



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Campus de São José do Rio Preto

Mirela Vanina de Mello

Zeros de Combinações Lineares de Polinômios

Tese de Doutorado

Pós-Graduação em Matemática

Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas
Rua Cristóvão Colombo, 2265
15054-000, São José do Rio Preto, São Paulo, Brasil
Telefone: (17) 3221-2444. Fax: (17) 3221-2445

Mirela Vanina de Mello

Zeros de Combinações Lineares de Polinômios

Tese apresentada para obtenção do título de doutor em Matemática, área de Análise Aplicada, junto ao Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista, Campus de São José do Rio Preto.

Orientador: Prof. Dr. Dimitar Kolev Dimitrov.

Coorientadora: Profa. Dra. Cleonice Fátima Bracciali.

São José do Rio Preto

2012

Mello, Mirela V..

Zeros de combinações lineares de polinômios/ Mirela Vanina de Mello. - São José do Rio Preto: [s.n.], 2012.

137 f.: il. ; 30 cm.

Orientador: Dimitar Kolev Dimitrov

Coorientadora: Cleonice Fátima Bracciali

Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Polinômios ortogonais. 2. Polinômios—Combinações lineares.
3. Zeros. I. Dimitrov, Dimitar Kolev. II. Bracciali, Cleonice Fátima.
III. Universidade Estadual Paulista, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. IV. Título.

CDU - 517.587

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do IBILCE
Campus de São José do Rio Preto - UNESP

Mirela Vanina de Mello

Zeros de Combinações Lineares de Polinômios

Tese apresentada para obtenção do título de doutor em Matemática, área de Análise Aplicada, junto ao Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista, Campus de São José do Rio Preto.

Banca Examinadora

Prof. Dr. Dimitar Kolev Dimitrov
Professor Titular/ UNESP - São José do Rio Preto
Orientador

Prof. Dr. Roberto Andreani
Professor Livre Docente/ UNICAMP - Campinas

Prof. Dr. Luis Gustavo Nonato
Professor Livre Docente/ USP - São Carlos

Profa. Dra. Eliana Xavier Linhares de Andrade
Professor Livre Docente/ UNESP - São José do Rio Preto

Prof. Dr. German Jesus Lozada Cruz
Professor Doutor/ UNESP - São José do Rio Preto

São José do Rio Preto, 20 de julho de 2012.

Por vezes sentimos que aquilo que fazemos
não é senão uma gota de água no mar.
Mas o mar seria menor se lhe faltasse uma gota.

Madre Teresa de Calcutá

*Aos meus pais, Wanderlei e Nádia,
às minhas irmãs, Milena e Miriana e
à minha querida afilhada Yasmin,
ofereço.*

*Ao meu amor, André,
dedico.*

Agradecimentos

A Deus, por guiar e iluminar meu caminho.

Um agradecimento especial ao Prof. Dimitar, por compartilhar parte da sua imensa sabedoria e de suas maravilhosas histórias, pela compreensão, amizade e incentivo.

À minha coorientadora Profa. Cleonice, pelo apoio constante e atenção dedicadas a mim sempre com muito carinho e paciência.

A todos os professores do departamento, em especial à Profa. Eliana e ao Prof. Ranga pelas atenciosas sugestões e também ao Prof. Fernando pelas valiosas contribuições.

Aos professores Miguel, Mayte, Lidia, Andrei e Juan José da *Universidad de Granada* e da *Universidad de Almería*, pela hospitalidade e profissionalismo com que nos acolheram.

Ao meu amor André, que sempre esteve ao meu lado nos momentos mais difíceis, pelo carinho, paciência, incentivo e pela compreensão na ausência, que foram fundamentais para a realização deste trabalho.

Aos meus estimados pais Wanderlei e Nádia, por todo amor e principalmente pelo apoio e sacrifício nestes anos que vivemos tão longe.

Às minhas queridas irmãs Milena e Miriana e à minha sobrinha Yasmin, pelo apoio incondicional.

A todos os professores e funcionários, amigos da graduação e pós-graduação que, direta ou indiretamente, contribuíram para a concretização desta tese e também pelo companheirismo em todos os momentos.

À CAPES, pelo auxílio financeiro.

Resumo

Neste trabalho, estudamos propriedades dos zeros de polinômios ortogonais do tipo Sobolev. Provamos resultados sobre entrelaçamento, monotonicidade e assintótica. Fornecemos, também, condições necessárias e/ou suficientes para os zeros dos polinômios $\{S_n\}_{n \geq 0}$, gerados pela fórmula

$$S_n(x) = P_n(x) + a_{n-1}P_{n-1}(x),$$

ou

$$S_n(x) - b_{n-1}S_{n-1}(x) = P_n(x),$$

onde $\{P_n\}_{n \geq 0}$ é uma sequência de polinômios ortogonais, serem todos reais.

Palavras-chave: Polinômios ortogonais, Zeros, Combinações lineares de polinômios.

Abstract

We study various properties of the zeros of Sobolev type orthogonal polynomials. Results on interlacing, monotonicity and asymptotic are proved. We also provide general necessary and/or sufficient conditions in order to the zeros of the polynomials $\{S_n\}_{n \geq 0}$, generated by the formulae

$$S_n(x) = P_n(x) + a_{n-1}P_{n-1}(x),$$

or

$$S_n(x) - b_{n-1}S_{n-1}(x) = P_n(x),$$

where $\{P_n\}_{n \geq 0}$ is a sequence of orthogonal polynomials, are all real.

Keywords: Orthogonal polynomials, Zeros, Linear combination of polynomials.

Sumário

1	Introdução	11
2	Polinômios Ortogonais	19
2.1	Polinômios ortogonais	19
2.1.1	Polinômios ortonormais	22
2.1.2	Polinômios núcleo	26
2.2	Quadratura gaussiana	26
2.3	Polinômios ortogonais clássicos	28
2.3.1	Polinômios de Jacobi	28
2.3.2	Polinômios de Laguerre	29
2.3.3	Polinômios de Hermite	30
3	Resultados Auxiliares da Análise Clássica	31
3.1	Polinômios e zeros de polinômios	32
3.1.1	Teorema de Obrechhoff e generalizações	32
3.1.2	Algoritmo de Euclides para polinômios	36
3.1.3	Teorema de Sturm	37
3.2	Matriz de Hurwitz	44
3.3	Resultante e discriminante	47
3.4	Equações de diferença	51
3.4.1	Equações de diferença: caso linear	52
3.4.2	Sistemas de equações de diferença	53
4	Zeros dos Polinômios Ortogonais do Tipo Jacobi-Sobolev	55
4.1	Resultados preliminares	55
4.2	Polinômios do tipo Jacobi-Sobolev, $P_n^{(\alpha,\beta,M,N)}$	57

4.2.1	Zeros de $P_n^{(\alpha,\beta,M,N)}$	60
4.3	Polinômios ortogonais do tipo Jacobi	64
4.3.1	Zeros de $P_n^{(\alpha,\beta,M)}$	66
4.3.2	Zeros de $P_n^{(\alpha,\beta,M,\tilde{M})}$	70
4.4	Polinômios do tipo Jacobi-Sobolev, $P_n^{(\alpha,\beta,N)}$	76
4.4.1	Zeros de $P_n^{(\alpha,\beta,N)}$	77
5	Zeros de Polinômios Ortogonais do Tipo Sobolev: um Caso Geral	80
5.1	Comportamento dos zeros de $P_n^{(\phi,\lambda,c,j)}$	81
5.2	Aplicações às medidas clássicas	89
5.2.1	Polinômios de Jacobi	89
5.2.2	Polinômios de Laguerre	92
5.3	Questões em aberto	94
6	Zeros de Combinações Lineares de Polinômios	96
6.1	Resultados preliminares	97
6.2	Zeros dos polinômios S_n	99
6.2.1	Zeros de combinações lineares de n polinômios	101
6.3	Ortogonalidade dos polinômios S_n	107
6.3.1	Aplicação para os polinômios ortonormais de Chebyshev	108
6.4	Localização dos zeros de combinações lineares de polinômios	124
6.4.1	Localização dos zeros dos polinômios S_n	125
6.5	Propostas futuras	129
7	Considerações Finais	130
	Referências Bibliográficas	132

Capítulo 1

Introdução

Seja ϕ uma função real, limitada, não decrescente, definida no intervalo (a, b) , $-\infty \leq a < b \leq \infty$, e com infinitos pontos de aumento em (a, b) , tal que os momentos

$$\mu_n^\phi = \int_a^b x^n d\phi(x), \quad n = 0, 1, \dots,$$

são finitos. Então, dizemos que ϕ é uma distribuição e $d\phi$ uma medida em (a, b) .

Uma sequência de polinômios $\{P_n^\phi\}_{n=0}^\infty$ é chamada de sequência de polinômios ortogonais com relação à medida $d\phi$ no intervalo (a, b) , se P_n^ϕ é de grau exatamente n e

$$\langle P_m^\phi, P_n^\phi \rangle_\phi = \int_a^b P_m^\phi(x) P_n^\phi(x) d\phi(x) = \begin{cases} 0, & \text{para } m \neq n \\ \rho_n^\phi > 0, & \text{para } m = n \end{cases}. \quad (1.1)$$

Esses polinômios satisfazem a muitas propriedades e por essa razão são aplicados na solução de diversos problemas da Matemática e das Ciências Aplicadas. Uma propriedade importante é que os zeros desses polinômios são reais, distintos e pertencem ao intervalo (a, b) . Ademais, os zeros de P_n^ϕ e P_{n-1}^ϕ se entrelaçam, isto é, se $x_{n,1} < x_{n,2} < \dots < x_{n,n}$ e $x_{n-1,1} < x_{n-1,2} < \dots < x_{n-1,n-1}$ denotam os zeros de P_n^ϕ e P_{n-1}^ϕ , respectivamente, então $x_{n,1} < x_{n-1,1} < x_{n,2} < \dots < x_{n,n-1} < x_{n-1,n-1} < x_{n,n}$.

Os zeros dos polinômios ortogonais são alvo de estudos de muitos autores. Uma das motivações mais importantes para seu estudo é o fato deles serem os nós das mais utilizadas fórmulas de quadratura, as de Gauss. Essas fórmulas possuem o maior grau de precisão algébrica, o que implica que elas aproximam, da maneira mais eficiente possível, integrais de funções suficientemente suaves.

Há vasta literatura sobre o comportamento dos zeros de polinômios ortogonais conhecidos, dentre eles, os polinômios ortogonais de Jacobi, Laguerre e Hermite. Esses polinômios, denominados de polinômios ortogonais clássicos, são muito utilizados por

satisfazerem a inúmeras propriedades. Por exemplo, eles são soluções de equações diferenciais de segunda ordem, podem ser obtidos explicitamente pela fórmula de Rodrigues e possuem a propriedade que, se derivarmos um polinômio de uma família de polinômios ortogonais, o novo polinômio pertencerá a essa mesma família. Para mais detalhes sobre polinômios ortogonais e fórmulas de quadratura de Gauss, o leitor pode consultar os textos clássicos de Chihara [16], Freud [25], Krylov [39], Stroud e Secrest [60] e Szegő [61].

A sequência de polinômios $\{Q_n\}_{n=0}^{\infty}$, ortogonais com relação ao produto interno de Sobolev

$$\langle p, q \rangle = \sum_{k=0}^N \int_a^b p^{(k)}(x)q^{(k)}(x)d\phi_k(x),$$

onde $d\phi_k$ são medidas em (a, b) , é conhecida como sequência de polinômios ortogonais de Sobolev.

Quando uma sequência de polinômios $\{P_n^{(\phi, \hat{\lambda}, \hat{c})}\}$, com $\hat{\lambda} = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_r)$ e $\hat{c} = (c_0, c_1, \dots, c_r)$, é ortogonal com relação ao produto interno

$$\langle p, q \rangle_{\phi, \hat{\lambda}, \hat{c}} = \int_a^b p(x)q(x)d\phi(x) + \sum_{i=0}^r \lambda_i p^{(i)}(c_i)q^{(i)}(c_i), \quad (1.2)$$

dizemos que essa sequência é uma sequência de polinômios ortogonais do tipo Sobolev, onde $\lambda_i \geq 0$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $c_i \in \mathbb{R}$, $p^{(i)}(c_i)$ e $q^{(i)}(c_i)$ denotam a derivada de ordem i de p e q , respectivamente, avaliadas nos pontos c_i , para $i = 0, 1, \dots, r$. Por exemplo, se $d\phi$ é a medida de Jacobi, ou seja,

$$d\phi(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta dx,$$

esses polinômios são chamados de polinômios ortogonais do tipo Jacobi-Sobolev. Para $r = 0$, essa sequência se reduz à sequência de polinômios ortogonais do tipo Jacobi. Vale mencionar que para alguns casos particulares de medida, de r e de c_i , os polinômios ortogonais do tipo Sobolev satisfazem uma equação diferencial. Mais detalhes sobre este assunto, o leitor pode consultar, por exemplo, [9], [20] e [22].

Tanto os polinômios ortogonais do tipo Sobolev quanto os polinômios ortogonais de Sobolev, em geral, não satisfazem às mesmas propriedades dos polinômios ortogonais associados ao produto interno (1.1). Por exemplo, eles não possuem uma relação de recorrência de três termos e os zeros desses polinômios podem não ser reais e simples. Eles podem ser complexos e, se forem reais, é possível, ainda, que não pertençam ao intervalo de ortogonalidade.

Saber o comportamento dos zeros desses polinômios é alvo de interesse de muitos pesquisadores. Por essa razão, esse tema vem sendo abordado em vários trabalhos, como, por exemplo, Alfaro, López e Rezola [1], Andrade, Bracciali, Mello e Pérez [7], Andrade, Bracciali e Sri Ranga [8], Bruin, Groenevelt e Meijer [14], Groenevelt [31], Huertas, Marcellán e Rafaeli [34], Marcellán e Ronveaux [45] e Meijer e Bruin [51]. Em geral, para analisar o comportamento dos zeros desses polinômios, representamos os polinômios $P_n^{(\phi, \hat{\lambda}, \hat{c})}$ ou S_n como uma combinação linear de outros polinômios cujos zeros possuem comportamentos conhecidos ou, pelo menos, mais fáceis de serem analisados.

Considerando a combinação linear de polinômios da forma

$$S_n(x) = P_n(x) + a_{n-1}P_{n-1}(x), \quad n \geq 1, \quad (1.3)$$

com $S_0(x) = 1$ e $a_n \in \mathbb{R}$, onde os zeros de P_n e P_{n-1} se entrelaçam, podemos dizer, pelo Teorema de Obrechhoff, que os zeros de S_n são reais, simples e se entrelaçam com os zeros de P_n e P_{n-1} . Note que esse resultado vale quando P_n e P_{n-1} são polinômios ortogonais da mesma família. Além disso, utilizando um resultado do artigo de Bracciali, Dimitrov e Sri Ranga [10], podemos concluir que esses zeros são funções monótonas de a_{n-1} . Em [18], desenvolvemos uma técnica para obter o comportamento assintótico dos zeros de S_n quando a_{n-1} tende ao infinito.

Nesta tese, o primeiro objetivo é estudar os zeros dos polinômios ortogonais do tipo Sobolev. O método que utilizamos consiste em representá-los como combinações lineares de dois polinômios cujos zeros são distintos e se entrelaçam e, então, aplicar as técnicas mencionadas no parágrafo anterior.

Um dos casos que consideramos é o dos polinômios ortogonais do tipo Jacobi-Sobolev, $P_n^{(\alpha, \beta, M, N, \tilde{M}, \tilde{N})}$, que são ortogonais com relação ao produto interno

$$\begin{aligned} \langle p, q \rangle &= \frac{\Gamma(\alpha + \beta + 2)}{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(\beta + 1)} \int_{-1}^1 p(x)q(x)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta dx \\ &\quad + Mp(1)q(1) + Np'(1)q'(1) + \tilde{M}p(-1)q(-1) + \tilde{N}p'(-1)q'(-1). \end{aligned} \quad (1.4)$$

Esses polinômios vêm sendo amplamente estudados. Informações sobre seus zeros podem ser encontrados, por exemplo, nos trabalhos de Alfaro, Marcellán e Rezola [2], Alfaro, Marcellán, Rezola e Ronveaux [3], Arvesú, Álvarez-Nodarse, Marcellán e Pan [9] e Dueñas e Garza [19]. Nosso objetivo é estudar a localização dos zeros dos polinômios ortogonais do tipo Jacobi-Sobolev com respeito aos zeros dos polinômios de Jacobi e com relação ao

intervalo $(-1, 1)$ e analisar a monotonicidade e o comportamento assintótico desses zeros como funções dos parâmetros M, N, \tilde{M} e \tilde{N} .

No trabalho de Dimitrov, Marcellán e Rafaeli [17], um estudo completo dos zeros foi realizado para os polinômios ortogonais do tipo Laguerre-Sobolev $L_n^{(\alpha, M, N)}$, ortogonais com relação ao produto interno

$$\langle p, q \rangle = \int_0^\infty p(x)q(x)x^\alpha e^{-x} dx + Mp(0)q(0) + Np'(0)q'(0), \quad (1.5)$$

com $\alpha > -1$ e $M, N > 0$.

Através da relação limite entre os polinômios de Jacobi e Laguerre, ou seja, como

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \lim_{\beta \rightarrow \infty} P_n^{(\alpha, \beta)}(1 - 2\beta^{-1}x),$$

nossos resultados generalizam os encontrados em [17].

Outro objetivo da nossa pesquisa é o estudo dos polinômios $P_n^{(\phi, \lambda, c, j)}$, ortogonais com relação ao produto interno do tipo Sobolev

$$\langle p, q \rangle_{\phi, \lambda, c, j} = \int_a^b p(x)q(x)d\phi(x) + \lambda p^{(j)}(c)q^{(j)}(c). \quad (1.6)$$

Meijer [50] realizou a primeira pesquisa sobre os zeros de $P_n^{(\phi, \lambda, c, j)}$ e demonstrou que esse polinômio possui n zeros reais, distintos e no máximo um deles está localizado fora do intervalo (a, b) . Meijer demonstrou também que os zeros desses polinômios se entrelaçam com os zeros dos polinômios usuais P_n^ϕ . Em alguns outros trabalhos, como no de Dimitrov, Marcellán e Rafaeli [17], Dueñas e Marcellán [21, 22], Marcellán, Pérez e Piñar [41] e no de Meijer [49], também foram estudados os zeros desses polinômios, mas na maioria dos casos foram considerados medidas específicas, ou $j = 1$ ou o ponto c é um dos pontos extremos do intervalo de ortogonalidade a ou b . Aqui, analisamos o comportamento dos zeros de $P_n^{(\phi, \lambda, c, j)}$, com $d\phi$ sendo uma medida qualquer, o ponto c sendo algum valor fora do intervalo (a, b) e j sendo qualquer inteiro positivo.

O terceiro objetivo desta tese é motivado por um problema geral formulado pelo renomado professor Francisco Marcellán da *Universidad Carlos III de Madrid*. Ele propôs o estudo dos zeros de uma combinação linear de polinômios inversa à dada na expressão (1.3), ou seja, dada uma sequência de polinômios ortogonais P_n^ϕ , o que se pode dizer sobre os zeros dos polinômios S_n dados pela relação

$$S_n(x) + a_{n-1}S_{n-1}(x) = P_n^\phi(x), \quad (1.7)$$

onde $a_n \in \mathbb{R}$? Esta relação aparece, por exemplo, quando os polinômios S_n são casos particulares dos polinômios ortogonais de Sobolev.

A seguir descrevemos os capítulos que compõem esta tese.

No Capítulo 2, apresentamos as definições, principais propriedades e resultados sobre os polinômios ortogonais, como, por exemplo, a fórmula de recorrência de três termos, algumas propriedades dos zeros, os Teoremas de Favard, de Markoff e de Wendroff e aproximações para medidas através dos determinantes de Turán. Além disso, elaboramos um breve resumo sobre as fórmulas de quadratura de Gauss.

No Capítulo 3, estabelecemos resultados inéditos sobre os zeros de combinações lineares de polinômios que são de suma importância para a solução de problemas dos capítulos seguintes. Ademais, relatamos alguns resultados clássicos da análise, como o algoritmo de Euclides e o Teorema de Sturm. Através deles, conseguimos mostrar que, dados dois polinômios cujos zeros se entrelaçam, é possível construir uma sequência de polinômios ortogonais à qual esses polinômios pertencem, isto é, elucidamos a demonstração do Teorema de Wendroff. Além disso, relacionamos a matriz de Hurwitz com a resultante de dois polinômios e condições para os zeros de polinômios serem reais. Ainda nesse capítulo, fornecemos um breve resumo de fatos sobre equações de diferença e suas soluções, que são essenciais para o desenvolvimento de resultados do último capítulo.

No Capítulo 4, estudamos os polinômios do tipo Jacobi-Sobolev $P_n^{(\alpha, \beta, M, N, \tilde{M}, \tilde{N})}$, ortogonais com relação ao produto interno (1.4). Para estudar os zeros desses polinômios, é de extrema importância encontrar uma relação na qual os polinômios $P_n^{(\alpha, \beta, M, N, \tilde{M}, \tilde{N})}$ são representados por uma combinação linear de polinômios cujos zeros se entrelaçam. A partir dessas relações, dividimos o estudo dos zeros nos seguintes casos:

- Para $\tilde{M} = \tilde{N} = 0$, mostramos que os zeros do polinômio ortogonal do tipo Jacobi-Sobolev $P_n^{(\alpha, \beta, M, N, 0, 0)}$ são reais, distintos, se entrelaçam com os zeros dos polinômios ortogonais de Jacobi $P_n^{(\alpha, \beta)}$ e, além disso, no máximo o último zero está fora do intervalo de ortogonalidade $(-1, 1)$. Ademais, fornecemos o valor de N_0 , que não depende de M , tal que o maior zero não pertence ao intervalo $(-1, 1)$.
- Para $N = \tilde{M} = \tilde{N} = 0$, mostramos que os zeros do polinômio ortogonal do tipo Jacobi $P_n^{(\alpha, \beta, M, 0, 0, 0)}$ se entrelaçam com os zeros dos polinômios de Jacobi $P_n^{(\alpha, \beta)}$ e $P_{n-1}^{(\alpha+2, \beta)}$, e todos os zeros de $P_n^{(\alpha, \beta, M, 0, 0, 0)}$ pertencem ao intervalo $(-1, 1)$. Mostramos, também, que os zeros são funções crescentes do parâmetro M , sendo que o maior zero

converge para 1 e os demais convergem para os zeros do polinômio de Jacobi $P_{n-1}^{(\alpha+2,\beta)}$ quando $M \rightarrow \infty$. Além disso, apresentamos uma expressão para a velocidade de convergência.

- Para $N = \tilde{N} = 0$, mostramos que os zeros do polinômio de Jacobi $P_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}$ separam os zeros do polinômio ortogonal do tipo Jacobi, $P_n^{(\alpha,\beta,M,0,\tilde{M},0)}$, e os zeros desse último polinômio são funções crescentes de M e decrescente de \tilde{M} . Esses zeros também convergem para os zeros de um dado polinômio quando $M \rightarrow \infty$ e para os zeros de um outro polinômio quando $\tilde{M} \rightarrow \infty$. Quando M e \tilde{M} vão para infinito simultaneamente, os zeros de $P_n^{(\alpha,\beta,M,0,\tilde{M},0)}$ convergem para os zeros dos polinômios de Jacobi $P_{n-2}^{(\alpha+2,\beta+2)}$, sendo que o menor e maior zeros convergem para -1 e 1 , respectivamente.
- Finalmente, para $M = \tilde{M} = \tilde{N} = 0$, mostramos que os zeros do polinômio ortogonal do tipo Jacobi-Sobolev $P_n^{(\alpha,\beta,0,N,0,0)}$ se entrelaçam com os zeros dos polinômios de Jacobi $P_n^{(\alpha,\beta)}$ e, também, com os zeros de um certo polinômio F_n e, neste caso, os zeros de $P_n^{(\alpha,\beta,0,N,0,0)}$ convergem para os zeros do polinômio F_n quando $M \rightarrow \infty$. A velocidade de convergência também é apresentada.

Essa minuciosa análise dos zeros de $P_n^{(\alpha,\beta,M,N,\tilde{M},\tilde{N})}$ foi publicada em 2010 na revista *Applied Numerical Mathematics* em colaboração com Fernando R. Rafaeli e Dimitar K. Dimitrov (veja [18]).

Obtivemos resultados semelhantes no Capítulo 5 para os zeros dos polinômios do tipo Sobolev $P_n^{(\phi,\lambda,c,j)}$, ortogonais com relação ao produto interno (1.6). Demonstramos uma nova propriedade de entrelaçamento dos zeros de $P_n^{(\phi,\lambda,c,j)}$ com os zeros do polinômio

$$G_n(c, j; x) := P_n^\phi(x) - \frac{K_{n-1}^{(j,0)}(c, x)}{K_{n-1}^{(j,j)}(c, c)} \frac{d^j P_n^\phi}{dx^j} \Big|_{x=c},$$

onde $K_{n-1}^{(r,s)}(x, y)$ denota o polinômio núcleo generalizado. Mostramos, também, que quando λ tende ao infinito, os zeros de $P_n^{(\phi,\lambda,c,j)}$ convergem monotonicamente para os zeros de $G_n(c, j; x)$ com velocidade de convergência da ordem de $1/\lambda$. Além disso, mostramos que, para determinados valores do parâmetro λ , um dos zeros do polinômio ortogonal do tipo Sobolev está fora do intervalo de ortogonalidade (a, b) . Esses resultados generalizam os encontrados na literatura em três aspectos: são verdadeiros para qualquer medida, para todo ponto c tal que $c \in (-\infty, a] \cup [b, +\infty)$ e para todo $j \geq 1$. Eles foram organizados

no artigo [15] aceito para publicação na revista *Applied Numerical Mathematics* e está disponível *online first*.

No último capítulo, Capítulo 6, apresentamos resultados de estudos realizados recentemente. Analisamos o comportamento dos zeros da combinação linear (1.7) e mostramos que a sequência de polinômios $\{S_n\}_{n \geq 0}$ satisfaz a uma relação de recorrência de quatro termos. Também apresentamos condições necessárias para que os zeros de S_n sejam reais, distintos e se entrelacem com os zeros de S_{n-1} . Além disso, mostramos que, se a sequência $\{a_n\}_{n \geq 0}$ satisfaz a uma relação recursiva, os polinômios S_n também são polinômios ortogonais e, portanto, seus zeros são reais, distintos e pertencentes ao intervalo $(-1, 1)$. Aplicamos esses resultados quando os polinômios p_n coincidem com os polinômios de Chebyshev de segunda espécie, que é um caso particular dos polinômios de Jacobi, e encontramos a função peso w com relação à qual S_n é um polinômio ortogonal no intervalo $(-1, 1)$. Por fim, determinamos regiões às quais pertencem os zeros de S_n , através da localização dos autovalores de uma matriz que é uma perturbação da matriz de Jacobi.

Para ilustrar alguns resultados contidos nesta tese, realizamos experimentos numéricos utilizando o *software Wolfram Mathematica*.

Até a presente data, publicamos os seguintes trabalhos:

- (1) ANDRADE, E.X.L.; BRACCIALI, C.F.; MELLO, M.V.; PÉREZ, T.E. Zeros of Jacobi-Sobolev orthogonal polynomials following non-coherent pair of measures. *Comput. Appl. Math.*, v. 29, p. 423-445, 2010.
- (2) CASTILLO, K.; MELLO, M.V.; RAFAELI, F.R. Monotonicity and asymptotics of zeros of Sobolev type orthogonal polynomials: a general case. *Appl. Num. Math.*, 2012. In Press.
- (3) DIMITROV, D.K.; MELLO, M.V.; RAFAELI, R.R. Monotonicity of zeros of Jacobi-Sobolev type orthogonal polynomials. *Appl. Num. Math.*, v. 60, p. 263-276, 2010.
- (4) MELLO, M.V.; PASCHOA, V.G.; PÉREZ, T.E.; PIÑAR, M.A. Multivariate Sobolev -type orthogonal polynomials. *Jaen J. Approx.*, v. 3, p. 241-259, 2011.

Nesta tese, como já mencionado, apresentamos detalhadamente os resultados encontrados nos artigos (2) e (3), onde fizemos uma análise completa dos zeros dos polinômios

ortogonais do tipo Sobolev num caso geral e do tipo Jacobi-Sobolev, respectivamente. O primeiro artigo trata dos zeros dos polinômios ortogonais de Jacobi-Sobolev. Estes resultados foram obtidos através dos estudos realizados durante o curso de mestrado finalizado em fevereiro de 2008. Finalmente, como consequência de pesquisa, efetuada durante um estágio de doutorado sanduíche na Espanha com apoio financeiro da CAPES, publicamos o trabalho (4) que também estuda os polinômios ortogonais do tipo Sobolev mas, neste caso, em várias variáveis. Pelo fato deste artigo não tratar de questões relacionadas a zeros, os resultados não se encontram nesta tese.

Capítulo 2

Polinômios Ortogonais

Neste capítulo apresentamos resultados conhecidos sobre polinômios ortogonais e fórmulas de quadratura gaussianas, cujas demonstrações podem ser encontradas nos textos clássicos de Chihara [16], Freud [25], Krylov [39], Stroud e Secrest [60] e Szegő [61]. Além disso, enunciamos teoremas importantes que envolvem os polinômios ortogonais, como os Teoremas de Wendroff, de Favard e de Markoff, e o resultado sobre aproximação da função peso usando os determinantes de Turán.

2.1 Polinômios ortogonais

Consideremos ϕ uma função real, limitada, não decrescente, definida no intervalo (a, b) , $-\infty \leq a < b \leq \infty$, e o conjunto

$$\mathfrak{C}(\phi) = \{x \mid \phi(x + \delta) - \phi(x - \delta) > 0 \text{ para todo } \delta > 0\}.$$

Os pontos $x \in \mathfrak{C}$ são chamados pontos de aumento de ϕ . O produto interno

$$\langle f, g \rangle_\phi = \int_a^b f(x)g(x)d\phi(x) \tag{2.1}$$

é definido positivo se o conjunto \mathfrak{C} é infinito. Além disso, \mathfrak{C} é chamado suporte de $d\phi$. A condição de que a função ϕ tem infinitos pontos de aumento garante que

$$\int_a^b p(x)d\phi(x) > 0,$$

para qualquer polinômio $p(x) \geq 0$, mas não identicamente nulo.

Seja ϕ uma função definida no intervalo (a, b) , limitada, não decrescente e com infinitos pontos de aumento, cujos momentos

$$\mu_n^\phi = \int_a^b x^n d\phi(x), \quad n = 0, 1, \dots,$$

são finitos. Então, ϕ é chamada de distribuição e $d\phi$ de medida (positiva) em (a, b) .

Quando a função ϕ é absolutamente contínua, podemos escrever $d\phi(x) = w(x)dx$, onde w é uma função não-negativa e não identicamente nula. Neste caso, chamamos w de função peso.

Além disso, dizemos que uma medida $d\phi$ é simétrica quando é definida em um intervalo $(-a, a)$, $0 < a \leq \infty$ e satisfaz $d\phi(-x) = d\phi(x)$.

A sequência de polinômios $\{P_n^\phi\}_{n=0}^\infty$ é chamada de sequência de polinômios ortogonais com relação à medida $d\phi$ no intervalo (a, b) , se P_n^ϕ é de grau exatamente n e

$$\langle P_m^\phi, P_n^\phi \rangle_\phi = \int_a^b P_m^\phi(x) P_n^\phi(x) d\phi(x) = \begin{cases} 0, & \text{para } m \neq n \\ \rho_n^\phi > 0, & \text{para } m = n \end{cases}. \quad (2.2)$$

Note que, sob essas condições, a sequência $\{P_n^\phi\}_{n=0}^\infty$ forma uma base para o espaço dos polinômios. Assim,

$$\langle Q_m, P_n^\phi \rangle_\phi = \int_a^b Q_m(x) P_n^\phi(x) d\phi(x) = \begin{cases} 0, & \text{para } m < n \\ q_{n,n} \rho_n^\phi \neq 0, & \text{para } m = n \end{cases}, \quad (2.3)$$

onde Q_m é qualquer polinômio de grau exatamente m e $q_{m,m}$ é o coeficiente do termo de maior grau desse polinômio. Aqui, consideramos os polinômios ortogonais P_n^ϕ mônicos, ou seja, seu coeficiente do termo de maior grau é igual a 1. Os polinômios P_n^ϕ satisfazem à propriedade extremal, ou seja,

$$\langle P_n^\phi, P_n^\phi \rangle_\phi \leq \langle Q_n, Q_n \rangle_\phi, \quad (2.4)$$

onde Q_n é qualquer polinômio mônico de grau n . Podemos facilmente mostrar as propriedades (2.3) e (2.4) escrevendo Q_m e Q_n como combinações lineares dos polinômios ortogonais P_n^ϕ e utilizando a relação de ortogonalidade de P_n^ϕ .

Os polinômios ortogonais satisfazem a uma relação de recorrência de três termos e, quando mônicos, é dada por

$$P_{n+1}^\phi(x) = (x - \beta_{n+1}^\phi) P_n^\phi(x) - \alpha_{n+1}^\phi P_{n-1}^\phi(x), \quad n \geq 1, \quad (2.5)$$

com $P_0^\phi(x) = 1$, $P_1^\phi(x) = x - \beta_1^\phi$ e os coeficientes α_{n+1}^ϕ e β_{n+1}^ϕ são dados por

$$\alpha_{n+1}^\phi = \frac{\rho_n^\phi}{\rho_{n-1}^\phi} \quad \text{e} \quad \beta_{n+1}^\phi = \frac{\langle xP_n^\phi, P_n^\phi \rangle_\phi}{\rho_n^\phi}, \quad (2.6)$$

onde

$$\rho_n^\phi = \int_a^b [P_n^\phi(x)]^2 d\phi(x) = \alpha_{n+1}^\phi \alpha_n^\phi \dots \alpha_3^\phi \alpha_2^\phi \mu_0^\phi, \quad n \geq 1. \quad (2.7)$$

A recíproca desse resultado também é válida e é conhecida como Teorema de Favard.

Teorema 2.1. [Favard] *Dada uma sequência de polinômios mônicos $\{P_n\}_{n \geq 0}$, que satisfaz à relação de recorrência de três termos*

$$P_n(x) = (x - \beta_n)P_{n-1}(x) - \alpha_n P_{n-1}(x), \quad n = 2, 3, \dots,$$

com $P_0(x) = 1$ e $P_1(x) = x - \beta_1$, sendo que $\beta_n \in \mathbb{R}$ e $\alpha_{n+1} > 0$, para $n \geq 1$, então existe uma medida $d\phi$ com relação à qual a sequência de polinômios $\{P_n\}_{n \geq 0}$ é ortogonal.

Os zeros dos polinômios ortogonais P_n^ϕ são reais, distintos e estão no intervalo (a, b) . Além disso, se denotamos por $x_{n,1}, x_{n,2}, \dots, x_{n,n}$ os zeros de P_n^ϕ , $n \geq 1$, em ordem crescente, então

$$x_{n,1} < x_{n-1,1} < x_{n,2} < x_{n-1,2} < \dots < x_{n,n-1} < x_{n-1,n-1} < x_{n,n}.$$

Quando a desigualdade acima é satisfeita, dizemos que os zeros de P_{n-1}^ϕ separam os zeros de P_n^ϕ ou que os zeros de P_{n-1}^ϕ e P_n^ϕ se entrelaçam.

Encontramos, ainda, em Szegő [61] o seguinte resultado.

Teorema 2.2. [Markoff] *Sejam $w(x, \tau)$ uma função peso no intervalo (a, b) dependendo do parâmetro τ tal que $w(x, \tau)$ é positiva e contínua para $a < x < b$ e $\tau_1 < \tau < \tau_2$, P_n^τ o polinômio ortogonal com respeito a $w(x, \tau)$ e $x_{n,k}^\tau$, $k = 1, 2, \dots, n$, seus zeros. Suponhamos a existência e continuidade da derivada parcial*

$$\frac{\partial w(x, \tau)}{\partial \tau},$$

para $a < x < b$ e $\tau_1 < \tau < \tau_2$ e a convergência das integrais

$$\int_a^b x^k \frac{\partial w(x, \tau)}{\partial \tau} dx, \quad k = 0, 1, \dots, 2n - 1,$$

uniformemente em todo intervalo fechado $\tau' \leq \tau \leq \tau''$ do segmento aberto (τ_1, τ_2) . Então, $x_{n,k}^\tau$ é uma função crescente (decrescente) de τ se

$$\frac{\partial \log[w(x, \tau)]}{\partial \tau}$$

é uma função crescente (decrescente) de x , $a < x < b$.

Quando dois polinômios de graus consecutivos possuem somente zeros reais, simples e que se entrelaçam, então podemos incluí-los em uma sequência de polinômios ortogonais. Esse resultado pode ser encontrado em [65] e é conhecido como Teorema de Wendroff. No próximo capítulo daremos uma demonstração que elucida a demonstração original dada por Wendroff.

Teorema 2.3. [Wendroff] *Sejam $a < x_1 < x_2 < \dots < x_n < b$ e $x_i < y_i < x_{i+1}$, $i = 1, 2, \dots, n-1$. Então, existe uma sequência de polinômios $\{P_n^\phi\}_{n \geq 0}$, ortogonais em (a, b) , tais que $P_n^\phi(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$ e $P_{n-1}^\phi(x) = (x - y_1)(x - y_2) \dots (x - y_{n-1})$.*

2.1.1 Polinômios ortonormais

A sequência de polinômios $\{p_n^\phi\}_{n \geq 0}$ é ortonormal com relação a $d\phi$ no intervalo (a, b) , se p_n^ϕ é de grau exatamente n e

$$\langle p_m^\phi, p_n^\phi \rangle_\phi = \int_a^b p_m^\phi(x) p_n^\phi(x) d\phi(x) = \begin{cases} 0, & \text{para } m \neq n \\ 1, & \text{para } m = n \end{cases}. \quad (2.8)$$

Seja $\{P_n^\phi\}_{n \geq 0}$ uma sequência de polinômios ortogonais com respeito a $d\phi$ e normalizados de forma que o primeiro momento seja igual a um, ou seja,

$$\mu_0^\phi = 1.$$

Suponhamos que esses polinômios satisfaçam à relação de recorrência

$$\zeta_{n+1}^\phi P_n^\phi(x) = (x - \beta_n^\phi) P_{n-1}^\phi(x) - \alpha_n^\phi P_{n-2}^\phi(x), \quad n \geq 2, \quad (2.9)$$

com $P_0^\phi(x) = 1$ e $\zeta_2^\phi P_1^\phi(x) = x - \beta_1^\phi$.

A partir dos polinômios P_n^ϕ , podemos construir os correspondentes polinômios ortonormais p_n^ϕ da seguinte forma,

$$p_0^\phi(x) = 1 \quad \text{e} \quad p_n^\phi(x) = \left(\frac{\zeta_2^\phi \zeta_3^\phi \dots \zeta_{n+1}^\phi}{\alpha_2^\phi \alpha_3^\phi \dots \alpha_{n+1}^\phi} \right)^{1/2} P_n^\phi(x). \quad (2.10)$$

Esses polinômios satisfazem à relação de recorrência de três termos

$$\sqrt{\zeta_{n+1}^\phi \alpha_{n+1}^\phi} p_n^\phi(x) = (x - \beta_n^\phi) p_{n-1}^\phi(x) - \sqrt{\zeta_n^\phi \alpha_n^\phi} p_{n-2}^\phi(x), \quad n \geq 1, \quad (2.11)$$

com $p_0^\phi(x) = 1$ e $\sqrt{\zeta_2^\phi \alpha_2^\phi} p_1^\phi(x) = x - \beta_1^\phi$.

Esse resultado pode ser encontrado em [36].

Observe que se $\zeta_n^\phi = 1$ para $n \geq 2$, os polinômios P_n^ϕ são mônicos e os correspondentes polinômios ortonormais são dados por

$$p_n^\phi(x) = \frac{P_n^\phi(x)}{\left(\alpha_2^\phi \alpha_3^\phi \dots \alpha_{n+1}^\phi\right)^{1/2}} = \frac{P_n^\phi(x)}{\sqrt{\langle P_n^\phi, P_n^\phi \rangle}}$$

e satisfazem à relação de recorrência de três termos

$$\sqrt{\alpha_{n+1}^\phi} p_n^\phi(x) = (x - \beta_n^\phi) p_{n-1}^\phi(x) - \sqrt{\alpha_n^\phi} p_{n-2}^\phi(x), \quad n \geq 1, \quad (2.12)$$

onde $p_0^\phi(x) = 1$ e $\sqrt{\alpha_2^\phi} p_1^\phi(x) = x - \beta_1^\phi$.

Afim de simplificar a relação (2.12), definimos $\delta_{n+1}^\phi := \sqrt{\alpha_{n+1}^\phi}$ e obtemos

$$\delta_{n+1}^\phi p_n^\phi(x) = (x - \beta_n^\phi) p_{n-1}^\phi(x) - \delta_n^\phi p_{n-2}^\phi(x), \quad n \geq 1. \quad (2.13)$$

Determinantes de Turán

O Teorema de Favard garante que se uma sequência de polinômios $\{p_n\}_{n \geq 0}$ satisfaz à relação de recorrência (2.13) com os coeficientes δ_n e β_n , tais que $\delta_n > 0$ e $\beta_n \in \mathbb{R}$, existe uma medida $d\phi$ com relação à qual esses polinômios são ortonormais. Mas, como é essa medida?

Dados os polinômios ortonormais com relação à medida $d\phi$, é possível encontrar uma aproximação para $d\phi$. Essa aproximação é encontrada através dos determinantes de Turán. Denotamos por $\{p_n^\phi\}_{n \geq 0}$ a sequência de polinômios ortonormais com relação à medida $d\phi$ e por δ_n^ϕ e β_n^ϕ os coeficientes da relação de recorrência de três termos.

Definição 2.1. Os determinantes de Turán são definidos por

$$\begin{aligned} D_n(x) &= [p_n^\phi(x)]^2 - \frac{\delta_{n+2}^\phi}{\delta_{n+1}^\phi} p_{n+1}^\phi(x) p_{n-1}^\phi(x) \\ &= \frac{1}{\delta_{n+1}^\phi} \begin{vmatrix} p_n^\phi(x) & \delta_{n+2}^\phi p_{n+1}^\phi(x) \\ p_{n-1}^\phi(x) & \delta_{n+1}^\phi p_n^\phi(x) \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

O nome Determinante de Turán é usado em homenagem a Paul Turán [62] que foi o primeiro a estudá-los.

Através desses determinantes, é possível encontrar a função peso w com relação à qual os correspondentes polinômios são ortonormais. Esse resultado pode ser encontrado, por exemplo, em [46], [47] e [64] e é apresentado a seguir.

Teorema 2.4. *Se as condições de Nevai são satisfeitas, ou seja,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n^\phi = \frac{1}{2}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n^\phi = 0 \quad (2.14)$$

e os coeficientes da relação de recorrência são de variação limitada, isto é,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \delta_{n+2}^\phi - \delta_{n+3}^\phi \right| + \left| \beta_{n+1}^\phi - \beta_{n+2}^\phi \right| < \infty,$$

então ϕ é absolutamente contínua em $(-1, 1)$, ou seja, podemos escrever $d\phi(x) = w(x)dx$, com w estritamente positiva e contínua em $(-1, 1)$. Além disso,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D_n(x) = \frac{2 \sqrt{1-x^2}}{\pi w(x)}$$

uniformemente em todo subconjunto compacto de $(-1, 1)$.

Observe que, para $n \rightarrow \infty$, o termo $\frac{\delta_{n+2}^\phi}{\delta_{n+1}^\phi} \rightarrow 1$ e, portanto, podemos retirá-lo do determinante de Turán e definí-lo apenas por

$$D_n(x) = [p_n^\phi(x)]^2 - p_{n+1}^\phi(x)p_{n-1}^\phi(x).$$

Em [27], o Teorema 2.4 foi estendido para vários intervalos. Para apresentar tal generalização, é necessário primeiro definir os determinantes de Turán deslocados.

