

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
CAMPUS DE GUARATINGUETÁ

RAFAEL ROBSON LINO DOS SANTOS

Sistemas Hamiltonianos vinculados e redução dimensional em teoria clássica de campos

Guaratinguetá

2018

Rafael Robson Lino dos Santos

Sistemas Hamiltonianos vinculados e redução dimensional em teoria clássica de campos

Trabalho de Graduação apresentado ao Conselho de Curso de Graduação em Física-Bacharelado da Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, como parte dos requisitos para obtenção do diploma de Graduação em Física-Bacharelado .

Orientador: Prof^o Dr. Denis Dalmazi

Guaratinguetá

2018

- Santos, Rafael Robson Lino dos
S237s Sistemas Hamiltonianos vinculados e redução dimensional em teoria clássica de campos / Rafael Robson Lino dos Santos – Guaratinguetá, 2018.
65 f.: il.
Bibliografia: f. 53-54
- Trabalho de Graduação – Bacharelado em Física – Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, 2018.
Orientadora: Prof. Dr. Denis Dalmazi
1. Sistemas hamiltonianos. 2. Teoria de campos (Física).
 3. Algoritmos. I. Título.
- CDU 530.145

Luciana Máximo

Bibliotecária CRB-8/3595

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
CAMPUS DE GUARATINGUETÁ

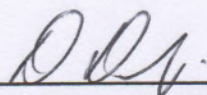
RAFAEL ROBSON LINO DOS SANTOS

ESTE TRABALHO DE GRADUAÇÃO FOI JULGADO ADEQUADO COMO PARTE DO
REQUISITO PARA A OBTENÇÃO DO DIPLOMA DE "BACHAREL EM FÍSICA"

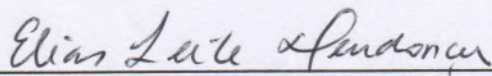
APROVADO EM SUA FORMA FINAL PELO CONSELHO DE CURSO DE GRADUAÇÃO EM
FÍSICA-BACHARELADO

Profº Dr. MARCO AURÉLIO ALVARENGA MONTEIRO
Coordenador

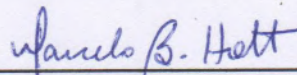
BANCA EXAMINADORA:



Profº Dr. Denis Dalmazi
Orientador/UNESP-FEG



Profº Dr. Elias Leite Mendonça
UNESP-FEG



Profº Dr. Marcelo Batista Hott
UNESP-FEG

Dezembro , 2018

AGRADECIMENTOS

Com este trabalho de graduação (TG) encerro a primeira parte da minha jornada estudando física. Indubitavelmente, muitas pessoas me ajudaram a concluir esta etapa e merecem ser agradecidas.

Este TG é fruto dos trabalhos de iniciação científica que venho desenvolvendo com meu orientador Denis Dalmazi desde o fim de 2015. Agradeço-lhe pela orientação e pela oportunidade de desenvolvermos trabalhos juntos.

Agradeço aos professores Marcelo Hott e Elias pela participação na banca e pelas valorosas sugestões.

Além deles, gostaria de agradecer aos demais professores com quem tive a chance de aprender, desde o ensino fundamental até a graduação. Em especial, agradeço aos professores Elias e Julio pelas inúmeras e interessantes aulas durante a graduação.

Ainda no contexto acadêmico, agradeço aos colegas pelo bom convívio, e em especial, ao meu amigo Raphael Schimidt pela parceria e pelos significativos diálogos. Certamente, muita física foi aprendida.

Fora do contexto acadêmico, agradeço aos meus familiares, em especial à minha mãe Cleidinéia, pelo apoio e dedicação, ao meu pai Robson, pela provisão, e à minha irmã Rafaela, por tornar os dias mais vívidos.

Por fim, gostaria de agradecer pela amizade e paciência a Luan, Leandro e Isabelle, amigos de longa data, e ao já citado Raphael, com quem aprendi muito nestes 4 anos de graduação.

Este trabalho contou com o apoio das seguintes entidades:

FAPESP - Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo

CNPq - Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico

“The mathematician plays a game in which he himself invents the rules while the physicist plays a game in which the rules are provided by nature, but as time goes on it becomes increasingly evident that the rules which the mathematician finds interesting are the same as those which nature has chosen.”

(Paul A. M. Dirac)

RESUMO

Neste trabalho introduzimos o leitor a dois assuntos em teoria de campos: Sistemas Hamiltonianos Vinculados (SHV) e Redução Dimensional a la Kaluza-Klein (KK). Na primeira parte do trabalho, após um breve resumo dos formalismos lagrangiano e hamiltoniano, investigamos importantes propriedades dos SHV através do algoritmo de Dirac-Bergmann, que nos permite analisar estes sistemas de maneira correta. Em seguida, aplicamos esta técnica em cinco modelos de teoria de campos: Maxwell, Maxwell-Proca (MP), Einstein-Hilbert (EH) linearizado, Fierz-Pauli (FP) e WTDiff. Na segunda parte, realizamos reduções dimensionais KK com o intuito de obter modelos massivos em D dimensões a partir do modelo não massivo correspondente em $D + 1$ dimensões. Com esta abordagem, obtivemos MP a partir de Maxwell, FP de EH e WTDiffm de WTDiff.

PALAVRAS-CHAVE: Sistemas hamiltonianos vinculados. Algoritmo de Dirac-Bergmann. Redução dimensional. Kaluza-Klein. Spin-1. Spin-2.

ABSTRACT

In this work, we introduce the reader to two subjects in field theory: Constrained Hamiltonian Systems and Kaluza-Klein Dimensional Reduction. In the first part of the work, after a brief review of Lagrangian and Hamiltonian formalism, we investigate important properties of Constrained Hamiltonian Systems through the Dirac-Bergmann algorithm, which allows us to analyze these systems correctly. Then, we apply this formalism to five models in the context of field theory, namely, Maxwell, Maxwell-Proca (MP), (linearized) Einstein-Hilbert (EH), Fierz-Pauli (FP), and WTDiff. In the second part, we perform Kaluza-Klein dimensional reductions in order to obtain massive models in D dimensions from their massless correspondents in $D + 1$ dimensions. Within this approach, we have obtained MP from Maxwell, FP from EH and WTDiffm from WTDiff.

KEYWORDS: Constrained Hamiltonian systems. Dirac-Bergmann algorithm. Dimensional Reduction. Spin-1. Spin-2.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	10
2	ANÁLISE HAMILTONIANA DE SISTEMAS VINCULADOS	11
2.1	UMA BREVE REVISÃO DO FORMALISMO HAMILTONIANO	11
2.2	SISTEMAS HAMILTONIANOS VINCULADOS	13
2.2.1	Igualdade fraca	14
2.2.2	Parênteses de Poisson	15
2.3	ALGORITMO DE DIRAC-BERGMANN	16
2.4	VÍNCULOS DE PRIMEIRA E SEGUNDA CLASSE	19
2.5	FIXAÇÃO DE CALIBRE	22
2.6	CONTAGEM DE GRAUS DE LIBERDADE	23
2.7	TEORIA DE CAMPOS	23
3	APLICAÇÃO DA ANÁLISE HAMILTONIANA	27
3.1	MODELO DE MAXWELL	27
3.2	MODELO DE MAXWELL-PROCA	29
3.3	MODELO DE EINSTEIN-HILBERT LINEARIZADO	31
3.4	MODELO DE FIERZ-PAULI	34
3.5	MODELO WTDIFF	37
4	REDUÇÃO DIMENSIONAL A LA KALUZA-KLEIN	41
4.1	INTRODUÇÃO À REDUÇÃO DIMENSIONAL E CONVENÇÃO	41
4.2	REDUÇÃO DIMENSIONAL DO MODELO DE MAXWELL	43
4.3	REDUÇÃO DIMENSIONAL DO MODELO DE EH LINEARIZADO	45
4.4	REDUÇÃO DIMENSIONAL DO MODELO WTDIFF	46
4.4.1	Eliminando ϕ	48
4.4.2	Eliminando A_μ	50
5	CONCLUSÃO	52
	REFERÊNCIAS	53
	APÊNDICE A – SOBRE AS SIMETRIAS DIFF E WTDIFF	55
	APÊNDICE B – OPERADORES DE PROJEÇÃO	57
	APÊNDICE C – REDUÇÃO DIMENSIONAL - SPIN-2	59
	APÊNDICE D – CONDIÇÕES DE FIERZ-PAULI	60

APÊNDICE E – ANÁLISE HAMILTONIANA DO MODELO TDIFF . . .	61
APÊNDICE F – ANÁLISE HAMILTONIANA DO MODELO DE SINGH- HAGEN (SPIN-2)	64

1 INTRODUÇÃO

Basicamente o objetivo deste trabalho de graduação é dotar o leitor, já familiarizado com alguns tópicos de mecânica analítica e teoria de campos, de conhecimentos de: **Análise Hamiltoniana de Sistemas Vinculados**, que pode ser utilizada para análise do conteúdo físico das teorias, e **Redução Dimensional**, utilizada neste trabalho como método para obter modelos massivos em D dimensões a partir de um modelo não-massivo em $D + 1$ dimensões.

O assunto Sistemas Hamiltonianos Vinculados (SHV) é, em certo ponto, pouco abordado na maioria dos cursos de graduação, e até mesmo de pós-graduação, de mecânica analítica. Embora sua existência possa até passar despercebida para um estudante, este assunto é de fundamental importância. Em teoria de campos, por exemplo, as teorias de gauge são descritas por lagrangianas que possuem matriz hessiana singular¹ e isso exige um certo rigor na análise hamiltoniana dessas teorias, caso contrário, as equações de Hamilton não reproduzem as equações de movimento de Euler-Lagrange.

A técnica adotada neste trabalho para a análise Hamiltoniana correta de tais modelos segue a exposição de Dirac (DIRAC, 1964). Longe de ter a pretensão de abordar todos os aspectos destes sistemas², faremos uma breve revisão de mecânica analítica, baseada em (LEMOS, 2007), para que possamos introduzir o assunto visando sua aplicação na análise do conteúdo físico dos modelos de Maxwell (spin-1) e Einstein-Hilbert linearizado (spin-2), e suas versões massivas Maxwell-Proca e Fierz-Pauli. Analisaremos também um modelo alternativo de spin-2, chamado de WTDiff. Através do chamado "Algoritmo de Dirac-Bergmann", encontraremos a dimensão do espaço de fase reduzido de cada um desses modelos e checaremos que de fato descrevem partículas de spin apropriado com hamiltoniana reduzida positivo-definida. De quebra, o método ainda explicita a presença de alguma simetria de calibre na teoria. A análise do conteúdo físico foi baseada na apostila (SANTOS, 2018) e na dissertação (RODRIGUES,).

O leitor poderá perceber que a análise hamiltoniana dos modelos acima citados nos leva a concluir que as teorias não massivas em $D + 1$ dimensões possuem o mesmo número de graus de liberdade da teoria massiva em D dimensões. Embora isso já fosse esperado do ponto de vista da teoria de grupos, encontramos uma maneira explícita de relacionar as teorias massiva e não-massiva através de uma Redução Dimensional a la Kaluza-Klein, que foi tema de um trabalho de graduação em 2015 (GRACIA,). Além deste, também utilizamos a tese (BONIFACIO,) e os artigos (BONIFACIO; FERREIRA; HINTERBICHLER, 2015; OVERDUIN; WESSON, 1997; KHOUDEIR; MONTEMAYOR; URRUTIA, 2008).

Durante todo o texto utilizamos a notação de Einstein para a soma de índices repetidos, o sistema de unidades naturais com $c = 1 = \hbar$ e a assinatura $\{-1, 1, \dots, 1\}$ para a métrica de Minkowski.

¹ Adiante explicitaremos o que isso significa. Associamos o termo SHV a tais modelos.

² Para um estudo aprofundado recomendamos as referências (HENNEAUX; TEITELBOIM, 1992; SUNDERMEYER, 1982; HANSON; REGGE; TEITELBOIM, 1976).

2 ANÁLISE HAMILTONIANA DE SISTEMAS VINCULADOS

A principal motivação de estudar SHV neste trabalho de graduação (TG) é o fato de que teorias físicas modernas de significado fundamental são descritas por lagrangianas com matriz hessiana singular.

Lembremos que a dimensão do espaço de configuração de um determinado sistema se reduz na presença de vínculos e, de certa forma, as equações de Lagrange já levam isso em conta¹. Porém a passagem do formalismo lagrangiano para o formalismo hamiltoniano é mais sutil. Neste caso, o espaço de fase que é reduzido. As equações de Hamilton não fornecerão os resultados corretos se existirem vínculos a nível hamiltoniano. Para tratar destes sistemas, utilizaremos a exposição de Dirac (DIRAC, 1964).

Começamos fazendo uma breve revisão do formalismo hamiltoniano, onde esperamos deixar claro a utilidade do tratamento de Dirac para a análise hamiltoniana.

2.1 UMA BREVE REVISÃO DO FORMALISMO HAMILTONIANO

Um sistema mecânico com um número finito N de graus de liberdade pode ser descrito por N coordenadas generalizadas, com as quais podemos escrever a Lagrangiana $L = L(q_i, \dot{q}_i, t)$ onde $i = 1, 2, \dots, N$.

As N coordenadas generalizadas e as respectivas N velocidades generalizadas \dot{q}_i constituem o chamado **espaço de configuração** de dimensão $2N$ do sistema.

Em mecânica analítica sabemos que as equações de Euler-Lagrange podem ser obtidas através do princípio de Hamilton, no qual a ação S

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t) dt \quad (2.1)$$

é mínima para a trajetória real, mantendo fixos os pontos inicial e final no espaço de configurações $\delta q(t_1) = 0 = \delta q(t_2)$, isto é,

$$\delta S = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, N), \quad (2.2)$$

que constituem um conjunto de N equações diferenciais ordinárias de segunda ordem, que podem ser resolvidas dadas N condições iniciais $(q_i(0), \dot{q}_i(0))$.

Definimos o momento canônico p_i como

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}. \quad (2.3)$$

A transição do espaço de configuração para o **espaço de fase** formado pelas coordenadas generalizadas e pelos momentos canônicos só é possível se as N quantidades p_i acima forem independentes

¹ Na presença de certos vínculos não-holônomos é necessária a introdução de multiplicadores de Lagrange.

entre si. Caso contrário, passaremos de um espaço (q_i, \dot{q}_i) de dimensão N para um espaço (q_i, p_i) de dimensão menor. Basicamente, o assunto SHV estuda os casos onde não é possível obter esses N momentos independentes.

Note que podemos reescrever as equações de Euler-Lagrange (2.2) como

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \ddot{q}_i + \frac{\partial^2 L}{\partial q_i \partial \dot{q}_j} \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0. \quad (2.4)$$

Definindo a matriz Hessiana \mathbf{W}

$$(W)_{ij} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \quad (2.5)$$

vemos que não é possível determinar unicamente todas as acelerações $\ddot{q}_i(t)$ em função dos \dot{q}_i e q_i se $\text{Det}W = 0$. Neste caso, o sistema é dito vinculado ou singular.

Da última definição e de (2.3) segue que a condição sobre o jacobiano J_{ij} da transformação, do espaço de configuração para o espaço de fase $(q, \dot{q}) \rightarrow (q, p)$, coincide com a condição sobre a matriz hessiana $J_{ij} = \frac{\partial p_i}{\partial \dot{q}_j} = W_{ij}$. Assim temos dois casos:

- Se $\text{det}W = 0$, a matriz hessiana é singular e as quantidades p_i não são independentes. Não há relação um-a-um entre todos os \dot{q}_i e os p_i e o espaço de fase não possui $2N$ dimensões. Neste caso, existem relações fundamentais entre as coordenadas e os momentos do tipo

$$\phi_m(q_i, p_i) = 0 \quad (m = 1, \dots, n). \quad (2.6)$$

Essas n relações são vínculos que restringem o espaço de fase do sistema. Por dependerem unicamente da forma da lagrangiana, damos a essas relações o nome de **vínculos primários**. Esse é o caso em que estamos interessados neste trabalho.

- se $\text{det}W \neq 0$ então as N equações (2.3) podem ser resolvidas para as N velocidades generalizadas. Desse modo, existe uma relação um-a-um entre \dot{q}_i e p_i e é possível fazer a transição do espaço de configuração para o espaço de fase Γ , ambos de dimensão $2N$, introduzindo a função Hamiltoniana $H(q_i, p_i, t)$ por meio de uma transformação de Legendre:

$$H(q_i, p_i, t) = \sum_{i=1}^N \dot{q}_i p_i - L(q_i, \dot{q}_i, t) \quad (2.7)$$

com $\dot{q}_i = f_i(q_i, p_i, t)$. Em geral, essa condição é assumida por hipótese na maior parte dos problemas de mecânica analítica em um curso tradicional.

A partir da definição (2.7) podemos obter, vide por exemplo (LEMOS, 2007), as equações de Hamilton:

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i \quad , \quad \frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i \quad , \quad (2.8)$$

um conjunto de $2N$ equações diferenciais parciais de primeira ordem, solúveis a partir de $2N$ condições iniciais (q_i, p_i) e que determinam a dinâmica no espaço de fase.

Podemos definir também os parênteses de Poisson de duas funções dinâmicas arbitrárias $f(q_i, p_i)$ e $g(q_i, p_i)$ como

$$[f, g] = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right). \quad (2.9)$$

Segue de (2.8) e (2.9) a equação de movimento para uma variável dinâmica $f(q, p, t)$:

$$\frac{df}{dt} = [f, H] + \frac{\partial f}{\partial t}. \quad (2.10)$$

Se as relações acima forem utilizadas para o caso $DetW = 0$, sem levar em consideração os vínculos hamiltonianos (2.6), a dinâmica do sistema será descrita de maneira equivocada!

2.2 SISTEMAS HAMILTONIANOS VINCULADOS

Consideramos agora o caso em que $DetW = 0$, seguindo a exposição de Dirac em seu influente livro (DIRAC, 1964), onde o autor consolidou seus pensamentos a respeito do formalismo canônico de sistemas vinculados.² Essa parte do TG foi fortemente influenciada pelo texto de (SANTOS, 2018).

Chamamos o sistema de vinculado devido à presença dos vínculos primários (2.6). Tais vínculos não nos permitem escrever todas as velocidades generalizadas em função dos momentos e isso significa que a Hamiltoniana canônica (2.7) não é bem definida em todo o espaço de fase.

Suponha que a partir de (2.3) apenas M das N velocidades generalizadas \dot{q}_i ($i = 1, 2, \dots, N$) possam ser escritas como

$$\dot{q}_a = f_a(q_i, p_b) \quad (a, b = 1, 2, \dots, M \leq N), \quad (2.11)$$

sendo as demais $N - M$ velocidades indeterminadas no espaço de fase. Por outro lado, temos:

$$\begin{aligned} p_a &= g_a(q_i, \dot{q}_b) & (a, b = 1, 2, \dots, M), \\ p_k &= g_k(q_i, p_a) & (k = M + 1, \dots, N), \end{aligned} \quad (2.12)$$

que definem os $n = N - M$ vínculos primários:

$$\phi_k(q_i, p_a) = p_k - g_k(q_i, p_a) = 0 \quad (k = M + 1, \dots, N). \quad (2.13)$$

Esses n vínculos definem um subespaço Γ_c do espaço de fase Γ , sendo o movimento restrito a este subespaço, cuja dimensão é $2N - n = N + M$.

A Hamiltoniana canônica (2.7) não está definida em todo o espaço Γ diante da indeterminação das

² Paul A. M. Dirac e, independentemente, Peter G. Bergmann e colaboradores, com propósitos distintos, iniciaram no fim da década de 1940 um estudo sistemático de SHV no contexto de teorias de calibre (gauge), influenciando os posteriores trabalhos. Referências podem ser encontradas em (PONS, 2005).

n velocidades \dot{q}_k . Note que³

$$\begin{aligned} H &= p^a \dot{q}_a + p^k \dot{q}_k - L(q, \dot{q}, t) = p^a \dot{q}_a + g^k \dot{q}_k - L(q, \dot{q}) \\ \Rightarrow \frac{\partial H}{\partial \dot{q}_k} &= g^k - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = g^k - p^k = 0, \end{aligned} \quad (2.14)$$

onde utilizamos (2.3), (2.12) e (2.13). Logo H não depende de \dot{q}_k e é apenas no subespaço Γ_c que ela está definida. Nosso objetivo é definir uma nova hamiltoniana, válida em todo Γ .

Procedendo de maneira similar à inclusão de vínculos não-holônomos ao formalismo lagrangiano através dos multiplicadores de Lagrange, vide por exemplo (LEMOS, 2007), definimos uma nova quantidade H_P chamada de Hamiltoniana primária:

$$H_P = H + \sum_{k=1}^n \lambda_k \phi_k, \quad (2.15)$$

onde introduzimos n multiplicadores de Lagrange, funções a priori arbitrárias. Note que com a definição (2.15) $H = H_P$ em Γ_c porém a dinâmica de H_P é diferente da dinâmica de H uma vez que $\phi_k = \phi_k(q_i, p_a)$. Logo, as equações de movimento obtidas a partir de H_P são diferentes daquelas obtidas com H .

As equações de Hamilton, sujeitas aos n vínculos $\phi_k(q, p) = 0$, oriundas do princípio variacional

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_i^N p_i \dot{q}_i - H_P \right) dt = 0$$

são:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} + \sum_{k=1}^n \lambda_k \frac{\partial \phi_k}{\partial p_i}, \quad (2.16)$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} - \sum_{k=1}^n \lambda_k \frac{\partial \phi_k}{\partial q_i}. \quad (2.17)$$

2.2.1 Igualdade fraca

Antes de reescrevermos as equações de movimento utilizando parênteses de Poisson vamos introduzir o conceito de igualdade fraca e igualdade forte.

A **igualdade fraca** é utilizada para ressaltar que uma variável dinâmica $F(q, p) \approx 0$ só é nula no subespaço Γ_c . Duas funções são ditas fracamente iguais se $F \approx G$.⁴

Já uma variável dinâmica $F(q, p) \simeq 0$, ou simplesmente $F(q, p) = 0$, é dita ser fortemente nula se ela for nula não só em Γ_c , mas também em alguma vizinhança desse subespaço. Para tal, exigimos que

$$F(q, p) |_{\Gamma_c} = 0,$$

³ Usaremos sempre que possível $a, b = 1, 2, \dots, M$ e $k = M + 1, \dots, N = 1, \dots, n$. Estamos utilizando a notação de Einstein em algumas equações para despoluir o texto.

⁴ Por exemplo, dadas as funções $(F, G : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R})$ $F = e^{(x+y)}$ e $G = \cos(2x + 2y)$ temos $F \neq G$ mas $F \approx G$ no subespaço definido por $\phi = x + y = 0$.

$$\left(\frac{\partial}{\partial q}, \frac{\partial}{\partial p} \right) F(q, p) |_{\Gamma_c} = 0.$$

Como $\frac{\partial \phi_k}{\partial p_i} = \delta_{ik}$, devemos expressar os vínculos (2.13) como igualdades fracas.

