



Jackeline del Carmen Huaccha Neyra

**Estudos em Problemas de Dimensionamento de
Lotes com Preparações *Carryover* e *Crossover***

Dissertação de Mestrado
Pós-Graduação em Matemática

Jackeline del Carmen Huaccha Neyra

*Estudos em Problemas de Dimensionamento de
Lotes com Preparações Carryover e Crossover*

Orientador: Silvio A. de Araujo

Co-Orientador: Diego Jacinto Fiorotto

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JULIO DE MESQUITA FILHO”
INSTITUTO DE BIOCIÊNCIAS LETRAS E CIÊNCIAS EXATAS
CAMPUS DE SÃO JOSÉ DO RIO PRETO

São José do Rio Preto

2017

Jackeline del Carmen Huaccha Neyra

Estudos em Problemas de Dimensionamento de Lotes com Preparações
Carryover e Crossover

Dissertação apresentada para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de Otimização e Teoria de Controle, junto ao Programa de Pós Graduação em Matemática do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus São José do Rio Preto.

Orientador: Prof. Dr. Silvio A. de Araujo

São José do Rio Preto

2017

Huaccha Neyra, Jackeline del Carmen.

Estudos em problemas de dimensionamento de lotes com
preparações *Carryover* e *Crossover* / Jackeline del Carmen Huaccha
Neyra. - São José do Rio Preto, 2017.

74 f. : il., tabs.

Orientador: Silvio A. de Araujo

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista "Júlio de
Mesquita Filho", Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Matemática. 2. Pesquisa operacional. 3. Otimização matemática.
4. Problemas de dimensionamento de lotes. 5. Planejamento de produção -
Modelos matemáticos. 6. Programação heurística. 7. Programação
(Matemática) I. Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho".
Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. II. Título.

CDU - 518.73

Jackeline del Carmen Huaccha Neyra

Estudos em Problemas de Dimensionamento de Lotes com Preparações
Carryover e Crossover

Dissertação apresentada para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de Otimização e Teoria de Controle, junto ao Programa de Pós Graduação em Matemática do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus São José do Rio Preto.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Silvio A. de Araujo
UNESP - São José do Rio Preto
Orientador

Profa. Dra. Kelly Cristina Poldi
UNICAMP - Campinas

Prof. Dr. Victor C. B. de Camargo
UFTM - Uberaba

São José do Rio Preto, 13 de Março de 2017.

À meu namorado e meus pais
dedico.

Agradecimentos

Agradeço a Deus, a meus pais Adelina e Pedro e a meu namorado Heraclio, pela força, apoio e compromisso para com a minha pessoa, respectivamente.

Ao Professor Dr. Silvio Alexandre de Araújo e Dr. Diego Jacinto Fiorotto por aceitar me orientar neste trabalho, pela paciência durante os seminários, por toda dedicação, ajuda e amizade ao longo deste percurso.

Aos professores Dra. Kelly Cristina Poldi e Dr. Victor C. B. de Camargo por aceitarem compor a banca examinadora.

À CAPES pelo apoio financeiro.

*“O único homem que está isento
de erros, é aquele que não
arrisca acertar.”*

(Albert Einstein)

Resumo

Os problemas de dimensionamento de lotes consistem em determinar a quantidade de itens que devem ser produzidos em todos os períodos de um horizonte de planejamento. Em geral, são considerados custos de produção, preparação de máquina e de manutenção de estoque. Neste trabalho estuda-se uma extensão do problema de dimensionamento de lotes com restrição de capacidade que considera tempos de preparação, preparação *carryover* e *crossover*, em que se tem uma única máquina, único estágio, multi-itens e *big-bucket* (CLSP-SCC). Novas formulações para o CLSP-SCC são apresentadas e evitam a necessidade de definir novas variáveis binárias para modelar a preparação *crossover*. Também são propostas restrições de quebra de simetria para formulações propostas na literatura. São provadas as relações teóricas que existem entre cada uma destas formulações estudadas. Além disso, é proposta uma heurística híbrida que combina as heurísticas *Relax-and-Fix* e *Fix-and-Optimize* (RF-FO), em que a heurística *Relax-and-Fix* é usada para obter uma solução inicial e a heurística *Fix-and-Optimize* melhora essa solução. Por fim, apresentam-se os resultados computacionais e conclui-se que os resultados obtidos melhoram significativamente quando comparam-se a formulação clássica com as formulações sem preparação *carryover*. Compara-se também os resultados da heurística com os do pacote computacional CPLEX e, quando ambos são limitados ao mesmo tempo computacional, a heurística RF-FO obtém melhores resultados.

Palavras-chave: Problemas de Dimensionamento de Lotes com Restrição de Capacidade, Preparação *Carryover*, Preparação *Crossover*, Heurística *Relax-and-Fix*, Heurística *Fix-and-Optimize*.

Abstract

Lot-Sizing Problems consist of determining the quantity of items to be produced in each period of a planning horizon. In general, production, setup and inventory costs are considered. In this work an extension of the Capacitated Lot-Sizing Problem is studied, which considers setup times, Setup Carryover and Setup Crossover, single machine, single level, multi items, multi periods and big-bucket (CLSP-SCC). New formulations to the CLSP-SCC are presented and avoid the necessity of defining new extra binary variables to model the setup crossover. Furthermore, symmetry breaking constraints are proposed for formulations from the literature. The theoretical relations between the studied formulations are proved. A Relax-and-Fix and Fix-and-Optimize (RF-FO) hybrid heuristic is proposed, in which the Relax-and-Fix helps to find an initial solution and the Fix-and-Optimize improves it. Computational results are presented and the obtained results improve significantly when comparing the classical formulation with the formulation without setup carryover. Finally, the results obtained by the RF-FO heuristic and the computational package CPLEX are compared and, when they both are limited to the same computational time, the RF-FO heuristic obtains better results.

Keywords: Capacitated Lot-sizing Problems, Setup *Carryover*, Setup *Crossover*, *Relax-and-Fix* Heuristic, *Fix-and-Optimize* Heuristic.

Sumário

1	Introdução	10
2	Revisão bibliográfica	14
2.1	Problemas de Dimensionamento de Lotes com Preparação <i>Carryover</i> (CLSP-SC)	14
2.2	Problemas de Dimensionamento de Lotes com Preparação <i>Crossover</i>	18
2.3	Problemas de Dimensionamento de Lotes com Preparações <i>Carryover</i> e <i>Crossover</i> (CLSP-SCC)	20
3	Análise de formulações para o problema de dimensionamento de lotes com preparações <i>carryover</i> e <i>crossover</i>	23
3.1	Modelos da literatura sem preparações <i>carryover</i> e <i>crossover</i>	24
3.2	Modelos baseados na literatura com preparações <i>carryover</i> e <i>crossover</i>	27
3.3	Modelos propostos	31
3.4	Resultados teóricos	36
3.5	Exemplo	39
4	Métodos de solução	43
4.1	Revisão bibliográfica	43
4.2	Heurística <i>Relax-and-Fix</i> aplicada ao CLSP-SCC	46
4.3	Heurística <i>Fix-and-Optimize</i> aplicada ao CLSP-SCC	48
5	Resultados computacionais	53
5.1	Resultados para as formulações	53

5.1.1	Resultados para as instâncias F e G	54
5.1.2	Resultados para as 540 instâncias	55
5.1.3	Comparação com formulações sem preparação <i>carryover</i>	59
5.1.4	Instâncias com penalização para a preparação <i>carryover</i>	60
5.2	Resultados para a heurística RF-FO	63
5.2.1	Seleção de parâmetros para RF-FO	63
5.2.2	Resultados computacionais	65
6	Conclusões	69
	Referências	72

Capítulo 1

Introdução

Nos últimos anos, com a evolução natural do processo de decisões industriais, bem como, o avanço na economia e a globalização, aumentou-se a já forte concorrência existente entre as empresas, as quais se viram obrigadas a aumentar a produção e melhorar a qualidade dos seus produtos que, na maioria das vezes, devem ser entregues em datas pré estabelecidas. Como a capacidade de produção é geralmente limitada, tem-se a necessidade de elaborar um sistema de planejamento de produção, que ajude a alcançar uma máxima eficiência e utilidade produtiva, tendo como objetivo principal minimizar os custos e o tempo total de produção tentando satisfazer as necessidades dos consumidores e evitando altos custos de produção.

A elaboração destes sistemas pode ser dividida em três fases: planejamento a curto, a médio e a longo prazo. Neste trabalho o interesse se concentra nos sistemas de planejamento de produção a médio e curto prazo, que geralmente incluem o dimensionamento e sequenciamento de lotes.

O problema de dimensionamento de lotes (*Lot-Sizing Problem-LSP*) pode ser definido como o problema de determinar a quantidade de itens que devem ser produzidos em todos os períodos do horizonte de planejamento. Seu objetivo é encontrar a quantidade de produção que minimize os custos totais, tais como: custos de produção, de preparação de máquina e de estoque.

Estes problemas podem ser classificados de acordo a diferentes características. Segundo o processo de produção: único-estágio e multi-estágios; no sistema com único estágio usualmente o item final é simples (i.e., o item final é obtido depois de uma operação simples), e no sistema com multi-estágios existe uma relação entre os itens. Segundo a quantidade de itens: único-

item (um único item é produzido) e multi-itens (são produzidos múltiplos itens). E quando tem-se restrições de capacidade, tais como: mão-de-obra, máquinas, equipamento, orçamento, etc. é denominado problema com restrição de capacidade. Em termos do tamanho dos períodos são comumente divididos em dois grupos: *small-bucket* e *big-bucket*; no modelo *small-bucket* é permitido no máximo uma preparação de máquina por período e no modelo *big-bucket* podem ser produzidos mais de um item por período, i.e., mais de uma preparação por período é permitida. A produção de diferentes tipos de itens numa única máquina impõe a necessidade de um tempo para mudar as configurações da máquina para passar de um item para outro. Este tempo é denominado o tempo de preparação.

Neste trabalho, considera-se o Problema de Dimensionamento de Lotes com Restrição de Capacidade (*Capacitated Lot-Sizing Problem-CLSP*) em que se tem uma única máquina, único estágio, multi-itens, *big bucket* e tempos e custos de preparação, onde os tempos de preparação são menores do que a capacidade por período.

Na formulação clássica deste problema (Trigeiro et al. (1989)), a preparação para o primeiro tipo de item produzido em um período começa no início deste período. Neste trabalho, estuda-se uma extensão deste problema de dimensionamento de lotes que inclui as possibilidades de preparações *carryover* e *crossover*. Observa-se que considerar esta extensão pode resultar em soluções mais eficientes em comparação com a formulação clássica.

O CLSP com preparações *carryover* e *crossover* (CLSP-SCC) é uma extensão da formulação clássica. A **preparação *carryover*** define-se como a possibilidade de começar um período com produção (ao invés de preparação) de um determinado item que estava sendo produzido no final do período anterior. Excluindo assim a necessidade de uma nova preparação para este item e, portanto, economizando em tempos e custos de preparação.

Por outro lado, a **preparação *crossover*** (ou *setup splitting*) permite a possibilidade de uma preparação começar no fim de um período e terminar no início do período seguinte, isto é, a preparação de um item pode expandir-se sobre dois períodos.

Na Figura 1.1 mostra-se um exemplo de preparações *carryover* e *crossover*. Nesta figura quando não se considera as possibilidades de preparações *carryover* nem *crossover* (1.1 a.) tem-se mais preparações do que quando se consideram as preparações *carryover* e *crossover*

(1.1 b.). Observe que quando tem-se a possibilidade de preparação *carryover*, para satisfazer a demanda do item *B* nos períodos 2 e 3, é feita apenas uma preparação no período 2 e a produção pode continuar no começo do período 3. Por causa da preparação *carryover* no período 2 tem-se capacidade disponível que é aproveitada para começar a preparação do item *D*, no período 3, e terminá-la no próximo período, isto é, tem-se preparação *crossover* para o item *D* entre os períodos 3 e 4.

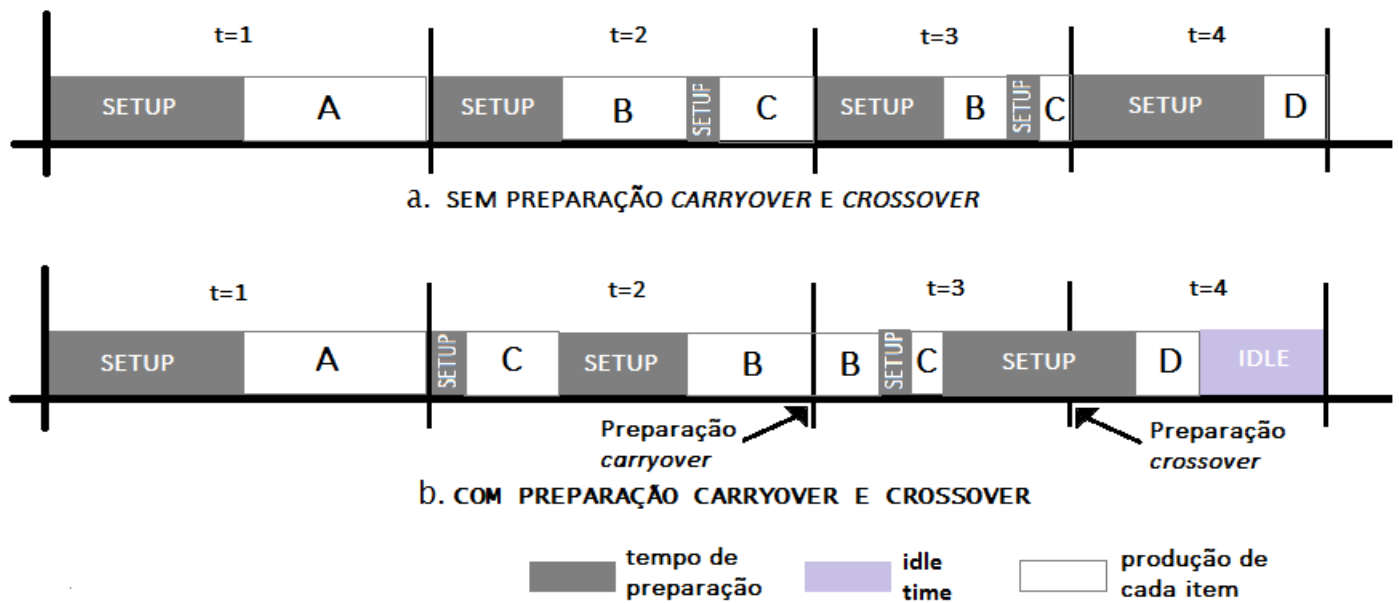


Figura 1.1: Preparação *carryover* e *crossover*

Muitos pesquisadores têm proposto modelos para o CLSP com preparação *carryover*: Dillenberger et al. (1994); Gopalakrishnan et al. (1995); Sox e Gao (1999); Gopalakrishnan (2000); Suerie e Stadtler (2003); Gupta e Magnusson (2005), entre outros; enquanto incorporar a preparação *carryover* nos modelos nos leva mais perto da realidade, existem muitas situações em que a preparação começa no final do período e não tem tempo suficiente para terminá-la nesse mesmo período. A fim de utilizar a capacidade disponível de maneira mais eficiente pode-se incluir a preparação *crossover*: Suerie (2006); Mohan et al. (2012); Menezes et al. (2010); Belo-Filho et al. (2014); Fiorotto et al. (2014); Fiorotto et al. (2017). Observa-se que, na maioria dos trabalhos, acrescenta-se variáveis binárias extras para formular a preparação *crossover*.

Assim, as contribuições deste trabalho são:

- estender as ideias propostas por Fiorotto et al. (2014) e Fiorotto et al. (2017) para o CLSP com preparação *crossover*, para formular o CLSP com preparações *carryover* e *crossover* obtendo assim três formulações ($F3$, $F4$ e $F5$) que usam menos variáveis binárias para o CLSP-SCC e duas formulações ($F1'$ e $F2'$) que eliminam as possíveis soluções simétricas obtidas ao adicionar restrições de quebra de simetria;
- obter resultados computacionais para analisar os benefícios obtidos ao considerar o CLSP-SCC em relação à formulação clássica e à formulação com apenas preparação *crossover*. Estes resultados mostram a importância de não simplificar as características de preparações *carryover* e *crossover*, nos casos práticos em que se tem a possibilidade de fazer tais preparações;
- propor uma heurística híbrida *Relax-and-fix* e *Fix-and-Optimize* e obter resultados computacionais para analisar o seu comportamento.

Os capítulos desta dissertação estão organizados da seguinte forma. No Capítulo 2, é feita uma revisão bibliográfica dos problemas de dimensionamento de lotes com preparações *carryover* e *crossover*. No Capítulo 3, apresenta-se a formulação clássica e duas formulações matemáticas propostas na literatura para o CLSP com preparações *carryover* e *crossover* (Menezes et al. (2010) e Mohan et al. (2012)). Em seguida, com base em Fiorotto et al. (2014) e Fiorotto et al. (2017), são propostas três formulações que evitam a necessidade de definir variáveis binárias extras para formular a preparação *crossover* e duas formulações que adicionam restrições de quebra de simetria às formulações propostas na literatura. Para todas estas formulações mostra-se a relação teórica entre elas. Por último, resolve-se um exemplo usando estas formulações. Com o intuito de melhorar as soluções obtidas, no Capítulo 4, desenvolve-se uma heurística híbrida *Relax-and-fix* e *Fix-and-Optimize*. No Capítulo 5, são apresentados os resultados computacionais das formulações do CLSP com preparações *carryover* e *crossover* para um conjunto de instâncias propostas em Trigeiro et al. (1989). Além disso, apresentam-se os resultados obtidos pela heurística para um determinado conjunto de instâncias. E, finalmente, as conclusões são apresentadas no Capítulo 6.

Capítulo 2

Revisão bibliográfica

Neste capítulo faz-se uma revisão detalhada dos problemas de dimensionamento de lotes com restrição de capacidade (CLSP) e com tempos de preparações *carryover* e *crossover*. Inicialmente, revisa-se o CLSP com preparação *carryover*, posteriormente o CLSP com preparação *crossover* e, por último, o CLSP com preparações *carryover* e *crossover*.

2.1 Problemas de Dimensionamento de Lotes com Preparação *Carryover* (CLSP-SC)

Existem vários trabalhos na literatura que abordam o problema CLSP-SC e alguns destes trabalhos são comentados a seguir:

Gopalakrishnan et al. (1995) propõem duas formulações, a primeira considera os custos e tempos de preparação independentes dos itens, fazendo uso de muitas variáveis binárias para poder modelar a preparação *carryover* e tendo como objetivo minimizar os custos totais de preparação e de estoque. A segunda formulação é baseada na primeira mas considera características adicionais como: várias máquinas (i.e., máquinas paralelas) e atribuição de recursos. Gopalakrishnan (2000) apresenta uma extensão da primeira formulação de Gopalakrishnan et al. (1995) em que os custos e tempos de preparação são dependentes da sequência dos itens.

Sox e Gao (1999) consideram o CLSP com uma única máquina, custos de preparação dependentes da sequência dos itens, custos de estoque e custos de produção sem tempos de

preparação. Os autores propõem duas formulações para o problema CLSP-SC. A primeira estende a formulação proposta por Trigeiro et al. (1989) a qual é resolvida usando uma heurística de decomposição Lagrangiana, que gera rapidamente soluções próximas à ótima. A segunda usa uma reformulação como problema do caminho mínimo com base nas ideias propostas por Eppen e Martin (1987). Os resultados computacionais mostram que incorporar a preparação *carryover* apresenta melhoras significativas tanto para os custos como para os tamanhos de lotes. Gao (2000) propõe uma simples heurística que avança período-por-período para o mesmo problema de Sox e Gao (1999).

