UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Câmpus de São José do Rio Preto

Raul Lima

Estabilidade de equações diferenciais funcionais com retardamento via teoria de pontos fixos

São José do Rio Preto
2019

Raul Lima

Estabilidade de equações diferenciais funcionais com retardamento via teoria de pontos fixos

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Câmpus de São José do Rio Preto.

Orientadora: Profa. Dra. Suzete Maria Silva Afonso
Financiadora: CAPES

São José do Rio Preto
2019

L732e

Lima, Raul

Estabilidade de equações diferenciais funcionais com retardamento via teoria de pontos fixos / Raul Lima. -- São José do Rio Preto, 2019

107 p. : il.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp), Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas, São José do Rio Preto

Orientadora: Suzete Maria Silva Afonso

1. Ponto fixo. 2. Estabilidade. 3. Funcionais de Lyapunov. 4. Equação diferencial funcional com retardamento. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas, São José do Rio Preto. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

Raul Lima

Estabilidade de equações diferenciais funcionais
com retardamento via teoria de pontos fixos

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Câmpus de São José do Rio Preto.
Financiadora: CAPES

Comissão Examinadora

Profa. Dra. Suzete Maria Silva Afonso
Orientadora

Profa. Dra. Marta Cilene Gadotti
Departamento de Matemática - IGCE - Universidade Estadual Paulista

---

Prof. Dr. Miguel Vinicius Santini Frasson
Departamento de Matemática - ICMC - Universidade de São Paulo

Rio Claro
25 de fevereiro de 2019

Aos meus pais Elizete e Alfredo, à minha irmã Vitória,
e aos meus avós Eudete e Claudoar (in memorian)*, pelo apoio incondicional.*

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, que me proporcionou ter uma família, ter amigos e estudar em uma universidade pública e de qualidade. Aos meus pais, Alfredo e Elizete, pelo amor incondicional que recebi por toda minha vida, pelo incentivo aos estudos, por me ensinarem valores imprescindíveis para a conclusão deste trabalho, como responsabilidade e empatia, e pelo suporte financeiro nos anos de graduação. À minha irmã Vitória, pela amizade, compreensão, companheirismo e por resolver todos os problemas que enfrentamos nos momentos em que estive ausente.

À minha família, que sempre me incentivou e se mostrou interessada e orgulhosa pelo meu progresso. Agradeço principalmente aos meus avós paternos Eudete e Claudoar *(in memorian)* que me deram o apoio incondicional e necessário no momento em que eu mais precisei, além de todo incentivo e amor recebido nas visitas a Piracicaba.

Aos meus professores de ensino fundamental, médio, técnico e superior que, na maioria das vezes, foram bons profissionais e me ajudaram a passar por barreiras ao longo de todos os anos que me fizeram chegar na conclusão deste trabalho.

Aos meus amigos de São Paulo, que me deram muito apoio e entenderam sempre a minha ausência. Aos meus amigos em Rio Claro, que foram a minha família, meu porto seguro e minha felicidade, por todos estes anos. Agradeço pelo cotidiano, pelas noites em claro, pelas festas e principalmente pela não enumerável quantidade de horas que ficamos conversando sobre vida; todos estes momentos ficarão guardados com muito carinho no meu coração. Em especial, agradeço aos meus grandes amigos e irmãos da República Mateca, Donizetti, Fernando, Guilherme, Marco e Rodrigo, e às minhas grandes amigas Deborah, Natalia e Renata, por me ouvirem, me entenderem e saberem quem eu sou, e me ajudarem nos momentos mais difíceis.

Ao grupo PET Matemática da Unesp de Rio Claro, que além do suporte financeiro, me ensinou a ouvir, aceitar e a enxergar que cada pessoa tem um papel fundamental em um grupo e que suas qualidades podem sobressair aos defeitos quando olhamos para elas como elas realmente são.

À professora Marta Cilene Gadotti, que foi como uma mãe nestes anos de Unesp, sempre muito carinhosa e receptiva com todos os alunos. Agradeço à ela pela amizade, pelas conversas, por acreditar em mim e no meu potencial e por ser muito mais do que uma orientadora. À professora Suzete Maria Silva Afonso, pela exímia orientação neste trabalho, pelas aulas impecáveis, pela amizade adquirida durante as reuniões de orientação e pela humildade que passa para todos à sua volta.

A todos os funcionários da Unesp de Rio Claro, que fazem esse ambiente ser muito acolhedor e receptivo. Em especial, Ana, Elisa, Inajara, José Ricardo, Clotilde e Alessandra, funcionários do Departamento de Matemática da Unesp de Rio Claro, que além de sua competência inquestionável, tratam todos com muito respeito.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001

Uma vez que você tenha aceitado todos os seus defeitos,
ninguém consegue usá-los contra você.
Tyrion Lannister - Game of Thrones

RESUMO

Neste trabalho, serão apresentados, inicialmente, resultados de estabilidade de soluções de equações diferenciais funcionais com retardamento (EDFRs) utilizando a teoria de Lyapunov. Em seguida, resultados similares serão abordados via teoria de pontos fixos. Os teoremas de pontos fixos a serem utilizados serão: Teorema do Ponto Fixo da Contração, Teorema do Ponto Fixo de Schauder e o Teorema do Ponto Fixo de Krasnoselskii. Vários exemplos serão apresentados para ilustrar os resultados exibidos.

Palavras-chave: Ponto fixo, Estabilidade, Funcionais de Lyapunov, Equação Diferencial Funcional com Retardamento.

ABSTRACT

In this work, stability results of solutions of retarded functional differential equations (RFDEs) using the Lyapunov theory will be presented initially. Subsequently, similar results will be approached via fixed-point theory. The fixed-point theorems to be used are: Contraction Fixed-Point Theorem, Schauder's Fixed-Point Theorem and Krasnoselskii Fixed-Point Theorem. Several examples will be presented to illustrate the results displayed.

Keywords: Fixed point, Stability, Lyapunov Functionals, Retarded Functional Differential Equation.

Lista de Figuras

Lista de Símbolos

$\mathbb{R}$ é o intervalo $(-\infty, \infty)$

$\mathbb{R}^n$ é o conjunto $\underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n-\text{vezes}}$

$\mathbb{R}^+$ é o intervalo $[0, +\infty)$

$\mathbb{R}^n_+$ é o conjunto $\underbrace{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \cdots \times \mathbb{R}^+}_{n-\text{vezes}}$

$\mathbb{N}$ é o conjunto dos números inteiros positivos

$C(A, B)$ é o espaço vetorial das funções contínuas $\varphi : A \to B$ sobre o corpo $\mathbb{R}$

$C^k(A, B)$ espaço das funções $f : A \longrightarrow B$ $k-$vezes diferenciáveis e $f^{k-1} : A \longrightarrow B$ contínua, com $k \in \mathbb{N}$

C denota o espaço de Banach das aplicações contínuas de $[-r, 0]$ em $\mathbb{R}^n$ com a norma do supremo, $\|\varphi\| = \sup\limits_{\theta \in [-r,0]} |\varphi(\theta)|$, em que $|\,.\,|$ é uma norma em $\mathbb{R}^n$

$x(t, t_0, \varphi)$ é a solução da equação $\dot{x}(t) = f(t, x_t)$ cuja função inicial em t_0 é φ

$x_t(t_0, \varphi)$ denota uma função contínua de $[-r, 0]$, $r > 0$, em $\mathbb{R}^n$, dada por $x_t(t_0, \varphi)(\theta) = x(t + \theta, t_0, \varphi)$ para $\theta \in [-r, 0]$

D_{t_0} é o centro de atração do ponto de equilíbrio $x = 0$ da equação $\dot{x}(t) = f(t, x_t)$ em t_0

Sumário

Introdução

As equações diferenciais funcionais (EDFs) tornaram-se objeto de grande interesse para a análise matemática, visto que elas representam sistemas dinâmicos de dimensão infinita com uma dinâmica muito complexa. Daremos ênfase neste trabalho ao estudo das equações diferenciais funcionais com retardamento (EDFRs). As EDFRs ganharam destaque na pesquisa em equações diferenciais por incluírem um fator de tempo entre a causa e o efeito, como, por exemplo, o tempo de incubação de uma determinada doença e o tempo de gestação de algumas espécies; a inclusão deste fator tornou os modelos matemáticos mais realísticos.

No estudo qualitativo das EDFRs, a teoria dos funcionais de Lyapunov destaca-se como a principal ferramenta. Através da construção de determinados tipos de funcionais, o matemático russo Aleksandr Lyapunov (1857-1918) mostrou que é possível estabelecer condições que garantem a estabilidade e a limitação de soluções de EDFRs. Para entender como estes funcionais são construídos e como podemos utilizá-los para extrair boas propriedades qualitativas de EDFRs, o Capítulo 1 apresentará resultados e exemplos úteis para a boa compreensão da técnica, tendo como principais referências [12, 15, 25].

Conforme foi citado, a dinâmica das equações diferenciais com retardamento é bastante complexa e é demasiadamente difícil encontrar a solução exata para a maioria das equações desse tipo. Portanto, obter boas propriedades qualitativas faz-se necessário. Apesar dos funcionais de Lyapunov serem a principal ferramenta, a dificuldade na construção dos mesmos limitava a obtenção de bons resultados, visto que, pela complexidade de alguns problemas, apesar da equação diferencial retratar bem o comportamento de alguns fenômenos, as condições de estabilidade impostas eram pouco aplicáveis. Um dos exemplos onde este fato ocorre é o modelo proposto por J. Levin e J. Nohel em [18], onde se tem uma equação integral do tipo Volterra, muito útil na descrição de fenômenos biológicos. Quando se leva em conta as condições exigidas para o funcional de Lyapunov, construído por Levin e Nohel, para que se obtenha a estabilidade assintótica da solução, há um problema: o resultado, apesar de verídico, é pouco aplicável.

Motivados pela dificuldade em determinar tais funcionais, Theodore Burton e pesquisadores associados a ele, como Weipeng Zhang e Tetsuo Furumochi, começaram a estudar a teoria qualitativa de EDFRs via teoria de ponto fixo. Este estudo gerou uma série de artigos com resultados novos sobre o tema, como se pode ver em [5, 8, 9, 10], por exemplo. No Capítulo 2, a teoria de ponto fixo é apresentada como uma alternativa ao estudo qualitativo de equações diferenciais. Utilizaremos o livro [9] do matemático Burton como principal referência. Este livro reúne os primeiros artigos de Burton e seus colaboradores, publicados sobre o tema. A técnica do estudo da teoria qualitativa de EDFRs por meio da teoria de ponto fixo consiste basicamente em construir uma aplicação entre espaços métricos convenientes, através da inversão da equação diferencial e da escolha um teorema de ponto fixo adequado, este responsável por garantir que a solução do problema possua as propriedades desejadas.

Inicialmente, utilizaremos o Teorema do Ponto Fixo da Contração, o mais simples dos teoremas de ponto fixo, mas que apresenta algumas vantagens em relação à teoria dos funcionais de Lyapunov, dependendo da família de equações a ser considerada. Já citado, o problema de Levin-Nohel é conhecido por ser um dos resultados mais bonitos na área, mas apresenta algumas limitações quando se considera a demonstração feita originalmente. No texto, utilizaremos o Teorema do Ponto Fixo da Contração para apresentar novas condições de estabilidade, desta vez mais aplicáveis a problemas do mundo real e com um resultado semelhante ao obtido por Levin e Nohel.

Diferente do que ocorre no Teorema de Ponto Fixo da Contração, o Teorema do Ponto Fixo de Schauder exige compacidade do espaço métrico em que se encontram as soluções da equação diferencial. Por esta razão, vamos definir como são os conjuntos compactos em espaços de dimensão infinita. Para caracterizá-los, a principal ferramenta será o Teorema de Ascoli-Arzelà que relaciona os conceitos de equicontinuidade, conjunto uniformemente limitado e compacidade. Além disso, o Teorema do Ponto Fixo de Schauder também exige convexidade do espaço em que se encontram as soluções.

Combinando os teoremas de ponto fixo supramencionados, o Teorema do Ponto Fixo de Krasnoselskii é o menos conhecido dentre os apontados, mas possui propriedades interessantes em relação à construção do operador. A ideia principal é enxergar o operador contruído como a soma de outros dois operadores A e B, que satisfazem condições diferentes entre si. A princípio, pode parecer mais trabalhoso, mas as condições sobre estes operadores são as mesmas exigidas nos teoremas da contração e de Schauder. Inspirados nos trabalhos desenvolvidos em [10] e [16], mostraremos que, sob algumas condições, o teorema de Krasnoselskii mostra-se bastante útil para determinar a limitação e a estabilidade de uma família de equações diferenciais funcionais não lineares.

Ao longo do texto os três teoremas de ponto fixo citados anteriormente serão utilizados para determinar algum tipo de estabilidade e limitação para diferentes classes de equações diferenciais funcionais com retardamento, como por exemplo equações lineares e quase lineares, além de equações não lineares com duplo retardo variado. Através dos exemplos, a teoria de ponto fixo será apresentada como uma alternativa a outras ferramentas no estudo qualitativo de EDFR.

A teoria qualitativa de equações diferenciais funcionais é construída sobre espaços de dimensão infinita e exige pré-requisitos de Equações Diferenciais Funcionais, Análise Real, Espaços Métricos e Topologia Geral. Os pré-requisitos de tais áreas utilizados neste texto, em sua maioria, não foram revisitados aqui. Por essa razão, indicamos ao leitor que tenha acesso às referências [15], [19], [20] e [24], para que possa desfrutar de uma boa leitura.

Cabe mencionar que alguns resultados referentes ao tema da dissertação, embora não obtidos originalmente pelo autor, encontram-se publicados em uma revista nacional de divulgação matemática (veja [21] e [22]). Os resultados presentes no trabalho [21] foram abordados na Seção 2.3 do Capítulo 2, enquanto que os resultados presentes em [22] não foram exibidos nesta dissertação por envolver ferramentas matemáticas que, por suas complexidades, julgamos por bem não tratá-las de forma superficial aqui.

Os gráficos presentes no texto foram elaborados pelo autor, com auxílio do software R e do pacote *deSolve*. Os códigos que auxiliaram na construção das simulações estão presentes em [27]. Além disso, a referência [3] é indicada para a consulta de soluções numéricas de equações diferencias funcionais com retardamento.

1 Estabilidade via funcionais de Lyapunov

Neste capítulo introduziremos as definições de estabilidade para equações diferenciais funcionais com retardamento (EDFRs) e apresentaremos os principais resultados desenvolvidos pelo russo Aleksandr Mikhailovich Lyapunov, durante os séculos XIX e XX. As principais referências para este capítulo são [12], [15] e [25]. Cabe frisar que os exemplos aqui explorados podem ser encontrados em [9].

Ao longo do texto, assumimos que o leitor tenha familiaridade com conceitos básicos de EDFRs. No entanto, a fim de tornar este trabalho mais didático e acessível, iniciamos este capítulo com algumas noções importantes a respeito de tal tipo de equações.

1.1 Preliminares

Sejam $r, H \in \mathbb{R}$, com $0 \leq r < +\infty$ e $0 < H \leq +\infty$, e $C_H = \{\varphi \in C : \|\varphi\| < H\}$, em que $C = C([-r, 0], \mathbb{R}^n)$ é o espaço de Banach das aplicações contínuas de $[-r, 0]$ em $\mathbb{R}^n$ com a norma $\|\varphi\| = \sup\limits_{-r \leq \theta \leq 0} |\varphi(\theta)|$ e $|\,.\,|$ é uma norma em $\mathbb{R}^n$. No caso em que $H = +\infty$, temos $C_H = C$.

Sejam A, $0 < A \leq +\infty$, e $x : [t_0 - r, t_0 + A) \to \mathbb{R}^n$ uma função contínua. Seja $t \in [t_0 - r, t_0 + A)$. Define-se x_t como o elemento de C dado por $x_t(\theta) = x(t + \theta)$ para $-r \leq \theta \leq 0$. A aplicação $t \in [t_0, t_0 + A) \mapsto x_t \in C$ é contínua (veja [15], Lema 2.1, página 40).

Seja $f : [0, +\infty) \times C_H \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação. A equação

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t), \tag{1.1}$$

é denominada **equação diferencial funcional com retardamento (EDFR)**.

Uma função $x : [t_0 - r, t_0 + A) \to \mathbb{R}^n$, contínua em $[t_0 - r, t_0 + A)$, com $0 < A \leq +\infty$, $t_0 \geq 0$, é dita uma **solução** de (1.1) em $[t_0, t_0 + A)$, se ela é diferenciável no intervalo $[t_0, t_0 + A)$ e se a igualdade $\dot{x}(t) = f(t, x_t)$ é cumprida para todo $t \in [t_0, t_0 + A)$. Observamos que não é exigido que a função x, definida em $[t_0 - r, t_0 + A)$, seja diferenciável em t_0. No instante t_0, consideramos apenas a derivada à direita da função x.

Note que, quando $r = 0$, a equação diferencial funcional com retardamento se reduz a uma equação diferencial ordinária.

Uma função $x : [t_0-r, t_0+A) \to \mathbb{R}^n$, contínua em $[t_0-r, t_0+A)$, com $0 < A \leq +\infty$, $t_0 \geq 0$, e diferenciável com $[t_0, t_0+A)$, é uma solução de (1.1) com função inicial ψ em t_0 se:

i) $x_t \in C_H$, para $t_0 \leq t < t_0 + A$;

ii) $x_{t_0} = \psi$;

iii) $\dot{x}(t) = f(t, x_t)$, para $t_0 \leq t < t_0 + A$.

O próximo resultado determina as condições necessárias para que as soluções de (1.1) existam e sejam únicas. Os demais resultados sobre existência e unicidade de soluções, bem como extensão de soluções de EDFRs podem ser pesquisados em [12], [15] e [25].

Teorema 1.1 ([1], Teorema 3.14, página 38)**.** *Seja $f : [0, \infty) \times C_H \to \mathbb{R}$ contínua e localmente lipschitziana relativamente a segunda variável. Então, para quaisquer $t_0 \geq 0$ e $\varphi \in C_H$, existem $A > 0$ e uma função $x : [t_0 - r, t_0 + A) \to \mathbb{R}$ que é sólução de* (1.1) *com função inicial φ em t_0. Mais ainda, esta solução é única.*

O estudo qualitativo de equações diferenciais dá-se em torno de um ponto de equilibrio, cuja definição é dada a seguir.

Definição 1.2. *Dizemos que um ponto x é um* ***ponto de equilíbrio*** *de* (1.1) *se*

$$f(t, x_t^*) = 0, \quad \textit{onde } x^*(t) = x \textit{ para todo } t \in [0, +\infty).$$

As definições de estabilidade neste capítulo serão dadas em relação a $x = 0$. Para isso, suporemos que a origem é um ponto de equilíbrio da equação (1.1), isto é, assumiremos que $f(t, 0) = 0$ para todo $t \geq 0$.

Observação 1.3. Quando a equação diferencial $\dot{y} = g(t, y_t)$ possuir um ponto de equilíbrio $y^* \in C_H$, $y^* \not\equiv 0$, podemos considerar a mudança de variável $x = y - y^*$. Dessa forma, teremos

$$\dot{x}(t) = \dot{y}(t) - \dot{y^*}(t) = g(t, y_t) - g(t, y_t^*) = g(t, x_t^* + y_t^*) - g(t, y_t^*).$$

Denotando $f(t, x_t) = g(t, x_t^* + y_t^*) - g(t, y_t^*)$, obtemos $f(t, 0) = 0$ para todo $t \geq 0$, de onde concluímos que $x = 0$ é um ponto de equilíbrio da equação $\dot{x}(t) = f(t, x_t)$. Pelo que foi exposto, alegamos ser suficiente apresentar definições e resultados sobre a estabilidade da equação (1.1) apenas com respeito ao ponto de equilíbrio $x = 0$.

Com relação à equação diferencial funcional com retardamento, consideremos as seguintes hipóteses:

i) f é uma função contínua que leva conjuntos $[0, \tau] \times C_{H_1}$ em conjuntos limitados do $\mathbb{R}^n$, para todo τ, H_1, tais que $0 < \tau < +\infty$ e $0 < H_1 < H$.

ii) Vale alguma condição de unicidade relativamente ao problema de função inicial, isto é, se $x(t)$ e $y(t)$ são duas soluções de (1.1) definidas em algum intervalo comum $[t_0 - r, t_0 + A)$, com $0 < A \leq +\infty$ e $x_{t_0} = y_{t_0}$, então, $x(t) = y(t)$ para todo $t \in [t_0 - r, t_0 + A)$.

Indicamos por $x(t, t_0, \varphi)$ a solução da equação (1.1) cuja função inicial em t_0 é φ. Usamos a notação $x_t(t_0, \varphi)$ para indicar o elemento de C dado por $x_t(t_0, \varphi)(\theta) = x(t + \theta, t_0, \varphi)$, para $\theta \in [-h, 0]$.

Agora, estamos aptos a definir os tipos de estabilidade a serem estudados.

Definição 1.4. *(Estabilidade) Dizemos que $x = 0$ é uma solução **estável** de (1.1) se, dados $\epsilon > 0$ e $t_0 \geq 0$, existe $\delta = \delta(\epsilon, t_0) > 0$ tal que*

$$\varphi \in C_H,\ \|\varphi\| < \delta \quad e \quad t \geq t_0 \quad \Longrightarrow \|x_t(t_0, \varphi)\| < \epsilon.$$

*Caso esta condição não seja satisfeita dizemos que a solução nula é **instável**.*

Definição 1.5. *(Estabilidade Uniforme) Dizemos que $x = 0$ é uma solução **uniformemente estável** de (1.1) se, dados $\varepsilon > 0$ e $t_0 \geq 0$, existe $\delta = \delta(\varepsilon)$ tal que*

$$\varphi \in C_H,\ \|\varphi\| < \delta \quad e \quad t \geq t_0 \quad \Longrightarrow \|x_t(t_0, \varphi)\| < \epsilon.$$

Definição 1.6. *(Estabilidade Assintótica) Dizemos que $x = 0$ é uma solução **assintoticamente estável** de (1.1) quando $x = 0$ é estável e, para cada $t_0 \geq 0$, existe um $\rho = \rho(t_0) > 0$ tal que se $\varphi \in C_H$ e $\|\varphi\| < \rho$, então qualquer solução $x(t, t_0, \varphi)$ de (1.1) satisfaz $x(t, t_0, \varphi) \to 0$ quando $t \to +\infty$. Se $H = +\infty$ e essa condição é satisfeita com $\rho(t_0) = +\infty$, dizemos que a solução nula é **globalmente assintoticamente estável**.*

Definição 1.7 (Estabilidade Assintótica Uniforme)**.** *Dizemos que $x = 0$ é **uniformemente assintoticamente estável** se $x = 0$ é uniformemente estável e existe $\rho > 0$ de modo que a todo $\varepsilon > 0$ corresponde um $T = T(\varepsilon) > 0$, tal que*

$$\varphi \in C_H,\ \|\varphi\| < \rho \quad e \quad t_0 \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad \|x_t(t_0, \varphi)\| < \varepsilon, \quad para\ t \geq t_0 + T(\varepsilon).$$

Exemplo 1.8. Considere a seguinte equação diferencial com retardamento

$$\dot{x}(t) = b(t)x\left(t - \frac{3\pi}{2}\right), \qquad t \geq 0, \tag{1.2}$$

em que

$$b(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq t \leq \dfrac{3\pi}{2}, \\ -\cos(t), & \text{se } \dfrac{3\pi}{2} \leq t \leq 3\pi, \\ 1, & \text{se } t \geq 3\pi. \end{cases}$$

Considere $\varphi : \left[-\frac{3\pi}{2}, 0\right] \to \mathbb{R}$ uma função inicial contínua.

- Para $0 \leq t \leq 3\pi/2$, temos $\dot{x}(t) = 0$ e, portanto, $x(t) = c$ nesse intervalo. Como $\varphi(0) = x(0) = c$, concluímos que $x(t) = \varphi(0)$, para $0 \leq t \leq 3\pi/2$.

- Para $3\pi/2 \leq t \leq 3\pi$, temos $\dot{x}(t) = -\cos(t)x(t - 3\pi/2)$. Como $3\pi/2 \leq t \leq 3\pi$, segue que $0 \leq t - 3\pi/2 \leq 3\pi/2$. Sendo assim, $x(t - 3\pi/2) = \varphi(0)$, de onde concluímos que $x(t) = -\varphi(0)\,\mathrm{sen}(t)$, para $3\pi/2 \leq t \leq 3\pi$.

- Para $3\pi \leq t \leq 9\pi/2$, temos $\dot{x}(t) = 1.x(t - 3\pi/2)$. Como $3\pi \leq t \leq 9\pi/2$, então $3\pi/2 \leq t - 3\pi/2 \leq 3\pi$. Portanto, $x(t - 3\pi/2) = -\varphi(0)\,\text{sen}(t - 3\pi/2)$. Consequentemente, obtemos $x(t) = -\varphi(0)\,\text{sen}(t)$, para $3\pi \leq t \leq 9\pi/2$.

- Para $9\pi/2 \leq t \leq 6\pi$, temos $\dot{x}(t) = 1.x(t - 3\pi/2)$. Como $9\pi/2 \leq t \leq 6\pi$, então $3\pi \leq t - 3\pi/2 \leq 9\pi/2$. Daí, $x(t - 3\pi/2) = \varphi(0)\,\text{sen}(t - 3\pi/2)$. Por conseguinte, obtemos $x(t) = -\varphi(0)\,\text{sen}(t)$, para $9\pi/2 \leq t \leq 6\pi$.

Repetindo esse processo, para a construção da solução em intervalos de comprimento do retardo, $3\pi/2$, obtemos

$$x(t,0,\varphi) = \begin{cases} \varphi(0), & \text{se } 0 \leq t \leq \dfrac{3\pi}{2}, \\ -\varphi(0)\,\text{sen}(t), & \text{se } t \geq \dfrac{3\pi}{2}. \end{cases}$$

Observe que, para $t_0 = 0$, a condição de estabilidade é satisfeita, uma vez que tomando $\delta = \varepsilon$ na definição de estabilidade tem-se

$$\|\varphi\| < \varepsilon \quad \text{e} \quad t > 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \|x_t(0,\varphi)\| < \varepsilon.$$

Agora, vamos mostrar que, para $t_0 = 3\pi$, a solução nula não é estável. Para isso, vamos considerar o resultado abaixo, que pode ser encontrado em [15], página 17.

Lema 1.9. *A equação escalar*

$$\dot{x} = Ax(t) + B(t - r),$$

em que A, B e r são constantes reais, possui uma solução não trivial $x(t) = ce^{\lambda t}$, onde c é uma constante real, se, e somente se,

$$h(\lambda) = \lambda - A - Be^{-\lambda r} = 0, \ \textit{para algum } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Pois bem, em nosso exemplo, para $t_0 = 3\pi$, temos a equação escalar

$$\dot{x}(t) = x\left(t - \frac{3\pi}{2}\right), \qquad t \geq 3\pi, \tag{1.3}$$

que tem a forma da equação do Lema 1.9, com $A = 0$, $B = 1$ e $r = 3\pi/2$.

Afirmação: Existe $\lambda > 0$ tal que

$$h(\lambda) = \lambda - e^{-\lambda 3\pi/2} = 0.$$

De fato, note que $h(0) = -1 < 0$ e $h(1) = 1 - e^{-3\pi/2} > 0$. Como h é nitidamente contínua segue, pelo Teorema do Valor Intermediário, que existe $\lambda > 0$ de forma que $h(\lambda) = 0$. Portanto, pelo Lema 1.9, podemos concluir que a equação (1.3) admite uma solução da forma $x(t) = ce^{\lambda t}$, com $\lambda > 0$. Note que

$$|x(t)| = |ce^{\lambda t}| \to \infty \ \text{ quando } \ t \to \infty,$$

Isso significa que, em qualquer vizinhança da função inicial zero, existe uma infinidade de funções iniciais φ de modo que $x(t, 3\pi, \varphi) \to \infty$ quando $t \to \infty$. Assim, a condição de estabilidade não está satisfeita para $t_0 = 3\pi$.

No estudo qualitativo de equações diferenciais funcionais com retardamento, ainda existem os conceitos de estabilidade equiassintótica e estabilidade exponencial. Esses conceitos não serão abordados neste trabalho, porém podem ser encontrados em [25], por exemplo.

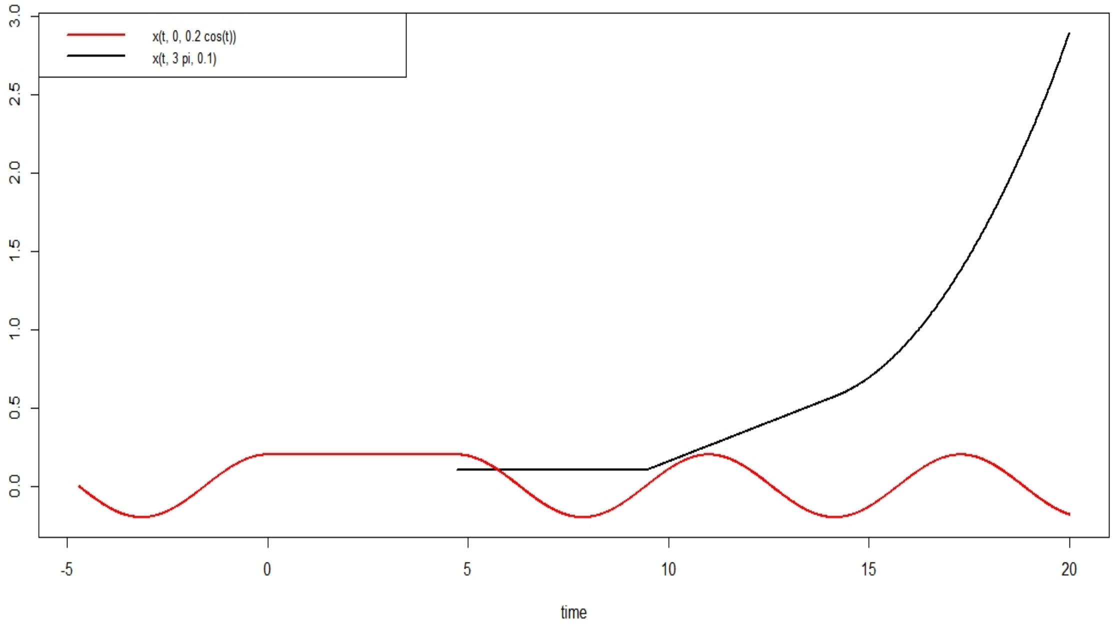

Figura 1.1: Simulação das soluções da equação (1.2) com $t_0 = 0$ e $t_0 = 3\pi$.

1.2 Estabilidade segundo Lyapunov

Nesta seção apresentaremos o Segundo Método de Lyapunov, que relaciona a construção de funcionais específicos para garantir algum tipo de estabilidade para a solução nula de uma equação diferencial com retardamento.

Seja $g : [a, b) \to \mathbb{R}$ uma função contínua definida em $[a, b)$, com $b \leq +\infty$. A expressão

$$\limsup_{h \to 0^+} \left[\frac{g(t+h) - g(t)}{h} \right] \tag{1.4}$$

tem sempre significado, podendo ser $\pm\infty$. Este limite será denotado por $\dot{g}(t)$. No caso em que a função g é diferenciável no ponto t, $\dot{g}(t)$ coincide com a derivada da g em t no sentido usual.

Com relação à derivada da função g, tomada no sentido acima (1.4), temos alguns lemas que serão úteis na demonstração dos resultados principais do capítulo e serão expostos na sequência. As provas deles serão omitidas, entretanto podem ser analisadas em [25].

Nos próximos resultados, consideraremos $g : [a, b) \to \mathbb{R}$ uma função contínua definida em $[a, b)$, com $b \leq +\infty$, como anteriormente.

Lema 1.10 ([25], Lema 1, página 23). *Se $\dot{g}(t) \leq 0\, [\dot{g}(t) \geq 0]$ para $a \leq t < b$, então g é não crescente [não decrescente] em $[a, b)$.*

Lema 1.11 ([25], Lema 2, página 24). *Se $\dot{g}(t) \leq \gamma\, [\dot{g}(t) \geq \gamma], \gamma > 0$, em $[a, b)$, então $g(t) \leq g(t_0) - \gamma(t - t_0)\, [g(t) \geq g(t_0) + \gamma(t - t_0)]$ para $a \leq t_0 \leq t < b$.*

Chamaremos de **funcional** uma função real contínua $V : [0, +\infty) \times C_H \to \mathbb{R}$.

No que segue, consideraremos que os funcionais $V : [0, +\infty) \times C_H \to \mathbb{R}$ têm a seguinte propriedade: $V(t, 0) = 0$, para todo $t \in [0, +\infty)$.

Definição 1.12. *Dizemos que V é* ***positivo-definido*** *se existe uma função real contínua $W = W(\eta)$ definida em $(0, +\infty)$ tal que $V(t, \varphi) \geq W(\|\varphi\|)$, para $(t, \varphi) \in [0, +\infty) \times C_H$, e $W(\eta) > 0$ se $\eta > 0$. Dizemos que V é* ***negativo-definido*** *se $-V$ é um funcional positivo-definido.*

Definição 1.13. *Sejam $V : [0, +\infty) \times C_H \to \mathbb{R}$ um funcional, $t_0 \geq 0$, $\varphi \in C_H$ e $x(t, t_0, \varphi)$ uma solução de (1.1), tal que $x_{t_0}(t_0, \varphi) = \varphi$. Definimos*

$$\dot{V}(t_0, \varphi) = \dot{V}(t, x_t(t_0, \varphi)) = \limsup_{h \to 0^+} \frac{V(t + h, x_{t+h}(t_0, \varphi)) - V(t, \varphi)}{h}. \tag{1.5}$$

Teorema 1.14. *Se existe um funcional $V : [0, +\infty) \times C_H \to \mathbb{R}$ positivo-definido tal que $\dot{V}(t_0, \varphi) \leq 0$, para quaisquer $t_0 \in [0, +\infty)$ e $\varphi \in C_H$, então a solução $x = 0$ de (1.1) é estável.*

Demonstração. Inicialmente, mostraremos que, dados $\varepsilon > 0$ e $t_0 \geq 0$, existe $\delta = \delta(t_0, \varepsilon) < H$ tal que

$$\varphi \in C_H, \ \|\varphi\| < \delta \quad \Longrightarrow \quad V(t_0, \varphi) < W(\varepsilon).$$

Com efeito, como V é uma função contínua em $[0, +\infty) \times C_H$, segue que, em particular, V é contínua em $(t_0, 0)$. Além disso, se $\varepsilon > 0$, então $W(\varepsilon) > 0$. Portanto, existe $\delta = \delta(t_0, \varepsilon) < H$ tal que

$$\varphi \in C_H, \ \|(t_0, 0) - (t_0, \varphi)\| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |V(t_0, 0) - V(t_0, \varphi)| < W(\varepsilon).$$

Como $V(t_0, 0) = 0$ e V é positivo-definido, temos

$$\varphi \in C_H, \ \|\varphi\| < \delta \quad \Longrightarrow \quad V(t_0, \varphi) < W(\varepsilon). \tag{1.6}$$

Afirmamos que $\|\varphi\| < \delta$ implica $\|x_t(t_0, \varphi)\| < \varepsilon$ para todo $t \geq t_0$. De fato, caso contrário, existiria $t_1 > t_0$ tal que

$$\|x_{t_1}(t_0, \varphi)\| = \varepsilon. \tag{1.7}$$

Então, pelas relações (1.6) e (1.7), e pelo fato de V ser positivo-definido, obteríamos

$$V(t_1, x_{t_1}(t_0, \varphi)) \geq W(\|x_{t_1}(t_0, \varphi)\|) \overset{(1.7)}{=} W(\varepsilon) \overset{(1.6)}{>} V(t_0, \varphi) = V(t_0, x_{t_0}(t_0, \varphi)).$$

Ou seja,

$$V(t_1, x_{t_1}(t_0, \varphi)) > V(t_0, x_{t_0}(t_0, \varphi)). \tag{1.8}$$

Por outro lado, temos, por hipótese, que $\dot{V}(t, \varphi) \leq 0$, para quaisquer $t \in [0, +\infty)$ e $\varphi \in C_H$. Portanto, pelo Lema 1.10 , podemos afirmar que V é não crescente. Isso significa que, como $t_1 > t_0$, vale

$$V(t_1, x_{t_1}(t_0, \varphi)) \leq V(t_0, x_{t_0}(t_0, \varphi)),$$

o que contradiz (1.8). Consequentemente, a solução $x = 0$ da equação (1.1) é estável.