2.2.2 Parênteses de Poisson

Considere uma variável dinâmica $g = g(q, p)$:

$$\dot{g} = \frac{\partial g}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial g}{\partial p_i} \dot{p}_i. \quad (2.18)$$

Utilizando (2.16) e (2.17) temos a equação de movimento para a variável dinâmica $g(q, p)$:

$$\dot{g} = [g, H] + \sum_{k=1}^N \lambda_k [g, \phi_k]. \quad (2.19)$$

Proposição: $\dot{g} \approx [g, H_P]$.

Demonstração: Utilizando a linearidade dos parênteses de Poisson temos

$$\begin{aligned} [g, H_P] &= [g, H + \sum_{k=1}^n \lambda_k \phi_k] = [g, H] + [g, \sum_{k=1}^n \lambda_k \phi_k] \\ &= [g, H] + \sum_{k=1}^n ([g, \lambda_k] \phi_k + \lambda_k [g, \phi_k]). \end{aligned} \quad (2.20)$$

Como $\phi_k \approx 0$ segue de (2.19) que

$$[g, H_P] \approx [g, H] + \sum_{k=1}^n \lambda_k [g, \phi_k] = \dot{g}. \quad \blacktriangleleft \quad (2.21)$$

Fica clara a diferença entre este resultado e o seu análogo para o caso em que o sistema não é vinculado: $\dot{g} = [g, H]$. A expressão (2.21) nos informa que a evolução temporal de uma variável dinâmica $g(q, p)$ depende dos parênteses de Poisson de g com os vínculos ϕ_k . Isso significa que os vínculos só podem ser postos iguais a zero depois que todos os parênteses de Poisson forem calculados.

Note que as equações de Hamilton podem ser reescritas como

$$\dot{q}_i \approx [q_i, H_P] = \frac{\partial H_P}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i \approx [p_i, H_P] = -\frac{\partial H_P}{\partial q_i}. \quad (2.22)$$

Como $\frac{\partial H}{\partial p_k} = 0$ segue da primeira equação acima que os n multiplicadores de Lagrange λ_k estão diretamente relacionados com as n velocidades generalizadas \dot{q}_k :

$$\lambda_k \approx \dot{q}_k. \quad (2.23)$$

Veremos a seguir em que condições as quantidades λ_k permanecem arbitrárias.

2.3 ALGORITMO DE DIRAC-BERGMANN

Por consistência, exigimos que os vínculos primários devam ser preservados no tempo: $\dot{\phi}_k \approx 0$. Então, utilizando $g(q, p) = \phi_k$ em (2.21), obtemos as **condições de consistência**:

$$\dot{\phi}_k = [\phi_k, H] + \sum_{l=1}^n \lambda_l [\phi_k, \phi_l] \approx 0 \quad (k, l = 1, 2, \dots, n). \quad (2.24)$$

Essas n equações podem determinar alguns dos multiplicadores de Lagrange λ_k como também podem levar a novos vínculos, que serão chamados de vínculos secundários. Exigindo que esses vínculos também sejam preservados no tempo, podemos obter novos vínculos⁵ ou determinar algum dos multiplicadores. Repetimos esse processo até que todos os multiplicadores sejam determinados ou até que nenhum novo vínculo apareça (relação de consistência identicamente satisfeita). Esse processo é chamado de **Algoritmo de Dirac-Bergmann**.

De (2.24), para os vínculo primários, temos três casos:

1. As condições de consistência são identicamente satisfeitas:

$$[\phi_k, H] = 0 \quad \cup \quad [\phi_l, \phi_k] = 0.$$

Se este for o caso para todos os vínculos primários da teoria, ela não conterà mais vínculos e todos os multiplicadores de Lagrange ficarão indeterminados.

2. As condições de consistência determinam univocamente os multiplicadores de Lagrange⁶

$$[\phi_k, H] \neq 0 \quad \cup \quad [\phi_l, \phi_k] \neq 0.$$

Se todos os vínculos primários se enquadram neste caso, de (2.24) é possível expressar os λ_k como

$$\lambda_k \approx - \sum_{l=1}^n (P^{-1})_{kl} [\phi_l, H] \quad (2.25)$$

onde $P_{kl} = [\phi_k, \phi_l]$ são os elementos da matriz formada pelos parênteses de Poisson dos vínculos primários, tais que $\det P \neq 0$.

3. As condições de consistência geram vínculos secundários χ :

$$[\phi_k, H] \neq 0 \quad \cup \quad [\phi_l, \phi_k] = 0,$$

$$\chi_r(q, p) \approx 0. \quad (2.26)$$

⁵ É comum chamar os vínculos secundários, terciários, quaternários, ... , simplesmente de vínculos secundários. A razão disso é simplesmente diferenciar os vínculos primários, dependentes unicamente da forma da lagrangiana, dos demais vínculos, decorrentes das equações de movimento.

⁶ Se $[\phi_k, H] = 0$ a solução é trivial.

A aplicação das condições de consistência sobre cada um dos m vínculos secundários

$$\dot{\chi}_r = [\chi_r, H] + \sum_{k=1}^n \lambda_k [\chi_r, \phi_k] \approx 0 \quad (r = 1, 2, \dots, m \leq n) \quad (2.27)$$

pode nos levar a um destes três casos. O processo termina após um número finito de etapas quando não houver mais nenhum novo vínculo. Note que a dinâmica do sistema conterà tantas funções arbitrárias quantos forem os multiplicadores de Lagrange λ_k que permanecerem indeterminados ao final do processo.

Exemplos ilustrativos:

1) Para ilustrar a aplicação do algoritmo, considere a lagrangiana⁷

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x} - \dot{y})^2. \quad (2.28)$$

Os momentos canônicos são

$$p_x = \dot{x} - \dot{y}, \quad p_y = \dot{y} - \dot{x}, \quad (2.29)$$

e através de (2.5) podemos calcular a matriz hessiana:

$$W = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.30)$$

cujos determinantes são nulos. Temos um vínculo primário $\phi = p_x + p_y \approx 0$ e a hamiltoniana canônica é $H = \frac{1}{2}p_x^2$. Assim, a hamiltoniana primária é

$$H_P = \frac{1}{2}p_x^2 + \lambda\phi. \quad (2.31)$$

A aplicação da condição de consistência (2.24) é identicamente satisfeita uma vez que $[\phi, H] \approx 0$, e o multiplicador de lagrange λ permanece indeterminado. Caímos, portanto, no caso 1.

As equações de Hamilton (2.16) e (2.17) dão:

$$\dot{x} \approx p_x + \lambda, \quad \dot{p}_x \approx 0, \quad (2.32)$$

$$\dot{y} \approx \lambda, \quad \dot{p}_y \approx 0, \quad (2.33)$$

cujas soluções gerais são $p_x = -p_y = a$ (note que só agora usamos $\phi = p_x + p_y = 0$ como igualdade forte) e $x(t) = y(t) + at + b$ onde a e b são constantes e $y(t)$ é uma função arbitrária do tempo.



2) Neste segundo exemplo considere a lagrangiana

$$L = \frac{1}{2}\dot{q}_1^2 + \dot{q}_1 q_2. \quad (2.34)$$

⁷ Exemplos 8.8.1 e 8.8.2 (LEMOS, 2007)

Os momentos canônicos são $p_1 = \dot{q}_1 + q_2$ e $p_2 = 0$. Através de (2.5), podemos calcular a matriz hessiana:

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.35)$$

cujo determinante é nulo. Temos um vínculo primário $\phi = p_2 \approx 0$ que nos permite escrever a hamiltoniana primária como

$$H_p = \frac{1}{2}\dot{p}_1^2 - p_1 q_2 + \frac{1}{2}\dot{q}_2^2 + \lambda \phi. \quad (2.36)$$

As equações de Hamilton (2.16) e (2.17) fornecem:

$$\dot{q}_1 \approx p_1 - q_2 \quad , \quad \dot{p}_1 \approx 0, \quad (2.37)$$

$$\dot{q}_2 \approx \lambda \quad , \quad \dot{p}_2 \approx p_1 - q_2. \quad (2.38)$$

Neste caso, a condição de consistência (2.24) aplicada ao vínculo primário fornece o vínculo secundário

$$\chi = p_1 - q_2 \approx 0, \quad (2.39)$$

pois $[\phi, H] = p_1 - q_2$ (caso 3). Aplicando novamente a condição de consistência, uma vez que $[\chi, H] = 0$ mas $[\chi, \phi] = -1$, determinamos o multiplicador de Lagrange $\lambda \approx 0$ (caso 2).

Finalmente tomando os vínculos como igualdades fortes, concluímos que a solução geral do problema é $q_1 = A$, $q_2 = B$, $p_1 = B$ e $p_2 = 0$, onde A e B são constantes. O leitor pode verificar rapidamente que essa é a mesma solução obtida através das equações de Euler-Lagrange.



3) Um exemplo mais elaborado é deixado como exercício ao leitor. Considere a lagrangiana⁸

$$L(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) = \frac{1}{2}\dot{q}_1^2 + q_2\dot{q}_1 + (1 - \alpha)q_1\dot{q}_2 + \frac{\beta}{2}(q_1 - q_2)^2 \quad (2.40)$$

onde α e β são constantes arbitrárias e a matriz hessiana é singular para qualquer valor de α e β . O leitor deve procurar por todos os vínculos do sistema e verificar qual dos três casos será obtido, para as quatro possíveis situações, dependendo dos valores de α e β .



É importante salientar que após a obtenção dos vínculos secundários o conceito de fracamente nulo muda pois $\Gamma_c \rightarrow \Gamma_{\tilde{c}}$ definido como o espaço de fase reduzido onde $\Phi(\phi, \chi) = 0$. Podemos compilar todos os j vínculos (n primários e m secundários) em

$$\Phi_\rho(\phi, \chi) \approx 0 \quad (\rho = 1, 2, \dots, n + m = j), \quad (2.41)$$

⁸ Exemplo 8.8.3 (LEMONS, 2007).

todos satisfazendo de alguma maneira as j condições de consistência

$$\dot{\Phi}_\rho = [\Phi_\rho, H] + \sum_{k=1}^n \lambda_k [\Phi_\rho, \phi_k] \approx 0. \quad (2.42)$$

Temos j equações para $n \leq j$ incógnitas λ_k , cuja solução geral pode ser escrita como

$$\lambda_k \approx U_k + \sum_{a=1}^{n_1} v_a V_k^{(a)} \quad (a = 1, \dots, n_1 \leq n), \quad (2.43)$$

onde U_k são as soluções particulares (caso ii) de (2.42) e $V_k^{(a)}$ são as soluções linearmente independentes da equação homogênea $V_k[\Phi_\rho, \phi_k] \approx 0$. Note que existem n_1 parâmetros arbitrários v_α .

Podemos escrever a Hamiltoniana primária omitindo os somatórios como

$$H_P = H + U_k \phi_k + v_a V_k^{(a)} \phi_k \equiv H' + v_a \varphi_a \quad (a = 1, \dots, n_1), \quad (2.44)$$

onde

$$H' = H + U_k \phi_k \quad , \quad \varphi_a = V_k^{(a)} \phi_k. \quad (2.45)$$

Para que essa notação fique mais clara, note que todos os multiplicadores de Lagrange que foram determinados estão compilados em U_k . Se para o i -ésimo vínculo primário, o multiplicador de Lagrange associado λ_i não for determinado então $U_i = 0$. Já se ele for determinado, $V_i = 0$.

De (2.21) temos $\dot{g} \approx [g, H_P]$ de forma que a dinâmica de $g(q, p)$ possui n_1 funções arbitrárias do tempo. Ainda assim todos os requisitos da teoria dinâmica foram satisfeitos. A física do sistema não deve depender dessas funções arbitrárias.

Conforme comentado em (LEMOS, 2007), essa é uma situação com a qual não estamos acostumados a lidar em problemas elementares⁹. Essas funções arbitrárias indicam a utilização de uma estrutura matemática contendo atributos arbitrários, típico das teorias dotadas de invariância sob **transformações de calibre (gauge)**, as quais costumam ser descritas por um número maior de variáveis do que o número de graus de liberdade da teoria. Compreender essas transformações é de fundamental importância em teoria de campos. Para isso vamos definir o conceito de vínculos de primeira e segunda classe.

2.4 VÍNCULOS DE PRIMEIRA E SEGUNDA CLASSE

Uma função $F(q, p)$ é dita ser de **primeira classe** se:

$$[F, \Phi_\rho] \approx 0 \quad (\rho = 1, 2, \dots, j). \quad (2.46)$$

Se para algum dos vínculos Φ_ρ isso não acontecer, a função é dita ser de **segunda classe**.

⁹ Em problemas elementares de mecânica analítica a solução é completamente determinada dadas as condições iniciais, não restando nenhuma função arbitrária após a obtenção da solução.

Com essa definição, tanto H' como φ_a , definidos em (2.45) são funções de primeira classe. Note que os vínculos primários ϕ_k que aparecem em H' são necessariamente de segunda classe enquanto os que aparecem em φ_a são de primeira classe. Além disso, os φ_a formam um conjunto completo de vínculos primários de primeira classe pois qualquer combinação linear de vínculos primários de primeira classe também é um vínculo primário de primeira classe. Sendo assim, o número de funções arbitrárias v_a é igual ao número de vínculos primários de primeira classe.

Para discutir uma importante propriedade dos vínculos primários de primeira classe, considere uma variável dinâmica $g(q, p, t)$ com valor inicial g_0 . Após um intervalo de tempo infinitesimal δt :

$$\begin{aligned} g(\delta t) &= g_0 + \dot{g}\delta t \\ &= g_0 + \delta t\{[g, H'] + \sum_a v_a[g, \varphi_a]\}. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Como os valores v_a são arbitrários, podemos escolher um outro conjunto v'_a sem alterar a física do sistema, tal que

$$\Delta g(\delta t) = \sum_a \delta t(v'_a - v_a)[g, \varphi_a] = \sum_a \epsilon_a[g, \varphi_a] \quad (2.48)$$

onde $\epsilon_a = \delta t(v'_a - v_a)$ é um número pequeno e arbitrário.

Embora a escolha dos v_a possam mudar as variáveis dinâmicas q_i e p_i do sistema, vide (2.16), (2.17) e (2.45), $g(\delta t)$ e $g(\delta t) + \Delta g$ correspondem ao mesmo estado físico¹⁰. Por outro lado, note que (2.48) corresponde a uma soma de n_1 transformações canônicas infinitesimais¹¹, cada uma gerada por φ_a com parâmetro infinitesimal associado ϵ_a .

Conclusão: Os vínculos primários de primeira classe φ_a geram transformações de calibre.

Após explorar essa importante propriedade dos vínculos primários, Dirac havia conjecturado (DIRAC, 1964) a possibilidade de se mostrar que todos os vínculos secundários de primeira classe também eram geradores de transformação de calibre. O próprio Dirac não conseguiu provar tal conjectura e de fato há contra-exemplos, como em (HENNEAUX; TEITELBOIM, 1992). Mas, em geral, postula-se que **todos os vínculos de primeira classe geram transformações de calibre**¹².

Vamos separar os j vínculos da teoria em j_1 vínculos de primeira classe (ψ_α) e j_2 vínculos de segunda classe (ξ_μ):

$$\psi_\alpha(\phi, \chi) \approx 0 \quad \alpha = 1, \dots, j_1 \quad (\text{vínculos de primeira classe}); \quad (2.49)$$

$$\xi_\mu(\phi, \chi) \approx 0 \quad \mu = 1, \dots, j_2 \quad (\text{vínculos de segunda classe}). \quad (2.50)$$

¹⁰ No exemplo 1 da subsecção anterior, por exemplo, diferentes escolhas de v_a lá significavam diferentes funções $y(t)$. Note que corresponder a um mesmo estado físico não significa, necessariamente, corresponder a uma mesma equação de movimento. Em geral, e nos exemplos que veremos em teoria de campos, as propriedades observáveis de um dado sistema independem das funções arbitrárias que possam existir nesse sistema.

¹¹ Transformações canônicas infinitesimais mudam os q 's e p 's mas não alteram o estado físico do sistema.

¹² Diante de certas condições simplificadoras, mas que genericamente costumam ocorrer, é possível provar tal conjectura, vide a subsecção 3.3.2 de (HENNEAUX; TEITELBOIM, 1992). Neste TG não consideraremos os casos patológicos onde isso não valha.

As condições de consistência (2.42) podem ser reescritas, omitindo os somatórios, como

$$[\psi_\alpha, H] \approx 0, \quad (2.51)$$

$$[\xi_\mu, H] + \lambda_\kappa [\xi_\mu, \xi_\kappa] \approx 0 \quad (\kappa = 1, \dots, \tilde{n} \leq n). \quad (2.52)$$

Da mesma forma que o índice a está contando os n_1 vínculos primários de primeira classe, o índice κ acima conta apenas os vínculos primários de segunda classe, já que não existem multiplicadores de Lagrange para vínculos secundários na hamiltoniana primária.

A matriz C formada pelos $C_{\mu\nu} = [\xi_\mu, \xi_\nu]$ é não-singular¹³ e nos permite determinar os \tilde{n} multiplicadores de Lagrange associados:

$$\lambda_\kappa \approx -(C^{-1})_{\kappa\mu} [\xi_\mu, H]. \quad (2.53)$$

Os $n_1 = n - \tilde{n}$ multiplicadores restantes ($\bar{\lambda}$) permanecerão indeterminados. Podemos reescrever a hamiltoniana primária em função dos vínculos primários como

$$H_P = H + \bar{\lambda}_a \psi_a + \lambda_\kappa \xi_\kappa = H'' + \bar{\lambda}_a \psi_a \quad (2.54)$$

onde $H'' = H - \xi_\kappa (C^{-1})_{\kappa\mu} [\xi_\mu, H]$ e compare (2.54) com (2.45).

Uma pergunta natural que pode ser feita é se há necessidade de incluir os vínculos secundários na hamiltoniana primária, tal qual fizemos com os vínculos primários na hamiltoniana canônica. Bem, se quisermos fazer isso teremos de adicionar novos multiplicadores de Lagrange à hamiltoniana primária.

Se fizermos isso, seremos capazes de determinar todos os novos multiplicadores associados aos vínculos secundários de segunda classe e não haverá informação nova alguma.

Por outro lado, afirmamos que vínculos secundários de primeira classe também são geradores de transformações de calibre. Mas, olhando para H_P não é nada óbvio que alguma transformação de calibre seja gerada por um vínculo secundário já que eles não aparecem em H_P . Dirac propõe então uma hamiltoniana estendida H_E

$$H_E = H'' + \Lambda^\alpha \psi_\alpha, \quad (2.55)$$

que contempla todos os vínculos de primeira classe e faz da Hamiltoniana estendida o verdadeiro gerador da evolução temporal. Essa é, porém, uma condição totalmente ad-hoc imposta por Dirac¹⁴. De fato, são as equações de movimento obtidas a partir de H_P , $\dot{g} = [g, H_P]$, que são as mesmas obtidas a partir da equação de Euler-Lagrange. As de H_E não. Note que, para variáveis dinâmicas invariantes de calibre (que são as observáveis) a evolução dinâmica regida por H_E é a mesma regida por H_P ou H'' uma vez que os parênteses de Poisson dessas variáveis com os vínculos de primeira classe ψ_α são fracamente nulos¹⁵.

¹³ Como a matriz C é antissimétrica, isso implica que a ordem da matriz é par e portanto deve haver um número par de vínculos de segunda classe. Com espinores essa afirmação já não é válida.

¹⁴ Recomendamos a leitura de (PONS, 2005), onde o autor expõe alguns motivos que levaram Dirac a definir essa nova hamiltoniana. Em suma, Dirac, confiando mais em sua intuição física do que em uma demonstração matemática rigorosa, estava convencido de que uma transformação de calibre deveria ter seu gerador aparecendo explicitamente na hamiltoniana, como acontecia com os vínculos primários em H_P . Define assim uma hamiltoniana estendida para se livrar de qualquer contradição. Uma análise completa mostra, porém, que essa proposta era desnecessária.

¹⁵ Essas variáveis, chamadas aqui de observáveis (SUNDERMEYER, 1982), são funções g determinadas completamente pelas equações de movimento e pelas condições iniciais, não podendo depender portanto de funções arbitrárias e para

2.5 FIXAÇÃO DE CALIBRE

Postulamos que todos os vínculos de primeira classe geram transformações de calibre. Assim, a presença de tais vínculos implicam na presença de funções arbitrárias na teoria. Essas funções alteram o conjunto de variáveis canônicas¹⁶ sem alterar o estado físico do sistema¹⁷.

Eliminamos essa ambiguidade impondo restrições sobre as variáveis canônicas, sem afetar as propriedades observáveis (que não dependem das funções arbitrárias). Para isso, introduzimos j_1 funções $\Omega_\alpha(q, p)$ chamadas de **condições de fixação de gauge** em uma teoria que possua j_1 vínculos de primeira classe, transformando-os em vínculos de segunda classe:

$$\begin{aligned} \psi_\alpha &\approx 0 ; \quad \Omega_\alpha(q, p) \approx 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, j_1), \\ \det [\psi_\alpha, \Omega_\beta] &\neq 0. \end{aligned} \quad (2.56)$$

Devemos tratar essas j_1 funções Ω_α como vínculos, que não podem ser obtidos a partir da lagrangiana do problema. Isso nada mais é do que uma escolha de gauge ou calibre, necessária para acessarmos a dinâmica das variáveis do problema pois com a fixação de gauge as funções v_a deixam de ser arbitrárias. Novamente lembramos que tal escolha não afeta o estado físico do sistema.

Definindo a matriz G como $G_{\alpha\beta} = [\Omega_\alpha, \psi_\beta]$ segue que os n_1 multiplicadores de Lagrange até então indeterminados são dados por $\lambda_a = -(G^{-1})_{a\beta}[\Omega_\beta, H'']$. Além disso, como agora todos os vínculos são de segunda classe podemos generalizar a matriz $C_{\mu\nu}$ construindo adequadamente uma matriz $M_{\mu\nu} = [\Phi_\mu, \Phi_\nu]$ de forma a incluir todos os $2j_1 + j_2$ vínculos. De (2.19) com $A = A(q, p)$ temos

$$\dot{A} \approx [A, H] - [A, \Phi_\mu] M_{\mu\nu}^{-1} [\Phi_\nu, H]. \quad (2.57)$$

Definição: os parênteses de Dirac de duas funções F e G são

$$[F, G]^* \equiv [F, G] - [F, \Phi_\mu] M_{\mu\nu}^{-1} [\Phi_\nu, G]. \quad (2.58)$$

Os parênteses de Dirac possuem as mesmas propriedades algébricas dos parênteses de Poisson¹⁸. Sua introdução está intimamente ligada ao processo de quantização, vide (DIRAC, 1964), que era inclusive uma das grandes motivações de Dirac e Bergmann em estudar SHV. Ademais, note que $[F, \Phi]^* \approx 0$: os parênteses de Dirac de um vínculo de segunda classe com uma função arbitrária são nulos. Assim $[F, H_P]^* \approx [F, H]^*$. Portanto os vínculos de segunda classe podem ser postos iguais a zero antes de se calcular os parênteses de Dirac. Finalmente podemos escrever os vínculos como igualdades fortes e

isso basta que $[g, \psi_\alpha] \approx 0$.

