

DIANA SANTOS SOUZA ALMEIDA

Geometria Fractal: uma proposta para sala de aula

Diana Santos Souza Almeida

Geometria Fractal: uma proposta para sala de aula

Trabalho de Graduação apresentado ao Conselho de Curso de Graduação em Licenciatura em Matemática da Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, como parte dos requisitos para obtenção do diploma de Graduação em Licenciatura em Matemática.

Orientadora: Profª. Dra. Rosa Monteiro Paulo.

A447g

Almeida, Diana Santos Souza

Geometria fractal: uma proposta para sala de aula / Diana Santos Souza
Almeida. – Guaratinguetá, 2016.

50 f : il.

Bibliografia: f. 49-50

Trabalho de Graduação em Licenciatura em Matemática – Universidade
Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, 2016.

Orientadora: Profª Drª Rosa Monteiro Paulo

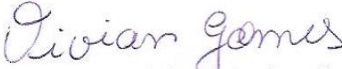
1. Fenomenologia 2. Pesquisa qualitativa 3. Logaritmos I. Título

CDU 165.62

Diana Santos Souza Almeida

ESTE TRABALHO DE GRADUAÇÃO FOI JULGADO ADEQUADO COMO
PARTE DO REQUISITO PARA A OBTENÇÃO DO DIPLOMA DE
“GRADUADO EM LICENCIATURA EM MATEÁTICA”

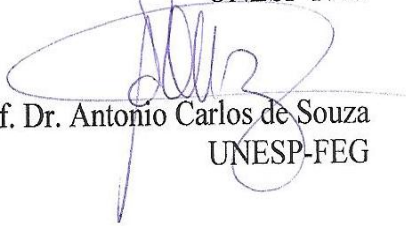
APROVADO EM SUA FORMA FINAL PELO CONSELHO DE CURSO DE
GRADUAÇÃO EM LICENCIATURA EM MATEMÁTICA.


Prof. Dra. Vivian Martins Gomes
Coordenadora

BANCA EXAMINADORA:


Prof. Dra. Rosa Monteiro Paulo
Orientadora/UNESP-FEG


Prof. Dra. Fabiane Mondini
UNESP-FEG


Prof. Dr. Antonio Carlos de Souza
UNESP-FEG

Junho de 2016

A minha família e amigos sempre presentes, em especial ao meu esposo Wesley pela compreensão e apoio.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar agradeço a Deus, fonte da vida e da graça. Agradeço pela minha vida, minha inteligência, minha família e meus amigos.

A minha orientadora Prof^{fa} Dr^a Rosa Monteiro Paulo, sempre disposta a me ouvir e atender minhas dúvidas. Aos meus colegas de Faculdade que me incentivaram e ajudaram a concluir este trabalho. Aos funcionários da FEG dispostos sempre que necessário.

Aos meus pais Maria Ercilia e Vítor, ao meu irmão Geovani e, em especial, a minha irmã Janaina, grande amiga de todos os momentos.

Ao meu esposo Wesley que esteve ao meu lado, me incentivando.

“ Nuvens não são esferas, montanhas não são cones, os litorais não são círculos, a casca da árvore não é lisa e tão pouco a luz viaja em linha reta.”

Benoit Mandelbrot

ALMEIDA, D. S. S. **Geometria Fractal**: uma proposta para sala de aula. 2016. 49 f. Trabalho de Conclusão de Curso. (Graduação em Licenciatura em Matemática) – Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2016.

RESUMO

O presente trabalho apresenta um estudo acerca da Geometria Fractal e sugere atividades que possibilitam a contextualização de conteúdos trabalhados na Educação Básica. Por meio da Geometria dos Fractais os alunos descobrem uma aplicação de conteúdos da matemática com os quais trabalham no ensino médio e que, algumas vezes, lhes parecem abstratos e sem utilidade. Trata-se de uma pesquisa qualitativa com abordagem fenomenológica hermenêutica buscando compreender o significado dos elementos da Geometria Fractal para sugerir uma possibilidade de trabalho para a sala de aula do ensino médio. As atividades propostas envolvem os conteúdos matemáticos logaritmo, suas propriedades e aplicações, progressão geometria e semelhança de polígonos. No texto apresentamos ideias da Geometria Fractal a partir das quais o professor terá a oportunidade de desenvolver um trabalho exploratório e investigativo que permita aos alunos a produção do conhecimento matemático.

PALAVRAS-CHAVE: Fenomenologia. Pesquisa Qualitativa. Logaritmo. Progressão Geométrica.

ALMEIDA, D. S. S. Geometry fractal: a proposal for the classroom. 2016. 49 f . Graduate Work (Graduate Mathematics)- Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2016.

ABSTRACT

This work will show a study on the Fractal Geometry and suggests activities that enable the contextualization of contents worked in Basic Education. Through the geometry of fractals students discover an application of mathematics content, they are developed in high school and sometimes they are difficult to understand and without utility. This is a qualitative research with phenomenological hermeneutics seeking to understand the meaning of Fractal Geometry elements to suggest a possibility of work for the high school classroom. The proposed activities involve the mathematical logarithm content, their properties and applications, progression geometry and similarity of polygons. In the paper we present the Fractal Geometry ideas from which the teacher will have the opportunity to conduct an exploratory and investigative work that allows students the production of mathematical knowledge.

KEYWORDS: Phenomenology. Qualitative research. Logarithm. Geometric progression.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Triângulo de Sierpinski	20
Figura 2: Curva de Peano.	21
Figura 3: Curva de Koch.	21
Figura 4: Ilhas de Koch ou Flocos de Neve.	22
Figura 5: Comparação entre a dimensão dos objetos da Geometria Euclidiana e da Geometria Fractal	24
Figura 6: Divisão de um segmento de reta, de um quadrado e de um cubo	25
Figura 7: Pirâmide de Sierpinski	30
Figura 8: Passo 1- cartão de Sierpinski	31
Figura 9: Passo 2- cartão de Sierpinski	31
Figura 10: Passo 3- cartão de Sierpinski	32
Figura 11: Passo 4- cartão de Sierpinski	32
Figura 12: Cartão 3D após a terceira iteração	33
Figura 13: Primeiras iterações do Floco de Neve.	36
Figura 14: Fractal tipo Dürer- Pentágono 3 iterações	39
Figura 15: Fractal tipo Dürer- Hexágono 3 iterações	39
Figura 16: Primeiro passo da construção do Fractal Hexagonal de Dürer	40
Figura 17: Fractal Hexagonal de Dürer	41

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	10
2 METODOLOGIA	13
2.1 PESQUISA QUALITATIVA.....	13
2.2 ABORDAGEM FENOMENOLÓGICA	15
3 A EVOLUÇÃO DA GEOMETRIA E OS MONSTROS FRACTAIS	19
3.1 GEOMETRIA DOS FRACTAIS.....	22
3.1.1 Autossimilaridade ou auto-semelhança	22
3.1.2 Complexidade infinita	23
3.1.3 Dimensão fractal	23
4 MATERIAL MANIPULATIVO NA AULA DE MATEMÁTICA	27
5 ATIVIDADES	29
5.1 PIRÂMIDE DE SIERPINSKI.....	29
5.1.1 Cartão fractal 3D	30
5.2 CURVA DE KOCH	35
5.2.1 Relação do Floco de Neve com a progressão geométrica	36
5.3 FRACTAL TIPO DÜRER	38
5.3.1 Possíveis explorações do Fractal Hexagonal de Dürer	39
5.3.2 Semelhança de figuras planas	40
5.3.3 Contagem da quantidade de hexágonos em um fractal de Dürer	42
6 CONCLUSÃO	45
REFERÊNCIAS	49

1 INTRODUÇÃO

A Geometria dos Fractais ainda é um campo de pesquisa recente na matemática. Teve início com o matemático polonês Benoit Mandelbrot na segunda metade de século XX. A ideia começou com os questionamentos sobre curvas e fenômenos da natureza, com os novos pensamentos foi dado início ao estudo de uma nova teoria, denominada Geometria Fractal. A palavra fractal é de origem latina e significa fractus, isto é, irregular, fração, partido ou quebrado.

A definição de fractal ainda é bastante discutida, embora o ponto de partida seja comum: a ideia de Mandelbrot. Segundo Sallun (2005),

Um fractal é uma figura que pode ser quebrada em pequenos pedaços, sendo cada um desses pedaços uma reprodução do todo. Não podemos ver um fractal porque é uma figura limite, mas as etapas de sua construção podem dar uma ideia da figura toda. Seu nome se deve ao fato de que a dimensão de um fractal não é um número inteiro. (SALLUN, 2005, p.1)

Mostra-se que, com a exposição das três principais características dos fractais, a autossimilaridade ou auto-semelhança, complexidade finita e a dimensão do fractal, ficou mais fácil a compreensão dessas figuras geométricas sendo possível a sua reunião e, mesmo, uma classificação que considera aspectos de uma geometria distinta das clássicas figuras da geometria euclidiana (embora dela traga alguns aspectos e mesmo figuras iniciais que dê origem aos objetos da geometria fractal).

As propriedades da Geometria Fractal possibilitam trabalhar com diversos conteúdos previstos no currículo do Ensino Médio, tais como funções, logaritmos e progressões. Mostrar aos alunos que a matemática tem uma aplicação na própria matemática é, segundo o que compreendemos, algo rico, pois se pode mostrar que o fazer matemática não se trata de seguir procedimentos, mas, antes, permite investigação e conseqüentemente a produção do conhecimento.

Com o estudo dessa geometria novas relações já foram observadas e outras estão em construção. Buscando explorar os fractais na sala de aula do Ensino Médio construímos, nesta pesquisa, uma proposta de atividades que possibilitem a contextualização de alguns conteúdos da matemática vista na Educação Básica.

Para o desenvolvimento de algumas das atividades que estamos propondo foi sugerido o uso de materiais manipulativos, pois eles poderão favorecer um ambiente de descoberta se

explorados pelo professor. Nosso objetivo é que, por meio da investigação, manipulação e construção de fractais os alunos estabeleçam relações que lhes permitam atribuir significado aos conteúdos matemáticos.

Iniciamos este trabalho com uma apresentação da metodologia utilizada, explorando o sentido da pesquisa qualitativa que foi a opção adotada uma vez que buscamos a compreensão dos modos de se trabalhar com os fractais na sala de aula do ensino médio e não uma resposta sobre o desencadeamento do conteúdo e seus resultados.

Nossas leituras nos permitem dizer que, nas pesquisas em Educação Matemática, é comum o modo qualitativo de proceder a investigação, pois essa metodologia permite que o desenvolvimento da pesquisa tenha diferentes formas de expor resultados ou caminhos percorridos. Além disso possibilita diferentes formas de registro de dados como em vídeo, imagens, entrevistas ou estudo hermenêutico de textos escritos. Em nosso caso assumimos uma abordagem fenomenológica hermenêutica buscando o significado do fenômeno investigado, isto é, o sentido da geometria fractal na sala de aula do ensino médio. Procuramos interpretar modos de a geometria fractal se mostrar possível no fazer matemática em sala de aula

Em seguida trazemos, no trabalho, aspectos da história dos fractais, que segundo Nascimento, Silva e Maciel (2012) antes da definição dos fractais, recebia o nome de “monstros matemáticos”, uma vez que não havia uma definição para suas características, parecendo, aos matemáticos, algo além do que o conhecido era capaz de explicar. Apresentamos os principais monstros matemáticos da época e seus respectivos autores.

Na sequência do trabalho apresentamos as atividades que foram elaboradas. Algumas delas, conforme salientamos, se valem do uso de materiais manipulativos para a construção dos fractais e investigação que permita, aos alunos, estabelecer uma conexão entre o concreto e o abstrato. Exploramos um pouco desse material mostrando suas vantagens e descobertas para auxiliar na aprendizagem matemática do aluno. Depois da contextualização e justificativa de trabalhar com material manipulativo, as atividades são identificadas. São elas: o desenvolvimento da pirâmide de Sierpinski, através de dobraduras e recortes; atividade com a qual é possível trabalhar o sentido da dimensão fractal, explorar a definição de logaritmo e suas propriedades. Na segunda atividade trabalha-se a curva de Koch onde são construídas tabelas para a organização de ideias. Nesta atividade exploramos o conteúdo matemático progressão geométrica, ilustrando com imagens e tabelas a definição de uma progressão geométrica. A terceira e última atividade trabalha com o fractal de Dürer envolvendo a ideia de semelhança, resgatando o trabalho com o uso do transferidor, posições entre retas,

contagem de figuras após as iterações e explorações gerais sobre polígonos da geometria euclidiana.

