $d = -1/\epsilon$ e fazendo $\epsilon \to 0$.

O caso $t = 0$ nos fornece o seguinte resultado:

Corolário 4.4. *Sejam os polinômios $\{p_n\}_{n\geq 0}$ ortonormais com relação a função peso*

$$w(x) = x^\alpha e^{-x^2}, \quad x > 0,$$

então os coeficientes da relação de recorrência desses polinômios satisfazem

$$(y_n + y_{n+1})(y_n + y_{n-1}) = \frac{\left(y_n^2 - \dfrac{\alpha^2}{4}\right)^2}{(y_n + z_n)^2}, \tag{4.35}$$

onde $z_n = n + \alpha/2$ e $y_n = 2a_n^2 - n - \alpha/2$. Os coeficientes b_n podem ser obtidos de

$$b_n^2 = n + \frac{\alpha+1}{2} - a_n^2 - a_{n+1}^2.$$

A equação (4.35) é um exemplo de equação discreta de Painlevé, neste caso a $\mathrm{dP_{IV}}$ em (4.5), ou seja,

$$\mathrm{dP_{IV}}: \quad (x_{n+1} + x_n)(x_n + x_{n-1}) = \frac{(x_n^2 - a^2)(x_n^2 - b^2)}{(x_n + z_n)^2 - c^2},$$

com $z_n = n + \alpha/2$ e colocando $x_n = y_n$, $a = b = \dfrac{\alpha}{2}$ e $c = 0$.

Adiante apresentamos a prova do teorema e do corolário acima dada em [1]. A demonstração desses resultados envolve a teoria de Par de Lax. Mas antes, como foi definido no Capítulo 3, podemos reescrever a relação de recorrência dos polinômios ortonormais como

$$x\mathbf{P} = \mathbf{J}\mathbf{P},$$

onde $\mathbf{J}$ e $\mathbf{P}$ são as matrizes definidas em (3.15).

Como vimos em (2.17), a função peso w_t satisfaz a equação de Pearson, ou seja,

$$[xw_t(x)]' = (1 + \alpha + tx - 2x^2)w_t(x).$$

Consideramos a expansão de Fourier do polinômio $xp_n'(x;t) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k p_{n-k}(x;t)$ com

$$\alpha_k(t) = \int_0^\infty xp_n'(x;t)p_{n-k}(x;t)w_t(x)dx.$$

Calculando a integral por partes e deixando a dependência de t implícita, obtemos

$$\alpha_k = -\int_0^\infty p_n(x)xp_{n-k}'(x)w_t(x)dx - \int_0^\infty p_n(x)p_{n-k}(x)[xw_t(x)]'dx,$$

ou seja,

$$\alpha_k = -\int_0^\infty p_n(x)xp_{n-k}'(x)w_t(x)dx - \int_0^\infty p_n(x)p_{n-k}(x)(1+\alpha+tx-2x^2)w_t(x)dx.$$

Devido as condições de ortonormalidade, essa integral se anula quando $k > 2$. Para $k = 2$, temos

$$\alpha_2 = 2\int_0^\infty x^2 p_n(x)p_{n-2}(x)w_t(x)dx.$$

Daí, aplicando a relação de recorrência para $n-2$, encontramos

$$\alpha_2 = 2a_{n-1}\int_0^\infty p_n(x)xp_{n-1}(x)w_t(x)dx,$$

e aplicando a relação de recorrência para $n-1$, obtemos

$$\alpha_2 = 2a_n a_{n-1}.$$

Comparando os coeficientes que acompanham x^n, segue que

$$\alpha_0 = n.$$

Agora, podemos escrever o polinômio xp_n' na forma matricial como

$$x\mathbf{P}' = \mathbf{LP},$$

com

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ A_1 & 1 & & & \\ 2a_2a_1 & A_2 & 2 & & \\ & 2a_3a_2 & A_3 & 3 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix},$$

e

$$A_n = \int_0^\infty x p_n'(x) p_{n-1}(x) w_t(x) dx.$$

Juntamente com a relação de recorrência, isso nos leva ao seguinte

$$\begin{cases} x\mathbf{P} = \mathbf{J}\mathbf{P}, \\ \\ x\mathbf{P}' = \mathbf{L}\mathbf{P}. \end{cases} \tag{4.36}$$

Apresentamos agora a demonstração do Teorema 4.3 juntamente com a demonstração do Corolário 4.4.

Demonstração. Uma relação entre as matrizes **J** e **L** pode ser encontrada calculando a compatibilidade de (4.36), ou seja, calculando $x(x\mathbf{P})'$, e então obtemos

$$\mathbf{J}\mathbf{L} - \mathbf{L}\mathbf{J} = \mathbf{J}.$$

De fato, derivando a relação de recorrência com respeito a x, temos

$$\mathbf{P} + x\mathbf{P}' = \mathbf{J}'\mathbf{P} + \mathbf{J}\mathbf{P}',$$

onde $f' = df/dx$. Como $\mathbf{J}'\mathbf{P} = 0$ e $x\mathbf{P}' = \mathbf{L}\mathbf{P}$, podemos substituir esses valores na última equação e multiplicar o resultado por x para obter

$$x\mathbf{P} + x\mathbf{L}\mathbf{P} = x\mathbf{J}\mathbf{P}',$$

que se reduz a $\mathbf{J} = \mathbf{J}\mathbf{L} - \mathbf{L}\mathbf{J}$, ou seja, igualando os termos das matrizes obtidas, temos

$$\begin{aligned} b_n &= a_{n+1}A_{n+1} - a_n A_n, && (4.37) \\ A_n(b_{n-1} - b_n) + 2a_n &= 2a_n(a_{n+1}^2 - a_{n-1}^2), && (4.38) \\ a_{n-1}A_n - a_n A_{n-1} &= 2a_n a_{n-1}(b_n - b_{n-2}). && (4.39) \end{aligned}$$

Dividindo (4.39) por $a_n a_{n-1}$ e observando que $n \geq 2$, então

$$\sum_{j=2}^{n} \left(\frac{A_j}{a_j} - \frac{A_{j-1}}{a_{j-1}} \right) = \sum_{j=2}^{n} (2(b_j - b_{j-2})),$$

que nos fornece

$$\frac{A_n}{a_n} = \frac{A_1}{a_1} + 2(b_n + b_{n-1} - b_1 - b_0).$$

Observe que

$$A_1 = \int_0^\infty x p_1'(x) p_0(x) w_t(x) dx.$$

Calculando a integral acima pelo método de integração por partes, obtemos

$$A_1 = -\int_0^\infty p_0(x)p_1(x)[1+\alpha+tx-2x^2]w_t(x)dx.$$

Aplicando a relação de recorrência, segue que $A_1 = a_1(2b_0+2b_1-t)$. Consequentemente,

$$A_n = a_n(2b_n+2b_{n-1}-t). \tag{4.40}$$

Usando essa expressão em (4.38) e em seguida dividindo por a_n, obtemos

$$(2b_n+2b_{n-1}-t)(b_{n-1}-b_n)+2 = 2(a_{n+1}^2-a_{n-1}^2).$$

Observe que $n \geq 1$, então

$$\sum_{j=1}^{n}((2b_j+2b_{j-1}-t)(b_{j-1}-b_j)+2) = \sum_{j=1}^{n}(2(a_{j+1}^2-a_{j-1}^2)),$$

que resulta em

$$2(a_n^2+b_n^2+a_{n+1}^2)-tb_n = 2n+2(a_0^2+b_0^2+a_1^2)-tb_0.$$

Note que

$$\begin{aligned}
2(a_0^2+b_0^2+a_1^2)-tb_0 &= \int_0^\infty (2x^2-tx)p_0^2(x)w_t(x)dx \\
&= -\int_0^\infty p_0^2(x)[xw_t(x)]'dx+\alpha+1 \\
&= \alpha+1,
\end{aligned}$$

consequentemente,

$$2(a_n^2+b_n^2+a_{n+1}^2) = tb_n+2n+\alpha+1. \tag{4.41}$$

Como $n \geq 0$ em (4.37), podemos fazer a seguinte soma

$$\sum_{j=0}^{n} b_j = \sum_{j=0}^{n}(a_{j+1}A_{j+1}-a_jA_j).$$

Logo,

$$\sum_{j=0}^{n-1} b_j = a_nA_n, \tag{4.42}$$

pois $a_0 = 0$.