Gopalakrishnan et al. (2001) desenvolvem uma heurística de busca tabu que consiste em cinco tipos de movimentos básicos (três para decisões de sequenciamento e dois para decisões de dimensionamento de lotes). A heurística chamada TABU-CLSPSC envolve decisões de sequenciamento parcial e dimensionamento de lotes. Os autores também modificam esta heurística para o CLSP (TABU-CLSP) com tempos de preparação sem preparação *carryover*. Os estudos computacionais têm três objetivos: quantificar a efetividade da preparação *carryover* usando a heurística TABU-CLSPSC, testar a eficiência da heurística e comparar o desempenho da heurística TABU-CLSP com Trigeiro et al. (1989). São usados os conjuntos de dados propostos por Trigeiro et al. (1989) e os resultados mostram que TABU-CLSPSC encontra soluções com custos menores comparados com Trigeiro et al. (1989) e encontra soluções factíveis para todas as instâncias. Além disso, TABU-CLSP é bastante eficiente mas apresenta tempos computacionais maiores. Uma vantagem destas heurísticas é que podem ser facilmente estendidas para problemas com máquinas paralelas.

Suerie e Stadtler (2003) apresentam uma nova formulação do CLSP-SC permitindo a preparação *carryover* por muitos períodos consecutivos e combinam as características dos problemas *small-bucket* e *big-bucket*. Além disso, com a finalidade de encontrar uma formulação que forneça limitantes melhores são adicionadas novas variáveis e propostos três grupos de desigualdades válidas (desigualdades de preprocessamento, estoque/preparação, capacidade/produção de um único item) para esta formulação. Os autores sugerem uma heurística de decomposição orientada ao tempo (proposta por Stadtler (2003) para o CLSP multi-estágio) para resolver problemas com um número grande de períodos. Os testes computacionais mostram que esta formulação é

melhor do que as formulações propostas por Sox e Gao (1999).

Gupta e Magnusson (2005) consideram o CLSP-SC com única máquina, custos de preparação dependentes da sequência e tempos de preparação. Os autores fornecem uma formulação para este problema e impõem um conjunto de restrições para eliminar sub-rotas. Os autores ainda desenvolvem uma heurística para resolver problemas de grande porte. As ideias principais desta heurística são: o primeiro passo consiste em gerar uma solução factível inicial, supondo que a preparação *carryover* é utilizada em cada período; no segundo passo procura-se encontrar uma sequência de produção de menor custo em cada período; e no terceiro passo a solução encontrada é melhorada com respeito ao custo total. Para avaliar a precisão da heurística, compara-se com a solução ótima de muitos exemplos e calcula-se o desvio percentual. Os resultados computacionais indicam que o algoritmo tem um melhor desempenho quando o número de itens é grande em relação ao número de períodos.

Quadt e Kuhn (2009) estudam o problema CLSP com tempos de preparação, preparação *carryover*, pedidos atrasados e máquinas paralelas. Os autores apresentam uma formulação inteira mista do problema e um novo procedimento de solução que usa variáveis inteiras ao invés de binárias, que é chamado de Modelo Agregado, incorporado em uma heurística período-por-período. O Modelo Agregado é resolvido até a otimalidade ou próximo da otimalidade em cada iteração. São propostas seis versões deste procedimento, as quais são testadas em problemas pequenos tendo como resultado tempos computacionais melhores do que o CPLEX. Para problemas grandes também conseguem encontrar boas soluções. No entanto, a otimalidade das soluções do CPLEX pode ser provada apenas para instâncias com duas máquinas e uma única instância com 6 máquinas. Assim, não pode-se garantir que as soluções para problemas grandes encontradas pelas heurísticas estão próximas do ótimo.

Tempelmeier et al. (2009) apresentam um novo algoritmo para o CLSP-SC multi-estágio que resolve uma série de problemas inteiros mistos com um método iterativo chamado de *Fix-and-Optimize* (FO) e propõem três maneiras de decompor o problema (decomposição orientada ao item, ao recurso e ao processo) em subproblemas gerando quatro variantes do algoritmo (1. decomposição orientada apenas ao item; 2. decomposição orientada primeiro ao item e depois ao recurso; 3. decomposição orientada primeiro ao item e depois ao processo; 4. decomposição

orientada primeiro ao item, ao recurso e finalmente ao processo) que são usadas para testar seis classes de problemas cujos resultados mostram que o algoritmo fornece soluções de alta qualidade e que o esforço computacional é moderado.

Wu e Shi (2011) propõem uma formulação de programação inteira mista para modelar o CLSP-SC. Os autores mostram teoricamente as relações entre quatro formulações propostas na literatura para o CLSP-SC, quando a condição de integralidade é relaxada para algum subconjunto de variáveis binárias de preparação e de preparação *carryover*. Estas quatro formulações são chamadas de: FL (proposta originalmente por Krarup e Bilde (1977) e estendida por Suerie e Stadtler (2003)), SR (proposta por Eppen e Martin (1987)), SMC (proposta em Rardin e Wolsey (1993)) e SSR (que é obtida a partir da formulação SR). Os autores provam a equivalência entre as formulações FL e S e entre SMC e SSR. Assim, considerando o esforço computacional, conclui-se que a formulação mais eficiente com respeito a relaxação linear para problemas de tamanho médio é a formulação FL. A formulação SR é mais eficiente para os modelos de grande porte.

Chen (2015) propõe um novo método *Fix-and-Optimize* (FO) para o CLSP-SC multi-estágio que, comparado com o método FO proposto em Helber e Sahling (2008) e Tempelmeier et al. (2009), seleciona as variáveis binárias a serem re-otimizadas, em um modelo MIP, baseado na relação das variáveis binárias de preparação nas restrições da formulação ao invés de ser baseado nos três problemas específicos de decomposição (decomposição orientada ao item, recurso e processo). O autor também propõe um método de busca em vizinhança variável (*Variable Neighborhood Search* - VNS), baseado em FO sem preparação *carryover*, que pode melhorar ainda mais a solução obtida por FO diversificando o espaço de busca. Experimentos numéricos mostram que o novo método obtém soluções melhores, para a maioria das instâncias, comparadas com as que foram encontradas usando o método FO proposto em Helber e Sahling (2008).

2.2 Problemas de Dimensionamento de Lotes com Preparação *Crossover*

Nesta seção apresenta-se alguns trabalhos da literatura que abordam o CLSP com preparação *crossover*.

Suerie (2006) estuda o problema de dimensionamento e sequenciamento de lotes e propõe duas formulações, chamadas de POST1 e POST2, com preparação *crossover* que permite longos tempos de preparação (i.e., os tempos de preparação podem ser maiores que o tamanho de um período). A formulação POST1 apresenta três tipos de variáveis relacionadas com os tempos de preparação, soma dos tempos de preparação em períodos adjacentes e o estado da preparação ao final de cada período. A ideia da formulação POST2 é dividir o tempo de preparação em duas variáveis contínuas, esta formulação usa menos variáveis e restrições. O autor conclui que os resultados de suas formulações produzem mais soluções factíveis e melhores em comparação com o problema de dimensionamento e sequenciamento de lotes clássico. Além disso, calcula-se os custos adicionais causados pela suposição de que toda preparação tem que ser feita num único período para um conjunto de instâncias aleatórias, obtendo um incremento de 0,14% – 0,49% no custo total quando o tempo de preparação é de 40% do tamanho do período. Para todos os casos a segunda formulação atinge otimalidade, em média, mais do que seis vezes mais rápido do que a primeira.

Kaczmarczyk (2009) propõe dois modelos de programação inteira mista baseados no problema de dimensionamento de lotes proporcional com preparação *crossover* e longos tempos de preparação. Estes modelos usam as variáveis de preparação apresentadas em Suerie (2006). Os resultados mostram que os modelos propostos podem ser resolvidos mais rápido do que os modelos já conhecidos, especialmente quando os tempos de preparação são maiores do que os períodos, pois no caso em que os tempos de preparação são menores do que o período a melhor formulação é a segunda formulação de Suerie (2006).

Menezes et al. (2010) propõem uma formulação para o CLSP, que é essencialmente modelado como o problema do caixeiro-viajante ou rotas de veículos, com preparação *crossover* entre períodos adjacentes considerando a preparação dependente da sequência e não trian-

gular, permitindo sub-rotas. Dois casos especiais de sub-rotas são referidas: sub-rotas *alpha* e desconexas, estas últimas não podem ser parte de uma solução factível. Por tal motivo, os autores desenvolvem um método para identificar e eliminar sub-rotas desconexas, que é importante para problemas grandes. Se alguma sub-ruta desconexa é encontrada, um corte global é adicionado que a elimina e impeça que aconteça de novo. Os testes computacionais mostram que a preparação *crossover* é importante para obter melhores soluções para os modelos *big-bucket*.

Kopanos et al. (2012) têm como objetivo desenvolver um método para planejamento e sequenciamento de produção simultânea de processos contínuos, paralelos, com tempos e custos de preparação, onde os itens são classificados em famílias. O método considera que a preparação é dependente do sequenciamento para famílias de itens e não dependente do sequenciamento quando os itens pertencem a mesma família. A formulação proposta integra três diferentes abordagens de modelagem: i) tempo discreto para calcular o custo de estoque e *backlogging* no planejamento de produção; ii) tempo contínuo com sequenciamento usando variáveis de prioridade imediata para o sequenciamento das famílias; e iii) um tipo de dimensionamento de lotes com restrições de capacidade para o sequenciamento dos itens. A formulação proposta encontra soluções muito boas para problemas com centenas de itens em 5 minutos. As soluções ótimas também foram encontradas em tempos razoáveis. Além disso, a formulação proposta fornece melhores soluções que as obtidas usando ferramentas comerciais.

Camargo et al. (2012) propõem três formulações para o problema de dimensionamento e sequenciamento de lotes com dois estágios, e uma delas considera a preparação *crossover* que é realizada por uma representação contínua do tempo. Os resultados computacionais mostram que apesar de ter o pior desempenho em tempos computacionais, a formulação com preparação *crossover* é a mais flexível ao incorporar características de preparação.

Kaczmarczyk (2013) apresenta um novo modelo de programação inteira mista para o problema de dimensionamento de lotes proporcional com máquinas paralelas idênticas e preparação *crossover*. Aqui também é permitido longos tempos de preparação, como em Suerie (2006). Os experimentos computacionais, testados em 15 instâncias de 5 itens e 30 períodos, mostram uma maior redução no custo, de 3,4%, para 5 máquinas, que diminui com o aumento do número de

máquinas.

Fiorotto et al. (2014) e Fiorotto et al. (2017) se baseiam nas ideias de Menezes et al. (2010) e Mohan et al. (2012) e apresentam modelos baseados no problema de localização de facilidades. Os autores desenvolvem formulações com *crossover* limitando o tempo emprestado e diminuindo a quantidade de variáveis binárias. Os autores também adicionam restrições de quebra de simetria à duas formulações para eliminar a existência de possíveis soluções com o mesmo valor ótimo para a função objetivo. Os autores usam as instâncias de Trigeiro et al. (1989) e concluem que as restrições de quebra de simetria são muito eficazes para a formulação proposta com base em Mohan et al. (2012), mas não para a formulação proposta com base em Menezes et al. (2010). Além disso, os autores obtêm uma diminuição nos custos totais de 2, 3% e 4% quando a capacidade diminui 5% e 10%, respectivamente em relação ao problema clássico. Em conclusão, adicionando a preparação *crossover* pode-se encontrar mais soluções factíveis e de melhor qualidade em relação ao problema clássico.

2.3 Problemas de Dimensionamento de Lotes com Preparações *Carryover* e *Crossover* (CLSP-SCC)

Nesta seção, apresenta-se alguns trabalhos da literatura que abordam o CLSP-SCC.

Sung e Maravelias (2008) consideram o problema CLSP-SCC *big-bucket* com preparações independentes da sequência, períodos de tempo não uniformes e os tempos de preparação podem ser maiores do que os períodos. Os autores apresentam duas formulações, a primeira é para tempos de preparação curtos e a segunda uma extensão para preparações curtas e longas e mostram de forma detalhada como lidar com a fronteira dos períodos usando a preparação *crossover* supondo que o custo de preparação é considerado no início da preparação. Os autores também discutem como a formulação pode ser estendida a modelos com períodos de tempo de tamanho não uniforme, tempo ocioso, famílias de itens, *backlogging* e perda de vendas; adicionando em cada caso restrições que satisfazem as condições exigidas. Por último, os autores concluem que o modelo proposto (aplicado em indústrias químicas) é computacionalmente eficiente e pode ser usado para solucionar aplicações de tamanho médio.

Mohan et al. (2012) incluem a possibilidade de preparação *crossover* para a formulação proposta por Suerie e Stadtler (2003) que trata o problema com preparação *carryover* e compara a melhoria obtida ao adicionar a preparação *crossover* na formulação com preparação *carryover*. Os autores ainda incluem variáveis que indicam quanto tempo é emprestado de um período a outro e o tempo para terminar a preparação quando tem-se preparação *crossover*. Os resultados computacionais mostram que implementar a preparação *crossover* melhora a solução em duas formas; a primeira é que as instâncias que foram infactíveis com a formulação de Suerie e Stadtler (2003) podem gerar soluções factíveis quando se incluem a preparação *crossover*; a segunda é que, inclusive para soluções factíveis usando a formulação de Suerie e Stadtler (2003), esta nova formulação fornece custos menores.

Belo-Filho et al. (2014) propõem duas formulações para o CLSP-SCC com *backlogging*. A primeira formulação proposta é baseada nos modelos de Suerie e Stadtler (2003) e Sung e Maravelias (2008) e destina-se a ser mais compacta, eliminando duas variáveis (apresentadas no modelo de Sung e Maravelias (2008)). A segunda formulação propõe a desagregação no índice de tempo para definir o tempo de início e de conclusão da preparação. Os autores também resolvem um exemplo com 4 itens e um horizonte de planejamento composto por 6 períodos não uniformes obtendo a mesma solução ótima para as duas formulações propostas e a de Sung e Maravelias (2008). Por último, os autores usam dois conjuntos de testes computacionais, o primeiro teste considera itens com longos tempos de preparação para medir o impacto da preparação *crossover* e o segundo teste permite uma comparação de desempenho de uma formulação da literatura e as propostas. Os resultados mostram que a preparação *crossover* é necessária e usa o tempo ocioso de forma mais eficiente, concluindo assim que as formulações propostas obtêm melhores resultados que as formulações da literatura.

Cheng-Lung (2015) estuda o CLSP-SCC com único estágio, única máquina, multi-itens e *backlogging*. O autor desenvolve uma heurística que combina a *Relax-and-Fix* e *Fix-and-Optimize* (denotada por RFFO). Os seus resultados computacionais mostram os benefícios de usar a heurística RFFO.

Ramya et al. (2016) propõem modelos matemáticos para o CLSP-SCC para dois cenários; i) custos de preparação e de estoque dependem dos itens mas não dependem do tempo; ii)

custos de preparação e de estoque dependem dos itens e do tempo. Os autores usam as mesmas premissas básicas que Mohan et al. (2012) e incluem mais variáveis binárias para indicar as diversas características em que a preparação pode ser feita.

Capítulo 3

Análise de formulações para o problema de dimensionamento de lotes com preparações *carryover* e *crossover*

Neste capítulo apresenta-se os modelos matemáticos para o problema de dimensionamento de lotes com restrição de capacidade, considerando primeiro a formulação clássica para o CLSP (sem preparações *carryover* e *crossover*), bem como, uma reformulação baseada no problema de localização de facilidades (Krarup e Bilde (1977)). A seguir, apresentam-se duas formulações para o CLSP com preparações *carryover* e *crossover* baseadas nas ideias propostas em Suerie e Stadtler (2003), Menezes et al. (2010) e Mohan et al. (2012). Em seguida, com base em Fiorotto et al. (2014), propõem-se duas formulações nas quais evita-se definir variáveis binárias para a preparação *crossover* e com base em Fiorotto et al. (2014) e Fiorotto et al. (2017) uma formulação em que a variável de preparação *crossover* é contínua. São propostas restrições para quebrar a simetria que surge pela presença de soluções ótimas alternativas. Estas restrições também são baseadas nas ideias propostas por Fiorotto et al. (2014) e Fiorotto et al. (2017). Com a finalidade de comparar as formulações apresentadas, são mostradas as relações que existem entre elas. E, por último, resolve-se um exemplo usando as formulações apresentadas.

3.1 Modelos da literatura sem preparações *carryover* e *crossover*

Nesta seção, apresenta-se a formulação clássica para o problema de dimensionamento de lotes com restrição de capacidade baseada em Trigeiro et al. (1989). Para isso, definem-se:

Os parâmetros:

$I = \{1, \dots, n\}$: conjunto de itens;

$T = \{1, \dots, m\}$: conjunto de períodos;

d_{it} : demanda do item i no período t ;

$sd_{it\tau}$: soma da demanda para o item i , desde o período t até o período τ ($\tau \geq t$);

hc_{it} : custo unitário de estoque do item i no período t ;

sc_{it} : custo de preparação para o item i no período t ;

vc_{it} : custo de produção do item i no período t ;

st_{it} : tempo da preparação do item i ;

vt_{it} : tempo de produção do item i ;

C_t : capacidade (em unidades de tempo) no período t .

As variáveis:

x_{it} : quantidade produzida do item i no período t ;

s_{it} : quantidade de estoque do item i ao final do período t ;

y_{it} : variável binária de preparação para o item i no período t ($y_{it} = 1$ se uma preparação é feita para o item i no período t ; e 0, caso contrário);

- Formulação Clássica (CF)

$$v(CF) = \min \sum_{i \in I} \sum_{t \in T} (hc_{it}s_{it} + sc_{it}y_{it} + vc_{it}x_{it}) \quad (3.1)$$

sujeito a:

$$s_{i,t-1} + x_{it} = s_{it} + d_{it} \quad \forall i \in I, t \in T \quad (3.2)$$

$$\sum_{i \in I} (st_{it}y_{it} + vt_{it}x_{it}) \leq C_t \quad \forall t \in T \quad (3.3)$$

$$x_{it} \leq \min\{(C_t - st_{it})/vt_{it}, sd_{itm}\}y_{it} \quad \forall i \in I, t \in T \quad (3.4)$$

$$x_{it} \geq 0, y_{it} \in \{0, 1\}, s_{it} \geq 0, s_{i0} = 0, s_{im} = 0 \quad \forall i \in I, t \in T. \quad (3.5)$$

A função objetivo (3.1) minimiza os custos totais de produção, de preparação e de estoque. Nas restrições (3.2) têm-se que a quantidade demandada do item i no período t tem que ser igual a quantidade produzida mais o estoque do período anterior menos a quantidade a ser estocada; i.e., garante o balanço do estoque de itens em cada período. As restrições (3.3) fornecem um limite (capacidade da máquina) para o tempo de produção e de preparação em cada período. Se o item i é produzido no período t então (3.4) garantem que a máquina deve estar preparada para produzir este item neste período. Por último, as restrições (3.5) definem os domínios das variáveis.

Vários artigos têm utilizado reformulações alternativas para o problema clássico de dimensionamento de lotes. Dentre estas, duas formulações têm sido bastante utilizadas. A primeira, proposta por Eppen e Martin (1987), reformula o problema como um problema do caminho mínimo. A segunda, estudada em Krarup e Bilde (1977), consiste na reformulação baseada no Problema de Localização de Facilidades.

Considerando que a maioria dos autores que estudam o problema de dimensionamento de lotes com preparação *carryover* e *crossover* utilizam a reformulação baseada no problema de localização de facilidades, utiliza-se ao longo deste capítulo esta reformulação para todas as formulações que são apresentadas.