Em toda tarefa proposta sugerimos possíveis questionamentos para o professor com o objetivo de iniciar uma discussão. Entende-se que esses questionamentos, se realizados de modo coletivo com a turma, pode avançar o conhecimento, uma vez que as diferentes interpretações realizadas pelos alunos podem auxiliar na produção do conhecimento. Para realizar a pesquisa, iniciamos com uma pergunta norteadora, que serve como ponto de partida para o nosso inquérito, sendo ela: quais sentidos o aluno atribui a determinados conteúdos matemáticos ao se trabalhar com a geometria fractal em sala de aula?

Esclarecemos que, nesta pesquisa, não realizamos um trabalho de campo, ou seja, não desenvolvemos as tarefas construídas com alunos do ensino médio e, portanto, não teremos elementos para responder a questão acima. Logo ela não é uma pergunta que irá ter resposta. É, antes, uma interrogação que foi colocada no horizonte de perspectivas para nos orientar na elaboração das atividades. Isto é, ao elaborar atividades para a sala de aula do Ensino Médio focando a geometria fractal tivemos em mente as possibilidades de atribuição de sentidos pelos alunos.

2 METODOLOGIA

Neste capítulo iremos abordar de modo breve o sentido da pesquisa qualitativa em Educação e a abordagem fenomenológica. O estudo realizado nos possibilitou compreender o sentido da pesquisa qualitativa e os procedimentos da abordagem fenomenológica sendo relevante por indicar modos de pesquisa em Educação.

2.1 PESQUISA QUALITATIVA

A pesquisa pode ser desenvolvida com diferentes finalidades, mas ela precisa partir de uma busca por informações, um problema ou uma pergunta norteadora que exija do pesquisador uma cuidadosa investigação sobre o tema escolhido. Não é suficiente apenas responder o que se pesquisa, é necessário expor uma compreensão do assunto contribuindo para a clareza da investigação. Com isso pode-se entender que pesquisa é diferente de um estudo, pois a pesquisa exige procedimentos sistemáticos, que visa solucionar problemas, responder interrogações ou contribuir para o esclarecimento do que o pesquisador investiga.

Segundo Bicudo (1993), a

pesquisa configura-se como buscar compreensões e interpretações significativas do ponto de vista da interrogação formulada. Configura-se, também, como buscar informações cada vez mais convincentes e claras sobre a pergunta feita. (BICUDO, 1993, p.18).

Apesar da pesquisa buscar uma resposta ou solução para uma investigação, na maioria das vezes não podemos tomar os resultados como única verdade, pois o conhecimento está em constante transformação. Novas descobertas vão sendo realizadas tornando o campo da pesquisa um ambiente de mudanças. A cada nova investigação, novos questionamentos vão surgindo, abrindo a possibilidades de outras pesquisas que possam vir a complementar o que já foi descoberto, estudado ou analisado.

As pesquisas em educação tiveram considerável avanço nos últimos anos. Entretanto vem sofrendo algumas transformações na forma como é feita. A abordagem qualitativa está sendo muito usada para divulgar as investigações no campo da Educação. No entanto, tal abordagem surgiu das críticas feitas a abordagem quantitativa que traduzia os dados coletados por meio de procedimentos estatísticos e testes padronizados ou sistemas numéricos de dados, padronizando os resultados da pesquisa. Para a Educação esse modo de fazer pesquisa

buscava, na maioria das vezes, um resultado comprovativo que pudesse ser generalizado, sem considerar o contexto.

Com o intuito de realizar uma abordagem que não fosse baseada somente em dados estatísticos ou em medidas passíveis de serem generalizada, a abordagem qualitativa visa a uma interrogação e pode ser desenvolvida em seu ambiente natural, levando em consideração o sujeito e o modo como ele está inserido na realidade. O pesquisador está imerso no contexto da pesquisa e precisa de uma trajetória que lhe permita compreender o que interroga, sem buscar explicações causais ou generalizações.

Segundo Garnica (2004), a pesquisa qualitativa se caracteriza por ter,

(a) a transitoriedade de seus resultados; (b) a impossibilidade de uma hipótese a priori, cujo objetivo da pesquisa será comprovar ou refutar; (c) a não neutralidade do pesquisador que, no processo interpretativo, vale-se de suas perspectivas e filtros vivenciais prévios dos quais não consegue se desvencilhar; (d) que a constituição de suas compreensões dá-se não como resultado, mas numa trajetória em que essas mesmas compreensões e também os meios de obtê-las podem ser (re)configuradas; e (e) a impossibilidade de estabelecer regulamentações, em procedimentos sistemáticos, prévios, estáticos e generalistas (GARNICA, 2004, p. 86).

Entretanto, é necessário compreender que não há uma única forma de conduzir uma pesquisa qualitativa. Ela poderá seguir várias abordagens e envolver diversos modos de análise e registros de dados como vídeos, imagens, entrevistas, textos escritos entre outras fontes de informação. Assim, não há uma abordagem única que permita a condução de toda pesquisa qualitativa uma vez que, nessa modalidade de pesquisa, busca-se o conhecimento ou a compreensão de algo que se deseja saber e não uma resposta a um problema ou uma certeza a partir de dados já pré-estabelecidos.

A pesquisa em Matemática, na maioria das vezes, implica na demonstração de teoremas que tem como base demonstrações feita anteriormente ou a produção de um conceito, ou, ainda, a investigação de um modo inédito de demonstração. Qualquer que seja a situação, a pesquisa é dependente do que já foi conceituado. Logo nessa área a busca é pela produção do conhecimento.

Na Educação não é possível uma exatidão em seus conceitos, uma vez que estão envolvidos seres humanos. Logo, é necessário levar em consideração que essa uma abordagem de pesquisa em Educação deverá articular questões de ordem cultural, filosófica, social entre outros ramos do entendimento humano. Pode ser analisado (a pesquisa em Educação) como um processo político pedagógico que necessita da investigação dos costumes

da região e do contexto no qual está o indivíduo. Por isso a importância da busca por compreensão e não por explicações ou demonstrações generalizáveis

Em Educação Matemática, em particular, a pesquisa tem a responsabilidade de abordar tanto a educação, no que diz respeito as questões de natureza pedagógica ou aos aspectos cognitivos, quanto as questões relativas aos conceitos matemáticos, isto é, os conteúdos. É, portanto, uma região de investigação ou de inquérito que busca questionar as interações que se dão no ambiente didático (relação professor-aluno, aluno-aluno, aprendizagem, formas de ensino, dentre outras) procurando analisar a matemática, no sentido de como compreendê-la, como estudá-la, como produzir conhecimento nessa área.

Segundo Bicudo (2005), apesar de se apresentar como opostas, a matemática estudada pelo matemático é exatamente a mesma que precisa ser transmitida ao aluno. O que separa a investigação acerca da Matemática da investigação acerca do seu ensino ou de sua aprendizagem é a forma didático-pedagógica em que é apresentada. Em Educação Matemática, esse trabalho de pesquisar o ensino ou a aprendizagem matemática envolve o sujeito e o contexto no qual ele está inserido, abrindo possibilidades para a produção de significado.

Por isso a Educação Matemática busca desenvolver a ciência exata e a ciência humana, uma vez que busca a produção do conhecimento matemático sem deixar de investigar o ambiente educacional no qual o sujeito está inserido bem como os modos pelos quais esse sujeito atribui significados aos conteúdos matemáticos.

Cabe à pesquisa em Educação Matemática investigar e interrogar a respeito dos métodos didático- pedagógicos possíveis de serem desenvolvidos em todas as áreas do conhecimento, compreender as necessidades para apresentar um caminho que auxilie no desenvolvimento de uma Matemática mais significativa para o sujeito. Mas como fazê-lo? Dissemos que a metodologia que melhor se presta a investigação em Educação Matemática é a qualitativa, mas as abordagens são variadas cabendo ao pesquisador fazer a opção. Em nosso caso nos voltamos para a abordagem fenomenológica que a seguir explicitamos.

2.2 ABORDAGEM FENOMENOLÓGICA

A fenomenologia é composta de duas palavras, *fenômeno* e *logos*. Fenômeno significa o que se mostra, e logos é a reflexão, é o voltar-se para o que se mostra buscando compreensão. Esse mostrar-se pode ser compreendido como a realidade interrogada, considerando a percepção do pesquisador perante o que está sendo interrogado. Segundo Garnica (1997), o

pesquisador fenomenólogo busca as evidências do fenômeno que interroga, através de uma perspectiva. Assim, por exemplo, se o fenômeno é a aprendizagem o fenomenólogo interroga os modos pelos quais o sujeito aprende e, estando com esse sujeito que aprende, compreende algumas possibilidades de sua aprendizagem.

É preciso estar atento as faces do investigado, bem como com a busca, pois, assim como em outras pesquisas, a fenomenologia não traz consigo uma certeza completa do fenômeno, já que poderá haver outra perspectiva de investigação que mostre outros significados. Voltando ao nosso exemplo, como a aprendizagem se mostra por perspectivas, como o sujeito está em constante aprendizagem, sempre o fenômeno interrogado poderá mostrar-se de modos distintos.

O que se pode afirmar acerca da abordagem fenomenológica é que o pesquisador fenomenólogo busca compreender o fenômeno interrogado. Paulo, Amaral e Santiago (2010) diz que,

o êxito na pesquisa de abordagem fenomenológica está na apreensão do sentido do que se mostra, na atribuição de significados à experiência vivida e na explicitação do compreendido que traz, com clareza, a estrutura do fenômeno interrogado. (PAULO, AMARAL e SANTIAGO 2010, p. 73).

Isso indica a necessidade do investigador colocar-se diante do fenômeno e, orientado pela experiência vivida, buscar os significados do que interroga.

A hermenêutica é um dos modos que essa busca se dá. Ela surgiu antes da fenomenologia, de origem grega, tem o significado de “interpretar”. Está relacionado ao deus-mensageiro-alado Hermes, da mitologia grega, que tinha como finalidade a interpretação relacionada à linguagem, visando o que está além do escrito para que se obtenha a compreensão. A pesquisa que busca, via hermenêutica, o sentido do que se mostra, intenciona, por meio da reflexão, a compreensão do que não está sendo dito, do que está nas entrelinhas ou que fica subentendido. Visa estabelecer um significado ao estudado. Há, porém, mais de uma perspectiva a ser compreendida e isso possibilita um campo inacabado de interpretações de modo que o conhecimento do que está sendo investigado seja um processo dinâmico e constante.

É preciso ter cautela na abordagem fenomenológica para que não exista a sua influência nas compreensões. Ou seja, é necessário que o pesquisador se compreenda como um sujeito que percebe, interroga e compreende através da realidade contextual do que está inserido. O pesquisador não é capaz de se colocar „no lugar“ do escritor do texto, mas deve buscar

compreender sua interpretação, o contexto no qual o texto foi escrito, o sentido histórico e temporal que ele possa ter. Segundo D'Agostini (2002), “o eu que enfrenta o texto na interpretação não é um eu, mas um cruzamento fortuito e multiforme de experiências em geral linguística (tradições, costumes, informações, ideologias e etc)”. (D' AGOSTINI, 2002, p.144).

Assim, na pesquisa fenomenológica-hermenêutica o pesquisador busca interpretar o sujeito no mundo em que vive levando em consideração o contexto histórico da realidade. A busca é pela compreensão do fenômeno que se mostra, como ele se apresenta na perspectiva da interrogação do pesquisador.

Este trabalho caracteriza-se como qualitativa pois não busca uma solução ou resposta, mas sim significados para o que interroga: a Geometria Fractal como possibilidade didática. Com a intenção de compreender alguns aspectos dessa geometria, e o modo pelo qual ela pode favorecer a aprendizagem matemática de alunos do Ensino Médio, voltamo-nos para ela. Para isso fomos a textos que trazem as ideias da Geometria Fractal fazendo um estudo hermenêutico para compreender suas características. Essa compreensão abre a possibilidade do trabalho na sala de aula de Matemática.

A intenção na pesquisa deu-se por entendermos que a Geometria Fractal é pouco trabalhada na Educação Básica não sendo apresentada ou discutida na maioria dos livros didáticos. Procuramos compreendê-la para construir uma sequência didática que possibilite-nos trabalhá-la na sala de aula da Educação Básica.