Multiplicando a equação (4.38) por a_n e sabendo que $n \geq 1$, temos então

$$\sum_{j=1}^{n}(A_j a_j(b_{j-1} - b_j) + 2a_j^2) = \sum_{j=1}^{n}(2a_j^2(a_{j+1}^2 - a_{j-1}^2)).$$

A equação anterior pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
2a_n^2 a_{n+1}^2 - 2\sum_{j=0}^{n} a_j^2 &= \sum_{j=1}^{n} a_j A_j (b_{j-1} - b_j) \\
&= \sum_{j=0}^{n-1}(a_{j+1}A_{j+1} - a_j A_j) b_j - a_n A_n b_n \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} b_j^2 - a_n A_n b_n,
\end{aligned}$$

onde foi usado (4.37) na última linha. Logo, temos

$$\begin{aligned}
2a_n^2 a_{n+1}^2 + a_n A_n b_n &= \sum_{j=0}^{n-1} b_j^2 + 2\sum_{j=0}^{n} a_j^2 \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} b_j^2 + \sum_{j=0}^{n} a_j^2 + \sum_{j=0}^{n} a_j^2 \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} b_j^2 + \sum_{j=0}^{n-1} a_j^2 + a_n^2 + \sum_{j=0}^{n-1} a_{j+1}^2 \\
&= \sum_{j=0}^{n-1}(a_j^2 + b_j^2 + a_{j+1}^2) + a_n^2.
\end{aligned}$$

Agora, usando (4.41) e (4.42), obtemos

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{n-1}(a_j^2 + b_j^2 + a_{j+1}^2) + a_n^2 &= \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n-1}(tb_j + 2j + \alpha + 1) + a_n^2 \\
&= \frac{1}{2}t\sum_{j=0}^{n-1} b_j + \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n-1}(2j + \alpha + 1) + a_n^2 \\
&= \frac{t}{2}a_n A_n + \frac{n(n+\alpha)}{2} + a_n^2.
\end{aligned}$$

Logo,

$$2a_n^2 a_{n+1}^2 = \frac{t}{2}a_n A_n - a_n A_n b_n + \frac{n(n+\alpha)}{2} + a_n^2.$$

Substituindo (4.40) na última equação obtida, têm-se

$$4a_n^2 a_{n+1}^2 = n(n+\alpha) + 2a_n^2 - a_n^2(2b_n - t)(2b_n + 2b_{n-1} - t). \tag{4.43}$$

Agora, vamos separar a continuação dessa demonstração em dois casos: $t = 0$ e $t \neq 0$.

Considere o caso $t = 0$, então a equação (4.43) torna-se

$$4a_n^2 a_{n+1}^2 = n(n + \alpha) + 2a_n^2 - 2a_n^2 b_n(2b_n + 2b_{n-1}),$$

ou seja,

$$4a_n^2 a_{n+1}^2 = n(n + \alpha) + 2a_n^2 - 4a_n^2 b_n^2 - 4a_n^2 b_n b_{n-1},$$

Usando (4.41) para substituir b_n^2 na equação acima, temos

$$4a_n^2 b_n b_{n-1} = (2a_n^2 - n)(2a_n^2 - n - \alpha).$$

Elevando a equação anterior ao quadrado e substituindo b_n^2 e b_{n-1}^2 usando (4.41), obtemos

$$(2a_n^2)^2(2a_n^2 + 2a_{n+1}^2 - 2n - \alpha - 1)(2a_n^2 + 2a_{n-1}^2 - 2n - \alpha + 1) = (2a_n^2 - n)^2(2a_n^2 - (n + \alpha))^2.$$

Usando a substituição $y_n = 2a_n^2 - n - \alpha/2$, então

$$(y_n + y_{n+1})(y_n + y_{n-1}) = \frac{\left(y_n^2 - \frac{\alpha^2}{4}\right)^2}{(y_n + z_n)^2},$$

onde $z_n = n + \alpha/2$, provando então o Corolário.

O primeiro valor inicial,

$$y_0 = -\frac{\alpha}{2},$$

segue do fato de que $a_0 = 0$.

Como $p_0^2(x) = 1/\mu_0$, onde μ_k é o k-ésimo momento relacionado a função peso w_t, da relação de recorrência, temos $b_0 = \mu_1/\mu_0$. Observe também que

$$a_1^2 + b_0^2 = \int_0^\infty (xp_0(x))^2 w_t(x)dx.$$

A partir disso, obtemos

$$a_1^2 = \frac{\mu_2\mu_0 - \mu_1^2}{\mu_0^2},$$

e então encontramos

$$y_1 = 2\frac{\mu_2\mu_0 - \mu_1^2}{\mu_0^2} - 1 - \frac{\alpha}{2}.$$

Usando a integração por partes em μ_k para encontrar

$$\mu_k = \frac{2}{\alpha + k + 1}\mu_{k+2},$$

então temos o nosso segundo valor inicial

$$y_1 = \frac{\alpha}{2} - \frac{2\mu_1^2}{\mu_0^2}.$$

Considere agora o caso $t \neq 0$. Para este caso não é possível ter a redução do sistema

$$\begin{cases} 2(a_n^2 + b_n^2 + a_{n+1}^2) = tb_n + 2n + \alpha + 1, \\ 4a_n^2 a_{n+1}^2 = n(n+\alpha) + 2a_n^2 - a_n^2(2b_n - t)(2b_n + 2b_{n-1} - t) \end{cases}$$

em uma única equação. Usando as substituições $y_n = 2a_n^2 - n - \alpha/2$ e $x_n = \dfrac{\sqrt{2}}{t - 2b_n}$ nas equações acima, obtemos o seguinte sistema

$$\begin{cases} x_{n-1}x_n &= \dfrac{y_n + z_n}{y_n^2 - \alpha^2/4}, \\ y_n + y_{n+1} &= \dfrac{1}{x_n}\left(\dfrac{t}{\sqrt{2}} - \dfrac{1}{x_n}\right), \end{cases}$$

com $z_n = n + \alpha/2$. As condições iniciais são dadas por

$$a_0 = 0, \quad b_0 = \frac{\mu_1}{\mu_0}$$

ou

$$y_0 = -\frac{\alpha}{2}, \quad x_0 = \frac{\sqrt{2}\mu_0}{t\mu_0 - 2\mu_1}.$$

E, com isso, provamos o Teorema 4.3. □

Agora vamos mostrar que os coeficientes da relação de recorrência dos polinômios ortonormais com respeito a função peso (2.16) satisfazem a quarta equação diferencial de Painlevé na variável t. Para isso vamos precisar do Teorema 3.1 (equações de Toda).

Da primeira equação em (4.33), temos

$$x_{n-1} = -\frac{2(2y_n + 2n + \alpha)}{x_n(\alpha^2 - 4y_n^2)}. \tag{4.44}$$

De (4.32) temos as seguintes expressões para a_n^2 e b_n (em termos de x_n e y_n),

$$b_n = \frac{tx_n - \sqrt{2}}{2x_n}, \quad a_n^2 = \frac{2y_n + 2n + \alpha}{4}.$$

A derivada de b_n com relação a t é

$$b_n' = \frac{x_n^2 + \sqrt{2}x_n'}{2x_n^2}.$$

Colocando as expressões acima na equação (3.5), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{x_n^2 + \sqrt{2}x_n'}{2x_n^2} &= \frac{2y_{n+1} + 2n + 2 + \alpha}{4} - \frac{2y_n + 2n + \alpha}{4} \\ &= \frac{y_{n+1} - y_n + 1}{2}, \end{aligned}$$

e, consequentemente,

$$y_{n+1} = \frac{x_n^2 + \sqrt{2}x_n'}{x_n^2} + y_n - 1.$$

Portanto,

$$y_{n+1} = \frac{x_n^2 y_n - \sqrt{2}x_n'}{x_n^2}, \tag{4.45}$$

onde $f' = \dfrac{df}{dt}$.