□

Definição 1.15. *Dizemos que um funcional $V : [0,+\infty) \times C_H \to \mathbb{R}$ tem* ***extremo superior infinitésimo****, se existe uma função real contínua e não-negativa $\xi = \xi(\eta)$, com $\eta \geq 0$ e $\xi(0) = 0$, tal que $|V(t,\varphi)| \leq \xi(\|\varphi\|)$ para $(t,\varphi) \in [0,+\infty) \times C_H$.*

Teorema 1.16. *Se existe um funcional $V : [0,+\infty) \times C_H \to \mathbb{R}$ positivo-definido, tendo extremo superior infinitésimo, com $\dot{V}(t,\varphi) \leq 0$, para quaisquer $t \in [0,+\infty)$ e $\varphi \in C_H$, então a solução $x = 0$ de (1.1) é uniformemente estável.*

Demonstração. Primeiramente, provaremos que, dados $\varepsilon > 0$ e $t_0 \geq 0$, existe $\delta = \delta(\varepsilon) < H$ tal que

$$\varphi \in C_H,\ \|\varphi\| < \delta \quad \Longrightarrow \quad V(t_0,\varphi) < W(\varepsilon).$$

De fato, temos, por hipótese, que

$$V(t_0,\varphi) \leq \xi(\|\varphi\|), \qquad \text{para } (t_0,\varphi) \in [0,+\infty) \times C_H. \tag{1.9}$$

Sendo $\varepsilon > 0$, temos $W(\varepsilon) > 0$. Como ξ é não-negativa, contínua em $\eta = 0$ e $\xi(0) = 0$, segue que, para $W(\varepsilon) > 0$, existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ de forma que

$$\varphi \in C_H,\ \|\varphi\| < \delta \ \Rightarrow\ |\xi(\|\varphi\|) - \xi(0)| < W(\varepsilon) \ \Rightarrow\ |\xi(\|\varphi\|)| = \xi(\|\varphi\|) < W(\varepsilon). \tag{1.10}$$

De (1.9) e (1.10) segue que

$$t_0 \geq 0,\ \varphi \in C_H,\ \|\varphi\| < \delta \quad \Longrightarrow \quad V(t_0,\varphi) < W(\varepsilon). \tag{1.11}$$

Agora, afirmamos que $\|\varphi\| < \delta$ implica $\|x_t(t_0,\varphi)\| < \varepsilon$ para todo $t \geq t_0$. Com efeito, caso contrário existiria $t_1 > t_0$ tal que

$$\|x_{t_1}(t_0,\varphi)\| = \varepsilon. \tag{1.12}$$

Portanto, pelas relações (1.11) e (1.12), e pelo fato de V ser positivo-definido, obteríamos

$$V(t_1, x_{t_1}(t_0,\varphi)) \geq W(\|x_{t_1}(t_0,\varphi)\|) \overset{(1.12)}{=} W(\varepsilon) \overset{(1.11)}{>} V(t_0,\varphi) = V(t_0, x_{t_0}(t_0,\varphi)).$$

Ou seja,

$$V(t_1, x_{t_1}(t_0,\varphi)) \geq V(t_0, x_{t_0}(t_0,\varphi)). \tag{1.13}$$

Em contrapartida, temos, por hipótese, que $\dot{V}(t,\varphi) \leq 0$, para quaisquer $t \in [0,+\infty)$ e $\varphi \in C_H$, de onde concluímos, por meio do Lema 1.10, que V é não crescente. Portanto, como $t_1 > t_0$, vale

$$V(t_1, x_{t_1}(t_0,\varphi)) < V(t_0, x_{t_0}(t_0,\varphi)),$$

o que está em contradição com (1.13). Por conseguinte, a solução $x = 0$ da equação (1.1) é uniformemente estável. □

Definição 1.17. *Seja $x = 0$ uma solução de (1.1) assintoticamente estável. Dado $t_0 \geq 0$, definimos o* ***centro de atração do ponto de equilíbrio $x = 0$ em t_0*** *como o conjunto*

$$D_{t_0} = \{\varphi \in C_H : x(t,t_0,\varphi) \to 0 \text{ quando } t \to +\infty\}.$$

No caso de um sistema autônomo, isto é, quando $f(t,\varphi) = h(\varphi)$, o conjunto D_{t_0} não depende de t_0, então $D_{t_0} = D$ é simplesmente chamado de ***centro de atração****. No caso em que a origem ($x = 0$) é globalmente assintoticamente estável, temos $D_{t_0} = C$ para todo $t_0 \geq 0$.*

Teorema 1.18. *Suponhamos que exista um funcional* $V : [0,+\infty) \times C_H \to \mathbb{R}$ *positivo-definido, tendo extremo superior infinitésimo e com* $\dot{V} : [0,+\infty)\times C_H \to \mathbb{R}$ *(definida em* (1.5)*) negativo-definido. Nessas condições, a solução nula de* (1.1) *é uniformemente assintoticamente estável.*

Demonstração. A estabilidade uniforme da solução nula de (1.1) segue do Teorema 1.16, visto que V é positivo-definido e tem extremo superior infinitésimo.

Como V é positivo-definido e tem extremo superior infinitésimo, existem funções reais contínuas $W = W(\eta)$ e $\xi = \xi(\eta)$, com $W(\eta) > 0$, $\xi(\eta) > 0$ para $\eta > 0$, e $\xi(0) = 0$, de modo que

$$W(\|\varphi\|) \leq V(t,\varphi) \leq \xi(\|\varphi\|) \qquad \text{para } t \geq t_0 \quad \text{e} \quad \varphi \in C_H.$$

Sejam $H_1, H_2, 0 < H_1 < H_2 < H$, escolhidos de modo que $\xi(H_1) < W(H_2)$. Afirmamos que a existência de H_1 e H_2 seguem das hipóteses sobre ξ e W. Com efeito, dado $0 < H_2 < H$, temos que $W(H_2) > 0$. Como ξ é contínua em $\eta = 0$ e $\xi(0) = 0$, existe $\delta > 0$, $\delta < H_2$, tal que

$$|\eta| < \delta < H_2 \qquad \Longrightarrow \qquad |\xi(\eta) - \xi(0)| = |\xi(\eta)| = \xi(\eta) < W(H_2). \tag{1.14}$$

Tomando $H_1 > 0$ tal que $H_1 < \delta$, temos, por (1.14), que $\xi(H_1) < W(H_2)$.

Afirmação 1: se $(t_0,\varphi) \in [0,+\infty) \times C_{H_1}$, então $x_t(t_0,\varphi) \in C_{H_2}$ para $t_0 \leq t < +\infty$.

Suponhamos, por absurdo, que a afirmação acima não seja verdadeira. Sendo assim, existem t_1, t_2, tais que $t_0 < t_1 < t_2$, com $\|x_{t_1}(t_0,\varphi)\| = H_1$ e $\|x_{t_2}(t_0,\varphi)\| = H_2$. Portanto,

$$V(t_1, x_{t_1}(t_0,\varphi)) \leq \xi(\|x_{t_1}(t_0,\varphi)\|) = \xi(H_1) < W(H_2) = W(x_{t_2}(t_0,\varphi)) \leq V(t_2, x_{t_2}(t_0,\varphi)). \tag{1.15}$$

Da relação obtida em (1.15) e do Lema 1.10 segue a existência de um número $\tau \in (t_1,t_2)$, tal que $\dot{V}(\tau, x_\tau(t_0,\varphi)) > 0$, o que contradiz a hipótese de $\dot{V}$ ser negativo-definido. Essa contradição justifica a veracidade da afirmação.

Agora, como $x = 0$ é uniformemente estável, dado $\varepsilon, 0 < \varepsilon < H_1$, existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, tal que

$$\varphi \in C_\delta \qquad \Longrightarrow \qquad x_t(t_0,\varphi) \in C_\varepsilon, \quad \text{para } \ t_0 \leq t < +\infty. \tag{1.16}$$

Como $\dot{V}$ é negativo-definido, existe uma função escalar contínua $\sigma = \sigma(\eta) > 0$ para $\eta > 0$, tal que $\dot{V}(t,\varphi) \leq -\sigma(\|\varphi\|)$, para $t \in [0,+\infty)$ e $\varphi \in C_H$.

Sejam

$$0 < \gamma = \inf_{\delta \leq \eta \leq H_2} \sigma(\eta), \qquad M > \sup_{0 \leq \eta \leq H_1} \xi(\eta) \qquad \text{e} \qquad T = \frac{M}{\gamma}.$$

Note que T não depende de t_0, apenas de ε, ou seja, $T = T(\varepsilon)$.

Afirmação 2: se $\varphi \in C_{H_1}$, então $x_{\tilde{t}}(t_0,\varphi) \in C_\delta$ para algum instante $\tilde{t}$, $t_0 \leq \tilde{t} \leq t_0 + T$.

Suponhamos, por contradição, que a afirmação não seja verdadeira. Então, $\delta \leq \|x_t(t_0,\varphi)\| \leq H_2$[1] para $t_0 \leq t \leq t_0 + T$ e, portanto,

$$\dot{V}(t, x_t(t_0,\varphi)) \leq -\sigma(\|x_t(t_0,\varphi)\|) \leq -\inf_{\delta \leq \eta \leq H_2} \sigma(\eta) = -\gamma, \quad \text{para } t_0 \leq t \leq t_0 + T.$$

Segue, então, do Lema 1.11 que

$$V(t_0 + T, x_{t_0+T}(t_0,\varphi)) \leq V(t_0, x_{t_0}(t_0,\varphi)) - \gamma(T + t_0 - t_0).$$

[1] Note que $\|x_t(t_0,\varphi)\| \leq H_2$ pela Afirmação 1, já que $\varphi \in C_{H_1}$.

Como $V(t_0, x_{t_0}(t_0, \varphi)) \le \xi(\|\varphi\|)$ e $T = M/\gamma$, obtemos

$$V(t_0 + T, x_{t_0+T}(t_0, \varphi)) \le \xi(\|\varphi\|) - \gamma T < M - \gamma T = 0,$$

o que contradiz a hipótese de V ser positivo-definido. Consequentemente, a afirmação é verdadeira.

Então, pela Afirmação 2,

$$\varphi \in C_\rho, \text{ com } \rho = H_1 \quad \Longrightarrow \quad x_{\tilde{t}}(t_0, \varphi) \in C_\delta, \quad \text{para algum } \tilde{t},\ t_0 \le \tilde{t} \le t_0 + T, \tag{1.17}$$

e, por (1.16) e (1.17) , concluímos que

$$\varphi \in C_\rho, \text{ com } \rho = H_1 \quad \Longrightarrow \quad x_t(t_0, \varphi) \in C_\varepsilon, \quad \text{para } t \ge t_0 + T.$$

A prova está completa. □

Observação 1.19. Dados $H_1, H_2 > 0$ como no Teorema 1.18, é possível verificar que C_{H_1} está contido no centro de atração do ponto de equilíbrio $x = 0$ para todo $t_0 \ge 0$. De fato, como $x = 0$ é uniformemente estável, dado $\varepsilon, 0 < \varepsilon < H_1$, existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, tal que

$$\varphi \in C_\delta \quad \Longrightarrow \quad x_t(t_0, \varphi) \in C_\varepsilon, \quad \text{para } t_0 \le t < +\infty. \tag{1.18}$$

Pela Afirmação 2 (veja a demonstração do Teorema 1.18), segue que

$$\varphi \in C_{H_1} \quad \Longrightarrow \quad x_{\tilde{t}}(t_0, \varphi) \in C_\delta, \quad \text{para algum } \tilde{t},\ t_0 \le \tilde{t} \le t_0 + T, \tag{1.19}$$

e, por (1.18) e (1.19), concluímos que

$$\varphi \in C_{H_1} \quad \Longrightarrow \quad x_t(t_0, \varphi) \in C_\varepsilon, \quad \text{para } t \ge t_0 + T,$$

ou seja,

$$\varphi \in C_{H_1} \quad \Longrightarrow \quad |x(t, t_0, \varphi)| \le \|x_t(t_0, \varphi)\| < \varepsilon, \quad \text{para } t \ge t_0 + T.$$

Isso mostra que se $\varphi \in C_{H_1}$, então $|x(t, t_0, \varphi)| \to 0$ quando $t \to +\infty$, para todo $t_0 \ge 0$.

Observação 1.20. Um funcional $V : [0, +\infty) \times C_H \to \mathbb{R}$ positivo-definido, tal $V(t, 0) = 0$ para todo $t \in [0, +\infty)$, e $\dot{V}(t_0, \varphi) \le 0$, para quaisquer $t_0 \in [0, +\infty)$ e $\varphi \in C_H$, com $\dot{V}(t_0, \varphi)$ definido em (1.5), é dito um **funcional de Lyapunov** para a equação (1.1).

Definição 1.21. *Dizemos que o funcional $V : [0, +\infty) \times C \to \mathbb{R}$ é **radialmente ilimitado** se existir uma função escalar contínua $\gamma = \gamma(\eta)$ tal que $V(t, \varphi) \ge \gamma(\|\varphi\|)$ e $\gamma(\eta) \to +\infty$ com $\eta \to +\infty$.*

Teorema 1.22. *Suponhamos que exista um funcional $V : [0, +\infty) \times C \to \mathbb{R}$ positivo-definido, radialmente ilimitado, tendo extremo superior infinitésimo e com $\dot{V} : [0, +\infty) \times C \to \mathbb{R}$ (definida em (1.5)) negativo-definido. Nessas condições, a solução nula de (1.1) é globalmente assintoticamente estável.*

Demonstração. Como V é positivo-definido e tem extremo superior infinitésimo, existem funções reais contínuas $W_1 = W_1(\eta)$ e $\xi = \xi(\eta)$, com $W_1(\eta) > 0$, $\xi(\eta) > 0$ para $\eta > 0$, e $\xi(0) = 0$, de modo que

$$W_1(\|\varphi\|) \leq V(t, \varphi) \leq \xi(\|\varphi\|) \qquad \text{para } t \geq 0 \quad \text{e} \quad \varphi \in C.$$

Sendo V radialmente ilimitado, existe uma função escalar contínua $\gamma = \gamma(\eta)$ tal que

$$V(t, \varphi) \geq \gamma(\|\varphi\|), \quad \text{com } \gamma(\eta) \to +\infty \text{ quando } \eta \to +\infty.$$

Definindo $W(\eta) = \max\{W_1(\eta), \gamma(\eta)\}$, temos que $W(\eta) > 0$ para $\eta > 0, W(\eta) \to +\infty$ quando $\eta \to +\infty$ e

$$W(\|\varphi\|) \leq V(t, \varphi) \leq \xi(\|\varphi\|), \qquad \text{para } t \geq 0 \quad \text{e} \quad \varphi \in C.$$

Dada qualquer constante positiva H_1, podemos encontrar uma constante positiva H_2 tal que $\xi(H_1) < W(H_2)$. Com efeito, como $\xi(H_1) > 0$ e $W(\eta) \to +\infty$ quando $\eta \to +\infty$, existe $H_2 > 0$, $H_2 > H_1$, tal que $W(H_2) > \xi(H_1)$.

Podemos concluir, assim como na Observação 1.19, que C_{H_1} está contido no centro de atração do ponto de equilíbrio $x = 0$ para todo $t_0 \geq 0$, visto que H_1, H_2 são constantes positivas tais que $H_2 > H_1$ e $W(H_2) > \xi(H_1)$, como no Teorema 1.18. Por essa razão, a solução $x = 0$ é globalmente assintoticamente estável. □

Os teoremas e corolários apresentados na sequência estabelecem critérios de estabilidade para a solução nula da equação (1.1).

Teorema 1.23. *Suponhamos que o funcional $V : [0, +\infty) \times C_H \to \mathbb{R}$ satisfaça as seguintes hipóteses:*

i) $\gamma(|\varphi(0)|) \leq V(t, \varphi) \leq W(\varphi)$, *para* $(t, \varphi) \in [0, +\infty) \times C_H$, *em que* $W : C_H \to \mathbb{R}$ *é uma função contínua tal que* $W(0) = 0$ *e* $\gamma : [0, H) \to \mathbb{R}$ *é uma função contínua tal que* $\gamma(\eta) > 0$, *para* $\eta > 0$.

ii) $\dot{V}(t, \varphi) \leq 0$, *para* $(t, \varphi) \in [0, +\infty) \times C_H$.

Então, a solução $x = 0$ de (1.1) *é uniformemente estável.*

Demonstração. Dado $\varepsilon, 0 < \varepsilon < H_1$, seja $\delta = \delta(\varepsilon)$, $0 < \delta < \varepsilon$, escolhido de modo que $W(\varphi) < \gamma(\varepsilon)$ para $\varphi \in C_\delta$. Essa escolha de δ pode ser feita em virtude das hipóteses feitas sobre as funções W e γ. Com efeito, como $\varepsilon > 0$, temos $\gamma(\varepsilon) > 0$. Como W é uma função contínua em seu domínio, em particular, contínua em $\psi \equiv 0$, existe $\delta > 0$, o qual pode ser tomado menor do que ε, tal que

$$\varphi \in C_H \quad \text{e} \quad \|\varphi\| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |W(\varphi) - W(0)| < \gamma(\varepsilon).$$

Como $W(0) = 0$, temos que

$$\varphi \in C_\delta \quad \Longrightarrow \quad W(\varphi) \leq |W(\varphi)| < \gamma(\varepsilon).$$

Sendo assim, pela hipótese $i)$, vemos que

$$t_0 \geq 0 \quad \text{e} \quad \varphi \in C_\delta \quad \Longrightarrow \quad V(t_0, \varphi) \leq W(\varphi) \leq \gamma(\varepsilon).$$

Pelo Lema 1.10 e pela hipótese $ii)$, temos que $V(t, x_t(t_0, \varphi))$ é não-crescente em t. Portanto,

$$V(t, x_t(t_0, \varphi)) \leq V(t_0, \varphi) < \gamma(\varepsilon), \qquad \text{para} \quad t \geq t_0. \tag{1.20}$$

Afirmamos que $x_t(t_0, \varphi) \in C_\varepsilon$ para $t \geq t_0$, se $\varphi \in C_\delta$. De fato, caso contrário, existiria $\tilde{t} \geq t_0$ tal que $|x(\tilde{t}, t_0, \varphi)| = \varepsilon$. Pela hipótese $i)$ teríamos

$$V(\tilde{t}, x_{\tilde{t}}(t_0, \varphi)) \geq \gamma(|x(\tilde{t}, t_0, \varphi)|) = \gamma(\varepsilon),$$

o que entraria em contradição com o que foi concluído em (1.20). Por conseguinte,

$$t_0 \geq 0 \quad \text{e} \quad \varphi \in C_\delta \quad \Longrightarrow \quad \|x_t(t_0, \varphi)\| < \varepsilon,$$

ou seja, a solução $x = 0$ de (1.1) é uniformemente estável. □

Exemplo 1.24. Seja $g : [0, +\infty) \times C_H \to \mathbb{R}$ uma função, tal que $g(t, \varphi) \geq 0$ para qualquer $(t, \varphi) \in [0, +\infty) \times C_H$. A solução nula da equação

$$\dot{x}(t) = -x(t) g(t, x_t), \quad t \geq 0, \tag{1.21}$$

é uniformemente estável.

De fato, consideremos o funcional $V : [0, +\infty) \times C_H \to \mathbb{R}$ definido por

$$V(t, \varphi) = [\varphi(0)]^2, \quad \text{para } (t, \varphi) \in [0, +\infty) \times C_H.$$

i) Seja $\gamma : [0, H) \to \mathbb{R}_+$ a função contínua dada por $\gamma(\eta) = \eta^2$ e $W : C_H \to \mathbb{R}$ o funcional contínuo dado por $W(\varphi) = \|\varphi\|^2$. Note que $\gamma(\eta) > 0$ se $\eta > 0$, $W(0) = 0$ e
$$\gamma(|\varphi(0)|) \leq V(t, \varphi) \leq W(\varphi),$$
pois como $\|\varphi\| = \sup\limits_{-r \leq \theta \leq 0} |\varphi(\theta)| \geq |\varphi(0)|$, temos $\|\varphi\|^2 \geq |\varphi(0)|^2$ e, consequentemente,
$$\gamma(|\varphi(0)|) = |\varphi(0)|^2 = [\varphi(0)]^2 = V(t, \varphi) \leq \|\varphi\|^2 = W(\varphi).$$

ii) A derivada de V ao longo de uma solução (desconhecida) de (1.21) satisfaz $\dot{V}(t, x_t) \leq 0$. Com efeito, temos que $V(t, x_t) = [x_t(0)]^2 = [x(t+0)]^2 = [x(t)]^2$. Assim,
$$\dot{V}(t, x_t) = 2 \cdot x(t) \cdot \dot{x}(t) = 2 \cdot x(t) \cdot [-x(t) g(t, x_t)] = -2 \, [x(t)]^2 \cdot g(t, x_t)$$
e, portanto, $\dot{V}(t, x_t) \leq 0$, já que $2 \, [x(t)]^2 \cdot g(t, x_t) \geq 0$.

Como V satisfaz as hipóteses $i)$ e $ii)$ do Teorema 1.23, concluímos que a solução $x = 0$ de (1.21) é uniformemente estável.

Teorema 1.25. *Suponhamos que exista um funcional $V : [0, +\infty) \times C_H \to \mathbb{R}$ satisfazendo a hipótese $i)$ do Teorema 1.23. Suponhamos também que exista uma função real contínua $\Gamma : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ tal que $\Gamma(\eta) > 0$ para $\eta > 0$, e $\dot{V}(t, x_t) \leq -\Gamma(|x(t)|)$ para toda solução $x(t) = x(t, t_0, \varphi)$, $t_0 \geq 0$, de (1.1). Suponhamos ainda que $f = f(t, \varphi)$ seja limitada em $[0, +\infty) \times C_H$. Nessas condições, a solução nula de (1.1) é assintoticamente estável.*

Demonstração. Nesta demonstração, por conveniência, consideraremos

$$|x(t)| = \sup_{1 \le j \le n} |x_j(t)|.$$

Seja $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < H$, e seja $\delta > 0$ escolhido de modo que $0 < \delta < \varepsilon$, e $\varphi \in C_\delta$ implica $W(\varphi) < \gamma(\varepsilon)$. Tal escolha de δ se justifica pelas propriedades das funções W e γ. Com efeito, como $\varepsilon > 0$, temos $\gamma(\varepsilon) > 0$. Como W é uma função contínua em $\psi \equiv 0$, existe $\delta > 0$, o qual pode ser tomado menor do que ε, tal que

$$\varphi \in C_H \quad \text{e} \quad \|\varphi\| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |W(\varphi) - W(0)| < \gamma(\varepsilon). \tag{1.22}$$

Como $W(0) = 0$, temos que

$$\varphi \in C_\delta \quad \Longrightarrow \quad W(\varphi) \le |W(\varphi)| < \gamma(\varepsilon).$$

Procedendo como na demonstração do Teorema 1.23, podemos concluir que $\varphi \in C_\delta$ implica $x_t(t_0, \varphi) \in C_\varepsilon$ para $t \ge t_0 \ge 0$. Isso mostra que a solução nula de (1.1) é uniformemente estável e, portanto, estável. Então, para completar a prova deste resultado, é suficiente mostrar que $\varphi \in C_\delta$ e $t_0 \ge 0$ implicam $x(t, t_0, \varphi) \to 0$ quando $t \to +\infty$.

Suponhamos, por contradição, que exista $(t_0, \varphi) \in [0, +\infty) \times C_\delta$ de modo que $x(t, t_0, \varphi) \not\to 0$ quando $t \to +\infty$. Então, existem $\mu > 0$ e uma sequência crescente $(t_m)_{m \in \mathbb{N}} \subset [0, +\infty)$, com $t_{m+1} - t_m > 2$, de modo que $|x(t_m, t_0, \varphi)| > \mu$ para todo $m \in \mathbb{N}$.

Afirmação: existe $\beta > 0$, que não depende de m, tal que $|x(t, t_0, \varphi)| > \frac{\mu}{2}$ para $|t_m - t| \le \beta$.

De fato, seja $\omega > 0$ tal que $|f(t, \varphi)| \le \omega$, para $t \ge 0$ e $\varphi \in C_H$. Para cada t_m, consideraremos o intervalo $(t_m - 1, t_m + 1)$ e vamos aplicar o Teorema do Valor Médio em cada componente de $x(t, t_0, \varphi)$. Então, para $t \in (t_m - 1, t_m + 1)$, existe um número real ξ entre t_m e t, tal que

$$|x_j(t_m, t_0, \varphi) - x_j(t, t_0, \varphi)| = |\dot{x_j}(\xi, t_0, \varphi)(t - t_m)| = |f_j(\xi, x_\xi)| \cdot |t - t_m|.$$

Como $|x_j(t_m, t_0, \varphi)| - |x_j(t, t_0, \varphi)| \le |x_j(t_m, t_0, \varphi) - x_j(t, t_0, \varphi)|$[2] e $|f_j(\xi, x_\xi)| \le \omega$, obtemos

$$|x_j(t_m, t_0, \varphi)| - |x_j(t, t_0, \varphi)| \le \omega |t - t_m|,$$

ou seja,

$$|x_j(t_m, t_0, \varphi)| - \omega |t - t_m| \le |x_j(t, t_0, \varphi)|,$$

de onde segue que

$$|x_j(t, t_0, \varphi)| \ge |x_j(t_m, t_0, \varphi)| - \omega |t - t_m| > \mu - \omega |t - t_m|.$$

Agora, tomando $\beta = \min\left\{\dfrac{\mu}{3\omega}, 1\right\}$, obtemos

$$|x_j(t, t_0, \varphi) \ge |x_j(t_m, t_0, \varphi)| - \omega |t - t_m| > \mu - \omega \frac{\mu}{3\omega} = \mu - \frac{\mu}{3} = \frac{2}{3}\mu > \frac{\mu}{2}$$

[2] $||a| - |b|| \le |a - b|, \forall a, b \in \mathbb{R}$.

para $|t - t_m| \leq \beta$. Observamos que β não depende de m. Portanto,

$$\frac{\mu}{2} \leq |x(t, t_0, \varphi)| \leq \varepsilon \quad \text{para} \quad |t - t_m| \leq \beta,$$

o que prova a afirmação. Contudo, isso determina que, para $|t - t_m| \leq \beta$,

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, x_t(t_0, \varphi)) \leq -\Gamma(|x(t, t_0, \varphi|) &\leq \sup_{t_m - \beta \leq s \leq t_m + \beta} (\{-\Gamma(|x(s, t_0, \varphi)|)\}) \\ &\leq \sup_{\frac{\mu}{2} \leq \eta \leq \varepsilon} \{-\Gamma(\eta)\} \overset{(*)}{:=} -q < 0. \end{aligned}$$

$(*)$ A função $-\Gamma$ é contínua e negativa no intervalo limitado $[\frac{\mu}{2}, \varepsilon]$. Por essa razão, o supremo de $-\Gamma$ nesse intervalo existe e é um número real negativo.

Levando em conta os Lemas 1.10 e 1.11, e os fatos de que $\beta \leq 1$ e $t_{m+1} - t_m > 2$, segue que, para todo $N \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} &V(t_N + \beta, x_{t_N+\beta}(t_0, \varphi)) - V(t_1 - \beta, x_{t_1-\beta}(t_0, \varphi)) \leq \\ &\qquad \sum_{m=1}^{N} [V(t_m + \beta, x_{t_m+\beta}(t_0, \varphi)) - V(t_m - \beta, x_{t_m-\beta}(t_0, \varphi))] \leq -2\beta q N. \end{aligned}$$

Consequentemente, $V(t_N + \beta, x_{t_N+\beta}(t_0, \varphi)) \to -\infty$ quando $N \to +\infty$, o que não pode ocorrer, visto que, por hipótese (condição i) do Teorema 1.23), $V(t, \varphi) \geq 0$ para $(t, \varphi) \in [0, +\infty) \times C_H$. Essa contradição mostra que $\varphi \in C_\delta$ e $t_0 \geq 0$ implicam $x(t, t_0, \varphi) \to 0$ quando $t \to +\infty$. Logo, a solução nula de (1.1) é assintoticamente estável. □

Corolário 1.26. *Suponhamos que exista um funcional $V : [0, +\infty) \times C \to \mathbb{R}$, satisfazendo as seguintes hipóteses:*

i) $\gamma(|\varphi(0)|) \leq V(t, \varphi) \leq W(\varphi)$, *para* $(t, \varphi) \in [0, +\infty) \times C$, *em que* $W : C \to \mathbb{R}^+$ *é um funcional contínuo, limitado sobre toda bola em* C, *com* $W(0) = 0$, *e* $\gamma : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *é uma função contínua, tal que* $\gamma(\eta) > 0$ *para* $\eta > 0$ *e* $\gamma(\eta) \to +\infty$ *quando* $\eta \to +\infty$.

ii) Existe uma função contínua $\Gamma : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *tal que* $\Gamma(\eta) > 0$ *para* $\eta > 0$ *e* $\dot{V}(t, x_t) \leq -\Gamma(|x(t)|)$ *para toda solução* $x(t) = x(t, t_0, \varphi)$, $t_0 \geq 0$, *de* (1.1).

iii) f *é limitada em* $[0, +\infty) \times C_H$ *para todo* $H < +\infty$.

Então, a solução nula de (1.1) *é globalmente assintoticamente estável.*

Demonstração. Para mostrar que a solução nula de (1.1) é globalmente assintoticamente estável, é suficiente mostrar que C_{H_1} está contido no centro de atração do ponto de equilíbrio $x = 0$ em t_0 para quaisquer $t_0 \geq 0$ e $H_1 < +\infty$, ou seja, que a inclusão

$$C_{H_1} \subset D_{t_0} = \{\varphi \in C_H : x(t, t_0, \varphi) \to 0 \text{ quando } t \to +\infty\},$$

é verdadeira para quaisquer $t_0 \geq 0$ e $H_1 < +\infty$.

Afirmação: para todo $H_1 > 0$, existe $H_2 > 0$ tal que $\varphi \in C_{H_1}$ implica $W(\varphi) < \gamma(H_2)$.

Com efeito, como W é limitado sobre toda bola de C, dado $H_1 > 0$, existe $K > 0$ tal que

$$W(\varphi) = |W(\varphi)| \leq K, \qquad \text{para } \varphi \in C_{H_1}. \tag{1.23}$$

Agora, como $\gamma(\eta) \to +\infty$ quando $\eta \to +\infty$, para tal $K > 0$, existe $H_2 > 0$ de modo que

$$\gamma(H_2) > K. \tag{1.24}$$

Portanto, de (1.23) e (1.24) segue que

$$W(\varphi) < \gamma(H_2), \qquad \text{para } \varphi \in C_{H_1},$$

provando a afirmação.

Procedendo como na demonstração do Teorema 1.25 (pondo H_1 em lugar de δ e H_2 em lugar de ε), podemos concluir que

$$\varphi \in C_{H_1} \quad \Longrightarrow \quad x_t(t_0, \varphi) \in C_{H_2}, \quad \text{para } t \geq t_0,$$

e a partir daí constatar que

$$\varphi \in C_{H_1} \quad \Longrightarrow \quad x(t, t_0, \varphi) \to 0 \quad \text{quando} \quad t \to +\infty.$$

Portanto, C_{H_1} está contido no centro de atração da origem e a prova está completa. □

O próximo teorema determina condições para que a solução nula de (1.1) seja uniformemente assintoticamente estável. Além disso, exibe condições para que as soluções de (1.1) sejam uniformemente limitadas. Para demonstrá-lo, é preciso usar argumentos semelhantes aos já usados nas demonstrações dos resultados precedentes. Por essa razão, omitiremos a prova desse resultado aqui, porém informamos ao leitor interessado que é possível encontrá-la em [15], página 132, Teorema 5.2.1.

Definição 1.27. *Dizemos que as soluções de* (1.1) *são **uniformemente limitadas** se para qualquer* $\alpha > 0$*, existe* $\beta(\alpha) > 0$ *tal que para* $t_0 \in \mathbb{R}$ *e* $\varphi \in C_\alpha$*, tem-se* $|x(t, t_0, \varphi)| \leq \beta(\alpha)$ *para* $t \geq t_0$*.*

Teorema 1.28 ([15], Teorema 5.2.1)**.** *Sejam* $\gamma, W, \Gamma : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *funções contínuas e não decrescentes, tais que* $\gamma(\eta) > 0$ *e* $W(\eta) > 0$ *para* $\eta > 0$ *e* $\gamma(0) = W(0) = 0$*. Se existe uma função contínua* $V : [0, +\infty) \times C \to [0, +\infty)$ *tal que*

$$\gamma(|\phi(0)|) \leq V(t, \phi) \leq W(\|\phi\|), \quad \textit{para } (t, \varphi) \in [0, +\infty) \times C,$$

e

$$\dot{V}(t, x_t) \leq -\Gamma(|x(t)|),$$

para toda solução $x(t) = x(t, t_0, \varphi)$*,* $t_0 \geq 0$*, de* (1.1)*, então a solução* $x = 0$ *da equação* (1.1) *é uniformemente estável. Se* $\gamma(\eta) \to +\infty$ *quando* $\eta \to +\infty$*, então as soluções de* (1.1) *são uniformemente limitadas. Se* $\Gamma(\eta) > 0$ *para* $\eta > 0$*, a solução* $x = 0$ *da equação* (1.1) *é uniformemente assintoticamente estável.*

Exemplo 1.29. Sejam a, b e r constantes reais, com $r \geq 0$. Se $a > 0$ e $|b| < a$, então a solução nula da equação

$$\dot{x}(t) = -ax(t) + bx(t - r), \qquad t \geq 0. \tag{1.25}$$

é uniformemente assintoticamente estável e, em particular, uniformemente estável.

Vamos definir um funcional de Lyapunov $V : [0, +\infty) \times C \to \mathbb{R}$ por

$$V(t, x_t) = x^2(t) + |b| \int_{t-r}^{t} x^2(s)\, ds.$$

A derivada de V ao longo de uma solução (desconhecida) de (1.25) satisfaz

$$\begin{aligned}
\dot{V}(t, x_t) &= 2x(t) \cdot (-ax(t) + bx(t-r)) + |b|x^2(t) - |b|x^2(t-r) \\
&= -2ax^2(t) + |b|x^2(t) + 2bx(t)x(t-r) - |b|x^2(t-r) \\
&\overset{(*)}{\leq} -2ax^2(t) + |b|x^2(t) + |b|x^2(t-r) + |b|x^2(t) - |b|x^2(t-r) \\
&= [-2a + 2|b|]x^2(t) =: -\alpha x^2(t),
\end{aligned}$$

onde $\alpha = 2a - 2|b| > 0$, uma vez que $|b| < a$.

Então, temos

$$|x(t)|^2 \leq V(t, x_t) \leq (1 + |b|r)\|x_t\|^2$$

e

$$\dot{V}(t, x_t) \leq -\alpha x^2(t).$$

Pelo Teorema 1.28, concluímos que a solução nula da equação (1.25) é uniformemente assintoticamente estável.

$(*)$ Sabemos que $[x(t) - x(t-r)]^2 \geq 0$. Daí, $x^2(t) - 2x(t)x(t-r) + x^2(t-r) \geq 0$ e, portanto,

$$|b|x^2(t) + |b|x^2(t-r) \geq 2|b|x(t)x(t-r) \geq 2bx(t)x(t-r).$$

Perceba na Figura 1.2 que, quando $|b| > a$, a solução nula da equação (1.25) não é uniformemente assintoticamente estável. Veja o gráfico da solução "vermelha".

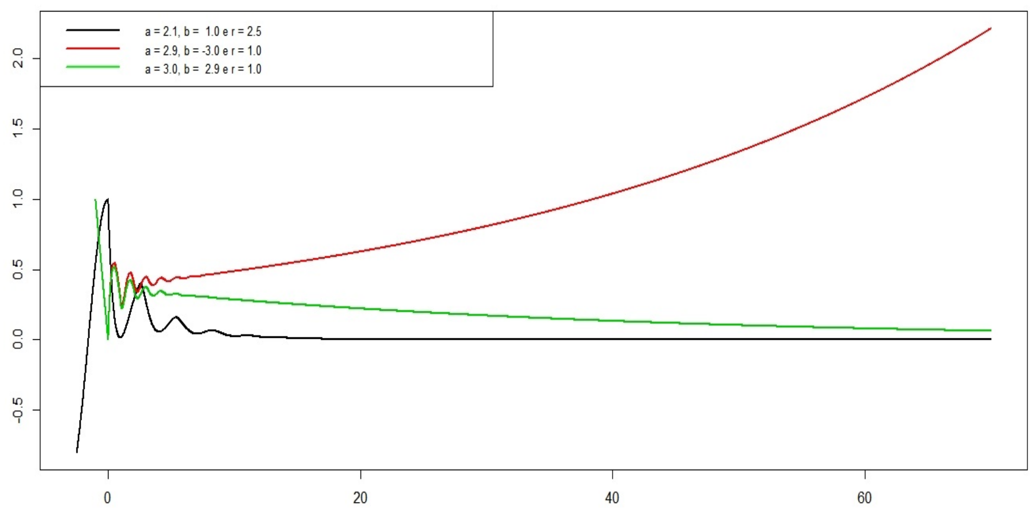

Figura 1.2: Simulações com valores de a, b e r para o Exemplo 1.29.