O estudo de qualquer geometria é importante para a compreensão do espaço e de como lidar com as situações no dia a dia. Segundo os PCN (2001) no bloco espaço e forma,

Os conceitos geométricos constituem parte importante do currículo de matemática do ensino fundamental, porque, por meio deles, o aluno desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive. (BRASIL, 2001, p.56).

A Geometria Fractal possibilita o desenvolvimento da visualização e permite a contextualização de aspectos do mundo em que o aluno vive permitindo explorar situações da vida cotidiana. Tais situações podem contribuir para a atribuição de significados pelo aluno e, conseqüentemente, para a aprendizagem Matemática. O Currículo do Estado de São Paulo (2011) enfatiza que,

[...] há o fato de que, em qualquer disciplina, conhecer é sempre conhecer o significado, ou seja, o grande valor a ser cultivado é a apresentação de conteúdos significativos para o aluno. O significado é mais importante que a utilidade prática, que nem sempre pode ser associada ao que se ensina. (SÃO PAULO, 2011, p. 45).

Procurando favorecer uma aprendizagem com significado o estudo das diferentes Geometrias é importante, pois, através delas, os alunos podem perceber a relação entre diferentes conteúdos trabalhados de modo isolados ou fragmentados. Por exemplo, ao se explorar os fractais pode-se abordar situações em que se valorizem o estudo das progressões geométricas, dos logaritmos, das funções exponenciais. Também podemos salientar que com o estudo da Geometria Fractal, o professor pode em suas aulas retomar conceitos já trabalhados pelos alunos na Geometria Euclidiana em anos anteriores, como por exemplo, dimensões do ponto, reta, plano e espaço. Com o objetivo de explorar essa geometria – a fractal - busca-se desenvolver situações que conduzam o aluno a produção do conhecimento matemático por meio da investigação. Desse modo pode-se dizer que, para esta pesquisa, envolvemo-nos com um estudo que visa compreender como a geometria fractal permite um trabalho na sala de aula do ensino médio possibilitando aos alunos ver as aplicações de ideias (ou conceitos) da matemática na própria matemática.

A seguir vamos abordar brevemente como foi o processo de evolução da Geometria, desencadeando em diferentes estudos e no desenvolvimento de diferentes geometria, bem como essa evolução proporcionou ao Benoit Mandelbrot reunir obras de grandes matemáticos e artistas, até então conhecidos como “monstros matemáticos”, e definir características e determinaram a Geometria Fractal.

3 A EVOLUÇÃO DA GEOMETRIA E OS MONSTROS FRACTAIS

A geometria que geralmente é trabalhada nas escolas é a Geometria Euclidiana (GE). Essa geometria ensinada nas escolas, apresentada nos currículos e nos livros didáticos, teve início com Euclides em aproximadamente 300 a.C. Euclides foi o responsável por reunir diversas descobertas já feitas por matemáticos e filósofos até a sua época e, também, responsável por estruturar em axiomas e teoremas as informações reunidas e posteriormente estudadas. Segundo Thomaz e Franco (2007,2008), a obra clássica “Os elementos” traz conteúdos da Geometria Plana, da Teoria dos Números e da Geometria Espacial. Os assuntos estão distribuídos em 13 volumes, dos quais apresentam 465 proposições, sendo 93 problemas e 372 teoremas.

Durante séculos as informações transmitidas sobre a Geometria se baseavam exclusivamente na GE até que, decorrente da tentativa de demonstrar o 5º axioma proposto por Euclides, alguns matemáticos como Karl Frederich Gauss em 1824, Nicolai Lobachevsky em 1829, Janos Bolyoi em 1832, Georg Bernhard Riemann em 1854 entre outros, contribuíram para a formulação de outras geometrias.

O quinto axioma traduzido por Irineu Bicudo (2009) diz que,

E, caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores que dois retos, sendo prolongada as duas retas, ilimitadamente, encontra-se no lado no qual estão os menores que dois retos (EUCLIDES, 2009)

As discussões acerca do 5º axioma de Euclides favoreceu o desenvolvimento das Geometrias Não Euclidianas (GNE). A GNE inclui a Geometria Hiperbólica (em cujos modelos existem mais de uma paralela a uma determinada reta), a Geometria Elíptica (na qual não existem retas paralelas), a Geometria Esférica (em que a soma dos ângulos internos de um triângulo pode ser superior a 180°) e, em meados do século XX, o matemático Benoit Mandelbrot, desenvolveu o conceito denominado *fractal*, que, embora tenha relações ainda euclidianas, traz inovações no que se refere a questão da dimensão dos objetos que estuda.

A Geometria dos Fractais já é aplicada em diversos ramos de pesquisas como a teoria do Caos, dada como uma situação de desordem uma vez que, segundo Barbosa (2005), “a estrutura fragmentada do fractal fornece certa ordem ao Caos e busca padrões dentro de um sistema por vez aparentemente aleatório” (BARBOSA, 2005, p. 10).

Antes de se iniciarem os estudos sobre os fractais alguns matemáticos como George Cantor, Giuseppe Peano, Helge von Koch e Walcaw Sierpinski, já haviam desenvolvido

formas que não poderiam ser classificadas na Geometria Euclidiana. Essas formas eram nomeadas como “monstros matemáticos”, pois eram formadas após um processo de iterações, que consiste na repetição sucessiva de construções geométricas. Para que seja possível compreender o sentido das iterações bem como das imagens construídas na Geometria Fractal vamos passar a análise de alguns exemplos.

A figura 1 apresenta o triângulo de Sierpinski, construído através da sucessiva retirada do triângulo central de cada imagem. Nota-se que há um triângulo inicial que é equilátero – uma figura da geometria euclidiana – e que, para se obter o fractal, determina-se os pontos médios dos lados desse triângulo e, unindo-os, obtém-se um novo triângulo equilátero. Esse novo triângulo é retirado (ficando um buraco). O processo é repetido infinitamente com os triângulos restantes (processo iterativo).

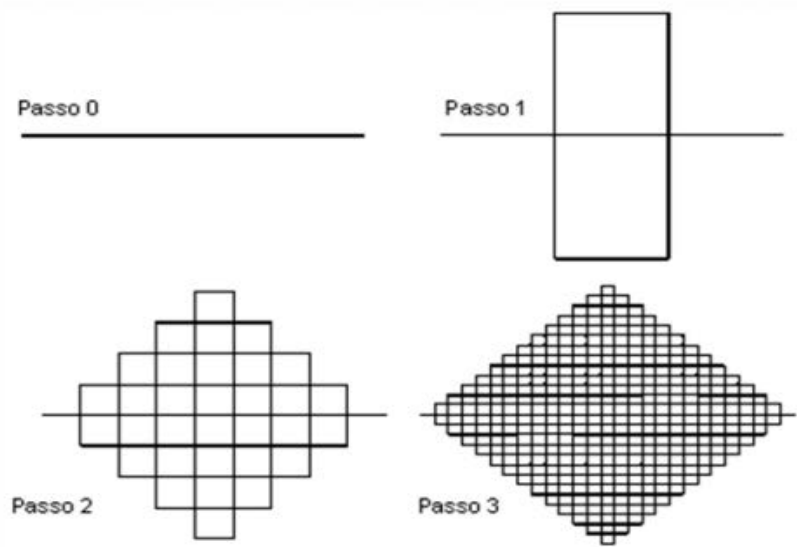
Figura 1: Triângulo de Sierpinski



Fonte: COSTA, Geometria Fractal, Impa (2006), p.4.

Outros exemplos de construções também classificadas como monstros matemáticos são a Curva de Peano e a Curva de Koch. A curva de Peano é obtida a partir de um segmento de reta que é substituído por uma curva com nove segmentos, sendo cada novo segmento $1/3$ do segmento original. A partir de cada novo segmento de reta é realizado novamente o mesmo procedimento, como ilustrado na figura 2.

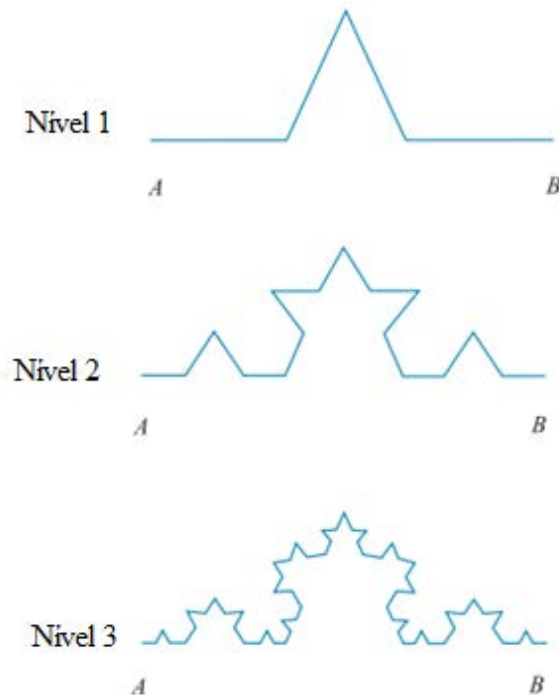
Figura 2: Curva de Peano.



Fonte: BONFIN; CASTRO, Caderno de História da Ciências (2006).

A Curva de Koch também é um fractal que inicia com um segmento de reta. O segmento é dividido em três partes iguais, retira-se o segmento central e o substituímos por outros dois segmentos congruentes. Após essa iteração obtém-se quatro segmentos congruentes e a partir de cada novo segmento se repete a operação. Observe a figura 3.

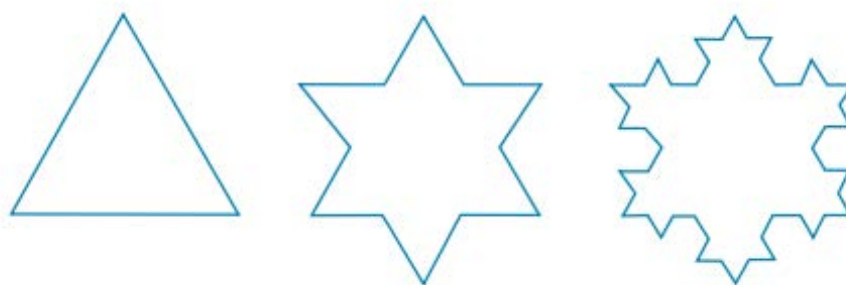
Figura 3: Curva de Koch



Fonte: SALLUM (2005), RPM 49, p.28.

Outra possibilidade de se obter a Curva de Koch é por meio de um triângulo equilátero, sendo cada lado do triângulo um segmento de reta. Nesse contexto a curva recebe o nome de Ilhas de Koch, mas conhecida como “Flocos de Neve”. Na figura 4 temos uma possibilidade dessa curva.

Figura 4: Ilhas de Koch ou Flocos de Neve.



Fonte: SALLUM (2005), RPM 49, p.33

3.1 GEOMETRIA DOS FRACTAIS

Para compreender como essas figuras, antes chamadas de monstros matemáticos, foram classificadas, vamos nos deter de modo breve na teoria da Geometria dos Fractais. Segundo Barbosa (2005), Benoit Mandelbrot é considerado o “Pai da Geometria dos Fractais”. Atualmente essa Geometria desenvolve uma linha de pesquisa na matemática responsável por dar sentido a acontecimentos da natureza.

Benoit Mandelbrot nasceu na Polónia em 1924. Devido a 2ª guerra mundial sua família emigrou para França. Sua escolaridade e vida acadêmica aconteceram entre Estados Unidos e França. As pesquisas de Mandelbrot tiveram início com os questionamentos feitos sobre a natureza, em que na Geometria Euclidiana já não era suficiente para dar-lhe as respostas. Com sua pesquisa – a Geometria dos Fractais – Mandelbrot auxiliou no desenvolvimento do fenômeno da Probabilidade Errática e nos métodos de auto-semelhança em probabilidade. Atualmente seus objetos fractais encantam a matemática moderna e a arte.

3.1.1 Autossimilaridade ou auto-semelhança

A principal característica de um fractal é a autossimilaridade, recebe essa importância pois é a mais visível em todas as formas que classificamos como fractal. Essa característica consiste em, se tomarmos qualquer parte da forma, ela é semelhante ao todo. Por isso quando observamos a construção de uma figura fractal existe a similaridade (ou autosemelhança). Ainda, o processo de obtenção de um fractal é iterativo, isto é, repete-se de modo infinito mantendo sempre a semelhança com o original.