Substituindo (4.45) na segunda equação em (4.33), temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{x_n}\left(\frac{t}{\sqrt{2}} - \frac{1}{x_n}\right) &= y_n + \left(\frac{x_n^2 y_n - \sqrt{2}x_n'}{x_n^2}\right) \\ &= \frac{2x_n^2 y_n + \sqrt{2}x_n'}{x_n^2}, \end{aligned}$$

e, portanto, isolando y_n, chegamos em

$$y_n = \frac{\sqrt{2}tx_n - 2\sqrt{2}x_n' - 2}{4x_n^2}. \tag{4.46}$$

Por outro lado, derivando $y_n = 2a_n^2 - n - \alpha/2$ com relação t e substituindo as expressões para a_n^2 e b_n na equação (3.4), obtemos

$$
\begin{aligned}
y_n' &= \left(\frac{2y_n + 2n + \alpha}{2}\right)\left(\frac{x_n t - \sqrt{2}}{2x_n} - \frac{x_{n-1}t - \sqrt{2}}{2x_{n-1}}\right) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(y_n + n + \frac{\alpha}{2}\right)\left(\frac{1}{x_{n-1}} - \frac{1}{x_n}\right),
\end{aligned}
$$

que resulta na seguinte expressão para y_n':

$$y_n' = \frac{1}{\sqrt{2}}(y_n + n + \alpha/2)\left(\frac{1}{x_{n-1}} - \frac{1}{x_n}\right).$$

Usando (4.44) podemos eliminar x_{n-1} da equação acima para obtermos

$$y_n' = \frac{-2(2y_n + 2n + \alpha) - x_n^2(\alpha^2 - 4y_n^2)}{4\sqrt{2}x_n}, \tag{4.47}$$

que envolve y_n', x_n e y_n. Da mesma forma, a equação (4.46) fornece uma expressão para x_n' em termos de x_n e y_n, ou seja,

$$x_n' = \frac{\sqrt{2}tx_n - 4x_n^2 y_n - 2}{2\sqrt{2}}.$$

Diferenciando com respeito a t, obtemos

$$x_n'' = \frac{x_n + tx_n'}{2} - \sqrt{2}(y_n' x_n^2 + 2y_n x_n x_n').$$

Agora, usando (4.46) e (4.47) para eliminar y_n e y_n', finalmente conseguimos uma equação diferencial ordinária não linear de segunda ordem para x_n da forma

$$x_n'' = \frac{3}{2}\frac{(x_n')^2}{x_n} + \frac{1}{4}\alpha^2 x_n^3 - \frac{x_n}{8}(t^2 - 4 - 8n - 4\alpha) + \frac{t}{\sqrt{2}} - \frac{3}{4x_n}.$$

E então, substituindo

$$x_n(t) = -\frac{\sqrt{2}}{y(z)}, \quad t = 2z,$$

na equação encontrada, temos

$$y''(t/2) = \frac{(y'(t/2))^2}{2y(t/2)} + \frac{3y^3(t/2)}{2} + 2ty^2(t/2) + \frac{y(t/2)}{2}(t^2 - 4 - 8n - 4\alpha) - \frac{2\alpha^2}{y(t/2)}.$$

Fazendo $t = 2z$, isto é, $t/2 = z$, então obtemos

$$y''(z) = \frac{(y'(z))^2}{2y(z)} + \frac{3y^3(z)}{2} + 4zy^2(z) + 2y(z)(z^2 - 1 - 2n - \alpha) - \frac{2\alpha^2}{y(z)},$$

que é a quarta equação diferencial de Painlevé (4.1),

$$\mathrm{P_{IV}}: \quad y'' = \frac{(y')^2}{2y} + \frac{3y^3}{2} + 4xy^2 + 2y(x^2 - \gamma) + \frac{\beta}{y},$$

onde $z = x$, $\gamma = 1 + 2n + \alpha$ e $\beta = -2\alpha^2$.

4.4 Polinômios de Charlier generalizados

Nesta seção vamos apresentar a relação entre os polinômios ortogonais discretos de Charlier com as equações de Painlevé. Os resultados deste capítulo podem ser encontrados em [5, 18] e [19].

Como vimos anteriormente, os polinômios de Charlier generalizados são ortonormais com relação ao peso discreto

$$w(k) = \frac{a^k}{k!(\eta)_k}, \quad k \in \mathbb{N}, a > 0, \eta > 0, \tag{4.48}$$

e satisfazem a seguinte relação de recorrência

$$kp_n(k;a) = a_{n+1}(a)p_{n+1}(k;a) + b_n(a)p_n(k;a) + a_n(a)p_{n-1}(k;a), \tag{4.49}$$

com $p_{-1}(k;a) = 0$ e coeficientes $a_n(a)$ e $b_n(a)$ dados por

$$a_n(a) = \sum_{k=0}^{\infty} kp_n(k;a)p_{n-1}(k;a)w(k), \tag{4.50}$$

e

$$b_n(a) = \sum_{k=0}^{\infty} kp_n^2(k;a)w(k).$$

Além disso, os polinômios de Charlier generalizados satisfazem a relação de estrutura

$$p_n(k+1) = p_n(k) + A_n p_{n-1}(k) + B_n p_{n-2}(k). \tag{4.51}$$

Os coeficientes da relação de recorrência dos polinômios de Chalier generalizados satisfazem a seguinte propriedade:

Propriedade 4.5. Os coeficientes a_n e b_n da relação de recorrência para os polinômios ortonormais com relação ao peso (4.48) sobre $\mathbb{N}$ satisfazem

$$b_n(a) + b_{n-1}(a) - n + \eta = \frac{an}{a_n^2(a)}, \tag{4.52}$$

$$b_{n-1}(a) - b_n(a) + 1 = \frac{a_n^2(a)}{an}(a_{n+1}^2(a) - a_{n-1}^2(a)), \tag{4.53}$$

com condições iniciais $a_0^2(a) = 0$ e $b_0(a) = \mu_1/\mu_0$.

Demonstração. Aplicando o operador de diferenças Δ na relação de recorrência (4.49), encontramos

$$(k+1)p_n(k+1;a) - kp_n(k;a) = a_{n+1}(a)\Delta p_{n+1}(k;a) + b_n(a)\Delta p_n(k;a) + a_n(a)\Delta p_{n-1}(k;a). \tag{4.54}$$

A partir de agora deixaremos implícita a dependência de a. O lado esquerdo da equação anterior pode ser escrito como $(k+1)\Delta p_n(k) + p_n(k)$. De fato,

$$\begin{aligned}
(k+1)\Delta p_n(k) + p_n(k) &= (k+1)[p_n(k+1) - p_n(k)] + p_n(k) \\
&= (k+1)p_n(k+1) - (k+1)p_n(k) + p_n(k) \\
&= (k+1)p_n(k+1) - kp_n(k).
\end{aligned}$$

Usando a relação de estrutura (4.51) substituimos Δp_n, Δp_{n+1} e Δp_{n-1}, em (4.54), para obter

$$\begin{aligned}
(k+1)(A_n p_{n-1}(k) + B_n p_{n-2}(k)) + p_n(k) &= a_{n+1}(A_{n+1}p_n(k) + B_{n+1}p_{n-1}(k)) \\
&+ b_n(A_n p_{n-1}(k) + B_n p_{n-2}(k)) + a_n(A_{n-1}p_{n-2}(k) + B_{n-1}p_{n-3}(k)).
\end{aligned}$$