Definição 2.2. *Os determinantes de Turán deslocados são definidos por*

$$\begin{aligned} D_n(x; N) &= p_n^\phi(x)p_{n-N+1}^\phi(x) - \frac{\delta_{n+2}^\phi}{\delta_{n-N+2}^\phi} p_{n+1}^\phi(x)p_{n-N}^\phi(x) \\ &= \frac{1}{\delta_{n-N+2}^\phi} \begin{vmatrix} p_n^\phi(x) & \delta_{n+2}^\phi p_{n+1}^\phi(x) \\ p_{n-N}^\phi(x) & \delta_{n-N+2}^\phi p_{n-N+1}^\phi(x) \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Ao invés de (2.14), vamos supor, aqui, que são dadas duas sequências periódicas $\delta_{n+1}^\psi > 0$ e $\beta_n^\psi \in \mathbb{R}$, $n \geq 1$, isto é,

$$\begin{aligned} \delta_{n+N}^\psi &= \delta_n^\psi, \quad n \geq 2, \\ \beta_{n+N}^\psi &= \beta_n^\psi, \quad n \geq 1, \end{aligned} \quad (2.15)$$

em que os coeficientes δ_{n+1}^ψ e β_n^ψ , $n \geq 1$, satisfazem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \delta_{n+1}^\phi - \delta_{n+1}^\psi \right| = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |\beta_n^\phi - \beta_n^\psi| = 0. \quad (2.16)$$

Dizemos, neste caso, que os polinômios ortonormais possuem os coeficientes da relação de recorrência de três termos assintoticamente periódicos e $N \geq 1$ é o período.

Vamos denotar por q_n^ψ os polinômios ortonormais cujos coeficientes da relação de recorrência de três termos δ_{n+1}^ψ e β_n^ψ são assintoticamente periódicos. Definimos

$$\omega^N(x) := \rho \left(\frac{1}{2} \left\{ q_N^\psi(x) - \frac{\delta_{N+1}^\psi}{\delta_{N+2}^\psi} q_{N-2}^{(1)}(x) \right\} \right),$$

onde

$$\rho(x) = x + \sqrt{x^2 - 1},$$

e $q_n^{(1)}$ são os polinômios associados a q_n^ψ , isto é, $q_n^{(1)}$ satisfaz à mesma relação de recorrência de três termos que q_n^ψ , porém deslocado, ou seja, $\delta_{n+1}^{(1)} = \delta_n^\psi$ e $\beta_{n+1}^{(1)} = \beta_n^\psi$.

Sejam

$$T(x) = \frac{1}{2} \left(q_N^\psi(x) - \frac{\delta_{N+1}^\psi}{\delta_{N+2}^\psi} q_{N-2}^{(1)}(x) \right)$$

e E o conjunto de N intervalos onde

$$-1 \leq T(x) \leq 1.$$

O conjunto $\{x : [\omega^N(x)]^2 = 1\}$ consiste dos pontos extremos dos N intervalos, sendo que é possível que alguns dos intervalos tenham pontos extremos em comum em $[\omega^N(x)]^2 = 1$.

Nas condições anteriores, apresentamos a generalização do Teorema 2.4.

Teorema 2.5. *Se a condição (2.16) é satisfeita e os coeficientes da relação de recorrência são de variação limitada módulo N , isto é,*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \delta_{n+2}^\phi - \delta_{n+N+2}^\phi \right| + \left| \beta_{n+1}^\phi - \beta_{n+N+1}^\phi \right| < \infty,$$

então ϕ é absolutamente contínua em $E \setminus \{[\omega^N(x)]^2 = 1\}$, ou seja, podemos escrever $d\phi(x) = w(x)dx$, com w estritamente positiva e contínua em $E \setminus \{[\omega^N(x)]^2 = 1\}$. Além disso, para todo j , com $1 \leq j \leq N - 1$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D_{nN+j}(x; N) = \frac{1}{\pi \delta_{j+1}^\psi} \frac{\sqrt{1 - T(x)^2}}{w(x)} \text{ sinal}[T'(x)]$$

uniformemente em todo subconjunto compacto de $E \setminus \{[\omega^N(x)]^2 = 1\}$.

2.1.2 Polinômios núcleo

Os polinômios núcleo são definidos por

$$K_n(x, y) = \sum_{k=0}^n p_k^\phi(x) p_k^\phi(y),$$

onde p_k^ϕ , $k = 0, \dots, n$, são ortonormais com relação à medida $d\phi$ no intervalo (a, b) . Esses polinômios também são conhecidos como polinômios reprodutores pois satisfazem

$$\int_a^b K_n(x, y) Q(x) d\phi(x) = Q(y),$$

onde Q é um polinômio arbitrário de grau até n .

Podem ainda ser dados por

$$K_n(x, y) = \frac{l_{n,n}^\phi}{l_{n-1,n-1}^\phi} \frac{p_{n+1}^\phi(x) p_n^\phi(y) - p_n^\phi(x) p_{n+1}^\phi(y)}{x - y},$$

onde $l_{n,n}^\phi$ denota o coeficiente do termo de maior grau de p_n^ϕ .

Para $x_0 \leq a$ ou $x_0 \geq b$, a sequência de polinômios $\{K_n(x, x_0)\}_{n \geq 0}$ é ortogonal em (a, b) com relação à medida

$$|x - x_0| d\phi(x).$$

Além disso, os zeros de $K_n(x, x_0)$ se entrelaçam com os zeros de p_n^ϕ .

2.2 Quadratura gaussiana

Uma das motivações mais importantes para o estudo dos zeros dos polinômios ortogonais é o fato deles serem os nós das mais utilizadas fórmulas de quadratura, as de Gauss.

Consideremos integrais da forma

$$I(f) = \int_a^b f(x) d\phi(x),$$

onde $d\phi$ é uma medida definida em (a, b) tal que $-\infty \leq a < b \leq \infty$. Sejam $a \leq x_{n,1} < x_{n,2} < \dots < x_{n,n} \leq b$, n pontos distintos em $[a, b]$. As quadraturas numéricas consistem em aproximar a integral de uma função $I(f)$ por uma combinação linear de n valores da função da forma

$$Q_n(f) = \sum_{i=1}^n W_{n,i} f(x_{n,i}),$$

cujos pesos $W_{n,i}$, $i = 1, 2, \dots, n$ são dados por

$$W_{n,i} = \frac{1}{\pi'(x_{n,i})} \int_a^b \frac{\pi(x)}{x - x_{n,i}} d\phi(x)$$

e $\pi(x) = (x - x_{n,1})(x - x_{n,2}) \dots (x - x_{n,n})$ é conhecido como polinômio dos nós.

Quando π é o polinômio ortogonal com relação a $d\phi$, então a fórmula de quadratura é exata para todos os polinômios de grau no máximo $2n - 1$, ou seja, tem grau de precisão algébrico $2n - 1$. Neste caso, o erro, isto é, $E_n(f) = I(f) - Q_n(f)$ é nulo se f é um polinômio de grau até $2n - 1$. Em outras palavras, $I(f) = Q_n(f)$ sempre que f for um polinômio de grau até $2n - 1$. O fato dessa fórmula de quadratura possuir o maior possível grau de precisão algébrico, que é $2n - 1$, implica que ela é a que melhor aproxima integrais de funções suficientemente suaves. Para sermos mais precisos, dentre todas as regras de quadratura com n nós, se $f \in C^{2n}[a, b]$, a fórmula de Gauss possui o menor erro possível. Consequentemente, ela fornece a melhor aproximação da integral $I(f)$. Por esse motivo, derivado da propriedade extremal (2.4), os pacotes numéricos, em geral, utilizam as fórmulas de quadratura de Gauss para cálculos aproximados de integrais. Essas fórmulas são conhecidas como Fórmulas de Quadratura Gaussianas ou Fórmulas de Quadratura de Gauss. Neste caso, se $f \in C^{2n}[a, b]$, então o erro dessa aproximação, $E_n(f)$, é dado por

$$E_n(f) = \frac{f^{(2n)}(\eta)}{(2n)!} \int_a^b \pi^2(x) d\phi(x), \quad a < \eta < b. \quad (2.17)$$

É claro que, dado um número natural n , o problema de determinar os n nós e os n pesos $W_{n,i}$ não é linear. Mas, como já mencionado, uma das principais características das fórmulas de quadratura de Gauss é que seus nós são exatamente os zeros dos polinômios ortogonais com relação a $d\phi$. Desta forma, se determinarmos os zeros desses polinômios, o problema de se obter a fórmula de quadratura reduz-se somente ao cálculo dos coeficientes $W_{n,i}$, o que torna o problema linear e, portanto, bastante acessível. Logo, essas fórmulas são um motivo bastante importante para estudarmos os zeros de polinômios ortogonais. Há vasta literatura sobre o comportamento dos zeros dos polinômios ortogonais conhecidos, dentre eles os polinômios ortogonais de Jacobi, Laguerre e Hermite, que veremos na seção a seguir.

2.3 Polinômios ortogonais clássicos

Os polinômios ortogonais de Jacobi (incluindo os casos especiais de Legendre, Chebyshev e Gegenbauer), Laguerre e Hermite são denominados polinômios ortogonais clássicos. Esses polinômios possuem muitas propriedades interessante, mas apresentamos, nesta seção, as mais importantes e que podem ser encontradas em [16], [25] e [61].

2.3.1 Polinômios de Jacobi

Os polinômios de Jacobi, denotados por $P_n^{(\alpha,\beta)}$, são ortogonais no intervalo $(-1, 1)$ com relação à função peso

$$w(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta, \quad \alpha > -1, \quad \beta > -1.$$

Esses polinômios podem ser definidos pela fórmula de Rodrigues dada por

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(-1)^n \Gamma(n+\alpha+\beta)}{\Gamma(2n+\alpha+\beta)} (1-x)^{-\alpha} (1+x)^{-\beta} \frac{d^n}{dx^n} [(1-x)^{n+\alpha} (1+x)^{n+\beta}]$$

quando estão na forma mônica, onde

$$\Gamma(t) = \int_0^\infty e^{-x} x^{t-1} dx, \quad t \in \mathbb{C} \text{ e } \operatorname{Re}(t) > 0$$

é a conhecida função Gama. Para detalhes sobre a função Gama, o leitor pode consultar [57].

Eles também podem ser dados explicitamente por

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \binom{2n+\alpha+\beta}{n}^{-1} \sum_{m=0}^n \binom{n+\alpha}{n-m} \binom{n+\beta}{m} (x-1)^m (x+1)^{n-m}, \quad (2.18)$$

em que

$$\binom{a}{b} = \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(b+1)\Gamma(a-b+1)}.$$

Os polinômios de Jacobi podem, ainda, ser obtidos através da relação de recorrência de três termos

$$P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x) = (x - \beta_{n+1}^{(\alpha,\beta)}) P_n^{(\alpha,\beta)}(x) - \alpha_{n+1}^{(\alpha,\beta)} P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x), \quad n \geq 1,$$

com

$$\alpha_{n+1}^{(\alpha,\beta)} = \frac{4n(n+\alpha)(n+\beta)(n+\alpha+\beta)}{(2n+\alpha+\beta-1)(2n+\alpha+\beta)^2(2n+\alpha+\beta+1)}, \quad (2.19)$$

$$\beta_{n+1}^{(\alpha,\beta)} = \frac{\beta^2 - \alpha^2}{(2n+\alpha+\beta+2)(2n+\alpha+\beta)}, \quad (2.20)$$

$P_0^{(\alpha,\beta)}(x) = 1$ e $P_1^{(\alpha,\beta)}(x) = x + \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta + 2}$. Além disso,

$$\rho_n^{(\alpha,\beta)} = \langle P_n^{(\alpha,\beta)}, P_n^{(\alpha,\beta)} \rangle = \frac{2^{2n+\alpha+\beta+1} n! \Gamma(n+\alpha+1) \Gamma(n+\beta+1) \Gamma(n+\alpha+\beta+1)}{\Gamma(2n+\alpha+\beta+2) \Gamma(2n+\alpha+\beta+1)}. \quad (2.21)$$

Esses polinômios satisfazem à seguinte relação diferencial

$$[P_n^{(\alpha,\beta)}(x)]' = n P_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(x).$$

Casos especiais dos polinômios de Jacobi são:

- i) os polinômios de Legendre, P_n , com $\alpha = \beta = 0$;
- ii) os polinômios de Chebyshev de primeira espécie, T_n , com $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$;
- iii) os polinômios de Chebyshev de segunda espécie, U_n , com $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$;
- iv) os polinômios de Gegenbauer, também conhecidos como polinômios Ultrasféricos, $G_n^{(\lambda)}$, com $\alpha = \beta = \lambda - \frac{1}{2}$.

2.3.2 Polinômios de Laguerre

Os polinômios de Laguerre, denotados por $L_n^{(\alpha)}$, são ortogonais no intervalo $(0, \infty)$ com relação à função peso

$$w(x) = x^\alpha e^{-x}, \quad \alpha > -1.$$

Podem ser definidos pela fórmula de Rodrigues:

$$L_n^{(\alpha)}(x) = (-1)^n x^{-\alpha} e^x \frac{d^n}{dx^n} [x^{n+\alpha} e^{-x}]$$

quando estão na forma mônica ou pela forma explícita

$$L_n^{(\alpha)}(x) = (-1)^n n! \sum_{m=0}^n \frac{(-1)^m}{m!} \binom{n+\alpha}{n-m} x^m.$$

Esses polinômios satisfazem à seguinte relação de recorrência de três termos

$$L_{n+1}^{(\alpha)}(x) = [x - (2n + \alpha + 1)] L_n^{(\alpha)}(x) - n(n + \alpha) L_{n-1}^{(\alpha)}(x), \quad n \geq 1, \quad (2.22)$$

com $L_0^{(\alpha)}(x) = 1$ e $L_1^{(\alpha)}(x) = x - (\alpha + 1)$ e, além disso,

$$\rho_n^{(\alpha)} = n! \Gamma(n + \alpha + 1). \quad (2.23)$$

Os polinômios de Laguerre satisfazem, ainda, à seguinte relação diferencial

$$[L_n^{(\alpha)}(x)]' = nL_{n-1}^{(\alpha+1)}(x)$$

e a relação

$$L_n^{(\alpha)}(x) + nL_{n-1}^{(\alpha)}(x) = L_n^{(\alpha-1)}(x). \quad (2.24)$$

2.3.3 Polinômios de Hermite

Os polinômios de Hermite, denotados por H_n , são ortogonais no intervalo $(-\infty, \infty)$ com relação à função peso

$$w(x) = e^{-x^2}.$$

Eles podem ser definidos pela fórmula de Rodrigues

$$H_n(x) = (-1)^n \frac{e^{x^2}}{2^n} \frac{d^n}{dx^n} [e^{-x^2}]$$

quando estão na forma mônica. Na forma explícita, são dados por

$$H_n(x) = \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^m n! x^{n-2m}}{4^m m! (n-2m)!},$$

onde $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ denota o maior inteiro menor ou igual a $\frac{n}{2}$.

Estes polinômios também podem ser obtidos através da relação de recorrência de três termos

$$H_{n+1}(x) = xH_n(x) - \frac{n}{2}H_{n-1}(x), \quad n \geq 1, \quad (2.25)$$

com $H_0(x) = 1$ e $H_1(x) = x$ e, além disso,

$$\rho_n^{(\alpha)} = \frac{\sqrt{\pi}n!}{2^n}.$$

Os polinômios de Hermite satisfazem, ainda, à seguinte relação diferencial

$$H_n'(x) = nH_{n-1}(x).$$

Capítulo 3

Resultados Auxiliares da Análise Clássica

Neste capítulo, apresentamos alguns resultados clássicos sobre polinômios e zeros de polinômios como, por exemplo, o Teorema de Obrechhoff, o Algoritmo de Euclides e o Teorema de Sturm. Apresentamos, também, um breve resumo sobre equações de diferença lineares de onde podemos obter a forma explícita dos polinômios ortogonais. Por fim, fornecemos uma relação entre a matriz de Hurwitz, a resultante de dois polinômios e zeros de polinômios.

Além de apresentarmos esses resultados clássicos, estabelecemos alguns fatos inéditos que utilizamos na análise nos próximos capítulos e que, certamente, são interessantes por si só, pois fornecem ferramentas para solucionar problemas semelhantes aos discutidos nesta tese. Uma dessas contribuições permite determinar o comportamento assintótico dos zeros de polinômios da forma

$$p(x) + c q(x) \tag{3.1}$$

através da assintótica do coeficiente c e da combinação linear. Vale mencionar que vários polinômios, como os polinômios ortogonais do tipo Sobolev, permitem representação da forma (3.1), onde geralmente o coeficiente c depende de vários parâmetros.

As considerações gerais sobre o algoritmo de Euclides, os teoremas clássicos de Sturm e de Favard nos permitiram obter, como consequência imediata, o Teorema de Wendroff, que afirma que quaisquer dois polinômios de graus consecutivos com zeros que se entrelaçam podem ser incluídos em uma sequência de polinômios ortogonais. Apesar da

ideia original de Wendroff ser semelhante, a nossa abordagem elucida melhor a natureza do Teorema de Wendroff.

3.1 Polinômios e zeros de polinômios

Dados dois polinômios que possuem somente zeros reais, simples e que se entrelaçam, um importante resultado sobre os zeros de combinações lineares desses polinômios é o Teorema de Obrechhoff, que pode ser encontrado, por exemplo, em [53].

3.1.1 Teorema de Obrechhoff e generalizações

Teorema 3.1. [Obrechhoff] *Sejam $p(x) = a_n(x-x_1)\dots(x-x_n)$ e $q(x) = b_n(x-y_1)\dots(x-y_n)$ polinômios com coeficientes reais, $a_n > 0$ e $b_n > 0$, cujos zeros se entrelaçam. Definindo*

$$h(x) = p(x) + c q(x),$$

obtemos que

- i) se $x_1 < y_1 < \dots < x_n < y_n$, então, para toda constante $c > 0$, o polinômio h tem n zeros reais $z_1 < \dots < z_n$ que se entrelaçam com os zeros de p e q da seguinte forma:*

$$x_1 < z_1 < y_1 < \dots < x_n < z_n < y_n; \quad (3.2)$$

- ii) se $y_1 < x_1 < \dots < y_n < x_n$, então, para todo $c > 0$, o polinômio h tem n zeros reais $z_1 < \dots < z_n$ que se entrelaçam com os zeros de p e q da seguinte forma:*

$$y_1 < z_1 < x_1 < \dots < y_n < z_n < x_n. \quad (3.3)$$

Demonstração: Demonstramos, aqui, apenas o item *i)* pois a prova de *ii)* é análoga. Uma vez que p e q são polinômios que possuem os coeficientes dos termos de maior grau positivos e $x_1 < y_1 < \dots < x_n < y_n$, temos

$$\text{senal}[h(x_k)] = \text{senal}[q(x_k)] = (-1)^{n-k+1}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Daí, existem $n - 1$ zeros z_1, \dots, z_{n-1} de h tais que

$$x_1 < z_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < z_{n-1} < x_n.$$

A existência de $z_n > x_n$ segue de $h(x_n) < 0$ e do fato de que $h(x) \rightarrow +\infty$ quando $n \rightarrow +\infty$. Usando raciocínio análogo, provamos que

$$z_1 < y_1 < \cdots < z_n < y_n$$

e, assim, concluímos que (3.2) vale. ■

A monotonicidade dos zeros da combinação linear de dois polinômios, apresentada a seguir, pode ser encontrada em [10].

Teorema 3.2. *Sejam $p(x) = a_n(x - x_1) \cdots (x - x_n)$ e $q(x) = b_n(x - y_1) \cdots (x - y_n)$ polinômios com coeficientes reais, $a_n > 0$ e $b_n > 0$, cujos zeros se entrelaçam. Definindo*

$$h(x) = p(x) + c q(x),$$

e denotando por $z_1 < z_2 < \cdots < z_n$ os zeros de h , então

- i) se $x_1 < y_1 < \cdots < x_n < y_n$, então, para toda constante $c > 0$, cada $z_k = z_k(c)$ é uma função crescente de c ;*
- ii) se $y_1 < x_1 < \cdots < y_n < x_n$, concluímos que, para todo $c > 0$, cada $z_k = z_k(c)$ é uma função decrescente de c .*

Demonstração: Novamente, como a demonstração dos itens *i)* e *ii)* são análogas, nos limitamos a demonstrar apenas *i)*. Para provar a monotonicidade dos zeros de h com relação a c , definimos o polinômio $h_\varepsilon(x)$ por

$$h_\varepsilon(x) = p(x) + (c + \varepsilon)q(x),$$

com $\varepsilon \geq 0$, e denotamos seus zeros por $z_1(\varepsilon) < \cdots < z_n(\varepsilon)$. É fácil ver que $z_k = z_k(0)$ e

$$h_\varepsilon(x) = h(x) + \varepsilon q(x).$$

Portanto, $h_\varepsilon(z_k) = \varepsilon q(z_k)$ e, então, para $\varepsilon > 0$,

$$\text{signal}[h_\varepsilon(z_k)] = \text{signal}[q(z_k)] = (-1)^{n-k+1} \tag{3.4}$$

devido à propriedade de entrelaçamento (3.2). Assim, $z_k < z_k(\varepsilon)$ ou, em outras palavras, cada zero z_k é uma função crescente de c . ■

Nossa principal contribuição sobre esse assunto foi a obtenção do comportamento assintótico dos zeros de uma combinação linear de dois polinômios utilizando uma metodologia nova e simples que gera uma ferramenta muito poderosa, como veremos nos Capítulos 4 e 5. Para apresentarmos nosso resultado, que pode ser encontrado em [18], enunciamos primeiramente o Teorema de Hurwitz (veja referência [61]).

Teorema 3.3. [Hurwitz] *Seja $\{f_n\}$ uma sequência de funções analíticas regulares na região G , tal que essa sequência é uniformemente convergente em cada subconjunto fechado de G . Suponha que a função analítica $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f(x)$ não seja identicamente nula. Se $x = x_0$ é um zero de f com multiplicidade k , então existem $\delta > 0$ e $N > 0$ tal que para $n > N$, f_n tem exatamente k zeros em $|x - x_0| < \delta$. Além disso, dada que $f_n(x)$ é real para x real, se $x = x_0$ é um zero real e simples de f , então para $n > N$ cada f_n tem exatamente um zero real em $|x - x_0| < \delta$.*

Teorema 3.4. *Sejam $p(x) = a_n(x - x_1) \cdots (x - x_n)$ e $q(x) = b_n(x - y_1) \cdots (x - y_n)$, $a_n > 0$ e $b_n > 0$, polinômios com coeficientes reais e com zeros que se entrelaçam. Definindo*

$$h(x) = p(x) + c q(x),$$

e denotando por $z_k = z_k(c)$ os zeros de h , $k = 1, 2, \dots, n$, então, para toda constante $c > 0$,

$$\lim_{c \rightarrow \infty} z_k = y_k \quad e \quad \lim_{c \rightarrow \infty} c[y_k - z_k] = \frac{p(y_k)}{q'(y_k)}, \quad k = 1, \dots, n. \quad (3.5)$$

Demonstração: Vamos definir o polinômio \hat{h} da seguinte maneira

$$\hat{h}(x) := \frac{1}{c} p(x) + q(x).$$

Note que os zeros de h e \hat{h} são os mesmos para $c > 0$, pois

$$\hat{h}(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{c} p(x) + q(x) = 0 \Leftrightarrow p(x) = -c q(x) \Leftrightarrow h(x) = p(x) + c q(x) = 0.$$

Como

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \hat{h}(x) = q(x),$$

pelo Teorema de Hurwitz, os zeros z_k de h convergem para os zeros y_k de q quando c tende ao infinito, isto é,

$$\lim_{c \rightarrow \infty} z_k = y_k, \quad k = 1, \dots, n.$$

Consideremos primeiramente $x_k < z_k < y_k$, $k = 1, \dots, n$. Usando o Teorema do Valor Médio aplicado à função $cq(x)$ no intervalo $[z_k, y_k]$, existem números reais θ_k entre z_k e y_k , tais que

$$\frac{cq(y_k) - cq(z_k)}{y_k - z_k} = cq'(\theta_k)$$

ou, equivalentemente,

$$c[y_k - z_k] = \frac{p(z_k)}{q'(\theta_k)}.$$

Por outro lado, p e q são polinômios com zeros simples. Como $q'(y_k) \neq 0$, então existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$m_k = \min \{|q'(x)| : x \in [y_k - \delta_1, y_k]\} \neq 0.$$

Seja $\varepsilon > 0$. Assim, existe $\delta_2 > 0$, com $\delta_2 < \delta_1$, tal que

$$|p(x) - p(y_k)| < \frac{\varepsilon m_k}{2} \quad \text{e} \quad |q(x) - q(y_k)| < \frac{\varepsilon m_k^2}{2|p(y_k)|}$$

quando $x \in [y_k - \delta_2, y_k]$. Uma vez que $z_k, \theta_k \rightarrow y_k$ quando $c \rightarrow \infty$, então existe $c_0 > 0$ tal que, para todo $c > c_0$, $z_k, \theta_k \in [y_k - \delta_2, y_k]$. Daí, para $c > c_0$

$$\begin{aligned} \left| \frac{p(z_k)}{q'(\theta_k)} - \frac{p(y_k)}{q'(y_k)} \right| &= \left| \frac{p(z_k)q'(y_k) - p(y_k)q'(\theta_k)}{q'(\theta_k)q'(y_k)} \right| \\ &\leq |p(z_k) - p(y_k)| \frac{1}{|q'(\theta_k)|} + |q'(\theta_k) - q'(y_k)| \frac{|p(y_k)|}{|q'(\theta_k)||q'(y_k)|} \\ &\leq |p(z_k) - p(y_k)| \frac{1}{m_k} + |q'(\theta_k) - q'(y_k)| \frac{|p(y_k)|}{m_k^2} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Então,

$$\lim_{c \rightarrow \infty} c[y_k - z_k] = \lim_{c \rightarrow \infty} \frac{p(z_k)}{q'(\theta_k)} = \frac{p(y_k)}{q'(y_k)} = \frac{h(y_k)}{q'(y_k)}.$$

Se $y_k < z_k < x_k$, $k = 1, \dots, n$, a demonstração é análoga e vale o mesmo resultado. ■

Destacamos o fato de que a ideia dessa demonstração pode ser estendida para o caso em que os coeficientes a_n ou b_n não são necessariamente positivos e, também, quando os graus de p e de q , ao invés de serem iguais, são consecutivos e seus zeros ainda se entrelaçam. Além disso, quando c converge para zero, podemos mostrar, de modo análogo, que os zeros z_k do polinômio h convergem para os zeros x_k do polinômio p e a velocidade de convergência é

$$\lim_{c \rightarrow 0} \frac{z_k - x_k}{c} = -\frac{q(x_k)}{p'(x_k)}.$$

Observamos que todos esses resultados valem quando c depende de parâmetros, desde que c possua um comportamento assintótico como função desses parâmetros.

3.1.2 Algoritmo de Euclides para polinômios

Dizemos que um polinômio q divide o polinômio p se

$$p(x) = r(x)q(x),$$

onde r é um polinômio de grau maior ou igual a um e menor que o grau do polinômio p . Podemos também dizer que q é divisor de p . O máximo divisor comum entre dois polinômios p e h é o polinômio de maior grau que divide p e h , ou seja, é o produto dos fatores comuns dos polinômios p e h . Caso não existam fatores comuns, o máximo divisor comum é 1. Observe que se o polinômio m é um máximo divisor comum, então, dada uma constante não nula k , km também é um máximo divisor comum. A fim de tornar o máximo divisor comum entre p e h único, o tomaremos como um polinômio mônico, ou seja, com coeficiente do termo de maior grau igual a 1. Como a fatoração de polinômios não é elementar, um método simples e eficiente para encontrar o máximo divisor comum entre dois polinômios é o algoritmo de Euclides, também conhecido por método das divisões sucessivas.

Algoritmo 3.1. [Euclides] *Sejam p e h dois polinômios tais que o grau de p é maior ou igual ao grau de h . Sejam r_{n-2} o resto com sinal invertido e q_1 o quociente da divisão de p por h , isto é, $p(x) = h(x)q_1(x) - r_{n-2}(x)$, com o grau de r_{n-2} menor que o grau de h . Se $r_{n-2}(x) \equiv 0$, o máximo divisor comum entre p e h é h . Se $r_{n-2}(x) \neq 0$, seja r_{n-3} o resto da divisão de h por r_{n-2} com sinal invertido. Se $r_{n-3}(x) \equiv 0$, então o máximo divisor comum entre p e h é r_{n-2} . Se $r_{n-3} \neq 0$, continuamos este processo da seguinte forma,*

$$\begin{aligned} p(x) &= h(x)q_1(x) - r_{n-2}(x) \\ h(x) &= r_{n-2}(x)q_2(x) - r_{n-3}(x) \\ r_{n-2}(x) &= r_{n-3}(x)q_3(x) - r_{n-4}(x) \\ r_{n-3}(x) &= r_{n-4}(x)q_4(x) - r_{n-5}(x) \\ &\vdots \\ r_2(x) &= r_1(x)q_{n-1}(x) - r_0(x) \\ r_1(x) &= r_0(x)q_n(x) - 0. \end{aligned}$$

O polinômio r_0 , na forma mônica, é o máximo divisor comum entre p e h .

Note que, após um certo número finito n de divisões sucessivas, atingimos necessariamente uma divisão exata, pois os graus dos restos diminuem ao menos uma unidade por

vez até atingirmos um resto r_0 constante diferente de zero, e a divisão de r_1 por r_0 é exata. Esse algoritmo é muito importante pois, a partir dele, geramos uma sequência de Sturm que, ao usá-la juntamente com o Teorema de Sturm, nos permite determinar o número exato de zeros reais de um polinômio em um intervalo usando apenas seus coeficientes.

3.1.3 Teorema de Sturm

O Teorema de Sturm nos permite determinar o número exato de raízes reais que um polinômio com coeficientes reais possui em um intervalo (a, b) , onde $-\infty \leq a < b \leq \infty$. Para enunciarmos o Teorema de Sturm, vamos primeiramente definir sequência de Sturm e o número de variações dessa sequência.

Definição 3.1. *Considere a sequência de polinômios reais $\{E_n, E_{n-1}, \dots, E_0\}$. Essa sequência é chamada sequência de Sturm se satisfaz às seguintes propriedades no intervalo (a, b) :*

- i) dado $x \in (a, b)$, se algum E_k se anula em x , então os dois polinômios adjacentes E_{k-1} e E_{k+1} têm valores diferentes de zero e sinais opostos em x , isto é,*

$$E_{k-1}(x)E_{k+1}(x) < 0;$$

- ii) o último polinômio da sequência, E_0 , não se anula em (a, b) .*

Dado $c \in (a, b)$, considere a sequência de Sturm avaliada em c , isto é,

$$\{E_n(c), E_{n-1}(c), \dots, E_0(c)\}.$$

Se substituirmos os termos positivos e negativos pelos seus respectivos sinais, desconsiderando possíveis valores nulos, o número de variações de sinal nesta sequência é chamado de número de variações na sequência de Sturm e será denotado por $V(c)$. Definimos, então, a seguinte aplicação:

$$\begin{aligned} V : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{N} \\ x &\mapsto V(x) \end{aligned} .$$

Para $\xi \in (a, b)$, dizemos que ξ é um zero relevante de E_k se E_k muda de sinal em ξ . Relativo a E_{k-1} , classificamos um zero relevante ξ como sendo de primeira espécie se $E_k(\xi + \eta)E_{k-1}(\xi) > 0$ e de segunda espécie se $E_k(\xi + \eta)E_{k-1}(\xi) < 0$, para todo $\eta > 0$ suficientemente pequeno.

Exemplo 3.1. *Sejam p e h polinômios com coeficientes reais, onde o grau de p é maior ou igual que o grau de h . Então, o Algoritmo de Euclides, começando com $r_n(x) := p(x)$ e $r_{n-1}(x) := h(x)$, produz uma sequência de polinômios $\{r_n, r_{n-1}, \dots, r_0\}$ que satisfaz à fórmula de recorrência*

$$r_{n-k}(x) = r_{n-k-1}(x)q_k(x) - r_{n-k-2}(x), \quad k = 0, \dots, n-1,$$

com $r_{-1}(x) \equiv 0$. No último passo do algoritmo é obtido o máximo divisor comum entre p e h que é o polinômio r_0 . Além disso, os polinômios r_k , $k = 1, 2, \dots, n$, são todos divisíveis por r_0 . É fácil ver que $\{r_n, r_{n-1}, \dots, r_0\}$ forma uma sequência de Sturm no intervalo em que r_0 não possui zeros.

Além disso, a sequência $\{\psi_n, \psi_{n-1}, \dots, \psi_0\}$ definida por

$$\psi_{n-k}(x) := \frac{r_{n-k}(x)}{r_0(x)}, \quad k = 0, \dots, n$$

também é uma sequência de Sturm em qualquer subintervalo da reta real. Em particular, se escolhermos $h(x) = p'(x)$, então ψ_n tem somente zeros simples e

$$\psi_n(x)\psi_{n-1}(x) = \frac{p(x)p'(x)}{(r_0(x))^2}.$$

É possível mostrar que $\psi_n(x)\psi_{n-1}(x)$ muda de sinal do menos para o mais quando x passa por um zero real de p . Então, os zeros de ψ_n são todos zeros relevantes de primeira espécie.

Exemplo 3.2. *Quando $\{P_n^\phi, P_{n-1}^\phi, \dots, P_0^\phi\}$ é uma sequência de polinômios ortogonais com relação à medida $d\phi$, ela também é uma sequência de Sturm.*

Teorema 3.5. [Sturm] *Seja $\{E_n, E_{n-1}, \dots, E_0\}$ uma sequência de Sturm em um intervalo $[a, b]$, com $p := E_n$. Suponha que $p(a) \neq 0$ e $p(b) \neq 0$. Denote por $N_p^+[a, b]$ o número de zeros relevantes distintos de primeira espécie de p em $[a, b]$ e por $N_p^-[a, b]$ o número de zeros relevantes distintos de segunda espécie de p em $[a, b]$. Então,*

$$N_p^+[a, b] - N_p^-[a, b] = V(a) - V(b),$$

onde V denota o número de variações na sequência de Sturm $\{E_n, E_{n-1}, \dots, E_0\}$.

Uma simples consequência do teorema anterior é o seguinte resultado:

Corolário 3.1. *Seja p um polinômio com coeficientes reais. Denote por $\{r_n, r_{n-1}, \dots, r_0\}$ a sequência de polinômios produzida pelo algoritmo de Euclides começando com $r_n := p$ e $r_{n-1} := p'$. Suponha que p não se anule em a e nem em b , com $a < b$. Então,*

$$N_p^0[a, b] = V(a) - V(b),$$

onde $N_p^0[a, b]$ denota o número de zeros distintos de p em $[a, b]$.

No corolário anterior, os zeros não são contados de acordo com suas multiplicidades. A seguinte modificação no algoritmo de Euclides remove essa deficiência.

Algoritmo 3.2. *Seja p um polinômio e definimos $E_n := p$ e $E_{n-1} := p'$. Se E_{n-k} não é constante, então dividimos E_{n-k} por E_{n-k-1} , ou seja, escrevemos*

$$E_{n-k}(x) = E_{n-k-1}(x)q_k(x) - r_{n-k-2}(x).$$

Definimos por

$$\begin{cases} E_{n-k-2}(x) := r_{n-k-2}(x), & \text{se } r_{n-k-2}(x) \not\equiv 0 \\ E_{n-k-2}(x) := E'_{n-k-1}(x), & \text{se } r_{n-k-2}(x) \equiv 0 \end{cases}.$$

Executamos este algoritmo até obtermos algum E_{n-k} constante.

Teorema 3.6. *Seja p um polinômio com coeficientes reais. Denotando a sequência de polinômios produzida pelo Algoritmo 3.2 por $\{E_n, E_{n-1}, \dots, E_m\}$, se p não se anula em a e nem em b , com $a < b$, então*

$$N_p[a, b] = V(a) - V(b),$$

onde $N_p[a, b]$ denota o número de zeros reais de p em $[a, b]$, contando suas multiplicidades.

Exemplo 3.3. *Seja $p(x) = x^3 - 3x^2 + 4 = (x - 2)^2(x + 1)$. Para utilizar o Algoritmo 3.2, definimos $E_3(x) := p(x)$ e $E_2(x) = p'(x) = 3x^2 - 6x$. Dividindo E_3 por E_2 , obtemos*

$$E_3(x) = \frac{1}{3}(x - 1)E_2(x) - (2x - 4).$$

Como $r_1(x) = 2x - 4 \not\equiv 0$, definimos $E_1(x) := 2x - 4$. Dividindo E_2 por E_1 , temos

$$E_2(x) = \frac{3}{2}xE_1(x) - 0.$$

Já que o resto dessa divisão é nulo, definimos $E_0(x) := E'_1(x) = 2$ e, seguindo o algoritmo,

$$E_1(x) = (x - 2)E_0(x) - 0.$$

Como E_0 é constante, encerramos a aplicação do algoritmo. Portanto, temos a sequência $\{E_3, E_2, E_1, E_0\}$. Vamos verificar que p possui três zeros reais. Considerando o intervalo $[-3, 3]$, concluímos que $\{E_3(-3), E_2(-3), E_1(-3), E_0(-3)\} = \{-50, 45, -10, 2\}$. Substituindo os termos negativos e positivos pelos respectivos sinais, chegamos na sequência de sinais $\{-, +, -, +\}$ que resulta em três mudanças de sinal, ou seja,

$$\left\{ \underbrace{-, +}_{1 \text{ mudança}}, \underbrace{+, -}_{1 \text{ mudança}}, \underbrace{-, +}_{1 \text{ mudança}} \right\}.$$

Logo $V(-3) = 3$. De forma análoga, obtemos $V(3) = 0$. Portanto, o número de zeros reais de p em $[-3, 3]$ é

$$N_p[-3, 3] = V(-3) - V(3) = 3.$$

Como p é um polinômio de grau 3, segue que p possui 3 zeros reais em $(-\infty, +\infty)$.

Uma outra forma de determinar o número de zeros reais de p na reta real é avaliar a sequência $\{E_3, E_2, E_1, E_0\}$ em $-\infty$ e $+\infty$.

A seguir, daremos uma condição necessária e suficiente para que todos os zeros de um polinômio sejam reais. Consideremos os polinômios E_{n-k} , $k = 0, 1, \dots$, obtidos pelo Algoritmo 3.2. Vamos definir $c(p)$ como sendo o coeficiente do termo de maior grau de p e

$$\begin{cases} c_{k+1} := \frac{c(E_k)}{c(E_{k+2})}, & \text{se } r_k(x) \not\equiv 0 \\ c_k := 0, & \text{se } r_k(x) \equiv 0 \end{cases},$$

para $k = 0, 1, \dots, n - 2$. Então, podemos enunciar o seguinte resultado:

Teorema 3.7. *Seja p um polinômio de grau n com coeficientes reais. Então, p tem somente zeros reais se, e somente se, o Algoritmo 3.2 produz $n - 1$ coeficientes c_1, \dots, c_{n-1} não negativos. Além disso, os zeros de p são reais e simples se, e somente se, os coeficientes c_1, \dots, c_{n-1} são estritamente positivos.*

Exemplo 3.4. *Temos, no Exemplo 3.3, que*

$$c_2 = \frac{c(E_1)}{c(E_3)} = 2 > 0 \quad \text{e} \quad c_1 = \frac{c(E_0)}{c(E_2)} = 0.$$

Portanto, $p(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ tem somente zeros reais, mas nem todos os zeros são simples.

Se p não possui zeros com multiplicidade, então o máximo divisor comum entre p e p' é 1. Assim, o algoritmo de Euclides, começando com $r_n(x) := p(x)$ e $r_{n-1}(x) := p'(x)$, termina com $r_0(x) = 1$. Portanto, podemos formular uma versão mais simplificada do Teorema de Sturm:

Teorema 3.8. [Sturm] *Seja p um polinômio de grau $n \geq 1$ que não possui zeros múltiplos em $[a, b]$, satisfazendo $p(a) \neq 0$ e $p(b) \neq 0$. Então, o número de zeros de p no intervalo $[a, b]$ é dado por $V(a) - V(b)$, sendo V o número de variações na sequência de Sturm $\{r_n, r_{n-1}, r_{n-2}, \dots, r_0\}$, onde $r_n = p$, $r_{n-1} = p'$ e r_k , $k = 0, 1, \dots, n-2$, são os restos obtidos pelo algoritmo de Euclides.*

Mais detalhes sobre o Teorema de Sturm e suas versões e as demonstrações dos resultados apresentados nesta seção podem ser encontradas em [26], [40], [53] e [56].

O Teorema 3.7 nos fornece condições necessárias e suficientes para que os zeros de um polinômios sejam reais e simples. Agora, consideremos um resultados semelhante como uma aplicação do Teorema de Sturm, que nos dá um critério para dois polinômios de graus consecutivos possuírem somente zeros reais, distintos e que se entrelaçam. Este resultado não se encontra na literatura desta forma.

Teorema 3.9. *Sejam P_n e P_{n-1} polinômios com graus exatamente n e $n-1$, respectivamente, cujos coeficientes dos termos de maior grau são positivos e tais que os zeros de P_n não coincidem com os zeros de P_{n-1} . Então, os zeros de P_n e P_{n-1} são reais, distintos e se entrelaçam se, e somente se, cada r_j possui o coeficiente do termo de maior grau estritamente positivo, onde r_j são os restos gerados pelo algoritmo de Euclides começando com $r_n(x) := P_n(x)$ e $r_{n-1}(x) := P_{n-1}(x)$.*

Demonstração:

[\Rightarrow] A sequência $\{r_n, r_{n-1}, r_{n-2}, \dots, r_0\}$ é uma sequência de Sturm. De fato, dado $c \in \mathbb{R}$ e j fixo tal que $r_{n-j}(c) = 0$, então $r_{n-j+1}(c) = -r_{n-j-1}(c)$. Se $r_{n-j+1}(c) = 0$ ou $r_{n-j-1}(c) = 0$, obtemos $r_{n-1}(c) = r_n(c) = 0$, o que é um absurdo, pois, por hipótese, os zeros de P_n e P_{n-1} não coincidem. Logo, a condição *i*) da Definição 3.1 é satisfeita. Como P_n e P_{n-1} não possuem zeros em comum, eles não possuem fatores comuns. Assim, o máximo divisor comum entre eles é 1. Então, pelo algoritmo de Euclides, r_0 é uma constante diferente de zero e, portanto, não se anula, o que satisfaz à condição *ii*) da Definição 3.1, que garante que a sequência $\{r_n, r_{n-1}, r_{n-2}, \dots, r_0\}$ forma uma sequência de Sturm em \mathbb{R} .

Pelo Teorema de Sturm (Teorema 3.5), como P_n e P_{n-1} possuem os zeros reais, distintos e que se entrelaçam, os n zeros de P_n são relevantes de primeira espécie relativos à P_{n-1} . Logo, $V(-\infty) - V(+\infty) = n$. Mas, como a sequência $\{r_n, r_{n-1}, r_{n-2}, \dots, r_0\}$ tem $n + 1$ termos, a variação de sinal será no máximo n . Além disso, V é sempre um número natural, logo $V(-\infty) = n$ e $V(+\infty) = 0$. Porém,

$$\begin{aligned} & \{\text{sinal}[r_n(x)], \text{sinal}[r_{n-1}(x)], \text{sinal}[r_{n-2}(x)], \dots, \text{sinal}[r_1(x)], \text{sinal}[r_0(x)]\} \Big|_{x \rightarrow +\infty} \\ &= \{+, +, \text{sinal}[c_{n-2}], \text{sinal}[c_{n-3}], \dots, \text{sinal}[c_1], \text{sinal}[c_0]\}, \end{aligned}$$

com c_j sendo o coeficiente do termo de maior grau de r_j para $j = 0, 1, \dots, n - 2$. Como $V(+\infty) = 0$, segue que $c_k \geq 0$ para $k = 0, 1, \dots, n - 2$.