Num fractal segundo Capra (1996),

Autossimilaridade é que seus padrões característicos são repetidamente encontrados em escalas descendentes, de modo que suas partes, em escalas menores, em qualquer escala, são, na forma, semelhantes ao todo. (CAPRA, 1996, P.118).

Na natureza encontramos objetos com essas características de autossimilaridade, entretanto, segundo Janos (2008), a autossimilaridade encontrada em objetos da natureza não é exata como os fractais construídos a partir de formas geométricas. Na natureza essa semelhança e regularidade é aproximada e, por isso, recebe o nome de auto-semelhança estatística.

3.1.2 Complexidade infinita

Essa característica está relacionada com a iteração infinita, pois consiste na repetição dos processos por um número ilimitado de vezes. Usando a ideia de complexidade infinita obtemos os fractais como figuras geométricas, porém somente através da computação gráfica, dada a sua perfeição. Na natureza não é possível encontrar essa perfeição havendo, apenas, formas aproximadas. Desse modo pode-se entender que os fractais são modelos para estudo das formas da natureza.

3.1.3 Dimensão fractal

Na Geometria Euclidiana diferenciamos as figuras de acordo com as suas dimensões, que podem variar de zero (0) até três (3). O ponto, na geometria euclidiana, possui dimensão zero, as retas possuem dimensão 1 (são unidimensionais), as figuras planas tem dimensão 2 (bidimensional) e as figuras espaciais, as que estão presentes no cotidiano, embora também como objetos modelados, tem dimensão 3 (tridimensional).

Para Barbosa (2005) a definição de Dimensão de um Fractal pode ser feita através da comparação de objetos nas dimensões 1, 2 e 3 repartindo-os em objetos autossimilares e estabelecendo o coeficiente de proporcionalidade.

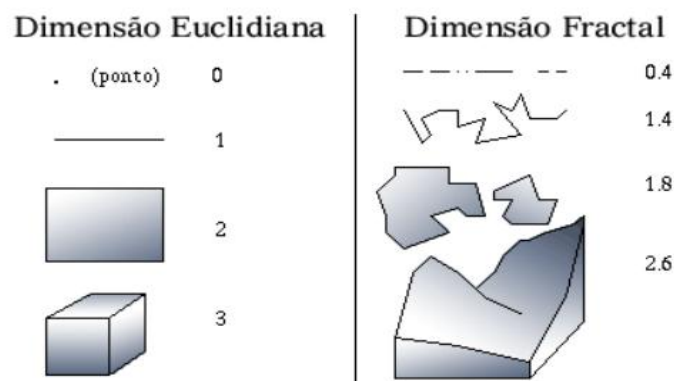
Na maioria dos fractais a dimensão é um número racional e sua dimensão diz respeito ao espaço que a figura representa. Por exemplo, uma curva irregular tem dimensão entre 1 e 2 uma vez que embora ela não represente simplesmente uma reta também não ocupa todo o espaço de um plano.

Para exemplificar a dimensão de um fractal Janos (2008) traz um experimento, como segue:

Pegue uma folha de papel de 5x10 cm e amasse-a até formar uma bola de papel. Esta bola de papel tem dimensão entre 2 e 3. A tentativa de construir um objeto de 3 dimensões a partir de objetos de 2 dimensões produz estruturas fractais quebradiças com espaços vazios irregulares como a bola de papel. (JANOS, 2008, p. 74).

Com esse exemplo dado por Janos (2008) é possível compreender o sentido da dimensão fractal. Embora a bola de papel aparente uma esfera da geometria euclidiana (de dimensão 3) jamais o papel amassado irá preencher completamente o espaço e, portanto, tem dimensão entre 2 e 3 (algo entre uma forma plana e uma forma espacial da geometria euclidiana). A figura abaixo traz uma comparação entre a dimensão dos objetos da Geometria Euclidiana e os da Geometria Fractal.

Figura 5: Comparação entre a dimensão dos objetos da Geometria Euclidiana e da Geometria Fractal

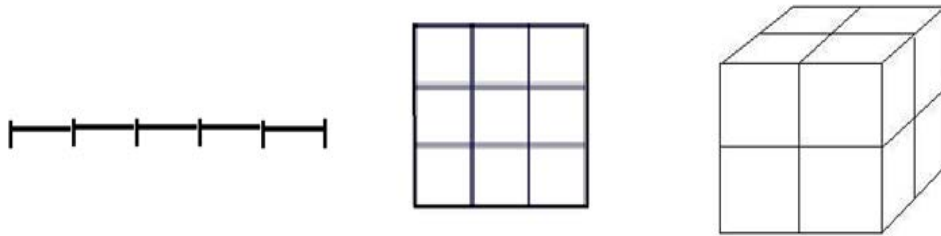


Fonte: SIQUEIRA, (2005), p. 24.

Segundo Barbosa (2005) podemos entender a dimensão de um fractal a partir da comparação feita com um segmento, um quadrado e um cubo.

Para tanto vamos considerar as divisões desses objetos da geometria euclidiana (o segmento, o quadrado e o cubo) conforme a figura a seguir.

Figura 6: Divisão de um segmento de reta, de um quadrado e de um cubo



Fonte: BARBOSA, 2005, p. 67.

Para compreender o sentido da dimensão fractal vamos considerar cada uma das partes em que as figuras acima foram divididas e o respectivo fator de aumento. O fator de aumento, segundo Barbosa (2005) ou *coeficiente de proporcionalidade* é o que indica quantas vezes cada peça auto-similar ao todo precisa ser ampliada para ter o tamanho original. Considerando os exemplos acima podemos ver que,

- O fator de aumento no segmento de reta é igual a 5
- O fator de aumento no quadrado é 9 ou 3^2
- O fator de aumento no cubo é 8 ou 2^3

Então, o número de peças “n” necessário para se obter o todo (do segmento, do quadrado e do cubo) pode ser expresso como $n = m^D$, em que “m” é o fator de aumento e “D” a dimensão do fractal. Ou seja, se considerarmos o segmento de reta pode-se escrever $5 = 5^1$, para o quadrado temos $9 = 3^2$ e para o cubo $8 = 2^3$.

Logo podemos expressar a dimensão de um fractal pela expressão $n = m^D$, conforme acima. Porém, como determinar D? Para isso pode-se usar os logaritmos. Ou seja,

$$D = \frac{\log n}{\log m} \quad (1)$$

Para compreendermos o modo pelo qual se pode determinar a dimensão fractal vamos considerar um exemplo: a curva de Koch.

Considere a curva de Koch. Na primeira iteração, conforme se observa no nível 1 da figura 3, há 4 segmentos congruentes, logo $n = 4$. Cada um desses segmentos tem comprimento igual a $1/3$ do segmento original. Portanto, pode-se dizer que o fator de

aumento é $m = 3$. Isto é, temos que aumentar 3 vezes cada segmento para obter o segmento original. Com isso se pode dizer que a dimensão da curva de Koch é dada por:

$$D = \frac{\log 4}{\log 3}$$

$$D = \frac{0,60206}{0,47712}$$

$$D = 1,262$$

O valor acima encontrado mostra que a dimensão fractal da curva de Koch está entre 1 e 2. Isso porque a curva de Koch não é uma reta; entretanto não cobre todo o plano, portanto não atingindo a dimensão 2.

A compreensão da Geometria dos Fractais, tal qual entendemos, abre possibilidade para um trabalho em sala de aula do Ensino Médio em que os alunos sejam inseridos em situações que proporcione resolução de problemas nas quais se buscam relações de regularidade e padrões, lei de formação de uma sequência que pode culminar no trabalho com funções e, obviamente, num trabalho com as propriedades de logaritmos a partir do cálculo da dimensão fractal. Segundo Barbosa (2005) a Geometria dos Fractais permite fazer conexão com outras ciências, quando proporciona o estudo das formas presentes na natureza. Ainda, possibilita o trabalho com a tecnologia com programas que permitem gerar fractais (uma vez que são processos iterativos) além de possibilitar o desenvolvimento do senso estético com a possibilidade de um trabalho com a arte nos fractais.

Considerando algumas dessas possibilidades construímos uma sequência de tarefas para trabalhar com conteúdos de Matemática presentes no Currículo do Estado de São Paulo a partir das explorações da geometria dos fractais. As tarefas podem ser desenvolvidas com alunos de diferentes níveis de ensino uma vez que permitem aprofundar conteúdos diversos. No entanto, nossa proposta é para a sala de aula de Matemática do Ensino Médio. Optamos pela construção de alguns fractais com uso de recursos manipulativos (recorte e colagem). Diante disso entende-se que, antes de apresentar a sequência de tarefas construída é importante destacar o sentido do trabalho com materiais (ou recursos) manipulativos na sala de aula de Matemática.

4 MATERIAL MANIPULATIVO NA AULA DE MATEMÁTICA

Durante muitos anos acreditava-se que os materiais manipulativos não agregavam nenhum conhecimento ao desenvolvimento do aluno. Segundo Fiorentini e Miorim (1990), as atividades que utilizavam material ou objeto manipulativo era considerada desnecessária na vida escolar uma vez que a função do professor era transmitir informações.

Os suíços Johann Heinrich Pestalozzi (1746- 1827) e Piaget (1896- 1980) contribuíram para uma mudança de concepção em relação a tais recursos. Defenderam que os materiais manipulativos têm um importante papel no desenvolvimento da criança e na sua aprendizagem. Para Piaget dos 7 aos 12 anos a criança está na fase das operações concretas, em que se desenvolve a capacidade de abstrair. Ou seja, dos 7 aos 12 anos o indivíduo desenvolve a potencialidade de ir da ação à abstração.

Os materiais manipulativos são, segundo Reys (1971, apud Matos e Serrazina, 1996) “objetos ou coisas que o aluno é capaz de sentir, tocar, manipular e movimentar. Podem ser objetos reais que têm aplicação no dia a dia ou podem ser objetos que são usados para representar uma ideia.”. Nesse sentido, tal qual entendemos, o trabalho com fractais a partir de recortes, dobraduras ou mesmo desenhos pode ser compreendido com uso de materiais manipulativos. Ou seja, quando dizemos do uso de materiais manipulativos não se diz apenas do que pode ser tocado, mas, antes, se diz do que pode ser percebido e que possibilita a produção de sentido pelo aluno.

Nacarato (2005) afirma que trabalhar com materiais manipulativos estimula a exploração do aluno e permite o estabelecimento de relações entre o manipulável e os conceitos (ou ideias) explorados na manipulação pelo professor o que pode gerar o conhecimento ou a aprendizagem.

Desse modo, na sala de aula, cabe ao professor preparar um ambiente que estimule a aprendizagem propondo tarefas com objetivos bem definidos e clareza do modo pelo qual as questões para exploração das ideias irão ser feitas.

Segundo Pais (2000),

O uso inadequado de um recurso didático pode resultar em uma inversão didática em relação a sua finalidade pedagógica inicial. Isso ocorre quando o material passa a ser utilizado com uma finalidade em si mesmo em vez de ser visto como um instrumento para a aquisição de um conhecimento específico. (PAIS, 2000, p. 13).

Ou seja, o material em si (ou por si só) não tem a possibilidade de facilitar a aprendizagem; ele deve ser trabalhado com conhecimento do que se pode e quer explorar e com objetivos e finalidades definidos pelo professor.

A metodologia adotada para o trabalho em sala de aula também tem que ser definida e pode variar de acordo com a turma e seu interesse. O uso do material pedagógico é rico em possibilidades e pode orientar o professor a dar significado a conteúdos atuais ou futuros, a passagem do concreto para o abstrato com significado pode auxiliar os alunos em temas mais complexos que serão trabalhados na própria matemática.

A seguir mostrarei algumas atividades que usam o material manipulativo como ponto de partida para a exploração de situações de investigação e produção do conhecimento envolvendo a Geometria Fractal.

5 ATIVIDADES

As atividades que neste trabalho iremos propor, tem por finalidade abrir possibilidades ao professor em sala de aula com a Geometria Fractal. Tal qual entendemos é possível, por meio de tarefas da Geometria Fractal, dar significado a alguns conteúdos matemáticos como logaritmo ou progressão geométrica mostrando aplicações na própria Matemática.