Agora, usando a relação de recorrência (4.49), eliminamos kp_{n-1} e kp_{n-2}, e encontramos

$$\begin{aligned}
A_n(a_n p_n(k) + b_{n-1}p_{n-1}(k) + a_{n-1}(k)p_{n-2}(k)) + B_n(a_{n-1}p_{n-1}(k) + b_{n-2}p_{n-2}(k) + a_{n-2}p_{n-3}(k)) \\
+ A_n p_{n-1}(k) + B_n p_{n-2}(k) + p_n(k) = a_{n+1}(A_{n+1}p_n(k) + B_{n+1}p_{n-1}(k)) \\
+ b_n(A_n p_{n-1}(k) + B_n p_{n-2}(k)) + a_n(A_{n-1}p_{n-2}(k) + B_{n-1}p_{n-3}(k)).
\end{aligned}$$

Em ambos os lados da igualdade acima temos uma combinação linear de quatro polinômios p_n, p_{n-1}, p_{n-2} e p_{n-3}, comparando os coeficientes desses polinômios, obtemos

$$A_n a_n + 1 = a_{n+1}A_{n+1}, \tag{4.55}$$

$$A_n b_{n-1} + B_n a_{n-1} + A_n = a_{n+1}B_{n+1} + b_n A_n, \tag{4.56}$$

$$A_n a_{n-1} + B_n b_{n-2} + B_n = b_n B_n + a_n A_{n-1}, \tag{4.57}$$

$$B_n a_{n-2} = a_n B_{n-1}. \tag{4.58}$$

De (4.55) temos $a_{n+1}A_{n+1} - A_n a_n = 1,\ n \geq 0$, ou seja, calculando

$$\sum_{j=0}^{n}(a_{j+1}A_{j+1} - A_j a_j) = \sum_{j=0}^{n} 1,$$

disso obtemos

$$A_n a_n = n.$$

De (4.58) conseguimos a relação

$$\frac{B_n}{a_n a_{n-1}} = \frac{B_{n-1}}{a_{n-1}a_{n-2}} = \cdots = \frac{B_2}{a_2 a_1} = c,$$

onde c é uma constante, ou seja, $B_n = c a_n a_{n-1}$.

De (4.56) encontramos

$$A_n(b_{n-1} - b_n + 1) = c a_n (a_{n+1}^2 - a_{n-1}^2),$$

e, multiplicando por a_n, obtemos

$$n(b_{n-1} - b_n + 1) = c a_n^2 (a_{n+1}^2 - a_{n-1}^2). \tag{4.59}$$

De (4.57) temos

$$c(b_n - b_{n-2} - 1) = \frac{A_n}{a_n} - \frac{A_{n-1}}{a_{n-1}}, \quad n \geq 2,$$

e então, somando de 2 a n,

$$c\sum_{j=2}^{n}(b_n - b_{n-2} - 1) = \sum_{j=2}^{n}\left(\frac{A_n}{a_n} - \frac{A_{n-1}}{a_{n-1}}\right),$$

obtemos

$$\frac{A_n}{a_n} = \frac{A_1}{a_1} + c(b_n + b_{n-1} - b_0 - b_1 - n + 1),$$

que mulplicado por a_n^2 nos fornece

$$n = \frac{a_n^2}{a_1^2} + c a_n^2 (b_n + b_{n-1} - b_0 - b_1 - n + 1). \tag{4.60}$$

As equações (4.59) e (4.60) ainda contém as constantes c, b_0, b_1 e a_1^2. Multiplicando a relação de estrutura (4.51) para $n = 1$ por p_0 e utilizando a propriedade de ortogonalidade (2.18), obtemos

$$A_1 = p_0(k)\sum_{k=0}^{\infty}\Delta p_1(k) w(k),$$

que, após alguns cálculos, também pode ser reescrito como

$$A_1 = -p_0(k)\sum_{k=0}^{\infty} p_1(k)\nabla w(k). \tag{4.61}$$

De fato,

$$\begin{aligned} A_1 &= p_0(k)[w(0)(p_1(1) - p_1(0)) + w(1)(p_1(2) - p_1(1)) + w(2)(p_1(3) - p_1(2)) + \ldots] \\ &= p_0(k)[-p_1(0)(w(0) - w(-1)) - p_1(1)(w(1) - w(0)) - p_1(2)(w(2) - w(1)) - \ldots] \\ &= p_0(k)\sum_{k=0}^{\infty} -p_1(k)[w(k) - w(k-1)] \\ &= -p_0(k)\sum_{k=0}^{\infty} p_1(k)\nabla w(k), \end{aligned}$$

assumindo $w(-1) = 0$.

Usando a equação de Pearson (2.20) no somatório acima, obtemos

$$A_1 = \frac{1}{a}(\eta - 1)\sum_{k=0}^{\infty} kp_1(k)p_0(k)w(k) + \frac{1}{a}\sum_{k=0}^{\infty} k^2 p_1(k)p_0(k)w(k).$$

Daí, usando (4.50) no primeiro somatório e a relação de recorrência (4.49) no segundo, temos

$$A_1 = \frac{a_1}{a}(\eta - 1 + b_0 + b_1).$$

Lembrando que $a_1 A_1 = 1$, consequentemente

$$a_1^2 = \frac{a}{b_0 + b_1 + \eta - 1}.$$

De maneira similar, multiplicando a relação de estrutura (4.51) para $n = 2$ por p_0 e usando a propriedade de ortogonalidade, concluímos que

$$B_2 = p_0(k)\sum_{k=0}^{\infty} \Delta p_2(k)w(k)$$

e, analogamente ao que foi feito em (4.61), temos

$$B_2 = -p_0(k)\sum_{k=0}^{\infty} p_2(k)\nabla w(k).$$

Usando a equação de Pearson (2.20), obtemos

$$B_2 = \frac{1}{a}\sum_{k=0}^{\infty} k^2 p_2(k)p_0(k)w(k).$$

Como consequência da relação de recorrência (4.49), temos $B_2 = a_1a_2/a$. Recordando que $B_2/a_2a_1 = c$, então

$$c = \frac{1}{a}.$$

Agora substituindo c e a_1^2 em (4.59) e (4.60) encontramos as equações desejadas (4.52) e (4.53).

Para encontrar os valores iniciais basta usar a relação de recorrência para $n = 0$, ou seja,

$$kp_0(k) = a_1p_1(k) + b_0p_0(k) + a_0p_{-1}(k).$$

Como $p_{-1}(k) = 0$, logo $a_0 = 0$. Além disso, para o segundo valor inicial, observe que

$$p_1(k) = \frac{(k - b_0)p_0(k)}{a_1}.$$

Multiplicando essa equação por p_0 e usando as propriedades de ortonormalidade dos polinômios $\{p_n\}_{n\geq 0}$, obtemos

$$b_0 = \frac{\mu_1}{\mu_0}.$$

□

Denota-se uma equação de diferenças de ordem m por

$$\begin{cases} y_n = f(y_{n-1}, y_{n-2}, \cdots, y_{n-m}, \beta_n), & n \geq m; \\ y_0, y_1, \cdots, y_{m-1} \in \mathbb{R} \text{ dados.} \end{cases}$$

Observe que (4.52) é uma equação de primeira ordem para b_n mas (4.53) é uma equação de segunda ordem para a_n. Temos que trabalhar um pouco mais para chegar em duas equações de primeira ordem ou uma equação de segunda ordem. Abaixo temos um resultado que nos fornece duas equações de primeira ordem.

Teorema 4.6. *Os coeficientes da relação de recorrência dos polinômios de Charlier generalizados ortonormais com relação ao peso (4.48) satisfazem*

$$(a_{n+1}^2(a) - a)(a_n^2(a) - a) = ad_n(a)(d_n(a) + \eta - 1), \tag{4.62}$$

$$d_n(a) + d_{n-1}(a) + n + \eta - 1 = \frac{an}{a_n^2(a)}, \tag{4.63}$$

onde $d_n(a) = b_n(a) - n$.