Agora, basta mostrar que r_k é de grau exatamente k , ou seja, $c_k \neq 0$. Se denotarmos por $x_{n-1,1} < x_{n-1,2} < \dots < x_{n-1,n-1}$ os zeros de P_{n-1} , então $P_n(x_{n-1,j}) = -r_{n-2}(x_{n-1,j})$ para $j = 1, 2, \dots, n - 1$. Como os zeros de P_n e P_{n-1} se entrelaçam, segue que P_n muda de sinal exatamente $n - 2$ vezes nos zeros de P_{n-1} . Logo, r_{n-2} também possui o mesmo comportamento. Assim, r_{n-2} possui pelo menos $n - 2$ zeros reais que separam os zeros de P_{n-1} . Como o grau de r_{n-2} é menor que $n - 1$, segue que r_{n-2} é um polinômio de grau exatamente $n - 2$. De forma análoga, concluimos que r_k é um polinômio de grau exatamente k , cujos zeros se entrelaçam com os zeros de r_{k-1} , $k = 1, 2, \dots, n - 2$.

[\Leftarrow] Como o coeficiente do termo de maior grau de r_k , que denotamos por c_k , são todos estritamente positivos para $k = 0, 1, \dots, n$, então, pelo algoritmo de Euclides,

$$r_k(x) = (a_k x - b_k)r_{k-1} - r_{k-2}, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

com $r_{-1}(x) \equiv 0$. Portanto, os polinômios r_k podem ser obtidos através de uma relação de recorrência de três termos cujos coeficientes satisfazem às hipóteses do Teorema de Favard (Teorema 2.1) e, portanto, são ortogonais com relação a uma medida $d\phi$. Assim, os zeros de r_k são reais, distintos e se entrelaçam com os zeros de r_{k-1} . Em particular, vale este resultado para $k = n$. ■

Pelo teorema anterior, podemos concluir que a sequência de polinômios gerada pelo algoritmo de Euclides é uma sequência de polinômios ortogonais. Esse fato implica diretamente no Teorema de Wendroff (Teorema 2.3) que será demonstrado detalhadamente a seguir.

Teorema 3.10. [Wendroff] *Sejam $a < x_1 < x_2 < \dots < x_n < b$ e $x_i < y_i < x_{i+1}$, $i = 1, 2, \dots, n-1$. Então, existe uma sequência de polinômios $\{P_n\}_{n \geq 0}$ ortogonais em (a, b) , tais que $P_n(x) = (x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)$ e $P_{n-1}(x) = (x-y_1)(x-y_2)\dots(x-y_{n-1})$.*

Demonstração: Sejam $P_n(x) = (x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)$ e $P_{n-1}(x) = (x-y_1)(x-y_2)\dots(x-y_{n-1})$, tais que $x_i < y_i < x_{i+1}$, $i = 1, 2, \dots, n-1$. Executando o Algoritmo de Euclides com $r_n(x) = P_n(x)$ e $r_{n-1}(x) = P_{n-1}(x)$, temos

$$r_n(x) = (x - b_n)r_{n-1}(x) - r_{n-2}(x)$$

e

$$r_k(x) = (a_k x - b_k)r_{k-1}(x) - r_{k-2}(x), \quad k = 1, 2, \dots, n-1.$$

Como P_n e P_{n-1} não possuem zeros em comum, segue que o máximo divisor comum entre eles é 1. Sem perda de generalidade, podemos considerar os polinômios r_k mônicos, caso contrário, denotando por $R_k(x) := \frac{r_k(x)}{c_k}$, onde c_k é o coeficiente do termo de maior grau de r_k , obtemos

$$R_k(x) = (x - \hat{b}_k)R_{k-1}(x) - \frac{c_{k-2}}{c_k}R_{k-2}(x), \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (3.6)$$

com $R_0(x) = 1$ e $R_1(x) = (x - \hat{b}_1)$. Comparando os coeficientes dos termos de maior grau em ambos os lados da igualdade acima, obtemos $\hat{b}_k = b_k \frac{c_{k-1}}{c_k}$. Note que, pelo teorema anterior, os coeficientes c_k , $k = 0, 1, \dots, n$, são todos estritamente positivos. Observe que construímos os polinômios mônicos R_0, R_1, \dots, R_{n-2} . Para obtermos os outros termos da sequência infinita, tomamos

$$R_{n+k}(x) = (x - \hat{b}_{n+k})R_{n+k-1}(x) - \frac{c_{n+k-2}}{c_{n+k}}R_{n+k-2}(x), \quad k = 1, 2, \dots,$$

onde \hat{b}_{n+k} são escolhidos de forma que os zeros de R_{n+k} pertençam ao intervalo (a, b) . Tendo construído os polinômios R_k , $k = 0, 1, \dots$, que satisfazem à relação de recorrência de três termos (3.6), aplicamos o Teorema de Favard (Teorema 2.1) e obtemos que a sequência $\{R_k\}_{k \geq 0}$ é uma sequência de polinômios ortogonais, ou seja, $P_n(x) = R_n(x)$ e $P_{n-1}(x) = R_{n-1}(x)$ pertencem a uma sequência de polinômios ortogonais. ■

3.2 Matriz de Hurwitz

Considere o sistema linear de n equações diferenciais

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (3.7)$$

onde A é uma matriz de ordem n com coeficientes constantes. Uma solução do sistema acima é uma função vetorial $x(t)$ que depende do tempo t e da condição inicial $x(0) = x_0$ tal que $x(t)$ satisfaz (3.7). A solução geral do sistema linear é a combinação linear de n soluções linearmente independentes $x_1(t), \dots, x_n(t)$,

$$x(t) = \sum_{j=1}^n c_j x_j(t),$$

onde as constantes c_j são determinadas pela condição inicial.

Para se obter a solução $x(t)$, precisamos encontrar os n autovalores de A , ou seja, é necessário encontrar as raízes do polinômio característico de grau n , obtido através de $\det(A - \lambda I) = 0$, onde I é a matriz identidade.

As diferentes possibilidades de combinação dos autovalores, que podem ser reais, imaginários puros, todos com parte real negativa, etc., vão definir não só a estabilidade do ponto de equilíbrio, mas também a forma de soluções em sua vizinhança.

Por exemplo, no caso em que A tem autovalores complexos λ_j e autovetores v_j , temos as soluções $x_j(t) = e^{Re(\lambda_j)t} e^{iIm(\lambda_j)t} v_j$, onde $Re(\lambda_j)$ e $Im(\lambda_j)$ são, respectivamente, a parte real e a parte imaginária de λ_j .

Como $e^{iIm(\lambda_j)t}$ é uma função limitada, a estabilidade de $x_j(t)$ vai depender essencialmente de $Re(\lambda_j)$. Se $Re(\lambda_j) > 0$, $e^{Re(\lambda_j)t}$ cresce continuamente com o tempo e $x_j(t) \rightarrow \infty$ quando $t \rightarrow \infty$. Isso significa que as trajetórias $x_j(t)$ deixam a vizinhança de um ponto de equilíbrio P . Inversamente, se $Re(\lambda_j) < 0$, $x_j(t) \rightarrow P$ quando $t \rightarrow \infty$ e nesse caso o ponto de equilíbrio é estável. Por isso, é de suma importância saber em que condições um polinômio possui todos os zeros com a parte real negativa.

Definição 3.2. *Um polinômio com coeficientes reais é chamado de polinômio de Hurwitz se todos os seus zeros possuem a parte real negativa.*

Dado um polinômio com coeficientes reais $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$, a

matriz quadrada de ordem n

$$\mathcal{H}(p) := \begin{pmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & a_{n-7} & \dots & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & a_{n-6} & \dots & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_0 \end{pmatrix}$$

é chamada de matriz de Hurwitz correspondente ao polinômio p . Consideremos a submatriz de ordem k de $\mathcal{H}(p)$ formada pelas k primeiras linhas e k primeiras colunas. O determinante dessa submatriz é chamado de menor principal de ordem k de $\mathcal{H}(p)$ e o denotaremos por $\Delta_k(p)$, ou seja,

$$\Delta_1(p) = |a_{n-1}|, \quad \Delta_2(p) = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ a_n & a_{n-2} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3(p) = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}, \dots,$$

$$\Delta_n(p) = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & a_{n-7} & \dots & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & a_{n-6} & \dots & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_0 \end{vmatrix}.$$

Apresentamos, a seguir, alguns resultados importantes da análise clássica, como o Critério de Routh-Hurwitz, o Teorema de Hermite–Biehler e sua consequência. Ambos podem ser encontrados em [26] ou em [53].

Teorema 3.11. [Critério de Routh-Hurwitz] *Todos os zeros do polinômio com coeficientes reais $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$, com $a_n > 0$, tem a parte real negativa se, e somente se,*

$$\Delta_1(p) > 0, \Delta_2(p) > 0, \dots, \Delta_n(p) > 0. \tag{3.8}$$

Em outras palavras, p é um polinômio de Hurwitz se, e somente se, as desigualdades (3.8) são satisfeitas.

Teorema 3.12. [Hermite–Biehler] *Se os zeros do polinômio $p(x) = q(x) + ih(x)$ estão localizados em um mesmo lado do eixo real, então os polinômios com coeficientes reais q e h têm somente zeros reais, simples e que se entrelaçam.*

Como consequência do Teorema Hermite–Biehler, temos o seguinte resultado:

Teorema 3.13. *O polinômio $r(x) = p(x^2) + xq(x^2)$ é um polinômio de Hurwitz se, e somente se, todas os zeros de p e q são reais, distintos, negativos e se entrelaçam.*

Observe que a condição dos zeros serem negativos pode ser contornada deslocando-se os polinômios. Ferramentas que podem ser utilizadas são, por exemplo, os Teoremas de Descartes e de Lagrange.

Teorema 3.14. [Descartes] *O número de zeros positivos de um polinômio $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ é o número de variações de sinal de seus coeficientes menos um número par.*

Teorema 3.15. [Lagrange] *Seja $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ um polinômio de grau n com $a_n > 0$. Sejam k o maior índice dos coeficientes negativos e A o valor absoluto do coeficiente negativo de maior valor absoluto da sequência a_0, a_1, \dots, a_n . Então, toda raiz positiva de p satisfaz*

$$x_{n,j} < L,$$

$$\text{onde } L = 1 + \sqrt[n-k]{\frac{A}{a_n}}.$$

Assim, se um polinômio p tem algum zero positivo, consideramos o polinômio $r(x) = p(x + L)$ que possuirá somente zeros negativos.

De posse desses resultados, podemos encontrar condições necessárias e suficientes para os zeros de dois polinômios serem reais, distintos, negativos e se entrelaçarem.

Considere os polinômios com coeficientes reais

$$\begin{aligned} p(x) &= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0, \\ q(x) &= b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \dots + b_1 x + b_0. \end{aligned}$$

Pelo Teorema 3.13, os zeros de p e q são reais, distintos, negativos e se entrelaçam se, e somente se, $r(x) = p(x^2) + xq(x^2)$ é um polinômio de Hurwitz, ou seja,

$\Delta_1(r) > 0, \Delta_2(r) > 0, \dots, \Delta_{2n}(r) > 0$. Neste caso, iremos denotar a matriz de Hurwitz correspondente ao polinômio r , $\mathcal{H}(r)$, por $\mathcal{H}_{2n}(q, p)$, ou seja,

$$\mathcal{H}_{2n}(q, p) = \begin{pmatrix} b_{n-1} & b_{n-2} & \dots & b_0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a_n & a_{n-1} & \dots & a_1 & a_0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_{n-1} & \dots & b_1 & b_0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_n & \dots & a_2 & a_1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 & a_0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & b_{n-1} & b_{n-2} & \dots & b_1 & b_0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_n & a_{n-2} & \dots & a_1 & a_0 \end{pmatrix}$$

e os menores principais dessa matriz denotaremos simplesmente por Δ_k , $k = 1, 2, \dots, 2n$.

Note que, se tomarmos o polinômio $q(x) = p'(x)$, obtemos condições necessárias e suficientes para que um polinômio possua somente zeros reais, distintos e negativos.

Teorema 3.16. *Seja $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, um polinômio de grau n com $a_n > 0$. Assim, os zeros de p são reais, distintos e negativos se, e somente se,*

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \dots, \Delta_{2n} > 0,$$

onde Δ_k , $k = 1, \dots, 2n$, são os menores principais da matriz de Hurwitz $\mathcal{H}_{2n}(p', p)$.

3.3 Resultante e discriminante

Nesta seção, apresentamos as definições e as principais propriedades sobre a resultante de dois polinômios e o discriminante, que podem ser encontradas em [55].

Sejam

$$\begin{aligned} p(x) &= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \\ q(x) &= b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0, \end{aligned} \tag{3.9}$$

polinômios com $a_n \neq 0$ e $b_m \neq 0$. Dizer que p e q possuem divisor comum, é equivalente a dizer que existem polinômios r e s tais que

$$p(x)r(x) = q(x)s(x), \tag{3.10}$$

onde o grau de r é menor ou igual a $m - 1$ e o grau de s é menor ou igual a $n - 1$. De fato, seja h o divisor comum de p e q . Logo,

$$p(x) = h(x)s(x) \quad \text{e} \quad q(x) = h(x)r(x),$$

com o grau de s menor ou igual a $n - 1$ e o grau de r menor ou igual a $m - 1$. Portanto,

$$p(x)r(x) = h(x)s(x)r(x) = q(x)s(x).$$

Por outro lado, seja

$$p(x)r(x) = q(x)s(x),$$

onde o grau de r é menor ou igual a $m - 1$. Se p e q não possuem divisor comum, então r divide q , o que é um absurdo, pois o grau de r é menor do que o grau de q .

Escrevendo os polinômios como

$$\begin{aligned} r(x) &= u_{m-1}x^{m-1} + u_{m-2}x^{m-2} + \dots + u_1x + u_0, \\ s(x) &= v_{n-1}x^{n-1} + v_{n-2}x^{n-2} + \dots + v_1x + v_0, \end{aligned}$$

e igualando os coeficientes dos termos de mesmo grau, podemos expressar a igualdade (3.10) como o seguinte sistema de $n + m$ equações:

$$\begin{aligned} a_n u_{m-1} &= b_m v_{n-1}, \\ a_{n-1} u_{m-1} + a_n u_{m-2} &= b_{m-1} v_{n-1} + b_m v_{n-2}, \\ &\vdots \\ a_0 u_0 &= b_0 v_0, \end{aligned}$$

que, na forma matricial, é dado por

$$\begin{pmatrix} a_n & 0 & \dots & 0 & -b_m & 0 & \dots & 0 \\ a_{n-1} & a_n & \dots & 0 & -b_{m-1} & -b_m & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_0 & 0 & 0 & \dots & -b_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{m-1} \\ \vdots \\ u_0 \\ v_{n-1} \\ \vdots \\ v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Os polinômios p e q têm divisor comum se, e somente se, esse sistema tem solução não nula. O determinante da matriz desse sistema pode ser dado por

$$(-1)^n \begin{vmatrix} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_0 \\ b_m & b_{m-1} & b_{m-2} & \dots & 0 \\ 0 & b_m & b_{m-1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_0 \end{vmatrix}.$$

A matriz de ordem $m + n$ relativa a esse determinante,

$$S(p, q) = \begin{pmatrix} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_0 \\ b_m & b_{m-1} & b_{m-2} & \dots & 0 \\ 0 & b_m & b_{m-1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_0 \end{pmatrix}$$

é chamada de matriz de Sylvester dos polinômios p e q .

Definição 3.3. A resultante $R(p, q)$ dos polinômios p e q , definidos por (3.9), é o determinante da matriz de Sylvester $S(p, q)$.

Observe que os polinômios p e q possuem divisor comum se, e somente se, $R(p, q) = 0$.

Teorema 3.17. Sejam x_1, x_2, \dots, x_n os zeros de p e y_1, y_2, \dots, y_m os zeros de q . Então,

$$R(p, q) = a_n^m b_m^n \prod_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} (x_i - y_j) = a_n^m \prod_{1 \leq i \leq n} q(x_i) = b_m^n \prod_{1 \leq j \leq m} p(y_j).$$

Definição 3.4. Sejam x_1, x_2, \dots, x_n os zeros de $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$. O discriminante de p é definido por

$$D(p) = a_n^{2n-2} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)^2.$$

Teorema 3.18. *Se $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, então*

$$R(p, p') = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_n D(p).$$

Efetuada algumas trocas de linhas na resultante de p e q , obtemos facilmente uma relação entre a resultante e o determinante da matriz de Hurwitz.

Teorema 3.19. *Sejam $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ e $q(x) = b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \dots + b_1 x + b_0$. Então,*

$$R(p, q) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \Delta_{2n-1},$$

onde Δ_{2n-1} é o determinante da matriz de Hurwitz de ordem $2n - 1$, $\mathcal{H}_{2n-1}(q, p)$.

A partir desses resultados, podemos obter uma outra condição necessária para os zeros de dois polinômios de grau consecutivos serem reais, distintos e se entrelaçarem.

Teorema 3.20. *Sejam $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ e $y_1 < y_2 < \dots < y_{n-1}$ os zeros de p e q , respectivamente, onde $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ e $q(x) = b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \dots + b_1 x + b_0$, com $a_n > 0$ e $b_{n-1} > 0$. Se os zeros de p e q se entrelaçam, o determinante da matriz de Hurwitz de ordem $2n - 1$, $\mathcal{H}_{2n-1}(q, p)$, é estritamente positivo, ou seja, $\Delta_{2n-1} > 0$.*

Demonstração: Se $\Delta_{2n-1} = 0$, então, pelo Teorema 3.19, $R(p, q) = 0$, o que implica que p e q possuem zeros em comum e isso é um absurdo.

Se $\Delta_{2n-1} < 0$, pelo Teorema 3.19, $\text{sinal}[R(p, q)] = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}+1}$. Mas, se os zeros de p e q se entrelaçam, então

$$\begin{aligned} \text{sinal}[R(p, q)] &= \text{sinal} \left[a_n^m \prod_{1 \leq i \leq n} q(x_i) \right] \\ &= \text{sinal}[q(x_1)] \text{sinal}[q(x_2)] \dots \text{sinal}[q(x_{n-1})] \text{sinal}[q(x_n)] \\ &= (-1)^{n-1} (-1)^{n-2} \dots (-1)^1 (-1)^0 = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}. \end{aligned}$$

■

Uma condição suficiente para um polinômio possuir zeros complexos é dada no teorema que enunciamos a seguir.

Teorema 3.21. *Sejam $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, $a_n > 0$, e Δ_{2n-1} o determinante da matriz de Hurwitz $\mathcal{H}_{2n-1}(p', p)$. Se $\Delta_{2n-1} < 0$, então p possui zeros complexos.*

Demonstração: Do Teorema 3.18 e da definição de discriminante, obtemos

$$R(p, p') = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_n D(p) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_n^{2n-1} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)^2,$$

onde x_1, x_2, \dots, x_n são os zeros do polinômio p . Por outro lado, pelo Teorema 3.19,

$$R(p, p') = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \Delta_{2n-1}.$$

Logo,

$$\Delta_{2n-1} = a_n^{2n-1} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)^2.$$

Como $\Delta_{2n-1} < 0$ e $a_n > 0$, segue que

$$\prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)^2 < 0.$$

Essa desigualdade ocorre somente se existe algum zero x_k complexo, $k = 1, 2, \dots, n$. ■

3.4 Equações de diferença

A fórmula de recorrência de três termos (2.5) pode ser considerada como uma equação de diferença e sua solução é exatamente a sequência de polinômios ortogonais $\{P_n^\phi\}$.

Por outro lado, a evolução de sistemas dinâmicos, que são todos os sistemas que evoluem ao longo do tempo qualquer que seja a sua natureza, isto é, sistemas físicos, biológicos, químicos, sociais, econômicos, etc., pode ser descrita por equações de diferença, uma vez que esse tempo é muitas vezes medido em intervalos discretos. Por exemplo, se uma certa população tem gerações discretas, o tamanho da $(n + 1)$ -ésima geração y_{n+1} é uma função da n -ésima geração y_n . Essa relação expressa a equação de diferença

$$y_{n+1} = p(y_n). \tag{3.11}$$

Aqui, vamos fazer um breve resumo sobre as equações de diferença lineares, homogêneas e com coeficientes constantes. O texto de Elaydi [23] contém informações detalhadas sobre o assunto.

3.4.1 Equações de diferença: caso linear

Uma equação de diferença linear de ordem k , homogênea, com coeficientes constantes, tem a forma geral dada por

$$y_{n+k} + c_1 y_{n+k-1} + \dots + c_k y_n = 0, \quad (3.12)$$

onde os coeficientes $c_k \neq 0$ para todo $k \geq n_0$. Se, para algum $n_0 \geq 0$, y_{n_0} é dado, então (3.12) é chamado de problema de valor inicial.

Suponha que a solução y_n é dada por λ^n , onde λ é um número complexo. Substituindo esses valores em (3.12), obtemos

$$\lambda^k + c_1 \lambda^{k-1} + \dots + c_k = 0.$$

Essa equação é chamada de equação característica. Consideremos dois casos: um em que as raízes da equação característica são distintas e o outro quando têm multiplicidades.

Se as raízes da equação característica são distintas, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, a solução geral de (3.12) é dada por

$$y_n = \sum_{i=1}^k a_i \lambda_i^n.$$

Se as raízes distintas da equação característica são $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$, com multiplicidades m_1, m_2, \dots, m_r , respectivamente, tais que $\sum_{i=1}^r m_i = k$, então a solução geral de (3.12) é

$$y_n = \sum_{i=1}^r \lambda_i^n (a_{i0} + a_{i1}n + a_{i2}n^2 + \dots + a_{i,m_i-1}n^{m_i-1}).$$

As constantes da solução y_n devem ser encontradas a partir das condições iniciais.

Exemplo 3.5. Considere os polinômios de Chebyshev de segunda espécie u_n , ortonormais no intervalo $(-1, 1)$, normalizados por $\mu_0 = 1$. Eles satisfazem à relação de recorrência de três termos

$$u_n(x) = 2xu_{n-1}(x) - u_{n-2}(x), \quad n \geq 2,$$

com $u_0(x) = 1$ e $u_1(x) = 2x$. Substituindo n por $n + 2$ na equação acima, obtemos a equação de diferença linear, homogênea e de segunda ordem,

$$u_{n+2}(x) - 2xu_{n+1}(x) + u_n(x) = 0, \quad n \geq 0.$$

Assim, a equação característica será

$$\lambda^2 - 2x\lambda + 1 = 0,$$

cujas raízes são

$$\lambda = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2 - 4}}{2} = x \pm \sqrt{x^2 - 1}.$$

Como $-1 < x < 1$, as raízes são distintas, pois são complexas conjugadas. Portanto, a solução é dada por

$$u_n = a_1(x + \sqrt{x^2 - 1})^n + a_2(x - \sqrt{x^2 - 1})^n.$$

Utilizando as condições iniciais, ou seja, $u_0 = 1$ e $u_1 = 2x$, obtemos

$$a_1 = \frac{x + \sqrt{x^2 - 1}}{2\sqrt{x^2 - 1}} \quad e \quad a_2 = -\frac{x - \sqrt{x^2 - 1}}{2\sqrt{x^2 - 1}}.$$

Logo, obtemos uma representação explícita para os polinômios de Chebyshev dada por

$$u_n(x) = \frac{(x + \sqrt{x^2 - 1})^{n+1} - (x - \sqrt{x^2 - 1})^{n+1}}{2\sqrt{x^2 - 1}}.$$

Por outro lado, fazendo $x = \cos \theta$, com $0 < \theta < \pi$, obtemos

$$u_n(x) = \frac{\sin [(n+1)\theta]}{\sin \theta} = \frac{\sin [(n+1) \arccos x]}{\sqrt{1-x^2}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

3.4.2 Sistemas de equações de diferença

Nosso interesse, aqui, é encontrar soluções para o seguinte sistema de k equações de diferença lineares:

$$\begin{aligned} y_{n+1}^{(1)} &= a_{11}y_n^{(1)} + a_{12}y_n^{(2)} + \dots + a_{1k}y_n^{(k)} \\ y_{n+1}^{(2)} &= a_{21}y_n^{(1)} + a_{22}y_n^{(2)} + \dots + a_{2k}y_n^{(k)} \\ &\vdots \\ y_{n+1}^{(k)} &= a_{k1}y_n^{(1)} + a_{k2}y_n^{(2)} + \dots + a_{kk}y_n^{(k)} \end{aligned} \quad (3.13)$$

Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz real e não singular. Como os elementos de A são todos constantes, este sistema é conhecido como autônomo e pode ser escrito na seguinte forma matricial

$$Y_{n+1} = AY_n, \quad (3.14)$$

com $Y_n = (y_n^{(1)}, y_n^{(2)}, \dots, y_n^{(k)})^t \in \mathbb{R}^k$, onde t indica o transposto do vetor.

Se, para algum $n_0 \geq 0$, $Y_{n_0} = Y_0$ é dado, então o sistema (3.13) é chamado de problema de valor inicial. Além disso, de (3.14), obtemos

$$Y_n = AY_{n-1} = A^2Y_{n-2} = \dots = A^{n-n_0}Y_{n_0}.$$

Sem perda de generalidade, podemos supor $n_0 = 0$ e, então, a solução para o sistema (3.13) é dada por

$$Y_n = A^n Y_0,$$

com $Y_0 = Y_{n_0}$.

Sejam $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ os autovalores da matriz real A de ordem k . Para calcular o valor de A^n , basta aplicarmos o seguinte algoritmo:

$$A^n = \sum_{j=1}^k u_j(n) M(j-1),$$

com

$$u_1(n) = \lambda_1^n, \quad u_j(n) = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_j^{n-1-i} u_{j-1}(i), \quad j = 2, 3, \dots, k,$$

e

$$M(j) = (A - \lambda_j I) M(j-1), \quad M(0) = I,$$

onde I é a matriz identidade. Este algoritmo é conhecido como Algoritmo de Putzer e pode ser encontrado com mais detalhes em [23] ou [24].

Capítulo 4

Zeros dos Polinômios Ortogonais do Tipo Jacobi-Sobolev

Apresentamos, neste capítulo, resultados que obtivemos sobre os zeros dos polinômios ortogonais do tipo Jacobi-Sobolev, $P_n^{(\alpha, \beta, M, N, \tilde{M}, \tilde{N})}$, que são ortogonais com relação ao produto interno

$$\langle p, q \rangle = \frac{\Gamma(\alpha + \beta + 2)}{2^{\alpha + \beta + 1} \Gamma(\alpha + 1) \Gamma(\beta + 1)} \int_{-1}^1 p(x)q(x)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta dx + Mp(1)q(1) + Np'(1)q'(1) + \tilde{M}p(-1)q(-1) + \tilde{N}p'(-1)q'(-1), \quad (4.1)$$

onde $\alpha, \beta > -1$ e $M, N, \tilde{M}, \tilde{N} \geq 0$. Para os casos particulares $\tilde{M} = \tilde{N} = 0$, $N = \tilde{M} = \tilde{N} = 0$, $M = \tilde{M} = \tilde{N} = 0$ e $N = \tilde{N}$, investigamos a localização, propriedades de entrelaçamento, a monotonicidade e o comportamento assintótico dos zeros de $P_n^{(\alpha, \beta, M, N, \tilde{M}, \tilde{N})}$ com respeito aos parâmetros $M, N, \tilde{M}, \tilde{N}$. Esses resultados são obtidos através da análise do comportamento dos zeros de combinações lineares de polinômios da forma

$$P_n(x) = H_n(x) + c G_n(x),$$

e foram publicados em 2010 na revista *Applied Numerical Mathematics* juntamente com Dimitar K. Dimitrov e Fernando R. Rafaeli, [18].

4.1 Resultados preliminares

A sequência de polinômios, ortogonal com relação ao produto interno

$$\langle f, g \rangle_{\mathbb{S}} = \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)d\phi(x) + \sum_{i=0}^k M_i f'(a_i)g'(a_i),$$

onde $M_i > 0$ para $i = 0, 1, \dots, k$ e $a \in \mathbb{R}$, é chamada sequência de polinômios ortogonais do tipo Sobolev. Quando $d\phi$ é a medida dos polinômios ortogonais clássicos de Jacobi, ou seja,

$$d\phi(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta dx,$$

os polinômios $P_n^{(\alpha, \beta, M_i)}$ são os polinômios ortogonais do tipo Jacobi-Sobolev. Esses polinômios, em geral, não satisfazem às mesmas propriedades dos polinômios ortogonais relacionados ao produto interno usual. Por exemplo, eles não possuem uma relação de recorrência de três termos e os zeros desses polinômios podem não ser reais. Vamos considerar, neste capítulo, os polinômios ortogonais de Jacobi normalizados por

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(1) = \binom{n+\alpha}{n}. \quad (4.2)$$

Nessas condições, para $n \geq 1$ e com as condições iniciais $P_{-1}^{(\alpha, \beta)}(x) = 0$ e $P_0^{(\alpha, \beta)}(x) = 1$, os polinômios de Jacobi podem ser obtidos pela relação de recorrência de três termos

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = (\gamma_n x - \beta_n)P_{n-1}^{(\alpha, \beta)}(x) - \alpha_n P_{n-2}^{(\alpha, \beta)}(x), \quad (4.3)$$

com

$$\begin{aligned} \gamma_n &= \frac{(2n + \alpha + \beta - 1)(2n + \alpha + \beta)}{2n(n + \alpha + \beta)}, \\ \beta_n &= \frac{(2n + \alpha + \beta - 1)(\beta^2 - \alpha^2)}{2n(n + \alpha + \beta)(2n + \alpha + \beta - 2)}, \\ \alpha_n &= \frac{2(n + \alpha - 1)(n + \beta - 1)(2n + \alpha + \beta)}{2n(n + \alpha + \beta)(2n + \alpha + \beta - 2)}, \end{aligned}$$

e possuem os coeficientes dos termos de maior grau dados por

$$l_n^{(\alpha, \beta)} = 2^{-n} \binom{2n + \alpha + \beta}{n}, \quad n \geq 1.$$

Além disso, satisfazem à equação diferencial

$$(1-x^2)y'' + [\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2)x]y' + n(n + \alpha + \beta + 1)y = 0, \quad (4.4)$$

às propriedades

$$\frac{d}{dx} P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{n + \alpha + \beta + 1}{2} P_{n-1}^{(\alpha+1, \beta+1)}(x), \quad (4.5)$$

$$\frac{d}{dx} P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{-n[(2n + \alpha + \beta)x + \beta - \alpha]P_n^{(\alpha, \beta)}(x) + 2(n + \alpha)(n + \beta)P_{n-1}^{(\alpha, \beta)}(x)}{(2n + \alpha + \beta)(1 - x^2)} \quad (4.6)$$

e à relação de simetria

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(-x) = (-1)^n P_n^{(\beta, \alpha)}(x). \quad (4.7)$$

Ademais, eles podem ser obtidos explicitamente por

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n+\alpha}{n-k} \binom{n+\beta}{k} \left(\frac{x-1}{2}\right)^k \left(\frac{x+1}{2}\right)^{n-k}. \quad (4.8)$$

4.2 Polinômios do tipo Jacobi-Sobolev, $P_n^{(\alpha,\beta,M,N)}$

Primeiramente, vamos estudar os polinômios do tipo Jacobi-Sobolev que são ortogonais com relação ao produto interno (4.1) quando $\tilde{M} = \tilde{N} = 0$ e os denotaremos por $P_n^{(\alpha,\beta,M,N)}$. Esses polinômios serão normalizados de modo que os coeficientes dos termos de maior grau são dados por

$$l_n^{(\alpha,\beta,M,N)} = 2^{-n} \binom{2n+\alpha+\beta}{n} [A_0 - nA_1 + n(n-1)A_2], \quad n \geq 0,$$

em que

$$\begin{aligned} A_0 &= 1 + AM + ACN + \frac{n(n+\alpha+\beta+1)A^2BMN}{2(\alpha+2)}, \\ A_1 &= \frac{(\alpha+1)AM}{n(n+\alpha+\beta+1)} + \frac{(n-1)(n+\alpha+\beta+2)AN}{4(\alpha+1)} + A^2BMN, \\ A_2 &= \frac{AN}{4(\alpha+1)} + \frac{(\alpha+3)A^2BMN}{2(n-1)(n+\alpha+\beta+2)}, \end{aligned} \quad (4.9)$$

com $A_k = A_k(n, \alpha, \beta, M, N)$, $k = 0, 1, 2$, e

$$\begin{aligned} A &= A(n, \alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\beta+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+2)\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+2)\Gamma(\alpha+\beta+2)\Gamma(n+\beta+1)\Gamma(n)}, \\ B &= B(n, \alpha, \beta) = \frac{(n-1)(n+\beta)(n+\alpha+1)(n+\alpha+\beta+2)}{2n(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)(n+\alpha+\beta+1)}, \\ C &= C(n, \alpha, \beta) = \frac{(n-1)(n+\alpha+\beta+2)[n(\alpha+2)(n+\alpha+\beta+1) - (\alpha+1)\beta]}{4(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Apesar desses polinômios não satisfazerem a uma relação de recorrência de três termos, mostramos que eles podem ser representados como uma combinação dos polinômios clássicos de Jacobi.

Teorema 4.1. *Os polinômios $P_n^{(\alpha,\beta,M,N)}$ podem ser representados por*

$$P_n^{(\alpha,\beta,M,N)}(x) = A_0 P_n^{(\alpha,\beta)}(x) - A_1 (1+x) \frac{d}{dx} P_n^{(\alpha,\beta)}(x) + A_2 (1+x)^2 \frac{d^2}{dx^2} P_n^{(\alpha,\beta)}(x), \quad (4.11)$$

com os coeficientes A_0 , A_1 e A_2 dados por (4.9).

Demonstração: Consideremos os polinômios

$$Q_n(x) = A_0 P_n^{(\alpha, \beta)}(x) - A_1(1+x) \frac{d}{dx} P_n^{(\alpha, \beta)}(x) + A_2(1+x)^2 \frac{d^2}{dx^2} P_n^{(\alpha, \beta)}(x), \quad n \geq 0$$

com A_0, A_1 e A_2 satisfazendo às igualdades dadas em (4.9). Como $(1-x)^m$, $m = 0, 1, \dots, n-1$, formam uma base para os polinômios de grau até $n-1$, basta mostrarmos que o produto interno, dado em (4.1), de cada um desses polinômios com o polinômio Q_n é zero. De fato, para $2 \leq m \leq n-1$, de (4.5) obtemos

$$\begin{aligned} \langle Q_n, (1-x)^m \rangle &= \frac{2^{-\alpha-\beta-1} \Gamma(\alpha+\beta+2)}{\Gamma(\alpha+1) \Gamma(\beta+1)} \int_{-1}^1 Q_n(x) (1-x)^m (1-x)^\alpha (1+x)^\beta dx \\ &= \frac{2^{-\alpha-\beta-1} \Gamma(\alpha+\beta+2)}{\Gamma(\alpha+1) \Gamma(\beta+1)} \left\{ A_0 \int_{-1}^1 P_n^{(\alpha, \beta)}(x) (1-x)^m (1-x)^\alpha (1+x)^\beta dx \right. \\ &\quad - \frac{DA_1}{2} \int_{-1}^1 P_{n-1}^{(\alpha+1, \beta+1)}(x) (1-x)^{m-1} (1-x)^{\alpha+1} (1+x)^{\beta+1} dx \\ &\quad \left. + \frac{D(D+1)A_2}{4} \int_{-1}^1 P_{n-2}^{(\alpha+2, \beta+2)}(x) (1-x)^{m-2} (1-x)^{\alpha+2} (1+x)^{\beta+2} dx \right\}, \end{aligned}$$

onde $D = D(n, \alpha, \beta) = n + \alpha + \beta + 1$. Assim, pela ortogonalidade dos polinômios de Jacobi clássicos, temos

$$\langle Q_n, (1-x)^m \rangle = 0, \quad m = 2, 3, \dots, n-1.$$

Além disso, para $m = 0$,

$$\begin{aligned} \langle Q_n, 1 \rangle &= \frac{2^{-\alpha-\beta-1} \Gamma(\alpha+\beta+2)}{\Gamma(\alpha+1) \Gamma(\beta+1)} \left\{ \underbrace{A_0 \int_{-1}^1 P_n^{(\alpha, \beta)}(x) (1-x)^\alpha (1+x)^\beta dx}_{=0} \right. \\ &\quad - \frac{DA_1}{2} \int_{-1}^1 P_{n-1}^{(\alpha+1, \beta+1)}(x) (1-x)^\alpha (1+x)^{\beta+1} dx \\ &\quad \left. + \frac{D(D+1)A_2}{4} \int_{-1}^1 P_{n-2}^{(\alpha+2, \beta+2)}(x) (1-x)^\alpha (1+x)^{\beta+2} dx \right\} \\ &\quad + M \left[A_0 P_n^{(\alpha, \beta)}(1) - 2A_1 \frac{d}{dx} P_n^{(\alpha, \beta)}(x) \Big|_{x=1} + 4A_2 \frac{d^2}{dx^2} P_n^{(\alpha, \beta)}(x) \Big|_{x=1} \right] \end{aligned} \quad (4.12)$$

e, para $m = 1$,

$$\begin{aligned} \langle Q_n, (1-x) \rangle &= \frac{2^{-\alpha-\beta-1} \Gamma(\alpha+\beta+2)}{\Gamma(\alpha+1) \Gamma(\beta+1)} \left\{ \underbrace{A_0 \int_{-1}^1 P_n^{(\alpha, \beta)}(x) (1-x) (1-x)^\alpha (1+x)^\beta dx}_{=0} \right. \\ &\quad - \frac{DA_1}{2} \int_{-1}^1 \underbrace{P_{n-1}^{(\alpha+1, \beta+1)}(x) (1-x)^{\alpha+1} (1+x)^{\beta+1} dx}_{=0} \\ &\quad \left. + \frac{D(D+1)A_2}{4} \int_{-1}^1 P_{n-2}^{(\alpha+2, \beta+2)}(x) (1-x)^{\alpha+1} (1+x)^{\beta+2} dx \right\} \\ &\quad + N \left[(A_0 - A_1) \frac{d}{dx} P_n^{(\alpha, \beta)}(x) \Big|_{x=1} - (2A_1 - 4A_2) \frac{d^2}{dx^2} P_n^{(\alpha, \beta)}(x) \Big|_{x=1} + 4A_2 \frac{d^3}{dx^3} P_n^{(\alpha, \beta)}(x) \Big|_{x=1} \right]. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Usando a igualdade

$$\int_{-1}^1 P_n^{(\alpha,\beta)}(x)(1-x)^\rho(1+x)^\beta dx = \frac{2^{\beta+\rho+1}\Gamma(\rho+1)\Gamma(n+\beta+1)\Gamma(n+\alpha-\rho)}{n!\Gamma(\alpha-\rho)\Gamma(n+\beta+\rho+2)},$$

que é a expressão 7.391(4) em [30], e a ortogonalidade dos polinômios de Jacobi em (4.12) e (4.13), obtemos um sistema linear com duas equações e três incógnitas, A_0 , A_1 e A_2 . Substituindo os valores desses coeficientes pelos dados em (4.9), obtemos

$$\langle Q_n, 1 \rangle = \langle Q_n, (1-x) \rangle = 0.$$

Portanto, os polinômios Q_n são ortogonais com relação ao produto interno (4.1) para M e N positivos e $\tilde{M} = \tilde{N} = 0$. Além disso, os coeficientes dos termos de maior grau dos polinômios Q_n são iguais aos dados para $P_n^{(\alpha,\beta,M,N)}$, que são

$$2^{-n} \binom{2n+\alpha+\beta}{n} [A_0 - nA_1 + n(n-1)A_2].$$

Logo,

$$Q_n(x) \equiv P_n^{(\alpha,\beta,M,N)}(x).$$

■

Lema 4.1. Para $n \geq 2$ e $\alpha, \beta > -1$, os coeficientes A_0 , A_1 e A_2 , dados em (4.9), satisfazem

$$A_0, A_1, A_2 > 0. \quad (4.14)$$

Além disso, o coeficiente do termo de maior grau $l_n^{(\alpha,\beta,M,N)}$ de $P_n^{(\alpha,\beta,M,N)}$ também é positivo.

Demonstração: Como $n \geq 2$ e $\alpha, \beta > -1$, concluímos imediatamente que $A, B, C > 0$.

Logo, as desigualdades (4.14) tornam-se claramente verdadeiras.

Por outro lado, para mostrar que

$$l_n^{(\alpha,\beta,M,N)} = 2^{-n} \binom{2n+\alpha+\beta}{n} [A_0 - nA_1 + n(n-1)A_2]$$

é positivo, é suficiente provar que $A_0 - nA_1 + n(n-1)A_2 > 0$. Substituindo os valores de A_0 , A_1 e A_2 dados em (4.9), obtemos

$$\begin{aligned}
 A_0 - nA_1 + n(n-1)A_2 = & \\
 & 1 + \frac{(n+\beta)A}{4(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)(n+\alpha+\beta+1)(n+\alpha+\beta+2)} \\
 & \times \{(n+\alpha+\beta+2)[4(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)M \\
 & + (n-1)(n+\alpha+\beta+1)[n(\alpha+2)(n+\alpha+\beta) - (\alpha+1)(\alpha+\beta+2)]N] \\
 & + 2n(\alpha+1)(\alpha+3)(n+\beta-1)(n+\alpha+\beta+1)ABMN\} > 0.
 \end{aligned}$$

■

4.2.1 Zeros de $P_n^{(\alpha,\beta,M,N)}$

A seguir, mostramos que os zeros de $P_n^{(\alpha,\beta,M,N)}$ são reais, distintos e se entrelaçam com os zeros de $P_n^{(\alpha,\beta)}$. Ademais, provamos que pelo menos $n-1$ desses zeros pertencem ao intervalo $(-1, 1)$ e fornecemos explicitamente o valor da massa N_0 tal que, para $N > N_0$, o maior zero de $P_n^{(\alpha,\beta,M,N)}$ é maior do que 1.

Para mostrar esses resultados, precisamos de um limitante para o maior zero do polinômio de Jacobi, $x_{n,n}^{(\alpha,\beta)}$, que é apresentado no lema a seguir.