A atribuição de significado ao conteúdo matemático possibilita ao aluno dar sentido ao que está sendo feito e, portanto, compreender os procedimentos e as regras matemáticas. Buscamos trazer atividades que explorem conteúdos propostos no Currículo do Estado de São Paulo e espera-se favorecer a compreensão da Geometria Fractal vendo-a como uma forma de aplicação dos conteúdos que se aprende na Matemática.

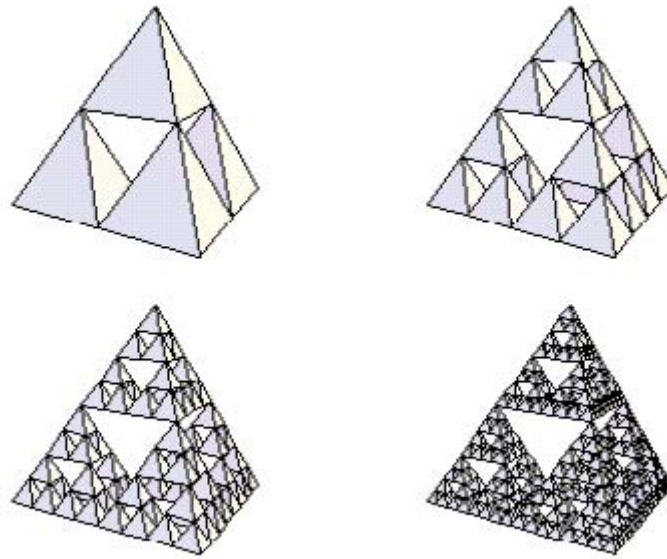
5.1 PIRÂMIDE DE SIERPINSKI

O matemático polonês Waclaw Sierpinski (1882- 1969) foi professor na Escola Lvov - Warsaw, na cidade de Lvov, e teve grande participação na construção dos “monstros” matemáticos. Em 1916 ele apresentou seu trabalho e, este, em sua homenagem, foi chamado de “Triângulo de Sierpinski”. Como já dissemos anteriormente, a construção do triângulo de Sierpinski consiste na divisão de um triângulo equilátero em quatro novos triângulos também equiláteros a partir do ponto médio de cada lado e, em seguida, da retirada do triângulo central. Procedimento semelhante pode ser adotado na elaboração de figuras tridimensionais (3D) com o que se obtém a “Pirâmide de Sierpinski”.

O sólido inicial, usado na construção do fractal 3D, é um tetraedro regular. Em cada face do tetraedro se repete o processo usado na obtenção do triângulo de Sierpinski. Entretanto serão retirados quatro tetraedros do sólido original. Esse processo pode ser repetido infinitas vezes, o que caracteriza a complexidade infinita dos fractais.

A seguir trazemos a representação das primeiras iterações da pirâmide de Sierpinski:

Figura 7: Pirâmide de Sierpinski



Fonte: PARANÁ (2013) p.6.

Disponível em

http://www.pibid.ufpr.br/pibid_new/uploads/matematica2011/arquivo/674/Geometria_Fractal.pdf.

5.1.1 Cartão fractal 3D¹

A atividade a seguir foi baseada em um trabalho proposto pela Universidade Federal do Paraná, realizado no Curso de Verão de 2013, tem o objetivo explorar a dimensão do fractal construído no item anterior. Esse estudo possibilita discutir a definição e as propriedades de logaritmos no contexto da Geometria Fractal.

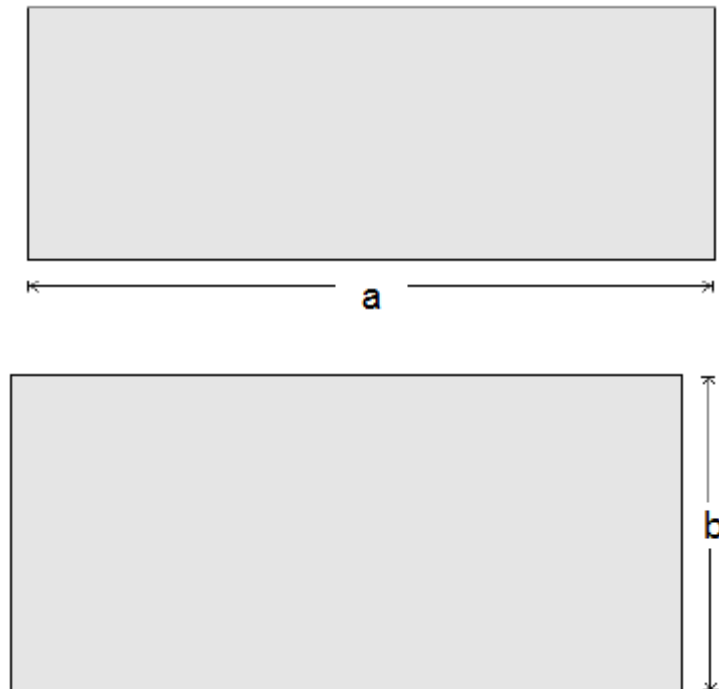
Para esta atividade será necessário uma folha de papel *color set*, escolhido devido a sua textura, régua e tesoura.

A seguir descrevemos o procedimento para a obtenção do fractal.

1. Meça o comprimento (a) e a largura (b) da folha.

¹ Esta tarefa foi construída a partir de um vídeo disponibilizado no Youtube. Embora no vídeo não haja descrição de como o cartão poderá ser feito, é interessante ver o resultado obtido. Para tanto se pode acessar o link <<https://www.youtube.com/watch?v=rhkxmBsOZMg>> Acesso em 30/03/2016

Figura 8: Passo 1- cartão de Sierpinski



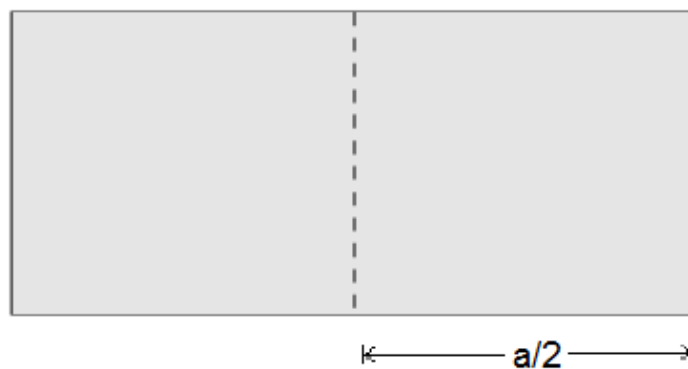
Fonte: PARANÁ (2013) p. 7.

Disponível em

http://www.pibid.ufpr.br/pibid_new/uploads/matematica2011/arquivo/674/Geometria_Fractal.pdf

2. Dobre a folha ao meio. Vinque a dobra.

Figura 9: Passo 2- cartão de Sierpinski



Fonte: PARANÁ (2013) p. 7.

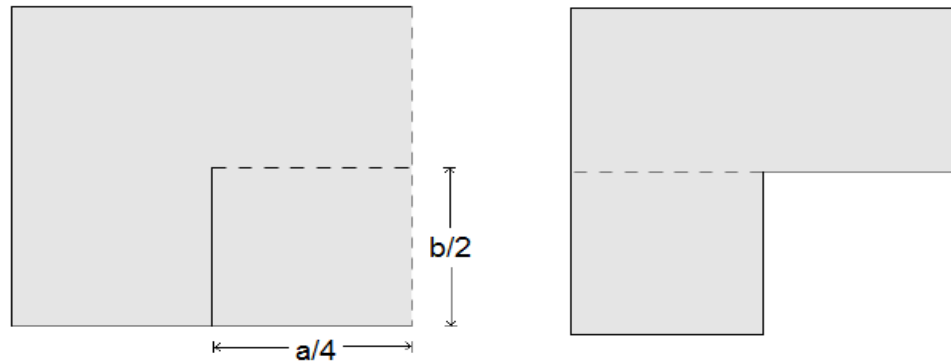
Disponível em

http://www.pibid.ufpr.br/pibid_new/uploads/matematica2011/arquivo/674/Geometria_Fractal.pdf

3. Sem abrir o papel, encontre, por meio de dobra (ou usando a régua) a metade do lado horizontal ($a/4$) e também a metade do lado vertical da folha ($b/2$). Desdobre e

recorte sobre a linha de dobra obtida na horizontal até o encontro da dobra feita verticalmente. Dobre o novo retângulo de lados $a/4$ e $b/2$ para o interior. Observe a figura abaixo.

Figura 10: Passo 3- cartão de Sierpinski



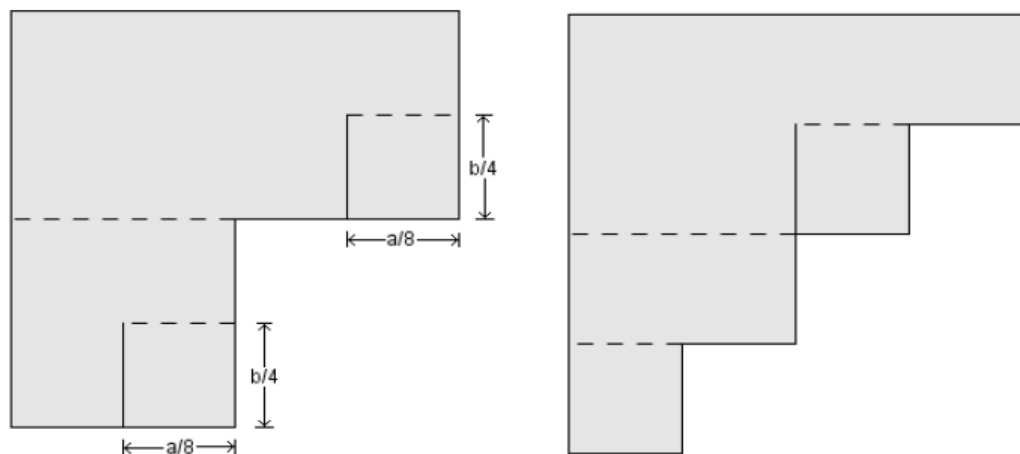
Fonte: PARANÁ (2013) p. 7.

Disponível em

http://www.pibid.ufpr.br/pibid_new/uploads/matematica2011/arquivo/674/Geometria_Fractal.pdf>

4. Repita o mesmo processo na parte de cima e de baixo do hexágono restante obtendo os retângulos de lados $b/4$ e $a/8$, conforme figura a seguir.

Figura 11: Passo 4- cartão de Sierpinski



Fonte: PARANÁ (2013) p.7.

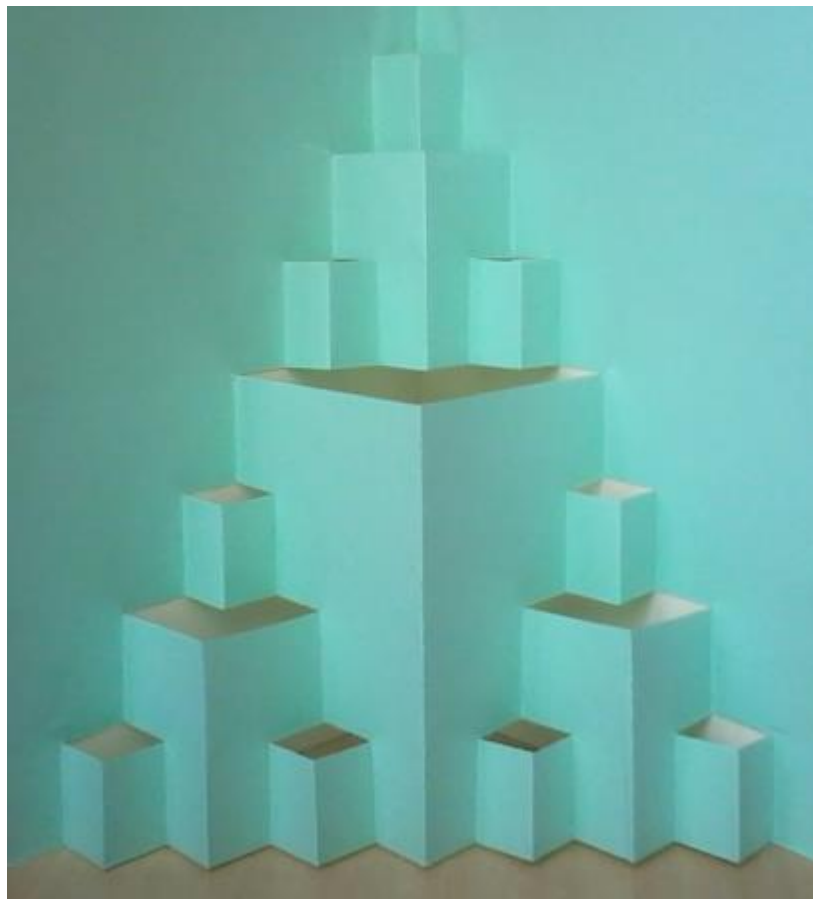
Disponível em

http://www.pibid.ufpr.br/pibid_new/uploads/matematica2011/arquivo/674/Geometria_Fractal.pdf>

5. Continue o processo quantas vezes desejar e for possível (dada a limitação do papel).

6. Após a terceira iteração, o resultado é semelhante ao apresentado na figura abaixo.

Figura 12: Cartão 3D após a terceira iteração



Fonte: PARANÁ (2013) p. 7.