Observação 1.30. Quando $|b| > a$, podemos afirmar que a solução nula de (1.25) não é uniformemente assintoticamente estável. A equação característica de (1.25) é $h(\lambda) = \lambda + a - b^{-\lambda r}$.

- Se $b > 0$ e $b > a$, então $h(0) = a - b < 0$ e como
$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda + a - b^{-\lambda r} = \infty,$$
a continuidade de h e o Teorema do Valor Intermediário garantem que existe $\lambda > 0$ tal que $h(\lambda) = 0$.

- Se $b < 0$ e $-b > a$, então $h(0) = a + b < 0$ e como
$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda + a + b^{-\lambda r} = \infty,$$
a continuidade de h e o Teorema do Valor Intermediário garantem que existe $\lambda > 0$ tal que $h(\lambda) = 0$.

Portanto, pelo Lema 1.9 segue que (1.25) possui uma solução não trivial do tipo $x(t) = ce^{\lambda t}$, onde $c \in \mathbb{R}$ e $\lambda > 0$

Exemplo 1.31. Consideremos uma generalização da equação apresentada no Exemplo 1.29:
$$\dot{x}(t) = -a(t)x(t) + b(t)x(t-r), \qquad t \geq 0, \tag{1.26}$$
onde $a : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ e $b : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ são funções contínuas limitadas, tais que $a(t) \geq \delta > 0$ e $|b(t)| \leq \theta\delta$, com $\theta < 1$, para todo $t \geq 0$. Utilizando o funcional de Lyapunov
$$V(t, x_t) = \frac{1}{2}\left(x^2(t) + \delta\int_{t-r}^{t} x^2(s)\,ds\right),$$
temos que a derivada de V ao longo de uma solução (desconhecida) de (1.26) satisfaz
$$\dot{V}(t, x_t) \leq \frac{\delta}{2}(\theta - 1)(x^2(t) + x^2(t-r)).$$

De fato, como $a(t) \geq \delta$, $|b(t)| \leq \theta\delta$ e $2x(t)x(t-r) \leq (x^2(t) + x^2(t-r))$ (pois $[x(t) - x(t-r)]^2 \geq 0$), obtemos

$$\begin{aligned}
\dot{V}(t, x_t) &= x(t)\left[-a(t)x(t) + b(t)x(t-r)\right] + \frac{\delta}{2}x^2(t) - \frac{\delta}{2}x^2(t-r)\\
&= -a(t)x^2(t) + b(t)x(t)x(t-r) + \frac{\delta}{2}x^2(t) - \frac{\delta}{2}x^2(t-r)\\
&\leq -\delta x^2(t) + \theta\delta(x^2(t) + x^2(t-r)) + \frac{\delta}{2}x^2(t) - \frac{\delta}{2}x^2(t-r)\\
&= \frac{\delta}{2}(-x^2(t) + \theta x^2(t) + \theta x^2(t-r) - x^2(t-r))\\
&= \frac{\delta}{2}(\theta - 1)\left(x^2(t) + x^2(t-r)\right).
\end{aligned}$$

Como $\theta < 1$, podemos concluir, novamente pelo Teorema 1.28, que a solução nula da equação (1.23) é uniformemente assintoticamente estável.

Note que, neste exemplo, para concluir a estabilidade assintótica uniforme da solução nula de (1.26), foi preciso exigir que a e b fossem funções limitadas e que a desigualdade

$$|b(t)| < a(t) \tag{1.27}$$

fosse válida para todo $t \geq 0$, visto que deve ocorrer $|b(t)| \leq \theta\delta < \delta \leq a(t)$ para todo $t \geq 0$.

Observação 1.32. Nas simulações abaixo, consideramos as seguintes equações diferenciais funcionais com retardamento

$$\dot{x}(t) = (-2 - \operatorname{sen}(t))x(t) - 0.99\cos(t)x(t-3), \qquad t \geq 0, \tag{1.28}$$

e

$$\dot{x}(t) = (-2 - \operatorname{sen}(t))x(t) + (2.1 + \cos(t))x(t-3), \qquad t \geq 0. \tag{1.29}$$

Para a equação (1.28), temos que o resultado obtido no Exemplo 1.31 é satisfeito para $\delta = 1$ e $\theta = 0.99$, de onde podemos concluir a estabilidade uniforme assintótica da solução nula de (1.28), como podemos ver na Figura 1.3.

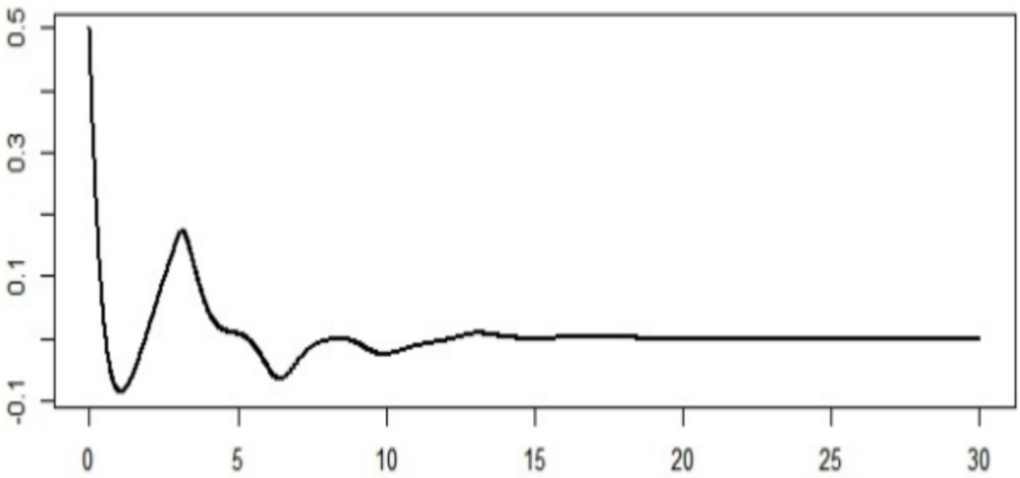

Figura 1.3: Simulação 1 - Exemplo (1.31).

Para a equação (1.29), apesar de $a(t) = 2+\operatorname{sen}(t)$ e $b(t) = 2.1+\cos(t)$ serem funções contínuas e limitadas, a desigualdade (1.27) não vale para todo $t \geq 0$. Pois bem, para $t = 2k\pi$, $k \in \mathbb{N}$, temos que

$$|b(2k\pi)| = |2.1 + \cos(2k\pi)| = 3.1 > 2 = 2 + \operatorname{sen}(2k\pi) = a(2k\pi).$$

Portanto, neste caso, não podemos determinar a estabilidade uniforme assintótica da solução nula da equação (1.29), usando o resultado obtido no Exemplo 1.31. Veja a Figura 1.4.

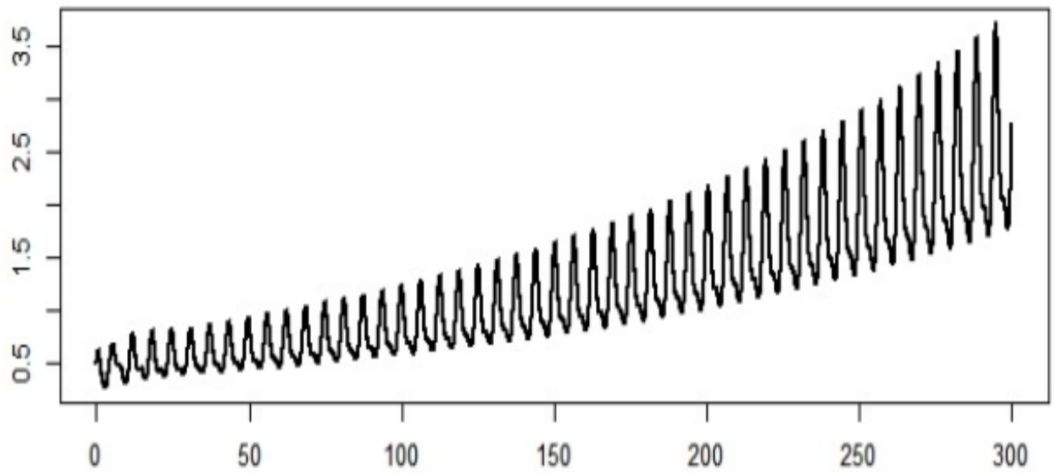

Figura 1.4: Simulação 2 - Exemplo (1.31).

A seguir, vamos estudar a estabilidade da solução nula de uma equação diferencial funcional com retardamento específica.

Seja $a : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ uma função contínua, limitada e não negativa, seja r uma constante positiva e considere a seguinte equação diferencial

$$\dot{x}(t) = -a(t)x(t-r), \qquad \text{para } t \geq 0. \tag{1.30}$$

Embora possamos tratar soluções de (1.30) com qualquer tempo inicial, estudaremos aqui uma solução $x(t) =: x(t, 0, \psi)$ de (1.30), onde $\psi : [-r, 0] \to \mathbb{R}$ é uma função inicial contínua e $x_0(0, \psi)(t) = \psi(t)$ para todo $t \in [-r, 0]$. É sabido que existe uma única solução contínua $x(t)$ satisfazendo (1.30) para $t > 0$ e $x(t) = \psi(t)$ para $t \in [-r, 0]$.

Podemos reescrever (1.30) como

$$\dot{x}(t) = -a(t+r)x(t) + \frac{d}{dt}\int_{t-r}^{t} a(s+r)x(s)\,ds. \tag{1.31}$$

O próximo resultado estabelece condições suficientes para que a solução nula da equação (1.30) seja uniformemente assintoticamente estável.

Corolário 1.33. *Suponha que sejam válidas as seguintes condições:*

(i) Existe $\delta > 0$ tal que $a(t+r) \geq \delta$, para todo $t \geq 0$;

(ii) Existe $\varepsilon > 0$ tal que $a(t+r)\int_{t-r}^{t} a(s+r)ds - 2 + r \leq -\varepsilon$ para todo $t \geq 0$;

(iii) Existe $\zeta > 0$ tal que $\zeta[a(t) + a(t+r)] \leq (\varepsilon/2)a(t+r)$ para todo $t \geq 0$.

Então, a solução nula de (1.30) é uniformemente assintoticamente estável. Além disso, a solução $x(t) =: x(t, 0, \psi)$ de (1.30) é uniformemente limitada.

Demonstração. De (1.31) segue que

$$-a(t+r)x(t) = \dot{x}(t) - \frac{d}{dt}\int_{t-r}^{t} a(s+r)x(s)ds = \left(x - \int_{t-r}^{t} a(s+r)x(s)ds\right)'.$$

Vamos definir um funcional $V_1 : [0, +\infty) \times C \to \mathbb{R}$ por:

$$V_1(t,\varphi) = \left(\varphi(0) - \int_{t-r}^{t} a(s+r)\varphi(0)\,ds\right)^2 + \int_{-r}^{0}\int_{t+s}^{t} a(u+r)\varphi^2(0)\,du\,ds.$$

Então,

$$V_1(t,x_t) = \left(x(t) - \int_{t-r}^{t} a(s+r)x(s)\,ds\right)^2 + \int_{-r}^{0}\int_{t+s}^{t} a(u+r)x^2(u)\,du\,ds$$

e, portanto, a derivada de V_1 ao longo da solução $x(t) =: x(t,0,\psi)$ de (1.31) obedece a seguinte desigualdade:

$$\dot{V}_1(t,x_t) \leq -\varepsilon\delta x^2(t).$$

De fato, temos

$$\begin{aligned}
\dot{V}_1(t,x_t) &= 2\left(x(t) - \int_{t-r}^{t} a(s+r)x(s)\,ds\right)(-a(t+r)x(t))\\
&+ \int_{-r}^{0} \frac{d}{dt}\left(\int_{t+s}^{t} a(u+r)x^2(u)\,du\right) ds\\
&= -2a(t+r)x^2(t) + 2a(t+r)x(t)\int_{t-r}^{t} a(s+r)x(s)\,ds + \int_{-r}^{0} a(t+r)x^2(t)\,ds\\
&- \int_{-r}^{0} a(t+s+r)x^2(t+s)\,ds\\
&= -2a(t+r)x^2(t) + 2a(t+r)x(t)\int_{t-r}^{t} a(s+r)x(s)\,ds + a(t+r)x^2(t)r\\
&- \int_{t-r}^{t} a(s+r)x^2(s)\,ds\\
&\overset{(*)}{\leq} -2a(t+r)x^2(t) + a^2(t+r)\int_{t-r}^{t} a(s+r)\,ds x^2(t) + \int_{t-r}^{t} a(s+r)x^2(s)\,ds\\
&+ a(t+r)x^2(t)r - \int_{t-r}^{t} a(s+r)x^2(s)\,ds\\
&= \left[-2a(t+r) + a^2(t+r)\int_{t-r}^{t} a(s+r)\,ds + a(t+r)r\right] x^2(t)\\
&= a(t+r)\left[-2 + a(t+r)\int_{t-r}^{t} a(s+r)\,ds + r\right] x^2(t)\\
&\overset{(ii)}{\leq} -\varepsilon a(t+r)x^2(t)\\
&\overset{(i)}{\leq} -\varepsilon\delta x^2(t).
\end{aligned}$$

$(*)$ Vamos justificar a desigualdade

$$2a(t+r)x(t)\int_{t-r}^{t} a(s+r)x(s)\,ds \leq a^2(t+r)x^2(t)\int_{t-r}^{t} a(s+r)\,ds + \int_{t-r}^{t} a(s+r)x^2(s)\,ds.$$

Com efeito, pela Desigualdade de Hölder-Riesz (com $p = q = 2$)[3], temos que

$$\begin{aligned}
\int_{t-r}^{t} a(s+r)x(s)\,ds &\leq \int_{t-r}^{t} |a(s+r)||x(s)|\,ds \\
&= \int_{t-r}^{t} \sqrt{|a(s+r)|}\sqrt{|a(s+r)|}|x(s)|\,ds \\
&\leq \left(\int_{t-r}^{t} \sqrt{|a(s+r)|}^2\,ds\right)^{1/2} \left(\int_{t-r}^{t} \sqrt{|a(s+r)|}^2\,|x(s)|^2\,ds\right)^{1/2} \\
&= \left(\int_{t-r}^{t} |a(s+r)|\,ds\right)^{1/2} \left(\int_{t-r}^{t} |a(s+r)|\,x^2(s)\,ds\right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Então,

$$\int_{t-r}^{t} a(s+r)x(s)\,ds \leq \left(\int_{t-r}^{t} |a(s+r)|\,ds\right)^{1/2} \left(\int_{t-r}^{t} |a(s+r)|\,x^2(s)\,ds\right)^{1/2}. \quad (1.32)$$

Como

$$\left[|a(t+r)||x(t)|\left(\int_{t-r}^{t} |a(s+r)|\,ds\right)^{1/2} - \left(\int_{t-r}^{t} |a(s+r)|\,x^2(s)\,ds\right)^{1/2}\right]^2 \geq 0,$$

obtemos

$$\begin{aligned}
&a^2(t+r)x^2(t)\int_{t-r}^{t} |a(s+r)|\,ds + \int_{t-r}^{t} |a(s+r)|x^2(s)\,ds - \\
&- 2|a(t+r)||x(t)|\left(\int_{t-r}^{t} |a(s+r)|\,ds\right)^{1/2} \left(\int_{t-r}^{t} |a(s+r)|\,x^2(s)\,ds\right)^{1/2} \geq 0. \quad (1.33)
\end{aligned}$$

Por a ser uma função não negativa, por (1.32) e (1.33), concluímos que

$$\begin{aligned}
&a^2(t+r)x^2(t)\int_{t-r}^{t} a(s+r)\,ds + \int_{t-r}^{t} a(s+r)x^2(s)\,ds = \\
&a^2(t+r)x^2(t)\int_{t-r}^{t} |a(s+r)|\,ds + \int_{t-r}^{t} |a(s+r)|x^2(s)\,ds \overset{(1.33)}{\geq} \\
&2|a(t+r)||x(t)|\left(\int_{t-r}^{t} |a(s+r)|\,ds\right)^{1/2} \left(\int_{t-r}^{t} |a(s+r)|\,x^2(s)\,ds\right)^{1/2} \overset{(1.32)}{\geq} \\
&2|a(t+r)||x(t)|\int_{t-r}^{t} |a(s+r)||x(s)|\,ds \geq \\
&2a(t+r)x(t)\int_{t-r}^{t} a(s+r)x(s)\,ds.
\end{aligned}$$

[3]**Desigualdade de Hölder-Riesz:** Sejam E um conjunto mensurável, $p \in [1, +\infty)$ e seja $q \in [1, +\infty)$ o expoente conjugado de p, ou seja, q é tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Se $f \in L_p(E)$ e $g \in L_q(E)$, então:

$$\int_E |f(x)g(x)|dx \leq \left(\int_E |f(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_E |g(t)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Agora, vamos definir um funcional $V_2 : [0, +\infty) \times C \to \mathbb{R}$ por:

$$V_2(t, \varphi) = \zeta \left[\varphi^2(0) + \int_{t-r}^{t} a(s+r)\varphi^2(0)\, ds \right].$$

Sendo assim,

$$V_2(t, x_t) = \zeta \left[x^2(t) + \int_{t-r}^{t} a(s+r)x^2(s)\, ds \right]$$

e a derivada de V_2 ao longo da solução $x(t) =: x(t, 0, \psi)$ de (1.31) satisfaz

$$\begin{aligned}
\dot{V}_2(t, x_t) &= \zeta \left[2x(t)(-a(t)x(t-r)) + a(t+r)x^2(t) - a(t)x^2(t-r) \right] \\
&= \zeta \left[-2a(t)x(t)x(t-r) + a(t+r)x^2(t) - a(t)x^2(t-r) \right] \\
&\overset{(**)}{\leq} \zeta \left[a(t)x^2(t) + a(t)x^2(t-r) + a(t+r)x^2(t) - a(t)x^2(t-r) \right] \\
&= \zeta \left[a(t) + a(t+r) \right] x^2(t) \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} a(t+r)x^2(t).
\end{aligned}$$

$(**)$ $-2a(t)x(t)x(t-r) \leq a(t)x^2(t) + a(t)x^2(t-r)$, pois

$$\left[\sqrt{|a(t)|}x(t) + \sqrt{|a(t)|}x(t-r) \right]^2 \geq 0.$$

Definindo $V : [0, +\infty) \times C \to \mathbb{R}$ por $V(t, \varphi) = V_1(t, \varphi) + V_2(t, \varphi)$, temos que a derivada de V ao longo da solução $x(t) =: x(t, 0, \psi)$ de (1.31) satisfaz

$$\begin{aligned}
\dot{V}(t, x_t) &\leq -\varepsilon\delta x^2(t) + \frac{\varepsilon}{2} a(t+r)x^2(t) \\
&= -\varepsilon\delta x^2(t) + \left(-\frac{\varepsilon}{2} \right) (-a(t+r))x^2(t) \\
&\overset{(i)}{\leq} -\varepsilon\delta x^2(t) + \left(-\frac{\varepsilon}{2} \right) (-\delta)x^2(t) \\
&\leq -\varepsilon\delta x^2(t) + \frac{\varepsilon}{2} \delta x^2(t) \\
&= -\frac{\varepsilon}{2} \delta x^2(t) \\
&= -\frac{\varepsilon}{2} \delta |x(t)|^2. \qquad (1.34)
\end{aligned}$$

(I) Existe uma função contínua e não decrescente $\Gamma : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ tal que $\Gamma(\eta) > 0$ para $\eta > 0$ e $\dot{V}(t, x_t) \leq -\Gamma(|x(t)|)$ para a solução $x(t) = x(t, 0, \psi)$ de (1.1). Com efeito, definindo a função $\Gamma : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ por $\Gamma(\eta) = \frac{\varepsilon}{2} \cdot \delta \cdot \eta^2$, vemos, por (1.34), que Γ é tal função.

(II) Existem funções contínuas e não decrescentes $W : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ e $\gamma : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, com $W(0) = \gamma(0) = 0$, tais que $W(\eta) > 0$, $\gamma(\eta) > 0$ para $\eta > 0$, e $\gamma(\eta) \to +\infty$ quando $\eta \to +\infty$, de forma que

$$\gamma(|\varphi(0)|) \overset{(\diamond)}{\leq} V(t, \varphi) \overset{(\diamond\diamond)}{\leq} W(\varphi), \quad \text{para } (t, \varphi) \in [0, +\infty) \times C.$$

De fato, temos que

$$V(t, \varphi) = V_1(t, \varphi) + V_2(t, \varphi) \geq \zeta\varphi^2(0) = \zeta|\varphi(0)|^2,$$

visto que a é uma função não negativa. Definindo $\gamma : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ por $\gamma(\eta) = \zeta \cdot \eta^2$, temos que γ é contínua, crescente, $\gamma(0) = 0$, $\gamma(\eta) > 0$ para $\eta > 0$, e $\gamma(\eta) \to +\infty$ quando $\eta \to +\infty$. Sendo assim, obtemos $(\diamond)$.

Ademais, como a é uma função limitada e não negativa, existe $K > 0$ tal que $0 \leq a(t) \leq K$ para todo $t \geq 0$. Dessa forma,

$$\begin{aligned}
V(t,\varphi) &= V_1(t,\varphi) + V_2(t,\varphi) \\
&= \left(\varphi(0) - \int_{t-r}^{t} a(s+r)\varphi(0)\,ds\right)^2 + \int_{-r}^{0}\int_{t+s}^{t} a(u+r)\varphi^2(0)\,du\,ds \\
&+ \zeta\left[\varphi^2(0) + \int_{t-r}^{t} a(s+r)\varphi^2(0)\,ds\right] \\
&= \varphi^2(0) - 2\varphi(0)\int_{t-r}^{t} a(s+r)\varphi(0)\,ds + \left(\int_{t-r}^{t} a(s+r)\varphi(0)\,ds\right)^2 \\
&+ \int_{-r}^{0}\int_{t+s}^{t} a(u+r)\varphi^2(0)\,du\,ds + \zeta\varphi^2(0) + \zeta\int_{t-r}^{t} a(s+r)\varphi^2(0)\,ds \\
&\overset{(\bullet)}{\leq} \|\varphi\|^2 + \varphi^2(0) + 2\left(\int_{t-r}^{t} a(s+r)\varphi(0)\,ds\right)^2 + \zeta\|\varphi\|^2 + \\
&+ \zeta\int_{t-r}^{t} a(s+r)\varphi^2(0)\,ds + \int_{-r}^{0}\int_{t+s}^{t} a(u+r)\varphi^2(0)\,du\,ds \\
&\overset{(\bullet\bullet)}{\leq} 2\|\varphi\|^2 + 2\left(\int_{t-r}^{t} a^2(s+r)\,ds\right)\left(\int_{t-r}^{t} \varphi^2(0)\,ds\right) + \zeta\|\varphi\|^2 \\
&+ \zeta K\|\varphi\|^2 r + K\|\varphi\|^2\frac{r^2}{2} \\
&\leq 2\|\varphi\|^2 + 2K^2\|\varphi\|^2 r^2 + \zeta\|\varphi\|^2 + \zeta K\|\varphi\|^2 r + K\|\varphi\|^2\frac{r^2}{2} \\
&= \left(2 + 2K^2r^2 + \zeta + \zeta K r + K\frac{r^2}{2}\right)\|\varphi\|^2.
\end{aligned}$$

$(\bullet)$ Temos que $-2\varphi(0)\int_{t-r}^{t} a(s+r)\varphi(0)\,ds \leq \varphi^2(0) + \left(\int_{t-r}^{t} a(s+r)\varphi(0)\,ds\right)^2$, pois

$$\left[\varphi(0) + \left(\int_{t-r}^{t} a(s+r)\varphi(0)\,ds\right)\right]^2 \geq 0.$$

$(\bullet\bullet)$ A relação

$$\left(\int_{t-r}^{t} a(s+r)\varphi(0)\,ds\right)^2 \leq \left(\int_{t-r}^{t} a^2(s+r)\,ds\right)\left(\int_{t-r}^{t} \varphi^2(0)\,ds\right)$$

é válida pela Desigualdade de Schwarz,[4] uma vez que φ e a são funções contínuas.

[4] **Desigualdade de Schwarz**: Se $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ são funções contínuas, então

$$\left[\int_a^b f(s)g(s)\,ds\right]^2 \leq \int_a^b f^2(s)\,ds \int_a^b g^2(s)\,ds.$$

Portanto,

$$V(t,\varphi) \leq \left(2 + 2K^2r^2 + \zeta + \zeta Kr + K\frac{r^2}{2}\right)\|\varphi\|^2. \tag{1.35}$$

Definindo $W : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ por $W(\eta) = \left(2 + 2K^2r^2 + \zeta + \zeta Kr + K\frac{r^2}{2}\right) \cdot \eta^2$, temos que W é contínua, crescente e $W(0) = 0$. Então, por (1.35), obtemos ($\diamond\diamond$).

Então, de (I), (II) e do Teorema 1.28 segue que a solução nula da equação (1.30) é uniformemente assintoticamente estável. Ademais, a solução $x(t) =: x(t, 0, \psi)$ de (1.30) é uniformemente limitada pelo Teorema 1.28. $\square$

O próximo exemplo exibe como as hipóteses do resultado anterior podem ser verificadas e as condições de estabilidade impostas sobre uma determinada equação diferencial funcional com retardamento.

Exemplo 1.34. Em (1.30), considere $a(t) = 1.1 + \operatorname{sen} t$. As condições do Corolário 1.33 são cumpridas se existir $\varepsilon > 0$ tal que

$$5.41r - 2 < -\varepsilon. \tag{1.36}$$

De fato, note que a hipótese (i) do Corolário 1.33 é satisfeita com $\delta = 0.1$, uma vez que

$$a(t) = 1.1 + \operatorname{sen} t \geq 1.1 - 1 = 0.1, \quad \text{para todo } t \geq 0. \tag{1.37}$$

Para que a condição (ii) seja cumprida, deve existir $\varepsilon > 0$ tal que

$$(1.1 + \operatorname{sen}(t+r)) \int_{t-r}^{t} (1.1 + \operatorname{sen}(s+r))\, ds - 2 + r < -\varepsilon.$$

Com efeito, fazendo a mudança de variável $u = s + r$, obtemos

$$\int_{t-r}^{t} (1.1 + \operatorname{sen}(s+r))\, ds = \int_{t}^{t+r} (1.1 + \operatorname{sen}(u))\, du.$$

Como $\operatorname{sen}(x) \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$, temos que

$$\begin{aligned}
(1.1 + \operatorname{sen}(t+r)) & \int_{t-r}^{t} (1.1 + \operatorname{sen}(s+r))\, ds - 2 + r \\
&= (1.1 + \operatorname{sen}(t+r)) \int_{t}^{t+r} (1.1 + \operatorname{sen}(u))\, du - 2 + r \\
&\leq (1.1 + \operatorname{sen}(t+r))(1.1r + 1r) - 2 + r \\
&\leq 2.1(2.1r) - 2 + r \\
&= 5.41r - 2 \\
&< -\varepsilon,
\end{aligned}$$

já que estamos supondo que (1.36) ocorre.

Portanto, podemos dizer que as hipóteses do Corolário 1.33 são verificadas ou se existir $\varepsilon > 0$ tal que

$$5.41r - 2 < -\varepsilon,$$

ou se

$$5.41r - 2 < 0, \qquad \text{ou seja,} \qquad r < 2/(5.41).$$

Agora, para que a hipótese (iii) do Corolário 1.33 seja satisfeita, basta tomar $\zeta > 0$ tal que $\zeta < \varepsilon/84$. Pois bem, note que

$$\begin{aligned}
\zeta(a(t) + a(t+r)) &= \zeta(1.1 + \operatorname{sen} t + 1.1 + \operatorname{sen}(t+r)) \\
&\leq 4.2\zeta \\
&< 4.2\frac{\varepsilon}{84} \\
&= 4.2\frac{\varepsilon}{2 \times 42} \\
&= 0.1\frac{\varepsilon}{2} \\
&\overset{(1.37)}{\leq} \frac{\varepsilon}{2}a(t+r),
\end{aligned}$$

para todo $t \geq 0$.

Observação 1.35. Considerando a equação diferencial funcional com retardamento

$$\dot{x}(t) = -(1.1 + \operatorname{sen}(t))x(t-r), \qquad \text{para } t \geq 0,$$

concluímos, pelo Exemplo 1.34, que para $r = 0.33 < 2/5.41$ as condições para garantir a estabilidade assintótica uniforme da solução nula da equação são satisfeitas, enquanto que para $r = 1.2 > 2/5.41$, estas não se verificam. Podemos confirmar essa conclusão observando as Figuras 1.5 e 1.6.

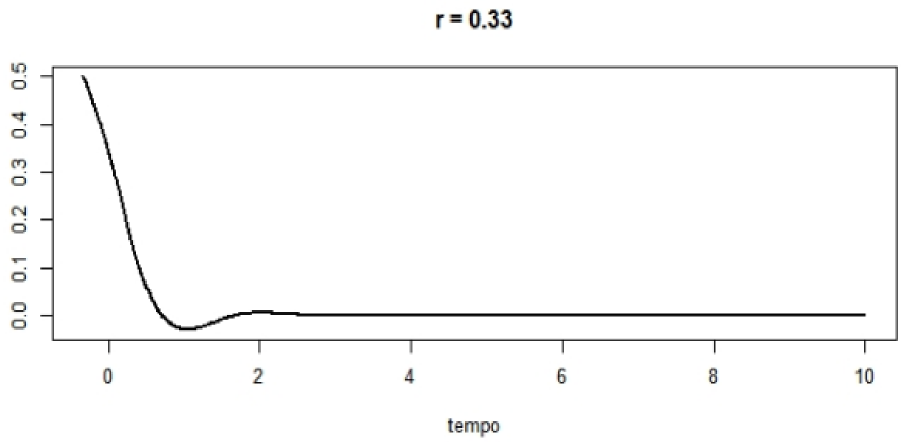

Figura 1.5: Simulação 1 - Exemplo (1.34).

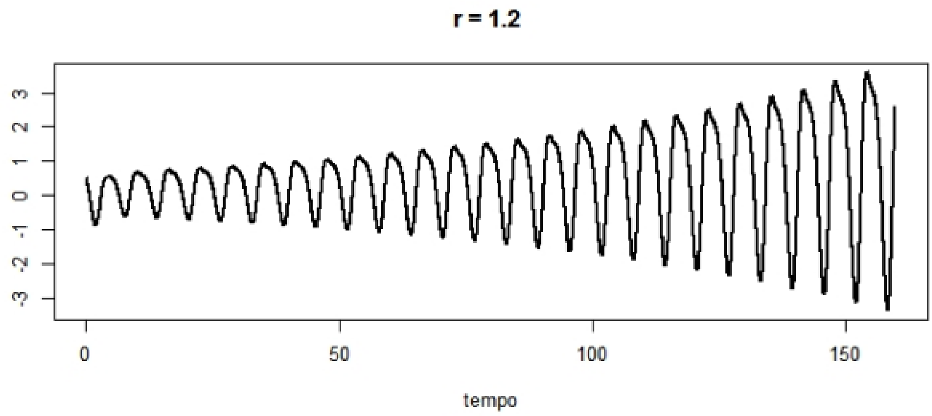

Figura 1.6: Simulação 2 - Exemplo (1.34).

Exemplo 1.36. Seja $b : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Considere a e σ constantes positivas de modo que $a \geq |b(t)| + \sigma$ para todo $t \geq 0$. Então, a solução nula de

$$\dot{x}(t) = -ax(t) + b(t)x(t-r), \text{ para } 0 \leq r < \infty, \ t \geq 0, \tag{1.38}$$

é globalmente assintoticamente estável.

Mostremos que as hipóteses do Corolário 1.26 estão satisfeitas. Para isso, vamos definir $V : C \to \mathbb{R}^+$ por

$$V(\varphi) = [\varphi(0)]^2 + a \int_{-r}^{0} \varphi^2(\theta)\, d\theta, \qquad \text{para } \varphi \in C.$$

i) Definindo $W : C \to \mathbb{R}^+$ e $\gamma : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ por $W(\varphi) = [\varphi(0)]^2 + a \int_{-r}^{0} \varphi^2(\theta) d\theta$ e $\gamma(\eta) = \eta^2$, respectivamente, temos que a condição $i)$ do Corolário 1.26 é verificada.

ii) Agora, seja $x(t)$ uma solução da equação (1.38). Temos que

$$V(x_t) = x^2(t) + \int_{-r}^{0} x^2(t+\theta)\, d\theta = x^2(t) + a \int_{t-r}^{t} x^2(s)\, ds \tag{1.39}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}
\dot{V}(x_t) &= 2x(t)\dot{x}(t) + a[x^2(t) - x^2(t-r)] \\
&\overset{(1.38)}{=} 2x(t)[-ax(t) + b(t)x(t-r)] + a[x^2(t) - x^2(t-r)] \\
&= -2ax^2(t) + 2b(t)x(t-r) + ax^2(t) - ax^2(t-r) \\
&= -ax^2(t) - ax^2(t-r) + 2b(t)x(t)x(t-r) \\
&\leq -ax^2(t) - ax^2(t-r) + |b(t)|[x^2(t) + x^2(t-r)] \qquad (1.40) \\
&= -a[x^2(t) + x^2(t-r)] + |b(t)|[x^2(t) + x^2(t-r)] \\
&= (-a + |b(t)|)(x^2(t) + x^2(t-r)) \\
&\leq -\sigma(x^2(t) + x^2(t-r)) \\
&\leq -\sigma x^2(t).
\end{aligned}$$

A desigualdade (1.40) é verdadeira, pois:

(I) se $b(t) \geq 0$, então $|b(t)| = b(t)$ e, portanto,

$$\begin{aligned}[x(t) - x(t-r)]^2 \geq 0 &\Longrightarrow x^2(t) - 2x(t)x(t-r) + x^2(t-r) \geq 0 \\ &\Longrightarrow x^2(t) + x^2(t-r) \geq 2x(t)x(t-r).\end{aligned}$$

Assim, $2b(t)x(t)x(t-r) = b(t)[2x(t)x(t-r)] \leq |b(t)|[x^2(t) + x^2(t-r)]$.

(II) se $b(t) < 0$, então $|b(t)| = -b(t)$ e, consequentemente,

$$\begin{aligned}[x(t) + x(t-r)]^2 \geq 0 &\Longrightarrow x^2(t) + 2x(t)x(t-r) + x^2(t-r) \geq 0 \\ &\Longrightarrow x^2(t) + x^2(t-r) \geq -2x(t)x(t-r).\end{aligned}$$

Portanto, $2b(t)x(t)x(t-r) = -b(t)[-2x(t)x(t-r)] \leq |b(t)|[x^2(t)+x^2(t-r)]$.

Como $\dot{V}(x_t) \leq -\sigma x^2(t)$, definindo $\Gamma : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ por $\Gamma(\eta) = \sigma\eta^2$, vemos que a condição $ii)$ do Corolário 1.26 também é satisfeita.

iii) Por fim, como $f(t, \varphi) = -a\varphi(0)+b(t)\varphi(-r)$, segue que a hipótese $iii)$ do Corolário (1.26) é satisfeita, pois, dado qualquer $0 < H < +\infty$, temos que se $\varphi \in C_H$, então

$$\begin{aligned}|-a\varphi(0) + b(t)\varphi(-r)| &\leq |-a\varphi(0)| + |b(t)\varphi(-r)| = |-a||\varphi(0)| + |b(t)||\varphi(-r)| \\ &\leq aH + (a-\sigma)H = H(2a-\sigma),\end{aligned}$$

e $H(2a - \sigma) > 0$, pois $H > 0$ e

$$a - \sigma \geq |b(t)| \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad 2a > a \geq \sigma \quad \Longrightarrow \quad 2a - \sigma > 0.$$

Portanto, pelo Corolário (1.26), concluímos que a solução $x = 0$ de (1.38) é globalmente assintoticamente estável.

Exemplo 1.37. Considere as equações diferenciais funcionais com retardamento

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= -\,5x(t) + (1 + \cos(t))x(t-10), \qquad \text{para } t \geq 0,\\ \dot{x}(t) &= -\,23x(t) + (1 + \cos(t))x(t-10), \qquad \text{para } t \geq 0,\\ \dot{x}(t) &= -\,10x(t) + (1 + \cos(t))x(t-10), \qquad \text{para } t \geq 0.\end{aligned}$$

Todas as equações acima cumprem as condições do Corolário 1.26, portanto as soluções nulas de todas elas são globalmente assintoticamente estáveis. Veja a Figura 1.7.