Lema 4.2. *Para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\alpha, \beta > -1$,*

$$x_{n,n}^{(\alpha,\beta)} < 1 - \frac{2(\alpha+1)}{n(n+\alpha+\beta+1)}.$$

Demonstração: Consideremos, agora, os polinômios ortogonais de Jacobi denotados por $R_n^{(\alpha,\beta)}$, e normalizados por

$$R_n^{(\alpha,\beta)}(1) = 1.$$

Assim, utilizando a função hipergeométrica de Gauss para expressar $R_n^{(\alpha,\beta)}(x)$, que pode ser encontrada no texto de Szegő [61], temos

$$R_n^{(\alpha,\beta)}(x) = {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -n, n+\alpha+\beta+1 \\ \alpha+1 \end{matrix} \middle| \frac{1-x}{2} \right),$$

onde

$${}_2F_1 \left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} \middle| x \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{k! (c)_k} x^k$$

e $(a)_k = a(a+1)(a+2)\dots(a+k-1)$ denota o símbolo de Pochhammer. Assim, com essa normalização,

$$\frac{d}{dx} R_n^{(\alpha,\beta)}(x) \Big|_{x=1} = \frac{n(n+\alpha+\beta+1)}{2(\alpha+1)}.$$

Agora, seja $1 - \delta$, com $\delta > 0$, o ponto de intersecção da reta tangente a $R_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ no ponto $(1, R_n^{(\alpha,\beta)}(1))$ com a reta real. Como $R_n^{(\alpha,\beta)}$ é uma função convexa para $x > x_{n,n}^{(\alpha,\beta)}$, concluímos que $x_{n,n}^{(\alpha,\beta)} < 1 - \delta$. Por outro lado,

$$\left. \frac{d}{dx} R_n^{(\alpha,\beta)}(x) \right|_{x=1} = \frac{R_n^{(\alpha,\beta)}(1)}{\delta},$$

o que implica na igualdade

$$\delta = \frac{2(\alpha + 1)}{n(n + \alpha + \beta + 1)}$$

de onde segue o resultado desejado. \blacksquare

Teorema 4.2. *Para $n \geq 2$, $\alpha, \beta > -1$ e $M, N > 0$, os zeros dos polinômios ortogonais do tipo Jacobi-Sobolev são reais e se entrelaçam com os zeros dos polinômios ortogonais de Jacobi, ou seja,*

$$-1 < x_{n,1}^{(\alpha,\beta)} < x_{n,1}^{(\alpha,\beta,M,N)} < \dots < x_{n,n}^{(\alpha,\beta)} < x_{n,n}^{(\alpha,\beta,M,N)}. \quad (4.15)$$

Demonstração: Reescrevendo a fórmula de conexão (4.11), temos

$$P_n^{(\alpha,\beta,M,N)}(x) = A_0 P_n^{(\alpha,\beta)}(x) - H_n^{(\alpha,\beta)}(x), \quad (4.16)$$

com

$$H_n^{(\alpha,\beta)}(x) = A_1(1+x) \frac{d}{dx} P_n^{(\alpha,\beta)}(x) - A_2(1+x)^2 \frac{d^2}{dx^2} P_n^{(\alpha,\beta)}(x).$$

Por outro lado, usando a equação diferencial satisfeita pelos polinômios de Jacobi, equação (4.4), e a expressão (4.6) para eliminar os termos $\frac{d}{dx} P_n^{(\alpha,\beta)}$ e $\frac{d^2}{dx^2} P_n^{(\alpha,\beta)}$ de $H_n^{(\alpha,\beta)}$, obtemos

$$H_n^{(\alpha,\beta)}(x) = T_0(x) P_n^{(\alpha,\beta)}(x) + T_1(x) P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x), \quad (4.17)$$

com

$$\begin{aligned} T_1(x) = & \frac{(n+\alpha)(n+\beta)}{n(n-1)(\alpha+1)(n+\alpha+\beta+1)(n+\alpha+\beta+2)(2n+\alpha+\beta)(x-1)^2} \\ & \times \{ (n-1)(n+\alpha+\beta+2)[4M(\alpha+1)^2(1-x) + n(n+\alpha+\beta+1)Nq(x)] \\ & + 2n(\alpha+1)(n+\alpha+\beta+1)ABMNr(x) \} \end{aligned}$$

onde

$$q(x) = -2(\alpha+1) + n(n+\alpha+\beta+1)(1-x)$$

e

$$r(x) = -2(\alpha+1)(\alpha+3) + (1-x)[2n(n+\alpha+\beta+1) + (\alpha+1)(\alpha+\beta+2)].$$

Como vamos avaliar a igualdade (4.17) nos zeros de $P_n^{(\alpha,\beta)}$, a expressão para T_0 não é relevante. Por outro lado, temos que determinar o sinal de T_1 . Para isso, basta analisarmos o comportamento das retas q e r . Observe que ambas são retas decrescentes e possuem como zeros

$$q_1 = 1 - \frac{2(\alpha + 1)}{n(n + \alpha + \beta + 1)}$$

e

$$r_1 = 1 - \frac{2(\alpha + 1)(\alpha + 3)}{2n(n + \alpha + \beta + 1) + (\alpha + 1)(\alpha + \beta + 2)},$$

respectivamente. Além disso, para $n \geq 2$,

$$r_1 - q_1 = \frac{2(n - 1)(\alpha + 1)^2(n + \alpha + \beta + 2)}{n(n + \alpha + \beta + 1)[2n(n + \alpha + \beta + 1) + (\alpha + 1)(\alpha + \beta + 2)]} > 0,$$

ou seja, $r_1 > q_1$. Por outro lado, usando o Lema 4.2, $x_{n,n}^{(\alpha,\beta)} < q_1 < r_1$. Logo, $T_1(x) > 0$ para $x < x_{n,n}^{(\alpha,\beta)}$.

Assim, avaliando a fórmula de conexão (4.16) nos zeros do polinômio de Jacobi, $P_n^{(\alpha,\beta)}$, usando a expressão (4.17) e a propriedade de entrelaçamento dos zeros de $P_n^{(\alpha,\beta)}$ e $P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}$, concluímos que

$$\begin{aligned} \text{sinal} \left[P_n^{(\alpha,\beta,M,N)} \left(x_{n,k}^{(\alpha,\beta)} \right) \right] &= -\text{sinal} \left[H_n^{(\alpha,\beta)} \left(x_{n,k}^{(\alpha,\beta)} \right) \right] \\ &= -\text{sinal} \left[P_{n-1}^{(\alpha,\beta)} \left(x_{n,k}^{(\alpha,\beta)} \right) \right] = (-1)^{n-k+1}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Portanto, $n - 1$ zeros de $P_n^{(\alpha,\beta,M,N)}$ se entrelaçam com os n zeros de $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$, isto é,

$$-1 < x_{n,k}^{(\alpha,\beta)} < x_{n,k}^{(\alpha,\beta,M,N)} < x_{n,k+1}^{(\alpha,\beta)}, \quad n \geq 2, \quad 1 \leq k \leq n - 1.$$

Falta mostrar que $x_{n,n}^{(\alpha,\beta,M,N)} > x_{n,n}^{(\alpha,\beta)}$. Pelo Lema 4.1, o coeficiente $l_n^{(\alpha,\beta,M,N)}$ de x^n em $P_n^{(\alpha,\beta,M,N)}$ é positivo e, de (4.18), $P_n^{(\alpha,\beta,M,N)}(x_{n,n}^{(\alpha,\beta)}) < 0$. Logo, $x_{n,n}^{(\alpha,\beta,M,N)} > x_{n,n}^{(\alpha,\beta)}$. ■

A seguir determinaremos explicitamente o valor crítico do parâmetro N , tal que o maior zero de $P_n^{(\alpha,\beta,M,N)}$ pertença ou não ao intervalo de ortogonalidade $(-1, 1)$.

Teorema 4.3. Para $n \geq 2$, $\alpha, \beta > -1$ e $M, N > 0$, o maior zero de $P_n^{(\alpha,\beta,M,N)}$ satisfaz

$$x_{n,n}^{(\alpha,\beta,M,N)} < 1, \quad \text{para } N < N_0,$$

$$x_{n,n}^{(\alpha,\beta,M,N)} = 1, \quad \text{para } N = N_0,$$

$$x_{n,n}^{(\alpha,\beta,M,N)} > 1, \quad \text{para } N > N_0,$$

com

$$N_0 = \frac{4(\alpha + 1)(\alpha + 2)(\alpha + 3)}{(n - 1)(n + \beta)(n + \alpha + 1)(n + \alpha + \beta + 2)A}.$$

Demonstração: Para investigar a localização de $x_{n,n}^{(\alpha,\beta,M,N)}$ com relação ao ponto $x = 1$, é suficiente observar que $P_n^{(\alpha,\beta,M,N)}(1) = 0$ se, e somente se, $N = N_0$. ■

É muito interessante observar que N_0 não depende de M . A fim de ilustrar os resultados obtidos no Teorema 4.3, colocamos, na Figura 4.1, alguns gráficos de $P_3^{(\alpha,\beta,M,N)}$, com $\alpha = 0.5$, $\beta = 1$ e $M = 0.2$, para três valores de N .

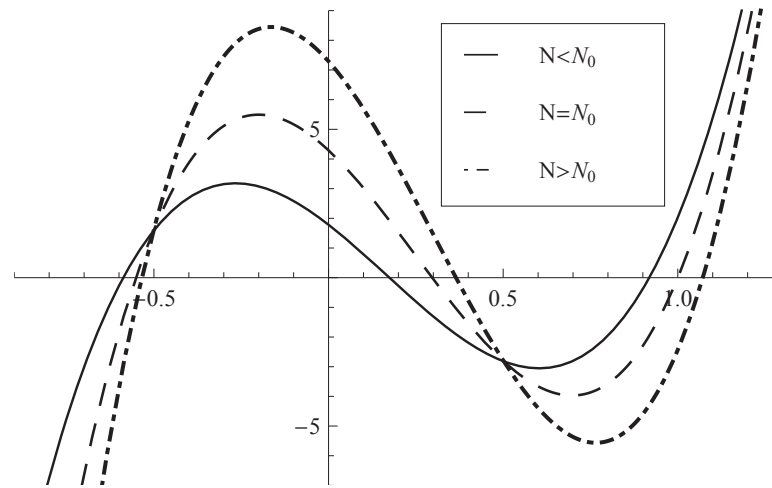


Figura 4.1: Gráfico de $P_3^{(0.5,1,0.2,N)}$ para alguns valores de N .

A Tabela 4.1 ilustra o comportamento dos zeros de $P_3^{(\alpha,\beta,M,N)}$, para $\alpha = 0.5$, $\beta = 1$, $M = 0.2$ e vários valores de N .

N	$x_{3,1}^{(0.5,1,0.2,N)}$	$x_{3,2}^{(0.5,1,0.2,N)}$	$x_{3,3}^{(0.5,1,0.2,N)}$
0	-0.592666	0.16014	0.911199
1/100	-0.559182	0.26751	0.976279
$N_0 = 128/9009$	-0.551342	0.296797	1
1/2	-0.504285	0.490049	1.33242
1	-0.502834	0.495743	1.35248
5	-0.501641	0.500377	1.36972
10	-0.50149	0.500961	1.37196

Tabela 4.1: Zeros de $P_3^{(\alpha,\beta,M,N)}$ para alguns valores de N .

Observe que, para $N > N_0$, o maior zero é maior do que 1. Ademais, parece que os zeros são funções crescentes de N . Alguns outros experimentos numéricos também indicam que esses zeros são funções crescentes de M .

Formulamos, então, o seguinte problema:

Conjectura 4.1. *Para todo $M > 0$ fixo, os zeros $x_{n,k}^{(\alpha,\beta,M,N)}$ são funções crescentes de N e, para todo $N > 0$ fixo, os zeros $x_{n,k}^{(\alpha,\beta,M,N)}$ são funções crescentes de M .*

4.3 Polinômios ortogonais do tipo Jacobi

Consideremos, agora, o produto interno (4.1) com $N = \tilde{M} = \tilde{N} = 0$. Denotemos por $P_n^{(\alpha,\beta,M)}$ os polinômios $P_n^{(\alpha,\beta,M,0,0,0)}$, ortogonais com relação ao produto interno

$$\langle p, q \rangle = \frac{2^{-\alpha-\beta-1}\Gamma(\alpha+\beta+2)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)} \int_{-1}^1 p(x)q(x)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta dx + Mp(1)q(1), \quad (4.19)$$

com $\alpha, \beta > -1$ e $M > 0$. Os polinômios que são ortogonais com relação a esse produto interno são chamados de polinômios ortogonais do tipo Jacobi (ou Jacobi-Koornwinder). De forma análoga, podemos considerar os polinômios do tipo Jacobi com $M = N = \tilde{N} = 0$, $P_n^{(\alpha,\beta,0,0,\tilde{M},0)}$ que vamos denotar por $P_n^{(\alpha,\beta,\tilde{M})}$. Dessa forma, esses polinômios são ortogonais com relação ao produto interno

$$\langle p, q \rangle = \frac{2^{-\alpha-\beta-1}\Gamma(\alpha+\beta+2)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)} \int_{-1}^1 p(x)q(x)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta dx + \tilde{M}p(-1)q(-1), \quad (4.20)$$

com $\alpha, \beta > -1$ e $\tilde{M} > 0$. Tais polinômios foram estudados primeiramente por T. H. Koornwinder [38] em 1984. O autor adicionou, simultaneamente, duas funções delta de Dirac nos pontos $x = -1$ e $x = 1$, isto é, estudou os polinômios ortogonais com relação ao produto interno (4.1), com $N = \tilde{N} = 0$, ou seja,

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle &= \frac{2^{-\alpha-\beta-1}\Gamma(\alpha+\beta+2)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)} \int_{-1}^1 f(x)g(x)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta dx \\ &+ Mf(1)g(1) + \tilde{M}f(-1)g(-1). \end{aligned} \quad (4.21)$$

Denotemos por $P_n^{(\alpha,\beta,M,\tilde{M})}$ os polinômios $P_n^{(\alpha,\beta,M,\tilde{M},0,0)}$ que são ortogonais com relação à medida (4.21). Uma representação desses polinômios em termos dos polinômios clássicos, dada em [38], é a seguinte.

Lema 4.3. Os polinômios $P_n^{(\alpha,\beta,M,\tilde{M})}$ podem ser representados por

$$P_n^{(\alpha,\beta,M,\tilde{M})}(x) = \delta_n \left\{ A_n B_n P_n^{(\alpha,\beta)}(x) + \frac{B_n \tilde{M}(1-x) - A_n M(1+x)}{\alpha + \beta + 1} \frac{d}{dx} P_n^{(\alpha,\beta)}(x) \right\}, \quad (4.22)$$

com

$$\delta_n = \delta_n(\alpha, \beta) = \left[\frac{\Gamma(n + \alpha + \beta + 1)}{\Gamma(n + 1)\Gamma(\alpha + \beta + 1)} \right]^2,$$

$$A_n = A_n^{\tilde{M}}(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(n + 1)\Gamma(n + \alpha + 1)\Gamma(\beta + 1)\Gamma(\alpha + \beta + 1)}{\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(n + \beta + 1)\Gamma(n + \alpha + \beta + 1)} + \frac{n(n + \alpha + \beta + 1)\tilde{M}}{(\beta + 1)(\alpha + \beta + 1)}, \quad (4.23)$$

$$B_n = B_n^M(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(n + 1)\Gamma(n + \beta + 1)\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(\alpha + \beta + 1)}{\Gamma(\beta + 1)\Gamma(n + \alpha + 1)\Gamma(n + \alpha + \beta + 1)} + \frac{n(n + \alpha + \beta + 1)M}{(\alpha + 1)(\alpha + \beta + 1)}.$$

Como consequência de (4.11), obtemos, para os polinômios $P_n^{(\alpha,\beta,M)}$, a fórmula de conexão a seguir.

Lema 4.4. Os polinômios $P_n^{(\alpha,\beta,M)}$ podem ser representados por

$$P_n^{(\alpha,\beta,M)}(x) = A_0 P_n^{(\alpha,\beta)}(x) - A_1 (1+x) \frac{d}{dx} P_n^{(\alpha,\beta)}(x), \quad (4.24)$$

com

$$A_0 = A_0^M(n; \alpha, \beta) = 1 + AM,$$

$$A_1 = A_1^M(n; \alpha, \beta) = \frac{\alpha + 1}{n(n + \alpha + \beta + 1)} AM$$

e

$$A = A(n; \alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\beta + 1)\Gamma(n + \alpha + \beta + 2)\Gamma(n + \alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 2)\Gamma(\alpha + \beta + 2)\Gamma(n + \beta + 1)\Gamma(n)}.$$

Forneceremos, em seguida, uma segunda fórmula de conexão que desenvolvemos para esses polinômios.

Teorema 4.4. Os polinômios $P_n^{(\alpha,\beta,M)}$ podem ser representados por

$$P_n^{(\alpha,\beta,M)}(x) = P_n^{(\alpha,\beta)}(x) + M G_n^{(\alpha,\beta)}(x), \quad (4.25)$$

com

$$G_n^{(\alpha,\beta)}(x) := \frac{(n + \beta)A}{2n} (x - 1) P_{n-1}^{(\alpha+2,\beta)}(x). \quad (4.26)$$

Demonstração: Observe que, de (4.9), temos

$$G_n^{(\alpha,\beta)}(x) = A P_n^{(\alpha,\beta)}(x) - \frac{(\alpha + 1)A}{n(n + \alpha + \beta + 1)} (1 + x) \frac{d}{dx} P_n^{(\alpha,\beta)}(x). \quad (4.27)$$

Agora, para provar que (4.26) e (4.27) coincidem, basta comparar os coeficientes das potências de x de cada equação, utilizando, por exemplo, a forma explícita para os polinômios de Jacobi dada pela expressão (4.8). ■

4.3.1 Zeros de $P_n^{(\alpha,\beta,M)}$

Um problema interessante é investigar o comportamento dos zeros dos polinômios do tipo Jacobi quando a massa M varia. Alguns autores que trataram desse e de outros assuntos são Álvarez-Nodarse, Marcellán e Petronilho [5], que estudaram a distribuição dos zeros dos polinômios do tipo Jacobi, Dueñas e Marcellán [20], que mostraram propriedades de entrelaçamento e a convergência desses zeros aos zeros dos polinômios de Jacobi, e Grünbaum [32], que tratou da interpretação eletrostática dos zeros desses polinômios.

Neste trabalho, provamos que os zeros de $P_n^{(\alpha,\beta,M)}$ são funções monótonas, considerando-os como funções da massa M , assim como a convergência deles quando M tende ao infinito, com velocidade da ordem de $1/M$.

Teorema 4.5. *Os zeros dos polinômios ortogonais do tipo Jacobi, $P_n^{(\alpha,\beta,M)}$, são reais, distintos e se entrelaçam com os zeros dos polinômios de Jacobi $P_n^{(\alpha,\beta)}$ e $P_{n-1}^{(\alpha+2,\beta)}$, ou seja, se denotarmos por $x_{n,k}^{(\alpha,\beta,M)}$, $k = 1, \dots, n$, os zeros de $P_n^{(\alpha,\beta,M)}$, então*

$$x_{n,k}^{(\alpha,\beta)} < x_{n,k}^{(\alpha,\beta,M)} < x_{n-1,k}^{(\alpha+2,\beta)} < x_{n,k+1}^{(\alpha,\beta)} < x_{n,k+1}^{(\alpha,\beta,M)}, \quad k = 1, 2, \dots, n-1, \quad (4.28)$$

para $M > 0$, $n \geq 2$ e $\alpha, \beta > -1$.

Demonstração: Os coeficientes de x^n em $P_n^{(\alpha,\beta)}$, $P_n^{(\alpha,\beta,M)}$ e $G_n^{(\alpha,\beta)}$ são dados por

$$2^{-n} \binom{2n+\alpha+\beta}{n}, \quad 2^{-n} \binom{2n+\alpha+\beta}{n} [A_0 - nA_1] \quad \text{e} \quad \frac{2^{-n}(n+\beta)A}{n} \binom{2n+\alpha+\beta}{n-1},$$

respectivamente. Como

$$A_0 - nA_1 = 1 + \frac{(n+\beta)AM}{n+\alpha+\beta+1} > 0,$$

então todos esses coeficientes são positivos. Por outro lado, usando a fórmula de conexão (4.24) para $P_n^{(\alpha,\beta,M)}$ e substituindo $\frac{d}{dx} P_n^{(\alpha,\beta)}$ pela expressão (4.6), obtemos

$$\begin{aligned} P_n^{(\alpha,\beta,M)}(x) &= \left\{ A_0 + \frac{n[(2n+\alpha+\beta)x + \beta - \alpha]}{(2n+\alpha+\beta)(1-x)} A_1 \right\} P_n^{(\alpha,\beta)}(x) \\ &\quad - \frac{2(n+\alpha)(n+\beta)}{(2n+\alpha+\beta)(1-x)} A_1 P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x). \end{aligned} \quad (4.29)$$

Já que

$$\frac{2(n+\alpha)(n+\beta)}{(2n+\alpha+\beta)(1-x)} A_1 > 0$$

para $-1 < x < 1$, $n \geq 2$ e $\alpha, \beta > -1$, avaliando a igualdade (4.29) nos zeros de $P_n^{(\alpha, \beta)}$, obtemos

$$\text{signal} \left[P_n^{(\alpha, \beta, M)} \left(x_{n, k}^{(\alpha, \beta)} \right) \right] = -\text{signal} \left[P_{n-1}^{(\alpha, \beta)} \left(x_{n, k}^{(\alpha, \beta)} \right) \right] = (-1)^{n-k+1},$$

pois os zeros de $P_n^{(\alpha, \beta)}$ e $P_{n-1}^{(\alpha, \beta)}$ se entrelaçam. Podemos, então, concluir que os zeros de $P_n^{(\alpha, \beta, M)}$ e $P_n^{(\alpha, \beta)}$ satisfazem às desigualdades

$$x_{n, 1}^{(\alpha, \beta)} < x_{n, 1}^{(\alpha, \beta, M)} < \dots < x_{n, n}^{(\alpha, \beta)} < x_{n, n}^{(\alpha, \beta, M)}.$$

Usando a propriedade de entrelaçamento dos zeros acima e avaliando a fórmula de conexão (4.25) nos zeros de $P_n^{(\alpha, \beta)}$ e de $P_n^{(\alpha, \beta, M)}$, obtemos

$$\text{signal} \left[P_n^{(\alpha, \beta, M)} \left(x_{n, k}^{(\alpha, \beta)} \right) \right] = \text{signal} \left[G_n^{(\alpha, \beta)} \left(x_{n, k}^{(\alpha, \beta)} \right) \right] = (-1)^{n-k+1}$$

e

$$\text{signal} \left[P_n^{(\alpha, \beta)} \left(x_{n, k}^{(\alpha, \beta, M)} \right) \right] = -\text{signal} \left[G_n^{(\alpha, \beta)} \left(x_{n, k}^{(\alpha, \beta, M)} \right) \right] = (-1)^{n-k},$$

para $k = 1, \dots, n$. Logo, os zeros de $P_n^{(\alpha, \beta, M)}$ e $G_n^{(\alpha, \beta)}$ se entrelaçam. Uma vez que o maior zero de $G_n^{(\alpha, \beta)}$ é 1 e os demais são os zeros de $P_{n-1}^{(\alpha+2, \beta)}$, obtemos o resultado desejado. ■

Como todos os zeros dos polinômios de Jacobi pertencem ao intervalo $(-1, 1)$, o teorema anterior implica imediatamente no corolário a seguir.

Corolário 4.1. *Todos os zeros do polinômio $P_n^{(\alpha, \beta, M)}$ pertencem ao intervalo de ortogonalidade $(-1, 1)$.*

Da igualdade (4.25), concluímos que os polinômios ortogonais do tipo Jacobi $P_n^{(\alpha, \beta, M)}$ podem ser obtidos através de uma combinação linear dos polinômios $P_n^{(\alpha, \beta)}$ e $G_n^{(\alpha, \beta)}$. Além disso, pelo Teorema 4.5, os zeros desses dois últimos polinômios se entrelaçam. Logo, usando o Teorema 3.2 (item *i*), concluímos que os zeros de $P_n^{(\alpha, \beta, M)}$ são funções crescentes do parâmetro M . Podemos, então, enunciar o teorema a seguir.

Teorema 4.6. *Os zeros do polinômio ortogonal do tipo Jacobi $P_n^{(\alpha, \beta, M)}$ são funções crescentes do parâmetro M .*

Quando M tende ao ∞ , pelo Teorema 3.4, o maior zero do polinômio do tipo Jacobi $P_n^{(\alpha, \beta, M)}$ converge para 1 e os $n - 1$ zeros restantes convergem para os zeros do polinômio de Jacobi $P_{n-1}^{(\alpha+2, \beta)}$. Então, formulamos o seguinte resultado:

Teorema 4.7. *Os zeros de $P_n^{(\alpha,\beta,M)}$ possuem o seguinte comportamento assintótico com respeito a M :*

$$\lim_{M \rightarrow \infty} x_{n,n}^{(\alpha,\beta,M)} = 1 \quad e \quad \lim_{M \rightarrow \infty} x_{n,k}^{(\alpha,\beta,M)} = x_{n-1,k}^{(\alpha+2,\beta)}. \quad (4.30)$$

Além disso, a velocidade de convergência é expressa por

$$\lim_{M \rightarrow \infty} M[1 - x_{n,n}^{(\alpha,\beta,M)}] = k(n, \alpha, \beta)$$

e

$$\lim_{M \rightarrow \infty} M[x_{n-1,k}^{(\alpha+2,\beta)} - x_{n,k}^{(\alpha,\beta,M)}] = \frac{[1 + x_{n-1,k}^{(\alpha+2,\beta)}] k(n, \alpha, \beta)}{2(\alpha + 2)}, \quad k = 1, 2, \dots, n-1,$$

com

$$k(n, \alpha, \beta) = \frac{2(\alpha + 1)(\alpha + 2)}{(n + \beta)(n + \alpha + 1)A}. \quad (4.31)$$

Demonstração: Usando a fórmula (4.25), as propriedades de entrelaçamento dos zeros contidas no Teorema 4.5 e o Teorema 3.4, obtemos que os zeros de $P_n^{(\alpha,\beta,M)}$ convergem para os zeros do polinômio $G_n^{(\alpha,\beta)}$ dado em (4.26), ou seja, valem as relações limites (4.30). Além disso, segue também que

$$\lim_{M \rightarrow \infty} M[1 - x_{n,n}^{(\alpha,\beta,M)}] = \frac{P_n^{(\alpha,\beta)}(1)}{\left[G_n^{(\alpha,\beta)}(x)\right]'_{x=1}}$$

e, para $k = 1, 2, \dots, n-1$,

$$\lim_{M \rightarrow \infty} M[x_{n-1,k}^{(\alpha+2,\beta)} - x_{n,k}^{(\alpha,\beta,M)}] = \frac{P_n^{(\alpha,\beta)}(x_{n-1,k}^{(\alpha+2,\beta)})}{\left[G_n^{(\alpha,\beta)}(x)\right]'_{x=x_{n-1,k}^{(\alpha+2,\beta)}}}.$$

Sabemos, de (4.2), que

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(1) = \binom{n + \alpha}{n}.$$

Então, derivando $G_n^{(\alpha,\beta)}$ com relação a x e avaliando no ponto $x = 1$, obtemos

$$\lim_{M \rightarrow \infty} M[1 - x_{n,n}^{(\alpha,\beta,M)}] = \frac{P_n^{(\alpha,\beta)}(1)}{\left[G_n^{(\alpha,\beta)}(x)\right]'_{x=1}} = \frac{2(\alpha + 1)(\alpha + 2)}{(n + \beta)(n + \alpha + 1)A}.$$

Agora, vamos encontrar uma forma explícita para

$$\frac{P_n^{(\alpha,\beta)}(x_{n-1,k}^{(\alpha+2,\beta)})}{\left[G_n^{(\alpha,\beta)}(x)\right]'_{x=x_{n-1,k}^{(\alpha+2,\beta)}}}.$$

Derivando $G_n^{(\alpha,\beta)}$, dado pela expressão (4.27), com relação a x e usando a equação diferencial (4.4) satisfeita pelos polinômios de Jacobi para substituir o termo $\left(P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\right)''$ em $\left[G_n^{(\alpha,\beta)}(x)\right]'$, obtemos

$$\begin{aligned} \left[G_n^{(\alpha,\beta)}(x)\right]' &= A \left\{ 1 - \frac{(\alpha+1)}{n(n+\alpha+\beta+1)} \left[1 - \frac{\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2)x}{1-x} \right] \right\} \left(P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\right)' \\ &\quad + \frac{(\alpha+1)A}{1-x} P_n^{(\alpha,\beta)}(x). \end{aligned} \quad (4.32)$$

Por outro lado, avaliando a equação (4.27) em $x_{n-1,k}^{(\alpha+2,\beta)}$, obtemos a igualdade

$$\left(P_n^{(\alpha,\beta)}(x_{n-1,k}^{(\alpha+2,\beta)})\right)' = \frac{n(n+\alpha+\beta+1)}{(\alpha+1)(1+x_{n-1,k}^{(\alpha+2,\beta)})} P_n^{(\alpha,\beta)}(x_{n-1,k}^{(\alpha+2,\beta)}).$$

Assim, substituindo a igualdade acima na equação (4.32) avaliada em $x = x_{n-1,k}^{(\alpha+2,\beta)}$, concluímos que

$$\frac{\left[G_n^{(\alpha,\beta)}(x)\right]'_{x=x_{n-1,k}^{(\alpha+2,\beta)}}}{P_n^{(\alpha,\beta)}(x_{n-1,k}^{(\alpha+2,\beta)})} = \frac{A(n+\alpha+1)(n+\beta)}{(1+x_{n-1,k}^{(\alpha+2,\beta)})(\alpha+1)}.$$

Portanto

$$\lim_{M \rightarrow \infty} M \left[x_{n-1,k}^{(\alpha+2,\beta)} - x_{n,k}^{(\alpha,\beta,M)} \right] = \frac{P_n^{(\alpha,\beta)}(x_{n-1,k}^{(\alpha+2,\beta)})}{\left[G_n^{(\alpha,\beta)}(x)\right]'_{x=x_{n-1,k}^{(\alpha+2,\beta)}}} = \frac{(1+x_{n-1,k}^{(\alpha+2,\beta)})(\alpha+1)}{A(n+\alpha+1)(n+\beta)}.$$

■

Para ilustrar os resultados dos Teoremas 4.5, 4.6 e 4.7, fornecemos a Tabela 4.2 que apresenta os zeros de $P_3^{(\alpha,\beta,M)}$ para $\alpha = 0$, $\beta = 2$ e vários valores de M .

M	$x_{3,1}^{(0,2,M)}$	$x_{3,2}^{(0,2,M)}$	$x_{3,3}^{(0,2,M)}$
0	-0.410004	0.305992	0.854012
1	-0.38243	0.368016	0.972748
5	-0.378969	0.375736	0.993617
10	-0.378475	0.376834	0.996739
50	-0.378068	0.377736	0.999336

Tabela 4.2: Zeros de $P_3^{(\alpha,\beta,M)}$ para alguns valores de M .

Observe que o maior zero converge para 1 e os outros dois zeros convergem aos zeros do polinômio de Jacobi $P_2^{(2,2)}$, isto é, eles convergem para $x_{2,1}^{(2,2)} = -1/\sqrt{7} \approx -0.377964$ e

$x_{2,2}^{(2,2)} = 1/\sqrt{7} \approx 0.377964$. Note também que todos os zeros são funções crescentes com relação a M .

A Figura 4.2 ilustra o comportamento dos zeros de $P_3^{(0,2,M)}$ como funções do parâmetro M , limitado superiormente pelos zeros de $P_2^{(2,2)}$ e por 1.

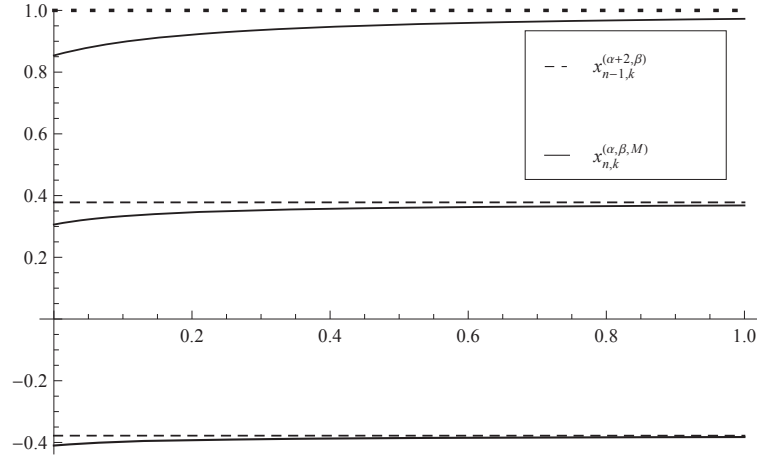


Figura 4.2: Gráfico dos zeros de $P_3^{(0,2,M)}$ como função de M .

Experimentos numéricos mostram que as quantidades $M[1 - x_{n,n}^{(\alpha,\beta,M)}]$ e $M[x_{n-1,k}^{(\alpha+2,\beta)} - x_{n,k}^{(\alpha,\beta,M)}]$, $1 \leq k \leq n - 1$, são funções crescentes de M .

Usando a propriedade de simetria (4.7) dos polinômios de Jacobi, obtemos facilmente resultados análogos aos anteriores sobre os zeros $x_{n,k}^{(\alpha,\beta,\tilde{M})}$ dos polinômios $P_n^{(\alpha,\beta,\tilde{M})}$, gerados pelo produto interno (4.20).

4.3.2 Zeros de $P_n^{(\alpha,\beta,M,\tilde{M})}$

Vale mencionar que Koornwinder [38] estudou os polinômios ortogonais do tipo Jacobi $P_n^{(\alpha,\beta,M,\tilde{M})}$ e mostrou que eles podem ser expressos por uma combinação de polinômios clássicos de Jacobi e que satisfazem a uma equação diferencial ordinária de segunda ordem. Nossa contribuição é com relação ao estudo dos zeros de $P_n^{(\alpha,\beta,M,\tilde{M})}$. Analisamos o comportamento monótono e assintótico desses zeros com relação às massas M e \tilde{M} . Esses resultados também são encontrados em [18].

Denotemos seus zeros por $x_{n,k}^{(\alpha,\beta,M,\tilde{M})}$, $k = 1, \dots, n$, com $x_{n,1}^{(\alpha,\beta,M,\tilde{M})} < \dots < x_{n,n}^{(\alpha,\beta,M,\tilde{M})}$.

Teorema 4.8. *Os zeros do polinômio de Jacobi $P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}$ separam os zeros do polinômio ortogonal do tipo Jacobi $P_n^{(\alpha,\beta,M,\tilde{M})}$, isto é,*

$$-1 < x_{n,1}^{(\alpha,\beta,M,\tilde{M})} < x_{n-1,1}^{(\alpha+1,\beta+1)} < x_{n,2}^{(\alpha,\beta,M,\tilde{M})} < \dots < x_{n-1,n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)} < x_{n,n}^{(\alpha,\beta,M,\tilde{M})} < 1, \quad (4.33)$$

para $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $M, \tilde{M} > 0$ e $\alpha + \beta + 1 > 0$. Além disso, os zeros $x_{n,k}^{(\alpha,\beta,M,\tilde{M})}$ são funções crescentes de M e decrescentes de \tilde{M} .

Demonstração: Usando a equação diferencial satisfeita pelos polinômios de Jacobi (4.4), podemos reescrever (4.22) como

$$P_n^{(\alpha,\beta,M,\tilde{M})}(x) = \left[\frac{\Gamma(n + \alpha + \beta + 1)}{\Gamma(n + 1)\Gamma(\alpha + \beta + 1)} \right]^2 \left\{ \frac{-A_n B_n}{n(n + \alpha + \beta + 1)} (1 - x^2) \left[P_n^{(\alpha,\beta)}(x) \right]'' + r_1^{(\alpha,\beta)}(n, M, \tilde{M}; x) \left[P_n^{(\alpha,\beta)}(x) \right]' \right\},$$

em que $r_1 = r_1^{(\alpha,\beta)}(n, M, \tilde{M}; x) = ax - b$, com

$$a = \frac{A_n B_n (\alpha + \beta + 2)}{n(n + \alpha + \beta + 1)} - \frac{A_n M + B_n \tilde{M}}{(\alpha + \beta + 1)} \quad \text{e} \quad b = \frac{A_n B_n (\beta - \alpha)}{n(n + \alpha + \beta + 1)} + \frac{A_n M + B_n \tilde{M}}{(\alpha + \beta + 1)}.$$

Substituindo em a os valores de A_n e B_n dados nas igualdades em (4.23) e considerando $n \geq 2$ e $\alpha + \beta + 1 > 0$, obtemos

$$n(\alpha + \beta + 1)(n + \alpha + \beta + 1)a = \frac{c}{d} > 0,$$

com

$$\begin{aligned} c = & \Gamma(n + 1)\Gamma(\alpha + \beta + 1) \\ & \times \left\{ \Gamma(n + 1)\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(\beta + 1)\Gamma(n + \alpha + 1)\Gamma(n + \beta + 1)\Gamma(\alpha + \beta + 3) \right. \\ & \left. + n \left[\Gamma(\beta + 2)^2 \Gamma(n + \alpha + 1)^2 + \tilde{M} \Gamma(\alpha + 2)^2 \Gamma(n + \beta + 1)^2 \right] \Gamma(n + \alpha + \beta + 2) \right\} \end{aligned}$$

e

$$d = \Gamma(\alpha + 2)\Gamma(\beta + 2)\Gamma(n + \alpha + 1)\Gamma(n + \beta + 1)\Gamma(n + \alpha + \beta + 1)^2.$$

Como

$$\begin{aligned} & n(\alpha + \beta + 1)(n + \alpha + \beta + 1)(a - b) \\ & = A_n \frac{2\Gamma(n + 1)\Gamma(\alpha + 2)\Gamma(n + \beta + 1)\Gamma(\alpha + \beta + 2)}{\Gamma(\beta + 1)\Gamma(n + \alpha + 1)\Gamma(n + \alpha + \beta + 1)} > 0 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} & n(\alpha + \beta + 1)(n + \alpha + \beta + 1)(a + b) \\ & = B_n \frac{2\Gamma(n + 1)\Gamma(\beta + 2)\Gamma(n + \alpha + 1)\Gamma(\alpha + \beta + 2)}{\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(n + \beta + 1)\Gamma(n + \alpha + \beta + 1)} > 0, \end{aligned}$$

o zero $\xi = b/a$ de r_1 pertence ao intervalo $(-1, 1)$. Agora, note que os zeros $x_{n,k}^{(\alpha,\beta,M,\tilde{M})}$ de $P_n^{(\alpha,\beta,M,\tilde{M})}$ são os pontos de intersecção da reta r_1 com a função racional

$$\begin{aligned}\Delta(x) &= \frac{A_n B_n}{n(n+\alpha+\beta+1)} (1-x^2) \frac{[P_n^{(\alpha,\beta)}(x)]''}{[P_n^{(\alpha,\beta)}(x)]'} \\ &= \frac{A_n B_n}{n(n+\alpha+\beta+1)} (1-x^2) \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{x - x_{n-1,k}^{(\alpha+1,\beta+1)}}.\end{aligned}$$

Os zeros de Δ são os zeros de $P_{n-2}^{(\alpha+2,\beta+2)}$ mais os pontos 1 e -1 , e seu gráfico possui assíntotas nos zeros de $P_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}$. Além disso,

$$\Delta'(x) = -\frac{A_n B_n}{n(n+\alpha+\beta+1)} \sum_{k=1}^{n-1} \left[1 + \frac{1 - \left(x_{n-1,k}^{(\alpha+1,\beta+1)}\right)^2}{\left(x - x_{n-1,k}^{(\alpha+1,\beta+1)}\right)^2} \right] < 0, \quad \text{para } x \neq x_{n-1,k}^{(\alpha+1,\beta+1)}.$$

Logo, Δ é uma função estritamente decrescente em cada intervalo $\left(x_{n-1,k-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}, x_{n-1,k}^{(\alpha+1,\beta+1)}\right)$, para $k = 2, 3, \dots, n-1$. Assim, podemos concluir que

$$-1 < x_{n,1}^{(\alpha,\beta,M,\tilde{M})} < x_{n-1,1}^{(\alpha+1,\beta+1)} < x_{n,2}^{(\alpha,\beta,M,\tilde{M})} < \dots < x_{n-1,n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)} < x_{n,n}^{(\alpha,\beta,M,\tilde{M})} < 1.$$

Vamos agora mostrar que, se fixarmos \tilde{M} , $x_{n,n}^{(\alpha,\beta,M,\tilde{M})}$ é uma função crescente de M . Dado $\varepsilon > 0$,

$$\frac{r_1^{(\alpha,\beta)}(n, M, \tilde{M}; x)}{B_n^M(\alpha, \beta)} - \frac{r_1^{(\alpha,\beta)}(n, M + \varepsilon, \tilde{M}; x)}{B_n^{M+\varepsilon}(\alpha, \beta)} = (1+x)c_n(\beta, \alpha, M, \tilde{M}),$$

com

$$\begin{aligned}c_n(\alpha, \beta, M, \tilde{M}) &= \frac{\varepsilon(\beta+1)^2 \delta_1(\alpha, \beta) [(\alpha+1)(\alpha+\beta+1)\delta_1(\alpha, \beta) + nM\delta_2(\alpha, \beta)]}{(\alpha+1)[(\beta+1)(\alpha+\beta+1)\delta_1(\beta, \alpha) + n\tilde{M}\delta_2(\beta, \alpha)]} \\ &\quad \times \frac{1}{[(\beta+1)(\alpha+\beta+1)\delta_1(\beta, \alpha) + n(N+\varepsilon)\delta_2(\beta, \alpha)]} > 0\end{aligned}$$

para $n \geq 2$, $\alpha + \beta + 1 > 0$,

$$\delta_1(\alpha, \beta) = \Gamma(n+1)\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)\Gamma(\alpha+\beta+1)$$

e

$$\delta_2(\alpha, \beta) = \Gamma(\beta+2)\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+2).$$

Observe que, para $x > -1$,

$$r_1^{(\alpha,\beta)}(n, M, \tilde{M}; x) > r_1^{(\alpha,\beta)}(n, M + \varepsilon, \tilde{M}; x),$$

em $x = -1$, $r_1^{(\alpha,\beta)}(n, M, \tilde{M}; x)$ e $r_1^{(\alpha,\beta)}(n, M + \varepsilon, \tilde{M}; x)$ coincidem para todo ε e, ainda, os zeros de $P_n^{(\alpha,\beta,M,\tilde{M})}$ são os pontos de intersecção entre $r_1^{(\alpha,\beta)}(n, M, \tilde{M}; x)$ e Δ . Segue, então, que os zeros $x_{n,k}^{(\alpha,\beta,M,\tilde{M})}$ são funções crescentes com relação à massa M .

Analogamente,

$$\frac{r_1^{(\alpha,\beta)}(n, M, \tilde{M}; x)}{A_n^{\tilde{M}}(n; \alpha, \beta)} - \frac{r_1^{(\alpha,\beta)}(n, M, \tilde{M} + \varepsilon; x)}{A_n^{\tilde{M}+\varepsilon}(n; \alpha, \beta)} = (-1 + x)c_n(\alpha, \beta, M, \tilde{M})$$

e desta igualdade concluímos que os zeros de $P_n^{(\alpha,\beta,M,\tilde{M})}$ são funções decrescentes de \tilde{M} . ■

Para exemplificar a monotonicidade, observe os gráficos das funções racionais

$$S_0(n; x) = \frac{A_n(1 - x^2)}{n(n + \alpha + \beta + 1)} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{x - x_{n-1,k}^{(\alpha+1,\beta+1)}} = \frac{\Delta(x)}{B_n}$$

e

$$S_1(n; x) = \frac{B_n(1 - x^2)}{n(n + \alpha + \beta + 1)} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{x - x_{n-1,k}^{(\alpha+1,\beta+1)}} = \frac{\Delta(x)}{A_n}$$

junto com os gráficos das retas

$$R_0^\varepsilon(n; x) = \frac{r_1^{(\alpha,\beta)}(n, M + \varepsilon, \tilde{M}; x)}{B_n^{M+\varepsilon}(n; \alpha, \beta)} \quad \text{e} \quad R_1^\varepsilon(n; x) = \frac{r_1^{(\alpha,\beta)}(n, M, \tilde{M} + \varepsilon; x)}{A_n^{\tilde{M}+\varepsilon}(n; \alpha, \beta)}$$

para vários valores de ε , $\varepsilon \geq 0$ (ver Figuras 4.3 e 4.4).

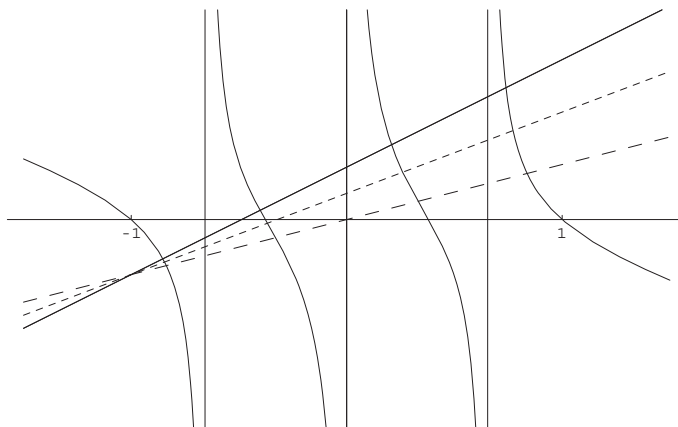


Figura 4.3: Gráficos de $S_0(4; x)$ e $R_0^\varepsilon(4; x)$ para alguns valores de ε .