Demonstração. Para simplicar os cálculos deixaremos implícita a dependência de a. De (4.52) encontramos

$$an = a_n^2(b_n + b_{n-1} - n + \eta).$$

Substituindo a equação anterior em (4.53), obtemos

$$(b_{n-1} - b_n + 1)(b_n + b_{n-1} - n + \eta) = a_{n+1}^2 - a_{n-1}^2.$$

Seja $(d_n)_{n\geq 0}$ uma sequência tal que $b_n = n + d_n$, então a última equação torna-se

$$(d_{n-1} - d_n)(d_n + d_{n-1} + n + \eta - 1) = a_{n+1}^2 - a_{n-1}^2,$$

ou seja,

$$(d_{n-1}^2 - d_n^2) + n(d_{n-1} - d_n) + (\eta - 1)(d_{n-1} - d_n) = a_{n+1}^2 - a_{n-1}^2. \tag{4.64}$$

Por outro lado, (4.53) é

$$an(d_{n-1} - d_n) = a_n^2 a_{n+1}^2 - a_{n-1}^2 a_n^2,$$

e substituindo esse resultado em (4.64), encontramos

$$(d_{n-1}^2 - d_n^2) + \frac{1}{a}(a_n^2 a_{n+1}^2 - a_{n-1}^2 a_n^2) + (\eta - 1)(d_{n-1} - d_n) = a_{n+1}^2 - a_{n-1}^2, \quad n \geq 1.$$

Após cálculos simples, obtemos

$$d_0^2 - d_n^2 + \frac{1}{a} a_n^2 a_{n+1}^2 + (\eta - 1)(d_0 - d_n) = a_{n+1}^2 + a_n^2 - a_1^2. \tag{4.65}$$

De fato, calculando

$$\sum_{j=1}^{n} \left(d_{j-1}^2 - d_j^2 + \frac{a_j^2 a_{j+1}^2 - a_{j-1}^2 a_j^2}{a} + (\eta - 1)(d_{j-1} - d_j) \right) = \sum_{j=1}^{n} (a_{j+1}^2 - a_{j-1}^2)$$

obtemos (4.65), que ainda contém as contantes $d_0 = b_0$ e a_1^2.

Observe que

$$a_1^2 + b_0^2 = \sum_{k=0}^{\infty} [k p_0(k)]^2 w(k). \tag{4.66}$$

De fato, usando a relação de recorrência (4.49), temos

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty}[kp_0(k)]^2w(k) &= \sum_{k=0}^{\infty}(a_1p_1(k)+b_0p_0(k)+a_0p_{-1}(k))^2w(k)\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}(a_1^2p_1^2(k)+b_0^2p_0^2(k))w(k)\\ &= a_1^2+b_0^2.\end{aligned}$$

Considerando os momentos μ_n definidos em (2.4), ou seja,

$$\mu_n = \sum_{k=0}^{\infty} k^n w(k),$$

podemos escrever (4.66) como

$$\sum_{k=0}^{\infty}[kp_0(k)]^2w(k) = \frac{\mu_2}{\mu_0},$$

pois $p_0^2 = 1/\mu_0$, e por outro lado, usando a ortogonalidade na equação de Pearson (2.20), temos

$$\sum_{k=0}^{\infty} a\nabla w(k) = \sum_{k=0}^{\infty}(a-(\eta-1)k-k^2)w(k),$$

que resulta em

$$0 = a\mu_0 - (\eta-1)\mu_1 - \mu_2.$$

Mas, pela relação de recorrência e ortogonalidade, temos $b_0 = \mu_1/\mu_0$, e consequentemente

$$a_1^2+b_0^2 = \frac{\mu_2}{\mu_0} = a-(\eta-1)b_0.$$

Substituindo todas as informações em (4.65), obtemos

$$\frac{a_n^2a_{n+1}^2}{a} - a_{n+1}^2 - a_n^2 + a = d_n^2 + (\eta-1)d_n.$$

Fatorando o lado esquerdo chegamos em (4.62). E (4.63) é a mesma equação que (4.52) com $b_n = d_n + n$. □

Quando $\eta = 1$ em (4.62) e (4.63), temos

$$(a_{n+1}^2-a)(a_n^2-a) = ad_n^2, \tag{4.67}$$

$$d_n + d_{n-1} + n = \frac{an}{a_n^2}, \tag{4.68}$$

consequentemente $a_n^2 - a$ tem sinal constante, pois como $ad_n^2 > 0$, então

$$(a_{n+1}^2 - a)(a_n^2 - a) > 0,$$

logo $(a_{n+1}^2 - a) > 0$ e $(a_n^2 - a) > 0$ ou $(a_{n+1}^2 - a) < 0$ e $(a_n^2 - a) < 0$ para todo $n \geq 0$. Então, $a_0 = 0$ implica que $a_n^2 - a < 0$ para todo $n \geq 0$, consequentemente podemos introduzir a sequência $(c_n)_{n\geq 0}$ com $c_0 = 1$ e $a_n^2 - a = -ac_n^2$. Substituindo essa equação em (4.67), obtemos

$$ac_n^2 c_{n+1}^2 = d_n^2,$$

ou, ainda,

$$d_n = \sqrt{a} c_n c_{n+1},$$

onde escolhemos o sinal de c_{n+1} igual o sinal de $d_n c_n$. Inserindo a última equação em (4.68), temos

$$\sqrt{a} c_n (c_{n+1} + c_{n-1}) + n = \frac{n}{1 - c_n^2},$$

que nos fornece

$$c_{n+1} + c_{n-1} = \frac{nc_n}{\sqrt{a}(1 - c_n^2)}.$$

Essa equação é a segunda equação discreta de Painlevé (4.4), ou seja,

$$\mathrm{dP_{II}} : x_{n+1} + x_{n-1} = \frac{x_n(\alpha\, n + \beta) + \gamma}{1 - x_n^2},$$

com $x_n = c_n$, $\alpha = 1/\sqrt{a}$ e $\beta = \gamma = 0$.

Agora relacionaremos os polinômios de Charlier generalizados com as equações diferenciais de Painlevé. Para isso, fazemos $a = e^t$ na função peso (4.48), ou seja,

$$w(k) = \frac{e^{tk}}{k!(\eta)_k}, \quad k \in \mathbb{N},\ t \in \mathbb{R},\ \eta > 0,$$

e conseguimos a função peso da forma

$$w_t(k) = e^{tk} w(k),$$

onde a função peso w é discreta sobre $\mathbb{N}$. Consequentemente, os coeficientes da relação de recorrência, como uma função de $t = ln(a)$, satisfazem as equações de Toda (3.4) e (3.5). Eles também satisfazem as equações não lineares (4.62) e (4.63). Estudamos agora os coeficientes da relação de recorrência como uma função de a ao invés de t, faremos essa alteração na variável apenas para facilitar os cálculos. Além disso, usamos

$$x_n(a) = a_n^2(a) = a_n^2(e^t) \quad \text{e} \quad y_n(a) = b_n(a) = b_n(e^t)$$

e

$$x_n' = \frac{dx_n}{da} \quad \text{e} \quad y_n' = \frac{dy_n}{da}.$$

Note que,

$$x_n'(a) = \frac{1}{a}\frac{dx_n(a)}{dt}, \quad y_n'(a) = \frac{1}{a}\frac{dy_n(a)}{dt},$$

então as equações de Toda tornam-se

$$x_n'(a) = \frac{x_n(a)}{a}(y_n(a) - y_{n-1}(a)), \tag{4.69}$$

$$y_n'(a) = \frac{1}{a}(x_{n+1}(a) - x_n(a)), \tag{4.70}$$

e as equações não lineares (4.62) e (4.63) tornam-se

$$\begin{aligned} (x_n(a) - a)(x_{n+1}(a) - a) &= a(y_n(a) - n)(y_n(a) - n + \eta - 1), & (4.71) \\ y_n(a) + y_{n-1}(a) - n + \eta &= \frac{an}{x_n(a)}. & (4.72) \end{aligned}$$

Calculando a derivada de (4.69) com respeito a variável a, temos

$$x_n''(a) = \frac{ax_n'(a) - x_n(a)}{a^2}(y_n(a) - y_{n-1}(a)) + \frac{x_n(a)}{a}(y_n'(a) - y_{n-1}'(a)).$$