Para tal reformulação definem-se:

Parâmetros:

cs_{itk} : custo de produção e de estoque para produzir uma unidade do item i no período t para satisfazer a demanda do período k

$$cs_{itk} = (vc_{it} + \sum_{u=t}^{k-1} hc_{iu})d_{ik}$$

Variáveis:

x_{itk} : fração da demanda do item i no período k produzida no período t

- Reformulação como um Problema de Localização de Facilidades (Formulação $F0$)

$$v(F0) = \min \sum_{i \in I} \sum_{t \in T} sc_{it}y_{it} + \sum_{i \in I} \sum_{t \in T} \sum_{k=t}^m cs_{itk}x_{itk} \quad (3.6)$$

sujeito a:

$$\sum_{k=1}^t x_{ikt} = 1, \quad \forall i \in I, t \in T | d_{it} > 0 \quad (3.7)$$

$$\sum_{i \in I} (st_{it}y_{it} + \sum_{k=t}^m vt_{it}d_{ik}x_{itk}) \leq C_t, \quad \forall t \in T \quad (3.8)$$

$$x_{itk} \leq y_{it}, \quad \forall i \in I, t \in T, k \in T, k \geq t \quad (3.9)$$

$$x_{itk} \geq 0, y_{it} \in \{0, 1\}, \quad \forall i \in I, t \in T, k \in T, k \geq t. \quad (3.10)$$

A função objetivo (3.6) minimiza o custo total (custo de preparação, custo de produção e estoque). As restrições (3.7) garantem que a demanda é atendida em cada período. A soma total dos tempos de preparação e de produção são limitados pela capacidade, segundo (3.8). As restrições (3.9) asseguram que se uma preparação não é feita no período t então não é permitida a produção. E finalmente, os domínios das variáveis são definidos por (3.10).

3.2 Modelos baseados na literatura com preparações *carryover* e *crossover*

Nesta seção apresenta-se as formulações para o CLSP-SCC baseadas nas ideias propostas por Suerie e Stadtler (2003), Menezes et al. (2010) e Mohan et al. (2012). Observa-se que as formulações que são apresentadas não são exatamente aquelas propostas nos referidos artigos, mas sim as ideias para modelar as preparações *carryover* e *crossover*. Para obter uma correta formulação do problema, ao longo deste capítulo, assume-se que quando uma preparação é dividida entre os períodos $t - 1$ e t , $v_{i,t-1} = 1$, o custo e tempo de preparação a serem considerados, tanto para a função objetivo como para as restrições de capacidade, são aqueles do período em que a produção é finalizada, i.e. no período t .

São definidas as seguintes variáveis:

$zeta_{it}$: variável binária, $zeta_{it} = 1$ se a preparação *carryover* para o item i é feita do período t para $t + 1$; e 0, caso contrário;

v_{it} : variável binária, $v_{it} = 1$ se a preparação *crossover* para o item i é feita entre o período t e o período $t + 1$; e 0, caso contrário;

u_t : tempo extra emprestado do período t para a preparação no período $t + 1$;

Q_t : variável binária que indica se o período t é ocioso ou não.

A primeira formulação baseia-se em Suerie e Stadtler (2003) para modelar a preparação *carryover* e em Menezes et al. (2010) para modelar a preparação *crossover*. As condições estabelecidas para determinar se um período é ocioso ou não estão baseadas em Mohan et al. (2012).

- Formulação $F1$

$$v(F1) = \min \sum_{i \in I} \sum_{t \in T} sc_{it} y_{it} + \sum_{i \in I} \sum_{t \in T} \sum_{k=t}^m cs_{itk} x_{itk} \quad (3.11)$$

sujeito a:

$$\sum_{k=1}^t x_{ikt} = 1, \quad \forall i \in I, t \in T | d_{it} > 0 \quad (3.12)$$

$$\sum_{i \in I} st_{it} y_{it} + \sum_{i \in I} \sum_{k=t}^m vt_{it} d_{ik} x_{itk} + u_t \leq C_t + u_{t-1}, \quad \forall t \in T \quad (3.13)$$

$$x_{itk} \leq y_{it} + zeta_{i,t-1}, \quad \forall i \in I, t \in T, k \in T, k \geq t \quad (3.14)$$

$$\sum_{i \in I} (v_{i,t-1} + zeta_{i,t-1}) \leq 1, \quad \forall t \in T \quad (3.15)$$

$$zeta_{it} \leq zeta_{i,t-1} + y_{it} + v_{i,t-1}, \quad \forall i \in I, t \in T \quad (3.16)$$

$$u_{t-1} \leq \sum_{i \in I} st_i v_{i,t-1}, \quad \forall t \in T \quad (3.17)$$

$$v_{i,t-1} \leq y_{it}, \quad \forall i \in I, \forall t \in T \quad (3.18)$$

$$zeta_{i,t-1} + zeta_{it} \leq 1 + Q_t, \quad \forall i \in I, t \in T \quad (3.19)$$

$$y_{it} + Q_t \leq 1, \quad \forall i \in I, \forall t \in T \quad (3.20)$$

$$y_{it}, v_{it}, zeta_{it}, Q_t \in \{0, 1\}, u_t \geq 0, \quad \forall i \in I, t \in T \quad (3.21)$$

$$v_{i0} = zeta_{i0} = u_0 = 0, x_{itk} \geq 0, \quad \forall i \in I, t \in T, k \in T, k \geq t. \quad (3.22)$$

A função objetivo (3.11) minimiza os custos de preparação, de produção e estoque. As restrições (3.12) garantem que a demanda seja satisfeita e (3.13) são as restrições de capacidade em que a soma total dos tempos de preparação e de produção considerando também o tempo a ser emprestado para o próximo período, u_t , é limitada pela capacidade do período, C_t , mais o tempo que foi emprestado desde o período anterior, u_{t-1} , em caso de ter preparação *crossover*. As restrições de preparação (3.14) não permitem produção no período t a menos que uma preparação seja feita ou tenha preparação *carryover* desde o período anterior $t-1$. As restrições (3.15) estabelecem que pode ocorrer preparações *carryover* ou *crossover* para apenas um item em cada período. As restrições (3.16) indicam que pode ter preparação *carryover* desde o período t até $t+1$ apenas se houver uma preparação no período t ou se tiver uma preparação

carryover desde o período $t - 1$ ou uma preparação *crossover* entre os períodos $t - 1$ e t . As restrições (3.17) limitam o tempo emprestado do período $t - 1$ usado no período t ao valor do tempo de preparação do item para o qual é realizado a preparação *crossover*. As restrições (3.18) asseguram que só poder ter preparação *crossover* entre período $t - 1$ e o período t se houver preparação no período t . As restrições (3.19) garantem que se tem preparação *carryover* para o item i desde o período $t - 1$ até t e desde t até $t + 1$ então o período t é ocioso. As restrições (3.20) indicam que se há uma preparação então período não é ocioso. E por último, as restrições (3.21) e (3.22) definem os domínios das variáveis.

A segunda formulação baseia-se em Mohan et al. (2012) para modelar a preparação *crossover* e utiliza as ideias propostas em Suerie e Stadtler (2003) para modelar a preparação *carryover*. Para esta formulação, o tempo de preparação em caso de preparação *crossover*, entre o período $t - 1$ e o período t , será dividido em tempo emprestado do período $t - 1$ e tempo usado no período t .

Assim, são definidas as seguintes variáveis:

z_{it} : variável binária, $z_{it} = 1$ se uma preparação completa para o item i é feita no período t , e 0, caso contrário;

$zeta'_{it}$: variável binária, $zeta'_{it} = 1$ se a preparação *carryover* para o item i é feita desde o período $t - 1$ até t , e 0, caso contrário;

$l_{i,t-1}$: tempo extra emprestado no período t para começar a preparação do item i ;

f_{it} : tempo total usado para completar a preparação do item i no período t ;

v'_{it} : variável binária, $v'_{it} = 1$ se a preparação *crossover* para o item i é feita entre o período $t - 1$ e o período t , e 0, caso contrário. (Se $v'_{it} = 1$ então o tempo de preparação para o item i será dividido da seguinte forma $l_{i,t-1} + f_{it} = st_{it}$).

- Formulação F2

$$v(F2) = \min \sum_{i \in I} \sum_{t \in T} (sc_{it}z_{it} + sc_{it}v'_{it}) + \sum_{i \in I} \sum_{t \in T} \sum_{k=t}^m cs_{itk}x_{itk} \quad (3.23)$$

sujeito a:

$$\sum_{k=1}^t x_{ikt} = 1, \quad \forall i \in I, t \in T | d_{it} > 0 \quad (3.24)$$

$$\sum_{i \in I} st_{it} z_{it} + \sum_{i \in I} \sum_{k=t}^m vt_{it} d_{ik} x_{itk} + \sum_{i \in I} l_{it} + \sum_{i \in I} f_{it} \leq C_t, \quad \forall t \in T \quad (3.25)$$

$$x_{itk} \leq z_{it} + zeta'_{it} + v'_{it}, \quad \forall i \in I, t \in T, k \in T, k \geq t \quad (3.26)$$

$$f_{it} + l_{i,t-1} = st_{it} v'_{it}, \quad \forall i \in I, \forall t \in T \quad (3.27)$$

$$\sum_{i \in I} (v'_{it} + zeta'_{it}) \leq 1, \quad \forall t \in T \quad (3.28)$$

$$zeta'_{it} \leq zeta'_{i,t-1} + z_{i,t-1} + v'_{i,t-1}, \quad \forall i \in I, t \in T \quad (3.29)$$

$$zeta'_{it} + zeta'_{i,t+1} \leq 1 + Q_t, \quad \forall i \in I, t \in T \quad (3.30)$$

$$z_{it} + Q_t \leq 1, \quad \forall i \in I, \forall t \in T \quad (3.31)$$

$$z_{it}, v'_{it}, zeta'_{it}, Q_t \in \{0, 1\}, x_{itk} \geq 0, \quad \forall i \in I, t \in T, k \in T, k \geq t \quad (3.32)$$

$$zeta'_{i0} = zeta'_{i,T+1} = v'_{i0} = z_{i0} = l_{i0} = 0, \quad \forall i \in I, t \in T. \quad (3.33)$$

A função objetivo (3.23) minimiza os custos de preparação completa, de preparação *crossover* e de estoque. As restrições (3.24) são as mesmas que (3.12). As restrições (3.25) garantem que os tempos totais de preparação, de produção, mais o tempo emprestado para o próximo período para começar uma preparação *crossover* (caso houver), mais o tempos usado para completar uma preparação do período anterior é limitada pela capacidade disponível do período. As restrições de preparação (3.26) não permitem produção no período t a menos que uma preparação completa seja feita no período t ou tenha preparação *carryover* desde o período anterior $t - 1$ ou preparação *crossover* entre os períodos $t - 1$ e t . Se tem uma preparação *crossover* entre os períodos $t - 1$ e t para o item i então por (3.27) o tempo de preparação para o item i no período t deve ser igual a soma do tempo emprestado do período $t - 1$ mais o tempo usado em t para terminá-lo. As restrições (3.28) estabelecem que pode ter preparação *carryover* ou preparação

crossover para apenas um item em cada período. As restrições (3.29) indicam que pode ocorrer preparação *carryover* desde o período $t - 1$ para o período t apenas se tiver preparação *carryover* desde o período $t - 2$ ou se houver uma preparação completa no período $t - 1$ ou preparação *crossover* entre o período $t - 2$ e o período $t - 1$. As restrições (3.30) garantem que se tem preparação *carryover* para o item i desde o período $t - 1$ até t e desde t até $t + 1$ então o período t é ocioso. As restrições (3.31) indicam que um período é ocioso se não tiver uma preparação completa. As restrições (3.32) e (3.33) definem os domínios das variáveis.

3.3 Modelos propostos

O primeiro modelo proposto consiste em uma versão restrita da formulação $F1$, baseada no modelo proposto por Fiorotto et al. (2014) que considera apenas preparação *crossover*. A ideia principal é limitar o tempo emprestado, para a preparação *crossover*, em cada período, pelo menor valor dos tempos de preparação (em caso de não ter preparação *carryover*). Evitando assim a necessidade de adicionar variáveis binárias para formular a preparação *crossover*. Observa-se que a contribuição desta seção está na extensão destas ideias para o problema com preparação *carryover* e *crossover*. Note que, nesta formulação, o valor ótimo da função objetivo será maior (ou igual) quando comparado com as formulações $F1$ e $F2$ (isto é, $v(F3) \geq v(F1) = v(F2)$, ver Seção 3.4).

- Formulação $F3$ (Versão restrita da formulação $F1$)

$$v(F3) = \min \sum_{i \in I} \sum_{t \in T} sc_{it} y_{it} + \sum_{i \in I} \sum_{t \in T} \sum_{k=t}^m cs_{itk} x_{itk} \quad (3.34)$$

sujeito a:

$$\sum_{k=1}^t x_{ikt} = 1, \quad \forall i \in I, t \in T | d_{it} > 0 \quad (3.35)$$

$$\sum_{i \in I} st_{it} y_{it} + \sum_{i \in I} \sum_{k=t}^m vt_{it} d_{ik} x_{itk} + u_t \leq C_t + u_{t-1}, \quad \forall t \in T \quad (3.36)$$

$$x_{itk} \leq y_{it} + zeta_{i,t-1}, \quad \forall i \in I, t \in T, k \in T, k \geq t \quad (3.37)$$

$$\sum_{i \in I} zeta_{it} \leq 1, \quad \forall t \in T \quad (3.38)$$

$$zeta_{it} \leq zeta_{i,t-1} + y_{it}, \quad \forall i \in I, t \in T \quad (3.39)$$

$$u_{t-1} \leq \min_{j \in I} \{st_{jt}\} (1 - \sum_{i \in I} zeta_{i,t-1}), \quad \forall i \in I, t \in T \quad (3.40)$$

$$zeta_{i,t-1} + zeta_{it} \leq 1 + Q_t, \quad \forall i \in I, t \in T \quad (3.41)$$

$$y_{it} + Q_t \leq 1, \quad \forall i \in I, \forall t \in T \quad (3.42)$$

$$zeta_{it}, y_{it}, Q_t \in \{0, 1\}, x_{itk} \geq 0, \quad \forall i \in I, t \in T, k \in T, k \geq t \quad (3.43)$$

$$u_t \geq 0, u_0 = 0, zeta_{i0} = 0, \quad \forall i \in I, t \in T. \quad (3.44)$$

A função objetivo (3.34) e as restrições (3.35), (3.36), (3.37), (3.41) e (3.42) são similares a (3.11), (3.12), (3.13), (3.14), (3.19) e (3.20), respectivamente. As restrições (3.38) indicam que em cada período é permitido apenas uma preparação *carryover*. As restrições (3.39) indicam que só podemos ter preparação *carryover* desde o período t até $t + 1$ se tiver uma preparação *carryover* desde o período $t - 1$ ou uma preparação no período t . As restrições (3.40) indicam que se ocorre uma preparação *crossover* entre os períodos $t - 1$ e t então o tempo extra emprestado é limitado pelo menor valor dos tempos de preparação, caso tenha uma preparação *carryover* o tempo emprestado será 0. Finalmente os domínios das variáveis são definidos em (3.43) e (3.44).

- Formulação *F4* (Versão restrita da formulação *F1*)

Esta segunda formulação proposta, também baseada na formulação *F1* e em Fiorotto et al. (2014) é uma extensão da formulação anterior. A ideia principal consiste em limitar o tempo extra que pode ser emprestado para a preparação *crossover* (entre os períodos $t - 1$ e t) pelo menor tempo de preparação ativo no período t (em caso de não ter preparação *carryover* desde o período $t - 1$ até o período t).

$$v(F4) = \min \sum_{i \in I} \sum_{t \in T} sc_{it} y_{it} + \sum_{i \in I} \sum_{t \in T} \sum_{k=t}^m cs_{itk} x_{itk} \quad (3.45)$$

sujeito a:

$$\sum_{k=1}^t x_{ikt} = 1, \quad \forall i \in I, t \in T | d_{it} > 0 \quad (3.46)$$

$$\sum_{i \in I} st_{it} y_{it} + \sum_{i \in I} \sum_{k=t}^m vt_{it} d_{ik} x_{itk} + u_t \leq C_t + u_{t-1}, \quad \forall t \in T \quad (3.47)$$

$$x_{itk} \leq y_{it} + zeta_{i,t-1}, \quad \forall i \in I, t \in T, k \in T, k \geq t \quad (3.48)$$

$$\sum_{i \in I} zeta_{i,t-1} \leq 1, \quad \forall t \in T \quad (3.49)$$

$$zeta_{it} \leq zeta_{i,t-1} + y_{it}, \quad \forall i \in I, t \in T \quad (3.50)$$

$$u_{t-1} \leq st_{it} y_{it} + \max_{j \in I} \{st_{jt}\} (1 - y_{it}), \quad \forall i \in I, t \in T \quad (3.51)$$

$$u_{t-1} \leq M(1 - zeta_{i,t-1}), \quad \forall i \in I, t \in T \quad (3.52)$$

$$zeta_{i,t-1} + zeta_{it} \leq 1 + Q_t, \quad \forall i, t \in T \quad (3.53)$$

$$y_{i,t} + Q_t \leq 1, \quad \forall i \in I, \forall t \in T \quad (3.54)$$

$$zeta_{it}, y_{it}, Q_t \in \{0, 1\}, x_{itk} \geq 0, \quad \forall i \in I, t \in T \quad (3.55)$$

$$u_t \geq 0, u_0 = 0, zeta_{i0} = 0, \quad \forall i \in I, t \in T, k \in T, k \geq t. \quad (3.56)$$

A função objetivo (3.45) e as restrições (3.46), (3.47), (3.48), (3.49), (3.50), (3.53) e (3.54) são semelhantes as restrições apresentadas anteriormente. As restrições (3.51) e (3.52) indicam que se houver uma preparação *carryover* desde o período t então, por (3.52), o tempo extra emprestado é 0, caso contrário, por (3.51), é limitado pelo menor tempo de preparação ativo. Observe que M é uma constante maior do que os tempos de preparação. Finalmente, os domínios das variáveis são definidos em (3.55) e (3.56).

Observe que, como esta formulação difere da formulação $F3$ apenas na limitação do tempo a ser emprestado, então terá também valor ótimo da função objetivo maior (ou igual) comparado

com as formulações $F1$ e $F2$, ou seja também trata-se de uma versão restrita da formulação $F1$

- Formulação $F5$

Analisando as restrições (3.15), (3.17) e (3.18), da formulação $F1$, observa-se que as restrições de integralidade sobre v_{it} podem ser omitidas. A ideia é que sempre é factível limitar o tempo permitido para a preparação *crossover* pelo maior tempo de preparação ativo em um período. Se um menor tempo é permitido (devido à capacidade disponível no período previo) ou necessário, a variável u_t pode assumir sempre o menor valor. Esta restrição ainda é imposta se deixa-se de lado as restrições de integralidade sobre a variável v_{it} . O lado direito da restrição (3.17) não pode ser maior que o maior tempo de preparação ativo por causa das restrições (3.15) e (3.18) mesmo se a variável v_{it} deixa de ser binária. Assim, a formulação $F5$ baseada na formulação $F1$, consiste da função objetivo (3.11), sujeito às restrições (3.12)-(3.22) substituindo $v_{it} \in \{0, 1\}$ em (3.21) por:

$$v_{it} \geq 0. \quad (3.57)$$

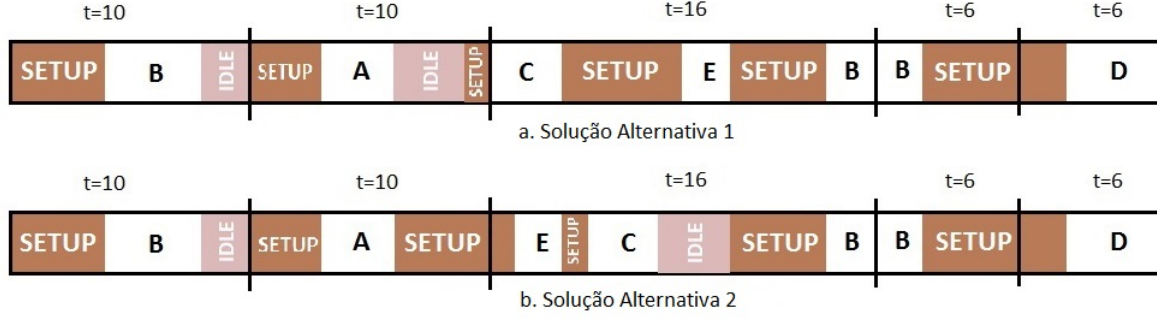
Observe que, nesta formulação, a variável v_{it} não indica se é realizada uma preparação *crossover* ou não, ela é usada para limitar o tempo a ser emprestado, i.e., a variável v_{it} indica a fração de cada tempo de preparação usado para limitar o tempo que pode ser emprestado para a preparação *crossover*. Além disso, observe que as restrições (3.15) são necessárias para garantir que no caso de ter preparação *carryover* não ocorra preparação *crossover*.