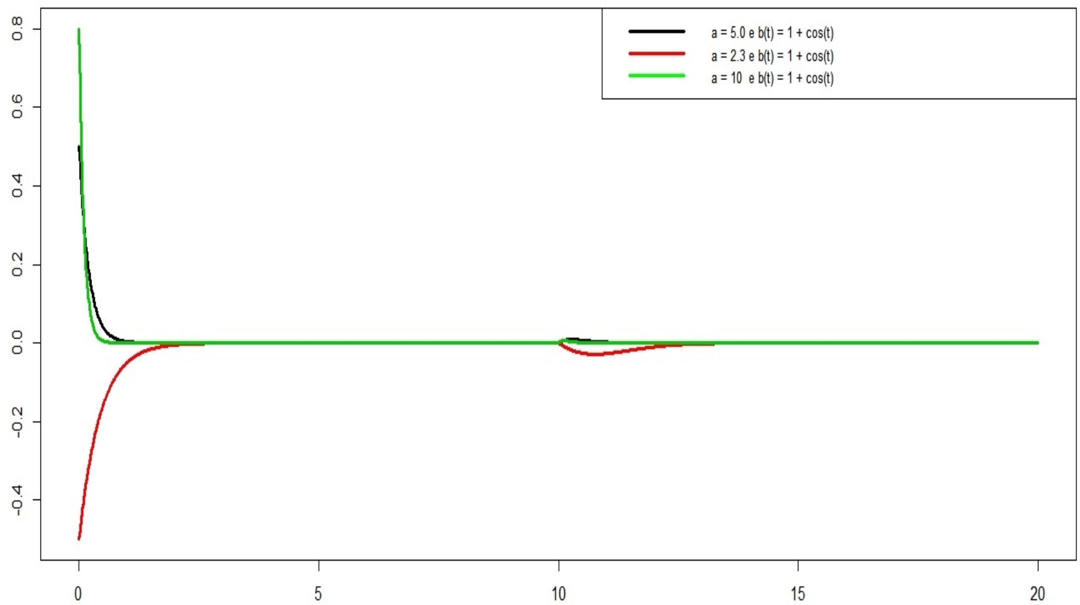

Figura 1.7: Gráficos das soluções das equações do Exemplo (1.37).

O próximo resultado, provado por Levin e Nohel em 1964, serviu como uma das motivações para o estudo de estabilidade de equações diferenciais com retardamento via teoria de ponto fixo. Levin e Nohel construíram um funcional de Lyapunov para a equação de Volterra

$$\dot{x}(t) = -\int_{t-L}^{t} a(t-s)g(x(s))ds,$$

na qual $xg(x) > 0$ se $x \neq 0$, $L > 0$, e $a : [0, L] \to \mathbb{R}$ é uma função duas vezes diferenciável, com a'' não identicamente nula.

Teorema 1.38 ([18], Teorema 2)**.** *Sejam $L > 0$, $a : [0, L] \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções, tais que:*

i) a é duas vezes diferenciável, $a(L) = 0$, $a'(t) \leq 0$, $a''(t) \geq 0$ e $a''(t)$ não é identicamente nula;

ii) $xg(x) > 0$ quando $x \neq 0$ e $\int_0^x g(s)ds \to \infty$ quando $x \to \pm\infty$.

Considere o seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -\int_{t-L}^{t} a(t-s)g(x(s))ds, & t \geq 0, \\ x(t) = \psi(t), & t \in [-L, 0], \end{cases} \tag{1.41}$$

em que $\psi : [-L, 0] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua.

Se as condições i) e ii) são satisfeitas, então o funcional

$$V(t) = \int_0^x g(u)\,du - \frac{1}{2}\int_{t-L}^t a'(t-v)\left[\int_v^t g(x(s))\,ds\right]^2 ds \geq 0$$

satisfaz

$$2\dot{V}(t) = a'(L)\left[\int_{t-L}^t g(x(s))ds\right]^2 - \int_{t-L}^t a''(t-s)\left[\int_s^t g(x(v))dv\right]^2 ds$$

ao longo da solução de (1.41) *e* $x^{(j)}(t) \to 0$ *quando* $t \to \infty$, *para* $j = 0, 1, 2$.

Pode-se prontamente argumentar que este é um dos mais belos resultados em toda a teoria de estabilidade utilizando funcionais de Lyapunov. Todavia, ao olharmos detalhadamente as condições impostas sobre a função a, somos forçados a dizer que estas dificilmente serão verificadas num problema do mundo real. Obter resultados mais realísticos com a respeito à estabilidade de equações diferenciais funcionais com retardamento é uma das razões que motiva o estudo de estabilidade por meio da teoria de ponto fixo, tema deste trabalho e foco do próximo capítulo.

2 Estabilidade via teoria de pontos fixos

Este capítulo apresenta uma introdução ao estudo de estabilidade de equações diferenciais funcionais via teoria de ponto fixo. Três teoremas de ponto fixo serão abordados para esse estudo, a saber, o Teorema do Ponto Fixo da Contração, o Teorema do Ponto Fixo de Schauder e o Teorema do Ponto Fixo de Krasnoselskii. Exemplos clássicos e outros não tão conhecidos na literatura serão explorados com detalhes para o bom entendimento da técnica apresentada.

O seguinte conjunto de passos (S_1, S_2, S_3) representa o caminho pelo qual a estabilidade da solução nula de uma equação diferencial funcional é estabelecida por meio da teoria de ponto fixo.

S_1. Uma análise da equação diferencial revela que, para algum t_0 dado, existe um intervalo inicial E_{t_0} e uma função inicial $\psi : E_{t_0} \to \mathbb{R}^n$. Subsequentemente, podemos determinar um conjunto de funções M da seguinte forma:

$$M = \{\phi : E_{t_0} \cup [t_0, \infty) \to \mathbb{R}^n : \phi(t) = \psi(t), \quad t \in E_{t_0}\},$$

que abrigaria soluções aceitáveis da equação. Usualmente, isso significa que nós poderíamos exigir que se $\phi \in M$, então ϕ é limitada e $\phi(t) \to 0$ quando $t \to \infty$.

S_2. O segundo passo consiste em resolver o problema $\dot{x} = f(t, x_t)$, através de um problema equivalente a fim de obter uma equação integral do tipo

$$x(t) = a(t) + \int_{t_0}^{t} G(t, s, x(\cdot), \psi)\, ds,$$

em que $a : [t_0, +\infty) \to \mathbb{R}^n$ e $G(t, s, \phi(\cdot), \psi)$ denota uma função vetorial de t, s, ϕ e ψ, tal que, considerando aplicação $P : M \to M$ dada por $(P\phi)(t) = \psi(t)$, se $t \in E_{t_0}$, e

$$(P\phi)(t) = a(t) + \int_{t_0}^{t} G(t, s, \phi(\cdot), \psi)\, ds, \qquad \text{se } t \geq t_0,$$

um ponto fixo de P resolverá o problema de valor inicial $\dot{x} = f(t, x_t)$ e $x(t) = \psi(t)$ em E_{t_0}.

A dificuldade nesse passo é que nem sempre a inversão da equação diferencial nos dará um aplicação P que leve conjuntos limitados em conjuntos limitados.

S_3. Por fim, escolhemos um teorema de ponto fixo adequado, que mostrará que a aplicação P possui um ponto fixo em M. Este ponto fixo será a solução aceitável para a equação analisada.

Nas próximas seções ilustraremos como podemos aplicar esses três passos na busca por soluções estáveis utilizando o Teorema do Ponto Fixo da Contração, o Teorema do Ponto Fixo de Schauder e o Teorema do Ponto Fixo de Krasnoselskii.

Quando se estuda estabilidade via funcionais de Lyapunov a grande dificuldade é determinar o funcional adequado. Na análise de estabilidade via teoria de ponto fixo, o grande passo se dá ao determinar uma aplicação adequada e que se encaixe nos teoremas de ponto fixo existentes, pois dependendo do teorema escolhido podemos obter resultados mais precisos e em intervalos de tamanho infinito, por exemplo.
Para sanar esta dificuldade, na maioria dos casos, utilizaremos a **fórmula da variação dos parâmetros** para equações diferenciais com retardamento. Solicitamos ao leitor que consulte a referência [2], Capítulo 4, para relembrá-las.

2.1 Teorema do Ponto Fixo da Contração

Nesta seção, faremos uma análise qualitativa de algumas equações diferenciais com retardamento, usando o Teorema do Ponto Fixo da Contração como principal ferramenta. Para isto, apresentaremos o Teorema do Ponto Fixo da Contração e um teorema de ponto fixo para contrações amplas. Além de alguns exemplos, cujos resultados serão comparados aos abordados no Capítulo 1, através da teoria de ponto fixo, daremos uma outra abordagem ao problema de Levin-Nohel, obtendo resultados semelhantes aos obtidos por tais matemáticos em [18].

Teorema 2.1 (Teorema do Ponto Fixo da Contração)**.** *Seja (S, ρ) um espaço métrico completo e considere $P : S \to S$ uma aplicação. Se $P : S \to S$ é uma* ***contração****, isto é, se existe uma constante $\alpha < 1$ tal que para cada par $\phi_1, \phi_2 \in S$ tivermos $\rho(P\phi_1, P\phi_2) \leq \alpha\rho(\phi_1, \phi_2)$, então P admite um único ponto fixo $\phi \in S$, ou seja, existe um único $\phi \in S$ tal que $P\phi = \phi$.*

Demonstração. Para demonstrarmos este resultado, seguiremos os seguintes passos:

(I) Construiremos uma sequência de Cauchy (ϕ_n) em (S, ρ);

(II) Como (S, ρ) é completo, por hipótese, concluiremos que ela converge em (S, ρ) para um limite $\phi \in S$;

(III) Provaremos que este limite ϕ é o único ponto fixo de $P : S \to S$.

Com efeito, escolhamos $\phi_0 \in S$ arbitrariamente e definamos iterativamente a sequência (ϕ_n) por

$$\phi_0, \qquad \phi_1 = P(\phi_0), \qquad \phi_2 = P(\phi_1) = P^2(\phi_0), \qquad \ldots \qquad \phi_n = P^n(\phi_0). \tag{2.1}$$

Afirmamos que (ϕ_n) é uma sequência de Cauchy em (S,ρ). De fato, pela existência de tal $\alpha < 1$ e por (2.1), temos

$$\begin{aligned}\rho(\phi_{m+1},\phi_m) &= \rho(P\phi_m, P\phi_{m-1}) \\ &\leq \alpha\rho(\phi_m,\phi_{m-1}) \\ &= \alpha\rho(P\phi_{m-1},P\phi_{m-2}) \\ &\vdots \\ &\leq \alpha^m\rho(\phi_1,\phi_0).\end{aligned} \tag{2.2}$$

Pela Desigualdade Triangular e pela fórmula da soma dos termos de uma progressão geométrica, obtemos, para $n > m$,

$$\begin{aligned}\rho(\phi_m,\phi_n) &\leq \rho(\phi_m,\phi_{m+1}) + \rho(\phi_{m+1},\phi_{m+2}) + \ldots + \rho(\phi_{n-1},\phi_n) \\ &\leq (\alpha^m + \alpha^{m+1} + \ldots + \alpha^{n-1})\rho(\phi_0,\phi_1) \\ &= \alpha^m\frac{1-\alpha^{n-m}}{1-\alpha}\rho(\phi_0,\phi_1).\end{aligned}$$

Como $0 < \alpha < 1$, no numerador temos que $1 - \alpha^{n-m} < 1$. Consequentemente,

$$\rho(\phi_m,\phi_n) \leq \frac{\alpha^m}{1-\alpha}\rho(\phi_0,\phi_1) \qquad (n > m). \tag{2.3}$$

Novamente, usando o fato de $0 < \alpha < 1$ e sabendo que $\rho(\phi_0,\phi_1)$ é um número fixo, podemos tornar o lado direito de (2.3) tão pequeno quanto quisermos, ao tomarmos m suficientemente grande. Isso mostra que (ϕ_n) é uma sequência de Cauchy. Agora, como S é completo, concluímos que $\phi_n \to \phi$, para algum $\phi \in S$.

Provemos que o limite ϕ é um ponto fixo da aplicação P. Pela Desigualdade Triangular e usando o fato de P ser uma contração, vemos que

$$\begin{aligned}\rho(\phi,P\phi) &\leq \rho(\phi,\phi_m) + \rho(\phi_m,P\phi) \\ &= \rho(\phi,\phi_m) + \rho(P\phi_{m-1},P\phi) \\ &\leq \rho(\phi,\phi_m) + \alpha\rho(\phi_{m-1},\phi).\end{aligned}$$

Como $\phi_m \to \phi$, temos que o lado direito da equação acima fica tão pequeno quanto se queira e isso mostra que $P\phi = \phi$, ou seja, ϕ é um ponto fixo de P.

Agora, para provarmos a unicidade de tal ponto fixo, suponhamos que existam ϕ_1 e ϕ_2 em (S,ρ) tais que $P(\phi_1) = \phi_1$ e $P\phi_2 = \phi_2$. Então, temos que $\rho(\phi_1,\phi_2) = \rho(P\phi_1,P\phi_2) \leq \alpha\rho(\phi_1,\phi_2)$, de onde podemos concluir que $\rho(\phi_1,\phi_2) = 0$, pois $\alpha < 1$. Daí, $\phi_1 = \phi_2$ e a prova está completa. □

Definição 2.2. *Sejam (M,ρ) um espaço métrico e $B : M \to M$ uma aplicação. Dizemos que B é uma **contração ampla** se para quaisquer $\phi,\psi \in M$, com $\phi \neq \psi$, tem-se $\rho(B\phi,B\psi) < \rho(\phi,\psi)$, e se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta < 1$ tal que*

$$\phi,\psi \in M,\ \rho(\phi,\psi) \geq \varepsilon \quad \Longrightarrow \quad \rho(B\phi,B\psi) \leq \delta\rho(\phi,\psi).$$

Teorema 2.3. *Sejam (M,ρ) um espaço métrico completo e B uma contração ampla. Se existem $x \in M$ e $L > 0$ tais que $\rho(x,B^n x) \leq L$ para todo $n \geq 1$, então B possui único ponto fixo em M.*

Demonstração. Para este $x \in M$, considere a sequência $(B^n x)$ em M, em que $B^n = B^{n-1}(Bx)$ para todo $n > 1$. Se $(B^n x)$ é uma sequência de Cauchy, então $s = \lim_{n\to\infty} B^n x$ é um ponto fixo de B, pois

$$s = \lim_{n\to\infty} B^n x = \lim_{n\to\infty} B^{n+1} x = \lim_{n\to\infty} B(B^n(x)) = \lim_{n\to\infty} B(s) = B(s).$$

Ora, se $(B^n x)$ não for uma sequência de Cauchy, então existirão $\varepsilon > 0$, uma sequência (N_k) tal que $N_k \to \infty$, $n_k > N_k$ e $m_k > n_k$, tais que $\rho(B^{m_k}, B^{n_k}(x)) \geq \varepsilon$. Dessa forma,

$$\varepsilon \leq \rho(B^{m_k}x, B^{n_k}x) < \rho(B^{m_k-1}x, B^{n_k-1}x) < \ldots < \rho(x, B^{m_k-n_k}x),$$

visto que B é contração ampla. Ademais, para este $\varepsilon > 0$, existe $\delta < 1$ tal que

$$\varepsilon \leq \rho(B^{m_k}x, B^{n_k}x) \leq \delta\rho(B^{m_k-1}x, B^{n_k-1}x) \leq \ldots \leq \delta^{n_k}\rho(x, B^{m_k-n_k}x) \leq \delta^{n_k}L,$$

o que é uma contradição, pois se $n_k \to \infty, \delta^{n_k} \to 0$ e não existirá tal ε. Isso conclui a prova do teorema. □

A proposição seguinte é extremamente útil, pois mostra que o espaço métrico das funções contínuas e limitadas, equipado com a métrica do supremo, é completo.

Proposição 2.4. *Seja (S, ρ) o espaço métrico das funções contínuas e limitadas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ com a métrica do supremo, $\rho(f, g) = \sup_{-\infty<t<\infty} |f(t) - g(t)|$, com $f, g \in S$, e $d(x, y) = |x - y|$ é uma métrica em $\mathbb{R}^n$. Então, (S, ρ) é completo.*

Demonstração. Seja $(f_n) \subset (S, \rho)$ uma sequência de Cauchy. Então, para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que se $m, n > N$ tem-se

$$\sup_{-\infty<t<\infty} |f_n(t) - f_m(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Em particular, para cada $t_0 \in \mathbb{R}$, $(f_n(t_0))$ é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}^n$ e como $\mathbb{R}^n$ é completo, $(f_n(t_0))$ tem um limite em $\mathbb{R}^n$, o qual denotaremos por $f(t_0)$. Como, para todo m, segue que

$$|f(t_0) - f_m(t_0)| = \lim_{n\to\infty} |f_n(t_0) - f_m(t_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

e, portanto, a convergência da sequência (f_n) para a função f é uniforme, uma vez que t_0 foi tomado arbitrariamente. Consequentemente, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua, pois todas as funções f_n da sequência o são. Observe agora que

$$\sup_{-\infty<t<\infty} |f(t)| \leq \sup_{-\infty<t<\infty} |f(t) - f_{n_0}(t)| + \sup_{-\infty<t<\infty} |f_{n_0}(t)|,$$

para algum $n_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande.

Como $f_{n_0} \in (S, \rho)$, segue que $\sup_{-\infty<t<\infty} |f_{n_0}(t)| \leq M$ para algum $M > 0$. Além disso, como $\rho(f, f_n) \to 0$ se $n \to \infty$, temos que $\sup_{-\infty<t<\infty} |f(t) - f_{n_0}(t)| \leq K$ para algum $K > 0$. Logo,

$$\sup_{-\infty<t<\infty} |f(t)| \leq K + M,$$

de onde segue que $f \in (S, \rho)$, o que garante que o espaço (S, ρ) é completo. □

Cabe lembrar que todo espaço normado $(M, \| \,.\, \|)$ é um espaço métrico, com a métrica induzida pela norma: $\rho(x, y) = \|x - y\|$, para $x, y \in M$. Portanto, pela Proposição 2.4, temos que o espaço normado das funções contínuas e limitadas, equipado com a norma induzida pela métrica do supremo, é um **espaço de Banach**, isto é, um espaço vetorial normado e completo.

2.1.1 Estabilidade via Teorema do Ponto Fixo da Contração

A primeira aplicação do Teorema do Ponto Fixo da Contração em estabilidade de EDFR mostra, de maneira simples, como exigimos a estabilidade assintótica uniforme da solução nula e a conclusão é a mesma da que foi obtida no Exemplo 1.29.

Considere a seguinte equação diferencial funcional com retardamento

$$\dot{x}(t) = -ax(t) + bx(t - r), \qquad t \geq 0, \tag{2.4}$$

onde a, b são constantes positivas e $r \geq 0$.

Teorema 2.5. *Se $a > 0$ e $|b| < a$, então a solução nula da equação* (2.4) *é uniformemente assintoticamente estável para $r \geq 0$.*

Demonstração. Para $t_0 = 0$, mostraremos que, dada uma função contínua inicial, a única solução que passa por ψ quando $t_0 = 0$, $x(t, 0, \psi)$, tende a zero quando $t \to \infty$.

Sejam, pois, $\psi : [-r, 0] \to \mathbb{R}$ uma função inicial contínua e $(M, \| \cdot \|)$ o espaço de Banach das aplicações contínuas e limitadas $\phi : [-r, \infty) \to \mathbb{R}$, com a norma do supremo. Seja S o seguinte conjunto:

$$S = \{\phi \in M : \phi(t) = \psi(t) \text{ para } t \in [-r, 0], \text{ e } \phi(t) \to 0 \text{ quando } t \to \infty\}.$$

Pela Proposição 2.4, S equipado com a métrica do supremo é um espaço métrico completo. Por conveniência de notação, denotaremos tal métrica por $\| \cdot \|$, ou seja, pela norma de M. Aqui, $| \,.\, |$ denotará o módulo de um número real.

Usando a fórmula da variação dos parâmetros para reescrever (2.4), obtemos

$$x(t) = \psi(0)e^{-at} + \int_0^t e^{-a(t-s)} bx(s - r)\, ds, \qquad t > 0.$$

Usaremos a expressão acima para definir uma aplicação $P : S \to M$ da seguinte forma:

$$P(\phi)(t) = \begin{cases} \psi(t), & \text{se } -r \leq t \leq 0, \\ \psi(0)e^{-at} + \displaystyle\int_0^t e^{-a(t-s)} b\phi(s - r)\, ds, & \text{se } t > 0. \end{cases}$$

<u>Afirmação</u>: $P(S) \subset S$, isto é, $P : S \to S$.

De fato, seja $\phi \in S$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $t_1 > 0$ tal que $|\phi(t - r)| < \varepsilon/2$ para $t > t_1$ e existe $t_2 > t_1$ tal que $|\psi(0)e^{-at}| < \varepsilon/2$, se $t > t_2$. Portanto, para $t > t_2$, temos

$$
\begin{aligned}
|P(\phi(t))| &\leq |\psi(0)e^{-at}| + \left|\int_0^t e^{-a(t-s)} b\phi(s-r)\, ds\right| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \int_0^t e^{-a(t-s)} |b| \frac{\varepsilon}{2}\, ds \\
&= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}|b|\frac{1}{a}\left[1 - e^{-at}\right] \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}\left[\frac{|b|}{a}\right] \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon,
\end{aligned}
$$

visto que $1 - e^{-at} < 1$ (para $t > 0$) e $|b| < a$. Então, $P(\phi) \in M$, $P(\phi)(t) = \psi(t)$ para $-r \leq t \leq 0$, e $P(\phi(t)) \to 0$ quando $t \to \infty$, de onde concluímos que $P(S) \subset S$.

Agora, se $\phi, \eta \in S$, então

$$
\begin{aligned}
|(P\phi)(t) - (P\eta)(t)| &= \int_0^t |b| e^{-a(t-s)} |\phi(s-r) - \eta(s-r)| ds \\
&\leq \|\phi - \eta\| \int_0^t |b| e^{-a(t-s)} ds \leq \|\phi - \eta\| \left(\frac{|b|}{a}\right),
\end{aligned}
$$

para qualquer $t > 0$. Consequentemente,

$$
\|(P\phi) - (P\eta)\| \leq \|\phi - \eta\| \left(\frac{|b|}{a}\right),
$$

de onde segue que P é uma contração, uma vez que $|b| < a$. Portanto, pelo Teorema 2.1, P possui um único ponto fixo em S, que denotaremos por ϕ, tal que $\phi(t) \to 0$ quando $t \to \infty$.

Para provar a estabilidade da solução nula da equação (2.4), basta aplicar a norma em ambos os lados da lei de formação de P no ponto fixo, obtendo

$$
\|\phi\| \leq \|\psi\| + \left(\frac{|b|}{a}\right)\|\phi\| \Longrightarrow \|\phi\| \left(1 - \frac{|b|}{a}\right) \leq \|\psi\| \Longrightarrow \|\phi\| \leq \frac{\|\psi\|}{\left(1 - \frac{|b|}{a}\right)}.
$$

Assim, dado $\varepsilon > 0$, tomando $\delta = \varepsilon\left(1 - \frac{|b|}{a}\right)$, segue a estabilidade uniforme e a estabilidade uniforme assintótica de $x = 0$. □

Exemplo 2.6. Pelo Teorema 2.5, sabemos que a solução nula de $\dot{x}(t) = -2x(t) - x(t-1)$ é uniformemente estável, uma vez que $|b| = 1 < a = 2$. Pelo que vimos acima, dado $\varepsilon > 0$, basta tomar $\delta = \varepsilon\left(1 - \frac{|b|}{a}\right)$, para obter a estabilidade uniforme. Assim, se $\varepsilon = 0.5$, tomamos $\delta = 0.25$.

Portanto, pela definição de estabilidade uniforme, temos que, dado $t_0 > 0$, se $\|\varphi\| \leq 0.25$ e $t \geq t_0$, então $\|x_t(t_0, \varphi)\| < 0.5$.

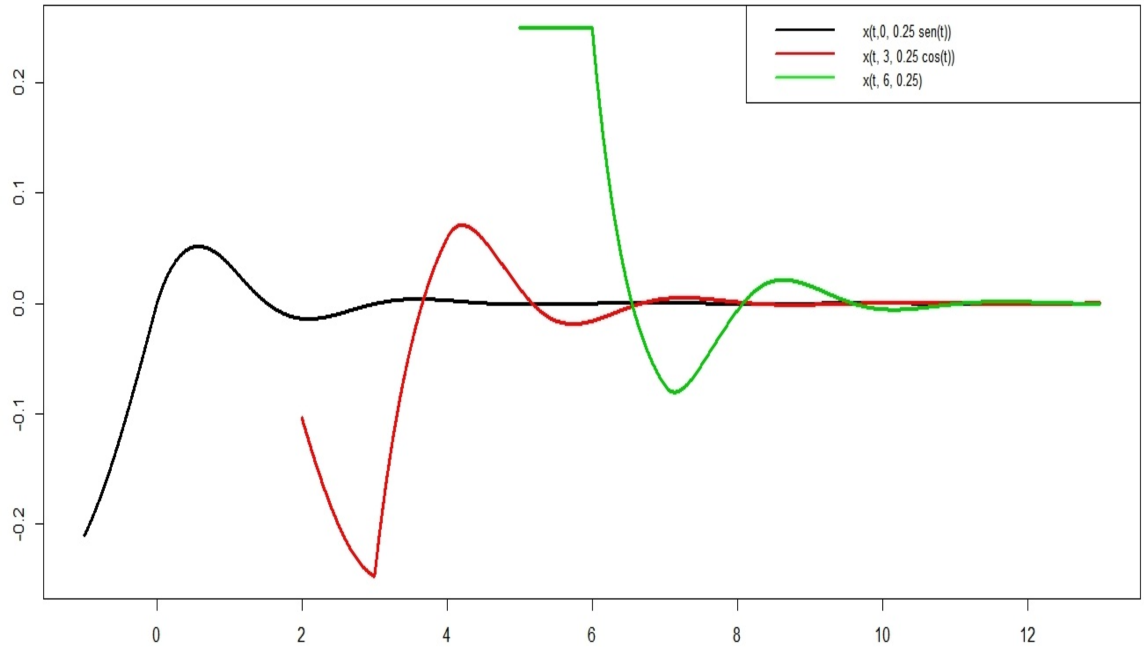

Figura 2.1: Simulações com valores de t_0 e φ para o Exemplo (2.6).

No próximo resultado, utilizaremos o Teorema do Ponto Fixo da Contração para determinar soluções limitadas de uma equação diferencial que generaliza a equação (2.4).

Teorema 2.7. *Sejam a, b e r funções reais contínuas de uma variável real, tais que*

(i) $r(t) \geq 0$;

(ii) $-\displaystyle\int_0^t a(s)\, ds$ *é uma função limitada superiormente, para* $t > 0$;

(iii) a desigualdade

$$\int_0^t e^{-\int_s^t a(u)du} |b(s)|\, ds \leq \alpha < 1 \tag{2.5}$$

é satisfeita para $t > 0$.

Se $\psi : (-\infty, 0] \to \mathbb{R}$ *é uma função limitada e contínua, então a solução* $x(t, 0, \psi)$ *da equação diferencial funcional com retardamento*

$$\dot{x}(t) = -a(t)x(t) + b(t)x(t - r(t)), \tag{2.6}$$

existe, é única, e limitada para $t \geq 0$.

Demonstração. Pela fórmula da variação dos parâmetros, obtemos a seguinte equação integral equivalente à equação (2.6):

$$x(t) = e^{-\int_0^t a(s)ds}\psi(0) + \int_0^t e^{-\int_s^t a(u)du} b(s)x(s - r(s))\, ds, \qquad \text{para } t > 0. \tag{2.7}$$

Seja $(\widetilde{M}, \|\cdot\|)$ o espaço de Banach das aplicações contínuas e limitadas $\phi : (-\infty, \infty) \to \mathbb{R}$, com a norma do supremo e seja M o seguinte conjunto:

$$M = \left\{ \phi : (-\infty, \infty) \to \mathbb{R} : \phi \in \widetilde{M},\ \phi(t) = \psi(t) \text{ para } t \in (-\infty, 0] \right\}.$$

M equipado com a métrica do supremo é um espaço métrico completo (veja a Proposição 2.4). Por conveniência de notação, denotaremos tal métrica por $\|\cdot\|$, ou seja, pela norma de $\widetilde{M}$. Aqui, $|\,.\,|$ denotará o módulo de um número real.

Por meio da equação integral (2.7), definiremos uma aplicação $P : M \to M$ por

$$P(\phi)(t) = \begin{cases} \psi(t), & \text{se } -\infty < t \leq 0, \\ e^{-\int_0^t a(s)ds}\psi(0) + \displaystyle\int_0^t e^{-\int_s^t a(u)du} b(s)\phi(s - r(s))\, ds, & \text{se } t > 0. \end{cases}$$

Claramente, se $\phi \in M$, então $P\phi$ é limitada pelas hipóteses do teorema. Vamos mostrar que P é uma contração. De fato, se f e $g \in M$, então, para todo $t > 0$, temos

$$\begin{aligned} |(Pf)(t) - (Pg)(t)| &= \left| \int_0^t e^{-\int_0^t a(u)du} b(s) \left(f(s - r(s)) - g(s - r(s)) \right) \right| ds \\ &\leq \int_0^t \left| e^{-\int_s^t a(u)du} b(s) \right| |f(s - r(s)) - g(s - r(s))|\, ds \\ &\leq \|f - g\| \int_0^t e^{-\int_s^t a(u)du} |b(u)|\, ds \\ &\overset{(iii)}{\leq} \alpha \|f - g\|, \end{aligned}$$

de onde segue que

$$\|(Pf) - (Pg)\| \leq \alpha \|f - g\|.$$

Como $\alpha < 1$, temos que P é contração. Portanto, pelo Teorema 2.1, P possui um único ponto fixo $\phi \in M$, que é limitado, contínuo e solução da equação (2.6) que satisfaz $\phi(t) = \psi(t)$ para $t \in (-\infty, 0]$. □

Exemplo 2.8. As condições do Teorema 2.7 são satisfeitas ao considerarmos a equação diferencial funcional com retardamento

$$\dot{x}(t) = -2tx(t) + e^{-t^2} x(t - 10), \qquad t > 0. \tag{2.8}$$

De fato:

(i) $r(t) = 10 > 0$ para todo $t \geq 0$;

(ii) $-\displaystyle\int_0^t 2sds = -t^2$ é uma função limitada superiormente para todo $t > 0$, a saber, por 0.

(iii) a desigualdade

$$\int_0^t e^{-\int_s^t a(u)du} |b(s)|\, ds \leq \alpha < 1$$

é satisfeita para $t > 0$, pois, para $t > 0$, temos

$$\int_0^t e^{-\int_s^t 2udu} e^{-s^2} ds = \int_0^t e^{-t^2} e^{s^2} e^{-s^2} ds = \frac{t}{e^{t^2}} < 1.$$

Por conseguinte, se $\psi : (-\infty, 0] \to \mathbb{R}$ é uma função limitada e contínua, então a solução $x(t, 0, \psi)$ da equação (2.8) existe, é única, e limitada para $t \geq 0$, conforme determina o Teorema 2.7.

O comportamento de uma determinada solução da equação (2.8) está representado na Figura 2.2.

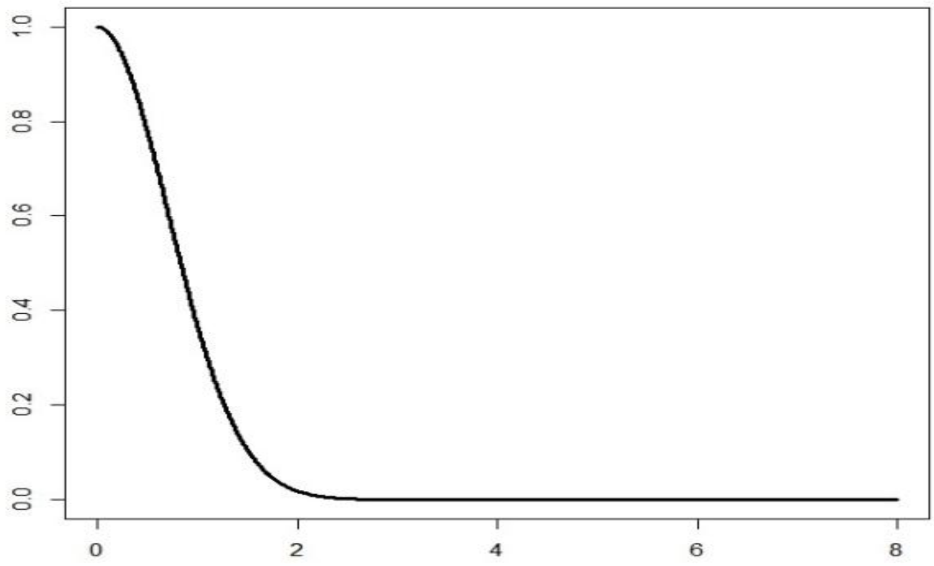

Figura 2.2: Comportamento de uma certa solução da equação (2.8) - Exemplo 2.8.

Observe que para as situações explicitadas acima (nos Teoremas 2.5 e 2.7), o método é simples, rápido, rigoroso e requer apenas conhecimentos prévios da fórmula da variação dos parâmetros. Em um único passo, conseguimos demonstrar existência, unicidade e limitação das soluções. Em seguida, imporemos pequenas condições que garantirão que as soluções de certas equação diferenciais funcionais com retardamento tendam a zero, por exemplo.

A equação quase linear

$$\dot{x}(t) = -a(t)x(t) + b(t)g(x(t - r(t))), \qquad t > 0, \tag{2.9}$$

apresenta grandes desafios em questão de estabilidade usando funcionais de Lyapunov como se pode constatar em [10]. Estamos interessados em estudar o caso em $a(t) < 0$ para algum $t \in \mathbb{R}$, as funções a e b estão relacionados de alguma forma, e a, b, e r' podem ser funções ilimitadas.

Teorema 2.9. *Sejam a, b, g e r funções reais, contínuas, de uma variável real, tais que:*

(i) quando $t \to \infty$, tem-se

$$\int_0^t a(s)\, ds \to \infty; \tag{2.10}$$

(ii) existe $\alpha < 1$ de forma que

$$\int_0^t e^{-\int_s^t a(u)du} |b(s)|\, ds \leq \alpha, \qquad t \geq 0; \tag{2.11}$$

(iii) $r(t) \geq 0$ *para todo* $t \geq 0$, *e*

$$t - r(t) \to \infty \quad \text{quando} \quad t \to \infty; \tag{2.12}$$

(iv) existe $L > 0$ *tal que se* $|x|, |y| \leq L$, *então*

$$g(0) = 0 \qquad e \qquad |g(x) - g(y)| \leq |x - y|. \tag{2.13}$$

Se as condições $(i) - (iv)$ *forem satisfeitas, então toda solução de* (2.9) *que passa por uma função inicial contínua com norma suficientemente pequena, quando* $t_0 = 0$, $x(t, 0, \phi)$, *tende a zero quando* $t \to \infty$. *Além disso, a solução nula de* (2.9) *é estável.*

Demonstração. Cabe destacar que estamos considerando $t_0 = 0$. Sejam α e L como nas hipóteses (ii) e (iv), respectivamente, e tome $\delta > 0$ suficientemente pequeno de forma que $\delta + \alpha L \leq L$.

Considere $\psi : (-\infty, 0] \to \mathbb{R}$ uma função contínua com $\|\psi\| < \delta$ e seja $(M, \|\cdot\|)$ o espaço de Banach das aplicações contínuas e limitadas $\phi : (-\infty, \infty) \to \mathbb{R}$, com a norma do supremo e seja S o seguinte conjunto:

$$S = \{\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \phi \in M,\ \|\phi\| \leq L,\ \phi(t) = \psi(t) \text{ se } t \leq 0,\ \phi(t) \to 0 \text{ se } t \to \infty\}.$$

Pela Proposição 2.4, S equipado com a métrica do supremo é um espaço métrico completo. Por conveniência de notação, denotaremos tal métrica por $\|\cdot\|$, ou seja, pela norma de M. Denotaremos, aqui, por $|\,.\,|$ o módulo de um número real.

Defina $P : S \to M$ por

$$P(\phi)(t) = \begin{cases} \psi(t), & \text{se } t \leq 0, \\ \psi(0)e^{-\int_0^t a(s)\,ds} + \displaystyle\int_0^t e^{-\int_s^t a(u)\,du} b(s) g(\phi(s - r(s)))\,ds, & \text{se } t > 0. \end{cases}$$

Inicialmente, cabe observar que, de fato, $P(S) \subset M$ e que $P(\phi)(t) = \psi(t)$ para todo $t \leq 0$. Isso segue da definição de P e das hipóteses $(i) - (iv)$. Para mostrar que $P(S) \subset S$, devemos mostrar que $\|P(\phi)\| \leq L$ e que $P(\phi)(t) \to 0$ quando $t \to \infty$, para qualquer $\phi \in S$.

(I) $\|P(\phi)\| \leq L$, se $\phi \in S$.