¹⁶ Relembrando (2.48), todos os $\{q_a, p_a\}$ determinados pelo conjunto de funções $\{v_a\}$, dada uma condição inicial (q_0, p_0) , pertencem a uma mesma classe de equivalência $[(\bar{q}, \bar{p})]: (q_0, p_0) \longrightarrow (q, p)_1 \sim (q, p)_2 \sim \dots \sim (\bar{q}, \bar{p}) \in [(\bar{q}, \bar{p})]$.

¹⁷ Vale destacar uma diferença conceitual importante entre o que Dirac e Bergmann entendiam por transformação de gauge em SHV (PONS, 2005): em (DIRAC, 1964), Dirac apenas considerava transformações que ocorriam nas vizinhanças de um certo instante de tempo, quando as condições iniciais eram dadas, vide (2.48). Já Bergmann adotava o conceito de transformações de gauge como simetrias que mapeavam soluções completas da dinâmica de um sistema em um novo conjunto de soluções, igualmente aceitáveis. Este é o ponto de vista comumente adotado.

¹⁸ São elas: $[A, B]^* = -[B, A]^*$, $[A, BC]^* = [A, B]^*C + B[A, C]^*$ e a identidade de Jacobi $[[A, B]^*, C]^* + [[C, A]^*, B]^* + [[B, C]^*, A]^* = 0$.

concluir de (2.57) que a evolução de uma grandeza dinâmica é regida pelos parênteses de Dirac:

$$\dot{A} = [A, H]^*. \quad (2.59)$$

2.6 CONTAGEM DE GRAUS DE LIBERDADE

Quantos graus de liberdade do problema são físicos?

Relembrando os passos adotados nas seções anteriores, diante da presença de vínculos, a dimensão $2N$ do espaço de fase Γ foi reduzida. Os j_1 vínculos de primeira classe e os j_2 vínculos de segunda classe definiram um subespaço de dimensão $2N - j_1 - j_2$. Mas após a implementação de t fixações de gauge a dimensão do subespaço se reduziu a $2N - j_1 - j_2 - t$. No final das contas, $t = j_1$ e obtém-se o espaço de fase reduzido Γ_r da teoria. Nesse subespaço, os vínculos podem ser postos iguais a zero e passamos a trabalhar com uma hamiltoniana reduzida H_r .

Assim, o número de graus de liberdade físicos de uma teoria em sua formulação hamiltoniana n é dado por:

$$n = EF - SC - PC - FG$$

onde

- EF: dimensão do espaço de fase completo Γ ,
- SC: número de vínculos de segunda classe,
- PC: número de vínculos de primeira classe,
- FG: número de condições de fixação de gauge.

A fim de eliminar a arbitrariedade temos $FG = PC$ de modo que

$$n = EF - SC - 2(PC) \quad (2.60)$$

e por isso dizemos que cada vínculo de segunda classe elimina 1 grau de liberdade enquanto que cada vínculo de primeira classe elimina 2 graus de liberdade¹⁹.

2.7 TEORIA DE CAMPOS

A aplicação do método desenvolvido nas seções anteriores também é útil no contexto de teoria de campos. Por isso, precisamos generalizar os resultados anteriores para um número infinito e contínuo de graus de liberdade, com as coordenadas generalizadas $q_i(t)$ sendo substituídas por campos²⁰ $\phi(x, t)$, já no contexto relativístico. Vamos apresentar uma prescrição de como as quantidades são redefinidas. Os detalhes podem ser encontrados em livros de mecânica analítica.

¹⁹ No formalismo lagrangiano, $n_L = \frac{n}{2}$, um número inteiro, já que tanto EF como SC são números pares.

²⁰ O campo pode ser um escalar, um espinor, um vetor ou um tensor sob transformações de Lorentz. Cada componente desse campo possui infinitos graus de liberdade - o índice discreto da coordenada generalizada é substituído por uma variável contínua x . Os graus de liberdade da teoria, no nosso caso, referem-se ao número de componentes independentes do campo no final da análise hamiltoniana.

Se em lagrangiana $L(q, \dot{q}, t)$ de sistemas discretos a soma é sobre todos os N graus de liberdades, no caso contínuo podemos substituir a soma por uma integral de uma **densidade lagrangiana**²¹ \mathcal{L} que agora passa a depender do campo, das derivadas do campo, da posição e possivelmente do tempo $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\varphi_\alpha, \dot{\varphi}_\alpha, \vec{\nabla} \varphi_\alpha, \vec{x}, t)$:

$$L = \int d^3x \mathcal{L}(\varphi_\alpha, \dot{\varphi}_\alpha, \vec{\nabla} \varphi_\alpha, \vec{x}, t). \quad (2.61)$$

Aplicando o princípio variacional à ação

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3x \mathcal{L}(\varphi_\alpha, \partial_\mu \varphi_\alpha, x^\mu) \quad (2.62)$$

obtemos as equações de Euler-Lagrange

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_\alpha)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_\alpha} = 0 \quad (2.63)$$

e definimos o momento canonicamente conjugado a φ_α como

$$\pi^\alpha(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_\alpha(x)}. \quad (2.64)$$

Da mesma maneira do caso discreto, se as equações (2.64) forem inversíveis, não será necessária a análise de vínculos e será possível escrever a densidade hamiltoniana canônica como

$$\mathcal{H}_c = \pi^\alpha \dot{\varphi}_\alpha - \mathcal{L} \quad (2.65)$$

definida em todo espaço de fase. A hamiltoniana canônica é dada por²²

$$H_c = \int d^3x \mathcal{H}_c(\varphi_\alpha, \pi^\alpha, \partial_i \varphi_\alpha, \partial_i \pi^\alpha). \quad (2.66)$$

Uma variável dinâmica $A[\varphi, \pi]$ é expressa em termos de sua densidade

$$A[\varphi, \pi] = \int d^3x \mathcal{A}(\varphi_\alpha, \pi^\alpha, \partial_i \varphi_\alpha, \partial_i \pi^\alpha) \quad (2.67)$$

de forma que definimos sua derivada funcional como

$$\frac{\delta A[\varphi, \pi]}{\delta \varphi_\alpha(y)} = \int d^3x \left[\frac{\partial \mathcal{A}(x)}{\partial \varphi_\beta(x)} \frac{\delta \varphi_\beta(x)}{\delta \varphi_\alpha(y)} + \frac{\partial \mathcal{A}(x)}{\partial (\partial_i \varphi_\beta(x))} \frac{\delta (\partial_i \varphi_\beta(x))}{\delta \varphi_\alpha(y)} \right], \quad (2.68)$$

onde $\frac{\delta \varphi_\beta(x)}{\delta \varphi_\alpha(y)} = \delta_{\alpha\beta} \delta^3(x - y)$.

²¹ Apesar disso, em um abuso de linguagem, é comum chamar tais densidades simplesmente de lagrangianas.

²² Exigimos que os φ e π , bem como suas derivadas, anulem-se na fronteira desse espaço, possivelmente no infinito.

Com o princípio variacional, podemos deduzir as equações de Hamilton :

$$\dot{\varphi}_\alpha = \frac{\delta H_c[\varphi, \pi]}{\delta \pi^\alpha} = \frac{\partial \mathcal{H}_c}{\partial \pi^\alpha} - \partial_i \frac{\partial \mathcal{H}_c}{\partial (\partial_i \pi^\alpha)}, \quad (2.69)$$

$$\dot{\pi}^\alpha = -\frac{\delta H_c[\varphi, \pi]}{\delta \varphi_\alpha} = -\frac{\partial \mathcal{H}_c}{\partial \varphi_\alpha} + \partial_i \frac{\partial \mathcal{H}_c}{\partial (\partial_i \varphi_\alpha)}. \quad (2.70)$$

Redefinimos também os parênteses de Poisson $[A_i, B_j] \Rightarrow \{A(x), B(y)\}$:

$$\{F(y), G(z)\} = \int d^3x \left[\frac{\delta F(y)}{\delta \varphi_\alpha(x)} \frac{\delta G(z)}{\delta \pi^\alpha(x)} - \frac{\delta F(y)}{\delta \pi^\alpha(x)} \frac{\delta G(z)}{\delta \varphi_\alpha(x)} \right]. \quad (2.71)$$

Já se as equações (2.64) não forem solúveis para todos os $\dot{\varphi}_\alpha$ em termos dos momentos π^α então aparecem vínculos do tipo $\phi_k[\varphi, \pi] \approx 0$ e todo o formalismo das seções anteriores deverá ser aplicado. Com algumas adaptações, o algoritmo de Dirac-Bergmann se repete de modo que as mesmas conclusões apresentadas anteriormente valem para as teorias de campo. As adaptações são:

- Os vínculos agora são relações funcionais: $\phi_k[\varphi_\alpha, \pi^\alpha, \partial\varphi, \partial\pi] \approx 0$;
- A Hamiltoniana primária é dada por $H_P = \int d^3x \mathcal{H}_p$ onde

$$\mathcal{H}_p = \mathcal{H}_c + \sum_k \lambda^k(x) \phi_k(x), \quad (2.72)$$

é a densidade de hamiltoniana primária, implementada com os vínculos primários através dos multiplicadores de Lagrange, análogo a (2.15);

- As condições de consistência continuam sendo $\dot{\phi}_k \approx 0$:

$$\dot{\phi}_k(x) = \{\phi_k(x), H_c(y)\} + \int d^3y \lambda_\nu(y) \{\phi_k(x), \phi_\nu(y)\} \approx \{\phi_k(x), H_P(y)\} \approx 0; \quad (2.73)$$

- O análogo das transformações de calibre (2.48) são

$$\delta^\varepsilon g[\varphi, \pi] = \{g, G[\varepsilon]\} \quad , \quad G[\varepsilon] = \int d^3x \varepsilon(x) \psi(x), \quad (2.74)$$

onde $G[\varepsilon]$ é o gerador da transformação, $\varepsilon(x)$ é um parâmetro funcional arbitrário e $\psi(x)$ é um vínculo de primeira classe.

Da definição (2.71) seguem relações úteis utilizadas no cálculo das condições de consistência:

$$\{\varphi_\alpha(x), \varphi_\beta(y)\} = 0 = \{\pi^\alpha(x), \pi^\beta(y)\}, \quad (2.75)$$

$$\{\varphi_\alpha(x), \pi^\beta(y)\} = \delta_\alpha^\beta \delta^{(3)}(x - y). \quad (2.76)$$

Essas informações são suficientes para aplicar o método a algumas teorias de campo, mote do próximo capítulo. Vale destacar que novamente o método nos permite identificar simetrias de gauge

e contar os graus de liberdade físicos da teoria; a desvantagem, porém, é a perda da covariância das equações, o que torna o cálculo relativamente trabalhoso.

Um aprofundamento do assunto pode ser feito nas referências (HENNEAUX; TEITELBOIM, 1992), (SUNDERMEYER, 1982) ou (HANSON; REGGE; TEITELBOIM, 1976), além de uma interessante discussão em (PONS, 2005). A relação entre SHV e o processo de quantização não faz parte deste TG mas o leitor pode encontrar o tema nestas referências ou então no próprio livro do Dirac (DIRAC, 1964). Vamos então dar início às aplicações do método.

3 APLICAÇÃO DA ANÁLISE HAMILTONIANA

Neste capítulo vamos aplicar o método apresentado no capítulo anterior em modelos conhecidos em teorias de campo: trabalharemos com os modelos de spin-1 Maxwell (Eletromagnetismo) e Maxwell-Proca (Eletromagnetismo com massa) e os modelos de spin-2 Einstein-Hilbert linearizado (Relatividade Geral linearizada), Fierz-Pauli (Einstein-Hilbert com massa) e WTDiff (uma teoria de spin-2 alternativa, invariante por transformações de Weyl e difeomorfismos transversais - TDiff). Usaremos o método de Dirac para checar o conteúdo físico e a positividade da Hamiltoniana reduzida destes modelos.

3.1 MODELO DE MAXWELL

O modelo de Maxwell, livre de fontes, é dado pela seguinte densidade lagrangiana¹

$$\mathcal{L}_{MAX} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad (3.1)$$

onde $F^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ é uma espécie de quadrirotacional do quadri vetor potencial. Note que (3.1) é invariante pela transformação local

$$\delta A^\mu = \partial^\mu \Lambda(x) \quad (3.2)$$

para uma função escalar arbitrária Λ . Portanto há uma simetria de gauge na teoria e esperamos checar com o método de Dirac a presença de uma função arbitrária no final do procedimento.

Para analisar, separamos as componentes² espaciais das temporais em (3.1):

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\dot{A}_i\dot{A}_i - \dot{A}_i\partial_i A_0 + \frac{1}{2}\partial_i A_0\partial_i A_0 - \frac{1}{4}F_{ij}F_{ij}. \quad (3.3)$$

Os momentos canônicos são

$$\pi^0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_0} = 0, \quad (3.4)$$

$$\pi^j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_j} = \dot{A}_j - \partial_i A_0. \quad (3.5)$$

Neste caso a matriz hessiana da teoria é singular pois não é possível relacionar \dot{A}_0 com o momento canônico π^0 e a teoria é vinculada. A relação (3.4) nos fornece um vínculo primário

$$\varphi(x) = \pi^0(x) \approx 0. \quad (3.6)$$

¹ Todos os modelos neste TG serão abordados na ausência de fontes.

² Trabalhando em D dimensões: $i = 1, 2, \dots, D-1$. Lembramos que $\eta_{\mu\nu} = (-1, +1, \dots, +1)$ e definimos $\dot{A}_i \equiv \partial_0 A_i$.

A densidade hamiltoniana canônica da teoria é dada por

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \pi^\mu \dot{A}_\mu - \mathcal{L} = \pi^0 \dot{A}_0 + \pi^i \dot{A}_i + \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \\ &= \frac{1}{2} \pi^i \pi^i + \pi^i \partial_i A_0 + \frac{1}{4} F_{ij} F^{ij}.\end{aligned}\quad (3.7)$$

Escrevemos a hamiltoniana canônica (2.66) e adicionamos o vínculo (3.6) com um multiplicador de Lagrange, obtendo a hamiltoniana primária (2.72):

$$H_P = \int d^{D-1}x \left[\frac{1}{2} \pi^i \pi^i + \pi^i \partial_i A_0 + \frac{1}{4} F_{ij} F^{ij} + \lambda \varphi \right]. \quad (3.8)$$

Agora aplicamos o algoritmo de Dirac-Bergmann. A condição de consistência (2.73) para φ requer que

$$0 \approx \dot{\varphi}(y) = \int d^{D-1}x [\{\varphi(y), \mathcal{H}(x)\} + \lambda(x) \{\varphi(y), \varphi(x)\}]. \quad (3.9)$$

Calculando os parênteses de Poisson com o auxílio de (2.75-2.76) obtemos

$$\begin{aligned}\{\varphi(y), \mathcal{H}(x)\} &= -\pi^i(x) \partial_i^{(x)} \partial^{(D-1)}(x-y), \\ \{\varphi(y), \varphi(x)\} &= 0,\end{aligned}$$

que substituindo em (3.9) nos dá $0 \approx \dot{\varphi}(y) = \partial_i \pi^i(y)$ e concluímos que há um vínculo secundário:

$$\chi = \partial_i \pi^i \approx 0. \quad (3.10)$$

Notando que $\pi^i = E^i$, essa relação nada mais é que a lei de Gauss, na ausência de fontes. Aplicando a condição de consistência para esse vínculo χ

$$0 \approx \dot{\chi}(y) = \int d^{D-1}x [\{\chi(y), \mathcal{H}(x)\} + \lambda(x) \{\chi(y), \varphi(x)\}] \quad (3.11)$$

chegamos à conclusão de que tal condição é identicamente satisfeita e portanto não há mais vínculos na teoria. O multiplicador de Lagrange $\lambda(x)$ permanece indeterminado, o que justifica a presença da simetria de gauge na teoria de Maxwell. Uma vez que $\{\varphi(y), \chi(x)\} = 0$ segue que $\varphi \approx 0$ e $\chi \approx 0$ são vínculos de primeira classe, que implementam a simetria de gauge.

Em $D = 3 + 1$, o espaço de fase do modelo de Maxwell $\{A_\mu, \pi^\mu\}$ possui 8 componentes mas como cada vínculo de primeira classe elimina 2 graus de liberdade a análise hamiltoniana desse modelo nos ensina, vide (2.60), que existem apenas $n = 4$ graus de liberdade no espaço de fase reduzido da teoria de Maxwell, o que corresponde aos 2 graus de liberdade físicos do fóton (helicidade ± 1) no formalismo lagrangiano. Note que em D dimensões, o resultado é $n = 2D - 4$ no formalismo hamiltoniano e $n_L = D - 2$ no lagrangiano.

A hamiltoniana reduzida nada mais é do que utilizar os vínculos como **igualdades fortes** na

hamiltoniana primária (3.8). Escrevemos a hamiltoniana parcialmente reduzida

$$H_{(pr)} = \frac{1}{2} \int d^{D-1}x [\pi^i \delta_{ij} \pi^j - A_i (\nabla^2 \delta_{ij} - \partial_i \partial_j) A_j]. \quad (3.12)$$

Em seguida utilizamos os operadores de projeção³ - ou projetores - de spin-0 e spin-1 dados respectivamente por

$$\omega_{ij} = \frac{\partial_i \partial_j}{\nabla^2}, \quad \theta_{ij} = \delta_{ij} - \omega_{ij}.$$

Como $\chi = \partial_i \pi^i = 0$ então $\omega_{ij} \pi^{ij} = 0$ e escrevemos a hamiltoniana reduzida como

$$H_r = \frac{1}{2} \int d^{D-1}x [\pi^i \theta_{ij} \pi^j - A_i \nabla^2 \theta_{ij} A_j]. \quad (3.13)$$

Como os operadores de projeção são hermitianos e idempotentes, $\pi^i \theta_{ij} \pi^j = \pi^i \theta_{ik} \theta_{kj} \pi^j = (\theta_{ij} \pi^j)^2 \geq 0$; e os autovalores do operador laplaciano são negativos⁴ segue $H_r \geq 0$. A hamiltoniana reduzida é positivo-definida, o que garante a **estabilidade clássica** da teoria. Note também que ela depende apenas do projetor de spin-1, como esperado para um fóton.

Por fim, em $D = 3 + 1$ é interessante reescrever (3.13) em termos dos campos elétrico e magnético. Notando que $\pi^i = E^i$ e integrando por partes o segundo termo (lembrando que $\vec{E} = \vec{A} - \nabla V$ e $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$) temos

$$H_r = \frac{1}{2} \int d^3x (E^2 + B^2) \quad (3.14)$$

que expressa corretamente a energia armazenada pelo campo eletromagnético.

3.2 MODELO DE MAXWELL-PROCA

O modelo de Maxwell-Proca (PROCA, 1936; PROCA, 1938; POENARU, 2005) é dado pela lagrangiana

$$\mathcal{L}_{MP} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{m^2}{2} A_\mu A^\mu \quad (3.15)$$

e é uma versão massiva do eletromagnetismo de Maxwell. O termo de massa quebra a invariância de gauge do modelo por (3.2). Neste caso, não esperamos ter nenhum multiplicador de Lagrange arbitrário no final do procedimento de Dirac.

Conforme fizemos no modelo de Maxwell começamos separando as componentes espaciais das temporais de (3.15), obtendo

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \dot{A}_i \dot{A}_i - \dot{A}_i \partial_i A_0 + \frac{1}{2} \partial_i A_0 \partial_i A_0 - \frac{1}{4} F_{ij} F_{ij} + \frac{m^2}{2} (A_0 A_0 - A_i A_i) \quad (3.16)$$

³ Uma breve introdução a esses operadores está apresentada no apêndice B.

⁴ Chegamos a essa conclusão através da transformada de Fourier F . Assuma que seja possível tomar a transformada dos campos e dos operadores de projeção, e que a inversa exista. Então, através da transformada inversa, se $A \mathcal{O} A(x) = F^{-1}[f(k)] = \int dk e^{ikx} f(k)$, então $d_x F^{-1}[f(k)] = ik F^{-1}[f(k)]$ e $d_x^2 F^{-1}[f(k)] = -k^2 F^{-1}[f(k)] \Rightarrow d_x^2 (A \mathcal{O} A(x)) = -k^2 (A \mathcal{O} A(x))$.

e os momentos canônicos são idênticos aos do modelo de Maxwell (3.4) e (3.5). Novamente temos uma teoria vinculada, cujo vínculo primário é

$$\varphi(x) = \pi^0(x) \approx 0. \quad (3.17)$$

A densidade hamiltoniana canônica se escreve como

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \pi^\mu \dot{A}_\mu - \mathcal{L} = \pi^0 \dot{A}_0 + \pi^i \dot{A}_i + \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{m^2}{2} A_\mu A^\mu \\ &= \frac{1}{2} \pi^i \pi^i + \pi^i \partial_i A_0 + \frac{1}{4} F_{ij} F^{ij} - \frac{m^2}{2} (A_0 A_0 - A_i A_i) \end{aligned} \quad (3.18)$$

e a hamiltoniana primária é

$$H_P = \int d^{D-1}x \left[\frac{1}{2} \pi^i \pi^i + \pi^i \partial_i A_0 + \frac{1}{4} F_{ij} F^{ij} - \frac{m^2}{2} (A_0 A_0 - A_i A_i) + \lambda \varphi \right]. \quad (3.19)$$

Aplicamos a condição de consistência para o vínculo primário φ :

$$0 \approx \dot{\varphi}(y) = \int d^{D-1}x [\{\varphi(y), \mathcal{H}(x)\} + \lambda(x) \{\varphi(y), \varphi(x)\}]. \quad (3.20)$$

Calculando os parênteses de Poisson obtemos

$$\begin{aligned} \{\varphi(y), \mathcal{H}(x)\} &= -\pi^i(x) \partial_i^{(x)} \delta^{(D-1)}(x-y) + m^2 A_0(x) \delta^{(D-1)}(x-y), \\ \{\varphi(y), \varphi(x)\} &= 0, \end{aligned}$$

que substituindo em (3.20) nos dá $0 \approx \dot{\varphi}(y) = \partial_i \pi^i(y) + m^2 A_0(y)$ e concluímos que há um vínculo secundário na teoria:

$$\chi = \partial_i \pi^i + m^2 A_0 \approx 0. \quad (3.21)$$

Aplicamos a condição de consistência nesse vínculo

$$0 \approx \dot{\chi}(y) = \int d^{D-1}x [\{\chi(y), \mathcal{H}(x)\} + \lambda(x) \{\chi(y), \varphi(x)\}]. \quad (3.22)$$

Calculando os parênteses de Poisson,

$$\{\chi(y), \varphi(x)\} = m^2 \delta^{(D-1)}(x-y), \quad (3.23)$$

$$\{\chi(y), \mathcal{H}(x)\} = -\partial_i^{(y)} [m^2 A_i - \partial_i A_j \partial_j + \partial_j A_i \partial_j](x) \delta^{(D-1)}(x-y), \quad (3.24)$$

e substituindo-os em (3.22) obtemos $0 \approx m^2 (\lambda - \partial_i A_i)(y)$. Logo, o multiplicador de Lagrange está determinado

$$\lambda \approx \partial_i A_i \quad (3.25)$$

e não há mais vínculos na teoria. De (3.23) segue que $\varphi \approx 0$ e $\chi \approx 0$ são vínculos de segunda classe. A inexistência de funções arbitrárias no tempo vai ao encontro do fato do modelo de Maxwell-Proca

não possuir simetria de gauge.