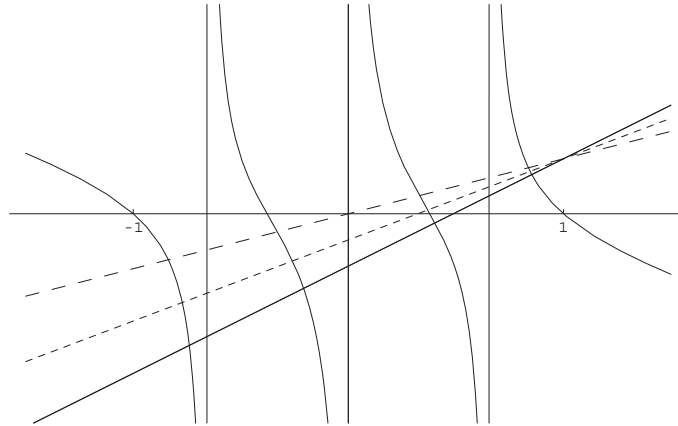


Figura 4.4: Gráficos de $S_1(4; x)$ e $R_1^\epsilon(4; x)$ para alguns valores de ϵ .

A seguir, fornecemos duas tabelas para ilustrar numericamente a monotonicidade dos zeros de $P_n^{(\alpha, \beta, M, \tilde{M})}$ como funções de M e \tilde{M} .

M	$x_{3,1}^{(1,2,M,5)}$	$x_{3,2}^{(1,2,M,5)}$	$x_{3,3}^{(1,2,M,5)}$
0	-0.997724	0.000285	0.666762
1/4	-0.996843	0.0898728	0.899104
1/2	-0.996733	0.0995849	0.940857
3/4	-0.99669	0.103278	0.958181
1	-0.996667	0.105223	0.967658
5	-0.996608	0.110183	0.99301

Tabela 4.3: Zeros de $P_3^{(\alpha, \beta, M, \tilde{M})}$ para alguns valores de M .

\tilde{M}	$x_{3,1}^{(1,2,4,\tilde{M})}$	$x_{3,2}^{(1,2,4,\tilde{M})}$	$x_{3,3}^{(1,2,4,\tilde{M})}$
0	-0.462982	0.239083	0.99439
1/4	-0.93918	0.116715	0.991499
1/2	-0.967854	0.113191	0.991401
3/4	-0.978155	0.111975	0.991366
1	-0.983456	0.111359	0.991349
5	-0.996612	0.10986	0.991306

Tabela 4.4: Zeros de $P_3^{(\alpha, \beta, M, \tilde{M})}$ para alguns valores de \tilde{M} .

A Tabela 4.3 mostra os zeros de $P_3^{(\alpha, \beta, M, \tilde{M})}$ para $\alpha = 1$, $\beta = 2$ e $\tilde{M} = 5$ e alguns

valores de M . Fica claro que os zeros são funções crescentes de M e que o maior zero converge muito rápido a 1.

A Tabela 4.4 mostra os zeros $P_3^{(\alpha,\beta,M,\tilde{M})}$ quando $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $M = 4$ e para alguns valores de \tilde{M} . Agora, note que os zeros são funções decrescentes de \tilde{M} e que o menor zero converge rapidamente a -1 .

Nosso próximo resultado mostra a convergência de $x_{n,k}^{(\alpha,\beta,M,\tilde{M})}$ quando um dos parâmetros M ou \tilde{M} tende ao infinito. Para isso, consideremos

$$D(M) = D(n, \alpha, \beta, M) = \frac{\Gamma(n + \alpha + \beta + 1)\Gamma(n + \alpha + \beta + 2)M}{n!(n-1)!(\alpha+1)(\beta+1)\Gamma(\alpha+\beta+2)^2}$$

e os polinômios U e V definidos por:

$$U(x) := (x-1) \left\{ \frac{(n+\beta)A}{2n} P_{n-1}^{(\alpha+2,\beta)}(x) + D(\tilde{M})(1+x) [P_n^{(\alpha,\beta)}(x)]' \right\}$$

e

$$V(x) := (x+1) \left\{ \frac{(n+\alpha)A}{2n} P_{n-1}^{(\alpha,\beta+2)}(x) - D(M)(1-x) [P_n^{(\alpha,\beta)}(x)]' \right\}.$$

Teorema 4.9. *Para cada $\tilde{M} > 0$ fixo, os zeros $x_{n,k}^{(\alpha,\beta,M,\tilde{M})}$ convergem aos zeros de $U(x)$ quando $M \rightarrow \infty$ e, para cada $M > 0$, os zeros $x_{n,k}^{(\alpha,\beta,M,\tilde{M})}$ convergem aos zeros de $V(x)$ quando $\tilde{M} \rightarrow \infty$.*

Demonstração: De (4.25) e da propriedade de simetria dos polinômios de Jacobi (4.7),

$$P_n^{(\alpha,\beta,M,0)}(x) = P_n^{(\alpha,\beta)}(x) + M \frac{(n+\beta)A}{2n} (x-1) P_{n-1}^{(\alpha+2,\beta)}(x)$$

e

$$P_n^{(\alpha,\beta,0,\tilde{M})}(x) = P_n^{(\alpha,\beta)}(x) + \tilde{M} \frac{(n+\alpha)A}{2n} (1+x) P_{n-1}^{(\alpha,\beta+2)}(x).$$

Assim, podemos reescrever (4.22) como

$$P_n^{(\alpha,\beta,M,\tilde{M})}(x) = P_n^{(\alpha,\beta,M,0)}(x) + P_n^{(\alpha,\beta,0,\tilde{M})}(x) + \hat{A}_n P_n^{(\alpha,\beta)}(x) + \hat{B}_n [P_n^{(\alpha,\beta)}(x)]',$$

com

$$\hat{A}_n = -1 + \frac{(\Gamma(n+\alpha+\beta+2))^2 M \tilde{M}}{(\alpha+1)(\beta+1) (\Gamma(n))^2 (\Gamma(\alpha+\beta+2))^2}$$

e

$$\hat{B}_n = \left(\frac{1-x}{\alpha+1} - \frac{1+x}{\beta+1} \right) \frac{n(n+\alpha+\beta+1) (\Gamma(n+\alpha+\beta+1))^2 M \tilde{M}}{\Gamma(n+1)^2 \Gamma(\alpha+\beta+2)^2}.$$

Daí,

$$\frac{P_n^{(\alpha,\beta,M,\tilde{M})}(x)}{M} \rightarrow U(x) \text{ quando } M \rightarrow \infty \quad (4.34)$$

e

$$\frac{P_n^{(\alpha,\beta,M,\tilde{M})}(x)}{\tilde{M}} \rightarrow V(x) \text{ quando } \tilde{M} \rightarrow \infty. \quad (4.35)$$

Portanto, para todo $\tilde{M} > 0$ fixo, os zeros $x_{n,k}^{(\alpha,\beta,M,\tilde{M})}$ convergem aos zeros do polinômios U quando $M \rightarrow \infty$ e, para todo $M > 0$ fixo, os zeros $x_{n,k}^{(\alpha,\beta,M,\tilde{M})}$ convergem aos zeros de V quando $\tilde{M} \rightarrow \infty$. ■

Usando raciocínio análogo ao da demonstração do teorema anterior, mostramos que quando M e \tilde{M} tendem simultaneamente a infinito, o maior zero de $P_n^{(\alpha,\beta,M,\tilde{M})}$ converge para 1, o menor para -1 e os demais zeros para os zeros de $P_{n-2}^{(\alpha+2,\beta+2)}$. Então, podemos enunciar o teorema a seguir.

Teorema 4.10. *Para $n \geq 2$,*

$$\lim_{M,\tilde{M} \rightarrow \infty} x_{n,1}^{(\alpha,\beta,M,\tilde{M})} = -1 \quad e \quad \lim_{M,\tilde{M} \rightarrow \infty} x_{n,n}^{(\alpha,\beta,M,\tilde{M})} = 1.$$

Além disso, para $k = 2, \dots, n-1$,

$$\lim_{M,\tilde{M} \rightarrow \infty} x_{n,k}^{(\alpha,\beta,M,\tilde{M})} = x_{n-2,k-1}^{(\alpha+2,\beta+2)}.$$

4.4 Polinômios do tipo Jacobi-Sobolev, $P_n^{(\alpha,\beta,N)}$

Consideremos $M = \tilde{M} = \tilde{N} = 0$. Os polinômios ortogonais com relação ao produto interno

$$\langle p, q \rangle = \frac{\Gamma(\alpha + \beta + 2)}{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(\beta + 1)} \int_{-1}^1 p(x)q(x)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta dx + Np'(1)q'(1), \quad (4.36)$$

com $\alpha, \beta > -1$ e $N > 0$, $P_n^{(\alpha,\beta,0,N,0,0)}$, também são chamados de polinômios ortogonais do tipo Jacobi-Sobolev. Denotemos $P_n^{(\alpha,\beta,0,N,0,0)}$ por $P_n^{(\alpha,\beta,N)}$.

Considerando $M = \tilde{M} = \tilde{N} = 0$ na equação (4.11) do Teorema 4.1, obtemos a seguinte fórmula de conexão para esses polinômios.

Corolário 4.2. *Os polinômios $P_n^{(\alpha,\beta,N)}$ podem ser representados por*

$$P_n^{(\alpha,\beta,N)}(x) = A_0 P_n^{(\alpha,\beta)}(x) - A_1(1+x) \frac{d}{dx} P_n^{(\alpha,\beta)}(x) + A_2(1+x)^2 \frac{d^2}{dx^2} P_n^{(\alpha,\beta)}(x), \quad (4.37)$$

em que

$$\begin{aligned}
 A_0 &= A_0^{(N)}(n; \alpha, \beta) = 1 + ACN, \\
 A_1 &= A_1^{(N)}(n; \alpha, \beta) = \frac{(n-1)(n+\alpha+\beta+2)}{4(\alpha+1)}AN, \\
 A_2 &= A_2^{(N)}(n; \alpha, \beta) = \frac{1}{4(\alpha+1)}AN
 \end{aligned} \tag{4.38}$$

e com as constantes A e C dadas por

$$\begin{aligned}
 A &= A(n; \alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\beta+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+2)\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+2)\Gamma(\alpha+\beta+2)\Gamma(n+\beta+1)\Gamma(n)}, \\
 C &= C(n; \alpha, \beta) = \frac{(n-1)(n+\alpha+\beta+2)(n(\alpha+2)(n+\alpha+\beta+1) - (\alpha+1)\beta)}{4(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)}.
 \end{aligned} \tag{4.39}$$

De (4.37), podemos reescrever $P_n^{(\alpha, \beta, N)}$ como

$$P_n^{(\alpha, \beta, N)}(x) = P_n^{(\alpha, \beta)}(x) + NF_n^{(\alpha, \beta)}(x), \tag{4.40}$$

com

$$\begin{aligned}
 F_n^{(\alpha, \beta)}(x) &= AC P_n^{(\alpha, \beta)}(x) - \frac{(n-1)(n+\alpha+\beta+2)}{4(\alpha+1)}A(1+x)\frac{d}{dx}P_n^{(\alpha, \beta)}(x) \\
 &\quad + \frac{A}{4(\alpha+1)}(1+x)^2\frac{d^2}{dx^2}P_n^{(\alpha, \beta)}(x).
 \end{aligned} \tag{4.41}$$

4.4.1 Zeros de $P_n^{(\alpha, \beta, N)}$

No próximo resultado, provamos que os zeros de $P_n^{(\alpha, \beta, N)}$ são reais, simples e que no máximo um deles está localizado fora do intervalo $(-1, 1)$. Além disso, fornecemos explicitamente o valor N_0 da massa tal que, para $N > N_0$, esta última situação ocorre. Mostramos, ainda, que os zeros de $P_n^{(\alpha, \beta, N)}$, $F_n^{(\alpha, \beta)}$ e $P_n^{(\alpha, \beta)}$ se entrelaçam.

Teorema 4.11. *Se $x_{n,k}^{(\alpha, \beta, N)}$ e $\zeta_{n,n}^{(\alpha, \beta)}$ denotam os zeros de $P_n^{(\alpha, \beta, N)}$ e $F_n^{(\alpha, \beta)}$, respectivamente, então*

$$-1 < x_{n,1}^{(\alpha, \beta)} < x_{n,1}^{(\alpha, \beta, N)} < \zeta_{n,1}^{(\alpha, \beta)} < \dots < x_{n,n}^{(\alpha, \beta)} < x_{n,n}^{(\alpha, \beta, N)} < \zeta_{n,n}^{(\alpha, \beta)} \tag{4.42}$$

para $n \geq 2$, $N > 0$ e $\alpha, \beta > -1$.

A demonstração do teorema anterior é análoga à do Teorema 4.5.

Calculando $P_n^{(\alpha, \beta, N)}(1)$, obtemos um valor para N de modo que $x_{n,n}^{(\alpha, \beta, N)}$ não pertence ao intervalo de ortogonalidade $(-1, 1)$.

Teorema 4.12. *O maior zero de $P_n^{(\alpha,\beta,N)}$, $x_{n,n}^{(\alpha,\beta,N)}$, satisfaz*

$$x_{n,n}^{(\alpha,\beta,N)} < 1, \quad \text{para } N < N_0,$$

$$x_{n,n}^{(\alpha,\beta,N)} = 1, \quad \text{para } N = N_0,$$

$$x_{n,n}^{(\alpha,\beta,N)} > 1, \quad \text{para } N > N_0,$$

com N_0 dado por

$$N_0 = \frac{4(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)}{(n-1)(n+\beta)(n+\alpha+1)(n+\alpha+\beta+2)A}.$$

No próximo resultado, obtemos a monotonicidade dos zeros de $P_n^{(\alpha,\beta,N)}$ com relação a N , bem como a convergência deles, quando N tende ao infinito, aos zeros $\zeta_{n,k}^{(\alpha,\beta)}$ com velocidade de convergência da ordem de $1/N$.

Teorema 4.13. *Para $n \geq 2$, $N > 0$ e $\alpha, \beta > -1$, os zeros $x_{n,j}^{(\alpha,\beta,N)}$ de $P_n^{(\alpha,\beta,N)}$ são funções crescentes de N . Além disso,*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} x_{n,j}^{(\alpha,\beta,N)} = \zeta_{n,j}^{(\alpha,\beta)}$$

e

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N[\zeta_{n,j}^{(\alpha,\beta)} - x_{n,j}^{(\alpha,\beta,N)}] = k_{n,j}^{(\alpha,\beta)}, \quad j = 1, \dots, n, \quad (4.43)$$

com

$$k_{n,j}^{(\alpha,\beta)} = \frac{(a_n(\alpha, \beta)\zeta_{n,j}^{(\alpha,\beta)} + b_n(\alpha, \beta))([\zeta_{n,j}^{(\alpha,\beta)}]^2 - 1)}{A(c_n(\alpha, \beta)[\zeta_{n,j}^{(\alpha,\beta)}]^2 + d_n(\alpha, \beta)\zeta_{n,j}^{(\alpha,\beta)} + e_n(\alpha, \beta))} \quad (4.44)$$

e

$$a_n(\alpha, \beta) = 4n(\alpha+1)(n+\alpha+\beta+1),$$

$$b_n(\alpha, \beta) = 4(\alpha+1)[2(\alpha+1) - n(n+\alpha+\beta+1)],$$

$$c_n(\alpha, \beta) = [4C(\alpha+1) - (n-1)n(n+\alpha+\beta+1)]$$

$$\times [4C(\alpha+1) + n(n+\alpha+\beta+1)(n+\alpha+\beta+2)],$$

$$d_n(\alpha, \beta) = 2(\alpha+1)\{-16C^2(\alpha+1)$$

$$-(n-1)n(n+\alpha+\beta+1)(n+\alpha+\beta+2)$$

$$+4C[(\alpha+1)(\alpha+2) + \beta(\alpha+1 - n(n+\alpha+\beta+1))]\},$$

$$e_n(\alpha, \beta) = 16C^2(\alpha+1)^2$$

$$+4C(\alpha+1)[2(\alpha+1)(\alpha-\beta+2) + n(-\alpha+\beta-3)(n+\alpha+\beta+1)]$$

$$+(n-1)n(n+\alpha+\beta+1)(n+\alpha+\beta+2)[-2(\alpha+1) + n(n+\alpha+\beta+1)].$$

Demonstração: O polinômio $P_n^{(\alpha,\beta,M)}$ é dado como combinação linear de $P_n^{(\alpha,\beta)}$ e $F_n^{(\alpha,\beta)}$ na expressão (4.40). Além disso, no Teorema 4.11 mostramos que os zeros de $P_n^{(\alpha,\beta)}$ e $F_n^{(\alpha,\beta)}$ se entrelaçam. Logo, é suficiente aplicarmos os Teoremas 3.2 e 3.4 para obtermos a monotonicidade e o comportamento assintótico dos zeros de $P_n^{(\alpha,\beta,M)}$. O valor explícito de $k_{n,j}^{(\alpha,\beta)}$ é obtido de modo análogo ao usado para encontrar $k(n, \alpha, \beta)$ do Teorema 4.7. ■

Simulações numéricas mostram que todas as quantidades

$$N[\zeta_{n,k}^{(\alpha,\beta)} - x_{n,k}^{(\alpha,\beta,N)}], \quad k = 1, \dots, n,$$

crecem com N , para $N > 0$.

Ressaltamos que os resultados obtidos por Dimitrov, Marcellán e Rafaeli em [17] seguem imediatamente dos nossos resultados apresentados neste capítulo e publicados em [18]. Para isso, basta utilizar a relação limite (5.3.4) de [61] dada por

$$\hat{L}_n^{(\alpha)}(x) = \lim_{\beta \rightarrow \infty} P_n^{(\alpha,\beta)}(1 - 2\beta^{-1}x),$$

onde $\hat{L}_n^{(\alpha)}$ denotam os polinômios ortogonais de Laguerre normalizados por

$$\hat{L}_n^{(\alpha)}(0) = \binom{n + \alpha}{n}.$$

Capítulo 5

Zeros de Polinômios Ortogonais do Tipo Sobolev: um Caso Geral

Seja $\{P_n^{(\phi, \lambda, c, j)}\}_{n \geq 0}$ a sequência de polinômios mônicos que são ortogonais em relação ao produto interno do tipo Sobolev

$$\langle p, q \rangle_{\phi, \lambda, c, j} = \int_a^b p(x)q(x)d\phi(x) + \lambda p^{(j)}(c)q^{(j)}(c), \quad (5.1)$$

onde $d\phi$ é uma medida positiva no intervalo (a, b) , $-\infty \leq a < b \leq \infty$, λ é um número real não negativo e $p^{(j)}(c)$ e $q^{(j)}(c)$ representam as derivadas de ordem j de p e q , respectivamente, avaliadas no ponto c , com $c \notin (a, b)$.

Sejam $x_{n,k}^{(\phi, \lambda, c, j)}$, $k = 1, \dots, n$, os zeros de $P_n^{(\phi, \lambda, c, j)}$. No caso em que $\lambda = 0$ ou $j \geq n$, os polinômios $P_n^\phi(x) := P_n^{(\phi, 0, c, j)}(x)$ são polinômios ortogonais usuais com relação ao produto interno

$$\langle p, q \rangle_\phi = \int_a^b p(x)q(x)d\phi(x)$$

e, como já dissemos anteriormente, seus zeros $x_{n,k}^\phi = x_{n,k}^{(\phi, 0, c, j)}$, $k = 1, \dots, n$, são reais, simples e estão no intervalo (a, b) . A fim de simplificar a notação, denotaremos P_n^ϕ e $x_{n,k}^\phi$ simplesmente por P_n e $x_{n,k}$, respectivamente.

Quando $\lambda > 0$ e $j < n$, algumas questões naturais surgem:

- Os zeros de $P_n^{(\phi, \lambda, c, j)}$ são reais e pertencem ao intervalo (a, b) ?
- Se sim, os zeros de $P_n^{(\phi, \lambda, c, j)}$ se entrelaçam com os zeros de P_n ?
- Além disso, os zeros $x_{n,k}^{(\phi, \lambda, c, j)}$ são funções monótonas em relação ao parâmetro λ ?

- Os zeros $x_{n,k}^{(\phi,\lambda,c,j)}$ convergem quando λ vai para infinito?
- Se sim, qual a velocidade de convergência?

A resposta para as duas primeiras questões foi dada no artigo de Meijer [50]. Ele provou que o polinômio $P_n^{(\phi,\lambda,c,j)}$ tem n zeros reais, simples e que no máximo um deles está localizado fora do intervalo (a, b) . Ele também mostrou que esses zeros se entrelaçam com os zeros de P_n .

Nossa contribuição consiste em responder às questões restantes. Obtivemos uma nova propriedade de entrelaçamento, a monotonicidade de $x_{n,k}^{(\phi,\lambda,c,j)}$ em relação a λ , assim como a convergência dos zeros quando λ tende ao infinito, ou seja, os $x_{n,k}^{(\phi,\lambda,c,j)}$ convergem para os zeros de um certo polinômio com velocidade de convergência da ordem de $1/\lambda$. Generalizamos os resultados da literatura em três aspectos: a medida usada é qualquer medida, o ponto c é qualquer valor fora do intervalo (a, b) e j é qualquer inteiro positivo. Tais resultados foram aceitos para publicação na revista *Applied Numerical Mathematics* [15].

5.1 Comportamento dos zeros de $P_n^{(\phi,\lambda,c,j)}$

Consideremos a seguinte normalização para os polinômios ortogonais do tipo Sobolev:

$$p_n^{(\phi,\lambda,c,j)}(x) := \left[1 + \lambda K_{n-1}^{(j,j)}(c, c)\right] P_n^{(\phi,\lambda,c,j)}(x),$$

onde $K_{n-1}^{(r,s)}(x, y)$ denota o polinômio núcleo generalizado

$$K_{n-1}^{(r,s)}(x, y) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{P_k^{(r)}(x)P_k^{(s)}(y)}{\langle P_k, P_k \rangle}.$$

Note que, quando $r = s = 0$, $K_{n-1}(x, y) = K_{n-1}^{(0,0)}(x, y)$ é o polinômio núcleo usual.

A partir da fórmula de conexão obtida por Marcellán e Ronveaux [45],

$$P_n^{(\phi,\lambda,c,j)}(x) = P_n(x) - \frac{\lambda P_n^{(j)}(c)}{1 + \lambda K_{n-1}^{(j,j)}(c, c)} K_{n-1}^{(j,0)}(c, x), \quad (5.2)$$

obtemos uma simples representação para os polinômios ortogonais do tipo Sobolev $p_n^{(\phi,\lambda,c,j)}$ que é apresentada no lema a seguir.

Lema 5.1. *Os polinômios ortogonais do tipo Sobolev $p_n^{(\phi, \lambda, c, j)}$ podem ser expressos por:*

$$p_n^{(\phi, \lambda, c, j)}(x) = P_n(x) + \lambda K_{n-1}^{(j, j)}(c, c) G_n(c, j; x), \quad (5.3)$$

onde

$$G_n(c, j; x) := P_n(x) - \frac{P_n^{(j)}(c)}{K_{n-1}^{(j, j)}(c, c)} K_{n-1}^{(j, 0)}(c, x). \quad (5.4)$$

Como já mencionamos, Meijer [50] mostrou que os zeros do polinômio ortogonal do tipo Sobolev se entrelaçam com os zeros do polinômio ortogonal P_n . Ele considerou o produto interno

$$\langle p, q \rangle = \int_0^\infty p(x)q(x)d\phi(x) + \lambda p^{(j)}(0)q^{(j)}(0).$$

É possível estender esses resultados considerando os polinômios ortogonais com relação ao produto interno (5.1), ou seja, considerando o intervalo de ortogonalidade como sendo (a, b) e tomando um ponto c qualquer fora de (a, b) ao invés de tomar os pontos extremos do intervalo. A seguir, mostraremos formalmente essa generalização.

Teorema 5.1. *Os zeros do polinômio $P_n^{(\phi, \lambda, c, j)}$ são reais, distintos e se entrelaçam com os zeros de P_n , mais precisamente,*

i) se $c \leq a$, então

$$x_{n,1}^{(\phi, \lambda, c, j)} < x_{n,1} < x_{n,2}^{(\phi, \lambda, c, j)} < x_{n,2} < \dots < x_{n,n}^{(\phi, \lambda, c, j)} < x_{n,n}; \quad (5.5)$$

ii) se $c \geq b$, então

$$x_{n,1} < x_{n,1}^{(\phi, \lambda, c, j)} < x_{n,2} < x_{n,2}^{(\phi, \lambda, c, j)} < \dots < x_{n,n} < x_{n,n}^{(\phi, \lambda, c, j)}. \quad (5.6)$$

Além disso, no máximo um zero de $P_n^{(\phi, \lambda, c, j)}$ não pertence a (a, b) .

Demonstração: Seja

$$I = \left\langle P_n^{(\phi, \lambda, c, j)}, \frac{P_n}{x - x_{n,j}} \right\rangle_\phi = \int_a^b P_n^{(\phi, \lambda, c, j)}(x) \frac{P_n(x)}{x - x_{n,j}} d\phi(x).$$

Aplicamos a fórmula de quadratura gaussiana na integral I, cujos nós são os n zeros de P_n . Como $P_n^{(\phi, \lambda, c, j)}(x)P_n(x)/(x - x_{n,j})$ é um polinômio de grau $2n - 1$, a fórmula de quadratura é exata, ou seja,

$$I = \sum_{i=1}^n W_{n,i} P_n^{(\phi, \lambda, c, j)}(x_{n,i}) \frac{P_n(x_{n,i})}{x_{n,i} - x_{n,j}} = W_{n,j} P_n^{(\phi, \lambda, c, j)}(x_{n,j}) P_n'(x_{n,j}).$$

Por outro lado,

$$\langle p, q \rangle_{\phi, \lambda, c, j} = \langle p, q \rangle_{\phi} + \lambda p^{(j)}(c) q^{(j)}(c)$$

e, assim,

$$\begin{aligned} \left\langle P_n^{(\phi, \lambda, c, j)}, \frac{P_n}{x - x_{n,j}} \right\rangle_{\phi, \lambda, c, j} &= W_{n,j} P_n^{(\phi, \lambda, c, j)}(x_{n,j}) P_n'(x_{n,j}) \\ &+ \lambda \left[\frac{d^j}{dx^j} P_n^{(\phi, \lambda, c, j)}(x) \right]_{x=c} \left[\frac{d^j}{dx^j} \frac{P_n(x)}{x - x_{n,j}} \right]_{x=c}. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Mas, da ortogonalidade de $P_n^{(\phi, \lambda, c, j)}$, segue que

$$\left\langle P_n^{(\phi, \lambda, c, j)}, \frac{P_n}{x - x_{n,j}} \right\rangle_{\phi, \lambda, c, j} = 0.$$

Derivando a equação (5.2) j vezes e avaliando o resultado no ponto c , obtemos

$$\left[\frac{d^j}{dx^j} P_n^{(\phi, \lambda, c, j)}(x) \right]_{x=c} = \frac{P_n^{(j)}(c)}{1 + \lambda K_{n-1}^{(j,j)}(c, c)}.$$

Logo, da igualdade (5.7), temos

$$W_{n,j} P_n^{(\phi, \lambda, c, j)}(x_{n,j}) P_n'(x_{n,j}) = -\lambda \left[\frac{d^j}{dx^j} \frac{P_n(x)}{x - x_{n,j}} \right]_{x=c} \frac{P_n^{(j)}(c)}{1 + \lambda K_{n-1}^{(j,j)}(c, c)}.$$

Consideremos primeiramente, o caso $c \leq a$.

Como $P_n(x)/(x - x_{n,j})$ é um polinômio mônico de grau $n - 1$ e todos os seus zeros são maiores que c , segue que

$$\text{signal} \left[\frac{d^j}{dx^j} \frac{P_n(x)}{x - x_{n,j}} \right]_{x=c} = (-1)^{n+j+1}.$$

Usando o mesmo raciocínio, temos

$$\text{signal} [P_n^{(j)}(c)] = (-1)^{n+j}.$$

Dado que os pesos das fórmulas de quadratura de Gauss, $W_{n,j}$, e $1 + \lambda K_{n-1}^{(j,j)}(c, c)$ são estritamente positivos, obtemos a desigualdade

$$P_n^{(\phi, \lambda, c, j)}(x_{n,j}) P_n'(x_{n,j}) > 0.$$

Nos zeros consecutivos de P_n , sua derivada muda de sinal. Logo, o mesmo comportamento ocorrerá para $P_n^{(\phi, \lambda, c, j)}$, isto é, em cada intervalo $(x_{n,k}, x_{n,k+1})$, $k = 1, 2, \dots, n - 1$, existe pelo menos um zero do polinômio ortogonal do tipo Jacobi. Encontramos, assim, $n - 1$ zeros de $P_n^{(\phi, \lambda, c, j)}$. Falta encontrar mais um zero. Este zero não é complexo, pois, neste

caso, o seu conjugado também seria e, então, teríamos $n + 1$ zeros para um polinômio não nulo de grau n , o que é um absurdo. O mesmo ocorre se esse zero restante também pertencesse a algum intervalo $(x_{n,k}, x_{n,k+1})$. Além disso, como $P_n^{(\phi, \lambda, c, j)}$ é mônico e $P_n'(x_{n,n}) > 0$, segue que $P_n^{(\phi, \lambda, c, j)}(x_{n,n}) > 0$. Portanto a única possibilidade é que este zero seja menor que $x_{n,1}$. Assim,

$$x_{n,1}^{(\phi, \lambda, c, j)} < x_{n,1} < x_{n,2}^{(\phi, \lambda, c, j)} < x_{n,2} < \dots < x_{n,n}^{(\phi, \lambda, c, j)} < x_{n,n}.$$

Quando $c \geq b$, a demonstração do entrelaçamento dos zeros segue de forma análoga.

Note que como todos os zeros de P_n pertencem a (a, b) , no máximo um zero de $P_n^{(\phi, \lambda, c, j)}$ estará fora desse intervalo. ■

A seguir mostramos que esses zeros também se entrelaçam com os zeros do polinômio $G_n(c, j; x)$, denotados por $y_{n,1}^{(c, j)} < \dots < y_{n,n}^{(c, j)}$. Além disso, mostramos que, quando λ tende para o infinito, os zeros $x_{n,k}^{(\phi, \lambda, c, j)}$ convergem monotonicamente para os zeros $y_{n,k}^{(c, j)}$.

Teorema 5.2. *Sejam $j, n \in \mathbb{N}$, com $j < n$, $\lambda > 0$ e $y_{n,1}^{(c, j)} < \dots < y_{n,n}^{(c, j)}$ os zeros do polinômio $G_n(c, j; x)$ definido em (5.4). Então,*

i) se $c \leq a$,

$$y_{n,1}^{(c, j)} < x_{n,1}^{(\phi, \lambda, c, j)} < x_{n,1} < \dots < y_{n,n}^{(c, j)} < x_{n,n}^{(\phi, \lambda, c, j)} < x_{n,n};$$

ii) se $c \geq b$,

$$x_{n,1} < x_{n,1}^{(\phi, \lambda, c, j)} < y_{n,1}^{(c, j)} < \dots < x_{n,n} < x_{n,n}^{(\phi, \lambda, c, j)} < y_{n,n}^{(c, j)}.$$

Demonstração: Consideremos, primeiramente, o caso $c \leq a$. Avaliando a expressão (5.3) nos zeros de P_n e $P_n^{(\phi, \lambda, c, j)}$, respectivamente, concluímos que, se $\lambda > 0$,

$$\text{ sinal } [G_n(c, j; x_{n,k})] = \text{ sinal } [p_n^{(\phi, \lambda, c, j)}(x_{n,k})]$$

e

$$\text{ sinal } [G_n(c, j; x_{n,k}^{(\phi, \lambda, c, j)})] = -\text{ sinal } [p_n(x_{n,k}^{(\phi, \lambda, c, j)})],$$

para $k = 1, \dots, n$. Então, usando a propriedade de entrelaçamento (5.5), segue que $G_n(c, j; x)$ muda de sinal $n - 1$ vezes nos zeros de P_n e de $P_n^{(\phi, \lambda, c, j)}$. Em outras palavras, cada intervalo $(x_{n,k}, x_{n,k+1})$ e $(x_{n,k}^{(\phi, \lambda, c, j)}, x_{n,k+1}^{(\phi, \lambda, c, j)})$, $1 \leq k \leq n - 1$, contém pelo menos um zero de $G_n(c, j; x)$. Resta encontrar a localização de mais um zero de $G_n(c, j; x)$. Este

zero não é complexo e não pertence aos intervalos $(x_{n,k}, x_{n,k+1})$ e $(x_{n,k}^{(\phi,\lambda,c,j)}, x_{n,k+1}^{(\phi,\lambda,c,j)})$, pois, nestes casos, causaríamos o absurdo de $G_n(c, j; x)$ possuir mais de n zeros. Levando em consideração que o polinômio $G_n(c, j; x)$ tem o coeficiente do termo de maior grau positivo e que

$$\text{senal}[G_n(c, j; x_{n,n})] = \text{senal}[G_n(c, j; x_{n,n}^{(\phi,\lambda,c,j)})] > 0,$$

segue que $G_n(c, j; x)$ não possui zeros depois de $x_{n,n}$. Logo, concluímos que $y_{n,1}^{(c,j)} < x_{n,1}^{(\phi,\lambda,c,j)}$. Portanto, obtemos as desigualdades afirmadas no item *i*). Usando argumentos análogos, demonstramos o item *ii*) deste teorema. ■

Teorema 5.3. *Sejam $j, n \in \mathbb{N}$, com $j < n$ e $\lambda > 0$. Então, os zeros de $x_{n,k}^{(\phi,\lambda,c,j)}$ são funções monótonas do parâmetro λ . Mais precisamente,*

- i) se $c \leq a$, então $x_{n,k}^{(\phi,\lambda,c,j)}$ é uma função decrescente de λ , $k = 1, \dots, n$;*
- ii) se $c \geq b$, então $x_{n,k}^{(\phi,\lambda,c,j)}$ é uma função crescente de λ , $k = 1, \dots, n$.*

Demonstração: Seja $\epsilon > 0$. Então, da fórmula de conexão (5.3), temos

$$\begin{aligned} p_n^{(\phi,\lambda+\epsilon,c,j)}(x) &= P_n(x) + (\lambda + \epsilon)K_{n-1}^{(j,j)}(c, c)G_n(c, j; x) \\ &= p_n^{(\phi,\lambda,c,j)}(x) + \epsilon K_{n-1}^{(j,j)}(c, c)G_n(c, j; x). \end{aligned}$$

Pelo Teorema 5.2, os zeros dos polinômios $p_n^{(\phi,\lambda,c,j)}$ e $G_n(c, j; x)$ se entrelaçam.

Assim,

$$p_n^{(\phi,\lambda+\epsilon,c,j)}(x_{n,k}^{(\phi,\lambda,c,j)}) = \epsilon K_{n-1}^{(j,j)}(c, c)G_n(c, j; x_{n,k}^{(\phi,\lambda,c,j)})$$

e

$$p_n^{(\phi,\lambda+\epsilon,c,j)}(x_{n,k+1}^{(\lambda,c,j)}) = \epsilon K_{n-1}^{(j,j)}(c, c)G_n(c, j; x_{n,k+1}^{(\phi,\lambda,c,j)})$$

têm sinais opostos. Dessa forma, cada intervalo $(x_{n,k}^{(\phi,\lambda,c,j)}, x_{n,k+1}^{(\phi,\lambda,c,j)})$ contém pelo menos um zero de $p_n^{(\phi,\lambda+\epsilon,c,j)}$.

Se $c \leq a$, então

$$\text{senal}[p_n^{(\phi,\lambda+\epsilon,c,j)}(x_{n,1}^{(\phi,\lambda,c,j)})] = (-1)^{n+1}.$$

Pelo simples fato de $p_n^{(\phi,\lambda+\epsilon,c,j)}(x) = \mathcal{O}(x^n)$ quando $x \rightarrow -\infty$, ou, em outras palavras,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} p_n^{(\phi,\lambda+\epsilon,c,j)}(x) = \begin{cases} +\infty, & \text{se } n \text{ é par} \\ -\infty, & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}.$$

Segue, então, que

$$x_{n,1}^{(\phi,\lambda+\epsilon,c,j)} < x_{n,1}^{(\phi,\lambda,c,j)} < \dots < x_{n,n}^{(\phi,\lambda+\epsilon,c,j)} < x_{n,n}^{(\phi,\lambda,c,j)},$$

ou seja, cada zero $x_{n,k}^{(\phi,\lambda,c,j)}$ é uma função decrescente do parâmetro λ .

Se $c \geq b$,

$$\text{sinal}[p_n^{(\phi,\lambda+\epsilon,c,j)}(x_{n,n}^{(\phi,\lambda,c,j)})] = -1$$

e

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} p_n^{(\phi,\lambda+\epsilon,c,j)}(x) = +\infty.$$

Assim,

$$x_{n,1}^{(\phi,\lambda,c,j)} < x_{n,1}^{(\phi,\lambda+\epsilon,c,j)} < \dots < x_{n,n}^{(\phi,\lambda,c,j)} < x_{n,n}^{(\phi,\lambda+\epsilon,c,j)},$$

isto é, $x_{n,k}^{(\phi,\lambda,c,j)}$ é uma função crescente do parâmetro λ , para $k = 1, 2, \dots, n$. ■

Teorema 5.4. *Se $j, n \in \mathbb{N}$, com $j < n$ e $\lambda > 0$, então*

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} x_{n,k}^{(\phi,\lambda,c,j)} = y_{n,k}^{(c,j)},$$

e

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda[y_{n,k}^{(c,j)} - x_{n,k}^{(\phi,\lambda,c,j)}] = \frac{P_n(y_{n,k}^{(c,j)})}{K_{n-1}^{(j,j)}(c, c)G'_n(c, j; y_{n,k}^{(c,j)})}.$$

Demonstração: Vamos definir o polinômio $\hat{p}_n^{(\phi,\lambda,c,j)}$ da seguinte maneira:

$$\hat{p}_n^{(\phi,\lambda,c,j)}(x) = \frac{1}{\lambda}P_n(x) + K_{n-1}^{(j,j)}(c, c)G_n(c, j; x).$$

Note que os zeros de $P_n^{(\phi,\lambda,c,j)}$ e $\hat{p}_n^{(\phi,\lambda,c,j)}$ são os mesmos para $\forall \lambda \neq 0$. Levando em consideração que

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \hat{p}_n^{(\phi,\lambda,c,j)}(x) = K_{n-1}^{(j,j)}(c, c)G_n(c, j; x),$$

pelo Teorema de Hurwitz (Teorema 3.3), os zeros $x_{n,k}^{(\phi,\lambda,c,j)}$ de $P_n^{(\phi,\lambda,c,j)}$ convergem para os zeros $y_{n,k}^{(c,j)}$ de $G_n(c, j; x)$ quando λ tende ao infinito, isto é,

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} x_{n,k}^{(\phi,\lambda,c,j)} = y_{n,k}^{(c,j)}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Por outro lado, usando o Teorema do Valor Médio aplicado à função $\lambda G_n(c, j; x)$, existem números reais $\theta_{n,k}$ entre $y_{n,k}^{(c,j)}$ e $x_{n,k}^{(\phi,\lambda,c,j)}$, $k = 1, \dots, n$, tais que

$$\frac{\lambda G_n(c, j; y_{n,k}^{(c,j)}) - \lambda G_n(c, j; x_{n,k}^{(\phi,\lambda,c,j)})}{y_{n,k}^{(c,j)} - x_{n,k}^{(\phi,\lambda,c,j)}} = \lambda G'_n(c, j; \theta_{n,k})$$

ou, equivalentemente,

$$\lambda[y_{n,k}^{(c,j)} - x_{n,k}^{(\phi,\lambda,c,j)}] = \frac{P_n(x_{n,k}^{(\phi,\lambda,c,j)})}{K_{n-1}^{(j,j)}(c,c)G'_n(c,j;\theta_{n,k})}.$$

Como

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} x_{n,k}^{(\phi,\lambda,c,j)} = y_{n,k}^{(c,j)}$$

e $\theta_{n,k}$ está localizado entre $y_{n,k}^{(c,j)}$ e $x_{n,k}^{(\phi,\lambda,c,j)}$, temos também que

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \theta_{n,k} = y_{n,k}^{(c,j)}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda[y_{n,k}^{(c,j)} - x_{n,k}^{(\phi,\lambda,c,j)}] &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{P_n(x_{n,k}^{(\phi,\lambda,c,j)})}{K_{n-1}^{(j,j)}(c,c)G'_n(c,j;\theta_{n,k})} \\ &= \frac{P_n(y_{n,k}^{(c,j)})}{K_{n-1}^{(j,j)}(c,c)G'_n(c,j;y_{n,k}^{(c,j)})}. \end{aligned}$$

■

Do Lema 5.1 e do Teorema 5.2, concluímos que os polinômios ortogonais do tipo Sobolev, $p_n^{(\phi,\lambda,c,j)}$, podem ser representados como uma combinação linear de polinômios cujos zeros se entrelaçam. Portanto, demonstramos as afirmações dos Teoremas 5.3 e 5.4 de forma análoga às demonstrações realizadas para os Teoremas 3.2 e 3.4, respectivamente.

Enfatizamos uma consequência interessante desses teoremas quando λ vai de zero para o infinito: cada zero $x_{n,k}^{(\phi,\lambda,c,j)}$ percorre monotonicamente todo o intervalo $(y_{n,k}^{(c,j)}, x_{n,k})$ no caso $c \leq a$ ou $(x_{n,k}, y_{n,k}^{(c,j)})$ no caso $c \geq b$. Em outras palavras, se $c \leq a$

$$x_{n,k}^{(\phi,\lambda,c,j)} \in \left(y_{n,k}^{(c,j)} = \sup_{\lambda} \{x_{n,k}^{(\phi,\lambda,c,j)}\}, x_{n,k} = \inf_{\lambda} \{x_{n,k}^{(\phi,\lambda,c,j)}\} \right),$$

e, se $c \geq b$,

$$x_{n,k}^{(\phi,\lambda,c,j)} \in \left(x_{n,k} = \inf_{\lambda} \{x_{n,k}^{(\phi,\lambda,c,j)}\}, y_{n,k}^{(c,j)} = \sup_{\lambda} \{x_{n,k}^{(\phi,\lambda,c,j)}\} \right).$$

Na sequência analisamos a localização do menor e do maior zero de $P_n^{(\phi,\lambda,c,j)}$ em relação aos pontos a e b , respectivamente.