- Formulação $F1$ com quebra de simetria: $F1'$

É possível que, para as formulações $F1$ e $F2$, existam soluções alternativas com o mesmo valor da função objetivo, podendo gerar um tempo computacional maior na resolução dos problemas. A Figura 3.1 mostra um exemplo de possíveis soluções simétricas. Observe que têm-se duas soluções alternativas produzindo os mesmos itens, consumindo a mesma capacidade com o mesmo custo de produção. Note que as duas soluções apresentam preparação *crossover* entre os períodos 2 e 3. No entanto, os itens utilizados para a preparação *crossover* são diferentes.

Em Fiorotto et al. (2014) e Fiorotto et al. (2017) foram propostas restrições de quebra de simetria para problemas com preparação *crossover* e neste trabalho estende-se essas restrições

Figura 3.1: Exemplo de soluções simétricas.



para problemas com preparações *carryover* e *crossover*.

Com o objetivo de excluir as soluções alternativas existentes impõe-se que o item com o maior tempo de preparação ativo no período $t + 1$ seja o escolhido para a preparação *crossover* entre os períodos t e $t + 1$. Como a variável u_t pode tomar valores menores que este então a condição acima será sempre factível. Para impor esta condição, reordena-se os itens em ordem decrescente com respeito a seus tempos de preparação e adiciona-se as seguintes restrições na formulação F1:

$$v_{1,t-1} \geq y_{1t} - \sum_{k \in I} zeta_{k,t-1} - \sum_{k \in I} zeta_{kt}, \quad \forall t \in T \setminus \{1\} \quad (3.58)$$

$$v_{i,t-1} \geq y_{it} - \sum_{j=1}^{i-1} y_{jt} - \sum_{k \in I} zeta_{k,t-1} - \sum_{k \in I} zeta_{kt}, \quad \forall i \in I \setminus \{1\}, \forall t \in T \setminus \{1\}. \quad (3.59)$$

As restrições (3.58) e (3.59) impõem que a preparação *crossover* em cada período é realizada para o item com maior tempo de preparação ativo. Observe que como os itens estão ordenados de forma decrescente de acordo com o tempo de preparação, o item 1 tem o maior valor de tempo de preparação em cada período. Assim, a restrição (3.58) força a preparação *crossover* (quando não tem-se preparação *carryover* entre os períodos $t - 1$ e t , e t e $t + 1$) entre os períodos $t - 1$ e t para o item 1 (isto é, o item com maior tempo de preparação) se este item é preparado no período t . A restrição (3.59) indica que pode ser realizada uma preparação *crossover* entre os períodos $t - 1$ e t para o item i apenas se este item é preparado no período t e se nenhum outro item com maior tempo de preparação for preparado neste período (quando não tem preparação

carryover entre os períodos $t - 1$ e t , e t e $t + 1$). A condição de não ter preparação *carryover* entre os períodos $t - 1$ e t , e t e $t + 1$ é imposta pelo fato de que existe a possibilidade de que o item com maior tempo de preparação, k , no período t , seja tal que $zeta_{kt} = 1$, neste caso, se fixarmos $v_{k,t-1} = 1$ poderíamos gerar uma solução com um custo maior pois teria que ser feita uma nova preparação para satisfazer a demanda do período $t + 1$, caso contrário é pago um custo do estoque.

Note que, embora nos resultados computacionais não haja variação dos tempos de preparação com respeito ao tempo, a reordenação para o caso quando dependem do tempo é feita em cada período.

- Formulação $F2$ com quebra de simetria: $F2'$

Para a formulação $F2$ observa-se que também pode haver soluções alternativas com o mesmo valor da função objetivo. Assim, também foram propostas restrições de quebra de simetria para esta formulação em que a preparação *crossover* é realizada sempre para o item com maior tempo de preparação ativo. Como para a formulação anterior, reordena-se os itens em ordem decrescente (reordenação feita em cada período) com respeito a seus tempos de preparação e adiciona-se as seguintes restrições na formulação $F2$:

$$\sum_{j=1}^{i-1} v'_{jt} \geq z_{it} - \sum_{k \in I} zeta'_{k,t-1} - \sum_{k \in I} zeta'_{kt} \quad \forall t \in T, i \in I \setminus \{1\} \quad (3.60)$$

As restrições (3.60) indicam que se existe uma preparação completa para o item i (e não tem-se preparação *carryover* no período atual nem no período seguinte) significa que deve haver uma preparação parcial para algum item $j < i$ (considerando uma ordem decrescente em relação aos tempos de preparação). As restrições (3.60) estabelecem assim, que a preparação *crossover* será realizada para o item com maior tempo de preparação ativo.

3.4 Resultados teóricos

Nesta seção prova-se as relações existentes entre cada uma das formulações. Note que $S(F)$ é o conjunto de soluções factíveis para a Formulação F .

Lema 3.1 $v(F0) \geq v(F3) \geq v(F4) \geq v(F5) = v(F1) = v(F2)$

Demonstração:

Para $v(F0) \geq v(F3)$, se na Formulação $F3$ fixarmos $zeta_{it} = 0$, $v_{it} = 0 \forall i \in I$, $\forall t \in T$ e $u_t = 0$, $\forall t \in T$ então obtém-se a Formulação $F0$, portanto, $S(F0) \subseteq S(F3)$ e, consequentemente, $v(F0) \geq v(F3)$.

A Formulação $F3$ difere da $F4$ na limitação do tempo a ser emprestado, então, supondo que não ocorra preparação *carryover* no período t e comparando as restrições (3.40) e (3.51), temos $\min_{j \in I} \{st_{jt}\} \leq st_{it} + \max_{j \in I} \{st_{jt}\}(1 - y_{it})$, $\forall i \in I$. Daí, $S(F3) \subseteq S(F4)$ e, portanto, $v(F3) \geq v(F4)$.

Para a desigualdade $v(F4) \geq v(F5)$ na Formulação $F4$, o tempo a ser emprestado é limitado pelo menor tempo de preparação ativo enquanto que na Formulação $F5$ é limitado pelo maior tempo de preparação ativo, assim $S(F4) \subseteq S(F5)$.

Para mostrar que a igualdade $v(F5) = v(F1)$ é válida observe que apesar da variável v_{it} não estar na função objetivo ela tem que satisfazer as restrições (3.15), (3.17) e (3.18). De (3.17) sabe-se que o tempo que pode ser emprestado é limitado pelo maior tempo de preparação ativo. Então, existe uma solução ótima para a formulação $F1$ em que o lado direito de (3.17) é $\sum_{i \in I} st_{it}v_{i,t-1} = \max_{i \in I | y_{it}=1} \{st_{it}\}$, assim, quando $v_{it} \geq 0$ no lado direito de (3.17), $\max_{i \in I | y_{it}=1} \{st_{it}\}$ ainda é o valor máximo. Portanto, quando a variável v_{it} deixa de ser binária obtém o mesmo valor na função objetivo como quando é binária.

As Formulações $F1$ e $F2$ são equivalentes pois ambas formulações valem para o mesmo problema, i.e., se para a formulação $F1$ tem-se uma preparação *crossover* entre os períodos $t - 1$ e t então, por (3.18), deve ter tido uma preparação no período t , i.e. $y_{it} = 1$, e portanto, o valor pago na função objetivo é st_{it} que é igual para a Formulação $F2$ pois neste caso tem-se $z_{it} = 0$ e $v_{it} = 1$. ■

Lema 3.2 (*Quebra de simetria da Formulação $F1$*) Dada uma solução factível para $F1$, com uma preparação *crossover* para o item i entre os períodos t e $t + 1$, pode-se construir uma solução factível alternativa com o mesmo valor da função objetivo se existir, no período $t + 1$, uma preparação ativa para outro item i' com tempo de preparação igual ou maior e não ocorrer

preparação carryover, para nenhum item, desde o período t até o período $t+1$ e desde o período $t+1$ até o período $t+2$ (i.e. $st'_{i',t+1} \geq st_{i,t+1}$, $y'_{i',t+1} = 1$, $zeta_{kt} = 0$ e $zeta_{k,t+1} = 0$, $\forall k \in I$).

Esta nova solução pode ser construída como segue:

$$v'_{i't} = 1,$$

$$v_{it} = 0,$$

As outras variáveis mantêm-se iguais.

Demonstração:

Pela construção da nova solução, esta já satisfaz todas as restrições e portanto é factível, e como os valores das variáveis y_{it} e x_{ik} permanecem iguais então o valor da função objetivo não muda. ■

Lema 3.3 (Quebra de simetria da Formulação F2) Dada uma solução factível para F2, com preparação crossover para o item i entre os períodos t e $t+1$ (i.e. $v'_{it} = 1$, $v'_{jt} = 0 \forall j \in I \setminus \{i\}$ e $z_{i,t+1} = 0$), pode-se construir uma solução factível alternativa com o mesmo valor da função objetivo se existir, no período $t+1$, uma preparação ativa para outro item i' com tempo de preparação igual ou maior e não ocorrer preparação carryover, para nenhum item, desde o período t até o período $t+1$ e desde o período $t+1$ até o período $t+2$ (i.e. $st'_{i',t+1} \geq st_{i,t+1}$, $z'_{i',t+1} = 1$, $zeta'_{k,t+1} = 0$ e $zeta'_{k,t+2} = 0$, $\forall k \in I$). Esta solução pode ser construída como segue:

$$v'_{i',t+1} = 1, z_{i',t+1} = 0,$$

$$v'_{i,t+1} = 0, z_{i,t+1} = 1,$$

$$l'_{i't} \leftarrow l_{it}, l_{it} = 0,$$

$$f'_{i',t+1} = st'_{i',t+1} - l'_{i't}, f_{i,t+1} = 0.$$

Demonstração:

A prova é estabelecida por duas fases:

1. A nova solução é factível. De fato:

- Como as variáveis x_{ikt} não mudam então a restrição (3.24) é satisfeita.

- Para as restrições (3.25): No período t , já que $l'_{i't}$ toma o valor de l_{it} e l_{it} toma o valor de 0 então $\sum_{j \in I} l_{jt}$ é igual nas duas soluções e assim as restrições são satisfeitas. No período $t+1$, as restrições (3.25) também são satisfeitas (ver Tabela 3.1). E portanto, as restrições são satisfeitas.

Tabela 3.1: Restrições (3.25) para o período $t+1$.

	solução inicial	nova solução
$\sum_{i \in I} st_{i,t+1} z_{i,t+1}$	$st'_{i',t+1} \times 1$	$st_{i,t+1} \times 1$
$\sum_{j \in I} l_{j,t+1}$	não muda	não muda
$\sum_{i \in I} f_{i,t+1}$	$f_{i,t+1} = st_{i,t+1} - l_{it}$	$f'_{i',t+1} = st'_{i',t+1} - l'_{i't}$
Total	$st'_{i',t+1} + st_{i,t+1} - l_{it}$	$st_{i,t+1} + st'_{i',t+1} - l'_{i't}$

- As restrições (3.26) são satisfeitas pois o lado direito é 1 tanto para o item i como para i' .
- As restrições (3.27) são satisfeitas por construção.
- As restrições (3.28) são satisfeitas pois é permitido apenas uma preparação *crossover* ou preparação *carryover* por período.
- Para as restrições (3.29): No período t , como a variável $v'_{i't} = 1$ então, pelas restrições (3.28), $zeta'_{it} = 0, \forall i \in I$. No período $t+1$, a variável $zeta'_{i',t+1} = 0, \forall i \in I$, por hipótese. Assim, as restrições são satisfeitas.
- As restrições (3.30) são satisfeitas pois os valores de $zeta'_{it}$ e $zeta'_{i',t+1}$ são 0 para todo $i \in I$.
- As restrições (3.31) são satisfeitas pois o período $t+1$ não é ocioso.

2. Pela construção da nova solução, o valor da função objetivo não muda.

■

3.5 Exemplo

Consideremos o seguinte exemplo, proposto em Fiorotto et al. (2017), com base em Belo Filho (2014), que consiste de um horizonte de planejamento de 5 períodos e um conjunto de 4

itens $\{A, B, C, D\}$. Como podemos observar, a Tabela 3.2 mostra que os custos de estoque e preparação e os tempos de preparação e de produção para cada item são iguais em todos os períodos. A Tabela 3.3 apresenta os valores da demanda por item e a capacidade de cada período.

Tabela 3.2: Parâmetros do exemplo.

	A	B	C	D
vt_i	0,1	0,1	0,1	0,1
hc_i	3	4	1	6
st_i	3	4	1	6
sc_i	3	4	1	6

Tabela 3.3: Demanda e capacidade.

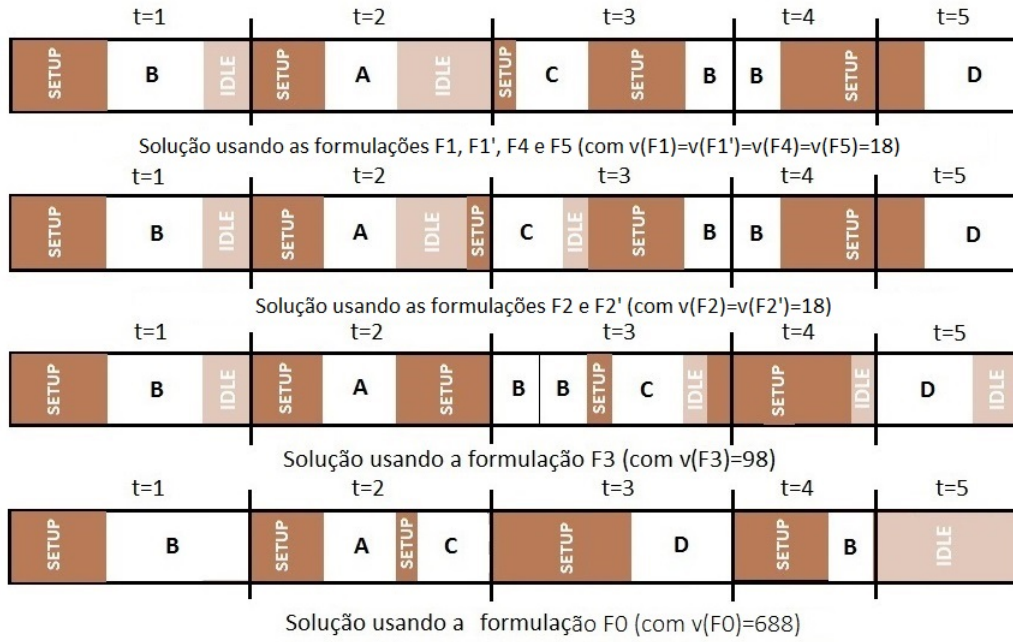
d_{it}	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$	$t = 4$	$t = 5$
$i = A$	0	30	0	0	0
$i = B$	40	0	20	20	0
$i = C$	0	0	30	0	0
$i = D$	0	0	0	0	40
Cap_t	10	10	10	6	6

Usando as formulações deste capítulo, resolve-se este exemplo e obtém-se os seguintes resultados, apresentados também na Figura 3.2.

Apesar das formulações $F1$, $F1'$, $F4$, $F5$, $F2$ e $F2'$ apresentarem uma solução com o mesmo valor da função objetivo, os valores das variáveis não são iguais (ver Tabela 3.4). Observa-se que, em alguns casos é possível que $v_{it} = 1$ porém a preparação pode ser feita completamente no período $t-1$, com $f_{it} = 0$, ou no período t , com $l_{i,t-1} = 0$ (ou $u_{t-1} = 0$). Também pode acontecer de $zeta_{it} = 1$ e ao analisarmos as variáveis de produção não haja preparação *carryover*. Assim, observa-se que, para a formulação $F2$ a preparação do item C é considerada como preparação *crossover* com $l_{C2} = 1$ e $f_{C3} = 0$ e para a formulação $F2'$ a variável de preparação completa do item C no período 2 é 1 ($z_{C2} = 1$) com produção do item C no período 3. As soluções obtidas por $F1$ e $F1'$, $F4$ e $F5$ são iguais porém em $F1$ e $F1'$ as soluções consideram $v_{A1} = 1$ com $u_1 = 0$.

A única diferença entre as soluções de $F1$, $F1'$, $F4$ e $F5$ e as soluções de $F2$ e $F2'$ está na preparação do item C , que no primeiro caso é feita no período 3 e no segundo caso, no período

Figura 3.2: Solução do exemplo.



2. Nestas formulações as soluções obtidas não apresentam estoque.

O valor obtido usando a formulação $F3$ é 98 pois tem-se um estoque de 20 unidades do item B haja vista que a demanda é no período 4 e a produção foi realizada no período 3. Isto ocorre porque o tempo de preparação do item D é do tamanho do período 4 então, nesse mesmo período, não há capacidade suficiente para produzir B pois, o tempo que pode ser emprestado é o menor tempo de preparação ($\min_{j \in I} \{st_{jt}\} = 1$).

Como na formulação clássica não é permitida preparação *carryover* nem *crossover* a solução ótima tem um valor objetivo muito alto pois apresenta estoque dos itens B (desde o período 1 até o período 3, de 20 unidades), C (desde o período 2 até o período 3, de 30 unidades) e D (desde o período 3 até o período 5, de 40 unidades). No caso do item D , é por causa do tempo de preparação ser do tamanho do período e não teria mais capacidade para a produção, neste caso nota-se a importância da preparação *crossover*.

Tabela 3.4: Valores das variáveis do exemplo para todas as formulações.

Variáveis de $F0$					
$x_{A22} = 1$	$x_{B11} = 1$	$x_{B13} = 1$	$x_{B44} = 1$	$x_{C23} = 1$	$x_{D35} = 1$
$y_{A2} = 1$	$y_{B1} = 1$	$y_{B4} = 1$	$y_{C2} = 1$	$y_{D3} = 1$	
Variáveis de $F1$ e $F1'$					
$x_{A22} = 1$	$x_{B11} = 1$	$x_{B33} = 1$	$x_{B44} = 1$	$x_{C33} = 1$	$x_{D55} = 1$
$y_{A2} = 1$	$y_{B1} = 1$	$y_{B3} = 1$	$y_{C3} = 1$	$y_{D5} = 1$	
$v_{A1} = 1$	$v_{D4} = 1$				
$u_4 = 4$					
$zeta_{B3} = 1$					
Variáveis de $F2$					
$x_{A22} = 1$	$x_{B11} = 1$	$x_{B33} = 1$	$x_{B44} = 1$	$x_{C33} = 1$	$x_{D55} = 1$
$z_{A2} = 1$	$z_{B1} = 1$	$z_{B3} = 1$			
$v_{C3} = 1$	$v_{D5} = 1$				
$f_{D5} = 2$					
$l_{C2} = 1$	$l_{D4} = 4$				
$zeta_{B2} = 1$	$zeta_{B4} = 1$				
Variáveis de $F2'$					
$x_{A22} = 1$	$x_{B11} = 1$	$x_{B33} = 1$	$x_{B44} = 1$	$x_{C33} = 1$	$x_{D55} = 1$
$z_{A2} = 1$	$z_{B1} = 1$	$z_{B3} = 1$	$z_{C2} = 1$		
$v_{D5} = 1$					
$f_{D5} = 2$					
$l_{D4} = 4$					
$zeta_{B2} = 1$	$zeta_{B4} = 1$	$zeta_{C3} = 1$			
Variáveis de $F3$					
$x_{A22} = 1$	$x_{B11} = 1$	$x_{B33} = 1$	$x_{B34} = 1$	$x_{C33} = 1$	$x_{D55} = 1$
$y_{A2} = 1$	$y_{B1} = 1$	$y_{B2} = 1$	$y_{C3} = 1$	$y_{D4} = 1$	
$u_3 = 1$					
$zeta_{B2} = 1$	$zeta_{B4} = 1$				
Variáveis de $F4$					
$x_{A22} = 1$	$x_{B11} = 1$	$x_{B33} = 1$	$x_{B44} = 1$	$x_{C33} = 1$	$x_{D55} = 1$
$y_{A2} = 1$	$y_{B1} = 1$	$y_{B3} = 1$	$y_{C3} = 1$	$y_{D5} = 1$	
$u_4 = 4$					
$zeta_{B3} = 1$					
Variáveis de $F5$					
$x_{A22} = 1$	$x_{B11} = 1$	$x_{B33} = 1$	$x_{B44} = 1$	$x_{C33} = 1$	$x_{D55} = 1$
$y_{A2} = 1$	$y_{B1} = 1$	$y_{B3} = 1$	$y_{C3} = 1$	$y_{D5} = 1$	
$v_{A1} = 1$	$v_{D4} = 0.67$				
$u_4 = 4$					
$zeta_{B3} = 1$					

Capítulo 4

Métodos de solução

Haja vista que as formulações apresentam altos tempos computacionais, ao serem resolvidas diretamente com o CPLEX para tentar resolvê-las e que na maioria das instâncias não é possível provar a otimalidade (ver Capítulo 5), apresenta-se, neste capítulo, uma heurística *Relax-and-Fix* e uma heurística *Fix-and-Optimize* com a finalidade de obter boas soluções factíveis em um menor tempo computacional.