Com efeito, dada $\phi \in S$, é claro que, para $t \leq 0$, temos:

$$|P(\phi)(t)| = |\psi(t)| \leq \|\psi\| < \delta \leq \delta + \alpha L \leq L. \tag{2.14}$$

Além disso, para $t > 0$, temos, por (i), (ii) e (iv), que

$$\begin{aligned} |P(\phi)(t)| &\leq \left|\psi(0)e^{-\int_0^t a(s)\,ds}\right| + \left|\int_0^t e^{-\int_s^t a(u)\,du} b(s) g(\phi(s - r(s)))\,ds\right| \\ &= \left|\psi(0)e^{-\int_0^t a(s)\,ds}\right| + \left|\int_0^t e^{-\int_s^t a(u)\,du} b(s)[g(\phi(s - r(s))) - g(0)]\,ds\right| \\ &\leq \|\psi\| + \int_0^t e^{-\int_s^t a(u)\,du} |b(s)||\phi(s - r(s))|\,ds \\ &\leq \|\psi\| + \left[\int_0^t e^{-\int_s^t a(u)\,du} |b(s)|\,ds\right] \|\phi\| \\ &\leq \delta + \alpha L \\ &\leq L, \end{aligned} \tag{2.15}$$

visto que $\phi \in S$ e, portanto, $\|\phi\| \leq L$.

Portanto, segue de (2.14) e (2.15) que

$$\|P(\phi)\| = \sup_{-\infty<t<\infty} |P(\phi)(t)| \leq L.$$

(II) $P(\phi) \to 0$ quando $t \to \infty$, se $\phi \in S$.

Sejam $\phi \in S$ e $\varepsilon > 0$ arbitrários. Como $\phi \in S$, temos que

$$\|\phi\| \leq L \qquad \text{e} \qquad \phi(t) \to 0 \;\; \text{quando} \;\; t \to \infty. \tag{2.16}$$

Além disso, temos, por (i) e (iii), que

$$\int_0^t a(s)\,ds \to \infty, \qquad t - r(t) \to \infty \quad \text{quando} \quad t \to \infty. \tag{2.17}$$

Então, por (2.16) e (2.17), podemos afirmar que existe $t_1 > 0$ tal que

$$t > t_1 \qquad \Longrightarrow \qquad |\phi(t - r(t))| < \frac{\varepsilon}{2\alpha}, \tag{2.18}$$

e existe $t_2 > t_1$ tal que

$$t > t_2 \qquad \Longrightarrow \qquad e^{-\int_0^t a(u)du} < \frac{\varepsilon}{2\delta}. \tag{2.19}$$

Assim, se $t > t_2$, então $t > t_1$ e

$$|g(\phi(s - r(s)))| \overset{(iv)}{=} |g(\phi(s - r(s))) - g(0)| \overset{(iv)}{\leq} |\phi(s - r(s))| \overset{(2.18)}{<} \frac{\varepsilon}{2\alpha}. \tag{2.20}$$

Consequentemente, se $t > t_2$, temos

$$\begin{aligned}
|P(\phi)(t)| &\leq \left|\psi(0)e^{-\int_0^t a(s)\,ds}\right| + \left|\int_0^t e^{-\int_s^t a(u)\,du} b(s) g(\phi(s - r(s)))\,ds\right| \\
&< \|\psi\|\frac{\varepsilon}{2\delta} + \int_0^t e^{-\int_s^t a(u)\,du} |b(s)||\phi(s - r(s))|\,ds \\
&< \|\psi\|\frac{\varepsilon}{2\delta} + \left[\int_0^t e^{-\int_s^t a(u)\,du} |b(s)|\,ds\right]\frac{\varepsilon}{2\alpha} \\
&< \delta\frac{\varepsilon}{2\delta} + \alpha\frac{\varepsilon}{2\alpha} \\
&= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon,
\end{aligned}$$

por (2.18), (2.19) e (2.20). Isso mostra que $P\phi(t) \to 0$ quando $t \to \infty$ e conclui a prova de que $P(S) \subset S$.

Agora, para mostrar que P é uma contração, tome $\phi, \eta \in S$ quaisquer. Para todo $t > 0$, tem-se

$$|(P\phi)(t) - (P\eta)(t)| \overset{(2.13)}{\leq} \int_{t_0}^t e^{-\int_s^t a(u)du} |b(s)| \|\phi - \eta\| ds \overset{(2.11)}{\leq} \alpha\|\phi - \eta\|, \text{ com } \alpha < 1.$$

Além disso, para $t \leq 0$, tem-se

$$|(P\phi)(t) - (P\eta)(t)| = 0 \leq \alpha\|\phi - \eta\|, \;\; \text{com} \;\; \alpha < 1.$$

Daí,

$$\|(P\phi) - (P\eta)\| \le \alpha\|\phi - \eta\|, \quad \text{com} \quad \alpha < 1.$$

Logo, pelo Teorema 2.1, para qualquer função inicial que satisfaça $\|\psi\| < \delta$, temos que a única solução da equação diferencial (2.9) que passa por ψ em $t = 0$, $x(t, 0, \psi)$, tende a zero quando $t \to \infty$. Observe que, tomando $\varepsilon = L$, basta encontrar $\delta > 0$ tal que $\delta + \alpha\varepsilon \le \varepsilon$ e repetir o processo anterior para garantir a estabilidade da solução. □

Exemplo 2.10. Considere a seguinte equação diferencial funcional com retardamento.

$$\dot{x}(t) = -2tx(t) + tx^2(t-1). \tag{2.21}$$

Afirmamos que as condições do Teorema 2.9 são satisfeitas para $a(t) = 2t$, $b(t) = t$, $g(\eta) = \eta^2$ e $r(t) = 1$. De fato:

(i) $\displaystyle\int_0^t 2sds = t^2 \to \infty$, quando $t \to \infty$.

(ii) existe $\alpha < 1$ de forma que

$$\int_0^t e^{-\int_s^t a(u)\,du}|b(s)|\,ds \le \alpha, \qquad t \ge 0,$$

pois, para $t \ge 0$, tem-se

$$\begin{aligned}\int_0^t e^{-\int_s^t 2u\,du}|s|\,ds &= \int_0^t e^{-t^2+s^2}|s|\,ds = e^{-t^2}\int_0^t e^{s^2}s\,ds = \frac{e^{-t^2}}{2}\int_0^{t^2} e^w\,dw \\ &= \frac{1-e^{-t^2}}{2} \le 0.5 < 1.\end{aligned}$$

Portanto, $\alpha = 0.5$.

(iii) $r(t) = 1 > 0$ para todo $t \ge 0$ e $\lim_{t\to\infty} t - 1 = \infty$.

(iv) Para $g(\eta) = \eta^2$, temos que $g(0) = 0$ e g é localmente lipschitziana, com constante de Lipschitz igual a 1. Com efeito, se $|x|, |y| \le 1/2$, então

$$|x^2 - y^2| = |(x+y)(x-y)| \le (|x| + |y|)|x - y| \le |x - y|.$$

Neste caso, $L = 1/2$.

Agora, pela demonstração do Teorema 2.9, devemos determinar $\delta > 0$ de forma que $\delta + \alpha.L \le L$, ou seja, $\delta > 0$ que cumpra a desigualdade $\delta + 1/4 \le 1/2$. Ora, basta tomarmos $\delta \le 1/4$.

Logo, pelo Teorema 2.9, a solução de (2.21) que passa por uma função inicial contínua com $\|\psi\| < \delta$ em $t_0 = 0$, $x(t, 0, \phi)$, tende a zero quando $t \to \infty$. Ademais, a solução nula de (2.21) é estável. Veja a Figura 2.3.

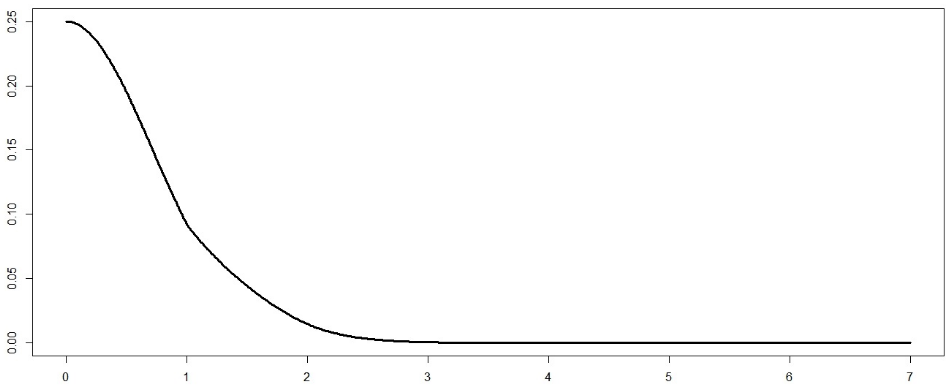

Figura 2.3: Solução da equação (2.21).

O clássico funcional de Lyapunov para a equação

$$\dot{x}(t) = -a(t)x(t) + b(t)\int_{t-r}^{t} x(s)ds, \quad t \geq 0,$$

é dado por

$$V(t, x_t) = x^2 + \gamma \int_{-r}^{0}\int_{t+v}^{t} x^2(u)\,du\,dv,$$

em que $|b(t)| \leq \gamma$ e γ é uma constante positiva.

É fácil ver que, na diferenciação de V, surgem problemas quando a função $a = a(t)$ se torna negativa, ou quando as funções $a = a(t)$ ou $b = b(t)$ não são limitadas. Esses tipos de problemas desaparecem com a teoria do ponto fixo.

Considere a equação diferencial escalar

$$\dot{x}(t) = -a(t)x + \int_{t-r(t)}^{t} b(t,s)g(x(s))\,ds, \quad t > 0, \tag{2.22}$$

com uma constante positiva r_0 tal que $0 \leq r(t) \leq r_0$. Suponhamos que exista uma constante positiva $\alpha < 1$ tal que

$$\int_0^t e^{-\int_s^t a(u)du} \int_{s-r(s)}^{s} |b(s,u)|\,du\,ds \leq \alpha. \tag{2.23}$$

Além disso, suponhamos que, para todo $\varepsilon > 0$, existam $t_1 > 0$ e $T > 0$ de forma que $t_2 \geq t_1$ e $t \geq t_2 + T$ impliquem que

$$e^{-\int_{t_2}^{t} a(s)\,ds} < \varepsilon \qquad \text{e} \qquad e^{-\int_0^t a(s)\,ds} \to 0, \quad \text{quando} \quad t \to \infty. \tag{2.24}$$

Finalmente, suponhamos que existe $L > 0$ tal que se $|x|, |y| \leq L$, então

$$|g(s) - g(y)| \leq |x - y| \qquad \text{e} \qquad g(0) = 0. \tag{2.25}$$

Observe que a estabilidade vem da parte relativa à equação diferencial ordinária, e comparando os tamanhos de a e b, o tamanho de b deve estar relacionado ao tamanho de r_0.

Teorema 2.11. *Se as condições* (2.23) - (2.25) *são satisfeitas, então a solução nula de* (2.22) *é assintoticamente estável.*

Demonstração. Conforme fizemos no Teorema 2.9, vamos considerar $t_0 = 0$. Sejam L e α como nas condições (2.25) e (2.23), respectivamente, e tome $\delta > 0$ suficientemente pequeno tal que $\delta + \alpha L \leq L$.

Considere $\psi : [-r_0, 0] \to \mathbb{R}$ uma função inicial contínua com $\|\psi\| < \delta$ e seja $(M, \|\cdot\|)$ o espaço de Banach das aplicações contínuas e limitadas $\phi : [-r_0, \infty) \to \mathbb{R}$, com a norma do supremo e seja S o seguinte conjunto:

$$S = \{\phi : [-r_0, \infty) \to \mathbb{R} : \phi \in M,\ \|\phi\| \leq L,\ \phi(t) = \psi(t) \text{ se } t \leq 0,\ \phi(t) \to 0 \text{ se } t \to \infty\}.$$

Pela Proposição 2.4, S equipado com a métrica do supremo é um espaço métrico completo. Por conveniência de notação, denotaremos tal métrica por $\|\cdot\|$, ou seja, pela norma de M. Denotaremos, aqui, por $|\,.\,|$ o módulo de um número real.

Defina a aplicação $P : S \to M$ por

$$P(\phi)(t) = \begin{cases} \psi(t), & \text{se } -r_0 \leq t \leq 0, \\ \psi(0)e^{-\int_0^t a(s)\,ds} + \displaystyle\int_0^t e^{-\int_s^t a(u)\,du} \int_{s-r(s)}^{s} b(s,u)g(\phi(u))\,du\,ds, & \text{se } t > 0. \end{cases}$$

Primeiramente, observamos que $P(S) \subset M$ e que $P(\phi)(t) = \psi(t)$ para todo $-r_0 \leq t \leq 0$. Isso segue da definição de P e das hipóteses do teorema. Para mostrar que $P(S) \subset S$, devemos provar que $\|P(\phi)\| \leq L$ e que $P(\phi)(t) \to 0$ quando $t \to \infty$, para qualquer $\phi \in S$.

Afirmação 1: $\|P(\phi)\| \leq L$, se $\phi \in S$.

De fato, para $\phi \in S$ e para $-r_0 \leq t \leq 0$, temos:

$$|P(\phi)(t)| = |\psi(t)| \leq \|\psi\| < \delta \leq \delta + \alpha L \leq L. \tag{2.26}$$

Ademais, se $\phi \in S$ e $t > 0$, temos, por (2.23) - (2.25), que

$$\begin{aligned} |P(\phi)(t)| &\leq \left|\psi(0)e^{-\int_0^t a(s)\,ds}\right| + \left|\int_0^t e^{-\int_s^t a(u)\,du} \int_{s-r(s)}^{s} b(s,u)g(\phi(u))\,du\,ds\right| \\ &= \left|\psi(0)e^{-\int_0^t a(s)\,ds}\right| + \left|\int_0^t e^{-\int_s^t a(u)\,du} \int_{s-r(s)}^{s} b(s,u)[g(\phi(u)) - g(0)]\,du\,ds\right| \\ &\leq \|\psi\| + \int_0^t e^{-\int_s^t a(u)\,du} \int_{s-r(s)}^{s} |b(s,u)||\phi(u)|\,du\,ds \\ &\leq \|\psi\| + \left[\int_0^t e^{-\int_s^t a(u)\,du} \int_{s-r(s)}^{s} |b(s,u)|\,du\,ds\right] \|\phi\| \\ &\leq \delta + \alpha L \leq L, \end{aligned} \tag{2.27}$$

visto que $\phi \in S$ e, consequentemente, $\|\phi\| \leq L$.

Logo, segue de (2.26) e (2.27) que

$$\|P(\phi)\| = \sup_{-r_0 \leq t < \infty} |P(\phi)(t)| \leq L.$$

Afirmação 2: $P(\phi) \to 0$ quando $t \to \infty$, se $\phi \in S$.

Sejam $\varepsilon > 0$ e $\phi \in S$ arbitrários. Então, $\|\phi\| \leq L$ e existe $t_1 > 0$ tal que

$$t \geq t_1 - r_0 \qquad \Longrightarrow \qquad |\phi(t)| < \varepsilon, \tag{2.28}$$

enquanto que

$$t_2 \geq t_1 \quad \text{e} \quad t \geq t_2 + T \qquad \Longrightarrow \qquad e^{-\int_{t_2}^{t} a(s)ds} < \varepsilon, \tag{2.29}$$

por (2.24). Ainda pela segunda parte de (2.24), podemos supor t_1 suficientemente grande de forma que tenhamos

$$e^{-\int_0^{t_1} a(s)ds} < \varepsilon. \tag{2.30}$$

Sendo assim, para $t \geq t_2 + T$, temos, pelas hipóteses (2.23) - (2.25), e por (2.28), (2.29) e (2.30), que

$$\begin{aligned}
|(P\phi)(t)| &\leq \left|\psi(0)e^{-\int_0^t a(s)\,ds}\right| + \left|\int_0^t e^{-\int_s^t a(u)\,du} \int_{s-r(s)}^{s} b(s,u)g(\phi(u))\,du\,ds\right| \\
&\leq \|\psi\|e^{-\int_0^t a(s)\,ds} + \left|\int_0^t e^{-\int_s^t a(u)\,du} \int_{s-r(s)}^{s} b(s,u)[g(\phi(u)) - g(0)]\,du\,ds\right| \\
&< \delta\varepsilon + \int_0^t e^{-\int_s^t a(u)\,du} \int_{s-r(s)}^{s} |b(s,u)|\|\phi\|\,du\,ds \\
&< \delta\varepsilon + \int_0^{t_2} e^{-\int_s^{t_2} a(u)\,du} e^{-\int_{t_2}^{t} a(u)\,du} \int_{s-r(s)}^{s} |b(s,u)|L\,du\,ds \\
&+ \int_{t_2}^{t} e^{-\int_s^t a(u)du} \int_{s-r(s)}^{s} |b(s,u)|\varepsilon\,ds \\
&< \varepsilon\delta + \varepsilon\alpha L + \alpha\varepsilon.
\end{aligned}$$

Por conseguinte, como $\varepsilon > 0$ é arbitrário e pode ser tão pequeno quanto se queira, concluímos que $(P\phi)(t) \to 0$ quando $t \to \infty$.

Logo, a prova de que $P(S) \subset S$ está completa.

Agora, para mostrar que P é uma contração, tome $\phi, \eta \in S$ quaisquer. Para todo $t > 0$, tem -se

$$\begin{aligned}
|(P\phi)(t) - (P\eta)(t)| &\leq \int_0^t e^{-\int_s^t a(u)du} \int_{s-r(s)}^{s} |b(s,u)|\,du\,ds\|\phi - \eta\| \\
&\overset{(2.23)}{\leq} \alpha\|\phi - \eta\|,
\end{aligned}$$

com $\alpha < 1$. Além disso, para $-r_0 \leq t \leq 0$, tem-se

$$|(P\phi)(t) - (P\eta)(t)| = 0 \leq \alpha\|\phi - \eta\|, \text{ com } \alpha < 1.$$

Daí,

$$\|(P\phi) - (P\eta)\| \leq \alpha\|\phi - \eta\|, \text{ com } \alpha < 1.$$

Portanto, pelo Teorema 2.1, para qualquer função inicial contínua que satisfaça $\|\psi\| < \delta$, temos que a única solução da equação diferencial (2.22) que passa por ψ em $t = 0$, $x(t, 0, \psi)$, tende a zero quando $t \to \infty$. $\square$

Vamos retornar à equação (1.30). No Corolário 1.33, foi estabelecido que a solução nula dessa equação é uniformemente assintoticamente estável e que, para toda função inicial contínua $\psi : [-r, 0] \to \mathbb{R}$, a solução $x(t, 0, \psi)$ de (1.30) é uniformemente limitada. O Corolário 1.33 foi provado por meio da teoria de Lyapunov. A seguir, o mesmo resultado será estabelecido por meio do teorema do ponto fixo de contração, todavia, outras condições sobre a função $a = a(t)$ serão impostas para tal.

Vamos, novamente, considerar $a : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ uma função contínua, limitada e não negativa, r uma constante positiva e a equação diferencial

$$\dot{x}(t) = -a(t)x(t - r), \qquad t \geq 0. \tag{2.31}$$

Assim como no Corolário 1.33, vamos estudar uma solução $x(t) =: x(t, 0, \psi)$ de (2.31), onde $\psi : [-r, 0] \to \mathbb{R}$ é uma função inicial contínua e $x_0(0, \psi)(t) = \psi(t)$ para todo $t \in [-r, 0]$. Conforme mencionamos anteriormente, existe única solução contínua $x(t)$ satisfazendo (2.31) para $t > 0$ e $x(t) = \psi(t)$ para $t \in [-r, 0]$.

Com tal função inicial ψ em mente, a equação (2.31) pode ser reescrita como

$$\dot{x}(t) = -a(t + r)x(t) + \frac{d}{dt} \int_{t-r}^{t} a(s + r)x(s)ds. \tag{2.32}$$

Usando a fórmula da variação dos parâmetros e integração por partes, obtemos

$$\begin{aligned} x(t) = x(0)e^{-\int_0^t a(s+r)\,ds} + \int_{t-r}^{t} a(u + r)x(u)\,du - e^{-\int_0^t a(u+r)\,du} \int_{-r}^{0} a(u + r)x(u)\,du \\ - \int_0^t a(s + r)e^{-\int_s^t a(u+r)\,du} \int_{s-r}^{s} a(u + r)x(u)\,du\,ds. \end{aligned} \tag{2.33}$$

Para usar o Teorema do Ponto Fixo da Contração para estabelecer o resultado de estabilidade para a equação (2.31), será necessário existir uma constante positiva $\alpha < 1$ tal que

$$\int_{t-r}^{t} |a(u + r)|\,du + \int_0^t |a(s + r)|e^{-\int_s^t a(u+r)\,du} \int_{s-r}^{s} |a(u + r)|\,du\,ds \leq \alpha, \tag{2.34}$$

para qualquer $t > 0$.

Como estamos interessados em estabilidade assintótica da solução nula da equação (2.31), será necessário também que

$$\int_0^t a(s + r)ds \to \infty \quad \text{quando} \quad t \to \infty, \tag{2.35}$$

conforme estabelece o próximo teorema.

Teorema 2.12. *Assuma que sejam válidas as relações* (2.34) *e* (2.35). *Então, para toda função inicial contínua* $\psi : [-r, 0] \to \mathbb{R}$*, a solução* $x(t, 0, \psi)$ *de* (2.31) *é limitada e tende a zero quando* $t \to \infty$.

Demonstração. Sejam $(B, \|\cdot\|)$ o espaço de Banach das funções contínuas e limitadas $\phi : [-r, \infty) \to \mathbb{R}$ com a norma do supremo e seja S o seguinte conjunto:

$$S = \{\phi \in B : \phi(t) = \psi(t) \text{ para } t \in [-r, 0], \text{ e } \phi(t) \to 0 \text{ quando } t \to \infty\}.$$

Novamente, pela Proposição 2.4, S munido da métrica do supremo é um espaço métrico completo. Por conveniência de notação, denotaremos tal métrica por $\|\cdot\|$, que é a norma de B. Assim como nos resultados precedentes, $|\,.\,|$ denotará o módulo de um número real.

Vamos definir uma aplicação $P : S \to B$ da seguinte forma: $(P\phi)(t) = \psi(t)$, se $t \in [-r, 0]$ e

$$\begin{aligned}(P\phi)(t) = \psi(0)e^{-\int_0^t a(s+r)\,ds} + \int_{t-r}^{t} a(u+r)\phi(u)\,du - e^{-\int_0^t a(u+r)\,du}\int_{-r}^{0} a(u+r)\phi(u)\,du \\ - \int_0^t a(s+r)e^{-\int_s^t a(u+r)\,du}\int_{s-r}^{s} a(u+r)\phi(u)\,du\,ds, \text{ se } t \geq 0. \qquad (2.36)\end{aligned}$$

É fácil verificar que:

(i) $P\phi$ é uma aplicação contínua, se $\phi \in S$;

(ii) $P\phi$ é limitada, se $\phi \in S$ (basta aplicar a hipótese (2.34)).

As constatações (i) e (ii) mostram que, de fato, $P\phi \in B$ se $\phi \in S$. Afirmamos que $P\phi \in S$ se $\phi \in S$. Com efeito, pela definição de P, se $\phi \in S$, temos que $(P\phi)(t) = \psi(t)$, se $t \in [-r, 0]$. Sendo assim, basta mostrar que $P\phi(t) \to 0$ quando $t \to \infty$, para qualquer $\phi \in S$.

Fixe $\phi \in S$. Por (2.36), temos

$$\begin{aligned}|(P\phi)(t)| = \underbrace{\left|\psi(0)e^{-\int_0^t a(s+r)\,ds}\right|}_{\text{Parte I}} + \underbrace{\left|\int_{t-r}^{t} a(u+r)\phi(u)\,du\right|}_{\text{Parte II}} \\ + \underbrace{\left|e^{-\int_0^t a(u+r)\,du}\int_{-r}^{0} a(u+r)\phi(u)\,du\right|}_{\text{Parte III}} \underbrace{\left|\int_0^t a(s+r)e^{-\int_s^t a(u+r)\,du}\int_{s-r}^{s} a(u+r)\phi(u)\,du\,ds\right|}_{\text{Parte IV}} \\ (2.37)\end{aligned}$$

Vamos denotar por $\|\phi\|$ o supremo de $|\phi|$ em $[0, \infty)$.

Mostraremos que cada parte de (2.37) tende a zero quando $t \to \infty$. Para tal, recordemos que $a(t) \geq 0$ para todo $t \geq 0$, a é uma função limitada, ou seja, existe $K > 0$ tal que $|a(t)| \leq K$ para todo $t \geq 0$, e que (2.34) e (2.35) ocorrem, por hipótese.

• **Parte I**: é claro que

$$\left|\psi(0)e^{-\int_0^t a(s+r)\,ds}\right| \leq |\psi(0)|e^{-\int_0^t a(s+r)\,ds}, \qquad \text{para todo } t > 0.$$

Por (2.35) e por propriedade da função exponencial, temos que

$$e^{-\int_0^t a(s+r)\,ds} \to 0 \quad \text{quando} \quad t \to \infty.$$

Portanto,

$$|\psi(0)|e^{-\int_0^t a(s+r)\,ds} \to 0 \quad \text{quando} \quad t \to \infty$$

e

$$\left|\psi(0)e^{-\int_0^t a(s+r)\,ds}\right| \to 0 \quad \text{quando} \quad t \to \infty.$$

• **Parte II**: denotando por $\|\phi\|_{[t-r,t]}$ o supremo de $|\phi|$ em $[t-r,t]$ para $t>0$, obtemos

$$\left|\int_{t-r}^{t} a(u+r)\phi(u)\,du\right| \leq \|\phi\|_{[t-r,t]}\int_{t-r}^{t}|a(u+r)|\,du \leq \|\phi\|_{[t-r,t]}\int_{t-r}^{t}K\,du \leq \|\phi\|_{[t-r,t]}Kr. \tag{2.38}$$

Como $\phi\in S$, segue que $\phi(t)\to 0$ quando $t\to\infty$ e, portanto, podemos afirmar que

$$\|\phi\|_{[t-r,t]}\to 0 \quad \text{quando} \quad t\to\infty. \tag{2.39}$$

Daí, como r e K são constantes positivas, obtemos

$$\|\phi\|_{[t-r,t]}Kr\to 0 \quad \text{quando} \quad t\to\infty. \tag{2.40}$$

Por conseguinte, por (2.38) e (2.40), concluímos que

$$\left|\int_{t-r}^{t} a(u+r)\phi(u)\,du\right|\to 0 \quad \text{quando} \quad t\to\infty.$$

• **Parte III**: para $t>0$, segue que

$$\left|e^{-\int_0^t a(u+r)\,du}\int_{-r}^{0} a(u+r)\phi(u)\,du\right| \leq e^{-\int_0^t a(u+r)\,du}\int_{-r}^{0}|a(u+r)||\phi(u)|\,du. \tag{2.41}$$

Por outro lado, denotando por $\|\phi\|_{[-r,0]}$ o supremo de $|\phi|$ em $[-r,0]$, temos que $\|\phi\|_{|[-r,0]} = \|\psi\|$ e

$$\int_{-r}^{0}|a(u+r)||\phi(u)|\,du \leq \|\psi\|\int_{-r}^{0}K\,du = \|\psi\|Kr. \tag{2.42}$$

Novamente, por (2.35) e por propriedade da função exponencial, temos

$$e^{-\int_0^t a(s+r)\,ds}\to 0 \quad \text{quando} \quad t\to\infty. \tag{2.43}$$

Como K, r e $\|\psi\|$ são constantes positivas, podemos afirmar, por meio das relações (2.42) e (2.43), que

$$\left[e^{-\int_0^t a(s+r)\,ds}\right]\|\psi\|Kr\to 0 \quad \text{quando} \quad t\to\infty. \tag{2.44}$$

Logo, segue de (2.41) e (2.44) que

$$\left|e^{-\int_0^t a(u+r)\,du}\int_{-r}^{0} a(u+r)\phi(u)\,du\right|\to 0 \quad \text{quando} \quad t\to\infty.$$

• **Parte IV**: dado $t>0$, fixe $0<T<t$. Vamos denotar o supremo de $|\phi|$ em $[T-r,\infty)$ por $\|\phi\|_{[T-r,\infty)}$. Pela hipótese (2.34), obtemos

$$\begin{aligned}
&\left|\int_0^t a(s+r)e^{-\int_s^t a(u+r)\,du}\int_{s-r}^{s} a(u+r)\phi(u)\,du\,ds\right| \\
&\leq \int_0^t |a(s+r)|e^{-\int_s^t a(u+r)\,du}\int_{s-r}^{s}|a(u+r)\phi(u)|\,du\,ds \\
&\leq \left[\int_0^T |a(s+r)|e^{-\int_s^T a(u+r)\,du}\int_{s-r}^{s}|a(u+r)|\,du\,ds\right]\|\phi\|e^{-\int_T^t a(u+r)\,du} \\
&+ \left[\int_T^t |a(s+r)|e^{-\int_s^t a(u+r)\,du}\int_{s-r}^{s}|a(u+r)|\,du\,ds\right]\|\phi\|_{[T-r,\infty)} \\
&\leq \alpha\|\phi\|e^{-\int_T^t a(u+r)\,du}+\alpha\|\phi\|_{[T-r,\infty)}.
\end{aligned} \tag{2.45}$$

Dado $\varepsilon > 0$, podemos tomar T tão grande de modo que $\alpha\|\phi\|_{[T-r,\infty)} < \varepsilon/2$, visto que $\phi(t) \to 0$ quando $t \to \infty$. Além disso, para tal T fixado, existe t^* suficientemente grande tal que $\alpha\|\phi\|e^{-\int_T^t a(u+r)du} < \varepsilon/2$ para $t > t^*$, uma vez que (2.35) ocorre. Portanto, se $t > t^*$, temos que

$$\alpha\|\phi\|e^{-\int_T^t a(u+r)\,du} + \alpha\|\phi\|_{[T-r,\infty)} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \tag{2.46}$$

Por (2.45) e (2.46), vemos que se $t > t^*$, então

$$\left| \int_0^t a(s+r)e^{-\int_s^t a(u+r)\,du} \int_{s-r}^s a(u+r)\phi(u)\,du\,ds \right| < \varepsilon.$$

Logo, $P\phi(t) \to 0$ quando $t \to \infty$, para qualquer $\phi \in S$, de onde finalmente concluímos que $P(S) \subset S$.

Agora, por (2.34), podemos facilmente verificar que $P : S \to S$ é uma contração. Dessa forma, o Teorema do Ponto Fixo da Contração garante que P tem um único ponto fixo em S, que é a solução limitada $x(t, 0, \psi)$ da equação (2.31), que tende a zero quando $t \to \infty$. □

A dificuldade em construir funcionais de Lyapunov para as equações diferenciais ordinárias e funcionais é uma das grandes motivações deste estudo, pois não há um funcional pré-definido para cada classe de equação, o que se sabe apenas é que para alguns tipos de estabilidade existem funcionais de determinado tipo. Outra característica importante é que no estudo feito por Lyapunov é exigido que $a(t + r) > 0$, o que não se requer no estudo via teoria de ponto fixo, como foi possível observar no Teorema 2.12, provado acima.

Corolário 2.13. *Em* (2.31)*, considere* $a(t) = 1.1 + \operatorname{sen}(t)$*, como no Exemplo 1.34. Temos, então, a seguinte equação:*

$$\dot{x}(t) = (-1.1 - \operatorname{sen}(t))x(t - r), \quad t \geq 0.$$

As condições do Teorema 2.12 são satisfeitas se $2(1.1r + 2\operatorname{sen}(r/2)) < 1$*, o que é atingido quando* r *é positivo e aproximadamente menor do que* 0.2.

Demonstração. É fácil ver que a condição (2.35) está satisfeita para $a(t) = 1.1+\operatorname{sen}(t)$.

Agora, vamos estimar a integral

$$\int_{t-r}^t |a(u + r)|\,du = \int_t^{t+r} (1.1 + \operatorname{sen}(u))\,du,$$

para $t > 0$ e $0 < r < 1$.

Afirmamos que

$$\int_t^{t+r} \operatorname{sen}(u)\,du \leq \int_{\frac{\pi}{2}-\frac{r}{2}}^{\frac{\pi}{2}+\frac{r}{2}} \operatorname{sen}(u)\,du, \qquad \text{se } t > 0 \quad \text{e} \quad 0 < r < 1.$$

Com efeito, sabemos que, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$, vale a relação trigonométrica

$$\cos(x) - \cos(y) = -2\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}(x + y)\right)\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}(x - y)\right). \tag{2.47}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\int_t^{t+r} \operatorname{sen}(u)\, du &= \cos(t) - \cos(t+r) \\
&= -2 \operatorname{sen}\left(\frac{r}{2} + t\right) \operatorname{sen}\left(-\frac{r}{2}\right) \\
&= 2 \operatorname{sen}\left(\frac{r}{2} + t\right) \operatorname{sen}\left(\frac{r}{2}\right) \qquad (2.48)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{\pi}{2}-\frac{r}{2}}^{\frac{\pi}{2}+\frac{r}{2}} \operatorname{sen}(u)\, du &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{r}{2}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{r}{2}\right) \\
&= -2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) \operatorname{sen}\left(-\frac{r}{2}\right) \\
&= 2 \operatorname{sen}\left(\frac{r}{2}\right), \qquad (2.49)
\end{aligned}$$

já que $\operatorname{sen}\left(-\frac{r}{2}\right) = -\operatorname{sen}\left(\frac{r}{2}\right)$ e $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

Para $0 < r < 1$, temos que

$$\operatorname{sen}\left(\frac{r}{2}\right) > 0.$$

Além disso,

$$\operatorname{sen}\left(\frac{r}{2} + t\right) \leq 1, \qquad \text{para } \; 0 < r < 1 \quad \text{e} \quad t > 0.$$

Então, de (2.48) e (2.49) segue que

$$\int_t^{t+r} \operatorname{sen}(u)\, du = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{r}{2} + t\right) \operatorname{sen}\left(\frac{r}{2}\right) \leq 2 \operatorname{sen}\left(\frac{r}{2}\right) = \int_{\frac{\pi}{2}-\frac{r}{2}}^{\frac{\pi}{2}+\frac{r}{2}} \operatorname{sen}(u)\, du, \qquad (2.50)$$

para $t \geq 0$ e $0 < r < 1$.

Consequentemente, por (2.50), constatamos que, para $t > 0$ e $0 < r < 1$,

$$\int_t^{t+r} (1.1 + \operatorname{sen}(u))\, du \leq \int_{\frac{\pi}{2}-\frac{r}{2}}^{\frac{\pi}{2}+\frac{r}{2}} (1.1 + \operatorname{sen}(u))\, du = 1.1r + 2 \operatorname{sen}\left(\frac{r}{2}\right). \qquad (2.51)$$

Ademais, a segunda integral em (2.34) é também limitada por $1.1r + 2\operatorname{sen}(r/2)$, para $t > 0$ e $0 < r < 1$, pois, por (2.51), vemos que

$$\begin{aligned}
&\int_0^t |a(s+r)| e^{-\int_s^t a(u+r)\, du} \left| \int_{s-r}^{s} |a(u+r)|\, du \right| ds \\
&\leq \int_0^t |a(s+r)| e^{-\int_s^t a(u+r)\, du} \left[1.1r + 2 \operatorname{sen}\left(\frac{r}{2}\right)\right] ds \\
&= \left[1.1r + 2 \operatorname{sen}\left(\frac{r}{2}\right)\right] \int_0^t |a(s+r)| e^{-\int_s^t a(u+r)\, du}\, ds \\
&\overset{(*)}{<} \left[1.1r + 2 \operatorname{sen}\left(\frac{r}{2}\right)\right] .1,
\end{aligned}$$

visto que, como $a(t) = 1.1 + \operatorname{sen}(t)$, a condição (2.35) é válida.

$(*)$ Vamos mostrar que

$$\int_0^t |a(s+r)|e^{-\int_s^t a(u+r)\,du}\,ds < 1 \tag{2.52}$$

se (2.35) ocorre.

De fato, por meio da mudança de variável $\omega = e^{-\int_s^t a(u+r)\,du}$, podemos obter

$$\int_0^t |a(s+r)|e^{-\int_s^t a(u+r)\,du}\,ds = \left[e^{\int_t^s a(s+r)\,ds}\right]_0^t = 1 - e^{-\int_0^t a(s+r)\,ds} < 1, \quad t > 0,$$

já que $e^{-\int_0^t a(s+r)\,ds} < 1$, em virtude da hipótese (2.35).