Quanto à contagem dos graus de liberdade, em $D = 3 + 1$, o espaço de fase do modelo de Proca possui 8 componentes, entretanto os 2 vínculos de segunda classe retiram 1 grau de liberdade cada um, de forma que no formalismo hamiltoniano o modelo de Maxwell-Proca possui $n = 8 - 2 = 6$ graus de liberdade. No formalismo lagrangiano são 3 graus de liberdade, como esperado para uma partícula massiva⁵ de spin-1 (helicidades $-1, 0, +1$).

Em D dimensões, $n = 2D - 2$ e $n_L = D - 1$. Note então que um fóton massivo em D dimensões possui o mesmo número de graus de liberdade que um fóton não massivo em $D + 1$ possui. Essa informação será levada em conta mais adiante no assunto Redução Dimensional.

Utilizando os vínculos como igualdades fortes obtemos a hamiltoniana reduzida

$$H_r = \int d^{D-1}x \left[\frac{1}{2} \pi^i \pi^i + \pi^i \partial_i A_0 + \frac{1}{4} F_{ij} F^{ij} + \frac{m^2}{2} A_i A_i + \frac{1}{2m^2} \partial_i \pi^i \partial_j \pi^j \right], \quad (3.26)$$

que reescrita em termos dos projetores fica

$$H_r = \frac{1}{2} \int d^{D-1}x \left\{ \pi^i \left[\theta_{ij} + \frac{(m^2 - \nabla^2)}{m^2} \omega_{ij} \right] \pi^j + A_i [(m^2 - \nabla^2) \theta_{ij} + m^2 \omega_{ij}] A_j \right\}. \quad (3.27)$$

Com os mesmos argumentos utilizados para o modelo de Maxwell, concluímos que $H_r \geq 0$. Note que a contribuição de cada helicidade $(\pm 1, 0)$ é positivo-definida separadamente⁶, o que garante a estabilidade clássica da teoria.

3.3 MODELO DE EINSTEIN-HILBERT LINEARIZADO

O modelo de Einstein-Hilbert linearizado é dado pela lagrangiana

$$\mathcal{L}_{EH} = -\frac{1}{4} \partial_\mu h_{\alpha\beta} \partial^\mu h^{\alpha\beta} + \frac{1}{4} \partial_\mu h \partial^\mu h - \frac{1}{2} \partial_\mu h \partial_\nu h^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \partial_\mu h^{\mu\nu} \partial^\lambda h_{\lambda\nu} \quad (3.28)$$

onde $h \equiv \eta_{\mu\nu} h^{\mu\nu}$ é o traço do tensor simétrico $h^{\mu\nu} = h^{\nu\mu}$. Esse modelo é obtido a partir da linearização da ação de Einstein-Hilbert, da relatividade geral.

A simetria de gauge de (3.28) é⁷

$$\delta h_{\mu\nu} = \partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu \quad (3.29)$$

onde $\xi_\mu(x)$ é um parâmetro vetorial.

⁵ Em $D = 3 + 1$, uma partícula massiva de spin s possui $2s + 1$ graus de liberdade, vide apêndice B. Já uma partícula sem massa e de spin $s \neq 0$ possui apenas 2 graus de liberdade, correspondente às helicidades $\pm s$.

⁶ De acordo com o apêndice B, em $D = 3 + 1$ o operador θ_{ij} projeta nas 2 direções espaciais transversais (associadas às helicidades ± 1) enquanto o operador ω_{ij} projeta na direção longitudinal (helicidade 0).

⁷ Dizemos que (3.28) é invariante por difeomorfismos (Diff). Consulte o apêndice A.

Separando⁸ as componentes espaciais das temporais de (3.28) obtemos :

$$\mathcal{L}_{EH} = \frac{1}{4}(\dot{h}_{ij}\dot{h}_{ij} - \dot{h}_{ii}\dot{h}_{jj}) - \dot{h}_{ij}\partial_i h_{0j} + \dot{h}_{ii}\partial_j h_{0j} - \mathcal{V}, \quad (3.30)$$

onde separamos a parte que não depende de derivadas temporais em

$$\begin{aligned} \mathcal{V} = & -\frac{1}{2}\partial_i h_{0j}\partial_i h_{0j} + \frac{1}{4}\partial_i h_{jk}\partial_i h_{jk} + \frac{1}{2}\partial_i h_{00}\partial_i h_{jj} - \frac{1}{4}\partial_i h_{jj}\partial_i h_{kk} + \\ & -\frac{1}{2}\partial_i h_{00}\partial_j h_{ij} + \frac{1}{2}\partial_i h_{kk}\partial_j h_{ij} + \frac{1}{2}\partial_i h_{0i}\partial_j h_{0j} - \frac{1}{2}\partial_i h_{ij}\partial_k h_{kj}. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Os momentos canônicos são dados por

$$\pi^{00} = \frac{\partial \mathcal{L}_{EH}}{\partial \dot{h}_{00}} = 0 \quad , \quad \pi^{0i} = \frac{\partial \mathcal{L}_{EH}}{\partial \dot{h}_{0i}} = 0 \quad , \quad (3.32)$$

$$\pi^{ij} = \frac{\partial \mathcal{L}_{EH}}{\partial \dot{h}_{ij}} = \frac{1}{2}\dot{h}_{ij} - \frac{1}{2}\delta_{ij}\dot{h}_{kk} - \frac{(\partial_i h_{0j} + \partial_j h_{0i})}{2} + \delta_{ij}\partial_k h_{0k}. \quad (3.33)$$

As equações (3.33) podem ser invertidas. De fato, manipulando-as obtemos

$$\dot{h}_{kk} = -\frac{2}{(D-2)}\pi^{kk} + 2\partial_k h_{0k}, \quad (3.34)$$

$$\dot{h}_{ij} = 2\pi^{ij} - \frac{2}{(D-2)}\delta_{ij}\pi^{kk} + \partial_i h_{0j} + \partial_j h_{0i}, \quad (3.35)$$

enquanto que (3.32) nos informa que a teoria é vinculada. Existem D vínculos primários na teoria:

$$\varphi^0 = \pi^{00} \approx 0 \quad , \quad \varphi^i = \pi^{0i} \approx 0. \quad (3.36)$$

A densidade hamiltoniana canônica é

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{EH} &= \pi^{\mu\nu}\dot{h}_{\mu\nu} - \mathcal{L}_{EH} \\ &= \pi^{00}\dot{h}_{00} + \pi^{0i}\dot{h}_{0i} + \pi^{ij}\dot{h}_{ij} - \mathcal{L}_{EH} \\ &= \pi^{ij}\pi^{ij} - \frac{1}{(D-2)}\pi^{jj}\pi^{kk} + 2\pi^{ij}\partial_i h_{0j} + \frac{1}{4}\partial_i h_{jk}\partial_i h_{jk} + \frac{1}{2}\partial_i h_{00}\partial_i h_{jj} + \\ & - \frac{1}{4}\partial_i h_{jj}\partial_i h_{kk} - \frac{1}{2}\partial_i h_{00}\partial_j h_{ij} + \frac{1}{2}\partial_i h_{kk}\partial_j h_{ij} - \frac{1}{2}\partial_i h_{ij}\partial_k h_{kj}. \end{aligned} \quad (3.37)$$

A hamiltoniana primária (2.72) é dada por

$$H_P = \int d^{D-1}x [\mathcal{H}_{EH} + \lambda_0\varphi^0 + \lambda_i\varphi^i]. \quad (3.38)$$

Para cada um dos vínculos primários a condição de consistência (2.73) é:

$$0 \approx \dot{\varphi}^\mu(y) = \int d^{D-1}x [\{\varphi^\mu(y), \mathcal{H}_{EH}(x)\} + \lambda_\nu(x)\{\varphi^\mu(y), \varphi^\nu(x)\}]. \quad (3.39)$$

⁸ Uma vez que trabalharemos com \mathcal{L}_{EH} no interior de integrais realizamos integrações por partes em termos do tipo $h_{0j}\partial_i h_{ij} = \dot{h}_{ij}\partial_i h_{0j}$. Dessa maneira simplificamos os cálculos garantindo que π^{0i} é um vínculo.

i) $\varphi^0 \approx 0$:

Calculando os parênteses de Poisson

$$\begin{aligned}\{\varphi^0(y), \mathcal{H}_{EH}(x)\} &= -\frac{1}{2}[\partial_i h_{jj} \partial_i - \partial_j h_{ij} \partial_i](x) \delta^{(D-1)}(x-y), \\ \{\varphi^0(y), \varphi^\nu(x)\} &= 0,\end{aligned}\tag{3.40}$$

e substituindo-os em (3.39) obtemos $0 \approx \frac{1}{2}[\nabla^2 h_{kk} - \partial_i \partial_j h_{ij}](y)$. Logo temos um vínculo secundário:

$$\chi^0 = \nabla^2 h_{kk} - \partial_i \partial_j h_{ij} \approx 0.\tag{3.41}$$

ii) $\varphi^i \approx 0$:

Calculando os parênteses de Poisson

$$\begin{aligned}\{\varphi^i(y), \mathcal{H}_{EH}(x)\} &= -2\pi^{ij} \partial_j(x) \delta^{(D-1)}(x-y), \\ \{\varphi^i(y), \varphi^\nu(x)\} &= 0,\end{aligned}\tag{3.42}$$

e substituindo-os em (3.39) obtemos $0 \approx 2\partial_k \pi^{ik}(y)$. Logo temos outro vínculo secundário:

$$\chi^i = \partial_k \pi^{ik}(y) \approx 0.\tag{3.43}$$

Devemos aplicar a condição de consistência para os vínculos secundários:

$$0 \approx \dot{\chi}^\mu(y) = \int d^{D-1}x [\{\chi^\mu(y), \mathcal{H}_{EH}(x)\} + \lambda_\nu(x) \{\chi^\mu(y), \varphi^\nu(x)\}].\tag{3.44}$$

Procedendo de maneira análoga aos casos anteriores, para $\chi^0 \approx 0$ obtemos $0 \approx -2\partial_i \partial_j \pi^{ij}(y) = -2\partial_i \chi^i(y)$. Como $\chi^i \approx 0$, a condição de consistência é identicamente satisfeita. Idem para $\chi^i \approx 0$, de modo que não há mais vínculos na teoria.

Terminamos então com D vínculos primários e D vínculos secundários. Calculando os parênteses de Poisson entre eles:

$$\begin{aligned}\{\varphi^\mu(y), \varphi^\nu(x)\} &= 0 = \{\varphi^i(y), \chi^\nu(x)\}, \\ \{\chi^0(y), \chi^0(x)\} &= 0 = \{\chi^i(y), \chi^j(x)\}, \\ \{\chi^0(y), \chi^i(x)\} &= \partial_k^{(y)} [\partial_k^{(y)} \partial_i^{(x)} - \partial_i^{(y)} \partial_k^{(x)}] \delta^{(D-1)}(x-y) = 0,\end{aligned}\tag{3.45}$$

logo, todos os $2D$ vínculos são vínculos de primeira classe e os D multiplicadores de Lagrange λ^μ mantêm-se indeterminados, o que justifica a simetria de gauge (3.29).

Quanto à contagem dos graus de liberdade, um tensor simétrico $h_{\mu\nu}$ possui em D dimensões $\frac{D(D+1)}{2}$ componentes independentes. A contagem (2.60) nos mostra que o espaço de fase reduzido dessa teoria possui dimensão $n = D(D+1) - 2(2D) = D(D-3)$, o que significa que no formalismo lagrangiano a teoria possui $\frac{D(D-3)}{2}$ graus de liberdade físicos. Em $D = 3 + 1$, a teoria possui 2 graus de liberdade, que correspondem às helicidades (± 2) do gráviton. Note que em $D = 2 + 1$, a teoria não

possui conteúdo físico.

Utilizando os vínculos como igualdades fortes, obtemos a hamiltoniana parcialmente reduzida

$$H_{(pr)} = \int d^{D-1}x \left[\pi^{ij}\pi^{ij} - \frac{\pi^{jj}\pi^{kk}}{D-2} + \frac{1}{4}(\partial_i h_{jk})^2 + \frac{1}{4}(\partial_i h_{jj})^2 - \frac{1}{2}(\partial_i h_{ij})^2 \right]. \quad (3.46)$$

Para modelos de spin-2 a base dos operadores de projeção $P_{AB}^{(s)}$, onde (s) indica o setor de projeção, é construída a partir de ω_{ij} e θ_{ij} . Esses operadores estão apresentados no apêndice B. Utilizando-os, reescrevemos a hamiltoniana parcialmente reduzida como

$$H_{(pr)} = \int d^{D-1}x \left\{ \pi^{ij} \left[P_{SS}^{(2)} + P_{SS}^{(1)} + \frac{D-3}{D-2} P_{WW}^{(0)} - \frac{1}{\sqrt{D-2}} (P_{SW}^{(0)} + P_{WS}^{(0)}) \right]^{ij,kl} \pi^{kl} + h_{ij} \left[-\frac{\nabla^2}{4} P_{SS}^{(2)} - \frac{D-1}{4} \nabla^2 P_{SS}^{(0)} - \frac{\sqrt{D-2}}{4} \nabla^2 (P_{SW}^{(0)} + P_{WS}^{(0)}) \right]^{ij,kl} h_{kl} \right\}. \quad (3.47)$$

Com o auxílio dos vínculos podemos mostrar que:

$$(P_{WW}^{(0)})^{ij,kl} \pi^{kl} = 0, (P_{SW}^{(0)})^{ij,kl} \pi^{kl} = 0, (P_{WS}^{(0)})^{ij,kl} \pi^{kl} = 0, (P_{SS}^{(1)})^{ij,kl} \pi^{kl} = 0, \quad (3.48)$$

$$(P_{SS}^{(0)})^{ij,kl} h_{kl} = 0, (P_{SW}^{(0)})^{ij,kl} h_{kl} = 0 \text{ e } (P_{WS}^{(0)})^{ij,kl} h_{kl} = 0. \quad (3.49)$$

Assim a hamiltoniana reduzida é simplesmente

$$H_r = \int d^{D-1}x \left\{ \pi^{ij} (P_{SS}^{(2)})^{ij,kl} \pi^{kl} + h_{ij} \left[-\frac{\nabla^2}{4} (P_{SS}^{(2)})^{ij,kl} \right] h_{kl} \right\}, \quad (3.50)$$

que é positivo-definida, garantindo a estabilidade clássica da teoria. Note também que ela depende apenas do projetor de spin-2, como esperado para o gráviton, uma partícula de spin-2 sem massa.

3.4 MODELO DE FIERZ-PAULI

O modelo de Fierz-Pauli é a tradicional versão massiva do modelo de Einstein-Hilbert linearizado (3.28) e serve como paradigma para as teorias massivas de spin-2 (FIERZ; PAULI, 1939). Utilizando o tensor simétrico $h_{\mu\nu}$, a densidade lagrangiana é escrita como

$$\mathcal{L}_{FP} = -\frac{1}{4} \partial_\mu h_{\alpha\beta} \partial^\mu h^{\alpha\beta} + \frac{1}{4} \partial_\mu h \partial^\mu h - \frac{1}{2} \partial_\mu h \partial_\nu h^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \partial_\mu h^{\mu\nu} \partial^\lambda h_{\lambda\nu} - \frac{m^2}{4} (h_{\mu\nu} h^{\mu\nu} - h^2). \quad (3.51)$$

O termo de massa quebra a invariância de gauge (3.29). Então, assim como no modelo de Maxwell-Proca, esperamos determinar todos os multiplicadores de Lagrange no final da análise hamiltoniana.

Apresentaremos os resultados de maneira sucinta, uma vez que os cálculos são análogos aos da seção anterior. Reescrevemos (3.51) utilizando (3.30) como

$$\mathcal{L}_{FP} = \mathcal{L}_{EH} + \frac{m^2}{4} (2h_{0i} h_{0i} - h_{ij} h_{ij} + h_{ii} h_{jj} - 2h_{00} h_{ii}). \quad (3.52)$$

Os momentos canônicos são os mesmos do modelo de Einstein-Hilbert, dados por (3.32) e (3.33), e a teoria também possui D vínculos primários:

$$\varphi^0 = \pi^{00} \approx 0 \quad , \quad \varphi^i = \pi^{0i} \approx 0. \quad (3.53)$$

Utilizando (3.37), a densidade hamiltoniana canônica é dada por

$$\mathcal{H}_{FP} = \pi^{\mu\nu} \dot{h}_{\mu\nu} - \mathcal{L}_{FP} = \mathcal{H}_{EH} - \frac{m^2}{4} (2h_{0i}h_{0i} - h_{ij}h_{ij} + h_{ii}h_{jj} - 2h_{00}h_{ii}) \quad (3.54)$$

e a hamiltoniana primária (2.72) é

$$H_P = \int d^{D-1}x [\mathcal{H}_{FP} + \lambda_0\varphi^0 + \lambda_i\varphi^i]. \quad (3.55)$$

Ao aplicarmos a condição de consistência (2.73) nos vínculos primários, obtemos os vínculos secundários

$$\dot{\varphi}^0 \approx 0 : \quad \chi^0 = \nabla^2 h_{kk} - \partial_i \partial_j h_{ij} - m^2 h_{kk} \approx 0; \quad (3.56)$$

$$\dot{\varphi}^i \approx 0 : \quad \chi^i = \partial_j \pi^{ij} + \frac{m^2}{2} h_{0i} \approx 0. \quad (3.57)$$

Aplicando a condição de consistência (2.73) nos vínculos secundários (3.56) e (3.57), constatamos que o multiplicador de Lagrange λ_i é determinado

$$\dot{\chi}^i \approx 0 : \quad \lambda_i \approx \partial_j h_{ij} + \partial_i h_{00} - \partial_i h_{kk}, \quad (3.58)$$

enquanto que para χ^0 geramos um novo vínculo (terciário) ψ :

$$\dot{\chi}^0 \approx 0 : \quad \psi = -\frac{m^2}{(D-2)} \pi^{kk} + \frac{m^2}{2} \partial_k h_{0k} \approx 0. \quad (3.59)$$

Repetindo o processo, encontramos um vínculo quaternário ξ :

$$\dot{\psi} \approx 0 : \quad \xi = \frac{m^4(D-1)}{2(D-2)} (h_{00} - h_{kk}) \approx 0. \quad (3.60)$$

Finalmente, ao aplicarmos a condição de consistência para $\xi \approx 0$ determinamos o multiplicador de Lagrange λ_0 :

$$\dot{\xi} \approx 0 : \quad \lambda_0 \approx -\frac{2}{(D-2)} \pi^{jj} + 2\partial_i h_{0i}. \quad (3.61)$$

Assim o processo termina e temos $2(D + 1)$ vínculos:

$$\begin{aligned}
\varphi^0 &= \pi^{00} \approx 0; \\
\varphi^i &= \pi^{0i} \approx 0; \\
\chi^0 &= \nabla^2 h_{kk} - \partial_i \partial_j h_{ij} - m^2 h_{kk} \approx 0; \\
\chi^i &= \partial_j \pi^{ij} + \frac{m^2}{2} h_{0i} \approx 0; \\
\psi &= -\frac{m^2}{(D-2)} \pi^{kk} + \frac{m^2}{2} \partial_k h_{0k} \approx 0; \\
\xi &= \frac{m^4(D-1)}{2(D-2)} (h_{00} - h_{kk}) \approx 0.
\end{aligned}$$

Calculando os parênteses de Poisson entre eles, concluímos que todos são vínculos de segunda classe. Note que não há funções arbitrárias na teoria, em pleno acordo com o fato de que o modelo não possui simetria de gauge.

Em relação aos graus de liberdade, o espaço de fase possui $D(D + 1)$ componentes. Como cada vínculo de segunda classe retira um grau de liberdade, terminamos com um espaço de fase reduzido de dimensão $n = D(D + 1) - 2(D + 1) = (D + 1)(D - 2)$. No formalismo lagrangiano temos $n_L = \frac{(D+1)(D-2)}{2}$ graus de liberdade físicos.

Assim, em $D = 3 + 1$, o modelo de Fierz-Pauli possui 5 graus de liberdade propagantes, o que corresponde às 5 helicidades $(-2, -1, 0, +1, +2)$ do gráviton massivo, uma partícula massiva de spin-2.

Note também que existe gravitação massiva em $D = 2 + 1$, diferentemente da gravitação usual (Einstein-Hilbert). Além disso, note que o número de graus de liberdade físicos do modelo de Einstein-Hilbert em $D + 1$ dimensões é exatamente o mesmo número do modelo de Fierz-Pauli em D dimensões. Isso está de acordo com o fato de que uma teoria massiva em D dimensões corresponde a uma teoria não massiva em $D + 1$ dimensões, fato que também ocorre nos modelos de spin-1 e será explorado no próximo capítulo.

Utilizando os vínculos como igualdades fortes escrevemos a hamiltoniana parcialmente reduzida

$$\begin{aligned}
H_{(pr)} &= \int d^{D-1}x \left\{ \pi^{ij} \pi^{ij} - \frac{\pi^{jj} \pi^{kk}}{D-2} + \frac{2}{m^2} \partial_i \pi^{ij} \partial_k \pi^{kj} + \frac{1}{4} (\partial_i h_{jk})^2 + \frac{1}{4} (\partial_i h_{jj})^2 + \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} (\partial_i h_{ij})^2 + \frac{m^2}{4} h_{ij} h_{ij} + \frac{m^2}{4} h_{ii} h_{jj} \right\}. \tag{3.62}
\end{aligned}$$

Reescrevendo-a com os operadores de projeção e utilizando os vínculos podemos mostrar que a hamiltoniana reduzida é dada por

$$\begin{aligned}
H_r &= \int d^{D-1}x \pi^{ij} \left[P_{SS}^{(2)} + \frac{(m^2 - \nabla^2)}{m^2} P_{SS}^{(1)} + \frac{D-1}{D-2} P_{WW}^{(0)} \right]^{ij,kl} \pi^{kl} + \\
&\quad \int d^{D-1}x h_{ij} \left[\frac{(m^2 - \nabla^2)}{4} P_{SS}^{(2)} + \frac{m^2}{4} P_{SS}^{(1)} + \frac{D-1}{4} (m^2 - \nabla^2) P_{SS}^{(0)} \right]^{ij,kl} h_{kl}, \tag{3.63}
\end{aligned}$$

de onde novamente concluímos que $H_r \geq 0$ (assumindo $D > 2$). Diferentemente de Einstein-Hilbert,

agora há projeção nos 3 setores (spins 2, 1 e 0), cada uma positivo-definida e correspondendo às 5 helicidade ($\pm 2, \pm 1, 0$) do gráviton massivo.

3.5 MODELO WTDIFF

O modelo WTDiff, proposto em (ALVAREZ et al., 2006), é uma teoria alternativa ao modelo de Einstein-Hilbert, descrevendo partículas não-massivas de spin-2 em termos de um tensor de rank-2 simétrico $h_{\mu\nu}$. Este modelo pode ser encarado como uma versão linearizada do modelo de gravitação unimodular (BONIFACIO,).