A partir de agora deixaremos implícita a dependência de a para facilitar os cálculos. Usando (4.69) e (4.70) para subtituir $y_n - y_{n-1}$, y_n' e y_{n-1}' encontramos

$$x_n'' = \left(x_n' - \frac{x_n}{a}\right)\frac{x_n'}{x_n} - \frac{2x_n(x_n - a)}{a^2} + \frac{x_n}{a^2}(x_{n+1} + x_{n-1} - 2a). \tag{4.73}$$

Fazendo (4.71) para n e $n-1$, ou seja,

$$\begin{aligned} \text{Para } n\text{:} \quad (x_n - a)(x_{n+1} - a) &= a(y_n - n)(y_n - n + \eta - 1), \\ \text{Para } n-1\text{:} \quad (x_{n-1} - a)(x_n - a) &= a(y_{n-1} - n + 1)(y_{n-1} - n + 1 + \eta - 1), \end{aligned}$$

podemos somar essas equações para obter

$$(x_n - a)(x_{n+1} + x_{n-1} - 2a) = a(y_n - n)(y_n - n + \eta - 1) + a(y_{n-1} - n + 1)(y_{n-1} - n + \eta).$$

Observe que o lado direito da última igualdade pode ser escrito como

$$\begin{aligned} &a((y_n - n)(y_n - n + \eta - 1) + (y_{n-1} - n + 1)(y_{n-1} - n + \eta)) \\ &= a\left(\frac{1}{2}(y_n + y_{n-1} - 2n)^2 + \frac{1}{2}(y_n - y_{n-1})^2 + \eta(y_n + y_{n-1} - 2n + 1) - (y_n - y_{n-1})\right). \end{aligned}$$

Com (4.69) e (4.72) podemos substituir $y_n - y_{n-1}$ e $y_n + y_{n-1}$, respectivamente, na equação anterior para encontrar

$$
\begin{aligned}
&a((y_n - n)(y_n - n + \eta - 1) + (y_{n-1} - n + 1)(y_{n-1} - n + \eta)) \\
&= a\left(\frac{1}{2}\left(\frac{an}{x_n} - n - \eta\right)^2 + \frac{1}{2}\left(a\frac{x_n'}{x_n}\right)^2 + \eta\left(\frac{an}{x_n} - n - \eta + 1\right) - a\frac{x_n'}{x_n}\right).
\end{aligned}
$$

Consequentemente

$$
\begin{aligned}
(x_n - a)(x_{n+1} + x_{n-1} - 2a) = a\Bigg(&\frac{1}{2}\left(\frac{an}{x_n} - n - \eta\right)^2 + \frac{1}{2}\left(a\frac{x_n'}{x_n}\right)^2 \\
&+\eta\left(\frac{an}{x_n} - n - \eta + 1\right) - a\frac{x_n'}{x_n}\Bigg),
\end{aligned}
$$

que substituído em (4.73) nos fornece

$$
\begin{aligned}
&x_n'' = \left(x_n' - \frac{x_n}{a}\right)\frac{x_n'}{x_n} - \frac{2x_n(x_n - a)}{a^2} + \\
&\frac{x_n}{a(x_n - a)}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{an}{x_n} - n - \eta\right)^2 + \frac{1}{2}\left(a\frac{x_n'}{x_n}\right)^2 + \eta\left(\frac{an}{x_n} - n - \eta + 1\right) - a\frac{x_n'}{x_n}\right).
\end{aligned}
$$

Essa é uma equação diferencial não linear de segunda ordem para x_n. Queremos identificar tal equação como uma equação de Painlevé.

Note que a equação anterior pode ser reescrita como

$$
\begin{aligned}
x_n'' &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x_n} + \frac{1}{x_n - a}\right)(x_n')^2 - \frac{x_n}{a(x_n - a)}x_n' - \frac{2x_n(x_n - a)}{a^2} \\
&+\frac{an^2}{2}\frac{1}{x_n(x_n - a)} - \frac{n^2}{x_n - a} + \frac{n^2 - \eta^2 + 2\eta}{2a}\frac{x_n}{x_n - a}.
\end{aligned}
\tag{4.74}
$$

Essa equação contém $(x_n')^2$ e tem singularidades quando $x_n = 0$ e $x_n = a$, consequentemente ela é similar com a equação diferencial de Painlevé V ($\mathrm{P_V}$), mas $\mathrm{P_V}$ tem singularidades quando $y = 0$ e $y = 1$.

Seja a transformação

$$
x_n(a) = \frac{a}{1 - y(a)}.
$$

Calculando a primeira e segunda derivada, temos

$$
x_n'(a) = \frac{1 - y(a) + ay'(a)}{(1 - y(a))^2} \quad \text{e} \quad x_n''(a) = \frac{ay''(a)}{(1 - y(a))^2} + \frac{2y'(a)}{(1 - y(a))^2} + \frac{2a(y'(a))^2}{(1 - y(a))^3}.
$$

Considerando a partir desse momento a dependência de a implícita e substituindo x_n, x_n' e x_n''

na equação (4.74), obtemos

$$y'' = \Big(\frac{1}{2y} + \frac{1}{y-1}\Big)(y')^2 - \frac{y'}{a} + \frac{(1-y)^2}{a^2}\Big(\frac{n^2 y}{2} - \frac{(\eta-1)^2}{2y}\Big) - \frac{2y}{a},$$

e essa é a Painlevé V em (4.2), ou seja,

$$\mathrm{P_V}: \quad y'' = \Big(\frac{1}{2y} + \frac{1}{y-1}\Big)(y')^2 + \frac{y'}{x} + \frac{(y-1)^2}{x^2}\Big(\alpha y + \frac{\beta}{y}\Big) + \frac{\gamma y}{x} + \frac{\delta y(y+1)}{y-1},$$

com $x = -a$, $\alpha = \dfrac{n^2}{2}$, $\beta = -\dfrac{(\eta-1)^2}{2}$, $\gamma = 2$ e $\delta = 0$.

4.5 Polinômios no círculo unitário

Nesta seção estudamos a relação entre os polinômios ortogonais no círculo unitário com respeito a função peso

$$w_t(\theta) = \frac{1}{2\pi}e^{tcos(\theta)}, \quad \theta \in [0, 2\pi],$$

e as equações de Painlevé. Estes resultados são encontrados em [15] e [19].

Como já definido em (2.26), os polinômios Φ_n satisfazem a recorrência de Szegő

$$z\Phi_n(z;t) = \Phi_{n+1}(z;t) + \overline{\alpha_n(t)}\Phi_n^*(z;t), \tag{4.75}$$

onde $\Phi_n^*(z;t)$ é o polinômio recíproco e $\alpha_n(t)$ é o coeficiente de Verblunsky.

A compatibilidade entre a relação de estrutura (2.28) e a recorrência de Szegő (4.75) é apresentada no seguinte resultado, encontrado em [19].

Teorema 4.7. *(Periwal-Shevitz) Os coeficientes de Verblunsky $\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$ para os polinômios ortogonais sobre o círculo unitário com relação a função peso $w_t(\theta) = \frac{1}{2\pi}e^{tcos(\theta)}$ satisfazem a equação não linear*

$$-\frac{t}{2}(1-\alpha_n^2(t))(\alpha_{n+1}(t) + \alpha_{n-1}(t)) = (n+1)\alpha_n(t). \tag{4.76}$$

Os valores iniciais são $\alpha_{-1}(t) = -1$ e $\alpha_0(t) = \dfrac{\mu_1}{\mu_0}$, onde μ_k são os momentos.

Demonstração. Deixaremos a dependência de t implícita para simplificar os cálculos. Calculando a derivada da recorrência de Szegő (4.75), temos

$$\Phi_n(z) + z\Phi_n'(z) = \Phi_{n+1}'(z) + \alpha_n(\Phi_n^*)'(z),$$

pois os coeficientes de Verblunsky são todos reais, ou seja, $\alpha_n = \overline{\alpha_n}$.