Teorema 5.5. *Sejam $n > j$, $\lambda > 0$ e*

$$\lambda_0(n, \xi, c, j) = \frac{P_n(\xi)}{K_{n-1}^{(j,0)}(c, \xi)P_n^{(j)}(c) - K_{n-1}^{(j,j)}(c, c)P_n(\xi)} = -\frac{P_n(\xi)}{K_{n-1}^{(j,j)}(c, c)G_n(c, j, \xi)}.$$

i) Se $c \leq a$ e $y_{n,1}^{(c,j)} < a$, então o menor zero do polinômio $P_n^{(\phi,\lambda,c,j)}$ satisfaz

$$x_{n,1}^{(\phi,\lambda,c,j)} > a, \quad \text{para } \lambda < \lambda_0(n, a, c, j),$$

$$x_{n,1}^{(\phi,\lambda,c,j)} = a, \quad \text{para } \lambda = \lambda_0(n, a, c, j),$$

$$x_{n,1}^{(\phi,\lambda,c,j)} < a, \quad \text{para } \lambda > \lambda_0(n, a, c, j).$$

ii) Se $c \geq b$ e $y_{n,n}^{(c,j)} > b$, então o maior zero do polinômio $P_n^{(\phi,\lambda,c,j)}$ satisfaz

$$x_{n,n}^{(\phi,\lambda,c,j)} < b, \quad \text{para } \lambda < \lambda_0(n, b, c, j),$$

$$x_{n,n}^{(\phi,\lambda,c,j)} = b, \quad \text{para } \lambda = \lambda_0(n, b, c, j),$$

$$x_{n,n}^{(\phi,\lambda,c,j)} > b, \quad \text{para } \lambda > \lambda_0(n, b, c, j).$$

Observe que este resultado pode ser considerado uma extensão natural do Teorema 4.3. A prova é uma consequência imediata da determinação do valor do polinômio $P_n^{(\phi,\lambda,c,j)}$ nos pontos a e b usando as relações (5.2) e (5.3), juntamente com o fato de que

$$\text{sign}[G_n(c, j; a)] = (-1)^{n+1} \quad \text{se } y_{n,1}^{(c,j)} < a$$

e

$$G_n(c, j; b) < 0 \quad \text{se } y_{n,n}^{(c,j)} > b.$$

Note que, para $c \notin (a, b)$ fornecemos explicitamente o valor de λ_0 tal que, para $\lambda > \lambda_0$, um dos zeros está localizado fora do intervalo (a, b) .

Um resultado similar sobre a localização de c e dos zeros extremos de $P_n^{(\phi,\lambda,c,j)}$ é apresentada no teorema a seguir.

Teorema 5.6. *Sejam $n > j$, $\lambda > 0$ e*

$$\lambda_1(n, c, j) = \frac{P_n(c)}{K_{n-1}^{(j,0)}(c, c)P_n^{(j)}(c) - K_{n-1}^{(j,j)}(c, c)P_n(c)} = -\frac{P_n(c)}{G_n(c, j; c)K_{n-1}^{(j,j)}(c, c)}.$$

i) Se $c \leq a$ e $y_{n,1}^{(c,j)} < c$, então o menor zero do polinômio $P_n^{(\phi,\lambda,c,j)}$ satisfaz

$$x_{n,1}^{(\phi,\lambda,c,j)} > c, \quad \text{para } \lambda < \lambda_1(n, c, j),$$

$$x_{n,1}^{(\phi,\lambda,c,j)} = c, \quad \text{para } \lambda = \lambda_1(n, c, j),$$

$$x_{n,1}^{(\phi,\lambda,c,j)} < c, \quad \text{para } \lambda > \lambda_1(n, c, j).$$

ii) Se $c \geq b$ e $y_{n,n}^{(c,j)} > c$, então o maior zero do polinômio $P_n^{(\phi,\lambda,c,j)}$ satisfaz

$$x_{n,n}^{(\phi,\lambda,c,j)} < c, \quad \text{para } \lambda < \lambda_1(n, c, j),$$

$$x_{n,n}^{(\phi,\lambda,c,j)} = c, \quad \text{para } \lambda = \lambda_1(n, c, j),$$

$$x_{n,n}^{(\phi,\lambda,c,j)} > c, \quad \text{para } \lambda > \lambda_1(n, c, j).$$

Do teorema anterior, podemos concluir que, dependendo do valor do parâmetro λ , um zero pode localizar-se fora do intervalo $(\min\{a, c\}, \max\{b, c\})$.

5.2 Aplicações às medidas clássicas

5.2.1 Polinômios de Jacobi

Lembramos mais uma vez que os polinômios de Jacobi, $P_n^{(\alpha,\beta)}$, são ortogonais em relação à função peso

$$w(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta, \quad \alpha, \beta > -1.$$

Sejam $P_n^{(\alpha,\beta,\lambda,c,j)}$ os polinômios ortogonais em relação ao produto interno do tipo Jacobi-Sobolev

$$\langle p, q \rangle_{\alpha,\beta,\lambda,c,j} = \int_{-1}^1 p(x)q(x)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta dx + \lambda p^{(j)}(c)q^{(j)}(c).$$

Denotemos por $x_{n,k}^{(\alpha,\beta)}$ e $x_{n,k}^{(\alpha,\beta,\lambda,c,j)}$ os zeros de $P_n^{(\alpha,\beta)}$ e $P_n^{(\alpha,\beta,\lambda,c,j)}$, respectivamente.

Para ilustrar os resultados obtidos nos Teoremas 5.5 e 5.6, fornecemos duas figuras. Na Figura 5.1 consideramos $n = 3$, $\alpha = -1/2$, $\beta = 1/2$, $j = 2$ e $c = 1$ para alguns valores de λ e, na Figura 5.2, tomamos os mesmos valores de n , α , β e j e escolhemos $c = 2$, isto é, agora c não é um ponto extremo do intervalo $(-1, 1)$ e variamos o parâmetro λ . Percebemos que nas duas figuras no máximo um zero de

$$P_3^{(-1/2,1/2,\lambda,c,2)}(x) = x^3 - \frac{384c\lambda + \pi}{2(64\lambda + \pi)}x^2 + \frac{192c\lambda - 96\lambda - \pi}{2(64\lambda + \pi)}x + \frac{384c\lambda + \pi}{8(64\lambda + \pi)}$$

está fora do suporte $(-1, 1)$. Além disso, um zero coincide com $b = 1$ quando

$$\lambda = \lambda_0(3, 1, c, 2) = \frac{\pi}{128(3c - 1)}$$

e com c quando

$$\lambda = \lambda_1(3, c, 2) = \frac{1 - 4c - 4c^2 + 8c^3\pi}{256c^2(4c - 3)}.$$

Observe, na Figura 5.1, que, como $c = b = 1$, então

$$\lambda_0(3, 1, 1, 2) = \lambda_1(3, 1, 2) = \frac{\pi}{256}.$$

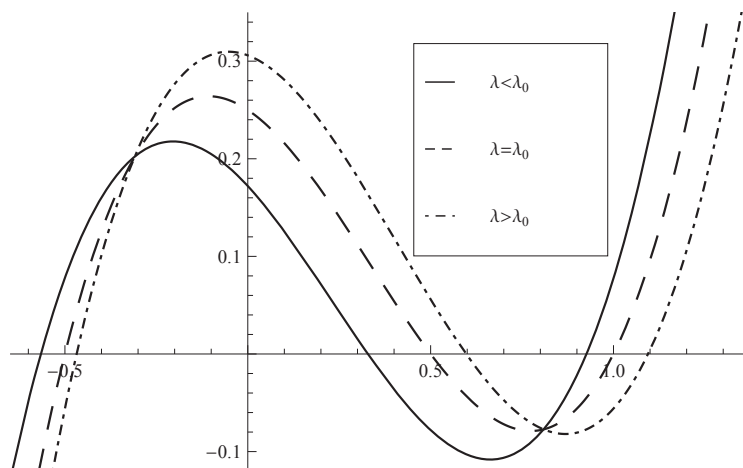


Figura 5.1: Gráficos de $P_3^{(-1/2, 1/2, \lambda, 1, 2)}$ para alguns valores de λ .

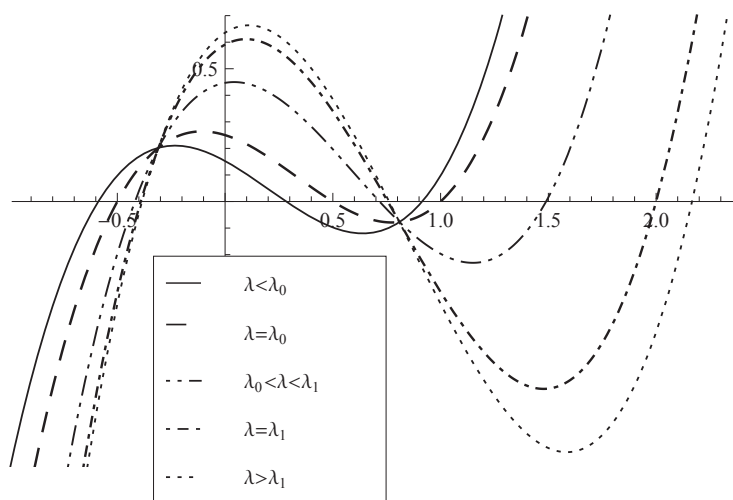


Figura 5.2: Gráficos de $P_3^{(-1/2, 1/2, \lambda, 2, 2)}$ para alguns valores de λ .

Também fornecemos duas tabelas para ilustrar a monotonicidade dos zeros de $P_n^{(\alpha, \beta, \lambda, c, j)}$ como funções de λ e a convergência desses zeros para os zeros do polinômio $G_n^{(\alpha, \beta)}(c, j; x)$ definido em (5.4). Podemos observar, na Tabela 5.1, o comportamento dos zeros de $P_4^{(\alpha, \beta, \lambda, c, j)}$ quando $\alpha = -1/2$, $\beta = 1/2$, $j = 2$ e $c = 1$, para alguns valores de λ . Fica claro que os zeros são funções crescentes de λ e eles convergem para os zeros de $G_4^{(-1/2, 1/2)}(1, 2; x)$ que são -0.696751 , 0.0803371 , 0.859082 e 1.69964 .

λ	$x_{4,1}^{(-1/2,1/2,\lambda,1,2)}$	$x_{4,2}^{(-1/2,1/2,\lambda,1,2)}$
1/3000	-0.74365	-0.09607
1/2000	-0.73703	-0.07079
$\lambda_0 = \lambda_1 = \pi/4096$	-0.72955	-0.04152
1	-0.69680	0.08019
10	-0.69676	0.08032
100	-0.69675	0.08034

λ	$x_{4,3}^{(-1/2,1/2,\lambda,1,2)}$	$x_{4,4}^{(-1/2,1/2,\lambda,1,2)}$
1/3000	0.59496	0.96120
1/2000	0.63516	0.97465
$\lambda_0 = \lambda_1 = \pi/4096$	0.68774	1
1	0.85899	1.69721
10	0.85907	1.69940
100	0.85908	1.69962

Tabela 5.1: Zeros de $P_4^{(-1/2,1/2,\lambda,1,2)}(x) = x^4 - \left[\frac{1}{2} + \frac{2400\lambda}{\pi+1664\lambda}\right] x^3 + \left[-\frac{3}{4} + \frac{960\lambda}{\pi+1664\lambda}\right] x^2 + \left[\frac{1}{4} + \frac{1320\lambda}{\pi+1664\lambda}\right] x + \frac{1}{16} - \frac{240\lambda}{\pi+1664\lambda}$ para alguns valores de λ .

Na Tabela 5.2, apresentamos os zeros de $P_4^{(\alpha,\beta,\lambda,c,j)}$ quando $\alpha = -1/2$, $\beta = 1/2$, $j = 2$ e $c = 2$, para algumas escolhas de λ . Nesta tabela, como os zeros de $G_4^{(-1/2,1/2)}(2, 2; x)$ são -0.659576 , 0.160050 , 0.886989 e 3.76418 , podemos observar que os zeros do polinômio ortogonal do tipo Jacobi-Sobolev $P_4^{(-1/2,1/2,\lambda,2,2)}$ têm o mesmo comportamento monótono e assintótico observado na tabela anterior, mesmo com o ponto c não coincidindo com os extremos do intervalo $(-1, 1)$.

λ	$x_{4,1}^{(-1/2,1/2,\lambda,2,2)}$	$x_{4,2}^{(-1/2,1/2,\lambda,2,2)}$
$\lambda_0 = \pi/54400$	-0.71792	-0.02081
1/3000	-0.67724	0.11537
$\lambda_1 = 17\pi/133376$	-0.67465	0.12258
1	-0.65958	0.16003
10	-0.65958	0.16005
100	-0.65958	0.16005

λ	$x_{4,3}^{(-1/2,1/2,\lambda,2,2)}$	$x_{4,4}^{(-1/2,1/2,\lambda,2,2)}$
$\lambda_0 = \pi/54400$	0.69706	1
1/3000	0.87010	1.84630
$\lambda_1 = 17\pi/133376$	0.87350	2
1	0.88699	3.76274
10	0.88699	3.76403
100	0.88699	3.76416

Tabela 5.2: Zeros de $P_4^{(-1/2,1/2,\lambda,2,2)}(x) = x^4 - \left[\frac{1}{2} + \frac{28512\lambda}{\pi+7808\lambda}\right]x^3 + \left[-\frac{3}{4} + \frac{12960\lambda}{\pi+7808\lambda}\right]x^2 + \left[\frac{1}{4} + \frac{14904\lambda}{\pi+7808\lambda}\right]x + \frac{1}{16} - \frac{3240\lambda}{\pi+7808\lambda}$ para alguns valores de λ .

5.2.2 Polinômios de Laguerre

Como já mencionado anteriormente, os polinômios de Laguerre $L_n^{(\alpha)}$ são ortogonais em relação à função peso

$$w(x) = x^\alpha e^{-x}, \quad \alpha > -1,$$

no intervalo $(0, \infty)$. Vamos denotar seus zeros, que são todos positivos, por $x_{n,k}^{(\alpha)}$.

Sejam $x_{n,k}^{(\alpha,\lambda,c,j)}$ os zeros do polinômio $P_n^{(\alpha,\lambda,c,j)}$ que são ortogonais em relação ao produto interno do tipo Laguerre-Sobolev

$$\langle p, q \rangle_{\alpha,\lambda,c,j} = \int_0^\infty p(x)q(x)x^\alpha e^{-x} dx + \lambda p^{(j)}(c)q^{(j)}(c). \quad (5.8)$$

Para ilustrar o comportamento de $x_{n,k}^{(\alpha,\lambda,c,j)}$, apresentamos duas figuras e duas tabelas. Primeiramente, traçamos os gráficos de $P_3^{(\alpha,\lambda,c,j)}$ para α, c , e j fixos e vários valores de λ , para mostrar que, dependendo do valor de λ , o menor zero pode ser menor ou coincidir com o valor de c . Na Figura 5.3 escolhemos $\alpha = 1, j = 2$ e $c = 0$, isto é, c é um ponto extremo do intervalo de ortogonalidade. Na Figura 5.4 tomamos $\alpha = 1, j = 2$ e $c = -2$.

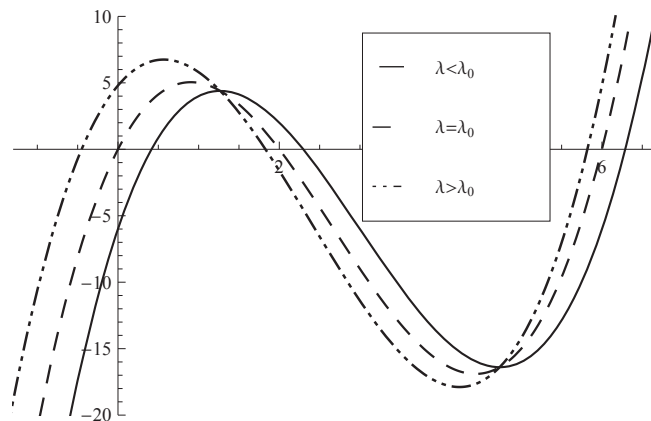


Figura 5.3: Gráficos de $P_3^{(1, \lambda, 0, 2)}(x) = x^3 - \left[\frac{36}{3+\lambda}\right] x^2 + \left[36 - \frac{72\lambda}{3+\lambda}\right] x - 24 + \frac{72\lambda}{3+\lambda}$ para alguns valores de λ ($\lambda_0 = \lambda_1 = 3/2$).

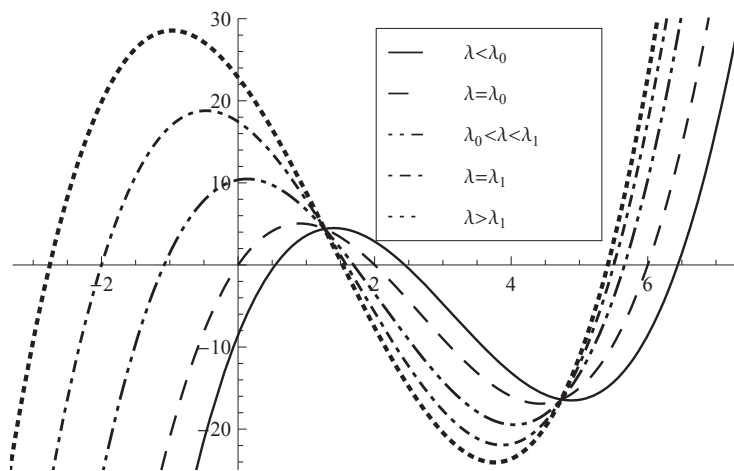


Figura 5.4: Gráficos de $P_3^{(1, \lambda, -2, 2)}(x) = x^3 - \left[12 - \frac{18\lambda}{3+\lambda}\right] x^2 + \left[36 - \frac{108\lambda}{3+\lambda}\right] x - 24 + \frac{180\lambda}{3+\lambda}$ para alguns valores de λ ($\lambda_0 = 6/7$ e $\lambda_1 = 114/61$).

Para ilustrar o comportamento dos zeros do polinômio ortogonal do tipo Laguerre-Sobolev $P_4^{(\alpha, \lambda, c, j)}$ mostrados nos Teoremas 5.2, 5.3 e 5.4, apresentamos alguns experimentos numéricos nas Tabelas 5.3 e 5.4. Na primeira, mostramos os zeros $x_{4,k}^{(\alpha, \lambda, c, j)}$ para $\alpha = 1$, $c = 0$, $j = 2$ e várias escolhas de λ . Observe que, como o ponto c está localizado do lado esquerdo do intervalo de ortogonalidade, todos os zeros desses polinômios são funções decrescentes de λ e convergem para os zeros de $G_4^{(1)}(0, 2; x)$, definidos em (5.4) e dados por -3.63913 , 1.16543 , 4.00543 e 9.23750 .

λ	$x_{4,1}^{(1,\lambda,0,2)}$	$x_{4,2}^{(1,\lambda,0,2)}$	$x_{4,3}^{(1,\lambda,0,2)}$	$x_{4,4}^{(1,\lambda,0,2)}$
1/100	0.71843	2.49658	5.60038	10.8012
1/10	0.39195	1.89442	4.85101	10.0719
$\lambda_0 = \lambda_1$	0	1.60262	4.57292	9.82446
1	-2.21826	1.22608	4.11868	9.37350
10	-3.46229	1.17104	4.01682	9.25187
100	-3.62101	1.16599	4.00657	9.23895
1000	-3.63731	1.16549	4.00554	9.23765

Tabela 5.3: Zeros de $P_4^{(1,\lambda,0,2)}(x) = x^4 - [20 - \frac{120\lambda}{3+13\lambda}]x^3 + [\frac{360}{3+13\lambda}]x^2 - [240 - \frac{5040\lambda}{3+13\lambda}]x + 120 - \frac{3600\lambda}{3+13\lambda}$ para alguns valores de λ ($\lambda_0 = \lambda_1 = 3/17$).

Na Tabela 5.4, escolhemos os mesmos valores de α e j mas, nesse caso, $c = -2$. Os zeros $x_{4,k}^{(\alpha,\lambda,c,j)}$ também são funções monótonas do parâmetro λ e convergem para os zeros de $G_4^{(1)}(-2, 2; x)$, que são -7.76110 , 1.07579 , 3.76689 e 8.77556 .

λ	$x_{4,1}^{(1,\lambda,0,2)}$	$x_{4,2}^{(1,\lambda,0,2)}$	$x_{4,3}^{(1,\lambda,0,2)}$	$x_{4,4}^{(1,\lambda,0,2)}$
1/100	0.660855	2.33685	5.33702	10.4580
λ_0	0	1.58118	4.50358	9.62953
1/10	-1.47545	1.26126	4.13306	9.25354
λ_1	-2	1.219141	4.06667	9.17819
10	-7.62158	1.07713	3.77041	8.78110
100	-7.74700	1.07593	3.76724	8.77611
1000	-7.75969	1.07580	3.76693	8.77561

Tabela 5.4: Zeros de $P_4^{(1,\lambda,-2,2)}(x) = x^4 - [20 - \frac{396\lambda}{3+28\lambda}]x^3 + [120 - \frac{5016\lambda}{3+28\lambda}]x^2 - [240 - \frac{15840\lambda}{3+28\lambda}]x + 120 - \frac{11088\lambda}{3+28\lambda}$ para alguns valores de λ ($\lambda_0 = 15/322$, $\lambda_1 = 471/3854$).

5.3 Questões em aberto

Em um contexto mais geral, muitos pesquisadores têm estudado os zeros do polinômio $S_n(\hat{\lambda}, \hat{c}, r; x)$, com $\hat{\lambda} = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_r)$ e $\hat{c} = (c_0, c_1, \dots, c_r)$, ortogonal em relação

ao produto interno do tipo Sobolev

$$\langle p, q \rangle_{\phi, \hat{\lambda}, \hat{c}} = \int_a^b p(x)q(x)d\phi(x) + \sum_{i=0}^r \lambda_i p^{(i)}(c_i)q^{(i)}(c_i), \quad (5.9)$$

onde $d\phi$ é uma medida, $\lambda_i \geq 0$, $r \in \mathbb{Z}_+$ e $c_i \in \mathbb{R}$.

Fixando λ_i , $i = 0, 1, \dots, k-1, k+1, \dots, r$, em (5.9) e considerando os zeros de S_n como funções de λ_k , formulamos então as seguintes questões:

- Quantos zeros de S_n estão no intervalo de ortogonalidade (a, b) ?
- Além disso, esses zeros são funções monótonas em relação ao parâmetro λ_k ?
- Eles convergem quando λ_k vai para o infinito?
- Se sim, qual a velocidade de convergência?

Para alguns resultados parciais sobre esses problemas, com medidas e vetores $\hat{\lambda}$ específicos, nos referenciamos a [3, 4, 6, 13, 17, 18, 37, 43, 48, 54].

Um resultado mais geral foi obtido em [1]. Quando $c_0 = c_1 = \dots = c_r$, Alfaro, López e Rezola mostraram que $S_n(\hat{\lambda}, \hat{c}, r; x)$ possui pelo menos $n - r$ zeros em (a, b) .

Capítulo 6

Zeros de Combinações Lineares de Polinômios

Consideramos, neste capítulo, a sequência de polinômios p_n^ϕ , ortonormais com relação a $d\phi$ e normalizados por $\mu_0^\phi = 1$. Assim, como p_n é ortonormal, os zeros de p_n são reais, simples e se entrelaçam com os zeros de p_{n-1} . Se considerarmos a combinação linear desses polinômios dada por

$$S_n(x) = p_n(x) + a_{n-1}p_{n-1}(x), \quad n \geq 1,$$

com $S_0(x) = 1$ e $a_{n-1} \in \mathbb{R}$, podemos dizer, pelo Teorema de Obrechhoff (Teorema 3.1), que os zeros de S_n são reais, simples e se entrelaçam com os zeros de p_n e p_{n-1} .

Neste capítulo, desenvolvemos um estudo motivado pelo problema inverso, ou seja, dada uma sequência de polinômios ortonormais $\{p_n\}_{n \geq 0}$, o que se pode dizer sobre os zeros de S_n se

$$p_n(x) = S_n(x) + a_{n-1}S_{n-1}(x), \quad n \geq 1? \tag{6.1}$$

Esse problema surge, por exemplo, quando $\{S_n\}_{n \geq 0}$ é uma sequência de polinômios ortogonais de Sobolev. Como os polinômios ortogonais de Sobolev não satisfazem a muitas das propriedades dos polinômios ortogonais usuais, é muito útil encontrar uma relação do tipo (6.1). Nos trabalhos [11] e [35] são apresentadas relações do tipo (6.1) para alguns casos particulares de polinômios ortogonais de Sobolev. Por exemplo, no trabalho de Meijer e Bruin [51] e em nosso trabalho [7] essas relações foram fundamentais para analisar o comportamento dos zeros dos polinômios ortogonais de Sobolev.

A princípio nada podemos dizer sobre o problema geral. Por exemplo, consideremos

a seguinte combinação linear de polinômios

$$p_5(x) = S_5(x) + a_4 S_4(x),$$

em que $a_4 \in \mathbb{R}$, $a_4 \neq 0$, S_4 e S_5 são polinômios de graus 4 e 5, respectivamente. Graficamente, os 5 zeros do polinômio p_5 são as abscissas dos pontos onde os gráficos de S_5 e $-a_4 S_4$ se cruzam. Note, na figura a seguir, que é possível ocorrer dos polinômios S_4 e S_5 não possuírem todos os zeros reais e a combinação linear deles produzir um polinômio que só tenha zeros reais.

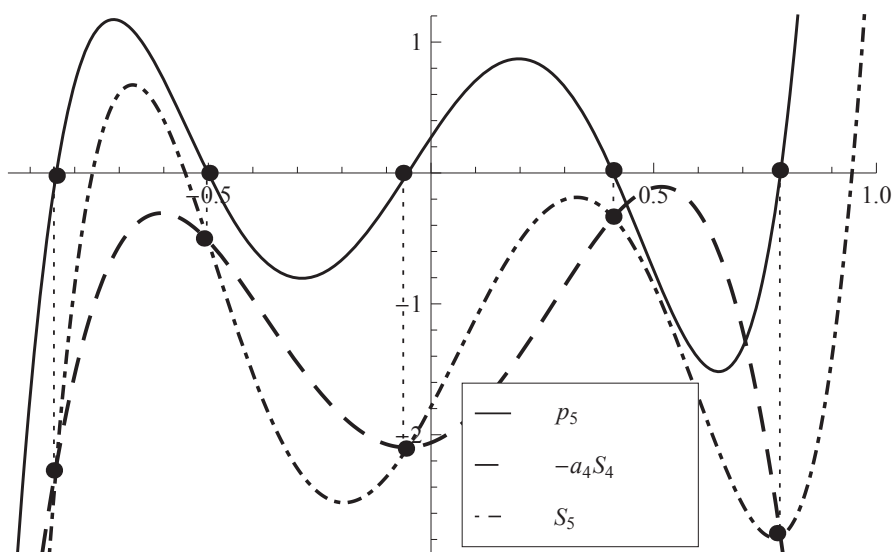


Figura 6.1: Gráficos de p_5 , $-a_4 S_4$ e S_5 .

Na Figura 6.1, tomamos $p_5(x) = p_5^{(3/2,1)}(x)$, isto é, p_5 é o polinômio ortonormal de Jacobi de grau 5 com $\alpha = 3/2$ e $\beta = 1$, $S_4(x) = p_4^{(3/2,1)}(x) + 1.3$ e $a_4 = 1$. Os zeros de p_5 , S_5 e S_4 são dados aproximadamente, por:

$$p_5 : \quad -0.8412, \quad -0.5007, \quad -0.0521, \quad 0.4091 \text{ e } 0.7848;$$

$$S_5 : \quad 0.3289 - 0.0902i, \quad 0.3289 + 0.0902i, \quad -0.760296, \quad -0.551712 \text{ e } 0.945344;$$

$$S_4 : \quad -0.6163 - 0.1119i, \quad -0.6163 + 0.1119i, \quad 0.52112 - 0.0652i \text{ e } 0.52112 + 0.0652i.$$

Observe que, neste exemplo, embora p_5 tenha todos os zeros reais, os polinômios S_4 e S_5 possuem zeros complexos.

6.1 Resultados preliminares

Nesta seção apresentamos algumas expressões que obtivemos para os polinômios S_n .

Lema 6.1. *Os polinômios S_n podem ser obtidos através da relação de recorrência de quatro termos*

$$\sqrt{\alpha_{n+1}}S_n(x) = (x - \beta_n - a_{n-1}\sqrt{\alpha_{n+1}})S_{n-1}(x) + [a_{n-2}(x - \beta_n) - \sqrt{\alpha_n}]S_{n-2}(x) - a_{n-3}\sqrt{\alpha_n}S_{n-3}(x),$$

para $n \geq 2$, com $S_{-1}(x) = a_{-1} = 0$, $S_0(x) = 1$ e $\sqrt{\alpha_2}S_1(x) = x - \beta_1 - a_0\sqrt{\alpha_2}$.

Demonstração: Utilizando a relação de recorrência de três termos para p_n , dada em (2.12), e a relação (6.1) multiplicada por $\sqrt{\alpha_{n+1}}$, obtemos

$$\begin{aligned} \sqrt{\alpha_{n+1}}S_n(x) + a_{n-1}\sqrt{\alpha_{n+1}}S_{n-1}(x) &= \sqrt{\alpha_{n+1}}p_n(x) \\ &= (x - \beta_n)(S_{n-1}(x) + a_{n-2}S_{n-2}(x)) \\ &\quad - \sqrt{\alpha_n}(S_{n-2}(x) + a_{n-3}S_{n-3}(x)), \end{aligned}$$

que é o resultado desejado. ■

Escrevendo $xS_0(x) = \sqrt{\alpha_2}S_1(x) + \beta_1 + a_0\sqrt{\alpha_2}$ e utilizando o Lema 6.1 para $n = 2$, obtemos

$$\begin{aligned} \sqrt{\alpha_3}S_2(x) &= (x - \beta_2 - a_1\sqrt{\alpha_3})S_1(x) + [a_0(x - \beta_2) - \sqrt{\alpha_2}]S_0(x) \\ &= (x - \beta_2 - a_1\sqrt{\alpha_3})S_1(x) + a_0[\sqrt{\alpha_2}S_1(x) + (\beta_1 + a_0\sqrt{\alpha_2})S_0(x)] \\ &\quad - [a_0\beta_2 + \sqrt{\alpha_2}]S_0(x) \\ &= (x - \beta_2 - a_1\sqrt{\alpha_3} + a_0\sqrt{\alpha_2})S_1(x) - [a_0(\beta_2 - \beta_1 - a_0\sqrt{\alpha_2}) + \sqrt{\alpha_2}]S_0(x) \\ &= (x - \beta_2 - a_1\sqrt{\alpha_3} + a_0\sqrt{\alpha_2})S_1(x) - \gamma_2S_0(x), \end{aligned}$$

com $\gamma_2 = a_0(\beta_2 - \beta_1 - a_0\sqrt{\alpha_2}) + \sqrt{\alpha_2}$. Logo,

$$xS_1(x) = \sqrt{\alpha_3}S_2(x) - (-\beta_2 - a_1\sqrt{\alpha_3} + a_0\sqrt{\alpha_2})S_1(x) + \gamma_2S_0(x). \quad (6.2)$$

Assim, usando (6.2) e o Lema 6.1 para $n = 3$, obtemos

$$\begin{aligned} \sqrt{\alpha_4}S_3(x) &= (x - \beta_3 - a_2\sqrt{\alpha_4})S_2(x) + [a_1(x - \beta_3) - \sqrt{\alpha_3}]S_1(x) - a_0\sqrt{\alpha_3}S_0(x) \\ &= (x - \beta_3 - a_2\sqrt{\alpha_4} + a_1\sqrt{\alpha_3})S_2(x) - [a_1(\beta_3 - \beta_2 - a_1\sqrt{\alpha_3} + a_0\sqrt{\alpha_2}) \\ &\quad + \sqrt{\alpha_3}]S_1(x) - (a_0\sqrt{\alpha_3} - a_1\gamma_2)S_0(x) \\ &= (x - \beta_3 - a_2\sqrt{\alpha_4} + a_1\sqrt{\alpha_3})S_2(x) - \gamma_3S_1(x) - (a_0\sqrt{\alpha_3} - a_1\gamma_2)S_0(x), \end{aligned}$$

onde $\gamma_3 = a_1(\beta_3 - \beta_2 - a_1\sqrt{\alpha_3} + a_0\sqrt{\alpha_2}) + \sqrt{\alpha_3}$.

Repetindo este raciocínio sucessivamente, chegamos ao resultado a seguir.

Lema 6.2. Para $n \geq 4$, os polinômios S_n satisfazem

$$\begin{aligned} \sqrt{\alpha_{n+1}}S_n(x) &= [x - (\beta_n + a_{n-1}\sqrt{\alpha_{n+1}} - a_{n-2}\sqrt{\alpha_n})] S_{n-1}(x) - \gamma_n S_{n-2}(x) \\ &\quad - (a_{n-3}\sqrt{\alpha_n} - a_{n-2}\gamma_{n-1})S_{n-3}(x) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{n-3} (-1)^{n-j-1} a_{j+1}a_{j+2} \cdots a_{n-3}a_{n-2} (a_{j-1}\sqrt{\alpha_{j+2}} - a_j\gamma_{j+1})S_{j-1}(x), \end{aligned} \quad (6.3)$$

onde $\gamma_n = [a_{n-2}(\beta_n - \beta_{n-1} - a_{n-2}\sqrt{\alpha_n} + a_{n-3}\sqrt{\alpha_{n-1}}) + \sqrt{\alpha_n}]$, para $n \geq 2$ com $a_{-1} = 0$, sendo

$$\begin{aligned} \sqrt{\alpha_4}S_3(x) &= [x - (\beta_3 + a_2\sqrt{\alpha_4} - a_1\sqrt{\alpha_3})] S_2(x) - \gamma_3 S_1(x) - (a_0\sqrt{\alpha_3} - a_1\gamma_2)S_0(x), \\ \sqrt{\alpha_3}S_2(x) &= [x - (\beta_2 + a_1\sqrt{\alpha_3} - a_0\sqrt{\alpha_2})] S_1(x) - \gamma_2 S_0(x), \\ \sqrt{\alpha_2}S_1(x) &= [x - (\beta_1 + a_0\sqrt{\alpha_2})] S_0(x), \end{aligned}$$

e $S_0(x) = 1$.

6.2 Zeros dos polinômios S_n

A seguir, apresentamos condições necessárias e/ou suficientes para que os n zeros de S_n sejam reais, distintos e se entrelacem com os $n - 1$ zeros de S_{n-1} .

Teorema 6.1. Se os zeros dos polinômios S_n são reais, distintos e se entrelaçam com os zeros de S_{n-1} , então as seguintes condições são satisfeitas para $n \geq 2$:

i) $\gamma_n > 0$;

ii) $\gamma_n [\gamma_n \gamma_{n-1} + a_{n-2}\sqrt{\alpha_{n-2}}(a_{n-4}\sqrt{\alpha_{n-1}} - a_{n-3}\gamma_{n-2})$
 $+ (a_{n-3}\sqrt{\alpha_n} - a_{n-2}\gamma_{n-1})(a_{n-2}\sqrt{\alpha_n} - 2a_{n-3}\sqrt{\alpha_{n-1}} + a_{n-4}\sqrt{\alpha_{n-2}} + \beta_{n-1} - \beta_{n-2})]$
 $+ (a_{n-3}\sqrt{\alpha_n} - a_{n-2}\gamma_{n-1})^2 \sqrt{\alpha_{n-1}} > 0$.

Demonstração: Apliquemos o algoritmo de Euclides para $\sqrt{\alpha_{n+1}}S_n$ e S_{n-1} com os restos da divisão com sinais negativos, como na Seção 3.1.2. Da relação (6.3) obtemos que, no primeiro passo do algoritmo,

$$\sqrt{\alpha_{n+1}}S_n(x) = S_{n-1}(x)Q_1(x) - R_{n-2}(x),$$

com

$$Q_1(x) = x - (\beta_n + a_{n-1}\sqrt{\alpha_{n+1}} - a_{n-2}\sqrt{\alpha_n})$$

e

$$R_{n-2}(x) = \gamma_n S_{n-2}(x) + (a_{n-3}\sqrt{\alpha_n} - a_{n-2}\gamma_{n-1})S_{n-3}(x) - \sum_{j=1}^{n-3} (-1)^{n-j-1} a_{j+1} a_{j+2} \dots a_{n-3} a_{n-2} (a_{j-1}\sqrt{\alpha_{j+2}} - a_j \gamma_{j+1}) S_{j-1}(x).$$

Como, por hipótese, os zeros de S_n e S_{n-1} são reais, distintos e se entrelaçam, pelo Teorema 3.9 concluímos que o coeficiente do termo de maior grau de R_{n-2} é positivo. Utilizando a relação (6.3) para $n-2$ e comparando os coeficientes de x^{n-2} em ambos os lados da igualdade, podemos ver que o coeficiente do termo de maior grau de S_{n-2} é

$$\frac{1}{(\alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \dots \alpha_n \alpha_{n-1})^{1/2}} > 0.$$

Logo, obtemos imediatamente $\gamma_n > 0$.

No segundo passo do algoritmo de Euclides, dividimos S_{n-1} por R_{n-2} e obtemos

$$S_{n-1}(x) = R_{n-2}(x)Q_2(x) - R_{n-3}(x),$$

com

$$Q_2(x) = \frac{1}{\gamma_n \sqrt{\alpha_n}} \left(x - \frac{(a_{n-3}\sqrt{\alpha_n} - a_{n-2}\gamma_{n-1}) \sqrt{\alpha_{n-1}}}{\gamma_n} - a_{n-2}\sqrt{\alpha_n} + a_{n-3}\sqrt{\alpha_{n-1}} - \beta_{n-1} \right)$$

e

$$\begin{aligned} \sqrt{\alpha_n} R_{n-3}(x) = & \left[\frac{-(a_{n-3}\sqrt{\alpha_n} - a_{n-2}\gamma_{n-1})(a_{n-3}\sqrt{\alpha_{n-1}} - a_{n-4}\sqrt{\alpha_{n-2}} + \beta_{n-2})}{\gamma_n} \right. \\ & + \frac{(a_{n-3}\sqrt{\alpha_n} - a_{n-2}\gamma_{n-1})}{\gamma_n} \left(a_{n-2}\sqrt{\alpha_n} - a_{n-3}\sqrt{\alpha_{n-1}} + \beta_{n-1} \right. \\ & \left. \left. + \frac{(a_{n-3}\sqrt{\alpha_n} - a_{n-2}\gamma_{n-1}) \sqrt{\alpha_{n-1}}}{\gamma_n} \right) + \gamma_{n-1} \right] S_{n-3}(x) \\ & + \frac{a_{n-2}(a_{n-4}\sqrt{\alpha_{n-1}} - a_{n-3}\gamma_{n-2})}{\gamma_n} x S_{n-4}(x) + \pi_{n-4}(x), \end{aligned}$$

onde π_{n-4} é um polinômio de grau no máximo $n-4$. Pelo Teorema 3.9, o coeficiente do termo de maior grau de R_{n-3} é positivo. Assim, como o coeficiente do termo de maior grau de S_{n-3} e de S_{n-4} também são positivos, segue a afirmação *ii*). ■

Como vimos na Figura 6.1, estudar o comportamento dos zeros de S_n apenas sabendo que os polinômios p_n são ortonormais não faz muito sentido. Suponhamos então, que os zeros de S_n sejam reais, distintos e se entrelacem com os zeros do polinômio S_{n-1} . Assim, utilizando a relação (6.1) e o Teorema 3.1, concluímos que os zeros do polinômio

p_n se entrelaçam com os zeros dos polinômios S_n e S_{n-1} . Podemos, então, enunciar o teorema a seguir.

Teorema 6.2. *Sejam $s_{n,1} < s_{n,2} < \dots < s_{n,n}$ os zeros de S_n e $s_{n-1,1} < s_{n-1,2} < \dots < s_{n-1,n-1}$ os zeros de S_{n-1} , tais que*

$$s_{n,1} < s_{n-1,1} < s_{n,2} < s_{n-1,2} < \dots < s_{n,n-1} < s_{n-1,n-1} < s_{n,n}.$$

Se denotarmos por $x_{n,1} < x_{n,2} < \dots < x_{n,n}$ os zeros de p_n , então

i) para $a_{n-1} > 0$,

$$x_{n,k} < s_{n,k} < x_{n-1,k}, \quad \text{para } k = 1, 2, \dots, n-1, \quad \text{e } x_{n,n} < s_{n,n};$$

ii) para $a_{n-1} < 0$,

$$s_{n,k} < x_{n,k} < s_{n-1,k}, \quad \text{para } k = 1, 2, \dots, n-1, \quad \text{e } s_{n,n} < x_{n,n}.$$

Além disso, os zeros de p_n são funções decrescentes de a_{n-1} .

Usando os Teoremas 3.20 e 3.21, formulados na Seção 3.3, obtemos mais uma condição necessária para os zeros de S_n e S_{n-1} serem reais, simples e se entrelaçarem e uma condição suficiente para S_n possuir zeros complexos.

Teorema 6.3. *Se os zeros de S_n e S_{n-1} são reais, simples e se entrelaçam, então o determinante da matriz de Hurwitz, $\mathcal{H}_{2n-1}(S_{n-1}, S_n)$, é estritamente positivo.*

Teorema 6.4. *Se o determinante da matriz de Hurwitz, $\mathcal{H}_{2n-1}(S'_n, S_n)$, é estritamente negativo, então S_n possui zeros complexos.*

6.2.1 Zeros de combinações lineares de n polinômios

A partir da relação

$$S_n(x) + a_{n-1}S_{n-1}(x) = p_n(x), \quad n \geq 1,$$

onde $S_0 = p_0$, podemos isolar S_n de forma recursiva e representá-lo como combinação linear dos polinômios p_k , $k = 0, 1, \dots, n$, obtendo o seguinte resultado.

Lema 6.3. *Sejam $\lambda_{n,k} = (-1)^{n+k}a_{n-1}a_{n-2}\dots a_{k+1}a_k$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, e $\lambda_{n,n} = 1$. Então,*

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n \lambda_{n,k} p_k(x). \quad (6.4)$$

Apesar de cada polinômio ortogonal possuir todos os zeros reais, note que, usando a relação (6.4) e o Teorema 6.4, obtemos uma condição para avaliar quando uma combinação linear de polinômios ortogonais não possui somente zeros reais.

Corolário 6.1. *A combinação linear de polinômios ortonormais (6.4) possui zeros complexos se o determinante da matriz de Hurwitz $\mathcal{H}_{2n-1}(S'_n, S_n)$ é estritamente negativo.*

Como uma aplicação do corolário acima, consideremos o seguinte exemplo:

Exemplo 6.1. *Consideremos a combinação linear dos polinômios ortonormais de Laguerre $l_n^{(\alpha)}$, com $\alpha = 1$,*

$$S_4(x) = l_4^{(1)}(x) + 2l_3^{(1)}(x) + 4l_2^{(1)}(x) + 8l_1^{(1)}(x) + 16l_0^{(1)}(x).$$

Sabemos que os polinômios ortogonais possuem todos os zeros reais. Por outro lado, utilizando o software Mathematica, obtemos -0.00324994 como um valor aproximado do determinante da matriz de Hurwitz $\mathcal{H}_7(S'_4, S_4)$. Logo, pelo corolário anterior, S_4 possui zeros complexos. De fato, os zeros de S_4 são aproximadamente $3.65662 - 2.46683i$, $3.65662 + 2.46683i$, 8.50784 e 13.1232 .

Medida simétrica

Quando ϕ é absolutamente contínua em $(-a, a)$, podemos escrever $d\phi(x) = w(x)dx$, onde w é uma função contínua, não negativa, mas não identicamente nula em $(-a, a)$. Um caso especial a tratar é quando w é uma função par. Neste caso, o polinômio ortonormal p_m , $m \geq 0$, com relação a essa medida no intervalo $(-a, a)$ é uma função par se m for par e é uma função ímpar se m for ímpar. Logo, os zeros de p_m são simétricos com relação à origem. Explicitamente,

$$p_{2m}(x) = a_{2m,2m}x^{2m} + a_{2m,2m-2}x^{2m-2} + \dots + a_{2m,2}x^2 + a_{2m,0}$$

e

$$p_{2m+1}(x) = a_{2m+1,2m+1}x^{2m+1} + a_{2m+1,2m-1}x^{2m-1} + \dots + a_{2m+1,1}x.$$

Note que podemos escrever

$$p_{2m}(x) = a_{2m,2m}y^m + a_{2m,2m-2}y^{m-1} + \dots + a_{2m,2}y + a_{2m,0} = p_m^{(e)}(y), \text{ com } y = x^2$$

e

$$p_{2m+1}(x) = x(a_{2m+1,2m+1}y^m + a_{2m+1,2m-1}y^{m-1} + \dots + a_{2m+1,1}) = xp_m^{(o)}(y), \text{ com } y = x^2.$$

Ademais, para $m \neq n$,

$$0 = \int_{-a}^a p_{2n}(x)p_{2m}(x)d\phi(x) = \int_0^{a^2} p_n^{(e)}(y)p_m^{(e)}(y) \frac{d\phi(\sqrt{y})}{2\sqrt{y}},$$

e

$$1 = \int_{-a}^a [p_{2n}(x)]^2 d\phi(x) = \int_0^{a^2} [p_n^{(e)}(y)]^2 \frac{d\phi(\sqrt{y})}{2\sqrt{y}}.$$

Logo os polinômios $p_n^{(e)}$ são ortonormais com relação à medida

$$\frac{d\phi(\sqrt{y})}{2\sqrt{y}}$$

no intervalo $(0, a^2)$, onde a pode ser finito ou não.