Assim, neste capítulo, primeiro, faz-se uma revisão bibliográfica dos trabalhos que utilizam heurísticas do tipo *Relax-and-Fix* e *Fix-and-Optimize* para problemas de dimensionamento de lotes. Em seguida, descreve-se a heurística *Relax-and-Fix* para que possa ser aplicada ao CLSP-SCC. E, por último, descreve-se a heurística *Fix-and-Optimize* para que possa ser aplicada ao CLSP-SCC.

4.1 Revisão bibliográfica

Inicialmente, apresenta-se a revisão para a heurística *Relax-and-Fix*, posteriormente para a heurística *Fix-and-Optimize* e, por último, para a heurística híbrida *Relax-and-Fix* com *Fix-and-Optimize*.

Alguns dos trabalhos que consideram a heurística *Relax-and-Fix* aplicada ao problema de dimensionamento de lotes são:

Suerie e Stadtler (2003) consideram o CLSP-SC permitindo a preparação *carryover* por

muitos períodos consecutivos e combinam as características dos problemas *small-bucket* e *big-bucket*. Os autores desenvolvem uma heurística *Relax-and-Fix* (esta heurística foi adaptada de Stadtler (2003) que usou decomposição por períodos) para resolver problemas com um número grande de períodos. O horizonte de planejamento é dividido em janelas e a heurística é controlada por três parâmetros e um tempo limite. Os testes computacionais mostram que a *Relax-and-Fix* é capaz de aproximar consideravelmente o *gap* num menor tempo computacional.

Mohammadi et al. (2010) consideram o CLSP com multi-estágios e preparações dependentes da sequência. Apresentam uma formulação exata do problema que não apresenta bons resultados, com respeito a tempos computacionais, ao tentar resolver instâncias grandes. Para essas instâncias propuseram 4 heurísticas uma delas é a *Relax-and-Fix*. Os seus resultados computacionais mostram que a RF é capaz de resolver instâncias de tamanho médio.

Wu e Shi (2011) apresentam heurísticas de relaxação Lagrangiana e *Relax-and-Fix* usando decomposição por períodos para comparar as formulações apresentadas em conjuntos de instâncias com múltiplas características.

Alguns dos trabalhos que consideram a heurística *Fix-and-Optimize* aplicada ao problema de dimensionamento de lotes são:

Helber e Sahling (2008) apresentam um método de solução para o CLSP multi-estágio. Resolvem uma série de subproblemas iterativamente usando a heurística *Fix-and-Optimize*. Cada um destes subproblemas é otimizado para todas as variáveis de valor real, porém para apenas um pequeno subconjunto de variáveis binárias de preparação. O algoritmo resultante é flexível, preciso e relativamente rápido.

Tempelmeier et al. (2009) apresentam um algoritmo para o CLSP-SC multi-estágio chamado de *Fix-and-Optimize* (FO) (baseado em Helber e Sahling (2008)) e propõem três maneiras de decompor o problema (decomposição orientada ao item, ao recurso e ao processo) em subproblemas gerando quatro variantes do algoritmo (1. decomposição orientada apenas ao item; 2. decomposição orientada primeiro ao item e depois ao recurso; 3. decomposição orientada primeiro ao item e depois ao processo; 4. decomposição orientada primeiro ao item, ao recurso e finalmente ao processo) que são usadas para testar seis classes de problemas cujos resultados mostram que o algoritmo e suas variantes fornece soluções de alta qualidade e que o esforço

computacional é moderado, onde as melhores soluções são obtidas com a variante 4.

Xiao et al. (2013) examinam o CLSP integrado ao problema de sequenciamento com tempos de preparação dependentes da sequência, janelas de tempo, elegibilidade da máquina e restrições de preferência. Neste artigo, são propostos dois algoritmos *Fix-and-Optimize* em que primeiro são fixadas as variáveis binárias de decisão associadas a atribuição de máquina usando a regra de máquina flexível menos aleatória. Experimentos mostram que os algoritmos para a *Fix-and-Optimize* são melhores que os propostos na literatura especialmente para instâncias com variação de demanda alta.

Chen (2015) propõe um novo método *Fix-and-Optimize* para o CLSP-SC multi-estágio que, comparado com o método FO proposto em Helber e Sahling (2008) e Tempelmeier et al. (2009), seleciona as variáveis binárias a serem re-otimizadas, em um modelo MIP, baseadas na relação das variáveis binárias de preparação nas restrições da formulação ao invés de serem baseadas nos três problemas específicos de decomposição (decomposição orientada ao item, recurso e processo). O autor também propõe um método de busca em vizinhança variável (VNS), baseada em FO sem preparação *carryover*, que pode melhorar ainda mais a solução obtida pela FO diversificando o espaço de busca. Experimentos numéricos mostram que o novo método obtém uma melhor solução, para a maioria das instâncias, comparadas com as que foram encontradas usando o método FO proposto em Helber e Sahling (2008).

Goren e Tunah (2015) propõem um novo modelo híbrido para resolver o CLSP-SC. A ideia principal é usar um Algoritmo Genético (*Genetic Algorithm* - GA) para gerar uma solução inicial para a heurística *Fix-and-Optimize*. Para avaliar o desempenho do GA e do algoritmo proposto executam experimentos comparativos usando problemas referenciais da literatura. Os resultados computacionais mostram que o desempenho do GA melhora notavelmente com a heurística *Fix-and-Optimize* e a qualidade das soluções do modelo proposto é superior comparada com os resultados da literatura.

Alguns dos trabalhos que consideram a heurística *Relax-and-Fix* e *Fix-and-Optimize* são:

Lang e Shen (2014) consideram o CLSP dinâmicos com único-estágio, custos de preparação dependentes da sequência e tempos que incluem opções de substituição de produtos. O modelo é motivado de um problema real de planejamento de produção de um fabricante de folhas de

plástico. Os autores combinam as heurísticas *Relax-and-Fix* e *Fix-and-Optimize*. A FO encontra melhores soluções ao considerar períodos de *overlapping*. As soluções factíveis obtidas pela RF, para o conjunto de instâncias considerado, não mostraram *backlogging* nem *overtime*.

Toledo et al. (2015) propõem uma heurística simples e eficiente que combina ideias de heurística construtiva e de melhoria para resolver o CLSP multi-estágio e problema de sequenciamento e produção de contenedor de vidro de dois estágios (representa um problema real de planejamento e sequenciamento de produção a curto prazo). Os autores usam a heurística *Relax-and-Fix* para construir uma solução inicial, e esta solução é melhorada aplicando a *Fix-and-Optimize*. Os testes computacionais mostram que a heurística RF obtém melhores soluções, para a FO, quando 80% das variáveis podem ser re-otimizadas (taxa de *overlap*), enquanto a FO é melhor quando 50% são re-otimizadas.

Furlan (2015) estuda o problema de dimensionamento e sequenciamento da produção em indústrias de papel. Ele desenvolve quatro heurísticas construtivas e duas de melhoria nas quais inclui a *Relax-and-Fix* e *Fix-and-Optimize*. Ele testou várias formas de particionamento das variáveis de decisão para a heurística RF. Além disso, apresenta a heurística FO tradicional e FO com mudança da função objetivo. Os resultados mostram que a heurística de melhoria obtém resultados de alta qualidade a partir da solução inicial gerada pela RF, mas quando é considerado o problema multi-estágio, o método tradicional da FO não foi tão eficiente como quando faz-se mudança na função objetivo.

Cheng-Lung (2015) desenvolve uma heurística que combina a *Relax-and-Fix* e *Fix-and-Optimize* (denotada por RFFO) para o CLSP-SCC com *backlogging*. A RF examina cada produto até que não seja possível encontrar um melhor valor para a função objetivo. Em seguida, esta solução é enviada para a FO, que usa a decomposição por períodos, e continua iterativamente ao longo de todo o horizonte de planejamento até encontrar o melhor valor para a função objetivo. Os seus resultados computacionais mostram os benefícios de usar a heurística RFFO.

4.2 Heurística *Relax-and-Fix* aplicada ao CLSP-SCC

No contexto de problemas de dimensionamento de lotes, a heurística *Relax-and-Fix* (RF) trata-se de uma heurística iterativa que consiste em fixar as variáveis binárias de preparação apenas

para um subconjunto de índices e relaxar as restantes a fim de obter subproblemas mais simples, para os quais pode-se encontrar uma solução factível. Suerie e Stadler (2003) usaram uma decomposição heurística orientada ao tempo, em que o horizonte de planeamento é dividido em janelas. Outras decomposições também podem ser feitas, tais como, a decomposição por itens.

Com base nas ideias de Suerie e Stadler (2003), usando decomposição por períodos, no presente trabalho divide-se o horizonte de planeamento em três janelas: a janela de fixação de um subconjunto de variáveis binárias, a janela de *overlap* (janela de sobreposição) e a janela de relaxação das variáveis. As variáveis consideradas neste trabalho são variáveis de preparação, preparação *carryover* e preparação *crossover*.

Para o desenvolvimento do algoritmo precisa-se definir os seguintes parâmetros:

$T_{window\ size}$: tamanho da janela;

T_{begin} e T_{end} : intervalo em que as variáveis serão fixadas, onde $T_{end} = T_{begin} + T_{window\ size}$;

$T_{overlap}$: indica os períodos de sobreposição

T_{limite} : indica o tempo limite em que cada subproblema pode ser resolvido.

A heurística *Relax-and-Fix*, descrita no Algoritmo 4.1, consiste em; inicialmente, fixar as variáveis binárias de preparação como binárias no intervalo $[T_{begin}, T_{end} + T_{overlap}]$, e nos períodos restantes, tais variáveis são relaxadas (i.e., nos períodos restantes elas deixam de ser binárias). Logo, resolve-se este subproblema e fixa-se a solução obtida na janela $[T_{begin}, T_{end}]$. Posteriormente, é definida uma janela obtendo um subconjunto de variáveis binárias fixas e outro conjunto de variáveis binárias relaxadas que é otimizado. O processo continua até que não haja mais variáveis para relaxar, i.e., $T_{end} = T$. Para cada subproblema o tempo limite é T_{limite} .

Para ilustrar, observe o exemplo da Figura 4.1 em que considera-se um horizonte de planeamento de 9 períodos com 3 itens, o tamanho da janela é 3, com 2 períodos de *overlap*. Na primeira iteração deixa-se binária as variáveis para os 5 primeiros períodos (3 períodos fixos e 2 de *overlap*) relaxa-se as restantes e resolve-se este subproblema. Na iteração seguinte, fixa-se as variáveis nos valores obtidos para os 3 primeiros períodos, as variáveis dos períodos 4 e 5 são

Algoritmo 4.1: Heurística *Relax-and-Fix* (baseada em Furlan (2015))

Data: $T_{window\ size}, T_{begin}, T_{overlap}, T_{limite}$

```

1 while  $T_{end} \leq T$  do
2    $T_{end} \leftarrow T_{begin} + T_{window\ size};$ 
3   Definir as variáveis  $y_{it}, zeta_{it}, v_{it}$  para  $t \in [T_{begin}, T_{end} + T_{overlap}]$  como binárias e
   relaxar para os períodos restantes;
4   Resolver o subproblema, limitado a  $T_{limite}$  segundos, para obter  $y^0, zeta^0, v^0$ ;
5   Fixar a nova solução para  $t \in [T_{begin}, T_{end}]$ ;
6    $y \leftarrow y^0$ ;
7    $v \leftarrow v^0$ ;
8    $zeta \leftarrow zeta^0$ ;
9    $T_{begin} \leftarrow T_{end} + 1$ ;
10 return Solução inicial

```

re-otimizadas e permanecem binárias junto com as do período 6, 7 e 8, relaxa-se as restantes e resolve-se este subproblema. Na última iteração, fixa-se as variáveis dos períodos 4, 5 e 6 (da iteração anterior tem-se os valores para os períodos 1, 2 e 3), novamente re-otimiza-se os períodos 7 e 8 e são binárias as variáveis dos períodos 7, 8 e 9, e resolve-se este subproblema em que as variáveis a serem otimizadas são dos períodos 7, 8 e 9 pois as primeiras já foram fixadas. Assim, a heurística fornece possivelmente uma solução com as variáveis binárias para todos os períodos.

4.3 Heurística *Fix-and-Optimize* aplicada ao CLSP-SCC

A heurística *Fix-and-Optimize* é uma heurística de melhoria, proposta por Pochet e Wolsey (2006) e chamada de *Exchange*.

A heurística *Fix-and-Optimize* (FO), diferente da RF, tem como objetivo melhorar uma solução inicial. Esta heurística é baseada no particionamento de variáveis de decisão do problema. Este particionamento pode ser feito de diferentes maneiras, tais como: particionamento por itens, períodos e processos. Em cada iteração as variáveis binárias que são liberadas para otimização são apenas as variáveis pertencentes a um subconjunto e as outras variáveis da partição são fixadas no valor da solução incumbente. Em cada iteração, resolvendo o subproblema, espera-se encontrar uma solução melhor que a solução inicial. Para cada subproblema o tempo

limite é T_{limite} (este tempo pode ser diferente do usado para a heurística *Relax-and-Fix*).

No problema abordado neste trabalho, as variáveis particionadas são as variáveis binárias de preparação, preparação *carryover* e preparação *crossover*. Faz-se partição por períodos em que o horizonte de planejamento é dividido em três janelas.

São definidos novos parâmetros que ajudam a comparar a qualidade da solução em cada iteração.

Obj_{old} : valor da solução inicial;

Obj_{new} : valor da nova solução, obtida em cada iteração;

Obj_{temp} : usado para comparar a melhoria da solução em cada iteração.

Para a heurística *Fix-and-Optimize* descrita no Algoritmo 4.2 tem-se uma solução inicial que é usada como dado. Em cada iteração libera-se as variáveis binárias para otimização apenas para o intervalo $[T_{begin}, T_{end} + T_{overlap}]$ e fixa-se as variáveis binárias restantes nos valores da solução inicial. Uma vez definido o subproblema, ele é resolvido e se o valor obtido for melhor do que o anterior ($Obj_{temp} < Obj_{old}$) então o valor da solução é salvo como valor atual para a solução inicial ($Obj_{new} \leftarrow Obj_{temp}$); caso contrário, fixam-se as variáveis no valor da solução inicial. O processo continua até que o tempo limite seja atingido ou quando atinge o final do horizonte do planejamento.

A Figura 4.2 mostra um exemplo que considera um horizonte de planejamento com $T = 9$, $T_{windossize} = 2$, $T_{overlap} = 1$. Na primeira iteração, libera-se as variáveis dos períodos 1, 2 e 3, fixa-se as variáveis restantes no valor da solução inicial e resolve-se este subproblema. Na segunda iteração, fixa-se as variáveis dos períodos 1 e 2 nos valores da nova solução, libera-se as variáveis dos períodos 3, 4 e 5 (observe que, como o $T_{overlap} = 1$, para $t = 3$ as variáveis são re-otimizadas), fixa-se as variáveis dos outros períodos no valor da solução inicial e resolve-se este subproblema. Na terceira iteração, fixa-se as variáveis dos 4 primeiros períodos (da iteração 1 tem-se os valores para os períodos 1 e 2 e da iteração 2, para os períodos 3 e 4), libera-se as variáveis dos períodos 5, 6 e 7, fixa-se as outras variáveis no valor da solução inicial e resolve-se este subproblema. Na última iteração, das três primeiras iterações tem-se os valores fixos para as variáveis dos períodos 1, 2, 3, 4, 5 e 6, libera-se as variáveis dos períodos 8 e 9 e resolve-se

Algoritmo 4.2: Heurística *Fix-and-Optimize* (baseada em Cheng-Lung (2015))

Data: T_{begin} , T_{end} , $T_{window\ size}$, $T_{overlap}$, T_{total} (tempo da RF), T_{limite} . Solução inicial: obj , y_{it} , $zeta_{it}$, v_{it}

```

1 Definir as variáveis para o particionamento do horizonte de planejamento;
2  $obj_{new} \leftarrow obj$ ;
3  $y^0 \leftarrow y$ ;
4  $v^0 \leftarrow v$ ;
5  $zeta^0 \leftarrow zeta$ ;
6  $obj_{old} \leftarrow \infty$ ;
7 while  $T_{total} < 1800$  ou  $T_{end} \leq T$  do
8    $obj_{old} \leftarrow obj_{new}$ ;
9    $T_{end} \leftarrow T_{begin} + T_{window\ size}$ ;
10  Liberar as variáveis  $y_{it}$ ,  $zeta_{it}$ ,  $v_{it}$  para  $t \in [T_{begin}, T_{end} + T_{overlap}]$  e fixar para os
    períodos restantes com  $y^0$ ,  $v^0$  e  $zeta^0$ ;
11  Resolver o subproblema para obter a função objetivo  $obj_{temp}$ , atuais  $y$ ,  $zeta$ ,  $v$  e o
    tempo  $T_{subprob} (\leq T_{limite})$ ;
12  if  $obj_{temp} < obj_{old}$  then
13    Atualizar;
14     $obj_{new} \leftarrow obj_{temp}$ ;
15     $y^0 \leftarrow y$ ;
16     $v^0 \leftarrow v$ ;
17     $zeta^0 \leftarrow zeta$ ;
18  else;
19    Restabelecer as variáveis atuais em;
20     $y \leftarrow y^0$ ;
21     $v \leftarrow v^0$ ;
22     $zeta \leftarrow zeta^0$ ;
23     $T_{total} \leftarrow T_{total} + T_{subprob}$ ;

```

este subproblema. Assim, a heurística possivelmente fornece uma solução que melhora a solução inicial.

Figura 4.1: Heurística *Relax-and-Fix*: em cada iteração é definido um subproblema em que as variáveis binárias são consideradas como binárias para um subconjunto e as restantes são relaxadas.