Substituindo as derivadas Φ_n' e Φ_{n+1}' usando a relação de estrutura (2.28), obtemos

$$z(n\Phi_{n-1}(z) + B_n\Phi_{n-2}(z)) + \Phi_n(z) = (n+1)\Phi_n(z) + B_{n+1}\Phi_{n-1}(z) + \alpha_n(\Phi_n^*)'(z).$$

Agora, usando a recorrência de Szegő para substituir $z\Phi_{n-1}$ e $z\Phi_{n-2}$, temos

$$\begin{aligned} n(\Phi_n(z) + \alpha_{n-1}\Phi_{n-1}^*(z)) + B_n(\Phi_{n-1}(z) + \alpha_{n-2}\Phi_{n-2}^*(z)) + \Phi_n(z) \\ = (n+1)\Phi_n(z) + B_{n+1}\Phi_{n-1}(z) + \alpha_n(\Phi_n^*)'(z), \end{aligned}$$

ou, ainda,

$$n\alpha_{n-1}\Phi_{n-1}^*(z) + B_n\Phi_{n-1}(z) + \alpha_{n-2}B_n\Phi_{n-2}^*(z) = B_{n+1}\Phi_{n-1}(z) + \alpha_n(\Phi_n^*)'(z). \tag{4.77}$$

Como $\Phi_n^*(z) = \Phi_n(0)z^n + \ldots = -\alpha_{n-1}\Phi_n(z) + \ldots$, substituindo em (4.77), temos

$$\begin{aligned} n\alpha_{n-1}[-\alpha_{n-2}\Phi_{n-1}(z) + \ldots] + B_n\Phi_{n-1}(z) + B_n\alpha_{n-2}[-\alpha_{n-3}\Phi_{n-3}(z) + \ldots] \\ = B_{n+1}\Phi_{n-1}(z) + \alpha_n[-n\alpha_{n-1}\Phi_{n-1}(z) + \ldots]. \end{aligned}$$

Igualando os coeficientes de Φ_{n-1}, encontramos

$$-n\alpha_{n-1}\alpha_{n-2} + B_n = B_{n+1} - n\alpha_n\alpha_{n-1},$$

que nos fornece,

$$B_{n+1} - B_n = n\alpha_{n-1}(\alpha_n - \alpha_{n-2}).$$

Daí, usando a expressão (2.29) da Propriedade 2.13 para substituir os valores de B_n e B_{n+1}, concluímos que

$$\frac{t}{2}\left(\frac{k_{n-1}^2}{k_{n+1}^2} - \frac{k_{n-2}^2}{k_n^2}\right) = n\alpha_{n-1}(\alpha_n - \alpha_{n-2}).$$

Finalmente, com a expressão (2.27) e lembrando que os coeficientes de Verblunsky são reais, obtemos

$$\frac{t}{2}[(1-\alpha_{n-1}^2)(\alpha_{n-2}^2 - \alpha_n^2)] = n\alpha_{n-1}(\alpha_n - \alpha_{n-2}).$$

Substituindo $n-1$ por n na equação anterior, temos

$$\frac{t}{2}[(1-\alpha_n^2)(\alpha_{n-1}^2 - \alpha_{n+1}^2)] = (n+1)\alpha_n(\alpha_{n+1} - \alpha_{n-1}).$$

Note que o lado esquerdo da última equação pode ser escrito como

$$\frac{t}{2}[(1-\alpha_n^2)(\alpha_{n-1}^2 - \alpha_{n+1}^2)] = -\frac{t}{2}(1-\alpha_n^2)(\alpha_{n+1} + \alpha_{n-1})(\alpha_{n+1} - \alpha_{n-1}).$$

Então, encontramos a equação desejada, isto é,

$$-\frac{t}{2}(1-\alpha_n^2)(\alpha_{n+1}+\alpha_{n-1}) = (n+1)\alpha_n.$$

Para as condições iniciais, temos $\alpha_{-1} = -\Phi_0(0) = -1$ e $\alpha_0 = -\Phi_1(0)$, então $\Phi_1(z) = z - \alpha_0$. Note que,

$$\int_0^{2\pi} \Phi_1(z)\Phi_0(z)w_t(\theta)d\theta = 0,$$

e substituindo $\Phi_1(z) = z - \alpha_0$, ou seja,

$$\int_0^{2\pi} z\Phi_0(z)w_t(\theta)d\theta = \int_0^{2\pi} \alpha_0\Phi_0(z)w_t(\theta)d\theta,$$

obtemos

$$\alpha_0 = \frac{\int_0^{2\pi} zw_t(\theta)d\theta}{\int_0^{2\pi} w_t(\theta)d\theta},$$

que é a razão dos momentos, ou seja, $\alpha_0 = \mu_1/\mu_0$. □

A relação de recorrência não linear (4.76) corresponde a segunda equação discreta de Painlevé (4.4), ou seja,

$$\mathrm{dP_{II}}: \quad x_{n+1} + x_{n-1} = \frac{x_n(\alpha n + \beta) + a}{1 - x_n^2},$$

com $\alpha_n = x_n$, $\alpha = \beta = -2/t$ e $a = 0$.

Agora mostramos que além dos coeficientes de Verblunsky satisfazerem uma equação discreta de Painlevé, eles também satisfazem uma equação diferencial. Para isso vamos combinar as equações (4.76) e (3.11). Novamente, no que segue, a dependência de t ficará implícita. De (4.76), temos

$$\alpha_{n+1} + \alpha_{n-1} = -\frac{2(n+1)\alpha_n}{t(1-\alpha_n^2)}. \tag{4.78}$$

E de (3.11),

$$\alpha_{n+1} - \alpha_{n-1} = \frac{2\alpha_n'}{1-\alpha_n^2}. \tag{4.79}$$

Derivando (3.11) com relação a t, obtemos

$$2\alpha_n'' = -2\alpha_n\alpha_n'(\alpha_{n+1}-\alpha_{n-1}) + (1-\alpha_n^2)(\alpha_{n+1}' - \alpha_{n-1}').$$

Consequentemente, podemos usar (3.11) para substituir α_{n+1}' e α_{n-1}', e concluir que

$$2\alpha_n'' = -2\alpha_n\alpha_n'(\alpha_{n+1}-\alpha_{n-1}) + \frac{1}{2}(1-\alpha_n^2)[(1-\alpha_{n+1}^2)(\alpha_{n+2}-\alpha_n) - (1-\alpha_{n-1}^2)(\alpha_n - \alpha_{n-2})]. \tag{4.80}$$

De (4.78), obtemos

$$(1-\alpha_{n+1}^2)\alpha_{n+2} = -(1-\alpha_{n+1}^2)\alpha_n - \frac{2(n+2)}{t}\alpha_{n+1}, \tag{4.81}$$

$$(1-\alpha_{n-1}^2)\alpha_{n-2} = -(1-\alpha_{n-1}^2)\alpha_n - \frac{2n}{t}\alpha_{n-1}, \tag{4.82}$$

de fato,

$$\alpha_{n+2} + \alpha_n = -\frac{2(n+2)\alpha_{n+1}}{t(1-\alpha_{n+1}^2)},$$

ou seja,

$$(1-\alpha_{n+1}^2)\alpha_{n+2} = -\alpha_n(1-\alpha_{n+1}^2) - \frac{2(n+2)\alpha_{n+1}}{t}.$$

O cálculo de (4.82) é análogo.