Portanto, para que as condições do Teorema 2.12 sejam satisfeitas é necessário que $2(1.1r + 2\,\mathrm{sen}(r/2)) < 1$. Fazendo a aproximação $\mathrm{sen}(r/2) = r/2$ para $r < 1$, temos que

$$2(1.1r + 2\,\mathrm{sen}(r/2)) < 1 \quad \Longrightarrow \quad 2(1.1r + 2(r/2)) < 1 \quad \Longrightarrow \quad 2.2r + 2r < 1$$
$$\Longrightarrow \quad 0 < r < \frac{1}{4.2}.$$

□

A simulação das soluções feita na Figura 2.4 constata a validade do Corolário 2.13 para $r = 0.19 < 1/4.2$ e mostra que o mesmo resultado não é verificado quando $r = 1.3$, número relativamente maior do que $1/4.2$.

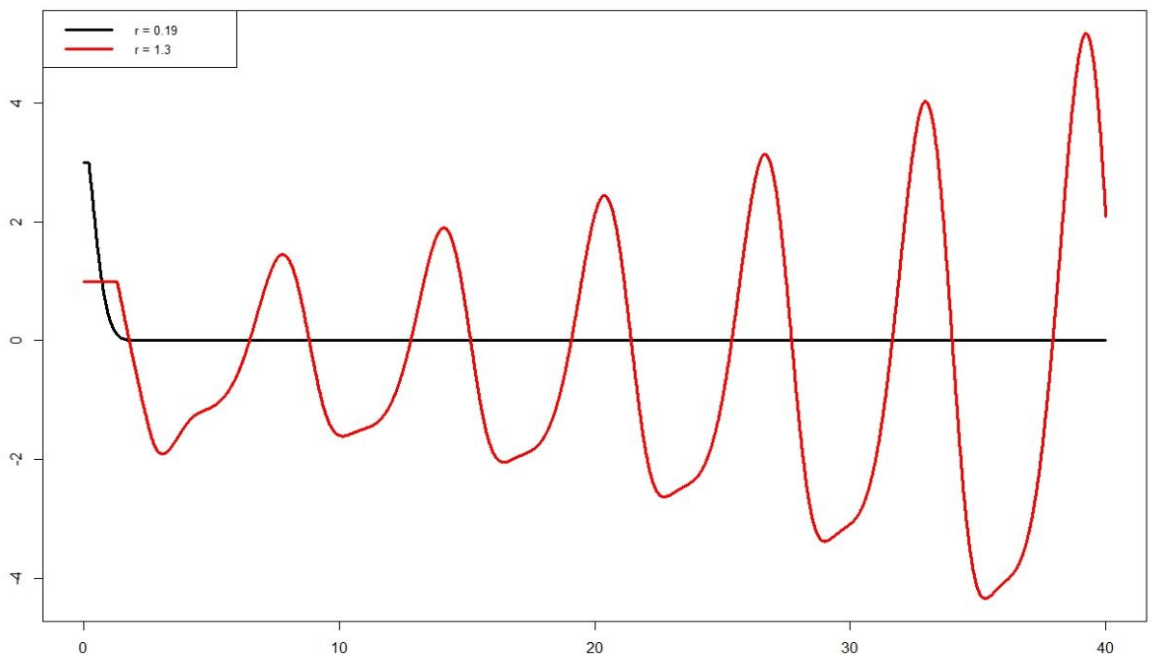

Figura 2.4: Simulação - Corolário (2.13).

Exemplo 2.14. Considere a equação escalar

$$\dot{x}(t) = -(1 + 2\,\mathrm{sen}\,t)x(t - r), \qquad t \geq 0, \tag{2.53}$$

onde $0 < r < 1$ e r sofrerá uma restrição mais adiante. Note que a função

$$a(t) = 1 + 2\,\mathrm{sen}(t), \qquad t \geq 0, \tag{2.54}$$

muda de sinal.

Precisamos estabelecer algumas limitações para que as condições do Teorema 2.12 sejam satisfeitas para a equação (2.53). Os cálculos são grosseiros, mas garantem que ainda podemos ter estabilidade quando a função coeficiente $a = a(t)$ muda de sinal.

Obteremos estabilidade assintótica da solução nula de (2.53) quando

$$(r + 4\,\mathrm{sen}(r/2))(2 + 2e^4) < 1,$$

que ocorre, aproximadamente, quando $0 \leq r < 0.002$.

Antes de iniciarmos os cálculos, cabe observar que a condição (2.35) está satisfeita para $a(t) = 1 + 2\,\mathrm{sen}(t)$.

Lema 2.15. *Para $a(t) = 1 + 2\,\mathrm{sen}(t)$, $0 < r < 1$ e $t > 0$, tem-se*

$$\int_{t-r}^{t} |a(u + r)|\, du \leq 2((r/2) + 2\,\mathrm{sen}(r/2)).$$

Demonstração. Assim como mostramos em (2.50), podemos verificar que, para $t > 0$ e $0 < r < 1$, vale a seguinte desigualdade

$$\int_{t}^{t+r} |\,\mathrm{sen}(u)|\, du \leq \int_{\frac{\pi}{2}-\frac{r}{2}}^{\frac{\pi}{2}+\frac{r}{2}} |\,\mathrm{sen}(u)|\, du. \tag{2.55}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\int_{t-r}^{t} |a(u + r)|\, du &= \int_{t}^{t+r} |1 + 2\,\mathrm{sen}(u)|\, du \leq \int_{\frac{\pi}{2}-\frac{r}{2}}^{\frac{\pi}{2}+\frac{r}{2}} |1 + 2\,\mathrm{sen}(u)|\, du \\
&\leq \int_{\frac{\pi}{2}-\frac{r}{2}}^{\frac{\pi}{2}+\frac{r}{2}} 1\, du + 2\int_{\frac{\pi}{2}-\frac{r}{2}}^{\frac{\pi}{2}+\frac{r}{2}} |\,\mathrm{sen}(u)|\, du \\
&\overset{(\star)}{=} r + 2\left[2\,\mathrm{sen}\left(\frac{r}{2}\right)\right] \\
&= 2\left[\left(\frac{r}{2}\right) + 2\,\mathrm{sen}\left(\frac{r}{2}\right)\right].
\end{aligned}$$

($\star$) Para concluir que

$$\int_{\frac{\pi}{2}-\frac{r}{2}}^{\frac{\pi}{2}+\frac{r}{2}} |\,\mathrm{sen}(u)|\, du = 2\,\mathrm{sen}\left(\frac{r}{2}\right), \tag{2.56}$$

basta efetuar um cálculo análogo ao realizado em (2.49). □

Lema 2.16. *Sob as mesmas condições do Lema 2.15, tem-se*

$$\begin{aligned}
J =: &\int_{0}^{t} |1 + 2\,\mathrm{sen}(s + r)|e^{-\int_s^t (1+2\,\mathrm{sen}(u+r))\, du} \int_{s-r}^{s} |1 + 2\,\mathrm{sen}(u + r)|\, du\, ds \\
&\leq (r + 4\,\mathrm{sen}(r/2))(1 + 2e^4), \qquad t > 0.
\end{aligned}$$

Demonstração. Primeiramente, observe que

$$\int_{s-r}^{s} |(1+2\operatorname{sen}(u+r))|du \leq r+4\operatorname{sen}(r/2).$$

De fato, fazendo a substituição $x = u+r$ e usando a Desigualdade Triangular, obtemos

$$\begin{aligned}\int_{s-r}^{s} |(1+2\operatorname{sen}(u+r))|\, du &= \int_{s}^{s+r} |1+2\operatorname{sen}(x)|\, dx \\ &\leq r+2\int_{s}^{s+r} |\operatorname{sen} x|\, dx \\ &\overset{(2.55)}{\leq} r+2\int_{\frac{\pi}{2}-\frac{r}{2}}^{\frac{\pi}{2}+\frac{r}{2}} |\operatorname{sen}(x)|\, dx \\ &\overset{(2.56)}{=} r+4\operatorname{sen}\left(\frac{r}{2}\right).\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} J &\leq \left[r+4\operatorname{sen}\left(\frac{r}{2}\right)\right]\int_0^t (1+2\operatorname{sen}(s+r)+2)e^{-\int_s^t (1+2\operatorname{sen}(u+r))\,du}\, ds \\ &= \left[r+4\operatorname{sen}\left(\frac{r}{2}\right)\right]\left(\int_0^t (1+2\operatorname{sen}(s+r))e^{-\int_s^t (1+2\operatorname{sen}(u+r))\,du}\, ds + 2\int_0^t e^{-\int_s^t (1+2\operatorname{sen}(u+r))\,du}\, ds\right) \\ &\overset{(2.52)}{<} \left[r+4\operatorname{sen}\left(\frac{r}{2}\right)\right]\left(1+2\int_0^t e^{-\int_s^t (1+2\operatorname{sen}(u+r))\,du}\, ds\right) \\ &= \left[r+4\operatorname{sen}\left(\frac{r}{2}\right)\right]\left(1+2\int_0^t e^{-\int_s^t 1\,du}\cdot e^{-2\int_s^t \operatorname{sen}(u+r))\,du}\, ds\right) \\ &\overset{(*)}{\leq} \left[r+4\operatorname{sen}\left(\frac{r}{2}\right)\right]\left(1+2e^4\int_0^t 1.e^{-\int_s^t 1\,du}\, ds\right) \\ &\overset{(2.52)}{<} \left[r+4\operatorname{sen}\left(\frac{r}{2}\right)\right]\left(1+2e^4\right).\end{aligned}$$

Em $(*)$, usamos:

$$-2\int_s^t \operatorname{sen}(u+r))\, du = 2\left[\cos(t+r)-\cos(s+r)\right] \leq 4,$$

já que $[\cos(t+r)-\cos(s+r)] \leq 2$, de onde segue que

$$e^{-2\int_s^t \operatorname{sen}(u+r))\,du} \leq e^4.$$

□

Corolário 2.17. *Sob as mesmas condições do Lema 2.15, tem-se*

$$\int_{t-r}^{t} |a(u+r)|\, du + \int_0^t |a(s+r)|e^{-\int_s^t a(u+r)\,du}\int_{s-r}^{s} |a(u+r)|\, du\, ds \leq \alpha,$$

para qualquer $t > 0$*, em que* $a(t) = 1+2\operatorname{sen} t$*. Daí, poderá se concluir que as condições do Teorema 2.12 são satisfeitas para a equação* (2.54)*, visto que* (2.35) *é facilmente verificável para a função* $a = a(t)$ *mencionada.*

Demonstração. Com efeito, pelos Lemas 2.15 e 2.16, devemos ter

$$2\left(\frac{r}{2}+\operatorname{sen}\left(\frac{r}{2}\right)\right)+\left[r+4\operatorname{sen}\left(\frac{r}{2}\right)\right](1+2e^4)<1,$$

ou seja,

$$r+2\operatorname{sen}\left(\frac{r}{2}\right)+\left[r+4\operatorname{sen}\left(\frac{r}{2}\right)\right](1+2e^4)<1,$$

de onde concluímos que

$$\left[r+4\operatorname{sen}\left(\frac{r}{2}\right)\right](2+2e^4)<1.$$

□

A simulação das soluções feita na Figura 2.5 evidencia a validade do Corolário 2.17 para $r = 0.0012 < 0.002$ e expressa que o mesmo resultado não é convalidado quando $r = 0.8$, número relativamente maior do que 0.002.

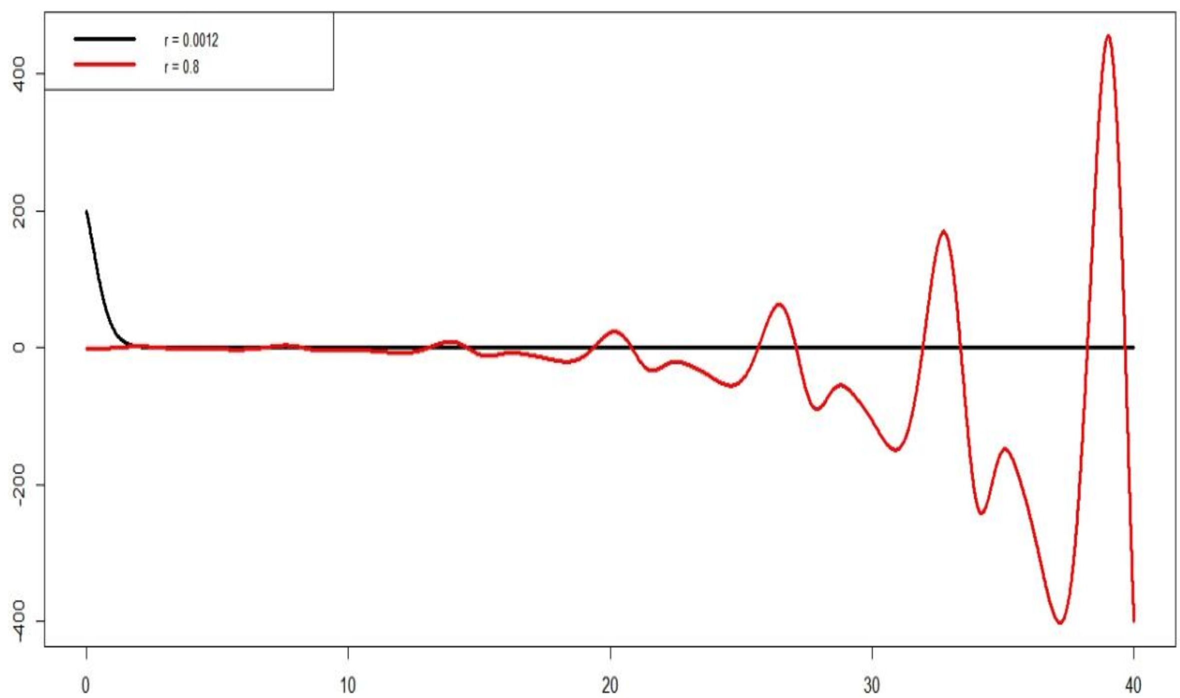

Figura 2.5: Simulação - Corolário (2.17).

2.1.2 Problema de Levin-Nohel

Vamos agora retornar ao problema de Volterra-Levin-Nohel, exposto brevemente ao final do Capítulo 1, fazendo mais algumas exigências sobre a função g, e exigindo condições sobre a função $a = a(t)$ mais verificáveis em problemas do mundo real.

Suponha que exista um função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisfaça

$$|g(x) - g(y)| \leq K|x - y|, \quad \text{para algum } K > 0 \text{ e para quaisquer } x, y \in \mathbb{R}, \tag{2.57}$$

$$\frac{g(x)}{x} \geq 0, \quad \text{para todo}\, x \in \mathbb{R} \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{x} \text{ existe,} \tag{2.58}$$

e às vezes

$$\frac{g(x)}{x} \geq \beta, \qquad \text{para algum } \beta > 0. \tag{2.59}$$

Considere a equação diferencial escalar

$$\dot{x}(t) = -\int_{t-L}^{t} p(s-t)g(x(s))\, ds, \quad t \geq 0, \tag{2.60}$$

com $L > 0$, p contínua e

$$\int_{-L}^{0} p(s)ds = 1. \tag{2.61}$$

(Na verdade, é necessário apenas que $\int_{-L}^{0} p(s)ds > 0$). Além disso, para K da condição (2.57), suponha que

$$2K \int_{-L}^{0} |p(v)v|\, dv = \alpha < 1. \tag{2.62}$$

Lema 2.18. *A equação* (2.60) *pode ser escrita como*

$$\dot{x}(t) = -g(x) + \frac{d}{dt}\int_{-L}^{0} p(s) \int_{t+s}^{t} g(x(u))\, du\, ds, \quad t \geq 0.$$

Demonstração. Com efeito, usando propriedades de diferenciação e integração, temos

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= -g(x(t)) + \frac{d}{dt}\int_{-L}^{0} p(s) \int_{t+s}^{t} g(x(u))\, du\, ds \\
&= -g(x(t)) + \int_{-L}^{0} p(s) \left[\frac{d}{dt}\int_{t+s}^{t} g(x(u))\, du\right] ds \\
&= -g(x(t)) + \int_{-L}^{0} p(s) \left[g(x(t)) - g(x(t+s))\right] ds \\
&= -g(x(t)) + \int_{-L}^{0} p(s)g(x(t))\, ds - \int_{-L}^{0} p(s)g(x(t+s))\, ds \\
&\overset{(2.61)}{=} -g(x(t)) + g(x(t))\int_{-L}^{0} p(s)\, ds - \int_{-L}^{0} p(s)g(x(t+s))\, ds \\
&= -\int_{-L}^{0} p(s)g(x(t+s))\, ds \\
&= \int_{t-L}^{t} p(s-t)g(x(s))\, ds.
\end{aligned}$$

□

Teorema 2.19. *Se as condições* (2.57), (2.58), (2.61) *e* (2.62) *são satisfeitas, então toda solução de* (2.60) *é limitada. Se a condição* (2.59) *também é satisfeita, então toda solução de* (2.60) *e sua derivada tendem a zero quando* $t \to \infty$.

Demonstração. Seja $\psi : [-L, 0] \to \mathbb{R}$ uma função inicial contínua dada e seja $x_1 = x(t, 0, \psi)$ a única solução de (2.60) que passa por ψ em $t = 0$. Pela condição de crescimento imposta sobre g, $x_1(t)$ existe em $[0, \infty)$. Pelo Lema 2.18, podemos escrever a equação (2.60) como

$$\dot{x}(t) = -g(x) + \frac{d}{dt}\int_{-L}^{0} p(s)\int_{t+s}^{t} g(x(u))\,du\,ds, \quad t \geq 0. \tag{2.63}$$

Defina uma função não-negativa $a : [0, \infty) \to [0, \infty)$ por

$$a(t) =: \frac{g(x_1(t))}{x_1(t)}.$$

Claramente, a está bem definida visto que (2.58) ocorre.

Afirmação: A função a é contínua. De fato, tome $t \in [0, \infty)$ arbitrariamente. Se $x_1(t) \neq 0$, é claro que a é contínua em t, uma vez que o quociente de funções contínuas é uma função contínua. Se $x_1(t) = 0$, a também é contínua em t em virtude da condição (2.58), pois g é contínua, a solução x_1 é contínua,

$$\frac{g(x_1(t))}{x_1(t)} \geq 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to 0} \frac{g(x)}{x} \quad \text{existe.}$$

Então, para cada solução fixada, podemos escrever a equação diferencial (2.63) como

$$\dot{x}(t) = -a(t)x(t) + \frac{d}{dt}\int_{-L}^{0} p(s)\int_{t+s}^{t} g(x(u))\,du\,ds,$$

que após a aplicação da fórmula da variação dos parâmetros e integração por partes, pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}
x(t) &= \psi(0)e^{-\int_0^t a(w)\,dw} + \int_0^t e^{-\int_v^t a(w)\,dw}\frac{d}{dv}\int_{-L}^{0} p(s)\int_{v+s}^{v} g(x(u))\,du\,ds\,dv \\
&= \psi(0)e^{-\int_0^t a(w)\,dw} + e^{-\int_v^t a(w)\,dw}\int_{-L}^{0} p(s)\int_{v+s}^{v} g(x(u))\,du\,ds\Big|_0^t \\
&\quad - \int_0^t a(v)e^{-\int_v^t a(w)\,dw}\int_{-L}^{0} p(s)\int_{v+s}^{v} g(x(u))\,du\,ds\,dv \\
&= \psi(0)e^{-\int_0^t a(w)\,dw} + \int_{-L}^{0} p(s)\int_{t+s}^{t} g(x(u))\,du\,ds - e^{-\int_0^t a(w)\,dw}\int_{-L}^{0} p(s)\int_{s}^{0} g(\psi(u))\,du\,ds \\
&\quad - \int_0^t e^{-\int_v^t a(w)\,dw}a(v)\int_{-L}^{0} p(s)\int_{v+s}^{v} g(x(u))\,du\,ds\,dv.
\end{aligned}$$

Seja $(B, \|\cdot\|)$ o espaço de Banach das funções contínuas e limitadas $\phi : [-L, \infty) \to \mathbb{R}$ com a norma do supremo. Utilizando a notação $\phi_0 = \psi$ para denotar $\phi(t) = \psi(t)$ em $[-L, 0]$, considere o seguinte conjunto:

$$M = \{\phi \in B : \phi_0 = \psi\}.$$

Pela Proposição 2.4, M munido da métrica do supremo é um espaço métrico completo. Por conveniência de notação, denotaremos tal métrica por $\|\cdot\|$, que é a norma de B. Novamente, $|\,.\,|$ denotará o módulo de um número real.

Defina $P : M \to M$ por $(P\phi)(t) = \psi(t)$, para $t \in [-L, 0]$, e

$$\begin{aligned}(P\phi)(t) = \psi(0)e^{-\int_0^t a(w)\,dw} &+ \int_{-L}^0 p(s)\int_{t+s}^t g(\phi(u))\,du\,ds \\ &- e^{-\int_0^t a(w)\,dw}\int_{-L}^0 p(s)\int_s^0 g(\psi(u))\,du\,ds \\ &- \int_0^t e^{-\int_v^t a(w)\,dw}a(v)\int_{-L}^0 p(s)\int_{v+s}^v g(\phi(u))\,du\,ds\,dv,\end{aligned}$$

para $t \geq 0$.

Afirmação: A aplicação P é uma contração em M. Com efeito, se $\phi, \eta \in M$ e $t \geq 0$, então

$$\begin{aligned}|(P\phi)(t) - (P\eta)(t)| &= \Big|\int_{-L}^0 p(s)\int_{t+s}^t g(\phi(u))\,du\,ds - \\ &- \int_0^t e^{-\int_v^t a(w)\,dw}a(v)\int_{-L}^0 p(s)\int_{v+s}^v g(\phi(u))\,du\,ds\,dv - \int_{-L}^0 p(s)\int_{t+s}^t g(\eta(u))\,du\,ds + \\ &+ \int_0^t e^{-\int_v^t a(w)\,dw}a(v)\int_{-L}^0 p(s)\int_{v+s}^v g(\eta(u))\,du\,ds\,dv\Big| \\ &= \Big|\int_{-L}^0 p(s)\int_{t+s}^t (g(\phi(u)) - g(\eta(u)))\,du\,ds - \\ &- \int_0^t e^{-\int_v^t a(w)\,dw}a(v)\int_{-L}^0 p(s)\int_{v+s}^v (g(\phi(u)) - g(\eta(u)))\,du\,ds\,dv\Big| \\ &\leq \int_{-L}^0 |p(s)|\int_{t+s}^t |g(\phi(u)) - g(\eta(u))|\,du\,ds + \\ &+ \int_0^t e^{-\int_v^t a(w)\,dw}a(v)\int_{-L}^0 |p(s)|\int_{v+s}^v |g(\phi(u)) - g(\eta(u))|\,du\,ds\,dv \\ &\leq \int_{-L}^0 |p(s)|K\int_{t+s}^t \|\phi - \eta\|\,du\,ds + \\ &+ \int_0^t e^{-\int_0^t a(w)\,dw}a(v)\int_{-L}^0 |p(s)|\int_{v+s}^v K\|\phi - \eta\|\,du\,ds\,dv \\ &= K\|\phi - \eta\|\int_{-L}^0 |p(s)||(-s)|ds + K\|\phi - \eta\|\int_0^t e^{-\int_v^t a(w)\,dw}a(v)\int_{-L}^0 |p(s)||(-s)|\,ds\,dv \\ &= K\|\phi - \eta\|\int_{-L}^0 |p(s)s|ds + K\|\phi - \eta\|\int_{-L}^0 |p(s)s|\,ds\int_0^t e^{-\int_v^t a(w)\,dw}a(v)\,dv \\ &\overset{(*)}{\leq} 2K\|\phi - \eta\|\int_{-L}^0 |p(s)s|\,ds \\ &= \alpha\|\phi - \eta\|.\end{aligned}$$

$(*)$ Podemos mostrar que

$$\int_0^t e^{-\int_v^t a(w)\,dw}a(v)\,dv < 1, \quad \text{para } t \geq 0,$$

usando o mesmo procedimento que foi utilizado em (2.52).

Logo, por (2.62), P é contração e possui um único ponto fixo em M, que é uma função limitada.

Note que se $g \equiv 0$ então $\dot{x}(t) = 0$, e isso não garante que todas as soluções da equação tendam a zero quando $t \to \infty$. Agora, se $\dfrac{g(x)}{x} \geq \beta > 0$, então acrescenta-se ao conjunto M a condição de que $\phi(t) \to 0$ quando $t \to \infty$. Através de um cálculo simples, pode-se mostrar que $(P\phi)(t) \to 0$ quado $\phi(t) \to 0$. De (2.60) pode-se observar que $\dot{x}(t) \to 0$ quando $t \to 0$. Após todas as suposições feitas sobre a limitação da derivada da função $p(t)$, pode-se também afirmar que $\ddot{x}(t)$ tende a zero quando $t \to 0$, conforme foi provado por Levin e Nohel. □

A estabilidade das soluções de vários outros modelos conhecidos na literatura pode ser analisada através do Teorema do Ponto Fixo da Contração, tais como do modelo populacional de Cooke-Yorke, que embora não tenha sido abordado aqui, pode ser estudado em [6] e [11].

2.2 Teorema do Ponto Fixo de Schauder

Aqui, o Teorema do Ponto Fixo de Schauder será apresentado como uma alternativa ao estudo de estabilidade das soluções de certas equações diferenciais funcionais com retardamento.

Iniciaremos esta seção com preliminares sobre subconjuntos de $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ e depois apresentaremos o Teorema do Ponto Fixo de Schauder, cuja demonstração baseia-se na referência [23].

Assumiremos o próximo resultado como um fato, visto que sua demonstração segue de forma análoga à prova da Proposição 2.4.

Fato 2.20. *Seja $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ uma função contínua e seja S o conjunto das funções limitadas e contínuas $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}^n$, com $f(t) = \phi(t)$ para $t \in [a, b]$. Para $f, g \in S$, defina $\rho(f, g) = \sup_{a \leq t < \infty} |f(t) - g(t)| =: \|f - g\|$. Então, $(S, \|\cdot\|)$ é um espaço métrico completo.*

Considere

$$M = \{\phi : [0, \infty) \to \mathbb{R} : \phi \in C([0, \infty), \mathbb{R}),\ |\phi(t)| \leq 1,\ \phi(t) \to 0 \text{ quando } t \to \infty\}$$

e

$$Q = \{\phi : [0, \infty) \to \mathbb{R} : \phi \in C([0, \infty), \mathbb{R}),\ |\phi(t)| \leq 1\}.$$

Sejam $\|\cdot\|$ a métrica do supremo e $|\cdot|_h$ uma métrica mais fina do que $\|\cdot\|$, em que

- ▷ $h : [0, \infty) \to [1, \infty)$ é contínua;
- ▷ $h(0) = 1$;
- ▷ $h(t) \to \infty$ quando $t \to \infty$ monotonicamente[1];
- ▷ se $\phi \in M$ ou $\phi \in Q$, então $|\phi|_h = \sup_{t \geq 0} \dfrac{|\phi(t)|}{h(t)}$.

[1] h é monótona, estritamente crescente, e o limite $\lim_{t \to \infty} h(t) = \infty$ ocorre.

Proposição 2.21. *$(Q, |\cdot|_h)$ é um espaço métrico completo.*

Demonstração. Suponha que $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seja uma sequência de Cauchy em Q. Se restringirmos $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ao intervalo $[0,k]$, para algum $k \in \mathbb{N}$, então

$$|\phi_n|_h \leq \|\phi_n\|. \tag{2.64}$$

De fato, sabemos que h é contínua, positiva e crescente em $[0,k]$. Então, como $h(0) = 1$, existe $\mu > 1$ tal que

$$1 \leq h(t) \leq \mu, \quad \text{para todo } t \in [0,k].$$

Daí,

$$\frac{|\phi_n(t)|}{\mu} \leq \frac{|\phi_n(t)|}{h(t)} \leq \phi_n(t), \quad \text{para todo } t \in [0,k],$$

de onde segue que

$$\sup_{t\in[0,k]} \frac{|\phi_n(t)|}{\mu} \leq \sup_{t\in[0,k]} \frac{|\phi_n(t)|}{h(t)} \leq \sup_{t\in[0,k]} \phi_n(t) \quad \Longrightarrow \quad |\phi_n|_h \leq \|\phi_n\|.$$

Por (2.64) vemos que $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ também é uma sequência de Cauchy em $(Q, \|\cdot\|)$ e, pelo Fato 2.20, ela tem uma única função contínua limite no intervalo $[0,k]$. A afirmação acima é válida para $k = 1, 2, 3, 4, \ldots$. Portanto, dessa forma, podemos obter $\phi \in Q$ tal que $|\phi_n - \phi|_h \to 0$ quando $n \to \infty$, o que completa a prova. $\square$

Proposição 2.22. *$(M, |\cdot|_h)$ não é um espaço métrico completo.*

Demonstração. Seja $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a sequência de funções tal que

$$\phi_n(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 \leq t \leq n, \\ 0, & \text{se } n+1 \leq t < \infty, \end{cases}$$

e ϕ_n é linear e contínua em $[n, n+1]$.

Afirmação: $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $(M, |\cdot|_h)$. Seja $\varepsilon > 0$. Deve-se determinar $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$m, n > N, \ t \in \mathbb{R} \quad \Longrightarrow \quad |\phi_n(t) - \phi_m(t)| < \varepsilon h(t).$$

Com efeito, tome $T > 0$ tal que $\varepsilon h(T) > 2$. Note que, para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$ e para todo $t \geq T$, temos $|\phi_n(t) - \phi_m(t)| < \varepsilon h(t)$, pois

$$|\phi_n(t) - \phi_m(t)| < |\phi_n(t)| + |\phi_m(t)| \leq 2 < \varepsilon h(T) \leq \varepsilon h(t),$$

já que h é monótona crescente.

Agora, tome $N > T$. Para $m, n \geq N$ e $0 \leq t \leq T < N$, temos que

$$|\phi_n(t) - \phi_m(t)| = |1 - 1| = 0 < \varepsilon h(t),$$

visto que $h(t) > 0$ para todo $t \geq 0$.

Portanto, $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy. Mas, para qualquer t fixado, $\phi_n(t) \to 1$ quando $n \to \infty$, e $1 \notin M$. Logo, $(M, |\cdot|_h)$ não é um espaço métrico completo. $\square$

Definição 2.23. *Um conjunto L em um espaço métrico (S, ρ) é **compacto** se toda sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L$ possui uma subsequência com limite em L.*

Definição 2.24. *Sejam $U \subset \mathbb{R}$ um intervalo e $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções, com $f_n : U \to \mathbb{R}^d$. Considere $|\cdot|$ uma norma qualquer em $\mathbb{R}^d$, bem como em $\mathbb{R}$, por simplicidade de notação.*

*(a) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é **uniformemente limitada** em U se existe $M > 0$ tal que $|f_n(t)| \leq M$ para todo n e todo $t \in U$.*

*(b) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é **equicontínua** se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $t_1, t_2 \in U$ são tais que $|t_1 - t_2| < \delta$ então $|f_n(t_1) - f_n(t_2)| < \varepsilon$, para todo n.*

A demonstração do Teorema de Ascoli-Arzelà, exibido a seguir, pode ser encontrada em [7], página 165.

Teorema 2.25 (Ascoli-Arzelà)**.** *Se $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência uniformemente limitada e equicontínua de funções reais em um intervalo $[a, b]$, então existe uma subsequência $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge uniformemente para uma função contínua f em $[a, b]$.*

O próximo teorema estende o Teorema de Ascoli-Arzelà para sequências de funções definidas em $\mathbb{R}^+ = [0, \infty)$. Sua demonstração pode ser encontrada em [9], página 20.

Teorema 2.26. *Sejam $q : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ uma função contínua tal que $q(t) \to 0$ quando $t \to \infty$, e $(\phi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções definidas em $\mathbb{R}^+$ com valores em $\mathbb{R}^d$. Se a sequência $(\phi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é equicontínua e $|\phi_k(t)| \leq q(t)$ para $t \in \mathbb{R}^+$, então $(\phi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ possui uma subsequência que converge uniformemente em $\mathbb{R}^+$, para uma função contínua ϕ, com $|\phi(t)| \leq q(t)$ para $t \in \mathbb{R}^+$, onde $|\cdot|$ denota a norma Euclidiana em $\mathbb{R}^d$.*

A demonstração do próximo teorema de ponto fixo pode ser encontrada em [28], Capítulo 2.

Teorema 2.27 (Teorema do Ponto Fixo de Brouwer)**.** *Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ não vazio, compacto e convexo. Se $f : X \to X$ é uma função contínua, então f tem um ponto fixo.*

Definição 2.28. *Sejam V um espaço vetorial normado sobre o corpo $\mathbb{R}$ e $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset X$. Definimos a **envoltória convexa** do conjunto $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ por*

$$\overline{conv}\{x_1, \ldots, x_n\} = \left\{ \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n \in V : \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}^+ \ e \ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1 \right\}.$$

A demonstração da proposição a seguir pode ser analisada na referência [23], página 18.

Proposição 2.29. *([23], página 18) Sejam V um espaço vetorial e $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset V$. O conjunto $\overline{conv}\{x_1, \ldots, x_n\}$ é homeomorfo a um subconjunto compacto e convexo de $\mathbb{R}^n$.*

Teorema 2.30 (Teorema do Ponto Fixo de Schauder)**.** *Sejam $(X, \|.\|)$ um espaço de Banach e $S \subset X$ um conjunto compacto e convexo. Se $f : S \to S$ é uma função contínua, então f possui ponto fixo.*

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$, temos que $\bigcup_{x \in S} B(x, \varepsilon)$ é uma cobertura por abertos de S. Da compacidade de S, segue que existem $x_1, x_2, \ldots, x_n \in S$ tais que $S \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon)$. Vamos definir $g : S \to S$ por

$$g(x) = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i(x) x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i(x)},$$

onde

$$m_i(x) = \begin{cases} \varepsilon - \|x - x_i\|, & \text{se } \|x - x_i\| < \varepsilon, \\ 0, & \text{se } \|x - x_i\| \geq \varepsilon. \end{cases}$$

Afirmação: g está bem definida, isto é, $\sum_{i=1}^{n} m_i(x) \neq 0$, para todo $x \in S$. Com efeito, se $\sum_{i=1}^{n} m_i(x^*) = 0$ para algum $x^* \in S$, o fato de $m_i(x) \geq 0$ para todo x, implica $m_i(x^*) = 0$ para todo i. Pela definição de m_i, temos que $\|x^* - x_i\| \geq \varepsilon$ e, portanto, $x^* \notin B(x_i, \varepsilon)$ para todo i, ou seja, $x^* \notin \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon) \supset S$, o que é absurdo, posto que $x^* \in S$.

Provaremos agora que g é contínua. Para isso, é suficiente mostrar que m_i é contínua para todo i, em virtude da definição de g. Dado $a \in S$, vamos mostrar que m_i é contínua em a. De fato, dado $\varepsilon > 0$, se $\|a - x_i\| \geq \varepsilon$, então $m_i(a) = 0$. Portanto, para todo $\delta > 0$, se $\|x - a\| < \delta$, então $\|m_i(x) - m_i(a)\| = \|m_i(x)\| < \varepsilon$, pois $m_i(x) = \varepsilon - \|x - x_i\| < \varepsilon$.

Suponha que $\|a - x_i\| < \varepsilon$. Tomando $\delta < \varepsilon$, temos que se $\|x - a\| < \delta$, então

$$\begin{aligned}
|m_i(x) - m_i(a)| &= \begin{cases} |\varepsilon - \|x - x_i\| - (\varepsilon - \|a - x_i\|)|, & \text{se } \|x - x_i\| < \varepsilon \\ |m_i(a)|, & \text{se } \|x - x_i\| \geq \varepsilon \end{cases} \\
&= \begin{cases} |-\|x - x_i\| + \|a - x_i\||, & \text{se } \|x - x_i\| < \varepsilon \\ |m_i(a)|, & \text{se } \|x - x_i\| \geq \varepsilon \end{cases} \\
&\leq \begin{cases} \|a - x_i - (x - x_i)\|, & \text{se } \|x - x_i\| < \varepsilon \\ |m_i(a)|, & \text{se } \|x - x_i\| \geq \varepsilon \end{cases} \\
&= \begin{cases} \|x - a\|, & \text{se } \|x - x_i\| < \varepsilon \\ |m_i(a)|, & \text{se } \|x - x_i\| \geq \varepsilon \end{cases} \\
&< \begin{cases} \delta, & \text{se } \|x - x_i\| < \varepsilon \\ |m_i(a)|, & \text{se } \|x - x_i\| \geq \varepsilon \end{cases} \\
&< \begin{cases} \varepsilon, & \text{se } \|x - x_i\| < \varepsilon \\ \varepsilon, & \text{se } \|x - x_i\| \geq \varepsilon. \end{cases}
\end{aligned}$$

Portanto, $|m_i(x) - m_i(a)| < \varepsilon$ se $\|x - a\| < \delta$. Como a foi tomado arbitrariamente em S, obtemos a continuidade de m_i em S e, por conseguinte, de g.