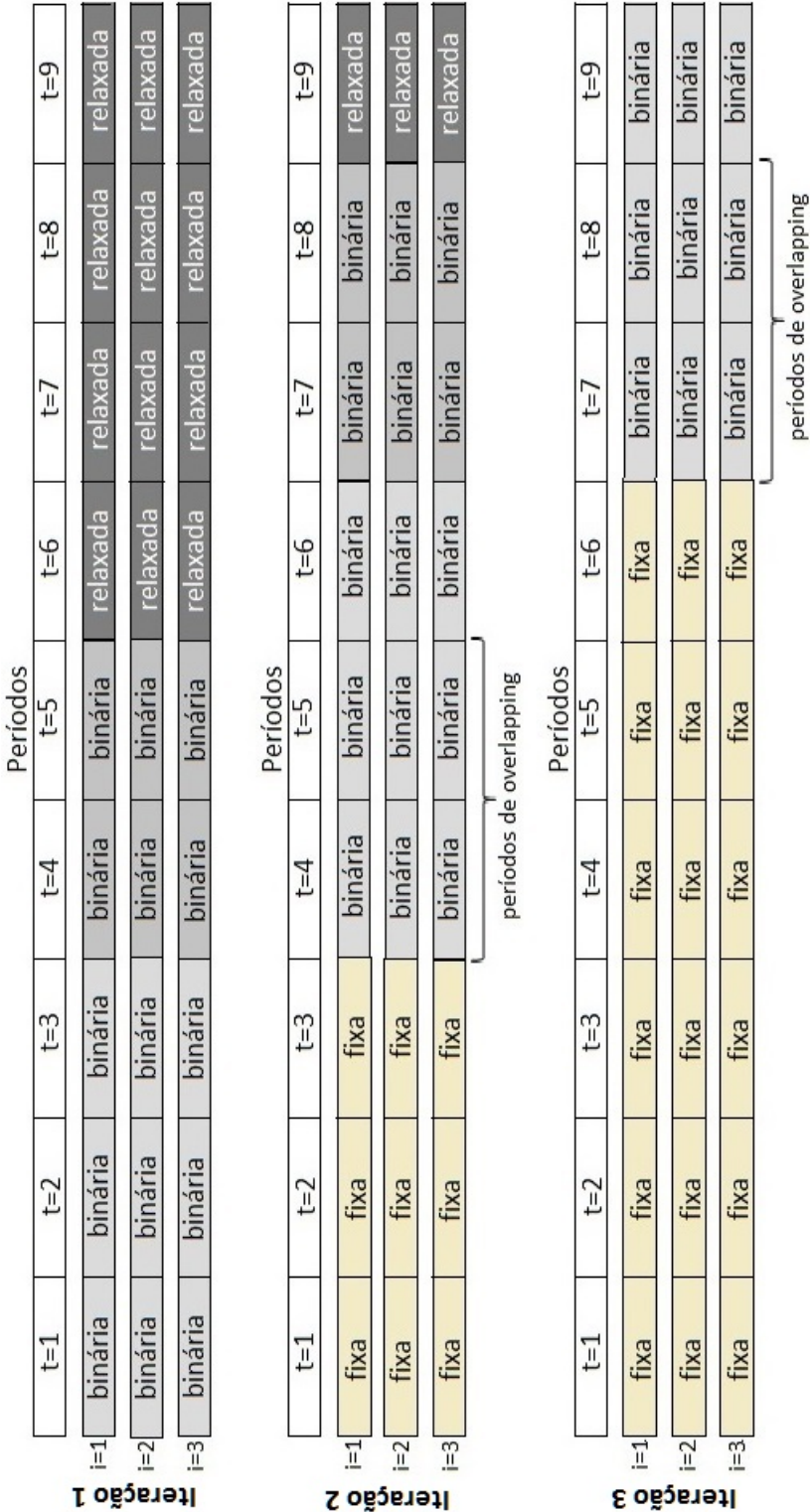


Figura 4.2: Heurística *Fix-and-Optimize*: em cada iteração é definido um subproblema em que as variáveis binárias liberadas para otimização são para um subconjunto e as restantes são fixadas no valor da solução incumbente.

Períodos									
	t=1	t=2	t=3	t=4	t=5	t=6	t=7	t=8	t=9
Iteração 1									
i=1	binária	binária	binária	fixa	fixa	fixa	fixa	fixa	fixa
i=2	binária	binária	binária	fixa	fixa	fixa	fixa	fixa	fixa
i=3	binária	binária	binária	fixa	fixa	fixa	fixa	fixa	fixa

Períodos									
	t=1	t=2	t=3	t=4	t=5	t=6	t=7	t=8	t=9
Iteração 2									
i=1	fixa	fixa	binária	binária	binária	fixa	fixa	fixa	fixa
i=2	fixa	fixa	binária	binária	binária	fixa	fixa	fixa	fixa
i=3	fixa	fixa	binária	binária	binária	fixa	fixa	fixa	fixa

período de overlapping

Períodos									
	t=1	t=2	t=3	t=4	t=5	t=6	t=7	t=8	t=9
Iteração 3									
i=1	fixa	fixa	fixa	fixa	binária	binária	binária	fixa	fixa
i=2	fixa	fixa	fixa	fixa	binária	binária	binária	fixa	fixa
i=3	fixa	fixa	fixa	fixa	binária	binária	binária	fixa	fixa

período de overlapping

Períodos									
	t=1	t=2	t=3	t=4	t=5	t=6	t=7	t=8	t=9
Iteração 4									
i=1	fixa	fixa	fixa	fixa	fixa	fixa	binária	binária	binária
i=2	fixa	fixa	fixa	fixa	fixa	fixa	binária	binária	binária
i=3	fixa	fixa	fixa	fixa	fixa	fixa	binária	binária	binária

período de overlapping

Capítulo 5

Resultados computacionais

As formulações e a heurística híbrida RF-FR foram modeladas em AMPL usando o CPLEX 12.6.1.0 como solver e um computador Intel Core i7, 3.60GHz com 16 GB de RAM e sistema operacional Windows 8.1. O tempo computacional, para cada instância, foi limitado a 1800 segundos.

Os testes computacionais foram feitos para dois conjuntos de instâncias propostas em Trigeiro et al. (1989). O primeiro conjunto, conhecido como instâncias F e G, consiste de 145 instâncias e o segundo conjunto consiste de um conjunto de dados de 540 instâncias propostas em Trigeiro et al. (1989).

No decorrer deste capítulo, primeiro mostra-se os resultados computacionais para as formulações descritas no Capítulo 3 e, por último, os resultados da heurística RF-FR descrita no Capítulo 4.

5.1 Resultados para as formulações

Nesta seção são apresentados os resultados para as instâncias F e G e as 540 instâncias. Em seguida, compara-se estes resultados com os obtidos por Fiorotto et al. (2014) e Fiorotto et al. (2017). Por fim, faz-se uma variação na função objetivo para comparar os benefícios das restrições de quebra de simetria.

5.1.1 Resultados para as instâncias F e G

As formulações $F1$, $F2$, $F3$, $F4$ e $F5$ foram testadas em um conjunto de 145 instâncias propostas em Trigeiro et al. (1989). O conjunto F consiste de 70 instâncias com 6 itens e 15 períodos, e o conjunto G com 50 instâncias de 6 itens e 15 períodos, 5 instâncias de 12 itens e 15 períodos, 5 instâncias de 24 itens e 15 períodos, 5 instâncias de 6 itens e 30 períodos, 5 instâncias de 12 itens e 30 períodos e 5 instâncias de 24 itens e 30 períodos.

A Tabela 5.1 mostra a média dos limites superiores (LS) e dos tempos computacionais em segundos (TEMPO) para cada conjunto de instâncias. Estabelecemos os limites superiores para a formulação clássica ($F0$) (sem preparações *carryover* e *crossover*) como 100% e as porcentagens dos outros valores são calculadas relativas a formulação clássica. Nesta tabela não são mostrados os resultados para as formulações $F1'$ e $F2'$ por estas instâncias apresentam poucas preparações *crossover* o que dificultaria a avaliação das restrições de quebra de simetria.

Ao comparar-se os tempos computacionais tem-se que, na média, a formulação $F3$ é a mais rápida para as instâncias F, G6-15 e G24-15, a formulação $F1$ é mais rápida para as instâncias de G12-15. Note que em G6-30, G12-30 e G24-30 nenhuma das formulações encontra uma solução ótima no tempo limite. Enquanto nos outros conjuntos de dados uma solução ótima é encontrada antes do tempo limite para quase todas as instâncias.

As formulações $F1$, $F2$ e $F5$ apresentam os mesmos resultados para as instâncias em que a solução ótima é encontrada antes do tempo limite (como foi mostrado nos resultados teóricos) e resultados muito próximos nos outros casos, tendo assim que, na média, os resultados são equivalentes. Note também que, para as formulações $F3$ e $F4$, apesar de serem formulações aproximadas, os resultados encontrados mostram pequenas variações com respeito a $F1$, $F2$ e $F5$.

Em comparação com a formulação clássica, como esperado, estas novas formulações têm tempos computacionais maiores. Em relação aos limites superiores, observe que, as formulações com preparações *carryover* e *crossover* melhoram significativamente em relação a formulação clássica chegando a mais de 20% de melhoria mostrando a importância de considerar preparações *carryover* e *crossover*.

Quando considera-se apenas 6 itens a melhora das formulações com preparações *carryover* e

crossover é de aproximadamente 22% em relação à formulação clássica, com 12 itens a melhora é de aproximadamente 13% e com 24 itens é de aproximadamente 7%, portanto enquanto o número de itens aumenta a porcentagem de melhora diminui. Assim, pode-se observar que, as formulações com preparações *carryover* e *crossover* melhoram bastante os resultados da formulação clássica, em especial quando são consideradas instâncias com poucos itens.

Tabela 5.1: Média dos limites superiores (LS) e tempos computacionais (TEMPO) das instâncias F e G usando as formulações propostas no capítulo anterior.

	F		G6-15		G12-15		G24-15		G6-30		G12-30		G24-30	
Formulações	LS	TEMPO	LS	TEMPO	LS	TEMPO	LS	TEMPO	LS	TEMPO	LS	TEMPO	LS	TEMPO
<i>F0</i>	100	1,3	100	11,6	100	3,8	100	6,5	100	141,4	100	473,2	100	230,0
<i>F1</i>	80,03	395,0	77,95	63,1	87,49	198,9	93,03	682,1	78,49	1800	87,49	1800	92,66	1800
<i>F2</i>	80,03	411,6	77,95	87,7	87,49	633,5	93,03	704,9	78,49	1800	87,46	1800	92,66	1800
<i>F3</i>	80,03	383,6	77,95	59,4	87,49	530,3	93,03	665,7	78,50	1800	87,49	1800	92,64	1800
<i>F4</i>	80,03	417,3	77,95	69,6	87,49	588,9	93,03	857,7	78,54	1800	87,48	1800	92,68	1800
<i>F5</i>	80,03	487,9	77,95	94,3	87,49	442,9	93,03	685,2	78,61	1800	87,49	1800	92,64	1800

5.1.2 Resultados para as 540 instâncias

As formulações foram testadas em um conjunto de 540 instâncias com 20 períodos propostas em Trigeiro et al. (1989), estas instâncias têm 5 características que foram analisadas: número de itens (10, 20 e 30), variabilidade da demanda (média [0, 125] e alta [0, 200]), custo de preparação (baixo [25, 75], médio [100, 300] e alto [400, 1200]), tempo de preparação (baixo [5, 17] e alto [21, 65]) e utilização da capacidade (baixa [75%], média [85%] e alta [95%]).

As Tabelas 5.2-5.6 mostram os limites superiores relativos (LS), tempos computacionais (TEMPO) e a porcentagem de instâncias que foram resolvidas até a otimalidade antes do tempo limite (SO). Todas as formulações apresentadas no Capítulo 3 obtêm melhores resultados que a formulação clássica.

A Tabela 5.2 mostra que para as instâncias com 10 itens a formulação *F4*, na média, é ligeiramente melhor do que as outras formulações e tem um menor tempo computacional, porém a formulação *F2* encontra mais soluções ótimas antes do tempo limite. A formulação *F5* tem o maior tempo computacional e menos soluções ótimas encontradas antes do tempo limite; para as instâncias com 20 itens a formulação *F3* tem o menor tempo computacional e mais soluções ótimas encontradas antes do tempo limite; para as instâncias com 30 itens a

formulação $F3$ é a mais rápida e todas as formulações encontraram a mesma quantidade de soluções ótimas.

Observa-se que quando considera-se apenas as instâncias resolvidas até a otimalidade a formulação $F3$ apresenta o menor tempo computacional, sendo inclusive mais rápida do que a formulação $F0$ e é seguida da $F4$. Neste caso, as formulações apresentam tempos computacionais próximos a formulação clássica.

Tabela 5.2: Média dos limites superiores (LS), tempos computacionais (TEMPO) e porcentagem de soluções ótimas obtidas antes do tempo limite (SO) agrupados pela quantidade de itens.

Formulações	10 itens			20 itens			30 itens			Média das SO	
	LS	TEMPO	SO	LS	TEMPO	SO	LS	TEMPO	SO	LS	TEMPO
$F0$	100	461,7	77,8	100	613,4	67,2	100	614,6	68,9	100	43,2
$F1$	86,41	1118,3	40,6	92,52	1166,8	36,1	94,79	1153,0	37,2	90,34	48,7
$F2$	86,41	1113,9	41,1	92,52	1170,6	35,6	94,78	1154,8	37,2	90,34	50,5
$F3$	86,42	1114,5	40,6	92,51	1160,5	37,2	94,77	1147,9	37,2	90,34	39,4
$F4$	86,40	1109,5	40,6	92,52	1171,7	35,6	94,78	1148,3	37,2	90,34	45,1
$F5$	86,42	1127,9	39,4	92,51	1168,6	35,6	94,78	1155,8	37,2	90,34	51,7

A Tabela 5.3 mostra que quando a capacidade é folgada as formulações melhoram a solução em comparação com a formulação clássica porém, enquanto a formulação clássica encontra soluções ótimas para todas as instâncias, as formulações propostas tem um tempo computacional muito alto e apenas a metade das instâncias são resolvidas até a otimalidade. Quando a capacidade é apertada as formulações propostas apresentam soluções ligeiramente melhores do que com a capacidade folgada mas, neste caso, o tempo computacional é muito alto tendo, portanto, que a porcentagem de soluções ótimas obtidas é baixa.

Tabela 5.3: Média dos limites superiores (LS), tempos computacionais (TEMPO) e porcentagem de soluções ótimas obtidas antes do tempo limite (SO) agrupados segundo utilização da capacidade.

Formulação	Capacidade apertada			Capacidade normal			Capacidade folgada		
	LS	Tempo	SO	LS	Tempo	SO	LS	Tempo	SO
$F0$	100	1490,5	17,2	100	256,1	96,1	100	2,2	100
$F1$	91,27	1646,4	11,7	91,49	1039,2	51,7	91,47	1032,8	50,6
$F2$	91,26	1650,5	11,1	91,49	1036,7	51,7	91,47	1027,3	51,1
$F3$	91,27	1645,6	11,1	91,49	1030,6	52,8	91,46	1029,1	51,1
$F4$	91,26	1642,9	11,1	91,47	1034,6	51,7	91,45	1027,1	50,6
$F5$	91,27	1651,6	7,8	91,49	1041,9	50,6	91,46	1037,0	50,0

Para a Tabela 5.4, analisando detalhadamente os resultados obtidos pelas formulações, quando os custos de preparação são baixos as formulações fazem muitas preparações e enquanto os custos aumentam as quantidades de preparação diminuem significativamente, isso ocorre porque quando os custos são altos, as formulações preferem fazer menos preparações e aumentar a quantidade de estoque. Note que, quando os custos de preparação aumentam, os tempos computacionais também aumentam e, além disso, as SO diminuem consideravelmente tanto que no caso com custos altos nenhuma formulação encontra solução ótima, com exceção da $F3$ que encontrou apenas uma solução ótima.

Tabela 5.4: Média dos limites superiores (LS), tempos computacionais (TEMPO) e porcentagem de soluções ótimas obtidas antes do tempo limite (SO) agrupados segundo custos de preparação.

	Custo de preparação baixo			Custo de preparação normal			Custo de preparação alto		
Formulação	LS	Tempo	SO	LS	Tempo	SO	LS	Tempo	SO
$F0$	100	411,7	78,3	100	538,5	71,1	100	739,4	80,6
$F1$	90,15	451,3	76,1	91,21	1186,8	37,8	92,36	1800	0
$F2$	90,15	456,7	75,6	91,21	1182,7	38,3	92,35	1800	0
$F3$	90,15	456,7	75,6	91,21	1167,7	38,3	92,35	1798,4	0,6
$F4$	90,15	453,2	75,6	91,20	1176,2	37,8	92,35	1800	0
$F5$	90,15	456,1	76,1	91,21	1196,3	36,1	92,36	1800	0

A Tabela 5.5 mostra que quando o tempo de preparação aumenta, a quantidade de SO aumenta e, como consequência, os tempos computacionais diminuem. Com tempos de preparação baixos, a $F3$ é a mais rápida e junto com a $F1$ encontram mais soluções ótimas. Com tempos de preparação altos, a $F4$ é a mais rápida, a $F2$ encontra mais soluções ótimas, a $F5$ é a mais lenta e tem a menor quantidade de soluções ótimas.

Na Tabela 5.6, quando a variabilidade da demanda é média os tempos computacionais são maiores do que quando é alta e com respeito as SO ocorre o contrário, a quantidade de soluções ótimas encontradas aumenta.

A Tabela 5.7 mostra resultados mais detalhados ao introduzir a preparação *carryover* e *crossover* comparando o comportamento das soluções para 10 itens para as formulações $F0$ e $F1$. A porcentagem dos custos de preparação e de manutenção de estoque no valor da função objetivo são mostrados nas colunas $CS(\%)$ e $CE(\%)$ respectivamente; e o número de preparações e estoque total, nas colunas PREPARAÇÃO e ESTOQUE respectivamente.

Tabela 5.5: Média dos limites superiores (LS), tempos computacionais (TEMPO) e porcentagem de soluções ótimas obtidas antes do tempo limite (SO) agrupados segundo tempos de preparação.

Formulação	Tempo de preparação baixo			Tempo de preparação alto		
	LS	Tempo	SO	LS	Tempo	SO
<i>F0</i>	100	596,4	58,2	100	530,0	61,5
<i>F1</i>	91,34	1194,8	35,6	91,14	1097,3	40,4
<i>F2</i>	91,34	1200,2	34,8	91,14	1092,6	41,1
<i>F3</i>	91,34	1191,9	35,6	91,14	1089,5	40,7
<i>F4</i>	91,34	1197,1	34,8	91,12	1089,2	40,7
<i>F5</i>	91,34	1199,2	34,8	91,13	1102,3	40,0

Tabela 5.6: Média dos limites superiores (LS), tempos computacionais (TEMPO) e porcentagem de soluções ótimas obtidas antes do tempo limite (SO) agrupados segundo variabilidade da demanda.

Formulação	Variabilidade média			Variabilidade alta		
	LS	Tempo	SO	LS	Tempo	SO
<i>F0</i>	100	662,8	69,3	100	463,6	76,3
<i>F1</i>	91,68	1387,6	23,7	90,80	904,4	52,2
<i>F2</i>	91,66	1381,6	24,4	90,81	911,3	51,5
<i>F3</i>	91,67	1378,8	24,1	90,80	903,1	51,9
<i>F4</i>	91,67	1380,3	24,1	90,80	906,0	51,5
<i>F5</i>	91,67	1388,9	23,3	90,80	912,6	51,5

A Tabela 5.7 mostra que, em geral, há uma diferença relevante entre o número de preparações e estoque entre as formulações *F0* e *F1*. Nota-se que, em média, considerando a possibilidade de preparações *carryover* e *crossover* (formulação *F1*) obtém-se um decréscimo de aproximadamente 14% e 10% em relação ao estoque total e o número de preparações, respectivamente. Comparando o número de preparações e estoque separadamente pelas características das instâncias, nota-se que, enquanto a diferença entre o número de preparações se mantém praticamente constante, o estoque total é consideravelmente menor para instâncias com custo de preparação baixo (decréscimo de 23%) e, consideravelmente maior para instâncias com capacidade apertada (decréscimo de 7%). Por fim, pode-se observar também que a porcentagem de custo de preparação e estoque nas soluções são, em geral, similares para as duas formulações com uma diferença de menos de 1%.