Analogamente, se $m \neq n$,

$$0 = \int_{-a}^a p_{2n+1}(x)p_{2m+1}(x)d\phi(x) = \int_0^{a^2} p_n^{(o)}(y)p_m^{(o)}(y) \frac{\sqrt{y}d\phi(\sqrt{y})}{2},$$

e

$$1 = \int_{-a}^a [p_{2n+1}(x)]^2 d\phi(x) = \int_0^{a^2} [p_n^{(o)}(y)]^2 \frac{\sqrt{y}d\phi(\sqrt{y})}{2}.$$

Assim os polinômios $p_n^{(o)}$ também são ortonormais, mas com relação à medida

$$\frac{\sqrt{y}d\phi(\sqrt{y})}{2}$$

no intervalo $(0, a^2)$.

Polinômios Ortogonais de Hermite-Sobolev do tipo II

Os polinômios ortogonais de Hermite-Sobolev do tipo II, estudados em [12] e [14], são ortogonais com relação ao produto interno

$$\langle f, g \rangle_{\mathbb{S}_2} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)e^{-x^2} dx + \lambda \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)g'(x) \frac{e^{-x^2}}{x^2 + \xi^2} dx,$$

com $\lambda > 0$ e $\xi \neq 0$.

Esses polinômios podem ser obtidos através da relação

$$S_n(x) + a_{n-2}S_{n-2}(x) = h_n(x) + d_{n-2}h_{n-2}(x), \quad n \geq 2, \quad (6.5)$$

com $S_0(x) = h_0(x)$, $S_1(x) = h_1(x)$ e $S_2(x) = h_2(x)$, onde h_n são os polinômios ortonormais de Hermite. Os coeficientes a_{n-2} e d_{n-2} podem ser obtidos de forma recursiva, como mostrado em [12].

Como a função peso dos polinômios de Hermite é $w(x) = e^{-x^2}$, que é uma função par, podemos denotar

$$h_{2m}(x) = h_m^{(e)}(y) \quad \text{e} \quad h_{2m+1}(x) = xh_m^{(o)}(y), \quad \text{com} \quad y = x^2.$$

Dessa forma, os polinômios $h_m^{(e)}(y)$ e $h_m^{(o)}(y)$ são ortonormais com relação às funções peso

$$w^{(e)}(x) = \frac{e^{-y}}{2\sqrt{y}} \quad \text{e} \quad w^{(o)}(x) = \frac{\sqrt{y}e^{-y}}{2},$$

respectivamente, em $(0, \infty)$. Utilizando (6.5) recursivamente, podemos representar S_{2m} e S_{2m+1} como combinações lineares dos polinômios ortonormais $h_m^{(e)}(y)$ e $h_m^{(o)}(y)$. Mais precisamente,

$$S_{2m}(x) = \sum_{k=1}^m \lambda_{m,k}^{(e)} h_k^{(e)}(y), \quad \text{com} \quad y = x^2,$$

onde $\lambda_{m,m}^{(e)} = 1$, $\lambda_{m,m-1}^{(e)} = d_{2m-2} - a_{2m-2}$ e $\lambda_{m,k}^{(e)} = (-1)^{m-k+1} a_{2m-2} a_{2m-4} \dots a_{2k+2} (d_{2k} - a_{2k})$, para $k = 1, 2, \dots, m-2$, e

$$S_{2m+1}(x) = x \sum_{k=0}^m \lambda_{m,k}^{(o)} h_k^{(o)}(y), \quad \text{com} \quad y = x^2,$$

onde $\lambda_{m,m}^{(o)} = 1$, $\lambda_{m,m-1}^{(o)} = d_{2m-1} - a_{2m-1}$ e $\lambda_{m,k}^{(o)} = (-1)^{m-k+1} a_{2m-1} a_{2m-3} \dots a_{2k+3} (d_{2k+1} - a_{2k+1})$, para $k = 0, 1, \dots, m-2$.

Exemplo 6.2. *Seja S_6 o polinômio ortogonal de Hermite-Sobolev de grau 6, com $\lambda = 100$ e $\xi = 1/100$. Assim, de (6.5), obtemos a relação*

$$S_6(x) = h_6(x) + (d_4 - a_4)h_4(x) - a_4(d_2 - a_2)h_2,$$

onde $d_2 = 1.14452$, $d_4 = 1.08819$, $a_2 = 0.00145432$, $a_4 = 0.00204956$. Neste caso, o determinante da matriz de Hurwitz $\mathcal{H}_{11}(S'_6, S_6)$ é aproximadamente -0.0246361 , um número negativo. Logo, pelo Teorema 6.4, S_6 possui zeros complexos. Calculando seus zeros, obtemos os seguintes valores aproximados para os zeros complexos: $-0.353295i$ e $0.353295i$, e para os demais zeros simétricos: -1.97728 , 1.97728 , -0.860627 , 0.860627 .

Uma forma mais simples de concluir que S_6 possui zeros complexos, é expressá-lo como

$$S_6(x) = h_3^{(e)}(y) + (d_4 - a_4)h_2^{(e)}(y) - a_4(d_2 - a_2)h_1^{(e)}(y) = S_3^{(e)}(y),$$

com $y = x^2$. Observe que se $S_3^{(e)}(y)$ possui algum zero negativo, então $S_6(x)$ possui zeros complexos. Considerando o polinômio $\tilde{S}_3(y) = -S_3^{(e)}(-y)$, obtemos $\mathcal{H}_6(\tilde{S}_3', \tilde{S}_3) \approx -0.00558194 < 0$. Logo, pelo Teorema 3.16, existe algum zero de $\tilde{S}_3(y)$ que é positivo, ou seja, existe pelo menos um zero negativo de $S_3^{(e)}(y)$. Dessa forma, garantimos a existência de um zero complexo de S_6 , mas calculando um determinante de ordem bem menor.

Localização dos Zeros

Em [63], encontramos os dois resultados a seguir.

Teorema 6.5. *Sejam*

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n \lambda_{n,k} h_k(x),$$

onde h_k denotam os polinômios de Hermite,

$$M^* = \max_{0 \leq k \leq n-1} |\lambda_{n,k}|,$$

e $s_{n,k}$, $k = 1, 2, \dots, n$, os zeros de S_n . Então,

$$|\Im(s_{n,k})| \leq \frac{1}{2} \left(1 + \frac{M^*}{|\lambda_{n,n}|} \right), \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Este teorema afirma que os zeros de S_n se localizam na faixa do plano complexo centrada no eixo real e com largura

$$\left(1 + \frac{M^*}{|\lambda_{n,n}|} \right).$$

Teorema 6.6. *Seja*

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n \lambda_{n,k} h_k(x),$$

onde h_k denotam os polinômios de Hermite. Então, os zeros $s_{n,k}$, $k = 1, 2, \dots, n$, de S_n satisfazem

$$|\Im(s_{n,k})| \leq \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \left| \frac{\lambda_{n,k}}{\lambda_{n,n}} \right|^{\frac{1}{n-k}}.$$

O Teorema anterior pode ser estendido para quaisquer outros polinômios ortogonais. Specht [59] provou o seguinte resultado:

Teorema 6.7. *Sejam $\{p_n\}_{n \geq 0}$ uma sequência de polinômios ortonormais e $a_{n,n}$ o coeficiente do termo de maior grau de p_n . Então, os zeros $s_{n,k}$, $k = 1, 2, \dots, n$, do polinômio complexo*

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n \lambda_{n,k} p_k(x)$$

satisfazem

$$|\Im(s_{n,k})| \leq \frac{a_{n-1,n-1}}{a_{n,n}} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \left| \frac{\lambda_{n,k}}{\lambda_{n,n}} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Giroux [28] obteve um resultado mais completo do que o de Specht, que enunciamos a seguir.

Teorema 6.8. *Seja $\{p_n\}_{n \geq 0}$ uma sequência de polinômios ortonormais com os coeficientes dos termos de maior grau denotados por $a_{n,n}$. Então, os zeros $s_{n,k}$, $k = 1, 2, \dots, n$, do polinômio complexo*

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n \lambda_{n,k} p_k(x)$$

satisfazem

$$\sum_{k=1}^n |\Im(s_{n,k})| \leq \frac{a_{n-1,n-1}}{a_{n,n}} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \left| \frac{\lambda_{n,k}}{\lambda_{n,n}} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

A igualdade acima é válida se, e somente se,

$$\lambda_{n,0} = \dots = \lambda_{n,n-2} \quad e \quad \operatorname{Re} \left(\frac{\lambda_{n,n-1}}{\lambda_{n,n}} \right) = 0.$$

Corolário 6.2. *Existe pelo menos um zero do polinômio*

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n \lambda_{n,k} p_k(x)$$

satisfazendo

$$|\Im(s_{n,k})| \leq \frac{1}{n} \frac{a_{n-1,n-1}}{a_{n,n}} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \left| \frac{\lambda_{n,k}}{\lambda_{n,n}} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Considerando a sequência de polinômios ortogonais mônicos $\{P_n\}_{n \geq 0}$, Gol'berg e Malozemov [29] obtiveram estimativas para os zeros de polinômios da forma

$$S_n(x) = P_n(x) + \sum_{k=0}^{n-1} \hat{\lambda}_{n,k} P_k(x).$$

Teorema 6.9. *Sejam $x_{n,1}$ e $x_{n,n}$ o menor e maior zeros do polinômio P_n , respectivamente, e $s_{n,k}$ um zero arbitrário de*

$$S_n(x) = P_n(x) + \sum_{k=0}^{n-1} \hat{\lambda}_{n,k} P_k(x).$$

Então,

$$x_{n,1} - \frac{1}{2} \left(\alpha + \sqrt{\alpha^2 + C} \right) \leq \operatorname{Re}(s_{n,k}) \leq x_{n,n} - \frac{1}{2} \left(\alpha - \sqrt{\alpha^2 + C} \right)$$

e

$$-\frac{1}{2} \left(\beta + \sqrt{\beta^2 + C} \right) \leq \operatorname{Im}(s_{n,k}) \leq -\frac{1}{2} \left(\beta - \sqrt{\beta^2 + C} \right),$$

onde C, α e β são tais que

$$\hat{\lambda}_{n,n-1} = \alpha + i\beta \quad e \quad C = \sum_{k=2}^n |c_k|^2,$$

com

$$c_2 = \frac{\hat{\lambda}_{n,n-2}}{\sqrt{\alpha_n}}, \quad c_3 = \frac{\hat{\lambda}_{n,n-3}}{\sqrt{\alpha_n} \sqrt{\alpha_{n-1}}}, \dots, \quad c_n = \frac{\hat{\lambda}_{n,0}}{\sqrt{\alpha_n} \sqrt{\alpha_{n-1}} \dots \sqrt{\alpha_2}}.$$

As constantes α_k são os coeficientes da relação de recorrência de três termos (2.5) para os polinômios ortogonais mônicos.

6.3 Ortogonalidade dos polinômios S_n

Considerando os zeros de S_n e S_{n-1} reais, simples e que se entrelaçam, pelo Teorema de Wendroff (Teorema 2.3), S_n e S_{n-1} pertencem a uma sequência de polinômios ortogonais. Dessa afirmação surge a pergunta: para quais valores de a_n os polinômios S_n , para $n \geq 1$, formam uma sequência de polinômios ortogonais? Obtivemos a resposta para essa pergunta e formulamos o teorema a seguir. Lembremos que a_n são os coeficientes da relação (6.1).

Teorema 6.10. *Se*

$$a_{j-1} \sqrt{\alpha_{j+2}} - a_j \gamma_{j+1} = 0, \quad \text{para } j \geq 1, \quad (6.6)$$

então $\{S_n\}_{n \geq 0}$ é uma sequência de polinômios ortogonais.

Demonstração: Se $a_{j-1} \sqrt{\alpha_{j+2}} - a_j \gamma_{j+1} = 0$ para $j \geq 1$, pela relação (6.3), temos

$$\sqrt{\alpha_{n+1}} S_n(x) = [x - (\beta_n + a_{n-1} \sqrt{\alpha_{n+1}} - a_{n-2} \sqrt{\alpha_n})] S_{n-1}(x) - \gamma_n S_{n-2}(x),$$

com $S_0(x) = 1$ e $\sqrt{\alpha_2}S_1(x) = (x - \beta_1 - a_0\sqrt{\alpha_2})S_0(x)$. Assim, os polinômios S_n satisfazem a uma relação de recorrência de três termos, com $\beta_n + a_{n-1}\sqrt{\alpha_{n+1}} - a_{n-2}\sqrt{\alpha_n} \in \mathbb{R}$ e $\gamma_n > 0$, como demonstramos no Teorema 6.1. Logo, pelo Teorema de Favard (Teorema 2.1), $\{S_n\}_{n \geq 0}$ é uma sequência de polinômios ortogonais. ■

A segunda questão que surge é a seguinte: se $\{S_n\}$ é uma sequência de polinômios ortogonais, como é a medida com relação à qual ela é ortogonal? A seguir responderemos essa pergunta para o caso particular em que p_n são os polinômios ortonormais de Chebyshev.

6.3.1 Aplicação para os polinômios ortonormais de Chebyshev

Seja

$$p_n(x) = S_n(x) + a_{n-1}S_{n-1}(x), \quad n \geq 1.$$

Para encontrar a medida na qual S_n é ortogonal, vamos considerar o caso particular $p_n = u_n$, ou seja, quando os polinômios p_n são os polinômios ortonormais de Chebyshev de segunda espécie. Aqui vamos considerar os polinômios de Chebyshev ortonormais com relação à função peso

$$w(x) = \frac{2}{\pi} \sqrt{1-x^2}.$$

A relação de recorrência de três termos para u_n é dada por

$$u_n(x) = 2xu_{n-1}(x) - u_{n-2}(x), \quad n \geq 2,$$

com $u_0(x) = 1$ e $u_1(x) = 2x$. Observe que para esses polinômios temos

$$\sqrt{\alpha_{n+1}} = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \beta_n = 0, \quad n \geq 1.$$

Assim, a condição (6.6) torna-se

$$\frac{1}{2} a_{j-1} - a_j \left[a_{j-1} \left(-\frac{1}{2} a_{j-1} + \frac{1}{2} a_{j-2} \right) + \frac{1}{2} \right] = 0,$$

que é equivalente a

$$a_j = \frac{a_{j-1}}{a_{j-1}(a_{j-2} - a_{j-1}) + 1}, \quad j \geq 2, \tag{6.7}$$

com $a_1 = \frac{a_0}{1 - a_0^2}$.

Para encontrar a medida com relação à qual S_n é ortogonal, usaremos os Teoremas 2.4 e 2.5, ou seja, encontraremos a medida através dos limites dos determinantes de Turán. Para isso, precisamos de alguns resultados preliminares.

Lema 6.4. *Seja $\{a_n\}_{n \geq 0}$ uma sequência de coeficientes que satisfazem à relação (6.7).*

Então,

$$a_{2m} = a_0 \frac{Q_m(a_0^2)}{R_m(a_0^2)} \quad e \quad a_{2m+1} = a_0 \frac{R_m(a_0^2)}{Q_{m+1}(a_0^2)}, \quad m \geq 0, \quad (6.8)$$

onde

$$Q_{m+1}(a_0^2) = -a_0^2 Q_m(a_0^2) + R_m(a_0^2), \quad (6.9)$$

$$R_{m+1}(a_0^2) = -a_0^2 Q_m(a_0^2) + (1 - a_0^2) R_m(a_0^2). \quad (6.10)$$

Em particular, se $a_0 = 0$, então $S_n(x) = u_n(x)$, $n \geq 1$.

Demonstração: Substituindo a_1 na relação (6.7) para $j = 2$, obtemos

$$a_2 = a_0 \frac{1 - a_0^2}{1 - 2a_0^2}.$$

Substituindo a_2 em (6.7) para $j = 3$ e repetindo esse raciocínio para $j = 4, 5, \dots$, obtemos os valores de a_k , $k \geq 3$, dados a seguir

$$\begin{aligned} a_3 &= a_0 \frac{1 - 2a_0^2}{1 - 3a_0^2 + a_0^4}, \\ a_4 &= a_0 \frac{1 - 3a_0^2 + a_0^4}{1 - 4a_0^2 + 3a_0^4}, \\ a_5 &= a_0 \frac{1 - 4a_0^2 + 3a_0^4}{1 - 5a_0^2 + 6a_0^4 - a_0^6}, \\ a_6 &= a_0 \frac{1 - 5a_0^2 + 6a_0^4 - a_0^6}{1 - 6a_0^2 + 10a_0^4 - 4a_0^6}, \\ a_7 &= a_0 \frac{1 - 6a_0^2 + 10a_0^4 - 4a_0^6}{1 - 7a_0^2 + 15a_0^4 - 10a_0^6 + a_0^8}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Observe que podemos escrever

$$a_{2m} = a_0 \frac{Q_m(a_0^2)}{R_m(a_0^2)} \quad e \quad a_{2m+1} = a_0 \frac{R_m(a_0^2)}{Q_{m+1}(a_0^2)}, \quad m \geq 0, \quad (6.11)$$

onde Q_m e R_m são polinômios de grau exatamente m para $m \geq 0$, com $Q_0 = R_0 = 1$. Essas fórmulas explícitas para a_{2m} e a_{2m+1} podem ser estabelecidas usando-se o princípio de indução finita. Consideremos, primeiramente, o caso não trivial $a_0 \neq 0$.

Fazendo $j = 2m$ na equação (6.7) e usando (6.8), obtemos

$$a_0 \frac{Q_m(a_0^2)}{R_m(a_0^2)} = \frac{a_0 \frac{R_{m-1}(a_0^2)}{Q_m(a_0^2)}}{a_0 \frac{R_{m-1}(a_0^2)}{Q_m(a_0^2)} \left(a_0 \frac{Q_{m-1}(a_0^2)}{R_{m-1}(a_0^2)} - a_0 \frac{R_{m-1}(a_0^2)}{Q_m(a_0^2)} \right) + 1},$$

que pode ser escrito da seguinte forma:

$$Q_m(a_0^2) (Q_m(a_0^2) + a_0^2 Q_{m-1}(a_0^2)) = R_{m-1}(a_0^2) (R_m(a_0^2) + a_0^2 R_{m-1}(a_0^2)). \quad (6.12)$$

Procedendo da mesma forma para $j = 2m + 1$, obtemos

$$Q_m(a_0^2) (Q_{m+1}(a_0^2) + a_0^2 Q_m(a_0^2)) = R_m(a_0^2) (R_m(a_0^2) + a_0^2 R_{m-1}(a_0^2)). \quad (6.13)$$

Substituindo (6.12) em (6.13), temos

$$\begin{aligned} Q_{m+1}(a_0^2) + a_0^2 Q_m(a_0^2) &= \frac{R_m(a_0^2)}{R_{m-1}(a_0^2)} (Q_m(a_0^2) + a_0^2 Q_{m-1}(a_0^2)) \\ &= \frac{R_m(a_0^2)}{R_{m-1}(a_0^2)} \frac{R_{m-1}(a_0^2)}{R_{m-2}(a_0^2)} (Q_{m-1}(a_0^2) + a_0^2 Q_{m-2}(a_0^2)) \\ &= \frac{R_m(a_0^2)}{R_{m-1}(a_0^2)} \frac{R_{m-1}(a_0^2)}{R_{m-2}(a_0^2)} \frac{R_{m-2}(a_0^2)}{R_{m-3}(a_0^2)} (Q_{m-2}(a_0^2) + a_0^2 Q_{m-3}(a_0^2)) \\ &\quad \vdots \\ &= \frac{R_m(a_0^2)}{R_0(a_0^2)} (Q_1(a_0^2) + a_0^2 Q_0(a_0^2)) \\ &= R_m(a_0^2), \end{aligned}$$

pois $Q_1(a_0^2) + a_0^2 Q_0(a_0^2) = (1 - a_0^2) + a_0^2 = 1$. Logo,

$$Q_{m+1}(a_0^2) = -a_0^2 Q_m(a_0^2) + R_m(a_0^2).$$

Da mesma forma, encontramos a relação

$$R_{m+1}(a_0^2) = -a_0^2 Q_m(a_0^2) + (1 - a_0^2) R_m(a_0^2).$$

Note que as igualdades em (6.8) implicam que se $a_0 = 0$, então $a_n = 0$, para $n \geq 1$. Logo, da relação

$$u_n(x) = S_n(x) + a_{n-1} S_{n-1}(x), \quad n \geq 1,$$

obtemos $S_n(x) = u_n(x)$ para $n \geq 0$. Em outras palavras, se $a_0 = 0$, então os polinômios S_n são ortogonais com relação à função peso de Chebyshev de segunda espécie. ■

Lema 6.5. *Seja $\{a_n\}_{n \geq 0}$ uma sequência de coeficientes que satisfazem à relação (6.7).*

Então,

$$a_{2m} = a_0 \frac{(1 + d_0)(1 - 2a_0^2 + d_0)^m - (1 - d_0)(1 - 2a_0^2 - d_0)^m}{(1 - 2a_0^2 + d_0)^{m+1} - (1 - 2a_0^2 - d_0)^{m+1}}, \quad (6.14)$$

$$a_{2m+1} = \frac{2a_0 [(1 - 2a_0^2 + d_0)^{m+1} - (1 - 2a_0^2 - d_0)^{m+1}]}{(1 + d_0)(1 - 2a_0^2 + d_0)^{m+1} - (1 - d_0)(1 - 2a_0^2 - d_0)^{m+1}}, \quad (6.15)$$

com $d_0 = \sqrt{1 - 4a_0^2}$.

Demonstração: Note que as relações (6.9) e (6.10) formam um sistema de equações de diferenças. Para encontrarmos a forma explícita para R_m e Q_m , encontremos a solução desse sistema. Usaremos o método descrito na Seção 3.4. Fazendo $y_m^{(1)} = Q_m(a_0^2)$ e $y_m^{(2)} = R_m(a_0^2)$, obtemos o seguinte sistema na forma matricial

$$\begin{pmatrix} y_{m+1}^{(1)} \\ y_{m+1}^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_0^2 & 1 \\ -a_0^2 & 1 - a_0^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_m^{(1)} \\ y_m^{(2)} \end{pmatrix}.$$

Denotando $Y_m = (y_m^{(1)} \ y_m^{(2)})^t$, na Seção 3.4.2 vimos que a solução desse sistema será

$$Y_m = A^m Y_0,$$

onde

$$Y_0 = \begin{pmatrix} Q_0(a_0) \\ R_0(a_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{pmatrix} -a_0^2 & 1 \\ -a_0^2 & 1 - a_0^2 \end{pmatrix}.$$

Os autovalores de A são

$$\lambda_1 = \frac{1 - 2a_0^2 - d_0}{2} \quad \text{e} \quad \lambda_2 = \frac{1 - 2a_0^2 + d_0}{2}.$$

Pelo algoritmo de Putzer,

$$A^m = u_1(m)I + u_2(m)(A - \lambda_1 I),$$

com

$$u_1(m) = \lambda_1^m \quad \text{e} \quad u_2(m) = \sum_{i=0}^{m-1} \lambda_2^{m-1-i} \lambda_1^i = \frac{\lambda_1^m - \lambda_2^m}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

Logo, encontramos

$$A^m = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

com

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{(d_0 - 1)(1 - 2a_0^2 + d_0)^m + (1 + d_0)(1 - 2a_0^2 - d_0)^m}{2^{m+1}d_0}, \\ a_{12} &= \frac{(1 - 2a_0^2 + d_0)^m - (1 - 2a_0^2 - d_0)^m}{2^m d_0}, \\ a_{21} &= -a_0^2 \frac{(1 - 2a_0^2 + d_0)^m - (1 - 2a_0^2 - d_0)^m}{2^m d_0}, \\ a_{22} &= \frac{(d_0 + 1)(1 - 2a_0^2 + d_0)^m - (d_0 - 1)(1 - 2a_0^2 - d_0)^m}{2^{m+1}d_0}. \end{aligned}$$

Assim, temos a solução

$$Q_m(a_0^2) = \frac{(1 + d_0)(1 - 2a_0^2 + d_0)^m - (1 - d_0)(1 - 2a_0^2 - d_0)^m}{2^{m+1}d_0}$$

e

$$R_m(a_0^2) = \frac{(1 - 2a_0^2 + d_0)^{m+1} - (1 - 2a_0^2 - d_0)^{m+1}}{2^{m+1}d_0}.$$

(6.16)

Dessa maneira,

$$a_{2m} = a_0 \frac{Q_m(a_0^2)}{R_m(a_0^2)} = a_0 \frac{(1 + d_0)(1 - 2a_0^2 + d_0)^m - (1 - d_0)(1 - 2a_0^2 - d_0)^m}{(1 - 2a_0^2 + d_0)^{m+1} - (1 - 2a_0^2 - d_0)^{m+1}}$$

e

$$a_{2m+1} = a_0 \frac{R_m(a_0^2)}{Q_{m+1}(a_0^2)} = 2a_0 \frac{(1 - 2a_0^2 + d_0)^{m+1} - (1 - 2a_0^2 - d_0)^{m+1}}{(1 + d_0)(1 - 2a_0^2 + d_0)^{m+1} - (1 - d_0)(1 - 2a_0^2 - d_0)^{m+1}}.$$

■

Para gerarmos valores de a_n reais, escolhemos $1 - 4a_0^2 > 0$, o que implica em $|a_0| < 1/2$. Logo, $1 - 2a_0^2 > 1/2$ e, portanto, $1 - 2a_0^2 + d_0 > 0$. Assim, como

$$\frac{1 - 2a_0^2 - d_0}{1 - 2a_0^2 + d_0} < 1,$$

obtemos

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{1 - 2a_0^2 - d_0}{1 - 2a_0^2 + d_0} \right)^m = 0.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} a_{2m} &= a_0 \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1 + d_0 - (1 - d_0) \left(\frac{1 - 2a_0^2 - d_0}{1 - 2a_0^2 + d_0} \right)^m}{1 - 2a_0^2 + d_0 - (1 - 2a_0^2 - d_0) \left(\frac{1 - 2a_0^2 - d_0}{1 - 2a_0^2 + d_0} \right)^m} \\ &= \frac{a_0(1 + d_0)}{1 - 2a_0^2 + d_0} = \frac{1 - d_0}{2a_0}. \end{aligned}$$

De forma análoga, mostramos que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} a_{2m+1} = \frac{1 - d_0}{2a_0}.$$

Podemos, então, enunciar o seguinte resultado.

Lema 6.6. *Para*

$$|a_0| < \frac{1}{2},$$

com $a_0 \neq 0$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1 - d_0}{2a_0}. \quad (6.17)$$

Para encontrarmos a medida com relação à qual S_n é ortogonal, precisamos transformar os polinômios ortogonais S_n em polinômios ortonormais. Das relações (6.1) e (6.3), podemos dizer que os polinômios S_n satisfazem à igualdade

$$S_n(x) + a_{n-1}S_{n-1}(x) = u_n(x) \quad n \geq 1, \quad (6.18)$$

com $S_0(x) = 1$ e $S_1(x) = 2x - a_0$ e à seguinte relação de recorrência de três termos

$$\frac{1}{2}S_n(x) = \left[x - \frac{a_{n-1} - a_{n-2}}{2} \right] S_{n-1}(x) - \frac{a_{n-2}(a_{n-3} - a_{n-2}) + 1}{2} S_{n-2}(x). \quad (6.19)$$

Comparando essa relação com a relação (2.9), temos

$$\zeta_n^S = \frac{1}{2}, \quad \beta_n^S = \frac{a_{n-1} - a_{n-2}}{2} \quad \text{e} \quad \alpha_n^S = \frac{a_{n-2}(a_{n-3} - a_{n-2}) + 1}{2}, \quad n \geq 1.$$

Assim, usando (2.11), obtemos os coeficientes da relação de recorrência de três termos para os polinômios ortonormais s_n que são dados por

$$\delta_n^s = \sqrt{\zeta_n^S \alpha_n^S} = \frac{\sqrt{a_{n-2}(a_{n-3} - a_{n-2}) + 1}}{2} \quad \text{e} \quad \beta_n^s = \beta_n^S = \frac{a_{n-1} - a_{n-2}}{2}. \quad (6.20)$$

Pela relação (2.10), obtemos

$$s_n(x) = \left(\prod_{k=0}^{n-1} [a_k(a_{k-1} - a_k) + 1] \right)^{-1/2} S_n(x),$$

com $s_0(x) = 1$ e $a_{-1} = 0$.

Logo, de (6.18) e definindo

$$\pi_n := \left(\prod_{k=0}^{n-1} [a_k(a_{k-1} - a_k) + 1] \right)^{1/2},$$

obtemos

$$\pi_n s_n(x) + a_{n-1} \pi_{n-1} s_{n-1}(x) = u_n(x). \quad (6.21)$$

Lema 6.7. *Para*

$$|a_0| < \frac{1}{2},$$

com $a_0 \neq 0$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \pi_n = \frac{\sqrt{2a_0}}{\sqrt{1 - d_0}}. \quad (6.22)$$

Demonstração: Utilizando a relação recursiva para a_n dada em (6.7), chegamos em

$$\begin{aligned} \prod_{k=0}^{n-1} [a_k(a_{k-1} - a_k) + 1] &= (1 - a_0^2) [a_1(a_0 - a_1) + 1] [a_2(a_1 - a_2) + 1] [a_3(a_2 - a_3) + 1] \\ &\quad \times \dots \times [a_{n-2}(a_{n-3} - a_{n-2}) + 1] [a_{n-1}(a_{n-2} - a_{n-1}) + 1] \\ &= \frac{a_0}{a_1} \frac{a_1}{a_2} \frac{a_2}{a_3} \frac{a_3}{a_4} \dots \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}} \frac{a_{n-1}}{a_n} \\ &= \frac{a_0}{a_n}. \end{aligned}$$

Logo, do Lema 6.6, obtemos o resultado desejado. \blacksquare

Lema 6.8. Para

$$|a_0| < \frac{1}{2},$$

com $a_0 \neq 0$, os coeficientes δ_n^s e β_n^s da relação de recorrência de três termos para os polinômios ortonormais s_n satisfazem às condições de Nevai, isto é,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n^s = \frac{1}{2} \quad e \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n^s = 0.$$

Além disso, são de variação limitada, ou seja,

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\delta_{n+2}^s - \delta_{n+3}^s| + |\beta_{n+1}^s - \beta_{n+2}^s| < \infty. \quad (6.23)$$

Demonstração: Como os coeficientes δ_n^s e β_n^s são dados por (6.20), usando o Lema 6.6, concluímos que eles satisfazem às condições de Nevai.

Por outro lado, vamos decompor a série dada em (6.23) em quatro séries, ou seja, vamos reescrevê-la como

$$\sum_{m=0}^{\infty} |\delta_{2m+2}^s - \delta_{2m+3}^s| + \sum_{m=0}^{\infty} |\delta_{2m+3}^s - \delta_{2m+4}^s| + \sum_{m=0}^{\infty} |\beta_{2m+1}^s - \beta_{2m+2}^s| + \sum_{m=0}^{\infty} |\beta_{2m+2}^s - \beta_{2m+3}^s|$$

e mostrar que cada uma dessas séries é convergente. Vamos começar com a primeira parcela da soma anterior, ou seja, mostremos que

$$\sum_{m=0}^{\infty} |\delta_{2m+2}^s - \delta_{2m+3}^s| < \infty.$$

Sejam

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{1 - 2a_0^2 - d_0}{2}, \quad z_2 = \frac{1 - 2a_0^2 + d_0}{2}, \\ A &= \frac{1}{d_0}, \quad B = \frac{1 + d_0}{2d_0} \quad e \quad C = \frac{1 - d_0}{2d_0}. \end{aligned}$$

Logo, $Q_n(a_0^2)$ e $R_n(a_0^2)$, dados pelas expressões em (6.16), podem ser escritos da seguinte forma:

$$Q_n(a_0^2) = Bz_2^n - Cz_1^n \quad \text{e} \quad R_n(a_0^2) = A(z_2^{n+1} - z_1^{n+1}).$$

Por (6.20) e (6.7), obtemos

$$\delta_n^s = \frac{\sqrt{a_{n-2}(a_{n-3} - a_{n-2}) + 1}}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a_{n-2}}{a_{n-1}}}$$

e, como, por (6.8),

$$a_{2m} = a_0 \frac{Q_m(a_0^2)}{R_m(a_0^2)} \quad \text{e} \quad a_{2m+1} = a_0 \frac{R_m(a_0^2)}{Q_{m+1}(a_0^2)},$$

segue que

$$\begin{aligned} & \left| \delta_{2m+2}^s - \delta_{2m+3}^s \right| \\ &= \frac{1}{2} \left| \sqrt{\frac{a_{2m}}{a_{2m+1}}} - \sqrt{\frac{a_{2m+1}}{a_{2m+2}}} \right| \\ &= \left| \frac{\sqrt{Q_m(a_0^2)Q_{m+1}(a_0^2)}}{R_m(a_0^2)} - \frac{\sqrt{R_m(a_0^2)R_{m+1}(a_0^2)}}{Q_{m+1}(a_0^2)} \right| \tag{6.24} \\ &= \left| \frac{B}{\sqrt{z_2}A} \frac{\sqrt{1 - \frac{C}{B} \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^m} \sqrt{1 - \frac{C}{B} \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{m+1}}}{1 - \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{m+1}} - \frac{\sqrt{z_2}A}{B} \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{m+1}} \sqrt{1 - \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{m+2}}}{1 - \frac{C}{B} \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{m+1}} \right|. \end{aligned}$$

Note que

$$\frac{B}{\sqrt{z_2}A} = \frac{\sqrt{z_2}A}{B} = 1. \tag{6.25}$$

Além disso,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1 - 2a_0^2 - d_0}{1 - 2a_0^2 + d_0} = \frac{(1 - 2a_0^2 - d_0)^2}{4a_0^4}$$

e

$$\frac{C}{B} = \frac{1 - d_0}{1 + d_0} = \frac{(1 - 2a_0^2 - d_0)}{2a_0^2},$$

ou seja,

$$\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{C}{B} \right)^2.$$

Vamos denotar

$$k = \frac{C}{B}.$$

Assim, de (6.24),

$$\begin{aligned} |\delta_{2m+2}^s - \delta_{2m+3}^s| &= \frac{1}{2} \left| \frac{\sqrt{(1-k^{2m+1})(1-k^{2m+3})}}{1-k^{2m+2}} - \frac{\sqrt{(1-k^{2m+2})(1-k^{2m+4})}}{1-k^{2m+3}} \right| \\ &= \frac{1}{2} \left| \frac{k^{2m+1}(1-k)^3(1-k^{4m+5})}{(1-k^{2m+2})^2(1-k^{2m+3})^2} \right| \\ &\quad \times \left| \frac{\sqrt{(1-k^{2m+1})(1-k^{2m+3})}}{1-k^{2m+2}} + \frac{\sqrt{(1-k^{2m+2})(1-k^{2m+4})}}{1-k^{2m+3}} \right|^{-1}. \end{aligned}$$

Como $|a_0| < 1/2$, então $0 < k < 1$ e

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{|\delta_{2m+4}^s - \delta_{2m+5}^s|}{|\delta_{2m+2}^s - \delta_{2m+3}^s|} = k^2.$$

Logo, pelo teste da razão para séries, segue que

$$\sum_{m=0}^{\infty} |\delta_{2m+2}^s - \delta_{2m+3}^s| < \infty.$$

De modo análogo, mostramos que a série

$$\sum_{m=0}^{\infty} |\delta_{2m+3}^s - \delta_{2m+4}^s|$$

é convergente.

Vamos provar, agora, que

$$\sum_{m=0}^{\infty} |\beta_{2m+1}^s - \beta_{2m+2}^s| < \infty.$$

Das relações (6.20) e (6.8), e usando a notação adotada nesta demonstração, obtemos

$$\begin{aligned} |\beta_{2m+1}^s - \beta_{2m+2}^s| &= \frac{1}{2} |a_{2m+1} - 2a_{2m} + a_{2m-1}| \\ &= \frac{|a_0|}{2} \left| \frac{R_m(a_0^2)}{Q_{m+1}(a_0^2)} - 2 \frac{Q_m(a_0^2)}{R_m(a_0^2)} + \frac{R_{m-1}(a_0^2)}{Q_m(a_0^2)} \right| \\ &= \frac{|a_0|}{2} \left| \frac{A(1-k^{2m+2})}{B(1-k^{2m+3})} - 2 \frac{B(1-k^{2m+1})}{z_2 A(1-k^{2m+2})} + \frac{A(1-k^{2m})}{B(1-k^{2m+1})} \right|. \end{aligned}$$

Como, de (6.25),

$$\frac{B}{\sqrt{z_2}A} = \frac{\sqrt{z_2}A}{B} \implies \frac{B}{z_2 A} = \frac{A}{B},$$

segue que

$$|\beta_{2m+1}^s - \beta_{2m+2}^s| = \frac{|a_0|A}{2B} \left| \frac{k^{2m}(1-k)^3(1+k^{2m+2})}{(1-k^{2m+1})(1-k^{2m+2})(1-k^{2m+3})} \right|.$$

Assim,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\beta_{2m+3}^s - \beta_{2m+4}^s|}{|\beta_{2m+1}^s - \beta_{2m+2}^s|} = k^2 < 1.$$

Logo, novamente pelo teste da razão, provamos que a série

$$\sum_{m=0}^{\infty} |\beta_{2m+1}^s - \beta_{2m+2}^s|$$

é convergente. Seguindo o mesmo raciocínio, mostramos que

$$\sum_{m=0}^{\infty} |\beta_{2m+2}^s - \beta_{2m+3}^s| < \infty.$$

Portanto, os coeficientes δ_n^s e β_n^s são de variação limitada. ■

Lema 6.9. *Considere os polinômios ortonormais de Chebyshev de segunda espécie, normalizados por*

$$\mu_0 = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx = 1. \quad (6.26)$$

Então, os determinantes de Turán para esses polinômios são sempre iguais a um, ou seja,

$$u_n^2(x) - u_{n+1}(x)u_{n-1}(x) \equiv 1, \quad n \geq 0.$$

Demonstração: Os polinômios de Chebyshev de segunda espécie normalizados por (6.26) são ortonormais no intervalo $(-1, 1)$ com relação à função peso

$$\frac{2}{\pi} \sqrt{1-x^2}$$

e são dados explicitamente, como vimos no Exemplo 3.5, por

$$u_n(x) = \frac{\sin[(n+1)\theta]}{\sin \theta}, \quad x = \cos \theta.$$

Assim,

$$\begin{aligned} u_n^2(x) - u_{n+1}(x)u_{n-1}(x) &= \frac{\sin^2[(n+1)\theta] - \sin[n\theta] \sin[(n+2)\theta]}{\sin^2 \theta} \\ &= \frac{\sin^2[(n+1)\theta] (1 - \cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + \sin^2 \theta}{\sin^2 \theta} \\ &= 1. \end{aligned}$$

■

Usando os resultados da Seção 2.1.1 e os obtidos até agora nesta seção, podemos encontrar não só a medida $d\phi$, mas a função peso com relação à qual os polinômios correspondentes s_n são ortonormais.

Teorema 6.11. *Seja*

$$\pi_n s_n(x) + a_{n-1} \pi_{n-1} s_{n-1}(x) = u_n(x), \quad n \geq 1, \quad (6.27)$$

tal que

$$a_n = \frac{a_{n-1}}{a_{n-1}(a_{n-2} - a_{n-1}) + 1}, \quad n \geq 1,$$

com $a_{-1} = 0$. Denotando por $d\phi$ a medida com relação à qual s_n é ortonormal, se

$$|a_0| < \frac{1}{2},$$

com $a_0 \neq 0$, então $d\phi$ é absolutamente contínua em $(-1, 1)$ e $d\phi(x) = w(x)dx$, com w estritamente positiva e contínua em $(-1, 1)$. Além disso,

$$w(x) = \frac{4a_0}{\pi} \left(x + \frac{1}{2a_0} \right) \sqrt{1 - x^2}.$$

Demonstração: Usando (6.27), obtemos

$$\begin{aligned} u_n^2(x) - u_{n+1}(x)u_{n-1}(x) &= [\pi_n s_n(x) + a_{n-1} \pi_{n-1} s_{n-1}(x)]^2 \\ &\quad - [\pi_{n+1} s_{n+1}(x) + a_n \pi_n s_n(x)] [\pi_{n-1} s_{n-1}(x) + a_{n-2} \pi_{n-2} s_{n-2}(x)]. \end{aligned} \quad (6.28)$$

Fazendo n tender ao infinito em (6.28) e usando os Lemas 6.6 e 6.7, obtemos

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} [u_n^2(x) - u_{n+1}(x)u_{n-1}(x)] &= \frac{2a_0^2}{1 - d_0} \lim_{n \rightarrow \infty} [s_n^2(x) - s_{n+1}(x)s_{n-1}(x)] \\ &\quad + \frac{1 - d_0}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} [s_{n-1}^2(x) - s_n(x)s_{n-2}(x)] + a_0 \lim_{n \rightarrow \infty} [s_n(x)s_{n-1}(x) - s_{n+1}(x)s_{n-2}(x)]. \end{aligned} \quad (6.29)$$

Do Lema 6.8 e do Teorema 2.4, podemos afirmar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [s_n^2(x) - s_{n+1}(x)s_{n-1}(x)] = \frac{2\sqrt{1-x^2}}{\pi w(x)}. \quad (6.30)$$

Os coeficientes da relação de recorrência de três termos dos polinômios de Chebyshev são periódicos, ou seja, satisfazem às relações limites (2.15). Seja

$$d\psi(x) = \frac{2}{\pi} \sqrt{1-x^2} dx,$$

a medida com relação à qual os polinômios de Chebyshev de segunda espécie são ortonormais. Pelo Lema 6.8,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n^s = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n^s = 0.$$

Assim,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\delta_n^s - \delta_n^\psi| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \delta_n^s - \frac{1}{2} \right| = 0$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\beta_n^s - \beta_n^\psi| = \lim_{n \rightarrow \infty} |\beta_n^s| = 0.$$

Além disso, como

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} |\delta_{n+2}^s - \delta_{n+4}^s| + |\beta_{n+1}^s - \beta_{n+3}^s| \\ \leq \sum_{n=0}^{\infty} |\delta_{n+2}^s - \delta_{n+3}^s| + |\delta_{n+3}^s - \delta_{n+4}^s| + |\beta_{n+1}^s - \beta_{n+2}^s| + |\beta_{n+2}^s - \beta_{n+3}^s| < \infty, \end{aligned}$$

valem as hipóteses do Teorema 2.5 para $N = 2$. Ademais, $u_2(x) = 4x^2 - 1$ e $u_0^{(1)}(x) = 1$.