Disponível em

http://www.pibid.ufpr.br/pibid_new/uploads/matematica2011/arquivo/674/Geometria_Fractal.pdf

A construção do cartão descrito acima possibilita ao professor explorar ideias relativas a alguns conteúdos matemáticos, como, área de superfícies, volume do sólido gerado e progressão geométrica, nesta atividade optei por trabalhar com logaritmo. Através da discussão da dimensão de um fractal, retomando as ideias acima expostas e explorando, com os alunos, qual a dimensão do fractal obtido, pode-se abrir oportunidade para a introdução do cálculo dessa dimensão. A dimensão de um fractal está relacionada com quantas partes iguais existem após a primeira iteração (n) e o seu fator de aumento (m).

Conforme nos diz Barbosa (2005), se tomamos como base um ponto da geometria euclidiana sabemos que sua dimensão é zero, uma reta tem dimensão 1 (comprimento), um plano tem dimensão 2 (comprimento e largura) e um sólido geométrico tem dimensão 3

(comprimento, largura e profundidade). Na Geometria Fractal, nota-se que um fractal não tem dimensões dessa natureza. Ou seja, um fractal não é apenas um ponto, não é uma linha, não é uma figura plana como as da geometria euclidiana e nem um sólido. Logo, sua dimensão é diferente. Em que consiste tal diferença? Como se observa na confecção dos fractais, e na sua própria definição, os elementos da geometria euclidiana (triângulo, pirâmide, etc) são fracionados para que seja possível obter um fractal. Logo, sua dimensão não é inteira, como já relatado anteriormente, essa exploração pode ser realizada em sala de aula.

Na confecção do cartão vê-se que quando se realiza a primeira iteração o que se obtém são retângulos todos de medidas $b/2$ e $a/4$, totalizando três retângulos (em uma face) o que faz $n = 3$, isto é, o número de figuras obtidas é igual a 3. Ainda foram retirados da folha inicial um retângulo de mesmas medidas ($b/2$ e $a/4$) de tal modo que, para se obter a medida da folha antes da primeira iteração, temos que ampliar a medida da figura retirada duas vezes (o dobro). Sendo assim, o fator de aumento é 2, ou $m = 2$.

Sabendo que para determinar a dimensão de um fractal usamos a equação (1),

$$D = \frac{\log n}{\log m}$$

Para o fractal acima construído, temos que:

$$D = \frac{\log n}{\log m}$$

$$D = \frac{\log 3}{\log 2}$$

$$D = \frac{0,47712}{0,30103}$$

$$D = 1,585$$

Esse resultado evidencia que a dimensão do fractal é um valor entre 1 e 2. O que isso significa? Se nos voltamos para o processo de construção do fractal é possível ver que, apesar de realizar os procedimentos a partir de uma figura plana (uma folha de papel que é plana e, na geometria euclidiana tem dimensão 2) recortamos o papel de tal forma que as dobras dessa figura plana foram retiradas (deixando-a “esburacada”) e assim não temos mais uma figura plana da geometria euclidiana mas também não a reduzimos a uma linha. “Diminuímos” sua dimensão.

É importante destacar que nessa atividade é recomendado que os alunos já consigam trabalhar com as propriedades de logaritmo para que eles compreendam os passos realizados para se obter a dimensão do fractal.

Após calcularem a dimensão do fractal os alunos podem ser questionados para que, por meio de uma investigação, cheguem a algumas conclusões. Pode-se por exemplo questioná-los sobre:

- Como se pode validar o resultado encontrado?
- Qual propriedade de logaritmo garante que não houve erro nos procedimentos realizados?
- Tente encontrar a dimensão do cartão fractal sem usar propriedades de logaritmo. Você chegou ao mesmo resultado?
- A partir da pergunta anterior que conclusões você observa sobre a utilização de logaritmos?

A reflexão e o questionamento são ações fundamentais no processo de aprendizagem do aluno, se entendermos que o aprender matemática é um modo ativo de envolver-se com o que é feito, conjecturando, levantando hipóteses e argumentando com vistas a validar os resultados obtidos. Entende-se que é importante que o aluno analise a situação para chegar a conclusões. Com isso, ou seja, no processo investigativo, é possível observar se houve a produção do conhecimento.

Iremos, a seguir, explorar mais uma atividade da Geometria Fractal.

5.2 CURVA DE KOCH

Helge Von Koch foi um matemático polonês do qual pouco se tem referências. Em 1904 ele foi o responsável pela construção do fractal que recebeu o seu nome, a Curva de Koch. Segundo BARBOSA (2005, p.38) “[...] sua curva é um belo exemplo de curva sem tangencia, ela pode ser modificada com outras construções análogas e deve ter influenciado bastante Mandelbrot, pois tem muito de linhas costeiras.”.

A curva de Koch é obtida a partir da divisão de um segmento de reta. Dado um segmento temos que dividi-lo em três partes congruentes e, posteriormente, retira-se o segmento central que é substituído por outros dois segmentos de mesmo comprimento formando um triângulo equilátero sem a sua base.

Com o mesmo princípio de construção da curva de Koch, também podem ser formadas as ilhas de Koch. Para a Ilha, inicia-se com um polígono regular (um triângulo equilátero) e em cada lado é realizado o procedimento da curva de Koch, isto é, divide-se cada lado em três partes de mesma medida, retira-se o segmento do meio e o substituímos por dois de mesmo comprimento que sejam colocados formando dois lados de um triângulo equilátero. A ilha de Koch, construída a partir do triângulo equilátero, é também conhecida como Floco de Neve.

Na atividade a seguir iremos explorar a ilha de Koch. Recomendamos que, ao se trabalhar com os alunos, primeiramente seja-lhes apresentada a figura da Ilha de Koch para que as medidas e o procedimento possam ser explorados.

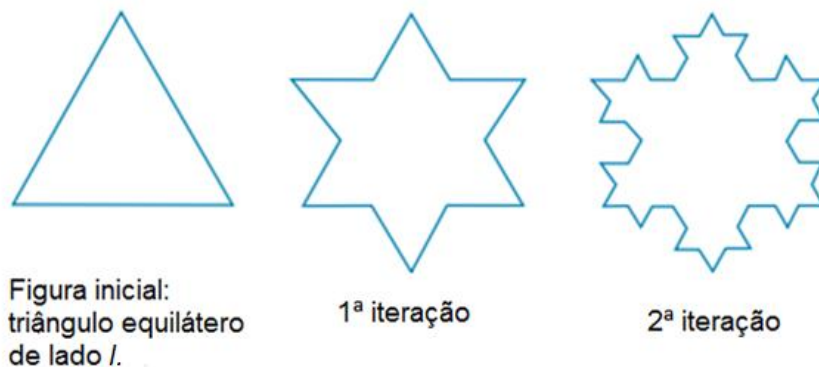
5.2.1 Relação do Floco de Neve com a progressão geométrica

A progressão geométrica (PG) é um conteúdo trabalhado no Ensino Médio e pode ser aplicado de diversas maneiras e em situações diversas. Optamos por trabalhar com a Geometria Fractal e, mais especificamente, com o Floco de Neve. Para esta tarefa, de modo distinto do anterior, não usaremos o recurso manipulativo uma vez que o fractal será construído apenas com desenho (pode-se, por exemplo, usar régua e compasso).

Considere primeiramente um triângulo equilátero genérico, isto é, um triângulo cujos lados meçam l . Para se obter o fractal, cada lado será dividido em três segmentos congruentes, logo de medida $l/3$. Em seguida, retira-se o segmento central que é substituído por outros dois segmentos iguais. .

As duas primeiras iterações estão representadas na figura a seguir.

Figura 13: Primeiras iterações do Floco de Neve.



A partir do obtido vamos iniciar a exploração. Para tanto se deve resgatar a ideia de perímetro de uma figura. No Floco de Neve pode-se ver que a cada iteração o perímetro da nova figura vai aumentando e, quanto maior o número de segmentos congruentes presentes na figura, maior será o seu perímetro. Para que os alunos percebam essa relação pode-se construir uma tabela, conforme o exemplo a seguir.

Tabela 1- Perímetro do Floco de Neve.

Nº de iterações	Quantidade de segmentos	Comprimento de cada segmento	Comprimento total do fractal- Perímetro
0	3	L	$3l$
1	3.4	$\frac{1}{3}l$	$3.4 \cdot \frac{1}{3}l = 3 \cdot \frac{4}{3}l = 4l$
2	$(3.4) \cdot 4 = 3.4^2$	$\frac{1}{3}l \cdot \frac{1}{3} = (1/3)^2 \cdot l$	$3.4^2 \cdot (1/3)^2 \cdot l = 3 \cdot (4/3)^2 \cdot l$
3	$(3.4^2) \cdot 4 = 3.4^3$	$(1/3)^2 \cdot l \cdot \frac{1}{3} = (1/3)^3 \cdot l$	$3.4^3 \cdot (1/3)^3 \cdot l = 3 \cdot (4/3)^3 \cdot l$
...
n	$(3.4^{n-1}) \cdot 4 = 3.4^n$	$(1/3)^{n-1} \cdot l \cdot \frac{1}{3} = (1/3)^n \cdot l$	$3.4^n \cdot (1/3)^n \cdot l = 3 \cdot (4/3)^n \cdot l$

Fonte: Autoria própria.

Após a construção da tabela é possível explorar que a razão de cada segmento (em relação ao anterior) é $1/3$. Logo, para determinar o perímetro da figura em cada iteração, é preciso multiplicar o número de segmentos pelo comprimento de cada um.

É importante notar que a cada iteração acrescenta-se o valor do perímetro anterior mais $1/3$ do mesmo, como é possível ver pela análise dos dados da última coluna da tabela. Pode-se, portanto, concluir que o perímetro do Floco de Neve aumenta segundo uma progressão

geométrica de razão de $4/3$ ($1 + 1/3$). Sendo essa razão maior que 1 e sabendo que o número de iterações é infinita, conclui-se que o perímetro do Floco de Neve também é infinito.

Essa atividade poder ser desenvolvida na sala de aula do Ensino Médio para apresentar como conteúdo matemático principal Progressão Geométrica, pois além deste assunto o professor pode relacionar com frações e proporções. Por ser uma situação passível de investigação o aluno poderá, a partir da construção da tabela, ir analisando os resultados obtidos com vistas à generalização do que irá ser apresentado como propriedades de PG. Obviamente é uma exploração intuitiva que, segundo o que estamos propondo, é importante para que o aluno entenda o sentido de uma sequência que poderá ser caracterizada como progressão geométrica levando-o a investigar outras possibilidades até que seja possível trabalhar conceitualmente as propriedades desse conteúdo.

Possíveis intervenções que podem ser feitas pelo professor para que o aluno investigue e generalize as propriedades de sequências desse tipo, são:

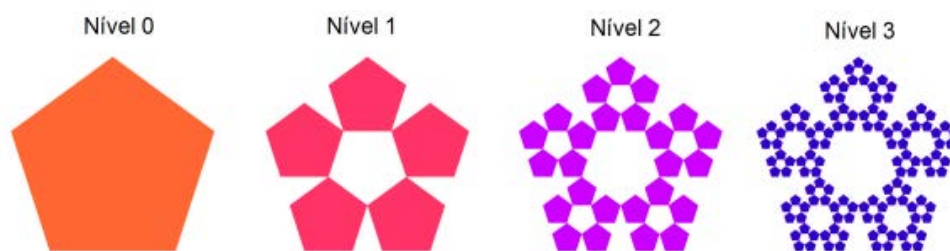
- Como podemos descobrir o perímetro em qualquer iteração do Floco de Neve?
- Se determinarmos que será realizada até a 20ª iteração como podemos descobrir a soma dos perímetro? Como isso poderia ser feito?
- E se não determinarmos um número de iterações, isto é as iterações puderem ser infinitas, será possível determinar a soma dos perímetros?