Tabela 5.7: Média dos resultados detalhados para as instâncias com 10 itens que mostra as diferenças entre as porcentagens dos custos de preparação (CS) e de estoque (CE), a quantidade de preparações feitas (PREPARAÇÃO) e o estoque total (ESTOQUE) entre as formulações $F0$ e $F1$ de acordo com as diferentes características das instâncias.

		Formulação $F0$				Formulação $F1$			
		CS(%)	CE(%)	PREPARAÇÃO	ESTOQUE	CS(%)	CE(%)	PREPARAÇÃO	ESTOQUE
Capacidade	Apertada	62,29	37,71	92,7	12835,1	61,93	38,07	83,6	11949,6
	Normal	66,25	33,75	102,5	10983,7	67,65	32,35	92,5	9265,3
	Folgada	66,01	33,99	100,6	11241,6	67,27	32,73	90,3	9585,3
Custo de preparação	Baixo	80,24	19,76	151,9	1878,4	81,73	18,27	136,9	1451,7
	Normal	65,36	34,64	90,4	9147,4	66,30	33,70	81,5	7777,9
	Alto	62,36	37,64	53,3	23973,2	63,05	36,95	47,9	20870,55
Tempo de preparação	Baixo	65,49	34,51	98,8	11473,8	65,71	34,29	88,5	10108,4
	Alto	64,15	35,85	98,4	11889,3	65,47	34,53	89,1	10351,2
Demanda	Média	64,82	35,18	105,4	12065,0	65,54	34,46	96,1	10736,8
	Alta	64,82	35,18	91,8	11300,0	65,64	34,36	81,4	9731,5
Média		66,18	33,83	98,6	11678,8	67,03	32,97	88,8	10182,8

5.1.3 Comparação com formulações sem preparação *carryover*

As Tabelas 5.8 e 5.9 (retiradas de Fiorotto et al. (2014) e Fiorotto et al. (2017), respectivamente) mostram os resultados computacionais, para as 540 instâncias, para as formulações sem preparação *carryover*.

Comparando os resultados da Tabela 5.2 com a Tabela 5.8, pode-se observar que as formulações sem preparação *carryover* são muito mais rápidas e encontram um maior número de soluções ótimas. No entanto, para todas as formulações sem preparação *carryover*, os limites superiores obtidos estão bem próximos da formulação clássica o que mostra a importância de considerar a possibilidade de preparação *carryover* para encontrar melhores soluções. Para as formulações sem preparação *carryover*, aumentar a quantidade de itens não mostra muita diferença nas porcentagens de SO. Para as formulações com preparação *carryover*, as instâncias com 10 itens obtêm melhores resultados em relação aos limites superiores. As formulações com preparação *carryover*, para 10 itens, mostram uma diferença de, na média, 13%; para 20 itens 7,2% e para 30 itens 5,2%. Enquanto a quantidade de itens aumenta a diferença diminui, ainda assim, as formulações propostas obtêm resultados significativamente melhores.

Observa-se que os resultados para a formulação $F0$ são ligeiramente diferentes devido à diferença de máquina. Fiorotto et al. (2014) e Fiorotto et al. (2017) utilizaram um computador Intel Core i5, 2.27GHz com 6 GB de RAM e sistema operacional Windows.

Os resultados detalhados das Tabelas 5.7 e 5.9 mostram que a formulação com preparação

Tabela 5.8: Média dos limites superiores (LS), tempos computacionais (TEMPO) e porcentagem de soluções ótimas obtidas antes do tempo limite (SO) agrupados pela quantidade de itens, obtidos em Fiorotto et al. (2014) - Formulação sem preparação *carryover*.

Formulações	10 itens			20 itens			30 itens			SO	
	LS	TEMPO	SO	LS	TEMPO	SO	LS	TEMPO	SO	LS	TEMPO
Clássica	100	589,8	70,6	100	684,9	63,9	100	707,1	62,8	100	10,7
$F1$	99,41	462,0	80,6	99,78	625,2	68,9	99,86	613,0	68,9	99,88	4,7
$F2$	99,43	813,7	57,2	99,79	859,5	53,9	99,89	865,3	55,0	99,88	96,1
$F2'$	99,43	628,0	68,8	99,79	685,0	64,5	99,89	672,8	65,5	99,88	9,5
$F3$	99,75	530,0	75,0	99,90	668,9	65,0	99,94	668,6	66,1	99,95	5,9
$F4$	99,73	539,1	73,4	99,90	688,3	63,9	99,94	666,8	65,6	99,94	6,3
$F5$	99,41	475,9	78,3	99,77	604,5	70,0	99,83	609,9	68,3	99,88	4,6

carryover diminui significativamente a quantidade de preparações realizadas obtendo uma maior diferença quando os custos de preparação são baixos. O mesmo ocorre com a quantidade de estoque total. Em geral, considerar a possibilidade de preparação *carryover* resulta em um decréscimo de 10% para o número de preparações e 12% para o estoque total em relação ao problema considerando apenas preparação *crossover*.

Tabela 5.9: Média dos resultados detalhados para as instâncias com 10 itens que mostra as diferenças entre as porcentagens dos custos de preparação (CS) e de estoque (CE), a quantidade de preparações feitas (PREPARAÇÃO) e o estoque total (ESTOQUE) entre as formulações $F0$ e $F1$ de acordo com as diferentes características das instâncias, obtidos em Fiorotto et al. (2017).

		Formulação $F0$				Formulação $F1$			
		CS(%)	CE(%)	PREPARAÇÃO	ESTOQUE	CS(%)	CE(%)	PREPARAÇÃO	ESTOQUE
Capacidade	Apertada	61,49	38,51	92,6	12953	62,60	37,40	93,0	12614
	Normal	73,79	26,21	102,5	10995	73,83	26,17	102,2	11010
	Relaxada	74,50	25,50	100,6	11242	74,52	25,48	100,4	11189
Custo de preparação	Baixo	82,21	17,79	152,0	1878	83,08	16,92	152,5	1766
	Normal	65,50	34,50	90,4	9186	65,74	34,26	90,3	9088
	Alto	62,07	37,93	53,2	24126	62,13	37,87	52,9	23959
Tempo de preparação	Baixo	69,28	30,72	98,7	11521	69,52	30,48	98,6	11427
	Alto	70,57	29,43	98,3	11939	71,12	28,88	98,5	11782
Demanda	Médio	71,15	28,85	105,3	12112	71,41	28,59	105,3	12053
	Alto	68,71	31,29	91,7	11348	69,23	30,77	91,8	11155
Média		69,93	30,07	98,5	11730	70,32	29,68	98,5	11604

5.1.4 Instâncias com penalização para a preparação *carryover*

Para os conjuntos de instâncias anteriores as soluções obtidas tiveram poucas preparações *crossover*. Observou-se que, de forma geral, os resultados mostraram uma preferência em se fazer

preparações *carryover* em detrimento às preparações *crossover*. Como as restrições de quebra simetria são úteis para fixar as preparações *crossover* apresenta-se, nesta seção, resultados em que pode-se comparar e explorar os ganhos obtidos para as formulações $F1'$ e $F2'$. As formulações $F3$, $F4$ e $F5$ também são testadas para estas instâncias.

Com o intuito de obter soluções com preparação *crossover* e com a experiência dos resultados anteriores, supõe-se nesta seção que a preparação *carryover* tem um custo que é considerado na função objetivo, este custo ajuda a diminuir a quantidade de preparações *carryover* e optar por mais preparações *crossover*. Portanto, tem-se que, para a formulação $F1$, a função objetivo é:

$$v(F1) = \min \sum_{i \in I} \sum_{t \in T} (sc_{it}y_{it} + cc_{it}zeta_{it}) + \sum_{i \in I} \sum_{t \in T} \sum_{k=t}^m cs_{itk}x_{itk} \quad (5.1)$$

e para a $F2$ é:

$$v(F2) = \min \sum_{i \in I} \sum_{t \in T} (sc_{it}z_{it} + cc_{it}zeta'_{it} + sc_{it}v'_{it}) + \sum_{i \in I} \sum_{t \in T} \sum_{k=t}^m cs_{itk}x_{itk} \quad (5.2)$$

onde cc_{it} é o custo de preparação *carryover* para o item i no período t .

Para os resultados apresentados considera-se $cc_{it} = sc_{it}$, $\forall i \in I$, $t \in T$.

Resultados para as instâncias F e G

Como pode ser observado na Tabela 5.10, ao considerar custos de preparação *carryover* na função objetivo, os tempos computacionais são bem mais rápidas.

As 70 instâncias, do conjunto das F , foram resolvidas até a otimalidade obtendo a mesma solução. O tempo computacional para a $F1$ e a $F1'$ é quase igual, mas a $F2'$ foi mais rápida que a $F2$.

No conjunto de instâncias G , enquanto aumenta o número de itens e períodos as formulações usam mais tempo para encontrar soluções ótimas. Para as instâncias com 30 períodos, enquanto o número de itens aumenta o tempo computacional da formulação $F2$ também aumenta. Para as instâncias $G24 - 30$, a $F2$ obtém solução ótima apenas para uma instância. Por outro lado, a $F2'$ é melhor, pois as soluções ótimas foram encontradas, na maioria das instâncias, em tempos bem menores.

As formulações $F3$ e $F4$ apesar de terem tempos computacionais baixos e encontrarem

soluções ótimas para todas as instâncias, exceto uma, os limites superiores são ligeiramente maiores que as outras formulações. A formulação $F5$ encontra soluções ótimas para todas as instâncias, exceto uma das $G24 - 30$ enquanto a $F1$ encontrou soluções ótimas para todas as instâncias.

Em resumo, as restrições de quebra de simetria para a $F1$ não fazem muita diferença. O que não acontece com a $F2$, na qual, as restrições de quebra de simetria são eficientes, influenciando nos tempos computacionais.

Tabela 5.10: Média dos limites superiores (LS) e tempos computacionais (TEMPO) das instâncias F e G ao considerar custos de preparação *carryover* na função objetivo.

Formulações	F		G6-15		G12-15		G24-15		G6-30		G12-30		G24-30	
	LS	TEMPO	LS	TEMPO	LS	TEMPO	LS	TEMPO	LS	TEMPO	LS	TEMPO	LS	TEMPO
$F1$	42064,73	1,2	36963,71	5,3	69161,60	4,4	144913,60	37,4	67334,20	25,2	144947,60	258,3	273182,20	500,0
$F1'$	42064,73	1,7	36963,71	9,9	69161,60	7,6	144913,60	60,0	67334,20	28,8	144947,60	385,5	273182,20	517,5
$F2$	42064,73	13,4	36963,71	84,9	69161,60	32,9	144913,60	921,3	67334,20	1047,5	144947,60	1433,04	273180,80	1191,7
$F2'$	42064,73	2,9	36963,71	19,2	69161,60	12,7	144913,60	87,4	67334,19	294,0	144947,60	588,7	273178,60	512,5
$F3$	42143,73	1,4	37067,42	8,5	69182,80	4,4	144918,60	32,4	67446,20	154,3	144971,20	259,7	273179,20	485,9
$F4$	42125,12	1,5	37060,37	11,2	69182,80	4,8	144918,60	35,6	67442,20	184,9	144970,60	210,4	273179,20	342,8
$F5$	42064,73	1,2	36963,71	5,8	69161,60	3,5	144913,60	44,9	67334,20	27,9	144947,60	190,3	273180,80	466,5

Resultados para instâncias com tempos e custos de preparação altos, das 540 instâncias

Escolheu-se um conjunto de 180 instâncias que consistem em instâncias com custos de preparação altos, pois na Tabela 5.4 nenhuma das formulações encontra soluções ótimas antes do tempo limite. Neste conjunto de instâncias estão as que tem tempos de preparação baixos e altos. A fim de reduzir a quantidade de instâncias considerou-se as que tem tempos de preparação altos. Então, nesta seção, apresenta-se os, na Tabela 5.11, resultados para as 90 instâncias com tempos e custos de preparação altos.

Ao considerar custos de preparação *carryover*, a quantidade de preparações *crossover* aumenta. Enquanto a quantidade de itens aumenta a porcentagem de soluções ótimas obtidas diminui. Com respeito aos tempos computacionais, a formulação $F1$ é a mais rápida e, portanto, é a que tem maior porcentagem de soluções ótimas.

A formulação $F2'$ além de ser mais rápida que a $F2$, encontra mais soluções ótimas, com 10 itens encontra 7,34% mais soluções ótimas que a $F2$, com 20 itens 20% a mais e com 30 itens 10% a mais. As formulações $F1$ e $F5$ são as que obtêm melhores (tanto em limites superiores como em tempos computacionais) soluções enquanto as formulações $F3$ e $F4$ obtêm piores

soluções.

Tabela 5.11: Média dos limites superiores (LS) e tempos computacionais (TEMPO), ao considerar custos de preparação *carryover* na função objetivo, das instâncias com tempos e custos de preparação altos.

Formulações	10 itens			20 itens			30 itens		
	LS	TEMPO	SO	LS	TEMPO	SO	LS	TEMPO	SO
$F1$	61484,63	659,3	70,0	120551,76	749,6	66,7	184346,56	890,1	60,0
$F1'$	61472,00	703,5	66,7	120612,19	874,9	56,7	184462,71	1056,3	46,7
$F2$	61488,46	1154,7	43,3	120570,20	1248,8	33,3	184440,19	1204,2	33,3
$F2'$	61476,86	822,9	56,7	120621,75	898,9	53,3	184496,19	1099,9	43,3
$F3$	61685,74	817,8	63,3	120739,58	904,9	53,3	184545,06	1001,9	50,0
$F4$	61622,88	747,8	66,7	120701,11	891,1	53,3	184522,85	1054,8	43,3
$F5$	61479,61	692,9	66,7	120561,93	803,8	63,3	184398,07	961,9	53,3

5.2 Resultados para a heurística RF-FO

Na Tabela 5.1, observa-se que, para as instâncias com 30 períodos nenhuma das formulações, resolvidas diretamente com o CPLEX, conseguem melhorar a solução encontrada no tempo limite. O mesmo acontece com as instâncias com custos de preparação alto, das 540 instâncias (ver Tabela 5.4). Nesta seção, com a finalidade de testar o desempenho das formulações $F1$ e $F2$ usando a heurística híbrida RF-FO em instâncias difíceis são usadas as instâncias $G6 - 30$, $G12 - 30$, $G24 - 30$ e as 90 instâncias, das 540 instâncias, com custos e tempos de preparação altos.

5.2.1 Seleção de parâmetros para RF-FO

Para selecionar os parâmetros a serem utilizados pela heurística RF-FO, fez-se alguns testes iniciais limitados às instâncias $G6 - 30$, $G12 - 30$ e $G24 - 30$.

No Algoritmo 4.1, cada subproblema foi limitado a um tempo computacional de 200 segundos. A heurística RF foi testada, de maneira isolada da FO, com diferentes tamanhos de janela para obter os melhores parâmetros. As combinações de parâmetros testadas são:

Teste 1: $T_{window\ size} = 3$ e $T_{overlap} = 2$.

Teste 2: $T_{window\ size} = 5$ e $T_{overlap} = 2$.

Teste 3: $T_{window\ size} = 7$ e $T_{overlap} = 3$.

Teste 4: $T_{window\ size} = 8$ e $T_{overlap} = 5$.

Teste 5: $T_{window\ size} = 10$ e $T_{overlap} = 4$.

Teste 6: $T_{window\ size} = 12$ e $T_{overlap} = 3$.

Teste 7: $T_{window\ size} = 15$ e $T_{overlap} = 4$.

Na Tabela 5.12 tem-se que estabelecendo os limites superiores obtidos pelas formulações resolvidas diretamente pelo CPLEX como 100%, a coluna %LS mostra a porcentagem relativa às formulações para as instâncias $G6 - 30$, $G12 - 30$ e $G24 - 30$.

Observe que, enquanto maior seja o número de variáveis binárias o problema tem melhores limites superiores, mas nem sempre será obtido o mesmo benefício no tempo computacional, como pode ser observado nas instâncias $G6 - 30$ dos Testes 6 e 7, em que o ganho obtido, para a formulação $F1$, pelo Teste 7, em comparação com o Teste 6, é de 0,02% que não compensa os 50 segundos a mais, além do que na maioria das outras instâncias o Teste 6 foi melhor. Portanto, escolhe-se $T_{window\ size} = 12$ e $T_{overlap} = 3$ para os próximos testes.

Tabela 5.12: Médias das porcentagens dos limites superiores obtidos pela RF relativos às formulações resolvidas diretamente pelo CPLEX (%LS) e os tempos computacionais (TEMPO) usando diferentes parâmetros.

	Formulação $F1$						Formulação $F2$					
	G6-30		G12-30		G24-30		G6-30		G12-30		G24-30	
	%LS	Tempo	%LS	Tempo	%LS	Tempo	%LS	Tempo	%LS	Tempo	%LS	Tempo
Teste 1	115,11	1,6	117,31	2,3	111,22	4,1	100,62	4,9	100,19	16,9	99,99	115,5
Teste 2	111,82	1,3	111,10	1,8	112,56	2,7	100,28	7,5	100,15	59,6	100,03	356,7
Teste 3	108,91	1,4	113,48	1,8	108,78	3,0	100,27	48,8	100,02	318,1	100,05	559,1
Teste 4	106,45	2,0	110,44	1,6	110,78	3,2	100,06	136,1	100,01	462,4	100,02	565,0
Teste 5	106,80	1,8	107,74	1,5	108,24	2,4	100,05	189,7	100,04	409,4	100,02	407,1
Teste 6	103,29	1,8	107,11	1,4	104,17	2,9	100,04	209,9	100,04	405,6	100,14	408,3
Teste 7	103,58	5,6	107,41	1,0	107,72	2,1	100,02	254,6	100,06	402,4	100,09	404,4

Uma vez fixados os parâmetros para a RF pode-se passar a testar a heurística FO com diferentes tamanhos de janela para obter os melhores parâmetros. No Algoritmo 4.2, cada subproblema está limitado a um tempo computacional de 50 segundos. As combinações de parâmetros testadas foram:

Teste 1: $T_{window\ size} = 2$ e $T_{overlap} = 1$.

Teste 2: $T_{window\ size} = 4$ e $T_{overlap} = 2$.

Teste 3: $T_{window\ size} = 5$ e $T_{overlap} = 3$.

Teste 4: $T_{window\ size} = 8$ e $T_{overlap} = 3$.

Teste 5: $T_{window\ size} = 10$ e $T_{overlap} = 5$.

A Tabela 5.13 mostra os resultados obtidos com os diferentes parâmetros. A coluna %LS mostra a porcentagem, do valor obtido pela heurística, com respeito ao valor obtido pelas formulações resolvidas diretamente pelo CPLEX para as instâncias $G6 - 30$, $G12 - 30$ e $G24 - 30$ (das instâncias F e G). Conforme observado anteriormente, escolhe-se os parâmetros que forneçam tanto bons limites superiores como tempos computacionais. Observe que o Teste 4 mostra porcentagens ligeiramente menores do que o Teste 3 porém os tempos computacionais são muito altos. Portanto, nos resultados computacionais, a heurística RF-FO usa os parâmetros do Teste 3.

Tabela 5.13: Médias das porcentagens dos limites superiores obtidos pela FO relativos às formulações resolvidas diretamente pelo CPLEX (%LS) e os tempos computacionais (TEMPO) usando diferentes parâmetros

	Formulação F1						Formulação F2					
	G6-30		G12-30		G24-30		G6-30		G12-30		G24-30	
	%LS	Tempo	%LS	Tempo	%LS	Tempo	%LS	Tempo	%LS	Tempo	%LS	Tempo
Teste 1	103,08	2,0	101,92	3,4	101,03	6,1	99,94	203,2	100,15	375,61	100,05	407,04
Teste 2	101,37	2,8	101,04	7,2	100,49	17,9	99,97	198,6	100,15	375,5	100,07	402,02
Teste 3	100,89	4,6	100,77	26,2	100,29	56,4	99,98	201,2	100,12	371,1	100,02	413,18
Teste 4	100,33	27,1	100,07	110,7	100,06	149,5	100,02	209,3	100,10	401,2	100,02	474,9
Teste 5	101,36	20,8	101,86	82,9	101,21	103,3	99,92	209,5	99,99	426,1	100,04	441,1

5.2.2 Resultados computacionais

Nesta seção são combinadas a heurísticas *Relax-and-Fix* e *Fix-and-Optimize* e apresenta-se os resultados da heurística RF-FO, em que a FO usa como solução inicial a solução obtida pela RF.