A densidade lagrangiana do modelo WTDiff em D dimensões é

$$\mathcal{L}_{WTDiff} = -\frac{1}{2}\partial_\mu h_{\alpha\beta}\partial^\mu h^{\alpha\beta} + \frac{(D+2)}{2D^2}\partial_\mu h\partial^\mu h - \frac{2}{D}\partial_\mu h\partial_\nu h^{\mu\nu} + \partial_\mu h^{\mu\nu}\partial^\alpha h_{\alpha\nu} \quad (3.64)$$

que é invariante sob a transformação

$$\delta h_{\mu\nu} = \underbrace{\partial_\mu \xi_\nu^T + \partial_\nu \xi_\mu^T}_{\text{TDiff}} + \underbrace{\eta_{\mu\nu}\Lambda}_{\text{Weyl}}, \quad (3.65)$$

o que justifica o nome do modelo WTDiff⁹. Esperamos então que os multiplicadores de Lagrange permaneçam arbitrários no fim da análise hamiltoniana.

Separamos as componentes espaciais das temporais de (3.64):

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{(D-1)(D-2)}{2D^2}h_{00}\dot{h}_{00} - \frac{(D-2)}{D^2}h_{00}\dot{h}_{ii} + \frac{1}{2}\dot{h}_{ij}h_{ij} - \frac{(D+2)}{2D^2}\dot{h}_{ii}h_{jj} + \\ & + 2\frac{(D-2)}{D}h_{00}\partial_i\dot{h}_{0i} - 2\dot{h}_{ii}\partial_i h_{0j} + \frac{4}{D}\dot{h}_{ii}\partial_j h_{0j} - \mathcal{V}, \end{aligned} \quad (3.66)$$

onde mais uma vez separamos a parte que não depende de derivadas temporais em

$$\begin{aligned} \mathcal{V} = & \frac{(D+1)(D-2)}{2D^2}\partial_i h_{00}\partial_i h_{00} + \frac{(D+2)}{D^2}\partial_i h_{00}\partial_i h_{jj} - \frac{2}{D}\partial_i h_{00}\partial_j h_{ij} - \partial_i h_{0j}\partial_i h_{0j} \\ & \partial_i h_{0i}\partial_j h_{0j} - \frac{(D+2)}{2D^2}\partial_i h_{jj}\partial_i h_{kk} + \frac{2}{D}\partial_i h_{jj}\partial_k h_{ik} + \frac{1}{2}\partial_i h_{jk}\partial_i h_{jk} - \partial_i h_{ij}\partial_k h_{kj}. \end{aligned} \quad (3.67)$$

Calculamos os momentos generalizados:

$$\pi^{00} = -\frac{(D-1)(D-2)}{D^2}\dot{h}_{00} - \frac{(D-2)}{D^2}\dot{h}_{ii} + 2\frac{(D-2)}{D}\partial_i h_{0i}; \quad (3.68)$$

$$\pi^{0i} = 0; \quad (3.69)$$

$$\pi^{ij} = \dot{h}_{ij} - \frac{(D-2)}{D^2}\delta_{ij}\dot{h}_{00} - \frac{(D+2)}{D^2}\delta_{ij}\dot{h}_{kk} + \frac{4}{D}\delta_{ij}\partial_k h_{0k} - (\partial_i h_{0j} + \partial_j h_{0i}). \quad (3.70)$$

Ao tomarmos o traço de (3.70), concluímos que $\eta_{\mu\nu}\pi^{\mu\nu} = \pi^{ii} - \pi^{00} = 0$. Desse modo temos D

⁹ É invariante sob transformações de Weyl, ou conforme, e difeomorfismos transversais - que é a simetria (3.29) com parâmetro transverso, i.e. $\partial^\mu \xi_\mu^T(x) = 0$. Veja apêndice A.

vínculos primários

$$\varphi^i = \pi^{0i} \approx 0, \quad (3.71)$$

$$\varphi = \pi^{00} - \pi^{ii} \approx 0. \quad (3.72)$$

Por outro lado, podemos escrever \dot{h}_{ij} como

$$\dot{h}_{ij} = \pi^{ij} - \frac{(D+2)}{(D-2)}\pi^{ii}\pi^{kk} + 2\delta_{ij}\partial_k h_{0k} + \partial_i h_{0j} + \partial_j h_{0i} - \delta_{ij}\dot{h}_{00}. \quad (3.73)$$

Então utilizando (3.70), (3.72) e (3.73) podemos escrever a densidade de hamiltoniana canônica como

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\pi^{ij}\pi^{ij} + \frac{(D+2)}{2(D-2)}\pi^{ii}\pi^{kk} + 2\pi^{ii}\partial_k h_{0k} + 2\pi^{ij}\partial_i h_{0j} + \tilde{\mathcal{V}} \quad (3.74)$$

onde

$$\tilde{\mathcal{V}} = \mathcal{V} + \partial_i h_{0j}\partial_i h_{0j} - \partial_i h_{0i}\partial_j h_{0j}. \quad (3.75)$$

A hamiltoniana primária é dada por $H_P = \int d^{D-1}x[\mathcal{H} + \lambda\varphi + \lambda_i\varphi^i]$. Para a condição de consistência dos vínculos primários calculamos os parênteses de Poisson

$$\{\varphi^i(y), \varphi(x)\} = 0, \quad (3.76)$$

$$\{\varphi^i(y), \mathcal{H}(x)\} = -2[\pi^{kk}\partial_i + \pi^{ij}\partial_j](x)\delta^{(D-1)}(x-y), \quad (3.77)$$

$$\{\varphi(y), \mathcal{H}(x)\} = 0, \quad (3.78)$$

e então para $\dot{\varphi}^i \approx 0$ descobrimos um novo vínculo secundário

$$\chi^i = 2\partial_j\pi^{ij} + 2\partial_i\pi^{kk} \approx 0, \quad (3.79)$$

enquanto que para $\dot{\varphi} \approx 0$ a condição é identicamente satisfeita.

Para o vínculo secundário temos

$$\{\chi^i(y), \varphi(x)\} = 0, \quad (3.80)$$

$$\{\chi^i(y), \varphi^j(x)\} = 0. \quad (3.81)$$

Aplicando a condição de consistência a esse vínculo obtemos

$$0 \approx \partial_i \left[\frac{2(D-2)}{D}\nabla^2 h_{00} + \frac{4}{D}\nabla^2 h_{jj} - 2\partial_j\partial_k h_{jk} \right]$$

e portanto temos um vínculo terciário ξ :

$$\xi = \frac{2(D-2)}{D}\nabla^2 h_{00} + \frac{4}{D}\nabla^2 h_{jj} - 2\partial_j\partial_k h_{jk} \approx 0. \quad (3.82)$$

Para esse vínculo

$$\{\xi(y), \varphi(x)\} = 0, \quad (3.83)$$

$$\{\xi(y), \varphi^i(x)\} = 0, \quad (3.84)$$

e aplicando a condição de consistência obtemos $0 \approx -\partial_i \chi^i$ que é identicamente satisfeita e não há mais nenhum vínculo na teoria. Portanto temos $2D$ vínculos:

$$\varphi = \pi^{00} - \pi^{ii} \approx 0;$$

$$\varphi^i = \pi^{0i} \approx 0;$$

$$\chi^i = 2\partial_j \pi^{ij} + 2\partial_i \pi^{kk} \approx 0;$$

$$\xi = \frac{2(D-2)}{D} \nabla^2 h_{00} + \frac{4}{D} \nabla^2 h_{jj} - 2\partial_j \partial_k h_{jk} \approx 0.$$

Note, dos parênteses de Poisson entre esses vínculos, que eles são vínculos de primeira classe. Os D multiplicadores de Lagrange permanecem indeterminados, em acordo com a simetria de gauge (3.65) da teoria, que depende de D parâmetros (Λ e ξ_μ^T).

Quanto à contagem dos graus de liberdade, os $2D$ vínculos de primeira classe retiram $4D$ graus de liberdade dos $D(D+1)$ do espaço de fase. Logo, WTDiff possui $n = D(D-3)$ graus de liberdade físicos no formalismo hamiltoniano e $n_L = \frac{D(D-3)}{2}$ no formalismo lagrangiano, assim como no modelo de Einstein-Hilbert.

Além destes graus de liberdade locais propagantes em cada ponto do espaço, existe um grau de liberdade global extra oriundo de uma constante de integração das equações de movimento, vide página 98 de (BONIFACIO,). Isso significa que uma condição inicial global precisa ser especificada para determinar unicamente a dinâmica do problema. Este é o análogo linear da constante (cosmológica) de integração da “gravidade unimodular”.

Utilizando os vínculos como igualdades fortes, escrevemos a hamiltoniana parcialmente reduzida como

$$\begin{aligned} H_{(pr)} = \int d^{D-1}x \{ & \frac{1}{2} \pi^{ij} \pi^{ij} - \frac{1}{2} \frac{D+2}{D-2} \pi^{ii} \pi^{jj} - \frac{(D-2)(D-3)}{2D^2} h_{00} \nabla^2 h_{00} + \\ & + \frac{D+6}{2D^2} h_{jj} \nabla^2 h_{kk} - \frac{3}{D} h_{ii} \partial_j \partial_k h_{jk} - \frac{1}{2} h_{ij} \nabla^2 h_{ij} + h_{ij} \partial_i \partial_k h_{kj} \}, \end{aligned} \quad (3.85)$$

que escrita em termos dos projetores fica

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{(pr)} = \frac{1}{2} \pi^{ij} \left[P_{SS}^{(2)} + P_{SS}^{(1)} - (D+1) P_{SS}^{(0)} - \frac{4 P_{WW}^{(0)}}{D-2} - \frac{(D+2)}{\sqrt{D-2}} (P_{SW}^{(0)} + P_{WS}^{(0)}) \right]^{ij,kl} \pi^{kl} + \\ + \frac{1}{2} h_{ij} \left\{ -\nabla^2 P_{SS}^{(2)} + \frac{4(D-3) \nabla^2}{D^2} P_{SS}^{(0)} + \frac{(D-2)(D-3)}{D^2} \nabla^2 P_{WW}^{(0)} + \right. \\ \left. - \frac{2\sqrt{D-2}(D-3)}{D^2} \nabla^2 (P_{SW}^{(0)} + P_{WS}^{(0)}) \right\}^{ij,kl} h_{kl} - \frac{(D-2)(D-3)}{2D^2} h_{00} \nabla^2 h_{00}. \end{aligned} \quad (3.86)$$

Com o auxílio dos vínculos podemos mostrar que $\pi^{ij} (P_{SS}^{(1)})^{ij,kl} \pi^{kl} = 0$ e que a parte escalar da

hamiltoniana parcialmente reduzida se anula, conduzindo-nos ao resultado final

$$H_r = \frac{1}{2} \int d^{D-1}x \left\{ \pi^{ij} (P_{SS}^{(2)})^{ij,kl} \pi^{kl} + h_{ij} \left[-\nabla^2 (P_{SS}^{(2)})^{ij,kl} \right] h_{kl} \right\}, \quad (3.87)$$

que coincide com (3.50) após a transformação canônica

$$(\pi^{kl}, h_{kl}) \rightarrow \left(\sqrt{2} \pi^{kl}, \frac{1}{\sqrt{2}} h_{kl} \right). \quad (3.88)$$

Novamente garantimos a estabilidade clássica da teoria, com $H_r \geq 0$. Ambos os modelos descrevem partículas não-massivas de spin 2.

Terminamos assim este capítulo. Nos apêndices E, com resultados originais, e F apresentamos resumidamente a análise hamiltoniana do modelo TDiff (invariante por difeomorfismos transversais) e do modelo de spin-2 de Singh-Hagen (SINGH; HAGEN, 1974), respectivamente. O modelo TDiff descreve uma partícula de spin-2 e outra de spin-0 ambas sem massa, enquanto o modelo de Singh-Hagen utiliza um tensor de rank-2 simétrico e sem traço mais um campo escalar auxiliar para descrever uma partícula massiva de spin-2.

4 REDUÇÃO DIMENSIONAL A LA KALUZA-KLEIN

Neste capítulo introduzimos o que chamamos de Redução Dimensional “a la Kaluza-Klein”¹. Inicialmente sugerida na década de 20 como uma forma de unificar o eletromagnetismo à gravitação, foi revitalizada após o advento das teorias de cordas e suas multidimensões. A redução dimensional é utilizada, neste trabalho, com o intuito de relacionar teorias não massivas em $D + 1$ dimensões com teorias massivas de mesmo spin em D dimensões. A técnica utilizada em (BONIFACIO; FERREIRA; HINTERBICHLER, 2015; KHOUDEIR; MONTEMAYOR; URRUTIA, 2008; GRACIA, ; BONIFACIO,) será aplicada aos modelos de Maxwell e Einstein-Hilbert com o objetivo de obter em uma dimensão mais baixa os modelos de Maxwell-Proca e Fierz-Pauli. Um interessante estudo do mecanismo de Kaluza-Klein e suas generalizações pode ser encontrado em (OVERDUIN; WESSON, 1997).

4.1 INTRODUÇÃO À REDUÇÃO DIMENSIONAL E CONVENÇÃO

A origem do mecanismo de KK remonta à década de 1920 quando Theodor Kaluza (KALUZA, 1921) propôs um método de unificar o eletromagnetismo com a gravitação², utilizando $D + 1 = 5$ dimensões. A métrica em 5 dimensões possui 15 componentes independentes, das quais 10 estão identificadas com a métrica em 4 dimensões, 4 estão relacionadas com o quadrivetor A^μ e a outra está relacionada com um campo escalar, chamado de rádion³. Entretanto, para que a dimensão extra não afetasse diretamente as leis físicas, Kaluza impôs uma condição artificial às coordenadas chamada de “condição cilíndrica”. Coube a Oscar Klein (KLEIN, 1926), em 1926, sugerir que a 5ª dimensão deveria estar compactificada.

O método de unificação proposto pela teoria de KK acabou caindo em desuso pois não fazia menção às demais interações, como as forças forte e fraca, além de problemas com a interpretação quântica. Mas é justamente esse mecanismo de compactificação de dimensões extras, originalmente proposto por Kaluza e Klein, o mecanismo revivido e utilizado mais tarde pelos teóricos do campo unificado que, na tentativa de unificar as 4 forças fundamentais, acabaram culminando nas teorias de cordas.

Nosso objetivo neste trabalho não é, porém, utilizar o mecanismo de Kaluza-Klein para motivar o estudo de teorias de unificação. Nosso propósito é fazer uso de uma dimensão compactificada - a $(D + 1)$ -ésima dimensão - a fim de efetuarmos uma redução dimensional das teorias escritas em $D + 1$ dimensões, gerando um outro modelo, agora escrito no espaço-tempo usual de D dimensões. Por

¹ Chamaremos de Redução Dimensional KK.

² Citando (KALUZA, 1921): “Die vollständige Weltmetrik wird dort als gemeinsamer Quell alles Naturgeschehens hingestellt.”, que pode ser traduzido como “A métrica completa é apresentada como a fonte comum de todos os fenômenos naturais.” Note que Kaluza não faz menção alguma às forças forte e fraca, que na aquela época ainda não eram encaradas como forças fundamentais.

³ Antes de Kaluza, Nordström (NORDSTRÖM, 1914) já havia proposto em 1914 que o campo eletromagnético poderia ser unificado com o campo gravitacional. Note porém que em 1914 a relatividade geral de Einstein ainda não havia sido publicada e Nordström, ao invés de utilizar um tensor de rank-2, utilizou um potencial gravitacional escalar.

fazer uso do mecanismo de KK, o processo de redução dimensional que vamos apresentar a seguir é chamado de redução dimensional KK.

No mecanismo de redução dimensional vamos assumir que a dimensão extra está compactificada e que a dependência dos campos em relação às coordenadas x^μ esteja fatorada da dependência em relação à coordenada extra y . Reservando índices latinos quando se inclui a dimensão extra (y), usamos índices gregos exclusivamente para as D dimensões (x^μ , $\mu = 0, 1, \dots, D - 1$).

No caso de Kaluza, diríamos que em $D + 1 = 5$ a métrica seria dada por $N^{AB}(x, y) = N^{AB}(x)$ (condição cilíndrica: sem dependência explícita da dimensão extra), a métrica quadridimensional $g^{\mu\nu}(x)$ seria escrita em termos de $N^{\mu\nu}(x)$, o quadrivetor $A^\mu(x)$ em termos de $N^{y\mu}(x)$ e o escalar em termos de $N^{yy}(x)$. Assim seria possível obter a partir da ação de Einstein-Hilbert em $D = 5$ a ação de Maxwell em $D = 4$ acoplada ao rádion e à métrica $g_{\mu\nu}(x)$.

Em outras palavras, se $G_{AB}^{(5)} = 0$ é o tensor de Einstein em 5 dimensões então em 4 dimensões temos $G_{\mu\nu}^{(4)} = T_{\mu\nu}^{(4)EM}$ além de uma equação de Klein-Gordon (sem massa) para o rádion.

Para o caso geral, a condição de compactação proposta por Klein é expressa como

$$T^{A,B,\dots}(x, y) = T^{A,B,\dots}(x, y + L) \quad (4.1)$$

onde a dimensão extra tem uma topologia circular e $L = 2\pi r$ é o comprimento da circunferência de raio r (parâmetro de escala) da dimensão extra. Klein assumiu que o parâmetro de escala era pequeno. Um ansatz natural para esse tipo de condição é supor que a parte dependente de y seja senos ou cossenos de modo que as componentes de $T^{A,B,\dots}(x, y)$ possam ser expandidos em uma série de Fourier:

$$T^{A,B,\dots}(x, y) = \mathbf{Re} \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} T_{(n)}^{A,B,\dots}(x) e^{iny/r} \right]. \quad (4.2)$$

Note que Kaluza só utilizou o modo $n = 0$ ao assumir a condição cilíndrica. No nosso caso, se fizermos isso eliminaremos todas as possibilidades de se obter uma teoria massiva após a redução dimensional. Lembrando que no sistema natural de unidades $[M] = [L]^{-1}$, vamos assumir⁴ que $m_n = \frac{2\pi|n|}{L}$. Note então que a redução dimensional nos levará a uma cadeia infinita de termos massivos m_n . Por outro lado, a ortogonalidade⁵ dos termos $e^{im_n y}$ nos permitirá realizar a redução dimensional de apenas um desses modos massivos e chegar, para a parte massiva, nas mesmas conclusões do cálculo feito com todos os modos⁶ (HINTERBICHLER, 2012). Por simplicidade, utilizaremos apenas o modo massivo $m = \frac{2\pi}{L}$.

Quanto à paridade, assumimos que cada um dos índices do tensor $T^{\alpha,\beta,\dots}$ tenha o mesmo comportamento em relação à troca $y \rightarrow -y$ que o vetor posição $x^A = (x^\mu, y)$, ou seja, campos com um número ímpar de índices na dimensão extra terão sua dependência na dimensão extra expressa por senos e aqueles com número par de índices por cossenos. Assim, na presença de um número par e ímpar de

⁴ Nesse caso, m se comporta como o inverso do raio da circunferência definida na dimensão extra. Tal escolha nos permite identificar m como a massa do termo massivo nos resultados obtidos em D dimensões.

⁵ Isso nada mais é do que a relação usual de ortogonalidade $\int_0^L dy (e^{im_n y})^* e^{im_k y} = L\delta_{nk}$.

⁶ Se realizássemos a redução dimensional utilizando todos os modos, obteríamos um gráviton, um vetor e um escalar, todos não massivos, além de uma cadeia infinita de grávitons massivos, vide (HINTERBICHLER, 2012). O que estamos fazendo neste TG é considerar apenas um desses modos massivos, apresentando uma prescrição de como obter um modelo massivo em D dimensões a partir de seu correspondente não massivo em $D + 1$.

índices Y , respectivamente, temos

$$\Phi^{YY\mu\nu\dots} = \sqrt{\frac{m}{\pi}} \phi^{\mu\nu\dots}(x) \cos(my), \quad (4.3)$$

$$\Phi^{Y\mu\nu\dots} = \sqrt{\frac{m}{\pi}} \phi^{\mu\nu\dots}(x) \sin(my), \quad (4.4)$$

onde as constantes $\sqrt{\frac{m}{\pi}}$ emergem como fatores de normalização durante o processo de integração da dimensão extra e dão conta de que campos em espaços com dimensões diferentes possuem unidades distintas.

Quanto à integração, a ação definida em $D + 1$ dimensões deve ser escrita como

$$S = \int d^{D+1}x \mathcal{L}_{(D+1)} = \int_0^L dy \int dx_0 \cdots dx_{D-1} \mathcal{L}_{(D+1)} = \int_0^{\frac{2\pi}{m}} dy \int d^Dx \mathcal{L}_{(D+1)}. \quad (4.5)$$

Integrando em y somos conduzidos à ação reduzida, de onde extraímos a lagrangiana reduzida \mathcal{L}_D .

Uma observação muito importante (GRACIA,) nesse procedimento é o fato de que uma partícula não massiva com um dado spin em $D + 1$ dimensões possui o mesmo número de graus de liberdade de uma partícula massiva de mesmo spin em D dimensões. Essa conservação dos graus de liberdade na redução dimensional tem uma forte ligação com as simetrias de gauge de cada modelo analisado. Tais simetrias por exemplo, permitem a eliminação de graus de liberdade ligados a campos de Stückelberg⁷ emergentes da redução dimensional. A conservação do número de graus de liberdade pode ser checada, por exemplo, com o método da análise hamiltoniana apresentada nos capítulos anteriores.

Estamos prontos para efetuar a redução dimensional dos modelos escritos em $D + 1$ dimensões.