Note também que para todo $x \in S$ tem-se

$$|g(x) - x| = \left| \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i(x)(x_i - x)}{\sum_{i=1}^{n} m_i(x)} \right| \leq \left| \varepsilon \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i(x)}{\sum_{i=1}^{n} m_i(x)} \right| = \varepsilon. \tag{2.65}$$

Considere $S_n = \overline{conv}\{x_1, \ldots, x_n\}$ e defina, para cada $n \in \mathbb{N}$, a aplicação

$$g \circ f : S_n \to S_n.$$

Vamos mostrar que $g \circ f$ tem um ponto fixo. Pela Proposição 2.29, S_n é homeomorfo a $K \subset \mathbb{R}^n$, onde K é um conjunto compacto e convexo. Seja h esse homeomorfismo: $h : K \to S_n$.

Defina $F : K \to K$ por $F = h^{-1} \circ (g \circ f) \circ h$. Temos que F é contínua e pelo Teorema do Ponto Fixo de Brouwer (Teorema 2.27), F tem um ponto fixo x^* em K. Agora, veja que $h(x^*)$ é ponto fixo de $g \circ f$. Com efeito, pela definição de F, temos que $g \circ f = h \circ F \circ h^{-1}$ e, consequentemente,

$$\begin{aligned} g \circ f(h(x^*)) &= h \circ F \circ h^{-1} \circ (h(x^*)) \\ &= h \circ F(x^*) \\ &= h(x^*). \end{aligned}$$

Portanto, para cada $n \in \mathbb{N}$, a aplicação $g \circ f : S_n \to S_n$ possui ponto fixo, que denotaremos por p_0^n. Considere a sequência de pontos fixos $(p_0^n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $g \circ f$. Como $(p_0^n)_{n \in \mathbb{N}}$ está contido em S e S é compacto, existe uma subsequência $(p_0^{n'})_{n' \in \mathbb{N}}$ de $(p_0^n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $p_0^{n'} \to p_0 \in S$ quando $n' \to \infty$.

Ademais, como $p_0^{n'} = g \circ f(p_0^{n'})$ para todo $n' \in \mathbb{N}'$, obtemos

$$\begin{aligned} \|p_0^{n'} - f(p_0^{n'})\| &= \|p_0^{n'} - g \circ f(p_0^{n'}) + g \circ f(p_0^{n'}) - f(p_0^{n'})\| \\ &\leq \|p_0^{n'} - g \circ f(p_0^{n'})\| + \|g \circ f(p_0^{n'}) - f(p_0^{n'})\| \\ &= \|g \circ f(p_0^{n'}) - f(p_0^{n'})\| \\ &\overset{(2.65)}{\leq} \varepsilon. \end{aligned}$$

Portanto, $\lim\limits_{n \to \infty} \|p_0^{n'} - f(p_0^{n'})\| \leq \varepsilon$. Da convergência de $(p_0^{n'})_{n' \in \mathbb{N}}$ e da continuidade de f, obtemos $\|p_0 - f(p_0)\| \leq \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$, de onde concluímos que $f(p_0) = p_0$, ou seja, f tem um ponto fixo em S, conforme queríamos demonstrar. $\square$

2.2.1 Estabilidade via Teorema do Ponto Fixo de Schauder

Antes de estudar a estabilidade da solução nula de certos tipos de equações diferenciais por um outro ponto de vista, vamos apresentar um subconjunto de $C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ que é compacto, e será útil em alguns resultados. A próxima proposição será uma ferramenta importante nesta seção, pois diferente do que ocorre quando utilizamos o Teorema do Ponto Fixo da Contração, o Teorema do Ponto Fixo de Schauder exige compacidade do espaço normado em que se encontram as soluções da equação diferencial. Sua demonstração é simples e segue do Teorema de Ascoli-Arzelà (Teorema 2.25).

Proposição 2.31. *Para constantes positivas M e K, o conjunto*

$$L = \{f \in C([a,b],\mathbb{R}^n) : \|f\| \leq M, \ |f(u) - f(v)| \leq K|u - v|\}$$

é compacto em $C([a,b],\mathbb{R}^n)$, em que $\|f\| = \max_{t\in[a,b]} |f(t)|$ e $|\,.\,|$ é uma norma em $\mathbb{R}^n$.

Para os seguintes tipos de equações diferenciais funcionais com retardamento:

$$\dot{x}(t) = -a(t,x_t)x(t) + f(t,x_t) \tag{2.66}$$

e

$$\dot{x}(t) = -g(t,x(t)) + f(t,x_t), \tag{2.67}$$

vamos assumir que suas soluções existem e são únicas. Aqui, $g \in C^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R},\mathbb{R})$ e $a, f \in C(\mathbb{R}^+ \times C, \mathbb{R})$, em que $C = C([-r,0],\mathbb{R})$.

Além disso, vamos considerar satisfeitas as seguintes condições:

(H_1) $f(t,0) = 0$, existem uma constante positiva L e uma função contínua $b_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ tais que

$$|f(t,\phi) - f(t,\psi)| \leq b_1|\phi - \psi|,$$

para $\phi, \psi \in C_L = \{x \in C(\mathbb{R},\mathbb{R}^+) : \|x\| \leq L\}$.

Existe uma função $b_2 \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ tal que

(H_2) $|f(t,x_t)| \leq |b_2(t)||x(t)|$, para $t \in \mathbb{R}^+$ e $x \in C$;

(H_3) $\displaystyle\lim_{t\to\infty} \int_0^t (a_1(s) - |b_2(s)|)\, ds = \infty.$

Em relação à equação (2.66), consideremos a equação linear

$$\dot{q}(t) = [-a_1(t) + |b_2(t)|]q(t). \tag{2.68}$$

Para qualquer $t_0 \geq 0$, temos que toda solução de (2.68), que satisfaz $q(t_0) = q_0 = \beta > 0$, pode ser escrita como

$$q(t) = \beta e^{\int_{t_0}^t (|b_2(s)| - a_1(s))ds}, \qquad t \geq t_0. \tag{2.69}$$

Segue de (H_3) que $q(t) \to 0$ quando $t \to \infty$ e que

$$0 < q(t) \leq \beta e^{\sigma} =: \gamma, \qquad t \geq t_0, \tag{2.70}$$

onde

$$\sigma = \sup\left\{\int_{t_0}^t (|b_2(s)| - a_1(s))ds : t \geq t_0\right\} < \infty.$$

Dessa forma, a solução nula da equação (2.68) é estável.

Teorema 2.32. *Para a equação (2.66), assuma que as condições (H_1), (H_2) e (H_3) são satisfeitas. Além disso, suponha que*

(H_4) *existem funções contínuas* a_1, $a_2 \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *tais que*

$$a_1(t) \le a(t, x_t) \le a_2(t).$$

Então, a solução nula de (2.66) *é assintoticamente estável.*

Demonstração. Como a solução nula de (2.68) é estável, para todo $\varepsilon \in (0, \gamma]$ e todo $t_0 \in \mathbb{R}^+$, existe $\eta = \eta(\varepsilon, t_0) \in (0, \beta]$ tal que, para qualquer q_0, com $|q_0| \le \eta$, tem-se $|q(t, t_0, q_0)| < \varepsilon$ para todo $t \ge t_0$.

Para qualquer $\psi \in C_\eta$, defina $S = \{u \in C([t_0 - r, \infty), \mathbb{R}) : u_{t_0} = \psi, |u(t)| \le q(t),\ t \ge t_0,\ |u(t_1) - u(t_2)| \le L|t_1 - t_2| \text{ para } t_1, t_2 \in \mathbb{R}^+ \text{ com } t_0 \le \tau_1 \le t_1, t_2 \le \tau_2\}$, onde

$$L = L(\tau_1, \tau_2) = \max_{t \in [\tau_1, \tau_2]} \{|a_1(t)|\gamma + |a_2(t)|\gamma + |b_2(t)|\gamma\}$$

e q foi definido em (2.69) com $\beta = \eta$.

Como $|q(t)| \le \gamma$, temos

$$|\dot{q}(t)| \le |a_1(t)|\gamma + |b_2(t)|\gamma \le L, \qquad t \ge t_0. \tag{2.71}$$

Defina

$$\xi(t) = \begin{cases} \psi(t - t_0), & \text{se } t_0 - r \le t \le t_0, \\ \dfrac{\psi(0) q(t)}{\eta}, & \text{se } t \ge t_0. \end{cases}$$

Então,

$$|\xi(t)| \le \frac{\psi(0)}{\eta} |q(t)| \le \frac{\|\psi\|}{\eta} |q(t)| \le |q(t)|, \qquad t \ge t_0.$$

Segue de (2.71) e do Teorema do Valor Médio que

$$|\xi(t_1) - \xi(t_0)| = \frac{\psi(0)}{\eta} |q(t_1) - q(t_0)| \le L|t_1 - t_0|, \quad \text{para } \tau_1 \le t_1, t_2 \le \tau_2.$$

Portanto, $\xi \in S$. Pelo Teorema 2.26, podemos concluir que S é um subconjunto compacto de $C([t_0 - r, \infty), \mathbb{R})$. Além disso, é fácil verificar que S é convexo e não vazio. Considere a equação

$$\dot{x}(t) = -a(t, x_t) x(t) + f(t, x_t) \tag{2.72}$$

e seja u a única solução de (2.72) com $u_{t_0} = \psi$. Então, podemos escrevê-la como

$$u(t) = \psi(0) e^{-\int_{t_0}^t a(s, u_s)\, ds} + \int_{t_0}^t e^{-\int_{t_0}^t e^{-\int_s^t a(\tau, u_\tau)\, d\tau}} f(s, u_s)\, ds, \qquad t \ge t_0.$$

Defina uma aplicação P em S por

$$(Pu)(t) = \begin{cases} \psi(t - t_0), & \text{se } t_0 - r \le t \le t_0, \\ \psi(0) e^{-\int_{t_0}^t a(s, u_s)\, ds} + \displaystyle\int_{t_0}^t e^{-\int_{t_0}^t e^{-\int_s^t a(\tau, u_\tau)\, d\tau}} f(s, u_s)\, ds, & \text{se } t \ge t_0. \end{cases}$$

Vamos mostrar que P aplica S em S. Note que $|(Pu)(t)| = |\psi(t-t_0)|$, para $t_0 - r \leq t \leq t_0$ e

$$
\begin{aligned}
|(Pu)(t)| &\leq |\psi(0)|e^{-\int_{t_0}^t a_1(s)\,ds} + \int_{t_0}^t e^{-\int_s^t a_1(\tau)\,d\tau}|f(s,u_s)|\,ds \qquad (2.73)\\
&\overset{(H_2)}{\leq} \eta e^{-\int_{t_0}^t a_1(s)\,ds} + \int_{t_0}^t e^{-\int_s^t a_1(\tau)\,d\tau}|b_2(s)||u(s)|\,ds\\
&\overset{u\in S}{\leq} \eta e^{-\int_{t_0}^t a_1(s)\,ds} + \int_{t_0}^t e^{-\int_s^t a_1(\tau)\,d\tau}|b_2(s)|q(s)\,ds\\
&\overset{(\star)}{=} \eta e^{-\int_{t_0}^t a_1(s)\,ds} + \int_{t_0}^t e^{-\int_s^t a_1(\tau)\,d\tau}(\dot{q}(s) + a_1(s)q(s))\,ds\\
&= \eta e^{-\int_{t_0}^t a_1(s)\,ds} + \int_{t_0}^t \frac{d}{ds}\left[e^{\int_t^s a_1(\tau)\,d\tau}q(s)\right]\,ds\\
&= \eta e^{-\int_{t_0}^t a_1(s)\,ds} + q(t) - q(t_0)e^{-\int_{t_0}^t a_1(s)\,ds}\\
&= \eta e^{-\int_{t_0}^t a_1(s)\,ds} + q(t) - \eta e^{-\int_{t_0}^t a_1(s)\,ds}\\
&= q(t).
\end{aligned}
$$

Em $(\star)$, usamos o fato de que $\dot{q}(t) = -a_1(t)q(t) + |b_2(t)|q(t)$. Além disso, temos que

$$(Pu)'(t) = -a(t,x_t)(Pu)(t) + f(t,u_t), \qquad t \geq t_0,$$

de onde segue que

$$
\begin{aligned}
|(Pu)'(t)| &\leq |a(t,u_t)|q(t) + |b_2(t)|q(t)\\
&\leq |a_1(t)|\gamma + |a_2(t)|\gamma + |b_2(t)|\gamma\\
&\leq L, \qquad \text{para } \ t \geq t_0.
\end{aligned}
$$

Portanto, P aplica S em S e é, claramente, contínua. Pelo Teorema do Ponto Fixo de Schauder, P tem um ponto fixo $u \in S$ que satisfaz $|u(t)| \leq q(t)$, para $t \geq t_0$. Por conseguinte, concluímos que a solução $u(t,t_0,\psi)$ de (2.66) satisfaz

$$|u(t,t_0,\psi)| \leq q(t) = q(t,t_0,\eta) < \varepsilon, \qquad \text{se } \ t \geq t_0.$$

Daí, temos que a solução nula de (2.66) é estável. Como $q(t) \to 0$ quando $t \to \infty$, também temos que $u(t,t_0,\psi) \to 0$ quando $t \to \infty$, o que prova que a solução nula de (2.66) é assintoticamente estável.

□

O exemplo a seguir pode ser encontrado em [13] e utiliza o Teorema do Ponto Fixo de Schauder para descrever o comportamento da produção de células sanguíneas na medula óssea.

Exemplo 2.33. Hematopoiese é nome dado ao processo de produção de células sanguíneas na medula óssea. Para estudar a regularização desse processo, Mackey e Glass propuseram um modelo que utiliza equações diferenciais funcionais com retardamento. Aqui, vamos considerar uma das generalizações do modelo original, onde alguns parâmetros se tornam funções positivas:

$$\dot{x}(t) = -a(t)x(t) + \frac{b(t)\theta^n x(t-r(t))}{\theta^n + x^n(t-r(t))}, \tag{2.74}$$

em que $a, b, r \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$, θ é uma constante positiva e n é um inteiro positivo dado. Em (2.74), r representa o tempo entre a produção de células imaturas na medula óssea e sua maturação quando é lançada na corrente sanguínea, por fim $x(t)$ denota a densidade de células maduras na corrente sanguínea no tempo t.

Corolário 2.34. *Se* $\lim_{t\to\infty}\int_0^t (a(s)-b(s))ds = \infty$, *então a solução nula de* (2.74) *é assintoticamente estável.*

Demonstração. Considere $f(t,\phi) = \dfrac{b(t)\theta^n\phi(t-r(t))}{\theta^n + \phi^n(t-r(t))}$, para $t \in \mathbb{R}^+$ e $\phi \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$.

Note que

$$|f(t,\phi)| = \left|\frac{b(t)\theta^n\phi(t-r(t))}{\theta^n + \phi^n(t-r(t))}\right| \leq |b(t)||\phi(t-\tau(t))| \leq b(t)\|\phi\|.$$

Tomando $b_2(t) = b(t)$ para $t \in \mathbb{R}^+$, temos

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^t (a_1(s) - |b_2(s)|)ds = \lim_{t\to\infty}\int_0^t (a(s)-b(s))ds = \infty.$$

Pelo Teorema 2.32, podemos concluir que a solução nula de (2.74) é assintoticamente estável. $\square$

Exemplo 2.35. Considere as equações diferenciais

$$\dot{x}(t) = -tx(t) + \frac{\cos(t)\cdot x(t-2)}{1+x^{10}(t-2)} \tag{2.75}$$

$$\dot{x}(t) = -0.2tx(t) + \frac{0.1t\cdot x(t-2)}{1+x^{10}(t-2)} \tag{2.76}$$

$$\dot{x}(t) = -0.1tx(t) + \frac{0.2t\cdot x(t-2)}{1+x^{10}(t-2)} \tag{2.77}$$

Note que as equações (2.75) e (2.76) satisfazem as condições do Corolário 2.34, já que

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^t s - \cos(s)\, ds = \lim_{t\to\infty}\frac{t^2}{2} - \operatorname{sen}(t) = \infty$$

e

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^t 0.1s\, ds = \lim_{t\to\infty}\frac{0.1t^2}{2} = \infty.$$

Como $\lim_{t\to\infty}\int_0^t -0.1s\, ds = -\infty$, nada podemos concluir sobre o comportamento das soluções de (2.77).

Se as funções na equação diferencial de interesse satisfizerem a condição local de Lipschitz, então o Teorema da Contração é a nossa primeira alternativa. Caso isto não ocorra, usaremos os Teoremas de Schauder ou de Krasnoselskii em geral. Estes teoremas exigem compacidade, além de completude e são formulados sobre espaços normados. O Teorema de Krasnoselskii será apresentado na sequência.

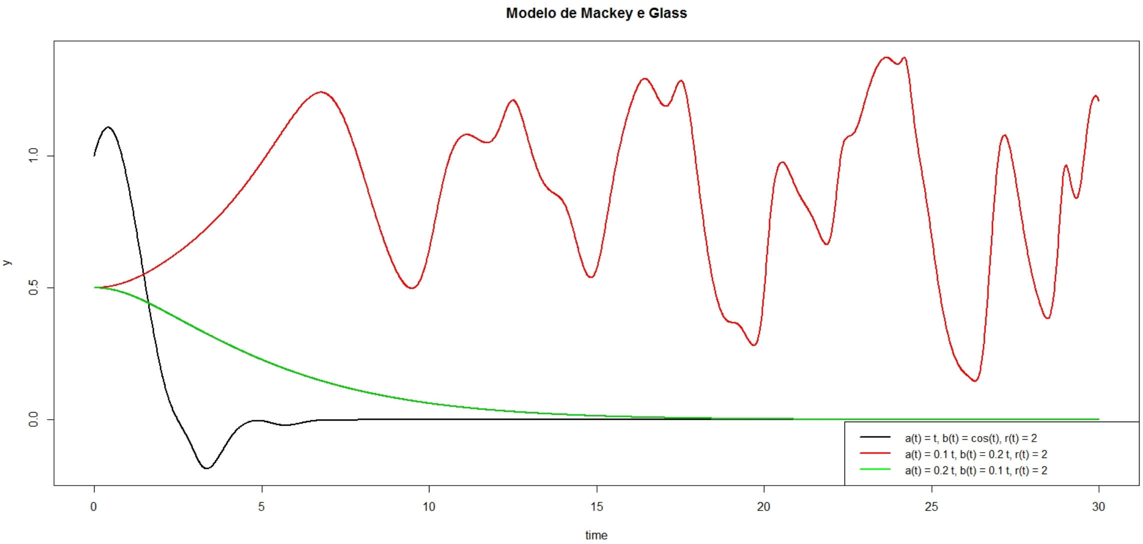

Figura 2.6: Simulações com valores de a, b e r para o Exemplo 2.35.

2.3 Teorema do Ponto Fixo de Krasnoselskii

O Teorema do Ponto Fixo de Krasnoselskii é uma combinação do Teorema do Ponto Fixo da Contração e do Teorema do Ponto Fixo de Schauder. Esses resultados serão combinados aqui para garantir a existência de uma solução limitada e assintoticamente estável para uma família de equações diferenciais funcionais não lineares.

Em [14], são apresentados problemas de análise não linear que podem ser resolvidos em cones. Nesta referência encontra-se uma versão do Teorema do Ponto Fixo de Krasnoselskii para cones. Utilizando este resultado, em [22] e [29] é descrito o comportamento da dinâmica de produção celular na medula óssea, e o resultado obtido é análogo ao visto no Exemplo 2.33. Esta aplicação não será abordada nesta seção por utilizar a teoria de cones, extensa e complexa para ser tratada superficialmente e, consequentemente, com pouco rigor matemático. Para o estudo desta teoria, indicamos ao leitor a referência [17].

Considere, inicialmente, a seguinte definição, utilizada na demonstração do Lema 2.37, exposto na sequência, que nos auxiliará na demonstração do Teorema do Ponto Fixo de Krasnoselskii.

Definição 2.36. *Dado um número real $\varepsilon > 0$ e um espaço métrico X, um subconjunto $N \subset X$ é denominado um $\varepsilon-$**net** para X se a família $\{B(x, \varepsilon) : x \in N\}$ cobre X.*

Lema 2.37. *Se B é uma contração de $X \subset S$ em S, onde S é um espaço normado, então $I - B$ é um homeomorfismo de X sobre $(I - B)X$, em que $I : X \to X$ é a aplicação identidade. Se $(I - B)X$ é precompacto[2], então X é precompacto.*

Demonstração. Claramente $I - B$ é contínua. Além disso, temos

$$\|(I - B)x - (I - B)y\| = \|(x - y) - (Bx - By)\| \geq (1 - k)\|x - y\|, \tag{2.78}$$

[2]Um conjunto em um espaço normado é dito precompacto se seu fecho é um conjunto compacto.

posto que B é contração, por hipótese, com $k \in (0,1)$. Daí segue que $(I-B)^{-1} : (I-B)X \to X$ existe e é contínua, por satisfazer a condição de Lipschitz, com constante $K = \dfrac{1}{1-k}$. Portanto, $I - B$ é um homeomorfismo de X sobre $(I-B)X$.

A Desigualdade (2.78) mostra que $x_1, x_2, \ldots, x_n$ é um $\varepsilon-$net para X se

$$(I-B)x_1, \ldots, (I-B)x_n$$

é um $(1-k)\varepsilon-$net para $(I-B)X$. Isso mostra que X é um conjunto totalmente limitado e, consequentemente, precompacto. □

A prova do Teorema do Ponto Fixo de Krasnoselskii apresentada a seguir foi feita baseada nas referências [4] e [26].

Teorema 2.38 (Teorema do Ponto Fixo de Krasnoselskii)**.** *Seja M um subconjunto fechado convexo e não vazio de um espaço de Banach $(S, \|\cdot\|)$. Suponha que A e B sejam aplicações de M em S, tais que:*

(a) $Ax + By \in S$, para quaisquer $x, y \in M$;

(b) A é contínua e AM está contido em um conjunto compacto;

(c) B é uma contração com constante $0 < \alpha < 1$.

Nessas condições, existe um ponto $y \in M$ tal que $Ay + By = y$.

Demonstração. Para cada $y \in M$, a equação $z = Bz + Ay$ tem uma única solução em M, posto que a aplicação

$$z \to Bz + Ay$$

é uma contração de M em M, uma vez B é contração por hipótese. Portanto, $z = (I-B)^{-1}Ay \in M$.

Pelo Lema 2.37, a aplicação $(I-B)^{-1}A : M \to M$ é contínua e compacta, pois A é compacta (pela condição (b)). Pelo Teorema do Ponto Fixo de Schauder (Teorema 2.30), $(I-B)^{-1}A$ tem um ponto fixo em M, isto é, existe $y \in M$ tal que $(I-B)^{-1}Ay = y$, de onde segue que $Ay = (I-B)y$ e, por conseguinte, $Ay + By = y$, como queríamos demonstrar. □

2.3.1 Estabilidade via Teorema do Ponto Fixo de Krasnoselskii

Inspirados por [10] e [16], adotamos o Teorema do Ponto Fixo de Krasnoselskii para estudar a estabilidade e a limitação das soluções da equação

$$x'(t) = -a(t)x(t - r_1(t)) + b(t)x^{1/3}(t - r_2(t)), \tag{2.79}$$

onde $a, b \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}), r_1 \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$, com $t - r_1(t) \to \infty$ quando $t \to \infty$, e $r_2 \in C(\mathbb{R}^+, [0, \gamma])$, com $\gamma > 0$. Os resultados descritos nesta seção foram publicados numa revista nacional de divulgação matemática; veja [21].

Primeiramente, exibiremos resultados de estabilidade e limitação para um caso especial da equação (2.79), a saber

$$x'(t) = -a(t)x(t - r_1) + b(t)x^{1/3}(t - r_2(t)), \tag{2.80}$$

em que $r_1 \geq 0$ é uma constante e $a \in C(\mathbb{R}^+, (0, \infty))$. Os resultados obtidos para a equação (2.79) generalizam os obtidos para a equação (2.80).

Para a equação (2.80), temos o seguinte resultado sobre limitação:

Teorema 2.39. *Suponha que existam constantes* $0 < \beta < 1$ *e* $K > 0$ *satisfazendo*

$$\sup_{t\geq 0}\left|\frac{b(t)}{a(t+r_1)}\right| \leq \beta \tag{2.81}$$

e, para $|t_1 - t_2| \leq 1$,

$$\left|\int_{t_1}^{t_2} a(u+r_1)\,du\right| \leq K|t_1 - t_2|, \tag{2.82}$$

enquanto para $t \geq 0$,

$$2\sup_{t\geq 0}\int_{t-r_1}^{t} a(u+r_1)\,du + \beta < 1. \tag{2.83}$$

Se ψ *é uma função inicial contínua com norma suficientemente pequena, então existirá uma solução* $x(t,0,\psi)$ *de* (2.80) *em* $\mathbb{R}$ *com* $|x(t,0,\psi)| < 1$.

Demonstração. Seja $\psi : [-r_1, 0] \to \mathbb{R}$ uma função inicial contínua com $|\psi| = \sup_{t\in[-r_1,0]} |\psi(t)| < \Psi$, em que Ψ é uma constante positiva menor do que 1, a ser determinada. Seja $h : [-r,\infty) \to [1,\infty)$ uma função crescente e contínua, tal que $h(-r) = 1$ e $h(s) \to \infty$ quando $s \to \infty$, e $\alpha < 1$ uma constante tal que

$$2\int_{t-r_1}^{t} \frac{a(s+r_1)h(s)}{h(t)}\,ds \leq \alpha. \tag{2.84}$$

Tal constante α existe, pois, por (2.83), para tal função h, tem-se

$$2\int_{t-r_1}^{t} \frac{a(s+r_1)h(s)}{h(t)}\,ds \leq 2\int_{t-r_1}^{t} \frac{a(s+r_1)h(t)}{h(t)}\,ds < 1.$$

Seja $(S, |\cdot|_h)$ o espaço de Banach das funções contínuas $\phi : [-r,\infty) \to \mathbb{R}$, com

$$|\phi|_h \equiv \sup_{t\geq -r}\left|\frac{\phi(t)}{h(t)}\right| < \infty,$$

e considere $(M, |\cdot|_h)$ o espaço métrico completo das funções $\phi \in S$ tais que $|\phi(t)| \leq 1$ para $-r \leq t < \infty$ e $\phi(t) = \psi(t)$ em $[-r, 0]$.

Escrevendo (2.80) como

$$x'(t) = -a(t+r_1)x(t) + \frac{d}{dt}\left[\int_{t-r_1}^{t} a(s+r_1)x(s)ds\right] + b(t)x^{1/3}(t - r_2(t)),$$

usando a fórmula da variação dos parâmetros e integração por partes, obtém-se

$$\begin{aligned}
x(t) &= x_0 e^{-\int_0^t a(s+r_1)\,ds} + \\
&\quad + \int_0^t e^{-\int_s^t a(u+r_1)\,du}\left[\int_{s-r_1}^{s} a(u+r_1)x(u)\,du + b(s)x^{1/3}(s-r_2(s))\right]'\,ds \\
&= x_0 e^{-\int_0^t a(s+r_1)\,ds} + \int_0^t e^{-\int_s^t a(u+r_1)\,du}\frac{d}{ds}\int_{s-r_1}^{s} a(u+r_1)x(u)\,du\,ds \\
&\quad + \int_0^t e^{-\int_s^t a(u+r_1)\,du} b(s)x^{1/3}(s-r_2(s))\,ds,
\end{aligned}$$

que equivale a

$$
\begin{aligned}
x(t) = {} & x_0 e^{-\int_0^t a(s+r_1)\,ds} + \int_{t-r_1}^{t} a(u+r_1)x(u)\,du - e^{-\int_0^t a(u+r_1)\,du}\int_{-r_1}^{0} a(u+r_1)x(u)\,du \\
& - \int_0^t a(u+r_1)e^{-\int_s^t a(u+r_1)du}\int_{s-r_1}^{s} a(u+r_1)x(u)\,du\,ds \\
& + \int_0^t e^{-\int_s^t a(u+r_1)\,du} b(s)x^{1/3}(s-r_2(s))\,ds,
\end{aligned}
$$

onde $x(t) = \psi(t)$ em $[-r, 0]$ e $\psi(0) = x_0$.

Definamos as aplicações $A, B : M \to S$ por

$$
(A\phi)(t) = \int_0^t e^{-\int_s^t a(u+r_1)\,du} b(s)\phi^{1/3}(s-r_2(s))\,ds \tag{2.85}
$$

e

$$
\begin{aligned}
(B\phi)(t) = {} & x_0 e^{-\int_0^t a(s+r_1)ds} + \int_{t-r_1}^{t} a(u+r_1)\phi(u)\,du- \\
& - e^{-\int_0^t a(u+r_1)\,du}\int_{-r_1}^{0} a(u+r_1)\phi(u)\,du- \\
& - \int_0^t a(u+r_1)e^{-\int_s^t a(u+r_1)\,du}\int_{s-r_1}^{s} a(u+r_1)\phi(u)\,du\,ds,
\end{aligned} \tag{2.86}
$$

para $\phi \in M$.

Mostraremos que $\phi, \eta \in M$ implica $A\phi + B\eta \in M$. Seja $\|\cdot\|$ a norma do supremo em $[-r, \infty)$ de $\phi \in S$, para ϕ limitada. Assim,

$$
\begin{aligned}
|(A\phi)(t) + (B\eta)(t)| \leq {} & \|\psi\| e^{-\int_0^t a(s+r_1)\,ds} + \|\eta\|\int_{t-r_1}^{t} a(u+r_1)\,du \\
& + e^{-\int_0^t a(u+r_1)\,du}\|\psi\|\int_{-r_1}^{0} a(u+r_1)\,du + \|\eta\|\sup_{t\geq 0}\int_{t-r_1}^{t} a(u+r_1)\,du + \|\psi\|^{1/3}\beta \\
& \leq \|\psi\| e^{-\int_0^t a(s+r_1)\,ds}\left(1 + \int_{-r_1}^{0} a(u+r_1)\,du\right) + 2\sup_{t\geq 0}\int_{t-r_1}^{t} a(u+r_1)\,du + \beta \\
& < 1,
\end{aligned}
$$

para $\|\psi\|$ suficientemente pequena.

Agora, mostraremos que AM está contido num conjunto compacto em $(S, |\cdot|_h)$. Pelo Lema 2.15, é suficiente mostrar que AM é equicontínua. Com efeito, se $\phi \in M$ e $0 \leq t_1 < t_2 < t_1 + 1$, então

$$
\begin{aligned}
& |(A\phi)(t_1) - (A\phi)(t_2)| \leq \\
& \leq \left| \int_0^{t_2} b(s)e^{-\int_s^{t_2} a(u+r_1)\,du}\phi^{1/3}(s-r_2(s))ds \right. \\
& \left. - \int_0^{t_1} b(s)e^{-\int_s^{t_1} a(u+r_1)\,du}\phi^{1/3}(s-r_2(s))\,ds \right|
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \left| \int_{t_1}^{t_2} b(s) e^{-\int_s^{t_2} a(u+r_1)\,du} \phi^{1/3}(s-r_2(s))ds \right. \\
&+ \left. \int_0^{t_1} b(s) \left[e^{-\int_s^{t_2} a(u+r_1)\,du} - e^{-\int_s^{t_1} a(u+r_1)\,du} \right] \phi^{1/3}(s-r_2(s))ds \right| \\
&\le \int_{t_1}^{t_2} |b(s)| e^{-\int_s^{t_2} a(u+r_1)\,du} ds + \int_0^{t_1} |b(s)| \left| e^{-\int_0^{t_2} a(u+r_1)\,du} - e^{-\int_0^{t_1} a(u+r_1)\,du} \right| e^{\int_0^s a(u+r_1)} \, ds \\
&\le \beta \int_{t_1}^{t_2} a(s+r_1)\, ds + \left| e^{-\int_0^{t_2} a(u+r_1)\,du} - e^{-\int_0^{t_1} a(u+r_1)\,du} \right| \int_0^{t_1} |b(s)| e^{\int_0^s a(u+r_1)\,du} \, ds \\
&= \beta K |t_2 - t_1| + \beta \left| e^{-\int_0^{t_2} a(u+r_1)\,du} - e^{-\int_0^{t_1} a(u+r_1)\,du} \right| \left[e^{\int_0^{t_1}} a(u+r_1) - 1 \right] \\
&\le \beta K |t_2 - t_1| + \beta \left| e^{-\int_{t_1}^{t_2} a(u+r_1)\,du} - 1 \right| \\
&\le \beta K |t_2 - t_1| + \beta \left| \int_{t_1}^{t_2} a(u+r_1)\,du \right| \\
&\le 2\beta K |t_2 - t_1|,
\end{aligned}
$$

por (2.82).

Agora vamos mostrar que $B : M \to M$ é uma contração, isto é, existe $0 < \alpha < 1$ tal que $|(B\phi_1) - (B\phi_2)|_h \le \alpha |\phi_1 - \phi_2|_h$, para $\phi_1, \phi_2 \in M$. De fato, para todo $t \ge 0$, temos

$$
\begin{aligned}
&\frac{|(B\phi_1)(t) - (B\phi_2(t))|}{h(t)} \le \int_{t-r_1}^{t} a(u+r_1) \frac{|\phi_1(u) - \phi_2(u)|}{h(t)}\, du \\
&+ \frac{1}{h(t)} \int_0^t a(s+r_1) e^{-\int_s^t a(u+r_1)\,du} \int_{s-r_1}^{s} a(u+r_1) |\phi_1(u) - \phi_2(u)|\, du\, ds \\
&\le \sup_{t \ge 0} \int_{t-r_1}^{t} a(s+r_1) \frac{h(s)}{h(t)}\, ds |\phi_1 - \phi_2|_h + |\phi_1 - \phi_2|_h \sup_{t \ge 0} \int_{t-r_1}^{t} a(u+r_1) \frac{h(u)}{h(t)}\, du \\
&= |\phi_1 - \phi_2|_h \sup_{t \ge 0} \int_{t-r_1}^{t} a(u+r_1) \frac{h(u)}{h(t)}\, du \\
&\le \alpha |\phi_1 - \phi_2|_h,
\end{aligned}
$$

em que $\alpha = \sup_{t \ge 0} \int_{t-r_1}^{t} a(u+r_1)\, du < 1$, por (2.83).

Por fim, mostremos que A é contínua. Seja $\varepsilon > 0$. Devemos encontrar $\delta > 0$ de forma que

$$
\phi, \eta \in M, |\phi - \eta|_h < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad |A\phi - A\eta|_h < \varepsilon\beta.
$$

Com efeito, como $x^{1/3}$ é uniformemente contínua em $[-1, 1]$, então dado $\varepsilon > 0$ e $T > 0$ fixado com $4/h(T) < \varepsilon$, existe $\delta > 0$ tal que $|x_1 - x_2| < \delta h(T)$ implica $|x_1^{1/3} - x_2^{1/3}| < \varepsilon/2$. Então, para $|\phi(t) - \eta(t)| < \delta h(t)$ e $t > T$, temos

$$
\frac{|A\phi(t) - A\eta(t)|}{h(t)} \le \frac{1}{h(t)} \int_0^t b(s) e^{-\int_s^t a(u+r_1)\,du} |\phi^{1/3}(s - r_2(s)) - \eta^{1/3}(s - r_2(s))|\, ds
$$

$$\leq \frac{1}{h(t)}\left[\int_0^T |b(s)|e^{-\int_s^t a(u+r_1)\,du}|\phi^{1/3}(s-r_2(s))-\eta^{1/3}(s-r_2(s))|\,ds\right.$$
$$\left.+2\int_T^t |b(s)|e^{-\int_s^t a(u+r_1)\,du}\,ds\right]$$
$$\leq \left[\frac{\beta\epsilon}{2h(t)}\right]\int_0^T a(s+r_1)e^{-\int_s^t a(u+r_1)\,du}\,ds+\frac{2\beta}{h(T)}$$
$$\leq \frac{\beta\varepsilon}{2}+\frac{2\beta}{h(T)}$$
$$\leq \frac{\beta\varepsilon}{2}+\frac{\beta\varepsilon}{2}=\beta\varepsilon.$$

Desta maneira, as condições do Teorema do Ponto Fixo de Krasnoselskii (Teorema 2.38) são satisfeitas e existe um ponto fixo em M da aplicação $A+B$, ou seja, existe uma solução $x(t,0,\psi)$ de (2.80) em $\mathbb{R}$ com $|x(t,0,\psi)|<1$. □

Para o próximo resultado de estabilidade, admitiremos que existe $\beta<1$ tal que

$$\sup_{t\geq 0}\left|\frac{b(t)}{a(t+r_1)}\right|\leq\beta \quad \text{e} \quad \frac{b(t)}{a(t+r_1)}\to 0 \ \text{ quando } \ t\to\infty. \tag{2.87}$$

Teorema 2.40. *Suponha satisfeitas as condições* (2.82)*,* (2.83) *e* (2.87) *e assuma que* $\displaystyle\int_0^\infty a(s)ds=\infty$*. Se* ψ *é uma função inicial contínua com norma suficientemente pequena, então a equação* (2.80) *possui uma solução* $x(t,0,\psi)$*, tal que* $x(t,0,\psi)\to 0$ *quando* $t\to\infty$*.*

Demonstração. Todos os cálculos na demonstração do teorema anterior são satisfeitas para $h(t)=1$ quando $|\cdot|_h$ é substituída pela norma do supremo $\|\cdot\|$. Defina $g:[0,\infty)\to(0,1]$ por

$$g(t)=\int_0^t\left[a(s+r_1)e^{-\int_s^t a(u+r_1)\,du}\frac{b(s)}{a(s+r_1)}\right]ds.$$

Afirmação: $g(t)\to 0$ quando $t\to\infty$. Com efeito, como

$$\frac{b(t)}{a(t+r_1)}\to 0 \ \text{ quando } \ t\to\infty,$$

temos que, dado $\varepsilon>0$, existe $A>0$ tal que

$$s>A \qquad\Longrightarrow\qquad \left|\frac{b(s)}{a(s+r_1)}\right|<\varepsilon.$$

Portanto, pelo resultado obtido em (2.52), podemos afirmar que

$$t>A \qquad\Longrightarrow\qquad |g(t)|<\varepsilon\int_0^t\left|a(s+r_1)e^{-\int_s^t a(u+r_1)\,du}\right|ds<\varepsilon,$$

mostrando a validade da afirmação.