Além dessas questões, podem ser realizadas atividades intermediárias de investigação, por exemplo, adotando-se um valor numérico (uma medida) para o comprimento l , o que poderá facilitar a compreensão do aluno e as descobertas tornando-o capaz de generalizar.

5.3 FRACTAL TIPO DÜRER

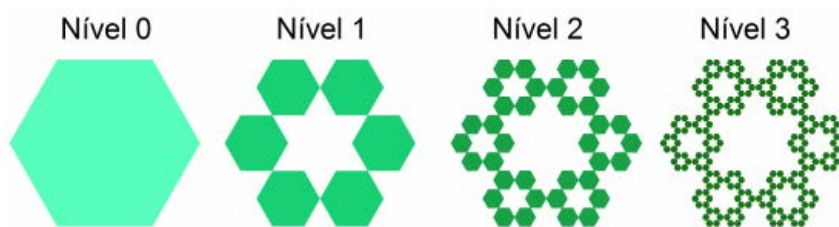
Albrecht Dürer (1472- 1528) nasceu em Nuremberga na Alemanha, foi um matemático que explorou os conteúdos de geometria e um grande pintor da época. Suas pinturas foram as primeiras a desenvolver a ideia de perspectiva. Criou por volta de 1500 os Fractais tipo Dürer, assim nomeados em sua homenagem. Tais fractais são obtidos a partir de polígonos. Abaixo trazemos alguns exemplos:

Figura 14: Fractal tipo Dürer- Pentágono 3 iterações



Fonte: RABAY (2013), p. 19.

Figura 15: Fractal tipo Dürer- Hexágono 3 iterações



Fonte: RABAY (2013), p. 19.

5.3.1 Possíveis explorações do Fractal Hexagonal de Dürer

O Fractal Hexagonal de Dürer possibilita que sejam trabalhados vários temas em sala de aula tais como, ângulos dos polígonos, semelhança de figuras planas e progressão geométrica através da contagem dos hexágonos regulares, perímetro e área.

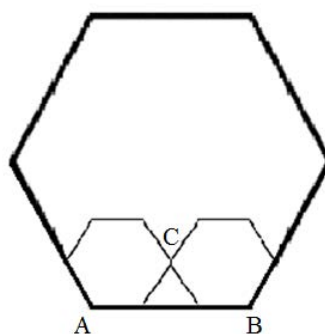
A atividade que sugerimos procura trabalhar os conceitos de semelhança de hexágonos regulares e o conceito de progressão geométrica através da contagem do número de hexágonos do fractal.

O material utilizado para realizar a atividade serão hexágonos regulares de diferentes tamanhos. Neste momento fica a critério do professor a realização da confecção dos hexágonos regulares com os alunos. Assim como toda a atividade proposta, é preciso ter pré-estabelecido um objetivo, a confecção dos polígonos busca recordar os conceitos de semelhança de figuras planas, tais como ângulos, internos e externos e proporcionalidade entre lados correspondentes. Com essa atividade os alunos interagem com as formas geométricas e suas propriedades.

Na construção do Fractal Hexagonal de Dürer, inicialmente temos um hexágono regular P. Seja AB um de seus lados. Em cada um dos vértices desse hexágono (extremidade A e B

do segmento) constrói-se outro hexágono regular menor, de forma que os vértices dos dois hexágonos (maior e menor) coincidam. É preciso que os hexágonos menores tenham um vértice em comum C, conforme mostra-se na figura 11.

Figura 16: Primeiro passo da construção do Fractal Hexagonal de Dürer



Fonte: Autoria própria

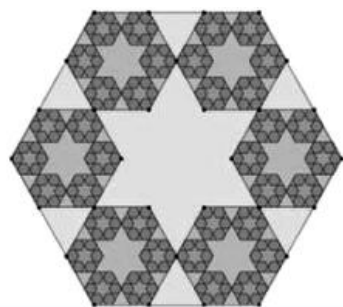
Repete-se esse procedimento para todos os lados do hexágono P. Após todos os vértices do hexágono P coincidirem com um vértice de um hexágono menor está realizada a 1ª iteração; a repetição desse processo dá origem ao Fractal tipo Dürer. A iteração infinita caracteriza um fractal pela propriedade da complexidade infinita, conforme já mencionamos.

5.3.2 Semelhança de figuras planas

Esta atividade tem por objetivo permitir o estabelecimento de relações entre figuras planas semelhantes, especificamente o hexágono usado para a construção do Fractal de Dürer.

Para tanto deve-se entregar aos alunos os hexágonos para a formação do Fractal Hexagonal de Dürer até a terceira iteração. Essa formação é composta por 1 hexágono regular grande, 6 hexágonos regulares médios e 36 hexágonos regulares pequenos. O conjunto de hexágonos e a descrição da construção do fractal possibilitará ao aluno a montagem do fractal conforme ilustra a figura abaixo.

Figura 17: Fractal Hexagonal de Dürer



Fonte: FARIA e MALTEMPI, (2012), p. 49.

Ao explorarmos o hexágono pode-se, por exemplo, destacar a possibilidade de dividi-lo em seis triângulos equiláteros. Com isso determina-se a medida de cada um de seus ângulos internos que é igual a 120° . Pode-se, também, analisar a razão entre o comprimento dos lados de hexágonos obtidos em duas iterações sucessivas verificando que ela é igual a 3. Ou seja, o comprimento do lado do hexágono da iteração 1 é igual a 3 vezes o comprimento do lado do hexágono obtido na iteração 2. Esse estudo do hexágono possibilita conclusões sobre semelhança de figuras planas.

Para tanto, pode-se propor algumas questões aos alunos, como, por exemplo:

- Com um transferidor encontre o valor do ângulo interno dos hexágonos de diferentes tamanhos (isto é, obtido em diferentes iterações). O que você observa em relação ao valor do ângulo interno do hexágono?
- O comprimento do lado de todos os hexágonos, nas diferentes iterações, é o mesmo?
- Existe uma proporção entre as medidas dos lados dos hexágonos obtidos em iterações consecutivas? Se existir essa proporção determine um valor.

Para que aluno consiga responder a essas perguntas ele pode montar uma tabela que auxilie na organização dos dados.

Observe um exemplo de tabela abaixo.

Tabela -2: Relação entre comprimento e ângulo do hexágono em um fractal de Dürer

Iteração	Comprimento do lado do hexágono	Valor do ângulo interno do hexágono
0	L	120°
1	L/3	120°
2	$(L/3) \cdot (1/3) = L/3^2$	120°
3	$(L/9) \cdot (1/3) = L/3^3$	120°
...
n	$(L/3^{n-1}) \cdot (1/3) = L/3^n$	120°

Fonte: Autoria própria.

Espera-se que o aluno reconheça a semelhança das figuras e veja que existe uma proporcionalidade entre os lados. Vale, nesse momento, relembrar os critérios de semelhança de figuras planas.

5.3.3 Contagem da quantidade de hexágonos em um fractal de Dürer

Continuando a exploração do Fractal Hexagonal de Dürer os alunos podem ser solicitados a determinar a quantidade de hexágonos obtidos em cada iteração. Essa tarefa pode ser realizada com alunos de ensino fundamental II no trabalho com sequências ou pode ser desenvolvida para trabalhar a ideia de progressão geométrica já com os adolescentes do ensino médio.

O desenvolvimento da tarefa, em nossa proposta, será direcionada ao conteúdo progressão geométrica. Nesse caso o Fractal Hexagonal de Dürer pode ser considerado uma possibilidade de aplicação da Geometria dos Fractais em um conteúdo de matemática presente no Currículo de Matemática do Estado de São Paulo.

Para organizar a contagem dos hexágonos optamos pela construção de uma tabela, conforme abaixo.

Tabela- 3: Contagem da quantidade de Hexágonos em um Fractal de Dürer

Iteração	Quantidade de Hexágonos
0	$6^0 = 1$
1	$6^0 \cdot 6 = 6^1 = 6$
2	$6^1 \cdot 6 = 6^2 = 36$
3	$6^2 \cdot 6 = 6^3 = 216$
...	...
N	$(6^{n-1}) \cdot (6) = 6^n$

Fonte: Autoria própria.

Na exploração da tabela pode-se levar o aluno a identificar que a quantidade de hexágonos (nas iterações consecutivas) forma uma progressão geométrica crescente, logo de razão positiva e o número de hexágonos vai tender ao infinito.

Os alunos podem ser questionados sobre:

- Qual a razão dessa progressão geométrica?
- Como podemos determinar uma lei (sentença matemática) que expresse (ou permita determinar) a quantidade de hexágonos em cada iteração?
- Como podemos descobrir a quantidade de hexágonos em qualquer iteração do Fractal de Dürer?
- Se determinarmos que o fractal será construído até a 20^a iteração, como podemos descobrir a quantidade total de hexágonos que já foram construídos?
- E se não determinarmos uma quantidade de iterações, isto é, se as iterações forem infinitas, podemos determinar a quantidade total de hexágonos já construídos? Justifique.

Observamos que o desenvolvimento desta atividade com os alunos pode ser feito para explorar o conteúdo de progressão geométrica com aplicação da matemática dentro da própria matemática. Tal qual entendemos, são tarefas como essas construídas a partir da exploração dos fractais que permitem um trabalho investigativo em sala de aula. Ou seja, proporciona aos alunos tarefas como, organizar as ideias, construir argumentos, levantar hipóteses, fazer

matemática. São tarefas que exploram conceitos matemáticos e permitem que o professor trabalhe em duplas, trios ou pequenos grupos e faça com que seus alunos se tornem co-responsáveis por sua aprendizagem, incentivando-os a analisar o que é proposto.

O desenvolvimento do conteúdo de Geometria Fractal pode, ainda, favorecer um trabalho articulado entre o professor de Matemática e o professor de Artes, caso se deseje construir os fractais como objetos artísticos.

6 CONCLUSÃO

Com a pesquisa realizada buscamos relacionar a Geometria Fractal com os conteúdos a serem trabalhados em sala de aula da Educação Básica, especialmente no Ensino Médio. Procuramos trazer algumas atividades que visem à investigação na sala de aula de matemática e a produção do conhecimento pelo aluno.

A Geometria Fractal possibilita explorar aspectos de uma geometria não euclidiana. Segundo o Currículo do Estado de São Paulo, destinado a Matemática e suas tecnologias (2011), as geometrias não euclidianas podem ser trabalhadas em sala de aula como um modo de discutir a percepção do espaço, trazendo para o ambiente escolar informações e discussões acerca de outras geometrias que não a de Euclides.

Atualmente a proposta para a aprendizagem dos conteúdos matemáticos, em especial a geometria, são baseados em definições já fundamentadas por teoremas e axiomas, desta maneira não existe um trabalho voltado para a investigação. Um exemplo é o estudo no qual os alunos recebem as definições sobre pontos, retas, planos e espaço e não são questionados sobre a veracidade ou situações que motivaram os matemáticos a chegarem a tais definições. Quando afirmamos que o ponto tem dimensão zero, a reta dimensão um, o plano dimensão dois e por fim que o espaço é tridimensional, essas conclusões são baseadas na geometria estabelecida por Euclides e os alunos não são motivados a investigarem se haveria outra forma de caracterizar ou determinar uma dimensão. Neste contexto as geometrias não euclidianas se tornam o ponto de partida para realizar um trabalho investigativo, propondo aos alunos atividades de aplicações da Matemática na própria Matemática.

Segundo Santos (2009),

[...] educadores passam o tempo a procurar, na ciência dos números, as tais aplicações úteis à vida desses alunos, chegando-se muitas vezes a “situações problemas” nada convincentes e, como eles próprios dizem: “forçando a barra”. Em meio à “febre de contextualizar” para o dia-a-dia, parece existir alguma lei, exigindo a Matemática ser aplicável ao mundo real para ser “entendível”. Será mesmo isso verdade? Afinal, é sabido que mesmo sem aplicações imediatas, as generalizações de diversos resultados e a busca pela consistência dos mesmos foram como estopins no desenvolvimento de grande parte do conhecimento matemático de que se tem registro. Talvez, o importante a se ter em mente é que nem tudo em Matemática possui uma aplicação imediata, e sim, que tudo em Matemática possui algum significado. (SANTOS, 2009, p. 2)

As atividades envolvendo a Geometria Fractal se responsabilizam por essa contextualização que os professores procuram. Além de serem aplicações do conteúdo

trabalhado em sala possibilita que os alunos entendam como a investigação foi, e ainda é, fundamental para que os matemáticos iniciassem o pensamento matemático.