Então,

$$T(x) = \frac{1}{2} \left(q_2^\psi(x) - \frac{\delta_3^\psi}{\delta_4^\psi} q_0^{(1)}(x) \right) = \frac{1}{2} \left(u_2(x) - u_0^{(1)}(x) \right) = 2x^2 - 1.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} [s_n(x)s_{n-1}(x) - s_{n+1}(x)s_{n-2}(x)] &= \frac{2 \sqrt{1 - T^2(x)}}{\pi w(x)} \text{sinal}[T'(x)] \\ &= \frac{4|x| \sqrt{1 - x^2}}{\pi w(x) |x|}. \end{aligned} \quad (6.31)$$

Assim, utilizando o Lema 6.9 e as igualdades (6.29), (6.30) e (6.31), obtemos

$$\begin{aligned} 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} [u_n^2(x) - u_{n+1}(x)u_{n-1}(x)] &= \frac{2a_0^2}{1 - d_0} \frac{2 \sqrt{1 - x^2}}{\pi w(x)} + \frac{1 - d_0}{2} \frac{2 \sqrt{1 - x^2}}{\pi w(x)} \\ &\quad + a_0 \frac{4x \sqrt{1 - x^2}}{\pi w(x)} \\ &= \frac{4 \sqrt{1 - x^2}}{\pi w(x)} a_0 \left(x + \frac{1}{2a_0} \right). \end{aligned}$$

Portanto, obtemos o resultado desejado, ou seja,

$$w(x) = \frac{4a_0}{\pi} \left(x + \frac{1}{2a_0} \right) \sqrt{1 - x^2}.$$

Observe que $w(x) \geq 0$, mas não identicamente nula em $(-1, 1)$ se, e somente se, $|a_0| < \frac{1}{2}$. ■

Do último teorema, concluimos que $d\phi$ é absolutamente contínua no intervalo $(-1, 1)$ e, além disso,

$$d\phi(x) = \frac{4a_0}{\pi} \left(x + \frac{1}{2a_0} \right) \sqrt{1 - x^2} dx,$$

em $(-1, 1)$. Resta saber como se comporta essa medida fora desse intervalo.

Motivados pela expressão obtida para $d\phi$, mostraremos que os polinômios s_n são os polinômios núcleo de Chebyshev de segunda espécie e, portanto, são ortonormais no intervalo $(-1, 1)$ com relação à função peso

$$w(x) = \frac{4a_0}{\pi} \left(x + \frac{1}{2a_0} \right) \sqrt{1 - x^2}.$$

Usando a forma explícita para os polinômios de Chebyshev de segunda espécie dada no Exemplo 3.5,

$$u_n(x) = \frac{(x + \sqrt{x^2 - 1})^{n+1} - (x - \sqrt{x^2 - 1})^{n+1}}{2\sqrt{x^2 - 1}},$$

e comparando com as expressões (6.14) e (6.15), obtemos o seguinte resultado:

Lema 6.10. *Os coeficientes a_n são dados por*

$$a_n = -\frac{u_n\left(-\frac{1}{2a_0}\right)}{u_{n+1}\left(-\frac{1}{2a_0}\right)}. \quad (6.32)$$

Do Lema 6.3, os polinômios S_n podem ser dados por

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n \lambda_{n,k} u_k(x),$$

com $\lambda_{n,k} = (-1)^{n+k} a_{n-1} a_{n-2} \dots a_{k+1} a_k$ para $k = 0, 1, \dots, n-1$ e $\lambda_{n,n} = 1$. Assim, diretamente da expressão (6.32) segue o seguinte lema:

Lema 6.11. *Os polinômios S_n podem ser expressos por*

$$S_n(x) = \frac{K_n\left(x, -\frac{1}{2a_0}\right)}{u_n\left(-\frac{1}{2a_0}\right)},$$

onde $K_n(x, y)$ é o polinômio núcleo dos polinômios de Chebyshev de segunda espécie, ou seja,

$$K_n(x, y) = \sum_{k=0}^n u_k(x) u_k(y).$$

Teorema 6.12. *Os polinômios S_n são ortogonais com relação à função peso*

$$w(x) = \frac{4a_0}{\pi} \left(x + \frac{1}{2a_0} \right) \sqrt{1 - x^2}$$

no intervalo $(-1, 1)$.

Demonstração: Sabemos que os polinômios núcleo satisfazem à seguinte propriedade:

$$\int_{-1}^1 K_n(x, y) Q(x) \frac{2}{\pi} \sqrt{1-x^2} dx = Q(y),$$

onde Q é um polinômio arbitrário de grau até n . Por outro lado, se $0 \leq k \leq n-1$ e Π_k um polinômio de grau k , então

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 S_n(x) \Pi_k(x) \frac{4a_0}{\pi} \left(x + \frac{1}{2a_0}\right) \sqrt{1-x^2} dx = \\ \frac{2a_0}{u_n(-1/(2a_0))} \int_{-1}^1 K_n(x, -1/(2a_0)) \Pi_k(x) \left(x + \frac{1}{2a_0}\right) \frac{2}{\pi} \sqrt{1-x^2} dx = 0, \end{aligned}$$

para $k = 0, 1, \dots, n-1$, já que

$$\Pi_k(x) \left(x + \frac{1}{2a_0}\right)$$

é um polinômio de grau no máximo n . ■

Zeros de S_n

A seguir fornecemos resultados que obtivemos sobre o entrelaçamento e o comportamento monótono dos zeros de S_n com relação ao parâmetro a_0 .

Teorema 6.13. *Sejam $u_{n,k}$ e $s_{n,k}$ os zeros de u_n e S_n , respectivamente. Então,*

i) se $0 < a_0 < 1/2$,

$$u_{n,1} < s_{n,1} < u_{n,2} < s_{n,2} < \dots < u_{n,n} < s_{n,n};$$

ii) se $-1/2 < a_0 < 0$,

$$s_{n,1} < u_{n,1} < s_{n,2} < u_{n,2} < \dots < s_{n,n} < u_{n,n};$$

iii) se $a_0 = 0$,

$$s_{n,k} = u_{n,k}, \quad n = 1, 2, \dots, n.$$

Demonstração: Os polinômios núcleo podem ser expressos por

$$K_n(x, y) = 2 \frac{u_{n+1}(x)u_n(y) - u_n(x)u_{n+1}(y)}{x - y}.$$

Então, do Lema 6.11, temos

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \frac{K_n(x, -1/(2a_0))}{u_n(-1/(2a_0))} \\ &= 2 \frac{u_{n+1}(x)u_n(-1/(2a_0)) - u_n(x)u_{n+1}(-1/(2a_0))}{(x + 1/(2a_0))u_n(-1/(2a_0))}. \end{aligned}$$

Avaliando a igualdade acima nos zeros de u_n , obtemos

$$S_n(u_{n,k}) = 2 \frac{u_{n+1}(u_{n,k})}{(u_{n,k} + 1/(2a_0))}.$$

Consideremos, primeiramente, $0 < a_0 < 1/2$. Como

$$u_{n,k} + \frac{1}{2a_0} > 0,$$

segue que

$$\text{signal}[S_n(u_{n,k})] = \text{signal}[u_{n+1}(u_{n,k})].$$

Dado que os zeros de u_n e u_{n+1} se entrelaçam, u_{n+1} muda de sinal nos zeros consecutivos de u_n , então o mesmo acontece com S_n . Em outras palavras, concluímos que existe um zero de S_n nos $n - 1$ intervalos da forma $(u_{n,k}, u_{n,k+1})$. Além disso, como o coeficiente do termo de maior grau de u_n é 2^n , que é positivo, temos

$$\text{signal}[S_n(u_{n,n})] = \text{signal}[u_{n+1}(u_{n,n})] < 0.$$

Já que S_n também possui o coeficiente do termo de maior grau positivo, concluímos que

$$u_{n,1} < s_{n,1} < u_{n,2} < s_{n,2} < \dots < u_{n,n} < s_{n,n}.$$

A demonstração das desigualdades afirmadas no item *ii*) segue de forma análoga.

Vimos, no Lema 6.4, que se $a_0 = 0$, então $S_n(x) = u_n(x)$. Logo, $s_{n,k} = u_{n,k}$, $k = 1, 2, \dots, n$. ■

Teorema 6.14. *Os zeros de S_n são funções crescentes de a_0 .*

Demonstração: Note que a função peso dos polinômios S_n

$$w(x) = w(x, a_0) = \left(\frac{4a_0}{\pi} x + \frac{2}{\pi} \right) \sqrt{1 - x^2}$$

depende do parâmetro a_0 . Vamos utilizar o Teorema de Markoff (Teorema 2.2), para mostrar o comportamento monótono dos zeros de S_n . As hipóteses do teorema são satisfeitas, pois

$$\frac{\partial w(x, a_0)}{\partial a_0} = \frac{4x}{\pi} \sqrt{1 - x^2}$$

é contínua para $-1 \leq x \leq 1$ e para todo a_0 . Além disso,

$$\frac{4}{\pi} \int_a^b x^{k+1} \sqrt{1-x^2} dx,$$

são os momentos dos polinômios de Chebyshev de segunda espécie e são todos finitos.

Assim, calculando a derivada logarítmica de $w(x, a_0)$, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \log[w(x, a_0)]}{\partial a_0} &= \frac{1}{w(x, a_0)} \frac{\partial w(x, a_0)}{\partial a_0} \\ &= \frac{2x}{2a_0x + 1}. \end{aligned}$$

Derivando a expressão acima com relação a x , obtemos $2/(2a_0x + 1)^2$ que é sempre positiva. Portanto $\partial \log[w(x, a_0)]/\partial a_0$ é uma função crescente de x , o que implica que o zero $s_{n,k} = s_{n,k}^{a_0}$ é uma função crescente de a_0 , para $k = 1, 2, \dots, n$. ■

No trabalho de Marcellán e Petronilho [42] encontramos o seguinte resultado.

Sejam $\{P_n\}_{n \geq 0}$ e $\{S_n\}_{n \geq 0}$ duas sequências de polinômios ortogonais mônicos e $\{a_n\}_{n \geq 0}$ uma sequência de parâmetros complexos, tais que essas duas famílias de polinômios são relacionadas por

$$P_1(x) = S_1(x) + a_0$$

e

$$P_{n+1}(x) = S_{n+1}(x) + a_n S_n(x), \quad n \geq 1. \quad (6.33)$$

Sejam $\{\alpha_{n+1}\}_{n \geq 1}$ e $\{\beta_n\}_{n \geq 1}$ os coeficientes da relação de recorrência de três termos de $\{P_n\}_{n \geq 0}$ e $\{\tilde{\alpha}_{n+1}\}_{n \geq 1}$ e $\{\tilde{\beta}_n\}_{n \geq 1}$ os coeficientes da relação de recorrência de três termos de $\{S_n\}_{n \geq 0}$. Então, comparando as relações de recorrência de três termos utilizando a relação (6.33), concluímos que os coeficientes estão relacionados da seguinte forma, para $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}_{n+1} &= \beta_{n+1} + a_n - a_{n-1}, \\ \tilde{\alpha}_{n+1} &= \alpha_{n+1} + a_{n-1}(\beta_{n+1} - \tilde{\beta}_n), \\ a_n \tilde{\alpha}_{n+1} &= a_{n-1} \alpha_{n+2}, \end{aligned}$$

com $a_{-1} = 0$. Através dessas igualdades, Marcellán e Petronilho concluíram que se $\{S_n\}_{n \geq 0}$ é uma sequência de polinômios mônicos, então essa sequência será ortogonal se

- $a_0 = 0$, pois neste caso $a_n = 0$ para $n \geq 1$ e $S_n(x) = P_n(x)$;

- $a_0 \neq 0$ e $a_n = -\alpha_{n+2} \frac{P_n(c)}{P_{n+1}(c)}$, $P_n(c) \neq 0$ para $n \geq 1$, onde $c = \beta_1 - \frac{\alpha_2}{a_0}$.

Além disso, se \mathcal{U} denota o funcional linear tal que $\{P_n\}_{n \geq 0}$ é a correspondente sequência de polinômios ortogonais, então $\{S_n\}_{n \geq 0}$ é ortogonal com relação a \mathcal{V} , que é definido por

$$\mathcal{V} = (x - c)\mathcal{U}.$$

Quando adaptamos esses resultados ao nosso problema, ou seja, considerando $P_n(x) = u_n(x)$, obtemos o mesmo resultado, mas com uma demonstração totalmente diferente e independente, sendo a nossa demonstração uma demonstração analítica enquanto que a dos autores Marcellán e Petronilho é uma demonstração algébrica. Além disso, obtemos não só o funcional linear, mas também a função peso com relação à qual os correspondentes polinômios S_n são ortogonais.

6.4 Localização dos zeros de combinações lineares de polinômios

Sejam $\{p_n\}_{n \geq 0}$ e $\{S_n\}_{n \geq 0}$ duas sequências de polinômios tais que

$$S_{n+1}(x) + a_n S_n(x) = p_{n+1}(x), \quad (6.34)$$

onde $\{a_n\}_{n \geq 0}$ é uma sequência de números reais. O problema considerado agora é encontrar regiões onde se localizam os zeros dos polinômios S_n , sendo $\{p_n\}_{n \geq 0}$ uma sequência de polinômios ortonormais.

Como já mencionado, os polinômios ortonormais possuem muitas propriedades interessantes, sendo uma das mais importantes a relação de recorrência de três termos (2.12), ou seja, eles podem ser obtidos por

$$p_0(x) = 1, \quad \sqrt{\alpha_2} p_1(x) = x - \beta_1,$$

$$\sqrt{\alpha_{n+1}} p_n(x) = (x - \beta_n) p_{n-1}(x) - \sqrt{\alpha_n} p_{n-2}(x), \quad \beta_n \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \alpha_n > 0, \quad \text{para} \quad n \geq 2, \quad (6.35)$$

seus zeros são reais, distintos, estão no intervalo (a, b) , são os autovalores da matriz de

Jacobi dada por

$$J_n = \begin{pmatrix} \beta_1 & \sqrt{\alpha_2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \sqrt{\alpha_2} & \beta_2 & \sqrt{\alpha_3} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\alpha_3} & \beta_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \beta_{n-1} & \sqrt{\alpha_n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \sqrt{\alpha_n} & \beta_n \end{pmatrix} \quad (6.36)$$

e os $n - 1$ zeros dos polinômios p_{n-1} se entrelaçam com os n zeros de p_n .

6.4.1 Localização dos zeros dos polinômios S_n

Transformamos, agora, o problema de encontrar os zeros de S_n em um problema de localizar autovalores de uma matriz e encontramos regiões onde os zeros de S_n estão localizados.

Teorema 6.15. *Os zeros dos polinômios S_n são autovalores da matriz superior de Hessenberg*

$$M_n = \begin{pmatrix} \beta_1 & \sqrt{\alpha_2} & 0 & \cdots & 0 & 0 & (-1)^{n+1}a_0a_1a_2 \cdots a_{n-1}\sqrt{\alpha_{n+1}} \\ \sqrt{\alpha_2} & \beta_2 & \sqrt{\alpha_3} & \cdots & 0 & 0 & (-1)^n a_1a_2a_3 \cdots a_{n-1}\sqrt{\alpha_{n+1}} \\ 0 & \sqrt{\alpha_3} & \beta_3 & \cdots & 0 & 0 & (-1)^{n-1}a_2a_3a_4 \cdots a_{n-1}\sqrt{\alpha_{n+1}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \beta_{n-2} & \sqrt{\alpha_{n-1}} & a_{n-3}a_{n-2}a_{n-1}\sqrt{\alpha_{n+1}} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \sqrt{\alpha_{n-1}} & \beta_{n-1} & \sqrt{\alpha_n} - a_{n-2}a_{n-1}\sqrt{\alpha_{n+1}} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \sqrt{\alpha_n} & \beta_n + a_{n-1}\sqrt{\alpha_{n+1}} \end{pmatrix}. \quad (6.37)$$

Demonstração: Do Lema 6.1, os polinômios S_n satisfazem à relação de recorrência de quatro termos

$$\sqrt{\alpha_{n+1}}S_n(x) = (x - \beta_n - a_{n-1}\sqrt{\alpha_{n+1}})S_{n-1}(x) + [a_{n-2}(x - \beta_n) - \sqrt{\alpha_n}]S_{n-2}(x) - a_{n-3}\sqrt{\alpha_n}S_{n-3}(x),$$

para $n \geq 3$, com

$$S_{-1} = 0, \quad S_0(x) = 1, \quad \text{e} \quad \sqrt{\alpha_2}S_1(x) = x - \beta_1 - \sqrt{\alpha_2}a_0.$$

Podemos escrever $S_n = \det(A_n x - B_n) = \det[(xI - B_n A_n^{-1}) A_n]$, com

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-2} & 1 \end{pmatrix}$$

e

$$B_n = \begin{pmatrix} \beta_1 + \sqrt{\alpha_2} a_0 & \sqrt{\alpha_2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_0 \beta_2 + \sqrt{\alpha_2} & \beta_2 + \sqrt{\alpha_3} a_1 & \sqrt{\alpha_3} & \cdots & 0 & 0 \\ \sqrt{\alpha_3} a_0 & a_1 \beta_3 + \sqrt{\alpha_3} & \beta_3 + \sqrt{\alpha_4} a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\alpha_4} a_1 & a_2 \beta_4 + \sqrt{\alpha_4} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \beta_{n-1} + \sqrt{\alpha_n} a_{n-2} & \sqrt{\alpha_n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-2} \beta_n + \sqrt{\alpha_n} & \beta_n + \sqrt{\alpha_{n+1}} a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Como $\det A_n = 1$, então $S_n(x) = \det(xI - B_n A_n^{-1})$, ou seja, os zeros de S_n são os autovalores da matriz $M_n = B_n A_n^{-1}$ dada em (6.37). ■

O resultado a seguir, semelhante a um resultado encontrado em [58], apresenta uma região onde estão contidos os zeros de S_n .

Teorema 6.16. *Sejam*

$$\gamma_k = (-1)^{n-k+1} a_k a_{k+1} \cdots a_{n-1} \sqrt{\alpha_{n+1}}, \quad \gamma_{n-1}^M = \max\{|\gamma_k|, k = 0, 1, \dots, n-1\}$$

e

$$\alpha_n^M = \max\{\sqrt{\alpha_k}, k = 2, 3, \dots, n\}.$$

Então, os zeros de S_n pertencem a

$$\bigcup_{j=1}^n \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - \beta_j| \leq \frac{(\alpha_n^M)^2 + (\alpha_n^M + \gamma_{n-1}^M)^2}{\alpha_n^M + \gamma_{n-1}^M} \right\}.$$

Demonstração: Sejam $D_n(\delta)$ a matriz diagonal de ordem n cuja diagonal é dada por $\{\delta, \delta^2, \dots, \delta^n\}$, com $0 < \delta < 1$, e a matriz $C_n(\delta) = D_n^{-1} M_n D_n$. Aplicando o Teorema de

Gerschgorin, veja [33], obtemos que os autovalores de $C_n(\delta)$ pertencem à união dos discos de centros em β_k e raios

$$\rho_k(\delta) = \delta\sqrt{\alpha_k} + \frac{\sqrt{\alpha_k}}{\delta}, \quad k = 1, 2, \dots, n-1,$$

considerando $\alpha_1 = 0$. Ou ao disco de centro $\beta_n + \gamma_{n-1}$ e raio

$$\rho_n(\delta) = \sum_{k=0}^{n-3} |\gamma_k| \delta^{n-k-1} + \delta|\sqrt{\alpha_n} + \gamma_{n-2}|.$$

Como

$$\rho_k(\delta) \leq \alpha_n^M \left(\delta + \frac{1}{\delta} \right) \quad \text{e} \quad \rho_n(\delta) \leq \frac{1}{1-\delta} \gamma_{n-1}^M - \gamma_{n-1}^M + \delta \alpha_n^M,$$

concluimos que os autovalores de $C_n(\delta)$ estão em

$$\bigcup_{k=1}^{n-1} \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - \beta_k| \leq \alpha_n^M \left(\delta + \frac{1}{\delta} \right) \right\} \cup \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - \beta_n| \leq \frac{1}{1-\delta} \gamma_{n-1}^M + \delta \alpha_n^M \right\}.$$

Basta escolher

$$\delta = \frac{\alpha_n^M}{\alpha_n^M + \gamma_{n-1}^M}$$

para minimizar o

$$\max \left\{ \alpha_n^M \left(\delta + \frac{1}{\delta} \right), \frac{1}{1-\delta} \gamma_{n-1}^M + \delta \alpha_n^M \right\},$$

com $0 < \delta < 1$. ■

Observe que a matriz M_n pode ser escrita como uma perturbação da matriz J_n , isto é, $M_n = J_n + E_n$, onde E_n é uma matriz com elementos nulos, exceto pela última coluna que é composta por $\{\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}\}$.

Teorema 6.17. *Para cada zero $s_{n,i}$ de S_n , existe um zero $x_{n,j}$ de p_n tal que*

$$|s_{n,i} - x_{n,j}| \leq |a_{n-1}| \sqrt{\alpha_{n+1}} \left(1 + \sum_{k=0}^{n-2} a_k^2 a_{k+1}^2 a_{k+2}^2 \dots a_{n-2}^2 \right)^{1/2}.$$

Demonstração: Aplicando o Corolário 6.3.4 de [33], concluimos que, se $s_{n,i}$ é um autovalor de M_n , então existe um autovalor $x_{n,j}$ de J_n tal que

$$|s_{n,i} - x_{n,i}| \leq \|E_n\|_2,$$

com $\|E_n\|_2 = \max\{\sqrt{\lambda} : \lambda \text{ é um autovalor de } E_n^t E_n\}$. Como os autovalores de $E_n^t E_n$ são iguais a zero ou

$$\begin{aligned} \gamma_0^2 + \gamma_1^2 + \dots + \gamma_{n-1}^2 &= a_0^2 a_1^2 \dots a_{n-1}^2 \sqrt{\alpha_{n+1}^2} + a_1^2 a_2^2 \dots a_{n-1}^2 \sqrt{\alpha_{n+1}^2} + \dots + a_{n-1}^2 \sqrt{\alpha_{n+1}^2} \\ &= a_{n-1}^2 \sqrt{\alpha_{n+1}^2} \left(1 + \sum_{k=0}^{n-2} a_k^2 a_{k+1}^2 a_{k+2}^2 \dots a_{n-2}^2 \right), \end{aligned}$$

obtemos o resultado desejado. \blacksquare

Observe que $x_i = (p_0(x_{n,i}), p_1(x_{n,i}), p_2(x_{n,i}), \dots, p_{n-1}(x_{n,i}))^t$ é autovetor de J_n com relação ao autovalor $x_{n,i}$. Tomemos o autovetor normalizado da seguinte forma: $y_i = x_i / \|x_i\|$. Então, usando o resultado da página 73 de [66], obtemos o seguinte teorema.

Teorema 6.18. *Sejam $s_{n,i}$ e $x_{n,i}$ zeros de S_n e p_n , respectivamente. Então*

$$|s_{n,i} - (x_{n,i} + a_{n-1}\beta_{ii})| \leq |a_{n-1}| \sum_{j \neq i} |\beta_{ij}|,$$

onde $\beta_{ij} = y_i^t \tilde{E}_n y_j$.

Demonstração: Como J_n é simétrica, o autovetor à esquerda é o transposto do autovetor à direita. Observe que $x_i = (p_0(p_{n,i}), p_1(p_{n,i}), p_2(p_{n,i}), \dots, p_{n-1}(p_{n,i}))^t$ é autovetor à direita de J_n com relação ao autovalor $p_{n,i}$. Queremos o autovetor cuja norma é 1. Assim, tomemos $y_i = \frac{x_i}{\|x_i\|}$, com $\|x_i\| = \sqrt{\sum_{k=0}^{n-1} p_k^2(p_{n,i})}$. Colocando a_{n-1} em evidência em E_n , obtemos $M_n = J_n + a_{n-1}\tilde{E}_n$. Usando o resultado da página 73 de [66], temos que os autovalores de M_n estão no disco de centro $p_{n,i} + a_{n-1}\beta_{ii}$ e raio $|a_{n-1}| \sum_{i \neq j} \beta_{ij}$, com

$$\beta_{ij} = y_i^t \tilde{E}_n y_j = \frac{\alpha_{n+1} p_{n-1}(p_{n,j}) \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k a_k a_{k+1} a_{k+2} \dots a_{n-2} p_k(x_{n,i})}{\sqrt{\sum_{k=0}^{n-1} p_k^2(p_{n,i})} \sqrt{\sum_{k=0}^{n-1} p_k^2(p_{n,j})}}.$$

Aplicando o Teorema 4.6 de [16], obtemos

$$\beta_{ii} = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k a_k a_{k+1} a_{k+2} \dots a_{n-2} p_k(x_{n,i})}{p'_n(p_{n,i})},$$

com $p'_n(p_{n,i}) = p'_n(x) \big|_{x=p_{n,i}}$. \blacksquare

Observe que se p_n forem polinômios ortonormais simétricos, então $\beta_j = 0$ para $j \geq 1$. Logo, pelo Teorema 6.16, todos os zeros de S_n estão na bola de centro zero e raio

$$\frac{(\alpha_n^M)^2 + (\alpha_n^M + \gamma_{n-1}^M)^2}{\alpha_n^M + \gamma_{n-1}^M}.$$

Também podemos salientar que se escolhermos a_{n-1} suficientemente pequeno, os discos dos Teoremas 6.17 e 6.18 serão isolados e, então, os zeros de S_n serão distintos.

6.5 Propostas futuras

Com os resultados deste capítulo, pretendemos escrever dois artigos. Um deles versará sobre as condições necessárias para que os zeros de S_n e S_{n-1} sejam reais, distintos e se entrelacem com os $n - 1$ zeros de S_{n-1} , apresentados na Seção 6.2, sendo que

$$p_n(x) = S_n(x) + a_{n-1}S_{n-1}(x), \quad n \geq 1,$$

onde $\{p_n\}_{n \geq 0}$ é uma sequência de polinômios ortonormais. O outro versará sobre a ortogonalidade dos polinômios S_n quando os polinômios ortogonais envolvidos p_n são os polinômios de Chebyshev de segunda espécie, ou seja, $p_n(x) = u_n(x)$. Embora este último resultado não seja inédito, ele é mais preciso do que o de Marcellán e Petronilho [42], sua demonstração é feita totalmente independente da demonstração original e utiliza ferramentas importantes da análise clássica.

Um próximo trabalho a ser desenvolvido é aprofundar os estudos das regiões dadas na Seção 6.4.

Capítulo 7

Considerações Finais

Neste trabalho, estudamos primeiramente os zeros dos polinômios do tipo Jacobi-Sobolev $P_n^{(\alpha,\beta,M,N,\tilde{M},\tilde{N})}$ e dos polinômios do tipo Jacobi $P_n^{(\alpha,\beta,M,N,0,0)}$, ortogonais com relação ao produto interno

$$\begin{aligned} \langle p, q \rangle &= \frac{\Gamma(\alpha + \beta + 2)}{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(\beta + 1)} \int_{-1}^1 p(x)q(x)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta dx \\ &\quad + Mp(1)q(1) + Np'(1)q'(1) + \tilde{M}p(-1)q(-1) + \tilde{N}p'(-1)q'(-1). \end{aligned}$$

Para algumas escolhas dos parâmetros M, N, \tilde{M} e \tilde{N} , representamos $P_n^{(\alpha,\beta,M,N,\tilde{M},\tilde{N})}$ como combinações lineares do tipo

$$P_n^{(\alpha,\beta,M,N,\tilde{M},\tilde{N})}(x) = Q(x) + a_n^{(\alpha,\beta,M,N,\tilde{M},\tilde{N})}R(x),$$

onde Q e R são polinômios que não dependem dos parâmetros M, N, \tilde{M} e \tilde{N} e possuem todos os zeros reais, distintos e que se entrelaçam. Através dessa representação, mostramos que os polinômios ortogonais do tipo Jacobi e do tipo Jacobi-Sobolev também possuem todos os zeros reais, distintos e que se entrelaçam com os zeros dos polinômios clássicos de Jacobi e que no máximo um deles está fora do intervalo de ortogonalidade. Além disso, mostramos que esses zeros são funções monótonas dos parâmetros M, N, \tilde{M} ou \tilde{N} . Usando a técnica inédita desenvolvida neste trabalho para obter o comportamento assintótico dos zeros de uma combinação linear de dois polinômios, mostramos também que os zeros dos polinômios ortogonais do tipo Jacobi e do tipo Jacobi-Sobolev convergem para os zeros dos polinômios de Jacobi e explicitamos a velocidade de convergência.

Utilizando métodos análogos ao descrito anteriormente, mostramos que os zeros dos polinômios tipo Sobolev $P_n^{(\phi,\lambda,c,j)}$ ortogonais à um produto interno na forma mais

geral do que o anterior, mais precisamente, ortogonais com relação ao produto interno

$$\langle p, q \rangle_{\phi, \lambda, c, j} = \int_a^b p(x)q(x)d\phi(x) + \lambda p^{(j)}(c)q^{(j)}(c),$$

convergem monotonicamente para os zeros dos polinômios $G_n(c, j; x)$, polinômio definido em (5.4), com a velocidade de convergência sendo $1/\lambda$. Mostramos também que para certos valores de λ um zero de $P_n^{(\phi, \lambda, c, j)}$ pode estar fora do intervalo de ortogonalidade (a, b) . Neste caso, também foi de suma importância representar $P_n^{(\phi, \lambda, c, j)}$ como combinação linear de P_n^ϕ e $G_n(c, j; x)$.

Motivados a estudar combinações lineares de polinômios, dedicamos o último capítulo desta tese para analisar os zeros do polinômio S_n que satisfaz

$$S_n(x) + a_{n-1}S_{n-1}(x) = P_n^\phi(x), \quad n \geq 1,$$

onde $a_n \in \mathbb{R}$ e $\{P_n^\phi\}_{n \geq 0}$ é uma sequência de polinômios ortogonais com relação à medida $d\phi$. Encontramos algumas condições necessárias para os zeros de S_n serem todos reais e também condições sobre a sequência $\{a_n\}_{n \geq 0}$ para $\{S_n\}_{n \geq 0}$ ser uma sequência de polinômios ortogonais. Além disso, para o caso particular $P_n^\phi(x) = U_n(x)$, ou seja, quando os polinômios P_n^ϕ são os polinômios de Chebyshev de segunda espécie, obtemos a representação explícita da medida em relação à qual S_n é ortogonal, dado que o coeficiente a_n satisfaz a equação (6.6), para $n \geq 0$.

Como consequência dos estudos descritos no primeiro e segundo parágrafos desta seção, desenvolvemos os trabalhos [18] e [15], que foram publicados na revista *Applied Numerical Mathematics* em 2010 e 2012, respectivamente. Pretendemos submeter, em breve, os resultados do último capítulo desta tese, dividindo-os em dois artigos que estão em fase de preparação.

Vale mencionar que, em 2009, realizei um estágio de doutorado sanduíche na Espanha. Como consequência desses estudos, publicamos o artigo intitulado *Multivariate Sobolev-type orthogonal polynomials* na revista *Jaen Journal on Approximation* [52]. Este trabalho também trata dos polinômios ortogonais do tipo Sobolev, mas neste caso, em várias variáveis.

Referências Bibliográficas

- [1] ALFARO, M.; LÓPEZ, G.; REZOLA, M.L. Some properties of zeros of Sobolev-type orthogonal polynomials. *J. Comput. Appl. Math.*, v. 69, p. 171–179, 1996.
- [2] ALFARO, M.; MARCELLÁN, F.; REZOLA, M.L. Estimates for Jacobi-Sobolev type orthogonal polynomials. *Appl. Anal.*, v. 67, p. 157–174, 1997.
- [3] ALFARO, M.; MARCELLÁN, F.; REZOLA, M.L.; RONVEAUX, A. On orthogonal polynomials of Sobolev type: Algebraic properties and zeros. *SIAM J. Math. Anal.*, v. 23, p. 737–757, 1992.
- [4] ALFARO, M.; MORENO BALCÁZAR, J.J.; PEÑA, A.; REZOLA, M.L. On Sobolev type orthogonal polynomials with unbounded support: asymptotic properties. *Monogr. Real Acad. Ci. Zaragoza*, v. 33, p. 209–223, 2010.
- [5] ÁLVAREZ-NODARSE, R.; MARCELLÁN, F.; PETRONILHO, J.; WKB approximation and Krall-type orthogonal polynomials. *Acta Appl. Math.*, v. 54, p. 27–58, 1998.
- [6] ÁLVAREZ-NODARSE, R.; MORENO BALCÁZAR, J.J. Asymptotic properties of generalized Laguerre orthogonal polynomials. *Indag. Math. N. S.*, v. 15, p. 151–165, 2004.
- [7] ANDRADE, E.X.L.; BRACCIALI, C.F.; MELLO, M.V.; PÉREZ, T.E. Zeros of Jacobi-Sobolev orthogonal polynomials following non-coherent pair of measures. *Comput. Appl. Math.*, v. 29, p. 423–445, 2010.
- [8] ANDRADE, E.X.L.; BRACCIALI, C.F.; SRI RANGA, A. Zeros of Gegenbauer-Sobolev orthogonal polynomials: beyond coherent pairs. *Acta Appl. Math.*, v. 105, p. 65–82, 2009.

-
- [9] ARVESÚ, J.; ÁLVAREZ-NODARSE, R.; MARCELLÁN, F.; PAN, K. Jacobi-Sobolev-type orthogonal polynomials: second-order differential equation and zeros. *J. Comput. Appl. Math.*, v. 90, p. 135–156, 1998.
- [10] BRACCIALI, C.F.; DIMITROV, D.K.; SRI RANGA, A. Chain sequences and symmetric generalized orthogonal polynomials. *J. Comput. Appl. Math.*, v. 143, p. 95–106, 2002.
- [11] BERTI, A.C.; BRACCIALI, C.F.; SRI RANGA, A. Orthogonal polynomials associated with related measures and Sobolev orthogonal polynomials. *Numer. Algorithms*, v. 34, p. 203–216, 2003.
- [12] BERTI, A.C.; SRI RANGA, A. Companion orthogonal polynomials: some applications. *Appl. Num. Math.*, v. 39, p. 127–149, 2001.
- [13] BRUIN, M.G. A tool for locating zeros of orthogonal polynomials in Sobolev inner product spaces. *J. Comput. Appl. Math.*, v. 49, p. 27–35, 1993.
- [14] BRUIN, M.G.; GROENEVELT, W.G.M.; MEIJER, H.G. Zeros of Sobolev orthogonal polynomials of Hermite type. *Appl. Math. Comput.*, v. 132, p. 135–166, 2002.
- [15] CASTILLO, K.; MELLO, M.V.; RAFAELI, F.R. Monotonicity and asymptotics of zeros of Sobolev type orthogonal polynomials: a general case. *Appl. Num. Math.*, 2012. In Press.
- [16] CHIHARA, T.S. *An introduction to orthogonal polynomials*. New York: Gordon and Breach, 1978.
- [17] DIMITROV, D.K.; MARCELLÁN, F.; RAFAELI, F.R. Monotonicity of zeros of Laguerre-Sobolev type orthogonal polynomials. *J. Math. Anal. Appl.*, v. 368, p. 80–89, 2010.
- [18] DIMITROV, D.K.; MELLO, M.V.; RAFAELI, R.R. Monotonicity of zeros of Jacobi-Sobolev type orthogonal polynomials. *Appl. Num. Math.*, v. 60, p. 263–276, 2010.
- [19] DUEÑAS, H.; GARZA, E. Jacobi-Sobolev-type orthogonal polynomials: holonomic equation and electrostatic interpretation - a non-diagonal case. *Integral Transforms Spec. Funct.*, 2012. In Press.

-
- [20] DUEÑAS, H.; MARCELLÁN, F. The Jacobi-type orthogonal polynomials: holonomic equation and electrostatic interpretation. *Commun. Anal. Theory Contin. Fract.*, v. 15, p. 4–19, 2008.
- [21] DUEÑAS, H.; MARCELLÁN, F. The Laguerre-Sobolev-type orthogonal polynomials. *J. Approx. Theory*, v. 162, p. 421–440, 2010.
- [22] DUEÑAS, H.; MARCELLÁN, F. The Laguerre-Sobolev-type orthogonal polynomials. Holonomic equation and electrostatic interpretation. *Rocky Mount. J. of Math.*, v. 41, p. 95–131, 2011.
- [23] ELAYDI, S. *An introduction to difference equations*. New York: Springer, 2005.
- [24] ELAYDI, S.; HARRIS, W. On the computation of A^n . *SIAM Rev.*, v. 40, p. 965–971, 1998.
- [25] FREUD, G. *Orthogonal polynomials*. New York: Pergamon Press, 1971.
- [26] GANTMACHER, F.R. *The theory of matrices*. New York: Chelsea Publishing Company, 1964. v. 2.
- [27] GERONIMO, J.S.; VAN ASSCHE, W. Approximating the weight function for orthogonal polynomials on several intervals. *J. Approx. Theory*, v. 65, p. 341–371, 1991.
- [28] GIROUX, A. Estimates for the imaginary parts of the zeros of a polynomial. *Proc. Amer. Math. Soc.*, v. 44, p. 61–67, 1974.
- [29] GOL'BERG, E.M.; MALOZEMOV, V.N. Estimates for roots of some polynomials. *Vestnik Leningrad. Univ. Mat. Mekh. Astronom.*, v. 7, p. 18–24, 1973.
- [30] GRADSHTEYN, I.S.; RYZHIK, I.M. *Tables of integrals series and products*. New York: Academic Press, 1980.
- [31] GROENEVELT, W.G.M. Zeros of Sobolev orthogonal polynomials of Gegenbauer type. *J. Approx. Theory*, v. 114, p. 115–140, 2002.
- [32] GRÜNBAUM, F.A. Variations on a theme of Heine and Stieltjes: an electrostatic interpretation of the zeros of certain polynomials. *J. Comput. Appl. Math.*, v. 99, p. 189–194, 1998.

-
- [33] HORN, R.A.; JOHNSON, C.R. *Matrix analysis*. Cambridge: Cambridge University Press, 1999.
- [34] HUERTAS, E.J.; MARCELLÁN, F.; RAFAELI, F.R. Zeros of orthogonal polynomials generated by canonical perturbations of measures. *Appl. Math. Comput.*, v. 218, p. 7109–7127, 2012.
- [35] ISERLES, A.; KOCH, P.E.; NØRSETT, S.P.; SANZ-SERNA, J.M. On polynomials orthogonal with respect to certain Sobolev inner products. *J. Approx. Theory*, v. 65, p. 151–175, 1991.
- [36] ISMAIL, M.H.; MULDOON, M.E. A discrete approach to monotonicity of zeros of orthogonal polynomials. *Trans. Amer. Math. Soc.*, v. 323, p. 65–78, 1991.
- [37] KOEKOEK, R.; MEIJER, H.G. A generalization of Laguerre polynomials. *SIAM J. Math. Anal.*, v. 24, p. 768–782, 1993.
- [38] KOORNWINDER, T.H. Orthogonal polynomials with weight function $(1-x)^\alpha(1+x)^\beta + M\delta(x+1) + N\delta(x-1)$. *Canad. Math. Bull.*, v. 27, p. 205–214, 1984.
- [39] KRYLOV, V.I. *Approximate calculation of integrals*. New York: MacMillan, 1962.
- [40] LUCAS, F.R. *Polinômios e funções inteiras com zeros reais*. 2010. 84 f. Tese (Doutorado em Matemática Aplicada)-IMECC, UNICAMP, Campinas, 2010.
- [41] MARCELLÁN, F.; PÉREZ, T.E.; PIÑAR, M.A. On zeros of Sobolev-type polynomials. *Rend. Mat. Appl.*, v. 12, n. 7, p. 455–473, 1992.
- [42] MARCELLÁN, F.; PETRONILHO, J. Orthogonal polynomials and coherent pairs: the classical case. *Indag. Mathem.*, v. 6, p. 287–307, 1995.
- [43] MARCELLÁN, F.; RAFAELI, F.R. A note on monotonicity of zeros of generalized Hermite-Sobolev type orthogonal polynomials. *Integral Transforms Spec. Funct.*, v. 21, p. 831–838, 2010.
- [44] MARCELLÁN, F.; RAFAELI, F.R. Monotonicity and asymptotics of zeros of Laguerre-Sobolev-type orthogonal polynomials of higher order derivatives. *Proc. Amer. Math. Soc.*, v. 139, p. 3929–3936, 2011.

-
- [45] MARCELLÁN, F.; RONVEAUX, A. On a class of polynomials orthogonal with respect to a discrete Sobolev inner product. *Ingdag. Math.*, v. 4, p. 451–464, 1990.
- [46] MÁTÉ, A.; NEVAI, P. Orthogonal polynomials and absolutely continuous measures. In: APPROXIMATION THEORY, n. 4, 1983, College Station. *Approx. Theory...*New York: Academic Press, 1983. p. 611–617.
- [47] MÁTÉ, A.; NEVAI, P.; TOTIK, V. Asymptotics for orthogonal polynomials defined by a recurrence relation. *Constr. Approx.*, v. 1, p. 231–248, 1985.
- [48] MEIJER, H.G. Laguerre polynomials generalized to a certain discrete Sobolev inner product space. *J. Approx. Theory*, v. 73, p. 1–16, 1993.
- [49] MEIJER, H.G. On real and complex zeros of orthogonal polynomials in a discrete Sobolev space. *J. Comp. Appl. Math.*, v. 49, p. 179–191, 1993.
- [50] MEIJER, H.G. Zero distribution of orthogonal polynomials in a certain discrete Sobolev space. *J. Math. Anal. Appl.*, v. 172, p. 520–532, 1993.
- [51] MEIJER, H.G.; BRUIN, M.G. Zeros of Sobolev orthogonal polynomials following from coherent pairs. *J. Comput. Appl. Math.*, v. 139, p. 253–274, 2002.
- [52] MELLO, M.V.; PASCHOA, V.G.; PÉREZ, T.E.; PIÑAR, M.A. Multivariate Sobolev-type orthogonal polynomials. *Jaen J. Approx.*, v. 3, p. 241–259, 2011.
- [53] OBRECHKOFF, N. *Zeros of polynomials*. Sofia: Marin Drinov Academic Publishing House, 2003.
- [54] PÉREZ, T.E.; PIÑAR, M.A. Global properties of zeros for Sobolev-type orthogonal polynomials. *J. Comput. Appl. Math.*, v. 49, p. 225–232, 1993.
- [55] PRASOLOV, V.V. *Polynomials, algorithms and computation in mathematics*. Berlin: Springer-Verlag, 2004. v. 11.
- [56] RAHMAN, Q.I.; SCHMEISSER, G. *Analytic theory of polynomials*. Oxford: Clarendon Press; New York: Oxford University Press, 2002.
- [57] RAINVILLE, E.D. *Special functions*. New York: The Macmillan Company, 1960.

-
- [58] SILVA, A.P.; SRI RANGA, A. Polynomials generated by a three term recurrence relation: bounds for complex zeros. *Linear Algebra Appl.*, v. 397, p. 299–324, 2005.
- [59] SPECHT, W. Die lage der nullstellen eines polynoms. *Math. Nachr.*, v. 15, p. 353–374, 1956.
- [60] STROUD, A.H.; SECREST, D. *Gaussian quadrature formulas*. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1966.
- [61] SZEGŐ, G. *Orthogonal polynomials*. 4. ed., Providence: American Mathematical Society Colloquium Publications, 1975. v. 23.
- [62] TURÁN, P. On the zeros of the polynomials of Legendre. *Časopis Pě. Mat. Fys.*, v. 75, p. 113–122, 1950.
- [63] TURÁN, P. Hermite-expansions and strips for zeros of polynomials. *Arch. Math.*, v. 5, p. 148–152, 1954.
- [64] VAN ASSCHE, W. Asymptotics for orthogonal polynomials and three-term recurrence. In: ORTHOGONAL POLYNOMIALS: THEORY AND PRACTICE, 1990, Ohio. *Orthogonal Polynomials: Theory and Practice...*Dordrecht: Kluwer Academic Publisher, 1990. p. 435–462. v. 294.
- [65] WENDROFF, B. On orthogonal polynomials. *Proc. Amer. Math. Soc.*, v. 12, p. 554–555, 1961.
- [66] WILKINSON, J.H. *The algebraic eigenvalue problem*. Oxford: Oxford Science Publications, 1965.

Autorizo a reprodução xerográfica para fins de pesquisa.

São José do Rio Preto, 20 / 07 / 2012

Mirela Aparecida de Mello

Assinatura