A Tabela 5.14 mostra os limitantes superiores (coluna LS_{RFFO}), o tempo computacional (coluna Tempo) da heurística RF-FO e na coluna $\%LS_{CPLEX}$, considerando como 100% o valor obtido pelo CPLEX, mostra-se as porcentagens dos valores obtidos pela heurística RF-FO que são calculadas relativas ao CPLEX, para os conjuntos de instâncias $G6-30$, $G12-30$ e $G24-30$, pois para os outros conjuntos de instâncias a heurística não mostrou muita diferença. Note que as heurísticas foram bem mais rápidas que às formulações resolvidas diretamente pelo CPLEX, que utilizou os 1800 segundos disponíveis (ver Tabela 5.1). As soluções obtidas pela heurística apresentam uma diferença de no máximo 0,89% com baixos tempos computacionais.

Tabela 5.14: Média dos limites superiores (LS_{RFFO}) e tempos computacionais (Tempo) usando a heurística RF-FO e porcentagens relativas às formulações resolvidas diretamente pelo CPLEX ($\%LS_{CPLEX}$), para instâncias com 30 períodos do conjunto FeG.

Instâncias	Formulação $F1$			Formulação $F2$		
	LS_{RFFO}	Tempo	$\%LS_{CPLEX}$	LS_{RFFO}	Tempo	$\%LS_{CPLEX}$
$G6-30$	53706,8	4,6	100,89	53206,2	201,2	99,98
$G12-30$	128011,4	26,2	100,77	127159,6	371,1	100,12
$G24-30$	254087,6	56,4	100,29	253269,0	413,2	100,02

Na Tabela 5.15 apresenta-se os resultados (limites superiores e tempo computacional) das instâncias com tempos e custos de preparação altos, separados pela quantidade de itens, usando a heurística RF-FO e a porcentagem da heurística com respeito às formulações resolvidas diretamente pelo CPLEX (limitados a 1800 segundos), coluna $\%LS_{CPLEX}$. Para a formulação $F1$, novamente a heurística encontrou boas soluções com baixos tempos computacionais. Para a formulação $F2$, na maioria das instâncias a heurística melhorou as soluções obtidos pelas formulações resolvidas diretamente pelo CPLEX.

Tabela 5.15: Média dos limites superiores (LS_{RFFO}) e tempos computacionais (Tempo) usando a heurística RF-FO e porcentagens relativas às formulações resolvidas diretamente pelo CPLEX ($\%LS_{CPLEX}$), para instâncias com tempos e custos de preparação altos separados pela quantidade de itens.

Instâncias	Formulação $F1$			Formulação $F2$		
	LS_{RFFO}	Tempo	$\%LS_{CPLEX}$	LS_{RFFO}	Tempo	$\%LS_{CPLEX}$
10 itens	54936,5	148,1	100,47	54917,3	268,3	99,87
20 itens	113423,6	114,4	100,35	113057,9	309,4	100,04
30 itens	176733,8	103,4	100,19	176197,1	377,9	99,49

Resultados Adicionais

Nos resultados computacionais apresentados nas seções anteriores, para as instâncias consideradas pela heurística, não se sabe se as formulações resolvidas diretamente pelo CPLEX obtêm soluções factíveis em um menor tempo computacional então para analisar os resultados de maneira justa, roda-se as mesmas instâncias, com as formulações resolvidas diretamente pelo CPLEX, no mesmo tempo computacional usado pela heurística.

Os resultados para as instâncias F e G são mostrados na Tabela 5.16. A coluna *Gap* representa o *gap* fornecido pelo pacote CPLEX. Como pode ser observado, o *gap* para a formulação *F1* é maior que para a *F2* em todos os conjuntos de instâncias. A coluna LS_{CPLEX} indica o limite superior encontrado pelas formulações resolvidas diretamente pelo CPLEX limitadas ao tempo computacional da heurística. Considerando LS_{CPLEX} como 100%, as porcentagens dos outros valores são calculadas relativas a LS_{CPLEX} (coluna $\%LS_{CPLEX}$). Para todas as instâncias, a heurística encontrou melhores soluções que as formulações resolvidas diretamente pelo CPLEX.

Tabela 5.16: Média dos limites superiores (LS_{CPLEX}) e o *gap* ($Gap(\%)$) obtidos usando as formulações resolvidas diretamente pelo CPLEX, limitadas ao tempo computacional da heurística RF-FO, e porcentagens dos resultados obtidos usando a heurística RF-FO relativas à LS_{CPLEX} ($\%LS_{CPLEX}$), para instâncias com 30 períodos do conjunto FeG.

	Formulação <i>F1</i>			Formulação <i>F2</i>		
Instâncias	LS_{CPLEX}	$Gap(\%)$	$\%LS_{CPLEX}$	LS_{CPLEX}	$Gap(\%)$	$\%LS_{CPLEX}$
<i>G6</i> – 30	54646,4	16,26	98,26	54289,0	8,80	98,04
<i>G12</i> – 30	130352,8	8,49	98,16	130226,4	3,42	97,64
<i>G24</i> – 30	258538,0	4,68	98,22	2661126,0	3,42	96,93

Agora, faz-se uma mesma análise para as 90 instâncias. A Tabela 5.17 mostra a porcentagem dos limites superiores da heurística correspondente aos obtidos pelas formulações resolvidas diretamente pelo CPLEX (coluna $\%LS_{CPLEX}$) limitados ao tempo computacional usado pela heurística. Em todos os casos a heurística melhora as soluções, sendo melhor para a *F1* com 20 itens.

Tabela 5.17: Média dos limites superiores (LS_{CPLEX}) e o *gap* ($Gap(\%)$) obtidos usando as formulações resolvidas diretamente pelo CPLEX, limitadas ao tempo computacional da heurística RF-FO, e porcentagens dos resultados obtidos usando a heurística RF-FO relativas à LS_{CPLEX} ($\%LS_{CPLEX}$), para instâncias com tempos e custos de preparação altos.

	Formulação $F1$			Formulação $F2$		
Instâncias	LS_{CPLEX}	Gap	$\%LS_{CPLEX}$	LS_{CPLEX}	Gap	$\%LS_{CPLEX}$
10 itens	55053,6	9,79	99,89	54972,0	9,55	99,44
20 itens	120747,2	0,51	93,93	113184,7	5,75	99,88
30 itens	177194,4	4,95	99,74	176564,6	4,36	99,39

Capítulo 6

Conclusões

Neste trabalho apresentou-se duas formulações para o problema CLSP-SCC, com base em formulações propostas na literatura ($F1$ e $F2$) considerando o modelo de localização de facilidades. Em seguida, a fim de diminuir a quantidade de variáveis binárias foram propostas formulações que limitam o tempo extra que pode ser emprestado, pelo menor valor dos tempos de preparação e pelo menor tempo de preparação ativo ($F3$ e $F4$, respectivamente) e uma outra formulação que, ao invés de supor que a variável de preparação *crossover* seja binária, é assumida contínua positiva ($F5$). Por último, adicionando restrições de quebra de simetria às formulações propostas na literatura, são obtidas mais duas formulações ($F1'$ e $F2'$).

Para mostrar as relações entre as 7 formulações propostas, apresentou-se resultados teóricos em que foram provados que as formulações $F1$, $F2$ e $F5$ são equivalentes, i.e, $v(F1) = v(F2) = v(F5)$; para as formulações $F3$ e $F4$ provou-se que $v(F3) \geq v(F1)$ e $v(F4) \geq v(F1)$. As formulações $F1'$ e $F2'$ simplesmente eliminam possíveis soluções alternativas, portanto, $v(F1') = v(F1) = v(F2) = v(F2')$.

Usando um pacote de otimização CPLEX e limitando o tempo computacional a 1800 segundos, os resultados computacionais mostraram que, as formulações $F1$ - $F5$, apresentadas no Capítulo 3, obtêm bons resultados em comparação com a formulação clássica (sem preparação *carryover* e *crossover*). Analisando os resultados para as formulações propostas observa-se que em termos de qualidade de solução as formulações obtêm resultados bastantes similares em que para as instâncias com poucos itens têm-se uma melhora de aproximadamente 20%, em relação

à formulação clássica, e enquanto o número de períodos aumenta a quantidade de soluções ótimas encontradas diminui, porém, na média, ainda tem uma melhoria de no mínimo 7,34%. Já para as instâncias com 20 períodos obtém-se um ganho de 13,59% que diminui enquanto o número de itens aumenta, ainda assim o ganho obtido em relação à formulação clássica foi de aproximadamente 5,22% para instâncias com 30 itens.

Comparando com as formulações que consideram apenas preparação *crossover*, propostas por Fiorotto et al. (2014) e Fiorotto et al. (2017), observou-se que, considerar preparação *carryover* ajudou a diminuir tanto a quantidade de preparações feitas, em aproximadamente 9,87%, como a quantidade de estoque e, portanto, encontrou melhores limites superiores para os conjuntos de instâncias considerados no Capítulo 5. Estes limites superiores foram aproximadamente 13% melhores para instâncias com 10 itens, aproximadamente 6,5% para instâncias com 20 itens e aproximadamente 5,07% para instâncias com 30 itens.

Em termos de tempo computacional, comparando as formulações propostas, a formulação *F3* tem um pequeno destaque seguida da formulação *F1*. Ao adicionar restrições de quebra de simetria às formulações propostas na literatura, concluiu-se que essas restrições não alteram os resultados para a formulação *F1*, mas para a formulação *F2* reduz consideravelmente os tempos computacionais.

Levando em conta os resultados obtidos tanto em qualidade de solução como em tempos computacionais conclui-se que, resolvendo usando apenas o CPLEX, a formulação que melhor se adaptou às diversas características das instâncias e obteve melhores resultados foi a formulação *F1*.

As formulações resolvidas diretamente com o pacote computacional CPLEX obtiveram boas soluções as instâncias pequenas, mas para instâncias grandes não foi possível encontrar soluções ótimas. Assim, foi desenvolvida a heurística *Relax-and-Fix* e *Fix-and-Optimize* (RF-FO). A RF consistiu em dividir o problema em subproblemas mais "fáceis" relaxando as variáveis binárias de preparação e foi utilizada para obter uma solução inicial. A RF-FO particionou o problema ao longo de todo o horizonte de planejamento. Os resultados computacionais da heurística mostraram que foi possível encontrar uma solução factível bastante próxima à obtida pelas formulações, resolvidas diretamente pelo CPLEX, com tempos computacionais bem mais rápidos,

pois o maior tempo computacional que usou a heurística para a formulação $F1$ foi aproximadamente 32 vezes mais rápido do que CPLEX e para a formulação $F2$ foi aproximadamente 4 vezes mais rápido. Para as instâncias em que as formulações, resolvidas diretamente pelo CPLEX, foram limitadas ao mesmo tempo computacional da heurística, a heurística encontrou melhores soluções para ambas formulações.

Como propostas futuras pretende-se melhorar a heurística proposta, analisando outros tipos de decomposição. Novas instâncias devem ser geradas, de forma que as soluções apresentam maior quantidade de preparações *crossover*. Além disso, extensões do modelo podem ser analisadas, por exemplo, considerando tempos de preparação maiores que o período.

Referências

BELO-FILHO, M. A. F.; ALMADA-LOBO, B. E TOLEDO, F. M. B. (2014). Models for Capacitated Lot-sizing problem with backlogging, setup carryover and crossover. *Journal of the Operational Research Society*, v. 65(11), p. 1735-1747.

CAMARGO, V. C. B.; TOLEDO, F. M. B. E ALMANDA-LOBO, B. (2012). Three time-based scale formulations for the two-stage lot sizing and scheduling in process industries. *Journal of the Operational Research Society*, v. 63, p. 1613-1630.

CHEN, H. (2015). Fix-and-Optimize and variable neighborhood search approaches for multi-level capacitated lot-sizing problems. *Omega*, v. 56, p. 25-36.

CHENG-LUNG, C. (2015). Fix-and-Optimize Heuristic and MP-based Approaches for Capacitated Lot Sizing Problem with Setup Carryover, Setup Splitting and Backlogging. 78 f. Dissertação (Mestre em Ciência) - Arizona State University. 2015.

DILLENBERGER, C.; ESCUDERO, L. F.; WOLLENSAK, A. E ZHAN, W. (1994). On practical resource allocation for production planning and scheduling with period overlapping setups. *European Journal of Operational Research*, v. 75(2), p. 275-286.

EPPEN, G. B. E MARTIN, R. K. (1987). Solving multi-item capacitated lot sizing problems using variable redefinition. *Operations Research*, v. 6, p. 832-848.

FIOROTTO, D. J.; JANS, R. E ARAUJO, S. A. (2014). An Analysis of Formulations for the Capacitated Lot Sizing Problem with Setup Crossover. *CIRRELT*, v. 65(11), p. 1735-1747.

FIOROTTO, D. J.; JANS, R. E ARAUJO, S. A. (2017). An Analysis of Formulations for the Capacitated Lot Sizing Problem with Setup Crossover. *Computers and*

Industrial Engineering.

FURLAN, M. M. (2015). Abordagens para o problema de dimensionamento e sequenciamento da produção em indústrias integradas de papel e celulose. 214 f. Tese (Doutor em Ciências) - Universidade de São Paulo, São Carlos. 2015.

GAO, Y. (2000). A Heuristic Procedure for the Capacitated Lot Sizing Problem with Setup Carryover. *Control Theory Appl*, v. 17(6), p. 937-940.

GOPALAKRISHNAN, M. (2000). A modified framework for modeling setup carryover in the capacitated lot-sizing problem. *International Journal of the Production Research*, v. 38(14), p. 3421-3424.

GOPALAKRISHNAN, M.; DING, K.; BOURJOLLY, J. M. E MOHAN, S. (2001). A tabu-search heuristic for the capacitated lot-sizing problem with setup carryover. *Management Science*, v. 47(6), p. 851-863.

GOPALAKRISHNAN, M.; MILLER, D. E SCHMIDT, C. P. (1995). A framework for modeling setup carryover in the capacitated lot sizing problem. *International Journal of The Production Research*, v. 33(7), p. 1973-1988.

GUPTA, D. E MAGNUSSON, T. (2005). The capacitated lot-sizing and scheduling problem with sequence-dependent setup costs and setup times. *Computers and Operations Research*, v. 34(4), p. 724-747.

GOREN, H. G. E TUNAH, S. (2015). Solving the capacitated lot-sizing setup carryover using a new sequential hybrid approach. *Applied Intelligence*, v. 42(4), p. 805-816.

HELBER, S. E SAHLING, F. (2008). A fix-and-optimize approach for the multi-

level capacitated lot sizing problem. *International Journal of Production Economics*, v. 123, p. 247-256.

KACZMARCZYK, W. (2009). Modeling multi-period set-up times in the proportional lot-sizing problem. *Decision Making in Manufacturing and Services*, v. 3(1-2), p. 15-35.

KACZMARCZYK, W. (2013). Modeling Set-up Times Overlapping Two Periods in the Proportional Lot-Sizing Problem with Identical Parallel Machines. *Decision Making in Manufacturing and Services*, v. 7(1-2), p. 43-50.

KOPANOS, G. M.; PUIGJANER, L. E MARAVELIAS, C. T. (2012). Production planning and scheduling of parallel continuous processes with product families. *Industrial and Engineering Chemistry Research*, v. 50(3), p. 1369-1378 .

KRARUP, J. E BILDE, O. (1977). Plant Location, set covering and economic lot size: An $O(mn)$ -algorithm for structured problems. *Numerische Methoden bei Optimierungsaufgaben. Band 3: Optimierung bei Graphentheoretischen Ganzzahligen Problemen*, p. 155-186.

LANG, C. J. E SHEN, Z. J. M. (2014). Fix-and-optimize heuristic for capacitated lot sizing problem with sequence-dependence setups and substitutions. *European Journal of Operational Research*, v. 214(3), p. 595-605.

MENEZES, A. A.; CLARK, B. E ALMADA-LOBO, B. (2010). Capacitated Lot-sizing and Scheduling with sequence-dependent, period-overlapping and non-triangular setups. *Journal of Scheduling*, v. 14(2), p. 209-219.

MOHAN, S.; GOPALAKRISHNAN, M.; MARATHE, R. E RAJAN, A. (2012). A note on modeling the capacitated Lot-sizing problem set-up carryover and set-up splitting.

International Journal of the Production Research, v. 50(19), p. 5538-5543.

MOHAMMADI, M. E GHOMI, S. M. T. F. (2010). Relax-and-Fix heuristics for simultaneous lot-sizing and sequencing the permutation flow shops with sequence-dependent setups. *International Journal of Industrial Engineering and Production Research*, v. 21(3), p. 147-153.

POCHET, Y. E WOLSEY, L. A. (2006). Production planning by mixed integer programming. *Springer Science & Business Media*

QUADT, D. E KUHN, H. (2009). Capacitated lot sizing and scheduling with parallel machines, back-orders, and setup carryover. *Naval Research Logistics (NRL)*, v. 56(4), p. 366-384.

RARDIN, R. E WOLSEY, L. A. (1993). Valid inequalities and projecting the multi-commodity extended formulation for uncapacitated fixed charged network flow problems. *European Journal of Operation Research*, v. 71(1), p. 95-109.

RAMYA, R.; RAJENDRAN, C. E ZIEGLER, H. (2016). Capacitated lot-sizing problem with production carry-over and set-up splitting: mathematical models. *International Journal of Production Research*, v. 54(8), p. 2332-2344.

SOX, C. R. E GAO, Y. (1999). The capacitated lot sizing problem with setup carry-over. *IIE Transactions*, v. 31, p. 173-181.

STADTLER, H. (2003). Multi-level lot-sizing with setup times and multiple constrained resources: Internally rolling schedules with lot-sizing window. *Operational Research*, v. 51, p. 487-502.

- SUERIE, C. (2006). Modeling of period overlapping setup times. *European Journal of Operational Research*, v. 174, p. 874-886.
- SUERIE, C. E STADTLER, H. (2003). The Capacitated Lot-sizing problem with linked lot sizes. *Management Science*, v. 49(8), p. 1039-1054.
- SUNG, C. E MARAVELIAS, C. T. (2008). A mixed-integer programming formulation for the general capacitated lot-sizing problem. *Computers and Chemical Engineering*, v. 32, p. 244 - 259.
- TEMPELMEIER, H.; BUSCHKUHL, L.; SAHLING, F. E HELBER, S. (2009). Solving a Multi-Level Capacitated Lot Sizing Problem with Multi-Period Setup Carry-Over via a Fix-and-Optimize Heuristic. *Computers and Operations Research*, v. 36, p. 2546-2553.
- TOLEDO, C. F. M.; DA SILVA ARANTES, M.; HOSSOMI, M. Y. B.; FRANÇA, P. M. E AKARTUNALR, K. (2015). A relax-and-fix with fix-and-optimize heuristic applied to multi-level lot-sizing problems. *Springer Science & Bussiness Media*, v. 21, p. 687-717.
- TRIGEIRO, W. W.; THOMAS, J. E MCCLAIN, J. O. (1989). Capacitated Lot-sizing with setup times. *Management Science*, v. 35, p. 553-566.
- WU, T. E SHI, L. (2011). Mathematical Models for Capacitated Multi-level Production Planning Problems with Linked Lot Sizes. *International Journal of the Production Research*, v. 49(20), p. 6227-6247.
- XIAO, J.; ZHANG, C.; ZHENG, L. E GUPTA, J. N. D. (2013). MIP-based fix-and-optimize algorithms for the parallel machine capacitated lot-sizing and scheduling problem. *International Journal of the Production Research*, v. 51(16), p. 5011-5028.