Agora, substituindo (4.81) e (4.82) na equação (4.80), temos

$$2\alpha_n'' = -2\alpha_n\alpha_n'(\alpha_{n+1} - \alpha_{n-1}) + (1-\alpha_n^2)\alpha_n(\alpha_{n+1}^2 + \alpha_{n-1}^2 - 2)$$
$$-\frac{(1-\alpha_n^2)}{t}[(n+1)(\alpha_{n+1} + \alpha_{n-1}) + (\alpha_{n+1} - \alpha_{n-1})].$$

Consequentemente, usando o fato de que $(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2+b^2)$, onde $a = \alpha_{n+1}$ e $b = \alpha_{n-1}$, e usando as equações (4.78) e (4.79), encontramos

$$\alpha_n'' = -\frac{\alpha_n}{1-\alpha_n^2}(\alpha_n')^2 - \frac{\alpha_n'}{t} - \alpha_n(1-\alpha_n^2) + \frac{(n+1)^2}{t^2}\frac{\alpha_n}{1-\alpha_n^2}. \tag{4.83}$$

Considerando a transformação racional

$$\alpha_n = \frac{1+y}{1-y},$$

e calculando a primeira e a segunda derivada com relação a t, temos

$$\alpha_n' = \frac{2y'}{(1-y)^2} \quad \text{e} \quad \alpha_n'' = \frac{2y''(1-y) + 4(y')^2}{(1-y)^3}.$$

Substituindo esses valores em (4.83) e fazendo algumas manipulações, obtemos

$$y'' = \left(\frac{1}{2y} + \frac{1}{y-1}\right)(y')^2 - \frac{y'}{t} + \frac{(n+1)^2}{8t^2}(y-1)^2\left(y - \frac{1}{y}\right) - \frac{2y(y+1)}{y-1},$$

que é a quinta equação diferencial de Painlevé (4.2), ou seja,

$$\mathrm{P_V}: \quad y'' = \left(\frac{1}{2y} + \frac{1}{y-1}\right)(y')^2 + \frac{y'}{x} + \frac{(y-1)^2}{x^2}\left(\alpha y + \frac{\beta}{y}\right) + \frac{\gamma y}{x} + \frac{\delta y(y+1)}{y-1},$$

com $t = -x$, $\alpha = -\beta = \dfrac{(n+1)^2}{8}$, $\gamma = 0$ e $\delta = -2$.

5 CONCLUSÕES

Nesta dissertação estudamos a relação das equações diferenciais e equações discretas de Painlevé com os coeficientes da relação de recorrência de três termos de polinômios ortogonais semiclássicos. Para entendermos essas relações apresentamos os polinômios ortogonais clássicos e semiclássicos e uma propriedade importante deles que é a relação de estrutura. Mostramos também as equações do tipo Toda que foram importantes para relacionar os polinômios com as equações diferenciais de Painlevé. O interesse pelo estudo envolvendo as equações de Painlevé se dá pelo motivo de serem equações não lineares importantes na teoria de matrizes aleatórias, em sistemas integráveis, mecânica estatística, gravitação quântica em duas dimensões, entre outros.

O principal capítulo desse texto é o Capítulo 4, nele apresentamos as equações de Painlevé e, em seguida, relacionamos tais equações com alguns polinômios. Cada polinômio foi relacionado com uma equação discreta de Painlevé, apenas usando a relação de recorrência de três termos e a relação de estrutura associada. Mas, para encontrar a relação entre os polinômios semiclássicos e as equações diferenciais de Painlevé, foi necessário as equações do tipo Toda. Para os polinômios de Freud, relacionamos seus coeficientes com a equação de Langmuir. No caso dos polinômios de Laguerre semiclássicos e Charlier generalizados, relacionou-se os coeficientes com as equações de Toda. E, para os polinômios ortogonais no círculo unitário foi necessária a utilização da equação de Ablowitz-Ladik para fazer a conexão com as equações diferenciais.

Em resumo, vimos que os coeficientes da relação de recorrência dos polinômios de Freud estão relacionados com a dP_{I}, e também com a P_{IV}. No caso dos polinômios de Laguerre semiclássicos, tais coeficientes estão relacionados com uma representação assimétrica da dP_{IV} e com a P_{IV}, além disso, quando $t = 0$ na função peso, eles também se relacionam com a dP_{IV}. Para os polinômios de Charlier generalizados, vimos que os coeficientes se relacionam com a dP_{II} e também com a P_{V}. E, por fim, os coeficientes de Verblunsky dos polinômios ortogonais no círculo unitário estão relacionados com a dP_{II} e com a P_{V}.

REFERÊNCIAS

[1] BOELEN, L.; VAN ASSCHE, W. Discrete Painlevé equations for recurrence coefficients of semiclassical Laguerre polynomials. *Proceedings of the American Mathematical Society*, Providence, v. 138, n. 4, p. 1317–1331, 2010.

[2] BRACCIALI, C.; PÉREZ, T. Bivariate orthogonal polynomials, 2D Toda lattices and Lax-type pairs. *Applied Mathematics and Computation*, New York, v. 309, p. 142–155, 2017.

[3] BRANQUINHO, A. A note on semi-classical orthogonal polynomials. *Bulletin of the Belgian Mathematical Society Simon Stevin*, Brussels, v. 3, p. 1–12, 1996.

[4] CHIHARA, T. S. *An introduction to orthogonal polynomials*. New York: Gordon and Breach, 1978.

[5] CLARKSON, P. Recurrence coefficients for discrete orthonormal polynomials and the Painlevé equations. *Journal of Physics A*: mathematical and theoretical, Bristol, v. 46, n. 18, p. 1–18, 2013.

[6] CLARKSON, P.; JORDAAN, K.; KELIL, A. A generalized Freud weight. *Studies in Applied Mathematics*, Cambridge, v. 136, n. 3, p. 288–320, 2016.

[7] CORTELLA, M. S. *Mario Sergio Cortella*: faça o teu melhor. [*S. l.*], 24 set. 2018. Disponível em: https://youtu.be/dd1bsHYYqjg. Acesso em: 30 jan. 2020.

[8] DOMINICI, D.; MARCELLÁN, F. Discrete semiclassical orthogonal polynomials of class one. *Pacific Journal of Mathematics*, Berkeley, v. 268, n. 2, p. 389–411, 2014.

[9] DRAZIN, P.; JOHNSON, R. *Solitons*: an introduction. Cambridge: Cambridge University Press, 1989.

[10] FILIPUK, G.; REBOCHO, M. Differential equations for families of semi-classical orthogonal polynomials within class one. *Applied Numerical Mathematics*, Amsterdam, v. 124, p. 76–88, 2018.

[11] FILIPUK, G.; VAN ASSCHE, W.; ZANG, L. The recurrence coefficients of semi-classical Laguerre polynomials and the fourth Painlevé equation. *Journal of Physics A*: mathematical and theoretical, Bristol, v. 45, n. 20, p. 1–13, 2012.

[12] HENDRIKSEN, E.; VAN ROSSUM, H. Semi-classical orthogonal polynomials. *In*: BREZINSKI, C., DRAUX, A.; MAGNUS, A. P.; MARONI, P.; RONVEAUX, A. (ed.) Polynômes orthogonaux et applications. Berlin: Spring-Verlag, 1985. p. 354–361. (Lecture Notes in Mathematics, v. 1171).

[13] ISMAIL, M. E. H. *Classical and quantum orthogonal polynomials in one variable*. Cambridge: Cambridge University Press, 2005. (Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 98).

[14] NAKAMURA, Y. A new approach to numerical algorithms in terms of integrable systems, *In*: INTERNATIONAL CONFERENCE ON INFORMATICS RESEARCH FOR DEVELOPMENT OF KNOWLEDGE SOCIETY INFRASTRUCTURE, 12., 2004, [*S. l.*]. *Proceedings*[...] Piscataway: Institute of Electrical and Electronics Engineers, 2004. v. 309, p. 194–205.

[15] SIMON, B. *Orthogonal polynomials on the unit circle*: part I: classical theory. Providence: American Mathematical Society, 2005. (American Mathematical Society Colloquium Publications).

[16] SMET, C.; VAN ASSCHE, W. Orthogonal polynomials on a bi-lattice. *Constructive Approximation*: an international journal for approximations and expansions, New York, v. 36, p. 215–242, 2012.

[17] SZEGŐ, G. *Orthogonal polynomials*. Providence: American Mathematical Society, 1975. (American Mathematical Society Colloquium Publications).

[18] VAN ASSCHE, W. *Discrete Painlevé equations for recurrence coefficients of orthogonal polynomials*. Leuven: Katholieke Universiteit Leuven, Department of Mathematics, [*S.d.*].

[19] VAN ASSCHE, W. *Orthogonal Polynomials and Painlevé Equations*. Cambridge: Cambridge University Press, 2018.