Vamos adicionar a M a seguinte condição:

$$\phi\in M \qquad\Longrightarrow\qquad \phi(t)\to 0 \ \text{ quando } \ t\to\infty.$$

Sejam A e B as aplicações definidas em (2.85) e (2.86), respectivamente. Então, $A\phi(t) \leq g(t)$ e $B\phi(t) \to 0$ quando $t \to \infty$.

Conforme vimos na demonstração do Teorema 2.39, temos que AM é equicontínuo e AM está contido num conjunto compacto. Pelo Teorema do Ponto Fixo de Krasnoselskii, existe $y \in M$ com $Ay + By = y$. Como $y \in M$, segue que $y(t) \to 0$, quando $t \to \infty$, e a prova está completa. $\square$

Vamos agora obter resultados de limitação e estabilidade para a equação (2.79), que generalizam os resultados apresentados na seção anterior.

Teorema 2.41. *Seja r_1 uma função diferenciável e suponha que existam constantes positivas $\alpha < 1, K_1$ e K_2 e uma função $g \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ tal que, para $|t_2 - t_1| \leq 1$, tem-se*

$$\left|\int_{t_1}^{t_2} |b(u)|\, du\right| \leq K_1|t_2 - t_1| \tag{2.88}$$

e

$$\left|\int_{t_1}^{t_2} g(u)\, du\right| \leq K_2|t_2 - t_1|, \tag{2.89}$$

enquanto que para $t \geq 0$ tem-se

$$\begin{aligned}\int_{t-r_1(t)}^{t} g(u)\, du + \int_0^t e^{-\int_s^t g(u)\, du} g(s) \int_{s-r_1(s)}^{s} g(u)\, du\, ds+ \\ + \int_0^t e^{-\int_s^t g(u)\, du} \left\{|g(s - r_1(s))(1 - r_1'(s)) - a(s)| + |b(s)|\right\} ds \leq \alpha.\end{aligned} \tag{2.90}$$

Se ψ é uma função inicial contínua com norma suficientemente pequena, então existe uma solução $x(t, 0, \psi)$ de (2.79) em $\mathbb{R}^+$ com $|x(t, 0, \psi)| < 1$.

Demonstração. Seja $\psi : [-r, 0] \to \mathbb{R}$ uma função inicial contínua com $|\psi| = \sup_{t\in[-r,0]} |\psi(t)| < \Psi$, onde Ψ é uma constante positiva menor do que 1, a ser determinada. Seja $h : [-r, \infty) \to [1, \infty)$ uma função estritamente crescente e contínua com $h(-r) = 1$, $h(s) \to \infty$ quando $s \to \infty$, tal que

$$\int_{t-r_1(t)}^{t} g(u)\frac{h(u)}{h(t)}\, du + \int_0^t e^{-\int_s^t g(u)\, du} g(s) \int_{s-r_1(s)}^{s} g(u)\frac{h(u)}{h(t)}\, du\, ds+ \tag{2.91}$$

$$\int_0^t e^{-\int_s^t g(u)\, du} |g(s - r_1(s))||(1 - r_1'(s)) - a(s)| \frac{h(s - r_1(s))}{h(t)} \leq \alpha. \tag{2.92}$$

Seja $(S, |\cdot|_h)$ o espaço de Banach das funções contínuas $\phi : [-r, \infty) \to \mathbb{R}$, tais que $|\phi|_h = \sup_{t\geq -r} \left|\dfrac{\phi(t)}{h(t)}\right| < \infty$, e $(M, |\cdot|_h)$ o espaço métrico das funções $\phi \in S$ tais que $|\phi(t)| \leq 1$ para $t \in [-r, \infty)$ e $\phi(t) = \psi(t)$ em $[-r, 0]$.

Multiplicando ambos os lados de (2.79) por $e^{\int_0^t g(s) ds}$ e integrando de 0 a t, obtemos

$$\begin{aligned}x(t) = x_0 e^{-\int_0^t g(s)\, ds} + \int_0^t e^{-\int_s^t g(u)\, du} g(s)x(s)\, ds - \int_0^t e^{-\int_s^t g(u) du} a(s)x(s - r_1(s))\, ds \\ + \int_0^t e^{-\int_s^t g(u)\, du} b(s)x^{1/3}(s - r_2(s))\, ds.\end{aligned} \tag{2.93}$$

Note que

$$\int_0^t e^{-\int_s^t g(u)\,du} g(s)x(s)\,ds = \int_0^t e^{-\int_s^t g(u)\,du} d\left(\int_{s-r_s}^s g(u)x(u)\,du\right) ds$$
$$+ \int_0^t e^{-\int_s^t g(u)\,du} g(s-r_1(s))x(s-r_1(s))(1-r_1'(s))\,ds.$$

Aplicando o método de integração por partes em (2.93), temos

$$x(t) = x_0 e^{-\int_0^t g(s)\,ds} - e^{-\int_0^t g(u)\,du} \int_{-r_1(0)}^0 g(u)x(u)\,du + \int_{t-r_1(t)}^t g(u)x(u)du$$
$$- \int_0^t e^{-\int_s^t g(u)\,du} g(s) \int_{s-r_1(s)}^s g(u)x(u)\,du\,ds$$
$$+ \int_0^t e^{-\int_s^t g(u)\,du} [g(s-r_1(s))(1-r_1'(s)) - a(s)]x(s-r_1(s))\,ds$$
$$+ \int_0^t e^{-\int_s^t g(u)\,du} b(s)x^{1/3}(s-r_2(s))\,ds,$$

onde $x(t) = \psi(t)$ em $[-r, 0]$ e $\psi(0) = x_0$.

Definamos as aplicações $A, B : M \to S$ por

$$(A\phi)(t) = \int_0^t e^{-\int_s^t g(u)\,du} b(s)x^{1/3}(s-r_2(s))\,ds \tag{2.94}$$

e

$$(B\phi)(t) = x_0 e^{-\int_0^t g(s)\,ds} - e^{-\int_0^t g(u)\,du} \int_{-r_1(0)}^0 g(u)x(u)\,du + \int_{t-r_1(t)}^t g(u)x(u)\,du \tag{2.95}$$
$$- \int_0^t e^{-\int_s^t g(u)\,du} g(s) \int_{s-r_1(s)}^s g(u)x(u)\,du\,ds$$
$$+ \int_0^t e^{-\int_s^t g(u)\,du} [g(s-r_1(s))(1-r_1'(s)) - a(s)]x(s-r_1(s))\,ds,$$

para $\phi \in M$.

Agora mostraremos que se $\phi, \eta \in M$ então $A\phi + B\eta \in M$. Considere $\|\cdot\|$ a norma do supremo em $[-r, \infty)$ de $\phi \in S$, para ϕ limitada. Observe que

$$|(A\phi)(t) + (B\eta)(t)| \leq \|\psi\| e^{-\int_0^t g(s)\,ds} \left(1 + \int_{-r_1(0)}^0 g(u)\,du\right) + \|\eta\| \int_{t-r_1(t)}^t g(u)\,du$$
$$+ \|\eta\| \int_0^t e^{-\int_s^t g(u)\,du} g(s) \int_{s-r_1(s)}^s g(u)x(u)\,du\,ds$$
$$+ \|\eta\| \int_0^t e^{-\int_s^t g(u)\,du} |g(s-r_1(s))(1-r_1'(s)) - a(s)|\,ds$$
$$+ \|\phi\|^{1/3} \int_0^t e^{-\int_s^t g(u)\,du} |b(s)|\,ds$$
$$\leq \|\psi\| e^{-\int_0^t g(s)\,ds} \left(1 + \int_{-r_1(0)}^0 g(u)\,du\right) + \alpha < 1,$$

desde que $\|\psi\|$ seja suficientemente pequeno.

Na sequência mostraremos que AM é equicontínuo. Se $\phi \in M$ e $0 \le t_1 < t_2$ com $t_2 - t_1 < 1$, então

$$
\begin{aligned}
&|(A\phi)(t_2) - (A\phi)(t_1)| = \left| \int_0^{t_2} e^{-\int_s^{t_2} g(u)\,du} b(s)\phi^{1/3}(s - r_2(s))\,ds \right. \\
&\left. - \int_0^{t_1} e^{-\int_s^{t_1} g(u)\,du} b(s)\phi^{1/3}(s - r_2(s)\,ds) \right| \\
&= \left| \int_0^{t_1} e^{-\int_s^{t_2} g(u)\,du} b(s)\phi^{1/3}(s - r_2(s))\,ds + \int_{t_1}^{t_2} e^{-\int_s^{t_2} g(u)\,du} b(s)\phi^{1/3}(s - r_2(s)\,ds \right. \\
&\left. - \int_0^{t_1} e^{-\int_s^{t_1} g(u)\,du} b(s)\phi^{1/3}(s - r_2(s))\,ds \right| \\
&\le \left| \int_{t_1}^{t_2} e^{-\int_s^{t_2} g(u)\,du} b(s)\phi^{1/3}(s - r_2(s)\,ds \right| \\
&+ \left| \int_0^{t_1} \left(e^{-\int_s^{t_2} g(u)\,du} - e^{-\int_s^{t_1} g(u)\,du} \right) b(s)\phi^{1/3}(s - r_2(s))\,ds \right| \\
&\le \int_{t_1}^{t_2} e^{-\int_s^{t_2} g(u)\,du} |b(s)|\,ds + \int_0^{t_1} \left| e^{-\int_s^{t_1} g(u)\,du} - e^{-\int_s^{t_2} g(u)\,du} \right| |b(s)|\,ds \\
&= \int_{t_1}^{t_2} e^{-\int_s^{t_2} g(u)\,du} d\left(\int_{t_1}^{s} |b(v)|dv \right) ds + \int_0^{t_1} e^{\int_0^s g(u)\,du} \left| e^{-\int_0^{t_2} g(u)\,du} - e^{-\int_0^{t_1} g(u)\,du} \right| |b(s)|\,ds \\
&= \int_{t_1}^{t_2} e^{-\int_s^{t_2} g(u)\,du} d\left(\int_{t_1}^{s} |b(v)|dv \right) ds + \left| e^{-\int_0^{t_2} g(u)\,du} - e^{-\int_0^{t_1} g(u)\,du} \right| \int_0^{t_1} e^{\int_0^s g(u)\,du} |b(s)|\,ds \\
&= \int_{t_1}^{t_2} e^{-\int_s^{t_2} g(u)\,du} d\left(\int_{t_1}^{s} |b(v)|dv \right) ds + \\
&+ \left| e^{-\int_0^{t_2} g(u)\,du} - e^{-\int_0^{t_1} g(u)\,du} \right| e^{\int_0^{t_1} g(u)\,du} \int_0^{t_1} e^{-\int_s^{t_1} g(u)\,du} |b(s)|\,ds \\
&\le \int_{t_1}^{t_2} |b(s)|\,du \left(1 + \int_{t_1}^{t_2} e^{-\int_s^{t_2} g(u)\,du} g(s)\,ds \right) + \alpha \left| e^{-\int_{t_1}^{t_2} g(u)\,du} - 1 \right| \\
&\le 2 \int_{t_1}^{t_2} |b(s)|\,du + \alpha \int_{t_1}^{t_2} g(u)\,du \le (2K_1 + \alpha K_2)|t_1 - t_2|.
\end{aligned}
$$

Sendo assim, pelo Lema 2.15, concluímos que AM está contido num conjunto compacto em $(S, |\cdot|_h)$.

Agora, vamos mostrar que B é uma contração com constante $\alpha < 1$. Com efeito, dadas ϕ_1 e ϕ_2 em M, temos

$$
\begin{aligned}
&\frac{|(B\phi_1)(t)-(B\phi_2)(t)|}{h(t)} \le \int_{t-r_1(t)}^{t} g(u)\frac{|\phi_1(u)-\phi_2(u)|}{h(t)}\,du\\
&+\frac{1}{h(t)}\int_0^t e^{-\int_s^t g(u)\,du} g(s)\int_{s-r_1(s)}^{s} g(u)|\phi_1(u)-\phi_2(u)|\,du\,ds+\\
&+\frac{1}{h(t)}\int_0^t e^{-\int_s^t g(u)\,du}|g(s-r_1(s))(1-r_1'(s))-a(s)||\phi_1(s-r_1(s))-\phi_2(s-r_1(s))|\,ds\\
&\le \left\{\int_{t-r_1(t)}^{t} g(u)\frac{h(u)}{h(t)}\,du+\int_0^t e^{-\int_s^t g(u)\,du} g(s)\int_{s-r_1(s)}^{s} g(u)\frac{h(u)}{h(t)}\,du\,ds\right.\\
&+\left.\int_0^t e^{-\int_s^t g(u)\,du}|g(s-r_1(s))(1-r_1'(s))-a(s)|\frac{h(s-r_1(s))}{h(t)}\,ds\right\}|\phi_1-\phi_2|_h\\
&\le \alpha|\phi_1-\phi_2|_h.
\end{aligned}
$$

Por último, vamos mostrar que A é contínua. Tome $\varepsilon > 0$ e $\phi \in M$. Como $x^{1/3}$ é uniformemente contínua em $[-1,1]$, então para $T>0$ com $4/h(T)<\varepsilon$, existe $\delta>0$ tal que $|x_1-x_2|<\delta h(T)$ implica $|x_1^{1/3}-x_2^{1/3}|<\varepsilon/2$. Assim, para $|\phi(t)-\eta(t)|<\delta h(T)$ e para $t>T$, tem-se

$$
\begin{aligned}
&\frac{|(A\phi)(t)-(A\eta)(t)|}{h(t)} \le \frac{1}{h(t)}\int_0^t e^{-\int_s^t g(u)\,du}|b(s)||\phi^{1/3}(s-r_2(s))-\eta^{1/3}(s-r_2(s))|\,ds\\
&\le \frac{1}{h(t)} - \left\{\int_0^T e^{-\int_s^t g(u)\,du}|b(s)||\phi^{1/3}(s-r_2(s))-\eta^{1/3}(s-r_2(s))|\,ds+\right.\\
&\left.+2\int_T^t |b(s)|e^{-\int_s^t g(u)\,du}\,ds\right\}\\
&\le \frac{1}{h(t)}\left\{\frac{\varepsilon}{2}\int_0^T e^{-\int_s^t g(u)\,du}|b(s)|\,ds+2\alpha\right\}\\
&\le \frac{1}{h(t)}\left(\frac{\varepsilon}{2}\alpha+2\alpha\right)\le \frac{\varepsilon\alpha}{2h(t)}+\frac{2\alpha}{h(T)}\le\frac{\varepsilon\alpha}{2}+\frac{2\alpha}{h(T)}<\frac{\varepsilon\alpha}{2}+\frac{\varepsilon\alpha}{2}=\varepsilon\alpha<\varepsilon.
\end{aligned}
$$

As condições do Teorema do Ponto Fixo de Krasnoselskii (Teorema 2.38) estão satisfeitas e, por conseguinte, existe um ponto fixo em M da aplicação $A+B$, ou seja, existe uma solução $x(t,0,\psi)$ de (2.79) em $\mathbb{R}$, tal que $|x(t,0,\psi)|<1$. □

Tomando $r_1(t)=r_1$, em que r_1 é uma constante real e $g(t)=a(t+r_1)$, obtém-se o seguinte resultado.

Corolário 2.42. *Suponha que* (2.82) *e* (2.88) *sejam satisfeitas e a condição* (2.90) *substituída pela seguinte condição:*

$$
\begin{aligned}
&\int_{t-r_1}^{t} a(u+r_1)\,du+\int_0^t e^{-\int_s^t a(u+r_1)\,du}a(s+r_1)\int_{s-r_1}^{s} a(u+r_1)\,du\,ds\\
&+\int_0^t e^{-\int_s^t a(u+r_1)\,du}|b(s)|\,ds\le\alpha. \qquad (2.96)
\end{aligned}
$$

Se ψ é uma função contínua inicial com norma suficientemente pequena, então existe uma solução $x(t,0,\psi)$ de (2.80) *em $\mathbb{R}^+$ com $|x(t,0,\psi)|<1$.*

Observação 2.43. Note que

$$(2.81) + (2.82) \quad \Longrightarrow \quad (2.88) \qquad \text{e} \qquad (2.81) + (2.83) \quad \Longrightarrow \quad (2.96).$$

Daí, podemos afirmar que o Corolário 2.42 generaliza o Teorema 2.39.

Teorema 2.44. *Suponha que as condições* (2.88), (2.89) *e* (2.90) *estejam satisfeitas e assuma que*

$$\int_0^t e^{-\int_s^t g(u)\,du} b(s)\,ds \to 0 \quad \text{quando} \quad t \to \infty \tag{2.97}$$

e

$$\liminf_{t\to\infty} \int_0^t g(s)\,ds > -\infty. \tag{2.98}$$

Se ψ *é uma função inicial contínua com norma suficientemente pequena, então* (2.79) *tem uma solução* $x(t, 0, \psi)$*, tal que* $x(t, 0, \psi) \to 0$ *quando* $t \to \infty$ *se, e somente se,*

$$\int_0^t g(s)\,ds \to \infty \quad \text{quando} \quad t \to \infty. \tag{2.99}$$

Demonstração. Suponhamos que (2.99) seja válido e considere

$$N = \sup_{t\geq 0}\{e^{-\int_0^t g(s)\,ds}\}. \tag{2.100}$$

Todos os cálculos na demonstração do teorema anterior seguem para $h(t) = 1$ quando $|\cdot|_h$ é trocada pela norma do supremo $\|\cdot\|$. Adicionemos a M a seguinte condição:

$$\phi \in M \quad \Longrightarrow \quad \phi(t) \to 0 \quad \text{quando} \quad t \to \infty.$$

Por (2.97) é possível notar que se $\phi \in M$ então $(A\phi)(t) \to 0$ quando $t \to \infty$. Além disso, é claro que $(B\phi)(t) \to 0$ quando $t \to \infty$. Logo $A\phi + B\eta \in M$, se $\phi, \eta \in M$.

Como AM é equicontínuo (veja a demonstração do Teorema 2.41), A aplica M em um conjunto compacto de M. Pelo Teorema do Ponto Fixo de Krasnoselskii, existe $x \in M$ tal que $Ax + Bx = x$. Como $x \in M$, $x(t) \to 0$ quando $t \to \infty$.

Reciprocamente, suponha que (2.99) não ocorra. Então, por (2.98), existe uma sequência $\{t_n\}$, $t_n \to \infty$ com $n \to \infty$, tal que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{t_n} g(u)\,du = l, \quad \text{para algum } l \in \mathbb{R}.$$

Podemos escolher uma constante $J \in \mathbb{R}^+$, tal que $-J \leq \displaystyle\int_0^{t_n} g(s)\,ds \leq J$ para $n \geq 1$. Para simplificar os cálculos, defina

$$\omega(s) = |g(s - r_1(s))(1 - r_1'(s)) - a(s)| + |b(s)| + g(s)\int_{s-r_1(s)}^{s} g(u)\,du, \quad \text{para todo } s \geq 0.$$

Por (2.90), tem-se $\displaystyle\int_0^t e^{-\int_s^{t_n} g(u)\,du}\omega(s)\,ds \leq \alpha$, de onde segue que

$$\int_0^{t_n} e^{\int_0^s g(u)\,du}\omega(s)\,ds \leq \alpha e^{\int_0^{t_n} g(u)\,du} \leq e^J.$$

A sequência $\left\{\int_0^{t_n} e^{\int_0^s g(u)\,du}\omega(s)ds\right\}$ é limitada, então admite subsequência convergente. Vamos assumir que $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_0^{t_n} e^{\int_0^s g(u)\,du}\omega(s)\,ds = \mu$, para algum $\mu \in \mathbb{R}^+$, e escolher $\overline{k} \in \mathbb{Z}^+$ suficientemente grande de modo que $\displaystyle\int_{t_{\overline{k}}}^{t_n} e^{\int_0^s g(u)\,du}\omega(s)\,ds < \frac{\delta_0}{4N}$ para $n \geq \overline{k}$, onde $\delta_0 > 0$ e $2\delta_0 K e^J + \alpha < 1$.

Agora vamos considerar a solução $x(t) = x(t, t_{\overline{k}}, \psi)$ de (2.79) com $\psi(t_{\overline{k}}) = \delta_0$ e $|\psi(s)| \leq \delta_0$ para $s \leq t_{\overline{k}}$. Devemos escolher ψ de modo que $|x(t)| \leq 1$ para $t \geq t_{\overline{k}}$ e $\psi(t_{\overline{k}}) - \displaystyle\int_{t_{\overline{k}}-r_1}^{t_{\overline{k}}} g(s)\psi(s)\,ds \geq \frac{1}{2}\delta_0$.

Segue de (2.94) e (2.95) que $x(t) = (Ax)(t) + (Bx)(t)$ para $n \geq t_{\overline{k}}$. Observe que

$$\begin{aligned}
|x(t_n) - \int_{t_n - r_1(t_n)}^{t_n} g(s)x(s)\,ds| &\geq \frac{1}{2}\delta_0 e^{-\int_{t_{\overline{k}}}^{t_n} g(u)\,du} - \int_{t_{\overline{k}}}^{t_n} e^{-\int_s^{t_n} g(u)\,du}\omega(s)\,ds \qquad (2.101)\\
&= \frac{1}{2}\delta_0 e^{-\int_{t_{\overline{k}}}^{t_n} g(u)\,du} - e^{-\int_0^{t_n} g(u)\,du}\int_{t_{\overline{k}}}^{t_n} e^{\int_0^s g(u)\,du}\omega(s)\,ds\\
&= e^{-\int_{t_{\overline{k}}}^{t_n} g(u)\,du}\left(\frac{1}{2}\delta_0 - e^{-\int_0^{t_{\overline{k}}} g(u)\,du}\int_{t_{\overline{k}}}^{t_n} e^{\int_0^s g(u)\,du}\omega(s)\,ds\right)\\
&\geq e^{-\int_{t_{\overline{k}}}^{t_n} g(u)\,du}\left(\frac{1}{2}\delta_0 - N\int_{t_{\overline{k}}}^{t_n} e^{\int_0^s g(u)\,du}\omega(s)\,ds\right)\\
&\geq e^{-\int_{t_{\overline{k}}}^{t_n} g(u)\,du}\left(\frac{1}{2}\delta_0 - \frac{1}{4}\delta_0\right)\\
&= \frac{1}{4}\delta_0 e^{-\int_{t_{\overline{k}}}^{t_n} g(u)\,du} \geq \frac{1}{4}\delta_0 e^{-2J} > 0.
\end{aligned}$$

Por outro lado, como a solução $x(t)$ de (2.79) é tal que $x(t) = x(t, t_{\overline{k}}, \psi) \to 0$ quando $t \to \infty$, visto que $t_n - r_1(t_n) \to \infty$ quando $n \to \infty$ e (2.90) é válida, temos que

$$x(t_n) - \int_{t_n - r_1(t_n)}^{t_n} g(s)x(s)\,ds \to 0, \qquad \text{quando } n \to \infty,$$

o que contradiz (2.101). Portanto, a condição (2.99) é necessária para que (2.79) possua uma solução $x(t, 0, \psi) \to 0$ quando $t \to \infty$, o que completa a prova. □

Para o caso especial em que $b(t) = 0$, obtemos o seguinte corolário.

Corolário 2.45. *Seja $r_1(t)$ diferenciável. Suponha que exista uma constante $\alpha \in (0, 1)$ e uma função $g \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$, tal que para $t \geq 0$ tem-se*

$$\liminf_{t\to\infty} \int_0^t g(s)\,ds > -\infty \tag{2.102}$$

e

$$\begin{aligned}
&\int_{t-r_1(t)}^t g(u)\,du + \int_0^t e^{-\int_s^t g(u)\,du} g(s)\int_{s-r_1(s)}^s g(u)\,du\,ds \\
&\qquad + \int_0^t e^{-\int_s^t g(u)\,du}|g(s - r_1(s))(1 - r_1'(s)) - a(s)|\,ds \leq \alpha.
\end{aligned} \tag{2.103}$$

Se ψ é uma função inicial contínua com norma suficientemente pequena, então (2.80) *possui uma solução $x(t,0,\psi) \to 0$ quando $t \to \infty$ se, e somente se,*

$$\int_0^t g(s)\,ds \to \infty, \qquad \textit{quando} \;\; t \to \infty. \tag{2.104}$$

Agora, se $r_1(t) = r_1 \in \mathbb{R}$ e $g(t) = a(t + r_1)$, então obtemos o próximo resultado.

Corolário 2.46. *Suponha que* (2.82), (2.88) *e* (2.96) *são satisfeitas e assuma que*

$$\int_0^t e^{-\int_s^t a(u+r_1)\,du} b(s)\,ds \to 0, \qquad \textit{quando} \;\; t \to \infty. \tag{2.105}$$

Se ψ é uma função inicial contínua com norma suficientemente pequena, então (2.80) *possui uma solução $x(t,0,\psi)$, tal que $x(t,0,\psi) \to 0$ quando $t \to \infty$ se, e somente se, $\displaystyle\int_0^\infty a(s)\,ds = \infty$.*

Observação 2.47. A condição (2.87) implica a condição (2.105); disto seque que o Corolário 2.46 generaliza o Teorema 2.40.

Exemplo 2.48. Considere a seguinte equação escalar

$$x'(t) = -\frac{1}{t+0.75}x(t-0.25) + \frac{1}{6.3052t+1}x^{1/3}(t - r_2(t)), \tag{2.106}$$

onde $r_2 \in C(\mathbb{R}^+, [0,\gamma])$, com $\gamma > 0$.

Claramente, $\displaystyle\sup_{t\geq 0}\left|\frac{\frac{1}{6.3052t+1}}{\frac{1}{(t+0.25)+0.75}}\right| = \sup_{t\geq 0}\frac{t+1}{6.3052t+1} = 1$, já que a função

$$t \geq 0 \mapsto \frac{t+1}{6.3052t+1}$$

é decrescente. Daí segue que a condição (2.81) não é satisfeita. Então, o Teorema 2.39 e o Teorema 2.40 falham para a equação 2.106. Por outro lado, é fácil verificar que as condições (2.82) e (2.88) são satisfeitas para $a(t) = \frac{1}{t+0.75}$ e $b(t) = \frac{t+1}{6.3052t+1}$. Ademais, dado $t \geq 0$, temos:

- $\displaystyle\int_{t-r_1}^t a(u+r_1)\,du = \int_{t-0.25}^t \frac{1}{s+1}ds = \ln(t+1) - \ln(t+0.75) \leq -\ln(0.75)$,
- $$\begin{aligned}\int_0^t e^{-\int_s^t a(u+r_1)\,du} a(s+r_1)\int_{s-r_1}^s a(u+r_1)\,du\,ds &= \int_0^t e^{-\int_s^t \frac{1}{u+1}\,du}\frac{1}{s+1}\int_{s-0.25}^s \frac{1}{u+1}\,du\,ds \\ &\leq -\ln(0.75)\end{aligned}$$

e

- $$\int_0^t e^{-\int_s^t a(u+r_1)\,du} b(s)\,ds = \int_0^t e^{\ln\left(\frac{s+1}{t+1}\right)} \frac{1}{6.3052s+1}\,ds = \frac{1}{t+1}\int_0^t \frac{s+1}{6.3052s+1}\,ds$$

$$= \frac{1}{1+t}\left(\int_0^t \frac{s}{6.3052s+1} + \frac{1}{6.3052s+1}\,ds\right)$$

$$= \frac{1}{1+t}\left(\int_0^t \frac{1}{6.3052} - \frac{1/6.3052}{6.3052(6.3052s+1)} + \frac{1}{6.3052s+1}\,ds\right)$$

$$= \frac{1}{1+t}\left(0.1586t - \frac{1/6.3052}{6.3052}\ln(6.3052t+1) + \frac{\ln(6.3052t+1)}{6.3052}\right)$$

$$= \frac{1}{1+t}\left(0.1586t - \frac{1-1/6.3052}{6.3052}\ln(6.3052t+1)\right)$$

$$= \frac{1}{1+t}\left(0.1586t - \frac{1-1/6.3052}{6.3052}\left(\ln(t+0.1586) - \ln(0.1586)\right)\right) \to 0,$$

quando $t \to \infty$.

Tomando

$$f(t) = \frac{\ln(t+0.1586) - \ln(0.1586)}{t+1}, \qquad t \in [0,\infty),$$

temos $f'(t) = \dfrac{1}{(t+1)^2}\left(\dfrac{t+1}{t+0.1586} - (\ln(t+0.1586) - \ln(0.1586))\right)$ e $f'(0.8414) = 0$, de onde podemos concluir que f assume seu valor máximo em 0.8414, a saber $f(0.8414) = 1$.

Além disso, $\dfrac{0.1586t}{t+1} < 0.1586$ e $\dfrac{1}{1+t} \times \dfrac{1-1/6.3052}{6.3052} < \dfrac{1-1/6.3052}{6.3052} = 0.1335$.

Portanto,

$$\int_0^t e^{-\int_s^t \frac{1}{u+1}\,du}\left|\frac{1}{6.3052s+1}\right| ds \le 0.1586 + 0.1335 = 0.2921.$$

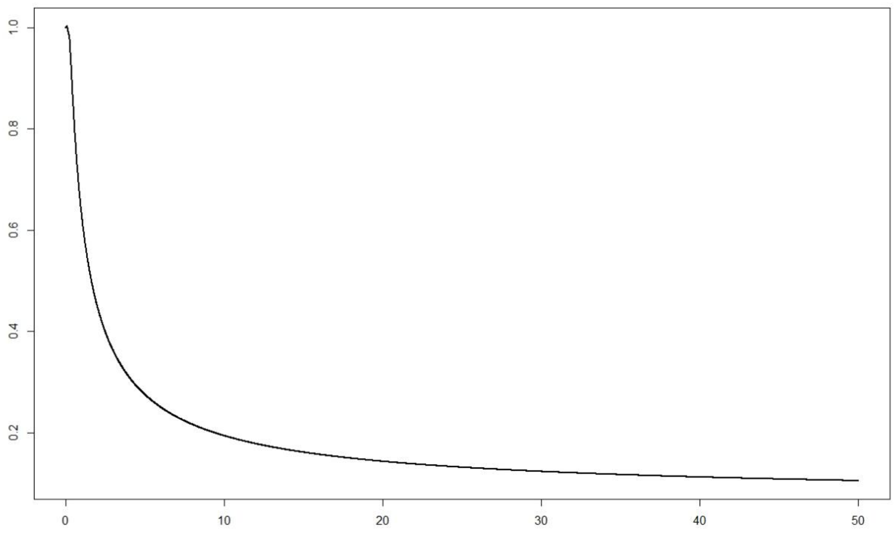

Figura 2.7: Simulação da solução da equação (2.106) com $r_2(t) = 0.5$.

Defina $\alpha = -2\ln 0.75 + 0.2921 \approx 0.8681 < 1$. Pelo Corolário 2.46, a equação 2.106 possui uma solução $x(t, 0, \psi)$, tal que $x(t, 0, \psi) \to 0$ quando $t \to \infty$, desde que a norma de ψ seja suficientemente pequena.

Referências

[1] M. G. Alves. Equações diferenciais com retardamento. Master's thesis, Universidade Federal de São Carlos, Agosto 2013.

[2] O. Arino, M. Hbid, and E. Dads. *Delay Differential Equations and Applications: Proceedings of the NATO Advanced Study Institute held in Marrakech, Morocco, 9-21 September 2002.* Nato Science Series II:. Springer Netherlands, 2007.

[3] A. Bellen and M. Zennaro. *Numerical Methods for Delay Differential Equations.* 01 2003.

[4] T. A. Burton. A fixed-point theorem of Krasnoselskii. *Applied Mathematics Letters*, 11(1):85–88, 1998.

[5] T. A. Burton. Stability by fixed point theory or Liapunov theory: A comparison. *Fixed Point Theory*, 4(1):15–32, 2003.

[6] T. A. Burton. Fixed points and differential equations with asymptotically constant or periodic solutions. *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*, 11:1–31, 2004.

[7] T. A. Burton. *Stability and Periodic Solutions of Ordinary and Functional Differential Equations.* Dover Books on Mathematics. Dover Publications, 2005.

[8] T. A. Burton. The case for stability by fixed point theory. *Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst. Ser. A Math. Anal., suppl. B*, 13:253–263, 2006.

[9] T. A. Burton. *Stability by Fixed Point Theory for Functional Differential Equations.* Dover Books on Mathematics. Dover Publications, 2013.

[10] T. A. Burton and T. Furumochi. Asymptotic behavior of solutions of functional differential equations by fixed point theorems. *Dynamic Systems and Applications*, 11(4):499–520, 2002.

[11] K. L. Cooke and J. A. Yorke. Some equations modelling growth processes and gonorrhea epidemics. *Mathematical Biosciences*, 16(1-2):75–101, 1973.

[12] L. A. L. Estevam. Tópicos de equações diferenciais com retardamento: uma abordagem segundo o trabalho do prof. Nelson Onuchic. Master's thesis, Universidade Estadual Paulista (UNESP), 2012.

[13] M. Fan, Z. Xia, and H. Zhu. Asymptotic stability of delay differential equations via fixed point theory and applications. *Canadian Applied Mathematics Quarterly*, 18(4):361–380, 2010.

[14] D. Guo and V. Lakshmikantham. *Nonlinear problems in abstract cones*, volume 5. Academic press, 2014.

[15] J. Hale and S. Lunel. *Introduction to Functional Differential Equations*. Number v. 99 in Applied mathematical sciences. Springer-Verlag, 1993.

[16] C. Jin and J. Luo. Stability in functional differential equations established using fixed point theory. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 68(11):3307–3315, 2008.

[17] M. A. Krasnoselskii and P. P. Zabreiko. *Geometrical Methods of Nonlinear Analysis*. Nauka, Moscow, 1975.

[18] J. Levin and J. Nohel. On a nonlinear delay equation. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 8(1):31–44, 1964.

[19] E. Lima. *Curso de Análise*. Number v. 1 in Curso de Análise. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1981.

[20] E. Lima. *Espaços Métricos*. Projeto Euclides. IMPA, 2009.

[21] R. Lima and S. M. S. Afonso. Análise de estabilidade e limitação de uma classe de equações diferenciais com retardamento via teorema do ponto fixo de Krasnoselskii. *C.Q.D. - Revista Eletrônica Paulista de Matemática*, 11:11–25, 2017.

[22] R. Lima and S. M. S. Afonso. Soluções periódicas para versões generalizadas do modelo de produção de células sanguíneas *(hematopoiese)* de mackey e glass. *C.Q.D. - Revista Eletrônica Paulista de Matemática*, 2019.

[23] T. Melo, Adson e Fernandes. Teoremas do Ponto Fixo. Technical report, Universidade Federal do Paraná, 2015.

[24] J. Munkres. *Topology*. Featured Titles for Topology Series. Prentice Hall, Incorporated, 2000.

[25] N. Onuchic. *Equações diferenciais com retardamento*. 8^0 Colóquio Brasileiro de Matemática, 1971.

[26] D. Smart. *Fixed Point Theorems*. Cambridge Tracts in Mathematics. Cambridge University Press, 1980.

[27] K. Soetaert, T. Petzoldt, and R. Setzer. Package desolve: Solving initial value differential equations in r. *The R Journal*, 2:5–15, 01 2010.

[28] T. Stuckless. Brouwer's fixed point theorem: Methods of proof and generalizations. Master's thesis, SIMON FRASER UNIVERSITY, March 2003.

[29] W. Zhang, D. Zhu, and P. Bi. Existence of periodic solutions of a scalar functional differential equation via a fixed point theorem. *Mathematical and computer modelling*, 46(5-6):718–729, 2007.

Índice Remissivo