O Currículo do Estado de São Paulo (São Paulo, 2011) destaca a importância de trazer para a experiência dos alunos situações problematizadoras para que eles sejam capazes de investigar soluções, discutir hipóteses e argumentar. Essa é uma tarefa muito difícil para o professor, mesmo que a primeira vista pareça simples. Segundo Ponte (1998), a atividade precisa ser composta de questões que causem um desequilíbrio no conhecimento já adquirido pelo aluno, é importante que eles não encontrem uma solução imediata, e perceba que será necessária a investigação, a exploração de diversas maneiras. A escolha das atividades deve ser planejada para uma turma de forma que atenda os diferentes níveis de conhecimentos dos alunos da classe.

A geometria fractal permite essa investigação do desconhecido, desde que a exploração seja conduzida pelo professor. Nas propostas de atividades desenvolvidas no decorrer deste trabalho, em diversos momentos propusemos questionamentos sobre cada situação. São questões simples que visam, por exemplo, determinar se seria possível encontrar um padrão em uma dada sequência e quais as conclusões que os alunos poderiam estabelecer na exploração desse padrão. Embora sejam questões simples, para que o aluno consiga responder coerentemente essas perguntas é preciso que ele tenha a compreensão da atividade e tenha a habilidade para generalizar as descobertas que estão sendo feitas na investigação. Essas situações que envolvem a exploração, a busca de padrões e a generalização são características de uma investigação matemática, que se baseia em três momentos, segundo os autores lidos: desafiar, dar informações e promover a reflexão.

Autores que defendem essa postura, como Ponte (1998), afirma que realizar em sala de aula uma investigação que seja capaz de promover a produção do conhecimento é essencial para o desenvolvimento das habilidades matemáticas do sujeito. Devemos ter claro, porém, que propor situações investigativas não se restringe a realizar perguntas durante a atividade. Para que a investigação aconteça é necessário planejar cuidadosamente cada ação de modo que o professor não forneça ao aluno a resposta, mas o direcione, o encaminhe para que ele consiga desenvolver o pensamento matemático.

Além disso, as tarefas investigativas, tais como foram propostas, estão em acordo com o Currículo do Estado de São Paulo (São Paulo, 2011) ao ressaltarem a importância de relacionar os três blocos do conhecimento matemático: Números, Geometria e Relações.

Segundo Currículo do Estado de São Paulo (São Paulo, 2011),

Os *números* envolvem as noções de contagem, medida e representação simbólica, tanto de grandezas efetivamente existentes quanto de outras imaginadas a partir das primeiras, incluindo-se a representação algébrica das operações fundamentais sobre elas. Duas ideias fundamentais na constituição da noção de número são as de equivalência e de ordem.

A *geometria* diz respeito diretamente à percepção de formas e de relações entre elementos de figuras planas e espaciais; à construção e à representação de formas geométricas, existentes ou imaginadas, e à elaboração de concepções de espaço que sirvam de suporte para a compreensão do mundo físico que nos cerca.

As *relações*, consideradas como um bloco temático, incluem a noção de medida, com a fecundidade e a riqueza da ideia de aproximação; as relações métricas em geral; e as relações de interdependência, como as de proporcionalidade ou as associadas à ideia de função. (SÃO PAULO, 2011, p.39)

Além de destacar os conteúdos o Currículo do Estado de São Paulo, destinado a Matemática e suas tecnologias (2011), enfatiza os aspectos metodológicos e discute os modos pelos quais os blocos devem ser trabalhados.

Naturalmente, os conteúdos dos três blocos interpenetram-se permanentemente, sendo praticamente impossível abordar um deles sem a participação quase automática dos dois outros, e é importante mencionar a positividade de tal fato. (SÃO PAULO, 2011, p.39)

Compreendendo essa importante conexão entre os blocos de conteúdos matemáticos buscamos integrar, por meio de tarefas que envolvem a Geometria Fractal, alguns conteúdos.

Ainda, segundo o Currículo do Estado de São Paulo, a geometria pode ser apresentada através de faces que dizem respeito à percepção, à concepção, à construção e à representação. Ou seja, são faces de atos de ensino que visam desenvolvimento de habilidades relativas ao ato da percepção, ao modo como as ideias são compreendidas, a forma como tais ideias são elaboradas e expressas. As atividades propostas neste trabalho buscam interagir essas faces da aprendizagem geométrica. Assim, na primeira atividade, a construção da pirâmide de Sierpinski, procuramos trabalhar com a percepção do espaço, partindo de um plano para a construção de uma forma tridimensional. A investigação é exigida durante, e também, após a construção da pirâmide, pois o aluno é desafiado a formular uma hipótese sobre a dimensão do objeto construído e, através dos conhecimentos anteriores, é levado a comprovar sua hipótese e generalizar o percebido.

As interações entre os blocos de conteúdos citados anteriormente – Números, Geometria e Relações – podem ser vistas no trabalho proposto na segunda e terceira atividades: a Curva de Koch e Fractal tipo Dürer, respectivamente. Apesar de cada proposta relacionar conteúdos distintos da Matemática, ambas utilizam tabelas para organizar informações a partir da

observação e construção dos fractais. A tabela é uma ferramenta que possibilita relacionar elementos da Geometria ou da percepção geométrica, com os Números, uma vez que a partir da construção é possível organizar as informações, refletir acerca do obtido, comprovar as hipóteses e generalizar a situação. Para a generalização é preciso realizar as medições, a contagem e construir uma representação algébrica que expresse o obtido.

As relações estão presentes em todo o processo de desenvolvimento da proposta, através do trabalho com funções, da aproximação de medidas e da proporcionalidade exigida, por exemplo, no Fractal do tipo Dürer.

Neste trabalho procuramos, por meio da Geometria Fractal, e tendo como base o Currículo do Estado de Paulo (2011) e PCN (2001) elaborar atividades que usam da investigação matemática para explorar materiais manipulativos, elaborar hipóteses, buscar informações e defender suas conjecturas, e com o suporte das ferramentas matemáticas atingir a produção do conhecimento. Amparados nos trabalhos de Ponte (1998), buscamos elaborar atividades que visem à aprendizagem matemática do aluno, pois entendemos que o conhecimento deve ser produzido de forma entrelaçada com conteúdos já trabalhados em situações anteriores, numa trama que vá fazendo sentido para o aluno. A pesquisa focou possibilidades de se trabalhar na sala de aula com a Geometria Fractal, abrindo oportunidade para que, em estudos futuros, se possa pôr em prática as tarefas sugeridas de modo que seja possível, também, validar ideias que, neste trabalho, nasceram como possibilidades de ensino e aprendizagem.

REFERÊNCIAS

BARBOSA, R. M. **Descobrimo a geometria fractal para a sala de aula**. Belo Horizonte: Ed Autêntica, 2005, 160p.

BICUDO, I. Introdução e tradução. In: EUCLIDES, **Os Elementos**. São Paulo: Ed. Unesp, 2009.

BICUDO. M. A. V. **Educação Matemática**. São Paulo, Ed Centauro, 2005, 140p.

BICUDO. M. A. V. Pesquisa em Educação Matemática, **Proposições**, São Paulo, v.4, n. 1[10], p. 18- 23, mar/ 1993.

BONFIN, D. M.; CASTRO, L. N. **Síntese Computacional de Fenômenos Naturais: Geometria Fractal e Vida Artificial Parte 2: Síntese de Formas**. Cadernos de História da Ciência – Instituto Butantan – vol. II. São Paulo, 2005.

BRASIL. Parâmetros curriculares nacionais: matemática / Ministério da Educação. Secretaria da Educação Fundamental. 3. Ed. Brasília: A Secretaria, 2001.

CAPRA, F. **A teia da vida: uma nova compreensão científica dos sistemas vivos**. São Paulo: Pensamento-Cultrix, 1996.

COSTA, D. L. H.; NASCIMENTO, M. L. Geometria Fractal. In: SIMPÓSIO NACIONAL/JORNADA DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA, 4. 2006, Rio de Janeiro. **Anais...** Rio de Janeiro: Associação Brasileira de Matemática, 2006.

D'AGOSTINI, F. **Analíticos e Continentais**, São Leopoldo, RS: ed. Unisinos, 2002. 715p.

FARIA, R. W. S.; MALTEMPI, M. V. Padrões Fractais: conectando Matemática e arte. Revista Científica **Eccos**. São Paulo, n. 27 p. 33- 53, jan/ abr- 2012.

FIorentini, D.; Miorim, M,A. Uma reflexão sobre o uso de materiais concretos e jogos no Ensino da Matemática. Boletim da **SBEM**. SBM: São Paulo, ano 4, n. 7, 1990.

FRANCO, V. S., THOMAZ, M. L. **Geometria não-euclidiana: geometria esférica**. 2008. Disponível em < <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/233-4.pdf>. > Acesso em 19 de janeiro de 2016

GARNICA, A. V. M. Algumas notas sobre pesquisa qualitativa e fenomenologia. **Interface - Comunicação, Saúde, Educação**, São Paulo, v. 1, n. 1, p.109-119, 1997.

GARNICA, A. V. M. História Oral e educação Matemática. In: BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. (Org.) Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática. Belo Horizonte: Ed. Autêntica, 2004.

JANOS, M. **Geometria Fractal**, Rio de Janeiro: Ed Ciência Moderna, 2008, 112p.

MATOS, J. M. e SERRAZINA, M. de L. **Didática da Matemática**. Lisboa: **Universidade Aberta**, 1996. Cap.7: recursos na aula de Matemática, p.191-212.

NACARATO, A. M. Eu trabalho primeiro no concreto. **Revista de Educação Matemática**, São Paulo, v. 9, n. 9-10, p. 1-6, 2005.

NASCIMENTO, M., SILVA, S. C. R., MACIEL, N. A. Uma proposta didática para o ensino de geometria fractal em sala de aula na educação básica. **Vidya**. Santa Maria, v. 32, n. 2, p. 113- 132, jul/dez- 2012.

PAIS, L. C. Uma análise do significado da utilização de recursos didáticos no ensino da geometria. In: REUNIÃO DA ASSOCIAÇÃO NACIONAL DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA EM EDUCAÇÃO, 23. 2000, Caxambu. **Anais...** Caxambu: Associação Nacional de Pós- graduação e Pesquisa em Educação, 2000. Disponível em: <<http://www.anped.org.br/reunioes/23/textos/1919t.pdf>>. Acesso em: 22 set. 2016.

PARANÁ (Estado). Universidade Federal do Paraná. Curso de Verão 2013. **Geometrias não euclidianas**, PIBID. Disponível em: <http://www.pibid.ufpr.br/pibid_new/uploads/matematica2011/arquivo/674/Geometria_Fractal.pdf>. Acesso em: 16 maio. 2016.

PAULO, R. M.; AMARAL, C. L. C.; SANTIAGO, R. A. A pesquisa na perspectiva fenomenológica: explicitando uma possibilidade de compreensão do ser professor de matemática, São Paulo, **Revista Brasileira de Pesquisa em Educação em Ciências**, v. 10 n. 3, p. 71- 86, 2010.

PONTES, J. P., at El. O trabalho do professor numa aula de investigação matemática. **Quadrante**, v.7, n. 2, p. 41-70, 1998.

RABAY, Y. S. F. **Estudo e aplicações da geometria fractal**. 2013. 103 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Centro de Ciências Exatas e da Natureza- Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa. 2013.

SALLUM, E. M. Fractais no ensino médio, **Revista do professor de matemática**, São Paulo, v. 57, p. 1- 8, 2005.

SANTOS, J. C. A. P. A geometria da esfera: conhecendo um pouco de uma proposta de geometria não euclidiana para a sala de aula. In: CONGRESSO NACIONAL DAS LICENCIATURAS, 2. 2009, São Paulo. **Anais...** São Paulo: Sociedade Brasileira de matemática, 2009.

SÃO PAULO (Estado) Secretaria de Educação. **Currículo do Estado de São Paulo**. São Paulo. 2011.

SIQUEIRA, R. **Introdução aos fractais**. Disponível em: <<http://www.insite.com.br/fractarte/artigos.php>> . Acesso em: 22 set. 2016.