4.2 REDUÇÃO DIMENSIONAL DO MODELO DE MAXWELL

A lagrangiana de Maxwell é dada por (3.1). Logo, a ação em $D + 1$ dimensões é dada por

$$S_{MAX}^{(D+1)} = \int_0^{\frac{2\pi}{m}} dy \int d^Dx \left(-\frac{1}{4} F_{MN} F^{MN} \right) \quad (4.6)$$

onde $F_{MN}(x, y) = \partial_M A_N - \partial_N A_M$. Seguindo a notação (4.3),(4.4) devemos expressar o campo $A_M(x, y)$ como

$$A_\mu(x, y) = \sqrt{\frac{m}{\pi}} A_\mu(x) \cos my \quad (4.7)$$

$$A_y(x, y) = \sqrt{\frac{m}{\pi}} \phi(x) \sin my \quad (4.8)$$

A ação (4.6) é invariante pela transformação de gauge $\delta A_M = \partial_M \Lambda(x, y)$. Para obtermos a

⁷ Campos de Stückelberg são campos, munidos de uma certa simetria, que adicionados a um dado modelo não alteram seu conteúdo físico. No nosso caso, esses campos e suas simetrias de gauge serão naturalmente obtidos com a redução dimensional. Para mostrar que o modelo reduzido é de fato equivalente a um modelo massivo conhecido, vamos nos livrar desses campos com o auxílio da simetria de gauge.

transformação correspondente a $A_\mu(x)$ e $\phi(x)$ em D dimensões escrevemos

$$\Lambda(x, y) = \sqrt{\frac{m}{\pi}} \lambda(x) \cos my \quad (4.9)$$

obtendo

$$\delta A_\mu(x) = \partial_\mu \lambda(x), \quad (4.10)$$

$$\delta \phi(x) = -m \lambda(x). \quad (4.11)$$

Podemos reescrever o tensor antissimétrico F_{MN} em termos de (4.7) e (4.8):

$$F_{\mu\nu}(x, y) = \sqrt{\frac{m}{\pi}} F_{\mu\nu}(x) \cos my, \quad (4.12)$$

$$F_{y\nu}(x, y) = -\sqrt{\frac{m}{\pi}} (\partial_\nu \phi + mA_\nu) \sin my. \quad (4.13)$$

Substituindo

$$F_{MN} F^{MN}(x, y) = \frac{m}{\pi} \cos^2 my F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}(x) + \frac{2m}{\pi} \sin^2 my (\partial_\nu \phi + mA_\nu)^2(x) \quad (4.14)$$

em (4.6), e utilizando a igualdade

$$\int_0^{2\pi} d\theta \cos^2 \theta = \pi = \int_0^{2\pi} d\theta \sin^2 \theta, \quad (4.15)$$

integramos em y , obtendo a ação reduzida

$$S^D = \int d^D x \left[-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}(x) - \frac{m^2}{2} \left(A_\mu + \frac{\partial_\mu \phi}{m} \right)^2 \right] \quad (4.16)$$

que é invariante sob as transformações (4.10) e (4.11).

O campo ϕ é chamado de campo de Stückelberg e podemos utilizar⁸ o parâmetro escalar λ em (4.11) para eliminá-lo:

$$S^D[\phi = 0] = \int d^D x \left[-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}(x) - \frac{m^2}{2} A_\mu A^\mu \right] \quad (4.17)$$

que é justamente a ação do modelo de Maxwell-Proca (3.15) em D dimensões!

Note que a escolha $\phi = 0$ destrói a simetria (4.10) de forma que não há simetria residual em (4.17), conforme esperado para essa teoria massiva⁹. A redução dimensional KK nos permitiu obter a versão massiva do modelo de Maxwell em D dimensões a partir de Maxwell em $D + 1$ dimensões.

⁸ Uma vez que a fixação de gauge completamente determina λ podemos fixar $\phi = 0$ diretamente na ação (MOTOHASHI; SUYAMA; TAKAHASHI, 2016)(MOTOHASHI; SUYAMA; YAMAGUCHI, 2018).

⁹ O termo de massa quebra a simetria de gauge.

4.3 REDUÇÃO DIMENSIONAL DO MODELO DE EH LINEARIZADO

O modelo de Einstein-Hilbert linearizado é dado por (3.28). A ação em $D + 1$ dimensões é

$$S_{EH}^{(D+1)} = \frac{1}{4} \int_0^{\frac{2\pi}{m}} dy \int d^D x \left(-\partial_A H_{MN} \partial^A H^{MN} + 2\partial_M H^{MN} \partial^A H_{AN} - 2\partial_M H^{MN} \partial_N H + \partial_A H \partial^A H \right) \quad (4.18)$$

onde $H \equiv \eta^{AB} H_{AB}$ é o traço de $H_{(AB)}(x, y)$. Lembramos que a métrica $(D + 1)$ -dimensional η^{AB} é diagonal com assinatura $(-1, +1, \dots, +1)$. O modelo é invariante por $\delta H_{MN}(x, y) = \partial_M \xi_N - \partial_N \xi_M$.

A meta é obter a versão massiva do modelo de Einstein-Hilbert, tratado na seção 3.4, a partir da redução dimensional KK de (4.18). Para isso decompos $H_{AB}(x, y)$ como

$$H_{\mu\nu}(x, y) = \sqrt{\frac{m}{\pi}} h_{\mu\nu}(x) \cos my, \quad (4.19)$$

$$H_{y\mu}(x, y) = \sqrt{\frac{m}{\pi}} a_\mu(x) \sin my, \quad (4.20)$$

$$H_{yy}(x, y) = \sqrt{\frac{m}{\pi}} \varphi(x) \cos my. \quad (4.21)$$

A fim de obter a simetria de gauge em D dimensões devemos expressar $\xi_N(x, y)$ como

$$\xi_\mu(x, y) = \sqrt{\frac{m}{\pi}} \psi_\mu(x) \cos my, \quad (4.22)$$

$$\xi_y(x, y) = \sqrt{\frac{m}{\pi}} \psi(x) \sin my. \quad (4.23)$$

Neste caso, as simetrias D -dimensionais são

$$\delta h_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu \psi_\nu + \partial_\nu \psi_\mu, \quad (4.24)$$

$$\delta a_\mu(x) = \partial_\mu \psi - m \psi_\mu, \quad (4.25)$$

$$\delta \varphi(x) = 2m \psi. \quad (4.26)$$

A substituição de (4.19)-(4.21) em (4.18) é trabalhosa. Os resultados da substituição em cada um dos termos da ação estão no apêndice C. Utilizando (4.15), a integração em y nos fornece a ação reduzida:

$$S^D = \int d^D x \left[\frac{1}{4} \left(-\partial_\mu h^{\nu\alpha} \partial^\mu h_{\nu\alpha} + \partial_\mu h \partial^\mu h - 2\partial_\mu h^{\mu\nu} \partial_\nu h + 2\partial_\mu h^{\mu\nu} \partial_\alpha h^{\alpha\nu} \right) - \frac{m^2}{4} (h^{\mu\nu} h_{\mu\nu} - h^2) \right. \\ \left. - m h_{\mu\nu} (\partial^\mu a^\nu - \eta^{\mu\nu} \partial^\alpha a_\alpha) + \frac{1}{2} \partial_\mu a_\nu (\partial^\nu a^\mu - \partial^\mu a^\nu) + \frac{1}{2} h_{\mu\nu} (\partial^\mu \partial^\nu \varphi - \eta^{\mu\nu} \square \varphi) \right]. \quad (4.27)$$

Note que a linha superior de (4.27) é justamente a ação de Fierz-Pauli (3.51) em D dimensões. Podemos

reescrever (4.27) como

$$S^D = \int d^D x \left[\mathcal{L}_{FP} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} (a^\beta) - m h_{\mu\nu} (\partial^\mu a^\nu - \eta^{\mu\nu} \partial^\alpha a_\alpha) + \frac{1}{2} h_{\mu\nu} (\partial^\mu \partial^\nu \varphi - \eta^{\mu\nu} \square \varphi) \right]. \quad (4.28)$$

Os parâmetros escalar (ψ) e vetorial (ψ_μ) das simetrias (4.24)-(4.26) podem ser usados para fixar¹⁰ $a^\mu = 0$ e $\varphi = 0$. O resultado final é ação de Fierz-Pauli (3.51):

$$S_{FP}^D = \frac{1}{4} \int d^D x \left[-\partial_\mu h^{\nu\alpha} \partial^\mu h_{\nu\alpha} + \partial_\mu h \partial^\mu h - 2\partial_\mu h^{\mu\nu} \partial_\nu h + 2\partial_\mu h^{\mu\nu} \partial_\alpha h^{\alpha\nu} - m^2 (h^{\mu\nu} h_{\mu\nu} - h^2) \right], \quad (4.29)$$

não restando simetria residual alguma, conforme esperado para essa teoria massiva. Novamente a redução dimensional KK nos permitiu obter a versão massiva do modelo escrito em $D + 1$ dimensões.

A pergunta que nos fica é: Qual modelo massivo será obtido se realizarmos a redução dimensional do modelo WTDiff?

4.4 REDUÇÃO DIMENSIONAL DO MODELO WTDIFF

O modelo WTDiff é dado por (3.64). A ação em $D + 1$ dimensões é dada por

$$S_{\text{WTDiff}}^{(D+1)} = \int_0^{\frac{2\pi}{m}} dy \int d^D x \mathcal{L}_{\text{WTDiff}}^{(D+1)} \quad (4.30)$$

onde $\mathcal{L}_{\text{WTDiff}}^{(D+1)} =$

$$-\frac{1}{2} \partial_A H_{MN} \partial^A H^{MN} + \partial_A H_{MN} \partial^M H^{AN} - \frac{2}{(D+1)} \partial_M H^{MN} \partial_N H + \frac{D+3}{2(D+1)^2} \partial_M H \partial^M H, \quad (4.31)$$

escrita em termos do tensor simétrico $H^{MN} = H^{NM}$. O modelo é invariante por $\delta H_{MN}(x, y) = \partial_M \xi_N^T + \partial_N \xi_M^T + \Lambda \eta_{MN}$.

A meta é obter a versão massiva do modelo WTDiff a partir da redução dimensional KK de (4.30). Note que neste caso ainda não está claro qual modelo massivo de spin-2 vamos obter, se será o paradigmático modelo de Fierz-Pauli ou um modelo distinto.

Como de costume decompomos $H_{AB}(x, y)$ como

$$H_{\mu\nu}(x, y) = \sqrt{\frac{m}{\pi}} h_{\mu\nu}(x) \cos my, \quad (4.32)$$

$$H_{y\mu}(x, y) = \sqrt{\frac{m}{\pi}} a_\mu(x) \sin my, \quad (4.33)$$

$$H_{yy}(x, y) = \sqrt{\frac{m}{\pi}} \varphi(x) \cos my. \quad (4.34)$$

¹⁰ Mas uma vez estamos fixando o calibre diretamente na ação (MOTOHASHI; SUYAMA; TAKAHASHI, 2016). O procedimento que estamos seguindo foi utilizado em (BONIFACIO; FERREIRA; HINTERBICHLER, 2015). O leitor pode verificar que em (KHOUDEIR; MONTEMAYOR; URRUTIA, 2008) é feita a redefinição $A_\mu = a_\mu - \frac{1}{2m} \partial_\mu \varphi$ de modo que as simetrias (4.20) e (4.21) equivalham à simetria $\delta A_\mu = -m\psi_\mu$. Fixando $A_\mu = 0$ chega-se à mesma conclusão.

A fim de obter a simetria de gauge em D dimensões devemos expressar $\xi_N^T(x, y)$ e $\Lambda(x, y)$ como

$$\xi_\mu^T(x, y) = \sqrt{\frac{m}{\pi}} \psi_\mu(x) \cos my, \quad (4.35)$$

$$\xi_y^T(x, y) = \sqrt{\frac{m}{\pi}} \psi(x) \sin my, \quad (4.36)$$

$$\Lambda(x, y) = \sqrt{\frac{m}{\pi}} \chi(x) \cos my. \quad (4.37)$$

Neste caso, as simetrias D -dimensionais são

$$\delta h_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu \psi_\nu + \partial_\nu \psi_\mu + \chi \eta_{\mu\nu}, \quad (4.38)$$

$$\delta a_\mu(x) = \partial_\mu \psi - m \psi_\mu, \quad (4.39)$$

$$\delta \varphi(x) = 2m \psi + \chi. \quad (4.40)$$

Da condição de transversalidade $\partial^A \xi_A^T = 0$ obtemos o seguinte vínculo

$$\partial^\mu \psi_\mu(x) + m \psi(x) = 0, \quad (4.41)$$

que desempenhará papel importante na análise do modelo reduzido. Ao utilizar os resultados do apêndice C e (4.15), a integração em y nos fornece a ação reduzida invariante pelas simetrias (4.38)-(4.40)

$$S^D = \int d^D x [\mathcal{L}_{\text{WTDiff},D} + F(h, a^\mu, \varphi)] \quad (4.42)$$

onde $F(h, a^\mu, \varphi) =$

$$\begin{aligned} & \frac{2}{D(D+1)} \partial_\mu h^{\mu\nu} \partial_\nu h - \frac{D^2 + 5D + 2}{2D^2(D+1)^2} \partial_\mu h \partial^\mu h - \frac{m^2}{2} \left(h_{\mu\nu}^2 - \frac{D+3}{(D+1)^2} h^2 \right) - \frac{1}{2} F_{\mu\nu}^2 + \\ & - 2m h^{\mu\nu} \left(\partial_\mu a_\nu - \frac{2}{D+1} \eta_{\mu\nu} \partial_\alpha a^\alpha \right) + \frac{2(D-1)}{D+1} m a^\mu \partial_\mu \varphi - \frac{D-1}{(D+1)^2} m^2 h \varphi + \\ & + \frac{2h^{\mu\nu}}{D+1} \left(\partial_\mu \partial_\nu \varphi - \frac{D+3}{2(D+1)} \eta_{\mu\nu} \square \varphi \right) - \frac{D-1}{2(D+1)^2} [(D+2)(\partial\varphi)^2 - D m^2 \varphi^2]. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Observando as simetrias (4.38)-(4.40), percebemos que é interessante desacoplarmos $\delta h_{\mu\nu}$ de $\delta \varphi$. Para isso, definimos o campo escalar φ da seguinte forma

$$\varphi = \frac{1}{D} h - (D+1)\phi. \quad (4.44)$$

Assim, o novo campo ϕ passa a ter a transformação de simetria

$$\delta \phi(x) = -\frac{2m}{D} \psi, \quad (4.45)$$

e $F(h, a^\mu, \varphi)$ pode ser reescrita como $f(h, a^\mu, \phi) =$

$$\begin{aligned} & -\frac{m^2}{2} \left(h_{\mu\nu}^2 - \frac{1}{D} h^2 \right) - \frac{1}{2} F_{\mu\nu}^2 - 2mh^{\mu\nu} \left(\partial_\mu a_\nu - \frac{1}{D} \eta_{\mu\nu} \partial_\alpha a^\alpha \right) - 2(D-1)ma^\mu \partial_\mu \phi + \\ & - 2h^{\mu\nu} \left(\partial_\mu \partial_\nu \phi - \frac{1}{D} \eta_{\mu\nu} \square \phi \right) - \frac{D-1}{2} [(D+2)(\partial\phi)^2 - D m^2 \phi^2], \end{aligned} \quad (4.46)$$

de modo que a lagrangiana D -dimensional é dada por

$$\mathcal{L}_{m\text{WTDiff},D}(h, a, \phi) = \mathcal{L}_{\text{WTDiff},D} + f(h, a^\mu, \phi). \quad (4.47)$$

Por causa do vínculo (4.41) **não** podemos utilizar a simetria de gauge para fixar $\phi = 0$ e $a_\mu = 0$ simultaneamente. Essa é a sutileza que a redução dimensional KK do modelo de Einstein-Hilbert não apresenta. Temos de examinar as consequências de se eliminar o campo escalar e o campo vetorial separadamente. Mais uma vez estaremos fixando calibre a nível de ação.

4.4.1 Eliminando ϕ

Utilizando (4.45) para fixar $\phi = 0$, (4.47) fica

$$\mathcal{L}_{m\text{WTDiff},D}(h, a) = \mathcal{L}_{\text{WTDiff},D} - \frac{1}{2} F_{\mu\nu}^2 - \frac{m^2}{2} \left(h_{\mu\nu}^2 - \frac{h^2}{D^2} \right) - 2mh^{\mu\nu} \left(\partial_\mu a_\nu - \frac{\eta_{\mu\nu}}{D} \partial_\alpha a^\alpha \right). \quad (4.48)$$

Podemos decompor o vetor ψ_μ em uma parte longitudinal e outra transversal ($\partial^\mu \psi_\mu^T = 0$). De acordo com o vínculo (4.41), ao utilizarmos ψ para fixar $\phi = 0$, a parte longitudinal de ψ_μ é fixada. Desse modo apenas a parte transversal de ψ_μ permanece arbitrária. Assim temos as simetrias de gauge residuais

$$\delta h_{\mu\nu} = \partial_\mu \psi_\nu^T + \partial_\nu \psi_\mu^T + \chi \eta_{\mu\nu}, \quad (4.49)$$

$$\delta a_\mu = -m \psi_\mu^T. \quad (4.50)$$

É instrutivo verificar as equações de movimento de (4.48):

$$\delta a_\mu : m \partial_\nu h^{\nu\mu} - \frac{m}{D} \partial^\mu h + \square a^\mu - \partial^\mu \partial_\nu a^\nu = 0, \quad (4.51)$$

$$\begin{aligned} \delta h_{\mu\nu} : & \square h^{\mu\nu} - \partial^\mu \partial_\lambda h^{\lambda\nu} - \partial^\nu \partial_\lambda h^{\lambda\mu} + \frac{2}{D} \partial^\mu \partial^\nu h + \frac{2}{D} \eta^{\mu\nu} \partial_\alpha \partial_\beta h^{\alpha\beta} - \left(\frac{D+2}{D^2} \right) \eta^{\mu\nu} \square h + \\ & + \frac{m^2}{D} \eta^{\mu\nu} h - m^2 h^{\mu\nu} - m(\partial^\mu a^\nu + \partial^\nu a^\mu) + \frac{2m}{D} \eta^{\mu\nu} \partial_\alpha a^\alpha = 0. \end{aligned} \quad (4.52)$$

Tomando a quadridivergência das equações de a_μ (4.51) obtemos

$$\partial^\mu \partial^\nu h_{\mu\nu} - \frac{1}{D} \square h = 0. \quad (4.53)$$

Tome a quadridivergência de (4.52) e utilize (4.53) para mostrar que

$$m \partial_\mu h^{\mu\nu} - \frac{m}{D} \partial^\nu h + \square a^\nu - \frac{2-D}{D} \partial^\nu \partial_\alpha a^\alpha = 0, \quad (4.54)$$

que quando comparada com (4.51) nos leva a $\partial^\nu \partial_\mu a^\mu = 0$. Substituindo em (4.51) deduzimos

$$\square a^\nu = -m \left(\partial_\mu h^{\mu\nu} - \frac{1}{D} \partial^\nu h \right). \quad (4.55)$$

Faça a redefinição

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} + \frac{1}{m} (\partial_\mu a_\nu + \partial_\nu a_\mu), \quad (4.56)$$

de modo que

$$\delta \bar{h}_{\mu\nu} = \chi \eta_{\mu\nu}. \quad (4.57)$$

Nesse caso, é eliminada a dependência de a^μ em (4.55), a qual pode ser reescrita como

$$\partial^\mu \bar{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{D} \partial_\nu \bar{h} = 0, \quad (4.58)$$

que utilizada nas equações de (4.52), reescritas com (4.56), fornece

$$(\square - m^2) \left(\bar{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{D} \eta_{\mu\nu} \bar{h} \right) = 0. \quad (4.59)$$

Utilizando (4.57) para fixar $\bar{h} = 0$, obtemos as equações de um campo massivo de spin-2 para $\bar{h}_{\mu\nu}$:

$$\begin{cases} \bar{h} = 0, \\ \partial^\mu \bar{h}_{\mu\nu} = 0, \\ (\square - m^2) \bar{h}_{\mu\nu} = 0. \end{cases} \quad (4.60)$$

Assim, a descrição tensor-vetorial (4.48) produz as equações de movimento corretas¹¹ para $\bar{h}_{\mu\nu}$, uma mistura do tensor original $h_{\mu\nu}$ e do vetor a^μ .

Podemos obter o modelo (4.48) a partir do modelo de Fierz-Pauli (3.51) justamente através da substituição

$$h_{\mu\nu} \longrightarrow h_{\mu\nu} - \frac{1}{D} \eta_{\mu\nu} h + \frac{1}{m} \partial_\mu a_\nu + \frac{1}{m} \partial_\nu a_\mu \quad (4.61)$$

que não é uma transformação inversível. É apenas uma maneira de gerar o modelo (4.48) a partir da ação de Fierz-Pauli.

¹¹ Essas são as condições de Fierz-Pauli (FP) para um tensor simétrico de rank-2. Em D dimensões, a partir de um tensor de rank- s com D^s componentes, as condições de FP reduzem esse número para $2s + 1$ componentes independentes, tornando lícito o uso desse tensor na descrição de uma partícula massiva de spin- s . A demonstração disso está no apêndice D.

4.4.2 Eliminando A_μ

Não vamos eliminar a_μ diretamente. Antes vamos desacoplar δa_μ de $\delta\phi$. Nesse caso, observando (4.39) e (4.45), definimos

$$A_\mu = a_\mu + \frac{D}{2m} \partial_\mu \phi \quad \Rightarrow \quad \delta A_\mu = -m\psi_\mu. \quad (4.62)$$

Reescrevendo (4.47) e fixando $A_\mu = 0$ obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{m\text{WTDiff},D}(h, \varphi) = \mathcal{L}_{\text{WTDiff},D} - \frac{m^2}{2} \left(h_{\mu\nu}^2 - \frac{1}{D} h^2 \right) + (D-2)h_{\mu\nu} \left(\partial^\mu \partial^\nu \phi - \frac{1}{D} \eta^{\mu\nu} \square \phi \right) \\ + \frac{(D-1)}{2} [(D-2)(\partial\phi)^2 + Dm^2\phi^2]. \end{aligned} \quad (4.63)$$

Ao eliminarmos A_μ fixamos ψ_μ completamente e, em decorrência do vínculo (4.41), também ψ . Assim as simetrias de gauge residuais de (4.63) são

$$\delta h_{\mu\nu} = \chi \eta_{\mu\nu}, \quad (4.64)$$

$$\delta\phi = 0. \quad (4.65)$$

Novamente analisaremos as equações de movimento:

$$\delta\phi : (D-2)\square\phi - Dm^2\phi = \frac{(D-2)}{(D-1)} \left(\partial^\mu \partial^\nu h_{\mu\nu} - \frac{1}{D} \square h \right), \quad (4.66)$$

$$\begin{aligned} \delta h_{\mu\nu} : \square h^{\mu\nu} - \partial^\mu \partial_\lambda h^{\lambda\nu} - \partial^\nu \partial_\lambda h^{\lambda\mu} + \frac{2}{D} \partial^\mu \partial^\nu h + \frac{2}{D} \eta^{\mu\nu} \partial_\alpha \partial_\beta h^{\alpha\beta} - \left(\frac{D+2}{D^2} \right) \eta^{\mu\nu} \square h + \\ + \frac{m^2}{D} \eta^{\mu\nu} h - m^2 h^{\mu\nu} + (D-2)(\partial_\mu \partial_\nu \phi - \frac{1}{D} \eta_{\mu\nu} \square \phi) = 0. \end{aligned} \quad (4.67)$$

Aplicando $\partial^\mu \partial^\nu$ nas equações de $h_{\mu\nu}$:

$$(D-2)\square \left(\partial^\mu \partial^\nu h_{\mu\nu} - \frac{1}{D} \square h \right) + m^2 D \left(\partial^\mu \partial^\nu h_{\mu\nu} - \frac{1}{D} \square h \right) = (D-1)(D-2)\square^2 \phi. \quad (4.68)$$

Isolando $\partial^\mu \partial^\nu h_{\mu\nu} - \frac{1}{D} \square h$ em (4.66) e substituindo em (4.68) obtemos $\phi = 0$. Assim podemos interpretar ϕ como um campo auxiliar. Com esse resultado, uma quadridivergência nas equações (4.67) nos leva a

$$\partial^\mu h_{\mu\nu} - \frac{1}{D} \partial_\nu h = 0, \quad (4.69)$$

que quando utilizada em (4.66) fornece

$$(\square - m^2) \left(h_{\mu\nu} - \frac{1}{D} \eta_{\mu\nu} h \right) = 0. \quad (4.70)$$

Da simetria de gauge residual $\delta h_{\mu\nu} = \chi \eta_{\mu\nu}$ podemos fixar $h = 0$ de modo a ter

$$\begin{cases} h = 0, \\ \partial^\mu h_{\mu\nu} = 0, \\ (\square - m^2) h_{\mu\nu} = 0. \end{cases} \quad (4.71)$$

Assim, novamente obtemos as condições de Fierz-Pauli para $h_{\mu\nu}$.

Podemos recuperar o modelo de Fierz-Pauli a partir da lagrangiana (4.63). Nesse caso, usamos a simetria de Weyl (4.64) para fixar $h = 0$ já na lagrangiana¹² para reescrevê-la como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\bar{h}=0,D} = & -\frac{1}{2} \partial_\lambda \bar{h}_{\mu\nu} \partial^\lambda \bar{h}^{\mu\nu} + \partial_\lambda \bar{h}_{\mu\nu} \partial^\mu \bar{h}^{\lambda\nu} - \frac{m^2}{2} \bar{h}_{\mu\nu}^2 + (D-2) \bar{h}^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \phi + \\ & + \frac{(D-1)}{2} [(D-2)(\partial\phi)^2 + Dm^2\phi^2]. \end{aligned} \quad (4.72)$$

Escrita dessa forma, (4.72) é exatamente o modelo de Singh-Hagen de spin-2 (SINGH; HAGEN, 1974). Redefinindo $D\phi = h$, isto é $h_{\mu\nu} \equiv \bar{h}_{\mu\nu} + \eta_{\mu\nu}\phi$, recuperamos exatamente o modelo de Fierz-Pauli (3.51).

Por outro lado, podemos obter (4.63) a partir de (3.51) através da substituição¹³

$$h_{\mu\nu} \longrightarrow \tilde{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{D} \eta_{\mu\nu} h + \phi \eta_{\mu\nu}. \quad (4.73)$$

Como em ambos os casos obtivemos uma lagrangiana que está relacionada com o modelo de Fierz-Pauli, podemos concluir que a redução dimensional KK do modelo WTDiff nos leva ao modelo paradigmático para partículas massivas de spin-2. Encerramos assim este capítulo e o texto principal deste TG, cuja leitura pode ser complementada com os apêndices.

¹² Isso é lícito já que a fixação de gauge determina completamente χ : da simetria residual (4.64) segue que $\tilde{h} = h + \delta h = \delta h$ e portanto $\tilde{h} = 0 \Rightarrow \chi = 0$. No entanto, não podemos utilizar χ para fixar $\phi = 0$ em (4.63), antes de calcular as equações de movimento, pois neste caso a simetria residual permite que infinitos χ sejam utilizados, vide (MOTOHASHI; SUYAMA; TAKAHASHI, 2016). De fato, é necessário que ϕ , sendo um campo auxiliar, apareça na lagrangiana, de tal forma que sua equação de movimento nos auxilie a chegar nas equações corretas (4.71) para $h_{\mu\nu}$ (SINGH; HAGEN, 1974).

¹³ É inversível pois estamos trocando as $D(D+1)/2$ componentes do tensor simétrico $h_{\mu\nu}$ de (3.51) por um novo tensor simétrico traceless \tilde{h} e um escalar ϕ , que são os campos de (4.63).

5 CONCLUSÃO

Neste trabalho de graduação discutimos a análise hamiltoniana de sistemas vinculados e a redução dimensional a la Kaluza-Klein.

O assunto sistemas hamiltonianos vinculados é de essencial importância em teoria de campos pois as teorias de gauge são descritas por lagrangianas cuja matriz hessiana (2.5) é singular. Vimos que quando isso acontece, aparecem vínculos que reduzem o espaço de fase da teoria e as equações de Hamilton não fornecem os resultados corretos se não modificarmos a hamiltoniana. Nesse caso, através dos multiplicadores de Lagrange, introduzimos a hamiltoniana primária que rege a evolução temporal de uma variável dinâmica $\dot{g} \approx [g, H_P]$ e exigimos que todos os vínculos da teoria sejam preservados no tempo $\dot{\Phi} \approx 0$ através do algoritmo de Dirac-Bergmann, seguindo o tratamento de Dirac (DIRAC, 1964).

Verificamos que a presença de vínculos primários na teoria está intimamente ligada à existência de simetria de calibre na teoria. Além disso, o número de graus de liberdade físicos da teoria (dimensão do espaço de fase reduzido) depende da quantidade de vínculos de primeira e segunda classe. Desse modo, utilizando o formalismo hamiltoniano checamos com sucesso o conteúdo físico dos modelos de Maxwell, Maxwell-Proca, Einstein-Hilbert, Fierz-Pauli e WTDiff.

Já o assunto redução dimensional KK se utiliza do fato de que teorias de campo para partículas não massivas descritas em $D + 1$ dimensões possuem o mesmo número de graus de liberdade de uma teoria de campo para partículas massivas, de mesmo spin, em D dimensões. Compactificando uma dimensão em $D + 1$, realizamos a redução dimensional dos modelos de Maxwell e Einstein-Hilbert, obtendo, com o auxílio das simetrias de gauge, as teorias massivas de Maxwell-Proca e Fierz-Pauli em D dimensões, respectivamente. Posteriormente, aplicamos o método ao modelo WTDiff, um tanto mais sutil diante da presença do vínculo (4.41). Nesse caso, obtivemos dois modelos massivos que estão relacionados com o modelo de Fierz-Pauli, demonstrando a ubiquidade deste modelo em se tratando de uma teoria que descreve partícula massiva de spin-2 utilizando um tensor simétrico de rank-2.

O objetivo deste TG é de oferecer ao leitor, possivelmente um estudante em sua iniciação científica, uma oportunidade de introdução aos dois assuntos tratados neste trabalho, além de familiarizar o leitor com a aplicação das técnicas na análise do conteúdo físico de teorias de campo. A metodologia exposta nos capítulos 3 e 4 deste trabalho pode ser utilizada para analisar qualquer outro modelo.

Esperamos ter cumprido essa meta e incentivamos o leitor interessado a verificar como o algoritmo de Dirac-Bergmann é aplicado em teorias com espinores (modelos fermiônicos), como os parênteses de Dirac são fundamentais no processo de quantização proposto por Dirac (DIRAC, 1964) e a investigar outras maneiras de explorar o mecanismo de Kaluza-Klein (OVERDUIN; WESSON, 1997), temas não abordados neste TG.

REFERÊNCIAS

- ALVAREZ, E. et al. Transverse Fierz–Pauli symmetry. **Nuclear Physics B**, Amsterdam, v. 756, n. 3, p. 148–170, 2006.
- BLAS, D. **Aspects of infrared modifications of gravity**. 2008. 158f. Tese (Doutorado em Física) - Departament de Física Fonamental, Universitat de Barcelona, Barcelona - Espanha. 2008.
- BONIFACIO, J. **Aspects of massive spin-2 effective field theories**. 2017. 128f. Tese (Doutorado em Física) - Oriel College, University of Oxford, Oxford - Inglaterra. 2017.
- BONIFACIO, J.; FERREIRA, P. G.; HINTERBICHLER, K. Transverse diffeomorphism and Weyl invariant massive spin 2: linear theory. **Physical Review D**, College Park, v. 91, n. 125008, 2015.
- DIRAC, P. A. M. **Lectures on quantum mechanics**. New York: Yeshiva University Lectures, 1964.
- FIERZ, M.; PAULI, W. On relativistic wave equations for particles of arbitrary spin in an electromagnetic field. **Proceedings of the Royal Society of London**, London, A173, n. 953, p. 211–232, 1939.
- FORTES, H. G. M. **Partículas massivas de spin-2 em espaços curvos de fundo**. 2018. 57 f. Tese (Doutorado em Física) - Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá. 2018.
- GRACIA, G. B. de. **Redução dimensional de partículas sem massa de spin $s = 0$, $s = 1$ e $s = 2$ via mecanismo de Kaluza-Klein**. 2015. 78 f. Trabalho de conclusão de curso (Bacharelado em Física) - Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá. 2015.
- HANSON, A.; REGGE, T.; TEITELBOIM, C. **Constrained Hamiltonian systems**: ciclo di lezioni tenute dal 29 aprile al 7 maggio 1974. Roma: Accademia Nazionale dei Lincei, 1976.
- HENNEAUX, M.; TEITELBOIM, C. **Quantization of gauge systems**. New Jersey: Princeton University Press, 1992.
- HINTERBICHLER, K. Theoretical aspects of massive gravity. **Reviews of Modern Physics**, Minneapolis, v. 84, n. 2, p. 671–710, 2012.
- KALUZA, T. Zum unitätsproblem der physik. **Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften**, Berlin, p. 966–972, 1921.
- KHOUDEIR, A.; MONTEMAYOR, R.; URRUTIA, L. F. Dimensional reduction as a method to obtain dual theories for massive spin two in arbitrary dimensions. **Physical Review D**, College Park, v. 78, n. 065041, 2008.
- KLEIN, O. Quantentheorie und fünfdimensionale relativitätstheorie. **Zeitschrift für Physik A**, Berlin, v. 37, p. 895, 1926.
- LEMOS, N. **Mecânica analítica**. 2. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2007.
- MOTOHASHI, H.; SUYAMA, T.; TAKAHASHI, K. Fundamental theorem on gauge fixing at the action level. **Physical Review D**, College Park, v. 94, n. 124021, 2016.
- MOTOHASHI, H.; SUYAMA, T.; YAMAGUCHI, M. Ghost-free theories with arbitrary higher-order time derivatives. **Journal of High Energy Physics**, Trieste, v. 06, n. 133, 2018.

NORDSTRÖM, G. Über die möglichkeit, das elektromagnetische feld und das gravitationsfeld zu vereinigen. **Physikalische Zeitschrift**, Leipzig, v. 15, p. 504–506, 1914.

OVERDUIN, J. M.; WESSON, P. S. Kaluza-Klein gravity. **Physics Reports**, Amsterdam, v. 283, n. 5-6, p. 303–378, 1997.

POENARU, D. **Alexandru Proca (1897–1955) the great physicist**. 2005. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/physics/0508195>>. Acesso em 01 Dez. 2018.

PONS, J. On Dirac's incomplete analysis of gauge transformations. **Studies in History and Philosophy of Modern Physics**, Oxford, v. 36, p. 491–518, 2005.

PROCA, A. Sur la théorie ondulatoire des électrons positifs et négatifs. **Journal de Physique et le Radium**, Paris, v. 7, p. 347–353, 1936.

PROCA, A. Théorie non relativiste des particules à spin entier. **Journal de Physique et le Radium**, Paris, v. 9, p. 61–66, 1938.

RODRIGUES, D. B. **Análise hamiltoniana de um modelo de partículas de spin-2 massivas não-Fierz-Pauli**. 2016. 54 f. Dissertação (Mestrado em Física) - Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá. 2016.

SANTOS, A. L. R. dos. **Sistemas vinculados e o método de Dirac**. [S.l.: s.n.], 2018.

SINGH, L. P. S.; HAGEN, C. R. Lagrangian formulation for arbitrary spin: the boson case. **Physical Review D**, College Park, v. 9, n. 898, p. 898–909, 1974.

SUNDERMEYER, K. **Constrained dynamics**. Berlin: Springer, 1982.

APÊNDICE A – SOBRE AS SIMETRIAS DIFF E WTDIFF

Neste apêndice vamos discutir um pouco sobre as simetrias Diff (difeomorfismos) e WTDiff (transformações de Weyl + difeomorfismos transversais) que apareceram neste trabalho. Essa exposição é baseada no trabalho de (BLAS, 2008).

Uma maneira de entendermos como essas simetrias surgem e para que elas são necessárias é escrevermos uma lagrangiana local, com até duas derivadas nos campos e invariante de Lorentz, mais geral possível a partir de um tensor de rank-2 simétrico $h_{(\mu\nu)}$. A motivação em se estudar tais modelos é investigar possíveis modificações, a nível linear, da gravitação (BONIFACIO, 2017; BLAS, 2008). Temos:

$$\mathcal{L}(1, \beta, a, b) = \mathcal{L}^I + \beta \mathcal{L}^{II} + a \mathcal{L}^{III} + b \mathcal{L}^{IV} \quad (\text{A.1})$$

com

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^I &= -\frac{1}{4} \partial_\mu h^{\alpha\beta} \partial^\mu h_{\alpha\beta} \quad , \quad \mathcal{L}^{II} = \frac{1}{2} \partial_\mu h^{\mu\beta} \partial_\alpha h^\alpha{}_\beta \quad , \\ \mathcal{L}^{III} &= -\frac{1}{2} \partial^\mu h \partial^\nu h_{\mu\nu} \quad , \quad \mathcal{L}^{IV} = \frac{1}{4} \partial_\mu h \partial^\mu h. \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Sob uma transformação geral infinitesimal $h_{\mu\nu} \rightarrow h_{\mu\nu} + \delta h_{\mu\nu}$ tais termos se transformam como

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L}^I &= \frac{1}{2} \delta h_{\mu\nu} \square h^{\mu\nu} \quad , \quad \delta \mathcal{L}^{II} = -\delta h_{\mu\nu} \delta^\alpha \partial^{(\mu} h_{\alpha}{}^{\nu)} \quad , \\ \delta \mathcal{L}^{III} &= \frac{1}{2} (\delta h \partial^\mu \partial^\nu h_{\mu\nu} + \delta h_{\mu\nu} \partial^\mu \partial^\nu h) \quad , \quad \delta \mathcal{L}^{IV} = -\frac{1}{2} \delta h \square h \quad , \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

de onde segue que a família de lagrangianas $\mathcal{L}(1, 1, a, b)$, com $\beta = 1$, é invariante pelas transformações

$$\delta h_{\mu\nu} = \partial_\mu \xi_\nu^T + \partial_\nu \xi_\mu^T \quad (\text{Difeomorfismos transversais}) \quad (\text{A.4})$$

tais que $\partial^\mu \xi_\mu^T = 0$ (transversalidade do parâmetro vetorial) para a e b arbitrários. Dizemos que essa família é invariante por **difeomorfismos transversais**, ou simplesmente **TDiff**. Tal simetria é necessária para se livrar da propagação de spin-1 e foi estudada durante a iniciação científica do autor deste trabalho. No apêndice E apresentamos a análise hamiltoniana do modelo TDiff.

Por outro lado, através da redefinição $h_{\mu\nu} \rightarrow h_{\mu\nu} + \lambda h \eta_{\mu\nu}$, para¹ $\lambda \neq -\frac{1}{D}$, obtemos a família de lagrangianas $\mathcal{L}(1, 1, A, B)$ que gozam das mesmas propriedades de $\mathcal{L}(1, 1, a, b)$:

$$\begin{aligned} A &= a + \lambda(D a - 2) \\ B &= b + 2\lambda(D b - a - 1) + \lambda^2[D^2 b - D(2a + 1) + 2] \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Se $a = 1 = b$ então $\mathcal{L}(1, 1, 1, 1) = \mathcal{L}_{EH}$, lagrangiana do modelo Einstein-Hilbert (EH) linearizado, dado por (3.28) e que contempla toda a simetria **Diff** (sem a restrição de transversalidade). Assim, podemos obter toda a família Diff de lagrangianas que comungam da mesma simetria de $\mathcal{L}(1, 1, 1, 1)$

¹ Se $\lambda = -1/D$ a redefinição se torna singular.

se

$$B = \frac{1 - 2A + (D - 1)A^2}{(D - 2)} \quad (\text{A.6})$$

Todo modelo com A e B relacionados dessa maneira é equivalente ao modelo EH, a menos que $A = 2/D$ que é obtido de (A.5) com $\lambda = -1/D$.

Uma outra possibilidade de aumentar a simetria de um modelo TDiff é exigir que ele também seja invariante por transformações de Weyl, isto é $\delta h_{\mu\nu} = \frac{2}{D}\phi\eta_{\mu\nu}$. Agora, a simetria é **WTDiff**. Neste caso, o parâmetro escalar ϕ pode ser usado para se eliminar o traço de $h_{\mu\nu}$ em \mathcal{L}_{TDiff} , indicando que este modelo não deve depender do traço. De fato, se em $\mathcal{L}(1, 1, a, b)$ fizermos a redefinição singular $h_{\mu\nu} \rightarrow \hat{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{D}h\eta_{\mu\nu}$ obtemos o modelo WTDiff (3.64): $\mathcal{L}_{WTDiff}[h_{\mu\nu}] = \mathcal{L}_{TDiff}[\hat{h}_{\mu\nu}]$. Note que essa última redefinição é equivalente a fazermos $A = 2/D$ em (A.6), de onde podemos ver rapidamente que o modelo WTiff é dado por $\mathcal{L}\left(1, 1, \frac{2}{D}, \frac{D+2}{D^2}\right)$.

Vimos que as família Diff e WTDiff descrevem partículas não massivas de spin-2. O modelo EH, representante da família Diff, é a versão linearizada da gravitação de Einstein-Hilbert, enquanto o modelo WTDiff é a versão linearizada da gravitação unimodular (BONIFACIO, 2017). Já o restante da família TDiff descreve duas partículas não massivas: uma de spin-2 e outra de spin-0, desde que $(D - 2)b < 1 - 2a + (D - 1)a^2$ (vide uma análise não-canônica de conteúdo físico em (BLAS, 2008) ou então a análise da positividade da hamiltoniana reduzida no apêndice E, um cálculo original).

Do ponto de vista da existência de uma teoria que descreva partículas massivas de spin-2, é possível verificar (BLAS, 2008) que embora tanto o modelo Diff como o WTDiff descrevam partículas não massivas de spin-2 somente a família Diff pode ser deformada de forma a descrever partícula massiva de spin-2, dando origem ao modelo de FP (3.51). Note que a redução dimensional do modelo WTDiff nos levou aos modelos (4.48) e (4.72) que estão relacionados ao modelo de FP.

Sobre a insistência em se estudar modelos de gravitação massiva, uma contextualização pode ser encontrada na tese (FORTES, 2018).

APÊNDICE B – OPERADORES DE PROJEÇÃO

Para campos vetoriais, podemos definir os **operadores de projeção** (projetores) que são caracterizados por serem idempotentes, não possuírem inversa e cujos traços determinam a dimensão do espaço onde projetam¹ :

$$\omega_{\mu\nu} = \frac{\partial_\mu \partial_\nu}{\square}, \quad (\text{B.1})$$

$$\theta_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} - \omega_{\mu\nu}. \quad (\text{B.2})$$

Com (B.1) e (B.2) podemos mostrar a propriedade de idempotência

$$\theta_{\mu\alpha} \theta^{\alpha\nu} = \theta_\mu^\nu \quad \text{e} \quad \omega_{\mu\alpha} \omega^{\alpha\nu} = \omega_\mu^\nu, \quad (\text{B.3})$$

a de completiza

$$\delta_\nu^\mu = \theta_\nu^\mu + \omega_\nu^\mu \quad (\text{B.4})$$

e a ortogonalidade de tais operadores

$$\omega_{\mu\nu} \theta^{\nu\alpha} = 0. \quad (\text{B.5})$$

Temos ainda a propriedade de transversalidade

$$\partial_\mu \theta^{\mu\nu} = 0. \quad (\text{B.6})$$

A mecânica quântica nos ensina que o spin s é uma quantidade quantizada e a helicidade de uma partícula massiva em $D = 3 + 1$ respeita a relação $m_s = -s, -s + 1, \dots, s - 1, s$. Há portanto $2s + 1$ estados quânticos entre $-s$ e s e as partículas massivas têm $2s + 1$ graus de liberdade. O traço dos projetores nos informa a dimensão onde projetam, logo podemos relacionar grau de liberdade (e portanto spin) com os projetores. De (B.1) e (B.2) notamos que $Tr\omega \equiv \eta^{\mu\nu} \omega_{\mu\nu} = 1$ e $Tr\theta \equiv \eta^{\mu\nu} \theta_{\mu\nu} = D - 1 = 3$. Logo,

$$\omega : (2s + 1) = 1 \Rightarrow s = 0,$$

$$\theta : (2s + 1) = 3 \Rightarrow s = 1.$$

Da relação $\partial_\mu = iP_\mu$ e $\omega_\mu^\nu A_\nu = \partial_\mu (\frac{\partial^\nu A_\nu}{\square}) = \partial_\mu \varphi$, em que φ é um escalar, notemos que $\omega_\mu^\nu A_\nu$ está na direção do quadrimomento P_μ enquanto (B.6) implica que $\theta_\mu^\nu A_\nu$ é ortogonal ao quadrimomento. Logo, de (B.4), $A_\mu = \delta_\mu^\nu A_\nu \Rightarrow A_\mu = \theta_\mu^\nu A_\nu + \omega_\mu^\nu A_\nu$, concluímos que todo quadrivetor pode ser decomposto em uma projeção (1 direção longitudinal) de spin-0 ($\omega_\mu^\nu A_\nu$) e em uma projeção (3 direções transversais) de spin-1 ($\theta_\mu^\nu A_\nu$).

¹ Note que para a análise hamiltoniana definimos os operadores apenas para as dimensões espaciais, substituindo \square pelo laplaciano ∇^2 e a métrica $\eta_{\mu\nu}$ por δ_{ij} .

A partir dos operadores de projeção vetoriais podemos construir a base de operadores que projetam os tensores em suas diferentes representações irreduzíveis. Neste texto, vamos nos ater aos operadores de spin-2 que atuam sobre **tensores simétricos de rank-2** (posto 2).

Definimos os operadores de projeção $(P_{ss}^{(2)})^{\mu\nu\alpha\beta}$, $(P_{ss}^{(1)})^{\mu\nu\alpha\beta}$, $(P_{ss}^{(0)})^{\mu\nu\alpha\beta}$ e $(P_{ww}^{(0)})^{\mu\nu\alpha\beta}$ em termos dos projetores $\theta_{\mu\nu}$ e $\omega_{\mu\nu}$:

$$(P_{ss}^{(2)})^{\mu\nu\alpha\beta} \equiv \frac{1}{2} (\theta^{\mu\alpha}\theta^{\nu\beta} + \theta^{\mu\beta}\theta^{\nu\alpha}) - \frac{1}{D-1}\theta^{\mu\nu}\theta^{\alpha\beta}, \quad (\text{B.7})$$

$$(P_{ss}^{(1)})^{\mu\nu\alpha\beta} \equiv \frac{1}{2} (\theta^{\mu\alpha}\omega^{\nu\beta} + \theta^{\mu\beta}\omega^{\nu\alpha} + \theta^{\nu\alpha}\omega^{\mu\beta} + \theta^{\nu\beta}\omega^{\mu\alpha}), \quad (\text{B.8})$$

$$(P_{ss}^{(0)})^{\mu\nu\alpha\beta} \equiv \frac{\theta^{\mu\nu}\theta^{\alpha\beta}}{D-1}, \quad (P_{ww}^{(0)})^{\mu\nu\alpha\beta} \equiv \omega^{\mu\nu}\omega^{\alpha\beta}. \quad (\text{B.9})$$

Nesse caso, além dos projetores temos também os operadores de transição

$$(P_{sw}^{(0)})^{\mu\nu\alpha\beta} \equiv \frac{\theta^{\mu\nu}\omega^{\alpha\beta}}{\sqrt{D-1}}, \quad (P_{ws}^{(0)})^{\mu\nu\alpha\beta} \equiv \frac{\omega^{\mu\nu}\theta^{\alpha\beta}}{\sqrt{D-1}}. \quad (\text{B.10})$$

Os operadores satisfazem a seguinte álgebra (suprimindo os índices gregos)

$$P_{ij}^{(r)} P_{kl}^{(q)} = \delta^{rq} \delta_{jk} P_{il}^{(r)} \quad (\text{B.11})$$

e a relação de completudeza é dada por:

$$S^{\mu\nu\alpha\beta} = (P_{ss}^{(2)} + P_{ss}^{(1)} + P_{ss}^{(0)} + P_{ww}^{(0)})^{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta} + \eta^{\nu\alpha}\eta^{\mu\beta}), \quad (\text{B.12})$$

onde $S^{\mu\nu\alpha\beta}$ é a parte simétrica do operador identidade².

Novamente, a dimensão desses operadores - obtida ao tomar o traço - está relacionada com o spin s através da relação $dim = 2s + 1$. O valor de s associado ao projetor indica em que spin é feita a projeção e esse valor está indicado dentro dos parênteses superescritos que identificam esses projetores. Dessa forma, $(P_{ss}^{(r)})$ projeta em um setor associado ao spin- r .

Atenção: Na análise hamiltoniana, trabalhamos com esses projetores atuando apenas na parte espacial dos tensores (para diferenciar, escrevemos os índices daqueles projetores com alfabeto latino). Nesse caso, se a dimensão do espaço-tempo é D , faça $D - 1 \rightarrow D - 2$ nas fórmulas (B.7-B.10).

² Da mesma forma, podemos definir operadores de projeção para a parte antissimétrica e de transição entre as partes simétrica e antissimétrica. Assim qualquer tensor pode ser decomposto em suas partes simétrica e antissimétrica através desses operadores.

APÊNDICE C – REDUÇÃO DIMENSIONAL - SPIN-2

Neste apêndice apresentamos os termos da ação (4.18) e (4.30) expandidos. Para isso decomposmos $H_{AB}(x, y)$ como

$$H_{\mu\nu}(x, y) = \sqrt{\frac{m}{\pi}} h_{\mu\nu}(x) \cos my, \quad (\text{C.1})$$

$$H_{y\mu}(x, y) = \sqrt{\frac{m}{\pi}} a_{\mu}(x) \sin my, \quad (\text{C.2})$$

$$H_{yy}(x, y) = \sqrt{\frac{m}{\pi}} \varphi(x) \cos my, \quad (\text{C.3})$$

e obtemos os seguintes resultados

$$\begin{aligned} \partial_A H^{MN} \partial^A H_{MN} &= \frac{m}{\pi} \cos^2 my \left(\partial_{\mu} h^{\nu\alpha} \partial^{\mu} h_{\nu\alpha} + \partial_{\mu} \varphi \partial^{\mu} \varphi + 2m^2 a_{\mu} a^{\mu} \right) + \\ &+ \frac{m}{\pi} \sin^2 my \left(2\partial_{\mu} a^{\nu} \partial^{\mu} a_{\nu} + m^2 h_{\mu\nu} h^{\mu\nu} + m^2 \varphi^2 \right), \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

$$\begin{aligned} \partial_M H^{MN} \partial^A H_{AN} &= \frac{m}{\pi} \cos^2 my \left(\partial_{\mu} h^{\mu\nu} \partial^{\alpha} h_{\nu\alpha} + 2m a^{\mu} \partial^{\nu} h_{\mu\nu} + m^2 a_{\mu} a^{\mu} \right) + \\ &+ \frac{m}{\pi} \sin^2 my \left(2\partial_{\mu} a^{\mu} \partial^{\nu} a_{\nu} - 2m \varphi \partial^{\mu} a_{\mu} + m^2 \varphi^2 \right), \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

$$\begin{aligned} \partial_M H^{MN} \partial_N H &= \frac{m}{\pi} \cos^2 my \left[\partial_{\mu} h^{\mu\nu} \partial_{\nu} (\varphi + h) + m a^{\mu} \partial_{\mu} (\varphi + h) \right] + \\ &+ \frac{m}{\pi} \sin^2 my \left[-\partial_{\mu} a^{\mu} (\varphi + h) + m^2 \varphi (\varphi + h) \right], \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

$$\partial_A H \partial^A H = \frac{m}{\pi} \cos^2 my \left[\partial_{\mu} (\varphi + h) \partial^{\mu} (\varphi + h) \right] + \frac{m}{\pi} \sin^2 my \left[m^2 (\varphi + h)^2 \right]. \quad (\text{C.7})$$

APÊNDICE D – CONDIÇÕES DE FIERZ-PAULI

Vamos demonstrar que as **condições ou vínculos de Fierz-Pauli**

- 1) Simetria: $\phi_{\mu_1 \dots \mu_j \dots \mu_k \dots \mu_s} = \phi_{\mu_1 \dots \mu_k \dots \mu_j \dots \mu_s}$;
- 2) Transversalidade: $\partial^{\mu_i} \phi_{\mu_1 \dots \mu_i \dots \mu_s} = 0$;
- 3) Traço nulo: $\eta^{\mu_i \mu_j} \phi_{\mu_1 \dots \mu_i \dots \mu_j \dots \mu_s} = 0$,

reduzem no caso de $D = 3 + 1$ o número de componentes independentes de um tensor de rank- s de 4^s para $2s + 1$, ou seja, o mesmo número de graus de liberdade de uma partícula massiva de spin- s .

Lembremos que um tensor simétrico de rank- s em D dimensões possui $\binom{D+s-1}{s} = \frac{D(D+1)\dots(D+s-1)}{s!}$ componentes independentes. Logo a condição 1) nos informa que ϕ , sendo simétrico em qualquer par de índices, possui apenas

$$\binom{3+s}{s} = \frac{(s+3)!}{3! s!} \quad (\text{D.1})$$

componentes independentes. A condição 2), por si só, é um conjunto de $\binom{s+2}{s-1} = \frac{(s+2)!}{(s-1)! 3!}$ equações que retiram graus de liberdade do tensor. Já a condição 3), por si só, é um conjunto de $\binom{s+1}{s-2} = \frac{(s+1)!}{(s-2)! 3!}$ equações que retiram mais graus de liberdade do tensor. Entretanto, se $s \geq 3$, as condições 2) e 3) não são independentes! Considere que as condições 1) e 3) tenham sido atendidas:

$$\times (\partial^{\mu_k}) \quad \eta^{\mu_i \mu_j} \phi_{\mu_1 \dots \mu_i \mu_j \dots \mu_s} = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial^{\mu_k} \eta^{\mu_i \mu_j} \phi_{\mu_1 \dots \mu_i \mu_j \dots \mu_k \dots \mu_s} = 0. \quad (\text{D.2})$$

Mas a última expressão (traço da condição 2) é um tensor de rank- $(s-3)$ simétrico, e portanto temos em (D.2) um conjunto de $\binom{s}{s-3} = \frac{s!}{(s-3)! 3!}$ equações independentes. Assim, se impormos $\partial^{\mu_i} \phi_{\mu_1 \dots \mu_i \dots \mu_s} = 0$ estamos introduzindo não $\frac{(s+2)!}{(s-1)! 3!}$ equações independentes mas sim $\frac{(s+2)!}{(s-1)! 3!} - \frac{s!}{(s-3)! 3!}$ equações.

Dessa maneira o número total n de componentes independentes de um tensor que satisfaça 1), 2) e 3) é dado por

$$n = \frac{(s+3)!}{s! 3!} - \left[\frac{(s+2)!}{(s-1)! 3!} - \frac{s!}{(s-3)! 3!} \right] - \frac{(s+1)!}{(s-2)! 3!} \quad (\text{D.3})$$

$$\Rightarrow \boxed{n = 2s+1}. \quad (\text{D.4})$$



APÊNDICE E – ANÁLISE HAMILTONIANA DO MODELO TDIFF

Nesta seção vamos apresentar de maneira resumida a análise hamiltoniana do modelo TDiff $\mathcal{L}(1, 1, a, b)$ (A.1). Os resultados a seguir são originais, obtidos durante a iniciação científica do autor deste TG. A novidade deste modelo é que além da partícula de spin-2 temos também uma partícula de spin-0, ambas sem massa.

Escrevemos

$$\mathcal{L}_{TDIFF} = -\frac{1}{4}\partial_\mu h^{\nu\rho}\partial^\mu h_{\nu\rho} + \frac{1}{2}\partial_\mu h^{\mu\rho}\partial_\nu h^\nu{}_\rho - \frac{a}{2}\partial^\mu\partial^\nu h_{\mu\nu} + \frac{b}{4}\partial_\mu h\partial^\mu h \quad (\text{E.1})$$

explicitamente em termos de suas componentes espaciais e temporais:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{TDIFF} = & \frac{(2a-b-1)}{4}\dot{h}_{00}\dot{h}_{00} + \frac{1}{4}\dot{h}_{ij}\dot{h}_{ij} + \frac{(b-a)}{2}\dot{h}_{00}\dot{h}_{ii} - \frac{b}{4}\dot{h}_{ii}\dot{h}_{jj} + (1-a)\dot{h}_{00}\partial_i h_{i0} + \\ & - \dot{h}_{ij}\partial_i h_{0j} + a\dot{h}_{ii}\partial_j h_{j0} + \frac{(b-1)}{4}\partial_i h_{00}\partial_i h_{00} + \frac{1}{2}\partial_i h_{j0}\partial_i h_{j0} - \frac{1}{2}\partial_i h_{i0}\partial_j h_{j0} - \frac{1}{4}\partial_i h_{kj}\partial_i h_{kj} + \\ & + \frac{1}{2}\partial_i h_{ij}\partial_k h_{kj} - \frac{b}{2}\partial_i h_{00}\partial_i h_{jj} + \frac{b}{4}\partial_i h_{jj}\partial_i h_{kk} + \frac{a}{2}\partial_i h_{00}\partial_j h_{ji} - \frac{a}{2}\partial_i h_{kk}\partial_j h_{ji}, \end{aligned} \quad (\text{E.2})$$

de onde obtemos os momentos canônicos:

$$\pi^{00} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{h}_{00}} = \frac{(2a-b-1)}{2}\dot{h}_{00} + \frac{(b-a)}{2}\dot{h}_{ii} + (1-a)\partial_i h_{i0}, \quad (\text{E.3})$$

$$\pi^{ij} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{h}_{ij}} = \frac{1}{2}\dot{h}_{ij} + \frac{(b-a)}{2}\delta_{ij}\dot{h}_{00} - \frac{b}{2}\delta_{ij}\dot{h}_{kk} - \frac{1}{2}(\partial_i h_{0j} + \partial_j h_{0i}) + a\delta_{ij}\partial_k h_{k0}, \quad (\text{E.4})$$

$$\pi^{0i} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{h}_{0i}} = 0, \quad (\text{E.5})$$

de onde identificamos os vínculos primários $\varphi^i = \pi^{0i} \approx 0$. Note que teremos também

$$\begin{aligned} \varphi^0 = \pi^{00} & \approx 0 \quad \text{se } a = b = 1, \\ \varphi^0 = \pi^{00} - \pi^{ii} & \approx 0 \quad \text{se } a = \frac{2}{D} \text{ e } b = \frac{(2+D)}{D^2}, \end{aligned}$$

que correspondem respectivamente aos vínculos (3.36) e (3.72) dos modelos EHL e WTDiff. Assumiremos que a e b não estão relacionados através de (A.6) pois esses casos já foram estudados.

Densidade de hamiltoniana canônica $\mathcal{H}_{TDIFF} = \pi^{\mu\nu}\dot{h}_{\mu\nu} - \mathcal{L}_{TDIFF}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & P\pi^{00}\pi^{00} + Q\pi^{00}\pi^{ii} + \pi^{ij}\pi^{jj} + R\pi^{ii}\pi^{jj} + 2\pi^{00}\partial_i h_{i0} + \pi^{ij}(\partial_i h_{0j} + \partial_j h_{0i}) + \\ & + \frac{1-b}{4}\partial_i h_{00}\partial_i h_{00} + \frac{1}{4}\partial_i h_{kj}\partial_i h_{kj} - \frac{1}{2}\partial_i h_{ij}\partial_k h_{kj} + \frac{b}{2}\partial_i h_{00}\partial_i h_{jj} \\ & - \frac{b}{4}\partial_i h_{jj}\partial_i h_{kk} - \frac{a}{2}\partial_i h_{00}\partial_j h_{ij} + \frac{a}{2}\partial_i h_{jj}\partial_k h_{ki}, \end{aligned} \quad (\text{E.6})$$

onde

$$P = \frac{bD - b - 1}{d_0}, \quad Q = \frac{2(b - a)}{d_0}, \quad R = \frac{b - a^2}{d_0}, \quad (E.7)$$

$$d_0 = 1 - 2a + a^2(D - 1) + b(2 - D).$$

Aplicando a condição de consistência (2.73) nos vínculos (E.5) obtemos os vínculos secundários

$$\chi^j = \partial_j \pi^{00} + \partial_i \pi^{ij} \approx 0, \quad (E.8)$$

cuja condição de consistência nos permite identificar outro vínculo $\partial_j \phi \approx 0$ que equivale a

$$\phi = (1 - a)\nabla^2 h_{00} + a\nabla^2 h_{ii} - \partial_i \partial_j h_{ij} \approx 0. \quad (E.9)$$

Como a condição de consistência desse vínculo nos leva a $\dot{\phi} = -2\partial_j \chi^j \approx 0$, concluímos que não há mais nenhum vínculo na teoria e o processo termina. Nenhum dos $D - 1$ multiplicadores de Lagrange λ_j foi determinado e assim permanecem arbitrários, em total acordo com a simetria TDiff do modelo¹. Todos os $2D - 1$ vínculos da teoria são de primeira classe.

Quanto ao número de graus de liberdade, de acordo com (2.60) $n = D(D + 1) - 2(2D - 1) - 0 = (D - 2)(D - 1)$ e no formalismo lagrangiano

$$n_L = \frac{(D - 2)(D - 1)}{2}. \quad (E.10)$$

Em $D = 3 + 1$, $n_L = 3$, em concordância com a descrição de partículas não massivas de spin-2 e de spin-0.

Resta-nos saber se de fato o modelo descreve, pelo menos a nível clássico, partículas físicas. Para isso, checamos a positividade da hamiltoniana reduzida.

No mesmo espírito do que foi descrito no capítulo 3 devemos utilizar os vínculos como igualdades fortes na hamiltoniana primária e com o auxílio dos operadores de projeção de spin-2 escrever a hamiltoniana reduzida. Deixamos como exercício ao leitor demonstrar que, definindo o momento escalar generalizado

$$\Pi = a \pi^{00} + \frac{a - 1}{D - 2} (\theta_{ij} \pi^{ij}) \quad (E.11)$$

e

$$Z = d_0(2 - D) = b - \frac{1 - 2a + (D - 1)a^2}{D - 2}, \quad (E.12)$$

a hamiltoniana reduzida é

$$H_r = \int d^{D-1}x \left[\pi^{ij} (P_{ss}^{(2)})_{ij,kl} \pi^{kl} + h_{ij} \left(-\frac{\nabla^2}{4} P_{ss}^{(2)} \right)^{ij,kl} h_{kl} \right] +$$

$$\int d^{D-1}x \left[-\frac{\Pi^2}{Z} + \frac{Z(D - 2)}{4(a - 1)^2} h_{ij} \left(\nabla^2 P_{ss}^{(0)} \right)^{ij,kl} h_{kl} \right], \quad (E.13)$$

¹ Como o parâmetro vetorial ξ^μ é transverso, ele possui em D dimensões $D - 1$ graus de liberdade.

que é positivo definida se $Z < 0$ e contém os termos corretos para a propagação de uma partícula não-massiva de spin-2 e outra não-massiva de spin-0.

Este resultado, de que a parte escalar da lagrangiana TDiff só é positiva se $Z < 0$, também foi obtido por (BLAS, 2008) mas lá não foi utilizada a análise hamiltoniana. Os cálculos descritos neste apêndice não foram encontrados na literatura.

APÊNDICE F – ANÁLISE HAMILTONIANA DO MODELO DE SINGH-HAGEN (SPIN-2)

Neste apêndice apresentamos os resultados da análise hamiltoniana do modelo de spin-2 de Singh-Hagen (SINGH; HAGEN, 1974). Diferente dos demais casos deste TG, agora vamos utilizar um tensor $h_{\mu\nu}$ **simétrico e sem traço**, e um **campo auxiliar escalar** ϕ .

Por simplicidade, vamos assumir que $D = 3 + 1$. A lagrangiana do modelo é dada por¹

$$\mathcal{L}_{SH} = \frac{1}{2} h_{\mu\nu} \square h^{\mu\nu} + (\partial_\mu h^{\mu\nu})^2 - \frac{m^2}{2} h_{\mu\nu} h^{\mu\nu} + 2 \phi \partial_\mu \partial_\nu h^{\mu\nu} - 3 \phi \square \phi + 6 m^2 \phi^2. \quad (\text{F.1})$$

Separação de componentes:

$$\mathcal{L}_{SH} = -\frac{1}{2} (\dot{h}_{00})^2 + \frac{1}{2} (\dot{h}_{ij})^2 + 2 \dot{h}_{00} \partial_i h_{i0} - 2 \dot{h}_{ij} \partial_i h_{j0} - 2 \dot{h}_{00} \dot{\phi} + 4 \dot{\phi} \partial_i h_{i0} - 3 \dot{\phi}^2 - \mathcal{V}, \quad (\text{F.2})$$

onde

$$\begin{aligned} \mathcal{V} = \frac{m^2}{2} [(\dot{h}_{00})^2 - 2(\dot{h}_{0i})^2 + (\dot{h}_{ij})^2] - (\partial_j h_{0i})^2 + \frac{1}{2} (\partial_k h_{ij})^2 - (\partial_i h_{ik})^2 + (\partial_i h_{i0})^2 + \\ + 2 \partial_i \phi \partial_j h_{ij} + \frac{1}{2} (\partial_i h_{00})^2 - 3 (\partial_i \phi)^2 - 6 m^2 \phi^2. \end{aligned} \quad (\text{F.3})$$

Como $h = 0$, substituímos $h_{00} = h_{11} + h_{22} + h_{33} \equiv h_{kk}$ e então calculamos os momentos canônicos:

$$\pi \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = -2 \dot{h}_{ii} + 4 \partial_i h_{0i} - 6 \dot{\phi}, \quad (\text{F.4})$$

$$\pi^{ij} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{h}_{ij}} = \dot{h}_{ij} - \delta_{ij} \dot{h}_{kk} + 2 \delta_{ij} \partial_k h_{k0} - 2 \partial_{(i} h_{j)0} - 2 \delta_{ij} \dot{\phi}, \quad (\text{F.5})$$

$$\pi^{0i} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{h}_{0i}} = 0. \quad (\text{F.6})$$

Concluimos que existem D vínculos primários: $\varphi = \pi^{ii} - \pi \approx 0$ e $\varphi^i = \pi^{0i} \approx 0$.

A densidade de hamiltoniana canônica é

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = \frac{1}{2} \pi^{ij} \pi^{ij} + 2 \pi^{ij} \partial_i h_{j0} - \frac{1}{4} \pi^2 + \frac{1}{2} \partial_k h_{ij} \partial_k h_{ij} - \partial_i h_{ik} \partial_j h_{jk} + \frac{1}{2} \partial_i h_{kk} \partial_i h_{jj} + \\ + 2 \partial_i \phi \partial_j h_{ij} - 3 \partial_i \phi \partial_i \phi - 6 m^2 \phi^2 + \frac{m^2}{2} (h_{kk} h_{jj} - 2 h_{0i} h_{0i} + h_{ij} h_{ij}), \end{aligned} \quad (\text{F.7})$$

com a qual construímos a hamiltoniana primária. As condições de consistência geram vínculos secundários:

$$\begin{aligned} \dot{\phi} \approx 0 : \quad \chi = \nabla^2 h_{ii} - \partial_i \partial_j h_{ij} - m^2 h_{ii} + 2 \nabla^2 \phi - 3 m^2 \phi \approx 0; \\ \dot{\phi}^i \approx 0 : \quad \chi^i = \partial_j \pi^{ij} + m^2 h_{0i} \approx 0. \end{aligned} \quad (\text{F.8})$$

¹ Faça $D = 4$ em (4.72).

Aplicando a condição de consistência em χ obtemos o vínculo terciário

$$\psi = \partial_i h_{i0} - \frac{\pi}{2} \approx 0, \quad (\text{F.9})$$

enquanto que para χ_i determinamos o multiplicador de Lagrange λ_i

$$\lambda_i \approx \partial_j h_{ij} - 3\partial_i \phi. \quad (\text{F.10})$$

Substituindo o λ_i obtido na hamiltoniana primária e aplicando a condição de consistência em ψ , obtemos o vínculo quaternário

$$\Lambda = \phi \approx 0 \quad (\text{F.11})$$

cuja condição de consistência nos determina o multiplicador de Lagrange λ_0

$$\lambda_0 \approx -\frac{\pi}{2} \quad (\text{F.12})$$

e o processo termina, com todos os multiplicados de Lagrange determinados (não há simetria de gauge).

Temos assim 10 vínculos, todos de segunda classe. Como um tensor simétrico $h_{\mu\nu}$ possui 10 componentes independentes e a condição de traço nulo retira 1 grau de liberdade, que é repostado pela inclusão do campo escalar, $EF = 20$ e o espaço de fase reduzido possui dimensão $n = 20 - 10 - 0 = 10$. No formalismo lagrangiano $n_L = 5$, em concordância com a descrição de partícula massiva de spin-2.

Deixamos como exercício ao leitor, utilizando os vínculos como igualdades fortes e os projetores de spin-2, mostrar que a hamiltoniana reduzida é

$$\begin{aligned} H_r = & \int d^3x \frac{1}{2} \pi^{ij} \left[(P_{ss}^{(2)}) + \frac{(m^2 - \nabla^2)}{m^2} (P_{ss}^{(1)}) + \frac{3}{2} (P_{ww}^{(0)}) \right]^{ij,kl} \pi^{kl} + \\ & + \int d^3x \frac{1}{2} h_{ij} \left[(m^2 - \nabla^2) (P_{ss}^{(2)}) + m^2 (P_{ss}^{(1)}) + 3(m^2 - \nabla^2) (P_{ww}^{(0)}) \right]^{ij,kl} h_{kl}, \end{aligned} \quad (\text{F.13})$$

que nada mais é do que a hamiltoniana reduzida do modelo de Fierz-Pauli em $D = 3 + 1$, após a transformação canônica

$$(\pi^{kl}, h_{kl}) \rightarrow (\sqrt{2}\pi^{kl}, \frac{1}{\sqrt{2}}h_{kl}). \quad (\text{F.14})$$

Checamos assim que o modelo descreve partículas massivas de spin-2.